



**HAL**  
open science

# Dérivation numérique : synthèse, application et intégration

Mehdi Dridi

► **To cite this version:**

Mehdi Dridi. Dérivation numérique : synthèse, application et intégration. Automatique / Robotique.  
Ecole Centrale de Lyon, 2011. Français. NNT : . tel-00687239v1

**HAL Id: tel-00687239**

**<https://theses.hal.science/tel-00687239v1>**

Submitted on 2 Jan 2012 (v1), last revised 12 Apr 2012 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Ecole Centrale de Lyon**

dans le cadre de l'Ecole Doctorale

**« Electronique, Electrotechnique et Automatique »**

présentée et soutenue publiquement le 13 Décembre 2010

par

Mehdi DRIDI

## **Dérivation numérique : synthèse, application et intégration**

### **Composition du jury**

---

<b>Rapporteurs :</b>	<i>Mohamed M'SAAD</i>	<i>Professeur des universités - ENSICAEN</i>
	<i>Kouider Nacer M'SIRDI</i>	<i>Professeur des universités - Aix Marseille III</i>
<b>Examineurs :</b>	<i>Hassan HAMMOURI (Président)</i>	<i>Professeur - Université Lyon I</i>
	<i>Dominique TOURNIER</i>	<i>Maître de conférences - INSA de Lyon</i>
	<i>Mohamed SMAOUI</i>	<i>Maître de conférences - INSA de Lyon</i>
<b>Directeur de thèse :</b>	<i>Gérard SCORLETTI</i>	<i>Professeur – Ecole Centrale de Lyon</i>

Laboratoire AMPERE – UMR CNRS 5005



## Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'Ecole Centrale de Lyon

<b>Nom-Prénom</b>	<b>Corps grade</b>	<b>Laboratoire ou à défaut département ECL</b>	<b>Etablissement</b>
AURIOL Philippe	professeur	AMPERE	ECL
BEROUAL Abderrahmane	professeur	AMPERE	ECL
BURET François	professeur	AMPERE	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
MARTELET Claude	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Alain	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
SCORLETTI Gérard	professeur	AMPERE	ECL
SIMONET Pascal	chargé de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
THOMAS Gérard	professeur	AMPERE	ECL
VOLLAIRE Christian	professeur	AMPERE	ECL
HELLOUIN Yves	maître de conférences	DER EEA	ECL
LE HELLEY Michel	professeur	DER EEA	ECL
GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	professeur	DER STMS	ECL
LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	professeur émérite	ICJ	ECL
MARION Martine	professeur	ICJ	ECL
MIRONESCU Elisabeth	professeur	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	professeur	ICJ	ECL
MUSY François	maître de conférences	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	ICJ	ECL
DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL
CALLARD Anne-Ségolène	maître de conférences	INL	ECL
CLOAREC Jean-Pierre	maître de conférences	INL	ECL
GAFFIOT Frédéric	professeur	INL	ECL
GAGNAIRE Alain	maître de conférences	INL	ECL
GARRIGUES Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GENDRY Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
JOSEPH Jacques	professeur	INL	ECL
KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
LETARTRE Xavier	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
MARTIN Jean-René	professeur émérite	INL	ECL

O'CONNOR Ian	professeur	INL	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	professeur	INL	ECL
ROBACH Yves	professeur	INL	ECL
SAINT-GIRONS Guillaume	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SEASSAL Christian	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
TARDY Jacques	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
CHEN Liming	professeur	LIRIS	ECL
BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BOGEY Christophe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur émérite	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT genevièvre	professeur émérite	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	professeur	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GOROKHOVSKI Mikhail	professeur	LMFA	ECL
HENRY Daniel	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
LE RIBAUT Catherine	chargée de recherche	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
SHAO Liang	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	maître de conférences	LMFA	ECL
BENAYOUN Stéphane	professeur	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	maître de conférences	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	maître de conférences	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfried	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	past	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	professeur	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
JUVE Denyse	ingénieur de recherche	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	professeur	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférences	LTDS	ECL
SALVIA Michelle	maître de conférences	LTDS	ECL
SIDOROFF François	professeur	LTDS	ECL

<i>SINOU Jean-Jacques</i>	<i>maître de conférences</i>	LTDS	ECL
<i>STREMSDOERFER Guy</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>THOUVEREZ Fabrice</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>TREHEUX Daniel</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>VANNES André-Bernard</i>	<i>professeur émérite</i>	LTDS	ECL
<i>VINCENS Eric</i>	<i>maître de conférences</i>	LTDS	ECL

# *Remerciements*

Trois années...trois années de travail, ponctuées de moments agréables et d'autres qui l'étaient moins...

Malgré que c'est bien de ma personne qu'il s'agit sur la couverture de ce document, en gras bien mis en évidence, nul ne doit oublier que tout cela n'aurait été possible sans la contribution de plusieurs personnes.

Je voudrais commencer par adresser mes plus sincères remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur Gerard SCORLETTI, et mes co-directeurs, Monsieur Mohamed SMAOUI et Monsieur Dominique TOURNIER pour leurs précieux conseils, leur disponibilité et leurs qualités humaines.

Je remercie chaleureusement Monsieur Mohamed M'SAAD et Monsieur Kouider Nacer M'SIRDI d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail et je les joins aux autres membres du jury pour leur exprimer ma gratitude de m'avoir honoré par leur présence pour juger ce travail.

Au-delà des personnes citées, je voudrais exprimer mes meilleurs sentiments à l'intégralité du personnel permanent ou non du laboratoire Ampère sur les sites de l'Ecole Centrale de Lyon et de l'INSA de Lyon.

Et, last but not the least, je souhaite finir sur une note personnelle : merci à vous tous qui êtes proches de moi et qui n'avez cessé de me pousser à me surpasser et qui avez cru en moi tout le long de mon parcours.



# Table des matières

<i>Introduction Générale</i> .....	1
<b>Chapitre I Problématique de la dérivation</b> .....	<b>5</b>
I.1 Introduction .....	7
I.2 Problème de dérivation : intérêt et motivations .....	7
I.3 Problématique de la dérivation .....	8
I.4 Différentes approches du problème .....	10
I.5 Modélisation de signaux .....	13
I.6 Problème d'observation .....	16
I.6.1 Structures d'observateurs .....	18
I.7 Conclusion .....	19
<b>Chapitre II Observateurs linéaires et dérivation</b> .....	<b>21</b>
II.1 Introduction .....	23
II.2 Outils et résultats.....	24
II.3 Dérivation par observateur linéaire par placement de pôles .....	28
II.3.1 Observateur grand gain : Principe.....	28
II.3.2 Observateur Grand Gain : Application à la dérivation.....	30
II.4 Dérivation par filtre de Kalman .....	32
II.4.1 Filtre de Kalman : Principe .....	32
II.4.2 Filtre de Kalman : Application à la dérivation.....	34
II.5 Dérivation par observateur $H_2$ .....	35
II.6 Application à la dérivation : comparaison des résultats.....	39
II.7 Dérivation par observation et filtrage $H_\infty$ .....	44
II.7.1 Synthèse d'observateur : Approche $H_\infty$ .....	45
II.7.2 Problèmes d'observation $H_\infty$ : définition.....	47
II.7.3 Problèmes d'observation $H_\infty$ : mise en œuvre .....	49
II.7.4 Application à la dérivation .....	59
II.8 Conclusion .....	68
<b>Chapitre III Observateurs non linéaires et dérivation</b> .....	<b>71</b>
III.1 Introduction .....	73
III.2 Généralités sur les modes glissants .....	74

III.3 Synthèse de commande par modes glissants.....	75
III.3.1 Commande par modes glissants d'ordre 1 .....	75
III.3.2 Commande par modes glissants d'ordre supérieur .....	78
III.3.3 Commande par modes glissants : algorithme du Super Twisting .....	79
III.3.4 Algorithme du Super Twisting : de la commande à l'observation.....	80
III.4 Observateurs modes glissants .....	87
III.4.1 Observateur Super Twisting.....	87
III.4.2 Observateur modes glissants d'ordre supérieur adaptatif .....	90
III.5 Application à la dérivation .....	95
III.6 Conclusion .....	99

## **Chapitre IV Mise en œuvre et application des algorithmes de dérivation 101**

IV.1 Introduction .....	103
IV.2 Protocole expérimental .....	104
IV.3 Discrétisation des algorithmes .....	105
IV.3.1 Différentiateur Observateur par placement de pôles et filtre $H_\infty$ .....	105
IV.3.2 Différentiateur Super Twisting .....	107
IV.3.3 Différentiateur modes glissants adaptatif.....	108
IV.4 Etude de l'effet des choix technologiques .....	109
IV.4.1 Effet de la conversion Analogique - Numérique.....	109
IV.4.2 Effet de la quantification des coefficients .....	112
IV.5 Carte de programmation.....	115
IV.5.1 Convertisseur Analogique Numérique (CAN).....	116
IV.5.2 Convertisseur Numérique Analogique (CNA).....	118
IV.5.3 Timers et signaux d'horloge.....	119
IV.6 Implémentation et validation des différentiateurs.....	119
IV.7 Conclusion .....	134

## **Chapitre V Algorithmes de dérivation : mise en œuvre expérimentale pour la commande d'un système électropneumatique ..... 137**

V.1 Introduction .....	139
V.2 Dispositif expérimental .....	139
V.3 Système électropneumatique.....	141
V.4 Carte d'acquisition DS1104 .....	142
V.5 Carte d'adaptation .....	143
V.6 Appareillage de mesures .....	145
V.7 Modèle dynamique du système électropneumatique .....	147

V.7.1	Partie mécanique : modèle de commande .....	147
V.7.2	Modèle de l'évolution des pressions dans les chambres .....	148
V.8	Commande par modes glissants du système électropneumatique .....	152
V.9	Validation expérimentale des algorithmes de différentiation .....	153
V.9.1	Validation expérimentale en boucle ouverte des algorithmes de différentiation .....	155
V.9.2	Validation expérimentale en boucle fermée des algorithmes de différentiation .....	160
V.10	Conclusion .....	169
	<i>Conclusion Générale</i> .....	171

# Table des figures

Figure I-1 : Dérivées signal sans bruit (a) et signal bruité (b).....	9
Figure I-2 : Dérivée avec filtrage du bruit.....	10
Figure I-3 : Modèle triple intégrateur.....	12
Figure I-4 : Modèle du signal.....	13
Figure I-5 : Système de convolution.....	15
Figure I-6 : Observateur d'état.....	16
Figure I-7 : Observateur à entrée inconnue.....	17
Figure II-1 : Problème de commande $H_\infty$ .....	25
Figure II-2 : signal utile $y_s$ , bruit de mesure $y_w$ et dérivée exacte $\dot{y}_s$ .....	39
Figure II-3 : Problème d'observation.....	40
Figure II-4 : Observateur par placement de pôles : réponse fréquentielle.....	40
Figure II-5 : Observateur par placement de pôles : Sortie et erreur de dérivation $w_0 = 30\pi \text{ rad.s}^{-1}$ (gauche) et $w_0 = 300\pi \text{ rad.s}^{-1}$ (droite).....	41
Figure II-6 : Filtre de Kalman : réponse fréquentielle.....	42
Figure II-7 : Filtre de Kalman : Sortie et erreur de dérivation.....	42
Figure II-8 : Réponses fréquentielles : Observateur par placement de pôles vs filtre de Kalman .....	43
Figure II-9 : Problème d'observation $H_\infty$ .....	45
Figure II-10 : Problème de commande $H_\infty$ .....	46
Figure II-11 : Problème 1.....	47
Figure II-12 : Problème 2.....	48
Figure II-13 : Problème 3.....	48
Figure II-14 : Problème 4.....	49
Figure II-15: Modules $ G_s(j\omega) ^2$ et $ G_b(j\omega) ^2$ .....	60
Figure II-16 : Diagrammes de Bode de $G_p(s)$ et $G_c(s)$ .....	61
Figure II-17: Diagramme de Bode $W_e(s)$ .....	62
Figure II-18 : Diagrammes de Bode $G_p(s)$ et $G_F(s)$ .....	63
Figure II-19 : Réponse fréquentielle $T_{w \rightarrow e_z}(j\omega)$ .....	63
Figure II-20 : Fonction de pondération $W_e$ .....	64
Figure II-21 : $G_p(s)$ : sortie et erreur de dérivation.....	64
Figure II-22 : $G_F(s)$ : sortie et erreur de dérivation.....	65
Figure II-23 : Réponses fréquentielles $G_{OPP}$ et $G_{F1}$ .....	66
Figure II-24 : $G_{F1}$ : Sortie et erreur de dérivation.....	66
Figure II-25 : DSP des erreurs d'estimation.....	67
Figure III-1 : Attractivité de la surface de glissement dans le plan de phase $(s, \dot{s})$ .....	75
Figure III-2: Phénomène de Chattering.....	77
Figure III-3: Convergence de l'algorithme Super Twisting dans le plan $(s, \dot{s})$ .....	80
Figure III-4 : Schéma du Super Twisting.....	81
Figure III-5 : Trajectoire de convergence de l'observateur.....	83

Figure III-6 : Observateur Super Twisting : sortie et erreur de dérivation ( $y_b = 0$ ) .....	96
Figure III-7 : Observateur Super Twisting : sortie et erreur de dérivation ( $y_b \neq 0$ ) .....	96
Figure III-8 : Observateur Super Twisting : sortie et erreur de dérivation (entrée filtrée) .....	97
Figure III-9 : Observateur Super Twisting Adaptatif : sortie et erreur de dérivation (entrée filtrée).....	98
Figure III-10 : Dérivateur linéaire : sortie et erreur de dérivation .....	98
Figure IV-1 : Diagramme de Bode filtre continu et filtres discrets Euler (gauche) et Bilinéaire (droite).....	106
Figure IV-2: Chaîne d'acquisition.....	109
Figure IV-3 : Erreur de quantification au niveau du CAN.....	110
Figure IV-4: Effet de la résolution du CAN sur la réponse du filtre linéaire.....	111
Figure IV-5: Effet du codage en virgule fixe .....	114
Figure IV-6: Effet de la précision des coefficients sur la réponse du filtre .....	115
Figure IV-7: Architecture du CAN .....	117
Figure IV-8: Circuit de protection des entrées analogiques .....	118
Figure IV-9: Architecture du CNA .....	118
Figure IV-10 : Observateur Grand Gain : sortie vs dérivée exacte .....	121
Figure IV-11 : Observateur Grand Gain : erreur de dérivation.....	121
Figure IV-12 : Observateur par placement de pôles : sortie pour $y = 0$ .....	122
Figure IV-13 : Observateur grand gain : DSP erreur de dérivation .....	123
Figure IV-14 : Filtre $H_\infty$ : sortie vs dérivée exacte .....	124
Figure IV-15 : Filtre dérivateur $H_\infty$ : erreur de dérivation .....	124
Figure IV-16 : Filtre $H_\infty$ : DSP erreur de dérivation .....	125
Figure IV-17 : Différentiateur Super Twisting : sortie vs dérivée exacte .....	126
Figure IV-18 : Différentiateur Super Twisting : erreur de dérivation.....	126
Figure IV-19 : Super Twisting : DSP erreur de dérivation .....	127
Figure IV-20 : Différentiateur Supertwisting SAT : sortie vs dérivée exacte.....	128
Figure IV-21 : Différentiateur Supertwisting SAT : erreur de dérivation.....	128
Figure IV-22 : Super Twisting SAT : DSP erreur de dérivation.....	129
Figure IV-23 : Différentiateur Super Twisting Adaptatif : sortie vs dérivée exacte.....	130
Figure IV-24 : Différentiateur Super Twisting Adaptatif : erreur de dérivation.....	130
Figure IV-25 : Super Twisting Adaptatif : DSP erreur de dérivation .....	131
Figure IV-26 : Super Twisting avec entrée filtrée : sortie vs dérivée exacte .....	133
Figure IV-27 : Super Twisting avec entrée filtrée : erreur de dérivation.....	133
Figure IV-28 : Super Twisting avec entrée filtrée : DSP erreur de dérivation.....	134
<b>Figure V-1: Dispositif expérimental.....</b>	<b>140</b>
Figure V-2 : Système électropneumatique .....	141
Figure V-3 : Carte d'adaptation .....	143
Figure V-4 : Schéma Circuit I.....	144
Figure V-5 : Schéma Circuit II.....	145
Figure V-6 : Consigne en position (m).....	154
Figure V-7 : Signaux vitesse à dériver : Essai1 (gauche) et Essai2 (droite) .....	155
Figure V-8 : Signaux d'accélération « exacts » : Essai1 (haut) et Essai2 (bas).....	155
Figure V-9 : DSP de signaux de vitesse Essai1 (haut) et Essai2 (bas).....	156
Figure V-10 : Dérivateur $H_\infty$ : accélération et erreur (Essai1) ( $m/s^2$ ).....	157
Figure V-11 : Dérivateur $H_\infty$ : accélération et erreur (Essai2) ( $m/s^2$ ).....	157
Figure V-12 : Super Twisting Adaptatif : accélération et erreur (Essai1) ( $m/s^2$ ).....	159
Figure V-13 : Super Twisting Adaptatif : accélération et erreur (Essai2) ( $m/s^2$ ).....	159

Figure V-14 : Consigne et position (gauche) et erreur de suivi (droite) (m) (essai1).....	161
Figure V-15 : Accélération (m/s <sup>2</sup> ) et Commande (V) (essai1).....	161
Figure V-16 : Consigne, position et erreur de poursuite (m) (essai2).....	162
Figure V-17 : Accélération (m/s <sup>2</sup> ) et Commande (V) (essai2).....	162
Figure V-18 : Différentiateur $H_\infty$ : Consigne et position (m) (essai1) .....	163
Figure V-19 : Différentiateur $H_\infty$ : Accélération (m/s <sup>2</sup> ) et Commande (V) (essai1).....	164
Figure V-20 : Différentiateur $H_\infty$ : Consigne, position et erreur de poursuite (m) (essai2) ..	164
Figure V-21 : Différentiateur $H_\infty$ : Accélération (m/s <sup>2</sup> ) et Commande (V) (essai2).....	165
Figure V-22 : Différentiateur Super Twisting Adaptatif : Consigne, position.....	166
Figure V-23 : Différentiateur Super Twisting Adaptatif : Accélération (m/s <sup>2</sup> ) et Commande (V) (essai1).....	166
Figure V-24 : Différentiateur Super Twisting Adaptatif : Consigne, position et erreur de poursuite (m) (essai2).....	167
Figure V-25 : Différentiateur Super Twisting Adaptatif : Accélération (m/s <sup>2</sup> ) et Commande (V) (essai2).....	167



## *Liste des tableaux*

Tableau I-1 : signaux canoniques.....	16
Tableau I-2 : Critères d'optimisation pour la synthèse d'observateurs.....	18
Tableau II-1 : comparaison des algorithmes .....	44
Tableau II-2 : Comparaison d'algorithmes .....	65
Tableau II-3: comparaison des algorithmes .....	67
Tableau III-1 : Comparaison d'algorithmes .....	99
Tableau IV-1 : Erreurs de dérivation.....	131
Tableau IV-2 : Comparaison de précision.....	132
Tableau V-1 : Caractéristiques techniques de la carte DS1104 .....	142
Tableau V-2 : Capteur de position : caractéristiques techniques .....	146
Tableau V-3 : Accéléromètre : caractéristiques techniques .....	146
Tableau V-4 : Capteur de pressions des chambres du vérin : caractéristiques techniques ...	147
Tableau V-5 : Dérivateur $H_\infty$ : comparaison RENESAS vs dSPACE.....	157
Tableau V-6 : Super Twisting Adaptatif : comparaison RENESAS vs dSPACE.....	159
Tableau V-7 : Essais avec accéléromètre : résultats d'essais.....	163
Tableau V-8 : Dérivateur $H_\infty$ : résultats d'essais .....	165
Tableau V-9 : Dérivateur Super Twisting Adaptatif : résumé des essais (Essai 2) .....	168
Tableau V-10 : Dérivateur $H_\infty$ : résultats .....	169
Tableau V-11 : Dérivateur Super Twisting : résultats.....	169



## *Introduction Générale*

La synthèse d'algorithmes de dérivation, pour l'estimation de dérivées de signaux mesurés, est un sujet [1, 2, 3, 4] qui a largement accaparé l'intérêt de la communauté scientifique et spécialement des automaticiens. En effet, ceux-ci trouvent leur application dans différents domaines allant de l'identification des procédés [5], l'imagerie [6] et est, surtout, indissociable du problème majeur de la discipline de l'automatique qui est la commande non linéaire des procédés et trouve son application dans l'automobile [1], les machines électriques [2], les systèmes pneumatiques [7, 8] et le guidage d'aéronefs [3]. En effet, les méthodes numériques pour l'estimation de la dérivée de signaux mesurés permettent de rendre disponibles, pour la commande, des signaux non accessibles à la mesure soit du fait des contraintes technologiques soit du fait de l'absence d'instrumentation appropriée. De même, celles-ci permettent de réduire le coût des installations, en réduisant le nombre de capteurs nécessaires pour rendre disponibles à la mesure les différentes grandeurs pertinentes, et d'augmenter leur fiabilité en assurant la disponibilité de la mesure dans le cas de défaut capteur. De ce principe, ces méthodes forment, dans certains cas, une alternative aux observateurs qui permettent, à partir de la connaissance du modèle du système et de la mesure de son entrée et de sa sortie, de reconstruire les informations manquantes. Cependant, celle-ci suppose la connaissance précise du modèle du système observé.

Dans ce cadre, plusieurs techniques de dérivation linéaires [3, 4] et non linéaires [9, 10, 11] ont été développées dans la littérature. Celles-ci ont en commun le fait que leur réglage est toujours ramené à un compromis entre précision, sur l'estimation de la dérivée, et sensibilité aux bruits et perturbations.

Un signal mesuré est inévitablement porteur de deux informations : une information utile représentant, dans ce cas, le signal à dériver, et une autre information regroupant les différentes perturbations et bruits de différentes natures et origines. La présence de cette dernière composante est la principale source de difficultés dans la synthèse d'algorithmes de dérivation et le problème aurait été trivial sans sa présence. Ainsi, le challenge majeur dans ces approches est de pouvoir mettre en place un mécanisme permettant de distinguer et extraire une information utile présente au milieu de perturbations.

La plupart de ces techniques prennent en compte, implicitement ou explicitement, des hypothèses propres sur le signal à dériver et/ou sur la perturbation l'affectant. Ainsi, dans l'approche de filtrage de Kalman, la perturbation est supposée être un bruit blanc gaussien de variance connue [3] et un signal borné dans les approches de dérivation par modes glissant [10].

Bien qu'il en soit rarement fait état dans la littérature, un algorithme de dérivation peut être vu comme un observateur pour un système particulier. Le signal mesuré est alors considéré comme la sortie d'un système dynamique linéaire dont l'entrée est un signal canonique dont les caractéristiques sont connues. Ce type de modélisation est une des hypothèses considérées dans la synthèse de l'algorithme. Ainsi, l'observation de ce système, mis sous une forme canonique particulière faisant apparaître les dérivées de sa sortie dans le vecteur d'état, permet l'estimation des dérivées de sa sortie.

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de différentes approches linéaires et non linéaires dans la synthèse d'algorithmes de dérivation pour l'estimation de la (des) dérivée(s) d'un signal mesuré. Ce problème est traité du point de vue des problèmes d'observation. Ainsi, des

méthodes d'observation linéaires et non linéaires, largement commentées dans la littérature, ont été étudiées et exploitées dans l'objectif de la mise en œuvre d'une large palette de méthodes pour l'estimation de la dérivée de signaux.

Un observateur est toujours mis en place pour satisfaire un critère de coût, dépendant de l'approche considérée, défini sur l'erreur d'estimation. Ainsi, et à titre d'exemples, un observateur de Luenberger [12] permet d'assurer l'annulation asymptotique de l'erreur d'observation alors que le filtre de Kalman [3] est mis en œuvre pour minimiser la variance de l'erreur d'estimation.

Partant de ce principe, une proposition d'approche d'observation linéaire a été introduite et appliquée à la dérivation. Dans celle-ci, un observateur linéaire est mis en œuvre par optimisation d'une norme  $H_\infty$  qui est équivalente à la minimisation de la DSP de l'erreur d'estimation. Le problème de synthèse d'observateur est alors formulé comme un problème d'optimisation sous contraintes LMI. Cette approche présente l'intérêt de la possibilité de considérer une norme  $H_\infty$  pondérée dans la synthèse de l'observateur. Dans ce cas, il est possible d'imposer un gabarit particulier sur la DSP de l'erreur. Une investigation supplémentaire est également apportée quant à la possibilité de considérer des structures d'observateurs alternatives à la structure Luenberger classique afin de s'affranchir de cette contrainte structurelle. Une comparaison quant au niveau de performances atteignable par chacune de ces structures est apportée. Les résultats de cette section ont été présentés dans une publication [13].

Dans un cadre non linéaire, les observateurs non linéaires par modes glissants [14, 15] fournissent une alternative aux observateurs linéaires pour l'application à la dérivation. Ces observateurs permettent de contraindre les trajectoires de l'observateur à atteindre, en temps fini, et à évoluer sur une surface où l'erreur d'observation est nulle. Le principal avantage de ces structures d'observateurs réside dans leur robustesse, principale qualité des techniques basées sur les modes glissants [16].

Dans le cadre de la dérivation, ces techniques d'observation, initialement adoptées pour les systèmes non linéaires, sont appliquées à des systèmes linéaires (modèles du signal) et on décrira le principe de leur adaptation à ces derniers. Les observateurs non linéaires par modes glissants ont été appliqués à l'estimation de dérivées de signaux mesurés vu le potentiel d'une éventuelle amélioration des résultats, par rapport aux observateurs linéaires, apportée par l'exploitation de fonctions non linéaires dans leurs structures. De plus, ces techniques permettent d'apporter une nouvelle approche, à notre connaissance inconnue en linéaire, de la convergence qu'est la convergence en temps fini.

Du fait de leur non linéarité, la procédure de réglage de algorithmes qui en découlent est assez délicate et dépend, surtout, de la nature du signal à dériver et du niveau de bruit sur celui-ci. Ainsi, un réglage reste optimal pour un signal donné mais ne garantit pas le même niveau de performances pour un autre. Dans ce cas, des techniques d'adaptation en temps réel pourront intervenir au niveau des paramètres de réglage de ces algorithmes et ce afin de s'affranchir de cette difficulté de réglage ou, du moins, la rendre moins complexe. Une version adaptative d'un algorithme de dérivation par modes glissants classique a été alors proposée.

Tout le long de ce travail, un effort de clarification et de positionnement des techniques abordées entre elles sera apporté. Ainsi, une comparaison est constamment effectuée entre celles-ci, linéaires et non linéaires, afin de les positionner les unes par rapport aux autres selon une liste de critères établie.

Cependant, notre approche dans l'étude du problème ne s'est pas bornée uniquement aux fondements théoriques des méthodes de dérivation. Ainsi, suite au travail théorique décrit précédemment, un travail de nature pratique et expérimental a été effectué. L'objectif étant de mettre en place un « capteur logiciel » embarqué sur cible numérique permettant l'estimation des variables d'état d'un système mécatronique, par dérivation de signaux mesurés, en vue de sa commande. L'avantage majeur de cette solution est que ce circuit numérique représentera un capteur universel permettant d'estimer les dérivées de différentes grandeurs physiques et ce, avec une même technologie. En effet, et à titre d'exemple, ce dérivateur permettra d'estimer vitesse et accélération, à partir de la mesure d'une position, avec une même carte. Ceci aurait nécessité l'emploi de deux technologies de capteurs différentes.

Outre l'idée de l'implémentation numérique de ces algorithmes, on s'est proposé d'effectuer l'étude de la faisabilité de l'implémentation d'algorithmes de dérivation sur des systèmes numériques embarqués « faible coût » ainsi que l'effet de la limitation de précision sur les performances de ceux-ci d'un point de vue boucle ouverte et également, dans le cas où le capteur est intégré dans une boucle de commande. En effet, la majorité des opérations d'implémentation numérique des algorithmes de dérivation, traitées dans la littérature, se sont uniquement limitées à des circuits numériques hautes performances ce qui implique, naturellement, un coût à l'image de celles-ci, et aucune ne s'est penchée sur la faisabilité de cette opération sur un circuit plus faible coût avec, naturellement, une précision moindre. De même, à notre connaissance, aucune étude ne s'est également penchée sur l'influence de ces paramètres sur les performances, en boucle fermée, dans la commande d'un système physique. Et l'opération de l'implémentation et le fait que le circuit soit d'une précision limitée, conduisent, inévitablement à la dégradation des performances des algorithmes de dérivation par rapport à celles obtenues en temps continu. La question d'implémentation numérique d'algorithmes de dérivation a ainsi fait l'objet d'une publication [17].

Ainsi, un environnement matériel représentatif d'une utilisation commune, de coût maîtrisé, a été choisi pour cette opération et des essais expérimentaux en vue de la validation de la solution en boucle ouverte et en boucle fermée (commande) ont été effectués. Dans ce cas, un système électropneumatique a été adopté pour les essais.

Dans cet objectif, un benchmark d'essais couvrant toutes les étapes de conception et de validation en simulation et en expérimentation a été établi.

Le plan de ce mémoire est alors organisé comme suit :

Un premier chapitre, permet d'introduire la problématique de la dérivation ainsi que d'apporter les éléments nécessaires pour expliquer comment un problème de dérivation peut être vu comme un problème d'observation.

Un second chapitre est consacré aux techniques d'observation linéaire appliquées à l'estimation de la dérivée de signaux. Les techniques d'observation par placement de pôles, de filtrage de Kalman et d'observation par optimisation d'une norme  $H_2$  y sont alors abordées. Puis, une technique d'observation alternative, basée sur une l'optimisation d'une norme  $H_\infty$  est introduite. Celle-ci est appliquée à différentes structures d'observation proposées et une investigation quant au niveau de performances atteignables par celles-ci est portée.

Ce chapitre se conclut par des essais en simulation et une comparaison de performances de ces méthodes linéaires en fonction de critères donnés.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'algorithmes de dérivation basés sur des observateurs non linéaires. Les techniques qui y sont présentées sont toutes basées sur les modes glissants. Ces techniques sont présentées d'un point de vue théorique dans un premier temps. Ensuite, on s'est intéressé à la proposition d'une approche adaptative, pour l'adaptation des gains de l'algorithme en temps réel, appliquée à une structure classique d'algorithme de dérivation par modes glissants. De même que pour le chapitre précédent, celui-ci se termine par des essais en simulation et une comparaison plus complète entre les algorithmes de dérivation linéaires et non linéaires.

L'investigation de l'implémentation numérique de ces algorithmes est le sujet du quatrième chapitre. Les algorithmes sont alors discrétisés et une étude de l'influence du choix technologique sur les performances des algorithmes est effectuée. Ensuite, et à l'issue de la présentation de la carte de développement utilisée pour l'implémentation des algorithmes, une validation alors en boucle ouverte des algorithmes implémentés est effectuée.

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à la validation de la carte de dérivation dans un contexte de problème de commande. La carte de dérivation est alors intégrée dans la boucle de commande en position d'un système électropneumatique. La carte permet, dans ce cas, l'estimation de l'accélération à partir de la mesure de la vitesse. La validation de la solution est alors effectuée en deux temps : validation en boucle ouverte puis validation en boucle fermée.

## **Chapitre I Problématique de la dérivation**



## I.1 Introduction

La problématique de l'estimation de la dérivée d'un signal est un problème majeur de l'automatique moderne vue son importance dans la commande des systèmes non linéaires. Ce problème, trivial dans le cas de la dérivation d'un signal non bruité, devient un problème plus complexe en présence d'un bruit sur le signal mesuré à dériver, ce qui est le cas dans quasiment tous les signaux de ce type.

Plusieurs méthodes linéaires [4, 18] et non linéaires [10, 11] ont été mises en œuvre et qui ont toutes en commun la prise en compte d'hypothèses sur le bruit et/ou sur le signal à dériver pour l'optimisation de la « précision » de l'algorithme associé. Comme il sera explicité dans ce chapitre, dans certaines des hypothèses considérées sur le signal à dériver et le bruit de mesure, on considère que ceux-ci sont les sorties de systèmes dynamiques linéaires. Le problème de l'estimation de la dérivée est alors ramené à un problème d'observation linéaire ou non linéaire de l'état de ce système.

Dans ce chapitre, on pose la problématique de la synthèse d'algorithmes de différentiation. On commencera par introduire, à travers un exemple, l'utilité de tels algorithmes dans le cadre de la commande de systèmes non linéaires. On passera ensuite à la présentation de la problématique dans la mise en œuvre de méthodes pour l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré. On définit, ensuite, la notion de modélisation de signaux pour la représentation du signal à dériver ainsi que sur comment le problème peut être considéré comme un problème d'observation.

## I.2 Problème de dérivation : intérêt et motivations

Comme son nom l'indique, un algorithme de dérivation est une méthode qui permet l'estimation de la dérivée d'un signal que l'on mesure. En effet, ce problème est aussi important que complexe et trouve son application principalement dans les problèmes de commande de systèmes physiques [2].

Pour introduire l'utilité de tels algorithmes dans une approche purement automatique, considérons l'exemple d'un problème de commande par retour de sortie appliqué à un système dynamique introduit dans ce qui suit.

### Exemple I-1

Soit l'exemple de synthèse de commande non linéaire par retour de sortie, basée sur la platitude, d'une génératrice synchrone [2] définie par le modèle d'état non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -b_1 x_3 \sin x_1 - D x_2 + P \\ \dot{x}_3 = b_3 \cos x_1 - b_4 x_3 + E - u \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

où  $x_1$  est la sortie mesurée représentant l'angle de la charge,  $x_2$  la vitesse angulaire de la tige,  $x_3$  une variable associée à une tension interne et  $u$  est l'entrée de commande.  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $P$  et  $E$  sont des paramètres constants connus strictement positifs.

Dans [2], un contrôleur non linéaire est proposé pour la commande de la génératrice synchrone (I.1). La commande est alors calculée à partir de la mesure de  $x_1$  et de  $x_2$ . L'application de cette commande sur la génératrice physique nécessite d'accès aux mesures de ces deux composantes.

La disponibilité de ces mesures peut être rendue possible de plusieurs manières. En effet, on peut envisager l'existence d'un appareillage de mesure adéquat et complet permettant de mesurer directement  $x_1$  et  $x_2$ . Cette première solution, outre le fait qu'elle soit coûteuse

(investissement dans les capteurs), suppose un accès à la grandeur mesurée. Cependant, dans certains systèmes, spécifiquement les moteurs électriques, la mesure de variables internes est techniquement impossible (flux statorique dans certaines machines électriques) [19] ou trop onéreuse [20].

Une autre alternative repose sur l'approche d'observation. En effet, à partir de la connaissance du modèle du système, un observateur peut être construit pour l'estimation des différentes variables d'état à partir de la mesure de la sortie. Comme pour la modélisation de tout système physique, un modèle est une traduction fidèle du comportement du système sous certaines conditions (points de fonctionnement, hypothèses,...) et il induit indubitablement des incertitudes, d'où l'estimation fiable des différentes variables d'état n'est possible qu'avec un modèle le plus exacte possible.

L'autre approche, origine de notre problématique, consiste à mettre en œuvre un algorithme de différentiation. Pour revenir à l'exemple précédent, la disponibilité du seul signal  $x_1$  de mesure de la position de la charge par un capteur peut ramener, par dérivations de celui-ci, à l'estimation d'où la disponibilité du signal  $x_2$ . D'où l'intérêt majeur des algorithmes de différentiation qui permettent de réduire le nombre de capteurs et de réduire par la même occasion le coût des installations.

Il faut bien noter que, dans le cadre d'une commande par retour de sortie, l'application de cette approche est réservée aux systèmes où une partie des variables d'état, accessibles ou non à la mesure et nécessaires pour le calcul de la commande, sont les dérivées d'autres variables d'état qui sont, elles, obligatoirement accessibles à la mesure. Dans ce cas, la seule différentiation du signal mesuré fournit les estimations des variables d'état dérivées. Cette approche est répandue dans les systèmes mécatroniques [16] et plusieurs méthodes de différentiation ont été proposées.

Cependant, le problème de l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré est loin d'être trivial. En effet, le problème principal dans la mise en œuvre d'algorithmes de différentiation

### I.3 Problématique de la dérivation

Soit  $f(t)$  une fonction continue du temps, dérivable et de dérivée continue. La dérivée  $f'(t)$  de la fonction est alors définie par

$$f'(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(t+\delta) - f(t)}{\delta} \quad (I.2)$$

Pour  $\delta$  suffisamment petit, cette dérivée est alors approximée [21] par

$$f'(t) = \frac{f(t+\delta) - f(t-\delta)}{2\delta} \quad (I.3)$$

Cette dérivée est appelée « différence d'ordre 1 centrée à gauche ». Des approximations d'ordre supérieur peuvent également être données [22].

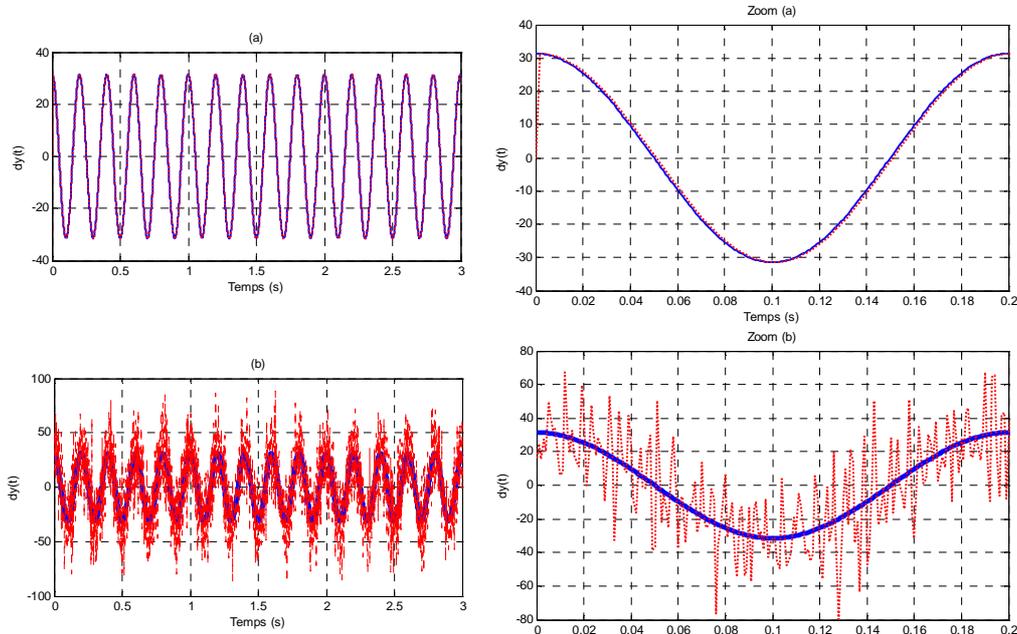
Bien qu'il approche la dérivée exacte, l'algorithme (I.3) est considéré comme l'algorithme de dérivation élémentaire et est rarement appliqué dans les problèmes de commande car celui-ci souffre d'une grande sensibilité aux bruits de mesure.

En effet, dans la réalité des applications sur systèmes physiques, toute mesure de signaux est polluée par des bruits de différentes origines (bruits électriques, thermiques, numériques,...).

Pour illustrer la sensibilité de l'algorithme (I.3), considérons un signal sinusoïdal  $y_s(t) = \sin(10\pi t)$  à dériver. Sa dérivée est alors approximée par la relation

$$\dot{y}_s(t) = \frac{y_s(t) - y_s(t - \delta)}{\delta} \quad (\text{I.4})$$

Le pas d'échantillonnage étant  $\delta = 1\text{ms}$ , la dérivée  $\dot{y}_s(t)$  est alors donnée par la figure suivante.



**Figure I-1 :** Dérivées signal sans bruit (a) et signal bruité (b)

Dans la *Figure I-1*, le graphique (a) représente la dérivée du signal  $y(t) = y_s(t)$  obtenue par l'algorithme (I.3). Le graphique (b) représente la dérivée, obtenue par le même algorithme, mais où le signal dérivé est  $y(t) = y_s(t) + y_b(t)$  avec  $y_b(t)$  une perturbation (bruit) telle que  $\forall t > 0, |y_b(t)| \leq 0.1$ .

Les résultats de la figure précédente résument parfaitement la problématique majeure dans la synthèse d'algorithmes de différentiation. En effet, on observe bien sur la *Figure I-1* qu'une bonne précision de dérivation peut être obtenue avec un algorithme élémentaire appliqué à un signal non perturbé et qu'en même temps la qualité de la dérivée est largement dégradée suite à l'ajout du bruit  $y_b(t)$  sur le signal à dériver  $y_s(t)$ .

L'algorithme de différentiation (I.4), est une méthode dans laquelle aucune distinction n'est faite entre l'information utile  $y_s(t)$  et la perturbation  $y_b(t)$ .

Dans ce cas, la dérivée résultante, donnée sur la *Figure I-1 (b)*, est définie par

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_s(t) + \dot{y}_b(t) \quad (\text{I.5})$$

ce qui explique la qualité « médiocre » de la dérivée obtenue.

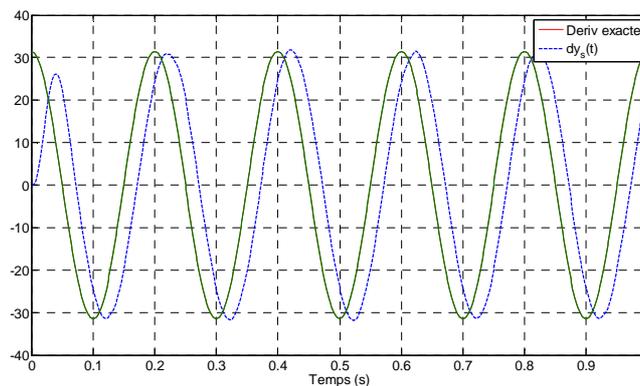
Dans la réalité des applications, tout signal mesuré est inévitablement pollué par signal perturbateur, qui se trouve être l'expression des bruits de l'environnement ayant diverses origines (électriques, thermiques,...).

Ainsi, derrière l'idée de mise en œuvre d'un différentiateur permettant une estimation précise de la dérivée d'un signal mesuré, l'élimination des effets des bruits s'impose. Le signal à dériver étant, dans la majorité des cas, supposé être un signal basses fréquences par rapport au

bruit, ceci renvoie intuitivement à une opération de filtrage passe-bas sur les signaux de perturbation.

Ainsi, il est possible d'effectuer, en amont du différentiateur, une première étape de filtrage pour éliminer les composantes de perturbation. Cette solution peut en effet fournir des résultats satisfaisant en terme de précision de l'estimation mais elle induit un déphasage inhérent et inévitable, chose qui peut ne pas être tolérée par un système commandé en boucle fermée et conduire à sa déstabilisation. De plus cette approche suppose que le signal utile et le signal de perturbation sont de spectres à supports disjoints car dans le cas contraire, le filtrage conduira à l'altération du signal utile en y supprimant des composantes dont les spectres se situent dans la bande de réjection du filtre.

Dans la *Figure I-2* qui suit, le résultat de la dérivée du même signal  $y(t) = y_s(t) + y_b(t)$  avec filtrage du bruit  $y_b(t)$  par un filtrage passe-bas.



**Figure I-2 :** Dérivée avec filtrage du bruit

On observe bien ainsi, l'effet du filtrage du bruit dans l'amélioration de la qualité de la dérivation et l'inévitable déphasage qu'il induit. Dans le cadre de la commande, la présence de ce déphasage peut ainsi conduire à la déstabilisation du système commandé

Au-delà de la simple opération de filtrage, le problème de l'estimation de la dérivée d'un signal nécessite une opération de distinction entre signal utile et perturbation. L'idée de filtrage du bruit est l'expression d'une information connue ou d'une hypothèse adoptée sur la perturbation et/ou sur le signal utile.

La question de comment pourrait-on être capable de distinguer le signal utile de la perturbation dans le signal mesuré se pose et quels types d'informations peuvent être exploitées à cette fin.

#### I.4 Différentes approches du problème

Plusieurs approches ont été adoptées dans la problématique de synthèse de différentiateurs pour l'estimation de la dérivée de signaux mesurés. La majorité de celles-ci ont en commun l'exploitation à priori de différentes caractéristiques des signaux utiles et/ou des bruits de mesure pour la synthèse et le réglage du différentiateur.

Dans l'approche à la dérivation par observateur grand gain linéaire [4, 23, 24], il est supposé que le signal mesuré, comportant l'information utile ainsi que les bruits de mesure, est la sortie d'une chaîne d'intégrateurs dont l'entrée est un signal déterministe inconnu considéré comme une perturbation et dont l'effet est rejeté dans la synthèse de l'observateur linéaire. Le bruit de mesure et le signal utile sont, dans ce cas, supposés être des signaux à supports fréquentiels disjoints et la synthèse du différentiateur vise à dériver la partie du signal se

situant dans une certaine plage de fréquences (basses fréquences) et d'atténuer le signal sur les fréquences restantes (hautes fréquences). Cependant, ce dérivateur n'est autre qu'un observateur linéaire avec un placement de pôles particulier et le dérivateur linéaire qui en découle est un dérivateur linéaire « intuitif », composé de la mise en série d'un filtre passe bas avec un dérivateur pur.

L'exploitation du filtrage de Kalman [3] dans la synthèse de dérivateurs pour l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré, est potentiellement plus intéressante. En effet, celle-ci introduit la prise en compte explicite des caractéristiques stochastiques du bruit de mesure dans la synthèse du dérivateur. Celui-ci est alors supposé être un signal aléatoire centré (bruit blanc gaussien) de variance connue. Dans ce cas, le signal mesuré est aussi considéré comme la sortie d'une chaîne d'intégrateurs dont l'entrée est un signal aléatoire centré (bruit blanc gaussien) de variance connue. Cependant, pour le réglage et l'optimisation du filtre, les hypothèses faites sur les signaux sont très fortes et difficiles à garantir en pratique.

Les différentiateur algébriques [2] introduisent une nouvelle approche pour l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré. Celles-ci se basent sur une approche temporelle dans laquelle le signal à dériver est approché par un développement en série de Taylor à un ordre donné. Le principal apport de ces méthodes est qu'elle permet la mise en œuvre d'un algorithme de dérivation sans paramètre de réglage et sans se baser sur un modèle du signal à dériver ou des bruits de mesure. Malgré ces aspects intéressants dans l'approche, celle-ci nécessite une remise à zéro répétitive de la sortie (dérivée) due à sa divergence par rapport à la vraie dérivée du signal. Cet aspect est principalement dû à la troncature de l'ordre du développement de la série de Taylor adopté pour l'approximation du signal à dériver. Cette opération d'initialisation cause une perte d'information sur un intervalle donné et durant lequel la dérivée est maintenue constante à sa valeur précédente ou interpolée à partir de ces valeurs passées.

Des approches non linéaires au problème ont également été traitées. Celles-ci reposent principalement sur la théorie des modes glissants [25, 26, 27]. Ces approches permettent d'introduire une nouvelle notion de convergence qu'est la convergence en temps fini qui est difficilement garantie dans un cadre linéaire ou l'on parle plutôt de convergence asymptotique. De plus, elles permettent d'exploiter des non linéarités pour, potentiellement, améliorer la précision de l'estimation sur la dérivée. Les dérivateurs modes glissants sont présentés dans la littérature comme des techniques de dérivation sans prise en compte d'une modélisation particulière. Cependant, et comme nous le démontrons dans les *sections III.4.1* et *III.4.2*, ces dérivateurs ne sont autres que des observateurs non linéaires où le signal mesuré est supposé être la sortie d'une chaîne d'intégrateurs dont l'entrée est un signal borné.

L'estimation optimale d'un signal présuppose la connaissance complète et précise du modèle observé, d'où, dans notre problématique, une connaissance précise du modèle du signal à dériver. Celui-ci peut être identifié à partir des observations [28, 29], cependant ces méthodes conduisent parfois à des modèles imprécis surtout dans le cas où l'ordre ou les caractéristiques des différents signaux sont approximatives [30].

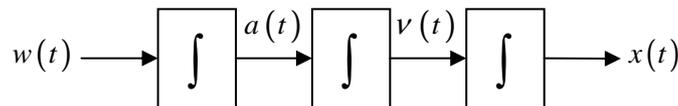
Les algorithmes de dérivation précédents, mis à part les dérivateurs algébriques, ont tous un point en commun. Dans toutes ces approches, le signal mesuré est modélisé comme la sortie d'une chaîne d'intégrateurs dont l'entrée est un signal dont les caractéristiques sont dépendantes de l'approche en question et l'algorithme de dérivation n'est autre qu'un

observateur pour l'estimation des entrées/sorties de chaque intégrateur. Cette interprétation sera plus explicitée dans les chapitres qui suivent.

La modélisation en chaîne d'intégrateurs, pour l'estimation des dérivées d'un signal mesuré, a été introduite dans un cadre stochastique pour le filtrage de Kalman, qu'on introduit plus loin dans ce document, appliqué au guidage de missiles [3]. Cette modélisation découle d'une approche par majoration qui permet de considérer un modèle majorant [30] utilisé pour une estimation optimale.

**Exemple 1-2**

Pour le guidage d'un missile, l'azimut de la cible est mesuré par un système radar. Pour la poursuite de cette trajectoire, la vitesse et l'accélération du mobile sont nécessaires. Dans cette approche, pour la reconstruction de la vitesse  $v(t)$  et l'accélération  $a(t)$  du mobile, sa position  $x(t)$  mesurée est modélisée comme la sortie d'une chaîne de trois intégrateurs dont l'entrée  $w(t)$  est un bruit blanc de spectre donné. Le spectre du bruit de mesure  $b(t)$  est évalué hors ligne à partir d'un échantillon d'azimut.



**Figure I-3 :** *Modèle triple intégrateur*

Le modèle associé à cette représentation est alors défini par

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ v \\ a \end{bmatrix} + b \end{cases} \quad (I.6)$$

La synthèse d'un filtre de Kalman pour l'estimation de l'état  $X = [x \quad v \quad a]^T$  conduit ainsi à l'estimation de la vitesse et de l'accélération et au même temps, au filtrage de la position  $y(t)$ .

Cet exemple est un cas d'application concret dans lequel le problème de dérivation est ramené à un problème d'observation ou filtrage.

La modélisation de signaux comme sortie d'une chaîne d'intégrateurs, adoptée dans les approches précédemment citées, peut cependant être qualifiée d'inadaptée vu qu'elle met tous les signaux dans un seul modèle. Dans ce document, on s'intéresse au cas où le signal à dériver est modélisé comme la sortie d'un système dynamique linéaire quelconque décrivant les caractéristiques spectrales du signal mesuré, du signal utile et du bruit sur celui-ci.

Dans ce qui suit, on introduit la notion de modélisation de signaux comme sortie d'un système dynamique linéaire stationnaire. Cette approche est considérée comme une généralisation de la modélisation en chaîne d'intégrateurs. Par la suite, on montre comment la formulation de

problèmes de synthèse de dérivateurs, pour l'estimation de la dérivée de signaux qu'on mesure, peut être vue comme un problème d'observation.

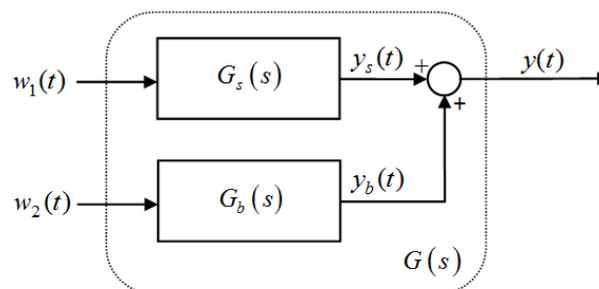
### I.5 Modélisation de signaux

En traitement du signal, un signal est modélisé, moyennant certaines hypothèses, comme la sortie d'un modèle dynamique particulier, décrit par un nombre fini de paramètres, et dont l'entrée est un signal canonique. Cette approche a été impulsée par les travaux de Yule [31], dans les années 1920, dans lesquels l'auteur s'est intéressé à la représentation d'une série temporelle (signal) comme étant le résultat du filtrage d'une variable aléatoire. Plusieurs structures de modèles ont alors été adoptées et qui sont classifiées en trois catégories : ARMA (AutoRégressif à Moyenne Ajustée), AR (AutoRégressif) et MA (Moyenne Ajustée) trouvant leur intérêt dans des applications spécifiques (traitement de la parole, traitement des signaux biomédicaux, ...).

Plusieurs méthodes (moindres carrés, algorithme de Levinson, ...) pour l'identification des modèles (coefficients du modèle), à partir d'observations de la sortie de celui-ci, ont été largement traitées et commentées [28, 29, 32].

De même que la notion de modélisation de signal, cette approche a été utile dans la réalisation de filtres optimaux (filtrage de Wiener [33], filtrage adaptatif [34]), dans le cas de connaissance du modèle du signal, permettant de reconstruire, sous contrainte, l'information utile portée par un signal à partir de mesures perturbées de celui-ci.

Dans notre approche au problème, on supposera que le modèle du signal est connu. Soit le signal mesuré  $y(t) = y_s(t) + y_b(t)$  composé d'un signal de base utile  $y_s(t)$  dont on désire estimer la dérivée et d'un signal de perturbation additif  $y_b(t)$  représentant les bruits de mesure et supposons que  $y(t)$  est la sortie d'un modèle linéaire à temps invariant (LTI).



**Figure I-4 :** Modèle du signal

Les deux signaux  $y_s(t)$  et  $y_b(t)$ , sont, à leur tour, modélisés comme la sortie d'une fonction de transfert dont l'entrée est un signal canonique.

$$y(s) = \underbrace{G_s(s) w_1(s)}_{y_s(s)} + \underbrace{G_b(s) w_2(s)}_{y_b(s)} \quad (\text{I.7})$$

Dans ce cas, on considèrera que  $G_s(s)$  est un filtre linéaire d'ordre  $n_s$ .  $G_b(s)$  est un filtre linéaire d'ordre  $n_b$ .

L'ordre des filtres devra être choisi en fonction du problème et du modèle adopté.

Le modèle complet  $G(s)$  du signal est un système linéaire formé par les fonctions de transfert  $G_s(s)$  et  $G_b(s)$  auxquelles correspondent, respectivement, les représentations d'état telles que

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) = A_s x_s(t) + B_s w_1(t) \\ y_s(t) = C_s x_s(t) + D_s w_1(t) \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

et

$$\begin{cases} \dot{x}_b(t) = A_b x_b(t) + B_b w_2(t) \\ y_b(t) = C_b x_b(t) + D_b w_2(t) \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

Le système LTI  $G$ , dont la sortie est le signal  $y(t)$ , est alors défini par une représentation d'état de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yw} w(t) \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

dans laquelle  $A = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_b \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} B_s & 0 \\ 0 & B_b \end{bmatrix}$ ,  $C_y = [C_s \quad C_b]$ ,  $D_{yw} = [D_s \quad D_b]$ .

$x = [x_s \quad x_b]^T$  est alors le vecteur d'état et  $w = [w_1 \quad w_2]^T$  le vecteur des entrées canoniques.

La sortie additionnelle  $z(t)$  est un signal interne représentant le signal qu'on désire estimer, et qui correspond à la première dérivée  $\dot{y}_s$  de  $y_s$ , et sur lequel l'optimisation de l'erreur d'estimation sera considérée.

Le modèle (I.10) décrivant la dynamique du signal mesuré étant établi, l'estimation de la dérivée de la sortie  $y_s(t)$  est alors équivalente à un problème d'observation classique. En effet, pour des systèmes  $G_s(s)$  et  $G_b(s)$  observables, commandables et minimaux, il est possible de les ramener sous une forme canonique particulière [35], dans laquelle les vecteurs d'états  $x_s$  et  $x_b$  respectifs de  $G_s$  et  $G_b$  se réécrivent sous la forme  $x_s^T = [y_s \quad \dot{y}_s \quad \ddot{y}_s \quad \cdots \quad y_s^{(n_s-1)}]$  et  $x_b^T = [y_b \quad \dot{y}_b \quad \ddot{y}_b \quad \cdots \quad y_b^{(n_b-1)}]$  et le vecteur d'état du système complet est alors  $x^T = [y_s \quad \dot{y}_s \quad \cdots \quad y_s^{(n_s-1)} \quad y_b \quad \dot{y}_b \quad \cdots \quad y_b^{(n_b-1)}]$ .

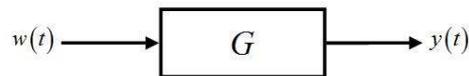
Cette représentation fait ainsi apparaître les dérivées de la sortie  $y_s(t)$  dans le vecteur d'état. Ainsi, la construction d'un observateur d'état au système sous forme canonique ramène à l'estimation des dérivées de la sortie du modèle.

**Remarque :**

Dans la modélisation choisie, on retrouve la même structure de vecteur d'état que celle rencontrée dans le cas de l'observation d'une chaîne d'intégrateurs pour l'estimation des dérivées d'un signal (*Exemple 1-2*).

De même, le choix de l'ordre  $n_s$  de  $G_s$  fixe le degré maximal ( $n_s - 1$ ) de la dérivée qu'il est possible d'estimer.

La modélisation d'un signal est une description (fréquentielle, temporelle,...) de celui-ci. En effet, considérons un signal canonique  $w(t)$  placé à l'entrée d'un système linéaire stationnaire défini par une fonction  $G$  et dont la sortie est un signal  $y(t)$ .



**Figure I-5 :** *Système de convolution*

Dans le système de convolution donné dans la *Figure I-5*, la relation liant les spectres des signaux d'entrée et de sortie est donnée par

$$y(\nu) = G(\nu)w(\nu) \quad (\text{I.11})$$

où  $\nu$  représente la variable fréquence.

$w(\nu)$  représente alors le spectre du signal d'entrée et  $G(\nu)$  la réponse fréquentielle du système de convolution qui est défini alors par une fonction de transfert  $G(s)$ .

Ainsi, le spectre  $y(\nu)$  du signal de sortie est le résultat de la multiplication du spectre  $w(\nu)$  du signal d'entrée par la réponse fréquentielle du système de convolution  $G(\nu)$ .

Au delà d'une simple description spectrale du signal, un modèle de signal peut être vu comme une description de sa DSP. En effet, pour le système de convolution défini par (I.11), la relation reliant les densités spectrales du signal d'entrée  $S_w(\nu)$  à la densité spectrale  $S_y(\nu)$  est définie par

$$S_y(\nu) = |G(\nu)|^2 S_w(\nu) \quad (\text{I.12})$$

Dans l'approche par modélisation de signaux de cette section, le signal est modélisé comme la sortie d'un système dynamique dont l'entrée est un signal canonique. Un tel signal est un signal qui n'est pas précisément défini, mais décrit par des caractéristiques spécifiques dépendantes de l'approche dans laquelle on se place.

Ainsi, à titre d'exemple, la connaissance d'une information sur les caractéristiques spectrales du signal canonique d'entrée  $w(\nu)$  et de la fonction  $G$  permet de reconstruire l'information spectrale sur le signal de sortie. En considérant dans la relation (I.12) un signal d'entrée  $w$  comme étant un signal aléatoire ou déterministe de densité spectrale unitaire, le signal à dériver est admis étant un signal dont la DSP est telle que  $S_y(\nu) = |G(\nu)|^2$ . De même, pour une densité spectrale  $S_w(\nu) \leq 1$  permet de décrire un signal de sortie tel que  $S_y(\nu) \leq |G(\nu)|^2$ .

Selon l'approche considérée, différents signaux canoniques peuvent être considérés. Dans le cadre stochastique du filtre de Kalman, le signal d'entrée du modèle est un bruit blanc centré de variance connue. Dans une approche déterministe par filtrage  $H_2$  et filtrage  $H_\infty$ , qui seront introduits plus loin dans ce document, le signal canonique est respectivement un signal déterministe de densité spectrale de puissance unitaire et un signal déterministe dont la densité spectrale est inférieure ou égale à 1. Dans un cadre non linéaire des observateurs modes glissants, ce signal est un signal borné.

Une classification de ces signaux est résumée dans le *Tableau I-1*.

Approche	Signal canonique
Filtrage de Kalman	Signal aléatoire : Bruit blanc de variance unitaire
Filtrage $H_2$	Signal déterministe de densité spectrale unitaire
Filtrage $H_\infty$	Signal déterministe de densité spectrale $\leq 1$
Modes Glissants	Signal borné

**Tableau I-1** : signaux canoniques

Une fois le modèle du signal connu, la construction d'un observateur est nécessaire pour l'estimation de l'état de ce modèle, d'où l'estimation des dérivées de sa sortie. Dans la section suivante, on introduit le problème d'observation et son application dans notre approche.

## I.6 Problème d'observation

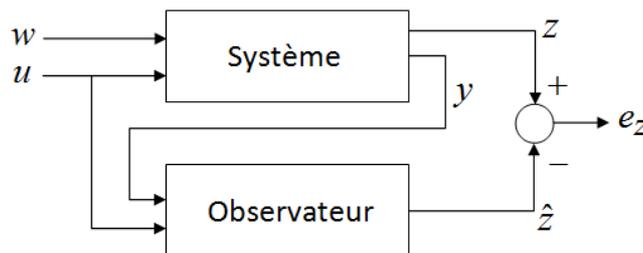
Soit un système linéaire stationnaire défini par une représentation d'état de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = C_y x(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

La reconstruction de l'état  $x \in \mathbb{R}^n$  du système (I.13) à partir de la mesure de sa sortie  $y(t)$  et de son entrée  $u(t)$ , se fait par la construction d'un observateur.

Un observateur est un système dynamique qui permet, à partir de la mesure de l'entrée  $u$  et de la sortie  $y$  du système (I.13), de reconstruire l'état  $x$  de celui-ci.

Le problème d'observation général est décrit dans la *Figure I-6*.



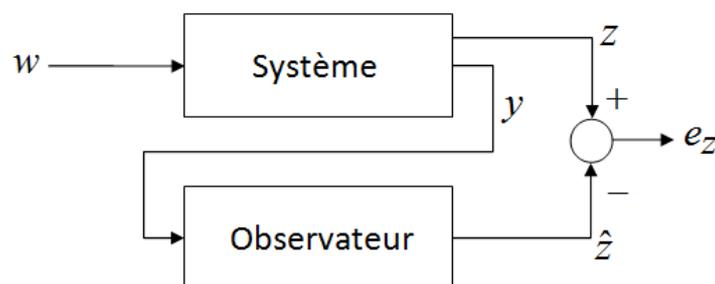
**Figure I-6** : Observateur d'état

Dans la figure précédente,  $w$  représente une entrée non mesurée, assimilée à une perturbation dans certains problèmes d'observation,  $u$  et  $y$  sont, respectivement, l'entrée et la sortie mesurées du système observé.  $z$  est le signal interne qu'on désire estimer et dont  $\hat{z}$  est l'estimée. Il peut être une composante ou une combinaison linéaire de composantes de l'état.

Dans le cas où  $w=0$ , on parle de « problèmes d'observation ». Certaines approches d'observation prennent compte dans leur synthèse de la perturbation ( $w \neq 0$ ) affectant les différents signaux mesurés. Dans ce cas, il est commun de parler non plus de problème

d'observation, mais de problème de filtrage vu l'idée de filtrage des signaux perturbés pour l'optimisation de la précision de l'estimation. Cette optimisation est généralement effectuée, dans les problèmes d'observation, sur l'erreur d'estimation sur tout le vecteur d'état tel que  $z = x$ . Cependant, il est possible aussi de considérer l'optimisation uniquement sur une partie du vecteur d'état ou une combinaison linéaires de ses composantes tel que  $z \neq x$ .

Comme montré dans la section précédente, on désire construire un observateur pour l'estimation de la dérivée d'un signal en estimant l'état du système linéaire modélisant, par sa sortie, ce même signal. Dans cette modélisation, le modèle du signal a pour entrée un signal canonique non mesurable sur lequel on ne dispose que d'informations d'ordre général. A cet effet, le problème d'observation équivalent est ramené à un problème d'observation à entrée inconnue dans lequel l'entrée  $u$  est considérée nulle et la perturbation  $w$  représente l'entrée canonique. Ainsi, seule la sortie  $y$  du modèle est mesurée par l'observateur.



**Figure I-7 :** Observateur à entrée inconnue

Dans toute approche d'observation, un observateur est synthétisé pour rencontrer un objectif quantitatif donné sous forme de critère pour l'optimisation de la précision de l'estimation. Cette notion d'optimalité de l'estimation est tributaire de certaines hypothèses et de certains critères d'optimalité. Selon l'approche d'estimation considérée, une information a priori sur les signaux et sur les bruits est nécessaire et les entrées des filtres sont supposés être des processus aléatoires ou déterministes.

Dans l'approche d'observation Luenberger [12], l'objectif est d'annuler, asymptotiquement, l'erreur d'estimation  $e_z$ . Dans l'approche de filtrage de Kalman [36], il est sujet de la minimisation de la variance de l'erreur  $e_z$  et de la convergence en temps fini de celle-ci vers zéro pour l'approche d'observation par modes glissants [37].

D'autres approches, introduites plus loin dans ce manuscrit, sont basées sur l'optimisation de la DSP ou de l'énergie du signal d'erreur  $e_z$ . (voir *Tableau I-2*)

Approche	Critère d'optimisation
Observateur grand gain	Convergence asymptotique de l'erreur
Filtrage de Kalman	Minimisation de la variance de l'erreur
Filtrage $H_2$	Minimisation de l'énergie de l'erreur
Filtrage $H_\infty$	Minimisation de la DSP de l'erreur
Modes Glissants	Convergence en temps fini de l'erreur

***Tableau I-2 :*** Critères d'optimisation pour la synthèse d'observateurs

Pour l'observation de l'état d'un modèle de signal, plusieurs structures d'observateurs peuvent alors être considérées. Celles-ci sont présentées dans ce qui suit.

### **I.6.1 Structures d'observateurs**

Pour un système linéaire donné sous la forme (I.13), la structure d'observateur Luenberger est l'approche la plus classique d'observation linéaire. Celle-ci est définie par une structure qui reprend le modèle du système observé tout en ajoutant un terme de correction, pondéré par la matrice  $L \in \mathbb{R}^n$  de gains statiques de l'observateur, qui corrige l'évolution de l'état en fonction de l'écart entre la sortie  $y$  et son estimée  $\hat{y}$ .

#### **Observateur Luenberger**

Pour estimer l'état du modèle décrit par la représentation d'état (I.13), l'observateur Luenberger est défini par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \eta(t) \\ \hat{y}(t) = C_y \hat{x}(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \eta(t) = L[y(t) - \hat{y}(t)] \quad (\text{I.14})$$

$L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  est la matrice de gain de l'observateur.  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  sont les estimées successives des signaux  $x$  et  $y$ . ■

Une autre structure d'observateur, qu'on appellera observateur étendu, est introduite dans ce qui suit.

### Observateur Luenberger étendu

L'observateur est défini par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \eta(t) \\ \hat{y}(t) = C_y\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

Où  $\eta(t)$  est la sortie d'un système dynamique, d'entrée  $(y(t) - \hat{y}(t))$ , et défini par

$$\begin{cases} \dot{x}_L(t) = A_L x_L(t) + B_L [y(t) - \hat{y}(t)] \\ \eta(t) = C_L x(t) + D_L [y(t) - \hat{y}(t)] \end{cases}$$

■

Cette structure reprend, en partie, la structure Luenberger à la seule différence que le gain dans celle-ci n'est plus statique et est remplacé par un gain dynamique modélisé par une représentation d'état et d'une fonction de transfert associée.

L'idée derrière cette structure est de rajouter un effet de filtrage additionnel porté par le gain dynamique.

Une autre structure alternative permet de s'affranchir de la structure d'observation typique rencontrée dans les deux structures précédentes. Dans ce cas, l'observateur est un système dynamique décrit par une représentation d'état d'un système linéaire générale.

### Observateur Filtre

Cette structure est définie par une représentation d'état de la forme

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_F \hat{x}(t) + B_F y(t) \\ \hat{y}(t) = C_{F_y} \hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

■

Pour passer outre le cadre linéaire, il pourrait s'avérer judicieux d'exploiter le potentiel des fonctions non linéaires en application aux observateurs. Dans ce cas, le gain de la structure proposée est une fonction non linéaire en fonction de l'erreur d'estimation.

### Observateur Non Linéaire

Cette structure est définie par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \Phi_L(y - \hat{y}) \\ \hat{y}(t) = C_y\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

où  $\Phi_L(\cdot)$  est une fonction non linéaire.

■

Ces structures d'observateurs sont les structures auxquelles on va s'intéresser dans ce qui suit en vue de la conception de différentiateurs pour l'estimation de la dérivée de signaux.

## **I.7 Conclusion**

Dans ce chapitre, le problème de synthèse de différentiateurs pour l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré a été introduit. Ce problème est un sujet relativement simple en absence de

perturbation sur le signal à dériver et devient plus complexe dans le cas contraire qui se trouve être la norme dans la réalité pratique.

De l'idée de trouver le moyen pour la distinction, dans l'information à disposition (signal mesuré), du signal utile de la perturbation, sont apparues des approches basées sur une représentation modélisant le signal à dériver et la perturbation l'affectant comme la sortie d'un système dynamique dont l'entrée est un signal canonique connu par ses caractéristiques générales définies selon le cadre dans lequel on se place. Dans ce cas, on a montré que le problème de l'estimation de la dérivée du signal est ramené à un problème d'observation particulier.

Dans ce qui suit, différentes approches linéaires et non linéaires pour l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré sont introduites. Ces problèmes sont traités en tant que problèmes d'observation et l'on essaiera également de montrer que certains des algorithmes connus comme différentiateurs indépendants de tout modèle de signal sont en fait des observateurs avec une représentation particulière du signal à dériver.

Dans le chapitre suivant, on commence par introduire les techniques linéaires pour l'estimation de la dérivée d'un signal. On présentera dans un premier temps certaines techniques rencontrées dans la littérature et on s'intéressera ensuite à une approche basée sur l'optimisation d'une norme  $H_\infty$  pour la construction d'un différentiateur basé sur un observateur. On montrera également que celle-ci est ramenée à l'optimisation de la densité spectrale de puissance de l'erreur d'estimation. Dans la construction du différentiateur, plusieurs structures différentes d'observateurs seront traitées et une comparaison de performances est aussi effectuée.

## **Chapitre II Observateurs linéaires et dérivation**



## II.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, les différences et les similitudes entre le problème de synthèse d'observateurs et de différentiateurs ont été mises au jour. Il en est ainsi sorti qu'un différentiateur n'est autre qu'un observateur particulier pour un système particulier.

En effet, une représentation du signal à dériver et de la perturbation qui l'affecte peut être donnée sous forme de modèle d'état linéaire. Ainsi, le signal utile et le bruit de mesure correspondent à la réponse de ce filtre à une entrée canonique non mesurée. La construction d'un observateur pour ce modèle, mis sous une forme canonique faisant apparaître les dérivées de la sortie dans le vecteur d'état, conduira à l'estimation des dérivées du signal de sortie.

Dans les approches classiques d'observation [12], la sortie et l'entrée du système observé doivent être disponibles à la mesure et forment les signaux d'entrée de l'observateur. Cependant, dans notre approche, l'entrée du modèle du signal n'est pas mesurée. On parle dans ce cas d'observation à entrée inconnue.

Dans cette notion d'observation à entrée inconnue, l'information sur le signal canonique d'entrée n'est plus représentée par l'information mesurée mais plutôt par une information portée par des hypothèses d'ordre général formulées sur ce signal et qui dépendent du cadre dans lequel on se place (déterministe, stochastique,...). Dans le cadre stochastique, traité par l'approche d'observation de Kalman [36, 38], le signal canonique est considéré être un signal aléatoire bruit blanc de variance donnée. Dans un cadre déterministe, le signal canonique est un signal de densité spectrale connue (observation  $H_2$ ) ou un signal déterministe de densité spectrale inférieure ou égale à 1 (observation  $H_\infty$ ). Dans d'autres approches d'observation à entrée inconnue, l'information sur le signal n'est pas explicitement donnée (observateur grand gain linéaire).

Comme première étape, on s'intéresse dans ce chapitre aux différentiateurs basés sur les observateurs linéaires. Le problème est alors ramené au calcul du gain optimal de l'observateur assurant l'optimalité de l'erreur d'estimation de la dérivée. Cette notion d'optimalité est dépendante de l'approche d'observation considérée. En effet, la quantification de la performance de l'observateur, en termes de précision de l'estimation, est formulée par un critère qui dépend lui-même de l'approche considérée (*Tableau I-2*).

Dans un premier temps, un observateur grand gain linéaire [4] est mis en œuvre pour l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré. Le gain de l'observateur est réglé afin de satisfaire un objectif de performance donné en termes de convergence asymptotique de l'erreur d'estimation de la dérivée.

Un algorithme de différentiation basé sur un observateur de Kalman [36] est ensuite synthétisé. Dans ce cas le réglage et le calcul du gain optimal est effectué de manière à satisfaire un critère d'optimalité traduit par la minimisation de la variance de l'erreur d'estimation.

Un dérivateur basé sur un observateur  $H_2$  est également mis en œuvre. Celui-ci n'est autre qu'un observateur Luenberger [12] à entrée inconnue. Le gain optimal de l'observateur est déterminé par optimisation d'une fonction de coût donnée sous forme d'une norme  $H_2$ . Le

problème de synthèse du gain est formulé comme un problème d'optimisation avec contraintes sous forme d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI).

Une proposition d'approche alternative, pour la construction d'un différentiateur linéaire, est introduite dans le reste du chapitre. Celle-ci est basée sur la construction d'un observateur, pour l'estimation d'un signal mesuré, par optimisation d'une norme  $H_\infty$  qui, comme ceci sera montré, correspond à une optimisation sur la DSP de l'erreur d'estimation. Cette approche présente l'avantage de la possibilité de considérer une norme  $H_\infty$  pondérée qui permet d'introduire une contrainte, ou gabarit, sur la DSP du signal d'erreur. Dans ce cadre, on propose différentes structures d'observateurs de la plus spécifique à la plus générale. Ces structures ainsi définies, une investigation supplémentaire est apportée quant au niveau de performances atteignables par chacune de celles-ci.

Le long de ce chapitre, des résultats de simulation sont présentés et une comparaison des performances et de précision entre les différentes techniques sera effectuée.

Avant d'entamer la présentation des différentes méthodes d'observation linéaire de cette section appliquées à la dérivation, on donne un rappel et résumé des principaux résultats et outils qui y sont utilisés.

## II.2 Outils et résultats

### **Définition II-1 : Norme $H_2$ [39, 40]**

Soit  $G(s)$  la matrice de transfert d'un système linéaire multivariable. Sa norme  $H_2$ , notée  $\|G\|_2$  est alors définie par

$$\|G\|_2 = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} \left[ G(j\omega)^* G(j\omega) d\omega \right] \right]^{1/2} \quad (\text{II.1})$$

où  $\text{tr}[\ ]$  désigne la trace d'une matrice, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux et  $G(j\omega)^*$  la transposée conjuguée de  $G(j\omega)$ . ■

### **Définition II-2 : Norme $H_\infty$**

Pour une matrice de fonctions de transfert stable  $G$ , on définit sa norme par

$$G_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}_+^*} \sigma_{\max} (G(j\omega)) \quad (\text{II.2})$$

Où  $\sigma_{\max}$  est la valeur singulière maximale. ■

La norme  $H_\infty$  correspond à la valeur maximale que prend, sur l'ensemble des fréquences  $\omega$  la plus grande valeur singulière de  $G$  équivalente, au cas monovariante, au maximum du module  $|G(j\omega)|$  de la fonction de transfert.

Pour  $\gamma > 0$ , l'inégalité  $G_\infty < \gamma$  peut être vérifiée en utilisant le Lemme Réel Borné défini dans ce qui suit.

**Lemme II-1 : Lemme Réel Borné [41]**

Soit un système linéaire stationnaire multivariable stable  $G$  décrit par une représentation d'état minimale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Où  $x(t)$  est l'état du système,  $u(t)$  son entrée et  $y(t)$  sa sortie. Alors  $G_\infty < \gamma$  si et seulement s'il existe une matrice  $P > 0$  telle que

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.4})$$

■

La notation  $P > 0$  signifie que la matrice  $P$  est définie positive.

**Définition II-3 : Matrice (semi) définie positive**

Une matrice symétrique réelle  $P$  est dite (semi) définie positive si  $v^T P v > 0$  ( $v^T P v \geq 0$ ) pour tout vecteur  $v$  non nul.

■

La norme  $H_\infty$ , comme la norme  $H_2$ , peut être utilisée pour définir des critères d'optimisation dans des problèmes de commande.

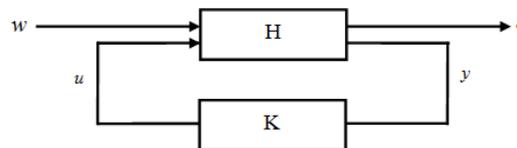
$$e(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$$

**Théorème II-1 : Problème de commande  $H_\infty$  [42]**

Soit un système LTI stable  $H$  d'ordre  $n$  défini par la représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \\ e(t) = C_e x(t) + D_{ew} w(t) + D_{eu} u(t) \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  est le vecteur d'état du système,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  le vecteur contenant toutes les entrées exogènes (commande, perturbations...),  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  le vecteur d'entrées de commande,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  est la sortie mesurée et  $e(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  est la sortie commandée (signal d'erreur).



**Figure II-1 : Problème de commande  $H_\infty$**

Etant donné  $\gamma > 0$ , il existe un correcteur  $K$  d'ordre inférieur ou égal à  $n$ , défini par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_K(t) = A_K x(t) + B_K y(t) \\ u(t) = C_K x(t) + D_K y(t) \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

tel que :

- le système bouclé  $H * K$ , de la Figure II-1, soit asymptotiquement stable
- $\|H * K\|_\infty < \gamma$

si et seulement si il existe deux matrices  $P$  et  $Q$  telles que :

$$\begin{bmatrix} B_u^T & 0 & B_{eu}^T \end{bmatrix}_{\perp}^T \begin{bmatrix} QA^T + AQ & B_w & QC_e^T \\ B_w^T & -\gamma I & D_{ew}^T \\ C_e Q & D_{ew} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_u^T & 0 & B_{eu}^T \end{bmatrix}_{\perp} < 0 \quad (\text{II.7})$$

$$\begin{bmatrix} C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix}_{\perp}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB_w & C_e^T \\ B_w^T P & -\gamma I & D_{ew}^T \\ C_e & D_{ew} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix}_{\perp} < 0 \quad (\text{II.8})$$

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.9})$$

où  $U_{\perp}$  représente l'orthogonal de la matrice de rang plein  $U$ , c'est-à-dire une matrice telle que  $UU_{\perp} = 0$  et  $\begin{bmatrix} U^T & U_{\perp} \end{bmatrix}$  soit de rang maximal. ■

Le problème d'existence de correcteur, défini par le *Théorème II-1*, est un problème de faisabilité donné sous forme d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI).

#### **Définition II-4 : Inégalité Matricielle Linéaire (LMI)**

Une Inégalité Matricielle Linéaire  $F(\xi)$  est définie telle que

$$F(\xi) = F_0 + \sum_{i=1}^m \xi_i F_i > 0$$

où  $\xi \in \mathbb{R}^m$  est la variable et  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, m$ , sont des matrices symétriques données. ■

Dans la définition précédente, l'inégalité est stricte et on parle de matrice définie positive (négative dans le cas contraire). Il existe aussi des LMI non strictes et dans ce cas on dit que  $F(\xi) \geq 0$  est semi définie positive (négative).

Le problème de tester l'existence d'un correcteur  $K$  est un problème de minimisation d'une fonction coût sous contraintes LMI.

#### **Définition II-5 : Problème d'optimisation**

Soit un entier naturel non nul  $n$  et  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un ensemble non vide et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\rightarrow f(\xi) \end{aligned}$$

Alors, un problème d'optimisation s'écrit :

$$\min_{\xi \in D} f(\xi)$$

où  $D$  est appelé l'ensemble des contraintes,  $\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_n]^T$  est appelé le vecteur des variables de décision et  $f$  est appelée la fonction de coût. ■

Pour l'étude des différents problèmes traités dans cette section, on distingue deux types de problèmes LMI :

- des problèmes de faisabilité LMI ;
- des problèmes d'optimisation LMI.

Dans le problème de faisabilité LMI, l'objectif est d'étudier l'existence d'un correcteur qui permette d'assurer un certain niveau de performance en terme de norme  $H_\infty$ . Pour aller plus loin, le problème de faisabilité peut se ramener au problème d'existence d'un correcteur assurant un niveau optimal  $\gamma_{opt}$  de la borne  $\gamma_{opt} > 0$ . Dans ce cas, le problème est écrit comme un problème d'optimisation d'une fonction de coût linéaire sous contrainte LMI.

Un problème d'optimisation LMI est un problème d'optimisation standard où l'ensemble des contraintes est défini par une LMI. Ce type de problèmes d'optimisation sont des problèmes convexes et peuvent être résolus de manière efficace.

### **Définition II-6 : Problème de faisabilité**

Pour un entier naturel non nul, trouver  $\xi \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$F(\xi) > 0$$

■

Certains problèmes d'optimisation sous contraintes d'inégalités matricielles peuvent être transformés sous forme de problèmes d'optimisation sous contraintes LMI moyennant certaines transformations parmi lesquelles on cite les deux lemmes suivants.

### **Lemme II-2 : (Lemme de Schur) [41]**

Soit une matrice symétrique partitionnée :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

où  $A$  et  $C$  sont des matrices carrées. Cette matrice est (semi) définie positive si et seulement si  $A$  et  $C - B^T A^{-1} B$  sont (semi) définies positives.

■

### **Lemme II-3 : (Lemme d'élimination) [41]**

Soit  $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $U \in \mathbb{R}^{r \times n}$  avec  $\text{Rang}(U) = r < n$  et  $V \in \mathbb{R}^{s \times n}$  avec  $\text{Rang}(V) = s < n$ .

Alors, il existe une matrice  $K \in \mathbb{R}^{r \times s}$  telle que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$G + U^T K V + V^T K^T U < 0 \quad (\text{II.10})$$

si et seulement si

$$U_\perp^T G U_\perp < 0 \quad (\text{II.11})$$

et

$$V_\perp^T G V_\perp < 0 \quad (\text{II.12})$$

avec

- $U_\perp$  engendre le noyau de l'application linéaire associée à la matrice  $U$  ;
- $V_\perp$  engendre le noyau de l'application linéaire associée à la matrice  $V$  .

■

Le problème standard peut être formulé comme un problème plus contraignant où l'objectif est d'optimiser la borne supérieure  $\gamma > 0$  sur la norme  $H_\infty$ . C'est ce type de problèmes qu'on se propose de résoudre dans ce qui suit. Le problème de commande est alors formulé comme un problème d'optimisation sous contraintes LMI.

### II.3 Dérivation par observateur linéaire par placement de pôles

L'observateur Luenberger [12, 43, 44] est la structure linéaire élémentaire d'observation par excellence. Pour l'estimation de l'état d'un système dynamique linéaire donné sous la forme (I.13), et dans le cas où l'entrée  $u(t)$  est mesurable, un observateur Luenberger est défini par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - \hat{y}(t)] \\ \hat{y}(t) = C_y\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

où  $L \in \mathbb{R}^n$  représente la matrice de gain de l'observateur.

La dynamique de l'erreur  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  est alors définie par la dynamique

$$\dot{e}(t) = (A - LC_y)e(t) \quad (\text{II.14})$$

Pour la convergence de l'état  $\hat{x}$  vers l'état  $x$  du système observé, il suffit d'effectuer un placement de pôles pour choisir le gain  $L$  de manière à ce que la matrice  $(A - LC_y)$  ait ses valeurs propres toutes à partie réelle strictement négative.

Cependant, dans le cas où l'entrée  $u(t)$  n'est pas accessible à la mesure, la dynamique de l'erreur d'observation est définie par

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (A - LC_y)e(t) + (B - LD)u(t) \\ e_y(t) = C_y e(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

A partir de (II.15), il apparaît clairement que le fait de choisir le gain  $L$  tel que la matrice  $(A - LC_y)$  soit à valeurs propres toutes à parties réelle négative et un placement de pôles classique qui ne garantit plus la convergence de l'estimation de l'observateur.

Pour la même structure d'observateur Luenberger, l'approche par observateur grand gain permet d'effectuer un placement de pôles particulier qui permet d'assurer la convergence de l'erreur d'estimation tout en rejetant l'effet du terme additionnel  $(B - LD)u(t)$  perturbateur sur la dynamique de l'erreur.

L'observateur grand gain [45] est principalement un observateur pour l'estimation de l'état des systèmes non linéaires. La notion de « grand gain », d'où le nom de l'observateur, découle du fait qu'un gain relativement important pour l'observateur est utilisé dans le but de réduire, à un certain niveau, l'effet de la partie non linéaire de la dynamique sur l'erreur d'estimation.

Dans ce qui suit, on présente le principe général de l'observateur grand gain, dans un cadre non linéaire. Ensuite, l'application de l'observateur grand gain linéaire pour l'estimation de la dérivée d'un signal, à partir d'un modèle, est expliquée.

#### II.3.1 Observateur grand gain : Principe

Soit un système non linéaire défini par une représentation d'état générale de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  l'entrée et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  la sortie mesurée.

D'une manière générale, pour l'observation d'un système non linéaire, le gain de l'observateur dépend de l'entrée de celui-ci [46, 47] vu que l'observabilité du système dépend elle-même de cette entrée et un système non linéaire peut être observable uniquement pour certaines entrées. Pour une classe particulière des systèmes non linéaires, les systèmes non linéaires uniformément observables (observables indépendamment de l'entrée), il est possible de construire un observateur dont le gain est indépendant de l'entrée du système observé.

Dans le cas mono sortie, si le système (II.16) est uniformément observable, un observateur dont le gain ne dépend pas de l'entrée du système [48, 49, 50] peut être conçu. En effet les gains des observateurs non linéaires sont dépendants de l'entrée. Une extension aux systèmes multivariés est également donnée dans la littérature [51].

Dans le cas monovarié, si un tel système est uniformément observable, on montre [52, 53] qu'il existe un changement de base pour ramener le système sous une forme canonique observable [54, 55] définie par une représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(x, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

$$\text{Où } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad \text{et } C = [1 \ 0 \ \dots \ \dots \ 0]_{1 \times n}$$

**Théorème II-2** [56]

Si dans (II.17), la fonction  $\varphi(x, u)$  est une fonction globalement Lipschitzienne, le système

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi(\hat{x}, u) + L(y - C\hat{x}) \quad (\text{II.18})$$

où  $L = \Lambda^{-1}(\varepsilon)H$  avec  $H^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ \dots \ h_n]$  est tel que  $(A - LC)$  est stable,

$\Lambda^{-1}(\varepsilon) = \text{diag}(\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \dots, \varepsilon^{-(n-1)})$  et  $\varepsilon > 0$  une constante choisie assez petite, (II.18) est un observateur exponentiel pour (II.17) et plus précisément :

il existe une constante  $\lambda_0 > 0$  telle que  $\forall \lambda > \lambda_0, \exists \alpha > 0$  et  $\exists \beta > 0$  tel que  $\forall \hat{x}(0)$  on a

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \alpha e^{-\beta t} \|\hat{x}(0) - x(0)\|$$

avec  $\hat{x}(t)$  est l'estimé de l'état  $x(t)$ .

■

Considérons un système non linéaire mono variable ayant un degré relatif  $n$  (dimension du vecteur d'état). Ce système peut alors être mis sous la forme normale [57] définie par

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B[f(x)u + g(x)] \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad \text{et } C = [1 \ 0 \ \cdots \ \cdots \ 0]_{1 \times n}$$

L'observateur grand gain pour l'estimation de l'état de (II.19) est alors défini par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B[f_0(\hat{x})u + g_0(\hat{x})] + L(y - C\hat{x}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

où  $f_0$  et  $g_0$  sont les modèles nominaux respectivement des fonctions  $f$  et  $g$ .

La dynamique de l'erreur d'observation  $e = x - \hat{x}$  est alors définie par

$$\dot{e} = (A - LC)e + B[[f(x)u + g(x)] - [f_0(\hat{x})u + g_0(\hat{x})]] \quad (\text{II.21})$$

Soit le terme de perturbation

$$\delta = [f(x)u + g(x)] - [f_0(\hat{x})u + g_0(\hat{x})]$$

En l'absence de ce terme de perturbation, le gain de l'observateur est réglé de manière à ce que la matrice  $(A - LC)$  soit Hurwitz.

Pour assurer la convergence de l'observateur en l'existence du terme de perturbation, le gain  $K$  est réglé de manière à stabiliser  $(A - LC)$  tout en rejetant l'effet de la perturbation sur l'erreur  $e$ . L'approche par perturbation singulière [24, 58] permet de montrer que l'effet du terme de perturbation  $\delta$  diminue si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

D'une manière plus directe, on peut aisément vérifier que le réglage du gain de l'observateur, donné dans le *Théorème II-2*, permet d'assurer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{\delta \rightarrow e}(s) = 0$$

avec  $T_{\delta \rightarrow e}$  la fonction de transfert reliant  $\delta$  à l'erreur d'observation  $e$ , d'où le rejet de l'effet de la perturbation.

### II.3.2 Observateur Grand Gain : Application à la dérivation

Considérons le système (II.19). En remplaçant l'expression  $[f(x)u + g(x)]$  par l'entrée inconnue  $w$ , ce système s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad \text{et } C = [1 \ 0 \ \cdots \ \cdots \ 0]_{1 \times n}$$

Et on se retrouve dans le cas où le modèle observé est un système linéaire dont la sortie  $y$ , est un signal considéré comme la sortie d'une chaîne de  $n$  intégrateurs et dont l'entrée inconnue n'est autre que  $y^{(n-1)}$ .

Considérons, maintenant, l'observateur linéaire

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

correspondant à la structure (II.20) dans laquelle la fonction nominale est considérée nulle. En effet, ce choix peut être fait dans la mesure où il permet de garder les termes incertains dans l'équation d'erreur tout en ayant la forme d'un observateur à entrée inconnue.

L'écriture de l'équation d'erreur conduit à

$$\dot{e} = (A - LC)e + Bw \quad (\text{II.24})$$

Le terme incertain (perturbation) est alors rejeté en réglant l'observateur selon le *Théorème II-2*.

Le caractère dérivateur de l'observateur grand gain linéaire apparaît en écrivant les fonctions de transfert  $T_{y \rightarrow \hat{x}_i}$  ( $i=1, \dots, n$ ) reliant la sortie mesurée  $y$  du système observé et les états estimés  $\hat{x}_i$ .

Le gain de l'observateur (II.23) est, selon le *Théorème II-2*, défini par

$$L^T = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & \dots & h_n \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & & & \varepsilon^n \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

**Remarque :**

Le réglage de  $L$  tel que  $(A - LC)$  soit Hurwitz n'est autre que le choix des gains d'un observateur Luenberger [12] linéaire classique. L'introduction du paramètre  $\varepsilon$  dans le gain de l'observateur correspond alors à une transformation permettant de placer les pôles du l'observateur grand gain à  $\frac{1}{\varepsilon}$  fois ceux de l'observateur Luenberger équivalent ce qui permet d'augmenter la rapidité de la convergence de l'observateur. D'où l'observateur grand gain linéaire n'est autre qu'un observateur Luenberger avec un placement de pôles particulier.

En prenant comme exemple un système de la forme (II.22) à l'ordre 3, l'observateur correspondant est défini par (II.23) et tel que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0] \quad \text{et} \quad L^T = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \end{bmatrix}$$

Soit  $T_{y \rightarrow \hat{x}}(s)$  la fonction de transfert définie par

$$T_{y \rightarrow \hat{x}}(s) = I(sI - (A - LC))^{-1} L \quad (\text{II.26})$$

représentant la fonction de transfert reliant l'entrée mesurée  $y$  de l'observateur (II.23) aux états estimés  $\hat{x}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ). Cette fonction est définie alors par

$$T_{y \rightarrow \hat{x}}(s) = \frac{1}{\varepsilon^3 s^3 + h_1 \varepsilon^2 s^2 + h_2 \varepsilon s + h_3} \begin{bmatrix} h_1 \varepsilon^2 s^2 + h_2 \varepsilon s + h_3 \\ h_2 \varepsilon s^2 + h_3 s \\ h_3 s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

A partir de (II.27), il est clair que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{y \rightarrow \hat{x}}(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix}$$

D'où, les états estimés  $\hat{x}_2$  et  $\hat{x}_3$  sont les estimées respectives de  $\dot{y}$  et  $\ddot{y}$ .

**Remarque :**

L'ordre  $n$  du modèle de signal considéré, fixant le degré  $d$  de la plus haute dérivée pouvant être estimée tel que  $d = n - 1$ , doit être choisi le plus faible possible. En effet, ceci permet de réduire l'ordre du filtre dérivateur.

Dans cette partie, on s'intéresse à la première dérivée du signal  $y$  mesuré. En prenant un modèle (II.22) d'ordre  $n = 2$ , le filtre dérivateur obtenu est alors défini par

$$T_{y \rightarrow \hat{x}_2}(s) = \frac{h_2 s}{\varepsilon^2 s^2 + h_1 \varepsilon s + h_2} \quad (\text{II.28})$$

En fixant  $h_2 = 1$ , cette expression est exactement la mise en série d'un dérivateur pur avec un filtre passe bas de pulsation de coupure  $\omega_0 = 1/\varepsilon$ , un gain unitaire et un facteur de qualité  $Q = 1/h_1$ .

Une autre approche d'observation, basée sur des hypothèses stochastiques sur les bruits de mesure, est introduite par le filtre de Kalman qu'on présente dans ce qui suit. Cette structure présente l'avantage de prendre en compte explicitement les caractéristiques des bruits de mesure dans la synthèse de l'observateur.

## II.4 Dérivation par filtre de Kalman

Le filtre, ou observateur, de Kalman [36, 59] est une technique d'estimation optimale de l'état par approche stochastique qui trouve son application dans la géo-localisation [60, 61], le guidage d'aéronefs [3, 62] ou encore les télécommunications [63].

Bien qu'il s'agisse d'un observateur, celui est communément qualifié de « filtre de Kalman » étant donnée l'idée de filtrage de bruits aléatoires qui existe derrière sa mise en œuvre.

Tout comme pour l'observateur linéaire de Luenberger [12], son principe est de corriger l'observation avec l'information disponible en terme de structure du modèle et la mesure de sa sortie, tout en introduisant des hypothèses supplémentaires, de nature stochastique, sur les bruits de modèle et de mesure.

Pour la mise en œuvre de cet observateur, il est indispensable de connaître certaines caractéristiques statistiques de bruits de mesure et d'état. Le bruit de mesure est un bruit d'instrumentation dont les caractéristiques peuvent être estimées par un protocole d'expériences de caractérisation. Le bruit d'état quant à lui est plus délicat à identifier et sa variance représente le principal paramètre de réglage qui, une fois réglé, assure l'optimalité de l'estimation. De plus, la précision du filtre est sensible à l'initialisation de l'estimation. Le réglage du filtre se résume au calcul du gain correspondant. Ce gain est calculé par résolution d'un système d'équation de Ricatti.

### II.4.1 Filtre de Kalman : Principe

Soit un signal mesuré  $y(t)$ , modélisé comme la sortie du modèle de Kalman défini par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système,  $u \in \mathbb{R}^m$  l'entrée déterministe et  $y \in \mathbb{R}^p$  la sortie mesurée.

Les deux entrées aléatoires  $w \in \mathbb{R}^q$  et  $v \in \mathbb{R}^p$  représentent, respectivement, les bruits d'état et de mesure. A ce modèle, nous associons certaines hypothèses.

**Hypothèses :**

- La paire  $(A, C)$  est observable ;
- Les entrées aléatoires  $w(t)$  et  $v(t)$  sont des signaux aléatoires stationnaires ;
- Les entrées aléatoires  $w(t)$  et  $v(t)$  sont des bruits blancs gaussiens centrés de variances respectives  $W$  et  $V$  telles que
  - $E[v(t)v(t+\tau)^T] = V\delta(t)$
  - $E[w(t)w(t+\tau)^T] = W\delta(t)$
  - $E[v(t)w(t+\tau)^T] = 0$

La dernière relation signifie que les bruits de mesure et d'état sont stochastiquement indépendants et leur covariance est nulle. Cependant, un observateur de Kalman peut être aussi mis en œuvre dans le cas où ces bruits sont corrélés [36].

Dans le cas stationnaire et dans le cas où  $w(t)$  est un bruit blanc gaussien centré, on parle de filtre de Kalman non biaisé et on parle d'estimateur biaisé dans le cas non centré, c'est à dire  $E[w(t)] \neq 0$ , on parle d'observateur de Kalman biaisé.

Pour le système (II.29), on définit l'observateur de Kalman par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(Cx(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

où  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  est l'état estimé de l'observateur, et  $L \in \mathbb{R}^n$  est la matrice du gain de l'observateur.

Comme dans les différentes structures d'observateurs linéaires, l'objectif est de minimiser l'erreur d'observation, traduite par l'écart entre l'état estimé et l'état réel, dans un certain sens. Pour se faire, le seul degré de liberté dans la synthèse de l'observateur réside dans la synthèse de son gain de manière à satisfaire un critère de minimisation de l'erreur d'estimation préalablement défini.

Dans l'observateur de Kalman (II.30), le gain  $L$  est réglé de manière à minimiser l'erreur quadratique moyenne de l'estimation de l'état du système (II.29).

Pour l'erreur d'observation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , le critère de minimisation est alors défini par

$$J(t) = E[e^T(t) \ e(t)] = \text{trace} E[e(t) \ e^T(t)] = \text{trace} P(t) \quad (\text{II.31})$$

Tous les signaux de perturbations étant admis centrés, le critère de minimisation (II.31) est alors équivalent à la minimisation de la trace de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $P(t)$ .

Le système d'erreur est donné par

$$\dot{e}(t) = (A - L(t)C)e(t) + Mw(t) - L(t)v(t) \quad (\text{II.32})$$

**Théorème II-3** [38]

Soit un système linéaire défini par une dynamique linéaire de la forme (II.29) et soit l'entrée déterministe  $u(t) = 0$  et l'entrée  $w(t)$  est un bruit blanc gaussien stationnaire centré de densité spectrale de puissance  $W$ .

Soient  $m(t_0)$  et  $P(t_0)$  la moyenne et la covariance de l'état initial  $x(t_0)$ , alors  $x(t)$  est un signal aléatoire gaussien :

- de moyenne  $E[x(t)] = m(t) = e^{A(t-t_0)}m(t_0)$  ;
- de covariance  $P(t)$  vérifiant

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + MWM^T$$

Si le système est stable, on tend vers un régime permanent tel que  $\dot{P}(t) = 0$  et  $P(t) = P$  vérifie alors l'équation de Lyapunov continue

$$0 = AP + PA^T + MWM^T \quad (\text{II.33})$$

■

L'application du *Théorème II-2* au système d'erreur (II.32) conduit à l'écriture de l'équation différentielle

$$\dot{P}(t) = (A - L(t)C)P(t) + P(t)(A - L(t)C)^T + MWM^T + L(t)VL(t)^T \quad (\text{II.34})$$

Pour trouver l'expression du gain qui permet de minimiser  $\text{trace } P(t)$ , il suffit de trouver ce

même gain qui minimise  $\text{trace } \dot{P}(t)$  tel que  $\frac{\partial(\text{trace } \dot{P}(t))}{\partial L} = 0$ . Ainsi, l'expression du gain permettant de satisfaire le critère de minimisation est donnée par

$$L(t) = P(t)C^T V^{-1} \quad (\text{II.35})$$

Après le transitoire, le signal d'erreur est un signal stationnaire et le réglage du gain de l'observateur (II.30) est obtenu par résolution des équations (II.36) (équation de Riccati) et (II.37) définies par

$$AP + PA^T - PC^T V^{-1} CP + MWM^T = 0 \quad (\text{II.36})$$

$$L = PC^T V^{-1} \quad (\text{II.37})$$

#### II.4.2 Filtre de Kalman : Application à la dérivation

Pour l'application à la dérivation de l'observateur de Kalman, le modèle du signal défini dans la *section I.5* doit être mis sous une forme normale faisant apparaître les dérivées de la sortie dans le vecteur d'état.

Dans ce cas, le modèle associé au signal à dériver  $y_s$  est défini par une représentation d'état canonique [35] sous forme normale de la fonction de transfert  $G_s(s)$  et la même représentation est utilisée pour modéliser la fonction de transfert  $G_b(s)$ .

Le modèle général, dont la sortie est  $y$ , est alors donné de manière à ce que sur son vecteur d'état se compose des dérivées successives des sorties  $y_s$  et  $y_b$ .

Ainsi le modèle à observer est donné sous la forme d'une représentation d'état définie par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yw} w(t) \\ z(t) = C_z x(t) \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

Cette représentation d'état est la même que (I.10) sauf qu'une sortie additionnelle a été rajoutée et qui représente un signal interne à estimer. Contrairement à l'approche par observateur grand gain, où l'optimisation de l'estimation, et donc le gain de l'observateur, ne dépend pas de la matrice de sortie, l'optimisation du filtre de Kalman dépend directement de celle-ci d'après l'expression (II.35).

Dans la majorité des problèmes d'observation, l'estimation est effectuée sur la totalité des composantes du vecteur d'état. Cependant, on se pose ici la question de l'éventuelle influence d'une optimisation sur uniquement une partie du vecteur d'état.

La matrice  $C_z$  a, ainsi, été introduite dans (II.38) afin de mieux décrire le problème. En effet elle permettra d'associer à la sortie additionnelle  $z$ , en fonction du choix de  $C_z$ , soit tout le vecteur d'état soit une partie de celui-ci ou toute combinaison linéaire de ses composantes.

Dans le cas du filtre de Kalman, il est démontré que l'optimisation est optimale sur toutes les composantes. En effet, pour l'estimation de l'état d'un système dynamique à partir d'une observation de sa sortie, le théorème de la borne de Cramer-Rao [64] établit que la matrice de covariance de l'erreur d'estimation est toujours supérieure ou égale à une borne inférieure de Cramer-Rao. Et le filtre de Kalman est un observateur fournissant une erreur de variance égale à l'inverse d'une matrice appelée matrice d'information. Dans le cas où l'on s'intéresse à un élément de l'état, le théorème de Cramer-Rao montre également que la variance minimale atteignable est la composante de l'inverse de la matrice d'information associée à la composante de l'état estimé. D'où la même performance est assurée par le filtre de Kalman dans le cas où une partie de l'état est considérée ou dans le cas où tout le vecteur d'état l'est.

Le filtre de Kalman est certes une des techniques d'estimation les plus utilisées, mais cependant, il faut reconnaître ses limites. En effet, celle-ci repose sur des hypothèses fortes sur les bruits qui doivent être blancs, gaussiens, centrés et non corrélés pour assurer l'optimalité de l'estimation. Conditions qu'il est, en pratique, difficile de rencontrer, ou du moins de garantir.

Une autre alternative dans la synthèse d'observateur linéaires repose sur l'observation par optimisation d'une norme  $H_2$  laquelle, on le verra plus loin dans ce chapitre, est une technique équivalente à l'observation par filtre de Kalman dans un cadre déterministe.

## II.5 Dérivation par observateur $H_2$

Une contrepartie déterministe au filtre de Kalman est donnée par l'optimisation  $H_2$ . En effet, dans cette partie, on considère, comme dans l'approche précédente, que le signal à dériver est la sortie d'un modèle de la forme (I.10). L'objectif est d'estimer la dérivée de ce signal par un observateur Luenberger dont le gain est obtenu par la minimisation d'un critère donné sous forme de la minimisation de la norme  $H_2$  de l'erreur d'observation. Le problème est alors formulé sous forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI.

Le système à observer, modèle du signal, est défini par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yw} w(t) \\ z(t) = C_z x(t) \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Pour l'observation de ce système, un observateur Luenberger [12] est alors défini par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_y \hat{x}(t) \\ \hat{z}(t) = C_z \hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

La dynamique de l'erreur d'observation  $e = x - \hat{x}$  est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (A - LC_y)e(t) + (B_w - LD_{yw})w(t) \\ e_y(t) = y(t) - \hat{y}(t) \\ e_z(t) = z(t) - \hat{z}(t) \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

L'objectif est de déterminer le gain  $L$  de l'observateur qui minimise un critère donné sous forme de norme  $H_2$ .

Pour mettre en évidence le choix de l'entrée canonique pour le modèle du signal dans cette approche, considérons les bruits d'entrée  $w_1$  et  $w_2$  étant deux bruits blancs de variances respectives  $W_1$  et  $W_2$ . Soit alors  $\tilde{w}^T = [\tilde{w}_1 \quad \tilde{w}_2]$  un vecteur de bruits blancs de variances unitaires. Dans ce cas, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.42})$$

Et le modèle du système (II.39) se réécrit alors

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(t) \\ \tilde{w}_2(t) \end{bmatrix} \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yw} \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(t) \\ \tilde{w}_2(t) \end{bmatrix} \\ z(t) = C_z x(t) \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

Ainsi, il apparaît que dans la modélisation du signal mesuré à dériver, le signal canonique peut être considéré un signal aléatoire de variance unitaire tel que  $e_z = G_e \tilde{w}$ . Les variances « réelles » des perturbations sont alors portées dans le modèle du signal.

La dynamique de l'erreur (II.41) se réécrit alors par

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (A - LC_y)e(t) + (B_w - LD_{yw}) \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(t) \\ \tilde{w}_2(t) \end{bmatrix} \\ e_z(t) = C_z e(t) \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

En posant  $M = B \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}$  et  $N = D_{yw} \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}$ , on réécrit (II.44) et l'on obtient

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (A - LC_y)e(t) + (M - LN) \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(t) \\ \tilde{w}_2(t) \end{bmatrix} = \tilde{A}e(t) + \tilde{B}\tilde{w}(t) \\ e_z(t) = C_z e(t) = \tilde{C}e(t) \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

Pour une autre interprétation de l'optimisation d'une norme  $H_2$ , commençons par introduire le théorème de Parseval-Plancherel.

**Théorème II-4 : Théorème de Parseval-Plancherel**

Soit une fonction  $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ . Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu \quad (\text{II.46})$$

où  $F$  est la transformée de Fourier de  $f$  et  $\nu$  est une fréquence. ■

Ce théorème montre que le calcul de l'énergie d'un signal ne dépend pas de sa représentation choisie (fréquentielle, temporelle).

Soit alors  $G_e = T_{\tilde{w} \rightarrow e_z}$ , la fonction de transfert reliant l'entrée canonique à l'erreur d'estimation  $e_z$ . Pour revenir à la définition de la norme  $H_2$ , dans le cas où l'entrée  $\tilde{w}$  est un signal déterministe de DSP unitaire, on peut aisément montrer [65] que

$$\|G_e\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} \left[ G_e(j\omega)^* G_e(j\omega) d\omega \right] = E \left\{ e_z(t)^T e_z(t) \right\} \quad (\text{II.47})$$

Ainsi, dans le cas monovariante,  $\|G_e\|_2^2$  représente l'énergie du signal de sortie en réponse à un bruit blanc.

L'optimisation de la norme  $H_2$  de la fonction de transfert  $G_e$  revient donc à une optimisation de l'énergie du signal d'erreur d'estimation  $e_z$ .

Dans le cas où le signal d'entrée est considéré être un signal déterministe de DSP unitaire, il est remarquable que le critère (II.47) correspond à celui de l'optimisation dans le filtrage de Kalman donné par (II.31). l'observation  $H_2$  est ainsi considérée comme l'équivalent déterministe de l'observation de Kalman.

A partir de là, on montre dans [66] que la solution des problèmes d'observation  $H_2$  et par filtrage de Kalman sont équivalentes.

**Théorème II-5** [67]

Soit un système linéaire stable défini par une représentation d'état de la forme (I.13) et soit  $T(s) = C(Is - A)^{-1}B + D$  sa fonction de transfert. Si  $D = 0$ , les propositions suivantes sont équivalentes :

(1)  $\|T\|_2 < \gamma$

(2) Il existe  $X = X^T > 0$  et  $R$  telles que

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB \\ B^T X & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.48})$$

$$\begin{bmatrix} X & C^T \\ C & R \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.49})$$

$$\text{trace}(R) < \gamma \quad (\text{II.50})$$

■

L'application du *Théorème II-5* au système d'erreur (II.45) conduit à l'écriture des inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T X + X\tilde{A} & X\tilde{B} \\ \tilde{B}^T X & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.51})$$

$$\begin{bmatrix} X & \tilde{C}^T \\ \tilde{C} & R \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.52})$$

$$\text{trace}(R) < \gamma \quad (\text{II.53})$$

L'inégalité (II.51) se réécrit

$$\begin{bmatrix} XA + A^T X - C_y^T L^T X - XLC_y & XM - XLN \\ M^T X - N^T L^T X & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.54})$$

Pour  $Z = XL$ , (II.54) se réécrit

$$\begin{bmatrix} XA + A^T X - C_y^T Z^T - ZC_y & XM - ZN \\ M^T X - N^T Z^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.55})$$

De même, (II.49) devient

$$\begin{bmatrix} X & C_Z^T \\ C_Z & R \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.56})$$

Le problème étant de trouver le gain  $L$  de l'observateur qui permette de minimiser  $\gamma$  tel que  $\|G_e\|_2 < \gamma$  d'où la puissance du signal d'erreur d'estimation  $z_e$ . Le problème se ramène donc à chercher le plus petit  $\varepsilon = \text{trace}(R)$  tel que les Inégalités Matricielles Linéaires (LMI), définies dans ce qui suit, soient satisfaites.

Ainsi, on peut formuler le problème de minimiser  $\text{trace}(R)$  par

$$\min_{\gamma, X, Z} \gamma \quad (\text{II.57})$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} XA + A^T X - C_y^T Z^T - ZC_y & XM - ZN \\ M^T X - N^T Z^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} X & C_y^T \\ C_y & R \end{bmatrix} > 0 \\ \text{trace}(R) < \gamma \end{cases}$$

Ce problème représente alors un problème de minimisation d'une fonction de coût linéaire sous contraintes LMI.

Le problème d'optimisation sous les contraintes LMI (II.57) est programmé et résolu sous le logiciel Matlab grâce aux fonctions dédiées de la *Robust Control Toolbox* du logiciel et qui fournissent les valeurs numériques des différentes variables de décision correspondantes à la solution optimale.

Dans ce qui suit, on présente les résultats de simulation pour la comparaison des performances de ses observateurs dans leur application pour l'estimation de la dérivée d'un signal représenté comme la sortie d'un système linéaire.

## II.6 Application à la dérivation : comparaison des résultats

Pour l'application des techniques précédentes à la dérivation d'un signal, on se propose de commencer par définir le modèle de signal à adopter.

En général, dans les problèmes de dérivation de signaux mesurés, on suppose que le signal à dériver, porteur de l'information utile, est admis être un signal basses fréquences en comparaison avec le signal de perturbation correspondant aux bruits de mesure.

Pour cela, on fait le choix de modélisation dans lequel le signal utile est modélisé comme étant la sortie, en réponse à un bruit blanc, d'un filtre passe bas de fréquence de coupure  $w_s$  donnée alors que le signal de perturbation est lui sortie d'un filtre passe haut de fréquence de coupure  $w_b$ .

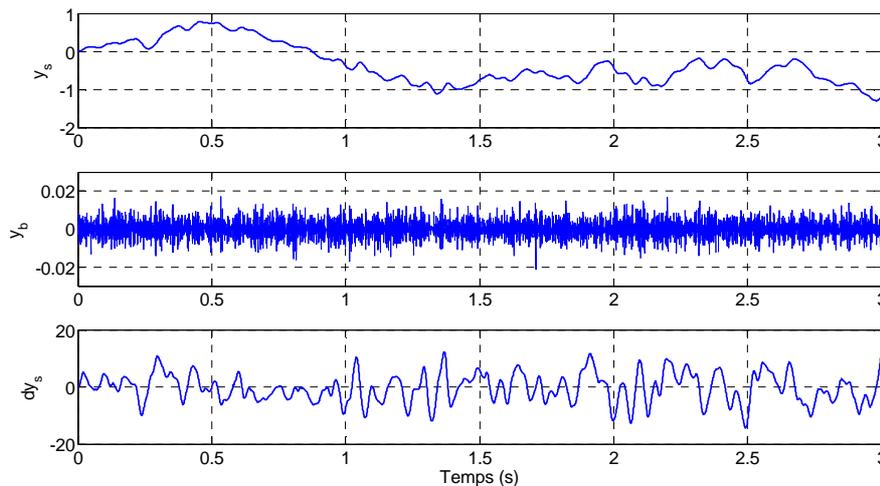
Ainsi, dans le modèle dynamique associé (I.10),  $G_s(s)$  est la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre  $n_s = 3$ , de pulsation de coupure  $w_s = 30\pi \text{ rad.s}^{-1}$  multiplié par un intégrateur perturbé et  $G_b(s)$  est la fonction de transfert d'un filtre passe-haut d'ordre  $n_b = 3$ , de pulsation de coupure  $w_b = 400\pi \text{ rad.s}^{-1}$ . Pour ces choix, on donne alors :

$$G_s(s) = \frac{8.3710^5}{s^4 + 188.5s^3 + 1.7710^4 s^2 + 8.3710^5 s + 837.2}$$

et

$$G_b(s) = \frac{s^3}{s^3 + 5027s^2 + 1.2610^7 s + 1.5810^{10}}$$

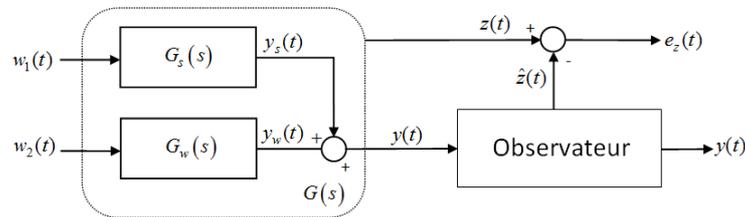
Pour une réalisation du bruit d'entrée  $w = [w_1 \ w_2]^T$ , le signal à dériver, le bruit de mesure et la dérivée exacte du signal utile sont alors donnés dans la *Figure II-2*.



**Figure II-2 :** signal utile  $y_s$ , bruit de mesure  $y_w$  et dérivée exacte  $\dot{y}_s$

Le signal d'entrée ainsi défini, on applique les méthodes linéaires d'observation pour l'estimation de sa dérivée première. Une comparaison de résultats sera ensuite effectuée quant

à la précision de leurs estimations respectives. Un tableau de synthèse de résultats sera dressé en fin de section. Le critère de comparaison adopté dans cette partie est l'erreur de dérivation absolue, différence entre le signal dérivé exact et la sortie du dérivateur.



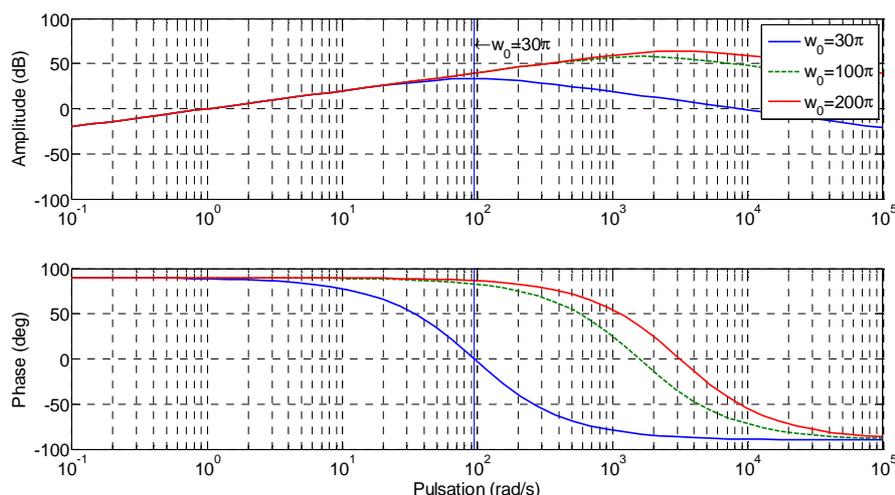
**Figure II-3 :** *Problème d'observation*

Dans chacune des approches d'observation, une information sur le signal doit être exploitée pour le réglage de l'observateur pour l'optimisation de l'estimation.

Pour la mise en œuvre d'un différentiateur basé sur un observateur par placement de pôles, l'information exploitée est une information spectrale qui concerne la limite supérieure du spectre du signal utile.

En effet, comme on l'a pointé précédemment, dans l'équation (II.28), la fonction de transfert du différentiateur d'ordre 1 associé à cet observateur est une mise en série d'un filtre passe-bas d'ordre 2 avec un dérivateur pur. Ainsi, le différentiateur aura un comportement dérivateur sur la bande de passage du filtre passe-bas et atténuera les fréquences au-delà de celle-ci. Remarquons que pour améliorer la réjection de ce différentiateur sur ces bandes de fréquences, un filtre passe-bas d'ordre plus important pourra être mis à la place du filtre d'ordre 2 mais il faut, cependant, considérer le déphasage additionnel induit par ce choix.

Pour revenir au réglage de l'observateur grand gain (II.28), sa bande de dérivation fixée par la pulsation  $w_{OPP}$  doit être réglée de manière à ce que  $w_{OPP} > w_s$ .



**Figure II-4 :** *Observateur par placement de pôles : réponse fréquentielle*

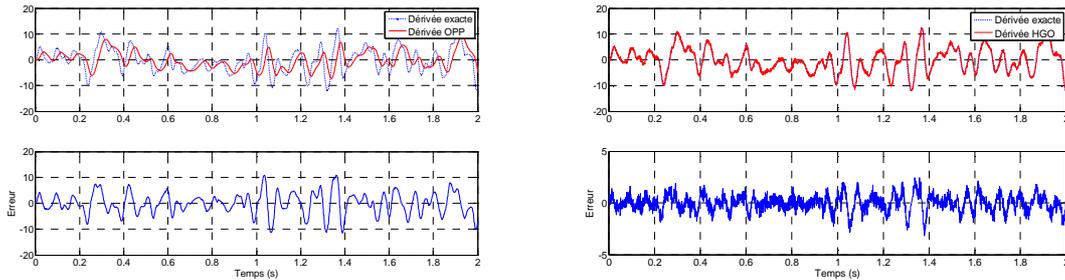
Comme le montre la *Figure II-4*, fixer la bande passante du différentiateur au delà de celle du spectre du signal à dériver, permet de réduire le déphasage et l'atténuation autour de cette

fréquence. Cependant, ce choix conduira à l'amplification, sur une certaine plage de fréquences, des composantes spectrales du bruit de mesure qui y figurent.

Pour les choix  $w_0 = 30\pi \text{ rad.s}^{-1}$  et  $w_0 = 300\pi \text{ rad.s}^{-1}$ , les sorties de l'algorithme et l'erreur de dérivation absolue associées sont données dans la *Figure II-5*. L'erreur de dérivation absolue  $e_{abs}$  est alors définie par

$$e_{abs}(t) = \dot{y}_s(t) - \dot{y}_{s\_exacte}(t) \quad (\text{II.58})$$

où  $\dot{y}_s$  est la sortie du dérivateur et  $\dot{y}_{s\_exacte}$  sa valeur exacte.



**Figure II-5 :** Observateur par placement de pôles : Sortie et erreur de dérivation  $w_0 = 30\pi \text{ rad.s}^{-1}$  (gauche) et  $w_0 = 300\pi \text{ rad.s}^{-1}$  (droite)

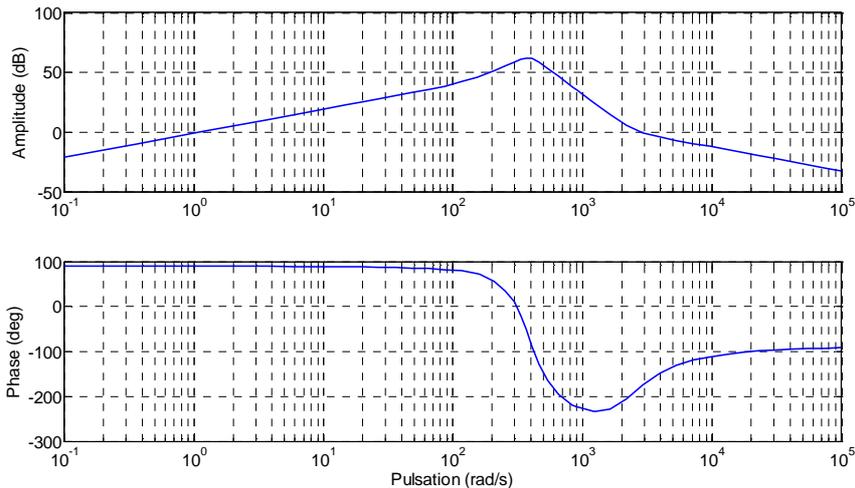
**Remarque :**

Les échelles d'erreurs ne sont pas les mêmes pour ces deux figures. Ceci est fait afin de faciliter l'interprétation des comparaisons à venir.

Conformément aux réponses fréquentielles de la *Figure II-4*, on observe une atténuation et un déphasage plus importants sur la dérivée du signal pour  $w_0 = 30\pi \text{ rad.s}^{-1}$  et le réglage de la bande passante du dérivateur sur une plus large bande passante que celle du signal permet d'améliorer la qualité de la dérivation par rapport à l'erreur absolue de dérivation. Cependant, une valeur trop importante de  $w_0$  conduira au bruitage, d'où l'imprécision, de la dérivée, conséquence de l'amplification des bruits de mesure. Le réglage de ce dérivateur est alors un compromis entre la précision de la dérivation et le niveau de bruit.

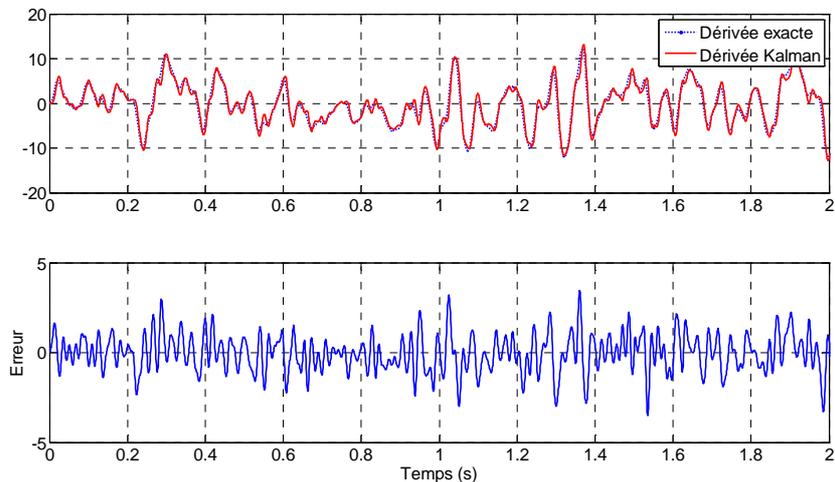
Le filtre de Kalman, pour l'estimation de la dérivée du même signal précédent, est mis en œuvre. Pour son réglage, outre le modèle du signal connu, le filtre de Kalman nécessite la connaissance de la variance des bruits d'état et de mesures. En pratique, ces valeurs peuvent être estimées par un ensemble d'expériences de caractérisation. Le bruit de mesure peut être caractérisé par des mesures ou tiré à partir des données fournies par le constructeur sur la précision de l'instrumentation de mesure. Le bruit d'état lui, est plus délicat à régler et il est, en général, réglé par essais successifs.

Pour le même signal précédent, un filtre de Kalman est réglé et mis en œuvre sur Matlab. La réponse fréquentielle du filtre associé est alors donnée dans la *Figure II-6*.



**Figure II-6 :** Filtre de Kalman : réponse fréquentielle

La sortie  $\hat{y}_s(t)$  du filtre de Kalman, estimée de  $\dot{y}_{s\_exacte}$ , est donnée dans la Figure II-7.



**Figure II-7 :** Filtre de Kalman : Sortie et erreur de dérivation

Le réglage du filtre de Kalman n'est pas évident puisque l'optimalité de la précision n'est assurée que, malgré des hypothèses très fortes, lorsque la variance des différents signaux de perturbation, est bien connue ce qui est rarement le cas en application et spécialement pour le bruit d'état.

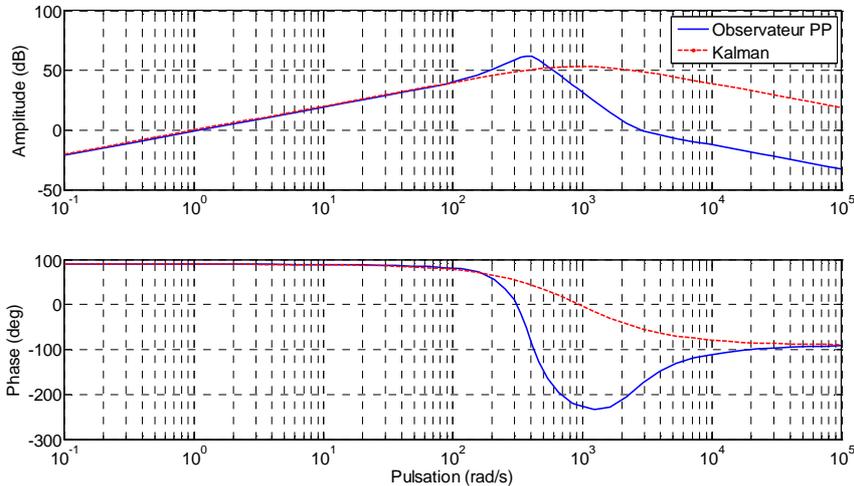
Dans notre cas, le réglage du filtre de Kalman a été optimisé pour le signal en considération. En effet, les différentes perturbations considérées dans le modèle du signal sont connues.

Pour la présentation des résultats, on fait l'impasse des résultats fournis par l'observateur  $H_2$  vu que, comme signalé dans la section II.5, celui-ci est équivalent au filtre de Kalman.

A partir des simulations précédentes, on s'intéresse à la comparaison de résultats, en termes de précision d'estimation, entre ces deux techniques linéaires d'observation.

Une comparaison des performances des différentes approches pour l'estimation de la dérivée, nécessite l'adoption de critères pertinents selon l'approche considérée. En effet, le fait de se limiter uniquement à l'erreur absolue de dérivation dans la comparaison de précision, ne permet pas d'avoir une idée globale et précise quant à la précision de l'estimation.

Il pourrait être judicieux donc de considérer d'autres critères de performance. En effet, et pour reprendre l'exemple de la comparaison faite pour l'observateur grand gain, l'erreur absolue d'observation est relativement importante vu qu'elle est composée d'une erreur due à l'erreur sur l'amplitude de la dérivée, mais aussi une erreur due à l'effet de déphasage qui apparaît entre la dérivée estimée et la dérivée exacte. Dans ce cas, pour distinguer ces deux paramètres, il suffira d'observer les réponses fréquentielles des différentiateurs. Cependant, cette dernière n'est possible que dans un cadre purement linéaire.



**Figure II-8 :** Réponses fréquentielles : Observateur par placement de pôles vs filtre de Kalman

En observant les réponses fréquentielles de ces deux observateurs, il apparaît que l'observateur par placement de pôles déphase plus la dérivée que le filtre de Kalman. De même, ce dernier amplifie plus que l'observateur par placement de pôles les composantes spectrales se situant à la limite de sa bande passante alors qu'il atténue fournit une atténuation plus prononcée des « hautes fréquences » réduisant ainsi l'effet du bruit de mesure sur l'estimation de la dérivée.

Cet effet est visible sur les signaux d'erreurs absolues représentées dans les *Figure II-5* et *Figure II-7* et qui montrent une erreur plus chahutée pour l'observateur par placement de pôles.

D'un autre coté, le filtre de Kalman montre une tendance d'atténuation du signal sur la bande de dérivation.

Dans le cadre d'une analyse purement temporelle, d'autres critères de performance, en plus de l'erreur absolue de dérivation, pourraient être considérés. Pour cela, considérons les deux critères additionnels suivants :

- L'erreur absolue moyenne ;
- L'erreur absolue maximale.

L'erreur absolue moyenne  $e_{moy}$  est la moyenne de l'erreur absolue  $e_{abs}$  prise entre deux instants  $t_i$  et  $t_f$ . Elle est donc définie par

$$e_{moy} = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} e_{abs}(t) dt \quad (II.59)$$

L'erreur absolue maximale  $e_{max}$  est définie par

$$e_{max} = \max_{t \in [t_i, t_f]} e_{abs}(t) \quad (II.60)$$

D'autres critères qualitatifs peuvent être aussi adoptés comme le nombre de paramètres de réglage et la difficulté de réglage de l'algorithme traduisant la facilité d'accès à l'information sur le signal exploitée par chaque approche. Un bilan sur ces aspects sera apporté plus loin dans ce document.

Pour les simulations précédentes, une comparaison fournit les résultats résumés par le *Tableau II-1*.

Dérivateur	Erreur moyenne	Erreur maximale
Observateur placement de pôles	$12.5 \times 10^{-3}$	2.46
Filtre de Kalman	$28.6 \times 10^{-3}$	3.44

***Tableau II-1 : comparaison des algorithmes***

Du tableau précédent, il sort que la précision est meilleure dans le cas de l'observateur par placement de pôles. Ces résultats viennent probablement du fait de la facilité de réglage de l'observateur par placement de pôles. En effet, son réglage repose sur la connaissance seule d'une information d'ordre spectral plus accessible que les caractéristiques stochastiques demandées par le filtre de Kalman. De plus, il faut noter que le fait que les deux réglages n'exploitent pas une même information, réduit la possibilité d'une comparaison directe et objective.

Au cours d'une étude comparative d'algorithmes de différentiation, il serait prétentieux de chercher à établir une conclusion et une préférence absolue d'une méthode par rapport à une autre. En effet, chaque critère fournit une conclusion qui serait valable dans certains cas et rejetée dans d'autres. L'objectif ainsi visé est alors de fournir une aide au choix pour un utilisateur en fonction des données qui lui sont accessibles, de la complexité de mise en œuvre et de réglage du dérivateur, etc.

Des critères purement fréquentiels peuvent être aussi considérés. En effet, comme dans le cas du filtrage  $H_\infty$ , qu'on introduit dans ce qui suit, une pondération fréquentielle sur la DSP du signal d'erreur de dérivation a été introduite et dans ce cas, le critère de performance à considérer est cette même DSP.

## **II.7 Dérivation par observation et filtrage $H_\infty$**

L'approche  $H_\infty$  a été largement adoptée pour la synthèse de commande pour les systèmes linéaires [68]. Cette technique se base sur une description fréquentielle du problème et est connue pour être flexible en termes de possibilités de formulation de cahier des charges pour un problème de commande.

L'objectif de l'observation  $H_\infty$  est de synthétiser un observateur en minimisant l'erreur d'observation tout en prenant en compte les bruits et perturbations du modèle observé en se plaçant dans le cas le plus défavorable. Cette approche admet aussi l'avantage de s'affranchir d'hypothèses statistiques fortes, rencontrées par exemple dans l'approche par filtrage de Kalman, et d'en introduire d'autres moins restrictives.

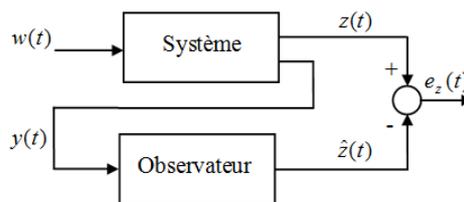
A ce niveau du manuscrit, on a essayé d'éclaircir le lien entre les problèmes d'observation et les problèmes d'estimation de la dérivée d'un signal, connus sous le nom de problèmes de dérivation ou de différentiation.

Ainsi, le problème de synthèse d'un différentiateur pour l'estimation de la dérivée d'un signal peut être ramené à un problème d'observation particulier. Dans cette partie, les différentes étapes de la construction d'un différentiateur par optimisation  $H_\infty$  sont présentées et ce dans le cas où le modèle du signal est connu par son modèle d'état. Dans un premier temps, l'observateur à construire est un observateur linéaire de type Luenberger synthétisé par optimisation d'un critère donné en termes de norme  $H_\infty$ .

Ensuite, une structure d'observateur "étendu" sera discutée avant de passer vers une structure "filtre" dans laquelle l'observateur à synthétiser, et contrairement aux approches précédentes, n'admet pas de structure particulière et est donné comme la structure générale d'un système linéaire à temps invariant (LTI). Ces approches sont présentées sous la forme d'un problème de commande  $H_\infty$  standard et leurs solutions formulées par un problème d'optimisation à contraintes LMI d'une norme  $H_\infty$  pondérée.

### II.7.1 Synthèse d'observateur : Approche $H_\infty$

Dans cette section, on s'intéresse particulièrement au problème de synthèse d'observateurs par approche  $H_\infty$ . Pour l'application du problème d'observation au problème de différentiation, le signal à dériver est considéré comme étant la sortie du modèle observé.



**Figure II-9 :** Problème d'observation  $H_\infty$

L'objectif est de concevoir un système dynamique permettant d'estimer un signal interne  $z$ , non mesuré, tout en minimisant l'erreur d'observation  $e_z = z - \hat{z}$  dans un certain sens.

Le modèle LTI d'ordre  $n$  observé est défini par une représentation d'état de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yw} w(t) \\ z(t) = C_z x(t) \end{cases} \quad (\text{II.61})$$

où  $y$  est la sortie mesurée et  $z$  la sortie additionnelle correspondant au signal interne à estimer. Dans l'application à la dérivation, ce signal correspond à la dérivée du signal  $y_s$ .

Dans l'approche  $H_\infty$  considérée dans la synthèse d'observateur, l'objectif est de minimiser la borne supérieure sur  $\|T_{w \rightarrow e_z}\|_\infty$  tel que  $\|T_{w \rightarrow e_z}\|_\infty < \gamma$  où  $T_{w \rightarrow e_z}$  est la fonction de transfert reliant l'entrée  $w$  au signal d'erreur d'observation  $e_z$ .

L'objectif est donc de trouver une formulation pour calculer le gain optimal de l'observateur garantissant l'optimalité de  $\gamma$ . Le problème d'optimisation  $H_\infty$  peut être résolu soit en résolvant un système d'équations de Ricatti [69] soit par résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI [42]. Cette dernière solution est la plus intéressante car, contrairement à la solution par équations de Ricatti, elle permet de passer outre la nécessité de vérifications de certaines conditions au préalable. Dans notre travail, c'est cette dernière approche qu'on considère et l'objectif est de trouver une formulation du problème pour calculer le gain "optimal" de l'observateur tel que la norme  $H_\infty$  du transfert de l'entrée de perturbation  $w$  vers la sortie  $e_z$  vérifie

$$\|T_{w \rightarrow e_z}\|_\infty < \gamma_{opt} \quad (\text{II.62})$$

Avec  $\gamma_{opt}$  le valeur optimale (minimale) de la norme  $H_\infty$ .

**Interprétation :** Dans l'approche  $H_\infty$ , le signal canonique d'entrée  $w$  est un signal déterministe à puissance finie dont la densité spectrale de puissance (DSP)  $S_w(\omega)$  est telle que  $\forall \omega \ S_w(\omega) < 1$ . A partir de la relation reliant les DSP des signaux d'un système de convolution, dans le cas monovariante, on écrit

$$S_{e_z}(\omega) = |T_{w \rightarrow e_z}(j\omega)|^2 S_w(\omega) \quad \forall \omega$$

d'où

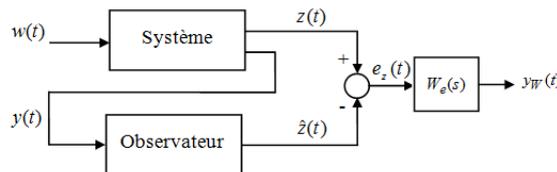
$$S_{e_z}(\omega) < |T_{w \rightarrow e_z}(j\omega)|^2 \quad \forall \omega$$

Sachant (II.62), ceci revient à écrire

$$S_{e_z}(\omega) < \gamma_{opt}^2 \quad \forall \omega$$

Il apparaît clairement que la synthèse d'observateur par optimisation de  $\|T_{w \rightarrow e_z}\|_\infty$  revient à imposer une borne supérieure constante sur la DSP du signal d'erreur d'estimation sur l'ensemble des fréquences.

Une autre alternative dans le problème de synthèse d'observateurs par approche  $H_\infty$  consiste à considérer la norme  $H_\infty$  pondérée. Dans ce cas, on introduit une contrainte fréquentielle à imposer aux signaux d'erreur. Cette contrainte est modélisée par une fonction de transfert appelée « fonction de pondération » qu'on notera dans la suite  $W_e(s)$ .



**Figure II-10 :** Problème de commande  $H_\infty$

**Interprétation :** A partir de la Figure II-10, dans le cas monovariante, on peut écrire

$$S_{y_w}(\omega) = |W_e(j\omega)T_{w \rightarrow e_z}(j\omega)|^2 S_w(\omega) \quad \forall \omega$$

d'où, pour  $\gamma > 0$  donné tel que  $\|W_e T_{w \rightarrow e_z}\|_\infty < \gamma$ , et pour  $S_w(\omega) < 1 \quad \forall \omega$  signifie que la DSP du signal d'erreur d'estimation  $e_z$  vérifie

$$S_{e_z}(\omega) < \frac{\gamma^2}{|W_e(j\omega)|^2}$$

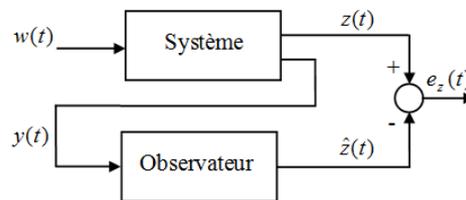
D'où la synthèse d'observateur par optimisation d'une norme  $H_\infty$  pondérée, revient à imposer une borne supérieure sur la DSP du signal d'erreur d'estimation sur l'ensemble des fréquences. Contrairement du cas d'une norme  $H_\infty$  non pondérée, cette contrainte n'est pas constante et peut être façonnée « à souhait » en fonction du cahier des charges.

Dans ce qui suit, on commence par définir les problèmes de synthèse d'observateur associés à chacune de ces structures. Les détails de résolution suivront par la suite.

### II.7.2 Problèmes d'observation $H_\infty$ : définition

Pour la synthèse d'observateur Luenberger [12] par norme  $H_\infty$  [70], nous introduisons le *Problème 1* défini dans ce qui suit.

#### Problème 1



**Figure II-11 : Problème 1**

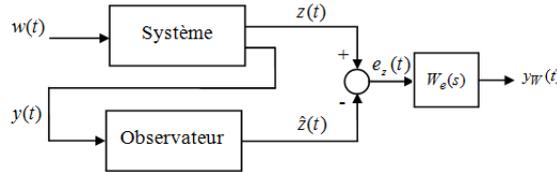
Soit le système observé (II.61) et soit l'observateur Luenberger (I.14) défini par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + L[y(t) - \hat{y}(t)] \\ \hat{y}(t) = C_y\hat{x}(t) \\ \hat{z}(t) = C_z\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{II.63})$$

Pour  $\gamma > 0$ , trouver  $L$  tel que  $\|T_{w \rightarrow e_z}\|_\infty < \gamma$ .

■

Généralement, les problèmes d'observation  $H_\infty$  considèrent uniquement une norme  $H_\infty$  non pondérée [33, 34, 35]. Une telle approche est justifiée par le fait que, dans ce cas, la synthèse d'observateur, s'écrit sous la forme d'un problème d'optimisation convexe sous contraintes LMI. Une autre alternative, serait de considérer une norme  $H_\infty$  pondérée. On introduit alors le *Problème 2*.

**Problème 2**

**Figure II-12 : Problème 2**

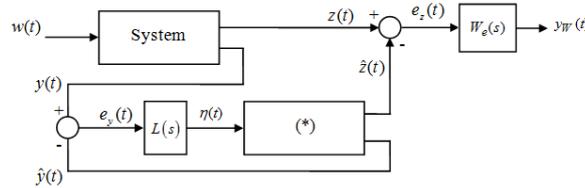
Soient le système observé défini par (II.61) et l'observateur Luenberger (II.63). Soit  $W_e$  une fonction de transfert stable d'ordre  $n_W$  définie par la représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}_W(t) = A_W x_W(t) + B_W e_z(t) \\ y_W(t) = C_W x_W(t) + D_W e_z(t) \end{cases} \quad (\text{II.64})$$

Pour  $\gamma > 0$  trouver  $L$  tel que  $\|W_e T_{w \rightarrow e_z}\|_\infty < \gamma$ .

■

Cependant, il sera démontré plus loin que l'approche précédente conduit à une formulation d'un problème BMI non convexe. Pour continuer dans la synthèse d'observateurs par norme pondérée, on considère, dans le *Problème 3*, la structure d'observateur Luenberger étendue. Le choix de cette structure, comme il sera démontré plus loin, a été introduit afin d'aboutir à une formulation du problème sous forme de problème d'optimisation sous contraintes LMI.

**Problème 3**

**Figure II-13 : Problème 3**

Soient le système observé défini par (II.61), une fonction de transfert stable  $W_e$  définie par (II.64) et l'observateur Luenberger étendu défini par

$$(*) \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \eta(t) \\ \hat{z}(t) = C_z \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) = C_y \hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{II.65})$$

où  $\eta(t)$  est définie comme la sortie d'un système dynamique défini par

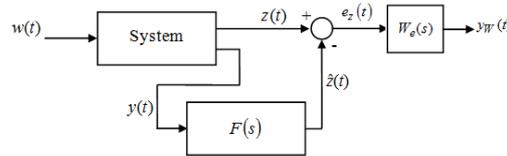
$$\begin{cases} \dot{x}_L(t) = A_L x_L(t) + B_L [y(t) - \hat{y}(t)] \\ \eta(t) = C_L x_L(t) + D_L [y(t) - \hat{y}(t)] \end{cases} \quad (\text{II.66})$$

Pour  $\gamma > 0$ , trouver  $A_L$ ,  $B_L$ ,  $C_L$  et  $D_L$  tels que  $\|W_e T_{w \rightarrow e_z}\|_\infty < \gamma$ .

■

Dans ce cas, le problème de synthèse d'observateur par norme  $H_\infty$  pondérée est exprimé sous la forme d'un problème standard de commande  $H_\infty$  [68] et l'observateur à synthétiser est un filtre de structure LTI générale.

### Problème 4



**Figure II-14 :** Problème 4

Soient le système observé défini par (II.61) et l'observateur filtre défini par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_F \hat{x}(t) + B_F y(t) \\ \hat{z}(t) = C_{F_z} \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) = C_{F_y} \hat{x}(t) \end{cases}$$

Pour  $\gamma > 0$ , trouver  $A_F$ ,  $B_F$ ,  $C_F$  et  $D_F$  tels que  $\|W_e T_{w \rightarrow e_z}\|_\infty < \gamma$ .

■

### II.7.3 Problèmes d'observation $H_\infty$ : mise en œuvre

#### II.7.3.1 Problème 1 : Observateur Luenberger

##### Théorème II-6

Pour le système LTI défini par (II.61), pour l'observateur Luenberger défini par (I.14) et pour  $\gamma > 0$ , le *Problème 1* admet une solution si et seulement si il existe deux matrices  $\bar{P} > 0$  et  $Z$  telles que

$$\begin{bmatrix} A^T \bar{P} + \bar{P} A - C_y^T Z^T - Z C_y & \bar{P} B_w - Z D_{yw} & C_z \\ B_w^T \bar{P} - D_{yw}^T Z^T & -\gamma I & 0 \\ C_z^T & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.67})$$

et le gain de l'observateur est alors donné par  $L = \bar{P}^{-1} Z$ .

■

##### Démonstration

Dans le *Problème 1*, donné par la *Figure II-11*, le système en boucle fermée est défini par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ LC_y & A - LC_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_w & 0 \\ LD_{yw} & 0 \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} C_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Par le changement de variable  $e = x - \hat{x}$ , le modèle du système en boucle fermée peut être redéfini par

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A - LC_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_w & 0 \\ (B_w - LD_{yw}) & 0 \end{bmatrix} w(t) \\ e_z(t) = \begin{bmatrix} 0 & C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{II.68})$$

Pour l'écriture du modèle minimal correspondant au système (II.68), on introduit le théorème suivant.

**Théorème II-7 : Forme de Kalman [71]**

Soit un système LTI défini par une représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

telle que

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = [C_1 \ 0 \ C_2 \ 0]$$

et  $(A_{11} \ B_1 \ C_1)$  minimal, le système

$$\left( \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, [C_1 \ 0] \right)$$

est gouvernable et inobservable.

A partir du théorème précédent, pour  $A_{11} = A - LC_y$  et  $A_{22} = A$ , la partie  $x$  du vecteur d'état du système (II.68) n'est pas observable de la sortie  $e_z$ . D'où la représentation minimale du système en boucle fermée est alors donnée par

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (A - LC_y)e(t) + (B_w - LD_{yw})w(t) \\ e_z(t) = C_z e(t) \end{cases} \quad (\text{II.69})$$

L'application du lemme du Réel Borné (*Lemme II-1*) au système (II.69) conduit à l'écriture

$$\begin{bmatrix} (A - LC_y)^T P + P(A - LC_y) + C_z^T C_z & P(B_w - LD_{yw}) \\ (B_w - LD_{yw})^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.70})$$

Multipliée par  $\gamma^{-1}$ , l'inégalité précédente peut être réécrite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (A - LC_y)^T \bar{P} + \bar{P}(A - LC_y) & \bar{P}(B_w - LD_{yw}) \\ (B_w - LD_{yw})^T \bar{P} & -\gamma I \end{bmatrix}}_C - \underbrace{\begin{bmatrix} C_z \\ 0 \end{bmatrix}}_{B^T} \underbrace{(\gamma^{-1})}_{A^{-1}} \underbrace{[C_z \ 0]}_B < 0 \quad (\text{II.71})$$

avec le changement de variable  $\bar{P} = \gamma^{-1}P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  introduit pour aboutir à une relation linéaire entre les variables de décision.

En appliquant le lemme de Schur (*Lemme II-2*), l'inégalité (II.71) se réécrit

$$\begin{bmatrix} (A-LC_y)^T \bar{P} + \bar{P}(A-LC_y) & \bar{P}(B_w - LD_{yw}) & C_z \\ (B_w - LD_{yw})^T \bar{P} & -\gamma I & 0 \\ C_z^T & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.72})$$

En développant (II.72), on obtient

$$\begin{bmatrix} A^T \bar{P} - C_y^T L^T \bar{P} + \bar{P}A - \bar{P}LC_y & \bar{P}B_w - \bar{P}LD_{yw} & C_z \\ B_w^T \bar{P} - D_{yw}^T K^T \bar{P} & -\gamma I & 0 \\ C_z^T & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.73})$$

Pour le changement de variable  $Z = \bar{P}L \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ , on obtient l'inégalité

$$\begin{bmatrix} A^T \bar{P} + \bar{P}A - C_y^T Z^T - ZC_y & \bar{P}B_w - ZD_{yw} & C_z \\ B_w^T \bar{P} - D_{yw}^T Z^T & -\gamma I & 0 \\ C_z^T & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.74})$$

■

L'inégalité (II.67) est linéaire en les variables  $\bar{P}$ ,  $Z$  et  $\gamma > 0$ . Le problème de chercher  $\bar{P}$  et  $Z$  telles que (II.67) soit vérifiée, est un problème de faisabilité LMI où les variables de décision sont  $\bar{P}$  et  $Z$ .

Dans ce problème, la borne  $\gamma > 0$  sur  $\|T_{w \rightarrow e_z}\|_\infty$  est une donnée du problème. Un problème intéressant est de chercher le gain  $L$  de l'observateur pour lequel  $\|T_{w \rightarrow e_z}\|_\infty$  est minimisée.

L'inégalité (II.67) étant linéaire en les variables  $\bar{P}$ ,  $Z$  et  $\gamma$ , le problème peut se formuler comme un problème de minimisation de la borne  $\gamma$  sous contrainte LMI où les variables de décision sont  $\bar{P}$ ,  $Z$  et  $\gamma$ . Ce problème est défini alors par

$$\min_{\gamma \in \mathbb{R}^+, \bar{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}, Z \in \mathbb{R}^{n \times n_y}} \gamma \quad (\text{II.75})$$

$$\begin{cases} \bar{P} > 0 \\ \begin{bmatrix} A^T \bar{P} - C_y^T Z^T + \bar{P}A - \bar{P}Z & \bar{P}B_w - ZD_{yw} & C_z \\ B_w^T \bar{P} - D_{yw}^T Z^T & -\gamma I & 0 \\ C_z^T & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \end{cases}$$

Le gain optimal  $L_{opt}$  de l'observateur est calculé à partir de la solution optimale du problème (II.75)  $\bar{P}_{opt}$ ,  $Z_{opt}$  et  $\gamma_{opt}$  tel que  $L_{opt} = \bar{P}_{opt}^{-1} Z_{opt}$ .

### II.7.3.2 Problème 2 : Observateur Luenberger

#### Théorème II-8

Pour le système LTI défini par (II.61), pour l'observateur Luenberger défini par (I.14), pour la fonction de pondération  $W_e$  définie dans (II.64) et pour  $\gamma > 0$ , le *Problème 2* admet une solution si et seulement si il existe une matrice  $P > 0$  et une matrice  $L$  telles que

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A-LC_y & 0 \\ B_W C_z & A_W \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} A-LC_y & 0 \\ B_W C_z & A_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_z^T D_W^T \\ C_W^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_W C_z & C_W \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} B_w - LD_{yw} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_w^T - D_{yw}^T L^T & 0 \end{bmatrix} P \qquad \qquad \qquad -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.76})$$

■

#### Démonstration

Le problème de synthèse d'observateur Luenberger (I.14) pour un système observé modélisé par (II.61) en considérant une norme  $H_\infty$  pondérée, s'écrit en appliquant, tout comme pour le *Problème 1*, le lemme du Réel Borné (*Lemme II-1*) à la fonction de transfert décrite par la représentation d'état (II.77). Le modèle du système en boucle fermée est alors donné par

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \\ \dot{x}_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A-LC_y & 0 \\ 0 & B_W C_z & A_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \\ x_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_w \\ B_w - LD_{yw} \\ 0 \end{bmatrix} w \\ y_W = \begin{bmatrix} 0 & D_W C_z & C_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \\ x_W \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{II.77})$$

qui est une représentation non minimale vu que le vecteur d'état  $x$  n'est pas observable de la sortie  $y_w$ . Une représentation minimale peut alors être donnée :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{x}_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-LC_y & 0 \\ B_W C_z & A_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_w - LD_{yw} \\ 0 \end{bmatrix} w \\ y_h = \begin{bmatrix} D_W C_z & C_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x_W \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{II.78})$$

L'application du lemme du Réel Borné (*Lemme II-1*) au système (II.78) conduit à l'expression

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A-LC_y & 0 \\ B_W C_z & A_W \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} A-LC_y & 0 \\ B_W C_z & A_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_z^T D_W^T \\ C_W^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_W C_z & C_W \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} B_w - LD_{yw} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_w^T - D_{yw}^T L^T & 0 \end{bmatrix} P \qquad \qquad \qquad -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.79})$$

■

L'inégalité (II.76), est bilinéaire en les variables  $P$ ,  $L$  et  $\gamma$ . Elle donne une formulation sous forme d'Inégalités Matricielles Bilinéaires (BMI), en  $P$ ,  $L$  et  $\gamma$ , du problème de synthèse d'observateur pondéré. Cette BMI ne peut être réduite en LMI par les méthodes de transformations usuelles [41]. Les problèmes BMI sont difficiles à résoudre du fait de leur complexité ( $\mathcal{N}$ - $\mathcal{P}$  difficiles) [72]. Néanmoins, une approche similaire au problème a été présentée [73] et une méthode de résolution de la BMI a été introduite [74] pour le calcul de

la matrice de gain  $L$ . Cependant, cette méthode est une méthode d'optimisation locale ne garantissant pas l'optimalité globale de la solution.

Cependant, le problème de synthèse d'observateur par optimisation d'une norme  $H_\infty$  pondérée peut être écrit sous la forme d'un problème d'optimisation LMI moyennant la considération, dans la structure de l'observateur, d'une structure particulière introduite à travers le *Problème 3* décrit dans ce qui suit.

### II.7.3.3 Problème 3 : Observateur Luenberger étendu

#### Théorème II-9

Pour le système LTI défini par (II.61), pour l'observateur Luenberger étendu (II.65) et pour la fonction de pondération  $W_e$  définie dans (II.64), le *Problème 3* admet une solution si et seulement si il existe deux matrices  $\tilde{P}$  et  $\tilde{Q}$  telles que

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}_2^T C_z^T B_W^T + B_W C_z \tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_3 A_W^T + A_W \tilde{Q}_3 & \tilde{Q}_2^T C_z^T D_W^T + \tilde{Q}_3 C_W^T \\ D_W C_z \tilde{Q}_2 + C_W \tilde{Q}_3 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.80})$$

$$\begin{bmatrix} X & N_1^T (A^T \tilde{P}_2 + C_z^T B_W^T \tilde{P}_3 + \tilde{P}_2 A_W) + N_2^T B^T \tilde{P}_2 & N_1^T C_z^T D_W^T \\ (A_W^T \tilde{P}_2^T + \tilde{P}_2^T A + \tilde{P}_3^T B_W C_z) N_1 + \tilde{P}_2^T B N_2 & A_W^T \tilde{P}_3 + \tilde{P}_3 A_W & C_W^T \\ D_W C_z N_1 & C_W & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.81})$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & I \\ I & \tilde{Q} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.82})$$

avec  $X = N_1^T (A^T \tilde{P}_1 + \tilde{P}_1 A + C_z^T B_W^T \tilde{P}_2^T + \tilde{P}_2 B_W C_z) N_1 + N_2^T B^T \tilde{P}_1 N_1 + N_1^T \tilde{P}_1 N_2 - \gamma N_2^T N_2$

où  $\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 & \tilde{P}_2 \\ \tilde{P}_2^T & \tilde{P}_3 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_2 \\ \tilde{Q}_2^T & \tilde{Q}_3 \end{bmatrix}$  et  $[C_y \quad D_{yw}]_\perp = [N_1 \quad N_2]^T$ .

■

#### Démonstration

Pour formuler le problème, l'application directe du lemme du Réel Borné (*Lemme II-1*), telle qu'effectuée dans la démonstration du *Théorème II-7*, ne fournit pas une solution vu que la structure de l'observateur ne repose plus sur un gain statique, mais sur une fonction dynamique.

Par analogie au problème de commande  $H_\infty$  défini par le *Théorème II-1*, le modèle du système commandé équivalent dans ce problème est défini par

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \\ \dot{x}_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & B_W C_z & A_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \\ x_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_W & 0 \\ B_W & -I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \eta \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} e_y \\ y_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_y & 0 & 0 \\ 0 & D_W C_z & C_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \\ x_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{yw} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \eta \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{II.83})$$

et le modèle minimal associé est alors défini par

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{x}_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_W C_z & A_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_W & -I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \eta \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} e_y \\ y_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D_W C_z & C_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{yw} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \eta \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{II.84})$$

Dans ce cas, le *Théorème II-1* permet de formuler le problème et son application à (II.84) conduit à l'écriture des LMIs suivantes

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_\perp \begin{bmatrix} \tilde{Q} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_W C_z & A_W \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_W C_z & A_W \end{bmatrix} \tilde{Q} \begin{bmatrix} B_W \\ 0 \end{bmatrix} & \tilde{Q} \begin{bmatrix} D_W C_z & C_W \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} B_W \\ 0 \end{bmatrix}^T & -\gamma I & 0 \\ \begin{bmatrix} D_W C_z & C_W \end{bmatrix} \tilde{Q} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_\perp < 0 \quad (\text{II.85})$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ D_{yw} \\ 0 \end{bmatrix}_\perp \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_W C_z & A_W \end{bmatrix}^T \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_W C_z & A_W \end{bmatrix} & \tilde{P} \begin{bmatrix} B_W \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_W C_z & C_W \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} B_W \\ 0 \end{bmatrix}^T \tilde{P} & -\gamma I & 0 \\ \begin{bmatrix} D_W C_z & C_W \end{bmatrix} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ D_{yw} \\ 0 \end{bmatrix}_\perp < 0 \quad (\text{II.86})$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & I \\ I & \tilde{Q} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.87})$$

Pour le choix des vecteurs orthogonaux

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_\perp = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{II.88})$$

et

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ D_{yw} \\ 0 \end{bmatrix}_\perp = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{II.89})$$

tel que  $\begin{bmatrix} C_y & D_{yw} \end{bmatrix}_\perp = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}^T$

Pour  $\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_2 \\ \tilde{Q}_2^T & \tilde{Q}_3 \end{bmatrix}$ , la LMI (II.85) développée et réécrite conduit à l'expression

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}_2^T C_z^T B_W^T + B_W C_z \tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_3 A_W^T + A_W \tilde{Q}_3 & \tilde{Q}_2^T C_z^T D_W^T + \tilde{Q}_3 C_W^T \\ D_W C_z \tilde{Q}_2 + C_W \tilde{Q}_3 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.90})$$

De même, la LMI (II.86) développée peut être réécrite comme

$$\begin{bmatrix} X & N_1^T (A^T \tilde{P}_2 + C_z^T B_w^T \tilde{P}_3 + \tilde{P}_2 A_w) + N_2^T B^T \tilde{P}_2 & N_1^T C_z^T D_w^T \\ (A_w^T \tilde{P}_2^T + \tilde{P}_2 A + \tilde{P}_3 B_w C_z) N_1 + \tilde{P}_2^T B N_2 & A_w^T \tilde{P}_3 + \tilde{P}_3 A_w & C_w^T \\ D_w C_z N_1 & C_w & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.91})$$

où  $X = N_1^T (A^T \tilde{P}_1 + \tilde{P}_1 A + C_z^T B_w^T \tilde{P}_2^T + \tilde{P}_2 B_w C_z) N_1 + N_2^T B^T \tilde{P}_1 N_1 + N_1^T \tilde{P}_1 N_2 - \gamma N_2^T N_2$

$$\text{et } \tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 & \tilde{P}_2 \\ \tilde{P}_2^T & \tilde{P}_3 \end{bmatrix}$$

D'où, le gain  $L(s)$  de l'observateur (I.15) tel que  $\|T_{w \rightarrow y_w}(s)\|_\infty < \gamma$  existe *si et seulement si* il est possible de trouver  $\tilde{P}$  et  $\tilde{Q}$  tel que les LMI (II.80), (II.81) et (II.82) sont satisfaites. ■

### Remarque :

L'observateur minimisant la norme  $H_\infty$  pondérée de la fonction de transfert  $T_{w \rightarrow e_z}$  de l'entrée inconnue  $w$  au signal d'erreur  $e_z$ . Pour cette fin, la fonction de transfert admet une représentation d'état minimale qui n'inclut pas les modes du modèle du signal. Ceci veut dire que, même lors de l'existence de dynamiques instables dans le modèle du signal, il est toujours possible de retrouver un observateur au sens du *Problème 3*.

### II.7.3.4 Problème 4 : Observateur filtre

#### Théorème II-10

Pour le système LTI stable défini par (II.61), pour la fonction de pondération  $W_e$  définie dans (II.64) et pour  $\gamma > 0$ , le *Problème 4* admet une solution *si et seulement si* il existe deux matrices  $\bar{P}$  et  $\bar{Q}$  telles que

$$\begin{bmatrix} M_1^T (\bar{Q}_3 A_w^T + A_w \bar{Q}_3) M_1 + M_2^T C_w \bar{Q}_3 M_1 + M_1^T \bar{Q}_3 C_w^T M_2 - \gamma M_1^T M_2 & M_1^T (\bar{Q}_2^T A^T + B_w C_z \bar{Q}_1 + A_w \bar{Q}_2^T) + M_2^T (D_w C_z \bar{Q}_1 + C_w \bar{Q}_2^T) & 0 \\ (\bar{Q}_1 C_z^T B_w^T + \bar{Q}_2 A_w^T + A \bar{Q}_2) M_1 + (\bar{Q}_1 C_z^T D_w^T + \bar{Q}_2 C_w^T) M_2 & \bar{Q}_1 A^T + A \bar{Q}_1 & B_w \\ 0 & B_w^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.92})$$

avec

$$\begin{bmatrix} X & N_1^T (A^T \bar{P}_2 + C_z^T B_w^T \bar{P}_3 + \bar{P}_2 A_w) + N_2^T B^T \bar{P}_2 & N_1^T C_z^T D_w^T \\ (A_w^T \bar{P}_2^T + \bar{P}_2 A + \bar{P}_3 B_w C_z) N_1 + \bar{P}_2^T B N_2 & A_w^T \bar{P}_3 + \bar{P}_3 A_w & C_w^T \\ D_w C_z M_1 & C_w & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.93})$$

où  $X = N_1^T (A^T \bar{P}_1 + \bar{P}_1 A + C_z^T B_w^T \bar{P}_2^T + \bar{P}_2 B_w C_z) N_1 + N_2^T B^T \bar{P}_1 N_1 + N_1^T \bar{P}_1 B_w N_2 - \gamma N_2^T N_2$

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & I \\ I & \bar{Q} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.94})$$

$$\text{avec } \bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 & \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_2^T & \bar{Q}_3 \end{bmatrix}, \bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \\ \bar{P}_2^T & \bar{P}_3 \end{bmatrix} \text{ et } [B_w \quad D_w]_\perp = [M_1 \quad M_2]^T.$$

### Démonstration

Dans les deux approches précédemment proposées, la structure de l'observateur à synthétiser était fixée. Dans cette partie, on s'affranchit de cette contrainte et l'observateur à construire n'admet aucune structure particulière et est défini par la représentation d'état d'un filtre linéaire. Cette approche est équivalente au problème de filtrage  $H_\infty$ . Le filtre  $F(s)$  est, alors, défini par sa structure générale telle que

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_F \hat{x}(t) + B_F y(t) \\ \hat{y}(t) = C_{Fy} \hat{x}(t) \\ \hat{z}(t) = C_{Fz} \hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{II.95})$$

Par analogie avec le problème de commande  $H_\infty$  défini dans le *Théorème II-1*, le modèle minimal du système  $P(s)$  correspondant à cette configuration est donné par

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_w C_z & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ -B_w \end{bmatrix} \hat{z} \\ \begin{bmatrix} y_w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_w C_z & C_w \\ C_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_{yw} \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} -D_w \\ 0 \end{bmatrix} \hat{z} \end{cases} \quad (\text{II.96})$$

L'objectif donc est de trouver un filtre  $F(s)$  tel que  $\|T_{w \rightarrow y_w}(s)\|_\infty < \gamma$ .

L'application du *Théorème II-1* au système (II.96) conduit aux inégalités matricielles suivantes

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -B_w \end{bmatrix}^T & 0 & -D_w \end{bmatrix}_\perp^T \begin{bmatrix} \bar{Q} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_w C_z & A_w \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_w C_z & A_w \end{bmatrix} \bar{Q} & \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} & \bar{Q} [D_w C_z \quad C_w]^T \\ \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix}^T & -\gamma I & 0 \\ [D_w C_z \quad C_w] \bar{Q} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -B_w \end{bmatrix}^T & 0 & -D_w \end{bmatrix}_\perp < 0 \quad (\text{II.97})$$

$$\begin{bmatrix} [C_y \quad 0 \quad D_{yw} \quad 0]^T & \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_w C_z & A_w \end{bmatrix}^T \bar{P} + \bar{P} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_w C_z & A_w \end{bmatrix} & \bar{P} \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} & [D_w C_z \quad C_w]^T \\ \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix}^T \bar{P} & -\gamma I & 0 & \\ [D_w C_z \quad C_w] & 0 & -\gamma I & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix}_\perp < 0 \quad (\text{II.98})$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & I \\ I & \bar{Q} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.99})$$

Pour le vecteur orthogonal

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -B_w \end{bmatrix}^T & 0 & -D_w^T \end{bmatrix}_\perp = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ M_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ M_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.100})$$

L'inégalité matricielle (II.97) est réécrite

$$\begin{bmatrix} M_1^T (\bar{Q}_3 A_W^T + A_W \bar{Q}_3) M_1 + M_2^T C_W \bar{Q}_3 M_1 + M_1^T \bar{Q}_3 C_W^T M_2 - \gamma M_2^T M_2 & M_1^T (\bar{Q}_2^T A^T + B_W C_z \bar{Q}_1 + A_W \bar{Q}_2^T) & 0 \\ & + M_2^T (D_W C_z \bar{Q}_1 + C_W \bar{Q}_2^T) & \\ (\bar{Q}_1 C_z^T B_W^T + \bar{Q}_2 A_W^T + A \bar{Q}_2) M_1 & \bar{Q}_1 A^T + A \bar{Q}_1 & B_w \\ + (\bar{Q}_1 C_z^T D_W^T + \bar{Q}_2 C_W^T) M_2 & & \\ 0 & B_w^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.101})$$

avec  $\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 & \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_2^T & \bar{Q}_3 \end{bmatrix}$

En remarquant que, pour  $\bar{P} = \tilde{P}$ , (II.93) = (II.81), pour le même choix du vecteur orthogonal (II.100), (II.93) est alors équivalente à

$$\text{où } X = M_1^T (A^T \bar{P}_1 + \bar{P}_1 A + C_z^T B_W^T \bar{P}_2^T + \bar{P}_2 B_W C_z) M_1 + M_2^T B^T \bar{P}_1 M_1 + M_1^T \bar{P}_1 B_w M_2 - \gamma M_2^T M_2$$

$$\text{et } \bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \\ \bar{P}_2^T & \bar{P}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X & M_1^T (A^T \bar{P}_2 + C_z^T B_W^T \bar{P}_3 + \bar{P}_2 A_W) + M_2^T B^T \bar{P}_2 & M_1^T C_z^T D_W^T \\ (A_W^T \bar{P}_2^T + \bar{P}_2 A + \bar{P}_3 B_W C_z) M_1 + \bar{P}_2^T B M_2 & A_W^T \bar{P}_3 + \bar{P}_3 A_W & C_W^T \\ D_W C_z M_1 & C_W & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

D'où, le filtre  $F(s)$  tel que  $\|T_{w \rightarrow y_w}(s)\|_\infty < \gamma$  existe *si et seulement si* il est possible de trouver  $\bar{P}$  et  $\bar{Q}$  tel que les LMI (II.92), (II.93) et (II.94) sont satisfaites.

**Remarque :**

Contrairement au *Problème 3*, dans le *Problème 4*, l'état du modèle du signal est observable. Dans ce cas, le *Problème 4* n'admet de solution que si les composantes de l'état du modèle du signal sont toutes stables.

**II.7.3.5 Problème d'observation : Luenberger étendu vs Filtre**

Le problème de synthèse d'observateurs par norme  $H_\infty$  pondérée (*Problème 3* et *Problème 4*), est donné sous forme de résolution de problèmes d'optimisation LMI. Cependant, la différence entre les deux observateurs ne se limite pas à la différence entre leurs structures respectives. En effet, l'observateur  $H_\infty$  pondéré à structure Luenberger étendu est d'ordre  $n_{obs} = n_L + n$  où  $n_L = n + n_w$  est l'ordre de  $L(s)$ . Dans le cas de l'observateur à structure filtre, celui-ci est d'ordre  $n_F = n + n_w$ . Ceci étant, il serait plus judicieux de considérer la structure filtre dans le cas d'implémentation numérique de celui-ci vu que l'ordre de l'observateur est moins important chose qui réduit le temps de calcul. Par contre, il est possible de trouver une solution au problème d'observation dans le cas de la structure Luenberger étendue malgré qu'il y ait des dynamiques instables dans le modèle du signal considéré. En effet, dans cette approche, l'état du modèle du signal ne figure pas dans le modèle minimal (II.84). Comme on a précédemment remarqué, dans l'approche par structure

filtre (*Problème 4*), l'état du modèle du signal est une partie de l'état du modèle minimal du système  $\square$  commandé  $\square$ . Dans ce cas, il est impératif de vérifier la stabilité du premier pour la synthèse d'un filtre pour ce problème.

Pour aller au-delà de cette première comparaison, on s'intéresse, dans ce qui suit, aux niveaux de performances garanties dans les *Problème 3* et *Problème 4* en terme de borne supérieure sur  $\|T_{w \rightarrow y_w}(s)\|_\infty$ . Cette interrogation montrera que, sous certaines hypothèses, ces deux problèmes sont équivalents.

### **Théorème II-11**

Pour  $\gamma > 0$  donné, le *Problème 3* admet une solution si et seulement si le *Problème 4* admet une solution. ■

### **Démonstration**

Cette démonstration se fait en deux étapes : la démonstration de l'implication *Problème 4*  $\Rightarrow$  *Problème 3* et celle de l'implication *Problème 3*  $\Rightarrow$  *Problème 4*.

### ***Problème 4* $\Rightarrow$ *Problème 3***

Considérons l'inégalité (II.82). En effectuant le changement de variable  $\tilde{Q}_1 = T + T^T$ , cette inégalité se réécrit par

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{P} & I \\ I & \tilde{Q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{P} & I & 0 \\ I & 0 & \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_2 \\ 0 & I & \tilde{Q}_2^T & \tilde{Q}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{P} & I & 0 \\ I & 0 & 0 & \tilde{Q}_2 \\ 0 & I & \tilde{Q}_2^T & \tilde{Q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} T^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (\text{II.102})$$

L'application du *Lemme II-3* conduit à l'inégalité

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & 0 \\ 0 & I & \tilde{Q}_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.103})$$

D'où le choix de changement de variable et l'application du lemme d'élimination conduit à une condition uniquement sur les matrices  $\tilde{P}$  et  $\tilde{Q}_3$ . La matrice  $\tilde{Q}_2$  n'apparaissant pas dans (II.103), il est possible de l'éliminer de la LMI (II.80). Cette dernière peut être réécrite

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}_3 A_W^T + A_W \tilde{Q}_3 & \tilde{Q}_3 C_W^T \\ C_W \tilde{Q}_3 & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_W \\ D_W \end{bmatrix} (C_Z \tilde{Q}_2) \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} (C_Z \tilde{Q}_2)^T \begin{bmatrix} B_W^T & D_W^T \end{bmatrix} < 0$$

Le lemme d'élimination appliqué à l'inégalité précédente conduit aux inégalités

$$\begin{bmatrix} M_1^T & M_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Q}_3 A_W^T + A_W \tilde{Q}_3 & \tilde{Q}_3 C_W^T \\ C_W \tilde{Q}_3 & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.104})$$

et

$$-\gamma I < 0 \quad (\text{II.105})$$

(II.105) étant toujours vérifiée, on développe (II.104) et l'on obtient

$$M_1^T (\tilde{Q}_3 A_W^T + A_W \tilde{Q}_3) M_1 + M_2^T C_W \tilde{Q}_3 M_1 + M_1^T \tilde{Q}_3 C_W^T M_2 - \gamma M_2^T M_2 < 0 \quad (\text{II.106})$$

Considérons désormais qu'il existe un filtre  $F(s)$  tel que  $\|T_{w \rightarrow y_w}(s)\|_\infty < \gamma$ . L'inégalité (II.92) est alors vérifiée et son terme supérieur gauche vérifie

$$M_1^T (\bar{Q}_3 A_W^T + A_W \bar{Q}_3) M_1 + M_2^T C_W \bar{Q}_3 M_1 + M_1^T \bar{Q}_3 C_W^T M_2 - \gamma M_2^T M_2 < 0 \quad (\text{II.107})$$

En choisissant alors  $\tilde{P} = \bar{P}$  et  $\tilde{Q}_3 = \bar{Q}_3$ , on a les équivalences suivantes :

- (II.92)  $\Rightarrow$  (II.80)

- (II.93)  $\Leftrightarrow$  (II.81)

- (II.94)  $\Leftrightarrow$  (II.82)

D'où s'il existe un filtre (I.16) tel que  $\|T_{w \rightarrow y_w}(s)\|_\infty < \gamma$ , ceci implique qu'il existe forcément un observateur (I.15) tel que  $\|T_{w \rightarrow y_w}(s)\|_\infty < \gamma$ .

### **Problème 3 $\Rightarrow$ Problème 4**

Supposons maintenant qu'il existe un observateur (I.15). Soit un système  $P(s)$  d'ordre  $n$  et un correcteur  $K(s)$  d'ordre  $n_K > n$  tel que  $\|P * K\|_\infty < \gamma$  pour  $\gamma > 0$ . Alors, il est toujours possible de trouver un correcteur  $K'(s)$  d'ordre  $n_{K'} = n$  tel que  $\|P * K'\|_\infty < \gamma$ .

Dans ce cas, l'observateur (I.15) d'ordre  $n_{obs} = n_L + n = 2n + n_W > n + n_W$  et le filtre (I.16) d'ordre  $n_F = n + n_W$  sont des observateurs du même système. D'où s'il existe un observateur (I.15) tel que  $\|T_{w \rightarrow y_w}(s)\|_\infty < \gamma$ , ceci implique qu'il existe forcément un filtre (I.16) tel que  $\|T_{w \rightarrow y_w}(s)\|_\infty < \gamma$ .

D'où à partir de ces deux démonstrations, il existe un filtre (I.16) tel que  $\|T_{w \rightarrow y_w}(s)\|_\infty < \gamma$ , si et seulement si il existe un observateur (I.15) tel que  $\|T_{w \rightarrow y_w}(s)\|_\infty < \gamma$ . ■

## **II.7.4 Application à la dérivation**

Certains problèmes de différentiation peuvent être interprétés comme des problèmes particuliers de synthèse d'observateurs. Dans cette section, l'application des résultats de la synthèse d'observateurs par approche  $H_\infty$  est présentée à travers un exemple.

Dans cet exemple, on compare deux structures d'observateurs obtenues par optimisation  $H_\infty$  non pondérée et par optimisation  $H_\infty$  pondérée. Pour ce dernier cas, on ne considérera que le cas du problème de filtrage  $H_\infty$  du *Problème 4*.

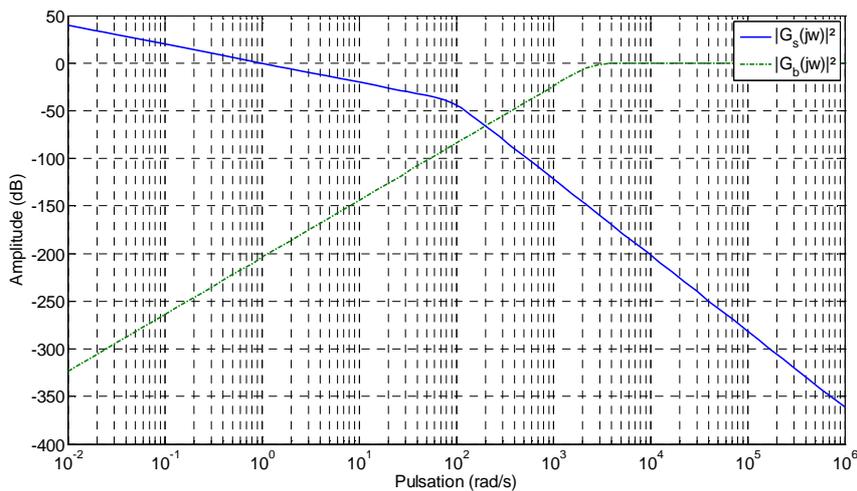
Pour l'application d'un problème d'observation à un problème de différentiation, le signal à dériver est modélisé comme la sortie d'un modèle LTI particulier.

Comme expliqué dans la *section II.7.3*, la synthèse d'observateur est réalisée par optimisation de  $\|T_{w \rightarrow e_z}\|_\infty$  ce qui revient à l'optimisation de la borne supérieure sur la DSP du signal d'erreur  $e_z = z - \hat{z}$ .

La dimension du signal interne à estimer  $z$  dépend de la matrice  $C_z$ . En effet, le choix  $C_z = I$  conduirait à une optimisation sur la DSP de l'erreur d'estimation de toutes les composantes de l'état. Une autre alternative, consiste à choisir  $C_z$  de manière à sélectionner la composante de l'état à laquelle on s'intéresse et sur laquelle on veut optimiser la DSP du signal d'erreur d'estimation.

Pour une comparaison objective des résultats en termes de précision d'estimation de la dérivée de l'observateur  $H_\infty$  par rapport à ceux déjà obtenus dans la *section II.6*, il est à remarquer que le même signal et les mêmes processus générateurs (modèles de signaux) ont été adoptés dans cette section.

$|G_s(j\omega)|^2$  et  $|G_b(j\omega)|^2$  modélisent les bornes supérieures sur les DSP respectives  $S_{y_s}$  et  $S_{y_b}$  des signaux  $y_s$  et  $y_b$  pour l'entrée canonique  $w$ .



**Figure II-15:** Modules  $|G_s(j\omega)|^2$  et  $|G_b(j\omega)|^2$

Le problème LMI correspondant est programmé et résolu à l'aide des fonctions dédiées de la *Robust Control Toolbox* de Matlab [75].

Dans la synthèse de l'observateur correspondant au *Problème 1*, une première investigation porte sur le choix de  $C_z$  pour le choix des composantes de l'état dont on veut optimiser la DSP de l'erreur d'estimation.

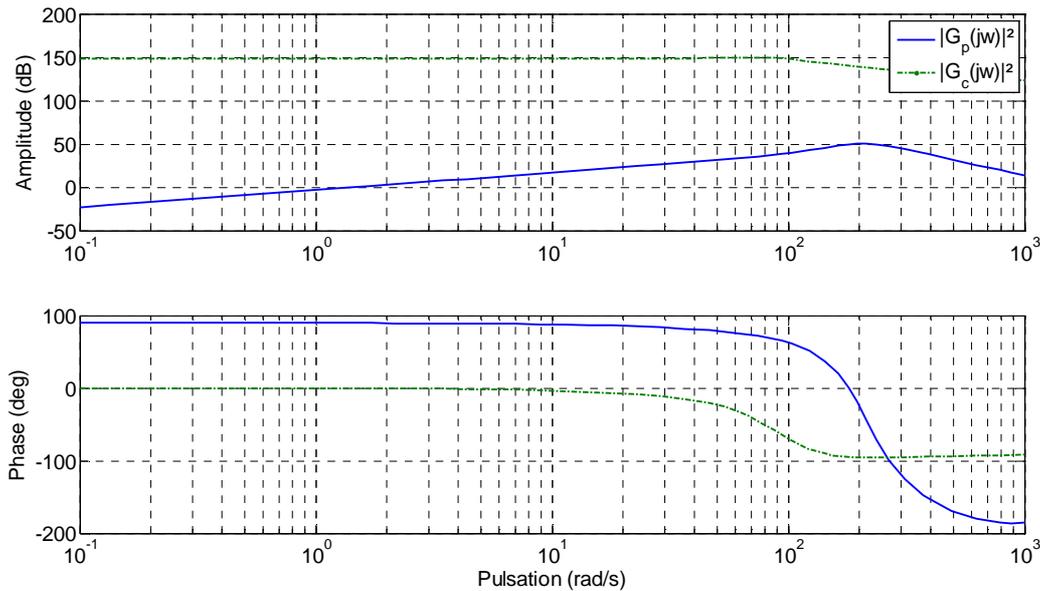
En effet, la norme  $H_\infty$  d'une matrice de transfert peut être supérieure à la norme  $H_\infty$  de chacun des fonctions de transfert qui la composent. Ce résultat justifie bien l'utilité du choix de  $C_z$  permettant l'optimisation sur la composante de l'état à laquelle on s'intéresse, plutôt que l'optimisation sur l'erreur d'estimation sur toutes les composantes contrairement aux approches d'observation par Kalman ou par optimisation  $H_2$  où l'optimal pour une composante est un optimal pour toutes les composantes. D'où, la synthèse d'observateurs par

approche  $H_\infty$  ajoute un degré de liberté supplémentaire dans la formalisation du problème et ceci est la base de la définition du problème de filtrage  $H_\infty$ .

Pour la solution du *Problème 1*, deux cas sont considérés :

- $G_c(s)$  est le filtre solution dans le cas où  $z = x$  tel que  $\|T_{w \rightarrow e_z}\|_\infty \approx 1.263 \cdot 10^7$  ;
- $G_p(s)$  est le filtre solution dans le cas où  $z = x_2$  tel que  $\|T_{w \rightarrow e_z}\|_\infty \approx 0.297$ .

La figure suivante est un tracé des diagrammes de Bode des fonctions de transfert des observateurs  $G_c(s)$  et  $G_p(s)$ .



**Figure II-16 :** Diagrammes de Bode de  $G_p(s)$  et  $G_c(s)$

De la *Figure II-16*, il paraît bien que la réponse fréquentielle de  $G_p(s)$  correspond à celle d'un dérivateur sur une certaine plage de fréquences ce qui n'est pas le cas pour  $G_c(s)$ . En effet, l'optimisation  $H_\infty$  sur une composante de l'état revient à l'optimisation de la valeur singulière d'un système monovariante, d'où l'optimisation du maximum de son gain sur l'ensemble des fréquences. Dans le cas de l'optimisation sur toutes les composantes du vecteur d'état, ceci revient à l'optimisation de la valeur singulière maximale, qui représente une généralisation de la notion de gain aux systèmes multivariants, de toutes les matrices de transfert du système optimisé. Dans ce cas, aucune garantie d'optimalité ne peut être assurée sur une composante particulière de l'état, ce qui est le cas dans les résultats présentés dans la *Figure II-16*.

Dans le *Problème 1*, même si elle n'est pas explicite, une pondération implicite unitaire est prise en compte et imposée à l'erreur sur toutes les fréquences. Cependant, dans la synthèse d'observateur par optimisation  $H_\infty$  pondérée, il est possible de s'affranchir de cette contrainte implicite surtout pour les signaux « hautes fréquences » comme il est question à travers la pondération de la *Figure II-17*.

Pour la synthèse de l'observateur/filtre solution du *Problème 4*, et après définition du modèle du signal, il est nécessaire de déterminer la fonction de pondération  $W_e(s)$  adéquate. En effet, cette fonction définit un gabarit fréquentiel à imposer à l'erreur d'estimation tel que

$$S_{e_z}(\omega) < \frac{\gamma^2}{|W_e(j\omega)|^2} \quad \forall \omega$$

Dans le cas où le signal est plutôt « basses fréquences » et la perturbation est un signal « hautes fréquences », le choix de la fonction de pondération doit traduire les objectifs suivants :

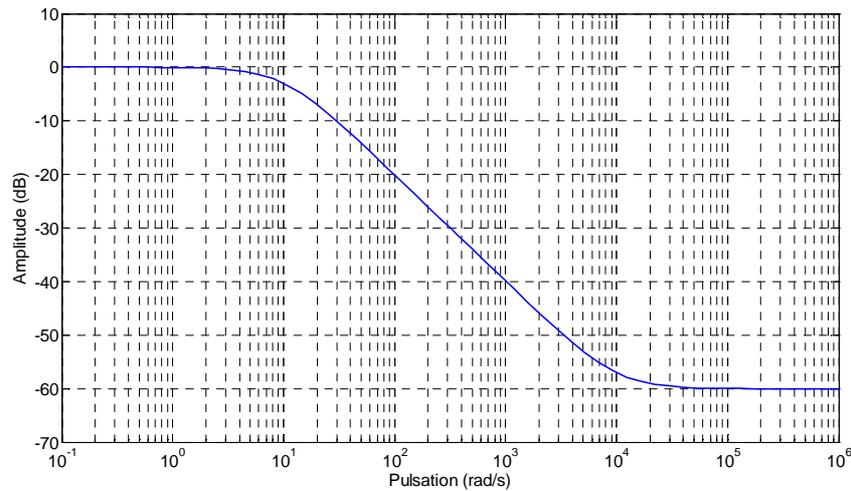
- Atténuer la DSP du signal d'erreur d'estimation  $e_z$  en atténuant l'effet de la perturbation sur celui-ci sur la plage de fréquences du signal  $[0, F_{cs}]$  ;
- Limiter la bande de dérivation à  $F_{cs}$  et atténuer le signal d'entrée au-delà ;
- Pas de contraintes particulières en hautes fréquences  $[F_{cb}, \infty[$ .

Une fonction de pondération permettant de satisfaire ces objectifs est donnée telle que

$$W_e(s) = \frac{\tau_{W_{e1}} s + 1}{\tau_{W_{e2}} s + 1}$$

avec  $\tau_{W_{e1}} = 10^{-4}$  et  $\tau_{W_{e2}} = 10^{-1}$ .

La réponse fréquentielle de cette fonction est donnée alors dans la *Figure II-17*.

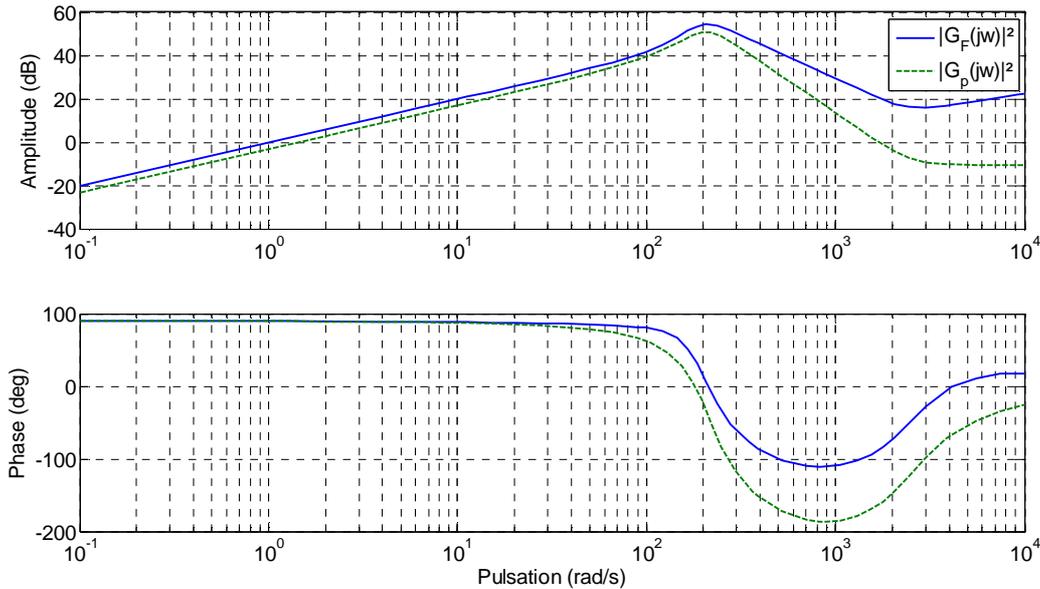


**Figure II-17:** Diagramme de Bode  $W_e(s)$

Le filtre  $G_F(s)$ , solution du *Problème 4*, ainsi obtenu est défini par la fonction de transfert d'ordre 8 :

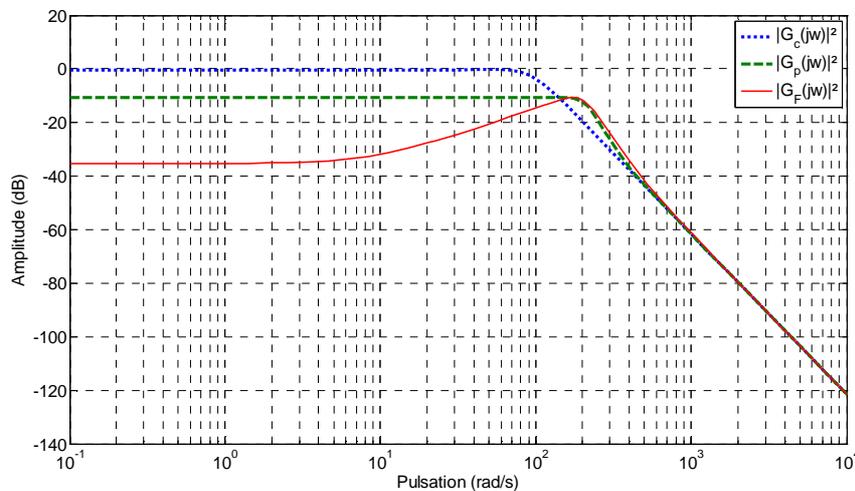
$$G_F(s) = \frac{1.110^7 s^7 + 5.910^{10} s^6 + 1.510^{14} s^5 + 2.210^{17} s^4 + 5.810^{19} s^3 + 7.310^{21} s^2 + 4.210^{23} s - 5.110^{18}}{s^8 + 6.110^5 s^7 + 6.510^9 s^6 + 510^{12} s^5 + 1.910^{15} s^4 + 4.910^{17} s^3 + 810^{19} s^2 + 8.310^{21} s + 4.310^{23}} \quad (\text{II.108})$$

Les réponses fréquentielles des filtres  $G_p(s)$  et  $G_F(s)$  sont données dans la *Figure II-18*.



**Figure II-18 :** Diagrammes de Bode  $G_p(s)$  et  $G_F(s)$

De la figure précédente, il paraît que le caractère dérivateur des deux filtres apparaît dans la bande de fréquences  $[0, F_{cs}]$  cependant, il montre également une atténuation et un déphasage plus importants sur la dérivée pour  $G_p(s)$ . Les réponses fréquentielles de la fonction de transfert reliant l'entrée à l'erreur d'estimation est donnée par la Figure II-19.



**Figure II-19 :** Réponse fréquentielle  $T_{w \rightarrow e_z}(j\omega)$

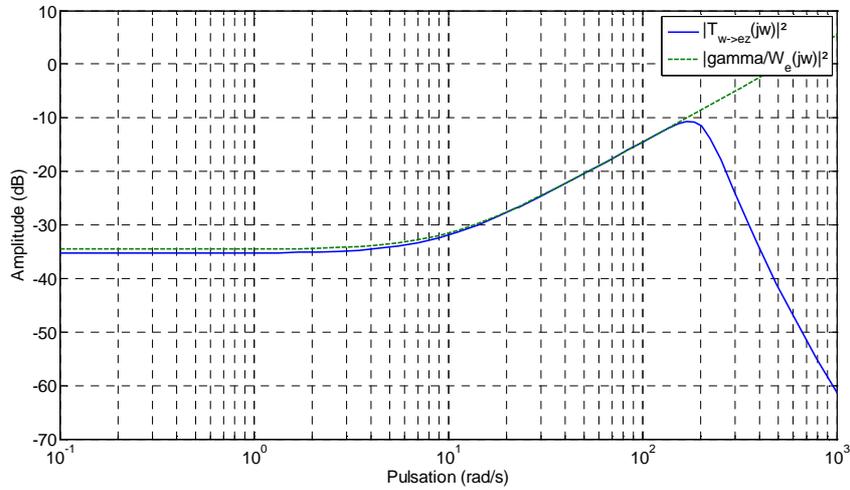
Des figures Figure II-18 et Figure II-19, il ressort qu'on devrait s'attendre à une qualité et une précision sur la dérivée meilleure pour  $G_F(s)$  que pour  $G_p(s)$ .

La fonction de pondération a été introduite afin de permettre de « façonner » la DSP de l'erreur d'estimation tel que

$$|T_{w \rightarrow e_z}(j\omega)|^2 < \frac{\gamma^2}{|W_e(j\omega)|^2} \quad \forall \omega \quad (\text{II.109})$$

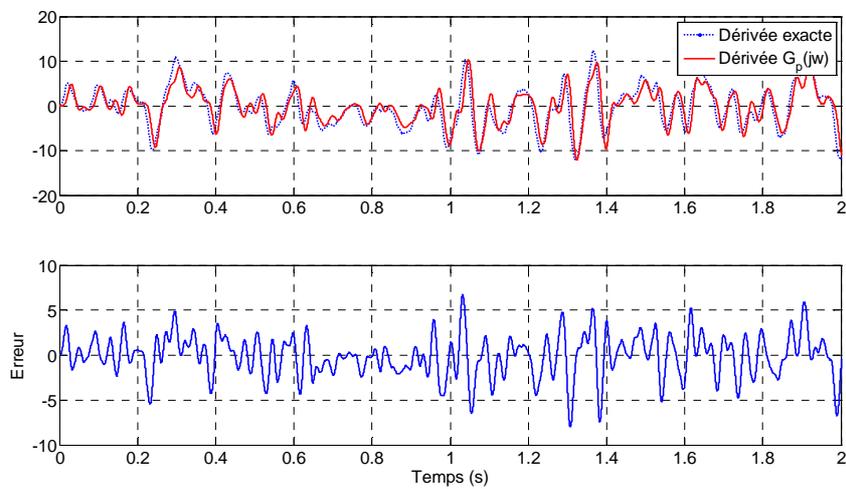
Pour visualiser l'effet de cette pondération, on dresse dans la *Figure II-20* les fonctions

$$\left|T_{w \rightarrow e_z}(j\omega)\right|^2 \text{ et } \frac{\gamma^2}{\left|W_e(j\omega)\right|^2}.$$

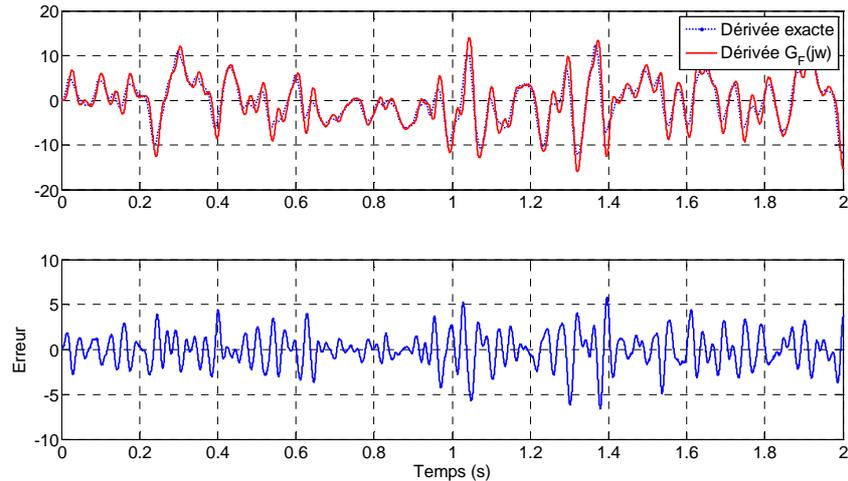


**Figure II-20 :** Fonction de pondération  $W_e$

Pour le même signal défini dans la *section II.6*, les réponses temporelles des observateurs  $G_p(s)$  et  $G_F(s)$  sont données par les figures suivantes.



**Figure II-21 :**  $G_p(s)$  : sortie et erreur de dérivation



**Figure II-22 :**  $G_F(s)$  : sortie et erreur de dérivation

A partir des deux figures précédentes, on note les erreurs de dérivation maximales et moyennes obtenues qui sont résumées dans le tableau suivant :

Dérivateur	Erreur moyenne	Erreur maximale
Filtre $H_\infty : G_p$	$88.3 \times 10^{-3}$	6.71
Filtre $H_\infty : G_F$	$17.7 \times 10^{-3}$	5.80

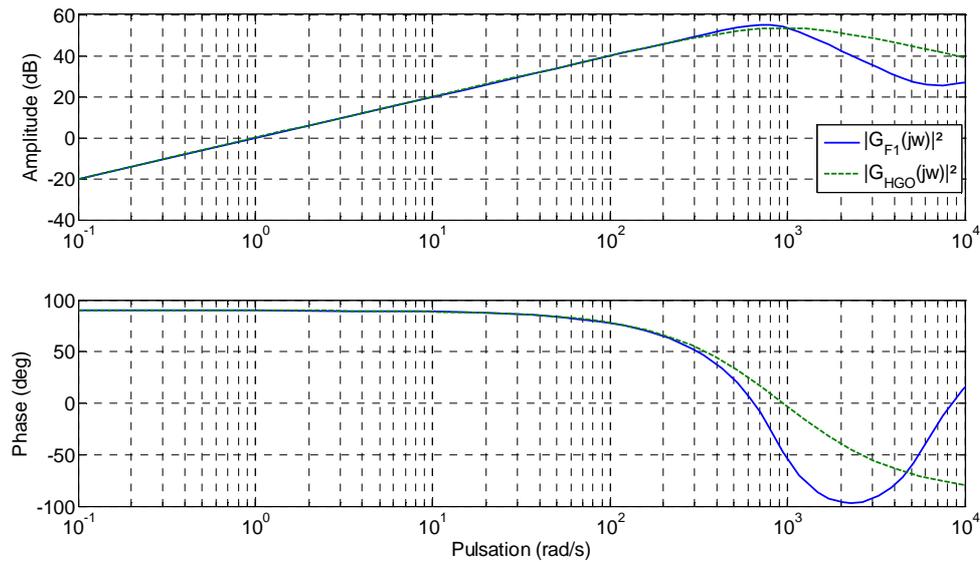
**Tableau II-2 :** Comparaison d'algorithmes

Comparaison faite entre ces deux approches pour l'estimation de la dérivée, il apparaît ainsi clairement que l'approche par optimisation d'une norme  $H_\infty$  pondérée fournit une meilleure précision pour l'estimation de la dérivée.

Cependant, pour la comparer aux résultats des techniques linéaires par observateur grand gain et filtrage de Kalman, celle-ci doit être objective et effectuée dans le même cadre. En effet, pour le cas de l'observateur grand gain, sa bande passante a été prise à une valeur supérieure de celle du signal à dériver. Ce choix a été commenté et justifié par l'amélioration de la précision de l'estimation (voir paragraphe II.6).

Ainsi, pour une comparaison entre l'observateur grand gain et le filtre par optimisation  $H_\infty$  pondérée, ce dernier est conçu de manière à ce que le signal à dériver ait été modélisé comme étant un signal à plus large bande passante qu'il n'en est réellement. Ceci est fait également dans le but d'élargir la bande de dérivation et de diminuer le déphasage. Dans ce cas, la bande passante du signal est prise telle que  $w_0 = 300\pi$ , la même bande passante que pour l'observateur par placement de pôles (Figure II-5).

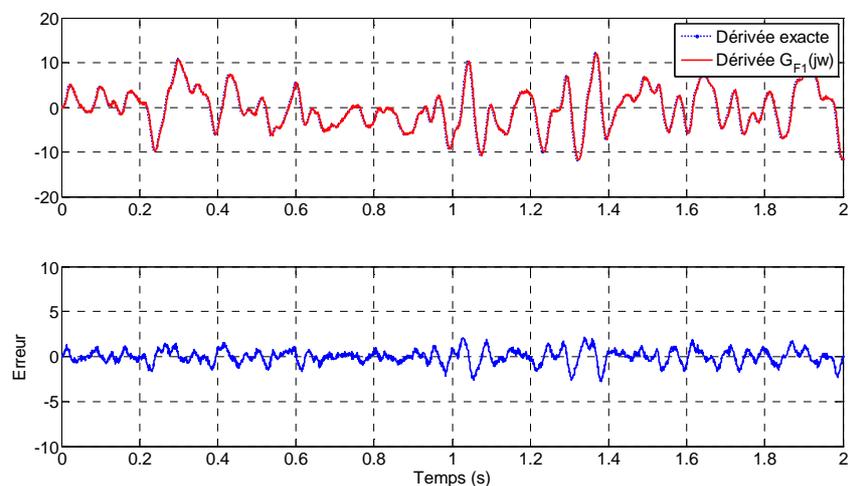
Une première comparaison des réponses fréquentielles du filtre  $G_{F1}$  et de l'observateur par placement de pôles  $G_{OPP}$  pour  $w_0 = 300\pi \text{ rad.s}^{-1}$  est donnée par la Figure II-23.



**Figure II-23 :** Réponses fréquentielles  $G_{OPP}$  et  $G_{F1}$

La réponse fréquentielle montre que le filtre  $G_{F1}$  et  $G_{OPP}$  ont le même comportement dérivateur sur la plage de fréquences du signal utile à dériver. Au-delà de cette plage de fréquences,  $G_{F1}$  amplifie moins les composantes fréquentielles que  $G_{OPP}$ , d'où un meilleur filtrage du bruit. En contre partie, le déphasage est plus important mais ceci reste limité aux fréquences où le rapport signal/bruit est défavorable.

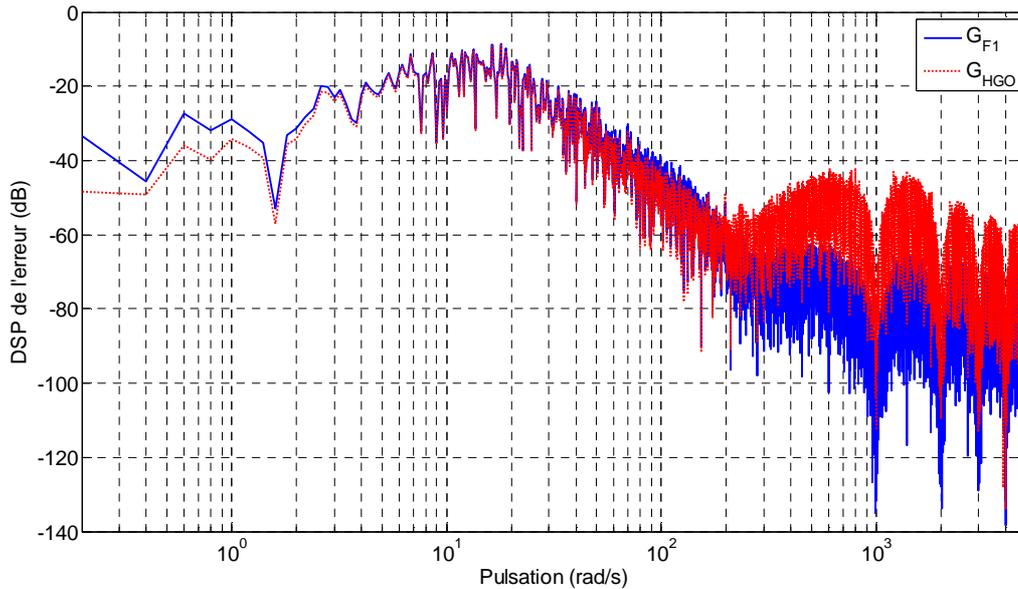
Pour le même signal d'entrée, la sortie du filtre  $G_{F1}$  et l'erreur absolue de dérivation associée sont données dans la figure suivante.



**Figure II-24 :**  $G_{F1}$  : Sortie et erreur de dérivation

Dans la suite, le filtre  $H_\infty$  qu'on considérera est le filtre  $G_{F1}$ .

L'approche de synthèse de dérivateur par optimisation d'une norme  $H_\infty$  pondérée a introduit une contrainte fréquentielle quant à la DSP du signal d'erreur. Il serait alors intéressant de considérer un critère fréquentiel pour estimer la qualité de la dérivée d'une méthode par rapport à une autre. Pour cela, on se propose de tracer la DSP des signaux d'erreurs de  $G_{F1}$  et  $G_{HGO}$ .



**Figure II-25 :** DSP des erreurs d'estimation

De cette figure, la DSP des erreurs des deux dérivateurs sont équivalentes sur la bande de fréquences du signal à dériver. Dans les fréquences supérieures, assimilées aux bruits, le dérivateur  $G_{F1}$  atténue plus ces composantes spectrales. Ceci était déjà visible à partir de la réponse fréquentielle des filtres.

En guise de synthèse, les résultats fournis par les différents dérivateurs linéaires (observateur par placement de pôles, le filtre de Kalman, filtre  $H_\infty$ ), dont il a été question dans ce chapitre, sont résumés dans le tableau suivant :

Dérivateur	Erreur moyenne	Erreur maximale
Observateur par placement de pôles	$12.5 \times 10^{-3}$	2.46
Filtre de Kalman	$28.6 \times 10^{-3}$	3.44
Filtre $H_\infty$	$17.3 \times 10^{-3}$	2.15

**Tableau II-3:** comparaison des algorithmes

On observe bien, à partir du tableau précédent, que le filtre  $H_\infty$  est le dérivateur donnant les meilleurs résultats, en termes de précision. Cette conclusion reste évidemment valable dans le cas des critères choisis précédemment et ne peut être généralisée et formulée d'une manière absolue. En effet, il serait prétentieux de notre part de statuer définitivement sur la qualité d'une méthode par rapport à une autre. De même, le signal d'erreur du dérivateur  $G_{OPP}$  semble, à vue d'œil, plus chahuté que celui du dérivateur  $G_{F1}$ . Ceci rejoint la conclusion faite à partir de l'observation de la DSP de l'erreur des deux dérivateurs en question (*Figure II-25*).

## II.8 Conclusion

Dans cette section, des algorithmes d'observation linéaires, appliqués à la dérivation, ont été présentés. Ces techniques offrent chacune une approche différente au problème. Ces approches sont alors toutes basées sur des propriétés intrinsèques qu'on rencontre dans le critère de convergence associé et une information a priori exploitée pour l'optimisation du réglage de l'observateur. De plus, elles offrent des niveaux de complexité de réglage différents.

L'observateur grand gain nécessite la connaissance de la bande passante du signal à dériver pour le réglage du gain de l'observateur pour une convergence asymptotique de l'erreur d'estimation. C'est la méthode la plus simple à régler vu qu'elle exploite une information de nature spectrale (borne supérieure sur le spectre du signal utile à dériver) pour l'optimisation de la précision de l'estimation de la dérivée. Dans un cadre pratique, l'accès à cette information est possible à travers soit des essais de caractérisation de signaux soit extraites des propriétés du système sur lequel sont récupérés les signaux à dériver. A titre d'exemple, si on désire dériver la position pour calculer une vitesse, le spectre du signal de position est directement lié à la dynamique de celle-ci sur le système. Cependant, pour une performance optimale, le signal à dériver et les bruits de mesures sont supposés être à supports disjoints.

L'observateur de Kalman exploite des propriétés stochastiques sur les bruits de mesures et d'état pour la synthèse du gain optimal par résolution d'une équation de Riccati afin de garantir la minimisation de la variance de l'erreur d'estimation. On a également montré que celui-ci est l'équivalent stochastique de la mise en œuvre d'observateur par optimisation d'une norme  $H_2$  qui est réglé en fonction de la DSP du bruit de mesure. Le réglage de cet observateur est plus délicat. Le bruit de mesure pourrait être pratiquement extrait par des essais de caractérisation de signaux ou extrait des propriétés du capteur mesurant le signal à dériver. Cette technique est intéressante dans le sens où, et contrairement à l'observateur grand gain, le bruit de mesure est supposé être un signal type bruit blanc qui est un signal à spectre constant s'étendant sur « toutes » les fréquences. Le bruit d'état est, quant à lui, plus délicat à déterminer et est, pratiquement, déterminé par essais successifs.

Une autre approche basée sur l'optimisation d'une norme  $H_\infty$  pour la synthèse d'observateur a été proposée dans ce chapitre. Le modèle du signal à dériver et des bruits de mesure y est utilisé pour l'optimisation du gain de l'observateur. Cette modélisation est donnée en termes de description d'une borne supérieure sur la DSP de ces signaux. Aussi, cette technique a été mise en œuvre pour différentes structures d'observateurs alternatives. Elle permet d'introduire une contrainte supplémentaire sur la gabarit de la DSP du signal d'erreur d'estimation et permet ainsi de « façonner » celle-ci en fonction du cahier des charges.

Dans ce qui suit, on poursuit notre investigation dans un cadre non linéaire. Des techniques d'observation non linéaires seront étudiées et appliquées à la dérivation de signaux. Ces techniques sont des techniques reposant sur la théorie des modes glissants et trouvent leur intérêt dans l'introduction d'une nouvelle approche de convergence qu'est la convergence en

temps fini. De plus, il pourrait s'avérer utile d'exploiter un éventuel potentiel des fonctions non linéaires pour l'amélioration de la précision de l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré.

Dans un premier temps, on commence par présenter le cadre général des modes glissants, les techniques d'observation associées et les principales méthodes pour l'estimation de la dérivée d'un signal par ces approches. Dans cette optique, on continuera par proposer une méthode de réglage adaptatif des paramètres d'un algorithme de dérivation par modes glissants. Ceci présente l'intérêt de s'affranchir de la complexité de réglage de ces algorithmes.



## **Chapitre III Observateurs non linéaires et dérivation**



### III.1 Introduction

Après avoir présenté les techniques linéaires pour l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré, on s'intéresse, dans ce chapitre, à une approche non linéaire du problème basée sur la théorie de commande à structure variable par modes glissants. La motivation de l'adoption d'approches non linéaires au problème de dérivation vient principalement de l'éventualité d'une amélioration des performances, en termes de précision d'estimation, que pourrait apporter l'exploitation de fonctions non linéaires dans l'estimation de la dérivée d'un signal. En ce qui concerne les algorithmes de dérivation par approche modes glissants, son intérêt majeur réside dans le fait qu'elle permet d'introduire une nouvelle notion dans la convergence des algorithmes étudiés : la convergence en temps fini.

Dans le cadre linéaire dans lequel on s'est placé dans le chapitre précédent, la notion de convergence de l'algorithme est une notion asymptotique (observateur par placement de pôles) ou donnée en termes de norme (observation  $H_2$  et observation  $H_\infty$ ) et on ne sait pas, à notre connaissance, parler de convergence en temps fini dans un cadre linéaire.

Initialement élaborées pour la synthèse de commande [76, 77], ces techniques sont basées sur la commutation de la commande autour d'une surface, appelée « surface de glissement » [78, 79], définie par une fonction des variables d'état. La commande discontinue est synthétisée de manière à contraindre le système à atteindre cette surface et à y rester par la suite. Cette surface une fois atteinte, le système est dit en « régime glissant » et sa dynamique est forcée à suivre celle fixée par l'équation de la surface. Le principal intérêt de ces techniques vient du fait qu'une fois en régime glissant, le système est insensible aux incertitudes paramétriques et aux perturbations extérieures [80].

Comme on va le préciser dans ce qui suit, certains algorithmes de commande par modes glissants peuvent être la base d'algorithmes de différentiation moyennant un choix particulier du système commandé et de la surface de glissement associée [16].

Cependant, comme dans le cas de la majorité des algorithmes de différentiation, la robustesse et la précision de l'algorithme face aux bruits de mesure est tributaire d'un réglage précis des paramètres. Ce réglage est alors dépendant de certaines caractéristiques des signaux d'entrée ou de perturbations et une précision optimale ne peut être garantie pour tous les signaux avec un même réglage. Dans ce cadre, les approches adaptatives au problème [81, 82, 83] permettent de s'affranchir de cette contrainte en introduisant un « mécanisme » d'adaptation des paramètres en temps réel, régi par une loi prédéfinie, dépendante de l'erreur d'estimation sur certains signaux et, de manière indirecte, du niveau du bruit et du signal à dériver.

Conformément à la présentation adoptée pour les dérivateurs linéaires dans les chapitres précédents, un effort de clarification sera apporté dans ce chapitre pour présenter les dérivateurs non linéaires par modes glissants d'un point de vue « observation ». En effet, dans la majeure partie de la littérature associée aux dérivateurs non linéaires, ceux-ci sont présentés comme des dérivateurs indépendants de tout modèle de signaux et le lien, quasi permanent, avec l'observation n'y est pas forcément explicité.

Par soucis de clarté, on entame ce chapitre par l'introduction de la théorie de commande par modes glissants et ses concepts de base pour passer ensuite, à la présentation des algorithmes de dérivation basés sur cette même technique. Par la suite, on montre comment ces algorithmes de commande peuvent être la base de développement d'algorithmes de dérivation qui peuvent, à leur tour, être écrits comme des observateurs pour des modèles de signaux

donnés. La question de l'adaptation en temps réel des réglages des algorithmes de dérivation non linéaires est soulevée et une proposition d'approche au problème sera introduite ensuite. Des essais en simulation sont introduits par la suite pour l'estimation de la précision de ces algorithmes. Une comparaison sera effectuée en dernier lieu avec les résultats fournis par les algorithmes de dérivation linéaires présentés dans le chapitre précédent.

### III.2 Généralités sur les modes glissants

Les commandes par modes glissants sont classées en deux catégories majeures :

- Commandes par modes glissants classiques ou modes glissants d'ordre 1 ;
- Commandes par modes glissants d'ordres supérieurs.

Dans un premier temps, on va se limiter aux algorithmes de commande par modes glissants classiques (d'ordre 1) pour passer ultérieurement aux modes glissants d'ordre supérieur.

Commençons par considérer le système non linéaire défini par la dynamique

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t, u(t)) \quad (\text{III.1})$$

Où  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  représente l'état du système et  $u \in \mathbb{R}$  l'entrée de commande.

Le problème de synthèse de commande par modes glissants se fait en deux temps : dans un premier temps, la surface de glissement définie par

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / s(x, t) = 0\} \quad (\text{III.2})$$

fixant la dynamique de glissement désirée, est déterminée. Cette surface traduit la trajectoire à imposer par la commande à l'état du système (III.1).

#### ***Définition III-1*** [84]

On dit qu'il existe un régime glissant d'ordre un idéal sur  $s$  s'il existe un temps fini  $t_s$  tel que la solution de (III.1) satisfait  $s(x, t) = 0$  pour tout  $t > t_s$ .

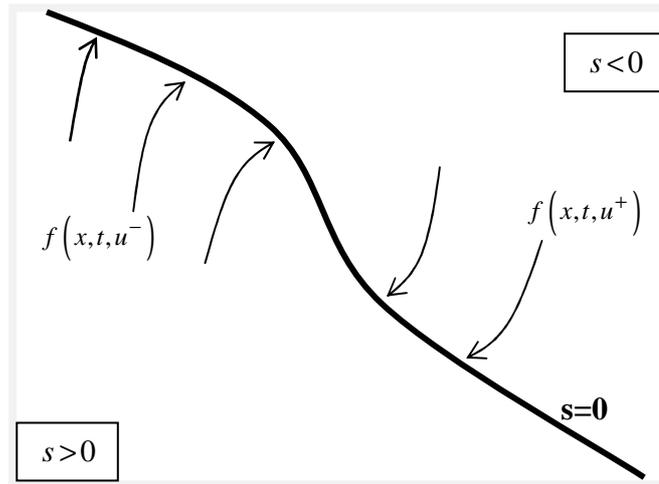
■

Dans un second temps, une commande discontinue est calculée. Celle-ci doit rendre la surface (III.2) attractive, ce qui équivaut à contraindre l'état du système à atteindre et à rester sur la surface  $S$ . La commande par modes glissants consiste à synthétiser une loi de commande discontinue définie par

$$\begin{cases} u^+(x, t) & \text{si } s(x, t) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{si } s(x, t) < 0 \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

où  $u^+(x, t)$  et  $u^-(x, t)$  sont des fonction continues. La fonction  $s(x, t)$ , qui définit la surface de glissement, est alors une fonction continue qui divise l'espace d'état en deux régions :  $\{x \in \mathbb{R}^n / s(x, t) > 0\}$  et  $\{x \in \mathbb{R}^n / s(x, t) < 0\}$ .

Elle peut être une fonction linéaire ou non linéaire [79, 85] et doit être convenablement choisie en fonction du problème.



**Figure III-1 :** Attractivité de la surface de glissement dans le plan de phase  $(s, \dot{s})$

L'attractivité de la surface est assurée si et seulement si les vecteurs  $f(x,t,u^+)$  et  $f(x,t,u^-)$  sont orientés l'un vers l'autre d'où l'assurance de l'apparition du mode glissant.

Pour l'existence du régime glissant, la surface  $S$  doit être attractive en tout point de l'espace d'état. Ceci est assuré si, au voisinage de la surface  $S$ ,  $s$  et sa dérivée  $\dot{s}$  sont de signes opposés.

L'attractivité de  $S$ , d'où l'existence du régime glissant, pour le système non linéaire (III.1), peut être étudiée par la méthode directe de Lyapunov [86] pour la stabilité des systèmes non linéaires. Sous certaines hypothèses [86], il suffit alors de trouver une fonction  $V(s)$  définie positive et dont la dérivée  $\dot{V}$  est telle que  $\dot{V}(s) < 0 \quad \forall s \neq 0$ .

Ces hypothèses étant satisfaites dans le cas d'une fonction quadratique, cette fonction est généralement définie par  $V(s) = \frac{1}{2}s^2$  et pour l'apparition du régime glissants, il suffit que la dérivée  $\dot{V}(s) < 0 \quad \forall s \neq 0$  ce qui revient à garantir  $s\dot{s} < 0$ .

### III.3 Synthèse de commande par modes glissants

Dans ce qui suit, on s'intéresse désormais à la synthèse de commande par modes glissants. Pour cela, considérons les systèmes non linéaires affines en la commande définis par

$$\dot{x} = f(x,t) + g(x,t)u \quad (\text{III.4})$$

Avec  $x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  l'état du système et  $u \in \mathbb{R}$  son entrée de commande.

#### III.3.1 Commande par modes glissants d'ordre 1

Pour la synthèse de commande par modes glissants classiques, on introduit dans la suite la méthode de la commande équivalente.

Supposons que l'état initial  $x_0$  du système (III.4) est tel que  $s(x_0, t_0) = 0$  et que l'évolution du système est maintenue sur cette surface tel que  $s(x, t) = 0$  pour  $t > t_0$ .

**Théorème III-1** [84]

Un régime glissant d'ordre un existe sur la surface  $S$  si et seulement si le système (III.4) est de degré relatif un par rapport à la variable de glissement  $S$ .

■

Le degré relatif d'une surface par rapport à la commande traduit l'ordre de la dérivée de la surface au cours duquel la commande apparaît pour la première fois [87].

Pour la synthèse de commande par la méthode de la commande équivalente, et dans le cas de l'existence d'un régime glissant d'ordre 1, le système est admis être commandé par une commande équivalente  $u_{eq}$  qui assure l'invariance de la surface  $S$  dans le temps tel que  $s(x, u_{eq}, t) = 0$  et  $\dot{s}(x, u_{eq}, t) = 0$ .

Pour la synthèse de cette commande, la dérivée de l'équation de la surface de glissement est donnée par

$$\dot{s}(x, t) = \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial s(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} (f(x) + g(x)u_{eq}) + \frac{\partial s(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{III.5})$$

en supposant la non singularité du terme  $\left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x)\right) \forall x \in \mathbb{R}$ , la solution  $u_{eq}$  de l'équation (III.5) est alors donnée par

$$u_{eq} = -\left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x)\right)^{-1} \left(\frac{\partial s}{\partial x} f(x) + \frac{\partial s}{\partial t}\right)$$

Cette commande décrit le glissement idéal, en absence de perturbation, et garantit ainsi l'attractivité de la surface. Pour donner un caractère « robuste » à cette dernière, un bouclage discontinu est ajouté à la commande équivalente afin d'assurer la convergence vers la surface de glissement et de contrecarrer les effets des perturbations. Ainsi, la commande par modes glissants d'ordre 1 se compose de la commande équivalente  $u_{eq}$  et d'un terme discontinu. On a dans ce cas :

$$u = u_{eq} - K \left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x, t)\right)^{-1} \text{sign}(s) \quad (\text{III.6})$$

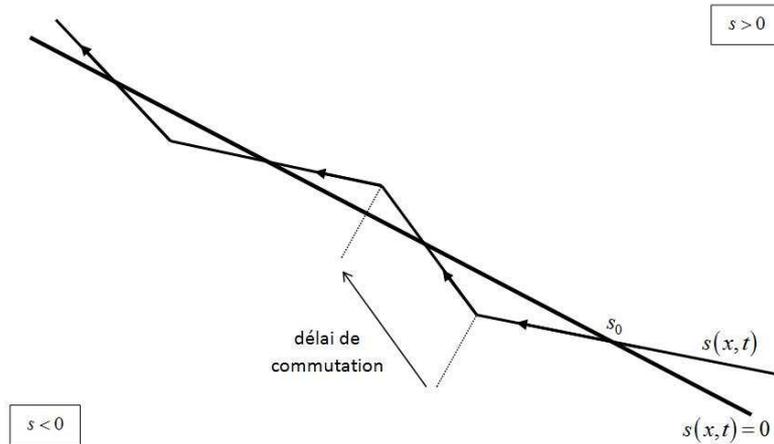
avec  $K > 0$  une constante et la fonction  $\text{sign}(\cdot)$  est définie par

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Dans la littérature, une fonction signe, notée  $\text{sign}(\cdot)$ , peut être rencontrée. Celle-ci est la même que la fonction signe (III.7) sauf qu'elle est considérée indéfinie en 0.

Les commandes par modes glissants classiques souffrent, malgré leur simplicité et leur robustesse [16, 80], d'un inconvénient majeur qui est le phénomène de réticence ou *Chattering* inhérent.

En effet, dans un régime glissant idéal, la fonction discontinue dans la commande (III.6) est supposée commuter avec une fréquence infinie. Cependant, dans la réalité pratique, il est impossible de générer, numériquement avec un organe de commande, une commutation avec une fréquence infinie ce qui tend à introduire un délai entre deux commutations successives et la *Figure III-2* montre leur contribution dans l'apparition du phénomène.



**Figure III-2:** Phénomène de *Chattering*

Dans le cadre d'un régime glissant idéal, la trajectoire  $s(x,t)$  coupe la surface  $S$  dans le point  $s_0$  et le mode glissant apparaît dès lors. Dans le cas de présence d'un retard de commutation, la trajectoire de  $s(x,t)$  traverse la surface  $S$  et passe dans la région où  $s(x,t)$  est de signe opposé. A la commutation, le sens de la trajectoire est inversé et le régime glissant est établi. Cette commutation autour de la surface au voisinage de  $S$  représente le phénomène de *Chattering*.

Ces commutations détériorent la précision de la commande et peuvent s'avérer néfastes pour l'organe de commande en provoquant une détérioration prématurée des systèmes mécaniques et une élévation de température dans les systèmes électriques.

Pour pallier au phénomène de *Chattering*, une approche a été introduite. Dans celle-ci, le régime glissant n'est plus porté par la surface  $s$ , mais par une couche limite (Boundary Layer) au voisinage de la surface  $s$  [88, 89]. Ceci est fait en remplaçant la fonction  $sign(\cdot)$  dans la commande par une approximation continue de celle-ci dans un proche voisinage de  $s$ . Parmi ces fonctions, on cite la fonction *arctangente*, *tangente hyperbolique*, la fonction *pseudo-signe* [84] et usuellement la fonction *saturation* définie par

$$sat(x, \varepsilon) = \begin{cases} sign(x) & si |x| > \varepsilon \\ \frac{x}{\varepsilon} & si |x| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (III.8)$$

Dans ce cas, pour une bonne précision de la commande,  $\varepsilon$  est choisi le plus faible possible et il apparaît clairement que si  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $sat(\cdot) \rightarrow sign(\cdot)$ . En introduisant la fonction  $sat(\cdot)$ , l'objectif de la commande n'est plus de stabiliser l'origine  $s = 0$ , mais plutôt de maintenir la trajectoire dans une bande frontière. Cette dernière solution permet en effet un gain en terme de réduction de l'amplitude du *Chattering*, mais elle induit cependant une perte en terme de robustesse et de temps de convergence [16, 86].

### III.3.2 Commande par modes glissants d'ordre supérieur

L'approche de commande par modes glissants classiques est une méthode connue pour sa robustesse par rapport à certains types d'incertitudes. Cependant, elle souffre d'un inconvénient inhérent à cette technique qui est le phénomène de *Chattering*. Bien que les solutions présentées dans la section II.3.1 aident à limiter ce phénomène, elles induisent cependant une dépréciation des performances de la commande en termes de précision et de rapidité.

Une alternative au problème des modes glissants classiques, est basée sur la théorie de la commande par modes glissants d'ordre supérieur [90, 91]. Dans cette approche, dans la commande synthétisée, le terme discontinu n'apparaît plus directement dans celle-ci mais dans une de ses dérivées supérieures ce qui a le mérite de réduire le *Chattering*.

Les modes glissants d'ordre supérieur ont été introduits pour pallier au problème de *Chattering* tout en gardant les propriétés de convergence en temps fini et de robustesse des commandes par modes glissants classiques.

Considérons le système non linéaire affine en la commande défini par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t) + g(x(t), t)u(t) \\ y(t) = h(x(t), t) \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  représente l'état du système et  $u \in \mathbb{R}$  la commande et  $f(x, t)$  une fonction supposée suffisamment différentiable.

Pour une fonction de glissement  $s(x, t)$  donnée, une commande par mode glissants d'ordre  $r > 1$  génère un régime glissant d'ordre  $r$  par rapport à  $s(x, t)$ .

#### ***Définition III-2 : Régime glissant d'ordre $r$***

Soit le système non linéaire (III.9) et la fonction de glissement  $s(x, t)$  associée. L'ensemble de glissement d'ordre  $r$  ( $r \in \mathbb{N}$ ) par rapport à la fonction de glissement est défini par

$$S^r = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / s = \dot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0 \right\} \quad (\text{III.10})$$

De même que dans le cas des modes glissants classiques, pour la synthèse d'une commande équivalente, on peut considérer qu'en régime glissant, le système est régi par une commande équivalente qui est solution de l'équation

$$s^{(p)}(t, x, u_{eq}) = 0$$

où  $p \leq r$  est le degré relatif de la surface par rapport à la commande. Dans ce cas, la commande discontinue apparaît dans  $u^{(r-p)}$ . La commande appliquée au système est alors un signal continu, sortie d'une cascade de  $(r - p)$  intégrateurs.

On s'intéresse dans ce qui suit aux algorithmes de commande par modes glissants d'ordre 2. D'après ce qui a été précédemment défini, un tel algorithme génère un régime glissant d'ordre 2 tel que l'on obtient en temps fini

$$s = \dot{s} = 0$$

Dans la littérature [76, 90], plusieurs algorithmes modes glissants d'ordre 2 ont été introduit. Parmi ces algorithmes, on note :

- Algorithme du Twisting [92] ;
- Algorithme du Super Twisting [90] ;
- Algorithme  $A-\mu$  [90] ;
- Algorithme avec une loi de convergence prédéfinie [16].

Dans la suite de ce travail, on va s'intéresser aux algorithmes de commande par modes glissants d'ordre 2 et spécifiquement l'algorithme du Super Twisting.

Pour l'application d'une loi de commande par modes glissants d'ordre 2, le degré relatif du système par rapport à la surface de glissement doit être au plus égal à 2. Dans ce cas, deux cas de figure se présentent.

En supposant le système (III.9) de degré relatif 1 par rapport à la surface de glissement, on obtient par dérivations successives

$$\ddot{s} = \alpha_1(x, t) + \beta_1(x, t)\dot{u} \quad (\text{III.11})$$

En supposant  $\alpha_1(x, t)$  et  $\beta_1(x, t)$  des fonctions bornées telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, |\alpha_1(x, t)| \leq C_0 \quad (\text{III.12})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, 0 < K_m < \beta_1(x, t) < K_M \quad (\text{III.13})$$

dans ce cas, l'entrée  $w = \dot{u}$  est considérée comme la nouvelle entrée du système.

De même, en supposant le système (III.9) de degré relatif 2 par rapport à la surface de glissement, on obtient par dérivations successives

$$\ddot{s} = \alpha_2(x, t) + \beta_2(x, t)u \quad (\text{III.14})$$

En supposant  $\alpha_2(x, t)$  et  $\beta_2(x, t)$  des fonctions bornées telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, |\alpha_2(x, t)| \leq C_0 \quad (\text{III.15})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, 0 < K_m < \beta_2(x, t) < K_M \quad (\text{III.16})$$

on donne alors, l'algorithme modes glissants d'ordre 2 appelé algorithme du Super Twisting qui permet d'obtenir  $s = \dot{s} = 0$  et qui est défini dans ce qui suit.

### III.3.3 Commande par modes glissants : algorithme du Super Twisting

Cet algorithme est présenté dans le cas où le système est de degré relatif 1 par rapport à la surface de glissement. La commande de cet algorithme est alors définie par

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \quad (\text{III.17})$$

où

$$\dot{u}_1(t) = -\lambda_2 \text{sign}(s(t)) \quad \text{et} \quad u_2(t) = -\lambda_1 |s(t)|^p \text{sign}(s(t))$$

et les conditions suffisantes [16] pour la convergence en temps fini de l'algorithme sont données par

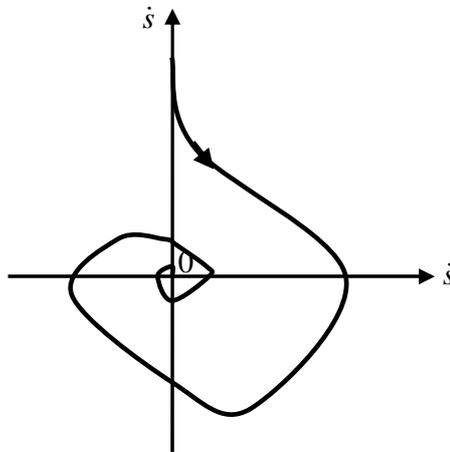
$$\lambda_2 > \frac{C_0}{K_m} \quad (\text{III.18})$$

$$\lambda_1^2 \geq \frac{4C_0}{K_m^2} \frac{K_M(\lambda_2 + C_0)}{K_m(\lambda_2 - C_0)} \quad (\text{III.19})$$

$$0 < \rho \leq 0.5 \quad (\text{III.20})$$

Dans la suite, on fixera  $\rho = 0.5$ .

La trajectoire de l'algorithme dans le plan de phase  $(s, \dot{s})$  est donnée dans la *Figure III-3* et on montre [25, 27], selon le même principe que pour la démonstration de la convergence de l'algorithme du Twisting, que cette trajectoire est confinée dans une trajectoire limite et que les intersections consécutives de celle-ci avec les axes du plan  $(s, \dot{s})$  évoluent tout en se rapprochant de l'origine qui est atteinte en temps fini.



**Figure III-3:** Convergence de l'algorithme Super Twisting dans le plan  $(s, \dot{s})$

A partir de l'expression de la commande de l'algorithme du Twisting et du Super Twisting, une première différence majeure est à signaler. En effet, l'algorithme du Twisting est un algorithme dans lequel la connaissance de la dérivée de la fonction de glissement est nécessaire à la synthèse de la commande ce qui n'est pas le cas pour l'algorithme du Super Twisting qui ne nécessite que la connaissance de cette même fonction.

Cette différence est l'argument majeur pour la synthèse d'un algorithme de différentiation d'ordre 1, pour l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré, à partir de l'algorithme de commande Super Twisting.

### III.3.4 Algorithme du Super Twisting : de la commande à l'observation

Par un choix particulier du modèle et de la surface de glissement, l'algorithme de commande modes glissants Super Twisting [10, 90], peut être formulé comme un algorithme d'observation pour l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré. Son avantage majeur est qu'il ne dépend pas de la dérivée  $\dot{s}$  de la surface  $s$ .

Soit le choix du modèle dynamique dans lequel le signal mesuré est modélisé comme étant la sortie d'un double intégrateur défini par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = w \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

où  $x = [x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$  est l'état du système et  $w$  une entrée inconnue caractérisée par des hypothèses qu'on donnera dans ce qui suit. Le sortie mesurée de ce modèle est alors  $y = x_1$ .

On s'intéresse dans cette partie à la construction d'un observateur modes glissants basé sur l'algorithme de commande Super Twisting pour l'estimation de l'état du système (III.21).

### **Théorème III-2**

Soit la structure d'observateur définie par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - \lambda_1 |s|^{1/2} \text{sign}(s) \\ \dot{\hat{x}}_2 = -\lambda_2 \text{sign}(s) \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

où  $\hat{x} = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2]^T$  est l'estimé de l'état  $x$  du système (III.21), et  $s = \hat{x}_1 - y = \hat{x}_1 - x_1$ , la surface de glissement considérée.

Pour une entrée bornée  $w$  du système (III.21) telle que  $|w| < W$  et pour le réglage des paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tel que

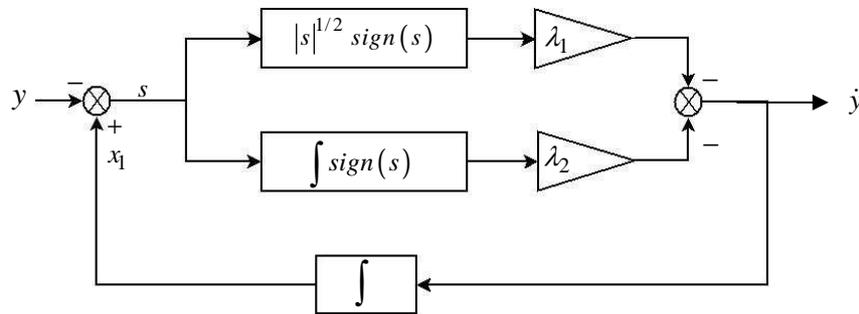
$$\lambda_2 > C \quad (\text{III.23})$$

et

$$\lambda_1 > \sqrt{2} \frac{(\lambda_2 + C)}{\sqrt{\lambda_2 - C}} \quad (\text{III.24})$$

L'état de l'observateur (III.22) converge en temps fini vers celui du système (III.21) et l'on a  $\hat{x}_1 = x_1$  et  $\hat{x}_2 = x_2$ .

■



**Figure III-4** : Schéma du Super Twisting

Ce théorème, ainsi que la démonstration qui suit sont adaptés de l'observateur Super Twisting à entrée mesurée introduit dans [25, 27]. La démonstration se fait en deux étapes. Dans un premier temps, la convergence de l'erreur d'observation vers l'origine est démontrée et, ensuite, on démontre que celle-ci s'effectue en temps fini.

### **Démonstration :**

Soient le système (III.21) et l'observateur (III.22) et soit l'erreur d'observation définie par  $e_i = \hat{x}_i - x_i$  ( $i = 1, 2$ ).

La dynamique de cette erreur est alors donnée par

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \lambda_1 |e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) \\ \dot{e}_2 = -w - \lambda_2 \text{sign}(e_1) \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

Sous l'hypothèse  $|w| \leq C$ , on peut écrire

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \lambda_1 |e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) \\ \dot{e}_2 \in [-C, C] - \lambda_2 \text{sign}(e_1) \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

Pour  $\frac{d|x|}{dt} = \dot{x} \text{sign}(x)$ , la dérivée de la première ligne de (III.26) est donnée par

$$\ddot{e}_1 \in [-C, C] - \lambda_2 \text{sign}(e_1) - \frac{\lambda_1}{2} |e_1|^{-1/2} \dot{e}_1 \quad (\text{III.27})$$

Pour la démonstration de convergence des états estimés  $\hat{x}_1$  et  $\hat{x}_2$  vers les états observés  $\hat{x}_1$  et  $\hat{x}_2$ , on démontre la convergence vers l'origine de l'erreur tel que  $e_1 \rightarrow 0$  et  $\dot{e}_1 \rightarrow 0$ .

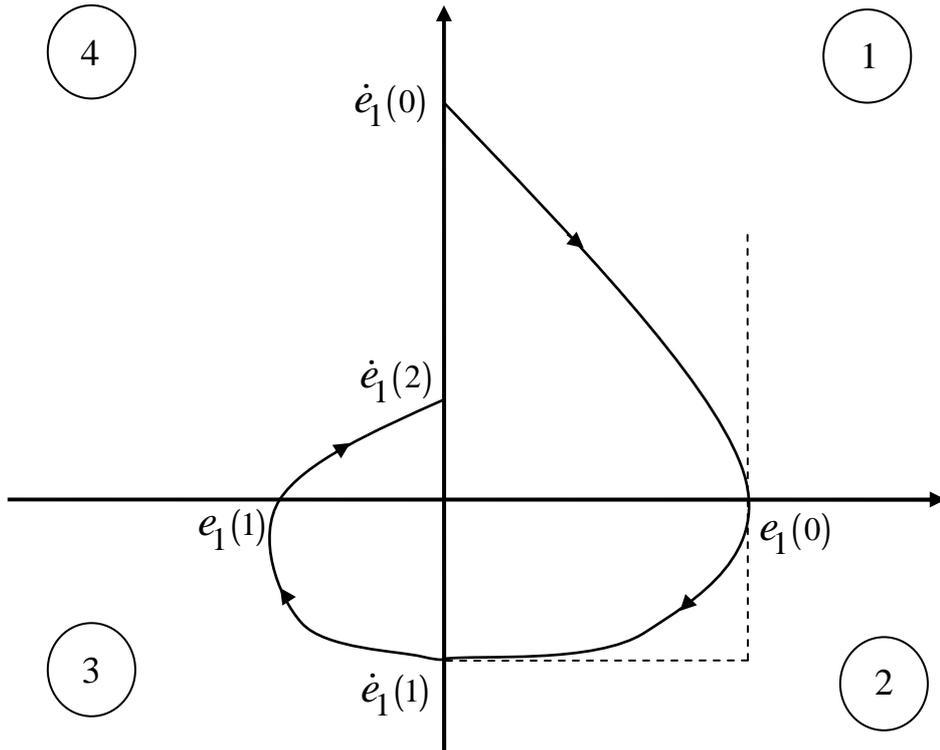
L'initialisation de l'observateur est telle que  $\hat{x}_2(0) = 0$  et  $\hat{x}_1(0) = x_1$ . Les erreurs initiales associées sont alors données par  $e_1 = 0$  et  $\dot{e}_1 = -x_2$ . Ainsi, à partir du point initial, la trajectoire  $\dot{e}_1 = f(e_1)$  dans le plan  $(e_1, \dot{e}_1)$  entre dans le quadrant  $e_1 > 0$  ou  $e_1 < 0$ , en fonction du signe de  $x_2$ . Soit le point de départ de la trajectoire  $\dot{e}_{10}$ , donné sur la *Figure III-5*.

On suppose que  $\dot{e}_1(0) > 0$  et donc, que la trajectoire de l'observateur quitte le point  $\dot{e}_1(0)$  vers le demi plan  $e_1 > 0$ .

Dans le 1<sup>er</sup> quadrant du plan de phase  $(e_1, \dot{e}_1)$ , la trajectoire reste confinée entre les droites  $e_1 = 0$  et  $\dot{e}_1 = 0$ . Dans ce cas, on vérifie bien que  $\ddot{e}_1$  est majorée par une trajectoire telle que

$$\ddot{e}_1 < C - \lambda_2$$

Dans ce cas, le choix  $\lambda_2 > C$ , correspondant à la condition de convergence (III.23), permettra de garantir que  $\ddot{e}_1 < 0$ , d'où  $\dot{e}_1$  diminue et la trajectoire tend vers l'axe  $\dot{e}_1 = 0$  du 1<sup>er</sup> quadrant qu'elle coupe au point  $e_1(0)$  (*Figure III-5*).



**Figure III-5 :** Trajectoire de convergence de l'observateur

$\ddot{e}_1 = C - \lambda_2$  étant la trajectoire majorante de  $\ddot{e}_1$  dans le 1<sup>er</sup> quadrant, on peut, par intégration, écrire la relation liant  $e_1(0)$  à  $\dot{e}_1(0)$  et qui est alors donnée par

$$e_1(0) = \frac{\dot{e}_1(0)}{2(\lambda_2 - C)}$$

et la trajectoire majorante dans ce cas est définie par

$$\dot{e}_1^2 = 2(\lambda_2 - C)(e_1(0) - e_1)$$

La trajectoire passe ensuite dans le 2<sup>ème</sup> quadrant, où  $e_1 > 0$  et  $\dot{e}_1 < 0$ . Dans ce cas, on désire faire un choix particulier sur la variable  $\lambda_1$  permettant de garantir la convergence de la trajectoire, dans ce quadrant, vers l'axe  $e_1 = 0$  et tel que  $\ddot{e}_1 < 0$ .

Pour la majoration de la trajectoire dans ce quadrant, on y procède en deux étapes. Une première majoration verticale et une seconde horizontale.

$\dot{e}_1 < 0$  garantit que, dans ce quadrant,  $e_1$  est décroissante et est donc, majorée par  $e_1 = e_1(0)$ .

Pour la limite verticale, on fait le choix du « pire cas » donné par

$$\ddot{e}_1 = -C - \lambda_2 \text{sign}(e_1) - \frac{\lambda_1}{2} |e_1|^{-1/2} \dot{e}_1$$

Pour  $\ddot{e}_1 < 0$ , on peut écrire

$$\dot{e}_1 \geq -\frac{2}{\lambda_1} (C + \lambda_2) e_1^{1/2}$$

d'où la trajectoire minorante est donnée par

$$\dot{e}_1 = -\frac{2}{\lambda_1} (C + \lambda_2) e_1^{1/2}(0)$$

et l'ordonnée du point extrême d'intersection avec l'axe  $e_1 = 0$  est donné par

$$\dot{e}_1(1) = -\frac{2}{\lambda_1}(C + \lambda_2)e_1^{1/2}(0)$$

Pour assurer la convergence dans ces conditions, on fixe  $\lambda_1$  tel que l'inégalité

$$\frac{|\dot{e}_1(1)|}{|\dot{e}_1(0)|} < 1$$

soit vérifiée. Celle-ci traduit le fait que deux intersections successives avec l'axe  $e_1 = 0$  sont de plus en plus proches de l'origine.

Celle-ci est vérifiée alors pour le choix

$$\lambda_1 > \sqrt{2} \frac{(\lambda_2 + C)}{\sqrt{\lambda_2 - C}}$$

correspondant à la condition (III.24).

En considérant la symétrie entre le 1<sup>er</sup> et le 3<sup>ème</sup> quadrant et celle du entre le 2<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> quadrant, on peut facilement montrer que les coordonnées des points d'intersection suivants  $e_1(1)$  et  $\dot{e}_1(2)$  respectivement avec les axes  $\dot{e}_1 = 0$  et  $e_1 = 0$  sont telles que :

$$e_1(1) = \frac{1}{\lambda_1^2} \left( \frac{\lambda_2 + C}{\lambda_2 - C} \right) \dot{e}_1(0)$$

et

$$\dot{e}_1(2) = \frac{2(\lambda_2 - C)}{\lambda_1^2} \sqrt{\frac{\lambda_2 + C}{\lambda_2 - C}} \dot{e}_1(0)$$

et de vérifier, ainsi, que  $\frac{|\dot{e}_1(2)|}{|\dot{e}_1(1)|} < 1$ .

D'où, les conditions de réglage des gains  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , données par (III.23) et (III.24), sont des conditions suffisantes pour garantir la convergence de l'erreur d'observation tel que  $e_1(i) = \dot{e}_1(i) = 0$  ( $i = 0, \dots, n$ ).

Une fois la convergence démontrée, on complète par la démonstration de convergence en temps fini.

Dans le 1<sup>er</sup> quadrant, en intégrant l'expression de la trajectoire majorante, donnée par  $\ddot{e}_1 = C - \lambda_2$ , on écrit

$$\dot{e}_1 = (C - \lambda_2)t + \dot{e}_1(0)$$

D'où le temps  $t(0)$  nécessaire pour aller de  $\dot{e}_1(0)$  vers  $e_1(0)$  est donné par

$$t(0) = \frac{1}{(C - \lambda_2)} \dot{e}_1(0)$$

De même, en intégrant, dans le second quadrant, la trajectoire majorante donnée par  $\ddot{e}_1 = -C - \lambda_2 - \frac{\lambda_1}{2}|e_1|^{-1/2} \dot{e}_1$  permet d'écrire

$$\dot{e}_1 = -(C + \lambda_2)t - \lambda_1 e_1^{1/2} + \lambda_1 e_1^{1/2}(0)$$

et le temps  $t(1)$  nécessaire pour aller de  $e_1(0)$  vers  $\dot{e}_1(1)$  est donné par

$$t(1) = \frac{\lambda_1 e_1^{1/2}(0) - \dot{e}_1(1)}{(C + \lambda_2)}$$

et qui est exprimé en fonction de  $\dot{e}_1(0)$  par

$$t(1) = \frac{2(C + \lambda_2) + \lambda_1^2}{(C + \lambda_2)\sqrt{2(\lambda_2 - C)}} \dot{e}_1(0)$$

En poursuivant la même procédure et en utilisant la propriété de symétrie entre le 1<sup>er</sup> et le 3<sup>ème</sup> quadrant, le temps  $t(2)$  nécessaire pour aller du point  $\dot{e}_1(1)$  au point  $e_1(1)$  est donné par

$$t(2) = \frac{-\dot{e}_1(1)}{(C + \lambda_2)} = \frac{2}{\lambda_1 \sqrt{2(\lambda_2 - C)}} \dot{e}_1(0)$$

De même, par symétrie entre le 2<sup>ème</sup> et le 4<sup>ème</sup> quadrant, le temps  $t(3)$ , nécessaire pour aller de  $e_1(1)$  vers  $\dot{e}_1(2)$  est tel que

$$t(3) = \frac{2(\lambda_2 - C) + \lambda_1^2}{\lambda_1^2(\lambda_2 - C)} \sqrt{\frac{C + \lambda_2}{\lambda_2 - C}} \dot{e}_1(0)$$

Ainsi, pour un tour complet du plan de phase, soit

$$T(1) = t(0) + t(1) + t(2) + t(3) = \Phi \dot{e}_1(0)$$

avec

$$\Phi = \frac{1}{(C - \lambda_2)} + \frac{2(C + \lambda_2) + \lambda_1^2}{(C + \lambda_2)\sqrt{2(\lambda_2 - C)}} + \frac{2}{\lambda_1 \sqrt{2(\lambda_2 - C)}} + \frac{2(\lambda_2 - C) + \lambda_1^2}{\lambda_1^2(\lambda_2 - C)} \sqrt{\frac{C + \lambda_2}{\lambda_2 - C}}$$

et le temps de convergence du tour complet est alors

$$T_c = \sum_{i=1}^{\infty} T(i) = \Phi \dot{e}_1(0) + \Phi \Gamma \dot{e}_1(0) + \Phi \Gamma^2 \dot{e}_1(0) + \Phi \Gamma^3 \dot{e}_1(0) + \dots$$

où

$$\Gamma = \frac{2(\lambda_2 - C)}{\lambda_1^2} \sqrt{\frac{C + \lambda_2}{\lambda_2 - C}} < 1$$

ce qui est ramené à la somme d'une suite géométrique telle que

$$T_c = \frac{1}{1 - \Gamma} \Phi \dot{e}_1(0)$$

**Conclusion :** l'observateur (III.22), réglé selon les conditions (III.23) et (III.24), est un observateur en temps fini pour le système (III.21). ■

Ainsi, il a été démontré que l'algorithme du Super Twisting est un observateur pour un système sous forme d'une chaîne de deux intégrateurs dont l'entrée est un signal canonique dont l'unique hypothèse est qu'il soit borné. La représentation de signaux sous forme d'une chaîne d'intégrateurs est la représentation générale considérée dans les problèmes d'observation pour l'estimation de la dérivée de signaux [3]. Ainsi, il apparaît clairement que l'observateur Super Twisting, ainsi mis en œuvre, est un algorithme de dérivation pour l'estimation de la dérivée de signaux. Ainsi, une fois de plus, un lien fort entre dérivation et observation est établi.

Dans la littérature, une nuance est faite dans la dénomination d'algorithmes pour l'estimation de la dérivée de signaux. En effet, il est commun de rencontrer le terme « différentiateur » dans le cas où le signal à dériver est modélisé comme la sortie d'une chaîne d'intégrateurs et l'observateur Super Twisting, présenté dans cette section, est souvent présenté comme un différentiateur [10].

Une autre version de dérivateur basée sur l'algorithme de commande Super Twisting a été présentée dans [10]. Dans cette approche, le signal mesuré  $y(t)$  est supposé être un signal dont la dérivée admet une constante de Lipschitz  $C > 0$  et la commande Super Twisting  $u$  (III.17) est appliquée pour le système  $\dot{x} = u$  en considérant la surface de glissement  $s = x - y$ .

Comme précédemment remarqué, l'algorithme de commande Super Twisting, algorithme modes glissants d'ordre 2, assure en temps fini,  $s = \dot{s} = 0$  en d'autres termes, obtenir en temps fini  $x = y$  et  $\dot{x} = u = \dot{y}$ . D'où la commande définie par

$$u = -\int \lambda_2 \text{sign}(s) - \lambda_1 |s|^{1/2} \text{sign}(s) \quad (\text{III.28})$$

est elle-même l'estimée de la dérivée du signal mesuré  $y$ .

Cet algorithme est alors également un dérivateur permettant l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré. L'expression de ce dérivateur est exactement la même que celle fournie par l'observateur (III.22), cependant, une différence existe dans les conditions de réglage des gains  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  pour assurer la convergence en temps fini. En effet, pour ce dernier, celles-ci sont données par

$$\lambda_2 > C \quad (\text{III.29})$$

et

$$\lambda_1^2 \geq 4C \frac{\lambda_2 + C}{\lambda_2 - C} \quad (\text{III.30})$$

Il est également prouvé qu'en présence de bruit de mesures tel que  $y(t) = y_s(t) + y_w(t)$ , où  $y_w(t)$  est un bruit borné tel que  $|y_w(t)| < \varepsilon$ , l'inégalité

$$|u(t) - y_s(t)| < b\varepsilon^{1/2}$$

est satisfaite en temps fini [10].

Dans ce qui suit, le différentiateur/observateur Super Twisting, pour l'estimation de la dérivée première d'un signal mesuré, peut être pris comme base pour la construction d'un observateur pour systèmes non linéaires donnés sous forme normale permettant l'estimation des dérivées supérieures d'un signal mesuré.

### III.4 Observateurs modes glissants

L'exploitation des propriétés, de robustesse et d'insensibilité aux variations paramétriques et aux perturbations, des modes glissants a offert une voie pour la synthèse d'observateurs. Des observateurs modes glissants basés sur des modes glissants classiques [15, 37, 93, 94] ont été introduits. Ces structures d'observateurs, basées sur un algorithme modes glissants d'ordre 1, souffrent à leur tour du problème de *Chattering* qui apparaît en présence de délais de commutation vu que la discontinuité apparaît directement dans l'état estimé. Pour réduire cet effet, on peut y procéder en remplaçant la fonction  $sign(\cdot)$  par une fonction  $sat(\cdot)$ . Une autre alternative est de construire un observateur basé sur un algorithme modes glissants d'ordre 2 [10, 25, 95].

Comme précédemment effectué, on commence, dans cette section, par présenter les résultats sur les observateurs modes glissants pour passer ultérieurement à leur application dans l'estimation de la dérivée d'un signal.

#### III.4.1 Observateur Super Twisting

Cette structure d'observateur, comme dans la majorité des observateurs modes glissants, a été proposée [14] pour les systèmes dynamiques non linéaires donnés sous la forme normale définie par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f(x) + g(x)w \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

où  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système,  $w \in \mathbb{R}$  une entrée inconnue,  $f(x)$  et  $g(x)$  deux fonctions non linéaires en  $x$  et  $y = x_1$  représente la sortie mesurée.

Pour la mise en œuvre de l'observateur Super Twisting, on introduit les hypothèses suivantes.

#### Hypothèses :

H1 : L'état du système (III.31) est uniformément borné et  $\forall t > 0 \quad |x_i(t)| < d_i \quad (i=1, \dots, n)$

H2 : L'entrée inconnue  $w(t)$  est bornée telle que

$$|w(t)| < W \quad \text{et} \quad |\dot{w}(t)| < W' \quad \forall t > 0$$

H3 :  $f(x)$  est définie telle qu'il existe des constantes  $F$  et  $F'$  vérifiant

$$|f(x(t))| < F \quad \text{et} \quad |\dot{f}(x(t))| < F' \quad \forall t > 0$$

H4 :  $g(x)$  est définie telle qu'il existe deux constantes  $G$  et  $G'$  vérifiant

$$|g(x(t))| < G \quad \text{et} \quad |\dot{g}(x(t))| < G' \quad \forall t > 0$$

Dans notre approche au problème de dérivation, le signal mesuré est modélisé par un modèle linéaire. Pour rencontrer cet objectif de modélisation dans l'application des observateurs non linéaires pour l'estimation de la dérivée, on étend ces structures d'observateurs non linéaires pour un modèle donné comme un système linéaire donné sous forme normale [87] et défini par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f(x) + w \end{cases} \quad (\text{III.32})$$

pour lequel les hypothèses H1, H2, H3 et H4 restent vérifiées.

### **Théorème III-3**

Soit l'observateur Super Twisting défini par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \tilde{x}_2 + \lambda_1 |e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \alpha_1 \text{sign}(e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = E_1 \left[ \tilde{x}_3 + \lambda_2 |e_2|^{1/2} \text{sign}(e_2) \right] \\ \dot{\hat{x}}_3 = E_1 \left[ \alpha_2 \text{sign}(e_2) \right] \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = E_{n-2} \left[ \tilde{x}_n + \lambda_{n-1} |e_{n-1}|^{1/2} \text{sign}(e_{n-1}) \right] \\ \dot{\hat{x}}_n = E_{n-2} \left[ \alpha_{n-1} \text{sign}(e_{n-1}) \right] \\ \dot{\hat{x}}_n = E_{n-1} \left[ \tilde{\theta} + \lambda_n |e_n|^{1/2} \text{sign}(e_n) \right] \\ \dot{\tilde{\theta}} = E_{n-1} \left[ \alpha_n \text{sign}(e_n) \right] \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

où  $e_i = \tilde{x}_i - \hat{x}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) représente l'erreur intermédiaire d'observation,  $\tilde{x}_1 = x_1$  et  $E_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) sont des constantes telles que

$$E_i = 1 \quad \text{si} \quad |e_j| = |\tilde{x}_j - \hat{x}_j| \leq \varepsilon \quad \forall j \leq i \quad \text{sinon} \quad E_i = 0$$

Il existe un réglage des paramètres  $\lambda_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) et  $\alpha_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) tel que (III.33) est un observateur pour le système (III.31) et telle que sa sortie  $\hat{x} = [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \dots \quad \hat{x}_n]^T$  converge en temps fini vers l'état  $x$  du système. ■

### **Démonstration**

Le signal mesuré  $x_1(t)$  est considéré comme la sortie d'un modèle dynamique dont une représentation d'état est définie par (III.31).

La démonstration de la convergence de l'erreur d'observation se fait en  $n$  étapes.

#### **Étape 1 :**

Etant donné  $\tilde{x}_1 = x_1$ , signal accessible à la mesure, l'erreur  $\tilde{e}_1$  est alors définie par

$$\begin{cases} \dot{\tilde{e}}_1 = x_2 - \tilde{x}_2 - \lambda_1 |e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) \\ \dot{\tilde{e}}_2 = \alpha_1 \text{sign}(e_1) \\ \dot{\tilde{e}}_2 = \alpha_1 \text{sign}(e_1) - E_1 \left[ \tilde{x}_3 + \lambda_2 |e_2|^{1/2} \text{sign}(e_2) \right] \\ \vdots \\ \dot{\tilde{e}}_n = E_{n-2} \left[ \alpha_{n-1} \text{sign}(e_{n-1}) \right] - E_{n-1} \left[ \tilde{\theta} + \lambda_n |e_n|^{1/2} \text{sign}(e_n) \right] \end{cases}$$

Il est remarquable que dans les deux premières lignes du système d'erreur on retrouve l'expression d'un simple observateur Super Twisting (III.22) dans lequel  $x_1$  est l'entrée mesurée et  $\tilde{x}_2$  est l'estimée de sa dérivée  $\dot{x}_2$ .

Les conditions suffisantes pour la convergence en temps fini de l'erreur  $e_1$  sont les mêmes conditions (III.29) et (III.30) données pour l'observateur Super Twisting (III.22). Celles-ci sont alors définies par les inégalités

$$\alpha_1 > d_3 \text{ et } \lambda_1^2 > 4d_3 \frac{\alpha_1 + d_3}{\alpha_1 - d_3}$$

où  $d_3$  est défini dans l'hypothèse H1.

Le choix des paramètres  $\alpha_1$  et  $\lambda_1$  étant ainsi choisi, le régime glissant d'ordre 2 apparaît après un temps fini  $t_1 > 0$  [25], et l'on a, à l'issue de cette étape

$$e_1 = \dot{e}_1 = 0$$

D'où,  $\hat{x}_1 \rightarrow x_1$ .

### **Etape 2 :**

Pour  $t > t_1$ , le réglage de l'étape précédente étant maintenu, on peut écrire  $\tilde{x}_2 = x_2$  et donc  $\dot{\tilde{x}}_2 = \dot{x}_2 = x_3$ , et la dynamique de l'erreur  $e_1$  est alors définie par

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = 0 \\ \dot{e}_2 = x_3 - \tilde{x}_3 - \lambda_2 |e_2|^{1/2} \text{sign}(e_2) \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \alpha_2 \text{sign}(e_2) \\ \vdots \\ \dot{e}_n = E_{n-2} \alpha_{n-1} \text{sign}(e_{n-1}) - E_{n-1} \left[ \tilde{\theta} + \lambda_n |e_n|^{1/2} \text{sign}(e_n) \right] \end{cases}$$

Pour la structure Super Twisting qui apparaît pour  $e_2$ , en choisissant les paramètres  $\alpha_2$  et  $\lambda_2$  selon les conditions

$$\alpha_2 > d_4 \text{ et } \lambda_2^2 > 4d_4 \frac{\alpha_2 + d_4}{\alpha_2 - d_4}$$

et l'erreur  $e_2 = \tilde{x}_2 - \hat{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$  converge et l'on obtient  $e_2 = \dot{e}_2 = 0$  d'où  $\tilde{x}_3 = x_3$  en temps fini  $t_2 > t_1$ .

La même procédure est suivie jusqu'à l'étape  $n$ .

### **Etape n :**

Après la convergence des  $n-1$  premiers états, on a pour  $t > t_{n-1}$ ,  $\tilde{x}_n = x_n$  d'où  $\dot{\tilde{x}}_n = \dot{x}_n$  et la dynamique de l'erreur d'estimation est définie par

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{e}_2 = \dots \dot{e}_{n-1} = 0 \\ \dot{e}_n = [f(x) + w] - \tilde{\theta} - \lambda_n |e_n|^{1/2} \text{sign}(e_n) \\ \dot{\tilde{\theta}} = \alpha_n \text{sign}(e_n) \end{cases}$$

Une structure Super Twisting apparaît encore dans l'équation d'erreur  $\dot{e}_n$ . Dans celle-ci, l'entrée est  $\tilde{x}_n = x_n$  et le réglage des paramètres  $\lambda_n$  et  $\alpha_n$  nécessite la connaissance d'une borne sur  $\ddot{x}_n$ . Or d'après (III.31)

$$\ddot{x}_n = \dot{f}(x) + \dot{w} \Leftrightarrow \ddot{x}_n \leq F' + W'$$

Pour la convergence de l'erreur d'observation et pour l'apparition d'un mode glissant assurant  $e_n = \dot{e}_n = 0$ , le réglage des paramètres  $\lambda_n$  et  $\alpha_n$  est alors effectué suivant les conditions

$$\alpha_n > F' + W' \quad \text{et} \quad \lambda_n^2 > 4(F' + W') \frac{\alpha_n + (F' + W')}{\alpha_n - (F' + W')}$$

**Remarque :**

Une fois la convergence de  $\hat{x}_n$  vers  $x_n$ , suite à l'établissement d'un régime glissant sur  $e_n = \dot{e}_n = 0$ , l'observateur peut être employé pour l'estimation de l'entrée inconnue  $w$ . En effet, on peut établir la relation

$$\hat{w} = \tilde{\theta} - f(\hat{x}) \quad (\text{III.34})$$

■

Le principe de cette structure d'observation est basé sur la mise en cascade d'observateurs Super Twisting « élémentaires » et la sortie d'un étage est considérée comme l'entrée du suivant. Cette structure en cascade peut être critiquable d'un point de vue structurel vu qu'elle conduit à la propagation des erreurs si celles-ci sont présentes au niveau de l'algorithme. Dans ce qui suit, on présente une structure alternative proposée pour l'estimation des dérivées supérieures d'un signal mesuré.

### III.4.2 Observateur modes glissants d'ordre supérieur adaptatif

L'observateur modes glissants d'ordre supérieur dont il est question dans cette section, est basé sur un schéma récursif de différentiateur permettant d'estimer la  $n^{\text{ème}}$  dérivée d'un signal mesuré et n'est autre qu'un schéma récursif basé sur un algorithme modes glissants [11].

Soit le système dynamique défini par la représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f(x) + w \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

où le signal mesuré  $y(t) = x_1(t)$  représentant un signal dont la dérivée  $n^{\text{ème}}$  admet une constante de Lipschitz  $C > 0$  connue.

### Lemme III-1

Soit l'observateur défini par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - \lambda_1 |\hat{x}_1 - y(t)|^{(n/(n+1))} \text{sign}(\hat{x}_1 - y(t)) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 - \lambda_2 |\hat{x}_2 - \dot{\hat{x}}_1|^{(n-1)/n} \text{sign}(\hat{x}_2 - \dot{\hat{x}}_1) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n = \hat{x}_{n+1} - \lambda_n |\hat{x}_n - \dot{\hat{x}}_{n-1}|^{1/2} \text{sign}(\hat{x}_n - \dot{\hat{x}}_{n-1}) \\ \dot{\hat{x}}_{n+1} = -\lambda_{n+1} \text{sign}(\hat{x}_{n+1} - \dot{\hat{x}}_n) = -\lambda_{n+1} \text{sign}(\hat{x}_n - \dot{\hat{x}}_{n-1}) \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

avec  $\lambda_i > 0$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) des gains positifs représentant les paramètres de réglage de l'observateur.

Avec un choix adéquat des gains  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ), l'observateur (III.36) fournit, en temps réel et en absence de bruits, une estimation exacte en temps fini de  $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$ , ...,  $y^{(n)}(t)$ .

La sortie de l'observateur (III.36) est alors  $\hat{x} = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \dots \ \hat{x}_n]$  l'estimé de l'état  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$  tel que  $\hat{x}_i(t) = y^{(i-1)}(t)$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ).

■

En présence de bruits de mesures bornés, la convergence en temps fini de l'observateur est assurée et l'erreur d'observation est alors majorée par une quantité dépendante de l'amplitude maximale du bruit [11].

La structure de l'observateur ne dépend pas explicitement de l'expression de la dynamique  $\dot{x}_n = f(x) + w$  et celle-ci est assimilée à une entrée inconnue  $\tilde{w} = f(x) + w$ .

Il est aussi facilement remarquable que, pris à l'ordre 1, cet observateur correspond à la structure Super Twisting élémentaire.

Ce dérivateur est ainsi basé sur un observateur où le modèle du signal à dériver est une chaîne d'intégrateurs. Contrairement aux observateurs linéaires, où le terme de correction dépend uniquement de l'erreur d'estimation sur la sortie mesurée, à chaque étage  $i \geq 2$  de l'observateur non linéaire, le terme de correction associé est une fonction non linéaire en fonction de l'erreur de mesure sur l'estimation de l'état courant  $x_i$  et la dérivée de l'état précédent  $x_{i-1}$ .

La principale difficulté dans la mise en œuvre de cet algorithme réside dans le choix des paramètres  $\lambda_i > 0$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ). En effet, c'est de leur valeur que dépend la précision et la qualité de l'estimation de la dérivée du signal mesuré.

Dans le cadre non linéaire de cet algorithme, il n'est pas aisé de pouvoir disposer d'une loi de réglage valable pour tous les signaux et, surtout, pour différents niveaux de bruits. En effet, le problème de l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré est toujours ramené à un compromis entre précision d'estimation et niveau de bruit au niveau du signal mesuré et le choix de valeurs importantes des paramètres peut conduire à un effet d'amplification des bruits d'où l'imprécision de l'estimation. Pour toutes ces raisons, on présente dans ce qui suit, une version adaptative de l'observateur (III.36) où les gains sont calculés et adaptés en temps réel en fonction de l'erreur tout en garantissant la convergence de l'algorithme pour ces paramètres adaptés.

Une première approche similaire au problème a été appliquée pour un différentiateur Super Twisting équivalent au différentiateur (III.36) pour  $n=1$  [65, 66, 67]. Dans ce qui suit, on présente une approche alternative et généralisée pour la construction d'un différentiateur modes glissants adaptatif d'ordre  $n$ .

#### **Théorème III-4**

L'observateur défini pour  $i = (1, \dots, n-1)$  par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = \hat{x}_{i+1} - \hat{\lambda}_i |s_i|^{\frac{(n+1-i)}{n+2-i}} \text{sign}(s_i) - K_i s_i \\ \dot{\hat{x}}_n = \hat{\lambda}_{n+1} \hat{x}_{n+1} - \hat{\lambda}_n |s_n|^{1/2} \text{sign}(s_n) - K_n s_n \\ \dot{\hat{x}}_{n+1} = -\text{sign}(s_n) \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

où les surfaces de glissement  $s_1 = \hat{x}_1 - y$  et  $s_i = \hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}$  ( $i = 2, \dots, n$ ), définissent les erreurs d'estimation des dérivées,  $K_i$  sont des gains positifs et  $\hat{\lambda}_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) les paramètres adaptés en temps réel selon les lois d'adaptation

$$\frac{d}{dt} \hat{\lambda}_i = \left[ |s_i|^{\frac{(n+1-i)}{n+2-i}} \text{sign}(s_i) \right] s_i \quad \text{pour } (i = 1, \dots, n-1) \quad (\text{III.38})$$

et

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_n \\ \hat{\lambda}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |s_n|^{1/2} \text{sign}(s_n) \\ \int_R \text{sign}(s_n) \end{bmatrix} s_n \quad (\text{III.39})$$

est un observateur pour le système (III.31) et fournit, en temps fini et en absence de bruit de mesure, l'estimation des dérivées du signal  $y(t)$  à l'ordre  $n$ . ■

#### **Démonstration**

Considérons la structure de l'observateur (III.37) et soient  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) des paramètres « fictifs » supposés fixés de manière à satisfaire la convergence de l'observateur (III.36).

Pour  $i = 1$ , la première équation de (III.37) s'écrit

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - \hat{\lambda}_1 |s_1|^{\frac{(n)}{n+1}} \text{sign}(s_1) - K_1 s_1 \quad (\text{III.40})$$

La dérivée de l'erreur  $s_1 = \hat{x}_1 - y$  est alors donnée par

$$\dot{s}_1 = \dot{\hat{x}}_1 - \dot{y} \quad (\text{III.41})$$

Soit alors  $\lambda_1$  un paramètre fictif fixé tel que l'expression

$$\dot{y} = \hat{x}_2 - \lambda_1 |s_1|^{\frac{(n)}{n+1}} \text{sign}(s_1) \quad (\text{III.42})$$

soit vérifiée.

Cette expression correspond à l'observateur non adaptatif (III.36) et cette valeur du gain  $\lambda_1$  permet ainsi une estimation exacte de la première dérivée du signal  $y$ .

En remplaçant (III.42) et (III.40) dans (III.41), cette dernière se réécrit

$$\dot{s}_1 = -\tilde{\lambda}_1 |s_1|^{\frac{(n)}{(n+1)}} \text{sign}(s_1) - K_1 s_1 \quad (\text{III.43})$$

où  $\tilde{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_1 - \lambda_1$ .

Pour la preuve de convergence, on y procède par méthode directe de Lyapunov. Pour cela, soit la fonction

$$V_1 = \frac{1}{2} (s_1^2 + \tilde{\lambda}_1^2) \quad (\text{III.44})$$

La dérivée de  $V_1$  est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= s_1 \dot{s}_1 + \tilde{\lambda}_1 \dot{\tilde{\lambda}}_1 \\ &= s_1 \left[ -\tilde{\lambda}_1 |s_1|^{\frac{(n)}{(n+1)}} \text{sign}(s_1) \right] - K_1 s_1^2 + \tilde{\lambda}_1 \dot{\tilde{\lambda}}_1 \\ &= -K_1 s_1^2 + \tilde{\lambda}_1 \left[ -|s_1|^{\frac{(n)}{(n+1)}} \text{sign}(s_1) s_1 + \dot{\tilde{\lambda}}_1 \right] \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

Etant donnée la loi d'adaptation (III.38), en la remplaçant dans (III.45), on obtient

$$\dot{V}_1 = -K_1 s_1^2 \quad (\text{III.46})$$

D'où, pour le choix tel que  $K_1 > 0$ , on assure la convergence de l'erreur d'estimation  $s_1$  telle que  $s_1 \rightarrow 0$  d'où, on obtient, en temps fini,  $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = y$ .

La même procédure décrite précédemment est adoptée pour la démonstration de la convergence en temps fini de l'erreur d'estimation  $s_i$  pour  $i = (2, \dots, n)$ .

D'une manière générale, pour tout  $j \in \{2, \dots, n-1\}$ , on commence par définir les gains  $\lambda_j$  vérifiant la convergence de l'observateur (III.36) et tels que

$$y^{(j)} = \hat{x}_{j+1} - \lambda_j |s_j|^{\frac{(n+1-j)}{(n+2-j)}} \text{sign}(s_j) \quad (\text{III.47})$$

Ensuite, pour la  $j^{\text{ème}}$  itération, on définit une fonction de Lyapunov

$$V_j = \frac{1}{2} (s_j^2 + \tilde{\lambda}_j^2) \quad (\text{III.48})$$

dont la dérivée est définie par

$$\begin{aligned} \dot{V}_j &= s_j \dot{s}_j + \tilde{\lambda}_j \dot{\tilde{\lambda}}_j \\ &= s_j \left[ \dot{\hat{x}}_j - \ddot{\hat{x}}_{j-1} \right] + \tilde{\lambda}_j \dot{\tilde{\lambda}}_j \end{aligned} \quad (\text{III.49})$$

En remplaçant alors  $\dot{\hat{x}}_j$  par son expression dans (III.37), on obtient

$$\dot{V}_j = s_j \left[ \hat{x}_{j+1} - \lambda_j |s_j|^{\frac{(n+1-j)}{(n+2-j)}} \text{sign}(s_j) - \ddot{\hat{x}}_{j-1} \right] - K_j s_j^2 \quad (\text{III.50})$$

Le résultat obtenu alors à l'itération  $(j-1)$ , permet d'écrire

$$\dot{\hat{x}}_{j-1} = y^{(j-1)} \quad (\text{III.51})$$

D'où, (III.50) se réécrit

$$\ddot{\hat{x}}_{j-1} = y^{(j)} \quad (\text{III.52})$$

On obtient ainsi, à partir de (III.52) et (III.50), l'expression

$$\dot{V}_j = s_j \left[ \hat{x}_{j+1} - \lambda_j |s_j|^{\frac{(n+1-j)}{(n+2-j)}} \text{sign}(s_j) - y^{(j)} \right] - K_j s_j^2 \quad (\text{III.53})$$

A partir de (III.47), on a

$$\hat{x}_{j+1} - \lambda_j |s_j|^{\frac{(n+1-j)}{(n+2-j)}} \text{sign}(s_j) - y^{(j)} = 0 \quad (\text{III.54})$$

D'où  $\dot{V}_j = -K_j s_j^2$  et pour  $K_j > 0$ , l'erreur  $s_j$  converge et tel que  $s_j \rightarrow 0$  d'où, on obtient, en temps fini,  $\dot{\hat{x}}_j = \hat{x}_{j+1} = y^{(j)}$  pour tout  $j \in \{2, \dots, n-1\}$ .

Pour  $i = n$ , les deux dernières lignes de (III.37) s'écrivent

$$\dot{\hat{x}}_n = -\hat{\lambda}_{n+1} \int_R \text{sign}(s_n) dt - \hat{\lambda}_n |s_n|^{1/2} \text{sign}(s_n) - K_n s_n \quad (\text{III.55})$$

et les paramètres  $\lambda_n$  et  $\lambda_{n+1}$  sont donnés tels qu'ils vérifient l'équation

$$y^{(n)} = -\lambda_{n+1} \int_R \text{sign}(s_n) dt - \lambda_n |s_n|^{1/2} \text{sign}(s_n) \quad (\text{III.56})$$

où  $s_n = \hat{x}_n - \hat{x}_{n-1}$  et ainsi on écrit

$$\dot{s}_n = \dot{\hat{x}}_n - \dot{\hat{x}}_{n-1} \quad (\text{III.57})$$

A l'issue de la précédente itération, l'égalité  $\dot{\hat{x}}_{n-1} = f^{(n-1)}$ . Ainsi, (III.57) devient

$$\dot{s}_n = \dot{\hat{x}}_n - f^{(n)} \quad (\text{III.58})$$

En remplaçant (III.55) et (III.56) dans (III.58), on obtient

$$\dot{s}_n = -\tilde{\lambda}_{n+1} \int_R \text{sign}(s_n) dt - \tilde{\lambda}_n |s_n|^{1/2} \text{sign}(s_n) - K_n s_n \quad (\text{III.59})$$

où  $\tilde{\lambda}_n = \hat{\lambda}_n - \lambda_n$  et  $\tilde{\lambda}_{n+1} = \hat{\lambda}_{n+1} - \lambda_{n+1}$

pour la fonction de Lyapunov  $V_n = \frac{1}{2} (s_n^2 + \tilde{\lambda}_n^2 + \tilde{\lambda}_{n+1}^2)$ , la dérivée  $\dot{V}_n$  est telle que

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= s_n \dot{s}_n + \tilde{\lambda}_n \dot{\tilde{\lambda}}_n + \tilde{\lambda}_{n+1} \dot{\tilde{\lambda}}_{n+1} \\ &= -K_n s_n^2 + s_n \left[ -|s_n|^{1/2} \text{sign}(s_n) s_n + \dot{\tilde{\lambda}}_n \right] + \tilde{\lambda}_{n+1} \left[ -s_n \int_R \text{sign}(s_n) dt + \dot{\tilde{\lambda}}_{n+1} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.60})$$

En remplaçant  $\hat{\lambda}_n$  et  $\hat{\lambda}_{n+1}$  dans (III.60) et dans  $\tilde{\lambda}_n$  et  $\tilde{\lambda}_{n+1}$ , on obtient

$$\dot{V}_n = -K_n s_n^2 \quad (\text{III.61})$$

D'où, le choix  $K_n > 0$ , permet de garantir la convergence de l'erreur tel que  $s_n \rightarrow 0$ . D'où, on vérifie  $\dot{\hat{x}}_n = y^{(n)}$

*Conclusion* : le différentiateur (III.37) est un différentiateur exact en temps fini d'ordre  $n$  pour l'estimation des  $n$  dérivées successives de  $y(t)$ . ■

Ces algorithmes étant définis, on s'attelle dans la section suivante à traiter les performances dans la dérivation, en termes de précision, fournies par ces techniques.

### III.5 Application à la dérivation

Dans cette partie, on présente les résultats de simulations de l'application à la dérivation des algorithmes présentés dans la *section III.4*. On s'intéresse dans ce qui suit uniquement à l'estimation de la dérivée première d'un signal mesuré modélisé comme la sortie du modèle d'état linéaire défini par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_3 = w \end{cases} \quad (\text{III.62})$$

La sortie mesurée, signal à dériver, est alors  $y = x_1$  et l'entrée inconnue  $w(t)$  est bornée telle que

$$|w(t)| < W \text{ et } |\dot{w}(t)| < W' \quad \forall t > 0$$

Dans ce chapitre, trois observateurs non linéaires ont été présentés :

- L'observateur Super Twisting (III.33) ;
- L'observateur d'ordre supérieur (III.36) ;
- L'observateur d'ordre supérieur adaptatif (III.37).

Pris à l'ordre 1, pour l'estimation de la première dérivée du signal  $y$ , les deux premiers algorithmes sont équivalents à l'observateur Super Twisting (III.25) élémentaire. L'algorithme adaptatif, pris également à l'ordre 1, donne une version adaptative du Super Twisting élémentaire. Ainsi, dans notre étude de cette section, on se limite aux deux versions classique et adaptative de l'observateur Super Twisting pour l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré.

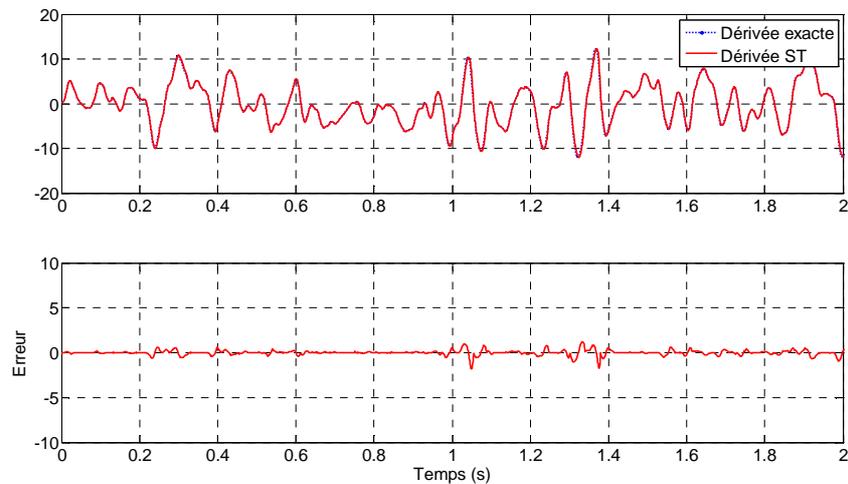
A partir du modèle (III.62), et d'une manière générale le modèle d'ordre  $n$  (III.32), on observe bien que celui-ci ne peut pas être pris de manière à considérer explicitement les modèles du signal de base à dériver  $y_s$  et le bruit de mesure  $y_b$  l'affectant comme il était le cas des techniques d'observation linéaires présentées dans le *Chapitre II*. Ceci montre la limite des observateurs non linéaires basés sur les modes glissants. Ceux-ci ne prennent en compte qu'un modèle de signal spécifique qu'est la chaîne d'intégrateurs.

Dans ce qui suit, les résultats de l'estimation de la première dérivée  $\dot{y}$  de  $y$  fournie par les différentes techniques d'observation/différentiation présentées dans la section précédente seront présentés. Une première étape de comparaison se fera entre ces techniques et sera suivie par une comparaison avec les résultats fournis par les observateurs linéaires et résumés dans la *section II.7.4*.

Pour le même signal  $y(t)$  défini dans la *section II.6*, on applique l'observateur modes glissants (III.33). Pour estimer la dérivée, l'observateur est défini par :

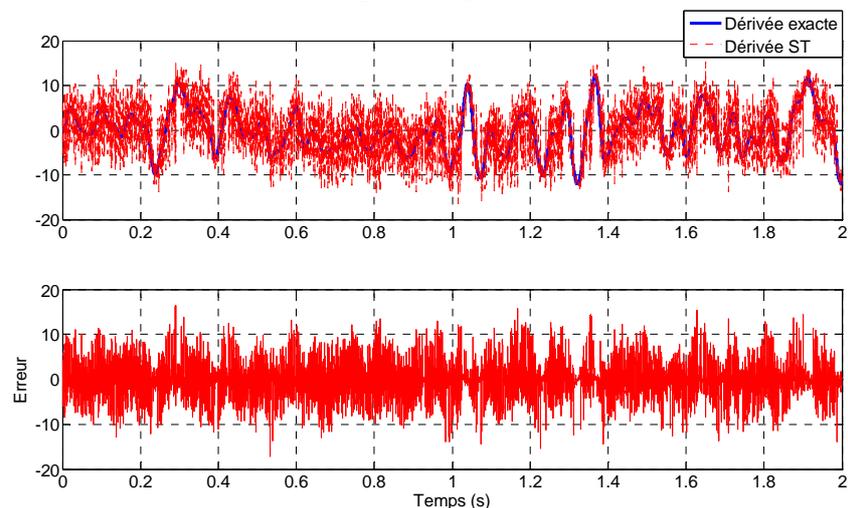
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \tilde{x}_2 + \lambda_1 |\tilde{e}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{e}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \alpha_1 \text{sign}(\tilde{e}_1) \end{cases} \quad (\text{III.63})$$

où  $\tilde{e}_1 = \tilde{x}_1 - \hat{x}_1$  définit l'erreur d'estimation pour le signal mesuré  $\tilde{x}_1 = y$ . La sortie de l'algorithme, estimée de la dérivée  $\dot{y}$ , est alors  $\hat{x}_1$ .



**Figure III-6 :** Observateur Super Twisting : sortie et erreur de dérivation ( $y_b = 0$ )

Les résultats de la *Figure III-6* ont été obtenus pour un signal à dériver  $y = y_s$  sans la composante du bruit de mesure  $y_b$  et pour un réglage  $\lambda_1 = \lambda_2 = 100$ . En effet, le réglage de l'observateur étant fait avec des gains « assez importants », ceci conduit inévitablement à l'amplification du bruit. Dans le cas où le bruit  $y_b$  n'est pas nul, les résultats des observateurs par modes glissants peuvent être rapidement détériorés et cela en fonction du niveau du bruit injecté. Pour le même bruit défini dans la *section II.6*, et pour el même réglage précédent, la sortie de l'algorithme (III.63) est donnée par la figure suivant.

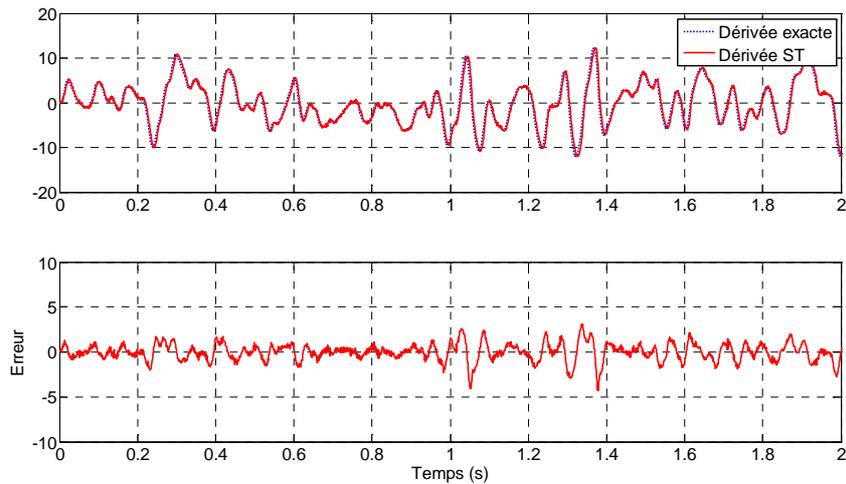


**Figure III-7 :** Observateur Super Twisting : sortie et erreur de dérivation ( $y_b \neq 0$ )

A la différence des techniques linéaires qui filtrent les bruits, l'observateur Super Twisting n'a pas de pouvoir de filtrage [81] et, en application, celui-ci est toujours précédé par un étage de filtrage. Ceci est le point principal qui différencie les observateurs non linéaires des

observateurs linéaires. En effet, comme montré dans le *chapitre Chapitre II*, les observateurs linéaires prennent explicitement en compte dans leur réglage du filtrage du bruit de mesure.

Pour observer l'effet et l'éventuelle amélioration de la précision de l'observateur Super Twisting induite par l'introduction d'un étage de filtrage en amont, un essai en simulation est effectué où le signal à dériver bruité  $y = y_s + y_b$  est filtré et le signal résultant est placé à l'entrée de l'observateur Super Twisting. Le filtre utilisé alors est un filtre Butterworth passe-bas d'ordre 3 et de bande passante  $w_0 = 300\pi \text{ rad.s}^{-1}$ . Il est cependant important de préciser que l'introduction d'un filtrage sur le signal conduira à l'apparition d'un déphasage au niveau de la dérivée par rapport à sa valeur exacte. Les résultats de cet essai sont résumés dans la *Figure III-8*.



**Figure III-8 :** Observateur Super Twisting : sortie et erreur de dérivation (entrée filtrée)

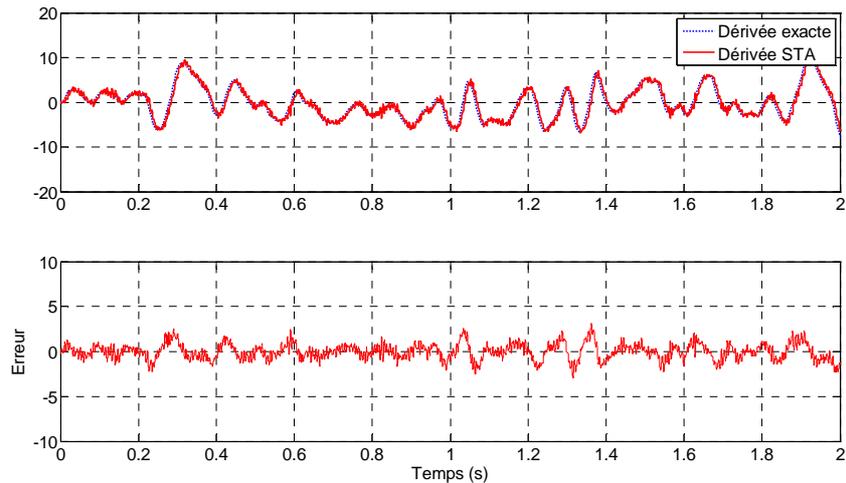
On observe bien, alors, à partir de cette figure, que la précision de l'observateur est meilleure, en termes d'erreur absolue, que dans le cas où l'entrée n'est pas filtrée. L'apparition d'un léger déphasage est également constatée.

En regardant de près la structure d'observation (III.33), elle n'est rien d'autre qu'une mise en cascade de différentiateurs Super Twisting « élémentaires » et la sortie de l'un est l'entrée du suivant. Cette structure est « critiquable » du point de vue que l'application d'une cascade de différentiateurs conduit à une propagation de l'erreur d'observation.

Pour le même signal à dériver, on applique l'observateur modes glissants adaptatif (III.37). Pour estimer la première dérivée, l'observateur adaptatif est défini par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - \hat{\lambda}_1 |e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) - K_1 e_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 = -\hat{\lambda}_2 \text{sign}(e_1) \end{cases} \quad (\text{III.64})$$

où  $e_1 = \hat{x}_1 - y$  et  $\hat{\lambda}_i > 0$  ( $i=1,2$ ) les paramètres adaptés en temps réel selon la règle d'adaptation (III.39). Pour le choix  $K_1 = 450$ , la sortie de l'observateur Super Twisting Adaptatif est alors donnée dans la figure suivante.



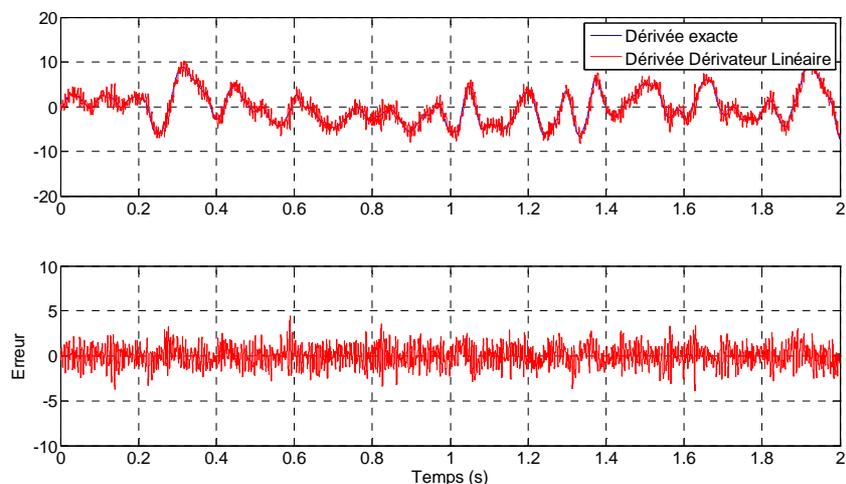
**Figure III-9 :** *Observateur Super Twisting Adaptatif : sortie et erreur de dérivation (entrée filtrée)*

Cet essai a été réalisé pour une entrée filtrée par le même filtre précédent. Un essai sans étage de filtrage a montré que, même si la précision est dégradée, elle est cependant meilleure que celle fournie par l’observateur Super Twisting. En plaçant, ainsi, le même étage de filtrage que précédemment sur ce signal, la précision de l’algorithme s’en trouve améliorée.

Cependant, il est légitime de se poser la question suivante : cette amélioration n’est elle pas due au filtrage passe bas intégré ? Aurait on obtenus les mêmes résultats en associant un dérivateur pur au même filtre passe bas ?

Pour répondre à ces questions, on procède à un essai en simulation dans lequel on confronte les résultats obtenus par un dérivateur linéaire classique, formé par un dérivateur pur multiplié par le filtre passe bas utilisé précédemment avec l’observateur Super Twisting Adaptatif, aux résultats fournis par un Super Twisting Adaptatif dont l’entrée est filtrée par le même filtre. Cet essai pourra montrer l’éventuelle amélioration de résultats qu’apportent les approches non linéaires au problème.

La sortie du dérivateur linéaire ainsi mis en œuvre et l’erreur de dérivation associée sont alors données dans la figure suivante.



**Figure III-10 :** *Dérivateur linéaire : sortie et erreur de dérivation*

Cet essai, ainsi mis en place, montre une erreur maximale de dérivation  $e_{moy\_Lin} = 3.31$  pour le cas du Super Twisting Adaptatif avec entrée filtrée et de  $e_{moy\_Lin} = 4.37$  pour le dérivateur linéaire. Ces résultats montrent alors que, par rapport à l'erreur de dérivation absolue maximale, la considération d'une technique non linéaire, basée sur les modes glissants, dans l'estimation de la dérivée de signaux permet d'apporter une amélioration de précision.

Pour continuer dans la comparaison des performances des différents algorithmes de dérivation, on souhaite comparer la précision des algorithmes non linéaires par rapport à ceux linéaires. Pour cela, on reprend les résultats du *Tableau II-3* ainsi que les critères associés et on les étend aux méthodes non linéaires de ce chapitre.

Dérivateur	Erreur moyenne	Erreur maximale
Observateur par placement de pôles	$25 \times 10^{-3}$	2.46
Filtre de Kalman	$28.6 \times 10^{-3}$	3.44
Filtre $H_\infty$	$17.3 \times 10^{-3}$	2.15
Observateur Super Twisting (entrée filtrée)	$18.6 \times 10^{-3}$	3.09
Observateur Super Twisting Adaptatif (entrée filtrée)	$14.2 \times 10^{-3}$	3.06

**Tableau III-1 :** Comparaison d'algorithmes

On note que les résultats résumés dans le tableau précédent, pour les observateurs non linéaires, ont été réalisés pour des entrées pré-filtrées. Il apparaît clairement, de ce dernier tableau, que la meilleure précision est fournie par le filtre  $H_\infty$  pour les méthodes linéaires. Pour ce qui est des méthodes non linéaires, l'observateur Super Twisting Adaptatif fournit une meilleure précision mais il est à noter que les performances de ces deux méthodes sont assez proches.

### III.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les méthodes de dérivation non linéaires basées sur les observateurs modes glissants. Ces méthodes, et comme il a été prouvé au cours de ce chapitre, permettent d'exploiter des expressions non linéaires dans les gains de l'observateur en plus d'apporter une nouvelle approche de la convergence : la convergence en temps fini. Ainsi, un observateur Super Twisting et un observateur modes glissants d'ordre supérieur ont été présentés.

Le problème majeur dans le réglage des techniques de dérivation en général, et spécifiquement les méthodes non linéaires, est que celui-ci est relativement compliqué et aucune méthode générique de réglage ne peut être formulée. Ainsi, un réglage donné reste valable pour des conditions spécifiques sur le signal et le bruit de mesure et non optimal pour d'autres. Dans ce cadre, une proposition d'approche adaptative appliquée aux deux observateurs modes glissants cités en haut a été proposée et appliquée. Les paramètres sont alors adaptés en temps réel en fonction d'une loi d'adaptation qui permet d'assurer la convergence de l'erreur d'estimation en temps fini. L'importance de telles approches réside dans le fait que celles-ci permettent de s'affranchir de la difficulté posée par le réglage de tels

algorithmes. Ainsi, dans le cas du Super Twisting, le réglage, initialement régi par deux inéquations pour deux paramètres, est ramené à une condition simple pour un seul paramètre.

Au début de ce chapitre, on s'est posé la question quant à l'utilité et l'éventuel apport de ces méthodes pour l'amélioration de la précision des algorithmes de dérivation à travers l'exploitation de non linéarités au niveau des termes de réglage. Après avoir présenté des résultats théoriques sur ces méthodes, et résultats d'essais en simulation à l'appui, on a pu montrer que celles-ci peuvent apporter une amélioration de la performance en termes de précision d'estimation de la dérivée. Cependant, ces techniques doivent être toujours, dans le cas d'un signal mesuré bruité, mises en œuvre avec un étage de filtrage précédent. En effet, les observateurs par modes glissants n'ont pas de pouvoir de filtrage et sont très sensibles aux bruits de mesures contrairement aux techniques linéaires qui prennent explicitement en compte cet aspect dans leur synthèse.

D'un point de vue observation, les observateurs par modes glissants sont limités à l'observation de systèmes modélisés comme chaînes d'intégrateurs et la structure de l'observateur ne peut être adaptée à un modèle sous forme générale.

Une fois les développements théoriques sur les méthodes d'observation linéaires et non linéaires, appliquées à l'estimation de dérivées de signaux, rapportés et des premiers résultats de simulation effectués, on passe dans ce qui suit à l'étude de la faisabilité de l'implémentation numérique de ces méthodes sur une cible numérique. L'objectif ultime étant de concevoir un « capteur » numérique pour l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré.

Dans le chapitre qui suit, une investigation est apportée autour de cette question. L'étude de l'influence de la discrétisation et des caractéristiques du circuit cible sur la précision des algorithmes sera effectuée. Suivra alors une validation en boucle ouverte et en boucle fermée de cette approche. Dans cette dernière, le « capteur » dérivateur numérique est intégré dans une boucle de commande d'un système électropneumatique.

## **Chapitre IV Mise en œuvre et application des algorithmes de dérivation**



## IV.1 Introduction

Dans les deux chapitres précédents, une synthèse et des propositions de nouvelles approches, linéaires et non linéaires, de techniques de dérivation ont été introduites pour l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré. Ceci représente la première partie des objectifs visés par ce travail. En effet, après l'étude théorique des algorithmes de dérivation, on vise à étudier leur implémentation numérique sur un circuit numérique embarqué à base de microcontrôleur, ceci dans le but de concevoir un composant, ou « capteur », numérique à la sortie duquel on récupère la dérivée d'un signal placé en son entrée. La finalité étant de venir intégrer le composant numérique dans une boucle de commande d'un système physique. En effet, la majorité des problèmes de commande de systèmes mécatroniques font intervenir les dérivées (vitesse, accélération) de certaines variables mesurées (position) dans le calcul de la commande.

A partir de cette section, on va s'intéresser à l'étude de l'implémentation numérique des algorithmes de dérivation précédemment définis en temps continu. Un algorithme continu, pour être numériquement implémenté, doit inévitablement être écrit sous forme discrète permettant de donner les équations à coder ultérieurement dans un langage informatique approprié.

L'implémentation numérique d'algorithmes pourrait se limiter à une « simple » opération de saisie de lignes de codes. Cependant, et malgré que cette étape représente une grande partie de la phase d'implémentation, d'autres étapes tout aussi importantes sont à considérer. En effet, les performances d'algorithmes dépendent, en outre de la méthode de discrétisation, mais aussi des choix technologiques qui accompagnent cette opération et on entend par cela les caractéristiques du circuit numérique en termes de résolution de calculs, de précision de conversion analogique-numérique ou numérique-analogique sur ses périphériques, la vitesse de calcul, etc.

Une fois ces caractéristiques connues, il reste à valider les performances des différentiateurs. Cette tâche est un peu délicate car, que ce soit en simulation ou en expérimentation, l'interprétation des résultats est toujours tributaire des conditions préalables dans lesquelles on se place (conditions initiales, hypothèses préalables,...) et toute idée de généralisation relève de la prétention. Cependant, l'objectif est d'aider et d'orienter le choix et la décision selon le cahier des charges disponible.

Cette idée de comparaison des résultats doit être aussi accompagnée par la définition et l'établissement d'une liste de critères quantifiables et jugés pertinents pour statuer d'une manière générale sur la précision des algorithmes. Les critères à adopter pour la comparaison et l'estimation des performances, doivent comporter les points qui sont les plus à même d'être formulés par un cahier des charges et de pouvoir créer, ainsi, un outil d'aide au choix pour l'utilisateur en fonction du cahier des charges et des données à sa disposition.

Dans ce qui suit, on commence par définir et expliquer les différentes étapes du protocole expérimental adopté pour passer, ensuite, à l'énoncé des critères de comparaison. Celui-ci couvre les travaux allant de la simulation des algorithmes aux essais en boucle fermée de la carte de dérivation à la validation expérimentale de la solution.

Ensuite, on passe à l'écriture des équivalents discrets de chaque méthode. L'influence des choix technologiques est aussi étudiée en termes de résolution de conversion et de variables de calcul.

La carte numérique de développement, choisie pour la réalisation de la solution est présentée par la suite et une comparaison de résultats, entre les différentes algorithmes de dérivation implémentés, est effectuée en vue d'une première validation en boucle ouverte sur des signaux connus.

En effet, le fait de ne considérer que l'erreur absolue de dérivation ne fournit pas d'informations assez précises.

Il pourrait être judicieux de considérer d'autres critères de performance. En effet, et pour reprendre l'exemple de la comparaison faite pour l'observateur grand gain, l'erreur absolue d'observation est relativement importante vu qu'elle est composée d'une erreur due à l'erreur sur l'amplitude de la dérivée, mais aussi une erreur due à l'effet de déphasage qui apparaît entre la dérivée estimée et la dérivée exacte. Dans ce cas, pour distinguer ces deux paramètres, il suffira d'observer les réponses fréquentielles des différentiateurs. Cependant, cette dernière n'est possible que dans un cadre purement linéaire.

Ainsi, et pour résumer, dans le cadre d'une analyse purement temporelle, d'autres critères de performances pourraient être considérés tels que l'erreur absolue de dérivation, sa moyenne, sa valeur relative, etc.

Des critères purement fréquentiels peuvent être aussi considérés. En effet, comme dans le cas du filtrage  $H_\infty$ , qu'on introduit dans ce qui suit, une pondération fréquentielle sur la Densité Spectrale de Puissance du signal d'erreur de dérivation a été introduite et dans ce cas, le critère de performance à considérer est cette même DSP.

## IV.2 Protocole expérimental

L'étude des systèmes dynamiques et de leur performance nécessite l'établissement d'une démarche d'essais clairement définie qui fournit une base et un ensemble de conditions et de situations à l'issue desquelles des résultats seront tirés, mis en forme et comparés afin d'aider le choix (commande, modèle,...) et de statuer sur les performances.

Dans ce contexte, on rencontre souvent l'expression « Benchmark » [96, 97, 98] qui signifie la mise en place d'un protocole d'expériences/essais établissant une référence de mesure de performance et un point de comparaison.

Dans la présente étude, ce protocole doit être une démarche et une suite d'expériences, jugées pertinentes, dont les résultats et leur interprétation conduisent à la formation d'une idée sur les performances d'un algorithme de dérivation par rapport à un autre.

Le protocole d'essais proposé se résume en les étapes suivantes

- Etude, en simulation, des performances des algorithmes en temps continu ;
- Etude, en simulation, de la discrétisation des algorithmes et validation de leurs performances ;
- Etude, en simulation, de l'effet des choix technologiques ;
- Validation expérimentale des algorithmes implémentés, en boucle ouverte sur des signaux particuliers ;
- Validation expérimentale des algorithmes implémentés, en boucle ouverte sur des signaux expérimentaux réels ;
- Validation expérimentale des algorithmes implémentés en boucle fermée pour la commande d'un système physique.

La première étape du protocole concerne l'étude théorique d'algorithmes de dérivation et qui a été traitée dans les chapitres *Chapitre II* et *Chapitre III*. Au cours de celle-ci, des simulations numériques, sous logiciel Matlab/Simulink, ont été effectuées et une première idée sur les performances de différents algorithmes a été établie.

Ensuite, la question de la discrétisation de ces algorithmes est discutée. Ainsi, une étude comparative, en simulation, est effectuée entre les différentes méthodes de discrétisation applicables en termes de précision par rapport à celle fournie par l'équivalent continu de l'algorithme.

La question des contraintes technologiques pouvant être rencontrées dans la phase d'implémentation des algorithmes est soulevée dans l'étape suivante. Différents paramètres liés à la technologie de la carte d'implémentation utilisée peuvent influencer la précision et la performance des algorithmes (résolution des organes de conversion, vitesse de calcul, résolution des calculs,...). L'influence de la variation de ses paramètres est étudiée, en simulation, sur un algorithme de dérivation type et les résultats sont rapportés.

Suite à cela, la partie expérimentale est entamée et les algorithmes retenus sont programmés et implémentés sur la carte microcontrôleur adoptée. Cette étape étant réalisée, la validation des algorithmes en boucle ouverte est effectuée sur la dérivation de signaux connus et sur la dérivation de signaux réels expérimentaux récupérés sur un dispositif expérimental. Ce dispositif est le même système qui sera considéré pour la validation en boucle fermée des algorithmes de dérivation implémentés. Dans ce cas, la carte de dérivation est intégrée dans la boucle de commande du système pour l'estimation de la dérivée de signaux qui seront fournis pour le calcul de la commande. Une synthèse des résultats, en termes de précision de la commande, en fonction de la méthode de dérivation sera effectuée.

Dans ce qui suit, on commence par étudier la discrétisation des algorithmes de dérivation présentés jusqu'à ce niveau du document.

### IV.3 Discrétisation des algorithmes

Dans tous ces essais, le même signal défini dans la *Section II.6* et donné dans la *Figure II-2*, est utilisé comme signal d'entrée aux algorithmes de dérivation.

Les algorithmes linéaires discrétisés seront, dans un premier temps, mis sous forme de fonction de transfert discrète puis l'équation de récurrence correspondante à coder et à implémenter sur le circuit cible est explicitée.

#### IV.3.1 Différentiateur Observateur par placement de pôles et filtre $H_\infty$

L'observateur par placement de pôles, pour un système en chaîne d'intégrateurs, présenté dans la *Section II.3* est un différentiateur linéaire défini par une fonction de transfert  $G_{OPP}$  telle que

$$G_{OPP}(s) = \frac{s}{\omega_0^2 s^2 + \frac{2}{\omega_0} s + 1} \quad (IV.1)$$

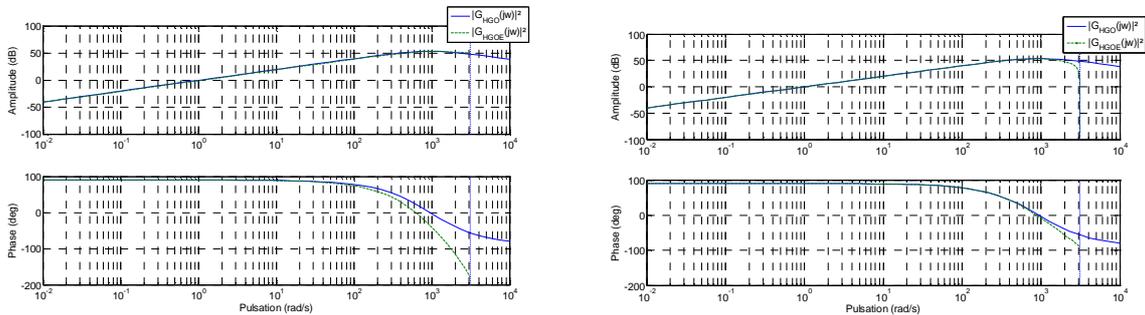
Ce filtre n'est autre que la mise en série d'un dérivateur pur avec un filtre passe bas du second ordre de gain unitaire, de fréquence de coupure  $\omega_0$  et de facteur de qualité  $Q=0.5$ .

La fonction de transfert du différentiateur (IV.1) est donnée sous la forme d'une fonction de transfert de la forme

$$G(s) = \frac{a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0} \quad (IV.2)$$

La discrétisation de cette fonction de transfert peut se faire suivant plusieurs approches. Dans ce qui suit, malgré une première idée préalable à l'avantage de la transformation Bilinéaire, on fait une comparaison des méthodes de discrétisation Euler et Bilinéaire afin de mettre en avant un choix justifié de la méthode à adopter.

La *Figure IV-1* représente, pour une bande passante  $\omega_0$  donnée, une comparaison des réponses fréquentielles du filtre continu  $G_{OPP}$  et des équivalents discrets  $G_{OPP\_E}$  et  $G_{OPP\_B}$  obtenus respectivement par transformation Euler et par transformation Bilinéaire.



**Figure IV-1 :** Diagramme de Bode filtre continu et filtres discrets Euler (gauche) et Bilinéaire (droite)

De la figure précédente, on observe que la réponse des filtres discrets, en comparaison à celle du filtre continu, sont sensiblement proches avec, cependant, un moindre déphasage est fourni dans le cas du filtre  $G_{OPP\_B}$  mais ce déphasage est dans les fréquences où le rapport signal/bruit est défavorable. A l'inverse de la transformation Euler, la méthode de transformation Bilinéaire est connue pour sa conservation de certaines propriétés fréquentielles et de garantir la stabilité du système discret lorsque le système continu l'est [99]. De plus, les pôles des systèmes discrétisés par cette méthode balayent tout l'espace des pôles stables alors que la transformation d'Euler balaye une partie de cet espace. D'autre part, elle a des propriétés intéressantes de préservation de caractéristiques de la réponse fréquentielle. La transformation bilinéaire est définie par une transposition continue-discret définie par

$$s \leftrightarrow \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \quad (IV.3)$$

où  $T_s$  est la période d'échantillonnage.

La transformation Euler est, quant à elle, définie par la relation

$$s \leftrightarrow \frac{z-1}{T_s} \quad (IV.4)$$

Soit une fonction de transfert discrète qui s'écrit sous la forme

$$H_T(z) = \frac{dy(z)}{y(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z^1 + a_0}{z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z^1 + b_0} \quad (IV.5)$$

Une telle fonction de transfert, en vue d'une implémentation sur un ordinateur numérique, doit être écrite sous la forme d'une équation de récurrence. Pour se faire, une fonction définie sous la forme (IV.5) se réécrit

$$z^n dy(z) + \dots + b_1 z^1 dy(z) + b_0 dy(z) = a_n z^n y(z) + \dots + a_1 z^1 y(z) + a_0 y(z) \quad (\text{IV.6})$$

Pour une période d'échantillonnage  $T_s$  donnée, et pour  $dy_k = dy(kT_s)$ , en multipliant de part et d'autre (IV.6) par  $z^{-n}$ , puis en appliquant une transformée en  $z$  inverse, l'équation à programmer est alors donnée dans la forme

$$\begin{aligned} dy_k &= a_n y_k + \dots + a_1 y_{k-n+1} + a_0 y_{k-n} \\ &\quad - b_{n-1} z^{n-1} dy_{k-1} - \dots - b_1 dy_{k-n+1} - b_0 dy_{k-n} \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

De la même manière, et pour rester dans le cadre linéaire, le filtre  $H_\infty$  conçu et à implémenter est un filtre dont la fonction de transfert continue est donnée sous la forme (IV.2). La même démarche est alors suivie pour l'écriture d'une équation de récurrence, de la forme (IV.7), à implémenter par la suite sur la cible numérique.

Dans un cadre non linéaire, l'étude de la discrétisation est plus délicate à mettre en place. En effet, on ne dispose pas d'outils génériques pour l'évaluation de la réponse d'un algorithme non linéaire discrétisé. De plus, comme c'est le cas dans les algorithmes qui suivent, certaines méthodes de discrétisation ne mènent pas à un résultat exploitable. En effet, la transformation bilinéaire, appliquée aux algorithmes non linéaires présentés dans le chapitre précédent, conduit à une expression implicite qu'il n'est pas possible d'expliciter.

Dans la section qui suit, comme cela a été le cas jusqu'à présent, on limite notre intérêt aux algorithmes de dérivation du premier ordre permettant l'estimation de la première dérivée d'un signal mesuré.

Dans le *Chapitre III*, on a présenté l'algorithme de dérivation de premier ordre Super Twisting permettant d'estimer la première dérivée du signal mesuré, et pour lequel deux méthodes de réglage de gains ont été proposées.

Aussi, un algorithme de dérivation modes glissants a été présenté et une proposition de méthode adaptative pour le réglage des gains a été présentée.

Comme il a été pointé précédemment, ce dernier, pris au premier ordre, n'est rien d'autre que l'expression de l'algorithme Super Twisting. D'où, dans ce qui suit, on étudiera la discrétisation du dérivateur Super Twisting et du dérivateur Super Twisting adaptatif.

### IV.3.2 Différentiateur Super Twisting

Le différentiateur modes glissants Super Twisting(III.22) défini par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - \lambda_1 |s_1|^{1/2} \text{sign}(s_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = -\lambda_2 \text{sign}(s_1) \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

avec  $s_1 = \hat{x}_1 - y$ ,  $y$  étant le signal mesuré, et l'estimée de la dérivée est alors donnée par  $\dot{\hat{x}}_1$ .

La discrétisation de l'algorithme (IV.8) par la méthode bilinéaire n'est pas possible du fait de la nature non linéaire de l'algorithme et conduit à une relation de récurrence implicite en  $dy_k$

qu'il n'est pas possible d'expliciter. L'algorithme discrétisé par la méthode d'Euler est alors défini par

$$\begin{cases} \hat{x}_{1k} = \hat{x}_{1(k-1)} + T_s \left[ \hat{x}_{2(k-1)} - \hat{\lambda}_{1(k-1)} |x_{1(k-1)} - y_{(k-1)}|^{1/2} \text{sign}(x_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) \right] \\ \hat{x}_{2k} = \hat{x}_{2(k-1)} - T_s \hat{\lambda}_{2(k-1)} \text{sign}(x_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

A l'instant  $t = kT_s$ , la sortie  $dy_k$  du différentiateur, estimée de la dérivée du signal  $y_k$ , est alors donnée par

$$dy_k = \hat{x}_{2k} - \lambda_1 |x_{1k} - y_k|^{1/2} \text{sign}(x_{1k} - y_k) \quad (\text{IV.10})$$

### IV.3.3 Différentiateur modes glissants adaptatif

Le différentiateur modes glissants adaptatif d'ordre  $n$  défini dans (III.37), pris au premier ordre, est équivalent un algorithme de dérivation Super Twisting Adaptatif. Celui-ci est alors défini par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - \hat{\lambda}_1 |\hat{x}_1 - y|^{1/2} \text{sign}(\hat{x}_1 - y) - K_1 (\hat{x}_1 - y) \\ \dot{\hat{x}}_2 = -\hat{\lambda}_2 \text{sign}(\hat{x}_1 - y) \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

où  $y$  est le signal mesuré à dériver.  $\hat{\lambda}_1$  et  $\hat{\lambda}_2$  sont les paramètres adaptés en temps réel et leurs lois d'adaptation sont définies par

$$\frac{d}{dt} \hat{\lambda}_1 = \left[ |x_1 - y|^{1/2} \text{sign}(x_1 - y) \right] (x_1 - y) \quad (\text{IV.12})$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\lambda}_2 = \text{sign}(s_n) s_n \quad (\text{IV.13})$$

De même, la sortie du différentiateur est la composante  $\hat{x}_2$  qui donne ainsi l'estimée de  $\dot{y}$ .

La discrétisation par la méthode d'Euler de (IV.11), (IV.12) et (IV.13) conduit alors à l'équivalent discret de l'algorithme tel que

$$\begin{cases} \hat{x}_{1k} = \hat{x}_{1(k-1)} + T_s \left[ \hat{x}_{2(k-1)} - \hat{\lambda}_{1(k-1)} |x_{1(k-1)} - y_{(k-1)}|^{1/2} \text{sign}(x_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) - K_1 (\hat{x}_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) \right] \\ \hat{x}_{2k} = \hat{x}_{2(k-1)} - T_s \hat{\lambda}_{2(k-1)} \text{sign}(x_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

où les paramètres adaptatifs  $\hat{\lambda}_1$  et  $\hat{\lambda}_2$  sont donnés par

$$\hat{\lambda}_{1k} = \hat{\lambda}_{1(k-1)} + T_s (x_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) |x_{1(k-1)} - y_{(k-1)}|^{1/2} \text{sign}(x_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) \quad (\text{IV.15})$$

et

$$\hat{\lambda}_{2k} = \hat{\lambda}_{2(k-1)} - T_s (x_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) \text{sign}(x_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) \quad (\text{IV.16})$$

et la sortie  $dy_k$  du différentiateur est alors donnée par

$$dy_k = \hat{x}_{2k} - \hat{\lambda}_{1k} |x_{1k} - y_k|^{1/2} \text{sign}(x_{1k} - y_k) - K_1 (\hat{x}_{1k} - y_k) \quad (\text{IV.17})$$

Avant le passage à l'étape de l'implémentation et de validation des algorithmes de dérivation, une étude est nécessaire quant à l'influence du choix de la technologie et des caractéristiques de la cible numérique sur laquelle viendront être codés et implémentés ces algorithmes.

Les deux paramètres les plus influents dans ce cas sont la résolution des Convertisseurs Analogiques-Numériques (CAN) ou Numériques-Analogiques (CNA), et spécialement Analogiques-Numériques, vu leur effet sur la perturbation du signal d'entrée de l'algorithme,

et la précision de calcul par laquelle on entend la résolution de la conversion des variables pour l'exécution de l'algorithme.

#### IV.4 Etude de l'effet des choix technologiques

Cette étude de différentiateurs est effectuée dans l'optique de leur implémentation ultérieure sur un circuit numérique qui fera office d'organe (capteur) fournissant la dérivée première et, éventuellement, seconde d'un signal mesuré en vue de fournir les mesures de l'état pour la synthèse de commande d'un système dynamique.

Le développement des technologies électroniques et numériques permet aujourd'hui de trouver facilement des composants à très haute performance de calcul (rapidité, précision,...). Cependant, dans notre approche au problème de conception du dit capteur, on s'est imposé une contrainte de coût. Ce coût est généralement tributaire de la résolution et de la rapidité de calcul proposée mais aussi de la précision des différents organes de conversion (CAN, CNA) qui y sont installés.

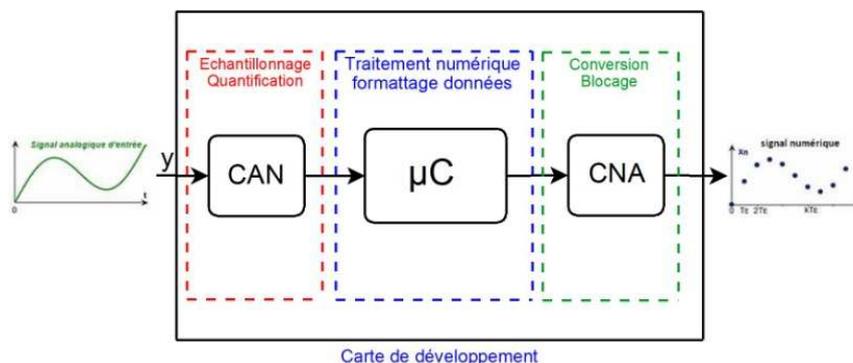
Dans cette partie, on étudie l'influence de ces différents paramètres sur les performances en termes de précision sur l'estimation de la dérivée par les différents algorithmes. Cette étude sera effectuée sur l'algorithme de dérivation observateur par placement de pôles vues la linéarité et la relative simplicité de sa fonction de transfert.

Une implémentation numérique de filtres continus sur des systèmes numériques implique inévitablement une quantification des signaux analogiques d'entrée ainsi que des coefficients du filtre. En effet, les variables associées ne peuvent être stockées que dans des registres à longueur (nombre de bits) finie et la conversion de ses grandeurs en séquences de bits fait apparaître des erreurs entre celle-ci et la valeur exacte originale.

Les filtres numériques étant conçus pour traiter des données disponibles sous forme de signaux continus, l'échantillonnage et la quantification de ceux-ci induit également des erreurs et l'opération est alors ramenée à l'ajout d'un bruit aux échantillons « idéaux » du signal.

##### IV.4.1 Effet de la conversion Analogique - Numérique

La chaîne d'acquisition, de conversion et de calcul reliant le signal d'entrée à la dérivée en sortie de la carte de dérivation est donnée dans la figure suivante



**Figure IV-2:** Chaîne d'acquisition

Dans la chaîne d'acquisition, le CAN est l'organe le plus influent sur la précision de l'algorithme vu que c'est lui qui permet la reconstruction du signal d'entrée. Ainsi, plus la

résolution du CAN est importante, plus le signal échantillonné et quantifié, entrée de l'algorithme, est fidèle au signal « réel » et moins affecté par les bruits de quantification.

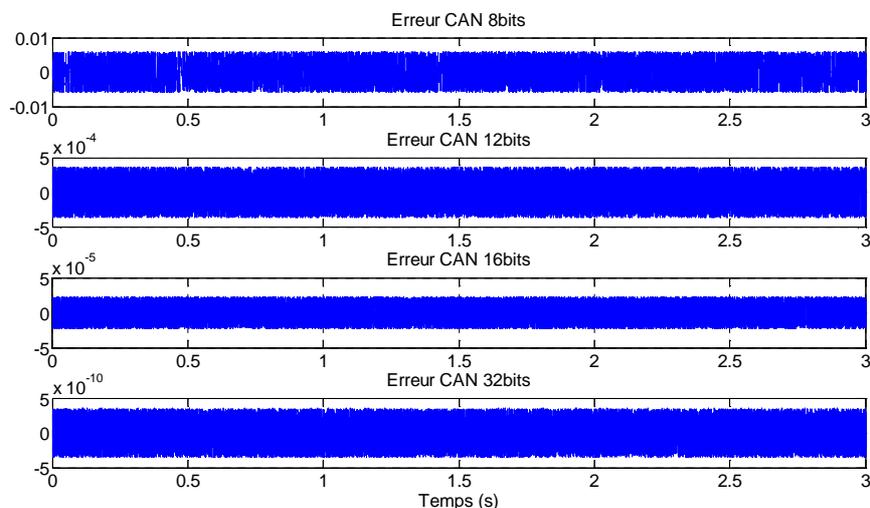
Un CAN est un organe qui permet de convertir un signal analogique (tension) en un nombre codé sur  $(N + 1)$  bits. Cette conversion se fait en générant, à partir d'une mesure de signal analogique (tension), une valeur numérique, codée sur un nombre fini de bits. Celle-ci est alors proportionnelle à celle de la tension analogique.

Il existe différents types de CAN caractérisés par différentes technologies de conversion et le choix de celle-ci dépend du temps de conversion souhaité.

La plus petite variation du signal d'entrée  $y$  tel que  $-A \leq y < A$  détectable correspond à  $q = A / 2^{N-1}$ , pour un codage en nombres signés où le bit de poids le plus fort est associé au signe de  $y$ , appelé également pas de quantification. Plusieurs techniques de quantification peuvent être rencontrées dans les CANs. et la quantification par arrondi est la plus communément utilisée du fait de la faible erreur de quantification engendrée.

L'erreur de quantification  $\varepsilon$ , différence entre le signal réel, non quantifié, et le signal quantifié, est, dans le cas de quantification par arrondi, celle-ci est telle que  $-q/2 \leq \varepsilon < q/2$ .

Pour le signal d'entrée  $y$  défini dans la *Section II.6*, un essai en simulation, sous logiciel Matlab/Simulink, est effectué. Dans cet essai, le signal  $y$  est passé à travers un CAN, dont la résolution d'un essai à l'autre est variée (8 bits, 12 bits, 16 bits et 32 bits), et on mesure l'erreur  $\varepsilon$ , différence entre le signal d'origine et le signal quantifié en sortie du CAN. Ces erreurs de quantification sont résumées dans la *Figure IV-3*.

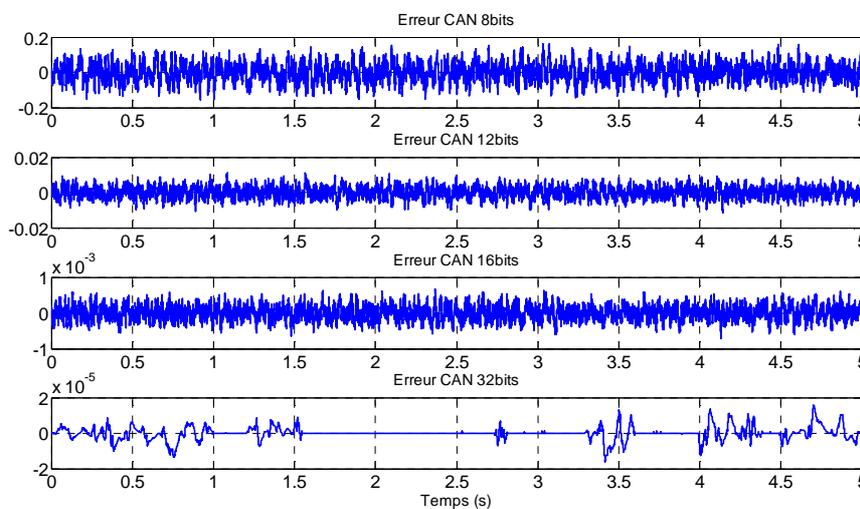


**Figure IV-3 :** Erreur de quantification au niveau du CAN

L'erreur de quantification est d'autant plus importante que la résolution de quantification est faible. Ainsi, le signal en sortie du CAN est le signal qui sera effectivement traité par le filtre implémenté. Généralement, on modélise l'erreur de quantification par l'ajout d'un bruit blanc centré de variance  $q^2 / 12$  [100]. Cette modélisation est alors utilisée pour le dimensionnement de la résolution d'un CAN en fonction du rapport signal-bruit de quantification souhaité. Ainsi, la quantification induit l'ajout d'un bruit au niveau du signal en entrée de l'algorithme implémenté et l'influence de celui-ci sur la réponse du filtre numérique implémenté dépendra de sa sensibilité aux bruits de quantification.

Aussi, à ce bruit de quantification, il est inévitable aussi de se voir ajouter un bruit dû à l'environnement (thermique, magnétique,...) et aussi un bruit induit par la fluctuation des tensions de polarisation du CAN qui ne peut pas être parfaitement stabilisée. Ce dernier, conduira à la fluctuation des seuils de quantification du CAN.

Après avoir observé l'erreur induite par la résolution de quantification du CAN sur le signal quantifié, on désire estimer son effet sur la réponse d'un filtre linéaire numérique. Pour cela, on simule, sous le logiciel Matlab/Simulink, le dérivateur numérique observateur par placement de pôles en modélisant les effets de quantification du CAN. Ainsi, le signal à l'entrée de celui-ci est le même signal  $y$  quantifié sur 8 bits, 12 bits, 16 bits et 32 bits. On observe alors l'erreur entre le signal de sortie du dérivateur sans quantification en entrée et le signal de sortie associé à une entrée  $y$  quantifiée sur plusieurs niveaux de quantification. Il est à noter que le même réglage au niveau de l'observateur est maintenu pour tous ces essais.



**Figure IV-4:** Effet de la résolution du CAN sur la réponse du filtre linéaire

On observe bien à partir de cette figure, que l'erreur au niveau de la sortie d'un filtre numérique augmente avec la diminution de la résolution de quantification du signal en son entrée. Ainsi, l'effet du signal quantifié d'entrée sur la réponse du filtre dépendra de la caractéristique de celui-ci en termes de réponse fréquentielle face au bruit de quantification additionné.

Cependant, un CAN est également caractérisé par des erreurs d'offset ainsi que des erreurs de non-linéarité. En considérant, d'une manière grossière, que la première erreur est stable, celle-ci n'aura pas d'impact particulier sur la sortie d'un algorithme de dérivation. La seconde erreur, quant à elle, induit un effet de distribution non linéaire de l'erreur de quantification et la représentation de cette dernière par un bruit blanc est alors contradictoire. Cette erreur sera omise dans notre étude.

De même, un benchmark pourrait être dressé afin d'estimer, en fonction de l'incidence sur la précision de sortie, à partir de laquelle résolution les performances peuvent être jugées comme acceptables. Cette approche est relativement compliquée et ne pourra prétendre à être généralisée car elle suppose une définition préalable de ce qui peut être estimé comme performances acceptables et celles-ci pourraient être données selon un cahier des charges en termes d'erreurs absolues maximales, spectre du signal d'erreur,... De plus, elle restera valable dans un cadre d'essai et pour des signaux bien précis.

Outre la résolution de la quantification au niveau du CAN, la résolution des variables de stockage et de calcul, au niveau du circuit numérique, est également un paramètre dont l'influence sur la précision et la réponse des filtres numériques est notable. Dans ce qui suit, on s'intéresse à l'effet de ce paramètre sur la précision d'un filtre linéaire. Le même observateur que celui de cette section sera également considéré.

#### IV.4.2 Effet de la quantification des coefficients

A partir d'un filtre continu, conçu pour satisfaire une réponse fréquentielle donnée, la quantification des coefficients conduit à l'implémentation d'un filtre équivalent dont la réponse fréquentielle peut varier d'une façon tolérable ou non de celle du filtre continu d'origine. En effet, et spécialement pour les filtres récurrents, une variation minime dans les coefficients du filtre peut conduire à de larges effets sur sa réponse et sur la localisation des pôles surtout dans le cas où ceux-ci sont situés sur la limite du cercle unité [100].

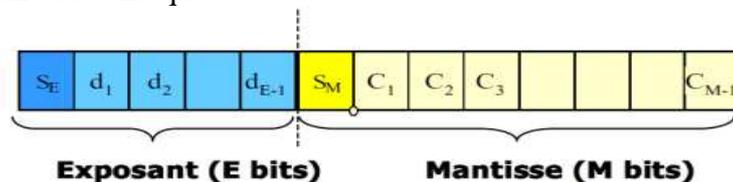
Dans cette partie on étudie l'influence de la résolution des différentes variables (coefficients, entrée, sortie, mémoire) choisie pour le calcul de la sortie de l'algorithme. Cette résolution dépend de la taille des registres mémoire de stockage. En effet, le format de codage des variables de calcul (nombre de bits, virgule fixe, virgule flottante) varie en fonction de la technologie choisie.

L'algorithme continu est préalablement conçu sous logiciel Matlab/Simulink. Le logiciel utilise un codage des nombres selon la taille des registres mémoire dédiés égale, par défaut, à celle de l'ordinateur utilisé soit un codage en virgule flottante double précision (64 bits). Lors de l'implémentation de l'algorithme de différentiation sur une cible numérique, une équation de récurrence est programmée et les coefficients de celle-ci doivent être initialisés aux valeurs correspondantes qui ont été synthétisées en précision infinie.

Il est évident que ceux-ci ne peuvent être intégrés dans le microcontrôleur avec la même précision que celle fournie par l'outil de conception. D'où l'intérêt d'une étude préalable de l'influence de cette précision sur les performances de l'algorithme. Ainsi, un petit rappel sur le codage binaire des variables réelles s'impose.

##### *Codage des nombre en flottant double précision*

Le format de codage double est établi selon la norme *IEEE 754*, qui spécifie deux formats de nombres en virgule flottante (simple précision, double précision). Actuellement, le calcul, sur la majeure partie des architectures des calculateurs numériques, sont effectués selon la norme *IEEE 754*. Dans cette partie on s'intéresse aux nombres flottants double précision dont la représentation binaire est telle que



La valeur du réel  $x$  codé est alors donnée par

$$x = 2^u (-1)^{S_E} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{M-1} C_i 2^{i-1} \right] \quad (IV.18)$$

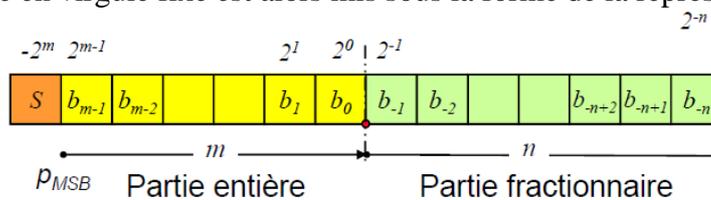
où  $u = (-1)^{S_E} \sum_{i=1}^{E-1} d_i 2^i$

Ainsi, et selon cette représentation, un nombre réel  $x$  est toujours représenté par un triplet  $(S, E, M)$ . La première composante,  $S$ , détermine le signe ( $s=0$  si le nombre est négatif, sinon  $s=1$ ).  $E$  est appelé l'exposant et  $M$  la mantisse.

**Codage des nombre en virgule fixe**

La représentation en virgule fixe d'un nombre réel est utilisée le plus souvent sur les systèmes numériques (processeurs) qui n'intègrent pas d'unité de calcul en virgule flottante. L'utilisation de ce type de données permet, en outre, de réduire l'espace mémoire nécessaire, d'augmenter la rapidité d'exécution de l'algorithme et de réduire, ainsi, la consommation énergétique du processeur. Cependant, la complexité de la programmation et le temps de développement s'en trouvent augmentés vu que les algorithmes doivent prendre en compte de la taille des mots et de l'échelle de la fraction et des opérations mathématiques spécifiques doivent ainsi être implémentées sans oublier que plus la dynamique du signal d'entrée est importante, plus ce type de codage augmente sensiblement l'effet du bruit de quantification [101].

Un nombre  $x$  codé en virgule fixe est alors mis sous la forme de la représentation suivante :



et la valeur du réel codé  $x$  est alors définie par

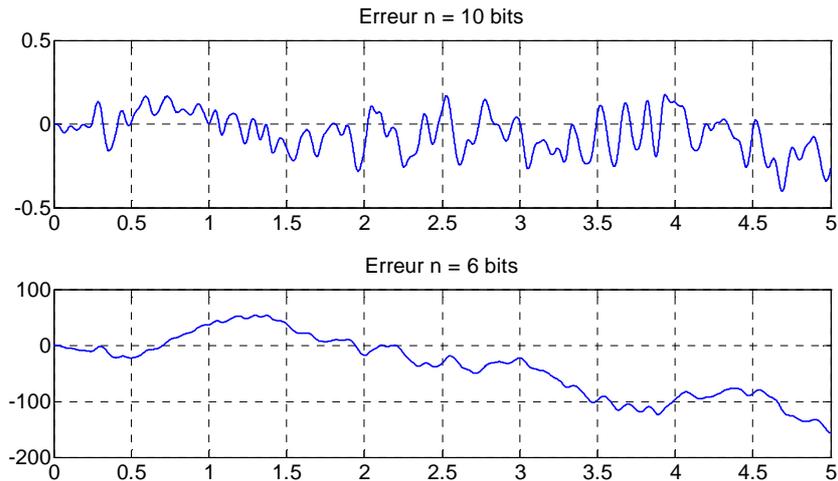
$$x = -2^m S + \sum_{i=-n}^{m-1} b_i 2^i \tag{IV.19}$$

La précision dans ce cas est le pas de quantification  $q = 2^{-n}$ .

Dans la bibliothèque « *Signal Processing Blockset* » de Matlab, l'outil « *Filter Design* » supporte le format de données en virgule fixe. Le codage en virgule fixe peut alors être appliqué aux coefficients du filtre, ses entrées et ses sorties.

Dans ce qui suit, on prend l'exemple du dérivateur observateur par placement de pôles et on désire montrer l'influence du codage en virgule fixe des coefficients, de l'entrée et de la de la sortie du filtre, sur l'erreur de dérivation lors du codage de l'équation de récurrence sur le circuit numérique cible.

Dans la *Figure IV-5*, l'erreur entre la sortie du filtre numérique avec précision infinie (flottant double précision) et le même filtre dont les variables sont codées sur un octet avec différentes longueurs de la partie fractionnaire ( $n_f = 10 \text{ bits}$  et  $n_f = 6 \text{ bits}$ ), correspondant à la variable  $n$  dans l'expression (IV.19), sont affichées dans la figure suivante.



**Figure IV-5:** Effet du codage en virgule fixe

Pour une précision de variables de  $2^{-6}$ , on observe bien que la réponse du filtre n'a plus rien à voir avec celle du filtre « idéal » à précision « infinie » (flottant double précision). Plus celle-ci est diminuée plus la réponse du filtre quantifié est proche de celle du filtre idéal.

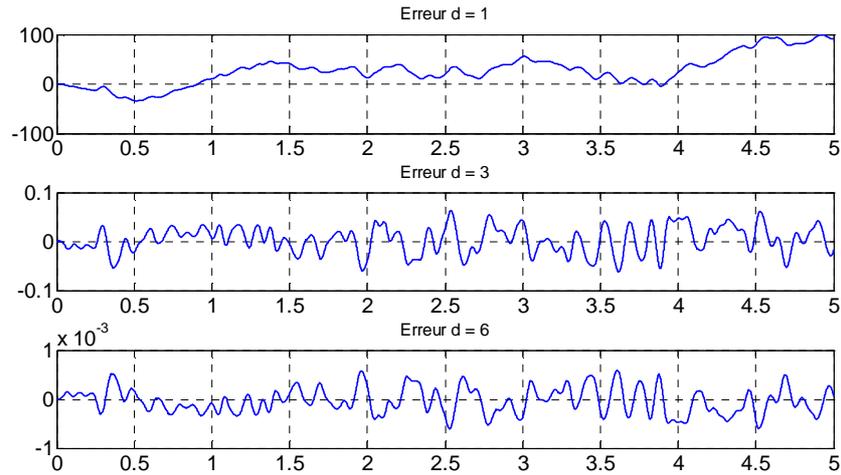
Cependant, même dans le cas où le système numérique, sur lequel les algorithmes seront implémentés, admet une unité de calcul en flottant double, la question de l'effet de la précision des coefficients sur la précision de l'algorithme peut toujours se poser.

Un filtre continu est conçu, au début, sur ordinateur et ses coefficients déterminés avec une précision « infinie » (virgule flottante double précision) sur un logiciel spécifique. Pour l'implémentation numérique de celui-ci, certaines solutions disponibles sur le marché permettent le codage et l'implémentation numérique du filtre sur circuit cible à travers un outil logiciel dédié et optimisé pour l'implémentation des filtres sur la cible numérique avec la même précision « idéale » avec laquelle il a été conçu et ce dans le cas où le circuit numérique cible supporte les calculs en virgule flottante double précision. Un exemple de solution est l'outil logiciel « *Real Time Interface* » pour l'implémentation de programmes développés sous Matlab/Simulink sur des cartes de développement DSP du constructeur dSPACE.

Dans le cas contraire, même si les calculs, au niveau de la cible embarquée, sont faits avec la même précision que sur le logiciel de conception, la programmation du filtre impose, à une certaine étape, un codage limité en précision. Ceci est généralement vrai pour les coefficients du filtre. En effet, ceux-ci sont calculés par l'outil logiciel et leur saisie lors de la programmation du filtre sur le circuit numérique se fera inévitablement à une précision finie. Cette précision est alors dépendante du nombre de chiffres significatifs à considérer dans l'initialisation des coefficients.

C'est ce sujet qu'on traite dans ce qui suit en étudiant l'influence de la résolution des coefficients du filtre, et plus spécifiquement du nombre de chiffres significatifs après la virgule, considérée sur la précision de la dérivée en sortie de l'algorithme. Cette étude servira aussi de démarche pour le choix de la résolution à adopter pour les différents filtres à implémenter ultérieurement.

Soit  $d$  le nombre de chiffres significatifs, après la virgule, considérés lors de l'initialisation des coefficients du filtre dans le codage. La *Figure IV-6* résume l'erreur entre la sortie du filtre idéal, avec précision infinie, et celle du filtre avec coefficients à  $d$  chiffres après la virgule.



**Figure IV-6:** Effet de la précision des coefficients sur la réponse du filtre

Ainsi, il paraît clair que la précision des coefficients du filtre numérique doit être correctement choisie afin d'assurer une erreur « tolérable » par rapport au filtre en temps continu référence.

Lors de l'étape d'implémentation numérique des filtres linéaires et non linéaires sur la cible numérique, ce même essai est préalablement effectué en simulation sur l'algorithme discret. En effet, la simulation préalable de l'algorithme discret, avec plusieurs précisions de variables, permet de fixer la résolution à considérer lors de l'implémentation sur circuit cible afin de garantir une erreur tolérable sur la réponse. La précision choisie est celle qui est jugée offrir la moindre erreur par rapport au filtre idéal. Il est aussi à noter que, inversement aux filtres linéaires, une estimation préalable des effets de la quantification sur la réponse d'un filtre non linéaire n'est pas possible.

Ces algorithmes sont à implémenter numériquement sur une cible numérique à base de microcontrôleur. Le choix de celle-ci s'est porté sur un kit de développement du constructeur RENESAS dont on présente les principales caractéristiques dans ce qui suit.

#### IV.5 Carte de programmation

Les dernières décennies ont vu un développement fulgurant des systèmes numériques et une démocratisation de leur utilisation dans un grand nombre de produits et d'applications dans divers secteurs (communications, transports,...) grâce à un rapport coût/performances de plus en plus maîtrisé.

Plusieurs technologies de circuits numériques programmables existent, dont les plus répandues sont les microcontrôleurs, connus pour leur taille réduite, leur plus faible vitesse de fonctionnement par rapport à celles des microprocesseurs, leur faible consommation énergétique et leur faible coût et sont principalement dédiés aux applications sur systèmes embarqués (électroménager, téléphonie mobile, jouets,...). Les circuits DSP's (Digital Signal Processor) sont des microprocesseurs optimisés pour les calculs de bas niveau à haut débit et trouvent leurs applications principalement dans les applications en traitement numérique du signal (filtrage, traitement de la parole, traitement de l'image,...). Une autre classe de circuits est représentée par les circuits FPGA's (Field programmable Gate Array), performants en traitement temps réel sévère et en traitement parallèle.

La communauté automatique n'a pas été en reste de cette évolution et s'est largement impliquée dans le développement de commandes numériques pour les systèmes physiques.

Dans ce contexte, l'implémentation sur microcontrôleur, pour la régulation de température d'un four, de différentes commandes PID adaptatives a été étudiée dans [102, 103]. Dans [104], il est sujet de l'implémentation d'une commande PID floue sur circuit DSP (Digital Signal Processing) pour la commande de la vitesse de miroirs d'un satellite et l'application de la commande d'un convertisseur multi-niveaux [105] et d'un moteur à courant continu [106] implémentée sur circuit FPGA ont été traités.

Certaines de ces technologies peuvent, dans certains cas, être considérées comme surdimensionnées par rapport à certains problèmes de l'automatique en termes de coûts et de performances. Dans notre cas, on s'intéresse à la différenciation de signaux plutôt basses fréquences et notre choix s'est porté sur une carte à base de microcontrôleur. Ce choix a été dicté d'une part par la nature des signaux à traiter, mais aussi par souci économique vu que cette étude s'inscrit dans l'intérêt pour une solution, faible coût, pour la conception d'un circuit différentiateur numérique pour l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré.

L'objectif de cette section est de présenter la carte de programmation sur laquelle s'est porté le choix technologique ainsi que les périphériques associés.

La carte utilisée est un kit de développement RSK SH7201, du constructeur RENESAS, à base de microcontrôleur SH7201 de la famille SuperH, comportant une CPU (processeur) 32 bits du type SH-2A à jeu d'instructions RISC (Reduced Instruction Set Computer) cadencée à une fréquence maximale de 120MHz (288 MIPS). Son architecture *Superscalaire* lui confère la capacité d'exécution de deux instructions simultanément. La CPU intègre une unité de calcul à virgule flottante (Floating Point Unit) permettant une exécution performante des opérations flottantes en format simple (32 bits) et double (64 bits) précision. La FPU est compatible avec le standard IEEE754 avec des modes d'arrondi configurables en « arrondi au plus près » (round to nearest) et « arrondi vers zéro » (round to zero).

Le microcontrôleur intègre aussi un cache de 16Ko, un contrôleur d'interruptions comportant 16 interruptions externes, 16 niveaux de priorités et des registres dédiés pour un traitement rapide des interruptions.

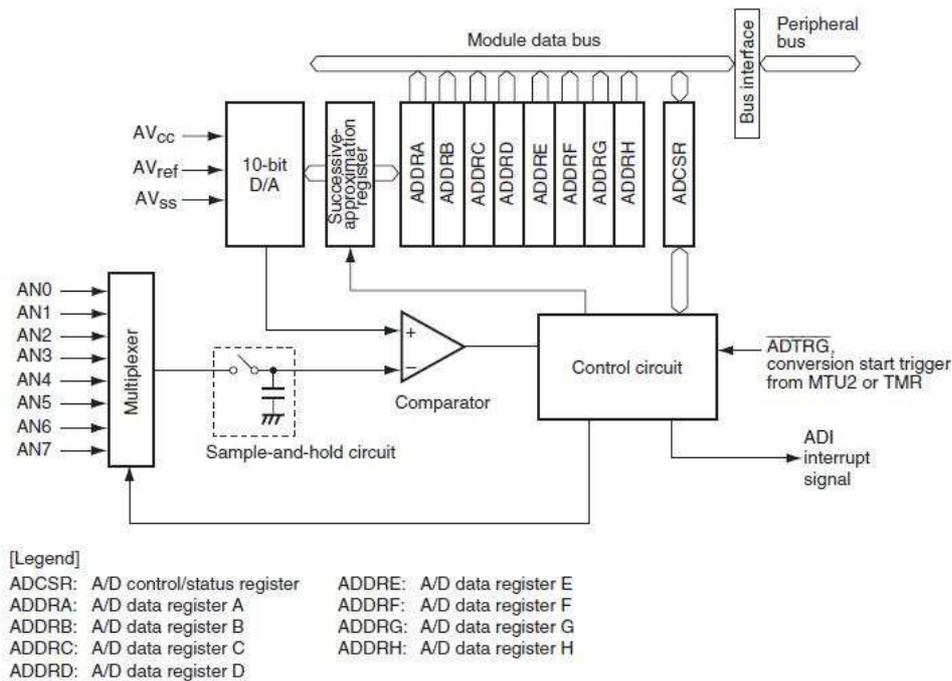
Un générateur d'impulsion d'horloge (Clock Pulse Generator) génère les signaux d'horloge pour la CPU, le bus de données et les périphériques. Un timer 8 bits, basé sur deux compteurs 8 bits, à deux canaux est cadencé par six signaux d'horloge internes, de fréquences sous multiples de la fréquence du signal d'horloge des périphériques, ou un signal d'horloge externe.

Dans cette partie, on se concentrera sur les détails des caractéristiques de la carte que l'on juge être les plus importantes dans notre application et on fera l'impasse sur trop de détails additionnels. Le lecteur intéressé pourra se guider vers [107, 108] pour d'amples détails.

Outre les caractéristiques du microcontrôleur, les caractéristiques les plus importantes dans notre application concernent les CANs et CNA.

#### **IV.5.1 Convertisseur Analogique Numérique (CAN)**

La carte RENESAS comporte 8 entrées analogiques. Les signaux en entrée de celles-ci sont numérisés par un CAN à approximations successives dont la résolution est de 10 bits. L'architecture générale de cet organe est donnée par la figure suivante.



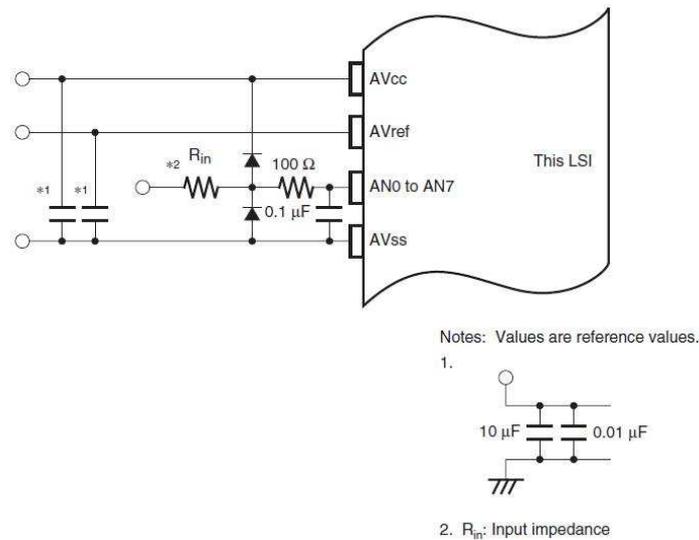
**Figure IV-7:** Architecture du CAN

Les résultats de conversions sont sauvegardés dans les registres (ADDRA, ..., ADDRH) de 16 bits accessibles en lecture seule. La conversion produit 10 bits de données transférés dans le registre de la voie concernée. Ces données sont sauvegardées dans les 10 bits de poids le plus fort des registres ADDR. Le reste des bits étant mis à zéro. La précision de cet organe est donnée par les données constructeur suivantes :

- Temps de conversion minimal :  $3.9\mu s$  ;
- Erreur de non linéarité :  $\pm 3LSB$  max ;
- Erreur d'offset :  $\pm 2LSB$  max ;
- Erreur pleine échelle :  $\pm 2LSB$  max ;
- Erreur de quantification :  $\pm 0.5LSB$  max ;
- Précision absolue :  $\pm 4LSB$  max .

Le registre de contrôle ADCSR est un registre 16 bits accessible en lecture/écriture. Il comporte des flags gérant le fonctionnement du convertisseur (gestion des interruptions, initialisation, mode de conversion,...).

Pour prévenir les risques de variation de tension sur les entrées analogiques (AN0,..., AN7), un circuit de protection, décrit dans la *Figure IV-8*, est placé à l'entrée de celles-ci. Ce circuit intègre aussi un filtre CR passe bas de fréquence de coupure  $f_e = \frac{1}{2\pi RC} \approx 16KHz$  pour filtrer les bruits.

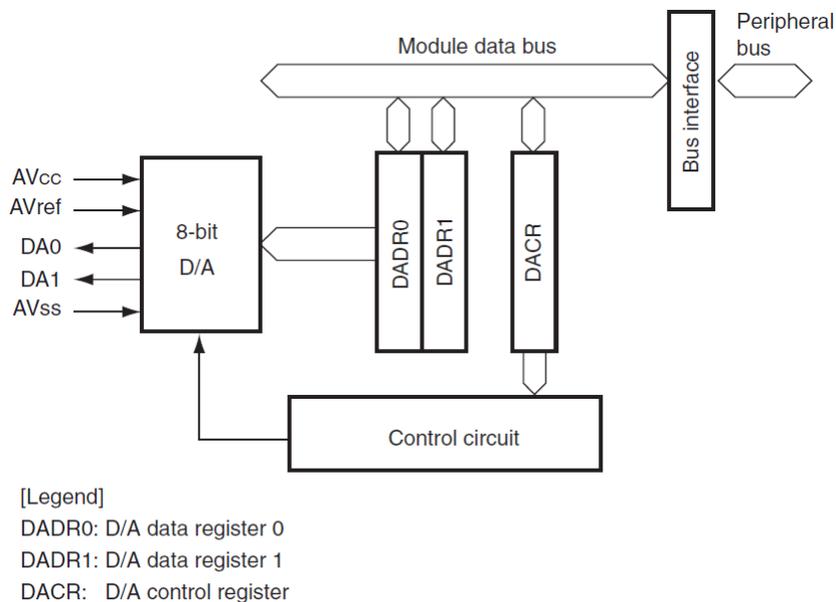


**Figure IV-8:** Circuit de protection des entrées analogiques

### IV.5.2 Convertisseur Numérique Analogique (CNA)

A l'inverse d'un CAN, un convertisseur numérique analogique (CNA) est un composant électronique qui permet de générer, à partir d'une information numérique codée sur N bits, un signal analogique qui lui est proportionnel.

La carte RENESAS comporte un CNA à deux voies, de résolution 8 bits et dont la tension de sortie  $V_s$  est telle que  $0 \leq V_s \leq V_{ref}$  où  $V_{ref} = 3.3V$ . La structure du CNA est donnée dans la Figure IV-9.



**Figure IV-9:** Architecture du CNA

Les données numériques à convertir sont sauvegardées dans les registres DADR0 et DADR1. Ces registres sont des registres de 8 bits accessibles en lecture/écriture.

Pour une valeur  $D$  sauvegardée dans un registre DADR, la valeur de la tension de sortie  $V_s$  du CNA associée est donnée par

$$V_s = \frac{D}{2^8} V_{ref}$$

Le registre de contrôle DACR est un registre de 8 bits. Les flags qu'il comporte permettent de gérer le fonctionnement du CNA en permettant de sélectionner la voie analogique de sortie et le mode de contrôle de la conversion.

Les caractéristiques de précision du CNA sont données par :

- Temps de conversion maximal :  $10\mu s$  ;
- Précision absolue :  $\pm 3LSB$  max .

Une fois cette carte présentée et adoptée, et en se référant au benchmark d'essais de validation défini dans la section IV.2, les algorithmes de dérivation linéaires et non linéaires précédemment définis sont implémentés et une validation de résultats est effectuée, dans un premier temps, en boucle ouverte sur le même signal généré à partir d'un modèle LTI connu défini dans la Section II.5.

### IV.5.3 Timers et signaux d'horloge

Le microcontrôleur de la carte de développement comporte un timer 8 bits à deux canaux, basé sur un compteur 8 bits. Il est utilisé pour la génération de signaux de remise à zéro, de requêtes d'interruptions et des sorties sous formes d'impulsions.

Le timer est cadencé par un des six signaux d'horloges internes de fréquence  $P_\phi / n$  (Hz). En effet un diviseur de fréquence permet de générer, à partir d'un signal d'horloge périphérique de fréquence  $P_\phi \in [5, 40]$  (MHz) utilisé pour cadencer les différents périphériques de la carte RENESAS, plusieurs signaux d'horloge pour les compteurs des timers. La valeur de la division  $n$  est alors donnée telle que  $n \in \{2, 8, 32, 64, 1024, 8192\}$ .

La sortie du timer est contrôlée par comparaison. La valeur actuelle du compteur est comparée à une valeur, mémorisée dans le registre dédié TCORA. Chaque fois que le compteur atteint cette valeur, une impulsion d'horloge est émise.

Le combinaison des choix de la fréquence du signal d'horloge des compteurs et la valeur du registre 8 bits TCORA permettent ainsi de générer un signal d'horloge adéquat. Ce signal sera le signal utilisé pour cadencer, par interruption, de la fréquence d'échantillonnage au niveau du CAN.

### IV.6 Implémentation et validation des différentiateurs

Les algorithmes de dérivation numérique étudiés dans les chapitres précédents sont implémentés sur la carte microcontrôleur RENESAS. Des essais préliminaires et des simulations sont effectués pour le réglage des paramètres et le choix de la résolution de ceux-ci pour la programmation du dérivateur discret sur la carte de développement.

À l'issue de l'étape de codage et d'implémentation, une validation des algorithmes et de cette opération est effectuée en boucle ouverte sur un signal généré par un système LTI bien connu et présenté précédemment. Le modèle du signal est implémenté sur une carte dSPACE et le même signal est alors envoyé à l'entrée de la carte de dérivation numérique. L'architecture PC-Carte RENESAS-Carte dSPACE est expliquée en détails dans la Section V.2.

Pour comparer la qualité de l'estimation de la dérivée fournie par chacun des algorithmes, une personne aura tendance à observer intuitivement l'erreur absolue de dérivation. Dans ce cas, une simple observation des amplitudes des signaux d'erreurs suffira pour statuer quant à la précision de chaque algorithme.

Cependant, il pourrait être judicieux de considérer d'autres critères de performance. En effet, et pour reprendre l'exemple de la comparaison faite dans les *Sections II.6* et *II.7.4*, l'erreur absolue d'observation est relativement importante vu qu'elle est en partie d'erreur d'amplitude et d'erreur due à l'effet de déphasage qui apparaît entre la dérivée estimée et la dérivée exacte. Pour une comparaison de performances indépendante de ces deux paramètres, et dans un cadre linéaire, une observation des réponses fréquentielles permet de distinguer les erreurs d'amplitudes et de déphasage et aucun outil générique du genre ne permet de faire le même raisonnement dans un cadre non linéaire.

Pour l'évaluation des performances des algorithmes de dérivation implémentés, on adopte dans ce qui suit les critères suivants :

- l'erreur absolue maximale de dérivation ;
- l'erreur absolue moyenne ;
- les écarts type de l'erreur absolue maximale et moyenne ;
- la DSP du signal d'erreur.

Les deux premiers critères ont déjà été adoptés dans les *Sections II.6* et *II.7.4*. Ce sont des critères « ponctuels » qui traduisent les performances dans un contexte particulier spécifique à l'acquisition et les données enregistrées à un instant donné dans des conditions données. C'est pourquoi on a introduit le troisième critère qui représente la « répétabilité » des résultats et des performances. En effet, l'implémentation des algorithmes conduit à l'intégration de quelques événements aléatoires qui dépendent de plusieurs variables (environnement, bruits électriques, bruits thermiques, interférences magnétiques,...) et dont l'incidence sur les résultats peut être assez importante comme rappelé dans le chapitre précédent.

Ainsi, l'écart type sur ces erreurs est une moyenne sur une série d'essais identiques effectués à des instants différents afin de varier leur incidence et leur intensité.

Un critère purement fréquentiel est introduit à travers la valeur de la DSP du signal d'erreur. Ce critère présente un intérêt particulier dans le cas du dérivateur par filtrage  $H_\infty$  où une pondération fréquentielle définissant un gabarit sur la DSP du signal d'erreur de dérivation a été introduite dans la synthèse du filtre et la comparaison de la DSP permettra, éventuellement, de mettre en lumière l'effet de cette pondération sur la réduction de l'amplification du bruit à travers le dérivateur.

A noter que l'erreur de dérivation absolue considérée représente alors l'écart entre la sortie du différentiateur numérique à un instant  $t_k$  (sortie de la carte) avec la valeur de la dérivée exacte du signal à ce même instant. Dans ces essais, on s'intéressera uniquement à la première dérivée  $\dot{y}_s$ .

Les algorithmes qui ont été implémentés sont les dérivateurs observateurs par placement de pôles, observateur  $H_\infty$ , le différentiateur Super Twisting dans ses deux versions où dans un temps la fonction discontinue est une fonction  $sign(.)$  usuelle puis une fonction saturation  $sat(.)$  et le différentiateur Super Twisting adaptatif.

L'information dont on dispose sur le signal à dériver est de nature spectrale. En effet, dans le modèle choisi, le spectre du signal  $y_s$  est limité à la fréquence de coupure  $F_{cs} = 15Hz$ .

Pour un pas d'échantillonnage  $T_s = 10^{-3}s$ , et pour un réglage tel que  $\omega_0 = 500rad.s^{-1}$ , l'équivalent discret de (IV.1), obtenu par discrétisation selon la méthode Bilinéaire, est défini par la fonction de transfert discrète

$$G_{OPP}(z) = \frac{dy(z)}{y(z)} = \frac{a_2 z^2 + a_0}{z^2 + b_1 z + b_0} \quad (\text{IV.20})$$

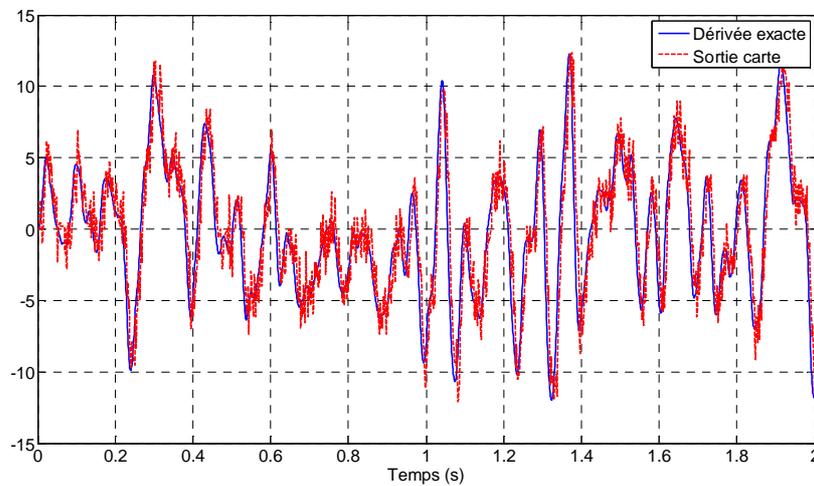
où  $y$  est le signal mesuré et  $dy$  sa dérivée. Les coefficients de la fonction de transfert sont donnés tels que :

- $a_2 = 80$
- $a_0 = -80$
- $b_1 = -1.2$
- $b_0 = 0.36$

L'équation de récurrence, associée a (IV.20), alors implémentée sur la carte RENESAS est

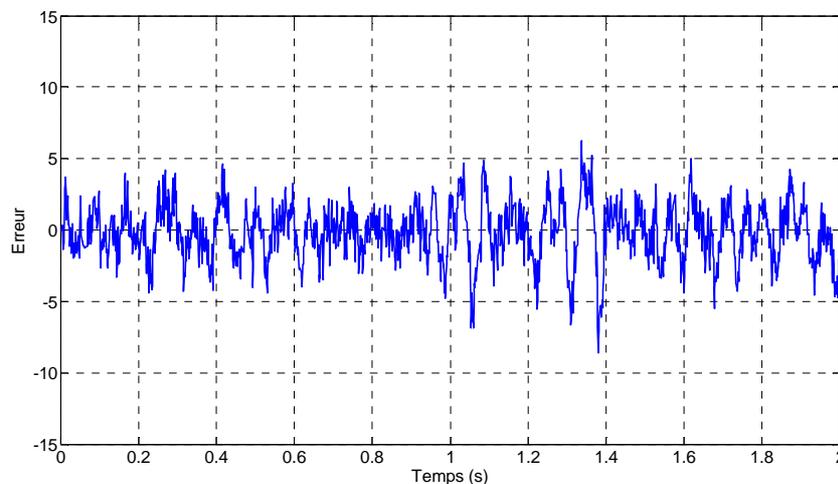
$$dy(k) = a_2 y(k) + a_0 y(k-2) + b_1 dy(k-1) + b_2 dy(k-2) \quad (\text{IV.21})$$

Le signal de sortie de ce différentiateur implémenté sur la carte RENESAS et l'erreur de dérivation sont alors données par la *Figure IV-10*.



**Figure IV-10 :** *Observateur Grand Gain : sortie vs dérivée exacte*

Cette courbe est une partie d'une acquisition faite sur un horizon de temps de 5s et l'erreur de dérivation, sur l'horizon de temps complet, associée est donnée sur la *Figure IV-11*.



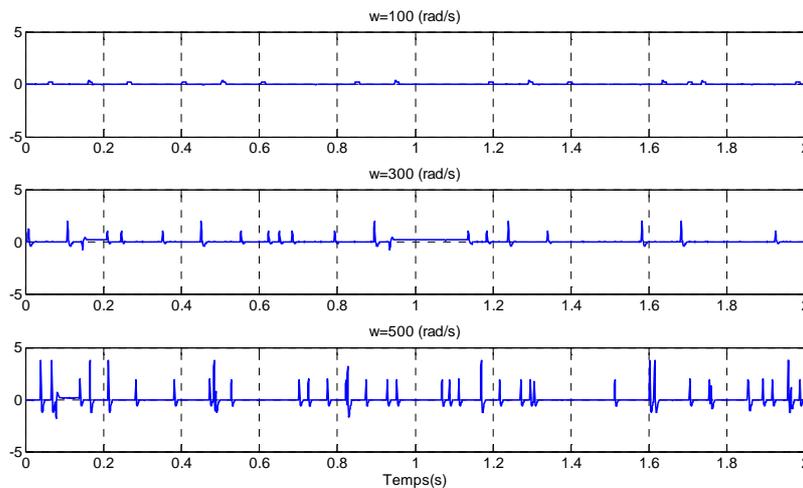
**Figure IV-11 :** *Observateur Grand Gain : erreur de dérivation*

Ce signal fournit une erreur de dérivation maximale de  $e_{HGO\_max} = 6.81$  et une moyenne de  $e_{HGO\_moy} = 154 \times 10^{-3}$ .

Pour la sortie de la *Figure IV-10*, l'observateur grand gain a été réglé pour une bande passante de  $\omega = 500 \text{ rad.s}$ , bande qui est au-delà de la plage de fréquences sur laquelle s'étend le signal à dériver  $y_s$ . En effet, comme on l'a précédemment pointé, il peut s'avérer judicieux de régler le différentiateur de la sorte car le fait de limiter sa bande à celle du signal auquel on s'intéresse, nous induit inévitablement, une majoration de l'atténuation et du déphasage autour de cette fréquence.

Il est à remarquer que le réglage effectué dans la *Section II.6* pour le même dérivateur et pour le même signal n'a pas été conservé. En effet, différents bruits sont injectés dans le signal à dériver à l'entrée de l'algorithme. Ces bruits sont le résultat de la conversion Analogique Numérique, de la quantification et des bruits électriques au niveau de la tension de référence du CAN. Ces bruits ainsi additionnés, réduisent la capacité de filtrage du dérivateur en excitant toutes ses fréquences, vu qu'ils sont modélisés comme des bruits blancs centrés. D'où, le fait de garder le même réglage, qui a été malgré tout validé en simulation à résolution infinie, conduira indubitablement à la détérioration de la précision de la dérivée résultant de l'amplification de ces bruits. D'où, la nécessité de réduire la bande passante du dérivateur.

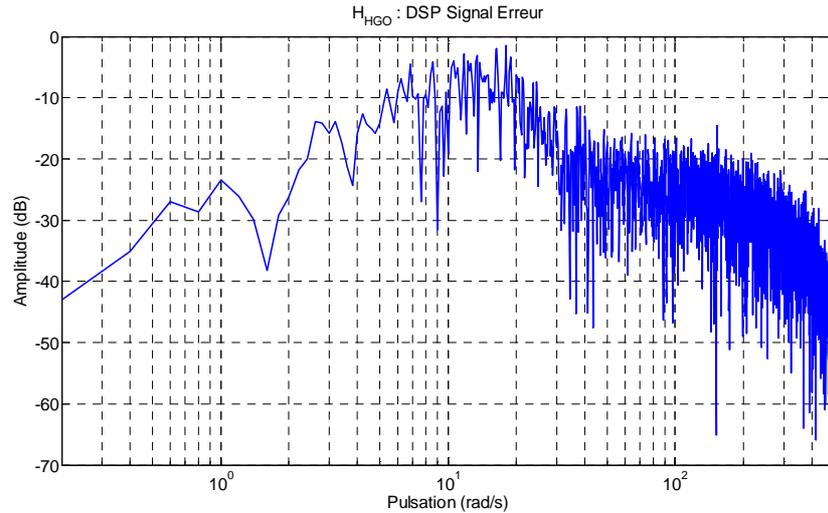
Pour observer l'effet de ces bruits sur la sortie du différentiateur en fonction de la bande passante du dérivateur, on donne dans ce qui suit un exemple où la bande passante de l'observateur grand gain est  $\omega = 500 \text{ rad/s}$ ,  $\omega = 300 \text{ rad/s}$  et  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ . L'entrée du différentiateur étant nulle, on observe directement l'effet de ces bruits sur la réponse du dérivateur.



**Figure IV-12 :** Observateur par placement de pôles : sortie pour  $y = 0$

D'après la *Figure IV-12*, il paraît clairement que l'amplification du bruit d'entrée est de plus en plus importante que la bande passante du différentiateur augmente. Cet effet d'amplification peut avoir une incidence directe dans le cas de l'utilisation de ce signal dans la commande d'un système vu qu'il induira un effet de perturbation au niveau de la commande dans le cas où ce signal  $y$  intervient directement.

La DSP du signal d'erreur est donnée dans la *Figure IV-13*. La considération de la DSP de ce signal est utile pour l'observation de l'effet d'atténuation de l'erreur en fonction des fréquences. Une comparaison ultérieure sera effectuée pour les niveaux de DSP rencontrés sur les signaux d'erreurs des différents algorithmes de dérivation.



**Figure IV-13 :** Observateur grand gain : DSP erreur de dérivation

De la même manière que précédemment, un filtre dérivateur  $H_\infty$  a été synthétisé. Celui-ci est la solution du problème défini dans la Section II.7.3.4. Celui-ci, d'ordre 8, est réduit et son ordre est ramené à 5. La réduction d'ordre est effectuée par la méthode de réduction pondérée [109] et permet de réduire le temps d'exécution de l'algorithme sur la carte microcontrôleur sans altérer les performances de celui-ci.

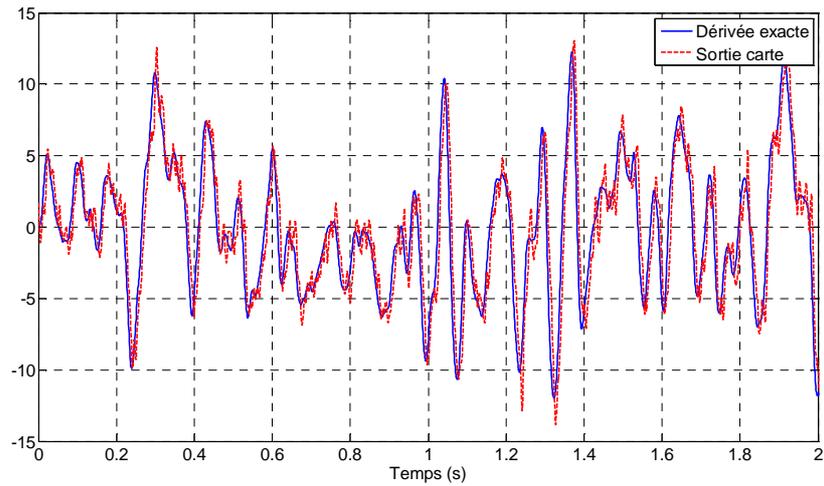
Le filtre réduit implémenté est alors défini par :

$$G_T(z) = \frac{a_5 z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{z^5 + b_4 z^4 + b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0} \quad (\text{IV.22})$$

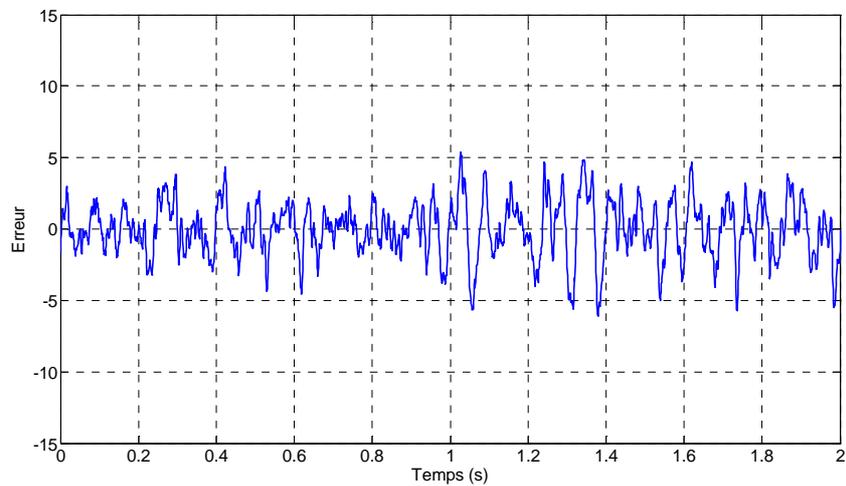
où

- $a_5 = 29.676768$
- $a_4 = 0.563915$
- $a_3 = -21.093793$
- $a_2 = -5.744901$
- $a_1 = -8.464883$
- $a_0 = 5.062892$
- $b_4 = -1.418683$
- $b_3 = -0.265107$
- $b_2 = 1.303831$
- $b_1 = -0.574670$
- $b_0 = 0.022701$

La réponse du filtre (IV.22), au même signal d'entrée, est consignée dans la Figure IV-14 et l'erreur de dérivation associées dans la Figure IV-15.

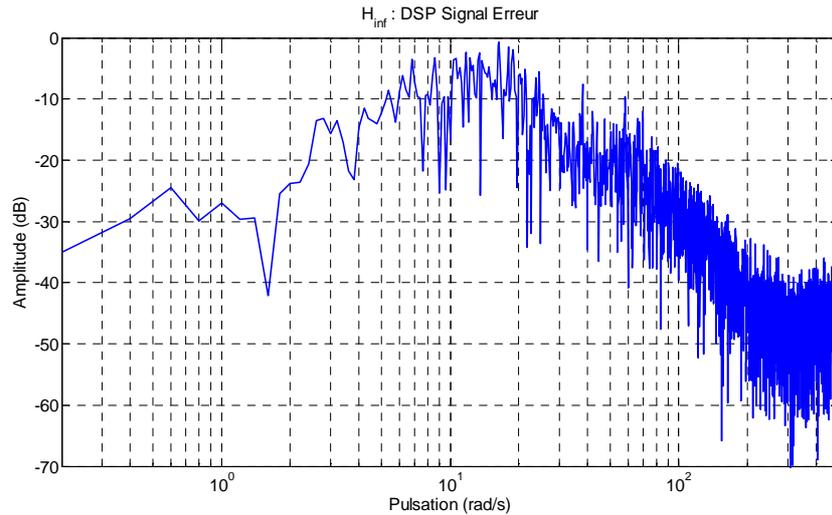


**Figure IV-14 :** *Filtre  $H_\infty$  : sortie vs dérivée exacte*



**Figure IV-15 :** *Filtre dérivateur  $H_\infty$  : erreur de dérivation*

De la même manière que pour l'observateur grand gain, le dérivateur  $H_\infty$  mis en œuvre l'a été pour un modèle de signal dont le spectre fréquentiel est plus large que celui du signal qu'on veut dériver. Pour cet essai, l'erreur de dérivation maximale est  $e_{H_\infty\_max} = 6.6$  pour une valeur moyenne  $e_{H_\infty\_moy} = 20 \times 10^{-3}$ . La DSP de l'erreur de dérivation est donnée dans la figure suivante.



**Figure IV-16 :** Filtre  $H_\infty$  : DSP erreur de dérivation

La DSP du signal d'erreur fourni par le filtre  $H_\infty$ , comparée à celle de l'observateur grand gain (Figure IV-13), est similaire à une différence près qu'elle atténue plus les composantes spectrales se situant au-delà de  $\omega=10^2 \text{ rad/s}$ .

Suite aux deux algorithmes linéaires précédents, on s'intéresse désormais aux algorithmes non linéaires présentés précédemment.

L'algorithme de dérivation Super Twisting (III.28) a été implémenté sur la carte et ses paramètres réglés de manière à ce que l'erreur de dérivation absolue soit la moins importante possible. En effet, le choix des paramètres selon les conditions (III.29) et (III.30), pour le signal à dériver considéré, conduira à des valeurs trop importantes des gains pour lesquelles la sortie du dérivateur implémenté est largement affectée par l'effet d'amplification du bruit.

Le réglage des gains étant effectué tel que  $\lambda_1 = 30$  et  $\lambda_2 = 80$ . Les gains  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ne sont pas réglés suivant les inégalités habituelles car, la dérivée seconde du signal à dériver étant d'une valeur très importante, le réglage selon ces inégalités conduit à des valeurs de gains très importantes. D'où le réglage proposé qui a été fixé afin d'obtenir le minimum d'erreur absolue.

Le dérivateur à implémenter est alors défini par :

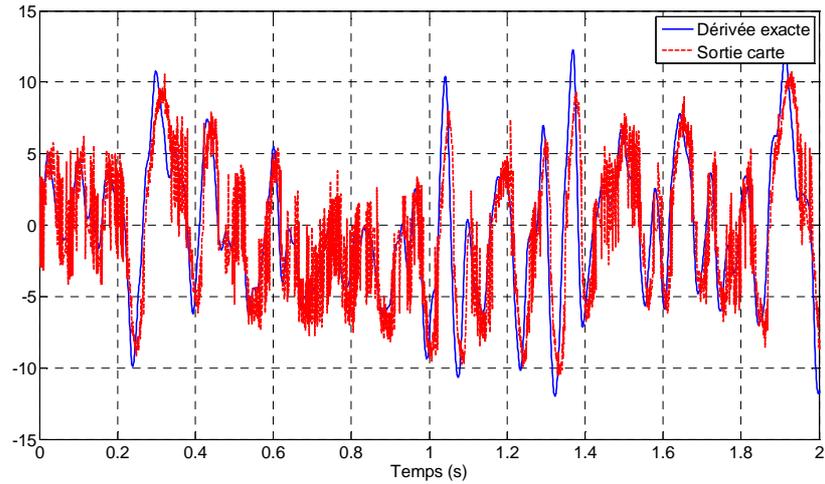
$$\begin{cases} \hat{x}_{1k} = \hat{x}_{1(k-1)} + 10^{-3} \left[ \hat{x}_{2(k-1)} - 30 \left| \hat{x}_{1(k-1)} - y_{(k-1)} \right|^{1/2} \text{sign}(\hat{x}_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) \right] \\ \hat{x}_{2k} = \hat{x}_{2(k-1)} - 10^{-3} 80 \text{sign}(\hat{x}_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

Et la dérivée  $dy_k$  à l'instant  $t = kT_s$  est alors

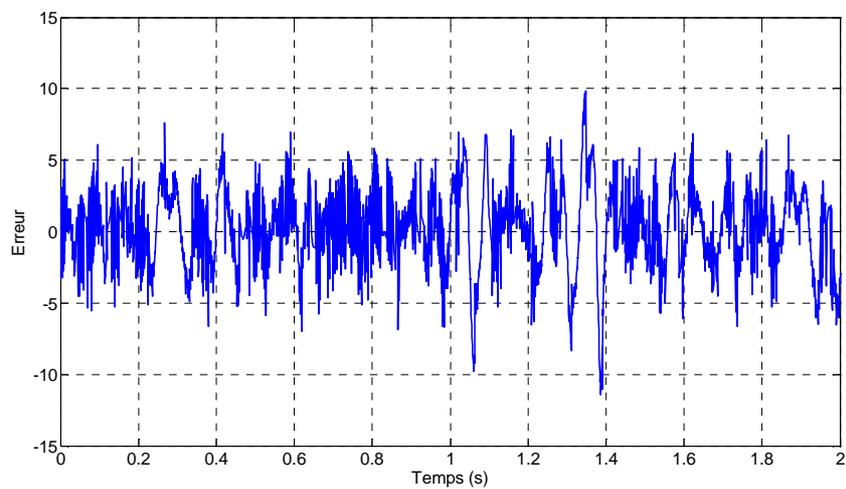
$$dy_k = \hat{x}_{2k} - \lambda_1 \left| \hat{x}_{1k} - y_k \right|^{1/2} \text{sign}(\hat{x}_{1k} - y_k) \quad (\text{IV.24})$$

La difficulté majeure posée par le réglage du différentiateur Super Twisting, réside dans le fait que le réglage des gains est un compromis constant entre la précision de l'estimation de la dérivée et l'amplification des bruits, résultat de valeurs trop importantes des gains.

De plus, il est impossible d'écrire une procédure de réglage formelle et ceci se fait « à l'œil » afin de réduire au mieux l'erreur d'estimation. La sortie de l'algorithme Super Twisting implémenté sur la carte RENESAS est donnée dans la Figure IV-17.

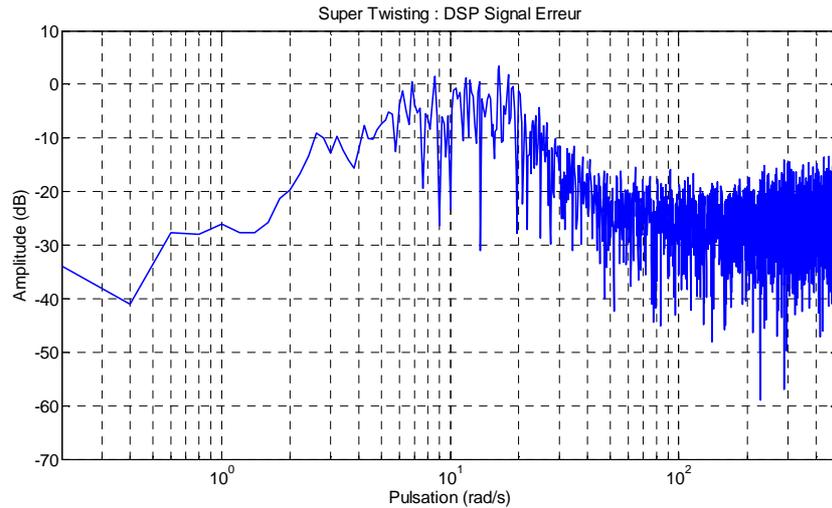


**Figure IV-17 :** *Différentiateur Super Twisting : sortie vs dérivée exacte*



**Figure IV-18 :** *Différentiateur Super Twisting : erreur de dérivation*

La *Figure IV-17* montre que la dérivée est trop bruitée et la précision de celle-ci s'en trouve dégradée vu que l'erreur maximale est  $e_{ST\_max} = 10.87$  et que sa moyenne est telle que  $e_{ST\_moy} = 230 \times 10^{-3}$ .



**Figure IV-19 :** Super Twisting : DSP erreur de dérivation

Par rapport aux signaux d'erreurs de l'observateur grand gain et le filtre  $H_\infty$ , la DSP de l'erreur de dérivation du Super Twisting est plus importante sur toutes les fréquences. En effet, la fonction  $sign(\cdot)$ , commutant à larges fréquences induit l'effet d'amplification des bruits.

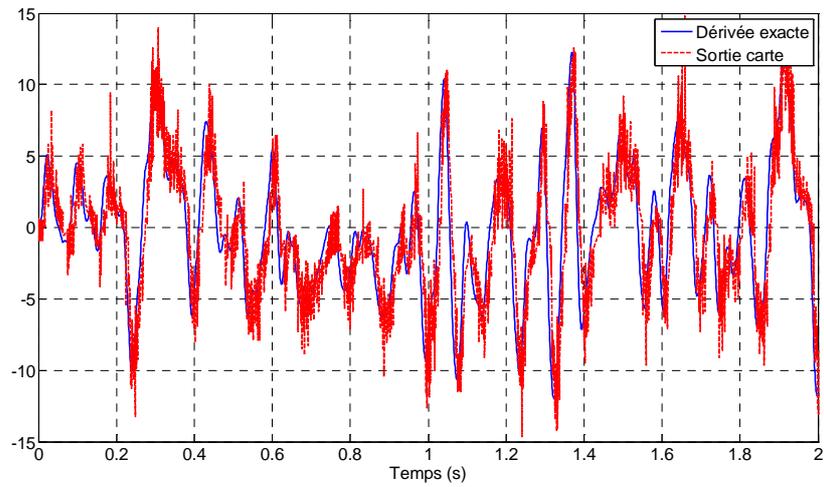
Dans le but de réduire le bruit qu'on voit apparaître dans la sortie de la carte RENESAS, on remplace la fonction  $Sign(\cdot)$  définie dans (III.7) par la fonction lissée  $Sat(\cdot)$  définie par (III.8). Dans la suite, on appellera le dérivateur correspondant Super Twisting SAT. Pour un réglage  $\lambda_1 = 50$ ,  $\lambda_2 = 80$  et  $\varepsilon = 0.07$ , ce dérivateur s'écrit

$$\begin{cases} \hat{x}_{1k} = \hat{x}_{1(k-1)} + 10^{-3} \left[ \hat{x}_{2(k-1)} - 50 \left| \hat{x}_{1(k-1)} - y_{(k-1)} \right|^{1/2} sat(\hat{x}_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) \right] \\ \hat{x}_{2k} = \hat{x}_{2(k-1)} - 10^{-3} 80 sat(\hat{x}_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) \end{cases} \quad (IV.25)$$

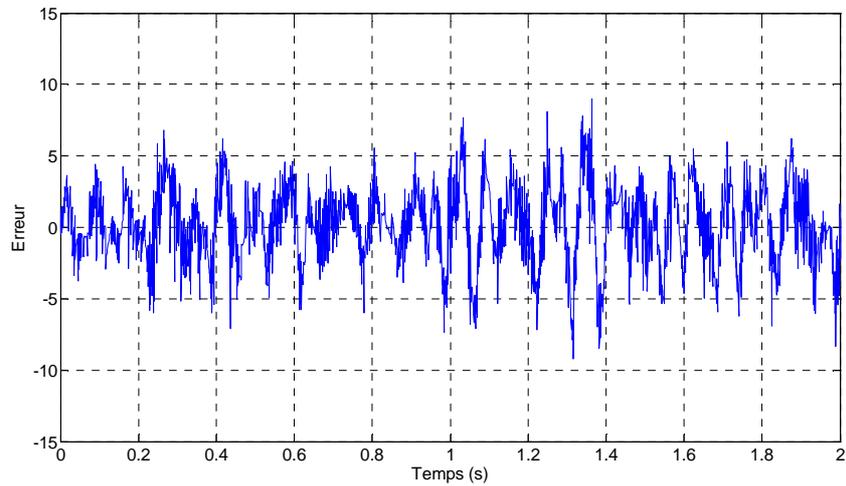
Et la sortie est alors

$$dy_k = \hat{x}_{2k} - 80 \left| \hat{x}_{1k} - y_k \right|^{1/2} sat(\hat{x}_{1k} - y_k) \quad (IV.26)$$

La sortie de ce différentiateur et l'erreur de dérivation associée sont données dans les figures suivantes.

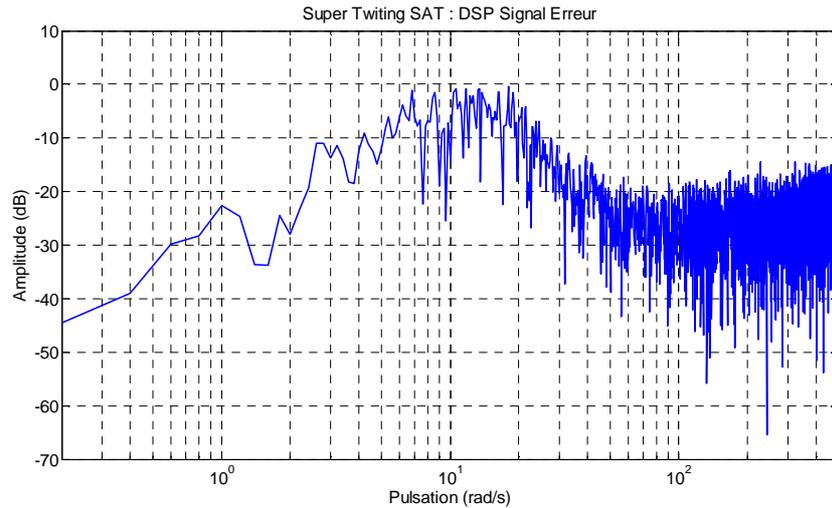


**Figure IV-20 :** *Différentiateur Supertwisting SAT : sortie vs dérivée exacte*



**Figure IV-21 :** *Différentiateur Supertwisting SAT : erreur de dérivation*

De même que précédemment, la DSP du signal d'erreur est donnée par :



**Figure IV-22 :** Super Twisting SAT : DSP erreur de dérivation

La sortie du différentiateur Super Twisting SAT montre que l'amplitude de l'erreur de dérivation a été réduite par rapport à l'algorithme de Super Twisting. En effet, on obtient, pour le signal d'erreur de dérivation, une erreur absolue maximale  $e_{ST\_SAT\_max} = 8.19$  et de moyenne  $e_{ST\_SAT\_moy} = 331 \times 10^{-3}$ .

Pour un réglage  $K_1 = 120$ , la version adaptative du Super Twisting est définie par

$$\begin{cases} \hat{x}_{1k} = \hat{x}_{1(k-1)} + T_s \left[ \hat{x}_{2(k-1)} - \hat{\lambda}_{1(k-1)} \left| \hat{x}_{1(k-1)} - y_{(k-1)} \right|^{1/2} \text{sign}(\hat{x}_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) - 120(\hat{x}_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) \right] \\ \hat{x}_{2k} = \hat{x}_{2(k-1)} - T_s \hat{\lambda}_{1(k-1)} \text{sign}(\hat{x}_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) \end{cases} \quad (\text{IV.27})$$

où les paramètres adaptatifs  $\hat{\lambda}_1$  et  $\hat{\lambda}_2$  sont tels que

$$\hat{\lambda}_{1k} = \hat{\lambda}_{1(k-1)} + T_s \left| \hat{x}_{1(k-1)} - y_{(k-1)} \right|^{1/2} \text{sign}(\hat{x}_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) (\hat{x}_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) \quad (\text{IV.28})$$

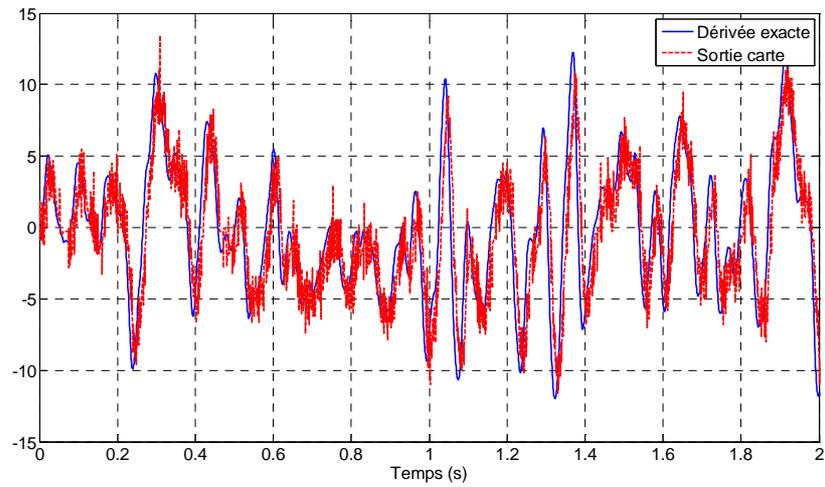
et

$$\hat{\lambda}_{2k} = \hat{\lambda}_{2(k-1)} - T_s \text{sign}(\hat{x}_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) (\hat{x}_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) \quad (\text{IV.29})$$

et la sortie du différentiateur est donnée par

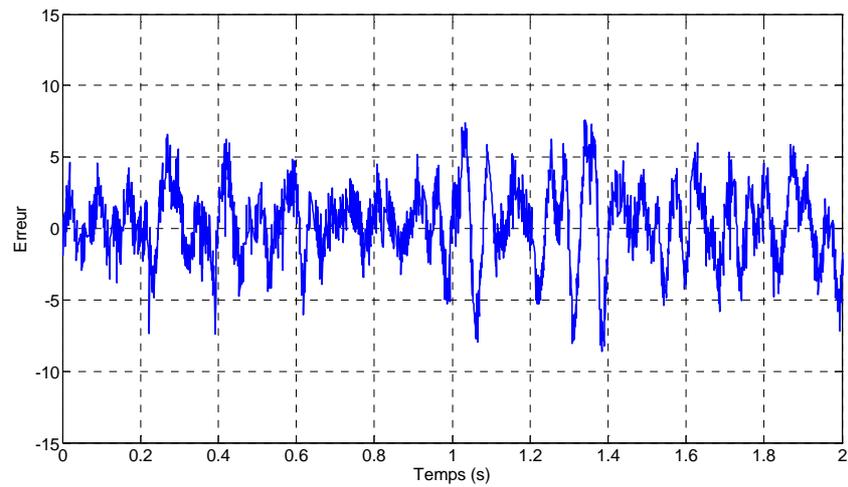
$$dy_k = \hat{x}_{2k} - \hat{\lambda}_{1k} \left| \hat{x}_{1k} - y_k \right|^{1/2} \text{sign}(\hat{x}_{1k} - y_k) - 120(\hat{x}_{1(k-1)} - y_{(k-1)}) \quad (\text{IV.30})$$

La sortie du différentiateur Super Twisting Adaptatif (IV.27) est alors donnée par :

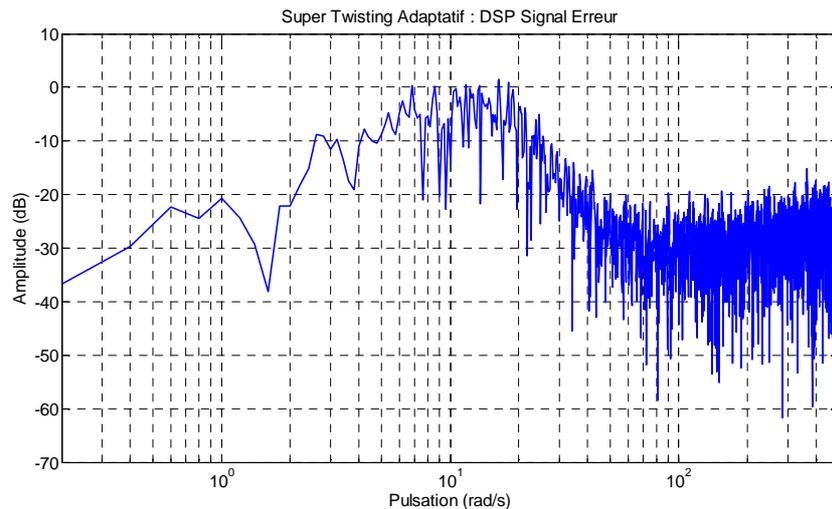


***Figure IV-23 :*** *Différentiateur Super Twisting Adaptatif : sortie vs dérivée exacte*

Et l'erreur associée est donnée dans la figure suivante.



***Figure IV-24 :*** *Différentiateur Super Twisting Adaptatif : erreur de dérivation*



**Figure IV-25 :** *Super Twisting Adaptatif : DSP erreur de dérivation*

Le dérivateur Super Twisting Adaptatif fournit une erreur de dérivation telle que  $e_{STA\_max} = 8.08$  et de moyenne  $e_{STA\_moy} = 189 \times 10^{-3}$ .

Les résultats, en termes de précision, obtenus par ces essais sont alors résumés par le tableau suivant.

	<i>Erreur maximale</i>	<i>Erreur moyenne</i>
<i>Observateur grand gain</i>	6.81	$154 \times 10^{-3}$
<i>Différentiateur <math>H_\infty</math></i>	6.6	$20 \times 10^{-3}$
<i>Super Twisting</i>	10.87	$230 \times 10^{-3}$
<i>Super Twisting (Saturation)</i>	8.08	$331 \times 10^{-3}$
<i>Super Twisting adaptatif</i>	8.19	$189 \times 10^{-3}$

**Tableau IV-1 :** *Erreurs de dérivation*

L'erreur absolue est plus faible dans le cas des dérivateurs linéaires par rapport à celle fournie par les algorithmes de dérivation non linéaires. La sensibilité au bruit des dérivateurs linéaires est moins importante par rapport à celle observée pour les dérivateurs non linéaires.

Dans [81], l'auteur s'est intéressé aux caractéristiques fréquentielles du dérivateur Super Twisting. Celles-ci montrent alors un comportement dérivateur sur une certaine plage de fréquence et une réponse quasi plate en hautes fréquences accentuant l'effet d'amplification des bruits présents sur le signal d'entrée d'où la haute sensibilité de ce dérivateur aux bruits de mesure. De ce fait, il est aisément compréhensible que la sortie de ceux-ci, implémentés sur la carte numérique, soit chahutée et l'erreur plus importante. En effet, des bruits additionnels dûs aux opérations de quantification et les variations de la tension de référence du CAN, sont ajoutés au signal à dériver ce qui augmente le niveau de bruit sur celui-ci et déprécie la précision de la dérivée de plus que le dérivateur y est sensible.

L'erreur moyenne est un paramètre important mais elle est tributaire d'un réglage des offsets sur la carte. En effet, toute acquisition est précédée par un réglage manuel à « l'œil » des

offsets de la sortie de la carte. D'où, l'erreur moyenne est un paramètre qui peut être plus pertinent dans le cas où la carte ne nécessite aucun réglage d'offset, par exemple les cartes dSPACE.

La carte de dérivation numérique étant placée dans un environnement pollué par différentes perturbations (bruits électriques, thermiques,...), il serait judicieux d'essayer d'avoir une vue plus globale sur la précision des algorithmes implémentés et ce en exploitant les résultats obtenus sur différents essais dans différentes conditions. Dans cette optique, on se propose de répéter, pour chaque algorithme implémenté sur la carte RENESAS, les essais précédents 10 fois. Ces essais sont alors effectués à des instants différents et des conditions différentes. Une fois ces essais effectués, on exploite les résultats obtenus en terme de précision de la dérivée afin d'avoir une idée quant à la répétabilité des résultats traduite par l'écart type obtenu lors de ces essais. Ces résultats sont alors résumés dans le tableau suivant.

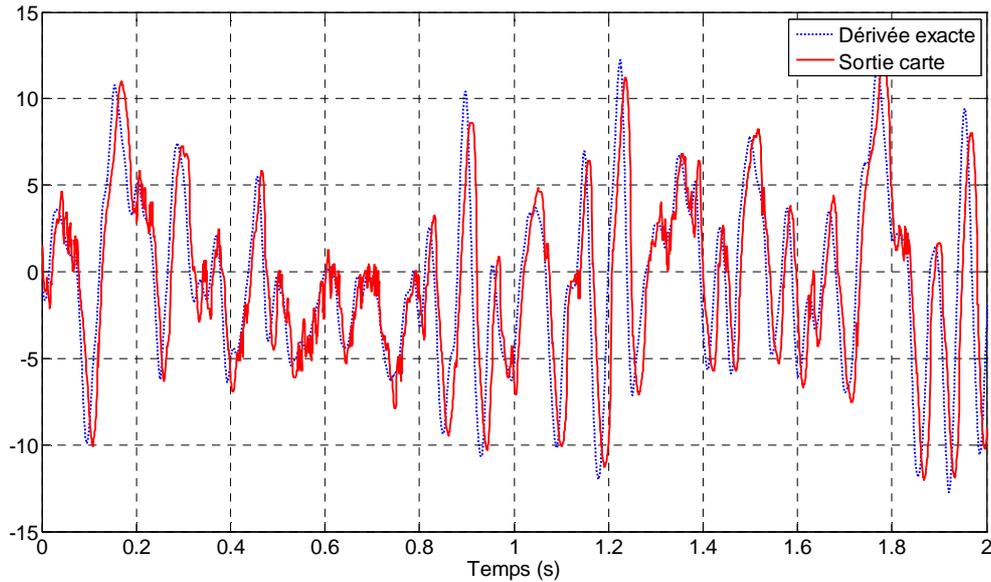
	<i>Ecart type erreur maximale</i>	<i>Ecarte type erreur moyenne</i>
<i>Observateur grand gain</i>	0.51	$4.9 \times 10^{-3}$
<i>Différentiateur <math>H_\infty</math></i>	0.44	$6.9 \times 10^{-3}$
<i>Super Twisting</i>	0.54	$8.2 \times 10^{-3}$
<i>Super Twisting SAT</i>	0.58	$14.4 \times 10^{-3}$
<i>Super Twisting adaptatif</i>	0.40	$4.8 \times 10^{-3}$

**Tableau IV-2 :** *Comparaison de précision*

La répétabilité de l'erreur moyenne est sensiblement similaire dans tous les cas mais celle-ci est dépendante de la précision de réglage de cet offset au niveau de l'organe d'acquisition. Le problème des offsets est moins délicat pour l'entrée du dérivateur vue que les algorithmes de dérivation sont, par définition, insensibles aux offsets. Pour ce qui est de l'erreur maximale de dérivation, la répétabilité des résultats est meilleure pour le cas du dérivateur Super Twisting Adaptatif, mais celles-ci sont sensiblement comparables.

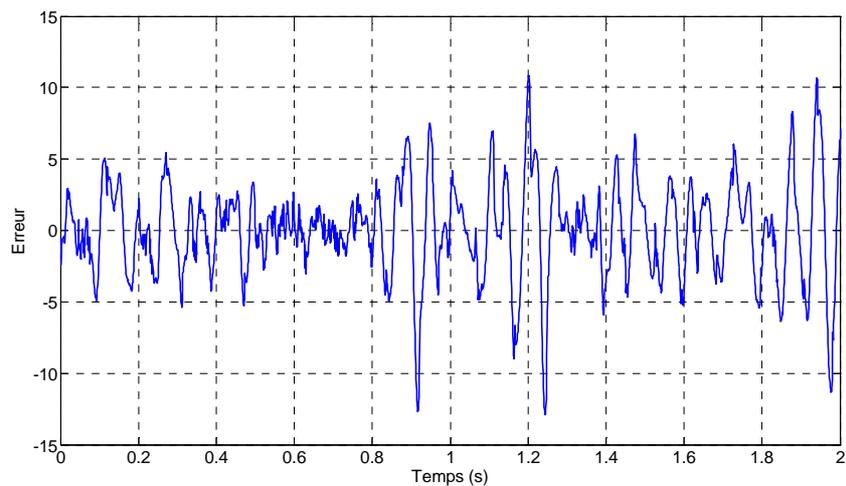
Dans la réalisation pratique des dérivateurs modes glissants, et vue leur sensibilité aux bruits de mesures sur le signal à dériver, il est commun de les précéder par un étage de filtrage passe-bas pour éliminer une partie des composantes spectrales du bruit. Dans notre étude, la seule possibilité qu'on a pour le filtrage du signal à l'entrée du dérivateur implémenté sur la carte RENESAS est d'insérer un algorithme de filtrage numérique implémenté dans le microcontrôleur. En effet, c'est l'unique moyen pour filtrer les bruits de quantification et de conversion Analogique – Numérique.

Un essai est effectué dans ce sens et l'entrée du dérivateur Super Twisting implémenté sur la carte RENESAS, est filtrée par un filtre passe-bas numérique de pulsation de coupure  $\omega = 300$ . Pour les paramètres du dérivateurs fixés tels que  $\lambda_1 = 40$  et  $\lambda_1 = 150$ , la sortie du dérivateur est alors donnée par



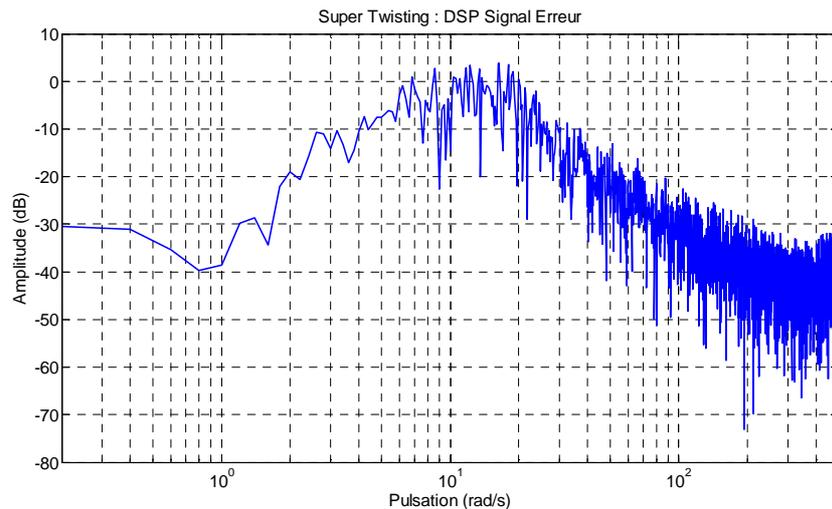
**Figure IV-26 :** *Super Twisting avec entrée filtrée : sortie vs dérivée exacte*

et l'erreur de dérivation associée est aussi donnée dans la figure suivante.



**Figure IV-27 :** *Super Twisting avec entrée filtrée : erreur de dérivation*

De la *Figure IV-26*, on observe une nette amélioration de la qualité de la dérivée en termes de chahutement. Un effet de déphasage apparaît entre la dérivée exacte et la sortie du dérivateur. C'est le retard induit par un filtrage passe-bas de l'entrée. La visualisation de la DSP du signal d'erreur donnée dans la *Figure IV-28* permet de voir encore mieux l'effet du filtrage de l'entrée sur le lissage du signal d'erreur et on observe bien que la DSP du signal est moins importante tout au long des fréquences mais admet cependant, une densité proche de celle du Super Twisting dans la bande de fréquences où le rapport signal/bruit est favorable.



**Figure IV-28 :** *Super Twisting avec entrée filtrée : DSP erreur de dérivation*

Outre la comparaison des erreurs des algorithmes de dérivation, il peut s’avérer être utile de considérer des critères quantitatifs en termes de temps d’exécution des algorithmes. Ceci permet d’avoir une idée sur la fréquence d’échantillonnage maximale pouvant être considérée pour chacun d’entre eux.

Le tableau suivant résume alors les différents temps d’exécution, sur le circuit cible, des différentes algorithmes implémentés.

	<i>Temps d’exécution (<math>\mu</math>s)</i>
<i>Observateur par placement de pôles</i>	8
<i>Différentiateur <math>H_\infty</math></i>	8
<i>Différentiateur <math>H_\infty</math> réduit</i>	8
<i>Super Twisting</i>	9
<i>Super Twisting (entrée filtrée)</i>	10
<i>Super Twisting adaptatif</i>	10

Ces valeurs ont été mesurées sur le temps de l’exécution d’une itération de calcul de dérivée et fournissent une image sur la complexité de l’implémentation de l’algorithme. En effet, plus le nombre d’opérations est important, plus le temps d’exécution l’est. Cet aspect se retrouve bien dans ce tableau vu que les méthodes par modes glissants sont les plus « gourmandes » en opérations vue la présence de puissances et de fonctions  $sign(.)$  alors que les techniques linéaires sont données par des sommes et produits uniquement. Cependant, les contraintes temporelles dans notre cas ne sont pas prioritaires mais ce tableau permet de donner une idée sur l’influence de la complexité d’un algorithme sur son temps d’exécution.

#### IV.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on s’est intéressé à la discrétisation et l’implémentation numérique des algorithmes de différentiation sur un circuit numérique à base de microcontrôleur. Les performances de ces algorithmes ont été discutées et validées selon un protocole expérimental

établi. Cette validation a été réalisée pour un signal à dériver généré par un modèle linéaire connu.

Comme première étape, la discrétisation des algorithmes a été présentée et différentes méthodes de discrétisation ont été abordées et appliquées à la discrétisation d'algorithmes de dérivation linéaires et, dans le cas où c'est possible, aux algorithmes non linéaires.

Ces méthodes de dérivation numérique ont alors été implémentées et codées sur un circuit numérique dont les principales caractéristiques ont été présentées.

L'implémentation numérique de ces algorithmes implique inévitablement l'introduction de perturbations et d'incertitudes additionnelles sur les coefficients des filtres implémentés. Dans ce sens, une étude en simulation a été apportée afin de mettre en évidence l'effet de l'imprécision de calcul et de quantification au niveau de la carte microcontrôleur sur la précision des algorithmes de dérivation. Cette étude forme alors une base pour le dimensionnement des algorithmes en fonction de la précision souhaitée.

Les algorithmes ont été appliqués pour l'estimation de la dérivée de signaux connus et les résultats ont démontré que les algorithmes de dérivation linéaires fournissent une meilleure précision ce qui est dû à leur effet filtrant, chose que l'on n'obtient pas pour les méthodes non linéaires. Pour cela, un étage de filtrage amont a été associé aux algorithmes de dérivation non linéaires. Des résultats expérimentaux ont alors mis en évidence l'amélioration, dans cette configuration, de la précision et de la qualité de la dérivée estimée mais, en contre partie, un déphasage plus important est alors introduit.

Dans le chapitre suivant on s'intéressera à l'étude des performances de ces mêmes algorithmes dans la dérivation d'un signal récupéré sur un système physique que l'on présentera. Ce signal est un signal de vitesse et la carte de dérivation est utilisée pour l'estimation d'une accélération. Dans un premier temps, on s'intéressera à l'étude des performances des algorithmes en boucle ouverte sur des signaux expérimentaux, pour passer à l'étude en boucle fermée où le signal d'accélération issu de la carte est bouclé pour le calcul de la commande du système. Des résultats en termes de suivi de trajectoire seront étudiés.



**Chapitre V Algorithmes de dérivation :  
mise en œuvre expérimentale  
pour la commande d'un  
système électropneumatique**



## V.1 Introduction

Dans les *chapitres II* et *III*, des méthodes linéaires et non linéaires pour l'estimation de la dérivée de signaux, ont été introduites et les développements théoriques associés ont été présentés. Dans le *chapitre IV*, ces méthodes ont été numériquement implémentées sur une carte à base de microcontrôleurs et une première validation de cette solution a été effectuée sur des signaux bien caractérisés et connus.

Dans ce chapitre, il est également question de la validation de l'implémentation sur microcontrôleur des algorithmes de dérivation. Cependant, cette validation se fait dans un cadre différent de celui du chapitre précédent.

La finalité de cette étude est de pouvoir estimer, par la dérivation d'un signal mesuré, certains des signaux internes intervenant dans le calcul de la commande d'un système. A cet effet, un système électropneumatique asservi en position a été considéré. La carte de dérivation numérique est alors utilisée pour l'estimation de l'accélération de la tige du vérin à partir de la dérivation de sa vitesse mesurée.

Dans un premier temps, on commence par décrire le dispositif expérimental formé par le système commandé, les différents périphériques électriques et électroniques de l'installation ainsi que l'appareillage de mesure utilisé.

Ensuite, on présentera dans les détails le système électropneumatique. Un modèle de commande associé sera présenté et une commande par modes glissants sera introduite et adoptée durant tous les essais ultérieurs.

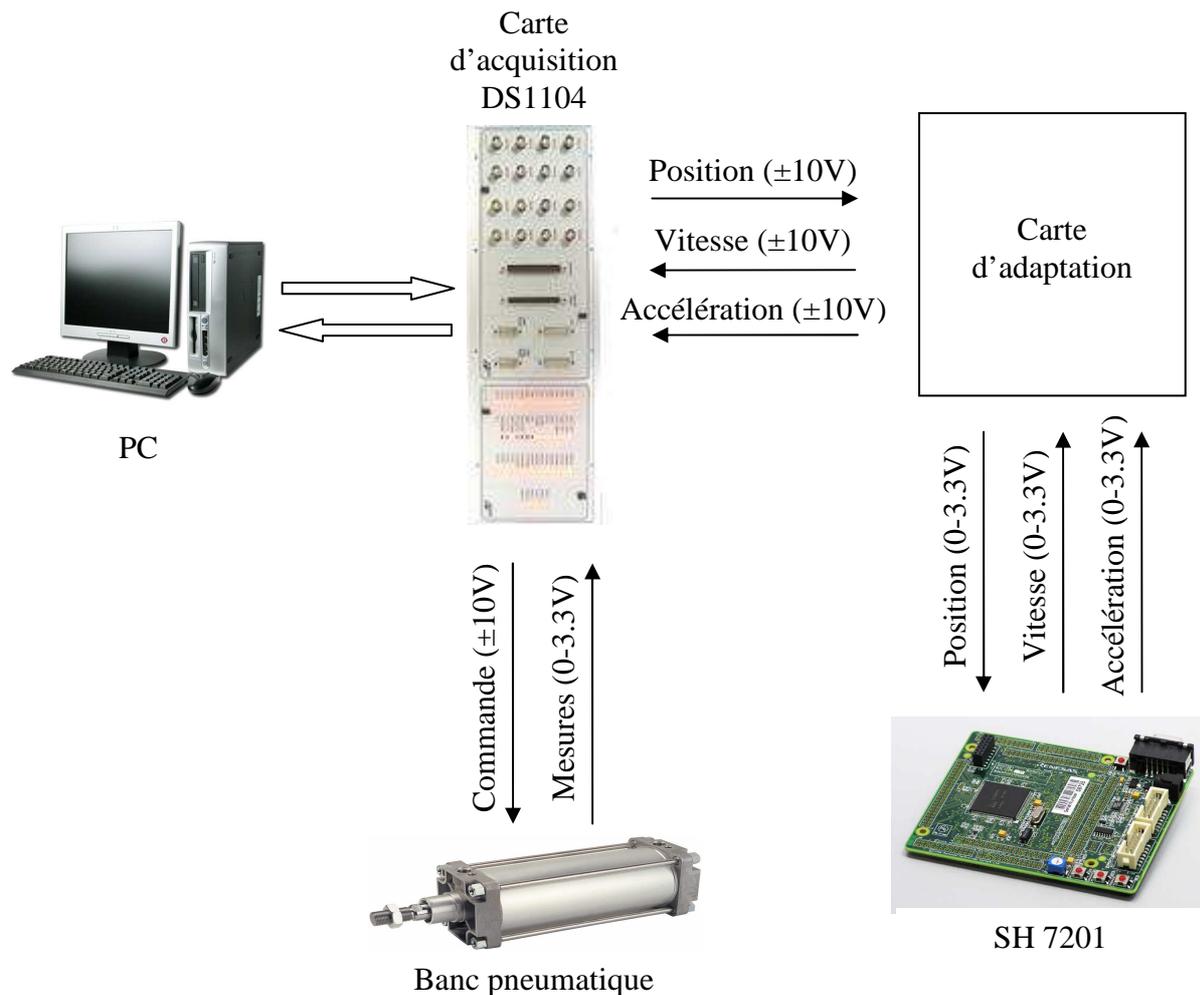
Pour la validation de la solution de la carte de dérivation numérique, une première étape concernera la validation en boucle ouverte avec la comparaison de signaux d'accélération obtenus en sortie de la carte de dérivation numérique à partir de la dérivation du signal de vitesse associée. Ces signaux seront comparés à ceux fournis par un accéléromètre dont la sortie est considérée la référence de comparaison.

Enfin, on passera à la validation en boucle fermée des algorithmes de dérivation implémentés sur la carte de dérivation. Dans ce cas, l'accélération est obtenue par dérivation de la vitesse et injectée dans l'algorithme de commande.

## V.2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental, décrit dans la *Figure V-1*, est composé de plusieurs organes. Celui-ci comporte alors :

- Un banc électropneumatique comportant un vérin pneumatique ;
- Un appareillage (capteurs) adéquat pour la mesure des différentes grandeurs physiques importantes (pression, position, accélération) ;
- Une carte d'acquisition reliée à un ordinateur ;
- La carte de dérivation numérique utilisée ;
- Une carte d'adaptation de signaux de la carte de développement à la carte d'acquisition.



**Figure V-1:** Dispositif expérimental

Le banc électropneumatique est composé d'un vérin pneumatique double effet, simple tige du constructeur ASCO Joucomatic. Le débit de l'air dans les chambres de celui-ci est réglé à travers deux servodistributeurs Servotronic du même constructeur.

Ce même banc est équipé de capteurs de mesure nécessaires pour la synthèse de la commande (pression, position, accélération). Cependant, dans notre approche, parmi les capteurs de position, de vitesse et d'accélération, uniquement le signal de mesure de position sera considéré. Les mesures de vitesse et d'accélération seront utilisées pour servir de références de comparaison à celles fournies par la carte de dérivation. La vitesse de référence est obtenue par dérivation analogique de la position référence.

Une carte d'acquisition du constructeur dSPACE est utilisée pour l'acquisition des différents signaux et pour le calcul de la commande par un algorithme de commande numérique implémenté sur celle-ci. Ce signal de commande est envoyé aux servodistributeurs pour satisfaire un objectif en terme de suivi de position.

La carte de dérivation numérique est une carte du constructeur RENESAS à base de microcontrôleur comportant des entrées et des sorties analogiques respectivement pour l'acquisition du signal de position et la restitution des signaux des dérivées (vitesse et accélération) correspondantes.

Une carte d'adaptation de tension est insérée entre la carte dSPACE et la carte RENESAS. Cette carte a été conçue afin de pouvoir connecter la carte dSPACE à la carte RENESAS.

Dans ce qui suit, on donne une description des différents organes qui composent le dispositif expérimental.

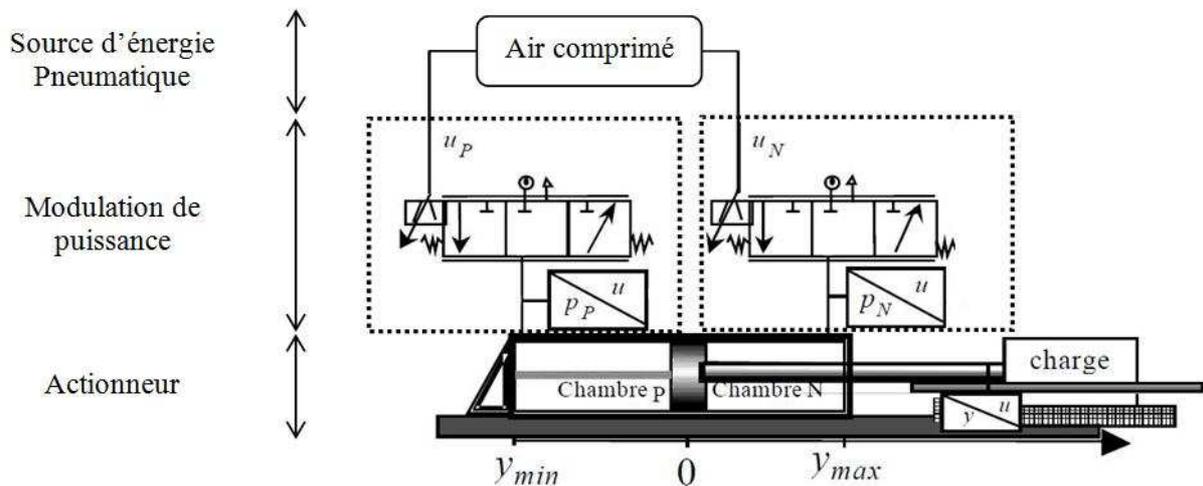
### V.3 Système électropneumatique

L'application des systèmes électropneumatiques dans l'industrie a connu un essor fulgurant au cours des dernières décennies. Au début, leur utilisation se trouvait restreinte à l'application dans les lignes de production en se limitant à des opérations basiques de manipulations (pressage, pliage, poinçonnage,...) obtenues par une commande tout ou rien de l'actionneur. Cependant, l'évolution de la technologie numérique et de la théorie de la commande de ces procédés ont fait évoluer leur utilisation et des applications de vérins pneumatiques asservis [110, 111, 112] dans la robotique, le contrôle d'effort et de débit sont apparues.

De plus ces systèmes jouissent de l'avantage de leur faible coût, relativement aux vérins électriques et hydrauliques, leur faible poids/encombrement, leur facilité d'installation et de maintenance et le faible coût de leur source d'énergie, propre, inépuisable et disponible partout.

Nous nous sommes intéressés au problème de commande d'un système électropneumatique (*Figure V-2*) composé des éléments suivants :

- Une source d'énergie ;
- Deux modulateurs de puissance pneumatique ;
- Un actionneur pneumatique ;
- Une charge.



**Figure V-2 :** Système électropneumatique

La source d'énergie est un compresseur pneumatique fournissant l'énergie pneumatique à la pression de fonctionnement nécessaire fixée à 7 bars. L'air comprimé en sortie de celui-ci est filtré et injecté dans un réservoir ajouté afin de filtrer les fluctuations de la pression de l'air en sortie du compresseur.

Les modulateurs de puissance, des servodistributeurs du constructeur Asco Joucomatic, ont été développés au sein du laboratoire Ampère [113] en partenariat avec leur constructeur. Ils permettent de moduler le débit d'air dans les chambres du vérin en fonction du signal de commande calculé et récupéré de la carte dSPACE et les cartes de commande et de puissance sont intégrées dans ceux-ci. L'air sous pression provenant de la source d'énergie est placé à l'entrée de ceux-ci.

L'actionneur pneumatique est un vérin double effet, simple tige. Celui-ci est relié à un chariot guidé sur deux glissières cylindriques horizontales. La liaison entre ces deux parties est assurée par des douilles à billes afin de réduire le frottement dans le mouvement.

Pour l'acquisition des différents signaux du système et leur traitement sur un ordinateur, la carte dSPACE est l'interface qui permet l'acquisition de ceux-ci et sur laquelle sont implémentés une partie des logiciels intervenant dans le dispositif.

#### V.4 Carte d'acquisition DS1104

La carte dSPACE est une interface entre les différents composants de la *Figure V-1*. Elle joue un rôle central dans la mesure où c'est la carte à travers laquelle est faite l'acquisition des différents signaux (mesures capteurs, sortie carte RENESAS) et c'est aussi elle qui restitue les signaux (commande, signal à dériver) aux autres composants du dispositif expérimental.

La carte d'acquisition est composée d'une carte DS1104 reliée au port PCI de l'ordinateur et reliée à un panneau de connexion CP1104. Ce dernier porte tous les ports de connexion (CAN, CNA, E/S numériques, interface série...) à divers périphériques pour l'acquisition et la génération de signaux.

Le système d'acquisition dSPACE est un outil puissant dédié au prototypage rapide de lois de commande et l'implémentation de modèles de simulation dans une architecture Hardware In the Loop (HIL). Associé au logiciel Matlab/Simulink, il permet, via le Real Time Interface (RTI), de compiler et télécharger un modèle construit sur celui-ci pour tester et valider ses performances. Le Real Time Interface (RTI) est un logiciel pour l'implémentation de différents types de modèles (temps continu, temps discret, hybrides, etc...) Matlab/Simulink sur la carte DS1104. Il intègre une bibliothèque de composants dédiés permettant la connexion du modèle à l'interface d'Entrées/Sorties dSPACE. Le Real Time Workshop (RTW) est le logiciel chargé de la génération de code C pour l'implémentation du modèle sur le matériel dSPACE.

Le tableau suivant résume les principales caractéristiques de la carte DS1104 [114].

<b>Processeur</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Processeur MPC8240</li> <li>▪ Processeur 64 bits à virgule flottante</li> <li>▪ Horloge CPU : 250 MHz</li> </ul>
<b>Entrées Analogiques</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ 4 voies multiplexées                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- Résolution : 16 bits</li> <li>- Temps de conversion : 2<math>\mu</math>s</li> </ul> </li> <li>▪ 4 voies parallèles                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- Résolution : 12 bits</li> <li>- Temps de conversion : 0.8<math>\mu</math>s</li> </ul> </li> <li>▪ Plage de tension d'entrée : <math>\pm 10</math>V</li> <li>▪ Erreur d'offset : <math>\pm 5</math>mV</li> </ul>
<b>Sorties Analogiques</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ 8 voies multiplexées                             <ul style="list-style-type: none"> <li>- Résolution : 16 bits</li> <li>- Temps d'établissement : 2<math>\mu</math>s</li> </ul> </li> <li>▪ Plage de tension de sortie : <math>\pm 10</math>V</li> <li>▪ Erreur d'offset : <math>\pm 1</math>mV</li> </ul>

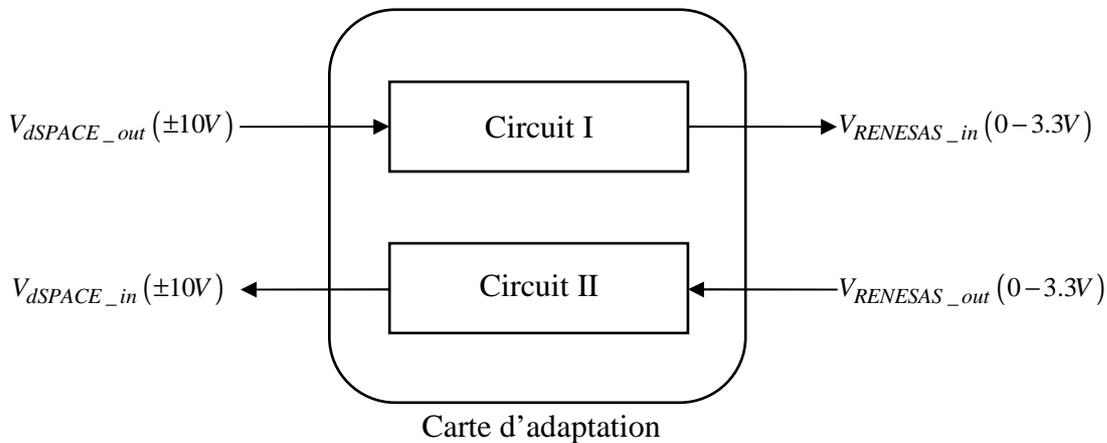
***Tableau V-1 : Caractéristiques techniques de la carte DS1104***

Le logiciel ControlDesk du même constructeur est installé sur l'ordinateur. Celui-ci est une IHM (Interface Homme Machine) qui permet de superviser les expérimentations en temps réel.

### V.5 Carte d'adaptation

Comme précisé dans la *Figure V-1*, les tensions d'entrée et de sortie de la carte dSPACE et de la carte RENESAS sont a priori incompatibles et il n'est pas possible de relier directement les Entrées/Sorties de celles-ci entre elles. C'est pour cela qu'une carte d'adaptation de tension est insérée entre les deux.

Cette carte permet de convertir le signal récupéré d'une sortie de la carte dSPACE, évoluant dans une plage de ( $\pm 10V$ ), en un signal compatible avec l'entrée analogique de la carte RENESAS. Ce dernier doit évoluer dans une plage de ( $0V - 3.3V$ ). De la même façon, le signal récupéré de la sortie de la carte RENESAS ( $0V - 3.3V$ ) est converti en signal pouvant être mis en entrée de la carte dSPACE ( $\pm 10V$ ).

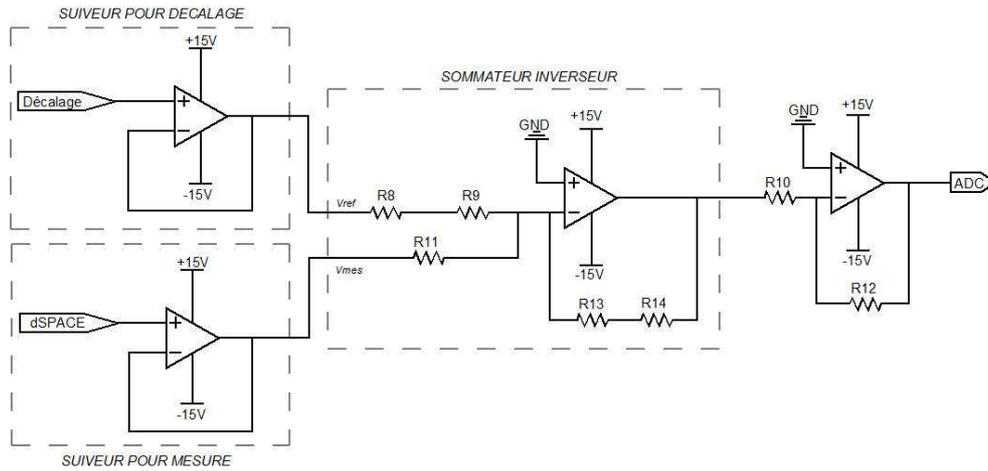


**Figure V-3 :** Carte d'adaptation

La carte d'adaptation a été réalisée à base d'amplificateurs opérationnels. Des études préliminaires ont été effectuées et les offsets et les bruits au niveau de chaque entrée/sortie du circuit ont été étudiés. En effet, ceci nous permettait de statuer quant à l'utilité d'insérer dans la carte un système (filtre) pour le filtrage du bruit et des systèmes de compensation d'offsets. Pour ce qui est du filtrage, une caractérisation spectrale des bruits au niveau des sorties de la carte dSPACE et celles de la carte RENESAS a été effectuée. Celle-ci a montré que le rapport signal/bruit dans ces ports est favorable et qu'il n'y a pas lieu d'incorporer un filtrage vu, qu'en plus, celui-ci introduira inévitablement un déphasage entre le signal à dériver et le signal dérivée. De plus, la carte RENESAS intègre un filtre au niveau de ses entrées analogiques et des filtres pourraient être, au besoin, intégrés sur la carte dSPACE ultérieurement laissant ainsi une liberté quant à leur utilisation.

Certains offsets apparaissent au niveau des différentes entrées/sorties. Les algorithmes de dérivation sont, par définition, insensibles aux offsets. Une première étape de compensation d'offsets pourra être envisagée avant la mise en œuvre des algorithmes.

La carte d'adaptation a été réalisée et les schémas électriques des circuits sont consignés dans les figures *Figure V-4* et *Figure V-5*.



**Figure V-4 : Schéma Circuit I**

Ce montage permet de convertir un signal de tension  $V \in [-10,10](V)$  en un signal de tension  $V \in [0,3.3](V)$ . Le montage « suiveur pour mesure » est un étage inséré à l’entrée du signal de la carte dSPACE pour une d’impédances. Sa sortie  $V_{mes}$  est alors égale à la sortie de la carte dSPACE  $V_{dSPACE\_out}$ . Le montage « suiveur pour décalage » permet de générer un offset pour faire correspondre la tension  $0V$  de la carte dSPACE avec la tension  $3.3/2V = 1.65V$  à l’entrée de la carte RENESAS. Ainsi, la sortie de celui-ci est  $V_{ref} = 1.65V$ .

Le montage « sommateur inverseur » est le montage qui permet de « comprimer » le signal ( $\pm 10V$ ) et le ramener à un signal à son image qui s’étend sur la plage ( $0V - 3.3V$ ) de l’entrée de la carte dSPACE. La sortie de cet étage est alors définie par

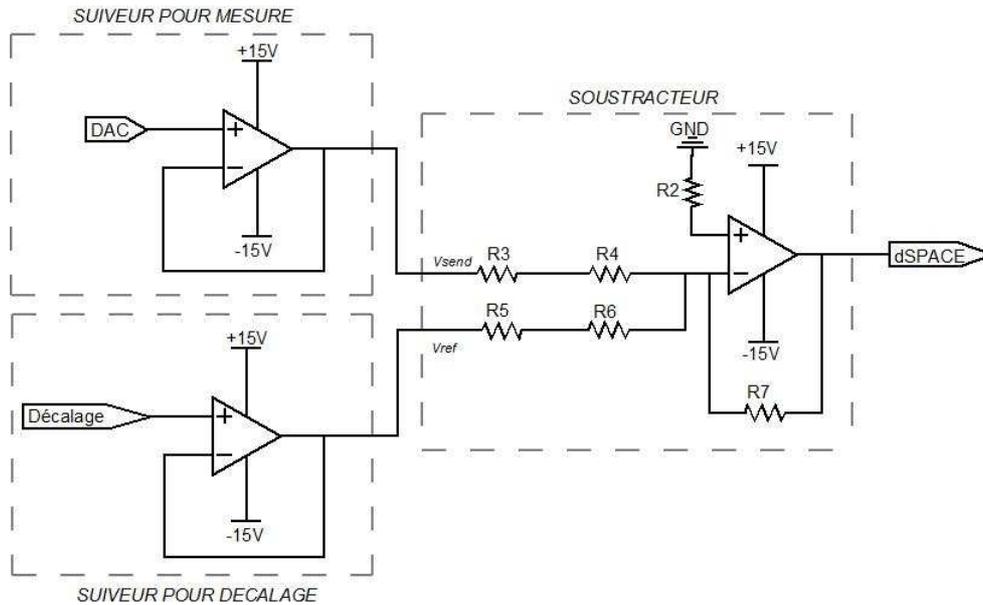
$$V_{SI} = - \left[ V_{ref} \frac{R_{13} + R_{14}}{R_8 + R_9} + V_{dt} \frac{R_{13} + R_{14}}{R_{11}} \right]$$

Les différentes valeurs de résistances ont été choisies de manière à ce que cette expression soit équivalente à

$$V_{SI} = - \left[ V_{ref} + \frac{3.3}{20} \times V_{dt} \right]$$

Et le dernier étage est alors un étage d’inversion de tension et dont la sortie  $V_{RENESAS\_in}$ , placée en entrée de la carte RENESAS, est

$$V_{RENESAS\_in} = -V_{SI}$$



**Figure V-5 :** Schéma Circuit II

Inversement au montage précédent, ce montage permet de convertir un signal de tension  $V \in [0, 3.3](V)$  en un signal de tension  $V \in [-10, 10](V)$ .

Les montages « suiveur pour mesure » et « suiveur pour décalage » jouent les mêmes rôles que dans le montage précédent.

Le montage « soustracteur » est un montage dont la tension de sortie  $V_{dSPACE\_in}$  est définie par

$$V_{dSPACE\_in} = V_{send} \left[ \left( 1 + \frac{R_7}{R_5 + R_6} \right) \left( \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} \right) \right] - V_{ref} \left[ \frac{R_7}{R_5 + R_6} \right]$$

et le choix des résistances est effectué de manière à ce que cette expression soit équivalente à

$$V_{dSPACE\_in} = \frac{20}{3.3} V_{send} - \frac{20}{3.3} V_{ref}$$

## V.6 Appareillage de mesures

Le dispositif expérimental est équipé de capteurs pour la mesure des différentes grandeurs physiques nécessaires pour la synthèse de la loi de commande. En effet, comme la majorité de problèmes de commande en position des systèmes mécatroniques, le vecteur d'état est composé de la position  $y$ , la vitesse  $\dot{y}$  et l'accélération  $\ddot{y}$ .

La position est mesurée par un potentiomètre linéaire. Celui-ci est un capteur TLH500 du fabricant Novotechnik dont les spécifications techniques sont résumées dans le *Tableau V-2*.

<b>Constructeur</b>	novotechnik
<b>Modèle</b>	TLH500
<b>Grandeur mesurée</b>	Position
<b>Course électrique (mm)</b>	508
<b>Course mécanique (mm)</b>	514
<b>Vitesse de déplacement max. (m/s)</b>	10
<b>Accélération max. (g)</b>	20
<b>Tension d'alimentation (V)</b>	24 DC
<b>Tension de sortie (V)</b>	±10
<b>Résolution (mm)</b>	0.01
<b>Sensibilité (mV/mm)</b>	40

**Tableau V-2** : Capteur de position : caractéristiques techniques

Le banc est également équipé d'une carte de dérivation analogique qui fournit la vitesse à partir de la position. Cette vitesse est la vitesse référence dans notre étude. C'est le signal qu'on dérivera pour le calcul de l'accélération.

L'accélération est mesurée à l'aide d'un accéléromètre capacitif mono-axe dont les caractéristiques sont données dans le *Tableau V-3*.

<b>Constructeur</b>	ASC (Advanced Sensors Calibration)
<b>Modèle</b>	ASC 4431-002-6A
<b>Etendue de mesure (g)</b>	±2
<b>Tension d'alimentation (V)</b>	10 DC
<b>Tension de sortie (V)</b>	0-5
<b>Sensibilité (mV/g)</b>	916.2

**Tableau V-3** : Accéléromètre : caractéristiques techniques

Les pressions dans les deux chambres du vérin sont mesurées par deux capteurs miniatures. Leur caractéristiques sont données dans le tableau suivant.

<b>Constructeur</b>	Kulite
<b>Modèle</b>	XT -140 M
<b>Etendue de Mesure (bar)</b>	7
<b>Précision (% de l'EM)</b>	0.1
<b>Tension d'alimentation (V)</b>	15 DC/AC
<b>Tension de sortie (mV)</b>	100

**Tableau V-4 :** Capteur de pressions des chambres du vérin : caractéristiques techniques

Dans ce qui suit, on commence par présenter le modèle dynamique du vérin avant de passer à la synthèse d'une commande en position par modes glissants.

### V.7 Modèle dynamique du système électropneumatique

L'établissement du modèle d'état du système électropneumatique est fait en deux étapes. Dans une première partie, un modèle de simulation est mis en place. Celui-ci est considéré comme le modèle le plus complet et le plus proche du système réel. A partir de celui-ci, un modèle de commande sera extrait moyennant quelques approximations et hypothèses simplificatrices. Ceci dans l'objectif d'écrire le modèle sous forme d'un modèle affine en la commande, nécessaire pour la synthèse de commande par modes glissants qu'on présente dans la *section V.8*. Dans ce qui suit, on s'intéressera surtout au deuxième modèle. Le lecteur intéressé par de plus amples détails sur la modélisation est invité à se référer aux travaux où la modélisation du banc électropneumatique a été initiée [18].

Dans un premier temps, on introduit le modèle de la partie mécanique pour passer, ensuite, à la modélisation de l'évolution des pressions dans les chambres du vérin.

#### V.7.1 Partie mécanique : modèle de commande

La partie mécanique du système à commander est formée par l'ensemble piston+charge. Celle-ci est soumise aux actions des forces suivantes :

- Force  $F_p$  exercée sur la tige du vérin par la pression dans ses chambres ;
- Force  $F_{ext}$  de la pression atmosphérique ;
- Forces  $F_f$  dues aux frottements secs  $F_{sec}$  et visqueux  $F_{visq}$  au niveau du piston.

Le vérin est composé de deux chambres  $P$  et  $N$  de volumes respectifs  $V_p(y)$  et  $V_N(y)$  variables en fonction de la position  $y$  de la tige.

Soient  $S_p$  et  $S_N$  les sections utiles de la tige du vérin respectivement dans les chambres  $P$  et  $N$  et soient  $P_p$  et  $P_N$  les pressions au niveau de celles-ci.

La force  $F_p$  est l'effort imposé au niveau de la tige du vérin par les pressions  $P_p$  et  $P_N$  dans les chambres  $P$  et  $N$  du vérin de sections utiles respectives  $S_p$  et  $S_N$ .  $F_p$  est la résultante des différence des forces exercées par la pression  $P_p$  sur  $S_p$  et celle exercée par  $P_N$  sur  $S_N$ .

Ainsi, on a :

$$F_p = S_P P_P - S_N P_N \quad (\text{V.1})$$

L'action de la pression atmosphérique est également donnée par

$$F_{ext} = (S_P - S_N) P_A \quad (\text{V.2})$$

où  $P_A$  définit la pression atmosphérique.

La force engendrée par les frottements secs et visqueux est donnée par

$$F_f = F_{sec} + F_{visq} \quad (\text{V.3})$$

Le frottement visqueux  $F_{visq}$  (N), proportionnel à la vitesse  $v$  (m/s) de la partie mobile, est défini par

$$F_{visq} = bv \quad (\text{V.4})$$

où  $b$  (N/m/s) est le coefficient de frottement visqueux.

Dans les systèmes pneumatiques, plusieurs modèles [115, 116, 117] ont été adoptés pour la représentation du frottement sec  $F_{sec}$  [118]. Celui-ci est négligé dans notre modèle de commande.

L'application de la loi fondamentale de la dynamique au système mobile de masse  $M$  conduit, sous l'hypothèse d'une liaison tige/chariot rigide indéformable, à l'équation d'état :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{M} (S_P P_P - S_N P_N - F_f - F_{ext}) \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

### V.7.2 Modèle de l'évolution des pressions dans les chambres

Pour la modélisation de la mise sous pression d'une chambre, des hypothèses classiques sont généralement admises [16]. Celles-ci sont alors résumées par

- L'air est considéré être un gaz parfait ;
- L'énergie cinétique du fluide est négligeable dans les chambres ;
- L'écoulement du fluide dans les chambres est adiabatique ;
- L'échange de travail fluide/piston est réversible ;
- Les conduites de mise sous pression et d'échappement sont à la même position horizontale.

D'autres hypothèses peuvent être également considérées pour l'écriture d'un modèle de commande. Le débit de fuite inter-chambres est alors considéré nul. Cette hypothèse a été vérifiée expérimentalement sur ce même système [84].

Pour la modélisation de l'évolution de la pression du fluide dans une chambre en fonction du volume de celle-ci, plusieurs modèles ont été proposés [118]. Dans notre étude, on considère le modèle polytropique.

Sous ces hypothèses, l'évolution des pressions dans les chambres  $P$  et  $N$  du vérin est alors définie par :

$$\begin{cases} \frac{dP_P}{dt} = \frac{krT_P}{V_P(y)} \left[ q_{mP}(u_P, P_P) - \frac{S_P}{rT_P} P_P v \right] \\ T_P = T_A \left( \frac{P_{P0}}{P_P} \right)^{\frac{1-k}{k}} \end{cases} \quad (\text{V.6})$$

$$\begin{cases} \frac{dP_N}{dt} = \frac{krT_N}{V_N(y)} \left[ q_{mN}(u_N, P_N) + \frac{S_N}{rT_N} P_N v \right] \\ T_N = T_A \left( \frac{P_{N0}}{P_N} \right)^{\frac{1-k}{k}} \end{cases} \quad (\text{V.7})$$

Dans ce modèle,  $q_{mP}(u_P, P_P)$  et  $q_{mN}(u_N, P_N)$  représentent les débits massiques d'air dans les chambres  $P$  et  $N$ .  $u_P$  et  $u_N$  sont les signaux de commande des servodistributeurs associés aux chambres  $P$  et  $N$  du vérin.

$P_{P0}$  et  $P_{N0}$  sont les pressions initiales dans les chambres,  $T_P$  et  $T_N$  leurs températures.  $k$  est le coefficient polytropique et sa valeur est ajustée expérimentalement.  $r$  représente la constante universelle des gaz parfaits.  $T_A$  est la température ambiante à l'instant initial

Soient les hypothèses suivantes [119]

- La dynamique des servodistributeurs est négligée devant celle du vérin ;
- La variation de la température dans les chambres est négligée devant la température ambiante de la source et l'on a  $T_A = T_P = T_N = T$ .

Sous ces hypothèses, le modèle de commande non linéaire peut alors être défini par

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{M} (S_P P_P - S_N P_N - F_f - F_{ext}) \\ \frac{dP_P}{dt} = \frac{krT_P}{V_P(y)} \left[ q_{mP}(u_P, P_P) - \frac{S_P}{rT_P} P_P v \right] \\ \frac{dP_N}{dt} = \frac{krT_N}{V_N(y)} \left[ q_{mN}(u_N, P_N) + \frac{S_N}{rT_N} P_N v \right] \end{cases} \quad (\text{V.8})$$

$V_P(y)$  et  $V_N(y)$  représentent les volumes des chambres et sont définis par

$$\begin{cases} V_P(y) = V_P(0) + S_P y \\ V_P(0) = V_{DP} + S_P \frac{l}{2} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} V_N(y) = V_N(0) + S_N y \\ V_N(0) = V_{DN} + S_N \frac{l}{2} \end{cases}$$

$V_N(0)$  et  $V_P(0)$  sont respectivement les volumes des chambres  $N$  et  $P$  pour  $y=0$ .  $V_{DN}$  et  $V_{DP}$  sont les volumes morts dans chaque extrémité de chambre.

Il a été démontré dans [119] que la dynamique de positionnement du tiroir servodistributeur, pour 50% de sa course, est 100 fois plus rapide que celle du positionnement de la tige du vérin en position centrale. Leur modèle est ainsi réduit à un modèle statique où les débits massiques  $q_{mN}$  et  $q_{mP}$  sont fonctions des pressions  $P_N$  et  $P_P$  dans les chambres et des commandes  $u_P$  et  $u_N$ .

Cependant, dans le but d'établir un modèle non linéaire affine en la commande, les débits massiques sont approximés par des fonctions polynomiales affines en la commande [120]. Ces approximations ont été effectuées, au sens des moindres carrés, sur les caractéristiques statiques issues de mesures expérimentales effectuées sur ce même système dans [21]. On obtient ainsi

$$q_{mP}(u_P, P_P) = \varphi(P_P) + \psi(P_P, \text{sign}(u_P))u_P$$

et

$$q_{mN}(u_N, P_N) = \varphi(P_N) + \psi(P_N, \text{sign}(u_N))u_N$$

$\varphi(P)(Kg/s)$  représente le débit de fuite dans le servodistributeur.  $\psi(P, \text{sign}(u))(Kg/s/V)$  est une fonction qui dépend du signe de la commande. Elle se compose ainsi, de deux expressions : une correspondante à l'admission ( $u > 0$ ) et une pour l'échappement ( $u < 0$ ).

Le modèle s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{M} (S_P P_P - S_N P_N - F_f(v) - F_{ext}) \\ \frac{dP_P}{dt} = \frac{krT}{V_P(y)} \left[ \varphi(P_P) - \frac{S_P}{rT} P_P v \right] + \frac{krT}{V_P(y)} \psi(P_P, \text{sign}(u_P))u_P \\ \frac{dP_N}{dt} = \frac{krT}{V_N(y)} \left[ \varphi(P_N) + \frac{S_N}{rT} P_N v \right] + \frac{krT}{V_N(y)} \psi(P_N, \text{sign}(u_N))u_N \end{cases} \quad (V.9)$$

Le modèle (V.9) est un modèle d'état non linéaire affine en la commande et de la forme

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$\text{avec } f(x) = \begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{M}(S_P P_P - S_N P_N - F_f(v) - F_{ext}) \\ \frac{krT}{V_P(y)} \left[ \varphi(P_P) - \frac{S_P}{rT} P_P v \right] \\ \frac{krT}{V_N(y)} \left[ \varphi(P_N) + \frac{S_N}{rT} P_N v \right] \end{bmatrix}$$

$$\text{et } g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{krT}{V_P(y)} \psi(P_P, \text{sign}(u_P)) & 0 \\ 0 & \frac{krT}{V_N(y)} \psi(P_N, \text{sign}(u_N)) \end{bmatrix}$$

où, dans la représentation d'état choisie,  $x = [y \ v \ P_P \ P_N]^T \in \mathbb{R}^4$  représente l'état du système, et  $u = [u_P \ u_N]^T \in \mathbb{R}^2$  la commande. Celle-ci regroupe les signaux de commande de chacun des servodistributeurs.

Pour la synthèse de commande monovariante, on suppose que les deux servodistributeurs sont pilotés par des signaux de commandes de signes opposés tels que  $u_P = u$  et  $u_N = -u$ . Le modèle monoentrée correspondant est alors défini par

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (\text{V.10})$$

$$\text{tel que } f(x) = \begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{M}(S_P P_P - S_N P_N - F_f(v) - F_{ext}) \\ \frac{krT}{V_P(y)} \left[ \varphi(P_P) - \frac{S_P}{rT} P_P v \right] \\ \frac{krT}{V_N(y)} \left[ \varphi(P_N) + \frac{S_N}{rT} P_N v \right] \end{bmatrix}$$

$$\text{et } g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{krT}{V_P(y)} \psi(P_P, \text{sign}(u)) \\ -\frac{krT}{V_N(y)} \psi(P_N, \text{sign}(-u)) \end{bmatrix}$$

## V.8 Commande par modes glissants du système électropneumatique

Comme précisé précédemment, la diversification de l'application des vérins pneumatiques a été impulsée par les résultats de plusieurs travaux de recherche dans la commande des axes pneumatiques :

- Commande linéaire [121, 122, 123] ;
- Commande linéarisante [22, 124] ;
- Commande adaptative [125, 126] ;
- Commande par modes glissants d'ordre 1 [16, 127, 128] ;
- Commande par modes glissants d'ordre [129, 130, 131] ;
- Commande backstepping [16].

L'étude dont il est sujet, à travers ce manuscrit, porte sur la validation de l'implémentation numérique d'algorithmes de différentiation sur carte numérique, mais aussi sur la validation de l'intégration de la carte de dérivation dans une boucle de commande d'un système physique. Le système dont il est question est un système électropneumatique commandé en position. Pour cela, une commande performante et validée doit être utilisée pour l'évaluation des résultats.

Dans cette section, on s'intéresse à l'application d'une commande par modes glissants d'ordre 2 au système électropneumatique. Cette commande a été développée au cours d'un précédent travail [16] dans le cadre d'une thèse de doctorat au laboratoire Ampère. Plusieurs commandes linéaires et non linéaires ont été appliquées à ce même système [16, 18, 121] et une comparaison des performances [16] a montré que les techniques non linéaires permettaient d'améliorer la robustesse du système commandé face aux variations paramétriques (variation de la charge, température, fuites, frottements) et d'assurer une plus grande précision d'asservissement. Cependant, la répétabilité de leurs résultats est moins régulière par rapport à celle obtenue par les techniques de commande linéaire [16].

Parmi ces commandes, on a choisi de considérer la commande par modes glissants avec une loi de convergence prédéfinie [16].

Cette commande est une commande basée sur les modes glissants d'ordre 2. Contrairement aux autres commandes de ce type, l'algorithme du Twisting et du Super Twisting présentées dans la *Section III.3*, et où la convergence en temps fini se fait par une trajectoire spirale autour de l'origine du plan de phase  $(s, \dot{s})$ , l'algorithme avec loi de convergence prédéfinie se fait en suivant la trajectoire d'une fonction  $\dot{s} = f(s)$  qui, une fois atteinte, converge vers  $s = \dot{s} = 0$ .

Soit la fonction  $\dot{s} = f(s) = -k|s|^{1/2} \text{sign}(s)$  où  $k > 0$  et soit la surface de glissement définie par

$$s = \lambda(y - y_{ref}) + (v - v_{ref}) \quad (\text{V.11})$$

Cette surface de glissement a été choisie de manière à ce que le degré relatif du système par rapport à celle-ci soit égal à 2. La dérivée seconde  $\ddot{s}$  de la surface est alors donnée par

$$\ddot{s} = \alpha(x) + \beta(x)u \quad (\text{V.12})$$

Soit  $\alpha(x) = \alpha_n(x) + \Delta\alpha(x)$ . Le terme  $\alpha_n(x)$  regroupe les quantités nominales de la fonction  $\alpha(x)$  et  $\Delta\alpha(x)$  représente le terme incertain qui regroupe les incertitudes dûes aux erreurs commises sur les paramètres de frottements, de débit de fuite, et sur la masse de la partie mobile.

Ces termes sont définis tels que

$$\alpha_n(x) = \lambda \left[ \frac{1}{M_n} (S_p p_p - S_N p_N - b v - F_{ext}) - a_{ref} \right] - \frac{k v}{M_n} \left[ \frac{S_p^2 p_p}{V_p(y)} + \frac{S_N^2 p_N}{V_N(y)} \right] - j_{ref} \quad (\text{V.13})$$

et

$$\begin{aligned} \Delta \alpha(x) = & -\frac{\lambda b}{M} v + \frac{k r T}{M} \left[ \frac{S_p}{V_p(y)} \varphi(p_p) - \frac{S_N}{V_N(y)} \varphi(p_N) \right] - \frac{b}{M^2} (S_p p_p - S_N p_N - b v - F_{ext}) \\ & - \frac{\lambda \Delta M (S_p p_p - S_N p_N - F_{ext})}{M_n M} + \frac{k v \Delta M}{M_n M} \left[ \frac{S_p^2 p_p}{V_p(y)} + \frac{S_N^2 p_N}{V_N(y)} \right] \end{aligned} \quad (\text{V.14})$$

De même,  $\beta(x) = \beta_n(x) + \Delta \beta(x)$  avec

$$\beta_n(x) = \frac{S_p}{M_n} \frac{k r T}{V_p(y)} \psi_n(P_p, \text{sign}(u)) + \frac{S_N}{M_n} \frac{k r T}{V_N(y)} \psi_n(P_N, \text{sign}(-u)) \quad (\text{V.15})$$

et

$$\begin{aligned} \Delta \beta(x) = & \frac{S_N}{M} \frac{k r T}{V_N(y)} \Delta \psi(P_N, \text{sign}(-u)) - \frac{S_N \Delta M}{M_n M} \frac{k r T}{V_N(y)} \psi_n(P_N, \text{sign}(-u)) \\ & + \frac{S_p}{M} \frac{k r T}{V_p(y)} \Delta \psi(P_p, \text{sign}(u)) - \frac{S_p \Delta M}{M_n M} \frac{k r T}{V_p(y)} \psi_n(P_p, \text{sign}(u)) \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

Définissons le retour

$$u = \beta_n^{-1}(x) [-\alpha_n(x) + w] \quad (\text{V.17})$$

wù  $w$  est considérée comme la nouvelle entrée du système et (V.12) se réécrit alors

$$\ddot{s} = \left[ \Delta \alpha(x) - \frac{\Delta \beta(x)}{\beta_n(x)} \alpha_n(x) \right] + \left[ 1 + \frac{\Delta \beta(x)}{\beta_n(x)} \right] w \quad (\text{V.18})$$

avec  $\left| \Delta \alpha(x) - \frac{\Delta \beta(x)}{\beta_n(x)} \alpha_n(x) \right| < C_0$  et  $\left| 1 + \frac{\Delta \beta(x)}{\beta_n(x)} \right| < B_0$

les constantes  $C_0$  et  $B_0$  sont fixées à partir des bornes sur les différentes grandeurs physiques du système électropneumatique.

Pour

$$w = -k_1 \text{sign}(\dot{s} + k_2 |s|^{1/2} \text{sign}(s)) \quad (\text{V.19})$$

la commande  $u$  est alors définie par

$$u = \beta_n^{-1}(x) \left[ -\alpha_n(x) - k_1 \text{sign}(\dot{s} + k_2 |s|^{1/2} \text{sign}(s)) \right] \quad (\text{V.20})$$

## V.9 Validation expérimentale des algorithmes de différentiation

A ce niveau du document, les algorithmes de différentiation ont été définis et une première comparaison de résultats des différentes méthodes, implémentées numériquement sur la carte RENESAS, a été effectuée sur des signaux à dériver définis par un modèle particulier. L'objectif final étant d'étudier et de valider la faisabilité de la solution d'implémentation d'algorithmes de différentiation sur la carte de développement et son utilisation dans une boucle de commande d'un système physique, on se propose de procéder en deux étapes supplémentaires :

- Validation en boucle ouverte ;
- Validation en boucle fermée.

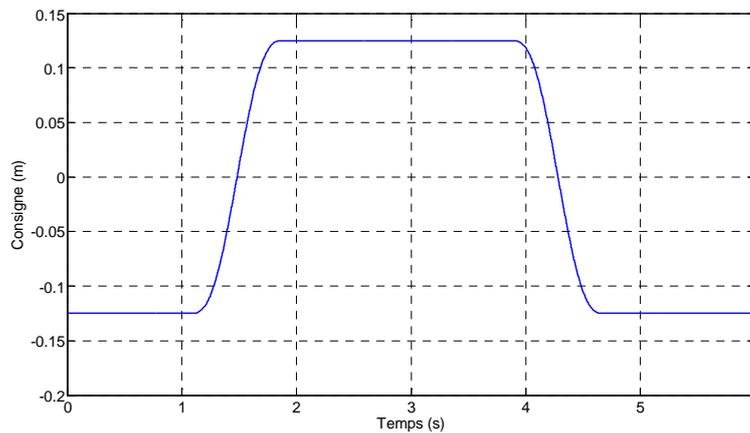
La validation en boucle ouverte suit le même principe que celui de la validation effectuée dans la *Section IV.6* sauf que le signal à dériver est le signal de vitesse de la tige du vérin. La comparaison se fait alors entre l'accélération obtenue par la carte de dérivation numérique et le capteur d'accélération disponible sur le système.

La validation en boucle fermée est effectuée par rapport à la précision du suivi de trajectoire obtenu dans le cas où l'accélération est obtenue par le capteur dédié et par la carte de dérivation numérique.

Dans cette section, on souhaite valider les algorithmes implémentés sur la carte RENESAS et ce en boucle ouverte. Le signal vitesse est récupéré de la carte analogique et est dérivé pour le calcul de l'accélération. Ce signal ainsi obtenu en sortie de la carte RENESAS est comparé à celui fourni par le capteur d'accélération installé sur le vérin pneumatique.

Notre étude comparative se limite à la considération d'un algorithme de dérivation linéaire (observateur  $H_\infty$ ) et un algorithme non linéaire (Super Twisting Adaptatif).

Le vérin est commandé en position avec deux types de consignes : une consigne en créneaux d'amplitude  $A = 0.1m$  et de fréquence  $F = 0.2Hz$  et une consigne point à point donnée dans la figure suivante.



**Figure V-6 :** Consigne en position (m)

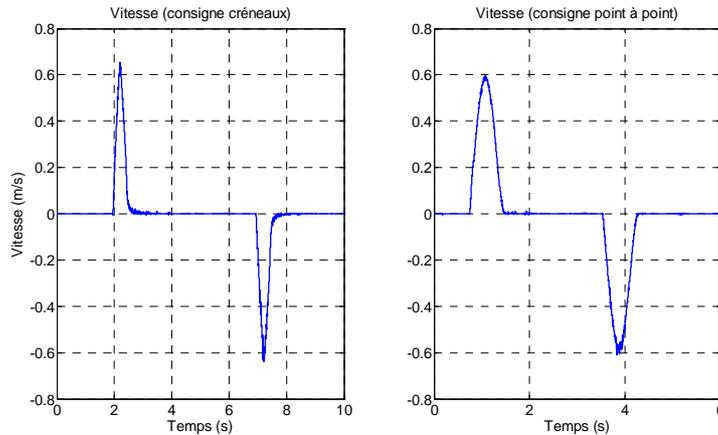
Dans cet essai, on ne s'intéresse pas encore aux performances en termes de suivi de position de la tige du vérin. En effet, le système est commandé en boucle fermée par la loi de commande définie dans la *Section V.8*. Les paramètres de la commande sont réglés pour donner le minimum d'erreur de suivi pour les deux consignes. Ce réglage a été effectué au cours d'un essai « référence » dans lequel l'accélération est récupérée de l'accéléromètre dont les caractéristiques sont présentées dans le *Tableau V-3*. Un réglage de commande « optimal » est alors donné par :

$$\lambda = 55, k_1 = -220 \text{ et } k_2 = -15$$

Le système étant commandé, on mesure la vitesse de la tige du vérin et on dérive ce signal par l'algorithme de différentiation numérique implémenté sur carte RENESAS pour estimer l'accélération. Cette accélération, sortie de la carte RENESAS, sera comparée à l'accélération fournie par l'accéléromètre.

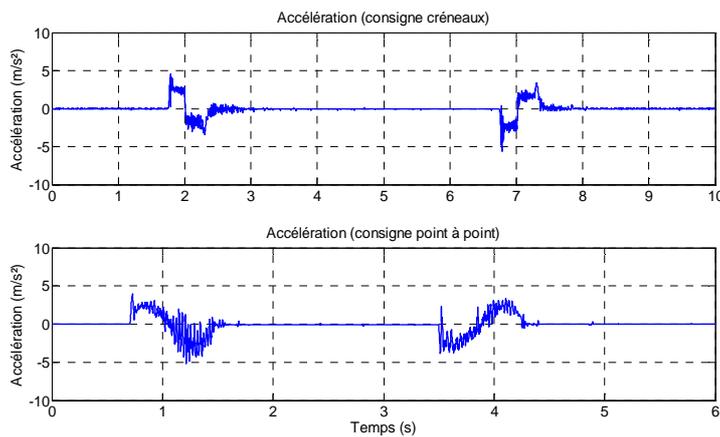
Le système est commandé pour la poursuite de deux consignes différentes. Ainsi, deux signaux de vitesse différents sont à dériver. Dans la suite, on appelle « *Essai* » l'essai avec la

consigne en créneaux et « *Essai2* » celui avec la consigne point à point de la *Figure V-6*. Les signaux de vitesse correspondants sont alors donnés dans la *Figure V-7*.



**Figure V-7 :** Signaux vitesse à dériver : *Essai1* (gauche) et *Essai2* (droite)

Les accélérations « exactes » associées, obtenues à la sortie de l'accéléromètre, sont également données par :



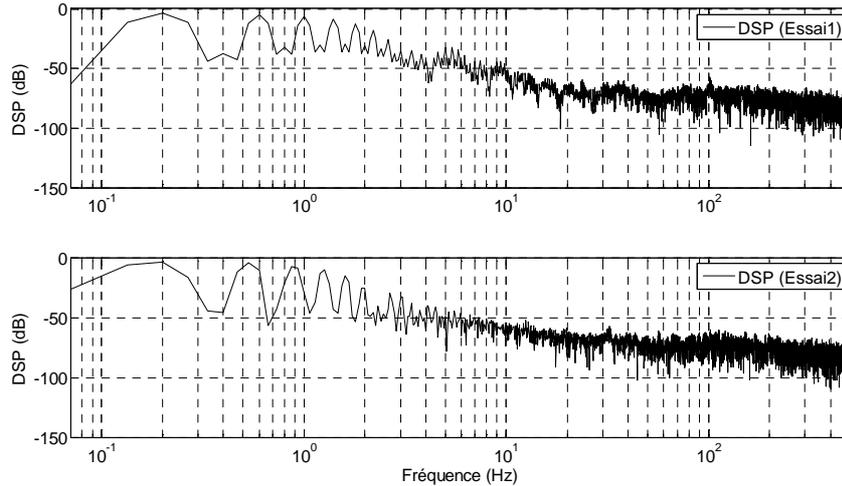
**Figure V-8 :** Signaux d'accélération « exacts » : *Essai1* (haut) et *Essai2* (bas)

Pour la validation en boucle ouverte des algorithmes de dérivation, la sortie de ceux-ci est comparée aux données accéléromètre.

### V.9.1 Validation expérimentale en boucle ouverte des algorithmes de différentiation

Le système électropneumatique est commandé en position. Comme première étape, on désire valider les algorithmes de dérivation par filtrage  $H_\infty$  et Super Twisting Adaptatif en boucle ouverte. Les signaux de vitesses mesurés à l'application de chaque consigne, sont dérivés et le signal d'accélération obtenu est comparé à celui fourni par l'accéléromètre. L'accélération récupérée sur ce dernier sera considérée comme la référence d'accélération.

Pour mettre en œuvre le filtre dérivateur  $H_\infty$  adéquat, on désire dresser le profil spectral des signaux de vitesses utilisés. Les DSPs de ces signaux sont alors données par :



**Figure V-9 :** DSP de signaux de vitesse Essai1 (haut) et Essai2 (bas)

A partir de la *Figure V-9*, on observe que le spectre du signal est plus puissant dans les fréquences allant jusqu'à environ 10 Hz. Ainsi, un filtre  $H_\infty$  spécifique est mis en œuvre et sera utilisé pour le reste des essais de ce chapitre. La bande passante du filtre sera choisie plus large que celle du signal de vitesse afin de limiter l'effet de déphasage sur la bande du signal de vitesse. Pour cela, on choisit de considérer une fréquence de coupure  $\omega_0 = 20 \text{ Hz}$ . Dans ce cas, le modèle du signal utile est alors donné par

$$G_s(s) = \frac{1.984 \times 10^6}{s^4 + 251.3 s^3 + 3.158 \times 10^4 s^2 + 1.984 \times 10^6 s + 1984}$$

Le modèle associé au bruit de mesure est défini par

$$G_b(s) = \frac{s^3}{s^3 + 5027 s^2 + 1.263 \times 10^7 s + 1.588 \times 10^{10}}$$

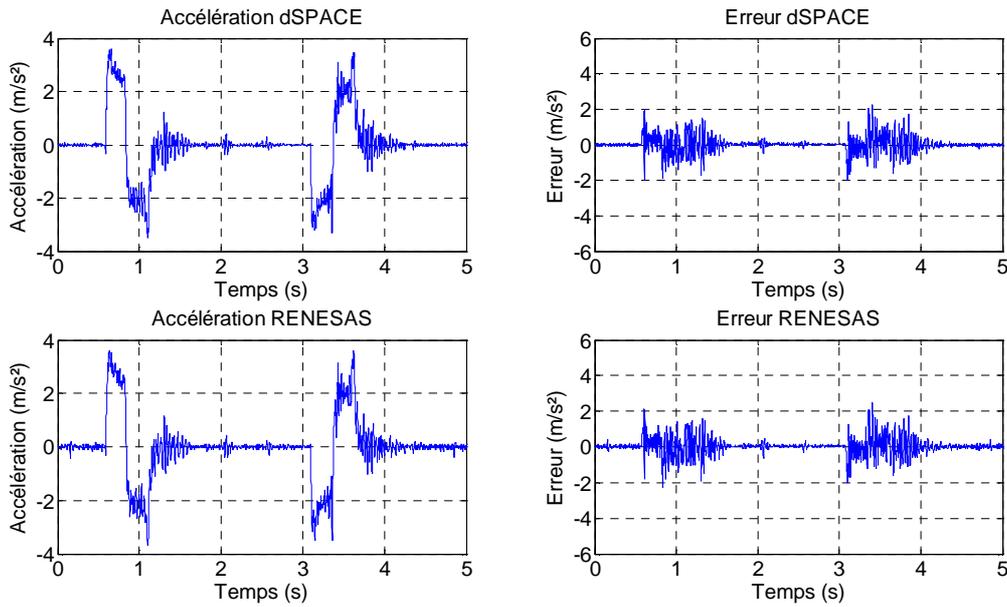
Le même dérivateur, pour le même réglage, est simultanément implémenté sur la carte RENESAS et sur la carte dSPACE. Les sorties de ces algorithmes seront confrontées et comparées. En effet, comme mentionné dans le chapitre précédent, l'implémentation d'un algorithme sur la carte RENESAS implique l'introduction de bruits au niveau de son entrée. Ceux-ci sont l'expression de la quantification au niveau des CANs, mais aussi de la fluctuation dans la tension de référence de ce même organe. De plus, l'implémentation des filtres se fait avec une précision finie sur leurs coefficients. Pour l'implémentation sur la carte dSPACE, ces phénomènes sont présents mais de moindre mesure puisque celle-ci est un produit professionnel optimisé pour son usage en plus du fait que la résolution des CANs de celle-ci est plus importante (16 bits). De même, l'implémentation sur la carte dSPACE des algorithmes s'effectue avec une précision « infinie ».

Ces effets additionnés ont inévitablement une incidence sur la réponse de l'algorithme.

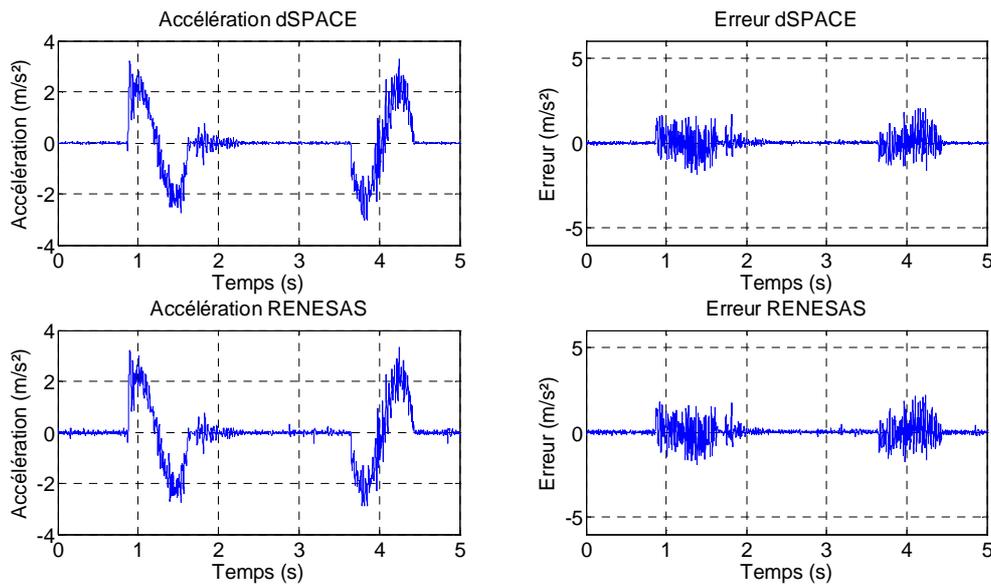
Ainsi, cette comparaison pourra nous fournir une idée sur l'effet de la résolution limitée de la conversion et des coefficients sur la carte RENESAS sur la sortie de l'algorithme en question.

Dans la *Figure V-10*, on trace les accélérations et les erreurs sur celle-ci obtenues, pour l'essai1, par le dérivateur filtre  $H_\infty$  implémenté sur la carte RENESAS et ce même filtre implémenté sur la carte dSPACE. L'erreur d'accélération est une erreur absolue considérée

par rapport à l'accélération référence. Les mêmes résultats pour l'essai2 sont résumés dans la Figure V-11.



**Figure V-10 :** Dérivateur  $H_\infty$  : accélération et erreur (Essai1) ( $m/s^2$ )



**Figure V-11 :** Dérivateur  $H_\infty$  : accélération et erreur (Essai2) ( $m/s^2$ )

A partir de ces figures, on résume les erreurs d'accélération obtenues dans le tableau suivant.

	Essai1		Essai2	
	Erreur maximale ( $m/s^2$ )	Erreur moyenne ( $m/s^2$ )	Erreur maximale ( $m/s^2$ )	Erreur moyenne ( $m/s^2$ )
$H_\infty$ RENESAS	2.487	0.021	2.192	0.019
$H_\infty$ dSPACE	2.262	0.016	2.033	0.011

**Tableau V-5 :** Dérivateur  $H_\infty$  : comparaison RENESAS vs dSPACE

Pour le même filtre  $H_\infty$ , implémenté sur la carte RENESAS et sur la carte dSPACE, le tableau précédent montre des erreurs absolues plus importantes dans le premier cas. Ce résultat était attendu vu la meilleure précision de la carte dSPACE par rapport à la carte RENESAS. En effet, cette dernière est équipée de CANs de 16 bits alors que la carte RENESAS est pourvue d'un CAN de 10 bits. Ainsi, le bruit de quantification est moins important sur la première d'où un moindre niveau de bruit au niveau de l'entrée de l'algorithme de dérivation. De plus, la précision de la conversion est plus importante dans cette dernière.

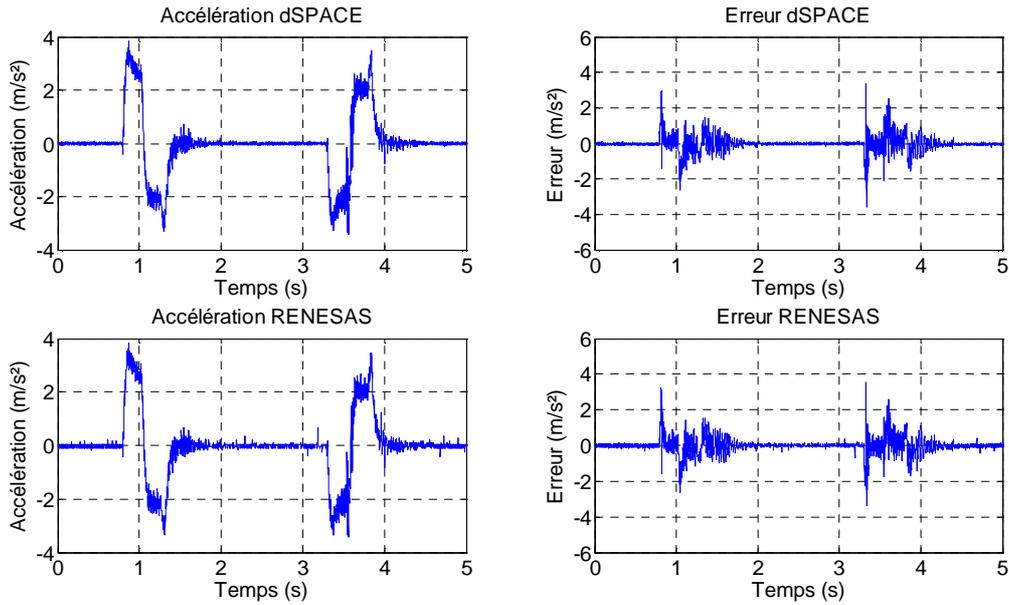
De même, le fait qu'une carte « artisanale » (carte d'adaptation) a été couplée à la carte RENESAS pour l'adaptation des tensions, induit également des perturbations au niveau du signal d'entrée de l'algorithme. D'autre part, la carte dSPACE est un produit dédié aux applications de précision et est développée et optimisée pour offrir un bas niveau de bruits électriques contrairement à la carte d'adaptation réalisée.

Dans ces essais, la considération de l'erreur moyenne n'est pas très pertinente vue que celle-ci dépend du réglage d'offsets effectué lors de la préparation des essais. En effet, l'entrée de la carte RENESAS ainsi que la sortie du capteur, acquises sur la carte dSPACE, nécessitent un réglage d'offsets. Ce réglage étant fait à l'œil, sa fiabilité ne peut pas être assurée.

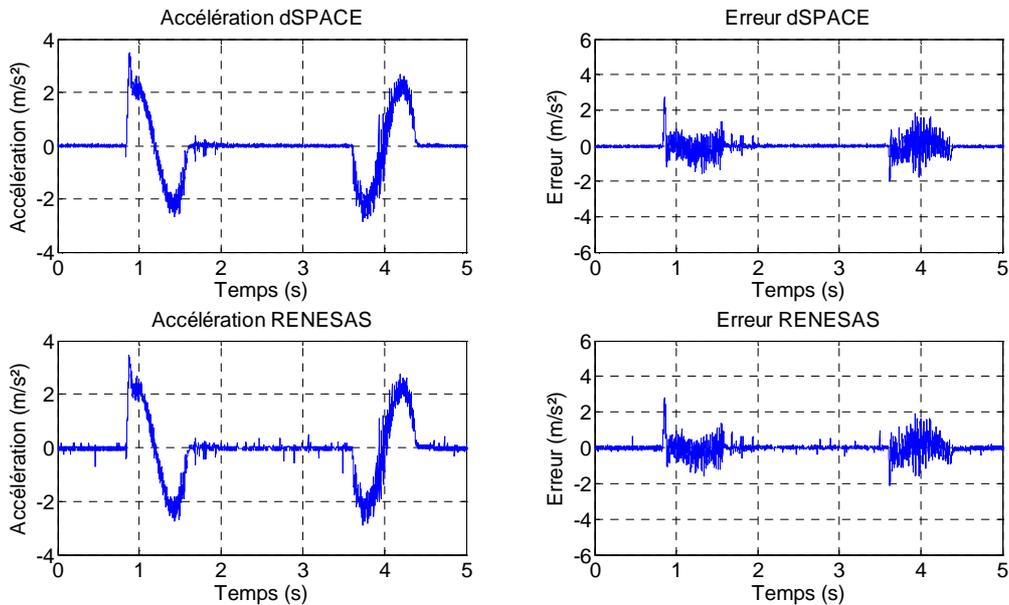
Au cours d'essais préalables, les bruits et les offsets au niveau de la carte d'adaptation ont été identifiés et leurs niveaux évalués. Ces essais ont été effectués en vue de voir s'il y avait besoin de filtrage au niveau de celle-ci afin d'améliorer la qualité des signaux à sa sortie et il s'est avéré que, malgré leur présence, ces bruits sont négligeables par rapport à la puissance des signaux à dériver utilisés en plus du fait que les cartes RENESAS et dSPACE sont pourvues de filtres sur leurs entrées. Un autre aspect des circuits à base d'amplificateurs opérationnels réside dans l'inévitable offset introduit par les différents étages. Cependant, les algorithmes de dérivation étant, par définition, insensibles aux offsets, on a renoncé à la mise en place d'un circuit de correction d'offset.

Même en observant, sur les figures *Figure V-10* et *Figure V-11*, les sorties des deux algorithmes, on s'aperçoit de l'existence d'un chahut plus important en statique sur la sortie de la carte RENESAS.

Les mêmes essais sont repris avec l'algorithme Super Twisting Adaptatif qu'on appelle dans la suite STA.



**Figure V-12 :** Super Twisting Adaptatif : accélération et erreur (Essai1) (m/s<sup>2</sup>)



**Figure V-13 :** Super Twisting Adaptatif : accélération et erreur (Essai2) (m/s<sup>2</sup>)

Les erreurs d'accélération rencontrées sur ces essais sont données dans le tableau suivant :

	Essai1		Essai2	
	Erreur maximale (m/s <sup>2</sup> )	Erreur moyenne (m/s <sup>2</sup> )	Erreur maximale (m/s <sup>2</sup> )	Erreur moyenne (m/s <sup>2</sup> )
<b>STA dSPACE</b>	3.369	0.022	2.759	0.029
<b>STA RENESAS</b>	3.534	0.016	2.817	0.022

**Tableau V-6 :** Super Twisting Adaptatif : comparaison RENESAS vs dSPACE

Comme dans le cas du dérivateur  $H_\infty$ , l'algorithme STA implémenté sur la carte RENESAS montre une erreur d'accélération plus importante que ce même algorithme implémenté sur la carte dSPACE.

Les erreurs résumées dans les tableaux *Tableau V-5* et *Tableau V-6* sont relativement faibles par rapport celles qu'on pourrait obtenir dans le cas où le profil spectral du signal vitesse est plus large. En effet, il existe une corrélation directe entre la bande passante du dérivateur et l'erreur d'accélération. Plus la bande passante du dérivateur est importante, plus le dérivateur amplifie les bruits de mesure et plus est donc dégradée la précision.

Cependant, pour réduire au maximum possible l'effet des bruits de quantification au niveau du signal d'entrée de l'algorithme de dérivation, une adaptation d'échelle au niveau du CAN tout comme le CNA est effectuée. Cette technique simple a pour but de « noyer » les perturbations dans le signal. Le signal d'entrée à dériver est alors multiplié par un gain afin de l'étendre sur la plus large plage de conversion du CAN possible. La réadaptation du signal est alors effectuée ensuite au niveau du programme logiciel. La même technique peut être utilisée également pour réduire au maximum les bruits de quantification au niveau du signal de sortie.

Aussi, à partir des deux tableaux précédents, on observe bien que l'erreur de dérivation maximale est plus importante dans le cas du dérivateur Super Twisting Adaptatif. De même, on observe que l'accélération du différentiateur linéaire est moins bruitée que celle obtenue par le différentiateur Super Twisting Adaptatif. Ceci est dû à la présence du terme discontinu dans l'expression du différentiateur. Dans le cadre de la commande, ces chahuts peuvent être néfastes et pourraient se voir répercutés sur le signal de commande. Ce qui engendre une perte d'énergie plus importante et une détérioration prématurée pour certains actionneurs.

L'influence de ce dernier aspect doit être étudiée de manière plus pertinente en observant son influence, dans le cas de la mise en boucle fermée de la carte de dérivation RENESAS, sur la précision de la commande et la commande. Ceci sera le sujet de la section suivante.

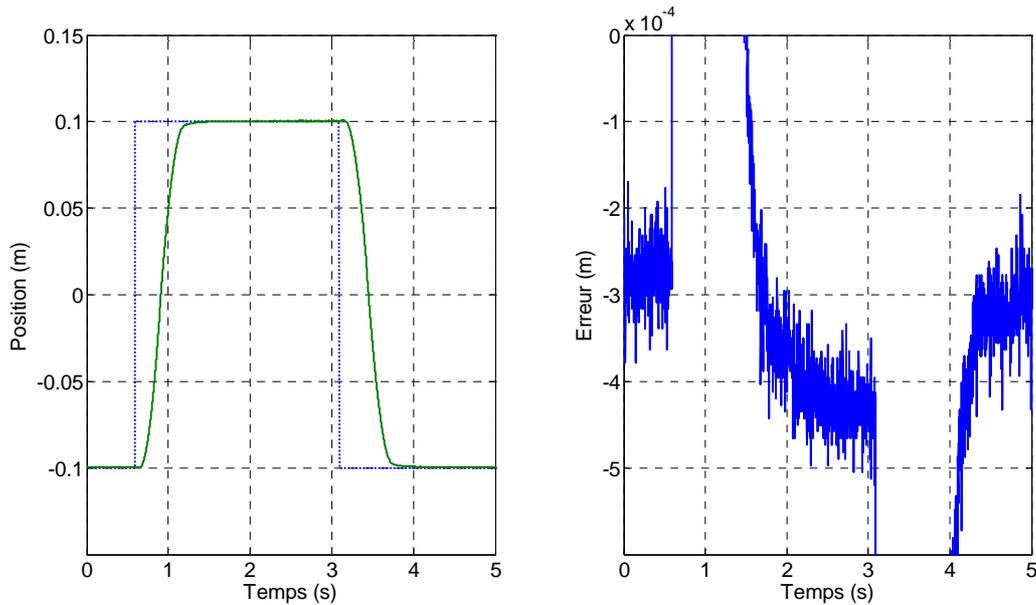
## **V.9.2 Validation expérimentale en boucle fermée des algorithmes de différentiation**

Après une première validation et estimation des performances des algorithmes en boucle ouverte, on désire valider les algorithmes implémentés sur la carte RENESAS en boucle fermée. Dans ce cas, le signal vitesse est récupéré de la carte analogique et est dérivé pour le calcul de l'accélération qui est bouclée pour le calcul de la commande

Dans cette section on essaiera d'évaluer l'influence de l'accélération fournie par la carte de dérivation numérique, à partir de la vitesse de la tige du vérin, sur la précision du suivi de trajectoire pour les deux consignes définies dans la *section V.9.1* ainsi que sur la commande.

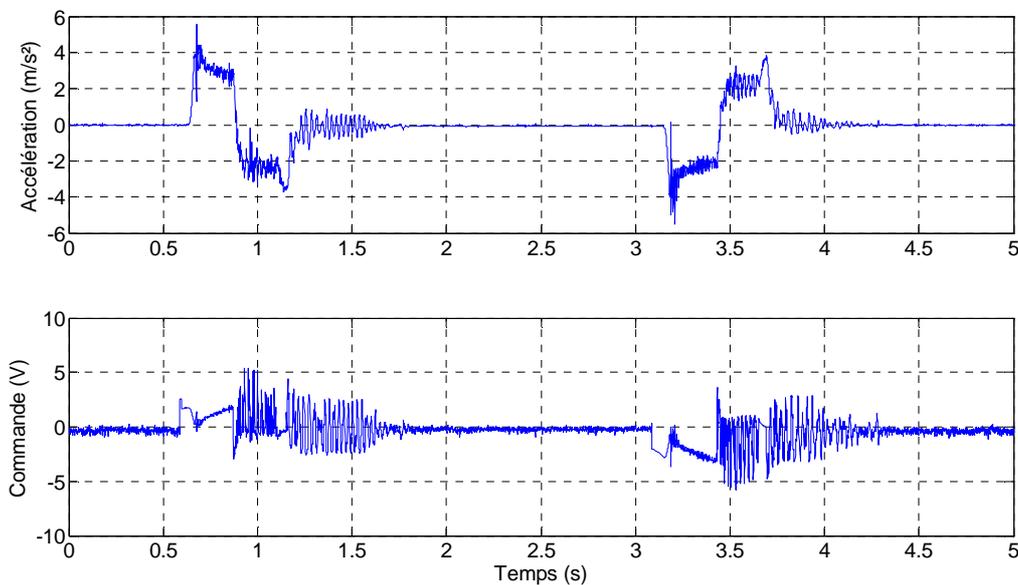
Pour cela, un premier essai « référence » est effectué dans lequel l'accélération est obtenue à partir de l'information capteur. Cette accélération étant la plus précise, les erreurs de position et la commande seront considérées comme référence lors de l'estimation des performances en boucle fermée des algorithmes implémentés sur la carte RENESAS.

Dans le cas de l'essai 1, la position et l'erreur en position de la tige du vérin dans ce cas sont données dans la *Figure V-14*. La *Figure V-15* reprend l'accélération de la tige et la commande envoyée aux servovalves.



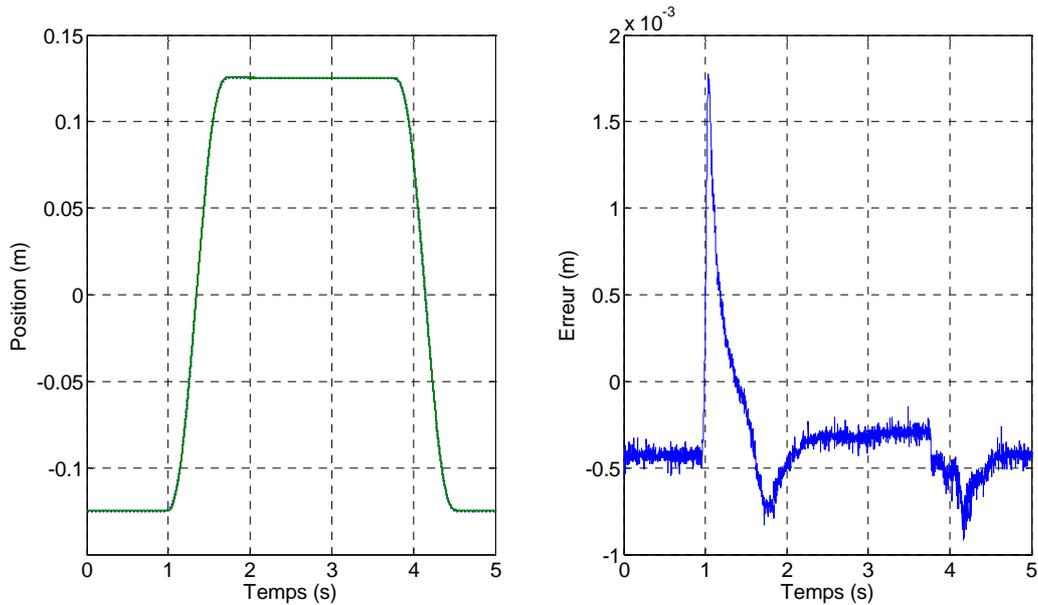
**Figure V-14 :** Consigne et position (gauche) et erreur de suivi (droite) (m) (essai1)

La partie gauche de la figure précédente est un zoom sur l'erreur de suivi. Pour l'essai1, on fera l'impasse sur l'erreur en régime dynamique. En effet, la nature de la consigne en échelon induit une erreur très importante dans le transitoire durant lequel l'erreur est égale à l'amplitude de l'échelon appliqué et la considération, donc, de celle-ci ne nous semble plus pertinente.

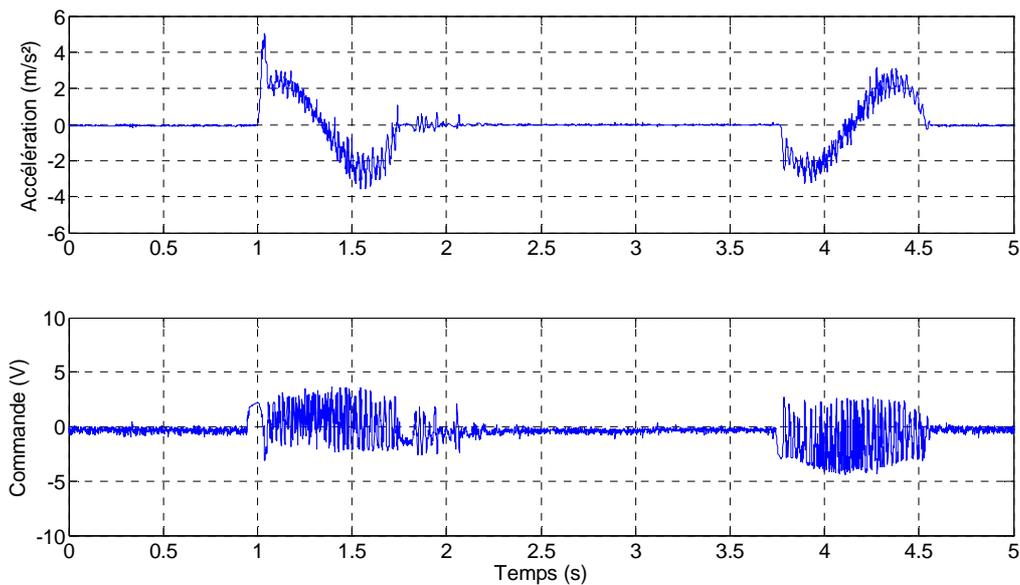


**Figure V-15 :** Accélération (m/s<sup>2</sup>) et Commande (V) (essai1)

Pour la consigne point à point (essai2), on donne également l'erreur de suivi, l'accélération et la commande. Ces signaux sont représentés sur les figures suivantes.



**Figure V-16 :** Consigne, position et erreur de poursuite (m) (essai2)



**Figure V-17 :** Accélération ( $m/s^2$ ) et Commande (V) (essai2)

Ces deux essais seront pris comme essais références dans la suite. La comparaison de performances entre les essais où l'accélération est mesurée par un capteur et ceux où elle est obtenue par dérivation de la vitesse, sera l'objet de cette section. Différents critères de performances seront alors adoptés. Ainsi, on considère :

- L'erreur maximale de suivi de position en régime dynamique ;
- L'erreur maximale de suivi de position en régime statique ;
- L'accélération maximale en régime statique ;
- Le temps de réponse dans le cas de la consigne de l'essai1.

L'estimation de l'erreur de position en statique et en dynamique permet d'avoir une idée sur la précision de la commande. En effet, la commande appliquée est une commande en position.

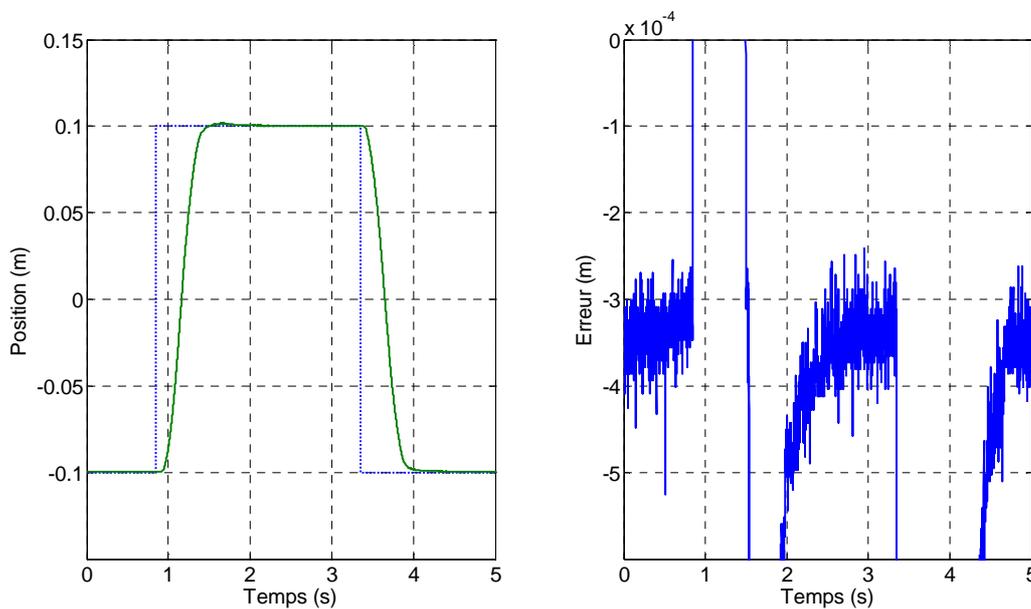
L'observation de l'accélération en régime statique, théoriquement nulle, permet d'avoir une idée sur la précision et l'incertitude sur ce signal. Le temps de réponse est calculé à 95% de la valeur finale de la consigne.

	Essai1	Essai2
<b>Erreur statique (mm)</b>	0.20	0.15
<b>Erreur maximale (dynamique) (mm)</b>	-	1.773
<b>Biais accélération (m/s<sup>2</sup>)</b>	0.15	0.15
<b>Temps de réponse (s)</b>	0.532	-

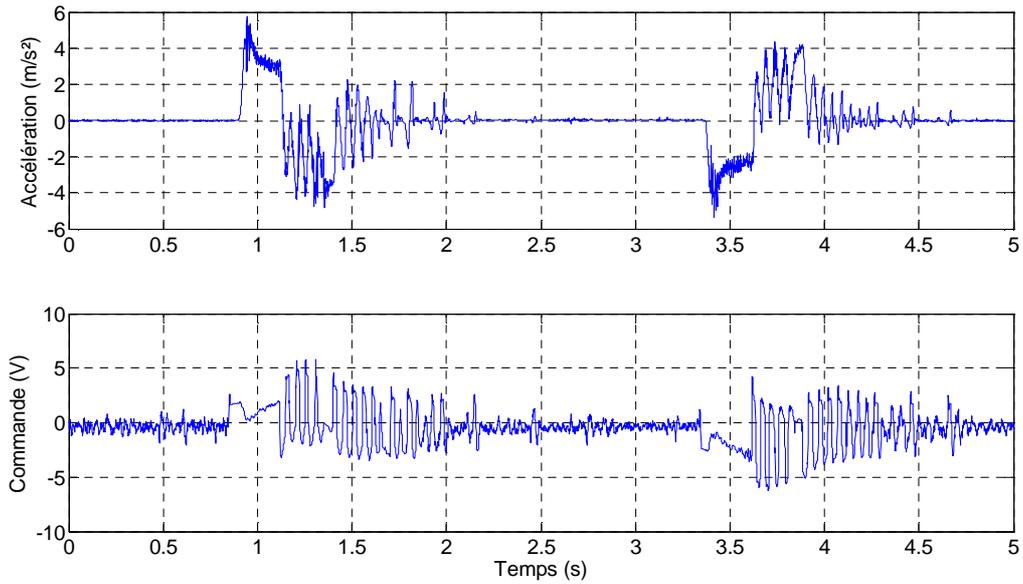
**Tableau V-7 :** Essais avec accéléromètre : résultats d'essais

Une fois les paramètres de référence en termes d'erreurs maximales en statique et en dynamique établis, les mêmes essais sont repris dans lesquels l'accélération utilisée pour le calcul de la commande est la sortie de la carte RENESAS et dont l'entrée est la vitesse fournie par la carte analogique.

Dans un premier temps, l'algorithme implémenté sur la carte est un dérivateur  $H_\infty$ . Pour l'essai1, les résultats d'essais sont donnés dans ce qui suit.

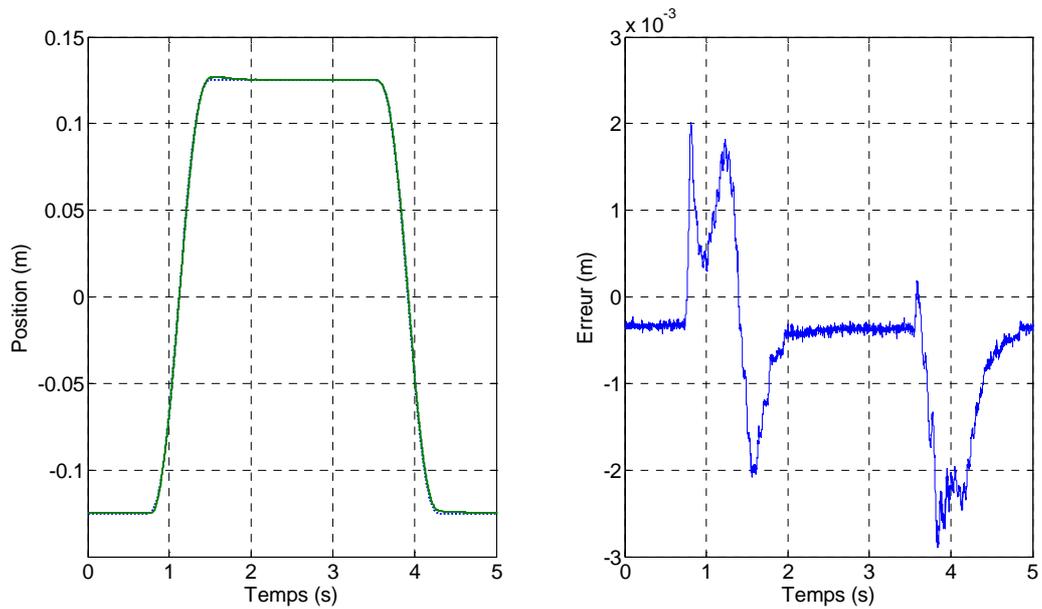


**Figure V-18 :** Différentiateur  $H_\infty$  : Consigne et position (m) (essai1)

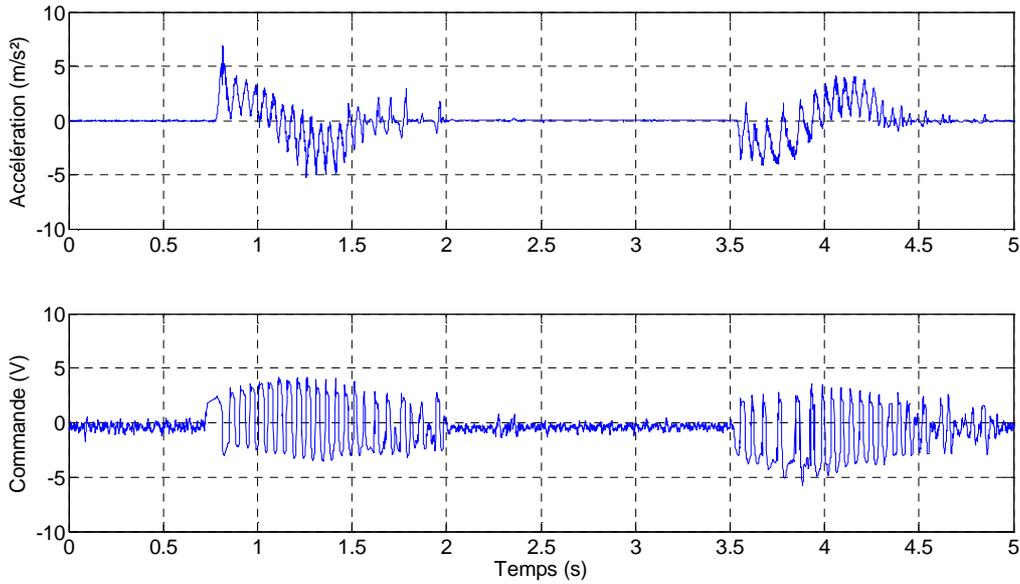


**Figure V-19 :** Différentiateur  $H_\infty$  : Accélération ( $m/s^2$ ) et Commande (V) (essai1)

Les résultats de poursuite en position pour la consigne de l'essai2 sont consignés dans les figures suivantes.



**Figure V-20 :** Différentiateur  $H_\infty$  : Consigne, position et erreur de poursuite (m) (essai2)



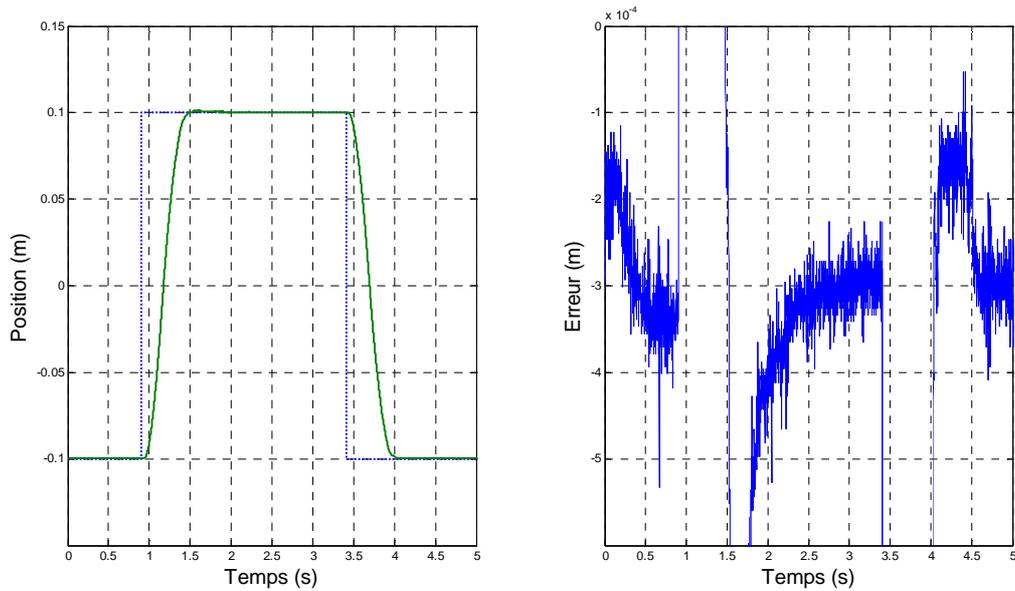
**Figure V-21 :** Différentiateur  $H_\infty$  : Accélération ( $m/s^2$ ) et Commande (V) (essai2)

De la *Figure V-20*, on observe que l’erreur dynamique est plus importante que l’essai référence. Les résultats d’essais sont alors résumés dans le tableau suivant.

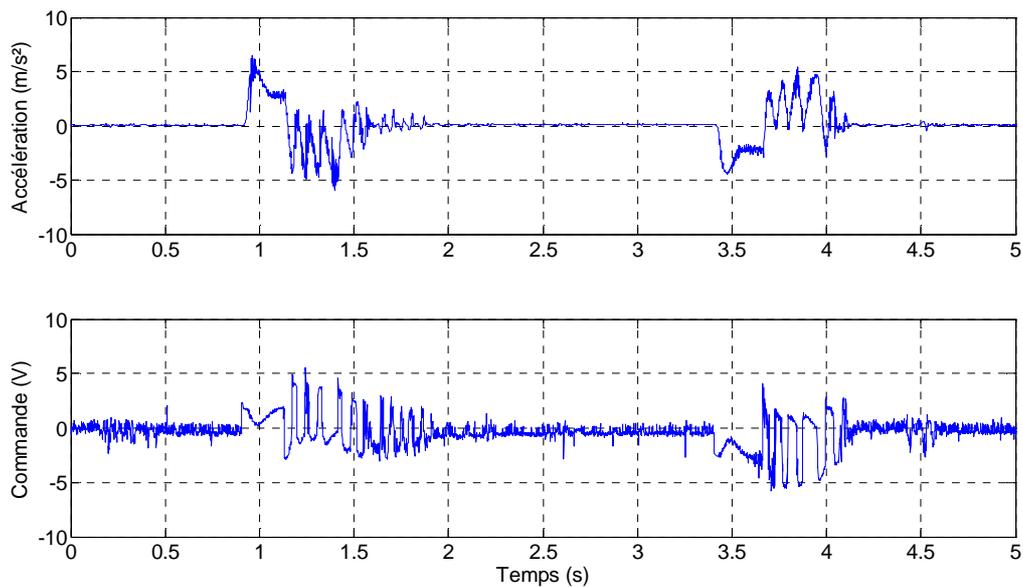
	<b>Essai1</b>	<b>Essai2</b>
<b>Erreur statique (mm)</b>	0.35	0.37
<b>Erreur maximale (dynamique) (mm)</b>	-	2.8
<b>Biais accélération (<math>m/s^2</math>)</b>	0.20	0.25
<b>Temps de réponse (s)</b>	0.515	-

**Tableau V-8 :** Dérivateur  $H_\infty$  : résultats d’essais

Les mêmes essais pour l’algorithme Super Twisting Adaptatif ont été réalisés. Il est à noter qu’un filtre passe bas numérique d’ordre 1 et de fréquence de coupure  $F_c = 30Hz$  a été implémenté avec le dérivateur sur la carte RENESAS. Celui-ci représente l’étage de filtrage en amont de l’algorithme de dérivation. Ceci n’a pas été mis en œuvre pour l’implémentation du filtre  $H_\infty$  vu que celui-ci prend compte, implicitement, dans sa réalisation de cet effet.

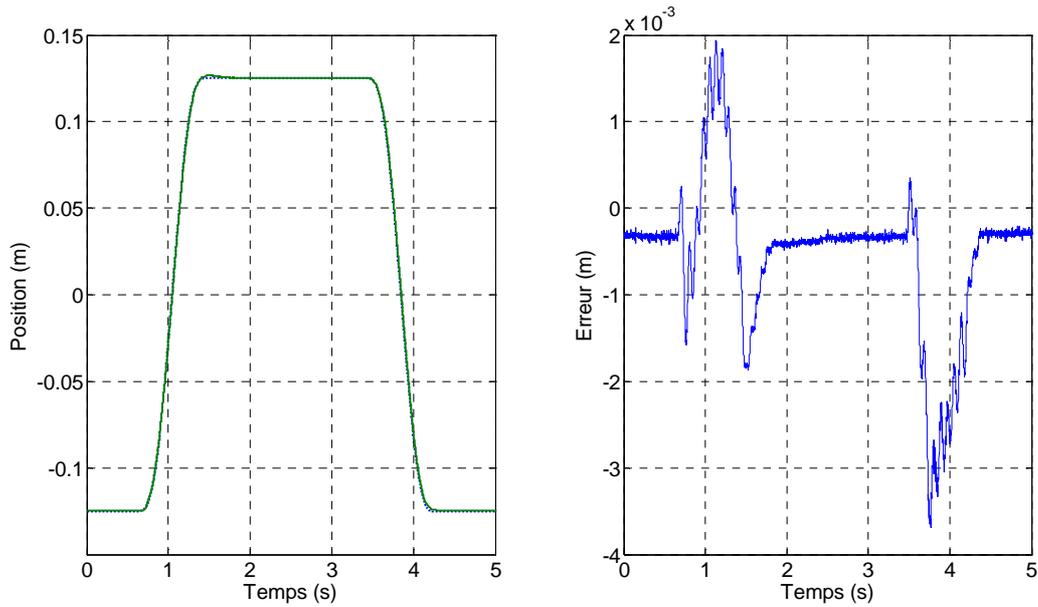


**Figure V-22 :** Différentiateur Super Twisting Adaptatif : Consigne, position et erreur de poursuite (m) (essai1)

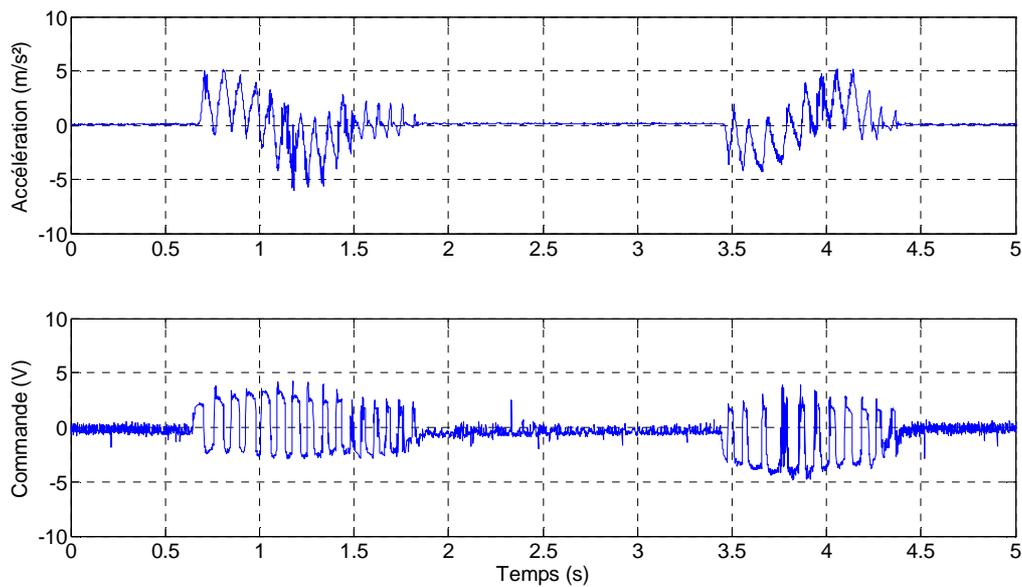


**Figure V-23 :** Différentiateur Super Twisting Adaptatif : Accélération (m/s<sup>2</sup>) et Commande (V) (essai1)

De même, pour la consigne de l'essai2, les résultats obtenus pour le dérivateur Super Twisting Adaptatif sont résumés dans ce qui suit.



**Figure V-24 :** *Différentiateur Super Twisting Adaptatif : Consigne, position et erreur de poursuite (m) (essai2)*



**Figure V-25 :** *Différentiateur Super Twisting Adaptatif : Accélération (m/s<sup>2</sup>) et Commande (V) (essai2)*

Un résumé concis des résultats obtenus lors des essais présentés dans les figures précédentes, pour l’algorithme Super Twisting Adaptatif, est donné dans le tableau suivant.

	<b>Essai1</b>	<b>Essai2</b>
<b>Erreur statique (mm)</b>	0.30	0.35
<b>Erreur maximale (dynamique) (mm)</b>	-	3.69
<b>Biais accélération (m/s<sup>2</sup>)</b>	0.30	0.15
<b>Temps de réponse (s)</b>	0.473	-

**Tableau V-9** : *Dérivateur Super Twisting Adaptatif : résumé des essais (Essai 2)*

A partir des tableaux *Tableau V-8* et *Tableau V-9*, on observe que les erreurs de position en régime statique sont comparables pour les deux essais et pour les deux algorithmes de dérivation numérique. Cependant, en régime dynamique, on observe, pour l'essai2, un dépassement plus important dans le cas de l'algorithme STA. De même, les temps de réponse ont été réduits, par rapport à ceux fournis par l'essai avec accéléromètre. Ceci peut s'expliquer par le fait que les signaux de commande sont moins bruités.

En effet, le signal de commande dans les deux essais est plus « lent » que le signal obtenu lors des essais référence. Ceci est l'effet du filtrage inséré au niveau des algorithmes de dérivation. Mais, d'un autre côté, cet effet conduit à une dépréciation de la précision du suivi de trajectoire et surtout à l'apparition d'un dépassement pour la consigne de l'essai2.

En utilisant la carte de dérivation, la commande est moins bruitée que lors de l'utilisation de l'accéléromètre et ce avec des performances quasi comparables en termes de suivi de position. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'accéléromètre utilisé est un composant qui passe des composantes spectrales plus riches que celles passées par la carte de dérivation. Ces composantes brulent ainsi plus la commande mais sans influencer sur sa précision.

Une augmentation de la bande passante des algorithmes de dérivation implique une accélération plus large en spectre d'où une commande plus réactive. Cependant, et spécialement dans le régime statique, ceci aura pour effet à faire apparaître un chahut plus prononcé au niveau de la commande, qui est l'expression de l'amplification des bruits de mesures et de quantification présents au niveau de l'entrée de l'algorithme de dérivation.

Pour évaluer la répétabilité des résultats obtenus dans les essais avec la carte de dérivation numérique sur laquelle sont implémentés l'algorithme de dérivation  $H_\infty$  et l'algorithme STA avec entrée filtrée, on répète chacun des essais précédents 20 fois et on calcule l'écart type rencontré au niveau de ces différents critères. Ces résultats sont alors résumés sur le tableau suivant.

	Essai1	Essai2
<b>Ecart type sur l'erreur statique (mm)</b>	0.04	0.05
<b>Ecart type sur l'erreur maximale (dynamique) (mm)</b>	-	0.73
<b>Ecart type sur le temps de réponse (s)</b>	0.002	-

**Tableau V-10 : Dérivateur  $H_\infty$  : résultats**

	Essai1	Essai2
<b>Ecart type sur l'erreur statique (mm)</b>	0.09	0.21
<b>Ecart type sur l'erreur maximale (dynamique) (mm)</b>	-	0.92
<b>Ecart type sur le temps de réponse (s)</b>	0.004	-

**Tableau V-11 : Dérivateur Super Twisting : résultats**

La répétabilité des résultats paraît assez importante excepté pour les erreurs maximales en dynamique. En effet, celles-ci sont les plus sensibles aux bruits au niveau du signal d'entrée.

Jusqu'ici, dans ce document, notre intérêt s'est limité à l'obtention de la première dérivée (accélération) obtenue à partir de la vitesse. Cependant, il serait être intéressant de pouvoir estimer l'accélération et la vitesse à partir de la mesure de la position de la tige du vérin. Ceci est possible par toutes les méthodes auxquelles on s'est intéressé tout le long de ce document. Des essais ont été réalisés dans ce sens. Les résultats obtenus sont « médiocres » pour certaines techniques, spécifiquement les dérivateurs par modes glissants et de plus larges investigations sont à apporter dans cette voie.

## V.10 Conclusion

Dans ce chapitre, on s'est intéressé à l'étude de la faisabilité de l'implémentation numérique d'algorithmes de dérivation sur un circuit numérique à base de microcontrôleur en vue de leur intégration dans une boucle de commande.

Ainsi, suite à un premier choix de méthodes linéaires et non linéaires à adopter, on a restreint les investigations sur deux méthodes : une méthode linéaire (filtre  $H_\infty$ ) et une méthode non linéaire (observateur modes glissants adaptatifs). L'objectif étant d'étudier la faisabilité de l'implémentation de ses algorithmes sur des cibles numériques, deux circuits distincts ont été considérés pour cette opération : un circuit haute précision et un second circuit, bas coût, de précision limitée.

Les algorithmes sont, dans un premier temps, mis en œuvre sur le logiciel Matlab et ensuite codés sur une carte dSPACE et une carte microcontrôleur RENESAS. Ces deux cartes étant de précisions différentes, une étude comparative des résultats a été menée afin d'étudier l'influence d'une précision de calcul limitée et/ou de la quantification sur les performances de l'algorithme. Cette étude s'est intéressée, dans un premier temps, à la validation en boucle ouverte de la solution sur des signaux expérimentaux. Une première comparaison a mis en

lumière l'incidence qu'a sur la précision de codage et de quantification sur la qualité de la dérivation qui s'améliore avec l'augmentation de la résolution des organes de conversion de signaux.

Ensuite, une validation en boucle fermée est effectuée. Dans cette étape, l'algorithme de dérivation est intégré dans une boucle de commande d'un système électropneumatique afin d'estimer l'accélération à partir de la dérivation de la vitesse. Celle-ci a montré que l'utilisation de ces algorithmes, correctement réglés, n'entraînait pas de dégradation notable de performances en termes de suivi de trajectoire par rapport au cas où un accéléromètre est utilisé pour l'estimation de l'accélération. De plus, on a pu constater que l'utilisation de ceux-ci permettait de réduire la consommation énergétique de la commande en la lissant. En effet, ces algorithmes sont associés à des techniques de filtrage afin de réduire leur sensibilité aux bruits de mesure ce qui les rend moins riches spectralement ce qui se retrouve également au niveau de la commande.

## *Conclusion Générale*

L'importance des algorithmes de dérivation dans les problèmes de commande des systèmes non linéaires n'est plus à prouver. Ceux-ci permettent d'estimer des composantes du vecteur d'état d'un système dynamique non linéaire qui sont nécessaires pour le calcul d'une commande synthétisée. En effet, dans le cas où certaines composantes du vecteur d'état sont les dérivées d'autres grandeurs mesurées, celles-ci peuvent être estimées par les algorithmes de dérivation offrant, ainsi, une alternative aux observateurs qui nécessitent une bonne connaissance du modèle observé. De même, dans certaines applications, ces techniques permettent d'estimer des grandeurs qu'il est techniquement impossible de mesurer. De plus, ils permettent de réduire le nombre de capteurs à installer sur un système, d'où une réduction de coût ainsi que d'augmenter la fiabilité des installations lorsque ceux-ci sont placés en redondance avec des capteurs et permettent de prendre le relais lors d'un défaut de capteur.

Ainsi, dans ce travail, on s'est intéressé à ces techniques et particulièrement à la faisabilité de leur implémentation numérique en vue de la conception d'un composant numérique qui fera office de capteur universel pour l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré. Par « universel », on entend que le capteur permet d'estimer différentes grandeurs physiques indépendamment avec la même technologie. En effet, et à titre d'exemple, l'obtention d'une vitesse ou d'une accélération nécessite un capteur de mesure dont la technologie est spécifiquement mise en place pour mesurer uniquement cette grandeur. Sachant que celles-ci peuvent être obtenues par dérivations successives de la position, un dérivateur numérique permettra d'estimer ses deux grandeurs avec une même technologie et un même composant moyennant, éventuellement, un réglage intermédiaire.

Pour se faire, une étude et une synthèse de l'existant a été effectuée. Au cours de celle-ci, des techniques linéaires et non linéaires ont été présentées et étudiées. Cette étude nous a permis de nous rendre compte que les problèmes de dérivation ne sont rien d'autres que des problèmes d'observation pour des systèmes particuliers. Cet aspect n'étant pas mis en avant dans la littérature, un effort a été apporté dans ce sens afin d'explicitier cette relation.

Les techniques d'observation ont largement été commentées dans les travaux à travers la littérature. Celles-ci sont basées sur un même principe : chercher un gain pour satisfaire un critère optimal donné. Ainsi, on a introduit une approche d'observation par optimisation d'une norme  $H_\infty$ . Le principal avantage de cette approche, équivalente à l'optimisation de la DSP de l'erreur d'estimation, est que le problème de recherche du gain optimal est donné sous forme de problème d'optimisation sous contraintes LMI en plus du fait qu'elle permet de synthétiser un observateur tout en imposant une contrainte (gabarit) fréquentielle sur le signal d'erreur. Dans ce cas, on parle de norme  $H_\infty$  pondérée.

Dans cette approche, on a présenté différentes structures d'observation, de la plus spécifique à la plus générale et sur lesquelles on s'est interrogé quant au niveau de performance atteignable dans leur cas et on a pu démontrer qu'un niveau de performance égal peut être atteint par les deux techniques ce qui permet d'utiliser des structures d'observation données sous forme générale, permettant, ainsi, de s'affranchir de la contrainte structurelle induite par les observateurs classiques.

Des techniques non linéaires d'observation, basées sur les modes glissants, ont également été traitées. Celles-ci présentent l'intérêt d'introduire une notion de convergence inconnue, à

notre connaissance, dans les approches linéaires : la convergence en temps fini. De même, celles-ci permettent d'introduire un effet non linéaire dans l'expression de l'observateur ce qui pourrait, éventuellement, apporter un avantage par rapport aux techniques linéaires. Ainsi, résultats de simulation à l'appui, on a pu mettre en avant l'apport de ces techniques, qui malgré tout, sont plus complexes à régler et plus spécifiques que les techniques linéaires communes. En effet, elles ne sont applicables qu'aux modèles de signaux spécifiques qui sont donnés sous forme de chaînes d'intégrateurs. Ainsi, une investigation plus approfondie sur la possibilité d'adapter ces observateurs à des modèles plus généraux est à considérer pour des recherches ultérieures. En effet, et malgré ce modèle spécifique, ces méthodes offrent des performances comparables aux méthodes linéaires plus classiques. D'où un potentiel d'amélioration des performances dans le cas où l'observateur non linéaire peut être conçu à partir d'un modèle général.

Les performances des observateurs, tout comme les algorithmes de dérivation, sont toujours tributaires d'un choix adéquat des paramètres de réglages de ceux-ci. Ce choix étant spécifique au modèle observé ou au signal à estimer, on ne peut alors pas garantir une performance optimale dans tous les cas. Cette complexité de réglage de ces algorithmes nous a poussé à étudier l'application de techniques adaptatives pour le réglage de leurs gains en temps réel selon des lois d'adaptation qui assurent la convergence de l'erreur d'estimation. Ainsi, une structure d'observateur/dérivateur générale, traitée dans la littérature, a été considérée et une version adaptative de celle-ci a été présentée.

Les techniques de dérivation étant définies et traitées d'un point de vue théorique, vient alors le volet application de celles-ci. En effet, dans ce travail, on a souhaité étudier la faisabilité de l'implémentation de ces algorithmes sur un circuit numérique en vue de concevoir un composant qui jouera le rôle d'un capteur universel pour l'estimation de dérivées de signaux récupérés en son entrée. Une contrainte de coût étant imposée, on s'est intéressés à l'étude de leur implémentation sur des systèmes numériques à faible coût représentatifs de la majorité des applications rencontrées. Ainsi, il a été nécessaire d'étudier l'influence, sur la qualité de la dérivée, des différents paramètres du circuit à considérer lors de l'implémentation. Ainsi, une étude en simulation a été effectuée dans laquelle on a évalué l'effet de la limite de précision de calcul (quantification, calculs en virgules fixes, résolution de conversion, etc.) sur la précision de la dérivée au niveau des algorithmes. Cette procédure a été adoptée par la suite pour le choix de la résolution à considérer lors de la phase d'implémentation.

La dérivation numérique intervenant principalement dans les problèmes de commande, les performances du dérivateur implémenté sur circuit numérique ont dû être évaluées dans le cadre d'un problème de commande. Ainsi, on a commencé par définir un benchmark couvrant toute la phase de développement de la solution. Celle-ci allait alors de la validation en boucle ouverte sur des signaux connus à la validation en boucle fermée dans un contexte de commande. Ainsi, le dérivateur numérique a été implémenté pour l'estimation d'une accélération par dérivation d'une vitesse mesurée. Des résultats encourageants ont alors été mis à jour. En effet, l'utilisation de dérivateurs, auxquels on associe inévitablement une opération de filtrage, permet de réduire la commutation au niveau de la commande d'un système électropneumatique réduisant ainsi la consommation énergétique de celle-ci et évitant la détérioration prématurée des actionneurs.

Au-delà d'une simple opération de dérivation, on s'est avancé vers l'implémentation d'une double dérivation sur une même carte microcontrôleur. Ainsi, on pourra disposer d'un composant permettant l'estimation de la vitesse et de l'accélération à partir de la mesure de la

position. Des essais portant sur l'implémentation d'une double dérivation linéaire ont été alors effectués et la carte a alors été intégrée dans la boucle de commande du système électropneumatique. Ces essais ont montré que la précision du suivi de trajectoires s'en trouve dépréciée. Ceci est le résultat de la présence de bruits et de déphasages au niveau des signaux dérivés. Le principal problème dans les algorithmes de dérivation découle du fait que plus on monte dans l'ordre des dérivées, plus celles-ci sont imprécises. De plus, l'augmentation du degré de dérivation induit inévitablement un effet de déphasage.

Des investigations plus poussées mériteraient d'être conduites concernant l'estimation de dérivées supérieures. En effet, plus l'ordre de celles-ci est important, plus les gains, en termes de coût et de fiabilité, des installations s'en trouvent améliorés. Dans la littérature, le problème des dérivées supérieures a été traité d'un point de vue théorique et « idéaliste » dans la mesure où les bruits de mesure sont considérés nuls vu que l'introduction de cette composante dégrade de plus en plus la précision d'estimation au fur et à mesure que l'on monte dans le degré de la dérivée. D'un point de vue expérimental, l'estimation des dérivées supérieures est encore plus délicate vu l'effet inévitable des quantifications et des perturbations extérieures et celle-ci devra impérativement passer l'utilisation, dans l'implémentation numérique, de circuits de haute précision afin de réduire au maximum l'effet des quantifications et imprécisions de calcul.

D'autre part, une voie reste à explorer dans l'exploitation d'effets non linéaires pour l'amélioration potentielle de la précision des algorithmes de dérivation. Dans ce sens, les observateurs non linéaires par modes glissants, valables pour des signaux modélisés par des chaînes d'intégrateurs, gagneraient à être exploités et appliqués pour des signaux plus généraux. De même, cette étape pourrait être associée à l'investigation de la possibilité d'une prise en compte explicite du modèle du bruit dans la mise en œuvre de ce type de dérivateurs/observateurs.



## Références

- [1] C. Boussard, "Estimations embarquées de conditions de risque : Adhérence et visibilité", Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 178 P., 2007.
- [2] H. Sira-Ramirez, M. Fliess, "On the output feedback control of a synchronous generator", IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 5, No. 43, Nassau, Bahamas, 2004.
- [3] R. A. Singer, "Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 6, No. 4, pp. 473-483, 1970.
- [4] A. Dabroom and H. K. Khalil, "Numerical differentiation using high-gain observers," *Proceedings of the 36<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, San Diego, California USA, December 1997, pp. 4790-4795.
- [5] L. Sidhom, M. T. Pham, F. Thevenoux, M. Gautier, "Identification of a robot manipulator based on adaptive higher order sliding modes differentiator", IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), Montreal, Canada, July 2010.
- [6] L. Sidhom, M. Smaoui, D. Thomasset, X. Brun, E. Bideaux, "Adaptive Higher Order Sliding Modes for Two-Dimensional Derivative Estimation", 18th IFAC World Congress, Milan, Italy, August 2011, (Submitted paper).
- [7] L. Sidhom, M. Smaoui, M. Di Loreto, X. Brun, E. Bideaux, D. Thomasset, "Higher-order Sliding modes for an electropneumatic system : differentiation and output feedback control", Proceedings of the Bath/ASME Symposium on Fluid Power and Motion Control, FPNC, United Kingdom, 2008.
- [8] L. Sidhom, M. Smaoui, M. Di Loreto, "A 2nd-Order Robust Adaptive Differentiator-Controller Design for an Electropneumatic System", Proceedings of the 5th Fluid Power Net International PhD Symposium - FPNI-PhD, Poland, 2008.
- [9] X. Wang, Z. Chen, G. Yang, "Finite-Time-Convergent Differentiator Based on Singular Perturbation Technique", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 52, No. 9, 2007.
- [10] A. Levant, "Robust Exact Differentiation via Sliding Mode Technique", *Automatica*, Vol. 34, No. 3, pp. 379-384, 2005
- [11] A. Levant, "Higher order sliding modes, differentiation and output feedback control", *International Journal of Control*, Vol. 76, No. 9, pp. 924-941, 2003.
- [12] D. G. Luenberger, "An introduction to observers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1971, Vol. AC-16, No. 6, pp. 596-602.
- [13] M. Dridi, G. Scorletti, M. Smaoui, D. Tournier, X. Lin-Shi, "Weighted Hinfinitiy Filtering versus Observation: Application to signal Differentiation", American Control Conference, Baltimore, Maryland, pp. 1404-1409, 2010.
- [14] T. Floquet, J. P. Barbot, "Super twisting algorithm-based step-by-step sliding mode observers for nonlinear systems with unknown inputs", *International Journal of Systems Science*, Vol. 38, No. 10, pp. 803-815, 2007.
- [15] S. V. Drakunov, "Sliding-mode Observer Based on Equivalent Control Method", IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 2, No. 31, pp. 2368-2369, Tucson, Arizona, USA, 1992.
- [16] M. Smaoui, "Commandes Non Linéaires Robustes Mono et Multidimensionnelles de Dispositifs Electropneumatiques: Synthèse et Applications", Thèse de doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 2004, 191 p.
- [17] M. Dridi, G. Scorletti, M. Smaoui, D. Tournier, "From theoretical differentiation methods to low-cost digital implementation", *International Symposium on Industrial Electronics*, Bari, Italy, 2010.

- [18] E. Richard, "*De la commande linéaire et non linéaire en position des systèmes électropneumatiques*", Thèse de doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 291 p., 1990.
- [19] B. Robyns, B. François, P. Degobert, J. P. Hautier, "Commande Vectorielle de la Machine Asynchrone : Désensibilisation et optimisation par la logique floue", Editions Technip, Paris, 2007, ISBN 978-2-7108-0834-3.
- [20] H. Tédjini, M. Moudjahed, Y. Meslem, M. Tadjine, "Commande Non Linéaire Adaptative par Backstepping et Observateur d'une Machine Synchrone à Aimant Permanent Alimentée par un Onduleur à Trois Niveaux", International Conference on Computer Integrated Manufacturing, November, 2007.
- [21] S. Sesmat, S. Scavarda, "*Static characteristics of a three way servovalve*", Conference on Fluid Power Technology, Aachen, Allemagne, 1996.
- [22] J. E. Bobrow, B. W. Mc Donell, "*Modelling, identification and control of a pneumatically actuated force controllable robot*", IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 14, No. 5, pp. 732-742, 1998.
- [23] N. Orani, A. Pisano, E. Usai, "*On a new sliding-mode differentiation scheme*", IEEE International Conference on Industrial Technology, pp. 2652-2657, Mumbai, 2006.
- [24] F. Esfandiari, H. K. Khalil, "*Output Feedback Stabilization of Fully Linearizable Systems*", International Journal of Control, Vol. 56, No. 5, pp. 1007-1037, 1992.
- [25] H. Saadaoui, N. Manamanni, M. Djemai, J. P. Barbot, T. Floquet, "*Exact Differentiation and Sliding Mode Observers for Switched Lagrangian Systems*", Nonlinear Analysis, Vol. 65, No. 5, pp. 1050-1069, 2006.
- [26] H. Saadaoui, M. Djemai, N. Manamanni, K. Benmansour, "*Super Twisting Algorithm Observer for a Class of Switched Chaotic Systems*", 2nd International Symposium on Communications, Control and Signal Processing, Marrakech, Maroc, 2006.
- [27] J. Davila, L. Fridman, A. Levant, "*Second-Order Sliding-Mode Observer for Mechanical Systems*", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 50, No. 11, pp. 1785-1789, 2005.
- [28] K. J. Aström, P. Eykhoff, "*System Identification: a survey*", Automatica, Vol. 7, No. 2, pp. 123-162, 1971.
- [29] B. S. Atal, S. L. Hanauer, "*Speech Analysis and Synthesis by Linear Prediction of the Speech Wave*", Journal of Acoustical Society of America, Vol. 50, No. 2B, pp. 637-655, 1971.
- [30] P. De Larminat, J. M. Piasco, "Modèles Majorants : application au filtrage de trajectoires de mobiles manoeuvrants", Colloque sur le Traitement du Signal et ses Applications, pp. 451-456, Nice, 1981.
- [31] G. U. Yule, "On Methods of Investigating Periodicities in Disturbed Series with Special Reference to Wölfe's Sunspot Numbers", Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol. A226, pp. 267-298, 1927.
- [32] J. D. Markel, A. H. Gray, "*On Autocorrelation Equation Applied to Speech Analysis*", IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, Vol. 21, No. 2, pp. 69-79, 1973.
- [33] N. Wiener, "Extrapolation, Interpolation and Smoothing at Stationnary Time Series", The Massachussets Institute of Technology Press, ISBN 0262730057, 1964.
- [34] J. R. Treichler, C. Richard Johnson Jr, M. G. Larimore, "*Theory and Design of Adaptive Filters*", Prentice Hall, ISBN 0130402656, 2001.
- [35] T. Kailath, "*Linear Systems*", Prentice Hall, 1979, ISBN 0135369614.
- [36] R. E. Kalman, "*A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*", Transactions of the American Society of Mechanical Engineers Journal of Basic Engineering, Vol. 82, pp. 35-45, 1960.

- [37] J. P. Barbot, T. Boukhobza, M. Djemaï, "Sliding Mode Observer for Triangular Input Form", *IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 2, pp. 1489-1490, Kobe, Japan, 1996.
- [38] D. Alazard, "Introduction au Filtre de Kalman: notes de cours, exercices corrigés, session Matlab", notes de cours, SUPAERO, 2005.
- [39] C. A. Desoer, M. Vidyasagar, "Feedback Systems: Input-Output Properties", Academic Press, 1975.
- [40] J. C. Doyle, G. Stein, "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26, No. 1, 1981.
- [41] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory," *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1994.
- [42] P. Gahinet, P. Apkarian, "A Linear Matrix Inequality Approach to Hinf Control", *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 4, pp. 421-448, 1994.
- [43] D. G. Luenberger, "Observing the State of a Linear System", *IEEE Transactions on Military Electronics*, Vol. 8, No. 2, pp. 74-80, 1964.
- [44] D. G. Luenberger, "Observers for Multivariable Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 11, No. 2, 1966.
- [45] A. Tornambè, "Gigh-gain observers for non-linear systems", *International Journal of Systems Science*, Vol. 23, No. 9, pp. 1475-1489, 1992.
- [46] R. Hermann, A. J. Krenner, "Nonlinear Controllability and Observability", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 22, No. 5, pp. 728-740, 1997.
- [47] H. J. Sussman, "Single-input Observability of Continuous-time Systems", *Mathematical System Theory*, Vol. 12, pp. 371-393, 1979.
- [48] G. Besançon, H. Hammouri, "On Uniform Observation of Non Uniformly Observable Systems", *Systems and Control Letters*, Vol. 29, No. 1, pp. 9-19, 1996.
- [49] G. Bornard, H. Hammouri, "A High Gain Observer for a Class of Uniformly Observable Systems", *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 122, Brighton, England, 1991.
- [50] X. H. Xia, W. B. Gao, "Nonlinear Observer Design by Observer error Linearization", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 27, No. 1, pp. 199-216, 1989.
- [51] H. Hammouri, M. Farza, "Nonlinear Observers for Locally Uniformly Observable Systems", *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, Vol. 9, pp. 353-370, 2003.
- [52] A. J. Krener, A. Isidori, "Linearization by Output Injection and Nonlinear observers", *System and Control Letters*, Vol. 3, No.1, pp. 47-52, 1983.
- [53] R. Marino, P. Tomei, "Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive & Robust", Prentice-Hall Information and System Sciences Series, 396 p., 1995.
- [54] J. P. Gauthier, G. Bornard, "Observability for any  $u(t)$  of a Class of Nonlinear Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 26, pp. 922-926, 1981.
- [55] J. P. Gauthier, I. A. K. Kupka, "Observability and observers for Nonlinear Systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 32, No. 4, pp. 975-994, 1994.
- [56] G. Besançon, "Nonlinear Observers and Applications", *Lecture Notes in Control and Information Science* 363, Springer Verlag, 2007.
- [57] A. Isidori, "Non Linear Control Systems", 2<sup>ème</sup> édition, New York: Springer Verlag, p. 479, 1989.
- [58] A. Saberi, P. Sannuti, "Observer Design for Loop Transfer Recovery and for Uncertain Dynamical Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 35, No. 8, pp. 878-897, 1990.

- [59] R. E. Kalman, R. S. Bucy, "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory", Transactions of the American Society of Mechanical Engineers Journal of Basic Engineering, Vol. 38, pp. 95-101, 1960
- [60] A. N. Ramjattan, P. A. Cross, "A Kalman filter model for an integrated land vehicle navigation system", Journal of Navigation, Vol. 48, No. 2, pp. 293-302, 1995.
- [61] E. Abbott, D. Powell, "Land-vehicle navigation using GPS", Proceedings of the IEEE, Vol. 87, No. 1, pp. 145-162, 1999.
- [62] M. Flament, "Apport du filtrage particulaire au recalage altimétrique dans un contexte de navigation hybridée", Thèse de doctorat, Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Sud 11, 2009, 116 p.
- [63] T. Jiang, N. D. Sidiropoulos, G. B. Giannakis, "Kalman Filtering for Power Estimation in Mobile Communications", IEEE Transactions on Wireless Communications, Vol. 2, No. 1, pp. 151-161, 2003.
- [64] C. R. Rao, "Advanced Statistical Methods in Biometric Research", Macmillan Pub Co, 1970.
- [65] G. Duc, "Robustesse des Systèmes linéaires Multivariables", Polycope, Ecole Supérieure d'Electricité, 1994.
- [66] H. T. Toivonen, "Robust Control Methods", Lecture Notes, Process Control Laboratory, Åbo Akademi University, Turku, Finland, 1998.
- [67] C. Scherer, S. Weiland, "Linear Matrix inequalities in Control", Lecture Notes on LMI, Delft Center for Systems and Control, 2005.
- [68] G. Zames, "Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses," *IEEE Trans. On Automatic Control*, Vol. AC-26, No. 2, pp. 301-320, 1981.
- [69] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, "State-Space Solutions to Standard and Control Problems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 34, No. 8, pp.831-847, 1989.
- [70] U. Shaked, "H<sub>∞</sub> Minimum Error State Estimation of Linear Stationary Processes," *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1990, Vol. 35, No. 5, pp. 554-558.
- [71] L. El Ghaoui, "Commande des Systèmes Linéaires", *Techniques avancées*, Octobre 1995.
- [72] O. Toker and H. Özbay, "On the NP-hardness of solving Bilinear Matrix Inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback" in *Proc. American Control Conf.*, Seattle, Washington, June 1997, pp.2525-2526.
- [73] S. Ibaraki, S. Suryanarayanan and M. Tomizuka, "Hinf Optimization of Leuenberger State Observers and Its Application to Fault Detection Filter design," *Proc. Of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control*, Orlando, Florida USA, December 2001.
- [74] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. Aitrami, "A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problem," *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1997, Vol. 42, No. 8, pp. 1171-1176.
- [75] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chilali, "The LMI Control Toolbox," *Proceedings Of the 33rd Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL, pp. 2038-2041, 1994.
- [76] A. Levant, "Construction principles of output-feedback 2-sliding mode design", *Proceedings of the 42th IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, December 10-13, pp. 317-322, 2002.
- [77] A. Levant, "Quasi-continuous High-Order Slidign-Mode Controllers", *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Hawaii, USA, pp. 4605-4610, 2003.

- [78] Z. Man, X. H. Yu, "Terminal sliding mode control of MIMO linear systems", *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, Vol. 44, No. 11, pp.1065-1070, 1997.
- [79] J. B. Gamble, N. D. Vaughan, "Comparison of Sliding Mode Control with State Feedback and PID Control Applied to a Proportional Solenoid Valve", *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 118, No. 3, pp. 434-438, 1996.
- [80] M. Bouri, "Contribution à la Commande Non Linéaire par Mode de Glissement: Application aux Actionneurs Electropneumatiques", *Thèse de doctorat*, Lyon, INSA de Lyon, 1997, 194 p.
- [81] S. Kobayashi, K. Furuta, "Frequency characteristics of Levant's differentiator and adaptive sliding mode differentiator", *International Journal of Systems Science*, Vol. 38, No. 10, October 2007, pp. 825-832.
- [82] S. Suzuki, K. Furuta and S. Shiratori, "Adaptative impact shot control by pendulum like juggling system", *International Journal of Japan Society Mechanical Engineering*, Vol. 46, No. 3, pp. 973-981, 2003.
- [83] S. Kobayashi, S. Suzuki, K. Furuta, "Adaptive VS-Differentiator", *Advances in Variable Structure Systems*, 7th IEEE International Workshop on Variable Structure Systems, pp. 35-45, Sarajevo, 2002.
- [84] S. Laghrouche, "Commande par Modes Glissants d'Ordre Supérieur: Théorie et Application", *Thèse de doctorat*, Nantes, Ecole Centrale de Nantes, 2004, 122 p.
- [85] J. J. E. Slotine, W. Li, "Applied Non Linear Control", *Engelwood Cliffs*, Prentice Hall, 1991, 461p.
- [86] H. K. Khalil, "Non Linear Systems", 3ème édition, *Prentice Hall*, Upper Saddle River , New Jersey, 2002, ISBN 0120673897.
- [87] A. Isidori, "Nonlinear Control Systems", Springer-Verlag Communication and Control Engineering, ISBN 3-540-19916-0 3rd edition, 1995.
- [88] V. Utkin, "Sliding Mode in Control and Optimization", Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [89] J. A. Burton, A. S. I. iZinober, "Continuous Approximation of Variable Structure Control", *International journal of systems science*, Vol. 17, No. 6, pp. 875-885, 1986.
- [90] A. Levant, "Sliding Order and Sliding Accuracy in Sliding Mode Control", *International Journal of Control*, Vol. 58, No. 6, pp. 1247-1263, 1993.
- [91] S. V. Emelyanov, S. K. Korovin, AA. Levantovsky, "Higher-order Sliding Modes in the Binary Control Systems", *Soviet Physics*, Vol. 31, No. 4, pp. 291-293, 1986.
- [92] S. V. Emelyanov, S. K. Korovin, AA. Levantovsky, "A Drift Algorithm in Control of Uncertain Processes", *Problems of Control and Information Theory*, Vol. 15, No. 6, pp. 425-438, 1990.
- [93] S. V. Drakunov, V. I. Utkin, "Sliding mode Observers", Tutorial, IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, LA, 1995.
- [94] V. I. Utkin, J. Guldner, J. Shi, "Sliding Mode Control in Electromechanical Systems", Taylor and Francis, London, 1999.
- [95] G. Bartolini, A. Pisano, E. Usai, "First and Second Derivative Estimation by Sliding Mode Technique", *Journal of Signal Processing*, Vol. 4, pp. 167-176, 2000.
- [96] S. Moberg, J. Öhr, "Robust Control of a Flexible Manipulator Arm: A Benchmark Problem", *Proceedings of the 16th of the International Federation of Automatic Control*, Vol. 16, No. 1, Czech Republic, 2005.
- [97] S. Moberg, J. Öhr, S. Gunnarsson, "A Benchmark Problem for Robust Control of a Multivariable Nonlinear Flexible Manipulator", *Proceedings of the 17th International Federation of Automatic Control World Congress*, Vol. 17, No. 1, Seoul, South Korea, 2008.

- [98] I. D. Landau, D. Rey, A. Karimi, A. Voda, A. Franco, "A Flexible Transmission System as a Benchmark for Robust Digital Control", *European Journal of Control*, Vol. 1, No. 2, pp. 77-96, 1995.
- [99] G. Scorletti, "*Traitement du signal*", Cours GE b1.2 Traitement du signal, 2008-2009, Ecole Centrale de Lyon, 141 p., 2008.
- [100] S. A. Tretter, "*Introduction to Discrete-time Signal processing*", John Wiley & Sons, New York, 1976, ISBN0-471-88760-9.
- [101] D. Menard, "*Méthodologies de conversion automatique en virgule fixe pour les applications de traitement du signal*", Ecole thématique Architecture des systèmes matériels enfouis et méthodes de conception associées, Roscoff, 2003.
- [102] E. D. Bolat, K. Erkan, S. Postalcioglu, "*Microcontroller Based Temperature Control of Oven using different Kinds of Autotuning PID Methods*", *Advances In Artificial Intelligence, Lecture Notes In Computer Science*, Vol. 3809/2005, pp. 1295-1300, 2005.
- [103] E. D. Bolat, "*Implementation of Matlab-SIMULINK Based Real Time Temperature Control for Set Point Changes*", *International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing*, No. 1, Vol. 1, 2007.
- [104] X. Dou, Q. Guo, "*Precise digital control system of a moving mirror's reciprocating move at even speed*", *Journal of Control theory and Applications*, Vol. 6, No. 4, pp. 431-434, 2008.
- [105] V. K. Chinnaiyan, J. Jerome, J. Karpagam, "*An FPGA Based Control Algorithm for Cascade Multilevel Inverters*", *International Journal of Engineering and Technology*, Vol. 1, No. 5, 2009.
- [106] A. Cozma, "*DC Motor Monitoring and Control System*", *Novel Algorithms and Techniques in Telecommunications, Automation and Industrial Electronics*, pp. 26-31, 2008.
- [107] RENESAS - SH7201 [en ligne]. Disponible sur: [http://america.renesas.com/full\\_product\\_info/products/mpumcu/superh/sh7200/sh7201/sh7201\\_root.jsp](http://america.renesas.com/full_product_info/products/mpumcu/superh/sh7200/sh7201/sh7201_root.jsp) (consulté le 19.09.2010).
- [108] RENESAS, "*SH7201 group Hardware Manual*", Rev. 1.00, 2006.
- [109] P. Pognant-Gros, "*De la réduction de modèles vers la commande robuste application aux canaux d'irrigation*", Thèse de doctorat, Caen, Université de Caen /Basse-Normandie, , 191 p., 2003.
- [110] X. Brun, D. Thomasset, E. Bideaux, "*Influence of the process design on the control strategy: application in electropneumatic field*", *Control Engineering Practice*, Vol. 10, No. 7, pp. 727-735, 2002.
- [111] K. A. Edge, "*The control of fluid power systems - responding to the challenge*", *Journal of Systems and Control Engineering*, Vol. 211, No. 12, pp. 91-110, 1997.
- [112] K. Hamiti, A. Voda-besançon, H. Roux-Buisson, "*Position control of a pneumatic actuator under the influence of stiction*", *Control Engineering Practice*, Vol. 4, No. 8, pp. 1079-1088, 1996.
- [113] S. Sesmat, "*Modélisation, simulation et commande d'une servovalve électropneumatique*", Thèse de doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 1996, 307 p.
- [114] dSPACE, "*Hardware Installation and Configuration - For Release 5.2*", DS1104 R&D Controller Board, 2006.
- [115] A. Tustin, "*The effect of backlash and speed-dependent friction on the stability of closed-cycle control systems*", *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, Vol. 94, No. 2, pp. 143-151, 1947.
- [116] B. Armstrong, P. Dupont, C. Canudas De Wit, "*A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction*", *Automatica*, Vol. 30, No. 7, pp. 1083-1138, 1994.

- [117] D. Karnopp, "Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems", Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 107, pp. 100-103, 1985.
- [118] K. Turki, "Nouvelles approches pour la synthèse de lois de commande non linéaires robustes . Application à un actionneur électropneumatique et proposition d'une solution au problème du redécollage", Thèse de doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 148 p., 2010.
- [119] X. Brun, "Commandes linéaires et non linéaires en électropneumatique: Méthodologie et applications", Thèse de doctorat, INSA de Lyon, Lyon, 1999, 121 p.
- [120] M. Belgharbi, D. Thomasset, S. Scavarda, S. Sesmat, "Analytical model of the flow stage of a pneumatic servo-distributor for simulation and nonlinear control", Scandinavian International Conference on Fluid Power, Tampere, Finland, 1999.
- [121] X. Brun, M. Belgharbi, S. Sesmat, D. Thomasset, S. Scavarda, "Control of anelectropneumatic actuator, comparison between some linear and nonlinear control laws", Journal of Systems and Control Engineering, Vol. 213, No. 15, pp. 387-406, 1999.
- [122] X. Brun, D. Thomasset, "Choice of control law in electropneumatics: Expertise using an industrial benchmark and some new trends", Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, 2000.
- [123] M. Mattei, "Robust regulation of the air distribution into an arc heater", Journal of Process Control, Vol. 11, pp. 285-297, 2001.
- [124] T. Kimura, S. Hara, T. Fujita, T. Kagawa, "Feedback linearization for pneumatic actuator systems wirth static friction", Control Engineering Practice, Vol. No. 5, No. 100, pp. 1385-1394, 1997.
- [125] B. Li, Z. Li, Y. Xu, "Study on adaptive control for a pneumatic servo system", Advances in Modelling and Analysis, Vol. 49, No. 2, pp. 21-28, 1997.
- [126] F. Errahimi, H. Cherrid, N. K. M'Sirdi, H. Aberkane, "Robust adaptive control and observer for a robot with pneumatic actuators", Robotica, Vol. 20, pp. 167-173, 2002.
- [127] M. Bouri, D. Thomasset, "Sliding control of an electropneumatic actuator using an integral switching surface", Control Systems Technology, Vol. 2, No. 2, pp. 368-375, 2001.
- [128] M. Bouri, D. Thomasset, S. Scavarda, "Integral sliding mode controller of a rotational servodrive", Japan Hydraulics and Pneumatics Society - International Symposium on Fluid Power, pp. 154-150, Tokyo, Japan, 1996.
- [129] S. Laghrouche, M. Smaoui, X. Brun, F. Plestan, "Robust second order sliding mode controller for electropneumatic actuator", American Control Conference, Vol. 6, pp. 5090-5095, Boston, Massachussets, USA, 2004.
- [130] M. Smaoui, X. brun, D. Thomasset, "Robust position control of electropneumatic system using second order sliding mode", International Symposium on Industrial Electronics, Ajaccio, France, 2004.
- [131] M. Smaoui, X. Brun, D. Thomasset, R. De Giorgi, "Expérimentation d'une commande multivariable par modes glissants d'ordre supérieur sur un système électropneumatique", Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Douz, Tunisie, 2004.



## Résumé

Les algorithmes de dérivation sont des méthodes numériques permettant d'estimer la dérivée d'un signal à partir d'une mesure de celui-ci. Dans la discipline de l'automatique, et comme il a été repris dans une large part des travaux de la communauté automatique, ces méthodes fournissent une aide précieuse dans les problèmes de commande non linéaire dans la mesure où celles-ci permettent de fournir, par dérivation de signaux mesurables, une estimation de signaux intervenant dans le calcul de la commande.

Les approches les plus connues au problème, sont basées sur les observateurs. Dans celles-ci, le signal à dériver est modélisé comme la sortie d'un système dynamique donné dont l'entrée est un signal canonique connu. Les dérivées du signal sont alors obtenues par observation de l'état de son modèle. La plupart de ces techniques prennent en compte, implicitement ou explicitement, des hypothèses, stochastiques ou déterministes, propres sur le signal à dériver et/ou sur la perturbation l'affectant.

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude et l'application des différentes approches linéaires et non linéaires d'observation dans la synthèse d'algorithmes de dérivation.

Dans un cadre linéaire, différentes approches de filtrage et d'observation (grand gain, Kalman,  $H_2$ ) sont alors introduites et appliquées pour l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré.

Une proposition d'approche alternative d'observation linéaire a été introduite et appliquée à la dérivation. Dans celle-ci, un observateur est mis en œuvre par optimisation d'une norme  $H_\infty$ . Le problème de synthèse d'observateurs est alors formulé comme un problème d'optimisation sous contraintes LMI. Cette approche présente l'intérêt de la possibilité de considérer une norme  $H_\infty$  pondérée dans la synthèse de l'observateur. Dans ce cas, il est possible d'imposer un gabarit particulier sur la Densité Spectrale de Puissance du signal d'erreur. Une investigation supplémentaire est également apportée quant à la possibilité de considérer des structures d'observateurs alternatives à la structure Luenberger classique afin de s'affranchir de cette contrainte structurelle.

Dans un cadre non linéaire, les observateurs par modes glissants fournissent une alternative aux observateurs linéaires dans l'application à la dérivation. Ces méthodes présentent l'intérêt de leur robustesse avérée et de pouvoir apporter une amélioration potentielle de la précision des algorithmes. De plus, celles-ci permettent l'introduction d'une notion de convergence inconnue dans un cadre linéaire : la convergence en temps fini.

Du fait de leur non linéarité, la procédure de réglage de algorithmes qui en découlent est assez délicate et dépend, surtout, de la nature du signal à dériver et du niveau de bruit sur celui-ci. Ainsi, un réglage reste optimal pour un signal donné mais ne garantit pas le même niveau de performances pour un autre. Dans ce cas, des approches d'adaptation en temps réel des gains de réglage des algorithmes ont été introduites afin de s'affranchir de cette difficulté de réglage ou, du moins, la rendre moins complexe. Une version adaptative d'un algorithme de dérivation par modes glissants classique a été alors proposée.

Cependant, notre approche dans l'étude du problème ne s'est pas réservée uniquement aux fondements théoriques des méthodes de dérivation. Ainsi, suite au travail théorique décrit précédemment, un travail de nature pratique et expérimental a été effectué. L'objectif étant de

mettre en place un « capteur logiciel » embarqué sur cible numérique à faible coût permettant l'estimation des variables d'état d'un système mécatronique, par dérivation de signaux mesurés, en vue de sa commande.

Pour se faire, une étude préalable quant aux effets des contraintes technologiques d'implémentation (résolution de calcul, précision des organes de conversion,...) sur les performances des algorithmes de dérivation a été présentée.

On s'est ensuite intéressé à la mise en œuvre des algorithmes de dérivation sur un circuit numérique et la validation de la solution en boucle ouverte pour l'estimation de la dérivée de différents signaux. Enfin, la carte de dérivation ainsi obtenue a été introduite dans une boucle de commande non linéaire d'un système électropneumatique. Dans cette étape, le dérivateur numérique fait office de capteur logiciel pour l'estimation de certaines grandeurs intervenant dans le calcul de la commande. Des résultats comparatifs entre différents algorithmes et différentes trajectoires de consigne ont été alors présentés.

## ***Abstract***

Differentiation algorithms are numerical methods for the derivative estimation of measured signals. These algorithms are necessary in the case of nonlinear output feedback control design as they enable the estimation of signals that are used for the control law computing by differentiating other measurable ones.

The most popular approaches to the problem are based on the observer theory. Thus, the signal to be differentiated is modeled as the output of a given dynamic system whose input is a known canonical signal. The signal derivatives are then available by the observation of the model state. Most of these approaches are based on deterministic or stochastic assumptions on the signal to be differentiated and/or the perturbations on it.

In this work, we are interested in the study and the application of linear and nonlinear observation approaches for signal derivative estimation.

In a linear framework, different filtering and observation approaches (high gain, Kalman,  $H_2$ ) are then introduced and applied following the previous goal.

An alternative approach for linear observer is also introduced in this work and applied to the differentiator design problem. In the latter, an observer is designed by minimizing an  $H_\infty$  norm and the problem boils down to a convex optimization problem involving Linear Matrix Inequalities (LMI). The interesting point of this approach is that, in the case of weighted  $H_\infty$  norm minimization, it allows the Power Spectral Density (PSD) shaping of the estimation error signal. An additional investigation is also carried out in order to introduce some linear observer structures as alternative to the classic Luenberger one.

The nonlinear observers based on the sliding modes theory present an alternative approach to the linear ones. As their robustness was widely commented and proved, the nonlinear observers can potentially improve the differentiator performances in addition to the fact that they allow to introduce a new convergence property, the finite time convergence.

Due to their nonlinear behavior, the tuning of these algorithms is complicated and depends on the characteristics of both the signal to be differentiated and the noise level affecting it and thus, an optimal tuning for a given signal is no more an optimal one for another one. To overcome this difficulty, adaptive procedures are introduced where the parameters are tuned on line in real time. Thereby, an adaptive sliding mode observer is introduced and applied to the differentiation problem.

Though, our study was not just limited to the theoretical background of the differentiation problem. It was extended to the experimental aspects. The goal is then to design an embedded low cost « software sensor » for mechatronic system state variable estimation for control design. These estimations are obtained by measured signal differentiation.

Thus, a study on the effect of the limited computing and signal conversion precision of the embedded device on the differentiator performances is done and results are presented in this work.

Then, the differentiation algorithms digital implementation is performed on a microcontroller based numerical device. This solution is then validated in open loop for the estimation of signal derivative. Finally, the numerical derivative device is introduced on an electropneumatic system control loop where the digital differentiator is used for the estimation of some derivative signals that are considered in the control computing. Comparative results on different differentiation algorithms and system trajectories are then presented.