



HAL
open science

Interaction entre symbolique et numérique : application à la vision artificielle

Didier Bondyfalat

► **To cite this version:**

Didier Bondyfalat. Interaction entre symbolique et numérique : application à la vision artificielle. Calcul formel [cs.SC]. Université Nice Sophia Antipolis, 2000. Français. NNT : 2000NICE5429 . tel-00685629

HAL Id: tel-00685629

<https://theses.hal.science/tel-00685629>

Submitted on 5 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE – SOPHIA-ANTIPOLIS
FACULTÉ DES SCIENCES

Laboratoire de : Mathématiques

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de
Docteur en SCIENCES

par

Didier BONDYFALAT

Interaction entre Symbolique et Numérique ;
Application à la Vision Artificielle

Soutenue le 12 septembre 2000 devant le jury composé de :

Président	André Galligo
Rapporteurs	Dongming Wang Jean-Claude Yakoubsohn Pierre Macé
Examineurs	Olivier Faugeras Long Quan
Directeur	Bernard Mourrain

à Inria Sophia-Antipolis à 14h

UNIVERSITÉ DE NICE – SOPHIA-ANTIPOLIS
FACULTÉ DES SCIENCES

Laboratoire de : Mathématiques

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de
Docteur en SCIENCES

par

Didier BONDYFALAT

Interaction entre Symbolique et Numérique ;
Application à la Vision Artificielle

Soutenue le 12 septembre 2000 devant le jury composé de :

Président	André Galligo
Rapporteurs	Dongming Wang Jean-Claude Yakoubsohn Pierre Macé
Examineurs	Olivier Faugeras Long Quan
Directeur	Bernard Mourrain

à Inria Sophia-Antipolis à 14h

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte	1
1.2	L'objet	2
1.3	Les travaux	5
I	Résolution	7
1	Méthodes matricielles	11
1.1	Opérateurs de multiplications	11
1.2	Matrices de résultants	14
1.2.1	Introduction du résultant	14
1.2.2	Théorème de Macaulay	16
1.2.3	Construction de la matrice de Macaulay	17
1.3	Méthodes itératives de résolution	24
1.3.1	Méthode de la puissance itérée et de la puissance inverse	24
1.3.2	Applications sur les opérateurs de multiplications	27
1.3.3	Expérimentation	30
1.4	Cas des systèmes sur-déterminés	31
1.4.1	L'idéal résultant	31
1.4.2	Construction de l'idéal résultant	32
1.4.3	Construction matricielle	33
1.4.4	Application à la résolution de systèmes sur-déterminés	33
2	Applications	35
2.1	Le problème du « P3P »	35
2.1.1	Recherche de toutes les solutions réelles	36
2.1.2	Recherche d'un régionnement	37
2.2	Étalonnage de caméras	41
2.2.1	Modèle et équations	42
2.2.2	Résolution	47

II	Modélisation	55
1	L’algèbre de Grassmann-Cayley	59
1.1	Définitions et propriétés	59
1.1.1	Algèbre extérieure	59
1.1.2	Algèbre double	68
1.1.3	« Cap Product » et algèbre de Hodge	71
1.2	Relations géométriques de base	75
1.2.1	Géométrie projective	75
1.2.2	Géométrie affine	78
1.2.3	Géométrie euclidienne	79
2	Équations d’étalonnage d’une caméra	81
2.1	Le modèle projectif d’une caméra	81
2.2	La matrice de projection inverse	83
2.3	La condition d’orthogonalité	84
2.4	Les contraintes de parallélisme	87
3	Étalonnage d’une caméra	89
3.1	Estimation de P^2	89
3.2	Estimation de la matrice fondamentale	90
3.3	Estimation de la matrice de projection à quatre paramètres	91
3.4	Estimation de la matrice de projection à deux paramètres	92
4	Étalonnage multi-caméras	95
4.1	Estimation des matrices P à 4 paramètres globaux	95
4.1.1	Expression de la matrice fondamentale à partir des matrices de projection	96
4.1.2	Contraintes d’appariement pour deux caméras	97
4.1.3	Contraintes d’appariement pour trois caméras	98
4.2	Estimation des matrices P à 2 paramètres globaux	99
4.2.1	Expression des contraintes géométriques	99
4.2.2	Estimation des deux paramètres	100
5	Applications	101
5.1	Étalonnage de caméras dans une scène virtuelle	101
5.1.1	Les fichiers	101
5.1.2	Étalonnage des caméras	105
5.2	Étalonnage de caméras dans des scènes réelles	105
III	Ajustement de modèles	111
1	Démonstration automatique	115
1.1	Avec un système de coordonnées	115

1.1.1	Base de Groebner	119
1.1.2	Ensembles caractéristiques	120
1.2	Sans système de coordonnées	126
1.2.1	Richter-Gebert Crapo	126
1.2.2	Chou-Gao-Zhang	131
1.2.3	Mourrain	135
1.3	Dans notre contexte	135
1.3.1	Comment mettre en évidence les incohérences	135
1.3.2	Les limitations naturelles	136
2	Ordre constructif et ensemble réducteur	137
2.1	Composantes génériques, points génériques	137
2.2	Ordre constructif et ensemble réducteur	140
2.2.1	Un algorithme	140
2.2.2	Une adaptation à notre problème	145
3	Extension à la découverte de propriétés	147
3.1	Les méthodes existantes	147
3.2	Notre approche	147
3.2.1	Le principe	148
3.2.2	Exemples	149
4	Applications	153
4.1	Étalonnage des paramètres internes	153
4.1.1	Étalonnage à partir de l'image d'un parallélépipède rectangle	154
4.1.2	Étalonnage dans une situation réelle	155
4.2	Construction de modèles 3D géométriques contraints à partir d'images	158
4.2.1	Comment utiliser les contraintes géométriques	158
4.2.2	Exemple d'utilisation	161
4.3	Découverte de théorèmes	166
	Conclusion	169
	Le petit Nicolas en thèse	171

Table des figures

1.1	Photographies et primitives de la scène de la bibliothèque de L'INRIA	3
1.2	Reconstruction de la bibliothèque avec pour les trois premières reconstructions, uniquement les 4 photographies et les primitives de la figure 1.1 et avec plus de photographies et les textures pour la 4 ^{ième} reconstruction	3
1.3	Photographies de la scène de Londres	4
2.1	Le problème du P3P	36
2.2	Régionnement pour les paramètres $a = 150$, $b = 140$, $c = 170$, $\gamma = 45^\circ$	41
2.3	Le modèle sténopé	43
2.4	La géométrie épipolaire	45
2.5	La géométrie des équations de Kruppa	46
2.6	Distribution du logarithme décimal de la valeur absolue des coefficients du système de Kruppa pour les mires	52
2.7	Distribution du logarithme décimal de la valeur absolue des coefficients du système de Kruppa pour les mires resserrées	53
5.1	Mire d'étalonnage avec ses primitives géométriques et sa carte	102
5.2	Un étalonnage avec TOTALCALIB, le photographe se situe à l'intersection des droites épipolaires dans la carte	107
5.3	La géométrie considérée	108
5.4	Un étalonnage avec contraintes géométriques	109
5.5	Un étalonnage avec contraintes géométriques et en positionnant correctement l'horloge de la cathédrale	110
1.1	Théorème du parallélogramme	115
1.2	Configuration à partir d'un triangle	117
1.3	Les trois autres configurations possibles	117
1.4	Théorème du papillon	118
1.5	Différentes projections.	119
1.6	Configuration du théorème de Pappus	128
1.7	Configuration du théorème des médianes	133
1.8	Segmentation d'un objet circulaire	136
2.1	Les différentes composantes génériques.	140
2.2	Configuration de l'exemple 10	143

2.3	Configuration appartenant à la bonne composante	144
2.4	Configuration appartenant à une mauvaise composante	144
2.5	Cas litigieux	146
3.1	La configuration de la médiane.	150
4.1	Image de 3 directions	153
4.2	Ajustement du cube pour différents bruits	156
4.3	Un modèle tridimensionnel	157
4.4	Différentes vues de la place des arcades, Valbonne	157
4.5	Modèles tridimensionnels en fil de fer	159
4.6	Un modèle construit à la main	161
4.7	Graphe des dépendances de la place des arcades	164
4.8	Reconstruction contrainte en fil de fer	166
4.9	La sous-configuration de la Place des Arcades	167

Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques des résolutions par la méthode de la puissance inverse. .	30
2.1	L'ensemble des solutions du P3P pour différentes valeurs des paramètres.	37
2.2	Évaluation de matrices fondamentales à partir de deux photographies synthétiques avec des bruits gaussiens de déviation standard <i>err.</i>	49
2.3	Recherche des solutions aux moindres carrés des polynômes de Kruppa par optimisation de MATLAB	51
2.4	Estimation des paramètres internes des caméras	53
5.1	Fichier de description géométrique de la scène formée par une mire d'étalonnage	104
5.2	Étalonnage de la première caméra par l'implantation MAPLE de la méthode multi-caméras	106
4.1	Tableaux de paramètres internes de la caméra pour les différents bruits .	155

Notations

- Ensemble de nombres :
 - \mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels.
 - \mathbb{Z} désigne l'ensemble des entiers relatifs.
 - \mathbb{Q} désigne l'ensemble des rationnels.
 - \mathbb{R} désigne l'ensemble des réels.
 - \mathbb{C} désigne l'ensemble des complexes.
 - \mathbb{K} désigne un corps de nombre.
 - $\bar{\mathbb{K}}$ désigne la clôture algébrique de \mathbb{K} .
- Polynômes :
 - \mathbf{x} désigne un ensemble de variables x_1, \dots, x_n .
 - $\bar{\mathbf{x}}$ désigne l'ensemble de variables x_0, x_1, \dots, x_n où x_0 est la variable d'homogénéisation.
 - $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ désigne l'anneau des polynômes de variables x_1, \dots, x_n sur le corps \mathbb{K} .
 - $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ est l'écriture abrégée de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.
 - $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ désigne l'anneau des polynômes homogènes de variables x_0, x_1, \dots, x_n sur le corps \mathbb{K} .
 - $\mathbb{K}[\bar{\mathbf{x}}]$ est l'écriture abrégée de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$.
- Idéaux et variétés :
 - $\mathcal{V}_k(I)$ désigne la variété dans le corps k définie par l'idéal I .
 - $\mathcal{I}(V)$ désigne l'idéal défini par la variété V .
- Pour un espace vectoriel E :
 - $SL(E)$ est l'ensemble des endomorphismes inversibles de E , c'est le groupe spécial linéaire;
 - $\mathbb{P}(E)$ est l'espace projectif associé à E .
- \mathfrak{S}_k est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, k\}$.
- δ_j^i est le symbole de Kronecker.
- C_n^p est le nombre de combinaisons de p éléments parmi n .
- Pour des ensembles :
 - $\mathfrak{C}_E F$ désigne le complémentaire de l'ensemble F dans l'ensemble E .

- Pour des matrices :
 - \mathbb{I} désigne la matrice identité.
 - $\text{diag}\lambda_1, \dots, \lambda_n$ désigne la matrice carré $n \times n$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale et des zéros partout ailleurs.
 - $[x]_{\times}$ désigne la matrice de pré-produit vectoriel par le vecteur x , c'est-à-dire que $[x]_{\times}y = x \times y$.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier **Bernard Mourrain** et **Olivier Faugeras**, mes patrons, qui sont très très forts, d'avoir accepté **un petit Didier en thèse** (Je sais, c'est répréhensible, j'ai copié sur Nicolas¹, mais c'est juste pour cette page, je le jure) il y a environ 4 ans.

Je tiens aussi à remercier André Galligo, Dongming Wang, Jean-Claude Yakoubsohn, Pierre Macé et Long Quan, qui sont des gens très très forts, certainement patrons eux mêmes, qui me font l'honneur de venir à, ce que j'espère être, la grande cérémonie (et même qu'il y aura de la crème renversée, c'est sûr).

Mes remerciements vont ensuite à Théo Papadopoulo avec qui j'ai eu le plaisir de partager le bureau pendant pratiquement deux ans et qui a toujours été disponible, à Sylvain Bougnoux et son formidable TOTALCALIB, à David Daney qui a toujours un problème à proposer, à Philippe Trébuchet mon autre co-bureau et MACREV, et pour oublier personne, à tous mes amis thésards (les pauvres) ou ex-thésard (les glorieux) et même d'autres patrons qui m'ont aidé et soutenu durant mes travaux et même mieux qui m'ont fait rire.

Je remercie aussi L'INRIA pour sa formidable organisation.

Mais je ne peux pas terminer cette page sans remercier mes parents, ma famille, Carine et sa famille et . . . le petit Nicolas d'avoir su apporter une réponse amusante aux questions souvent embarrassantes de mon entourage.

1. Pour comprendre je vous invite à la lecture du petit Nicolas en Thèse qui se trouve en annexe du document.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

En architecture, en ingénierie civile, en robotique et dans bien d'autres domaines encore, il est très important de pouvoir acquérir des informations sur une scène ou un objet, de manière fiable et rapide afin de modéliser, de simuler des expériences et d'étudier le comportement de la scène ou de l'objet, à moindre coût. Les progrès technologiques permettent à l'heure actuelle d'avoir des logiciels permettant une aide à la construction de **modèles tridimensionnels virtuels**.

Malgré ces précieux outils, la construction d'un modèle tridimensionnel reste un long et fastidieux travail qui nécessite soit une étude préalable de la géométrie de la scène, soit l'acquisition d'un jeu de mesures, soit les deux à la fois. Les enjeux liés à ce problème entraînent un engouement de la recherche dans l'élaboration de techniques ayant pour but de réduire considérablement les tâches préalables, voire de les rendre complètement automatiques.

À l'image de l'être humain qui est capable de percevoir la notion de relief grâce à ses deux yeux, la **vision artificielle** prend à sa charge de construire un modèle tridimensionnel d'une scène à partir d'un ensemble de photographies de celle-ci [Fau93]. Cette approche met en évidence le lien entre la modélisation tridimensionnelle et l'asservissement d'un robot par des capteurs visuels.

En vision artificielle, la construction de modèles tridimensionnels nécessite d'abord la construction d'un modèle mathématique d'une caméra [Lav96, Qua97, Zel96] puis d'une estimation des paramètres de ce modèle. Cette étape s'appelle **l'étalonnage des caméras**. Ensuite, la construction d'un point tridimensionnel est possible si l'on connaît au moins son image dans deux photographies. Celui-ci est le point d'intersection des deux rayons optiques¹ passant par ces deux images. L'étape la plus pénalisante dans ce processus est celle de l'étalonnage des caméras [Zel96]. Il existe plusieurs notions d'étalonnage [Dev97] : la première est celle de l'étalonnage fort qui est obtenu à partir d'une mire d'étalonnage² ou bien de connaissances précises sur la scène; la deuxième est

1. Demi-droite reliant le centre de la caméra et l'image dans le plan rétinien.

2. Il s'agit de deux grilles très précises situées sur deux plans orthogonaux.

celle dite de l'**auto-étalonnage** où seule l'information contenue dans les photographies est utilisée, la seule contrainte est de posséder plusieurs photographies d'une même scène³. Comme le but est de réduire les tâches préalables, la notion d'auto-étalonnage apparaît plus adaptée à notre problématique.

L'auto-étalonnage est fondé sur l'extraction de « primitives » géométriques⁴ dans les différentes photographies, puis sur l'appariement de ces « primitives » à travers les photographies. En d'autres termes, il suffit de remarquer que deux points dans deux photographies sont respectivement les images d'un même point de la scène. Chaque appariement fournit une contrainte sur les paramètres des caméras. L'étalonnage est possible si le nombre d'appariements est supérieur au nombre de paramètres des caméras recherchés. En raison des **imprécisions** sur les « primitives » géométriques extraites, nous utilisons beaucoup plus d'appariements que le nombre minimal afin d'étalonner avec une meilleure précision. L'ensemble des contraintes forme un **système algébrique largement surdéterminé**. Ces systèmes sont généralement résolus par optimisation d'un critère construit à partir des appariements.

Les modèles tridimensionnels présentés dans les figures 1.2 ont été construits avec TOTALCALIB[BR97]⁵, qui implante les techniques que nous venons de décrire. Ces modèles construits exclusivement à partir de photographies sont très réalistes. Cependant, cette technique bien que fiable et robuste vis à vis de la qualité des photographies n'est pas sans failles. Nous avons des prises de vues pour lesquelles l'étalonnage des caméras est incorrect, voire complètement faux. Nous présentons deux exemples que nous traiterons tout au long de la thèse. Il s'agit d'une scène de Londres (fig. 1.3) et d'une partie des bâtiments de l'INRIA de Sophia-Antipolis. L'étalonnage des caméras par les techniques présentées, à partir de la scène de Londres, place le photographe au milieu de la Tamise.

1.2 L'objet

L'essentielle difficulté provient du fait que nous sommes contraints d'utiliser des coefficients approchés pour estimer les paramètres d'un modèle mathématique exact. Nous sommes donc confrontés à l'opposition entre l'exactitude et l'approché.

L'objet de cette thèse est de montrer que le symbolique, qui correspond à des calculs exacts en un point et le numérique, qui correspond à des calculs avec des nombres approchés, c'est-à-dire dans un voisinage autour d'un point peuvent interagir l'un sur l'autre.

Nous développerons trois interactions portant sur la résolution, sur la modélisation et sur l'ajustement d'un modèle.

3. Au moins 3.

4. Essentiellement des points et des segments.

5. Logiciel développé par Sylvain Bougnoux au sein de l'équipe Robot vis de l'INRIA Sophia-Antipolis



FIG. 1.1 – Photographies et primitives de la scène de la bibliothèque de L'INRIA

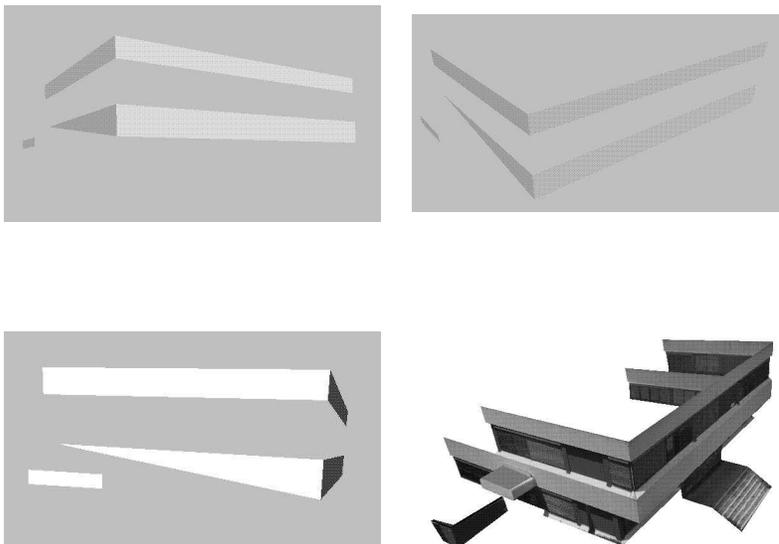


FIG. 1.2 – Reconstruction de la bibliothèque avec pour les trois premières reconstructions, uniquement les 4 photographies et les primitives de la figure 1.1 et avec plus de photographies et les textures pour la 4^{ième} reconstruction



FIG. 1.3 – Photographies de la scène de Londres

1.3 Les travaux

Les travaux effectués dans cette thèse se divisent en trois parties :

- La première partie est une étude sur la résolution d'équations polynomiales. Les méthodes étudiées ne tiennent pas réellement compte des valeurs prises par les polynômes (méthode numérique) mais elles transforment symboliquement le système en une autre formulation équivalente. L'ensemble de ces techniques est communément appelé : théorie de l'élimination [CLO97]. Nous approfondirons le cas des systèmes sur-contraints. Nous illustrerons nos travaux sur des exemples effectifs issus de la vision artificielle.
- La deuxième partie propose l'étude de formalismes géométriques [Wan97, Cru90] donnant des expressions simples et compactes afin de mieux modéliser nos problèmes de nature géométrique. Nous donnons les contraintes permettant d'établir un ensemble de caméras à partir de photographies et d'un plan de type cadastral et en considérant quelques contraintes géométriques basiques vérifiées par la scène.
- La troisième partie constitue sans doute l'interaction entre le numérique et le symbolique la plus forte puisqu'il s'agit d'ajuster au mieux un modèle entièrement paramétré de la scène satisfaisant toutes les contraintes géométriques à un modèle calculé numériquement par les techniques usuelles. Pour effectuer de tels modèles, nous utilisons des techniques proches de la démonstration automatique [Wan96].

En plus des liens d'interaction entre symbolique et numérique, ces trois parties sont fortement soudées entre elles. En effet, la théorie de l'élimination joue un rôle prépondérant dans les techniques de résolution ainsi que dans la démonstration automatique. De plus, le formalisme de Grassmann-cayley est constamment utilisé dans les formulations sans coordonnées des invariants géométriques de la démonstration automatique. Pour évoquer les parties un et deux, la modélisation est un élément essentielle du bon conditionnement des systèmes ; dans les exemples étudiés comme les systèmes de **Kruppa**, les équations sont basées sur des propriétés des éléments des coniques absolues, qui sont malheureusement difficiles à estimer correctement.

Première partie

Résolution

Notre premier but est de résoudre des systèmes algébriques permettant l'étalonnage des caméras. Ces systèmes sont largement surdéterminés et les coefficients sont entachés d'erreurs puisqu'ils dépendent des caractéristiques des primitives géométriques que nous avons mesurées dans les différentes photographies.

Dans cette première partie, nous présentons des méthodes symboliques continues par rapport aux coefficients des polynômes ce qui nous permet d'effectuer les calculs directement avec des nombres approchés. Nous commençons par évoquer grossièrement l'ensemble des méthodes de résolution de systèmes polynomiaux en évoquant leurs avantages et leurs inconvénients. Ces méthodes se classent en deux groupes : les méthodes analytiques et les méthodes algébriques.

Les méthodes analytiques. Il existe essentiellement deux méthodes : l'optimisation et l'analyse par intervalles. Les points communs de ces méthodes analytiques sont qu'elles utilisent les valeurs des fonctions et qu'elles sont basées sur la notion de convergence d'une suite. Elles construisent de proche en proche une nouvelle entrée à partir d'une entrée courante qui minimise un critère. Il est impératif de leur fournir une entrée initiale, un critère et une condition d'arrêt.

Pour l'optimisation [PFTV88, Lem89, BJC97, Dan00], l'entrée initiale est une instantiation des variables; le critère est une fonction réelle positive des variables dont l'évaluation en la solution cherchée est nulle⁶; la condition d'arrêt est donnée par le dépassement d'un seuil fixé d'avance⁷. L'utilisation de l'optimisation nécessite certaines précautions, il faut s'assurer : que l'entrée initiale satisfasse les conditions de convergence de l'algorithme; que l'algorithme converge vers la solution recherchée; que l'algorithme ne s'arrête pas dans un minimum local.

Pour l'analyse par intervalles, l'entrée de la méthode est une « boîte »⁸. A chaque itération, une méthode de dichotomie est utilisée. Une boîte est éliminée si nous sommes sûr qu'elle ne contient pas de solution ou si ses dimensions sont plus petites que la précision souhaitée ou si elle satisfait le critère de Kantorovitch [Tap71]. Les deux derniers cas nous donnent des solutions approchées. L'algorithme s'arrête quand il n'y a plus de boîtes. L'inconvénient majeur de cette méthode est la très forte croissance du nombre de boîtes à traiter.

Notre point de vue est de prendre pour entrée initiale une entrée « proche » de la solution. Plus l'entrée initiale sera proche, plus les algorithmes numériques seront fiables et efficaces.

Les méthodes algébriques. Ce sont des méthodes qui utilisent les relations entre les racines et permettent d'obtenir directement⁹ des solutions. Elles construisent des systèmes plus simples à résoudre qui possèdent les mêmes solutions. À l'image du cas linéaire, il est facile de résoudre des systèmes polynomiaux lorsque ceux-ci sont sous

6. Par exemple le critère des moindres carrés.

7. Pour Newton, la différence entre deux itérations doit être inférieure à la précision souhaitée.

8. C'est-à-dire un intervalle en dimension deux, un parallélépipède en dimension trois, ...

9. Contrairement aux méthodes numériques qui fonctionnent de proche en proche.

forme triangulaire. Pour cela, il existe des algorithmes comme les bases de Groebner avec un ordre d'élimination, et autres [AMM99]. Outre les inconvénients dûs à la complexité de calculs, la mise sous forme triangulaire des systèmes polynomiaux souffre de ne pas être continue par rapport aux coefficients des polynômes [Mou99b]. Ces discontinuités entraînent des difficultés pour la résolution de systèmes avec des coefficients approchés. Il existe cependant d'autres méthodes de résolution [CLO97, EM99b] qui utilisent des techniques matricielles. Ces méthodes sont continues par rapport aux coefficients des équations. Bien que le comportement numérique en fonction du bruit sur les coefficients ne soit pas très bien connu, nous espérons obtenir de bonnes estimées des solutions pour pouvoir utiliser avec bénéfice des algorithmes numériques.

Notre étude. Nous proposons d'étudier dans le premier chapitre, ces méthodes matricielles, puis de les adapter à nos propres besoins pour l'étalonnage des robots et des caméras. Nous concluons cette partie en présentant la résolution effective de deux problèmes qui ont servi à valider ces techniques.

Chapitre 1

Méthodes matricielles

L'idée essentielle de ce chapitre est de transformer le problème de la résolution d'un système polynomial en un problème de recherche de valeurs propres et vecteurs propres ou du noyau d'une matrice. Les éléments clés de cette transformation sont l'explicitation du dual de l'algèbre quotient¹ et les opérateurs de multiplications (voir 1.1). Les matrices de résultants (voir 1.2.3) jouent un rôle déterminant dans la construction des matrices de ces opérateurs de multiplications.

Nous introduisons maintenant quelques notations que nous nous efforcerons d'utiliser tout au long de cette thèse. \mathbb{K} est un corps commutatif et $\bar{\mathbb{K}}$ sa clôture algébrique. $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ est l'anneau des polynômes à n variables dans \mathbb{K} , que nous notons souvent en abrégé $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$. Nous considérons maintenant des polynômes de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ notés $f_i, i \in \{1, \dots, n\}$, et I l'idéal de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ engendré par f_1, \dots, f_n . Nous noterons $\mathcal{A} = \mathbb{K}[\mathbf{x}]/I$ l'algèbre quotient.

Nous centrons notre étude sur les idéaux zéro-dimensionnels. Dans ce cas, \mathcal{A} est un espace vectoriel de dimension finie δ et la variété algébrique définie par l'ensemble des zéros de I est finie $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(I) = \{\zeta_1, \dots, \zeta_d\}$ ²[CLO92].

1.1 Opérateurs de multiplications

$\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ et \mathcal{A} étant des \mathbb{K} -espaces vectoriels, nous pouvons considérer $\widehat{\mathbb{K}[\mathbf{x}]}$ (respectivement $\widehat{\mathcal{A}}$) comme l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ (respectivement \mathcal{A}). Ce sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels. De plus, si \mathcal{A} est de dimension finie alors il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels entre \mathcal{A} et $\widehat{\mathcal{A}}$ et $\dim \widehat{\mathcal{A}} = \dim \mathcal{A}$.

Des éléments particuliers de $\widehat{\mathbb{K}[\mathbf{x}]}$ sont les évaluations : $\forall \zeta \in \mathbb{K}^n$,

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\zeta} : \mathbb{K}[\mathbf{x}] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ a &\longmapsto \mathbf{1}_{\zeta}(a) = a(\zeta) \end{aligned}$$

Lemme 1 $\widehat{\mathcal{A}}$ s'identifie aux formes linéaires de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ qui s'annulent sur I .

-
1. D. Lazard [Laz77] et J.P. Cardinal [Car96] sont à l'origine de cette formulation
 2. Pour tout polynôme f dans I . $f(\zeta_i) = 0$, $i \in \{1, \dots, d\}$.

Démonstration : Notons

$$I^\perp = \{l \in \widehat{\mathbb{K}[\mathbf{x}]} \mid \forall f \in I, l(f) = 0\}.$$

Soit $\Lambda \in \widehat{\mathbb{K}[\mathbf{x}]}$ tel que $\forall f \in I \Lambda(f) = 0$, alors nous pouvons définir par passage au quotient la forme linéaire

$$\begin{aligned} \Lambda' : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \bar{a} &\longmapsto \Lambda(a) \end{aligned}$$

ce qui nous définit une injection \mathcal{I}_1 de I^\perp dans $\widehat{\mathcal{A}}$. Réciproquement, soit Π la surjection de $\widehat{\mathbb{K}[\mathbf{x}]}$ dans \mathcal{A} , $\forall \Lambda' \in \widehat{\mathcal{A}}$, nous pouvons définir $\Lambda \in \widehat{\mathbb{K}[\mathbf{x}]}$ de la manière suivante :

$$\Lambda : f \longmapsto \Lambda'(\Pi(f)).$$

Comme nous avons $\Pi(f) = 0$ pour $f \in I$, nous en déduisons que $\Lambda \in I^\perp$; ceci définit une injection \mathcal{I}_2 de $\widehat{\mathcal{A}}$ dans I^\perp . De plus, $\forall \Lambda' \in \widehat{\mathcal{A}}$, $\forall \bar{a} \in \mathcal{A}$ et $\forall f \in I$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_1 \circ \mathcal{I}_2(\Lambda'))(\bar{a}) &= (\mathcal{I}_1(\mathcal{I}_2(\Lambda')))(\bar{a}) \\ &= (\mathcal{I}_2(\Lambda'))(a + f) \\ &= \Lambda'(\Pi(a + f)) = \Lambda'(\bar{a}), \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{I}_1 \circ \mathcal{I}_2 = \mathbb{I}$. □

Des éléments particuliers de $\widehat{\mathcal{A}}$ sont les évaluations $\forall \zeta \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(I)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_\zeta : \mathbb{K}[\mathbf{x}] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ a &\longmapsto \mathbf{1}_\zeta(a) = a(\zeta) \end{aligned}$$

Nous définissons une structure de \mathcal{A} -module sur $\widehat{\mathcal{A}}$ par l'opération suivante $\forall a \in \mathcal{A}$, $\Lambda \in \widehat{\mathcal{A}}$:

$$\begin{aligned} a \cdot \Lambda : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ b &\longmapsto a \cdot \Lambda(b) = \Lambda(ab) \end{aligned}$$

Définition 1 L'opérateur de multiplication par $a \in \mathcal{A}$ est :

$$\begin{aligned} M_a : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ b &\longmapsto ab \end{aligned}$$

Ces endomorphismes induisent les applications \mathbb{K} -linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} M_a^* : \widehat{\mathcal{A}} &\longrightarrow \widehat{\mathcal{A}} \\ \Lambda &\longmapsto a \cdot \Lambda = \Lambda \circ M_a \end{aligned}$$

Théorème 1 Les éléments $\mathbf{1}_{\zeta_1}, \dots, \mathbf{1}_{\zeta_a}$ sont les vecteurs propres communs à tous les endomorphismes $(M_a^*)_{a \in \mathcal{A}}$ de $\widehat{\mathcal{A}}$ associés respectivement aux valeurs propres $a(\zeta_1), \dots, a(\zeta_a)$.

Démonstration : Comme les applications M_a^* et M_a sont transposées, elles ont les mêmes valeurs propres. Nous recherchons alors les valeurs propres de M_a .

Soit le polynôme $\psi = \prod_{i=1}^d (a - a(\zeta_i))$. Ce polynôme s'annule sur $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(I)$ ou de manière équivalente $\psi \in \mathcal{I}(\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(I))$, donc par le théorème des zéros de Hilbert³, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\psi^n = \prod_{i=1}^d (a - a(\zeta_i))^n \in I$ et par conséquent,

$$\psi_{M_a} = \prod_{i=1}^d (M_a - a(\zeta_i)\mathbb{I})^n = 0.$$

Le polynôme $\psi(T) = \prod_{i=1}^d (T - a(\zeta_i))^n$ est un multiple du polynôme minimal de M_a , et l'ensemble des valeurs propres de M_a est inclus dans $\{a(\zeta_1), \dots, a(\zeta_d)\}$.

Montrons maintenant que pour tout $a \in \mathcal{A}$, $\mathbf{1}_{\zeta_i}$ est un vecteur propre pour la valeur propre $a(\zeta_i)$ de M_a^* .

Comme $M_a^*(\mathbf{1}_{\zeta_i}) = a \cdot \mathbf{1}_{\zeta_i}$ est un élément de $\widehat{\mathcal{A}}$, et que $\forall b \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} a \cdot \mathbf{1}_{\zeta_i}(b) &= \mathbf{1}_{\zeta_i}(ab) = ab(\zeta_i) \\ &= a(\zeta_i)b(\zeta_i) = a(\zeta_i)\mathbf{1}_{\zeta_i}(b), \end{aligned}$$

nous avons :

$$M_a^*(\mathbf{1}_{\zeta_i}) = a(\zeta_i)\mathbf{1}_{\zeta_i},$$

$\mathbf{1}_{\zeta_i}$ est un vecteur propre de M_a^* pour la valeur propre $a(\zeta_i)$ et par conséquent, $\mathbf{1}_{\zeta_i}$ est un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $(M_a^*)_{a \in \mathcal{A}}$.

Réciproquement, montrons que les vecteurs propres communs aux endomorphismes $(M_a^*)_{a \in \mathcal{A}}$ sont exactement (à un scalaire près) $\mathbf{1}_{\zeta_1}, \dots, \mathbf{1}_{\zeta_d}$. Considérons $\Lambda \neq 0 \in \widehat{\mathcal{A}}$ un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $(M_a^*)_{a \in \mathcal{A}}$, alors Λ est un vecteur propre aux endomorphismes $(M_{x_i}^*)_{i=\{1, \dots, n\}}$. Nous appelons γ_i la valeur propre associée à Λ pour l'endomorphisme $M_{x_i}^*$ et nous avons :

$$M_{x_i}^*(\Lambda) = \gamma_i \Lambda.$$

Aussi, pour tout monôme \mathbf{x}^α de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, nous avons :

$$M_{x_i}^* \circ \Lambda(\mathbf{x}^\alpha) = \Lambda(x_i \mathbf{x}^\alpha) = \gamma_i \Lambda(\mathbf{x}^\alpha).$$

Par récurrence, nous obtenons que :

$$\Lambda(\mathbf{x}^\alpha) = \gamma^\alpha \Lambda(1),$$

où $\gamma^\alpha = (\gamma_1^{\alpha_1}, \dots, \gamma_n^{\alpha_n})$. En d'autres termes, nous avons aussi :

$$\Lambda = \Lambda(1)\mathbf{1}_\gamma,$$

où $\mathbf{1}_\gamma \in \widehat{\mathbb{K}[\mathbf{x}]}$ est l'évaluation en γ . Or comme $\Lambda \in \widehat{\mathcal{A}} \equiv I^\perp$, nous avons pour tout $p \in I$:

$$\Lambda(p) = \Lambda(1)\mathbf{1}_\gamma(p) = \Lambda(1)p(\gamma) = 0.$$

3. $\mathcal{I}(\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(I)) = \sqrt{I}$

Ceci implique que $\gamma \in \{\zeta_1, \dots, \zeta_d\}$ et $\Lambda = \Lambda(1)\mathbf{1}_\gamma$. □

La résolution de systèmes polynomiaux est équivalente à la recherche des vecteurs propres de la transposée des opérateurs de multiplications. En effet, comme ces vecteurs propres correspondent aux évaluations de la base de l'algèbre quotient par rapport à une racine commune des polynômes, il suffit d'extraire les valeurs correspondantes aux variables. Si les variables ne sont pas toutes présentes dans la base de l'algèbre quotient, alors il existe des polynômes de l'idéal permettant de les évaluer.

Algorithme 1

entrée : L'opérateur de multiplication par une forme linéaire dans l'algèbre quotient définie par les polynômes f_1, \dots, f_n .

sorties : toutes les solutions communes des polynômes f_1, \dots, f_n .

1. Calculer les vecteurs propres de la matrice transposée de l'opérateur de multiplication.
2. Extraire de ces vecteurs les coordonnées qui correspondent aux évaluations des variables aux racines communes des polynômes.
3. Calculer les valeurs des variables que nous ne connaissons pas directement par substitution dans des polynômes de l'idéal.

Remarque 1 Dans beaucoup de cas, l'étape 3 est inutile car toutes les variables sont évaluées dès l'étape 2. Le fait qu'une variable n'apparaisse pas dans la base du quotient entraîne qu'il existe une règle de réécriture permettant d'éliminer cette variable. Cette règle permet alors d'évaluer la variable manquante.

1.2 Matrices de résultants

Les matrices de résultants constituent un moyen continu de construire les opérateurs de multiplication. Ces matrices vont alors nous permettre de calculer les matrices de multiplications directement avec des coefficients approchés.

1.2.1 Introduction du résultant

Supposons que $f_0 = 0, \dots, f_n = 0$ soient $n + 1$ équations **linéaires** par rapport aux variables x_0, \dots, x_n . Ces équations possèdent au moins une solution commune si et seulement si le déterminant du système est nul.

Comme dans le cadre linéaire, nous voulons définir un critère sur les coefficients de $n + 1$ polynômes en n variables qui permet d'affirmer s'il existe au moins une racine commune à ces $n + 1$ polynômes.

Commençons par étudier le cas de deux polynômes à une variable. Soient $f_0 = c_{0,0} + \dots + c_{0,d_0}x^{d_0}$ et $f_1 = c_{1,0} + \dots + c_{1,d_1}x^{d_1}$, deux polynômes de $\mathbb{K}[x]$ de degré respectif d_0 et d_1 .

Démonstration : Par le lemme 2, f_0 et f_1 ont au moins une racine commune si et seulement si il existe $A \in V_0$ et $B \in V_1$ tels que $\mathcal{S}(A, B) = 0$, soit $\ker(\mathcal{S}) \neq 0$, ce qui est équivalent à $\det(\mathcal{S}) = 0$. \square

Essayons maintenant de donner une définition dans le cas général d'un système de $n + 1$ polynômes. Nous nous plaçons dans l'espace projectif $\bar{\mathbf{x}} = \{x_0, \mathbf{x}\}$, de manière à ce que la projection d'une variété algébrique reste une variété algébrique.

Soient $n + 1$ polynômes homogènes de $\mathbb{K}[\bar{\mathbf{x}}]$:

$$\begin{aligned} f_0 &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \\ |\alpha| = d_0}} c_{0,\alpha} \bar{\mathbf{x}}^\alpha && \text{où } \alpha \text{ est un multi-indice} \\ &\vdots \\ f_n &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \\ |\alpha| = d_n}} c_{n,\alpha} \bar{\mathbf{x}}^\alpha. \end{aligned}$$

Définition 2 *Le résultant de f_0, \dots, f_n est la condition polynomiale de plus petit degré⁴ sur les coefficients $c_{i,\alpha}$ nécessaire et suffisante pour que ces $n + 1$ polynômes aient au moins une racine commune sur \mathbb{P}^n .*

L'existence d'une telle condition n'est pas triviale. Nous noterons $k_i = C_{n+d_i+1}^{d_i}$ et si nous considérons les coefficients des polynômes f_0, \dots, f_n comme des paramètres [VdW48], alors le système $f_0 = 0, \dots, f_n = 0$ forme une variété d'incidence W dans $\mathbb{P}^{k_0} \times \dots \times \mathbb{P}^{k_n} \times \mathbb{P}^n$. Nous pouvons définir deux projections :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: W \longrightarrow \mathbb{P}^{k_0} \times \dots \times \mathbb{P}^{k_n} \\ \Pi_2 &: W \longrightarrow \mathbb{P}^n \end{aligned}$$

Pour un point de $\zeta \in \mathbb{P}$ solution du système, $\Pi_2^{-1}(\zeta)$ est un sous-espace linéaire de $\mathbb{P}^{k_0} \times \dots \times \mathbb{P}^{k_n} \times \mathbb{P}^n$ de dimension $\sum_{i=0}^n k_i - n - 1$. D'après le théorème des fibres (voir [Sha74] pages 60 et 61, [Har92] page 139), la variété W est irréductible et de dimension $\sum_{i=0}^n k_i - 1$ et par conséquent, la projection $\Pi_1(W)$ est de dimension au plus $\sum_{i=0}^n k_i - 1$ soit de codimension au moins 1. Pour une justification plus détaillée de l'existence du résultant voir⁵ dans [Mac02, GKZ94].

1.2.2 Théorème de Macaulay

Reprenons le système polynomial homogène de $\mathbb{K}[\bar{\mathbf{x}}]$ vu précédemment, et considérons l'application \mathbb{K} -linéaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : V_0 \times \dots \times V_n &\longrightarrow V \\ (q_0, \dots, q_n) &\longmapsto q_0 f_0 + \dots + q_n f_n \end{aligned}$$

4. À un facteur scalaire près.

5. Nous reprendrons ce problème d'existence pour les systèmes sur-déterminés.

où V_0, \dots, V_n et V sont des sous espaces vectoriels $\mathbb{K}[\bar{\mathbf{x}}]$. Prenons b_1, \dots, b_r une base de V . Comme $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $V_i \subset V$ nous avons une base de V_i . Nous pouvons alors définir S la matrice de l'application \mathcal{S} .

Théorème 2 (Macaulay) *Supposons que la matrice S ait plus ou autant de colonnes que de lignes. S est surjective équivaut au fait que les polynômes f_0, \dots, f_n n'ont pas de racine commune dans \mathbb{P}^n .*

Idée de démonstration : Si S est surjective alors pour tout i , il existe $(q_0, \dots, q_n) \in V_0 \times \dots \times V_n$ tels que :

$$S(q_0, \dots, q_n) = b_i.$$

Et par conséquent, b_i est une combinaison des f_0, \dots, f_n et si ζ est une racine commune aux f_j , alors $b_i(\zeta) = 0$ et ζ est une racine de b_i . Or, ceci est contradictoire avec le fait que $1 \in V$.

Une démonstration de la réciproque utilise le complexe de Koszul [Mat80] :

$$0 \longrightarrow \bigwedge^{n+1} \mathbb{K}[\bar{\mathbf{x}}]^{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \bigwedge^n \mathbb{K}[\bar{\mathbf{x}}]^{n+1} \xrightarrow{d_n} \dots \xrightarrow{d_2} \bigwedge^1 \mathbb{K}[\bar{\mathbf{x}}]^{n+1} \xrightarrow{d_1} \mathbb{K}[\bar{\mathbf{x}}] \longrightarrow 0,$$

avec

$$d_p(e_{i_1} \vee \dots \vee e_{i_p}) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} f_{i_k} e_{i_1} \vee \dots \vee e_{i_{k-1}} e_{i_{k+1}} \vee \dots \vee e_{i_p}.$$

Si f_0, \dots, f_n n'ont pas de zéros communs alors nous pouvons montrer que le complexe est exact (cette démonstration est technique et elle est faite dans [Laz77] avec un complexe un peu différent) et qu'en le restreignant au degré ν , l'image de l'application \mathcal{S} (qui correspond à la dernière flèche du complexe) a une image de dimension la somme alternée de coefficients binomiaux, ne dépendant que des degré des f_i . Dans le cas particulier où $f_0 = x_0^{d_0}, \dots, f_n = x_n^{d_n}$, tout monôme de degré ν est divisible par l'un des $x_i^{d_i}$ ce qui entraîne que \mathcal{S} est surjective. \mathcal{S} est donc en général surjective quand le résultant de f_0, \dots, f_n est différent de zéro. \square

1.2.3 Construction de la matrice de Macaulay

La matrice de Macaulay est construite suivant le même schéma que la matrice S du théorème de Macaulay. Elle généralise la matrice de Sylvester pour des polynômes multivariés. Nous décrivons sa construction explicite pour des polynômes non homogènes. Le fait de se placer dans l'espace affine correspond davantage à nos situations, il faut en contre partie, que nous écartions les problèmes à l'infini en interdisant aux systèmes polynomiaux étudiés d'avoir des zéros communs à l'infini. Considérons le système polynomial de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq d_0}} c_{0,\alpha} \mathbf{x}^\alpha = 0 \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq d_n}} c_{n,\alpha} \mathbf{x}^\alpha = 0 \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Soit $\nu = \sum_{i=0}^n (d_i - 1) + 1$, considérons V le \mathbb{K} espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ de degré inférieur ou égal à ν . Nous prenons \mathbf{x}^F l'ensemble des monômes de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ de degré au plus ν et pour chaque f_i , nous définissons V_i le \mathbb{K} sous espace vectoriel de V engendré par l'ensemble \mathbf{x}^{E_i} défini comme suit :

$$\begin{aligned} i \in \{1, \dots, n\}, \mathbf{x}^\alpha \in \mathbf{x}^{E_i} &\iff \begin{cases} \mathbf{x}^\alpha x_i^{d_i} \in \mathbf{x}^F \\ \deg_{x_l}(\mathbf{x}^\alpha x_i^{d_i}) < d_l, l \in \{i+1, \dots, n\} \end{cases} \\ \mathbf{x}^\alpha \in \mathbf{x}^{E_0} &\iff \deg_{x_l}(\mathbf{x}^\alpha) < d_l, l \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Remarque 2 Ces ensembles dépendent uniquement des degrés des polynômes f_0, \dots, f_n et ne dépendent pas des coefficients. Seul l'ensemble \mathbf{x}^{E_0} est indépendant de d_0 .

Nous pouvons considérer l'application \mathbb{K} -linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : V_0 \times \dots \times V_n &\longrightarrow V \\ (q_0, \dots, q_n) &\longmapsto \sum_{i=0}^n q_i f_i \end{aligned}$$

Définition 3 Nous appellerons la matrice de l'application \mathcal{S} dans les bases données ci-dessus la matrice de Macaulay du système f_0, \dots, f_n et nous la noterons S .

Remarque 3 Dans le cas de deux polynômes univariés cette matrice est identique à la matrice de Sylvester.

Notation 1 f_1^T, \dots, f_n^T la partie homogène de degré maximal des polynômes f_1, \dots, f_n .

Remarque 4 Nous pouvons construire la matrice de Macaulay S^T des polynômes f_1^T, \dots, f_n^T . La base des monômes est formée par l'ensemble \mathbf{x}^{F^T} des monômes en les variables x_1, \dots, x_n de degré $\nu^T = \sum_{i=1}^n (d_i - 1) + 1 = \nu - (d_0 - 1)$. Les bases locales $\mathbf{x}^{E_i^T}$ sont les ensembles :

$$i \in \{1, \dots, n\} \quad \mathbf{x}^\alpha \in \mathbf{x}^{E_i^T} \iff \begin{cases} \mathbf{x}^\alpha x_i^{d_i} \in \mathbf{x}^{F^T} \\ \deg_{x_l}(\mathbf{x}^\alpha x_i^{d_i}) < d_l, l = i+1, \dots, n \end{cases}$$

Propriété 1 Le déterminant de la matrice de Macaulay est un multiple non trivial du résultant des polynômes f_0, \dots, f_n .

Démonstration : Supposons ζ une racine commune aux polynômes f_0, \dots, f_n . Nous pouvons évaluer la base des monômes \mathbf{x}^F en ζ ce qui nous donne un vecteur $m_\zeta \neq 0$ tel que :

$$S^t m_\zeta = \left(\underbrace{\dots, (\mathbf{x}^{\alpha_0} f_0)(\zeta), \dots}_{\mathbf{x}^{\alpha_0} \in V_0}, \dots, \dots, \underbrace{\dots, (\mathbf{x}^{\alpha_n} f_n)(\zeta), \dots}_{\mathbf{x}^{\alpha_n} \in V_n} \right)^t = 0$$

D'où m_ζ est un élément non trivial du noyau de S^t et par conséquent $\det(S) = 0$. Or comme $\det(S)$ est un polynôme par rapport aux coefficients des f_i qui s'annule si les f_i possèdent une racine commune et que le résultant engendre ces polynômes, $\det(S)$ est un multiple du résultant. \square

Comment obtenir les opérateurs de multiplications. Comme $\mathbf{x}^{E_0} \subset \mathbf{x}^F$, quitte à réorganiser les éléments de \mathbf{x}^F , nous pouvons supposer que les premiers éléments de \mathbf{x}^F sont ceux de \mathbf{x}^{E_0} . Dans ce cas, la matrice de Macaulay a la forme suivante :

$$S = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{A}^{\mathbf{x}^{E_0} f_0} & \overbrace{B}^{\mathbf{x}^{E_i} f_i} \\ \hline C & D \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \mathbf{x}^{E_0} \\ \mathbf{x}^F \setminus \mathbf{x}^{E_0} \end{array} \right\}$$

Proposition 2 Si D est inversible alors l'ensemble \mathbf{x}^{E_0} des monômes multiplicateurs du polynôme f_0 forment une base de \mathcal{A} .

Démonstration :

Démontrons dans un premier temps que \mathbf{x}^{E_0} est une partie génératrice de \mathcal{A} .

Soit g un polynôme de V_0 de coordonnées v dans \mathbf{x}^{E_0} , nous voulons montrer que $f_0 g \bmod I \in \mathbf{x}^{E_0}$. Or le polynôme $f_0 g$ a pour coordonnées $S(v, 0)^t$ dans \mathbf{x}^F . Comme D est inversible, nous pouvons prendre h de coordonnées $w = -D^{-1}Cv$ dans \mathbf{x}^F alors $S(0, w)^t = (Bw, Dw)^t$ qui est un multiple de f_1, \dots, f_n donc appartient à l'idéal I . Or comme

$$\begin{aligned} S \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} &= S \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Av - BD^{-1}Cv \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.3)$$

nous en déduisons que $f_0.g \bmod I$ est un polynôme de V_0 .

Comme V_0 est indépendant du choix de f_0 , nous pouvons spécialiser $f_0 = x_i$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$. De plus, v_0 contient 1, il est alors facile de montrer par récurrence que tout polynôme de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ peut se réécrire comme un élément de V_0 modulo I . Par conséquent, \mathbf{x}^{E_0} est une partie génératrice de \mathcal{A} et $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A} \leq \prod_{i=1}^n d_i$.

Nous construisons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{E'_i} &= \{\mathbf{x}^\alpha \in \mathbf{x}^{E_i} \text{ tq } \deg \mathbf{x}^\alpha x_i^{d_i} < \nu\} \\ \mathbf{x}^{E''_i} &= \{\mathbf{x}^\alpha \in \mathbf{x}^{E_i} \text{ tq } \deg \mathbf{x}^\alpha x_i^{d_i} = \nu \text{ et } x_1^{d_0-1} \text{ divise } \mathbf{x}^\alpha\} \\ \mathbf{x}^{E'''_i} &= \{\mathbf{x}^\alpha \in \mathbf{x}^{E_i} \text{ tq } \deg \mathbf{x}^\alpha x_i^{d_i} = \nu \text{ et } x_1^{d_0-1} \text{ ne divise pas } \mathbf{x}^\alpha\} \end{aligned}$$

Quitte à permuter des lignes et des colonnes, S s'écrit :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \overbrace{A}^{\mathbf{x}^{E_0} f_0} & \overbrace{}^{\mathbf{x}^{E'_i} f_i} & \overbrace{}^{\mathbf{x}^{E''_i} f_i} & \overbrace{}^{\mathbf{x}^{E'''_i} f_i} \\ \hline & * & * & * \\ C & 0 & S^T & * \\ & 0 & 0 & * \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \mathbf{x}^{E_0} \\ \mathbf{x}^{E'_i} x_i^{d_i} \\ \mathbf{x}^{E''_i} x_i^{d_i} \\ \mathbf{x}^{E'''_i} x_i^{d_i} \end{array} \right\}$$

Comme pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour $\mathbf{x}^\alpha \in \mathbf{x}^{E'_i}$, $\deg(\mathbf{x}^\alpha f_i) < \nu$ et que $\mathbf{x}^{E''_i} x_i^{d_i} \cup \mathbf{x}^{E'''_i} x_i^{d_i}$ est un ensemble de monômes de degré ν , nous avons $D_{2,1} = 0$ et $D_{3,1} = 0$. De plus, comme pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, les polynômes de l'ensemble $\mathbf{x}^{E''_i} f_i$ sont divisibles par $x_i^{d_0-1}$, nous avons aussi $D_{3,2} = 0$. Si $\mathbf{x}^\alpha \in \mathbf{x}^{E''_i}$, $\frac{\mathbf{x}^\alpha x_i^{d_i}}{x_i^{d_0-1}}$ est de degré total ν^T et

$$\deg_{x_k} \left(\frac{\mathbf{x}^\alpha x_i^{d_i}}{x_i^{d_0-1}} \right) < \deg_{x_k} (m x_i^{d_i}) \text{ si } k = i + 1, \dots, n,$$

ce qui montre que $\frac{\mathbf{x}^\alpha}{x_1^{d_0-1}} \in \mathbf{x}^{E'_i}$, réciproquement si $\mathbf{x}^\alpha \in \mathbf{x}^{E'_i}$ alors $\mathbf{x}^\alpha x_1^{d_0-1} \in \mathbf{x}^{E''_i}$ et nous avons $D_{2,2} = S^T$. Si les polynômes f_i , $i = 1, \dots, n$, sont génériques sans racines à l'infini alors le théorème de Bézout impose $\dim_{\mathbb{K}\text{-ev}} \mathcal{A} = \prod_{i=1}^n d_i$ d'où E_0 est une base de \mathcal{A} . \square

Proposition 3 *Si D est inversible, alors la matrice de multiplication par f_0 est :*

$$M_{f_0} = (A - BD^{-1}C)$$

Démonstration : Comme nous l'avons déjà vu dans la démonstration de la proposition 2, pour tout polynôme g de V_0 de coordonnées $(v, 0)^t$ dans \mathbf{x}^F , les coordonnées modulo I de $f_0.g$ dans \mathbf{x}^F sont $(Av - BD^{-1}Cv, 0)^t$ (cf. 1.3). Nous en déduisons que la matrice de multiplication par f_0 dans \mathcal{A} dans la base \mathbf{x}^{E_0} est :

$$M_{f_0} = A - BD^{-1}C.$$

\square

Comment résoudre Nous venons de voir que la matrice de Macaulay permet de déterminer la matrice de multiplication par une forme linéaire. Or nous avons vu dans la première section que les solutions communes des f_1, \dots, f_n sont données par des coordonnées des vecteurs propres de l'adjoint de l'opérateur de multiplication. Nous avons donc un algorithme complet de résolution :

Algorithme 2

entrée : un système polynomial zéro-dimensionnel de n équations à n variables.

sorties : toutes les solutions du système.

1. Calculer S la matrice de Macaulay de l'ensemble des polynômes du système complété d'une forme linéaire quelconque.
2. Calculer la matrice de multiplication par la forme linéaire dans l'algèbre quotient, en calculant le complément de Schur de S : $M = A - BD^{-1}C$.
3. Calculer les vecteurs propres de la matrice transposée de l'opérateur de multiplication.

4. Extraire de ces vecteurs les coordonnées qui correspondent aux évaluations des variables aux racines communes du système polynomial.

Exemple 1 Considérons deux polynômes à deux variables de degré deux :

$$\begin{aligned} f &= 13x^2 + 8xy + 4y^2 - 8x - 8y + 2 \\ g &= x^2 + xy - x - 1/6 \end{aligned}$$

Le système défini par $f = 0$ et $g = 0$ est zéro-dimensionnel et sans zéro à l'infini. Nous pouvons construire la matrice de Macaulay associée à ce système et à la forme linéaire x . $\nu = 3$ et la base des monômes est alors :

$$[1, y, x, xy, x^2y, xy^2, x^2, y^2, x^3, y^3].$$

Les bases locales sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{E_0} &= \{1, y, x, xy\} \\ \mathbf{x}^{E_1} &= \{x, 1, y\} \\ \mathbf{x}^{E_2} &= \{y, 1, x\} \end{aligned}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 2 & -1/6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & -1 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 & 8 & -8 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 0 & 13 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 13 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcul de la matrice de multiplication par x dans l'algèbre quotient $\frac{\mathbb{K}[x,y]}{(f,g)}$ par le complément de Schur :

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{54} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{27} \\ 1 & 0 & 1 & \frac{55}{54} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Recherche des solutions du système, par valeurs propres et vecteurs propres de la transposée de la matrice de multiplication M_x :

$$\begin{array}{lll} \text{valeur propre } 1/3 & \text{multiplicité } 2 & \text{vecteur propre } (1, 7/6, 1/3)^t \\ \text{valeur propre } -1/3 & \text{multiplicité } 2 & \text{vecteur propre } (1, 5/6, -1/3)^t \end{array}$$

Les racines communes de f et g sont :

$$(x = 1/3, y = 7/6); (x = -1/3, y = 5/6).$$

Nous retrouvons bien le fait que les valeurs propres correspondent aux évaluations de la forme linéaire x aux racines et que les vecteurs correspondent aux évaluations de la base du quotient $1, y, x, xy$ aux racines.

Nous verrons d'autres exemples utilisant cet algorithme dans le chapitre 2.

Autres formes matricielles Nous donnons ici les idées de construction de la matrice de multiplication à partir des Bézoutiens.

Soient f_0, \dots, f_n , $n + 1$ polynômes de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ et un deuxième ensemble de variables y_1, \dots, y_n . Nous définissons :

$$\theta_i(f_j)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{f_j(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, \dots, x_n) - f_j(y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{y_i - x_i} \quad (1.4)$$

Définition 4 Avec les notations ci-dessus, le Bézoutien de f_0, \dots, f_n est le polynôme de $\mathbb{K}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ suivant :

$$\Theta_{f_0, \dots, f_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} f_0(\mathbf{x}) & \theta_1(f_0)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \cdots & \theta_n(f_0)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) & \theta_1(f_n)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \cdots & \theta_n(f_n)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

Soient $(\mathbf{x}^\alpha)_\alpha$ et $(\mathbf{y}^\beta)_\beta$ les supports monomiaux de Θ_{f_0, \dots, f_n} en \mathbf{x} et \mathbf{y} .

Définition 5 La Bézoutienne des polynômes f_0, \dots, f_n dans les bases $(\mathbf{x}^\alpha)_\alpha$ et $(\mathbf{y}^\beta)_\beta$ est la matrice $B_{f_0, \dots, f_n} = (\lambda_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta}$ où $\lambda_{\alpha, \beta}$ sont des coefficients de \mathbb{K} tels que :

$$\Theta_{f_0, \dots, f_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\alpha, \beta} \lambda_{\alpha, \beta} \mathbf{x}^\alpha \mathbf{y}^\beta, \quad \lambda_{\alpha, \beta} \in \mathbb{K} \quad (1.6)$$

Remarque 5

$$\forall f \in \mathbb{K}[\mathbf{x}], \quad f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \theta_i(f)(y_i - x_i)$$

et

$$\Theta_{f_0, \dots, f_n} = \begin{vmatrix} f_0(\mathbf{y}) & \theta_1(f_0)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \cdots & \theta_n(f_0)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(\mathbf{y}) & \theta_1(f_n)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \cdots & \theta_n(f_n)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

Proposition 4

$$\Theta_{f_0, \dots, f_n} = f_0(\mathbf{x}) \Theta_{1, f_1, \dots, f_n} \text{ mod } I_{\mathbf{x}}$$

$$\Theta_{f_0, \dots, f_n} = f_0(\mathbf{y}) \Theta_{1, f_1, \dots, f_n} \text{ mod } I_{\mathbf{y}}$$

Démonstration : En développant suivant la première colonne de 1.5 et 1.7. □

Soient deux opérateurs linéaires :

$$\begin{aligned} \triangleright : \mathbb{K}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\mathbf{y}] &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\widehat{\mathbb{K}[\mathbf{x}]}, \mathbb{K}[\mathbf{x}]) \\ \sum_i a_i \otimes b_i &\longmapsto \triangleright(\sum_i a_i \otimes b_i)(\Lambda) = \sum_i a_i \Lambda(b_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleleft : \mathbb{K}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\mathbf{y}] &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\widehat{\mathbb{K}[\mathbf{y}]}, \mathbb{K}[\mathbf{y}]) \\ \sum_i a_i \otimes b_i &\longmapsto \triangleleft(\sum_i a_i \otimes b_i)(\Lambda) = \sum_i \Lambda(a_i) b_i \end{aligned}$$

Nous complétons les ensembles $(\mathbf{x}^\alpha)_\alpha$ et $(\mathbf{y}^\beta)_\beta$ en des bases v et w de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ et $\mathbb{K}[\mathbf{y}]$ respectivement. Et nous considérons l'écriture suivante :

$$\Theta_{f_0, \dots, f_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j} \nu_{i,j} v_i w_j \quad (1.8)$$

Nous définissons l'application \mathbb{K} -linéaire suivante :

$$\Theta_{f_0, \dots, f_n}^\triangleright : \begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{K}[\mathbf{x}]} & \longrightarrow & \mathbb{K}[\mathbf{x}] \\ \Lambda & \longmapsto & \sum_{i,j} \nu_{i,j} \Lambda(w_j) v_i \end{array}$$

et considérons $(\widehat{w}_j)_j$ la base duale de $(w_j)_j$, nous avons :

$$\Theta_{f_0, \dots, f_n}^\triangleright(\widehat{w}_l) = \sum_{i,j} \nu_{i,j} \widehat{w}_l(w_j) v_i = \sum_i \nu_{i,l} v_i$$

d'où la matrice de $\Theta_{f_0, \dots, f_n}^\triangleright$ dans les bases $(\widehat{w}_j)_j$ et $(v_i)_i$ est $(\nu_{i,j})_{i,j}$. De la même manière, la matrice de $\Theta_{f_0, \dots, f_n}^\triangleleft$ dans les bases $(\widehat{v}_i)_i$ et $(w_j)_j$ est $(\nu_{i,j})_{i,j}^t$.

Proposition 5 *Il existe deux bases $\mathbf{v} = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $\mathbf{w} = (w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ telles que $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_D)$, $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_D)$ sont des bases de \mathcal{A} et que $v_i, w_i \in I$ pour $i > D$, et pour tout f_0 dans $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$, la matrice $[\theta_{f_0}]_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}$ est de la forme*

$$\left(\begin{array}{cc|cc} v_1 \cdots v_D & v_{D+1} \cdots & & \\ \hline & M_{f_0} & 0 & \\ \hline & 0 & L_{f_0} & \end{array} \right) \begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ w_D \\ w_{D+1} \\ \vdots \end{array}$$

Démonstration : voir [CM96] la démonstration de la proposition 3.3.3 de la page 197.

□

La proposition précédente montre que nous pouvons récupérer la matrice de multiplication par f_0 à partir des Bézoutiens, mais elle ne fournit pas d'algorithme de calcul. Dans la pratique, nous utilisons la compression de matrice, c'est-à-dire que nous supprimons les lignes et les colonnes (en modifiant les bases) qui sont des combinaisons linéaires des autres. Ce processus se termine et la matrice restante contient encore M_{f_0} et dans beaucoup de cas (c'est vraie pour les conditions de Macaulay), cette matrice est de la dimension du quotient (pour une approche plus complète avec une compression

plus complexe voir [CM96]). Lorsque nous récupérons la matrice de multiplication, nous savons trouver les zéros communs aux polynômes f_1, \dots, f_n .

De nombreux autres travaux ont été effectués pour généraliser ces techniques matricielles. Ils ont apporté d'autres constructions comme celles de Dixon, Jouanolou, [EM99b, Mou99a, DD00], et ont permis d'agrandir le domaine d'application [BEM00].

1.3 Méthodes itératives de résolution

Dans les sections précédentes, nous avons ramené l'étude des solutions d'un système polynomial à la recherche de valeurs et de vecteurs propres des opérateurs de multiplications.

Dans cette section, nous allons étudier comment adapter les méthodes classiques de recherche de valeurs et vecteurs propres, comme la puissance itérée ou bien la puissance inverse [Boi98, GVL96, TB97, Cia82], à nos opérateurs.

1.3.1 Méthode de la puissance itérée et de la puissance inverse

Notation 2 Soit N , la matrice nilpotente suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & 0 & \end{pmatrix}$$

Lemme 3 Soit $J = \alpha \mathbb{I} + \beta N$, si $|\alpha| < 1$ alors $\lim_{k \rightarrow \infty} J^k = 0$.

Démonstration : N est nilpotente d'ordre n . De plus, les matrices \mathbb{I} et N commutent, donc :

$$J^k = \sum_{j=0}^n C_k^j \beta^j \alpha^{k-j} N^j.$$

Si $\alpha = 0$, le résultat est évident, sinon nous avons :

$$J^k = \alpha^k \left(\sum_{j=0}^n C_k^j \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^j N^j \right).$$

Or $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k C_k^j = 0$, donc $\lim_{k \rightarrow \infty} J^k = 0$. □

Lemme 4 Soit $J = \mathbb{I} + \beta N$, $\forall u \in \mathbb{K}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{J_\alpha^k u}{\|J_\alpha^k u\|} = \lambda e_1$, où $\lambda \in \bar{\mathbb{K}}^*$ et e_1 est le premier vecteur de la base canonique.

Démonstration : Notons (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{K}^n , comme les matrices N et \mathbb{I} commutent, nous pouvons appliquer la formule du binôme de Newton. Un calcul rapide montre ensuite que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$J^k e_i = C_k^{i-1} \beta^{i-1} \left(e_1 + \frac{C_k^{i-1}}{\beta C_k^{i-1}} e_2 + \dots + \frac{i C_k^1}{\beta^{i-2} C_k^{i-1}} e_{i-1} + \frac{1}{\beta^{i-1} C_k^{i-1}} e_i \right),$$

et nous en déduisons alors que :

$$J^k e_i = C_k^{i-1} \beta^{i-1} (e_1 + \epsilon_i(k)) \text{ où } \lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_i(k) = 0.$$

Si nous notons $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, nous avons alors :

$$J^k u = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i C_k^{i-1} \beta^{i-1} \right) e_1 + \left(\sum_{i=1}^n C_k^{i-1} \beta^{i-1} \epsilon_i(k) \right).$$

Posons alors $\nu(k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i C_k^{i-1} \beta^{i-1}$. ν est un polynôme non nul de variable k et nous avons pour k assez grand :

$$\frac{J^k u}{\nu(k)} = e_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i C_k^{i-1} \beta^{i-1} \epsilon_i(k)}{\nu(k)}$$

soit $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{J^k u}{\nu(k)} = e_1$ et finalement :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{J^k u}{\|J^k u\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{J^k u}{\nu(k)} \left| \frac{\nu(k)}{\|J^k u\|} \right| \frac{\nu(k)}{|\nu(k)|} = \lambda e_1,$$

où $\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\nu(k)}{|\nu(k)|}$. □

Soient $w_0 \in \mathbb{K}^n$ et $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$, nous définissons :

$$\forall k \geq 1, w_k = \frac{A w_{k-1}}{\|w_{k-1}\|}$$

Théorème 3 Si A possède une unique valeur propre de module maximal notée λ_m d'espace propre E_m et que $w_0 \notin E_m^\perp$ alors :

- i. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|w_k\| = |\lambda_m|$
- ii. $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = w$ un vecteur propre associé à λ_m .

Démonstration : Par récurrence, nous obtenons facilement que :

$$\forall \geq 1, w_k = \frac{A^{k-1} w_0}{\|A^{k-2} w_0\|}.$$

Cas où A est diagonalisable :

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A avec

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \dots = \lambda_p \\ |\lambda_p| &> |\lambda_{p+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n \end{aligned}$$

et (v_1, \dots, v_n) une base de vecteurs propres normés associée. Dans cette base, w_0 s'écrit comme $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, où $\alpha_i \in \mathbb{K}$ et par hypothèse il existe v un vecteur de E_1 tel que $\langle w_0, v \rangle \neq 0$, c'est-à-dire qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\langle w_0, v_{i_0} \rangle = \alpha_{i_0} \neq 0$.

Posons $u = \sum_{i=1}^p \alpha_i v_i \neq 0$ un vecteur propre associé à λ_1 de A . Comme

$$A^k w_0 = \lambda_1^k \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i v_i + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k v_i \right)$$

et que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k = 0$$

nous en déduisons que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = \lambda_1 \frac{u}{\|u\|}.$$

Cas général :

Nous notons :

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & J_{n_q}(\lambda_q) \end{bmatrix}$$

une décomposition de Jordan de A avec :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p \text{ et } |\lambda_1| = \dots = |\lambda_p| \geq |\lambda_p + 1| \geq \dots \geq |\lambda_q|.$$

Nous décomposons $P^{-1}w_0$ sous la forme $(w_0^{(1)}, \dots, w_0^{(q)})^t$ adaptée à la décomposition par blocs. Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} A^k w_0 &= P(J_{n_1}(\lambda_1)^k w_0^{(1)}, \dots, J_{n_q}(\lambda_q)^k w_0^{(q)})^t \\ &= \lambda_1^k P(J_{n_1}(1)^k w_0^{(1)}, \dots, J_{n_q} \left(\frac{\lambda_q}{\lambda_1} \right)^k w_0^{(q)})^t \end{aligned}$$

et nous permettre de conclure en appliquant le lemme 4. \square

Pour la méthode de la puissance inverse, nous définissons la suite $v_0 \in \mathbb{K}^n$ et $A \in GL_n(\mathbb{K})$, nous définissons :

$$\forall k \geq 1, v_k = \frac{A^{-1}v_{k-1}}{\|v_{k-1}\|}$$

Théorème 4 *Si A est inversible et possède une unique valeur propre de module minimal notée λ_1 d'espace propre E_1 et si $v_0 \notin E_1^\perp$ alors :*

- i. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k\| = |\lambda_1|$
- ii. $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v$ un vecteur propre associé à λ_1 .

Démonstration : La démonstration se fait sur le même schéma que celle de la méthode de la puissance itérée. \square

Remarque 6 *Si λ_1 est une valeur propre simple de A et A est diagonalisable, la convergence de $(w_k)_k$ et $(v_k)_k$ est en $O\left(\frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k}\right)$ et $O\left(\frac{\lambda_1^k}{\lambda_2^k}\right)$ respectivement.*

1.3.2 Applications sur les opérateurs de multiplications

Les opérateurs de multiplications obtenus à partir des matrices de Sylvester sont de la forme :

$$M_f = A - BD^{-1}C, \text{ où } S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

D est généralement une matrice de grande taille (rapidement de l'ordre de 1000×1000), notre but est de ne pas avoir à effectuer le calcul de l'inverse de cette matrice qui est une opération coûteuse (elle est équivalente à résoudre n systèmes linéaires où n est la taille du système). Nous proposons une adaptation de l'algorithme précédent à notre cas [BMP98, BMP99].

Algorithme 3

entrée : La matrice de Macaulay S d'un système polynomial.

sortie : Une solution du système polynomial

1. Choisir un vecteur u_0 ⁶
 2. $k = 1$ et répéter :
 - Calculer $v_{k+1} = B^t u_k$.
 - Résoudre $D^t w_{k+1} = v_{k+1}$.
 - Calculer $r_{k+1} = A^t u_k - C^t w_{k+1}$.
 - Si la première coordonnée de $r_{k+1} \neq 0$, calculer $u_{k+1} = \frac{r_{k+1}}{r_{k+1}[1]}$ où $r_{k+1}[1]$ est la première coordonnée de r_{k+1} .
- jusqu'à ce que la première coordonnée de $r_{k+1} = 0$.

Remarque 7 Si D est une matrice inversible alors

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= (D^{-1})^t v_{k+1} \\ u_{k+1} &= (A - BD^{-1}C)^t u_k \end{aligned}$$

Proposition 6 Si M_{f_0} admet une valeur propre unique de module maximal, alors l'algorithme 3 converge et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u$$

où u est un vecteur propre pour la valeur propre de module maximal.

Démonstration : La démonstration suit le même schéma que celle du théorème 3 avec la matrice $M_{f_0}^t = (A - BD^{-1}C)^t$. Nous montrons par récurrence que pour tout k :

$$u_k = \frac{(M_{f_0}^t)^k u_0}{[(M_{f_0}^t)^k u_0]_1}$$

6. Il faut que u_0 n'appartienne pas à l'orthogonal de l'espace propre associé à la valeur propre de plus grand module. Dans la pratique un vecteur choisi aléatoirement convient.

Par le théorème 1, nous savons que les valeurs propres de $M_{f_0}^t$ sont les évaluations de f_0 aux racines communes de f_1, \dots, f_n qui sont ζ_1, \dots, ζ_d et que les évaluations $\mathbf{1}_{\zeta_i}$ sont des vecteurs propres de $M_{f_0}^t$.

Or M_{f_0} est donnée dans la base duale de la base de $\mathcal{A} \{1, \dots, x^\alpha, \dots\}$. Les coordonnées de $\mathbf{1}_{\zeta_i}$ dans cette base duale sont les évaluations des monômes de la base en ζ_i . De par ce fait, la première coordonnée des $\mathbf{1}_{\zeta_i}$ est 1.

Soit les valeurs propres sont simples alors nous pouvons supposer quitte à renumérotter les valeurs propres que :

$$|f_0(\zeta_1)| > |f_0(\zeta_2)| \geq \dots \geq |f_0(\zeta_n)|$$

et $\{\mathbf{1}_{\zeta_1}, \dots, \mathbf{1}_{\zeta_n}\}$ est une base de $\widehat{\mathcal{A}}$. Dans ce cas, pour tout u_0 n'appartenant pas au sous-espace propre de $f_0(\zeta_1)$, $u_0 = c_1 \mathbf{1}_{\zeta_1} + \dots + c_n \mathbf{1}_{\zeta_n}$, nous avons :

$$\begin{aligned} (M_{f_0}^t)^k u_0 &= \sum_{i=1}^n c_i (f_0(\zeta_i))^k \mathbf{1}_{\zeta_i} \\ &= (f_0(\zeta_1))^k (c_1 \mathbf{1}_{\zeta_1} + \sum_{i=2}^n c_i \left(\frac{f_0(\zeta_i)}{f_0(\zeta_1)}\right)^k \mathbf{1}_{\zeta_i}) \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(M_{f_0}^t)^k u_0}{(M_{f_0}^t)^k} = \zeta_1$$

Soit il existe des valeurs propres de multiplicité supérieure à un, et une technique similaire à la démonstration du théorème 3 faisant intervenir une décomposition de Jordan de la matrice $M_{f_0}^t$ permet de démontrer cette propriété. \square

Lemme 5 Si S et D sont inversibles alors :

- i. M_f est inversible.
- ii. S^{-1} est de la forme :

$$\begin{pmatrix} M_f^{-1} & V \\ Z & W \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Démonstration : Soit la matrice inversible

$$P = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & 0 \\ -D^{-1}C & \mathbb{I}_3 \end{pmatrix}.$$

- i. Considérons les déterminants suivants :

$$\begin{aligned} \det(S) \det(P) &= \det(SP) \\ &= \begin{vmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{vmatrix} \\ &= \det(A - BD^{-1}C) \det(D). \end{aligned}$$

Comme S et P sont inversibles, le déterminant est non nul et $\det(M_f) \neq 0$.

ii.

$$\begin{aligned}
S^{-1} &= PP^{-1}S^{-1} \\
&= P(SP)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & 0 \\ -D^{-1}C & \mathbb{I}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_f & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1}
\end{aligned}$$

Or l'inverse d'une matrice triangulaire par blocs est une matrice de la même forme avec pour blocs diagonaux les inverses des blocs diagonaux, d'où

$$\begin{aligned}
S^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & 0 \\ -D^{-1}C & \mathbb{I}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_f^{-1} & V \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} M_f^{-1} & V \\ -D^{-1}CM_f^{-1} & D^{-1}(-CB + \mathbb{I}_3) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Algorithme 4

entrée : La matrice de Macaulay S d'un système polynomial.

sortie : Une solution du système polynomial

1. Choisir un vecteur u_0 ⁷
2. $n = 1$ et répéter :
 - Résoudre $S^t v_{n+1} = (u_n, 0)^t$.
 - Si $[v_{n+1}]_1$ la première coordonnée de v_{n+1} est non nulle calculer $u_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{[v_{n+1}]_1}$.

Proposition 7 *Si M_{f_0} admet une valeur propre unique de module maximal, alors l'algorithme 4 converge et*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u$$

où u est un vecteur propre pour la valeur propre de module minimal.

Démonstration : La démonstration se fait en appliquant le théorème 7 à la matrice $(A - BD^{-1}C)^t$ avec la même différence que pour la démonstration de la proposition 6.

□

⁷ Il faut que u_0 n'appartienne pas à l'orthogonal de l'espace propre associé à la valeur propre de plus grand module. Dans la pratique un vecteur choisi aléatoirement convient.

	N	S	D	n	k	T
s44	36	138	16	2	7	0.050s
s442	165	821	32	3	6	0.151s
s4422	715	3704	64	4	8	1.179s
s455	364	1664	100	3	6	2.331s
s2445	1820	8795	160	4	8	4.323s
s22445	8568	41942	320	5	8	28.213s
sq4	126	585	16	4	5	0.313s
sq5	462	2175	32	5	44	2.135s
sq6	1716	7973	64	6	52	49.397s
sing	210	4998	21	2	14	0.438s

TAB. 1.1 – Caractéristiques des résolutions par la méthode de la puissance inverse.

1.3.3 Expérimentation

Nous présentons maintenant une expérimentation de ces méthodes de résolution et plus particulièrement de la méthode de la puissance inverse pour calculer la racine de plus petit module d'un système polynomial. Nous avons implanté en C++ l'algorithme 3 en utilisant des bibliothèques de matrices creuses comme TNT⁸ développé par R. Pozo; nous nous sommes aussi servis de la bibliothèque de résolution de systèmes linéaires GMRES qui utilise des préconditionnements ILU (voir [Saa96] pour plus de détails). Les matrices sont tout d'abord calculées par ALP⁹ qui implante la construction de Macaulay des matrices de résultants. Les résultats sont montrés dans la table 1.1.

Dans cette table, N est la dimension de la matrice de Macaulay S (c'est une matrice carré de taille $N \times N$), S est le nombre de coefficients non nuls de la matrice S , D est la dimension de l'algèbre quotient \mathcal{A} , n est le nombre de variables du système, k est le nombre d'itérations requises pour une erreur inférieure à $\epsilon 10^{-4}$, et T est le temps de calcul. Ce temps correspond au temps utilisateur de la commande UNIX `time`. Ces expérimentations ont été faites sur une station de travail Dec Alpha 500 AU avec 512M de mémoire.

Les exemples s44, ..., s22445 sont des exemples avec peu de monômes, où la construction de Macaulay peut être appliquée. Le nombre de solutions est le produit des degrés. Le premier exemple est un système de 2 équations à 2 variables, toutes les deux de degré 4, le second est un système de 3 équations à 3 variables dont les équations sont de degré 2, 4 et 4 respectivement, et ainsi de suite.

Les exemples sq4, ..., sq6 correspondent à l'intersection de quadriques dans un espace de dimension 4,5,6, sans point à l'infini¹⁰.

8. voir <http://math.nist.gov/tnt/> .

9. voir <http://www.inria.fr/saga/logiciels/ALP/>.

10. Ce problème provient du traitement du signal.

L'exemple `sing` correspond aux points singuliers de la courbe plane définie par :

$$\begin{aligned}
p := & x^8 - 8x^7y + 28x^6y^2 - 56x^5y^3 + 70x^4y^4 - 56x^3y^5 \\
& + 28x^2y^6 - 8xy^7 + y^8 - 128x^7 + 448x^6y - 672x^5y^2 \\
& + 560x^4y^3 - 280x^3y^4 + 84x^2y^5 - 14xy^6 + y^7 - 8x^6 \\
& + 48x^5y - 120x^4y^2 + 160x^3y^3 - 120x^2y^4 + 48xy^5 - 8y^6 \\
& + 224x^5 - 560x^4y + 560x^3y^2 - 280x^2y^3 + 70xy^4 - 7y^5 \\
& + 20x^4 - 80x^3y + 120x^2y^2 - 80xy^3 + 20y^4 - 112x^3 \\
& + 168x^2y - 84xy^2 + 14y^3 - 16x^2 + 32xy - 16y^2 + 14x \\
& - 7y + 2
\end{aligned}$$

(voir [CGT97]). Ces points singuliers sont définis par $p = 0, d_x(p) = 0, d_y(p) = 0$. Ils conduisent à un système sur-déterminé dont la taille de la matrice de Macaulay est 210. Nous l'avons construite à partir de la matrice de Macaulay de $p, d_x(p), d_y(p) + d_x(p)$, qui est de rang 189, et en remplaçant les $210 - 189 = 21$ premières colonnes par des multiples de la forme linéaire $x - 4$.

Comme le polynôme p a beaucoup de monômes, seulement 11% des coefficients de la matrice S sont nuls. Il y a 21 points singuliers sur cette courbe, qui sont tous réels, et par notre méthode nous pouvons sélectionner le point qui a la première coordonnée la plus proche de 4. Notons que la matrice de multiplication par cette forme linéaire dans l'algèbre quotient peut être calculée en résolvant 21 systèmes associés à la matrice S .

1.4 Cas des systèmes sur-déterminés

Dans la suite nous prendrons comme système d'équations polynomiales homogènes de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = d_0}} c_{0,\alpha} \mathbf{x}^\alpha = 0 \\ \vdots \\ f_r = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = d_r}} c_{r,\alpha} \mathbf{x}^\alpha = 0 \end{array} \right.$$

avec $r > n + 1$.

1.4.1 L'idéal résultant

Comme pour les systèmes bien déterminés, nous pouvons considérer les coefficients $c_{i,\alpha}$ comme des paramètres et définir la variété d'incidence W de $\mathbb{P}^{k_0} \times \dots \times \mathbb{P}^{k_r} \times \mathbb{P}^{n+1}$ d'équations :

$$f_i = 0 \text{ pour } i \in \{1, \dots, r\}.$$

Soient Π_1 et Π_2 les projections de W sur $\mathbb{P}^{k_0} \times \mathbb{P}^{k_r}$ et sur \mathbb{P}^{n+1} . Pour tout $\zeta \in \mathbb{P}^{n+1}$, $\Pi_2^{-1}(\zeta)$ est un espace linéaire de W de dimension $\sum_{i=0}^n (k_i - 1)$ ¹¹. Par le théorème des fibres, nous avons que W est irréductible et de dimension $\sum_{i=0}^r k_i - (r - n) - 1$ et par conséquent, $\Pi_1(W)$ est au plus de dimension $\sum_{i=0}^r k_i - (r - n) - 1$, c'est-à-dire au moins de codimension $r - n + 1$. Nous avons alors un idéal résultant.

1.4.2 Construction de l'idéal résultant

Nous allons nous ramener à la construction du résultant de $n + 1$ polynômes génériques.

Considérons les polynômes de paramètres $\mathbf{u} = (u_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}^2}$:

$$\begin{aligned} g_0 &= u_{0,0}f_0 + \cdots + u_{0,r}f_r \\ &\vdots \\ g_n &= u_{n,0}f_0 + \cdots + u_{n,r}f_r \end{aligned}$$

Proposition 8 *Res(g_0, \dots, g_n) $x_i \equiv 0$ dans $\mathbb{K}[\mathbf{u}]$ si et seulement si f_0, \dots, f_r ont au moins une racine commune.*

Démonstration : Si f_0, \dots, f_r ont au moins une racine commune ζ alors $f_0(\zeta) = \cdots = f_r(\zeta) = 0$ et pour toutes les valeurs des paramètres \mathbf{u} , $g_0(\zeta) = \cdots = g_n(\zeta) = 0$.

Réciproquement, démontrons la contraposé, c'est-à-dire : f_0, \dots, f_r n'ont pas de racine commune implique qu'il existe $u_{i,j}$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$ et $j \in \{0, \dots, r\}$ tels que :

$$\begin{aligned} g_0 &= u_{0,0}f_0 + \cdots + u_{0,r}f_r \\ &\vdots \\ g_n &= u_{n,0}f_0 + \cdots + u_{n,r}f_r \end{aligned}$$

avec $Res(g_0, \dots, g_n) \neq 0$.

Supposons que les polynômes f_0, \dots, f_{n-1} admettent un ensemble fini de racines communes $\{\zeta_1, \dots, \zeta_d\}$ et posons $g_0 = f_0; \dots; g_{n-1} = f_{n-1}$ alors il suffit de trouver un hyperplan de l'espace \mathbb{K}^{r-n+1} qui évite les points $(f_n(\zeta_i), \dots, f_r(\zeta_i))^t$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$. Un tel hyperplan existe toujours ce qui nous donne l'existence de g_0, \dots, g_n avec $Res(g_0, \dots, g_n) \neq 0$.

Si f_0, \dots, f_n ne définissent pas des points isolés, nous pouvons choisir $n + 1$ combinaisons linéaires qui définissent le vide [EM99a] et [Mat80] au chapitre 6, c'est-à-dire

11. La i -ème équation est satisfaite si et seulement si $(c_0, \dots, c_{k_i})^t$ est dans le noyau de la forme linéaire suivante :

$$\begin{aligned} l_i : \mathbb{P}^{k_i} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (c_0, \dots, c_{k_i}) &\longmapsto f_i(\zeta) \end{aligned}$$

Or la dimension du noyau de l_i est $k_i - 1$.

que nous prenons n combinaisons linéaires parmi les $n + 1$, nous avons n polynômes qui ont un ensemble fini de racines communes, ce qui nous permet de conclure. \square

Corollaire 1 *En remarquant que $\text{Res}(g_0, \dots, g_n)$ peut être vu comme un polynôme par rapport aux paramètres \mathbf{u} , les coefficients de $\text{Res}(g_0, \dots, g_n)$ engendrent le même idéal radical que l'idéal résultant de f_0, \dots, f_r .*

1.4.3 Construction matricielle

Théorème 5 *Soient f_0, \dots, f_r des polynômes homogènes de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ engendrant un idéal I ; soit d_i le degré de f_i ; supposons que : $d_0 \geq d_1 \geq \dots \geq d_r \geq 1$, et que $r \geq n$. les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i. Les $r + 1$ hypersurfaces projectives définies par les f_i n'ont pas de point commun sur aucune extension algébrique de \mathbb{K} ;*
- ii. L'idéal I contient une puissance de l'idéal maximal homogène m de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$;*
- iii. $I \supset m^\nu$ avec $\nu = d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1} - n + 1$;*
- iv. L'application $S : (q_0, \dots, q_r) \mapsto \sum_{i=1}^r q_i f_i$, à valeur dans les polynômes homogènes de degré $\nu = d_0 + \dots + d_{n-1} - n + 1$, est surjective quand, pour tout i , q_i parcourt les polynômes homogènes de degré $\nu - d_i$.*

Démonstration : Voir le corollaire page 169 de l'article de Daniel Lazard [Laz77]. \square

1.4.4 Application à la résolution de systèmes sur-déterminés

Considérons f_0, \dots, f_r des polynômes homogènes de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ tels que $d_i = \deg(f_i)$ et que $d_0 \geq d_1 \geq \dots \geq d_r \geq 1$.

Nous définissons $\nu = d_0 + d + 1 + \dots + d_{n-1} - n + 1$, V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ des polynômes de degré ν ainsi que V_i le sous-espace de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ des polynômes de degré $\nu - d_i$, pour $i \in \{0, \dots, r\}$.

Considérons l'application surjective de Macaulay :

$$S : V_0 \times \dots \times V_r \longrightarrow V \\ (q_0, \dots, q_r) \longmapsto \sum_i q_i f_i$$

Cette application dans de bonnes bases peut s'écrire :

$$S = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A & & B & \\ \hline & & & \\ \hline C & & D & \\ \hline \end{array} \right)$$

Comme S est surjective, alors il existe un mineur inversible de D que nous notons Δ . Nous notons Δ_B la sous-matrice de B construite avec les mêmes indices de colonne que Δ .

Proposition 9 *La matrice de multiplication par f_0 dans l'algèbre quotient $\frac{\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]}{(f_1, \dots, f_r)}$ est donnée par :*

$$M_{f_0} = A - \Delta_B \Delta^{-1} C.$$

Chapitre 2

Applications

Dans ce chapitre, nous proposons d'une part de mettre en application les différentes méthodes que nous venons de décrire et d'autre part, d'étudier la sensibilité par rapport aux erreurs commises sur les coefficients. Nous essaierons de comparer ces méthodes avec l'optimisation.

Les applications que nous développons sont issues de l'étalonnage de caméras. Dans une première section, nous commençons par étudier l'existence et le nombre de solutions du problème dit du « P3P ». Nous chercherons pour terminer cette application les équations implicites de la frontière entre les différents espaces dans lesquels le nombre de solutions est constant.

Dans une seconde section, nous présenterons rapidement un modèle mathématique classique en vision de manière à donner les contraintes utilisées pour l'estimation de la « matrice fondamentale » [LDFP93, ZDFL94] et les fameuses « équations de Kruppa » [MF92, Zel96]. Nous exposons ensuite des techniques de résolution de ces équations et nous en observons la sensibilité numérique à l'aide de simulations de bruits gaussiens.

2.1 Le problème du « P3P »

Le problème du « Perspective View of Three Points, P3P » [MR93, HLON94] consiste à trouver la position de la caméra P connaissant les angles de visée de trois points de l'espace A, B, C (fig. 2.1). Ce problème est équivalent à trouver la position de P connaissant les images des points A, B, C . Les études précédentes [WMSM91] ont montré que le nombre de positions réelles de P varie entre zéro et quatre¹ en prenant toutes les valeurs intermédiaires. Notre but est double : nous commencerons par donner une méthode pour calculer toutes les positions pour n'importe quelle configuration de A, B, C et pour n'importe quel angle de visée α, β, γ ; puis dans un second temps, nous établirons un régionnement de l'espace des paramètres² où pour chaque région, le nombre de positions réelles de P est constant.

1. Quatre est le nombre de solutions. Il correspond comme nous le verrons, à la borne de Bézout.

2. Paramètres provenant des configurations de A, B, C et des angles de visée α, β, γ .

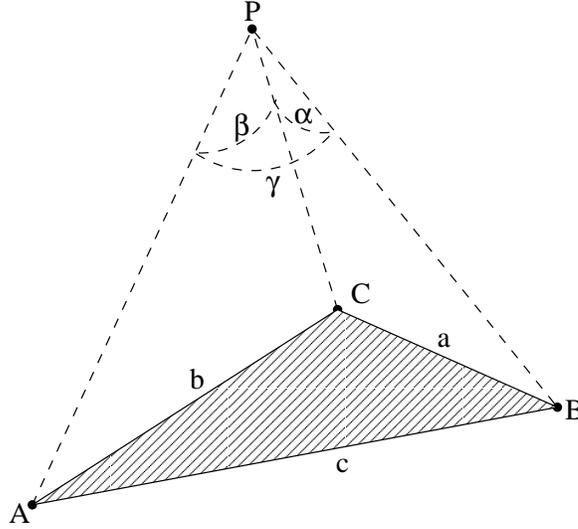


FIG. 2.1 – Le problème du P3P

2.1.1 Recherche de toutes les solutions réelles

La géométrie du problème nous amène à considérer le système suivant :

$$\begin{cases} PA^2 + PB^2 - 2 \cos(\gamma)PA.PB - c^2 = 0 \\ PA^2 + PC^2 - 2 \cos(\beta)PA.PC - b^2 = 0 \\ PB^2 + PC^2 - 2 \cos(\alpha)PB.PC - a^2 = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

En posant $p = \cos(\gamma)$, $q = \cos(\beta)$, $r = \cos(\alpha)$ et $x_1 = PA$, $x_2 = PB$ et $x_3 = PC$ nous devons résoudre un système polynomial à trois variables x_1, x_2, x_3 . Comme nous sommes dans un cas zéro-dimensionnel sans racine à l'infini, nous proposons de résoudre ce système en utilisant l'algorithme 2 décrit dans le premier chapitre.

Pour notre problème, le degré considéré est $\nu = 4$ et le nombre de monômes en trois variables de degré inférieur ou égal à 4 est 35. Par conséquent, la taille de la matrice de Macaulay est 35×35 . Les monômes $1, x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3$ forment une base de l'algèbre quotient et la matrice de multiplication par la première variable x_1 est de taille 8×8 . Nous avons donc au plus 8 solutions à notre problème, mais pour des raisons de symétrie, seulement 4 solutions peuvent être admises.

Nous avons implanté cet algorithme en utilisant la librairie C++ ALP développée dans le projet SAGA. Cet algorithme nous permet de calculer toutes les solutions complexes du système. Nous montrons dans les tables 2.1 un aperçu des solutions pour différentes valeurs des paramètres $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$. Le temps de calcul est de l'ordre du 10-ième de la seconde. Pour répondre exactement au problème, nous devons regarder uniquement les solutions réelles.

$a = 150 \ b = 140 \ c = 170 \ \alpha = 30 \ \beta = 30 \ \gamma = 45$			
	$x_1 = PA$	$x_2 = PB$	$x_3 = PC$
solution 1	$270.1260 - 92.8856 i$	$295.9671 + 53.8465 i$	$324.8849 - 11.4718 i$
solution 2	$270.1260 + 92.8856 i$	$295.9671 - 53.8465 i$	$324.8849 + 11.4718 i$
solution 3	238.8186	188.4363	279.9080
solution 4	216.4272	227.06170	98.6068

$a = 150 \ b = 140 \ c = 170 \ \alpha = 40 \ \beta = 39 \ \gamma = 45$			
	$x_1 = PA$	$x_2 = PB$	$x_3 = PC$
solution 1	107.7856	228.1737	206.2351
solution 2	213.9235	228.8449	204.6649
solution 3	217.0030	226.6211	137.8183
solution 4	216.0646	78.2285	201.2470

TAB. 2.1 – L'ensemble des solutions du P3P pour différentes valeurs des paramètres.

2.1.2 Recherche d'un régionnement

Le problème que nous considérons maintenant est différent de celui de la résolution. Nous considérons toujours le même système polynomial mais cette fois-ci, dans le produit de l'espace des paramètres par l'espace des variables. L'ensemble des solutions du problème du P3P est une variété algébrique de cet espace. Le problème du régionnement revient à diviser cette variété en composantes sur lesquelles le nombre de solutions réelles est constant.

L'idée essentielle vient du fait que le nombre de solutions réelles varie si et seulement si au moins une des solutions devient multiple³. Cette variation du nombre de solutions réelles se caractérise par une perte de rang de la jacobienne du système par rapport aux variables

Calcul du régionnement sur les variables d'espace : Nous commençons par étudier ce régionnement dans une modélisation plus adaptée. Nous définissons un repère orthonormé de l'espace de manière à ce que le plan défini par A, B, C ait pour équation $z = 0$. Soient (x, y, z) les coordonnées de point P , la symétrie du problème par rapport au plan A, B, C nous amène à restreindre notre étude au cas $z \geq 0$. Nous obtenons :

$$\begin{cases} f_1 = \cos^2 \alpha = \frac{\langle PB, PC \rangle^2}{\|PB\|^2 \|PC\|^2} \\ f_2 = \cos^2 \beta = \frac{\langle PC, PA \rangle^2}{\|PC\|^2 \|PA\|^2} \\ f_3 = \cos^2 \gamma = \frac{\langle PA, PB \rangle^2}{\|PA\|^2 \|PB\|^2} \end{cases} \quad (2.2)$$

Nous définissons l'application qui pour une position de P , nous donne le carré des

3. Passage du cas réel au cas complexe conjugué.

cosinus des trois angles de visée, c'est-à-dire l'application suivante :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow [0,1]^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (\cos^2 \alpha, \cos^2 \beta, \cos^2 \gamma) = \\ &\frac{\langle PB, PC \rangle^2}{\|PB\|^2 \|PC\|^2}, \frac{\langle PC, PA \rangle^2}{\|PC\|^2 \|PA\|^2}, \frac{\langle PA, PB \rangle^2}{\|PA\|^2 \|PB\|^2} \end{aligned}$$

Remarque 8 Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, si $\det(J_\phi(x_0, y_0, z_0)) \neq 0$ alors par le théorème des fonctions implicites, pour U_0 un voisinage de (x_0, y_0, z_0) dans \mathbb{R}^3 et pour V_0 un voisinage de $(\cos^2 \alpha_0, \cos^2 \beta_0, \cos^2 \gamma_0) = \phi(x_0, y_0, z_0)$ dans $[0,1]^3$, il existe une unique application ψ telle que :

$$\begin{aligned} \psi : V_0 &\longrightarrow U_0 \\ (\cos^2 \alpha, \cos^2 \beta, \cos^2 \gamma) &\longmapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} \psi \circ \phi = \mathbb{I}|_{U_0} \\ \phi \circ \psi = \mathbb{I}|_{V_0} \\ J_\psi = J_\phi^{-1} \end{cases}$$

L'équation $\det(J_\phi)$ définit une variété algébrique de \mathbb{R}^3 . Nous considérons son image V par ϕ , variété de $[0,1]^3$.

Proposition 10 Si $(\cos^2 \alpha_0, \cos^2 \beta_0, \cos^2 \gamma_0) \in [0,1]^3 - V$ alors il existe un voisinage V_0 de $(\cos^2 \alpha_0, \cos^2 \beta_0, \cos^2 \gamma_0)$ dans $[0,1]^3$ tel que le nombre de solutions réelles distinctes soit constant, c'est-à-dire constant par composante connexe de V .

Démonstration : Supposons qu'il existe n solutions réelles distinctes dans U_0 , à $\phi(x, y, z) = (\cos^2 \alpha_0, \cos^2 \beta_0, \cos^2 \gamma_0)$. Nous les nommons $(x_{0_i}, y_{0_i}, z_{0_i})$, $i \in \{0, \dots, n\}$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ en appliquant la remarque 8, il existe les voisinages U_{0_i} et V_{0_i} ainsi qu'une application ψ_i telle que :

$$\begin{aligned} \psi_i : V_{0_i} &\longrightarrow U_{0_i} \\ (\cos^2 \alpha, \cos^2 \beta, \cos^2 \gamma) &\longmapsto (x, y, z) \\ \phi \circ \psi_i &= I_{U_{0_i}} \text{ et } \psi_i \circ \phi = I_{V_{0_i}}. \end{aligned}$$

Quitte à réduire nos voisinages, nous pouvons supposer que :

$$\bigcap_{i=1}^n U_{0_i} = \emptyset.$$

Alors dans $V_0 = \bigcap_{i=1}^n V_{0_i}$, le nombre de solutions réelles est constant. En effet, ce nombre peut varier de deux manières : soit des solutions réelles distinctes deviennent une solution multiple, soit deux solutions réelles distinctes deviennent complexes après un passage par une solution double. Dans les deux cas, la jacobienne de ϕ passe par

une singularité, c'est-à-dire que son déterminant devient nul ce qui n'est pas possible sur V_0 . \square

Proposition 11 *Les lieux géométriques où la jacobienne n'est pas de rang maximal sont le cylindre perpendiculaire au plan défini par A, B, C passant par A, B, C et le plan $z = 0$.*

Démonstration : Nous devons donc effectuer le calcul de la matrice jacobienne du système 2.2. Comme $\frac{\partial PB}{\partial x} = (-1, 0, 0)^t$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle PB, PC \rangle}{\partial x} &= 2x - (B_x + C_x), \\ \frac{\partial \|PB\|^2}{\partial x} &= 2(x - B_x), \\ \frac{\partial \|PC\|^2}{\partial x} &= 2(x - C_x),\end{aligned}$$

et nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \cos^2 \alpha}{\partial x} &= \frac{2(2x - (B_x + C_x)) \langle PB, PC \rangle \|PB\|^2 \|PC\|^2}{\|PB\|^4 \|PC\|^4} \\ &\quad - \frac{(2(x - B_x) \|PC\|^2 + 2(x - C_x) \|PB\|^2) \langle PB, PC \rangle^2}{\|PB\|^4 \|PC\|^4} \\ &= \frac{2 \langle PB, PC \rangle}{\|PB\|^4 \|PC\|^4} ((x - B_x) \|PC\|^2 (\|PB\|^2 - \langle PB, PC \rangle) \\ &\quad + (x - C_x) \|PB\|^2 (\|PC\|^2 - \langle PB, PC \rangle)) \\ &= \frac{2 \langle PB, PC \rangle}{\|PB\|^4 \|PC\|^4} ((x - B_x) \|PC\|^2 \langle PB, CB \rangle + (x - C_x) \|PB\|^2 \langle PC, BC \rangle).\end{aligned}$$

Par la symétrie des points A, B, C , nous pouvons écrire la matrice jacobienne

$$\begin{aligned}J &= \begin{pmatrix} c_1(x - B_x) f_{1,1} & c_1(y - B_y) f_{1,1} & c_1(z - B_z) f_{1,1} \\ c_2(x - C_x) f_{2,1} & c_2(y - C_y) f_{2,1} & c_2(z - C_z) f_{2,1} \\ c_3(x - A_x) f_{3,1} & c_3(y - A_y) f_{3,1} & c_3(z - A_z) f_{3,1} \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} c_1(x - C_x) f_{1,2} & c_1(y - C_y) f_{1,2} & c_1(z - C_z) f_{1,2} \\ c_2(x - A_x) f_{2,2} & c_2(y - A_y) f_{2,2} & c_2(z - A_z) f_{2,2} \\ c_3(x - B_x) f_{3,2} & c_3(y - B_y) f_{3,2} & c_3(z - B_z) f_{3,2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{2 \langle PB, PC \rangle}{\|PB\|^4 \|PC\|^4}, c_2 = \frac{2 \langle PC, PA \rangle}{\|PC\|^4 \|PA\|^4}, c_3 = \frac{2 \langle PA, PB \rangle}{\|PA\|^4 \|PB\|^4} \\ f_{1,1} &= \|PC\|^2 \langle PB, CB \rangle, f_{1,2} = \|PB\|^2 \langle PC, BC \rangle, f_{2,1} = \|PA\|^2 \langle PC, AC \rangle \\ f_{2,2} &= \|PC\|^2 \langle PA, CA \rangle, f_{3,1} = \|PA\|^2 \langle PA, BA \rangle, f_{3,2} = \|PB\|^2 \langle PB, AB \rangle\end{aligned}$$

$$J = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} f_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & f_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 & f_{3,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & f_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & f_{3,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x - B_x & y - B_y & z - B_z \\ x - C_x & y - C_y & z - C_z \\ x - A_x & y - A_y & z - A_z \end{pmatrix}$$

Le déterminant de J vaut :

$$\det(J) = c_1 c_2 c_3 \begin{vmatrix} \|PC\|^2 \langle PB, CB \rangle & \|PB\|^2 \langle PC, BC \rangle & 0 \\ 0 & \|PA\|^2 \langle PC, AC \rangle & \|PC\|^2 \langle PA, CA \rangle \\ \|PA\|^2 \langle PB, AB \rangle & 0 & \|PB\|^2 \langle PA, BA \rangle \\ \left| \begin{matrix} x - B_x & y - B_y & z - B_z \\ x - C_x & y - C_y & z - C_z \\ x - A_x & y - A_y & z - A_z \end{matrix} \right| \end{vmatrix}$$

Or en développant, nous observons que le premier terme est nul si et seulement si :

$$\langle PB, AB \rangle \langle PC, BC \rangle \langle PA, CA \rangle - \langle PB, CB \rangle \langle PC, AC \rangle \langle PA, BA \rangle = 0.$$

Comme les points A, B, C appartiennent au plan $z = 0$, il est facile de vérifier que notre équation ne comprend pas de termes en z et qu'elle s'annule pour $P = A, B, C$. En développant par rapport à un repère, nous pouvons constater qu'il s'agit du cylindre passant par A, B, C et d'axe z .

Le second terme est nul si et seulement si P appartient au plan ABC (il suffit de soustraire la première colonne aux deux autres pour voir que ce déterminant est un polynôme de degré 1. De plus, il s'annule clairement en A, B, C). \square

Calcul d'un régionnement de l'espace des paramètres : Pour répondre exactement à notre problème, nous devons regarder l'image par ϕ de cette variété. Nous pouvons bien sûr le faire par morceau, c'est-à-dire regarder l'image du plan, puis celle du cylindre. Mais nous pouvons aussi chercher les équations implicites de ces variétés.

Nous proposons de reprendre le système polynomial 2.1 et de déterminer les conditions sur les paramètres pour qu'il existe une solution du système qui annule le déterminant de la jacobienne.

Proposition 12 *La condition sur les paramètres pour que les polynômes f_1, f_2, f_3 et $\det(J)$ aient une racine commune est donnée par :*

$$\det(M_{\det(J)}), \tag{2.3}$$

où $M_{\det(J)}$ est la matrice de multiplication dans l'algèbre quotient $\frac{\mathbb{K}[PA, PB, PC]}{f_1, f_2, f_3}$.

Démonstration : Considérons $M_{\det(J)}$ la matrice de multiplication par le polynôme $\det(J)$ dans l'algèbre quotient $\frac{\mathbb{K}[PA, PB, PC]}{f_1, f_2, f_3}$. En remarquant que le déterminant de $M_{\det(J)}$ est le produit des valeurs propres et qu'une valeur propre est l'évaluation de

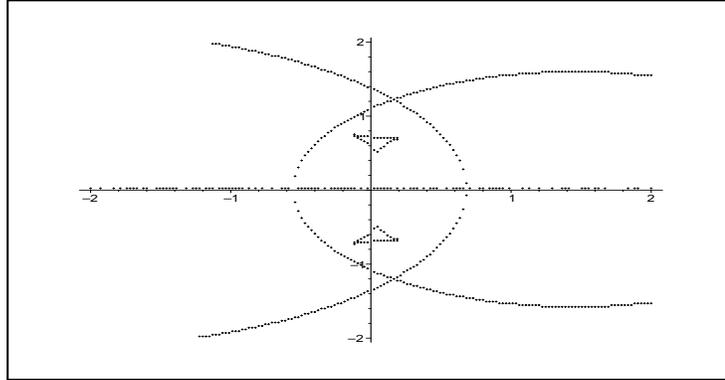


FIG. 2.2 – *Régionnement pour les paramètres $a = 150$, $b = 140$, $c = 170$, $\gamma = 45^\circ$*

$\det(J)$ en une racine commune de f_1, f_2, f_3 (voir le théorème 1), nous avons que le déterminant est nul si et seulement s'il existe une racine commune à $f_1, f_2, f_3, \det(J)$.
□

Remarque 9 *Les racines du système 2.1 qui correspondent à une position de la caméra sont celles à valeurs réelles positives.*

La condition donnée par la proposition 12, ne prend pas en compte la remarque précédente. Comme le passage par zéro d'une des variables PA, PB, PC entraîne une perte de rang de la jacobienne (puisque dans ce cas, P appartient au plan défini par A, B, C), les conditions sur les paramètres pour que $PA = 0, PB = 0$ et $PC = 0$ sont contenues dans la condition 2.3.

Comme nous le montrons dans la figure 2.2, où nous avons affiché un point d'une grille lorsque son nombre de solutions réelles est différent du nombre de solutions réelles du point précédent, nous retrouvons les résultats décrits dans l'article [WMSM91].

2.2 Étalonnage de caméras

Dans cette section, nous présentons tout d'abord les fondements de la vision par ordinateur [Fau93] en donnant le modèle de caméra utilisé (voir [Lav96, Qua97, Zel96] pour une présentation plus complète de différents modèles) et la construction des matrices fondamentales ainsi que des équations de Kruppa [MF92, FLM92, Har97].

2.2.1 Modèle et équations

Bien que nous aborderons plus profondément la géométrie dans les deux dernières parties de cette thèse, nous nous devons d'introduire quelques notions sur les liens existants entre la géométrie projective, la géométrie affine et la géométrie euclidienne [Fau95, Kle74].

Considérons $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ un espace projectif de dimension n . Si nous spécialisons un hyperplan de \mathbb{P}^n comme étant H_∞ l'hyperplan de l'infini, alors tous les points n'appartenant pas à H_∞ forment un espace affine de dimension n . Pour tout repère \mathcal{R} de cet espace affine, un point P est défini par ses coordonnées (p_1, \dots, p_n) dans \mathcal{R} et nous pouvons définir un repère \mathcal{R}' de \mathbb{P}^n tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathcal{A}} &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1 : \dots : x_n : 1) \end{aligned}$$

et réciproquement, si $x_{n+1} \neq 0$ alors :

$$(x_1 : \dots : x_n : x_{n+1}) \longmapsto \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right).$$

Si nous considérons en plus une conique non dégénérée de H_∞ que nous appellerons conique absolue⁴ alors les points n'appartenant pas à H_∞ forment un espace euclidien de dimension n muni du produit scalaire suivant, pour $P, Q \notin H_\infty$:

$$\begin{aligned} P &= (p_1 : \dots : p_n : 1); \quad Q = (q_1 : \dots : q_n : 1) \\ \langle P, Q \rangle &= (p_1, \dots, p_n) B (q_1, \dots, q_n)^t \end{aligned}$$

où B est la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée à la conique absolue.

Notation 3 Nous appellerons *complété projectif d'un repère affine (resp. euclidien)* [Fre91], l'opération inverse qui consiste à plonger l'espace affine (resp. euclidien) dans un espace projectif.

Remarque 10 Dans le cas d'un repère orthonormé, l'équation de la conique absolue est : $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$.

Une vue, le modèle sténopé

Définition 6 Une caméra est définie par une projection perspective de centre (optique) C et de plan (rétinien) R [Fau93].

Soit $\widetilde{\mathcal{R}}_i$ un repère du plan rétinien dont le premier axe est parallèle aux lignes et le deuxième axe est parallèle aux colonnes de la grille de digitalisation. Nous appellerons repère image \mathcal{R}_i , le complété projectif de $\widetilde{\mathcal{R}}_i$.

Il est toujours possible de définir un repère orthonormal $\widetilde{\mathcal{R}}_C$ de l'espace de centre C tel que : le premier axe $\widetilde{\mathcal{R}}_{C_1}$ soit parallèle au premier axe du repère $\widetilde{\mathcal{R}}_i$; le deuxième axe

4. Ou conique de l'infini.

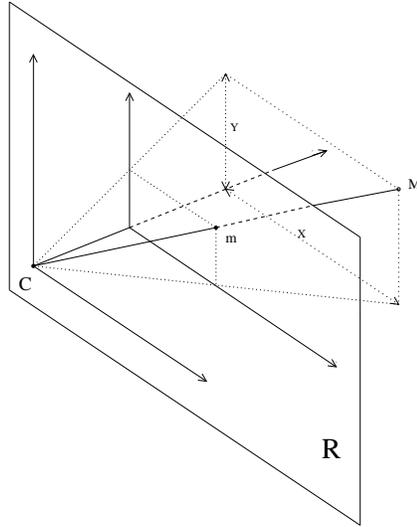


FIG. 2.3 – Le modèle sténopé

soit perpendiculaire à $\widetilde{\mathcal{R}}_{C_1}$ et de manière à ce que le plan $C, \widetilde{\mathcal{R}}_{C_1}, \widetilde{\mathcal{R}}_{C_2}$ ⁵ soit parallèle au plan rétinien ; le troisième axe $\widetilde{\mathcal{R}}_{C_3}$ soit orthogonal au plan focal et de norme f ⁶. Nous appellerons le repère projectif \mathcal{R}_C associé à $\widetilde{\mathcal{R}}_C$ le repère lié à la caméra.

Le repère \mathcal{R}_C induit un repère du plan rétinien \mathcal{R}_c ⁷.

Proposition 13 *La matrice de la projection perspective de la caméra dans les repères \mathcal{R}_C et \mathcal{R}_c est :*

$$P_0^{\mathcal{R}_c} = [I \quad 0] \quad (2.4)$$

Tout point M de \mathbb{P}^3 a pour image :

$$m = P_0 M \quad (2.5)$$

Démonstration : voir figure 2.3. □

Il existe une application affine entre le repère image \mathcal{R}_i et le repère induit \mathcal{R}_c qui conserve la direction du premier axe. Nous appelons α_u le facteur d'échelle du premier axe et α_v le facteur d'échelle du second axe, θ l'angle entre les deux axes de \mathcal{R}_i .

Proposition 14 *La matrice projection est :*

$$P_{\mathcal{R}_c}^{\mathcal{R}_i} = A P_0^{\mathcal{R}_c} \quad (2.6)$$

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{R}_c}^{\mathcal{R}_i} = \begin{pmatrix} \alpha_u & -\alpha_u \cot \theta & u_0 \\ 0 & \alpha_v / \sin \theta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

5. Ce plan est appelé plan focal.

6. f est la distance focale, c'est-à-dire la distance entre le centre optique et le plan rétinien.

7. \mathcal{R}_c est l'image de \mathcal{R}_C par la projection orthographique selon le troisième axe.

Démonstration : Voir [Fau93] ou [Zel96] pages 21 – 22. \square

On appelle A la matrice des paramètres intrinsèques de la caméra.

Proposition 15 *L'image ω de la conique absolue de Ω par la caméra de centre C , de plan rétinien R et de matrice de paramètre interne A est définie par :*

$$\forall m \in R, m \in \omega \iff m^t(A^{-1})^t A^{-1} m = 0.$$

Démonstration : Un point m du plan rétinien appartient à ω si il est l'image d'un point M de Ω . Si M de coordonnées homogènes $(X : Y : Z : T)$ dans le repère \mathcal{R}_C appartient à Ω alors :

$$\begin{cases} T = 0 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 \end{cases} \iff M^t M = 0 \iff M^t (P_0^{\mathcal{R}_c})^t P_0^{\mathcal{R}_c} M = 0.$$

De plus, comme m est l'image de M par la caméra, nous avons que $A^{-1} m_{\mathcal{R}_i} = P_0^{\mathcal{R}_c} M$, c'est-à-dire que :

$$m^t (A^{-1})^t A^{-1} m = 0.$$

\square

Deux vues

Déplacement rétinien : Pour la caméra de centre \mathcal{C} , nous définissons \mathcal{R}_C un repère projectif de \mathbb{P}^3 associé à la caméra et \mathcal{R}_c le repère du plan rétinien induit. Nous définissons de la même manière les repères \mathcal{R}'_C et \mathcal{R}'_c pour la deuxième caméra de centre optique \mathcal{C}' . Entre les repères \mathcal{R}'_C et \mathcal{R}_C (deux repères orthonormés) il existe un déplacement, c'est-à-dire une rotation R et une translation T telles que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}_C}^{\mathcal{R}'_C} = \begin{pmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 16

$$P_C^{\mathcal{R}_c} = [I \quad 0] \tag{2.8}$$

$$P_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{R}'_c} = P_0 \mathcal{M}_{\mathcal{R}_C}^{\mathcal{R}'_C} \tag{2.9}$$

Géométrie épipolaire et la matrice fondamentale [Fau93] : Soit m un point du plan rétinien de la caméra \mathcal{C} , s'il est l'image d'un point M de \mathbb{P}^3 alors nécessairement M appartient au rayon optique (Cm) . Nous définissons P_m le plan épipolaire de m comme le plan contenant le rayon optique (Cm) et les deux centres C, C' . Pour tout point M de (Cm) , le rayon optique $(C'M)$ appartient à P_m . Nous pouvons alors affirmer que l'image de (Cm) par la caméra \mathcal{C}' est la droite d'intersection du plan épipolaire P_m et du plan rétinien \mathcal{R}'_c . Nous pouvons constater que pour tout m point du plan rétinien de \mathcal{C} , correspond une droite du plan rétinien de \mathcal{C}' passant par un point fixe e' qui est

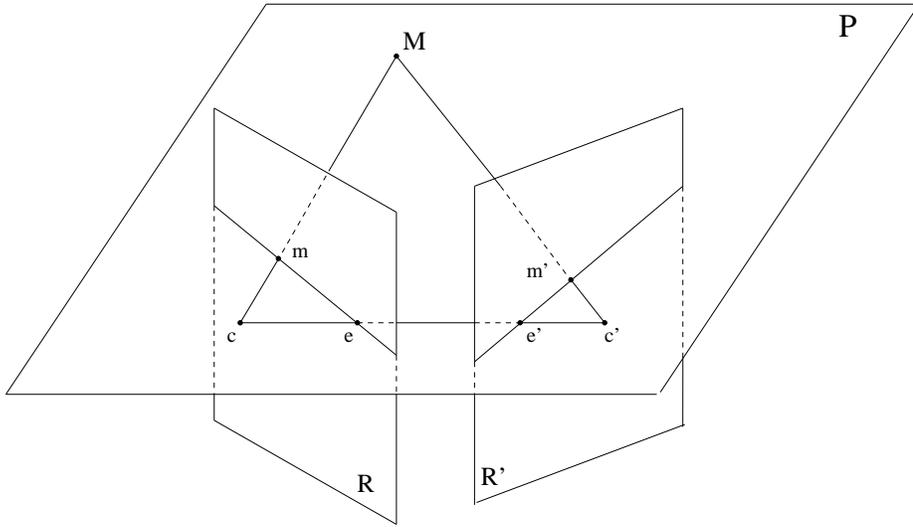


FIG. 2.4 – La géométrie épipolaire

l'image de C par C' . Comme les caméras C et C' jouent des rôles symétriques, nous pouvons définir de la même manière une correspondance entre les points images de C' et les droites images de C passant par e , l'image de C' par la caméra C . Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} F : R &\longrightarrow \widehat{R'} \\ m &\longmapsto R' \wedge (C \vee C' \vee m) \end{aligned} \quad (2.10)$$

où \wedge est l'opérateur d'intersection et \vee l'opérateur d'intersection dans l'algèbre extérieure (voir II). L'application F apparaît alors clairement comme linéaire et de rang 2 puisque $F(e) = R' \wedge (C \vee C' \vee e) = 0$ car $e \in (C \vee C')$. Si m et m' sont les images de M par les caméras, alors nécessairement

$$m'^t F m = 0 \quad (2.11)$$

Comme les deux caméras jouent des rôles symétriques, nous pouvons construire

$$\begin{aligned} G : R' &\longrightarrow \widehat{R} \\ m' &\longmapsto R \wedge (C \vee C' \vee m') \end{aligned} \quad (2.12)$$

Proposition 17 G et F^t sont proportionnelles et définissent la même application projective.

Démonstration : Pour tout point $m' \in R'$, il existe $M \in \mathbb{P}^3$ et $m \in R$ (resp. $m' \in R'$) tels que m (resp. m') soit l'image de M par la caméra de centre C (resp. C'). Gm' est la droite de R qui passe par l'épipole e , c'est-à-dire l'image du centre optique C' par la caméra de centre C , et par le point m . Or comme $Fe = 0$, nous avons $e^t F^t m = 0$ ce qui entraîne que e appartient à $F^t m$; de plus, comme $m^t F^t m = (m'^t F m)^t = 0$, nous avons que $m \in F^t m'$. Nous pouvons alors affirmer que Gm' et $F^t m'$ sont deux droites confondues de R et

$$G = \lambda F^t.$$

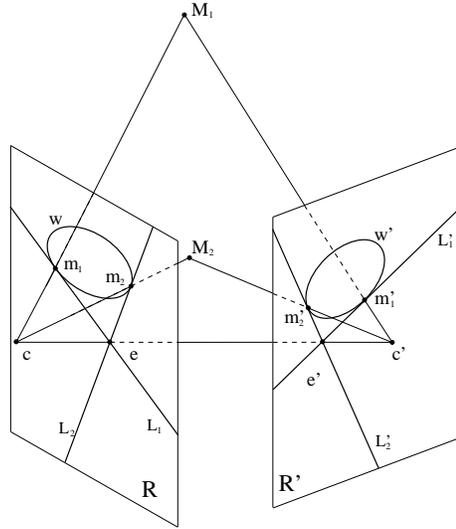


FIG. 2.5 – La géométrie des équations de Kruppa

□

Les équations de Kruppa : Nous allons décrire une approche permettant d'obtenir les équations de Kruppa qui ont déjà fait l'objet des travaux [MF92, FLM92, LF95, Zel96, Har97, LD99, LD00]. Nous commençons par donner quelques résultats.

Lemme 6 Si $Q_{\mathcal{R}}$ est la matrice d'une quadrique Q dans le repère \mathcal{R} d'un espace projectif, alors

$$m \in Q \iff m_{\mathcal{R}}^t Q_{\mathcal{R}} m_{\mathcal{R}} = 0$$

Un hyperplan H est tangent à Q si et seulement si :

$$H_{\mathcal{R}}^t Q_{\mathcal{R}}^{-1} H_{\mathcal{R}} = 0$$

Démonstration : L'hyperplan tangent à la quadrique Q en un point m a pour équation $2m^t Q_{\mathcal{R}_C}$. Nous voulons trouver un point $m \in H$ tel que $2m^t Q_{\mathcal{R}_C} = H_{\mathcal{R}_C}^t$ c'est-à-dire :

$$m^t = \frac{1}{2} H^t (Q_{\mathcal{R}_C})^{-1}$$

et comme $m \in H$ alors

$$H^t m = m^t H = \frac{1}{2} H^t (Q_{\mathcal{R}_C})^{-1} H = 0$$

□

Proposition 18 Soient deux caméras de centre C et C' n'appartenant pas à H_{∞} et l' , une droite épipolaire du plan rétinien tangente à ω' , l'image de Ω par la caméra de centre C' . La droite épipolaire correspondante à l' dans la caméra de centre C est tangente à l'image de Ω par la même caméra.

Démonstration : Supposons que le plan H défini par les droites (CC') et $(C'm')$, coupe Ω en deux points distincts, alors les images de ces deux points par la caméra de centre C' sont :

- deux points distincts : nous pouvons vérifier qu'ils appartiennent à ω' et l' , ce qui contredit le fait que l' est tangente à ω' .
- deux points confondus : nous pouvons alors en déduire que C' appartient au plan de la conique ce qui est contradictoire avec les hypothèses.

Par conséquent, nous avons que le plan H est tangent à Ω et par la projection de centre C , la droite l qui l'intersection de H avec le plan rétinien de la caméra de centre C est tangente à ω qui est l'image de Ω par la caméra de centre C . \square

Donnons maintenant la construction des équations de Kruppa. Soient ω (resp. ω') l'image de la conique absolue Ω par la caméra de centre C (resp. C'), l_1' et l_2' les deux droites épipolaires tangentes en m_1' et m_2' à ω' (fig. 2.5). Par la proposition 15 et le lemme 6, une droite l' tangente à ω' vérifie :

$$l'^t A' A'^t l' = l'^t K' l' = 0$$

où $K' = A' A'^t$ et $K = A A^t$. Par la proposition 18, les droites épipolaires l_1 et l_2 , qui sont les images de m_1' et m_2' par F^t , sont tangentes à ω . Par conséquent pour $i = \{1..2\}$ en notant $[x]_{\times}$ la matrice de pré-produit vectoriel par x , nous avons :

$$\begin{aligned} l_i^t K l_i &= 0 &\iff m_i'^t F K F^t m_i' &= 0 \\ l_i'^t K' l_i' &= 0 &\iff m_i'^t [e']_{\times}^t K [e']_{\times} m_i' &= 0 \end{aligned}$$

car $l_i' = e' \times m_i'$. Nous avons deux quadriques $F K F^t$ et $[e']_{\times}^t K [e']_{\times}$ dans \mathcal{R}' de rang 2 qui ont le même lieu de zéros, c'est-à-dire les points m' appartenant à l_1' et l_2' . Nous pouvons alors affirmer que ces deux quadriques sont proportionnelles d'où :

$$\exists k \in \mathbb{R} \mid \forall m' \in \mathcal{R}' \quad m'^t (F K F^t - k [e']_{\times}^t K [e']_{\times}) m' = 0 \quad (2.13)$$

2.2.2 Résolution

Estimation de la matrice fondamentale

Ce problème est extrêmement classique et une importante littérature existe [LDFP93, ZDFL94]. Notre objectif est d'illustrer le comportement numérique des méthodes matricielles présentées dans le chapitre précédent.

L'évaluation de la matrice fondamentale F revient à déterminer les coefficients à un facteur près d'une matrice 3×3 de rang 2 connaissant des appariements de points. Chaque appariement de points permet de formuler une contrainte linéaire 2.11 sur les coefficients de F . La connaissance minimale de 7 appariements permet d'estimer F . La difficulté essentielle dans cette estimation vient du fait que la connaissance des points (donc des appariements) est entachée d'erreurs ce qui nous ramène à la résolution d'un système polynomial avec des coefficients approchés. Dans la pratique, nous augmentons

considérablement (au moins une vingtaine et souvent plus) le nombre d'appariements afin d'obtenir une meilleure qualité de l'estimation de F .

Nous présentons dans la table 2.2, l'estimation de la matrice fondamentale de deux photographies obtenus par trois techniques différentes. La première consiste à résoudre le système linéaire au sens des moindres carrés, puis de projeter la matrice obtenue sur l'ensemble des matrices de rang inférieur à 3 au moyen d'un **SVD**⁸. La deuxième consiste à résoudre le système polynomial formé par le système linéaire et la contrainte de rang par la technique matricielle du Bézoutien. Pour finir, nous utilisons une technique d'optimisation : nous minimisons un critère ayant une signification physique⁹. Cet exemple est une simulation, c'est-à-dire que nous créons, à partir de deux matrices de projection et d'un ensemble de points d'une scène tridimensionnelle, un ensemble d'appariements parfaits¹⁰. Nous ajoutons à ces appariements des bruits gaussiens centrés de déviation standard 0.01, 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 1, 1.5 et 2 pixels (par rapport à des photographies de taille 512×512). Cet exemple montre que sans présence de bruit sur les coefficients, la technique des Bézoutiens fonctionne bien, puis progressivement, les résultats s'écartent des valeurs recherchées.

Résolution des équations de Kruppa

Deux équations quadratiques par paire de caméras : Considérons \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux caméras de mêmes paramètres internes et F_{12} la matrice fondamentale de la caméra \mathcal{C}_1 vers la caméra \mathcal{C}_2 . Nous notons e' l'épipole dans la caméra \mathcal{C}_2 ¹¹. Pour K une matrice symétrique 3×3 et pour un paramètre k , nous définissons la matrice symétrique suivante :

$$M = FK F^t - k[e']_x^t K [e']_x.$$

Les équations de Kruppa sont données par :

$$\exists k \in \mathbb{R} \mid M \equiv 0.$$

La résolution des équations de Kruppa est équivalente à la détermination des coefficients de la matrice K et éventuellement du paramètre k ¹².

En remarquant que :

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad M e' = 0, \tag{2.14}$$

8. Singular Values Decompositon.

9. La somme des distances entre les points et les droites épipolaires.

10. Ce cas correspond à l'erreur 0 dans la table.

11. e' est un noyau à gauche de F .

12. Ce paramètre n'apporte pas d'information pour l'étalonnage.

err	Mth	$F_{1,1}$	$F_{1,2}$	$F_{1,3}$	$F_{2,1}$	$F_{2,2}$	$F_{2,3}$	$F_{3,1}$	$F_{3,2}$	$F_{3,3}$
0	Svd	2.0570e-7	4.1985e-6	3.1281e-3	-5.8591e-6	-6.7305e-7	-6.8108e-3	-4.9189e-3	9.1431e-3	1
	Bezout	2.0570e-7	4.1985e-6	3.1281e-3	-5.8591e-6	-6.7305e-7	-6.8108e-3	-4.9189e-3	9.1431e-3	1
	Optim	2.0570e-7	4.1985e-6	3.1281e-3	-5.8591e-6	-6.7305e-7	-6.8108e-3	-4.9189e-3	9.1431e-3	1
0.01	Svd	2.02153e-7	4.2408e-6	3.1272e-3	-5.9049e-6	-6.8434e-7	-6.8088e-3	-4.9165e-3	9.1485e-3	1
	Bezout	-1.95996e-6	3.7999e-6	5.0912e-3	-5.7689e-6	-6.1952e-7	-7.0184e-3	-6.0509e-3	9.3833e-3	1
	Optim	2.02098e-7	4.2407e-6	3.1272e-3	-5.9045e-6	-6.8427e-7	-6.8087e-3	-4.9162e-3	9.1483e-3	1
0.05	Svd	2.1340e-7	4.0558e-6	3.0683e-3	-5.7557e-6	-6.8650e-7	-6.8130e-3	-4.8893e-3	9.1323e-3	1
	Bezout	1.8712e-6	3.7690e-6	1.8478e-3	-5.0558e-6	-7.1102e-7	-6.5601e-3	-4.3202e-3	8.7486e-3	1
	Optim	2.1553e-7	4.0577e-6	3.0683e-3	-5.7538e-6	-6.8470e-7	-6.8129e-3	-4.8824e-3	9.1386e-3	1
0.1	Svd	2.3304e-7	3.9106e-6	2.9696e-3	-5.7657e-6	-6.5716e-7	-6.8111e-3	-4.8347e-3	9.1241e-3	1
	Bezout	1.8237e-5	5.5110e-6	-1.2680e-2	-4.5316e-6	-1.0265e-6	-4.9579e-3	3.8962e-3	6.7845e-3	1
	Optim	2.4108e-7	3.9165e-6	2.9695e-3	-5.7602e-6	-6.5247e-7	-6.8110e-3	-4.8095e-3	9.1431e-3	1
0.3	Svd	4.9062e-7	1.6332e-6	2.3725e-3	-3.8497e-6	-5.3929e-7	-6.8137e-3	-4.6084e-3	8.87816e-3	1
	Bezout	-4.0926e-5	2.9537e-5	3.3343e-2	-3.8967e-5	-2.8914e-7	-1.2076e-2	-1.7957e-2	1.85292e-2	1
	Optim	5.0786e-7	1.6448e-6	2.3724e-3	-3.8399e-6	-5.3130e-7	-6.8134e-3	-4.4841e-3	8.96501e-3	1
0.5	Svd	6.0925e-7	8.9587e-7	2.5639e-3	-2.8510e-6	-3.1385e-7	-6.7276e-3	-4.8287e-3	8.5887e-3	1
	Bezout	-8.5369e-6	1.6899e-5	8.2320e-3	-1.9055e-5	-2.5707e-6	-7.8776e-3	-6.2990e-3	1.2059e-2	1
	Optim	6.1517e-7	9.0112e-7	2.5638e-3	-2.8458e-6	-3.0897e-7	-6.7271e-3	-4.7425e-3	8.6662e-3	1
1	Svd	1.6618e-6	-5.0260e-6	2.2332e-3	3.4315e-6	4.9241e-7	-6.8191e-3	-5.0503e-3	7.8688e-3	1
	Bezout	2.2545e-6	2.1579e-6	1.9830e-3	-2.5429e-6	-4.0041e-7	-6.1691e-3	-4.7217e-3	7.7685e-3	1
	Optim	1.6008e-6	-5.0814e-6	2.2328e-3	3.3792e-6	4.4145e-7	-6.8184e-3	-4.9151e-3	7.9939e-3	1
1.5	Svd	3.1191e-6	-1.0290e-5	1.4327e-3	9.1801e-6	5.9798e-7	-6.7633e-3	-5.0263e-3	7.2752e-3	1
	Bezout	-4.2546e-6	-3.8319e-5	1.5974e-2	3.9316e-5	5.1203e-6	-4.7241e-3	-1.7641e-2	1.8470e-4	1
	Optim	2.8613e-6	-1.0548e-5	1.4324e-3	9.1870e-6	6.5745e-7	-6.7625e-3	-4.8416e-3	7.4444e-3	1
2	Svd	4.7765e-6	-1.3595e-5	-1.1692e-05	1.2855e-5	1.2394e-6	-6.7909e-3	-4.3273e-3	6.7795e-3	1
	Bezout	1.4152e-5	3.3710e-5	-1.8251e-2	-3.7409e-5	-9.0347e-6	-8.3653e-3	1.1950e-2	1.7316e-2	1
	Optim	3.7868e-6	-1.4000e-5	-1.1941e-05	1.3105e-5	1.2886e-6	-6.7900e-3	-3.8571e-3	6.9798e-3	1

Tab. 2.2 – Evaluation de matrices fondamentales à partir de deux photographies synthétiques avec des bruits gaussiens de déviation standard err.

et en le formulant de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 & Jv = 0 \\
 & \text{où} \\
 & J = \begin{pmatrix} e'_1 & 0 & 0 & e'_2 & e'_3 & 0 \\ 0 & e'_2 & 0 & e'_1 & 0 & e'_3 \\ 0 & 0 & e'_3 & 0 & e'_1 & e'_2 \end{pmatrix} \\
 & v = (M_{1,1}, M_{2,2}, M_{3,3}, M_{1,2}, M_{1,3}, M_{2,3})^t,
 \end{aligned}$$

il est facile de voir que la matrice J est de rang 3 pourvu que le vecteur e' soit différent de zéro¹³. Par conséquent, trois des coefficients de M peuvent être calculés à partir des autres. En effet, puisque J est de rang 3, il existe Δ un mineur non nul de J et les coefficients correspondants aux indices de Δ dans J peuvent être éliminés. En pratique dans des cas numériques, nous éliminons les coefficients correspondants au plus grand mineur de J .

Supposons que $M_{i_1, j_1}, M_{i_2, j_2}, M_{i_3, j_3}$ soient les coefficients que nous devons déterminer¹⁴. Résoudre les équations de Kruppa correspond à déterminer une valeur du paramètre k qui annule les trois coefficients. Comme la valeur de k n'apporte pas d'information intéressante, nous pouvons l'éliminer par une technique de résultant et obtenir deux équations quadratiques par rapport aux coefficients de K , c'est-à-dire six paramètres.

La résolution pour trois caméras : Si nous considérons trois caméras de mêmes paramètres internes, nous pouvons alors considérer trois paires de caméras, et les équations de Kruppa forment alors un système sur-déterminé de 6 équations homogènes à 6 variables de degré 2. En remplaçant une des inconnues par 1, nous obtenons un système affine sans zéros à l'infini.

Comme les équations de ce système sont construites à partir de trois matrices fondamentales, il est difficile et extrêmement lourd d'en formuler une écriture symbolique. Nous travaillerons essentiellement sur des évaluations numériques approchées des trois matrices fondamentales. Dans la table 2.3 nous pouvons observer que les techniques d'optimisations ne sont pas satisfaisantes. En effet, pour le système de Kruppa sans bruit il est difficile de converger vers la bonne solution.

Nous sommes dans le cadre des résolutions des méthodes matricielles que nous avons décrites au chapitre 1. Nous voulons montrer que ces méthodes s'avèrent efficaces et numériquement robustes. Pour cela, nous étudions les équations de Kruppa pour trois photographies synthétiques¹⁵ d'une mire d'étalonnage. Nous avons deux façons pour bruite nos équations, soit ajouter un bruit gaussien directement sur les coefficients des équations, soit ajouter un bruit gaussien sur les points dans les photographies. La

13. Ce qui est toujours vrai puisque F est de rang 2.

14. C'est-à-dire ceux que nous n'avons pas éliminés.

15. Il s'agit d'une simulation dans laquelle nous connaissons entièrement les matrices de projection des caméras et un ensemble de points tridimensionnels.

Point de départ	SumSqr	α_u	α_v	θ	u_0	v_0
[0, 0, 0, 0, 0]	.446	11.76	*	*	-26.99	-50.02
[$1e^6, 3e^6, 5e^4, 260, 200$]	26.02	998.90	1634.90	1.746	-74.45	485.03
[$1.8e^6, 3.9e^6, 5.1e^4, 260, 200$]	47.23	1325.37	1964.66	1.575	194.61	220.90
Solution théorique**	$4.09e^{-8}$	1345.78	1983.56	1.57	261.36	201.15

* Nombre complexe

** La solution théorique est :

$$[1.879433704406167e^6, 3.974966933796428e^6, 51059.70192167550, \\ 261.3578754202898, 201.1541099294620]$$

TAB. 2.3 – Recherche des solutions aux moindres carrés des polynômes de Kruppa par optimisation de MATLAB

deuxième technique apparaît plus réaliste puisque dans la pratique, l'imprécision est en grande partie due à l'extraction des primitives dans les images. Comme nous le verrons dans les résultats, cette deuxième technique est aussi plus difficile à contrôler que la première.

Une des difficultés essentielles rencontrée dans la résolution des équations de Kruppa provient de l'amplitude des coefficients les uns par rapport aux autres. Si nous regardons la distribution des coefficients du système de Kruppa non bruité pour trois photographies d'une mire d'étalonnage, nous avons le graphe de la figure 2.6. Notre premier travail a consisté à trouver des changements de variables et des coefficients de manière à resserrer cette distribution autour de 1. La technique consiste à imposer des changements de variables de la forme $x_i \rightarrow 10^{q_i} x_i$ et nous nous autorisons à multiplier les équations par un facteur 10^{p_i} . Avec ces restrictions, en prenant le logarithme décimal des coefficients, le problème revient à résoudre aux moindres carrés un système linéaire sur-déterminé. Nous montrons dans la figure 2.7 la distribution resserrée d'un système équivalent à celui de la figure 2.6.

Les résultats que nous montrons dans la table 2.4 ont été effectués par une méthode matricielle similaire à celle de Macaulay décrite dans les articles [MT00, Mou99b]. Cette méthode a l'avantage de faire intervenir des calculs moins lourds que la méthode de Macaulay classique. Elle est implantée en C++ par Philippe Trébuchet et sera bientôt dans la librairie ALP. Cette table contient des estimations pour différents bruits gaussiens. La première colonne indique leur déviation standard et la dernière correspond à la somme des carrés des évaluations des équations.

Même si le bruit « accepté » par la méthode est loin d'être réaliste pour un étalonnage de caméras avec de vraies photographies, la méthode matricielle utilisée est largement supérieure à l'optimisation. Cette instabilité est essentiellement due à deux facteurs : l'imprécision sur les estimations des matrices fondamentales et le fait que les équations de Kruppa sont fondées sur des tangences avec la conique absolue, ce qui

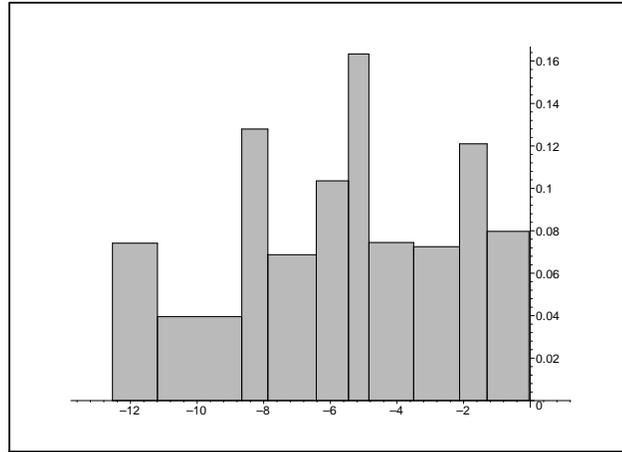


FIG. 2.6 – *Distribution du logarithme décimal de la valeur absolue des coefficients du système de Kruppa pour les mires*

entraîne de grosses variations pour de petites modifications des points.

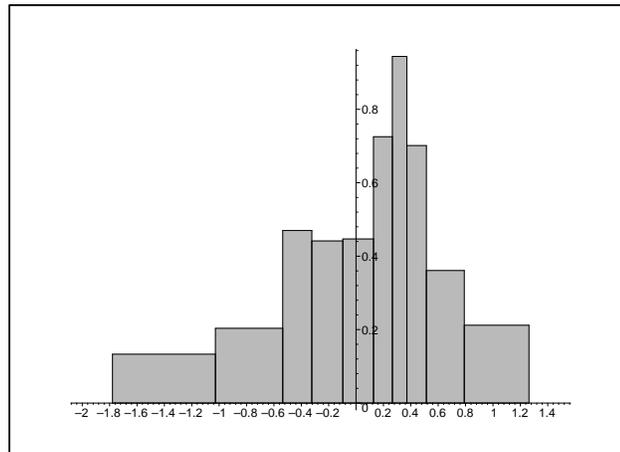


FIG. 2.7 – Distribution du logarithme décimal de la valeur absolue des coefficients du système de Kruppa pour les mires resserrées

bruit	α_u	α_v	θ	u_0	v_0	r
0	1345.7805	1983.5588	1.5702	261.3578	201.1542	.0068
$1e - 5$	1345.7593	1983.4829	1.5702	261.4197	201.0987	.4113
$1e - 4$	1345.7220	1983.3667	1.5701	261.4930	201.0796	.1602
$1e - 3$	1346.4692	1988.7797	1.5717	254.9697	206.3889	.3106
$1e - 2$	1350.8370	2002.2224	1.5530	239.3611	215.1175	12.2225
$1e - 1$	1452.6160	2161.2241	1.5516	100.9649	362.3058	.5769e9
0.05	1274.5549	1858.2709	1.5896	316.0969	166.6458	72.9727

TAB. 2.4 – Estimation des paramètres internes des caméras

Deuxième partie

Modélisation

Dans cette partie, nous allons construire une modélisation de l'étalonnage de caméras plus riche, dans le sens où nous nous donnons des hypothèses plus fortes sur les connaissances de la scène. Cette modélisation est établie de manière symbolique, puis elle sera utilisée par des techniques numériques pour étalonner les caméras.

Parmi les hypothèses supplémentaires, nous introduisons des contraintes géométriques que vérifie la scène à modéliser.

Pour établir la modélisation, nous nous sommes placés dans un cadre naturel pour la géométrie tel que les algèbres de Grassmann-Cayley. Le premier chapitre est entièrement dédié à des rappels et à l'étude de propriétés dans ce formalisme.

Le chapitre suivant développe la modélisation de certaines contraintes géométriques de la scène à travers une caméra. Les contraintes étudiées sont simples : parallélisme et orthogonalité de deux droites, de deux plans. Malgré la simplicité des contraintes et l'utilisation d'un formalisme compact, les équations sont difficiles à appréhender.

Les chapitres trois et quatre sont assez ressemblants. Ils contiennent tous les deux une utilisation effective des équations vues dans le chapitre précédent. Dans les deux utilisations, nous rajoutons la connaissance d'un plan de la scène. C'est en exploitant la verticalité et l'horizontalité que les équations issues des contraintes géométriques se simplifient et permettent une estimation robuste des paramètres des caméras. Dans le troisième chapitre, l'étalonnage des caméras se fait caméra par caméra alors que dans le quatrième chapitre, l'étalonnage est fait de manière globale sur l'ensemble des caméras et en tenant compte des appariements entre les différentes caméras. La technique du quatrième chapitre s'avère moins sensible au bruit.

Le cinquième chapitre est entièrement consacré aux résultats de ces méthodes dans différentes situations. Nous finissons par un étalonnage des caméras de la fameuse scène de Londres.

Chapitre 1

L'algèbre de Grassmann-Cayley

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux algèbres extérieures, algèbres doubles, algèbres de Hodge, \dots , que nous nommons plus communément algèbres de Grassmann-Cayley. L'idée de base de ces algèbres est de fournir un cadre algébrique capable de transcrire de manière simple, compacte et synthétique des propriétés de nature géométrique. Bien que leurs constructions soient connues depuis longtemps [DRS74, BBR85], ces algèbres restent encore très peu utilisées dans les systèmes informatiques.

Notre but est une nouvelle fois de montrer leur puissance en rappelant leurs définitions et propriétés puis en dressant un dictionnaire entre les propriétés géométriques et leurs expressions dans ces algèbres.

1.1 Définitions et propriétés

Dans toute cette section, \mathbb{K} est un corps et E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . Nous noterons $\mathbb{P}(E)$ l'espace projectif associé à E .

1.1.1 Algèbre extérieure

Définition 7 Nous appellerons *extenseur d'ordre k* un ensemble ordonné de k vecteurs de E et nous le noterons :

$$a_1 \nabla a_2 \nabla \cdots \nabla a_k$$

Proposition-définition 1 Nous définissons une relation d'équivalence sur les extenseurs d'ordre k comme suit :

$$\begin{aligned} a_1 \nabla a_2 \nabla \cdots \nabla a_k \sim b_1 \nabla b_2 \nabla \cdots \nabla b_k \\ \iff \\ \forall x_{k+1}, \dots, x_n \in E, |a_1, a_2, \dots, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n| = |b_1, b_2, \dots, b_k, x_{k+1}, \dots, x_n| \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que nous définissons bien une relation d'équivalence.

Notation 4 \mathfrak{S}_k est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, k\}$.

Remarque 11 Une permutation de l'ordre des vecteurs d'un extenseur d'ordre k entraîne un changement de signe suivant le principe suivant $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$:

$$a_{\sigma(1)} \nabla a_{\sigma(2)} \nabla \cdots \nabla a_{\sigma(k)} \sim \text{sign}(\sigma) (a_1 \nabla a_2 \nabla \cdots \nabla a_k) \quad (1.1)$$

Pour démontrer cette propriété, il suffit de revenir à la définition de l'équivalence sous forme d'égalité de déterminants et d'utiliser le fait que les déterminants sont des formes multilinéaires alternées.

Proposition 19 Deux extenseurs d'ordre k $a_1 \nabla \cdots \nabla a_k$ et $b_1 \nabla \cdots \nabla b_k$ sont équivalents si et seulement si l'une des deux propriétés est satisfaite :

- i. Pour chaque extenseur, les vecteurs qui le composent, sont linéairement dépendants.
- ii. Les vecteurs qui composent un extenseur engendrent le même sous espace vectoriel de E (de dimension k) que les vecteurs qui composent l'autre extenseur et il existe une transformation de $SL(E)^1$, Φ telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} \quad \Phi(a_i) = b_i.$$

Démonstration : Si les extenseurs $a_1 \nabla a_2 \nabla \cdots \nabla a_k$ et $b_1 \nabla b_2 \nabla \cdots \nabla b_k$ sont équivalents alors :

$$\forall x_{k+1}, \dots, x_n \in E, \quad |a_1, \dots, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n| = |b_1, \dots, b_k, x_{k+1}, \dots, x_n|.$$

Deux cas sont alors possibles :

- Les vecteurs a_1, \dots, a_k sont linéairement dépendants et

$$\begin{aligned} & \forall x_{k+1}, \dots, x_n \in E \\ & |a_1, \dots, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n| = |b_1, \dots, b_k, x_{k+1}, \dots, x_n| = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

En particulier, l'équation (1.2) reste valide pour x_{k+1}, \dots, x_n des éléments du supplémentaire de $\langle b_1, \dots, b_k \rangle$ dans E donc les b_1, \dots, b_k sont liés.

- Les vecteurs a_1, \dots, a_k sont linéairement indépendants et

$$\begin{aligned} & \exists x_{k+1}, \dots, x_n \in E \\ & |a_1, a_2, \dots, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n| = |b_1, b_2, \dots, b_k, x_{k+1}, \dots, x_n| \neq 0 \end{aligned}$$

et les vecteurs b_1, \dots, b_k sont linéairement indépendants. De plus, si nous supposons que :

$$\langle a_1, \dots, a_k \rangle \neq \langle b_1, \dots, b_k \rangle,$$

alors il existe un vecteur v tel que :

$$\begin{aligned} v & \notin \langle a_1, \dots, a_k \rangle \\ v & \in \langle b_1, \dots, b_k \rangle. \end{aligned}$$

1. Ensemble des transformations linéaires inversibles de E .

Nous pouvons alors considérer des vecteurs libres x_{k+2}, \dots, x_n du supplémentaire de l'espace $\langle a_1, \dots, a_k, v \rangle$ et nous avons :

$$\begin{aligned} |a_1, a_2, \dots, a_k, v, x_{k+2}, \dots, x_n| &\neq 0 \\ |b_1, b_2, \dots, b_k, v, x_{k+2}, \dots, x_n| &= 0 \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse que $a_1 \nabla a_2 \nabla \dots \nabla a_k$ et $b_1 \nabla b_2 \nabla \dots \nabla b_k$ sont équivalents. Nous pouvons donc conclure dans ce cas que les espaces $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ et $\langle b_1, \dots, b_k \rangle$ sont égaux. Les ensembles $\{a_1, \dots, a_k\}$ et $\{b_1, \dots, b_k\}$ forment des bases d'un même espace vectoriel, il existe une transformation linéaire inversible de changement de base qui peut être étendue en une transformation Φ sur E en prenant l'identité sur le supplémentaire de $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ dans E . Les images des vecteurs a_1, \dots, a_k sont les vecteurs b_1, \dots, b_k et la propriété (ii.) est satisfaite.

Réciproquement : supposons la propriété (ii.) vérifiée alors nous avons $\langle a_1, \dots, a_k \rangle = \langle b_1, \dots, b_k \rangle$ et $\Phi \in SL(E)$ telle que :

$$\Phi(a_1, \dots, a_k) = (b_1, \dots, b_k).$$

Pour tout x_{k+1}, \dots, x_n de E :

- Soit il existe j dans $\{k+1, \dots, n\}$ tel que $x_j \in \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ alors $x_j \in \langle b_1, \dots, b_k \rangle$ et :

$$|a_1, \dots, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n| = |b_1, \dots, b_k, x_{k+1}, \dots, x_n| = 0.$$

- Soit $|a_1, \dots, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n| \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} &|b_1, \dots, b_k, x_{k+1}, \dots, x_n| \\ &= \det \Phi |a_1, \dots, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n| \\ &= |a_1, \dots, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n| \end{aligned}$$

Si la propriété (i.) est satisfaite alors a_1, \dots, a_k et b_1, \dots, b_k sont liés et tous les déterminants construits sur les a_i ou bien les b_i sont nuls. \square

Proposition-définition 2 *Nous appelons la grassmannienne d'ordre k de E et la notons $G_k(E)$, l'ensemble des sous espaces vectoriels de dimension k . Nous avons une correspondance entre les classes des extenseurs d'ordre k et les éléments de $G_k(E)$.*

Définition 8 *Nous considérons l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des extenseurs d'ordre k modulo la relation d'équivalence sur les combinaisons linéaires d'extenseurs. Nous noterons cet ensemble $\bigwedge^k E$ et nous nommerons ses éléments des k -séquences.*

Nous avons naturellement défini une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel sur l'ensemble $\bigwedge^k E$.

Proposition 20 e_1, \dots, e_n une base de E , $a_1 \nabla \dots \nabla a_k$ un extenseur d'ordre k alors

$$a_1 \nabla \dots \nabla a_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \Delta_{(i_1, \dots, i_k)}(e_{i_1} \nabla \dots \nabla e_{i_k})$$

où $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)}$ est le mineur de la matrice formée par les vecteurs a_1, \dots, a_k dont nous gardons les lignes i_1, \dots, i_k .

Démonstration : Pour chercher une k -séquence équivalente à l'extenseur $a_1 \nabla \dots \nabla a_k$, il faut revenir à l'égalité de déterminants. Pour tout x_{k+1}, \dots, x_n de E , nous considérons le déterminant :

$$|a_1, \dots, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n|.$$

En développant ce déterminant par rapport à la dernière colonne, nous obtenons un polynôme dont les variables sont les mineurs de la matrice formés des $n - 1$ premiers vecteurs. Nous itérons le développement des mineurs jusqu'à obtenir un polynôme dont les variables soient des mineurs d'ordre k formés par les vecteurs a_1, \dots, a_k . Puis en substituant les a_i par $\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} e_j$, nous obtenons l'égalité annoncée. \square

Remarque 12 Pour une k -séquence :

$$\sum_{j=1}^l \alpha_j (a_{j_1} \nabla \dots \nabla a_{j_k}),$$

nous pouvons, en développant par linéarité et en utilisant la proposition 20, écrire cette k -séquence sous la forme :

$$\sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \Delta_{(i_1, \dots, i_k)} e_{i_1} \nabla \dots \nabla e_{i_k}.$$

Définition 9 Avec les notations de la proposition 20, les $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)}$, tel que $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ s'appellent les coordonnées de Plucker.

Proposition 21 Les coordonnées de Plucker d'un extenseur d'ordre k vérifient :

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n \\ \forall 1 \leq j_1 < \dots < j_{k-1} \leq n \\ F_{i_1 \dots i_{k+1}, j_1 \dots j_{k-1}} &= \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^l \Delta_{(i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_{k+1})} \Delta_{(i_l, j_1, \dots, j_{k-1})} = 0. \end{aligned}$$

Démonstration : Montrons que si $a = a_1 \nabla \dots \nabla a_k$ est un extenseur d'ordre k , alors :

$$F_{i_1 \dots i_{k+1}, j_1 \dots j_{k-1}} = \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^l \Delta_{(i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_{k+1})} \Delta_{(i_l, j_1, \dots, j_{k-1})} = 0.$$

Nous commençons par nommer les coordonnées de a_i $(\alpha_i^j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$, alors :

$$F_{i_1 \dots i_{k+1}, j_1 \dots j_{k-1}} = \sum_{l=0}^{k+1} (-1)^l \begin{vmatrix} \alpha_{i_1}^1 & \dots & \alpha_{i_{l_1}}^1 & \alpha_{i_{l+1}}^1 & \dots & \alpha_{i_{k+1}}^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_1}^k & \dots & \alpha_{i_{l-1}}^k & \alpha_{i_{l+1}}^k & \dots & \alpha_{i_{k+1}}^k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{i_l}^1 & \alpha_{j_1}^1 & \dots & \alpha_{j_k}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_l}^{k-1} & \alpha_{j_1}^{k-1} & \dots & \alpha_{j_k}^{k-1} \end{vmatrix}.$$

Nous développons par la première colonne le second déterminant :

$$F_{i_1 \dots i_{k+1}, j_1 \dots j_{k-1}} = \sum_{l=0}^{k+1} \sum_{m=1}^{k-1} (-1)^l \alpha_{i_l}^m D_{i_l}^m \begin{vmatrix} \alpha_{i_1}^1 & \dots & \alpha_{i_{l_1}}^1 & \alpha_{i_{l+1}}^1 & \dots & \alpha_{i_{k+1}}^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_1}^k & \dots & \alpha_{i_{l-1}}^k & \alpha_{i_{l+1}}^k & \dots & \alpha_{i_{k+1}}^k \end{vmatrix},$$

où $D_{i_l}^m$ est le cofacteur de $\alpha_{i_l}^m$ dans le second déterminant. Nous pouvons alors avoir l'écriture suivante :

$$F_{i_1 \dots i_{k+1}, j_1 \dots j_{k-1}} = \sum_{m=1}^{k-1} D_{i_l}^m \begin{vmatrix} \alpha_{i_1}^m & \dots & \alpha_{i_l}^m & \dots & \alpha_{i_{k+1}}^m \\ \alpha_{i_1}^1 & \dots & \alpha_{i_l}^1 & \dots & \alpha_{i_{k+1}}^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_1}^k & \dots & \alpha_{i_l}^k & \dots & \alpha_{i_{k+1}}^k \end{vmatrix}.$$

Or tous les déterminants de cette somme possèdent deux lignes identiques, donc la somme est nulle et

$$F_{i_1 \dots i_{k+1}, j_1 \dots j_{k-1}} = 0.$$

□

Remarque 13 Soient s un élément et i_1, \dots, i_k et j_1, \dots, j_k deux k -uplets de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, alors :

$$F_{j_s i_1 \dots i_k, j_1 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_k} = -\Delta_{(i_1, \dots, i_k)} \Delta_{(j_s, j_1, \dots, j_{s-1}, j_{s+1}, \dots, j_k)} \\ + \sum_{l=1}^k (-1)^{l+1} \Delta_{(j_s, i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_k)} \Delta_{(i_l, j_1, \dots, j_{s-1}, j_{s+1}, \dots, j_k)} = 0.$$

Or $l-1$ transpositions nous permettent de placer la colonne d'indice j_s du premier mineur entre les colonnes d'indices i_{l-1} et i_{l+1} . De la même manière, $s-1$ transpositions nous permettent de positionner la colonne d'indice i_l entre les colonnes d'indices j_{s-1} et j_{s+1} , soit :

$$F_{j_s i_1 \dots i_k, j_1 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_k} = (-1)^s \Delta_{(i_1, \dots, i_k)} \Delta_{(j_1, \dots, j_k)} \\ - (-1)^s \sum_{l=1}^k \Delta_{(i_1, \dots, i_{l-1}, j_s, i_{l+1}, \dots, i_k)} \Delta_{(j_1, \dots, j_{s-1}, i_l, j_{s+1}, \dots, j_k)} = 0.$$

De part ce fait, nous avons de manière équivalente à la relation $F_{j_s i_1 \dots i_k, j_1 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_k} = 0$:

$$\Delta_{(i_1, \dots, i_k)} \Delta_{(j_1, \dots, j_k)} = \sum_{l=1}^k \Delta_{(i_1, \dots, i_{l-1}, j_s, i_{l+1}, \dots, i_k)} \Delta_{(j_1, \dots, j_{s-1}, i_l, j_{s+1}, \dots, j_k)}.$$

Proposition 22 Une k -séquence est un extenseur d'ordre k si ses coordonnées de Plücker vérifient les relations :

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n \\ \forall 1 \leq j_1 < \dots < j_{k-1} \leq n \\ F_{i_1 \dots i_{k+1}, j_1 \dots j_{k-1}} &= \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^l \Delta_{(i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_{k+1})} \Delta_{(i_l, j_1, \dots, j_{k-1})} = 0 \end{aligned}$$

Démonstration : Quitte à renuméroter les éléments de base, nous pouvons supposer que $\Delta_{(1, \dots, k)} \neq 0$ et comme nos expressions sont homogènes nous pouvons prendre :

$$\Delta_{(1, \dots, k)} = 1.$$

Pour simplifier les notations, nous notons :

$$\Delta_j^i = \Delta_{(1, \dots, i-1, j, i+1, \dots, k)}, \quad i \in \{1, \dots, k\} \text{ et } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Nous allons prouver que les k points :

$$P^i = (\Delta_1^i, \dots, \Delta_n^i) \quad i \in \{1, \dots, k\},$$

déterminent un extenseur d'ordre k .

Comme $\Delta_i^i = \Delta_{(1, \dots, k)} = 1$ $i \in \{1, \dots, k\}$, la sous matrice formée par les k premières colonnes de la matrice des (Δ_j^i) est la matrice identité (car comme $j \leq k$ nous avons deux indices identiques). Aussi cette matrice est de rang k et les points P^1, \dots, P^k déterminent un extenseur d'ordre k que nous appelons S_k .

Considérons

$$q_{i_1 \dots i_k} = \begin{vmatrix} \Delta_{i_1}^0 & \dots & \Delta_{i_k}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{i_1}^k & \dots & \Delta_{i_k}^k \end{vmatrix}$$

les coordonnées de Plücker de S_k et montrons que pour tout i_1, \dots, i_k :

$$q_{i_1 \dots i_k} = \Delta_{(i_1, \dots, i_k)}.$$

Comme les Δ_{i_1, \dots, i_k} sont antisymétriques, ce résultat ne dépend pas de l'ordre. Considérons l'ensemble i_1, \dots, i_k contenant les entiers l_1, \dots, l_s qui sont supérieurs à k (il s'agit de remplacer dans l'ensemble $1, \dots, k$, s éléments d'indice j_1, \dots, j_s par les valeurs l_1, \dots, l_s) :

$$i_1, \dots, i_k = 1, \dots, j_1 - 1, l_1, j_1 + 1, \dots, j_2 - 1, l_2, j_2 + 1, \dots, j_s - 1, l_s, j_s + 1, \dots, k.$$

Or comme pour $j \leq k$:

$$\Delta_j^i = \delta_j^i \text{ où } \delta_j^i \text{ est le symbole de Kronecker,}$$

le déterminant $q_{i_1 \dots i_k}$ se simplifie en développant par les colonnes comme suit :

$$q_{i_1 \dots i_k} = \begin{vmatrix} \Delta_{l_1}^{j_1} & \dots & \Delta_{l_s}^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{l_1}^{j_s} & \dots & \Delta_{l_s}^{j_s} \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration de la propriété par récurrence sur s .

Si $s = 0$ alors nous avons bien :

$$\begin{aligned} i_1, \dots, i_k &= 1, \dots, k, \\ q_{i_1 \dots i_k} &= 1 = \Delta_{(i_1, \dots, i_k)}. \end{aligned}$$

Si $s = 1$ alors la proposition est satisfaite puisque :

$$q_{i_1 \dots i_k} = \Delta_{l_1}^{j_1} = \Delta_{(1, \dots, j_1-1, l_1, j_1+1, \dots, k)}.$$

Supposons que si pour $s < t$, $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)} = q_{i_1 \dots i_k}$, c'est-à-dire que :

$$\Delta_{(i_1, \dots, i_k)} = \begin{vmatrix} \Delta_{l_1}^{j_1} & \dots & \Delta_{l_s}^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{l_1}^{j_s} & \dots & \Delta_{l_s}^{j_s} \end{vmatrix}.$$

Montrons alors que pour $s = t$ la proposition est satisfaite. Comme $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)}$ satisfait la relation $F_{i_r 1 \dots k, i_1 \dots i_{r-1} i_{r+1} \dots i_k}$, et par la remarque 13 nous avons :

$$\Delta_{(i_1, \dots, i_k)} \Delta_{(1, \dots, k)} = \sum_{j=1}^k \Delta_{(i_1, \dots, i_{r-1}, j, i_{r+1}, \dots, i_k)} \Delta_{(1, \dots, j-1, i_r, j+1, \dots, k)},$$

où $r \in \{1, \dots, k\}$. Aussi nous pouvons choisir r tel que $i_r = l_t$ soit $r = j_t$ et alors :

$$\Delta_{i_1, \dots, i_{r-1}, j, i_{r+1}, \dots, i_k} = 0,$$

sauf si $j \in \{j_1, \dots, j_t\}$, ceux-ci étant les seuls entiers manquant de l'ensemble $\{1, \dots, k\}$ d'où :

$$\Delta_{(i_1, \dots, i_k)} \Delta_{(1, \dots, k)} = \sum_{m=1}^t \Delta_{(i_1, \dots, i_{r-1}, j_m, i_{r+1}, \dots, i_k)} \Delta_{(1, \dots, j_m-1, l_t, j_m+1, \dots, k)}.$$

Si maintenant nous prenons $m \in \{1, \dots, t\}$, alors

$$\begin{aligned} &\Delta_{i_1, \dots, i_{r-1}, j_m, i_{r+1}, \dots, i_k} \\ &= \Delta_{(1, \dots, j_1-1, l_1, j_1+1, \dots, j_m-1, l_m, j_m+1, \dots, j_t-1, j_m, j_t+1, \dots, k)} \\ &= -\Delta_{(1, \dots, j_1-1, l_1, j_1+1, \dots, j_m-1, j_m, j_m+1, \dots, j_t-1, l_m, j_t+1, \dots, k)} \end{aligned}$$

possède seulement $t - 1$ multiindices qui n'appartiennent pas à $\{1, \dots, k\}$, et donc nous avons en appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \Delta_{(i_1, \dots, i_{r-1}, j, i_{r+1}, \dots, i_k)} &= - \begin{vmatrix} \Delta_{l_1}^{j_1} & \cdots & \Delta_{l_{m-1}}^{j_1} & \Delta_{l_{m+1}}^{j_1} & \cdots & \Delta_{l_{t-1}}^{j_1} & \Delta_{l_m}^{j_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta_{l_1}^{j_{m-1}} & \cdots & \Delta_{l_{m-1}}^{j_{m-1}} & \Delta_{l_{m+1}}^{j_{m-1}} & \cdots & \Delta_{l_{t-1}}^{j_{m-1}} & \Delta_{l_m}^{j_{m-1}} \\ \Delta_{l_1}^{j_{m+1}} & \cdots & \Delta_{l_{m-1}}^{j_{m+1}} & \Delta_{l_{m+1}}^{j_{m+1}} & \cdots & \Delta_{l_{t-1}}^{j_{m+1}} & \Delta_{l_m}^{j_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta_{l_1}^{j_t} & \cdots & \Delta_{l_{m-1}}^{j_t} & \Delta_{l_{m+1}}^{j_t} & \cdots & \Delta_{l_{t-1}}^{j_t} & \Delta_{l_m}^{j_t} \end{vmatrix} \\ &= -(-1)^{t-1+m} \begin{vmatrix} \Delta_{l_1}^{j_1} & \cdots & \Delta_{l_{m-1}}^{j_1} & \Delta_{l_m}^{j_1} & \Delta_{l_{m+1}}^{j_1} & \cdots & \Delta_{l_{t-1}}^{j_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{l_1}^{j_{m-1}} & \cdots & \Delta_{l_{m-1}}^{j_{m-1}} & \Delta_{l_m}^{j_{m-1}} & \Delta_{l_{m+1}}^{j_{m-1}} & \cdots & \Delta_{l_{t-1}}^{j_{m-1}} \\ \Delta_{l_1}^{j_{m+1}} & \cdots & \Delta_{l_{m-1}}^{j_{m+1}} & \Delta_{l_m}^{j_{m+1}} & \Delta_{l_{m+1}}^{j_{m+1}} & \cdots & \Delta_{l_{t-1}}^{j_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{l_1}^{j_t} & \cdots & \Delta_{l_{m-1}}^{j_t} & \Delta_{l_m}^{j_t} & \Delta_{l_{m+1}}^{j_t} & \cdots & \Delta_{l_{t-1}}^{j_t} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Or comme $\Delta_{(1, \dots, k)} = 1$, et que $\Delta_{(1, \dots, j_{m-1}, l_t, j_{m+1}, \dots, k)} = \Delta_{l_t}^{j_m}$, et les relations de Plucker nous donnent :

$$\begin{aligned} \Delta_{(i_1, \dots, i_k)} &= \sum_{m=1}^t (-1)^{t+m} \Delta_{l_t}^{j_m} \begin{vmatrix} \Delta_{l_1}^{j_1} & \cdots & \Delta_{l_{t-1}}^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{l_1}^{j_{m-1}} & \cdots & \Delta_{l_{t-1}}^{j_{m-1}} \\ \Delta_{l_1}^{j_{m+1}} & \cdots & \Delta_{l_{t-1}}^{j_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{l_1}^{j_t} & \cdots & \Delta_{l_{t-1}}^{j_t} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \Delta_{l_1}^{j_1} & \cdots & \Delta_{l_{t-1}}^{j_1} & \Delta_{l_t}^{j_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta_{l_1}^{j_t} & \cdots & \Delta_{l_{t-1}}^{j_t} & \Delta_{l_t}^{j_t} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition pour $s = t$ et termine la démonstration. \square

Si V est un sous-espace vectoriel de dimension k de E , a_1, \dots, a_k et b_1, \dots, b_k deux bases de V alors :

$$\begin{aligned} a_1 \nabla \cdots \nabla a_k &= |b_1, \dots, b_k| \text{ dans la base } a_1, \dots, a_k \quad b_1 \nabla \cdots \nabla b_k \\ &\neq \text{ en général } b_1 \nabla \cdots \nabla b_k \end{aligned}$$

Proposition 23 Si e_1, \dots, e_n forment une base de E alors les C_n^k k -séquences $e_{i_1} \nabla \cdots \nabla e_{i_k}$ pour $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ forment une base de $\bigwedge^k E$.

Démonstration : Montrons que l'ensemble des k -séquences $e_{i_1} \nabla \cdots \nabla e_{i_k}$ est générateur. Soit $a_1 \nabla \cdots \nabla a_k$ un extenseur d'ordre k , en utilisant la proposition 20, nous avons :

$$a_1 \nabla \cdots \nabla a_k \sim \sum_{0 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \Delta_{(i_1, \dots, i_k)} e_{i_1} \nabla \cdots \nabla e_{i_k}.$$

Nous savons alors réécrire toutes les k -séquences sous forme d'une somme de $e_{i_1} \nabla \cdots \nabla e_{i_k}$. Montrons que cet ensemble est libre. Soient une combinaison linéaire nulle

$$\sum_{0 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \nabla \cdots \nabla e_{i_k}$$

et $\forall x_{k+1}, \dots, x_n \in E$, alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \nabla \cdots \nabla e_{i_k} \\ &= \sum_{0 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_k} |e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, x_{k+1}, \dots, x_n| = 0. \end{aligned}$$

En particulier, cette équation est vraie pour $\{x_{k+1}, \dots, x_n\}$ une base du supplémentaire du sous espace vectoriel de E engendré par $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$. Dans ce cas, la relation ne possède plus qu'un seul terme ce qui entraîne que $\lambda_i = 0$. \square

Définition 10 Soient $a_1 \nabla \cdots \nabla a_k$, un extenseur d'ordre k et $b_1 \nabla \cdots \nabla b_h$, un extenseur d'ordre h , nous définissons un opérateur \vee de la manière suivante :

$$(a_1 \nabla \cdots \nabla a_k) \vee (b_1 \nabla \cdots \nabla b_h) = \begin{cases} 0 & \text{si } \langle a_1, \dots, a_k \rangle \cap \langle b_1, \dots, b_h \rangle \neq \emptyset \\ a_1 \nabla \cdots \nabla a_k \nabla b_1 \nabla \cdots \nabla b_h & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous appellerons cet opérateur l'union.

Remarque 14 – Si $k + h > n$ alors $(a_1 \nabla \cdots \nabla a_k) \vee (b_1 \nabla \cdots \nabla b_h) = 0$.

– De plus, dorénavant nous définirons les extenseurs d'ordre k directement avec l'opérateur d'union, c'est-à-dire que $\nabla = \vee$.

Proposition-définition 3 Nous étendons la définition de l'opérateur d'union aux algèbres $\bigwedge^k E \times \bigwedge^h E$ par linéarité :

$$\begin{aligned} e &\in \bigwedge^k E, e = \sum_i \alpha_i a_i \text{ avec } a_i \in G_k(E), \\ f &\in \bigwedge^h E, f = \sum_j \beta_j b_j \text{ avec } b_j \in G_h(E), \\ e \vee f &= \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j a_i \nabla b_j. \end{aligned}$$

Cet opérateur est clairement distributif par rapport à l'addition, c'est-à-dire, avec les notations précédentes :

$$g \in \bigwedge^k E, (e + g) \vee f = e \vee f + g \vee f.$$

il muni donc $\bigwedge E$ d'une structure d'algèbre.

1.1.2 Algèbre double

Le but est de rajouter à l'algèbre extérieure un opérateur d'intersection.

Définition 11 Soient \mathfrak{S}_k l'ensemble des permutations des k premiers entiers et $r \in \{1, \dots, k\}$. Considérons l_1, \dots, l_r un r -uplet de $\{1, \dots, k\}$ tel que $\sum_{i=1}^r l_i = k$, nous définissons $\mathfrak{S}_{l_1, \dots, l_r}(k)$ le sous ensemble des permutations de \mathfrak{S}_k telle que :

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(l_1); \sigma(l_1 + 1) < \dots < \sigma(l_1 + l_2); \dots; \sigma(l_1 + \dots + l_{r-1} + 1) < \dots < \sigma(k).$$

Lemme 7 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{k+h}$ telle que :

$$\sigma(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_h) = j_1, \dots, j_h, i_1, \dots, i_k,$$

alors nous avons $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{k \cdot h}$.

Idée de démonstration : Chaque élément j_i , c'est-à-dire h , doit être permuter avec les k éléments i_1, \dots, i_k , d'où le résultat. \square

Remarque 15 Il existe une bijection entre $\mathfrak{S}_{k, h-k}(h)$ et $\mathfrak{S}_{h-k, k}(h)$. En effet, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{k, h-k}(h)$, il existe $\sigma' \in \mathfrak{S}_{h-k, k}(h)$ telle que :

$$\sigma'(1, \dots, h) = \sigma(k+1), \dots, \sigma(h), \sigma(1), \dots, \sigma(k).$$

En appliquant le lemme 7, nous avons :

$$\text{sign}(\sigma') = (-1)^{k(h-k)} \text{sign}(\sigma).$$

Définition 12 Soient $A = a_1 \vee \dots \vee a_k$ et $B = b_1 \vee \dots \vee b_h$ deux extenseurs d'ordre k et h respectivement. Nous définissons l'intersection des extenseurs si $k+h \geq n$ comme suit :

$$A \wedge B = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-h, k+h-n}(k)} \text{sign}(\sigma) |a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n-h)}, b_1, \dots, b_h | a_{\sigma(n-h+1)} \vee \dots \vee a_{\sigma(k)},$$

sinon

$$A \wedge B = 0.$$

Proposition 24 Avec les mêmes notations que dans la définition précédente, si $k+h \geq n$, alors :

$$A \wedge B = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-k, h+k-n}(h)} \text{sign}(\sigma) |a_1, \dots, a_k, b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n-k)} | b_{\sigma(n-k+1)} \vee \dots \vee b_{\sigma(h)}.$$

Démonstration : Introduisons les applications suivantes :

$$\begin{aligned}
f &: (E^n)^k \times (E^n)^h \longrightarrow G_{k+h-n}(E) \\
(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_h) &\longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-h, k+h-n}(k)} \text{sign}(\sigma) |a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n-h)}, b_1, \dots, b_h| a_{\sigma(n-h+1)} \vee \dots \vee a_{\sigma(k)}, \\
g &: (E^n)^k \times (E^n)^h \longrightarrow G_{k+h-n}(E) \\
(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_h) &\longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-k, h+k-n}(h)} \text{sign}(\sigma) |a_1, \dots, a_k, b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n-k)}| b_{\sigma(n-k+1)} \vee \dots \vee b_{\sigma(h)}.
\end{aligned}$$

Ces deux applications sont multilinéaires alternées. Pour vérifier qu'elles sont identiques, il suffit de le vérifier sur les éléments de base :

$$f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}; e_{j_1}, \dots, e_{j_h}) = g(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}; e_{j_1}, \dots, e_{j_h}).$$

Soient $I = i_1, \dots, i_k$, $J = j_1, \dots, j_h$ les ensembles ordonnés et $d = \text{card}(I \cap J)$, quitte à renuméroter, nous avons :

$$\begin{aligned}
I &= \overbrace{i_1, \dots, i_d}^{d \text{ éléments}}, \overbrace{i_{d+1}, \dots, i_k}^{k-d \text{ éléments}}, \\
J &= \overbrace{j_1, \dots, j_d}^{d \text{ éléments}}, \overbrace{j_{d+1}, \dots, j_h}^{h-d \text{ éléments}}, \\
&\text{avec } i_l = j_l \forall l \in \{1, \dots, d\}.
\end{aligned}$$

Si $d > k + h - n$, $k - d$ et $h - d$ sont inférieurs respectivement à $n - k$ et $n - h$. C'est-à-dire que les déterminants apparaissant dans les définitions de f et g sont tous nuls et que $f = g = 0$.

Si $d = k + h - n$ alors $k - d = n - h$ et $h - d = n - k$. Il existe alors un seul élément dans les sommes définies dans f et g . La seule permutation de $\mathfrak{S}_{n-h, h+k-n}(k)$ qui permette $|e_{i_{\sigma(d+1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(k)}}, e_{j_1}, \dots, e_{j_h}| \neq 0$ est l'image de l'identité $\mathbb{I} \in \mathfrak{S}_{h+k-n, n-h}(k)$ par la bijection de la remarque 15, d'où :

$$\begin{aligned}
f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}; e_{j_1}, \dots, e_{j_h}) &= \\
&(-1)^{(n-h)(k+h-n)} |e_{i_{d+1}}, \dots, e_{i_k}, e_{j_1}, \dots, e_{j_d}, e_{j_{d+1}}, \dots, e_{j_k}| e_{i_{k-d}} \vee \dots \vee e_{i_k}.
\end{aligned}$$

De même, la seule permutation de $\mathfrak{S}_{n-k, h+k-n}(h)$ qui permette $|e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e_{j_{d+1}}, \dots, e_{j_h}| \neq 0$ est l'identité \mathbb{I} , d'où :

$$\begin{aligned}
g(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}; e_{j_1}, \dots, e_{j_h}) &= \\
&|e_{i_1}, \dots, e_{i_d}, e_{i_{d+1}}, \dots, e_{i_k}, e_{j_{d+1}}, \dots, e_{j_h}| e_{j_1} \vee \dots \vee e_{j_d}.
\end{aligned}$$

En permutant dans l'expression de f les d termes communs au début du déterminant, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}; e_{j_1}, \dots, e_{j_h}) &= \\
&(-1)^{(n-h)(k+h-n)} (-1)^{(n-h)(k+h-n)} |e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-d-1}}, e_{j_1}, \dots, e_{j_k}| e_{i_{k-d}} \vee \dots \vee e_{i_k},
\end{aligned}$$

et $f = g$. □

Proposition 25 *L'opérateur d'intersection des extenseurs correspond à l'intersection des sous espaces vectoriels associés.*

Idée de démonstration : Il suffit de considérer une base de l'intersection des sous espaces vectoriels associés aux extenseurs et de la compléter en une base de chaque sous espace. En appliquant la définition de l'intersection, nous obtenons directement le résultat souhaité. □

Propriété 2 *Avec les notations ci-dessus :*

$$A \wedge B = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-k, h+k-n}(h)} \text{sign}(\sigma) |a_1, \dots, a_k, b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n-k)}| b_{\sigma(n-k+1)} \vee \dots \vee b_{\sigma(h)}$$

Démonstration :

$$B \wedge A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-k, k+h-n}(h)} \text{sign}(\sigma) |b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n-k)}, a_1, \dots, a_k| b_{\sigma(n-k+1)} \vee \dots \vee b_{\sigma(h)}.$$

En utilisant la remarque 15, nous avons la bijection suivante :

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{S}_{n-k, k+h-n}(h) &\longrightarrow \mathfrak{S}_{k+h-n, n-k}(h) \\ \sigma &\longmapsto \sigma' = (\sigma(n-k+1), \dots, \sigma(h); \sigma(1), \dots, \sigma(n-k)), \end{aligned}$$

et $\text{sign}(\sigma') = (-1)^{(n-k)(k+h-n)} \text{sign}(\sigma)$ et inversement $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{(n-k)(k+h-n)} \text{sign}(\sigma')$.

En utilisant cette bijection, nous pouvons écrire :

$$B \wedge A = \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_{k+h-n, n-k}(h)} (-1)^{(n-k)(k+h-n)} \text{sign}(\sigma') |b_{\sigma'(k+h-n+1)}, \dots, b_{\sigma'(h)}, a_1, \dots, a_k| b_{\sigma'(1)} \vee \dots \vee b_{\sigma'(k+h-n)}.$$

En utilisant le lemme 7, nous avons :

$$B \wedge A = \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_{k+h-n, n-k}(h)} (-1)^{(n-k)(k+h-n) + (n-k)k} \text{sign}(\sigma') |a_1, \dots, a_k, b_{\sigma'(k+h-n+1)}, \dots, b_{\sigma'(h)}| b_{\sigma'(1)} \vee \dots \vee b_{\sigma'(k+h-n)}.$$

En factorisant nous voyons la deuxième forme (proposition 24) :

$$B \wedge A = (-1)^{(n-k)(n-h)} A \wedge B.$$

□

Définition 13 *Nous étendons cet opérateur par linéarité à l'algèbre extérieure $\wedge E$.*

Remarque 16 Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_{k,n-k}(n)$ et $\sigma' \in \mathfrak{S}_{l,k-l}(k)$ alors nous pouvons écrire une sorte de composition :

$$\sigma' \circ \sigma(1, \dots, k) = \sigma' \circ \sigma(1), \dots, \sigma' \circ \sigma(h); \sigma' \circ \sigma(h+1), \dots, \sigma' \circ \sigma(k); \sigma(k+1), \dots, \sigma(n).$$

$\sigma' \circ \sigma \in \mathfrak{S}_{h,k-h,n-k}(n)$ et :

$$\text{sign} \sigma' \circ \sigma = \text{sign} \sigma' \text{sign} \sigma.$$

Proposition 26 L'opérateur d'intersection est associatif : soient A, B et C trois extenseurs, alors nous avons

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C.$$

Démonstration : Supposons que A (resp. B, C) soit un extenseur d'ordre k (resp. h, l) et afin d'alléger la présentation, nous noterons pour cette démonstration :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \mathfrak{S}_{k+h-n,n-k}(h) \\ \mathfrak{S}' &= \mathfrak{S}_{n-l,k+h+l-2n}(k+h-n), \end{aligned}$$

et pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{m,n}(m+n)$,

$$\sigma i_1, \dots, i_{m+n} = \underbrace{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(m)}}_{\sigma_1}; \underbrace{i_{\sigma(m+1)}, \dots, i_{\sigma(m+n)}}_{\sigma_2}.$$

Nous développons les deux termes.

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \wedge C &= \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \text{sign}(\sigma) |A, B_{\sigma_2}| B_{\sigma_1} \right) \wedge C \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}'} \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\sigma') |A, B_{\sigma_2}| |B_{\sigma_1 \sigma'_1}| B_{\sigma_1 \sigma'_2} \\ &= \sum \end{aligned}$$

□

1.1.3 « Cap Product » et algèbre de Hodge

La dualité entre les points de l'espace et les formes linéaires joue un rôle important en géométrie classique. Nous allons voir que la dualité se traduit naturellement et apporte une souplesse supplémentaire à ce formalisme.

Nous commençons par une notation. Dans la suite, nous appellerons $\mathbf{e} = e_1 \vee \dots \vee e_n$ l'intégrale de $\wedge(E)$ où e_1, \dots, e_n est une base canonique de E . S_k sera l'ensemble des k -uplets ordonnés de $\{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} S_k &= \{ \{i_1, \dots, i_k\} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \} \\ e(S_k) &= \{ e_{i_1} \vee \dots \vee e_{i_k} \mid \{i_1, \dots, i_k\} \in S_k \} \end{aligned}$$

Proposition 27

i. $\forall A \neq 0$ un extenseur d'ordre non nul

$$A \vee \mathbf{e} = 0 \text{ et } A \wedge \mathbf{e} = A$$

ii. $\forall k \in \mathbb{K}$

$$k \vee \mathbf{e} = k\mathbf{e} \text{ et } k \wedge \mathbf{e} = k$$

iii. $\forall n$ -uplet b_1, \dots, b_n de E ,

$$b_1 \vee \dots \vee b_n = |b_1, \dots, b_n| \mathbf{e}$$

Démonstration : Ces propriétés découlent directement des définitions, de la remarque 14 et de la proposition 20. \square

Proposition 28 A et B deux extenseurs d'ordre k et l respectivement avec $n = k + l$:

$$A \vee B = (A \wedge B) \vee \mathbf{e}$$

Démonstration : Si $A \vee B \neq 0$ alors $A \vee B$ est un extenseur d'ordre n et grâce à la proposition 27 (iii.) :

$$A \vee B = \det(A, B) \mathbf{e}$$

et $A \wedge B$ est un extenseur d'ordre nul et de valeur :

$$A \wedge B = \det(A, B)$$

d'où par la proposition 27 (ii.), nous obtenons la conclusion attendue.

Si $A \vee B = 0$ alors $A \wedge B$ est un extenseur d'ordre non nul et de la proposition 27 (i.), nous obtenons :

$$(A \wedge B) \vee \mathbf{e} = 0$$

\square

Proposition-définition 4

$$\begin{aligned} (\)_k : G_k(E) \times G_{n-k}(E) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (A, B) &\longmapsto A \wedge B \end{aligned}$$

$(\)_k$ est une forme bilinéaire que l'on appelle « Cap Product ».

Démonstration : La bilinéarité vient directement de la multilinéarité de l'opérateur d'intersection. \square

Proposition 29 Soit $s \in S_k$ et $t \in S_{n-k}$:

$$(e(s), e(t))_k = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \mathbf{C}_{\{1, \dots, n\}}^s \\ |e(s), e(t)| & \text{si } t = \mathbf{C}_{\{1, \dots, n\}}^s \end{cases} ,$$

où $\mathbf{C}_{\{1, \dots, n\}}^s$ désigne le complémentaire de l'ensemble s dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Démonstration : La démonstration est directe à partir de la définition de l'opérateur d'intersection. \square

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons $\mathbb{C}s$ au lieu de $\mathbb{C}_{\{1,\dots,n\}}s$.

Définition 14 Pour $s = \{i_1, \dots, i_k\} \in S_k$ nous définissons :

$$\alpha(s) = |e(s), e(\mathbb{C}s)|^{-1} e(\mathbb{C}s)$$

et $\alpha(S_k) = \{\alpha(s), s \in S_k\}$.

Remarque 17 En utilisant la proposition 29, nous avons :

$$\alpha(s) = (e(s), e(\mathbb{C}s))_k^{-1} e(\mathbb{C}s).$$

De plus, en remarquant que la signature de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que :

$$\sigma(1, \dots, i, \dots, j, \dots, n) = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, j, j+1, \dots, n,$$

est $(-1)^{j-i}$, nous pouvons voir que la signature de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que :

$$\begin{aligned} \sigma(i_1, \dots, i_k, 1, \dots, i_1-1, i_1+1, \dots, i_k-1, i_k+1, \dots, n) = \\ i_1, \dots, i_{k-1}, 1, \dots, i_1-1, i_1+1, \dots, i_{k-1}-1, i_{k-1}+1, \dots, n \end{aligned}$$

est $(-1)^{i_k-1-(k-1)}$. En itérant cette remarque nous avons que la signature de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que :

$$\sigma(i_1, \dots, i_k, 1, \dots, i_1-1, i_1+1, \dots, i_k-1, i_k+1, \dots, n) = 1, \dots, n$$

est $(-1)^{\sum_{j=1}^k i_j-1-(j-1)} = (-1)^{\sum_{j=1}^k i_j - \frac{k(k+1)}{2}}$. Nous avons alors :

$$\alpha(s) = (-1)^{i_1+\dots+i_k - \frac{k(k+1)}{2}} |e_1, \dots, e_n|^{-1} e(\mathbb{C}s).$$

Proposition 30 $\alpha(S_k)$ est une base pour $G_{n-k}(E)$.

Démonstration : Nous savons que les éléments de S_{n-k} forment une base de $G_{n-k}(E)$. Or les éléments de S_{n-k} et de $\alpha(S_k)$ sont identiques à un facteur non nul et au signe près, ce qui ne modifie pas l'espace engendré. Par conséquent, les $\alpha(S_k)$ forment aussi une base de $G_{n-k}(E)$. \square

Proposition 31 $\alpha(S_k)$ est la base duale de $e(S_k)$ pour le « cap product ».

Démonstration : Montrons que $\forall s, t \in S_k$,

$$(e(s), \alpha(t))_k = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq t \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $\alpha(t) = |e(t), e(\mathbb{C}t)|^{-1} e(\mathbb{C}t)$, nous avons :

$$(e(s), \alpha(t))_k = |e(t), e(\mathbb{C}t)|^{-1} (e(s), e(\mathbb{C}t))_k.$$

Or par définition, si $s \neq t$, $(e(s), e(\mathbb{C}t))_k = 0$ et si $s = t$, $e(\mathbb{C}t)_k = |e(t), e(\mathbb{C}t)|$ nous obtenons le résultat annoncé. \square

Notation 5

$$\alpha_i = (-1)^{i-1} e_1 \vee \cdots \vee e_{i-1} \vee e_{i+1} \vee \cdots \vee e_n.$$

Théorème 6 e_1, \dots, e_n une base de E et $s = \{i_1, \dots, i_k\} \in S_k$:

$$\alpha(s) = \alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k} \tag{1.3}$$

Démonstration : Elle s'effectue par récurrence sur k .

Pour $k = 1$, alors $s = i_1$ et

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= |e_{i_1}, e_1, \dots, e_n|^{-1} e_1 \vee \cdots \vee e_{i_1-1} \vee e_{i_1+1} \vee \cdots \vee e_n \\ &= (-1)^{i_1-1} |e_1, \dots, e_n|^{-1} e_1 \vee \cdots \vee e_{i_1-1} \vee e_{i_1+1} \vee \cdots \vee e_n \\ &= \alpha_{i_1} \end{aligned}$$

Supposons que pour $l < k$, nous avons :

$$\alpha(i_1, \dots, i_l) = \alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_l}.$$

Montrons que nous avons cette égalité pour k . Considérons $(\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_{k-1}}) \wedge \alpha_k$. Comme nous avons $\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_{k-1}} \in \bigwedge^{n-(k-1)} E$ et $\alpha_{i_k} \in G_k(E)$, nous pouvons développer l'opérateur d'intersection afin d'obtenir un élément de $\bigwedge^{n-k} E$. De plus le seul déterminant non nul apparaissant dans le développement provient de la permutation σ de $\mathfrak{S}_{n-k, 2k-n-1}(k-1)$ telle que $e_{\sigma(n-k+1)}, \dots, e_{\sigma(k-1)}$ engendrent l'espace complémentaire de celui engendré par $\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_{k-1}}$, c'est-à-dire $e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-1}}$ ². Nommons $e_{j_1}, \dots, e_{j_{n+1-k}}$ le complémentaire de $e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-1}}$.

$$\begin{aligned} &(\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_{k-1}}) \wedge \alpha_k \\ &= (-1)^{i_1 + \cdots + i_{k-1} - \frac{k(k-1)}{2}} \text{sign}(\sigma) |e_1, \dots, e_n|^{-1} |e_{j_1}, \dots, e_{j_{n+1-k}}, e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-1}}| e_{j_1} \vee \cdots \vee e_{j_{n+1-k}} \\ &= \alpha(s) \end{aligned}$$

\square

Corollaire 2

- i. $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_i = e^{-1} e_{i+1} \vee \cdots \vee e_n$
- ii. $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n = e^{-1}$

2. Nous savons que $\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_{k-1}} = \alpha(i_1, \dots, i_{k-1})$ par hypothèse de récurrence, donc nous savons que c'est un extenseur.

Démonstration : Découle directement de la remarque 17 et du théorème 6. \square

Définition 15 Nous définissons l'opérateur de Hodge $*$ comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \text{si } k \neq 0 \text{ et si } k \neq n \text{ alors} \\
 & : \bigwedge^k E \longrightarrow \bigwedge^{n-k} E \\
 a = \sum_{s \in S_k} a_s e(s) & \longmapsto \sum_{s \in S_k} a_s \alpha(s) \\
 & \text{si } k = 0 \\
 & : \mathbf{k} \longrightarrow \bigwedge^n E \\
 1 & \longmapsto \mathbf{e} \\
 & \text{si } k = n \\
 & : \bigwedge^n E \longrightarrow \mathbf{k} \\
 \mathbf{e} & \longmapsto 1
 \end{aligned}$$

Proposition 32 L'opérateur $*$ définit un isomorphisme d'algèbre entre $(\bigwedge^k E, \vee)$ et $(\bigwedge^k E, \wedge)$.

Démonstration : Cet isomorphisme se vérifie aisément avec l'ensemble des propriétés énoncées précédemment. \square

Théorème 7 Si nous avons $|e_1, \dots, e_n| = 1$ alors, pour tout $A \in \bigwedge^k E$ et $B \in \bigwedge^l E$,

- i. $*(A \vee B) = (*A) \wedge (*B)$ et $*(A \wedge B) = (*A) \vee (*B)$.
- ii. $__(*A) = (-1)^{k(n-k)} A$.

1.2 Relations géométriques de base

Dans cette section, nous établissons une correspondance entre des propriétés géométriques élémentaires et leurs écritures dans l'algèbre de Grassmann-Cayley. Nous montrons ainsi la simplicité d'utilisation de ces algèbres. Nous avons classé ces propriétés en trois groupes : les propriétés projectives, les propriétés affines et les propriétés euclidiennes.

1.2.1 Géométrie projective

Une propriété géométrique est dite projective si elle est invariante par les transformations du groupe projectif. De ce fait, elle est facile à transcrire sous forme de polynômes de déterminants (voir le premier théorème fondamental de [Wey39]).

Dans le plan

Lemme 8 (Colinéarité) *Soient les points A, B et C du plan, ils sont colinéaires si et seulement si*

$$|A, B, C| = 0$$

ou de manière équivalente, si et seulement si pour tout point E et F du plan tels que $|A, E, F| \neq 0$,

$$|A, B, E||A, C, F| - |A, B, F||A, C, E| = 0.$$

Démonstration : À partir de la relation de Cramer sur les déterminants :

$$|B, C, E|A - |A, C, E|B + |A, B, E|C - |A, B, C|E = 0$$

Il suffit de construire la séquence formée par le membre de gauche de l'égalité ci-dessus et de A et F , soit :

$$|B, C, E||A, A, F| - |A, C, E||B, A, F| + |A, B, E||C, A, F| - |A, B, C||E, A, F| = 0$$

d'où

$$|A, B, C||A, E, F| = |A, B, F||A, C, E| - |A, B, E||A, C, F|.$$

Si $|A, E, F| \neq 0$ alors $|ABC| = 0$ si et seulement si $|A, B, E||A, C, F| - |A, B, F||A, C, E| = 0$
□

Lemme 9 (Concurrence) *Soient les droites du plan (AB) , (CD) , (EF) . Elles sont concourantes si et seulement si :*

$$|A, B, E||C, D, F| + |A, B, F||C, D, E| = 0$$

Démonstration : Soit I le point d'intersection des droites (CD) et (EF) alors I vérifie³:

$$I = |C, D, F| E - |C, D, E| F.$$

Les droites (AB) , (CD) et (EF) sont concourantes si et seulement si le point I appartient à la droite (AB) , c'est-à-dire :

$$|A, B, I| = |A, B, E||C, D, F| - |A, B, F||C, D, E| = 0.$$

□

Lemme 10 (Birapport) *Le birapport des points A, B, C, D est égal à*

$$(A, B; C, D) = \frac{|A, D, E||B, C, E|}{|B, D, E||A, C, E|}$$

où E est un point quelconque du plan.

3. Il suffit de vérifier $I \vee C \vee D = 0$ et $I \vee E \vee F = 0$.

Pour tous les points P_1, P_2, P_3, P_4 du plan et pour tous les points A, B, C, D tels que A (resp. B) soit le point d'intersection des droites (P_1P_2) et (CD) , (resp. (P_3P_4) et (CD)), nous avons :

$$(A, B; C, D) = \frac{|P_1, P_2, C| |P_3, P_4, D|}{|P_1, P_2, D| |P_3, P_4, C|}$$

Lemme 11 (Conique) *Le point F est sur la conique définie par les points A, B, C, D, E si et seulement si*

$$|A, B, E| |A, D, F| |C, D, E| |C, B, F| - |A, D, E| |A, B, F| |C, B, E| |C, D, F| = 0.$$

Démonstration : La preuve de ce lemme utilise le théorème de Pascal : les six points A, B, C, D, E, F sont sur une même conique si et seulement si les points I, J, K , définis respectivement comme étant les points d'intersection des droites $(AC) \cup (BF)$, $(AE) \cup (FD)$, $(BE) \cup (CD)$, sont alignés.

Aussi, nous avons les règles de réécriture suivantes :

$$\begin{aligned} I &= |C, B, F| A - |A, B, F| C, \\ J &= |E, D, F| A - |A, D, F| E, \\ J &= |F, A, E| D - |D, A, E| F, \\ K &= |E, C, D| B - |B, C, D| E, \\ K &= |D, B, E| C - |C, B, E| D. \end{aligned}$$

De plus, $|I, J, K| = 0$. Si nous appliquons les règles de réécriture, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |I, J, K| &= |A, B, E| |A, D, F| |C, D, E| |C, B, F| \\ &\quad - |A, D, E| |A, B, F| |C, B, E| |C, D, F| = 0. \end{aligned}$$

□

Dans l'espace

Lemme 12 (Coplanarité) *Les points A, B, C, D sont sur un même plan si et seulement si :*

$$|A, B, C, D| = 0.$$

Or pour E, F, G, H des points quelconques de l'espace, nous avons

$$\begin{aligned} &|A, B, C, E| |D, F, G, H| - |A, B, C, F| |D, E, G, H| \\ &+ |A, B, C, G| |D, E, F, H| - |A, B, C, H| |D, E, F, G| = 0 \end{aligned}$$

Lemme 13 (Concurrence de plans) *Les plans $A \vee B \vee C$, $D \vee E \vee F$, $G \vee H \vee I$ et $J \vee K \vee L$ sont concourants si et seulement si :*

$$\begin{aligned} &|A, B, G, H| |C, D, E, F| |I, J, K, L| - |A, B, G, I| |C, D, E, F| |H, J, K, L| \\ &+ |A, B, H, I| |C, D, E, F| |G, J, K, L| - |A, C, G, H| |B, D, E, F| |I, J, K, L| \\ &+ |A, C, G, I| |B, D, E, F| |H, J, K, L| - |A, C, H, I| |B, D, E, F| |G, J, K, L| \\ &+ |B, C, G, H| |A, D, E, F| |I, J, K, L| - |B, C, G, I| |A, D, E, F| |H, J, K, L| \\ &+ |B, C, H, I| |A, D, E, F| |G, J, K, L| = 0 \end{aligned}$$

1.2.2 Géométrie affine

La géométrie affine peut être définie à partir de la géométrie projective par l'adjonction d'une forme linéaire \mathcal{H} définissant l'hyperplan à l'infini.

Dans le plan

Dans le cas plan, il est équivalent d'introduire deux points I et J pour définir la droite à l'infini.

Lemme 14 (Parallélisme) *Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si :*

$$|A,B,I||C,D,J| - |A,B,J||C,D,I| = 0$$

ou de manière équivalente :

$$|A,B,C||I,J,D| - |A,B,D||I,J,C| = 0,$$

ou

$$|A,B,C| \mathcal{H}(D) - |A,B,D| \mathcal{H}(C) = 0.$$

Démonstration : (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si (AB) , (CD) et (IJ) sont concourantes. \square

Lemme 15 (Milieu d'un segment) *Le point C est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si pour tout point E du plan :*

$$|A,I,J||B,C,E| + |B,I,J||A,C,E| = 0,$$

ou de manière équivalente :

$$\mathcal{H}(A) |B,C,E| + \mathcal{H}(B) |A,C,E| = 0.$$

Démonstration : Soit U le point d'intersection de la droite (AB) et de la droite à l'infini (IJ) , alors U s'écrit :

$$U = |B,I,J|A - |A,I,J|B.$$

C est le milieu du segment $[AB]$ $\iff (A,B; C,D) = -1$. Aussi pour E un point générique :

$$\frac{|U,A,E||C,B,E|}{|U,B,E||C,A,E|} = \frac{-|A,I,J||B,A,E||C,B,E|}{|B,I,J||A,B,E||C,A,E|} = -1.$$

\square

Dans l'espace

Lemme 16 (Parallélisme de plans) *Les plans définis par $A \vee B \vee C$ et $D \vee E \vee F$ sont parallèles si et seulement si :*

$$\begin{aligned} & |A, I, J, K|(\mathcal{H}(B)|C, D, E, F| - \mathcal{H}(C)|B, D, E, F|) \\ + & |B, I, J, K|(\mathcal{H}(C)|A, D, E, F| - \mathcal{H}(A)|C, D, E, F|) \\ + & |C, I, J, K|(\mathcal{H}(A)|B, D, E, F| - \mathcal{H}(B)|A, D, E, F|) = 0. \end{aligned}$$

Lemme 17 (Parallélisme de droites) *Les droites $A \vee B$ et $C \vee D$ sont parallèles si et seulement si :*

$$\begin{cases} \mathcal{H}(A)|B, C, D| - \mathcal{H}(B)|A, C, D| = 0 \\ |A, B, C, D| = 0 \end{cases}$$

1.2.3 Géométrie euclidienne

Comme le mentionne F. Klein dans son « Erlangen program » [Kle74], la géométrie euclidienne est une géométrie qui respecte un hyperplan \mathcal{H} (appelé hyperplan à l'infini) et une quadrique \mathcal{Q} qui définit la métrique. La géométrie euclidienne correspond à la géométrie affine à laquelle nous ajoutons une forme bilinéaire symétrique \mathcal{Q} .

Dans le plan

Dans le cas plan, nous appellerons I et J les points d'intersection de la quadrique \mathcal{Q} et de la droite à l'infini \mathcal{H} .

Lemme 18 (Angle de droites) *L'angle entre les droites (AB) et (CD) est égal à α si et seulement si :*

$$|A, B, I||C, D, J| - e^{2i\alpha}|A, B, J||C, D, I| = 0.$$

La démonstration de ce lemme repose sur la formule de Laguerre [Sam86] : $(\Pi_1, \Pi_2; I, J) = e^{2i\alpha}$ où Π_1 (resp. Π_2) est le point d'intersection de la droite à l'infini et de la droite (AB) (resp. (CD)).

Démonstration : En utilisant les règles de réécriture de Π_1 et Π_2 :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= |A, B, J|I - |A, B, I|J \\ \Pi_2 &= |C, D, J|I - |C, D, I|J \end{aligned}$$

et pour tout point E générique, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\Pi_1, \Pi_2; I, J) &= \frac{|J, \Pi_1, E||I, \Pi_2, E|}{|J, \Pi_2, E||I, \Pi_1, E|} \\ &= \frac{-|A, B, J||J, I, E||C, D, I||I, J, E|}{-|C, D, J||J, I, E||A, B, I||I, J, E|} \\ &= e^{2i\alpha} \end{aligned}$$

□

Lemme 19 (Cocyclicité) *Les points A, B, C, D sont sur un même cercle si et seulement si :*

$$|A, B, I||A, D, J||C, D, I||C, B, J| - |A, D, I||A, B, J||C, B, I||C, D, J| = 0.$$

Démonstration : Les points A, B, C, D sont sur un même cercle si et seulement si les points A, B, C, D, I, J sont sur une même conique, le résultat est alors immédiat avec le lemme 11. \square

Lemme 20 (Orthogonalité de droites) *Les droites $A \vee B$ et $C \vee D$ sont orthogonales si et seulement si :*

$$\begin{aligned} |A, B, C, D| &= 0 \\ \mathcal{H}(B)\mathcal{H}(D)\mathcal{Q}(A, C) - \mathcal{H}(B)\mathcal{H}(C)\mathcal{Q}(A, D) \\ - \mathcal{H}(A)\mathcal{H}(D)\mathcal{Q}(B, C) + \mathcal{H}(A)\mathcal{H}(C)\mathcal{Q}(B, D) &= 0 \end{aligned}$$

Dans l'espace

Lemme 21 (Orthogonalité de plans) *Les plans $A \vee B \vee C$ et $D \vee E \vee F$ sont orthogonaux si et seulement si :*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A)\mathcal{H}(D)\tilde{\mathcal{Q}}(B \vee C, E \vee F) - \mathcal{H}(A)\mathcal{H}(E)\tilde{\mathcal{Q}}(B \vee C, D \vee F) \\ + \mathcal{H}(A)\mathcal{H}(F)\tilde{\mathcal{Q}}(B \vee C, D \vee E) - \mathcal{H}(B)\mathcal{H}(D)\tilde{\mathcal{Q}}(A \vee C, E \vee F) \\ + \mathcal{H}(B)\mathcal{H}(E)\tilde{\mathcal{Q}}(A \vee C, D \vee F) - \mathcal{H}(B)\mathcal{H}(F)\tilde{\mathcal{Q}}(A \vee C, D \vee E) \\ + \mathcal{H}(C)\mathcal{H}(D)\tilde{\mathcal{Q}}(A \vee B, E \vee F) + \mathcal{H}(C)\mathcal{H}(E)\tilde{\mathcal{Q}}(A \vee B, D \vee F) \\ - \mathcal{H}(C)\mathcal{H}(F)\tilde{\mathcal{Q}}(A \vee B, D \vee E) &= 0 \end{aligned}$$

où

$$\tilde{\mathcal{Q}}(A \vee B, C \vee D) = \begin{vmatrix} \mathcal{Q}(A, C) & \mathcal{Q}(A, D) \\ \mathcal{Q}(B, C) & \mathcal{Q}(B, D) \end{vmatrix}.$$

Remarque 18 *Nous notons encore par algèbre des déterminants sur un ensemble de points \mathfrak{X} , l'ensemble des polynômes ayant pour variables les déterminants $|A_1, \dots, A_n|$, les formes linéaires \mathcal{B} et les produits scalaires $\mathcal{Q}(C, D)$, pour $A_i, B, C, D \in \mathfrak{X}$.*

Remarque 19 *Tous les théorèmes correspondent à des polynômes de déterminants qui sont homogènes par rapport aux points et de petit degré (inférieur ou égal à 4).*

Remarque 20 *Si nous travaillons dans un repère orthonormé, la notion d'orthogonalité définie par la dualité est équivalente à la notion d'orthogonalité définie par la quadrique \mathcal{Q} .*

Orthogonalité de droites: l_1 et l_2 sont orthogonales si et seulement si :

$$(l_1 \wedge \mathcal{H})^* \vee (l_2 \wedge \mathcal{H}) = 0.$$

Orthogonalité de plans: H_1 et H_2 sont orthogonaux si et seulement si :

$$H_1^* \vee H_2 = 0.$$

Chapitre 2

Équations d'étalonnage d'une caméra

Dans ce chapitre, nous allons chercher à exprimer des contraintes d'orthogonalité et de parallélisme de deux droites de la scène à travers une caméra. En d'autres termes, nous voulons traduire le fait que deux droites dans la photographie sont les images de deux droites orthogonales ou parallèles de la scène.

Dans tout ce qui suit, nous supposons posséder :

- Une caméra non calibrée de matrice de projection :

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = (P^1 \quad P^2 \quad P^3 \quad P^4).$$

- Un plan dans l'espace ne passant pas par le centre optique de la caméra

$$\Pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4).$$

- Quatre points du plan Π :

$$A, B, C, D$$

de coordonnées respectives $(A_1 : A_2 : A_3 : A_4)$, $(B_1 : B_2 : B_3 : B_4)$, $(C_1 : C_2 : C_3 : C_4)$ et $(D_1 : D_2 : D_3 : D_4)$.

- Les quatre images respectives de A, B, C, D par P notées :

$$a, b, c, d.$$

2.1 Le modèle projectif d'une caméra

Remarque 21 P_1, P_2, P_3 définissent des plans de l'espace.

Une caméra peut être vue comme une machine capable de mesurer les intensités lumineuses des rayons optiques, demi-droites joignant un point particulier C appelé le

centre optique de la caméra et n'importe quel point de l'espace, qui « frappe » le plan rétinien de celle-ci.

Remarque 22 C est l'unique point de l'espace vérifiant $PC = 0$ soit

$$PC = (P_1 \vee C : P_2 \vee C : P_3 \vee C)^t = (0 : 0 : 0)^t$$

Or $\forall H \in \mathbb{P}^2(E)$, $H \vee C = 0$ est équivalent à $C \in H$ d'où $C \in P_1$, $C \in P_2$ et $C \in P_3$, soit

$$C = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3.$$

Proposition 33 Pour m un point du plan rétinien de coordonnées $(x : y : z)$, le rayon optique qu'il définit est :

$$xP_2 \wedge P_3 + yP_3 \wedge P_1 + zP_1 \wedge P_2 \quad (2.1)$$

Démonstration : Soient $m = (x : y : z)$ un point du plan rétinien et le plan $xP_2 - yP_1$ ¹, nous pouvons remarquer que $C \vee (xP_2 - yP_1) = 0$ et que pour tout point M de la droite (Cm) :

$$\begin{aligned} m &= PM \\ &= (P_1 \vee M, P_2 \vee M, P_3 \vee M) \\ &= (x : y : z) \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} (xP_2 - yP_1) \vee M &= ((P_1 \vee M)P_2 - (P_2 \vee M)P_1) \vee M \\ &= (P_1 \vee M)(P_2 \vee M) - (P_2 \vee M)(P_1 \vee M) \\ &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que C et tout point M de la droite (Cm) appartiennent au plan $xP_2 - yP_1$. Par un raisonnement analogue, nous montrons que les points C et M appartiennent aux plans $yP_3 - zP_2$ et $zP_1 - xP_3$. Par conséquent, l'intersection de ces trois plans est la droite (Cm) . Or les intersections s'écrivent :

$$\begin{aligned} (xP_2 - yP_1) \wedge (yP_3 - zP_2) &= y(xP_2 \wedge P_3 + yP_3 \wedge P_1 + zP_1 \wedge P_2) \\ (xP_2 - yP_1) \wedge (zP_1 - xP_3) &= -x(xP_2 \wedge P_3 + yP_3 \wedge P_1 + zP_1 \wedge P_2) \\ (yP_3 - zP_2) \wedge (zP_1 - xP_3) &= z(xP_2 \wedge P_3 + yP_3 \wedge P_1 + zP_1 \wedge P_2) \end{aligned}$$

Et comme x, y, z ne peuvent pas être tous nuls, nous avons que :

$$C \vee m = (xP_2 \wedge P_3 + yP_3 \wedge P_1 + zP_1 \wedge P_2).$$

□

1. $xP_2 - yP_1$ est un élément du faisceau de plans engendré par P_1 et P_2 . Tous les plans du faisceau contiennent la droite d'intersection de P_1 et P_2 .

2.2 La matrice de projection inverse

Pour chaque plan Π de l'espace, il existe une homographie ² entre le plan rétinien et Π .

Proposition 34 Soit $P_{\Pi}^+ : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^3$ définie par

$$P_{\Pi}^+ = (P_2 \wedge P_3 \wedge \Pi, P_3 \wedge P_1 \wedge \Pi, P_1 \wedge P_2 \wedge \Pi).$$

Pour tout point m du plan rétinien, $P_{\Pi}^+(m)$ représente le vecteur de coordonnées du point d'intersection du rayon optique (Cm) et du plan Π .

Démonstration : En effet si $m = (x : y : z)$ alors

$$\begin{aligned} M &= P_{\Pi}^+(m) \\ &= (P_2 \wedge P_3 \wedge \Pi, P_3 \wedge P_1 \wedge \Pi, P_1 \wedge P_2 \wedge \Pi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= x(P_2 \wedge P_3 \wedge \Pi) + y(P_3 \wedge P_1 \wedge \Pi) + z(P_1 \wedge P_2 \wedge \Pi) \\ &= (x(P_2 \wedge P_3) + y(P_3 \wedge P_1) + z(P_1 \wedge P_2)) \wedge \Pi \end{aligned}$$

□

Proposition-définition 5 Avec les notations courantes, nous définissons

$$G = \begin{pmatrix} P^1 & P^2 & P^3 & P^4 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{pmatrix}$$

Si P est une matrice de projection dont le centre optique C n'appartient pas au plan Π , alors G est inversible.

Démonstration : En fait, G peut s'écrire sous la forme $(P_1 P_2 P_3 \Pi)^t$ d'où

$$\begin{aligned} \det(G) &= P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \Pi \\ &= C \wedge \Pi \neq 0 \text{ car } C \notin \Pi \end{aligned}$$

□

Proposition 35 Si $a = (a_1 : a_2 : a_3)^t \in \mathbb{P}^2$ alors les coordonnées de $A = P_{\Pi}^+(a)$ sont :

$$\left(\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} a & P^2 & P^3 & P^4 \\ 0 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cccc} P^1 & a & P^3 & P^4 \\ \pi_1 & 0 & \pi_3 & \pi_4 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cccc} P^1 & P^2 & a & P^4 \\ \pi_1 & \pi_2 & 0 & \pi_4 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cccc} P^1 & P^2 & P^3 & a \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_2 & 0 \end{array} \right| \end{array} \right)$$

2. Application projective inversible.

Démonstration : Si $A = P_{\Pi}^+(a)$ alors

$$\begin{cases} a = PA \\ \Pi \vee A = 0 \end{cases}$$

Ce qui s'écrit $GA = (a \ 0)^t$. Si Π ne passe pas par le centre optique de la caméra alors G est inversible et $A = G^{-1} (a \ 0)$. Soit, par la règle de Cramer :

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a & P^2 & P^3 & P^4 & P^1 & a & P^3 & P^4 \\ 0 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_1 & 0 & \pi_3 & \pi_4 \\ \hline P^1 & P^2 & a & P^4 & P^1 & P^2 & P^3 & a \\ \pi_1 & \pi_2 & 0 & \pi_4 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & 0 \end{array} \right) :$$

□

2.3 La condition d'orthogonalité

Dans ce qui suit, nous supposons que e_1, e_2, e_3, e_4 est une base de E , que les points du plan à l'infini H_{∞} sont les points dont la dernière coordonnée est nulle³. Nous définissons le produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} \forall (M = (X : Y : Z : T), M' = (X' : Y' : Z' : T')) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3, \\ \langle M, M' \rangle = XX' + YY' + ZZ' + TT'. \end{aligned}$$

Un point M de H_{∞} de coordonnées $(X : Y : Z : 0)^t$ appartient à la conique absolue si et seulement si $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$.

Proposition 36 Soient A, B, C, D quatre points, les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si :

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_4 & B_4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} C_1 & D_1 \\ C_4 & D_4 \end{array} \right| \\ & + \left| \begin{array}{cc} A_2 & B_2 \\ A_4 & B_4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} C_2 & D_2 \\ C_4 & D_4 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} A_3 & B_3 \\ A_4 & B_4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} C_3 & D_3 \\ C_4 & D_4 \end{array} \right| = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Démonstration : Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si les deux points à l'infini sont conjugués par rapport à la conique absolue, c'est-à-dire :

$$\langle (A \vee B) \wedge H_{\infty}, (C \vee D) \wedge H_{\infty} \rangle = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} & \langle (A \vee B) \wedge H_{\infty}, (C \vee D) \wedge H_{\infty} \rangle \\ & = \langle H_{\infty}(A)B - H_{\infty}(B)A, H_{\infty}(C)D - H_{\infty}(D)C \rangle \end{aligned}$$

3. $H_{\infty} = *e_4$.

$$\begin{aligned}
&= \langle A_4B - B_4A, C_4D - D_4C \rangle \\
&= (A_4B_1 - B_4A_1)(C_4D_1 - D_4C_1) + (A_4B_2 - B_4A_2)(C_4D_2 - D_4C_2) \\
&\quad + (A_4B_3 - B_4A_3)(C_4D_3 - D_4C_3) \\
&= \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_4 & D_4 \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_2 & D_2 \\ C_4 & D_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_3 & D_3 \\ C_4 & D_4 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

□

Lemme 22 Nous rappelons ici la règle de développement des doubles produits vectoriels :

$$(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u \quad (2.3)$$

et nous donnons une propriété dont nous nous servirons dans la suite :

$$\langle a, x \rangle \langle b, y \rangle - \langle b, x \rangle \langle a, y \rangle = \langle a \times b, x \times y \rangle \quad (2.4)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
&\langle a, x \rangle \langle b, y \rangle - \langle b, x \rangle \langle a, y \rangle \\
&= \langle a, \langle b, y \rangle x \rangle - \langle a, \langle b, x \rangle y \rangle \\
&= \langle a, \langle b, y \rangle x - \langle b, x \rangle y \rangle \\
&= \langle a, (y \times x) \times b \rangle \\
&= \det(x \times y, a, b) \\
&= \langle a \times b, x \times y \rangle
\end{aligned}$$

□

Proposition 37 Si a, b, c, d sont les images respectives de A, B, C, D par la matrice de projection P de la caméra, alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&(\pi_3 \langle u, P^2 \rangle - \pi_2 \langle u, P^3 \rangle)(\pi_3 \langle v, P^2 \rangle - \pi_2 \langle v, P^3 \rangle) \\
&+ (\pi_1 \langle u, P^3 \rangle - \pi_3 \langle u, P^1 \rangle)(\pi_1 \langle v, P^3 \rangle - \pi_3 \langle v, P^1 \rangle) \\
&+ (\pi_2 \langle u, P^1 \rangle - \pi_1 \langle u, P^2 \rangle)(\pi_2 \langle v, P^1 \rangle - \pi_1 \langle v, P^2 \rangle) = 0
\end{aligned} \quad (2.5)$$

où $u = a \times b$ et $v = c \times d$ sont les droites dans les images.

Démonstration : Le schéma de la démonstration est le suivant : à partir de l'équation 2.2, nous substituons les coordonnées des points à l'aide de la proposition 35. En développant cette dernière expression, nous obtenons le résultat annoncé.

Nous commençons par le premier terme :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & P^2 & P^3 & P^4 \\ 0 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & P^2 & P^3 & P^4 \\ 0 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} P^1 & P^2 & P^3 & a \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} P^1 & P^2 & P^3 & b \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Si nous développons les déterminants par la dernière ligne, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix} &= (\pi_2 \langle a, P^3 \times P^4 \rangle - \pi_3 \langle a, P^2 \times P^4 \rangle + \pi_4 \langle a, P^2 \times P^3 \rangle) \\ &\quad (-\pi_1 \langle P^2 \times P^3, b \rangle + \pi_2 \langle P^1 \times P^3, b \rangle - \pi_3 \langle P^1 \times P^2, b \rangle) \\ &\quad (\pi_2 \langle b, P^3 \times P^4 \rangle - \pi_3 \langle b, P^2 \times P^4 \rangle + \pi_4 \langle b, P^2 \times P^3 \rangle) \\ &\quad (-\pi_1 \langle P^2 \times P^3, a \rangle + \pi_2 \langle P^1 \times P^3, a \rangle - \pi_3 \langle P^1 \times P^2, a \rangle) \\ &= \langle a, \pi_2 P^3 \times P^4 - \pi_3 P^2 \times P^4 + \pi_4 P^2 \times P^3 \rangle \\ &\quad \langle b, -\pi_1 P^2 \times P^3 + \pi_2 P^1 \times P^3 - \pi_3 P^1 \times P^2 \rangle \\ &\quad - \langle b, \pi_2 P^3 \times P^4 - \pi_3 P^2 \times P^4 + \pi_4 P^2 \times P^3 \rangle \\ &\quad \langle a, -\pi_1 P^2 \times P^3 + \pi_2 P^1 \times P^3 - \pi_3 P^1 \times P^2 \rangle \end{aligned}$$

Par la relation (2.4) du lemme 22, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix} &= \langle a \times b, (\pi_2 P^3 \times P^4 - \pi_3 P^2 \times P^4 + \pi_4 P^2 \times P^3) \times (-\pi_1 P^2 \times P^3 + \pi_2 P^1 \times P^3 - \pi_3 P^1 \times P^2) \rangle \end{aligned}$$

Nous appelons la matrice

$$G = \begin{pmatrix} P^1 & P^2 & P^3 & P^4 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

et nous donnons plusieurs écritures du déterminant de G :

$$\begin{aligned} \det(G) &= -\pi_1 |P^2, P^3, P^4| + \pi_2 |P^1, P^3, P^4| - \pi_3 |P^1, P^2, P^4| + \pi_4 |P^1, P^2, P^3| \\ &= -\pi_1 |P^2, P^3, P^4| + \langle P^1, \pi_2 P^3 \times P^4 - \pi_3 P^2 \times P^4 + \pi_4 P^2 \times P^3 \rangle \\ &= \langle P^4, -\pi_1 P^2 \times P^3 + \pi_2 P^1 \times P^3 - \pi_4 P^1 \times P^2 \rangle + \pi_4 |P^1, P^2, P^3| \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 2.4, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\langle \pi_2 P^3 \times P^4 - \pi_3 P^2 \times P^4 + \pi_4 P^2 \times P^3 \times -\pi_1 P^2 \times P^3 + \pi_2 P^1 \times P^3 - \pi_4 P^1 \times P^2, P^1 \times P^4 \rangle \\ &= \langle \pi_2 P^3 \times P^4 - \pi_3 P^2 \times P^4 + \pi_4 P^2 \times P^3, P^1 \rangle \langle -\pi_1 P^2 \times P^3 + \pi_2 P^1 \times P^3 - \pi_4 P^1 \times P^2, P^4 \rangle \\ &\quad - \langle -\pi_1 P^2 \times P^3 + \pi_2 P^1 \times P^3 - \pi_4 P^1 \times P^2, P^1 \rangle \langle \pi_2 P^3 \times P^4 - \pi_3 P^2 \times P^4 + \pi_4 P^2 \times P^3, P^4 \rangle \\ &= (\det(G) + \pi_1 |P^2, P^3, P^4|)(\det(G) - \pi_4 |P^1, P^2, P^3|) + \pi_1 \pi_4 |P^1, P^2, P^3| |P^2, P^3, P^4| \\ &= \det(G)^2 + \det(G)(\pi_1 |P^2, P^3, P^4| - \pi_4 |P^1, P^2, P^3|). \end{aligned}$$

Or,

$$\pi_1|P^2, P^3, P^4| - \pi_4|P^1, P^2, P^3| = \pi_2|P^1, P^3, P^4| - \pi_3|P^1, P^2, P^4| - \det(G)$$

d'où,

$$\begin{aligned} & \langle (\pi_2 P^3 \times P^4 - \pi_3 P^2 \times P^4 + \pi_4 P^2 \times P^3) \times (-\pi_1 P^2 \times P^3 + \pi_2 P^1 \times P^3 - \pi_4 P^1 \times P^2), P^1 \times P^4 \rangle \\ & = \det(G) \langle P^1 \times P^4, \pi_3 P^2 - \pi_2 P^3 \rangle. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix} = \det(G) (\pi_3 \langle u, P^2 \rangle - \pi_2 \langle u, P^3 \rangle).$$

Nous déduisons par permutation circulaire les autres déterminants et ainsi nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} & \det(G)^2 ((\pi_3 \langle u, P^2 \rangle - \pi_2 \langle u, P^3 \rangle) (\pi_3 \langle v, P^2 \rangle - \pi_2 \langle v, P^3 \rangle) \\ & + (\pi_1 \langle u, P^3 \rangle - \pi_3 \langle u, P^1 \rangle) (\pi_1 \langle v, P^3 \rangle - \pi_3 \langle v, P^1 \rangle) \\ & + (\pi_2 \langle u, P^1 \rangle - \pi_1 \langle u, P^2 \rangle) (\pi_2 \langle v, P^1 \rangle - \pi_1 \langle v, P^2 \rangle)) = 0. \end{aligned}$$

□

2.4 Les contraintes de parallélisme

Proposition 38 Soient A, B, C, D quatre points n'appartenant pas au plan de l'infini, les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si :

$$H_\infty(C)A \vee B \vee D - H_\infty(D)A \vee B \vee C = 0 \quad (2.7)$$

Démonstration : Deux droites n'appartenant pas au plan à l'infini sont parallèles si et seulement si elles se coupent en un point du plan à l'infini, ou bien de manière équivalente, le point à l'infini⁴ de l'une appartient à l'autre. Cette dernière propriété s'écrit naturellement dans l'algèbre de Grassmann-Cayley comme suit :

$$\begin{aligned} & (A \vee B) \vee (H_\infty \wedge (C \vee D)) = 0 \\ \iff & A \vee B \vee (H_\infty(C)D - H_\infty(D)C) = 0 \\ \iff & H_\infty(C)A \vee B \vee D - H_\infty(D)A \vee B \vee C = 0 \end{aligned}$$

□

Proposition 39 Soient a, b, c, d les images respectives de A, B, C, D , les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si :

$$\langle \pi_1(P^3 \times P^2) + \pi_2(P^1 \times P^3) - \pi_3(P^1 \times P^2), (a \times b) \times (c \times d) \rangle = 0 \quad (2.8)$$

où $(a \times b) \times (c \times d)$ désigne le point d'intersection des droites images dans la photographie.

4. c'est-à-dire l'unique point d'intersection de H_∞ et de la droite.

Démonstration : Comme l'équation 2.7 est équivalente à

$$\forall I, |H_\infty(C)D - H_\infty(D)C, A, B, I| = 0,$$

que l'application G est inversible et que le produit des déterminants est égal au déterminant du produit, nous avons :

$$\det(G)|H_\infty(C)D - H_\infty(D)C, A, B, I| = \begin{vmatrix} H_\infty(C)d - H_\infty(D)c & a & b & (i_1, i_2, i_3)^t \\ 0 & 0 & 0 & i_4 \end{vmatrix}$$

où $i = \{i_1, \dots, i_4\}$ est l'image de I par l'application G . Si I n'appartient pas à Π alors $i_4 \neq 0$ et en développant le déterminant par la dernière ligne, notre équation devient :

$$|H_\infty(C)d - H_\infty(D)c \quad a \quad b| = 0.$$

Comme $H_\infty = *e_4$, par la proposition 35, nous avons :

$$\begin{aligned} H_\infty(C) &= C_4 = \begin{vmatrix} P^1 & P^2 & P^3 & c \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & 0 \end{vmatrix} \\ H_\infty(D) &= D_4 = \begin{vmatrix} P^1 & P^2 & P^3 & d \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Or en développant ces déterminants 4x4 par la dernière ligne, le premier vecteur v devient :

$$\begin{aligned} v &= H_\infty(C)d - H_\infty(D)c = \\ &\quad \langle -\pi_1(P^2 \times P^3) + \pi_2(P^1 \times P^3) - \pi_3(P^1 \times P^2), c \rangle d \\ &\quad - \langle -\pi_1(P^2 \times P^3) + \pi_2(P^1 \times P^3) - \pi_3(P^1 \times P^2), d \rangle c \\ &= (c \times d) \times (-\pi_1(P^2 \times P^3) + \pi_2(P^1 \times P^3) - \pi_3(P^1 \times P^2)) \end{aligned}$$

et nous sommes en mesure de conclure en nommant $K = -\pi_1(P^2 \times P^3) + \pi_2(P^1 \times P^3) - \pi_3(P^1 \times P^2)$ que

$$\begin{aligned} |H_\infty(C)d - H_\infty(D)c, a, b| &= |(c \times d) \times K, a, b| \\ &= \langle (c \times d) \times K, a \times b \rangle \\ &= |c \times d, K, a \times b| \\ &= \langle K, (a \times b) \times (c \times d) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Chapitre 3

Étalonnage d'une caméra

Dans ce chapitre, nous allons présenter une technique d'étalonnage d'une caméra à partir d'une photographie et d'une carte (du type plan urbain) de la scène. La carte peut être assimilée à une photographie d'une caméra avec un à l'infini. La direction verticale correspond à celle des rayons optiques. Par conséquent, une droite verticale (resp. un segment vertical) a pour image dans la carte un point. Nous avons choisi l'axe des y pour définir la verticalité. La matrice de projection de la carte est la suivante :

$$P_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'étalonnage d'un système photographie-carte consiste à estimer la matrice de projection de la caméra associée à la photographie. En plus des correspondances entre les points de la carte et les points de la photographie, nous considérons des correspondances entre des points de la cartes et des segments dans la photographie qui sont les images de segments verticaux ainsi que des propriétés géométriques comme le parallélisme et l'orthogonalité.

3.1 Estimation de P^2

Qu'est-ce que la géométrie épipolaire dans le cas d'une photographie et d'une carte? C'est la correspondance qui existe entre les points et les droites. Tout point de la carte correspond à l'image d'une droite verticale dans la photographie. L'épipole est définie comme l'intersection de toutes les droites épipolaires. L'épipole de la carte dans la photographie est l'intersection de toutes les images des droites verticales.

Proposition 40 *L'épipole de la carte dans la photographie a pour coordonnées P^2 .*

Démonstration : Pour tout point $m_c = (m_1 : m_3 : m_4)^t$ de la carte considérons le point M de l'espace tel que :

$$P_c M = m_c.$$

Le M appartient à la droite verticale¹ passant par $(m_1 : 0 : m_3 : m_4)^t$ et par $(m_1 : 1 : m_3 : m_4)^t$. L'image de cette droite par la caméra est la droite épipolaire du point m_c et elle s'écrit naturellement :

$$(M_1P^1 + M_3P^3 + M_4P^4) \vee (M_1P^1 + P^2 + M_3P^3 + M_4P^4).$$

Nous vérifions aisément en développant par linéarité que P^2 appartient à cette droite, c'est-à-dire :

$$P^2 \vee (M_1P^1 + M_3P^3 + M_4P^4) \vee (M_1P^1 + P^2 + M_3P^3 + M_4P^4) = 0.$$

Donc toutes les droites épipolaires passent par le point P^2 et P^2 est donc l'épipole. \square

Nous appelons par abus de langage « une droite verticale » (resp. « un segment vertical ») dans la photographie, une droite (resp. un segment) qui est l'image d'une droite verticale (resp d'un segment vertical) de l'espace. Comme nous l'avons montré dans la démonstration de la proposition précédente, P^2 appartient à toutes les droites verticales de la photographie. Son estimation est donc relativement simple puisqu'il suffit de résoudre un système linéaire homogène. Nous imposons $\|P^2\| = 1$ ce qui nous fixe le facteur d'échelle de la matrice P . Dans la pratique, nous avons plus de deux droites verticales (resp. segments verticaux) dans la photographie. Par conséquent, nous cherchons P^2 comme la solution aux moindres carrés d'un système linéaire.

3.2 Estimation de la matrice fondamentale

Proposition 41

$$F = \begin{pmatrix} P^1 \times P^2 & P^3 \times P^2 & P^4 \times P^2 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Démonstration : Soit $M = (M_1 : Y : M_3 : M_4)$ un point de l'espace, ses images respectives dans la carte et dans la photographie sont données par :

$$\begin{aligned} m_c &= (M_1 : M_3 : M_4), \\ m_p &= PM = M_1P^1 + YP^2 + M_3P^3 + M_4P^4. \end{aligned}$$

La matrice fondamentale de la carte dans la photographie doit vérifier :

$$m_p^t F m_c = 0. \quad (3.2)$$

Or,

$$F m_c = M_1P^1 \vee P^2 + M_3P^3 \vee P^2 + M_4P^4 \vee P^2.$$

Il s'agit alors de vérifier² que :

$$(M_1P^1 + YP^2 + M_3P^3 + M_4P^4) \vee (M_1P^1 \vee P^2 + M_3P^3 \vee P^2 + M_4P^4 \vee P^2) = 0.$$

1. Cette droite correspond au rayon optique passant par m_c pour la carte.

2. Il suffit de développer par linéarité.

□

Remarque 23 F est clairement de rang strictement plus petit que 3 puisque l'épipole, P^2 est un noyau à gauche de F .

Proposition 42 Les parallélismes dans les plans verticaux nous permettent une estimation linéaire des deux premières colonnes de F .

Démonstration : Si $\Pi = (\pi_1 : \pi_2 : \pi_3 : \pi_4)$ est un plan vertical et que $a \times b$ et $c \times d$ sont les images de deux droites parallèles de Π alors en remarquant que la verticalité de Π entraîne $\pi_2 = 0$ et en remplaçant π_2 par 0 dans la contrainte de parallélisme 2.8, on obtient :

$$\langle \pi_1 P^3 \times P^2 - \pi_3 P^1 \times P^2, (a \times b) \times (c \times d) \rangle = 0 \quad (3.3)$$

où $(a \times b) \times (c \times d)$ est le point d'intersection des droites images dans la photographie et π_1, π_3 sont directement accessibles dans la carte, puisqu'il s'agit des deux premières coordonnées de la projection du plan Π dans la carte. □

Corollaire 3 Si $a \times b$ et $c \times d$ sont les images de droites parallèles dans un plan vertical Π , alors :

$$\langle \pi_1 F^2 - \pi_3 F^1, (a \times b) \times (c \times d) \rangle = 0.$$

Démonstration : Voir la proposition 41 et l'équation 3.3 de la démonstration de la proposition précédente. □

La connaissance de l'épipole P^2 simplifie grandement l'estimation de la matrice fondamentale F . En effet, la contrainte de rang de F s'exprime directement avec P^2 en considérant f une matrice 3×3 et en écrivant $F = [P^2]_{\times} f$ (où $[P^2]_{\times}$ est la matrice de pré-produit vectoriel par P^2) qui est une matrice de rang 2. Comme dans le cas classique, les appariements de points nous donnent des contraintes linéaires homogènes sur f auxquelles nous pouvons ajouter les contraintes linéaires homogènes dues aux images de droites parallèles dans des plans verticaux (voir corollaire 3). La matrice f est déterminée à un facteur près comme une solution non triviale du système linéaire formé par l'ensemble ces contraintes. Dans la pratique, ce système est largement sur-déterminé et f est calculer comme une solution aux moindres carrés avec $\|f\| = 1$. Nous obtenons alors \tilde{F} une évaluation à un facteur près de F .

3.3 Estimation de la matrice de projection à quatre paramètres

Dans notre processus d'étalonnage nous avons déjà estimé P^2 et une matrice fondamentale \tilde{F} . Or nous avons vu dans la proposition 41 que :

$$F = \begin{pmatrix} P^1 \times P^2 & P^3 \times P^2 & P^4 \times P^2 \end{pmatrix}$$

De par ce fait, nous allons donner une paramétrisation de la matrice P ne dépendant que de 4 paramètres.

Nous commençons par définir λ comme le facteur entre F et \tilde{F} :

$$F = \lambda \tilde{F}.$$

Proposition 43 *Il existe P_0^1, P_0^3, P_0^4 trois vecteurs et quatre réels $\lambda \neq 0, \mu_1, \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$P = \begin{pmatrix} \lambda P_0^1 + \mu_1 P^2 & P^2 & \lambda P_0^3 + \mu_3 P^2 & \lambda P_0^4 + \mu_4 P^2 \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Soit pour $i \in \{1, 3, 4\}$:

$$l(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ i - 1 & \text{si } i \neq 1. \end{cases} \iff l(1) = 1, l(3) = 2, l(4) = 3$$

Pour tout $i \in \{1, 3, 4\}$, nous définissons v^i un vecteur unitaire colinéaire à la projection parallèlement à P^2 de P^i sur le plan orthogonal à P^2 . Comme $P^i = \nu_i v^i + \mu_i P^2$ et que $F^{l(i)} = P^i \times P^2$, nous remarquons que $F^{l(i)}$ et $v^i \times P^2$ sont colinéaires et :

$$\begin{aligned} F^{l(i)} &= \langle F^{l(i)}, v^i \times P^2 \rangle v^i \times P^2 = \det(F^{l(i)}, v^i, P^2) v^i \times P^2 = \|F^{l(i)}\| v^i \times P^2 \\ \tilde{F}^{l(i)} &= \langle \tilde{F}^{l(i)}, v^i \times P^2 \rangle v^i \times P^2 = \det(\tilde{F}^{l(i)}, v^i, P^2) v^i \times P^2 = \|\tilde{F}^{l(i)}\| v^i \times P^2 \end{aligned}$$

Nous définissons $P_0^i = \det(\tilde{F}^{l(i)}, v^i, P^2) v^i$ et pour $P^i = \nu_i P_0^i + \mu_i P^2$ nous avons :

$$P^i \times P^2 = \nu_i P_0^i \times P^2 = \nu_i \|\tilde{F}^{l(i)}\| P_0^i \times P^2.$$

Or,

$$P^i \times P^2 = F^{l(i)} = \|F^{l(i)}\| v^i \times P^2,$$

il en résulte que :

$$\nu_i = \frac{\|F^{l(i)}\|}{\|\tilde{F}^{l(i)}\|} = \lambda.$$

□

3.4 Estimation de la matrice de projection à deux paramètres

Nous reprenons les notations du chapitre précédent, Π est un plan, A, B, C, D sont quatre points de Π et a, b, c, d sont les images respectives de A, B, C, D par une caméra de matrice de projection P .

Proposition 44 *Soient (ab) et (cd) deux droites de la photographie. Elles sont les images respectives de (AB) et (CD) de la scène. Si (CD) est une verticale, si (AB) et (CD) appartiennent au plan vertical Π , et si ce sont deux droites orthogonales alors :*

$$\langle v, \pi_3 P_0^1 - \pi_1 P_0^3 \rangle (\lambda \langle u, \pi_3 P_0^1 - \pi_1 P_0^3 \rangle + (\pi_3 \mu_1 - \pi_1 \mu_3) \langle u, P^2 \rangle) = 0 \quad (3.4)$$

avec $u = a \times b$ et $v = c \times d$.

Démonstration : Comme Π est un plan vertical, $\pi_2 = 0$ et comme v est une droite de direction verticale, $\langle v, P^2 \rangle = 0$. Par substitution dans la contrainte d'orthogonalité 2.5, nous obtenons :

$$(\pi_3 \langle v, P^1 \rangle - \pi_1 \langle v, P^3 \rangle)(\pi_3 \langle u, P^1 \rangle - \pi_1 \langle u, P^3 \rangle) = 0$$

En remplaçant $P^1 = \lambda P_0^1 + \mu_1 P^2$ et $P^3 = \lambda P_0^3 + \mu_3 P^2$ dans l'équation ci-dessus, nous obtenons :

$$\lambda \langle v, \pi_3 P_0^1 - \pi_1 P_0^3 \rangle (\lambda \langle u, \pi_3 P_0^1 - \pi_1 P_0^3 \rangle) + (\pi_3 \mu_1 - \pi_1 \mu_3) \langle u, P^2 \rangle = 0$$

Comme $\lambda \neq 0$ nous retrouvons le résultat annoncé. \square

Proposition 45 *Soient (ab) et (cd) deux droites de la photographie. Elles sont les images respectives de (AB) et (CD) de la scène. Si (AB) et (CD) sont dans un plan horizontal Π et sont orthogonales alors*

$$\begin{aligned} & \lambda^2 (\langle u, P_0^1 \rangle \langle v, P_0^1 \rangle + \langle u, P_0^3 \rangle \langle v, P_0^3 \rangle) \\ & + \lambda (\mu_1 (\langle u, P^2 \rangle \langle v, P_0^1 \rangle + \langle u, P_0^1 \rangle \langle v, P^2 \rangle) + \mu_3 (\langle u, P_0^3 \rangle \langle v, P^2 \rangle + \langle u, P^2 \rangle \langle v, P_0^3 \rangle)) \\ & + (\mu_1^2 + \mu_3^2) \langle u, P^2 \rangle \langle v, P^2 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Démonstration : Comme Π est un plan horizontal alors $\pi_1 = \pi_3 = 0$ et $\pi_2 \neq 0$. En substituant dans l'équation 2.5, nous avons :

$$\langle u, P^1 \rangle \langle v, P^1 \rangle + \langle u, P^3 \rangle \langle v, P^3 \rangle = 0. \quad (3.6)$$

Nous obtenons le résultat annoncé en utilisant la linéarité du produit scalaire. \square

Proposition 46 *Soient (ab) et (cd) deux droites de la photographie. Elles sont les images respectives de (AB) et (CD) de la scène. Si (AB) et (CD) sont dans un plan horizontal Π et sont parallèles alors :*

$$\langle \lambda(P_0^1 \times P_0^3) + ((\mu_3 P_0^1 - \mu_1 P_0^3) \times P^2), (a \times b) \times (c \times d) \rangle = 0. \quad (3.7)$$

Démonstration : Si Π est un plan horizontal alors $\pi_1 = \pi_3 = 0$ et $\pi_2 \neq 0$ d'où l'équation 2.8 devient :

$$\pi_2 \langle P^1 \times P^3, (a \times b) \times (c \times d) \rangle = 0.$$

En remplaçant $P^1 = \lambda P_0^1 + \mu_1 P^2$ et $P^3 = \lambda P_0^3 + \mu_3 P^2$,

$$\langle \lambda(P_0^1 \times P_0^3) + ((\mu_3 P_0^1 - \mu_1 P_0^3) \times P^2), (a \times b) \times (c \times d) \rangle = 0.$$

\square

Nous avons donc deux sortes de contrainte géométrique qui nous permettent d'obtenir une estimation à un facteur près des valeurs de λ, μ_1, μ_3 par la résolution au sens des

moindres carrés d'un système linéaire³ homogène. Les contraintes d'orthogonalité (3.5) peuvent nous servir pour un raffinement non linéaire de nos solutions. Nous obtenons alors la matrice P avec seulement deux paramètres λ et μ_4 :

$$P = \begin{pmatrix} \lambda P_0^1 + \lambda \mu_1 P^2 & P^2 & \lambda P_0^3 + \lambda \mu_3 P^2 & \lambda P_0^4 + \mu_4 P^2 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Pour obtenir une estimation complète de la matrice de projection, il suffit de se fixer une origine ainsi qu'un facteur d'échelle sur l'axe vertical. Par conséquent, la connaissance de la hauteur de deux points dans la scène est suffisante pour déterminer complètement la matrice de projection.

3. Comme $\lambda = 0$ n'est pas une solution admissible, les équations (3.4) (3.7) sont linéaires en λ, μ_1, μ_3 .

Chapitre 4

Étalonnage multi-caméras

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à plusieurs photographies comme dans l'auto-étalonnage classique. D'autre part, comme dans le chapitre précédent, nous considérons en plus une carte de la scène et la connaissance de contraintes géométriques élémentaires¹.

L'effort essentiel de ce chapitre est la prise en compte des appariements entre les différentes photographies. Nous verrons que cette information s'insère simplement dans le schéma de l'algorithme d'étalonnage photographie-carte.

Nous étudierons uniquement le cas de trois photographies pour des raisons de clarté dans les notations. La généralisation à $n > 3$ photographies ne devrait pas être problématique. Pourquoi pas deux? Le cas de deux photographies est plus simple et comme nous le verrons il ne fait pas apparaître toutes les relations algébriques sur les différents paramètres considérés.

Dans ce chapitre, A, B, C sont trois caméras et P_A, P_B, P_C sont leur matrice de projection.

4.1 Estimation des matrices P à 4 paramètres globaux

Pour commencer l'étalonnage des trois caméras, nous procédons exactement comme dans le chapitre précédent en travaillant séparément pour chaque caméra. Pour une photographie, nous savons estimer la deuxième colonne de la matrice de projection, c'est-à-dire P_K^2 , $K \in \{A, B, C\}$ (cf. 3.1) avec $\|P_K^2\| = 1$, $K \in \{A, B, C\}$.

En utilisant les correspondances de points et de segments entre une photographie et le plan, et en utilisant les parallélismes de droites dans des plans verticaux (cf. 3.2), nous pouvons estimer à un facteur près la matrice fondamentale entre la photographie et la carte.

La dernière étape que nous pouvons exécuter séparément est l'estimation des matrices P_k , $K \in \{A, B, C\}$ (cf. 3.3) en tenant compte de la structure particulière des

1. La plupart peuvent être déduites directement par la vue des photographies.

matrices fondamentales photographie-carte. Nous obtenons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} P_A &= \begin{pmatrix} l_{A,2}P_{A,0}^1 + l_{A,1}P_A^2 & P_A^2 & l_{A,2}P_{A,0}^3 + l_{A,3}P_A^2 & l_{A,2}P_{A,0}^4 + l_{A,4}P_A^2 \end{pmatrix} \\ P_B &= \begin{pmatrix} l_{B,2}P_{B,0}^1 + l_{B,1}P_B^2 & P_B^2 & l_{B,2}P_{B,0}^3 + l_{B,3}P_B^2 & l_{B,2}P_{B,0}^4 + l_{B,4}P_B^2 \end{pmatrix} \\ P_C &= \begin{pmatrix} l_{C,2}P_{C,0}^1 + l_{C,1}P_C^2 & P_C^2 & l_{C,2}P_{C,0}^3 + l_{C,3}P_C^2 & l_{C,2}P_{C,0}^4 + l_{C,4}P_C^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Maintenant, nous allons expliciter les relations provenant des matrices fondamentales entre les photographies. Ces relations vont nous permettre de réduire l'ensemble des douze paramètres définissant les matrices de projection à quatre paramètres.

4.1.1 Expression de la matrice fondamentale à partir des matrices de projection

Ce travail est développé dans les références [FM95a, FM95b, FM95c]. Soient $P = (P_1, P_2, P_3)^t$ et $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)^t$ deux matrices de projection, $m_P = (x_P, y_P, z_P)^t$, $m_Q = (x_Q, y_Q, z_Q)^t$ deux points projectifs des plans rétinien des caméras P et Q respectivement.

Proposition 47 *Les points m_P et m_Q sont en correspondance si et seulement si le système en M :*

$$\begin{cases} x_P \langle P_2, M \rangle - y_P \langle P_1, M \rangle &= 0 \\ y_P \langle P_3, M \rangle - z_P \langle P_2, M \rangle &= 0 \\ x_Q \langle Q_2, M \rangle - y_Q \langle Q_1, M \rangle &= 0 \\ y_Q \langle Q_3, M \rangle - z_Q \langle Q_2, M \rangle &= 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

est de rang ≤ 3 .

Démonstration : m_P est en correspondance avec m_Q si et seulement s'il existe M point projectif de l'espace tel que les images de M par les caméras P et Q soient les points m_P et m_Q respectivement. Ceci s'écrit algébriquement de la manière suivante :

$$\begin{cases} m_P \text{ colinéaire } PM &\iff m_P \times PM = 0 \\ m_Q \text{ colinéaire } QM &\iff m_Q \times QM = 0 \end{cases}$$

En utilisant le fait que $PM = (\langle P_1, M \rangle, \langle P_2, M \rangle, \langle P_3, M \rangle)^t$ et que $QM = (\langle Q_1, M \rangle, \langle Q_2, M \rangle, \langle Q_3, M \rangle)^t$ et en développant puis en regroupant les deux dernières équations de chaque produit vectoriel, nous obtenons le système 4.1. Les deux points m_P et m_Q sont en correspondance si et seulement si il existe un point M de l'espace solution de ce système, c'est-à-dire si et seulement si le système est de rang ≤ 3 . \square

Proposition 48

$$F_{P,Q} = \begin{pmatrix} |P_2, P_3, Q_2, Q_3| & -|P_1, P_3, Q_2, Q_3| & |P_1, P_2, Q_2, Q_3| \\ -|P_2, P_3, Q_1, Q_3| & |P_1, P_3, Q_1, Q_3| & -|P_1, P_2, Q_1, Q_3| \\ |P_2, P_3, Q_1, Q_2| & -|P_1, P_3, Q_1, Q_2| & |P_1, P_2, Q_1, Q_2| \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Démonstration : La condition de rang du système 4.1 est équivalente au déterminant du système 4.1 égal à zéro. Notons :

$$B(m_P, m_Q) = \frac{1}{y_P y_Q} \begin{vmatrix} x_P P_2 - y_P P_1 \\ y_P P_3 - z_P P_2 \\ x_Q Q_2 - y_Q Q_1 \\ y_Q Q_3 - z_Q Q_2 \end{vmatrix}$$

En remarquant que $P_i, i \in \{1,2,3\}$ et $Q_i, i \in \{1,2,3\}$ sont des plans de l'espace projectif, nous avons :

$$B(m_P, m_Q) = \frac{1}{y_P y_Q} (x_P P_2 - y_P P_1) \wedge (y_P P_3 - z_P P_2) \wedge (x_Q Q_2 - y_Q Q_1) \wedge (y_Q Q_3 - z_Q Q_2)$$

et en développant par linéarité dans l'algèbre extérieure, nous obtenons :

$$\begin{aligned} B(m_P, m_Q) = & x_P x_Q |P_2, P_3, Q_2, Q_3| - x_P y_Q |P_2, P_3, Q_1, Q_3| + x_P z_Q |P_2, P_3, Q_1, Q_2| \\ & - y_P x_Q |P_1, P_3, Q_2, Q_3| + y_P y_Q |P_1, P_3, Q_1, Q_3| - y_P z_Q |P_1, P_3, Q_1, Q_2| \\ & + z_P x_Q |P_1, P_2, Q_2, Q_3| - z_P y_Q |P_1, P_2, Q_1, Q_3| + z_P z_Q |P_1, P_2, Q_1, Q_2| \end{aligned}$$

qui est une forme bilinéaire de matrice $F_{P,Q}$. \square

4.1.2 Contraintes d'appariement pour deux caméras

Considérons deux matrices de projection de la même structure que nos matrices P_A, P_B, P_C :

$$\begin{aligned} P &= (l_2 P^1 + l_1 P^2, P^2, l_2 P^3 + l_3 P^2, l_2 P^4 + l_4 P^2) \\ Q &= (k_2 Q^1 + k_1 Q^2, Q^2, k_2 Q^3 + k_3 Q^2, k_2 Q^4 + k_4 Q^2) \end{aligned}$$

Grâce à la proposition 48, nous pouvons exprimer la matrice fondamentale par des déterminants d'ordre 4 obtenues à partir des lignes des matrices de projection. Ces déterminants ont une structure commune. Ils sont formés de deux lignes issues de la matrice P et de deux lignes issues de la matrice Q . Comme toutes les lignes de la matrice P (respectivement de la matrice Q) ont le même support par rapport aux variables $l_i, i \in \{1,2,3,4\}$ (respectivement $k_i, i \in \{1,2,3,4\}$), nous pouvons étudier la structure d'un seul déterminant :

$$|P_1, P_2, Q_1, Q_2| = \begin{vmatrix} l_2 P_1^1 + l_1 P_1^2 & P_1^2 & l_2 P_1^3 + l_3 P_1^2 & l_2 P_1^4 + l_4 P_1^2 \\ l_2 P_2^1 + l_1 P_2^2 & P_2^2 & l_2 P_2^3 + l_3 P_2^2 & l_2 P_2^4 + l_4 P_2^2 \\ k_2 Q_1^1 + k_1 Q_1^2 & Q_1^2 & k_2 Q_1^3 + k_3 Q_1^2 & k_2 Q_1^4 + k_4 Q_1^2 \\ k_2 Q_2^1 + k_1 Q_2^2 & Q_2^2 & k_2 Q_2^3 + k_3 Q_2^2 & k_2 Q_2^4 + k_4 Q_2^2 \end{vmatrix}$$

En ajoutant à la première colonne du déterminant l_1 fois la deuxième, à la troisième colonne l_3 fois la deuxième et à la quatrième l_4 fois la deuxième, nous obtenons :

$$|P_1, P_2, Q_1, Q_2| =$$

$$\begin{vmatrix} l_2 P_1^1 & P_1^2 & l_2 P_1^3 & l_2 P_1^4 \\ l_2 P_2^1 & P_2^2 & l_2 P_2^3 & l_2 P_2^4 \\ k_2 Q_1^1 + (k_1 - l_1) Q_1^2 & Q_1^2 & k_2 Q_1^3 + (k_3 - l_3) Q_1^2 & k_2 Q_1^4 + (k_4 - l_4) Q_1^2 \\ k_2 Q_2^1 + (k_1 - l_1) Q_2^2 & Q_2^2 & k_2 Q_2^3 + (k_3 - l_3) Q_2^2 & k_2 Q_2^4 + (k_4 - l_4) Q_2^2 \end{vmatrix}$$

Sous cette forme, il apparaît clairement que $|P_1, P_2, Q_1, Q_2|$ est un polynôme homogène en $l_2, k_2, k_1 - l_1, k_3 - l_3, k_4 - l_4$ de degré 3. De plus, en développant par la deuxième colonne, l_2 apparaît comme un facteur commun. En utilisant la symétrie de ce déterminant entre les l_i et k_i pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ et entre P et Q , nous en déduisons que k_2 est aussi un facteur commun.

Comme $|P_1, P_2, Q_1, Q_2|$ est de degré 3 et possède $l_2 k_2$ comme facteur, nous en déduisons que la matrice fondamentale $F_{P,Q}$ est le produit du terme $l_2 k_2$ par une matrice linéaire homogène en $l_2, k_2, k_1 - l_1, k_3 - l_3, k_4 - l_4$.

Proposition 49 *Les appariements de points entre les deux photographies induisent des contraintes linéaires sur les paramètres des matrices de projection².*

Démonstration : Immédiate puisque $F_{P,Q} = l_2 k_2 F'$ avec F' une matrice linéaire homogène en $l_2, k_2, k_1 - l_1, k_3 - l_3, k_4 - l_4$. \square

4.1.3 Contraintes d'appariement pour trois caméras

Comme nous venons de le voir, nous pouvons exprimer les matrices fondamentales entre nos caméras A, B, C de manière linéaire par rapport aux paramètres suivant :

$$\begin{aligned} F_{P_A, P_B} &= \text{matrice linéaire}(l_{A,2}, l_{B,2}, l_{A,1} - l_{B,1}, l_{A,3} - l_{B,3}, l_{A,4} - l_{B,4}) \\ F_{P_B, P_C} &= \text{matrice linéaire}(l_{B,2}, l_{C,2}, l_{B,1} - l_{C,1}, l_{B,3} - l_{C,3}, l_{B,4} - l_{C,4}) \\ F_{P_C, P_A} &= \text{matrice linéaire}(l_{C,2}, l_{A,2}, l_{C,1} - l_{A,1}, l_{C,3} - l_{A,3}, l_{C,4} - l_{A,4}) \end{aligned}$$

L'estimation séparée de ces matrices fondamentales n'est pas envisageable en raison des relations³ entre les trois derniers paramètres, $\forall i \in \{1, 3, 4\}$:

$$(l_{A,i} - l_{B,i}) + (l_{B,i} - l_{C,i}) + (l_{C,i} - l_{A,i}) = 0.$$

Par conséquent, nous estimons l'ensemble des matrices fondamentales à partir d'un seul système homogène de paramètres :

$$l_{A,2}, l_{B,2}, l_{C,2}, l_{A,1} - l_{B,1}, l_{B,1} - l_{C,1}, l_{A,3} - l_{B,3}, l_{B,3} - l_{C,3}, l_{A,4} - l_{B,4}, l_{B,4} - l_{C,4}.$$

Dans la pratique, le système linéaire homogène est largement sur-déterminé, nous le résolvons par une méthode des moindres carrés. Nous appelons le vecteur v une estimation de ces paramètres telle que $l_{A,2} = 1$:

$$v = (1, v_{B,2}, v_{C,2}, v_{AB,1}, v_{BC,1}, v_{AB,3}, v_{BC,3}, v_{AB,4}, v_{BC,4})$$

2. Les matrices P doivent être paramétrées par quatre inconnues comme dans 3.3.

3. Ce sont les fameuses relations que nous n'avons pas dans le cas de deux caméras.

alors en prenant $l^2 = l_{A,2}$, $l^1 = \frac{l_{A,1}}{l_{A,2}}$, $l^3 = \frac{l_{A,3}}{l_{A,2}}$ et $l^4 = \frac{l_{A,4}}{l_{A,2}}$, les matrices de projection se réécrivent :

$$\begin{aligned} P_A &= (l^2 P_{A,0}^1 + l^2 l^1 P_A^2, P_A^2, l^2 P_{A,0}^3 + l^2 l^3 P_A^2, l^2 P_{A,0}^4 + l^2 l^4 P_A^2) \\ P_B &= (l^2 v_{B,2} P_{B,0}^1 + l^2 (l^1 - v_{AB,1}) P_B^2, P_B^2, \\ &\quad l^2 v_{B,2} P_{B,0}^3 + l^2 (l^3 - v_{AB,3}) P_B^2, l^2 v_{B,2} P_{B,0}^4 + l^2 (l^4 - v_{AB,4}) P_B^2) \\ P_C &= (l^2 v_{C,2} P_{C,0}^1 + l^2 (l^1 - v_{AB,1} - v_{BC,1}) P_C^2, P_C^2, \\ &\quad l^2 v_{C,2} P_{C,0}^3 + l^2 (l^3 - v_{AB,3} - v_{BC,3}) P_C^2, l^2 v_{C,2} P_{C,0}^4 + l^2 (l^4 - v_{AB,4} - v_{BC,4}) P_C^2) \end{aligned}$$

Ces matrices dépendent uniquement des paramètres l_1, l_2, l_3, l_4 .

4.2 Estimation des matrices P à 2 paramètres globaux

Comme dans le chapitre précédent, les contraintes géométriques vont nous permettre d'estimer deux des quatre paramètres.

4.2.1 Expression des contraintes géométriques

Ces contraintes ressemblent beaucoup aux contraintes décrites dans le chapitre précédent. Ce sont simplement des généralisations⁴ pour des matrices de projection un peu plus complexes.

Soit la matrice de projection générique paramétrée par quatre paramètres l_1, l_2, l_3, l_4 (cf. 3.3) :

$$P = (x_2 l_2 P_0^1 + l_2 (l_1 - x_1) P^2, P^2, x_2 l_2 P_0^3 + l_2 (l_3 - x_3) P^2, x_2 l_2 P_0^4 + l_2 (l_4 - x_4) P^2) \quad (4.3)$$

Remarque 24 *Il apparaît une façon différente de paramétrer qui est plus souple pour la gestion des facteurs d'échelle. Mais la vraie différence provient de l'apparition de constantes numériques x_1, x_2, x_3, x_4 ⁵. Or ces constantes ne changent pas les monômes intervenant dans les contraintes, ce qui fait que nous avons des équations similaires.*

Contraintes d'orthogonalité Nous commençons par rappeler la contrainte (2.5) traduisant que les droites u et v sont les images de deux droites orthogonales du plan Π , décrite dans la proposition 37 :

$$\begin{aligned} &(\pi_3 \langle u, P^2 \rangle - \pi_2 \langle u, P^3 \rangle)(\pi_3 \langle v, P^2 \rangle - \pi_2 \langle v, P^3 \rangle) \\ &+ (\pi_1 \langle u, P^3 \rangle - \pi_3 \langle u, P^1 \rangle)(\pi_1 \langle v, P^3 \rangle - \pi_3 \langle v, P^1 \rangle) \\ &+ (\pi_2 \langle u, P^1 \rangle - \pi_1 \langle u, P^2 \rangle)(\pi_2 \langle v, P^1 \rangle - \pi_1 \langle v, P^2 \rangle) = 0 \end{aligned}$$

4. Nous avons préféré commencer par décrire les contraintes simples qui sont dans la logique de l'algorithme plutôt que de décrire les contraintes plus génériques et moins claires et intuitives qui nous auraient alors servis dans ce chapitre.

5. x_1, x_2, x_3, x_4 vaut $0, 1, 0, 0$ pour la caméra A , vaut $v_{AB,1}, v_{B,2}, v_{AB,3}, v_{AB,4}$, etc.

Proposition 50 *Si le plan Π est vertical et que la droite qui a pour image v est de direction verticale alors la contrainte devient :*

$$\begin{cases} \langle v, \pi_1 P_0^3 - \pi_3 P_0^1 \rangle \neq 0 \\ (\pi_1 l_3 - \pi_3 l_1) \langle u, P^2 \rangle + x_2 \langle u, \pi_1 P_0^3 - \pi_3 P_0^1 \rangle - (\pi_1 x_3 - \pi_3 x_1) \langle u, P^2 \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Proposition 51 *Si le plan Π est horizontal alors la contrainte devient :*

$$\begin{aligned} & ((l_3 - x_3)^2 + (l_1 - x_1)^2) u_2 v_2 + x_2^2 (u_3 v_3 + u_1 v_1) \\ & + x_2 (l_3 - x_3) (u_3 v_2 + u_2 v_3) + x_2 (l_1 - x_1) (u_1 v_2 + u_2 v_1) = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

où $u_1 = \langle u, P_0^1 \rangle$, $u_2 = \langle u, P^2 \rangle$, $u_3 = \langle u, P_0^3 \rangle$ et $v_1 = \langle v, P_0^1 \rangle$, $v_2 = \langle v, P^2 \rangle$, $v_3 = \langle v, P_0^3 \rangle$.

Contraintes de parallélisme Nous commençons par rappeler la contrainte (2.8) traduisant que les droites u et v sont les images de deux droites parallèles du plan Π , décrite dans la proposition 39 :

$$\langle \pi_1 P^3 \times P^2 + \pi_2 P^1 \times P^3 - \pi_3 P^1 \times P^2, u \times v \rangle = 0$$

Proposition 52 *Si Π est un plan horizontal alors la contrainte devient :*

$$\langle x_2 P_0^1 \times P_0^3 + (l_3 - x_3) P_0^1 \times P^2 + (l_1 - x_1) P_0^3 \times P^2, u \times v \rangle = 0 \quad (4.6)$$

4.2.2 Estimation des deux paramètres

Comme pour le cas des estimations séparées, nous utilisons les contraintes d'orthogonalité (4.4), (4.5) et de parallélisme (4.6) afin d'estimer les paramètres l_1 et l_3 . Les contraintes (4.4) et (4.6) sont linéaires et homogènes par rapport à l_1, l_2, l_3 . Dans la pratique, ces contraintes forment un système sur-déterminé, nous pouvons donc le résoudre par une méthode des moindres carrés. En normalisant la solution avec une première coordonnée à 1, nous récupérons une évaluation v_1 de l_1 et v_3 de l_3 . Les contraintes du type (4.5) peuvent alors nous servir pour un raffinement non linéaire de nos estimations.

Les matrices complètes s'obtiennent en se fixant une origine et un facteur d'échelle sur l'axe vertical, c'est-à-dire que la connaissance de deux points d'altitude différente même dans des photographies différentes est suffisante pour obtenir un étalonnage euclidien des caméras.

Chapitre 5

Applications

Dans ce chapitre, nous proposons les premiers résultats obtenus par une implantation en MAPLE puis en C++ des méthodes d'étalonnage décrites dans les chapitres 3 et 4.

Ces implantations sont encore en cours d'amélioration, nous préciserons par la suite les points qui n'ont pas encore été développés.

Pour commencer, nous proposons une série d'exemples simulés à partir de photographies d'une mire d'étalonnage. Nous présentons les formats des fichiers d'entrées ainsi que les primitives et les contraintes géométriques choisies.

Nous terminerons ce chapitre et cette partie par l'étalonnage de la scène réelle de Londres.

5.1 Étalonnage de caméras dans une scène virtuelle

Nous voulons étalonner trois caméras à partir de trois photographies, d'une carte et d'une description géométrique d'une même scène. Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, nous sommes particulièrement intéressés par des scènes riches en propriétés géométriques faisant intervenir une notion de verticalité (la direction normale à la carte), comme les scènes architecturales. L'exemple d'école est celui de la mire comme le montre la figure 5.1.

5.1.1 Les fichiers

Nous avons choisi pour des raisons de souplesse de définir un fichier par photographie, un fichier pour la carte et un fichier pour la géométrie.

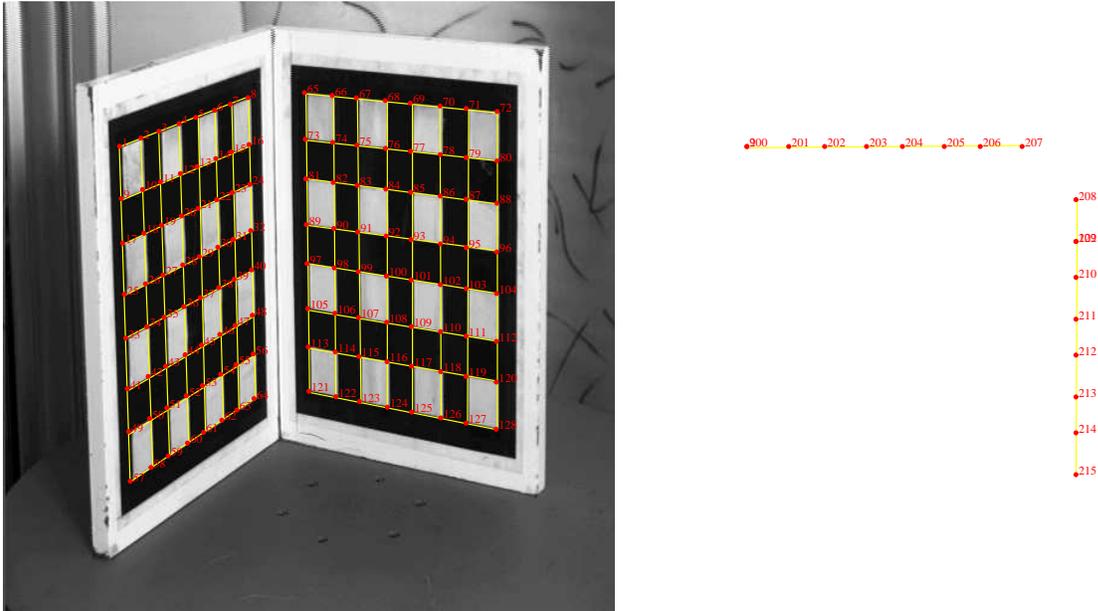


FIG. 5.1 – Mire d'étalonnage avec ses primitives géométriques et sa carte

Les fichiers de points

mire.1.data	mire.2.data	mire.3.data
1 139.222 32.194	1 98.323 122.015	1 119.327 183.462
2 157.544 31.219	2 116.327 115.204	2 134.571 168.955
3 172.906 30.402	3 131.245 109.560	3 147.194 156.943
4 190.442 29.469	4 148.080 103.191	4 161.429 143.397
5 205.152 28.687	5 162.046 97.907	5 173.230 132.168
⋮	⋮	⋮
126 361.554 260.624	126 366.806 349.328	126 344.172 374.352
127 376.157 265.283	127 387.956 353.615	127 364.625 384.678
128 393.581 270.842	128 413.091 358.710	128 388.775 396.871

Les nombres situés devant les coordonnées des points servent à l'appariement des points. En fait un nombre n est associé à chaque point tridimensionnel extrait de la scène. Si ce point est visible dans la photographie P alors le fichier $P.data$ contient la

ligne suivante :

$n \ x \ y$

où x et y sont les coordonnées de l'image du point n .

Le fichier des points du plan

mire.3.data		
9	10	10
122	285	89.5
200	10	10
201	45	10
202	75	10
:	:	:
213	285	219.5
214	285	249.5
215	285	284.5

Selon le même principe que pour les fichiers de points des photographies, les premiers nombres de chaque ligne désignent des objets tridimensionnels, par exemple, 9 et 122 désignent des points, alors que nous le verrons avec le fichier de description géométrique, les nombres 200, 201, . . . , 215 désignent des segments verticaux.

Le fichier de description géométrique

Voir la table 5.1.

Toujours dans la même optique, les premiers numéros désignent soit un objet tridimensionnel, soit une contrainte géométrique. Le caractère placé dans la deuxième colonne désigne la nature de l'objet ou de la contrainte. Voici la liste des caractères acceptés ainsi que leurs sens avec la définition des arguments suivants :

- Le caractère **V** désigne des segments verticaux, il est directement suivi de la liste des numéros des points lui appartenant;
- Le caractère **S** désigne des segments horizontaux, il est utilisé de la même façon que pour les segment verticaux;
- Le caractère **H** désigne des hyperplans verticaux, c'est-à-dire des droites (en fait des segments) dans la carte, il est utilisé de la même façon que pour les segments verticaux;
- Le caractère **o** désigne des contraintes d'orthogonalité dans des plans verticaux, le troisième élément de la ligne correspond au numéro du plan vertical, le quatrième désigne un segment vertical et le cinquième un segment tel que les deux segments soient orthogonaux;
- Le caractère **p** désigne des contraintes de parallélisme dans des plans verticaux, le troisième élément de la ligne correspond au numéro d'un plan vertical et les deux derniers éléments désignent des droites parallèles.

```

Geom.data
200 V 1 9 17 25 33 41 49 57
201 V 2 10 18 26 34 42 50 58
  ⋮
215 V 72 80 88 96 104 112 120 128

300 S 1 2 3 4 5 6 7 8
301 S 9 10 11 12 13 14 15 16
  ⋮
315 S 121 122 123 124 125 126 127 128

400 H 200 201 202 203 204 205 206 207
401 H 208 209 210 211 212 213 214 215

500 o 400 200 300
501 o 400 200 301
  ⋮
663 o 401 215 315

700 p 400 300 301
700 p 400 300 301
  ⋮
713 p 401 308 315

800 0 300 308
801 0 301 309
  ⋮
807 0 307 315

```

TAB. 5.1 – *Fichier de description géométrique de la scène formée par une mire d'éta-
lonnage*

- Le caractère 0 désigne des contraintes d’orthogonalité dans des plans horizontaux, les deux éléments suivants désignent des droites orthogonales.
- Le caractère P, qui n’est pas présent dans la scène de la mire, désigne des contraintes de parallélisme dans des plans horizontaux, les deux éléments suivants désignent des droites parallèles.

Pour terminer les entrées de notre méthode, il faut fournir en plus la « hauteur » de deux points de la scène.

5.1.2 Étalonnage des caméras

L’implantation MAPLE suit exactement la méthode décrite en effectuant à chaque étape une résolution des systèmes linéaires aux moindres carrés par une décomposition en valeurs singulières de la matrice du système.

Dans un cas synthétique avec uniquement le bruit machine¹, nous retrouvons bien les matrices de projection de chacune des caméras. Malheureusement, rapidement, c’est-à-dire pour des déviations standards nettement inférieures aux erreurs commises lors de situations réelles, cette méthode souffre du bruit que nous ajoutons sur les points extraits dans les photographies (voir les résultats de la table 5.2).

Afin de palier ce problème, nous avons fait une implantation de cette méthode en C++. L’avantage provient du fait que nous pouvons à chaque étape raffiner nos résultats par la minimisation² d’un critère géométrique (en termes de distances et de surfaces).

Malgré cet effort, les résultats ne sont pas franchement meilleurs pour au moins deux raisons : l’instabilité du calcul de la deuxième colonne des matrices de projection (cf. 3.1) qui joue pourtant un rôle déterminant pour la suite des calculs et la difficulté pour écrire des critères géométriques de grandeur comparable entre des propriétés de nature différente.

Une nouvelle implantation est en cours de développement, nous envisageons d’améliorer nos critères géométriques et de faire après chaque étape une relaxation de tous les paramètres.

5.2 Étalonnage de caméras dans des scènes réelles

Les photographies de la scène de Londres (voir figure 1.3) sont difficiles à étalonner car le photographe est situé loin de la scène et il a utilisé un zoom de fort grossissement, ce qui réduit considérablement la profondeur de champs et « écrase » la notion de profondeur. De par ce fait, les points extraits des photographies sont essentiellement situés sur les premières façades des immeubles et par conséquent il sont pratiquement coplanaires. Les algorithmes classiques d’étalonnage donnent des résultats complètement erronés, par exemple TOTALCALIB positionne le photographe en plein milieu de la Tamise ou dans la prise de vue elle-même (voir figure 5.2). De plus, les droites épipolaires dans les photographies sont de direction verticale et doivent être pratiquement parallèles.

1. C’est-à-dire les erreurs d’arrondi sur les doubles.

2. Nous utilisons la librairie **mini** de ROBOTVIS qui est basé sur MINPACK.

bruit	matrice P			
th	$5.7748e^{-1}$	$-2.0859e^{-2}$	$-3.7136e^{-1}$	$1.3922e^2$
	$-1.7146e^{-2}$	$9.9612e^{-1}$	$-6.6743e^{-2}$	$3.2194e^1$
	$3.4282e^{-4}$	$8.0413e^{-5}$	$3.5613e^{-4}$	1
0	$5.7741e^{-1}$	$-2.0856e^{-3}$	$3.7132e^{-1}$	$1.2972e^2$
	$-1.7144e^{-2}$	$9.9599e^{-1}$	$6.6735e^{-2}$	$3.1694e^1$
	$3.4278e^{-4}$	$8.0402e^{-05}$	$-3.5608e^{-4}$	1
0.0001	$5.7741e^{-1}$	$-2.0853e^{-3}$	$3.7131e^{-1}$	$1.2972e^2$
	$-1.7143e^{-2}$	$9.9599e^{-1}$	$6.6734e^{-2}$	$3.1694e^1$
	$3.4278e^{-4}$	$8.0403e^{-5}$	$-3.5609e^{-4}$	1
0.0005	$5.7740e^{-1}$	$-2.0865e^{-3}$	$3.7131e^{-1}$	$1.2972e^2$
	$-1.7146e^{-2}$	$9.9599e^{-1}$	$6.6735e^{-2}$	$3.1694e^1$
	$3.4275e^{-4}$	$8.0397e^{-5}$	$-3.5608e^{-4}$	1
0.001	$5.7742e^{-1}$	$-2.0823e^{-3}$	$3.7133e^{-1}$	$1.2972e^2$
	$-1.7140e^{-2}$	$9.9600e^{-1}$	$6.6739e^{-2}$	$3.1693e^1$
	$3.4281e^{-4}$	$8.0417e^{-5}$	$-3.5606e^{-4}$	1
0.005	$5.7738e^{-1}$	$-2.0639e^{-3}$	$3.7134e^{-1}$	$1.2972e^2$
	$-1.7152e^{-2}$	$9.9598e^{-1}$	$6.6744e^{-2}$	$3.1697e^1$
	$3.4268e^{-4}$	$8.0490e^{-5}$	$-3.5598e^{-4}$	1
0.01	$5.7743e^{-1}$	$-2.1458e^{-3}$	$3.7149e^{-1}$	$1.2971e^2$
	$-1.7119e^{-2}$	$9.9598e^{-1}$	$6.6785e^{-2}$	$3.1688e^1$
	$3.4290e^{-4}$	$8.0114e^{-5}$	$-3.5573e^{-4}$	1
0.05	$5.7703e^{-1}$	$-2.3791e^{-3}$	$3.7105e^{-1}$	$1.2978e^2$
	$-1.7136e^{-2}$	$9.9579e^{-1}$	$6.6538e^{-2}$	$3.1683e^1$
	$3.4186e^{-4}$	$7.9901e^{-5}$	$-3.5641e^{-4}$	1
0.1	$5.7905e^{-1}$	$-1.9073e^{-3}$	$3.7416e^{-1}$	$1.2966e^2$
	$-1.6584e^{-2}$	$9.9801e^{-1}$	$6.7901e^{-2}$	$3.1569e^1$
	$3.4835e^{-4}$	$8.1429e^{-5}$	$-3.5086e^{-4}$	1
0.5	$5.7333e^{-1}$	$-4.4886e^{-5}$	$3.6283e^{-1}$	$1.2958e^2$
	$-2.0587e^{-2}$	$9.9028e^{-1}$	$6.3648e^{-2}$	$3.2220e^1$
	$3.2548e^{-4}$	$8.4994e^{-5}$	$-3.7316e^{-4}$	1
1	$5.7511e^{-1}$	$-3.6979e^{-3}$	$3.8443e^{-1}$	$1.2970e^2$
	$-1.7347e^{-2}$	$9.9185e^{-1}$	$7.6739e^{-2}$	$3.2396e^1$
	$3.3227e^{-4}$	$7.8719e^{-5}$	$-3.1583e^{-4}$	1
1.5	$5.7351e^{-1}$	$1.9886e^{-3}$	$3.8270e^{-1}$	$1.3000e^2$
	$-2.4284e^{-2}$	$9.9968e^{-1}$	$7.7436e^{-2}$	$3.1962e^1$
	$3.2405e^{-4}$	$1.0578e^{-4}$	$-3.1781e^{-4}$	1
2	$5.5504e^{-1}$	$-2.8221e^{-2}$	$3.4660e^{-1}$	$1.3094e^2$
	$-3.2140e^{-2}$	$9.5229e^{-1}$	$6.5614e^{-2}$	$3.4095e^1$
	$2.6792e^{-4}$	$-1.5443e^{-5}$	$-3.7795e^{-4}$	1

TAB. 5.2 – Étalonnage de la première caméra par l'implantation MAPLE de la méthode multi-caméras

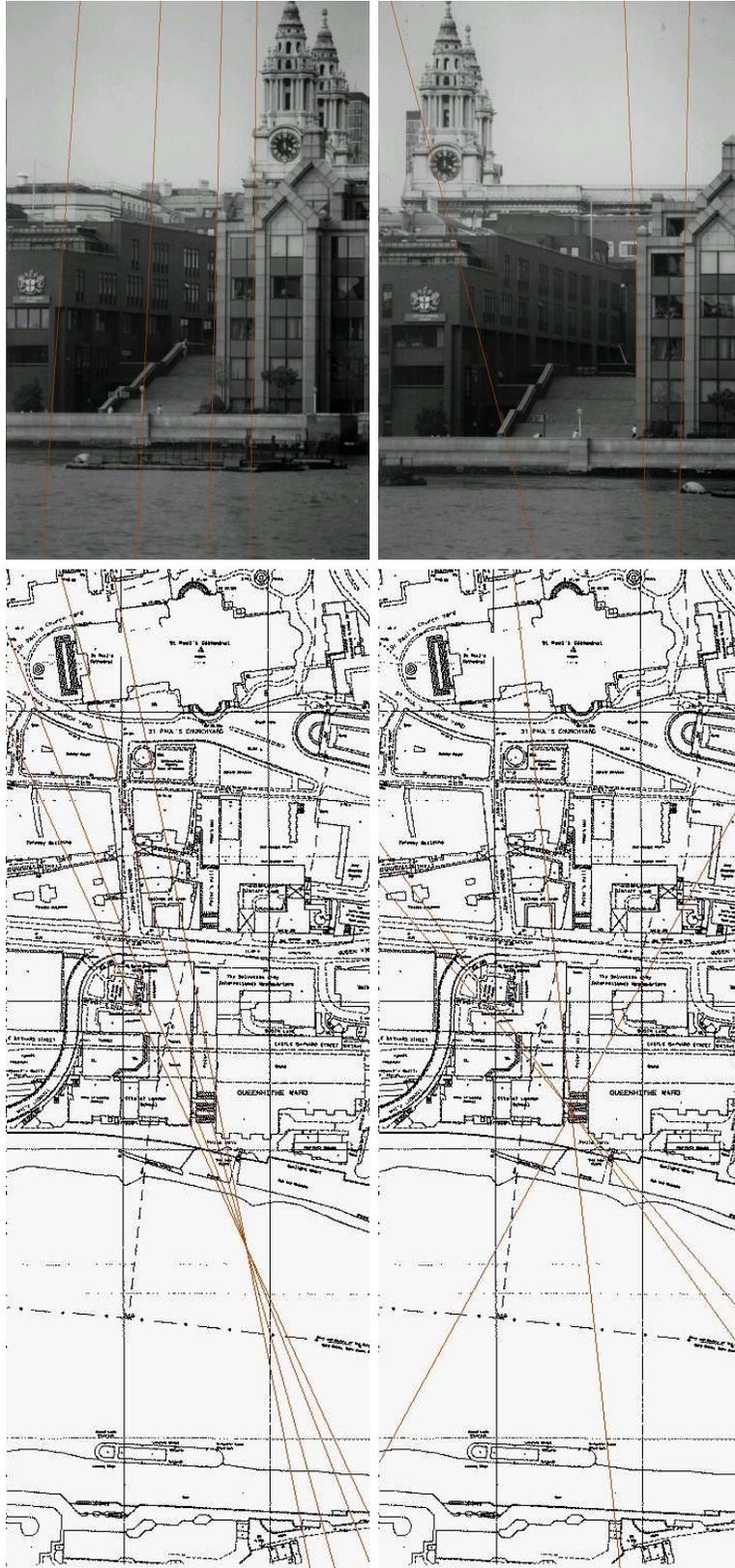


FIG. 5.2 – Un étalonnage avec TOTALCALIB, le photographe se situe à l'intersection des droites épipolaires dans la carte

Nous proposons d'utiliser l'algorithme décrit dans le chapitre 3 séparément sur chaque photographie. Pour cela, nous avons extrait dans les photographies un ensemble de primitives et de contraintes géométriques (voir 5.3).



FIG. 5.3 – *La géométrie considérée*

Cet algorithme ne donne pas un résultat parfait, mais nous pouvons voir sur les figures 5.4 et 5.5 que le photographe est du bon côté de la Tamise. Nous pouvons aussi observer que les droites épipolaires dans les photographies sont bien de direction verticale et pratiquement parallèles.

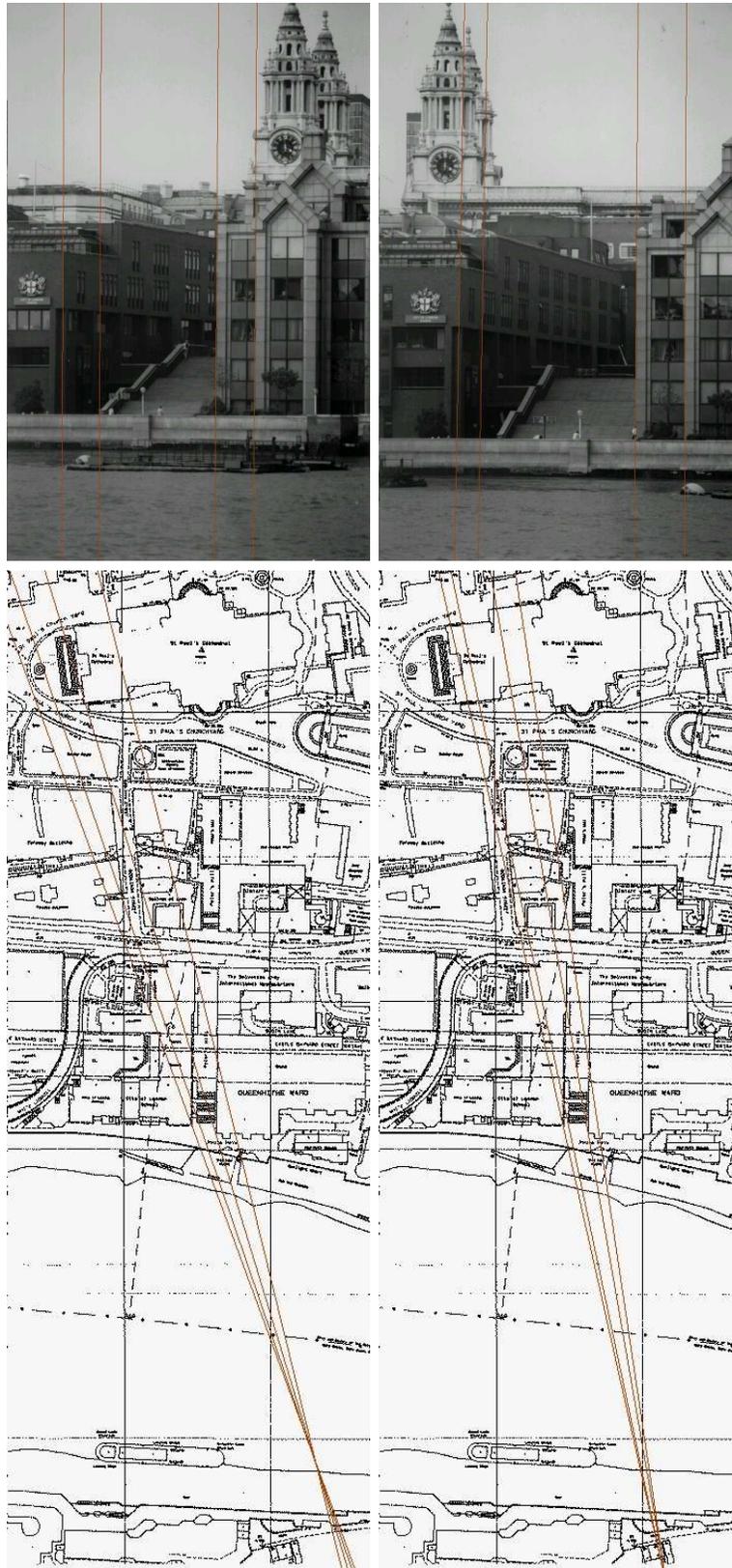


FIG. 5.4 – Un étalonnage avec contraintes géométriques

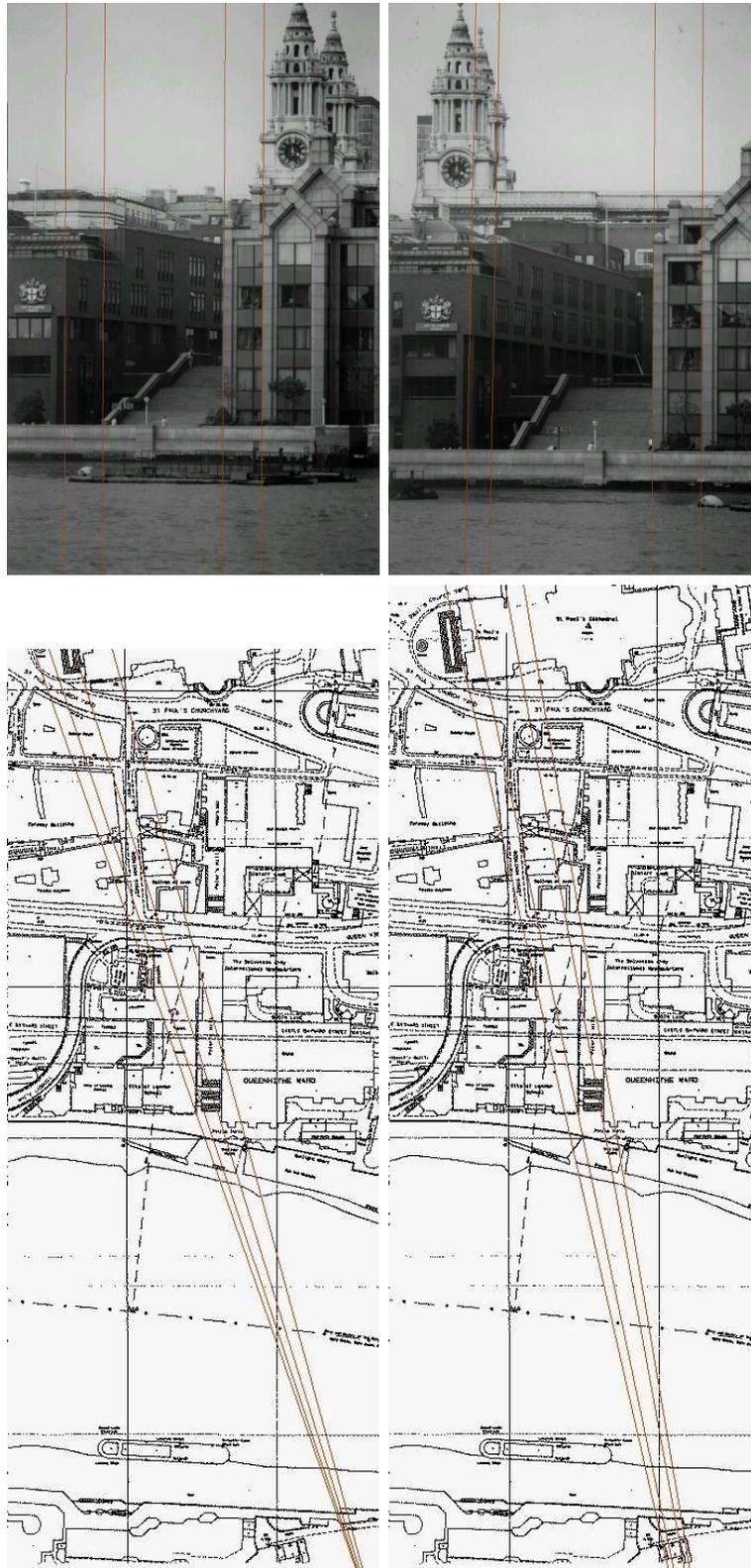


FIG. 5.5 – Un étalonnage avec contraintes géométriques et en positionnant correctement l'horloge de la cathédrale

Troisième partie

Ajustement de modèles

Notre but dans cette dernière partie est également de montrer une interaction possible entre le numérique et le symbolique, mais à un niveau différent des deux premières parties. Nous travaillerons avec un modèle tridimensionnel approché de la scène et une description géométrique (symbolique) de celle-ci.

L'utilisation de contraintes géométriques vérifiées par la scène dans les processus d'étalonnage et de reconstruction n'est pas nouveau [KM89b, KM89a], mais peu de travaux ont été réalisés. Cependant, récemment, nous avons différentes approches comme celle de Debevec-Taylor-Malik [DTM96] et celle de Poulin-Quimet-Frasson [POF98]. La première nécessite une décomposition de la scène en volumes élémentaires comme des parallélépipèdes, des prismes, des pyramides, . . . Une gestion et un assemblage de ces volumes sont faits de manière à ajuster les paramètres des volumes à partir des projections dans les photographies. Cette approche souffre du fait qu'il peut être difficile de décomposer la scène en volumes élémentaires. La deuxième approche nécessite la donnée de contraintes géométriques élémentaires vérifiées par la scène comme le parallélisme, l'orthogonalité et l'incidence. Ces contraintes sont directement utilisées dans un processus de minimisation. Une telle utilisation n'assure pas parfaitement la géométrie et soulève le problème de l'importance des contraintes géométriques face aux contraintes d'appariement.

L'approche symbolique que nous proposons consiste à construire, à partir de la description géométrique, un modèle articulé de la scène. Ce modèle devra bien sûr satisfaire toutes les contraintes et aussi posséder le nombre minimal de degrés de liberté.

Avec le modèle approché, nous pourrons instancier les paramètres libres du modèle articulé, puis nous l'ajusterons de manière à ce que la distance entre les points reprojétés dans les photographies et les points extraits soit minimale.

La partie numérique d'ajustement est partiellement implantée dans le logiciel TOTALCALIB et ne fait pas l'objet de cette troisième partie qui s'axe essentiellement sur l'obtention d'un modèle articulé à partir d'une description formelle.

Nous allons maintenant introduire les principaux fondements de ces modèles articulés. Pour bien comprendre les problèmes, il faut se replacer dans le contexte de la vision artificielle. Le but est d'écrire un logiciel permettant d'étalonner un ensemble de caméras à partir de photographies. Un utilisateur de ce logiciel a déjà extrait des primitives géométriques, points, droites et plans à la souris. Maintenant, il veut définir des contraintes élémentaires entre ces primitives. Nous pouvons facilement imaginer qu'il sélectionne les primitives impliquées dans la contrainte qu'il veut définir et un menu déroulant dans lequel différentes contraintes sont répertoriées. Comme ces contraintes sont déterminées à travers les photographies, c'est-à-dire à travers les perspectives, nous ne sommes pas sûrs qu'elles soient exactes. De plus, la description ne sera certainement pas exhaustive.

Une des premières difficultés consiste donc à vérifier la cohérence de la description. La vérification de propriétés géométriques a déjà fait l'objet de recherches que nous trouvons plus sous la terminologie de démonstration automatique [Wan96].

Nous présenterons dans le premier chapitre un éventail de techniques de démonstration automatique en géométrie en mettant en valeur leurs différents avantages et inconvénients pour une utilisation directe dans notre contexte. Il s'avère que ces tech-

niques sont relativement mal adaptées. Une des raisons essentielles vient du fait que nous ne connaissons pas un ordre constructif de notre modèle articulé. Ce problème fera l'objet du deuxième chapitre.

Chapitre 1

Démonstration automatique

Dans ce chapitre, nous allons développer les notions géométriques que nous allons utiliser par la suite. La géométrie recouvre plusieurs aspects : le premier consiste à construire des figures vérifiant certaines propriétés, le second consiste à démontrer des propriétés d'une figure. Soyons plus précis, nous appellerons description géométrique, un ensemble d'objets (tels que des points, des droites, des plans, etc), et un ensemble de contraintes entre ces objets comme l'incidence, le parallélisme, l'orthogonalité, etc. Nous appellerons figure ou configuration, un modèle satisfaisant ces contraintes.

Notre problème est de faire faire de la géométrie à un ordinateur. Il est alors nécessaire de donner une représentation informatique aux objets ainsi qu'aux propriétés. Essentiellement, il existe deux méthodes : celles qui utilisent un système de coordonnées et celles qui manipulent directement les objets de manière plus formelle et symbolique.

Nous proposons d'étudier ces différentes techniques avec pour objectif de bien mettre en place les définitions et les outils nécessaires.

1.1 Avec un système de coordonnées

Nous commençons notre étude par la démonstration d'un théorème géométrique élémentaire.

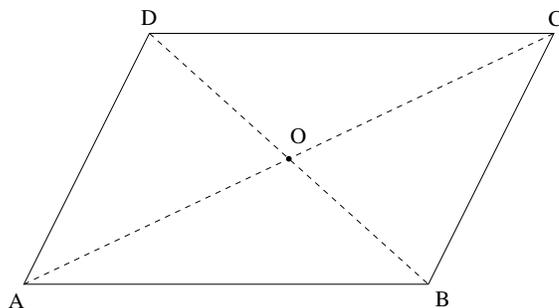


FIG. 1.1 – *Théorème du parallélogramme*

Théorème : Soient $ABCD$, un parallélogramme et O , le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD) alors $AO \equiv OC$ (fig. 1.1).

Comme la conclusion du théorème est une propriété euclidienne, il apparaît raisonnable de choisir un système de coordonnées orthonormé du plan. Nous pouvons prendre les coordonnées suivantes :

$$A(x_1, x_2), B(x_3, x_4), C(x_5, x_6), D(x_7, x_8), O(x_9, x_{10}).$$

Nous travaillons dans $\mathbb{K}[\mathbf{x}] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{10}]$. La phrase de l'énoncé « $ABCD$ un parallélogramme » sous-entend que le parallélogramme ne doit pas être aplati¹, c'est-à-dire que les points A et B sont distincts, les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles. Ces deux conditions que nous appellerons conditions de non dégénérescence se transcrivent par deux inéquations :

$$\begin{array}{ll} (AC) \not\parallel (BD) & \iff s_1(\mathbf{x}) = (x_5 - x_1)(x_8 - x_4) - (x_6 - x_2)(x_7 - x_3) \neq 0 \\ A \neq B & \iff s_2(\mathbf{x}) = x_3 - x_1 \neq 0 \end{array}$$

Nous pouvons de même transcrire les hypothèses et la conclusion sous forme d'équations :

$$\begin{array}{ll} (AB) \parallel (DC) & \iff h_1(\mathbf{x}) = (x_3 - x_1)(x_8 - x_6) - (x_4 - x_2)(x_7 - x_5) = 0 \\ (DA) \parallel (CB) & \iff h_2(\mathbf{x}) = (x_1 - x_7)(x_4 - x_6) - (x_2 - x_8)(x_3 - x_5) = 0 \\ O \in (BD) & \iff h_3(\mathbf{x}) = (x_9 - x_3)(x_8 - x_4) - (x_{10} - x_2)(x_7 - x_3) = 0 \\ O \in (AC) & \iff h_4(\mathbf{x}) = (x_9 - x_1)(x_6 - x_2) - (x_{10} - x_2)(x_5 - x_1) = 0 \\ AO \equiv OC & \iff c(\mathbf{x}) = (x_9 - x_1)^2 + (x_{10} - x_2)^2 - (x_5 - x_9)^2 - (x_6 - x_{10})^2 = 0 \end{array}$$

Le théorème est valide si et seulement si :

$$s_1(\mathbf{x}) \neq 0, s_2(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ et } h_1(\mathbf{x}) = h_2(\mathbf{x}) = h_3(\mathbf{x}) = h_4(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow g(\mathbf{x}) = 0,$$

ou de manière équivalente $s.g \in \sqrt{I}$ avec $I = \langle h_1, \dots, h_4 \rangle$ et $s = s_1.s_2 \neq 0$ une condition de non dégénérescence. En d'autres termes, la démonstration automatique en géométrie revient à détecter les conditions de non dégénérescence de la configuration et à savoir si un polynôme appartient au radical d'un idéal.

Poursuivons notre étude par un deuxième exemple.

Théorème : Soient ABC un triangle, $ACDE$ et $BCFG$ des carrés et M le milieu de $[AB]$ alors $DF \equiv 2CM$ (fig. 1.2).

La construction de la figure n'est pas univoque. Il y a en effet quatre configurations possibles (fig. 1.3). Le théorème est vérifié uniquement pour deux des quatre configurations. En d'autres termes, la variété définie par le système polynomial correspondant aux hypothèses se décompose en sous-variétés irréductibles appelées composantes, et le théorème est valide seulement sur certaines composantes. Du point de vue des idéaux, cela se traduit par une décomposition du radical de l'idéal engendré par les polynômes transcrivant les hypothèses en idéaux premiers :

$$\sqrt{I} = P_1 \cap \dots \cap P_d,$$

1. Dans ce cas, le théorème n'est pas valide.

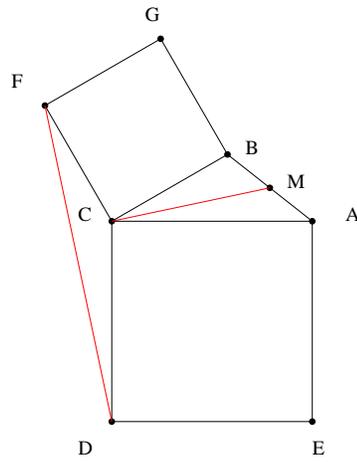


FIG. 1.2 – Configuration à partir d'un triangle

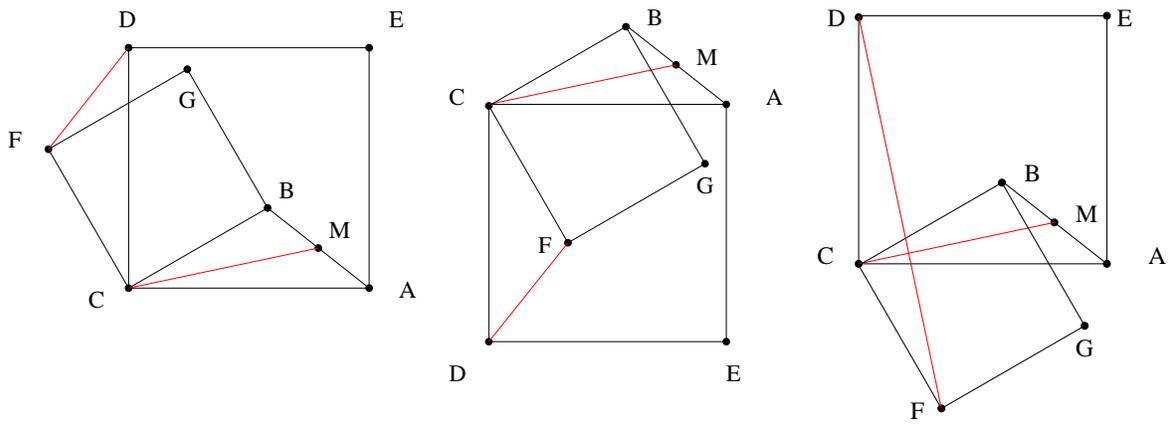
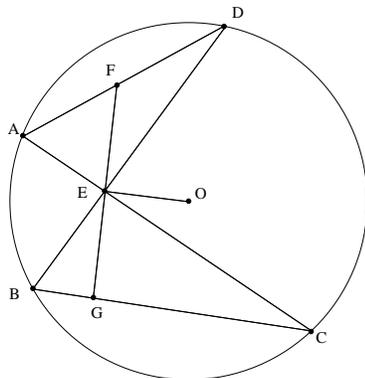


FIG. 1.3 – Les trois autres configurations possibles

FIG. 1.4 – *Théorème du papillon*

où les P_i sont des idéaux premiers.

La démonstration automatique se complique. Pour prouver qu'une propriété est valide, il faut montrer que le système polynomial correspondant à la conclusion est satisfait sur au moins l'une des composantes de la variété définie par les hypothèses ne satisfaisant aucune des conditions de dégénérescence. En d'autres termes, la propriété est valide si g est un polynôme du système conclusion, $s.g \in P_i$ avec $\sqrt{I} = \bigcap_i P_i$ et P_i des idéaux premiers, s étant une condition de dégénérescence.

Dans la pratique, la recherche des conditions de dégénérescence et la décomposition en variétés irréductibles peuvent être grandement simplifiées par le choix d'un repère adapté au problème. Nous distinguerons des paramètres \mathbf{u} pouvant être fixés presque librement ce qui revient à travailler sur le corps des fractions en \mathbf{u} et des variables \mathbf{x} pouvant être exprimées en fonction des \mathbf{u} . Étudions à travers un troisième exemple l'importance du choix du repère et des paramètres.

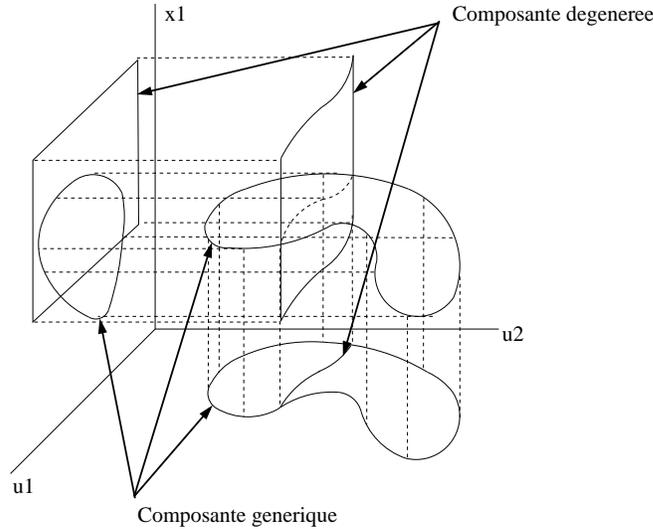
Théorème du papillon : Soient A, B, C, D quatre points d'un cercle de centre O , E le point d'intersection de (AC) et (BD) , F et G les points d'intersection des droites (AD) et (BC) avec la droite orthogonale à (OE) passant par E alors $FE \equiv GE$ (fig. 1.4).

Nous proposons la paramétrisation utilisée dans [Cho88] par Chou : $E(0, 0)$, $O(u_1, 0)$, $A(u_2, u_3)$, $B(x_1, u_4)$, $C(x_2, x_3)$, $D(x_4, x_5)$, $F(0, x_6)$ et $G(0, x_7)$. Cette paramétrisation conduit à quatre composantes de la variété des hypothèses, puisque C et D sont obtenus comme les points d'intersection du cercle et des droites (AE) et (BE) . Par conséquent, C peut être confondu avec A , et D peut être confondu avec B . Or, le théorème a un sens uniquement sur la composante où aucun des points ne sont confondus.

Maintenant, si nous prenons pour paramétrisation, $A(0, 0)$, $B(u_1, 0)$, $C(u_2, u_3)$, $D(x_1, u_4)$, $O(x_2, x_3)$, $E(x_4, x_5)$, $F(x_6, x_7)$, $G(x_8, x_9)$, seul le point D n'est pas parfaitement défini² et le théorème est vrai sur toute la variété définie par les hypothèses dans $\overline{\mathbb{K}(\mathbf{u})}$.

Le fait de choisir une paramétrisation adaptée à l'énoncé, nous permet d'éliminer des composantes dégénérées. En effet, supposons que nous ayons une variété formée de

2. Il y a deux solutions, mais pas de superposition de points.

FIG. 1.5 – *Différentes projections.*

deux composantes (fig. 1.5), la projection suivant x_1 de cette variété est une variété ne contenant qu'une seule composante dominante qui correspond à la composante qui nous intéresse³ alors que la projection suivant u_2 conserve deux composantes dominantes.

1.1.1 Base de Groebner

Nous n'allons pas ici rappeler la construction des bases de Groebner [Buc85, CLO92, Sti93] mais voir comment les utiliser pour démontrer des propriétés géométriques.

Nous commençons par rappeler le théorème des zéros de Hilbert

Théorème 8 Soient p un polynôme, $I = (f_1, \dots, f_r)$ un idéal de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$.

$$p \in \sqrt{I} \iff (f_1, \dots, f_r, 1 - zp) = (1) \text{ dans } \mathbb{K}[\mathbf{x}, z].$$

Démonstration : Voir [CLO92] page 177. □

Ce théorème permet de tester si un polynôme appartient au radical d'un idéal. Pour la démonstration automatique, nous devons encore faire le ppcm⁴ de tous les dénominateurs apparaissant dans le calcul.

Théorème 9 Soient p un polynôme et $I = (f_1, \dots, f_n)$ un idéal de $\mathbb{K}[\mathbf{u}, \mathbf{x}]$ et $J = \langle f_1, \dots, f_r, 1 - zp \rangle$ un idéal de $\mathbb{K}[\mathbf{u}, \mathbf{x}, z]$.

Si $J \cap \mathbb{K}[\mathbf{u}] = \emptyset$ alors $p \notin \sqrt{f_1, \dots, f_r}$ sinon $J \cap \mathbb{K}[\mathbf{u}]$ est l'idéal des conditions de non dégénérescence.

3. L'autre composante est de dimension inférieure et elle est au moins définie par un polynôme en u . Elle correspond donc à une composante dégénérée.

4. Plus Petit Commun Multiple.

Démonstration : Nous notons $\bar{p}, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r$, les polynômes p, f_1, \dots, f_r vus comme des éléments de $\mathbb{K}(\mathbf{u})[\mathbf{x}]$.

$$\bar{p} \in \sqrt{\langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r \rangle} \iff \langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r, 1 - z\bar{p} \rangle = \langle 1 \rangle$$

ce qui est équivalent à

$$\exists \bar{q}_i \ i \in \{1, \dots, r\}, \bar{q} \in \mathbb{K}(\mathbf{u})[\mathbf{x}] \text{ tels que } \sum_{i=1}^r \bar{q}_i \bar{f}_i + \bar{q}(1 - z\bar{p}) = 1.$$

Or, $\bar{q}_i \ i \in \{1, \dots, r\}$ et \bar{q} sont de la forme $\frac{n_i}{d_i}$ et $\frac{n}{d}$ avec $n_i, n \in \mathbb{K}[\mathbf{u}, \mathbf{x}]$ et $d_i, d \in \mathbb{K}[\mathbf{u}]$. En réduisant au même dénominateur, ceci est équivalent à :

$$\sum_{i=1}^r n_i f_i + n(1 - zp) = \prod_{i=1}^r d_i d \in \mathbb{K}[\mathbf{u}]$$

d'où $\prod_{i=1}^r d_i d \in J \cap \mathbb{K}[\mathbf{u}] \neq \emptyset$. □

Pour prouver une propriété géométrique en utilisant les bases de Groebner, il suffit de calculer une base de Groebner de $(f_1, \dots, f_n, 1 - zg)$ avec un ordre d'élimination des \mathbf{x} et z . S'il existe des polynômes p_u de $\mathbb{K}[\mathbf{u}]$ dans la base alors la propriété est vraie à l'extérieur de $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}((p_u))$, sinon la propriété est fausse.

1.1.2 Ensembles caractéristiques

Les ensembles caractéristiques jouent un rôle important en démonstration automatique comme l'atteste la littérature en ce domaine [Wu84, Wu86, Wu94, Cho88, CG90]. Nous présentons ici rapidement les principes de construction des ensembles caractéristiques ainsi que leurs utilisations pour la démonstration automatique.

Construction des ensembles caractéristiques

Nous commençons par décrire les éléments de base de la construction. Tout d'abord, nous définissons un ordre sur les variables et pour un polynôme $p \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$, nous avons l'existence d'une plus grande variable que nous appellerons $class(p)$, d'un initial $init(p)$ qui est le coefficient du terme de plus haut degré de p vu comme un polynôme par rapport à la variable $class(p)$.

Proposition-définition 6 Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ et $y \in \{x_1, \dots, x_n\}$ une variable. Soit $m = \deg(B, y)$, supposons que $m \neq 0$ alors le polynôme B peut s'écrire

$$B = b_m y^m + b_{m-1} y^{m-1} + \dots + b_0$$

Il existe deux polynômes Q et R de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ et un entier naturel s tels que :

$$b_m^s A = BQ + R,$$

avec $\deg(R,y) < m$.

De plus, si s est minimal alors Q et R sont uniques à une constante multiplicative près et cette opération s'appelle la pseudo-division de A par B et R s'appelle le pseudo-reste de A par B . Nous noterons $R = \text{prem}(A,B,y)$.

Démonstration : Voir [CLO92] page 297. \square

Définition 16 Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$, P est dit réduit par rapport à Q si et seulement si :

$$P = \text{prem}(P,Q,\text{class}(Q)).$$

À partir de l'ordre sur les variables, nous pouvons définir un ordre partiel sur les polynômes en comparant leur plus grande variable puis en cas d'égalité en comparant le degré des polynômes par rapport à cette variable. Deux polynômes sont comparables si ils sont de même classe et de même degré par rapport à leur classe. Nous sommes alors en mesure de construire des séquences de polynômes qui sont des ensembles ordonnés de polynômes.

Définition 17 Soit $\mathcal{A} = A_1, \dots, A_r$ une séquence :

– \mathcal{A} est une chaîne ascendante si et seulement si :

$$\left| \begin{array}{l} r = 1 \text{ et } A_1 \neq 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} r > 1 \\ 0 < \text{class}(A_1) < \dots < \text{class}(A_r) \\ \forall i < j \text{ } A_j \text{ réduit par rapport à } A_i \end{array} \right. \end{array} \right.$$

– Une chaîne sera dite contradictoire si elle contient uniquement un polynôme constant non nul.

Remarque 25 Une chaîne ascendante forme un système triangulaire.

Définition 18 Soient deux chaînes ascendantes $\mathcal{A} = A_1, \dots, A_r$ et $\mathcal{B} = B_1, \dots, B_s$. $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ si et seulement si :

$$\left| \begin{array}{l} \exists j \in \{1, \dots, \min(r,s)\} \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} \forall i < j, A_i \text{ et } B_i \text{ sont comparables} \\ A_j < B_j \end{array} \right. \\ r > s \text{ et } \forall i A_i \text{ et } B_i \text{ sont comparables} \end{array} \right.$$

Lemme 23 Toute suite décroissante de chaîne ascendante stationne à partir d'un certain indice [Wu86].

Démonstration : Cette démonstration s'effectue par récurrence sur les polynômes successifs des chaînes ascendantes. Soit $\Phi_1, \dots, \Phi_q, \dots$ la suite de chaînes ascendantes. L'hypothèse de récurrence est la suivante :

- Soit A_i^r , le r -ième polynôme de la chaîne Φ_i .
- Pour tout indice k , il existe un indice q_k à partir duquel la suite (A_i^k) stationne, c'est-à-dire que les A_i^k sont comparables à partir d'un certain rang.

Étape 1 : Soit A_i le premier polynôme de Φ_i . La suite de (A_i) décroît d'après la définition de l'ordre sur les chaînes ascendantes, et comme la suite (A_i) est minorée par le polynôme nul, cette suite stationne à partir d'un certain rang.

$$\exists q_1 \mid \forall q' > q_1, A_{q'} \sim A_{q_1}.$$

Si toutes les chaînes sont de longueur 1, la démonstration est terminée. Sinon, comme les chaînes les plus courtes sont les plus grandes, il existe un indice $q_1 > q$ tel que :

$$\forall q' > q_1 \text{ Longueur}(\Phi_{q'}) > 1.$$

Étape $r + 1$: D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\forall q > q_r \forall k \leq r, A_q^k \sim A_{q_r}^k.$$

Donc tous ces polynômes ne rentrent pas en compte pour déterminer l'ordre sur les chaînes Φ_i . Si toutes les chaînes sont de longueur r , la démonstration est terminée (puisque toutes les chaînes sont équivalentes pour $q > q_r$). Sinon, comme les chaînes les plus courtes sont les plus grandes, il existe un indice $q_r' > q_r$ tel que :

$$\forall q > q_r', \text{Longueur}(\phi_q) > r.$$

Pour $q > q_r'$, nous considérons la suite des (Φ_i^r) où Φ_i^r est construit à partir de Φ_i en lui enlevant ses r premiers polynômes A_i^k , pour $k \in \{1, \dots, r\}$. Nous pouvons alors faire le même raisonnement qu'à l'étape 1 pour rétablir l'hypothèse de récurrence à l'étape $r + 1$. \square

Lemme 24 *Soit Σ un ensemble fini de polynômes. L'ensemble des chaînes ascendantes construites sur Σ admet un élément minimal qui peut être construit de façon mécanique.*

Démonstration : Soit A_1 un des éléments minimaux de Σ . Il suffit de considérer les chaînes commençant par A_1 ⁵ :

- soit $\text{class}(A_1) = 0$: nous avons une chaîne contradictoire et minimale.
- soit $\text{class}(A_1) > 0$: nous considérons alors l'ensemble

$$\Sigma' = \{P \in \Sigma, P \text{ est réduit par rapport à } A_1\}.$$

Σ' est l'ensemble des polynômes de Σ qui peuvent participer à une chaîne ascendante après A_1 . Comme $A_1 \notin \Sigma'$, $\Sigma' \subsetneq \Sigma$. De plus, Σ' (s'il est non vide) ne contient que des polynômes supérieurs à A_1 .

- Si $\Sigma' = \emptyset$ alors A_1 est une chaîne minimale.
- Sinon, A_1 est le premier polynôme d'une chaîne minimale.

5. Les autres sont ou plus grandes ou de même ordre.

□

Lemme 25 Soient $\mathcal{A} = A_1, \dots, A_r$ la chaîne ascendante minimale construite sur Σ avec $\text{class}(A_1) > 0$ et B un polynôme non nul réduit par rapport à tous les A_i . $\Sigma \cup B$ admet une chaîne ascendante minimale plus petite que \mathcal{A} .

Démonstration : Le principe de la preuve est d'exhiber dans les différents cas, une chaîne de Σ' plus petite que \mathcal{A} .

- si $\text{class}(B) < \text{class}(A_1)$ alors l'ensemble minimal de Σ' commence par B et sera plus petit que \mathcal{A} ⁶
- $\exists i$ tel que $\text{class}(A_i) < \text{class}(B) \leq \text{class}(A_{i+1})$.
Soit $\text{class}(B) < \text{class}(A_{i+1})$, soit $\text{class}(B) = \text{class}(A_{i+1})$ et alors $\deg(B) < \deg(A_{i+1})$ car B est réduit par rapport à A_{i+1} . De plus, B est réduit par rapport aux $A_k, k = 1 \dots i$, donc $A_1, \dots, A_i, B < \mathcal{A}$.
- si $\text{class}(A_r) < \text{class}(B)$, alors $A_1, \dots, A_r, B < \mathcal{A}$.

□

Théorème 10 (Ritt) Soit Σ un ensemble fini. En un nombre fini d'étapes, on peut trouver :

- Soit A avec $\text{class}(A) = 0$ et $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma) = \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(A) = \emptyset$.
- Soit il existe un chaîne ascendante non contradictoire $\Phi = \phi_1, \dots, \phi_p$ telle que :

$$\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma) \subset \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Phi) \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Phi) \setminus \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(I) \subset \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma),$$

où $I = \{\text{init}(\phi_i), \phi_i \in \Phi\}$.

Définition 19 Φ est appelé un ensemble caractéristique de Σ .

Démonstration :

1. Démontrons la construction de Φ . Soit \mathcal{A}_1 une chaîne minimale de $\Sigma_1 = \Sigma$ (cette chaîne existe d'après le lemme 24) et $\mathcal{R}_1 = \{\text{prem}(B, \mathcal{A}_1), B \in \Sigma_1\} \setminus \{0\}$.
 - Si $\mathcal{R}_1 = \emptyset$ alors $\Phi = \mathcal{A}_1$.
 - Sinon, nous considérons $\Sigma_2 = \sigma_1 \cup \mathcal{R}_\infty$ et nous recommençons le processus.
D'après le lemme 25, ce processus se termine en un nombre fini d'étapes puisque les \mathcal{A}_i forment une suite strictement décroissante de chaînes ascendantes et d'après le lemme 23, cette suite stationne. De plus, au point de stationnement, $\mathcal{R}_{stat} = \emptyset$, alors $\phi = \mathcal{A}_{stat}$.
2. Démontrons que $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma) \subset \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Phi)$. Nous allons faire une récurrence sur la suite des Σ_i construite ci-dessus.
 - Σ_2 est formé des polynômes de Σ et de leurs restes par $\mathcal{A}_1 = A_1, \dots, A_r$. Si $R = \text{prem}(B, \mathcal{A}_1)$ est un tel reste alors par définition :

$$R = PB - \sum_{i=1}^r P_i A_i,$$

6. Le fait que les chaînes les plus courtes soient les plus grandes est central dans la démonstration.

où $P = \prod_{i=1}^r \text{init}(A_i)^{s_i}$. Donc R s'annule sur $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma_1)$ et $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma_1) \subset \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma_2)$.
Or, $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$, donc $i\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma_2) \subset \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma_1)$. Il en résulte $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma_1) = \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma_2)$.

– On montre de proche en proche que :

$$\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma) = \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma_1) = \dots = \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma_{stat}) = \dots$$

Or $\Phi \subset \Sigma_{stat}$ donc $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma) \subset \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Phi)$.

3. Démontrons que $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Phi) \setminus \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(I) \subset \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma)$: par construction de Φ , nous avons :

$$\forall B \in \Sigma, I^s B = \sum_{i=1}^p Q_i \phi_i,$$

car $\mathcal{R}_{stat} = \emptyset$. Si $I^s \neq 0$ et $\phi_i = 0$ alors $B = 0$ donc $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Phi) \setminus \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(I) \subset \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma)$. □

Décomposition d'un variété en variétés irréductibles

Dans ce paragraphe, nous énoncerons seulement les théorèmes, propositions et lemmes importants pour le déroulement mécanique de la décomposition sans donner les démonstrations qui sont dans les deux articles [Wu86, CSY89].

Dans la suite, $\Phi = A_1, \dots, A_s$ sera une chaîne ascendante dans laquelle nous avons effectué le renommage des variables suivant :

$$\begin{cases} d+1 = \text{class}(A_1); s = n-d \\ \forall i \in \{1, \dots, d\}, x_i = u_i \\ \forall i \in \{d+1, \dots, n\}, x_i = y_{i-d} \end{cases}$$

Proposition-définition 7 Nous appelons $K_0 = \mathbb{K}(u_1, \dots, u_d)$ et pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, nous définissons par récurrence les extensions de corps :

$$K_i = \frac{K_{i-1}[y_i]}{(A_i)} \text{ si } A_i \text{ est irréductible dans } K_{i-1}[y_i].$$

Si tous les A_i sont irréductibles dans $K_{i-1}[y_i]$ alors la chaîne ascendante Φ est dite irréductible.

Théorème 11 Soit Φ une chaîne ascendante irréductible, il existe alors un idéal premier Ω tel que Φ soit un ensemble caractéristique de Ω .

Théorème 12 Soient Ω un idéal premier et Φ un ensemble caractéristique de Ω , alors Φ est irréductible.

Ces deux théorèmes établissent une sorte de correspondance entre les idéaux premiers et les chaînes ascendantes irréductibles.

Lemme 26 Soient Σ un ensemble polynômial et Φ un ensemble caractéristique avec Φ irréductible alors :

$$\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma) = \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Omega) \cup \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma + I_1) \cup \dots \cup \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma + I_s)$$

où Ω est un idéal premier associé à Φ et $I_i, i \in \{1, \dots, s\}$ sont les initiaux des A_i .

Lemme 27 Soient Σ un ensemble polynomial et $\Phi = A_1, \dots, A_s$ un ensemble caractéristique de Σ tel qu'il existe $k \in \{1, \dots, s\}$ et :

$$\begin{cases} \text{pour } j < k, A_j \text{ irréductible dans } K_{j-1}[y_j] \\ A_k \text{ réductible dans } K_{k-1}[y_k] \end{cases}$$

alors il existe G_1, \dots, G_h des polynômes irréductibles dans $K_{k-1}[y_k]$ tels que :

$$I_1^{\alpha_1} \dots I_{k-1}^{\alpha_{k-1}} G_1 \dots G_h = \sum_{i=1}^k Q_i A_i$$

$$\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma) = \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma + I_1) \cup \dots \cup \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma + I_{k-1}) \cup \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma + G_1) \cup \dots \cup \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma + G_k)$$

Théorème 13 Il existe un algorithme qui permet de donner pour un ensemble de polynômes σ , une décomposition en variétés irréductibles

$$\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma) = \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Psi_1) \cup \dots \cup \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Psi_q)$$

où chaque Ψ_i est un ensemble caractéristique de Ω_{Ψ_i} qui est un idéal premier.

Les ensembles caractéristiques et la démonstration automatique

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, choisir un repère adapté à la propriété à démontrer permet d'éliminer des composantes dégénérées. Soit $\Phi = A_1, \dots, A_r$ un ensemble caractéristique des hypothèses.

- Si le polynôme $c \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ représentant la conclusion se réduit à zéro par Φ alors il existe les polynômes Q_1, \dots, Q_r de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ et les entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que :

$$c \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Phi) \setminus \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(I) \subset \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma) \text{ avec } I = \langle Q_1^{\alpha_1}, \dots, Q_r^{\alpha_r} \rangle.$$

Dans ce cas, la conclusion est une conséquence des hypothèses et le théorème est vraie sur « toute la variété » privée de l'ensemble des zéros des initiaux.

- Si le polynôme c ne se réduit pas à zéro par Φ alors nous ne pouvons rien dire. Nous devons calculer une décomposition en variétés irréductibles de $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma)$ par l'algorithme du théorème 13.

$$\mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Sigma) = \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Psi_1) \cup \dots \cup \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(\Psi_q)$$

où Ψ_i est un ensemble caractéristique de chacune des composantes irréductibles de la variété. Or, pour une variété irréductible nous avons l'équivalence entre : un polynôme s'annule sur cette variété, et ce polynôme se réduit à zéro par un ensemble caractéristique de la variété. La propriété sera donc vraie sur une composante si et seulement si le polynôme c se réduit à zéro par ψ_i .

Cette technique a été ensuite reprise afin d'obtenir d'autres ensembles triangulaires plus efficaces par D. Wang [Wan95], D. Lazard, P. Aubry et M. Moreno Maza [AMM99, ALMM99].

1.2 Sans système de coordonnées

Il est possible de faire de la géométrie avec un ordinateur sans utiliser de système de coordonnées, mais en faisant des calculs directement sur les objets de la géométrie. Les techniques qui utilisent ce procédé ont l'avantage d'être plus intrinsèques et d'avoir des formulations plus compactes.

Si le passage de la géométrie à l'algèbre par un système de coordonnées paraît naturel, il n'en est pas de même pour faire de la géométrie directement avec les objets de la configuration. Dans ces formalismes, les objets ne possèdent pas de représentation particulière, par contre, les propriétés géométriques sont caractérisées par des invariants. Et un invariant dépend de la géométrie considérée [Fau95, Kle74]. Pour la géométrie projective, les propriétés géométriques peuvent être caractérisées par des polynômes de l'algèbre de Grassmann-Cayley comme dans la deuxième partie [Wan97, Stu93] ou bien par des polynômes de déterminants. Pour la géométrie affine, il suffit d'ajouter un hyperplan⁷ à l'algèbre de Grassmann-Cayley; d'autres caractérisations sont possibles, par exemple à partir de barycentres de points. En géométrie euclidienne, il faut encore ajouter une quadrique; dans ce cas, l'algèbre de Grassmann-Cayley n'est pas le formalisme le mieux adapté, il existe d'autres algèbres comme celle de Clifford, et aussi d'autres caractérisations comme celles qui sont données par les angles ou celles données par les distances.

Démontrer des propriétés consiste à faire de l'élimination à partir des invariants caractérisant les hypothèses de la propriété sur les objets géométriques jusqu'à ce que les invariants caractérisant la conclusion de la propriété soient trivialement vérifiés.

Nous présentons maintenant trois techniques: la première est celle qui est implémentée dans les premières versions de CINDERELLA [RG95], la deuxième est une des méthodes du logiciel GEX [CGZ94], la troisième est celle de GEO [Mou91a].

1.2.1 Richter-Gebert Crapo

Cette méthode de démonstration automatique utilise l'algèbre des déterminants et plus particulièrement les relations binomiales de déterminants [CRG95, RG95]. Nous allons étudier son fonctionnement pour la géométrie plane.

Les correspondances entre relations binomiales et propriétés géométriques.

Soit \mathcal{D} l'ensemble des déterminants des points⁸ d'une configuration géométrique. Nous considérons les déterminants de cet ensemble \mathcal{D} comme des variables et nous appelons relation binomiale une égalité formée d'un polynôme possédant uniquement deux termes et zéro, soit :

$$m_1 - am_2 = 0 \iff \frac{m_1}{m_2} = a \quad (1.1)$$

7. que nous considérerons comme l'hyperplan de l'infini

8. Par exemple, les déterminants des matrices dont les colonnes sont les coordonnées de trois points dans le cas du plan projectif.

avec m_1, m_2 deux monômes de $\bar{\mathbb{K}}[D]$ et a , un élément de $\bar{\mathbb{K}}$. Ces relations binomiales permettent de traduire pratiquement toutes les propriétés géométriques planes. Nous en montrons quelques unes dans le chapitre 1.2 de la partie II.

Remarque 26 *Il existe souvent plusieurs relations binomiales caractérisant la même propriété géométrique⁹.*

La méthode. Soit \mathcal{R} l'ensemble des relations binomiales pour une configuration géométrique. Nous munissons \mathcal{R} d'une structure de $\bar{\mathbb{K}}$ -espace vectoriel (multiplicatif) par les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} \forall R : m_1 - am_2 = 0, R' : m_1' - a'm_2' = 0 \in \mathcal{R} \text{ et } \lambda \in \bar{\mathbb{K}} \\ RR' : m_1m_1' - aa'm_2m_2' = 0 \\ R^\lambda : m_1^\lambda - a^\lambda m_2^\lambda = 0 \end{aligned}$$

Proposition 53 *Soient une propriété géométrique, $c_i = 0, i \in \{1, \dots, k\}$ les relations binomiales donc sous la forme 1.1 représentant sa conclusion et $h_j = 0, j \in \{1, \dots, l\}$ les relations binomiales donc sous la forme 1.1 représentant ses hypothèses. Cette propriété est vraie si pour chaque i dans $\{1, \dots, k\}$ il existe des scalaires $\alpha_{i_0}, \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ tels que*

$$c_i^{\alpha_{i_0}} = \prod_{j=1}^l h_j^{\alpha_{i_j}}$$

avec α_{i_0} impair.

Démonstration : Très simple en prenant la notation multiplicative des relations binomiales. \square

Exemple 2

Théorème de Pappus : Soient A, B, C (respectivement G, H, I) trois points colinéaires et F (respectivement E et D) les points d'intersections des droites (AH) et (BG) (respectivement (AI) et (CG) , (BI) et (CH)) (fig . 1.6). Les points F, E, D sont colinéaires.

Démonstration : Comme $(AB), (EG), (DH)$ (respectivement $(AE), (GH), (BD)$) sont concourantes, nous avons :

$$\begin{aligned} h_1 : |A, B, E||D, G, H| &= |A, B, G||D, E, H| \\ h_2 : |A, D, E||B, G, H| &= |A, B, E||D, G, H| \end{aligned}$$

De plus, les points A, F, H (respectivement B, F, G) sont colinéaires. Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} h_3 : |A, B, F||E, F, H| &= |A, E, F||B, F, H| \\ h_4 : |A, B, G||B, F, H| &= |A, B, F||B, G, H|. \end{aligned}$$

Pour la conclusion, D, E, F sont colinéaires si :

$$c : |A, D, E||E, F, H| = |A, E, F||D, E, H|$$

9. Pour chaque relation, les conditions de non dégénérescence ne sont pas équivalentes.

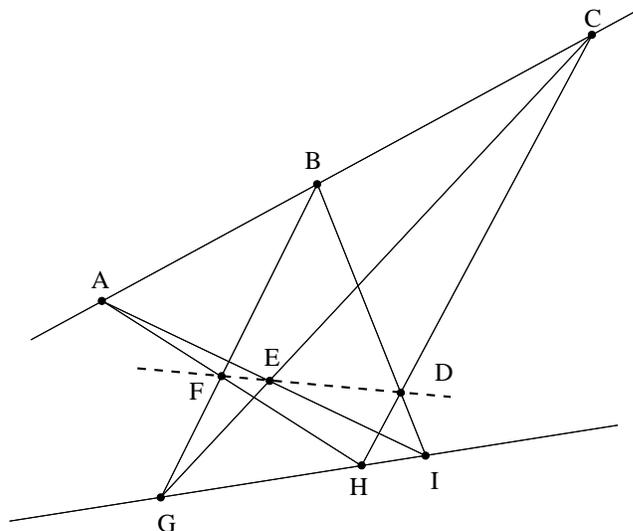


FIG. 1.6 – Configuration du théorème de Pappus

Or, comme nous avons en passant à la notation multiplicative des relations binomiales :

$$\frac{|A,D,E||E,F,H|}{|A,E,F||D,E,H|} = \frac{\frac{|A,B,E||D,G,H|}{|A,B,G||D,E,H|} \frac{|A,D,E||B,G,H|}{|A,B,E||D,G,H|}}{\frac{|A,B,F||E,F,H|}{|A,E,F||B,F,H|} \frac{|A,B,G||B,F,H|}{|A,B,F||B,G,H|}} = 1$$

il en résulte que :

$$c = h_1 h_2 h_3 h_4$$

et le théorème est démontré.

Que se cache-t-il derrière cette démonstration ? Voyons le processus pas à pas sur un autre exemple.

Exemple 3

Nous prenons la configuration de la médiane, le premier pas consiste à calculer toutes les relations binomiales possibles¹⁰ qui caractérisent les hypothèses de la configuration.

- Le point A est sur (B'C) :
- $|A,C,A'||A,B,B'| - |A,A',B'||A,B,C| = 0$
- $|A,C,C'||A,B,B'| + |A,B',C'||A,B,C| = 0$
- $|A,C,C'||A,A',B'| - |A,B',C'||A,C,A'| = 0$

10. Par la remarque 26, il peut y en avoir plusieurs pour une même hypothèse.

- *Le point A est sur (C'B):*
 - $|A, B, A'| |A, C, C'| + |A, B, C'| |A, A', C'| = 0$
 - $|A, C, C'| |A, B, B'| + |A, B', C'| |A, B, C'| = 0$
 - $|A, B, B'| |A, A', C'| + |A, B, A'| |A, B', C'| = 0$
- *Le point B est sur la droite (C'A):*
 - $|B, C, C'| |A, B, A'| - |B, A', C'| |A, B, C'| = 0$
 - $|B, C, C'| |A, B, B'| - |B, B', C'| |A, B, C'| = 0$
 - $|B, A', C'| |A, B, B'| - |B, B', C'| |A, B, A'| = 0$
- *Le point B est sur la droite (A'C):*
 - $|A, B, A'| |B, C, B'| - |B, A', B'| |A, B, C'| = 0$
 - $|B, C, C'| |A, B, A'| - |B, A', C'| |A, B, C'| = 0$
 - $|B, A', B'| |B, C, C'| - |B, A', C'| |B, C, B'| = 0$
- *Le point C est sur la droite (A'B):*
 - $|A, C, A'| |B, C, B'| + |C, A', B'| |A, B, C'| = 0$
 - $|A, C, A'| |B, C, C'| + |C, A', C'| |A, B, C'| = 0$
 - $|C, A', B'| |B, C, C'| + |C, A', C'| |B, C, B'| = 0$
- *Le point C est sur la droite (B'A):*
 - $|A, C, A'| |B, C, B'| + |C, A', B'| |A, B, C'| = 0$
 - $|B, C, B'| |A, C, C'| - |C, B', C'| |A, B, C'| = 0$
 - $|C, A', B'| |A, C, C'| + |C, B', C'| |A, C, A'| = 0$
- *Le point A' est sur la droite (BC):*
 - $|A, B, A'| |C, A', B'| - |B, A', B'| |A, C, A'| = 0$
 - $|A, B, A'| |C, A', C'| - |B, A', C'| |A, C, A'| = 0$
 - $|B, A', B'| |C, A', C'| - |B, A', C'| |C, A', B'| = 0$
- *Le point A' est le milieu de [BC]:*
 - $|A, B, A'| + |A, C, A'| = 0$
 - $|B, A', B'| + |C, A', B'| = 0$
 - $|B, A', C'| + |C, A', C'| = 0$
- *Le point B' est sur la droite (AC):*
 - $|A, B, B'| |C, A', B'| + |A, A', B'| |B, C, B'| = 0$
 - $|A, B, B'| |C, B', C'| - |A, B', C'| |B, C, B'| = 0$
 - $|A, A', B'| |C, B', C'| + |C, A', B'| |A, B', C'| = 0$
- *Le point B' est le milieu de [AC]:*
 - $|A, B, B'| + |B, C, B'| = 0$
 - $|A, A', B'| - |C, A', B'| = 0$
 - $|A, B', C'| + |C, B', C'| = 0$
- *Le point C' est sur la droite (AB):*
 - $|A, C, C'| |B, A', C'| - |A, A', C'| |B, C, C'| = 0$
 - $|A, C, C'| |B, B', C'| - |A, B', C'| |B, C, C'| = 0$
 - $|A, A', C'| |B, B', C'| - |A, B', C'| |B, A', C'| = 0$
- *Le point C' est le milieu de [AB]:*
 - $|A, C, C'| - |B, C, C'| = 0$

Corollaire 4 Avec les mêmes notations que dans la proposition 53 la propriété est vraie si et seulement si pour tout i dans $\{1, \dots, k\}$, nous avons :

$$F(c_i) = \sum_{j=1}^l \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{i0}} F(h_j)$$

et si et seulement si il existe une solution dans \mathbb{Q} au système linéaire $Mx = V$ où M est la matrice dont les lignes sont $F(h_j)$ $j \in \{1, \dots, l\}$ et V est une matrice dont les colonnes sont $F(c_i)$ $i \in \{1, \dots, k\}$.

Exemple 5 (suite de l'exemple 3)

Il reste donc à résoudre le système par une élimination de Gauss par exemple. Nous obtenons une solution¹¹.

$$-F(c) = F(h_4) - F(h_8) - F(h_{22}) + F(h_{28}) - F(h_{34})$$

c'est-à-dire en notation multiplicative:

$$\begin{aligned} c^{-1} &= \frac{|B, B', C'| |A, C, A'|}{|A, A', C'| |B, C, B'|} \\ &= \frac{|A, B, A'| |A, C, C'|}{|A, B, C'| |A, A', C'|} \frac{|B, B', C'| |A, B, C|}{|B, C, C'| |A, B, B'|} \\ &= \frac{|A, C, A'|}{|A, B, A'|} \frac{|A, B, B'|}{|B, C, B'|} \frac{|B, C, C'|}{|A, C, C'|} \\ &= h_4 h_8^{-1} h_{22}^{-1} h_{28} h_{34}^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

1.2.2 Chou-Gao-Zhang

Ces méthodes utilisent un ensemble de règles de réécriture sur les points pour réduire un invariant géométrique. Les règles de réécriture sont préalablement établies pour un certain nombre de configurations génériques. Nous présentons ici la méthode vectorielle [CGZ94].

Règles de réécriture et géométrie

Propriété 3 Soit le point M sur la droite (AB) , alors:

$$\vec{M} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B} \text{ où } \alpha = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} \text{ et } \beta = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}.$$

11. En général, cette solution n'est pas unique

Démonstration : Si M est sur la droite (AB) alors les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires. Nous avons $\overrightarrow{AM} = \frac{AM}{AB}\overrightarrow{AB}$ ou bien en utilisant $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$, nous obtenons la relation souhaitée. \square

Propriété 4 Soit le point M tel que $\overrightarrow{AM} = r.\overrightarrow{BC}$ alors:

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{A} + r(\overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}).$$

Remarque 27 Le sens de \overrightarrow{M} est le même que celui du vecteur \overrightarrow{OM} où O est un point origine. En fait, de telles relations sont indépendantes de l'origine choisie.

Démonstration : C'est immédiat par la relation de Chasles. \square

Propriété 5 Soit le point M l'intersection des droites (AB) et (CD) alors:

$$\overrightarrow{M} = -\frac{|\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}|}\overrightarrow{A} + \frac{|\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}|}\overrightarrow{B}.$$

Démonstration : Si $M \in (AB)$ alors $\overrightarrow{M} = \alpha.\overrightarrow{A} + \beta.\overrightarrow{B}$ où α et β sont uniques avec $\alpha + \beta = 1$. De plus, si $M \in (CD)$ alors $|\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}| = \alpha|\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}| + \beta|\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}| = 0$ et en utilisant le fait que $\alpha = 1 - \beta$, nous obtenons $\beta = \frac{|\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}|}$ et $\alpha = -\frac{|\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}|}$. \square

Propriété 6 Soit le point H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) alors:

$$\overrightarrow{H} = -\frac{\langle CA, BC \rangle}{BC^2}\overrightarrow{B} + \frac{\langle BA, BC \rangle}{BC^2}\overrightarrow{C}.$$

Démonstration : Si $H \in (BC)$ alors $\overrightarrow{H} = \alpha\overrightarrow{B} + \beta\overrightarrow{C}$ avec $\alpha + \beta = 1$ et $\beta = \frac{\overline{BH}}{BC}$. Or, si H est le projeté orthogonal de A sur (BC) , nous avons $\overline{BH}.\overline{BC} = \langle BA, BC \rangle$ soit finalement $\beta = \frac{\langle BA, BC \rangle}{BC^2}$. \square

Le fonctionnement de la méthode Nous définissons un état géométrique par

$$S = (C_1, C_2, \dots, C_k, G)$$

où C_1 représente l'ensemble des points libres de la configuration; C_i représente la construction d'un nouveau point qui dépend uniquement des points déjà construits à cette étape. Nous nommons G l'ensemble des conditions de non dégénérescence.

Nous formalisons une propriété par

$$T = (S, E = F)$$

où S est l'état géométrique des hypothèses de la propriété et $E = F$ est un invariant géométrique caractérisant la conclusion de la propriété. Cette propriété est vraie si, par

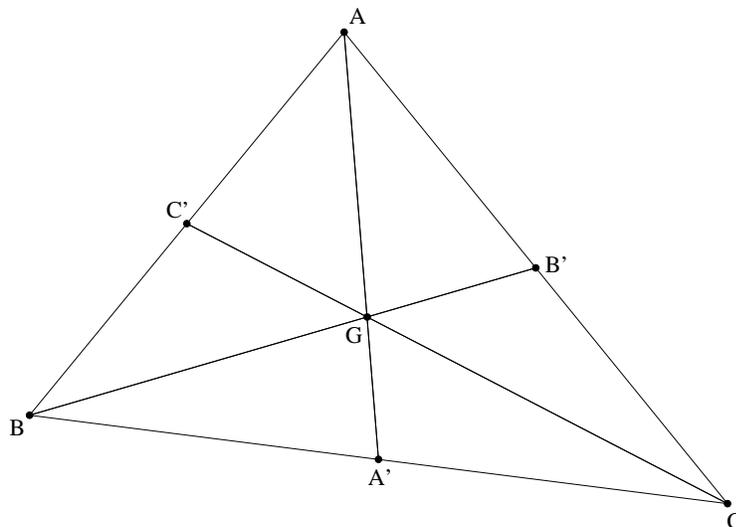


FIG. 1.7 – Configuration du théorème des médianes

éliminations successives des points dans l'ordre inverse de leur construction¹², l'égalité $E = F$ est trivialement vérifiée.

Exemple 6 *Théorème des médianes* : Soient ABC un triangle et A' , B' , C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ (fig . 1.7) alors les droites (AA') , (BB') , (CC') sont concourantes.

Démonstration : Construction de l'état géométrique des hypothèses.

- C_1 représente les points libres, c'est-à-dire A , B , C .
- C_2 représente la construction de A' , c'est-à-dire A' milieu de $[BC]$, nous avons donc la règle de réécriture suivante :

$$\vec{A}' = \frac{1}{2}\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{C}$$

et la condition de non dégénérescence $B \neq C$.

- C_3 représente la construction du point B' , soit :

$$\vec{B}' = \frac{1}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{C}$$

et la condition de non dégénérescence $A \neq C$.

- C_4 représente la construction du point C' , soit :

$$\vec{C}' = \frac{1}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}$$

et la condition de non dégénérescence $A \neq B$.

12. C'est-à-dire i décroissant.

Nous devons maintenant caractériser la conclusion sous forme d'un invariant vectoriel. Pour cela, nous construisons un nouveau point G .

- C_5 représente la construction du point G , défini comme l'intersection des droites (BB') et (CC') . Nous avons donc la règle de réécriture suivante :

$$\vec{G} = -\frac{|\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{CC'}|}{|\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}|} \vec{B} + \frac{|\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'}|}{|\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}|} \vec{B}'.$$

Il faut que les droites (BB') et (CC') soient non parallèles ce qui équivaut à A, B, C non alignés.

La conclusion se caractérise par A, A', G alignés, soit :

$$|\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AA'}| = 0$$

donc $E = |\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AA'}|$ et $F = 0$.

Nous pouvons alors commencer la réduction de la conclusion :

- réécriture du point G :

$$|\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AA'}| = -\frac{|\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{CC'}|}{|\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}|} |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}| + \frac{|\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'}|}{|\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}|} |\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AA'}|.$$

- réécriture du point $C'i$:

$$|\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AA'}| = \frac{-\left(|\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{CA}| + |\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{CB}|\right) |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}| + |\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AA'}|}{|\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CA}| + |\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CB}|}.$$

- réécriture du point B' :

$$|\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AA'}| = \frac{|\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}| \left(|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}| + |\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}| \right)}{|\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}| + |\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}| + |\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}|}$$

en remarquant que $|\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}|$ nous avons :

$$|\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AA'}| = -\frac{|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}| + |\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}|}{3}.$$

- réécriture du point A' :

$$|\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AA'}| = -\frac{|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}|}{3} = 0.$$

Ces méthodes ont commencé à être développées pour de la géométrie dans l'espace [CGZ95], mais le nombre de règles de réécriture augmente considérablement même dans des cas simples.

1.2.3 Mourrain

C'est en définissant une généralisation des opérateurs d'union et d'intersection dans l'algèbre extérieure, que nous pouvons aborder les problèmes de genericité [Mou91a, Mou91b].

1.3 Dans notre contexte

Nous commençons par rappeler le contexte dans lequel nous voulons utiliser ces techniques. Nous avons pour point de départ une description géométrique de la scène (un ensemble d'objets ainsi que des contraintes). Notre but est premièrement, de vérifier la cohérence de cette description ; deuxièmement, d'en calculer son degré de liberté ainsi qu'une paramétrisation minimale.

Les méthodes de démonstration automatique telles que les ensembles caractéristiques ou les réécritures de Chou-Gao-Zhang, permettent de répondre en partie à nos espérances.

1.3.1 Comment mettre en évidence les incohérences

Une des techniques possible pour extraire des propriétés géométriques de manière automatique consiste à vérifier que certaines équations prennent une valeur inférieure à un seuil que nous nous fixons. Par exemple, si nous souhaitons trouver les segments parallèles, il suffit de se fixer un seuil ϵ et de sélectionner tous les couples de segments $([AB],[CD])$ tels que :

$$abs(\det(A - B, C - D)) < \epsilon.$$

Que se passe-t-il si nous avons la photographie d'un objet circulaire ? La segmentation¹³ nous fournit un ensemble de petits segments qui forment le contour de notre objet. Si le travail de segmentation est assez fin, même pour des valeurs ϵ assez petites, deux segments consécutifs seront parallèles. La description géométrique suivante est donc tout à fait réaliste : soient S_1, S_2, S_3, S_4 quatre segments tels que :

- S_i et S_{i+1} sont parallèles pour $i \in \{1,2,3\}$,
- S_1 et S_4 sont orthogonaux.

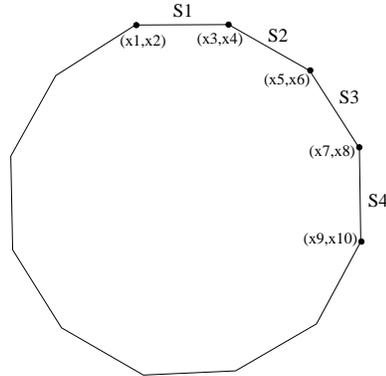
Dans un repère quelconque de plan, nous pouvons associer à chaque segment deux coordonnées à chaque extrémité (fig. 1.8). Dans ce repère, les hypothèses deviennent :

$$\begin{cases} (x_3 - x_1)(x_6 - x_4) - (x_4 - x_2)(x_5 - x_3) = 0 \\ (x_5 - x_3)(x_8 - x_6) - (x_6 - x_4)(x_7 - x_5) = 0 \\ (x_7 - x_5)(x_{10} - x_8) - (x_8 - x_6)(x_9 - x_7) = 0 \\ (x_3 - x_1)(x_9 - x_7) + (x_4 - x_2)(x_{10} - x_8) = 0 \end{cases}$$

L'inter-réduction des hypothèses nous permet d'obtenir que :

$$\begin{cases} x_4 = x_2 \\ x_3 = x_1 \end{cases}$$

13. Action de détection de contour en vision artificielle.

FIG. 1.8 – *Segmentation d'un objet circulaire*

c'est-à-dire que les extrémités du premier segment sont confondues. Cette configuration est dégénérée.

Dans le cas où la description géométrique est incohérente, l'inter-réduction des hypothèses permet de mettre en évidence que les seules composantes valides sont dégénérées.

1.3.2 Les limitations naturelles

En vision artificielle, nous étudions souvent des scènes dont la modélisation nécessite au moins une centaine d'objets tridimensionnels. Malheureusement, aussi bien pour les méthodes utilisant des coordonnées que pour les méthodes dites intrinsèques (méthodes utilisant des déterminants), la représentation des contraintes sur ces objets est un ensemble de polynômes avec beaucoup d'indéterminées. Même si ces contraintes sont très simples, la construction d'un ensemble triangulaire n'est pas simple et la réduction par rapport à un tel ensemble est extrêmement coûteuse¹⁴.

14. Durant le processus de réduction, les polynômes considérés sont denses.

Chapitre 2

Ordre constructif et ensemble réducteur

Nous rappelons que nous avons à notre disposition un modèle approché et une description géométrique de la scène à modéliser. La description géométrique est restreinte à un ensemble d'objets tels que des points, des droites ou segments, des plans ou polygones, ainsi qu'un ensemble de contraintes entre ces objets. Mais contrairement à la plupart des énoncés des théorèmes géométriques, nous ne connaissons pas d'algorithme permettant de construire la configuration décrite. Or, nous avons vu dans le chapitre précédent que l'ordre et la construction des objets jouent un rôle essentiel dans la recherche des conditions de dégénérescence et des différentes composantes de la variété des hypothèses. De plus, ils agissent aussi de façon non négligeable sur la complexité. Des approches basées sur l'utilisation des graphes existent [HV95] pour la géométrie plane essentiellement.

2.1 Composantes génériques, points génériques

Avant de décrire un algorithme permettant la construction d'une configuration, nous devons nous interroger sur la définition même de générique.

De manière générale en mathématiques, nous disons qu'une situation est générique si elle est vraie presque partout. Plus précisément, une situation est générique si elle appartient à un sous-ensemble dense des ensembles des situations possibles.

En conservant la même notion, nous dirons qu'une configuration géométrique est générique si elle appartient à un sous-ensemble dense de l'ensemble des configurations possibles. En d'autres termes, nous enlevons à la variété algébrique des configurations possibles, un ensemble fermé de plus petite dimension, c'est-à-dire dans une hypersurface. L'ensemble des configurations non génériques peut donc être déterminé par un ensemble de relations¹.

Dans la méthode de Chou [Cho88], la variété de dégénérescence est donnée par les polynômes en \mathbf{u} apparaissant dans le calcul de l'ensemble caractéristique ou le cas

1. Ces relations sont les équations de la surface et certaines inéquations éventuellement.

échéant dans la décomposition en variétés irréductibles. Cette variété de dégénérescence correspond au fait que les objets définis par les paramètres \mathbf{u} ne possèdent pas de propriétés géométriques non spécifiées par la configuration.

Il existe pour un problème donné plusieurs définitions possibles de variété de dégénérescence. Étudions un exemple :

Exemple 7

Génériquement deux coniques homogènes se coupent en quatre points.

Prenons les coniques d'équation :

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy + d_1xz + e_1yz + f_1z^2 \\ c_2 &= a_2x^2 + b_2y^2 + c_2xy + d_2xz + e_2yz + f_2z^2 \end{aligned}$$

- Pour toute forme linéaire l , nous pouvons construire la matrice de Macaulay S de $\{l, c_1, c_2\}$. Cette matrice se décompose en quatre blocs :

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Si D est inversible alors les deux coniques d'équations c_1 et c_2 se coupent en quatre points. La variété de dégénérescence est définie par l'équation $\det(D) = 0$.

- *Si les deux coniques sont dégénérées², elles se coupent en quatre points.*
- *Nous n'avons pas les mêmes notions de généralité, comme le montre les deux coniques suivantes :*

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - r^2z^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ces deux coniques sont génériques dans le sens où le déterminant de la sous-matrice D de l'application de Macaulay est inversible, alors que la première conique est dégénérée dans le sens où sa matrice associée n'est pas de rang maximal.

Pour notre problème, il ne serait pas raisonnable de demander à l'utilisateur une description géométrique exhaustive de la scène. Par conséquent, nous ne pouvons pas utiliser la notion de dégénérescence usuelle³ pour la géométrie. En effet, si l'utilisateur omet une contrainte, c'est-à-dire que la scène vérifie une contrainte géométrique qui n'est pas une conséquence des hypothèses de la description, alors la géométrie de la scène est dans une composante dégénérée de la description. C'est une des raisons qui nous a amené à choisir une définition différente.

Définition 21 *Pour une description géométrique \mathcal{D} , une composante de la variété des configurations est générique si et seulement si toutes les contraintes de \mathcal{D} sont satisfaites et que tous les objets de \mathcal{D} sont distincts.*

2. Une conique est dite dégénérée si et seulement si le déterminant de la matrice de la forme bilinéaire associée est nul.

3. Celle de Chou.

De plus, les descriptions géométriques que nous souhaitons étudier ont pour type d'objet des points, des droites et des plans ; et pour type de contrainte de l'incidence, du parallélisme, de l'orthogonalité entre deux objets. Nous remarquons que ces contraintes sont linéaires par rapport à chacun des objets. Nous travaillerons avec la condition suivante :

Conditions 1 *Les contraintes agissant sur un objet sont linéaires par rapport à cet objet.*

Proposition 54 *Si une description géométrique \mathcal{D} satisfait la condition 1 alors un objet O de \mathcal{D} appartient à l'intersection d'un ensemble d'hyperplans dépendants uniquement des objets de \mathcal{D} déjà construits.*

Démonstration : Supposons que O_1, \dots, O_k soient k objets construits de \mathcal{D} . Appelons $h_{O_{k+1}}$ l'ensemble des contraintes exercées par les objets O_1, \dots, O_k sur O_{k+1} . Comme \mathcal{D} vérifie la condition 1, ces contraintes sont linéaires en O_{k+1} . Chaque contrainte est équivalente à un ensemble de formes linéaires ou bien à l'appartenance de O_{k+1} à des hyperplans. \square

Notation 6 *Pour une description géométrique \mathcal{D} :*

- Nous appelons h_{O_1, \dots, O_k} l'ensemble des contraintes de \mathcal{D} portant sur les objets O_1, \dots, O_k .
- Nous appelons V_k la variété des configurations des objets O_1, \dots, O_k de \mathcal{D} qui est aussi la variété définie par h_{O_1, \dots, O_k} .
- Nous appelons W_k une composante générique de V_k .
- Nous appelons $h_{O_{k+1}}$ les contraintes exercées par les objets O_1, \dots, O_k sur O_{k+1} .

Remarque 28 *Avec la définition 21 de généricité, il peut exister plusieurs composantes génériques pour une même description géométrique vérifiant la condition 1.*

Exemple 8 *Soient P un point, L une droite et H un plan, avec $P \in L$ et $P \in H$. Supposons que H et L soient construits, alors nous avons deux cas possibles soit la droite est dans le plan, soit la droite coupe le plan en un point. Dans chacun des cas, la construction appartient à une composante générique. Dans un cadre plus général, nous pouvons construire ces composantes génériques pour chaque nouvel objet par un relèvement d'une composante générique des objets déjà construits (fig. 2.1).*

Théorème 14 *Pour une description géométrique \mathcal{D} vérifiant la condition 1, ω étant une configuration générique de \mathcal{D} , il existe une unique composante générique contenant ω de la variété des configurations de \mathcal{D} .*

Démonstration : Cette démonstration se fait par récurrence sur les objets construits.

Supposons que les objets O_1, \dots, O_k de \mathcal{D} ont été construits et que W_k soit la composante générique de V_k contenant ω_k la projection de ω sur V_k .

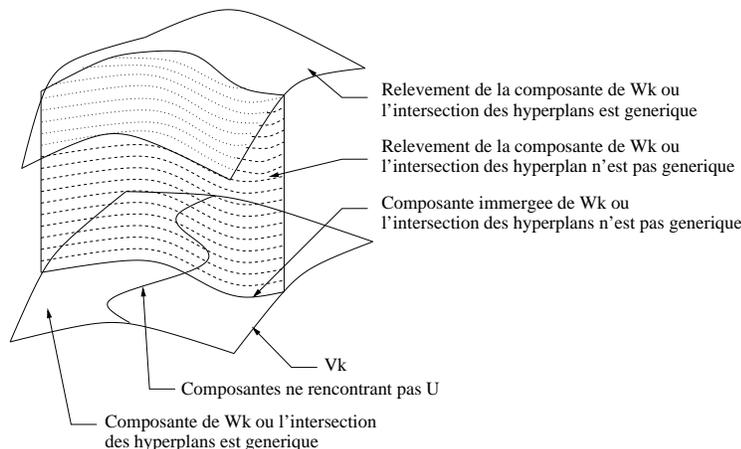


FIG. 2.1 – Les différentes composantes génériques.

Construisons l'objet O_{k+1} . Comme \mathcal{D} vérifie la condition 1, O_{k+1} appartient à l'intersection finie d'hyperplans $(H_i)_{i \in I}$. Nous appelons d_{k+1} la dimension de l'intersection des $(H_i)_{i \in I}$ en ω_k et $U_k = \{y \in W_k \mid \dim_y(\bigcap_{i \in I} H_i) = d_{k+1}\}$ un ouvert de W_k . Soit $\pi_k : V_{k+1} \rightarrow V_k$ la projection sur les premières coordonnées. $\forall y \in U_k$, $\pi_k^{-1}(y)$ est un espace vectoriel donc une fibre irréductible de dimension la dimension de l'objet O_{k+1} moins d_{k+1} . Comme W_k est irréductible alors U_k est un ouvert irréductible et par le théorème des fibres (voir théorème 8 page 61 de [Sha74]) adapté pour des ouverts de variétés projectives, $\pi_k^{-1}(U_k)$ est un ouvert irréductible. Nous en déduisons que $W_{k+1} = \pi_k^{-1}(U_k)$ est la variété irréductible générique de V_{k+1} contenant w_{k+1} . \square

2.2 Ordre constructif et ensemble réducteur

Les deux principaux obstacles à l'utilisation des méthodes de démonstration automatique sont l'absence d'ordre sur les objets et la complexité des calculs. Dans cette section, nous nous intéressons à rechercher une méthode qui permette de construire un ordre qui donne des calculs relativement simples.

Or un ordre qui permet de construire progressivement les objets en fonction d'objets déjà construits nous apporte naturellement une structure triangulaire, et par conséquent, des calculs assez simples.

Dans la suite, nous nous intéressons à trouver un ordre de construction d'une description géométrique.

2.2.1 Un algorithme

Des méthodes ont déjà été étudiées et développées [HV95, FH97, JASR99, Lee99]. Elles construisent le graphe de contraintes d'une configuration, c'est-à-dire un graphe dont les noeuds sont les objets géométriques et les arêtes représentent les contraintes

géométriques entre deux objets représentés par les deux extrémités de l'arête. Donner un ordre de construction est équivalent à orienter ce graphe. Pour ce faire, ces techniques découpent ce graphe en sous-graphes appelés « cluster » qui correspondent aux plus grands ensembles que nous pouvons construire à partir de deux objets pour le plan et trois objets pour l'espace. Une fois le graphe des contraintes partitionné en « cluster », nous savons alors orienter entièrement le graphe. Ces méthodes sont malheureusement mal adaptées au cas tridimensionnel. Seulement quelques tentatives ont été faites avec de grosses restrictions sur la nature des objets et des contraintes.

L'algorithme que nous proposons permet de trouver un ordre de construction d'une configuration satisfaisant la description géométrique. L'élément clé de cet algorithme est le calcul à chaque étape du degré de liberté de tous les objets à construire.

Algorithme 5

entrée : Une description géométrique.

sortie : Un ordre constructif et une caractérisation de la composante irréductible de la variété des configurations.

initialisation :

- Affecter l'ensemble des contraintes actives à l'ensemble vide.
- Affecter l'ensemble des contraintes inactives à l'ensemble des contraintes de la description géométrique.
- Affecter l'ensemble réducteur à l'ensemble vide.
- Affecter l'ensemble des objets construits à l'ensemble vide.
- Affecter l'ensemble des objets non construits à l'ensemble des objets de la description géométrique.
- Associer à tous les objets non construits deux entiers : le degré de liberté et le nombre de contraintes non actives portant sur l'objet. Le degré de liberté est initialisé à la dimension de l'objet.

corps : Tant que tous les objets ne sont pas construits faire :

1. - Si c'est la première construction ou bien si un objet a été construit alors rechercher l'objet à construire c'est-à-dire un élément de l'ensemble des objets de plus petit degré de liberté, nous appelons cet ensemble une composante.
 - Sinon, si la dernière composante est non vide alors rechercher l'objet à construire dans cette composante.
 - Sinon, si l'ensemble des objets construits n'est pas réduit à un objet alors supprimer le dernier objet construit et mettre à jour tout l'environnement puis retourner à l'étape 1.
 - Sinon, il n'y a pas de construction générique possible et l'algorithme s'arrête.
2. Mettre à jour les ensembles d'objets construits et non construits ainsi que les ensembles de contraintes.
3. Construire les règles de réduction pour cet objet, et les ajouter à l'ensemble réducteur.
4. Pour tous les objets non construits faire
 - Calculer l'intersection des hyperplans définissant l'objet non construit.

- Si cette intersection est vide⁴ ou coïncide avec un objet déjà construit⁵ alors supprimer le dernier objet construit et mettre à jour tout l'environnement puis aller à l'étape 1 sans avoir construit d'objet.
- Sinon un objet est construit.

Nous allons reprendre en détail les étapes de cet algorithme.

Comment choisir l'objet à construire : Nous choisissons un objet possédant le plus petit degré de liberté.

Bien que cela paraisse naturel, puisqu'il s'agit de construire le plus d'objets avec le moins de paramètres possibles, nous ne savons pas si une telle construction est toujours possible. En revanche, nous sommes en mesure de construire des exemples pour lesquels la construction d'objets de degré supérieur au degré minimal ne peut pas satisfaire toutes les contraintes.

Exemple 9 *Supposons la description géométrique tridimensionnelle suivante :*

- **Les objets :** P_1, P_2 deux points, l_1, l_2, l_3, l_4 quatre droites.
- **Les contraintes :** $P_1 \in l_1, P_1 \in l_2, P_2 \in l_3, P_2 \in l_4, l_1 \parallel l_3, l_2 \parallel l_4, l_3 \perp l_4$.

Supposons que les objets P_1, l_1, l_3, P_2 sont construits. Il reste seulement deux droites l_2 et l_4 . La droite l_2 a pour degré de liberté 2 puisqu'elle doit passer par le point P_1 . La droite l_4 est de degré 1 puisqu'elle doit être orthogonale à l_3 et passer par le point P_2 . Si nous construisons génériquement la droite l_2 alors nous rajoutons la contrainte $l_2 \parallel l_4$ et il n'est pas possible de construire une droite l_4 satisfaisant toutes les contraintes. Alors que si nous construisons en premier l_4 , la construction de l_2 ne pose pas de problème.

Nous utilisons des heuristiques pour choisir un objet parmi l'ensemble des objets de plus petit degré. Si cet ensemble possède plus d'un élément, nous retenons les objets de plus petite dimension, puis s'il reste encore plusieurs objets, nous gardons les objets qui ont le plus de contraintes potentielles, nous prenons ensuite un élément aléatoirement.

Exemple 10 *Supposons la description géométrique tridimensionnelle suivante (fig. 10) :*

- **Les objets :** P_1, P_2, P_3, P_4 quatre points, l_1, l_2, l_3, l_4 quatre droites, H un plan.
- **Les contraintes :** $P_1 \in H, P_2 \in H, P_3 \in H, P_4 \in H, P_1 \in l_1, P_2 \in l_1, P_2 \in l_2, P_3 \in l_2, P_3 \in l_3, P_4 \in l_3, P_4 \in l_4, P_1 \in l_4, l_1 \parallel l_3, l_2 \parallel l_4, l_3 \perp l_4$.

Recherche d'un ordre constructif en utilisant les heuristiques.

Initialisation : nous donnons pour chaque objet la liste suivante : (objet, degré de liberté, dimension de l'objet, nombre de contraintes inactives)

$(P_1, 3, 1, 3); (P_2, 3, 1, 3); (P_3, 3, 1, 3); (P_4, 3, 1, 3); (l_1, 4, 2, 3); (l_2, 4, 2, 3); (l_3, 4, 2, 4); (l_4, 4, 2, 4); (H, 3, 3, 4)$

Construction :

1. \mathbf{P}_1 $(P_2, 3, 1, 3); (P_3, 3, 1, 3); (P_4, 3, 1, 3); (l_1, 2, 2, 2); (l_2, 4, 2, 3); (l_3, 4, 2, 4); (l_4, 2, 2, 3); (H, 2, 3, 3)$
2. \mathbf{l}_4 $(P_2, 3, 1, 3); (P_3, 3, 1, 3); (P_4, 1, 1, 2); (l_1, 2, 2, 2); (l_2, 2, 2, 2); (l_3, 3, 2, 3); (H, 2, 3, 3)$

4. Construction impossible, nous ne sommes pas sur la bonne composante.

5. Composante dégénérée.

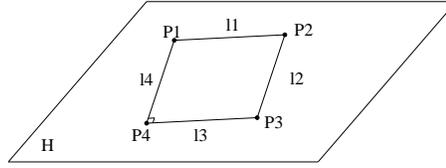


FIG. 2.2 – Configuration de l'exemple 10

3. \mathbf{P}_4 $(P_2, 3, 1, 3); (P_3, 3, 1, 3); (l_1, 2, 2, 2); (l_2, 2, 2, 2); (l_3, 1, 2, 2); (H, 1, 3, 2)$
4. \mathbf{l}_3 $(P_2, 3, 1, 3); (P_3, 1, 1, 2); (l_1, 0, 2, 1); (l_2, 2, 2, 2); (H, 1, 3, 2)$
5. \mathbf{l}_1 $(P_2, 1, 1, 2); (P_3, 1, 1, 2); (l_2, 2, 2, 2); (H, 1, 3, 2)$
6. \mathbf{P}_2 $(P_3, 1, 1, 2); (l_2, 0, 2, 1); (H, 0, 3, 1)$
7. \mathbf{l}_2 $(P_3, 0, 1, 1); (H, 0, 3, 1)$
8. \mathbf{P}_3 $(H, 0, 3, 0)$
9. \mathbf{H}

L'ensemble de ces heuristiques est naturel puisqu'il s'agit de construire en premier les objets de petite dimension⁶ puis ceux qui contraignent le plus la configuration pour ensuite avoir le moins de degré de liberté possible.

Nous verrons que ces heuristiques sont très importantes pour la rapidité de l'algorithme, et qu'elles n'entraînent pas de conséquence théorique puisqu'en cas d'erreurs, nous pouvons remonter la construction afin de faire un autre choix⁷.

Calcul de la dimension générique de l'intersection Après la k -ième itération de cet algorithme nous supposons avoir construit un ensemble de règles de réduction réduisant à zéro toutes les propriétés géométriques vérifiées par les k premiers objets⁸. L'intersection d'hyperplans s'écrit bien en utilisant la généralisation de l'opérateur d'intersection dans l'algèbre extérieure 1.2.3 [Mou91a, Mou91b]. Avec ce formalisme, il est facile de voir que trouver la dimension de l'intersection revient à vérifier que des déterminants construits sur les k premiers objets s'annulent ou ne s'annulent pas génériquement⁹.

Le problème des contraintes redondantes est complètement résolu par la recherche de l'intersection générique des hyperplans.

Le retour en arrière Les heuristiques prises pour choisir l'objet à construire peuvent nous amener sur une composante dégénérée ou ne satisfaisant pas les hypothèses. Nous sommes capable de le détecter à l'étape 4 de l'algorithme mais pas forcément à la même itération. Pour cela, nous avons mis en place un système de retour en arrière et de composantes. Nous donnons un exemple pour permettre une meilleure compréhension.

6. Cela évite des problèmes d'inclusions.

7. Nous décrirons un peu plus comment nous effectuons ce retour en arrière par la suite.

8. Nous démontrerons ce résultat par récurrence (voir la démonstration du théorème 14).

9. C'est-à-dire se réduisent ou ne se réduisent pas à zéro.

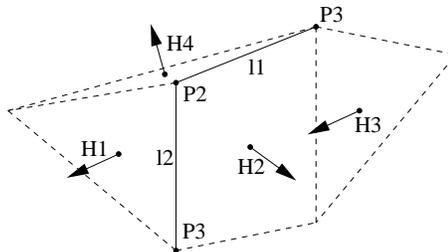


FIG. 2.3 – Configuration appartenant à la bonne composante

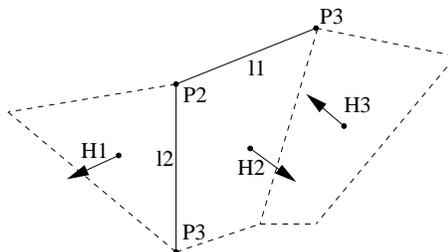


FIG. 2.4 – Configuration appartenant à une mauvaise composante

Exemple 11 Supposons la description géométrique suivante (fig. 2.3) :

- **Les objets** : P_1, P_2, P_3 trois points, l_1, l_2 deux droites, H_1, H_2, H_3, H_4 quatre plans.
- **Les contraintes** : $P_2 \in H_1, P_3 \in H_1, P_1 \in H_2, P_2 \in H_2, P_3 \in H_2, P_1 \in H_4,$
 $P_2 \in H_4, P_1 \in H_3, P_1 \in l_1, P_2 \in l_1, P_2 \in l_2, P_3 \in l_2, l_1 \perp l_2, H_1 \perp H_2, H_2 \perp H_3,$
 $H_4 \perp H_3.$

Initialisation : nous associons à chaque objet la liste suivante : (objet, degré de liberté, dimension de l'objet, nombre de contraintes inactives)

$(P_1, 3, 1, 4), (P_2, 3, 1, 5), (P_3, 3, 1, 3), (l_1, 4, 2, 3), (l_2, 4, 2, 3), (H_1, 3, 3, 3), (H_2, 3, 3, 5), (H_3, 3, 3, 3),$
 $(H_4, 3, 3, 3)$

Construction :

1. \mathbf{P}_2 : $(P_1, 3, 1, 4); (P_3, 3, 1, 3); (l_1, 2, 2, 2); (l_2, 2, 2, 2); (H_1, 2, 3, 2); (H_2, 2, 3, 4); (H_3, 3, 3, 3);$
 $(H_4, 2, 3, 2)$
2. $l_1 \{l_2, H_1, H_2, H_4\}$: $(P_1, 1, 1, 3); (P_3, 3, 1, 3); (l_2, 1, 2, 1); (H_1, 2, 3, 2); (H_2, 2, 3, 4); (H_3, 3, 3, 3);$
 $(H_4, 2, 3, 2)$
3. $\mathbf{P}_1 \{l_2\}$: $(P_3, 3, 1, 3); (l_2, 1, 2, 1); (H_1, 2, 3, 2); (H_2, 1, 3, 3); (H_3, 2, 3, 2); (H_4, 1, 3, 1)$
4. $l_2 \{H_2, H_4\}$: $(P_3, 1, 1, 2); (H_1, 2, 3, 2); (H_2, 1, 3, 3); (H_3, 2, 3, 2); (H_4, 1, 3, 1)$
5. $\mathbf{P}_3 \{H_2, H_4\}$: $(H_1, 1, 3, 1); (H_2, 0, 3, 2); (H_3, 2, 3, 2); (H_4, 1, 3, 1)$
6. \mathbf{H}_2 : $(H_1, 0, 3, 0); (H_3, 1, 3, 1); (H_4, 1, 3, 1)$
7. \mathbf{H}_1 : $(H_3, 1, 3, 1); (H_4, 1, 3, 1)$
8. Les deux objets à construire ont même degré, même dimension et même nombre de contraintes inactives. Si l'algorithme choisit le premier objet de la liste \mathbf{H}_3 ,

alors la configuration est dégénérée car :

$$\left. \begin{array}{l} H_4 \perp H_3 \\ l_1 \subset H_4 \end{array} \right\} \Rightarrow n(H_4) = l_1 \times n(H_3) = n(H_2)$$

où l'opérateur $n(H)$ est la normale au plan H (fig. 2.4).

9. Le retour en arrière d'une itération nous donne la construction de \mathbf{H}_4 puis la construction de \mathbf{H}_3 qui est une configuration d'une composante générique.

Ici, le retour en arrière est juste d'une itération, mais nous avons des exemples qui seraient trop long à décrire en détail dans lesquels le retour en arrière remonte de 2, 3, ... itérations.

Cette recherche de l'ordre est en quelque sorte une exploration en profondeur de l'arbre des configurations. Lorsque nous trouvons une configuration soit non générique soit impossible, nous remontons dans l'arbre pour pouvoir explorer une nouvelle branche. Les heuristiques nous permettent simplement de regarder en premier les branches qui nous semblent plus prometteuses.

Quelques remarques : Comme nous l'avons souligné au début de ce chapitre, un des points faibles de ces algorithmes est la réduction d'une contrainte par un ensemble réducteur pour tester si elle est ou si elle n'est pas une conséquence des hypothèses.

Comme l'algorithme 5 construit la composante itérativement objet par objet, nous pouvons, à chaque itération, faire un tirage aléatoire des paramètres de l'objet qui restent libres¹⁰ et ainsi construire une configuration correspondante à la composante décrite.

Cette technique permet de vérifier avec une forte probabilité n'importe quelle propriété. En particulier, nous pouvons déterminer la dimension de l'intersection d'hyperplans.

Dans ce cas, à chaque itération, nous utilisons une configuration aléatoire dans la composante choisie, nous calculons la dimension de l'intersection des hyperplans la plus générique¹¹ et nous caractérisons la composante dominante de la variété des configurations.

2.2.2 Une adaptation à notre problème

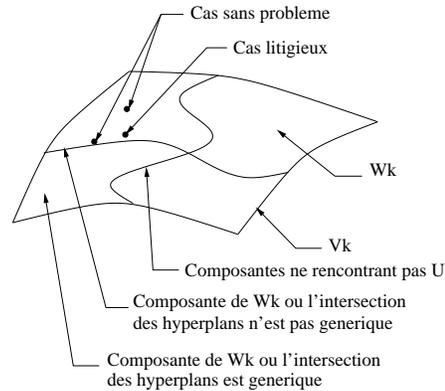
Notre problème est de donner une caractérisation d'une (de la) composante générique « correspondant au mieux » à une configuration approchée d'une description géométrique vérifiant les conditions 1.

L'algorithme 5 utilisant une instanciation aléatoire ne nous garantit pas de décrire la bonne composante. Comment en être sûr ?

Nous proposons de ne plus instancier aléatoirement une configuration, mais d'affecter les paramètres libres des objets directement avec les valeurs du modèle approché. La

10. Leur nombre correspond au degré de liberté de l'objet.

11. Le lieu géométrique où l'intersection des hyperplans n'est pas générique est une variété de dimension inférieure (fig. 2.1).

FIG. 2.5 – *Cas litigieux*

configuration ainsi choisie ne devrait pas être trop loin du modèle approché. Pourtant les erreurs sur le modèle approché vont nous conduire avec une très forte probabilité vers la même composante que celle construite à partir des instantiations aléatoires.

Essayons de mieux comprendre ce qui peut se passer? La scène que nous voulons modéliser vérifie des contraintes supplémentaires puisque nous supposons avoir une description non exhaustive. En effet notre modèle approché ne vérifiera que très peu de contraintes de manière formelle (fig. 2.5). Le modèle approché sera très proche des lieux critiques pour l'ensemble des contraintes décrites vérifiées par la scène à modéliser. C'est pour ces raisons, qu'instancier la configuration de manière aléatoire ou en fonction du modèle approché revient au même, si nous regardons l'intersection des hyperplans de manière formelle.

Nous proposons de modifier l'interprétation de la dimension de l'intersection des hyperplans. Il ne suffit plus de savoir si certains déterminants (voir 1.2.3) sont nuls mais de savoir si certains déterminants sont proches de zéro ou plus précisément d'établir un critère et un seuil qui permette de dire si un déterminant est numériquement nul ou non nul.

Pour se garantir de choisir la bonne composante, nous pouvons affiner d'avantage notre réponse en proposant une solution inter-active avec l'utilisateur. En effet, lors de cas litigieux, nous pouvons demander directement à l'utilisateur de nous aider dans notre choix, en rajoutant une ou des contraintes pour la construction de cet objet.

Cela dit, comme la scène peut vérifier beaucoup plus de contraintes, nous risquons de trop solliciter l'utilisateur ce qui n'est peut être pas très souhaitable.

Chapitre 3

Extension à la découverte de propriétés

Nous venons de décrire dans le chapitre précédent, un algorithme qui détermine un ordre de construction d'une configuration vérifiant une description géométrique.

Cet algorithme est incrémental. Il construit progressivement les objets de la description. Mais comme nous l'avons illustré par les exemples 10 et 11, il est parfois nécessaire de revenir en arrière dans la construction, pour changer l'ordre des objets et la terminer correctement. Une des raisons de ces retours en arrière vient des biais introduits par la description. Dans l'exemple 10, les rôles géométriques des droites et des points sont parfaitement symétriques alors que la description privilégie les droites l_3 et l_4 en spécifiant uniquement leur orthogonalité. Par contre, si nous ajoutons à la description les contraintes redondantes suivantes :

$$l_1 \perp l_2, l_2 \perp l_3, l_4 \perp l_1,$$

alors la construction devient triviale.

Nous suggérons ainsi que rajouter de l'information redondante dans la description peut grandement simplifier la recherche d'un ordre de construction.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux différentes méthodes qui permettent de déterminer des propriétés redondantes d'une description, c'est-à-dire découvrir des théorèmes.

3.1 Les méthodes existantes

- Théorie des graphes.
- Base de déduction.

3.2 Notre approche

Les méthodes que nous venons de décrire sont plus fondées sur les propriétés du graphe de contraintes ou de la base déductive que la géométrie de la description elle-

même. Comme depuis le début, nous avons préféré adopter un regard algébrique sur la géométrie.

En termes d'idéaux et de variétés, tout polynôme de l'idéal associé aux configurations génériques constitue un théorème. Et de par ce fait, chercher des théorèmes sur un sous-ensemble des objets de la description, revient à prendre l'intersection de cet idéal avec le sous-anneau défini par les paramètres du sous-ensemble. Dongming Wang utilise cet approche en calculant l'intersection à l'aide de calcul de base de Groebner [Wan98].

La méthode que nous proposons est différente. Elle est fondée sur les remarques suivantes :

Remarque 29 *Une propriété s'exprime par des polynômes homogènes de l'algèbre extérieure.*

Remarque 30 *Pour un scalaire $\lambda \neq 0$, dans l'algèbre extérieure, toute propriété faisant intervenir l'objet O est vraie avec l'objet λO . Nous dirons que les propriétés sont homogènes par rapport aux objets.*

Pour déterminer les propriétés sur un sous-ensemble d'objets de la description, il suffit de considérer les polynômes dans l'algèbre extérieure vérifiant les deux remarques.

3.2.1 Le principe

Soient une description géométrique et un ensemble réducteur de cette description. Nous choisissons l'algèbre extérieure comme formalisme et nous définissons \mathfrak{R} comme le sous-ensemble des objets de la description union l'hyperplan de l'infini H_∞ , union la forme quadratique \mathcal{Q} qui définit la métrique de l'espace.

Définition 22 *Nous appelons support d'un monôme de l'algèbre extérieure construite à partir de \mathfrak{R} , l'ensemble des objets, comptés avec multiplicité, apparaissant dans le monôme.*

Par exemple :

$$\text{Supp}(\mathcal{H}(A) \mathcal{H}(C) \mathcal{Q}(A,B) |A,B,C||A,D,E|) = \mathcal{H}^2, \mathcal{Q}, A^3, B, C^2, D, E.$$

Définition 23 *Nous désignons par composante homogène l'ensemble des monômes de même support.*

En accord avec les remarques 29 et 30, les théorèmes correspondent aux relations entre les monômes d'une même composante homogène. Pour une composante homogène et un degré, nous considérons une combinaison linéaire générique de tous les monômes de la composante. Ce polynôme générique peut être réduit par l'ensemble réducteur. Après réduction, le reste est encore un polynôme linéaire par rapport aux coefficients. Or, si ce reste est identiquement nul alors nous avons une propriété géométrique.

Algorithme 6

entrées : Une description géométrique \mathcal{D} et un ensemble réducteur RS de cette description.

sorties : Toutes les propriétés géométriques vérifiées par la description.

Pour tous les degrés et pour toutes les composantes homogènes \mathcal{H} de l'algèbre extérieure des objets de \mathcal{D} faire :

1. Calculer une combinaison linéaire P de tous les monômes de \mathcal{H} , avec pour coefficients $u = [u_1, \dots, u_k]$ (où k est le nombre de monômes de \mathcal{H}).
2. Calculer le reste R de la réduction de P par RS .
3. Calculer les vecteurs u solutions de $R \equiv 0$ et pour chaque vecteur, chercher l'interprétation géométrique de la relation trouvée.

Il est à noter que l'essentielle difficulté de cet algorithme est l'interprétation géométrique des propriétés découvertes. Nous n'avons pas réellement de technique automatique pour faire cette analyse, mais nous sommes capables de détecter une partie des propriétés qui sont décrites dans la section 1.2 du chapitre 1 de la partie II.

Il est intéressant de remarquer que les propriétés d'incidence, de parallélisme, d'angle, de rapport sont des propriétés de degré 2 par rapport aux déterminants. Les cocyclicités, ou plus généralement la propriété pour six points d'être sur une même conique, est de degré 4, c'est-à-dire que pour découvrir les propriétés qui nous intéressent il suffit de regarder les composantes jusqu'au degré 4. Mais nous pouvons nous poser la question suivante : les composantes de degrés supérieurs cachent-elles de nouvelles propriétés ?

3.2.2 Exemples

La configuration de la médiane

Nous donnons un exemple pour la description plane suivante :

Soient ABC un triangle et A', B', C' , les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$.

Nous avons l'ensemble de règles de réécriture suivant :

$$\begin{aligned} A' &\longrightarrow \frac{1}{2}(B + C), \\ B' &\longrightarrow \frac{1}{2}(A + C), \\ C' &\longrightarrow \frac{1}{2}(A + B). \end{aligned}$$

Pour cette description de 6 points, nous avons $C_n^3 = 20$ déterminants et $5C_n^5 + C_n^6 = 31$ composantes homogènes de degré 2. Nous allons par exemple étudier la composante de degré 1, 1, \dots , 1 en les points A, B, \dots, C' suivante :

$$\begin{aligned} &|A, B, C| |A', B', C'|, |A, B, A'| |C, B', C'|, |A, B, B'| |C, A', C'|, \\ &|A, B, C'| |C, A', B'|, |A, C, A'| |B, B', C'|, |A, C, B'| |B, A', C'|, |A, C, C'| |B, A', B'|, \\ &|A, A', B'| |B, C, C'|, |A, A', C'| |B, C, B'|, |A, B', C'| |B, C, A'|. \end{aligned}$$

Nous construisons la forme linéaire générique :

$$P = u_1 |A, B, C| |A', B', C'| + \dots + u_{10} |A, B', C'| |B, C, A'|,$$

et nous calculons le reste R de P par notre ensemble de règles de réécriture :

$$R = |A, B, C|^2 (-u_3 + u_2 - u_9 + 2u_1 - u_5 + u_8 - u_7).$$

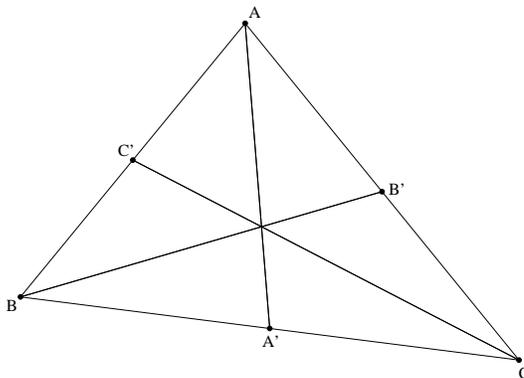


FIG. 3.1 – La configuration de la médiane.

Nous devons résoudre l'équation diophantaine¹ :

$$-u_3 + u_2 - u_9 + 2u_1 - u_5 + u_8 - u_7 = 0.$$

- Pour la solution $u_5 = 1, u_9 = -1, u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_6 = u_7 = u_8 = u_{10} = 0$ nous obtenons l'équation suivante :

$$|A, C, A'| |B, B', C'| - |A, A', C'| |B, C, B'| = 0$$

qui exprime le fait que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes.

- Une autre solution est $u_2 = u_5 = 1, u_1 = u_3 = u_4 = u_6 = u_7 = u_8 = u_9 = u_{10} = 0$, nous obtenons alors l'équation :

$$|A, A', B| |B', C', C| + |A, A', C| |B', C', B| = 0,$$

ce qui signifie que les droites $(B'C')$ et (BC) sont parallèles. En effet, A' est le point d'intersection de (AA') et de (BC) , I est le point d'intersection de $(B'C')$ et (BC) . Or, comme par hypothèse nous avons que :

$$(A', I; B, C) = \frac{|A, A', B| |B', C', C|}{|A, A', C| |B', C', B|} = -1,$$

les points B, C, A', I forment une division harmonique. Alors le fait que A' est le milieu de $[BC]$ implique que I est sur la droite de l'infini et que (BC) est parallèle à $(B'C')$.

La configuration du rectangle

Considérons la description suivante :

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AC \equiv BD$.

1. Résolution dans \mathbb{Z} .

Nous commençons par choisir le système de coordonnées tel que $A(0,0)$, $B(x_1,0)$, $C(x_2,x_3)$, $D(x_4,x_5)$. Les hypothèses s'écrivent :

$$\begin{aligned} (AB) \parallel (CD) & \quad -x_1(x_2 - x_4) = 0, \\ (AD) \parallel (BC) & \quad x_4x_3 - x_4x_1 - x_5x_2 = 0, \\ AC \equiv BD & \quad x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - (-x_5 + x_1)^2 = 0, \end{aligned}$$

et nous obtenons l'ensemble caractéristique CS suivant :

$$\begin{aligned} & x_1^2x_2(x_1 - x_3), \\ & x_1(x_2 - x_4), \\ & x_5x_1^2x_2. \end{aligned}$$

Comme nous avons des hypothèses euclidiennes, nous rajoutons les points I et J de la conique absolue à l'ensemble des objets de la description. Nous devons donc considérer comme dans l'exemple précédent, 6 points, 20 déterminants et 31 composantes homogènes. Intéressons nous à la composante de support : A^2, B, D, I, J .

$$P = v_1|A,B,D||A,I,J| + v_2|A,B,I||A,D,J| + v_3|A,B,J||A,D,I|$$

Alors, le reste par pseudo-division de P par CS est :

$$R = x_1^2x_2^2u(2v_1 + v_2 - v_3).$$

La solution de l'équation diophantine $2v_1 + v_2 - v_3 = 0$ est :

$$\begin{cases} v_1 = kl \\ v_2 = (1 - 2k)l \\ v_3 = l \end{cases}$$

avec $k, l \in \mathbb{Z}$. Pour $k = 0$ et $l = 1$, nous obtenons la relation :

$$|A,B,I||A,D,J| + |A,B,J||A,D,I| = 0$$

qui implique l'orthogonalité de (AB) et (AD) .

Chapitre 4

Applications

4.1 Étalonnage des paramètres internes

En faisant l'hypothèse que θ^1 est égal à $\frac{\pi}{2}$ et que $\frac{\alpha_u}{\alpha_v} = 1^2$ alors nous donnons une méthode d'étalonnage des paramètres internes (focale et position du point principal) de la caméra si nous avons les images de trois paires de droites parallèles orthogonales deux à deux.

Cette méthode est basée sur une propriété de la géométrie projective.

Proposition 55 *Si nous avons les images de trois paires de droites parallèles deux à deux orthogonales alors le centre optique de la caméra est l'un des points d'intersection des trois sphères de diamètre les points de fuite dans la photographie des droites parallèles*

Démonstration : Voir la figure 4.1. H est l'hyperplan à l'infini de \mathbb{P}^3 . Comme I, J, K sont des points de H , nous avons que toutes les droites passant par I (resp. J et K) sont parallèles d'où $(OI) \parallel (CI)$, $(OJ) \parallel (CJ)$ et $(OK) \parallel (CK)$. Or, par hypothèse,

-
1. Angle formé par la grille de digitalisation.
 2. Ce rapport correspond aux rapport de la hauteur sur la largeur des pixels.

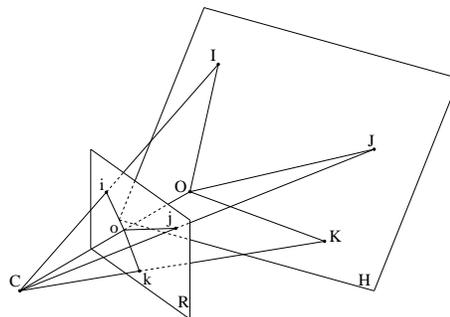


FIG. 4.1 – Image de 3 directions

nous avons $(OI) \perp (OJ)$, $(OI) \perp (OK)$ et $(OJ) \perp (OK)$ d'où nous en déduisons que $(CI) \perp (CJ)$, $(CI) \perp (CK)$ et $(CJ) \perp (CK)$. Nous appelons i, j, k les images respectives de I, J, K par la caméra de centre C . Par construction nous avons que $i \in (CI)$, $j \in (CJ)$ et $k \in (CK)$, nous pouvons conclure que C est sur les sphères de diamètre $[ij]$, $[ik]$ et $[jk]$. \square

4.1.1 Étalonnage à partir de l'image d'un parallélépipède rectangle

C'est un exemple que nous avons repris de l'article [KM99] dans un contexte légèrement différent. Nous supposons connaître les images des huit sommets d'un parallélépipède rectangle et nous voulons reconstruire la position de la caméra par la proposition 55.

Nous commençons par observer le cas où les images des sommets sont connues de manière exacte. Notre problème revient à déterminer les trois points de fuite des directions parallèles du parallélépipède. Une méthode qui permet de trouver les directions consiste à calculer l'enveloppe convexe des huit sommets. Deux cas sont possibles :

- soit l'enveloppe convexe est un hexagone et les côtés opposés sont de même direction,
- soit l'enveloppe convexe est un carré, alors les deux paires de côtés opposés nous donnent deux des trois directions. La troisième direction est donnée par le produit vectoriel des deux premières.

Malheureusement, nous savons que ces conditions d'exactitude ne sont en général pas vérifiées. Nous pouvons tout de même appliquer un algorithme similaire en prenant pour points de fuite, les points qui minimisent les distances aux droites. Mais ces calculs s'avèrent instables numériquement.

Pour aider la stabilité du processus, nous allons prendre en compte le fait que les huit points sont les images des sommets d'un parallélépipède rectangle³. L'algorithme que nous proposons permet d'estimer les paramètres de la caméra qui minimisent les distances entre les points de la photographie et les images des sommets d'un parallélépipède rectangle par cette même caméra.

Algorithme 7 *entrées* : $p_l, l \in \{1, \dots, 8\}$ les images bruitées des sommets d'un parallélépipède rectangle.

sorties : une estimation de la focale et une estimation du point principal de la caméra.

1. Créer un modèle tridimensionnel articulé d'un parallélépipède rectangle dont les trois directions orthogonales sont des paramètres de ce modèle.
2. Créer une matrice de projection de paramètres f, u_0, v_0 .
3. Créer $s_l, l \in \{1, \dots, 8\}$ les images des sommets du modèle par cette caméra.
4. Estimer linéairement i, j, k les trois points de fuite des huit points $p_l, l \in \{1, \dots, 8\}$.
5. Estimer les paramètres f, u_0, v_0 .

3. C'est-à-dire qu'ils doivent vérifier des contraintes géométriques.

bruit	Estimation linéaire				Estimation non linéaire				r_3
	f	u_0	v_0	r_1	f	u_0	v_0	r_2	
0	1345.7805	261.3579	201.1541	.0000	1345.7805	261.3579	201.1541	.0000	.0000
0.0001	1345.6635	261.3244	201.2246	.0000	1345.4306	261.2560	200.9407	.0000	.0000
0.0005	1346.7636	262.9781	201.1617	.0000	1346.1410	262.9914	200.5681	.0000	.0000
0.001	1350.2403	255.5947	197.6788	.0000	1351.0565	256.2178	198.9906	.0000	.0000
0.005	1355.6458	241.1480	184.6970	.0002	1357.9976	244.3897	186.3113	.0001	.0001
0.01	1338.8470	285.3159	212.9123	.0026	1378.0136	307.9111	254.8349	.0004	.0006
0.05	1007.9801	48.9506	142.9299	.0626	1301.9223	77.3009	182.1373	.0208	.0237
0.1	1056.6244	-183.3713	237.0820	.0829	1096.6316	-31.3999	53.2175	.0149	.0327
0.5	107.7532	226.4138	193.0467	509.7730	69.1665	750.9881	929.9140	1.5804	2.6183

TAB. 4.1 – Tableaux de paramètres internes de la caméra pour les différents bruits

6. Apparier les huit points p_l , $l \in \{1, \dots, 8\}$ et les huit images des sommets s_l , $l \in \{1, \dots, 8\}$ de manière cohérente.
7. Estimer linéairement les autres paramètres du parallélépipède rectangle.
8. Estimer par une méthode d'optimisation non linéaire les paramètres de la caméra et les paramètres du parallélépipède de manière à minimiser les distances entre les points p_l et les images des sommets s_l appariés. Nous prenons les premières estimations pour point de départ de l'optimisation.

Nous présentons dans la table 4.1 les résultats obtenus par simulation. A partir d'un tirage d'un parallélépipède rectangle aléatoire et d'une caméra à paramètres internes connus, nous avons généré des images des sommets en ajoutant des bruits gaussiens de déviation standard variant de 0 à 0.5 pixel⁴. Nous présentons la première estimation avec r_1 comme résidu⁵, l'estimation après optimisation avec r_2 comme résidu, puis r_3 le résidu du meilleur parallélépipède en conservant les paramètres de la caméra fixés aux valeurs théoriques.

4.1.2 Étalonnage dans une situation réelle

Cette technique peut être adaptée à des situations plus complexes, comme pour la scène de Londres.

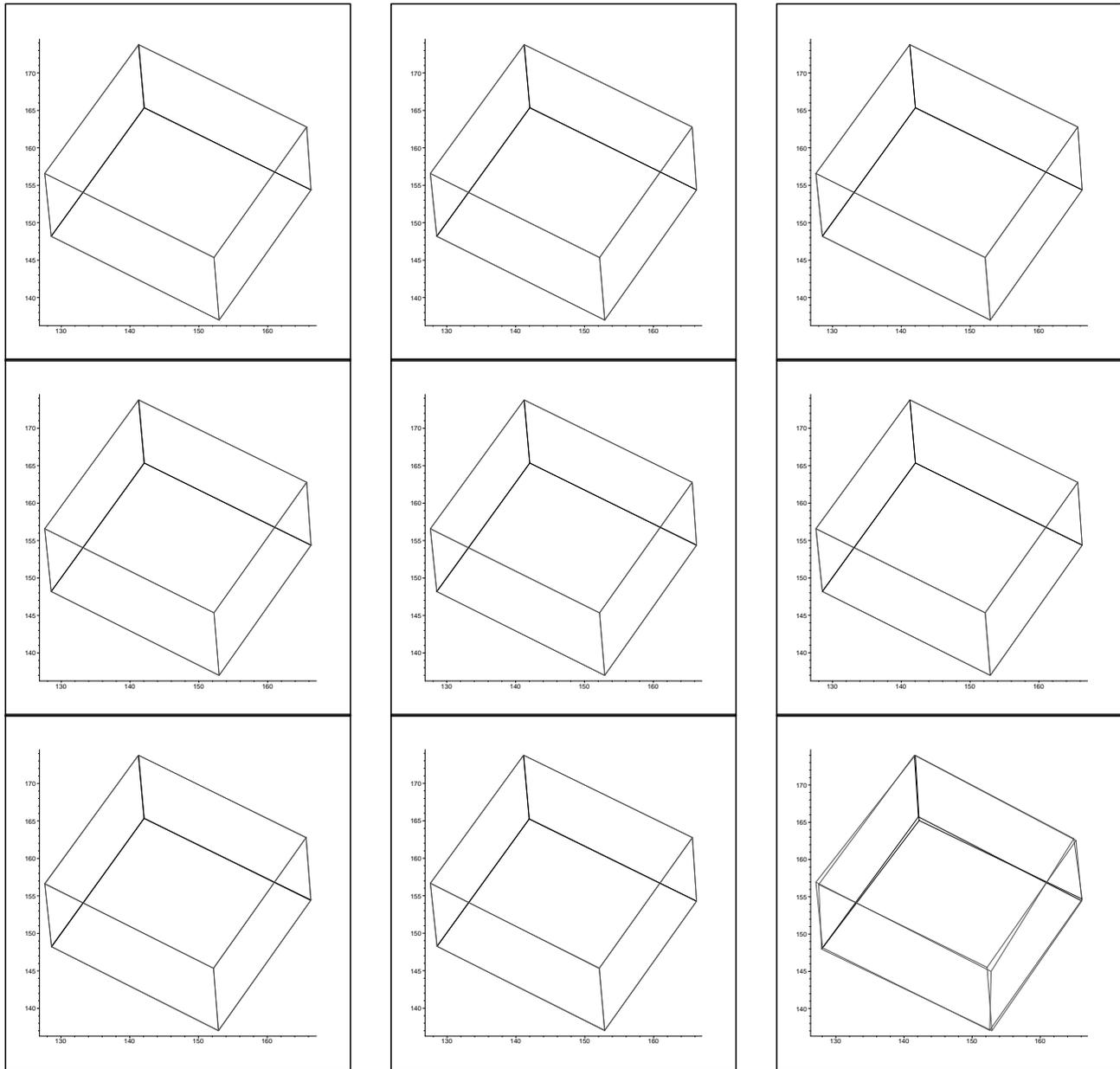


FIG. 4.2 – Ajustement du cube pour différents bruits

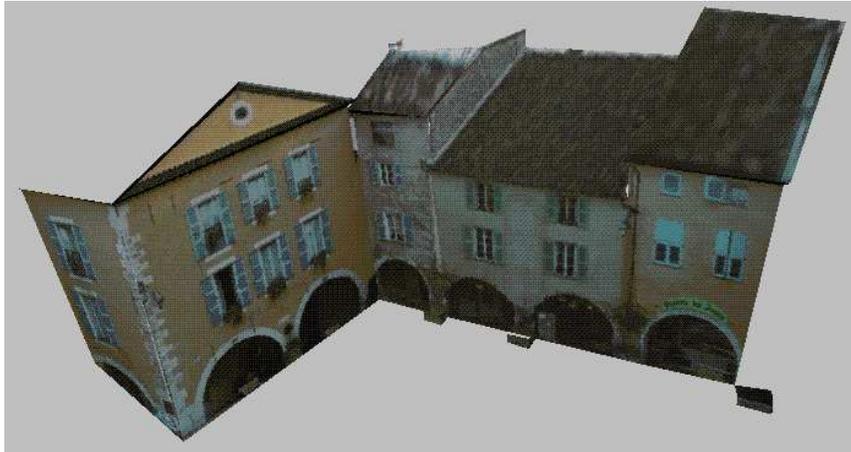


FIG. 4.3 – Un modèle tridimensionnel



FIG. 4.4 – Différentes vues de la place des arcades, Valbonne

4.2 Construction de modèles 3D géométriques contraints à partir d'images

4.2.1 Comment utiliser les contraintes géométriques

Des modèles tridimensionnels tels que celui de la figure 4.3 sont construits uniquement à partir d'un ensemble d'images (fig. 4.4). Comme nous l'avons rapidement dit dans l'introduction, les trois étapes principales sont :

- l'extraction des points caractéristiques (coins des bâtiments, ...) de chacune des photographies;
- la mise en correspondance des points à travers les photographies : nous disons que des points de différentes photographies sont en correspondance s'ils sont les images d'un même point tridimensionnel;
- l'utilisation des correspondances pour établir les matrices fondamentales qui correspondent à la structure projective pour chaque paire de photographies. Les matrices fondamentales sont alors combinées pour établir les positions et les propriétés euclidiennes de chacune des caméras. Il est à noter que ce processus est fondé sur le fait que la scène est euclidienne et fixe. Une fois cette géométrie établie, il est facile de reconstruire les points tridimensionnels de la scène déterminés par les points mis en correspondance (par intersection des rayons optiques) et d'obtenir ainsi un premier modèle tridimensionnel.

Malheureusement, ce schéma doit faire face à beaucoup de problèmes :

- L'extraction de points caractéristiques est toujours entachée d'erreurs (bruit). Ces erreurs proviennent de plusieurs phénomènes : des effets électroniques et optiques, de la digitalisation et des biais introduits par les méthodes automatiques quand celles-ci sont utilisées.
- Les mauvaises mises en correspondance bien que certaines puissent être détectées durant l'estimation de la matrice fondamentale, influent sur le résultat final de l'algorithme.
- Le calcul des positions des caméras et de leurs caractéristiques est naturellement non linéaire, ce qui entraîne des instabilités de convergence dans les cas un peu difficiles.

Bien sûr, ces effets sont augmentés si nous utilisons des méthodes complètement automatiques ou des méthodes manuelles ou semi-automatiques. Toujours est-il que les imprécisions restent.

C'est pour cela que nous utilisons toujours une étape supplémentaire pour terminer le processus. Cette étape appelée « bundle adjustment » est un raffinement de la structure tridimensionnelle et des paramètres des caméras de manière à minimiser le carré de la distance entre les points extraits et les points reprojetés dans les différentes photographies. Pour mieux formaliser les choses, nous appelons M^j les points tridimensionnels et m_i^j les points extraits de la i -ième photographie de la caméra P_i comme les

4. Pour des coordonnées des points de l'ordre de 100 pixels.

5. C'est-à-dire la somme des carrés des distances entre les points et les images des sommets.

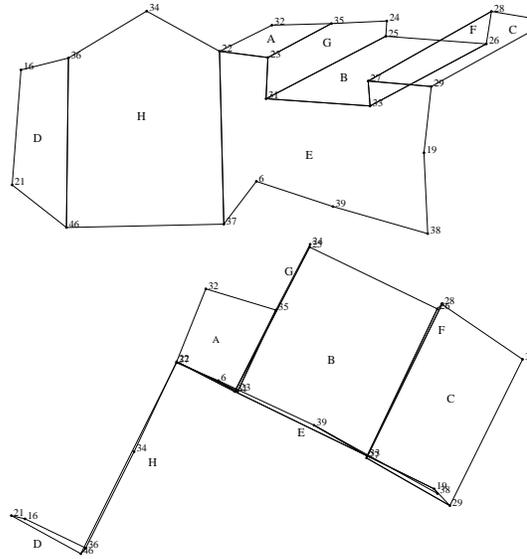


FIG. 4.5 – Modèles tridimensionnels en fil de fer

images des M^j . Nous notons $P_i(M^j)$ la reprojection du point tridimensionnel M^j par la i -ème caméra. Si nous avons N caméras et m points tridimensionnels alors le processus du « bundle adjustment » minimise le critère suivant :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m d(m_i^j, P_i(M^j))^2,$$

où $d(m_1, m_2)$ est la distance entre m_1 et m_2 . Nous pouvons remarquer que les points tridimensionnels sont calculés à partir des données et les paramètres sur lesquels la minimisation est effectuée sont juste les P_i , $i = \{1, \dots, N\}$. En pratique, cette minimisation peut être effectuée en alternance sur les points tridimensionnels (en gardant les paramètres des caméras fixes) et sur l'étalonnage des caméras (en gardant les points fixes). Les figures 4.3 et 4.5 montrent les résultats obtenus en utilisant les données de la figure 4.4. Le modèle tridimensionnel est montré sous différents points de vue. Sur la vue orthographique de dessus, nous pouvons constater que les toits ne sont pas rectangulaires et que les façades des immeubles ne sont pas planes. Ces modèles ne vérifient pas exactement les propriétés géométriques élémentaires naturelles [BB98, Bou98].

Bien sûr, nous voulons montrer que l'utilisation de la connaissance géométrique de la scène permet non seulement de stabiliser l'étalonnage des caméras mais aussi d'obtenir un modèle qui respecte la géométrie tridimensionnelle de la scène. Pour ce faire, nous commençons par enrichir nos données :

- $\tilde{\mathcal{P}}$ est un ensemble d'objets tridimensionnels tels que des plans, des droites, des points . . . Ces objets sont formés par les points tridimensionnels que nous avons reconstruits.

- \tilde{C} est un ensemble de contraintes entre les objets que nous venons de définir. Ces contraintes peuvent être des contraintes d'incidence, des contraintes de parallélisme, des contraintes d'orthogonalité, . . .

Nous supposons que cet enrichissement de nos connaissances sur la scène est fourni par l'utilisateur. Nous considérons que les méthodes classiques d'étalonnage telles que nous les avons décrites, nous permettent d'obtenir une initialisation des paramètres des caméras ainsi que du modèle tridimensionnel. Maintenant, nous voulons introduire les contraintes de \tilde{C} dans le processus du « bundle adjustment ». Il existe essentiellement deux techniques pour le faire.

En utilisant une paramétrisation : Considérons une paramétrisation \mathbf{p} de la scène, ou plus précisément de l'ensemble des objets de \tilde{P} satisfaisant les contraintes de \tilde{C} . Une telle paramétrisation peut être généralement définie par un sous-ensemble \mathcal{M} d'objets tridimensionnels de \tilde{P} et par un ensemble d'expressions $M_i(\mathbf{p})$ dérivées de \tilde{C} définissant tous les autres objets tridimensionnels de \tilde{P} en fonction des objets de \mathcal{M} . Par construction, \tilde{P} est entièrement défini dans le sens où toutes les contraintes de \tilde{C} sont satisfaites. En utilisant un tel outil, il est facile de modifier le « bundle adjustment » pour prendre en compte ces contraintes. Il suffit de modifier la partie de reconstruction tridimensionnelle par :

- Reconstruire seulement les objets de \mathcal{M} à partir des données des photographies.
- Dédire les autres objets tridimensionnels en utilisant les règles $M_i(\mathbf{p})$.

Le critère à minimiser est alors :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m d(m_i^j, P_i(M^j(\mathbf{p})))^2.$$

Cette méthode a été implantée dans le logiciel TOTALCALIB. Les résultats obtenus pour la scène décrite ci-dessus sont montrés dans la figure 4.8⁶. Comme les objets \mathcal{M} jouent un rôle spécial dans cette méthode, des problèmes peuvent apparaître si ces objets sont très altérés par les mesures dans les photographies et ces erreurs sont alors propagées à tout le modèle. C'est une des lacunes de cette méthode. Ses points forts sont sa simplicité (une fois la paramétrisation calculée) et la justesse du modèle tridimensionnel dans le sens qu'il vérifie exactement toutes les contraintes de \tilde{C} à chaque itération.

En utilisant une méthode d'optimisation : Une alternative à la méthode précédente est d'utiliser une technique d'optimisation en introduisant incrémentalement les contraintes de la structure tridimensionnelle à chaque étape. Dans le principe, cette méthode ne semble pas difficile à implanter. En effet, chaque contrainte de \tilde{C} peut être exprimée par une expression algébrique. Minimiser les résidus de ces expressions en respectant les paramètres des objets tridimensionnels peut être fait par une descente de gradient.

Cette méthode souffre du même problème que la première méthode décrite, à savoir que tous les objets tridimensionnels ne jouent pas un rôle similaire. Pour mieux

6. Nous étudierons cet exemple par la suite.

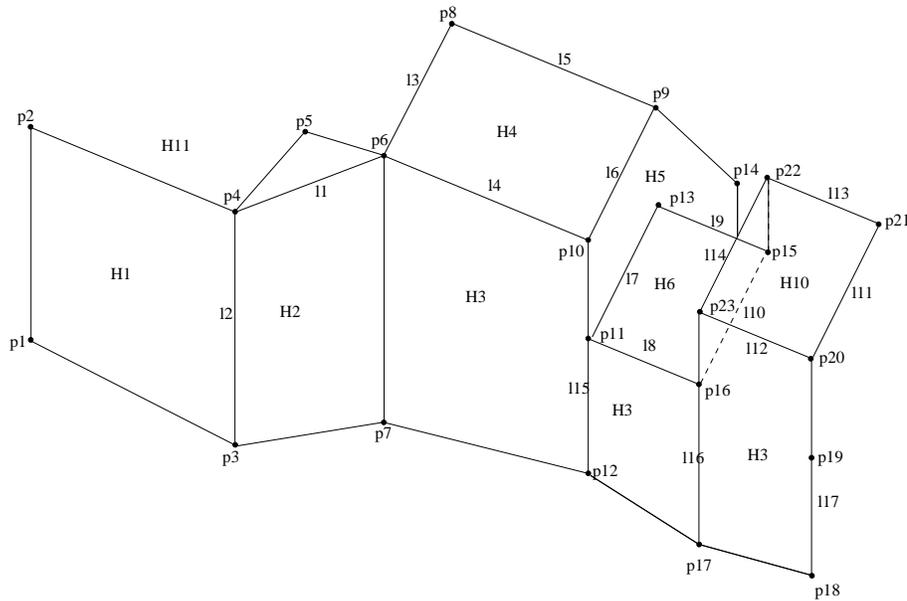


FIG. 4.6 – Un modèle construit à la main

comprendre le problème, considérons un ensemble de droites l_1, l_2, \dots, l_k . Nous savons que toutes ces droites sont parallèles alors nous écrivons que l_j est parallèle à l_1 pour $j \in \{2, \dots, k\}$. Avec cette écriture, l_1 joue clairement un rôle central qui est complètement artificiel. Si nous supposons que l_1 est l'objet reconstruit avec une grosse altération et que l_2, \dots, l_k sont correctement reconstruits, alors cette erreur va tendre à se propager à toutes les droites. Cet effet ne devrait pas apparaître si les contraintes de parallélisme sont explicitées dans \tilde{C} .

Cela souligne l'extrême importance de pouvoir générer toutes les conséquences de l'ensemble des contraintes de \tilde{C} . Utiliser toutes ces contraintes dans le processus de minimisation devrait considérablement réduire le risque de propagation d'erreurs.

4.2.2 Exemple d'utilisation

Dans cette sous section, nous détaillons l'utilisation d'une paramétrisation de la scène à partir des photographies de la place des arcades de Valbonne (fig. 4.4).

A partir des photographies (fig. 4.4), nous pouvons décrire des contraintes géométriques élémentaires vérifiées par la scène : comme telle fa-cade est parallèle à celle-ci, telle fa-cade est orthogonale à celle-là, le toit de cette maison est rectangulaire, *etc.* Nous donnons l'ensemble des contraintes considérées sous forme de fichier MAPLE⁷ avec les notations de la figure 4.6.

Definition of the objects in the model

7. C'est le format compréhensible par notre programme.

```

seq(point(p.i),i=1..23),
map(x->plane(x), [H1,H2,H3,H4,H5,H6,H10,H11]),
seq(line(l.i),i=1..17):

## Incidence constraints: line, plane
OnObject(l1,H2),
OnObject(l1,H11),
OnObject(l2,H1),
OnObject(l7,H5),
OnObject(l8,H3),
OnObject(l8,H6),
OnObject(l12,H3),
OnObject(l12,H10),
OnObject(l11,H10),
OnObject(l15,H3),
OnObject(l15,H5):

## Incidence constraints: point, plane
op(map(OnObject, [p1,p2,p3,p4],H1)),
op(map(OnObject, [p3,p4,p5,p6,p7],H2)),
op(map(OnObject, [p6,p7,p10,p11,p12],H3)),
op(map(OnObject, [p6,p8,p9,p10],H4)),
op(map(OnObject, [p9,p10,p11,p12,p13,p14],H5)),
op(map(OnObject, [p11,p13,p15,p16],H6)),
op(map(OnObject, [p11,p12,p16,p17],H3)),
op(map(OnObject, [p16,p17,p18,p19],H3)),
op(map(OnObject, [p16,p19,p20,p23],H3)),
op(map(OnObject, [p20,p21,p22,p23],H10)),
op(map(OnObject, [p2,p4,p6,p10,p14],H11)):

## Incidence constraints: point, line
op(map(OnObject, [p4,p6],l1)),
op(map(OnObject, [p4,p3],l2)),
op(map(OnObject, [p6,p8],l3)),
op(map(OnObject, [p6,p10],l4)),
op(map(OnObject, [p8,p9],l5)),
op(map(OnObject, [p9,p10],l6)),
op(map(OnObject, [p11,p13],l7)),
op(map(OnObject, [p11,p16],l8)),
op(map(OnObject, [p13,p15],l9)),
op(map(OnObject, [p15,p16],l10)),
op(map(OnObject, [p20,p21],l11)),
op(map(OnObject, [p20,p23],l12)),
op(map(OnObject, [p21,p22],l13)),

```

```

op(map(OnObject, [p22,p23],l14)),
op(map(OnObject, [p10,p11,p12],l15)),
op(map(OnObject, [p16,p17,p23],l16)),
op(map(OnObject, [p18,p19,p20],l17)):

## Constraints of parallelism: plane, plane
ParallelConstraint(H5,H2),
ParallelConstraint(H4,H6),
ParallelConstraint(H6,H10):

## Constraints of parallelism: line, line
ParallelConstraint(l3,l6),
ParallelConstraint(l4,l5),
ParallelConstraint(l7,l10),
ParallelConstraint(l8,l9),
ParallelConstraint(l11,l14),
ParallelConstraint(l12,l13):

## Constraints of orthogonality: plane, plane
PerpendicularConstraint(H11,H3),
PerpendicularConstraint(H11,H2),
PerpendicularConstraint(H1,H2),
PerpendicularConstraint(H3,H2):

## Constraints of orthogonality: line, line
PerpendicularConstraint(l1,l2),
PerpendicularConstraint(l4,l6),
PerpendicularConstraint(l7,l9),
PerpendicularConstraint(l11,l12):

```

L'algorithme 5 utilisé pour obtenir un ordre de construction de la description donne la liste d'objets triés dans le sens croissant de la construction :

```
[p6, l1, p4, l2, p3, H2, H1, H11, H3, p10, H5, l4, l15, p11, p2,
p7, p12, p14, l6, l3, p8, H4, l5, p9, H6, l8, p13, l7, l9, p16,
l10, p15, H10, l12, p20, l11, p23, l14, l16, p21, l13, p22, p17,
p18, l17, p19, p1, p5]
```

Cet ordre de construction peut être représenté par le graphe des dépendances (fig. 4.7) où chaque noeud est associé à un objet (les ellipses représentent des points, les rectangles des plans et les losanges des droites). Les couleurs des noeuds correspondent aux degrés de liberté de l'objet représenté (le gris foncé correspond aux objets possédant trois degrés de liberté, le gris moyen pour les objets de degré deux, le gris clair pour les objets de degré un et le blanc pour les objets de degré zéro). Chaque arête correspond à une contrainte géométrique entre les deux objets qu'elle relie, l'orientation de l'arête indique le sens de la dépendance entre les objets.

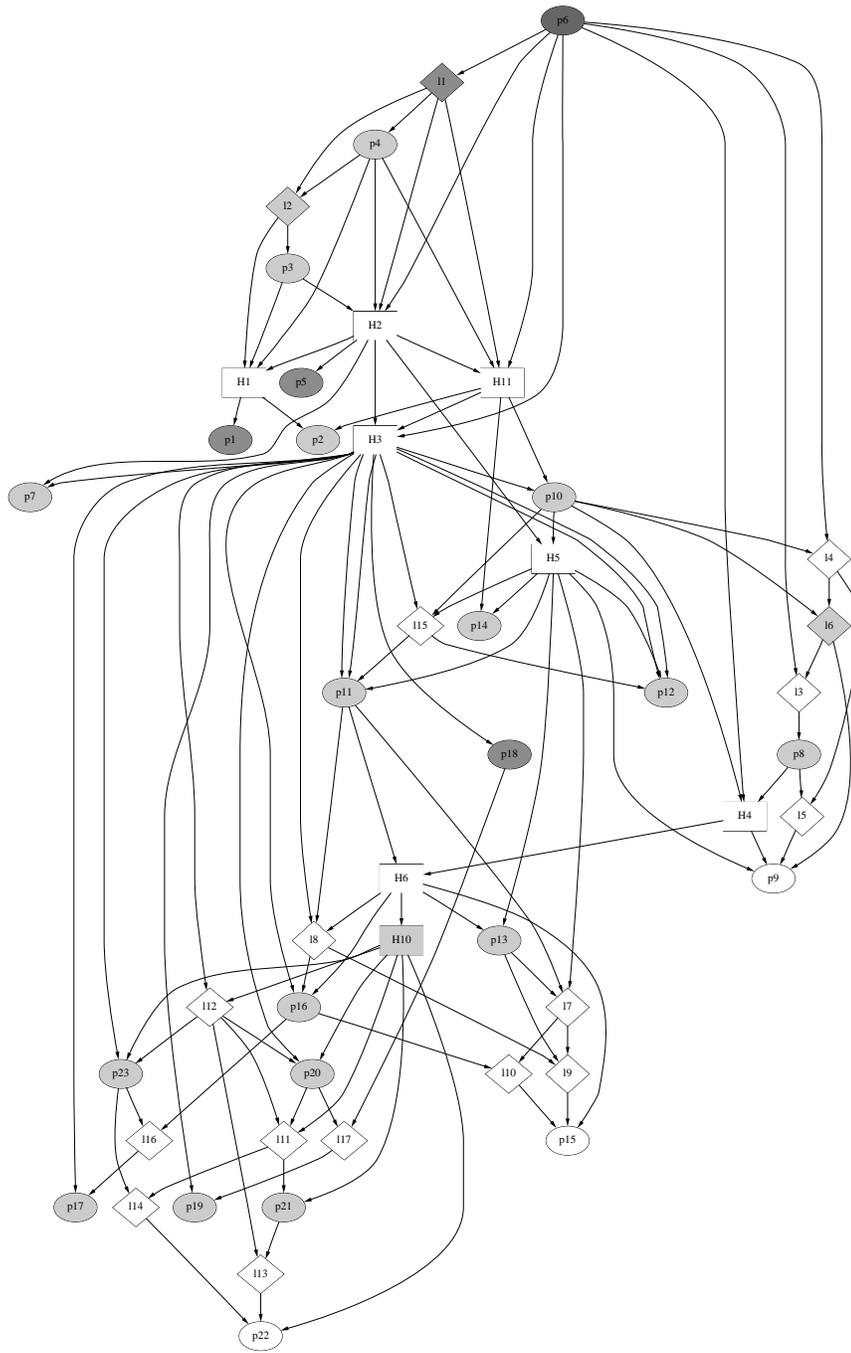


FIG. 4.7 – Graphe des dépendances de la place des arcades

L'ensemble qui caractérise la composante décrite est donné sous forme d'un ensemble triangulaire construit à partir des polynômes correspondant aux contraintes géométriques. L'ordre sur les variables choisi est composé des variables indépendantes et des variables non libres :

[p6[1], p6[2], p6[3], l1[1], l1[2], p4[1], l2[1], p3[1], p10[1], p11[2],
p2[1], p7[1], p12[1], p14[1], l6[1], p8[1], p13[1], p16[1], H10[1],
p20[1], p23[1], p21[1], p17[1], p18[1], p18[2], p19[1], p1[1],
p1[2], p5[1], p5[2]]

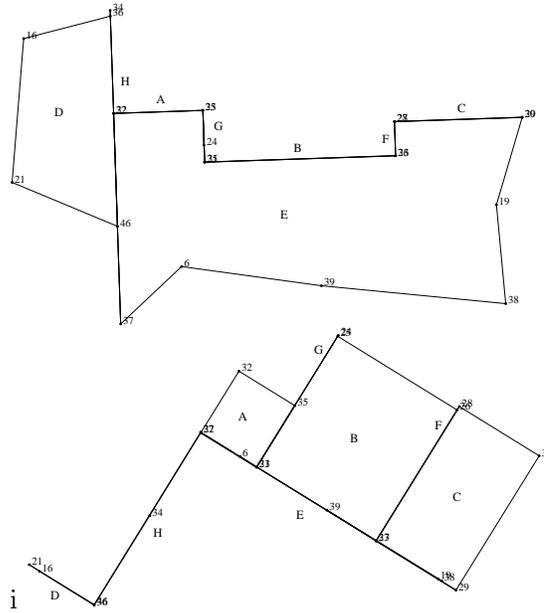
[l1[3], l1[4], p4[2], p4[3], l2[2], l2[3], l2[4], p3[2], p3[3],
H2[1], H2[2], H2[3], H1[1], H1[2], H1[3], H11[1], H11[2], H11[3],
H3[1], H3[2], H3[3], p10[2], p10[3], H5[1], H5[2], H5[3], l4[1],
l4[2], l4[3], l4[4], l15[1], l15[2], l15[3], l15[4], p11[2],
p11[3], p2[2], p2[3], p7[2], p7[3], p12[2], p12[3], p14[2],
p14[3], l6[2], l6[3], l6[4], l3[1], l3[2], l3[3], l3[4], p8[2],
p8[3], H4[1], H4[2], H4[3], l5[1], l5[2], l5[3], l5[4], p9[1],
p9[2], p9[3], H6[1], H6[2], H6[3], l8[1], l8[2], l8[3], l8[4],
p13[2], p13[3], l7[1], l7[2], l7[3], l7[4], l9[1], l9[2],
l9[3], l9[4], p16[2], p16[3], l10[1], l10[2], l10[3], l10[4],
p15[1], p15[2], p15[3], H10[2], H10[3], l12[1], l12[2], l12[3],
l12[4], p20[2], p20[3], l11[1], l11[2], l11[3], l11[4], p23[2],
p23[3], l14[1], l14[2], l14[3], l14[4], l16[1], l16[2], l16[3],
l16[4], p21[2], p21[3], l13[1], l13[2], l13[3], l13[4], p22[1],
p22[2], p22[3], p17[2], p17[3], p18[3], l17[1], l17[2], l17[3],
l17[4], p19[2], p19[3], p1[3], p5[3]]

Nous ne décrivons pas pour des raisons de lisibilité l'ensemble triangulaire dans son intégralité, mais nous donnons le premier et le dernier des 131 polynômes qui le caractérise :

[p6[3] l1[3] - p6[1] + l1[1],
p6[2] - l1[2] - p6[3] l1[4],
l1[4] p4[1] - l1[4] l1[1] - l1[3] p4[2] + l1[3] l1[2],
p4[2] - l1[2] - p4[3] l1[4],
.
.
.

H3[3] p19[2] - H3[3] l17[2] + l17[4] p19[1] H3[1]
+ l17[4] p19[2] H3[2] + l17[4],
p19[1] H3[1] + p19[2] H3[2] + p19[3] H3[3] + 1,
p1[1] H1[1] + p1[2] H1[2] + p1[3] H1[3] + 1,
p5[1] H2[1] + p5[2] H2[2] + p5[3] H2[3] + 1]

Nous pouvons voir sur la figure 4.8 deux vues en fil de fer du modèle corrigé.

FIG. 4.8 – *Reconstruction contrainte en fil de fer*

4.3 Découverte de théorèmes

Nous proposons d'illustrer maintenant la méthode de découverte de nouvelles propriétés proposée dans le contexte d'un sous-ensemble de la description géométrique de la scène de la Place des Arcades de Valbonne (fig. 4.9).

Nous commençons par calculer un ordre de construction d'une configuration générique de la description, puis nous calculons ensuite un ensemble réducteur associé à cette configuration. Nous choisissons, ici, de le construire par des règles de réécriture dans l'algèbre extérieure. Nous avons utilisé l'opérateur de dualité $*$ pour définir la notion

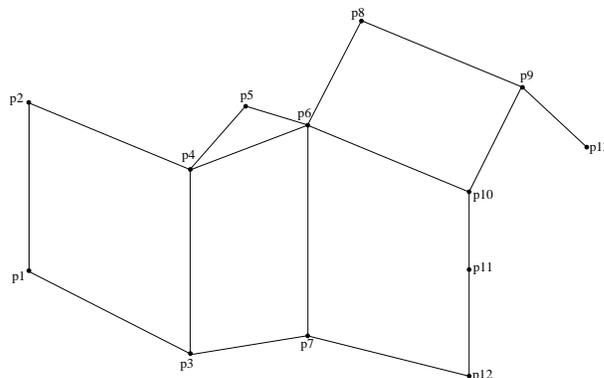


FIG. 4.9 – La sous-configuration de la Place des Arcades

d'orthogonalité⁸. L'ensemble des règles de réécriture est le suivant :

$$\begin{aligned}
l_3 &\rightarrow p_8 \vee p_6 \\
p_8 &\rightarrow H_2 \wedge l_5 \\
l_5 &\rightarrow (l_4 \wedge \mathcal{H}) \vee p_9 \\
H_4 &\rightarrow p_6 \vee p_9 \vee p_{10} \\
l_6 &\rightarrow p_9 \vee p_{10} \\
p_9 &\rightarrow x_5 p_{10} + x_6 p_{12} + (1 - x_5 - x_6)((U_1 \vee U_2) \wedge H_5) \\
p_{11} &\rightarrow x_3 p_{10} + (1 - x_3)(l_7 \wedge \mathcal{H}) \\
l_7 &\rightarrow H_5 \wedge H_6 \\
H_1 &\rightarrow p_3 \vee p_4 \vee (H_2)^* \\
p_3 &\rightarrow x_2 p_4 + (1 - x_2)(l_2 \wedge \mathcal{H}) \\
l_2 &\rightarrow ((l_1 \wedge \mathcal{H})^* \wedge \mathcal{H}) \vee p_4 \\
p_4 &\rightarrow x_1 p_6 + (1 - x_1)(l_1 \wedge \mathcal{H}) \\
l_1 &\rightarrow H_2 \wedge H_3 \\
l_4 &\rightarrow H_6 \wedge H_3 \\
p_{10} &\rightarrow H_3 \wedge H_5 \wedge H_6 \\
H_5 &\rightarrow (H_2 \wedge \mathcal{H}) \vee p_{12} \\
H_2 &\rightarrow p_6 \vee p_7 \vee (H_6)^* \\
H_6 &\rightarrow p_6 \vee p_7 \vee p_{12}
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant appliquer l'algorithme 6 pour découvrir les propriétés de la configuration. En raison du nombre de composantes homogènes, nous nous intéressons plus particulièrement à la composante de support : $\mathcal{H}, p_4, p_6, p_8, p_9$, c'est-à-dire à la forme linéaire générique :

$$\begin{aligned}
P = & u_1((p_4 \vee p_6) \wedge \mathcal{H})^* \vee ((p_8 \vee p_9) \wedge \mathcal{H}) + u_2((p_4 \vee p_8) \wedge \mathcal{H})^* \vee ((p_6 \vee p_9) \wedge \mathcal{H}) \\
& + u_3((p_4 \vee p_9) \wedge \mathcal{H})^* \vee ((p_6 \vee p_8) \wedge \mathcal{H}) + u_4((p_6 \vee p_8) \wedge \mathcal{H})^* \vee ((p_4 \vee p_9) \wedge \mathcal{H})
\end{aligned}$$

8. Nous assurons que l'orthogonalité définie par la dualité coïncide avec l'orthogonalité définie par la quadrique \mathcal{Q} .

$$+u_5((p_6 \vee p_9) \wedge \mathcal{H})^* \vee ((p_4 \vee p_8) \wedge \mathcal{H}) + u_6((p_8 \vee p_9) \wedge \mathcal{H})^* \vee ((p_4 \vee p_6) \wedge \mathcal{H})$$

et nous vérifions que la seule relation valide est pour $u_2 = \dots = u_6 = 0$ qui implique que les droites (p_4p_6) et (p_8p_9) sont orthogonales.

Conclusion

L'objet de cette thèse est d'étudier l'interaction entre le symbolique et le numérique. Au mot symbolique, nous associons des calculs exacts en un point, alors qu'au mot numérique, nous associons des calculs approchés au voisinage d'un point.

Nous avons développé plusieurs interactions qui ont des points de vues différents et qui se placent à différents niveaux. En effet, la première partie traite la résolution d'équations, c'est-à-dire qu'un formalisme mathématique est déjà en place. Dans la deuxième partie, nous étudions la modélisation mathématique d'un problème, à savoir l'étalonnage de caméras. Et pour terminer, dans la troisième partie, nous nous intéressons à un problème dont nous avons une modélisation mathématique et une solution approchée (le modèle tridimensionnel) et cette solution ne nous satisfait pas pleinement (ce modèle ne satisfait pas la géométrie élémentaire). Nous construisons alors une nouvelle modélisation mathématique (fondée sur un raisonnement géométrique) qui nous conduit vers une meilleure solution.

Les méthodes de résolution que nous avons étudiées traitent uniquement des systèmes polynomiaux multivariés. Elles sont symboliques au même titre que les bases de Groebner ou les systèmes triangulaires, c'est-à-dire qu'elles utilisent des calculs exacts pour un système donné. Contrairement à leurs semblables précédemment citées, ces méthodes matricielles ont pour essentielle particularité d'être continues par rapport aux coefficients des polynômes du système (elles dépendent uniquement du nombre de variables, du degré de polynômes et de conditions de généricité). De par ce fait, nous pouvons les utiliser avec des coefficients approchés (c'est-à-dire de manière numérique). Ces méthodes s'avèrent être efficaces et elles ont un « bon » comportement numérique. Nous les avons utilisées pour différents problèmes issus de la vision artificielle comme le « P3P » (problème plutôt théorique, où nous cherchons à caractériser un lieu singulier) et la résolution des équations de Kruppa avec seulement trois caméras (dans ce cas l'optimisation converge vers des minima locaux).

La modélisation d'un problème a pour but d'exploiter à travers un modèle mathématique le maximum d'informations disponibles. Dans le cas de l'étalonnage de scènes architecturales, nous rajoutons à la connaissance usuelle une carte et des contraintes géométriques élémentaires. Par conséquent, les algorithmes classiques ne peuvent pas prendre toute notre information en compte. Nous devons alors chercher une nouvelle démarche mathématique satisfaisante. Pour cela, nous avons été obligé de mettre en

équations, d'éliminer certains paramètres en considérant d'une part des calculs exacts et d'autre part, le fait que les propriétés géométriques sont vérifiées. Ce n'est qu'après avoir établi le modèle mathématique que nous devons le résoudre numériquement.

Un modèle numérique correspond à la connaissance de l'ensemble des valeurs approchées des paramètres d'un modèle mathématique alors qu'un modèle symbolique équivaut à la connaissance des relations entre les différents paramètres du modèle mathématique et d'un algorithme permettant de calculer l'ensemble des paramètres à partir d'un sous-ensemble connu. L'ajustement consiste alors à faire converger l'un vers l'autre un modèle numérique et un modèle symbolique. Dans notre cas, la construction du modèle numérique correspond à l'étalonnage classique alors que la construction du modèle symbolique a été longuement étudié précédemment. Il est cependant à noter que le modèle symbolique peut être construit à partir des techniques développées dans la partie III que si un modèle approché est connu ce qui renforce l'idée d'interaction.

Les parties I et II ont pratiquement la même notion d'interaction dans le sens où il s'agit dans les deux cas d'algorithmes symboliques vérifiant des propriétés de continuité que nous « déroulons » avec des nombres approchés. Par contre, comme nous l'avons déjà souligné, dans la partie III l'interaction est plus complexe, il n'est pas possible d'extraire le symbolique du numérique. D'autres liens entre les différentes parties existent, comme l'élimination qui est très présente et essentielle dans les parties I et III et sous-jacente dans la partie II ainsi que la géométrie qui intervient fortement dans les parties II et III.

Les trois interactions décrites sont loin de constituer les seules interactions possibles, au contraire, elles correspondent seulement à une première approche dans la confrontation entre la géométrie et les objets approchés, par exemple. Les perspectives de travaux sont nombreuses, nous en donnons quelques unes d'abord assez directe puis plus profondes :

- Il serait intéressant d'améliorer l'exploitation des algorithmes d'étalonnage développés dans la deuxième partie, et peut-être faire intervenir un modèle symbolique comme dans la troisième partie. Je ne suis pas sûr qu'un modèle similaire ne puisse pas être adapté pour des photographies uniquement.
- Il serait intéressant de mieux comprendre l'instabilité numérique des systèmes de Kruppa, de rechercher s'il existe une formulation s'appuyant moins sur des tangentes d'hyperplans avec la conique absolue, d'explicitier les liens entre les contraintes reliant les matrices fondamentales d'un système de trois caméras et les équations de Kruppa.
- Il serait intéressant d'être capable d'interagir avec un utilisateur pour sélectionner les « bonnes » composantes d'une configuration géométrique.
- Il serait intéressant de faire de la géométrie avec des objets approchés, mais que deviendraient les théorèmes classiques comme Pappus, Menelaus, Céva, . . .

Avertissement : On nous a souvent demandé ce que nous faisons comme travail de recherche. Malgré tous nos efforts pour rester vagues et un peu compréhensibles, nos parents, nos amis répliquaient invariablement à nos explications: ‘oui, oui...’ en soupirant plus ou moins, plus intrigués que jamais. Aussi nous sommes nous résignés à raconter aux masses étonnées non pas notre travail, mais ce qu’est la vie du thésard. Il semblerait que nous ayons réussi, à en croire les premières réactions.

Le petit Nicolas en thèse

Le Directeur de Thèse

Pour commencer une thèse, il faut avoir un patron. Un patron, c’est un monsieur très, très fort qui me pose un problème et qui va m’aider à le résoudre. Là, c’est mon patron photographié par Christian Mercatier-Bresson.



La Recherche

Au début, c’est tellement compliqué, on n’y comprend rien.



THEOREME 1 - On a l'inégalité

$$\sum_{n \in G} \frac{|K_n|(|K_n| - 1)}{K^2} \log \left(\frac{|K_n| - 1}{K \cdot \Lambda_r} \right) + \frac{K-1}{K^2} \sum_{n \in G} \sum_{n \in K_n} |\log |n||$$

$$\leq \left(1 - \frac{1}{K}\right) \frac{2D}{K} \sum_{i=1}^K h(n_i) + \frac{D}{K} \left(1 + \frac{|G|}{2D} + \log \frac{K}{2}\right)$$



On peut passer des heures et des heures à chercher sans rien trouver. Dans ces moments-là, mon papa et ma maman sont drôlement inquiets et quand ma maman demande si c’était une bonne idée de faire faire une thèse au petit (c’est moi), mon papa ouvre la bouche sans parler, il agite les bras, et il s’en va lire le journal dans le salon.

La Découverte

Des fois, c'est super, parce que je découvre des trucs que mon patron m'avait demandés. Evidemment, ça peut arriver à n'importe quelle heure, et mes parents ne sont pas toujours ravis.



Ils se demandent si je ne deviens pas complètement fou, mais ma maman sait que mon papa n'aime pas qu'elle le lui dise.

Moi, je trouve ça plutôt normal d'être content. D'ailleurs, quand mon patron trouve un théorème, il est super fier et ses copains (qui sont aussi des gens très, très forts) sont super contents de lui. Mais ça mes parents, ils ne le savent pas.



Des fois aussi, ça se passe mal, parce que je me trompe. Et quand je me trompe, avec mon patron, ça ne rigole pas, mais alors pas du tout. 'Regardez-moi dans les yeux, Nicolas', il me dit, pas content du tout. 'Vous appelez ça du travail, peut-être ?' qu'il me demande. Eh ben, là, ça a l'air d'une question, mais il ne faut surtout pas répondre, parce que sinon, il se fâche tout rouge !

Les Séminaires

De temps en temps, un

monsieur très, très important et vachement fort (mais pas aussi fort que mon patron, quand même) vient nous parler de trucs super-complicés. Ça s'appelle un séminaire, et pendant un séminaire, ça ne rigole pas non plus. Quand le monsieur a fini de parler, mon patron lui pose des tas de questions très compliquées, et il ne sait pas toujours répondre. Et là c'est pas juste, parce que lui, il ne se fait pas disputer !



La Soutenance

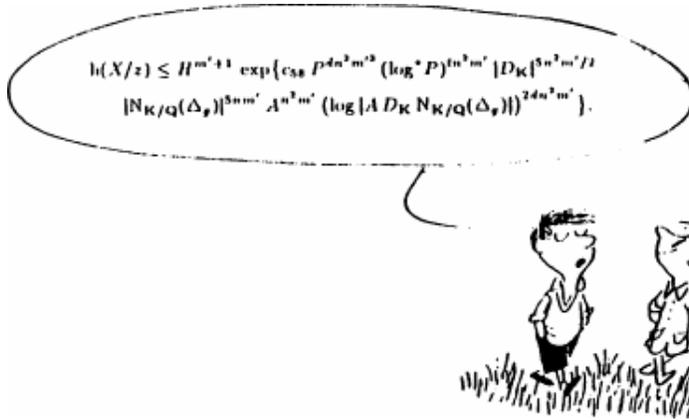


Quand j'aurai fini, il y aura une grande cérémonie avec plein de gens très, très forts (il y aura même d'autres patrons, c'est dire) et il y aura un vieux monsieur très, très important qui me dira que c'est très bien, mon petit, les chemins de la Recherche me sont glorieusement ouverts et je suis l'honneur de mes parents et l'orgueil de mon pays, et tout le baratin. Et après, il y aura un super goûter avec tous mes amis. Génial !

Et quand il lira tout cela dans le journal, mon papa sera très fier et ma maman sera tellement contente qu'elle me servira deux fois de la crème renversée, mon dessert préféré. C'est vraiment super, une thèse, à la fin !



La Gloire



$$h(X/z) \leq H^{m'+1} \exp\{c_{38} P^{4n^2 m'^2} (\log^* P)^{m' m'} |D_K|^{5n^2 m' / 11} |N_{K/Q}(\Delta_P)|^{5n m'} A^{n^2 m'} (\log |A D_K N_{K/Q}(\Delta_P)|)^{24n^2 m'}\}.$$

D'ailleurs les filles, ça les impressionne drôlement de savoir qu'on a fait une thèse de mathématiques et qu'on a trouvé des tas de théorèmes compliqués et tout, et tout. Même la maman de Marie-Edwige, elle me fait des grands sourires maintenant, alors qu'elle trouvait que j'étais un petit garçon très turbulent.

Bibliographie

- [ALMM99] P. Aubry, D. Lazard, and M. Moreno Maza. On the theories of triangular sets. *J. of Symb. Comp.*, 28(1&2):105–124, 1999.
- [AMM99] P. Aubry and M. Moreno Maza. Triangular sets for solving polynomial systems: a comparative implementation of four methods. *Journal of Symbolic Computation*, 28(1):125–154, Jul 1999.
- [BB98] D. Bondyfalat and S. Bougnoux. Imposing euclidean constraints during self-calibration processes. In *ECCV98 Workshop SMILE*, 1998.
- [BBR85] M. Barnabei, A. Brini, and G.-C. Rota. On the exterior calculus of invariant theory. *Journal of Algebra*, 96:120–160, 1985.
- [BEM00] L. Busé, M. Elkadi, and B. Mourrain. Generalized resultant over unirational algebraic varieties. *J. of Symbolic Computation*, 29:515–526, 2000.
- [BJC97] Lemaréchal C. Bonnans J.F., Gilbert J.C. and Sagastizábal C. *Optimisation numérique*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [BMP98] D. Bondyfalat, B. Mourrain, and V.Y. Pan. Controlled iterative methods for solving polynomial systems. In O. Gloor, editor, *Proc. ISSAC'98*, pages 252–259. NewYork, ACM Press., 1998.
- [BMP99] D. Bondyfalat, B. Mourrain, and V.Y. Pan. Solution of a polynomial system of equations via the eigenvector computation. *Lin. Alg. Appl.*, 1999. Submitted.
- [Boi98] A. Boisseau. Calcul des éléments propres. Technical report, ENS Cachan, 1998.
- [Bou98] S. Bougnoux. From projective to euclidean space under any practical situation, a criticism of self-calibration. In *Proceedings of the 6th International Conference on Computer Vision*, pages 790–796, Bombay, India, jan 1998. ieee-comp-soc-press.
- [BR97] S. Bougnoux and L. Robert. Totalcalib: a fast and reliable system for off-line calibration of images sequences. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Puerto Rico, jun 1997. ieee. The Demo Session.
- [Buc85] B. Buchberger. Gröbner bases: An algebraic method in ideal theory. In N.K. Bose, editor, *Multidimensional System Theory*, pages 184–232. Reidel Publishing Co., 1985.

- [Car96] J.P. Cardinal. On two iterative methods for approximating the roots of a polynomial. In J. Renegar, M. Shub, and S. Smale, editors, *Proc. AMS-SIAM Summer Seminar on Math. of Numerical Analysis, (Park City, Utah, 1995)*, volume 32 of *Lectures in Applied Math.*, pages 165–188. Am. Math. Soc. Press, 1996.
- [CG90] S.-C. Chou and X.-S. Gao. Ritt-Wu’s decomposition algorithm and geometry theorem proving. In *Proc. CADE-10*, pages 202–220, Kaiserslautern, Germany, 1990.
- [CGT97] R.M. Corless, P.M. Gianni, and B.M. Trager. A reordered Schur factorization method for zero-dimensional polynomial systems with multiple roots. In W.W. K uchlin, editor, *Proc. ISSAC*, pages 133–140, 1997.
- [CGZ94] S.-C. Chou, X.-S. Gao, and J.-Z. Zhang. *Machine proofs in geometry: automated production of readable proofs for geometry problems*, volume 6 of *Series on applied mathematics*. World scientific, 1994.
- [CGZ95] S.-C. Chou, X.-S. Gao, and J.-Z. Zhang. Automated production of traditional proofs in solid geometry. *Journal of Automated Reasoning*, 14(2):257–291, April 1995.
- [Cho88] S.-C. Chou. *Mechanical geometry theorem proving*. Reidel, Dordrecht Boston, 1988.
- [Cia82] P.G. Ciarlet. *Introduction   l’analyse numérique matricielle et   l’optimisation*. Collection Mathématiques Appliqu es pour la maîtrise. Masson, Paris, 1982.
- [CLO92] D. Cox, J. Little, and D. O’Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, New York, 1992.
- [CLO97] D. Cox, J. Little, and D. O’Shea. *Using Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [CM96] J.P. Cardinal and B. Mourrain. Algebraic approach of residues and applications. In J. Renegar, M. Shub, and S. Smale, editors, *Proc. AMS-SIAM Summer Seminar on Math. of Numerical Analysis, (Park City, Utah, 1995)*, volume 32 of *Lectures in Applied Math.*, pages 189–210. Providence, American Mathematical Society Press, 1996.
- [CRG95] H. Crapo and J. Richter-Gebert. Automatic proving of geometric theorems. *Invariant Methods in Discrete and Computational Geometry*, pages 167–196, 1995.
- [Cru90] A. Crumeyrolle. *Orthogonal and Symplectic Clifford Algebra*. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [CSY89] S.-C. Chou, W. F. Schelter, and J.-G. Yang. Characteristic Sets and Gröbner Bases in Geometry Theorem Proving. In *Resolution of Equations in Algebraic Structures*, pages 33–92. Academic Press, 1989.
- [Dan00] D. Daney. * talonnage Géométrique des Robots Parallèles*. PhD thesis, Universit  de Nice-Sophia Antipolis, Feb 2000.

- [DD00] C. D'Andrea and A. Dickenstein. Generalized Macaulay formulas for the multivariate resultant. *Preprint*, 2000.
- [Dev97] Frédéric Devernay. *Vision stéréoscopique et propriétés différentielles des surfaces*. PhD thesis, École Polytechnique, Palaiseau, France, February 97.
- [DRS74] P. Doubilet, G. C. Rota, and J. Stein. Foundations of Combinatorics IX: Combinatorial methods in Invariant Theory. *Studies in Appl. Math.*, 53:185–216, 1974.
- [DTM96] P.E. Debevec, C.J. Taylor, and J. Malik. Modeling and rendering architecture from photographs: a hybrid geometry- and image-based approach. In *siggraph*, pages 11–20, New Orleans, aug 1996.
- [EM99a] M. Elkadi and B. Mourrain. A new algorithm for the geometric decomposition of a variety. In S. Dooley, editor, *Proc. ISSAC*, pages 9–16. New-York, ACM Press., 1999.
- [EM99b] I.Z. Emiris and B. Mourrain. Matrices in Elimination Theory. *J. of Symbolic Computation*, 28(1&2):3–44, 1999.
- [Fau93] O. Faugeras. *Three-Dimensional Computer Vision: a Geometric Viewpoint*. MIT press, 1993.
- [Fau95] O. Faugeras. Stratification of 3-D vision: projective, affine, and metric representations. *Journal of the Optical Society of America A*, 12(3):465–484, March 1995.
- [FH97] I. Fudos and C. M. Hoffmann. A graph-constructive approach to solving systems of geometric constraints. *ACM Transactions on Graphics*, 16(2):179–216, Apr 1997.
- [FLM92] Olivier Faugeras, Tuan Luong, and Steven Maybank. Camera self-calibration: theory and experiments. In G. Sandini, editor, *Proc 2nd ECCV*, pages 321–334, Santa Margherita, Italy, may 1992. springer-verlag.
- [FM95a] O. Faugeras and B. Mourrain. On the geometry and algebra of the point and line correspondences between n images. In Roger Mohr and Chengke Wu, editors, *Proceedings of Europe-China Workshop on Geometrical Modeling and Invariants for Computer Vision*, pages 102–109. Xidan University Press, 1995.
- [FM95b] O. Faugeras and B. Mourrain. On the geometry and algebra of the point and line correspondences between N images. In *ICCV'95*, pages 951–956, 1995.
- [FM95c] O. Faugeras and B. Mourrain. On the geometry and algebra of the point and line correspondences between N images. Rapport de recherche 2665, INRIA, Sophia-Antipolis, 1995.
- [Fre91] J. Fresnel. *Géométrie*. Université de Bordeaux I, Bordeaux, 1991.
- [GKZ94] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, and A.V. Zelevinsky. *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*. Boston, Birkhäuser, 1994.
- [GVL96] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix computations*. John Hapkins, Univ. Press, Baltimore, Maryland, 3rd edition, 1996.

- [Har92] J. Harris. *Algebraic Geometry, a first course*, volume 133 of *Graduate Texts in Math.* New-York, Springer-Verlag, 1992.
- [Har97] R.I. Hartley. Kruppa's equations derived from the fundamental matrix. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(2):133–135, feb 1997.
- [HLON94] Robert M. Haralick, Chung-Nan Lee, Karsten Ottenberg, and Michael Nolle. Review and analysis of solutions of the three point perspective pose estimation problem. *International Journal of Computer Vision*, 13(3):331–356, December 1994.
- [HV95] C. M. Hoffmann and P. J. Vermeer. Geometric constraint solving in \mathbf{R}^2 and \mathbf{R}^3 . In D. Z. Du and F. Hwang, editors, *Computing in Euclidean Geometry*, pages 266–298. World Scientific Publishing, second edition, 1995.
- [JASR99] R. Joan-Arinyo and A. Soto-Riera. Combining constructive and equational geometric constraint-solving techniques. *ACM Transactions on Graphics*, 18(1):35–55, Jan 1999.
- [Kle74] F. Klein. *Le programme d'Erlangen; considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*. Discours de la méthode. Gautier-Villas, Paris, édit. 1974.
- [KM89a] D. Kapur and J. L. Mundy, editors. *Geometric Reasoning*. MIT Press, Cambridge, 1989.
- [KM89b] D. Kapur and J. L. Mundy. Wu's method and its application to perspective viewing. In *Geometric Reasoning* [KM89a], pages 15–36.
- [KM99] P. Kuzo and P. Macé. 2d3p declarative design by projective properties propagation. In P. Brunet and R. Scopigno, editors, *EUROGRAPHICS'99*, volume 18. Blackwell Publishers, 1999.
- [Lav96] Stéphane Laveau. *Géométrie d'un système de N caméras. Théorie, estimation et applications*. PhD thesis, École Polytechnique, May 96.
- [Laz77] D. Lazard. Algèbre linéaire sur $k[x_1, \dots, x_n]$ et élimination. *Bull. Soc math. France*, 105:165–190, 1977.
- [LD99] Manolis I.A. Lourakis and Rachid Deriche. Camera self-calibration using the singular value decomposition of the fundamental matrix: From point correspondences to 3D measurements. Research Report 3748, INRIA Sophia-Antipolis, August 1999.
- [LD00] Manolis I.A. Lourakis and Rachid Deriche. Camera self-calibration using the singular value decomposition of the fundamental matrix. In *Proc. of the 4th Asian Conference on Computer Vision*, volume I, pages 403–408, January 2000.
- [LDFF93] Q.-T. Luong, R. Deriche, O. Faugeras, and T. Papadopoulos. On determining the fundamental matrix: analysis of different methods and experimental results. In *Israeli Conf. on Artificial Intelligence and Computer Vision*, Tel-Aviv, Israel, 1993. A longer version is INRIA Tech Report RR-1894.

- [Lee99] J. Y. Lee. A 2d geometric constraint solver for parametric design using graph analysis and reduction. In X.-S. Gao, D. Wang, and L. Yang, editors, *Automated Deduction in Geometry*, number 1669 in LNAI, pages 258–274. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.
- [Lem89] C. Lemaréchal. *Méthodes numériques d'optimisation*. INRIA, 1989.
- [LF95] Quang-Tuan Luong and Olivier Faugeras. The fundamental matrix: theory, algorithms, and stability analysis. *The International Journal of Computer Vision*, 17(1):43–76, January 1995.
- [Mac02] F.S. Macaulay. Some formulae in elimination. *Proc. London Math. Soc.*, 1(33):3–27, 1902.
- [Mat80] H. Matsumura. *Commutative Algebra*. Mathematics Lecture Notes Series. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1980.
- [MF92] S. J. Maybank and O. D. Faugeras. A theory of self-calibration of a moving camera. *The International Journal of Computer Vision*, 8(2):123–152, August 1992.
- [Mou91a] B. Mourrain. *Approche effective de la théorie des invariants des groupes classiques*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, September 1991.
- [Mou91b] B. Mourrain. Géométrie et interprétation générique ; un algorithme. In *Effective Methods in Algebraic Geometry (MEGA '90)*, volume 94 of *Progress in Math.*, pages 363–377, Castiglioncello (Italy), 1991. Birkhäuser.
- [Mou99a] B. Mourrain. An introduction to linear algebra methods for solving polynomial equations. In E.A. Lipitakis, editor, *HERCMA '98*, pages 179–200, 1999.
- [Mou99b] B. Mourrain. A new criterion for normal form algorithms. In M. Fossorier, H. Imai, Shu Lin, and A. Poli, editors, *Proc. AAECC*, volume 1719 of *LNCS*, pages 430–443, 1999.
- [MR93] H. Michel and P. Rives. Singularities in the determination of the situation of a robot effector from the perspective view of 3 points. Rapport de Recherche 1850, INRIA, 1993.
- [MT00] B. Mourrain and Ph. Trébuchet. Solving projective complete intersection faster. *Proc. ISSAC*, pages 231–238, 2000.
- [PFTV88] William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, and William T. Vetterling. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 1988.
- [POF98] P. Poulin, M. Ouimet, and M-C Frasson. Interactively modeling with photogrammetry. In *Proceedings of Eurographics Workshop on Rendering 98*, pages 93–104, june 1998.
- [Qua97] l. Quan. *Contribution à la reconsturction tridimensionnelle*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Jun 1997.
- [RG95] J. Richter-Gebert. Mechanical theorem proving in projective geometry. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 13:139–172, 1995.
- [Saa96] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. Series in Computer Science. PWS, 1996.

- [Sam86] P. Samuel. *Géométrie projective*. Presse Universitaires de France, Paris, 1986.
- [Sha74] I.R. Shafarevitch. *Basic Algebraic Geometry*. New-York, Springer-Verlag, 1974.
- [Sti93] S. Stifter. Geometry theorem proving in vector spaces by means of gröbner bases. In M. Bronstein, editor, *ISSAC'93*, ACM press, pages 301–310, Kiev (Ukraine), jul 1993.
- [Stu93] B. Sturmfels. *Algorithms in Invariants Theory*. RISC Series on Symbolic Computation. Springer Verlag, Vienna, 1993.
- [Tap71] R.A. Tapia. The Kantorovitch theorem for Newton's method. *American Mathematic Monthly*, 78(1.ea):389–392, 1971.
- [TB97] L.N. Trefethen and D. Bau. *Numerical linear algebra*. SIAM, Philadelphia, 1997.
- [VdW48] B.L. Van der Waerden. *Modern algebra, Vol. II*. New-York, Frederick Ungar Publishing Co, 1948.
- [Wan95] D. Wang. Elimination procedures for mechanical theorem proving in geometry. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 13:1–24, 1995.
- [Wan96] D. Wang. Geometry machines: From ai to smc. In *AIMC-3*, volume 1138 of *LNCS*, pages 213–239, 1996.
- [Wan97] D. Wang. *Clifford algebraic calculus for geometric reasoning with application to computer vision*, volume 1360 of *Springer's LNAI*, pages 115–140. Springer, 1997.
- [Wan98] D. Wang. Gröbner bases applied to geometric theorem proving and discovering. In B. Buchberger and F. Winkler, editors, *Gröbner bases and applications*, pages 281–301. Cambridge Univ. Press, 1998.
- [Wey39] H. Weyl. *The Classical Groups, their invariants and representations*. Princeton University Press, 1939.
- [WMSM91] W.J. Wolfe, D. Mathis, C.W. Sklair, and M. Magee. The Perspective View of Three Points. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(1):66–73, jan 1991.
- [Wu84] W.-t Wu. Some recent advances in mechanical theorem proving: After 25 years. In American Mathematical Society, editor, *Contemporary Mathematics*, pages 235–242, 1984.
- [Wu86] W.-t Wu. Basic principles of mechanical theorem proving in elementary geometries. *J. Automated Reasoning*, 2:221–252, 1986.
- [Wu94] W.-t Wu. *Mechanical Theorem Proving in Geometries: Basic Principles (translated from Chinese by X. Jin and D. Wang)*. Texts and Monographie in Symbolic Computation. Springer, 1994.
- [ZDFL94] Z. Zhang, R. Deriche, O. Faugeras, and Q.-T. Luong. A robust technique for matching two uncalibrated images through the recovery of the unknown epipolar geometry. *Artificial Intelligence Journal*, 78(1-2):87–119, 1994.

Appeared in October 1995, also INRIA Research Report No.2273, May 1994.

- [Zel96] C. Zeller. *Calibration Projective Affine et Euclidienne en Vision par Ordinateur*. PhD thesis, École Polytechnique, feb 1996.

Interaction entre Symbolique et Numérique; Application à la Vision Artificielle

Les motivations initiales de ce travail proviennent de l'étalonnage de caméras en vision artificielle. Nous nous sommes surtout intéressés aux manières d'exploiter des mesures dans les images (détection d'objets) et des considérations géométriques formelles. Nous avons élargi nos recherches à la problématique suivante : « l'interaction entre le symbolique et le numérique ». Ce travail se divise en trois parties. La première partie traite de la résolution d'équations polynomiales avec des coefficients approchés. Nous étudions des méthodes matricielles qui transforment la résolution en la recherche des valeurs et des vecteurs propres d'une matrice. Ces transformations et les calculs de valeurs et vecteurs propres sont continues par rapport aux coefficients et permettent donc de résoudre des équations à coefficients approchés. La deuxième partie présente un cadre algébrique permettant d'exprimer simplement des contraintes géométriques. Ce formalisme nous a permis de modéliser de manière fine l'étalonnage d'une ou plusieurs caméras avec l'aide d'un plan. L'étalonnage ne peut être effectué pratiquement qu'avec des résolutions numériques de systèmes linéaires. La troisième partie est consacrée à l'étude et surtout à l'utilisation des outils de démonstration automatique en géométrie pour la construction de modèles 3D articulés. Par des optimisations numériques, nous déterminons les paramètres des modèles articulés qui permettent aux images de ces modèles de coïncider avec les données extraites des photographies.

mots clés : résolution matricielle, algèbre de Grassmann-Cayley, démonstration automatique, étalonnage de caméras, modèle 3D.

Interaction between Symbolic and numerical Computation; Application to Computer Vision

The initial motivations of this work come from the camera calibration in computer vision. We are especially interested in using jointly time measures in the images and formal geometry constraints. We have even enlarged our research to the following theme: "interaction between symbolic and numerical computations". This work is divided into three parts. The first part deals with solving polynomial equations with approximate coefficients. We have studied matrix methods which transform this problem into the computation of eigenvalues and eigenvectors. Both the transformation and the computation are continuous with respect to the coefficients of the equations and can tackle them with approximate coefficients. The second part present an algebraic context in which geometric constraints are easily written . This formalism enable us to model the calibration of one or several cameras with a map. These calibrations can be performed by using almost only numerical linear systems solving. The third part deals with automated geometry deduction tools and their use to construct 3D articulated models. Numerical optimisation enable to determine the parameters of these articulated models so that their images are in correspondance to the images in the different cameras.

keywords: matrix solving, Grassmann-Cayley algebra, automated deduction, camera calibration, 3D model.