



**HAL**  
open science

# Modélisation par une approche temporelle de la propagation acoustique en milieu extérieur : traitement de frontières complexes et validation sur site ferroviaire

Didier Dagna

► **To cite this version:**

Didier Dagna. Modélisation par une approche temporelle de la propagation acoustique en milieu extérieur : traitement de frontières complexes et validation sur site ferroviaire. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2011. Français. NNT : 2011ECDL0035 . tel-00687519

**HAL Id: tel-00687519**

**<https://theses.hal.science/tel-00687519>**

Submitted on 13 Apr 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée devant  
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir  
le titre de DOCTEUR  
SPÉCIALITÉ ACOUSTIQUE

par

Didier DRAGNA

## MODÉLISATION PAR UNE APPROCHE TEMPORELLE DE LA PROPAGATION ACOUSTIQUE EN MILIEU EXTÉRIEUR : TRAITEMENT DE FRONTIÈRES COMPLEXES ET VALIDATION SUR SITE FERROVIAIRE

Soutenue le 16 novembre 2011 devant la Commission d'Examen

### JURY

Présidente : Mme. D. HABAULT

Examineurs : M. M. BÉRENGIER (Rapporteur)  
M. Ph. BLANC-BENON (Directeur de thèse)  
M. D. JUVÉ  
M. Ph. LAFON (Rapporteur)  
M. R. MARCHIANO  
M. F. POISSON

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509  
École Centrale de Lyon



# Remerciements

Ce travail de thèse s'est déroulé au Centre Acoustique du Laboratoire du Mécanisme des Fluides et d'Acoustique de l'École Centrale de Lyon. Il a été cofinancé par la Société Nationale des Chemins de Fer (SNCF) et le Centre National de Recherche Scientifique (CNRS).

Mes remerciements vont tout d'abord à mes directeurs de thèse, Philippe Blanc-Benon, directeur de recherche au CNRS, et Franck Poisson de la Direction de l'Innovation et de la Recherche de la SNCF, pour l'encadrement de ce travail. Leurs aides et conseils m'ont été précieux pendant ces trois années. J'associe Pierre-Étienne Gautier à ces remerciements.

Je tiens ensuite à remercier Michel Bérengier, directeur de recherche à l'Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (IFSTTAR), et Philippe Lafon, ingénieur de recherche EDF au Laboratoire de Mécanisme des Structures Industrielles Durables, pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteur de cette thèse.

Je remercie également Dominique Habault, directrice de recherche au CNRS et directrice du Laboratoire de Mécanisme et d'Acoustique, d'avoir présidé le jury et Régis Marchiano, professeur de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), d'avoir accepté de juger ce travail. Je tiens aussi à remercier Daniel Juvé, pour son accueil au Centre Acoustique et pour avoir fait partie du jury.

Je voudrais aussi exprimer ma gratitude à Benoît Gauvreau et à Philippe L'Hermite de l'IFSTTAR, pour m'avoir montré les subtilités de la mesure de l'impédance de surface et pour avoir participé à la campagne expérimentale à la Veuve. Je voudrais ensuite remercier les cowboys de l'Agence d'Essais Ferroviaires, Sylvain Bossier, Michel Leterrier et en particulier Sélim Bellaj pour avoir organisé la campagne de mesures.

Mes remerciements vont aussi aux différents membres du personnel du Centre Acoustique et du service technique. Je remercie, en particulier, Pierre Roland pour son soutien informatique et Olivier Marsden qui, malgré une sombre histoire de nez et de raquette, a été d'une aide constante. Un grand merci à Benjamin Cotté pour m'avoir épaulé au début de la thèse et pour m'avoir mis sur les bons rails. Je tiens à remercier aussi mes collègues stagiaires, doctorants et post-doctorants pour les pauses plus ou moins endiablées autour d'une partie de cartes, d'un sudoku ou de baby-foot. J'adresse un mot de remerciement particulier à Aroune et Gaëlle pour les soirées coinche, à Gaël pour le café chaud du matin, à Arnulfo pour les parties disputées de squash, à Damien pour les sublimes tourteaux fromagers et à Nicolas pour son soutien sans faille pour les finir.

Enfin, j'associe à ces remerciements les amis de toujours : Benjamin, Chantal et Charles. Je remercie aussi Yannik et Martin pour avoir été amicalement squattés. Mes derniers remerciements vont à mes parents et à ma soeur pour leurs encouragements et leur soutien tout au long de ces années.

---

# Résumé

Dans cette thèse, un modèle de propagation acoustique dans le domaine temporel est proposé pour des applications en milieu extérieur. Dans le contexte du transport ferroviaire, il est nécessaire de considérer des sources étendues et en mouvement dont le contenu fréquentiel peut aller jusqu'à 8000 Hz. La résolution des équations d'Euler linéarisées dans le domaine temporel est alors une méthode bien adaptée à ce problème. Pour cela, des méthodes de différences finies, développées par la communauté de l'aéroacoustique numérique, sont utilisées. Le modèle ainsi développé permet de prendre en compte les effets météorologiques (profils de vent et de température) ainsi que les effets de sol (impédance et topographie).

Dans le premier chapitre, les méthodes différences finies ainsi que la condition limite d'impédance dans le domaine temporel, basée sur une technique de convolution récursive, sont présentées dans le cadre général d'un calcul tridimensionnel. Une étude sur la propagation d'ondes acoustiques dans une atmosphère stratifiée au-dessus de sols impédants est ensuite proposée. En conditions homogènes, les formes d'ondes sont comparées à celles obtenues avec une solution analytique. En conditions défavorables, les temps d'arrivée des différentes contributions sont analysés avec une approche d'acoustique géométrique. Dans les deux cas, des ondes de surface sont mises en évidence. Enfin, dans une première analyse, une étude des effets de la compacité d'une source mobile harmonique à support spatial gaussien sur le champ de pression acoustique est proposée.

Dans un second chapitre, le problème du couplage champ proche - champ lointain est traité. En effet, les méthodes de résolution des équations d'Euler linéarisées sont actuellement « lourdes » à mettre en oeuvre pour modéliser la propagation à très grande distance. Une stratégie de couplage avec des méthodes d'équation parabolique est alors mise en place afin de réduire le temps de calcul et l'espace mémoire nécessaires. Une méthode split-step Padé est utilisée afin d'obtenir une approximation parabolique dans un cône d'angle voulu. Une étude sur les conditions initiales adaptées à l'ordre du développement de l'approximant de Padé est proposée.

La modélisation de la topographie dans le code différences finies fait l'objet d'un troisième chapitre. Pour cela, des coordonnées curvilignes sont introduites et permettent une résolution similaire au cas cartésien. Différentes applications sont proposées. La propagation au-dessus d'un cylindre est étudiée ; des ondes de surfaces sont mises en évidence. Ensuite, l'influence de la topographie d'un site ferroviaire sur la mesure des niveaux de pression est analysée. En champ proche, des écarts importants sont obtenus à basse fréquence. En champ lointain, les résultats dépendent des conditions météorologiques. Enfin, des comparaisons des niveaux de pression calculés et mesurés lors d'une campagne expérimentale menée en octobre 2001 à Saint-Berthevin sont réalisées.

Dans une dernière étude, le modèle de propagation acoustique est validé avec des mesures effectuées en mai 2010 sur un site ferroviaire situé à La Veuve. Des mesures de la topographie, des impédances de surface et de différents paramètres météorologiques ont été réalisées. Les niveaux de pression et les formes d'ondes calculés avec le modèle de propagation sont en bon accord avec ceux obtenus expérimentalement pour le cas d'une source impulsionnelle.



# Abstract

In this work, a numerical model to treat outdoor sound propagation in the time domain is proposed. In the context of railway noise, extended acoustic sources in motion have to be considered. The typical frequency band of interest goes up to 8000 Hz. Finite-Difference Time-Domain (FDTD) methods which are used to solve the linearized Euler equations are then well-adapted to the problem. To do so, finite-difference techniques developed in the computational aeroacoustics community are employed. Meteorological effects (mean wind and temperature profiles) as well as ground effects (impedance and topography) are taken into account.

In the first chapter, finite-difference techniques and the time-domain impedance boundary condition, based on a recursive convolution, are presented in the general case of the tridimensional problem. Propagation of acoustic waves in a stratified atmosphere over an impedance ground is then considered. In homogeneous conditions, waveforms are compared to those obtained with an analytical solution. In downward-refracting conditions, arrival times of the different contributions are analysed using a geometrical acoustic approach. In both cases, presence of surface waves is highlighted. At last, in a first analysis, effects of a non-compact source in rectilinear motion on the acoustic pressure field are studied.

In the second chapter, the coupling between near-field calculations and far-field calculations is considered. Indeed, the FDTD model currently needs large computational time and memory to handle large propagation distances. A coupling strategy using parabolic equation methods can then be employed. A split-step Padé method is used in order to choose the angular validity of the parabolic approximation. A study on the starting field adapted to the order of the Padé approximant is proposed.

The third chapter deals with the modeling of the topography in the FDTD solver. Curvilinear coordinates are introduced, and numerical resolution is similar to the cartesian case. Several applications are proposed. Propagation over a cylinder is first studied; presence of surface waves is highlighted. Then, influence of the topography of a railway site on the measure of sound pressure levels is analysed. In near-field, significant differences are obtained at low frequencies. In far-field, the results depend strongly on the meteorological conditions. At last, comparisons of sound pressure levels calculated with the propagation model and measured during an experimental campaign carried out in october 2001 in Saint-Berthevin are realised.

In a last study, the propagation model is validated thanks to measurements performed in may 2010 on a railway site in La Veuve. Measurement of the topography, of the surface impedances and of meteorological parameters have been realised. Sound pressure levels and waveforms computed with the propagation model are in close agreement with those obtained experimentally in the case of a pulse source.





# Table des matières

Remerciements	i
Résumé	iii
Abstract	v
Table des matières	1
Introduction générale	5
<b>1 Modélisation de la propagation atmosphérique dans le domaine temporel avec les équations d'Euler linéarisées</b>	<b>9</b>
1.1 Rappel sur la résolution des équations d'Euler linéarisées . . . . .	10
1.1.1 Calcul des dérivées spatiales . . . . .	12
1.1.2 Intégration temporelle . . . . .	17
1.1.3 Filtrage sélectif . . . . .	19
1.1.4 Condition limite . . . . .	20
1.2 Condition limite d'impédance dans le domaine temporel . . . . .	23
1.2.1 Formulation . . . . .	25
1.2.2 Modèles d'impédance . . . . .	28
1.2.3 Obtention des coefficients . . . . .	33
1.2.4 Validation sur un cas uni-dimensionnel . . . . .	34
1.3 Étude dans une atmosphère stratifiée sur sol plan . . . . .	42
1.3.1 Fenêtre glissante . . . . .	42
1.3.2 Modèles d'impédance . . . . .	44
1.3.3 Modèle de source monopolaire . . . . .	45
1.3.4 Conditions homogènes . . . . .	46
1.3.5 Conditions favorables . . . . .	54
1.4 Source en mouvement . . . . .	60
1.4.1 Source harmonique . . . . .	61
1.4.2 Source large bande . . . . .	64
<b>2 Couplage champ proche - champ lointain</b>	<b>67</b>
2.1 Équation parabolique grand angle . . . . .	68
2.1.1 Obtention de l'équation parabolique . . . . .	68
2.1.2 Méthode Split-Step Padé $(n, n)$ . . . . .	71
2.1.3 Implémentation numérique . . . . .	76
2.2 Initialisation du code EP . . . . .	80

2.2.1	Conditions initiales analytiques . . . . .	80
2.2.2	Conditions initiales numériques . . . . .	82
2.2.3	Comparaison des conditions initiales . . . . .	83
2.3	Couplage FDTD - EP . . . . .	89
2.3.1	Cas test d'un monopôle à support gaussien . . . . .	90
2.3.2	Cas d'une source large bande . . . . .	92
<b>3</b>	<b>Modélisation de la topographie pour les codes de résolution dans le domaine temporel</b>	<b>95</b>
3.1	Prise en compte de la topographie . . . . .	96
3.1.1	Équations en coordonnées curvilignes . . . . .	96
3.1.2	Conditions limites au niveau du sol . . . . .	98
3.1.3	Cas-test 2D . . . . .	101
3.2	Propagation au-dessus d'un cylindre impédant . . . . .	103
3.2.1	Comparaison à une solution analytique . . . . .	104
3.2.2	Cas de l'onde de surface quand le rayon tend vers l'infini . . . . .	110
3.3	Étude sur les effets de la topographie d'une voie . . . . .	112
3.3.1	Modélisation . . . . .	113
3.3.2	Champ proche . . . . .	115
3.3.3	Champ lointain . . . . .	117
3.4	Comparaison avec des mesures effectuées à Saint-Berthevin . . . . .	120
3.5	Comparaison avec des mesures effectuées à La Veuve . . . . .	126
3.5.1	Description et modélisation du site . . . . .	126
3.5.2	Simulations . . . . .	135
	<b>Conclusion générale</b>	<b>147</b>
<b>A</b>	<b>Modèles d'impédance physiquement admissibles</b>	<b>151</b>
A.1	Modèles de type produit de racines . . . . .	152
A.2	Modèles de type polynôme . . . . .	154
A.2.1	Modèle de Delany-Bazley . . . . .	154
A.2.2	Modèle de Miki . . . . .	155
A.2.3	Modèle de Miki modifié . . . . .	156
<b>B</b>	<b>Modèles de sources monopôlaires pour les codes de résolution dans le domaine temporel</b>	<b>159</b>
B.1	Cas d'une source impulsionnelle . . . . .	161
B.2	Cas d'une source harmonique . . . . .	163
B.2.1	Cas général . . . . .	163
B.2.2	Cas d'une distribution gaussienne . . . . .	165
B.3	Cas général . . . . .	169
<b>C</b>	<b>Compléments sur la propagation au-dessus de sols plans en conditions homogènes</b>	<b>171</b>
C.1	Étude de l'équivalence des formulations analytiques d'Enflo et de Di et Gilbert . . . . .	171
C.1.1	Cas où $\text{Im}[k_s] > 0$ . . . . .	174
C.1.2	Cas où $\text{Im}[k_s] < 0$ . . . . .	176
C.2	Solution analytique avec la méthode d'expansion modale . . . . .	180

C.3	Réaction locale - Réaction étendue . . . . .	182
C.3.1	Hypothèses . . . . .	182
C.3.2	Coefficients de réflexion . . . . .	184
C.3.3	Réaction approximativement locale . . . . .	184
C.3.4	Autres formules pour le cas de la réaction étendue . . . . .	186
C.3.5	Comparaison des résultats . . . . .	186
<b>D</b>	<b>Compléments sur les méthodes de résolution pseudospectrales</b>	<b>191</b>
D.1	Sous-domaines pour la méthode PS Chebyshev . . . . .	191
D.2	Cas de propagation à longue distance . . . . .	193
D.2.1	Paramètres numériques . . . . .	193
D.2.2	Résultats . . . . .	194
D.2.3	Comparaison des coûts numériques . . . . .	195
D.3	Simulations dans une géométrie bidimensionnelle avec des effets météorologiques . . . . .	196
D.3.1	Cas d'un profil de célérité du son . . . . .	197
D.3.2	Cas d'un écoulement constant . . . . .	199
<b>E</b>	<b>Solution analytique pour le cas de diffusion par un cylindre impédant</b>	<b>201</b>
<b>F</b>	<b>Compléments sur la description du site de La Veuve</b>	<b>203</b>
<b>G</b>	<b>Coefficients des méthodes différences finies</b>	<b>207</b>
G.1	Algorithme de Runge-Kutta . . . . .	207
G.2	Schémas différences finies . . . . .	208
G.3	Schémas filtrage sélectif . . . . .	210



# Introduction générale

Le bruit ferroviaire est un des freins majeurs à l'augmentation de la vitesse commerciale des trains à grande vitesse (Cléon et Poisson, 2010). Outre l'aspect de réduction du bruit à la source, il est nécessaire de comprendre et de prédire la propagation du bruit en environnement. Une directive européenne impose ainsi, outre des plans de réduction de bruit, de réaliser des cartes de bruit stratégiques des réseaux de transports terrestres. Celles-ci sont réalisées à l'aide de méthodes d'ingénierie. Des méthodes de référence, capables de prendre en compte les différents phénomènes physiques, sont alors nécessaires pour valider ces modèles. Pour les applications ferroviaires, elles doivent permettre de considérer des distances de propagation de l'ordre du kilomètre et un intervalle fréquentiel allant jusqu'à 8000 Hz.

De plus, les méthodes dans le domaine temporel permettent d'envisager une écoute des signaux de pression synthétisés. Cette approche est développée par la SNCF ; le logiciel VAMP-PASS (Bongini, 2008), basé sur une représentation des sources ferroviaires par un modèle de sources équivalentes, permet ainsi de générer le signal temporel de pression au passage d'un train. Le modèle de propagation utilisé est pour l'instant adapté à des calculs champ proche pour un sol homogène et pour une atmosphère homogène. En champ lointain, il est par contre nécessaire de prendre en compte des profils de vent et de température.

Pendant la thèse de Cotté (2008), un code de résolution des équations d'Euler linéarisées dans le domaine temporel a été développé à l'aide de méthodes différences finies, développées dans la communauté de l'aéroacoustique numérique. Une étude sur le phénomène du grondement a été réalisée et une explication de l'apparition de celui-ci a été proposée. On se place ici dans la continuité de ces travaux.

## Objectifs de la thèse

Les différents phénomènes physiques influant sur la propagation acoustique en milieu extérieur peuvent être rangés en deux catégories. La première est liée au milieu dans lesquelles se propagent les ondes acoustiques et la seconde aux frontières du domaine. Les effets atmosphériques peuvent être pris en compte dans les équations d'Euler linéarisées, classiquement à travers des profils spatiaux de température et de vent. Les effets de frontière posent plus de problèmes, notamment pour la prise en compte de la condition limite d'impédance dans le domaine temporel. En effet, celle-ci est définie dans le domaine fréquentiel et sa transposition directe dans le domaine temporel nécessite le calcul d'un produit de convolution. Pour optimiser le calcul de celui-ci, une technique de convolution récursive a été utilisée par Cotté *et al.* (2009). Elle nécessite l'approximation de l'impédance de surface dans le domaine fréquentiel par une fraction rationnelle ; elle peut donc être utilisée quel que soit le modèle d'impédance choisi. La condition limite d'impédance ainsi obtenue a été validée sur différents cas-tests pour le code différences finies. Une extension naturelle est alors de pouvoir prendre en compte une topographie complexe dans le code différences finies en temps.

Par ailleurs, d'autres méthodes de résolution des équations Euler linéarisées ont été utilisées pour des applications en milieu urbain. Ainsi, dans des études récentes (Hornikx, 2009), les dérivées sont évaluées à l'aide de méthodes pseudospectrales. Il est alors intéressant de montrer que la condition limite d'impédance que nous avons développée peut aussi être appliquée à ce type de méthode.

Une limitation actuelle des modèles de résolution des équations d'Euler linéarisées dans le domaine temporel est leur coût numérique important. Ainsi, ils sont relativement lourds à mettre en oeuvre pour des cas de propagation à longue distance, notamment pour des géométries tridimensionnelles. Des techniques de fenêtres glissantes peuvent être utilisées afin de réduire l'espace mémoire nécessaire. Par ailleurs, des méthodes d'équation parabolique sont bien adaptées au calcul en champ lointain ; elles permettent aussi de prendre en compte des profils moyens de vent et de température, qui sont nécessaires pour avoir une évaluation réaliste des niveaux de pression acoustique en champ lointain. Des stratégies de couplage entre le code différences finies et le code de résolution de l'équation parabolique peuvent alors être employées. Ces techniques ont déjà été utilisées dans la littérature (Van Renterghem *et al.*, 2005) et ont montré leur efficacité.

Enfin, une campagne expérimentale spécifique a été réalisée en mai 2010 sur le site de la Veuve près de Reims. Due à la présence d'une voie ferroviaire et d'un fossé, le site présente une topographie marquée. Des tirs à blanc de pistolet ont été effectués et une mesure à la fois des conditions météorologiques, des impédances de surface des sols rencontrés et de la topographie a été réalisée. Une évaluation du modèle de propagation développé peut donc être faite à la fois dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel.

Un objectif à long terme est de pouvoir prédire à l'aide d'un modèle de sources équivalentes le niveau de pression équivalent sur le temps de passage d'un train sur un site complexe. Le modèle dans le domaine temporel pourrait alors être utilisé dans une approche de synthèse sonore. L'implémentation d'une source en mouvement est donc une question préalable à considérer.

## Organisation du mémoire

Le premier chapitre est consacré à la présentation des méthodes utilisées pour la résolution des équations d'Euler linéarisées dans le domaine temporel. L'implémentation de la condition limite d'impédance est décrite en détail et différentes méthodes pour obtenir l'approximation rationnelle de l'impédance de surface sont proposées. Un cas-test unidimensionnel sur une bande de fréquence jusqu'à 8000 Hz est traité, afin de montrer que la condition limite d'impédance est applicable pour différents types de sol rencontrés en milieu extérieur : l'effet d'épaisseur dans le cas d'une couche de ballast est souligné. Une étude de propagation à longue distance dans une atmosphère stratifiée est ensuite réalisée. La présence d'ondes de surface est, en particulier, mise en évidence et nous nous sommes intéressés à la condition d'existence en conditions de propagation homogènes et ceci pour différents sols. Enfin, une première étude sur l'implémentation d'une source en mouvement est présentée. En liaison avec ce chapitre, deux études sont présentées en annexe. L'annexe A a pour but de déterminer les modèles d'impédance de surface physiquement admissibles. Dans l'annexe D, la condition limite d'impédance est implémentée dans un code de résolution utilisant des méthodes pseudospectrales et différents cas-tests de validation sont considérés.

Dans le deuxième chapitre, nous examinons le problème de la transition champ acoustique proche - champ acoustique lointain. Pour cela, le couplage entre le code de résolution des équations d'Euler linéarisées et le code de résolution de l'équation parabolique est réalisé. La méthode split-step Padé est tout d'abord considérée ; celle-ci se base sur un approximant de Padé de l'opérateur de propagation et permet en augmentant l'ordre de l'approximant de Padé d'avoir une validité angulaire plus grande. Une étude est ensuite réalisée afin de déterminer suivant l'or-

dre du développement de l'approximant de Padé la condition initiale la mieux adaptée. Enfin, le couplage est réalisé sur des cas-tests monofréquentiel et large bande.

Dans un dernier chapitre, la prise en compte de la topographie dans le code de résolution des équations d'Euler linéarisées est décrite ; pour cela, des coordonnées curvilignes sont introduites. La condition limite d'impédance est adaptée à ce cas et un cas-test est proposé afin de valider le code. Le problème de la propagation au-dessus d'un cylindre est ensuite considéré. Par la suite, une étude est proposée afin de mettre en évidence l'effet de la topographie d'un site ferroviaire sur les niveaux de pression ; on étudie aussi le rôle couplé des effets météorologiques en champ lointain. Enfin, les résultats de deux campagnes de mesure sur des sites présentant une topographie sont comparés à ceux du code différence finies. Le premier correspond au site de Saint-Berthevin et a déjà été étudié par Blairon (2002). Le second correspond au site de la Veuve et une comparaison des niveaux de pression et des formes d'ondes est alors réalisée.

Par ailleurs, nous avons choisi de présenter dans les annexes A à G les développements théoriques et analytiques nécessaires à la validation des différents cas-tests ainsi que des compléments aux différents chapitres.





# Chapitre 1

## Modélisation de la propagation atmosphérique dans le domaine temporel avec les équations d'Euler linéarisées

Dans ce premier chapitre, la modélisation numérique du problème considéré est présentée. Typiquement, on veut pouvoir prendre en compte une source qui peut être mobile et qui émet des ondes acoustiques dans un milieu inhomogène, qui peut lui aussi être en mouvement. L'inhomogénéité du milieu se traduit notamment par un profil de température qui induit un profil de célérité du son. On doit aussi pouvoir considérer un sol avec une impédance finie et spatialement variable, ce qui impose une condition aux limites spécifique. La prise en compte de la topographie fait l'objet d'une étude séparée, présentée dans le chapitre 3. Enfin, il convient de respecter la condition de non-rayonnement à l'infini. Un schéma du problème type à résoudre est représenté sur la figure 1.1.

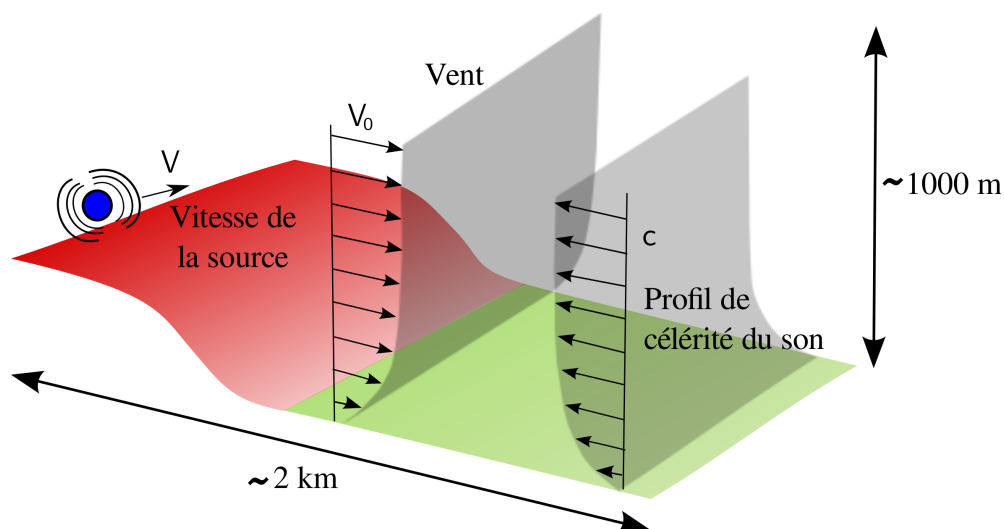


Figure 1.1 – Schéma du problème à traiter.

Notre choix pour le modèle de propagation se porte sur la résolution des équations d'Euler

linéarisées dans le domaine temporel. Celles-ci permettent de prendre en compte la plupart des phénomènes physiques importants et sont bien adaptées pour des sources large bande, comme cela est le cas avec les sources ferroviaires. Elles permettent aussi de considérer des conditions de propagation dépendant du temps ainsi que des sources mobiles. Elles sont aussi plus générales que les méthodes dans le domaine fréquentiel basées sur une équation d'onde pour la pression acoustique (c'est ainsi le cas des méthodes d'équation parabolique et de la méthode Fast Field Program (Raspet *et al.*, 1985)); en effet, il n'est possible d'obtenir une équation d'onde exacte seulement dans le cas d'une atmosphère uniformément convectée.

A cause de leur coût numérique relativement élevé, les méthodes de résolution dans le domaine temporel des équations d'Euler linéarisées sont utilisées depuis une dizaine d'années seulement dans la communauté de la propagation acoustique à longue distance. Les premières études (Blumrich et Heimann, 2002; Van Renterghem et Botteldooren, 2003) avaient pour but de modéliser l'effet de conditions météorologiques complexes sur la propagation acoustique au-dessus de sols plans en présence d'obstacles (typiquement des écrans acoustiques). Un des problèmes majeurs rencontrés est la prise en compte d'une condition limite d'impédance. En effet, celle-ci est définie dans le domaine fréquentiel, et la transcription dans le domaine temporel amène à une convolution, dont le coût numérique est important, notamment pour des applications en propagation à longue distance. De plus, de nombreux modèles d'impédance ne peuvent être transcrits dans le domaine temporel (Cotté *et al.*, 2009). Des travaux ont ainsi été menés afin d'éviter ce problème en couplant aux équations d'Euler linéarisées, des équations de propagation dans le sol (Salomons *et al.*, 2002; Wilson *et al.*, 2007). Cette approche séduisante reste néanmoins d'une mise en oeuvre délicate puisqu'elle nécessite la connaissance des propriétés acoustiques du sol, ce qui n'est pas souvent le cas dans un problème pratique de propagation à longue distance où on cherchera plutôt à caractériser les propriétés de surface du sol. Dans ce travail, nous avons choisi de conserver l'approche classique utilisant la notion d'impédance ce qui nécessite d'adopter des conditions limites adaptées au domaine temporel (Ostashev *et al.*, 2007; Cotté *et al.*, 2009).

Dans une première partie du chapitre, les techniques numériques utilisées pour résoudre les équations d'Euler linéarisées sont présentées. Ensuite, la condition limite d'impédance dans le domaine temporel proposée par Cotté *et al.* (2009) est rappelée. Un premier cas-test unidimensionnel est présenté afin de montrer que la méthode peut être appliquée au cas des signaux large bande et pour différents types d'impédance de surface rencontrés dans les problèmes de propagation en milieu extérieur. Dans une troisième partie, deux cas-tests sont présentés. Un premier cas tridimensionnel de propagation à longue distance dans une atmosphère homogène est étudié et on s'intéressera particulièrement aux ondes de surface. Dans un deuxième cas, des conditions de propagation favorables sont considérées et une comparaison des temps d'arrivée des différentes ondes (directe, réfléchie, réfractée, ...) est réalisée avec un code de tracé de rayons. Enfin, dans une dernière partie, une source en mouvement est considérée et une discussion sur l'effet de la compacité de la source est proposée.

### 1.1 Rappel sur la résolution des équations d'Euler linéarisées

On se place ici dans un domaine tridimensionnel cartésien  $(x, y, z)$ . Les équations d'Euler linéarisées sont obtenues en linéarisant les équations de la mécanique des fluides autour d'un écoulement moyen de densité  $\rho_0$ , de pression  $P_0$  et de vitesse  $\mathbf{V}_0 = (V_{0x}, V_{0y}, V_{0z})$ . La pression

acoustique  $p$  et la vitesse acoustique  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  sont alors données par :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla p + \rho_0 c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = \rho_0 c^2 Q, \quad (1.1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_0 (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + \rho_0 (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 + \nabla p = \mathbf{R}. \quad (1.2)$$

Dans les équations 1.1 et 1.2,  $t$  représente le temps et  $c$  la célérité du son dans l'air. Les termes  $Q$  et  $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)$  sont des termes sources correspondant respectivement à une source de masse et aux forces extérieures. Différentes hypothèses ont été faites pour obtenir le système d'équations ci-dessus. Tout d'abord, l'air est supposé être un gaz parfait. De plus, les termes d'ordre  $|\mathbf{V}_0|^2/c^2$  et d'ordres supérieurs ont été négligés.

Ces équations sont écrites sous la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} + \mathbf{H} = \mathbf{S}, \quad (1.3)$$

où le vecteur inconnu est  $\mathbf{U} = [p, \rho_0 v_x, \rho_0 v_y, \rho_0 v_z]^T$ . Pour obtenir les flux  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$ , l'équation 1.1 est réécrite sous la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \mathbf{V}_0) - p \nabla \cdot \mathbf{V}_0 + \nabla \cdot (\rho_0 c^2 \mathbf{v}) - \nabla (\rho_0 c^2) \cdot \mathbf{v} = \rho_0 c^2 Q. \quad (1.4)$$

Sous l'hypothèse des gaz parfaits, la célérité du son vérifie l'équation  $c^2 = \gamma P_0 / \rho_0$ , où  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques. On obtient ainsi la relation  $\nabla (\rho_0 c^2) \cdot \mathbf{v} = \nabla (\gamma P_0) \cdot \mathbf{v}$ . Dans le cas d'une atmosphère inhomogène en mouvement, le terme  $\nabla P_0$  a pour ordre de grandeur  $|\mathbf{V}_0|^2/c^2$  (Ostashev *et al.*, 2005). Ainsi, le terme  $\nabla (\rho_0 c^2) \cdot \mathbf{v}$  qui est proportionnel à  $\nabla P_0$  est négligé dans l'équation 1.4. De plus, le terme  $\nabla \cdot \mathbf{V}_0$  a pour ordre de grandeur  $|\mathbf{V}_0|^3/c^2 L$  (Ostashev *et al.*, 2005), où  $L$  représente l'échelle caractéristique des variations de densité. Le terme  $p \nabla \cdot \mathbf{V}_0$  est donc lui aussi négligé dans l'équation 1.4. Pour obtenir l'équation sur le terme  $\rho_0 \mathbf{v}$ , on écrit l'équation de conservation de la masse volumique sans terme source :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \rho_0 + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{V}_0 = 0. \quad (1.5)$$

On obtient alors en utilisant les équations 1.2 et 1.5 :

$$\frac{\partial \rho_0 \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \rho_0 \mathbf{v} + \rho_0 (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 + (\nabla \cdot \mathbf{V}_0) \rho_0 \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{R}. \quad (1.6)$$

Enfin, on réécrit le terme  $(\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \rho_0 \mathbf{v}$  et après avoir négligé les termes proportionnels à  $\nabla \cdot \mathbf{V}_0$ , on obtient pour les flux les expressions suivantes :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} V_{0x} p + \rho_0 c^2 v_x \\ V_{0x} \rho_0 v_x + p \\ V_{0x} \rho_0 v_y \\ V_{0x} \rho_0 v_z \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} V_{0y} p + \rho_0 c^2 v_y \\ V_{0y} \rho_0 v_x \\ V_{0y} \rho_0 v_y + p \\ V_{0y} \rho_0 v_z \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} V_{0z} p + \rho_0 c^2 v_z \\ V_{0z} \rho_0 v_x \\ V_{0z} \rho_0 v_y \\ V_{0z} \rho_0 v_z + p \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_0 \mathbf{v} \cdot \nabla V_{0x} \\ \rho_0 \mathbf{v} \cdot \nabla V_{0y} \\ \rho_0 \mathbf{v} \cdot \nabla V_{0z} \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \rho_0 c^2 Q \\ R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}.$$

Les méthodes numériques utilisées pour résoudre ces équations sont présentées dans les paragraphes suivants.

### 1.1.1 Calcul des dérivées spatiales

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour évaluer numériquement les dérivées spatiales des flux :

- La méthode des différences finies est la plus répandue dans la communauté de la propagation en milieu extérieur. La plupart des études ont été menées avec des schémas d'ordre peu élevé (typiquement d'ordre 1 ou 2) (Blumrich et Heimann, 2002; Salomons *et al.*, 2002; Ostashev *et al.*, 2005). Cependant, afin de réduire le coût des calculs, un intérêt important se porte désormais sur les schémas optimisés, développés dans la communauté de l'aéroacoustique numérique. On pourra ainsi citer les travaux d'Heimann (2010), dans lesquels les schémas optimisés d'ordre 4 sur 6 points de Tam et Webb (1993) sont choisis, ou les travaux de Cotté et Blanc-Benon (2009) qui utilisent des schémas optimisés de Bogey et Bailly (2004). Ces schémas sont aussi utilisés dans le cadre de ce travail et sont décrits par la suite.
- Les méthodes de type PseudoSpectral (PS) sont un autre type de méthodes numériques pour évaluer les dérivées spatiales. Elles consistent à projeter les différents flux sur une base de fonctions adaptées au problème. La dérivée des flux s'obtient alors à partir de la dérivée des fonctions de la base. Concernant l'application de ces méthodes pour la propagation acoustique en milieu extérieur, on peut citer les travaux d'Hornikx et Waxler (2010) qui ont utilisé une méthode pseudospectrale pour laquelle les fonctions de bases sont les polynômes trigonométriques et l'ont étendue au cas de milieux discontinus. Dans ce travail, les méthodes pseudospectrales sont considérées afin de montrer que la condition limite d'impédance dans le domaine temporel, décrite au paragraphe 1.2, peut être appliquée à ce type de méthode.

#### Différences finies

Nous considérons un maillage uniforme de pas  $\Delta x$ . En utilisant un schéma centré sur  $2M + 1$  points, la dérivée spatiale au point  $x_l$  avec une méthode différences finie s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_l) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{m=-M}^M a_m u(x_l + m\Delta x), \quad (1.7)$$

où  $a_k$  sont les coefficients du schéma avec généralement  $a_0 = 0$  et  $a_{-m} = -a_m$ . Ces derniers peuvent être déterminés de façon classique à partir de développements de Taylor pour assurer une erreur de l'ordre de  $\Delta x^{2M}$ . Si on considère une onde plane du type  $u(x, t) = \exp(ikx - i\omega t)$ , on peut aussi associer à ces schémas un nombre d'onde effectif  $k^*$  avec :

$$k^* = \frac{2}{\Delta x} \sum_{m=1}^M a_k \sin(mk\Delta x). \quad (1.8)$$

On utilisera dans ce travail pour les points à l'intérieur du domaine, le schéma optimisé centré sur 11 points proposé par Bogey et Bailly (2004) et noté ici FD55. Il a été construit de façon à assurer formellement un schéma d'ordre 4 et à minimiser l'erreur commise sur le nombre d'onde effectif  $k^*$  du schéma pour  $k\Delta x$  compris entre  $\pi/16$  et  $\pi/2$ ; ces limites correspondent respectivement à une longueur d'onde discrétisée sur 32 points et sur 4 points. L'idée est qu'augmenter l'ordre du schéma permet d'avoir une précision très importante pour les faibles  $k\Delta x$ , c'est-à-dire pour les grandes longueurs d'onde; celle-ci peut alors être diminuée afin d'améliorer la précision pour les plus hauts  $k\Delta x$ , c'est-à-dire pour les faibles longueurs d'onde. Ce type de schéma est ainsi plus performant que le schéma classique d'ordre 10 sur 11 points. (Bogey et Bailly, 2004) Il est à noter

que le schéma centré ne crée que des erreurs théoriques de dispersion, c'est-à-dire de déphasage entre la solution réelle du problème et la solution numérique. Cette erreur est représentée sur la figure 1.2 en fonction du nombre d'onde réduit  $k\Delta x$ .

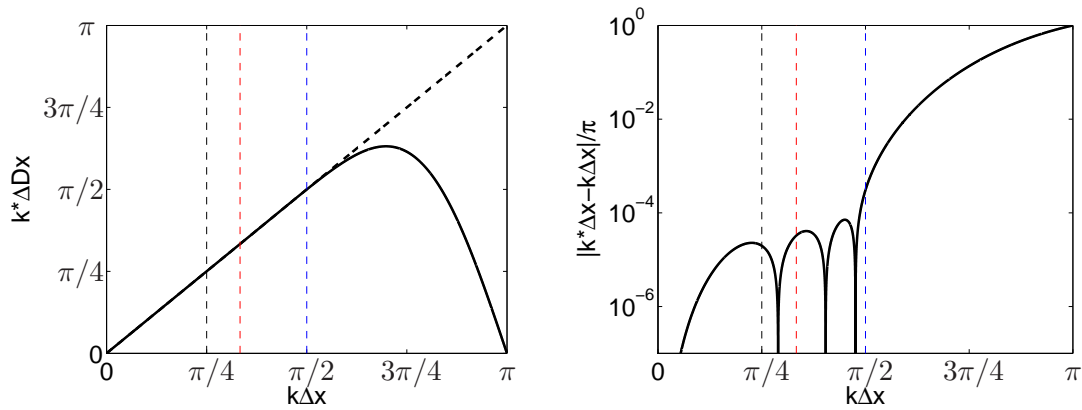


Figure 1.2 – (gauche) Nombre d'onde effectif  $k^*\Delta x$  et (droite) erreur de dispersion pour le schéma aux différences finies FD55 (Bogey et Bailly, 2004) en fonction du nombre d'onde réduit  $k\Delta x$ . Les lignes verticales noire, rouge et bleue correspondent respectivement à  $k\Delta x = \pi/4$ ,  $k\Delta x = \pi/3$  et  $k\Delta x = \pi/2$ .

Pour les points aux frontières, soit pour les points situés à moins de 5 mailles des bords du domaine, on utilise les schémas décentrés optimisés sur 11 points d'ordre 4 proposés par Berland *et al.* (2007). Du fait du décentrage, on commet des erreurs de dispersion et de dissipation, c'est-à-dire à la fois des erreurs sur la phase et sur l'amplitude de la solution. En détail, les schémas appelés FD010, FD19, FD28, FD37 et FD46 sont respectivement utilisés pour les points sur le bord du domaine et pour les points à 1, 2, 3 et 4 pas de maillage de celui-ci. Les coefficients de ces différents schémas différences finies sont donnés dans l'annexe G. Une représentation de l'utilisation de ceux-ci est proposée sur la figure 1.3.

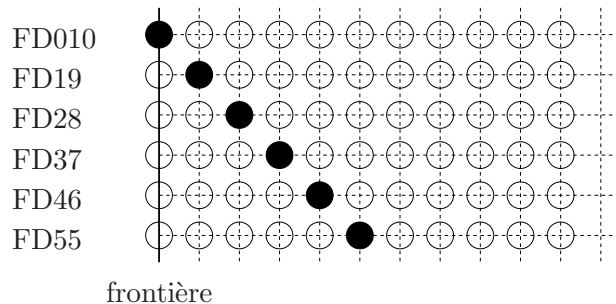


Figure 1.3 – Représentation des schémas différences finies utilisés.

### Méthodes pseudospectrales

Dans les méthodes spectrales, les fonctions à dériver sont projetées sur une base de fonctions, notées ici  $\phi_n$  (Boyd, 2001; Gottlieb et Hesthaven, 2001) :

$$u^N(x) = \sum_{n=0}^N U_n \phi_n(x), \quad (1.9)$$

où on a noté  $u^N$  la projection de  $u(x)$  sur la base  $\phi_n$ . La dérivée de la fonction recherchée s'exprime alors simplement comme la dérivée des fonctions de la base choisie :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) \simeq \frac{\partial u^N}{\partial x}(x) = \sum_{n=0}^N U_n \frac{\partial \phi_n(x)}{\partial x}. \quad (1.10)$$

Les méthodes pseudospectrales sont un type particulier de méthodes spectrales pour lesquelles les coefficients  $U_n$  sont calculés en rendant la projection  $u^N$  égale à  $u$  aux points de la grille, appelés aussi points de collocation. Ce sont donc des méthodes globales dans le sens où les valeurs de la variable  $u$  à tous les points de la grille sont utilisées pour calculer la dérivée de  $u$  en un point. Ce n'est pas le cas des méthodes différences finies où la dérivée en un point n'utilise que les valeurs prises au voisinage de ce point. Typiquement, l'erreur commise sur la différenciation est de l'ordre de  $(1/N)^N$  (Boyd, 2001). Ainsi, sur un intervalle fixé, augmenter le nombre de points permet de réduire le pas spatial mais aussi d'augmenter l'ordre de la méthode.

Les fonctions de base  $\phi_n$  les plus couramment utilisées sont les polynômes trigonométriques : la méthode associée est appelée méthode PS de type Fourier. Celle-ci est limitée aux problèmes périodiques du fait de la propriété de périodicité de ces polynômes. La méthode de type Chebyshev construite avec la base de polynômes du même nom permet de prendre en compte les cas non-périodiques, mais est moins performante d'un point de vue numérique. En effet, la méthode pseudospectrale de type Fourier permet d'évaluer les dérivées spatiales jusqu'à une discrétisation de deux points par longueur d'onde alors que la longueur d'onde minimale résolue est égale à  $\pi$  fois le pas de maillage moyen pour la méthode pseudospectrale de type Chebyshev (Weideman et Trefethen, 1988). Ces deux méthodes sont présentées ci-après. On propose ensuite deux codes de résolution basés sur ces méthodes.

#### *Méthode pseudospectrale de type Fourier*

On considère ici l'intervalle  $[0, 2\pi]$  et on choisit pour  $N$  un nombre pair. La projection sur la base des polynômes trigonométriques s'écrit alors : (Gottlieb et Hesthaven, 2001)

$$u(x) = \sum_{n=0}^N U_n \exp(ik_n x), \quad (1.11)$$

avec  $k_n = -N/2 + n$ . Les coefficients  $U_n$  sont obtenus avec la formule :

$$U_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \exp(-ik_n x) dx. \quad (1.12)$$

Cette intégrale peut alors être calculée avec la quadrature suivante :

$$U_n = \frac{1}{\tilde{c}_n N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) \exp(-ik_n x_j), \quad (1.13)$$

où les points de collocation  $x_j$  sont donnés par  $x_j = 2\pi j/N$  et où  $\tilde{c}_n = 2$  pour  $n = 0$  et  $n = N$  et  $\tilde{c}_n = 1$  sinon. Il est donc à noter qu'un maillage uniforme est utilisé pour cette méthode. La dérivée aux points de collocation  $x_j$  s'obtient alors avec l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_j) = \sum_{n=1}^{N-1} ik_n U_n \exp(ik_n x_j) \text{ pour } j = 1, \dots, N-1. \quad (1.14)$$

Les termes en  $n = 0$  et  $n = N$  n'apparaissent pas ci-dessus puisqu'ils s'annulent l'un l'autre. Le calcul de la dérivée des flux avec cette méthode se fait donc en deux étapes :

1. calcul des coefficients de la projection pour  $n = 0, \dots, N-1$  avec l'équation 1.13,
2. calcul de la dérivée pour  $j = 0, \dots, N-1$  avec l'équation 1.14.

L'intérêt principal de cette méthode est qu'elle permet d'évaluer la dérivée spatiale jusqu'à une limite de résolution de deux points par longueur d'onde, cette limite étant fixée par le théorème de Shannon-Nyquist. Il est à noter que ces deux calculs peuvent se faire avec des transformées de Fourier rapides. Le coût du calcul pour évaluer la dérivée d'une variable sur  $N$  points est ainsi de l'ordre de  $N \log N$ , au lieu de  $N^2$  qui serait obtenu si on calculait directement la double somme. Il est à comparer avec le coût de calcul pour une méthode différences finies qui est de l'ordre de  $NM$ , où  $M$  correspond au nombre de points du schéma. La contrainte principale de la méthode est qu'elle requiert que les variables soient périodiques, ce qui n'est pas le cas en général pour la propagation acoustique en milieu extérieur, notamment à cause de la présence de paroi. Ce type de méthode peut être étendu pour prendre en compte le cas de sols rigides (Hornikx *et al.*, 2010), mais ne peut pas être directement appliqué au cas de sols impédants.

#### *Méthode pseudospectrale de type Chebyshev*

Pour traiter le cas de problèmes non-périodiques, des polynômes orthogonaux comme ceux de Legendre ou de Chebyshev peuvent être utilisés comme fonctions de la base. On développera ici le cas de polynômes de Chebyshev, que l'on notera  $T_n$ . Sans perte de généralité, on considère l'intervalle  $[-1, 1]$  et on a alors la projection :

$$u(x) \approx \sum_{n=0}^N U_n T_n(x). \quad (1.15)$$

Grâce à l'orthogonalité des polynômes de Chebyshev, les coefficients  $U_n$  sont obtenus avec l'équation :

$$U_n = \frac{2}{c_n \pi} \int_{-1}^1 \frac{u(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (1.16)$$

avec  $c_0 = 2$  et  $c_n = 1$  sinon. Comme précédemment, on utilise une quadrature, ici dite de Gauss-Lobatto, pour évaluer l'intégrale (Gottlieb et Hesthaven, 2001) :

$$U_n = \frac{2}{c_n \pi} \sum_{j=0}^N w_j u(x_j) T_n(x_j). \quad (1.17)$$

Cette quadrature est intéressante puisqu'elle inclut les points aux extrémités de l'intervalle et permet ainsi d'implémenter directement la condition limite d'impédance. Les points de collocation sont ainsi donnés par :

$$x_j = -\cos\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad j = 0, \dots, N, \quad (1.18)$$



et les poids  $w_j$  sont obtenus avec la formule :

$$w_j = \frac{\pi}{\tilde{c}_j N}, \quad (1.19)$$

avec  $\tilde{c}_j = 2$  pour  $j = 0$  et  $j = N$  et  $\tilde{c}_j = 1$  sinon. Un exemple du maillage obtenu avec cette distribution pour  $N = 16$  est représenté sur la figure 1.4. Contrairement à la méthode pseudospectrale de type Fourier, la résolution minimale est de  $\pi$  points par longueur d'onde. Ce facteur  $\pi$  provient du rapport entre le pas de maillage moyen égal à  $2/N$  et le pas de maillage le plus grand égal à  $\pi/N$ . La dérivée peut être obtenue facilement en utilisant un changement de variable avec  $x = -\cos \xi$  :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{n=0}^N U_n T_n(-\cos \xi) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{n=0}^N n U_n (-1)^n \sin n\xi. \quad (1.20)$$

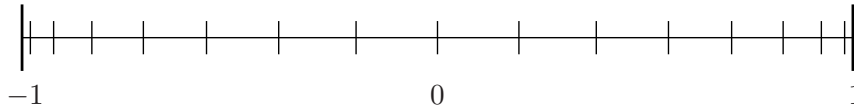


Figure 1.4 – Exemple de maillage obtenu avec la distribution de Gauss-Lobatto avec  $N = 16$  pour la méthode pseudospectrale de type Chebyshev.

Le calcul avec la méthode pseudospectrale de type Chebyshev se réalise là encore en deux étapes :

1. Calcul des coefficients de la projection :

$$U'_n = \frac{2}{c_n N} \sum_{j=0}^N \frac{1}{\tilde{c}_j} u(x_j) \cos\left(\frac{nj\pi}{N}\right) \text{ pour } n = 0, \dots, N, \quad (1.21)$$

2. Calcul de la dérivée avec (Trefethen, 2000) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_j) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x_j^2}} \sum_{n=0}^N n U'_n \sin\left(\frac{nj\pi}{N}\right) \text{ pour } j = 1, \dots, N-1, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0) &= -\sum_{n=0}^N n^2 U'_n, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_N) &= -\sum_{n=0}^N n^2 (-1)^{n+1} U'_n. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Notons là encore que les coefficients de la projection et de la dérivée aux points de collocation peuvent être calculés à l'aide de transformées de Fourier rapides.

Une remarque importante est à faire sur la distribution des points avec cette méthode. Il a pu être noté que le maillage n'était pas uniforme; ainsi, la plus petite maille a une taille approximativement égale à  $\pi^2/2N^2$ . Cela signifie que la plus petite maille décroît quadratiquement avec le nombre de points. Pour les méthodes d'intégration temporelle explicites, utilisées dans ce travail, la stabilité est liée par le nombre de Courant Friedrichs Lewy au rapport  $\Delta t/\Delta x$  : doubler le nombre de points sur un intervalle fixe oblige donc à diviser par quatre le pas de temps

pour résoudre à CFL constant. Ainsi, pour des problèmes de propagation à longue distance pour lesquels un domaine important et donc un nombre de points élevé est nécessaire, une application directe de la méthode va demander un pas de temps très faible et par conséquent un coût de calcul important. Pour éviter ce problème, le domaine est découpé en sous-domaines. Cependant, dans ce cas, la méthode n'est plus globale et des conditions aux frontières des sous-domaines doivent être proposées afin de faire transiter l'information à travers celles-ci.

#### *Codes de résolution*

Deux codes de résolution peuvent être construits avec ces méthodes :

1. dans le premier, appelé code « PS Chebyshev », la méthode pseudospectrale de type Chebyshev est utilisée pour le calcul des dérivées spatiales dans toutes les directions.
2. il sera vu dans la partie 1.1.4 que des couches parfaitement adaptées (appelées aussi PMLs) sont utilisées pour les conditions aux limites de non-réflexion. Celles-ci permettent alors d'avoir un support compact pour les différentes variables. Ainsi, on peut considérer que le signal est périodique dans les directions parallèles au sol et utiliser la méthode pseudospectrale de type Fourier, qui est plus performante que celle de type Chebyshev. Dans la direction perpendiculaire, cette dernière est utilisée. Ce code sera appelé par la suite code « PS hybride Fourier-Chebyshev ».

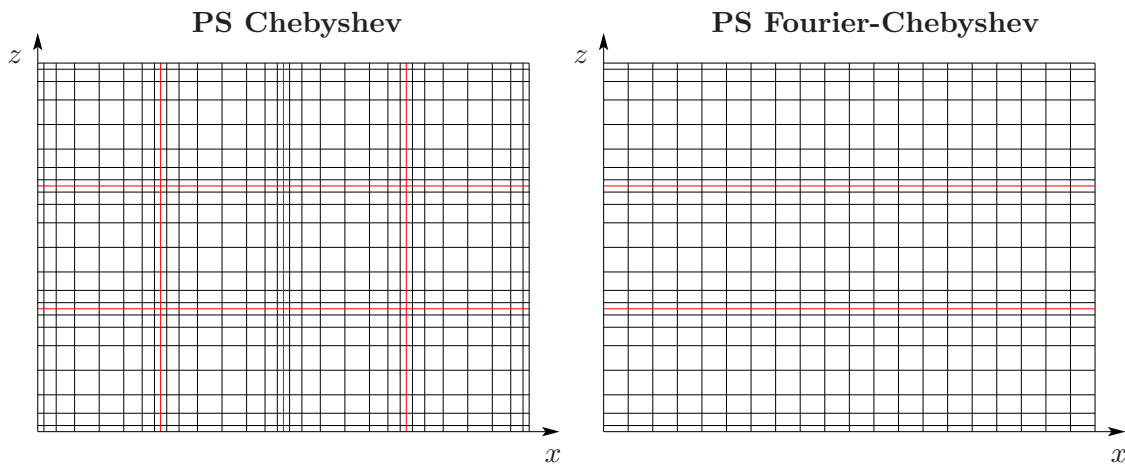


Figure 1.5 – Exemple de grille utilisée (gauche) pour le code PS Chebyshev et (droite) pour le code PS hybride Fourier-Chebyshev. Les frontières des sous-domaines sont représentées en ligne pleine rouge.

Un exemple typique des grilles obtenues avec ces deux codes de résolution est représenté sur la figure 1.5. Des cas-tests de validation des deux codes ainsi que des comparaisons en terme de performance numérique sont présentés dans l'annexe D.

### 1.1.2 Intégration temporelle

Pour l'intégration temporelle, un algorithme de Runge-Kutta optimisé à six sous-étapes est utilisé. Pour cela, on considère l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u). \quad (1.23)$$

L'intégration temporelle de la variable  $u$  entre le  $n$ -ième et le  $n + 1$ -ième pas de temps s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= u[n\Delta t], \\ u^{(i)} &= u^{(i-1)} + \gamma_i \Delta t F(u^{(i-1)}), \text{ pour } i = 1, \dots, p \\ u[(n + 1)\Delta t] &= u^{(p)}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps choisi,  $p$  est le nombre de sous-étapes, ici égal à 6 et où  $\gamma_i$  sont les coefficients du schéma de Runge-Kutta. Notons qu'avec ce type d'algorithme, seulement deux espaces de stockage sont nécessaires pour chaque variable physique. Deux schémas différents seront considérés. Le premier, noté RKo6s et développé par Bogey et Bailly (2004), est formellement d'ordre deux. Le second, noté RK46-L et proposé par Berland *et al.* (2006), est formellement d'ordre quatre. Les coefficients  $\gamma_i$  de ce schéma sont donnés dans l'annexe G. Comme pour les schémas différences finies, on peut associer à ces algorithmes, une pulsation réduite effective  $\omega^* \Delta t$ , où  $\Delta t$  est le pas de temps de l'intégration temporelle. L'optimisation a pour but de rendre le schéma stable pour des valeurs plus importantes de  $\omega \Delta t$  que les schémas standards de Runge-Kutta de même ordre et aussi de minimiser les erreurs de dispersion et de dissipation pour des valeurs de  $\omega \Delta t$  comprises entre  $\omega \Delta t = \pi/16$  et  $\omega \Delta t = \pi/2$ , qui correspondent respectivement à des fréquences acoustiques discrétisées sur 32 et 4 pas de temps.

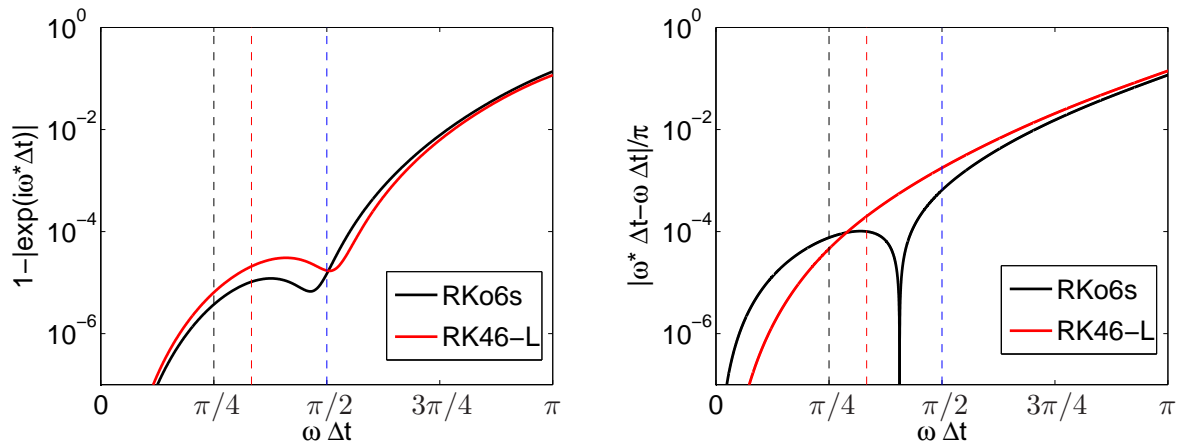


Figure 1.6 – Erreur de dissipation (gauche) et de dispersion (droite) associées aux algorithmes de Runge-Kutta optimisés à 6 six-étapes d'ordre 2 RKo6s (Bogey et Bailly, 2004) et d'ordre 4 RK46-L Berland *et al.* (2006) en fonction de la pulsation réduite  $\omega \Delta t$ . Les lignes verticales noire, rouge et bleue correspondent respectivement à  $\omega \Delta t = \pi/4$ ,  $\omega \Delta t = \pi/3$  et  $\omega \Delta t = \pi/2$ .

La pulsation réduite peut être associée au nombre d'onde réduit  $k \Delta x$  avec le nombre de Courant-Friedrichs-Lewy défini par  $CFL = c_0 \Delta t / \Delta x$ ; on a alors  $\omega \Delta t = CFL k \Delta x$ . Le nombre CFL permet ainsi, une fois le pas de maillage  $\Delta x$  fixé, de se positionner sur les courbes d'erreurs liées à l'intégration temporelle.

Les courbes de l'atténuation et de l'erreur de dispersion sont représentées sur la figure 1.6. Il est à noter que les deux schémas ont des erreurs de dissipation relativement comparables sur l'intervalle considéré, même si le schéma RKo6s offre jusqu'à  $\omega \Delta t = \pi/2$  une erreur un peu plus faible. Concernant l'erreur de dispersion, on peut voir que pour  $\omega \Delta t \leq \pi/4$ , celle-ci est plus faible pour le schéma RK46-L d'environ un ordre de grandeur. Cela est important, puisque dans

le cadre de simulations de propagation à longue distance, il est utile de pouvoir propager une onde acoustique sur des distances de l'ordre du millier de longueur d'onde; il faut ainsi pouvoir considérer un nombre d'itérations temporelles important, de l'ordre de  $10^4$ . Pour une résolution jusqu'à  $\omega\Delta t \leq \pi/4$ , on peut donc voir que l'erreur de dispersion sera dans ce cas relativement importante si l'on utilise le schéma RK6s. On utilisera donc de façon préférentielle le schéma RK46-L.

### 1.1.3 Filtrage sélectif

Comme il a été vu dans le paragraphe 1.1.1, les méthodes de différences finies ne permettent pas de résoudre correctement toutes les longueurs d'onde discrétisées. Un filtrage sélectif de type passe-bas est alors utilisé pour éliminer les longueurs d'onde mal discrétisées sans dissiper celles bien résolues. Le filtrage d'une variable  $u$  au point  $x_l$  s'écrit :

$$u^f(x_l) = u(x_l) - \sigma_f D(x_l), \quad (1.25)$$

où  $\sigma_f$  est le coefficient de filtrage choisi constant pour que le système reste conservatif. Dans le cas d'un filtre sélectif centré sur  $2F + 1$  points,  $D(x_l)$  est donné par :

$$D(x_l) = \sum_{j=-F}^F d_j(x_l + j\Delta x), \quad (1.26)$$

où  $d_j$  sont les coefficients du filtre.

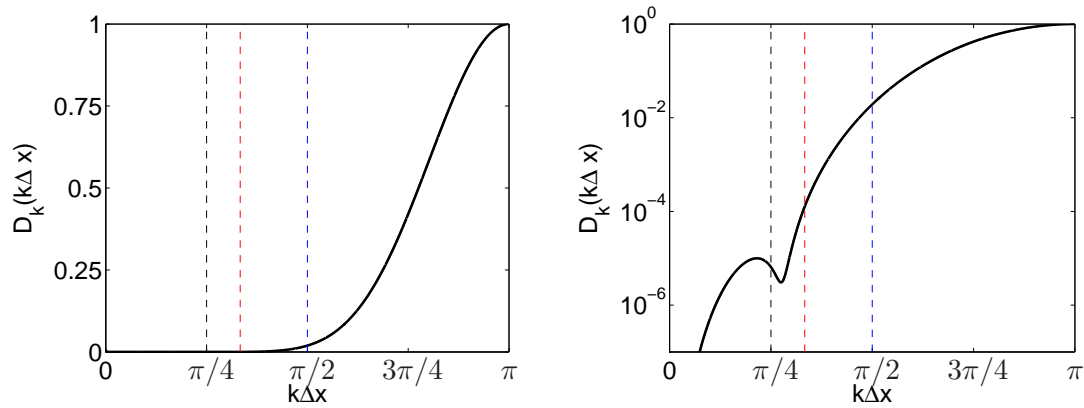


Figure 1.7 – Taux de dissipation du filtre sélectif centré sur 11 points d'ordre 6 proposé par Bogey *et al.* (2009) en fonction du nombre d'onde réduit  $k\Delta x$  (gauche) en échelle linéaire et (droite) en échelle logarithmique. Les lignes verticales noire, rouge et bleue correspondent respectivement à  $k\Delta x = \pi/4$ ,  $k\Delta x = \pi/3$  et  $k\Delta x = \pi/2$ .

Pour les points intérieurs, on utilisera le filtre sélectif centré sur 11 points d'ordre 6 proposé par Bogey *et al.* (2009), avec un coefficient de filtrage  $\sigma_f = 0.2$ . Le taux de dissipation de ce filtre pour un coefficient de filtrage unitaire est représenté en fonction du nombre d'onde réduit  $k\Delta x$  sur la figure 1.7. On peut voir que la fréquence du coupure du filtre est proche de  $k\Delta x = \pi/2$ , ce qui correspond bien à la limite haute utilisée pour l'optimisation du schéma de différences finies centré. Pour les points aux frontières, on utilise les filtres décentrés de Berland *et al.* (2007) avec un coefficient de filtrage égal à  $\sigma_f = 0.2$ . En détail, pour les points situés à 2, 3 et 4 mailles du bord

du domaine, on utilise respectivement les schémas décentrés sur 11 points d'ordre 2 SF28, SF37 et SF46. Pour le point situé à 1 maille du bord du domaine, on utilise le schéma décentré sur 7 points d'ordre 2 SF15. Enfin, pour le point situé au bord du domaine, le schéma sur 4 points d'ordre 2 SF03 peut être utilisé avec un coefficient de filtrage très faible. Dans la majorité des simulations, ce dernier filtre ne sera pas utilisé. Le filtrage est appliqué toutes les itérations et dans chaque direction de l'espace. Sur la figure 1.8, on représente l'utilisation des schémas de filtrage sélectifs. Les coefficients des schémas des différents filtres sélectifs sont donnés dans l'annexe G.

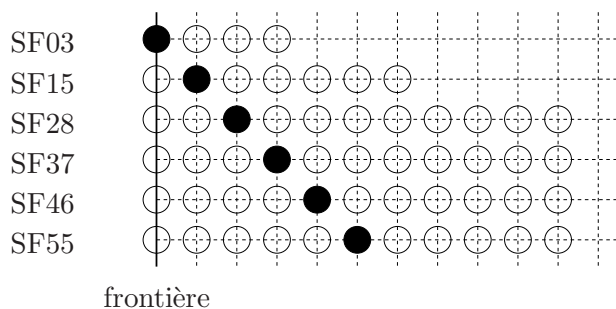


Figure 1.8 – Représentation des schémas de filtrage sélectif utilisés.

### 1.1.4 Condition limite

Dans ce travail, deux types de condition limite seront utilisés aux frontières du domaine numérique pour minimiser la réflexion des ondes acoustiques. La première méthode, appelée condition limite de rayonnement, consiste à résoudre aux bords du domaine une formulation asymptotique des équations d'Euler linéarisées qui ne contient que les ondes se propageant vers l'extérieur du domaine. Une seconde méthode consiste à transformer les équations résolues afin de rendre les ondes acoustiques évanescentes dans une couche aux bords du domaine. C'est la méthode dite des couches parfaitement adaptées. Par rapport à d'autres types de conditions aux limites, ces deux méthodes ont la propriété que leur performance dépend très peu de l'angle d'incidence des ondes (Mesbah *et al.*, 2008). Les avantages et les inconvénients de chaque méthode sont aussi soulignés.

#### Condition limite de rayonnement

Cette première méthode a été proposée initialement pour des géométries bi-dimensionnelles avec un écoulement constant par Tam et Webb (1993) avant d'être étendue pour prendre en compte un écoulement quelconque par Tam et Dong (1996). Le cas tri-dimensionnel a ensuite été traité par Bogey et Bailly (2002). L'idée consiste à écrire qu'en champ lointain les perturbations acoustiques de vitesse et de pression sont des ondes progressives fonctions de  $r - V_g t$  dont la décroissance est en  $\sqrt{r}$  dans le cas 2D et en  $r$  dans le cas 3D. On a noté  $r$  la distance à la source de bruit et  $V_g$  la vitesse de groupe. Le problème est représenté sur le schéma de la figure 1.9. Il est donc à noter que la position prise pour l'origine de la source est un paramètre à fixer. Cela permet d'obtenir les équations suivantes dans le cas 3D :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + V_g \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \begin{pmatrix} p \\ \rho_0 v_x \\ \rho_0 v_y \\ \rho_0 v_z \end{pmatrix} = 0, \quad (1.27)$$

où  $\mathbf{U}$  est le vecteur inconnu. La vitesse de groupe  $V_g$  est calculée à partir de la vitesse du son et de l'écoulement moyen. En pratique, ces équations sont implémentées pour les points situés à moins de trois pas de maillage de la frontière dans le code de différences finies. On peut noter que cette méthode peut difficilement être appliquée dans le cas des codes avec les méthodes pseudospectrales proposées ici puisque, ces méthodes étant globales, on ne peut résoudre qu'une seule équation dans le domaine numérique considéré.

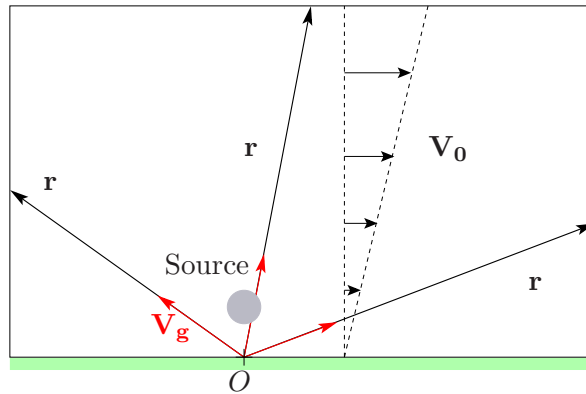


Figure 1.9 – Schéma d'implémentation de la condition limite de rayonnement. Le point  $O$  correspond à l'origine prise pour le calcul de  $V_g$  et de  $r$ .

Cette condition limite permet d'avoir un taux de réflexion typiquement de l'ordre du pourcent (Bogey et Bailly, 2002), ce qui est tout à fait acceptable dans les applications visées. De plus, elle ne demande pas de coût numérique supplémentaire, en particulier, en ce qui concerne l'espace mémoire. Comme noté par Mesbah *et al.* (2008), le problème majeur de cette condition limite est la définition de l'origine prise pour le calcul de  $r$ , c'est-à-dire l'origine du bruit. Pour le cas de sources immobiles en champ libre, cela ne pose pas de problème. Cependant, dès que l'on considère une frontière réfléchissante, une source image existe aussi, placée symétriquement de l'autre côté de la frontière. On peut alors prendre l'origine du bruit au niveau du sol pour être à la même distance des deux sources ; cette approche est valable dans le cas de sources placées au niveau de sol mais peut amener à des réflexions importantes au niveau des bords du domaine dans le cas contraire. De plus, dans le cas de propagation sur sol non plan, d'autres sources peuvent être identifiées, liées notamment aux effets de diffraction. Enfin, cette méthode apparaît difficilement applicable dans le cas de sources mobiles où, à un temps donné, les fronts d'ondes dans le domaine ne sont pas liés à une même zone source.

### Couche parfaitement adaptée ou « PML »

La seconde méthode considérée ici a été proposée initialement par Bérenger (1994), dans le cadre de la propagation d'ondes électromagnétiques. Celui-ci propose de rendre évanescentes les ondes propagatives dans des couches au bord du domaine de calcul, tout en assurant qu'il n'y ait pas de réflexion à l'interface avec le domaine intérieur. Ce type de condition limite est alors appelé couche parfaitement adaptée ou Perfectly Matched Layer (PML). Ainsi, on considère une onde plane du type  $\exp(ikx - i\omega t)$  qui se propage dans un domaine 1D avec une couche parfaitement adaptée placée en  $x > 0$ . On a représenté sur la figure 1.10 un schéma du problème. On veut donc avoir  $\text{Re}[ikx]$  négatif dans la couche soit pour  $x > 0$  et nul partout ailleurs. Cela peut être obtenu

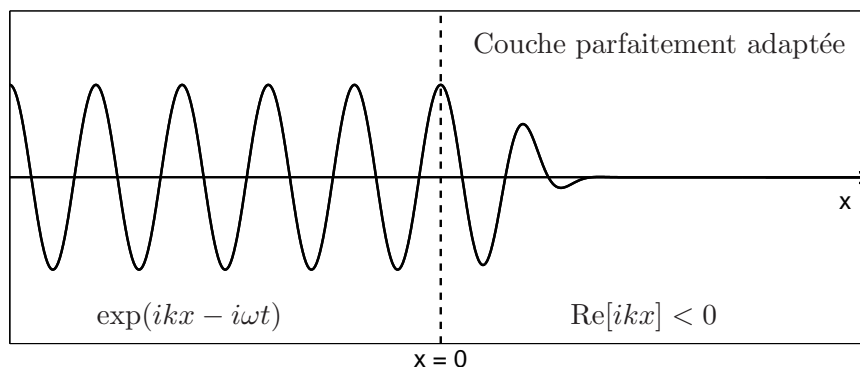


Figure 1.10 – Schéma de la propagation d'une onde plane dans une couche parfaitement adaptée.

en faisant le changement de variable :

$$\tilde{x} = x + \frac{1}{i\omega} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi, \quad (1.28)$$

où  $\sigma$  est un coefficient positif dans la PML et nul ailleurs. Cela revient alors à changer l'opérateur de dérivation spatial dans le domaine fréquentiel :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{1 + i\sigma(x)/\omega} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}. \quad (1.29)$$

Une fois l'équation obtenue dans le domaine fréquentiel, celle-ci peut être transcrite dans le domaine temporel. Lorsqu'on se place dans un espace à deux ou trois dimensions, cette méthode ne peut plus être directement appliquée puisqu'une transcription dans le domaine temporel n'amène plus à un système d'équations différentielles du premier ordre. Deux méthodes différentes sont classiquement utilisées. Dans la première, on scinde les variables physiques pour calculer séparément les contributions dans chaque direction de l'espace et on se ramène alors à un système d'équations différentielles du premier ordre : c'est la méthode dite « split ». Cependant, cela est très coûteux en espace mémoire puisque, pour un espace tridimensionnel, il ne faudra non plus 4 variables scalaires mais 12 variables scalaires. Une seconde méthode consiste non plus à scinder les variables physiques mais à introduire des variables intermédiaires qui ne sont utilisées que dans les PML ; c'est la méthode dite « unsplit » (Hu, 2001). Ici, on suit l'approche de Hornikx *et al.* (2010) et on ne scindera que la variable de pression  $p$  en composantes  $p_x$ ,  $p_y$  et  $p_z$ . Le vecteur inconnu devient alors  $\mathbf{U} = [p_x, p_y, p_z, \rho_0 v_x, \rho_0 v_y, \rho_0 v_z]^T$  avec  $p = p_x + p_y + p_z$ . Les flux pour les équations d'Euler linéarisées (cf. Eq. 1.3) sont donnés par :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} V_{0x} p_x + \rho_0 c^2 v_x \\ V_{0x} p_y \\ V_{0x} p_z \\ V_{0x} \rho_0 v_x + p \\ V_{0x} \rho_0 v_y \\ V_{0x} \rho_0 v_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} V_{0y} p_x \\ V_{0y} p_y + \rho_0 c^2 v_y \\ V_{0y} p_z \\ V_{0y} \rho_0 v_x \\ V_{0y} \rho_0 v_y + p \\ V_{0y} \rho_0 v_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} V_{0z} p_x \\ V_{0z} p_y \\ V_{0z} p_z + \rho_0 c^2 v_z \\ V_{0z} \rho_0 v_x \\ V_{0z} \rho_0 v_y \\ V_{0z} \rho_0 v_z + p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \sigma_x p_x \\ \sigma_y p_y \\ \sigma_z p_z \\ \rho_0 \mathbf{v} \cdot \nabla V_{0x} + \sigma_x \rho_0 v_x \\ \rho_0 \mathbf{v} \cdot \nabla V_{0y} + \sigma_y \rho_0 v_y \\ \rho_0 \mathbf{v} \cdot \nabla V_{0z} + \sigma_z \rho_0 v_z \end{pmatrix}.$$

Enfin, le terme de source de masse est réparti sur  $p_x$ ,  $p_y$  et  $p_z$ . On obtient alors le vecteur source  $\mathbf{S} = [\rho_0 c^2 Q/3, \rho_0 c^2 Q/3, \rho_0 c^2 Q/3, R_x, R_y, R_z]^T$ .

Il reste à choisir les coefficients  $\sigma$  dans la PML. Diaz et Joly (2006) ont obtenu une solution analytique dans le domaine temporel pour la fonction de Green de l'équation d'onde pour un demi-plan prolongé par une PML. Les auteurs ont ainsi montré que l'erreur entre cette fonction de Green et celle associée à l'équation d'onde pour un plan entier convergeait de manière exponentielle vers 0 ; les paramètres de cette convergence sont la valeur moyenne de  $\sigma$  dans la PML, notée  $\bar{\sigma}$  et l'épaisseur de la PML notée  $L$  ainsi que la distance entre la source et la PML. Ainsi, on prendra pour  $\bar{\sigma}$  la valeur la plus importante possible ; néanmoins, pour minimiser les réflexions à l'interface de la PML,  $\sigma$  est choisi comme fonction continue et croissante. On prendra ici un modèle de type puissance pour les coefficients  $\sigma$  dans les différentes directions de l'espace :

$$\sigma_{\bullet} = \sigma_0 \left( \frac{\bullet}{L} \right)^{\beta} \quad (1.30)$$

avec  $\sigma_0$  et  $\beta$  des paramètres constants.

L'intérêt principal de cette méthode est qu'on ne présuppose pas la position des sources acoustiques. Elle est donc plus générale que la condition limite précédente et peut de plus être utilisée en champ proche. Cependant, la PML peut amener à des instabilités dès qu'un écoulement moyen est pris en compte. Des techniques de changement de variable ont été proposées pour éliminer cette instabilité (Hu, 2001; Diaz et Joly, 2006). Les méthodes de PML sont utilisées ici principalement en conditions homogènes. Les calculs avec une méthode de PML et avec écoulement réalisés dans l'annexe D sont stables pour les temps de simulation considérés et on n'utilise donc pas de technique particulière pour traiter cette instabilité.

## 1.2 Condition limite d'impédance dans le domaine temporel

La condition limite d'impédance est définie de façon classique pour une onde plane avec un nombre d'onde  $\mathbf{k}$  dans le domaine fréquentiel avec l'équation suivante au niveau de l'interface air-sol :

$$\hat{p}(\omega, \mathbf{k}, f(\mathbf{r}) = 0) = Z_S(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{n}) \hat{v}_n(\omega, \mathbf{k}, f(\mathbf{r}) = 0), \quad (1.31)$$

où  $Z_S$  est l'impédance de surface et où  $f(\mathbf{r}) = 0$  représente l'équation de la surface. On a noté  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Le problème est représenté sur la figure 1.11. La pression  $\hat{p}$  et la vitesse acoustique normale  $\hat{v}_n$  sont définies dans le domaine fréquentiel avec la convention suivante pour la transformée de Fourier :

$$\hat{p}(\omega, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, \mathbf{r}) \exp(i\omega t) dt. \quad (1.32)$$

Tout d'abord, le sol est considéré à structure rigide, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de déformation du sol au passage des ondes acoustiques. On utilise aussi l'hypothèse de la réaction locale dans ce travail. Elle consiste à supposer que la réflexion d'une onde incidente sur le sol a lieu selon la normale au sol et ne dépend donc pas de l'angle d'incidence. L'approximation est valable si à la fois l'indice de réfraction  $n = k_c/k_0$  et le rapport des densités  $m = \rho_g/\rho_0$  sont suffisamment grands. On a noté ici  $k_0 = \omega/c_0$  le nombre d'onde dans l'air,  $k_c$  le nombre d'onde dans le sol et  $\rho_g$  la masse volumique dynamique de l'air dans le sol. Cela est vérifié par la plupart des sols semi-infinis, rencontrés dans les problèmes de propagation en milieu extérieur. L'approximation de la réaction locale est par contre plus contestable dans le cas de sols stratifiés. Une étude de l'erreur réalisée en faisant cette approximation pour des sols semi-infinis est présentée dans l'annexe C. Dans le cadre de l'approximation locale, l'impédance de surface  $Z_S$  ne dépend plus de l'angle de l'incidence et donc de  $\mathbf{k}$ . On peut réécrire alors de façon générale :

$$\hat{p}(\omega, f(\mathbf{r}) = 0) = Z_S(\omega) \hat{v}_n(\omega, f(\mathbf{r}) = 0), \quad (1.33)$$



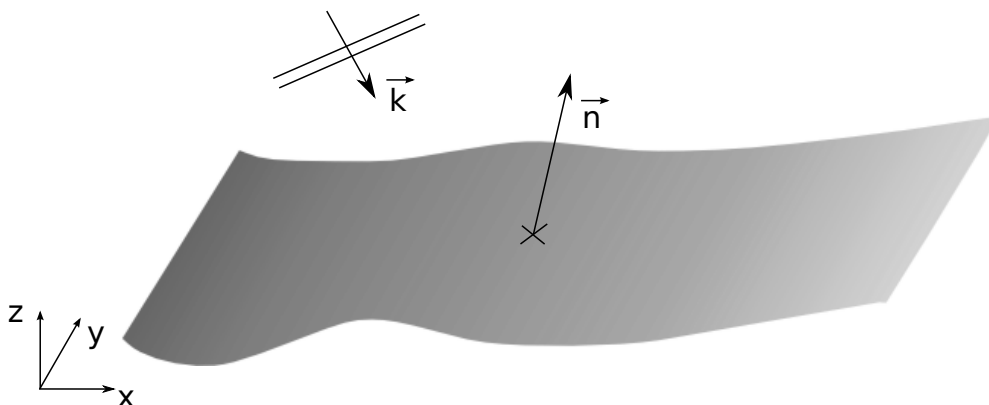


Figure 1.11 – Schéma du problème de réflexion d'une onde plane sur une surface ayant une impédance de surface  $Z_S$ .

Cette condition limite peut être directement traduite dans le domaine temporel sous la forme d'un produit de convolution :

$$p(t, f(\mathbf{r}) = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_S(t - t') v_n(t', f(\mathbf{r}) = 0) dt', \quad (1.34)$$

où  $r_S$  est la réponse impulsionnelle. Celle-ci est donnée par  $r_S(t) = 2\pi z_S(t)$  où  $z_S(t)$  est la transformée de Fourier inverse de l'impédance de surface  $Z_S$ . Du fait de la représentation dans le domaine temporel, plusieurs conditions doivent être respectées par  $z_S$ . Tout d'abord, les variables  $p$  et  $v_n$  prennent des valeurs réelles ; le paramètre  $z_S(t)$  doit donc être réel. Ensuite, la pression à l'instant  $t$  ne doit dépendre que de la vitesse normale aux instants  $t' < t$  pour des raisons de causalité. Cela implique  $z(t) = z(t)H(t)$  où  $H(t)$  est la fonction d'Heaviside. Une troisième condition dite de passivité est ajoutée. L'intensité acoustique à travers le sol est définie par  $I = \text{Re}(\hat{p}\hat{v}_n^*)/2$ . Elle peut donc s'écrire avec la condition limite d'impédance  $I = \text{Re}(Z_S)|\hat{v}_n|^2/2$ . Le sol étant absorbant ou rigide, l'intensité acoustique à travers le sol est donc soit positive soit nulle. Cela revient à avoir  $\text{Re}(Z_S) \geq 0$ . Ces différentes conditions imposent alors au modèle d'impédance dans le domaine fréquentiel (Rienstra, 2006) :

- condition de réalité :  $\overline{Z_S(\omega)} = Z_S(-\omega)$ ,
- condition de causalité :  $Z_S(\omega)$  analytique et non-nul pour  $\text{Im}(\omega) > 0$ ,
- condition de passivité :  $\text{Re}[Z_S(\omega)] \geq 0$  pour  $\omega > 0$ .

Notons que la condition de causalité revient à ce que le modèle d'impédance de surface vérifie les relations de Kramers-Kronig : ainsi, les parties réelle et imaginaire de  $Z_S(\omega)$  sont reliées par une transformée de Hilbert. La condition de réalité peut être écrite de façon différente. En effet, on peut écrire :

$$Z_S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} z_S(t) \exp(i\omega t) dt. \quad (1.35)$$

Si le modèle d'impédance  $Z_S(\omega)$  vérifie la condition de réalité alors  $z_S(t)$  est réel. Cela implique que  $Z_S$  est une fonction à coefficients réels de la variable  $-i\omega$ . Réciproquement, si  $Z_S$  est une fonction à coefficients réels de la variable  $-i\omega$  alors la condition de réalité est vérifiée.

On remarquera aussi que pour un modèle causal, on peut écrire :

$$Z_S(s) = \int_0^{+\infty} z_S(t) \exp(-st) dt, \quad (1.36)$$

où on a posé  $s = -i\omega$ . Ainsi, dans ce cas, la fonction  $Z_S$  correspond à la transformée de Laplace de  $z_S(t)$ .

### 1.2.1 Formulation

La transcription directe de la condition limite d'impédance dans le domaine temporel amène à un produit de convolution. Le calcul direct de celui-ci requiert la mise en mémoire de la vitesse normale au sol à tous les instants du calcul. Cela est rédhibitoire pour des calculs de propagation à longue distance où des temps de propagation relativement longs sont considérés (Özyörük et Long, 1996) (pour des calculs à longue distance, on devra typiquement considérer un nombre d'itérations temporelles de l'ordre de 10000).

Pour éviter le calcul de l'intégrale de convolution, une méthode de convolution récursive proposée initialement par Luebbers et Hunsberger (1992) pour la propagation d'ondes électromagnétiques dans les milieux dispersifs est ici utilisée. Celle-ci a été introduite en acoustique par Reymen *et al.* (2006) avant d'être appliquée sur des problèmes de propagation à longue distance par Cotté *et al.* (2009). Pour cela, l'impédance doit tout d'abord être approximée par une fraction rationnelle :

$$Z_S(\omega) \approx Z_S^M(\omega) = \frac{a_0 + a_1(-i\omega) + \dots + a_M(-i\omega)^M}{b_0 + b_1(-i\omega) + \dots + b_M(-i\omega)^M}, \quad (1.37)$$

où  $M$  est le degré des polynômes au numérateur et au dénominateur. Cela revient à remplacer la condition limite d'impédance par une équation différentielle linéaire d'ordre  $M$  entre la pression et la vitesse normale au sol. Pour vérifier la condition de réalité,  $Z_S(s)$  doit être une fonction à coefficients réels ce qui implique que les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  doivent être réels. Les racines des polynômes au numérateur et au dénominateur sont donc réelles ou complexes conjugués. On peut alors réécrire  $Z_S^M$  comme la somme de  $N$  fonctions du premier ordre et de  $T$  fonctions du second ordre :

$$Z_S^M(\omega) = Z_S^\infty + \sum_{k=1}^N Z_k + \sum_{l=1}^T Z_l, \quad (1.38)$$

avec :

$$Z_k = \frac{A_k}{\lambda_k - i\omega} \quad \text{et} \quad Z_l = \frac{A_l}{\lambda_l - i\omega} + \frac{A_l^*}{\lambda_l^* - i\omega} = \frac{B_l + iC_l}{\alpha_l + i\beta_l - i\omega} + \frac{B_l - iC_l}{\alpha_l - i\beta_l - i\omega}, \quad (1.39)$$

où  $M = N + 2T$  et où  $\lambda_i$  sont appelés les pôles et  $A_i$  sont les coefficients correspondants. Pour le cas de pôles complexes conjugués, on a posé  $\lambda_l = \alpha_l + i\beta_l$  et  $A_l = B_l + iC_l$ . Le paramètre  $Z_S^\infty$  correspond à la limite en haute fréquence du modèle d'impédance  $Z_S$ . Il est, d'un point de vue formel, nécessaire puisque la somme de fonctions du premier ordre et du second ordre tend vers une limite nulle à haute fréquence, ce qui n'est généralement pas le cas pour les modèles d'impédance. Cependant, on pourra utiliser pour des calculs sur une bande de fréquence limitée  $Z_S^\infty = 0$ , comme on le verra par la suite.

Notons que la condition de causalité est vérifiée si les pôles  $\lambda_k$  sont situés dans le demi-plan droit soit si  $\text{Re}(\lambda_i) \geq 0$ . La condition de réalité, comme décrit ci-dessus, est assurée par le fait que les coefficients  $A_i$  et  $\lambda_i$  sont réels ou complexes conjugués. Enfin, la condition de passivité devra être vérifiée pour chaque jeu de coefficients.

La réponse impulsionnelle associée à  $Z_S^M$  est donc dans le domaine temporel :

$$r_S^M(t) = Z_S^\infty \delta(t) + \sum_{k=1}^N r_k(t) + \sum_{l=1}^T r_l(t), \quad (1.40)$$

avec

$$r_k(t) = A_k \exp(-\lambda_k t) \mathbf{H}(t) \quad \text{et} \quad r_l(t) = 2[B_l \cos(\beta_l t) + C_l \sin(\beta_l t)] \exp(-\alpha_l t) \mathbf{H}(t). \quad (1.41)$$

Une interprétation physique peut donc être donnée à chaque contribution. Le premier terme  $Z_S^\infty \delta(t)$  correspond à la réponse instantanée du sol à une excitation. Les termes du type  $r_k(t)$  correspondent à une relaxation classique avec une réponse qui décroît exponentiellement avec le temps. Enfin, les termes du type  $r_l(t)$  représentent une réponse de type oscillateur amorti avec une décroissance exponentielle modulée par une sinusoïde. Il est à noter que les paramètres  $\lambda_k$ ,  $\alpha_l$  et  $\beta_l$  correspondent à l'inverse de constantes de temps liées à la réponse du sol.

La condition limite d'impédance dans le domaine temporel (appelée aussi CLIT par la suite) ainsi obtenue :

$$p(t) = Z_S^\infty v_n(t) + \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} r_k(t-t') v_n(t') dt' + \sum_{l=1}^T \int_{-\infty}^{+\infty} r_l(t-t') v_n(t') dt', \quad (1.42)$$

relie directement la pression et la vitesse au temps  $t$ . On considère maintenant les variables aux temps discrétisés  $p^{(n)} = p(n\Delta t)$  et  $v^{(n)} = v(n\Delta t)$ . Deux types de méthodes de convolution récursive peuvent être utilisées. Dans la première dite méthode PCRC - pour Piecewise Constant Recursive Convolution -, la vitesse normale est supposée constante sur un pas de temps. Dans la seconde méthode appelée PLRC - pour Piecewise Linear Recursive Convolution -, la vitesse normale est supposée linéaire sur un pas de temps. On considérera ici le seul cas de la méthode PCRC bien que la méthode PLRC ait été aussi utilisée durant la thèse. L'approximation de la vitesse normale constante sur un pas de temps permet d'écrire :

$$p^{(n)} = Z_S^\infty v_n^{(n)} + \sum_{k=1}^N A_k \phi_k^{(n)} + \sum_{l=1}^T 2B_l \text{Re}(\psi_l^{(n)}) + 2C_l \text{Im}(\psi_l^{(n)}), \quad (1.43)$$

avec les accumulateurs :

$$\phi_k^{(n)} = v_n^{(n)} \frac{1 - \exp(-\lambda_k \Delta t)}{\lambda_k} + \phi_k^{(n-1)} \exp(-\lambda_k \Delta t), \quad (1.44)$$

$$\psi_l^{(n)} = v_n^{(n)} \frac{1 - \exp[-(\alpha_l - i\beta_l)\Delta t]}{\alpha_l - i\beta_l} + \psi_l^{(n-1)} \exp[-(\alpha_l - i\beta_l)\Delta t]. \quad (1.45)$$

### CLIT : implémentation sur la pression

La condition limite d'impédance dans le domaine temporel privilégie une implémentation sur la pression. Dans ce cas, l'avancement temporel se déroule en trois étapes :

1. Avancement en temps de la pression et de la vitesse pour avoir  $p^{(n)}$  et  $v^{(n)}$  sur tout le domaine,
2. Avancement des accumulateurs  $\phi_k^{(n)}$  et  $\psi_k^{(n)}$ ,
3. Forçage de la pression au niveau du sol avec l'équation 1.43.

### CLIT : Implémentation sur la vitesse normale

Pour les modèles d'impédance représentant des sols très réfléchissants, il sera montré par la suite que l'implémentation de la condition limite d'impédance sur la pression peut rendre le calcul instable. Une implémentation sur la vitesse normale sera utilisée dans ce cas. Pour ce type de sols, des pôles réels suffisent généralement pour approximer l'impédance et on n'utilisera donc pas de pôles complexes. L'avancement temporel sur la vitesse normale est donc :

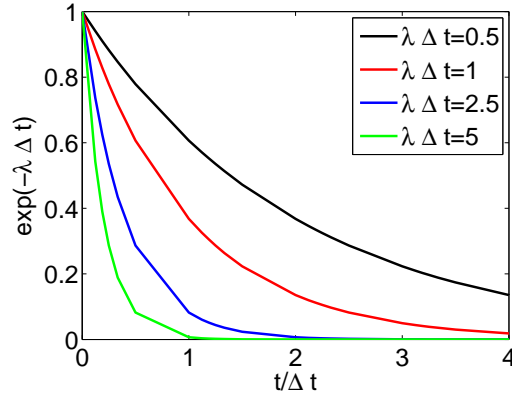


Figure 1.12 – Allure de la contribution des pôles réels pour différentes valeurs du paramètre  $\lambda\Delta t$ .

1. Avancement en temps de la pression et de vitesse pour avoir  $p^{(n)}$  et  $v^{(n)}$  sur tout le domaine,
2. Forçage de la vitesse normale au niveau du sol avec l'équation :

$$v_n^{(n)} = \frac{1}{C} \left[ p^{(n)} - \sum_{k=1}^N A_k \phi_k^{(n-1)} \exp(-\lambda_k \Delta t) \right], \quad (1.46)$$

avec :

$$C = Z_S^\infty + \sum_{k=1}^N A_k \frac{1 - \exp(-\lambda_k \Delta t)}{\lambda_k} \quad (1.47)$$

3. Avancement des accumulateurs  $\phi_k^{(n)}$

Comme cela a été remarqué par Cotté *et al.* (2009), cette implémentation est très proche de celle proposée par Ostashev *et al.* (2007).

Il a été noté dans la communauté de la propagation des ondes électromagnétiques (Young *et al.*, 1995) et par Cotté *et al.* (2009) que les constantes de temps associées aux pôles ne devaient pas être trop petites par rapport aux autres constantes de temps du calcul. C'est en particulier le cas ici avec le pas de temps. En effet, si les constantes de temps associées à des pôles sont beaucoup plus faibles que le pas de temps, les contributions associées à ces pôles ne seront pas « vues » par le code de résolution. Ainsi, on a représenté sur la figure 1.12 l'allure de la fonction  $z_k(t)$  pour différentes valeurs du paramètre  $\lambda\Delta t$ . Le temps  $t$  a été discrétisé aux temps correspondants aux sous-étapes de l'algorithme de Runge-Kutta. On peut ainsi observer que pour  $\lambda\Delta t = 5$  la réponse  $z_k(t)$  est très mal discrétisée. Pour des valeurs de  $\lambda\Delta t$  inférieures à 2.5, on commence à avoir une bonne discrétisation de la réponse.

On peut aussi remarquer que si le paramètre  $Z_S^\infty$  n'est pas pris en compte dans l'approximation de l'impédance (cf. Eq. 1.38), l'approximation par la fraction rationnelle peut avoir des coefficients  $\lambda_k$ ,  $\alpha_l$  et  $\beta_l$  importants afin d'avoir des constantes de temps petites pour reproduire la réponse instantanée du sol.

Enfin, on peut noter que si un pôle  $\lambda_k$  tend vers 0, l'équation d'avancement des accumulateurs devient :

$$\phi_k^{(n)} = v_n^{(n)} \Delta t + \phi_k^{(n-1)}, \quad (1.48)$$

qui correspond numériquement à l'équation  $\partial \phi_k / \partial t = v_n$ . Cela est en accord avec la contribution dans le domaine fréquentiel qui est donnée par  $Z_k(\omega) = A_k / (-i\omega)$  pour  $\lambda_k = 0$  et qui correspond

donc à une intégration temporelle. La réponse impulsionnelle associée est alors  $r(t) = A_k H(t)$ . On pourra donc ajouter ce terme simplement dans la condition limite d'impédance dans le domaine temporel si cela est nécessaire. On retrouve aussi une contribution présente dans la condition limite d'impédance dans le domaine temporel proposée par Rienstra (2006) pour un résonateur d'Helmholtz, où un terme proportionnel à  $1/(-i\omega)$  est utilisé. Récemment, suivant les travaux de Reymen *et al.* (2006), Li *et al.* (2011) ont proposé une condition limite similaire à celle utilisée ici prenant aussi en compte une contribution en  $1/(-i\omega)$ .

### 1.2.2 Modèles d'impédance

Deux modélisations différentes pour le sol sont considérées dans la thèse. L'approximation de la réaction locale est utilisée en accord avec la formulation de la condition limite d'impédance. Dans le premier cas, un sol semi-infini sera pris en compte. L'impédance de surface est alors donnée par :

$$Z_{S,\infty} = Z_c/\Omega, \quad (1.49)$$

où  $Z_c$  est l'impédance caractéristique du milieu poreux et où  $\Omega$  est la porosité du sol. Ce paramètre représente le volume relatif occupé par l'air sur le volume total d'un échantillon de sol et est donc compris entre 0 et 1. Pour les sols naturels, la porosité  $\Omega$  est proche de 1, ce qui signifie que l'on peut considérer le sol comme un milieu fluide équivalent. D'autres paramètres physiques influent sur l'impédance caractéristique du sol. C'est ainsi le cas de la résistivité au passage de l'air, notée  $\sigma_0$ . Celle-ci est liée à la perte de charge lors de l'écoulement à travers le milieu poreux par la loi de Darcy (Taraldsen, 2005b). Elle peut prendre des valeurs comprises entre 10 kPa.s.m<sup>-2</sup> pour un sol absorbant de type neigeux jusqu'à des valeurs de 10<sup>5</sup> kPa.s.m<sup>-2</sup> pour un sol réfléchissant de type asphalte. Un dernier paramètre appelé tortuosité a une influence non-négligeable sur les impédances des sols. Il permet de relier les propriétés microscopiques du matériau à celles macroscopiques ; concrètement, dans le cas de matériaux présentant des pores inclinés d'un angle  $\phi$  par rapport à la normale à la surface, ce paramètre noté  $q$  est égal à  $q = 1/\cos \phi$ . Une propriété générale de ce paramètre est qu'il prend des valeurs supérieures à 1.

Dans un second cas, une couche de sol sur un support acoustiquement rigide sera considérée. L'impédance de surface est alors donnée par :

$$Z_{S,d} = Z_c \coth(-ik_c d)/\Omega, \quad (1.50)$$

où  $d$  est l'épaisseur de la couche et où  $k_c$  est le nombre d'onde dans le milieu poreux. Pour une épaisseur infinie, l'impédance de surface correspond au cas d'un sol semi-infini. Pour une épaisseur nulle, elle devient infinie et correspond donc au cas d'un sol rigide. Le sol est donc caractérisé acoustiquement par deux paramètres  $k_c$  et  $Z_c$  qui peuvent être reliés à deux paramètres physiques  $\rho_g$  et  $K_g$  le module de compressibilité dynamique du milieu fluide équivalent avec les équations (Allard, 1993) :

$$Z_c = [\rho_g K_g]^{1/2}, \quad (1.51)$$

$$k_c = \omega[\rho_g/K_g]^{1/2}. \quad (1.52)$$

Notons que les effets visqueux sont généralement pris en compte par la masse volumique dynamique  $\rho_g$  alors que les effets thermiques sont reliés au module de compressibilité dynamique  $K_g$ .

Les différents modèles d'impédance utilisés par la suite sont présentés ci-après. Une discussion est proposée afin de déterminer les modèles physiquement admissibles dans l'annexe A.

### Modèles de type produit de racines

De très nombreux modèles d'impédance utilisés pour la propagation acoustique en milieu extérieur peuvent s'écrire sous la forme de produit de fonctions de type racine :

$$Z_c = \rho_0 c_0 q \alpha \left(1 + \frac{\omega_1}{-i\omega}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\omega_2}{-i\omega}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\omega_3}{-i\omega}\right)^{-1/2}, \quad (1.53)$$

$$-ik_c = \frac{-i\omega q}{c_0} \beta \left(1 + \frac{\omega_1}{-i\omega}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\omega_2}{-i\omega}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{\omega_3}{-i\omega}\right)^{1/2}, \quad (1.54)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega_i$  sont tous des réels positifs.

#### Modèle de Zwikker et Kosten

Le modèle de Zwikker et Kosten (1949) est obtenu à partir d'équations de propagation acoustique dans le sol. Il prend en compte 3 paramètres physiques, mais ne dépend en réalité que de deux paramètres numériques. Les coefficients de ce modèle sont :

$$\alpha^{\text{ZK}} = \beta^{\text{ZK}} = 1, \quad \omega_1^{\text{ZK}} = \frac{\sigma_0 \Omega}{\rho_0 q^2}, \quad \omega_2^{\text{ZK}} = \omega_3^{\text{ZK}} = 0 \quad (1.55)$$

D'autres auteurs (Ostashev *et al.*, 2007) ont proposé une modification de la pulsation  $\omega_1$  pour obtenir un comportement plus réaliste de ce modèle en hautes fréquences :

$$\omega_1^{\text{Ost}} = \frac{\sigma_0 \Omega}{\rho_0 q^2 \gamma}. \quad (1.56)$$

Enfin, Taraldsen et Jonasson (2011) ont proposé récemment un modèle d'impédance du même type à partir de la loi de Darcy. Les coefficients s'écrivent alors :

$$\alpha^{\text{TJ}} = \gamma^{-1/2}, \quad \beta^{\text{TJ}} = \gamma^{1/2}, \quad \omega_1^{\text{TJ}} = \frac{\sigma_0 \Omega}{\rho_0 q^2}, \quad \omega_2^{\text{TJ}} = \omega_3^{\text{TJ}} = 0. \quad (1.57)$$

Ce modèle diffère donc peu du modèle de Zwikker et Kosten. Par contre, les auteurs proposent une relation entre les paramètres  $\Omega/q$  et  $\sigma_0/q$  ce qui permet d'avoir un modèle qui a autant de paramètres que d'inconnues.

#### Modèle d'Attenborough

Le modèle d'Attenborough à 4 paramètres (Attenborough, 1985) considéré ici est dérivé d'un modèle plus complexe basé sur la propagation dans les pores du matériau. Pour des résistivités au passage de l'air élevées, ce modèle peut s'écrire sous la forme proposée ci-dessus et les coefficients sont alors égaux à :

$$\alpha^{\text{Att}} = \frac{4}{3}(\lambda\gamma)^{-1/2}, \quad \beta^{\text{Att}} = (\lambda\gamma)^{1/2}, \quad \omega_1^{\text{Att}} = \frac{3s_f^2\sigma_0\Omega}{4\rho_0q^2}, \quad \omega_2^{\text{Att}} = \omega_1^{\text{Att}}, \quad \omega_3^{\text{Att}} = \frac{s_f^2\sigma_0\Omega}{\rho_0\lambda q^2}, \quad (1.58)$$

où  $s_f$  est un paramètre supplémentaire appelé facteur de formes des pores. Le coefficient  $\lambda$  est donné par :

$$\lambda = \left(\frac{4}{3} - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\right) N_{\text{Pr}}, \quad (1.59)$$

avec le nombre de Prandtl  $N_{\text{Pr}}$ . Il peut être noté que  $\alpha$  est très proche de 1 et que pour des hautes fréquences, le modèle d'Attenborough donne une valeur comparable aux autres modèles

d'impédance. Enfin, on peut remarquer que ce modèle a besoin de 4 paramètres physiques mais ne dépend que de 3 paramètres numériques.

*Modèle d'Hamet et Bérenghier*

Le modèle d'Hamet et Bérenghier (Bérenghier *et al.*, 1997) est un modèle phénoménologique initialement développé pour modéliser le comportement acoustique des asphaltes poreux. Les coefficients proposés sont :

$$\alpha^{\text{HB}} = \beta^{\text{HB}} = 1, \quad \omega_1^{\text{HB}} = \frac{\sigma_0 \Omega}{\rho_0 q^2}, \quad \omega_2^{\text{HB}} = \frac{\sigma_0}{\rho_0 N_{\text{Pr}}}, \quad \omega_3^{\text{HB}} = \frac{\gamma \sigma_0}{\rho_0 N_{\text{Pr}}}. \quad (1.60)$$

Ce modèle sera utilisé par la suite pour modéliser l'impédance du ballast.

*Transcription dans le domaine temporel*

Afin de comprendre physiquement l'effet de l'impédance sur la réponse du sol, il est intéressant de calculer la réponse impulsionnelle de l'impédance de surface. Wilson *et al.* (2006) ont ainsi réalisé ce calcul pour le modèle d'impédance d'un sol semi-infini avec le modèle de Zwikker et Kosten :

$$r_{S,\infty}^{\text{ZK}}(t) = \frac{\rho_0 c_0 q}{\Omega} \alpha \left[ \delta(t) + \frac{\omega_1}{2} \exp\left(-\frac{\omega_1 t}{2}\right) \left( I_0\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) + I_1\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) \right) \mathbf{H}(t) \right], \quad (1.61)$$

où les fonctions  $I_0$  et  $I_1$  sont les fonctions de Bessel modifiées du premier type. On retrouve donc une réponse de type relaxation qui décroît exponentiellement avec le temps.

**Modèles de type polynôme**

Les modèles d'impédance de type polynôme sont parmi les plus utilisés, notamment parce qu'ils mettent en oeuvre peu de paramètres. Ils permettent ainsi de caractériser simplement l'impédance d'un sol dont les propriétés acoustiques sont peu connues. Leur utilisation est restreinte à des matériaux dont la porosité est proche de 1 : on prendra ainsi par la suite  $\Omega = 1$ . Ce sont des modèles empiriques obtenus en cherchant à approximer les résultats de mesures d'impédance et de nombres d'onde pour de nombreux matériaux poreux par des lois puissances. La forme la plus usitée s'écrit :

$$Z_c = \rho_0 c_0 \left[ 1 + a \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^b + ic \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^d \right], \quad (1.62)$$

$$-ik_c = \frac{-i\omega}{c_0} \left[ 1 + p \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^q + ir \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^s \right], \quad (1.63)$$

où  $\omega_0 = \sigma_0/\rho_0$  avec  $\rho_0 = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}$ . Le modèle ci-dessus est écrit dans la littérature plutôt avec la seule variable  $f/\sigma_0$ . On utilise ici la variable  $\omega_0/\omega$  à la fois pour avoir une variable adimensionnée et pour montrer que cette pulsation  $\omega_0$  se retrouve dans les autres modèles d'impédance. En effet, la pulsation  $\omega_0$  correspond à une pulsation des modèles de Zwikker et Kosten, de Taraldsen et Johansson et d'Hamet et Bérenghier en fixant  $\Omega = 1$  et  $q = 1$ . Pour les sols dont la porosité n'est pas égale à 1, il a été proposé (Embleton *et al.*, 1983) de remplacer la résistivité au passage de l'air  $\sigma_0$  par  $\sigma_e = \Omega \sigma_0$  appelé résistivité effective au passage de l'air, ce qui est en accord avec l'expression des pulsations des différents modèles avec  $q = 1$ . Par la suite, on réservera l'épithète « effectif » aux paramètres physiques qui n'ont pas été directement mesurés mais qui permettent de reproduire avec un modèle d'impédance donné l'évolution avec la fréquence de l'impédance de surface mesurée.

### Modèle de Delany-Bazley

Les coefficients proposés par Delany et Bazley (1970) sont :

$$a_{\text{DB}} = 0.233, \quad c_{\text{DB}} = 0.298, \quad b_{\text{DB}} = 0.75, \quad d_{\text{DB}} = 0.73, \quad (1.64)$$

$$p_{\text{DB}} = 0.353, \quad r_{\text{DB}} = 0.195, \quad q_{\text{DB}} = 0.70, \quad s_{\text{DB}} = 0.59. \quad (1.65)$$

Ce modèle bien qu'utilisé dans de nombreuses études (Heutschi *et al.*, 2005) n'est pas physiquement admissible autant pour modéliser un sol semi-infini (Miki, 1990) que pour modéliser une couche sur support rigide (Cotté *et al.*, 2009). D'autres coefficients pour ce type de modèle ont été proposés par Allard (1993).

### Modèle de Miki

Une modification des coefficients a été proposée par Miki (1990) pour rendre le modèle de Delany-Bazley physiquement admissible. Les coefficients sont ainsi :

$$a_{\text{M}} = 0.250, \quad c_{\text{M}} = 0.384, \quad b_{\text{M}} = 0.632, \quad d_{\text{M}} = b_{\text{M}}, \quad (1.66)$$

$$p_{\text{M}} = 0.382, \quad r_{\text{M}} = 0.559, \quad q_{\text{M}} = 0.618, \quad s_{\text{M}} = q_{\text{M}}. \quad (1.67)$$

Il peut être réécrit sous la forme (Cotté *et al.*, 2009) :

$$Z_c^{\text{M}} = \rho_0 c_0 \left[ 1 + \mu_{\text{M}} \left( \frac{\omega_0}{-i\omega} \right)^{b_{\text{M}}} \right], \quad (1.68)$$

$$-ik_c^{\text{M}} = \frac{-i\omega}{c_0} \left[ 1 + \nu_{\text{M}} \left( \frac{\omega_0}{-i\omega} \right)^{q_{\text{M}}} \right], \quad (1.69)$$

avec  $\mu_{\text{M}} = 0.459$  et  $\nu_{\text{M}} = 0.673$ . Le modèle d'impédance d'une couche semi-infinie est bien physiquement admissible. Cependant, le modèle d'une couche sur support rigide n'est plus passif. Cela est montré dans l'annexe A.

Nous proposons une modification du modèle de Miki pour avoir aussi un modèle d'une couche sur support rigide physiquement admissible :

$$Z_c^{\text{Mb}} = \rho_0 c_0 \left[ 1 + \mu_{\text{Mb}} \left( \frac{\omega_0}{-i\omega} \right)^{b_{\text{M}}} \right], \quad (1.70)$$

$$-ik_c^{\text{Mb}} = \frac{-i\omega}{c_0} \left[ 1 + \nu_{\text{Mb}} \left( \frac{\omega_0}{-i\omega} \right)^{b_{\text{M}}} \right], \quad (1.71)$$

avec  $\mu_{\text{Mb}} = \mu_{\text{M}} = 0.459$  et  $\nu_{\text{Mb}} = \gamma \mu_{\text{Mb}}$ .

Un exemple de la non passivité des modèles de Delany-Bazley et de Miki d'une couche sur support rigide est présenté sur la figure 1.13. Le choix des paramètres est  $\sigma_e = 100 \text{ kPa.s.m}^{-2}$  et  $d = 0.01 \text{ m}$ . On peut ainsi observer que le modèle de Delany-Bazley a une partie réelle négative pour des fréquences inférieures à 300 Hz. Le modèle de Miki permet d'améliorer ce comportement mais donne toujours une partie réelle négative pour des fréquences inférieures à 30 Hz. Enfin, le modèle de Miki modifié est bien passif en basse fréquence.

### Transcription dans le domaine temporel

Pour les modèles de type polynômes pour un sol semi-infini, on peut calculer analytiquement la réponse impulsionnelle associée à l'impédance de surface. Pour cela, on utilise la transformée



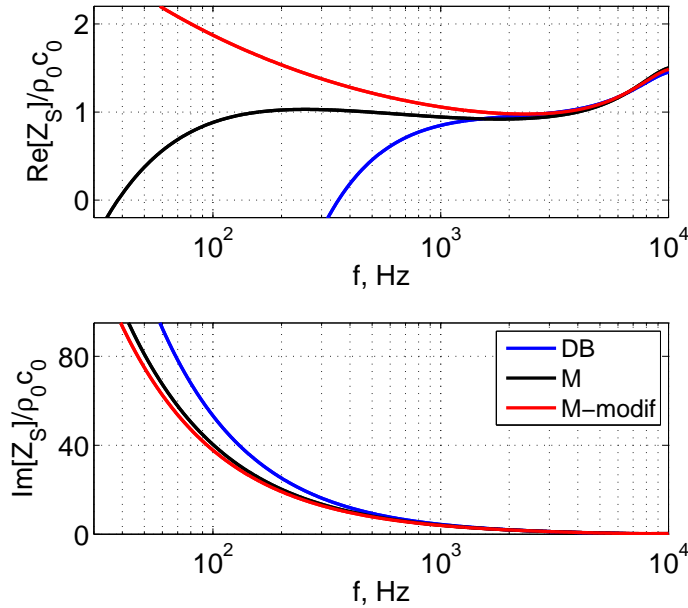


Figure 1.13 – Parties réelle et imaginaire de l’impédance d’une couche de résistivité au passage de l’air  $\sigma_0 = 100 \text{ kPa.s.m}^{-2}$  et d’épaisseur  $d = 0.01 \text{ m}$  obtenue avec les modèles de Delany-Bazley, de Miki et de Miki modifié en fonction de la fréquence.

de Fourier suivante (équation 3.381.5 dans Gradshteyn et Ryzhik (1980)) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^{1-\nu}} H(t) \exp(i\omega t) dt = \Gamma(\nu) \frac{1}{(-i\omega)^\nu}, \quad (1.72)$$

valable pour  $\nu$  compris entre 0 et 1. On retrouve alors pour le modèle de Miki (Cotté *et al.*, 2009) :

$$r_{S,\infty}^M = \rho_0 c_0 \left[ \delta(t) + \frac{\mu_M}{\Gamma(b_M)} \frac{\omega_0}{(\omega_0 t)^{1-b_M}} H(t) \right]. \quad (1.73)$$

On obtient de même pour le modèle de Delany et Bazley :

$$r_{S,\infty}^{DB} = \rho_0 c_0 \left[ \delta(t) + (-i)^{b_{DB}} \frac{a_{DB}}{\Gamma(b_{DB})} \frac{\omega_0}{(\omega_0 t)^{1-b_{DB}}} H(t) - (-i)^{d_{DB}+1} \frac{c_{DB}}{\Gamma(d_{DB})} \frac{\omega_0}{(\omega_0 t)^{1-d_{DB}}} H(t) \right]. \quad (1.74)$$

Le résultat permet de noter que le modèle de Miki est bien réel et causal, comme cela était voulu par construction. On retrouve aussi que le modèle de Delany et Bazley ne vérifie pas la condition de réalité. Par contre, il est intéressant de noter que le modèle de Delany et Bazley est causal. Ces différentes propriétés sont retrouvées dans le domaine fréquentiel dans l’annexe A.

### Autres modèles

Les modèles présentés ci-dessus sont les modèles les plus couramment utilisés pour caractériser acoustiquement les sols naturels. On pourra aussi citer le modèle d’impédance proposé par Wilson (1993). Des modèles plus complexes basés sur la modélisation du milieu poreux avec différentes géométries existent dans la littérature (Attenborough, 1985; Allard, 1993; Champoux et Stinson, 1992) mais sont peu employés dans la communauté de la propagation acoustique en milieu extérieur.

### 1.2.3 Obtention des coefficients

On a pu voir dans la partie 1.2.1 que la formulation proposée pour la condition limite d'impédance nécessite une approximation du modèle d'impédance, dans le domaine fréquentiel, par une fraction rationnelle. Différentes méthodes ont été développées par Cotté *et al.* (2009). Elles sont ainsi brièvement rappelées dans cette partie. Une autre méthode basée sur des approximants de Padé est aussi proposée.

#### Vector Fitting

La méthode de Vector Fitting (Gustavsen et Semlyen, 1999) est une méthode itérative qui permet de trouver à partir d'un vecteur de données dans le domaine fréquentiel, une fonction rationnelle représentant la loi d'évolution du vecteur. Elle est donc intéressante puisqu'elle n'a pas besoin d'une formulation analytique pour le vecteur d'entrée. De plus, elle n'a besoin que de quelques itérations pour arriver à un optimum ; le calcul est donc quasiment immédiat. Elle donne en sortie des pôles réels ou complexes conjugués avec une partie réelle positive. Par contre, elle ne permet pas a priori de contrôler la valeur maximale des parties réelle et imaginaire des pôles obtenus, ce qui comme décrit dans la partie 1.2.1 peut amener à des problèmes numériques.

#### Optimisation dans le domaine fréquentiel

Une seconde méthode consiste à réaliser une optimisation sous contrainte de l'impédance  $Z_S$  pour trouver des coefficients permettant de minimiser une certaine fonction coût. Il est à noter qu'on ne peut pas faire d'optimisation sur la seule partie réelle ou imaginaire puisque cela n'assure pas que la fonction complexe soit elle bien approximée. L'idée utilisée ici est de trouver les coefficients du modèle d'impédance  $A_k, \lambda_k, B_l, C_l, \alpha_l$  et  $\beta_l$  pour minimiser l'écart entre la partie réelle de  $Z_S$  et la partie réelle de l'approximation  $Z_S^M$  tout en contraignant la partie imaginaire de  $Z_S^M$  obtenue de n'être pas trop loin de celle de  $Z_S$ . Cela revient donc à minimiser la fonction scalaire réelle  $f$  :

$$f(A_k, \lambda_k, B_l, C_l, \alpha_l, \beta_l) = \sum_{j=1}^{N_s} (\operatorname{Re}[Z_S^M(\omega_j)] - \operatorname{Re}[Z_S(\omega_j)])^2, \quad (1.75)$$

avec les contraintes :

– sur la partie imaginaire :

$$1. \quad |\operatorname{Im}[Z_S^M(\omega_j)] - \operatorname{Im}[Z_S(\omega_j)]| \leq \epsilon \text{ pour tous les } \omega_j, \quad (1.76)$$

– sur les pôles :

$$\begin{aligned} 2. \quad & \operatorname{Re}[\lambda_i] \geq 0, \\ 3. \quad & \operatorname{Re}[\lambda_i] \Delta t \leq \text{thres}, \\ 4. \quad & |\operatorname{Im}[\lambda_i] \Delta t| \leq \text{thres}. \end{aligned} \quad (1.77)$$

La minimisation se fait donc sur un vecteur de  $N_s$  fréquences, réparties sur l'intervalle fréquentiel d'intérêt, qui est fixé à l'initialisation de l'algorithme. Le nombre de pôles réels et de pôles complexes conjugués est lui aussi choisi au départ de l'optimisation. Le paramètre  $\Delta t/\text{thres}$  correspond à la valeur minimale admissible pour les constantes de temps associées aux pôles. Cotté *et al.* (2009) proposent une valeur  $\text{thres} = 2.5$ , qui sera aussi utilisée ici. Le coefficient  $\epsilon$  fixe l'écart admissible entre les parties imaginaires de  $Z_S$  et de son approximation. On prendra ici pour valeur au départ de l'algorithme  $\epsilon = Z_S^\infty$ .

Cette méthode appliquée au seul cas de pôles réels a permis à Cotté *et al.* (2009) d'obtenir une approximation du modèle de Miki d'une couche sur support rigide pour des fréquences allant jusqu'à 1200 Hz. Le problème principal de cette méthode est le choix des paramètres au départ de l'optimisation qui a un rôle important dans les résultats obtenus. Cotté *et al.* proposent de choisir au hasard au départ de nombreux jeux de coefficients et de réaliser une optimisation pour chacun de ces jeux. Le meilleur jeu de coefficients obtenu est ensuite utilisé comme jeu de coefficients initial pour une dernière optimisation. Cette approche peut se révéler coûteuse en terme de temps de calcul, notamment dans le cas où un nombre de pôles important est nécessaire. Ainsi, pour réduire celui-ci, on peut utiliser les coefficients fournis par un premier calcul avec les deux autres méthodes proposées comme jeu de coefficients initial pour l'optimisation.

### Approximant de Padé

Nous proposons une dernière méthode basée sur un approximant de Padé du modèle d'impédance de surface. C'est un cas particulier d'approximation par une fraction rationnelle d'une fonction pour laquelle les coefficients de l'approximation sont calculés afin que les coefficients de Taylor de la fonction et de l'approximant soient égaux au point de l'approximation. C'est donc une méthode locale dans le sens que l'erreur croît lorsqu'on s'éloigne du point auquel a été réalisée l'approximation ; néanmoins, cette méthode a souvent des domaines de convergence très importants. Elle est aussi différente de la méthode appelée « Padé approximant » dans Ostashev *et al.* (2007) qui correspond en réalité à une approximation classique par une fraction rationnelle, où les coefficients de l'approximation ont été obtenus en minimisant l'erreur sur un intervalle donné. La méthode d'approximation de Padé ainsi que le calcul des coefficients de l'approximant sont décrits plus en détail dans la partie 2.1.2 où un approximant de Padé est aussi utilisé.

Le premier problème rencontré est que l'impédance est une fonction complexe de la variable  $\omega$ . Les coefficients de l'approximant de Padé de  $Z_S(\omega)$  sont donc aussi complexes et on n'obtiendra donc pas a priori des pôles réels et des pôles complexes conjugués. Comme remarqué au début du chapitre, pour les modèles réels,  $Z_S$  est une fonction à coefficients réels de la variable  $s = -i\omega$ . On pourra donc réaliser un approximant de Padé de  $Z_S(s)$ , qui aura ainsi des pôles réels et complexes conjugués. Le second problème est que les modèles d'impédance ont une limite infinie en  $\omega = 0$ . L'approximant de Padé est alors réalisé non pas en  $s = 0$  mais en  $s = s_0$  décalé sur l'axe des réels positifs. Celui-ci s'écrit alors :

$$Z_S^M(s) = \frac{a_0 + a_1(s - s_0) + \dots + a_{M-1}(s - s_0)^{M-1}}{1 + b_1(s - s_0) + \dots + b_M(s - s_0)^M} + Z_S^\infty \quad (1.78)$$

Le calcul numérique des différents coefficients de l'approximation est là aussi immédiat. Comme pour la méthode du Vector Fitting, on ne peut pas contrôler la valeur prise par les pôles. Néanmoins, puisqu'on obtient un jeu de coefficient pour chaque pulsation  $s_0$ , on peut déterminer facilement la pulsation  $s_0$  telle que le jeu de coefficients associé minimise l'erreur, choisie pour cette méthode, sur la valeur absolue de  $Z_S$  tout en vérifiant la contrainte sur la valeur minimale admissible pour les constantes de temps.

#### 1.2.4 Validation sur un cas uni-dimensionnel

On reprend dans cette partie le cas-test unidimensionnel proposé par Cotté *et al.* (2009) sur un intervalle fréquentiel entre 50 Hz et 8000 Hz, qui correspond à l'intervalle d'intérêt pour le bruit d'origine ferroviaire. Dans l'étude de Cotté *et al.*, la limite haute fréquence était fixée à 1200 Hz. Le but est de montrer ici que la formulation proposée permet de prendre en compte la plupart des

types de sols rencontrés en propagation en milieu extérieur, sous l'hypothèse de la réaction locale. On évaluera aussi dans ces différents cas les méthodes d'obtention de coefficients. On s'intéressera donc à trois modèles d'impédance différents :

- un sol très réfléchissant modélisé par un modèle de Miki d'un sol semi-infini avec une résistivité au passage de l'air  $\sigma_0 = 5.10^4$  kPa.s.m<sup>-2</sup>,
- un sol absorbant de type herbeux modélisé par un modèle de Miki d'une couche de résistivité au passage de l'air  $\sigma_0 = 100$  kPa.s.m<sup>-2</sup> et d'épaisseur  $d = 0.01$  m sur support rigide,
- une couche de ballast d'épaisseur 0.68 m modélisée avec le modèle d'Hamet et Bérenghier. Ce modèle provient de mesures indirectes d'impédance de surface d'une couche de ballast et sera décrit plus en détail dans la partie 3.5.1. Les paramètres de ce modèle sont  $\Omega = 0.6$  et  $q = 1.4$  et  $\sigma_0 = 0.4$  kPa.s.m<sup>-2</sup>.

On considère donc un domaine de  $N_x = 101$  points avec une impulsion à support gaussien placée au centre de celui-ci. Le pas spatial est choisi à  $\Delta x = 0.0075$  m et le nombre CFL est fixé à 1. Dans les deux premiers cas, on évalue les méthodes d'obtention des coefficients de l'approximation. Le paramètre d'intérêt est ici l'erreur maximale commise  $\max(e_{\text{num}}(t))$  entre la pression obtenue par le calcul numérique et la pression obtenue par une solution analytique avant que l'onde réfléchie sorte du domaine numérique, c'est-à-dire avant  $t = 140\Delta t$ . L'erreur  $e_{\text{num}}$  est définie par :

$$\text{err}[e_{\text{num}}(t)] = \left[ \frac{\sum_{i=1}^{N_x} (p_{\text{ana}}(t, x_i) - p_{\text{num}}(t, x_i))^2}{\sum_{i=1}^{N_x} p_{\text{ana}}(t, x_i)^2} \right]^{1/2}. \quad (1.79)$$

### Sol réfléchissant

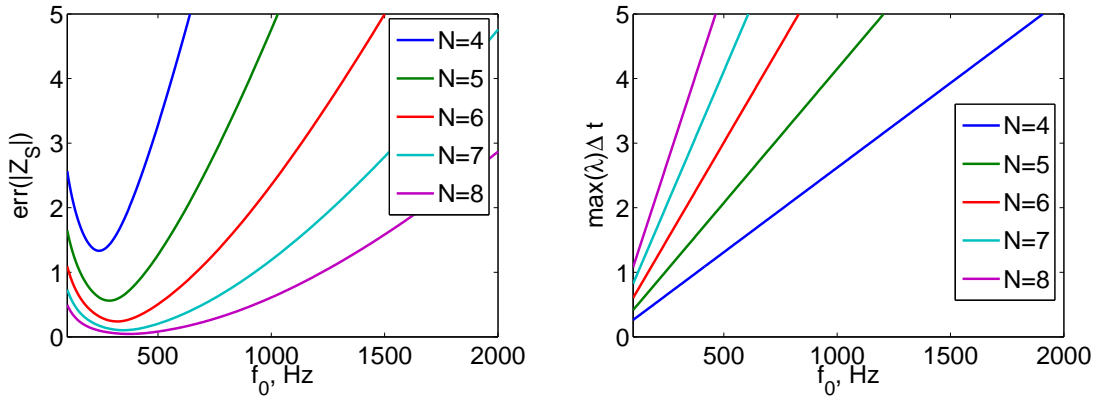


Figure 1.14 – (gauche) Erreur sur la valeur absolue commise avec l'approximation de Padé  $\text{err}[|Z_S|]$  en fonction du nombre de pôles  $N$  choisis et de la fréquence à laquelle est calculée l'approximation  $f_0$ . (droite) Valeur maximale des pôles obtenues.

On considère ici un modèle de Miki de sol réfléchissant avec une résistivité de  $5.10^3$  kPa.s.m<sup>-2</sup>. Le modèle d'impédance de surface correspondant est approximé avec les différentes méthodes vues dans la section précédente. Pour la méthode Vector Fitting et la méthode d'optimisation, le vecteur de données d'entrée est calculé pour  $N_\omega = 100$  fréquences réparties logarithmiquement entre 50 Hz et 8000 Hz. Puisque l'impédance varie en première approximation comme l'inverse d'une fonction puissance (typiquement en  $1/\sqrt{-i\omega}$ ), cette dépendance logarithmique permet de bien prendre en compte les variations de  $Z_S(\omega)$ . On calculera donc les erreurs commises avec l'approximation de

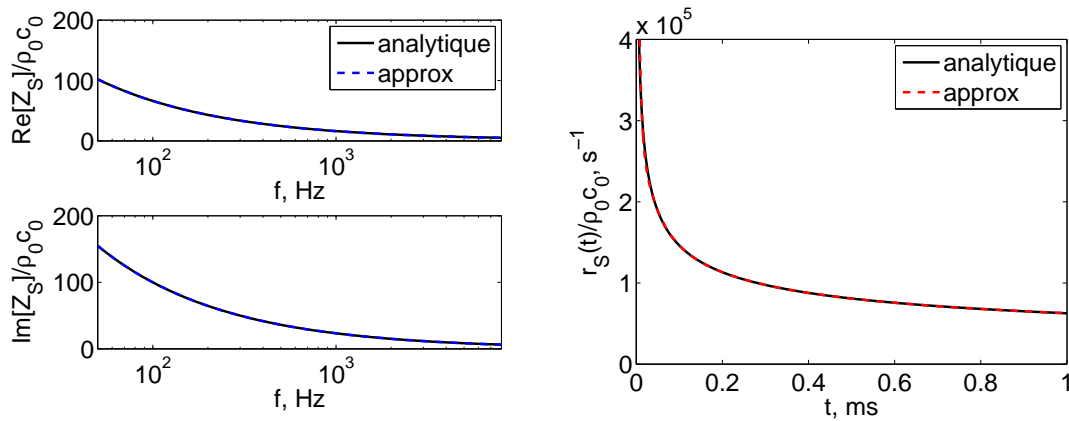


Figure 1.15 – (gauche) Parties réelle et imaginaire de l’impédance de surface d’un sol semi-infini avec une résistivité de  $5.10^3$  kPa.s.m<sup>-2</sup> pour un modèle de Miki obtenue analytiquement (en ligne noire) et de son approximation pour un jeu de coefficient (en ligne bleue). (droite) Partie continue de la réponse impulsionnelle en fonction du temps correspondant au modèle d’impédance de surface (en ligne noire) et de l’approximation de celui-ci (en ligne rouge).

l’impédance de surface sous la forme :

$$\text{err}[u_{\text{num}}] = \left[ \frac{\sum_{i=1}^{N_\omega} (u_{\text{ana}}(\omega_i) - u_{\text{num}}(\omega_i))^2}{\sum_{i=1}^N u_{\text{ana}}(\omega_i)^2} \right]^{1/2}. \quad (1.80)$$

On réalise une première approximation avec la méthode des approximants de Padé avec un nombre de pôles compris entre 4 et 8. Tous les pôles sont réels. On a tracé sur la figure 1.14 l’erreur sur la valeur absolue de l’impédance pour les différents jeux de coefficients obtenus en fonction de la fréquence de calcul  $f_0 = s_0/2\pi$  et du nombre  $N$  de pôles voulus. On peut donc remarquer que toutes les courbes présentent un minimum à une fréquence  $f_0$  qui croît avec le nombre de pôles. On peut aussi noter qu’augmenter le nombre de pôles permet de diminuer la plus petite valeur obtenue pour l’erreur. La valeur maximale des pôles pour ces jeux de coefficients est aussi représentée sur la même figure. Dans ce cas, cette valeur maximale croît à peu près linéairement avec le fréquence  $f_0$ . Elle croît aussi avec le nombre de pôles choisis.

D’autres jeux de coefficients sont obtenus avec la méthode Vector Fitting pour un nombre de pôles compris entre 4 et 8. Enfin, ces coefficients sont utilisés comme coefficients initiaux pour la méthode d’optimisation dans le domaine fréquentiel. Lors de l’optimisation, on vise à obtenir la valeur de  $\max(\lambda\Delta t)$  la plus faible possible tout en assurant une erreur sur la valeur absolue, sur la partie réelle et sur la partie imaginaire de  $Z_S$  à peu près équivalente. L’erreur commise sur la valeur absolue, les parties réelles et imaginaires ainsi que la valeur maximale de  $\lambda\Delta t$  sont données dans le Tableau 1.1. On retrouve le fait qu’augmenter le nombre de pôles permet d’avoir une meilleure approximation du modèle d’impédance de surface mais que celui-ci s’accompagne aussi d’une augmentation de la valeur de  $\max(\lambda\Delta t)$ . Notons que 7 pôles suffisent pour avoir une erreur quasiment nulle sur l’approximation.

On a représenté sur la figure 1.15, un exemple d’approximation de l’impédance de surface obtenue ici avec la méthode Vector Fitting en utilisant 6 pôles. Pour ce cas simple, on voit que l’on a une très bonne approximation dans le domaine fréquentiel. On a aussi représenté la réponse impulsionnelle associée à l’impédance de surface  $r_S(t)$  et à son approximation  $r_S^M(t)$ , auxquelles

Tableau 1.1 – Paramètres des coefficients obtenus pour l'approximation du modèle d'impédance de Miki d'un sol semi-infini avec une résistivité de  $5.10^3$  kPa.s.m<sup>-2</sup> avec les différentes méthodes pour un nombre de pôles compris entre 4 et 8.

	max( $\lambda$ ) $\Delta t$			err[ $ Z_S $ ] %			err[Re $Z_S$ ] %			err[Im $Z_S$ ] %		
	Padé	Vfit	Opt	Padé	Vfit	Opt	Padé	Vfit	Opt	Padé	Vfit	Opt
S4	0.6	1.1	0.8	1.3	0.7	0.9	1.2	0.8	1.0	1.5	0.7	0.8
S5	1.2	1.9	1.5	0.6	0.2	0.2	0.6	0.3	0.2	0.5	0.2	0.2
S6	1.9	3.0	1.9	0.3	0.1	0.2	0.4	0.1	0.2	0.2	0.0	0.2
S7	2.9	4.3	2.3	0.1	0.0	0.1	0.2	0.0	0.1	0.1	0.0	0.1
S8	4.0	5.8	2.3	0.1	0.0	0.1	0.1	0.0	0.1	0.1	0.0	0.1

on a enlevé le terme en  $\delta(t)$ , en fonction du temps. Il est à noter que ces deux réponses sont à peu près égales.

Tableau 1.2 – Erreur obtenue suivant le jeu de coefficient choisi.

	max[ $e_{\text{num}}$ ] %		
	Padé	Vfit	Opt
S4	2.2	2.2	2.2
S5	2.4	2.4	2.3
S6	2.5	2.6	2.5
S7	2.6	2.6	2.5
S8	2.7	2.6	2.5

Pour tous les jeux de coefficients testés ici, l'implémentation de la condition d'impédance sur la pression rend le calcul instable. Il est par contre stable si on utilise l'implémentation sur la vitesse normale. La valeur maximale de l'erreur  $e_{\text{num}}$  obtenue avec les différents jeux de coefficients est donnée dans le tableau 1.2. On retrouve le fait qu'avoir une meilleure approximation de l'impédance ne permet pas toujours d'avoir une erreur plus faible sur la pression. Néanmoins, on peut remarquer que tous les jeux de coefficients donnent à peu près la même erreur quelle que soit la méthode d'obtention des coefficients choisie.

### Sol absorbant

On considère maintenant le modèle d'impédance de surface d'une couche de résistivité 100 kPa.s.m<sup>-2</sup> et d'épaisseur 0.01 m sur support rigide. Les mêmes méthodes sont mises en oeuvre pour un nombre de pôles  $N$  compris entre 4 et 8. Comme pour le cas précédent, on a représenté sur la figure 1.16, l'erreur sur la valeur absolue et le minimum pris par les constantes de temps pour des jeux de coefficients calculés avec la méthode de l'approximant de Padé. Il est à noter que sur certains intervalles, au moins un des pôles a une partie réelle négative ; par exemple, c'est ainsi le cas pour  $N = 8$  sur un intervalle compris entre  $f_0 \approx 750$  Hz et  $f_0 \approx 1700$  Hz. Les résultats cor-

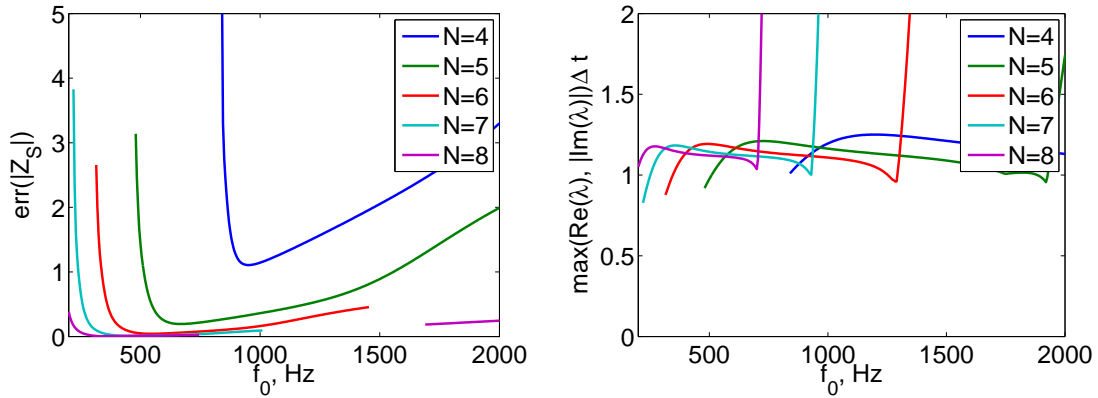


Figure 1.16 – (gauche) Erreur sur la valeur absolue commise avec l’approximation de Padé  $\text{err}[|Z_S|]$  en fonction du nombre de pôles  $N$  choisi et de la fréquence à laquelle est calculée l’approximation  $f_0$ . (droite) Valeur maximale des pôles obtenus.

respondants à ces pôles n’ont pas été représentés. Il est à aussi à noter que l’approximation donne pour chaque jeu de coefficient, deux pôles complexes conjugués. Comme pour le cas précédent, l’erreur sur la valeur absolue décroît avec le nombre de pôles et présente un minimum pour un  $f_0$  donné. La valeur du minimum des constantes de temps est, elle, relativement constante sur l’intervalle des fréquences de calculs considéré ici. De plus la valeur minimale atteinte par les constantes diminue peu lorsque le nombre de pôles augmente.

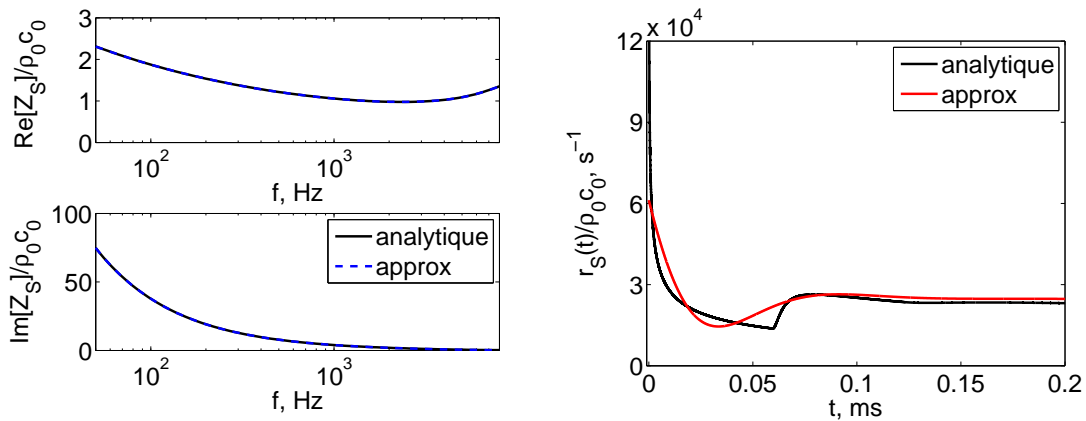


Figure 1.17 – (gauche) Parties réelle et imaginaire de l’impédance de surface d’une couche de résistivité de  $100 \text{ kPa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$  et d’épaisseur  $0.01 \text{ m}$  sur support rigide pour un modèle de Miki obtenues analytiquement (en ligne noire) et de son approximation pour un jeu de coefficient (en ligne bleue). (droite) Partie continue de la réponse impulsionnelle en fonction du temps correspondant au modèle d’impédance de surface (en ligne noire) et de l’approximation de celui-ci (en ligne rouge).

La méthode de Vector Fitting est appliquée comme précédemment. Là encore, pour chaque jeu de coefficients, on obtient deux pôles complexes conjugués. La méthode d’optimisation prend pour jeu de coefficients initial les coefficients obtenus avec la méthode Vector Fitting en gardant ces deux pôles complexes conjugués. Les valeurs prises par l’erreur sur la valeur absolue de  $Z_S$  et par

le minimum des constantes de temps pour les différents calculs sont données dans le tableau 1.3. Il est à noter là encore que les différentes méthodes donnent des résultats très comparables. Sur la figure 1.17, on a représenté le modèle d'impédance de surface ainsi que son approximation en fonction de la fréquence. On a aussi représenté les parties continues des deux réponses impulsionnelles correspondantes en fonction du temps. Celle correspondant à l'impédance de surface a été calculée à partir d'une transformée de Fourier inverse en vérifiant que le résultat obtenu ne dépend ni de la discrétisation fréquentielle, ni de la fréquence de coupure. Il est à noter que l'on retrouve comme pour le cas semi-infini, une décroissance exponentielle avec le temps. Cependant, on peut remarquer l'apparition d'un second pic pour  $t = 0.06$  ms qui correspond à la contribution qui s'est propagée dans la couche et réfléchiée sur le support rigide. On peut aussi noter que la réponse impulsionnelle associée à l'approximation de l'impédance ne ressemble pas à celle de l'impédance de surface, notamment au niveau de l'apparition du pic qui semble correspondre à des hautes fréquences. Cela montre que l'approche utilisée ici d'approximer l'impédance dans le domaine fréquentiel est plus performante pour des modèles complexes que celle d'approximer la réponse impulsionnelle dans le domaine temporel.

Tableau 1.3 – Paramètres des coefficients obtenus pour l'approximation du modèle d'impédance de Miki d'une couche de résistivité de  $100 \text{ kPa.s.m}^{-2}$  et d'épaisseur  $0.01 \text{ m}$  sur support rigide avec les différentes méthodes. On utilise deux pôles complexes conjugués et un nombre de pôles réels compris entre 4 et 8.

	$\max(\text{Re } \lambda,  \text{Im } \lambda )\Delta t$			err[ $ Z_S $ ] %			err[ $\text{Re } Z_S$ ] %			err[ $\text{Im } Z_S$ ] %		
	Padé	Vfit	Opt	Padé	Vfit	Opt	Padé	Vfit	Opt	Padé	Vfit	Opt
S2T1	1.2	1.3	1.0	1.2	0.2	0.3	8.9	1.8	1.5	1.1	0.1	0.3
S3T1	1.2	1.2	1.0	0.4	0.0	0.3	1.9	0.3	0.4	0.4	0.0	0.3
S4T1	1.2	1.2	1.0	0.1	0.1	0.5	0.7	0.0	0.4	0.1	0.0	0.5
S5T1	1.2	1.2	1.0	0.1	0.0	0.5	0.1	0.1	0.2	0.1	0.0	0.5
S6T1	1.2	1.3	1.0	0.1	0.0	0.5	0.1	0.0	0.1	0.1	0.0	0.5

Tableau 1.4 – Erreur obtenue suivant le jeu de coefficient choisi.

	$\max[e_{\text{num}}]$ %		
	Padé	Vfit	Opt
S2T1	2.5	3.2	3.4
S3T1	2.6	2.6	2.6
S4T1	2.5	2.6	2.5
S5T1	2.6	2.6	2.6
S6T1	2.6	2.6	2.6

Enfin, l'erreur maximale obtenue pour le calcul numérique est donnée dans le tableau 1.4 pour les différents jeux de coefficient. Notons là encore, que l'erreur dépend peu de la méthode utilisée. Ainsi, la méthode d'optimisation des coefficients ne permet pas d'améliorer l'erreur commise par



rapport à la méthode Vector Fitting. On peut aussi remarquer que l'erreur varie peu si on augmente le nombre de pôles pour l'approximation,

### Couche de ballast

Pour ce dernier cas, on considère une couche de ballast d'épaisseur 0.68 m sur un support rigide. Les mesures réalisées sur le site de l'IFSTTAR à Bouguenais et décrites dans la partie 3.5.1 ont permis de déterminer les paramètres effectifs du modèle d'Hamet et Bérenghier pour modéliser l'impédance de la couche de ballast. Les coefficients obtenus sont une tortuosité effective  $q_e = 1.4$ , une porosité effective  $\Omega = 0.6$  et une résistivité effective au passage de l'air  $\sigma_e = 0.4 \text{ kPa.s.m}^{-2}$ . Cette résistivité très faible montre que le milieu est très peu dissipatif; ainsi, le nombre d'onde dans la couche a une partie imaginaire très faible et on a  $k_c \approx \omega q/c_0$ . Les ondes acoustiques se propagent donc dans la couche en étant peu absorbées. On réécrit l'impédance de surface d'une couche sur support rigide sous la forme (Rienstra, 1988) :

$$Z_{S,d} = \frac{1}{\Omega} Z_c \coth(-ik_c d) = \frac{1}{\Omega} Z_c \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(2ink_c d) \right]. \quad (1.81)$$

Dans le cas où  $k_c \approx \omega q/c_0$ , on a alors :

$$r_{S,d}(t) = r_{S,\infty}(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r_{S,\infty} \left( t - \frac{2ndq}{c_0} \right). \quad (1.82)$$

La réponse impulsionnelle associée dans ce cas à l'impédance de surface correspond donc à la somme des réponses impulsionnelles d'un sol semi-infini décalées d'un temps qui correspond au temps de parcours de l'onde entre son entrée dans la couche de ballast et son retour à l'interface entre l'air et la couche.

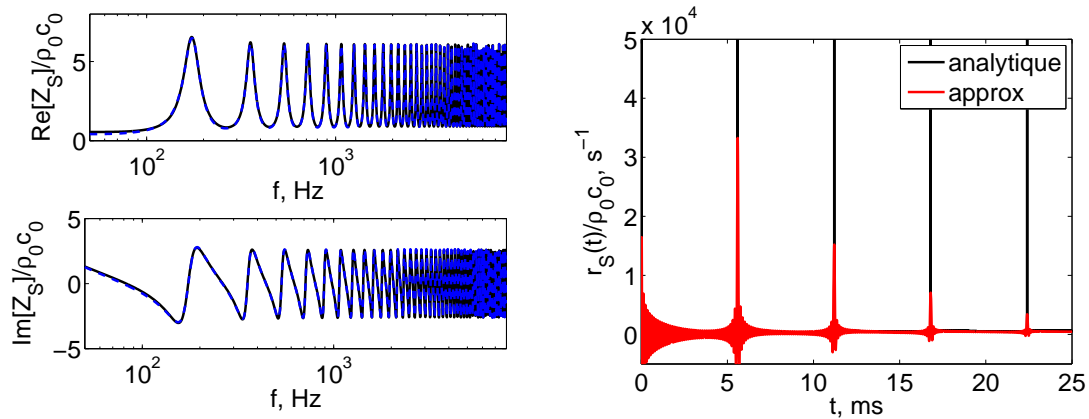


Figure 1.18 – (gauche) Parties réelle et imaginaire de l'impédance de surface pour une couche de ballast avec un modèle d'Hamet et Bérenghier obtenues analytiquement (en ligne noire) et de son approximation (en ligne bleue). (droite) Partie continue de la réponse impulsionnelle en fonction du temps correspondant au modèle d'impédance de surface (en ligne noire) et de l'approximation de celui-ci (en ligne rouge).

Les parties réelle et imaginaire du modèle d'impédance de surface obtenu sont représentées sur la figure 1.18. L'approximation est ici réalisée sur un vecteur de fréquences sur 1000 points

compris entre 50 Hz et 8000 Hz avec la méthode Vector Fitting. En effet, comme les variations de  $Z_S(\omega)$  sont importantes, le domaine de convergence obtenu avec un approximant de Padé ne permet pas ici d'avoir une bonne approximation sur l'intervalle voulu. On obtient avec la méthode Vector Fitting 2 pôles réels et 45 pôles complexes conjugués. Les parties réelle et imaginaire de l'approximant sont aussi représentées sur la figure 1.18. L'erreur obtenue est faible ; elle est d'environ 2.7% sur  $|Z_S|$ , 2.2% sur  $\text{Re } Z_S$  et 3.7 % sur  $\text{Im } Z_S$ . La valeur de  $\max(\text{Re } \lambda, |\text{Im } \lambda|)\Delta t$  est d'environ 1.1. La partie continue de la réponse impulsionnelle associée à l'impédance de surface et à son approximation a été tracée sur la figure 1.18. Pour l'impédance de surface, elle a été calculée à partir d'une transformée de Fourier inverse de  $Z_S$  ; comme  $Z_S$  décroît très peu en module avec la fréquence,  $Z_S$  a été multiplié par une gaussienne pour avoir une réponse impulsionnelle propre. On obtient bien une série d'impulsions décalées chacune d'un temps égal à environ  $2dq/c_0$ . On observe sur la réponse impulsionnelle associée à l'approximant de  $Z_S$  la présence de pics aux temps correspondants ; l'amplitude ainsi que le taux de variation sont plus faibles puisque l'approximation n'est pas valable en hautes fréquences.

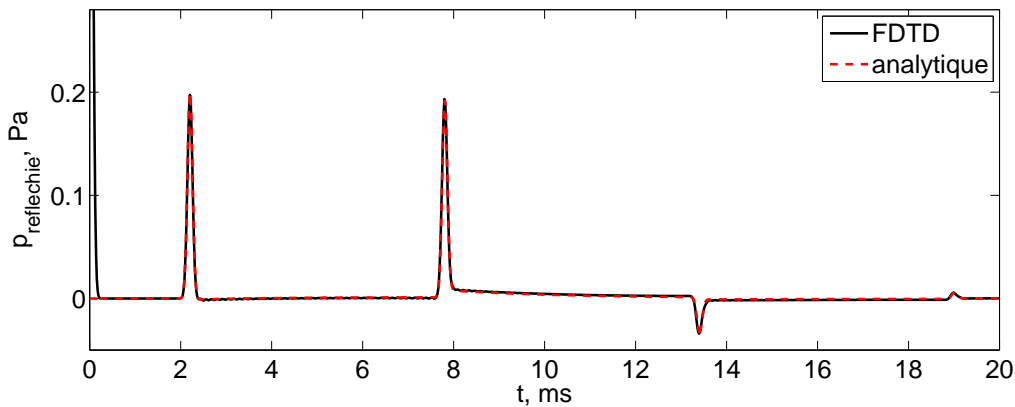


Figure 1.19 – Tracé en fonction du temps de la pression à un récepteur placé au milieu du domaine (en ligne pleine noire) et de l'onde réfléchie calculée analytiquement (en ligne pointillée rouge).

Le calcul est instable pour un CFL fixé à 1 ; le pas de temps est donc ici diminué en prenant  $\text{CFL} = 0.8$ . Sur la figure 1.19, on a tracé en fonction du temps la pression obtenue à un récepteur placé au centre du domaine ainsi que l'onde réfléchie calculée analytiquement. On retrouve l'effet d'épaisseur de la couche avec la présence de plusieurs arrivées pour l'onde réfléchie. On peut noter qu'un très bon accord entre le calcul numérique et la solution analytique est obtenu. Il est donc à noter que la formulation proposée pour l'implémentation de la condition limite d'impédance dans le domaine temporel permet de prendre en compte de façon précise l'effet d'épaisseur dans le modèle d'impédance de surface. En détail, l'erreur  $e_{\text{num}}$  maximale obtenue avant la sortie de la première contribution de l'onde réfléchie est d'environ 2 %, ce qui est comparable avec les deux cas traités précédemment.

## Conclusions

Dans cette partie, un cas test unidimensionnel a été étudié afin de valider l'implémentation choisie pour la condition limite d'impédance dans le domaine temporel sur un intervalle fréquentiel correspondant à celui d'émission des sources ferroviaires. Il a été montré que pour trois types de sols typiques d'un problème réaliste, une erreur de l'ordre du pourcent était obtenue, ce qui

est tout à fait acceptable pour les applications envisagées ici. Les trois méthodes d'obtention des coefficients de l'approximation de l'impédance de surface ont aussi été évaluées. La méthode Vector Fitting semble la plus performante puisqu'elle permet d'obtenir une approximation globale et puisqu'elle permet un calcul des coefficients très rapide. La méthode d'approximants de Padé est une alternative qui permet d'obtenir elle aussi un calcul très rapide des coefficients ; néanmoins, elle ne fournit qu'une approximation locale et ne pourra pas être employée pour des modèles d'impédance de surface dont les variations avec la fréquence sont importantes. Enfin, la méthode d'optimisation dans le domaine fréquentiel est intéressante si on cherche seulement des pôles réels pour l'approximant ; cependant, si on considère des pôles complexes, il est plus compliqué d'obtenir une approximation avec une erreur faible.

### 1.3 Étude dans une atmosphère stratifiée sur sol plan

Dans cette section, on traite deux cas de propagation à longue distance d'ondes acoustiques au-dessus de sols plans. Une source impulsionnelle est utilisée. Dans le premier cas, on réalise un calcul en conditions de propagation homogène dans une géométrie tridimensionnelle. On compare les formes d'ondes obtenues avec le code FDTD avec celles calculées avec une solution analytique. En particulier, on s'intéresse aux ondes de surface. Celles-ci sont des ondes se propageant au-dessus de sols impédants et qui décroissent exponentiellement avec la hauteur.

Dans le second cas, on se place en conditions de propagation favorables dans une géométrie bidimensionnelle. Le but est ici de comparer les temps d'arrivée pour les différentes contributions du champ de pression à celles obtenues avec un calcul de tracé de rayons. On étudiera aussi la présence d'ondes de surface.

Tout d'abord, on présente la méthode de la fenêtre glissante qui permet de réduire l'espace mémoire nécessaire et le temps de calcul dans le cas où une source impulsionnelle est utilisée. On présentera ensuite les modèles d'impédance utilisés pour les deux simulations avant de décrire la source.

#### 1.3.1 Fenêtre glissante

Lorsqu'une source impulsionnelle est utilisée, les variables acoustiques ont un support spatial limité. Cela signifie en particulier que celles-ci sont nulles dans le domaine physique considéré sauf dans une petite portion de l'espace. Dans ce cas, la méthode de la fenêtre glissante (Salomons *et al.*, 2002) peut être utilisée ; celle-ci consiste à déplacer le domaine dans une direction choisie pour suivre le front d'onde. Ainsi, si au bout de  $N$  itérations, le front d'onde s'est propagé sur un pas spatial  $\Delta x$ , le domaine physique est alors déplacé dans la direction choisie du même pas spatial. Le principe de la méthode est représenté sur la figure 1.20. Les conditions limites doivent être modifiées si on utilise une fenêtre glissante. On décrit dans la suite les modifications effectuées pour les deux types de conditions aux limites utilisés ici.

#### Condition limite de rayonnement

Dans le cas de la condition limite de rayonnement, on rappelle qu'en champ lointain, on suppose que les perturbations acoustiques sont des ondes progressives fonction de  $r - V_g t$  où  $r$  est la distance à un point que l'on doit fixer. Celui-ci peut être choisi proche de la source dans le cas d'un domaine fixe ; cependant, si on utilise une fenêtre glissante, ce point peut ne plus se trouver dans le domaine après un certain nombre d'itérations. Pour certaines frontières, on peut alors avoir le vecteur  $\mathbf{r}$  dirigé vers l'intérieur du domaine ; dans ce cas-là, les ondes sortantes du domaine

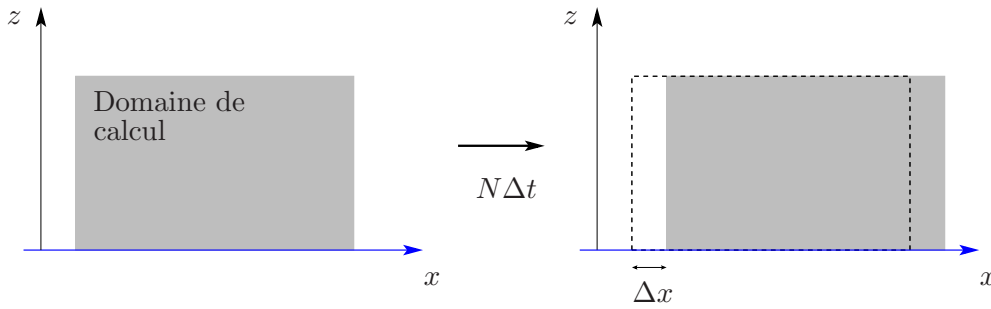


Figure 1.20 – Schéma de la méthode de la fenêtre glissante.

numérique seront considérées comme rentrantes pour la condition limite. Afin d'éviter cela, le point d'origine choisi pour la condition limite de rayonnement doit être pris pour ces frontières-là dans le domaine. La méthode alors adoptée est représentée sur la figure 1.21. On peut observer que pour les frontières liées aux directions transverses, on ne fait pas de modifications de la condition limite de rayonnement. Par contre pour la frontière à  $x$  constant, on ne peut pas garder le point  $O$  comme point d'origine puisque le vecteur  $r$ , tracé en rouge est dirigé vers l'intérieur du domaine ; on utilisera alors le point fictif situé dans le domaine de calcul pour cette frontière.

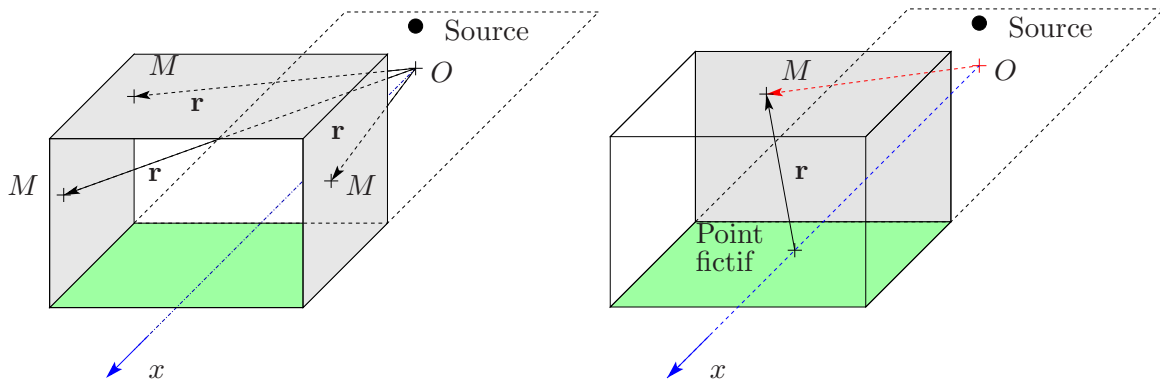


Figure 1.21 – Schéma d'implémentation de la condition limite de rayonnement dans le cas de l'utilisation de la méthode de la fenêtre glissante.

Il est à noter qu'alors, on introduit une discontinuité aux bords du domaine, ce qui peut amener à des réflexions parasites aux bords du domaine. De plus, le point fictif introduit ne correspond pas avec la zone de la source ; on diminue donc l'efficacité de la condition limite de rayonnement.

### Couche parfaitement adaptée

Pour la méthode des couches parfaitement adaptées ou PMLs, on utilise la méthode proposée par Hornikx *et al.* (2010). Si on considère que la grille est avancée dans la direction  $x$ , on ajoute un coefficient  $\sigma_x/2$  dans les couches PMLs dans la direction  $x$  pour les variables se propageant dans les directions transverses. Ainsi, par exemple, on résout pour la variable  $p_z$ , l'équation :

$$\frac{\partial p_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} V_{0x} p_z + \frac{\partial}{\partial y} V_{0y} p_z + \frac{\partial}{\partial z} (V_{0z} p_z + c_0^2 \rho_0 v_z) + \sigma_z p_z + \frac{\sigma_x}{2} p_z = \frac{\rho_0 c_0^2 Q}{3}. \quad (1.83)$$

### 1.3.2 Modèles d'impédance

On présente ici les trois modèles d'impédance utilisés dans les simulations numériques. Les deux premiers sont basés sur le modèle de Miki ; on considérera ainsi :

- un sol semi-infini de résistivité au passage de l'air  $\sigma_0 = 100 \text{ kPa.s.m}^{-2}$ , caractéristique d'un sol herbeux. Ce modèle sera appelé « herbe » par la suite.
- une couche d'épaisseur  $d = 10 \text{ cm}$  et de résistivité au passage de l'air  $\sigma_0 = 10 \text{ kPa.s.m}^{-2}$  sur support rigide. Ces propriétés sont celles d'un sol gelé recouvert d'une couche de neige. Des comparaisons effectuées par Albert et Orcutt (1990) entre des formes d'ondes obtenues expérimentalement et calculées avec une solution analytique ont montré qu'un modèle simple à 1 paramètre permettait de reproduire le comportement de ce type de sol. Cependant, des modèles à trois paramètres du type modèle d'Attenborough permettent d'avoir un meilleur accord (Albert et Orcutt, 1990; Albert, 2003). Ce modèle sera ainsi appelé « neige ».

Le troisième modèle considéré est le modèle de Zwicker et Kosten modifié d'un sol semi-infini avec une tortuosité  $q = 1$ , une porosité  $\Omega = 0.8$  et une résistivité au passage de l'air  $\sigma_0 = 10 \text{ kPa.s.m}^{-2}$ . Ce modèle n'est utilisé que dans la partie 1.3.4 ; on expliquera alors l'intérêt de ce modèle. Il sera noté « ZK ». Les parties réelle et imaginaire de ces trois modèles d'impédance sont tracées sur la figure 1.22.

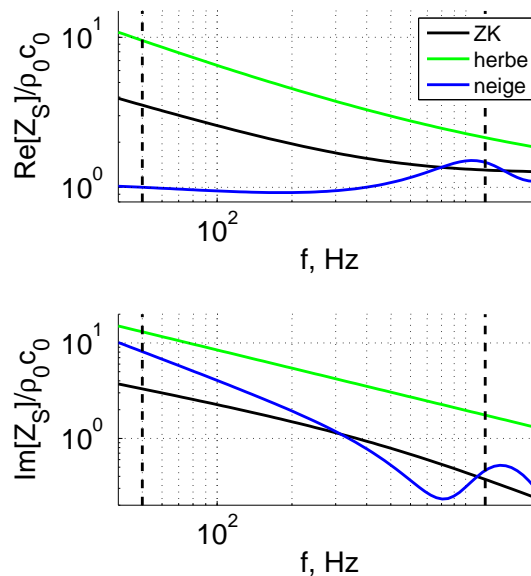


Figure 1.22 – Parties réelles et imaginaires des trois modèles d'impédance de surface utilisées dans les simulations.

Notons aussi que l'implémentation de la condition limite d'impédance dans le domaine temporel n'utilise pas pour les calculs présentés dans cette partie le terme  $Z_S^\infty$  (voir l'équation 1.38) : les pôles obtenus sont tous réels et vérifient bien la condition  $\max(\lambda)\Delta t \leq 2.5$ .

### 1.3.3 Modèle de source monopolaire

Pour les deux cas étudiés ici, on utilisera un terme de source de masse du type  $Q(\mathbf{r}, t) = Q(r) \delta(t)$ . On prendra ici un support gaussien pour la source de masse :

$$Q(r) = \exp\left(-\ln 2 \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^2}{B_x^2}\right), \quad (1.84)$$

où  $B_x$  est la demi-largeur de la gaussienne et où  $\mathbf{r}_s$  correspond à la position du centre de la source dans le domaine. L'implémentation de ce type de source revient à imposer les conditions initiales dans le code FDTD avec  $p(\mathbf{r}, t = 0) = \rho_0 c_0^2 Q(r)$  et  $\rho_0 \mathbf{v}(\mathbf{r}, t = 0) = \mathbf{0}$ . Dans l'annexe B, il est montré qu'en champ libre et en conditions homogènes de propagation l'onde progressive peut être écrite sous la forme :

$$p(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(r, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega H(t), \quad (1.85)$$

où  $H(t)$  est la fonction d'Heaviside et où on a noté :

$$p(r, \omega) = S(\omega) G_{nD}(k_0, r), \quad (1.86)$$

avec  $S(\omega) = \rho_0 c_0 i k_0 \hat{Q}(k_0)$  et avec le nombre d'onde  $k_0 = \omega/c_0$ . Le terme  $G_{nD}(k, r)$  est la fonction de Green en espace libre en  $n$  dimensions. Quant à lui, le terme  $\hat{Q}(k_0)$  correspond à la transformée de Fourier en 1D, à la transformée de Hankel en 2D et à la transformée de Hankel sphérique en 3D (les normalisations choisies sont données dans l'annexe B) de  $Q(r)$ .

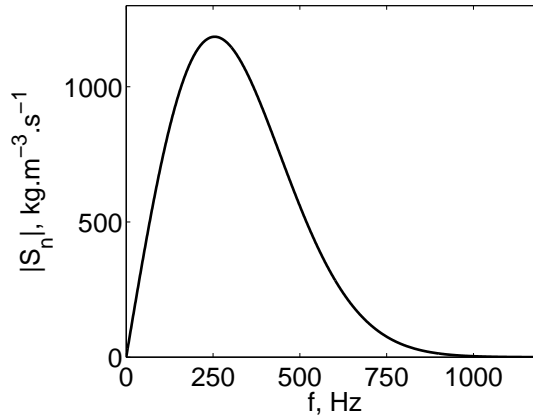


Figure 1.23 – Valeur absolue de  $S_n(\omega) = S(\omega)/(\sqrt{\pi}B)^n$  en fonction de la fréquence.

Dans le cas d'un support gaussien, on a :

$$\hat{Q}(k_0) = (\sqrt{\pi}B)^n \exp\left(-\frac{k_0^2 B^2}{4}\right), \quad (1.87)$$

où le paramètre  $B$  est lié à  $B_x$  par la relation  $B_x^2/\ln 2 = B^2$ . On obtient alors directement :

$$S(\omega) = \rho_0 c_0 i k_0 (\sqrt{\pi}B)^n \exp\left(-\frac{k_0^2 B^2}{4}\right). \quad (1.88)$$

Notons que dans l'équation 1.85, la fonction d'Heaviside est nécessaire afin d'assurer la condition de causalité. Ce type de source permet donc d'avoir une source de masse monopolaire dont la

puissance  $S(\omega)$  est directement liée à sa distribution spatiale. De plus, on obtient une source avec un comportement passe-bande, ce qui est intéressant pour le code de résolution des équations d'Euler linéarisées, puisqu'on ne veut pas de composante continue et puisque cela permet de ne pas mettre d'énergie dans la partie du spectre non résolue.

On prendra ici  $B_x = 0.25$  m. Le contenu fréquentiel  $S_n(\omega) = S(\omega)/(\sqrt{\pi}B)^n$  est représenté sur la figure 1.23. Le maximum de contenu fréquentiel est obtenu pour un nombre d'onde  $k_0 = \sqrt{2}/B$ , soit pour une fréquence d'environ 250 Hz.

### 1.3.4 Conditions homogènes

Dans cette section, on considère une géométrie tridimensionnelle avec une atmosphère homogène. Le centre de la source décrite dans la partie précédente est placé à  $z_S = 1$  m. La géométrie du problème est représentée sur la figure 1.24. Des simulations similaires pour une géométrie bidimensionnelle sont présentées dans Dragna *et al.* (2011).

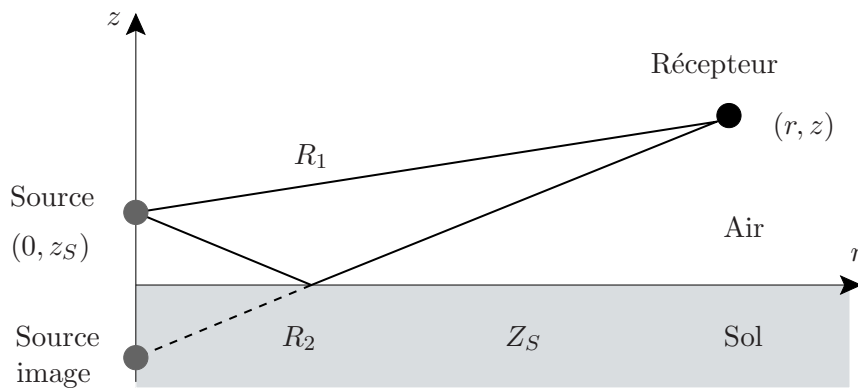


Figure 1.24 – Schéma du problème considéré.

### Formulation analytique

Les résultats de la simulation sont ici comparés à une solution analytique proposée par Habault et Filippi (1981). Le champ de pression s'écrit dans le domaine temporel comme la somme de trois contributions :

$$p(x, y, z, \omega) = p_D(x, y, z, \omega) + p_R(x, y, z, \omega) + p_S(x, y, z, \omega). \quad (1.89)$$

Le premier terme correspond à l'onde directe et s'écrit :

$$p_D(x, y, z, \omega) = -\frac{\exp(ik_0 R_1)}{4\pi R_1}, \quad (1.90)$$

où le paramètre  $R_1$  correspond à la distance source-récepteur et est donné par la relation  $R_1 = \sqrt{r^2 + (z - z_S)^2}$  avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . La seconde contribution correspond à l'onde réfléchie :

$$p_R(x, y, z, \omega) = -\frac{\exp(ik_0 R_2)}{4\pi R_2} - 2ik_S H[-\text{Im} \beta] \int_0^{+\infty} \exp(-ik_S q) \frac{\exp(ik_0 R_q)}{4\pi R_q} dq + 2ik_S H[\text{Im} \beta] \int_{-\infty}^0 \exp(-ik_S q) \frac{\exp(ik_0 R_q)}{4\pi R_q} dq, \quad (1.91)$$

avec  $k_S = k_0\beta$  et  $R_q = \sqrt{r^2 + (z + z_S + q)^2}$ . Le paramètre  $R_2 = \sqrt{r^2 + (z + z_S)^2}$  correspond à la distance source image-récepteur. Les deux intégrales sont multipliées par la fonction d'Heaviside, notée  $H$  ; celle-ci est nécessaire afin d'assurer que pour  $q$  qui tend vers l'infini, le terme  $\exp(-ik_S q)$  ne croît pas exponentiellement. La dernière terme dans l'équation 1.89 est l'onde de surface donnée par :

$$p_S(x, y, z, \omega) = \frac{k_S}{2} H[-\text{Im} \beta] H_0^{(1)}(\sqrt{k_0^2 - k_S^2} r) \exp(-ik_S(z + z_S)). \quad (1.92)$$

Cette solution analytique est très proche de celle donnée par Di et Gilbert (1993). La différence est l'écriture de l'onde réfléchie. Dans la formulation d'Habault et Filippi, le terme intégral correspond à la contribution d'une ligne source située sur la droite réelle d'axe  $z$ . Dans la formule de Di et Gilbert, la ligne source se trouve dans le plan complexe. L'onde réfléchie s'écrit alors :

$$p_R(x, y, z, \omega) = -\frac{\exp(ik_0 R_2)}{4\pi R_2} + 2k_S \int_0^{+\infty} \exp(-k_S q) \frac{\exp(ik_0 R_q)}{4\pi R_q} dq - p_S(x, y, z, \omega), \quad (1.93)$$

où  $R_q$  est ici donné par  $R_q = \sqrt{r^2 + (z + z_S + iq)^2}$ . Il est à noter que dans cette formulation la contribution de l'onde de surface n'apparaît pas comme une contribution séparée et se trouve dans le terme intégral de l'onde réfléchie. Ces différentes formulations ont été aussi retrouvées par Ochmann (Ochmann, 2004; Taraldsen, 2005a). Enfin, on peut aussi citer la solution analytique de Enflo (1986) qui a été aussi obtenue par Gilbert et Di (2007). Dans cette solution, l'onde de surface est explicite et l'onde réfléchie a pour expression :

$$p_R(x, y, z, \omega) = -\frac{\exp(ik_0 R_2)}{4\pi R_2} + i\frac{k_S}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}\left(\sqrt{k_0^2 - k^2} r\right) \frac{1}{k + k_S} \exp(ik(z + z_S)) dk. \quad (1.94)$$

On montre dans l'annexe C que les formulations d'Enflo et de Di et Gilbert sont équivalentes. La solution analytique obtenue avec la méthode d'expansion modale proposée par Waxler (2002) est aussi calculée dans l'annexe : on retrouve alors la formulation d'Enflo.

Pour obtenir les formes d'ondes dans le domaine temporel, on réalise alors une transformée de Fourier inverse :

$$p(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) p(x, y, z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (1.95)$$

où  $S(\omega)$  a été défini dans la section précédente (cf. Eq 1.88).

On s'intéressera par la suite particulièrement aux ondes de surface, qui, comme on peut le voir avec l'équation 1.92, sont des ondes cylindriques qui décroissent exponentiellement avec la hauteur. Par rapport à l'onde directe qui décroît en  $1/r$ , son amplitude décroît en  $1/\sqrt{r}$ . Dans des cas de propagation en incidence rasante, le niveau de pression devient très faible à longue distance et l'onde de surface peut donc devenir la contribution majeure au champ de pression. Elles ont été mises en évidence expérimentalement dès 1978 par Donato (1978) à l'aide de mesures réalisées en chambre anéchoïque ; l'atténuation horizontale et verticale des ondes acoustiques à longue distance est en accord avec la théorie et avec des mesures d'impédances de surface. Des expériences comparables ont été ensuite réalisées par Daigle *et al.* (1996) en utilisant des sources impulsives ; des comparaisons avec une solution analytique dans le domaine temporel sont présentées et mettent en évidence le temps d'arrivée plus important de l'onde de surface. Des campagnes expérimentales en milieux extérieurs où des ondes de surface peuvent être clairement observées sont plus rares. On pourra citer les mesures réalisées par Albert (2003) sur des sols gelés recouvert de neige ; les récepteurs sont situés à 60 m et la source a de l'énergie jusqu'à 900 Hz environ. Là encore, les formes d'ondes ont été comparées à une solution analytique pour un sol à



réaction locale ; dans certains cas, les signaux de pression présentent une queue basse fréquence avec une décroissance exponentielle avec la hauteur. Cette queue a pu être reliée à l'onde de surface. A partir de ces mesures, une autre étude a été réalisée par Boeckx *et al.* (2004) en considérant un sol à réaction étendue ; l'accord obtenu est comparable à celui trouvé dans le cadre de l'approximation de la réaction locale. Plus récemment, des mesures à plus longue distance - de l'ordre du kilomètre - ont été réalisées par Talmadge *et al.* (2008) au-dessus de champs agricoles ; la source était ici aussi impulsionnelle avec un contenu fréquentiel jusqu'à 900 Hz. Des ondes de surface ont là aussi été mises en évidence.

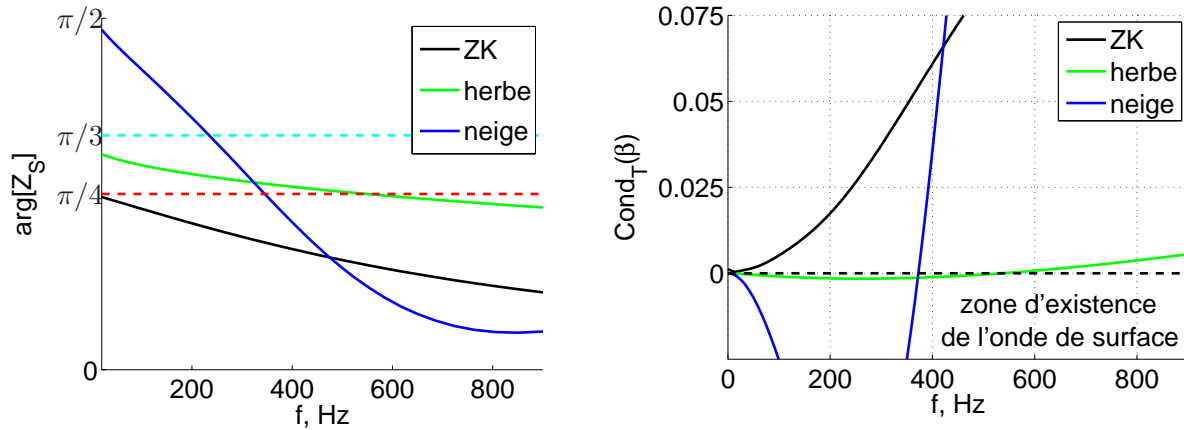


Figure 1.25 – (gauche) Phase et (droite) condition d'existence de l'onde de surface proposée par Thomasson pour les trois modèles d'impédance.

On peut voir que dans les formulations présentées ci-dessus, l'onde de surface existe tant que  $\text{Im}[\beta] < 0$  ou de façon équivalente  $\text{Im}[Z_S] > 0$ . Comme on peut le voir sur la figure 1.22, c'est ici le cas pour les trois modèles d'impédance considérés. Dans d'autres formulations développées dans la littérature, une onde de surface dont l'expression analytique est la même que celle donnée ci-dessus, est présente mais avec une condition d'existence plus restrictive. Notons que la formule pour l'équation de l'onde réfléchi est alors différente de celles données précédemment. Ainsi dans la formulation de Thomasson (1976), la condition d'existence de l'onde de surface est alors :

$$\text{Cond}_T(\beta) = \text{Re}[1 + \beta \cos \theta_0 - \sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta_0] < 0 \text{ et } \text{Im} \beta < 0, \quad (1.96)$$

avec  $\cos \theta_0 = (z + z_S)/R_2$  et  $\sin \theta_0 = r/R_2$ . En incidence rasante soit pour  $R_2 \gg (z + z_S)$  et pour  $|\beta| \ll 1$ , la première inégalité revient à ce que la phase de l'impédance soit supérieure à  $\pi/4$ . Le modèle d'impédance appelé « ZK » a justement une phase inférieure à  $\pi/4$  sur tout l'intervalle fréquentiel considéré ici ; de manière générale, le modèle d'impédance de Zwicker et Kosten d'un sol semi-infini a toujours une phase inférieure à  $\pi/4$ . Il a donc été choisi afin de déterminer dans ce cas la contribution de l'onde de surface donnée par la formulation d'Habault et Filippi et de vérifier sa présence dans les résultats de la simulation numérique. Sur la figure 1.25, on a ainsi représenté les phases des modèles d'impédance en fonction de la fréquence. On peut vérifier que le modèle « ZK » a une phase inférieure à  $\pi/4$  sur toute la bande de fréquence considérée. Les deux autres modèles ont une phase supérieure à  $\pi/4$  à basse fréquence. Sur la figure 1.25, la condition d'existence proposée par Thomasson a aussi été tracée en fonction de la fréquence pour les trois modèles d'impédance et pour un récepteur situé à  $r = 300 \text{ m}$  et  $z_S = 0 \text{ m}$ . En effet, pour une distance donnée et pour les modèles d'impédance choisis ici, la condition  $\text{Cond}_T(\beta)$  est la plus

restrictive pour des récepteurs placés au niveau du sol. On remarque bien que sur tout l'intervalle fréquentiel considéré ici, on a  $\text{Cond}_T(\beta) > 0$  et on ne devrait donc pas observer d'ondes de surface avec le modèle d'impédance « ZK ». Notons que pour les deux autres modèles d'impédance, la condition de Thomasson est bien vérifiée en basse fréquence.

### Formes d'ondes analytiques

Dans cette section, on présente les formes d'ondes obtenues pour les différentes contributions avec la formulation d'Habault et Filippi (1981). Ainsi, sur la figure 1.26, le spectre de l'onde directe ainsi que les formes d'ondes correspondantes sont représentés pour une colonne de récepteurs situés à  $x = 300$  m. Les spectres obtenus dépendent très peu de la hauteur puisqu'on se trouve ici à longue distance ; de même, l'amplitude des formes d'onde dépend peu de la hauteur.

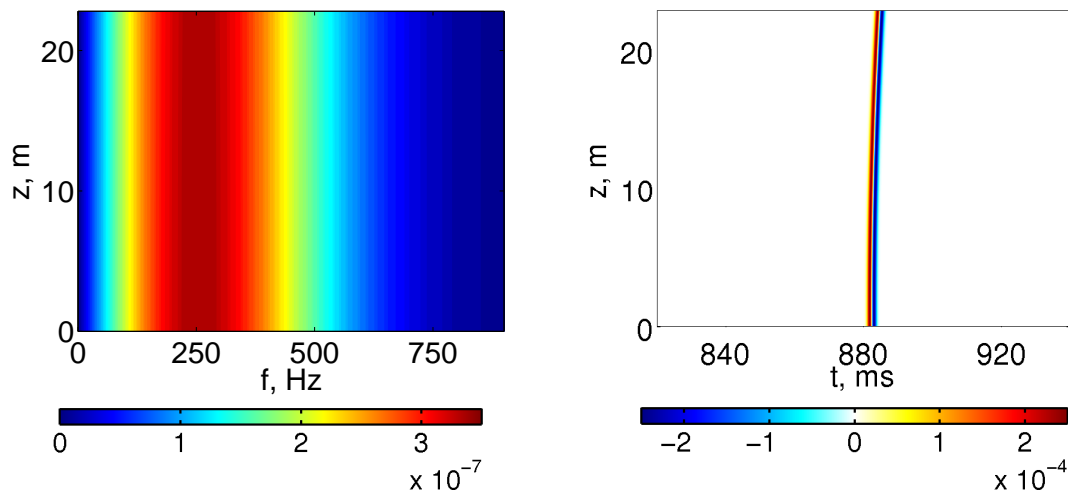


Figure 1.26 – (gauche) Spectre de l'onde directe  $p_D/\rho_0 c_0^2$  pour une colonne de récepteurs situés à une distance  $x = 300$  m et (droite) formes d'ondes de la pression correspondantes.

Sur la figure 1.27, on a représenté les spectres et les formes d'ondes associés à l'onde de surface pour les différents modèles d'impédance considérés. On peut ainsi observer que la contribution onde de surface est basse fréquence et décroît avec la hauteur. Il est à noter que dans le cas « ZK » l'amplitude de l'onde de surface est faible relativement aux deux autres cas. Notons aussi que cet onde présente un caractère non-causal ; en effet, on peut observer que dans tous les cas elle arrive avant l'onde directe, c'est-à-dire que leur contribution est non-nulle pour  $t < R_1/c_0$ . Enfin, la forme d'onde associée présente des oscillations dont le nombre, la période et l'amplitude dépendent fortement du modèle d'impédance de surface considérée.

Les spectres et les formes d'ondes associés à l'onde réfléchie dans la formulation d'Habault et Filippi (cf. Eq. 1.91) sont représentés sur la figure 1.28. Les spectres, notamment dans le cas « herbe », présentent deux contributions, une basse fréquence et une large bande. Les formes d'ondes ont, elles aussi, un comportement non-causal ; cela s'explique par le fait que la somme de l'onde réfléchie et de l'onde de surface doit être causale. Cette partie non-causale permet donc d'annuler celle de l'onde de surface. Remarquons aussi, que puisqu'on se trouve en incidence rasante, l'amplitude du front d'onde de l'onde réfléchie est l'opposée de celle du front d'onde de l'onde directe.

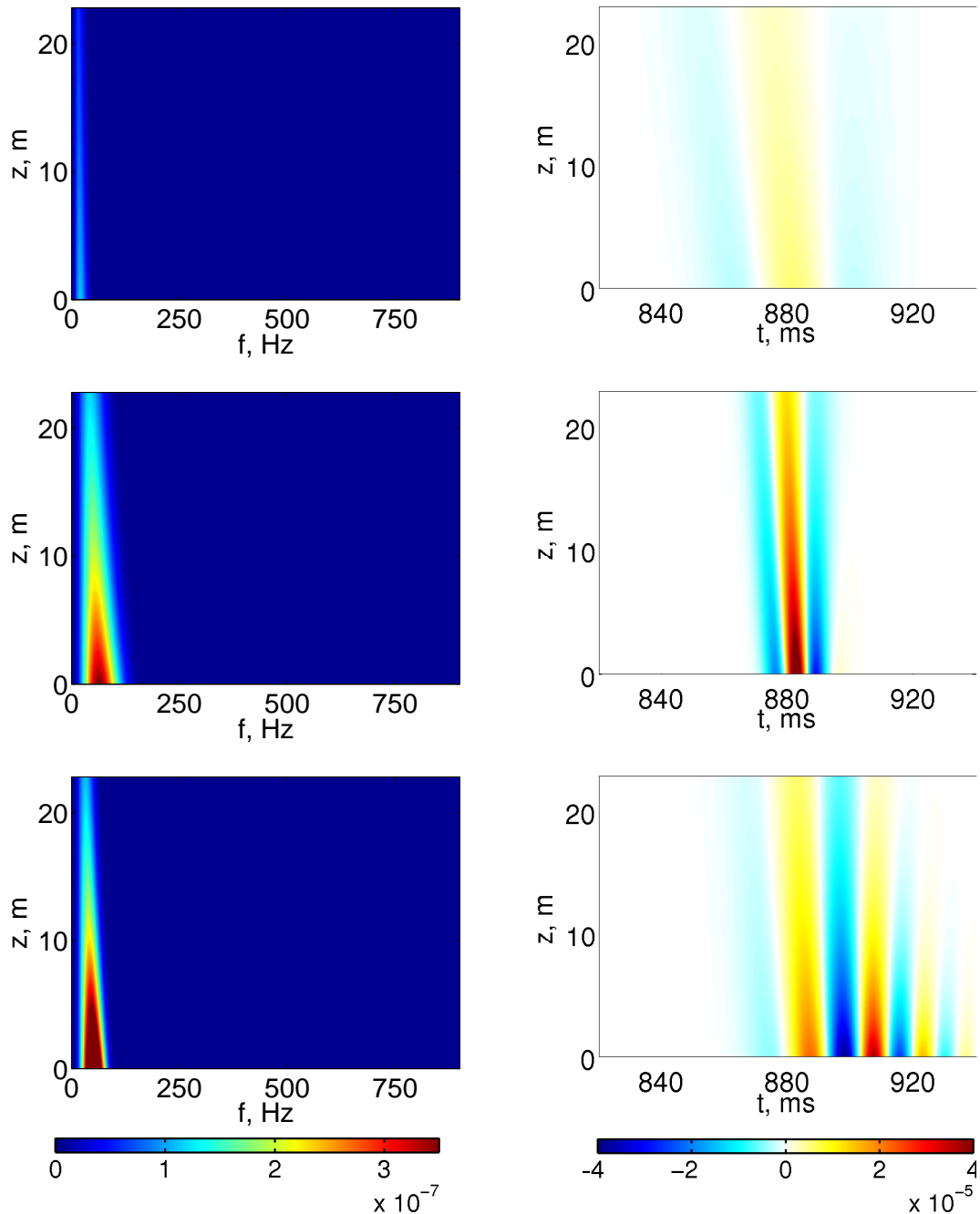


Figure 1.27 – (gauche) Spectre de l'onde de surface  $p_S/\rho_0 c_0^2$  pour une colonne de récepteurs situés à une distance  $x = 300$  m et (droite) formes d'ondes de la pression correspondantes. De haut en bas, les modèles d'impédance appelés « ZK », « herbe » et « neige » sont respectivement considérés.

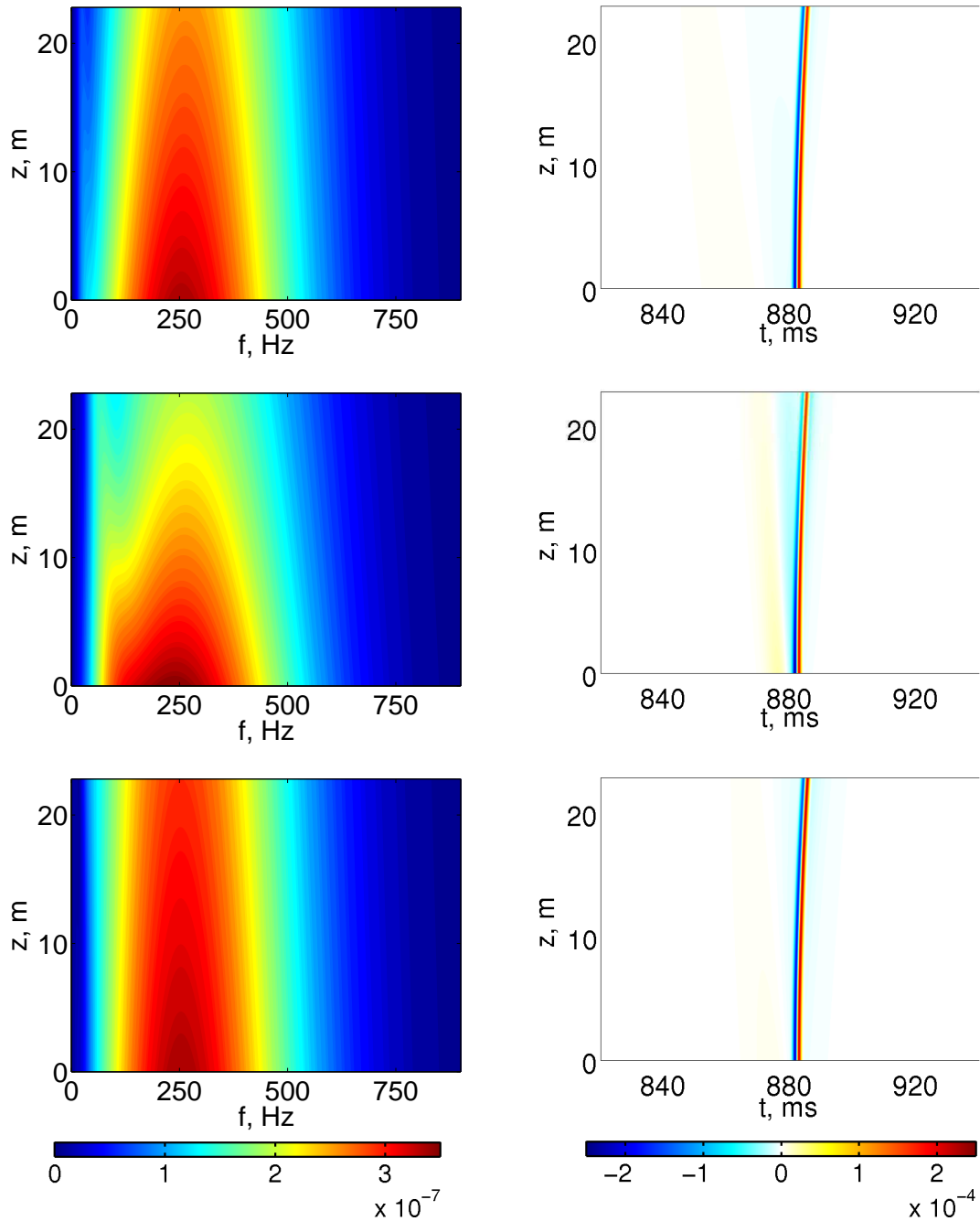


Figure 1.28 – (gauche) Spectre de l'onde réfléchie  $p_R/\rho_0 c_0^2$  pour une colonne de récepteurs situés à une distance  $x = 300$  m et (droite) formes d'ondes de la pression correspondantes. De haut en bas, les modèles d'impédance appelés « ZK », « herbe » et « neige » sont respectivement considérés.

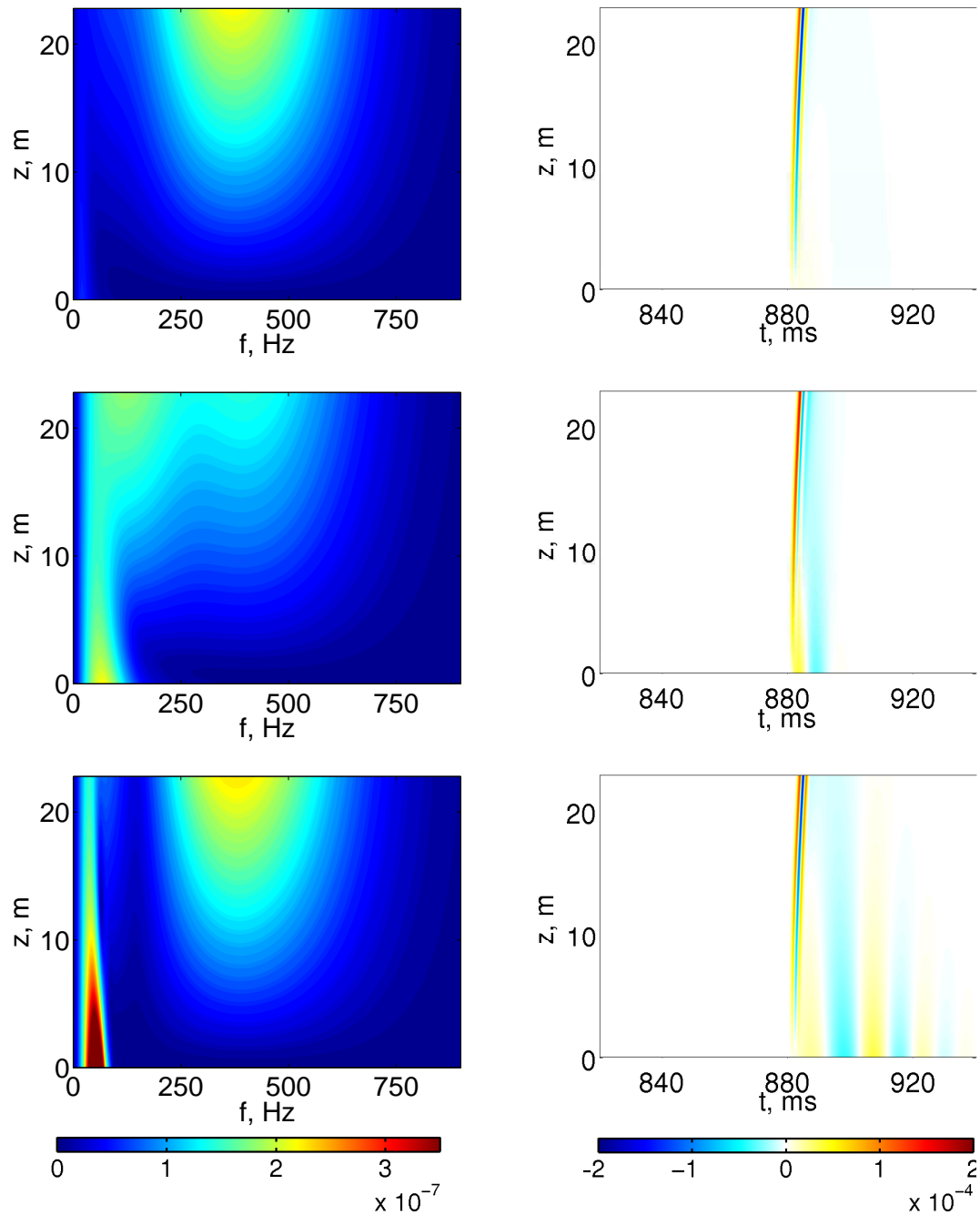


Figure 1.29 – (gauche) Spectre de la pression normalisée  $p/\rho_0 c_0^2$  pour une colonne de récepteurs situés à une distance  $x = 300$  m et (droite) formes d'ondes de la pression correspondantes. De haut en bas, les modèles d'impédance appelés « ZK », « herbe » et « neige » sont respectivement considérés.

Enfin, on représente les spectres et les formes d'onde de la somme de ces trois ondes sur la figure 1.29. Pour les spectres, on peut voir que pour des récepteurs proches du sol, les niveaux de pression sont faibles à cause de l'interférence destructive entre onde directe et onde réfléchiée ; néanmoins, on peut voir en basse fréquence la contribution de l'onde de surface. Notons aussi que le niveau en basse fréquence est plus faible parce qu'une partie de l'onde réfléchiée annule la partie non-causale de l'onde de surface. Pour des récepteurs à une hauteur plus grande, on peut observer à la fois que l'amplitude de l'onde de surface diminue et que la pression sur la partie large bande due à l'onde directe et l'onde réfléchiée augmente. Pour les formes d'onde obtenues en sommant les différentes contributions, on peut observer que les signaux de pression sont bien causaux, c'est-à-dire que le signal de pression est bien nul pour  $t < R_1/c_0$ . On retrouve au niveau du sol les oscillations basse fréquence de l'onde de surface, notamment pour les cas « herbe » et « neige » ; pour le cas « ZK », cette partie oscillante du signal existe toujours mais comme noté précédemment, les amplitudes des oscillations sont très faibles.

### Comparaison avec les résultats d'un calcul numérique

On réalise pour les trois modèles d'impédance de surface un calcul avec le code FDTD. Le pas spatial est fixé à  $\Delta x = 0.05$  m. Le nombre CFL est fixé à 0.8 et le calcul est réalisé sur 10000 itérations temporelles. On a vu que dans le cas « ZK », l'amplitude de l'onde de surface à longue distance était très faible ; afin d'avoir le minimum de réflexions parasites aux bords du domaine, on utilise ici des PMLs pour les conditions limites. On utilise aussi une fenêtre glissante, présentée dans la section 1.3.1. Le domaine contient  $555 \times 911 \times 456$  points et a donc une taille de  $[-25 \text{ m}, 2 \text{ m}] \times [-45.55 \text{ m}, 45.55 \text{ m}] \times [0 \text{ m}, 22.8 \text{ m}]$  dans les directions respectives  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Le calcul est réalisé sur une machine vectorielle NEC SX-8 et nécessite environ 60 heures CPU.

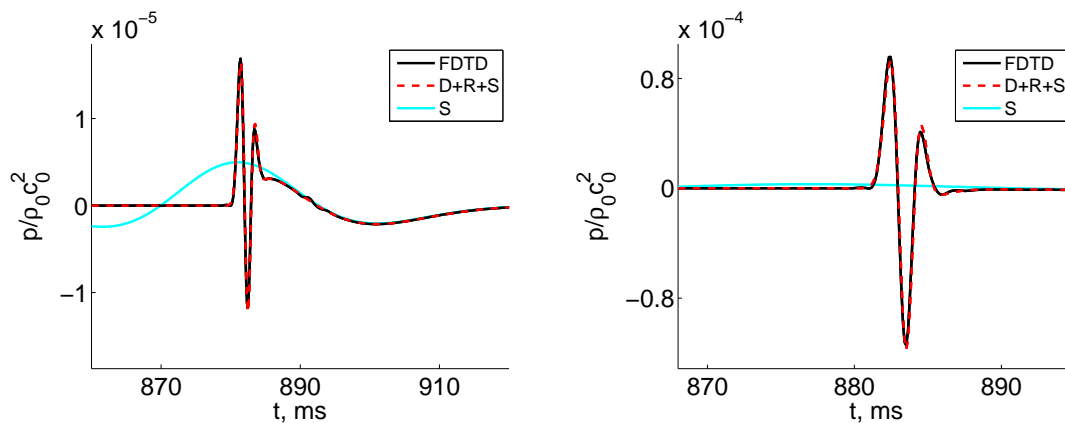


Figure 1.30 – Formes d'ondes obtenues à des récepteurs placés à  $x = 300$  m et à (gauche)  $z = 2$  m et à (droite)  $z = 15$  m. Le modèle d'impédance « ZK » est considéré.

Sur les figures 1.30 à 1.32, les formes d'ondes obtenues avec le code FDTD et avec la solution analytique sont représentées pour les différents modèles d'impédance considérés. On observe que dans les différents cas, la queue basse fréquence du signal est associée à l'onde de surface. C'est notamment le cas pour le modèle d'impédance « ZK » ; cela semble ainsi montrer que la condition d'existence de l'onde de surface proposée par Thomasson est trop restrictive. On retrouve aussi que l'onde de surface est non-causale. Pour les cas « herbe » et « neige » et pour le récepteur à  $z = 2$  m, l'onde de surface semble la contribution principale ; pour le cas « ZK », comme noté précédemment, son amplitude est très petite. Pour le récepteur à  $z = 15$  m, sa contribution est

relativement bien plus faible. On peut voir que le code FDTD permet bien de retrouver les formes d'ondes analytiques, à part pour le cas « neige », où l'amplitude des oscillations associées à l'onde de surface est plus petite que celle donnée par la solution analytique.

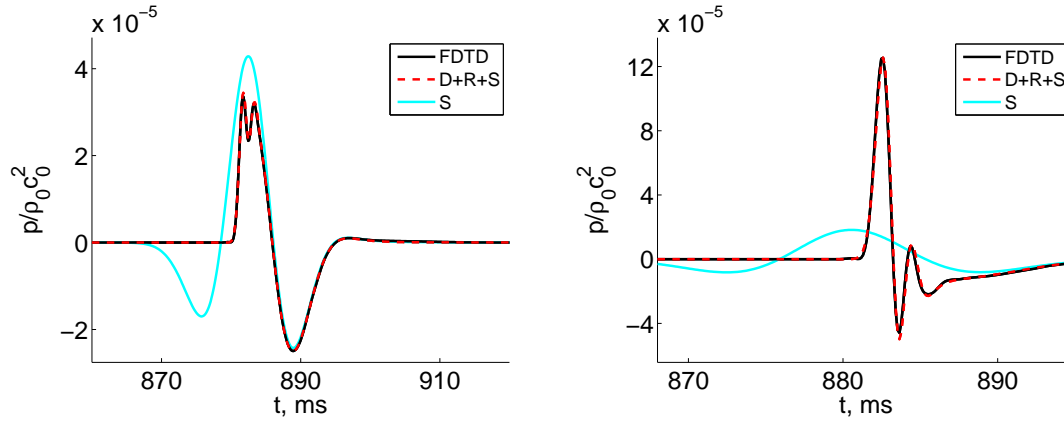


Figure 1.31 – Formes d’ondes obtenues à des récepteurs placés à  $x = 300$  m et à (gauche)  $z = 2$  m et à (droite)  $z = 15$  m. Le modèle d’impédance « herbe » est considéré.

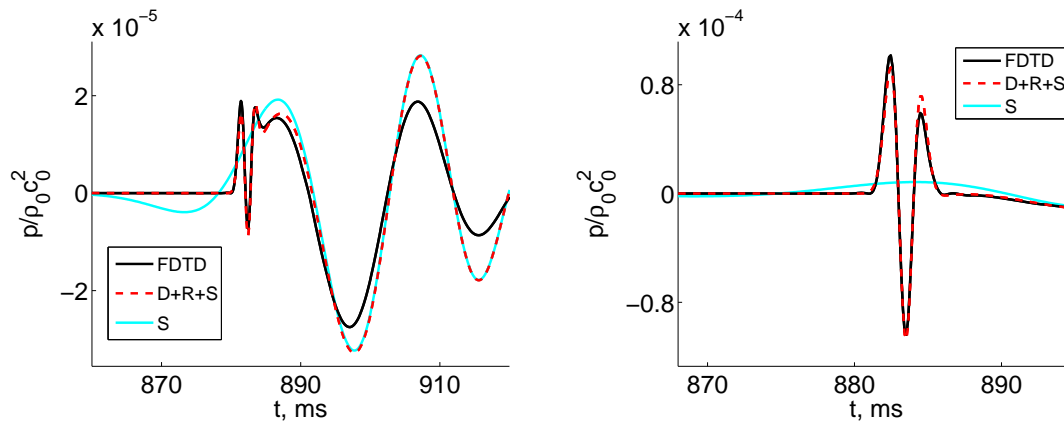


Figure 1.32 – Formes d’ondes obtenues à des récepteurs placés à  $x = 300$  m et à (gauche)  $z = 2$  m et à (droite)  $z = 15$  m. Le modèle d’impédance « neige » est considéré.

### 1.3.5 Conditions favorables

On considère maintenant des conditions de propagation favorables. Le profil de célérité du son choisi est logarithmique :

$$c(z) = c_0 + A_c \ln \frac{z + z_0}{z_0}, \quad (1.97)$$

avec  $A_c = 1 \text{ m.s}^{-1}$  et  $z_0 = 0.1$  m. On réalise le calcul dans un domaine bidimensionnel avec  $\Delta x = \Delta z = 0.05$  m. Le centre de la source est situé en  $x_S = 0$  m et  $z_S = 2$  m. Le nombre CFL est fixé à 1 et on réalise 11000 itérations temporelles pour s’assurer que le pulse quitte le domaine de calcul. Pour un premier calcul, la technique de la fenêtre glissante n’est pas utilisée et le domaine compte ainsi environ 10000 points dans la direction  $x$  et 2000 points dans la direction  $z$ . Le calcul

est réalisé lui aussi sur une machine vectorielle NEC-SX8 et il demande environ 6 heures de temps CPU.

### Comparaison des formes d'ondes

Les formes d'ondes obtenues à une distance  $x = 500$  m de la source pour les deux modèles d'impédance considérés et pour des récepteurs jusqu'à une hauteur  $z = 50$  m sont représentées sur la figure 1.33. Par rapport au cas homogène, on peut observer la présence de nombreuses arrivées. Une amplification de la pression acoustique peut être observée pour des récepteurs proches du sol ; cela est notamment le cas lorsque le modèle d'impédance de surface appelé « neige » est utilisé. Cette amplification est liée à la création d'un guide d'ondes à la surface, dû aux effets de réfraction.

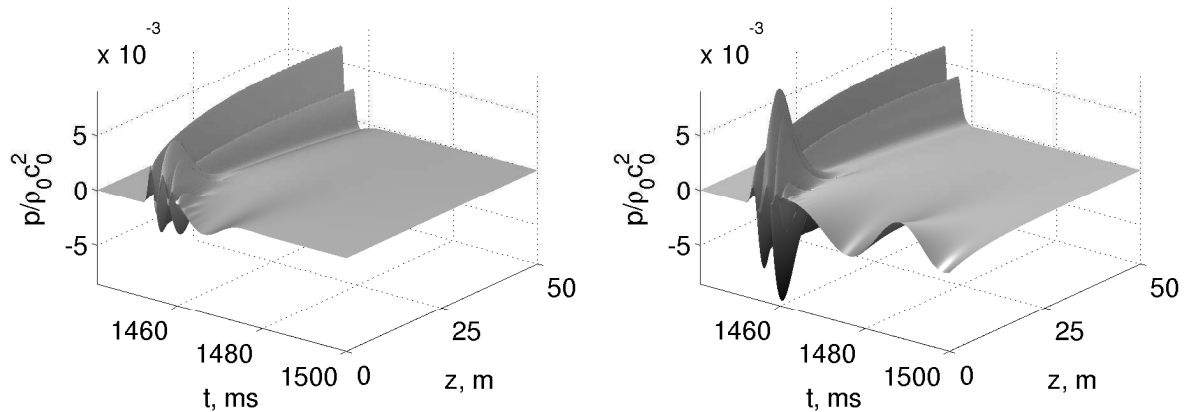


Figure 1.33 – Formes d'ondes obtenues à des récepteurs situés à une distance de  $x = 500$  m de la source (gauche) pour le cas du modèle d'impédance de surface appelé « herbe » et (droite) pour le cas du modèle d'impédance de surface appelé « neige ».

Pour mettre en évidence l'effet combiné de l'effet de sol et de la réfraction sur les résultats précédents, une troisième simulation est réalisée en considérant cette fois-ci un sol parfaitement réfléchissant. Les formes d'ondes obtenues dans ce cas sont tracées sur la figure 1.34. Il peut être noté que le maximum de pression est obtenu ici au niveau du sol pour un temps proche de  $t = 1461$  ms ; la valeur de ce maximum est environ 4 fois plus importante que celle obtenue pour le cas de surfaces avec une impédance finie. On peut aussi remarquer que la pression décroît rapidement avec la hauteur ; ainsi pour  $z > 25$  m, seulement deux arrivées peuvent être clairement identifiées à des temps compris entre  $t = 1451$  ms et  $t = 1454$  ms pour la première et entre  $t = 1453$  ms et  $t = 1456$  ms pour la seconde.

Par ailleurs, pour les deux cas où l'impédance de surface est finie, on peut observer sur les formes d'ondes après les premières arrivées ( $t > 1462$  ms) une queue basse fréquence. Ses caractéristiques sont similaires à celles décrites dans la partie précédente pour une onde de surface : c'est une contribution basse-fréquence qui décroît lentement avec le temps et qui décroît rapidement avec la hauteur. On retrouve aussi pour le cas « neige », les oscillations avec le temps de cette contribution. Enfin, pour une surface parfaitement réfléchissante, la pression acoustique est presque nulle pour  $t > 1463$  ms et il n'y a pas cette queue basse fréquence, visible pour les cas d'une impédance de surface finie.



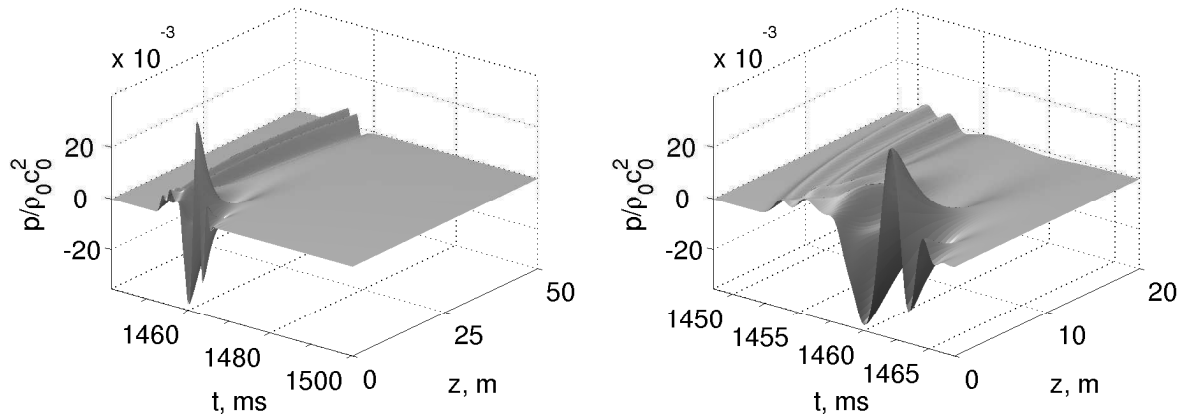


Figure 1.34 – Formes d’ondes obtenues à des récepteurs situés à une distance de  $x = 500$  m de la source pour un sol parfaitement réfléchissant.

### Comparaison à un calcul de tracés de rayons

Cotté et Blanc-Benon (2009) ont montré qu’un bon accord était trouvé pour les spectres entre la simulation pour le cas de l’impédance de surface « herbe » et des calculs réalisés avec un code de résolution de l’équation parabolique grand angle sur tout l’intervalle fréquentiel considéré ici. Afin d’identifier les différentes contributions, il est intéressant de réaliser un calcul de tracé de rayons. En effet, cette méthode haute-fréquence, basée sur l’approximation de l’acoustique géométrique permet de déterminer le temps de parcours le long des rayons. On rappelle que par définition, un rayon correspond à la tangente en un point au vecteur vitesse de groupe ; on peut ainsi identifier la trajectoire du front d’onde entre la source et le récepteur. Pour chaque récepteur, les rayons propres sont déterminés en résolvant l’équation eikonale avec la méthode des caractéristiques (voir par exemple Candel (1977)). L’intégration numérique est réalisée avec un algorithme standard de Runge-Kutta d’ordre 4. La réflexion sur le sol est supposée spéculaire. Dans un calcul de tracé de rayons, la pression à un récepteur est obtenue en sommant les contributions de tous les rayons. Il faut donc déterminer le nombre de rayons qui atteignent le récepteur. On rappelle que la méthode de lancer de rayons est utilisée ici pour obtenir le temps de parcours des rayons et non pas le niveau de pression au récepteur. Pour cela, on détermine tout d’abord les rayons qui atteignent les récepteurs situés à une hauteur  $z = 2$  m et à une distance allant jusqu’à 550 m. Les différents rayons sont ensuite rangés en groupes, suivant le nombre de réflexions  $m$  sur le sol. Chaque groupe est ainsi noté  $R_m$ . Le schéma du problème est représenté sur la figure 1.35.

Sur la figure 1.36, les angles de départ des rayons, notés  $\theta$ , ont été tracés en fonction de la position du récepteur selon l’axe  $x$ . Les cas  $\theta > 0$  et  $\theta < 0$  correspondent respectivement à un rayon se propageant initialement vers les  $z$  croissant et vers les  $z$  décroissant. On peut ainsi observer que le nombre de rayons propres augmente avec la distance. On peut aussi noter que pour  $m > 1$  chaque groupe contient quatre rayons propres. Le cas  $m = 0$  correspond au rayon direct. Le groupe  $m = 1$  contient trois rayons propres, sauf pour les petites distances de propagation. En effet, pour une distance inférieure à 100 m, seulement deux rayons propres, correspondant au rayon direct et au rayon réfléchi, atteignent le récepteur. Notons aussi qu’initialement, on retrouve un angle de départ pour l’onde directe égal à  $\theta = 0$  et pour l’onde réfléchie égal à  $\theta = -\pi/2$ .

On s’intéresse maintenant à deux distances de propagation  $x = 250$  m et  $x = 500$  m afin d’étudier les formes d’onde à la lumière des résultats du calcul du tracé de rayons. Par la suite,

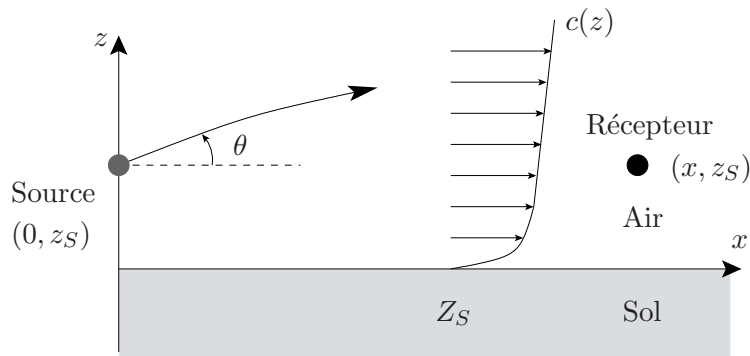
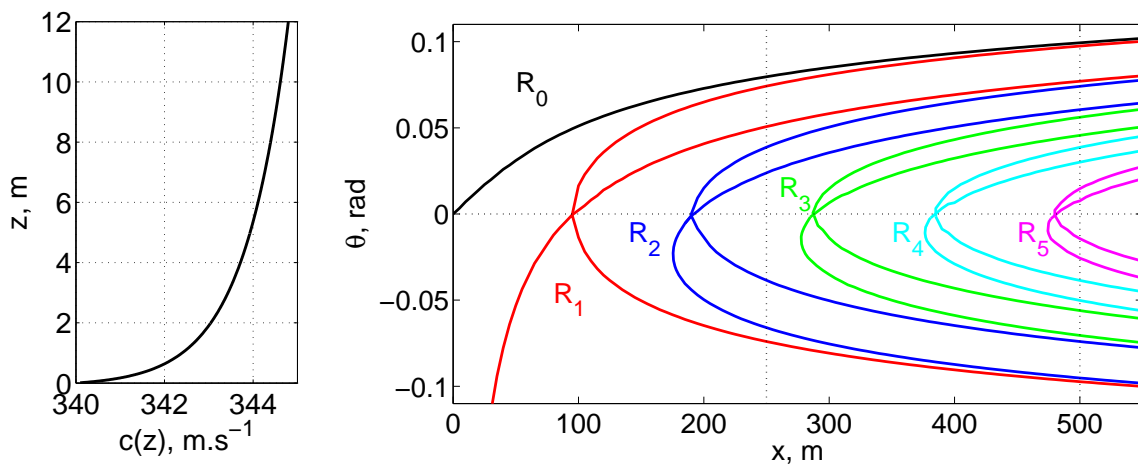


Figure 1.35 – Schéma du problème considéré.


 Figure 1.36 – (gauche) Profil de célérité du son. (droite) Angle de départ des rayons propres correspondants pour une source placée en  $x_S = 0$  m et  $z_S = 2$  m et pour des récepteurs situés à une hauteur  $z = 2$  m et à une abscisse allant de  $x = 0$  m à  $x = 500$  m.

on se limite au cas de l'impédance de surface appelé « herbe ». A partir de la figure 1.36, on peut observer qu'il y a 8 rayons propres pour une distance  $x = 250$  m. Ils correspondent au rayon direct  $R_0$  ( $\theta = 0.080$  rad), aux trois rayons qui se sont réfléchis une seule fois sur le sol  $R_1$  ( $\theta = -0.074$  rad,  $\theta = 0.050$  rad and  $\theta = 0.074$  rad) et aux quatre rayons qui se sont réfléchis deux fois sur le sol  $R_2$  ( $\theta = -0.066$  rad,  $\theta = -0.039$  rad,  $\theta = 0.024$  rad and  $\theta = 0.039$  rad). Pour une distance  $x = 500$  m, il y a 20 rayons propres; le nombre maximal de réflexions au niveau du sol est égal à 5. Les rayons propres sont représentés sur la figure 1.37. Le rayon direct et les rayons qui se sont réfléchis une fois et deux fois sur le sol sont tracés avec la même couleur que sur la figure 1.36. Les autres rayons propres sont représentés en gris clair. L'effet du guide d'onde est clair; en particulier, pour  $x = 500$  m, on peut observer que la plupart des rayons propres se propagent proche du sol.

Les temps d'arrivée des rayons propres correspondent avec un bon accord aux premiers extrema de pression acoustique, comme cela peut être vu sur la figure 1.38. En détail, le premier et le second extrema sont liés respectivement au rayon direct et au rayon qui s'est réfléchi sur le sol avant d'atteindre le récepteur. Pour  $x = 250$  m, les autres rayons propres ont des temps d'arrivée très proches et leurs contributions sont difficilement identifiables. Pour  $x = 500$  m, on peut identifier

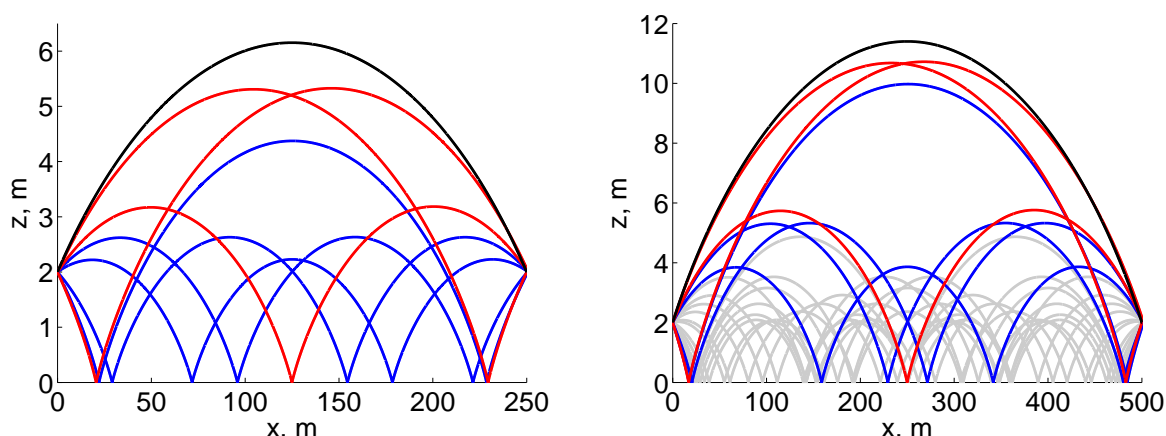


Figure 1.37 – Rayons propres calculés pour un récepteur situé à (gauche)  $x = 250$  m et à (droite)  $x = 500$  m.

les contributions du rayon direct et des rayons qui se sont réfléchis une fois et deux fois sur le sol. Par contre, les autres rayons propres ont là encore des temps d'arrivée très proches et on ne peut pas distinguer clairement chaque contribution. De plus, ces rayons se sont réfléchis plusieurs fois sur le sol et transportent donc moins d'énergie que les rayons précédents.

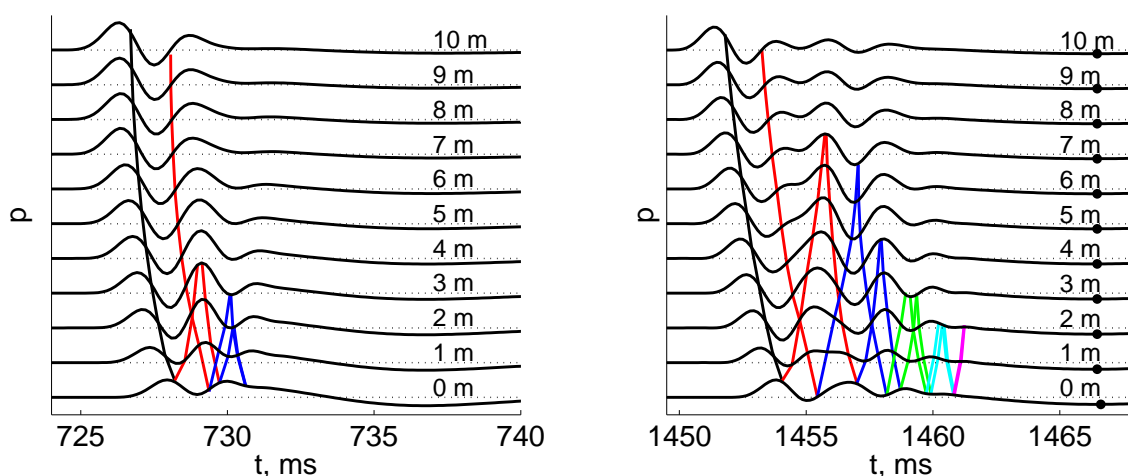


Figure 1.38 – Formes d'ondes obtenues pour le cas de l'impédance de surface appelée « herbe » pour un récepteur situé (gauche) à  $x = 250$  m et (droite) à  $x = 500$  m.

### Effet du contenu fréquentiel

On se propose ici de réaliser le même calcul mais dans une bande de fréquence plus importante. Ainsi, on fixe le pas spatial à  $\Delta x = 0.02$  m. La demi-largeur de la gaussienne est toujours fixée à  $B_x = 5\Delta x$  et le maximum de la puissance de la source  $S(\omega)$  est obtenu pour une fréquence proche de 765 Hz. On utilise ici une fenêtre glissante afin de réduire la taille du domaine ; ainsi, on utilise seulement 711 points dans la direction  $x$  et on a 5000 points dans la direction  $z$ . Le nombre CFL

est fixé à 0.66 et le domaine est donc avancé d'un pas  $\Delta x$  deux itérations sur trois. Enfin, le calcul est mené sur 33000 itérations temporelles.

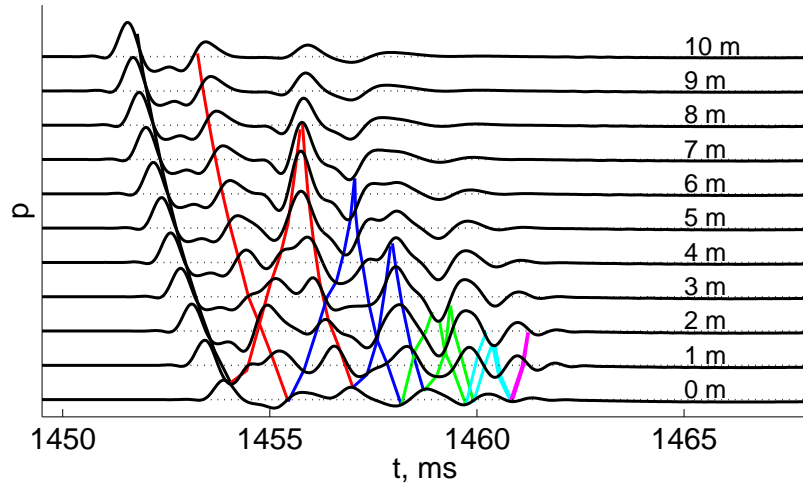


Figure 1.39 – Formes d'ondes obtenues pour le cas de l'impédance de surface appelée « herbe » pour un récepteur situé à  $x = 500$  m.

Les formes d'ondes obtenues dans ce cas à un récepteur à  $x = 500$  m sont représentées sur la figure 1.39. Par rapport aux formes d'ondes représentées sur la figure 1.38, on peut observer que celles-ci ont un support temporel plus petit, parce que le contenu fréquentiel est déplacé vers des fréquences plus élevées. Cela permet notamment de pouvoir distinguer un peu plus précisément les différentes contributions. Ainsi, pour les récepteurs proches du sol, le nombre d'extrema de pression est plus important. Par exemple, pour le récepteur à  $z = 2$  m, on peut identifier autour de  $t = 1454$  ms une contribution liée à deux rayons du groupe  $R_1$  et à  $t = 1456$  ms une contribution liée à un rayon du groupe  $R_1$  et à un rayon du groupe  $R_2$ ; pour les formes d'ondes du cas précédent, on a seulement un maximum pour  $t = 1455$  ms. On peut aussi noter que les contributions des rayons qui se sont réfléchis de 3 à 5 fois sont plus marquées ici. Notamment, on peut remarquer que les contributions autour de  $t = 1460$  ms deviennent non négligeables. Enfin, l'amplitude de la queue basse fréquence est réduite du fait que l'énergie introduite à basse fréquence est relativement plus faible ici.

### Ondes de surface

Pour les deux cas considérés d'un sol avec une impédance finie, il est à noter que pour des temps suffisamment longs ( $t > 735$  ms pour  $x = 250$  m et  $t > 1465$  ms pour  $x = 500$  m), la fluctuation de pression ne revient pas à zéro, contrairement au cas d'un sol parfaitement réfléchissant. De plus, on peut observer sur la figure 1.38 que la queue du signal ne peut pas être liée à une contribution d'un rayon propre. Cela signifie donc que cette partie du signal ne peut pas être expliquée par l'acoustique géométrique et peut donc être liée à une onde de surface.

Dans la section 1.3.4, il a été noté que l'amplitude de l'onde de surface décroissait exponentiellement avec la hauteur pour une atmosphère homogène. Sur la figure 1.40, le logarithme du minimum de la longue queue du signal, noté avec des points sur les formes d'ondes de la figure 1.38, a été tracé en fonction de la hauteur pour des récepteurs situés à  $x = 500$  m et pour les deux modèles d'impédance de surface. On a aussi représenté les droites obtenues par régression linéaire

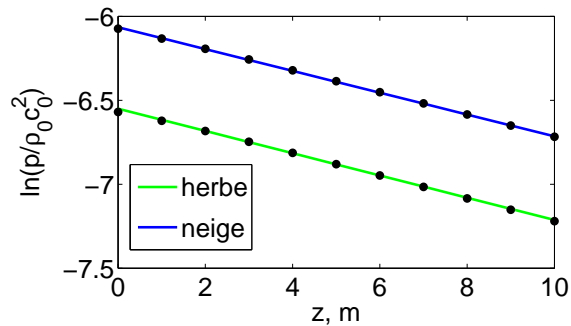


Figure 1.40 – Logarithme du minimum de la longue queue du signal en fonction de la hauteur pour les deux modèles d’impédance et pour des récepteurs situés en  $x = 500$  m.

avec la méthode des moindres carrés. La décroissance exponentielle de ce minimum avec la hauteur est ainsi mise en évidence pour les deux cas. Les différents arguments apportés ici confirment que la longue queue du signal est aussi due à une onde de surface pour les conditions de propagation favorables.

## 1.4 Source en mouvement

Dans les parties précédentes, un modèle de propagation acoustique dans un milieu complexe a été décrit. Pour une application ferroviaire, il faut aussi pouvoir décrire les différentes sources acoustiques afin de représenter fidèlement le rayonnement acoustique d’un train. Dans les modèles classiques utilisés par la SNCF, le train est défini par un ensemble de sources ponctuelles. Le modèle de sources équivalentes, développé dans le cadre de la collaboration franco-allemande DEUFRAKO (1999), a ainsi permis de calculer la signature temporelle et le spectre en tiers d’octaves au passage de trains en champ proche, à l’aide du logiciel MAT2S. Ce modèle a été utilisé par Cotté (2008) afin d’étudier l’influence des paramètres météorologiques sur la signature temporelle et le spectre au passage d’un train à longue distance. Pour cela, un modèle analytique est utilisé conjointement à une méthode de résolution de l’équation parabolique. Il a ainsi été montré que des écarts importants étaient obtenus pour le niveau global sur le temps de passage par rapport à un cas de référence allant, pour un récepteur à 300 m de la voie, jusqu’à 20 dBA en conditions défavorables. La signature temporelle est largement modifiée, notamment dans le cas de profils de vent. Le logiciel VAMPASS, développé récemment par Bongini (2008), permet, quant à lui, une synthèse sonore du signal de pression au passage d’un train ; on peut ainsi écouter les signaux de pression acoustique. Le modèle de propagation acoustique utilisé permet de prendre en compte l’effet d’un sol homogène et est bien adapté pour des calculs champ proche. Pour une approche champ lointain, il est par contre nécessaire de considérer plusieurs types de sols et des conditions météorologiques. Un modèle de propagation dans le domaine temporel, comme celui proposé précédemment, paraît alors mieux adapté à ces situations.

L’objectif est donc de pouvoir prendre en compte les modèles de sources équivalentes dans notre code FDTD. On rappelle que celles-ci sont des sources ponctuelles en mouvement ; il est compliqué de prendre en compte une source sur un seul point dans le code et on utilisera plutôt une distribution spatiale pour chaque source. On se place ici dans un premier cas d’étude. On considère le cas bidimensionnel d’une source à symétrie cylindrique en mouvement rectiligne uniforme. Le schéma du problème est représenté sur la figure 1.41.

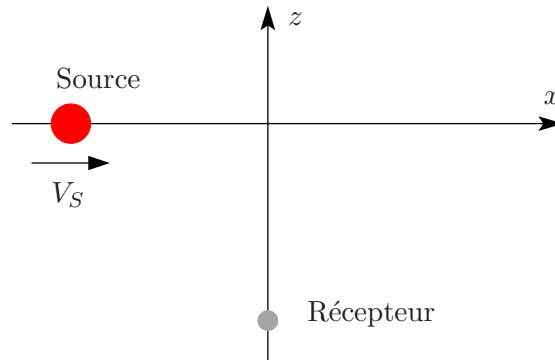


Figure 1.41 – Schéma du problème d'une source en mouvement rectiligne.

### 1.4.1 Source harmonique

Dans cette partie, on considère une source harmonique avec un support spatial gaussien. La source de masse s'écrit alors :

$$Q(x, z, t) = Q'(x - V_S t, z) \sin 2\pi f_0 t \text{H}(t), \quad (1.98)$$

avec le support spatial :

$$Q'(x, z) = \exp\left(-\ln 2 \frac{x^2 + z^2}{B_x^2}\right), \quad (1.99)$$

où  $V_S$  est la vitesse de la source (ici  $V_S = 100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ) et  $f_0$  est la fréquence d'excitation de la source. Le nombre de Mach  $M = V_S/c_0$  est proche de 0.3. La demi-largeur de la gaussienne  $B_x$  est égale à 0.3 m. La fonction d'Heaviside est nécessaire dans la formule ci-dessus pour garantir la causalité.

Le domaine de calcul a une taille de  $[-205 \text{ m}; 150 \text{ m}] \times [-25 \text{ m}; 20 \text{ m}]$  dans les directions respectives  $x$  et  $z$ . Le pas de maillage est fixé à  $\Delta x = \Delta z = 0.1 \text{ m}$  et le CFL est égal à 1. Environ 12000 itérations temporelles sont réalisées. On se place ici en champ libre et des couches PML sont placées aux frontières du domaine. Au départ de la simulation, la source est centrée en  $x_S = -200 \text{ m}$ . On s'intéresse ici aux effets de la compacité de la source sur les résultats.

#### Cas compact

Le cas d'une source compacte est tout d'abord considéré. La fréquence d'excitation est fixée à  $f_0 = 50 \text{ Hz}$ ; le paramètre  $k_0 B$ , avec  $B = B_x/\sqrt{\ln 2}$ , est alors égal à 0.33. On peut ainsi s'attendre à un comportement monopolaire de la source.

La forme d'onde à un récepteur placé en  $x = 0 \text{ m}$  et  $z = -20 \text{ m}$  a été représentée sur la figure 1.42. Le temps de référence  $t = 0$  correspond au temps pour lequel la source est centrée au droit du récepteur, c'est-à-dire en  $x = 0 \text{ m}$  et  $z = 0 \text{ m}$ . Les temps négatifs correspondent alors à la phase d'approche et les temps positifs à la phase d'éloignement. On peut noter qu'en phase d'approche, le niveau de pression est plus important qu'en phase d'éloignement; cela peut être relié à l'amplification convective. Une analyse temps-fréquence de la forme d'onde a été effectuée; pour cela, le signal temporel est découpé en segments de 2048 points et sur chaque segment une transformée de Fourier est réalisée. Le niveau de pression présente en fonction du temps un comportement tonal. Les fréquences pour lesquelles sont obtenues les maxima du niveau de pression sont représentées en fonction du temps sur la figure 1.42. On retrouve le comportement classique d'un point source en mouvement rectiligne uniforme (Morse et Ingard, 1968) avec l'effet Doppler.

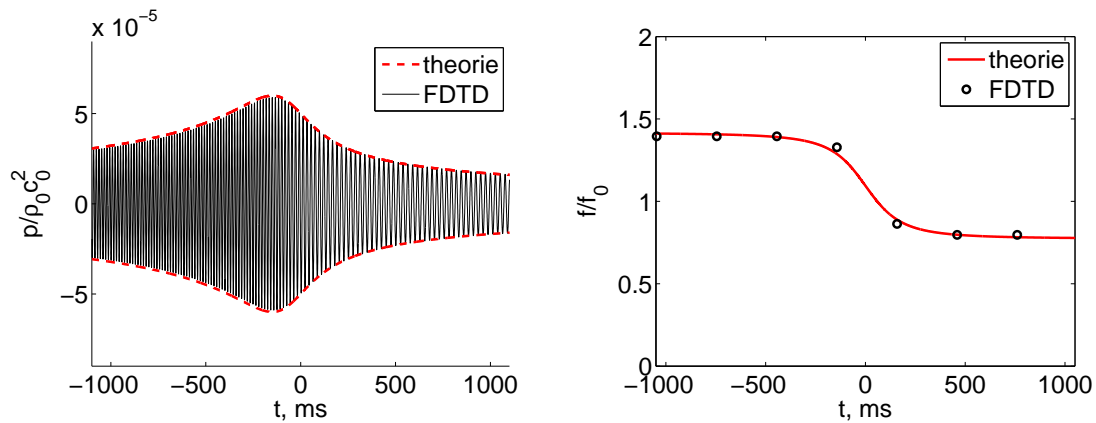


Figure 1.42 – (gauche) Forme d’onde pour un récepteur situé en  $x = 0$  m et  $z = -20$  m et enveloppe obtenue avec la formule de Tanaka. (droite) Fréquence pour laquelle le niveau de pression est maximum en fonction du temps (cercles) et fréquence Doppler (ligne rouge). La fréquence de la source est  $f_0 = 50$  Hz.

En phase d’approche, la fréquence du signal reçu par l’observateur correspond à  $f_- = f_0/(1 - M)$ , égal ici à 71 Hz environ. En phase d’éloignement, elle correspond à  $f_+ = f_0/(1 + M)$ , égal à 39 Hz environ.

Afin de voir l’effet du support spatial de la source, on compare les résultats du calcul numérique à ceux d’une solution analytique pour le point source obtenue par Tanaka et Ishii (1981). Celle-ci s’écrit en notation complexe :

$$p(x, z, t) = -\frac{i}{4(1 - M^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{i\omega_0(t - Mx/c_0)}{1 - M^2}\right) \left[ \frac{iM(x - V_S t)}{\sqrt{(x - V_S t)^2 + (1 - M^2)z^2}} H_1^{(1)}\left(\frac{\omega_0 \sqrt{(x - V_S t)^2 + (1 - M^2)z^2}}{c_0(1 - M^2)}\right) + H_0^{(1)}\left(\frac{\omega_0 \sqrt{(x - V_S t)^2 + (1 - M^2)z^2}}{c_0(1 - M^2)}\right) \right]. \quad (1.100)$$

Pour une source fixe, il est montré dans l’annexe B que le champ de pression en champ libre dans le cas d’une source à symétrie cylindrique correspondait en champ lointain au cas d’un point source avec une puissance de source liée à la distribution spatiale (plus précisément par la transformée de Hankel de  $Q(r)$ ). Dans le cas gaussien, la puissance de la source  $S(\omega)$  est donnée par  $S(\omega) = ik\rho_0 c_0 \pi B^2 \exp(-k^2 B^2/4)$ . On peut donc s’attendre dans le cas d’une source en mouvement compacte retrouver ce facteur  $S(\omega)$ . On a ainsi représenté sur la figure 1.42, l’enveloppe de la forme d’onde obtenue avec le produit  $S(\omega_0)p(x, z, t)$ . Un très bon accord est trouvé avec les résultats du calcul FDTD.

### Cas non-compact

On considère maintenant une fréquence d’excitation  $f_0$  égale à 300 Hz. Le paramètre  $k_0 B$  est ici égal à 2 et la source n’est plus compacte. La forme d’onde obtenue au même récepteur placé en  $x = 0$  m et  $z = -20$  m est représentée en fonction du temps sur la figure 1.43. Contrairement au cas précédent, le niveau de pression est plus élevé en phase d’éloignement qu’en phase d’approche.

On retrouve par contre l'effet Doppler, comme on peut le voir sur la figure 1.43 : notons qu'ici la forme d'onde a été découpée en segments de 512 points. On a représenté aussi la solution analytique en considérant la puissance de la source à la fréquence d'excitation  $f_0$  et aux fréquences  $f_-$  et  $f_+$  correspondant respectivement aux fréquences du signal en phase d'approche et en phase d'éloignement. Il est à noter que les différentes enveloppes ne sont pas en accord avec la forme d'onde obtenue avec le code FDTD. Néanmoins, une certaine correspondance peut être notée en phase d'approche avec le calcul avec  $f_-$  et en phase d'éloignement avec le calcul avec  $f_+$ .

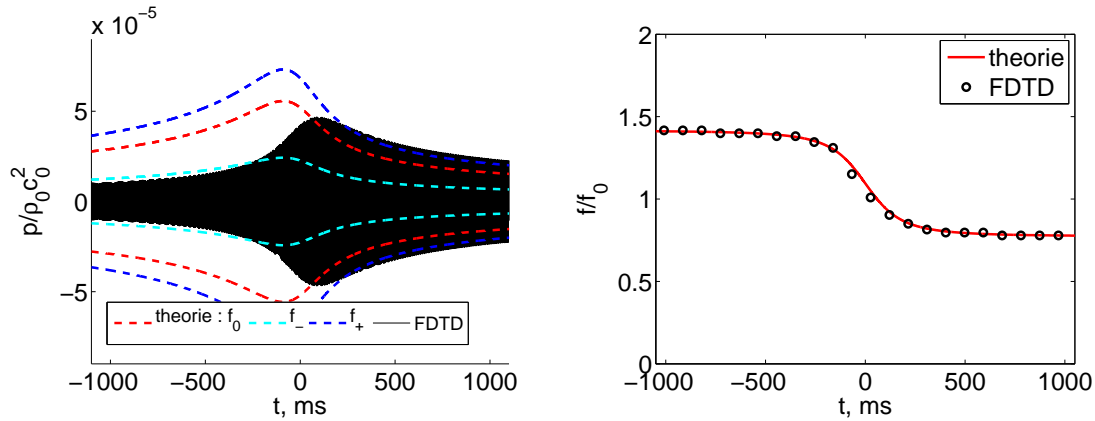


Figure 1.43 – (gauche) Forme d'onde pour un récepteur situé en  $x = 0$  m et  $z = -20$  m et enveloppe obtenue avec la formule de Tanaka. (droite) Fréquence pour laquelle le niveau de pression est maximum en fonction du temps (cercles blancs) et fréquence instantanée avec l'effet Doppler (ligne rouge). La fréquence de la source est  $f_0 = 300$  Hz.

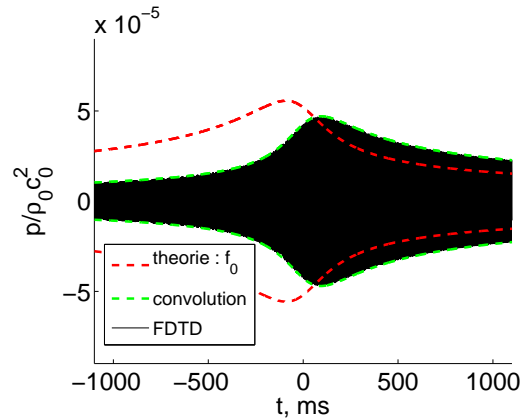


Figure 1.44 – Formes d'onde pour un récepteur situé en  $x = 0$  m et  $z = -20$  m et enveloppe obtenue avec la formule de Tanaka en ligne rouge et avec le produit de convolution en ligne verte. La fréquence de la source est  $f_0 = 300$  Hz.

Il est possible de déterminer la forme d'onde analytiquement en utilisant un produit de convolution :

$$p_B(x, z, t) = i\omega_0 \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q'(x' - V_S t, z') p(x - x', z - z', t) dx' dz'. \quad (1.101)$$



Le produit de convolution est calculé en considérant une surface de 4 m sur 4 m centrée sur la source avec un pas spatial égal à celui du code FDTD. L'enveloppe obtenue dans ce cas-là est représentée sur la figure 1.44. Un très bon accord est cette fois-ci trouvé avec la forme d'onde obtenue avec le code FDTD.

### 1.4.2 Source large bande

Dans la partie précédente, il a été montré que dans le cas d'une excitation harmonique, la prise en compte de sources en mouvement dans le code de résolution des équations d'Euler linéarisées permettait de retrouver des solutions analytiques. On s'intéresse maintenant au cas d'une source large bande de la forme :

$$Q(x, z, t) = Q'(x - V_S t, z) s(t) H(t), \quad (1.102)$$

où  $s(t)$  est un signal de type bruit blanc et où le support spatial est ici donné par :

$$Q'(x, z) = \left(1 - \ln 2 \frac{x^2 + z^2}{B_x^2}\right) \exp\left(-\ln 2 \frac{x^2 + z^2}{B_x^2}\right). \quad (1.103)$$

En notant  $B^2 = B_x^2 / \ln 2$ , la transformée de Hankel de  $Q'$ , s'écrit :

$$\hat{Q}(k) = \pi B^2 \frac{k^2 B^2}{4} \exp\left(-\frac{k^2 B^2}{4}\right). \quad (1.104)$$

Le paramètre  $B$  est ici égal à 0.3 m et on peut considérer que pour des fréquences supérieures à 70 Hz, la source n'est pas compacte.

On réalise 29 simulations numériques correspondant chacune à une réalisation du bruit blanc. Le domaine numérique a une taille de  $[-200 \text{ m}; 150 \text{ m}] \times [-25 \text{ m}; 20 \text{ m}]$  et le maillage est uniforme avec  $\Delta x = \Delta z = 0.05 \text{ m}$ . La source est centrée en  $x_S = -195 \text{ m}$  au départ de la simulation. Comme précédemment, le CFL est fixé à 1; on réalise 25000 itérations temporelles.

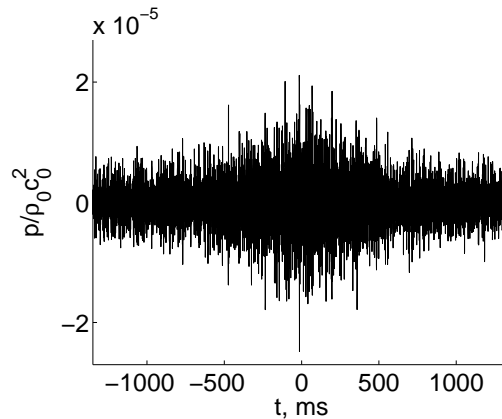


Figure 1.45 – Forme d'onde pour un récepteur situé en  $x = 0 \text{ m}$  et  $z = -20 \text{ m}$  pour une réalisation du bruit blanc.

Une forme d'onde obtenue pour une réalisation du bruit blanc est représentée sur la figure 1.45. Comme dans le cas précédent, elle est découpée en segments de 512 points et sur chaque partie une transformée de Fourier est réalisée. La moyenne des niveaux de pression obtenue au récepteur est tracée en fonction du temps sur la figure 1.46. Une symétrie semble exister pour les niveaux

de pression autour du temps  $t = 0$ . En particulier, il ne semble pas y avoir de dissymétrie causée par l'effet Doppler. Cependant, l'interprétation de la cartographie des niveaux de pression reste complexe.

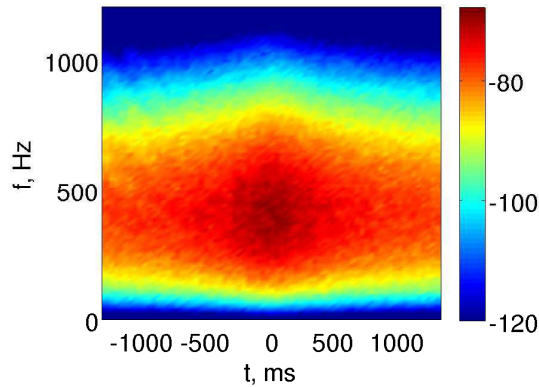


Figure 1.46 – Niveau de pression pour un récepteur situé en  $x = 0$  m et  $z = -20$  m en fonction du temps et de la fréquence.

## Conclusion

Dans ce chapitre, des méthodes de résolution dans le domaine temporel des équations d'Euler linéarisées ont été présentées. En particulier, la condition limite d'impédance dans le domaine temporel proposée par Cotté *et al.* (2009) a été étudiée en détail. Celle-ci se base sur une approximation par une fraction rationnelle de l'impédance dans le domaine fréquentiel qui permet de calculer la condition limite d'impédance dans le domaine temporel avec une méthode de convolution récursive. Une modification de l'écriture de l'approximation de l'impédance a été ainsi proposée afin de pouvoir réaliser des calculs sur une bande de fréquence plus importante. Les méthodes proposées par Cotté *et al.* (2009) pour calculer les coefficients de la fraction rationnelle ont été aussi présentées. Une autre méthode basée sur un approximant de Padé de l'impédance a été proposée. L'intérêt principal de cette méthode est son temps de calcul très faible ; néanmoins, l'approximation est locale et pour certains modèles d'impédance, cette méthode ne permet pas d'avoir une bonne approximation sur tout l'intervalle d'intérêt. Un cas-test unidimensionnel a été repris afin de montrer que les différentes méthodes numériques permettent d'avoir sur un intervalle fréquentiel, typique du bruit ferroviaire, une bonne précision. De plus, il semble que l'erreur obtenue dépende très peu de la méthode choisie pour l'approximation de l'impédance. Dans ce cas-là, la méthode Vector Fitting peut être conseillée puisqu'elle permet d'avoir une approximation globale et un temps de calcul très faible.

Les modèles d'impédance utilisés dans la thèse ont ensuite été présentés. Il a été montré que la plupart d'entre eux sont physiquement admissibles, suivant les critères proposés par Rienstra (2006). Une modification du modèle de Miki (1990) d'une couche sur support rigide a été proposée afin de rendre le modèle passif et de retrouver en basse fréquences le comportement de modèles d'impédance plus complexes.

Dans une troisième partie, deux études ont été réalisées sur la propagation d'une source impulsionnelle au-dessus d'un sol plan dans une atmosphère stratifiée. Une méthode de fenêtre glissante est utilisée pour réduire le domaine dans la direction de propagation privilégiée ; celle-ci permet

ainsi à la fois de réduire l'espace mémoire et le temps de calcul nécessaire. Dans un premier cas, une atmosphère homogène a été considérée. Les formes d'ondes obtenues pour différents modèles d'impédance ont été comparées à une solution analytique pour des récepteurs situés à longue distance. Des ondes de surface ont été mises en évidence dans les différents cas. Il a été aussi montré que certaines conditions d'existence de l'onde de surface proposées dans la littérature (Thomasson, 1976) sont trop restrictives. Dans un second cas, des conditions de propagation favorables ont été considérées. Les temps d'arrivée des différentes contributions du champ de pression sont en bon accord avec ceux donnés par un calcul de tracé de rayons. Enfin, il a été montré qu'une contribution basse fréquence était présente sur les signaux de pression et qu'elle présentait des caractéristiques similaires à celles de l'onde de surface en conditions homogènes.

Enfin, la dernière partie traite d'une étude sur la prise en compte de sources en mouvement dans le code FDTD. Ainsi, une source harmonique avec un support spatial gaussien est considérée. Il a été montré que dans le cas d'une source compacte, on retrouve le comportement d'un point source en mouvement. Dans le cas non-compact, le champ de pression obtenu est plus complexe. Un premier exemple de prise en compte d'une source large bande a été présenté.

Le solveur ainsi développé permet de prendre en compte les effets de gradients de célérité du son et de vitesse du vent sur la propagation acoustique. Avec la condition limite d'impédance dans le domaine temporel, on peut modéliser aussi l'effet de sol. L'extension naturelle est alors de considérer un sol non-plan ; des méthodes numériques pour traiter la topographie et des applications sont présentées dans le chapitre 3.

## Chapitre 2

# Couplage champ proche - champ lointain

La résolution dans le domaine temporel des équations d'Euler linéarisées (LEEs) permet d'obtenir de façon précise le champ de pression acoustique en présence d'un milieu complexe, notamment en champ proche. Cependant, les coûts de calcul et d'espace mémoire demandés sont importants, par rapport à des méthodes développées dans le domaine fréquentiel. L'idée serait alors de réaliser un calcul champ proche avec un code de résolution des équations d'Euler linéarisées et de réaliser un couplage avec un code dans le domaine fréquentiel approprié pour le calcul champ lointain. Les méthodes de résolution d'équations d'ondes telles que, par exemple, les méthodes Fast Field Program ou les méthodes d'équation parabolique (EP) sont ainsi un bon choix. On considérera ici les méthodes d'équation parabolique. Celles-ci correspondent à une approximation paraxiale d'une équation d'onde choisie : ainsi, on ne traite que les ondes acoustiques se propageant dans une direction privilégiée. Les méthodes EP ont été largement étudiées dans la littérature et permettent de prendre en compte la plupart des phénomènes rencontrés dans la propagation acoustique en milieu extérieur. Leur principale limitation est qu'elles ne sont pas valables en champ proche, mais elles sont par contre adaptées pour le calcul champ lointain.

Van Renterghem *et al.* (2005) sont les premiers à proposer un code hybride FDTD et EP. Il est appliqué dans cette étude pour déterminer le champ de pression acoustique dans un cas où se trouve en champ proche un milieu complexe (vent, écrans acoustiques). Depuis, il a été utilisé pour étudier l'impact de la diffraction due aux arbres (Van Renterghem et Botteldooren, 2008) sur l'efficacité d'écrans acoustiques. Une application en acoustique des milieux urbains a été aussi proposée (Van Renterghem *et al.*, 2006). On peut enfin citer Yokota *et al.* (2006) qui ont mené une étude comparable sur des écrans acoustiques.

Dans ce chapitre, on se propose donc de réaliser un couplage entre le code FDTD, vu dans le chapitre précédent et un code de résolution d'équation parabolique. Dans une première partie, on développera la méthode split-step Padé pour obtenir une équation parabolique grand angle afin d'avoir un cône de validité compatible avec la résolution du code FDTD. Dans une seconde partie, on étudiera l'initialisation de ces équations paraboliques grand angle, en particulier avec une condition initiale numérique obtenue en rétropropageant un champ analytique. Enfin, dans une troisième partie, on réalisera le couplage FDTD - EP sur un premier cas-test monofréquentiel avant de considérer un cas large bande.

## 2.1 Équation parabolique grand angle

On décrit ici la méthode classique d'obtention de l'équation parabolique. Celle-ci a été développée initialement pour des problèmes de propagation d'ondes électromagnétiques (Leontovich et Fock, 1946; Fock, 1965) avant d'être introduit avec les travaux de Tappert (1977) dans la communauté de l'acoustique sous-marine. Les premières études avec une application en propagation atmosphérique ont été réalisées par Myers et McAninch (1978) et par Gilbert et White (1989). On s'intéressera notamment au domaine de validité de l'approximation parabolique et des méthodes pour augmenter celui-ci. Ainsi, on détaillera la méthode dite « split-step Padé ».

### 2.1.1 Obtention de l'équation parabolique

#### Équation « one-way »

On développera la méthode d'obtention de l'équation parabolique pour le cas simple de l'équation d'Helmholtz. On se place donc en champ libre dans un repère  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  :

$$(\Delta + k_0^2(1 + \epsilon))p(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.1)$$

On note  $\epsilon = n^2 - 1$  où  $n$  est l'indice de réfraction donné par  $n = c_0/c(z)$ . En choisissant une direction privilégiée, ici la direction horizontale  $x$ , on arrive à :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2 \left( 1 + \epsilon + \frac{1}{k_0^2} \Delta_{\perp} \right) \right] p(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.2)$$

où  $\Delta_{\perp}$  est le laplacien dans la direction transverse. On peut ensuite écrire cette équation sous la forme :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + ik_0 Q \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - ik_0 Q \right) p(\mathbf{r}) + ik_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} Q - Q \frac{\partial}{\partial x} \right) p(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.3)$$

où l'opérateur  $Q$  est donné par la relation :

$$Q = \left( 1 + \epsilon + \frac{1}{k_0^2} \Delta_{\perp} \right)^{\frac{1}{2}} = (1 + L)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.4)$$

avec l'opérateur  $L$  défini par :

$$L = \epsilon + \frac{1}{k_0^2} \Delta_{\perp}. \quad (2.5)$$

Si l'opérateur de dérivation et l'opérateur  $Q$  commutent, on peut alors découpler cette équation en deux équations dites « one-way », caractérisant une onde se propageant vers les  $x$  positifs notée  $p_+(\mathbf{r})$  et l'autre vers les  $x$  négatifs notée  $p_-(\mathbf{r})$ . En utilisant la notation  $\gamma = \pm 1$ , on obtient alors les équations :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \gamma ik_0 Q \right) p_{\gamma}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.6)$$

On introduit ensuite la variable  $\varphi_{\gamma}$  correspondant à l'enveloppe de la pression :

$$p_{\gamma}(\mathbf{r}) = \exp(i\gamma k_0 x) \varphi_{\gamma}(\mathbf{r}). \quad (2.7)$$

On obtient alors l'équation « one-way » :

$$\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x}(\mathbf{r}) = \gamma i k_0 (Q - 1) \varphi_\gamma(\mathbf{r}). \quad (2.8)$$

Il est à noter que les équations obtenues pour  $\varphi_+$  et  $\varphi_-$  sont comparables. On garde par la suite l'équation pour  $\varphi_+$  noté simplement  $\varphi$ .

### Équation parabolique et notion d'angle de validité

Pour résoudre numériquement l'équation « one-way », le terme  $Q$  peut être développé afin de faire apparaître explicitement les dérivées spatiales dans la direction transverse. Puisque les inhomogénéités du milieu sont faibles et puisqu'on s'intéresse à la propagation des ondes acoustiques dans la direction privilégiée, on peut alors réaliser une approximation de l'opérateur  $\sqrt{1 + \cdot}$ . L'idée naturelle est de réaliser un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction  $\sqrt{1 + \cdot}$  autour de  $x = 0$ ; il vient alors l'équation suivante, appelée équation parabolique standard :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathbf{r}) = i k_0 p L \varphi(\mathbf{r}), \quad (2.9)$$

avec  $p = 1/2$ .

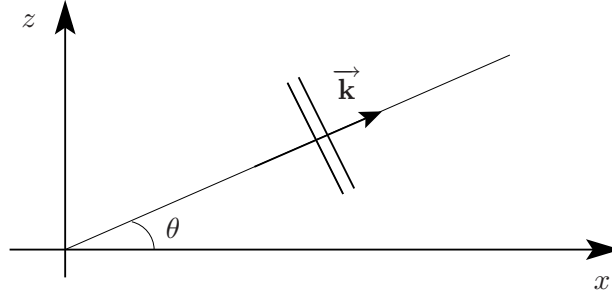


Figure 2.1 – Schéma représentant une onde plane se propageant dans un milieu homogène.

Pour étudier l'erreur commise avec l'approximation de l'équation parabolique standard, on reprend l'étude réalisée par Dallois (2000) de propagation d'une onde plane 2D dans un milieu homogène et au repos. On considère ainsi que l'on a en  $x = 0$ , une onde plane du type  $\varphi(x = 0, z) = \exp(i k_0 \sin \theta z)$ . Le schéma du problème est représenté sur la figure 2.1. On fait une transformée de Fourier spatiale sur la variable  $z$  :

$$\bar{\varphi}(x, k_z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, z) \exp(-i k_z z) dz. \quad (2.10)$$

On se ramène alors à un problème simple avec une condition initiale, puisque la solution analytique dans le domaine  $(x, k_z)$  est simplement donnée par :

$$\bar{\varphi}(x, k_z) = C(k_z) \exp\left(-\frac{i k_z^2}{2 k_0} x\right), \quad (2.11)$$

où  $C(k_z)$  s'obtient avec la valeur de  $\bar{\varphi}$  en 0. Dans notre cas, on a simplement  $C(k_z) = 2\pi \delta(k_z - k_0 \sin \theta)$ . En réalisant une transformée de Fourier inverse, on a alors la solution analytique :

$$\varphi(x, z) = \exp\left(-i \frac{k_0 \sin^2 \theta}{2} x\right) \exp(i k_0 \sin \theta z). \quad (2.12)$$

Celle-ci est à comparer avec l'expression analytique d'une onde plane, solution analytique de l'équation d'Helmholtz, du type  $\varphi(x, z) = \exp(ik_0(\cos \theta - 1)x) \exp(ik_0 \sin \theta z)$ . Il apparaît donc une erreur sur la phase introduite par l'approximation de l'opérateur  $\sqrt{1 + \cdot}$ . On obtient ainsi une erreur relative  $e(\theta)$  donnée par l'expression :

$$e(\theta) = \frac{\cos \theta - 1 + (\sin^2 \theta)/2}{\cos \theta - 1}. \quad (2.13)$$

Cette erreur est tracée en % en fonction de l'angle  $\theta$  sur la figure 2.2. On peut voir qu'elle croît lorsque l'angle  $\theta$  augmente c'est-à-dire lorsque la direction de propagation de l'onde plane s'éloigne de la direction de propagation privilégiée. On prendra ici comme référence pour parler d'angle de validité de l'équation parabolique, la valeur de  $\theta$  pour laquelle l'erreur relative devient supérieure à 1 %. L'angle de validité de l'équation parabolique standard est donc de  $11.5^\circ$ .

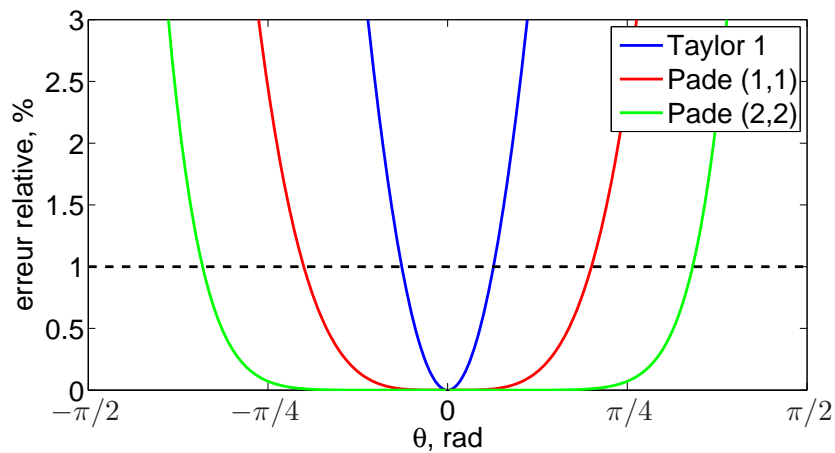


Figure 2.2 – Erreur relative commise en % sur le nombre d'onde dans la direction de propagation pour une onde plane en fonction de l'angle  $\theta$ .

Pour augmenter cet angle de validité, l'idée est alors de réaliser une approximation plus précise de l'opérateur  $\sqrt{1 + \cdot}$ . Pour obtenir l'équation dite WAPE, on réalise ainsi un approximant de Padé (1,1) de la fonction  $\sqrt{1 + x}$  autour de  $x = 0$ . Cette approximation consiste alors à évaluer les dérivées en 0 jusqu'à l'ordre 2 de cet opérateur et d'une fraction rationnelle dont les numérateurs et les dénominateurs sont des polynômes du premier degré. On arrive alors à l'approximation :

$$Q \approx \frac{1 + p_1 L}{1 + q_1 L} \quad (2.14)$$

où  $p_1 = 3/4$  et  $q_1 = 1/4$ . On obtient finalement l'équation suivante dénommée WAPE (Wide-Angle Parabolic Equation) :

$$(1 + q_1 L) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x} = ik_0(p_1 - q_1) L \varphi(\mathbf{r}). \quad (2.15)$$

On fera par la suite fréquemment référence à cette équation, car de nombreuses techniques numériques ont été proposées pour résoudre celle-ci. On a tracé sur la figure 2.2 l'erreur réalisée avec cet approximation en fonction de l'angle  $\theta$ . On a pour l'équation WAPE un angle de validité de  $36^\circ$ . Cela montre bien l'intérêt d'augmenter l'ordre d'approximation de l'opérateur  $\sqrt{1 + \cdot}$ . De même, si on considère un approximant de Padé d'ordre (2,2) :

$$Q \approx \frac{1 + r_1 L + r_2 L^2}{1 + s_1 L + s_2 L^2} \quad (2.16)$$

avec  $r_1 = 5/4$ ,  $r_2 = 5/16$ ,  $s_1 = 3/4$  et  $s_2 = 1/16$ , on obtient alors un angle de validité de  $61^\circ$ . Il est ainsi théoriquement possible d'obtenir un angle de validité proche de  $90^\circ$  si on augmente encore l'ordre d'approximation. Notons aussi que le développement de Taylor utilisé pour obtenir l'équation parabolique standard correspond à un approximant de Padé (1,0).

### 2.1.2 Méthode Split-Step Padé ( $n, n$ )

On a vu dans le paragraphe précédent qu'augmenter l'ordre de l'approximation de Padé permet d'améliorer la validité angulaire de l'équation parabolique. Pour des approximants de Padé (1,1) ou (2,2) avec une méthode de Crank-Nicolson, le système à résoudre ne comporte que des matrices tridiagonales ou pentadiagonales pour lesquelles des algorithmes efficaces existent à la fois pour la multiplication et pour l'inversion. Pour des ordres plus élevés, on perd ces avantages. La méthode split-step Padé introduite par Collins (1993) permet elle d'augmenter l'angle de validité tout en gardant la tridiagonalité des matrices. Elle permet aussi de modifier facilement l'opérateur de propagation  $Q$  pour prendre en compte les effets locaux du milieu tels que la turbulence (Dallois, 2000).

### Équation parabolique générale

Pour cela, à partir de l'équation « one-way » (voir Eq. 2.8), le champ en  $x + \Delta x$  est relié à celui en  $x$  par la relation :

$$\varphi(x + \Delta x, z) = \exp \left[ \int_x^{x+\Delta x} ik_0(Q - 1) dx \right] \varphi(x, z). \quad (2.17)$$

Dans le cas d'une atmosphère stratifiée, l'opérateur  $Q$  ne dépend pas de  $x$  et on obtient alors l'équation :

$$\varphi(x + \Delta x, z) = \exp[ik_0\Delta x(Q - 1)] \varphi(x, z). \quad (2.18)$$

En utilisant l'opérateur  $L$  défini dans le paragraphe précédent, on arrive à :

$$\varphi(x + \Delta x, z) = \exp[ik_0\Delta x(\sqrt{1 + L} - 1)] \varphi(x, z). \quad (2.19)$$

On réalise ensuite un approximant de Padé de l'opérateur  $\exp[ik_0\Delta x(\sqrt{1 + L} - 1)]$ . Pour cela, on écrit :

$$\exp[ik_0\Delta x(\sqrt{1 + L} - 1)] = \frac{P_n(L)}{Q_n(L)} = \frac{p_0 + p_1L + \dots + p_nL^n}{1 + q_1L + \dots + q_nL^n}. \quad (2.20)$$

Les polynômes de la fraction rationnelle sont ensuite décomposés en produits de polynômes du premier degré :

$$\exp[ik_0\Delta x(\sqrt{1 + L} - 1)] = \prod_{j=1}^n \frac{1 + \mu_j L}{1 + \nu_j L}. \quad (2.21)$$

On peut remarquer que les coefficients  $p_j$  et  $q_j$  et  $\mu_j$  et  $\nu_j$  sont deux à deux conjugués puisque la conjuguée de l'exponentielle complexe est son inverse. Cette propriété est importante puisqu'elle permet d'assurer la stabilité numérique de la méthode. Enfin, en faisant une décomposition en éléments simples, on obtient un schéma d'avancement du type :

$$\exp[ik_0\Delta x(\sqrt{1 + L} - 1)] = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j L}{1 + \beta_j L}. \quad (2.22)$$



Comme le propose Dallois (2000), deux schémas d'avancement sont donc possibles, un sous forme produit et l'autre sous forme somme. Pour le premier, la résolution numérique se fait pas à pas :

$$\varphi_j = \frac{1 + \mu_j L}{1 + \nu_j L} \varphi_{j-1} \text{ avec } \varphi_0 = \varphi(x, z) \text{ et } \varphi_n = \varphi(x + \Delta x, z). \quad (2.23)$$

Pour le schéma sous forme de somme, la résolution numérique se fait en parallèle :

$$\varphi(x + \Delta x, z) = \varphi(x, z) + \sum_{j=1}^n \varphi_j \text{ avec } \varphi_j = \frac{\alpha_j L}{1 + \beta_j L} \varphi(x, z). \quad (2.24)$$

Ce schéma a pour avantage de pouvoir envisager de faire le calcul sur des ordinateurs supportant la parallélisation (ce qui peut être intéressant pour une valeur de  $n$  importante) ; le schéma produit ne le permet pas. Cependant, il demande plus de mémoire pour stocker à chaque pas les différents  $\varphi_j$ . De plus, comme les  $\alpha_j$  et les  $\nu_j$  ne sont a priori pas conjugués, la stabilité de la résolution n'est pas assurée. Dans la suite, les calculs seront effectués avec un développement sous forme produit.

### Calcul des coefficients

Afin d'implémenter les schémas d'avancement, il faut déterminer les coefficients des développements indiqués ci-dessus. Une remarque importante est à faire : tous les coefficients dépendent à la fois du paramètre  $ik_0 \Delta x$  et aussi de l'ordre du développement, c'est à dire de  $n$ . On devra donc les calculer à chaque simulation.

Dans cette partie, on note :

$$f(y) = \exp[ik_0 \Delta x (\sqrt{1+y} - 1)], \quad h(y) = ik_0 \Delta x (\sqrt{1+y} - 1) \text{ et } g(y) = \exp(y). \quad (2.25)$$

Par définition de l'approximation de Padé, pour calculer les coefficients  $p_j$  et  $q_j$  de la fraction rationnelle, on égale les dérivées en 0 jusqu'à l'ordre  $2n$ . Pour cela, on écrit le développement de Taylor de  $f$  à l'ordre  $2n$ . Pour une fonction composée, les polynômes de Bell notés  $B_{n,k}$  permettent de calculer les dérivées  $n$ -ièmes avec la formule de Faà di Bruno (Riordan, 1946) :

$$f^{(n)}(0) = (g \circ h)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n g^{(k)}(h(0)) B_{n,k}(h^{(1)}(0), h^{(2)}(0), \dots, h^{(n-k+1)}(0)). \quad (2.26)$$

Etant donné les propriétés de la fonction  $g$ , on peut donner une valeur plus simple aux dérivées  $n$ -ièmes :

$$f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n B_{n,k}(h^{(1)}(0), \dots, h^{(n-k+1)}(0)). \quad (2.27)$$

Les dérivées de la fonction  $h$  s'obtiennent elles plus facilement par la formule suivante

$$\text{pour } i > 0, \quad h^{(i)}(0) = (-1)^{n+1} ik_0 \Delta x \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}. \quad (2.28)$$

En écrivant l'égalité des dérivées jusqu'à l'ordre  $2n$ , on arrive à deux systèmes matriciels, un

pour les  $q_i$  et l'autre pour les  $p_i$ . Le système matriciel vérifié par les premiers est :

$$\begin{bmatrix} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} & \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} & \cdots & \frac{f^{(1)}(0)}{1!} \\ \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} & \frac{f^{(n)}(0)}{n!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \\ \frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!} & \cdots & \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} & \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \\ \frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!} \\ \vdots \\ \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Les coefficients  $q_i$  peuvent donc être obtenus par résolution d'un système linéaire standard de type  $Ax = b$ . Cependant, le conditionnement de la matrice du terme de gauche de type Toeplitz semble augmenter exponentiellement avec  $n$ . Un exemple du comportement du conditionnement de la matrice est représenté pour le cas  $k_0\Delta x = \pi/5$  sur la figure 2.3. Pour des valeurs relativement faibles de  $n$  (de l'ordre de 6), des erreurs très importantes sont alors obtenues si on utilise une méthode d'inversion directe de la matrice. L'algorithme de Barlekamp-Massey qui permet de résoudre des systèmes linéaires du même type que celui obtenu (Blahut, 1992) est alors utilisé.

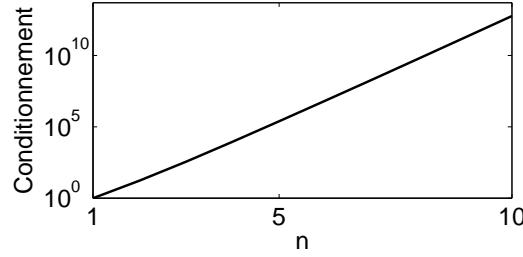


Figure 2.3 – Conditionnement de la matrice de type Toeplitz dans l'équation 2.29 pour  $k_0\Delta x = \pi/5$  en fonction de  $n$ .

Les coefficients  $p_i$  s'obtiennent par une simple multiplication par une matrice triangulaire :

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f^{(0)}(0)}{0!} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} & \cdots & \frac{f^{(0)}(0)}{0!} & 0 \\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} & \cdots & \frac{f^{(1)}(0)}{1!} & \frac{f^{(0)}(0)}{0!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

La propriété que les  $p_i$  soient les conjugués des  $q_i$  permet de vérifier la bonne résolution des systèmes et de détecter les erreurs numériques trop importantes. Les séries de coefficients  $\mu_i$  et  $\nu_i$  sont obtenues en trouvant les racines des polynômes  $P_n$  et  $Q_n$ . Enfin, il reste à déterminer les coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ . Il est immédiat que les coefficients  $\beta_i$  et  $\nu_i$  sont égaux. Les termes  $\alpha_i$  peuvent s'obtenir par la formule :

$$\alpha_k = -(\nu_k - \mu_k) \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{\nu_k - \mu_j}{\nu_k - \nu_j}. \quad (2.31)$$

Il a été montré par Blairon (2002) qu'avec une méthode split-step Padé pour un schéma (1,1), on retrouvait le même schéma d'avancement que celui de l'équation WAPE si on utilisait pour l'intégration suivant  $x$  une méthode des trapèzes (utilisée notamment dans la méthode de Crank-Nicolson). Les coefficients  $q_i$  et  $\nu_i$  pour un schéma de Padé (1,1) et (2,2) sont calculés explicitement ci-dessous en notant le paramètre  $\sigma = ik_0\Delta x$ . Dès  $n = 2$ , ces différents coefficients ont une formule analytique relativement compliquée.

Tableau 2.1 – Coefficients des schémas de Padé pour  $n = 1$  et  $n = 2$

Termes	$n = 1$	$n = 2$
$q_1$	$\frac{1 - \sigma}{4}$	$\frac{1}{4} \frac{9 - 3\sigma - 2\sigma^2 + \sigma^3}{3 - \sigma^2}$
$q_2$		$\frac{1}{48} \frac{9 - 18\sigma + 3\sigma^2 + 3\sigma^3 - \sigma^4}{3 - \sigma^2}$
$\nu_1$	$\frac{1 - \sigma}{4}$	$\frac{1}{8} \frac{9 - 3\sigma - 2\sigma^2 + \sigma^3 - (45 + 18\sigma - 27\sigma^2 - 6\sigma^3 + 6\sigma^4 - \frac{1}{3}\sigma^6)^{1/2}}{3 - \sigma^2}$
$\nu_2$		$\frac{1}{8} \frac{9 - 3\sigma - 2\sigma^2 + \sigma^3 + (45 + 18\sigma - 27\sigma^2 - 6\sigma^3 + 6\sigma^4 - \frac{1}{3}\sigma^6)^{1/2}}{3 - \sigma^2}$

Afin de valider l'approche utilisée, on considère comme pour les équations paraboliques vues dans la partie précédente, une onde plane du type  $\varphi(x, z) = \exp(ik_x x + ik_z z)$ . En introduisant cette formule dans l'équation 2.19, on arrive à l'équation suivante :

$$\exp(ik_x \Delta x) = \exp \left[ ik_0 \Delta x \left( \sqrt{1 - \frac{k_z^2}{k_0^2}} - 1 \right) \right]. \quad (2.32)$$

Il est à noter que l'on retrouve dans ce cas-là la relation de dispersion exacte de l'équation d'Helmholtz puisqu'on obtient à partir de l'équation ci-dessus  $k_x = \sqrt{k_0^2 - k_z^2} - k_0$ . On s'intéresse ensuite à l'erreur introduite par l'approximant de Padé. Pour cela, on peut remarquer que puisque  $\mu_j$  et  $\nu_j$  sont complexes conjuguées, on a la relation  $|1 + \mu L_z| = |1 + \nu L_z|$  avec  $L_z = -k_z^2/k_0^2$ . On peut alors écrire :

$$k_x = \frac{2}{\Delta x} \sum_{j=1}^n \psi_j \text{ avec } \tan \psi_j = -\frac{k_z^2 \text{Im}(\mu_j)}{k_0^2 - k_z^2 \text{Re}(\mu_j)}. \quad (2.33)$$

Il est à noter que puisque le problème est discrétisé dans la direction  $x$ , le nombre d'onde  $k_x$  dépend du pas d'avancement  $\Delta x$ . Dans le cas split-step Padé (1,1), il n'y a qu'un seul coefficient  $\mu_j$  et son expression analytique est simple ; on peut alors calculer la relation de dispersion et on obtient :

$$k_x = -\frac{2}{\Delta x} \arctan \frac{k_0 \Delta x k_z^2}{4k_0^2 - k_z^2}. \quad (2.34)$$

Quand  $k_0 \Delta x$  devient petit, on obtient alors la relation de dispersion :

$$k_x = -\frac{2k_0 k_z^2}{4k_0^2 - k_z^2}, \quad (2.35)$$

qui ne dépend plus du pas d'avancement et qui correspond à la relation de dispersion de l'équation WAPE.

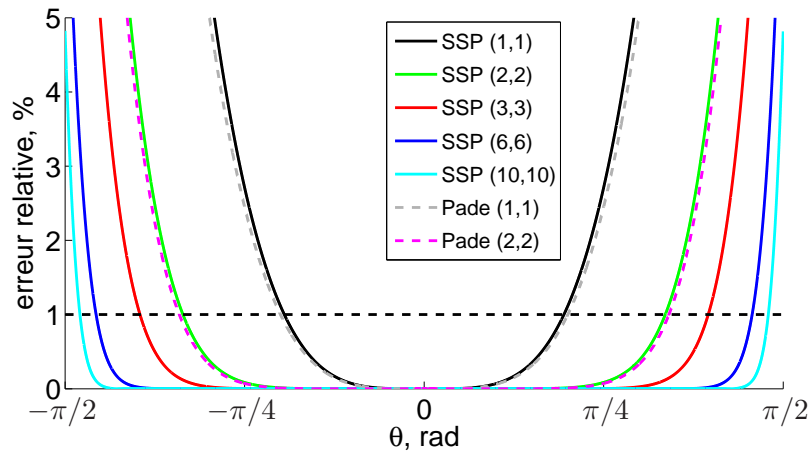


Figure 2.4 – Erreur relative commise en % sur le nombre d’onde dans la direction de propagation pour une onde plane en fonction de l’angle  $\theta$ . Le pas  $\Delta x$  pour la méthode split-step Padé a été fixé à  $\lambda/10$ .

Comme pour la partie précédente, on peut calculer l’erreur dans la direction  $\theta$ , en posant  $k_z = k_0 \sin \theta$ . Cette erreur est représentée sur la figure 2.4 pour différents ordres de l’approximant de Padé en fixant  $\Delta x = \lambda/10$ . On peut observer que sur tout l’intervalle considéré, l’erreur décroît bien lorsque l’ordre d’approximation augmente. Pour des ordres d’approximation importants, on remarque qu’on a une erreur très faible sur tout l’intervalle considéré; ainsi, pour un ordre de développement (10,10), l’erreur relative devient supérieure à 1% pour  $\theta = 86^\circ$ . Notons aussi qu’on retrouve l’erreur obtenue en faisant un approximant de Padé de l’opérateur  $\sqrt{1 + \cdot}$  avec la méthode split-step Padé pour des développements (1,1) ou (2,2).

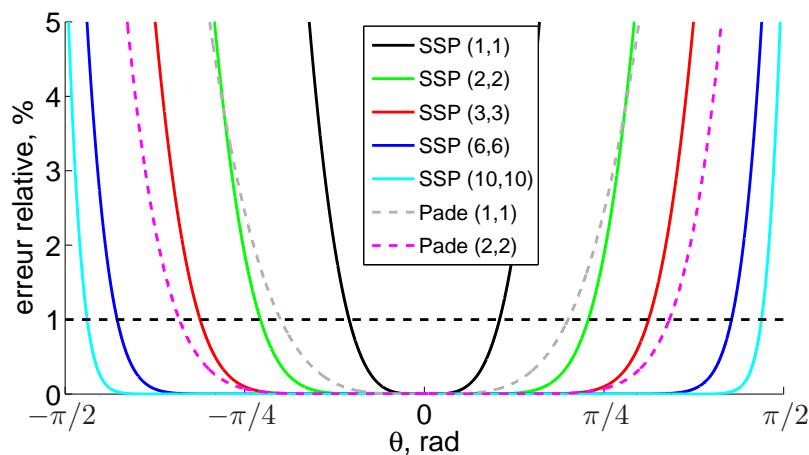


Figure 2.5 – Erreur relative commise en % sur le nombre d’onde dans la direction de propagation pour une onde plane en fonction de l’angle  $\theta$ . Le pas  $\Delta x$  pour la méthode split-step Padé a été fixé à  $\lambda$ .

Il est intéressant de voir l’effet d’une augmentation du pas de maillage  $\Delta x$  sur les courbes d’erreur. On a représenté sur la figure 2.5 les courbes d’erreur obtenues avec  $\Delta x = \lambda$ . Il est à noter

que pour les faibles ordres d'approximants de Padé, l'erreur croît beaucoup plus vite avec l'angle  $\theta$ . Ainsi, pour le cas split-step Padé (1,1), l'erreur relative atteint 1% pour un angle  $\theta = 19^\circ$  pour  $\Delta x = \lambda$  alors qu'elle atteint cette valeur pour un angle  $\theta = 36^\circ$  pour  $\Delta x = \lambda/10$ . Par contre, pour les ordres de développement élevés, cette augmentation a peu d'effet sur les courbes d'erreur. Comme noté par Dallois (2000), avoir un ordre de développement élevé permet à la fois d'avoir une validité angulaire plus grande mais aussi d'augmenter le pas d'avancement.

### 2.1.3 Implémentation numérique

On décrit dans cette partie l'implémentation numérique de la méthode split-step Padé. On s'intéressera par la suite au cas 2D. L'équation parabolique développée sera donc basée sur l'équation d'Helmholtz 2D :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2(1 + \epsilon) \right] p(x, z) = 0. \quad (2.36)$$

Néanmoins cette équation parabolique est aussi valable pour le cas 3D axisymétrique (Salomons, 2001). En effet, l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  peut s'écrire :

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k_0^2(1 + \epsilon) \right] p(r, \theta, z) = 0. \quad (2.37)$$

Si on suppose que la pression ne dépend pas de  $\theta$ , on peut alors introduire le terme  $q(r, z) = p(r, z)\sqrt{r}$ . Ce terme vérifie alors l'équation :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{4r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2(1 + \epsilon) \right] q(r, z) = 0. \quad (2.38)$$

En champ lointain ( $k_0 r \gg 1$ ), le terme  $q(r, z)$  vérifie alors l'équation d'Helmholtz 2D :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2(1 + \epsilon) \right] q(r, z) = 0. \quad (2.39)$$

Une fois que  $q(r, z)$  est connu, la pression peut ensuite être déduite facilement.

### Conditions aux limites

Il reste finalement à mettre les conditions aux limites pour clore le problème. Deux types de conditions aux limites sont envisageables :

- des conditions d'impédance pour le sol,
- des conditions de sortie en haut du domaine de calcul.

Pour prendre en compte ces conditions limites, on étend ce qui a été fait pour le cas du code de résolution de l'équation WAPE avec la méthode de Crank-Nicolson (méthode dite CNPE pour Crank-Nicolson Parabolic Equation) au cas Padé  $(n, n)$ .

#### *Condition d'impédance*

Pour la condition limite d'impédance pour les deux cas - produit et somme -, on utilise la relation au niveau du sol :

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial z}(x, 0) + ik_0 \beta \varphi_j(x, 0) = 0. \quad (2.40)$$

Cela revient simplement à modifier la première ligne des différentes matrices d'avancement.

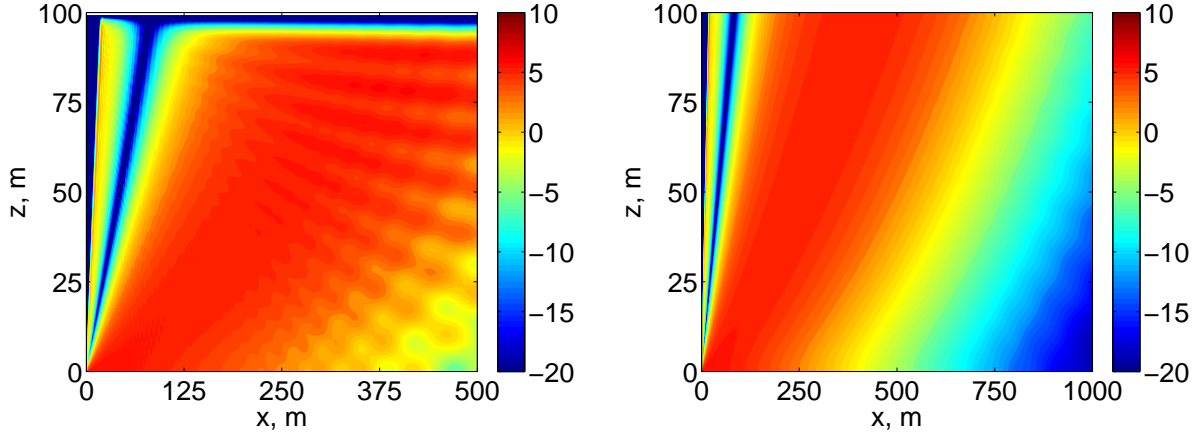


Figure 2.6 – Niveau de pression relatif au champ libre en dB pour une source à 2 m d’un sol parfaitement réfléchissant. La fréquence est fixée à 50 Hz. Le domaine de calcul est tronqué sur la figure de gauche à 100 m et sur la figure de droite à 200 m.

#### *Couches absorbantes*

Une première condition de sortie simple consiste à placer des couches absorbantes à la sortie du domaine. Cela revient, pour le cas du code de résolution de l’équation WAPE, à multiplier le vecteur  $\varphi(x, z)$  par une matrice d’amortissement :

$$\varphi^{\text{amorti}}(x, z) = \varphi^{\text{num}}(x, z) \exp\left(-\frac{1}{C_\alpha} \left(\frac{z - z_\alpha}{z_{\text{max}} - z}\right)^2\right) \text{ pour } z \geq z_\alpha. \quad (2.41)$$

Les coefficients  $z_\alpha$  et  $C_\alpha$  sont déterminés empiriquement. Des valeurs classiques sont de  $z_\alpha = 0.8 z_{\text{max}}$  pour le premier et de  $C_\alpha = 100$  pour le second où  $z_{\text{max}}$  correspond à l’ordonnée maximale du domaine de calcul. Pour des basses fréquences, il faudra s’assurer que les couches absorbantes soient placées suffisamment loin de la source et qu’elles contiennent un nombre suffisant de longueurs d’ondes : en effet, si ce n’est pas le cas, des réflexions parasites peuvent apparaître. On considère ici le cas d’une source à 50 Hz - soit une longueur d’onde d’environ 7 m - situé à 2 m au-dessus d’un sol réfléchissant. Les cartographies de la pression relative au champ libre  $\Delta Lp$  sont représentées sur la figure 2.6. Dans le premier cas, le domaine est tronqué à une hauteur de 100 m ; on peut observer une réflexion importante qui vient parasiter le champ acoustique au niveau du sol. Pour un domaine tronqué à 200 m, on peut encore observer de légères oscillations pour des récepteurs proches du sol mais l’amplitude de celles-ci est beaucoup plus faible que dans le cas précédent.

Pour le cas du schéma somme, on réalise à chaque pas pour chaque  $\varphi_j$  cet amortissement. Par contre, pour le cas produit, à chaque pas d’avancement, on va réaliser en tout  $n$  fois l’amortissement. On utilisera donc un amortissement du type :

$$\varphi_j^{\text{amorti}}(x, z) = \varphi_j^{\text{num}}(x, z) \exp\left(-\frac{1}{n C_\alpha} \left(\frac{z - z_\alpha}{z_{\text{max}} - z}\right)^2\right) \text{ pour } z \geq z_\alpha. \quad (2.42)$$

Les coefficients  $z_\alpha$  et  $C_\alpha$  sont donc choisis de façon comparable à ceux utilisés dans le code de résolution de l’équation WAPE.

Pour améliorer cette condition de sortie, on pourrait utiliser la condition limite de rayonnement, présentée dans la partie 1.1.4, dans le domaine fréquentiel. Celle-ci s'écrit alors pour le cas d'une atmosphère homogène :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, z_{\max}) - ik_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \varphi(x, z_{\max}) - \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, z_{\max}) = 0, \quad (2.43)$$

où on a noté  $\cos \theta = x/r$  et  $\sin \theta = z/r$  avec  $r = \sqrt{x^2 + (z_{\max} - z_S)^2}$ . Cependant, cette équation fait apparaître les dérivées dans la direction de propagation et n'est donc pas directement implémentable. Salomons (2001) propose d'utiliser la condition suivante :

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial z}(x, z_{\max}) - ik_0 \varphi_j(x, z_{\max}) = 0. \quad (2.44)$$

Celle-ci correspond donc à la condition de rayonnement pour un angle  $\theta = \pi/2$ . Cela n'est donc a priori pas adapté à notre problème puisque, avec l'approximation parabolique, on s'intéresse principalement à la propagation autour de  $\theta = 0$ . Elle peut aussi être vue comme une condition d'impédance avec  $\beta = 1$ . Cette solution donne globalement de bons résultats : néanmoins, une grosse partie du domaine de calcul est réservée aux couches absorbantes. Cela est réhhibitoire pour passer à un code 3D.

#### *Couche parfaitement adaptée*

Une autre technique consiste à utiliser une couche parfaitement adaptée ou PML (pour Perfectly Matched Layer) introduite initialement par Bérenger (1994) dans le cadre de l'électromagnétisme. Cette technique a été présentée dans la partie 1.1.4 où elle était appliquée pour les méthodes de résolution dans le domaine temporel. On rappelle que l'idée consiste à créer une couche au bord du domaine dans laquelle les ondes acoustiques deviennent évanescentes. L'approche est assez simple ; elle peut se résumer par la modification suivante de la dérivée partielle suivant la direction verticale (Collino, 1997) :

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \frac{1}{1 + i\sigma(z)/\omega} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.45)$$

où  $\sigma(z)$  est une fonction positive et non-nulle seulement dans la PML.

La taille du domaine nécessaire pour atténuer les ondes est moins importante que dans le cas précédent (de l'ordre de la longueur d'onde). La difficulté est de définir la fonction  $\sigma(z)$ . Ici, on utilise une fonction du type :

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_0(z - z_\delta)^n & \text{si } z \geq z_\delta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.46)$$

Les paramètres  $\sigma_0$  et  $n$  doivent être choisis afin d'avoir les réflexions minimales à l'interface et en haut du domaine. On prendra ici  $\sigma_0 = 10\omega$  et  $n = 2.5$ . Cette condition de sortie sera utilisée en priorité ici.

### **Schéma numérique**

Dans cette partie, on explicite le schéma de résolution numérique de l'équation parabolique pour le schéma produit de l'équation parabolique. On notera  $\Delta x$  et  $\Delta z$  les pas respectifs de discrétisation selon  $x$  et  $z$ . Enfin, on utilisera la notation  $\varphi_j^n = \varphi_j(m\Delta x, n\Delta z)$ .

Dans un premier temps, la discrétisation des dérivées partielles selon la direction verticale ( $\partial/\partial z$ ,  $\partial^2/\partial z^2$ ) se fait avec des différences finies centrées d'ordre 2 :

$$\frac{\partial \varphi^n}{\partial z} = \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n-1}}{2\Delta z}, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^n}{\partial z^2} = \frac{\varphi^{n+1} - 2\varphi^n + \varphi^{n-1}}{\Delta z^2}. \quad (2.48)$$

On rappelle l'équation à résoudre pour  $\varphi_j$

$$(1 + \nu_j L)\varphi_j = (1 + \mu_j L)\varphi_{j-1}. \quad (2.49)$$

L'opérateur  $L$  est ici égal avec l'utilisation d'une PML à :

$$L = \epsilon + \frac{1}{(k_0 + i\sigma(z)/c_0)^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - i \frac{\sigma'(z)}{\omega + i\sigma(z)} \frac{\partial}{\partial z} \right], \quad (2.50)$$

où  $\sigma'$  désigne la dérivée selon  $z$  de  $\sigma$ .

La discrétisation spatiale du problème amène donc à résoudre au  $p$ -ième pas d'avancement  $n$  systèmes linéaires :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi[p\Delta x], \\ A_j \varphi_j &= B_j \varphi_{j-1}, \text{ pour } j = 1, \dots, n, \\ \varphi[(p+1)\Delta x] &= \varphi_n. \end{aligned} \quad (2.51)$$

où les matrices  $A_j$  et  $B_j$  sont des matrices tridiagonales données par :

$$A_j = \begin{bmatrix} A_2^1 & A_3^1 & & & \\ A_1^1 & & \ddots & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_1^{n-1} & & \\ & & & A_3^{n-1} & \\ & & & & A_2^n \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} A_1^k = \frac{\nu_j}{(k_0 + i\sigma^{k+1}/c_0)^2} \left[ \frac{1}{\Delta z^2} + i \frac{\sigma'^{k+1}}{\omega + i\sigma^{k+1}} \frac{1}{2\Delta z} \right], \\ A_2^k = 1 + \nu_j \epsilon^k - 2 \frac{\nu_j}{(k_0 + i\sigma^k/c_0)^2} \frac{1}{\Delta z^2}, \\ A_3^k = \frac{\nu_j}{(k_0 + i\sigma^k/c_0)^2} \left[ \frac{1}{\Delta z^2} - i \frac{\sigma'^k}{\omega + i\sigma^k} \frac{1}{2\Delta z} \right], \end{cases} \quad (2.52)$$

$$B_j = \begin{bmatrix} B_2^1 & B_3^1 & & & \\ B_1^1 & & \ddots & & \\ & \ddots & & & \\ & & & B_1^{n-1} & \\ & & & & B_2^n \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} B_1^k = \frac{\mu_j}{(k_0 + i\sigma^{k+1}/c_0)^2} \left[ \frac{1}{\Delta z^2} + i \frac{\sigma'^{k+1}}{\omega + i\sigma^{k+1}} \frac{1}{2\Delta z} \right], \\ B_2^k = 1 + \mu_j \epsilon^k - 2 \frac{\mu_j}{(k_0 + i\sigma^k/c_0)^2} \frac{1}{\Delta z^2}, \\ B_3^k = \frac{\mu_j}{(k_0 + i\sigma^k/c_0)^2} \left[ \frac{1}{\Delta z^2} - i \frac{\sigma'^k}{\omega + i\sigma^k} \frac{1}{2\Delta z} \right]. \end{cases} \quad (2.53)$$

La condition d'impédance revient à modifier la première ligne des matrices par :

$$A_2^1 = 1 + \nu_j \epsilon^1 - 2 \frac{\nu_j}{(k_0 + i\sigma^1/c_0)^2} \frac{1}{\Delta z^2} + 2ik_0\beta \frac{\nu_j}{(k_0 + i\sigma^1/c_0)^2} \left[ \frac{1}{\Delta z} + i \frac{\sigma'^1}{\omega + i\sigma^1} \frac{1}{2} \right], \quad (2.54)$$

$$A_3^1 = \frac{\nu_j}{(k_0 + i\sigma^1/c_0)^2} \frac{2}{\Delta z^2}, \quad (2.55)$$

$$B_2^1 = 1 + \mu_j \epsilon^1 - 2 \frac{\mu_j}{(k_0 + i\sigma^1/c_0)^2} \frac{1}{\Delta z^2} + 2ik_0\beta \frac{\mu_j}{(k_0 + i\sigma^1/c_0)^2} \left[ \frac{1}{\Delta z} + i \frac{\sigma'^1}{\omega + i\sigma^1} \frac{1}{2} \right], \quad (2.56)$$

$$B_3^1 = \frac{\mu_j}{(k_0 + i\sigma^1/c_0)^2} \frac{2}{\Delta z^2}. \quad (2.57)$$

On peut remarquer que pour  $\sigma = 0$ , les matrices d'avancement sont comparables à celles obtenues, par exemple par Blairon (2002), dans le cas du code de résolution CNPE.



## 2.2 Initialisation du code EP

Dans la partie précédente, la méthode split-step Padé a été présentée afin d'augmenter l'angle de validité de l'équation parabolique. Une résolution pas-à-pas en avançant dans la direction de propagation privilégiée a été proposée. Le problème est alors de déterminer une condition initiale pour l'équation parabolique compatible avec l'angle de validité de celle-ci. En particulier, il est préférable de propager le minimum d'énergie hors du cône de validité de l'équation parabolique. On s'intéressera par la suite seulement au cas d'une source monopolaire. Le problème à modéliser est alors :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, z) - ik_0(Q - 1)\varphi(x, z) = \delta(x) \delta(z). \quad (2.58)$$

Deux grandes familles de conditions initiales peuvent être utilisées et sont présentées dans la suite. La première famille est basée sur une expression analytique explicite de la condition initiale. La seconde comprend les conditions initiales obtenues avec différentes méthodes numériques.

### 2.2.1 Conditions initiales analytiques

Tout d'abord, on peut donner une condition initiale analytique ; le champ de pression obtenu en champ libre doit alors correspondre en champ lointain à la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz dans le cas 2D ou 3D dans un angle le plus grand possible. On cherchera ici à retrouver dans notre cas le comportement de la fonction de Green 3D  $G_{3D}^H$  donnée par :

$$G_{3D}^H(k_0, x, z) = -\frac{\sqrt{x}}{4\pi r} \exp(ik_0 r), \quad (2.59)$$

où  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ . On rappelle que le terme  $\sqrt{x}$  est lié au fait qu'on ne résout pas l'équation d'Helmholtz dans le cas 3D axisymétrique mais dans le cas 2D.

La fonction de Green de l'équation 2.58 peut être obtenue dans le cas de l'équation parabolique standard. Elle s'écrit :

$$G_{2D}^{EP}(k_0, x, z) = -i\sqrt{\frac{ik_0}{2\pi x}} \exp\left[ik_0 x \left(1 + \frac{z^2}{2x^2}\right)\right] \underset{k_0 r \gg 1}{\approx} 2i\sqrt{2i\pi k_0} G_{3D}^H(k_0, r). \quad (2.60)$$

On vérifie ainsi qu'on obtient en champ lointain le même comportement que la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz. On retrouve aussi la notion d'angle de validité dans le développement de Taylor  $r = x(1 + z^2/2x^2)$ .

### Conditions initiales gaussiennes

L'idée est alors d'utiliser une condition analytique pour représenter un Dirac positionné en  $x = 0$ . On peut ainsi considérer une condition analytique initiale de type gaussienne :

$$\varphi(x = 0, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}B} \exp\left(-\frac{z^2}{B^2}\right), \quad (2.61)$$

qui tend bien vers un Dirac si on considère  $B$  qui tend vers 0. La solution analytique pour le cas de l'équation parabolique standard s'obtient avec la même méthode que celle présentée dans la partie 2.1.1. On arrive alors à :

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 B^2 + 2ik_0 x}} \exp\left(-\frac{k_0^2 z^2}{k_0^2 B^2 + 2ik_0 x}\right). \quad (2.62)$$

On peut alors vérifier que pour  $B = 0$ , l'équation ci-dessus est bien la même que l'équation 2.60 obtenue pour un dirac. On se place maintenant en champ lointain ; on fait alors l'approximation  $k_0x \gg k_0^2B^2/2$ . On arrive ainsi à l'équation :

$$\varphi(x, z) \approx -i\sqrt{\frac{ik_0}{2\pi x}} \left(1 + i\frac{k_0B^2}{4x}\right) \exp\left(i\frac{k_0z^2}{2x}\right) \exp\left(-\frac{k_0^2z^2B^2}{4x^2}\right). \quad (2.63)$$

On peut finalement écrire le champ de pression en champ lointain :

$$p(x, z) \approx -i\sqrt{\frac{ik_0}{2\pi x}} \exp\left[ik_0x\left(1 + \frac{z^2}{2x^2}\right)\right] \left(1 + i\frac{k_0B^2}{4x}\right) \exp\left(-\frac{k_0^2z^2B^2}{4x^2}\right). \quad (2.64)$$

Cette condition initiale est intéressante pour deux raisons principales. Tout d'abord, on retrouve en champ lointain la même solution que dans le cas où la source est un Dirac avec deux termes supplémentaires liés à la distribution de la source. Ces termes participent d'autant moins au champ de pression que la demi-largeur de la gaussienne, liée au paramètre  $B$ , est petite. Ensuite, l'amplitude de la pression décroît exponentiellement en dehors d'un cône dont l'angle est fixé par le paramètre  $k_0B$ . En effet, si on note  $\tan\theta_{\text{EP}} = z/x$  et  $\tan\theta_{\text{Gauss}} = 1/k_0B$ , on a alors une décroissance en  $\exp[-(\tan\theta_{\text{EP}}/\tan\theta_{\text{Gauss}})^2/4]$ . Pour des angles  $\theta_{\text{EP}}$  très grands par rapport à  $\theta_{\text{Gauss}}$ , le champ de pression va donc décroître exponentiellement.

Une valeur de  $B = \sqrt{2}/k_0$  est classiquement utilisée pour un code de résolution de l'équation parabolique standard. Celle-ci provient de l'approximation en champ lointain  $r = x(1 + z^2/2x^2)$ . On peut alors réécrire la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz comme :

$$G_{3\text{D}}^{\text{H}}(k_0, r) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{x}} \exp\left[ik_0x\left(1 + \frac{z^2}{2x^2}\right)\right] \left(1 - \frac{z^2}{2x^2}\right). \quad (2.65)$$

En utilisant  $\exp(-x) = 1 - x$  quand  $x$  tend vers 0, on peut faire correspondre de façon plus précise la solution de l'équation parabolique avec, pour condition initiale, une distribution gaussienne à la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz, en posant  $k_0^2B^2 = 2$ . Notons que, dans ce cas, la solution analytique de l'équation parabolique est plus proche de la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz si on utilise la distribution gaussienne à la place d'un dirac comme condition initiale. Dans le cas où on voudrait retrouver le comportement de la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz 2D, on peut choisir  $k_0^2B^2 = 1$ .

On propose donc finalement la condition initiale analytique gaussienne suivante :

$$\varphi_{\text{Gauss}}(x = 0, z) = -\frac{\sqrt{ik_0}}{4\pi\Theta} \exp\left(-\frac{k_0^2z^2}{2\Theta^2}\right), \quad (2.66)$$

où on a défini le paramètre  $\Theta = k_0B/\sqrt{2}$ . Cette condition initiale a pour but de retrouver la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz en champ libre. En augmentant l'ordre de l'approximant de Padé utilisé, on visera à diminuer la valeur du paramètre  $\Theta$ .

### Conditions initiales gaussiennes modifiées

Des modifications de la condition initiale gaussienne ont été proposées dans la littérature. On pourra ainsi citer la condition initiale de Greene (1984) proposée par l'auteur pour le code de résolution de l'équation parabolique HAPE ; dans cette méthode, l'opérateur  $\sqrt{1 + \cdot}$  est approximé par une fraction rationnelle dont les coefficients sont obtenus en minimisant l'écart entre l'opérateur  $\sqrt{1 + \cdot}$  et la fraction rationnelle sur un intervalle autour de 1. La condition initiale

proposée est donc basée sur la relation de dispersion obtenue et ne sera donc pas utilisée ici. Pour un code de résolution de l'équation WAPE, Salomons (2001) propose la condition initiale suivante :

$$\varphi_{\text{Salomons}}^{(2)}(x = 0, z) = -\sqrt{ik_0}(A_0 - A_2 k_0^2 z^2) \exp\left(-\frac{k_0^2 z^2}{3}\right). \quad (2.67)$$

Cette condition initiale est obtenue en optimisant les coefficients  $A_0$  et  $A_2$  afin qu'une solution analytique approchée de l'équation WAPE initialisée avec la condition ci-dessus corresponde en champ lointain à la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz dans le secteur angulaire le plus grand possible. L'optimisation est ici réalisée sur un secteur angulaire jusqu'à environ  $30^\circ$ . D'autres développements ont été réalisés par le même auteur pour la méthode GFPE (pour Green's Function Parabolic Equation) en utilisant des polynômes de degrés 4 et 8. Ces derniers sont appelés par la suite  $\varphi_{\text{Salomons}}^{(4)}$  et  $\varphi_{\text{Salomons}}^{(8)}$  et ont été optimisés respectivement sur un secteur angulaire allant jusqu'à environ  $40^\circ$  et  $60^\circ$ . Les coefficients de ces différentes conditions analytiques sont donnés dans le tableau 2.2.

Tableau 2.2 – Coefficients des conditions initiales analytiques proposées par Salomons (2001)  
 $\varphi_{\text{Salomons}} = \sqrt{ik_0}(A_0 + A_2 k_0^2 z^2 + A_4 k_0^4 z^4 + A_6 k_0^6 z^6 + A_8 k_0^8 z^8) \exp(-k_0^2 z^2/3)$ .

	$A_0$	$A_2$	$A_4$	$A_6$	$A_8$
$\varphi_{\text{Salomons}}^{(2)}$	$1.0916 \times 10^{-1}$	$-2.9452 \times 10^{-2}$			
$\varphi_{\text{Salomons}}^{(4)}$	$1.5681 \times 10^{-1}$	$-9.2986 \times 10^{-2}$	$7.0585 \times 10^{-3}$		
$\varphi_{\text{Salomons}}^{(8)}$	$7.7176 \times 10^{-1}$	$-1.6217 \times 10^0$	$4.7898 \times 10^{-1}$	$-3.8563 \times 10^{-2}$	$8.3556 \times 10^{-4}$

### 2.2.2 Conditions initiales numériques

Une seconde famille de conditions initiales utilise différentes méthodes numériques afin d'obtenir un terme source le plus proche possible du monopôle.

#### Self-starter

Parmi celles-ci, on peut citer la méthode du self-starter proposée par Collins (1992) pour des applications en acoustique sous-marine; cette méthode consiste à écrire l'équation d'Helmholtz avec terme source :

$$(\Delta + k_0^2(1 + \epsilon))p(x, z) = \delta(x) \delta(z - z_S), \quad (2.68)$$

puis à intégrer sur un petit pas spatial autour de  $x = 0$ . Il vient :

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x = 0, z) = \delta(z - z_S). \quad (2.69)$$

La dérivée spatiale suivant  $x$  peut s'exprimer à l'aide de l'équation parabolique (voir Eq. 2.7) :

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x = 0, z) = ik_0(1 + L)^{1/2}p(x = 0, z) \quad (2.70)$$

Enfin, pour ne pas avoir à résoudre avec le code d'équation parabolique la singularité en  $x = 0$  liée au Dirac, on utilise la relation donnée par la méthode split-step Padé pour obtenir la pression en un pas  $\Delta x$  :

$$p(\Delta x, z) = \exp \left[ ik_0 \Delta x (1 + L)^{1/2} \right] p(0, z). \quad (2.71)$$

On obtient alors une condition initiale en  $\Delta x$  en résolvant le système :

$$\varphi(\Delta x, z) = \frac{1}{ik_0} \exp \left[ ik_0 \Delta x ((1 + L)^{1/2} - 1) \right] (1 + L)^{1/2} q(z), \quad (2.72)$$

$$(1 + L)q(z) = \delta(z - z_S). \quad (2.73)$$

On se ramène donc à résoudre l'équation 2.73, qui est une équation différentielle sur la seule dimension transverse ; cependant, résoudre cette équation est loin d'être trivial.

### Méthode de rétro-propagation

Ici, on utilisera une autre méthode proposée par Collins et Westwood (1991) et appelée méthode de rétro-propagation. Elle a aussi été étudiée pour une application en propagation atmosphérique par Galindo (1996). Le principe de la méthode de rétro-propagation est simple. Il se base sur le fait que l'équation parabolique permet de reproduire en champ lointain et dans le cône de validité de l'approximation parabolique les solutions de l'équation d'Helmholtz. L'idée est alors d'imposer à une distance  $x_0$  la fonction de Green du problème pour l'équation d'Helmholtz en milieu homogène, pour lequel des solutions analytiques sont connues, et de rétro-propager ce champ jusqu'à la position de la source. Cette condition initiale pourra être ensuite utilisée pour le cas de milieux inhomogènes. La méthode est expliquée sur la figure 2.7.

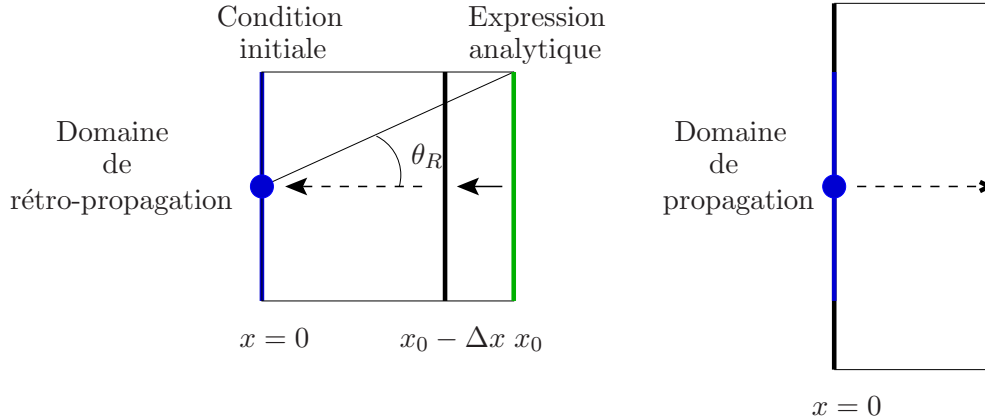


Figure 2.7 – Schéma de description de la méthode de rétro-propagation.

Il est à noter que la rétro-propagation doit se faire dans un domaine compatible avec l'angle de validité de l'équation parabolique. On notera ainsi  $\theta_R$  l'angle maximal du domaine dans lequel la condition initiale sera déterminée. Enfin, on utilisera pour la méthode de rétro-propagation pour les conditions limites des couches absorbantes. En effet, l'utilisation de couches PML rend le calcul instable et ne permet pas de revenir à la condition initiale équivalente.

### 2.2.3 Comparaison des conditions initiales

Dans cette partie, on compare les différentes conditions initiales pour le code d'équation parabolique en champ libre. On considère séparément le cas WAPE ou Padé (1,1) et les cas

Padé  $(n, n)$ .

### Cas WAPE

La source est ici placée en  $z = 0$  avec une fréquence de 340 Hz ; la longueur d'onde est donc égale à  $\lambda = 1$  m. Le domaine de propagation considéré a une dimension de 300 longueurs d'onde selon  $x$  et de 600 longueurs d'onde selon  $z$ . Le pas spatial est fixé à  $\Delta x = \Delta z = \lambda/10$ . L'angle maximal par rapport à la direction de propagation privilégiée est donc de  $45^\circ$ . Pour la condition initiale avec la méthode de rétro-propagation, on se fixe une distance de  $100 \lambda$  et on compare les conditions initiales obtenues avec les valeurs  $\theta_R = 50^\circ, 56^\circ, 63^\circ, 68^\circ$  et  $72^\circ$ . Deux valeurs différentes pour le paramètre  $\Theta$  pour la condition initiale gaussienne sont aussi utilisées.

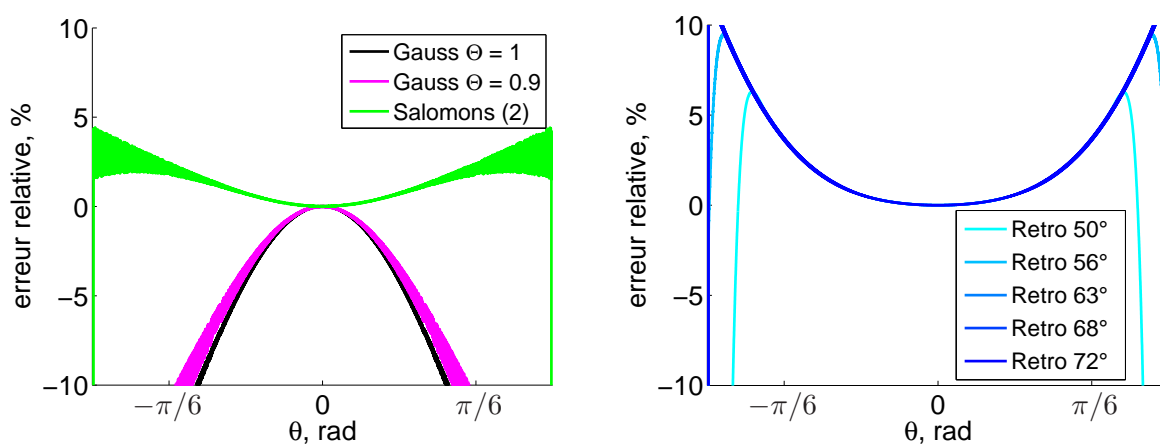


Figure 2.8 – Erreurs relatives sur la pression obtenues à une colonne de récepteurs à  $x = 300\lambda$ . en fonction de l'angle  $\theta = \arctan z/x$ . La fréquence est fixée à 340 Hz. Des conditions initiales analytiques sont utilisées sur la figure à gauche alors qu'à droite, on considère la méthode de rétro-propagation.

Les erreurs relatives sur la pression obtenues avec les différentes conditions initiales sont représentées sur la figure 2.8 pour une colonne de récepteurs situés à  $x = 300\lambda$ . La référence utilisée pour le calcul de l'erreur relative est la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz. Concernant les conditions initiales analytiques, il est à noter que celle de Salomons  $\varphi_{\text{Salomons}}^{(2)}$  permet de retrouver dans le secteur angulaire le plus grand le comportement de la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz, par rapport aux conditions initiales gaussiennes, comme cela était attendu. On note aussi qu'en réduisant le paramètre  $\Theta$  pour les conditions initiales gaussiennes, on arrive à approximer un peu mieux la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz. Néanmoins, cela s'accompagne d'oscillations avec une amplitude plus importante.

Concernant la méthode de rétro-propagation, on peut voir que quel que soit l'angle  $\theta_R$  l'erreur relative obtenue est similaire. Pour un angle trop faible ( $\theta_R = 50^\circ$ ), la pression décroît plus rapidement que dans le cas d'une condition initiale analytique. Enfin, on peut remarquer que le niveau de pression est surestimé avec cette méthode.

On a représenté sur la figure 2.9 les conditions initiales obtenues pour les différents cas. Il est à noter que les conditions initiales analytiques décroissent très vite alors que pour la condition initiale obtenue avec la méthode de rétro-propagation, même pour les angles  $\theta_R$  petits, la décroissance est beaucoup plus faible. On a ainsi une source non négligeable même à 20 longueurs d'onde du centre

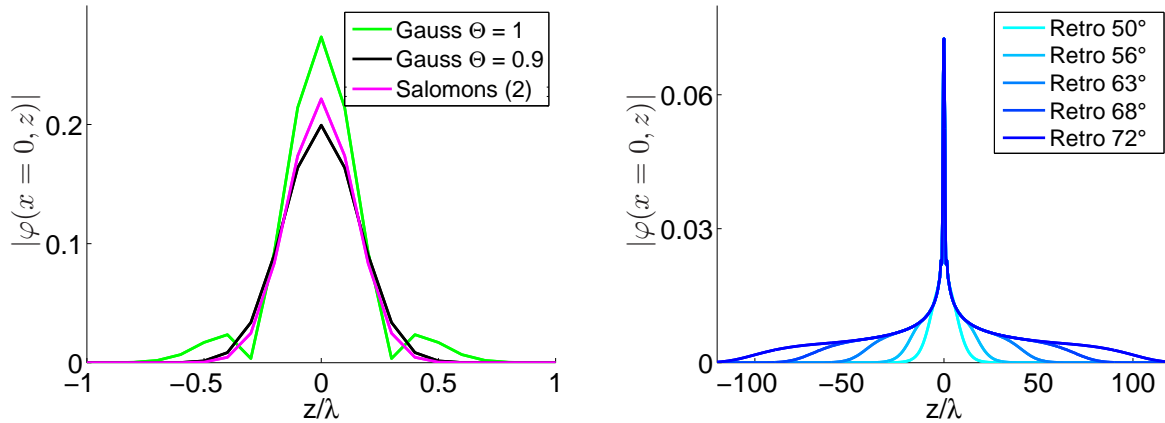


Figure 2.9 – Conditions initiales obtenues (gauche) pour les cas analytiques et (droite) pour la méthode de rétro-propagation. La représentation graphique est la même que celle utilisée sur la figure précédente.

de celle-ci. Enfin, on peut remarquer que plus l'angle  $\theta_R$  est important, plus la source est étalée. Cet étalement peut être dû au fait que, pour de grands angles  $\theta_R$ , on dépasse l'angle de validité de l'équation WAPE et on rétropropage ainsi un champ qui n'aurait pas été résolu de manière exacte.

### Cas Padé $(n, n)$

Dans cette partie, on se propose de comparer les différentes initialisations pour le cas Padé  $(n, n)$ . En particulier, le but est de déterminer quel type de condition initiale permet d'obtenir en champ lointain, un champ de pression qui approxime la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz sur l'intervalle angulaire le plus grand possible. Le domaine de propagation considéré a une taille de 300 longueurs d'onde dans la direction  $x$  et de 2000 longueurs d'onde dans la direction  $z$ ; l'angle maximal de propagation considéré est ainsi d'environ  $73^\circ$ .

Un premier calcul est réalisé afin de déterminer si les conditions initiales analytiques utilisées pour le code de résolution de l'équation WAPE permettent d'avoir en champ lointain une bonne approximation de la fonction de Green dans une ouverture angulaire plus grande. On s'intéresse tout d'abord au cas des conditions initiales de Salomons. On a représenté sur la figure 2.10 l'erreur relative sur la pression en  $x = 300\lambda$  obtenue avec différents ordres du développement de Padé et pour les deux conditions initiales de Salomons considérées ici. Pour la première, utilisée précédemment pour le cas WAPE, il est à noter que lorsqu'on augmente l'ordre du développement de Padé, les amplitudes des oscillations autour d'une valeur moyenne diminuent. De plus, il semble que l'on obtienne pour un ordre de développement important une convergence vers un résultat en champ lointain; cependant, l'accord avec la fonction de Green est moins bon que celui obtenu pour le cas WAPE. Pour la seconde condition initiale, les résultats sont comparables. On obtient dans le cas de la méthode split-step Padé d'ordre  $(4,4)$  et  $(8,8)$  un meilleur accord avec la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz en champ lointain. Pour le cas WAPE, on obtient de très fortes oscillations et l'accord avec la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz est bien moins bon en champ lointain qu'avec la condition initiale précédente.

Le même calcul est réalisé avec la condition initiale de Salomons  $\varphi_{\text{Salomons}}^{(8)}$  pour un développement de Padé  $(10,10)$ . Les résultats en champ lointain sont représentés sur la figure 2.11

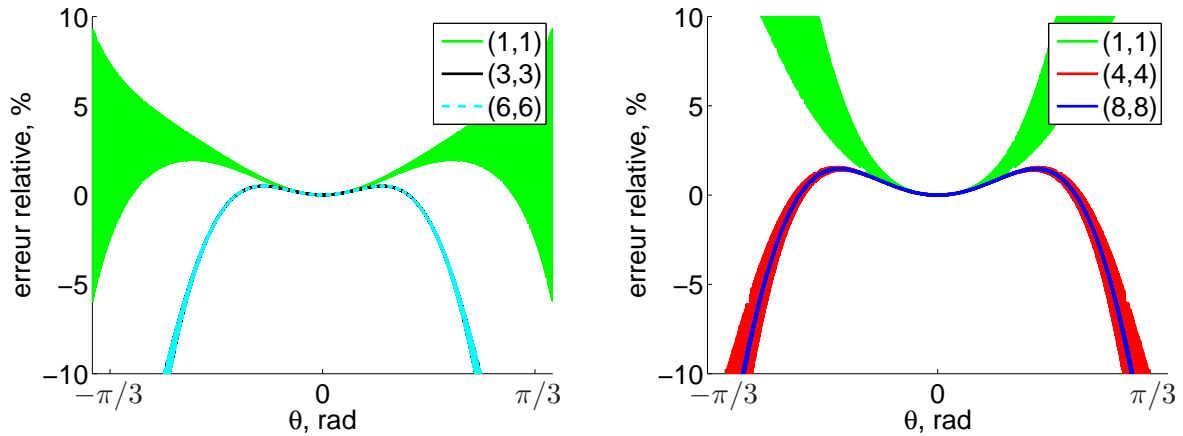


Figure 2.10 – Erreurs relatives sur la pression obtenues à une colonne de récepteurs à  $x = 300\lambda$  en fonction de l'angle  $\theta = \arctan z/x$  et pour différentes valeurs du développement de Padé. La fréquence est fixée à 340 Hz. Les conditions initiales analytiques  $\varphi_{\text{Salomons}}^{(2)}$  et  $\varphi_{\text{Salomons}}^{(4)}$  sont respectivement utilisées sur la figure de gauche et de droite.

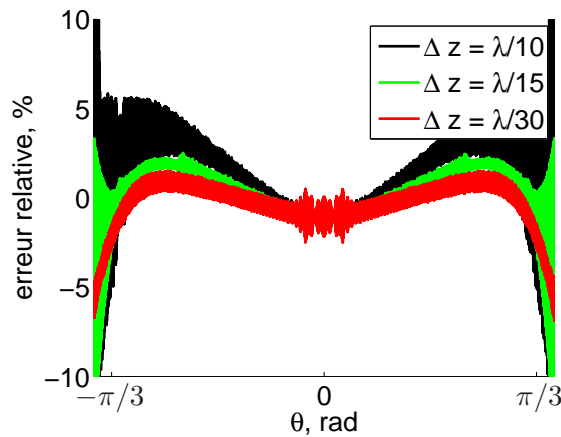


Figure 2.11 – Erreurs relatives sur la pression obtenues à une colonne de récepteurs à  $x = 300\lambda$  en fonction de l'angle  $\theta = \arctan z/x$  pour un développement de Padé (10,10). La fréquence est fixée à 340 Hz. La condition initiale analytique  $\varphi_{\text{Salomons}}^{(8)}$  est utilisée.

pour différentes valeurs du rapport  $\lambda/\Delta z$ . Cette condition initiale offre la correspondance avec l'équation d'Helmholtz dans l'ouverture angulaire la plus grande. Cependant, les variations avec  $k_0 z$  de cette condition initiale sont très rapides et pour des valeurs du rapport  $\lambda/\Delta z$  trop faibles, on obtient des oscillations importantes sur les niveaux de pression. Un compromis est donc à trouver entre coût numérique et accord dans l'ouverture angulaire la plus grande avec la fonction de Green.

On considère une condition initiale gaussienne et on utilise un ordre de développement (10,10) afin d'avoir un angle de validité important. On a représenté sur la figure 2.12 les erreurs relatives pour 3 valeurs du paramètre  $\Theta$ . Il est à noter que par rapport aux conditions initiales précédentes, l'ouverture angulaire est très réduite ; ainsi, dans le cas  $\Theta = 0.8$ , l'erreur relative atteint le seuil de

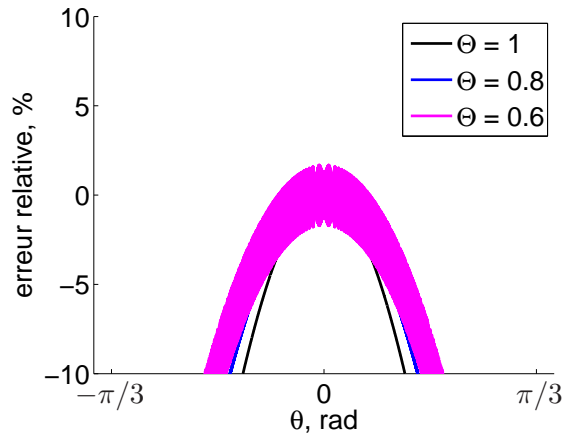


Figure 2.12 – Erreurs relatives sur la pression obtenues à une colonne de récepteurs à  $x = 300\lambda$  en fonction de l'angle  $\theta = \arctan z/x$  pour un développement de Padé (10,10). La fréquence est fixée à 340 Hz. Des conditions initiales analytiques gaussiennes sont considérées.

10 % pour  $\theta = 28^\circ$  alors que dans le cas de la condition initiale de Salomons  $\varphi_{\text{Salomons}}^{(8)}$ , ce seuil est atteint pour  $\theta = 56^\circ$ . Enfin, pour  $\Theta = 0.6$ , on peut noter de fortes oscillations dues à une mauvaise discrétisation initiale de la gaussienne.

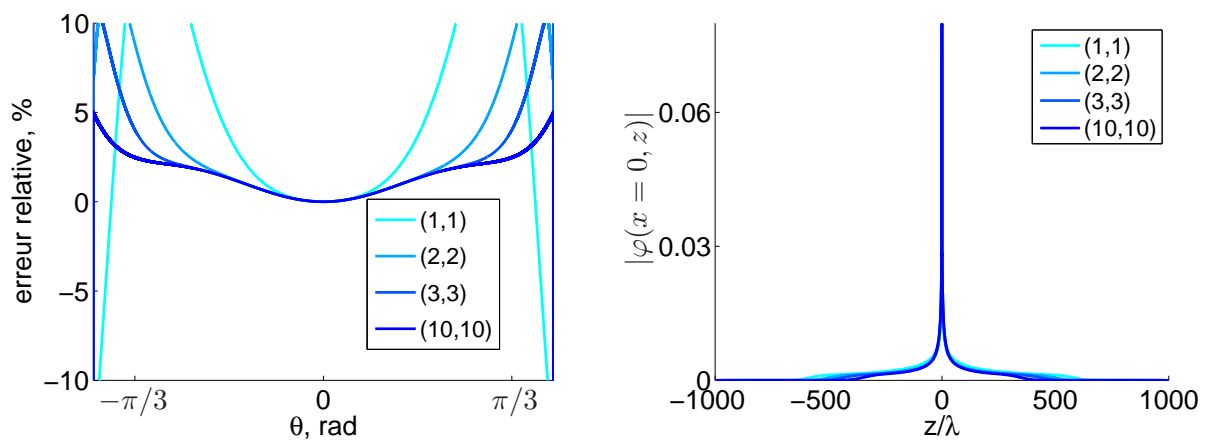


Figure 2.13 – (gauche) Erreurs relatives sur la pression obtenues à une colonne de récepteurs à  $x = 300\lambda$  pour la méthode de rétro-propagation et pour différents ordre de développement de l'approximant de Padé. (droite) Conditions initiales correspondantes en fonction de  $z/\lambda$ .

Enfin, on considère la condition initiale utilisant la méthode de rétro-propagation. Celle-ci est réalisée à une distance  $x = 100\lambda$  et sur un domaine de hauteur  $2000\lambda$  selon  $z$ . On a représenté sur la figure 2.13, les erreurs relatives obtenues à  $x = 300\lambda$  pour différents ordres de développement de l'approximant de Padé. Il est à noter qu'en augmentant cet ordre, l'erreur relative diminue. Cette méthode permet d'obtenir, notamment pour les ordres de développement de l'approximant de Padé élevés (typiquement supérieur à 2), une erreur plus faible que les conditions analytiques précédemment utilisées. Les conditions initiales obtenues dans les différents cas sont aussi représentées sur la figure 2.13. Comme pour le cas précédent, on a un pic au niveau de la source et une



décroissance très faible de la pression lorsqu'on s'éloigne du centre de la source.

### Autres applications de la méthode de rétro-propagation

On présente ici des applications possibles pour la méthode de rétro-propagation. La méthode de rétro-propagation peut être utilisée dans le cas de la propagation au-dessus d'un sol plan avec une impédance de surface. L'initialisation utilise dans ce cas la formule de Di et Gilbert (1993), vue précédemment dans la partie 1.3.4. Cependant, suivant les valeurs données pour l'admittance  $\beta$ , la méthode de rétro-propagation rend le calcul instable. Enfin, des solutions analytiques approchées existent en champ lointain pour la propagation acoustique au-dessus d'un sol impédant pour des sources dipôlares (Li *et al.*, 1997) et des sources quadripôlares (Li et Taherzadeh, 1997). Elles peuvent être utilisées avec cette méthode de rétro-propagation afin de prendre en compte la directivité de sources plus complexes que le monopôle.

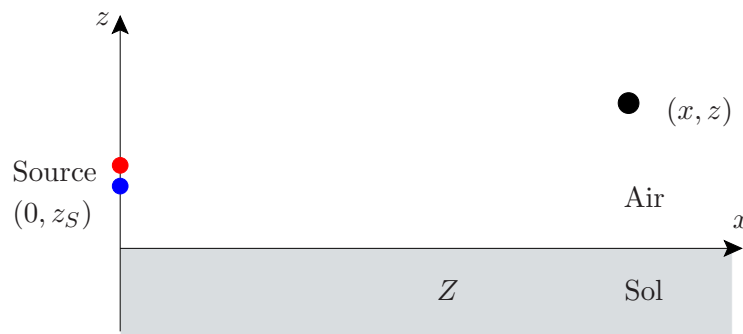


Figure 2.14 – Schéma d'une source dipolaire située au-dessus d'un sol impédant.

On donne ici un exemple de calcul pour le cas d'une source dipolaire sur un plan impédant. On considère toujours un cas axisymétrique et l'orientation du dipôle est donc fixée. Le schéma du problème est représenté sur la figure 2.14. La source est placée à une hauteur  $z_S = 2$  m et la fréquence considérée est de 340 Hz. Le modèle d'impédance de surface est le modèle de Miki d'une couche d'épaisseur  $d = 10$  cm et de résistivité au passage de l'air  $\sigma_0 = 100$  kPa.s.m<sup>-2</sup>. La méthode de rétro-propagation est appliquée à  $x = 100$  m. Le domaine de propagation est de 300 m dans la direction  $x$  et de 80 m dans la direction  $z$ . On utilise ici la méthode split-step Padé à l'ordre (1,1).

On a représenté sur la figure 2.15, le niveau de pression défini par :

$$Lp = 20 \log_{10} \left| \frac{p}{p_{\text{ref}}} \right|, \quad (2.74)$$

avec  $p_{\text{ref}} = 2.10^{-5}$  Pa, pour des récepteurs situés à  $x = 300$  m de la source avec la méthode split-step Padé (1,1) et avec la solution analytique pour une source dipolaire. On peut observer qu'un bon accord global est obtenu, même si on a un écart important au niveau de l'interférence située près du sol.

### Conclusions

Le problème de l'initialisation des codes de résolution de l'équation parabolique a été étudié dans cette partie. Des conditions initiales analytiques de types gaussiennes et de type gaussiennes modifiées proposées par Salomons (2001) ont été considérées. De même, une condition initiale numérique basée sur la rétro-propagation à longue distance d'une solution analytique a été utilisée.

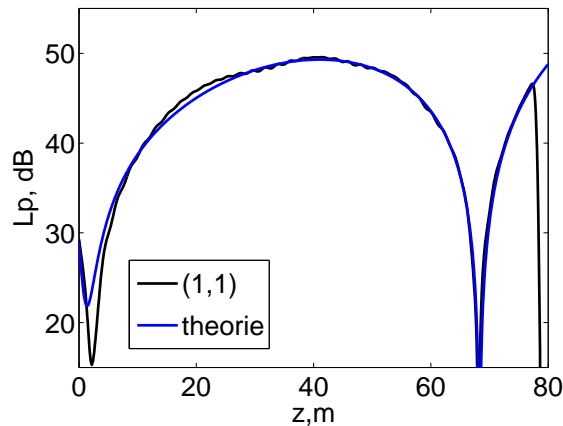


Figure 2.15 – Niveaux de pression  $L_p$  calculés analytiquement et obtenus avec la méthode split-step Padé (1,1) initialisée avec la méthode de rétro-propagation pour une colonne de récepteurs situés à  $x = 300$  m de la source. La source est un dipôle situé à 2 m de hauteur par rapport au sol.

Pour des développements de Padé de l'opérateur de propagation peu élevés, les conditions initiales analytiques de Salomons  $\varphi_{\text{Salomons}}^{(2)}$  et  $\varphi_{\text{Salomons}}^{(4)}$  permettent de reproduire le comportement de la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz dans le secteur angulaire le plus important. Cependant lorsque l'ordre du développement de Padé augmente ( $n > 4$ ), ces conditions initiales ne permettent pas de profiter de l'augmentation de la validité angulaire de l'équation parabolique. La condition initiale  $\varphi_{\text{Salomons}}^{(8)}$  peut alors être utilisée mais il faut dans ce cas réduire le pas spatial dans la direction transverse pour réduire les oscillations parasites. Dans les différents cas analysés ici, la condition initiale analytique de type gaussienne ne permet de reproduire le comportement de la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz que dans un secteur angulaire peu important (de l'ordre de  $15^\circ$ ) et la condition initiale de Salomons semble donc plus performante. Quant à elle, la méthode de rétro-propagation semble donner de meilleurs résultats lorsque l'ordre du développement de Padé augmente. Pour les ordres de développements importants, elle s'avère donc intéressante par rapport aux conditions initiales analytiques. De plus, il a été vu qu'elle permet de modéliser des sources de types dipolaires ou quadripolaires dans les codes de résolution de l'équation parabolique.

## 2.3 Couplage FDTD - EP

Dans cette partie, on réalise le couplage entre un code différences finies de résolution des équations d'Euler linéarisées en champ proche et un code de résolution de l'équation parabolique avec la méthode split-step Padé en champ lointain. Le problème principal de cette résolution hybride est la transition entre le modèle temporel FDTD et le modèle fréquentiel EP. Van Renterghem *et al.* (2005) proposent de réaliser cette transition à une abscisse située un peu avant la fin du domaine de calcul du code FDTD pour éviter de prendre en compte les réflexions parasites au niveau des conditions aux limites : cette abscisse est notée  $x_t$  sur la figure 2.16. Pour tous les points à cette abscisse, la pression est stockée à chaque itération ; l'initialisation du code EP est ensuite calculée en faisant une transformée de Fourier de la pression à ces différents points. Du fait de la différence de pas spatial de la grille, la pression est interpolée aux noeuds de la grille du code EP.

Le domaine du code EP étant plus important pour prendre en compte des couches absorbantes, la pression est extrapolée en haut de la grille EP (extrapolation linéaire de la phase, décroissance linéaire de la pression jusqu'au sommet de la grille EP). L'abscisse choisie dans l'étude de Van Renterghem *et al.* pour la transition est de l'ordre de 20 m.

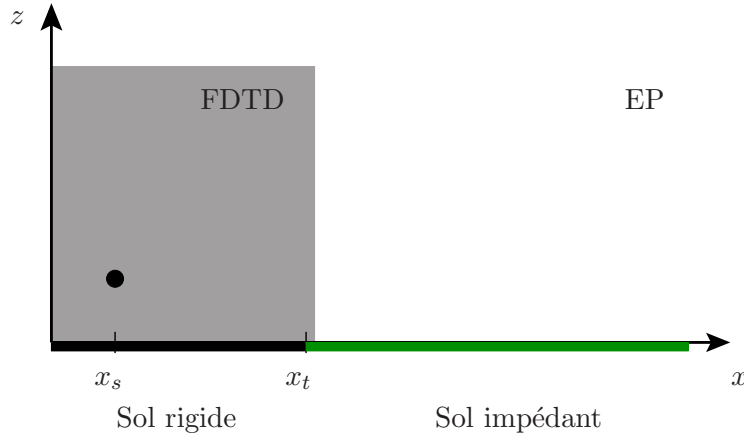


Figure 2.16 – Géométrie utilisée dans Van Renterghem *et al.* (2005) pour le couplage FDTD-EP.

Les différents cas-tests montrent une bonne adéquation entre les résultats obtenus avec le code hybride et le code FDTD. Une estimation des temps de calculs montre que, pour un calcul mono-fréquentiel, le code EP est environ  $17n$  fois plus rapide que le code FDTD avec  $n$  la taille du domaine en longueur d'ondes. Ce facteur doit être réduit puisque les équations d'Euler linéarisées sont résolues dans le domaine temporel et permettent donc d'avoir un calcul large bande. Néanmoins, le code hybride FDTD-EP reste efficace, d'un point de vue numérique, pour une propagation à longue distance.

On reprend ici la même méthode pour les différents cas. Cependant, on utilisera pour la condition limite des couches PML. Dans un premier cas, on considère une source monopolaire sur sol plan afin de valider l'approche. On traitera ensuite le cas d'une source large bande dans une atmosphère stratifiée.

### 2.3.1 Cas test d'un monopôle à support gaussien

Afin de valider l'approche, on réalise un premier calcul pour une géométrie bidimensionnelle avec le code FDTD en plaçant une source harmonique du type :

$$Q(x, z, t) = \exp\left(-\ln 2 \frac{x^2 + (z - z_S)^2}{B_x^2}\right) \sin(\omega_0 t). \quad (2.75)$$

Un calcul réalisé dans l'annexe B montre qu'en champ lointain, la solution analytique pour le champ de pression s'écrit, en utilisant la notation complexe :

$$p(x, z, t) = \rho_0 c_0 \hat{Q}(k_0) G_{2D}(k_0, r) \exp(-i\omega_0 t), \quad (2.76)$$

où la puissance de la source  $\hat{Q}(k_0)$  est donnée par :

$$\hat{Q}(k_0) = ik_0 \pi B^2 \exp\left(-\frac{k_0^2 B^2}{4}\right). \quad (2.77)$$

On a noté ci-dessus  $G_{2D}$ , la fonction de Green en espace libre en 2D, le nombre d'ondes  $k_0 = \omega_0/c_0$  et  $r$  la distance à la source. Le paramètre  $B$  est lié à la demi-largeur de la gaussienne par  $B_x^2/\ln 2 = B^2$ . La solution analytique en champ lointain au-dessus d'un sol plan avec une impédance de surface finie s'obtient donc en multipliant la fonction de Green correspondante par la puissance de la source  $\hat{Q}(k_0)$ . On rappelle que cette fonction de Green est donnée par la formule de Di et Gilbert (1993), présentée dans la partie 1.3.4.

On réalise donc un calcul à l'aide du code FDTD 2D pour deux fréquences différentes choisies à  $f_0 = 340$  Hz et  $f_0 = 680$  Hz. Le pas spatial est fixé à  $\Delta x = \Delta z = 0.05$  m et le pas de temps est donné par  $\Delta t = CFL\Delta x/c_0$  avec  $CFL = 1$ . La demi-largeur de la gaussienne est donnée par  $B_x = 3\Delta x$ . Les dimensions du domaine sont  $[-5 \text{ m}; 40 \text{ m}] \times [0 \text{ m}; 40 \text{ m}]$ . Le couplage entre le code FDTD et le code de résolution de l'équation parabolique est réalisé à une abscisse  $x_t = 35$  m. Enfin, concernant la condition limite d'impédance, on utilise, pour les deux calculs, un modèle de Miki d'un sol semi-infini de résistivité au passage de l'air  $\sigma_0 = 100 \text{ kPa.s.m}^{-2}$ .

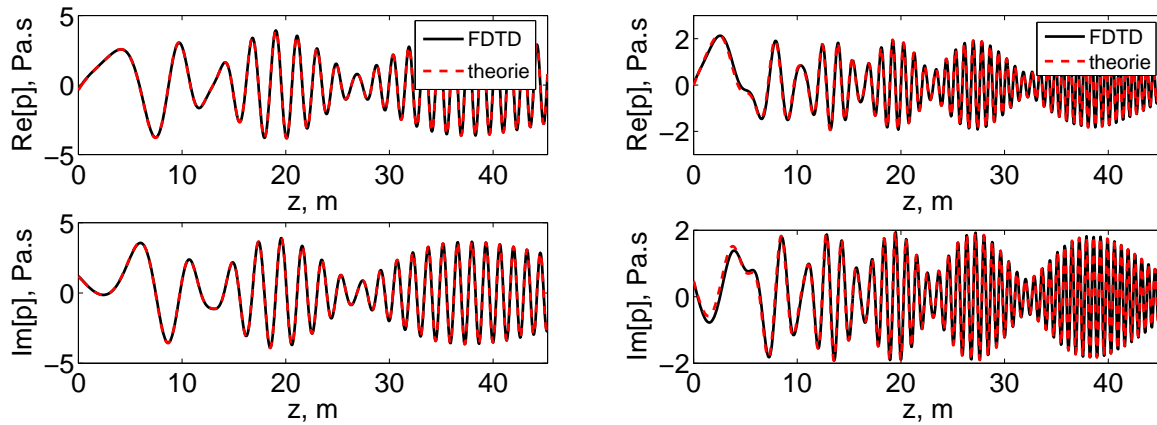


Figure 2.17 – Pression acoustique dans le domaine fréquentiel obtenue à une distance de  $x_t = 35$  m pour une source sinusoïdale (gauche) de fréquence  $f_0 = 340$  Hz et (droite) de fréquence  $f_0 = 680$  Hz.

On a représenté sur la figure 2.17 la pression acoustique dans le domaine fréquentiel pour des récepteurs situés à  $x_t = 35$  m de la source. Celle-ci est obtenue en réalisant une transformée de Fourier de la pression en s'assurant que celle-ci est réalisée sur un intervalle temporel contenant un nombre entier de périodes. Il est à noter qu'on a un très bon accord pour les parties réelles et imaginaires de la pression avec la solution analytique, notamment dans le cas  $f_0 = 340$  Hz. Dans le cas  $f_0 = 680$  Hz, on peut observer un léger déphasage pour les récepteurs proches du sol. La condition initiale pour l'équation parabolique est alors obtenue avec  $\varphi(x_t, z, \omega_0) = \hat{p}(x_t, z, \omega_0) \exp(-ik_0 x_t)$ .

On réalise un calcul longue distance avec le code de résolution de l'équation parabolique. On considère une distance de propagation de  $x = 400$  m. Etant donné que l'on se place en condition de propagation homogène à longue distance et que la source est placée proche du sol, l'angle de validité de l'équation parabolique peut être choisi relativement faible. Ainsi, on réalise un calcul avec une méthode split-step Padé (1,1) avec un pas d'avancement  $\Delta x = 2\lambda$ . En réalité, on peut augmenter pour un développement (1,1) le pas d'avancement jusqu'à  $\Delta x = 4\lambda$  avant de voir un effet de l'angle de validité de la méthode. Avec un développement plus élevé, on peut encore augmenter ce pas  $\Delta x$ . Ainsi, pour les hauteurs considérées et pour une méthode split-step Padé (10,10), on peut aller jusqu'à un pas d'avancement de  $\Delta x = 35\lambda$ . Les parties réelles et imaginaires obtenues pour une colonne de récepteurs situés à  $x = 400$  m sont représentées sur la figure 2.18.

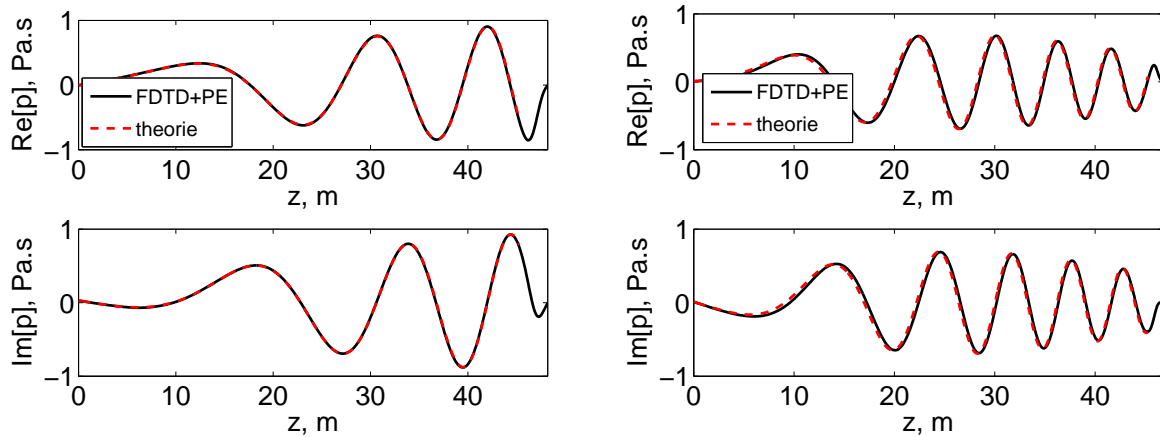


Figure 2.18 – Pression acoustique dans le domaine fréquentiel obtenue à une distance de  $x = 400$  m pour une source sinusoïdale (gauche) de fréquence  $f_0 = 340$  Hz et (droite) de fréquence  $f_0 = 680$  Hz.

On peut observer qu’un très bon accord est trouvé avec la solution analytique pour les différentes hauteurs considérées.

### 2.3.2 Cas d’une source large bande

Dans cette partie, on se propose de réaliser le couplage pour un cas large bande dans une atmosphère stratifiée. Pour cela, on reprend la simulation présentée dans la partie 1.3.5. On rappelle que le profil de célérité du son est logarithmique :

$$c(z) = c_0 + A_c \ln \frac{z + z_0}{z_0}, \quad (2.78)$$

avec  $A_c = 1 \text{ m.s}^{-1}$  et  $z_0 = 0.1$  m. Le code FDTD est initialisé avec une impulsion dont le support spatial est gaussien : ce type de source a un comportement passe bande et a ici de l’énergie jusqu’à environ 900 Hz (voir Fig. 1.23). Le couplage est réalisé à une distance  $x_t = 25$  m et on considèrera une hauteur de domaine de 100 m. On compare le temps de calcul et l’erreur relative moyenne pour des ordres de développement de l’approximant de Padé compris entre 1 et 4 et pour des pas d’avancement compris entre  $\Delta x = 0.5\lambda$  et  $\Delta x = 10\lambda$ . Le calcul avec le code EP est réalisé pour des fréquences comprises entre 5 Hz et 900 Hz avec un pas fréquentiel de 5 Hz ; on réalise ainsi 200 calculs monofréquentiels.

Les cartographies de pression à une colonne de récepteurs situés à  $x = 500$  m pour le calcul avec le code FDTD et pour un exemple de calcul avec le code FDTD-EP sont représentées sur la figure 2.19 ; on a utilisé dans ce cas une méthode split-step Padé (3,3) avec un pas d’avancement  $\Delta x = \lambda$ . La pression a été normalisée par le maximum de pression obtenue pour le code FDTD. On peut observer qu’on obtient un très bon accord entre les deux calculs, sauf pour les très basses fréquences pour lesquelles le couplage avec le code parabolique amène à des oscillations. Cela peut s’expliquer par le faible nombre de longueurs d’onde présentes dans le domaine pour ces fréquences.

On a représenté sur la figure 2.20 l’erreur relative moyenne pour différents ordres de développement de l’approximant de Padé et pour les différentes valeurs de  $\lambda/\Delta x$ . L’erreur minimale est obtenue pour  $\lambda/\Delta x$  grand et est égale pour tous les ordres de développement (environ 5.4 %). Lorsque le paramètre  $\lambda/\Delta x$  décroît, l’erreur augmente lentement jusqu’à ce qu’une partie du domaine se trouve en dehors du domaine de validité angulaire de l’approximation parabolique ;

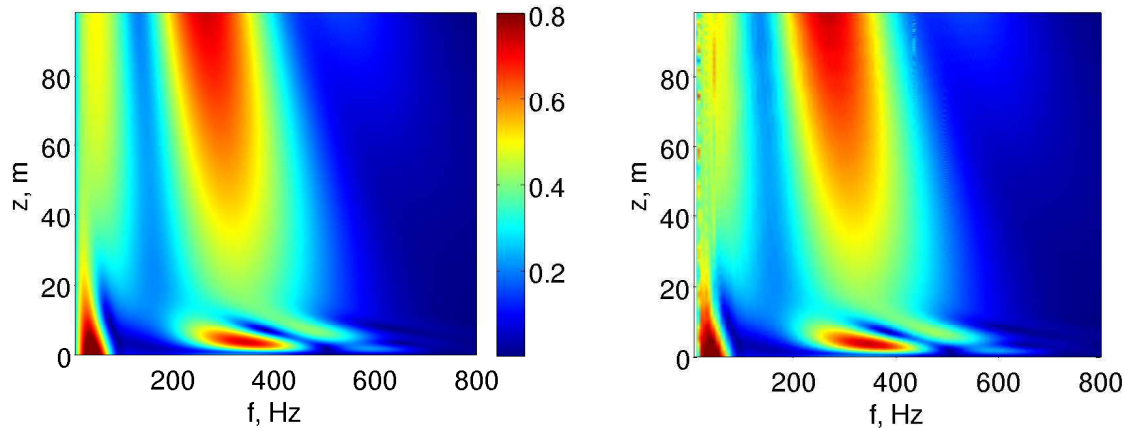


Figure 2.19 – Cartographie de pression normalisée à une colonne de récepteurs situés à une distance  $x = 500$  m obtenue (gauche) avec le code FDTD et (droite) avec le code FDTD-EP.

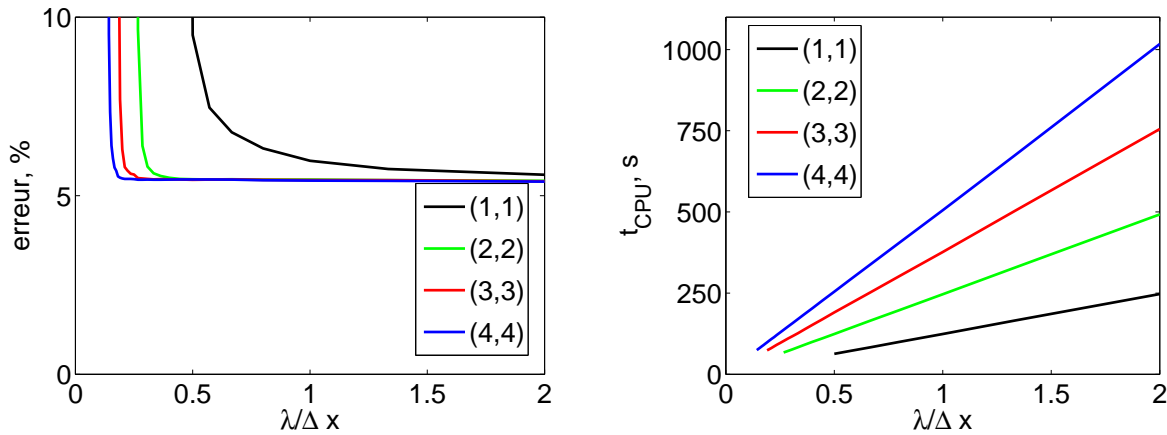


Figure 2.20 – (Gauche) Erreur relative moyenne obtenue avec le couplage FDTD-EP pour différents ordres de développement de l'approximant de Padé et pour différentes valeurs du rapport  $\lambda/\Delta x$ . (droite) Temps de calcul correspondant.

l'erreur croît alors fortement. La valeur de  $\lambda/\Delta x$  pour laquelle l'erreur commence à augmenter diminue avec l'ordre de développement de l'approximant de Padé. Le temps de calcul pour chaque ordre de développement a été tracé en fonction de  $\lambda/\Delta x$  sur la figure 2.20. Comme attendu, on peut noter que le comportement est linéaire. De plus, comme pour un ordre de développement de l'approximant de Padé  $(n, n)$ , on effectue  $n$  fois plus d'opérations que dans le cas  $(1, 1)$ , le temps de calcul est aussi multiplié par ce facteur  $n$ .

Enfin, si on considère une valeur limite pour l'erreur égale à 10 %, le temps de calcul avec les différents ordres de développement de l'approximant de Padé est à peu près égal (de l'ordre de 100 s CPU). Il faut alors noter qu'augmenter la validité angulaire de l'approximation parabolique ne permet pas, dans ce cas, de diminuer significativement le temps de calcul. Pour donner un ordre de grandeur, le calcul avec un code de résolution de l'équation parabolique sous MATLAB a été effectué sur un ordinateur quadri-coeur cadencé à 2.83 GHz. On rappelle que le calcul FDTD a nécessité 6 heures CPU sur une machine vectorielle.

### Conclusion

Dans ce chapitre, un code de résolution de l'équation parabolique avec la méthode split-step Padé  $(n, n)$  a été développé. Celle-ci permet à la fois d'augmenter la validité angulaire par rapport aux méthodes de résolution de l'équation WAPE et aussi d'envisager un pas d'avancement plus important. Une méthode de couches parfaitement adaptées a été utilisée pour la condition limite afin de réduire l'espace mémoire nécessaire avec des méthodes de couches absorbantes.

Dans la partie 2.2, une étude a été présentée dont le but était de déterminer les conditions initiales compatibles avec les approximations grand-angle de l'équation parabolique. Pour les ordres d'approximation faibles - typiquement inférieurs à un ordre  $(4,4)$  -, il semble que les conditions initiales analytiques proposées par Salomons (2001) permettent d'avoir un accord avec la fonction de Green en champ libre de l'équation d'Helmholtz dans l'ouverture angulaire la plus grande. Par contre, les conditions analytiques gaussiennes ne permettent pas de profiter de l'augmentation de l'ouverture angulaire. Pour les ordres élevés, des conditions initiales de type numérique, comme la méthode de rétro-propagation, deviennent intéressantes et permettent d'avoir une correspondance avec la fonction de Green même pour des angles très importants.

Enfin, dans la partie 2.3, une méthode de couplage entre le code FDTD de résolution des équations d'Euler linéarisées et le code de résolution de l'équation parabolique a été appliquée sur deux cas. Un premier cas-test monofréquentiel a permis de montrer que le couplage permettait de garder une erreur faible par rapport à une solution analytique. Dans un second cas-test large bande, une atmosphère stratifiée a été considérée. On a pu voir qu'un bon accord était trouvé entre la pression obtenue pour des récepteurs à longue distance avec un calcul réalisé avec le code FDTD. Il a aussi été montré que le couplage est performant d'un point de vue temps de calcul.

Cette méthode de couplage sera aussi utilisée dans la section 3.3, où le code EP sera couplé avec un code FDTD prenant en compte la topographie afin d'étudier l'influence de la topographie en champ proche sur les niveaux de pression en champ lointain. Dans de prochaines études, il sera intéressant de reprendre le modèle de sources équivalentes proposé par Cotté (2008) ; on pourrait alors modéliser les effets de la topographie en champ proche avec le code FDTD, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, et réaliser le couplage avec le code EP afin de réduire le temps de calcul.

## Chapitre 3

# Modélisation de la topographie pour les codes de résolution dans le domaine temporel

Dans cette partie, on s'intéresse à la prise en compte de la topographie dans les méthodes de résolution des équations d'Euler linéarisées. Suivant les équations considérées et les méthodes de résolution utilisées, de nombreuses techniques ont été proposées dans la littérature pour modéliser les effets de la topographie sur la propagation acoustique en milieu extérieur. En ce qui concerne le domaine fréquentiel, les méthodes de type éléments de frontière permettent de considérer aisément une frontière complexe et ont été ainsi utilisées dans de nombreuses études ; on pourra ainsi citer par exemple, l'étude de Jean (1998) sur l'impact d'écrans acoustique près d'une voie ferroviaire. Cependant, les difficultés pour la prise en compte des effets météorologiques limitent l'application de cette méthode dans un cadre général. Plusieurs méthodes ont été développées pour modéliser un sol non-plan dans les méthodes d'équation parabolique. Ainsi, Sack et West (1995) ont proposé une équation parabolique, obtenue en utilisant un changement de coordonnées, appelé « terrain-following coordinates », sur l'équation d'Helmholtz afin de se ramener à un maillage cartésien ; cette méthode permet alors de prendre en compte de façon précise des sols avec une pente allant jusqu'à 35°. Une autre technique a été proposée par Blairon (2002) ; le profil du terrain est représenté par une succession de segments et à chaque rupture de pente, une rotation du domaine est effectuée afin de pouvoir utiliser une méthode d'équation parabolique classique sur un maillage cartésien. Cette technique a été appliquée avec succès pour prédire les niveaux de pression dans un milieu complexe à Saint-Berthevin (Blairon, 2002; Blairon *et al.*, 2002; Bérengier *et al.*, 2003). On peut aussi citer les travaux de Di et Gilbert (1994) qui ont proposé de modéliser le profil du terrain par une succession de segments cylindriques ; une transformation conforme est ensuite utilisée pour se ramener à un maillage cartésien. Une méthode proche de la précédente a été proposée récemment par Parakkal *et al.* (2010) ; l'équation parabolique est obtenue à partir de l'équation d'Helmholtz en coordonnées polaires généralisées, ce qui permet de prendre en compte un sol avec une courbure non-constante. Concernant les méthodes de résolution dans le domaine temporel, les études réalisées (de Greve *et al.*, 2005; Heimann et Karle, 2006) ont principalement repris le système de coordonnées utilisé par Sack et West. En ce qui concerne la prise en compte des conditions aux limites, Heimann et Karle modélisent explicitement le sol dans le domaine de calcul et les équations de propagation dans le sol proposées par Zwicker et Kosten (1949) sont alors résolues. A notre connaissance, des conditions limites d'impédance dans le domaine temporel n'ont pas été utilisées dans des codes de résolution des équations d'Euler linéarisées prenant en compte la topographie.



On décrit dans un premier paragraphe la méthode choisie pour prendre en compte la topographie dans le code de résolution des équations d'Euler linéarisées. Pour cela, suivant les travaux réalisés dans la communauté de l'aéroacoustique numérique (Marsden *et al.*, 2005; Emmert, 2007), les équations sont réécrites pour un maillage curviligne. L'implémentation des conditions limites est alors adaptée à ce cas. Le problème de diffusion d'ondes acoustiques par un cylindre impédant est ensuite étudié pour valider la prise en compte de la condition limite d'impédance.

Dans un second paragraphe, on étudie la propagation au-dessus d'un cylindre. Ce problème est intéressant puisqu'il est analogue à la propagation au-dessus d'un sol plan en conditions défavorables. Les formes d'ondes obtenues avec le code FDTD sont alors comparées à celles calculées avec une solution analytique. En particulier, on s'intéresse aux ondes de surface. Le comportement de la solution analytique lorsque le rayon du cylindre tend vers l'infini est comparé sur deux exemples à celui d'une solution analytique pour la propagation en condition homogène sur sol plan.

Les effets d'irrégularité d'une topographie sur le champ de pression sont étudiés dans une troisième partie. Pour cela, une topographie de référence d'une voie ferroviaire est proposée et deux variations de celle-ci, avec pour l'une un fossé et pour l'autre un niveau du sol plus bas, sont considérés. En champ proche, les niveaux de pression pour deux récepteurs aux positions normalisées pour la mesure du bruit ferroviaire sont examinés. En champ lointain, on étudie l'effet des conditions de propagation sur les niveaux de pression pour les différentes géométries.

Enfin, dans les deux derniers paragraphes, des résultats de campagnes expérimentales sont comparés à ceux du code FDTD. Tout d'abord, les résultats des mesures effectuées à Saint-Berthevin en octobre 2001 sont considérés. Ensuite, une campagne expérimentale spécifique réalisée en mai 2010 sur un site ferroviaire est étudiée. On compare à la fois les niveaux de pression dans le domaine fréquentiel et les formes d'onde dans le domaine temporel.

### 3.1 Prise en compte de la topographie

Suivant les travaux réalisés dans la communauté de l'aéroacoustique numérique, plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour prendre en compte des interfaces non-planes. Si on veut garder un maillage cartésien dans le domaine physique, la frontière correspondant au sol ne sera pas confondue, dans le cas général, avec une ligne du maillage; des techniques d'interpolation (Kurbatskii et Tam, 1997) peuvent alors être utilisées. Cependant, celles-ci peuvent engendrer des instabilités numériques et l'utilisation de coordonnées curvilignes est en général mieux adaptée (Marsden *et al.*, 2005). L'idée est d'effectuer un changement de coordonnées entre le domaine numérique  $(\xi, \zeta, \eta)$  où un maillage cartésien est utilisé, et le domaine physique  $(x, y, z)$ ; un schéma de principe de la méthode est représenté sur la figure 3.1. Les méthodes de différences finies présentées dans la partie 1.1.1 peuvent alors être utilisées.

#### 3.1.1 Équations en coordonnées curvilignes

Dans cette partie, le calcul des flux eulériens dans le cas curviligne est développé pour une géométrie tridimensionnelle. On ne considère que des maillages invariants temporellement. Pour obtenir les équations dans le domaine numérique, on note que les variables dans le domaine physique sont des fonctions des variables d'espace  $(\xi, \zeta, \eta)$ . Ainsi, on a  $x = x(\xi, \zeta, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \zeta, \eta)$

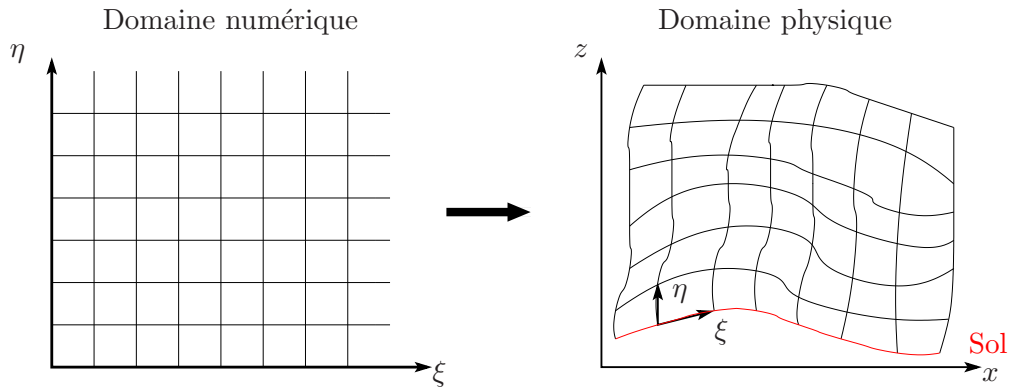


Figure 3.1 – Schéma de principe du maillage curviligne.

et  $z = z(\xi, \zeta, \eta)$  et les règles de dérivations sur les fonctions composées amènent à :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \text{ avec la matrice jacobienne } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \xi_x & \zeta_x & \eta_x \\ \xi_y & \zeta_y & \eta_y \\ \xi_z & \zeta_z & \eta_z \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

On a utilisé la notation  $i_j = \partial i / \partial j$  pour les dérivées des coordonnées. À partir de l'écriture sous forme conservative des équations d'Euler linéarisées (cf. Eq. 1.3), l'équation suivante est obtenue :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \zeta_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} + \eta_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \zeta_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \zeta} + \eta_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} + \xi_z \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \xi} + \zeta_z \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \zeta} + \eta_z \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} + \mathbf{H} = \mathbf{S}. \quad (3.2)$$

On introduit ensuite le jacobien de la transformation  $J = \det(\mathbf{J})$ . En divisant l'équation 3.2 par  $J$  et en réécrivant sous forme conservative, il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \frac{1}{J} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_x}{J} \mathbf{E} + \frac{\xi_y}{J} \mathbf{F} + \frac{\xi_z}{J} \mathbf{G} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta_x}{J} \mathbf{E} + \frac{\zeta_y}{J} \mathbf{F} + \frac{\zeta_z}{J} \mathbf{G} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_x}{J} \mathbf{E} + \frac{\eta_y}{J} \mathbf{F} + \frac{\eta_z}{J} \mathbf{G} \right) + \frac{\mathbf{H}}{J} = \frac{\mathbf{S}}{J} \\ & + \mathbf{E} \left[ \left( \frac{\xi_x}{J} \right)_\xi + \left( \frac{\zeta_x}{J} \right)_\zeta + \left( \frac{\eta_x}{J} \right)_\eta \right] + \mathbf{F} \left[ \left( \frac{\xi_y}{J} \right)_\xi + \left( \frac{\zeta_y}{J} \right)_\zeta + \left( \frac{\eta_y}{J} \right)_\eta \right] + \mathbf{G} \left[ \left( \frac{\xi_z}{J} \right)_\xi + \left( \frac{\zeta_z}{J} \right)_\zeta + \left( \frac{\eta_z}{J} \right)_\eta \right]. \end{aligned}$$

Les termes entre crochets dans l'équation précédente représentent les invariants métriques et sont nuls. On se ramène ainsi à l'équation :

$$\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial \eta} + \mathbf{H}^* = \mathbf{S}^*, \quad (3.3)$$

avec les flux :

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}/J, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{E}^* = (\xi_x \mathbf{E} + \xi_y \mathbf{F} + \xi_z \mathbf{G})/J, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{F}^* = (\zeta_x \mathbf{E} + \zeta_y \mathbf{F} + \zeta_z \mathbf{G})/J, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{G}^* = (\eta_x \mathbf{E} + \eta_y \mathbf{F} + \eta_z \mathbf{G})/J, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H}/J, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{S}/J. \quad (3.9)$$

L'équation à résoudre dans le domaine  $(\xi, \zeta, \eta)$  est donc très similaire à celle obtenue dans le repère cartésien. Les méthodes de calcul des dérivées spatiales et de filtrage sélectif décrites dans la partie 1.1 pourront être aussi appliquées dans ce cas. Il est à noter que la connaissance de la métrique, c'est-à-dire de l'ensemble des coefficients de la matrice jacobienne, est nécessaire. Cependant, les paramètres d'entrée du modèle sont les coordonnées  $x, y, z$ . Pour obtenir les coefficients voulus, on remarque que par construction :

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Le jacobien peut donc se calculer avec la relation :

$$\frac{1}{J} = x_\xi y_\zeta z_\eta + x_\zeta y_\eta z_\xi + x_\eta y_\xi z_\zeta - x_\xi y_\eta z_\zeta - x_\zeta y_\xi z_\eta - x_\eta y_\zeta z_\xi. \quad (3.11)$$

Le calcul de chaque coefficient de la matrice jacobienne peut ensuite se faire avec la formule :

$$\mathbf{J}_{i,j} = J \text{Cof}(\mathbf{J}^{-1})_{j,i}, \quad (3.12)$$

où Cof est le cofacteur. En détail, on obtient alors les relations :

$$\begin{aligned} \xi_x &= J(y_\zeta z_\eta - y_\eta z_\zeta), & \zeta_x &= J(y_\eta z_\xi - y_\xi z_\eta), & \eta_x &= J(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi), \\ \xi_y &= J(z_\zeta x_\eta - z_\eta x_\zeta), & \zeta_y &= J(z_\eta x_\xi - z_\xi x_\eta), & \eta_y &= J(z_\xi x_\zeta - z_\zeta x_\xi), \\ \xi_z &= J(x_\zeta y_\eta - x_\eta y_\zeta), & \zeta_z &= J(x_\eta y_\xi - x_\xi y_\eta), & \eta_z &= J(x_\xi y_\zeta - x_\zeta y_\xi). \end{aligned} \quad (3.13)$$

On pourra vérifier qu'on retrouve les invariants métriques avec les équations ci-dessus. A l'initialisation du code FDTD, les coefficients de l'inverse de la matrice jacobienne sont donc calculés analytiquement si une expression analytique de la transformation est utilisée ou avec les méthodes différences finies dans un cas plus général. Le jacobien et les coefficients de la matrice jacobienne sont alors déterminés avec les équations 3.11 et 3.13.

On peut donc voir que l'utilisation d'un maillage curviligne introduit peu de différences par rapport au cas d'un maillage cartésien. En termes d'espace mémoire, il faudra stocker en plus le jacobien et les coefficients de la matrice jacobienne. Le temps de calcul par itération est aussi plus élevé puisque les flux eulériens ont une expression plus compliquée.

### 3.1.2 Conditions limites au niveau du sol

Dans cette partie, on décrit les méthodes utilisées pour appliquer la condition limite d'impédance dans le domaine temporel, décrite dans la section 1.2, au cas curviligne. On décrira de même la prise en compte d'un sol rigide.

#### Préliminaires

Afin d'implémenter la condition limite d'impédance ou de sol rigide, il est nécessaire de calculer la vitesse normale et la vitesse tangentielle au sol. On rappelle que le sol correspond à la surface  $\eta = 0$ . On obtient donc un vecteur normal unitaire au sol, noté  $\mathbf{e}_\eta$  avec le gradient de  $\eta$  :

$$\mathbf{e}_\eta = \frac{1}{|\nabla\eta|} \nabla\eta. \quad (3.14)$$

Le vecteur vitesse normale au sol  $\mathbf{v}_n$  s'obtient alors avec le produit scalaire :

$$\mathbf{v}_n = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\eta) \mathbf{e}_\eta = \frac{1}{|\nabla \eta|} (\nabla \eta \cdot \mathbf{v}) \mathbf{e}_\eta. \quad (3.15)$$

Le vecteur vitesse tangente  $\mathbf{v}_t$  s'obtient par soustraction  $\mathbf{v}_t = \mathbf{v} - \mathbf{v}_n$ . Enfin, les composantes du vecteur vitesse dans le repère cartésien s'obtiennent par projection :

$$v_\bullet = \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{e}_\bullet + \mathbf{v}_t \cdot \mathbf{e}_\bullet. \quad (3.16)$$

On représente sur la figure 3.2 un schéma de définition des repères utilisés. On donne dans le tableau 3.1 l'expression explicite de la vitesse normale et de la vitesse tangentielle pour le cas 2D et pour le cas 3D. Il est à noter que dans le cas 3D, les vecteurs tangents unitaires choisis dans cette étude  $\mathbf{e}_{t1}$  et  $\mathbf{e}_{t2}$  ne sont pas orthogonaux.

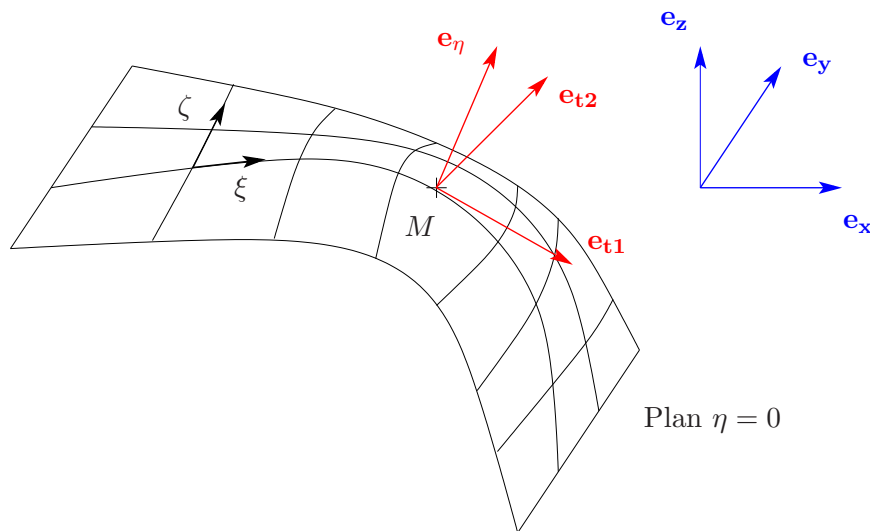


Figure 3.2 – Schéma de définition des différents vecteurs du repère attaché à la surface du sol.

### CLIT : implémentation sur la pression

Pour le cas de sols non-plans avec l'approche choisie, l'implémentation sur la pression est intéressante puisque la pression fait partie des variables, contrairement à la vitesse normale. L'implémentation sur la pression de la condition limite d'impédance dans le domaine temporel est donc peu modifiée, si ce n'est que pour l'avancement des accumulateurs, la vitesse normale est calculée à partir des équations présentées dans le tableau 3.1. L'avancement en temps est ainsi donnée par :

1. Avancement en temps de la pression et de vitesse pour avoir  $p^{(n)}$  et  $v^{(n)}$  sur tout le domaine,
2. Calcul de la vitesse normale avec les relations dans le tableau 3.1,
3. Avancement des accumulateurs  $\phi_k^{(n)}$  et  $\psi_k^{(n)}$ ,
4. Forçage de la pression au niveau du sol avec l'équation 1.43.

Tableau 3.1 – Expressions analytiques des composantes de la vitesse acoustique dans le repère cartésien et dans le repère attaché au sol.

	Cas 2D	Cas 3D
Vecteur normal	$\mathbf{e}_\eta = \frac{\eta_x \mathbf{e}_x + \eta_z \mathbf{e}_z}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_z^2}}$	$\mathbf{e}_\eta = \frac{\eta_x \mathbf{e}_x + \eta_y \mathbf{e}_y + \eta_z \mathbf{e}_z}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}}$
Vitesse normale	$v_n = \frac{\eta_x v_x + \eta_z v_z}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_z^2}}$	$v_n = \frac{\eta_x v_x + \eta_y v_y + \eta_z v_z}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}}$
Vecteur tangent	$\mathbf{e}_t = \frac{\eta_z \mathbf{e}_x - \eta_x \mathbf{e}_z}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_z^2}}$	$\mathbf{e}_{t2} = \frac{\eta_z \mathbf{e}_y - \eta_y \mathbf{e}_z}{\sqrt{\eta_y^2 + \eta_z^2}}$
		$\mathbf{e}_{t1} = \frac{\eta_z \mathbf{e}_x - \eta_x \mathbf{e}_z}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_z^2}}$
Vitesse tangente	$v_t = \frac{\eta_z v_x - \eta_x v_z}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_z^2}}$	$v_{t2} = \frac{\eta_z v_y - \eta_y v_z}{\sqrt{\eta_y^2 + \eta_z^2}}$
		$v_{t1} = \frac{\eta_z v_x - \eta_x v_z}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_z^2}}$
Vitesse dans le repère cartésien	$v_x = \frac{\eta_x v_n + \eta_z v_t}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_z^2}}$	$v_x = \frac{\eta_x v_n}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}} + \frac{\eta_z v_{t1}}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_z^2}}$
		$v_y = \frac{\eta_y v_n}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}} + \frac{\eta_z v_{t2}}{\sqrt{\eta_y^2 + \eta_z^2}}$
		$v_z = \frac{\eta_z v_n - \eta_x v_t}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_z^2}}$
		$v_z = \frac{\eta_z v_n}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}} - \frac{\eta_x v_{t1}}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_z^2}} - \frac{\eta_y v_{t2}}{\sqrt{\eta_y^2 + \eta_z^2}}$

### CLIT : implémentation sur la vitesse normale

L'implémentation sur la vitesse normale est un peu plus complexe. En effet, la condition limite d'impédance donne dans ce cas la vitesse normale qui devra être projetée dans le repère cartésien. La méthode proposée consiste alors à déterminer la ou les vitesses tangentielles. Une fois la vitesse normale calculée avec la condition limite, les vitesses acoustiques dans le repère cartésien sont alors obtenues par projection. En détail, l'avancement en temps est :

1. Avancement en temps de la pression et de vitesse pour avoir  $p^{(n)}$  et  $v^{(n)}$  sur tout le domaine,
2. Calcul de la vitesse tangentielle avec les relations dans le tableau 3.1,
3. Calcul de la vitesse normale niveau du sol avec l'équation :

$$v_n^{(n)} = \frac{1}{C} \left[ p^{(n)} - \sum_{k=1}^N A_k \phi_k^{(n-1)} \exp(-\lambda_k \Delta t) \right], \quad (3.17)$$

avec :

$$C = Z_S^\infty + \sum_{k=1}^N A_k \frac{1 - \exp(-\lambda_k \Delta t)}{\lambda_k}. \quad (3.18)$$

4. Avancement des accumulateurs  $\phi_k^{(n)}$ ,
5. Forçage des composantes de la vitesse avec les équations données dans le tableau 3.1.

### Cas d'un sol rigide

Pour le cas d'un sol rigide, on rappelle que la relation  $v_n = 0$  doit être vérifiée à la frontière. L'implémentation alors proposée s'écrit :

1. Avancement en temps de la pression et de vitesse pour avoir  $p^{(n)}$  et  $v^{(n)}$  sur tout le domaine,
2. Calcul de la vitesse tangentielle avec les équations dans le tableau 3.1,
3. Forçage des composantes de la vitesse dans le repère cartésien en imposant  $v_n = 0$ .

### 3.1.3 Cas-test 2D

Afin de valider la prise en compte des conditions limites au niveau du sol, un cas-test est proposé : on étudiera ainsi la diffusion d'ondes acoustiques par un cylindre impédant. Ce cas-test est basé sur celui proposé dans « Second Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems » (CAA, 1997). Le schéma du problème est représenté sur la figure 3.3. Le changement de coordonnées ici choisi s'écrit :

$$\begin{cases} x = (\eta + R_c) \sin(\xi/R_c), \\ z = (\eta + R_c) \cos(\xi/R_c). \end{cases} \quad (3.19)$$

Les paramètres  $r = \eta + R_c$  et  $\theta = \xi/R_c$  peuvent être ainsi vus comme les coordonnées polaires classiques.

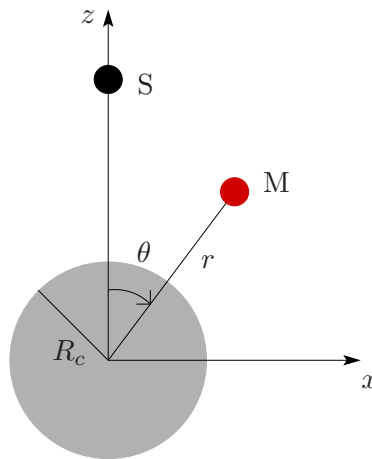


Figure 3.3 – Schéma du problème.

On considère une impulsion à support gaussien à  $t = 0$  centrée en  $(0, z_S)$ . Comme dans la partie 1.3, on a alors  $Q(x, z, t) = Q(x, z) \delta(t)$  avec :

$$Q(x, z) = \exp\left(-\ln 2 \frac{z^2 + (y - z_S)^2}{B_x^2}\right). \quad (3.20)$$

L'initialisation du code FDTD est alors  $p(x, z, t = 0) = \rho_0 c_0^2 Q(x, z)$  et  $\rho_0 \mathbf{v}(\mathbf{r}, t = 0) = \mathbf{0}$ .

La solution analytique dans le domaine temporel peut s'exprimer sous la forme d'une transformée de Fourier :

$$p(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \hat{p}(r, \theta, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (3.21)$$

où  $S(\omega)$  est la puissance de la source donnée dans le cas d'un support gaussien par l'équation 1.88. Le terme  $\hat{p}(r, \theta, \omega)$  est la solution analytique pour un point source dans le domaine fréquentiel. L'obtention de cette solution est détaillée dans l'annexe E.

Le rayon du cylindre est ici fixé à  $R_c = 20$  m. La hauteur de la source est donnée par  $z_S = 3R_c$ . Trois récepteurs sont placés dans le domaine à une distance  $r = 2R_c$  du centre du cylindre et avec des angles  $\theta = 0, \pi/3$  et  $\pi$ . La demi-largeur de la gaussienne  $B_x$  est choisie à  $B_x = 5\Delta\xi = 0.25$  m. Dans le domaine physique, lorsque  $\eta$  augmente, le pas spatial dans la direction  $\xi$  augmente aussi. Ainsi, la discrétisation spatiale de la source dans la direction  $\xi$  est lâche. Il sera montré, cependant, que les résultats sont encore précis.

### Paramètres numériques

Dans les simulations numériques, le maillage est uniforme avec  $\Delta\xi = \Delta\eta = 0.05$  m. Il comporte 2500 points dans la direction  $\xi$  et 1800 points dans la direction  $\eta$ . Le nombre CFL est fixé à 1. On réalise 4000 itérations temporelles. Concernant les conditions aux limites, une condition de périodicité est utilisée dans la direction azimuthale. Dans la direction radiale, la condition de rayonnement de Tam et Dong (1996) (cf. Sec. 1.1.4) est appliquée.

Les trois types de conditions limites vues dans le paragraphe précédent pour le sol sont considérées avec :

- un sol rigide.
- un sol absorbant de type herbeux modélisé par un modèle de Miki d'une couche de résistivité au passage de l'air  $\sigma_0 = 100$  kPa.s.m<sup>-2</sup> et d'épaisseur  $d = 0.01$  m sur support rigide. Ce modèle est appelé « couche herbeuse » et l'implémentation de la condition limite d'impédance sur la pression est utilisée.
- un sol très réfléchissant modélisé par un modèle de Miki d'un sol semi-infini avec une résistivité au passage de l'air  $\sigma_0 = 5.10^4$  kPa.s.m<sup>-2</sup>. Ce modèle est appelé par la suite « sol réfléchissant ». On utilise dans ce cas l'implémentation de la condition limite d'impédance sur la vitesse normale.

Les deux modèles d'impédance ont déjà été utilisés dans la partie 1.2.4 pour valider la condition limite d'impédance sur un cas-test unidimensionnel.

### Résultats

Des détails sur le calcul de la solution analytique du problème peuvent être trouvés dans l'annexe E. La pression aux trois récepteurs obtenue avec le calcul numérique et avec la solution analytique est représentée sur la figure 3.4 pour les trois conditions aux limites. Pour les cas  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi/3$ , la première arrivée correspond à l'onde directe et est identique pour les trois conditions aux limites considérées. La seconde arrivée correspond alors à l'onde diffusée. Dans le cas  $\theta = \pi$ , il n'y a pas d'onde directe puisque le cylindre est alors situé entre la source et le récepteur. L'arrivée observée correspond alors à l'onde diffusée; on peut remarquer qu'elle dépend fortement de la condition limite au sol. Dans tous les cas, un très bon accord est trouvé entre les formes d'ondes obtenues avec le code numérique et avec la solution analytique.

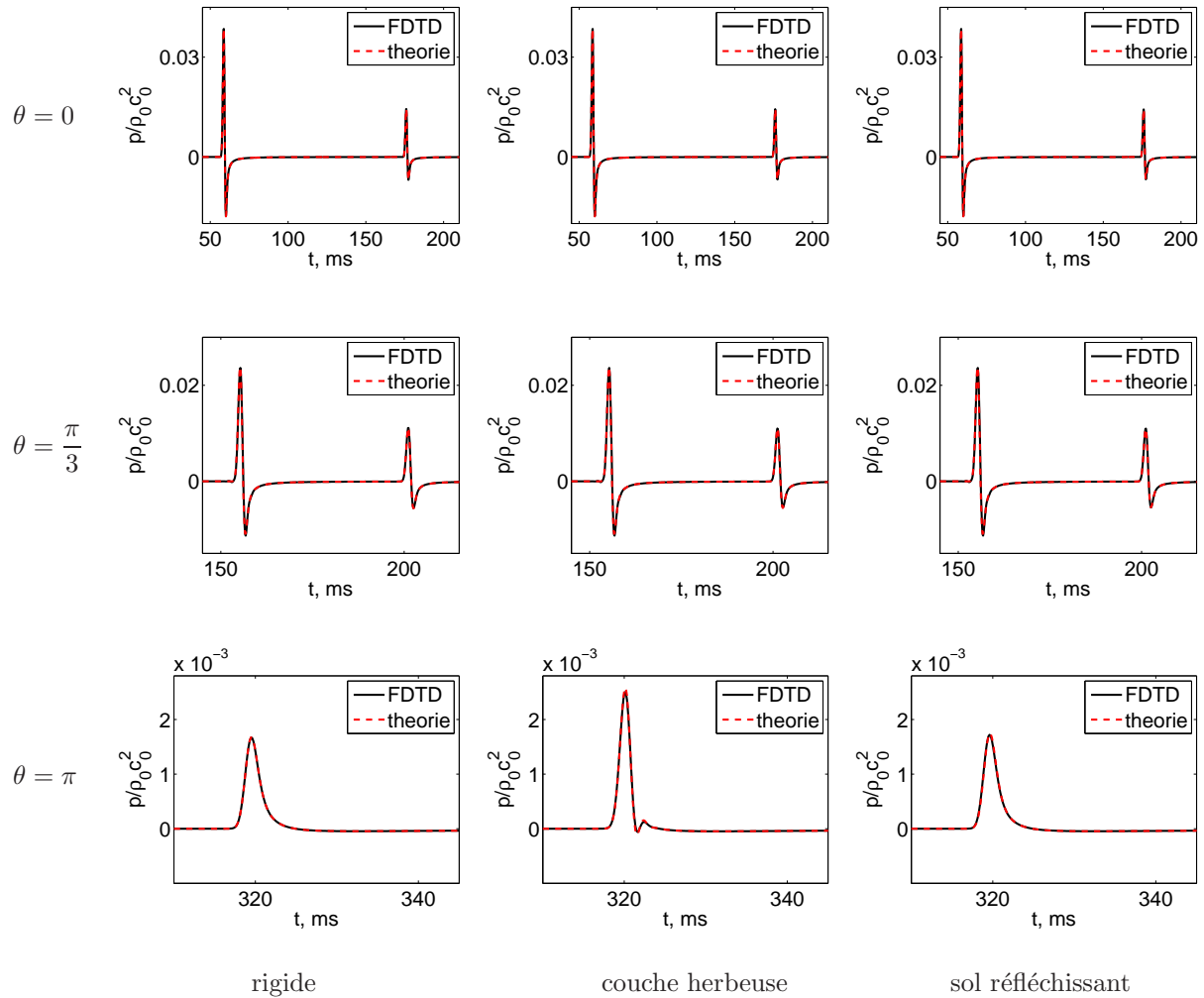


Figure 3.4 – Formes d’onde de la pression obtenues pour des récepteurs situés en  $r = 40$  m et en  $\theta = 0, \pi/3$  et  $\pi$  pour les trois conditions limites. Les lignes noire et rouge représentent respectivement les résultats obtenus avec le calcul numérique et avec la solution analytique.

### 3.2 Propagation au-dessus d’un cylindre impédant

Dans cette partie, la propagation d’ondes acoustiques au-dessus d’un cylindre impédant est étudiée. Ce cas est un problème classique en acoustique linéaire. Il a été tout d’abord traité dans le cadre de la propagation d’ondes en électromagnétisme (Fock, 1965; Tolstoy, 1973) et a été étudié ensuite par de nombreux auteurs en acoustique (Pierce, 1989; Berry et Daigle, 1988; Raspét *et al.*, 1991). Une analogie a été proposée entre la propagation en conditions homogènes au-dessus d’un cylindre et la propagation en conditions défavorables au-dessus d’un sol plan. Un schéma de cette analogie est proposé sur la figure 3.5. Il a été montré par Di et Gilbert (1994) que cette analogie était exacte pour une géométrie bidimensionnelle ; dans ce cas, le profil de célérité du son équivalent est exponentiel. Le rayon du cylindre permet alors de faire le lien avec le gradient de la célérité du son équivalente. Pour le cas de la sphère, l’analogie peut être faite avec un profil de type bilinéaire (Li *et al.*, 1998). D’un point de vue pratique, cette analogie est importante puisqu’elle



autorise en chambre sourde la modélisation de conditions de propagation défavorables par une paroi courbe.

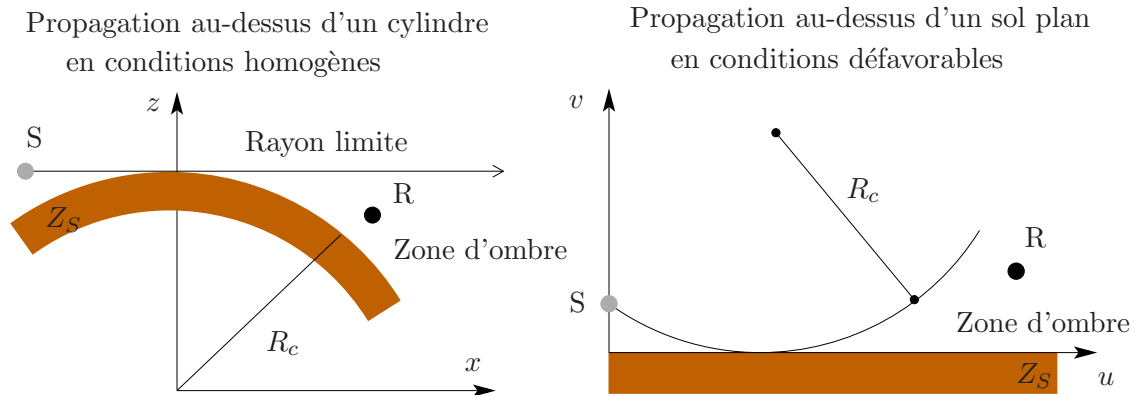


Figure 3.5 – Analogie entre la propagation au-dessus d’un cylindre en conditions homogènes et la propagation au-dessus d’un sol plan en conditions défavorables.

Dans une première section, les résultats de simulation numérique seront comparés à une solution analytique pour des récepteurs situés dans la zone d’ombre acoustique. Celle-ci peut être définie à partir d’une approche géométrique : la zone d’ombre correspond à la partie de l’espace qu’aucun rayon ne peut atteindre. Les contributions dans la zone d’ombre sont alors liées aux ondes diffractées par la paroi courbe, appelées ondes rampantes mais aussi aux ondes de surface présentées dans la partie 1.3. Dans une atmosphère réaliste, l’insonorisation de la zone d’ombre est aussi due aux ondes acoustiques diffusées par les structures turbulentes. Par ailleurs, de nombreuses études dans la littérature ont montré que le niveau de pression dans la zone d’ombre dépendait de la rugosité du sol (Chambers et Berthelot, 1996; Whelan et Chambers, 2009). Nous nous intéresserons donc ici seulement à l’effet de sol sur les niveaux de pression dans la zone d’ombre. Dans une seconde section, une étude est proposée sur le comportement de la solution analytique lorsque le rayon du cylindre devient infini ; en particulier, la condition d’existence de l’onde de surface en conditions de propagation défavorables est considérée.

### 3.2.1 Comparaison à une solution analytique

On étudie ici la propagation au-dessus d’un cylindre impédant de rayon  $R_c = 1000$  m. Le changement de variables utilisé est le même que dans la partie précédente :

$$\begin{cases} x = (\eta + R_c) \sin(\xi/R_c), \\ z = (\eta + R_c) \cos(\xi/R_c). \end{cases} \quad (3.22)$$

Un schéma du problème est représenté sur la figure 3.6. On utilise comme précédemment, une source de masse impulsionnelle à support gaussien (cf. Eq. 3.20). La demi largeur de la gaussienne est fixée à  $B_x = 0.25$  m. Elle est centrée en  $x_S = 0$  m et à une hauteur de 3 m par rapport à la surface du cylindre. Le maillage dans le domaine numérique  $(\xi, \eta)$  est uniforme avec  $\Delta \xi = \Delta \eta = 0.05$  m. Le domaine numérique a 1552 points dans la direction  $\xi$  et 1106 points dans la direction  $\eta$ . Le nombre CFL est égal à 1 et 7000 itérations temporelles sont effectuées. Enfin, une fenêtre glissante, dont l’implémentation est décrite dans la section 1.3.1, est utilisée.

On considère trois conditions aux limites au niveau du sol. La première correspond au cas d’un sol rigide. Pour les deux autres, on reprend les modèles d’impédance appelés « herbe » et « neige »,

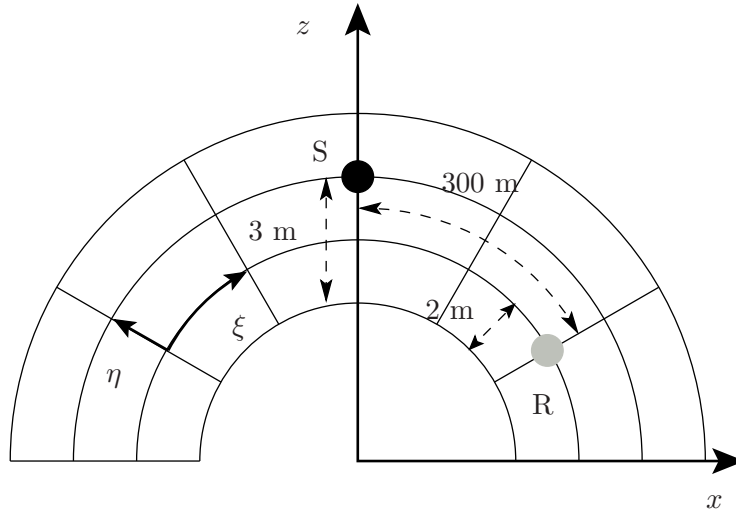


Figure 3.6 – Schéma du problème.

utilisés précédemment dans la partie 1.3. On rappelle que le modèle « herbe » correspond à un modèle de Miki d'une couche semi-infinie de résistivité au passage de l'air  $\sigma_0 = 100 \text{ kPa.s.m}^{-2}$  et que le modèle « neige » correspond au modèle de Miki d'une couche d'épaisseur  $d = 10 \text{ cm}$  et de résistivité au passage de l'air  $\sigma_0 = 10 \text{ kPa.s.m}^{-2}$  sur support rigide.

Les résultats de la simulation numérique sont comparés à ceux d'une solution analytique. Dans le cas d'une atmosphère homogène, les équations d'Euler linéarisées se réduisent dans le domaine fréquentiel à l'équation d'Helmholtz :

$$[\Delta + k_0^2]\hat{p}(x, z) = \delta(x - x_S)\delta(z - z_S). \quad (3.23)$$

En suivant Di et Gilbert (1994), on introduit le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x = R_c \exp(v/R_c) \sin(u/R_c), \\ y = R_c \exp(v/R_c) \cos(u/R_c). \end{cases} \quad (3.24)$$

L'équation d'Helmholtz devient alors dans le système de coordonnées  $(u, v)$  :

$$[\Delta + k(v)^2]\hat{p}(u, v) = \delta(u - u_S)\delta(v - v_S), \quad (3.25)$$

avec  $(u_S, v_S)$  la position de la source dans le plan  $(u, v)$  et avec  $k(v) = \omega/c(v)$  où le profil de célérité du son équivalent est  $c(v) = c_0 \exp(-v/R_c)$ . Avec la valeur importante de  $R_c$ , le profil de célérité est à peu près linéaire pour des hauteurs de récepteurs allant jusqu'à  $v = 50 \text{ m}$ , comme on peut le voir sur la figure 3.7. On a aussi représenté le profil dit « bilinéaire » défini par  $c(v) = c_0/\sqrt{1 + 2v/R_c}$ . Ce profil est intéressant puisqu'une solution analytique de l'équation 3.25 existe pour ce cas dans la littérature. Un état de l'art des solutions analytiques pour différents profils de célérité du son est donné dans Brekhovskikh (1980).

La solution analytique pour le profil bilinéaire pour une géométrie bidimensionnelle est donnée sous la forme d'une somme de résidus par Berry et Daigle (1988) :

$$\hat{p}(u, v) = \sum_{n \geq 1} \frac{-i e^{i k_n u}}{2 k_n} \varphi_n(v) \varphi_n(v_S), \quad (3.26)$$

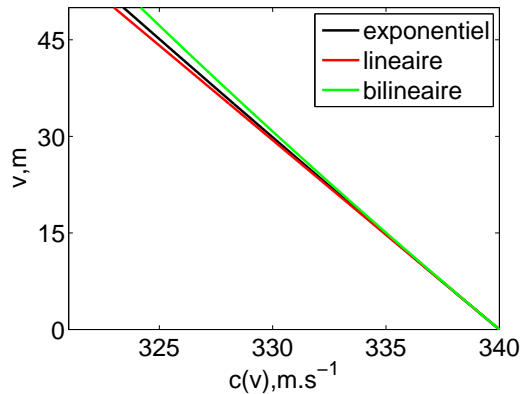


Figure 3.7 – Profils de célérité du son en fonction de la hauteur pour  $R_c = 1000$  m.

avec

$$\varphi_n(v) = i \frac{e^{2i\pi/3}}{\sqrt{l}} \frac{\text{Ai}[(\tau_n - v/l) e^{2i\pi/3}]}{[\text{Ai}'(b_n)^2 - b_n \text{Ai}(b_n)^2]^{1/2}}. \quad (3.27)$$

Dans l'égalité ci-dessus, les paramètres  $l = (R_c/2k_0^2)^{1/3}$  et  $\tau_n = (k_n^2 - k_0^2)l^2$  représentent respectivement l'épaisseur de la couche d'ondes rampantes et le carré du nombre d'onde transverse adimensionnalisé. Les coefficients  $b_n = \tau_n e^{2i\pi/3}$  vérifient la relation :

$$\text{Ai}'(b_n) + q e^{i\pi/3} \text{Ai}(b_n) = 0. \quad (3.28)$$

où  $q = ik_S l$  avec  $k_S = k_0 \beta$ . Pour un sol rigide, le paramètre  $q$  est nul et les coefficients  $b_n$  correspondent alors aux zéros de la dérivée de la fonction d'Airy. Pour des sols impédants, ils dépendent de la fréquence. Pour les calculer, on utilise la méthode proposée par Raspet *et al.* (1991). Pour cela, la discrétisation du problème amène à considérer des fréquences discrètes, notées  $(f_i)_{1 \leq i \leq M}$  avec  $f_1 = 0$  Hz pour le problème large bande résolu. Un algorithme de Newton-Raphson est alors utilisé pour résoudre l'équation 3.28. Si on note  $g(x) = \text{Ai}'(x) + q e^{i\pi/3} \text{Ai}(x)$ , cela revient à calculer itérativement pour chaque  $n$  et pour chaque fréquence  $f_i$  :

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{g(x_i^{(k)})}{g'(x_i^{(k)})}, \quad (3.29)$$

avec le critère d'arrêt à l'étape  $p$  :

$$\left| g(x_i^{(p)}) \right| \leq \epsilon, \quad (3.30)$$

avec le paramètre d'arrêt  $\epsilon$  fixé ici à  $1.10^{-6}$ . L'initialisation de l'algorithme se fait alors avec  $x_{i+1}^{(0)} = x_i^{(p)}$ . Enfin, on note que les  $x_0$  sont connus puisqu'ils correspondent aux zéros de la dérivée de la fonction d'Airy ; en effet, à très basse fréquence, le comportement d'un sol impédant est comparable à celui d'un sol rigide.

On a représenté sur la figure 3.8 les trajectoires des six premiers coefficients  $b_n$  pour les modèles d'impédance « herbe » et « neige ». Comme noté précédemment, à basse fréquence, la trajectoire des coefficients  $b_n$  est issue des zéros de la dérivée de fonction d'Airy, représentés par des points noirs sur la figure 3.8. Lorsque la fréquence augmente, les trajectoires sont liées aux zéros de la fonction d'Airy, représentés par des cercles blancs ; en effet, en haute fréquence,  $\beta$  et donc

$q$  tendent vers l'infini et les coefficients  $b_n$  correspondent alors aux zéros de la fonction d'Airy. Ce comportement est bien retrouvé pour tous les coefficients  $b_n$  sauf pour le coefficient  $b_1$  pour le cas « neige ». En effet, on peut voir que la trajectoire s'éloigne de la ligne des réels, tout au moins pour les fréquences considérées ici. Ce type de comportement est lié, d'après Raspét *et al.*, à la présence d'ondes de surface. Pour vérifier cela, on peut comparer les nombres d'onde horizontaux  $k_n$  au nombre d'onde horizontal de l'onde de surface en conditions homogènes qui est donné par  $k_S^H = \sqrt{k_0^2 - k_S^2}$ . Il est aussi intéressant de calculer les nombres d'onde horizontaux pour les différentes conditions limites afin d'identifier l'effet d'une impédance finie sur le champ de pression.

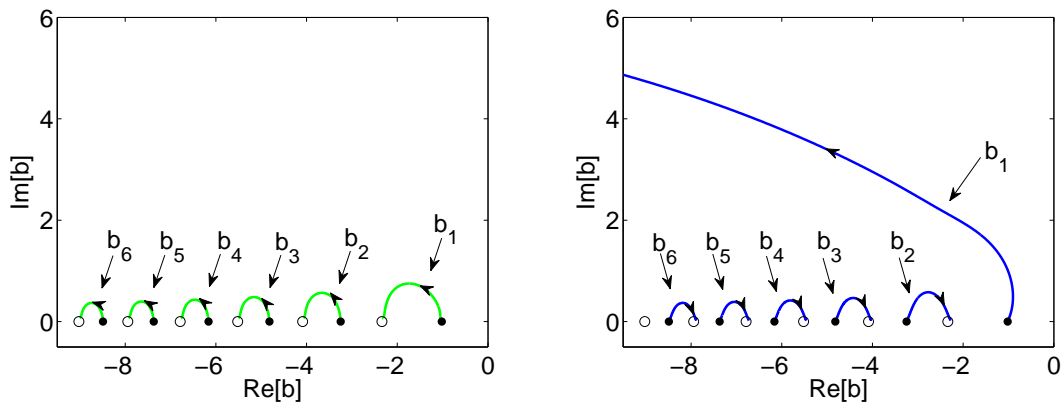


Figure 3.8 – Trajectoires des coefficients  $b_n$  dans le plan complexe (gauche) pour le cas « herbe » et (droite) pour le cas « neige ».

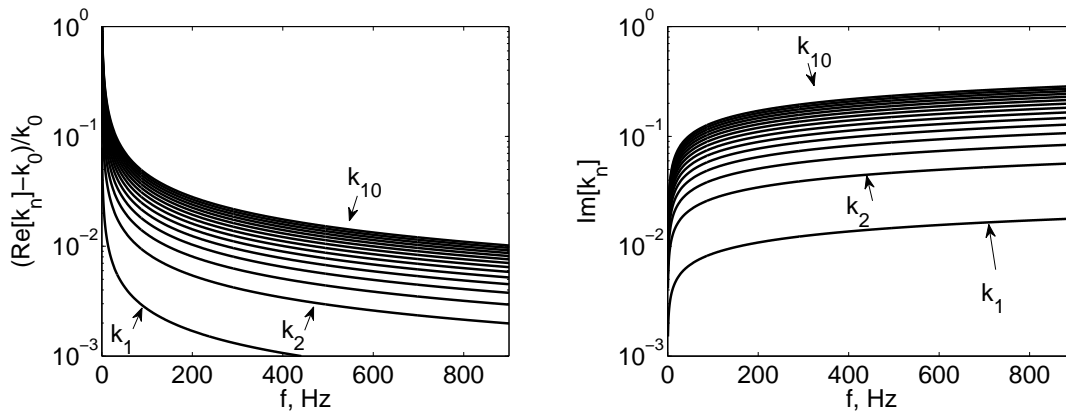


Figure 3.9 – Parties réelle et imaginaire des nombres d'onde horizontaux en fonction de la fréquence pour le cas rigide.

On a ainsi représenté sur la figure 3.9 les parties réelle et imaginaire des nombres d'onde horizontaux  $k_n$  pour  $1 \leq n \leq 10$  pour le cas rigide. On peut voir que tous les  $k_n$  ont une partie imaginaire non nulle, ce qui implique une décroissance exponentielle de la pression dans la zone d'ombre. Notons que  $k_1$  a la partie imaginaire la plus faible et que pour des distances de propagation importantes, la contribution liée au premier résidu sera prépondérante. Sur la figure 3.10, on a représenté les parties imaginaire et réelle des  $k_n$  et de  $k_S^H$  pour le cas « herbe ». Notons qu'ici,

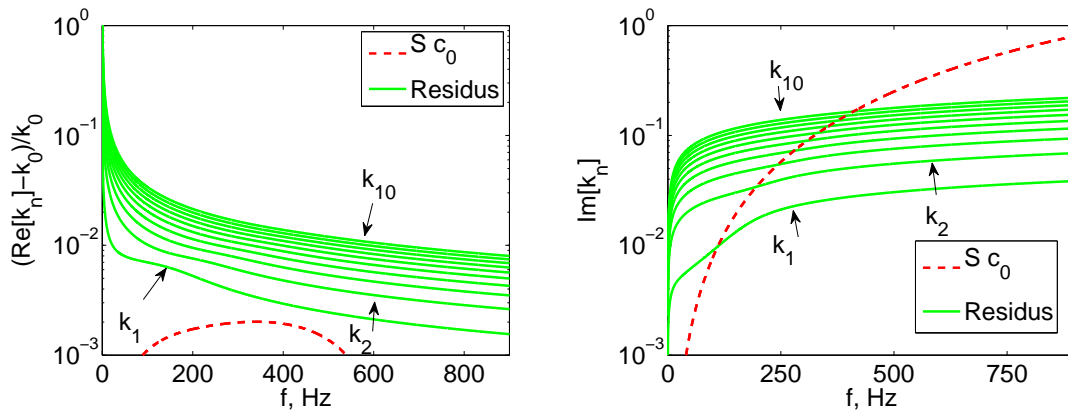


Figure 3.10 – Parties réelle et imaginaire des nombres d’onde horizontaux en fonction de la fréquence pour le cas « herbe ».

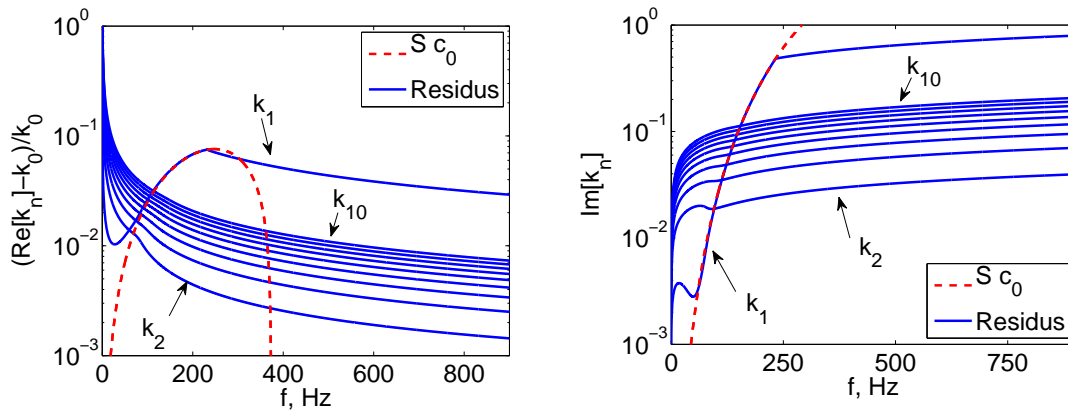


Figure 3.11 – Parties réelle et imaginaire des nombres d’onde horizontaux en fonction de la fréquence pour le cas « neige ».

il ne semble pas y avoir de nombre d’onde horizontal lié à l’onde de surface. On peut remarquer que là encore, la partie imaginaire de  $k_1$  est bien plus faible que celle des autres  $k_n$ . Par rapport au cas rigide, on peut aussi voir l’effet de sol : en effet, la partie imaginaire de  $k_1$  est plus faible à basse fréquence et plus grande à haute fréquence. Enfin, sur la figure 3.11, on a représenté les parties réelle et imaginaire des nombres d’onde  $k_n$  pour le cas « neige ». Notons que sur l’intervalle fréquentiel compris entre 50 Hz et 250 Hz, le nombre d’onde  $k_1$  correspond bien au nombre d’onde horizontal de l’onde de surface. En particulier à très basse fréquence, la partie imaginaire de  $k_1$  est plus faible que celle obtenue dans le cas rigide. Cependant pour des fréquences supérieures à 250 Hz, le comportement de  $k_1$  est similaire à celui des autres  $k_n$ .

On compare maintenant les résultats du calcul numérique à la solution analytique pour un récepteur situé à 300 m le long de la paroi et à une hauteur de 2 m. Sur la figure 3.12, on a tracé en fonction de la fréquence la pression normalisée par la puissance de la source  $S(\omega)$  obtenue avec le calcul numérique pour les différents cas ; on rappelle que l’expression analytique de  $S(\omega)$  dans le cas d’un pulse gaussien est donnée par l’équation 1.88. Le paramètre  $|p(\omega)/S(\omega)|$  peut ainsi être vu comme la valeur absolue de la fonction de Green du problème. Les contributions des quatre premiers résidus sont aussi représentées. On peut noter que les résultats du calcul FDTD

correspondent bien avec la contribution du premier résidu pour les cas rigide et « herbe ». Pour le cas « neige », la contribution majeure est liée au premier résidu pour des fréquences inférieures à 100 Hz environ. Pour des fréquences plus grandes, elle provient du second résidu. Notons qu'on retrouve, tout du moins pour des fréquences inférieures à 100 Hz, le comportement de filtre passe-bas de l'onde de surface.

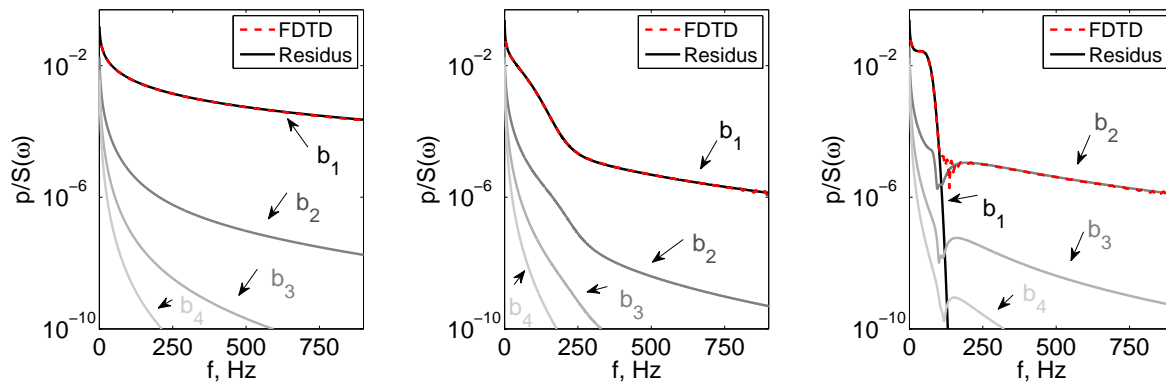


Figure 3.12 – Pression obtenue avec le calcul numérique et contributions des quatre premiers résidus normalisés par la puissance de la source  $S(\omega)$  en fonction de la fréquence pour les cas (gauche) rigide, (centre) « herbe » et (droite) « neige ».

Les formes d'ondes de la pression sont représentées sur la figure 3.13. On retrouve un bon accord entre la solution analytique et les résultats du code FDTD. Notons que les formes d'onde pour les cas rigide et « herbe » sont similaires ; néanmoins, dans le cas rigide, on peut observer un contenu fréquentiel en haute fréquence plus important. Pour le cas « neige », on obtient le comportement oscillant de l'onde de surface observé dans les cas de propagation en conditions homogènes (cf. Sec. 1.3.4) et de propagation en conditions favorables (cf. Sec. 1.3.5).

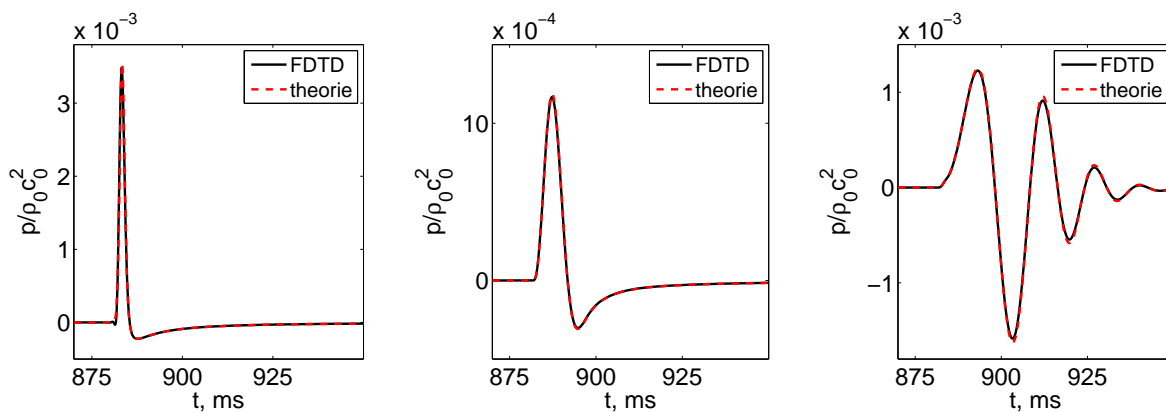


Figure 3.13 – Formes d'ondes de la pression normalisée obtenues avec le calcul numérique (en ligne pleine noire) et avec la solution analytique (en pointillés rouges) pour les cas (gauche) rigide, (centre) « herbe » et (droite) « neige ».

### 3.2.2 Cas de l'onde de surface quand le rayon tend vers l'infini

Raspet *et al.* ont montré que pour des phases de l'impédance de surface comprises entre  $\pi/3$  et  $\pi/2$ , le premier résidu correspondait lorsque  $R_c$  tend vers l'infini à l'onde de surface en conditions de propagation homogènes. Il est alors intéressant de savoir si c'est aussi le cas pour des phases d'impédance de surface comprises entre 0 et  $\pi/3$ . En effet, le problème de propagation au-dessus d'un cylindre de rayon infini revient à celui de propagation au-dessus d'un sol plan. L'onde de surface, comme on a pu le voir dans la partie 1.3.4, doit donc être présente dans la solution.

Pour vérifier cela, on considère la même source et le même récepteur situé à 300 m le long de la paroi de la source et à 2 m de hauteur. Le rayon doit être choisi assez grand pour se rapprocher le plus possible du cas de propagation au-dessus d'un sol plan ; néanmoins, pour des valeurs trop élevés de  $R_c$ , il faut augmenter le nombre de termes dans la somme de résidus pour obtenir une convergence. Une valeur de  $R_c = 10^5$  m semble un bon compromis. On utilise toujours les modèles d'impédance appelés « herbe » et « neige ». Il a été vu (voir Fig. 1.25) que la phase du modèle « herbe » était inférieure à  $\pi/3$  sur toute la bande fréquentielle considérée. Par contre, le modèle « neige » possède une phase supérieure à  $\pi/3$  en basse fréquence.

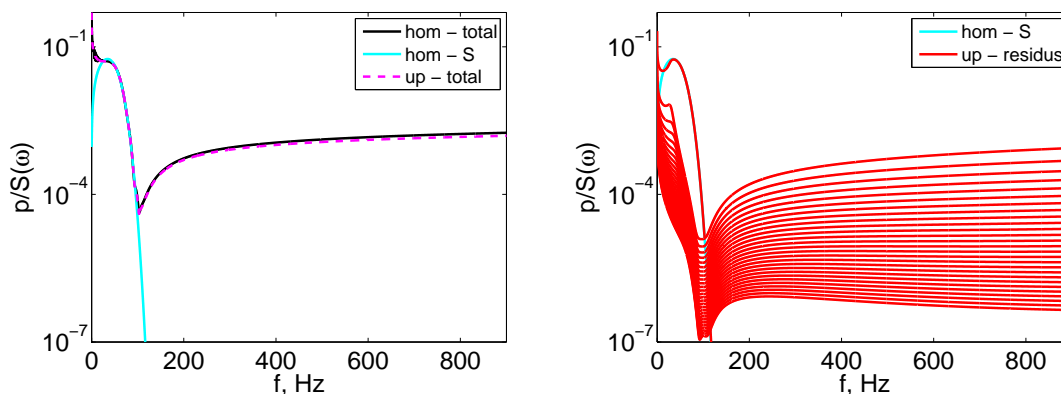


Figure 3.14 – (gauche) Pression normalisée par la puissance de la source  $S(\omega)$  en fonction de la fréquence obtenue avec les solutions analytiques dans le cas de propagation en conditions homogènes (ligne noire) et en conditions défavorables (ligne magenta). (droite) Contributions des 28 premiers résidus. Dans les deux cas, la contribution de l'onde de surface en conditions homogènes est tracée en cyan. Le cas « neige » est considéré.

On a représenté sur la figure 3.14 la pression dans le domaine fréquentiel obtenue avec la solution analytique en conditions défavorables (cf. Eq. 3.26) et la solution analytique de Di et Gilbert (1993) pour un cas bidimensionnel en conditions homogènes (cf. Sec. 1.3.4). On peut voir qu'un bon accord global est obtenu. Comme on a pu le voir dans la section précédente, la contribution liée à  $b_1$  correspond à l'onde de surface sauf pour les très basses fréquences ( $f < 20$  Hz). Notons aussi que par rapport au cas  $R_c = 1000$  m, il n'y a pas que les deux premiers résidus qui donnent une contribution non-négligeable. Sur la figure 3.15, on a tracé les formes d'ondes correspondantes. On peut remarquer qu'un bon accord est trouvé à la fois sur la longue queue du signal et sur les arrivées correspondant à l'onde directe et à l'onde réfléchie. On peut aussi voir que le premier résidu correspond bien à l'onde de surface ; en particulier, il a aussi un comportement non-causal. La partie non-causale est annulée par les contributions des autres résidus. On peut aussi noter que les autres résidus ne présentent pas du tout le caractère oscillant du premier résidu. On peut ici dissocier l'onde de surface avec le reste du signal.

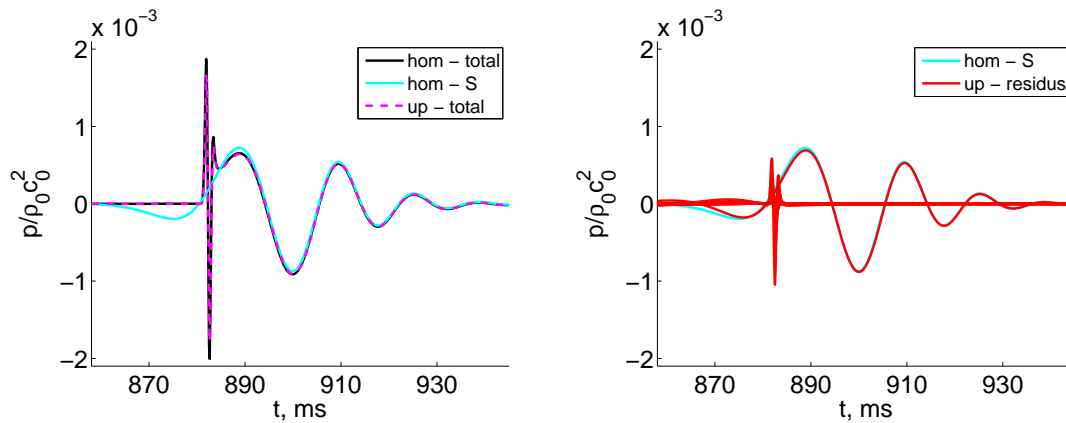


Figure 3.15 – (gauche) Formes d’onde de la pression obtenues avec les solutions analytiques en conditions homogènes (ligne noire) et en conditions défavorables (ligne magenta). (droite) Contribution des 28 premiers résidus. La contribution de l’onde de surface a aussi été représentée dans les deux cas. Le cas « neige » est considéré.

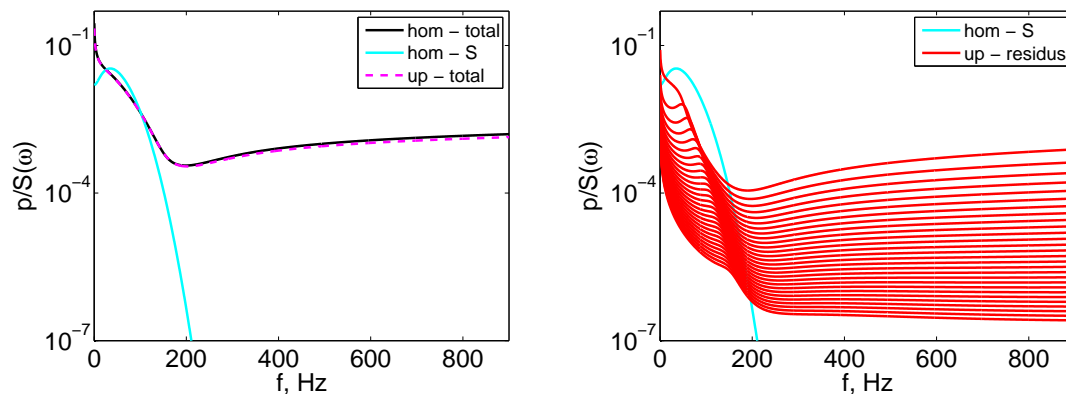


Figure 3.16 – (gauche) Pression normalisée par la puissance de la source  $S(\omega)$  en fonction de la fréquence obtenue avec les solutions analytiques dans le cas de propagation en conditions homogènes (ligne noire) et en conditions défavorables (ligne magenta). (droite) Contributions des 28 premiers résidus. Dans les deux cas, la contribution de l’onde de surface en conditions homogènes est tracée en cyan. Le cas « herbe » est considéré.

Sur la figure 3.16, on a représenté la pression dans le domaine fréquentiel obtenue avec les deux solutions analytiques pour le cas « herbe ». Là encore, un bon accord est trouvé. Si on s’intéresse aux contributions des résidus, on peut observer que, contrairement au cas « neige », aucune contribution ne correspond à celle de l’onde de surface. La pression dans le domaine temporel est tracée sur la figure 3.17. On peut encore vérifier qu’un bon accord est trouvé. Contrairement au cas précédent, chaque contribution participe à la fois à l’onde de surface et aux ondes directes et réfléchies. Notons aussi, que toutes les contributions des résidus présentent ici un comportement causal, ce qui n’était pas le cas avec le modèle d’impédance appelé « neige ».



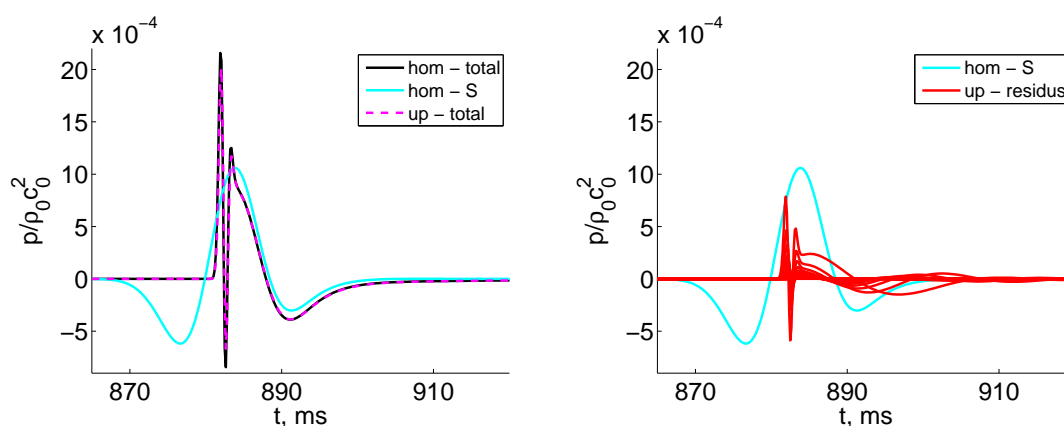


Figure 3.17 – (gauche) Formes d’onde de la pression obtenues avec les solutions analytiques en conditions homogènes (ligne noire) et en conditions défavorables (ligne magenta). (droite) Contribution des 28 premiers résidus. La contribution de l’onde de surface a aussi été représentée dans les deux cas. Le cas « herbe » est considéré.

## Conclusions

Dans cette partie, on s’est intéressé à la propagation d’ondes acoustiques au dessus d’un cylindre dans une géométrie bidimensionnelle. Ce problème est analogue à la propagation au-dessus d’un sol plan en conditions défavorables. Différentes conditions limite à la surface du cylindre ont été considérées. Des comparaisons ont été effectuées pour un récepteur dans la zone d’ombre entre les résultats d’une simulation numérique et entre ceux d’une solution analytique, écrite sous la forme d’une somme de résidus. Il a été montré qu’une onde de surface similaire à celle obtenue en conditions homogènes était présente et qu’elle pouvait être la contribution majeure dans la zone d’ombre. On s’est intéressé ensuite au cas d’un cylindre d’un rayon très grand et les résultats des solutions analytiques en conditions homogènes et défavorables ont été comparées. Il a été montré qu’un très bon accord était obtenu. De plus, dans le cas où la phase de l’impédance était supérieure à  $\pi/3$ , le premier résidu est lié directement à l’onde de surface. Dans le cas où la phase de l’impédance était inférieure à  $\pi/3$ , l’onde de surface est alors obtenue en sommant les contributions des résidus. Il semble alors que la condition de l’existence de l’onde de surface en conditions défavorables est la même que celle en conditions homogènes.

## 3.3 Étude sur les effets de la topographie d’une voie

Une étude est ici proposée afin de mettre en évidence l’effet de la topographie d’un site ferroviaire sur la mesure du niveau de pression acoustique. Cette question est importante, notamment pour la certification des matériels roulants. Celle-ci est définie dans les Spécifications Techniques d’Interopérabilité (STI) qui donnent les valeurs limites. Les paramètres des mesures sont donnés dans l’ISO 3095 (ISO, 2005). Ainsi, il est noté dans l’ISO 3095, que le niveau du sol sur le site de mesure doit être compris entre -2 m et 0 m par rapport au sommet du rail. Trois géométries sont alors considérées. On utilisera des sources monopôlaires placées à trois hauteurs différentes. Dans une première partie, on décrit la modélisation du site choisi et l’implémentation numérique utilisée. On fera ensuite dans un second paragraphe, la comparaison des différents résultats pour des récepteurs situés en champ proche. Dans une dernière partie, on étudie l’effet de la topographie en champ proche sur les résultats en champ lointain.

### 3.3.1 Modélisation

#### Topographies des sites

Trois topographies sont ici modélisées :

- La première, appelée géométrie A, est la topographie de référence correspondant à un sol plan sur lequel a été posée une couche de ballast de 0.9 m de hauteur.
- La seconde, appelée géométrie B, est similaire à la géométrie A mais présente un fossé d'une profondeur de 1 m.
- Enfin, pour la dernière topographie étudiée, appelée géométrie C, le niveau du sol est plus bas d'1 mètre par rapport aux deux cas précédents.

Les trois géométries sont représentées sur la figure 3.18.

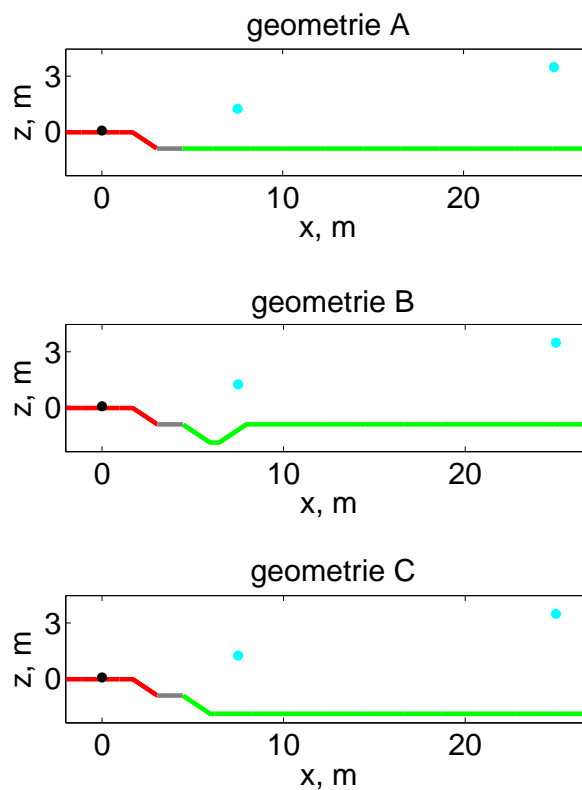


Figure 3.18 – Trois géométries de voies ferroviaires. Les points noirs et bleus représentent respectivement la position de la source placée à une hauteur de 0.5 m et des deux récepteurs en champ proche à une distance de 7.5 m et 25 m. Les couleurs pour le sol correspondent aux différents modèles d'impédance de surface utilisés.

Pour la modélisation de l'effet de sol, on utilise les modèles d'impédance de surface obtenus sur le site de la Veuve (ceux-ci sont décrits en détail dans la partie 3.5.1) :

- une couche de ballast jusqu'en  $x = 3.05$  m. Le modèle d'impédance d'Hamet et Bérenghier est utilisé avec une résistivité effective au passage de l'air égale à  $0.4 \text{ kPa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$ , une porosité effective de 0.6 et une tortuosité effective de 1.4. On utilise ici un modèle de sol semi-infini et l'épaisseur de la couche de ballast n'est pas prise en compte. Une justification de cette modélisation est donnée dans la partie 3.5.2.

- un sol de gravier fin entre  $x = 3.05$  m et  $x = 4.45$  m. Le modèle d'impédance de Miki est utilisé avec une résistivité effective égale à  $600 \text{ kPa.s.m}^{-2}$  et une épaisseur effective de  $0.006$  m.
- un sol de type herbeux à partir de  $x = 4.45$  m. Le modèle de Miki est aussi utilisé avec une résistivité effective de  $180 \text{ kPa.s.m}^{-2}$  et une épaisseur effective de  $0.018$  m.

#### Source

Trois hauteurs de sources sont considérées :

- $z_S = 0$  m. La source associée au bruit de roulement dû au contact roue-rail peut être liée à cette hauteur. Le bruit de roulement est la principale source de bruit pour le TGV pour des vitesses allant de  $60 \text{ km/h}$  à  $300 \text{ km/h}$ .
- $z_S = 0.5$  m. Cette hauteur correspond à la zone bogie.
- $z_S = 4$  m. La cavité du pantographe est située à cette hauteur. Les sources acoustiques liées à la zone bogie et à la zone pantographe sont les contributions majeures au bruit d'origine aérodynamique. Celui-ci est négligeable par rapport au bruit de roulement pour des vitesses inférieures à  $300 \text{ km/h}$  et devient du même ordre de grandeur pour une vitesse égale à  $320 \text{ km/h}$  environ. Pour des vitesses plus élevées, le bruit d'origine aérodynamique devient prépondérant.

Ces trois sources sont placées au centre de la voie, c'est-à-dire en  $x_S = 0$ .

#### Comparaison calcul 2D/3D

La géométrie est invariante dans la direction transverse  $y$ . Il est alors intéressant de vérifier si un calcul dans une géométrie 2D permet de fournir la même information qu'un calcul dans une géométrie 3D. Il a été montré par Parakkal *et al.* (2010) que le champ de pression en 3D, noté  $p_{3D}(x, y, z)$ , était relié au champ de pression en 2D, noté  $p_{2D}(x, z)$ , pour  $|y|/x \ll 1$  par :

$$p_{3D}(x, y, z) = p_{2D}(x, z) \sqrt{\frac{k_0}{2\pi i x}} \exp\left(\frac{ik_0 y^2}{2x}\right). \quad (3.31)$$

Le premier terme correspond à une correction sur l'amplitude et le second à une correction de la phase pour le champ de pression. Notons que seul le paramètre  $k_0$  intervient dans cette relation, qui reste valable si le nombre d'onde  $k = k(x, z)$  est fonction de la distance. On se propose ici de vérifier cette relation avec un calcul numérique. Pour l'implémentation dans le code FDTD en 3D, on utilise ici le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x = \xi, \\ y = \zeta, \\ z = \eta + P(\xi), \end{cases} \quad (3.32)$$

avec  $P(\xi)$  le profil du terrain. Afin de rendre le profil dérivable, on raccorde les segments droits avec des polynômes de degré 3 en imposant les valeurs du polynôme et de sa dérivée aux extrémités des segments. Dans le cas 2D, le changement de variable utilisé est le même.

Un calcul préliminaire est alors réalisé pour comparer les résultats obtenus avec un profil de terrain invariant dans la direction  $y$  pour un calcul 2D et 3D. La géométrie B sera utilisée pour la comparaison. L'atmosphère est homogène. Le maillage est uniforme avec un pas spatial  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.05$  m. Le domaine numérique a ainsi une taille de  $[-5 \text{ m}; 30 \text{ m}] \times [-10 \text{ m}; 10 \text{ m}] \times [0 \text{ m}; 15 \text{ m}]$ . Le calcul 2D est effectué dans le plan  $y = 0$ . La source est pour les deux calculs

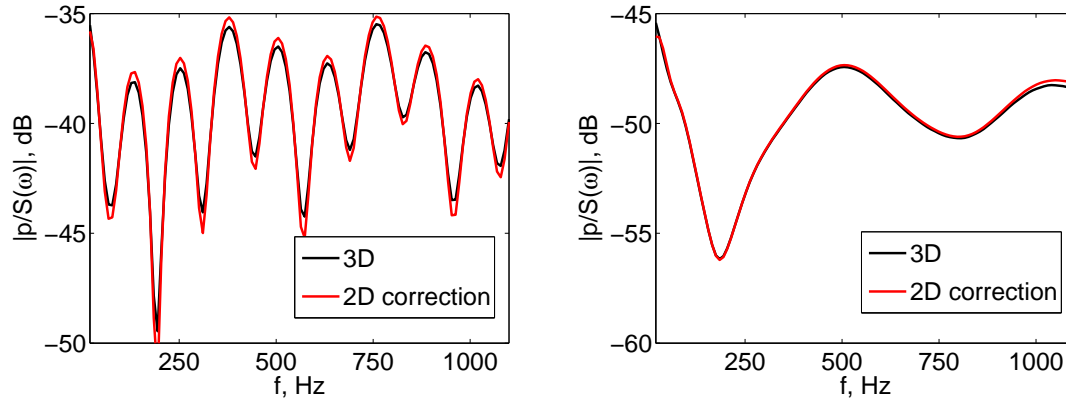


Figure 3.19 – Pression normalisée par la puissance de la source pour le calcul 3D (ligne noire) et le calcul 2D corrigé (ligne rouge) pour les récepteurs situés respectivement (gauche) en  $x = 7.5$  m et (droite)  $x = 25$  m.

une impulsion à support gaussien avec une demi-largeur  $B_x = 0.25$  m. Elle est centrée en  $x = 0$  m,  $y = 0$  m et  $z = 0.5$  m. Les comparaisons sont effectuées pour deux récepteurs situés en champ proche, placés en  $x = 7.5$  m et  $z = 1.2$  m et en  $x = 25$  m et  $z = 3.5$  m. Le nombre CFL est fixé à 0.6 et environ 1200 itérations temporelles sont réalisées. Ainsi, le calcul 2D nécessite environ 100 secondes CPU sur un ordinateur quadri-cœur cadencé à 2.83 GHz. Le calcul 3D demande quant à lui 160000 secondes CPU environ sur un ordinateur vectoriel NEC SX-8; le rapport  $t_{\text{CPU}}/nby$ , où  $t_{\text{CPU}}$  et  $nby$  représentent respectivement le temps de calcul et le nombre de points dans la direction  $y$  est donc comparable au calcul 2D.

La pression normalisée par la puissance de la source  $S(\omega)$  est représentée sur la figure 3.19 pour le cas 3D et pour le cas 2D corrigé par le facteur  $\sqrt{k_0/2\pi ix}$ . On peut donc vérifier que pour les deux récepteurs considérés l'erreur faite avec le calcul 2D est faible. On considérera ainsi dans cette étude des simulations numériques dans une géométrie 2D.

### 3.3.2 Champ proche

Des premières comparaisons sont effectuées en champ proche. Pour cela, on considérera deux récepteurs aux positions définies pour la mesure des matériels roulants dans la norme ISO 3095 (ISO, 2005) déjà utilisées dans la partie précédente. Les récepteurs sont donc situés en  $x = 7.5$  m et  $z = 1.2$  m et en  $x = 25$  m et  $z = 3.5$  m.

Le contenu fréquentiel du bruit ferroviaire a typiquement une limite supérieure de l'ordre de 8 kHz. Un pas spatial  $\Delta x = \Delta z = 0.005$  m permet donc de résoudre les longueurs d'onde voulues. Le domaine numérique a une taille de  $[-5 \text{ m}; 30 \text{ m}] \times [0 \text{ m}; 25 \text{ m}]$ . Le CFL est fixé à 0.6 et environ 12000 itérations temporelles sont réalisées. Chaque simulation numérique nécessite environ 10 heures CPU de temps de calcul sur une machine vectorielle NEC SX-8.

On a représenté sur les figures 3.20, 3.21 et 3.22, les niveaux relatifs de pressions  $(\Delta Lp)_A$  obtenus aux deux récepteurs pour les trois hauteurs de source. Ce paramètre est défini par  $(\Delta Lp)_A = Lp - Lp_A$ , où  $Lp_A$  est le niveau de pression pour la géométrie A. Ce paramètre permet donc d'estimer l'écart du niveau de pression par rapport à la géométrie A, qui correspond à la géométrie de référence dans l'étude. Les spectres présentent de nombreuses interférences; une représentation en tiers d'octaves a été choisie afin d'avoir un effet de moyenne. Pour le récepteur à 7.5 m, les écarts en valeur absolue sont les plus importants pour la géométrie B et atteignent

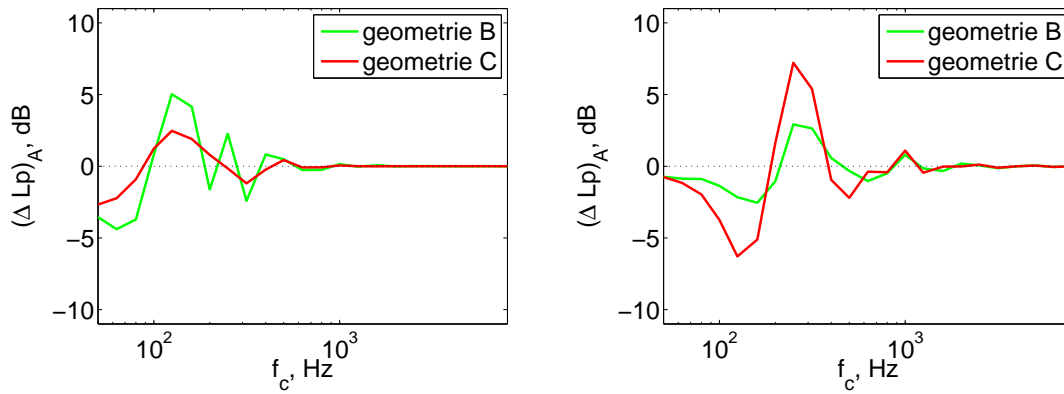


Figure 3.20 – Niveaux de pressions pour les géométries B et C relatifs à la géométrie A pour les récepteurs situés (gauche) à 7.5 m et (droite) à 25 m. La source est placée en  $z_S = 0$  m.

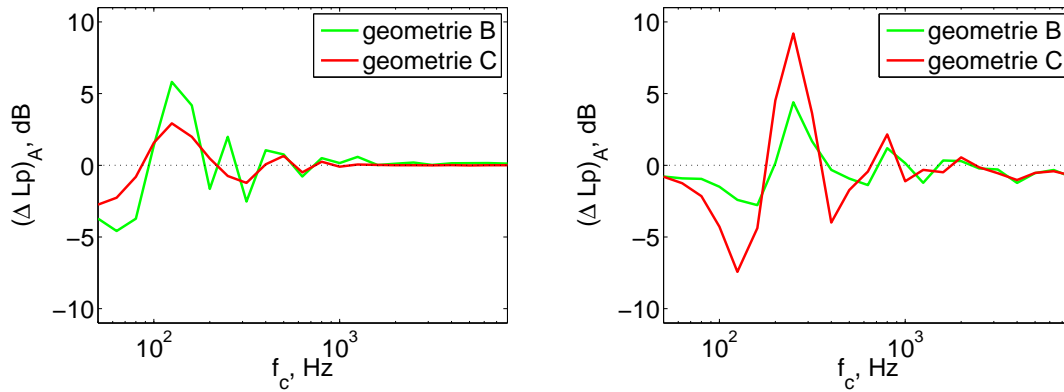


Figure 3.21 – Niveaux de pressions pour les géométries B et C relatif à la géométrie A pour les récepteurs situés (gauche) à 7.5 m et (droite) à 25 m. La source est placée en  $z_S = 0.5$  m.

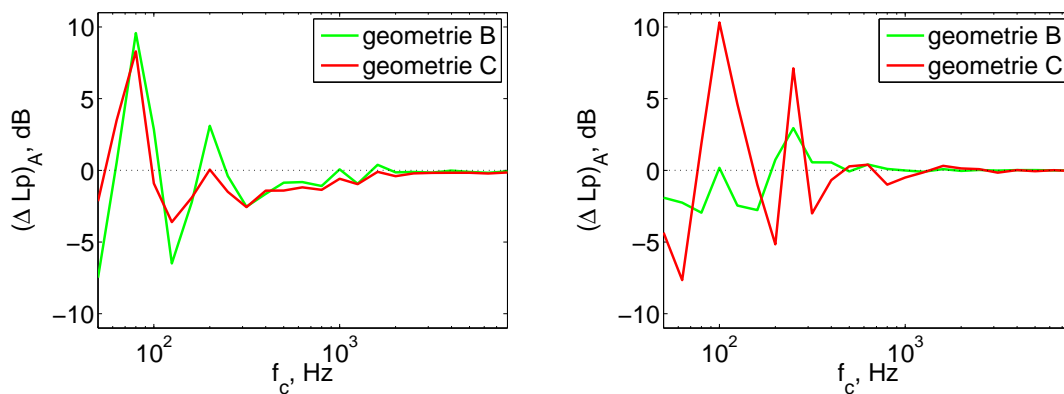


Figure 3.22 – Niveaux de pressions pour les géométries B et C relatifs à la géométrie A pour les récepteurs situés (gauche) à 7.5 m et (droite) à 25 m. La source est placée en  $z_S = 4$  m.

environ 10 dB pour la source située à  $z_s = 4$  m. Pour le récepteur à 25 m, les écarts les plus importants sont cette-fois-ci obtenus avec la géométrie C et le maximum atteint là aussi 10 dB. Il est à noter qu'au-delà d'une fréquence de 1000 Hz environ, les niveaux de pressions mesurés sont à peu près les mêmes pour les différentes géométries. Les variations de topographie considérées ici n'ont donc un impact important qu'en basses fréquences.

### 3.3.3 Champ lointain

On s'intéresse maintenant aux effets couplés de la topographie et des conditions météorologiques. Pour cela, on reprend le modèle FDTD-EP développé dans le chapitre 2. Le couplage entre les deux codes est effectué à une abscisse  $x = 25$  m. On utilise un profil logarithmique pour la célérité du son :

$$c(z) = c_0 + a_c \ln \left( \frac{z + z_0}{z_0} \right), \quad (3.33)$$

avec  $z_0 = 0.1$  m. Le paramètre  $a_c$  prend trois valeurs  $a_c = -1 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $a_c = 0 \text{ m.s}^{-1}$  et  $a_c = 1 \text{ m.s}^{-1}$ . Pour la modélisation, le sol est plan à partir de 25 m et l'impédance de surface est celle du sol du type herbeux. On considère une ligne de récepteurs placés à une hauteur de 2 m par rapport au sol et à une abscisse comprise entre  $x = 25$  m et  $x = 400$  m. Le couplage avec le code de résolution de l'équation parabolique est réalisé pour des fréquences comprises entre 100 Hz et 8800 Hz avec un pas fréquentiel de 20 Hz. On utilise un développement de Padé(1,1) avec un pas spatial  $\Delta x = 2\lambda$ . Le calcul nécessite 45 minutes environ pour chaque configuration. On rappelle que la géométrie est ici bidimensionnelle.

On s'intéresse par la suite au terme  $Lp_{A,25\text{ m}}$  défini par :

$$Lp_{A,25\text{ m}} = Lp - Lp_A(x = 25\text{ m}). \quad (3.34)$$

Il représente ainsi la perte par propagation avec pour référence la géométrie A. Comme pour le champ proche, les comparaisons sont effectuées en tiers d'octave afin d'avoir un effet de moyenne. On a ainsi représenté sur les figures 3.23 et 3.24 les pertes par propagation pour les fréquences centrales de 125 Hz et 500 Hz et de 2000 Hz et 8000 Hz pour les trois hauteurs de source et pour les différentes valeurs de  $a_c$ .

Pour à peu près tous les cas, les lignes noires et vertes correspondant respectivement à la géométrie A et B sont confondues. On ne peut voir un écart important (de l'ordre de 5 dB) que pour le tiers d'octave centré en  $f_c = 125$  Hz et pour la source à une hauteur de 4 m. Par contre, les différences de niveau de pression entre la géométrie A et C sont importantes. Ils dépendent ainsi fortement des conditions de propagation ; on peut observer, par exemple, pour le tiers d'octave centré en  $f_c = 500$  Hz, pour une source de hauteur  $z_S = 4$  m et pour une distance de propagation de  $x = 350$  m, que le niveau de pression obtenu pour la géométrie C est supérieur à celui obtenu pour la géométrie A de 3 dB dans le cas homogène alors que dans le cas favorable, il est inférieur de 8 dB. L'écart pour les niveaux de pression entre ces deux géométries atteint une valeur maximale de 15 dB environ pour le cas  $f_c = 8000$  Hz,  $a_c = 0 \text{ m.s}^{-1}$  et  $z_S = 0.5$  m. Il est aussi à noter qu'en basse fréquence les pertes par propagation pour les hauteurs de source  $z_S = 0$  m et  $z_S = 0.5$  m sont à peu près similaires ; en effet, la différence de hauteur est faible par rapport à la longueur d'onde. À plus haute fréquence, on observe des écarts importants entre les deux cas (voir ainsi le cas  $f_c = 2000$  Hz et  $a_c = 1 \text{ m.s}^{-1}$  pour les géométries A et B).

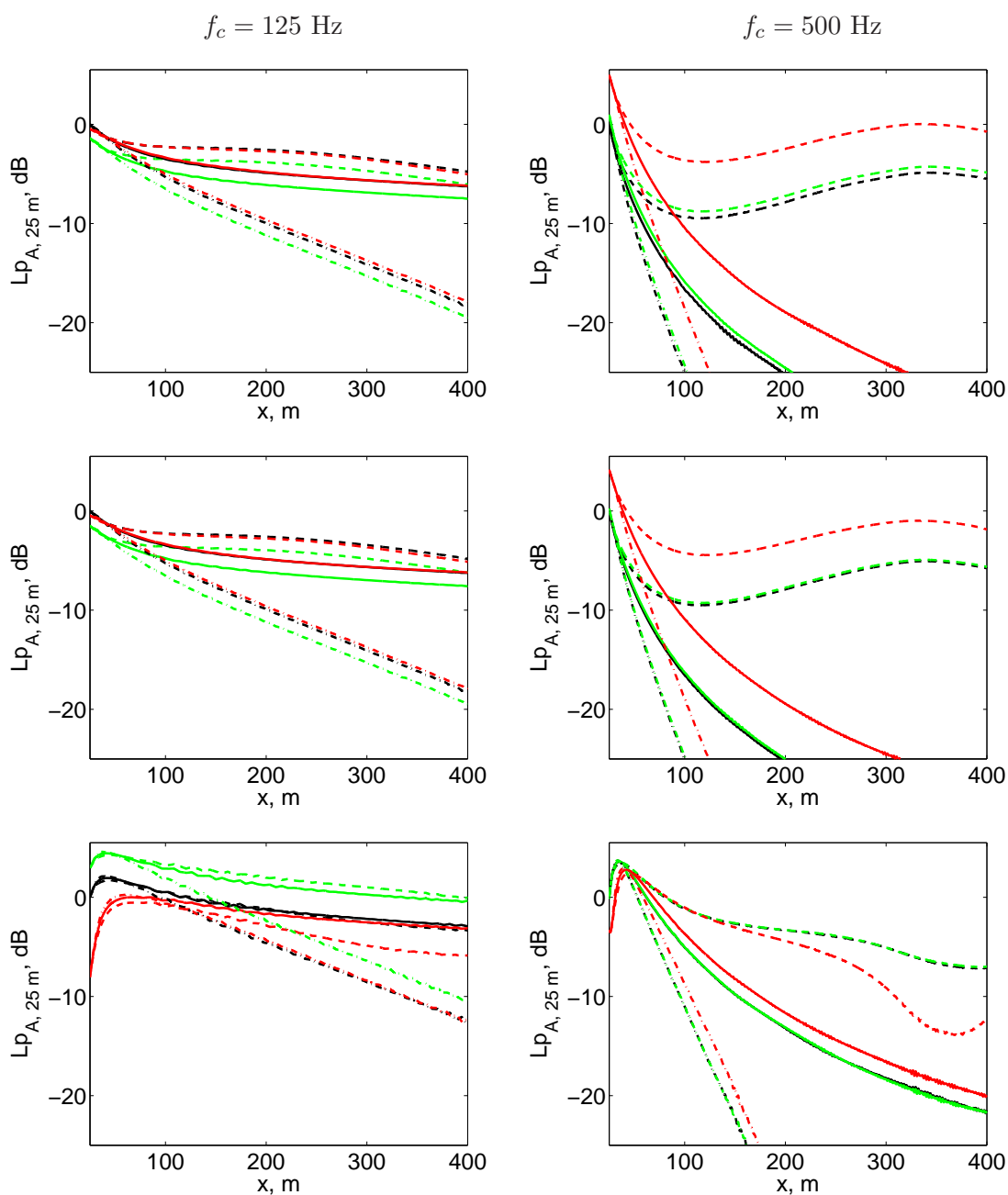


Figure 3.23 – Pertes par propagation pour les fréquences centrales (gauche)  $f_c = 125$  Hz et (droite)  $f_c = 500$  Hz et pour des hauteurs de sources (haut)  $z_S = 0$  m, (milieu)  $z_S = 0,5$  m et (bas)  $z_S = 4$  m. Pour les couleurs, — géométrie A, — géométrie B et — géométrie C. Pour les lignes, vent nul : —  $a_c = 0 \text{ m.s}^{-1}$ , vent portant : - -  $a_c = 1 \text{ m.s}^{-1}$  et vent contraire : - ·  $a_c = -1 \text{ m.s}^{-1}$ .

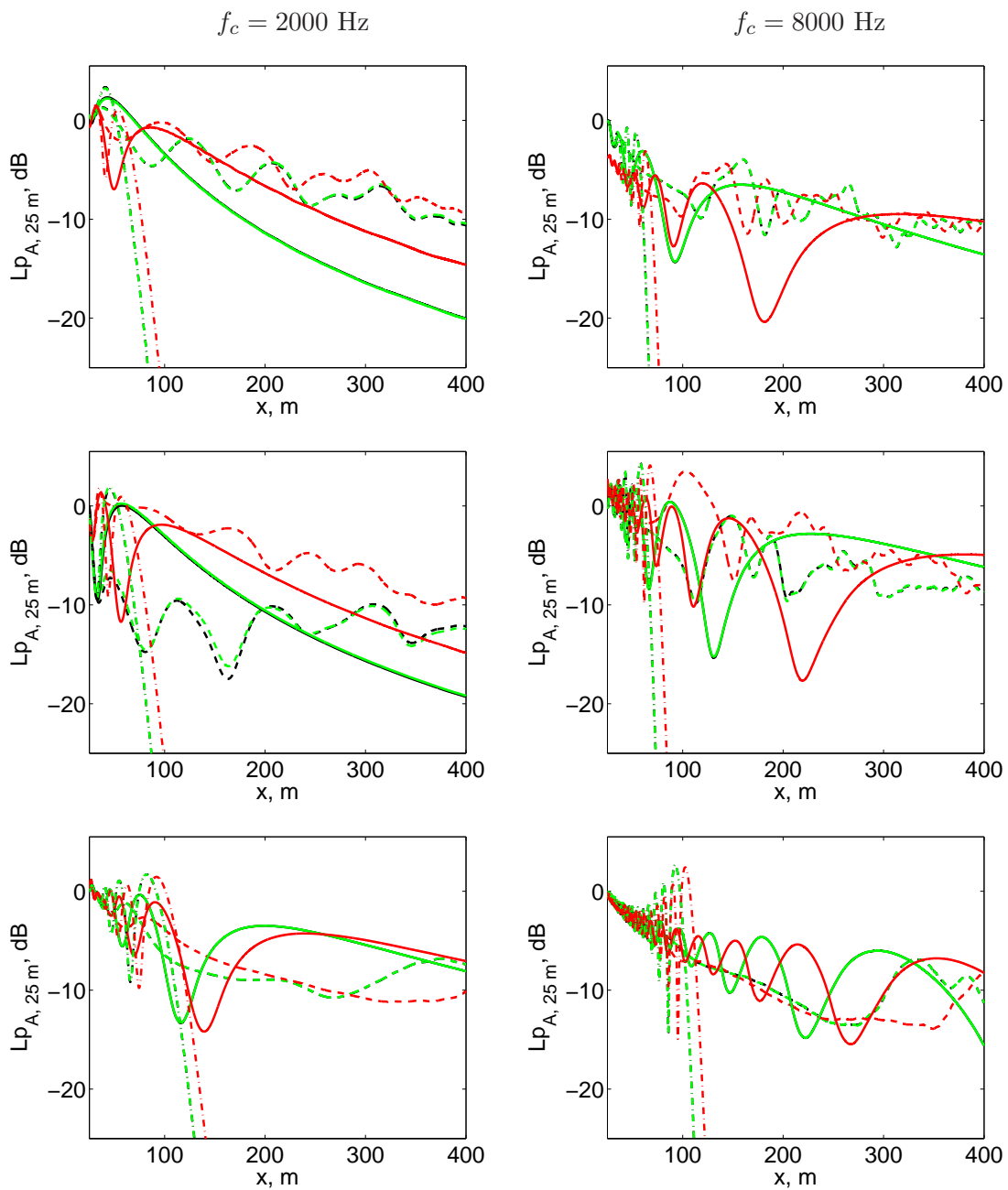


Figure 3.24 – Pertes par propagation pour les fréquences centrales (gauche)  $f_c = 2000$  Hz et (droite)  $f_c = 8000$  Hz et pour des hauteurs de sources (haut)  $z_S = 0$  m, (milieu)  $z_S = 0,5$  m et (bas)  $z_S = 4$  m. Pour les couleurs, — géométrie A, — géométrie B et — géométrie C. Pour les lignes, vent nul : —  $a_c = 0$  m.s<sup>-1</sup>, vent portant : - -  $a_c = 1$  m.s<sup>-1</sup> et vent contraire : - ·  $a_c = -1$  m.s<sup>-1</sup>.



### Conclusion

Une étude a été menée sur l'impact de la topographie sur la mesure des niveaux de pression sur un site ferroviaire, à la fois en champ proche et en champ lointain. Pour cela, une géométrie de référence d'une voie ferroviaire a été proposée. Deux autres géométries, présentant pour l'une un fossé dont la dimension caractéristique est de l'ordre du mètre et pour l'autre un niveau du sol plus bas de 1 mètre, ont été considérées. L'effet de l'accident de topographie n'est visible sur les niveaux de pression que pour des fréquences dont la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur de la dimension caractéristique du fossé. Des écarts de l'ordre de 5 dB peuvent alors être attendus en champ proche. La différence de niveau de terrain a un rôle plus important sur l'ensemble de l'intervalle fréquentiel considéré. En champ proche des écarts de l'ordre de 10 dB peuvent être obtenus. En champ lointain, ces écarts dépendent fortement des conditions de propagation et peuvent atteindre, dans les simulations numériques considérées ici, des écarts de 15 dB sur un tiers d'octave.

### 3.4 Comparaison avec des mesures effectuées à Saint-Berthevin

Dans cette partie, les résultats d'une campagne expérimentale menée à Saint-Berthevin en octobre 2001 (Blairon *et al.*, 2002) sont comparés à ceux obtenus avec le code FDTD en coordonnées curviligne. Des simulations dans une géométrie 2D sont réalisées. Le site de Saint-Berthevin (site internet du LCPC, 2010) est un site complexe présentant une topographie marquée. Celle-ci est représentée sur la figure. 3.25.

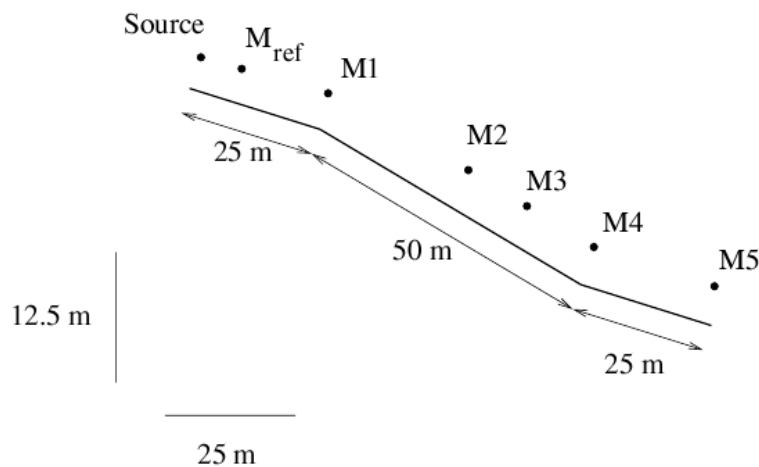


Figure 3.25 – Topographie du site de mesure de Saint-Berthevin. Les points notés  $M_i$  représentent la position des récepteurs. Extrait de Blairon *et al.* (2002).

Plusieurs études ont été menées à partir des mesures en utilisant des méthodes d'équations paraboliques. La topographie est prise en compte en modélisant le profil du terrain par une succession de segments. A chaque rupture de pente, une rotation du domaine de calcul est effectuée afin de résoudre sur un maillage cartésien classique. Dans les travaux de Blairon *et al.* (2002), les effets des gradients de température et des profils de vent sont pris en compte avec l'approximation de la célérité effective. D'autres calculs ont été réalisés par Lihoreau *et al.* (2006) à partir de la méthode d'équation parabolique MW-WAPE qui permet de prendre en compte un écoulement moyen. La

topographie du site de mesure a été modélisée par trois segments de longueurs respectives 25 m, 50 m et 25 m et avec des pentes de 10.21°, 17.42° et 8.61°.

Tableau 3.2 – Paramètres des profils de vent et de température. Extrait de Blairon *et al.* (2002).

mesure	$T_0$ , °C	$a_T$ , °C	$a_v$ , m.s <sup>-1</sup>	$\theta$ , °
5	17.4	0	0.5	0
7	16.8	0.2	0.65	20
10	15.6	0	0.4	110

Un mât météorologique a été placé proche du micro  $M_2$ . Des mesures de la température et de la direction et de la vitesse du vent ont ainsi été effectuées à des hauteurs de 1 m, 3 m et 10 m par rapport au sol. Les profils de température et de vent, notés respectivement  $u(z_g)$  et  $T(z_g)$ , ont été extrapolés à partir des mesures sous la forme d'un profil logarithmique :

$$u(z_g) = a_v \ln \left( \frac{z_g + z_0}{z_0} \right) \text{ et } T(z_g) = T_0 + a_T \ln \left( \frac{z_g + z_0}{z_0} \right), \quad (3.35)$$

où  $z_g$  représente la hauteur par rapport au sol. Les paramètres  $z_0$  et  $T_0$  sont respectivement la longueur de rugosité fixée à  $z_0 = 0.1$  m et la température pour  $z_g = z_0$ . Dans la thèse de Blairon (2002), les comparaisons sont effectuées sur 15 séries de mesures ; on ne traitera ici que des mesures 5, 7 et 10. Pour la mesure 5, le vent est portant et le gradient de température est nul. Pour la mesure 7, le vent est portant et le gradient de température est positif. Enfin, pour la mesure 10, le vent est transverse et le gradient de température est nul. Les valeurs des différents paramètres des profils de vent et de l'angle  $\theta$  entre la direction de propagation et la direction du vent sont données dans le tableau 3.2. Dans le solveur FDTD pour une géométrie bidimensionnelle, les profils de vents sont implémentés sous la forme  $V_{0x}(z_g) = u(z_g) \cos \theta$ .

Tableau 3.3 – Valeurs des résistivités effectives au passage de l'air pour les modèles d'impédance de surface utilisés dans les simulations numériques.

$x$ , m	résistivités effectives au passage de l'air, kPa.s.m <sup>-2</sup>	
	PE : Delany-Bazley	FDTD : Miki
$< 24.60$	600	750
$24.60 < 43.69$	90	90
$43.69 < 62.77$	160	200
$62.77 <$	200	240

On reprend pour les calculs avec le code FDTD, les paramètres géométriques et météorologiques utilisés pour les simulations avec les méthodes d'équation parabolique. Néanmoins, les effets du vent sont pris en compte sans l'approximation de la célérité effective. De plus, les modèles d'impédance de surface sont aussi modifiés. En effet, Blairon *et al.* ont utilisé le modèle d'impédance de surface d'un sol semi-infini de Delany et Bazley ; comme il est montré dans l'annexe A, ce modèle ne vérifie pas la condition de réalité et n'est donc pas adapté à des simulations dans le domaine temporel. On utilisera donc ici le modèle de Miki. Les valeurs des résistivités effectives au passage de l'air utilisées sont données dans le tableau 3.3.

Tableau 3.4 – Position des récepteurs utilisée pour les calculs FDTD.

	$x$ , m	$\eta$ , m
$M_{\text{ref}}$	10.20	1.96
$M_1$	24.96	1.96
$M_2$	49.06	1.90
$M_3$	60.98	1.90
$M_4$	72.91	1.97
$M_5$	97.33	1.97

Pour l'implémentation dans le code FDTD, on utilise comme dans la partie précédente le changement de variable :

$$\begin{cases} x = \xi, \\ z = \eta + P(x) = \eta + P(\xi). \end{cases} \quad (3.36)$$

Dans ce cas particulier, la variable  $\eta$  peut être interprétée comme la hauteur au-dessus du sol (en particulier  $z_g = \eta$  dans l'équation. 3.35). Un maillage uniforme dans les directions  $\xi$  et  $\eta$  est utilisé avec  $\Delta\xi = \Delta\eta = 0.0178$  m. Le nombre CFL est fixé à 0.97. On utilise une source impulsionnelle à support gaussien avec une demi-largeur  $B_x = 5\Delta\xi$ . Environ 10 000 itérations temporelles sont nécessaires afin que le front d'onde puisse quitter le domaine temporel. Les comparaisons sont réalisées avec les niveaux de pression relatifs au microphone de référence :

$$\Delta L_{\text{exp}}(M_i) = 20 \log_{10} \left| \frac{p_{\text{exp}}(M_i, \omega)}{p_{\text{exp}}(M_{\text{ref}}, \omega)} \right|. \quad (3.37)$$

Les calculs EP et FDTD sont effectués pour une géométrie bidimensionnelle. Le niveau de pression relatif au microphone de référence est alors calculé avec la relation :

$$\Delta L_{\text{num}}(M_i) = 20 \log_{10} \left| \frac{p_{\text{num}}(M_i, \omega)}{p_{\text{num}}(M_{\text{ref}}, \omega)} \right| \left| \frac{\sqrt{x_{\text{ref}}}}{\sqrt{x_i}} \right|. \quad (3.38)$$

La position des différents récepteurs dans le domaine de calcul est donnée dans le tableau 3.4.

Sur les figures 3.26, 3.27 et 3.28, les niveaux de pressions relatifs mesurés et obtenus avec la méthode EP et avec les résultats du code FDTD ont été tracés en fonction de la fréquence pour différents récepteurs. Il est à noter que dans les différents cas un bon accord est trouvé entre le paramètre  $\Delta L$  obtenu expérimentalement et calculé à l'aide du code FDTD en coordonnées curvilignes. Il semble, de plus, que la position des minima et des maxima est plus précise avec les résultats du calcul FDTD. Comme cela est souligné par Lihoreau *et al.* (2006), l'approximation de la célérité du son effective entraîne une erreur de phase, qui devient importante à longue distance. Cela peut donc expliquer les écarts obtenus à haute fréquence avec les résultats du code de résolution de l'équation parabolique. Notons aussi que les modèles d'impédance de surface ne sont pas les mêmes pour les deux méthodes.

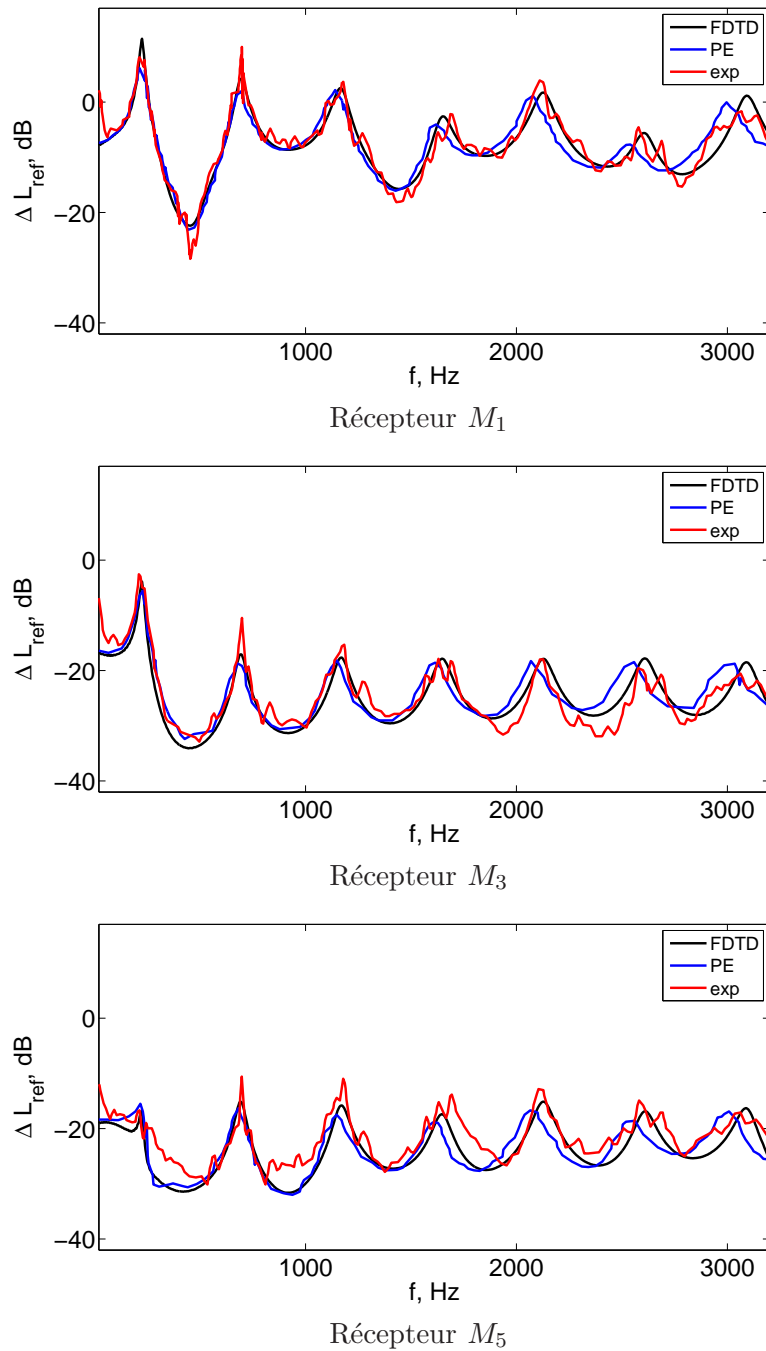


Figure 3.26 – Niveau de pression relatif au microphone de référence pour les récepteurs  $M_1$  (haut),  $M_3$  (milieu) et  $M_5$  (bas) pour la mesure 10. La source est située en  $x = 0$  m et  $\eta = 2$  m. — mesure 10, — EP et — FDTD.

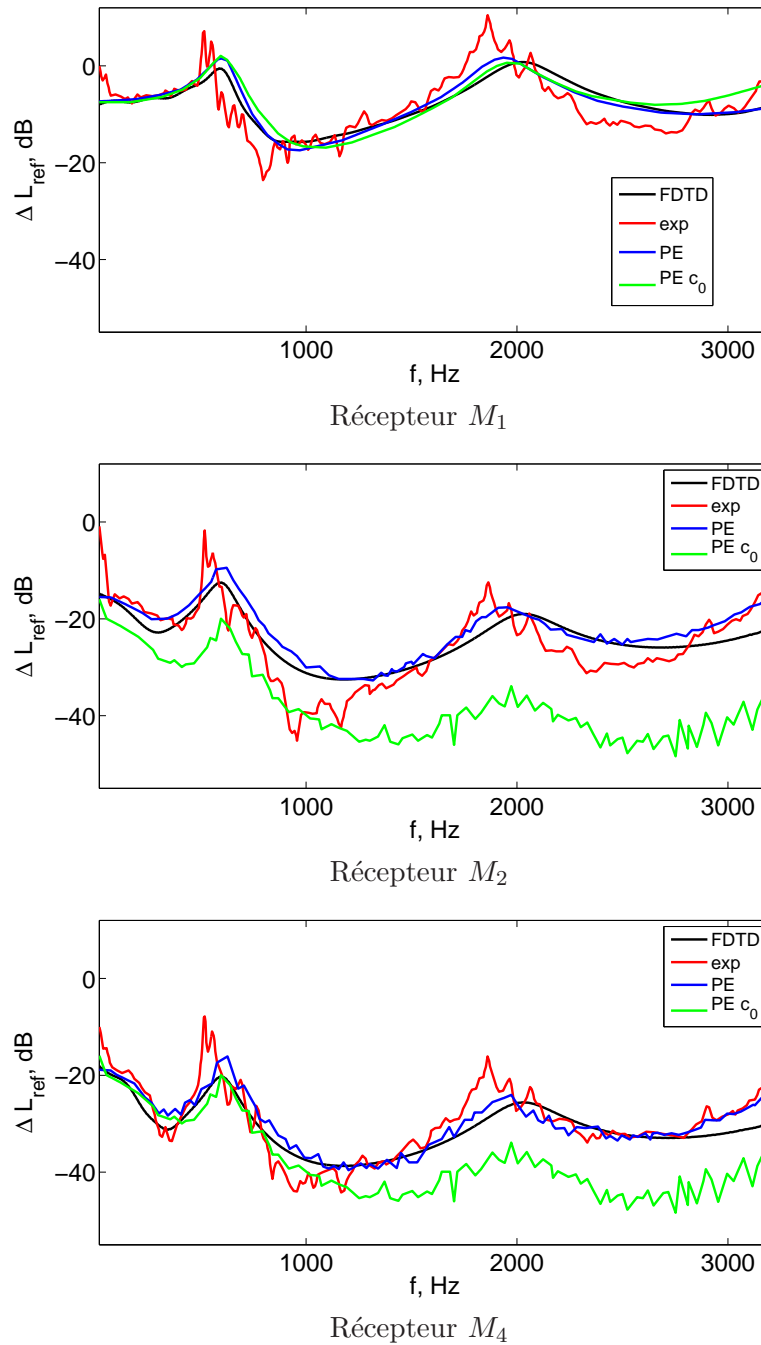


Figure 3.27 – Niveau de pression relatif au microphone de référence pour les récepteurs  $M_1$  (haut),  $M_2$  (milieu) et  $M_4$  (bas) pour la mesure 5. La source est située en  $x = 0$  m et  $\eta = 2$  m. — mesure 5, — EP, — EP avec une célérité du son constante et — FDTD.

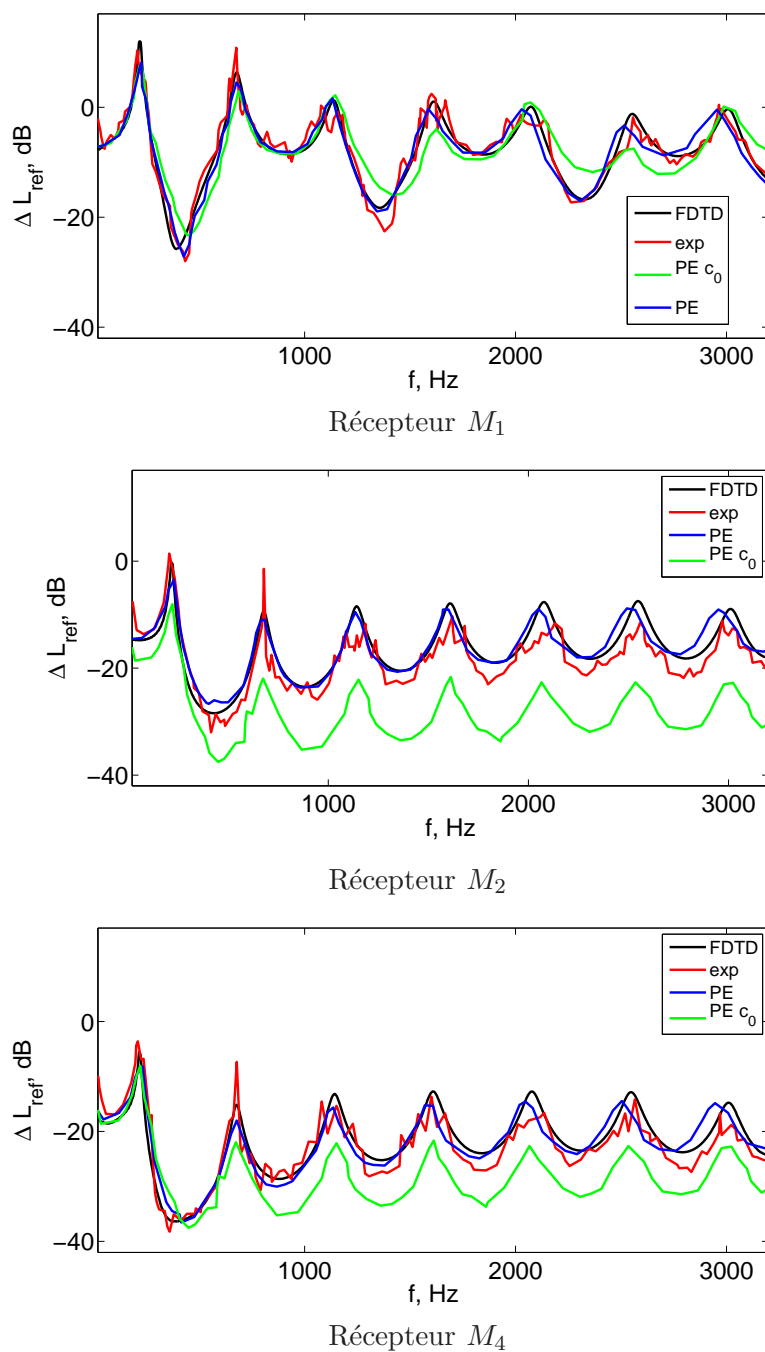


Figure 3.28 – Niveau de pression relatif au microphone de référence pour les récepteurs  $M_1$  (haut),  $M_2$  (milieu) et  $M_4$  (bas) pour la mesure 7. La source est située en  $x = 0$  m et  $\eta = 0.6$  m. — mesure 7, — EP, — EP avec une célérité du son constante et — FDTD.

### 3.5 Comparaison avec des mesures effectuées à La Veuve

Dans cette partie, on compare les résultats de mesures effectuées sur le site de la Veuve en mai 2010 avec les résultats du code différences finies. Pour cela, la topographie le long de la ligne de propagation a été mesurée. Les différentes impédances de surface rencontrées ont été caractérisées à l'aide de modèles d'impédance. Enfin, un mât météorologique est placé sur le site de mesure et permet d'avoir les valeurs locales de vitesse et direction du vent, de la température et de la masse volumique de l'air à trois hauteurs différentes. Ces différents paramètres servent de données d'entrée au code de résolution des équations d'Euler linéarisées. La source utilisée est un pistolet. Les résultats des mesures sont alors comparés à ceux du code FDTD à la fois dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel.

#### 3.5.1 Description et modélisation du site

##### Topographie

La topographie du site a été mesurée le long de la ligne de propagation par l'Agence d'Essai Ferroviaire (AEF). L'origine du repère est prise au centre de la voie sur la couche de ballast. L'axe  $x$  est confondu avec la ligne de propagation. L'axe  $y$  est parallèle à la voie ferroviaire. Enfin l'axe  $z$  est vertical. L'origine du système de coordonnées est prise au centre de la voie, sur la surface supérieure du rail et sur le plan de propagation. A proximité de la voie, c'est-à-dire jusqu'à une distance  $x = 32$  m du centre de la voie, le pas de maillage est fin avec  $\Delta x_{\text{mes}} \approx 0.5$  m. Pour des distances plus grandes, les variations de la topographie sont plus faibles et le pas de maillage pour les mesures est plus grossier avec  $\Delta x_{\text{mes}} \approx 5$  m.

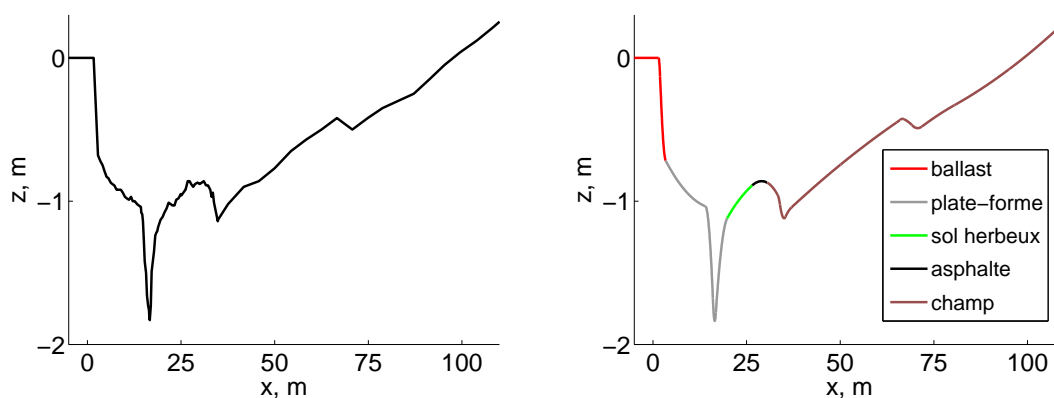


Figure 3.29 – Topographie du site de mesure de La Veuve (gauche) mesurée et (droite) approchée par des polynômes de degré 2.

La topographie mesurée est représentée sur la figure 3.25. Le site de mesure est donc relativement plat le long de la ligne de propagation. Néanmoins, il est à noter que le site présente de brusques variations de la topographie :

- au niveau de la couche de ballast,
- avec la présence d'un fossé pour  $x = 20$  m avec une profondeur de 0.8 m environ.

On peut aussi remarquer la présence d'accidents de topographie pour  $x = 28$  m et  $x = 75$  m. La modélisation dans le code FDTD curviligne impose que la frontière soit décrite par un profil

continu et dérivable. Pour cela on approche le profil du sol mesuré par des polynômes de degré 2. Les coefficients des polynômes sont donnés dans le tableau F.1 de l'annexe F.

### Source et récepteurs

On considère ici les mesures effectuées pour une source impulsionnelle. Celle-ci correspond à des tirs à blanc de pistolet. La source a été placée à 4 hauteurs différentes :  $z_S = 0.5$  m,  $z_S = 1$  m,  $z_S = 1,3$  m et  $z_S = 2$  m. Pour chaque hauteur, 3 tirs ont été effectués, sauf pour le cas  $z_S = 2$  m où seulement 2 tirs ont été effectués. Six microphones étaient placés sur la ligne de propagation. Le premier récepteur situé en  $x = 3$  m ne sera pas utilisé ici ; en effet, les forts niveaux de pression engendrés par les tirs ont causés la saturation du microphone. En champ proche, les microphones sont situés, comme précédemment, aux positions définies dans l'ISO 3095 (ISO, 2005) pour la mesure du matériel roulant, c'est-à-dire en  $x = 7.5$  m et  $z = 1.2$  m et  $x = 25$  m et  $z = 3.5$  m. En champ lointain, trois microphones ont été placés en  $x = 100$  m,  $x = 200$  m et  $x = 300$  m et à une hauteur de 2 m par rapport au sol. Néanmoins, à cause des difficultés pour obtenir des modèles d'impédance pour les sols en champ lointain, on ne considèrera que le récepteur en  $x = 100$  m. Il est à noter qu'un filtre passe-haut avec une fréquence de coupure égale à 50 Hz environ a été appliqué pour chaque mesure.

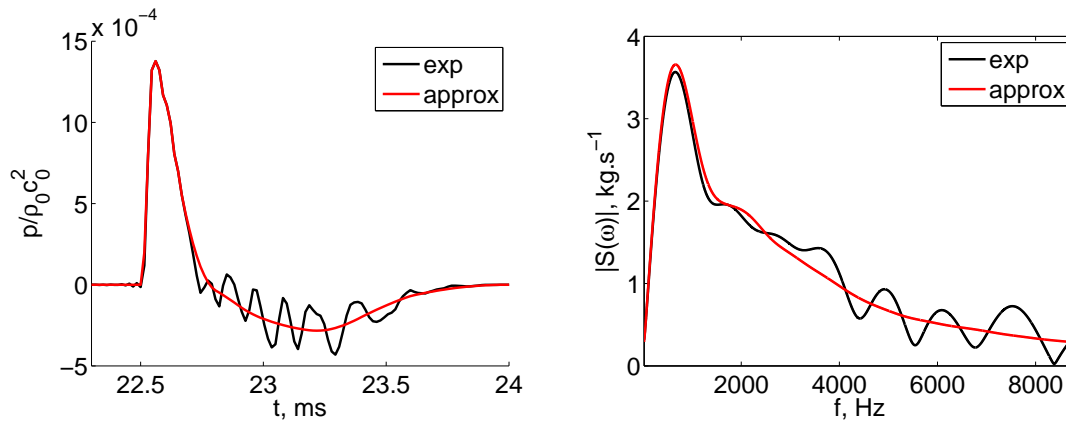


Figure 3.30 – (gauche) Formes d'onde de l'onde directe pour le récepteur à 7.5 m et (droite) puissance de la source en fonction de la fréquence. Les lignes noires et rouges correspondent respectivement à la mesure et à l'approximation de la forme d'onde.

La directivité de la source n'a pas été mesurée. On fait par la suite l'approximation d'une source monopolaire. La puissance de la source  $S(\omega)$  peut alors être déterminée à partir des formes d'onde. Pour cela, on considère le récepteur en champ proche à 7.5 m et la contribution de l'onde directe pour chaque signal peut être obtenue par fenêtrage. Dans le domaine fréquentiel, l'onde directe s'écrit comme le produit de la fonction de Green en champ libre par la puissance de la source :

$$\hat{p}_D(\omega) = -S(\omega) \frac{\exp(ik_{\text{eff}}R)}{4\pi R}, \quad (3.39)$$

avec  $R$  la distance entre la source et le récepteur à 7.5 m et  $k_{\text{eff}} = \omega/c_{\text{eff}}$ . Le terme  $c_{\text{eff}}$  représente la célérité du son effective et est donné par  $c_{\text{eff}} = c_0 + V_0 \cos \theta$ , avec  $\theta$  l'angle entre la direction de propagation et la direction du vent. Un exemple de forme d'onde de l'onde directe et de la puissance de la source correspondante pour  $z_S = 1$  m est donné sur la figure 3.30. La puissance de la source a alors un maximum fréquentiel pour une fréquence proche de 900 Hz. Le contenu fréquentiel de la



source est important jusqu'à une fréquence de 10000 Hz environ. On peut observer des oscillations pour la forme d'onde de l'onde directe pendant la phase de décompression. Pour ne pas prendre en compte ces oscillations, une approximation de la forme d'onde peut être utilisée : on utilise ici une approximation par des polynômes, similaire à celle utilisée pour la prise en compte de profils de terrain. Cette approximation ainsi que la puissance de source correspondante sont aussi représentées sur la figure 3.30.

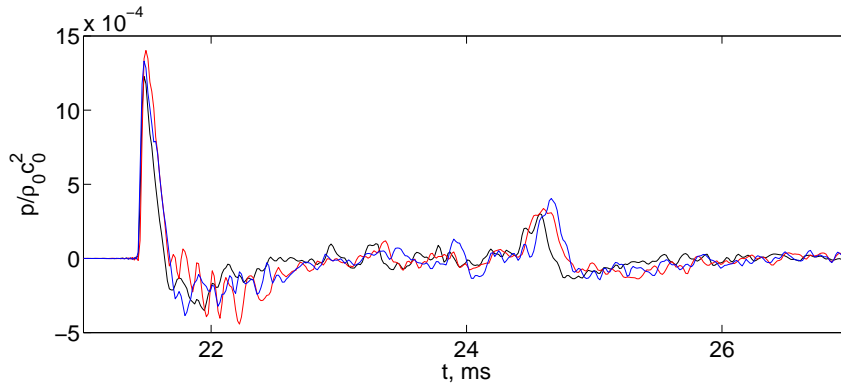


Figure 3.31 – Formes d’ondes obtenues à un récepteur situé en  $x = 7.5$  m et  $z = 1.2$  m pour la source placée en  $z_S = 1$  m.

Pendant la campagne expérimentale, il n’y avait pas de système spécifique de positionnement de la source. Chaque tir était donc effectué à bout de bras et une erreur est donc attendue sur le positionnement de la source, que l’on peut estimer de l’ordre de 10 cm. Dans le code, la source sera centrée sur la position théorique de la source et on peut donc obtenir des écarts importants pour les niveaux de pression notamment pour les longueurs d’ondes de l’ordre de l’erreur de positionnement. Il se pose aussi le problème de la répétabilité de la mesure puisque le contenu fréquentiel associé à chaque tir de pistolet est difficilement contrôlable.

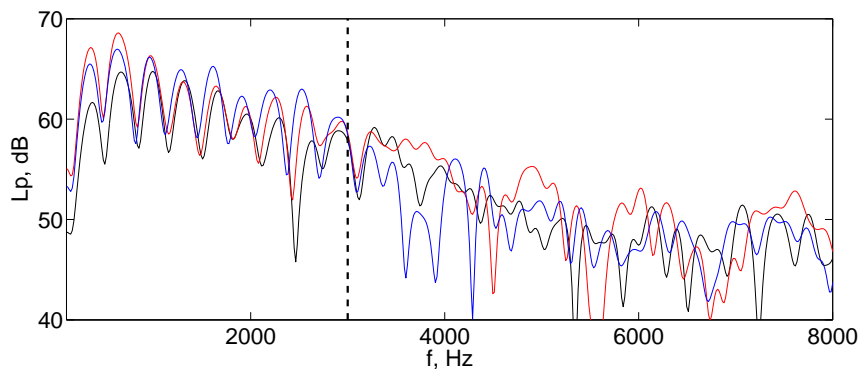


Figure 3.32 – Niveaux de pression en dB pour les trois tirs à un récepteur situés en  $x = 7.5$  m et  $z = 1.2$  m pour la source placée en  $z_S = 1$  m.

Pour mettre en évidence ces problèmes, on a représenté sur la figure 3.31, les formes d’ondes obtenues dans le cas  $z_S = 1$  m pour le récepteur situé à  $x = 7.5$  m. A cette distance de propagation, les effets météorologiques sont négligeables. Les formes d’ondes sont globalement similaires. Néanmoins, il est à noter que :

- la valeur maximale de la pression varie suivant les tirs considérés,
- pour l’onde directe, la partie de la forme d’onde liée à la décompression est différente.
- pour l’onde réfléchie, le temps d’arrivée (autour de  $t = 24.5$  ms) n’est pas exactement le même.

Sur la figure 3.32, les niveaux de pression correspondants ont été tracés. Jusqu’à une fréquence de 3000 Hz environ, le comportement des niveaux de pression est similaire, notamment en ce qui concerne la position des minima et des maxima. Par contre pour des fréquences supérieures, on peut voir une plus grande dispersion. La longueur d’onde associée à cette fréquence est bien du même ordre de grandeur que l’erreur de positionnement de la source. On limitera ainsi dans la suite la comparaison des résultats expérimentaux aux résultats numériques à une fréquence de 3000 Hz.

### Impédances de surface

Plusieurs types de sols ont pu être identifiés :

- la couche de ballast pour  $x < 2.83$  m,
- la plate-forme pour  $2.83 \text{ m} < x < 16.5$  m,
- un sol de type herbeux pour  $16.5 \text{ m} < x < 26.5$  m,
- une route pour  $26.5 \text{ m} < x < 31.5$  m,
- un champ pour  $31.5 \text{ m} < x$ .

Ils ont été représentés par des couleurs différentes sur la figure 3.29. Afin d’avoir un modèle d’impédance de surface pour chaque type de sol, la méthode de la fonction de transfert a été utilisée par l’IFSTTAR (anciennement LCPC). Pour cela, une source monopolaire et impulsionnelle est placée au-dessus du sol à une hauteur de 0.6 m ; deux récepteurs, notés  $R_1$  et  $R_2$ , éloignés d’une distance de 4 m par rapport à la source et placés à des hauteurs respectives de 0 m et 0.6 m permettent d’enregistrer le signal. Un schéma de la géométrie utilisée est représenté sur la figure 3.33. Aux distances considérées, les effets météorologiques peuvent être négligés et la fonction de transfert, définie par :

$$T = \frac{\hat{p}(\omega, R_2)}{\hat{p}(\omega, R_1)}, \quad (3.40)$$

ne dépend alors que de la géométrie, qui est fixée, et de l’impédance de surface. Une fois la formulation analytique et le modèle d’impédance de surface choisis, l’idée est alors de trouver les coefficients du modèle d’impédance qui permettent d’approcher au mieux la fonction de transfert déterminée expérimentalement par celle calculée analytiquement. L’approximation est généralement faite sur le premier creux d’interférence. Ici, le modèle d’impédance choisi est le modèle de Miki d’une couche sur support rigide et la formulation analytique celle de Di et Gilbert, présentée dans la partie 1.3.4.

La méthode, développée par l’IFSTTAR est bien adaptée pour les mesures en milieu extérieur. Néanmoins, elle ne permet pas d’obtenir directement par la mesure l’impédance de surface. Des techniques ont alors été proposées dans la littérature pour résoudre le problème : « trouver  $\beta$  tel que  $T_{\text{ana}}(\beta) - T_{\text{exp}} = 0$  », où  $T_{\text{exp}}$  et  $T_{\text{ana}}$  sont les fonctions de transfert déterminées expérimentalement et analytiquement. Takahashi *et al.* (2005) utilisent une solution analytique pour les ondes planes ; l’impédance de surface peut alors s’exprimer analytiquement en fonction de  $T$ . Cependant, cette technique n’est valable qu’en haute fréquence. Suite à différents travaux (Nocke *et al.*, 1997; Taherzadeh et Attenborough, 1999), Kruse (2007) propose de résoudre le problème en utilisant un algorithme de Newton-Raphson. Cette méthode est intéressante puisqu’elle permet d’obtenir l’impédance de surface sur tout l’intervalle fréquentiel. Des méthodes de mesure en incidence normale ont aussi été utilisées (voir par exemple Londhe *et al.* (2009)) mais celles-ci sont plus lourdes à

mettre en oeuvre. Enfin, on peut citer les travaux de Soh *et al.* (2010) qui proposent de déterminer directement l'impédance à l'aide d'un doublet microphonique positionné au niveau du sol ; celui-ci permet alors d'obtenir la pression et la vitesse normale au sol et donc l'impédance de surface.

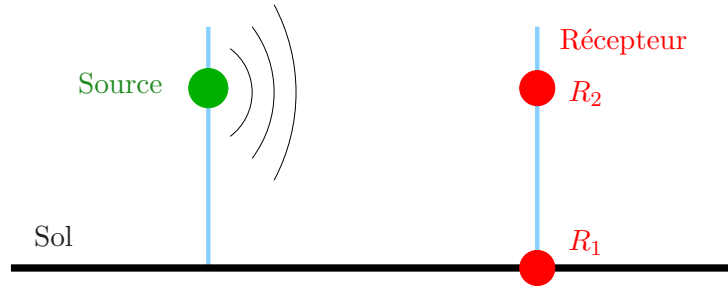


Figure 3.33 – Schéma de principe de la méthode de la fonction de transfert.

Sur la figure 3.34, les modules des fonctions de transfert déterminées expérimentalement pour la plate-forme, le sol herbeux et le champ ont été représentés. L'approximation obtenue avec la fonction de transfert calculée analytiquement a aussi été tracée. Les paramètres du modèle d'impédance de Miki pour ces trois sols sont donnés dans le tableau 3.5. Le cas du ballast n'a pas été traité. En effet, la mise en oeuvre de la mesure in situ était complexe. Les rails étant posés sur la couche de ballast, la mesure ne pouvait se faire que sur une partie non-plane. Il faut alors s'affranchir des réflexions dues aux rails ou à la plate-forme ; de plus, le support rigide sous la couche de ballast étant horizontal, il est compliqué de prendre en compte l'effet d'épaisseur. Les mesures effectuées in situ n'ont donc pas permis d'approximer de façon convenable la fonction de transfert. Des mesures complémentaires ont été effectuées sur le site de l'IFSTTAR à Bouguenais sur une couche de ballast. Une bonne approximation de la fonction de transfert a pu être obtenue dans ce cas avec un modèle d'Hamet et Bérenghier (Rouffaud, 2010). Les paramètres de ce modèle sont donnés dans le tableau 3.5. Notons que l'épaisseur de la couche de ballast sur le site de l'IFSTTAR n'était pas la même que celle sur le site de la Veuve ; on pourra donc prendre pour le modèle d'impédance la valeur mesurée in situ de l'épaisseur de la couche de ballast. On considérera aussi par la suite la modélisation de la couche de ballast par un sol semi-infini.

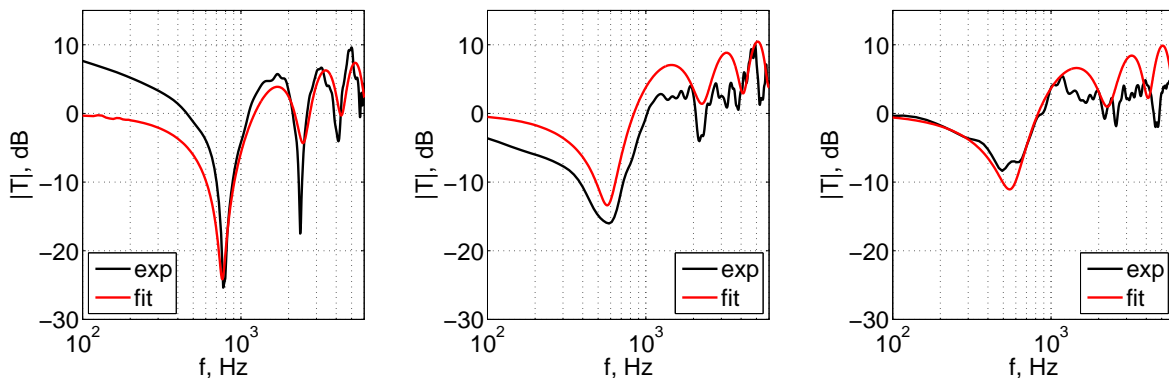


Figure 3.34 – Fonctions de transfert (gauche) pour la plate-forme, (centre) pour le sol herbeux et (droite) pour le champ. La ligne noire représente la fonction de transfert obtenue expérimentalement et la ligne rouge l'approximation de celle-ci avec la formulation analytique.

Tableau 3.5 – Valeurs des coefficients des modèles d’impédances de surface.

	Miki			Hamet et Bérengier
	plate-forme	sol herbeux	champ	couche de ballast
$\sigma_0$ , kPa.s.m <sup>-2</sup>	600	180	170	0.4
$d$ , m	0.006	0.018	0.022	0.68/ $\infty$
$q$				1.4
$\Omega$				0.6

### Conditions météorologiques

Un mât météorologique a été installé à 125 m de la voie et à côté de la ligne de propagation. Trois anémomètres à hélice ainsi que des capteurs de température ont été placés à des hauteurs de 1 m, 3 m et 10 m afin de déterminer respectivement les profils verticaux de vent et de température. La fréquence d’acquisition de l’anémomètre à hélice est de 1 seconde. Un capteur d’humidité a aussi été placé à une hauteur de 3 m. Enfin, le mât comporte un anémomètre sonique situé à une hauteur de 10 m.

Tableau 3.6 – Valeurs mesurées de la pression atmosphérique  $P_0$ , de l’humidité relative  $r_h$ , de la température  $T_0$ , de la masse volumique de l’air  $\rho_0$  et de la célérité du son  $c$ .

$P_0$ , hPa	$r_h$ , %	$T_0$ , °C			$\rho_0$ , kg.m <sup>-3</sup>			$c$ , m.s <sup>-1</sup>
		1 m	3 m	10 m	1 m	3 m	10 m	10 m
991	82	6.1	6.4	6.7	1.24	1.24	1.24	335.5

Les mesures avec le pistolet présentées ici ont été effectuées le jeudi matin 6 mai 2010 entre 10 h 31 et 10 h 39. L’écart entre les mesures peut sembler peu important : en effet, la source étant placée sur la voie, celle-ci a dû être immobilisée pendant les mesures. Les valeurs de la température, de la pression atmosphérique et de l’humidité sont à peu près constantes durant cet intervalle de temps (environ 2 % d’écart au maximum pour l’humidité relative) et on utilise alors les valeurs moyennes, données dans le tableau 3.6. La valeur mesurée de la célérité du son par l’anémomètre sonique à une hauteur de 10 m est aussi donnée dans le tableau.

Tableau 3.7 – Valeurs mesurées de la vitesse et de la direction du vent.

	$V_0$ , m.s <sup>-1</sup>			$\theta$ , °		
	1 m	3 m	10 m	1 m	3 m	10 m
$z_S = 0.5$ m	3.4	3.7	4.2	302	312	326
$z_S = 1.0$ m	3.3	3.5	4.0	297	304	315
$z_S = 1.3$ m	4.5	5.0	6.0	297	304	321
$z_S = 2.0$ m	4.1	4.8	5.6	296	303	321

Par contre, la vitesse du vent ainsi que sa direction varient de manière plus importante. Pour chaque hauteur de source, une valeur moyenne est ainsi utilisée. Ces valeurs sont données dans le tableau 3.7. Dans l’annexe F, les variations de la vitesse du vent dans le plan horizontal sont représentées durant l’ensemble des mesures.

*Obtention des profils verticaux de célérité du son et de vitesse du vent*

Pour obtenir les profils de température et de vitesse du vent, on utilise la théorie de la similitude de Monin-Obukhov. Celle-ci n'est a priori pas valable pour des sols non-homogènes, comme c'est le cas ici. Néanmoins, elle permet d'estimer à partir d'un nombre faible de mesures un profil vertical réaliste pour la vitesse du vent et pour la température. On peut voir dans le tableau 3.7, que la direction du vent mesurée dépend de la hauteur. Pour obtenir un profil vertical, on considère alors la direction du vent au niveau du sol et les valeurs dans le tableau sont multipliées par le facteur  $\cos(\theta_{z_m} - \theta_{0_m})$ . où  $\theta_{z_m}$  est la direction du vent mesurée à  $z$  m. Le paramètre  $\theta_{0_m}$  est estimé à partir des valeurs de l'angle  $\theta$  aux autres hauteurs. Dans le cas d'une atmosphère instable, comme c'est le cas ici, les profils de vitesse du vent et de température sont donnés par :

$$T_0(z) = T_0(z = 0 \text{ m}) + \alpha_0 z + \frac{\theta_*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z + z_0}{z_0} \right) - 2 \ln \left( \frac{1 + x^2}{2} \right) \right], \quad (3.41)$$

$$V_0(z) = \frac{u_*}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z + z_0}{z_0} \right) - 2 \ln \left( \frac{1 + x}{2} \right) - \ln \left( \frac{1 + x^2}{2} \right) + 2 \arctan x - \frac{\pi}{2} \right], \quad (3.42)$$

avec  $x = (1 - 16z/L_{MO})^{1/4}$ . Le paramètre  $L_{MO}$  est l'échelle de Monin-Obukhov et est négatif dans le cas d'une atmosphère instable. Les paramètres  $\theta_*$  et  $u_*$  représentent respectivement l'échelle de température de la couche de surface et la vitesse de friction. Le terme  $\kappa$  correspond à la constante de von Kármán et est égal à 0.41. Enfin, les paramètres  $\alpha_0$  et  $z_0$  représentent le taux de déséquilibre pour une atmosphère sèche adiabatique et la longueur de rugosité. Notons que, dans les équations 3.41 et 3.42, on a approximé le terme  $\ln(z/z_0)$ , qui apparaît dans les relations de similitude par  $\ln(1 + z/z_0)$ .

Les profils de la similarité sont obtenus en utilisant la méthode proposée par Cotté (2008) (voir l'annexe C). Celle-ci est une méthode d'optimisation qui permet de déterminer itérativement les coefficients des profils de la similitude. Deux paramètres sont à fixer ; il s'agit de  $\alpha_0$  égal à environ 0.01 K/m pour  $T_0$  autour de 20°C et de  $z_0$ . Ce dernier paramètre a un rôle important puisqu'il permet de contrôler le taux de variation des profils au niveau de sol. On prend ici  $z_0 = 0.01$  m qui correspond au cas de terrains agricoles dégagés.

Tableau 3.8 – Coefficients utilisés pour les profils de vitesse du vent et de température.

	$L_{MO}$ , m	$\theta_*$ , K	$u_*$ , m.s <sup>-1</sup>	$T_0(z = 0 \text{ m})$ , °C	$\theta_{0_m}$ , °
$z_S = 0.5 \text{ m}$	-52.0	-0.091	0.26	7.7	297
$z_S = 1.0 \text{ m}$	-50.5	-0.091	0.26	7.7	293
$z_S = 1.3 \text{ m}$	-97.0	-0.091	0.35	7.7	293
$z_S = 2.0 \text{ m}$	-85.8	-0.091	0.33	7.7	293

Les coefficients des profils sont donnés dans le tableau 3.8 et les profils sont tracés sur la figure 3.35. Le profil de température semble bien correspondre aux mesures aux hauteurs correspondantes. Il est à noter que le profil varie dans les différents cas même si les mesures de température sont les mêmes ; en effet, dans la théorie de la similitude, les profils de température et du vitesse du vent sont liés, en particulier, par l'échelle de Monin-Obukhov  $L_{MO}$ . Pour le cas de la vitesse du vent, l'accord est moins bon notamment pour la mesure à 1 m où la valeur obtenue pour  $V_0$  est plus faible que la valeur mesurée dans les différents cas.

Enfin, pour obtenir le profil de célérité du son, différentes méthodes peuvent être appliquées :

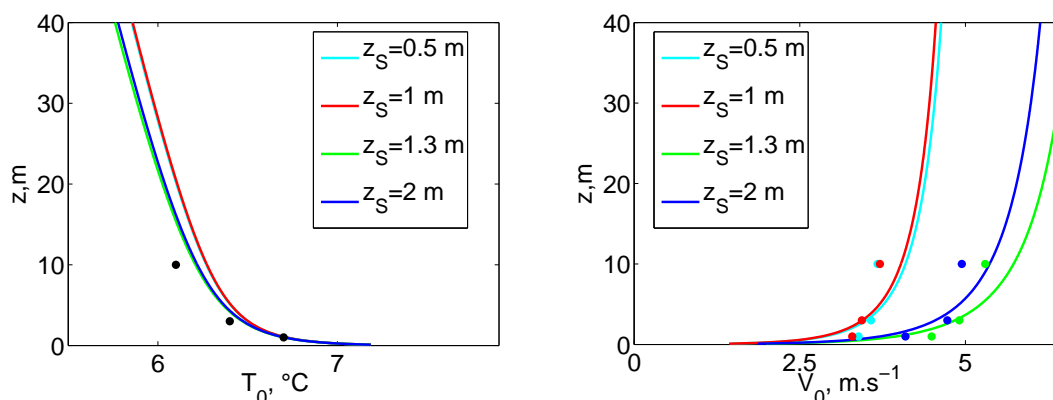


Figure 3.35 – (gauche) Profil de la température  $T_0$  et (droite) profil de la vitesse du vent  $V_0$  pour les différents cas. Les courbes en traits plein représentent les profils obtenus avec la théorie de la similitude et les points correspondent aux valeurs mesurées.

- on peut utiliser la relation pour un gaz parfait  $c = \sqrt{\gamma R_S T_0}$ , avec  $R_S$  la constante spécifique de l'air sec égale à  $287.05 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  environ.
- on peut utiliser la mesure effectuée avec l'anémomètre sonique à une hauteur de 10 m et on peut proposer alors un profil du type  $c = c(z = 10 \text{ m})\sqrt{T_0/T_0(z = 10 \text{ m})}$ . Ce modèle est appelé « fit » par la suite.
- on peut utiliser un modèle de gaz réel. Des formules ont été proposées par Cramer (1993) qui permettent de calculer la célérité du son à partir des valeurs de la pression atmosphérique, de l'humidité relative, de la température et de la concentration en  $\text{CO}_2$ . Ce dernier paramètre, non mesuré ici, influence peu les valeurs de la célérité du son par rapport à l'humidité relative et est fixé à la valeur standard donnée dans le tableau I dans Cramer (1993).

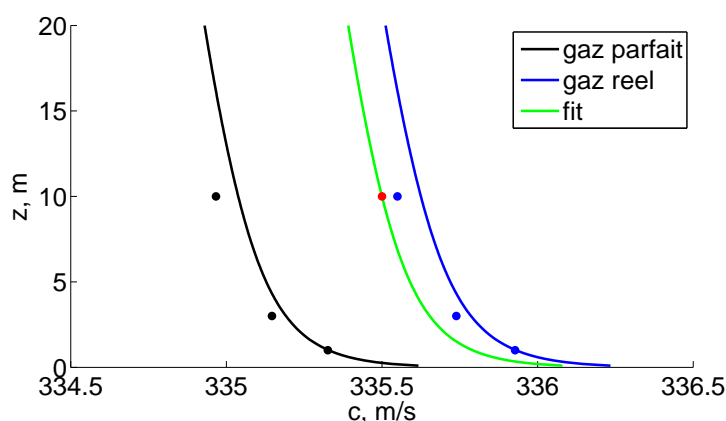


Figure 3.36 – Profil de célérité du son obtenu avec le cas gaz parfait (ligne noire), gaz réel (ligne bleue) et modèle « fit » (ligne verte). Les valeurs correspondantes aux mesures de température sont représentées par des points noirs pour le modèle gaz parfait et par des points bleus pour le modèle gaz réel. Le point rouge correspond à la mesure de la célérité du son effectuée avec l'anémomètre sonique. Le cas  $z_S = 2 \text{ m}$  est ici considéré.

Les profils obtenus dans les trois cas à partir du profil du température son représentés en ligne

pleine sur la figure 3.36. Les valeurs de la célérité du son déterminées pour le cas d'un modèle d'un gaz parfait et d'un gaz réel à partir des mesures sont représentées par des points respectivement noirs et bleus. Enfin, la mesure de la célérité du son obtenue avec l'anémomètre sonique à une hauteur de 10 m est représentée par un point rouge. On peut noter que la valeur calculée de la célérité du son avec un modèle de gaz réel pour  $z = 10$  m est très proche de la valeur mesurée. Par contre, pour le cas d'un gaz parfait, on obtient un écart  $\Delta c$  égal à environ  $0.6 \text{ m.s}^{-1}$ . Cet écart peut sembler faible mais il correspond à un écart de température  $\Delta T_0 = 2T_0\Delta c/c$  égal à  $1^\circ$ . On peut aussi remarquer la variation avec la hauteur du profil de célérité pour le cas gaz réel est très similaire avec le cas gaz parfait. Pour les simulations, on utilisera alors le modèle d'un gaz réel pour le profil de célérité du son.

#### *Absorption atmosphérique*

Par la suite, l'absorption atmosphérique n'est pas prise en compte dans les calculs. En effet, on a représenté sur la figure 3.37 l'atténuation due à l'absorption atmosphérique. Celle-ci est calculée à partir des formules de Bass *et al.* (1995, 1996) et des paramètres atmosphériques donnés dans le tableau 3.6. La valeur maximale de l'atténuation due à l'absorption atmosphérique pour les simulations numériques est de -2 dB pour le récepteur à 100 m et pour une fréquence de 3000 Hz. Par rapport aux autres sources d'erreur (erreur de positionnement, conditions météorologiques et impédance de surface mesurées ponctuellement), l'atténuation due à l'absorption atmosphérique est donc négligeable en première approximation dans notre cas.

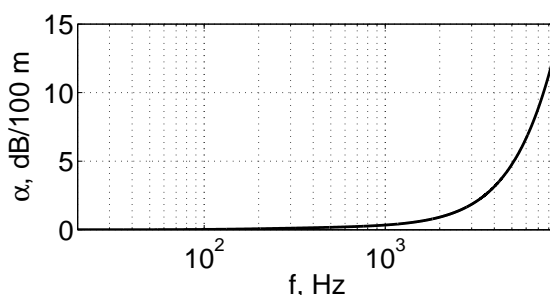


Figure 3.37 – Atténuation en dB/100 m due à l'absorption atmosphérique.

### Conclusions et incertitudes sur les mesures

Le site expérimental a été décrit. La topographie a été mesurée le long de la ligne de propagation. Des mesures d'impédance ont été réalisées pour décrire les différents types de sols rencontrés. La source est modélisée par une source monopolaire dont la puissance présente un maximum pour une fréquence de 900 Hz environ. Les conditions météorologiques pendant la campagne expérimentale ont été présentées. Celles-ci ont été mesurées à l'aide d'un mât météorologique à une distance de 125 m de la source. Ces différents paramètres sont ainsi utilisés dans le paragraphe suivant comme données d'entrée pour le code FDTD. Il a été ainsi vu que de nombreuses incertitudes inhérentes, en partie, aux mesures en milieu extérieur pouvaient être présentes :

- sans système de positionnement, on peut estimer l'erreur sur la position de la source de l'ordre de 0.1 m.
- les mesures d'impédance sont ponctuelles et on peut s'attendre à des variations locales de l'impédance de surface.

- les mesures météorologiques sont aussi ponctuelles. De plus, on utilise pour la suite des valeurs moyennées, qui ne correspondent qu'en partie aux conditions réelles de propagation, notamment pour des sources impulsionnelles. Enfin, les fluctuations temporelles de vitesse du vent et de température peuvent aussi jouer un rôle important (Voisin et Blanc-Benon, 2007).

De façon plus générale, il faut noter que de nombreux phénomènes doivent être pris en compte pour des études réalistes de propagation en milieu extérieur et de nombreux paramètres, qui ne sont pas tous accessibles directement par la mesure, sont alors nécessaires. Outre des modèles purement déterministes, comme développé ici, il est alors important de pouvoir quantifier l'importance relative de chaque paramètre sur les résultats. Des études récentes (Baume, 2006; Junker *et al.*, 2006) ont été réalisées en ce sens.

### 3.5.2 Simulations

Pour chaque hauteur de source, une simulation numérique avec le code FDTD est réalisée. Le calcul est effectué dans une géométrie bidimensionnelle; afin de pouvoir comparer les résultats du calcul numérique à ceux de l'expérience, la relation 3.31 est utilisée. Le domaine numérique comporte 11000 points dans la direction  $\xi$  et 1501 points dans la direction  $\eta$ . Le maillage est uniforme avec  $\Delta\xi = \Delta\eta = 0.01$  m. Le nombre CFL est fixé à 0.5 et 22000 itérations temporelles sont réalisées. La durée du calcul sur une machine vectorielle NEC SX-8 est de 8 heures CPU environ.

La source utilisée pour les calculs FDTD est une source impulsionnelle à support gaussien, utilisée dans les calculs précédents. Pour les comparaisons dans le domaine fréquentiel, on utilisera le terme  $\hat{p}(\omega)/S(\omega)$  pour éliminer le contenu fréquentiel de la source. Ce rapport peut être vu comme la fonction de Green du problème. Pour les mesures, la puissance de la source  $S_{\text{exp}}(\omega)$  est estimée à partir de l'onde directe, comme cela est expliqué dans le paragraphe 3.5.1. Pour les calculs numériques, le terme  $S_{\text{FDTD}}(\omega)$  est obtenu à partir de l'équation 1.88. Pour les comparaisons dans le domaine temporel, le rapport  $(\hat{p}(\omega)/S(\omega))_{\text{FDTD}}$  est multiplié par la puissance de la source  $S_{\text{exp}}(\omega)$  et la pression est alors obtenue par transformée de Fourier inverse. Les mesures aux différents récepteurs sont synchrones; néanmoins, le temps auquel a été effectué le tir n'est pas connu. L'origine des temps pour les mesures expérimentales est choisi de telle sorte que le temps d'arrivée de l'onde directe pour les résultats des mesures soit le même que pour les résultats du calcul FDTD au récepteur à 7.5 m.

#### Calcul préliminaire : modélisation du ballast

Dans la section 1.2.4, le modèle d'impédance de surface de la couche de ballast a été étudié sur un cas unidimensionnel. Il a été vu que l'onde réfléchie comportait plusieurs arrivées qui sont dues aux ondes transmises dans la couche puis réfléchies sur le support rigide. Cela soulève, pour ce cas particulier, le problème de la validité de l'approximation réaction locale pour des calculs bi- ou tri-dimensionnels. Une comparaison avec des solutions analytiques pour le cas réaction locale et étendue est proposée dans l'annexe C pour un problème de propagation en conditions homogènes sur sol plan. Il est montré que la réaction locale n'est pas une bonne approximation dans le cas du ballast.

Puisque l'effet d'épaisseur avec le modèle d'impédance d'une couche de ballast est important et n'est pas bien modélisé par la réaction locale, on peut alors se demander si une modélisation par un modèle de sol semi-infini ne serait pas mieux appropriée. Ainsi, les contributions qui se réfléchissent sur le support rigide ne seraient pas prises en compte. On propose donc ici de faire



un premier calcul en champ proche afin de voir l'effet de la modélisation de la couche de ballast par un sol semi-infini.

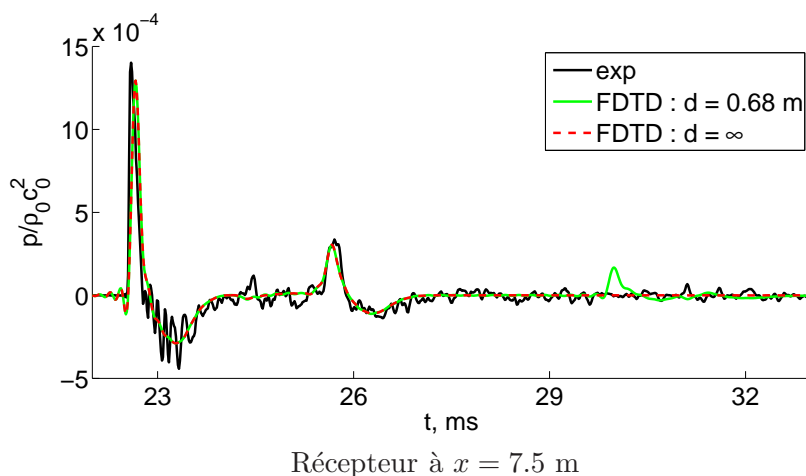


Figure 3.38 – Formes d’ondes de la pression pour les récepteurs situés à  $x = 7.5$  m. — mesure, — FDTD et - - FDTD.

On a ainsi représenté sur la figure 3.38, les formes d’onde de pression obtenues au récepteur à 7.5 m pour la mesure et pour les calculs FDTD en utilisant un modèle de couche sur support rigide et un modèle de sol-infini pour l’impédance du ballast. Les deux premières arrivées correspondant à l’onde directe et à l’onde réfléchie sont comparables dans les trois cas. L’effet d’épaisseur pour le modèle d’impédance du ballast ajoute au signal de pression plusieurs arrivées dont la première pour  $t = 30$  ms a une amplitude comparable à celle de l’onde réfléchie. On peut observer que ces contributions n’apparaissent pas sur la forme d’onde obtenue expérimentalement. Par la suite, on utilisera donc un modèle de sol semi-infini pour l’impédance du ballast.

### Source à $z_S = 0.5$ m

On considère tout d’abord la source placée à une hauteur de 0.5 m par rapport au sommet du rail. Les résultats sont ici représentés pour le tir pour lequel le meilleur accord est obtenu. Les niveaux de pression normalisée par la puissance de la source sont tracés dans ce cas sur la figure 3.39. Les formes d’ondes correspondantes sont représentées sur la figure 3.40. A 7.5 m, le niveau est globalement retrouvé même si les valeurs des maxima ne sont pas égaux. Cette différence peut s’expliquer sur les formes d’onde par une arrivée supplémentaire pour  $t = 24$  ms. A 25 m, l’accord est meilleur même si observe un décalage en haute fréquence entre les niveaux de pression obtenus expérimentalement et avec le calcul numérique. On peut voir un écart, égal à  $\Delta t = 0.5$  ms environ, pour les temps d’arrivée des ondes directes. Cet écart peut être lié à une erreur sur la position de la source et/ou du récepteur par  $\Delta x = c_0 \Delta t = 0.2$  m. Cette erreur est bien de l’ordre de l’erreur de positionnement que l’on avait estimée dans la partie précédente. Trois arrivées principales peuvent être distinguées. La première pour  $t = 75$  ms correspond à l’onde directe. La seconde pour  $t = 76$  ms est liée à la réflexion sur la plate-forme. Enfin, une dernière arrivée pour  $t = 80$  ms correspond à une diffraction du front d’onde par le fossé. A 100 m, on a une bonne correspondance pour le niveau global et pour l’interférence à basse fréquence. Les temps d’arrivée des formes d’onde sont aussi décalées avec une valeur  $\Delta t = 7$  ms. Cet écart est plus important qu’à 25 m ; il correspond à une erreur de positionnement de l’ordre de 2 m ce qui

semble relativement important. Ces écarts à 25 m et 100 m sont retrouvés par la suite pour toutes les hauteurs de source.

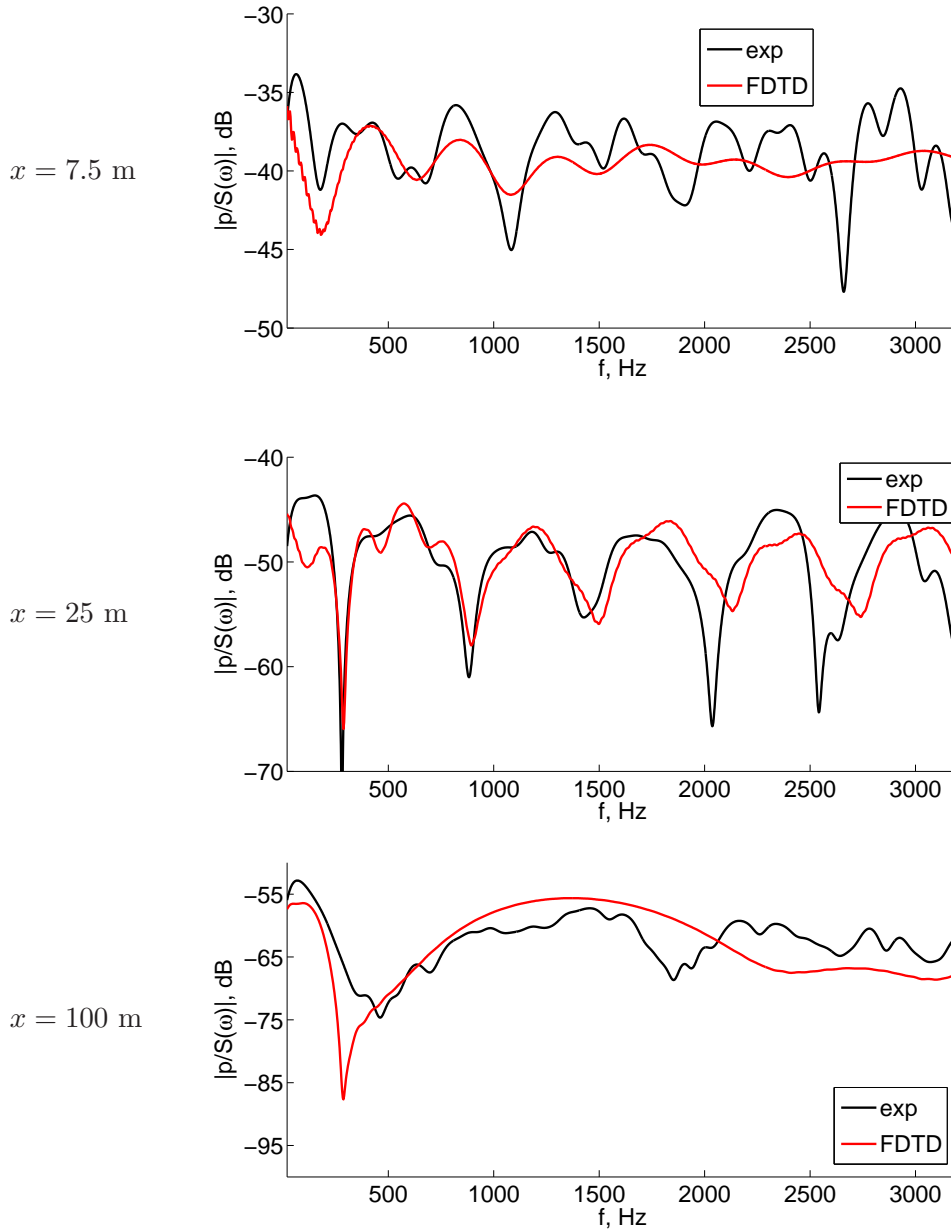


Figure 3.39 – Niveaux de pression normalisée par la puissance de la source pour les récepteurs situés à  $x = 7.5$  m (haut),  $x = 25$  m (milieu) et  $x = 100$  (bas). La source est située en  $z_S = 0.5$  m. — mesure et — FDTD

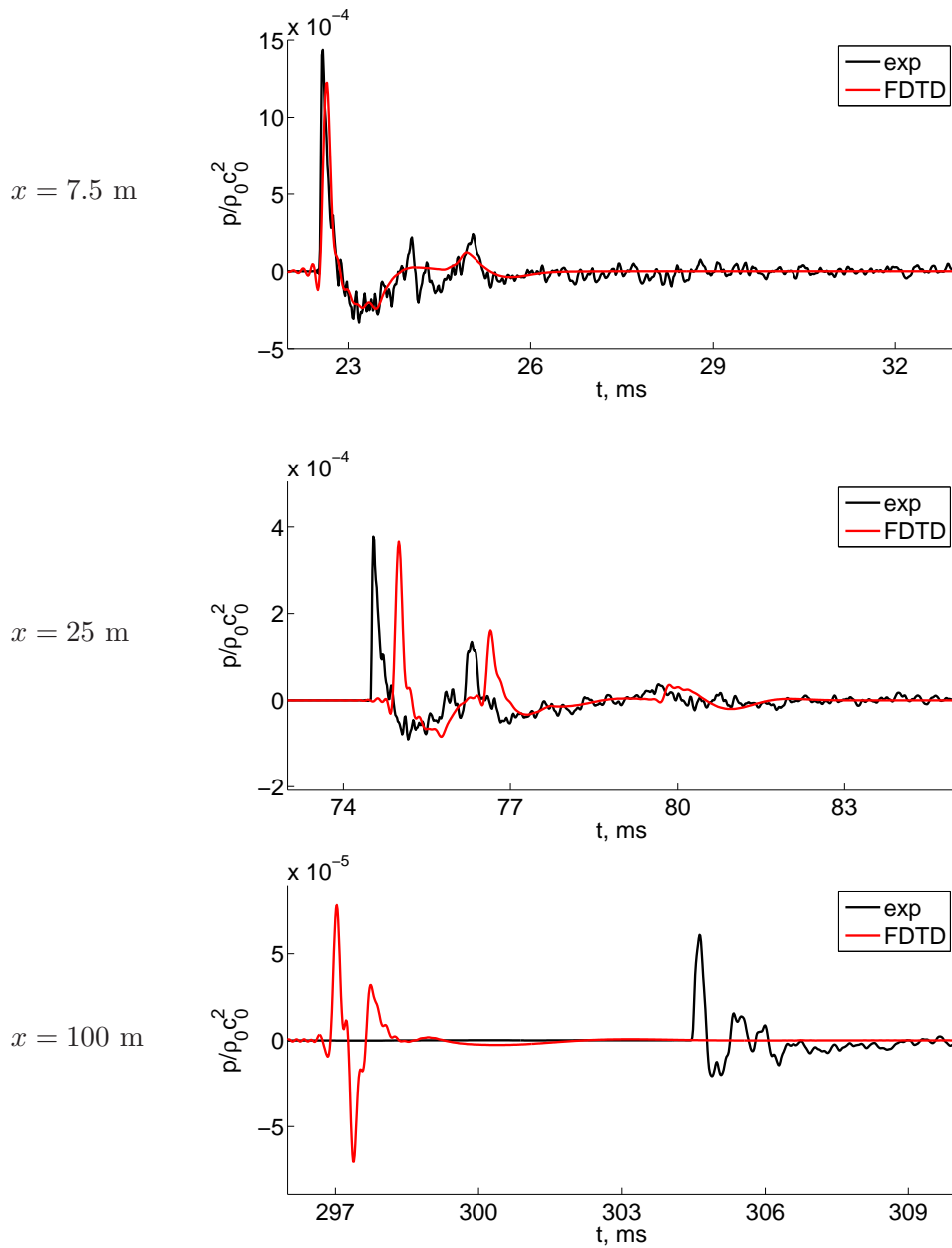


Figure 3.40 – Formes d’ondes de la pression pour les récepteurs situés à  $x = 7.5$  m (haut),  $x = 25$  m (milieu) et  $x = 100$  (bas). La source est située en  $z_S = 0.5$  m. — mesure et — FDTD

Source à  $z_S = 1$  m

Les comparaisons sont ici effectuées pour une hauteur de source de 1 m sur les figures 3.41 et 3.42. Pour les trois récepteurs, un très bon accord est obtenu pour les niveaux de pression. On observe néanmoins un décalage pour des fréquences supérieures à 2000 Hz environ. On obtient ainsi une bonne correspondance pour les formes d'onde, mis à part l'écart sur les temps d'arrivée.

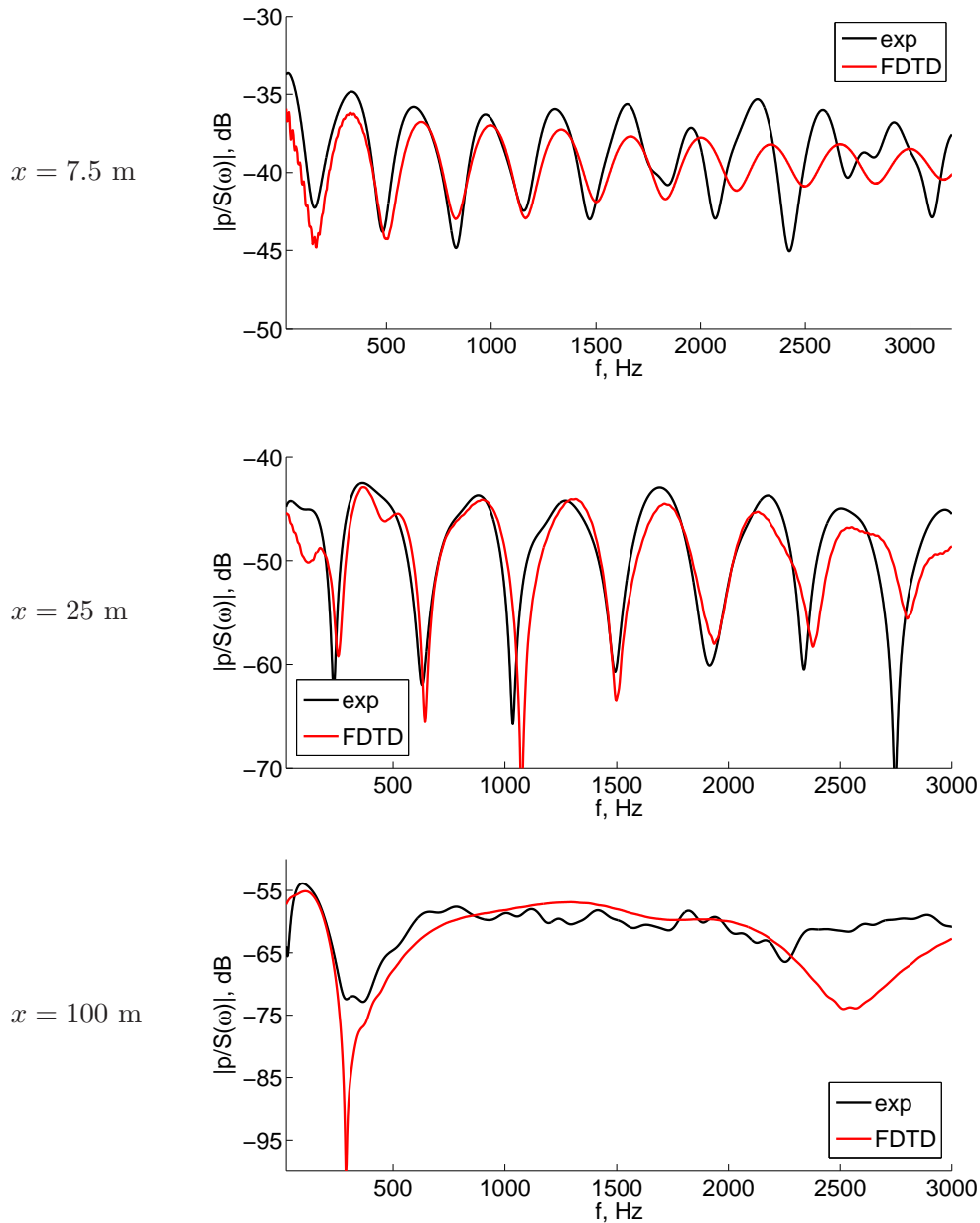


Figure 3.41 – Niveaux de pression normalisée par la puissance de la source pour les récepteurs situés à  $x = 7.5$  m (haut),  $x = 25$  m (milieu) et  $x = 100$  (bas). La source est située en  $z_S = 1$  m. — mesure et — FDTD

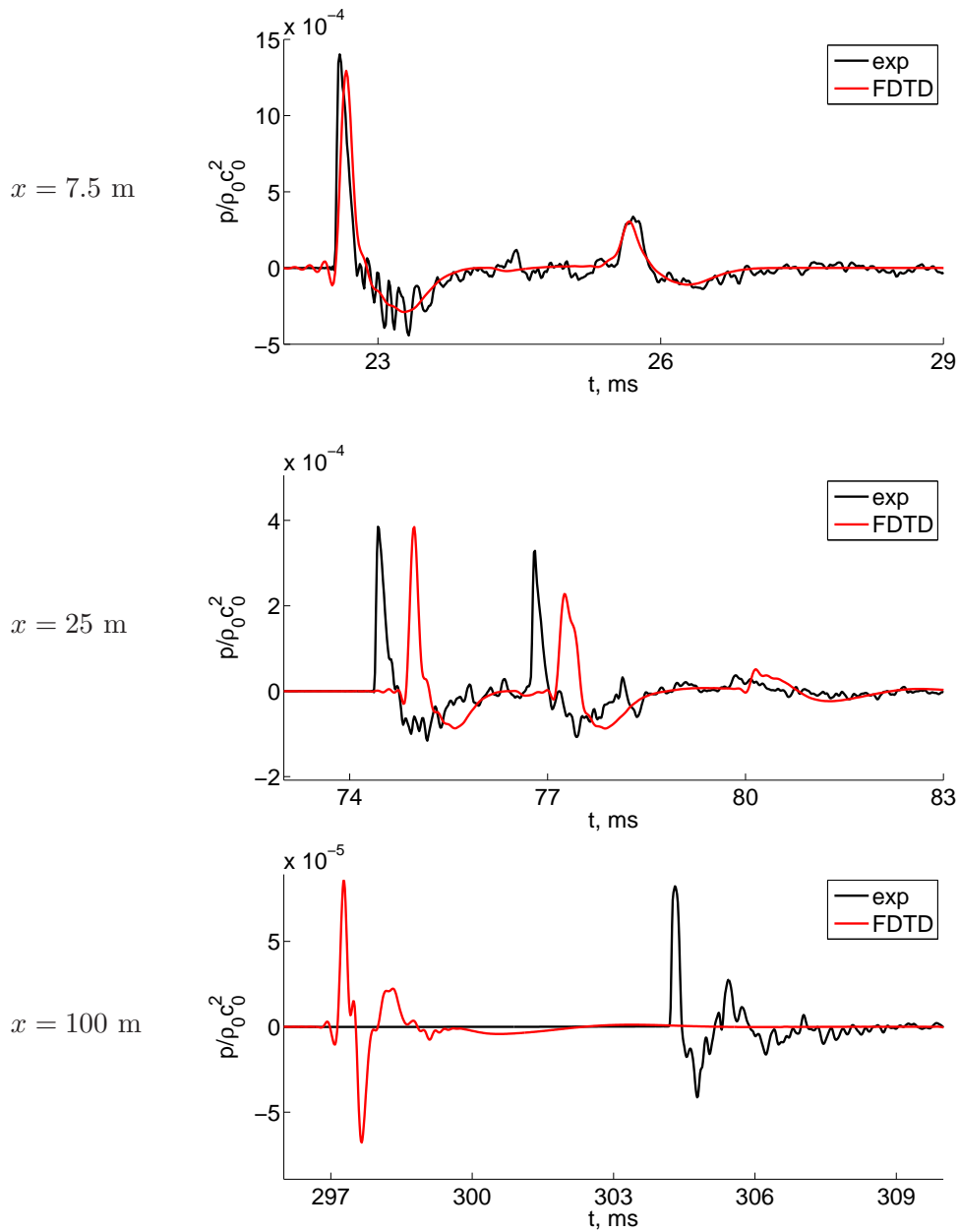


Figure 3.42 – Formes d’ondes de la pression pour les récepteurs situés à  $x = 7.5$  m (haut),  $x = 25$  m (milieu) et  $x = 100$  (bas). La source est située en  $z_S = 1$  m. — mesure et — FDTD

Source à  $z_S = 1.3$  m

Les résultats pour une hauteur de source de 1.3 m sont ici représentés sur les figures 3.43 et 3.44. Les conclusions sont similaires au cas  $z_S = 1$  m. Néanmoins, l'accord est moins bon pour le récepteur à 100 m.

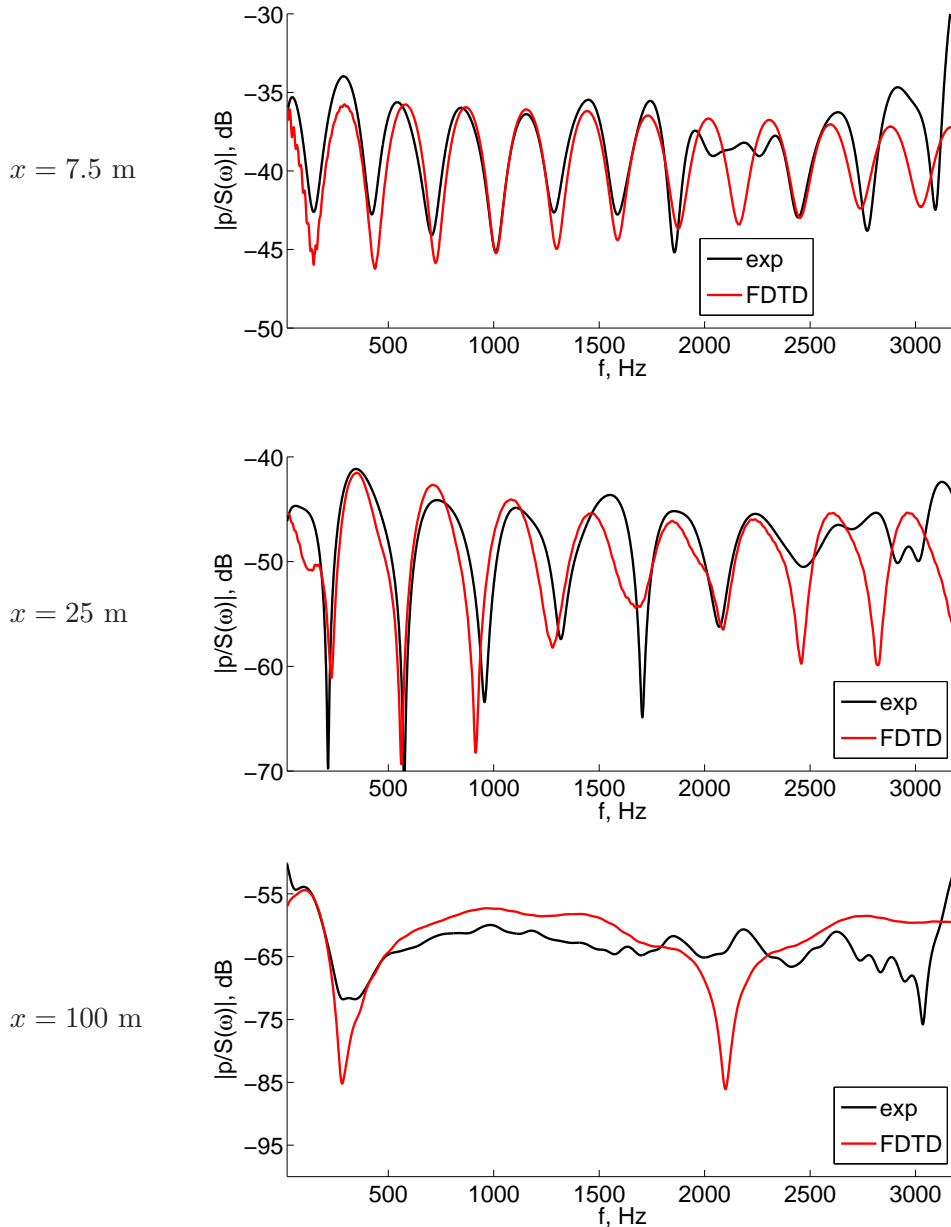


Figure 3.43 – Niveaux de pression normalisée par la puissance de la source pour les récepteurs situés à  $x = 7.5$  m (haut),  $x = 25$  m (milieu) et  $x = 100$  (bas). La source est située en  $z_S = 1.3$  m. — mesure et — FDTD

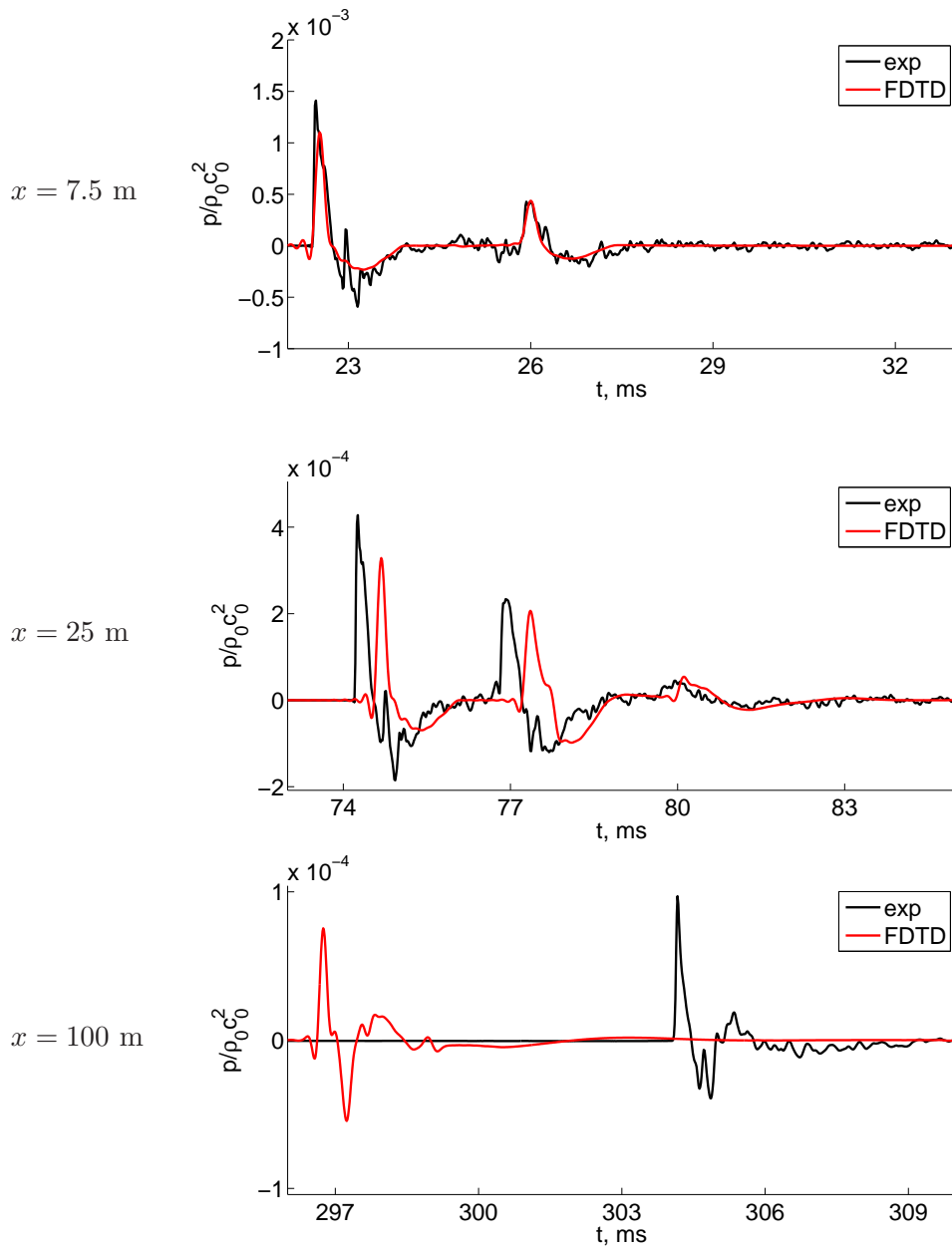


Figure 3.44 – Formes d’ondes de la pression pour les récepteurs situés à  $x = 7.5$  m (haut),  $x = 25$  m (milieu) et  $x = 100$  (bas). La source est située en  $z_S = 1.3$  m. — mesure et — FDTD

Source à  $z_S = 2$  m

On considère maintenant une hauteur de source  $z_S = 2$  m. Les niveaux de pression et les formes d'onde sont tracés respectivement sur les figures 3.45 et 3.46. Par rapport aux cas précédents, les niveaux de pression présentent plus d'interférences. A 7.5 m et 25 m, celles-ci sont bien reproduites par le calcul FDTD jusqu'à une fréquence de 2000 Hz. Un bon accord est ainsi trouvé sur les formes d'onde. A 100 m, un bon accord global est trouvé sur les niveaux de pression même si on ne retrouve pas expérimentalement l'interférence pour une fréquence de 1900 Hz.

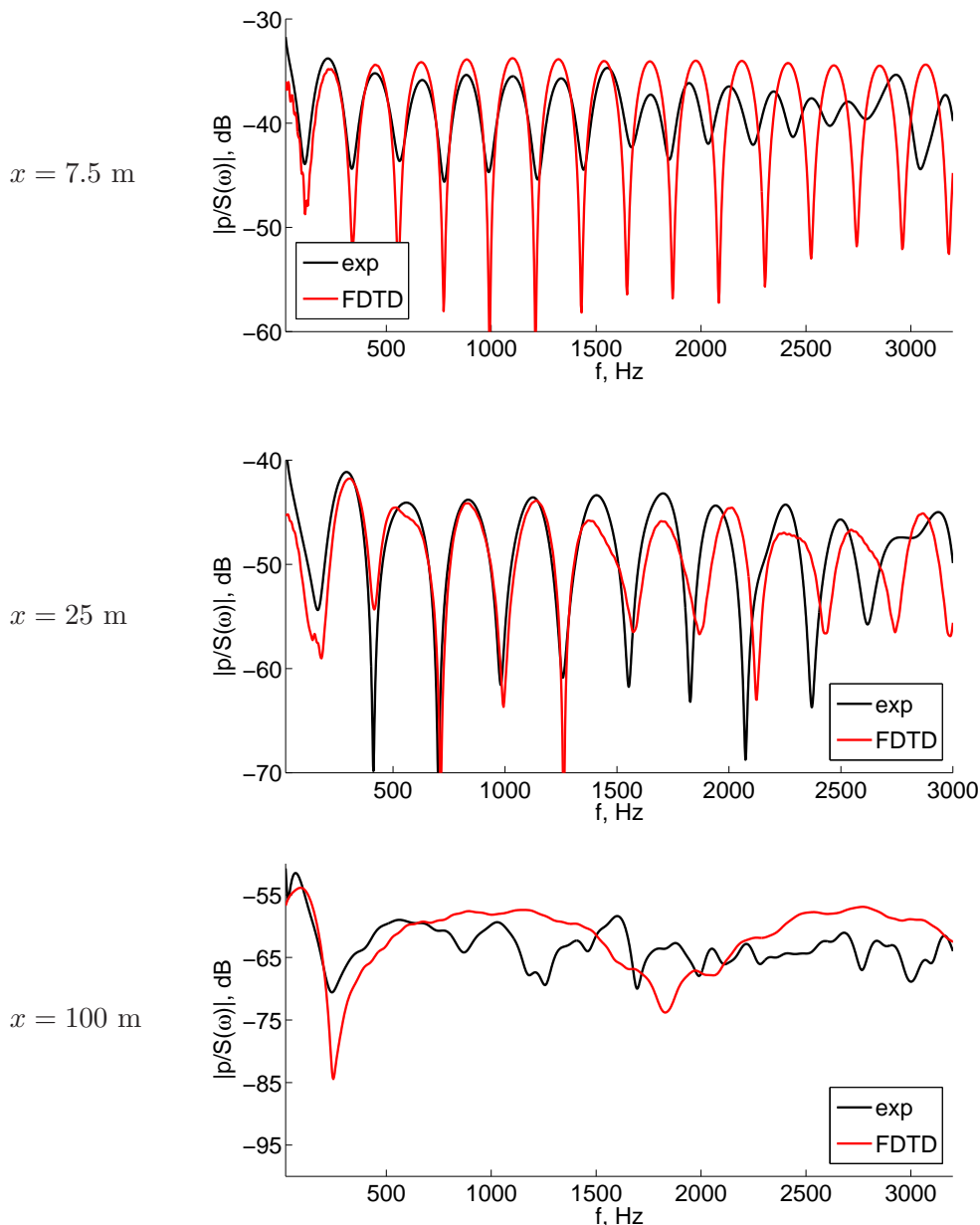


Figure 3.45 – Niveaux de pression normalisée par la puissance de la source pour les récepteurs situés à  $x = 7.5$  m (haut),  $x = 25$  m (milieu) et  $x = 100$  (bas). La source est située en  $z_S = 2$  m. — mesure et — FDTD



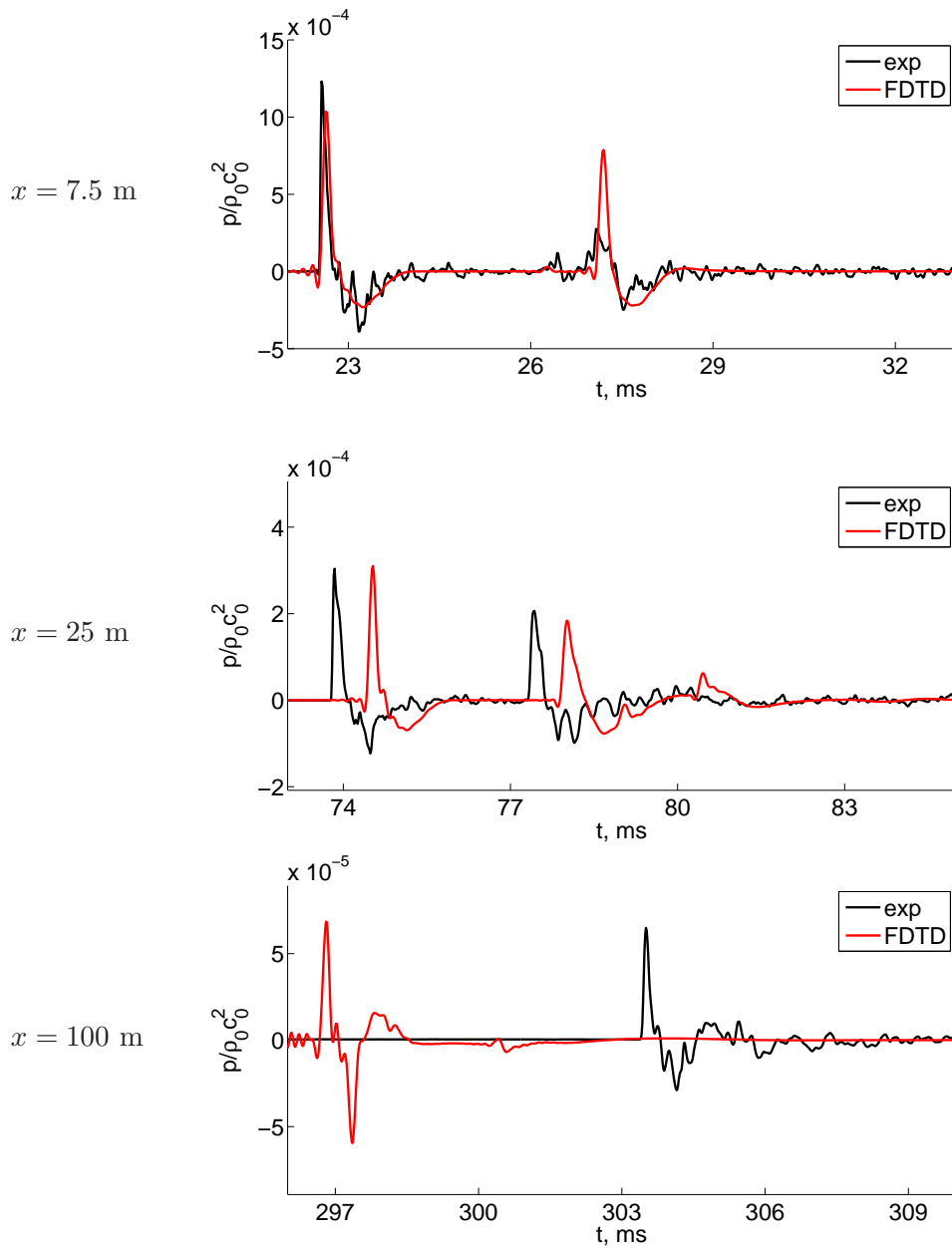


Figure 3.46 – Formes d’ondes de la pression pour les récepteurs situés à  $x = 7.5$  m (haut),  $x = 25$  m (milieu) et  $x = 100$  (bas). La source est située en  $z_S = 2$  m. — mesure et — FDTD

## Conclusion

La prise en compte de la topographie dans un code de résolution des équations d'Euler linéarisées a été étudiée ici. Des méthodes de coordonnées curvilignes sont utilisées pour faire correspondre la frontière à la première ligne du maillage. Celles-ci permettent alors de conserver les techniques différences finies présentées dans le chapitre 1. L'implémentation de la condition limite d'impédance dans le domaine temporel est peu modifiée dans ce cas. Un cas-test de diffusion acoustique par un cylindre impédant a permis de valider ces conditions limites dans le cas de coordonnées curvilignes.

Dans une seconde partie, la propagation au-dessus d'un cylindre impédant a été considérée. Ce problème est dans le cas d'une géométrie bidimensionnelle analogue à celui de la propagation au-dessus d'un sol plan en conditions défavorables. Les formes d'ondes obtenues avec le code FDTD ont été comparées à celles calculées avec une solution analytique. Des ondes de surface ont aussi pu être mises en évidence. Le comportement de la solution analytique lorsque le rayon du cylindre devient grand a ensuite été étudié. Il a été vu que les résultats sont alors comparables à ceux obtenus dans le cas de propagation au-dessus d'un sol plan en conditions homogènes. En particulier, il semble que la condition d'existence de l'onde de surface en conditions défavorables est alors la même qu'en conditions homogènes.

L'étude de la propagation acoustique sur un site ferroviaire a fait l'objet d'une troisième partie. On s'est intéressé en particulier aux effets de la modification de la topographie sur les niveaux de pression. Pour cela, par rapport à une géométrie de référence, deux géométries ont été proposées présentant pour l'une un fossé à proximité de la couche de ballast et pour l'autre un niveau du terrain plus bas. En champ proche, l'effet de l'accident de topographie n'est remarquable que pour les longueurs d'onde du même ordre de grandeur que la dimension caractéristique du fossé. Les effets d'une différence de niveau du sol semble être plus importants, tout du moins pour les configurations envisagées. En champ lointain, plusieurs configurations de l'atmosphère ont été envisagées. L'effet du fossé semble peu important. Par contre, la différence de niveau du sol a un effet important et les écarts obtenus pour le niveau de pression par rapport à la géométrie de référence dépendent alors des conditions de propagation.

Dans une quatrième partie, des résultats d'une campagne expérimentale menée à Saint-Berthevin en 2001 ont été comparés à ceux d'un calcul numérique. Des mesures d'impédance et des conditions météorologiques sont utilisées comme données d'entrée pour le code FDTD. Des bons accords ont été obtenus pour les niveaux de pression dans les différents cas considérés.

Dans une dernière partie, les mesures effectuées en mai 2010 sur le site ferroviaire dit de la Veuve ont été présentées. Des relevés topographiques précis ont été réalisés. L'impédance de surface a été déterminée expérimentalement pour les différents types de sols rencontrés. Un mât météorologique a permis de mesurer différents paramètres de l'atmosphère. Des tirs de pistolet étaient utilisés comme source acoustique; le pistolet a été placé au-dessus de la voie ferroviaire. Les niveaux de pression obtenus à des récepteurs à 7,5 m, 25 m et 100 m sont comparés à ceux déterminés avec le code FDTD. Pour les quatre hauteurs de source considérées, un bon accord est trouvé. Un très bon accord est aussi obtenu pour les formes d'ondes dans le domaine temporel.



# Conclusion générale

L'étude avait pour but de proposer un modèle de propagation acoustique dans le domaine temporel, permettant de prendre en compte à la fois un milieu de propagation et des frontières complexes. Celle-ci s'est basée sur les travaux effectués à l'École Centrale de Lyon, notamment pendant la thèse de Cotté (2008). Pour des applications ferroviaires, le modèle doit pouvoir considérer des distances de propagation importantes, typiquement de l'ordre du kilomètre et un intervalle fréquentiel jusqu'à 8000 Hz environ.

Dans le premier chapitre, un code de résolution des équations d'Euler linéarisées dans le domaine temporel, basé sur des techniques de différences finies, a été proposé. La condition limite d'impédance proposée par Cotté *et al.* (2009) pour les sols à réaction locale a été décrite. Un premier cas-test a montré qu'elle permettait de prendre en compte les différents types de sols, rencontrés dans les problèmes classiques de propagation en milieu extérieur, et que les résultats obtenus étaient en bon accord avec la théorie sur un intervalle fréquentiel correspondant au bruit d'origine ferroviaire. Une étude de propagation à longue distance dans une atmosphère stratifiée a ensuite été réalisée. En conditions homogènes, les formes d'ondes ont été comparées à une solution analytique. En conditions favorables, les temps d'arrivées des différentes contributions sont en bon accord avec un calcul d'acoustique géométrique. Dans les deux cas, des ondes de surfaces ont été mises en évidence. La forme d'onde associée dépend alors fortement du modèle d'impédance choisi. De plus, il a été montré sur un exemple que la condition d'existence de l'onde de surface en conditions homogènes proposée par Thomasson (1976) était trop restrictive. Enfin, une première étude sur la modélisation d'une source en mouvement dans le code FDTD pour une géométrie bidimensionnelle a été proposée; en particulier, dans le cas d'une source harmonique avec un support spatial gaussien, l'effet de la non-compacité de la source a été souligné.

Dans les annexes en liaison avec ce premier chapitre, une étude a été réalisée afin de déterminer les modèles d'impédance de surface physiquement admissible. Il a été montré que la plupart des modèles d'impédance à la fois pour un sol semi-infini et pour une couche sur support rigide vérifiaient les trois conditions proposées par Rienstra (2006). Cependant, le modèle de Delany-Bazley ne vérifie pas les conditions de réalité et de passivité; il est néanmoins causal. De même, le modèle de Miki pour une couche sur support rigide ne vérifie pas la condition de passivité et un modèle de Miki modifié a été proposé afin d'avoir un modèle physiquement admissible. La condition limite d'impédance a aussi été implémentée dans un code de résolution des équations d'Euler linéarisées utilisant des méthodes pseudospectrales et a été validée sur plusieurs cas-tests. Enfin, dans l'annexe C, la validité de l'approximation de la réaction locale a été étudiée pour différents types de sols semi-infinis. Pour des modèles d'impédance à un paramètre, la réaction étendue doit être prise en compte à haute fréquence et pour des sols présentant une résistivité au passage de l'air faible. Par contre, la réaction locale est une mauvaise approximation dans le cas du ballast. Une solution analytique a aussi été proposée pour le cas de la propagation au-dessus d'un sol homogène en conditions homogènes qui prend en compte au premier ordre la propagation

dans le milieu poreux.

Dans un deuxième chapitre, des techniques de couplage entre la méthode de résolution des équations d'Euler linéarisées dans le domaine temporel et une méthode de résolution de l'équation parabolique ont été réalisées. En effet, cette dernière est bien adaptée à des calculs en champ lointain alors que, dans ce cas, le coût numérique de calcul du code FDTD dans le domaine temporel devient rédhibitoire. Une méthode split-step Padé est utilisée pour obtenir une approximation parabolique grand angle. L'effet de l'ordre du développement de l'approximant de Padé ainsi que du pas d'avancement sur la validité angulaire a été étudié. Ensuite, différentes conditions initiales pour l'équation parabolique ont été considérées afin de déterminer, pour un ordre de développement de l'approximant de Padé donné, lesquelles permettraient de retrouver la fonction de Green de l'équation d'Helmholtz dans un cône d'angle le plus grand possible. Pour des ordres de développement faibles (inférieurs à 4), les conditions initiales analytiques de Salomons *et al.* (2002) semblent les mieux adaptées. Pour des ordres élevés, une condition initiale de rétro-propagation donne les meilleurs résultats. De plus, celle-ci peut être utilisée pour modéliser des sources dipôlares ou quadripôlares. Deux cas-tests du couplage code FDTD - code EP ont été proposés et ont montré l'efficacité de cette méthode.

Le traitement d'une topographie dans le code de résolution des équations d'Euler linéarisées a fait l'objet d'un troisième chapitre. Pour cela, en suivant les travaux réalisés en aéroacoustique numérique, on utilise une méthode de coordonnées curvilignes, qui permet une résolution similaire au cas cartésien ; en particulier, les méthodes différences finies présentées dans le premier chapitre peuvent être utilisées. Une modification de la condition limite d'impédance est alors proposée. Un cas-test a permis de valider l'implémentation. Le problème de la propagation au-dessus d'un cylindre impédant a ensuite été étudié. Ce cas est intéressant puisqu'une analogie existe entre ce problème et celui de la propagation au-dessus d'un sol plan en conditions défavorables. Les niveaux de pression et les formes d'onde dans la zone d'ombre ont été comparés à une solution analytique. Il a été montré que, dans certains cas, on pouvait relier une contribution du champ de pression à l'onde de surface obtenue en conditions homogènes. De plus, dans le cas limite où le rayon du cylindre tend vers l'infini, la contribution de l'onde de surface en conditions homogènes était bien obtenue avec la solution analytique en conditions défavorables.

Par la suite, on s'est intéressé à l'effet d'irrégularités de la topographie d'une voie ferroviaire sur les niveaux de pression. Pour cela, par rapport à une topographie de référence, deux géométries présentant pour l'une un fossé en champ proche et pour l'autre un niveau du sol plus bas ont été considérées. En champ proche, il a été montré que des écarts allant jusqu'à 5 dB peuvent être obtenus. Des écarts importants sont en particulier obtenus aux fréquences dont les longueurs d'ondes correspondantes sont de l'ordre de la dimension du fossé. En champ lointain, l'effet du fossé est négligeable. Par contre, les écarts obtenus dus à la différence de niveau du sol peuvent là-encore être importants (de l'ordre de 15 dB au maximum) mais ils dépendent remarquablement des conditions de propagation.

Enfin, les résultats de deux campagnes expérimentales ont été comparés à ceux du code FDTD. La première avait été réalisée à Saint-Berthevin en octobre 2001. Les niveaux de pression sont en très bon accord dans les différents cas traités. Une seconde campagne expérimentale spécifique à ce travail et effectuée en mai 2010 sur le site ferroviaire de La Veuve a été considérée. La topographie a été précisément mesurée. Des mesures d'impédance ont permis de caractériser les différents types de sol rencontrés. A l'aide d'un mât météorologique, différents paramètres de l'atmosphère ont été mesurés. Les profils de vent et de température ont été déterminés à l'aide de la théorie de la similitude de Monin-Obukhov. Des tirs à blanc de pistolet ont joué le rôle de source acoustique. Le pistolet a été placé à 4 hauteurs différentes et pour chaque hauteur, une simulation numérique

avec le code FDTD a été réalisée. Des comparaisons ont été effectuées dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel. Les niveaux de pression acoustique sont en bon accord dans les différents cas jusqu'à des fréquences proches de 3000 Hz. Un bon accord est aussi trouvé pour les formes d'onde.

Les travaux futurs pourront porter sur plusieurs points. Tout d'abord, l'étude sur la modélisation de sources en mouvement est à poursuivre. Une campagne expérimentale pourrait être réalisée en utilisant une source sphérique en mouvement rectiligne uniforme produisant un signal harmonique et un signal de type bruit blanc ; les résultats pourraient alors être comparés à ceux du code FDTD pour notamment étudier les effets de compacité de la source. Ensuite, il a été vu que l'approximation de la réaction locale n'était pas adaptée au cas du ballast. Mis à part les équations de Zwikker et Kosten, les équations de propagation dans le sol dans le domaine temporel proposées dans la littérature (Wilson *et al.*, 2006) requièrent un calcul de produit de convolution et sont donc difficilement applicables à des calculs haute fréquence et longue distance. Des techniques de convolution récursive pourraient alors être appliquées. Enfin, il se pose le problème de la prise en compte des effets météorologiques. Dans l'étude, seuls des profils moyens verticaux ont été considérés. Des techniques de couplage avec des codes météorologiques, comme développées actuellement à l'IFSTTAR (Aumond *et al.*, 2011), peuvent être envisagées. Il se pose alors le problème de la modélisation de la couche limite atmosphérique.



## Annexe A

# Modèles d'impédance physiquement admissibles

Dans cet annexe, une discussion est proposée afin de déterminer parmi les modèles d'impédance décrits dans la partie 1.2.2 les modèles physiquement admissibles. On rappelle tout d'abord que pour qu'un modèle d'impédance soit physiquement admissible, il doit vérifier (Rienstra, 2006) :

- condition de réalité :  $\overline{Z_S(\omega)} = Z_S(-\omega)$ ,
- condition de causalité :  $Z_S(\omega)$  analytique et non-nul dans  $\text{Im}(\omega) > 0$ ,
- condition de passivité :  $\text{Re}[Z_S(\omega)] \geq 0$  pour  $\omega > 0$ .

Une représentation de ces différentes conditions dans le plan complexe est proposée sur la figure A.1. On s'intéresse à deux types d'impédances de surface :

- un sol semi-infini :

$$Z_{S,\infty} = Z_c/\Omega, \quad (\text{A.1})$$

- une couche sur support rigide :

$$Z_{S,d} = Z_c \coth(-ik_c d)/\Omega. \quad (\text{A.2})$$

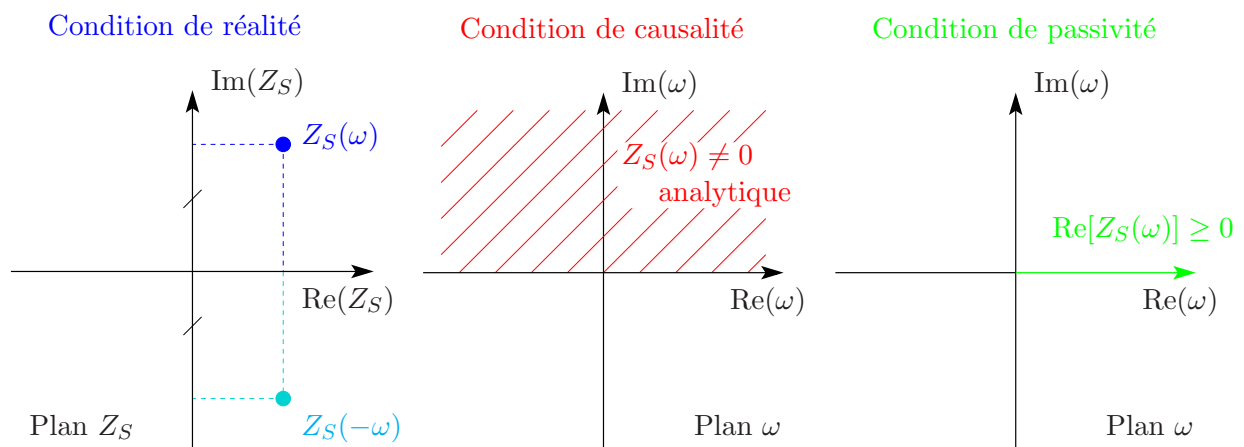


Figure A.1 – Représentation dans le plan complexe des conditions à vérifier pour qu'un modèle d'impédance soit physiquement admissible.



## Remarques préliminaires

Tout d'abord, on fait une remarque préliminaire sur le modèle d'impédance de surface d'une couche sur support rigide. Pour que ce modèle soit causal, il faut à la fois que  $Z_c$  et  $\coth(-ik_c d)$  vérifient la condition de causalité. Ainsi  $k_c$  doit être analytique dans  $\text{Im}(\omega) > 0$ . De plus, puisque la fonction  $\coth x$  présente des pôles en  $x = ik\pi$  avec  $k$  entier, il faut que  $\text{Im}(k_c) > 0$ , dans la partie du plan complexe pour lequel  $\text{Im}(\omega) > 0$ , pour ne pas rencontrer ces pôles. Ces deux conditions peuvent être écrites de façon équivalente :  $-ik_c$  doit être analytique dans  $\text{Re}(-i\omega) > 0$  et  $\text{Re}(-ik_c) > 0$  dans  $\text{Re}(-i\omega) > 0$ .

On utilisera aussi par la suite la propriété que pour  $x > 0$  et  $y < 0$  :

$$\arg[x + iy] \leq \arg[\coth(x + iy)] \leq -\arg[x + iy], \quad (\text{A.3})$$

où  $\arg$  est l'argument d'un nombre complexe qui est défini ici dans l'ensemble  $] -\pi; \pi]$ .

Pour montrer cela, on peut écrire :

$$\coth(x + iy) = \frac{1}{\tanh^2 x + \tan^2 y} \left[ \frac{\tanh x}{\cos^2 y} - i \frac{\tan y}{\cosh^2 x} \right]. \quad (\text{A.4})$$

Notons que la partie réelle de  $\coth(x + iy)$  est du même signe que celle de  $x$  et est donc ici positive. On en déduit l'inégalité pour  $x > 0$  et  $y < 0$  :

$$\arg[\coth(x + iy)] = \arctan \left( \frac{\sin -2y}{\sinh 2x} \right) \leq \arctan \left( \frac{-y}{x} \right) = -\arg[x + iy]. \quad (\text{A.5})$$

De même, on a l'inégalité pour  $x > 0$  et  $y < 0$  :

$$\arg[\coth(x + iy)] \geq \arctan \left( \frac{y}{x} \right) = \arg[x + iy]. \quad (\text{A.6})$$

D'où, on retrouve bien l'inégalité voulue à l'équation A.3.

### A.1 Modèles de type produit de racines

On rappelle la forme prise par les modèles d'impédance de type racine :

$$Z_c = \rho_0 c_0 q \alpha \left( 1 + \frac{\omega_1}{-i\omega} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\omega_2}{-i\omega} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\omega_3}{-i\omega} \right)^{-1/2}, \quad (\text{A.7})$$

$$-ik_c = \frac{-i\omega q}{c_0} \beta \left( 1 + \frac{\omega_1}{-i\omega} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\omega_2}{-i\omega} \right)^{-1/2} \left( 1 + \frac{\omega_3}{-i\omega} \right)^{1/2}, \quad (\text{A.8})$$

où  $\alpha, \beta, \omega_i$  sont tous des réels positifs.

Les branches de coupure des fonctions racines sont choisies comme étant la demi-droite des réels négatifs. Le modèle d'une couche semi-infinie est ainsi réel et causal puisque dans  $\text{Im}(\omega) > 0$ ,  $Z_c$  est bien analytique et non-nul car les coefficients  $\omega_i$  sont réels positifs. Pour la condition de passivité, on peut noter que pour  $\omega > 0$ , on a :

$$0 \leq \arg \left( 1 + \frac{\omega_i}{-i\omega} \right) \leq \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A.9})$$

D'où, on a directement :

$$-\frac{\pi}{4} \leq \arg(Z_c) \leq \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.10})$$

Le modèle d'impédance  $Z_c$  a donc bien une partie réelle positive pour  $\omega > 0$ . On en conclut que ce type de modèle d'impédance pour une couche semi-infinie est bien physiquement admissible.

Pour le modèle d'impédance d'une couche sur support rigide, le modèle est toujours réel. Concernant la condition de passivité, il faut étudier tout d'abord l'argument de  $-ik_c$ . On a :

$$\arg(-ik_c) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left[ \arg\left(1 + \frac{\omega_1}{-i\omega}\right) - \arg\left(1 + \frac{\omega_2}{-i\omega}\right) + \arg\left(1 + \frac{\omega_3}{-i\omega}\right) \right]. \quad (\text{A.11})$$

Notons que dans le cas du modèle de Zwikker et Kosten (1949), on a  $\omega_2 = \omega_3 = 0$ . Cela implique donc  $-\pi/2 \leq \arg(-ik_c) \leq 0$ . De même, dans le cas du modèle d'Attenborough (1985), on a  $\omega_2 = \omega_1$ . Cela implique aussi  $-\pi/2 \leq \arg(-ik_c) \leq 0$ . Enfin, dans le cas du modèle d'Hamet et Bérengier (Bérengier *et al.*, 1997)  $\omega_3 = \gamma\omega_2$  d'où  $\omega_3 > \omega_2$ . On en déduit que :

$$0 \leq -\arg\left(1 + \frac{\omega_2}{-i\omega}\right) + \arg\left(1 + \frac{\omega_3}{-i\omega}\right) \leq \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A.12})$$

d'où il vient  $-\pi/2 \leq \arg(-ik_c) \leq 0$  pour  $\omega > 0$  et pour les différents cas traités ici. Il vient alors puisque  $\arg[Z_{S,d}] = \arg[Z_c] + \arg[\coth -ik_c d]$  :

$$\arg[Z_{S,d}] \leq \arg[Z_c] - \arg[-ik_c d] = \frac{\pi}{2} + \arg\left(1 + \frac{\omega_2}{-i\omega}\right) - \arg\left(1 + \frac{\omega_3}{-i\omega}\right) \leq \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.13})$$

De même, on a :

$$\arg[Z_{S,d}] \geq \arg[Z_c] + \arg[-ik_c d] = -\frac{\pi}{2} + \arg\left(1 + \frac{\omega_1}{-i\omega}\right) \geq -\frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.14})$$

On a donc bien dans les cas considérés ici  $\text{Re}[Z_{S,d}] \geq 0$  et les modèles d'impédance d'une couche sur support rigide sont bien passifs.

Pour la causalité, on considère  $-i\omega = A \exp(i\theta)$  avec  $A > 0$  et  $\theta$  dans  $] -\pi/2; \pi/2[$ . On veut que l'argument de  $-ik_c$  soit compris aussi dans  $] -\pi/2; \pi/2[$ . Pour cela, on réécrit  $-ik_c$  sous la forme :

$$-ik_c = \frac{(-i\omega)^{1/2} q}{c_0} \beta (-i\omega + \omega_1)^{1/2} (-i\omega + \omega_2)^{-1/2} (-i\omega + \omega_3)^{1/2}. \quad (\text{A.15})$$

On a alors :

$$\arg(-ik_c) = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} [\arg(A \exp(i\theta) + \omega_1) - \arg(A \exp(i\theta) + \omega_2) + \arg(A \exp(i\theta) + \omega_3)]. \quad (\text{A.16})$$

Pour le cas du modèle de Zwikker et Kosten, on a simplement :

$$\arg(-ik_c) = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \arg(A \exp(i\theta) + \omega_1). \quad (\text{A.17})$$

Pour  $\theta$  dans  $[0; \pi/2[$ , on a l'inégalité :

$$0 \leq \arg(A \exp(i\theta) + \omega_1) \leq \theta, \quad (\text{A.18})$$

puisque les parties imaginaire et réelle de  $A \exp(i\theta) + \omega_1$  sont positives. On a donc :

$$0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \arg(-ik_c) = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \arg(A \exp(i\theta) + \omega_1) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.19})$$

Pour  $\theta$  dans  $] -\pi/2; 0[$ , on a l'inégalité

$$\theta \leq \arg(A \exp(i\theta) + \omega_1) \leq 0, \quad (\text{A.20})$$

puisque les parties imaginaire et réelle de  $A \exp(i\theta) + \omega_1$  sont respectivement négative et positive. On a donc :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \arg(-ik_c) \leq \frac{\theta}{2} \leq 0. \quad (\text{A.21})$$

On a donc bien dans tous les cas, une partie réelle positive et le modèle de Zwikker et Kosten d'une couche sur support rigide est bien causal. Dans le cas du modèle d'Attenborough, on a  $\omega_1 = \omega_2$  et les mêmes conclusions que précédemment peuvent être faites. Dans le cas du modèle d'Hamet et Bérengier, puisqu'on a  $\omega_3 > \omega_2$ , on a l'inégalité pour  $\theta$  dans  $[0; \pi/2[$  :

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\arg(A \exp(i\theta) + \omega_2) + \arg(A \exp(i\theta) + \omega_3) \leq 0. \quad (\text{A.22})$$

On a donc :

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \arg(-ik_c) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.23})$$

De même pour  $\theta$  dans  $] -\pi/2; 0]$ , on a :

$$\frac{\pi}{2} \geq -\arg(A \exp(i\theta) + \omega_2) + \arg(A \exp(i\theta) + \omega_3) \geq 0. \quad (\text{A.24})$$

D'où, on obtient :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \arg(-ik_c) \leq \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}. \quad (\text{A.25})$$

On a donc bien là-encore dans les deux cas une partie réelle pour  $-ik_c$  et le modèle d'Hamet et Bérengier d'une couche sur support rigide est lui aussi causal.

## A.2 Modèles de type polynôme

On rappelle que la forme-type de ces modèles est :

$$Z_c = \rho_0 c_0 \left[ 1 + a \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^b + ic \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^d \right], \quad (\text{A.26})$$

$$-ik_c = \frac{-i\omega}{c_0} \left[ 1 + p \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^q + ir \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^s \right]. \quad (\text{A.27})$$

### A.2.1 Modèle de Delany-Bazley

Les coefficients proposés par Delany et Bazley (1970) peuvent se trouver dans les équations 1.64 et 1.65. Il faut noter qu'il sont tous réels positifs. Pour un sol semi-infini, le modèle d'impédance de Delany-Bazley est un modèle passif; cela s'obtient directement puisque la partie réelle de  $Z_c$  est positive. On peut aussi montrer que le modèle est causal. Pour cela, on peut remarquer que  $Z_c$  est bien analytique dans  $\text{Im}(\omega) > 0$  en choisissant la demi-droite des réels négatifs pour branche de coupure pour les fonctions racine. Pour montrer que  $Z_c$  n'a pas de zéro dans  $\text{Im}(\omega) > 0$ , on pose  $\omega/\omega_0 = A \exp(i\theta)$  avec  $A$  réel positif et avec  $\theta$  dans  $]0; \pi[$ . On cherche donc le couple  $(A, \theta)$  tel que :

$$P(A, \theta) = 1 + a_{\text{DB}} A^{-b_{\text{DB}}} \exp(-ib_{\text{DB}}\theta) + ic_{\text{DB}} A^{-d_{\text{DB}}} \exp(-id_{\text{DB}}\theta) = 0. \quad (\text{A.28})$$

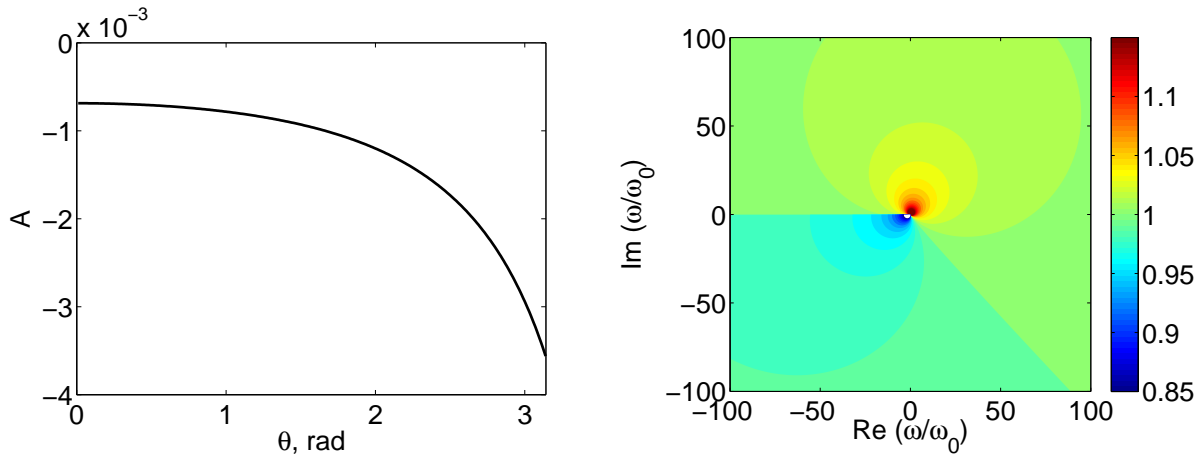


Figure A.2 – (gauche) Paramètre  $A$  de l'équation A.29 en fonction de  $\theta$ . (droite) Valeur absolue de l'impédance caractéristique normalisée obtenue avec le modèle de Delany-Bazley dans le plan complexe.

Le couple qui vérifie l'équation ci-dessus doit donc annuler la partie réelle et la partie imaginaire de  $P$ . Cela implique la relation suivante entre les deux paramètres :

$$A^{-d_{\text{DB}}} = c_{\text{DB}} \frac{\sin d_{\text{DB}}\theta - \cos d_{\text{DB}}\theta \tan b_{\text{DB}}\theta}{\tan b_{\text{DB}}\theta}. \quad (\text{A.29})$$

La valeur obtenue pour  $A$  en fonction de  $\theta$  est représentée sur la figure A.2. On peut ainsi voir qu'il est négatif sur l'ensemble de définition de  $\theta$ , ce qui est contraire aux hypothèses.  $Z_c$  n'a donc pas de zéro dans  $\text{Im}(\omega) > 0$ . Cela est confirmé aussi sur la figure A.2. Enfin, le modèle d'impédance n'est pas réel puisqu'il ne vérifie pas  $\overline{Z_c(\omega)} = Z_c(-\omega)$ .

Le modèle de Delany-Bazley d'une couche sur support rigide n'est plus passif, comme cela a été montré par Cotté *et al.* (2009). Il n'est pas non plus réel. Par contre, il vérifie toujours la condition de causalité. En effet, on note  $X = A \exp(i\theta)$  avec  $A > 0$  et avec  $\theta$  dans  $]0; \pi[$ , et on considère l'expression :

$$P = X[1 + p_{\text{DB}}X^{-q_{\text{DB}}} + ir_{\text{DB}}X^{-s_{\text{DB}}}] . \quad (\text{A.30})$$

On a directement :

$$\text{Im}(P) = A \sin \theta + p_{\text{DB}} \sin(1 - q_{\text{DB}})\theta A^{1-q_{\text{DB}}} + r_{\text{DB}} \cos(1 - s_{\text{DB}})\theta A^{1-s_{\text{DB}}} > 0, \quad (\text{A.31})$$

puisque tous les termes sont positifs. Le modèle est donc bien causal.

### A.2.2 Modèle de Miki

Pour le modèle de Miki (1990), on considère la forme (Cotté *et al.*, 2009) :

$$Z_c^{\text{M}} = \rho_0 c_0 \left[ 1 + \mu_{\text{M}} \left( \frac{\omega_0}{-i\omega} \right)^{b_{\text{M}}} \right], \quad (\text{A.32})$$

$$-ik_c^{\text{M}} = \frac{-i\omega}{c_0} \left[ 1 + \nu_{\text{M}} \left( \frac{\omega_0}{-i\omega} \right)^{q_{\text{M}}} \right]. \quad (\text{A.33})$$

On peut noter que le modèle d'impédance d'une couche semi-infinie est réel puisque  $Z_c^M$  est une fonction à coefficients réels de  $-i\omega$ . Il est aussi passif comme pour le modèle de Delany-Bazley. Pour montrer que le modèle est causal, il faut montrer que le modèle n'a pas de zéro dans  $\text{Re}(-i\omega) > 0$ . On considère donc  $X = A \exp(i\theta)$  avec  $A > 0$  et  $\theta \in ]-\pi/2; \pi/2[$ . On considère le cas  $1 + \mu X^{-b_M} = 0$ . Cela implique :

$$1 + \mu A^{-b_M} \cos(b_M \theta) = 0, \quad (\text{A.34})$$

$$\sin(b_M \theta) = 0. \quad (\text{A.35})$$

Les paramètres  $A$  et  $\mu$  étant positifs, ces deux équations ne peuvent être vérifiées simultanément que pour  $b_M \theta = -\pi + k\pi$ , avec  $k$  entier soit pour des valeurs de  $\theta$  en dehors de son ensemble de définition. La condition de causalité est donc aussi vérifiée.

Le modèle d'une couche sur support rigide est lui aussi réel. Pour montrer que le modèle est causal, il faut montrer que  $\text{Re}(-ikc) > 0$  dans  $\text{Re}(-i\omega) > 0$ . Pour cela, on considère  $X = A \exp(i\theta)$  avec  $A$  positif et  $\theta$  dans  $]-\pi/2, \pi/2[$ . On considère l'expression  $P = X[1 + \nu X^{-q_M}]$ . On a directement que :

$$\text{Re}(P) = \nu A \cos(1 - q_M)\theta + A \cos \theta > 0, \quad (\text{A.36})$$

donc le modèle est bien causal. Par contre, pour les faibles fréquences, il n'est plus passif. En effet, on peut montrer que :

$$Z_{S,d}^M \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \frac{\rho_0 c_0^2 \mu_M}{d \nu_M \omega_0^{-b_M + q_M}} (-j\omega)^{-b_M + q_M - 1}, \quad (\text{A.37})$$

d'où on a la relation :

$$\text{Re}[Z_{S,d}^M] \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} -0.150 \frac{\rho_0 c_0^2}{d \omega_0^{-b_M + q_M}} \omega^{-b_M + q_M - 1}. \quad (\text{A.38})$$

Le coefficient négatif  $-0.150$  provient de la partie réelle de  $(-i\omega)^{b_M - q_M - 1}$  qui est négative. Pour avoir une partie réelle positive, le coefficient  $b_M - q_M$  devrait être compris entre 0 et 2. On peut remarquer aussi avec l'équation A.37 que le comportement à basse fréquence dépend du paramètre  $\omega_0$  et donc de la résistivité au passage de l'air  $\sigma_0$  ce qui n'est pas le cas pour des modèles plus complexes. En effet, puisque  $Z_c = [\rho_g K_g]^{1/2}$  et  $k_c = \omega[\rho_g / K_g]^{1/2}$ , le comportement attendu à basse fréquence est :

$$Z_{S,d} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \frac{K_0}{-i\omega d \Omega}, \quad (\text{A.39})$$

où  $K_0$  est le module de compressibilité statique. Celui-ci est donné, pour un gaz parfait, par  $K_0 = \rho_0 c_0^2 / \gamma$  si on considère que la propagation du son dans le matériau poreux est un processus isotherme. C'est ainsi le cas pour la plupart des modèles d'impédance à l'exception notable du modèle de Zwikker et Kosten pour lequel  $K_0 = \rho_0 c_0^2$ , ce qui correspond au cas où la propagation du son dans le matériau est modélisée par un processus adiabatique. On peut ainsi voir que le comportement à basse fréquence ne dépend pas de la résistivité au passage de l'air.

### A.2.3 Modèle de Miki modifié

On propose un modèle de Miki modifié afin d'avoir un modèle physiquement admissible. Une idée pour résoudre le problème de passivité du modèle de Miki aux basses fréquences est de choisir  $q_{Mb} = b_{Mb} = b_M = 0.632$ . De même, on peut reproduire le comportement en basse fréquence attendu pour l'impédance de surface d'une couche sur support rigide en choisissant  $\nu_{Mb} = \gamma \mu_{Mb} =$

$\gamma\mu_M$ . Notons que dans le modèle original de Miki, on retrouve à peu de choses près ce facteur  $\gamma$  puisque  $\nu_M/\mu_M = 1.47$ . Le modèle s'écrit alors :

$$Z_c^{\text{Mb}} = \rho_0 c_0 \left[ 1 + \mu_{\text{Mb}} \left( \frac{\omega_0}{-i\omega} \right)^{b_{\text{Mb}}} \right], \quad (\text{A.40})$$

$$-ik_c^{\text{Mb}} = \frac{-i\omega}{c_0} \left[ 1 + \nu_{\text{Mb}} \left( \frac{\omega_0}{-i\omega} \right)^{b_{\text{Mb}}} \right], \quad (\text{A.41})$$

avec  $b_{\text{Mb}} = b_M = 0.632$ ,  $\mu_M = \mu_{\text{Mb}} = 0.459$  et  $\nu_{\text{Mb}} = \gamma\mu_{\text{Mb}}$ .

Le modèle d'une couche semi-infinie est le même que celui de Miki et est donc physiquement admissible. Le modèle d'une couche sur support rigide est réel et causal comme celui de Miki. Il faut donc montrer qu'il est bien passif. Pour cela, on peut noter que :

$$\arg(-ik_c) = -\frac{\pi}{2} + \arg \left[ 1 + \nu_{\text{Mb}} \left( \frac{\omega_0}{-i\omega} \right)^{b_{\text{Mb}}} \right]. \quad (\text{A.42})$$

On en déduit que  $0 \geq \arg(-ik_c) \geq -\frac{\pi}{2}$  et on peut utiliser l'équation A.3. On a alors :

$$\arg[Z_c] + \arg[-ik_c] \leq \arg[Z_{S,d}] \leq \arg[Z_c] - \arg[-ik_c]. \quad (\text{A.43})$$

On peut écrire :

$$\arg[Z_c] + \arg[-ik_c] = -\frac{\pi}{2} + \arg \left[ 1 + \nu_{\text{Mb}} \left( \frac{\omega_0}{-i\omega} \right)^{b_{\text{Mb}}} \right] + \arg \left[ 1 + \mu_{\text{Mb}} \left( \frac{\omega_0}{-i\omega} \right)^{b_{\text{Mb}}} \right] \quad (\text{A.44})$$

Les deux termes à droite ont une partie réelle et une partie imaginaire positive et ont donc un argument compris entre 0 et  $\pi/2$ . D'où, on a

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg[Z_c] + \arg[-ik_c] \leq \arg[Z_{S,d}]. \quad (\text{A.45})$$

De même, on a :

$$\arg[Z_c] - \arg[-ik_c] = +\frac{\pi}{2} + \arg \left[ 1 + \mu_{\text{Mb}} \left( \frac{\omega_0}{-i\omega} \right)^{b_{\text{Mb}}} \right] - \arg \left[ 1 + \nu_{\text{Mb}} \left( \frac{\omega_0}{-i\omega} \right)^{b_{\text{Mb}}} \right]. \quad (\text{A.46})$$

On remarque que  $\nu_{\text{Mb}} > \mu_{\text{Mb}} > 0$ . De même, les parties réelles et imaginaires de  $\exp(ib_{\text{Mb}}\pi/2)$  sont positives. Cela implique :

$$\arg \left[ 1 + \nu_{\text{Mb}} \left( \frac{\omega_0}{-i\omega} \right)^{b_{\text{Mb}}} \right] - \arg \left[ 1 + \mu_{\text{Mb}} \left( \frac{\omega_0}{-i\omega} \right)^{b_{\text{Mb}}} \right] \geq 0. \quad (\text{A.47})$$

On a donc bien :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg[Z_{S,d}] \leq \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A.48})$$

ce qui signifie que la partie réelle de  $Z_{S,d}$  est positive et que le modèle d'impédance de Miki modifié d'une couche sur support rigide est bien passif et physiquement admissible.

## Récapitulatif

Les différents résultats obtenus dans cette annexe sont récapitulés dans le tableau A.1.

Tableau A.1 – Conditions remplies par les différents modèles pour être physiquement admissibles.

Modèles d'impédance	Sol semi-infini			Couche sur support rigide		
	Réalité	Causalité	Passivité	Réalité	Causalité	Passivité
Delany et Bazley	Non	Oui	Oui	Non	Oui	Non
Miki	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Non
Miki modifié	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Zwikker et Kosten	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Taraldsen et Jonasson	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Attenborough	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Hamet et Bérengier	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui

## Annexe B

# Modèles de sources monopôlaires pour les codes de résolution dans le domaine temporel

On s'intéresse dans cette annexe à l'implémentation d'un terme source de type monopolaire dans un code de résolution des équations d'Euler linéarisées dans le domaine temporel. En particulier, on s'intéressera à l'effet de la distribution spatiale sur le contenu fréquentiel des signaux de pression.

### Préliminaires

Pour cela, on rappelle tout d'abord les équations d'Euler linéarisées en absence d'écoulement avec une source de masse  $Q$  :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = \rho_0 c_0^2 Q, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0. \quad (\text{B.2})$$

On considère ensuite le potentiel acoustique  $\varphi$  lié à la pression par la relation  $p = -\rho_0 \partial\varphi/\partial t$  et lié à la vitesse par  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ . Le potentiel acoustique vérifie l'équation d'Helmholtz :

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = Q. \quad (\text{B.3})$$

On s'intéressera ici à l'équation d'Helmholtz avec un terme de dissipation liée à la viscosité et à la conduction thermique du type (Bruneau, 1998) :

$$\Delta\varphi + \frac{\alpha}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta\varphi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = Q, \quad (\text{B.4})$$

où  $\alpha$  représente une longueur caractéristique. On considère par la suite seulement le cas où  $Q = Q(r)f(t)$ . La symétrie radiale permet d'utiliser les transformées suivantes pour ramener la dérivation spatiale à une multiplication par un scalaire :



1. en 1D, la transformée de Fourier :

$$\hat{\varphi}(k, t) = 2 \int_0^{+\infty} \varphi(r, t) \cos(kr) dr, \quad (\text{B.5})$$

et la transformée de Fourier inverse :

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{\varphi}(k, t) \cos(kr) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(k, t) \exp(ikr) dk. \quad (\text{B.6})$$

On peut noter pour la transformée de Fourier inverse que :

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ik \hat{\varphi}(k, t) G_{1D}(k, r) dk, \quad (\text{B.7})$$

avec  $G_{1D}(k, r) = \exp(ik|r|)/2ik$ . Par la suite, on ne considérera que des distances à la source positives et on notera abusivement  $r$  à la place de  $|r|$ .

2. en 2D, la transformée de Hankel :

$$\hat{\varphi}(k, t) = 2\pi \int_0^{+\infty} \varphi(r, t) J_0(kr) r dr, \quad (\text{B.8})$$

et la transformée de Hankel inverse :

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{\varphi}(k, t) J_0(kr) k dk = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(k, t) H_0^{(1)}(kr) k dk. \quad (\text{B.9})$$

Comme pour le cas 1D, on a aussi :

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ik \hat{\varphi}(k, t) G_{2D}(k, r) dk, \quad (\text{B.10})$$

avec ici  $G_{2D}(k, r) = H_0^{(1)}(k|r|)/4i$ .

3. en 3D, la transformée de Hankel sphérique :

$$\hat{\varphi}(k, t) = 4\pi \int_0^{+\infty} \varphi(r, t) j_0(kr) r^2 dr, \quad (\text{B.11})$$

avec la fonction de Bessel sphérique  $j_0(kr) = \sin(kr)/kr$  et la transformée de Hankel inverse :

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \hat{\varphi}(k, t) j_0(kr) k^2 dk = -\frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(k, t) \frac{\exp(ikr)}{r} k dk. \quad (\text{B.12})$$

Comme pour les cas 1D et 2D, on retrouve :

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ik \hat{\varphi}(k, t) G_{3D}(k, r) dk, \quad (\text{B.13})$$

avec ici  $G_{3D}(k, r) = -\exp(ik|r|)/4\pi r$ .

Enfin, on utilisera la transformée de Fourier pour la dépendance temporelle :

$$\bar{\varphi}(k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(k, t) \exp(i\omega t) dt, \quad (\text{B.14})$$

et la transformée de Fourier inverse :

$$\hat{\varphi}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}(k, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (\text{B.15})$$

## B.1 Cas d'une source impulsionnelle

On considère dans cette partie une impulsion de masse avec  $f(t) = \delta(t)$ . On a donc  $Q(r, t) = Q(r)\delta(t)$ . Cela revient à imposer à  $p(t = 0, r) = \rho_0 c_0^2 Q(r)$  et  $\mathbf{v}(t = 0, r) = 0$ . L'application des transformées spatiales et temporelles permet d'écrire directement :

$$\bar{\varphi}(k, \omega) = \frac{\hat{Q}(k)}{k_\omega^2 + ik_\omega k^2 \alpha - k^2}, \quad (\text{B.16})$$

avec  $k_\omega = \omega/c_0$ . On se ramène à  $\hat{\varphi}$  par :

$$\hat{\varphi}(k, t) = \frac{\hat{Q}(k)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{k_\omega^2 + ik_\omega k^2 \alpha - k^2} d\omega = \frac{c_0 \hat{Q}(k)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-ik_\omega c_0 t)}{k_\omega^2 + ik_\omega k^2 \alpha - k^2} dk_\omega. \quad (\text{B.17})$$

Cette dernière intégrale présente deux pôles situés en :

$$k_\omega^\pm = -i\frac{k^2 \alpha}{2} \pm k \sqrt{1 - \frac{k^2 \alpha^2}{4}}. \quad (\text{B.18})$$

Pour  $k\alpha < 2$ , ces deux pôles ont la même partie imaginaire négative et ont des parties réelles opposées. Pour  $k\alpha \geq 2$ , les deux pôles ont une partie réelle nulle et une partie imaginaire qui tend vers  $-\infty$  pour l'un et vers 0 pour l'autre. Dans tous les cas, les deux pôles ont une partie imaginaire négative.

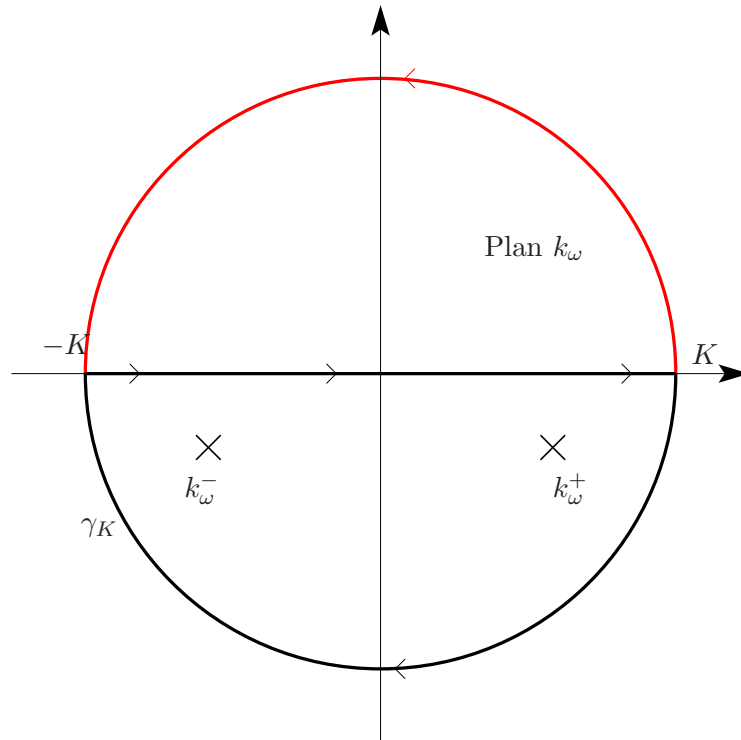


Figure B.1 – Chemin d'intégration suivi pour calculer l'intégrale dans l'équation B.17.

Pour calculer l'intégrale pour  $t < 0$ , on utilise le chemin d'intégration représenté en rouge sur la figure B.1. On a alors :

$$\int_{-K}^K + \int_{\gamma_K} = 0. \quad (\text{B.19})$$

L'intégrale sur le chemin  $\gamma_K$  donne :

$$\int_{\gamma_K} \frac{\exp(-ik_\omega c_0 t)}{k_\omega^2 - k^2} dk_\omega = \int_0^\pi \frac{\exp[-iK \exp(i\theta) c_0 t]}{k_\omega^2 - K^2 \exp(2i\theta)} iK \exp(i\theta) d\theta. \quad (\text{B.20})$$

Cette intégrale tend donc vers 0 lorsque  $K$  tend vers l'infini et  $\hat{\varphi}(k, t)$  est nul pour  $t < 0$ .

Pour calculer l'intégrale pour  $t > 0$ , on utilise le chemin d'intégration représenté en noir sur la figure B.1. On a alors :

$$\int_{-K}^K + \int_{\gamma_K} = 2\pi i \left[ \frac{\exp(-ik_\omega^+ c_0 t)}{k_\omega^+ - k_\omega^-} + \frac{\exp(-ik_\omega^- c_0 t)}{k_\omega^- - k_\omega^+} \right] \quad (\text{B.21})$$

L'intégrale sur le chemin  $\gamma_K$  donne :

$$\int_{\gamma_K} \frac{\exp(-ik_\omega c_0 t)}{k_\omega^2 - k^2} dk_\omega = \int_0^{-\pi} \frac{\exp[-iK \exp(i\theta) c_0 t]}{k_\omega^2 - K^2 \exp(2i\theta)} iK \exp(i\theta) d\theta. \quad (\text{B.22})$$

Cette intégrale tend donc vers 0 lorsque  $K$  tend vers l'infini.

Finalement, on a donc :

$$\hat{\varphi}(k, t) = ic_0 \hat{Q}(k) \left[ \frac{\exp(-ik_\omega^+ c_0 t)}{k_\omega^+ - k_\omega^-} + \frac{\exp(-ik_\omega^- c_0 t)}{k_\omega^- - k_\omega^+} \right] H(t), \quad (\text{B.23})$$

où  $H(t)$  est la fonction d'Heaviside. On fait maintenant tendre  $\alpha$  vers 0. On obtient alors  $k_\omega^- = -k$  et  $k_\omega^+ = k$ . D'où, on a :

$$\hat{\varphi}(k, t) = \frac{ic_0 \hat{Q}(k)}{2k} [\exp(-ikc_0 t) - \exp(ikc_0 t)] H(t). \quad (\text{B.24})$$

Pour revenir à  $\varphi(r, t)$ , il suffit de faire une transformée spatiale inverse. On considérera tout d'abord la pression. On a alors :

$$\hat{p}(k, t) = -\rho_0 \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} = \rho_0 c_0^2 \frac{\hat{Q}(k)}{2} [\exp(ikc_0 t) + \exp(-ikc_0 t)] H(t). \quad (\text{B.25})$$

On obtient finalement pour la pression en  $n$  dimensions :

$$p(r, t) = p^-(r, t) + p^+(r, t), \quad (\text{B.26})$$

avec :

$$p^-(r, t) = \frac{\rho_0 c_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ik \hat{Q}(k) G_{nD}(k, r) \exp(+ikc_0 t) dk H(t), \quad (\text{B.27})$$

$$p^+(r, t) = \frac{\rho_0 c_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ik \hat{Q}(k) G_{nD}(k, r) \exp(-ikc_0 t) dk H(t). \quad (\text{B.28})$$

La première contribution  $p^-(r, t)$  correspond à l'onde rétrograde et la seconde  $p^+(r, t)$  à l'onde progressive. Si on s'intéresse plus particulièrement à l'onde progressive, on peut noter que l'intégrale sur les nombres d'onde correspond à la sommation d'ondes planes en 1D, cylindriques en 2D et sphériques en 3D à partir d'une source située en  $r = 0$  avec un débit massique donné par  $ik \hat{Q}(k)$ . En particulier, on retrouve en 1D et en 3D :

$$p_{1D}^+(r, t) = \frac{\rho_0 c_0^2}{2} Q(r - c_0 t) H(t), \quad (\text{B.29})$$

$$p_{3D}^+(r, t) = \frac{\rho_0 c_0^2}{2r} (r - c_0 t) Q(r - c_0 t) H(t). \quad (\text{B.30})$$

Dans le cas 2D, il est plus compliqué d'avoir une solution simple dans le domaine temporel du fait que la fonction de Green en 2D est une fonction de Hankel.

Notons que si l'on fait le changement de variable  $\omega = kc_0$  dans l'équation B.28 pour l'onde progressive, on peut écrire :

$$p^+(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(r, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega H(t), \quad (\text{B.31})$$

où on a noté :

$$p(r, \omega) = \rho_0 c_0 i k_\omega \hat{Q}(k_\omega) G_{nD}(k_\omega, r). \quad (\text{B.32})$$

Une impulsion de masse permet donc de mettre un terme source de type monopolaire avec une puissance de source directement liée à la distribution spatiale en champ lointain. La fonction d'Heaviside, quant à elle, est liée à la causalité.

## B.2 Cas d'une source harmonique

### B.2.1 Cas général

On considère le cas d'une source de masse émettant à une pulsation  $\omega_0$  avec  $f(t) = \exp(-i\omega_0 t)$ . On obtient cette fois-ci :

$$\bar{\varphi}(k, \omega) = 2\pi \frac{\hat{Q}(k)}{\omega^2/c_0^2 + ik^2\alpha\omega/c_0 - k^2} \delta(\omega - \omega_0). \quad (\text{B.33})$$

On a alors :

$$\hat{\varphi}(k, t) = \hat{Q}(k) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(\omega - \omega_0)}{\omega^2/c_0^2 + ik^2\alpha\omega/c_0 - k^2} \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (\text{B.34})$$

Il vient ainsi :

$$\hat{\varphi}(k, t) = \frac{\hat{Q}(k)}{k_0^2 - k^2(1 - i\alpha k_0)} \exp(-i\omega_0 t), \quad (\text{B.35})$$

avec  $k_0 = \omega_0/c_0$ . On obtient donc pour la pression :

$$\hat{p}(k, t) = i\rho_0 c_0 k_0 \frac{\hat{Q}(k)}{k_0^2 - k^2(1 - i\alpha k_0)} \exp(-i\omega_0 t). \quad (\text{B.36})$$

D'où, on a :

$$p(r, t) = i \frac{\rho_0 c_0 k_0}{\pi} \exp(-i\omega_0 t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ik \hat{Q}(k)}{k_0^2 - k^2(1 - i\alpha k_0)} G_{nD}(k, r) dk. \quad (\text{B.37})$$

On a donc là encore deux pôles pour l'intégrande situés en :

$$k^\pm = \pm k_0 \sqrt{\frac{1 + i\alpha k_0}{1 + \alpha^2 k_0^2}}. \quad (\text{B.38})$$

On voudrait utiliser la même méthode que pour l'équation B.17. En effet, on a la propriété :

$$G_{nD}(|K| \exp(i\theta), r) \xrightarrow{|K| \rightarrow \infty} 0 \text{ pour } \theta \in ]0; \pi[. \quad (\text{B.39})$$

Cependant,  $\hat{Q}(k)$  n'est pas forcément borné dans le demi-plan supérieur. En effet, si  $\hat{Q}(k)$  était borné dans le demi-plan supérieur, alors puisque que  $\hat{Q}(k)$  est symétrique,  $\hat{Q}(k)$  serait borné sur tout le plan complexe et serait alors constant ; dans ce cas,  $Q(r)$  correspondrait à un dirac. Ainsi, par exemple, dans le cas d'une source gaussienne  $Q(r) = \exp(-r^2/B^2)/(\sqrt{\pi}B)^n$ , on a  $\hat{Q}(k) = \exp(-k^2B^2/4)$ . On a donc :

$$\hat{Q}(|K| \exp(i\theta)) = \exp(-\cos(2\theta)|K|^2B^2/4) \exp(-i \sin(2\theta)|K|^2B^2/4), \quad (\text{B.40})$$

et  $\hat{Q}(|K| \exp(i\theta))$  est borné dans le demi-plan supérieur seulement pour  $\theta \in ]0; \pi/4[$  et  $\theta \in ]3\pi/4; \pi[$ .

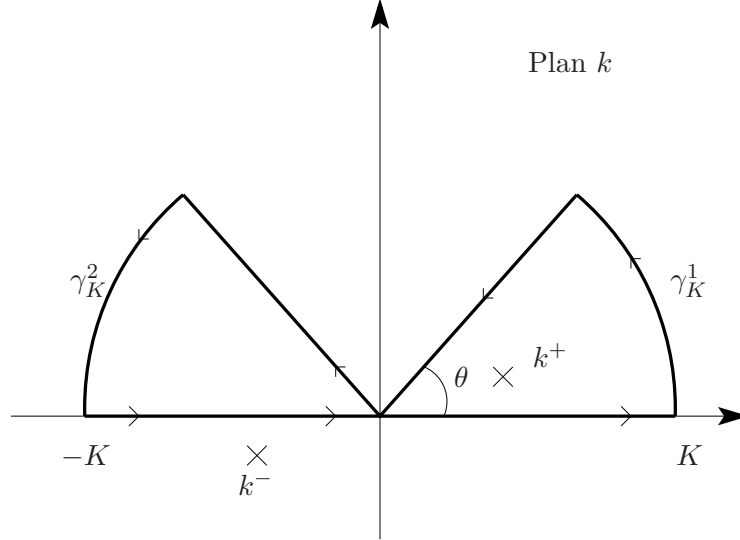


Figure B.2 – Chemin d'intégration suivi pour calculer l'intégrale dans l'équation B.35.

Il est à noter que si  $\hat{Q}(k)$  est borné dans la direction  $\theta$ , il est aussi borné dans la direction  $\pi - \theta$ . En effet, on a :

$$|\hat{Q}(|K| \exp[i(\pi - \theta)])| = |\hat{Q}(-|K| \exp[-i\theta])| = |\hat{Q}(|K| \exp[-i\theta])|, \quad (\text{B.41})$$

puisque  $\hat{Q}(k)$  est symétrique. Ensuite, on a

$$|\hat{Q}(|K| \exp[i(\pi - \theta)])| = |\hat{Q}(|K| \exp[-i\theta])| = |\hat{Q}(\overline{|K| \exp[i\theta]})| = |\overline{\hat{Q}(|K| \exp[i\theta])}|, \quad (\text{B.42})$$

puisque  $\hat{Q}(\bar{k}) = \overline{\hat{Q}(k)}$ . D'où, on retrouve  $|\hat{Q}(|K| \exp[i(\pi - \theta)])| = |\hat{Q}(|K| \exp[i\theta])|$ .

Néanmoins, dans le cas où  $\hat{Q}(k)$  est borné sur un secteur angulaire dans le demi-plan supérieur, on peut utiliser un chemin d'intégration comme celui présenté sur la figure B.2.

On obtient alors à la limite  $\alpha$  tend vers 0 et  $K$  tend vers l'infini :

$$p(r, t) = i\rho_0 c_0 k_0 \hat{Q}(k_0) G_{nD}(k_0, r) \exp(-i\omega_0 t) + p_{CP}(r, t), \quad (\text{B.43})$$

avec :

$$p_{CP}(r, t) = i \frac{\rho_0 c_0 k_0}{\pi} \exp(-i\omega_0 t) \left[ \int_0^{+\infty e^{i\theta}} \frac{ik \hat{Q}(k)}{k_0^2 - k^2} G_{nD}(k, r) dk - \int_0^{+\infty e^{i(\pi-\theta)}} \frac{ik \hat{Q}(k)}{k_0^2 - k^2} G_{nD}(k, r) dk \right]. \quad (\text{B.44})$$

On peut aussi réécrire cette équation sous la forme :

$$p_{CP}(r, t) = i \frac{\rho_0 c_0 k_0}{\pi} \exp(-i\omega_0 t) \left[ \int_0^{+\infty} \frac{ik\hat{Q}[k \exp(i\theta)]}{k_0^2 - k^2 \exp(2i\theta)} G_{nD}[k \exp(i\theta), r] dk \exp(2i\theta) + \int_{-\infty}^0 \frac{ik\hat{Q}[k \exp(-i\theta)]}{k_0^2 - k^2 \exp(-2i\theta)} G_{nD}[k \exp(-i\theta), r] dk \exp(-2i\theta) \right]. \quad (\text{B.45})$$

Dans ces deux intégrales, le terme  $G_{nD}$  est une fonction qui décroît exponentiellement avec  $kr$ . Les autres facteurs dans l'intégrale, étant bornés à l'infini par construction, le terme  $p_{CP}(r, t)$  représente donc le champ proche. En champ lointain, on a alors simplement :

$$p(r, t) = \rho_0 c_0 ik_0 \hat{Q}(k_0) G_{nD}(k_0, r) \exp(-i\omega_0 t). \quad (\text{B.46})$$

### B.2.2 Cas d'une distribution gaussienne

Dans cette partie, on s'intéresse au cas d'une distribution gaussienne pour le terme de source massique :

$$Q_B(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}B)^n} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}|^2}{B^2}\right) \exp(-i\omega_0 t), \quad (\text{B.47})$$

où  $n$  correspond à la dimension de l'espace considérée. Quand le paramètre  $B$  tend vers 0, on retrouve le cas d'un terme source de type Dirac :

$$Q_0(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_0 t). \quad (\text{B.48})$$

Le but est de calculer dans ce cas-là particulier le champ de pression en champ proche dû à la distribution spatiale du terme source.

Pour cela, on définit enfin la fonction erreur complémentaire erfc par :

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-u^2) du, \quad (\text{B.49})$$

et on rappelle les valeurs aux limites de cette fonction :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{erfc}(x) = 0, \quad (\text{B.50})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{erfc}(x) = 2. \quad (\text{B.51})$$

### Champ libre en 1D

Dans le cas 1D, on se place sur une droite dont l'abscisse des points est notée  $r$ . Le potentiel acoustique s'écrit alors en champ libre à l'aide de la fonction de Green avec l'intégrale sur la droite réelle  $D$  :

$$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}B} \int_D G_{1D}(k_0, r - r') \exp\left(-\frac{|r'|^2}{B^2}\right) dr'. \quad (\text{B.52})$$

On a donc :

$$\phi(r) = -\frac{i}{2\sqrt{\pi}k_0B} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik_0|r - r'|) \exp\left(-\frac{|r'|^2}{B^2}\right) dr'. \quad (\text{B.53})$$

On fait le changement de variable  $R = r' - r$  :

$$\phi(r) = -\frac{i}{2\sqrt{\pi}k_0B} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_0|R|) \exp\left(-\frac{|R + r|^2}{B^2}\right) dR. \quad (\text{B.54})$$

On décompose alors  $\phi(r) = \phi_-(r) + \phi_+(r)$  avec :

$$\phi_-(r) = -\frac{i}{2\sqrt{\pi}k_0B} \exp\left(-\frac{r^2}{B^2}\right) \int_0^\infty \exp\left(ik_0R - \frac{R^2 + 2Rr}{B^2}\right) dR, \quad (\text{B.55})$$

$$\phi_+(r) = -\frac{i}{2\sqrt{\pi}k_0B} \exp\left(-\frac{r^2}{B^2}\right) \int_{-\infty}^0 \exp\left(-ik_0R - \frac{R^2 + 2Rr}{B^2}\right) dR. \quad (\text{B.56})$$

Pour  $\phi_+(r)$ , on fait le changement de variable  $R = -R$  et on a :

$$\phi_+(r) = -\frac{i}{2\sqrt{\pi}k_0B} \exp\left(-\frac{r^2}{B^2}\right) \int_0^{+\infty} \exp\left(ik_0R - \frac{R^2 - 2Rr}{B^2}\right) dR. \quad (\text{B.57})$$

On fait ensuite le changement de variable  $U = R/B - (r/B + ik_0B/2)$  et on obtient :

$$\phi_+(r) = -\frac{i}{2k_0} \exp\left(-\frac{k_0^2B^2}{4}\right) \frac{\exp(ik_0r)}{2} \operatorname{erfc}\left(-\frac{ik_0B}{2} - \frac{r}{B}\right). \quad (\text{B.58})$$

De même pour  $\phi_-(r)$ , on fait le changement de variable  $U = R/B + (r/B - ik_0B/2)$  et on a :

$$\phi_-(r) = -\frac{i}{2k_0} \exp\left(-\frac{k_0^2B^2}{4}\right) \frac{\exp(-ik_0r)}{2} \operatorname{erfc}\left(-\frac{ik_0B}{2} + \frac{r}{B}\right). \quad (\text{B.59})$$

Le potentiel acoustique peut donc se décomposer en deux parties. La première partie  $\phi_-$  correspond au champ convergeant vers la source alors que la seconde partie  $\phi_+$  représente le champ divergent. On a ensuite :

$$\phi(r) = \exp\left(-\frac{k_0^2B^2}{4}\right) \frac{1}{2} \left[ G_{1D}(k_0, r) \operatorname{erfc}\left(-\frac{ik_0B}{2} - \frac{r}{B}\right) - \overline{G_{1D}(k_0, r)} \operatorname{erfc}\left(-\frac{ik_0B}{2} + \frac{r}{B}\right) \right]. \quad (\text{B.60})$$

En champ lointain  $r \gg B$ , la solution se simplifie. Le potentiel  $\phi_-$  tend vers 0 et on a alors :

$$\phi(r) = G_{1D}(k_0, r) \exp\left(-\frac{k_0^2B^2}{4}\right). \quad (\text{B.61})$$

On retrouve le cas d'une source ponctuelle à un facteur près. Lorsque B tend vers zéro, on a bien le cas du monopôle.

### Champ libre en 3D

On se place maintenant dans un repère  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Le potentiel acoustique s'écrit en champ libre avec l'intégrale sur tout l'espace :

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi^{5/2}B^3} \int_V \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}'|^2}{B^2}\right) d\mathbf{r}'. \quad (\text{B.62})$$

On fait un changement de variables en posant  $\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$  :

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi^{5/2}B^3} \int_V \frac{\exp(ik_0|\mathbf{R}|)}{|\mathbf{R}|} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} + \mathbf{R}|^2}{B^2}\right) d\mathbf{R}. \quad (\text{B.63})$$

Pour calculer l'intégrale, on se place en coordonnées sphériques. Le problème étant de symétrie sphérique, la pression ne dépend que de la distance à l'origine. On résout le problème en se plaçant sur l'axe des ordonnées. On arrive ainsi à :

$$\phi(z) = -\frac{1}{4\pi^{5/2}B^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \exp(ik_0\rho) \exp\left(-\frac{\rho^2 + z^2 + 2z\rho \cos\phi}{B^2}\right) \rho \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi. \quad (\text{B.64})$$

On peut ensuite se ramener à :

$$\begin{aligned} \phi(z) &= -\frac{1}{2\pi^{3/2}B^3} \exp\left(-\frac{z^2}{B^2}\right) \int_0^\infty \rho \exp(ik_0\rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{B^2}\right) \int_0^\pi \sin\phi \exp\left(-\frac{2z\rho \cos\phi}{B^2}\right) d\phi \, d\rho, \\ &= -\frac{1}{4\pi^{3/2}Bz} \exp\left(-\frac{z^2}{B^2}\right) \int_0^\infty \exp(ik_0\rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{B^2}\right) \left[\exp\left(-\frac{2z\rho \cos\phi}{B^2}\right)\right]_0^\pi d\rho. \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

On peut ensuite écrire  $\phi(z) = \phi_+(z) - \phi_-(z)$ . On a noté :

$$\phi_-(z) = -\frac{1}{4\pi^{3/2}Bz} \exp\left(-\frac{z^2}{B^2}\right) \int_0^\infty \exp\left(ik_0\rho - \frac{\rho^2 + 2z\rho}{B^2}\right) d\rho, \quad (\text{B.66})$$

$$\phi_+(z) = -\frac{1}{4\pi^{3/2}Bz} \exp\left(-\frac{z^2}{B^2}\right) \int_0^\infty \exp\left(ik_0\rho - \frac{\rho^2 - 2z\rho}{B^2}\right) d\rho. \quad (\text{B.67})$$

Pour  $\phi_-(z)$ , on fait le changement de variable  $u = \rho/B + z/B - ik_0B/2$  et on obtient :

$$\phi_-(z) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-ik_0z)}{2z} \exp\left(-\frac{k_0^2B^2}{4}\right) \operatorname{erfc}\left(-\frac{ik_0B}{2} + \frac{z}{B}\right). \quad (\text{B.68})$$

Pour  $\phi_+(z)$ , on fait le changement de variable  $u = \rho/B - z/B + ik_0B/2$  et on obtient :

$$\phi_+(z) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik_0z)}{2z} \exp\left(-\frac{k_0^2B^2}{4}\right) \operatorname{erfc}\left(-\frac{ik_0B}{2} - \frac{z}{B}\right). \quad (\text{B.69})$$

On retrouve de façon quasi-identique le potentiel acoustique créé en 1D. On peut noter ici :

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \exp\left(-\frac{k_0^2B^2}{4}\right) \frac{1}{2} \left[ G_{3D}(k_0, r) \operatorname{erfc}\left(-\frac{ik_0B}{2} - \frac{r}{B}\right) \right. \\ &\quad \left. - \overline{G_{3D}(k_0, r)} \operatorname{erfc}\left(-\frac{ik_0B}{2} + \frac{r}{B}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

### Champ libre en 2D

En 2D, le problème n'est pas exactement le même. Pour ce cas-là, le potentiel acoustique s'écrit en champ libre à l'aide de la fonction de Green en 2D avec l'intégrale sur un plan où  $y$  est constant :

$$\phi(x, y, z) = -\frac{i}{4\pi B^2} \int_S \mathbf{H}_0^{(1)}(k_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}'|^2}{B^2}\right) d\mathbf{r}'. \quad (\text{B.71})$$

On fait le changement de variables  $\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$  :

$$\phi(x, y, z) = -\frac{i}{4\pi B^2} \int_S \mathbf{H}_0^{(1)}(k_0|\mathbf{R}|) \exp\left(-\frac{|\mathbf{R} + \mathbf{r}|^2}{B^2}\right) d\mathbf{R}. \quad (\text{B.72})$$



On passe en coordonnées polaires et on a :

$$\phi(x, y, z) = -\frac{i}{4\pi B^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}(k_0\rho) \exp\left(-\frac{(x + \rho \cos \theta)^2 + (y + \rho \sin \theta)^2}{B^2}\right) \rho d\theta d\rho. \quad (\text{B.73})$$

La même méthode que précédemment permet ensuite d'écrire le potentiel acoustique sous la forme d'une seule intégrale dépendant de la distance à l'axe de révolution  $r$  :

$$\phi(r) = -\frac{i}{2B^2} \exp\left(-\frac{r^2}{B^2}\right) \int_0^\infty H_0^{(1)}(k_0\rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{B^2}\right) I_0\left(\frac{2r\rho}{B^2}\right) \rho d\rho. \quad (\text{B.74})$$

Pour cela, on a utilisé la représentation intégrale de la fonction de Bessel modifiée de la première espèce :

$$I_0(x) = J_0(ix) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-x \cos \theta) d\theta. \quad (\text{B.75})$$

En décomposant la fonction de Hankel, en somme d'une fonction de Bessel de premier et de second ordre ( $H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + iY_0(x)$ ), on arrive à :

$$\begin{aligned} \phi(r) = -\frac{i}{2B^2} \exp\left(-\frac{r^2}{B^2}\right) \left[ \int_0^\infty J_0(k_0\rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{B^2}\right) I_0\left(\frac{2r\rho}{B^2}\right) \rho d\rho \right. \\ \left. + i \int_0^\infty Y_0(k_0\rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{B^2}\right) I_0\left(\frac{2r\rho}{B^2}\right) \rho d\rho \right]. \quad (\text{B.76}) \end{aligned}$$

La première intégrale est en fait une transformation de Hankel dont l'expression analytique est connue (Debnath et Bhatta, 2007). Elle provient de la seconde formule de Weber (Watson, 1966) valable pour  $\text{Re } \nu > -1$  :

$$\int_0^\infty J_\nu(k_0\rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{B^2}\right) I_\nu\left(\frac{2r\rho}{B^2}\right) \rho d\rho = \frac{B^2}{2} \exp\left(-\frac{k_0^2 B^2}{4}\right) \exp\left(\frac{r^2}{B^2}\right) J_\nu(k_0 r).$$

La seconde intégrale correspond à une transformation en  $Y$ . A partir de la relation de Weber et des relations  $Y_\nu = (J_\nu \cos \nu\pi - J_{-\nu})/\sin \nu\pi$  et  $K_\nu = \pi(I_\nu - I_{-\nu})/2 \sin \nu\pi$ , on peut montrer que pour  $|\text{Re } \nu| < 1$  on obtient la même formule pour la transformation en  $Y$  que pour la transformation de Hankel avec un terme intégral supplémentaire.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Y_\nu(k_0\rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{B^2}\right) I_\nu\left(\frac{2r\rho}{B^2}\right) \rho d\rho = \frac{B^2}{2} \exp\left(-\frac{k_0^2 B^2}{4}\right) \exp\left(\frac{r^2}{B^2}\right) Y_\nu(k_0 r) \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty J_{-\nu}(k_0\rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{B^2}\right) K_{-\nu}\left(\frac{2r\rho}{B^2}\right) \rho d\rho. \quad (\text{B.77}) \end{aligned}$$

On peut donc réduire la solution analytique à :

$$\phi(r) = -\frac{i}{4} \left[ \exp\left(-\frac{k_0^2 B^2}{4}\right) H_0^{(1)}(k_0 r) - \psi(r) \right], \quad (\text{B.78})$$

où on a noté :

$$\psi(r) = \frac{4i}{\pi B^2} \exp\left(-\frac{r^2}{B^2}\right) \int_0^\infty J_0(k_0\rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{B^2}\right) K_0\left(\frac{2r\rho}{B^2}\right) \rho d\rho. \quad (\text{B.79})$$

En utilisant le théorème de Plancherel et des tables de transformées de Hankel, on peut montrer :

$$\psi(r) = \frac{2i}{\pi} \exp\left(-\frac{k_0^2 B^2}{4}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{B^2}\right) \int_0^\infty \text{I}_0\left(\frac{k_0 B^2 k}{2}\right) \exp\left(-\frac{k^2 B^2}{4}\right) \frac{B^4}{k^2 B^4 + 4r^2} k \, dk. \quad (\text{B.80})$$

En champ lointain  $r \gg B$ , on a finalement :

$$\psi(r) = \frac{iB^2}{\pi r^2} \exp\left(-\frac{r^2}{B^2}\right). \quad (\text{B.81})$$

Le terme  $\psi(r)$  décroît donc beaucoup plus vite avec la distance que la fonction de Hankel, dont la décroissance correspond à l'inverse de la racine en champ lointain. Par analogie avec le calcul en 3D, on peut identifier le premier terme du potentiel acoustique comme le champ divergent et  $\psi$  avec le champ convergeant vers la source.

On obtient finalement le potentiel acoustique en 2D en champ lointain par la formule :

$$\phi(r) = G_{2\text{D}}(k_0, r) \exp\left(-\frac{k_0^2 B^2}{4}\right). \quad (\text{B.82})$$

### Résumé

Dans les différents cas traités, on a obtenu la relation :

$$\phi(r) = G_{n\text{D}}(k_0, r) \exp\left(-\frac{k_0^2 B^2}{4}\right). \quad (\text{B.83})$$

On rappelle qu'on a la relation  $\hat{Q}(k) = \exp(-k^2 B^2/4)$  pour une distribution de source massique gaussienne. On obtient le champ de pression avec la relation :

$$p(\mathbf{r}, t) = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{B.84})$$

D'où finalement, on a en champ libre pour  $r \gg B$  :

$$p(\mathbf{r}) = ik_0 \rho_0 c_0 \exp\left(-\frac{k_0^2 B^2}{4}\right) G_{n\text{D}}(k_0, r). \quad (\text{B.85})$$

On retrouve bien la relation B.43.

## B.3 Cas général

On peut maintenant généraliser l'équation B.46. On note  $\bar{f}(\omega)$  la transformée de Fourier temporelle de  $f(t)$ . Le champ de pression en champ lointain pour le cas d'une source de masse spatiale est donc donné par :

$$p(r, \omega) = \rho_0 c_0 ik_0 \hat{Q}(k_0) G_{n\text{D}}(k_0, r) \bar{f}(\omega). \quad (\text{B.86})$$

En particulier, on retrouve la solution de l'équation B.32 pour le cas où  $f(t) = \delta(t)$ .



## Annexe C

# Compléments sur la propagation au-dessus de sols plans en conditions homogènes

Dans cette annexe, trois études sont proposées dans le cadre de la propagation en conditions homogènes sur sol plan. Dans la première partie, on considère le cas de la réaction locale et l'étude a pour but d'établir l'équivalence entre la solution analytique de Di et Gilbert (1993) et celle développée par plusieurs auteurs dont notamment Enflo (1986) et Gilbert et Di (2007). La solution de Di et Gilbert est intéressante car elle amène en faisant l'approximation d'incidence rasante à la formule « classique » de Weyl - Van der Pol obtenue notamment par Chien et Soroka (1975). Dans une seconde partie, on montre que la solution analytique obtenue avec une méthode d'expansion modale, proposée par Waxler (2002, 2004), permet de retrouver la formulation d'Enflo et de Gilbert et Di. Dans une troisième partie, on s'intéresse à l'erreur commise en faisant l'approximation de la réaction locale pour les sols semi-infinis. En particulier, on étudie le cas du ballast.

### C.1 Étude de l'équivalence des formulations analytiques d'Enflo et de Di et Gilbert

On s'intéresse au problème de la propagation acoustique en milieu extérieur sur un sol plan avec une impédance de surface  $Z_S$ . On définit l'admittance du sol  $\beta = \rho_0 c_0 / Z_S$  et on suppose que celui-ci est à réaction locale. On rappelle que puisque le sol est un matériau passif, on a  $\text{Re}[\beta] \geq 0$  (Rienstra, 2006).

Le problème étant axisymétrique, on note  $\mathbf{r} = (x, y)$ . La propagation sur sol plan d'un monopôle est alors gouverné par les trois équations suivantes pour la pression  $p$  :

$$(\nabla^2 + k_0^2) \hat{p}(r, z) = \delta(\mathbf{r}) \delta(z - z_S) \quad (\text{C.1})$$

$$\left. \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \right|_{z=0} + ik_S \hat{p}(r, 0) = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left( \frac{\partial}{\partial R} - ik_0 \right) \hat{p}(r, z) = 0 \quad (\text{C.3})$$

On notera aussi  $h = z + z_S$ .

## Préliminaires

### Solution d'Enflo

La solution analytique pour le champ de pression peut être décomposée comme la somme de trois termes différents :

$$\hat{p}(r, z) = \hat{p}_d(r, z) + \hat{p}_r(r, z) + \hat{p}_s(r, z) \quad (\text{C.4})$$

avec :

$$\hat{p}_d(r, z) = -\frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{H}_0^{(1)} \left( \sqrt{k_0^2 - k^2} r \right) \exp[ik(z - z_S)] dk, \quad (\text{C.5})$$

$$\hat{p}_r(r, z) = -\frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{H}_0^{(1)} \left( \sqrt{k_0^2 - k^2} r \right) R(k) \exp[ikh] dk, \quad (\text{C.6})$$

$$\hat{p}_s(r, z) = \frac{1}{2} k_S \text{H}_0^{(1)} \left( \sqrt{k_0^2 - k_S^2} r \right) \exp[-ik_S h] \text{H}(-\text{Im}[k_S]). \quad (\text{C.7})$$

On a noté  $H$  la fonction d'Heaviside et  $R(k)$  le coefficient de réflexion des ondes planes donné par :

$$R(k) = \frac{k - k_S}{k + k_S}. \quad (\text{C.8})$$

On peut remarquer que  $\hat{p}_s$  est donc nul si  $\text{Im}[\beta] > 0$ .

Le terme  $\hat{p}_d$  est appelé onde directe et a une expression analytique simple :

$$\hat{p}_d(r, z) = -\frac{\exp(ik_0 R_1)}{4\pi R_1}. \quad (\text{C.9})$$

Il correspond à l'onde sphérique se propageant à partir de la source en champ libre.

Le terme  $\hat{p}_r$  peut être décomposé en deux termes :

$$\hat{p}_r(r, z) = -\frac{\exp(ik_0 R_2)}{4\pi R_2} + i \frac{k_S}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{H}_0^{(1)} \left( \sqrt{k_0^2 - k^2} r \right) \frac{1}{k + k_S} \exp[ikh] dk. \quad (\text{C.10})$$

Il peut être vu comme une onde réfléchie, du fait de la présence du coefficient de réflexion des ondes planes dans l'intégrale.

### Solution de Di et Gilbert

Dans l'expression exacte obtenue par Di et Gilbert pour le champ de pression  $\hat{p}$ , le terme onde de surface n'apparaît pas. Pourtant, l'onde de surface existe toujours. On rappelle ci-dessous la solution exacte de Di et Gilbert :

$$\hat{p}(r, z) = -\frac{\exp(ik_0 R_1)}{4\pi R_1} - \frac{\exp(ik_0 R_2)}{4\pi R_2} + 2k_S \int_0^{+\infty} \exp(-k_S q) \frac{\exp(ik_0 R_q)}{4\pi R_q} dq, \quad (\text{C.11})$$

avec  $R_q = \sqrt{r^2 + (h + iq)^2}$ .

On retrouve bien directement l'onde directe et la partie de l'onde réfléchie correspondant à la solution en champ libre pour la source image. La différence entre les deux formulations se trouve sur le terme intégrale de l'onde réfléchie. On veut ainsi montrer que :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \exp(-k_S q) \frac{\exp(ik_0 R_q)}{R_q} dq &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{H}_0^{(1)} \left( \sqrt{k_0^2 - k^2} r \right) \frac{1}{k + k_S} \exp[ikh] dk \\ &+ \pi \text{H}_0^{(1)} \left( \sqrt{k_0^2 - k_S^2} r \right) \exp[-ik_S h] \text{H}(-\text{Im}[k_S]). \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

**Définition de la fonction  $R_q$** 

On s'intéresse donc à l'intégrale  $F$  définie par :

$$F = \int_0^{+\infty} \exp(-k_S q) \frac{\exp(ik_0 R_q)}{R_q} dq. \quad (\text{C.13})$$

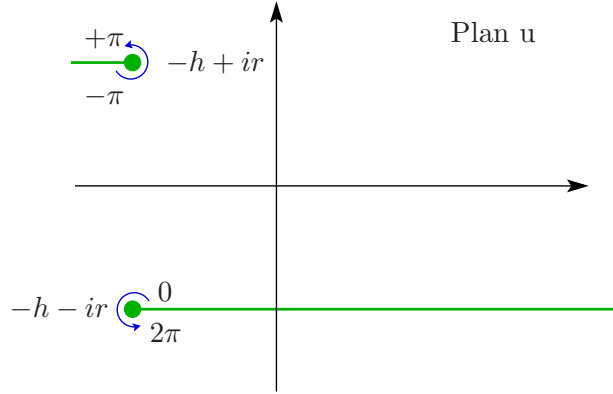


Figure C.1 – Plan  $u$  avec les branches de coupures choisies.

On fait tout d'abord le changement de variable  $u = iq$  et on se ramène à :

$$F = -i \int_0^{+i\infty} \exp(ik_S u) \frac{\exp(ik_0 R_u)}{R_u} dq, \quad (\text{C.14})$$

avec  $R_u = \sqrt{r^2 + (h + u)^2}$ . Le but consiste maintenant à revenir à une intégrale sur des réels. Pour cela, on va définir deux contours d'intégration différents selon le signe de  $\text{Im}[k_s]$ .

On définit aussi la fonction  $R_u$  qui est une fonction multiforme dans le plan complexe. Pour cela, on réécrit le terme  $R_u$  pour faire apparaître le produit de deux fonctions racines :

$$R_u = \sqrt{u - u_+} \sqrt{u - u_-}, \quad (\text{C.15})$$

où on a noté  $u_{\pm} = -h \pm ir$ . On utilise la détermination principale pour la première fonction racine :

$$\sqrt{u - u_+} = \sqrt{|u - u_+|} \exp(i\phi_+/2), \quad \phi_+ \in [-\pi, \pi[. \quad (\text{C.16})$$

Pour la seconde fonction racine, on utilise la détermination suivante :

$$\sqrt{u - u_-} = \sqrt{|u - u_-|} \exp(i\phi_-/2), \quad \phi_- \in [0, 2\pi[. \quad (\text{C.17})$$

L'intégrande est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} - ]-\infty + ir, -h + ir] \cup [-h - ir, +\infty - ir[$ . On notera  $\phi_u = (\phi_- + \phi_+)/2$ .

On peut remarquer que dans les zones notées 1, 2 et 4 sur la figure C.2, on a  $\phi_u \geq 0$ . Ce n'est pas le cas dans la zone 3.

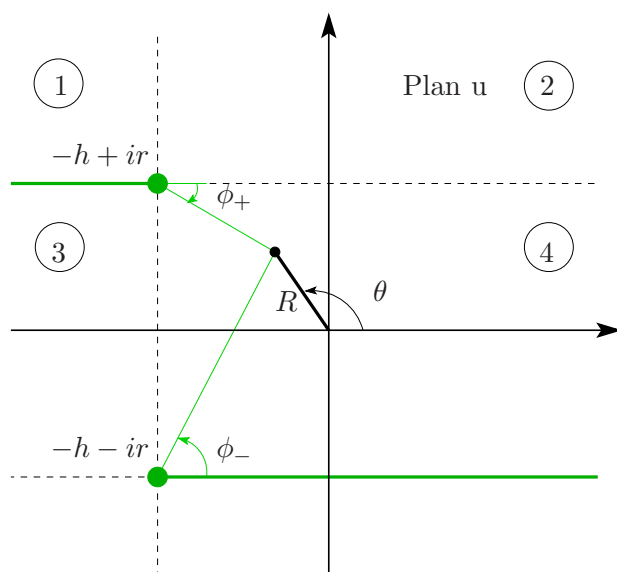


Figure C.2 – Définition des notations pour la fonction  $R_u$ .

C.1.1 Cas où  $\text{Im}[k_s] > 0$

On se place dans le plan  $u$  et on utilise le chemin d'intégration décrit sur la figure C.3. Dans ce premier cas, on a avec le théorème de Jordan :

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_R} = 0. \tag{C.18}$$

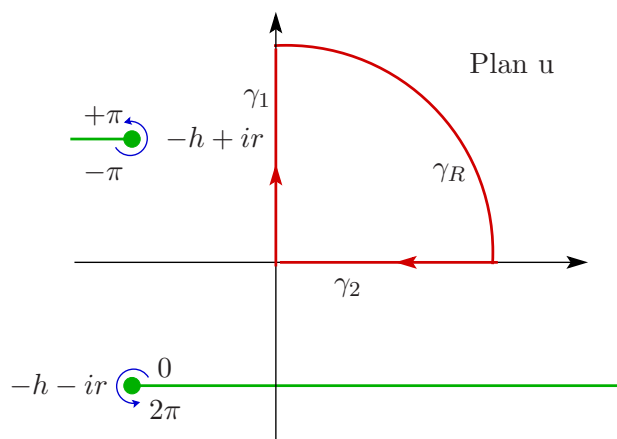


Figure C.3 – Chemin d'intégration suivi dans le cas où  $\text{Im}[k_s] > 0$ .

**Calcul sur  $\gamma_R$** 

L'intégration selon le chemin  $\gamma_R$  tend vers 0 quand  $R$  tend vers 0. En effet, on fait le changement de variable  $u = R \exp(i\theta)$  avec  $\theta \in ]0, \pi/2[$ . D'où, on a :

$$\int_{\gamma_R} = -i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(ik_S R \exp(i\theta)) \frac{\exp(ik_0 |R_u| \exp(i\phi_u))}{|R_u| \exp(i\phi_u)} i R \exp(i\theta) d\theta. \quad (\text{C.19})$$

On a donc après simplification :

$$\int_{\gamma_R} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(ik_S R \exp(i\theta) + ik_0 |R_u| \exp(i\phi_u)) \exp(i\theta - i\phi_u) \frac{R}{|R_u|} d\theta. \quad (\text{C.20})$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [ik_S R \exp(i\theta) + ik_0 |R_u| \exp(i\phi_u)] &= -\operatorname{Re}[k_S] R \sin \theta - \operatorname{Im}[k_S] R \cos \theta - k_0 |R_u| \sin \phi_u \leq 0, \\ &\text{pour } \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

La partie réelle de l'argument de l'exponentielle est toujours négatif sur l'intervalle d'intégration et tend en valeur absolue vers l'infini quand  $R$  tend vers l'infini. Donc, le terme sur le contour  $\gamma_R$  tend vers 0 quand  $R$  tend vers l'infini.

**Résultat pour F**

L'intégration sur  $\gamma_R$  tendant vers 0 quand  $R$  vers l'infini, on a directement la relation :

$$F = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_1} = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_2} = -i \int_0^{\infty} \exp(ik_S u) \frac{\exp(ik_0 R_u)}{R_u} dq. \quad (\text{C.22})$$

On utilise alors la relation (Eq 6.616.3 dans Gradshteyn et Ryzhik (1980)) :

$$\frac{\exp(ik_0 \sqrt{r^2 + x^2})}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx) \operatorname{H}_0^1 \left( \sqrt{k_0^2 - k^2} r \right) dk. \quad (\text{C.23})$$

On a alors en inversant les intégrales :

$$F = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{H}_0^{(1)} \left( \sqrt{k_0^2 - k^2} r \right) \exp(ikh) \int_0^{+\infty} \exp(i[k + k_S]u) du dk. \quad (\text{C.24})$$

On utilise enfin la relation :

$$\int_0^{+\infty} \exp(i[k + k_S]u) du = i \frac{1}{k + k_S}. \quad (\text{C.25})$$

On a alors pour F :

$$F = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{H}_0^{(1)} \left( \sqrt{k_0^2 - k^2} r \right) \exp(ikh) \frac{1}{k + k_S} dk. \quad (\text{C.26})$$

On retrouve bien dans ce cas la formulation d'Enflo.



### C.1.2 Cas où $\text{Im}[k_s] < 0$

Dans le cas où  $\text{Im}[k_s] < 0$ , on ne peut plus utiliser le chemin d'intégration utilisé dans la partie précédente : en effet, du fait de la différence de signe sur  $\text{Im}[k_s]$ , on ne peut plus assurer que l'intégration selon  $\gamma_R$  est nulle. Dans ce cas, on utilise un chemin d'intégration plus complexe défini à la figure C.4 du fait que l'on croise une branche de coupure. On note  $\epsilon$  le rayon du demi-cercle contournant le point  $u+$ .

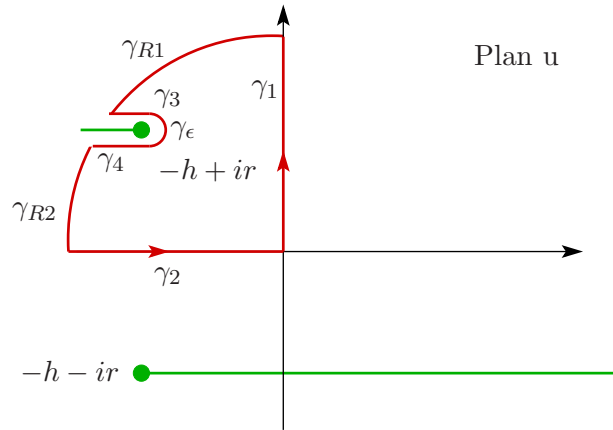


Figure C.4 – Chemin d'intégration suivi dans le cas où  $\text{Im}[k_s] < 0$ .

#### Calcul sur $\gamma_{R1}$

Le calcul sur  $\gamma_{R1}$  se fait avec la même méthode que celle utilisée dans la partie précédente pour  $\gamma_R$ . Avec les mêmes arguments, l'intégration sur le contour sur  $\gamma_{R1}$  tend vers 0 quand  $R$  tend vers l'infini. En effet, on a :

$$\text{Re}[ik_S R \exp(i\theta) + ik_0 |R_u| \exp(i\phi_u)] = -\text{Re}[k_S] R \sin \theta - \text{Im}[k_S] R \cos \theta - k_0 |R_u| \sin \phi_u \leq 0, \quad \text{pour } \theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi - \arcsin\left(\frac{r}{R}\right) \right[. \quad (\text{C.27})$$

De même lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, l'intégration sur  $\gamma_\epsilon$  est nulle. Il reste donc à évaluer les intégrales sur  $\gamma_{R2}$ ,  $\gamma_3$  et  $\gamma_4$ .

#### Calcul sur $\gamma_{R2}$

On se propose de montrer que l'intégrale sur  $\gamma_{R2}$  tend aussi vers 0 quand  $R$  tend vers l'infini. Tout d'abord on peut noter :

$$\text{pour } \theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi - \arcsin\left(\frac{r}{R}\right) \right[, \quad \begin{cases} -\pi + \arctan\left(\frac{r}{R-h}\right) \geq \phi_+ \geq -\pi, \\ +\pi - \arctan\left(\frac{r}{R-h}\right) \geq \phi_- \geq +\pi - \arctan\left(\frac{2r}{\sqrt{R^2 - rR} - h}\right). \end{cases}$$

On a donc :

$$\text{pour } \theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi - \arcsin\left(\frac{r}{R}\right) \right[, \quad 0 \geq \phi_u \geq -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2r}{\sqrt{R^2 - rR} - h}\right). \quad (\text{C.28})$$

D'où on a :

$$\text{pour } \theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi - \arcsin\left(\frac{r}{R}\right) \right[ , 0 \geq \sin \phi_u \geq \min \sin \phi_u, \quad (\text{C.29})$$

avec la propriété :

$$\min \sin \phi_u \underset{R \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{r}{R}. \quad (\text{C.30})$$

On a alors :

$$\text{pour } \theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi - \arcsin\left(\frac{r}{R}\right) \right[ , -k_0 |R_u| \sin \phi_u \leq -k_0 r |R_u| \min \sin \phi_u. \quad (\text{C.31})$$

Comme  $|R_u|$  est équivalent à  $R$  à l'infini, la partie réelle de l'argument dans l'exponentiel reste bornée. Enfin, comme l'intervalle d'intégration tend vers une mesure nulle quand  $R$  tend vers l'infini, le terme sur le contour  $\gamma_{R2}$  tend vers 0 lorsque  $R$  tend vers l'infini.

À ce niveau du calcul, on a donc :

$$F = \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\gamma_1} = - \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\gamma_2} - \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}. \quad (\text{C.32})$$

### Calcul sur $\gamma_3$ et $\gamma_4$

On calcule maintenant les contributions dues aux branches de coupure. Pour la première, on a :

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\gamma_3} = -i \int_{-\infty + ir}^{-h + ir} \exp(ik_S u) \frac{\exp(ik_0 R_u)}{R_u} du, \quad (\text{C.33})$$

avec  $R_u = \sqrt{|u - u_+|} \sqrt{|u - u_-|} \exp(i\phi_u)$ . Sur la branche choisie, on a immédiatement  $\phi_+ = \pi$ . On a alors pour  $\phi_u$  :

$$\phi_u = \frac{\pi + \phi_-}{2} = \pi - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2r}{h - ir - u}\right). \quad (\text{C.34})$$

On a alors en faisant le changement de variable  $v = h - ir - u$  :

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\gamma_3} = i \exp(-k_S r) \exp(-ik_S h) \int_0^{+\infty} \exp(-ik_S v) \frac{\exp(-ik_0 R_v)}{R_v} dv, \quad (\text{C.35})$$

avec l'expression suivante pour  $R_v$  :

$$R_v = \sqrt{v} \sqrt{v^2 + 4r^2} \exp\left[-\frac{i}{2} \arctan\left(\frac{2r}{v}\right)\right]. \quad (\text{C.36})$$

La fonction  $R_v$  peut être simplifiée en utilisant l'égalité :

$$\arctan(x) = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1 + ix}{1 - ix}\right). \quad (\text{C.37})$$

On se retrouve alors avec :

$$R_v = (v^2 - 2irv)^{1/2}. \quad (\text{C.38})$$

L'expression est quasiment la même sur  $\gamma_4$  mise à part que sur la branche  $\phi_+ = -\pi$ . On a donc la même expression à un facteur moins près :

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\gamma_4} = i \exp(-k_S r) \exp(-ik_S h) \int_0^{+\infty} \exp(-ik_S v) \frac{\exp(ik_0 R_v)}{R_v} dv. \quad (\text{C.39})$$

On a donc :

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = 2i \exp(-k_S r) \exp(-ik_S h) \int_0^{+\infty} \exp(ik_S v) \frac{\cos(k_0 R v)}{R v} dv. \quad (\text{C.40})$$

On veut montrer que les contributions des branches de coupure donnent exactement l'onde de surface ; il reste donc à montrer que :

$$G = \int_0^{+\infty} \exp(-ik_S v) \frac{\cos(k_0(v^2 - 2irv)^{1/2})}{(v^2 - 2irv)^{1/2}} dv = i \frac{\pi}{2} \exp(k_S r) H_0^{(1)} \left( \sqrt{k_0^2 - k_S^2} r \right). \quad (\text{C.41})$$

On fait le changement de variable  $u = v - ir$  pour se ramener à :

$$G = \exp(k_S r) \int_{-ir}^{+\infty - ir} \exp(-ik_S u) \frac{\cos(k_0(u^2 + r^2)^{1/2})}{(u^2 + r^2)^{1/2}} du. \quad (\text{C.42})$$

On réalise ensuite le changement de variable  $u = iu/r$  et on obtient :

$$G = -i \exp(k_S r) \int_1^{1+i\infty} \exp(-k_S r u) \frac{\cos(k_0 r(1 - u^2)^{1/2})}{(1 - u^2)^{1/2}} du. \quad (\text{C.43})$$

On veut finalement montrer que :

$$K = \int_1^{1+i\infty} \exp(-k_S r u) \frac{\cos(k_0 r(1 - u^2)^{1/2})}{(1 - u^2)^{1/2}} du = -\frac{\pi}{2} H_0^{(1)} \left( \sqrt{k_0^2 - k_S^2} r \right). \quad (\text{C.44})$$

Pour cela, on montre que le terme  $K$  vérifie l'équation aux dérivées :

$$\frac{d^2 K}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dK}{dr} + (k_0^2 - k_S^2) K = 0. \quad (\text{C.45})$$

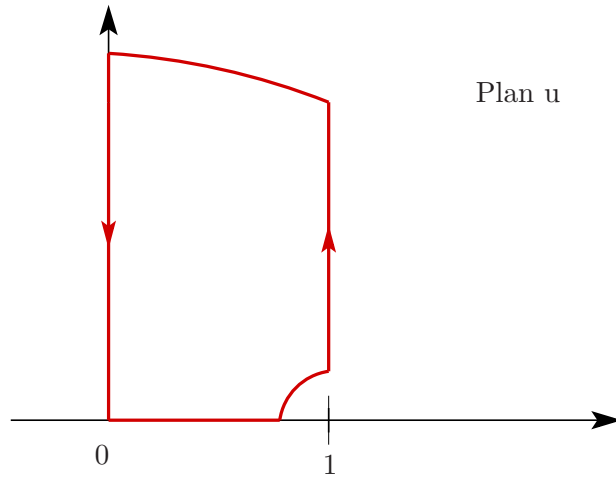


Figure C.5 – Plan  $u$  avec le chemin d'intégration choisi pour  $K$ .

On découpe l'intégration en 3 parties comme défini sur la figure C.5 :

$$K = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^{1+iR} = \lim_{R \rightarrow +\infty} - \int_0^1 + \int_0^{iR} + \int_{iR}^{1+iR}. \quad (\text{C.46})$$

La dernière intégrale tend vers 0 quand  $R$  tend vers l'infini avec les mêmes arguments que ceux utilisés pour  $\gamma_R$ . On va montrer que la somme des deux termes restants vérifie bien l'équation C.45.

Tout d'abord, on s'intéresse à :

$$K_1 = - \int_0^1 \exp(-k_S r u) \frac{\cos(k_0 r (1 - u^2)^{1/2})}{(1 - u^2)^{1/2}} du. \quad (\text{C.47})$$

On fait le changement de variable  $u = \sin \theta$  et on obtient :

$$K_1 = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-k_S r \sin \theta) \cos(k_0 r \cos \theta) d\theta. \quad (\text{C.48})$$

En calculant les dérivées première et seconde de  $K_1$ , on peut montrer qu'on arrive à la relation :

$$\frac{d^2 K_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dK_1}{dr} + (k_0^2 - k_S^2) K_1 = \frac{k_S}{r} \cos k_0 r. \quad (\text{C.49})$$

Il reste donc la dernière intégrale à évaluer :

$$K_2 = \int_0^{i\infty} \exp(-k_S r u) \frac{\cos(k_0 r (1 - u^2)^{1/2})}{(1 - u^2)^{1/2}} du. \quad (\text{C.50})$$

On fait le changement de variable  $u = iv$  pour arriver à :

$$K_2 = i \int_0^{+\infty} \exp(-ik_S r v) \frac{\cos(k_0 r (1 + v^2)^{1/2})}{(1 + v^2)^{1/2}} dv. \quad (\text{C.51})$$

On fait ensuite le changement de variable  $v = \sinh t$  et on arrive à :

$$K_2 = i \int_0^{+\infty} \exp(-ik_S r \sinh t) \cos(k_0 r \cosh t) dt. \quad (\text{C.52})$$

Comme pour  $K_1$ , le calcul des dérivées première et seconde amène à l'équation suivante, vérifiée par  $K_2$  :

$$\frac{d^2 K_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dK_2}{dr} + (k_0^2 - k_S^2) K_2 = -\frac{k_S}{r} \cos k_0 r. \quad (\text{C.53})$$

On a donc démontré que :

$$\frac{d^2 K}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dK}{dr} + (k_0^2 - k_S^2) K = 0. \quad (\text{C.54})$$

On peut donc écrire que :

$$K = A J_0 \left( \sqrt{k_0^2 - k_S^2} r \right) + B Y_0 \left( \sqrt{k_0^2 - k_S^2} r \right), \quad (\text{C.55})$$

où  $J_0$  et  $Y_0$  sont les fonctions de Bessel d'ordre zéro et de premier et second type et  $A$  et  $B$  sont des coefficients à déterminer. Pour  $k_0 = 0$ , on retrouve avec la définition de  $K$  à l'équation C.47 la fonction de Hankel avec l'écriture intégrale (Petiau, 1955) :

$$H_0^{(1)}(x) = -\frac{2}{\pi} \int_1^{1+i\infty} \frac{\exp(ixu)}{(1 - u^2)^{1/2}} du. \quad (\text{C.56})$$

On a donc bien :

$$K = -\frac{\pi}{2} H_0^{(1)} \left( \sqrt{k_0^2 - k_S^2} r \right). \quad (\text{C.57})$$

### Calcul sur $\gamma_2$

Sur le contour  $\gamma_2$ , on arrive à l'expression :

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\gamma_2} = -i \int_{-\infty}^0 \exp(ik_S u) \frac{\exp(ik_0 R u)}{R u} dq. \quad (\text{C.58})$$

Comme dans la première partie, on utilise la transformation du terme exponentiel en fonction de Hankel pour se ramener à l'expression :

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\gamma_2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{H}_0^{(1)} \left( \sqrt{k_0^2 - k^2 r} \right) \exp(ikh) \int_{-\infty}^0 \exp(i[k + k_S]u) du dk. \quad (\text{C.59})$$

On utilise enfin la relation :

$$\int_{-\infty}^0 \exp(i[k + k_S]u) du = -i \frac{1}{k + k_S}. \quad (\text{C.60})$$

On alors :

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{\gamma_2} = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{H}_0^{(1)} \left( \sqrt{k_0^2 - k^2 r} \right) \exp(ikh) \frac{1}{k + k_S} dk. \quad (\text{C.61})$$

On a donc montré dans cette partie que :

$$F = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{H}_0^{(1)} \left( \sqrt{k_0^2 - k^2 r} \right) \exp(ikh) \frac{1}{k + k_S} dk + \pi \text{H}_0^{(1)} \left( \sqrt{k_0^2 - k_S^2 r} \right) \exp[-ik_S h]. \quad (\text{C.62})$$

On retrouve bien la formulation d'Enflo dans ce cas aussi.

### Conclusion

Dans cette section de l'annexe, on a montré que la formulation de Di et Gilbert et d'Enflo sont équivalentes. Cela met en évidence que dans la formulation de Di et Gilbert, l'onde de surface existe bien avec la condition donnée par Enflo. Enfin, la formule de Weyl - Van der Pol qui peut être tirée de l'approximation de Di et Gilbert contient aussi l'onde de surface avec pour condition que les parties réelle et imaginaire de l'impédance soient positives.

## C.2 Solution analytique avec la méthode d'expansion modale

Dans cette partie, on calcule la solution analytique obtenue avec la méthode d'expansion modale proposée par Waxler (2002). Dans le cas général où la célérité du son  $c(z)$  dépend de l'altitude, l'équation de propagation à résoudre est :

$$(\Delta + k(z)^2) \hat{p}(r, z) = \delta(\mathbf{r}) \delta(z - z_S), \quad (\text{C.63})$$

où  $k(z) = \omega/c(z)$ . L'expansion modale de  $\hat{p}(r, z)$  s'écrit :

$$\hat{p}(r, z) = -\frac{i}{4} \sum_{j=0}^N \psi_j(z_S) \psi_j(z) \text{H}_0^{(1)}(k_j r) - \frac{i}{4} \int_0^{+\infty} \text{H}_0^{(1)} \left( \sqrt{k_0^2 - k^2 r} \right) \varphi_k(z_S) \varphi_k(z) dk, \quad (\text{C.64})$$

où  $N$  est le nombre de modes et où  $\varphi_k$  sont les fonctions propres continues. Les paramètres  $\psi_j(z)$  et  $k_j$  sont respectivement la fonction modale et le nombre d'onde horizontal du mode  $j$ . Les fonctions propres continues correspondent aux solutions de l'équation qui oscillent à l'infini alors que les fonctions modales décroissent exponentiellement à l'infini.

### Calcul des fonctions propres continues

On se place désormais dans le cas d'une atmosphère homogène : le nombre d'onde vaut  $k(z) = k_0$ . Dans ce cas, les fonctions propres continues satisfont les relations :

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2\right) \varphi_k(z) = 0, \quad (\text{C.65})$$

$$\varphi'_k(0) = -ik_S \varphi_k(0). \quad (\text{C.66})$$

avec la normalisation suivante

$$\varphi_k(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kz + \theta) \text{ pour } z \text{ suffisamment grand.} \quad (\text{C.67})$$

Dans notre cas, on cherche les solutions de C.65 sous la forme :

$$\varphi_k(z) = A \cos(kz) + B \sin(kz). \quad (\text{C.68})$$

La condition C.66 permet d'écrire :

$$\varphi_k(z) = A \left[ \cos(kz) - i \frac{k_S}{k} \sin(kz) \right]. \quad (\text{C.69})$$

En posant  $\cos \theta = k / \sqrt{k^2 - k_S^2}$  et  $\sin \theta = ik_S / \sqrt{k^2 - k_S^2}$ , on arrive avec la condition de normalisation :

$$A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_S^2}}. \quad (\text{C.70})$$

On trouve la valeur suivante pour les fonctions propres continues :

$$\varphi_k(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{k^2 - k_S^2}} [k \cos(kz) - ik_S \sin(kz)]. \quad (\text{C.71})$$

### Calcul des modes propres

Les fonctions propres suivent les deux équations suivantes :

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k(z)^2 - k_j^2\right) \psi_j(z) = 0, \quad (\text{C.72})$$

$$\psi'_j(0) = -ik_S \psi_j(0), \quad (\text{C.73})$$

avec la condition de normalisation :

$$\int_0^{+\infty} \psi_j(z)^2 dz = 1. \quad (\text{C.74})$$

On cherche une solution de C.72 sous la forme d'exponentielles :

$$\psi_j(z) = A \exp\left(i\sqrt{k_0^2 - k_j^2}z\right) + B \exp\left(-i\sqrt{k_0^2 - k_j^2}z\right). \quad (\text{C.75})$$

La condition de normalisation impose  $A = 0$  ou  $B = 0$ . Les deux choix amènent à un seul mode avec :

$$\psi_S = \sqrt{2ik_S} \exp(-ik_S z). \quad (\text{C.76})$$

Ce mode a donc pour nombre d'onde horizontal  $\sqrt{k_0^2 - k_S^2}$  et pour nombre d'onde vertical  $-k_S$ . La décroissance exponentielle à l'infini dans la direction  $z$  impose que  $\text{Im}[k_S] < 0$  soit que  $\text{Im}[\beta] < 0$ . La décroissance à l'infini dans la direction  $x$  est vérifiée parce qu'on a la relation dite de passivité  $\text{Re}[\beta] > 0$ . Le calcul montre ensuite que l'on retrouve exactement l'équation pour l'onde de surface C.7.

Dans le cas plus général d'une atmosphère stratifiée, en rangeant les modes par nombre d'onde horizontal décroissant, le mode correspondant à  $j = 0$  présente des caractéristiques similaires à l'onde de surface obtenue en condition homogène (Waxler *et al.*, 2006).

## Conclusion

Avec la méthode de l'expansion modale, la solution analytique pour la pression en conditions homogènes est donnée par :

$$\hat{p}(r, z) = \hat{p}_s(r, z) - \frac{i}{2\pi} \int_0^{+\infty} H_0^{(1)} \left( \sqrt{k_0^2 - k^2} r \right) \frac{[k \cos(kz) - ik_S \sin(kz)][k \cos(kz_S) - ik_S \sin(kz_S)]}{k^2 - k_S^2} dk. \quad (\text{C.77})$$

On peut montrer qu'en décomposant le terme intégral sur les nombres d'onde verticaux positifs et négatifs, on retrouve bien les intégrales définissant les ondes directes et réfléchies des équations C.5 et C.6. La solution obtenue correspond alors à la solution de Enflo.

## C.3 Réaction locale - Réaction étendue

Dans cette partie, on étudie sur deux cas simples l'erreur commise sur le champ de pression en réalisant l'approximation de la réaction locale. On propose aussi une autre approximation, nommée « réaction approximativement locale », qui permet de prendre en compte au premier ordre la propagation dans le matériau poreux.

### C.3.1 Hypothèses

On considère la propagation d'ondes acoustiques à partir d'une source monopolaire située dans un milieu fluide occupant le demi-espace supérieur ( $z > 0$ ). Le demi-espace inférieur ( $z < 0$ ) est occupé par un milieu poreux à support rigide. On note  $p_1$  et  $p_2$  les pressions dans le milieu fluide et dans le milieu poreux,  $k_1$  et  $k_2$  les nombres d'onde,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  les masses volumiques et  $c_1$  et  $c_2$  les vitesses du son. La vitesse du son dans le milieu poreux est reliée au nombre d'onde  $k_2$  par la relation  $c_2 = \omega/k_2$  avec  $\omega = k_1 c_1$  la pulsation. La masse volumique  $\rho_2$  est donnée par  $\rho_2 = \rho_1 c_1 Z_n / c_2$  où  $Z_n$  est l'impédance caractéristique normalisée du sol. On notera  $\phi$  la porosité du sol. L'impédance normalisée à la surface est alors donnée par  $Z_S = Z_n / \phi$ . On utilisera aussi l'admittance normalisée  $\beta_S = 1/Z_S$  et le nombre d'onde  $k_S = k_0 \beta_S$ . On définit  $\rho'_2 = \rho_1 c_1 Z_S / c_2 = \rho_2 / \phi$ . On remarquera que le rapport des masses volumiques  $m$  est égal à  $m = \rho'_2 / \rho_1 = k_2 / k_S$ . De même l'indice de réfraction  $n$  peut être écrit comme le rapport de deux nombres d'onde  $n = k_2 / k_1$ . La source est située en  $(x_S, y_S, z_S)$  avec  $x_S = y_S = 0$  m. Le problème considéré est représenté sur la figure C.6.

L'équation d'Helmoltz inhomogène s'écrit :

$$\Delta p_1 + k_1^2 p_1 = \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_S), \quad (\text{C.78})$$

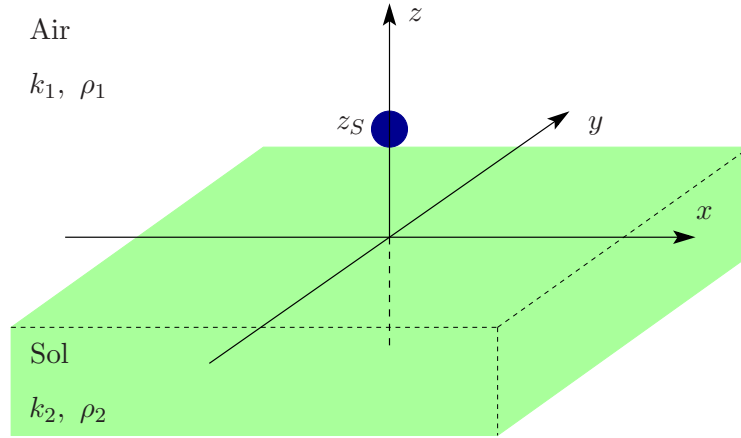


Figure C.6 – Schéma du problème considéré.

On s'intéresse à la transformée de Fourier en espace dans les directions  $x$  et  $y$  de la pression :

$$\hat{p}_1(k_{1x}, k_{1y}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x, y, z) \exp(-ik_{1x}x - ik_{1y}y) dx dy. \quad (\text{C.79})$$

On suppose que l'équation d'Helmholtz peut aussi être écrite dans le sol :

$$\Delta p_2 + k_2^2 p_2 = 0. \quad (\text{C.80})$$

On utilise la continuité de la pression et de la vitesse normale à l'interface ainsi que la condition de saut et de continuité de la pression au niveau de la source :

$$\hat{p}_1(k_{1x}, k_{1y}, 0) = \hat{p}_2(k_{2x}, k_{2y}, 0), \quad (\text{C.81})$$

$$\hat{v}_{1z}(k_{1x}, k_{1y}, 0) = \hat{v}_{2z}(k_{2x}, k_{2y}, 0) \phi, \quad (\text{C.82})$$

$$\hat{p}_1(k_{1x}, k_{1y}, z_S^+) = \hat{p}_1(k_{1x}, k_{1y}, z_S^-), \quad (\text{C.83})$$

$$\frac{\partial \hat{p}_1}{\partial z}(k_{1x}, k_{1y}, z_S^+) - \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial z}(k_{1x}, k_{1y}, z_S^-) = 1. \quad (\text{C.84})$$

La condition de continuité sur la vitesse peut être réécrite :

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial z}(k_{1x}, k_{1y}, 0) = \frac{\phi}{\rho_2} \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial z}(k_{2x}, k_{2y}, 0) = \frac{1}{\rho_2'} \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial z}(k_{2x}, k_{2y}, 0). \quad (\text{C.85})$$

Le terme  $\hat{p}_1$  est alors donné par : (Di et Gilbert, 1993)

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{2ik_{1z}} [\exp(ik_{1z}|z - z_S|) + R(k_{1z}) \exp(ik_{1z}(z + z_S))], \quad (\text{C.86})$$

avec  $k_{1z}^2 = k_1^2 - k_{1x}^2 - k_{1y}^2$ . Le coefficient de réflexion  $R$  correspond au coefficient de réflexion des ondes planes et est donné par : (Di et Gilbert, 1993)

$$R(k_{1z}) = \frac{\rho_2' k_{1z} - \rho_1 k_{2z}}{\rho_2' k_{1z} + \rho_1 k_{2z}}, \quad (\text{C.87})$$

où  $k_{2z}$  est définie de façon analogue à  $k_{1z}$ .



### C.3.2 Coefficients de réflexion

L'idée est ensuite d'éliminer le terme  $k_{2z}$  du coefficient de réflexion dans l'équation C.87. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées :

- cas de la réaction locale : on approxime  $k_{2z}$  par  $k_2$  (Di et Gilbert, 1993; Salomons, 2001). Le coefficient de réflexion peut alors s'écrire :

$$R(k_{1z}) = \frac{k_{1z} - k_S}{k_{1z} + k_S} = 1 - 2\frac{k_S}{k_{1z} + k_S}. \quad (\text{C.88})$$

Cela revient à considérer la condition limite d'impédance classique. On remarquera que le coefficient de réflexion présente un pôle situé en  $k_{1z} = -k_S$ .

- cas de la réaction étendue : on utilise la loi de Snell-Descartes  $k_{2z}^2 - k_2^2 = k_{1z}^2 - k_1^2$ . Le coefficient de réflexion s'écrit alors : (Di et Gilbert, 1993)

$$R(k_{1z}) = \frac{\rho'_2 k_{1z} - \rho_1 \sqrt{(k_2^2 - k_1^2) + k_{1z}^2}}{\rho'_2 k_{1z} + \rho_1 \sqrt{(k_2^2 - k_1^2) + k_{1z}^2}} = \frac{\frac{k_2}{k_S} k_{1z} - \sqrt{(k_2^2 - k_1^2) + k_{1z}^2}}{\frac{k_2}{k_S} k_{1z} + \sqrt{(k_2^2 - k_1^2) + k_{1z}^2}}. \quad (\text{C.89})$$

La solution analytique implique le calcul d'une double intégrale (Di et Gilbert, 1993), ce qui peut se révéler coûteux en temps de calcul. Le coefficient de réflexion présente un pôle situé en :

$$k_{1z} = -k_S \sqrt{\frac{k_2^2 - k_1^2}{k_2^2 - k_S^2}} = -k_S \sqrt{\frac{1 - 1/n^2}{1 - 1/m^2}} \quad (\text{C.90})$$

Dans le cas où  $|n| \gg 1$  et  $|m| \gg 1$ , soit  $|k_2| \gg |k_1|$  et  $|k_2| \gg |k_S|$ , on retrouve le pôle obtenu dans le cas de la réaction locale.

- cas de la réaction approximativement locale : c'est le cas considéré ci-dessous.

### C.3.3 Réaction approximativement locale

On considère ici que  $k_{2z}$  est proche de  $k_2$ . On approxime alors  $k_{2z}^2 - k_2^2 \approx 2k_2(k_{2z} - k_2)$ . On obtient donc avec la loi de Snell-Descartes :

$$k_{2z} = \frac{k_{1z}^2}{2k_2} - \frac{k_1^2}{2k_2} + k_2. \quad (\text{C.91})$$

Pour estimer le degré d'approximation avec la formule précédente, on écrit  $k_{1z} = k_1 \cos \theta$  et  $k_{2z} = k_2 \cos \theta'$ . Un schéma du problème est proposé sur la figure C.7. L'approximation de la réaction locale revient à écrire  $k_{2z} = k_2$ , d'où on a  $\sin \theta' = 0$ ; on retrouve que l'approximation de la réaction locale revient à une propagation dans le sol selon la direction normale à l'interface air-sol. Dans le cas réaction étendue, la relation de Snell-Descartes donne la relation  $\sin \theta' = \sin \theta/n$ . Avec l'approximation  $k_{2z}^2 - k_2^2 \approx 2k_2(k_{2z} - k_2)$ , on obtient la relation :

$$\sin \theta' = \frac{2}{n} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (\text{C.92})$$

ce qui correspond bien au cas de la réaction étendue pour les petits angles  $\theta$ .

Dans ce cas, on obtient le coefficient de réflexion :

$$R(k_{1z}) = -\frac{k_{1z}^2 - 2\frac{\rho'_2}{\rho_1} k_2 k_{1z} + (2k_2^2 - k_1^2)}{k_{1z}^2 + 2\frac{\rho'_2}{\rho_1} k_2 k_{1z} + (2k_2^2 - k_1^2)} = -\frac{k_{1z}^2 - 2\frac{k_2^2}{k_S} k_{1z} + (2k_2^2 - k_1^2)}{k_{1z}^2 + 2\frac{k_2^2}{k_S} k_{1z} + (2k_2^2 - k_1^2)}. \quad (\text{C.93})$$

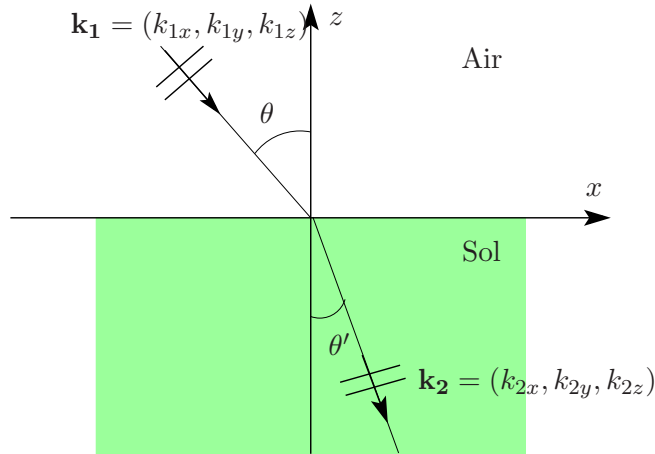


Figure C.7 – Schéma de transmission d'une onde plane dans un sol semi-infini.

Celui-ci peut s'écrire :

$$R(k_{1z}) = -\frac{(k_{1z} - k_+)(k_{1z} - k_-)}{(k_{1z} + k_+)(k_{1z} + k_-)}, \quad (\text{C.94})$$

avec les nombres d'onde :

$$k_{\pm} = \frac{k_2^2}{k_S} \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{2k_S^2}{k_2^2} + \frac{k_S^2 k_1^2}{k_2^2 k_2^2} \right)^{1/2} \right] = k_S m^2 \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{2}{m^2} + \frac{1}{m^2 n^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (\text{C.95})$$

On obtient donc deux pôles pour le coefficient de réflexion. On a donc un pôle supplémentaire par rapport aux cas vus ci-dessus. Si l'on considère que  $|m| \gg 1$  et  $|n| \gg 1$  soit que  $|k_S/k_2| \ll 1$  et  $|k_1/k_2| \ll 1$ , on obtient deux valeurs plus simples pour les nombres d'onde. La première correspond à  $k_- = k_S$ , qui est liée au pôle présent dans le coefficient de réflexion dans le cas de la réaction locale. Le second correspond à  $k_+ = 2k_2^2/k_S = 2k_S m^2$ . Notons que ce nombre d'onde tend en valeur absolue vers l'infini quand  $m$  tend vers l'infini.

Pour la suite du calcul, le coefficient de réflexion est décomposé en éléments simples :

$$R(k_{1z}) = A + \frac{B}{k_{1z} + k_+} + \frac{C}{k_{1z} + k_-}. \quad (\text{C.96})$$

On trouve :

$$A = -1, \quad (\text{C.97})$$

$$B = -2 \frac{(k_- + k_+)k_+}{k_- - k_+}, \quad (\text{C.98})$$

$$C = +2 \frac{(k_- + k_+)k_-}{k_- - k_+}. \quad (\text{C.99})$$

Ensuite, on écrit :

$$R(k_{1z}) = A + B \int_0^{a_+ \infty} \exp(-k_+ q) \exp(-k_{1z} q) dq + C \int_0^{a_- \infty} \exp(-k_- q) \exp(-k_{1z} q) dq, \quad (\text{C.100})$$

avec  $a_{\pm} = \text{sign}[\text{Re}[k_{\pm}]]$ .

Une transformée de Fourier inverse permet ensuite d'écrire la pression comme :

$$p_1 = -\frac{\exp(ik_1 R_1)}{4\pi R_1} + \frac{\exp(ik_1 R_2)}{4\pi R_2} + 2\frac{(k_- + k_+)k_+}{k_- - k_+} \int_0^{a+\infty} \exp(-k_+ q) \frac{\exp(ik_1 R_q)}{4\pi R_q} dq - 2\frac{(k_- + k_+)k_-}{k_- - k_+} \int_0^{a-\infty} \exp(-k_- q) \frac{\exp(ik_1 R_q)}{4\pi R_q} dq \quad (\text{C.101})$$

où  $R_1 = \sqrt{x^2 + (z - z_S)^2}$  est la distance source - récepteur,  $R_2 = \sqrt{x^2 + (z + z_S)^2}$  est la distance source image-récepteur et avec  $R_q = \sqrt{x^2 + (z + z_S + iq)^2}$ .

On peut ainsi voir que par rapport à la formule de Di et Gilbert (1993) pour la propagation acoustique à longue distance sur un sol à réaction locale, on apporte l'information sur le nombre d'onde dans le sol. Notons là encore que si  $|m|$  tend vers l'infini, on retrouve le coefficient de réflexion  $R(k_{1z})$  obtenu dans le cas réaction locale.

### C.3.4 Autres formules pour le cas de la réaction étendue

Des modifications simples de la formule obtenue dans le cas de la réaction locale pour une application dans le cas étendu ont été proposées dans la littérature. La première consiste à modifier l'impédance en suivant Rudnick (1947) :

$$Z_\chi = Z_S / \sqrt{1 - k_1/k_2 \sin \theta_0}, \quad (\text{C.102})$$

avec  $\sin \theta_0 = r/R_2$  et  $\theta_0$  qui correspond à l'angle d'incidence.

La seconde méthode approchée consiste à modifier l'impédance de telle sorte que le pôle du coefficient de réflexion pour le cas réaction locale soit égal à celui obtenu dans le cas réaction étendue. Cela revient à avoir une impédance équivalente :

$$Z_{eq} = Z_S \sqrt{\frac{k_2^2 - k_S^2}{k_2^2 - k_0^2}}. \quad (\text{C.103})$$

Ce choix peut être validé (Allard et Henry, 2006) car la solution analytique obtenue par Brekhovskikh et Godin (1992) en incidence rasante pour le cas de la réaction étendue correspond à celle obtenue dans le cas de la réaction locale en remplaçant l'impédance  $Z_S$  par l'impédance équivalente  $Z_{eq}$  sous l'hypothèse que  $|m| \gg 1$ . L'intérêt principal de cette approximation est que l'impédance équivalente ne dépend pas de l'angle d'incidence et donc que l'implémentation dans la condition limite d'impédance dans le domaine temporel est directe.

### C.3.5 Comparaison des résultats

Dans cette partie, on compare les résultats obtenus avec les formulations :

- réaction locale,
- réaction approximativement locale,
- réaction locale avec correction d'angle,
- réaction locale avec impédance équivalente,
- réaction étendue.

### Modèle à un paramètre

On réalise ici les premières comparaisons en utilisant le modèle de Miki (1990) d'un sol semi-infini. Ce modèle qui ne dépend que d'un paramètre, la résistivité au passage de l'air  $\sigma_0$ , est notamment utilisé pour modéliser les impédances de sols herbeux. On s'intéressera à deux valeurs différentes de la résistivité au passage de l'air égales à 20 kPa.s.m<sup>-2</sup> et à 100 kPa.s.m<sup>-2</sup>. Les valeurs correspondantes des paramètres  $1/|m|^2$  et  $1/|n|^2$  sont représentées sur la figure C.8. On peut voir comme attendu que ces paramètres augmentent avec la résistivité au passage de l'air. Ainsi, pour des sols herbeux classiques (avec  $\sigma_0 > 100$  kPa.s.m<sup>-2</sup>), la réaction locale est une bonne approximation pour les fréquences considérées ici. On peut voir que pour le cas  $\sigma_0 = 20$  kPa.s.m<sup>-2</sup>, les valeurs de  $1/m^2$  et  $1/n^2$  sont proches de 1 pour les hautes fréquences : on peut donc s'attendre à des écarts sur les résultats obtenus avec le cas de la réaction locale et avec le cas de la réaction étendue.

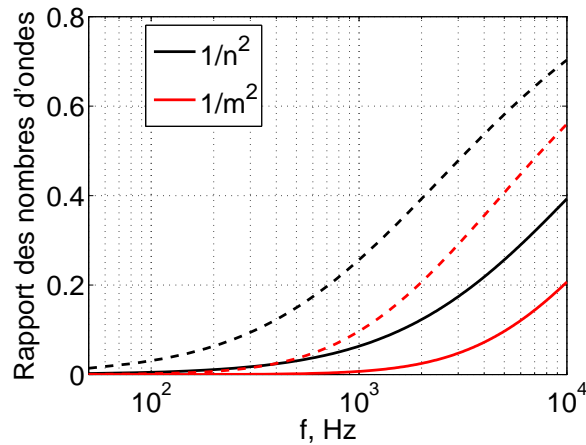


Figure C.8 – Paramètres  $1/|m|^2$  et  $1/|n|^2$  pour le modèle d'impédance de Miki d'un sol semi-infini de résistivité au passage de l'air égale à 20 kPa.s.m<sup>-2</sup> (en tirets) et égale à 100 kPa.s.m<sup>-2</sup> (en traits pleins).

On a représenté sur la figure C.9, les niveaux de pression relatifs au champ libre obtenus avec les différentes approches pour deux récepteurs situés à 1 m de hauteur et à des distances de 10 m et de 100 m de la source. La source est placée à 1 m du sol et la résistivité est de 100 kPa.s.m<sup>-2</sup>. On peut voir que pour le cas à 10 m, on obtient un très bon accord général ; néanmoins, le cas étendu prévoit des extrema moins marqués que le cas local. Cette différence semble augmenter avec la fréquence. Les différentes approches pour modéliser un sol à réaction étendue donnent sensiblement les mêmes résultats. Pour le récepteur à 100 m, on est dans le cas d'une incidence rasante et les résultats des différents calculs concordent. On peut voir pour le cas étendu un pic marqué autour de 1000 Hz ; ce pic est dû à un nombre de points insuffisant pour la discrétisation de la double intégrale intervenant dans la solution analytique de Di et Gilbert.

La même comparaison est réalisée sur la figure C.10 pour une résistivité de 20 kPa.s.m<sup>-2</sup>. Pour le récepteur à 10 m, on peut observer des écarts importants sur les niveaux de pression relatifs au champ libre entre les cas réaction locale et réaction étendue ; ces écarts peuvent atteindre environ 2 dB pour les minima à hautes fréquences. On peut aussi observer que la position des interférences semble se décaler à hautes fréquences entre les deux cas. On peut aussi noter que les différentes approches pour modéliser le cas étendu donnent les mêmes résultats, mis à part l'approche de

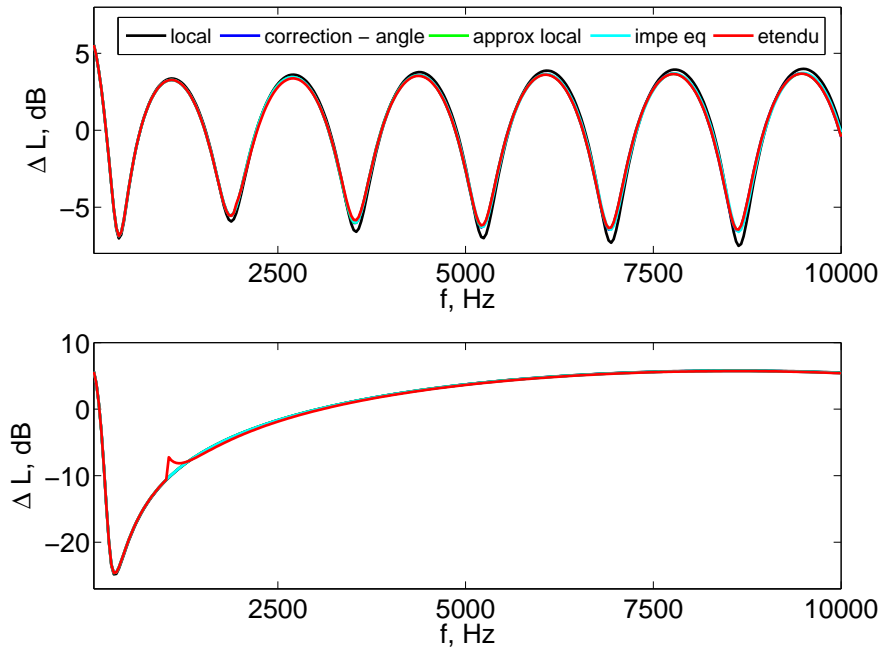


Figure C.9 – Niveaux de pression relatifs au champ libre pour une source placée à 1 m de hauteur et pour un récepteur placé à 1 m de hauteur et à une distance de 10 m (haut) et de 100 m (bas) de la source. Le modèle de Miki d'un sol semi-infini avec une résistivité au passage de l'air égale à  $100 \text{ kPa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$  est considéré.

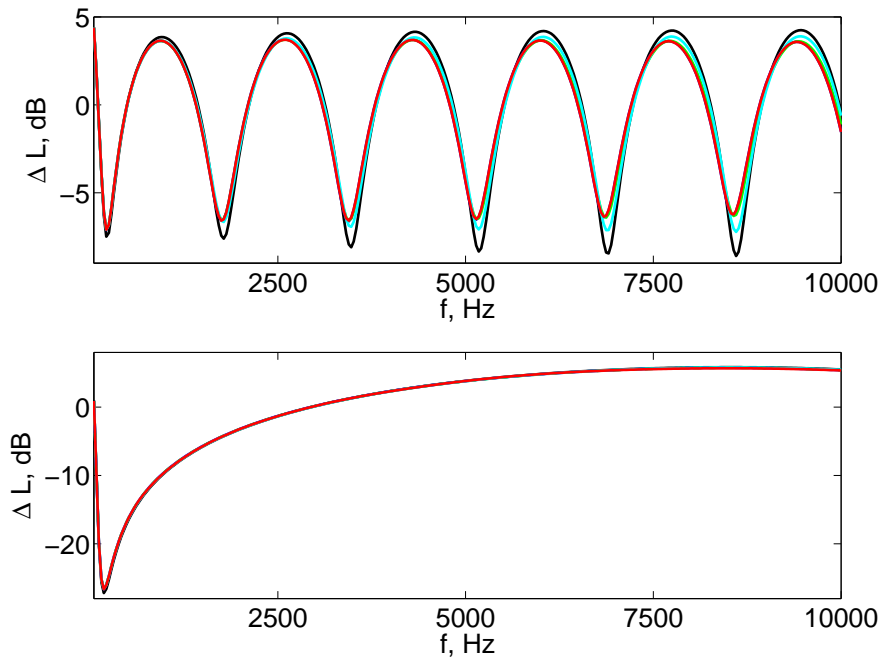


Figure C.10 – Niveaux de pression relatifs au champ libre pour une source placée à 1 m de hauteur et pour un récepteur placé à 1 m de hauteur et à une distance de 10 m (haut) et de 100 m (bas) de la source. Le modèle de Miki d'un sol semi-infini avec une résistivité au passage de l'air égale à  $20 \text{ kPa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$  est considéré.

l'impédance équivalente qui fournit malgré tout une estimation meilleure que la réaction locale. Pour le récepteur à 100 m, toutes les approches donnent le même résultat.

### Cas du ballast

On s'intéressera ici au cas du ballast en prenant le modèle d'impédance proposé par le LCPC (Rouffaud, 2010). Il s'agit du modèle d'Hamet à Bérengier à 3 paramètres (Bérengier *et al.*, 1997). On rappelle qu'on considère le ballast comme un sol semi-infini. Les comparaisons sont réalisées aux récepteurs utilisés pour les mesures effectuées à La Veuve (cf. Sec. 3.5 pour plus de détails). La source considérée a une hauteur de 1 m par rapport au rail, dont l'épaisseur est de 18 cm.

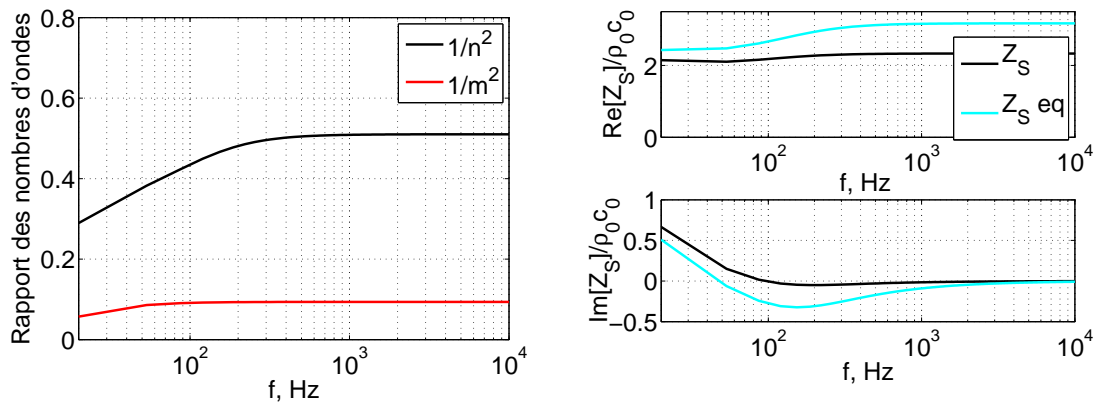


Figure C.11 – (gauche) Paramètres  $1/|m|^2$  et  $1/|n|^2$  en fonction de la fréquence pour le modèle du ballast. (droite) Parties réelles et imaginaires du modèle d'impédance pour le ballast et de l'impédance équivalente (voir Eq. C.103) en fonction de la fréquence.

Sur la figure C.11, on a représenté les paramètres  $1/n^2$  et  $1/m^2$  en fonction de la fréquence pour le modèle du ballast utilisé ici. On peut ainsi noter que l'on est bien dans le cas d'une réaction étendue puisque  $n$  est proche de 1. On peut aussi remarquer que  $1/m^2$  est petit devant 1 si bien que l'on peut utiliser l'approche de l'impédance équivalente (voir Eq. C.103). On a aussi représenté sur la figure C.11 les parties réelles et imaginaires de l'impédance du ballast et de l'impédance équivalente en fonction de la fréquence. On peut ainsi observer que l'impédance équivalente a une partie réelle plus grande que l'impédance et que sa partie imaginaire prend des valeurs négatives aux basses fréquences.

Sur la figure C.12, on a tracé les niveaux de pression relatifs au champ libre pour les deux récepteurs. Dans les deux cas, l'erreur commise en considérant une réaction locale est importante. Pour le récepteur à 7.5 m, on peut remarquer que les niveaux de pression relatifs entre les cas réaction locale et réaction étendue semblent être de signes contraires sur la plus grande partie de l'intervalle fréquentiel considéré. De plus, le cas de réaction approximativement locale donne des amplitudes en bon accord avec la réaction étendue mais est lui aussi de signe opposé. Les autres approximations donnent des résultats comparables au cas réaction étendue. Pour le récepteur à 25 m, le cas de la réaction locale surestime l'amplitude des oscillations du niveau de pression relatif au champ libre. Les autres cas sont en bon accord avec le cas de la réaction étendue.

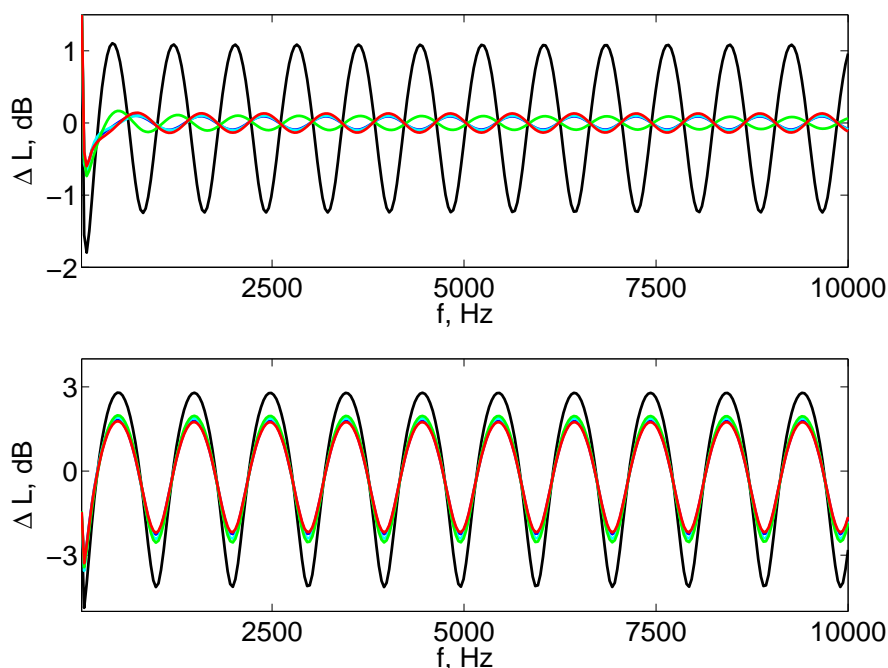


Figure C.12 – Niveaux de pression relatifs au champ libre pour une source placée à 1.18 m de hauteur et pour des récepteurs placés à 1.38 m de hauteur et à une distance de 7.5 m (haut) et à 3.68 m de hauteur et à une distance de 25 m. Le modèle de Hamet et Bérengier pour le ballast proposé par le LCPC est utilisé.

## Conclusion

Dans cette partie de l'annexe, on s'est intéressé à la limite de l'approximation de la réaction locale pour les types de sols rencontrés classiquement dans les études de propagation acoustique à longue distance. Néanmoins, on s'est limité au cas de sols semi-infinis et l'étude n'est a priori pas généralisable au cas, par exemple, d'une couche poreuse sur support rigide. Pour les sols qui peuvent être modélisés par un modèle à 1 paramètre, on a pu voir que la réaction locale était une bonne approximation pour des résistivités au passage de l'air élevées (typiquement supérieures à  $100 \text{ kPa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$ ). Pour les faibles résistivités, cette approximation peut amener des erreurs importantes si on n'est pas dans le cadre d'une incidence rasante. Le cas de la propagation au-dessus d'une couche semi-infinie de ballast a ensuite été considéré pour des récepteurs situés aux distances normalisées pour l'étude du bruit ferroviaire. Il a été montré que l'hypothèse de la réaction locale conduisait à des erreurs très importantes. Cependant, en utilisant une impédance équivalente, on peut toujours utiliser une condition limite d'impédance simple dans les codes de résolution dans le domaine temporel qui permet d'avoir des résultats comparables au cas de la réaction étendue.

## Annexe D

# Compléments sur les méthodes de résolution pseudospectrales

Dans cette annexe, on propose différents cas-tests afin, à la fois, de valider l'implémentation des méthodes pseudospectrales et de montrer que la condition limite d'impédance proposée par Cotté *et al.* (2009) est utilisable pour d'autres méthodes de résolution des équations d'Euler linéarisées que les différences finies. On rappelle que deux méthodes de résolution étaient proposées. Dans la première, la méthode pseudospectrale de type Chebyshev est utilisée pour calculer les dérivées des flux eulériens dans toutes les directions de l'espace. Dans la seconde, la méthode pseudospectrale de type Chebyshev n'est utilisée que dans la direction perpendiculaire au sol et la méthode pseudospectrale de type Fourier est utilisée dans les autres directions. Dans les deux cas, des sous-domaines sont utilisés avec la méthode pseudospectrale de type Chebyshev pour relâcher la contrainte sur le pas de temps. On présentera tout d'abord la méthode utilisée pour transmettre l'information aux interfaces de ces sous-domaines. Ensuite, un premier cas-test de propagation d'ondes acoustiques à longue distance dans une atmosphère homogène et au-dessus d'un sol impédant, similaire à celui présenté dans la section 1.3.4, est considéré. Une comparaison en termes de coûts numérique pour les deux méthodes est réalisée. Dans une dernière partie, deux cas-tests dans une atmosphère inhomogène sont présentés. Pour le premier cas, on considère des conditions de propagation défavorables avec un profil de célérité du son dit « bilinéaire » et un sol impédant. Dans le second cas, on considère un écoulement constant et un sol rigide.

### D.1 Sous-domaines pour la méthode PS Chebyshev

Comme cela a pu être vu dans la section 1.1.2, le pas de temps maximal associé à la limite de stabilité pour les algorithmes de Runge-Kutta est lié au plus petit pas de maillage à travers la condition CFL. Pour un domaine numérique important, si on utilise la méthode PS Chebyshev, on devra ainsi découper le domaine en sous-domaines afin d'avoir un pas de temps acceptable. Dans ce cas, il faut s'assurer que l'information se propage à l'interface des sous-domaines à chaque sous-étape de l'algorithme de Runge-Kutta. La méthode des variables caractéristiques peut ainsi être utilisée (Hornikx, 2009). Pour cela, les équations d'Euler linéarisées avec utilisation d'une PML (cf. Eq. 1.1.4) sont réécrites sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} + C \mathbf{q} = D, \quad (\text{D.1})$$



avec le vecteur inconnu  $q = [p_x, p_z, \rho_0 c v_x, \rho_0 c v_z]^T$  et les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ . Pour obtenir les variables se propageant, par exemple, dans la direction  $x$ , la matrice  $A$  est diagonalisée : on écrit ainsi  $A = P^{-1}\Lambda P$  où  $\Lambda$  est une matrice diagonale. On introduit le vecteur  $\bar{q} = P^{-1}q$  et après substitution dans l'équation D.1, le système suivant est obtenu :

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + A' \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + B' \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} + C' \bar{q} = D', \quad (\text{D.2})$$

où les matrices  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  dépendent de  $P$  et des matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ . Pour une atmosphère homogène avec  $c = c_0$ , les équations suivantes sont obtenues :

$$\frac{\partial \bar{q}_1}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial x} + \frac{c_0}{\sqrt{2}} \frac{\partial \bar{q}_3}{\partial z} + \sigma_x \bar{q}_1 = 0, \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{\partial \bar{q}_2}{\partial t} - c_0 \frac{\partial \bar{q}_2}{\partial x} + \frac{c_0}{\sqrt{2}} \frac{\partial \bar{q}_3}{\partial z} + \sigma_x \bar{q}_2 = 0, \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{\partial \bar{q}_3}{\partial t} + \frac{c_0}{\sqrt{2}} \frac{\partial (\bar{q}_1 + \bar{q}_2)}{\partial z} + \sigma_z \bar{q}_3 = 0, \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{\partial \bar{q}_4}{\partial t} + c_0 \sqrt{2} \frac{\partial \bar{q}_3}{\partial z} + \sigma_z \bar{q}_4 = 0, \quad (\text{D.6})$$

où les variables caractéristiques sont :  $\bar{q}_1 = (\rho_0 c_0 v_x + p)/\sqrt{2}$ ,  $\bar{q}_2 = (-\rho_0 c_0 v_x + p)/\sqrt{2}$ ,  $\bar{q}_3 = \sqrt{2} \rho_0 c_0 v_z$  et  $\bar{q}_4 = 2p_z$ . Les variables  $\bar{q}_1$  et  $\bar{q}_2$  représentent les ondes se propageant respectivement dans les directions  $x$  et  $-x$ . Quant à elles, les variables  $\bar{q}_3$  et  $\bar{q}_4$  représentent les contributions se propageant dans les directions transverses. A chaque sous-étape de l'algorithme de Runge-Kutta, les variables caractéristiques sont calculées à partir des variables physiques à l'interface des sous-domaines. Les variables physiques sont ainsi « corrigées » aux interfaces en considérant que les variables caractéristiques se propageant dans la direction perpendiculaire à l'interface sont exactes. Les autres variables caractéristiques sont moyennées. Par exemple, pour une interface dans la direction  $x$ , les variables caractéristiques  $\bar{q}_1^l$  et  $\bar{q}_2^r$  sont calculées respectivement à gauche et à droite de l'interface. En prenant en compte la continuité de la pression et de la vitesse normale à l'interface, les variables physiques sont ainsi corrigées avec les formules :

$$p = (\bar{q}_1^l + \bar{q}_2^r)/\sqrt{2}, \quad (\text{D.7})$$

$$p_z = (\bar{q}_4^l + \bar{q}_4^r)/4, \quad (\text{D.8})$$

$$p_x = p - p_z, \quad (\text{D.9})$$

$$\rho_0 v_x = (\bar{q}_1^l - \bar{q}_2^r)/(\sqrt{2}c_0), \quad (\text{D.10})$$

$$\rho_0 v_z = (\bar{q}_3^l + \bar{q}_3^r)/(\sqrt{2}c_0). \quad (\text{D.11})$$

Un problème particulier se pose pour le code PS Chebyshev ; en effet, pour les points situés aux coins des sous-domaines, on ne peut pas utiliser la méthode précédente. On calculera alors pour chaque variable la moyenne aux coins des sous-domaine et celle-ci sera ensuite imposée aux points correspondants. Un schéma du calcul des variables caractéristiques est représenté sur la figure D.1.

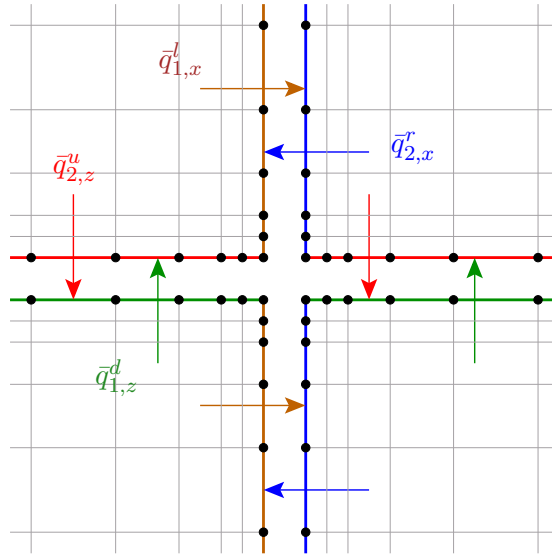


Figure D.1 – Représentation du calcul des variables caractéristiques à l'interface de quatre sous-domaines.

## D.2 Cas de propagation à longue distance

Dans cette section, la propagation d'ondes acoustiques dans une atmosphère homogène au-dessus d'un sol plan impédant est considérée afin de valider l'implémentation des méthodes pseudo-spectrales. Les deux codes proposés dans la partie 1.1.1 sont utilisés.

### D.2.1 Paramètres numériques

Les comparaisons dans le domaine fréquentiel sont réalisées pour un récepteur situé à  $x = 400$  m et  $z = 2$  m. Le domaine numérique a pour taille  $[-12 \text{ m}; 412 \text{ m}]$  dans la direction  $x$  et  $[0 \text{ m}; 48 \text{ m}]$  dans la direction  $z$ . L'épaisseur de la couche PML est  $L = 2$  m et les paramètres suivants sont utilisés :  $\sigma_0 = 25 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$  et  $\beta = 4$ . Le modèle d'impédance utilisé est le modèle de Miki (1990) d'un sol semi-infini avec une résistivité au passage de l'air égale à  $100 \text{ kPa.s.m}^{-2}$ . Ce modèle a déjà été utilisé dans la partie 1.3. La source est un pulse gaussien situé en  $x_S = 0$  m et  $z_S = 2$  m et s'écrit :

$$Q(x, z, t) = \exp \left[ -\frac{(x - x_S)^2 + (z - z_S)^2}{B^2} \right] \delta(t), \quad (\text{D.12})$$

avec  $B = 0.4$  m.

Quatre simulations sont effectuées : on réalise un calcul avec chaque code pour deux valeurs différentes du nombre de points dans les sous-domaines pour la méthode PS Chebyshev. Celui-ci doit être choisi assez petit pour avoir un pas temporel acceptable et assez grand pour obtenir la résolution spectrale. On prendra ainsi  $N = 16$  et  $N = 32$  et les sous domaines ont une taille respective de 2 m et 4 m. Pour la méthode PS Chebyshev, le pas spatial moyen est égal à  $\Delta z_{avg} = 0.125$  m ; en considérant que la résolution minimale est de  $\pi$  points par longueur d'onde, la fréquence maximale résolue est alors égale à 865 Hz. Pour le code hybride Fourier-Chebyshev PSTD, le pas spatial moyen est toujours de  $\Delta z_{avg} = 0.125$  m dans la direction  $z$  ; le pas spatial dans la direction  $x$  peut être choisi plus grand et est ici choisi à  $\Delta x = 0.196$  m. Dans toutes les simulations, le nombre CFL est fixé à 1.

### D.2.2 Résultats

Les formes d'onde obtenues à un récepteur positionné à  $x = 400$  m et  $z = 2$  m pour les différentes simulations sont tracées sur la figure D.2. Pour tous les cas, les formes d'ondes sont comparables et ont un contenu fréquentiel essentiellement basse fréquence. Les résultats sont ensuite comparés à une solution analytique basée ici sur la solution de Di et Gilbert (1993) (cf. Sec 1.3.4 pour plus de détails). Les spectres correspondants pour la pression normalisée par le facteur  $\rho_0 c_0^2$  sont représentés sur la figure D.3. Il est à noter que pour les basses fréquences un très bon accord est obtenu pour les différentes simulations. Cependant, pour le code Chebyshev PSTD avec  $N = 16$ , le spectre obtenu avec le calcul numérique ne correspond plus avec le spectre analytique pour des fréquences supérieures à environ 480 Hz ; cette valeur correspond à une longueur d'onde minimale résolue égale à 5.7 fois le pas spatial. Pour le code Chebyshev PSTD avec  $N = 32$ , ce comportement est obtenu pour des fréquences supérieures à 660 Hz, ce qui correspond à une longueur d'onde égale à 4 fois le pas spatial. Pour le code hybride Fourier Chebyshev PSTD, un bon accord est obtenu jusqu'à 865 Hz pour les deux cas  $N = 16$  et  $N = 32$  ; en effet, les spectres obtenus avec le code hybride Fourier Chebyshev PSTD et avec la solution analytique sont presque confondus.

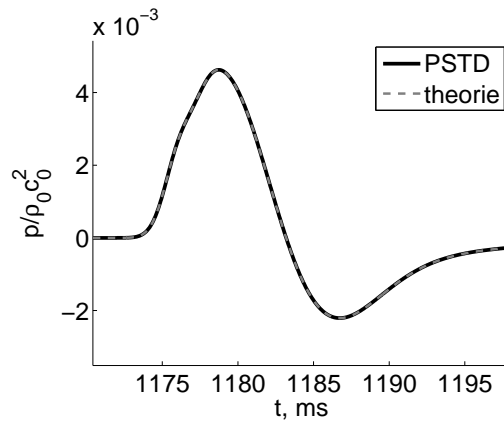


Figure D.2 – Formes d'onde pour un récepteur situé en  $x = 400$  m et  $z = 2$  m obtenues avec les codes PSTD et avec une solution analytique.

Pour confirmer les commentaires précédents, deux estimateurs sont introduits :

$$\epsilon^{\text{amp}} = 20 \log \left| \frac{|p_{\text{ana}}| - |p_{\text{num}}|}{p_{\text{ana}}} \right| \quad \text{et} \quad \epsilon^{\text{phase}} = 20 \log \left| \frac{\phi_{\text{ana}} - \phi_{\text{num}}}{\phi_{\text{ana}}} \right|, \quad (\text{D.13})$$

où  $p_{\text{ana}}$  et  $p_{\text{num}}$  sont respectivement la pression dans le domaine fréquentiel obtenue analytiquement et avec le calcul numérique et où  $\phi_{\text{ana}}$  et  $\phi_{\text{num}}$  sont les phases correspondantes de la pression. Ces deux estimateurs correspondent ainsi à l'erreur relative sur l'amplitude et sur la phase. Ils sont représentés en fonction de la fréquence sur la figure D.4 pour les différents calculs. Comme cela a été noté dans le paragraphe précédent, l'erreur sur l'amplitude est faible à basse fréquence et croît rapidement avec la fréquence dans le cas du code Chebyshev PSTD. Remarquons aussi que l'erreur sur l'amplitude est comparable pour les calculs avec le code hybride Fourier Chebyshev PSTD pour  $N = 16$  et  $N = 32$ . Quant à l'erreur sur la phase, il est à noter qu'à basse fréquence, des valeurs à peu près égales sont obtenues pour les codes Fourier Chebyshev PSTD et Chebyshev PSTD. Des écarts apparaissent en plus haute fréquence entre les calculs réalisés avec  $N = 16$  et

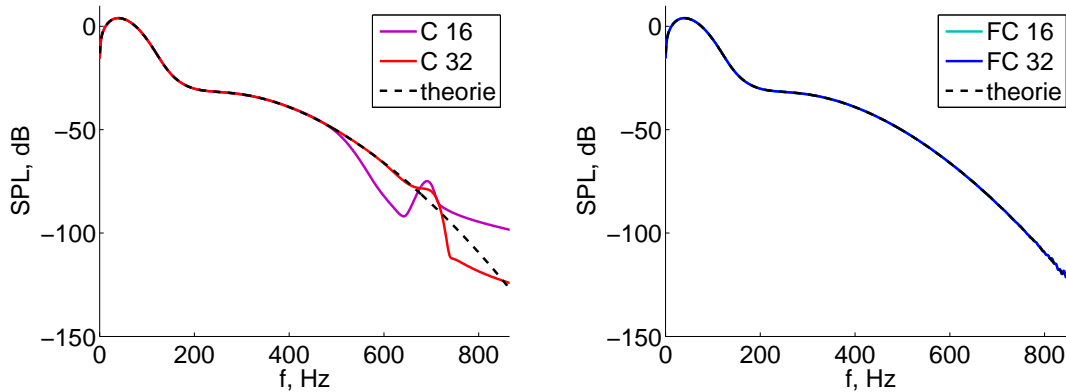


Figure D.3 – Spectres de la pression normalisée pour un récepteur situé et  $x = 400$  m et  $z = 2$  m (gauche) pour le code Chebyshev PSTD et (droite) pour le code hybride Fourier Chebyshev PSTD.

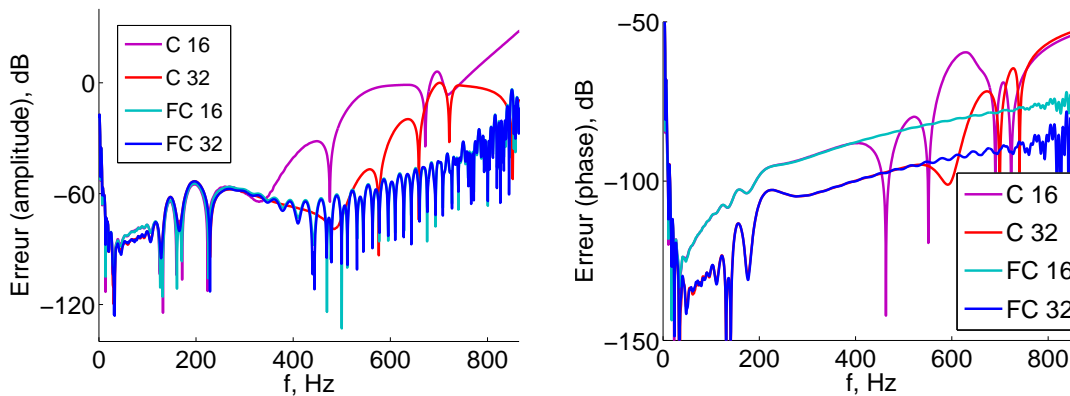


Figure D.4 – Erreurs relatives sur l'amplitude (gauche) et sur la phase (droite) obtenues pour les différents calculs en fonction de la fréquence.

avec  $N = 32$ ; cela peut être lié au fait que le pas de temps utilisé pour  $N = 32$  est plus petit, ce qui assure une erreur plus faible due à l'intégration temporelle.

### D.2.3 Comparaison des coûts numériques

Dans ce paragraphe, les coûts numériques de calcul des deux codes sont comparés. Plusieurs paramètres sont ainsi présentés dans le tableau D.1. Tout d'abord, il est à noter que le code hybride Fourier Chebyshev PSTD demande un nombre de points plus petit que le code Chebyshev PSTD; cela est dû au fait qu'il y a moins de points dans la direction  $x$  pour le code hybride Fourier Chebyshev PSTD. Le nombre d'itérations, noté nbt dans le tableau, est multiplié par deux quand  $N$  est aussi multiplié par deux à cause de la quadrature de Gauss-Lobatto. Notons aussi que le temps de calcul par itération est à peu près constant et dépend donc peu du nombre de points  $N$  dans les sous-domaines avec la méthode Chebyshev PS. Les calculs avec  $N = 32$  demandent ainsi deux fois plus de temps car il y a deux fois plus d'itérations. Il semble aussi que, pour ce cas, le code hybride Fourier Chebyshev PSTD requiert moins de temps de calcul que le code Chebyshev PSTD. Enfin, pour comparer les erreurs obtenues pour les différents calculs, une limite de précision

	nombre de points	nbt	$t_{CPU}$ , s	$t_{CPU}/nbt$ , s	$f_{-20\text{dB}}$ , Hz
C $N = 16$	$1.47 \times 10^6$	28311	$1.23 \times 10^5$	4.4	490
C $N = 32$	$1.38 \times 10^6$	56486	$2.67 \times 10^5$	4.7	630
FC $N = 16$	$0.88 \times 10^6$	28311	$1.09 \times 10^5$	3.84	814
FC $N = 32$	$0.86 \times 10^6$	56486	$1.45 \times 10^5$	2.6	814

Tableau D.1 – Paramètres des différents calculs.

basée sur le critère  $\epsilon^{\text{amp}} > -20$  dB est proposée. Cette limite correspond à une erreur de 10 % sur l'amplitude de la pression. La fréquence à laquelle cette limite est atteinte pour la première fois, notée  $f_{-20\text{dB}}$ , est donnée dans le tableau D.1. Comme il a déjà été remarqué précédemment, la méthode hybride Fourier Chebyshev PS apparaît comme la méthode la plus intéressante.

On a ainsi pu voir sur ce premier cas-test que le code hybride Fourier Chebyshev PSTD semble prometteur. Deux cas-tests sont présentés dans la prochaine section afin de valider la prise en compte des effets météorologiques dans ce code.

### D.3 Simulations dans une géométrie bidimensionnelle avec des effets météorologiques

Dans cette partie, on réalise deux cas-tests dans une atmosphère stratifiée. Une source impulsionnelle est utilisée afin de pouvoir utiliser une fenêtre glissante pour réduire l'espace mémoire et le temps de calcul (celle-ci est présentée dans la partie 1.3.1). Avec le code Chebyshev PSTD, il est, cependant, compliqué d'implémenter une fenêtre glissante puisque le maillage n'est pas uniforme. Cependant, avec le code hybride Fourier Chebyshev PSTD, le maillage est uniforme dans les directions perpendiculaires au sol et il est donc possible d'utiliser une fenêtre glissante. On utilisera ainsi seulement ce code dans la suite. Le domaine numérique a 384 points dans la direction  $x$  et 25 sous-domaines avec 32 points dans la direction  $z$ . Le pas spatial est approximativement égal à 0.1 m dans la direction  $x$  et à 0.0625 m dans la direction  $z$ . Le nombre CFL est fixé à 2.03 afin que le rapport  $\Delta x/(c_0 \Delta t)$  soit un entier le plus petit possible. Ce rapport est ici égal à 10 ; la grille est ainsi déplacée d'un pas spatial dans la direction de propagation considérée toutes les 10 itérations.

La source est ici une source de masse ponctuelle du type :

$$Q(x, y, z, t) = s(t) \delta(x - x_S) \delta(z - z_S), \quad (\text{D.14})$$

où le terme  $s(t)$  est donné par :

$$s(t) = S_0 \sin(2\pi f_c t) \exp\left[\frac{(t - t_c)^2}{\tau^2}\right] \text{H}(t), \quad (\text{D.15})$$

avec  $\text{H}(t)$  la fonction d'Heaviside. Celle-ci est nécessaire pour des raisons de causalité. Avec la forme prise pour  $s(t)$ , si les paramètres  $t_c$  et  $\tau$  sont bien choisis, elle peut être enlevée de l'équation précédente. La puissance de la source  $S(\omega)$  obtenue en prenant la transformée de Fourier de  $s(t)$

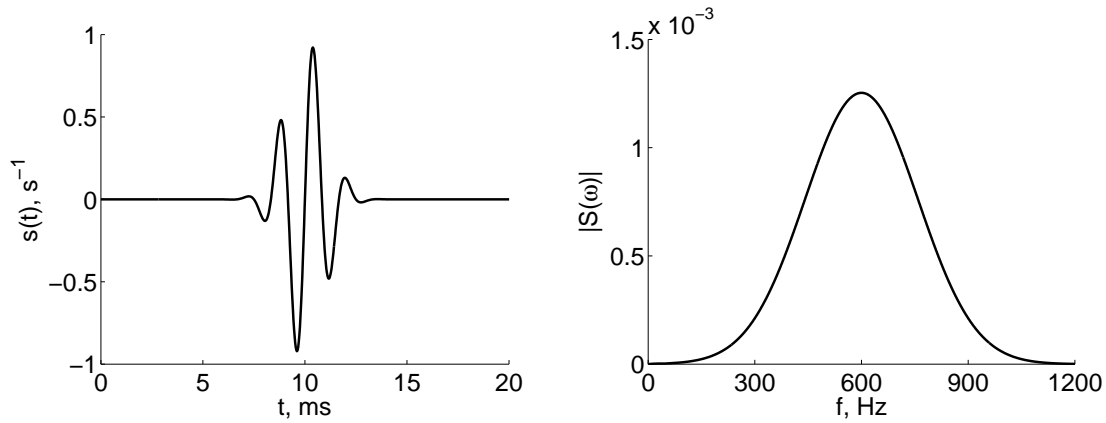


Figure D.5 – Signal de la source de masse  $s(t)$  dans le domaine temporel (gauche) et puissance de la source dans le domaine fréquentiel (droite).

est alors donnée par :

$$S(\omega) = S_0 \frac{i\sqrt{\pi}\tau}{2} \left[ \exp[i(\omega - \omega_c)t_c] \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_c)^2\tau^2}{4}\right) - \exp[i(\omega + \omega_c)t_c] \exp\left(-\frac{(\omega + \omega_c)^2\tau^2}{4}\right) \right], \quad (\text{D.16})$$

avec  $\omega_c = 2\pi f_c$ . Le paramètre  $f_c$  correspond à la fréquence centrale et est fixé à  $f_c = 600$  Hz. L'amplitude  $S_0$  est choisie à  $S_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ . Le paramètre  $\tau$  permet de contrôler la décroissance de la gaussienne et est fixé à  $\tau = 1.4$  ms. Enfin, la variable  $t_c$  permet de positionner la source dans le domaine temporel et est égale à  $t_c = 10$  ms. Le signal  $s(t)$  et la puissance de la source sont représentés sur la figure D.5.

Comme cela a été noté par Hornikx *et al.* (2010), l'utilisation d'un point source induit une discontinuité dans le champ de pression. Cependant, dans la méthode dite « extended Fourier PSTD », cette discontinuité n'introduisait pas d'effets remarquables dans les résultats. Il n'est pas évident que ce soit aussi le cas pour le code hybride Fourier Chebyshev PSTD. Il est ainsi prudent de ne pas positionner le point source à une interface des sous-domaines utilisés pour la méthode PS Chebyshev. La source est ici placée à  $x_S = 0$  m et  $z_S = 3$  m. Environ 33 000 itérations temporelles sont nécessaires pour que les fronts d'onde atteignent les récepteurs situés à  $x = 300$  m.

### D.3.1 Cas d'un profil de célérité du son

Dans ce premier cas-test, une atmosphère stratifiée avec des conditions de propagation défavorables est considérée. On utilise le profil de célérité du son appelé « bilinéaire » :

$$c(z) = \frac{c_0}{\sqrt{1 + 2z/R_c}}, \quad (\text{D.17})$$

avec  $R_c = 1000$  m. La valeur de  $R_c$  étant suffisamment grande, la célérité du son décroît de façon à peu près linéaire jusqu'à une hauteur de 50 m. Pour la condition limite d'impédance, on utilise le modèle d'impédance de Miki d'un sol semi-infini avec une résistivité au passage de l'air égale à  $100 \text{ kPa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$  et d'une couche d'épaisseur 10 cm et de résistivité au passage de l'air égale à  $10 \text{ kPa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$ . Ils correspondent aux modèles appelés respectivement « herbe » et « neige » dans

la partie 1.3 et seront nommés de la même façon dans la suite. Le schéma du problème est représenté sur la figure D.6.

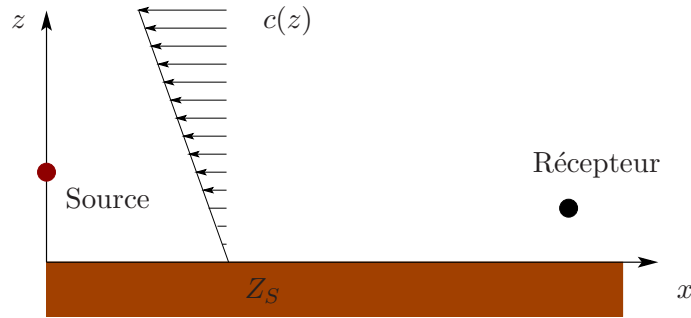


Figure D.6 – Schéma du problème

Les résultats du calcul numérique sont comparés à la solution analytique proposée par Berry et Daigle (1988) dans le domaine temporel. Pour la solution analytique, les formes d’onde sont calculées avec une transformée de Fourier inverse :

$$p(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 i\omega AS(\omega) \hat{p}(x, z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (D.18)$$

où  $\hat{p}(x, z, \omega)$  est la solution de l’équation :

$$\Delta \hat{p} + k(z)\hat{p} = \delta(x - x_S)\delta(z - z_S), \quad (D.19)$$

avec  $k(z) = \omega/c(z)$ . Il est à remarquer qu’écrire que la dépendance spatiale du terme source dans l’équation D.14 est un dirac est purement formel. En effet, il y a un facteur constant, noté  $A$  dans l’équation D.18 entre la puissance de la source voulue et celle obtenue numériquement. Ce facteur  $A$  dépend du maillage et a la dimension de  $m^2$  pour des calculs dans une géométrie bidimensionnelle. Un calcul préliminaire en champ libre montre que ce facteur  $A$  est proche de  $\Delta x^2$  dans notre cas.

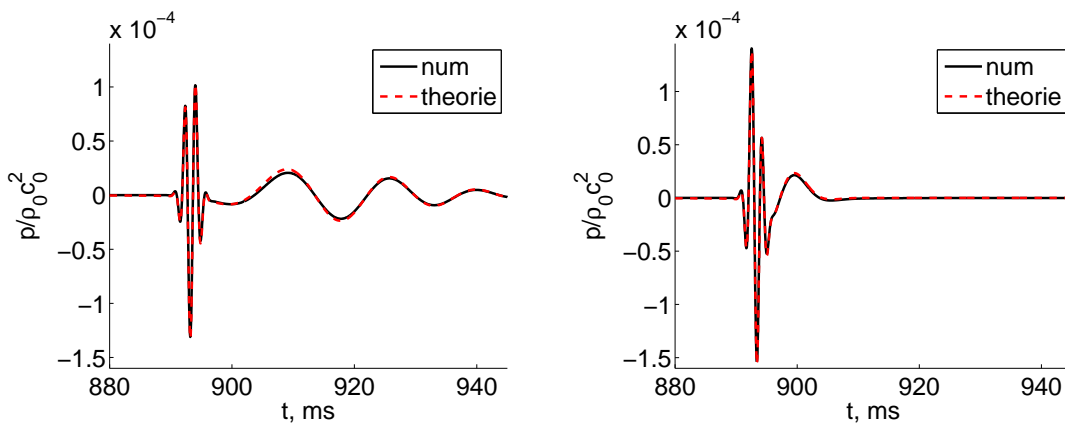


Figure D.7 – Formes d’onde obtenues à un récepteur situé à  $x = 300$  m et  $z = 2$  m pour les modèles d’impédance appelés « neige » (gauche) et « herbe » (droite). Les lignes pleines et pointillées représentent respectivement les résultats issus du calcul numérique et de la solution analytique.

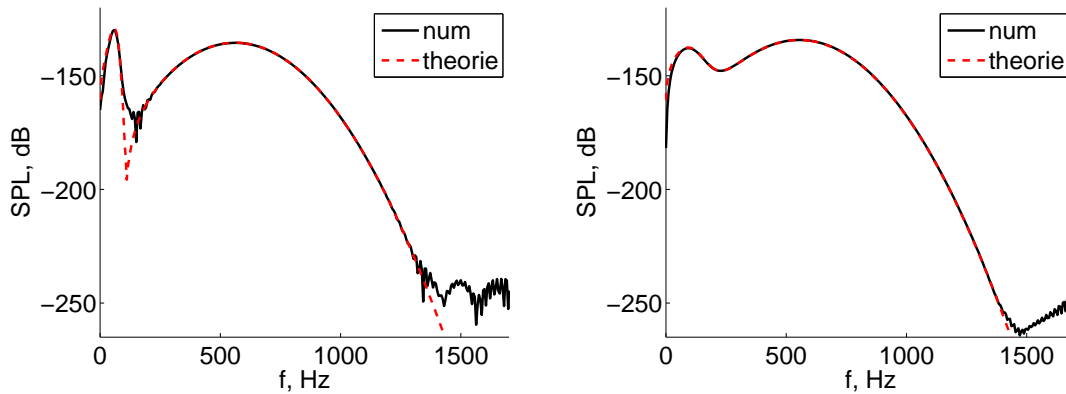


Figure D.8 – Spectres obtenus pour un récepteur situé à  $x = 300$  m et  $z = 2$  m pour les modèles d'impédance appelés « neige » (gauche) et « herbe » (droite). Les lignes pleines et pointillées représentent respectivement les résultats issus du calcul numérique et de la solution analytique.

Les formes d'ondes obtenues à un récepteur situé à  $x = 300$  et  $z = 2$  m sont représentées sur la figure D.7. On peut ainsi vérifier que les formes d'ondes obtenues analytiquement et avec le calcul numérique sont en très bon accord. Les spectres correspondants sont tracés sur la figure D.8. Sur la bande de fréquence d'intérêt, un bon accord est là aussi obtenu. Pour des fréquences supérieures à 1400 Hz, des écarts peuvent cependant être observés. On peut aussi voir sur les spectres pour le cas « neige » une mauvaise résolution autour de l'interférence pour des fréquences proche de 100 Hz ; cela est dû principalement au fenêtrage des formes d'onde.

### D.3.2 Cas d'un écoulement constant

Dans ce second cas-test, un écoulement constant du type  $V_{0x} = Mc_0$  est pris en compte. Le nombre de Mach  $M$  est fixé à 0.05 et un sol rigide est considéré. Le schéma du problème est représenté sur la figure D.9.

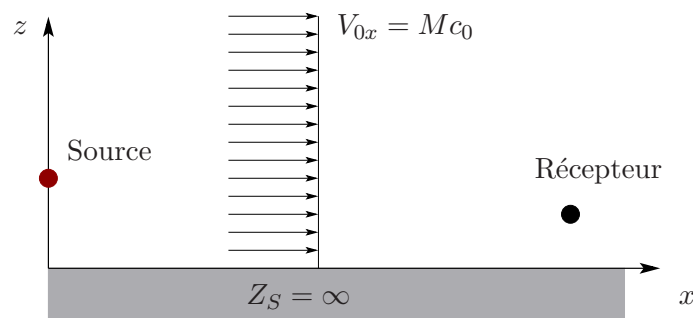


Figure D.9 – Schéma du problème

La solution analytique peut être trouvée par exemple dans Ostashev *et al.* (2005). Les formes d'onde obtenues à un récepteur situé à  $x = 300$  m et  $z = 2$  m et les spectres correspondants sont représentés sur la figure D.10. Là encore, un très bon accord est trouvé. Des écarts peuvent être observés sur les spectres pour des fréquences supérieures à 1550 Hz.



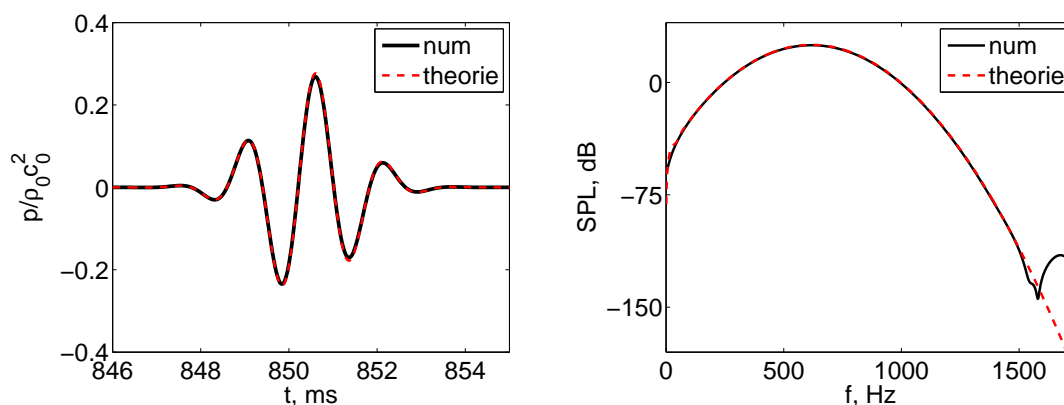


Figure D.10 – Formes d’onde obtenues à un récepteur situé à  $x = 300$  m et  $z = 2$  m (gauche) et spectres correspondants (droite). Les lignes pleines et pointillées correspondent respectivement aux résultats issus du calcul numérique et de la solution analytique.

## Conclusion

Pour résoudre les équations d’Euler linéarisées dans le domaine temporel, les méthodes pseudospectrales sont une alternative aux méthodes différences finies. Elles peuvent être intéressantes pour réduire l’espace mémoire et le temps de calcul. La méthode Fourier PS a été récemment étendue pour prendre en compte la propagation d’ondes acoustiques au-dessus de sols ayant une impédance réelle (Hornikx et Waxler, 2010). Ici, une autre extension a été proposée afin de prendre en compte des modèles d’impédance plus complexe ; pour cela, la méthode Chebyshev PS a été utilisée car elle permet d’imposer de telles conditions aux limites. La condition limite d’impédance dans le domaine temporel proposée par Cotté *et al.* (2009) a ainsi été implémentée.

Deux codes ont été proposés. Le premier utilise la méthode Chebyshev PS pour évaluer les dérivées dans toutes les directions. Le second n’utilise la méthode Chebyshev PS que dans la direction perpendiculaire au sol ; dans les autres directions, la méthode Fourier PS est utilisée. Un cas-test de propagation à longue distance a été proposé afin de valider les deux codes. Il a été montré que le code hybride Fourier Chebyshev PSTD était plus efficace d’un point de vue numérique. Ce code a ensuite été utilisé pour traiter deux cas de propagation dans une atmosphère stratifiée ; en particulier, une méthode de fenêtre glissante a été implémentée. Un bon accord a été obtenu dans les deux cas avec des solutions analytiques.

Le problème principal des codes présentés est que le plus petit pas spatial avec la méthode Chebyshev PS décroît quadratiquement avec le nombre de points. Pour les méthodes d’intégration temporelle explicites, le pas de temps est lié au plus petit pas spatial et devra lui décroître quadratiquement avec le nombre de points. Cela a deux conséquences principales. Tout d’abord, pour des applications usuelles, le domaine doit être découpé en sous-domaines. De plus, même pour un nombre de points par sous-domaine peu élevé, le nombre d’itérations nécessaire est relativement important. Plusieurs techniques (Platte et Gelb, 2009) ont été proposées dans la littérature afin que le pas de temps décroisse linéairement avec le nombre de points, comme cela est le cas pour un maillage uniforme, et pourront donc être étudiées dans des travaux futurs.

## Annexe E

# Solution analytique pour le cas de diffusion par un cylindre impédant

Dans cette annexe, on considère la diffusion d'ondes acoustiques par un cylindre impédant à partir d'un point source dans une géométrie bidimensionnelle. Le point source est situé en  $(0, y_S)$ . La surface du cylindre est caractérisée par son admittance normalisée notée  $\beta$ . La pression acoustique  $\hat{p}(r, \theta, \omega)$  vérifie l'équation d'Helmholtz en coordonnées polaires :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \theta^2} + k_0^2 \hat{p} = \delta(x) \delta(y - y_S), \quad (\text{E.1})$$

avec la condition de Sommerfeld à l'infini :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left( \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} - ik_0 \hat{p} \right) = 0, \quad (\text{E.2})$$

et la condition limite d'impédance sur le cylindre :

$$\left. \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} \right|_{R_c} + ik_S \hat{p}(R_c, \theta, \omega) = 0, \quad (\text{E.3})$$

où on a posé  $k_S = k_0 \beta$ .

La pression est séparée en deux contributions  $\hat{p}(r, \theta, \omega) = \hat{p}_i(r, \theta, \omega) + \hat{p}_d(r, \theta, \omega)$  où  $\hat{p}_i$  est la pression incidente sur le cylindre et  $\hat{p}_d$  est la pression diffusée par le cylindre. La pression incidente  $\hat{p}_i$  est donnée par la fonction de Green 2D :

$$\hat{p}_i(r, \theta, \omega) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( k_0 \sqrt{r^2 + y_S^2 - 2ry_S \cos \theta} \right). \quad (\text{E.4})$$

A cause des propriétés géométriques (symétrie d'axe  $y$ , périodicité pour  $\theta$ ) et de la condition de Sommerfeld, la pression diffusée est cherchée sous la forme :

$$\hat{p}_d(r, \theta, \omega) = -\frac{i}{4} \sum_{p=0}^{+\infty} C_p H_p^{(1)}(k_0 r) \cos p\theta. \quad (\text{E.5})$$

Les coefficients  $C_p$  sont obtenus avec la condition limite d'impédance. Il vient ainsi :

$$\left. \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial r} \right|_{R_c} = \frac{i}{4} \frac{k_0 (R_c - y_S \cos \theta)}{\sqrt{R_c^2 + y_S^2 - 2R_c y_S \cos \theta}} H_1^{(1)} \left( k_0 \sqrt{R_c^2 + y_S^2 - 2R_c y_S \cos \theta} \right), \quad (\text{E.6})$$

où la relation suivante pour les fonctions de Hankel a été utilisée :

$$\frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(z) = -H_1^{(1)}(z). \quad (\text{E.7})$$

On peut ensuite écrire :

$$\left. \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial r} \right|_{R_c} + ik_S \hat{p}_i = -\frac{i}{4} k_0 \sum_{p=0}^{+\infty} B_p \cos p\theta, \quad (\text{E.8})$$

où les coefficients  $B_p$  sont donnés par :

$$B_p = \frac{\epsilon_p}{\pi} \int_0^\pi \left[ -\frac{R_c - x_S \cos \theta}{\sqrt{R_c^2 + x_S^2 - 2R_c x_S \cos \theta}} H_1^{(1)} \left( k_0 \sqrt{R_c^2 + x_S^2 - 2R_c x_S \cos \theta} \right) + i\beta H_0^{(1)} \left( k_0 \sqrt{R_c^2 + x_S^2 - 2R_c x_S \cos \theta} \right) \right] \cos p\theta \, d\theta. \quad (\text{E.9})$$

Le paramètre  $\epsilon_p$  est égal à 1 pour  $p = 0$  et est égal à 2 sinon. On a ensuite :

$$\left. \frac{\partial \hat{p}_d}{\partial r} \right|_{R_c} = -i \frac{k_0}{4} \sum_{p=0}^{+\infty} C_p \frac{H_{p-1}^{(1)}(k_0 R_c) - H_{p+1}^{(1)}(k_0 R_c)}{2} \cos p\theta. \quad (\text{E.10})$$

On utilise la formule suivante pour les fonctions de Hankel :

$$H_{p-1}^{(1)}(z) + H_{p+1}^{(1)}(z) = \frac{2p}{z} H_p^{(1)}(z), \quad (\text{E.11})$$

ce qui permet d'écrire :

$$\left. \frac{\partial \hat{p}_d}{\partial r} \right|_{R_c} = -i \frac{k_0}{4} \sum_{p=0}^{+\infty} C_p \left( \frac{p}{k_0 R_c} H_p^{(1)}(k_0 R_c) - H_{p+1}^{(1)}(k_0 R_c) \right) \cos p\theta. \quad (\text{E.12})$$

On obtient enfin :

$$\left. \frac{\partial \hat{p}_d}{\partial r} \right|_{R_c} + ik_S \hat{p}_d = -i \frac{k_0}{4} \sum_{p=0}^{+\infty} C_p \left( \left[ \frac{p}{k_0 R_c} + i\beta \right] H_p^{(1)}(k_0 R_c) - H_{p+1}^{(1)}(k_0 R_c) \right) \cos p\theta. \quad (\text{E.13})$$

Si on égale les termes des séries dans les équations E.8 et E.13, on trouve la relation :

$$C_p = \frac{B_p}{H_{p+1}^{(1)}(k_0 R_c) - \left( \frac{p}{k_0 R_c} + i\beta \right) H_p^{(1)}(k_0 R_c)}. \quad (\text{E.14})$$

La pression acoustique  $\hat{p}(r, \theta, \omega)$  peut donc être calculée à partir des équations E.4, E.5, E.9 et E.14. Le calcul de la solution analytique est réalisé en trois étapes. Tout d'abord, les coefficients  $B_p$  (cf. Eq. E.9) sont déterminés avec une intégration numérique utilisant la méthode des trapèzes : 350 points sont utilisés pour la discrétisation avec les différents coefficients présentés dans la section 3.1.3. Ensuite, la pression diffusée est calculée en utilisant les 350 premiers termes dans la série de l'équation E.5. Enfin, la pression dans le domaine temporel  $p(r, \theta, t)$  est obtenue avec l'équation 3.21 dans la section 3.1.3 en utilisant une FFT avec  $N_{FFT} = 8196$  points et avec une fréquence d'échantillonnage égale à celle du code de résolution des équations d'Euler linéarisées.

## Annexe F

# Compléments sur la description du site de La Veuve

Tableau F.1 – Coefficients des polynômes utilisés pour l'approximation du profil du sol le long de la ligne de propagation pour le site de la Veuve.

$a_2x^2 + a_1x + a_0$	$a_2, \text{m}^{-1}$	$a_1$	$a_0, \text{m}$
$-0 \leq x \leq 1.5$	0	0	-0.18
$1.5 \leq x \leq 1.9$	-0.81304348	2.43913043	-2.00934782
$1.9 \leq x \leq 2.4$	0.11826087	-1.09982609	1.27266087
$2.4 \leq x \leq 3.4$	0.24113884	-1.68964039	2.06043804
$3.4 \leq x \leq 14$	0.00187499	-0.06264615	-0.70545216
$14 \leq x \leq 16$	-0.15584347	4.35347078	-31.61827078
$16 \leq x \leq 16.8$	0.63957662	-21.09997229	172.00927389
$16.8 \leq x \leq 19.7$	-0.05684792	2.29989273	-24.54959235
$19.7 \leq x \leq 26.5$	-0.00377931	0.20898917	-3.95419231
$26.5 \leq x \leq 30.5$	-0.00095680	0.05939643	-1.97208844
$30.5 \leq x \leq 33.3$	-0.01136303	0.69417655	-11.65248536
$33.3 \leq x \leq 33.9$	-0.078598908	5.172085560	-86.20967024
$33.9 \leq x \leq 35.5$	0.06619380	-4.64486026	80.18756156
$35.5 \leq x \leq 37$	-0.00933836	0.71792338	-15.00184833
$37 \leq x \leq 65$	-0.00020562	0.04210078	-2.491913027
$65 \leq x \leq 66$	0.00409498	-0.51697815	15.6709355
$66 \leq x \leq 67$	-0.019259042	2.56575301	-86.05919311
$67 \leq x \leq 69.2$	-0.00202686	0.25664130	-8.70395103
$69.2 \leq x \leq 71.8$	0.00786946	-1.11301103	38.68601990
$71.8 \leq x \leq 81$	-0.00001547	0.01926658	-1.96274659
$81 \leq x \leq 110$	0.00010693	-0.00056336	-1.159633621

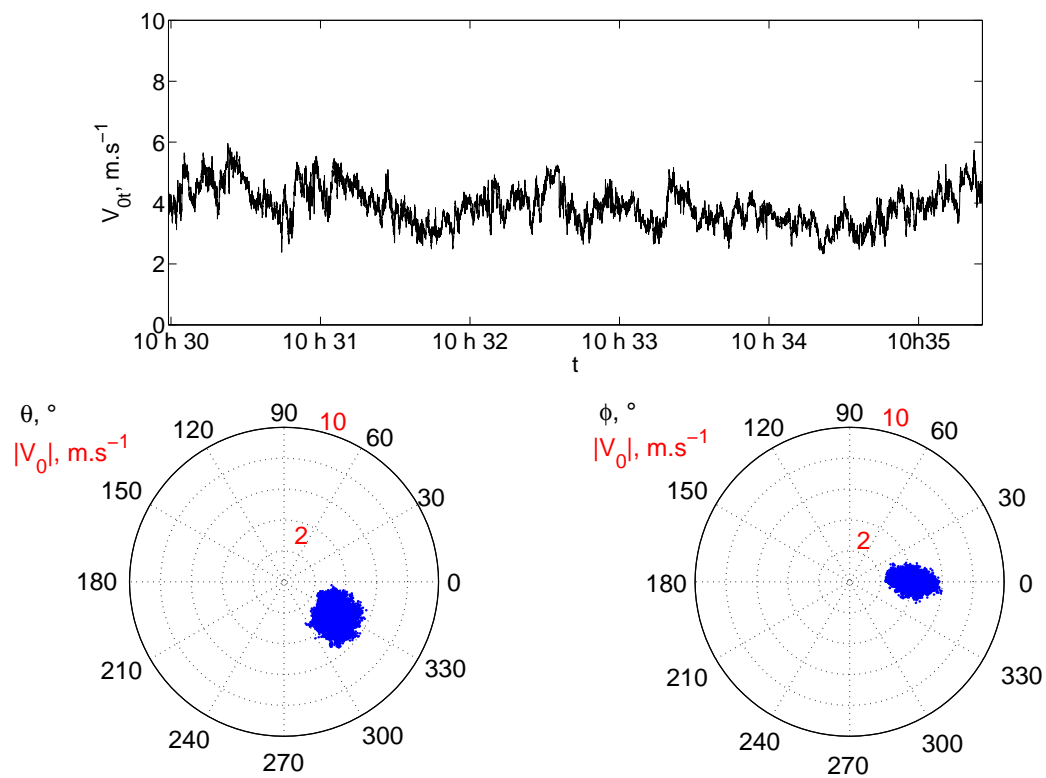


Figure F.1 – (Haut) Module du vent dans le plan horizontal en fonction du temps. (Bas) Répartition de la vitesse du vent respectivement dans les plans vertical et horizontal.

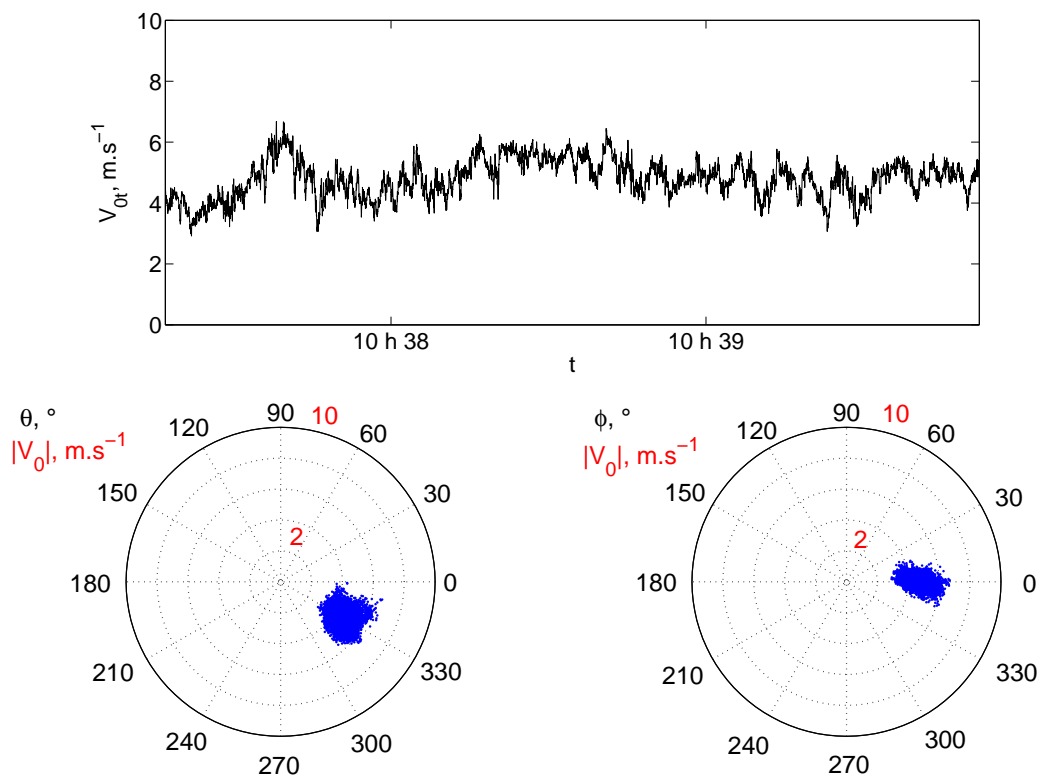


Figure F.2 – (Haut) Module du vent dans le plan horizontal en fonction du temps. (Bas) Répartition de la vitesse du vent respectivement dans les plans vertical et horizontal.



Ligne de propagation



Fossé à une distance de 20 m



Mesure d'impédance par l'IFSTTAR



Tir de pistolet à une hauteur de 2 m

Figure F.3 – Photographies du site de mesure.

## Annexe G

# Coefficients des méthodes différences finies

### G.1 Algorithme de Runge-Kutta

Tableau G.1 – Coefficients du schéma de l’algorithme de Runge-Kutta à six sous-étapes d’ordre 4 proposé par Berland *et al.* (2006).

	RK46-L
$\gamma_1$	0.000959998595
$\gamma_2$	0.007856772044
$\gamma_3$	1/24
$\gamma_4$	1/6
$\gamma_5$	1/2
$\gamma_6$	1.



## G.2 Schémas différences finies

Tableau G.2 – Coefficients du schéma différences finies centré d'ordre 4 sur 11 points, proposé par Bogey et Bailly (2004).

	FD55
$a_1$	0.872756993963
$a_2$	-0.286511173973
$a_3$	0.090320001280
$a_4$	-0.020779405824
$a_5$	0.002484594688

Tableau G.3 – Coefficients des schémas différences finies décentrés d'ordre 4 sur 11 points proposés par Berland *et al.* (2007).

	FD46	FD37	FD28	FD19	FD010
$a_{-4}$	0.016756572303				
$a_{-3}$	-0.117478455239	-0.013277273810			
$a_{-2}$	0.411034935097	0.115976072920	0.057982271137		
$a_{-1}$	-1.130286765151	-0.617479187931	-0.536135360383	-0.180022054228	
$a_0$	0.341435872099	-0.274113948204	-0.264089548965	-1.237550583044	-2.391602219538
$a_1$	0.556396830543	1.086208764653	0.917445877604	2.484731692990	5.832490322294
$a_2$	-0.082525734207	-0.402951626982	-0.169688364841	-1.810320814061	-7.650218001181
$a_3$	0.003565834658	0.131066986242	-0.029716326170	1.112990048440	7.907810563576
$a_4$	0.001173034777	-0.028154858354	0.029681617641	-0.481086916514	-5.922599052629
$a_5$	-0.000071772607	0.002596328316	-0.005222483773	0.126598690230	3.071037015445
$a_6$	-0.000000352273	0.000128743150	-0.000118806260	-0.015510730165	-1.014956769726
$a_7$		0.0	-0.000118806260	0.000021609059	0.170022256519
$a_8$			-0.000020069730	0.000156447570	0.002819958377
$a_9$				-0.000007390277	-0.004791009708
$a_{10}$					-0.000013063429

### G.3 Schémas filtrage sélectif

Tableau G.4 – Coefficients du schéma de filtrage sélectif centré sur 11 points d'ordre 6 proposé par Bogey *et al.* (2009).

	SF55
$d_0$	0.234810479762
$d_1$	-0.199250131286
$d_2$	0.120198310245
$d_3$	-0.049303775636
$d_4$	0.012396449874
$d_5$	-0.001446093078

Tableau G.5 – Coefficients des schémas de filtrage sélectif décentrés d'ordre 2 proposés par Berland *et al.* (2007).

	SF46	SF37	SF28	SF15	SF03
$d_{-4}$	0.008391235145				
$d_{-3}$	-0.047402506444	-0.000054596010			
$d_{-2}$	0.121438547725	0.042124772446	0.030715985599		
$d_{-1}$	-0.200063042812	-0.173103107841	-0.148395705486	-0.085777408969	
$d_0$	0.240069047836	0.299615871352	0.312055385964	0.277628171524	0.320882352941
$d_1$	-0.207269200141	-0.276543612935	-0.363202245196	-0.356848072173	-0.465
$d_2$	0.122263107843	0.131223506571	0.230145457063	0.223119093072	0.179117647059
$d_3$	-0.047121062819	-0.023424966418	-0.041231656461	-0.057347064865	-0.035
$d_4$	0.009014891495	0.013937561779	-0.053102470081	-0.000747264596	
$d_5$	0.001855812216	-0.024565095706	0.049434326117	-0.000027453993	
$d_6$	-0.001176830044	0.013098287852	-0.019814358546		
$d_7$		-0.002308621090	0.003395281025		
$d_8$			0.0		

# Bibliographie

- ALBERT, D. G. (2003). Observations of acoustic surface waves in outdoor sound propagation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113(5):2495–2500.
- ALBERT, D. G. et ORCUTT, J. A. (1990). Acoustic pulse propagation above grassland and snow : comparison of theoretical and experimental waveforms. *J. Acoust. Soc. Am.*, 87(1):93–100.
- ALLARD, J. F. (1993). *Propagation of sound in porous media : modelling sound absorbing materials*. Elsevier, première édition.
- ALLARD, J. F. et HENRY, M. (2006). Fluid-fluid interface and equivalent impedance plane. *Wave Motion*, 43:232–240.
- ATTENBOROUGH, K. (1985). Acoustical impedance models for outdoor ground surfaces. *J. Sound. Vib.*, 99(4):521–544.
- AUMOND, P., GUILLAUME, G., GAUVREAU, B., LAC, C., MASSON, V. et BÉRENGIER, M. C. (2011). Coupling time domain acoustical and mesoscale meteorological models. Fourteenth Long Range Sound Propagation Symposium, Annapolis, ML, USA, <http://ncpa.olemiss.edu/LRSP.php>.
- BASS, H. E., SUTHERLAND, L. C., ZUCKERWAR, A. J., BLACKSTOCK, D. T. et HESTER, D. M. (1995). Atmospheric absorption of sound : further developments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97(1):680–683.
- BASS, H. E., SUTHERLAND, L. C., ZUCKERWAR, A. J., BLACKSTOCK, D. T. et HESTER, D. M. (1996). Erratum : Atmospheric absorption of sound : further developments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(2):1259.
- BAUME, O. (2006). *Approche gostatistique de l'influence des paramètres physiques sur la propagation acoustique à longue distance*. Thèse de doctorat, Université du Maine.
- BÉRENGER, J. P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comp. Phys.*, 114:185–200.
- BÉRENGIER, M. C., GAUVREAU, B., BLANC-BENON, Ph. et JUVÉ, D. (2003). Outdoor sound propagation : A short review on analytical and numerical approaches. *Acta Acustica united with Acustica*, 89(6):980–991.
- BÉRENGIER, M. C., STINSON, M. R., DAIGLE, G. A. et HAMET, J. F. (1997). Porous road pavement : Acoustical characterization and propagation effects. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101(1):155–162.
- BERLAND, J., BOGEY, C. et BAILLY, C. (2006). Low-dissipation and low-dispersion fourth-order Runge-Kutta algorithm. *Computers & Fluid*, 35:1459–1463.

- BERLAND, J., BOGEY, C., MARSDEN, O. et BAILLY, C. (2007). High order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale and boundary problems. *J. Comp. Phys.*, 224:637–662.
- BERRY, A. et DAIGLE, G. A. (1988). Controlled experiments of the diffraction of sound by a curved surface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 83(6):2047–2058.
- BLAHUT, R. E. (1992). *Algebraic methods for signal processing and communication coding*. Springer-Verlag.
- BLAIRON, N. (2002). *Effets de la topographie sur la propagation des ondes acoustiques dans l’atmosphère : modélisation avec l’équation parabolique et validation sur un site extérieur*. Thèse de doctorat, n°2002-35, École Centrale de Lyon.
- BLAIRON, N., BLANC-BENON, Ph., BÉRENGIER, M. C. et JUVÉ, D. (2002). Outdoor sound propagation in complex environments : experimental validation of a pe approach. Tenth Long Range Sound Propagation Symposium, Grenoble, France, <http://ncpa.olemiss.edu/LRSP.php>.
- BLUMRICH, R. et HEIMANN, D. (2002). A linearized Eulerian sound propagation model for studies of complex meteorological effects. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(2):446–455.
- BOECKX, L., JANSSENS, G., LAURIKS, W. et ALBERT, D. G. (2004). Modelling acoustic surface waves above a snow layer. *Acta Acustica United with Acustica*, 90:246–250.
- BOGEY, C. et BAILLY, C. (2002). Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations : far-field formulation and validation test cases. *Acta Acustica United with Acustica*, 88:463–471.
- BOGEY, C. et BAILLY, C. (2004). A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations. *J. Comp. Phys.*, 194:194–214.
- BOGEY, C., DE CACQUERAY, N. et BAILLY, C. (2009). A shock-capturing methodology based on adaptative spatial filtering for high-order non-linear computations. *J. Comp. Phys.*, 228(5):1447–1465.
- BONGINI, E. (2008). *Modèle acoustique global et synthèse sonore du bruit d’un véhicule : applications aux véhicules ferroviaires*. Thèse de doctorat, Université de Provence.
- BOYD, J. P. (2001). *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Dover Publications, INC.
- BREKHOVSKIKH, L. M. (1980). *Waves in layered media*. Academic Press, INC.
- BREKHOVSKIKH, L. M. et GODIN, O. A. (1992). *Acoustics of layered media II*. Springer, New York.
- BRUNEAU, M. (1998). *Manuel d’acoustique fondamentale*. Editions Hermes.
- CAA (1997). Proceedings of the second Computational AeroAcoustics (CAA) workshop on benchmark problems. NASA.
- CANDEL, S. (1977). Numerical solution of conservation equations arising in linear wave theory : application to aeroacoustics. *J. Fluid. Mech.*, 83(3):465–493.

- CHAMBERS, J. P. et BERTHELOT, Y. H. (1996). An experimental investigation of the propagation of sound over a curved, rough, rigid surface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102(2):707–714.
- CHAMPOUX, Y. et STINSON, M. R. (1992). On acoustical models for sound propagation in rigid frame porous materials and the influence of shape factors. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(2):1120–1131.
- CHIEN, C. F. et SOROKA, W. W. (1975). Sound propagation along an impedance plane. *J. Sound. Vib.*, 43(1):9–20.
- CLÉON, L. M. et POISSON, F. (2010). *Acoustique des transports ferroviaires*. Techniques de l'ingénieur.
- COLLINO, F. (1997). Perfectly matched absorbing layers for the paraxial equations. *J. Comp. Phys.*, 131:164–180.
- COLLINS, M. D. (1992). A self-starter for the parabolic equation method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(4):2069–2074.
- COLLINS, M. D. (1993). A split-step Padé solution for the parabolic equation method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 93(4):1736–1742.
- COLLINS, M. D. et WESTWOOD, E. K. (1991). A higher-order energy-conserving parabolic equation for range-dependent ocean depth, sound speed, and density. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(3):1068–1075.
- COTTÉ, B. (2008). *Propagation acoustique en milieu extérieur complexe : problèmes spécifiques au ferroviaire dans le contexte des trains à grande vitesse*. Thèse de doctorat, n°2008-19, École Centrale de Lyon.
- COTTÉ, B. et BLANC-BENON, Ph. (2009). Time-domain simulations of sound propagation in a stratified atmosphere over an impedance ground. *J. Acoust. Soc. Am.*, 125(5):EL 202–207.
- COTTÉ, B., BLANC-BENON, Ph., BOGEY, C. et POISSON, F. (2009). Time-domain impedance boundary conditions for simulations of outdoor sound propagation. *AIAA J.*, 47(10):2391–2403.
- CRAMER, O. (1993). The variation of the specific heat ratio and the speed of sound in air with temperature, pressure, humidity, and co concentration. *J. Acoust. Soc. Am.*, 93(5):2510–2516.
- DAIGLE, G. A., STINSON, M. R. et HAVELOCK, D. I. (1996). Experiments on surface waves over a model impedance plane using acoustical pulses. *J. Acoust. Soc. Am.*, 99(4):1993–2005.
- DALLOIS, L. (2000). *Propagation des ondes acoustiques dans les milieux en mouvement : extension grand angle de l'approximation parabolique*. Thèse de doctorat, n°2000-37, École Centrale de Lyon.
- DE GREVE, B., VAN RENTERGHEM, T. et BOTTELDOOREN, D. (2005). Long range FDTD over undulating terrain. Forum Acusticum, Budapest, Hongrie.
- DEBNATH, L. et BHATTA, D. (2007). *Integral Transforms and Their Applications*. CRC-Press.
- DELANY, M. et BAZLEY, E. (1970). Acoustical properties of fibrous absorbent materials. *Appl. Acoust.*, 3:105–116.
- DEUFRAKO (1999). Annexe K2, Rapport final.

- DI, X. et GILBERT, K. E. (1993). An exact Laplace transform formulation for a point source above a ground surface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 93(2):714–720.
- DI, X. et GILBERT, K. E. (1994). The effect of turbulence and irregular terrain on outdoor sound propagation. In *Sixth International Symposium on Long Range Sound Propagation, Ottawa, Canada*, pages 315–333.
- DIAZ, J. et JOLY, P. (2006). A time domain analysis of PML models in acoustics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195:3820–3853.
- DONATO, R. J. (1978). Model experiments on surface waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, 63(3):700–704.
- DRAGNA, D., COTTÉ, B., BLANC-BENON, Ph. et POISSON, F. (2011). Time-domain simulations of outdoor sound propagation with suitable impedance boundary conditions. *AIAA J.*, 49(7):1420–1428.
- EMBLETON, T. F. W., PIERCY, J. E. et DAIGLE, G. A. (1983). Effective flow resistivity of ground surfaces determined by acoustical measurements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 74(4):1239–1244.
- EMMERT, T. (2007). *Development of multidomain high-order algorithm for computational aeroacoustics : application to subsonic and transonic confined flows*. Thèse de doctorat, n°2007-30, École Centrale de Lyon.
- ENFLO, B. O. (1986). The sound field from a point source above an infinite homogeneous impedance boundary. Rapport technique, Tech. Rep, TRITA-MEK-86-4.
- FOCK, V. A. (1965). *Electromagnetic diffraction and propagation problems*. Pergamon Press, Ltd., Oxford.
- GALINDO, M. (1996). Approximations in the PE method. Phase and level errors in a downward refracting atmosphere. Seventh Long Range Sound Propagation Symposium, Lyon, France, <http://ncpa.olemiss.edu/LRSP.php>.
- GILBERT, K. E. et DI, X. (2007). An exact point source starting field for the Fourier parabolic equation in outdoor sound propagation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 121(5):EL 203–210.
- GILBERT, K. E. et WHITE, M. J. (1989). Application of the parabolic equation to sound propagation in a refracting atmosphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(2):630–637.
- GOTTLIEB, D. et HESTHAVEN, J. S. (2001). Spectral methods for hyperbolic problems. *J. Comp. Appl. Math.*, 128:83–131.
- GRADSHTEYN, I. S. et RYZHIK, I. M. (1980). *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, quatrième édition.
- GREENE, R. R. (1984). The rational approximation to the acoustic-wave equation with bottom interaction. *J. Acoust. Soc. Am.*, 76(6):1764–1773.
- GUSTAVSEN, B. et SEMLYEN, A. (1999). Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting. *IEEE Trans. Power Delivery*, 14(3):1052–1061.
- HABAULT, D. et FILIPPI, P. J. T. (1981). Ground effect analysis : surface wave and layer potential representations. *J. Sound. Vib.*, 79(4):529–550.

- HEIMANN, D. (2010). On the efficiency of noise barriers near sloped terrain - a numerical study. *Acta Acustica United with Acustica*, 96:1003–1011.
- HEIMANN, D. et KARLE, R. (2006). A linearized Euler finite-difference time-domain sound propagation model with terrain-following coordinates. *J. Acoust. Soc. Am.*, 119(6):3813–3821.
- HEUTSCHI, K., HORVATH, M. et HOFMANN, J. (2005). Simulation of ground impedance in finite difference time domain calculations of outdoor sound propagation. *Acta Acustica United with Acustica*, 91:35–40.
- HORNIKX, M. (2009). *Numerical modelling of sound propagation to closed urban courtyards*. Thèse de doctorat, Chalmers University of Technology.
- HORNIKX, M. et WAXLER, R. (2010). The extended Fourier pseudospectral time-domain (PSTD) method for fluid media with discontinuous properties. *J. Comp. Acoust.*, 18(4):297–319.
- HORNIKX, M., WAXLER, R. et FORSSÉN, J. (2010). The extended Fourier pseudospectral time-domain method for atmospheric sound propagation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 128(4):1632–1646.
- HU, F. Q. (2001). A stable, perfectly matched layer for linearized Euler equations in unsplit physical variables. *J. Comp. Phys.*, 173:455–480.
- ISO (2005). ISO 3095, Applications ferroviaires – Acoustique – Mesurage du bruit émis par les véhicules circulant sur rails. International Organization for Standardization, Genève, Suisse.
- JEAN, P. (1998). A variational approach for the study of outdoor sound propagation and application to railway noise. *J. Sound. Vib.*, 212(2):275–294.
- JUNKER, F., GAUVREAU, B., BLANC-BENON, Ph., CREMEZI-CHARLET, C., ECOTIÈRE, D., BAUME, O. et COTTÉ, B. (2006). *Classification de l'influence relative des paramètres physiques affectant les conditions de propagation à grande distance*. Rapport final du projet MEDD.
- KRUSE, R. (2007). Application of the two-microphone method for in-situ ground impedance measurements. *Acta Acustica United with Acustica*, 93:837–342.
- KURBATSKII, K. A. et TAM, C. K. W. (1997). Cartesian boundary treatment of curved walls for high-order computational aeroacoustics schemes. *AIAA J.*, 35(1):133–140.
- LCPC (2010). LCPC - moyens remarquables - acoustique environnementale : site expérimental permanent du LCPC. <http://www.lcpc.fr/francais/presentation/moyens-humains-financiers-et/lcpc-moyens-remarquables-153/>.
- LEONTOVICH, M. A. et FOCK, V. A. (1946). Solution of the problem of propagation of electromagnetic waves along the earth's surface using parabolic equation method. *Zh. Eks. Teor. Fiz.*, 16:557–573.
- LI, K. M. et TAHERZADEH, S. (1997). The sound field of an arbitrarily oriented quadrupole near ground surfaces. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102(4):2050–2057.
- LI, K. M., TAHERZADEH, S. et ATTENBOROUGH, K. (1997). Sound propagation from a dipole source near an impedance plane. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101(6):3343–3352.
- LI, K. M., WANG, Q. et ATTENBOROUGH, K. (1998). Sound propagation over convex impedance surfaces. *J. Acoust. Soc. Am.*, 104(5):2683–2691.



- LI, X. Y., LI, X. D. et TAM, C. (2011). Construction and validation of a broadband time domain impedance boundary condition. *In Seventeenth AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Portland, OR, USA*. AIAA Paper 2011-2870.
- LIHOREAU, B., GAUVREAU, B., BÉRENGIER, M., BLANC-BENON, Ph. et CALMET, I. (2006). Outdoor sound propagation modeling in realistic environments : application of coupled parabolic and atmospheric models. *J. Acoust. Soc. Am.*, 120(1):110–119.
- LONDHE, N., RAO, M. et BLOUGH, J. (2009). Application of the ISO 13472-1 in situ technique for measuring the acoustic absorption coefficient of grass and artificial turf surfaces. *Appl. Acoust.*, 70:129–141.
- LUEBBERS, R. J. et HUNSBERGER, F. (1992). FDTD for Nth-order dispersive media. *IEEE Trans. Antenn. Propag.*, 40(11):1297–1301.
- MARSDEN, O., BOGEY, C. et BAILLY, C. (2005). High-order curvilinear simulations of flows around non-Cartesian bodies. *J. Comp. Acoust.*, 13(4):731–748.
- MESBAH, M., MEYERS, J. et BAELMANS, M. (2008). Acoustic performance of nonreflecting boundary conditions for a range of incident angles. *J. Comp. Acoust.*, 16(1):11–29.
- MIKI, Y. (1990). Acoustical properties of porous materials - modifications of Delany-Bazley models. *J. Acoust. Soc. Jpn.*, 11(1):19–24.
- MORSE, P. M. et INGARD, K. U. (1968). *Theoretical acoustics*. McGraw-Hill.
- MYERS, M. K. et MCANINCH, G. L. (1978). Parabolic approximation for sound propagation in the atmosphere. *AIAA J.*, 16:836–842.
- NOCKE, C., WATERS-FULLER, T., ATTENBOROUGH, K., MELLERT, V. et LI, K. M. (1997). Impedance deduction from broad-band, point-source measurements at grazing angles. *Acta Acustica United with Acustica*, 83:1085–1090.
- OCHMANN, M. (2004). The complex equivalent source method for sound propagation over an impedance plane. *J. Acoust. Soc. Am.*, 116(6):3304–3311.
- OSTASHEV, V. E., COLLIER, S. L., WILSON, D. K., ALDRIDGE, D. F., SYMONS, N. P. et MARLIN, D. H. (2007). Padé approximation in time-domain boundary conditions of porous surfaces. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(1):107–112.
- OSTASHEV, V. E., WILSON, D. K., LIU, L., ALDRIDGE, D. F., SYMONS, N. P. et MARLIN, D. (2005). Equations for finite-difference, time-domain simulation of sound propagation in moving inhomogeneous media and numerical implementation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117(2):503–517.
- ÖZYÖRÜK, Y. et LONG, L. N. (1996). A time-domain implementation of surface acoustic impedance condition with and without flow. *In Second AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, State College, PA, USA*. AIAA Paper 96-1663.
- PARAKKAL, S., GILBERT, K. E., DI, X. et BASS, H. E. (2010). A generalized polar coordinate method for sound propagation over large-scale irregular terrain. *J. Acoust. Soc. Am.*, 128(5):2573–2580.
- PETIAU, G. (1955). *La théorie des fonctions de Bessel*. CNRS.

- PIERCE, A. D. (1989). *Acoustics : An Introduction to its Physical Principles and Applications*. Acoustical Society of America.
- PLATTE, R. B. et GELB, A. (2009). A hybrid Fourier-Chebyshev method for partial differential equations. *J. Sci. Comput.*, 39:244–264.
- RASPET, R., BAIRD, G. E. et WU, W. (1991). The relationship between upward refraction above a complex impedance plane and the spherical wave evaluation for a homogeneous atmosphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(1):107–114.
- RASPET, R., LEE, S. W., KUESTER, E., CHANG, D. C., RICHARDS, W. F., GILBERT, R. et BONG, N. (1985). A fast-field program for sound propagation in a layered atmosphere above an impedance ground. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(2):345–352.
- REYEMEN, Y., BAELMANS, M. et DESMET, W. (2006). Time-domain impedance formulation based on recursive convolution. In *Twelfth AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Cambridge, MA, USA*. AIAA Paper 2006-2685.
- RIENSTRA, S. W. (1988). 1-D reflection at an impedance wall. *J. Sound. Vib.*, 125(1):43–51.
- RIENSTRA, S. W. (2006). Impedance models in time domain including the extended Helmholtz resonator model. In *Twelfth AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Cambridge, MA, USA*. AIAA Paper 2006-2686.
- RIORDAN, J. (1946). Derivatives of composite functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:664–667.
- ROUFFAUD, R. (2010). Traitement et analyse d’une base de données expérimentale des caractéristiques d’impédance du sol (station de long terme). Rapport de stage, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.
- RUDNICK, I. (1947). The propagation of an acoustic wave along a boundary. *J. Acoust. Soc. Am.*, 19(2):348–356.
- SACK, R. A. et WEST, M. (1995). A parabolic equation for sound propagation in two dimensions over any smooth terrain profile : the generalised terrain parabolic equation (GT-PE). *Appl. Acoust.*, 45:113–129.
- SALOMONS, E. (2001). *Computational Atmospheric Acoustics*. Kluwer Academic Publishers.
- SALOMONS, E. M., BLUMRICH, R. et HEIMANN, D. (2002). Eulerian time-domain model for sound propagation over a finite-impedance ground surface. Comparison with frequency-domain models. *Acta Acustica United with Acustica*, 88:483–492.
- SOH, J. H., GILBERT, K. E., FRAZIER, G., TALMADGE, C. L. et WAXLER, R. (2010). A direct method for measuring acoustic ground impedance in long-range propagation experiments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 129(5):EL 286–293.
- TAHERZADEH, S. et ATTENBOROUGH, K. (1999). Deduction of ground impedance from measurements of excess attenuation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105(3):2039–2042.
- TAKAHASHI, Y., OTSURU, T. et TOMIKU, R. (2005). In situ measurements of surface impedance and absorption coefficients of porous materials using two microphones and ambient noise. *Appl. Acoust.*, 66:845–865.

- TALMADGE, C. L., WAXLER, R., DI, X., GILBERT, K. E. et KULICHKOV, S. (2008). Observation of low-frequency acoustic surface waves in the nocturnal boundary layer. *J. Acoust. Soc. Am.*, 124(4):1956–1962.
- TAM, C. K. W. et DONG, Z. (1996). Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow. *J. Comp. Acoust.*, 4:175–201.
- TAM, C. K. W. et WEBB, J. C. (1993). Dispersion-relation preserving finite difference schemes for computational acoustics. *J. Comp. Phys.*, 107:262–281.
- TANAKA, K. et ISHII, S. (1981). Acoustic radiation from a moving source line. *J. Sound. Vib.*, 77(3):397–401.
- TAPPERT, F. D. (1977). The parabolic equation method. *In Wave Propagation and Underwater acoustics*, pages 224–287. Springer-Verlag.
- TARALDSEN, G. (2005a). The complex image method. *Wave Motion*, 43(1):91–97.
- TARALDSEN, G. (2005b). The Delany-Bazley impedance model and Darcy’s law. *Acta Acustica United with Acustica*, 91:41–50.
- TARALDSEN, G. et JONASSON, H. (2011). Aspects of ground effect modeling. *J. Acoust. Soc. Am.*, 129(1):47–53.
- THOMASSON, S. I. (1976). Reflection of waves from a point source by an impedance boundary. *J. Acoust. Soc. Am.*, 59(4):780–785.
- TOLSTOY, I. (1973). *Wave propagation*. McGraw-Hill Companies.
- TREFETHEN, L. N. (2000). *Spectral methods in MATLAB*. Society for industrial and applied mathematics.
- VAN RENTERGHEM, T. et BOTTELDOOREN, D. (2003). Numerical simulation of the effect of trees on downwind noise barriers performance. *Acta Acustica United with Acustica*, 89:764–778.
- VAN RENTERGHEM, T. et BOTTELDOOREN, D. (2008). Numerical evaluation of tree canopy shape near noise barriers to improve downwind shielding. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123(2):648–657.
- VAN RENTERGHEM, T., SALOMONS, E. M. et BOTTELDOOREN, D. (2005). Efficient FDTD-PE model for sound propagation in situations with complex obstacles and wind profiles. *Acta Acustica United with Acustica*, 91:671–679.
- VAN RENTERGHEM, T., SALOMONS, E. M. et BOTTELDOOREN, D. (2006). Parameter study of sound propagation between city canyons with a coupled FDTD-PE model. *Appl. Acoust.*, 67:487–510.
- VOISIN, Ph. et BLANC-BENON, Ph. (2007). The influence of meteorological conditions for the localization of an acoustic source by means of a microphone antenna. *Acta Acustica United with Acustica*, 87:695–702.
- WATSON, G. N. (1966). *Theory of Bessel functions*. Cambridge University Press.

- WAXLER, R. (2002). A vertical eigenfunction expansion for the propagation of sound in a downward-refracting atmosphere over a complex impedance plane. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(6):2540–2552.
- WAXLER, R. (2004). Modal expansions for sound propagation in the nocturnal boundary layer. *J. Acoust. Soc. Am.*, 115(4):1437–1448.
- WAXLER, R., TALMADGE, C. L., DRAVIDA, S. et GILBERT, K. E. (2006). The near-ground structure of the nocturnal sound field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 119(1):86–95.
- WEIDEMAN, J. A. C. et TREFETHEN, L. N. (1988). The eigenvalues of second-order spectral differentiation matrices. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25(6):1279–1298.
- WHELAN, A. et CHAMBERS, J. P. (2009). A note on the effects of roughness on acoustic propagation past curved rough surfaces. *J. Acoust. Soc. Am.*, 125(6):EL 231–235.
- WILSON, D. K. (1993). Relaxation-matched modeling of propagation through porous media, including fractal pore structure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(2):1136–1145.
- WILSON, D. K., COLLIER, S. L., OSTASHEV, V. E., ALDRIDGE, D. F., SYMONS, N. P. et MARLIN, D. H. (2006). Time-domain modeling of the acoustic impedance of porous surfaces. *Acta Acustica United with Acustica*, 92:965–975.
- WILSON, D. K., OSTASHEV, V. E., COLLIER, S. L., SYMONS, N. P., ALDRIDGE, D. F. et MARLIN, D. H. (2007). Time-domain calculations of sound interactions with outdoor ground surfaces. *Appl. Acoust.*, 68:173–200.
- YOKOTA, T., HIRAO, Y. et YAMAMOTO, K. (2006). Efficient calculation on outdoor sound propagation by FDTD and PE method. *Acoustical Science and Technology*, 27(3):177–179.
- YOUNG, J., KITTICHARTPHAYAK, A., KWOK, Y. et SULLIVAN, D. (1995). On the dispersion errors related to (FD)<sup>2</sup>TD type schemes. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 43(18):1902–1910.
- ZWIKKER, C. et KOSTEN, C. W. (1949). *Sound absorbing materials*. Elsevier.



## AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur Ph. BLANC-BENON

et les rapports de

Monsieur M. BERENGIER  
Directeur de Recherche HDR - Laboratoire Central des Ponts et Chaussées - Route de Bouaye - BP 4129  
44341 BOUGUENAIS cedex

Et de

Monsieur Ph. LAFON  
Ingénieur Chercheur Senior HDR - EDF R&D et LaMSID UMR EDF-CNRS-CEA 2832 - BP 408  
1, avenue Général de Gaulle - 92141 CLAMART cedex

**Monsieur DRAGNA Didier**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE**

Fait à Ecully, le 8 novembre 2011

P/Le Directeur de l'E.C.L.  
La Directrice des Etudes

