



HAL
open science

Résolution de l'équation de l'infiltration de l'eau dans le sol : approches analytiques et numériques

Randel Haverkamp

► **To cite this version:**

Randel Haverkamp. Résolution de l'équation de l'infiltration de l'eau dans le sol : approches analytiques et numériques. Milieux fluides et réactifs. Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1983. Français. NNT : . tel-00688101

HAL Id: tel-00688101

<https://theses.hal.science/tel-00688101v1>

Submitted on 16 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
ET
L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE GRENOBLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

Randel HAVERKAMP

Chargé de Recherches C.N.R.S.

S U J E T

**Résolution de l'équation
de l'infiltration de l'eau dans le sol.
Approches analytiques et numériques.**

Soutenue le 28 Novembre 1983 devant la Commission d'Examen

M. J.-L. AURIAULT	Président
M. J. DELLEUR	Rapporteur
M. J.-Y. PARLANGE	
M. C. TZIMOPOULOS	Examineurs
M. G. VACHAUD	
M. M. VAUCLIN	
M. J. WOLSACK	

A Nevil

AVANT-PROPOS

Les travaux qui font l'objet de ce mémoire ont été effectués à l'Institut de Mécanique de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, dans le cadre de l'équipe des milieux poreux non saturés du Groupe Hydrologie.

Monsieur le Professeur J.L. AURIAULT m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Monsieur le Professeur J.Y. PARLANGE, de Griffith University, Brisbane, a accordé à mes travaux un intérêt constant et m'a fait l'honneur de participer au Jury comme rapporteur. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Que Monsieur le Professeur J. DELLEUR, de Purdue University, Indiana, soit remercié sincèrement pour ses critiques constructives et pour sa participation au Jury.

J'exprime ma plus vive reconnaissance à Monsieur G. VACHAUD, Directeur de Recherches au C.N.R.S., qui, en dirigeant ce travail, a su me faire bénéficier de sa longue expérience. Pendant mes "ups and downs", son aide amicale et compréhensive ainsi que son soutien constant m'ont toujours été très précieux.

Michel VAUCLIN, Maître de Recherches au C.N.R.S., avec qui j'ai travaillé sans cesse en étroite collaboration, m'a beaucoup aidé par son esprit critique et cartésien, son oeil de "Lynx" et sa très grande disponibilité. Qu'il trouve ici l'expression de mes sincères remerciements.

Je remercie également Monsieur J. WOLSACK, responsable du Département Mathématiques Appliquées de l'E.N.G.R.E.F., ainsi que le Professeur C. TZIMOPOULOS de l'Université Aristotele de Thessalonique, qui ont bien voulu accepter de participer au jury.

Je ne saurais oublier que cette recherche n'a pu être menée à bien que grâce à un travail d'équipe. Que soient donc remerciés les membres du Groupe d'Hydrologie, et plus particulièrement Jaoudat TOUMA.

Que ne soient oubliés Sylviane FABRY et Robert LATY pour leur aide matérielle si efficace et patiente, sans laquelle ce mémoire ne serait pas.

SOMMAIRE

INTRODUCTION..... 1

CHAPITRE I - CONSIDERATIONS GENERALES..... 3

 I.1 - POSITION DU PROBLEME..... 4

 1.1 - Approche complète 4

 1.2 - Approches simplifiées 5

 I.2 - EQUATIONS DE BASE 6

 2.1 - L'équation en θ 9

 2.2 - L'équation en h 10

 2.3 - L'équation en U 11

 I.3 - PRESENTATIONS DES CAS ETUDIES 11

 3.1 - Caractérisation du "Yolo Light Clay" en
 infiltration 13

 3.2 - Caractérisation du "Sable de l'Isère" en
 infiltration 14

LES SOLUTIONS QUASI-ANALYTIQUES

CHAPITRE II - RAPPELS THEORIQUES DES SOLUTIONS QUASI-ANALYTIQUES 19

 II-1 - L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK 19

 1.1 - La solution en série 20

 1.2 - La solution asymptotique 22

 II.2 - L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK TRANSFORMEE 24

 2.1 - La solution de PARLANGE 24

 2.2 - La solution flux-concentration 26

 2.3 - La solution aux perturbations 28

 II.3 - AUTRES METHODES 30

 II.4 - PROBLEMES DE LA MISE EN OEUVRE 31

 4.1 - La solution de PHILIP 31

 4.2 - La solution de PARLANGE 33

 4.3 - La solution flux-concentration 34

 4.4 - La solution aux perturbations 34

 II.5 - CONCLUSIONS 35

<u>CHAPITRE III - EXTENSION ET MISE EN OEUVRE DE LA METHODE QUASI-ANALYTIQUE DE PHILIP</u>	37
III.1 - CALCUL GENERAL DES TERMES DE LA SERIE	37
III.2 - INFLUENCE DE LA METHODE ET PAS D'INTEGRATION	40
2.1 - Yolo Light Clay	42
2.2 - Sable de L'Isère	49
2.3 - Conclusions	54
III.3 - INFLUENCE DU NOMBRE DES TERMES DE LA SOLUTION EN SERIE..	54
3.1 - Yolo Light Clay	60
3.2 - Sable de l'Isère	79
3.3 - Conclusions	91
III.4 - TEMPS DE PASSAGE ENTRE LES SOLUTIONS EN SERIE ET ASYMPTOTIQUE	94
4.1 - Yolo Light Clay	96
4.2 - Sable de l'Isère	99
4.3 - Conclusions	99
III.5 - SOLUTION ASYMPTOTIQUE	101
5.1 - La solution PHILIP	101
5.2 - La solution à double intégration	103
5.2.1 - La constante d_4	108
5.3 - Yolo Light Clay	110
5.4 - Sable de l'Isère	119
5.5 - Conclusions	122
III.6 - CONCLUSIONS	124

LES SOLUTIONS NUMERIQUES

<u>CHAPITRE IV - RAPPELS THEORIQUES DES SOLUTIONS NUMERIQUES</u>	129
IV.1 - EQUATIONS DE TRAVAIL	130
1.1 - Ecriture adimensionnelle	130
1.2 - Grille de discrétisation	131
IV.2 - SCHEMAS DE DISCRETISATION	133
2.1 - Problèmes de la mise en oeuvre	133
2.2 - Schémas de discrétisation des différents modèles de départ	136

2.2.1 - Modèle du bilan local	136
2.2.2 - Modèle décomposé	142
2.2.3 - Modèle de KIRCHHOFF	143
2.2.4 - Modes de pondération	145
IV.3 - CONCLUSIONS	148
<u>CHAPITRE V</u> - <u>ETUDE DE CONVERGENCE DES SOLUTIONS NUMERIQUES</u>	149
V.1 - INFLUENCE DU MODE DE PONDERATION	149
1.1 - Etude des schémas LOC1.B	150
1.1.1 - Cinétique d'humidification	150
1.1.2 - Comportement asymptotique	159
1.2 - Etude des schémas DEC.B	163
1.3 - Etude des schémas DEC.F et KIR.B.....	164
1.4 - Conclusions	167
V.2 - INFLUENCE DU MODE DE LINEARISATION	169
2.1 - Etude des modèles du bilan local	169
2.1.1 - Schémas explicites ($\sigma = 0$)	169
2.1.2 - Schémas totalement implicites ($\sigma = 1$)....	175
2.1.2.1 - Influence du mode de calcul de \bar{C}^*	175
2.1.2.2 - Influence du mode de calcul de \bar{K}^*	183
2.1.3 - Schémas de type CRANK-NICOLSON ($\sigma = \frac{1}{2}$)... 188	
2.1.4 - Conclusions	199
2.2 - Etude des modèles décomposés	200
2.2.1 - Schémas explicites ($\sigma = 0$)	200
2.2.2 - Schémas totalement implicites ($\sigma = 1$) ...	201
2.2.3 - Schémas de type CRANK-NICOLSON ($\sigma = \frac{1}{2}$)... 203	
2.2.4 - Conclusions	207
2.3 - Etude des modèles de KIRCHHOFF	208
2.3.1 - Schémas explicites ($\sigma = 0$)	208
2.3.2 - Schémas totalement implicites ($\sigma = 1$) ...	208
2.3.3 - Schémas de type CRANK-NICOLSON ($\sigma = \frac{1}{2}$)... 209	
2.3.4 - Conclusions	213
V.3 - CONCLUSIONS	214
<u>CHAPITRE VI</u> - <u>CONCLUSIONS GENERALES</u>	227

BIBLIOGRAPHIE 231
ANNEXE - SCHEMAS ET MAILLAGE DE DISCRETISATION 239

LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES

Symboles	Définitions	Dimensions
a_1	Paramètre de calage. (Eq. I-17).	L
a_2	Paramètre de calage. (Eq. I-17).	
a_3	Paramètre de calage. (Eq. I-19).	L^{-1}
a_4	Paramètre de calage. (Eq. I-19).	
a_5	Paramètre de calage. (Eq. I-19).	
b_1	Paramètre de calage. (Eq. I-18).	L
b_2	Paramètre de calage. (Eq. I-18).	
b_3	Paramètre de calage. (Eq. I-20).	
BM	Bilan de la masse. (Eq. III-88).	
C	Capacité capillaire	L^{-1}
C^*	Capacité capillaire réduite. (Eq. IV-4).	
c_2	Paramètre de la solution en série. (Eq. III-5).	
c_3	Paramètre de la solution en série. (Eq. III-6).	$L.T^{-3/2}$
c_m	Paramètre de la solution en série. (Eq. III-9).	$L.T^{-m/2}$
D	Diffusivité capillaire	$L^2 T^{-1}$
d_1	Paramètre de la solution asymptotique. (Eq. III-57).	$L T^{-1}$
d_2	Paramètre de la solution asymptotique. (Eq. III-57).	T^{-1}
d_3	Paramètre de la solution asymptotique (Eq. III-58).	L
d_4	Paramètre de la solution "D.I." (Eq. III-68).	$T.L^{-2}$

d_5	Paramètre de la solution "D.I." (Eq. III-77b).	
d_6	Paramètre de la solution "D.I." (Eq. III-77c).	
E_D	Erreur de discrétisation	
$E_{D.l}$	Erreur de discrétisation dans le cas du régime permanent. (Eq. V-12).	
$E_{D.t}$	Composante temporelle de l'erreur E_D (Eq. V-23).	
$E_{D.z}$	Composante spatiale de l'erreur E_D (Eq. V-23).	
E_I	Erreur d'intégration (Eqs. III-15, III-17, III-19).	L
E^*_I	Erreur d'intégration réduite (Eqs. III-18, III-20).	
E_N	Erreur numérique. (Eq. IV-56).	
E_T	Erreur de troncature. (Eqs. III-22, III-24).	L
E^*_T	Erreur de troncature réduite (Eqs. III-23, III-25).	
E_{T1}	Première estimation de E_T (Eqs. III-26, III-28).	L
E^*_{T1}	Première estimation de E^*_T (Eqs. III-27, III-29).	
E_{T2}	Deuxième estimation de E_T . (Eq. III-33).	L
E^*_{T2}	Deuxième estimation de E^*_T . (Eq. III-35).	
E_{T3}	Troisième estimation de E_T . (Eq. III-39).	L
E^*_{T3}	Troisième estimation de E^*_T . (Eq. III-40).	
F_{PA}	Paramètre de forme de la solution de Parlange. (Eq. II-20).	
F_{PH}	Paramètre "flux-concentration". (Eq. II-22).	
f_m	"m"-ième coefficient de la solution en série. (Eq. III-1).	$L.T^{-m/2}$
g	Accélération de la pesanteur.	$L.T^{-2}$
H	Charge hydraulique. (Eq. I-4)	L

h	Pression effective de l'eau.	L
h_o	Pression effective correspondant à la teneur en eau initiale θ_o . (Eq. IV-1)	L
h_1	Pression effective correspondant à la teneur en eau à la surface θ_1 . (Eq. IV-1).	L
h_A^*	Pression effective de la solution quasi-analytique du cas non linéaire en valeurs réduites. (Eq. IV-56).	
h_i^{*j}	Pression numérique du cas non linéaire en valeurs réduites. (Eq. IV-1).	
I	Lame d'eau infiltrée. (Eq. II-4).	L
I_{REEL}	Valeur réelle de I. (Eq. III-17).	L
I_{CAL}	Valeur de I calculée avec la solution quasi-analytique. (Eq. III-17).	L
I_{T2}	Deuxième estimation de I. (Eq. III-41).	L
I_{T3}	Troisième estimation de I. (Eq. III-42).	L
I_{PH}	Valeur de I calculée avec la solution asymptotique de PHILIP. (Eq. III-87).	L
$I_{D.I}$	Valeur de I calculée avec la solution asymptotique à double intégration. (Eq. III-87)	L
i	Indice d'espace	
j	Indice du temps	
K	Conductivité hydraulique	$L T^{-1}$
K_o	Conductivité hydraulique correspondant à la teneur en eau initiale θ_o	$L T^{-1}$
K_1	Conductivité hydraulique correspondant à la teneur en eau à la surface θ_1	$L T^{-1}$
K_S	Conductivité hydraulique à saturation naturelle	$L T^{-1}$
k	Indice de somme. (Eq. III-9).	
K^*	Conductivité hydraulique réduite. (Eq. IV-5).	
K_N^*	Conductivité hydraulique réduite calculée numériquement	
K_R^*	Conductivité hydraulique réduite réelle	

L	Longueur caractéristique ($h_1 - h_0$). (Eq. IV-2).	L
M	Nombre des termes mis en oeuvre avec la solution en série de PHILIP	
M*	Relation $\Delta t^* / \Delta z^{*2}$. (Eq. IV-11).	
m	Nombre du m-ième terme de la solution en série de PHILIP	
m_{fin}	Valeur limite de m	
N	Nombre de pas d'intégration. (Eq. III-13).	
n	Numéro d'itération. (Eqs. II-30 et III-86).	
P_i	Opérateur discret. (Eq. IV-17).	T^{-1}
p_o	Pression de l'air	$M L T^{-2}$
p	Pression de l'eau	$M L T^{-2}$
Q_i	Opérateur discret. (Eq. IV-34).	T^{-1}
q	Densité de flux volumique	$L T^{-1}$
q_o	Densité de flux volumique correspondant à la teneur initiale θ_o	$L T^{-1}$
q_1	Densité de flux volumique correspondant à la teneur en eau à la surface θ_1	$L T^{-1}$
\tilde{q}	Densité de flux volumique correspondant au temps d'inflexion \tilde{t} de la solution en série de PHILIP	$L T^{-1}$
q*	Densité de flux volumique réduite	
q_e^*	Densité de flux volumique entrant. (Eq. IV-16).	
q_s^*	Densité de flux volumique sortant. (Eq. IV-16).	
R"m"	m-ième terme d'erreur relatif au dérivée spatiale ou temporelle	
$S_m(\theta_o, \theta_1)$	m-ième terme de la solution en série de PHILIP. (Eq. II-7).	$L T^{-m/2}$
$S_1(\theta_o, \theta_1)$	Sorptivité capillaire	$L T^{-1/2}$

T	Temps caractéristique. (Eq. IV-2).	T
t	Temps	T
t_{lim}	Temps limitant le champ d'applicabilité de la solution en série de PHILIP	T
t_{grav}	Estimation du temps t_{lim} selon PHILIP. (Eq. II-9).	T
$t_{1.2}$	Deuxième estimation du temps t_{lim} . (Eq. III-49).	T
$t_{1.3}$	Troisième estimation du temps t_{lim} . (Eq. III-50).	T
\tilde{t}	Temps correspondant au point d'inflexion de la solution en série de PHILIP	T
\hat{t}	Temps caractéristique de la solution aux perturbations. (Eq. II-32).	T
t^*	Temps réduit. (Eq. IV-1).	
U	Potentiel d'écoulement. (Eq. I-15).	$L^2 T^{-1}$
u	Vitesse de translation de la solution asymptotique de PHILIP. (Eqs. II-12 et III-55).	$L T^{-1}$
U^*	Potentiel d'écoulement réduit	
V_i	Opérateur discret. (Eq. IV-40).	T^{-1}
W_i	Opérateur discret. (Eq. IV-41).	T^{-1}
x	Coordonnée horizontale	L
z	Cote	L
$z_K(\theta, t)$	Profil hydrique calculé avec successivement k-termes de la solution en série de PHILIP. (Eq. III-1).	L
$z_\infty(\theta)$	Profil à l'infini de la solution asymptotique de PHILIP. (Eqs. II-11 et III-54).	L
\hat{z}	Cote caractéristique de la solution aux perturbations. (Eq. II-32).	L
z^*	Cote réduite	
α	Variable d'intégration	
β	Variable d'intégration	
γ	Coefficient correctif. (Eq. III-36).	

ΔI^*	ASYM	Ecart relatif entre les valeurs de I calculées par la solution asymptotique de PHILIP et la solution à double intégration. (Eq. III-87).	
Δt		Pas de temps	T
Δt^*		Pas de temps réduit	
Δz		Pas d'espace	L
Δz^*		Pas d'espace réduit	
$\Delta \theta$		Pas d'intégration. (Eq. III-13).	
Θ		Degré de saturation effective. (Eq. III-21).	
θ		Teneur en eau volumique	$L^3 L^{-3}$
θ_0		Teneur en eau initiale	$L^3 L^{-3}$
θ_1		Teneur en eau à la surface	$L^3 L^{-3}$
θ_r		Teneur en eau résiduelle	$L^3 L^{-3}$
θ_S		Teneur en eau à saturation naturelle	$L^3 L^{-3}$
θ_i^{*j}		Teneur en eau numérique	
λ		Paramètre de perturbation. (Eq. II-33).	
ρ_w		Masse volumique de l'eau	$M L^{-3}$
σ		Paramètre de discrétisation	

INTRODUCTION

Les transferts hydriques dans la zone non-saturée du sol revêtent une grande importance dans toutes les disciplines de Sciences de l'Environnement (l'hydrologie pour la gestion des ressources en eau ; l'agronomie pour les interactions entre l'eau, le sol et la plante, l'irrigation et le drainage). Considérant certaines hypothèses simplificatrices, ce phénomène d'écoulement est ramené physiquement à un processus décrit par une équation aux dérivées partielles de type parabolique, fortement non linéaire. Elle pose de très nombreux problèmes au niveau de sa résolution mathématique.

Bien que différentes approches quasi-analytiques de résolution aient été développées dans la littérature, elles ne sont applicables uniquement que pour des conditions initiales et aux limites particulières, rarement rencontrées en pratique. Dès lors, les solutions numériques doivent être utilisées. En se limitant aux méthodes numériques fondées sur les différences finies, l'examen de nombreux travaux disponibles montre une grande variété des approches non seulement au niveau du choix et de la discrétisation de l'équation de départ mais également au niveau du traitement des non-linéarités. Néanmoins, dans aucune de ces études le choix du modèle utilisé n'a été justifié en termes de précision, stabilité ou temps de calcul.

Le but de ce mémoire est de tester un grand nombre de solutions numériques (40) de l'équation du transfert de l'eau par rapport à une solution quasi-analytique sélectionnée préalablement afin d'essayer de dégager un ou plusieurs modèles, si faire se peut, présentant un optimum vis à vis des critères de convergence et précision avec un coût économique d'exploitation raisonnable.

Le chapitre I rappelle les généralités relatives aux transferts hydriques isothermes dans un milieu poreux à degré de saturation variable. Les équations de base y sont présentées ainsi que les conditions d'applications.

Dans le chapitre II, la solution quasi-analytique la mieux adaptée à notre étude (condition limite à la surface de type DIRICHLET) est analysée tandis que dans le chapitre III les différents problèmes relatifs à sa mise en oeuvre sont exposés afin de mettre en évidence les erreurs et les restrictions liées à son application.

La partie numérique constitue les chapitres IV et V. Dans le chapitre IV, quarante schémas de discrétisation en différences finies de l'équation de transfert sont exposés. Le chapitre V présente une analyse critique des différents modèles en termes de convergence, de précision et de faisabilité d'exploitation. Les détails de discrétisation des modèles examinées sont donnés dans l'annexe en fin d'étude.

CHAPITRE I

CONSIDERATIONS GENERALES

Ce mémoire voudrait se présenter comme une étude méthodologique, systématique permettant de traiter par voie numérique l'infiltration de l'eau dans un sol. Le processus physique équivalent peut au sens large être défini comme celui qui correspond à l'humidification d'un sol, initialement non-saturé, par un apport d'eau à la surface.

Dans le contexte de notre environnement naturel, cet apport peut s'effectuer soit sous forme de flux (pluie, irrigation par aspersion générale ou localisée), soit sous forme de lame d'eau (irrigation à la raie ou par submersion ; fuite dans les réservoirs ; recharge artificielle de nappe). Malgré la très grande importance, en terme de bilan quantitatif et qualitatif, de la connaissance ou de la prédiction de la quantité d'eau infiltrée dans la gestion des ressources en eau, il est étonnant de constater le manque de moyens fiables mis à la disposition du praticien ou du chercheur pour décrire mathématiquement ce processus.

Cette lacune peut s'expliquer par la complexité des phénomènes physiques mis en jeu, puisqu'ils correspondent au déplacement d'un fluide non mouillant (air) par un fluide mouillant (eau) dans une matrice poreuse éventuellement déformable et de caractéristiques très variables dans l'espace. Même en simplifiant à l'extrême, l'on est physiquement ramené à un problème décrit par une équation différentielle de type parabolique très fortement non linéaire, dont il n'existe pas des solutions analytiques dans le cas général. La prise en compte de ces très fortes non linéarités pose enfin sur le plan de la simulation numérique de très nombreux problèmes.

Compte-tenu de l'importance que révèle ce phénomène dans le domaine de l'hydraulique et des sciences de l'environnement, nous avons estimé justifié de lui consacrer une étude de plusieurs années. Nous nous sommes volontairement limité à un problème "simplifié", correspondant à l'infiltration sous charge constante dans un sol homogène et inerte, dont

l'humidité est initialement uniforme. L'étude de ce problème a en effet donné lieu à une méthode de résolution quasi-analytique, développée par PHILIP J.R. en 1957 et dans les années suivantes, et qui demeure certainement la méthode la plus citée dans la littérature. Une partie importante de notre thèse sera consacrée à l'étude de la validité de cette approche qui servira par la suite de référence permettant de tester un grand nombre d'algorithmes de discrétisation numérique de la solution. Cette étude permettra de retenir certains schémas qualifiés de "solutions optimales", qui peuvent s'appliquer pour résoudre dans les meilleures conditions des problèmes plus complexes et plus réalistes correspondant à des conditions de profil initial d'humidité non uniforme, de milieux stratifiés, de flux ou charge variable, pour lesquels on ne dispose pas de solution analytique.

I.1 - POSITION DU PROBLEME

Comme nous venons de le voir, l'infiltration d'eau dans un sol non saturé correspond physiquement à un problème d'écoulement polyphasique (déplacement d'un fluide non-mouillant par un fluide mouillant) dans un domaine soumis, dans les conditions naturelles, à des variations thermiques.

Plusieurs approches peuvent être envisagées pour sa modélisation conceptuelle, à l'échelle macroscopique.

1.1 - Approche complète

L'approche la plus complète et rigoureuse consiste à considérer pour chaque phase les équations de conservation (masse, énergie, quantité de mouvement), de transport (Darcy, Fourier, Fick), et d'état, les lois de comportement ainsi que les cinétiques d'échange entre phase solide-liquide (adsorption-désorption), solide-gaz (sublimation) et liquide-gaz (évaporation-condensation).

La complexité du formalisme mathématique résultant (équations non linéaires couplées) et les difficultés expérimentales de détermination des coefficients phénoménologiques et de leurs variations spatiales font que des hypothèses simplificatrices plus ou moins fortes doivent être avancées afin de résoudre les problèmes pratiques.

1.2 - Approches simplifiées

Une revue bibliographique montre que des hypothèses de nature différente peuvent être introduites pour étudier le problème de l'infiltration. Toutes ces hypothèses considèrent l'influence des effets thermiques comme négligeable et supposent que le milieu poreux est inerte et indéformable.

i) - Approche bi-phasique

Initialement développée en génie pétrolier (COLLINS, 1961 ; PEACEMAN et RACHFORD, 1962 ; BLAIR et WEINAUG, 1969 ; MAC DONALD et COATS, 1970), cette approche a été étendue à la physique du sol par PHUC et MOREL-SEYTOUX, 1972 ; MOREL-SEYTOUX, 1973 ; MOREL-SEYTOUX et KHANJI, 1975 pour le cas des écoulements isothermes des deux phases eau-air. En effet, des expériences de laboratoire (PECK, 1965 ; MAC WHORTER, 1971 ; VACHAUD et al., 1973 et 1974 ; TOUMA et al., 1984) et des études "in-situ" (DIXON et LINDEN, 1972 ; STARR et al., 1978) ont montré que dans certaines situations le processus d'infiltration pouvait être affecté par l'augmentation de la pression d'air en amont du front.

Cette approche, bien que satisfaisante sur le plan théorique, présente certaines limitations :

- sa mise en oeuvre nécessite la connaissance de la perméabilité relative à l'air, d'accès très difficile en conditions "in-situ".

- les solutions analytiques et numériques butent sur la difficulté de caractériser la condition à la limite supérieure (surface du sol) pour la phase gazeuse. Une étude exhaustive du problème doit être effectuée dans le cadre d'une autre thèse de notre groupe par TOUMA J.

- enfin, et ce point est important, le processus de l'infiltration est probablement plus complexe qu'un simple problème d'écoulement bi-phasique, en raison des instabilités qui se produisent durant le déplacement vertical d'un fluide moins dense, par un fluide plus dense, comme le montrent HILL et PARLANGE (1972), RAATS (1973). On notera à

ce propos que PHILIP (1975) fournit des critères de stabilité qui montrent que dans la majorité des cas pratiques il existe des instabilités. Ces effets ne sont pas pris en compte dans notre analyse.

ii) - Approche mono-phasique

Ces difficultés, liées au fait essentiel que dans de très nombreuses applications pratiques la compression de l'air peut être considérée extrêmement faible, ont conduit la majorité des chercheurs en physique de sol à utiliser l'approche développée par RICHARDS L.A. en 1931 et qualifiée de mono-phasique. L'approche suppose en effet que l'air présent dans le milieu poreux est en permanence à la pression atmosphérique, ou que son écoulement, s'il existe, est quasi-instantané compte-tenu de la grande différence de viscosité entre les deux phases.

On est dès lors ramené à un problème d'écoulement d'une seule phase (eau) dans un milieu inerte et isotherme avec un degré de saturation de l'espace poral variant dans le temps et dans l'espace.

Nous nous placerons dans ces conditions de travail supposant de plus le milieu poreux homogène et isotrope.

I.2 - EQUATIONS DE BASE

L'approche mono-phasique amène au départ à considérer comme variable explicative la teneur en eau volumique θ (volume d'eau par volume unitaire de sol).

La description mathématique de l'écoulement est obtenue en considérant d'une part l'équation de continuité, d'autre part l'équation dynamique. Nous ne présentons ici qu'un rappel général de ces équations, les détails en étant disponibles dans les livres classiques (CHILDS, 1969 ; NIELSEN et al., 1972 ; HILLEL, 1980).

L'équation de continuité, qui exprime la conservation de la masse d'eau dans un élément de volume représentatif de sol s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \operatorname{div} (\bar{q}) \quad (\text{I-1})$$

avec : \bar{q} = densité de flux volumique

t = temps

Il en résulte que tout transfert d'eau en régime transitoire, dans la zone non-saturée, s'accompagne d'une variation de teneur en eau dans le volume du sol considéré.

Pour un écoulement mono-dimensionnel et vertical, cette équation devient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial z} \quad (\text{I-2})$$

où z est la cote, orientée par convention positivement vers le bas, avec comme origine la surface du sol.

Les hypothèses limitatives introduites précédemment conduisent à n'associer l'écoulement de l'eau dans le milieu poreux qu'aux seuls effets des variations d'énergie potentielle de pression et de gravité.

On peut facilement montrer (HILLEL, 1980) que si l'on exprime cette énergie potentielle par unité de poids, le terme de pression de l'eau vaut $[p_W - p_0]/\rho_W g$, où p_W est la pression de l'eau, p_0 la pression de l'air (atmosphérique), ρ_W la masse volumique de l'eau et g l'accélération de la pesanteur. Cette grandeur, notée par la suite comme "h" est négative ; elle exprime la pression effective de l'eau mesurée en hauteur d'eau et est directement liée aux effets capillaires. Par le biais de la courbure de l'interface eau-air dans le milieu poreux (loi de Laplace) toute diminution de la teneur en eau induit une forte diminution de la pression. La relation $h(\theta)$ est une caractéristique du milieu poreux, appelée "courbe de succion", qui peut malheureusement être soumise à deux types d'effets parasites :

- soit des effets d'hystérésis (MILLER et MILLER, 1955 et 1956; PHILIP, 1964 ; TOPP, 1969 et 1971 ; THONY, 1970 ; VACHAUD et THONY, 1971) entre processus d'humidification ou de drainage ;

- soit des effets dynamiques (DAVIDSON et al., 1966 ; VAUCLIN, 1971) dépendant de la vitesse de l'écoulement, mais qui sont moins importants que l'hystérésis.

L'utilisation d'une relation biunivoque entre pression effective et teneur en eau implique que l'on se place dans des conditions correspondant toujours au même processus, partant de valeurs initiales voisines, et avec des transferts de dynamique analogue.

La composante gravitaire de l'énergie potentielle par unité de poids est tout simplement $-z$. Dans ces conditions, on est amené à lier tout transfert d'eau entre deux points à la variation de la grandeur $(h-z)$ entre ces points. Ce terme $(h-z)$ correspond à la définition classique de la charge hydraulique H , lorsqu'on néglige les termes d'inertie. Ces considérations ont amené à proposer la loi de Darcy, sous une forme généralisée, comme loi du transfert de l'eau dans un milieu poreux non-saturé (SLICHTER, 1899 ; BUCKINGHAM, 1907) :

$$\bar{q} = - K(\theta) \cdot \overline{\text{grad}} H \quad (\text{I-3})$$

où $K(\theta)$ est un coefficient de conductivité hydraulique, variant très fortement avec la valeur de la teneur en eau, et H est la charge hydraulique définie ci-dessus par :

$$H = h - z \quad (\text{I-4})$$

La validité de cette hypothèse de généralisation de la loi de Darcy a été vérifiée par de nombreux auteurs (BRUCE et KLUTE, 1956 ; YOUNGS, 1960 ; VACHAUD, 1968). La loi $K(\theta)$ sera la seconde relation caractéristique du milieu poreux. Elle ne semble pas être sujette à hystérésis, mais sa détermination expérimentale est délicate et relativement imprécise surtout aux faibles teneurs en eau.

La combinaison des équations (I-1) et (I-3) conduit à l'équation descriptive de l'écoulement, soit pour le cas vertical :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\theta) \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (\text{I-5})$$

Outre son aspect très fortement non linéaire qui apparaît sur $K(\theta)$ et $h(\theta)$, il est clair que cette équation n'est pas homogène au niveau du choix de la variable descriptive. Plusieurs propositions d'homogénéisation peuvent être trouvées dans la littérature. Elles reviennent toutes à se placer dans des conditions où l'hystérésis et les effets dynamiques sur $h(\theta)$ peuvent être négligés, de sorte que cette relation soit biunivoque.

2.1 - L'équation en θ

Soit $D(\theta)$ le coefficient de diffusivité capillaire initialement introduit par CHILDS et COLLIS-GEORGE (1950) et défini par :

$$D(\theta) = K(\theta) \cdot \frac{dh}{d\theta} \quad (\text{I-6})$$

on peut écrire l'équation (I-5) sous la forme :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} - K(\theta) \right] \quad (\text{I-7})$$

connue sous le nom de FOKKER-PLANCK.

On notera qu'en utilisant la relation suivante :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{\theta} = - \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_z \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)_t \quad (\text{I-8})$$

l'équation (I-7) peut s'écrire également :

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[D(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} - K(\theta) \right] = 0 \quad (\text{I-9})$$

soit :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial \theta} \quad (\text{I-10})$$

en posant :

$$q(z, t) = - D(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} + K(\theta) \quad (\text{I-11})$$

Comme nous le verrons au chapitre suivant (II), les équations (I-7) et (I-9) peuvent être résolues de façon quasi-analytique dans des cas particuliers. Néanmoins, elles présentent une limitation importante de sorte qu'elles ne s'appliquent pas si une partie du domaine est saturé. En effet, tout point de cette zone est alors défini par une valeur constante : la teneur en eau à saturation naturelle (θ_s), et le choix de cette variable entraîne une indétermination dans le domaine saturé. Cette équation ne peut donc pas être utilisée dans le cas où l'analyse comporte un problème d'infiltration par submersion ou de couplage entre infiltration et nappe aquifère.

2.2 - L'équation en h

L'introduction de la capacité capillaire (RICHARDS, 1931) définie par :

$$C = \frac{d\theta}{dh} \quad (I-12)$$

permet d'écrire l'équation (I-5) sous la forme :

$$C(h) \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} [K(h) \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial z} - 1\right)] \quad (I-13)$$

où $K(h)$ est la relation caractéristique entre conductivité et pression, obtenue en combinant $K(\theta)$ et $\theta(h)$.

Il faut noter que l'introduction de la pression effective (h) comme variable descriptive dans l'équation (I-5) élimine l'ambiguïté signalée pour l'équation de FOKKER-PLANCK, puisque h varie d'une façon continue dans tout le domaine de l'écoulement (VAUCLIN, 1975) passant des valeurs positives (en zone saturée) à des valeurs négatives (en zone non-saturée). D'autre part l'équation (I-13) appelée généralement l'équation de RICHARDS permet de résoudre les écoulements en milieu stratifié contrairement à l'équation (I-7) (VAUCLIN et VACHAUD, 1981).

Le développement de l'équation (I-13) conduit également à :

$$C(h) \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = K(h) \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{dK}{dh} \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \left(\frac{\partial h}{\partial z} - 1 \right) \quad (I-14)$$

dite "forme décomposée", qui fait apparaître les aspects diffusif ($K(h) \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$) et convectif ($\frac{dK}{dh} \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \cdot \frac{\partial h}{\partial z}$) du mouvement de l'eau.

2.3 - L'équation en U

En introduisant le potentiel d'écoulement en U (GARDNER, 1958), défini par :

$$U(h) = \int_{-\infty}^h K(\alpha) \cdot d\alpha \quad (I-15)$$

l'équation (I-13) devient enfin (RAATS, 1971 ; WARRICK, 1974) :

$$\frac{C(h)}{K(h)} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{K} \frac{dK}{dh} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \quad (I-16)$$

généralement dénommée "équation de KIRCHHOFF".

Nous verrons qu'un grand avantage de cette forme est de réduire l'importance des non-linéarités, surtout au début du processus d'infiltration, grâce à l'utilisation d'une variable intégrale (U).

I.3 - PRESENTATIONS DES CAS ETUDIÉS

A ce stade, il apparaît donc que pour un milieu poreux caractérisé par deux relations :

- la loi $h(\theta)$ liant la pression et la teneur en eau ;
- la loi $K(\theta)$ liant la conductivité hydraulique et la teneur en eau

et soumis à toutes les conditions limitatives énoncées au cours de cette étude :

- milieu homogène, isotrope, inerte et isotherme, écoulement de l'air négligé, pas d'effets d'hystérésis, ni d'effets dynamiques

nous disposons de quatre types d'équations différentes pour résoudre le même problème. Nous étudierons par la suite l'incidence du choix entre ces différents formalismes au niveau de la simulation numérique. Dans un premier temps toutefois, la méthode que nous nous sommes fixés, va nous conduire à privilégier le formalisme correspondant à l'équation de FOKKER-PLANCK (Eq. I-7) puisque c'est à partir de cette équation que PHILIP (1957 a,b et c) a développé la solution quasi-analytique que nous nous sommes donnés pour but d'analyser en détail.

Afin de donner à cette étude un caractère d'applicabilité général, malgré les limitations que nous imposent les conditions de travail, nous avons pris le parti de considérer deux sols qui caractérisent assez bien les gammes extrêmes rencontrées dans la pratique :

- un sable de très grande perméabilité, dit "SABLE de L'ISERE"
- un limon argileux très peu perméable, dit "YOLO LIGHT CLAY".

Avant de présenter les caractéristiques de ces deux matériaux, il nous semble important d'insister sur une difficulté intrinsèque liée à l'estimation des valeurs de h et K aux faibles teneurs en eau.

Il suffit en effet de se reporter aux ouvrages généraux cités au début du paragraphe (I-2) (p.e. HILLEL, 1980) pour voir que les techniques de mesures directes de la pression de l'eau (tensiomètres) sont nécessairement limitées à des valeurs de h , supérieures à -10^3 cm. Pour les sols argileux, notamment cette plage peut ne couvrir qu'une très faible gamme de variation de la teneur en eau. Les méthodes permettant d'avoir accès à des valeurs plus faibles de la pression (p.e. les psychromètres) sont extrêmement délicates et contestées. Si, comme c'est souvent le cas, les conditions initiales correspondent à des valeurs en dehors de la gamme de mesure, on est amené à utiliser des procédures d'extrapolation, fondées sur une expression analytique plus ou moins empirique et calée sur les points de mesures disponibles, sans être pour autant assuré de la représentativité réelle des valeurs extrapolées. Il en est de même pour la courbe $K(\theta)$, généralement obtenue à partir de l'analyse

de régimes d'écoulement transitoire ou permanent réalisés soit au champ (ROSE et al., 1965 ; HILLEL et al., 1972) soit sur des échantillons de sols au laboratoire (RIJTEMA, 1959 ; WATSON, 1966). Toutefois, l'influence des incertitudes dues à la méthode d'extrapolation aux faibles teneurs en eau est moins importante que pour h , compte-tenu des faibles valeurs de K .

Pour la méthode d'extrapolation de $h(\theta)$ nous nous reportons à l'étude de VAN GENUCHTEN (1980).

3.1 - Caractérisation du "YOLO LIGHT CLAY" en infiltration

Nous avons choisi ce sol car c'est celui qu'a utilisé PHILIP dans son analyse.

Il s'agit d'un limon argileux de la plaine de Californie qui a été caractérisé par MOORE (1939).

Contrairement au second sol étudié, il nous paraît important d'insister sur le fait qu'on ne dispose d'aucun essai d'infiltration sur ce sol. MOORE a, en effet, effectué un essai de remontée capillaire sur une colonne de sol de 84 cm de haut, reliée à une alimentation d'eau, et équipée de tensiomètres à différentes hauteurs tous les 10 cm. Le profil hydrique en régime permanent (flux d'évaporation égal au flux d'imbibition), obtenu par sectionnement de la colonne et pesée au bout d'environ 40 jours d'imbibition, lui a permis d'établir les relations entre pression de l'eau (h) et teneur en eau pondérale, conductivité hydrique (K) et teneur en eau pondérale.

Ces valeurs ont été reprises par PHILIP (1955) qui en utilisant les estimations de masse volumique données par MOORE (1939) a transformé les teneurs en eau pondérales en valeurs volumiques (θ). Puis, il a tabulé pour des valeurs discrètes de θ :

- d'une part les valeurs de h , interpolées manuellement d'après les données de MOORE ;
- d'autre part les valeurs de diffusivité calculées par l'expression (I-6).

Ces valeurs, données figure (I-1), ont pour notre étude été lissées par les expressions suivantes :

- pour la loi $h(\theta)$

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_S - \theta_r} = \frac{a_1}{a_1 + [\ln|h|]^{a_2}} \quad (I-17)$$

- pour la loi $K(h)$ (GARDNER, 1960) :

$$K = K_S \cdot \frac{b_1}{b_1 + |h|^{b_2}} \quad (I-18)$$

où l'indice S est relatif à la saturation naturelle, et

l'indice r est relatif à la teneur en eau "résiduelle", grandeur empirique correspondant à une teneur en eau ne participant pas à l'écoulement.

avec :

$\theta_S = 0.4950$	$\theta_r = 0.125$
$a_1 = 738.8$	$a_2 = 3.98$
$K_S = 0.0443$ (cm/h)	
$b_1 = 124.6$	$b_2 = 1.77$

La combinaison des expressions (I-17) et (I-18) permet d'obtenir directement les relations analytiques de $K(\theta)$ et $D(\theta)$.

L'essai d'infiltration que PHILIP (1955, 1957 a,b et c) a simulé est alors hypothétique puisqu'aucune possibilité de comparaison n'existe au niveau expérimental ni avec un profil hydrique ni avec une loi d'infiltration. C'est pourquoi nous avons repris exactement les conditions de simulation de PHILIP pour ce type de sol.

3.2 - Caractérisation de "SABLE DE L'ISERE" en infiltration

Il s'agit cette fois d'un matériau provenant du lit de l'Isère qui a donné lieu à un essai d'infiltration en colonne sous charge constante (2.7 cm) en laboratoire, avec :

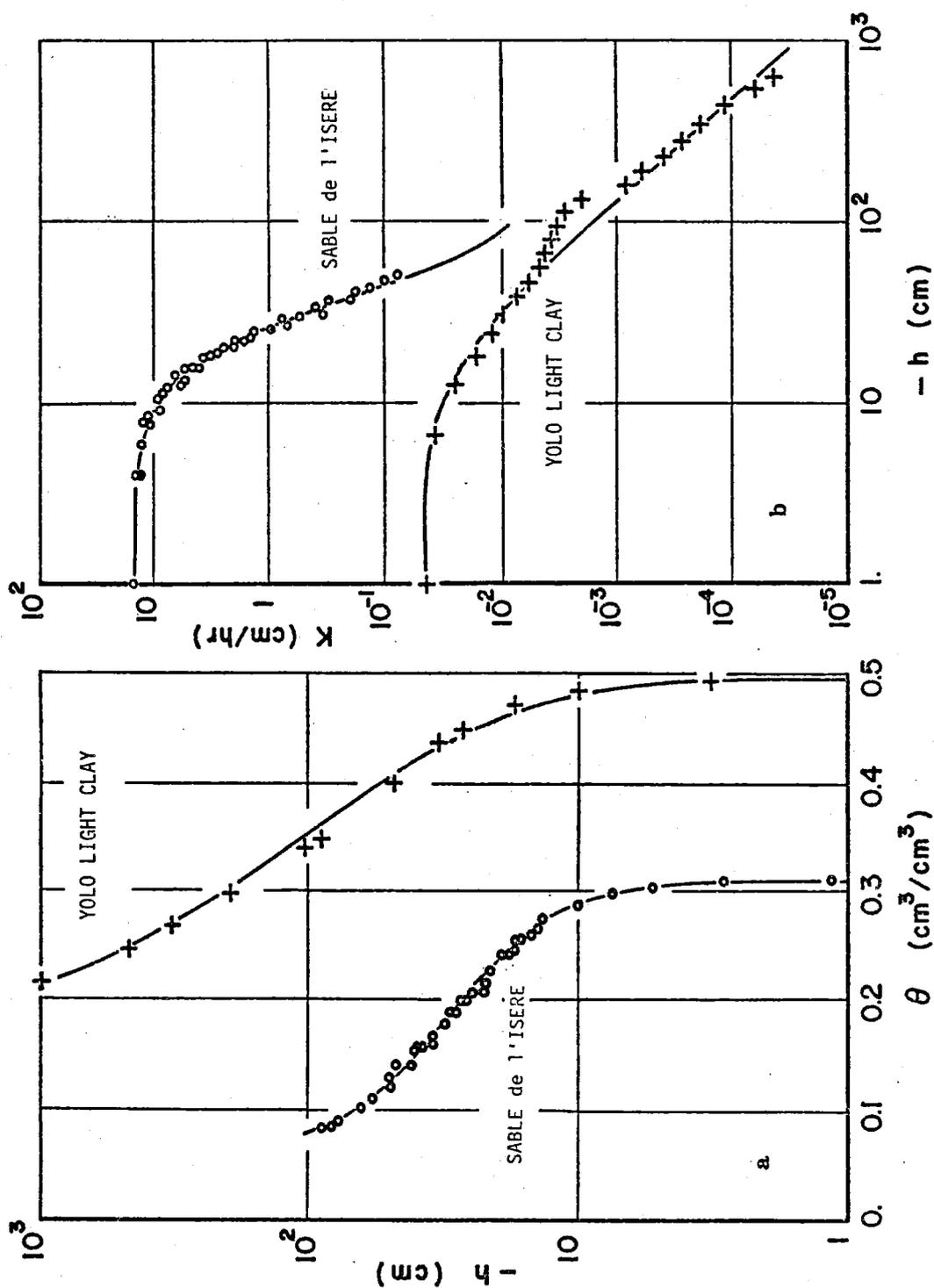


Figure I-1 : Propriétés hydrodynamiques des sols utilisés ; les points sont les valeurs expérimentales et les courbes représentent les valeurs lissées (Eqs. I-17, I-18 et I-19).

2a : relation pression - teneur en eau

2b : relation conductivité hydraulique - pression

- mesure du volume infiltré en fonction du temps ;
- mesure des variations de teneur en eau dans le temps et dans l'espace par atténuation de rayonnement gamma, selon la méthode décrite par VACHAUD et THONY (1971) :

- caractérisation directe des lois $h(\theta)$ et $K(\theta)$ pendant l'infiltration par combinaison des mesures gammamétriques et tensiométriques, selon également la référence ci-dessus.

Le meilleur lissage des relations $h(\theta)$ et $K(h)$ correspondant (Figure I-1) est donné par les relations suivantes :

- pour la loi $h(\theta)$ (VAN GENUCHTEN, 1980) :

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_S - \theta_r} = \frac{1}{[1 + (a_3 h)^{a_4}]^{a_5}} \quad (I-19)$$

avec :

$\theta_S = 0.312$	$\theta_r = 0.0265$
$a_3 = 0.0437$ (1/cm)	
$a_4 = 2.2223$	$a_5 = 0.55$

- pour la loi $K(\theta)$ (BROOKS et COREY, 1964) :

$$K = K_S \left[\frac{\theta - \theta_r}{\theta_S - \theta_r} \right]^{b_3} \quad (I-20)$$

avec :

$K_S = 15.37$ (cm/h)
$b_3 = 6.07$

On notera que la conductivité à saturation naturelle de ce sol est à peu près 400 fois supérieure à celle du YOLO LIGHT CLAY.

D'autre part, on remarque que l'expression de $h(\theta)$ utilisée pour l'argile (HAVERKAMP et al., 1977) est une forme particulière de l'expression plus générale telle qu'elle est proposée par VAN GENUCHTEN (Eq. I-19).

LES SOLUTIONS QUASI ANALYTIQUES

CHAPITRE II

RAPPELS THEORIQUES DES SOLUTIONS QUASI-ANALYTIQUES

L'aspect fortement non linéaire des équations du transfert d'eau en milieu poreux à degré de saturation variable, développé au chapitre I rend vaine dans le cas général la recherche de solutions analytiques du problème de l'infiltration.

Cependant, pour des conditions particulières (infiltration faiblement submergeante dans un milieu semi-infini à une humidité initiale uniforme), plusieurs solutions de type "quasi-analytique" ont été développées (PHILIP, 1955, 1957 a,b et c ; PARLANGE, 1971 ; PHILIP et KNIGHT, 1974 ; BABU, 1976 ; TOLIKAS et al., 1983). Elles diffèrent essentiellement par l'équation de base utilisée et par la méthode de résolution adoptée. Nous présentons ici leurs fondements théoriques, ainsi qu'une brève analyse critique.

II.1 - L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK

L'équation de FOKKER-PLANCK :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} - K(\theta) \right] \quad (\text{II-1})$$

soumise aux conditions :

$$\begin{array}{lll} t < 0 & z > 0 & \theta = \theta_0 \\ t > 0 & z = 0 & \theta = \theta_1 \end{array} \quad (\text{II-2})$$

où θ_0 et θ_1 sont respectivement les teneurs volumiques en eau initiale et imposée à la surface du sol, a été résolue par PHILIP (1957).

1.1 - La solution en série

Par extension de la solution de l'absorption horizontale d'eau :

$$x(\theta, t) = f_1(\theta) \cdot t^{1/2}$$

où $f_1(\theta)$ correspond à la variable de BOLTZMANN (PHILIP, 1955), au cas de l'infiltration verticale, PHILIP (1957a) a développé en détail la solution en série suivante :

$$z(\theta, t) = \sum_{m=1}^4 f_m(\theta) \cdot t^{m/2} \quad (\text{II-3})$$

où $z(\theta, t)$ représente l'évolution dans le temps de la teneur en eau θ . Les coefficients $f_m(\theta)$ sont solutions d'équations différentielles ordinaires.

La lame d'eau infiltrée (volume d'eau par unité de surface de sol) s'obtient par l'intégration des profils $z(\theta, t)$, soit :

$$I(t) = K_o t + \int_{\theta_o}^{\theta_1} z(\theta, t) \cdot d\theta \quad (\text{II-4})$$

où K_o est la conductivité hydraulique pour la teneur en eau $\theta = \theta_o$. Compte-tenu de l'équation (II-3), l'équation (II-4) s'écrit également :

$$I(t) = K_o \cdot t + \sum_{m=1}^4 \left[\int_{\theta_o}^{\theta_1} f_m(\theta) \cdot d\theta \right] t^{m/2} \quad (\text{II-5})$$

soit encore :

$$I(t) = K_o \cdot t + \sum_{m=1}^4 S_m(\theta_o, \theta_1) \cdot t^{m/2} \quad (\text{II-6})$$

en posant :

$$S_m(\theta_o, \theta_1) = \int_{\theta_o}^{\theta_1} f_m(\theta) \cdot d\theta \quad (\text{II-7})$$

On notera que pour $m=1$ et $\theta_1 = \theta_S$ la grandeur $S_1(\theta_o, \theta_S)$ est connue sous le nom de sorptivité capillaire. Ce paramètre traduit la capacité d'un sol à absorber l'eau par capillarité. Il est clair que sa valeur dépend des conditions initiales (θ_o) et aux limites (θ_S) imposées.

Parallèlement, le flux d'eau entrant à travers la surface du sol s'obtient par :

$$q_1(t) = \frac{dI}{dt} = K_o + \sum_{m=1}^4 \frac{m}{2} \cdot S_m(\theta_o, \theta_1) \cdot t^{m/2-1} \quad (\text{II-8})$$

Le domaine de validité des équations (II-3), (II-6) et (II-8) dépend de la convergence de la série exprimée sous sa forme générale. Un traitement rigoureux apparaissant difficile, PHILIP (1969) introduit d'une manière empirique, un rayon de convergence estimé par le temps :

$$t_{\text{grav}} = \left[\frac{S_1(\theta_o, \theta_1)}{K_1 - K_o} \right]^2 \quad (\text{II-9})$$

où K_1 est la valeur de la conductivité hydraulique pour la teneur en eau $\theta = \theta_1$. Cette limite correspond au temps pour lequel l'influence des forces gravitaires sur le processus d'infiltration est du même ordre de grandeur que celle des forces capillaires.

En-deça de t_{grav} , la solution du problème d'infiltration verticale est donnée par l'équation (II-3), au-delà, PHILIP (1957c) introduit une solution asymptotique.

1.2 - La solution asymptotique

Pour $t > t_{\text{grav}}$, la solution de l'infiltration proposée par PHILIP (1957c) est de la forme suivante :

$$z(\theta, t) = z_{\infty}(\theta) + u(t) [t - t_{\text{grav}}] \quad (\text{II-10})$$

où u est la vitesse de translation verticale du profil hydrique $z_{\infty}(\theta)$, dont la forme est supposée indépendante du temps :

$$z_{\infty}(\theta) = \int_{\theta}^{\theta_1 - \epsilon} \frac{D(\alpha)}{[K_0 - K(\alpha)] + \left[\frac{K_1 - K_0}{\theta_1 - \theta_0} \right] [\alpha - \theta_0]} d\alpha \quad (\text{II-11})$$

avec ϵ très petit mais strictement positif. L'indice " ∞ " est utilisé pour montrer que le profil $z_{\infty}(\theta)$ correspond en fait au profil hydrique obtenu pour des temps très grands ($t \rightarrow \infty$).

La vitesse de translation $u(t)$ est estimée par :

$$u(t) = \frac{q_1(t) - K_0}{\theta_1 - \theta_0} \quad (\text{II-12})$$

Notons que pour $t \rightarrow \infty$, la vitesse $u(t)$ correspond à celle de l'eau dans le milieu totalement saturé.

Cela revient à dire que les profils hydriques se déduisent les uns des autres par une translation verticale dont la vitesse est $u(t)$. Dès lors deux domaines peuvent être considérés dans le sol (Figure II-1) :

- une zone de teneur en eau constante et égal à θ_1 avec une épaisseur $z(\theta_1, t)$ qui évolue dans le temps selon :

$$z(\theta_1, t) = u(t) \cdot [t - t_{\text{grav}}] \quad (\text{II-13})$$

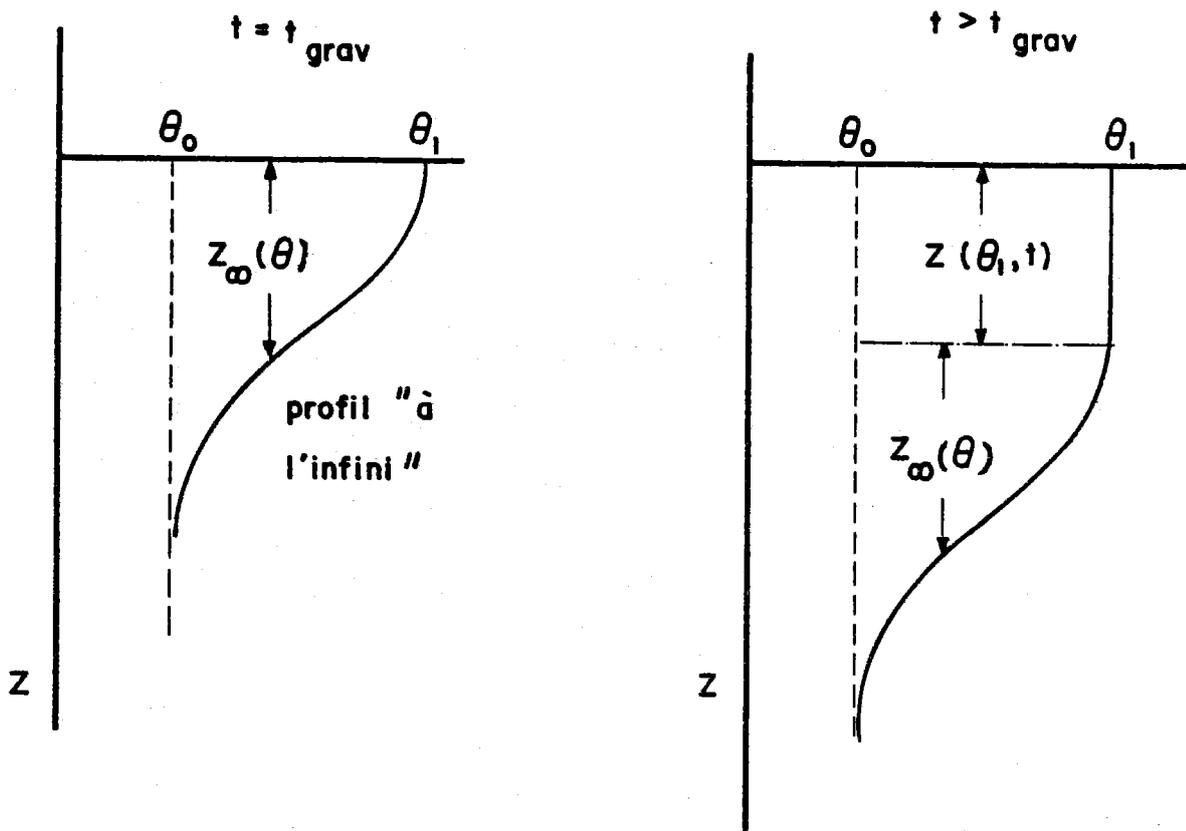


Figure II-1

- suivie par une zone de teneur en eau variable, décrite par l'équation (II-11) où la position du profil hydrique est donnée par l'équation (II-10).

Pour la détermination de la vitesse $u(t)$, PHILIP (1957c) propose d'extrapoler $q_1(t)$ au-delà de t_{grav} par une loi exponentielle telle que d'une part la pente (dq_1/dt) au temps t_{grav} soit celle donnée par l'équation (II-8) et d'autre part le flux $q_1(\infty)$ tende asymptotiquement vers la valeur K_1 .

On remarquera à ce niveau que cette approche constitue également le fondement de la solution de GREEN et AMPT (1911). Cependant, dans ce dernier cas le profil $z_{\infty}(\theta)$ est assimilé à un rectangle (écoulement de type piston) négligeant ainsi les effets diffusifs liés aux forces capillaires.

II.2 - L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK TRANSFORMEE

Il s'agit ici de résoudre l'équation (I-9) :

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[D(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} - K(\theta) \right] = 0 \quad (\text{II-14})$$

soumise aux mêmes conditions initiales et aux limites que précédemment (II-2). Plusieurs méthodes de résolution ont été suggérées.

2.1 - La solution de PARLANGE (1971)

L'intégration directe de l'équation (II-14) conduit à :

$$\int_{\theta}^{\theta_1} \left[\frac{\partial z}{\partial t} \right] d\theta + \left[D(\theta_1) \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{\theta_1} - K(\theta_1) \right] = D(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} - K(\theta) \quad (\text{II-15})$$

Pour résoudre cette équation, PARLANGE (1971) a proposé une méthode itérative simplifiée qui ne boucle que sur la solution de $z(\theta, t)$ sans corriger la valeur du temps correspondant.

i) - Premier pas d'itération

Reprenant l'équation (II-15) le terme $\left(\int_{\theta}^{\theta_1} \frac{\partial z}{\partial t} d\theta \right)$ peut être négligé devant les autres termes pour des teneurs en eau voisines de θ_1 . L'équation (II-15) s'approxime alors par :

$$D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} = K(\theta) - q_1(t) \quad (\text{II-16})$$

où $q_1(t)$ est le flux à la surface du sol défini à partir de l'équation (I-11).

L'intégration de l'équation II-16 donne une première estimation de la solution :

$$[z(\theta, t)]_1 = \int_{\theta}^{\theta_1} \frac{D(\alpha)}{q_1(t) - K(\alpha)} d\alpha \quad (\text{II-17})$$

où l'indice 1 fait référence au premier pas d'itération.

La dérivée par rapport au temps de l'équation (II-17) reportée dans l'équation (II-15) et intégrée sur le segment $[\theta_0, \theta_1]$ donne :

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{[\alpha - \theta_0] D(\alpha)}{[K(\alpha) - K_0]^2} \left\{ \ln \left[\frac{q_1(t) - K(\alpha)}{q_1(t) - K_0} \right] + \left[\frac{K(\alpha) - K_0}{q_1(t) - K(\alpha)} \right] \right\} d\alpha \quad (\text{II-18})$$

L'ensemble des équations (II-17) et (II-18) constitue la première estimation de la solution de l'équation (II-14).

ii) - Deuxième pas d'itération

La deuxième estimation s'obtient en dérivant l'équation (II-17) par rapport au temps et en reportant la valeur correspondante dans l'équation (II-14) avant son intégration. Ceci amène l'estimation suivante :

$$[z(\theta, t)]_2 = \int_{\theta}^{\theta_1} \frac{D(\alpha) d\alpha}{[K_0 - K(\alpha)] + F_{PA}(\alpha, t) [q_1(t) - K_0]} \quad (\text{II-19})$$

avec :

$$F_{PA}(\alpha, t) = \frac{f_{PA}(\alpha, t)}{f_{PA}(\theta_1, t)} \quad (\text{II-20})$$

et :

$$f_{PA}(\alpha, t) = \int_{\theta_0}^{\alpha} dB \int_B^{\theta_1} \frac{D(\theta)}{[q_1(t) - K(\theta)]^2} d\theta \quad (\text{II-21})$$

$F_{PA}(\alpha, t)$ peut être considéré comme une fonction d'ajustement définie sur le segment $[0, 1]$. On verra par la suite (Chapitre II.2.2) que PHILIP (1973) a redéfini cette fonction d'une façon moins empirique que par l'équation (II-20). Notons que pour $F_{PA}(\alpha, t) = 1$ on retrouve la première estimation (Eq. II-17).

L'ensemble des équations (II-18) à (II-21) représente le deuxième pas de la procédure itérative.

Bien que les estimations d'ordre supérieur puissent être obtenues de la même manière, PARLANGE (1971) déconseille de développer la procédure au-delà de la deuxième itération. En effet, on peut montrer que les solutions suivantes conduisent à un effet d'oscillation sur le calcul du profil hydrique. Ceci est dû au fait que $F_{PA}(\theta, t)$ ne satisfait plus la condition $F_{PA}(\theta_1, t) = 1$ pour un nombre d'itérations supérieur à deux.

2.2 - La solution flux-concentration

Plus récemment, PHILIP (1973) a introduit la relation $F_{PH}(\theta, t)$ définie par :

$$F_{PH}(\theta, t) = \frac{q(z, t) - K_o}{q_1(t) - K_o} \quad (II-22)$$

D'une façon générale F_{PH} est fonction de z et t , donc de θ et t . Comme le montre l'équation (II-22) elle est monotone et croissante avec les valeurs particulières $F_{PH}(\theta_o, t) = 0$ et $F_{PH}(\theta_1, t) = 1$.

En reportant l'expression du flux (Eq. I-11) dans l'équation (II-22), on obtient après intégration :

$$z(\theta, t) = \int_{\theta}^{\theta_1} \frac{D(\alpha) d\alpha}{[K_o - K(\alpha)] + F_{PH}(\alpha, t) \cdot [q_1(t) - q_o]} \quad (II-23)$$

On remarquera l'analogie entre cette équation et la solution de PARLANGE (Eq. II-19).

D'autre part, la relation (II-22), compte-tenu de l'équation (I-10) peut également s'écrire :

et

$$F_{PH}(\theta, t) = \frac{\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial z}{\partial t} \cdot d\alpha}{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\partial z}{\partial t} \cdot d\alpha} \quad (\text{II-24})$$

soit d'après l'équation (II-23) :

$$F_{PH}(\theta, t) = \frac{\int_{\theta_0}^{\theta} d\beta \int_{\beta}^{\theta_1} D(\alpha) \frac{\partial [q_1(t) \cdot F_{PH}(\alpha, t)] / \partial q_1}{[K_0 - K(\alpha) + F_{PH}(\alpha, t) [q_1(t) - K_0]]^2} d\alpha}{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{(\alpha - \theta_0) \cdot D(\alpha) \cdot \partial [q_1(t) \cdot F_{PH}(\alpha, t)] / \partial q_1}{[K_0 - K(\alpha) + F_{PH}(\alpha, t) [q_1(t) - K_0]]^2} d\alpha} \quad (\text{II-25})$$

La relation (II-25) donne implicitement $F_{PH}(\theta, t)$ à condition que le flux $q_1(t)$ soit connu.

L'équation (II-24) donne également :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\theta_0}^{\theta} z(\alpha, t) d\alpha = F_{PH}(\theta, t) \cdot [q_1(t) - K_0] \quad (\text{II-26})$$

qui pour la teneur en eau $\theta = \theta_1$ devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\theta_0}^{\theta_1} z(\alpha, t) d\alpha = q_1(t) - K_0 \quad (\text{II-27})$$

En multipliant les deux membres de l'équation (II-27) par dt/dq_1 , il vient :

$$\frac{dt}{dq_1} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\partial z / \partial q_1}{q_1(t) - K_0} d\alpha \quad (\text{II-28})$$

L'intégration par partie de l'équation (II-28) après y avoir introduit l'expression (II-23) conduit à :

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta_1} (\alpha - \theta_0) \cdot D(\alpha) \cdot \left[\int_{q_1(t) - K_0}^{\infty} \frac{\alpha(q_1(t) \cdot F_{PH}(\alpha, t))}{[q_1(t) - K_0] \cdot [K_0 - K(\alpha) + F_{PH}(\alpha, t)] [q_1(t) - K_0]^2} d\alpha \right] \quad (II-29)$$

L'ensemble des deux équations (II-25) et (II-29) constitue alors la solution du problème d'infiltration verticale.

L'équation (II-25) qui se présente sous la forme :

$$[F_{PH}(\theta, t)]_{n+1} = f([F_{PH}(\theta, t)]_n) \quad (II-30)$$

peut être résolue par approximations successives à partir d'une valeur particulière $[F_{PH}(\theta, t)]_1$, la valeur $q_1(t)$ étant obtenue par l'équation (II-29) écrite également avec $[F_{PH}(\theta, t)]_1$. Comme valeur initiale $[F_{PH}(\theta, t)]_1$, PHILIP et KNIGHT (1974) proposent :

$$F_{PH}(\theta) = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \quad (II-31)$$

Dans la suite (Chapitre III-5), on verra que cette forme de la fonction F_{PH} qui est indépendante du temps, est quasiment exacte pour l'infiltration verticale.

Il convient, d'autre part, de noter que la deuxième itération de la solution de PARLANGE (1971) (Eqs. II-18 et II-20) correspond au cas particulier $F_{PH}(\theta, t) = 1$ des équations (II-29) et (II-25).

2.3 - La solution aux perturbations

Dans une série de trois articles, BABU (1976a, b et c) présente une méthode fondée sur la théorie des perturbations, pour résoudre l'équation de l'infiltration horizontale et verticale. Rappelons ici les fondements de cette solution pour le cas vertical.

Partant de l'équation de base (II-14) les deux variables descriptives z et t peuvent être redéfinies comme :

$$\hat{z} = \frac{z}{\lambda} \quad \text{et} \quad \hat{t} = \frac{t}{\lambda} \quad (\text{II-32})$$

où λ est un paramètre de perturbation exprimé sous la forme :

$$\lambda \equiv \frac{1}{[\theta_1 - \theta_0]} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{D(\theta)}{D(\theta_0)} \cdot d\theta \quad (\text{II-33})$$

soit encore après l'intégration par parties de l'équation (II-14) par rapport à θ :

$$\lambda \equiv \frac{1}{[\theta_1 - \theta_0]} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{z}{D(\theta_0)} \left[\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{dK}{d\theta} \right] d\theta \quad (\text{II-34})$$

En reportant l'ensemble des équations (II-32) et (II-34) dans l'équation (II-14), l'équation de base peut être écrite sous une nouvelle forme :

$$D(\theta) \cdot \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial \theta^2} - \frac{dD}{d\theta} \cdot \frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta} = \lambda \left[\frac{\partial \hat{z}}{\partial \theta} \right]^2 \cdot \left[\frac{\partial \hat{z}}{\partial t} - \frac{dK}{d\theta} \right] \quad (\text{II-35})$$

soumise aux conditions initiales et aux limites :

$$\begin{aligned} \hat{t} < 0 & \quad \hat{z} \geq 0 & \quad \theta = \theta_0 \\ \hat{t} \geq 0 & \quad \hat{z} = 0 & \quad \theta = \theta_1 \end{aligned} \quad (\text{II-36})$$

Pour résoudre ce système d'équations, BABU considère une solution sous forme d'un développement en série suivant les puissances de λ

$$\hat{z}(\theta, \hat{t}) = \sum_{m=0}^M \lambda^m \cdot \hat{z}_m(\theta, \hat{t}) \quad (\text{II-37})$$

ce qui ramène le problème à la recherche des coefficients $\hat{z}_m(\theta, \hat{t})$.

L'introduction de l'équation (II-37) dans (II-35) permet de développer un système d'équations en $\hat{z}_m(\theta, \hat{t})$, obtenu par procédure d'identification des différents termes de mêmes puissances en λ . Par souci de concision nous ne rappelons ici que les deux premières équations en $\hat{z}_0(\theta, \hat{t})$ et $\hat{z}_1(\theta, \hat{t})$:

$$D(\theta) \frac{\partial^2 \hat{z}_0}{\partial \theta^2} - \frac{dD}{d\theta} \cdot \frac{\partial \hat{z}_0}{\partial \theta} = 0$$

$$D(\theta) \frac{\partial^2 \hat{z}_1}{\partial \theta^2} - \frac{dD}{d\theta} \cdot \frac{\partial \hat{z}_1}{\partial \theta} = \left[\frac{\partial \hat{z}_0}{\partial \theta} \right]^2 \cdot \left[\frac{\partial \hat{z}_0}{\partial \hat{t}} - \frac{dK}{d\theta} \right]$$

(II-38)

A l'aide des conditions initiales et aux limites :

$$\hat{z}_0(\theta, 0) = \hat{z}_1(\theta, 0) = \dots = \hat{z}_m(\theta, 0) = 0$$

et :

$$\hat{z}_0(\theta_1, \hat{t}) = \hat{z}_1(\theta_1, \hat{t}) = \dots = \hat{z}_m(\theta_1, \hat{t}) = 0$$

(II-39)

l'ensemble (II-38) peut alors être résolu.

Bien que cette approche soit d'expression relativement simple (Eq. II-37), elle est lourde à mettre en oeuvre pour des valeurs de M élevées, ce qui explique le fait que BABU (1976c) n'a présenté que la solution avec deux termes (M=2).

D'autre part, il convient de remarquer que la solution sous la forme de l'ensemble (II-38), est uniquement valable lorsque la valeur du membre de droite de l'équation (II-35) est petite. De ce fait, BABU suggère de travailler de préférence avec des variables normalisées.

II.3 - AUTRES METHODES

Pour mémoire, on notera la solution quasi-analytique proposée par TOLIKAS et al. (1983). Cette approche est fondée sur l'hypothèse que les relations D(θ) et K(θ) sont de type exponentiel. Outre le fait que cela impose une forme particulière (exponentielle également) à la relation h(θ), cette hypothèse conduit à un profil hydrique concave sur tout le segment

$[\theta_0, \theta_1]$. Les effets diffusifs pour les teneurs en eau proche de la teneur en eau initiale (θ_0) ne sont alors pas pris en compte dans la description du processus de l'infiltration. Compte-tenu de ces limitations, qui apparaissent trop restrictives dans de nombreux cas pratiques, nous considèrerons pas cette approche dans le chapitre suivant où seront analysés, d'une manière plus détaillée, les problèmes liés à la mise en oeuvre des quatre autres méthodes.

II.4 - PROBLEMES DE LA MISE EN OEUVRE

Un examen préalable des différents problèmes liés à l'utilisation des quatre méthodes quasi-analytiques, présentées précédemment, (Chapitres II-1 et II-2) va permettre de sélectionner l'approche la plus performante en termes de précision et faisabilité pour les conditions initiales et aux limites choisies.

4.1 - La solution de PHILIP (1957)

Rappelons les deux phases très différentes de la solution de PHILIP :

- une solution quasi-analytique en développement en série pour des temps courts $t \leq t_{\text{grav}}$

- suivie par une solution dite "asymptotique" pour des temps longs ($t \geq t_{\text{grav}}$) résultant d'une approche empirique.

La solution en série, développée spécialement pour résoudre les problèmes d'infiltration sous condition de concentration à la surface (problème de DIRICHLET), donne les résultats directement sous forme des profils hydriques $z(\theta, t)$, sans nécessiter la connaissance préalable des valeurs de flux, $q_1(t)$. Ce dernier point est un avantage considérable par rapport aux autres méthodes ("PARLANGÉ" et "flux-concentration") où la solution $z(\theta, t)$ est exprimée en fonction de $q_1(t)$.

La précision de l'approche, garantie a priori par son caractère quasi-analytique, dépend toutefois des points suivants :

i) - Le calcul des coefficients $f_m(\theta)$ (Eq. II-3) effectué à partir d'un système d'équations différentielles ordinaires, nécessite une procédure d'intégration discrète. Le choix de la méthode d'intégration et du pas d'intégration peuvent alors jouer un rôle important au niveau de la précision des résultats.

ii) - Le développement en série est limité aux quatre premiers termes (Eq. II-3). PHILIP suggère que pour la plupart des sols, le fait de considérer un plus grand nombre de termes représente un surcroît de travail disproportionné par rapport au gain de précision obtenu. Il est important de vérifier cette affirmation.

iii) - En ce qui concerne le temps de passage entre les solutions en série et asymptotique, PHILIP introduit l'estimation de t_{grav} (Eq. II-9). En-deça de ce temps, le développement en série peut être considéré comme convergent. Néanmoins, cette limite, déterminée empiriquement, n'exclut nullement l'existence d'un temps de passage supérieur à t_{grav} pour lequel la convergence de la solution reste toujours assurée. Un tel accroissement du temps de passage augmente alors la durée d'applicabilité de la solution quasi-analytique et en conséquence la précision des résultats.

iv) - Le profil hydrique asymptotique $z(\theta, t)$ est calculé à partir d'une procédure de translation verticale d'un profil fixe dans le temps $z_{\infty}(\theta)$ (Eq. II-11). La vitesse de translation $u(t)$ (Eq. II-12), est estimée par une loi exponentielle du temps. Outre que le caractère empirique de cette détermination de $u(t)$ risque d'amener des imprécisions sur les résultats, il existe une certaine incompatibilité au niveau de l'utilisation des deux équations (II-11 et II-12). En effet, l'équation (II-11) vérifiée uniquement pour $t \rightarrow \infty$, est employée sur tout l'intervalle du temps $[t_{\text{grav}}, \infty]$. Il sera donc nécessaire d'étudier si ces deux incon vénients ne peuvent pas être évités par l'introduction d'une autre approche déterministe.

4.2 - La solution de PARLANGE (1971)

Contrairement à la solution précédente, l'approche de PARLANGE (1971) a été développée en premier lieu pour les cas d'infiltration sous condition de flux à la surface (problème de NEUMANN). Elle permet de calculer le profil hydrique en fonction de la valeur du flux (q_1), ce qui impose obligatoirement une procédure itérative pour obtenir simultanément $z(\theta, t)$ et t .

La méthode consiste en deux pas d'itération : le premier calcule le profil $z(\theta, t)$ (Eq. II-17) et le temps correspondant (Eq. II-18) sans prise en compte des effets diffusifs ; le deuxième pas corrige le profil hydrique (Eqs. II-19 et II-20) en fonction des effets négligés au cours du pas précédent. La mise en oeuvre de cette approche amène les remarques suivantes :

i) - La première itération détermine le profil $z(\theta, t)$ comme si le terme $\int_0^1 [\partial z / \partial t] d\theta$ dans l'équation (II-15) était de faible importance pour le positionnement du profil. Cela revient à considérer la variable d'ajustement $F_{PA}(\theta, t)$ (Eq. II-20) égale à 1. Une telle hypothèse correcte uniquement dans le cas d'un écoulement "piston", conduit nécessairement à une sous-estimation des valeurs de $z(\theta, t)$. En conséquence, la relation "flux-temps" (Eq. II-18) développée à partir de l'expression (II-17) amène également une sous-estimation du temps correspondant, tout en conservant la masse (Eq. II-15).

ii) - La deuxième itération sert principalement à corriger la forme du profil $z(\theta, t)$ en fonction de l'influence de l'intégrale $\int_0^1 [\partial z / \partial t] \cdot d\theta$ sans pour autant corriger la valeur du temps. Ainsi la solution calculée à partir des équations (II-19) et (II-20), donne un profil hydrique $z(\theta, t)$ qui conserve bien la masse, mais qui correspond à une valeur du temps trop faible.

iii) - Au fur et à mesure que le temps d'infiltration augmente et que la pente de la relation "flux-temps" (Eq. II-18) diminue, l'imprécision sur l'estimation de la valeur du temps devient de plus en plus élevée. Puisque la procédure itérative sert uniquement à ajuster la valeur

correspondante du temps, cette erreur systématique sera présente tout au long du processus indépendamment du nombre d'itérations utilisées.

4.3 - La solution flux-concentration

Comme pour la méthode précédente, la solution flux-concentration est conçue initialement pour résoudre l'équation de transfert sous condition de flux. L'adaptation aux problèmes d'infiltration sous condition de concentration nécessite obligatoirement une procédure d'itérations (PHILIP et KNIGHT, 1974).

La technique itérative est fondée sur un ajustement progressif et simultané du profil hydrique $z(\theta, t)$ par l'intermédiaire de la fonction $F_{PH}(\theta, t)$ (Eq. II-25) et du temps t correspondant (Eq. II-29) pour une valeur de flux (q_1) donnée. Les remarques suivantes peuvent être faites :

i) - Bien que la correction simultanée du profil $z(\theta, t)$ et du temps (t) élimine l'imprécision systématique au niveau de l'estimation du temps telle qu'elle a été observée par la méthode de PARLANGE, elle n'élimine pas pour autant la sensibilité de la solution aux faibles fluctuations de la relation flux-temps (Eq. II-29). Cet inconvénient dû à la conception même du modèle, entraîne un nombre d'itération de plus en plus élevé lorsque le temps d'infiltration augmente.

ii) - Du point de vue du temps de calcul, la méthode est lourde à mettre en oeuvre surtout pour des applications de routine. Il va de soi que ce désavantage devient de plus en plus contraignant lorsque le critère de précision de la procédure itérative est serré et que la durée de l'infiltration augmente.

4.4 - La solution aux perturbations

La méthode aux perturbations recherche une solution de l'équation de base (II-35) sous forme d'un développement en série en fonction d'un paramètre de perturbation λ (Eq. II-37). Elle amène les remarques suivantes :

i) - La solution en série (Eq. II-37) gagne en précision lorsque le membre de droite de l'équation (II-35) prend des valeurs très faibles. Comme la dérivée $\hat{\partial z}/\partial \theta$ figure explicitement dans cette partie de l'équation, il est évident que cette condition est de moins en moins vérifiée pour des teneurs en eau proches de θ_1 et θ_0 ($\hat{\partial z}/\partial \theta \rightarrow \infty$). Il en résulte que la méthode aux perturbations génère des fortes imprécisions sur le profil hydrique proche des valeurs θ_0 et θ_1 , notamment lorsque $t \rightarrow \infty$ (Figure 3, BABU 1976c).

ii) - La solution du système d'équations (II-38) utilisée pour calculer les différents coefficients $\hat{z}_m(\theta, \hat{t})$ devient de plus en plus contraignante du point de vue du temps de calcul pour des valeurs de m élevées. La précision des résultats étant directement liée au nombre de termes mis en oeuvre, cet inconvénient limite fortement l'applicabilité de l'approche.

II.5 - CONCLUSIONS

Dans le cadre de notre étude, qui se limite au problème d'infiltration sous condition de concentration, l'analyse précédente nous permet de retenir parmi les quatre solutions analysées, l'approche de PHILIP (1957a, b et c) comme la méthode "optimale" en termes de précision et de temps de calcul.

Les quatre points soulevés dans le chapitre (II.4.2) concernant le choix du pas d'intégration, du nombre de termes de la série, du temps de passage et de la solution asymptotique, feront l'objet d'une étude plus approfondie dans le chapitre suivant (III).

Cette méthode servira ensuite comme solution de référence permettant de tester les différents algorithmes de discrétisation numérique en égard à leur précision, convergence et stabilité.

CHAPITRE III

EXTENSION ET MISE EN OEUVRE DE LA METHODE QUASI-ANALYTIQUE DE PHILIP (1957)

Nous nous proposons dans ce chapitre de répondre essentiellement à deux objectifs dans le but de valider le choix de la méthode proposée par PHILIP (1957a, b, et c) comme solution de référence.

- d'une part, étendre la solution en série à un plus grand nombre de termes ;

- d'autre part, analyser en détail la précision de la solution ainsi obtenue en considérant l'influence respective des quatre points présentés à la fin du chapitre précédent.

III.1 - CALCUL GENERAL DES TERMES DE LA SERIE

Rappelons la forme générale de la solution en série exprimée par l'équation (II-3) :

$$z(\theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\theta) \cdot t^{m/2} \quad (\text{III-1})$$

Les premiers coefficients sont donnés par les équations différentielles suivantes :

$$\int_{\theta_0}^{\theta} f_1(\alpha) d\alpha = - 2 \cdot D(\theta) \cdot \frac{d\theta}{df_1} \quad (\text{III-2})$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} f_2(\alpha) d\alpha = c_2 \frac{df_2}{d\theta} + K(\theta) - K_0 \quad (\text{III-3})$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} f_3(\alpha) d\alpha = 2/3 c_2 \frac{df_3}{d\theta} - 2/3 c_3 \quad (\text{III-4})$$

avec :

$$c_2 = D(\theta) \cdot \left(\frac{d\theta}{df_1}\right)^2 \quad (\text{III-5})$$

et :

$$c_3 = D(\theta) \cdot \frac{d\theta}{df_1} \cdot \left(\frac{df_2}{df_1}\right)^2 \quad (\text{III-6})$$

En imposant la condition supplémentaire :

$$f_1(\theta_1) = f_2(\theta_1) = f_3(\theta_1) = 0 \quad (\text{III-7})$$

l'ensemble des équations (III-2)...(III-6) peut être résolu par un schéma itératif présenté initialement par PHILIP (1957a).

Bien que cette procédure itérative puisse être appliquée au calcul des termes au-delà de $m=3$, elle est très fastidieuse à rendre opérationnelle en routine. De ce fait, nous avons développé, en étroite collaboration avec TOUMA, une équation de récurrence originale et relativement simple à mettre en oeuvre sous la forme

$$\int_{\theta_0}^{\theta} f_m(\alpha) \cdot d\alpha = 2/m \left[c_2 \frac{df_m}{d\theta} - c_m \right] \quad (\text{III-8})$$

avec :

$$c_m = c_3 \sum_{k=1}^{k=m-2} \frac{df_{m-k}}{df_2} \cdot \frac{df_{k+1}}{df_2} - \sum_{k=1}^{k=m-3} \frac{df_{k+1}}{df_1} \cdot c_{m-k} \quad (\text{III-9})$$

Les paramètres c_2 et c_3 étant donnés par les équations (III-5) et (III-6).

Dans la suite de l'analyse, nous avons retenu cinq coefficients $f_m(\theta)$ supplémentaires, soit une limite de l'équation (III-1) à un développement en neuf termes :

$$z(\theta, t) = \sum_{m=1}^9 f_m(\theta) \cdot t^{m/2} \quad (\text{III-10})$$

La validité de cette hypothèse est vérifiée chapitre III-3, à partir des résultats obtenus avec un développement en quinze termes de la série.

La mise en oeuvre de cette solution a été effectuée sur les deux types de sol : YOLO LIGHT CLAY (Y.L.C.) et SABLE de L'ISERE (S.d.I.) caractérisés dans le premier chapitre. Ils peuvent être considérés comme représentatifs de deux classes extrêmes de sols rencontrés généralement en pratique. Nous espérons de ce fait que les conclusions obtenues seront généralisables.

Rappelons que les conditions d'essais, définies chapitre I, sont pour le YOLO LIGHT CLAY celles utilisées par PHILIP (1957a,b et c) :

$$z = 0 ; t \geq 0 ; \theta_1 = \theta_S = 0.4950 \text{ cm}^3/\text{cm}^3 \quad (\text{III-11})$$

$$z > 0 ; t = 0 ; \theta_0 = 0.2376 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$$

Pour le SABLE de L'ISERE, nous imposons les conditions :

$$z = 0 ; t \geq 0 ; \theta_1 = \theta_S = 0.312 \text{ cm}^3/\text{cm}^3 \quad (\text{III-12})$$

$$z > 0 ; t = 0 ; \theta_0 = 0.10 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$$

Il faut noter que tous les calculs effectués dans la suite de ce chapitre ont été obtenus avec une simple calculatrice de poche HP 41 CV.

La solution en série à neuf termes servira de base à l'étude critique des quatre points énumérés précédemment. Nous nous orientons d'abord sur l'analyse du choix de la méthode et du pas d'intégration numérique des équations (III-2)...(III-4) et (III-8).

III.2 - INFLUENCE DE LA METHODE ET PAS D'INTEGRATION

L'influence de la méthode d'intégration (i) et du pas d'intégration (ii) sur la solution en série donnée par l'équation (III-10) est évaluée en testant la solution du système d'équations (III-2)...(III-9) pour deux procédures d'intégration différentes : la méthode trapézoïdale et la méthode de Simpson avec un pas d'intégration défini par :

$$\Delta\theta = \frac{[\theta_1 - \theta_0]}{N} \quad (III-13)$$

où N est le nombre de points de discrétisation du segment $[\theta_0, \theta_1]$

Nous nous proposons d'exprimer cette influence en fonction de ce que nous définirons par la suite comme "erreur d'intégration : E_I ".

Considérons la solution en série sous la forme de l'équation (III-8) avec :

$$S_m(\theta_0, \theta_1) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f_m(\theta) \cdot d\theta \quad (III-14)$$

L'erreur d'intégration, induite sur le terme $S_m(\theta_0, \theta_1)$ est exprimée sous la forme de l'écart- type :

$$E_I[S_m] = \sqrt{[S_m(\theta_0, \theta_1)_{REEL} - S_m(\theta_0, \theta_1)_{CAL}]^2} \quad (III-15)$$

où $S_m(\theta_0, \theta_1)_{REEL}$ et $S_m(\theta_0, \theta_1)_{CAL}$ correspondent respectivement aux valeurs "réelles" et calculées du terme $S_m(\theta_0, \theta_1)$ de la série ; l'indice I étant utilisé pour "intégration". Cette équation pose naturellement le problème d'estimation de la valeur de $S_m(\theta_0, \theta_1)_{REEL}$.

La connaissance de cette valeur théoriquement inaccessible nécessite d'examiner le comportement de chaque terme $S_m(\theta_0, \theta_1)$, lorsque le pas d'intégration tend vers des valeurs très faibles. En effet, l'influence du pas d'intégration $\Delta\theta$ se manifeste sur la détermination de $S_m(\theta_0, \theta_1)$ à deux niveaux : calcul de l'intégrale et estimation par linéarisation de la diffusivité capillaire $D(\theta)$. Néanmoins, l'importance de ces deux effets doit diminuer lorsque le nombre de pas N devient très grand, conduisant alors à des valeurs asymptotiques de $S_m(\theta_0, \theta_1)$.

Bien que cette procédure empirique rende possible le calcul de l'erreur d'intégration sur chaque terme de la série $S_m(\theta_0, \theta_1)$, elle ne permet pas d'estimer en termes d'un écart-type l'erreur d'intégration cumulée sur les résultats finaux de la solution en série (Eq. II-5). En effet, la solution étant développée sous la forme d'une équation de récurrence (Eq. III-8), il est évident que la valeur de l'intégrale $S_m(\theta_0, \theta_1)$ dépend des termes précédents $S_k(\theta_0, \theta_1)$ avec $k \leq m-1$. Par conséquent, pour exprimer l'erreur d'intégration cumulée, il faudrait prendre en compte non seulement les variances des différents termes $S_m(\theta_0, \theta_1)$ (soit $(E_I[S_m])^2$), mais aussi les co-variances entre les termes de la série. Malheureusement, ces dernières valeurs ne sont guère accessibles.

C'est pourquoi, nous nous proposons d'évaluer l'erreur d'intégration cumulée d'une manière semblable à celle utilisée pour l'équation (III-15). Considérons la solution sous la forme de l'équation (II-6) :

$$I(t) = K_0 \cdot t + \sum_{m=1}^9 S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2} \quad (\text{III-16})$$

l'erreur d'intégration cumulée peut être définie par l'écart-type :

$$E_I[I] = \sqrt{[I_{\text{REEL}} - I_{\text{CAL}}]^2} \quad (\text{III-17})$$

où I_{REEL} et I_{CAL} correspondent respectivement aux valeurs "réelles" et calculées de la lame d'eau infiltrée (I). De nouveau ceci pose le problème d'estimation de I_{REEL} .

D'après l'équation (III-16), il est évident que la solution $I(t)$ se comporte de la même façon que les termes $S_m(\theta_0, \theta_1)$ lorsque N augmente. Par conséquent, la procédure utilisée pour estimer $S_m(\theta_0, \theta_1)_{REEL}$, fixe en même temps le point de fonctionnement pour lequel la solution (I) approche sa valeur "réelle" I_{REEL} .

D'autre part, l'erreur d'intégration peut être exprimée en valeur relative définie par :

$$E_I^*[I] = \frac{E_I[I]}{I_{REEL}} \quad (III-18)$$

Par la même procédure, on peut enfin évaluer l'influence du pas d'intégration sur le positionnement du profil hydrique $z(\theta, t)$ calculé par l'équation (III-10) :

$$E_I[z] = \sqrt{[z(\theta, t)_{REEL} - z(\theta, t)_{CAL}]^2} \quad (III-19)$$

où $z(\theta, t)_{REEL}$ est évidemment estimé avec le même pas d'intégration que $S_m(\theta_0, \theta_1)_{REEL}$, et en valeur relative par :

$$E_I^*[z] = \frac{E_I[z]}{z(\theta, t)_{REEL}} \quad (III-20)$$

Cette analyse systématique des erreurs d'intégration va être testée sur les deux types de sol retenus, en considérant une période de simulation voisine de l'intervalle de la validité définie par PHILIP comme $t \leq t_{grav}$ (Eq. II-9). On montre par la suite (Chapitre III-4) que pour l'argile et le sable, la valeur de t_{grav} vaut respectivement 250 heures et 0.3 heures.

2.1 - Yolo Light Clay

La solution en série à 9 termes est mise en oeuvre pour six pas d'intégration différents (Eq. III-13) correspondants à $N = 10, 25, 50, 100, 250$ et 500 . Parallèlement deux procédures d'intégration sont testées : la méthode trapézoïdale et la méthode SIMPSON. Les différentes valeurs de $S_m(\theta_0, \theta_1)$ ainsi obtenues sont données tableau (III-1).

YOLO LIGHT CLAY

		N = 10	N = 25	N = 50	N = 100	N = 250	N = 500	PHILIP (1957 b)
$S_1(\theta_0, \theta_1)$	TRAPEZE	0.6583	0.6774	0.6864	0.6928	0.6988	0.7021	
(cm/ \sqrt{h})	SIMPSON	0.6589	0.6772	0.6862	0.6927	0.6988	0.7021	0.7524
$S_2(\theta_0, \theta_1)$	TRAPEZE	1.278 10^{-2}	1.394 10^{-2}	1.438 10^{-2}	1.467 10^{-2}	1.463 10^{-2}	1.507 10^{-2}	
(cm/h)	SIMPSON	1.302 10^{-2}	1.388 10^{-2}	1.440 10^{-2}	1.468 10^{-2}	1.493 10^{-2}	1.507 10^{-2}	1.627 10^{-2}
$S_3(\theta_0, \theta_1)$	TRAPEZE	2.476 10^{-4}	3.029 10^{-4}	3.198 10^{-4}	3.291 10^{-4}	3.362 10^{-4}	3.397 10^{-4}	
(cm/h $^{3/2}$)	SIMPSON	2.573 10^{-4}	3.039 10^{-4}	3.210 10^{-4}	3.295 10^{-4}	3.362 10^{-4}	3.397 10^{-4}	3.034 10^{-4}
$S_4(\theta_0, \theta_1)$	TRAPEZE	2.439 10^{-6}	4.437 10^{-6}	4.946 10^{-6}	5.138 10^{-6}	5.224 10^{-6}	5.242 10^{-6}	
(cm/h 2)	SIMPSON	2.644 10^{-6}	4.522 10^{-6}	4.996 10^{-6}	5.157 10^{-6}	5.229 10^{-6}	5.242 10^{-6}	1.161 10^{-6}
$S_5(\theta_0, \theta_1)$	TRAPEZE	- 6.384 10^{-8}	- 2.394 10^{-8}	- 1.166 10^{-8}	- 9.576 10^{-9}	- 1.154 10^{-8}	- 1.379 10^{-8}	
(cm/h $^{5/2}$)	SIMPSON	- 6.792 10^{-8}	- 2.130 10^{-8}	- 9.887 10^{-9}	- 8.879 10^{-9}	- 1.135 10^{-8}	- 1.376 10^{-8}	
$S_6(\theta_0, \theta_1)$	TRAPEZE	- 3.014 10^{-9}	- 3.864 10^{-9}	- 3.542 10^{-9}	- 3.608 10^{-9}	- 3.677 10^{-9}	- 3.771 10^{-9}	
(cm/h 3)	SIMPSON	- 3.411 10^{-9}	- 3.883 10^{-9}	- 3.603 10^{-9}	- 3.588 10^{-9}	- 3.671 10^{-9}	- 3.770 10^{-9}	
$S_7(\theta_0, \theta_1)$	TRAPEZE	- 2.531 10^{-12}	- 1.029 10^{-10}	- 1.039 10^{-10}	- 9.968 10^{-11}	- 9.611 10^{-11}	- 9.691 10^{-11}	
(cm/h $^{7/2}$)	SIMPSON	- 1.791 10^{-12}	- 1.099 10^{-10}	- 1.043 10^{-10}	- 9.939 10^{-11}	- 9.598 10^{-11}	- 9.711 10^{-11}	
$S_8(\theta_0, \theta_1)$	TRAPEZE	3.769 10^{-12}	5.949 10^{-13}	3.07 10^{-13}	2.900 10^{-13}	3.056 10^{-13}	3.831 10^{-13}	
(cm/h 4)	SIMPSON	4.336 10^{-12}	2.205 10^{-13}	1.191 10^{-13}	2.794 10^{-13}	3.051 10^{-13}	3.827 10^{-13}	
$S_9(\theta_0, \theta_1)$	TRAPEZE	8.052 10^{-14}	1.516 10^{-13}	1.118 10^{-13}	1.121 10^{-13}	1.197 10^{-13}	1.215 10^{-13}	
(cm/h $^{9/2}$)	SIMPSON	1.027 10^{-13}	1.458 10^{-13}	1.062 10^{-13}	1.110 10^{-13}	1.196 10^{-13}	1.210 10^{-13}	

Tableau III-1 : Les valeurs de $S_m(\theta_0, \theta_1)$ avec $m \leq 9$ en fonction du nombre de pas d'intégration N .

Indépendamment de la procédure d'intégration considérée, les quatre premiers termes de la série ont une tendance nette à augmenter avec le nombre de pas d'intégration (N). Par contre, au-delà $m=4$, les valeurs de $S_m(\theta_0, \theta_1)$, qui sont très faibles ($10^{-8} \text{ cm/h}^{m/2} < S_m(\theta_0, \theta_1) < 10^{-13} \text{ cm/h}^{m/2}$) ne sont guère influencées par la valeur de N et fluctuent légèrement autour d'une moyenne.

La comparaison entre les deux méthodes d'intégration montre que pour des faibles valeurs de N (N=10 ; N=25) les grandeurs de $S_m(\theta_0, \theta_1)$ sont très légèrement différentes. Avec l'augmentation de N, les valeurs de $S_m(\theta_0, \theta_1)$ convergent rapidement vers une valeur unique indépendante de la méthode d'intégration. En conséquence, les effets de troncature introduits par la procédure d'intégration (du 2ème ordre pour la méthode trapézoïdale et du 4ème ordre pour la méthode de SIMPSON) peuvent être considérés comme de faible importance par rapport à l'erreur induite par la linéarisation de la diffusivité.

A titre d'exemple, nous avons également présenté sur le même tableau, les résultats obtenus par PHILIP (1957b). Bien que les calculs aient été effectués avec un pas d'intégration (N=20) proche de notre exemple (N=25), les valeurs des intégrales $S_m(\theta_0, \theta_1)$ diffèrent sensiblement. Ceci paraît devoir essentiellement être expliqué par le fait que nous avons utilisé des expressions analytiques pour les caractéristiques du sol, tandis que PHILIP a travaillé avec des valeurs discrètes de θ , K et D.

Les figures (III-1a,b,c et d) donnent l'évolution respective des quatre premiers termes $S_m(\theta_0, \theta_1)$ en fonction de N. Les courbes montrent clairement que les valeurs obtenues pour N=500 peuvent être considérées comme les limites asymptotiques.

Le pas d'intégration correspondant sera donc utilisé pour ce type de sol, pour estimer les valeurs "réelles" de $S_m(\theta_0, \theta_1)$, $z(\theta, t)$ et $I(t)$.

YOLO LIGHT CLAY

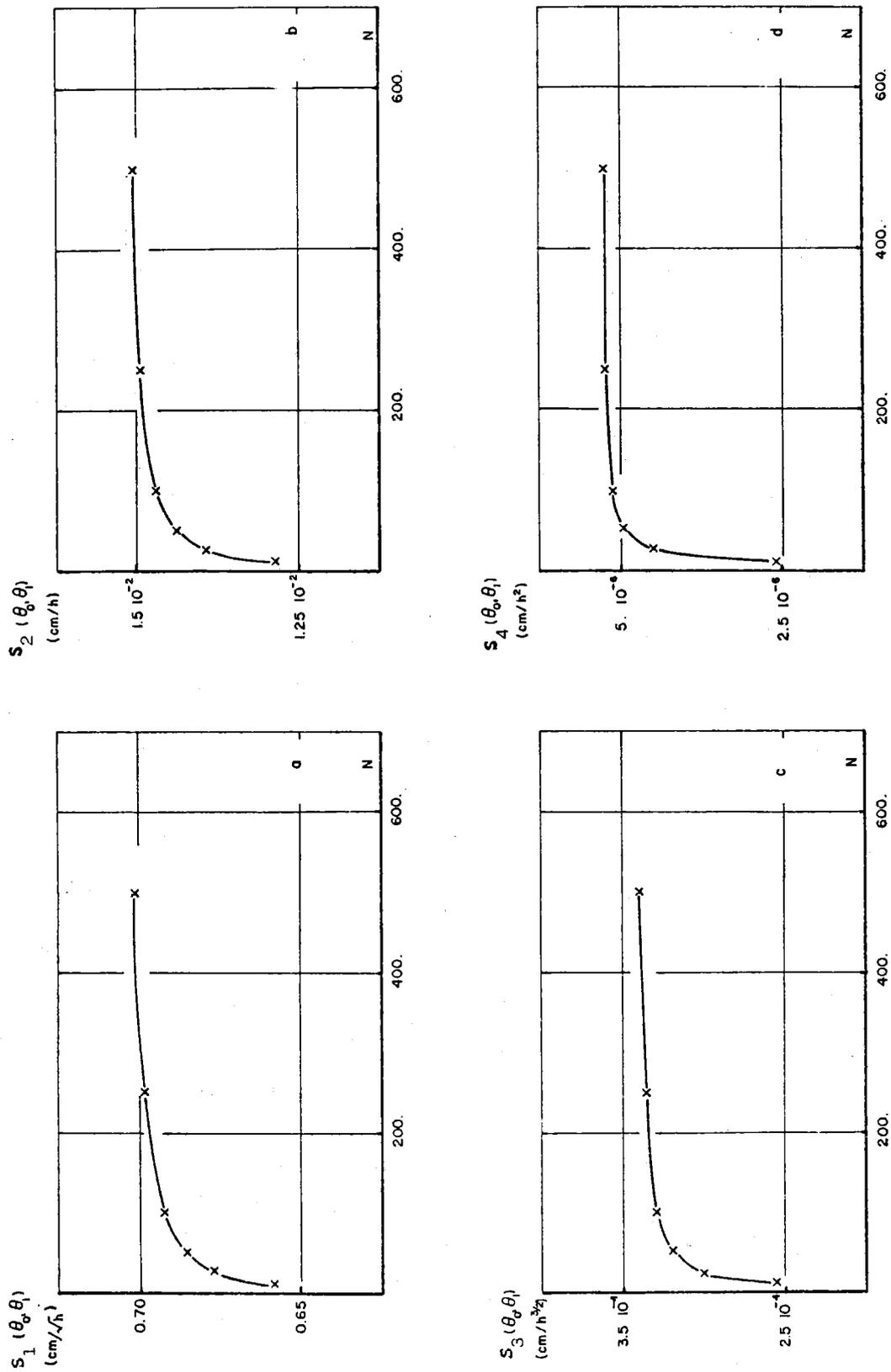


Figure III-1 : L'évolution des premiers quatre termes $S_m(\theta_0, \theta_1)$ de la série en fonction du nombre de pas d'intégration N .

Il apparait également que le gain de précision est très faible (inférieure à 1 %) lorsque l'on passe de $N = 250$ à $N = 500$. Pour des raisons évidentes de temps de calcul, on retiendra donc pour ce sol la valeur de $N=250$ comme choix "optimal", ce qui conduira à définir de facto un critère de précision.

La faible différence entre les valeurs de $S_m(\theta_0, \theta_1)$ obtenue avec les deux méthodes d'intégration différentes (Tableau III-1) se trouve confirmée au niveau du calcul des erreurs d'intégration cumulées, $E_I[I]$. Ce n'est que pour les petites valeurs de N qu'un léger avantage est obtenu par la méthode de SIMPSON. Au temps $t = 250$ h, pour $N=10$, la valeur de $E_I[I]$ s'améliore de 6 %, tandis que pour $N=25$, on n'obtient qu'un gain de 1 %.

Puisque la méthode trapézoïdale est plus souple et plus rapide à mettre en oeuvre numériquement, nous opterons par la suite pour cette procédure d'intégration.

Les figures (III-2a et b) donnent pour différentes valeurs de N l'évolution respective des erreurs absolue $E_I[I]$ et relative $E_I^*[I]$ en fonction du temps.

En se limitant à l'intervalle du temps $t \leq t_{\text{grav}}$ soit $t \leq 250$ h, on observe que l'erreur $E_I^*[I]$ générée par le pas d'intégration "optimal" ($N = 250$) ne dépasse pas 0.6%, soit une erreur absolue inférieure à 0.1 cm sur la lame d'eau infiltrée. Néanmoins, il faut bien garder à l'esprit le fait que le temps t_{grav} n'est qu'une première estimation (PHILIP, 1969) de la valeur exacte et inconnue du temps limite fixant le rayon de convergence de la solution en série. Il n'est pas impossible qu'une deuxième approximation plus précise de ce temps limite augmente légèrement la borne supérieure du champ d'applicabilité de la solution dans le temps. On peut toutefois estimer, d'après la forme des courbes de la figure (III-2b) que le choix $N=250$ n'est guère affecté par ce problème du fait de la très faible variation de $E_I^*[I]$ avec le temps. Ainsi le critère de précision fixé à 0.6 % reste toujours valable si la valeur du temps limite passe à $t = 300$ h. Dans le chapitre (III-4), nous reviendrons plus en détail sur le problème de l'estimation de ce temps limite.

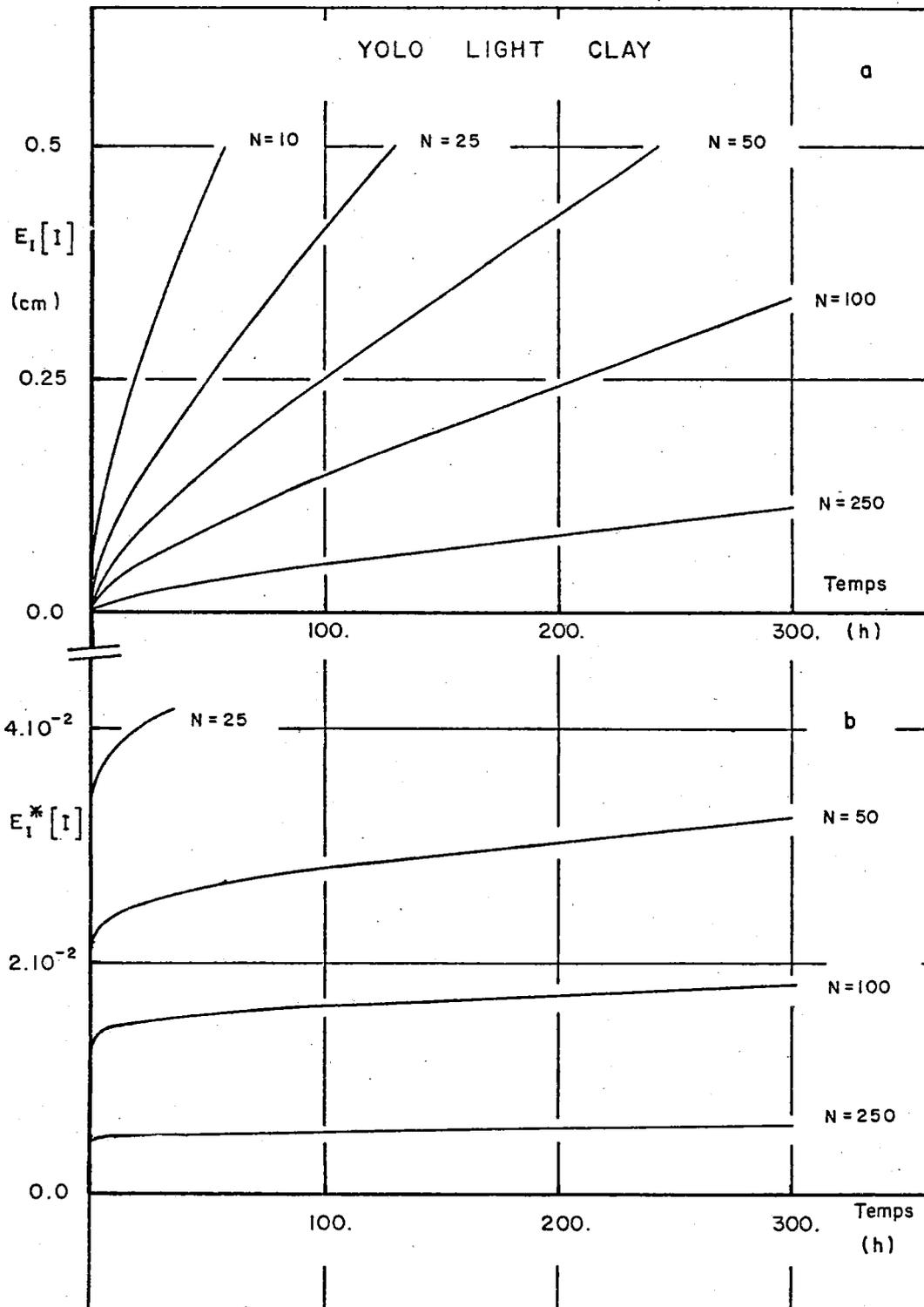


Figure III-2 : L'évolution en fonction du temps des erreurs d'intégration $E_I [I]$ en valeurs absolues (a) et relatives (b) pour différentes valeurs de N.

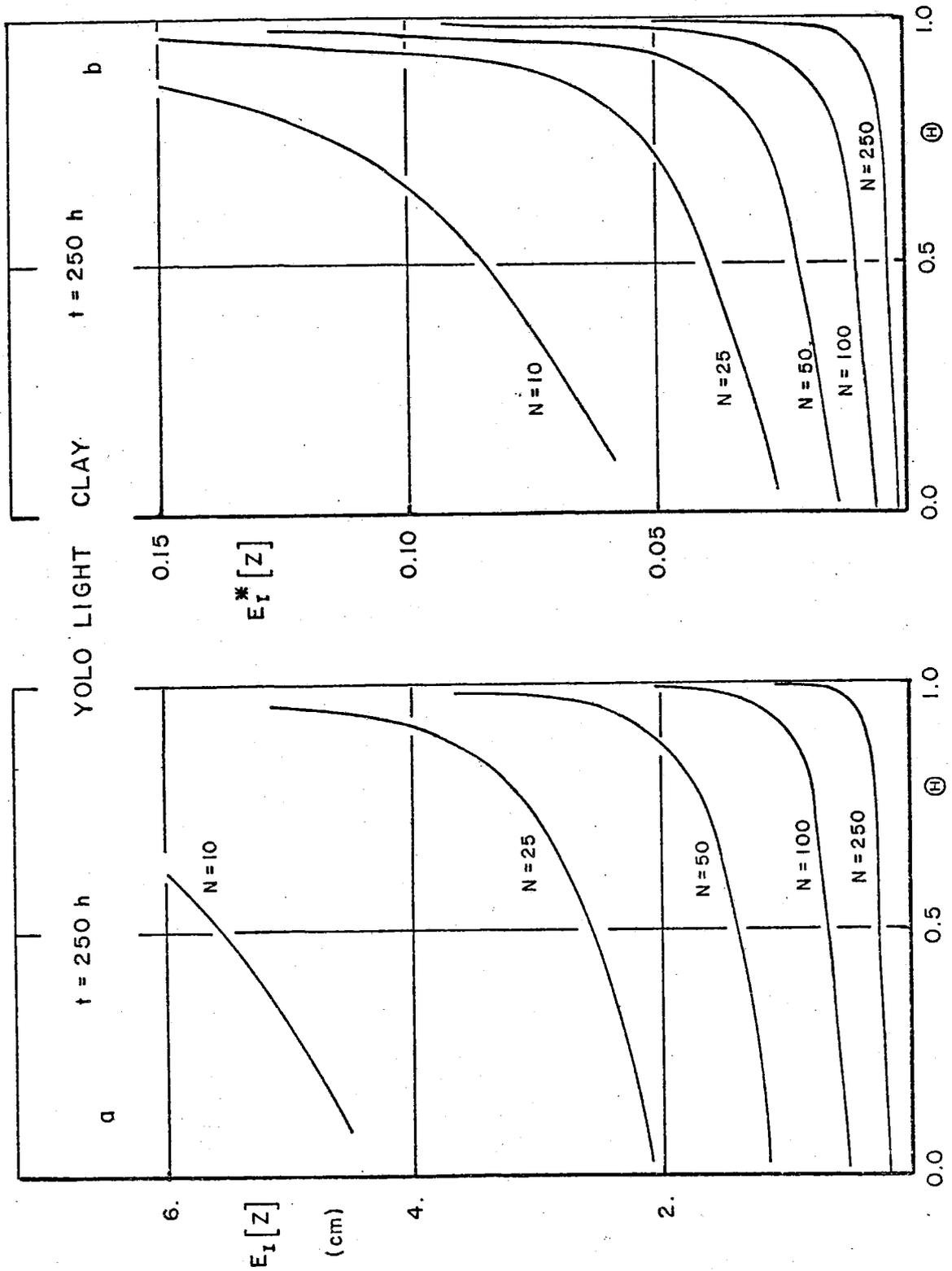


Figure III-3 : L'évolution en fonction de θ des erreurs d'intégration $E_T[z]$ en valeurs absolues (a) et relatives (b) pour différentes valeurs de N .

Les figures (III-3a et b) donnent pour différentes valeurs de N l'évolution des erreurs d'intégration induites sur $z(\theta, t)$ (Eqs. III-19 et III-20) en fonction du degré de saturation effective Θ , défini par :

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \quad (\text{III-21})$$

Puisque $E_I[z]$ est une fonction croissante du temps, nous avons choisi d'effectuer le calcul de ces courbes au temps limite, t_{grav} .

On observe que l'erreur $E_I[z]$ affecte surtout les teneurs en eau très proches de la teneur en eau maximum θ_1 . Lorsque N augmente, le déplacement erroné du profil hydrique dû à $E_I[z]$ diminue. Au bout de 250 heures, l'utilisation d'un pas d'intégration avec $N=100$ conduit à une incertitude au niveau du front du profil de ± 0.7 cm. Le passage à $N = 250$ réduit cette erreur à ± 3 mm., pour $0 < \Theta < 0.9$, soit une erreur relative inférieure à 0.7 % pour la même gamme de teneur en eau.

A la faveur de ces résultats, nous pouvons conclure que pour ce type de sol le pas d'intégration correspondant à $N = 250$, représente un choix "optimal" en termes de précision et de temps de calcul de la solution. Sur tout l'intervalle du temps considéré ($t \leq t_{\text{grav}}$), il conduit à une erreur d'intégration sur I et sur $z(\theta, t)$ inférieure à 0.7 %.

2.2 - Sable de l'Isère

Une analyse identique a été faite pour le Sable de l'Isère.

Le tableau (III-2) donne les valeurs de $S_m(\theta_0, \theta_1)$ avec $m \leq 9$ en fonction du pas d'intégration obtenues avec la méthode trapézoïdale tenant compte de la faible influence de la méthode d'intégration.

SABLE DE L'ISERE

METHODE TRAPEZOIDALE							
	N = 10	N = 25	N = 50	N = 100	N = 250	N = 500	Valeurs "réelles"
$S_1(\theta_0, \theta_1)$ (cm/ \sqrt{h})	7.6771	8.02023	8.4510	8.6243	8.7790	8.8587	8.8587
$S_2(\theta_0, \theta_1)$ (cm/h)	6.5313	6.9380	7.2202	7.3462	7.4510	7.5023	7.5023
$S_3(\theta_0, \theta_1)$ (cm/h ^{3/2})	3.0877	3.3306	3.4218	3.4231	3.4237	3.4239	3.4239
$S_4(\theta_0, \theta_1)$ (cm/h ²)	2.337 10 ⁻¹	1.728 10 ⁻¹	1.592 10 ⁻¹	1.231 10 ⁻¹	8.22 10 ⁻²	5.95 10 ⁻²	5.712 10 ⁻²
$S_5(\theta_0, \theta_1)$ (cm/h ^{5/2})	- 0.8723	- 0.7385	- 0.7185	- 0.7103	- 0.7047	- 0.7013	- 0.7013
$S_6(\theta_0, \theta_1)$ (cm/h ³)	- 1.715 10 ⁻¹	- 1.650 10 ⁻¹	- 1.083 10 ⁻¹	- 7.175 10 ⁻²	- 4.149 10 ⁻²	- 2.627 10 ⁻²	- 2.568 10 ⁻²
$S_7(\theta_0, \theta_1)$ (cm/h ^{7/2})	0.5101	0.2770	0.2881	0.2933	0.2934	0.2934	0.2934
$S_8(\theta_0, \theta_1)$ (cm/h ⁴)	3.096 10 ⁻¹	1.135 10 ⁻¹	6.581 10 ⁻²	4.386 10 ⁻²	2.368 10 ⁻²	1.932 10 ⁻²	1.898 10 ⁻²
$S_9(\theta_0, \theta_1)$ (cm/h ^{9/2})	- 0.3431	- 0.1043	- 0.1471	- 0.1529	- 0.1534	- 0.1536	- 0.1536

Tableau III-2 : Les valeurs de $S_m(\theta_0, \theta_1)$ avec $m \leq 9$ en fonction du nombre de pas d'intégration N .

Lorsque N augmente, on constate que les termes $S_m(\theta_0, \theta_1)$ tendent chacun vers une limite par valeurs, soit inférieures, soit supérieures. A part $S_4(\theta_0, \theta_1)$, $S_6(\theta_0, \theta_1)$ et $S_8(\theta_0, \theta_1)$ dont les valeurs numériques sont relativement faibles, tous les autres termes atteignent quasiment leurs valeurs asymptotiques pour $N = 500$, ce qui permet d'évaluer les valeurs dites "réelles". Pour les 4°, 6° et 8° termes, les valeurs asymptotiques ont été estimées par extrapolation parabolique calculée sur les cinq derniers points. Cela conduit aux données tableau (III-2).

Comme pour le Yolo Light Clay, la valeur $N = 250$ peut être considérée comme point de fonctionnement "optimal" en égard à la précision et au temps de calcul. L'écart relatif entre les valeurs $S_m(\theta_0, \theta_1)$ obtenues pour $N = 250$ et $N = 500$ ne dépasse pas 0.9 %.

Les figures (III-4a et b) montrent pour différentes valeurs de N l'évolution respective des erreurs absolue et relative sur la lame d'eau infiltrée, en fonction du temps.

Contrairement aux résultats obtenus pour l'argile, l'erreur relative $E_I^*[I]$ a tendance à décroître dans le temps par suite des effets compensatoires des co-variances entre les différents termes $S_m(\theta_0, \theta_1)$.

La faible variation de $E_I^*[I]$ pour $N \geq 100$, montre que les erreurs $E_I[I]$ augmentent proportionnellement avec les valeurs de I .

Au temps $t = t_{\text{grav}}$ soit $t = 0.3$ heures pour ce sol, l'erreur relative $E_I^*[I]$ pour $N = 250$ atteint 0.7 % soit une erreur absolue inférieure à 0.6 mm, sur la lame d'eau infiltrée. Ces résultats quasiment identiques à ceux trouvés pour l'argile (respectivement 0.6 % et 0.1 cm) justifient largement le choix de $N = 250$ comme valeur "optimale".

Comme nous l'avons fait remarquer précédemment, la valeur de t_{grav} n'est qu'une estimation provisoire du temps limite. Néanmoins, le caractère décroissant de l'erreur $E_I^*[I]$ avec le temps garantit la validité du choix de 0.7 % comme critère de précision, même si la borne supérieure du champ d'applicabilité de la solution en série est augmenté par la suite (Chapitre III-4).

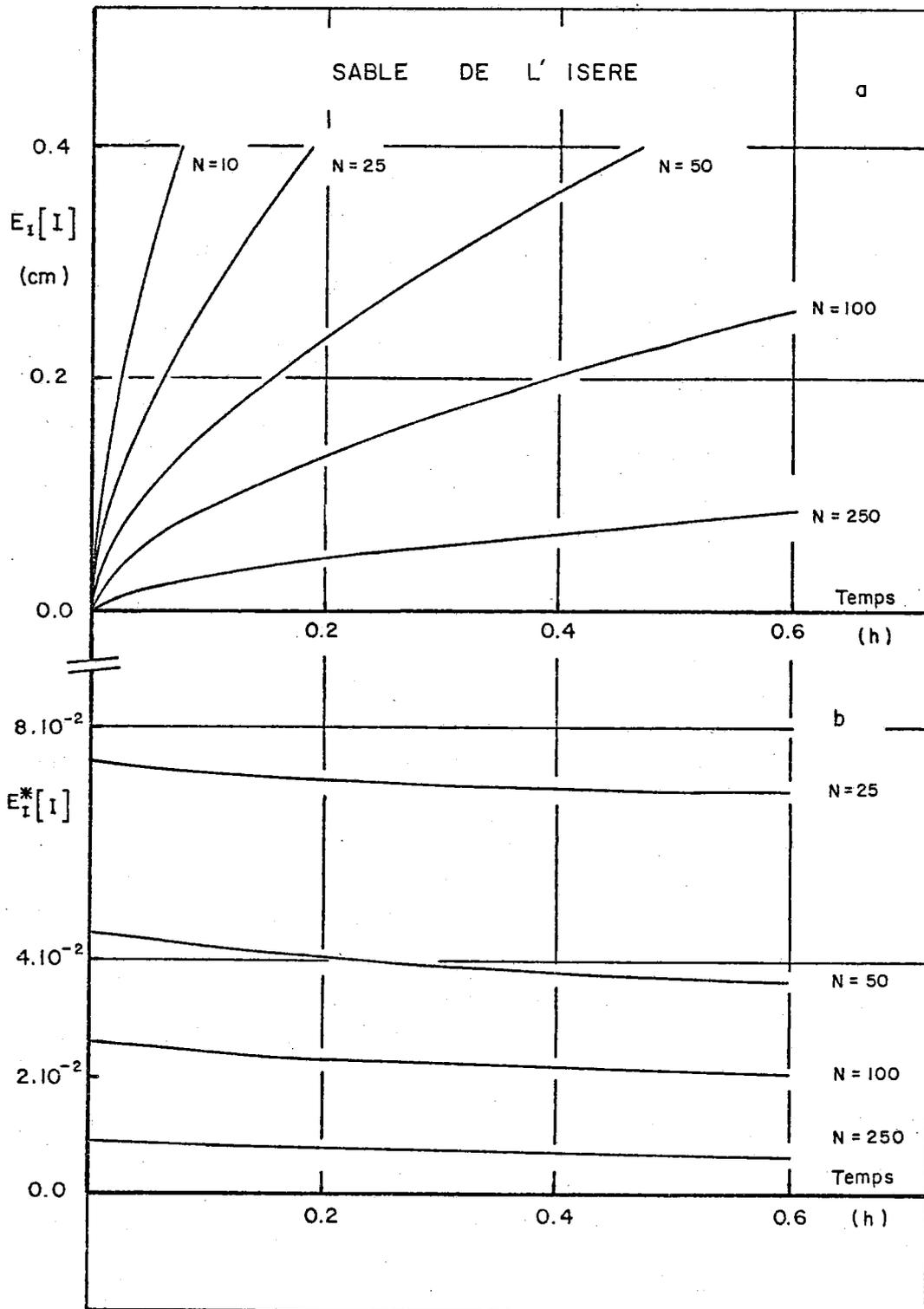


Figure III-4 : L'évolution en fonction du temps des erreurs d'intégration $E_I [I]$ en valeurs absolues (a) et relatives (b) pour différentes valeurs de N.

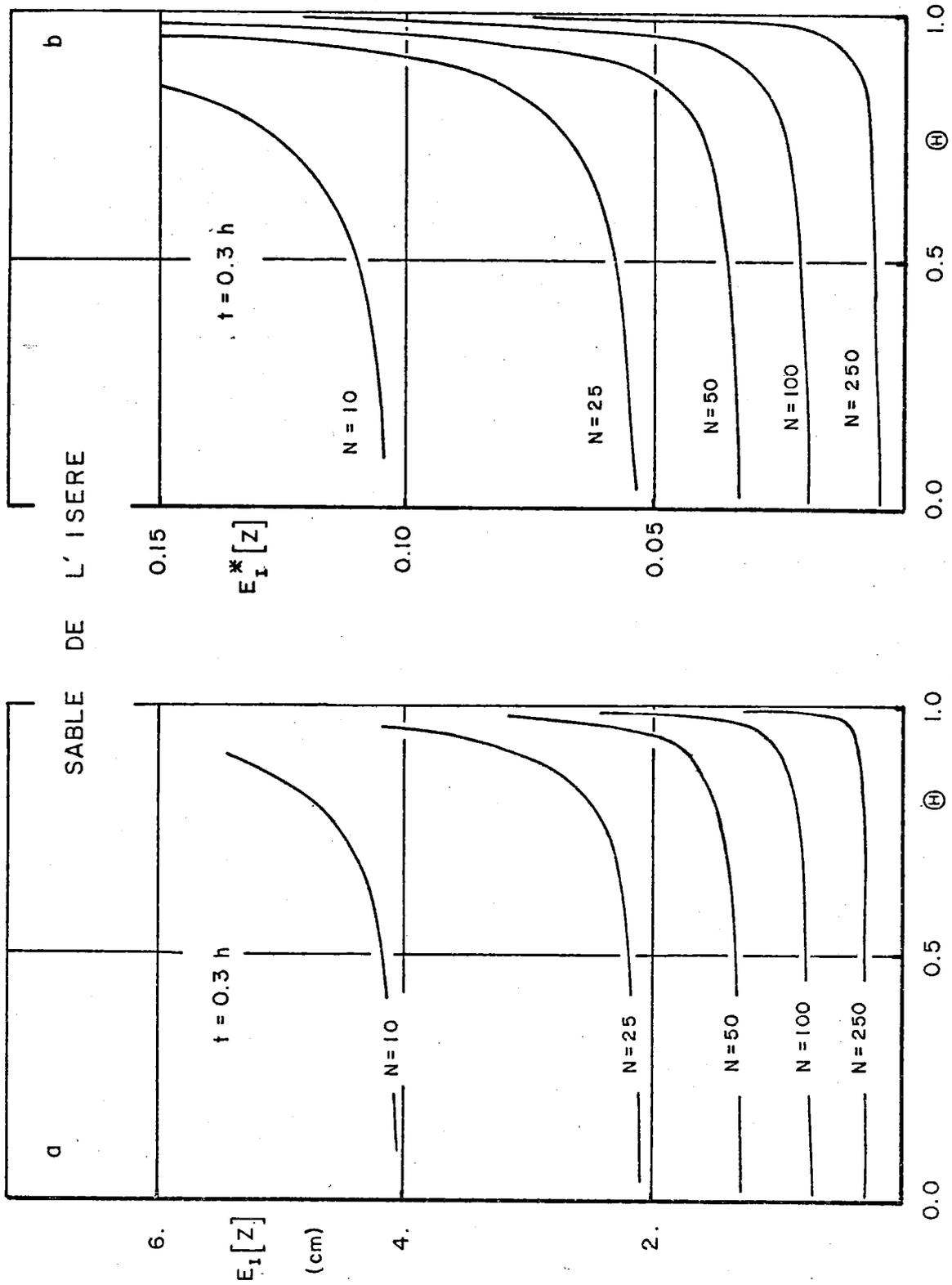


Figure III-5 : L'évolution en fonction de θ des erreurs d'intégration $E_1[z]$ en valeurs absolues (a) et relatives (b) pour différentes valeurs de N .

Les figures (III-5a et b) montrent enfin l'évolution respective des erreurs sur le positionnement du profil hydrique $E_I[z]$ et $E_I^*[z]$ en fonction du degré de saturation effective (Θ) au temps : $t = t_{grav}$.

Comme pour l'argile, l'erreur d'intégration affecte surtout les teneurs en eau très proche de Θ_1 . Au temps $t = 0.3$ heures, l'utilisation de $N = 250$ amène une erreur sur le positionnement du front du profil de 0.3 cm, ce qui correspond à une erreur relative $E_I^*[z]$ inférieure à 0.7 % pour : $0 < \Theta < 0.9$.

2.3 - Conclusions

Les résultats obtenus pour ces deux sols montrent que le choix du pas d'intégration intervient principalement au niveau de la linéarisation de la diffusivité capillaire.

La comparaison entre deux procédures d'intégration : méthode trapézoïdale et celle de SIMPSON, montre des résultats quasiment identiques; dès lors, la méthode trapézoïdale peut être retenue pour sa plus grande souplesse de programmation.

Le point de fonctionnement $N = 250$, amène un pas d'intégration "optimal" en termes de précision et de temps de calcul. Sur l'intervalle du temps considéré, l'erreur relative ainsi générée est inférieure à 0.7 % aussi bien pour la lame d'eau infiltrée que pour le profil hydrique, ce qui définit de facto le critère de précision à satisfaire par l'erreur de troncature analysée dans le chapitre suivant (III-3).

Pour les deux sols, ce critère de précision (0.7 %) se trouve être quasiment indépendant du choix de l'estimation du temps limite.

III.3 - INFLUENCE DU NOMBRE DES TERMES DE LA SOLUTION EN SERIE

Le second problème à étudier est relatif à l'influence du nombre des termes M de la série (Eq. III-1) sur la précision de la solution.

Cette influence peut être exprimée sous la forme d'une erreur de troncature :

$$E_T[z] = \sum_{m=M+1}^{\infty} f_m(\theta) \cdot t^{m/2} \quad (\text{III-22})$$

où $E_T[z]$ représente pour toute valeur de θ l'erreur de positionnement entre la profondeur calculée en se limitant au M-ième terme de la série, et la profondeur "réelle", qui correspondrait à une série infinie. Dans la suite l'indice T est utilisé pour "troncature".

Cette erreur peut également être exprimée en valeur relative par :

$$E_T^*[z] = \frac{\sum_{m=M+1}^{\infty} f_m(\theta) \cdot t^{m/2}}{\sum_{m=1}^{\infty} f_m(\theta) \cdot t^{m/2}} \quad (\text{III-23})$$

On peut de même étudier l'erreur sur la lame d'eau infiltrée ($E_T[I]$). Reprenant la solution sous la forme de l'équation (III-16), on peut écrire :

$$E_T[I] = \sum_{m=M+1}^{\infty} S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2} \quad (M \geq 2) \quad (\text{III-24})$$

ou en valeur relative :

$$E_T^*[I] = \frac{\sum_{m=M+1}^{\infty} S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}}{K_0 t + \sum_{m=1}^{\infty} S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}} \quad (M \geq 2) \quad (\text{III-25})$$

Ces calculs (III-22)...(III-25) demandent le développement de la série jusqu'à $m = \infty$. Ceci n'étant pas réalisable, il faut nécessairement borner la plage des valeurs de m par une valeur limite m_{fin} , de sorte que $1 \leq m \leq m_{fin}$. Pour choisir la valeur de m_{fin} , nous considérerons les apports relatifs de chaque terme de la série, soit $[f_m(\theta) \cdot t^{m/2}] / z$ pour les équations (III-22) et (III-23) et $[S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}] / I$ pour les équations (III-24) et (III-25). La valeur de m , au-delà de laquelle les apports deviennent négligeables sur les résultats de la solution, fixe la valeur de m_{fin} .

Ceci conduit à une première estimation indiquée par T_1 , des erreurs de troncature sous la forme :

$$E_{T1}[z] = \sum_{m=M+1}^{m_{fin}} f_m(\theta) \cdot t^{m/2} \quad (III-26)$$

et :

$$E_{T1}^*[z] = \frac{\sum_{m=M+1}^{m_{fin}} f_m(\theta) \cdot t^{m/2}}{\sum_{m=1}^{m_{fin}} f_m(\theta) \cdot t^{m/2}} \quad (III-27)$$

pour la profondeur de pénétration du profil hydrique, et :

$$E_{T1}[I] = \sum_{m=M+1}^{m_{fin}} S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2} \quad (M \geq 2) \quad (III-28)$$

et :

$$E_{T1}^*[I] = \frac{\sum_{m=M+1}^{m_{fin}} S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}}{K_0 \cdot t + \sum_{m=1}^{m_{fin}} S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}} \quad (M \geq 2) \quad (III-29)$$

pour la lame d'eau infiltrée.

Le calcul de ces erreurs E_{T1} et E_{T1}^* ne peut toutefois être effectué qu'après avoir mis en oeuvre la solution avec un nombre de termes égal à m_{fin} . Il nous paraît important de disposer d'un moyen permettant d'estimer l'ordre de grandeur de $E_T[I]$ préalablement par une méthode approximative ne nécessitant qu'un nombre réduit de termes.

Pour cela nous proposons en premier lieu de faire appel à une hypothèse introduite par PHILIP (1957a) :

$$\frac{s_m(\theta_o, \theta_1)}{s_1(\theta_o, \theta_1)} \leq \left[\frac{s_2(\theta_o, \theta_1)}{s_1(\theta_o, \theta_1)} \right]^{m-1} \quad (\text{III-30})$$

Bien que cette hypothèse ne puisse pas être dérivée théoriquement, elle semble être vérifiée expérimentalement (PHILIP, 1957a).

Cette équation permet de borner les valeurs de $s_m(\theta_o, \theta_1)$ de la série par leurs limites supérieures selon :

$$s_m(\theta_o, \theta_1) \leq s_1(\theta_o, \theta_1) \left[\frac{s_2(\theta_o, \theta_1)}{s_1(\theta_o, \theta_1)} \right]^{m-1} \quad (\text{III-31})$$

ce qui permet de majorer la solution sous la forme d'une série géométrique :

$$\sum_{m=1}^{\infty} s_m(\theta_o, \theta_1) \cdot t^{m/2} \leq \frac{s_1^2(\theta_o, \theta_1)}{s_2(\theta_o, \theta_1)} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{s_2(\theta_o, \theta_1)}{s_1(\theta_o, \theta_1)} \cdot \sqrt{t} \right]^m \quad (\text{III-32})$$

ne nécessitant que la connaissance des deux premiers termes de la série.

L'ensemble des équations (III-24) et (III-32) conduit à un majorant de l'erreur de troncature ($E_{T2}[I]$) :

$$E_{T2}[I] \leq \frac{s_1(\theta_o, \theta_1) \cdot \sqrt{t} \left[\frac{s_2(\theta_o, \theta_1)}{s_1(\theta_o, \theta_1)} \cdot \sqrt{t} \right]^M}{\left[1 - \frac{s_2(\theta_o, \theta_1)}{s_1(\theta_o, \theta_1)} \cdot \sqrt{t} \right]} \quad (\text{III-33})$$

Afin de définir d'une façon identique l'erreur en valeur relative $E_{T2}^*[I]$, le dénominateur de l'équation (III-25) est estimé sous la forme de la série géométrique minorante :

$$K_o \cdot t + \sum_{m=1}^{\infty} s_m(\theta_o, \theta_1) \cdot t^{m/2} \geq \frac{s_1^2(\theta_o, \theta_1)}{s_2(\theta_o, \theta_1)} \sum_{m=1}^M \left[\frac{s_2(\theta_o, \theta_1)}{s_1(\theta_o, \theta_1)} \cdot \sqrt{t} \right]^m \quad (\text{III-34})$$

La combinaison des équations (III-25), (III-33) et (III-34) amène l'estimation $E_{T2}^*[I]$ majorant le domaine de l'erreur $E_T^*[I]$

$$E_{T2}^*[I] \leq \frac{\left[\frac{S_2(\theta_0, \theta_1)}{S_1(\theta_0, \theta_1)} \cdot \sqrt{t} \right]^M}{1 - \left[\frac{S_2(\theta_0, \theta_1)}{S_1(\theta_0, \theta_1)} \cdot \sqrt{t} \right]^M} \quad (\text{III-35})$$

Comme nous le verrons par la suite cette estimation du majorant est beaucoup trop forte. On peut dès lors étudier une troisième estimation intermédiaire en s'appuyant sur une modification de l'hypothèse (III-30). En effet, l'expérience montre pour différents types de sol que cette hypothèse n'exclue pas l'existence d'une condition plus restreinte de la forme :

$$\left[\frac{S_m(\theta_0, \theta_1)}{S_1(\theta_0, \theta_1)} \right] \leq \left[\gamma \cdot \frac{S_2(\theta_0, \theta_1)}{S_1(\theta_0, \theta_1)} \right]^{m-1} \quad (\text{III-36})$$

avec $m \geq 3$, où le paramètre γ est un coefficient correctif, défini sur le segment $]0,1]$. Notons que pour $\gamma = 1$, on retrouve l'équation (III-30).

Pour chaque terme $S_m(\theta_0, \theta_1)$ on peut calculer la valeur correspondante de γ_m par l'identité :

$$\gamma_m = \frac{S_1(\theta_0, \theta_1)}{S_2(\theta_0, \theta_1)} \cdot \left[\frac{S_m(\theta_0, \theta_1)}{S_1(\theta_0, \theta_1)} \right]^{1/m-1} \quad (\text{III-37})$$

La valeur de γ à sélectionner pour (Eq. III-36) est le majorant des différents γ_m .

L'introduction de γ amène une modification de la série géométrique (III-32) sous la forme :

$$\sum_{m=1}^{\infty} S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2} \leq [1-\gamma] S_2(\theta_0, \theta_1) \cdot t + \frac{S_1^2(\theta_0, \theta_1)}{\gamma \cdot S_2(\theta_0, \theta_1)} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\gamma \cdot \frac{S_2(\theta_0, \theta_1)}{S_1(\theta_0, \theta_1)} \sqrt{t} \right]^m \quad (\text{III-38})$$

ce qui conduit à la troisième estimation plus restrictive $E_{T3}[I]$ du domaine de l'erreur de troncature par l'expression :

$$E_{T3}[I] \leq \frac{S_1(\theta_0, \theta_1) \cdot \sqrt{t} \cdot \left[\gamma \cdot \frac{S_2(\theta_0, \theta_1)}{S_1(\theta_0, \theta_1)} \cdot \sqrt{t} \right]^M}{\left[1 - \gamma \cdot \frac{S_2(\theta_0, \theta_1)}{S_1(\theta_0, \theta_1)} \cdot \sqrt{t} \right]^M} \quad (\text{III-39})$$

et de même :

$$E_{T3}^*[I] \leq \frac{\left[\gamma \cdot \frac{S_2(\theta_0, \theta_1)}{S_1(\theta_0, \theta_1)} \cdot \sqrt{t} \right]^M}{1 - \left[\gamma \cdot \frac{S_2(\theta_0, \theta_1)}{S_1(\theta_0, \theta_1)} \cdot \sqrt{t} \right]^M} \quad (\text{III-40})$$

Pour $\gamma = 1$ on vérifie bien l'identité entre les définitions E_{T2} et E_{T3} .

Bien que dans les expressions de $E_{T3}[I]$ n'apparaissent que les deux premiers termes $S_m(\theta_0, \theta_1)$ de la série, il faut bien garder à l'esprit le fait que la valeur majorante de γ est obtenue à partir des M -termes de la série. Au fur et à mesure que le nombre de termes (M) augmente, l'erreur de troncature correspondante peut être estimée. Les expressions de $E_{T3}[I]$ permettent alors de fixer d'une façon progressive le nombre de termes de la série nécessaire pour satisfaire la précision imposée sans pour autant avoir développé auparavant tous les m_{fin} -termes de la série comme il faut le faire pour le calcul de $E_{T1}[I]$.

Par ailleurs, les hypothèses (III-30) et (III-36) introduites pour les expressions de $E_{T2}[I]$ et $E_{T3}[I]$ sont importantes pour l'estimation du temps limite, au-delà duquel la solution en série de l'équation (III-1) ne peut plus être considérée comme convergente. Cela sera traité plus en détail dans le chapitre suivant (III.4).

Nous nous proposons par la suite de sélectionner la valeur optimale du nombre de termes M de la série en fonction de ces trois estimations différentes des erreurs de troncature, en partant du principe que l'erreur d'intégration (Chapitre III-2) vaut déjà $E_I^* = \pm 0.7\%$. Notre critère de précision sera alors $[E_T^*] \leq [E_I^*]$.

Pour la mise en oeuvre, on retient naturellement la méthode trapézoïdale avec $N = 250$ comme procédure d'intégration. De même, nous considérons la période de simulation $t \leq t_{\text{grav}}$, sans pour autant négliger l'effet possible d'une augmentation du temps limite sur le choix optimal du nombre de termes de la série.

3.1 - Yolo light Clay

A partir de l'ensemble des équations (III-2)...(III-9), nous avons déterminé les différents coefficients $f_m(\theta)$ pour $m \leq 9$. La justification du choix m_{fin} égal à 9 sera exposée par la suite. La figure (III-6) donne l'évolution des coefficients en fonction de la teneur en eau. Nous n'avons tracé que les sept premiers coefficients, l'allure générale de $f_8(\theta)$ et $f_9(\theta)$ étant semblable à celle de $f_7(\theta)$ mais avec des ordres de grandeur bien inférieurs.

La comparaison des coefficients montre une prédominance importante de $f_1(\theta)$ sur les autres termes avec une différence de l'ordre de plusieurs modules. Ces écarts sont encore plus marqués au niveau des valeurs des intégrales qui sont données dans le tableau (III-3).

La figure (III-7) montre les profils de teneur en eau, $z(\theta, t)$, calculés aux temps $t = 2.5$ h, $t = 25$ h, $t = 100$ h et $t = 250$ h avec les neuf termes de la série. La dernière valeur (250 heures) a été retenue, puisqu'elle correspond au temps t_{grav} , au delà duquel a priori la solution diverge selon l'hypothèse de (II-9). A titre d'exemple, nous avons en plus tracé sur la même figure aux temps $t = 25$ h, et $t = 250$ h les profils hydriques calculés en considérant successivement un, deux et trois termes de la série, notés respectivement $z_1(\theta, t)$, $z_2(\theta, t)$ et $z_3(\theta, t)$. Les profils suivants ($z_4(\theta, t)$, etc...) ne sont pas donnés car leurs écarts avec $z_9(\theta, t)$ sont tout à fait insignifiants.

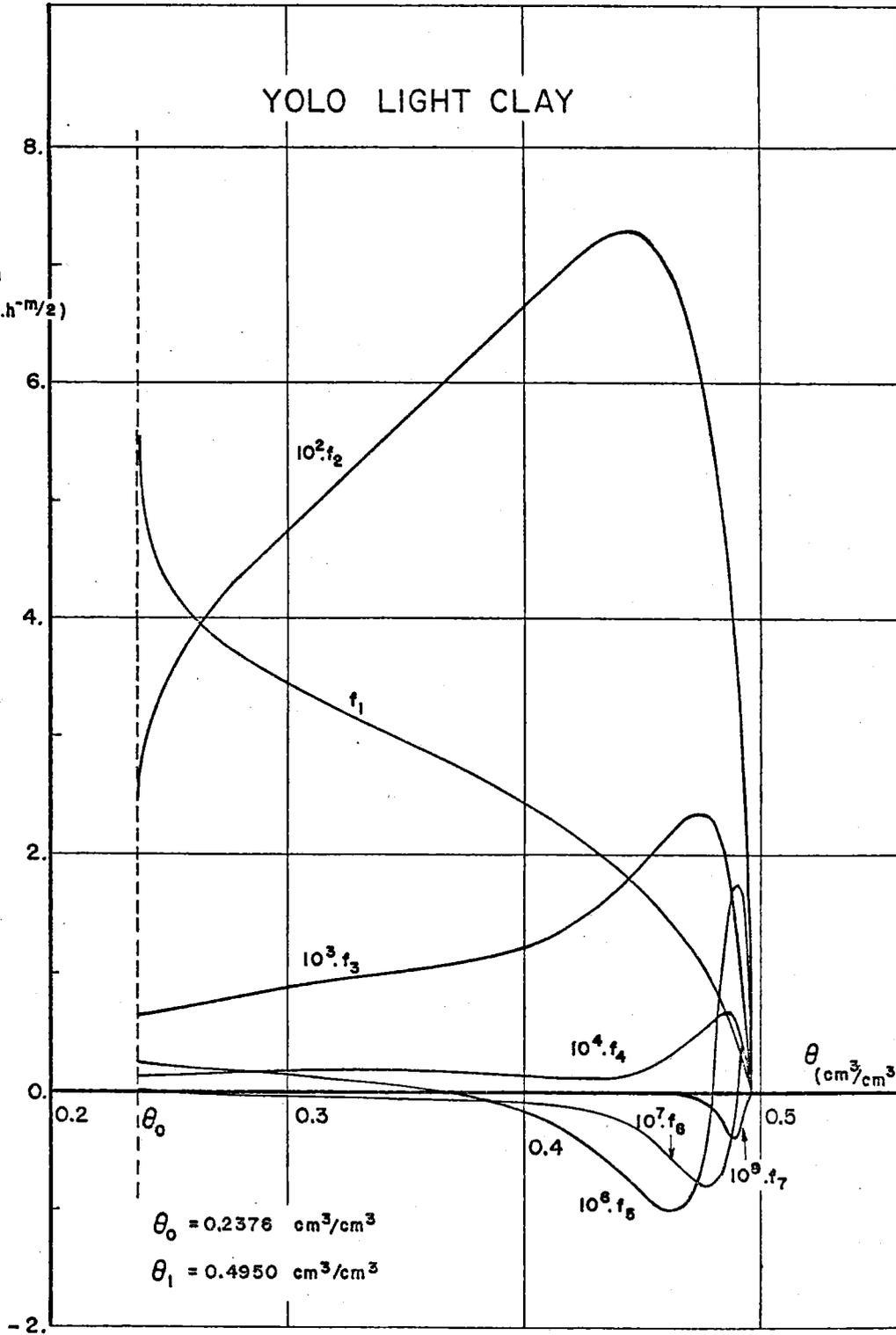


Figure III-6 : Les coefficients f_m en fonction de θ pour $m \leq 7$

YOLO LIGHT CLAY

	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
$S_m(\theta_o, \theta_1)$	0.6988	$1.493 \cdot 10^{-2}$	$3.362 \cdot 10^{-4}$	$5.224 \cdot 10^{-6}$	$-1.154 \cdot 10^{-8}$
γ_m			0.9982	0.9155	0.5306
	m=6	m=7	m=8	m=9	OBSERVATIONS
$S_m(\theta_o, \theta_1)$	$-3.677 \cdot 10^{-9}$	$-9.611 \cdot 10^{-11}$	$3.056 \cdot 10^{-13}$	$1.197 \cdot 10^{-13}$	Eq. (III-14)
γ_m	1.034	1.063	0.803	1.187	Eq. (III-37)

Valeur de γ retenue : 0.9982 pour $m \leq 5$

Points de fonctionnement :

- méthode trapézoïdale d'intégration
- pas d'intégration $[\theta_1 - \theta_o] / 250$ avec $\theta_1 = 0.4950 \text{ cm}^3 / \text{cm}^3$
et $\theta_o = 0.2376 \text{ cm}^3 / \text{cm}^3$

Tableau III-3

Ces résultats montrent l'importance décisive du premier terme sur la solution au début de l'infiltration $z(\theta, 25) = z_1(\theta, 25)$, tant que l'influence des forces gravitaires sur l'écoulement est encore négligeable. Au fur et à mesure que le processus d'infiltration se développe, l'importance relative de $f_1(\theta)$ diminue : $z_1(\theta, 250) \ll z(\theta, 250)$.

Bien que l'influence des deuxième et troisième termes sur le positionnement du profil prenne de l'ampleur dans le temps, elle reste toujours faible. Il semble que pour ce type de sol le fait de considérer plus de quatre termes ne représente aucun avantage.

Pour mieux étudier l'influence partielle de chaque coefficient $f_m(\theta)$, nous avons tracé (Figures III-8a,b,c et d), pour différents temps, la contribution relative des quatre premiers termes sur le positionnement du profil hydrique : $[f_m(\theta) \cdot t^{m/2}] / z$ en fonction du degré de saturation effective Θ (Eq. III-21).

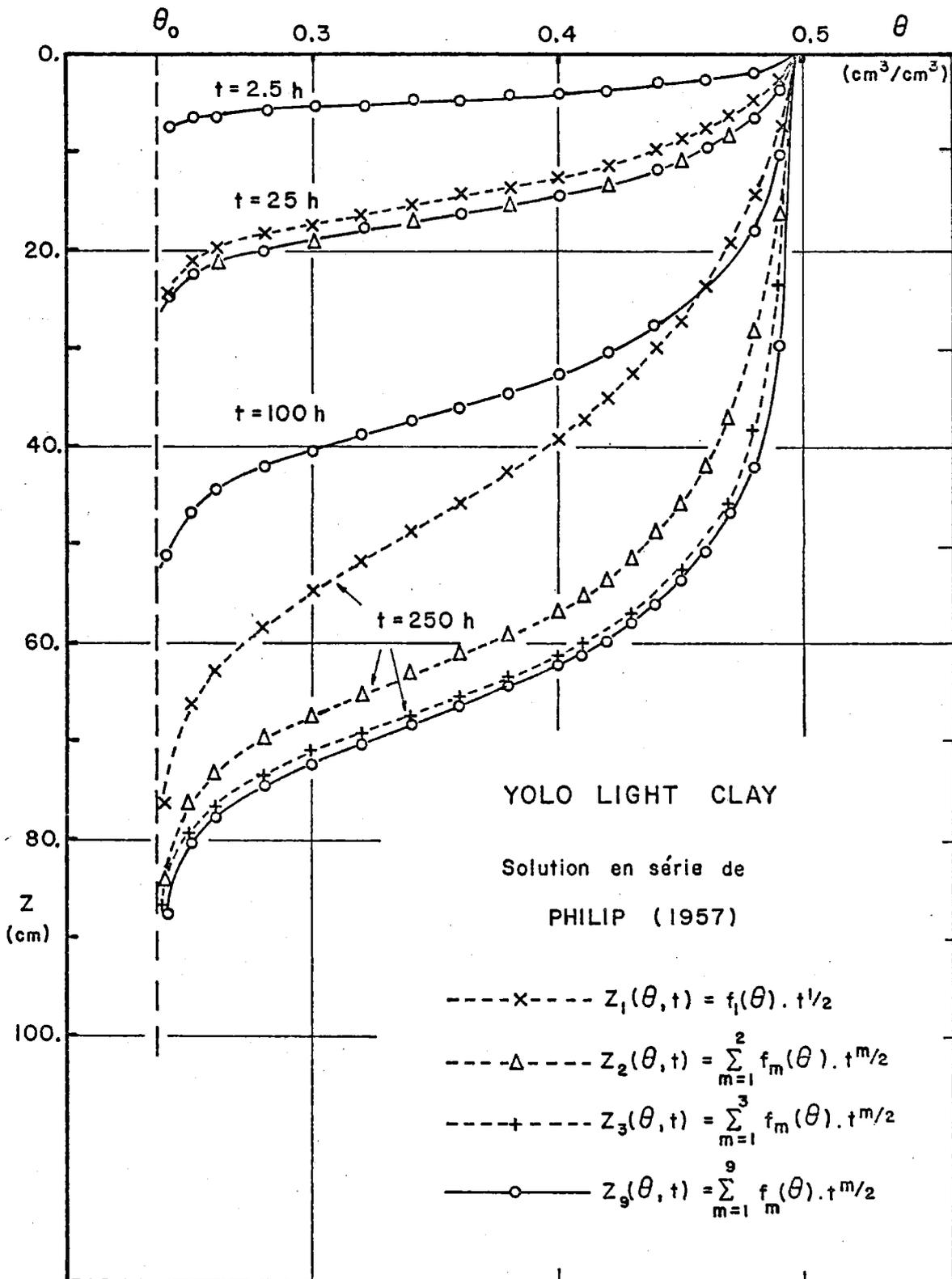


Figure III-7 : Les profils hydriques pour quatre temps différents.

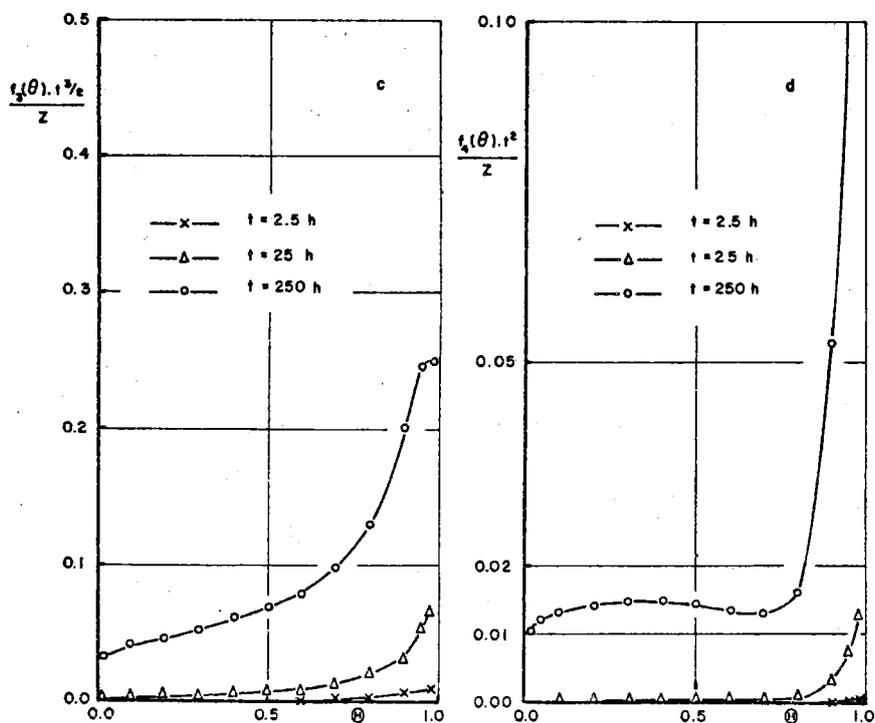
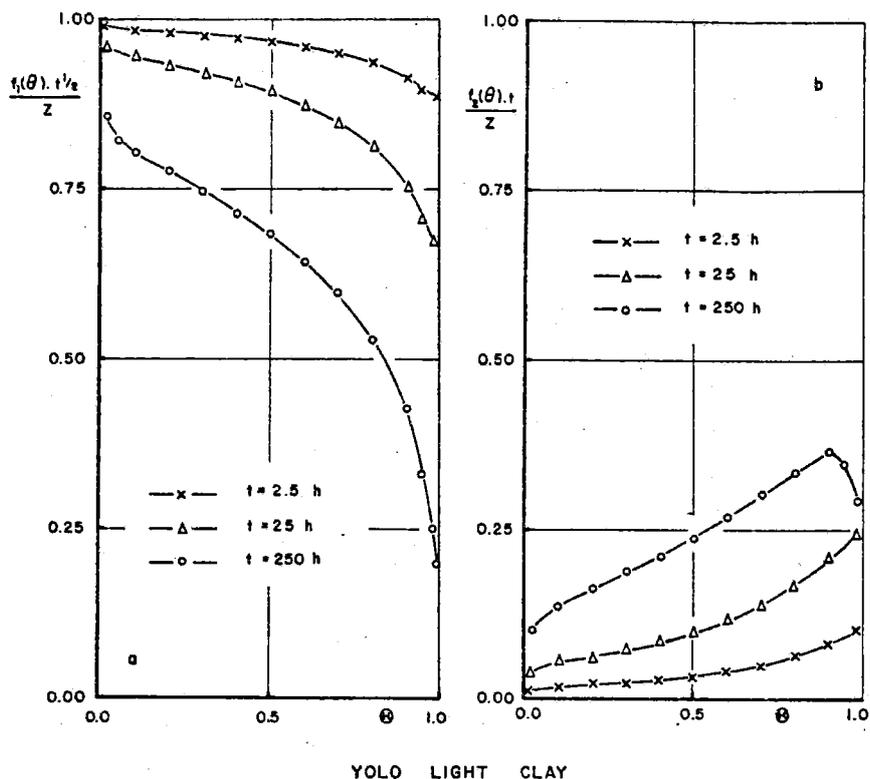


Figure III-8 : Les rapports relatifs $[f_m(\theta).t^{m/2}]/z$ en fonction de θ pour les quatre premiers termes.

De nouveau, on remarque l'influence prédominante du premier terme au début de l'infiltration ($t = 2.5$ h). A ce temps, l'apport relatif des termes suivants (2° , 3° et 4°) diminue en importance ; ainsi le troisième terme de la série n'influence que pour 7 % au maximum sur le positionnement du profil hydrique tandis que l'effet du quatrième terme ne dépasse guère 0.03 %. Au fur et à mesure que le temps d'infiltration augmente, les contributions relatives du deuxième, troisième et quatrième termes s'accroissent. A $t = 250$ heures, le rapport $[f_2(\theta).t]/z$ vaut 0.365 pour $\Theta = 0.9$, ce qui est du même ordre de grandeur que l'influence du premier terme $[f_1(\theta).t^{1/2}]/z = 0.42$. A ce temps, l'apport du quatrième terme passe à 5 % pour $\Theta = 0.9$.

Puisque la contribution relative de chaque terme ($m \geq 2$) augmente avec le temps et avec Θ , nous avons choisi $t = t_{\text{grav}}$ et $\Theta = 0.9$ (soit $\theta = 0.4693$) comme points de fonctionnement pour vérifier la validité du choix de $m_{\text{fin}} = 9$ comme nombre de termes suffisants pour le calcul de l'erreur de troncature E_{T1} . Nous avons été amené dans ce cadre à augmenter le nombre de termes de la série pris en considération jusqu'à la valeur $m = 15$. La figure (III-9) montre l'évolution de la contribution relative de chaque terme $[f_m(0,4693).t_{\text{grav}}^{m/2}]/z$ en fonction de m .

On remarque un effet oscillatoire des valeurs autour de l'abscisse, qui s'amortit lorsque m augmente. Au-delà de $m = 9$, les apports relatifs deviennent inférieurs à 0.1 %, justifiant ainsi le choix de $m = 9$ comme valeur limite m_{fin} .

A la faveur de ce résultat, nous avons tracé (Figures III-10a et b) pour différentes valeurs de M l'évolution respective des erreurs $E_{T1}[z]$ et $E_{T1}^*[z]$ en fonction du temps (Eqs. III-26 et III-27). Bien entendu le point de fonctionnement $\Theta = 0.9$ a été utilisé.

On observe de nouveau l'effet oscillatoire de la solution autour de l'axe $E_{T1}[z] = 0$. En effet, pour $M = 3$ toutes les valeurs de z calculées pour $\theta = 0.4693$ sous-estiment ($E_{T1}[z] > 0$) les valeurs "réelles" de la solution obtenue avec 9 termes de la série. La correction apportée par le quatrième terme fait basculer la solution $z(0.4693, t)$ vers des valeurs trop grandes ($E_{T1}[z] < 0$). Cette surestimation est ensuite de plus en plus

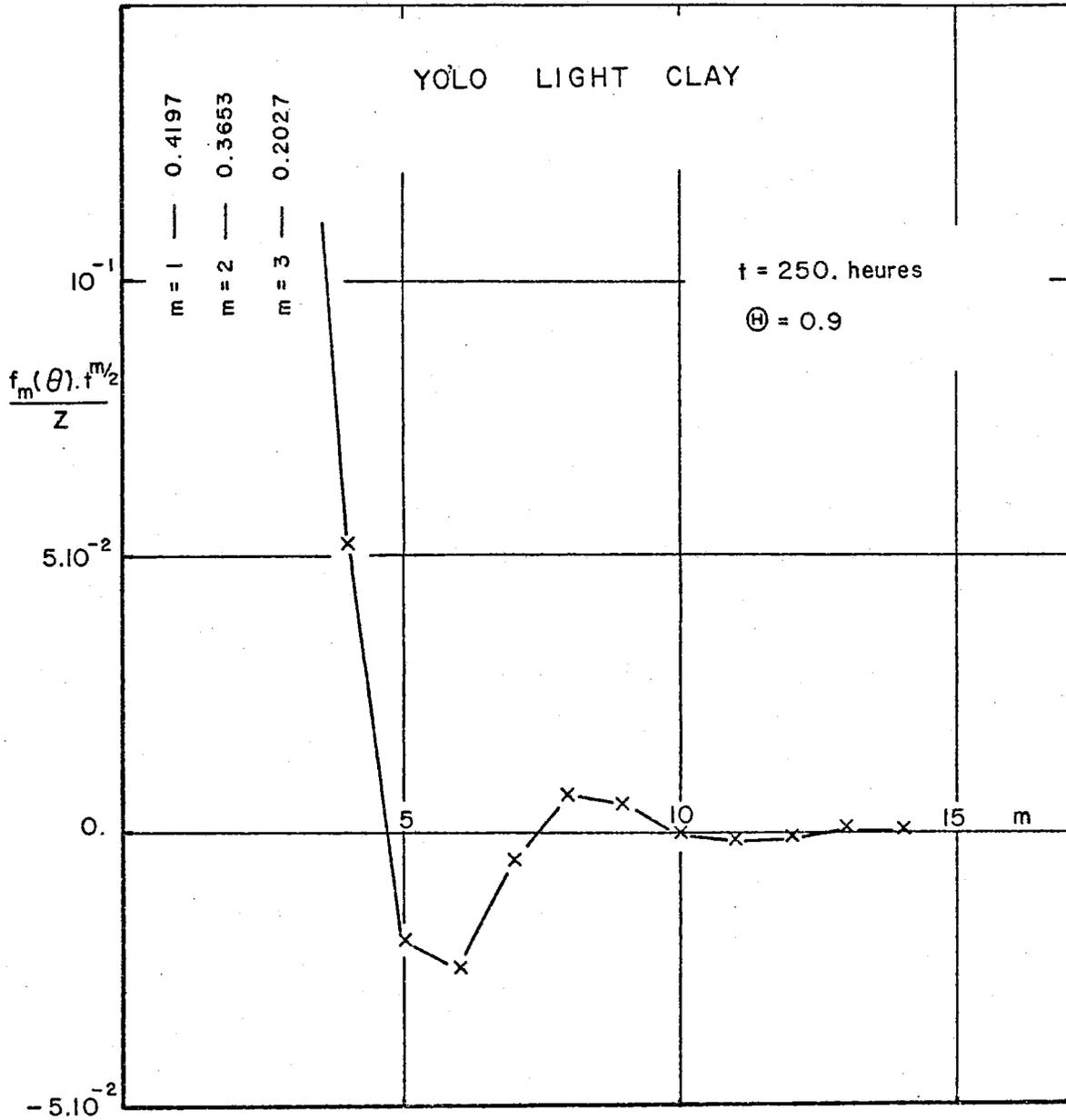


Figure III-9 : La contribution relative de chaque terme $\left[\frac{f_m(0.4693) \cdot t^{m/2}}{z} \right]$ en fonction du nombre de terme m.

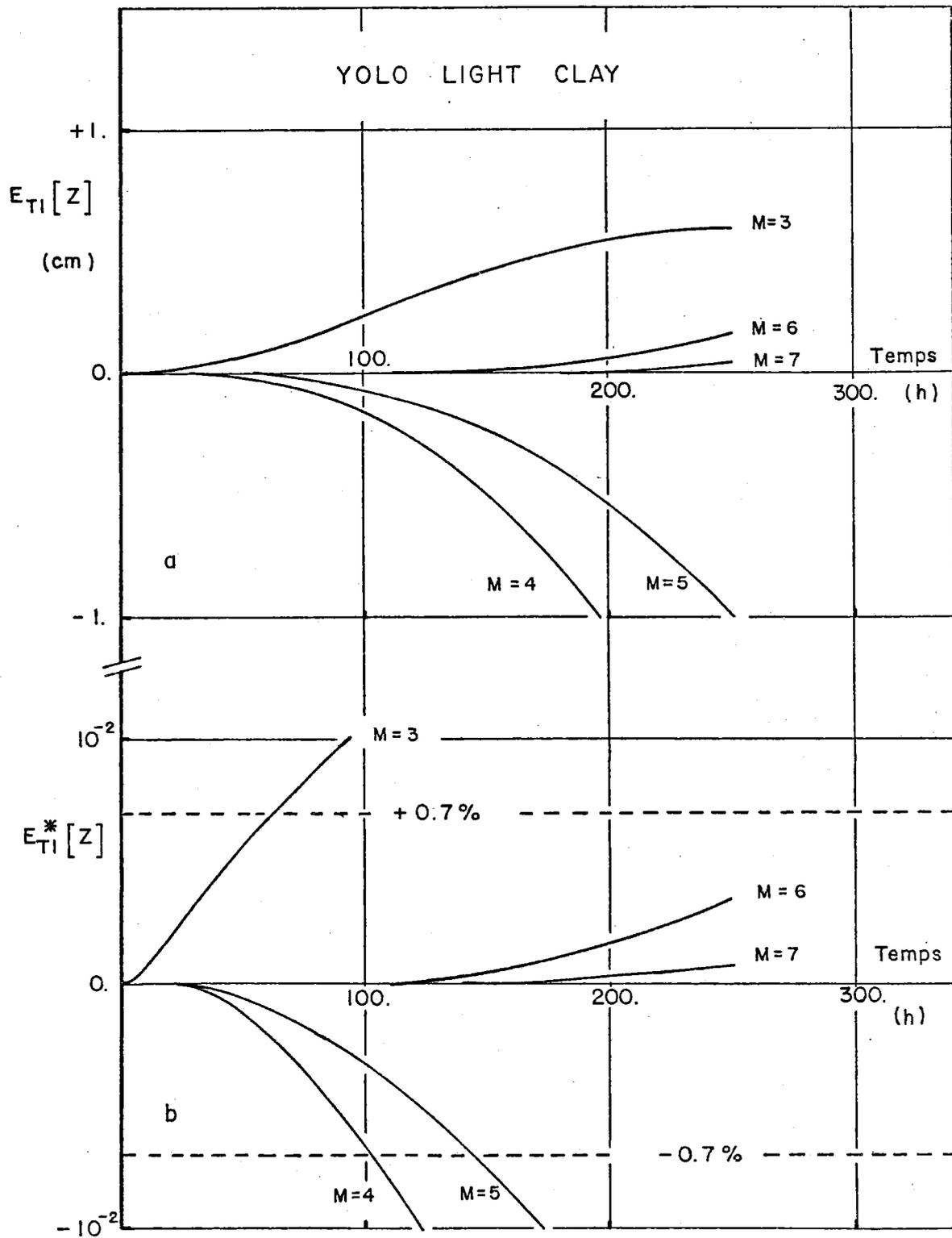


Figure III-10 : L'évolution en fonction du temps des erreurs de troncature $E_{T1} [z]$ en valeurs absolues (a) et relatives (b) pour différentes valeurs de M.

neutralisée avec l'augmentation de M. Pour M = 7, les valeurs de z(0.4693, t) ont déjà pratiquement atteint leurs valeurs "réelles". Le même comportement se traduit naturellement au niveau de l'erreur $E_{T1}^*[z]$.

Le fait que les valeurs de z(0.4693, t) pour M = 3 donnent des erreurs $E_{T1}[z]$ moins importantes que celles obtenues avec M = 4, n'est pas significatif, car le phénomène d'oscillation n'est pas encore amorti. Pour mieux visualiser cet effet d'oscillation de la solution en série autour de la solution "réelle", nous avons tracé (Figures III-11a et b) les erreurs $E_{T1}[z]$ et $E_{T1}^*[z]$ en fonction de M au temps t = 250 heures.

La comparaison des résultats de $E_{T1}^*[z]$ avec le critère de précision imposé par l'erreur d'intégration $E_I^*[z] = \pm 0.7\%$ (Figure III-3b) nous amène à considérer au moins six termes de la série pour avoir une précision comparable : $E_{T1}^*[z] = 3.6 \cdot 10^{-3}$ sur l'intervalle de temps fixé t \leq 250 heures.

Bien que ces résultats peuvent suggérer que les quatre termes proposés par PHILIP ne suffisent pas au niveau de la précision de la solution, il faut garder présent à l'esprit le fait que ces résultats s'appliquent pour la teneur en eau : $\theta = 0.4693$. On peut vérifier en évaluant les erreurs de troncature au niveau de la lame d'eau infiltrée, que les effets de surestimation sur les fortes teneurs en eau sont partiellement compensés par une sous-estimation des faibles teneurs en eau.

Nous avons tracé (Figure III-12a) l'évolution simultanée de la lame d'eau infiltrée I (Eq. III-16) et celle du flux à la surface du sol (q_1) (Eq. II-8) en fonction du temps, tout en utilisant $m_{fin} = 9$ comme point de fonctionnement.

Parallèlement, nous présentons (Figure III-12b), l'évolution en fonction du temps des apports relatifs de chaque terme de la série $[S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}] / I$.

Comme il a été montré précédemment, le premier terme $[S_1(\theta_0, \theta_1) \cdot \sqrt{t}]$ a une influence importante sur l'évolution de I(t), surtout au début de l'infiltration. Ceci souligne la prédominance des forces capillaires sur le processus de transfert pour ce type de sol. Même au bout

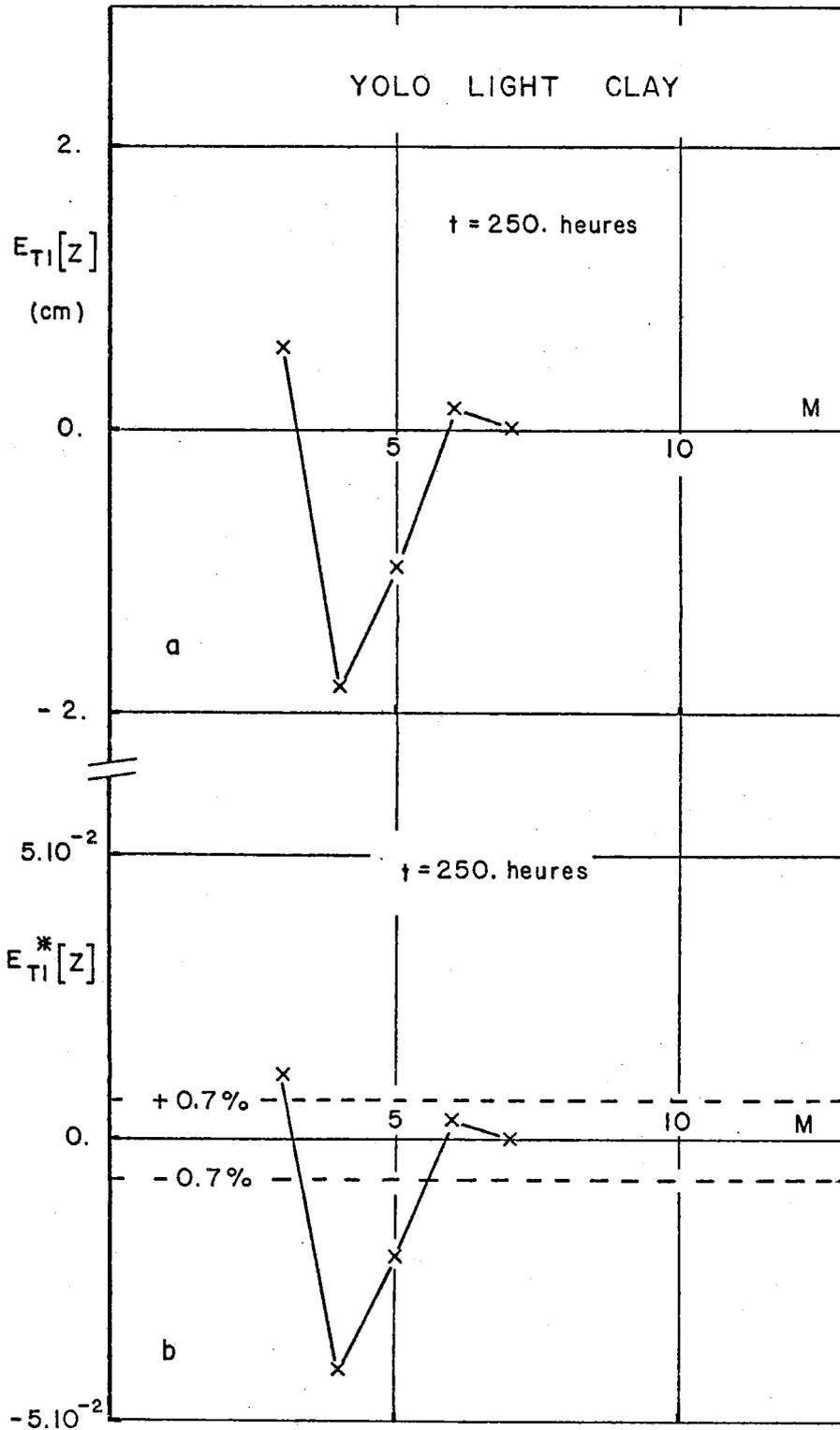


Figure III-11 : L'évolution en fonction de M des erreurs de troncature $E_{T1}[z]$ en valeurs absolues (a) et relatives (b).

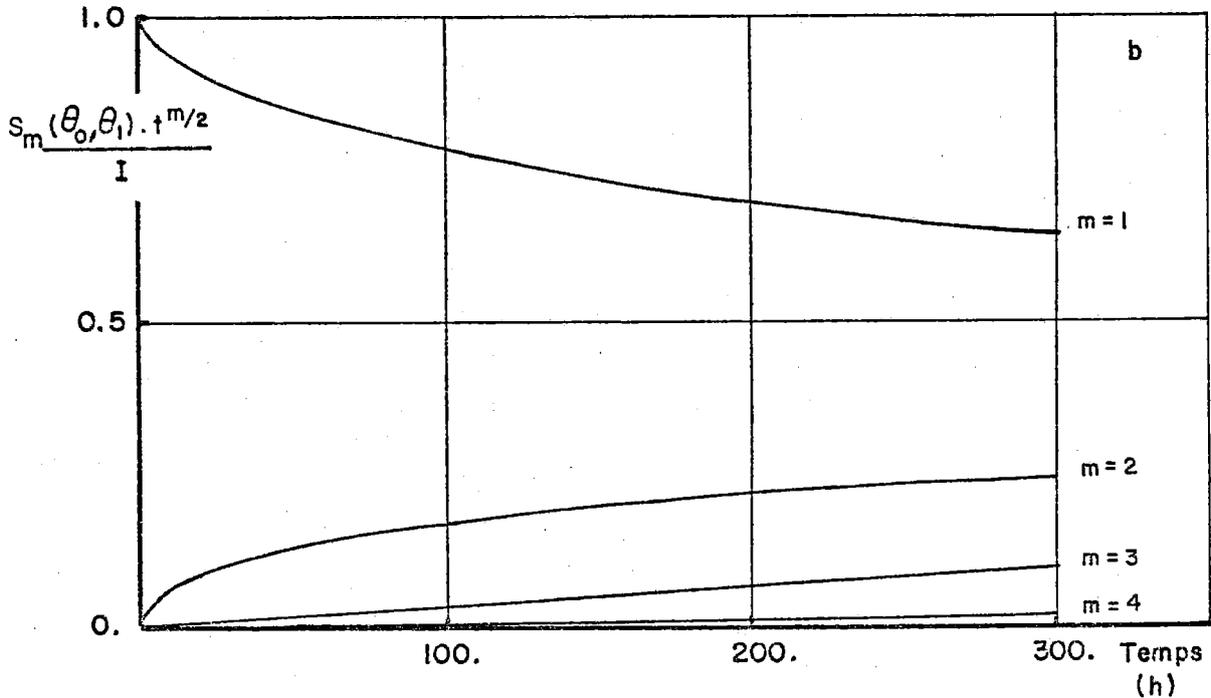
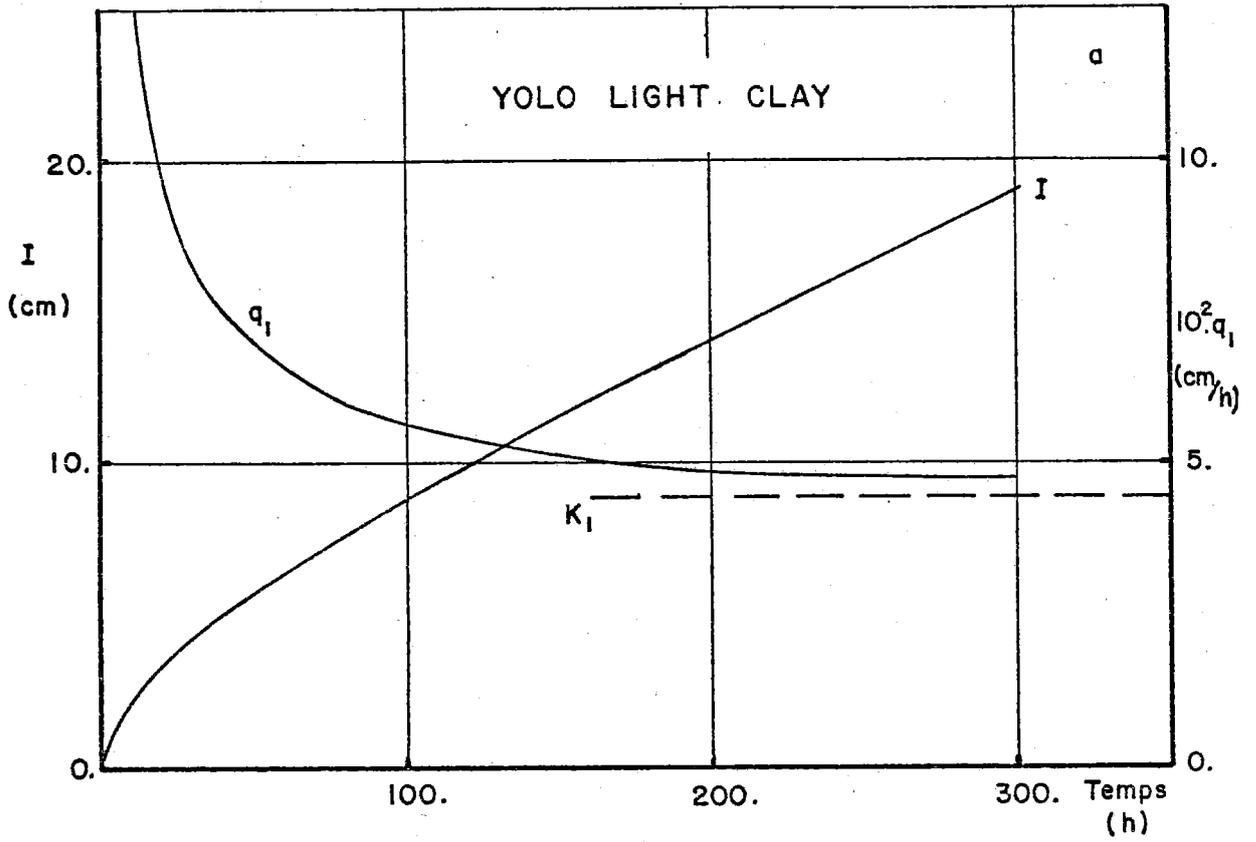


Figure III-12 : a) L'évolution simultanée de la lame d'eau I et celle du flux q_1 en fonction du temps.
 b) L'évolution en fonction du temps des apports relatifs de quatre premiers termes $[S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}] / I$ de la série.

de 250 heures, le rapport $[S_1(\theta_0, \theta_1) \cdot \sqrt{t}]/I$ représente encore 67 % alors que le flux q_1 approche sa valeur asymptotique $K(\theta_1)$ à moins de 8 %. Les autres termes ($m = 2, 3$ ou 4) ont beaucoup moins d'importance ; au temps $t = 250$ h, la contribution du quatrième terme est à peine de 1.8 %.

Avant d'évaluer les erreurs de troncature sur I nous avons voulu pour cette variable tester la validité de l'hypothèse $m_{fin} = 9$, comme nous l'avons fait précédemment pour $\Phi = 0.9$ (Figure III-9). Pour cela nous avons tracé (Figure III-13) la contribution relative de chaque terme $[S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}]/I$ en fonction du nombre de terme m , calculée au temps $t_{grav} = 250$ heures et avec $m \leq 15$.

Comme les valeurs numériques de $S_m(\theta_0, \theta_1)$ (Tableau III-3) le suggéraient déjà, la contribution relative $[S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}]/I$ oscille autour de l'abscisse. Le mouvement s'amortit très rapidement à partir de $m = 5$ pour arriver à des valeurs inférieures à 0.02 % pour $m > 9$. Ainsi l'option prise précédemment d'associer $m = 9$ à la valeur m_{fin} est largement justifiée.

A la faveur de ces résultats, nous avons évalué les erreurs de troncature E_{T1} avec les équations (III-28) et (III-29). Les Figures (III-14a et b) montrent l'évolution respective de $E_{T1}[I]$ et de $E_{T1}^*[I]$ en fonction du temps pour différentes valeurs de M .

Comme nous l'avons observé pour l'erreur $E_{T1}[z]$ (Figures III-10a et b), la solution en série oscille autour de la solution "réelle" ($M = 9$) avec le même comportement en fonction de M . Néanmoins, les valeurs numériques de $E_{T1}[I]$ sont beaucoup moins fortes, ce qui montre que des effets compensatoires de sur- et sous-estimation se produisent pour les différents teneurs en eau du profil hydrique.

Au vu de ces résultats, on peut retenir l'erreur de troncature sur la lame d'eau infiltrée comme paramètre pour sélectionner la valeur "optimale" de M , plutôt que celle sur le profil hydrique.

Le critère de précision défini précédemment ($|E_{T1}^*[I]| \leq 0.7 \%$), nous amène à considérer uniquement quatre termes de la série pour obtenir une précision adéquate, ce qui justifie le choix de PHILIP dans son article

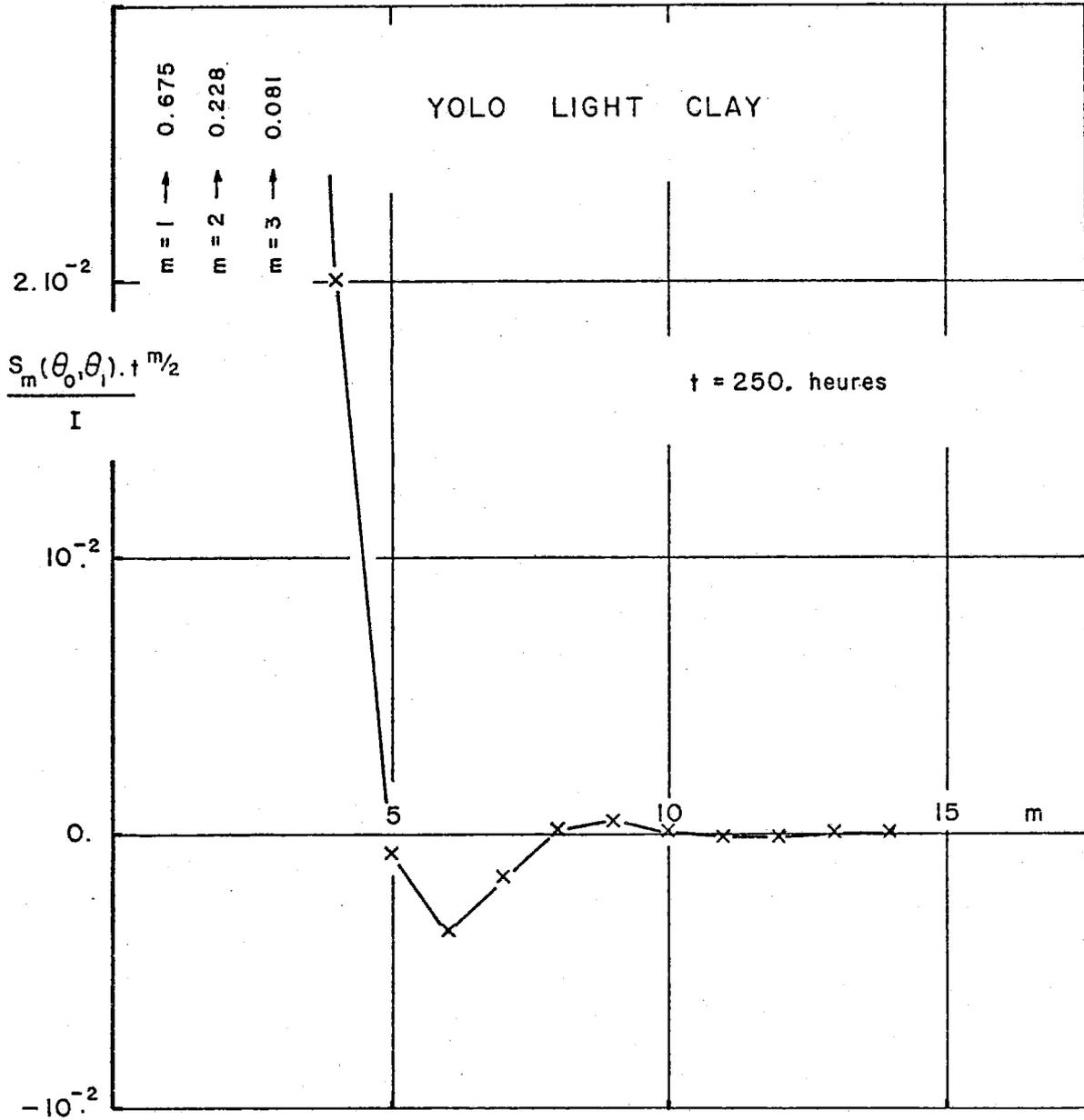


Figure III-13 : La contribution relative de chaque terme $\left[\frac{S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}}{I} \right]$ en fonction du nombre de terme m.

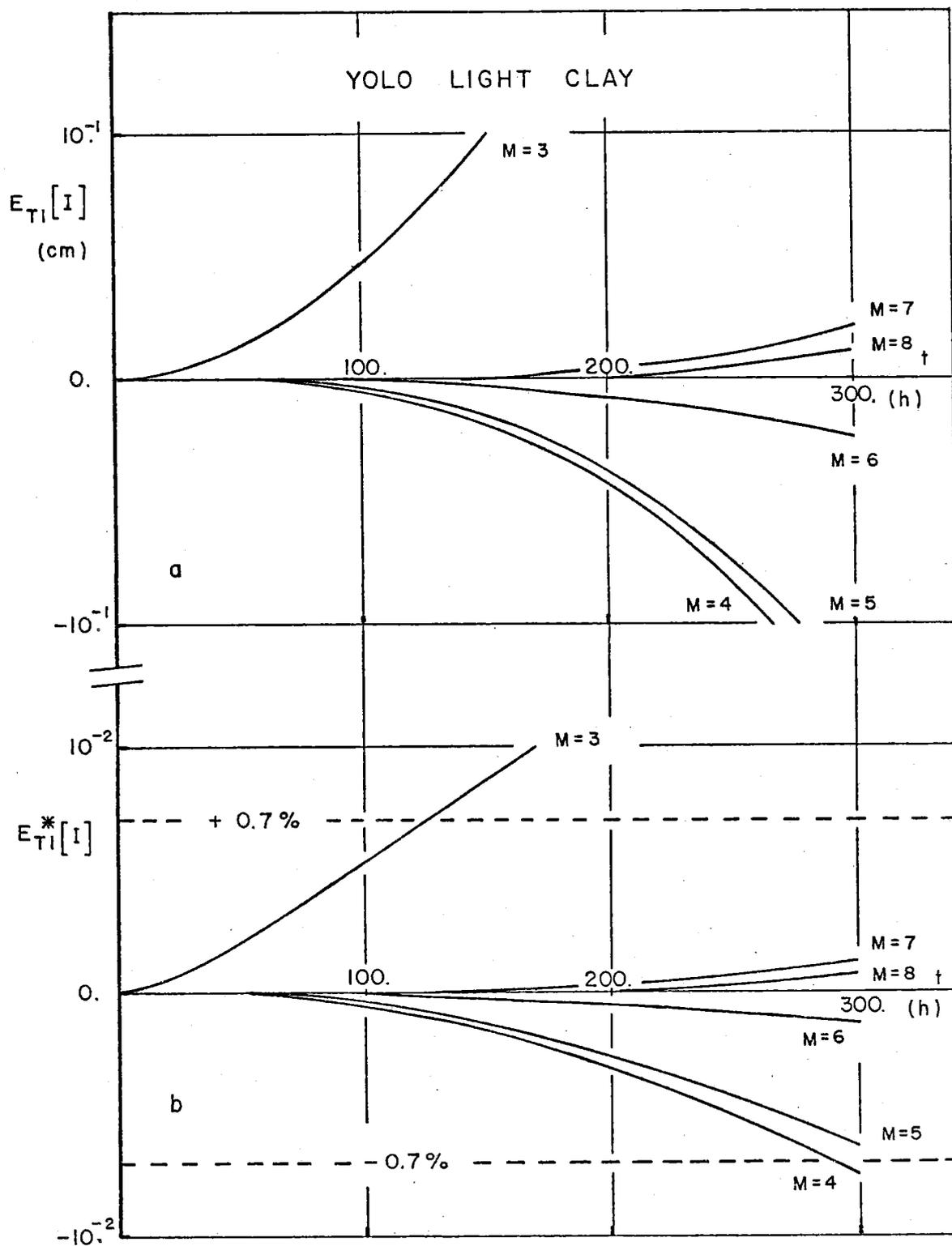


Figure III-14 : L'évolution en fonction du temps des erreurs de troncature $E_{T1} [I]$ en valeurs absolues (a) et relatives (b) pour différentes valeurs de M.

de 1957(a). Toutefois, ce résultat n'est valable que pour l'intervalle du temps $t \leq t_{\text{grav}}$ soit $t \leq 250$ heures. Comme il a été remarqué précédemment, cette estimation peut être améliorée sensiblement en utilisant une hypothèse plus précise que celle proposée par PHILIP (1969) pour approcher le rayon de convergence de la solution en série. L'accroissement de l'estimation du temps limite affecte directement le choix de la valeur optimale de M . Par exemple, pour l'intervalle de temps $t \leq 300$ h, il nous faut au maximum cinq termes pour arriver à la même précision que précédemment, avec $M = 4$ pour $t \leq 250$ heures. Ceci montre clairement que le nombre "optimal" de termes de la série ne peut être sélectionné qu'en fonction du domaine d'applicabilité de la solution.

Plutôt que d'obtenir ce résultat à la suite d'un calcul assez fastidieux nécessitant la connaissance des neuf termes de la série, on peut souhaiter disposer d'une méthode permettant de fixer ce critère préalablement à partir d'un nombre de termes réduit. C'est dans cette optique que les deux autres expressions pour estimer l'erreur de troncature (E_{T2} et E_{T3}) ont été développées.

Les équations (III-30) et (III-36), qui forment les hypothèses de base pour calculer $E_{T2}[I]$ et $E_{T3}[I]$ doivent être vérifiées tout d'abord. Pour cela, nous avons déterminé les valeurs de γ_m à partir de l'équation (III-37), Tableau (III-3).

Pour les cinq premiers termes, l'hypothèse (III-30) est entièrement satisfaite, puisque toutes les valeurs de γ_m avec $m \leq 5$, sont inférieures à 1. Pour les deux termes γ_6 et γ_7 , qui sont supérieurs à 1, l'hypothèse (III-30) reste toutefois encore valable, puisque les valeurs de $S_6(\theta_0, \theta_1)$ et $S_7(\theta_0, \theta_1)$ sont négatives (Tableau III-3). Ce n'est qu'au niveau du neuvième terme $S_9(\theta_0, \theta_1)$, que cette hypothèse est mise à l'échec.

En ce qui concerne l'hypothèse (III-36) qui restreint en quelque sorte la condition précédente en fonction du type de sol, la valeur de γ_3 , majorant des cinq premiers termes, fixe $\gamma = 0.9983$. S'il est nécessaire dans la suite de considérer plus de cinq termes de la série géométrique (Eq. III-38) pour arriver au critère de précision imposé, le majorant de γ devra bien entendu être adapté.

Ces résultats montrent que pour ce type de sol la série géométrique développée à partir de l'hypothèse (III-36) n'améliore que de très peu celle développée avec la condition (III-30). Pour mieux illustrer cette remarque, nous avons tracé, Figure (III-15), en fonction du temps d'évolution des lames d'eau infiltrées calculées pour les deux hypothèses selon :

$$I_{T2}(t) = K_o \cdot t + \frac{S_1^2(\theta_o, \theta_1)}{S_2(\theta_o, \theta_1)} \cdot \sum_{m=1}^4 \left[\frac{S_2(\theta_o, \theta_1)}{S_1(\theta_o, \theta_1)} \cdot \sqrt{t} \right]^m \quad (\text{III-41})$$

et :

$$I_{T3}(t) = K_o \cdot t + [1-\gamma] \cdot S_2(\theta_o, \theta_1) \cdot t + \frac{S_1^2(\theta_o, \theta_1)}{\gamma \cdot S_2(\theta_o, \theta_1)} \cdot \sum_{m=1}^4 \left[\gamma \cdot \frac{S_2(\theta_o, \theta_1)}{S_1(\theta_o, \theta_1)} \cdot \sqrt{t} \right]^m \quad (\text{III-42})$$

Compte-tenu du caractère majorant des deux hypothèses, les équations (III-41) et (III-42) doivent satisfaire la condition supplémentaire

$$I(t) < I_{T3}(t) < I_{T2}(t) \quad (\text{III-43})$$

ce qui apparaît clairement sur la figure (III-15).

Les hypothèses (III-30) et (III-36) étant vérifiées, nous avons calculé Figure (III-16), pour différentes valeurs de M l'évolution des deux erreurs relatives $E_{T2}^*[I]$ et $E_{T3}^*[I]$ en fonction du temps à l'aide des équations (III-35) et (III-40). Pour l'interprétation de la figure, il faut bien garder à l'esprit le fait que chaque courbe majore le domaine de l'erreur relative $E_T^*[I]$ en fonction du temps et de M.

Ainsi que le faisait sous-entendre les résultats de $I_{T2}(t)$ et $I_{T3}(t)$, le comportement de $E_{T2}^*[I]$ est quasiment identique à celui de $E_{T3}^*[I]$. L'amélioration au niveau de $E_{T3}^*[I]$, apportée par l'introduction du coefficient $\gamma = 0.9982$ n'est que de faible importance pour ce type de sol.

Lorsque M augmente, les deux erreurs $E_{T2}^*[I]$ et $E_{T3}^*[I]$ ont tendance à approcher la solution "réelle" sans effet oscillatoire, ce qui est logique dans la mesure où les séries géométriques ne permettent que des termes $S_m(\theta_o, \theta_1)$ positifs.

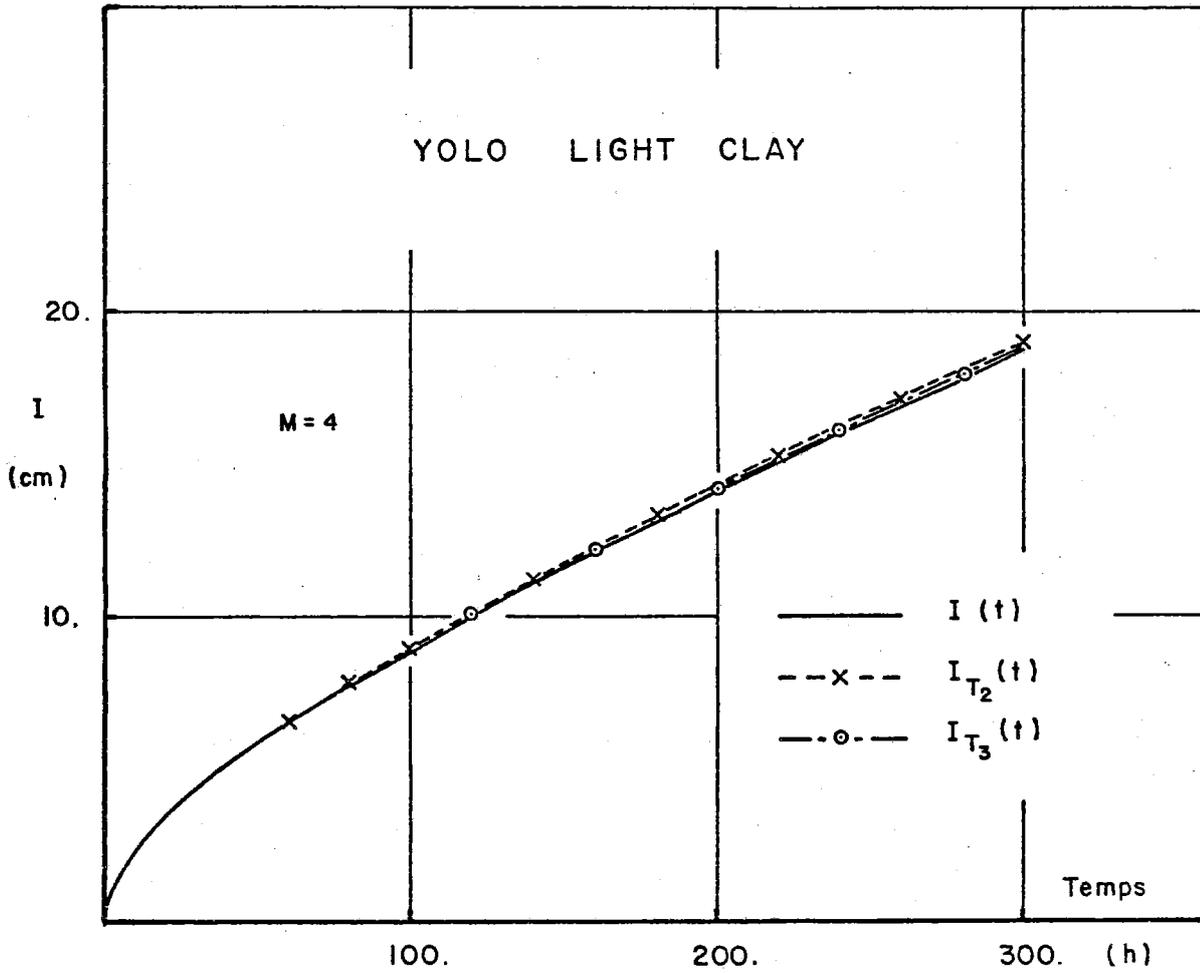


Figure III-15 : L'évolution en fonction du temps de la lame d'eau infiltrée comparée avec deux relations $I(t)$ plus ou moins majorantes : $I_{T_2}(t)$ et $I_{T_3}(t)$.

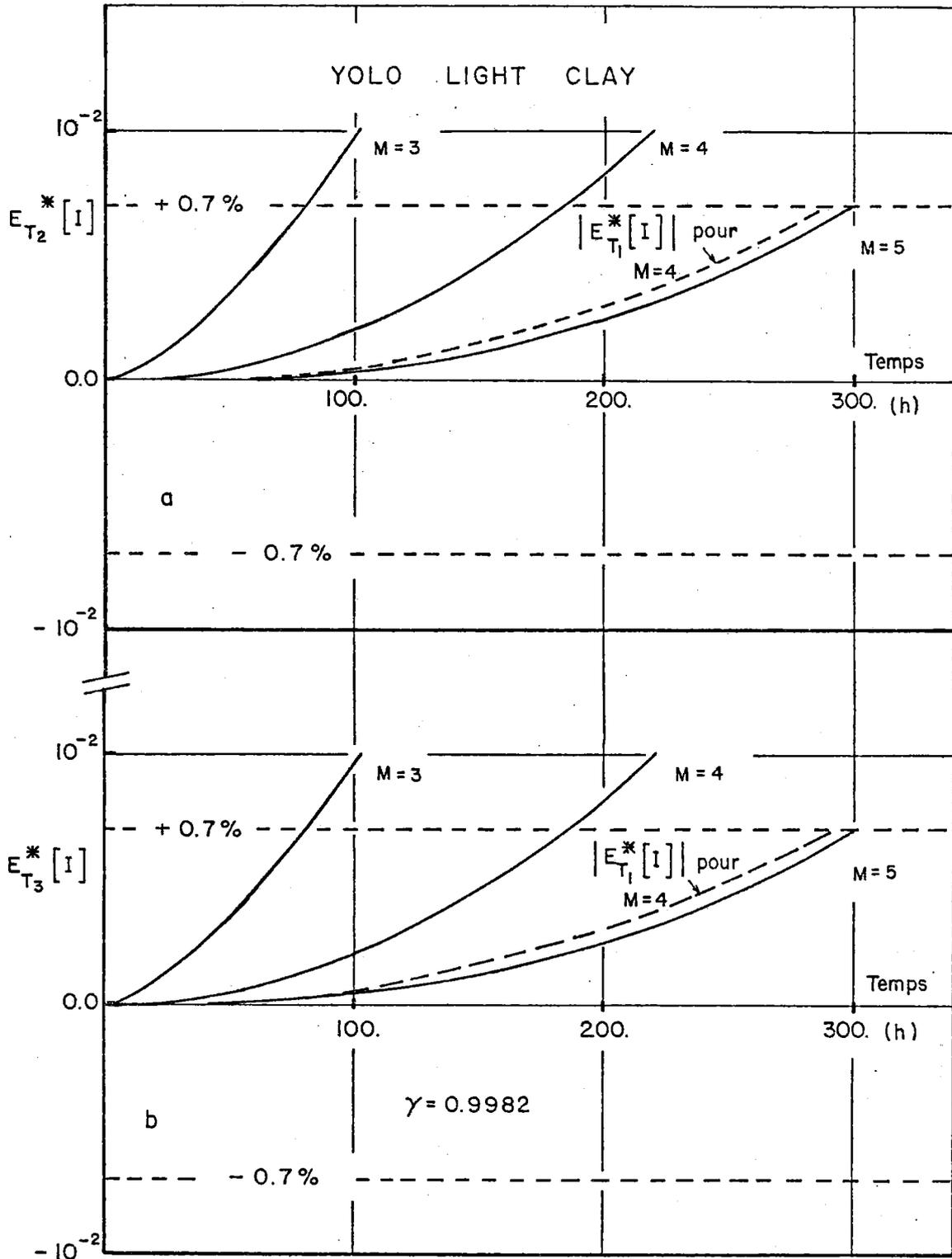


Figure III-16 : L'évolution en fonction du temps des erreurs de troncature $E_{T_2}^*[I]$ et $E_{T_3}^*[I]$ (respectivement a et b) pour différentes valeurs de M.

En se limitant par exemple à l'erreur $E_{T3}^*[I]$ sur l'intervalle du temps $t \leq 250$ h., le critère de précision fixé à $|E_T^*| < 0.7\%$, nous impose la solution en série avec au moins quatre termes et au maximum cinq termes. Puisque chaque courbe $E_{T3}^*[I]$ majore le domaine d'erreur, l'erreur de troncature $E_T^*[I]$ induite par l'utilisation de quatre termes doit se trouver en réalité placé dans la fourchette formée par les deux courbes $E_{T3}^*[I]$ obtenues avec $M = 4$ et $M = 5$.

A titre d'exemple, nous avons tracé la même figure, l'erreur relative $|E_{T1}^*[I]|$ calculée pour $M = 4$. On constate que la remarque ci-dessus est bien vérifiée.

Avant d'appliquer la même analyse au sable, il nous semble important de rappeler les conclusions les plus importantes obtenues pour l'argile.

- Le nombre "optimal" de termes de la série doit être sélectionné plutôt en fonction de l'erreur de troncature générée sur le volume d'eau infiltré $E_T[I]$, qu'en fonction de l'erreur induite sur le profil hydrique $E_T[z]$. Cette dernière grandeur n'a qu'une importance locale au niveau d'une teneur en eau donnée du profil hydrique.

Sur l'intervalle du temps $t \leq t_{\text{grav}}$, l'utilisation de l'expression en série avec quatre termes ($M = 4$) conduit à une erreur de troncature $|E_{T1}^*[I]|$ bien inférieure au seuil de précision imposée (0.7%). Pour cela, les contributions relatives sont considérées comme ayant une influence négligeable sur la solution ($m_{\text{fin}} = 9$).

Les deux hypothèses introduites pour assimiler la solution en série à deux séries géométriques plus ou moins majorantes, ont été vérifiées.

Les deux estimations $E_{T2}^*[I]$ et $E_{T3}^*[I]$, qui définissent l'erreur de troncature par excès, semblent être suffisamment précises pour ce sol pour qu'elles puissent être utilisées pour prédire le nombre de termes en fonction du critère de précision préalablement choisi.

3.2 - Sable de l'Isère

La même analyse a été effectuée pour le Sable de l'Isère avec des points de fonctionnement identiques à ceux utilisés précédemment pour le Yolo Light Clay.

La figure (III-17) montre l'évolution des coefficients $f_1(\theta) \dots f_7(\theta)$ en fonction de la teneur en eau. De même, le tableau (III-4) donne les valeurs des intégrales $S_1(\theta_0, \theta_1) \dots S_9(\theta_0, \theta_1)$.

Bien que le premier terme $f_1(\theta)$ soit encore prédominant sur les autres, l'écart entre les différents termes reste néanmoins très limité. En effet, contrairement aux résultats obtenus pour le Yolo Light Clay, les valeurs de $f_m(\theta)$ au delà du troisième terme sont toutes du même ordre de grandeur. Ces effets sont encore plus marqués au niveau des intégrales données (Tableau III-4).

SABLE DE L'ISERE

	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
$S_m(\theta_0, \theta_1)$	8.7790	7.4510	3.4257	0.0822	-0.7047
γ_m			0.7358	0.2483	0.6272
	m=6	m=7	m=8	m=9	OBSERVATIONS
$S_m(\theta_0, \theta_1)$	$-4.149 \cdot 10^{-2}$	0.2934	$2.368 \cdot 10^{-2}$	-0.1534	Eq. (III-14)
γ_m	0.4038	0.6687	0.5061	0.7104	Eq. (III-37)

Valeur de γ retenue : 0.7358 pour $m \leq 9$

Points de fonctionnement :

- méthode trapézoïdale d'intégration
- pas d'intégration $[\theta_1 - \theta_0] / 250$ avec $\theta_1 = 0.312 \text{ cm}^3 / \text{cm}^3$
et $\theta_0 = 0.10 \text{ cm}^3 / \text{cm}^3$

Tableau III-4

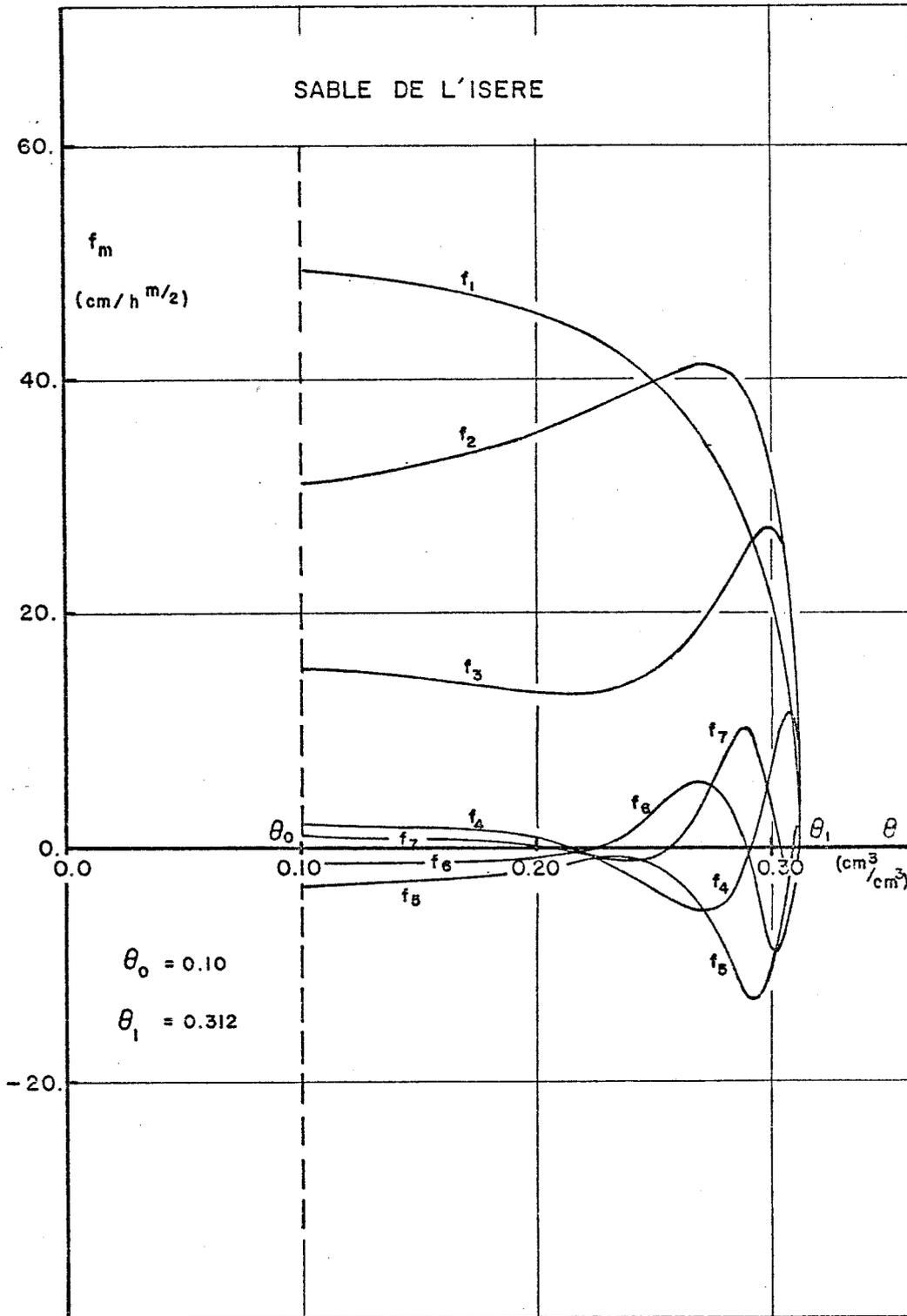


Figure III-17 : Les coefficients f_m en fonction de θ pour $m \leq 7$.

La figure (III-18) donne les profils de teneur en eau, $z(\theta, t)$ calculés au temps $t = 0.05$ h., $t = 0.1$ h. et $t = 0.3$ h., la dernière valeur correspondant à t_{grav} (Eq. II-9). Sur la même figure, on a tracé les profils hydriques $z_1(\theta, t)$, $z_2(\theta, t)$ et $z_3(\theta, t)$ aux temps $t = 0.05$ h. et $t = 0.3$ h. Les profils successifs $z_4(\theta, t) \dots z_8(\theta, t)$ ne sont pas significativement différents de la solution $z_9(\theta, t)$.

Les résultats montrent que l'influence du premier terme sur la solution diminue très vite en importance. Déjà au bout de 3 minutes, le profil $z_1(\theta, 0.05)$ ne représente que 80 % de la solution $z_9(\theta, 0.05)$, tandis qu'au bout de 18 minutes l'apport de $z_1(\theta, 0.03)$ n'est plus que de 66 %. Par contre, l'influence du deuxième terme croît très vite dans le temps. Ceci met en évidence l'importance des effets gravitaires sur le processus d'infiltration pour ce sol.

Le dernier aspect est également souligné par la forme du profil hydrique peu diffusive près de la teneur en eau initiale, contrairement aux résultats observés pour le Yolo Light Clay (Figure III-7).

Aux temps $t = 0.1$ h. et $t = 0.3$ h., la figure (III-18) montre que l'influence des termes $f_m \cdot t^{m/2}$ avec $m \geq 4$, sur la solution $z(\theta, t)$ est très faible, ce qui semble a priori justifier la troncature de la série à partir du quatrième terme.

Puisqu'il est préférable de sélectionner la valeur "optimale" de M plutôt en fonction de l'erreur de troncature $E_T^*[I]$ qu'en fonction de $E_T^*[z]$, comme nous l'avons montré pour l'argile, nous avons choisi d'analyser les erreurs de troncature sur la lame d'eau infiltré (Eq. III-16).

On trouve, figure (III-19a) l'évolution simultanée de la lame d'eau infiltrée (I) et celle du flux à la surface (q_1) en fonction du temps. Le calcul a été effectué avec les neuf premiers termes de la série. De même, la figure (III-19b) donne les contributions relatives de chaque terme de la solution : $[S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}] / I$ pour les quatre premiers termes en fonction du temps.

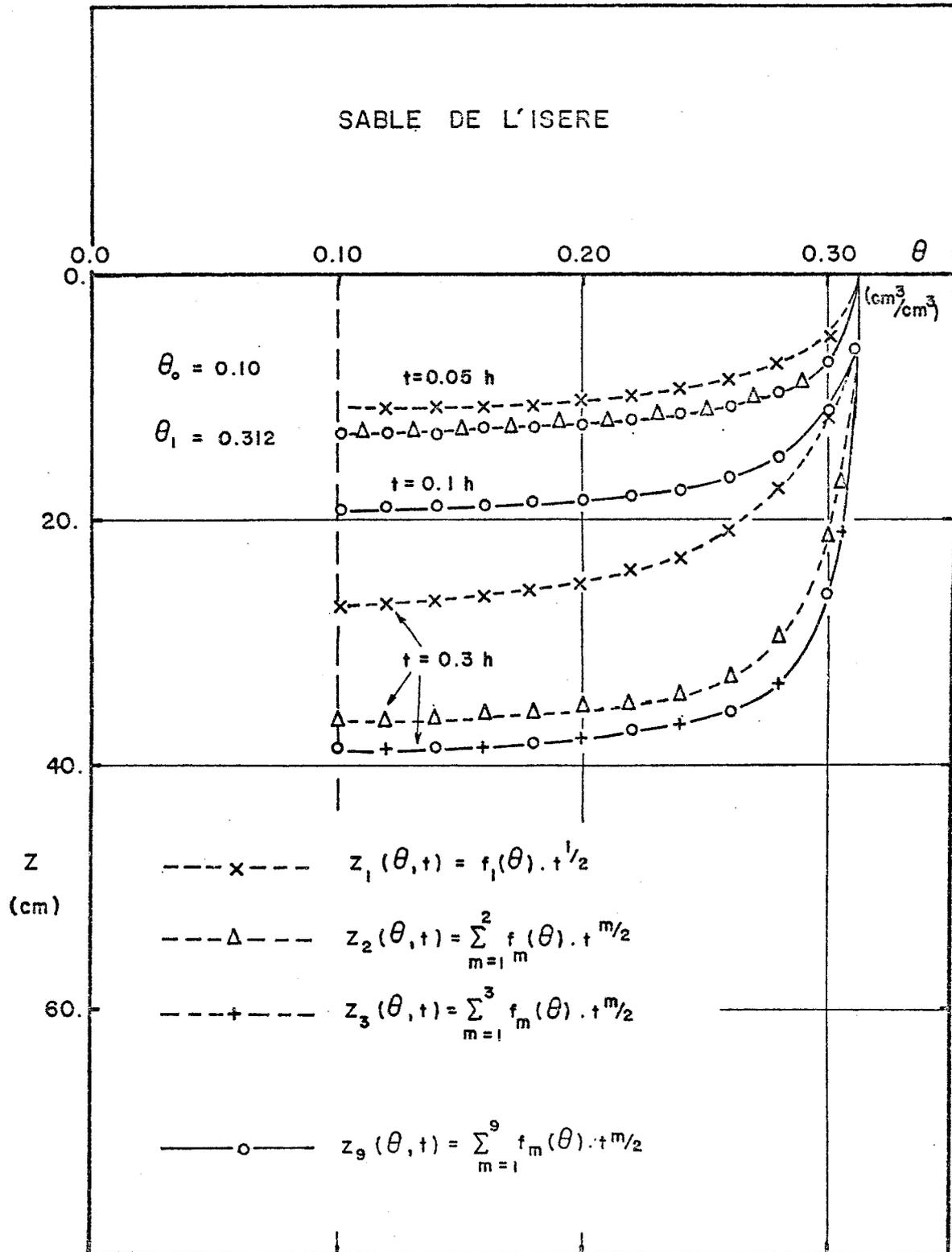


Figure III-18 : Les profils hydriques pour trois temps différents.

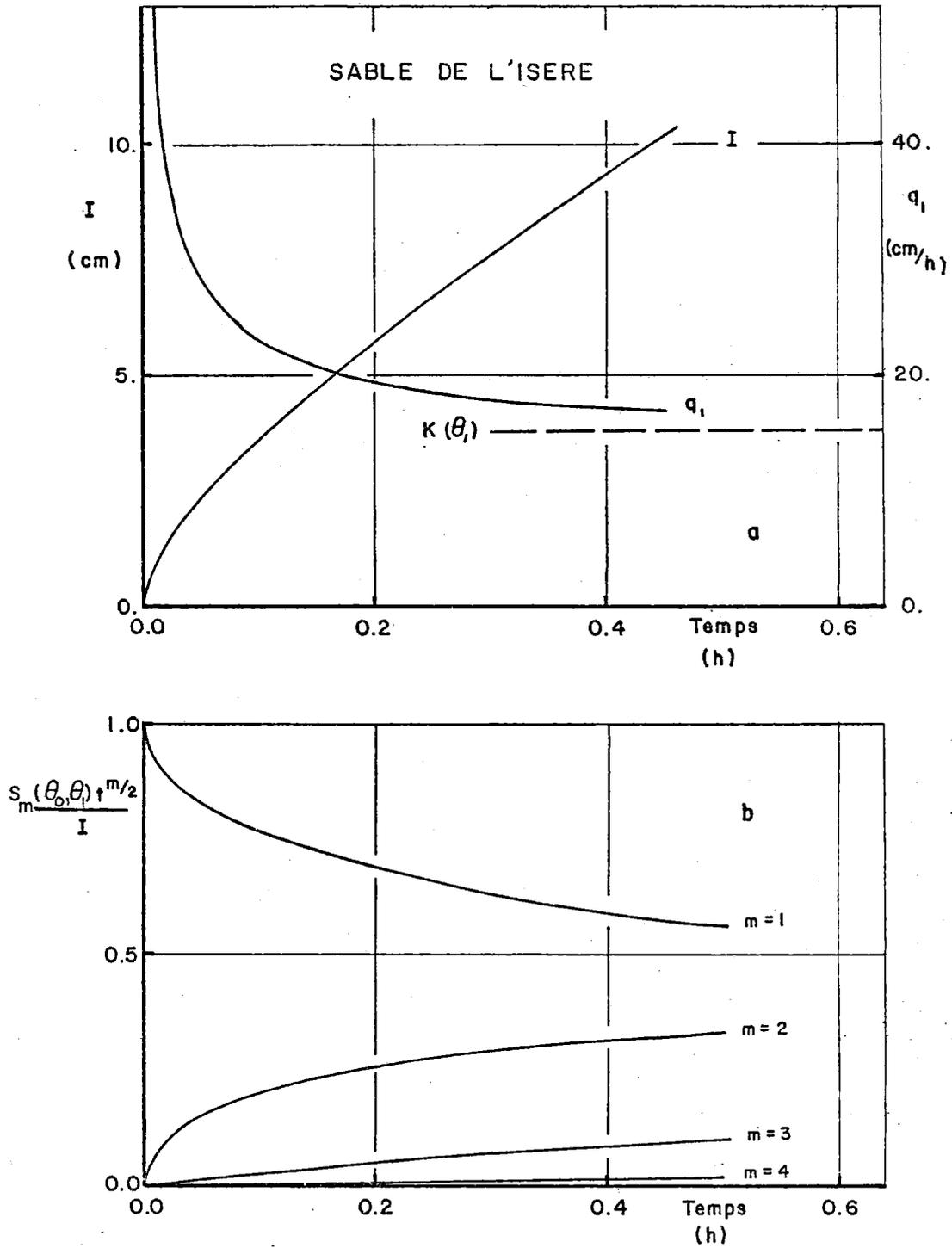


Figure III-19 : a) - L'évolution simultanée de la lame d'eau I et celle du flux q_1 en fonction du temps.
 b) - L'évolution en fonction du temps des apports relatifs de quatre premiers termes $[S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}] / I$ de la série.

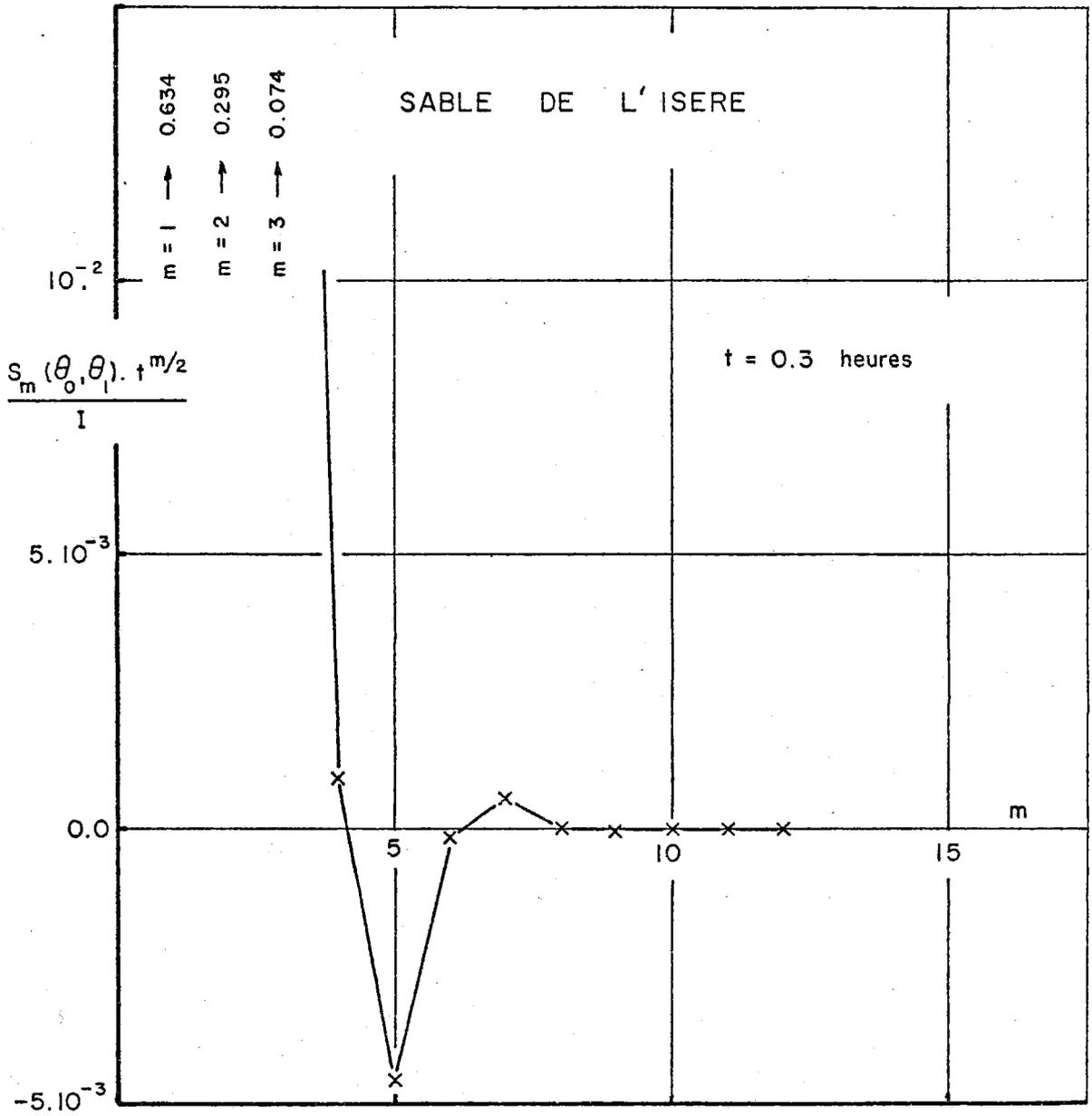


Figure III-20 : La contribution relative de chaque terme $[S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}] / I$ en fonction du nombre de terme m.

De nouveau, on constate que l'influence du premier terme sur la solution décroît très vite avec le temps. Cet effet est concrétisé par la croissance rapide du deuxième terme $[S_2(\theta_0, \theta_1) \cdot t]/I$. Si l'on considère le rapport $[S_2(\theta_0, \theta_1) \cdot t]/[S_1(\theta_0, \theta_1) \cdot t]$, qui représente le terme clef dans l'hypothèse de convergence (Eq. III-30) de PHILIP, on trouve une valeur de 0.47 pour $t = 0.3$ h. Ce même rapport calculé pour l'argile à un temps équivalent ($t = t_{\text{grav}} = 250$ h.) vaut 0.33 (Figure III-12b). La comparaison des deux résultats montre clairement l'influence plus importante des forces gravitaires sur le processus d'infiltration pour le sable.

Bien que les apports relatifs des termes suivants $[S_3(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{3/2}]$ et $[S_4(\theta_0, \theta_1) \cdot t^2]$ augmentent dans le temps, leur influence sur la solution devient de plus en plus faible avec l'accroissement de m . Au temps $t = t_{\text{grav}}$ (0.3 heures) les valeurs de $[S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}]/I$ valent respectivement 7.4 % et 0.97 % pour $m = 3$ et $m = 4$. Pour mieux visualiser ce dernier point, qui est d'une importance décisive pour la vérification de la validité du choix de m_{fin} (Eqs. III-26 et III-27), la contribution relative de chaque terme $[S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}]/I$ en fonction de m a été tracée figure (III-20). Comme dans le cas de l'argile, nous avons choisi les points de fonctionnement suivants $t = t_{\text{grav}}$ et $m \leq 15$.

Comme on peut s'y attendre d'après le tableau (III-4), les valeurs de $[S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}]/I$ oscillent autour de zéro. Néanmoins, le phénomène s'amortit très rapidement à partir de $m = 4$ pour arriver à des valeurs inférieures à 0.001 % pour $m > 9$. L'influence des termes $S_m(\theta_0, \theta_1)$ sur la valeur de I devenant très faible pour $m > 9$, il est largement justifié d'associer $m = 9$ à la valeur m_{fin} .

A la faveur de ce résultat, nous avons tracé figures (III-21a et b) pour différentes valeurs de M , l'évolution respective des erreurs $E_{T1}[I]$ et $E_{T1}^*[I]$ en fonction du temps.

De nouveau, on observe l'effet oscillatoire de la solution autour de l'axe $E_{T1}[I] = 0$. Pour les valeurs de $M = 3$ et $M = 4$, les résultats $I(t)$ surestiment ($E_{T1}[I] < 0$) la solution "réelle" obtenue avec 9

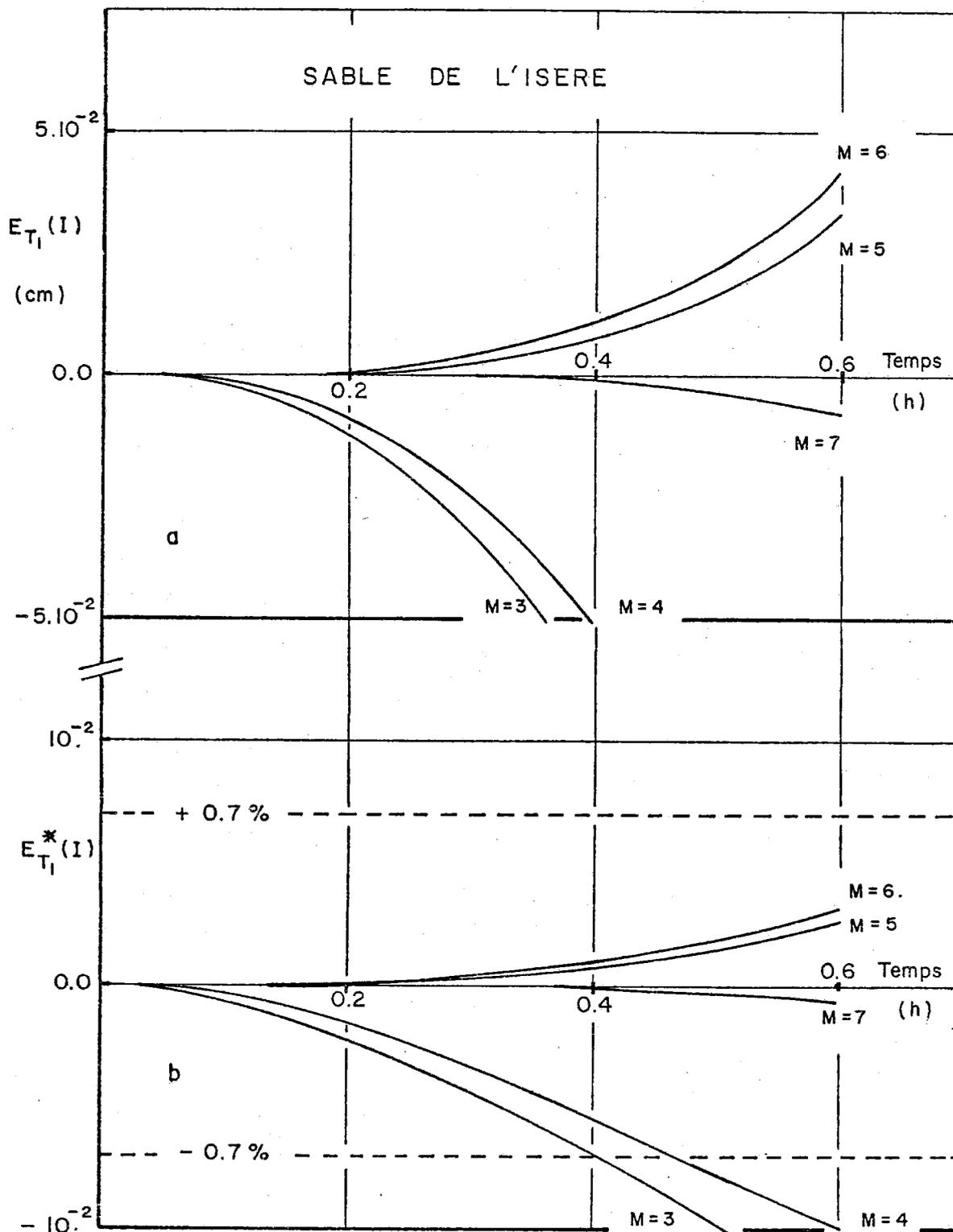


Figure III-21 : L'évolution en fonction du temps des erreurs de troncature $E_{T_1}[I]$ en valeurs absolues (a) et relatives (b) pour différentes valeurs de M.

termes de la série. Les corrections apportées par les termes supplémentaires $M = 5$ et $M = 6$ font basculer la solution $I(t)$ vers des valeurs trop petites ($E_{T1}[I] > 0$). Au fur et à mesure que M augmente, l'effet oscillatoire s'amortit, et pour $M = 7$, la solution "réelle" est déjà quasiment atteinte. Le même comportement peut naturellement être signalé pour l'erreur relative $E_{T1}^*[I]$.

La comparaison des résultats $E_{T1}^*[I]$ avec le critère de précision $[E_T^*] < 0.7 \%$, nous amène à considérer une série de quatre termes sur l'intervalle du temps $t \leq t_{grav}$, soit $t \leq 0.3$ h. Par contre, si le champ d'applicabilité de la solution en série doit être augmenté jusqu'à 0.6 heure —comme on le montrera dans le chapitre suivant (III-4)— les quatre termes de la série ne garantissent plus la précision imposée et le nombre de termes de la série doit passer à $M = 5$.

D'autre part, l'erreur de troncature peut être majorée par les deux estimations E_{T2} et E_{T3} obtenues avec un nombre limité de termes $S_m(\theta_0, \theta_1)$. Néanmoins, avant de les calculer, il est nécessaire de vérifier les hypothèses de base des équations (III-30) et (III-36). Pour cela les valeurs de γ_m ont été déterminées, tableau (III-4), à l'aide de l'équation (III-37).

On constate que pour tous les termes de la série, la condition (III-30) est entièrement satisfaite, puisque toutes les valeurs de γ_m sont inférieures à 1. En ce qui concerne l'hypothèse (III-36), la valeur de γ_3 majore toutes les autres, fixant ainsi $\gamma = 0.7358$. Ceci montre que pour ce type de sol la série géométrique développée à partir de l'hypothèse (III-30) peut être améliorée de façon significative en introduisant le coefficient correctif γ (Eq. III-36).

Ce résultat est mis en évidence par la figure (III-22) qui donne, en fonction du temps, les évolutions : $I(t)$, $I_{T2}(t)$ et $I_{T3}(t)$, calculées respectivement avec ces hypothèses. Pour la mise en oeuvre des trois solutions, nous avons choisi $M = 5$ pour satisfaire le critère de précision (Figure III-21).

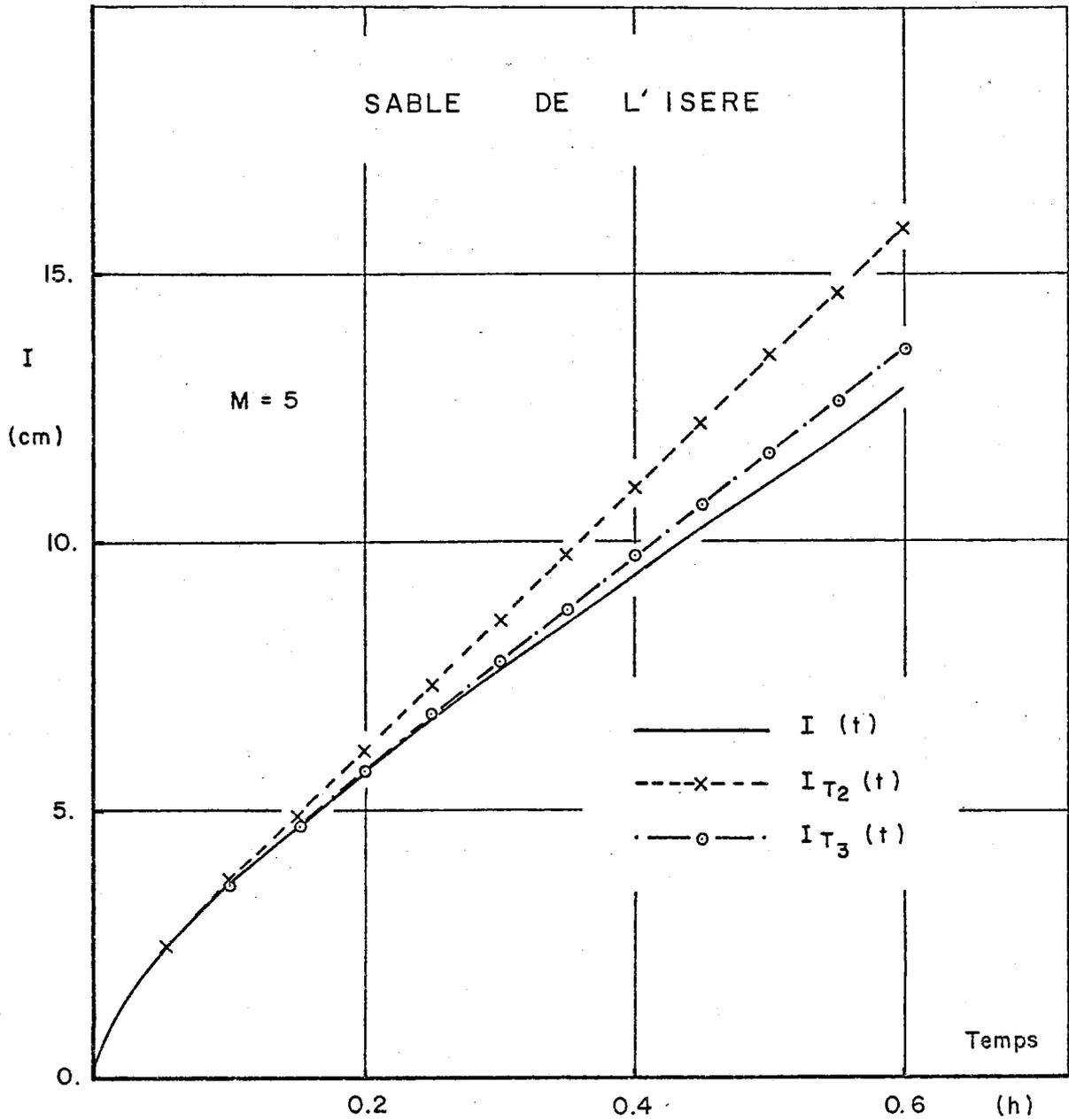


Figure III-22 : L'évolution en fonction du temps de la lame d'eau infiltrée I comparée avec deux relations $I(t)$ plus ou moins majorantes $I_{T1}(t)$ et $I_{T3}(t)$.

L'utilisation de $\gamma = 0.7358$ amène des résultats $I_{T_3}(t)$ plus proches de la solution "réelle" $I(t)$ que la courbe $I_{T_2}(t)$. La surestimation de $I_{T_3}(t)$ par rapport à $I(t)$ devient importante à partir du temps $t = 0.3$ heure. Puisque la valeur majorante de γ surestime pratiquement trois fois la valeur de γ_4 (Tableau III-4), l'utilisation de la série géométrique (Eq. III-42) entraîne une surestimation de la solution "réelle" au moment où le quatrième terme prend de l'importance. Ce phénomène de surestimation apparaît davantage pour les résultats de $I_{T_2}(t)$, dont le calcul fait appel à la valeur $\gamma = 1$.

Les hypothèses (III-30) et (III-36) étant vérifiées, nous avons tracé (figures III-23a et b) pour différentes valeurs de M l'évolution respective des deux estimations $E_{T_2}^*[I]$ et $E_{T_3}^*[I]$ en fonction du temps. A titre de comparaison, nous avons donné sur la même figure les erreurs $|E_{T_1}^*[I]|$ calculées pour $M = 4$ et $M = 5$.

Bien que les expressions $E_{T_2}^*[I]$ et $E_{T_3}^*[I]$ fixent par définition le domaine d'erreur par excès, l'estimation $E_{T_2}^*[I]$ surestime fortement l'erreur réellement induite $|E_{T_1}^*[I]|$. Par exemple, pour $M = 4$, le domaine d'erreur donné par $E_{T_2}^*[I]$ surestime dix fois l'erreur $|E_{T_1}^*[I]|$. Cette amplification se retrouve au niveau du calcul de $E_{T_3}^*[I]$ mais d'une façon nettement moins prononcée : pour $M = 4$ le domaine d'erreur borné par $E_{T_2}^*[I]$ ne surestime que trois fois l'erreur $|E_{T_1}^*[I]|$. Ceci met en évidence que pour ce sol l'utilisation du critère $E_{T_2}^*[I]$ amène une définition trop large du domaine d'erreur. Dès lors l'introduction du coefficient correctif γ conduisant à l'expression $E_{T_3}^*[I]$ semble être pleinement justifiée.

En se limitant ainsi à l'erreur $E_{T_3}^*[I]$ sur l'intervalle de temps $t \leq t_{\text{grav}}$, le critère de précision fixé à 0.7 % nous impose la solution en série avec au moins cinq termes et au maximum six termes, soit un à deux termes de plus que le nombre de termes "réellement" nécessaire ($M=4$). De même, sur l'intervalle du temps $t \leq 0.6$ heure, l'expression $E_{T_3}^*[I]$ prédit un nombre "optimal" de termes égal à sept au lieu de $M = 5$ calculé à partir de $E_{T_1}^*[I]$.

Cette surestimation due à l'emploi de $E_{T_3}^*[I]$ s'explique de deux façons :

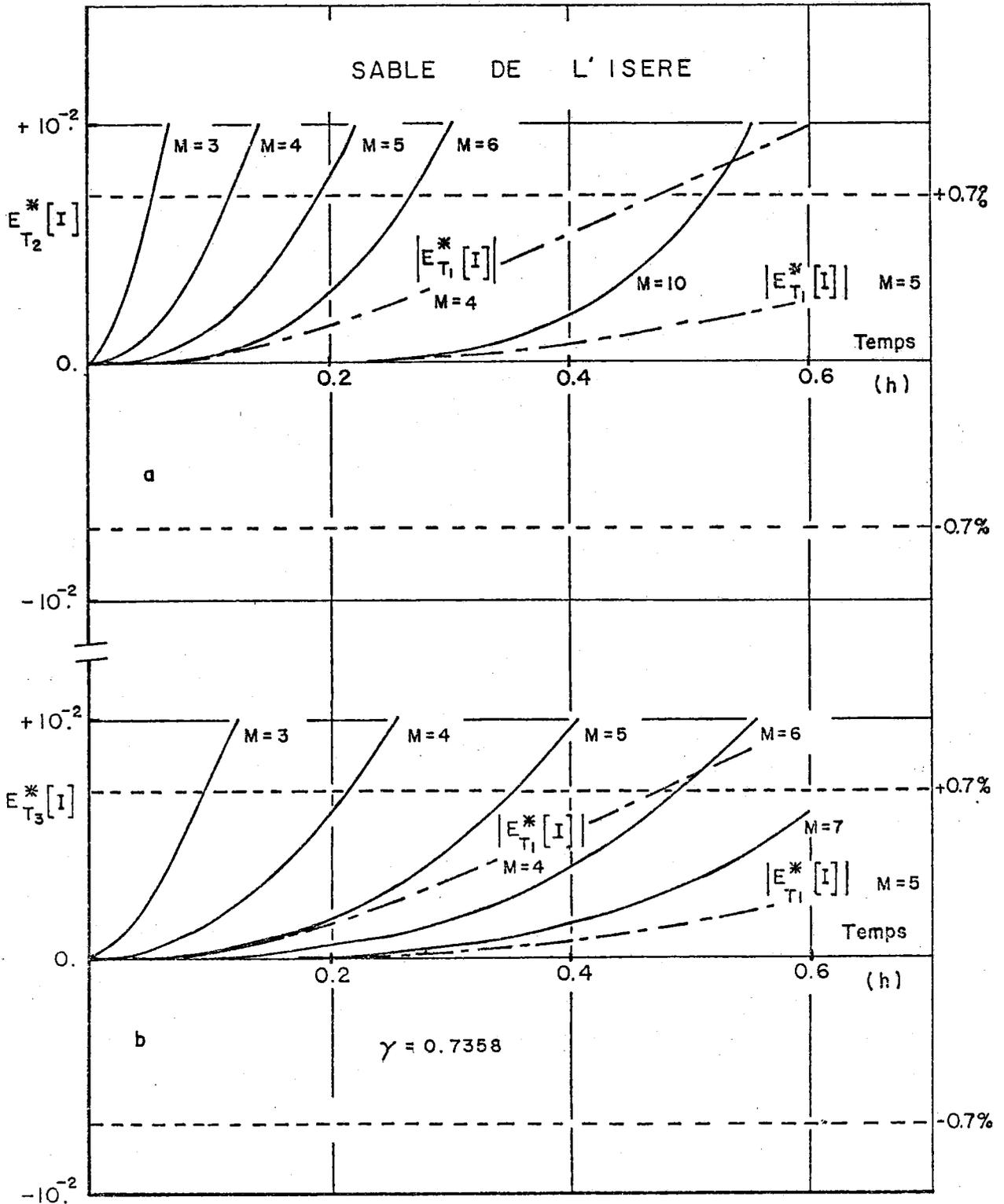


Figure III-23 : L'évolution en fonction du temps des erreurs de troncature $E_{T_2}^*[I]$ et $E_{T_3}^*[I]$ (respectivement a et b) pour différentes valeurs de M .

- d'une part, la série géométrique (Eq. III-32) utilisée comme équation de base pour $E_{T3}^*[I]$ ne prédit que des termes positifs de la série, excluant ainsi les effets compensatoires au niveau de l'estimation de l'erreur ;

- d'autre part, la série géométrique (III-32) fait appel à la valeur majorante de γ , ce qui amène automatiquement un écart par rapport à la série approchée (Eq. III-16) au moment où les termes $S_m(\theta_0, \theta_1)$ représentés par des valeurs de γ_m inférieures à la valeur majorante, commencent à prendre de l'importance.

Au vu de ces résultats, il apparaît que pour ce sol, contrairement à l'argile, l'utilisation de $E_{T3}^*[I]$ présente un net avantage sur l'expression $E_{T2}^*[I]$, ceci du fait de sa plus grande précision. Toutefois, elle prédit un nombre de termes légèrement trop élevé par rapport à ce qui est réellement nécessaire pour atteindre une précision égale.

3.3 - Conclusions

Les résultats ainsi obtenus pour les deux sols permettent de dégager les conclusions suivantes :

i) - L'utilisation de l'expression en série avec uniquement quatre termes ($M=4$) amène une erreur de troncature bien inférieure au seuil de précision ($\pm 0.7\%$) fixée préalablement par l'erreur d'intégration. Ce résultat, qui justifie l'option prise par PHILIP (1957a, b et c), est toutefois soumis à deux conditions restrictives :

a) - L'intervalle du temps de simulation doit se limiter à $t \leq t_{grav}$. Si une estimation plus précise du temps limite conduit à une augmentation de la période de simulation au-delà de la valeur t_{grav} , un terme supplémentaire, soit $M=5$, doit être mis en oeuvre pour assurer la même précision.

b) - Les contributions relatives des termes de la série $S_m(\theta_0, \theta_1)$ avec $m > m_{fin}$ doivent être considérées comme ayant une influence négligeable sur la solution. Bien que pour les deux sols considérés la valeur de m_{fin} soit limitée à 9, il est important de vérifier si cette condition peut être étendue à d'autres sols.

Rappelons que si la contribution relative du m-ième terme $S_m(\theta_0, \theta_1)$ de la série est notée $[S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}] / I$, cette grandeur doit tendre vers zéro, lorsque m augmente au-delà de m_{fin} . L'ensemble des équations (III-36) et (III-38) utilisé pour estimer l'erreur $E_{T3}^*[I]$, permet également d'approcher la contribution relative de chaque terme par une expression majorante de la forme :

$$\frac{S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot t^{m/2}}{I} \leq p^{m-1} [1-p] [1 + p^m + p^{2m} + \dots] \quad (\text{III-44})$$

avec :

$$p = \gamma \cdot \frac{S_2(\theta_0, \theta_1)}{S_1(\theta_0, \theta_1)} \cdot \sqrt{t} \quad (\text{III-45})$$

et : $m \geq 3$.

Comme le montrent ces équations, la valeur du rapport approché, noté par la suite "SSI", augmente avec le temps. Ainsi le temps utilisé pour estimer la limite d'applicabilité de la solution en série, conduit à une valeur maximale du paramètre p et par conséquent à une série des valeurs de SSI en fonction du nombre m, qui peuvent être considérées comme majorantes par rapport aux valeurs réellement atteintes. Bien que ces valeurs de p soient définies théoriquement sur le segment $[0,1[$, l'expérience montre qu'ils varient plutôt dans la gamme $0 \leq p \leq 0.5$. A titre d'exemple, la valeur de p calculée pour l'argile au temps $t = t_{grav}$ devient $p = 0.34$; pour le sable au temps correspondant $t = t_{grav}$, $p = 0.24$ et au temps $t = 0.6$ heure $p = 0.48$.

Au vu de ces résultats, nous avons tracé, (Figure III-24), l'évolution de SSI en fonction de m tout en considérant trois points de fonctionnement différents : $p = 0.3$, $p = 0.4$ et $p = 0.5$.

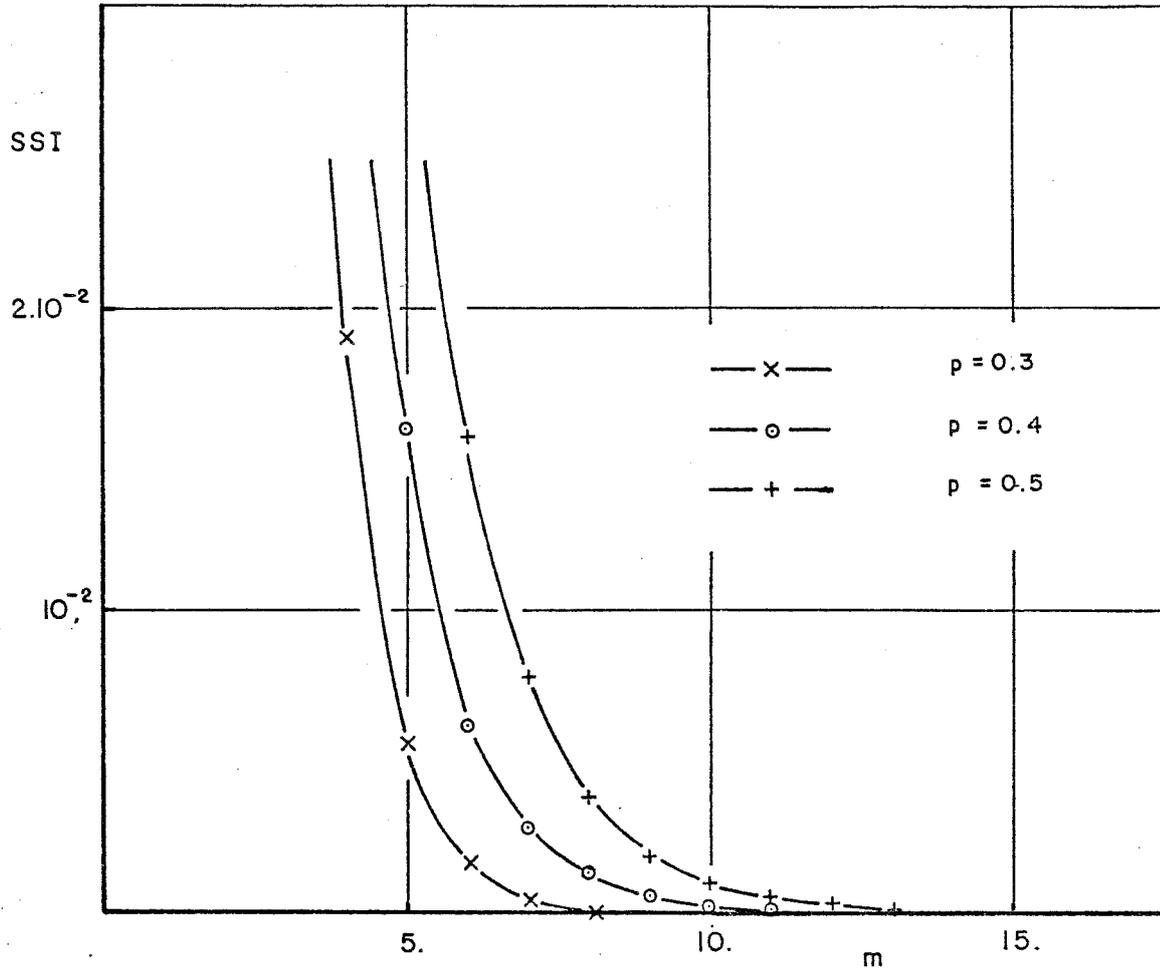


Figure III-24 : La contribution relative (SSI) des termes consécutifs de la série obtenus par majoration, en fonction du nombre m pour différentes valeurs de p.

La figure montre clairement que la contribution relative (SSI) tend vers zéro dès que m devient supérieur à 9. Même pour $p = 0.5$, le rapport est inférieur à 0.1 % pour $m > 9$.

Ceci semble justifier le choix de $m = 9$ pour d'autres sols et corrobore ainsi le caractère général de la conclusion précédente concernant la valeur "optimale" du nombre de termes à utiliser.

ii) - Les deux hypothèses introduites pour développer les estimations d'erreur de troncature E_{T2}^* et E_{T3}^* sont vérifiées. Cette conclusion, qui est indépendante du type de sol, a surtout de l'importance pour l'estimation du temps limite traitée plus en détail dans le chapitre suivant (III-4).

iii) - Pour estimer l'ordre de grandeur de l'erreur de troncature par une méthode approximative, on doit utiliser plutôt l'expression $E_{T3}^*[I]$ que $E_{T2}^*[I]$, ceci du fait de sa plus grande précision. Au niveau de la prédiction du nombre "optimal" de termes, il faut néanmoins noter qu'elle surestime légèrement l'erreur de troncature $E_T^*[I]$ amenant ainsi une prédiction d'un à deux termes de trop par rapport au nombre "réellement" nécessaire pour assurer la même précision.

III.4 - TEMPS DE PASSAGE ENTRE LES SOLUTIONS EN SERIE ET ASYMPTOTIQUE

Le troisième problème à étudier consiste à analyser le calcul du temps de passage entre les deux solutions en série (Eq. II-3) et asymptotique (Eq. II-12). Comme nous l'avons vu précédemment (Chapitre II-1), cette valeur dépend directement de la méthode d'estimation de convergence de la solution en série.

Bien que la théorie montre que la série de terme général $S_m(\theta_0, \theta_1) \cdot (\sqrt{t})^m$ est convergente si :

$$\sqrt{t} \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{S_{m+1}(\theta_0, \theta_1)}{S_m(\theta_0, \theta_1)} \right| < 1 \quad (\text{III-46})$$

la pratique ne permet pas, compte-tenu des expressions formelles de $S_m(\theta_0, \theta_1)$ de déterminer rigoureusement le domaine de convergence ni la valeur du rayon de convergence t_{lim} .

Ceci met en évidence le problème principal de la solution de PHILIP : au-delà d'un certain temps, t_{lim} , qui dépend du type de sol considéré, la solution en série ne converge plus. Toutefois, il n'est pas possible d'avoir accès rigoureusement à cette valeur de t_{lim} .

Pour pallier cette difficulté, PHILIP (1957a) fait appel à l'hypothèse (III-30) utilisée précédemment (Chapitre III-3) pour borner l'erreur de troncature. L'introduction de ces conditions permet d'estimer les valeurs de $S_m(\theta_0, \theta_1)$ par leur limite supérieure :

$$S_m(\theta_0, \theta_1) \leq \frac{S_1^2(\theta_0, \theta_1)}{S_2(\theta_0, \theta_1)} \cdot \left[\frac{S_2(\theta_0, \theta_1)}{S_1(\theta_0, \theta_1)} \right]^m \quad (\text{III-47})$$

et par leur limite inférieure :

$$S_m(\theta_0, \theta_1) \geq \frac{S_1^2(\theta_0, \theta_1)}{[K_1 - K_0]} \cdot \left[\frac{S_2(\theta_0, \theta_1)}{S_1(\theta_0, \theta_1)} \right]^m \quad (\text{III-48})$$

La résolution de l'ensemble des équations (III-46), (III-47) et (III-48) amène une estimation du temps limite $t_{1.2}$, dont on sait qu'il approche la valeur de t_{lim} par sa limite inférieure :

$$t_{1.2} = \left[\frac{S_1(\theta_0, \theta_1)}{K - K_0} \right]^2 \leq t_{\text{lim}} \quad (\text{III-49})$$

Nous avons choisi l'indice "2" en analogie avec l'estimation d'erreur de troncature E_{T2} fondée sur la même hypothèse (III-30) (Chapitre III-3).

Dès lors, l'utilisation de $t_{1.2}$ comme temps de passage garantit la convergence de la solution en série. Notons que l'estimation $t_{1.2}$ correspond au temps de passage t_{grav} (Eq. II-9) donné par PHILIP (1969).

Enfin, comme nous l'avons montré au chapitre précédent, l'hypothèse (III-30) peut être améliorée sensiblement par l'introduction du coefficient correctif γ . La condition ainsi obtenue (Eq. III-36) permet de développer une nouvelle estimation du temps limite $t_{1.3}$ sous la forme :

$$t_{1.3} = \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{s_1(\theta_0, \theta_1)}{K_1 - K_0} \right]^2 < t_{\text{lim}} \quad (\text{III-50})$$

soit :

$$t_{1.3} = \frac{1}{\gamma^2} \cdot t_{1.2} < t_{\text{lim}} \quad (\text{III-51})$$

En fonction de la valeur de γ , défini sur le segment $]0,1[$, il est évident qu'il existe une valeur estimative $t_{1.3}$ plus grande que le temps proposé par PHILIP ($t_{1.2}$) mais toujours plus petite que la valeur "réelle" de t_{lim} , soit :

$$t_{1.2} \leq t_{1.3} \leq t_{\text{lim}} \quad (\text{III-52})$$

Identifiant la valeur $t_{1.3}$ au temps de passage entre les deux solutions en série et asymptotique, l'équation (III-52) montre qu'il peut exister une valeur $t_{1.3} > t_{1.2}$ qui ne conduit pas pour autant à une divergence de la solution en série.

Dans la suite, nous nous proposons pour les deux sols retenus de comparer les deux estimations de temps de passage tout en utilisant les points de fonctionnement suivants : nombre de termes de série mis en oeuvre $M=5$; nombre de pas d'intégration $N=250$.

4.1 - Yolo Light Clay

Les hypothèses (III-30) et (III-36) étant vérifiées au niveau de l'estimation des erreurs de troncature (Chapitre III-3), nous passons tout de suite au calcul des valeurs de $t_{1.2}$ et $t_{1.3}$ (Tableau III-5). La valeur de γ utilisée est : $\gamma = 0.9983$ (voir Tableau III-3).

	Yolo Light Clay	Sable de l'Isère	Observations
$t_{1.2} = t_{\text{grav}}$	249.7 h	0.326 h	Eq. (III-49)
γ	0.9983	0.7358	Eq. (III-37)
$t_{1.3}$	254.8 h	0.603 h	Eq. (III-50)
\tilde{t}	302.5 h	0.8082 h	Eq. (II-8)
q_1^2	0.0466 cm/h	17.083 cm/h	Eq. (II-8)
K_1	0.0443 cm/h	15.37 cm/h	

Tableau III-5

Ces résultats montrent que pour ce type de sol l'hypothèse de convergence amène une estimation du temps de passage $t_{1.2} = 250$ h. du même ordre de grandeur que celle évaluée à partir de l'hypothèse plus restrictive (Eq. III-36) : $t = 255$ h., justifiant ainsi le choix de PHILIP d'identifier t_{grav} au temps de passage.

La solution en série sous la forme de $I(t)$ connaît un point d'inflexion à un certain temps noté, \tilde{t} . Souvent ce temps est confondu avec le temps limitant la convergence de la série. Pour montrer que cette identification n'est pas justifiée, nous avons tracé, figure (III-28), l'évolution du flux d'eau à la surface ($q_1 = dI/dt$) en fonction du temps. Deux expressions du flux sont utilisées : d'une part la solution en série donnée par l'équation (II-8), d'autre part la relation développée à partir de la série géométrique majorante (Eq. III-38) :

$$q_1(t) < [K_0 + (1-\gamma) \cdot S_2(\theta_0, \theta_1)] + \frac{S_1^2(\theta_0, \theta_1)}{2 \cdot \gamma \cdot S_2(\theta_0, \theta_1)} \sum_{m=1}^5 \frac{m}{t} \cdot \left[\gamma \cdot \frac{S_2(\theta_0, \theta_1)}{S_1(\theta_0, \theta_1)} \cdot \sqrt{t} \right]^m \quad (\text{III-53})$$

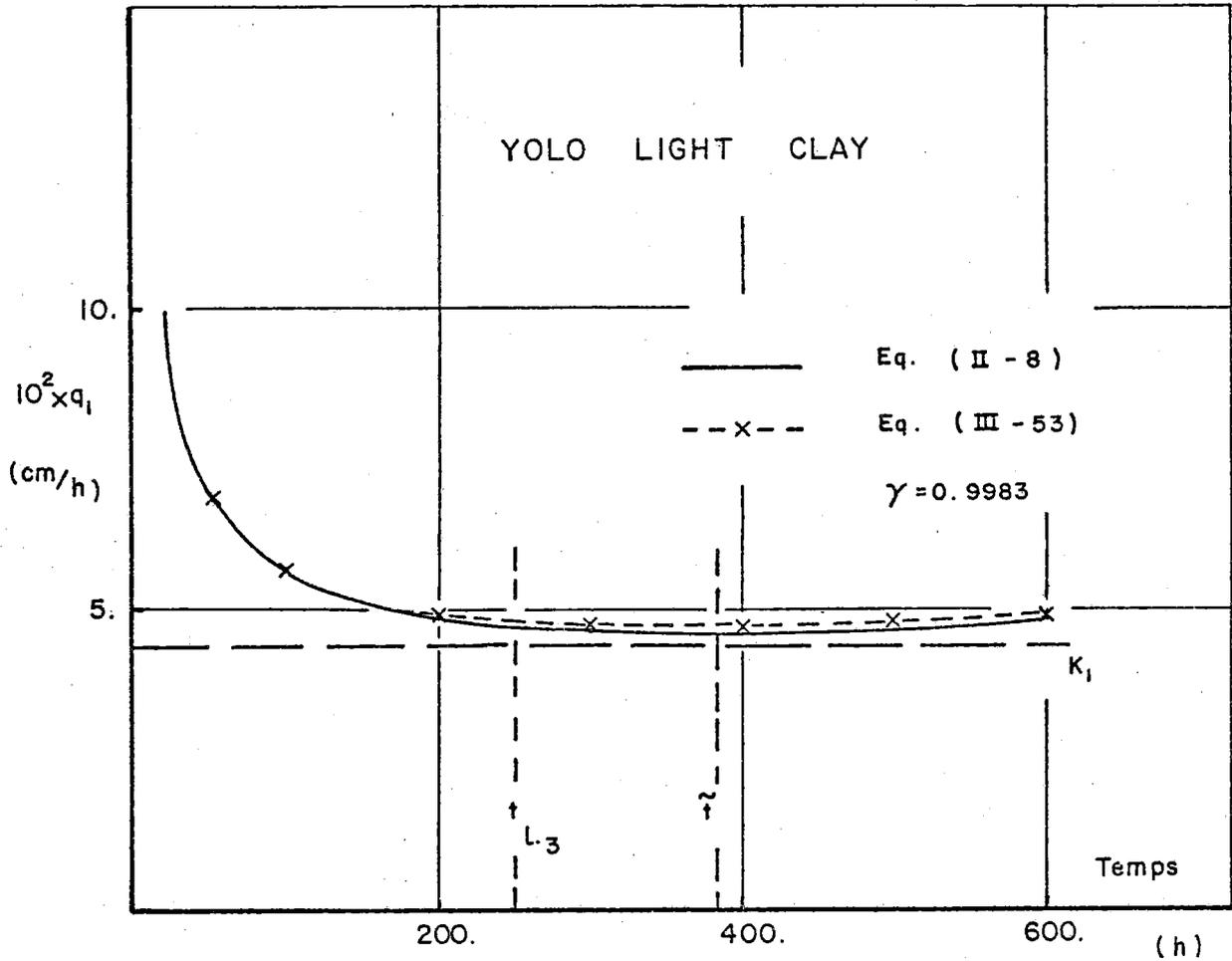


Figure III-28 : L'évolution en fonction du temps du flux (q_1) calculé d'une part avec la solution en série (Eq. II-8), d'autre part avec la série majorante (Eq. III-53). Le temps t correspond au point d'inflexion.

La valeur de \tilde{t} calculée avec (Eq. II-8) (Tableau III-5) est $\tilde{t} = 382$ h., amenant un flux $\tilde{q}_1 = 4.66 \cdot 10^{-2}$ cm/h.

Bien que la valeur de t_{lim} ne soit pas connue rigoureusement, l'excellent accord entre les valeurs de flux obtenues avec les Eqs. (II-8) et (III-53) laisse supposer que la valeur $t_{1.3} = 255$ h. ne sous-estime que très légèrement la valeur "réelle" t_{lim} . Dès lors, l'écart entre les deux temps $t_{1.3}$ et \tilde{t} montre le danger de confondre le temps limite avec le point d'inflexion de la solution en série.

4.2 - Sable de l'Isère

Les valeurs de $t_{1.2}$ et $t_{1.3}$ sont données tableau (III-5). La valeur de γ retenue sur les cinq premiers termes de la série est $\gamma = 0.7358$ (Tableau III-4).

Contrairement aux résultats obtenus pour l'argile, le coefficient correctif γ est très différent de 1 pour ce sol. De ce fait, il conduit à une nette augmentation du temps de passage, avec $t_{1.3} = 0.6$ h. au lieu de $t_{1.2} = 0.33$ h., ce qui représente un accroissement voisin de 100 % de la période d'applicabilité de la solution en série.

L'évolution du flux (q_1) en fonction du temps est donnée figure (III-29). Comme dans le cas précédent, l'expression (III-53) ne surestime que très peu la solution en série (Eq. II-8). La valeur de $\tilde{t} = 0.81$ h. montre un écart important avec l'estimation $t = 0.6$ h., soulignant de nouveau le danger d'associer le temps limite au point d'inflexion de la solution en série.

4.3 - Conclusions

Les résultats obtenus pour les deux sols montrent que l'utilisation de l'hypothèse de convergence (Eq. III-30), telle que PHILIP l'a proposée, peut conduire à une limitation trop restrictive ($t_{1.2}$) du domaine d'applicabilité de la solution en série. L'introduction d'une légère

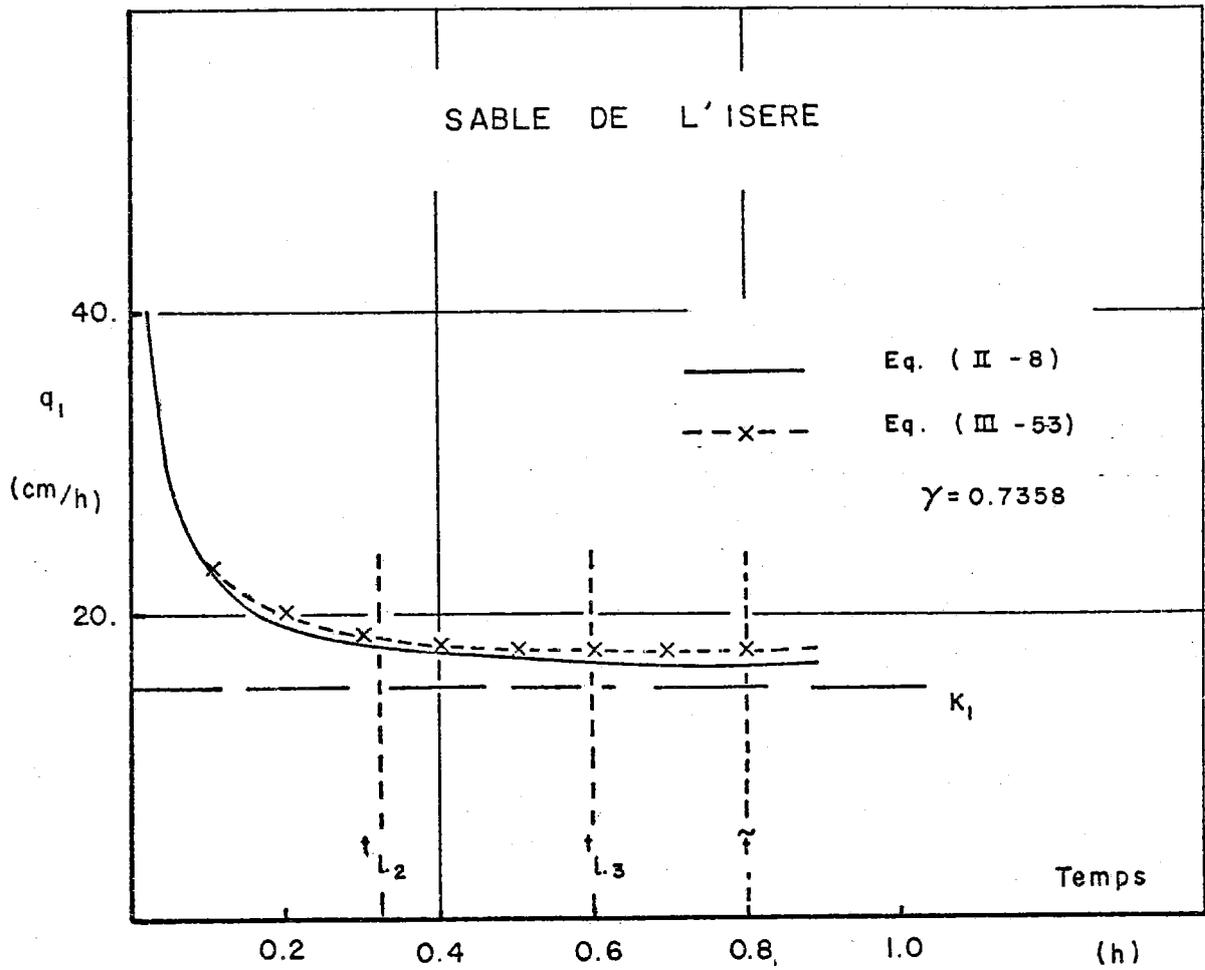


Figure III-29 : L'évolution en fonction du temps du flux (q_1) calculé d'une part avec la solution en série (Eq. II-8), d'autre part avec la série majorante (Eq. III-53). Le temps t correspond au point d'inflexion.

modification de l'hypothèse sous la forme de l'équation (III-36) amène une nouvelle estimation plus précise du temps limite, augmentant ainsi le temps d'application de la solution quasi-analytique.

L'identification du temps de passage entre les deux solutions en série et asymptotique à l'estimation $t_{1.3}$, peut alors augmenter considérablement la précision des résultats de la solution.

III.5 - SOLUTION ASYMPTOTIQUE

Le dernier problème à étudier est relatif à la définition d'une solution asymptotique pour tout temps supérieur au temps de passage. Compte-tenu des limitations liées à l'approche semi-empirique proposée par PHILIP (1957c), nous avons développé une deuxième solution déterministe fondée sur la méthode de double intégration introduite par PARLANGE et al. (1982) et approfondie par PARLANGE, HAVERKAMP et TOUMA (1983).

L'estimation $t_{1.3}$ (Eq. III-50) est retenue comme définition du temps de passage entre les solutions en série et asymptotique. Bien sur, l'analyse présentée par la suite s'applique également à la deuxième estimation moins précise $t_{1.2}$ (Eq. III-49).

5.1 - La solution PHILIP (1957c)

Cette approche est fondée sur la translation verticale d'un profil hydrique non-évolutif dans le temps de la forme :

$$z_{\infty}(\theta) = \int_{\theta}^{\theta_1 - \epsilon} \frac{D(\alpha)}{\theta [K_0 - K(\alpha)] + \left[\frac{K_1 - K_0}{\theta_1 - \theta_0} \right] [\alpha - \theta_0]} d\alpha \quad (\text{III-54})$$

où ϵ est une grandeur petite mais strictement positive. La vitesse de translation est estimée par :

$$u(t) = \frac{q_1(t) - K_0}{\theta_1 - \theta_0} \quad (\text{III-55})$$

L'ensemble des équations (III-54) et (III-55) permet de calculer la solution $z(\theta, t)$ sous la forme :

$$z(\theta, t) = z_{\infty}(\theta) + u(t) [t - t_{1.3}] \quad (\text{III-56})$$

à condition que le flux $q_1(t)$ soit connu.

Bien que PHILIP (1957c) ne donne pas une expression précise pour déterminer le flux, il préconise une relation empirique de la forme :

$$q_1(t) = K_1 + d_1 \exp(-d_2 [t - t_{1.3}]) \quad (\text{III-57})$$

où d_1 et d_2 sont des constantes à établir par calage sur les valeurs $q_1(t_{1.3})$ et $(dq_1/dt)_{t_{1.3}}$ obtenues à partir de la solution en série, (Eq. II-8).

L'intégration de l'équation (III-57) amène directement une expression pour la lame d'eau infiltrée (I) en fonction du temps :

$$I(t) = K_1 t - \frac{d_1}{d_2} \exp(-d_2 [t - t_{1.3}]) + d_3 \quad (\text{III-58})$$

où d_3 est une constante d'intégration à calculer à partir $I(t_{1.3})$, (Eq. II-5).

Malgré sa simplicité apparente, cette solution présente deux limitations importantes :

- d'une part les erreurs dues au mauvais calage entre l'expression exponentielle (Eq. III-57) et le flux "réel", se répercutent proportionnellement sur l'estimation de la vitesse de translation $u(t)$ et par conséquent sur le positionnement du profil hydrique $z(\theta, t)$;
- d'autre part, il existe une anomalie fondamentale au niveau de l'utilisation de l'équation (III-54) sur l'intervalle du temps $[t_{1.3}, \infty]$.

En effet, le profil hydrique $z(\theta)$ (Eq. III-54) est dérivé directement de l'expression générale (Eq. II-23) obtenue après la transformation de l'équation FOKKER-PLANCK :

$$z(\theta, t) = \int_{\theta}^{\theta_1} \frac{D(\alpha) d\alpha}{[K_0 - K(\alpha)] + F_{PH}(\alpha, t) \cdot [q_1(t) - K_0]} \quad (\text{III-59})$$

sous réserve que la relation $F_{PH}(\alpha, t)$ prenne la forme :

$$F_{PH}(\theta) = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \quad (\text{III-60})$$

et que le flux $q_1(t)$ tende vers sa valeur asymptotique K_1 .

En cas d'infiltration verticale, la première hypothèse est entièrement justifiée pour tout temps supérieur à $t_{1.3}$ (PHILIP, 1973 ; PERROUX et al. 1981), tandis que la seconde n'est valable que pour le temps $t \rightarrow \infty$. Comme sur l'intervalle de temps $[t_{1.3}, \infty[$, le flux "réel" est plus grand que K_1 , cette imprécision due à la seconde hypothèse entraîne une surestimation systématique du profil $z_{\infty}(\theta)$ par rapport au profil hydrique "réel" donné par l'équation (III-59). L'intégrale du profil $z_{\infty}(\theta)$ conduit alors à des valeurs $I(t)$ peu compatibles avec les valeurs obtenues à partir de l'équation (III-58). Cette discontinuité s'observe immédiatement au temps de passage $t_{1.3}$ et se maintient tout au long de la simulation à cause de la procédure de translation de l'équation (III-56).

Pour éviter ces inconvénients, nous avons développé une solution alternative fondée sur la même expression générale (Eq. III-59) mais ne faisant pas appel à l'hypothèse restrictive $q_1(t) = K_1$.

5.2 - La solution à double intégration

Cette approche dérivée de la solution proposée par PARLANGE, HAVERKAMP, et TOUMA (1983) permet de résoudre l'ensemble des équations (III-59) et (III-60) sous la forme d'une série de trois relations permettant de calculer respectivement le profil hydrique, le flux et la lame d'eau infiltrée en fonction du temps.

i) - La première équation obtenue en réportant la relation (III-60) dans l'équation (III-59), détermine le profil hydrique $z(\theta, t)$:

$$z(\theta, t) = \int_{\theta}^{\theta_1} \frac{D(\alpha) d\alpha}{[K_0 - K(\alpha)] + \left[\frac{\alpha - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \right] [q_1(t) - K_0]} \quad (\text{III-61})$$

à condition que le flux $q_1(t)$ au temps correspondant soit connu.

Bien que l'intégrale (III-61) ne soit pas définie pour $\theta = \theta_0$ elle peut être résolue en utilisant une procédure d'intégration trapézoïdale sous la forme :

$$z(\theta_n, t) = \Delta\theta \cdot \sum_{i=1}^n \frac{D(\theta_{i-1/2})}{[K_0 - K(\theta_{i-1/2})] + [\theta_{i-1/2} - \theta_0] \left[\frac{q_1 - K_0}{\theta_1 - \theta_0} \right]} \quad (\text{III-62})$$

avec : $\Delta\theta = [\theta_1 - \theta_0] / N$
 et : $\theta_i = \theta_1 - i \cdot \Delta\theta$ (III-63)

N étant le nombre de pas d'intégration.

ii) - La deuxième phase consiste à établir une relation explicite pour calculer le flux $q_1(t)$, nécessaire à la résolution de l'équation (III-61).

La dérivée de l'équation (III-61) par rapport à θ , donne :

$$\left[\frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \right] [q_1(t) - K_0] \cdot \frac{dz}{d\theta} = -D(\theta) + [K(\theta) - K_0] \cdot \frac{dz}{d\theta} \quad (\text{III-64})$$

soit après intégration sur le segment $[\theta_0, \theta_1]$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{q_1(t) - K_0}{\theta_1 - \theta_0} \right] \int_{\theta_0}^{\theta_1} [\theta - \theta_0] \frac{dz}{d\theta} \cdot d\theta = \\ - \int_{\theta_0}^{\theta_1} D(\theta) d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_1} [K(\theta) - K_0] \frac{dz}{d\theta} \cdot d\theta \end{aligned} \quad (\text{III-65})$$

La partie gauche de cette équation étant intégrable sans difficulté, elle s'écrit :

$$\frac{[q_1(t)-K_o][I-K_o t]}{[\theta_1-\theta_o]} = \int_{\theta_o}^{\theta_1} D(\theta) d\theta - \int_{\theta_o}^{\theta_1} [K(\theta)-K_o] \frac{dz}{d\theta} d\theta \quad (\text{III-66})$$

Considérons d'abord la résolution de la deuxième intégrale :

$$\int_{\theta_o}^{\theta_1} [K(\theta)-K_o] \cdot \frac{dz}{d\theta} \cdot d\theta \quad (\text{III-67})$$

D'une façon similaire à la méthode de double intégration de PARLANGE et al. (1982) on peut introduire l'hypothèse :

$$\left[\frac{K(\theta)-K_o}{K_1-K_o} \right] = \left[\frac{\theta-\theta_o}{\theta_1-\theta_o} \right] \left[1-d_4 \int_{\theta_o}^{\theta_1} D(\alpha) d\alpha \right] \quad (\text{III-68})$$

où d_4 est un paramètre de calage servant à obtenir la même forme entre les membres de gauche et de droite de l'équation. Dans la suite, nous reviendrons plus en détail sur la détermination de d_4 .

En reportant dans l'équation (III-67) les valeurs de $dz/d\theta$ et $[K(\theta)-K_o]$ obtenues respectivement à partir des équations (III-64) et (III-68), il vient :

$$\int_{\theta_o}^{\theta_1} [K(\theta)-K_o] \cdot \frac{dz}{d\theta} \cdot d\theta = \int_{\theta_o}^{\theta_1} \frac{[K_1-K_o][1-d_4\beta] d\beta/d\theta}{[q_1(t)-K_o]-[K_1-K_o][1-d_4\beta]} d\theta \quad (\text{III-69})$$

avec :
$$\beta = \int_{\theta_o}^{\theta_1} D(\alpha) d\alpha \quad (\text{III-70})$$

soit :
$$\int_{\theta_o}^{\theta_1} [K(\theta)-K_o] \cdot \frac{dz}{d\theta} \cdot d\theta = \int_{\theta_o}^{\theta_1} D(\theta) d\theta + \quad (\text{III-71})$$

$$- \frac{[q_1(t)-K_o]}{d_4[K_1-K_o]} \ln \left\{ 1 + \frac{d_4[K_1-K_o]}{[q_1(t)-K_1]} \cdot \int_{\theta_o}^{\theta_1} D(\theta) d\theta \right\}$$

L'ensemble des équations (III-66) et (III-71) permet enfin d'écrire :

$$[I - K_o t] = \frac{[\theta_1 - \theta_o]}{d_4 [K_1 - K_o]} \ln \left\{ 1 + \frac{d_4 [K_1 - K_o]}{[q_1(t) - K_1]} \int_{\theta_o}^{\theta_1} D(\theta) d\theta \right\} \quad (\text{III-72})$$

D'autre part, en utilisant le concept de "flux-concentration" (Chapitre II.2.2) on peut définir la sorptivité $S_1(\theta_o, \theta_1)$ (Eq. II-7) d'une façon rigoureuse (PHILIP, 1973) par :

$$S_1^2(\theta_o, \theta_1) = 2 \int_{\theta_o}^{\theta_1} \frac{D(\theta)}{F_{PH}(\theta)} \cdot [\theta - \theta_o] \cdot d\theta \quad (\text{III-73})$$

Bien que pour une absorption horizontale l'hypothèse $F_{PH}(\theta) = [\theta - \theta_o] / [\theta_1 - \theta_o]$ soit moins justifiée que dans le cas d'infiltration verticale, l'introduction de cette estimation pour F_{PH} conduit à une erreur très faible (0.7 %) sur la valeur de $S_1(\theta_o, \theta_1)$ (ELRICK et ROBIN, 1981).

Ainsi, la combinaison des équations (III-72) et (III-73) amène la relation :

$$I(t) = K_o t + \frac{[\theta_1 - \theta_o]}{d_4 [K_1 - K_o]} \ln \left\{ 1 + \frac{d_4 [K_1 - K_o] \cdot S_1^2(\theta_o, \theta_1)}{2 [q_1(t) - K_1] [\theta_1 - \theta_o]} \right\} \quad (\text{III-74})$$

soit :

$$q_1(t) = K_1 + \frac{d_4 \cdot [K_1 - K_o] \cdot S_1^2(\theta_o, \theta_1)}{2 [\theta_1 - \theta_o] \left[\exp \left\{ \frac{d_4 [I - K_o t] [K_1 - K_o]}{[\theta_1 - \theta_o]} \right\} - 1 \right]} \quad (\text{III-75})$$

qui détermine le flux $q_1(t)$ à tout temps $t > t_{1.3}$ en fonction de la valeur de $I(t)$ correspondante. Ceci nous amène à la troisième phase de la solution: le calcul de $I(t)$.

iii) - La transformation de l'équation (III-75) en :

$$\frac{d}{dt} (I - K_o t) = [K_1 - K_o] \cdot \left[1 + \frac{d_4 \cdot s_1^2(\theta_o, \theta_1)}{2[\theta_1 - \theta_o] \left[\exp \frac{d_4 [I - K_o t] [K_1 - K_o]}{[\theta_1 - \theta_o]} - 1 \right]} \right] \quad (\text{III-76})$$

suivie par une deuxième intégration sur le segment $[0, t]$, conduit finalement à une relation implicite pour $I(t)$ sous la forme :

$$[I - K_o t] = [1 - d_5] [K_1 - K_o] \cdot t + \frac{s_1^2(\theta_o, \theta_1)}{2[K_1 - K_o]} \ln(d_6) \quad (\text{III-77a})$$

avec :

$$d_5 = \frac{d_4 \cdot s_1^2(\theta_o, \theta_1)}{2[\theta_1 - \theta_o]} \quad (\text{III-77b})$$

et :

$$d_6 = \frac{d_5 - 1 + \exp \left\{ \frac{2d_5 [I - K_o t] [K_1 - K_o]}{s_1^2(\theta_o, \theta_1)} \right\}}{d_5} \quad (\text{III-77c})$$

La solution asymptotique constituée de l'ensemble des équations (III-61), (III-75) et (III-77) permet de calculer respectivement le profil hydrique $z(\theta, t)$, le flux $q_1(t)$ et la lame d'eau infiltrée $I(t)$ avec comme seule inconnue le paramètre de calage d_4 .

Avant d'entrer en détail sur la détermination de d_4 , analysons le comportement de la solution asymptotique pour $t \rightarrow \infty$.

D'après l'équation (III-77c), le terme d_6 devient pour $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (d_6) = \frac{\exp \left\{ \frac{2 \cdot d_5 \cdot [I - K_o t] [K_1 - K_o]}{s_1^2(\theta_o, \theta_1)} \right\}}{d_5} \quad (\text{III-78})$$

puisque l'influence de (d_5-1) devient négligeable devant le terme exponentiel. Reportant l'équation (III-78) dans l'équation (III-77a), il vient :

$$I = K_1 t + \frac{S_1^2(\theta_0, \theta_1)}{2[1-d_5][K_1-K_0]} \ln(1/d_5) \quad (\text{III-79})$$

Cette expression est tout à fait semblable à celle de GREEN et AMPT (1911), où la lame d'eau infiltrée diffère de $K_1 t$ par un terme constant en "ln" (à condition que $t \rightarrow \infty$). Il en est de même pour le flux, qui tend vers K_1 .

Ayant développé ainsi une solution asymptotique déterministe que l'approche empirique de PHILIP (1957c), il nous reste à calculer la constante d_4 .

5.2.1 - La constante d_4

Le paramètre de calage d_4 est introduit afin de décrire la relation caractéristique $K(\theta)$ sur le segment $[K_0, K_1]$ sous la forme de l'équation (III-68). De ce fait, il peut être considéré par définition comme constant et indépendant du temps.

Le domaine de variation de d_4 est directement imposé par l'équation (III-77b). En effet, l'argument du logarithme étant positif, on trouve :

$$0 < d_4 < \frac{2[\theta_1 - \theta_0]}{S_1^2(\theta_0, \theta_1)} \quad (\text{III-80})$$

Une augmentation de la sorptivité $S_1(\theta_0, \theta_1)$ amène donc une diminution de la gamme de variation de d_4 . A titre d'exemple, on trouve pour les deux sols retenus :

- le Yolo Light Clay :

$$0 < d_4 < 1.054 \text{ h/cm}^2 \quad (\text{III-81})$$

- le Sable de l'Isère :

$$0 < d_4 < 0.0055 \text{ h/cm}^2 \quad (\text{III-82})$$

A ce sujet, il est important d'analyser plus en détail les effets des deux valeurs extrêmes de d_4 sur la solution.

Supposons que d_4 tende vers zéro (donc $d_5 \rightarrow 0$) le développement limité de d_6 (Eq. III-77c) donne l'expression :

$$d_6 = 1 + \frac{2[I-K_0 t] [K_1-K_0]}{s_1^2(\theta_0, \theta_1)} + o(d_5) \quad (\text{III-83})$$

En reportant cette valeur de d_6 dans l'équation (III-77a), il vient :

$$I = K_1 t + \frac{s_1^2(\theta_0, \theta_1)}{2[K_1-K_0]} \ln \left\{ 1 + \frac{2[I-K_0 t] [K_1-K_0]}{s_1^2(\theta_0, \theta_1)} \right\} \quad (\text{III-84})$$

soit l'équation de GREEN et AMPT (1911), qui peut être considérée comme une solution exacte de l'équation FOKKER-PLANCK avec une diffusivité $D(\theta)$ assimilée à une fonction DIRAC.

D'autre part, pour ce qui concerne la valeur maximale de d_4 , l'introduction de $d_4 = 2[\theta_1 - \theta_0] / s_1^2(\theta_0, \theta_1)$ dans l'équation (III-74), suivie par une intégration dans le temps sur le segment $[0, t]$ conduit à l'expression :

$$I = K_1 t + \frac{s_1^2(\theta_0, \theta_1)}{2[K_1-K_0]} \left\{ 1 - \exp \left(- \frac{2[I-K_0 t] [K_1-K_0]}{s_1^2(\theta_0, \theta_1)} \right) \right\} \quad (\text{III-85})$$

dont PARLANGE (1975) montre qu'elle représente une solution exacte à condition que non seulement la relation $D(\theta)$ mais également $dK/d\theta$ suivent la même fonction DIRAC.

Après avoir comparé pour différents types de sol ces deux expressions de $I(t)$ avec les résultats numériques obtenus sans prise en compte des hypothèses restrictives sur $D(\theta)$ et $dK/d\theta$, SMITH et PARLANGE

(1978) mettent en évidence que la relation "réelle" de $I(t)$ se trouve toujours dans le domaine limité par les deux relations (III-84) et (III-85). Ces résultats valident alors la condition (III-80).

La valeur correcte de d_4 doit garantir la continuité des courbes $I(t)$ et $q_1(t)$ au niveau du temps de passage ($t_{1.3}$). Pour cela, il suffit de résoudre itérativement l'équation (III-74) écrite sous la forme :

$$(d_4)_{n+1} = \frac{[\theta_1, \theta_0]}{[I(t_{1.3}) - K_0 \cdot t_{1.3}] [K_1 - K_0]} \ln \left\{ 1 + \right. \\ \left. + \frac{(d_4)_n \cdot [K_1 - K_0] \cdot S_1^2(\theta_0, \theta_1)}{2[q_1(t_{1.3}) - K_1] \cdot [\theta_1 - \theta_0]} \right\} \quad (III-86)$$

où les valeurs de $I(t_{1.3})$ et $q_1(t_{1.3})$ sont obtenues à partir de la solution en série (Eqs. III-16 et II-8). L'indice n représente le nombre d'itération.

On doit noter que la validité de la solution obtenue par l'ensemble des équations (III-61), (III-75) et (III-77) n'est pas seulement limitée à l'intervalle du temps $[t_{1.3}, \infty]$. La solution s'applique également pour toute la gamme du temps > 0 . Cependant, dans ce dernier cas, la valeur de d_4 ne peut pas être déterminée par calage et peut uniquement être estimée approximativement ce qui va au détriment de la précision. D'autre part, pour des temps courts au début de l'infiltration l'effet de la capillarité est prépondérant et la validité de l'expression $F_{PH}(\theta) = \oplus$ est sujette à caution.

Dans la suite, nous nous proposons pour les deux sols retenus, de tester les deux solutions asymptotiques ainsi développées.

5.3 - Yolo Light Clay

Les principaux points de fonctionnement des solutions asymptotiques sont donnés tableau (III-6). Pour le calcul des valeurs de $I(t_{1.3})$ et de $q_1(t_{1.3})$ la solution en série avec $M=5$ a été utilisée.

Les figures (III-30a et b) montrent les évolutions respectives de I et de q_1 en fonction du temps, calculées avec l'ensemble de la solution en série ($t < t_{1.3}$) et les solutions asymptotiques ($t \geq t_{1.3}$). On observe que la solution à double intégration est quasiment confondue avec celle de PHILIP. Pour les deux solutions la condition de continuité des courbes I(t) et $q_1(t)$ au niveau du temps de passage est conservée et le flux (q_1) tend vers sa valeur asymptotique K_1 . Pour le temps $t = 650$ h., le flux a déjà approché cette valeur asymptotique à moins de 1 % conduisant alors à un accroissement de I pratiquement proportionnel avec $K_1 t$, ce qui correspond au régime d'écoulement permanent donné par l'équation (III-79)

		YOLO LIGHT CLAY	SABLE DE L'ISERE	OBSERVATIONS
$t_{1.3}$	Solution série	255 h	0,6 h	Eq. (III-50)
$I(t_{1.3})$		16.678 cm	12.699 cm	Eq. (III-16)
$q_1(t_{1.3})$		$4.747 \cdot 10^{-2}$ cm/h	16.383 cm/h	Eq. (II-8)
d_1		$3.193 \cdot 10^{-3}$ cm/h	1.013 cm/h	Eq. (III-57)
d_2	Solution	$5.426 \cdot 10^{-3}$ 1/h	3.247 1/h	$(dq_1/dt)t_{1.3}$
d_3	Philip	5.975 cm	3.789 cm	Eq. (III-58)
d_4	Solution double	0.8860 h/cm ²	$2.0675 \cdot 10^{-3}$ h/cm ²	Eq. (III-86)
d_5	intégration	0.8403	0.3758	Eq. (III-77)

Tableau III-6

La même figure (III-30a) montre les évolutions I(t) données par les relations (III-84) et (III-85). La solution à double intégration, notée dans la suite "D.I.", se trouve bien dans le domaine limité par les équations (III-84) et (III-85) ; ceci est en effet vérifié par la valeur de $d_4 = 0.8860$ (Tableau III-6), située dans l'intervalle de la condition (III-81).

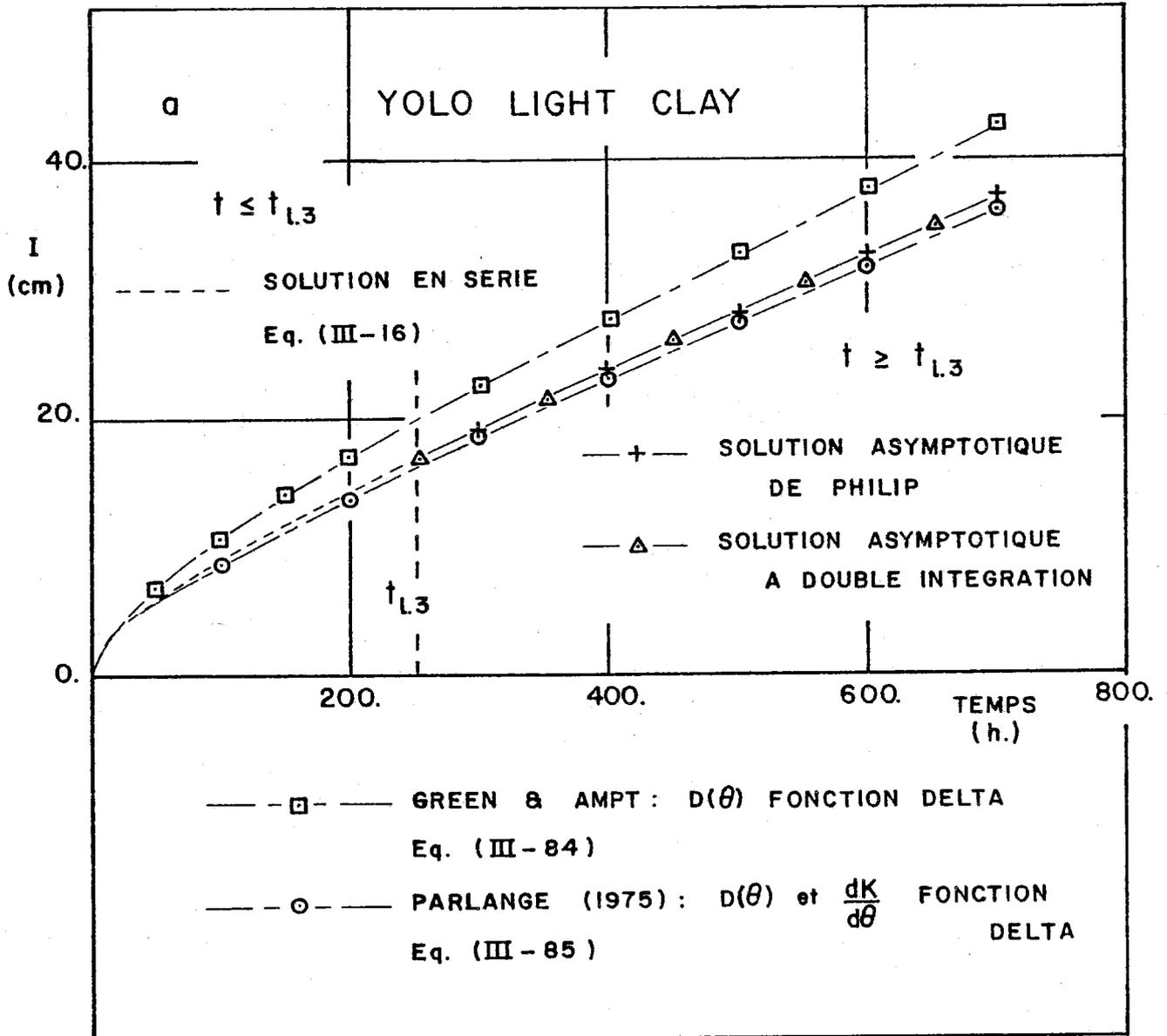


Figure III-30 a : L'évolution en fonction du temps de la lame d'eau infiltrée (I), calculée avec quatre approches différentes:

- Solutions en série ($t \leq t_{L,3}$) et asymptotique ($t \geq t_{L,3}$) de PHILIP (Eqs. III-16 et III-58) ;
- Solution en série ($t \leq t_{L,3}$) et asymptotique ($t \geq t_{L,3}$) de double intégration (Eqs. III-77a, b et c) ;
- Solution de GREEN et AMPT (Eq. III-84) ;
- Solution de PARLANGE (Eq. III-85).

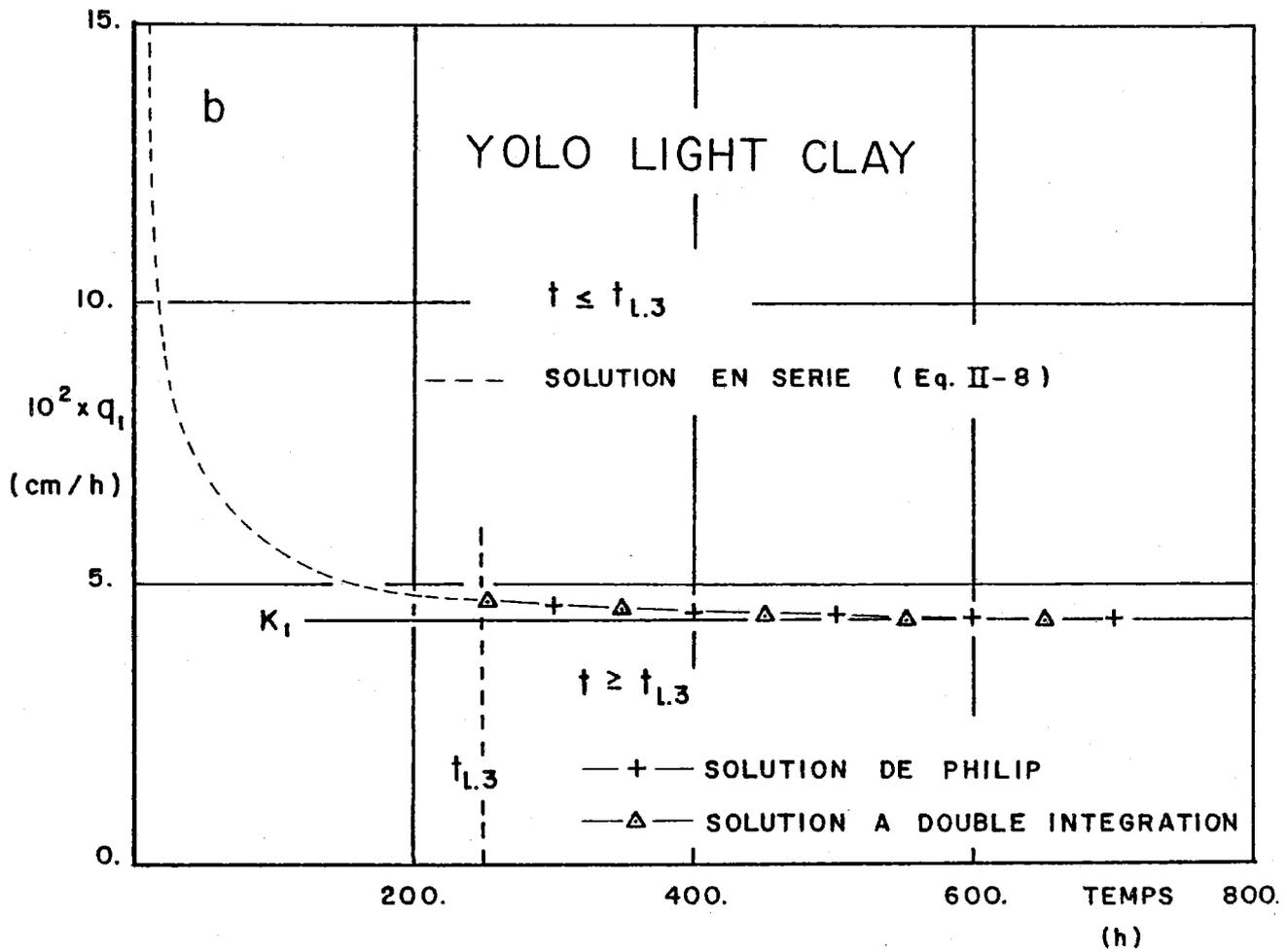


Figure III-30 b : L'évolution en fonction du temps du flux (q_1) calculée avec deux approches différentes :

- Solutions en série ($t \leq t_{1.3}$) et asymptotique ($t \geq t_{1.3}$) de PHILIP (Eqs. II-8 et III-58) ;
- Solution en série ($t \leq t_{1.3}$) et asymptotique ($t \geq t_{1.3}$) de double intégration (Eq. III-75).

Comme on pouvait s'y attendre, l'approche de GREEN et AMPT (Eq. III-84) surestime très nettement la solution "D.I.", mettant en évidence le fait, que l'hypothèse d'un écoulement piston est mal fondée pour ce type de sol où les effets diffusifs liés aux forces capillaires sont loin d'être négligeables (Figure III-7).

L'équation (III-85) par contre ne sous-estime que très faiblement la solution "D.I.". Ceci peut être expliqué par la valeur $d_4=0.8860$ qui se trouve proche de sa limite supérieure $d_4=1.054$, pour laquelle l'équation (III-85) devient la solution exacte de l'équation (III-74).

Le fait que les deux solutions asymptotiques donnent des résultats très semblables, montre que le flux $q_1(t)$ suit pratiquement une fonction exponentielle sur l'intervalle du temps : $t \geq t_{1.3}$. Pour mieux valoriser l'influence de cette hypothèse empirique sur les estimations du flux et de la lame d'eau infiltrée, nous avons tracé, figure (III-31) en fonction du temps la différence relative entre les valeurs de I calculées avec la solution empirique de PHILIP (I_{PH}) et la solution déterministe à double intégration ($I_{D.I.}$) :

$$\Delta I_{ASYM}^* = \frac{I_{D.I.} - I_{PH}}{I_{D.I.}} \quad t \geq t_{1.3} \quad (III-87)$$

Les résultats montrent que la solution de PHILIP surestime systématiquement la solution "D.I.". Toutefois, l'erreur relative ne dépasse pas 0.36 %, soit une erreur absolue inférieure à 0.16 cm pour $t = 2000$ h. Ceci confirme l'hypothèse de PHILIP (1957c, pp. 447) selon laquelle l'erreur relative induite par l'utilisation d'une fonction exponentielle est inférieure à 1 %.

Notons d'autre part que la même analyse sur les valeurs de flux amène des erreurs du même ordre de grandeur que celles tracées figure (III-31).

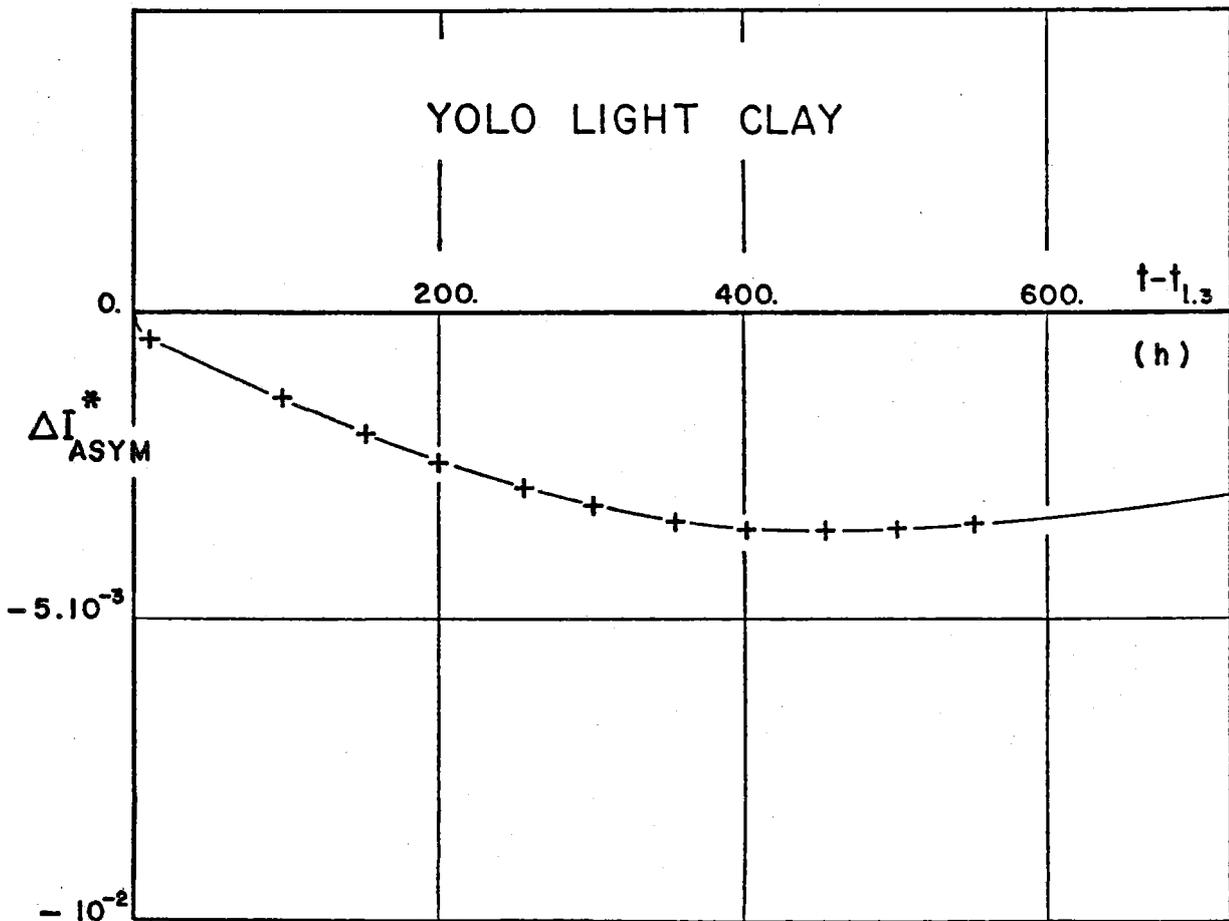


Figure III-31 : L'évolution en fonction du temps de l'écart relatif (ΔI_{ASYM}^*) entre les solutions asymptotiques de PHILIP et de double intégration.

Pour le calcul des profils hydriques, les deux solutions asymptotiques font appel au même type d'intégrale : Eqs. (III-54) et (III-59), où la première forme utilisée par PHILIP, n'est intégrable que sur l'intervalle $[\theta_0 + \epsilon, \theta_1 - \epsilon]$. Fixant $\epsilon = \frac{1}{2} \Delta\theta$ (Eq. III-63), l'influence du pas d'intégration sur la précision du calcul, peut être étudiée en termes de conservation de la masse d'eau en effectuant le bilan (BM) entre le volume entré dans le sol (I) et le volume stocké dans le profil (par unité de surface) :

$$BM = \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_1} z \cdot d\theta - I}{I} \quad (III-88)$$

L'utilisation du temps de passage ($t_{1.3}$) comme point de fonctionnement permet de calculer la valeur de $I(t_{1.3})$ d'une façon très précise à partir de la solution quasi-analytique en série (Eq. III-16).

La figure (III-32) donne l'évolution du bilan (BM) en fonction du nombre (N) de pas d'intégration obtenue pour la solution à double intégration. La courbe montre clairement que les valeurs de BM tendent vers zéro lorsque N augmente soit $\Delta\theta$ diminue. Le gain de précision est faible lorsque N passe de 300 (BM = - 0.9 %) à 500 (BM = - 0.2 %). Pour des raisons évidentes de temps de calcul, on retiendra donc N=300 comme valeur "optimale" pour calculer les profils hydriques avec l'équation (III-62).

Par contre la solution asymptotique de PHILIP (Eq. III-54) se révèle très sensible aux choix de ϵ . Pour la valeur de N = 300, soit $\epsilon = (\theta_1 - \theta_0)/600$, l'intégration du profil hydrique $z(\theta, 255)$ amène une valeur de 26.4 cm (BM = 62 %). L'augmentation de ϵ jusqu'à $\epsilon = (\theta_1 - \theta_0)/25$ améliore considérablement les résultats : BM = - 2.9 %.

Compte-tenu de la grande sensibilité de cette méthode vis à vis du choix de ϵ , nous n'avons utilisé que la solution à double intégration pour calculer les profils hydriques pour des temps $t \geq t_{1.3}$ (Figure III-33).

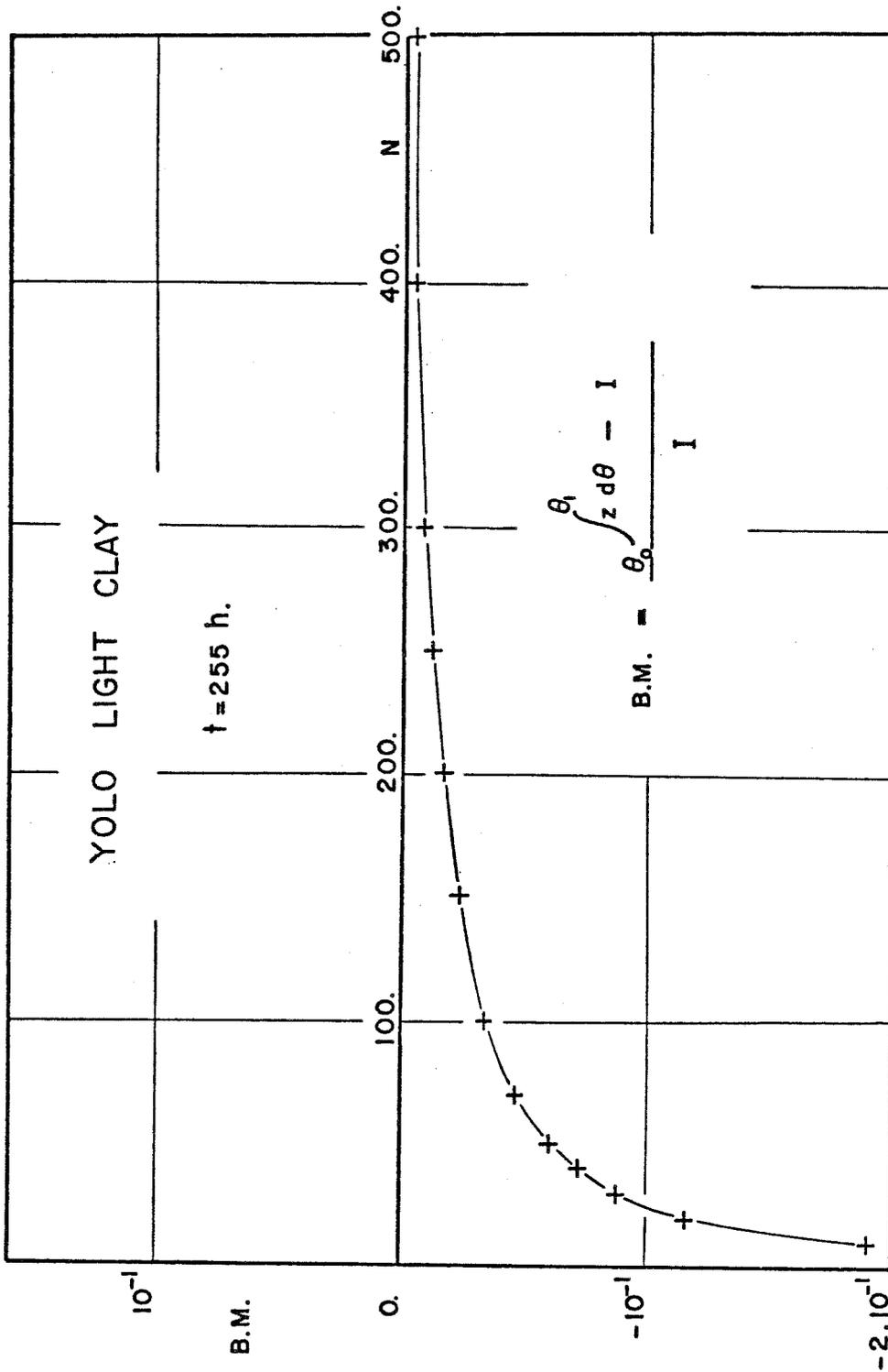


Figure III-32 : L'évolution du bilan de masse (BM) en fonction du nombre de pas d'intégration N pour la méthode asymptotique à double intégration.

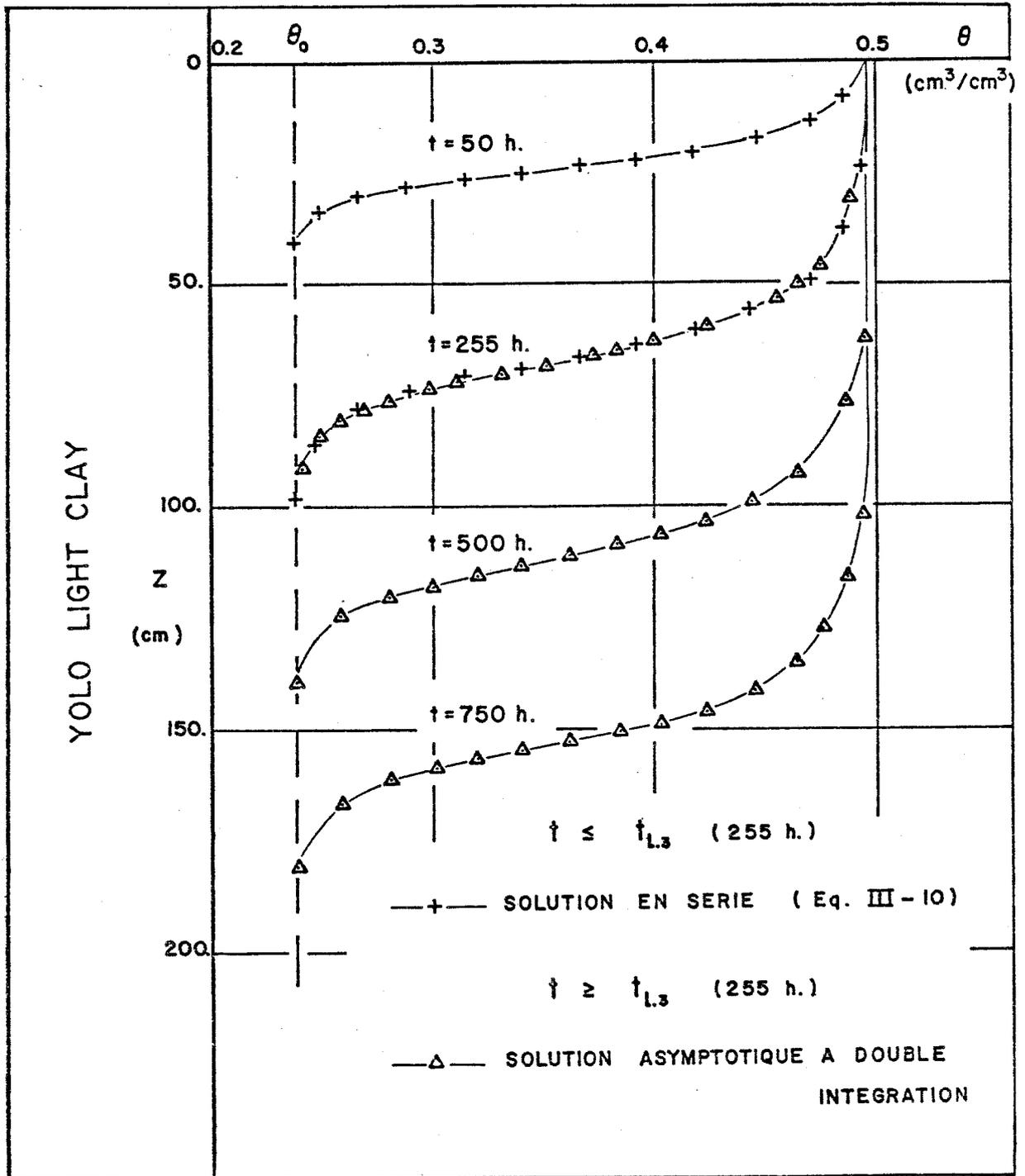


Figure III-33 : Les profils hydriques calculés pour différents temps avec :
 - Solution en série de PHILIP (Eq. III-10) pour $t = 50$ h. et $t = 255$ h.
 - Solution asymptotique de double intégration (Eq. III-62) pour $t = 255$ h., $t = 500$ h. et $t = 750$ h.

Les résultats sont en très bon accord avec le profil "réel" déterminé avec la solution en série. Pour les fortes teneurs en eau, le profil obtenu avec l'équation (III-61) ne sous-estime que très légèrement la solution en série, alors que pour des faibles teneurs en eau, l'effet est inversé. La forme du profil étant principalement déterminée par l'expression $F_{PH}(\theta, t)$ (Eq. III-60), ces résultats montrent clairement la validité de l'hypothèse $F_{PH}(\theta) = \text{④}$ utilisée pour la solution "D.I."

Pour les trois instants considérés (Figure III-33), $t=255$ h, $t=500$ h et $t = 750$ h, le bilan "BM" (Eq. III-88) donne un très bon accord entre les volumes stockés dans les profils (par unité de surface) et les valeurs de I calculée par l'expression (III-77) : "BM" < 0.9 %.

A la faveur de ces résultats, nous pouvons conclure que la solution à double intégration est mieux apte à être utilisée comme solution asymptotique, puisque son caractère déterministe assure une grande précision au niveau de $I(t)$ et de $z(\theta, t)$.

5.4 - Sable de l'Isère

Comme pour le sol précédent, les principaux points de fonctionnement des solutions asymptotiques sont donnés tableau III-6.

Les figures (III-34a et b) montrent les évolutions respectives de I et de q_1 en fonction du temps, calculées avec l'ensemble de la solution en série ($t \leq t_{1.3}$) et les deux solutions asymptotiques de PHILIP et "D.I." ($t \geq t_{1.3}$).

Comme pour l'argile, les solutions de PHILIP et "D.I." sont quasiment confondues. La différence relative ΔI_{ASYM}^* (Eq. III-87) atteint au maximum 0.2 %, soulignant ainsi la validité de l'hypothèse posée par PHILIP d'approcher l'évolution du flux (q_1) par une loi exponentielle (Eq. III-57) pour $t \geq t_{1.3}$.

D'autre part, on observe que la solution "D.I." se trouve bien dans le domaine limité par les équations (III-84) et (III-85), comme la valeur $d_4 = 2.067 \cdot 10^{-3}$ le laissait présager.

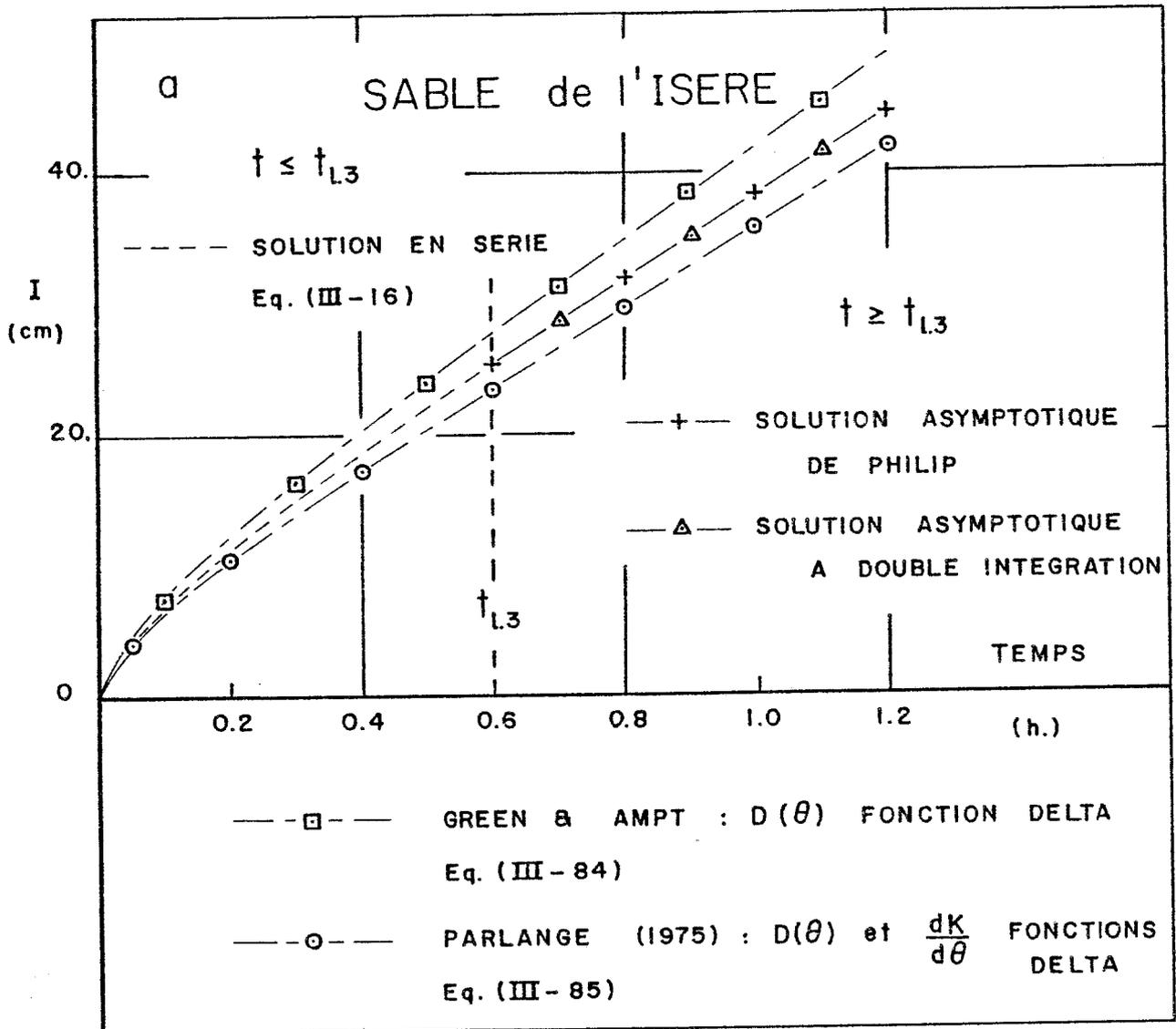


Figure III-34 a - L'évolution en fonction du temps de la lame d'eau infiltrée (I), calculée avec quatre approches différentes :

- Solutions en série ($t \leq t_{1.3}$) et asymptotique ($t \geq t_{1.3}$) de PHILIP (Eqs. III-16 et III-58).
- Solutions en série ($t \leq t_{1.3}$) et asymptotique ($t \geq t_{1.3}$) de double intégration (Eqs. III-77a, b et c).
- Solution de GREEN et AMPT (Eq. III-84).
- Solution de PARLANGE (Eq. III-85).

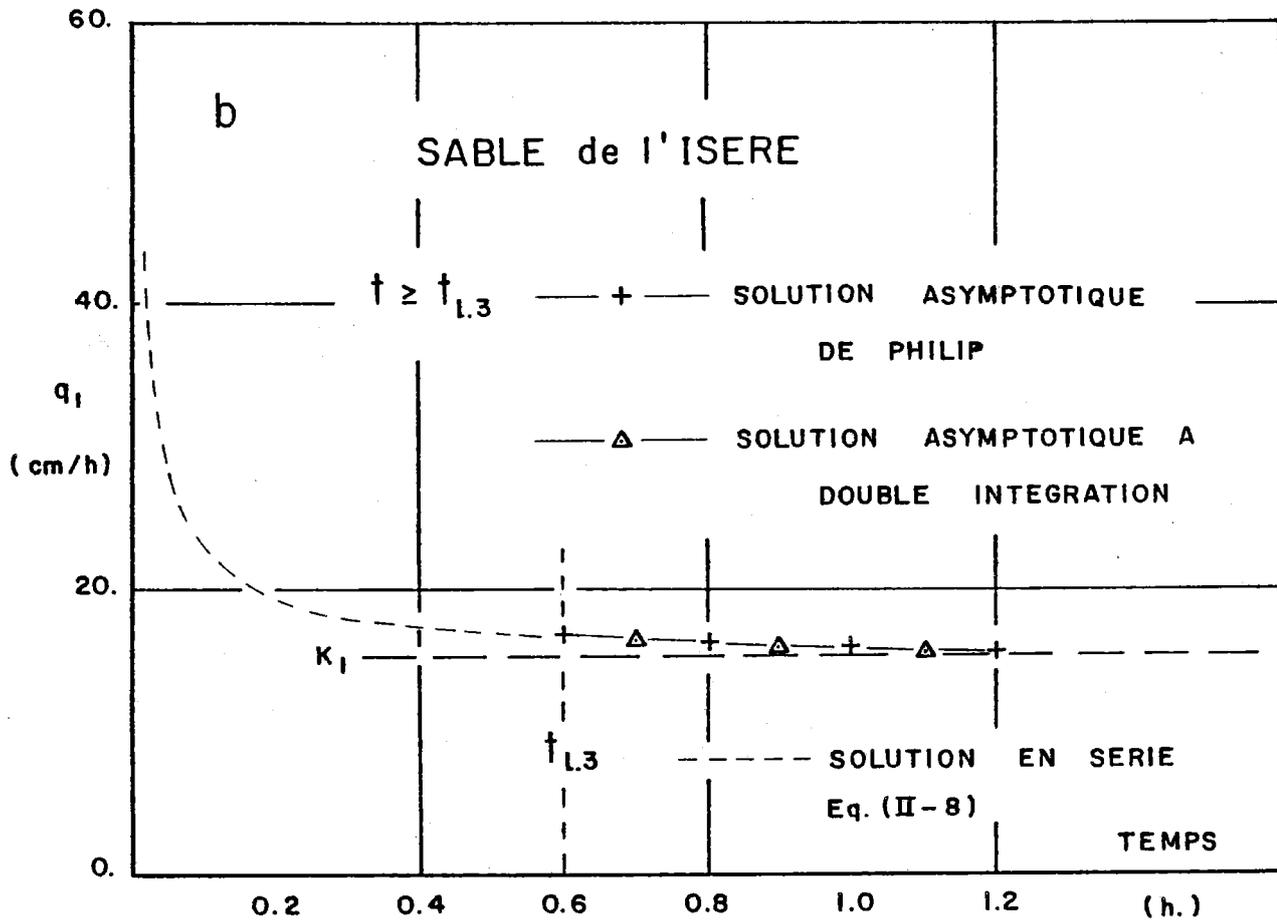


Figure III-34 b - L'évolution en fonction du temps du flux (q_1) calculée avec deux approches différentes :

- Solutions en série ($t \leq t_{1.3}$) et asymptotique ($t \geq t_{1.3}$) de PHILIP (Eqs. II-8 et III-58).
- Solutions en série ($t \leq t_{1.3}$) et asymptotique ($t \geq t_{1.3}$) de double intégration (Eq. III-75).

La figure (III-35) montre l'évolution des profils hydriques calculés d'une part avec la solution en série ($t < 0.6$ h), et d'autre part, avec la solution à double intégration ($t \geq 0.6$ h). Le nombre de pas d'intégration utilisé était $N = 300$. La solution asymptotique de PHILIP n'est pas mise en oeuvre à cause de sa trop grande sensibilité au choix de ϵ .

Les profils calculés au temps $t = t_{1.3}$ avec d'une part la solution en série et d'autre part la solution "D.I." donnent un très bon accord. Ceci met en évidence la validité de l'hypothèse $F_{PH}(\theta) = \oplus$ (Eq. III-60) utilisée pour le développement de la solution à double intégration.

D'autre part la vérification du bilan de masse entre les volumes stockés (par unité de surface) et les valeurs de $I(t)$ calculées avec l'expression (III-77) : $BM < 0.9$ % (Eq. III-88) ne montre qu'une très faible erreur de positionnement de 0.8 cm au maximum.

5.5 - Conclusions

Afin de décrire le phénomène d'infiltration au-delà de la limite d'applicabilité de la solution série proposée par PHILIP, deux approches différentes de la solution asymptotique ont été utilisées. La précision de chaque méthode étant difficile à évaluer en termes absolus, les résultats des deux solutions sont comparés mutuellement.

Pour les deux sols, les valeurs de $I(t)$ calculées par la solution asymptotique de PHILIP, sont quasiment identiques à celles obtenues avec la solution "D.I.". Dès lors, l'hypothèse empirique introduite pour approcher l'évolution du flux par une expression exponentielle semble être justifiée sur l'intervalle du temps $[t_{1.3}, \infty]$. Par contre, en ce qui concerne le calcul des profils hydriques, la solution de PHILIP génère des erreurs importantes au niveau de la conservation de la masse.

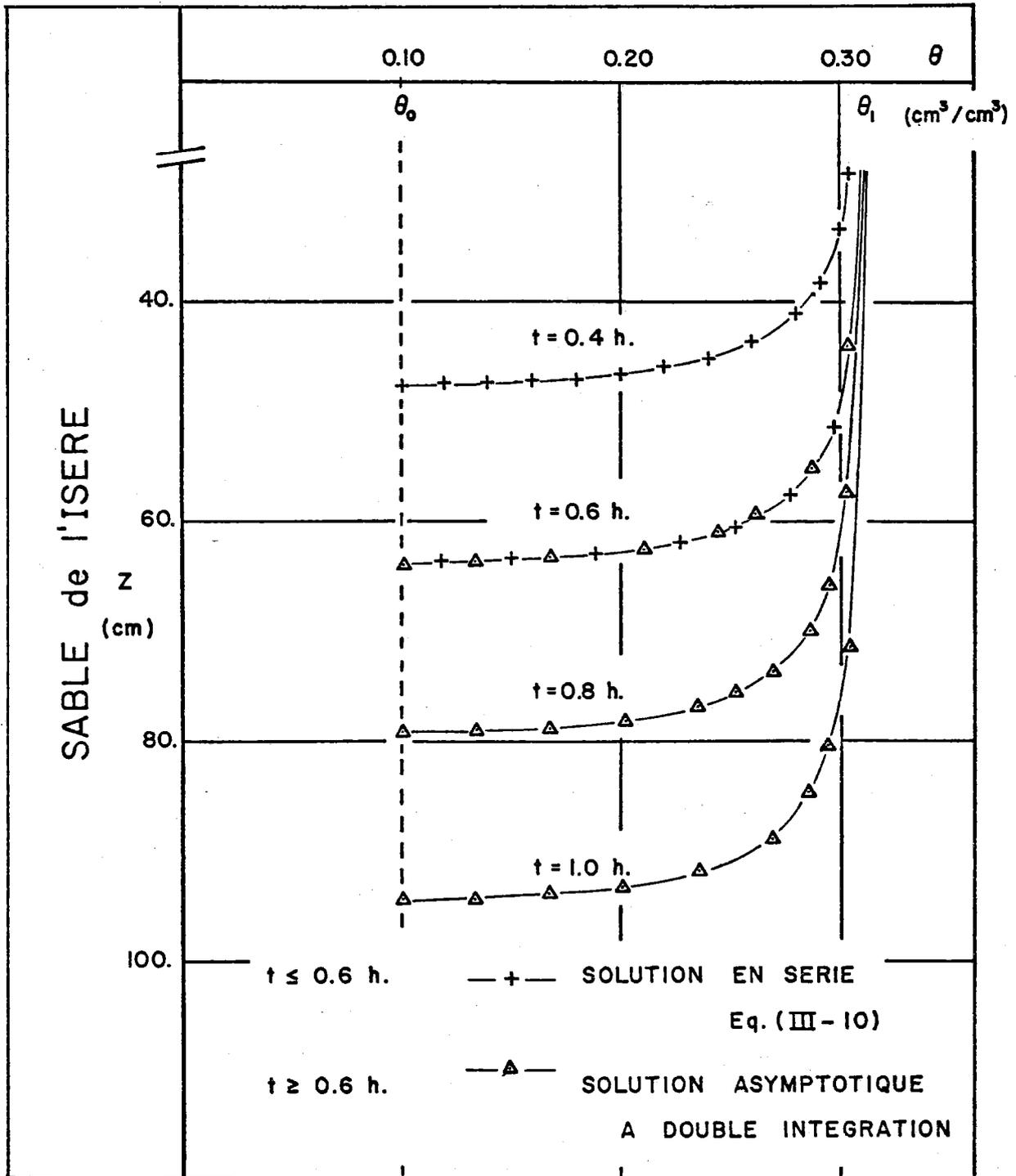


Figure III-35 : Les profils hydriques calculés pour différents temps avec deux approches différentes :

- Solution en série de PHILIP (Eq. III-10) pour $t = 0.4$ h et $t = 0.6$ h.
- Solution asymptotique de double intégration (Eq. III-62) pour $t = 0.6$ h, $t = 0.8$ h et $t = 1.0$ h.

La deuxième solution à double intégration est une méthode déterministe. Pour les deux sols, le bilan de la masse est satisfait à 0.9 % près. Au temps de passage $t = t_{1.3}$, les profils hydriques calculés d'une part par la solution en série de PHILIP et d'autre part par la solution "D.I." sont identiques. Cela justifie pleinement l'expression $F_{PH}(\theta) = \textcircled{H}$ introduite comme paramètre de forme dans la solution "D.I."

A la faveur de ces résultats cette dernière solution sera retenue dans la suite.

III.6 - CONCLUSIONS

La solution en série de PHILIP (1957a, b et c) étant retenue comme meilleure approche quasi-analytique pour résoudre le problème d'infiltration sous condition de concentration, nous avons testé dans ce chapitre III les différentes limitations de la méthode en termes des erreurs d'intégration, de troncature et de convergence.

L'analyse faite pour deux sols très différents, permet de dégager les conclusions suivantes :

- pour le calcul des intégrales qui déterminent les termes successifs de la série, la procédure d'intégration trapézoïdale est suffisamment précise. Le nombre de pas d'intégration $N = 250$ (Eq. III-13) peut être considéré comme point de fonctionnement optimal en termes de précision et de temps de calcul. Elle conduit à une erreur d'intégration relative inférieure à 0.7 % sur la lame d'eau infiltrée, $I(t)$, et le positionnement des profils hydriques.

- le choix du nombre de termes de la série (M) dépend de l'intervalle du temps de simulation. Limitant le domaine d'applicabilité de la solution à $t \leq t_{\text{grav}}$ (Eq. II-9), l'utilisation d'une série avec quatre termes ($M=4$) génère une erreur de troncature bien inférieure au seuil de précision fixé par l'erreur d'intégration. Toutefois, l'augmentation du

domaine d'applicabilité de la solution jusqu'au temps $t = t_{1,3}$, nécessite la mise en oeuvre d'un terme supplémentaire ($M=5$) afin d'assurer la même précision.

- L'erreur globale induite par la solution en série par rapport à la solution "réelle" peut s'écrire sous la forme :

$$\sqrt{(E^*_{I}[I])^2 + (E^*_{T1}[I])^2} \quad (\text{III-89})$$

ce qui donne pour la solution en série de PHILIP, avec cinq termes (et $N=250$), tout de même une erreur totale de 0.9 %.

- le rayon de convergence de la solution en série limite le champ d'applicabilité à un temps limite. Cette valeur n'étant pas accessible rigoureusement, différentes estimations ont été développées. Parmi celle-ci, la valeur $t = t_{1,3}$ (Eq. III-50) obtenue par majoration de la solution en série par une série géométrique, conduit à l'estimation la plus précise de ce temps limite. A titre d'exemple, pour le Sable de l'Isère, elle augmente de 50 % le domaine d'applicabilité de la solution quasi-analytique par rapport au temps $t = t_{\text{grav}}$ proposé par PHILIP (1969).

- au-delà du temps limite, il convient d'utiliser une solution asymptotique convergente. L'approche la plus appropriée semble être la solution à double intégration ("D.I."). Cette méthode déterministe permet de calculer les valeurs de $I(t)$ et de $z(\theta, t)$ avec une précision tout à fait comparable à celle de la solution en série : l'erreur sur le bilan de la masse ne dépasse pas 0.9 %.

Compte-tenu de ces résultats, nous préconisons comme solution "optimale" l'ensemble suivant :

- pour $t \leq t_{1,3}$, la solution en série de PHILIP (Eq. III-I) avec cinq termes ($M=5$) où le calcul des différents coefficients de la série est effectué avec une procédure d'intégration trapézoïdale utilisant :
 $\Delta\theta = (\theta_1 - \theta_0)/250$ comme pas d'intégration ;

- pour $t \geq t_{1.3}$, la solution asymptotique à double intégration "D.I." constituée de l'ensemble des équations (III-61), (III-75) et (III-77), où le paramètre de calage d_4 est déterminé à partir de la valeur $I(t_{1.3})$ obtenue avec la solution en série.

Dans la suite (Chapitre IV), cette combinaison servira de référence dans l'analyse de différentes solutions numériques du problème de l'infiltration.

LES SOLUTIONS NUMERIQUES

CHAPITRE IV

RAPPELS THEORIQUES DES SOLUTIONS NUMERIQUES

Les solutions quasi-analytiques analysées dans les chapitres précédents ne sont valables uniquement que pour des conditions initiales et aux limites très particulières. Toutefois, comme le montre l'expérience, ces conditions sont rarement rencontrées dans la pratique. Dans le cas général, il convient alors de chercher des solutions numériques du problème de l'infiltration.

Presque tous les schémas numériques proposés dans la littérature sont fondés sur les différences finies. Ils diffèrent dans le choix du modèle de départ (Eqs. I-13, I-14 et I-16) et dans la manière dont les non-linéarités de $K(h)$ et $C(h)$ sont traitées. Une comparaison directe de ces schémas et de leurs performances s'avère quasiment impossible, car ils ont été appliqués ou testés sur des problèmes très différents.

Ainsi, nous nous proposons d'étudier les performances de schémas existants ou mis au point par nos soins en comparant d'une manière systématique la solution numérique avec la solution quasi-analytique développée dans le chapitre III afin d'essayer de dégager un meilleur schéma (s'il existe). A ce niveau, il convient de noter que les principaux résultats de cette analyse ont fait l'objet d'une publication sous la forme d'un livre (VAUCLIN et al., 1979).

Cette étude étant très laborieuse, l'analyse ne sera effectuée que sur un des deux sols : le Yolo Light Clay. Pour ne pas restreindre ensuite la généralité des résultats, on considèrera les variables descriptives des équations de départ sous une forme adimensionnelle.

IV.1 - EQUATIONS DE TRAVAIL

1.1 - Ecriture adimensionnelle

Les équations de base développées dans le chapitre I peuvent être écrites sous forme adimensionnelle en effectuant la transformation affine suivante :

$$z^* = \frac{z}{L} \quad ; \quad t^* = \frac{t}{T}$$

et : (IV-1)

$$h^* = \frac{h - h_o}{h_1 - h_o}$$

où L et T sont respectivement les échelles des longueurs et des temps définies par :

$$L = h_1 - h_o \quad \text{et} \quad T = \frac{(h_1 - h_o)(\theta_1 - \theta_o)}{K_S} \quad \text{(IV-2)}$$

h_1 et h_o sont deux valeurs particulières de la pression limitant la gamme de variation de la pression pendant l'essai ; θ_1 et θ_o sont les teneurs en eau correspondant à h_1 et h_o ; K_S est la perméabilité à saturation naturelle.

L'équation de RICHARDS (Eq. I-13) se normalise alors sous la forme :

$$C^*(h) \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left[K^*(h) \cdot \left(\frac{\partial h^*}{\partial z^*} - 1 \right) \right] \quad \text{(IV-3)}$$

avec :

$$C^*(h) = \left(\frac{h_1 - h_o}{\theta_1 - \theta_o} \right) \cdot C(h) \quad \text{(IV-4)}$$

et :

$$K^*(h) = \frac{K(h)}{K_S} \quad (IV-5)$$

De la même manière, l'équation décomposée (Eq. I-14) peut être écrite :

$$C^*(h) \frac{\partial h^*}{\partial t} = K^*(h) \cdot \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}} + \frac{dK^*}{dz^*} \cdot \left(\frac{\partial h^*}{\partial z} - 1 \right) \quad (IV-6)$$

et l'équation de KIRCHHOFF (Eq. I-16) devient :

$$\frac{C^*(h)}{K^*(h)} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 U^*}{\partial z^{*2}} - \frac{1}{K^*} \cdot \frac{dK^*}{dh^*} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial z^*} \quad (IV-7)$$

Dans la suite de l'étude, ces trois formalismes seront utilisés comme les équations de départ notées respectivement : modèles LOC (bilan local), DEC (décomposé) et KIR (KIRCHHOFF).

Utilisant les mêmes conditions initiales et aux limites qui ont été choisies précédemment pour la solution analytique (Eq. III-11), elles s'écrivent :

$$\begin{array}{lll} z^* = 0 & t^* \geq 0 & h^* = 1 \\ z^* \geq 0 & t^* = 0 & h^* = 0 \end{array} \quad (IV-8)$$

où les valeurs de h_1 et h_0 correspondent respectivement aux teneurs en eau $\theta_1 = 0.4950$ et $\theta_0 = 0.2376$.

1.2 - Grille de discrétisation

Pour les solutions numériques on a fait appel à une grille de discrétisation régulière avec le pas d'espace défini par :

$$\Delta z^* = z_{i+1}^* - z_i^* \quad (IV-9)$$

et le pas de temps par :

$$t^* = t^{*j+1} - t^{*j} \quad (\text{IV-10})$$

où "i" et "j" correspondant respectivement aux indices de l'espace et du temps.

Bien que des pas de temps et d'espace très petits permettent en théorie de s'assurer de la convergence de la solution numérique vers la solution exacte, les résultats peuvent néanmoins être obérés par l'accumulation des erreurs d'arrondis. Il est donc nécessaire d'estimer les dimensions minimum de la grille de discrétisation, en-deçà desquelles il serait illusoire de descendre pour améliorer la précision des résultats numériques.

Considérons le rapport entre le pas de temps (Δt^*) et le pas d'espace (Δz^*) par :

$$M^* = \frac{\Delta t^*}{\Delta z^{*2}} \quad (\text{IV-11})$$

L'étude faite sur un problème linéaire pour lequel on dispose de la solution analytique (VAUCLIN et al., 1979) montre en effet qu'en dessous $M^* = 0.25$ la convergence de la solution numérique n'est plus assurée en raison de l'accumulation des erreurs d'arrondis liées à l'utilisation de l'ordinateur. Il est bien entendu que cette valeur de M^* dépend de la machine utilisée (IBM 360/67) et de la précision choisie pour les calculs (précision standard).

Pour l'analyse du cas non linéaire, nous avons retenu le seuil $M^* \geq 0.5$ en remarquant qu'il ne servirait à rien de prendre des valeurs de M^* inférieures car le nombre d'opération à effectuer est encore plus élevé que dans le cas linéaire.

IV.2 - SCHEMAS DE DISCRETISATION

2.1 - Problèmes de la mise en oeuvre

Le problème à résoudre se ramène, d'un point de vue formel, à trouver par intégration numérique de l'équation du transport de l'eau, la distribution de pression dans un milieu poreux, dont on connaît les relations $K^*(h)$ et $C^*(h)$ pour des conditions initiales et aux limites définies (Eq. IV-8).

Ainsi, l'intégration de l'équation (IV-3) entre les instants t^* et $t^* + \Delta t^*$, sur le segment $z^* - \Delta z^*/2$ et $z^* + \Delta z^*/2$, où Δt^* et Δz^* sont respectivement les pas de temps et d'espace conduit à :

$$\int_{t^*}^{t^* + \Delta t^*} \left[\int_{z^* - \Delta z^*/2}^{z^* + \Delta z^*/2} C^* \frac{\partial h^*}{\partial t^*} dz^* \right] dt^* = \quad (IV-12)$$

$$\int_{t^*}^{t^* + \Delta t^*} \left\{ \int_{z^* - \Delta z^*/2}^{z^* + \Delta z^*/2} \left[K^* \left(\frac{\partial h^*}{\partial z^*} - 1 \right) \right] dz^* \right\} dt^*$$

$$\int_{z^* - \Delta z^*/2}^{z^* + \Delta z^*/2} \left[\int_{t^*}^{t^* + \Delta t^*} C^* \frac{\partial h^*}{\partial t^*} dt^* \right] dz^* = \quad (IV-13)$$

$$\int_{t^*}^{t^* + \Delta t^*} \left[F^*(z^* + \Delta z^*/2) - F^*(z^* - \Delta z^*/2) \right] dt^*$$

où :

$$F^*(z^*) = K^* \cdot \left(\frac{\partial h^*}{\partial z} - 1 \right) \quad (IV-14)$$

En appliquant le théorème de la moyenne, l'équation (IV-13) s'écrit :

$$\int_{z^* - \Delta z^*/2}^{z^* + \Delta z^*/2} \bar{C}^* \left[h^*(t^* + \Delta t^*) - h^*(t^*) \right] dz^* = \Delta t^* \left\{ \sigma \left[F^*(z^* + \Delta z^*/2) - F^*(z^* - \Delta z^*/2) \right]_{t^* + \Delta t^*} + (1 - \sigma) \cdot \left[F^*(z^* + \Delta z^*/2) - F^*(z^* - \Delta z^*/2) \right]_{t^*} \right\} \quad (IV-15)$$

où \bar{C}^* est une valeur prise par la fonction $C^*(h^*)$ sur le segment $[t^*, t^* + \Delta t^*]$ et σ est un paramètre compris entre 0 et 1.

On peut remarquer que le premier membre de l'équation (IV-15) représente la variation de volume d'eau dans le volume $[z^* - \Delta z^*/2, z^* + \Delta z^*/2]$ entre les instants t^* et $t^* + \Delta t^*$. Les fonctions $F^*(z^* - \Delta z^*/2)$ et $F^*(z^* + \Delta z^*/2)$ représentent au signe près les flux entrant (q_e^*) et sortant (q_s^*) du volume considéré. Ainsi l'équation (IV-15) peut encore s'écrire :

$$[V_w^*]_{t^*}^{t^* + \Delta t^*} = \Delta t^* \left[\sigma \cdot (q_e^* - q_s^*)_{t^* + \Delta t^*} + (1 - \sigma) \cdot (q_e^* - q_s^*)_{t^*} \right] \quad (IV-16)$$

L'équation (IV-16) qui exprime la loi de conservation de la masse met en évidence, par son formalisme, les problèmes les plus importants que pose l'intégration numérique de l'équation (IV-15).

i) - Choix du paramètre σ

La valeur du paramètre σ est fixée par l'utilisateur au mieux de son intérêt. On notera que :

- les schémas explicites correspondent à $\sigma = 0$
- les schémas totalement implicites correspondent à $\sigma = 1$
- les schémas implicites de type CRANK-NICOLSON correspondent à $\sigma = 1/2$.

ii) - Choix de la valeur de \bar{C}^* : problème de linéarisation

Dans l'utilisation du théorème de la moyenne, \bar{C}^* est la valeur prise par $C^*(h)$ à un instant $\bar{t}^* \in [t^*, t^* + \Delta t^*]$ fixé par l'utilisateur.

iii) - Pour les schémas implicites, choix des valeurs de $K^*(h)$ au temps $t^* + \Delta t^*$: problème de linéarisation

Les schémas implicites conduisent à des systèmes d'équations qu'il convient de linéariser pour pouvoir les résoudre. Là encore, l'utilisateur a plusieurs possibilités à sa disposition et il doit effectuer un choix avec un maximum d'objectivité.

iv) - Choix des valeurs de $K^*(h)$ aux points $z^* + \Delta z^*/2$ et $z^* - \Delta z^*/2$: problème de pondération

Le calcul des fonctions $F^*(z^* - \Delta z^*/2)$ et $F^*(z^* + \Delta z^*/2)$ fait appel aux valeurs de la conductivité hydraulique aux points correspondants comme le montre l'équation (IV-14). En ces points la solution numérique n'est pas calculée, et doit donc être estimée.

v) - Choix du modèle de départ

Il va de soi que les quatre points précédents mis en évidence sur le modèle (Eq. IV-3), interviennent également dans les équations (IV-6) et (IV-7).

Selon les différentes combinaisons entre les cinq options retenues, il existe une grande diversité des schémas numériques de discrétisation.

vi) - De plus, il convient d'ajouter le problème plus général de la convergence de l'opérateur discret vers l'opérateur différentiel.

En toute rigueur, il convient de s'assurer que la solution de l'opérateur discret correspond à la solution du problème posé. D'après le théorème d'équivalence de LAX, il est nécessaire et suffisant que :

- le problème différentiel soit bien posé : pour une équation parabolique cela revient à se donner une condition initiale dans tout le domaine et des conditions sur les frontières du domaine pendant toute la durée du phénomène à étudier,
- l'opérateur discret soit consistant à l'opérateur différentiel,
- le schéma discret soit stable.

Pour une équation non linéaire, la stabilité est très difficile à prouver mathématiquement et on est réduit à une étude pseudo-empirique fondée sur la comparaison entre solutions numériques et analytiques quand cela est possible.

Nous présentons dans la suite les différents schémas de discrétisation pour chaque modèle.

2.2 - Schémas de discrétisation des différents modèles de départ

En premier lieu, les différents modes de linéarisation seront examinés en fonction du choix du modèle de départ et du paramètre σ (Paragraphe 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.3). En second lieu, le problème de la pondération sera analysé (Paragraphe 2.2.4). Les détails de calcul sont donnés dans l'annexe.

2.2.1 - Modèle du bilan local

Considérons l'opérateur discret suivant :

$$P_i(K^{*j}, h^{*j}) = \frac{1}{\Delta z^{*j}} \left[K_{i+1/2}^{*j} \left(\frac{h_{i+1}^{*j} - h_i^{*j}}{\Delta z^{*j}} - 1 \right) - K_{i-1/2}^{*j} \left(\frac{h_i^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{\Delta z^{*j}} - 1 \right) \right] \quad (IV-17)$$

La discrétisation de l'équation (IV-3) peut s'effectuer de différentes façons.

a) - Le schéma explicite ($\sigma = 0$) conduit à :

$$\bullet \quad C_i^{*j} \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = P_i(K_i^{*j}, h_i^{*j}) \quad (IV-18)$$

et la solution est donnée par la résolution de N équations indépendantes :

$$h_i^{*j+1} = h_i^{*j} + \frac{\Delta t^*}{C_i^{*j}} \cdot P_i(K_i^{*j}, h_i^{*j}) \quad i = 1, \dots, N \quad (IV-19)$$

où N est le nombre total de noeuds de calcul.

Ce schéma conditionnellement stable a notamment été utilisé par STAPLE (1966) pour calculer la distribution des teneurs en eau dans une colonne verticale de sol soumise à une infiltration suivie de la redistribution avec prise en compte des effets d'hystérésis. Ce mode est également employé par les utilisateurs de CSMP (Continuous System Simulation Language) (VAN DER PLOEG, 1974 ; WIERENGA et DE WIT, 1970 ; VAN KEULEN et VAN BEEK, 1971). Dans la suite, il sera appelé schéma LOC.A1.

• DU FORT et FRANKEL (1953) posent dans l'équation (IV-18) :

$$h_i^{*j} = 0.5 (h_i^{*j+1} + h_i^{*j-1})$$

Ce schéma explicite à pas multiples (LOC.A2) est inconditionnellement stable pour le cas linéaire. ROSEMA (1975) a utilisé un tel schéma pour résoudre les transferts couplés de masse et de chaleur, lors d'un processus d'évaporation.

b) - Le schéma totalement implicite ($\sigma = 1$) s'écrit :

$$\bar{C}_i^* \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = P_i(K_i^{*j+1}, h_i^{*j+1}) \quad (IV-20)$$

On constate qu'il fait intervenir les paramètres \bar{C}^* et K^* à des temps où ils ne sont pas connus, et il convient par conséquent d'effectuer une linéarisation.

● Une méthode simple, utilisée la première fois par LAASONEN (1949), consiste à considérer que les coefficients \bar{C}^* et K^* sont constants pendant un pas de temps de calcul et égaux à ceux calculés à la fin du pas de temps précédent. L'équation (IV-20) devient alors (LOC1.B) :

$$C_i^{*j} \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = P_i(K^{*j}, h_i^{*j+1}) \quad (\text{IV-21})$$

● En conservant K^* constant égal à K^{*j} on peut considérer les valeurs de \bar{C}_i^* dans l'intervalle $[t^*, t^* + \Delta t^*]$, le calcul se faisant alors suivant plusieurs possibilités :

i) - Les valeurs de \bar{C}_i^* sont considérées au temps $t^* + 1/2 \Delta t^*$:

- par une extrapolation linéaire dans le temps
(schéma LOC2.B) :

$$\bar{C}_i^* \equiv C_i^{*j+1/2} = 1.5 C_i^{*j} - 0.5 C_i^{*j-1} \quad (\text{IV-22})$$

- par l'utilisation de la relation fonctionnelle :

$$\bar{C}_i^* \equiv C^*(h_i^{*j+1/2}) \quad (\text{IV-23})$$

Dans ce dernier cas, les valeurs de $h_i^{*j+1/2}$ sont obtenues par la résolution de l'équation (IV-3) selon un schéma de type explicite, LOC3.B (Eq. IV-19) ou totalement implicite, LOC4.B (Eq. IV-20).

ii) - HANKS et BOWERS (1962) proposent de prendre (LOC5.B) :

$$\bar{C}_i^* = C^*(h_i^{*j+\omega}) \quad (\text{IV-24})$$

où $h_i^{*j+\omega} = \omega(h_i^{*j} - h_i^{*j-1}) + h_i^{*j}$ avec ω définie sur $[0.7, t/t+3.33]$.

A l'exception du dernier schéma, les autres n'ont pas été utilisés à notre connaissance pour résoudre des problèmes de transfert d'eau dans le sol.

● En conservant \bar{C}^* constant et égal à C^{*j} on peut prendre les valeurs de K^* dans l'intervalle $[t^*, t^* + \Delta t^*]$ selon les possibilités suivantes :

i) - Les valeurs de K^* sont considérées au temps $t^* + \frac{1}{2} \Delta t^*$. Il convient alors d'en effectuer une estimation pour pouvoir calculer la solution au temps $t^* + \Delta t^*$. On a retenu les méthodes suivantes :

- estimation par extrapolation (LOC6.B) :

$$K_{i+\frac{1}{2}}^{*j+\frac{1}{2}} = 1.5 K_{i+\frac{1}{2}}^{*j} - 0.5 K_{i+\frac{1}{2}}^{*j-1} \quad (\text{IV-25})$$

- estimation par prédiction explicite (LOC7.B) ou implicite (LOC8.B) de $h_i^{j+\frac{1}{2}}$, d'où les valeurs correspondantes de $K_i^{*j+\frac{1}{2}} = K^*(h_i^{j+\frac{1}{2}})$.

ii) - Les valeurs de K^* sont considérées au pas de temps $t^* + \Delta t^*$. Leur estimation est faite par extrapolation linéaire à partir des valeurs aux temps t^* et $t^* - \Delta t^*$ (LOC9.B).

c) - Les schémas de type CRANK-NICOLSON ($\sigma = \frac{1}{2}$) s'écrivent :

$$\bar{C}_i^* \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = \frac{1}{2} \cdot [P_i(K^{*j+1}, h^{*j+1}) + P_i(K^{*j}, h^{*j})] \quad (\text{IV-26})$$

La linéarisation de ces équations peut s'effectuer de différentes manières.

● Pour étudier l'infiltration d'eau dans une colonne verticale, HANKS et BOWERS (1962) proposent :

$$K_i^{*j+1} = K_i^{*j}$$

$$\bar{C}_i^* = C_i^{*j+\omega}$$

Ainsi, l'équation (IV-26) s'écrit (LOC.C) :

$$C_i^{*j+\omega} \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = P_i(K^{*j}, \bar{h}^*) \quad (IV-27)$$

avec : $\bar{h}^* = 0.5 (h_i^{*j+1} + h_i^{*j})$

● Pour résoudre un problème d'écoulement dans les zones saturée et non saturée, PIKUL et al. (1974) utilisent l'équation (IV-26) avec la linéarisation suivante :

$$K^{*j+1} = K^{*j+\frac{1}{2}}$$

$$\bar{C}_i^* = C_i^{*j+\frac{1}{2}}$$

d'où :

$$C_i^{*j+\frac{1}{2}} \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = 0.5 [P_i(K^{*j+\frac{1}{2}}, h_i^{*j+1}) + P_i(K^{*j}, h_i^{*j})] \quad (IV-28)$$

L'utilisation de ce schéma référencé LOC.D nécessite la détermination de $C_i^{*j+\frac{1}{2}}$ et $K^{*j+\frac{1}{2}}$ qui est obtenue d'après PIKUL et al., par la résolution totalement implicite de l'équation (IV-3) selon le schéma de discrétisation suivant :

$$C_i^{*j} \frac{h_i^{*j+\frac{1}{2}} - h_i^{*j}}{\Delta t^*/2} = P_i(K^{*j}, h_i^{*j+\frac{1}{2}}) \quad (IV-29)$$

Cela correspond à un schéma de type "predictor-corrector" dû à DOUGLAS et JONES (1963).

● D'autres auteurs linéarisent l'équation (IV-26) de la manière suivante :

$$K^{*j+1} = K^{*j+\frac{1}{2}} ; K^{*j} = K^{*j+\frac{1}{2}} ; \bar{C}_i^* = C_i^{*j+\frac{1}{2}}$$

Cela revient au schéma suivant (LOC.E) :

$$C_i^{*j+1/2} \cdot \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = P_i(K^{*j+1/2}, h^*) \quad (IV-30)$$

L'estimation des coefficients se fait de différentes manières :

- La linéarisation s'effectue par une extrapolation linéaire dans le temps des coefficients C^* et K^* (LOC.E1) :

$$C_i^{*j+1/2} = 1.5 C_i^{*j} - 0.5 C_i^{*j-1} \quad (IV-31)$$

$$K^{*j+1/2} = 1.5 K^{*j} - 0.5 K^{*j-1}$$

- RUBIN et STEINHARDT (1963) effectuent une extrapolation linéaire dans le temps de la fonction décrivant le phénomène à étudier. Dans notre cas, cela revient à poser (LOC.E2) :

$$h_i^{*j+1/2} = 1.5 h_i^{*j} - 0.5 h_i^{*j-1} \quad (IV-32)$$

d'où les valeurs correspondantes de $C_i^{*j+1/2}$ et $K^{*j+1/2}$.

- RUBIN (1966) propose la prédiction de $h_i^{*j+1/2}$ par résolution explicite de l'équation (IV-3) (LOC.E3) selon l'équation (IV-18).

- Il est possible d'envisager également la prédiction implicite de $h_i^{*j+1/2}$ (LOC.E4) selon le schéma de DOUGLAS-JONES donné à l'équation (IV-29).

- WHISLER et KLUTE (1965) supposent que les valeurs $C_i^{*j+1/2}$ et $K^{*j+1/2}$ sont les moyennes arithmétiques des valeurs prises aux temps t^* et $t^* + \Delta t^*$. Ainsi ils posent :

$$K^{*j+1/2} = 0.5 (K^{*j+1} + K^{*j}) ; C_i^{*j+1/2} = 0.5 (C_i^{*j+1} + C_i^{*j}) \quad (IV-33)$$

La résolution de ce schéma (LOC.E5) est obtenue par la méthode itérative des déplacements simultanés.

2.2.2 - Modèle décomposé

Considérons l'opérateur discret suivant :

$$Q_i(K^{*j}, h^{*j}) = K_i^{*j} \frac{h_{i+1}^{*j} - 2h_i^{*j} + h_{i-1}^{*j}}{\Delta z^{*2}} + \left(\frac{K_{i+1/2}^{*j} - K_{i-1/2}^{*j}}{\Delta z^{*}} \right) \cdot \left(\frac{h_{i+1}^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{2 \cdot \Delta z^{*}} - 1 \right) \quad (IV-34)$$

De la même façon que pour le modèle du bilan local, on peut résoudre l'équation (IV-6) par des schémas explicites, ou implicites.

a) - Le schéma explicite (DEC.A1) conduit à écrire :

$$C_i^{*j} \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^{*}} = Q_i(K^{*j}, h^{*j}) \quad (IV-35)$$

En posant $h_i^{*j} = 0.5 (h_i^{*j+1} + h_i^{*j-1})$ l'équation (IV-35) se ramène à un schéma de type DU FORT-FRANKEL (DEC.A2).

b) - Pour les schémas implicites, il est possible d'envisager les mêmes modes de discrétisation que ceux utilisés pour le modèle du bilan local. Cependant, compte-tenu des résultats obtenus et afin de ne pas trop alourdir l'étude, nous avons retenu les schémas suivants :

i) - Le schéma totalement implicite (DEC.B), dont la discrétisation est analogue à LOC.B (GAUDET, 1978) :

$$C_i^{*j} \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^{*}} = Q_i(K^{*j}, h^{*j+1}) \quad (IV-36)$$

ii) - Trois schémas de type CRANK-NICOLSON ($\sigma = \frac{1}{2}$) :

$$\bullet \quad C_i^{*j+\omega} \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^{*}} = Q_i(K^{*j}, h^{*j}) \quad (IV-37)$$

où $\bar{h}^* = 0.5 (h_i^{*j+1} + h_i^{*j})$. Ce modèle (DEC.C) est analogue à celui de HANKS et BOWERS (1962) pour le modèle du bilan local.

$$\bullet \quad C_i^{*j+1/2} \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = Q_i(K_i^{*j+1/2}, \bar{h}^*) \quad (\text{IV-38})$$

Dans ce cas, les coefficients $C_i^{*j+1/2}$ et $K_i^{*j+1/2}$ sont estimés par les relations $C_i^*(h_i^{*j+1/2})$ et $K_i^*(h_i^{*j+1/2})$. Les valeurs $h_i^{*j+1/2}$ sont calculées par deux procédures différentes :

- par une extrapolation linéaire selon l'équation (IV-32),
(DEC.E2)
- par une prédiction implicite selon le schéma DEC.B (DEC.E4).

Ce dernier schéma du type "prédicteur-corrector" est utilisé par MOLZ et REMSON (1970) pour simuler les transferts d'humidité dans un sol cultivé.

c) - LIAKOPOULOS (1966) utilise un schéma implicite (DEC.F) appliqué à l'équation (IV-6) pour résoudre un problème d'évaporation :

$$C_i^{*j} \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = K_i^{*j} \frac{h_{i+1}^{*j+1} - 2h_i^{*j+1} + h_{i-1}^{*j+1}}{\Delta z^{*2}} + \left(\frac{dK_i^{*j}}{dh_i^{*j}} \right) \cdot \left(\frac{h_{i+1}^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{2 \Delta z^*} \right) \cdot \left(\frac{h_{i+1}^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{2 \Delta z^*} - 1 \right) \quad (\text{IV-39})$$

2.2.3 - Modèle de KIRCHHOFF

Considérons les opérateurs discrets suivants :

$$V_i(K_i^{*j}, U_i^{*j}) = \frac{1}{K_i^{*j}} \cdot \left(\frac{dK}{dh} \right)_i^{*j} \cdot \frac{U_{i+1}^{*j} - U_{i-1}^{*j}}{2 \Delta z^*} \quad (\text{IV-40})$$

$$W_i(U_i^{*j}) = \frac{U_{i+1}^{*j} - 2 U_i^{*j} + U_{i-1}^{*j}}{\Delta z^{*2}} \quad (\text{IV-41})$$

Il est également possible d'appliquer les différents schémas proposés dans le modèle du bilan local. Cependant, on ne retiendra uniquement que les schémas suivants :

a) - Schéma explicite ($\sigma = 0$), KIR.A1 :

$$\frac{C_i^{*j}}{K_i^{*j}} \cdot \frac{U_i^{*j+1} - U_i^{*j}}{\Delta t^*} = V_i(K_i^{*j}, U_i^{*j}) + W_i(U_i^{*j}) \quad (\text{IV-42})$$

b) - Schéma totalement implicite ($\sigma = 1$), KIR.B :

$$\frac{C_i^{*j}}{K_i^{*j}} \cdot \frac{U_i^{*j+1} - U_i^{*j}}{\Delta t^*} = V_i(K_i^{*j}, U_i^{*j+1}) + W_i(U_i^{*j+1}) \quad (\text{IV-43})$$

c) - Schéma implicite de type CRANK-NICOLSON ($\sigma = \frac{1}{2}$), KIR.E :

$$\frac{C_i^{*j+\frac{1}{2}}}{K_i^{*j+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{U_i^{*j+1} - U_i^{*j}}{\Delta t^*} = V_i(K_i^{*j+\frac{1}{2}}, \bar{U}^*) + W_i(\bar{U}^*) \quad (\text{IV-44})$$

$$\text{avec } \bar{U}^* = 0.5 (U_i^{*j+1} + U_i^{*j})$$

Les coefficients C^* et K^* peuvent être estimés de différentes façons :

● Par une extrapolation linéaire dans le temps (KIR.E2) :

$$U_i^{*j+1} = 1.5 U_i^{*j} - 0.5 U_i^{*j-1}$$

● RUBIN (1966) propose la résolution explicite de l'équation (IV-7), KIR.E3 :

$$\frac{C_i^{*j}}{K_i^{*j}} \cdot \frac{U_i^{*j+1/2} - U_i^{*j}}{\Delta t^*/2} = V_i(K^{*j}, U^{*j}) + W_i(U^{*j}) \quad (IV-45)$$

Les valeurs de $U_i^{*j+1/2}$ permettent d'obtenir $h_i^{j+1/2}$ donc $C_i^{*j+1/2}$ et $K_i^{*j+1/2}$.

● On peut envisager la résolution implicite de l'équation (IV-7). Dans ce cas, on est amené à résoudre le schéma suivant (KIR.E4) :

$$\frac{C_i^{*j}}{K_i^{*j}} \cdot \frac{U_i^{*j+1/2} - U_i^{*j}}{\Delta t^*/2} = V_i(K^{*j}, U^{*j+1/2}) + W_i(U^{*j+1/2}) \quad (IV-46)$$

On peut constater qu'un grand nombre de ces schémas font intervenir les valeurs de la conductivité hydraulique aux points $z^* + \Delta z^*/2$ et $z^* - \Delta z^*/2$, c'est à dire aux points internodaux de calcul. Il est possible d'imaginer différents modes d'estimation de ces valeurs.

2.2.4 - Modes de pondération

La pondération relative à l'estimation dans l'espace des valeurs internodales de la conductivité hydraulique intervient uniquement dans les opérateurs discrets P_i et Q_i . Le modèle de KIRCHHOFF n'est pas affecté par ce problème.

Plusieurs modes peuvent être considérés :

i) - La méthode couramment utilisée (WHISLER et KLUTE, 1965 ; RUBIN, 1968 ; WHISLER et WATSON, 1968 ; PIKUL et al., 1974 ; VAUCLIN et al., 1976 ; GAUDET, 1978 ; HAVERKAMP et al., 1977) consiste à calculer les

valeurs $K_{i\pm\frac{1}{2}}^*$ par la moyenne arithmétique des conductivités aux noeuds (LOC.B1):

$$K_{i\pm\frac{1}{2}}^* = 0.5 (K_i^* + K_{i\pm 1}^*) \quad (\text{IV-47})$$

On retrouve également ce mode de calcul chez de nombreux utilisateurs du CSMP (WIERENGA et De WIT, 1970 ; BHUIYAN et al., 1971 ; VAN DER PLOEG, 1974 ; VAN KEULEN et VAN BEEK, 1971).

ii) - Dans leur étude de l'infiltration sous charge hydraulique positive, SMITH et WOOLHISER (1971) calculent les perméabilités intrinsèques internodales par la moyenne harmonique des valeurs prises aux noeuds. Par extension aux conductivités hydrauliques, on peut écrire (LOC.B2) :

$$K_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{2 \cdot K_i^* \cdot K_{i+1}^*}{K_i^* + K_{i+1}^*} \quad (\text{IV-48})$$

HANKS et BOWERS (1962) utilisent également cette méthode pour estimer la conductivité hydraulique à l'interface de deux milieux poreux différents constituant une colonne stratifiée.

iii) - Dans une étude comparative des différents modes de pondération, HAVERKAMP et VAUCLIN (1979) proposent la moyenne géométrique (LOC.B3) :

$$K_{i\pm\frac{1}{2}}^* = \sqrt{K_i^* \cdot K_{i\pm 1}^*} \quad (\text{IV-49})$$

iv) - Pour simuler l'écoulement simultané d'eau et d'air PHUC et MOREL-SEYTOUX (1972) supposent que si l'écoulement du fluide mouillant va dans le sens de i vers $i+1$ (c'est le cas de l'infiltration, avec l'axe Oz orienté positivement vers le bas), LOC.B4 :

$$K_{i+\frac{1}{2}}^* = K_i^* \quad ; \quad K_{i-\frac{1}{2}}^* = K_{i-1}^* \quad (\text{IV-50})$$

v) - VAN QUY (1976) suggère de corriger les valeurs précédentes (Eq. IV-50) en effectuant un développement limité de $K_{i\pm\frac{1}{2}}^*$ au voisinage du noeud i (LOC.B5) :

$$K_{i\pm\frac{1}{2}}^* = K_i^* \pm \frac{1}{2} \cdot \Delta z^* \cdot \left(\frac{\partial K}{\partial z}\right)_i^* \quad (\text{IV-51})$$

vi) - Pour améliorer la précision numérique de la solution d'un gisement pétrolier TODD et al. (1972) proposent une extrapolation spatiale des conductivités hydrauliques (LOC.B6) :

$$K_{i+\frac{1}{2}}^* = 1.5 K_i^i - 0.5 K_{i-1}^* ; \quad K_{i-\frac{1}{2}}^* = 1.5 K_{i-1}^* - 0.5 K_{i-2}^* \quad (\text{IV-52})$$

Ces différentes méthodes peuvent également être appliquées à la fonction $h_{i\pm\frac{1}{2}}$ qui compte-tenu de la relation $K^*(h)$ permettront d'obtenir la valeur $K_{i\pm\frac{1}{2}}^*$ correspondante. Nous avons retenu trois méthodes seulement :

vii) - La moyenne arithmétique (LOC.B7) :

$$K_{i\pm\frac{1}{2}}^* = K^* (0.5 [h_i + h_{i\pm 1}]) \quad (\text{IV-53})$$

Cette méthode a été utilisée par RUBIN (1967).

viii) - La moyenne harmonique (LOC.B8) :

$$K_{i\pm\frac{1}{2}}^* = K^* \left(\frac{2 \cdot h_i \cdot h_{i\pm 1}}{h_i + h_{i\pm 1}} \right) \quad (\text{IV-54})$$

ix) - La moyenne géométrique (LOC.B9) :

$$K_{i\pm\frac{1}{2}}^* = K^* (\sqrt{h_i \cdot h_{i\pm 1}}) \quad (\text{IV-55})$$

IV.3 - CONCLUSIONS

Cette étude bibliographique montre l'extrême diversité des schémas numériques tant dans les choix du modèle de départ que dans les modes de linéarisation et de pondération. Il convient donc d'en faire l'analyse afin de dégager leurs avantages et inconvénients respectifs, exprimés en terme de précision, degré de faisabilité et coût économique.

L'étude de la précision des schémas revient à une étude de la convergence des différentes solutions numériques vers la solution exacte.

Comme critère de précision, nous avons retenu l'évolution de l'écart :

$$E_N[h^*] = h_A^*(z,t) - h_i^{*j} \quad (\text{IV-56})$$

où $h_A^*(z,t)$ et h_i^{*j} sont respectivement les valeurs quasi-analytiques et numériques de la pression adimensionnelle calculées à la profondeur $z = i \cdot \Delta z^*$ et au temps $t = j \cdot \Delta t^*$.

L'expression (IV-56) nécessite la connaissance des valeurs de (h_A^*) aux noeuds de calcul de la solution numérique. Ces valeurs sont calculées par interpolation linéaire des profils de pression $z(h^*,t)$ déterminés à partir des profils hydriques $z(\theta,t)$ et de la relation $h(\theta)$ (Eq. I-17).

Le chapitre suivant porte sur l'analyse du problème de la convergence des différents modèles de départ donnés précédemment.

CHAPITRE V

ETUDE DE CONVERGENCE DES SOLUTIONS NUMERIQUES

La précision de la solution numérique du problème de l'infiltration exprimée par l'écart $E_N[h^*]$ (Eq. IV-56) est conditionnée non seulement par les erreurs de discrétisation $E_D[h^*]$ liées aux expressions des dérivées spatiales et temporelles en différences finies et dont les valeurs numériques sont affectées par le mode de linéarisation et de pondération, mais aussi par le choix de l'équation de départ. Une analyse globale de ces erreurs qui serait fondée sur les développements en série de TAYLOR s'avère très complexe et ne permet pas toujours d'expliquer le comportement d'une solution numérique. En effet, les erreurs de discrétisation de deux (ou plusieurs) schémas peuvent être formellement identiques mais numériquement différentes. Devant la complexité d'une telle analyse, nous avons décidé de faire une étude fractionnée en examinant successivement les modes de pondération et de linéarisation des différents modèles de départ.

V.1 - INFLUENCE DU MODE DE PONDERATION

L'examen des différents schémas de discrétisation permet de distinguer 3 classes de modèles, vis-à-vis du mode de pondération :

- les modèles faisant intervenir uniquement les conductivités internodales (modèles du bilan local)
- les modèles faisant appel à la fois aux conductivités nodales et inter-nodales (modèles décomposés)
- les modèles où seules les conductivités nodales apparaissent (DEC.F, KIR.B).

L'analyse successive de ces trois catégories va permettre de dégager l'influence de la pondération sur la précision de la solution approchée.

Cependant, dans un souci de concision, nous développons pour le schéma LOC1.B la méthode d'analyse utilisée et nous nous contentons d'indiquer les résultats obtenus pour les autres modèles. Les principaux résultats de cette étude ont fait l'objet d'un article (HAVERKAMP et VAUCLIN, 1979).

1.1 - Etude des schémas LOC1.B

La méthode de linéarisation utilisée est la même pour tous les schémas : les coefficients C^* et K^* sont supposés constants durant un pas de temps et égaux aux valeurs calculées à la fin du pas de temps précédent. Tous les systèmes linéaires sont résolus par la méthode d'élimination directe suivant l'algorithme de THOMAS (REMSON, 1971) : le pas d'espace utilisé est $\Delta z^* = 4.10^{-3}$ (soit $\Delta z = 2.52$ cm pour le Yolo Light Clay) et le pas de temps est fixé par la relation $M^* = \Delta t^* / \Delta z^{*2} = 0.5$.

On est conduit à distinguer deux phases : la cinétique d'humidification des différentes sections qui correspond au passage du front d'infiltration et le comportement asymptotique lié à l'établissement d'un régime d'écoulement permanent sur une profondeur de sol de plus en plus importante au fur et à mesure que se poursuit l'infiltration.

1.1.1 - Cinétique d'humidification

On trouvera sur les figures (V-1a et b) l'évolution en fonction du temps des écarts $E_N[h^*]$ (Eq. IV-56) entre la solution quasi-analytique et les solutions numériques des neuf schémas de discrétisation du modèle LOC1.B : LOC1.B1/B2/B3/B4/B5/B6/B7/B8/B9 (Annexe) pour trois cotes différentes : $z^* = 0.004, 0.04$ et 0.06 .

Les erreurs de discrétisation $E_D[h^*]$ des différents schémas sont obtenues par le développement en série de TAYLOR de la solution discrète ; elles sont composées de plusieurs termes ($R''m''$) relatifs au pas de temps ou au pas d'espace (Tableau V-1).

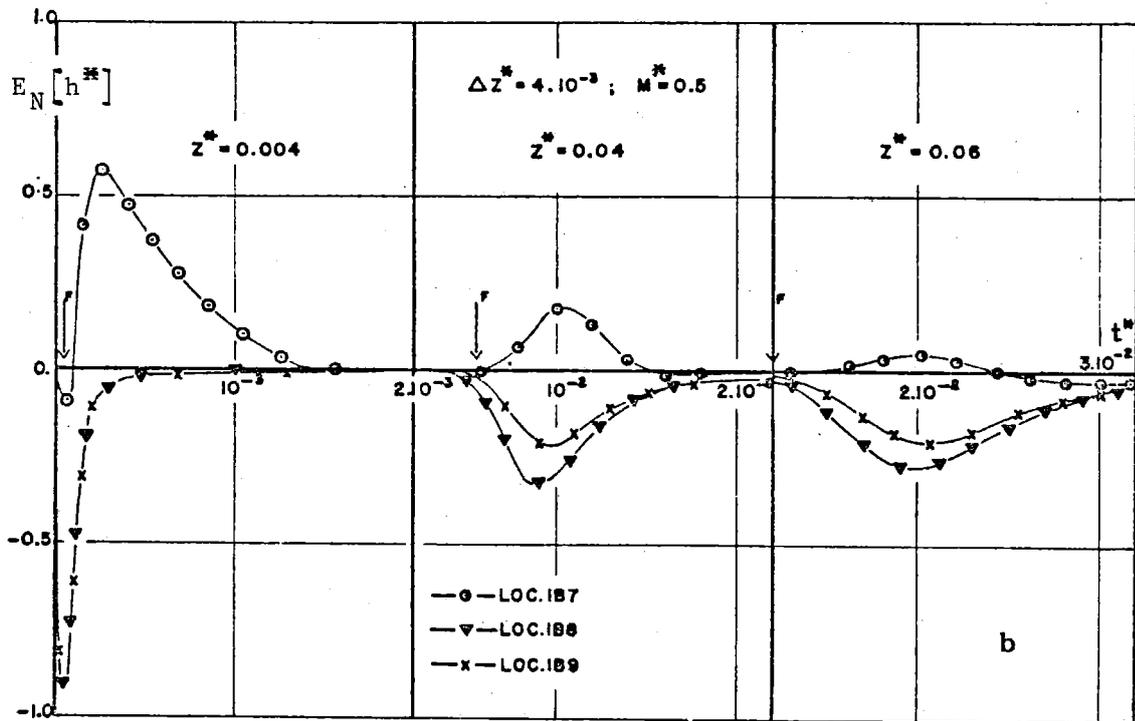
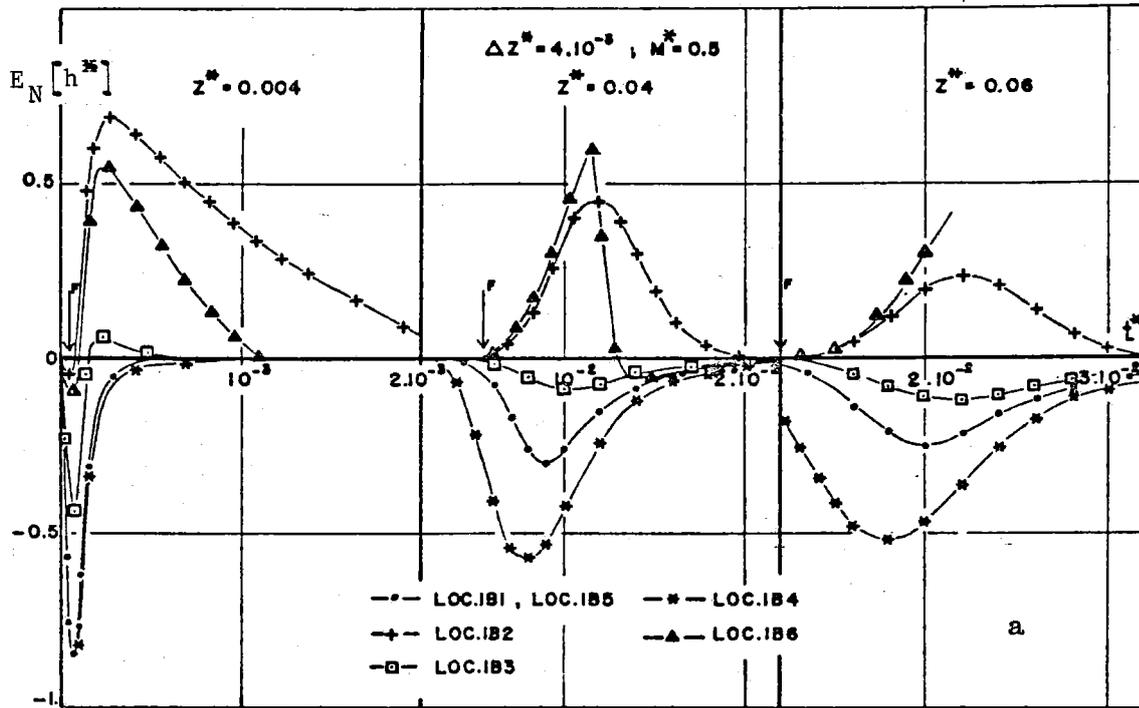


Figure V-1 : Evolution en fonction du temps des écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques obtenues pour les différents modes de pondération : cinétique d'humidification des cotes $z^* = 0.004, 0.04$ et 0.06 .

	Δt^*	Δt^{*2}	Δz^*	Δz^{*2}	OBSERVATIONS
LOC1.81	R1	R13	0	R27	$K_{N_{i\pm 1/2}}^* = K_{R_{i\pm 1/2}}^* + 1/8 \cdot \Delta z^{*2} \cdot \frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} + 0 (\Delta z^{*4})$
LOC1.82	R1	R13	0	R28	$K_{N_{i\pm 1/2}}^* = K_{R_{i\pm 1/2}}^* + 1/8 \cdot \Delta z^{*2} \cdot \frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} - 1/4 \frac{\Delta z^{*2}}{K_i^*} \cdot \left(\frac{\partial K^*}{\partial z^*}\right)^2 +$ $\pm 1/4 \frac{\Delta z^{*3}}{K_i^*} \left(\frac{\partial K^*}{\partial z^*}\right)^3 + 0 (\Delta z^{*4})$
LOC1.83	R1	R13	0	R28	$K_{N_{i\pm 1/2}}^* = K_{R_{i\pm 1/2}}^* + 1/8 \Delta z^{*2} \cdot \frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} - 1/8 \frac{\Delta z^{*2}}{K_i^*} \left(\frac{\partial K^*}{\partial z^*}\right)^2 \pm 1/16 \frac{\Delta z^{*3}}{K_i^*} \left(\frac{\partial K^*}{\partial z^*}\right)^3$ $0 (\Delta z^{*4})$
LOC1.84	R1	R13	R27	R29	$K_{N_{i\pm 1/2}}^* = K_{R_{i\pm 1/2}}^* - 1/2 \Delta z^* \cdot \frac{\partial K^*}{\partial z^*} + 1/8 \Delta z^{*2} \cdot \frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} - 1/48 \Delta z^{*3} \cdot \frac{\partial^3 K^*}{\partial z^{*3}} + 0 (\Delta z^{*4})$
LOC1.85	R1	R13	0	R28	$K_{N_{i\pm 1/2}}^* = K_{R_{i\pm 1/2}}^* + 1/8 \cdot \Delta z^{*2} \cdot \frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} + 0 (\Delta z^{*4})$
LOC1.86	R1	R13	0	R31	$K_{N_{i\pm 1/2}}^* = K_{R_{i\pm 1/2}}^* - 3/8 \cdot \Delta z^{*2} \cdot \frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} + 1/4 \Delta z^{*3} \cdot \frac{\partial^3 K^*}{\partial z^{*3}} + 0 (\Delta z^{*4})$
LOC1.87	R1	R13	0	R28	$K_{N_{i\pm 1/2}}^* = K^* \left\{ h_{R_{i\pm 1/2}} + 1/8 \cdot \Delta z^2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + 0 (\Delta z^4) \right\}$
LOC1.88	R1	R13	0	R28	$K_{N_{i\pm 1/2}}^* = K^* \left\{ h_{R_{i\pm 1/2}} + 1/8 \cdot \Delta z^2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - 1/4 \frac{\Delta z^2}{h_i} \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 + \right.$ $\left. + 1/4 \frac{\Delta z^3}{h_i} \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^3 + 0 (\Delta z^4) \right\}$
LOC1.89	R1	R13	0	R28	$K_{N_{i\pm 1/2}}^* = K^* \left\{ h_{R_{i\pm 1/2}} + 1/8 \cdot \Delta z^2 \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - 1/8 \frac{\Delta z^2}{h_i} \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 + \right.$ $\left. + 1/16 \frac{\Delta z^3}{h_i} \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^3 + 0 (\Delta z^4) \right\}$

ERREURS DE
DISCRETISATION

$$R1 = \Delta t^* \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^* \partial t^*} \right) - 1/2 C^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} \right\}$$

$$R13 = 1/2 \Delta t^{*2} \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^* \partial t^{*2}} \right) - 1/3 C^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} \right\}$$

$$R27 = -1/2 \Delta z^* \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial K^*}{\partial z^*} \left(\frac{\partial h^*}{\partial z^*} - 1 \right) \right) \right\}$$

$$R28 = \Delta z^{*2} \left\{ 1/6 \left[1/4 \frac{\partial^3 K^*}{\partial z^{*3}} \left(\frac{\partial h^*}{\partial z^*} - 1 \right) + \frac{\partial K^*}{\partial z^*} \cdot \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^{*3}} + 1/2 K^* \frac{\partial^4 h^*}{\partial z^{*4}} \right] + 1/8 \frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} \cdot \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}} \right\}$$

$$R29 = R28 + 1/8 \Delta z^{*2} \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} \left(\frac{\partial h^*}{\partial z^*} - 1 \right) \right) \right\}$$

$$R31 = \Delta z^{*2} \left\{ 1/3 \left[1/2 \frac{\partial K^*}{\partial z^*} \cdot \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^{*3}} - \frac{\partial^3 K^*}{\partial z^{*3}} \left(\frac{\partial h^*}{\partial z^*} - 1 \right) + 1/4 K^* \frac{\partial^4 h^*}{\partial z^{*4}} \right] - 1/4 \frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} \cdot \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}} \right\}$$

Tableau V-1 : Erreurs de discrétisation générées par les différents modes de pondération appliqués au modèle du bilan local et développements limités des conductivités internodales.

Il apparaît que tous les schémas LOC1.B ont formellement la même erreur par rapport au pas de temps : (R1 + R13). Les schémas LOC1.B1/B2/B3/B5/B7/B8/B9 ont des erreurs globales : $E_D [h^*] = R1+R13+R28$ formellement identiques mais numériquement différentes, comme le montrent les figures (V-1a et b). Ce comportement s'explique par le mode d'estimation des conductivités hydrauliques.

● Les conductivités hydrauliques internodales $K_{N,i\pm 1/2}^*$ calculées par la moyenne arithmétique (Eq. IV-47) sont surestimées par rapport à la réalité. En effet, elles sont déterminées par la relation :

$$\begin{aligned} K_{N,i\pm 1/2}^* &= 0.5 (K_i^* + K_{i\pm 1}^*) \\ &= 0.5 [K_i^* + K_i^* \pm \Delta z^* \left(\frac{\partial K^*}{\partial z^*} \right)_i + 1/2 \Delta z^{*2} \left(\frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} \right)_i + \\ &\quad \pm 1/6 \Delta z^{*3} \left(\frac{\partial^3 K^*}{\partial z^{*3}} \right)_i + 0 (\Delta z^*)^4] \end{aligned} \quad (V-1)$$

soit :

$$\begin{aligned} K_{N,i\pm 1/2}^* &= K_i^* \pm 1/2 \Delta z^* \left(\frac{\partial K^*}{\partial z^*} \right)_i + 1/4 \Delta z^{*2} \left(\frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} \right)_i + \\ &\quad \pm 1/12 \Delta z^{*3} \left(\frac{\partial^3 K^*}{\partial z^{*3}} \right)_i + 0 (\Delta z^*)^4 \end{aligned} \quad (V-2)$$

D'autre part, un développement en série de TAYLOR de $K_{i\pm 1/2}^*$ conduit à écrire :

$$\begin{aligned} K_{R,i\pm 1/2}^* &= K_i^* \pm 1/2 \Delta z^* \left(\frac{\partial K^*}{\partial z^*} \right)_i + 1/8 \Delta z^{*2} \left(\frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} \right)_i + \\ &\quad \pm 1/48 \Delta z^{*3} \left(\frac{\partial^3 K^*}{\partial z^{*3}} \right)_i + 0 (\Delta z^*)^4 \end{aligned} \quad (V-3)$$

où $K_{R,i\pm 1/2}^*$ sont les valeurs réelles des conductivités internodales.

Les équations (V-2) et (V-3) donnent :

$$K_{N,i\pm 1/2}^* = K_{R,i\pm 1/2}^* + 1/8 \Delta z^{*2} \left(\frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} \right)_{i\pm 1/2} + 1/16 \Delta z^{*3} \left(\frac{\partial^3 K^*}{\partial z^{*3}} \right)_{i\pm 1/2} + O(\Delta z^{*4}) \quad (V-4)$$

Cela conduit à :

$$K_{N,i\pm 1/2}^* = K_{R,i\pm 1/2}^* + 1/8 \Delta z^{*2} \left(\frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} \right)_{i\pm 1/2} + O(\Delta z^{*4})_{i\pm 1/2} \quad (V-5)$$

Pour une infiltration en milieu homogène, la relation $K^*(z^*)$ est décroissante le long d'un profil hydrique, à un instant donné (Figure V-2a) et $\partial K^* / \partial z^*$ est négatif. De plus, lors du passage du front d'humidification à une cote donnée (repéré par la lettre "F" sur la figure V-1), l'étude locale du profil $K^*(z^*)$ montre que la concavité est dirigée vers les z^* positifs, donc $\partial^2 K^* / \partial z^{*2}$ est positif (Figure V-2b). Il en résulte, d'après l'équation (V-5) que $K_{N,i\pm 1/2}^* > K_{R,i\pm 1/2}^*$ en négligeant les termes supérieurs au 3^e ordre. Tout se passe comme si on considérait un milieu poreux fictif plus perméable que la réalité. Cela explique que le schéma LOC1.B1 surestime la solution exacte ($E_N[h^*] < 0$ sur la figure V-1a). On peut en déduire que l'erreur de discrétisation : (R1+R13+R28) de ce schéma est négative.

● Le développement limité des $K_{N,i\pm 1/2}^*$ calculées par la moyenne harmonique des conductivités nodales (Eq. IV-48) fait apparaître (Tableau V-1) le terme supplémentaire :

$$- 1/4 \Delta z^{*2} \cdot \frac{1}{K^*} \cdot \left(\frac{\partial K^*}{\partial z^*} \right)^2 + O(\Delta z^{*3}) \quad (V-6)$$

par rapport à celui relatif à la moyenne arithmétique. Ce terme étant négatif, le schéma LOC1.B2 surestime moins la solution exacte que LOC1.B1 (Figure V-1a).

D'autre part, le développement en série de TAYLOR donne :

$$K_{N,i\pm 1/2}^* - K_{R,i\pm 1/2}^* = 1/4 \Delta z^{*2} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} - \frac{1}{K_i^*} \cdot \left(\frac{\partial K^*}{\partial z^*} \right)^2 \right] + O(\Delta z^{*3}) \quad (V-7)$$

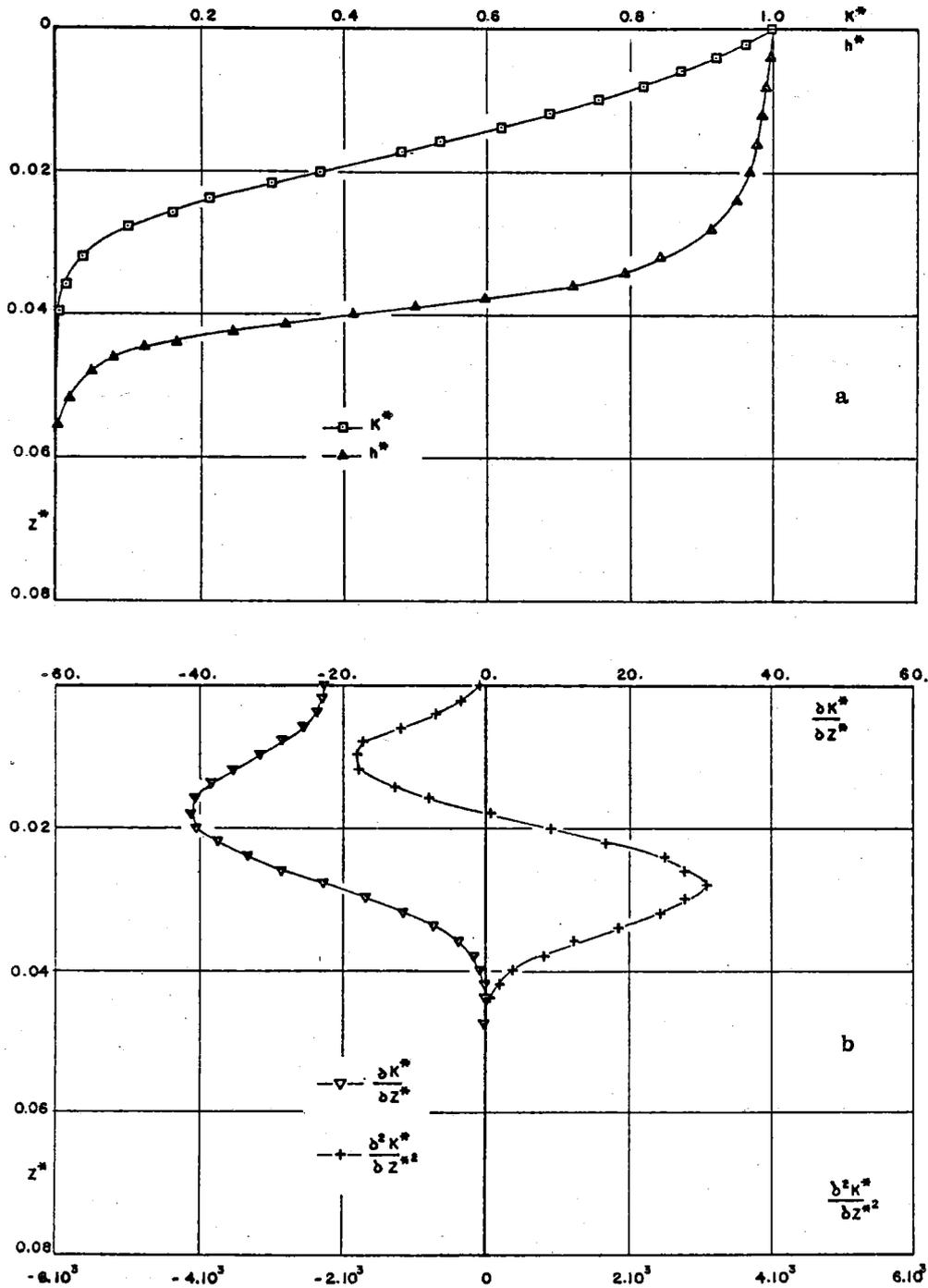


Figure V-2 : Profils $K^*(z^*)$, $h^*(z^*)$, $\frac{\partial K^*}{\partial z^*}$ et $\frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}}$ au temps $t^* = 0.01$ dans le cas de l'humidification du Yolo Light Clay. Les profils $\frac{\partial K^*}{\partial z^*}$ et $\frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}}$ sont obtenus à partir du lissage de $K(z)$ par fonction spline cubique.

L'étude des profils $\partial K^* / \partial z^*$ et $\partial^2 K^* / \partial z^{*2}$ en fonction de z^* (Figure V-2b) montre que $K_{N,i\pm\frac{1}{2}}^* - K_{R,i\pm\frac{1}{2}}^*$ est négatif. Cela correspond à une sous-estimation de la solution exacte : $E_N[h^*] > 0$. Ce dernier résultat obtenu pour le Yolo Light Clay n'est pas nécessairement extrapolable à d'autres sols.

● Le mode de pondération (Eq. IV-49) utilisé dans le schéma LOC1.B3 améliore sensiblement les résultats. En effet, en raison des inégalités évidentes suivantes :

$$[K_{N,i\pm\frac{1}{2}}^*]_H \leq [K_{N,i\pm\frac{1}{2}}^*]_G \leq [K_{N,i\pm\frac{1}{2}}^*]_A \quad (V-8)$$

où H, G et A représentent respectivement les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique, il n'est pas surprenant que le schéma LOC1.B3 donne des erreurs intermédiaires entre celles données par LOC1.B1 et LOC1.B2 (Figure V-1a).

● Le schéma LOC1.B4 (Eq. IV-50) est du 1^o ordre en Δz^* (Tableau V-1) et il donne par conséquent les écarts les plus importants. Le développement en série de TAYLOR de la solution discrète montre que ce schéma est la discrétisation du problème différentiel suivant :

$$C^*(h) \cdot \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left[\left(K^* - \frac{1}{2} \Delta z^* \frac{\partial K^*}{\partial z^*} \right) \cdot \left(\frac{\partial h^*}{\partial z^*} - 1 \right) \right] + O(\Delta t^*, \Delta z^{*2}) \quad (V-9)$$

Cela revient à considérer un milieu physique dont la conductivité apparente $K_{app}^* = K^* - \frac{1}{2} \Delta z^* \cdot \partial K^* / \partial z^*$ est supérieure à la réalité puisque $\partial K^* / \partial z^* < 0$. L'utilisation de ce schéma conduit donc à une surestimation importante de la solution exacte ($E_N[h^*] < 0$).

● La correction des conductivités effectuée par VAN QUY (1976) dans le schéma LOC1.B5 (Eq. IV-51) ramène à la solution donnée par LOC1.B1. Cela se trouve confirmé par l'examen du développement limité de $K_{N,i\pm\frac{1}{2}}^*$ (Tableau V-1).

● Les valeurs numériques des conductivités calculées par l'équation (IV-52) : schéma LOC1.B6 sont sousestimées (Tableau V-1) ; cela conduit à des écarts positifs. De plus, ce mode de calcul peut donner en infiltration des valeurs négatives, ce qui serait physiquement absurde. Ce problème, signalé par TODD (1972) crée des instabilités qui obligent à imposer la contrainte supplémentaire que les conductivités hydrauliques doivent être positives ou nulles.

● Dans les schémas LOC1.(B7/B8/B9) l'estimation de $K_{i\pm\frac{1}{2}}^*$ se fait par l'intermédiaire du calcul de $h_{i\pm\frac{1}{2}}$ compte-tenu de la relation $K^*(h)$ (Eq. I-18).

Le comportement relatif de ces 3 schémas donné dans la figure (V-1b) s'explique par les valeurs des conductivités les unes par rapport aux autres. En effet, les différents modes de calcul de $h_{i\pm\frac{1}{2}}$ conduisent aux inégalités suivantes :

$$[h_{N,i\pm\frac{1}{2}}]_H \geq [h_{N,i\pm\frac{1}{2}}]_G \geq [h_{N,i\pm\frac{1}{2}}]_A \quad (V-10)$$

d'où :

$$[K_{N,i\pm\frac{1}{2}}^*]_H \geq [K_{N,i\pm\frac{1}{2}}^*]_G \geq [K_{N,i\pm\frac{1}{2}}^*]_A \quad (V-11)$$

Pour les schémas LOC1.(B8/B9) cette analyse ne permet pas de prédire s'il s'agit d'une surestimation ou d'une sous-estimation de la solution exacte.

En revanche, les valeurs $h_{i\pm\frac{1}{2}}$ obtenues par la moyenne arithmétique (Eq. IV-53) sont sous-estimées (Tableau V-1) et par conséquent les valeurs $K_{N,i\pm\frac{1}{2}}^*$ correspondantes le sont aussi. Cela se traduit par une erreur positive générée par le schéma LOC1.B7 ($E_N[h^*] > 0$).

D'une manière générale, on retiendra que le fait qu'il y ait surestimation ou sous-estimation de la solution exacte par tel ou tel schéma est lié à l'importance de la concavité des profils $K^*(z^*)$ et $h^*(z^*)$. Cette concavité sera d'autant plus grande que l'effet de diffusion sera plus

important. C'est notamment le cas pour les sols argileux ou pendant la phase initiale d'une infiltration. Ce dernier point explique l'atténuation avec la cote z^* des erreurs maxima induites par le mode de pondération constatée pour les différents schémas à l'exception de LOC1.B3 qui est très peu affecté par le mode de pondération.

A l'examen de ces différents schémas, on perçoit la difficulté d'obtenir une bonne solution de la cinétique d'humidification de chaque section, succédant à une rupture d'équilibre en forme d'échelon unitaire. Ce phénomène est particulièrement accusé près de la surface du sol où l'erreur, $E_N [h^*]$, peut atteindre 0.9 pour certains schémas.

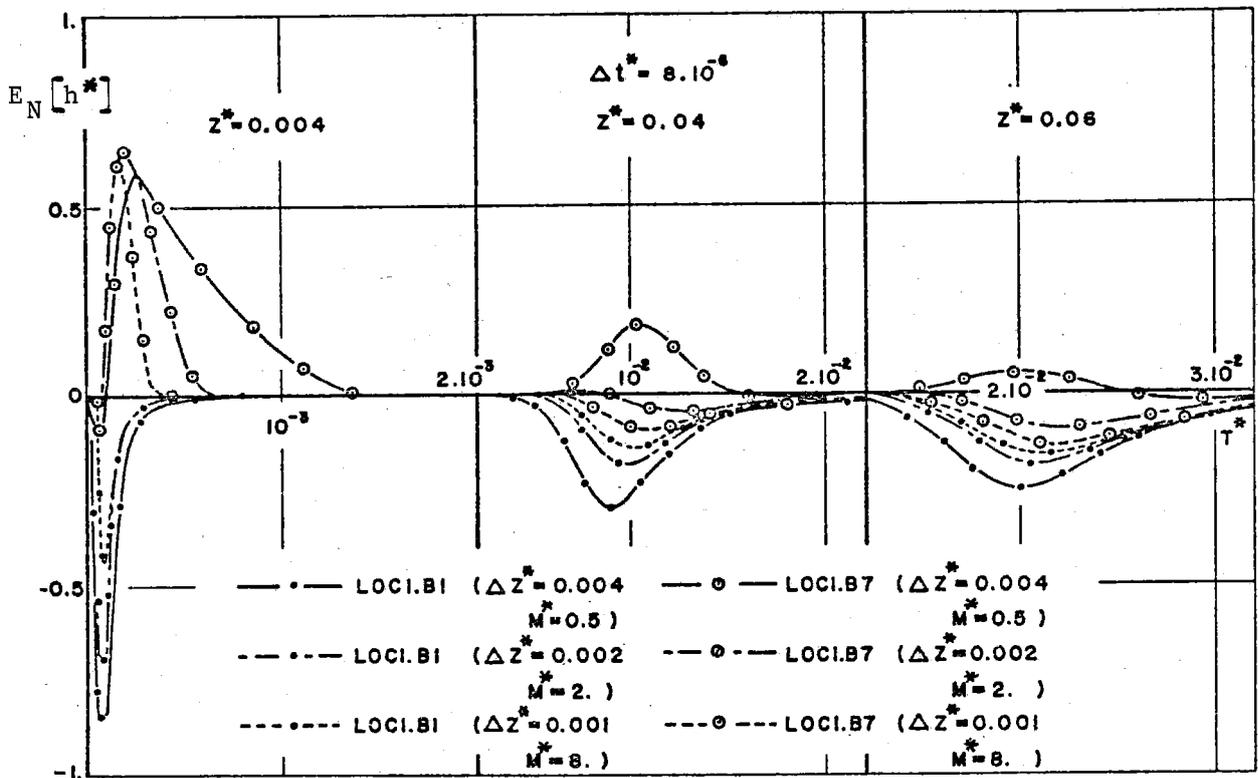


Figure V-3 : Evolution en fonction du temps des écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques (LOC1.B1, LOC1.B7) pour différentes valeurs de Δz^* lors de la cinétique d'humidification des cotes $z^* = 0.004, 0.04$ et 0.06 .

En diminuant la valeur de Δz^* , toutes choses étant égales par ailleurs, les erreurs induites par le mode de pondération diminuent ($K_{R,i\pm\frac{1}{2}}^*$ tendent vers $K_{N,i\pm\frac{1}{2}}^*$). Ainsi, la figure (V-3) montre l'influence de Δz^* sur la solution donnée par les schémas LOC1.B1 et LOC1.B7. Quand $\Delta z^* \rightarrow 0$, les écarts tendent vers la même valeur limite qui se trouve proche de celle du schéma LOC1.B3 pour $\Delta z^* = 4.10^{-3}$ (Figure V-1a). De plus, comme il sera vu ultérieurement sur la figure (V-1a), ce dernier schéma est nettement moins sensible que les autres schémas au choix du pas d'espace. Cela montre que la moyenne géométrique introduit de très faibles erreurs de pondération, dans la solution approchée.

1.1.2 - Comportement asymptotique

Bien qu'ils soient différents dans la cinétique d'humidification tous les schémas LOC1.B considérés ici ont le même comportement asymptotique. Ils sont tous convergents car $E_N[h^*]$ tend vers zéro lorsque t^* tend vers ∞ (Figures V-4a et b). Cependant, seul le schéma LOC1.B3 ne présente pas d'oscillations numériquement décelables.

De plus, les schémas LOC1.(B1/B3/B7) ont le même comportement asymptotique quand le pas d'espace Δz^* diminue (Figures V-5a et b). Les solutions données par LOC1.B1 et LOC1.B7 tendent vers une solution peu affectée par le mode de pondération (LOC1.B3) l'une par excès, l'autre par défaut. Il apparaît donc que le mode de pondération n'affecte pas la solution numérique au voisinage de l'infini.

On peut remarquer (Figures V-4a et 5a) que les écarts $E_N[h^*]$ aux différentes cotes z^* , se maintiennent à une valeur quasiment constante : -3.10^{-3} pendant un certain temps, avant de tendre vers zéro. L'instant où cette valeur devient constante semble correspondre à l'établissement d'un état hydrique proche de la saturation. On peut alors supposer qu'en première approximation, l'équation du mouvement est quasi-linéaire avec l'erreur de discrétisation suivante :

$$E_{D.1}[h^*] = \left(\frac{\Delta t^*}{2} + \frac{\Delta z^{*2}}{12.D_s^*} \right) \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} - 1/6 \Delta t^{*2} \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} + O(\Delta t^{*3}, \Delta z^{*4}) \quad (V-12)$$

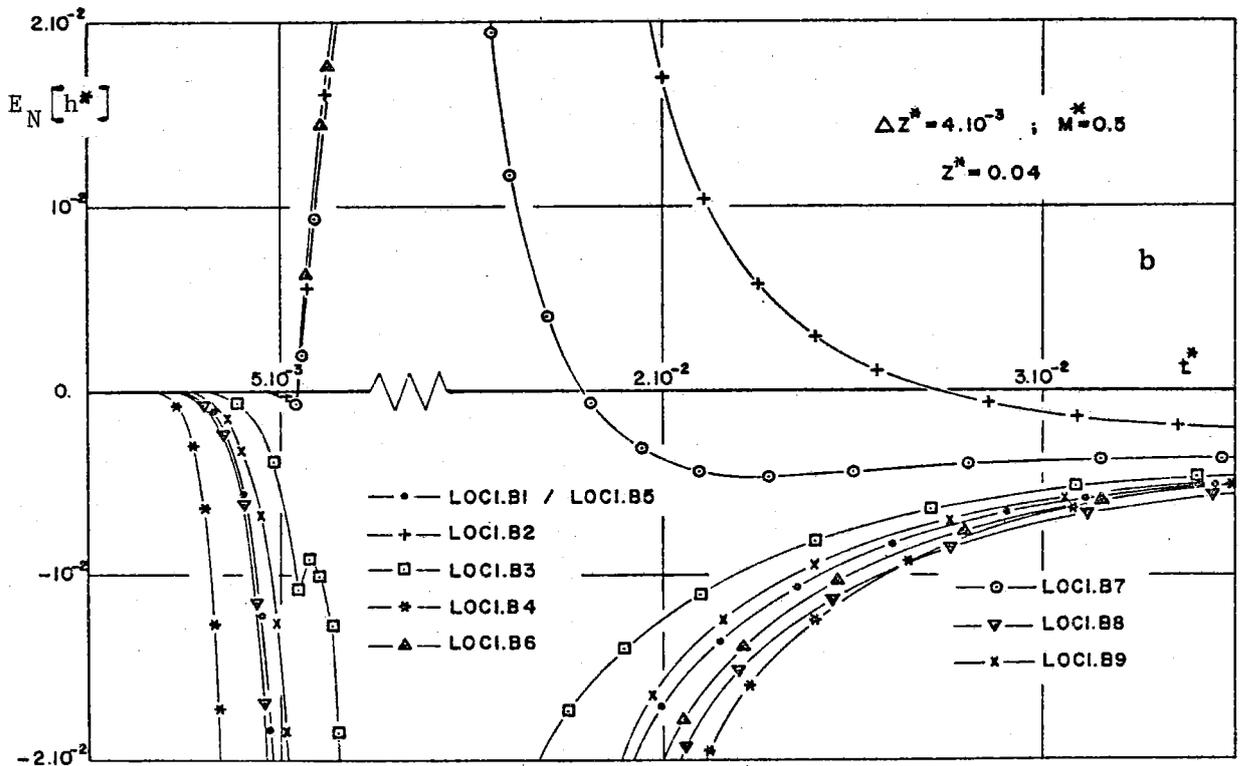
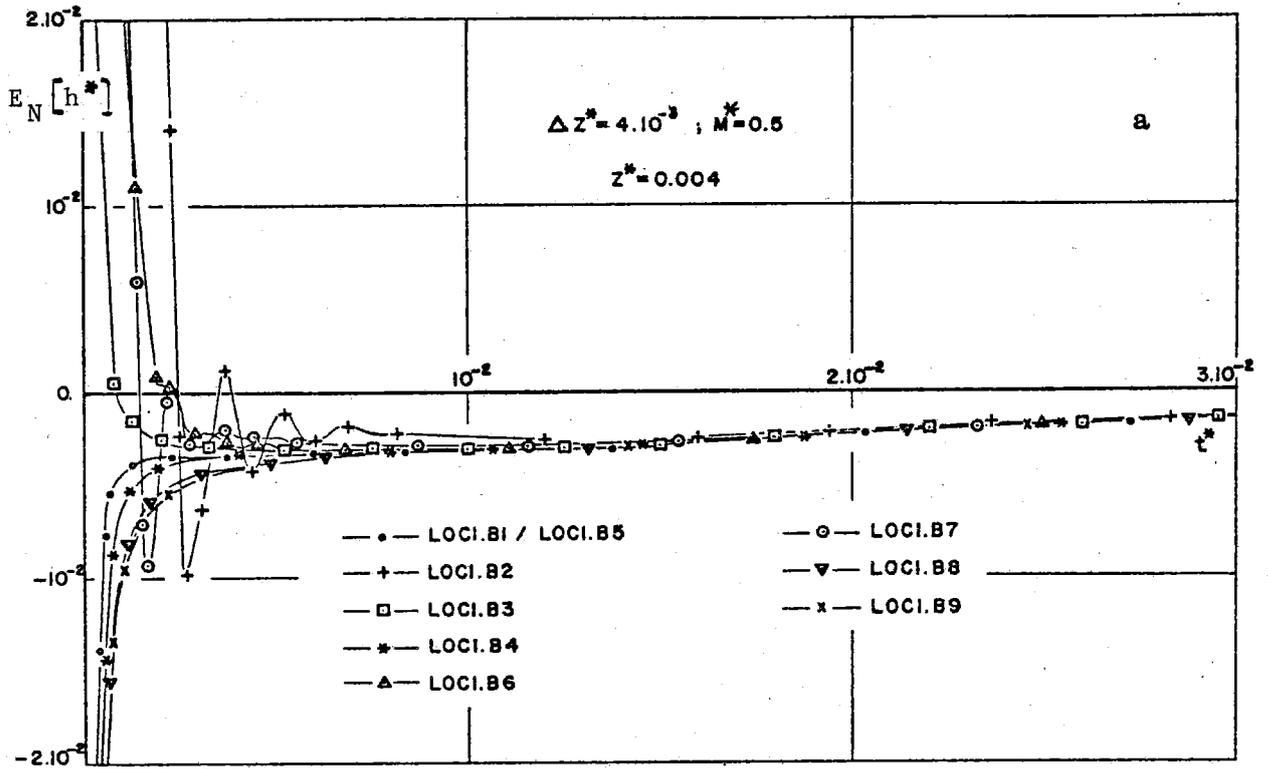


Figure V-4 : Evolution en fonction du temps des écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques obtenues avec les différents modes de pondération lors du régime asymptotique aux cotes $z^* = 0.004$ et 0.04 .

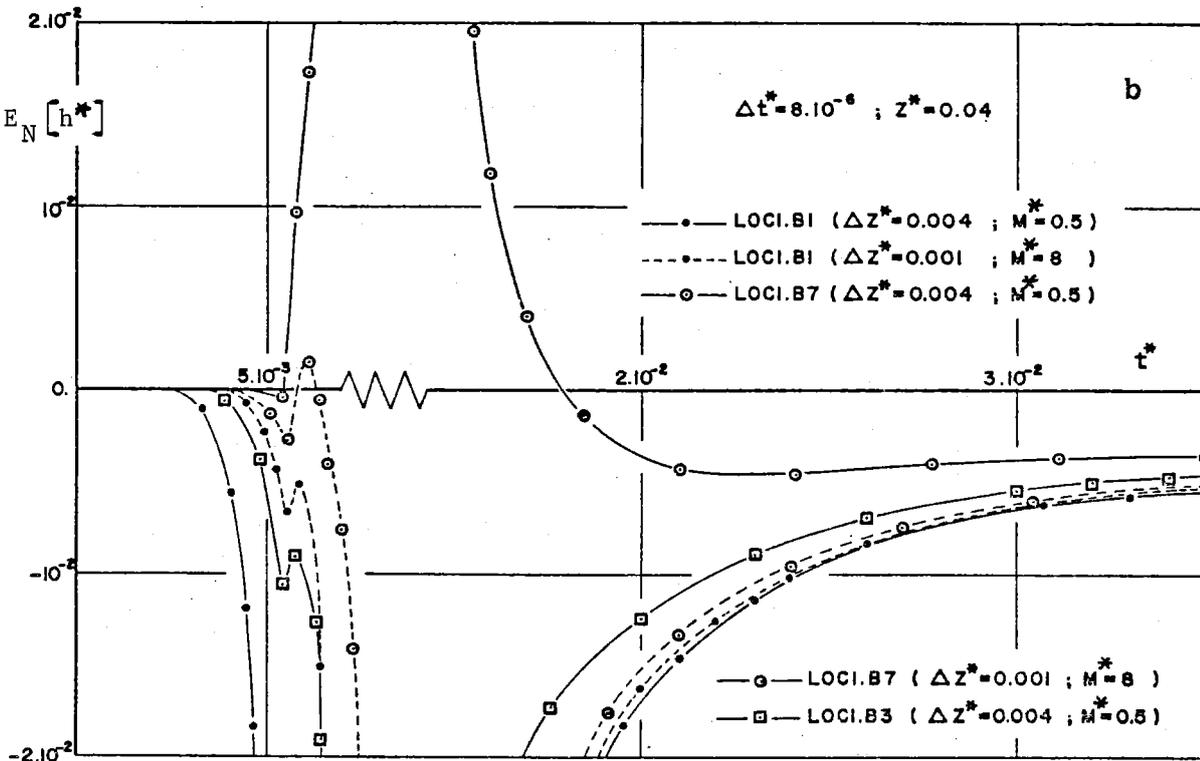
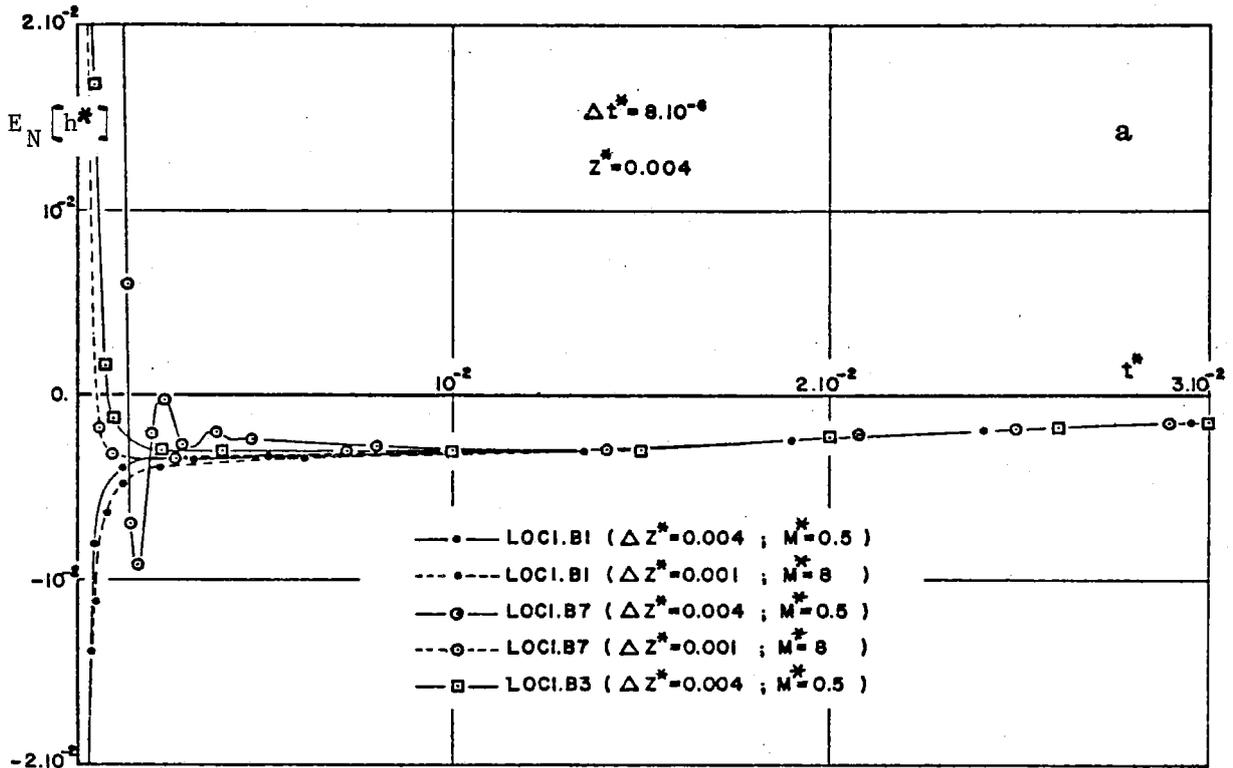


Figure V-5 : Evolution en fonction du temps des écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques (LOC1.B1 et LOC1.B7) pour différentes valeurs de Δz^* lors du régime asymptotique aux cotes $z^* = 0.004$ et 0.04

Dans cette équation D_s^* est la diffusivité capillaire à "saturation" définie par $D_s^* = 1/C_s^*$; C_s^* est la capacité capillaire réduite considérée au voisinage de la saturation qui a été prise à 10^{-2} .

L'évolution temporelle de la pression réelle $h_A^*(t^*)$ dans la section $z^* = 4.10^{-3}$ est donnée sur la figure (V-6). Elle montre que :

$$\text{pour } t^* < 1.3 \cdot 10^{-2} \quad \frac{\partial^2 h_A^*}{\partial t^{*2}} < 0 \quad \text{donc } E_D(h^*) < 0 \quad (V-13)$$

$$\text{pour } t^* > 1.3 \cdot 10^{-2} \quad \frac{\partial^2 h_A^*}{\partial t^{*2}} > 0 \quad \text{donc } E_D(h^*) > 0$$

Cela montre la convergence de la solution approchée vers la solution exacte à partir de $t^* = 1.3 \cdot 10^{-2}$ pour la cote $z^* = 4.10^{-3}$. Ce résultat est également valable pour les autres sections de calcul, à des temps différents.

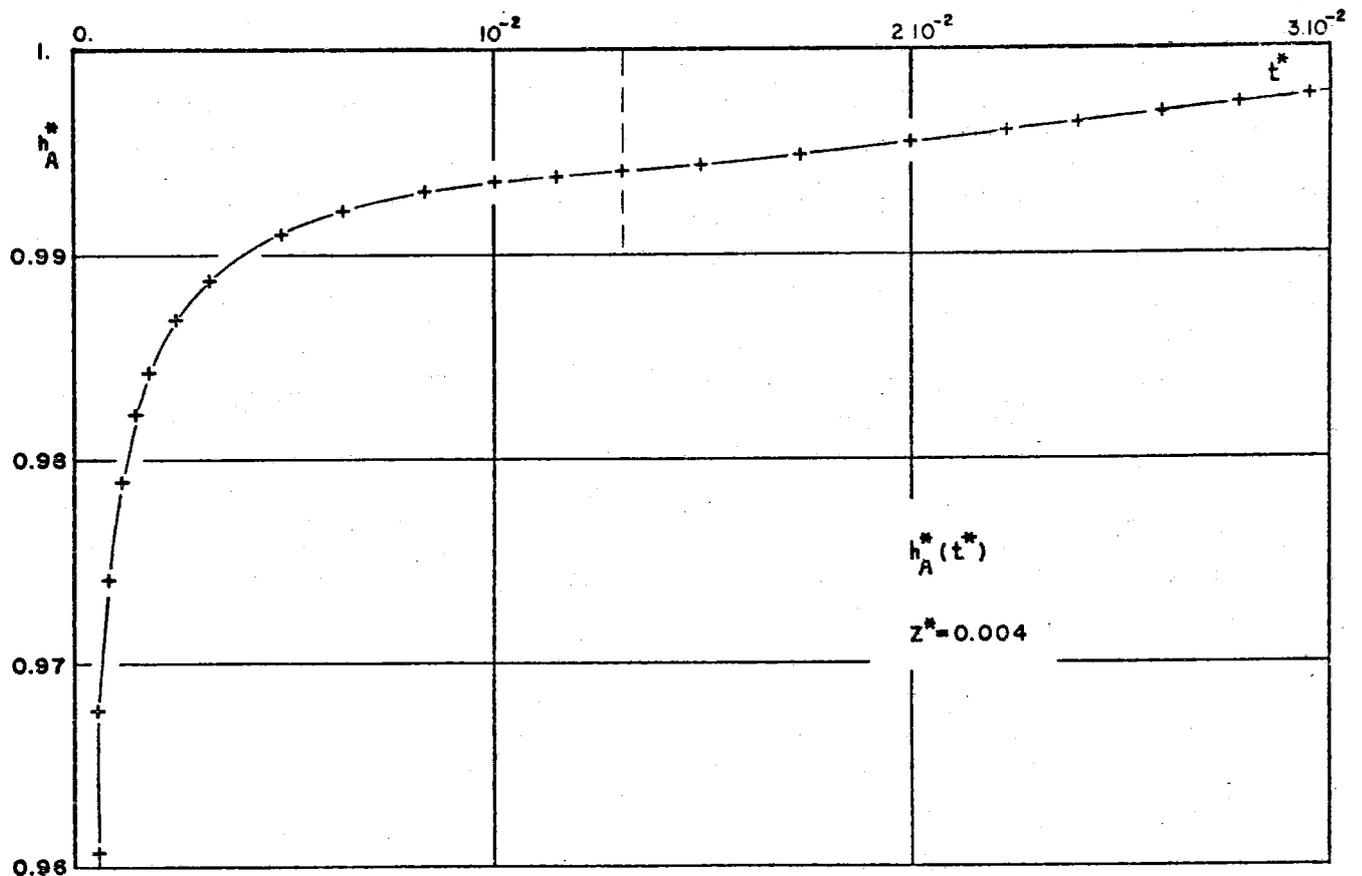


Figure V-6 : Evolution en fonction du temps de la pression adimensionnelle pour la cote $z^* = 0.004$.

1.2 - Etude des schémas DEC.B

La méthode d'analyse exposée précédemment peut être appliquée au schéma DEC.B. Cependant afin de ne pas trop alourdir le texte, nous avons retenu les trois "meilleurs" modes de pondération du schéma du bilan local : la moyenne géométrique sur $[K_i^*, K_{i+1}^*]$ (DEC.B3), la moyenne arithmétique sur $[K_i^*, K_{i+1}^*]$ (DEC.B1) et sur $[h_i, h_{i+1}]$ (DEC.B7). On dégage les résultats suivants :

- Les allures des cinétiques d'humidification données par les schémas DEC.(B1/B3/B7) sont identiques à celles des schémas LOC1.(B1/B3/B7) respectivement : la moyenne arithmétique sur h sous-estime la solution alors que les moyennes arithmétique et géométrique sur K^* la surestiment (Figure V-7) au voisinage du front.

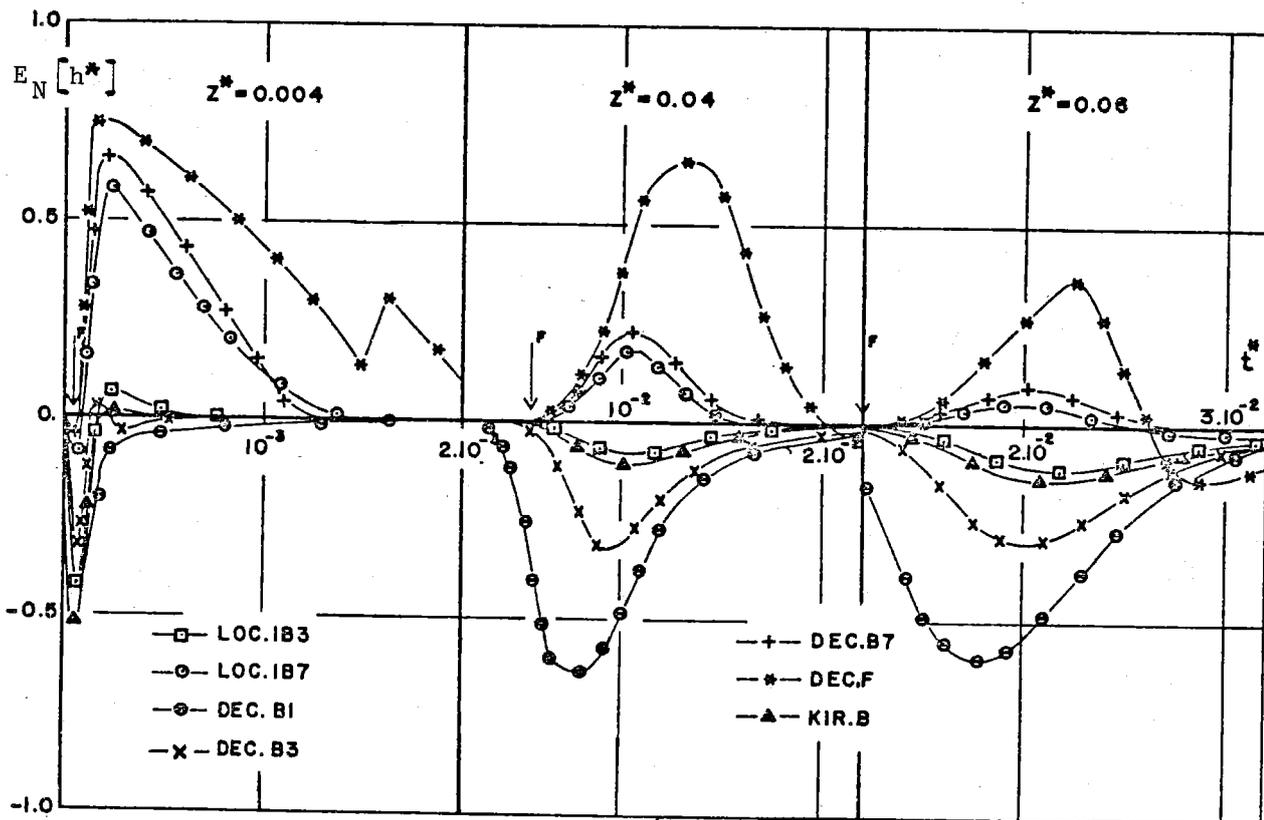


Figure V-7 : Influence du modèle de départ sur les écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques lors de la cinétique d'humidification des cotes $z^* = 0.004, 0.04$ et 0.06 .

- Les schémas DEC.B1, DEC.B3 et DEC.B7 sont convergents (Figures V-8a et b).

- L'analyse des erreurs de discrétisation (Tableau V-2) montre que les écarts à la solution exacte générés par DEC.B sont en valeur absolue supérieurs à ceux des schémas LOC1.B. Cela provient du fait que seuls les schémas du bilan local sont de type conservatif, comme le montre l'équation (IV-16).

1.3 - Etude des schémas DEC.F et KIR.B

Ces deux schémas sont intéressants à considérer car ils ne font pas intervenir les conductivités internodales.

a) - Le schéma DEC.F développé par LIAKOPOULOS (1966) génère les erreurs les plus importantes (Figures V-7 et V-8). Cela est dû à la valeur plus élevée des erreurs de discrétisation liées notamment à Δt^* (Tableau V-2), indépendamment du mode de pondération. Cela se traduit également par des instabilités de calcul dans le régime asymptotique (Figures V-8a et b).

b) - Les résultats produits par le schéma KIR.B ne sont pas affectés par le mode de pondération et ils sont très voisins de ceux donnés par le schéma LOC1.B3, bien qu'ils aient des erreurs de discrétisation formellement différentes (Tableau V-2). Cela tend à prouver une nouvelle fois que la moyenne géométrique minimise l'influence de la pondération sur les erreurs de discrétisation, sans toutefois l'annuler totalement. Il convient de préciser, cependant que les résultats donnés par le modèle KIR.B dépendent de la précision avec laquelle le tableau des valeurs $U^*(h^*) = \int_0^1 K^*(h).dh$ est calculé. La méthode de SIMPSON utilisée ici avec un pas d'intégration de 1/500 donne une erreur inférieure à $9.10^{-14} \cdot \frac{\partial^4 K^*}{\partial h^{*4}}$.

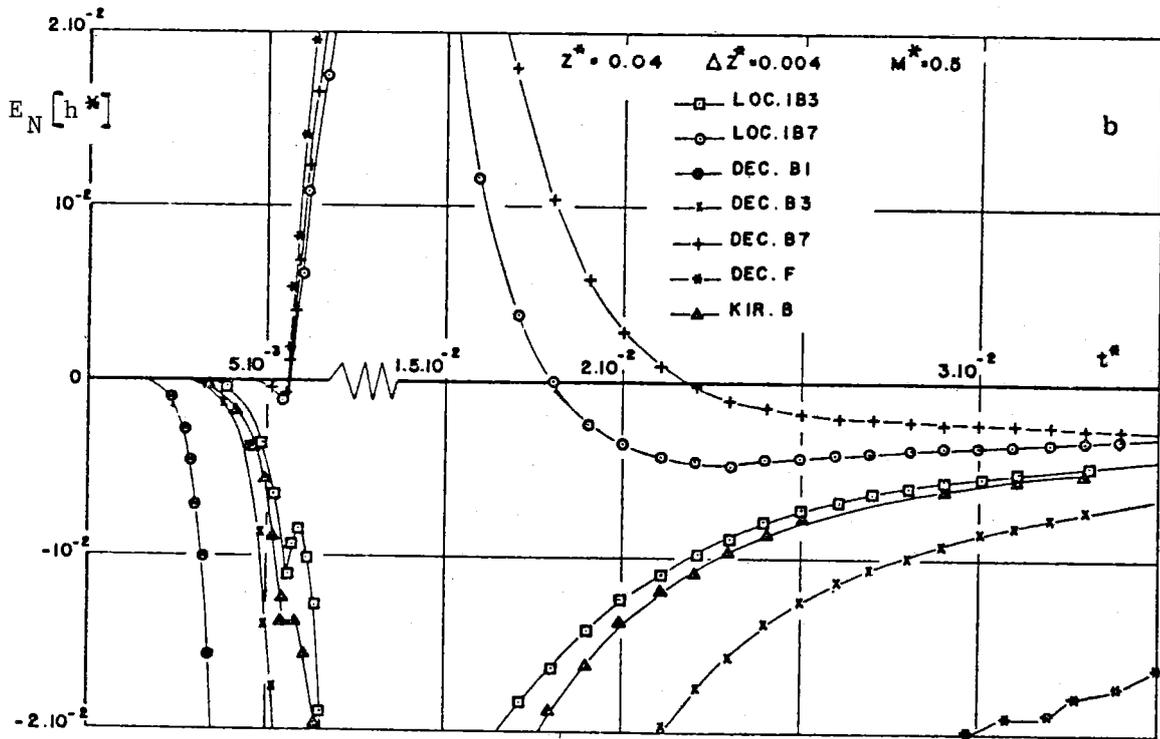
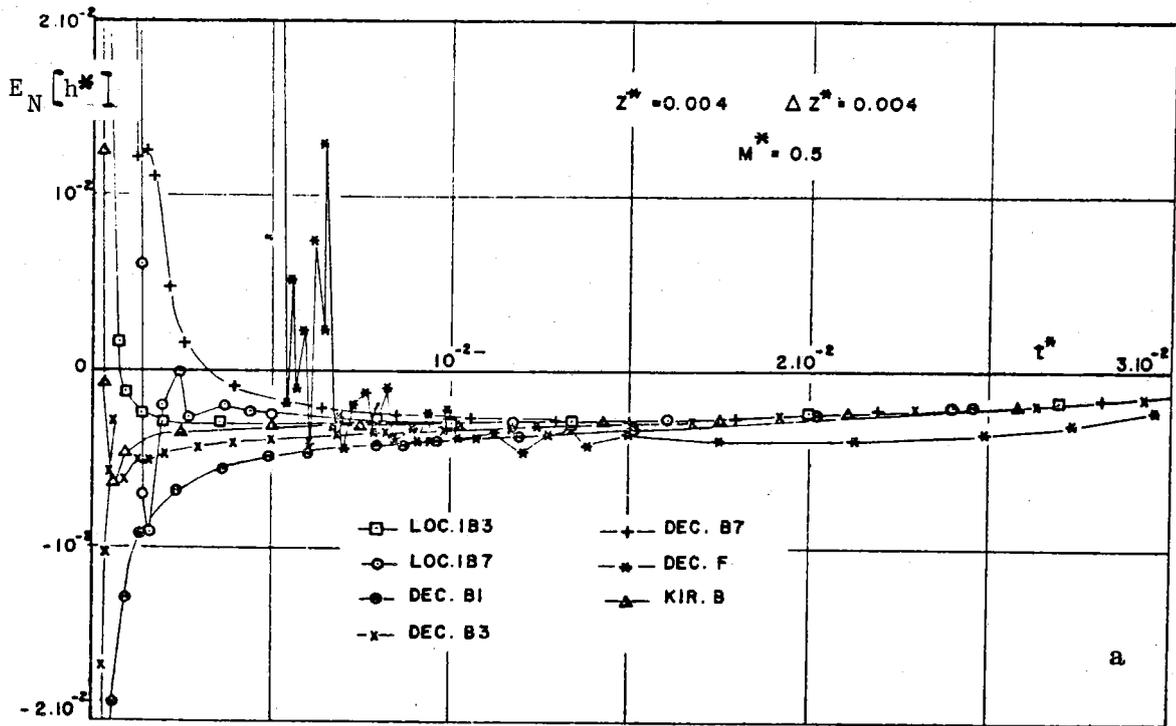


Figure V-8 : Influence du modèle de départ sur les écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques lors du régime asymptotique aux cotes $z^* = 0.004$ et 0.04 .

	Δt^*	Δt^{*2}	Δz^*	Δz^{*2}	OBSERVATIONS
LOC1. B3	R1	R13	0	R28	$K_{N,i\pm 1/2}^*$ Calculé par Eq.(IV-49)
LOC1. B7	R1	R13	0	R28	$K_{N,i\pm 1/2}^*$ Calculé par Eq.(IV-53)
DEC. B1	R1	R13	0	R30	$K_{N,i\pm 1/2}^*$ Calculé par Eq.(IV-47)
DEC. B3	R1	R13	0	R30	$K_{N,i\pm 1/2}^*$ Calculé par Eq.(IV-49)
DEC. B7	R1	R13	0	R30	$K_{N,i\pm 1/2}^*$ Calculé par Eq.(IV-53)
DEC. F	R2	R14	0	R32	
KIR. B	R11	R25	0	R33	

ERREURS DE DISCRETISATION :

$$R1 = \Delta t^* \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial h^*}{\partial z^* \partial t^*} - 1/2 C^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} \right) \right\}$$

$$R2 = \Delta t^* \left\{ K^* \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial^2 h^*}{\partial z^* \partial t^*} \right) - 1/2 C^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} \right\}$$

$$R11 = \Delta t^* \left\{ \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial z^{*2}} \right) - \frac{1}{K^*} \left(\frac{dK}{dh} \right)^* \cdot \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right) - 1/2 \frac{C^*}{K^*} \cdot \frac{\partial^2 U^*}{\partial t^{*2}} \right\}$$

$$R13 = 1/2 \Delta t^{*2} \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^* \partial t^{*2}} \right) - 1/3 C^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} \right\}$$

$$R14 = 1/2 \Delta t^{*2} \left\{ K^* \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \cdot \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} - 1/3 C^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} \right\}$$

$$R25 = 1/2 \Delta t^{*2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial z^{*2}} \right) - \frac{1}{K^*} \left(\frac{dK}{dh} \right)^* \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \left(\frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right) - 1/3 \frac{C^*}{K^*} \cdot \frac{\partial^3 U^*}{\partial t^{*3}} \right\}$$

$$R28 = \Delta z^{*2} \left\{ 1/6 \left[1/4 \frac{\partial^3 K^*}{\partial z^{*3}} \left(\frac{\partial h^*}{\partial z^*} - 1 \right) + \frac{\partial K^*}{\partial z^*} \cdot \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^{*3}} + 1/2 K^* \frac{\partial^4 h^*}{\partial z^{*4}} \right] \right. \\ \left. + 1/8 \frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} \cdot \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}} \right\}$$

$$R30 = 1/6 \Delta z^{*2} \left\{ 1/4 \frac{\partial^3 K^*}{\partial z^{*3}} \left(\frac{\partial h^*}{\partial z^*} - 1 \right) + \frac{\partial K^*}{\partial z^*} \cdot \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^{*3}} + 1/2 K^* \frac{\partial^4 h^*}{\partial z^{*4}} \right\}$$

$$R32 = \Delta z^* \left\{ 1/6 \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^{*3}} \left(\frac{\partial K^*}{\partial z^*} - \frac{\partial K^*}{\partial h^*} \right) + \frac{\partial K^*}{\partial z^*} \cdot \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^{*3}} + \frac{1}{2} K^* \frac{\partial^4 h^*}{\partial z^{*4}} \right\}$$

$$R33 = \frac{1}{6} \Delta z^{*2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^4 U^*}{\partial z^{*4}} - \frac{1}{K^*} \left(\frac{dK}{dh} \right)^* \frac{\partial^3 U^*}{\partial z^{*3}} \right\}$$

Tableau V-2 : Erreurs de discrétisation générées par les différents modèles.

1.4 - Conclusions

Cette étude des différentes façons de calculer les conductivités internodales permet de dégager les conclusions suivantes :

i) - Tous les schémas considérés ici (à l'exception de DEC.F) sont convergents. Seul le schéma DEC.F présente des instabilités numériques.

ii) - L'importance de la pondération varie avec le choix du modèle de départ. Les modèles DEC donnent, de ce point de vue, de plus mauvais résultats que les modèles LOC ; le modèle KIR, quant à lui, ne présente pas ce problème.

iii) - L'effet de la pondération se fait sentir essentiellement au niveau du passage du front d'humidification à chaque cote. Il peut être réduit à diminuant le pas d'espace Δz^* . Cela se fait au détriment du coût économique. On remarque (Figure V-9) que les schémas LOC1.B3 et KIR.B sont les moins sensibles à une augmentation du pas d'espace, ce qui les rend intéressants d'un point de vue économique. En revanche, on note que les schémas considérés sont relativement peu sensibles au choix du pas de temps Δt^* . Les autres sections de calcul ont un comportement comparable à celui de la section $z^* = 0.004$ présentée ici.

iv) - L'influence du mode de pondération sur les erreurs de discrétisation décroît au fur et à mesure que z^* augmente.

v) - L'étude des erreurs de discrétisation se révèle souvent insuffisante pour prédire le comportement des schémas. En effet, plusieurs schémas peuvent avoir des erreurs formellement identiques, mais numériquement différentes. Il faut alors coupler cette analyse à l'étude locale de profils $K^*(z^*)$ et $h^*(z^*)$.

vi) - Il est souhaitable d'utiliser soit un modèle non affecté par ce problème de pondération, tel KIR.B, soit un mode de calcul qui en atténue l'importance, tel celui de la moyenne géométrique appliqué au modèle du bilan local.

vii) - Les conclusions précédentes sont indépendantes du type de sol considéré.

viii) - Les résultats obtenus pour l'infiltration instationnaire d'eau en milieu non saturé se trouvent confirmés par l'analyse de APPEL (1976). En effet, on peut montrer (VAUCLIN et al., 1979) que dans le cas d'un écoulement permanent d'un aquifère confiné dont la transmissivité varie linéairement avec la cote z^* , les valeurs exactes des conductivités internodales à saturation (APPEL, 1976) sont les mieux estimées par la moyenne géométrique. Ce mode de calcul peut donc également être utilisé avantageusement pour la résolution des problèmes de mouvement de nappe.

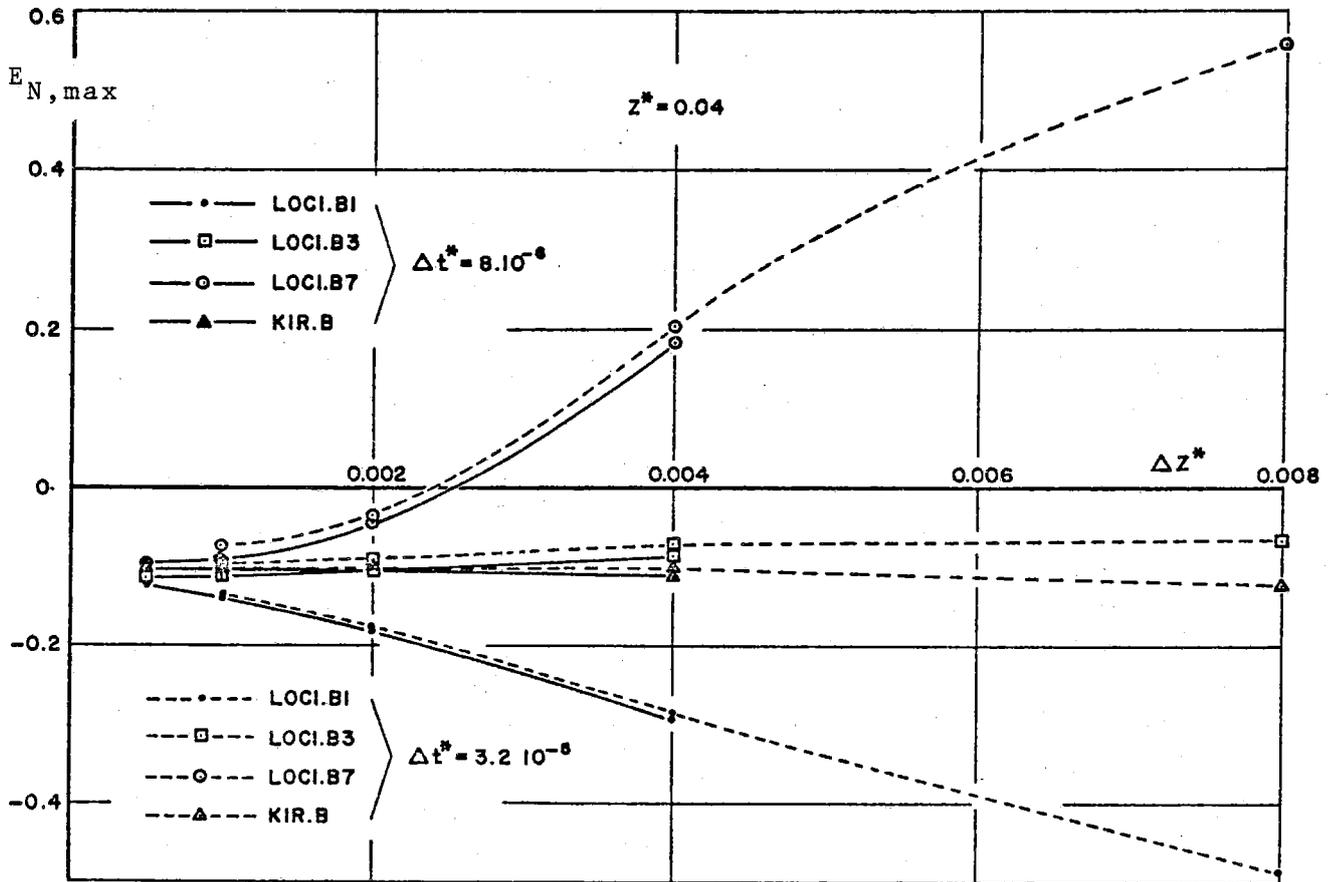


Figure V-9 : Relation entre l'écart maximum $E_{N,max} [h^*]$ à la cote $z^* = 0.004$ et le pas d'espace pour différents schémas et pour deux pas de temps $\Delta t^* = 8.10^{-6}$ et $3.2 10^{-6}$.

V.2 - INFLUENCE DU MODE DE LINEARISATION

Le problème de la linéarisation se pose différemment suivant les valeurs du paramètre σ choisi dans l'équation (IV-16). D'un point de vue pratique, il est souhaitable d'utiliser les schémas qui, à précision identique sont les moins coûteux en temps calcul. Cela revient à rechercher ceux qui, pour un pas d'espace fixe ($\Delta z^* = 4.10^{-3}$) permettent le pas de temps le plus élevé sans perte appréciable de précision.

2.1 - Etude des modèles du bilan local

2.1.1 - Schémas explicites ($\sigma = 0$)

Pour les schémas explicites, le problème de la linéarisation ne se pose pas puisque les coefficients K^* et C^* sont considérés au pas de temps précédent. Ils conduisent à la résolution explicite d'équations indépendantes.

a) - En phase d'humidification des différentes cotes, la figure (V-10) montre pour $M^* = 0.5$ que les erreurs de discrétisation générées par les schémas LOC.A1 et LOC.A2 sont quasiment identiques à celles du schéma LOC1.B3 (Figure V-1a). Le développement de ces erreurs donné dans le tableau (V-3) permet d'écrire pour les schémas LOC.A1 et LOC1.B3 :

$$R3 + R15 + R28 \equiv R1 + R13 + R28 \quad (V-14)$$

d'où :

$$\Delta t^* \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^* \partial z^*} \right) + \frac{1}{2} \Delta t^{*2} \cdot \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*2} \partial z^*} \right) \equiv 0 \quad (V-15)$$

En négligeant le terme du 2ème ordre en Δt^{*2} l'équation (V-15) montre que la quantité $\partial(K^* \cdot \partial^2 h^* / \partial t^* \cdot \partial z^*) / \partial z^*$ reste bornée par une valeur très petite.

De la même manière, la comparaison des schémas LOC.A2 et LOC1.B3 donne :

$$R16 + R28 + R34 \equiv R1 + R13 + R28$$

d'où :

$$\Delta t^* \left[\frac{\delta}{\delta z^*} \left(K^* \frac{\delta^2 h^*}{\delta z^* \delta t^*} \right) + (M \cdot K^* - 1/2 C^*) \frac{\delta^2 h^*}{\delta t^{*2}} \right] + 1/2 \Delta t^{*2} \tag{V-16}$$

$$\left[1/4 \frac{\delta^2 K^*}{\delta z^{*2}} \cdot \frac{\delta^2 h^*}{\delta t^{*2}} + \frac{\delta}{\delta z^*} \left(K^* \frac{\delta^3 h^*}{\delta z^* \delta t^{*2}} \right) \right] \equiv 0$$

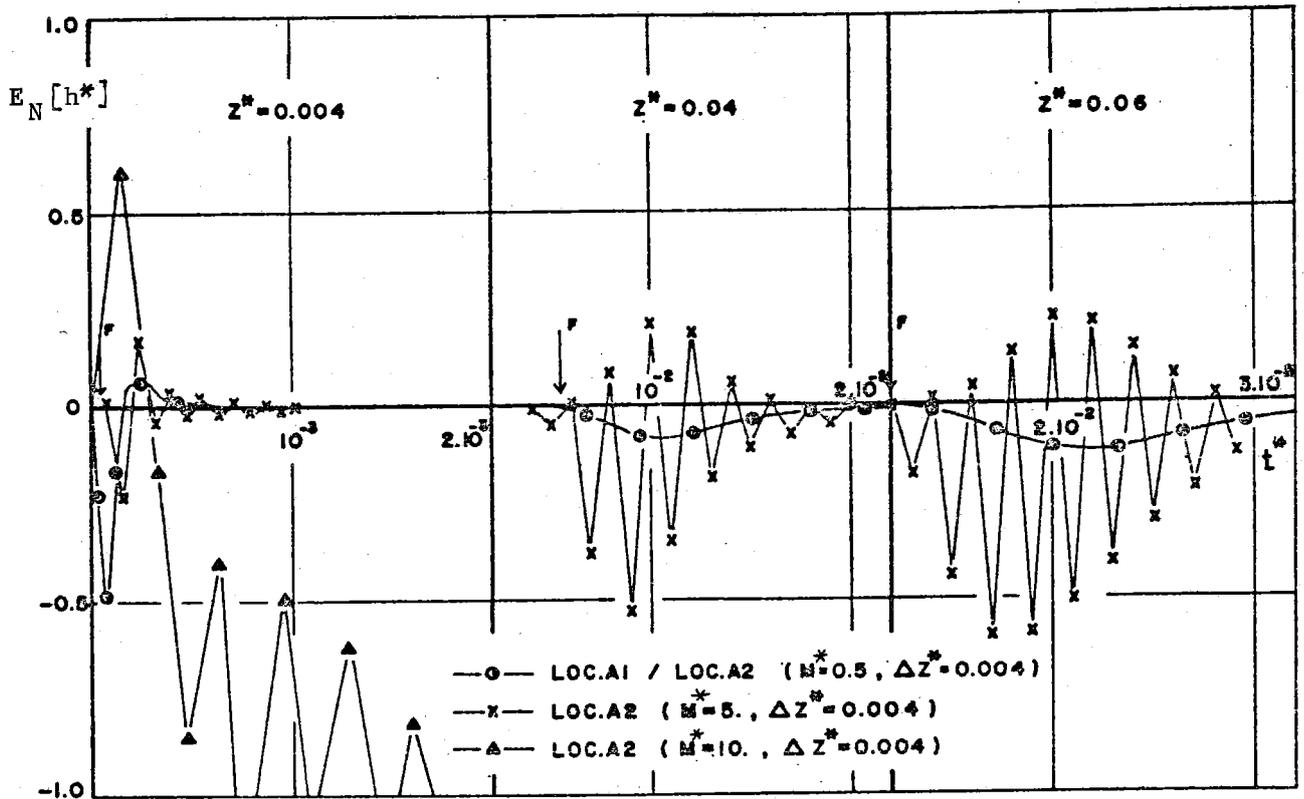


Figure V-10 : Evolution en fonction du temps, des écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques explicites lors de la cinétique d'humidification des cotes : $z^* = 0.004, 0.04$ et 0.06 .

Compte-tenu de la remarque précédente et en négligeant le terme en Δt^{*2} , on constate que le terme en Δt^* est négligeable sous la condition que l'expression $(M^* \cdot K^* - \frac{1}{2} C^*) \partial^2 h^* / \partial t^{*2}$ le soit également. On conçoit ici l'importance du choix de la valeur de M^* . Les courbes de la figure (V-10) montrent que pour $M^* = 0.5$, les erreurs liées au pas de temps sont négligeables devant celles liées au pas d'espace. Le résultat n'est plus nécessairement vrai pour des valeurs de M^* plus importantes comme cela sera montré ultérieurement.

Il convient de noter que le schéma du type DU FORT-FRANKEL (1953) est à pas multiples. Il nécessite par conséquent la connaissance de deux couches de conditions initiales (aux temps $j = 0$ et $j = 1$) pour pouvoir calculer la solution à $j = 2$. La solution correspondant à $j = 1$ a été estimée ici par le schéma traditionnel LOC.A1.

Quand on augmente le pas de temps, Δz^* étant maintenu constant, le schéma LOC.A1 donne une solution instable pour $M^* > 0.5$. En revanche le schéma LOC.A2 est moins sensible ; les instabilités numériques prennent naissance pour $M^* \geq 3$, comme on peut l'observer figure (V-10).

b) - En ce qui concerne le comportement asymptotique, on peut constater (Figures V-11a et b) que la solution à la côte $z^* = 0.004$, donnée par LOC.A1 est instable pour $M^* = 0.5$ à partir de $t^* = 1.36 \cdot 10^{-2}$. Ce temps correspond à l'apparition d'un état hydrique très voisin de la saturation, pour la section de calcul considérée, ce qui confirme l'hypothèse précédente de l'apparition d'un écoulement quasi-stationnaire dans la section $z^* = 0.004$ à partir du temps $t^* = 1.36 \cdot 10^{-2}$ (Eq. V-12). La capacité capillaire tend vers zéro et la solution numérique tend vers l'infini (Eq. IV-19), ce qui est physiquement absurde. Pour pallier cet inconvénient on a imposé arbitrairement une contrainte supplémentaire $C^* \geq 10^{-5}$. Cela constitue une limitation à l'utilisation du schéma LOC.A1 pour résoudre des problèmes d'écoulements couplés en zones saturée et partiellement saturée. A cet égard, le schéma LOC.A2 (qui est inconditionnellement stable pour les équations linéaires) ne présente pas cette limitation physique et dans le cas considéré, il reste stable pour $\forall M^* < 3$.

	Δt^*	Δt^{*2}	Δz^*	Δz^{*2}	$\left(\frac{\Delta t^*}{\Delta z^*}\right)^2$	OBSERVATIONS
LOC A1	R3	R15	0	R28	0	$\sigma = 0 ; K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Ec. (IV-49)
LOC A2	0	R16	0	R28	R34	$\sigma = 0 ; K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-49)
LOC1.B3	R1	R13	0	R28	0	$\sigma = 1 ; K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-49) $C_{N,i}^* = C_{R,i}^* ; K_{N,i\pm 1/2}^* = K_{R,i\pm 1/2}^*$
LOC2.B3	R4	R17	0	R28	0	$\sigma = 1 ; K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-49) $C_{N,i}^* = C_{R,i}^* - 3/8 \Delta t^{*2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial t^{*2}} + 1/4 \Delta t^{*3} \frac{\partial^3 C^*}{\partial t^{*3}} + 0 (\Delta t^{*4})$
LOC3.B3	R4	R17	0	R28	0	$\sigma = 1 ; K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-49) $C_{N,i}^* = C_i^* (h_{R,i}^{*j+1/2} - 1/2 R14 - 1/4 R15 - R4)$
LOC4.B3	R4	R17	0	R28	0	$\sigma = 1 ; K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-49) $C_{N,i}^* = C_i^* (h_{R,i}^{*j+1/2} - 1/2 R1 - 1/4 R2 - R4)$
LOC5.B3	R9	R23	0	R28	0	$\sigma = 1 ; K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-49) $C_{N,i}^* = C_i^* (h_{R,i}^{*j} - 1/2 \omega(\omega+1) \Delta t^{*2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^{*2}} + 0 (\Delta t^{*3}))$
LOC6.B3	R7	R21	0	R28	0	$\sigma = 1 ; K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-49) $K_{N,i+1/2}^* = K_{R,i\pm 1/2}^* - 3/8 \Delta t^{*2} \frac{\partial^2 K^*}{\partial t^{*2}} + 1/4 \Delta t^{*3} \frac{\partial^3 K^*}{\partial t^{*3}} + 0 (\Delta t^{*4})$
LOC7.B3	R7	R21	0	R28	0	$\sigma = 1 ; K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-49) $K_{N,i+1/2}^* = K_{i\pm 1/2}^* (h_{R,i}^{*j+1/2} - 1/2 R14 - 1/4 R15 - R4)$
LOC8.B3	R7	R21	0	R28	0	$\sigma = 1 ; K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-49) $K_{N,i+1/2}^* = K_{N,i\pm 1/2}^* (h_{R,i}^{*j+1/2} - 1/2 R1 - 1/4 R2 - R4)$
LOC9.B3	R8	R22	0	R28	0	$\sigma = 1 ; K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-49) $K_{N,i+1/2}^* = K_{R,i\pm 1/2}^* - \Delta t^* \frac{\partial^2 K^*}{\partial t^{*2}} + \Delta t^{*3} \frac{\partial^3 K^*}{\partial t^{*3}}$

Tableau V-3 : Erreurs de discrétisation générées par les différents modes de linéarisation, appliquées au modèle du bilan local.

ERREURS DE DISCRETISATION :

$$R1 = \Delta t^* \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^* \partial t^*} \right) - 1/2 C^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} \right\}$$

$$R3 = - 1/2 \Delta t^* C^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}}$$

$$R4 = \Delta t^* \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^* \partial t^*} \right) - 1/2 \frac{\partial}{\partial t^*} \left(C^* \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \right) \right\}$$

$$R7 = 1/2 \Delta t^* \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^* \partial t^*} \right) + \frac{\partial C^*}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \right\}$$

$$R8 = \Delta t^* \left\{ \frac{\partial C^*}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + 1/2 C^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} \right\}$$

$$R9 = \Delta t^* \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^* \partial t^*} - 1/2 C^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} - \omega \frac{\partial C^*}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \right) \right\}$$

$$R13 = 1/2 \Delta t^{*2} \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^* \partial t^{*2}} \right) - 1/3 C^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} \right\}$$

$$R15 = - 1/6 \Delta t^{*2} C^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}}$$

$$R16 = - 1/2 \Delta t^{*2} \left\{ 1/4 \frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} \cdot \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} + 1/3 C^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} \right\}$$

$$R17 = 1/2 \Delta t^{*2} \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^* \partial t^{*2}} \right) - 1/3 C^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} - 1/2 \frac{\partial C^*}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} - 1/4 \frac{\partial^2 C^*}{\partial t^{*2}} \cdot \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \right\}$$

$$R21 = 1/2 \Delta t^{*2} \left\{ 1/4 \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^* \partial t^{*2}} + 1/2 \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^* \partial t^*} \right) \right) + 1/4 \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \left(C^* \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \right) - 1/3 C^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} \right\}$$

$$R22 = 1/2 \Delta t^{*2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \left(C^* \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \right) - 1/3 C^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} \right\}$$

$$R23 = 1/2 \Delta t^{*2} \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^* \partial t^{*2}} \right) - 1/3 C^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} - \omega \frac{\partial C^*}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} - \omega^2 \frac{\partial^2 C^*}{\partial t^{*2}} \cdot \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \right\}$$

$$R28 = \Delta z^{*2} \left\{ 1/6 \left[1/4 \frac{\partial^3 K^*}{\partial z^{*3}} \left(\frac{\partial h^*}{\partial z^*} - 1 \right) + \frac{\partial K^*}{\partial z^*} \cdot \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^{*3}} + 1/2 K^* \frac{\partial^4 h^*}{\partial z^{*4}} \right] + 1/8 \frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} \cdot \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}} \right\}$$

$$R34 = - \left(\frac{\Delta t^*}{\Delta z^*} \right)^2 \cdot K^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}}$$

Tableau V-3 : (suite)

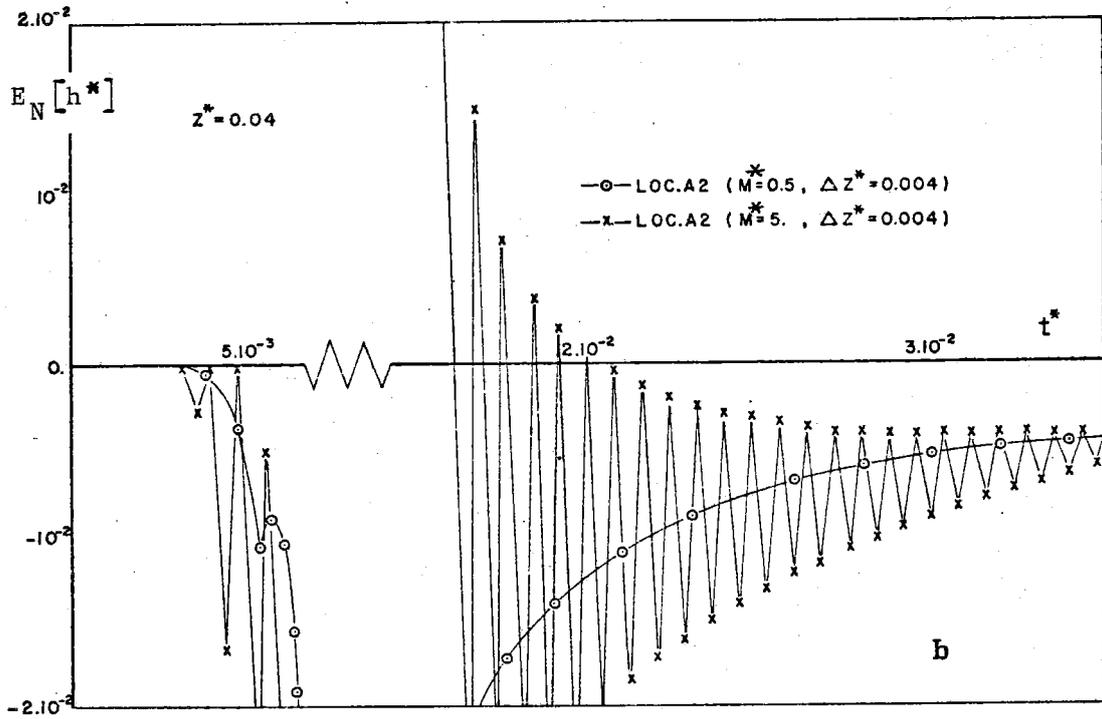
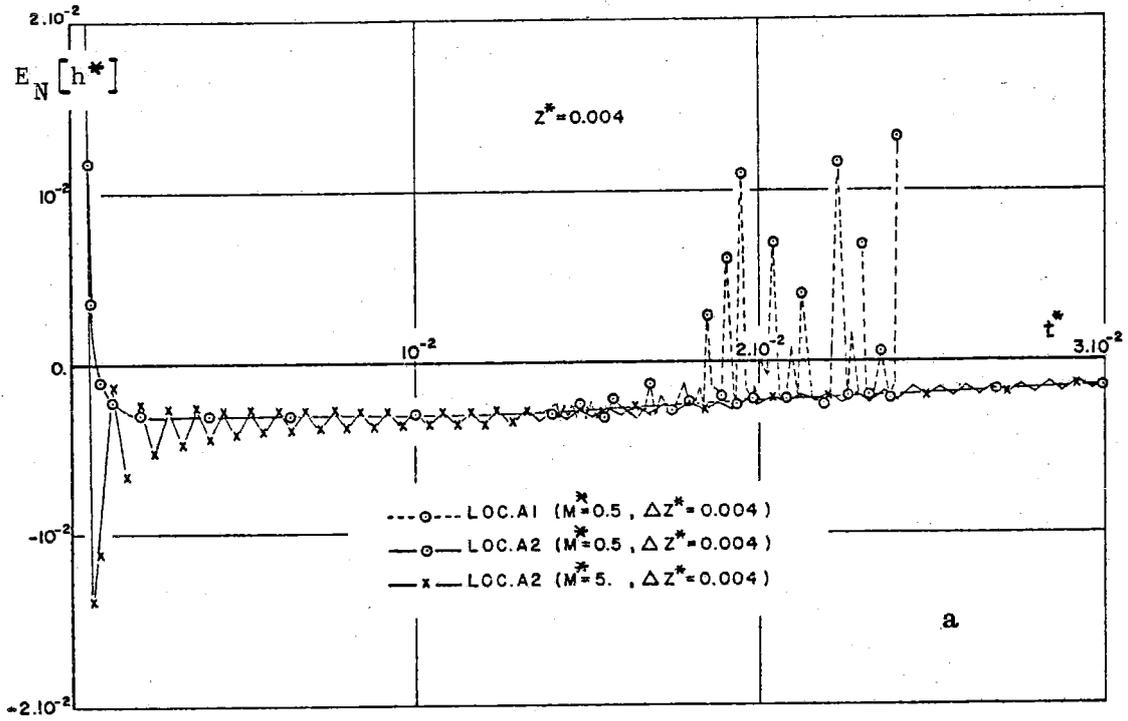


Figure V-11 : Evolution en fonction du temps des écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques explicites lors du régime asymptotique aux cotes $z^* = 0.004$ et 0.04 .

2.1.2 - Schémas totalement implicites ($\sigma = 1$)

Contrairement au cas précédent, ces schémas posent le problème de l'estimation des coefficients \bar{C}^* et \bar{K}^* dans le temps. Il convient d'en étudier l'influence relative sur la précision de la solution numérique.

2.1.2.1 - Influence du mode de calcul de \bar{C}^*

Comme on l'a vu précédemment, cinq modes de calcul de \bar{C}^* (Annexe) ont été retenus, \bar{K}^* étant considéré au pas de temps précédent. Différentes valeurs de M^* sont testées en gardant Δz^* constant et égal à 0.004.

a) - Cinétique d'humidification

Les figures (V-12a, b et c) donnent les évolutions en fonction du temps des écarts à la solution quasi-analytique à trois cotes et pour les valeurs de $M^* = 0.5, 20$ et 50 . Elles conduisent aux remarques suivantes :

i) - Pour $M^* = 0.5$, tous les schémas donnent la même cinétique d'humidification aux différentes cotes. Tout se passe comme si le mode de calcul de \bar{C}^* n'avait pratiquement aucune influence sur la solution. L'analyse des erreurs de discrétisation données au tableau (V-3) montre que tous ces schémas génèrent la même erreur de discrétisation spatiale (R28), mais des erreurs temporelles différentes. Toutes les solutions numériques étant néanmoins identiques, cela prouve que les erreurs liées au pas de temps sont négligeables devant celles liées au pas d'espace pour cette valeur de M^* .

ii) - Pour d'autres valeurs de M^* ($M^* = 20$ et $M^* = 50$), on constate une différenciation dans le comportement des schémas numériques. Seule l'analyse systématique des modes de calcul de \bar{C}^* permet de dégager l'explication d'un tel comportement (Tableau V-3).

● Dans le schéma LOC1.B3, la capacité capillaire est considérée au temps j ; elle est donc inférieure à celle utilisée dans les autres schémas ($\partial C^* / \partial t^* > 0$ en cinétique d'humidification).

● Pour le schéma LOC2.B3, $C_N^{*j+1/2}$ est supérieure à la réalité en négligeant les termes du 3ème ordre, car $\partial^2 C^* / \partial t^{*2}$ est négatif (Tableau V-3) Comme pour l'équation (V-1), l'indice "N" signifie que les valeurs de C^* sont calculées numériquement.

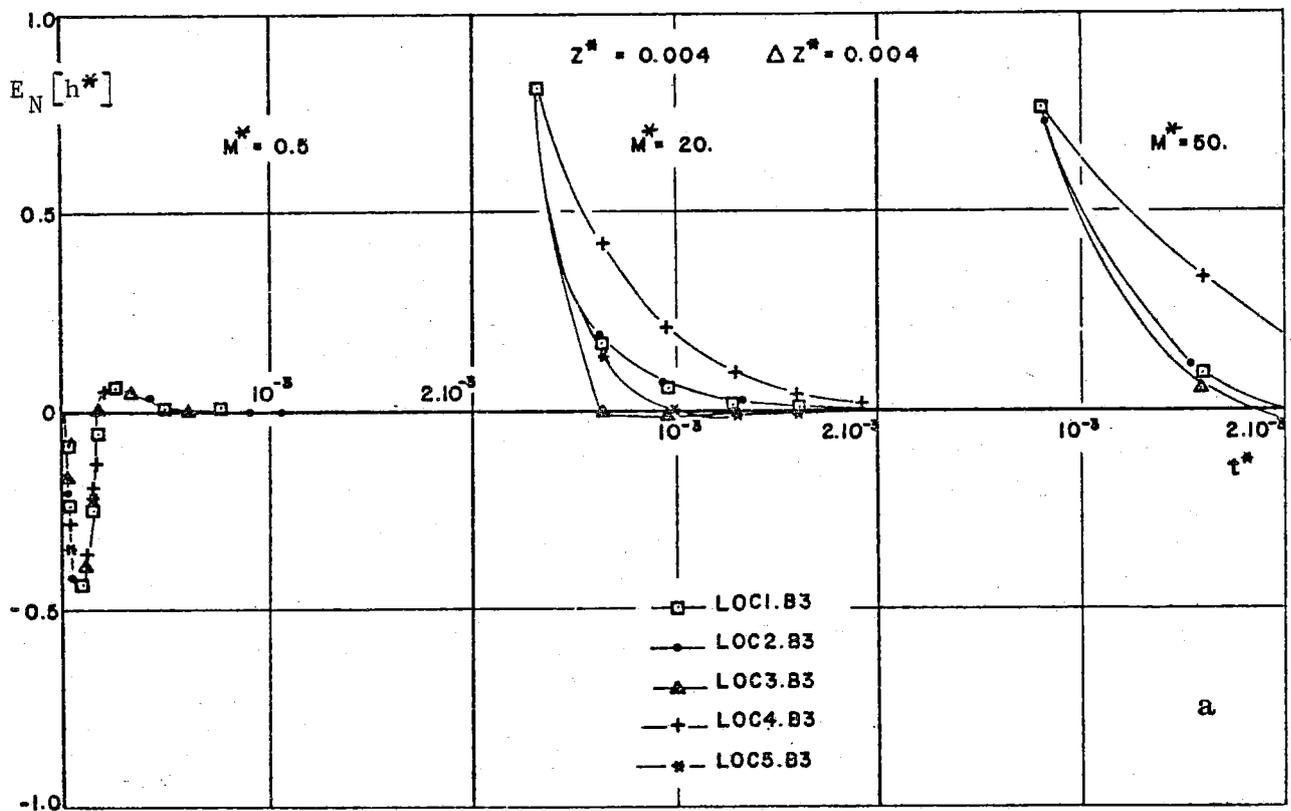
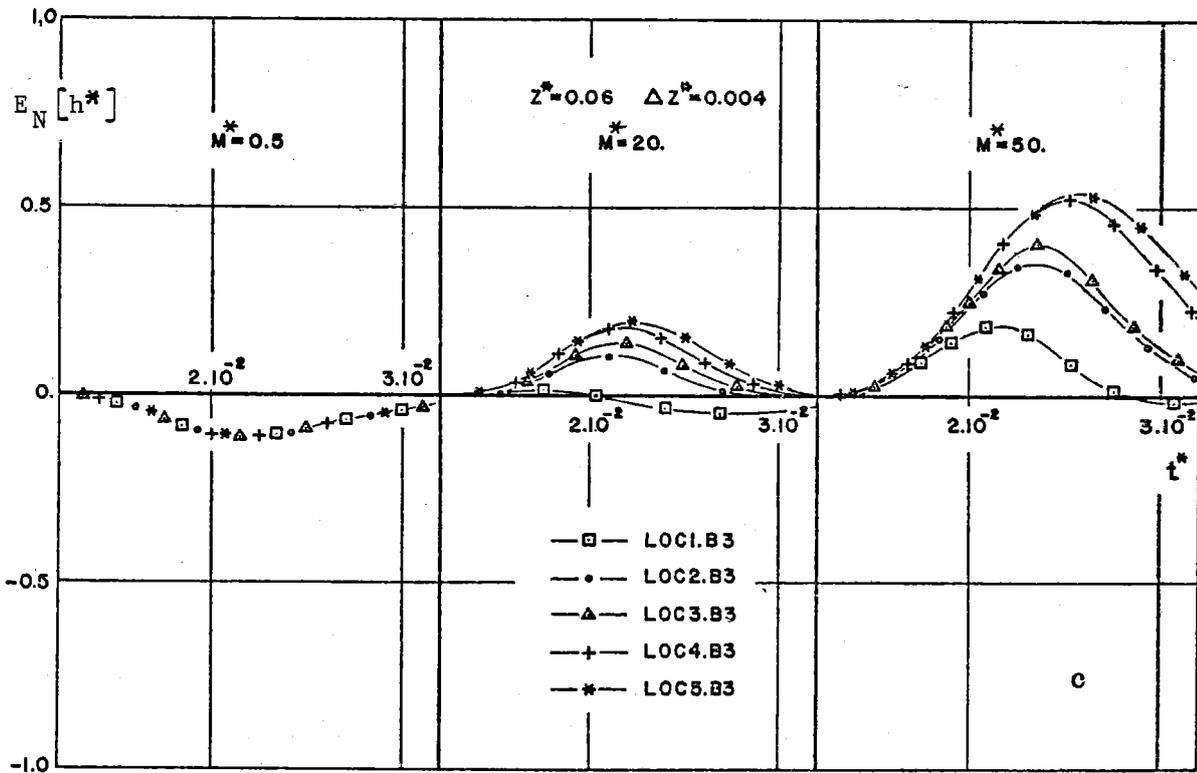
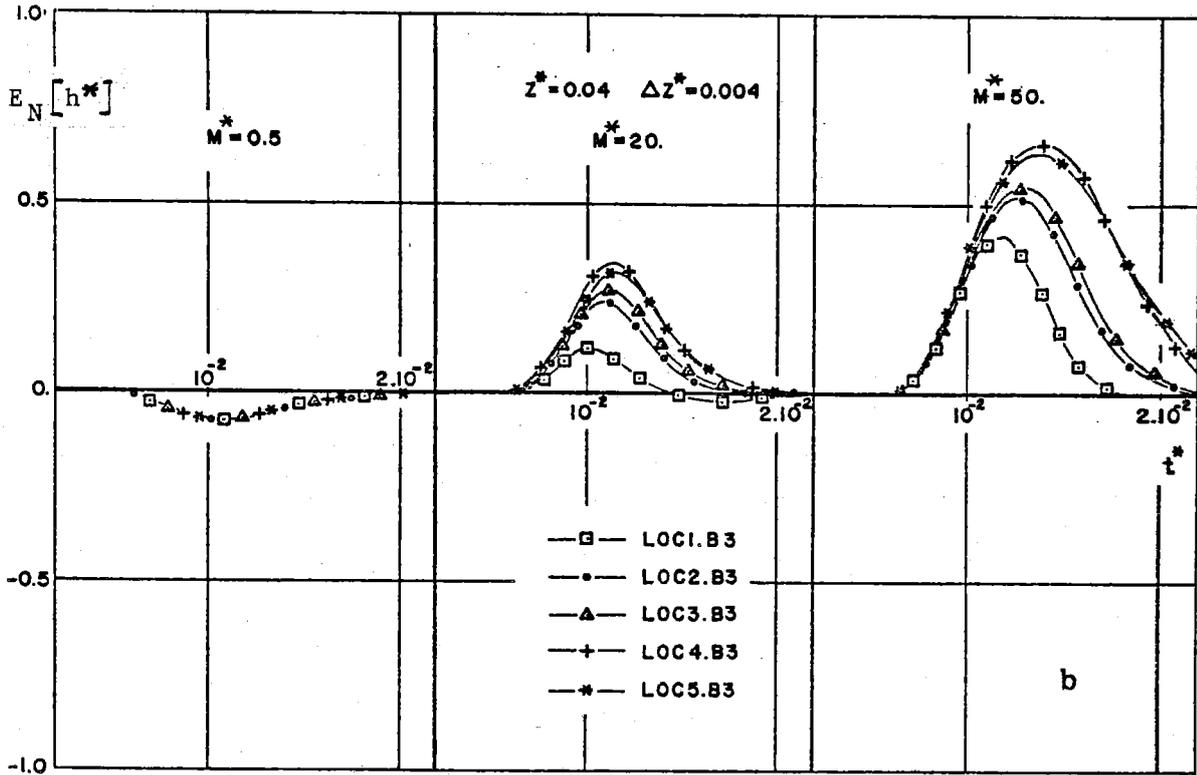


Figure V-12a : Evolution en fonction du temps des écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques totalement implicites obtenus avec les différents modes de calcul de C et différentes valeurs de M^* lors de la cinétique d'humidification de la cote $z^* = 0.004$.



Figures V-12b,c : Evolution en fonction du temps des écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques totalement implicites obtenus avec les différents modes de calcul de \bar{C} et différentes valeurs de M lors de la cinétique d'humification des cotes $z^* = 0.04$ et 0.06 .

● Les pressions calculées explicitement (schéma LOC3.B3) sont surestimées comme on l'a vu à propos du schéma explicite LOC.A1 et cela conduit à une surestimation des valeurs de $C_N^*(h_i^{j+1/2})$ correspondantes.

● Les pressions calculées implicitement (schéma LOC4.B3) sont surestimées puisqu'elles résultent de l'utilisation du schéma LOC1.B3 entre $[t^*, t^* + 1/2 \Delta t^*]$ et les valeurs de $C_N^*(h_i^{j+1/2})$ le sont également.

● Dans le schéma LOC5.B3 les valeurs de la pression sont considérées au temps $t^* + \omega \Delta t^*$ (avec $\omega = 0.7$) ; elles sont donc supérieures aux valeurs h_i^j et $h_i^{j+1/2}$ (car $\partial C^*/\partial t^* > 0$ en cinétique d'humidification). Cela conduit à une surestimation des valeurs correspondantes de $C_N^*(h_i^{j+\omega})$.

Physiquement cela signifie que les schémas LOC(2.B3/3.B3/4.B3/5.B3) permettent au milieu poreux une possibilité d'emmagasinement plus importante que le schéma LOC1.B3, donc une évolution de la solution plus lente dans le temps. Cela explique que les erreurs générées par ces schémas soient plus grandes que celles du schéma LOC1.B3.

iii) - L'influence de l'augmentation de M^* est étudié, à titre d'exemple, pour le schéma LOC1.B3.

En négligeant les termes supérieurs au 3ème ordre, l'erreur de discrétisation s'exprime par (Tableau V-3) :

$$E_D[h^*] = R1(\Delta t^*) + R13(\Delta t^{*2}) + R28(\Delta z^{*2}) \quad (V-17)$$

avec :

$$R1(\Delta t^*) = \Delta t^* \left\{ \frac{\partial K^*}{\partial z^*} \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^* \partial t^*} + K^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^{*2} \partial t^*} - 1/2 C^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} \right\} \quad (V-18)$$

$$R13(\Delta t^{*2}) = 1/2 \Delta t^{*2} \left\{ \frac{\partial K^*}{\partial z^*} \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*2} \partial z^*} + K^* \frac{\partial^4 h^*}{\partial t^{*2} \partial z^*} - 1/3 C^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} \right\} \quad (V-19)$$

En supposant que \bar{C}^* et \bar{K}^* sont localement constants et en dérivant l'équation (IV-3) par rapport au temps, on trouve que :

$$R1(\Delta t^*) = \frac{1}{2} \Delta t^* \cdot C^* \cdot \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} \quad (V-20)$$

$$R13(\Delta t^{*2}) = \frac{1}{3} \Delta t^{*2} \cdot C^* \cdot \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} \quad (V-21)$$

L'écart s'écrit donc :

$$E_D[h^*] = \Delta t^* \cdot C^* \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} + \frac{1}{3} \Delta t^* \cdot \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} \right] + R28(\Delta z^{*2}) \quad (V-22)$$

soit :

$$E_D[h^*] = E_{D.t}[h^*] + E_{D.z}[h^*] \quad (V-23)$$

où $E_{D.t}[h^*]$ est la composante de l'erreur de discrétisation liée au temps et $E_{D.z}[h^*]$ la composante liée à l'espace.

La figure (V-13b) montre l'évolution de l'expression $\partial^2 h_A^* / \partial t^{*2}$ en fonction du temps pour la cote $z^* = 0.04$. Cette courbe est obtenue à partir du lissage de la courbe $h_A^*(t^*)$ par une fonction spline cubique (Figure V-13a).

Le sens de variation de $E_{D.t}[h^*]$ s'explique par l'analyse de la figure (V-13b) :

$$- \text{ pour } t^* \leq 7.8 \cdot 10^{-3} : \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} \geq 0 \quad ; \quad \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} \geq 0$$

donc $E_{D.t}[h^*]$ augmente ;

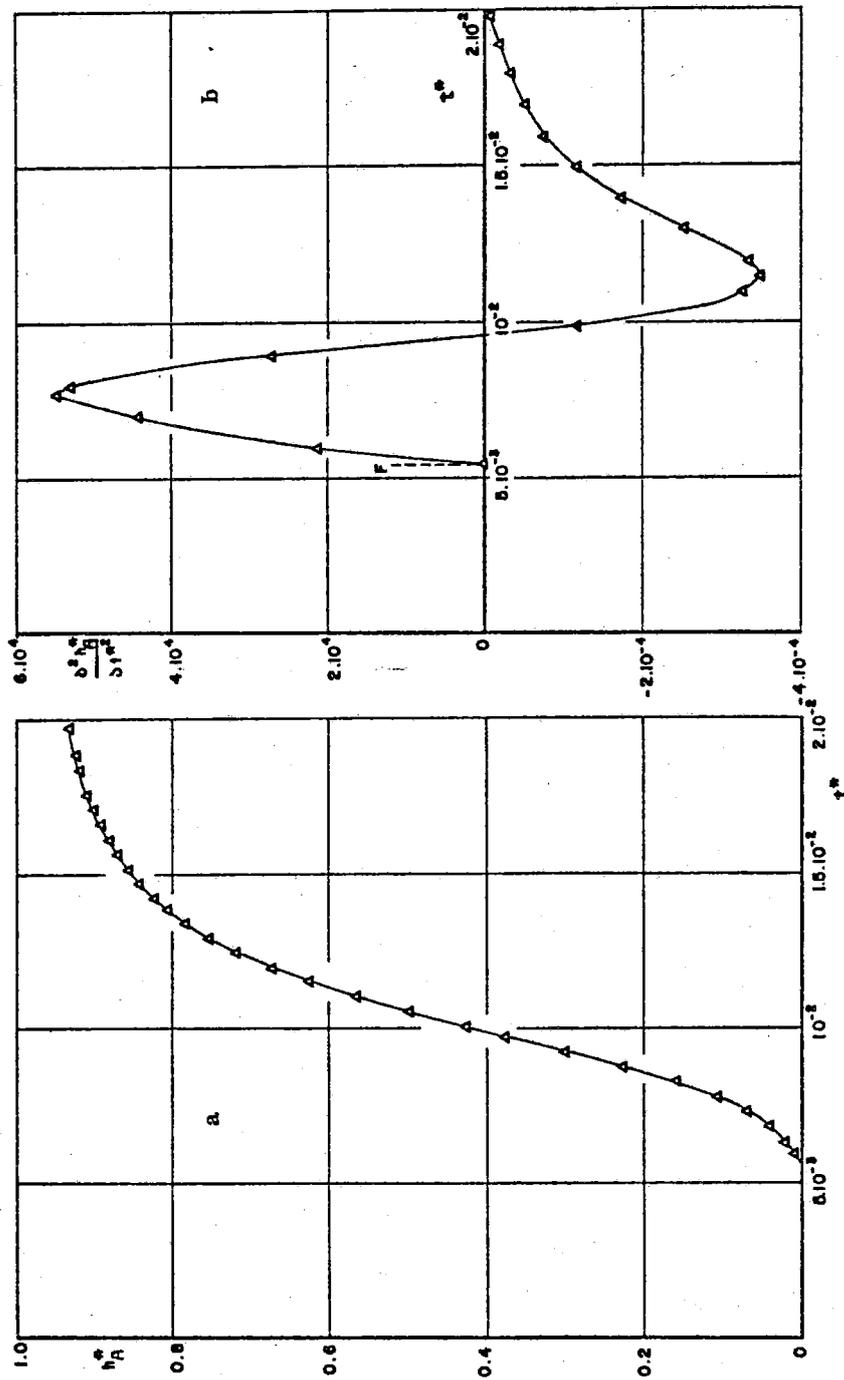


Figure V-13 : Profils de h_A^* et $\frac{\partial^2 h_A^*}{\partial t^{*2}}$ en fonction du temps (t^*) à la cote $z^* = 0.04$ pour le cas de l'humidification du Yolo Light Clay. Le profil $\frac{\partial^2 h_A^*}{\partial t^{*2}}$ est obtenu à partir du lissage de $h_A^*(t^*)$ par fonction spline cubique.

- pour $7.8 \cdot 10^{-3} < t^* < 9.7 \cdot 10^{-3}$:

$$\frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} > 0 \quad ; \quad \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} < 0$$

donc $E_{D,t}[h^*]$ commence à décroître à partir des valeurs précédentes ;

- pour $9.7 \cdot 10^{-3} \leq t^* \leq 1.15 \cdot 10^{-2}$:

$$\frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} \leq 0 \quad ; \quad \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} \leq 0$$

donc $E_{D,t}[h^*]$ décroît de plus en plus vite ;

- pour $t^* \geq 1.15 \cdot 10^{-2}$:

$$\frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} < 0 \quad ; \quad \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} > 0$$

donc la décroissance de $E_{D,t}[h^*]$ s'amortit.

L'analyse de $E_{D,t}[h^*]$, du comportement de l'écart $E_N[h^*]$ (Figures V-12a,b et c) et le fait que $R28(\Delta z^{*2})$ soit négatif pour ce mode de pondération, montrent que la composante $E_{D,z}[h^*]$ devient de moins en moins importante devant les erreurs de discrétisation liées au pas de temps $E_{D,t}[h^*]$ lorsque M^* augmente.

Les temps mis en évidence dans l'analyse ci-dessus sont relatifs à la solution quasi-analytique et ils ne correspondent pas aux temps critiques de la figure (V-12b) en raison du déphasage entre les solutions numériques et la solution quasi-analytique ; $h_{N,LOC1.B3}^*$ est de plus en plus en retard sur la valeur quasi-analytique h_A^* à mesure que M^* augmente.

D'autre part, l'erreur de discrétisation $E_D[h^*]$ et donc l'écart $E_N[h^*]$ sont proportionnels à Δt^* et à C^* (Eq. V-22). Quand Δt^* augmente,

l'écart augmente également. Cela conduit à une sous-estimation de plus en plus importante de la solution exacte.

Cette analyse effectuée sur LOC1.B3 est identique pour les autres schémas, car l'hypothèse faite sur \bar{C}^* et \bar{K}^* amènent les identités suivantes :

$$\begin{aligned} R1(\Delta t^*) &\equiv R4(\Delta t^*) \equiv R9(\Delta t^*) \\ R13(\Delta t^{*2}) &\equiv R17(\Delta t^{*2}) \equiv R23(\Delta t^{*2}) \end{aligned} \quad (V-24)$$

iv) - La comparaison des écarts $E_N[h^*]$ obtenus avec les mêmes valeurs de M^* mais pour différentes cotes montre une atténuation de l'erreur de discrétisation globale dans le profil. Cela s'explique par le fait que la composante liée au temps $E_{D.t}[h^*]$ devient de moins en moins importante devant la composante liée à l'espace $E_{D.z}[h^*]$. Ce phénomène se fait sentir plus particulièrement près de la surface du sol, où $E_N[h^*]$ atteint des valeurs de 0.8 dans la première section $z^* = 0.004$ pour $M^* = 20$ ou 50 (Figure V-12a).

On sait que l'infiltration d'eau dans un sol quelconque a toujours une allure de cinétique comparable à celle donnée figure (V-13a). On peut donc légitimement penser que cette analyse est extrapolable à d'autres types de sol que l'argile considérée ici.

Dans l'exploitation des modèles, il conviendra donc d'utiliser des pas de temps pas trop grands. De ce point de vue, le schéma LOC1.B3 est le moins sensible à une telle augmentation.

b) - Comportement asymptotique

L'étude du régime asymptotique montrerait que la solution numérique donnée par le modèle du bilan local n'est pas affectée par le mode de calcul de \bar{C}^* et est pratiquement insensible à une augmentation du pas de temps dans les limites considérées ici. Cela prouve que les erreurs liées au pas de temps sont négligeables devant celles liées au pas d'espace.

Pour le schéma totalement implicite, il apparaît que le calcul de \bar{C}^* par $\bar{C}^* = C_i^* \cdot j$ donne les meilleurs résultats. De plus, au niveau du code numérique cette méthode évite des calculs supplémentaires contrairement aux autres cas de figure. Elle sera donc retenue dans la suite de cette étude.

2.1.2.2 - Influence du mode de calcul de \bar{K}^*

On examine successivement les différents modes d'estimation de \bar{K}^* dans le temps, donnés au chapitre IV et en annexe.

Dans tous ces schémas, les conductivités hydrauliques internodales sont calculées par la moyenne géométrique et le coefficient \bar{C}^* est considéré au pas de temps précédent ; le pas d'espace est gardé constant et égal à $\Delta z^* = 0.004$.

a) - Cinétique d'humidification

Les figures (V-14a et b) montrent les évolutions en fonction du temps des écarts à la solution exacte (Eq. IV-56), qui sont générés par les schémas LOC(1.B3/6.B3/9.B3) pour les cotes $z^* = 0.04$ et 0.06 pour $M^* = 0.5$, 20 et 50. Elles conduisent aux remarques suivantes :

i) - Pour $M^* = 0.5$, le mode de linéarisation portant sur \bar{K}^* n'a pas d'influence sur la cinétique d'humidification des différentes cotes. Cela montre que les composantes de l'erreur de discrétisation liées au pas de temps (Δt^* et Δt^{*2}) sont négligeables devant les composantes liées au pas d'espace (Δz^{*2}).

ii) - Pour d'autres valeurs de M^* ($M^* = 20$ et 50 successivement) on constate une différenciation dans le comportement des schémas numériques. Comme pour la linéarisation sur \bar{C}^* , cela s'explique facilement par la façon dont on calcule la valeur de \bar{K}^* :

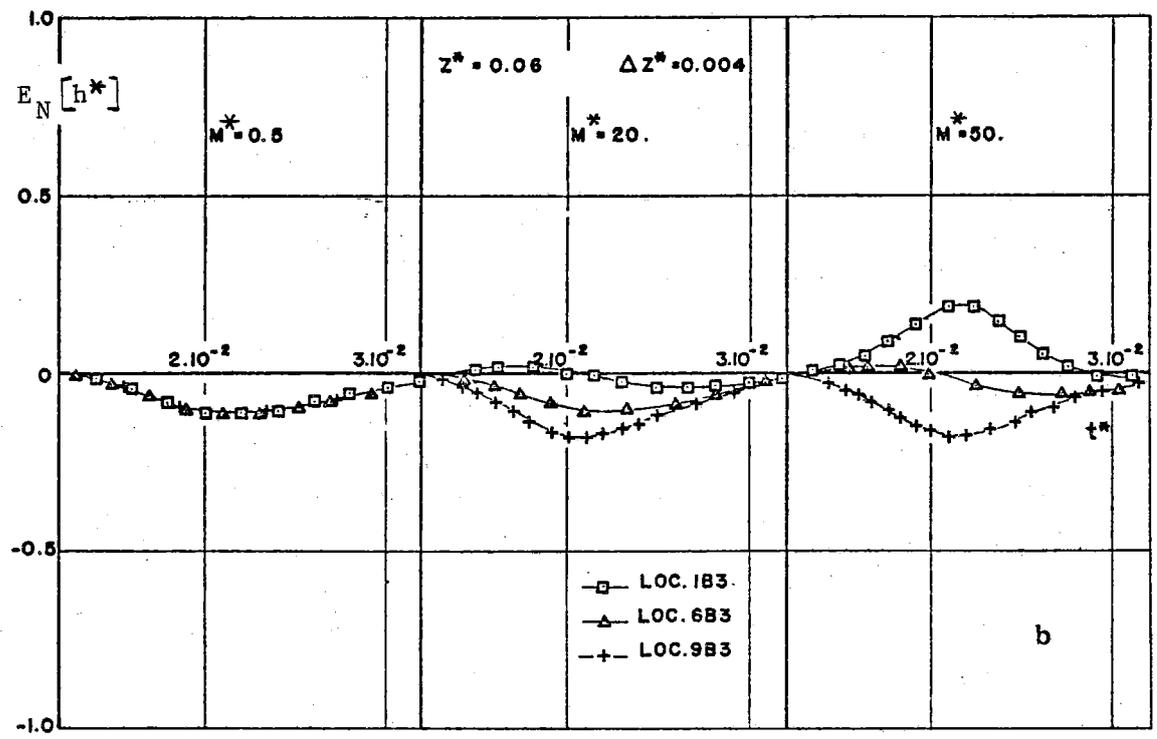
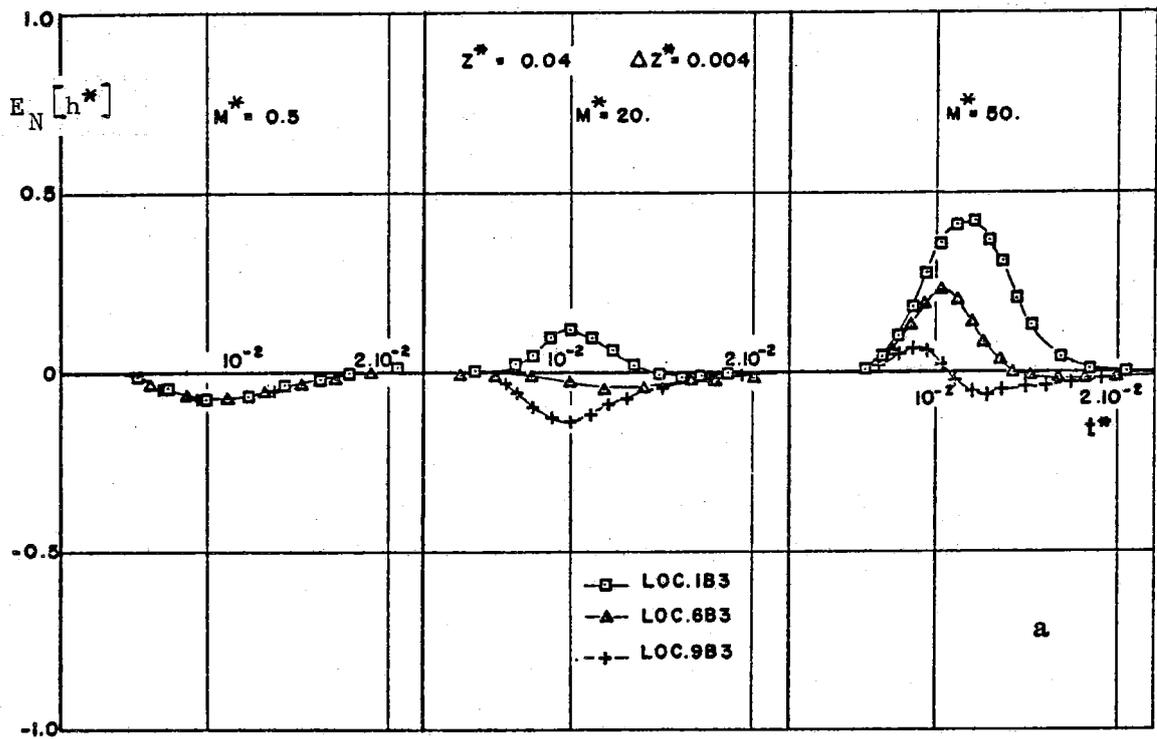


Figure V-14 : Evolution en fonction du temps des écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques totalement implicites obtenus pour différents modes de calcul de K^* .

● Dans le schéma LOC1.B3, la conductivité hydraulique K_N^{*j} est considérée au temps j ; par conséquent, elle est inférieure à celle utilisée dans les autres schémas ($\partial K^* / \partial t^* > 0$). Cela conduit à une sous-estimation de la solution exacte par rapport aux schémas LOC6.B3 et LOC9.B3.

● De la même façon, la valeur de $K_N^{*j+1/2}$ utilisée dans le schéma LOC6.B3 est inférieure à la conductivité K_N^{*j+1} considérée dans le schéma LOC9.B3 ; cela explique la sous-estimation de la solution donnée par LOC6.B3 par rapport au LOC9.B3.

iii) - L'augmentation du pas de temps, donc de M^* , produit une croissance en valeur algébrique de l'écart $E_N[h^*]$. L'explication de ce phénomène est à rapprocher de l'étude faite précédemment sur les modes de calcul de \bar{C}^* .

En supposant \bar{C}^* et \bar{K}^* localement constants et en dérivant l'équation (IV-3) par rapport au temps, on trouve des identités semblables à l'équation (V-24), (Tableau V-3) :

$$\begin{aligned} R1(\Delta t^*) &\equiv R7(\Delta t^*) \equiv R8(\Delta t^*) \\ R13(\Delta t^{*2}) &\equiv R21(\Delta t^{*2}) \equiv R22(\Delta t^{*2}) \end{aligned} \tag{V-25}$$

Cela montre que l'erreur liée au temps $E_{D.t}[h^*]$ est identique à celle donnée par les équations (V-22 et V-23).

En conséquence, l'augmentation de M^* amène une croissance de l'erreur $E_{D.t}[h^*]$ bien que moins forte que dans le cas précédent (Figure V-12b et c) parce que la valeur de \bar{C}^* est calculée de la même façon pour tous les modèles. Par contre, l'accroissement des valeurs de \bar{K}^* avec l'augmentation du pas de temps, Δt^* , (Tableau V-3), conduit à une influence de plus en plus importante de $R28(\Delta z^{*2})$ sur l'écart $E_N[h^*]$, et ce d'autant plus que les valeurs de \bar{K}^* sont calculées à des temps plus proches de $t^* + \Delta t^*$. Cet effet de compensation n'existe pas pour le schéma LOC1.B3 et par conséquent ce schéma est le plus sensible à une augmentation de Δt^* (Figures V-14a et b).

iv) - Une fois de plus, on peut constater que l'erreur $E_{D,t}[h^*]$ décroît avec l'avancement du front d'humidification dans le profil (Figures V-14a et b).

Les figures (V-15a et b) montrent l'influence de l'estimation des valeurs de \bar{K}^* à partir des valeurs de la pression au temps $t^* + \frac{1}{2} \Delta t^*$ LOC(7.B3/8.B3). Les résultats obtenus sont parfaitement conformes à ceux relatifs à \bar{C}^* , trouvés précédemment.

En effet, dans les schémas LOC(7.B3/8.B3) les valeurs de $h_{i,*}^{j+\frac{1}{2}}$ sont surestimées, comme cela a été montré pour les schémas LOC(3.B3/4.B3). Cela conduit à une surestimation des valeurs de $K_{i,*}^{j+\frac{1}{2}}$ correspondantes. Avec l'hypothèse faite sur \bar{C}^* et \bar{K}^* , le tableau (V-3) montre que la valeur de la pression $h_{N,i,*}^{j+\frac{1}{2}}$ pour le schéma LOC7.B3 est supérieure à celle du schéma LOC8.B3, ce qui explique que LOC7.B3 surestime plus la solution exacte que LOC8.B3.

b) - Comportement asymptotique

L'étude du régime asymptotique montre que la solution numérique donnée par le schéma du bilan local n'est pas plus affectée par le mode de calcul de \bar{K}^* qu'elle ne l'est par celui de \bar{C}^* . Elle n'est pas sensible à une augmentation du pas de temps du moins dans les limites considérées dans cette étude.

A la faveur de ces résultats, il apparaît difficile de pouvoir dégager un meilleur mode d'estimation de \bar{K}^* dans le temps, contrairement à \bar{C}^* . En effet, si certains schémas sont moins sensibles à une augmentation de Δt^* (LOC6.B3, LOC7.B3, LOC8.B3 et LOC9.B3) que d'autres (LOC1.B3), ils conduisent à une propagation plus importante des erreurs dans le profil.

De plus, ils présentent un temps de calcul plus important en raison de l'estimation du coefficient \bar{K}^* à des pas de temps intermédiaires. Cette dernière remarque fait que nous retenons le mode de pondération et de linéarisation du schéma LOC1.B3.

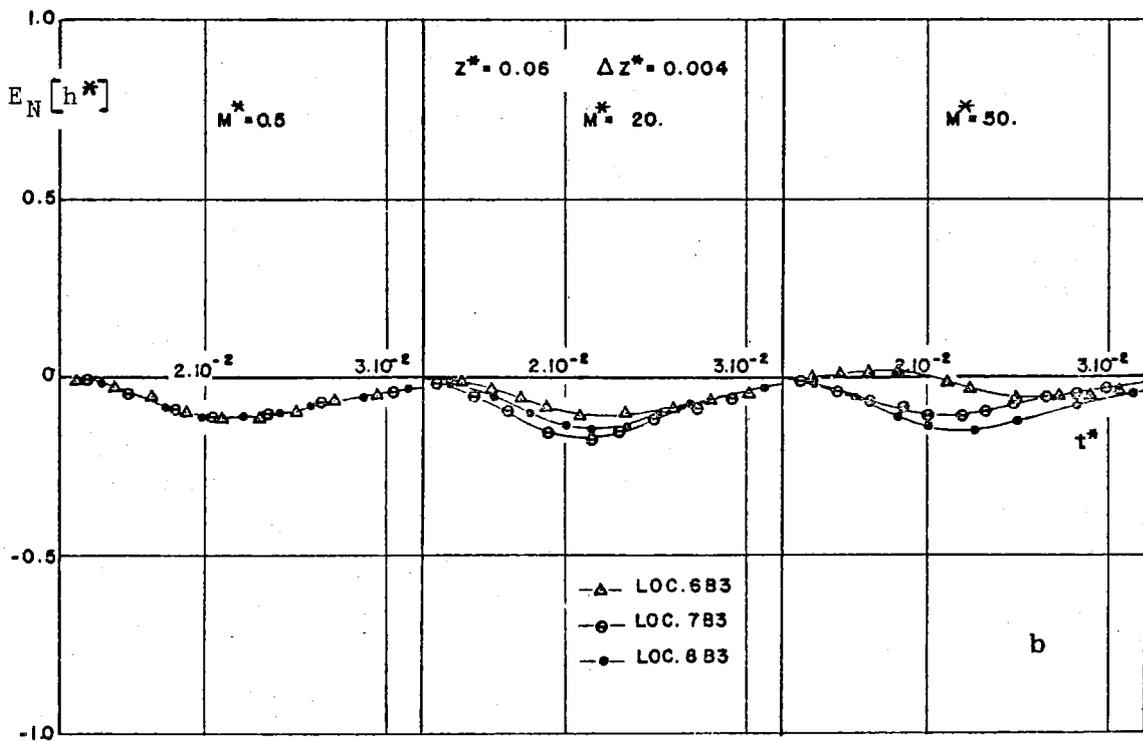
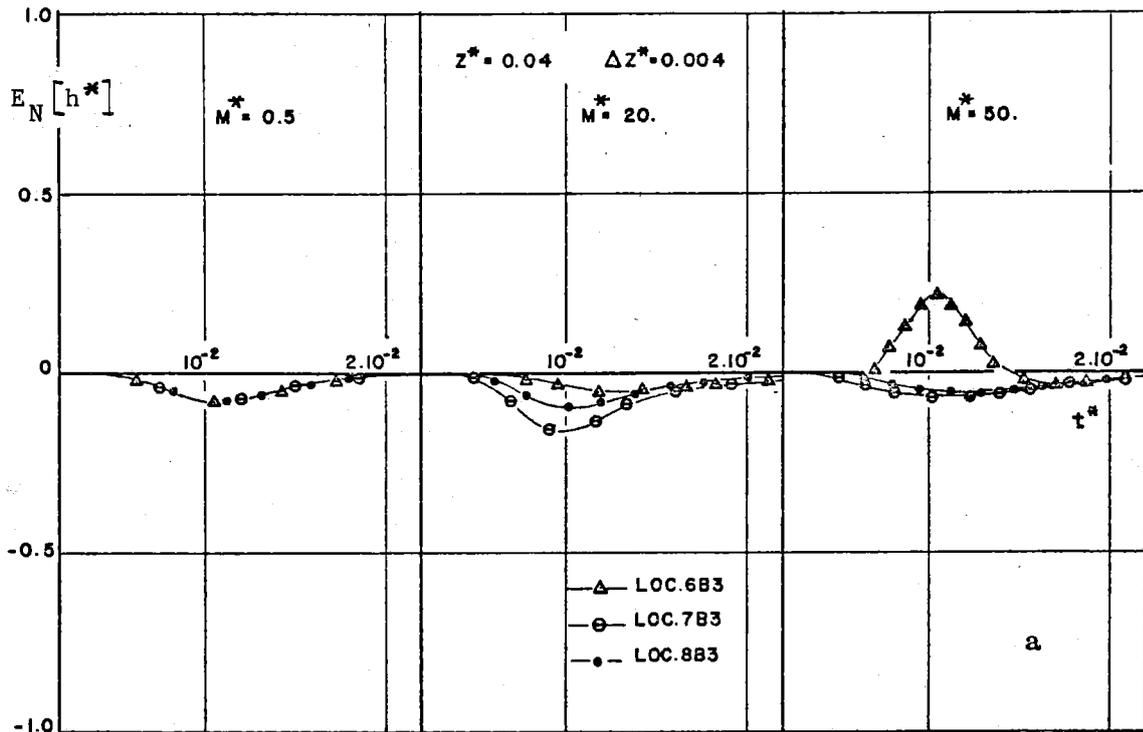


Figure V-15 : Evolution en fonction du temps des écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques totalément implicites obtenus pour différents modes de calcul de K

2.1.3 - Schémas de type CRANK-NICOLSON ($\sigma = \frac{1}{2}$)

Comme pour les schémas totalement implicites, ces schémas posent le problème de l'estimation des coefficients \bar{C}^* et \bar{K}^* dans le temps. Il convient donc d'en étudier l'influence sur la précision de la solution numérique. Cependant, compte-tenu du grand nombre des possibilités, nous avons décidé, pour des raisons évidentes de concision, de limiter notre étude à trois groupes de modèles. Chaque groupe est caractérisé par le même mode de pondération :

- Les schémas LOC.C (HANKS et BOWERS, 1962) et LOC.E2 (RUBIN et STEINHARDT, 1963) utilisent pour mode de pondération la moyenne arithmétique sur h ;
- Les schémas LOC.D (PIKUL et al., 1974), LOC.E3 (RUBIN, 1966) et LOC.E5 (WHISLER et KLUTE, 1965) font intervenir la moyenne arithmétique sur K pour calculer les conductivités internodales ;
- Les schémas LOC.E1 et LOC.E4 qui n'ont jamais été publiés à notre connaissance, sont utilisés avec la moyenne géométrique pour mode de pondération.

Ces différents schémas sont comparés aux schémas totalement implicites avec le mode de pondération correspondant (LOC1.B7, LOC1.B1 et LOC1.B3 respectivement) afin de dégager les avantages et inconvénients des schémas de CRANK-NICOLSON, par rapport aux schémas totalement implicites.

a) - Cinétique d'humidification

Les figures (V-16a, b et c) montrent les évolutions en fonction du temps des écarts à la solution quasi-analytique générés par les différents schémas aux cotes $z^* = 0.004, 0.04$ et 0.06 pour $M^* = 0.5, 20$ et 50 . Elles conduisent aux remarques suivantes :

i) - Pour $M^* = 0.5$ les schémas de type CRANK-NICOLSON (Figures V-16, V-17 et V-18), quelque soit le mode de linéarisation, donnent une solution identique aux schémas totalement implicites correspondants. Comme dans le cas précédent, les erreurs liées au pas de temps sont négligeables devant les erreurs liées au pas d'espace, pour cette valeur particulière de M^* .

ii) - Pour d'autres valeurs de M^* ($M^* = 20$ et 50 successivement) on peut constater une différenciation dans le comportement des schémas numériques :

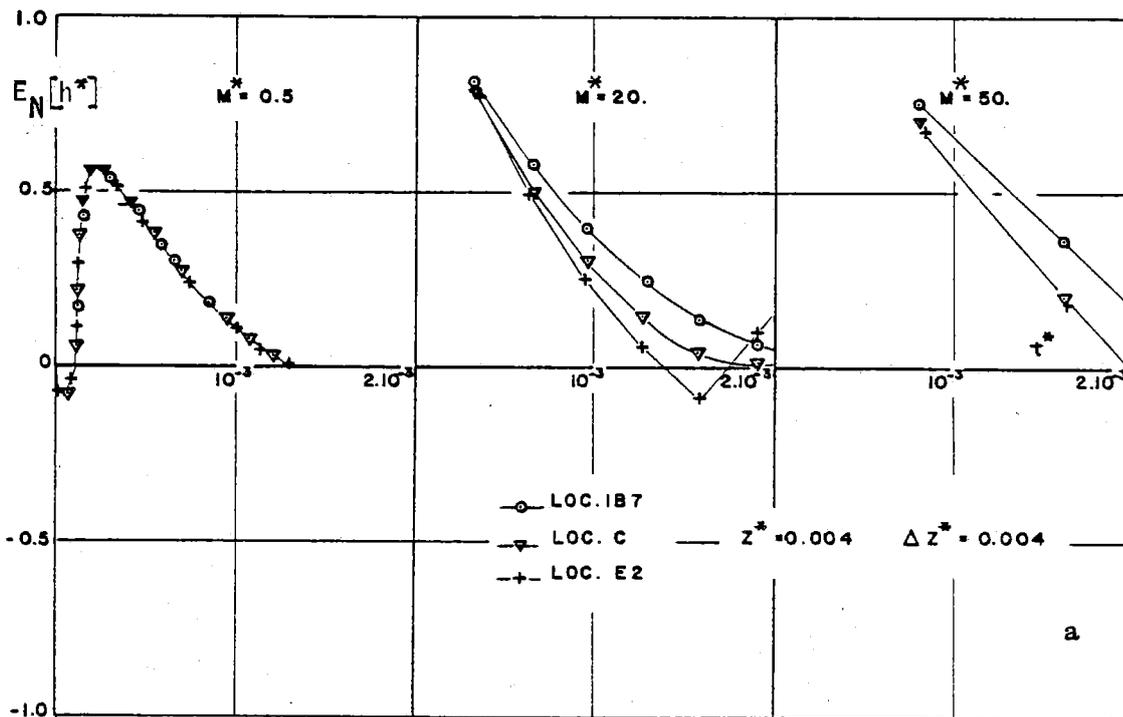
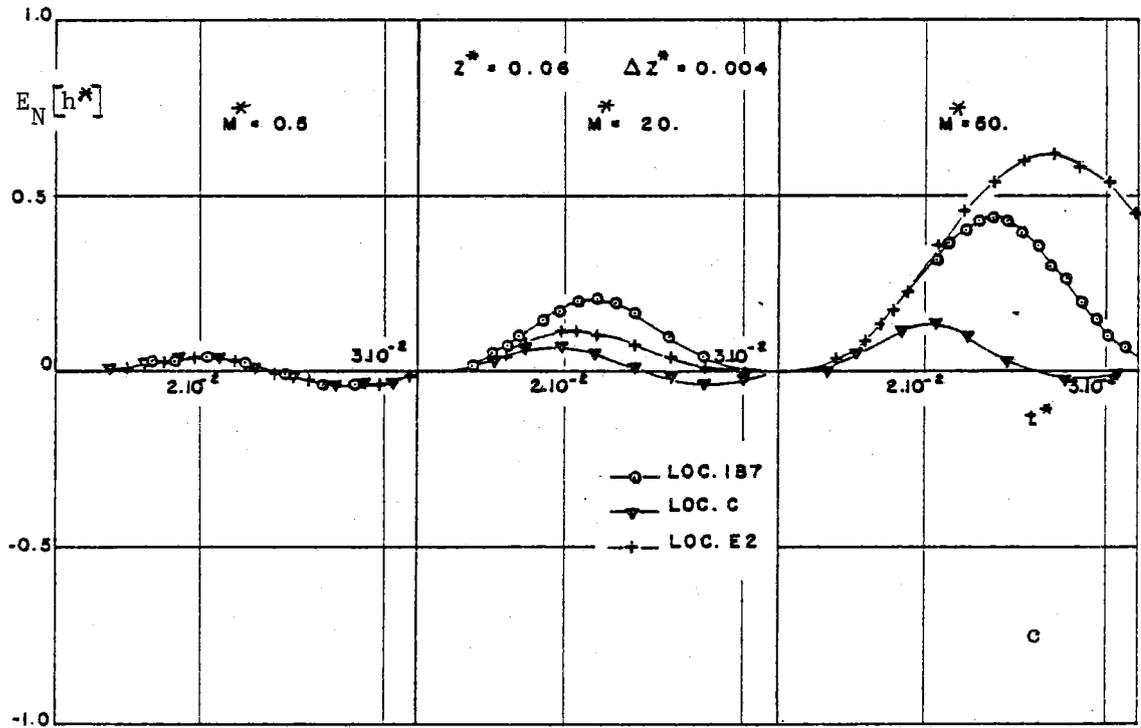
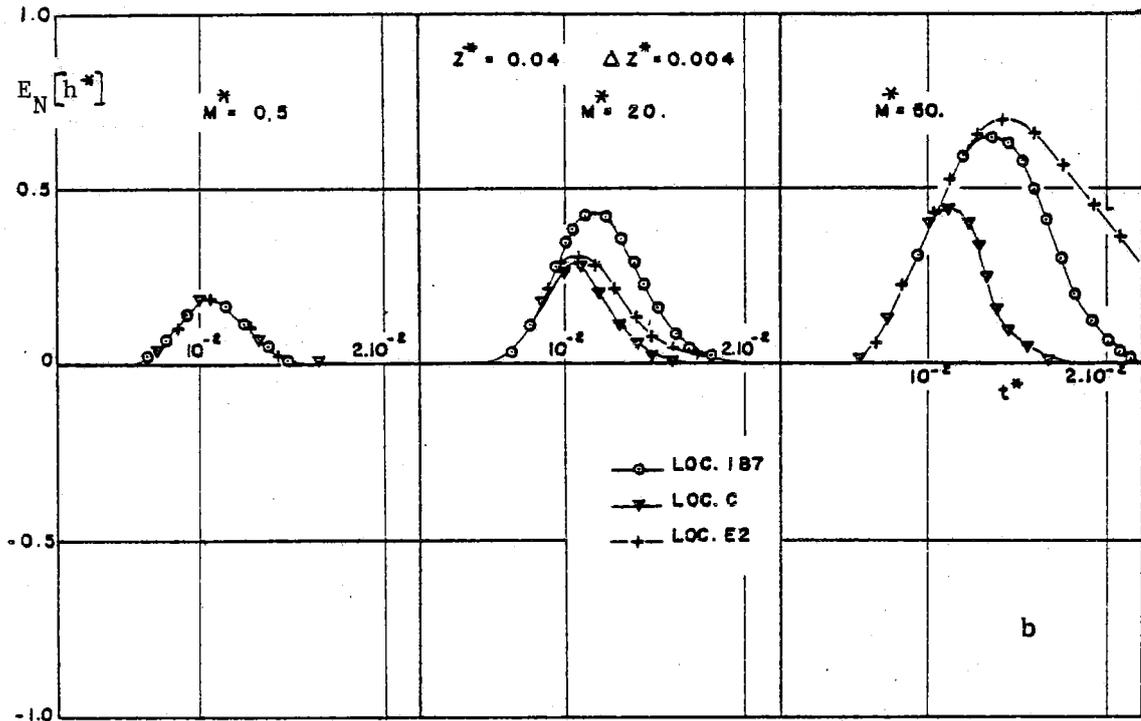


Figure V-16a : Ecart entre les solutions quasi-analytique et numériques de type CRANK-NICOLSON en fonction du temps. Mode de pondération : la moyenne arithmétique sur h .



Figures V-16b et c : Ecart entre les solutions quasi-analytique et numériques de type CRANK-NICOLSON en fonction du temps. Mode de pondération : la moyenne arithmétique sur h .

● Les schémas LOC(E1/E2/E3/E4/E5) ont formellement les mêmes erreurs de discrétisation globales : (R20 + R28) données dans le tableau (V-4). Par contre, les valeurs de $E_N[h^*]$ sont différentes comme le montrent les figures (V-16, V-17 et V-18).

Cela est lié aux différents modes de prédiction de \bar{C}^* et \bar{K}^* au temps $t^* + \frac{1}{2} \Delta t^*$. De ce point de vue, il est difficile, sinon impossible d'analyser leur influence respective sur l'erreur de discrétisation globale. Cependant, il est possible de faire les constatations suivantes :

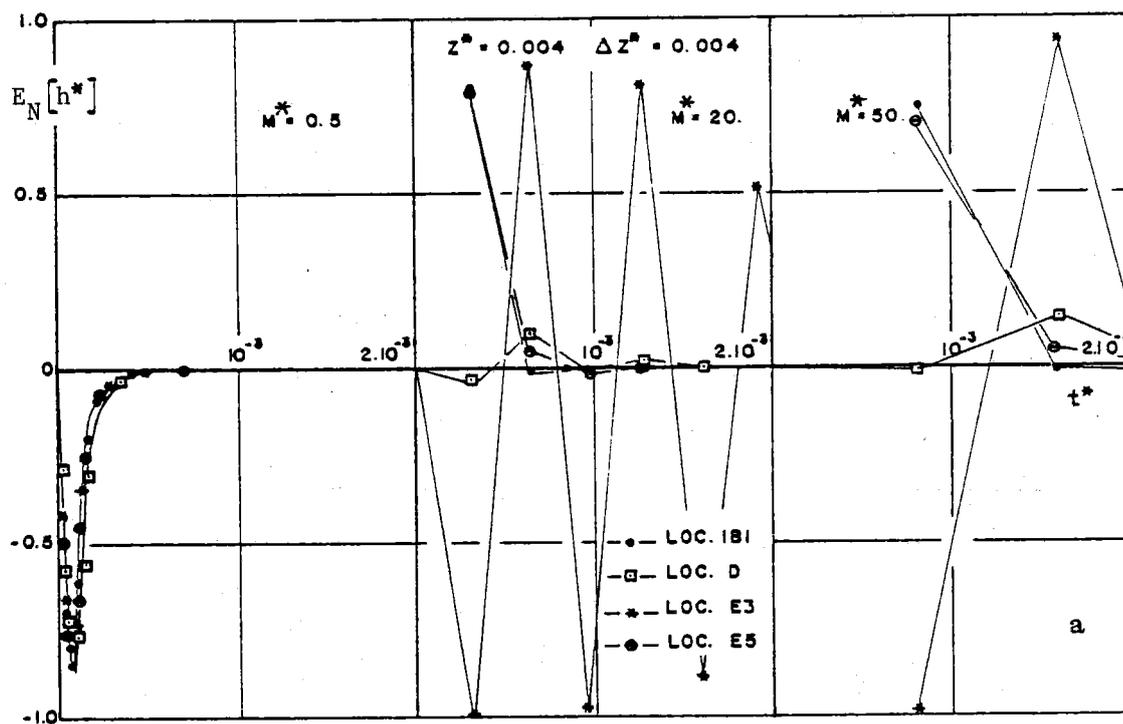
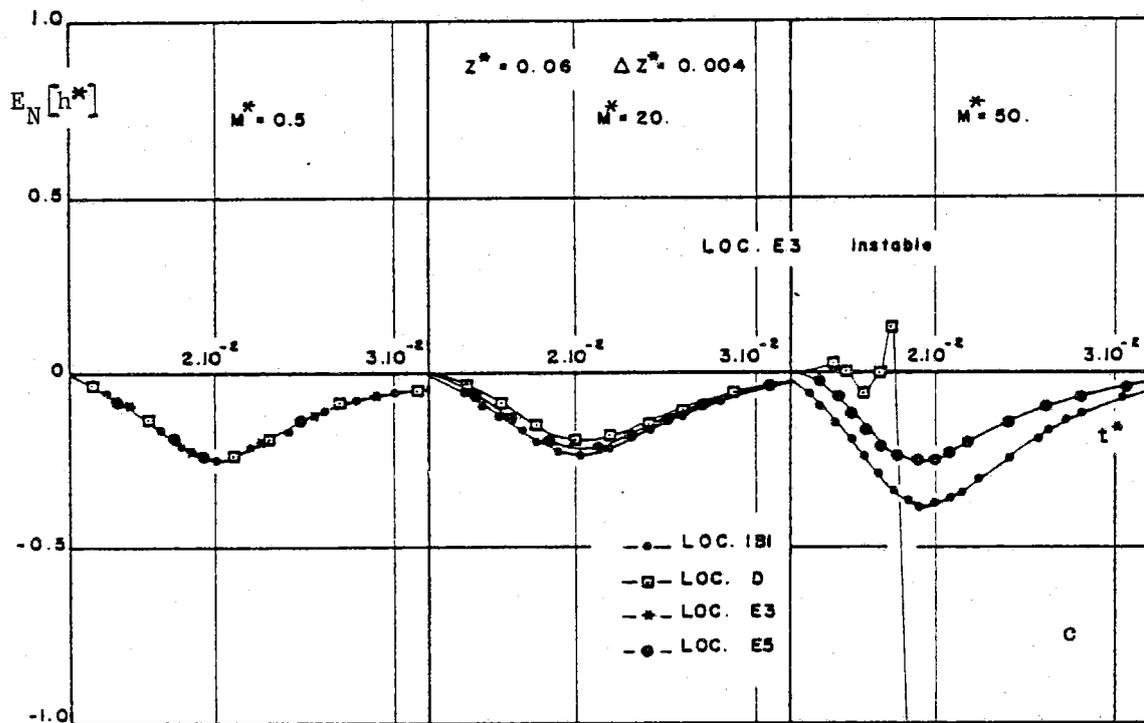
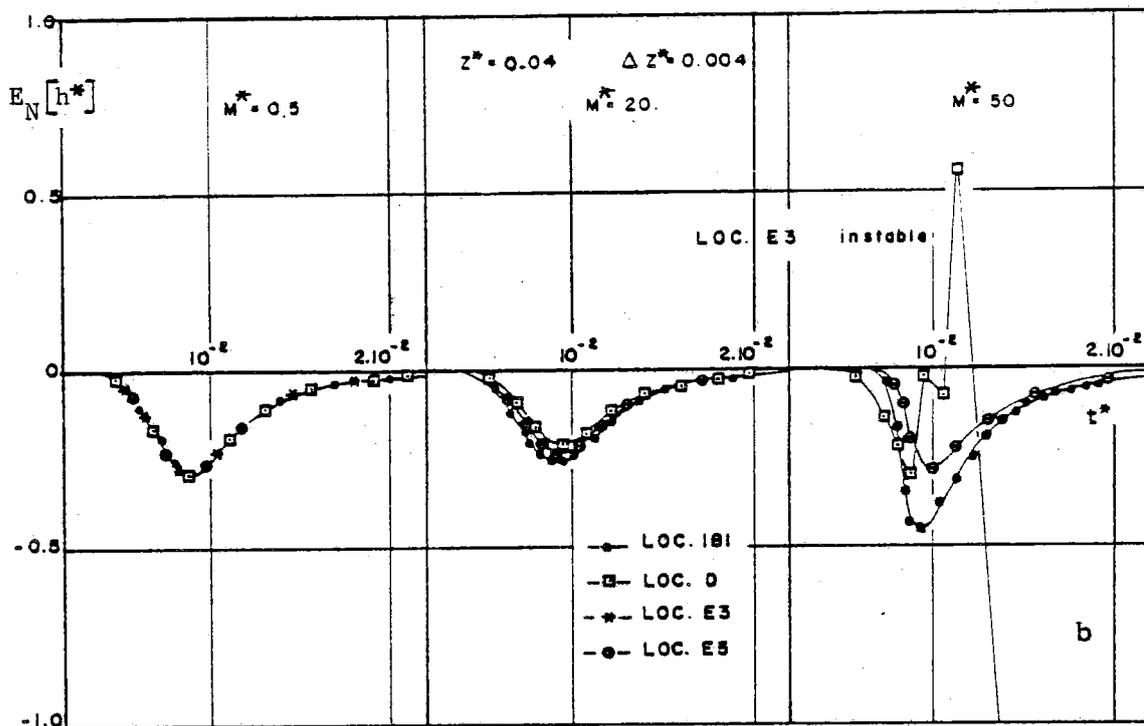


Figure V-17a : Ecart entre les solutions quasi-analytique et numériques de type CRANK-NICOLSON en fonction du temps. *Mode de pondération : la moyenne arithmétique sur K .



Figures V-17b et c : Ecart entre les solutions quasi-analytique et numériques de type CRANK-NICOLSON en fonction du temps. Mode de pondération : la moyenne arithmétique sur K^* .

- Le schéma LOC.E1 (Figures V-18b et c) devient instable pour $M^* \geq 20$ dans toutes les sections de calcul. Cela provient du fait que les coefficients \bar{C}^* et \bar{K}^* sont estimés indépendamment l'un de l'autre par une extrapolation linéaire, alors qu'en réalité ils sont liés par les relations $h(\theta)$ et $K(h)$. On remarque qu'il est nécessaire de linéariser les équations par une extrapolation linéaire sur h : le schéma LOC.E2 est stable pour $\forall M^* < 50$ (Figures V-16b et c). Cependant, la sous-estimation plus importante de la solution exacte pour $M^* = 50$, fait penser à un début d'instabilités de ce schéma.

- Les instabilités du schéma LOC.E3 (Figures V-17b et c) pour $M^* \geq 20$ sont liées à la nature explicite de la prédiction de h^* au temps $t^* + \frac{1}{2} \Delta t^*$, comme cela a été montré pour le schéma LOC.A1. L'utilisation du schéma LOC.A2 améliore sensiblement les résultats.

- Le schéma LOC.E4 (Figures V-18b et c) présente de légères instabilités pour $M^* \geq 20$ dans la section $z^* = 0.004$. Elles s'amortissent ensuite dans le profil.

- Un calcul itératif des coefficients \bar{C}^* et \bar{K}^* (LOC.E5) améliore sensiblement la solution (Figures V-17b et c). Cependant ce gain de précision est obtenu au détriment du coût économique. En effet, il faut compter une dizaine d'itérations par pas de temps pour satisfaire un critère de convergence fixé à 10^{-5} .

● Les schémas LOC.C et LOC.D sont du 1^o ordre en Δt^* contrairement aux schémas précédents.

- Le schéma LOC.C (Figure V-16) est stable dans le domaine d'étude du pas de temps considéré.

- Le schéma LOC.D (Figure V-17) est instable pour $M^* \geq 25$. La comparaison avec les autres schémas instables (LOC.E1 et LOC.E3) montre que le caractère implicite de la prédiction de \bar{C}^* et de \bar{K}^* dans le temps repousse la valeur limite de M^* à partir de laquelle les instabilités apparaissent.

● Contrairement aux schémas totalement implicites, il apparaît donc que certains schémas de type CRANK-NICOLSON présentent des instabilités numériques dans le domaine d'étude considéré (LOC.D, LOC.E1 et LOC.E3). En revanche, ceux qui sont stables (LOC.C, LOC.E2, LOC.E4 et LOC.E5) sont moins

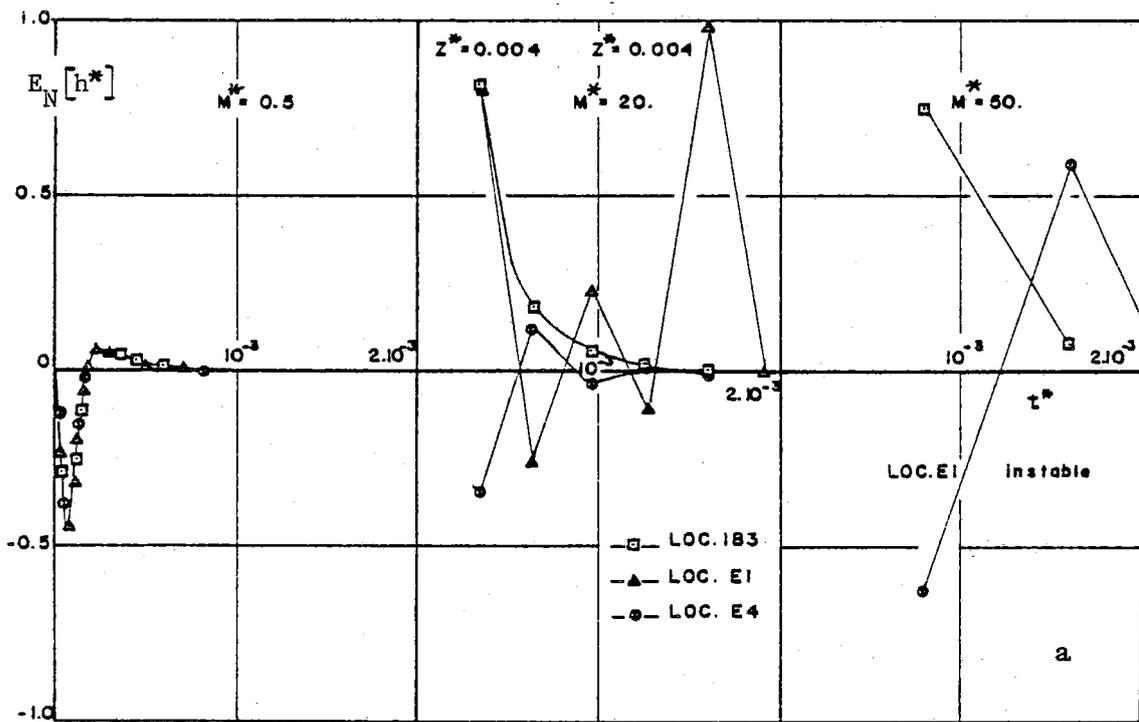


Figure V-18a : Ecart entre les solutions quasi-analytique et numériques de type CRANK-NICOLSON en fonction du temps. Mode de pondération : la moyenne géométrique sur K^* .

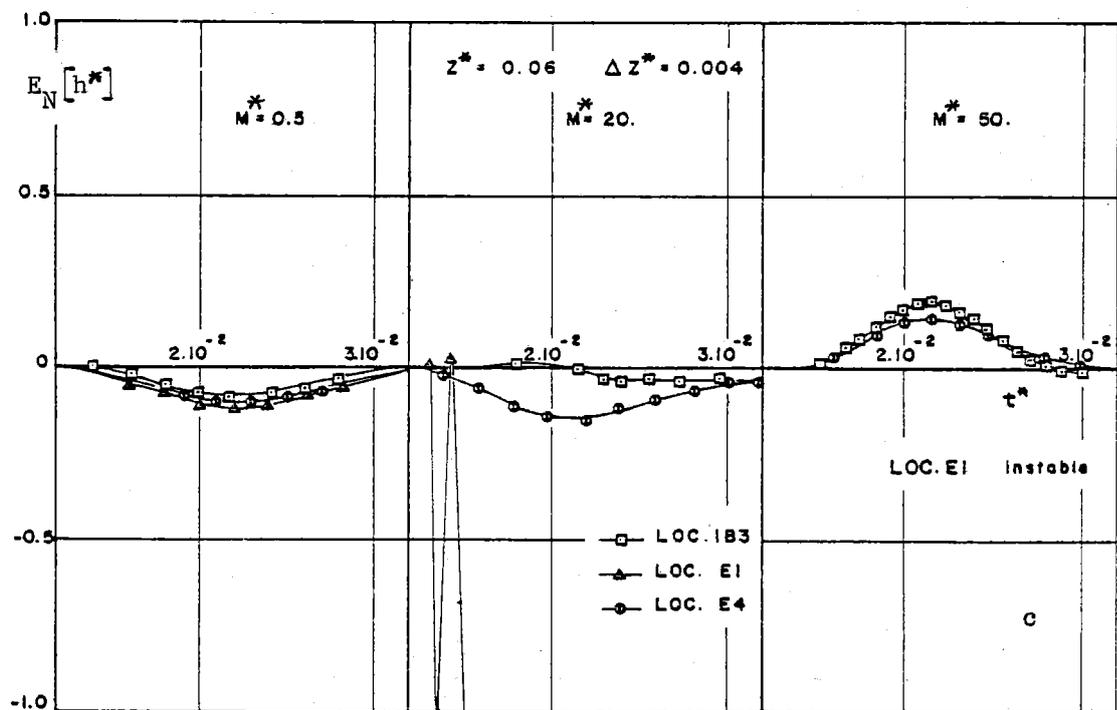
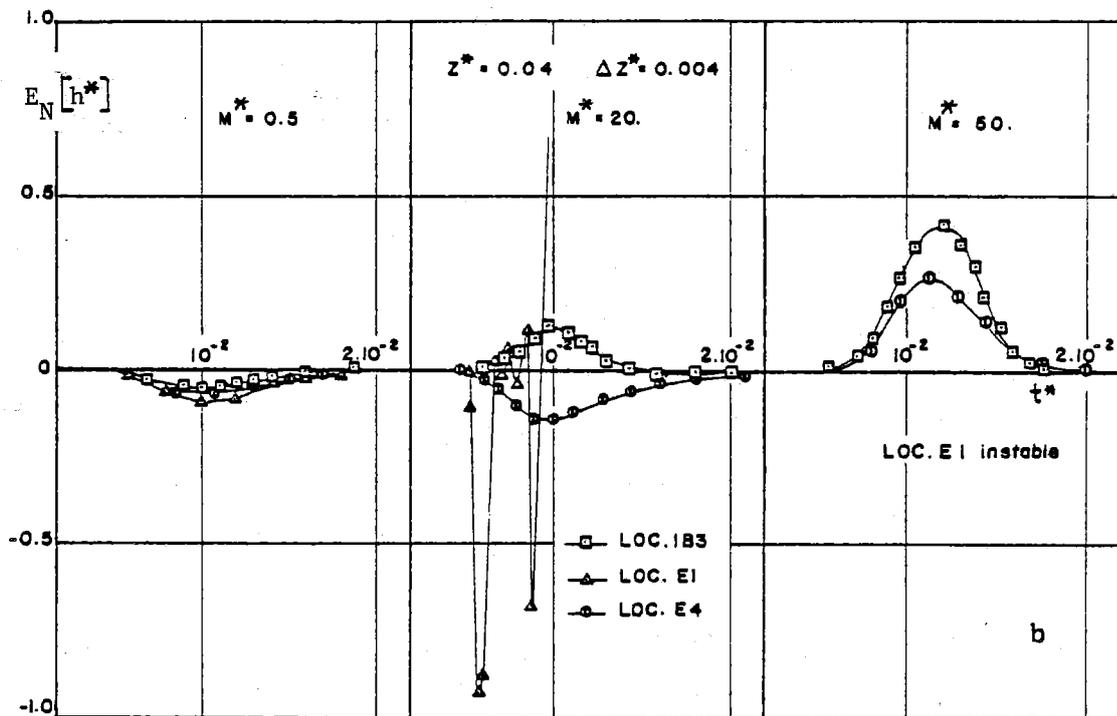


Figure V-18b et c : Ecart entre les solutions quasi-analytique et numériques de type CRANK-NICOLSON en fonction du temps. Mode de pondération : la moyenne géométrique sur K^* .

sensibles que les schémas totalement implicites à une augmentation de M^* , donc de Δt^* , puisqu'ils sont du 2° ordre en Δt^{*2} à l'exception de LOC.C. En effet, ce dernier schéma génère une erreur en Δt^* (Tableau V-4) :

$$R10(\Delta t^*) = \frac{1}{2} \Delta t^* \left[\frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \cdot \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^* \partial t^*} \right) - C^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} + 2 \cdot \omega \cdot \frac{\partial C^*}{\partial t^*} \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \right] \quad (V-26)$$

En supposant que \bar{C}^* et \bar{K}^* sont localement constants, et en dérivant l'équation (IV-3) par rapport au temps, on trouve $R10(\Delta t^*) \cong 0$. Cette remarque s'applique également pour LOC.D : $R6(\Delta t^*) \cong 0$.

Le schéma LOC1.B7, quant à lui, a l'erreur suivante en utilisant la même hypothèse :

$$R1(\Delta t^*) = \frac{1}{2} \Delta t^* \cdot C^* \cdot \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} \quad (V-27)$$

Or, le schéma est du premier ordre en Δt^* et est donc plus sensible que LOC.C à une augmentation du pas de temps.

● La surestimation ou la sous-estimation de la solution exacte est déterminée par le mode de pondération et ce phénomène est indépendant du choix du paramètre σ .

b) - Comportement asymptotique

La Figure (V-19) montre l'écart à la solution quasi-analytique généré par les différents schémas du type CRANK-NICOLSON à la cote $z^* = 0.004$ pour $M^* = 0.5$ et $\Delta z^* = 4 \cdot 10^{-3}$. Bien que tous ces schémas soient convergents, on constate que LOC.(C/D/E2) présentent de très légères oscillations non-significatives autour de la solution donnée par LOC(E1/E3/E4/E5). Pour d'autres valeurs de M^* les oscillations s'accroissent dans la première section de calcul pour s'amortir avec le temps (LOC.C pour $M^* > 5$), ou pour donner naissance à des fortes instabilités (LOC.D/LOC.E1 pour $M^* > 25$, LOC.E2/E4/E5 pour $M^* > 50$ et LOC.E3 pour $M^* > 5$).

		Δt^*	Δt^{*2}	Δz^*	Δz^{*2}	OBSERVATIONS $\sigma = 1/2$
LOC.C		R10	R24	0	R28	$K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-53)
LOC.D	PREDICTION	1/2 R1	1/4R13	0	R28	$K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-47)
	CORRECTION	R6	R19	0	R28	$K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-47)
LOC.E1	PREDICTION					$K_{N,i\pm 1/2}^* = K_{R,i\pm 1/2} - 3/8 \Delta t^{*2} \frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} + 1/4 \Delta t^{*3} \frac{\partial^3 K^*}{\partial z^{*3}} + 0 (\Delta t^{*4})$ $C_{N,i\pm 1/2}^* = C_{R,i\pm 1/2}^* - 3/8 \Delta t^{*2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^{*2}} + 1/4 \Delta t^{*3} \frac{\partial^3 C^*}{\partial z^{*3}} + 0 (\Delta t^{*4})$
	CORRECTION	0	R20	0	R28	$K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-49)
LOC.E2	PREDICTION					$K_{N,i\pm 1/2}^* = K_{i\pm 1/2}^* (h_R - 3/8 \Delta t^2 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + 1/4 \Delta t^3 \frac{\partial^3 h}{\partial t^3} + 0 (\Delta t^4))$ $C_{N,i}^* = C_i^* (h_R - 3/8 \Delta t^2 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + 1/4 \Delta t^3 \frac{\partial^3 h}{\partial t^3} + 0 (\Delta t^4))$
	CORRECTION	0	R20	0	R28	$K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-53)
LOC.E3	PREDICTION	1/2 R3	1/4R15	0	R28	$K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-47)
	CORRECTION	0	R20	0	R28	$K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-47)
LOC.E4	PREDICTION	1/2 R1	1/4R13	0	R28	$K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-49)
	CORRECTION	0	R20	0	R28	$K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-49)
LOC.E5	ITERATION	0	R20	0	R28	$K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-47)

ERREURS DE DISCRETISATION :

$$R1 = \Delta t^* \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^* \partial t^*} \right) - 1/2 C^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} \right\}$$

$$R3 = - 1/2 \Delta t^* \cdot C^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}}$$

$$R6 = 1/4 \Delta t^* \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^* \partial t^*} \right) - \frac{\partial}{\partial t^*} \left(C^* \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \right) \right\}$$

$$R10 = \Delta t^* \left\{ 1/2 \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^* \partial t^*} \right) - 1/2 C^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} - \omega \frac{\partial C^*}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \right\}$$

$$R13 = 1/2 \Delta t^{*2} \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^* \partial t^{*2}} \right) - 1/3 C^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} \right\}$$

$$R15 = - 1/6 \Delta t^{*2} C^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}}$$

$$R19 = 1/8 \Delta t^{*2} \left\{ 1/2 \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^* \partial t^{*2}} \right) + \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^* \partial t^*} \right) - 1/2 \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \left(C^* \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \right) - 1/3 C^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} \right) \right) \right\}$$

$$R20 = 1/4 R13 (\Delta t^{*2})$$

$$R24 = 1/2 \Delta t^{*2} \left\{ 1/2 \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^* \partial t^{*2}} \right) - 1/3 C^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} - \omega \frac{\partial C^*}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} - \omega^2 \frac{\partial^2 C^*}{\partial t^{*2}} \cdot \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \right\}$$

$$R28 = \Delta z^{*2} \left\{ 1/6 \left[1/4 \frac{\partial^3 K^*}{\partial z^{*3}} \left(\frac{\partial h^*}{\partial z^*} - 1 \right) + \left(\frac{\partial K^*}{\partial z^*} \cdot \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^{*3}} + 1/2 K^* \frac{\partial^4 h^*}{\partial z^{*4}} \right) + 1/8 \frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} \cdot \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}} \right] \right\}$$

Tableau V-4 : Erreurs de discrétisation générées par les différents schémas type CRANK-NICOLSON appliqués au modèle du bilan local.

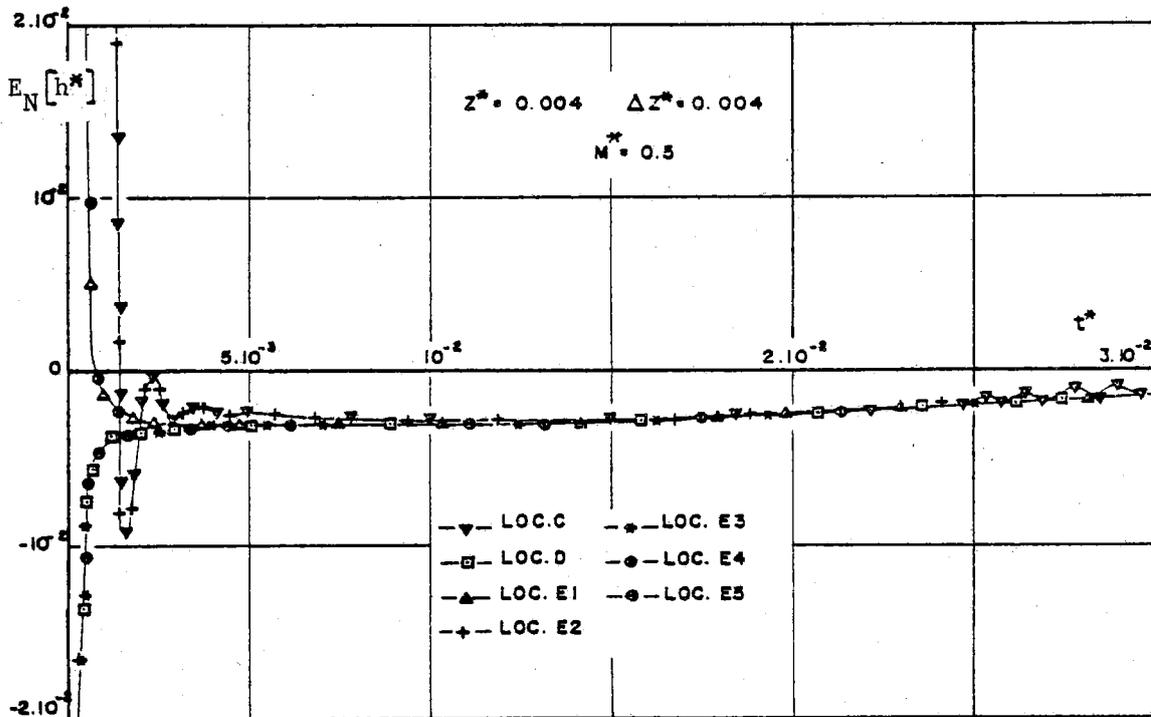


Figure V-19 : Evolution en fonction du temps des écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques de type CRANK-NICOLSON obtenus lors du régime asymptotique à la cote $z^* = 0.004$.

A la faveur de ces résultats, il apparaît que le schéma LOC.C, utilisant la moyenne arithmétique sur "h" comme mode de pondération, donne les meilleurs résultats. En effet, si le schéma LOC.E4 est aussi peu sensible à une augmentation de Δt^* que LOC.C, il conduit à un temps de calcul plus important en raison de l'estimation des coefficients \bar{K}^* et \bar{C}^* à des pas de temps intermédiaires. C'est pourquoi nous retenons LOC.C comme meilleur schéma de type CRANK-NICOLSON.

2.1.4 - Conclusions

Cette étude des différentes façons de linéariser les équations du modèle du bilan local permet de dégager les conclusions suivantes :

i) - La discrétisation explicite nécessite l'utilisation de très petits pas de temps pour assurer la stabilité de la solution numérique. De ce point de vue, il est préférable d'utiliser la méthode de DU FORT-FRANKEL (1953) plutôt que le schéma traditionnel.

ii) - Pour des pas de temps suffisamment petits $\Delta t^* = 8.10^{-6}$ soit $\Delta t = 105$ sec. pour le Yolo Light Clay, tous les schémas implicites ($\sigma = 1$, $\sigma = \frac{1}{2}$) convergent vers la solution quasi-analytique aussi bien en cinétique d'humidification qu'en régime asymptotique. Les modes de calcul de \bar{C}^* et de \bar{K}^* dans le temps n'ont pratiquement aucune influence sur la solution numérique.

iii) - Ces schémas ont un comportement différent quand on cherche à augmenter le pas de temps, en conservant le pas d'espace constant, afin de réduire, si faire se peut le coût économique :

- les schémas totalement implicites restent stables pour $\Delta t^* \in [8.10^{-6}, 8.10^{-4}]$

- certains schémas du type CRANK-NICOLSON deviennent instables (LOC.D, LOC.E1 et LOC.E3) dans ce domaine d'étude de Δt^* . Ces instabilités sont liées au mode de prédiction de \bar{C}^* et \bar{K}^* . Il apparaît que la prédiction implicite repousse la valeur limite de Δt^* à partir de laquelle les instabilités numériques apparaissent.

- les schémas CRANK-NICOLSON qui sont stables (LOC.C, LOC.E2, LOC.E4 et LOC.E5) sont moins sensibles que les schémas totalement implicites à une augmentation de Δt^* pour le même mode de pondération.

iv) - La surestimation ou la sous-estimation de la solution exacte est davantage liée au mode de pondération qu'à celui de linéarisation.

v) - Quand la valeur de M^* , donc Δt^* augmente, l'erreur liée au temps amène une sous-estimation de plus en plus importante par rapport à la solution exacte.

vi) - Au vu de cette analyse, il est possible de dégager pour chaque type de linéarisation, un meilleur schéma :

- LOC.A2 pour les schémas explicites ;
- LOC1.B3 pour les schémas totalement implicites ;
- LOC.C pour les schémas de type CRANK-NICOLSON

vii) - Les considérations relatives au coût économique qui seront étudiées ultérieurement contribueront à la sélection définitive.

viii) - Les conclusions précédentes sont indépendantes du sol utilisé.

2.2 - Etude des modèles décomposés

Tous les modèles décomposés étudiés dans ce paragraphe utilisent la moyenne arithmétique sur h_i et h_{i+1} comme mode de pondération, car on a montré précédemment (Figure V-7) qu'il donnait les meilleurs résultats pour ce type de modèle. On est donc ramené ici à étudier uniquement le problème de la linéarisation.

2.2.1 - Schémas explicites ($\sigma = 0$)

Les résultats obtenus par l'utilisation des schémas DEC.A1 et DEC.A2 (Annexe) sont qualitativement identiques à ceux des schémas LOC.A1 et LOC.A2 respectivement. Ils plaident en la faveur de l'utilisation de la discrétisation de DU FORT-FRANKEL (1953), plutôt que le schéma traditionnel.

2.2.2 - Schémas totalement implicites ($\sigma = 1$)

Une étude sur l'influence du mode de calcul de \bar{C}^* et \bar{K}^* , comparable à celle décrite précédemment pour le modèle du bilan local a été menée pour le modèle décomposé. Par souci de concision, nous ne présentons pas le détail de cette analyse. Il ressort que là encore le mode d'estimation de ces coefficients au temps précédent donne les meilleurs résultats pour la cinétique d'humidification. Le régime asymptotique obtenu pour $M^* = 0.5$ n'est pas affecté par le mode de calcul de \bar{C}^* et \bar{K}^* . Nous retenons par conséquent le schéma DEC.B7 dont la solution est donnée figures (V-20a, b et c) pour la cinétique d'humidification et figures (V-8a et b) pour le régime asymptotique.

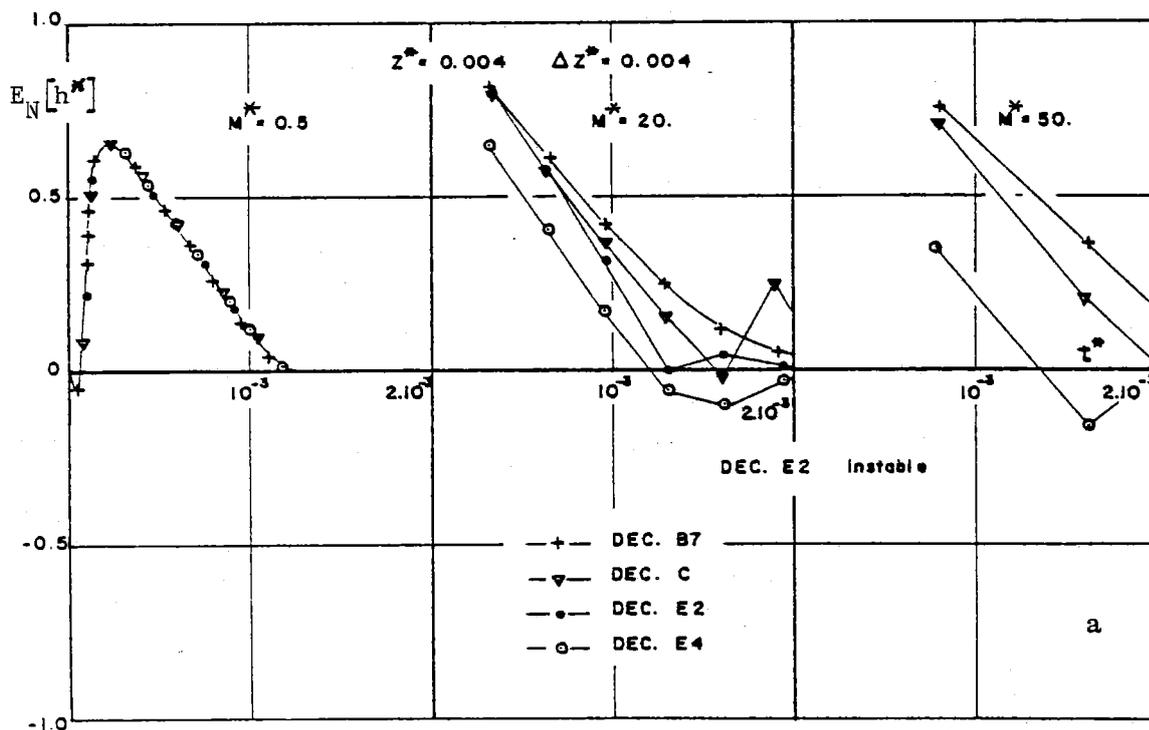
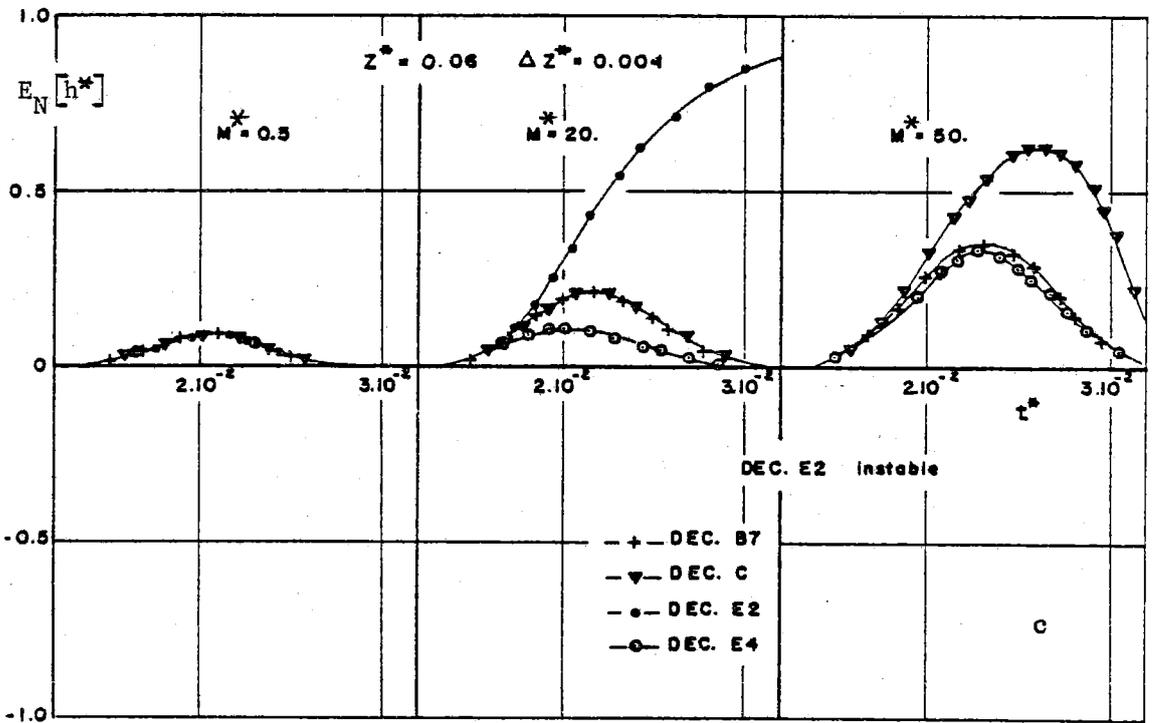
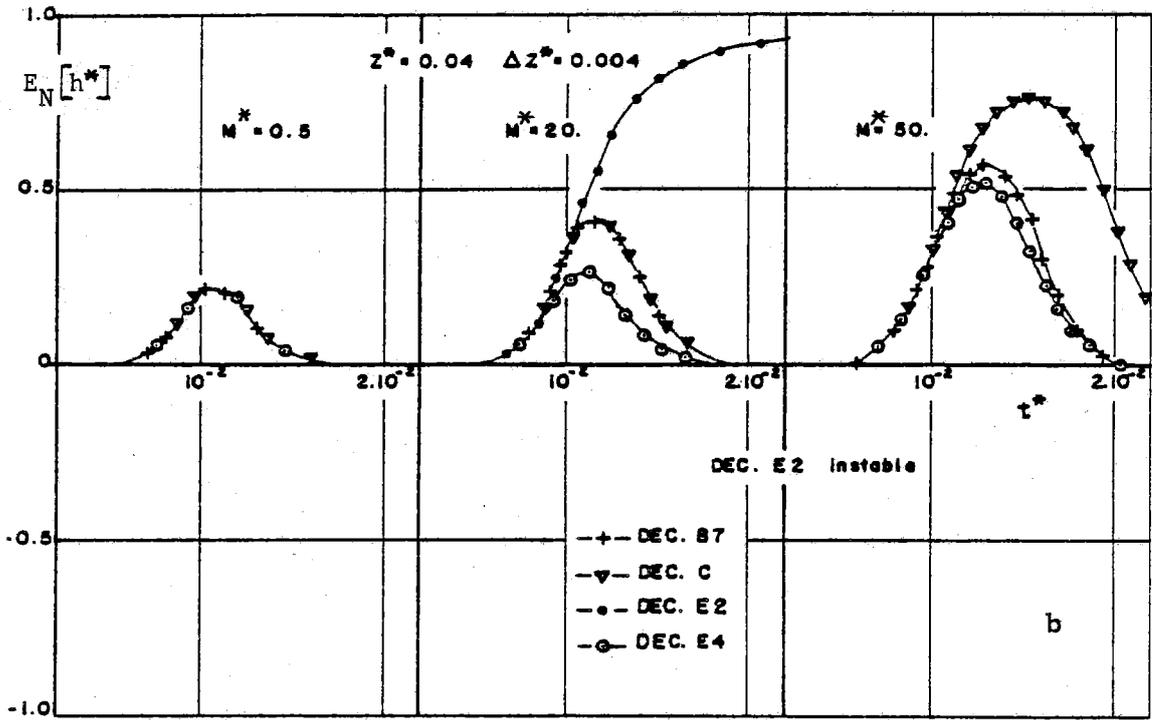


Figure V-20a : Ecart en fonction du temps entre les solutions quasi-analytique et numériques de type totalement implicite et CRANK-NICOLSON appliquées au modèle décomposé.



Figures V-20b et c : Ecart en fonction du temps entre les solutions quasi-analytique et numériques de type totalement implicite et CRANK-NICOLSON appliquées au modèle décomposé.

Cependant, il convient de noter que les légères oscillations qui apparaissent au temps $t^* = 1.2 \cdot 10^{-3}$ pour $M^* = 0.5$ (Figures V-8a et b), s'accroissent pour des valeurs croissantes de M^* avant de s'amortir dans le temps.

2.2.3 - Schémas de type CRANK-NICOLSON ($\sigma = \frac{1}{2}$)

a) - Cinétique d'humidification

Les figures (V-20a, b et c) montrent les évolutions en fonction du temps des écarts à la solution quasi-analytique à trois cotes et pour les valeurs $M^* = 0.5, 20$ et 50 . Elles conduisent aux remarques suivantes :

i) - Pour $M^* = 0.5$, tous les schémas donnent la même cinétique d'humidification des différentes sections. Tout se passe donc comme si le mode de linéarisation n'avait aucune influence. L'analyse des erreurs de discrétisation (Tableau V-5) montre que tous les schémas génèrent la même erreur spatiale ($R30 (\Delta z^{*2})$), mais des erreurs temporelles différentes. Toutes les solutions numériques étant néanmoins identiques, cela prouve que, pour cette valeur de M^* les erreurs liées au pas de temps sont négligeables devant celles liées au pas d'espace qui sont positives pour le mode de pondération retenu ici.

ii) - Pour d'autres valeurs de M^* ($M^* = 20$ et 50) on constate une différenciation dans le comportement des schémas numériques :

● Bien que les schémas DEC.E2 et DEC.E4 génèrent les mêmes erreurs ($R20 (\Delta t^{*2}) + R30 (\Delta z^{*2})$), les solutions numériques sont différentes :

- Le schéma DEC.E2 est instable pour $M^* = 50$ et son comportement pour $M^* = 20$ fait également penser à un début d'instabilités. Il est à rapprocher de celui obtenu pour le schéma LOC.E2 où le début des instabilités s'est produit pour $M^* = 50$ (Figures V-16b et c). Le caractère conservatif de ce schéma permet l'utilisation d'une gamme plus étendue du

		Δt^*	Δt^{*2}	Δz^*	Δz^{*2}	OBSERVATIONS
DEC.B7		R1	R13	0	R30	$\sigma = 1 ; K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-53)
DEC.C		R10	R24	0	R30	$\sigma = 1/2 ; K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-53)
DEC.E2	PREDICTION					$K_{N,i\pm 1/2}^* = K_{i\pm 1/2}^* (h_R^* - 3/8 \Delta t^{*2} \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} + 1/4 \Delta t^{*3} \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} + 0 (\Delta t^{*4}))$ $C_{N,i}^* = C_i^* (h_R^* - 3/8 \Delta t^{*2} \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} + 1/4 \Delta t^{*3} \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} + 0 (\Delta t^{*4}))$
	CORRECTION	0	R20	0	R30	$\sigma = 1/2 ; K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-53)
DEC.E4	PREDICTION	1/2R1	1/4R13	0	R30	$K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-53)
	CORRECTION	0	R20	0	R30	$\sigma = 1/2 ; K_{N,i\pm 1/2}^*$ CALCULE PAR Eq. (IV-53)
KIR.A1		R12	R26	0	R33	$\sigma = 0$
KIR.B		R11	R25	0	R33	$\sigma = 1$
KIR.E2	PREDICTION					$K_{N,i}^* = K_i^* (U_R^* - 3/8 \Delta t^{*2} \frac{\partial^2 U^*}{\partial t^{*2}} + 1/4 \Delta t^{*3} \frac{\partial^3 U^*}{\partial t^{*3}} + 0 (\Delta t^{*4}))$ $C_{N,i}^* = C_i^* (U_R^* - 3/8 \Delta t^{*2} \frac{\partial^2 U^*}{\partial t^{*2}} + 1/4 \Delta t^{*3} \frac{\partial^3 U^*}{\partial t^{*3}} + 0 (\Delta t^{*4}))$
	CORRECTION	0	R35	0	R33	$\sigma = 1/2$
KIR.E3	PREDICTION	1/2R12	1/4R26	0	R33	$\sigma = 0$
	CORRECTION	0	R35	0	R33	$\sigma = 1/2$
KIR.E4	PREDICTION	1/4R11	1/4R25	0	R33	$\sigma = 1$
	CORRECTION	0	R35	0	R33	$\sigma = 1/2$

Tableau V-5 : Erreurs de discrétisation générées par les différents schémas appliqués au modèle décomposé et au modèle KIRCHHOFF.

ERREURS DE DISCRETISATION

$$\begin{aligned}
 R1 &= \Delta t^* \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^* \partial t^*} \right) - 1/2 C^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} \right\} \\
 R10 &= \Delta t^* \left\{ 1/2 \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^* \partial t^*} \right) - 1/2 C^* \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} - \omega \frac{\partial C^*}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \right\} \\
 R11 &= \Delta t^* \left\{ \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial z^{*2}} \right) - \frac{1}{K^*} \left(\frac{dK}{dh} \right)^* \cdot \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right) - 1/2 \frac{C^*}{K^*} \cdot \frac{\partial^2 U^*}{\partial t^{*2}} \right\} \\
 R12 &= - 1/2 \Delta t^* \frac{C^*}{K^*} \cdot \frac{\partial^2 U^*}{\partial t^{*2}} \\
 R13 &= 1/2 \Delta t^* \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^* \partial t^{*2}} \right) - 1/3 C^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} \right\} \\
 R20 &= 1/4 R 13 (\Delta t^{*2}) \\
 R24 &= 1/2 \Delta t^{*2} \left\{ 1/2 \frac{\partial}{\partial z^*} \left(K^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^* \partial t^{*2}} \right) - 1/3 C^* \frac{\partial^3 h^*}{\partial t^{*3}} - \omega \frac{\partial C^*}{\partial t^*} \cdot \frac{\partial^2 h^*}{\partial t^{*2}} - \omega^2 \frac{\partial^2 C^*}{\partial t^{*2}} \cdot \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \right\} \\
 R25 &= 1/2 \Delta t^{*2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \left(\frac{\partial^2 U^*}{\partial z^{*2}} \right) - \frac{1}{K^*} \left(\frac{dK}{dh} \right)^* \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \left(\frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right) - 1/3 \frac{C^*}{K^*} \cdot \frac{\partial^3 U^*}{\partial t^{*3}} \right\} \\
 R26 &= -1/6 \Delta t^{*2} \frac{C^*}{K^*} \cdot \frac{\partial^3 U^*}{\partial t^{*3}} \\
 R35 &= \Delta t^{*2} \left\{ \frac{\partial^4 U^*}{\partial z^{*2} \partial t^{*2}} - 1/8 \frac{1}{K^*} \left(\frac{dK}{dh} \right)^* \cdot \frac{\partial^3 U^*}{\partial z^* \partial t^{*2}} - 1/6 \frac{C^*}{K^*} \cdot \frac{\partial^3 U^*}{\partial t^{*3}} \right\} \\
 R30 &= 1/6 \Delta z^{*2} \left\{ 1/4 \frac{\partial^3 K^*}{\partial z^{*3}} \left(\frac{\partial h^*}{\partial z^*} - 1 \right) + \frac{\partial K^*}{\partial z^*} \cdot \frac{\partial^3 h^*}{\partial z^{*3}} + 1/2 K^* \frac{\partial^4 h^*}{\partial z^{*4}} \right\} \\
 R33 &= 1/6 \Delta z^{*2} \left\{ 1/2 \frac{\partial^4 U^*}{\partial z^{*4}} - \frac{1}{K^*} \left(\frac{dK}{dh} \right)^* \cdot \frac{\partial^3 U^*}{\partial z^{*3}} \right\}
 \end{aligned}$$

Tableau V-5 : (Suite)

pas de temps que pour le schéma DEC.E2, qui n'est pas conservatif. Ces instabilités sont liées au mode de linéarisation des équations discrétisées par une extrapolation sur "h".

- Le schéma DEC.E4 est stable. Il est le moins sensible à une augmentation du pas de temps, en étant du 2° ordre en Δt^{*2} , comme le montre le tableau (V-5). Son comportement, qui est semblable à celui de LOC.E4 renforce l'idée que la prédiction implicite de "h" (schéma du type "predictor-corrector", dû à DOUGLAS-JONES, 1963) est préférable à d'autres méthodes d'estimation des coefficients \bar{K}^* et \bar{C}^* à des pas de temps intermédiaires.

● Le schéma DEC.C donne la même cinétique d'humidification que DEC.B7 pour $M^* < 20$. Cependant, pour $M^* \geq 20$, la solution numérique présente des oscillations qui sont perceptibles aux cotes $z^* = 0.004$ pour $M^* = 20$. Les solutions relatives à $z^* = 0.04$ et 0.06 correspondent à une oscillation de grande période.

Les écarts à la solution exacte générés par DEC.C sont supérieurs à ceux générés par LOC.C (Figures V-16a, b et c). En effet, la comparaison des erreurs de discrétisation de ces deux schémas conduit à :

$$\begin{aligned}
 E_{D,DEC.C}[h^*] - E_{D,LOC.C}[h^*] &= R30(\Delta z^{*2}) - R28(\Delta z^{*2}) \\
 &= 1/8 \Delta z^{*2} \cdot \frac{\partial^2 K^*}{\partial z^{*2}} \cdot \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}}
 \end{aligned}
 \tag{V-28}$$

La figure (V-2) montre que $\partial^2 K^* / \partial z^{*2} > 0$ et $\partial^2 h^* / \partial z^{*2} < 0$ pour $t^* = 10^{-2}$ à la cote $z^* = 0.04$. Ainsi :

$$E_{D,DEC.C}[h^*] \quad E_{D,LOC.C}[h^*]$$

Cette comparaison peut également s'appliquer aux schémas LOC1.B7 et DEC.B7, LOC.E2 et DEC.E2, LOC.E4 et DEC.E4. Cela prouve que les écarts à la solution exacte donnés par le modèle décomposé sont supérieurs à ceux donnés par le schéma du bilan local.

b) - Comportement asymptotique

L'étude du régime asymptotique montrerait que tous les schémas du type CRANK-NICOLSON considérés ici sont convergents et stables pour une valeur de $M^* = 0.5$. Pour des valeurs croissantes de M^* , DEC.E2 présente rapidement ($M^* \geq 1$) des oscillations dans la première section $z^* = 0.004$, qui s'amortissent dans le temps ; pour des valeurs de M^* supérieures à $M^* = 15$, ces oscillations s'amplifient sans être bornées, conduisant ainsi à une solution instable. D'une façon semblable DEC.C et DEC.E4 génèrent des légères oscillations à partir de $M^* = 5$, bien qu'elles s'amortissent toutes avec le temps pour la gamme de M^* considérée. L'amplitude des oscillations présentée par DEC.C varie autour de la valeur correspondante fournie par DEC.E4.

2.2.4 - Conclusions

Cette étude des différentes façons de linéariser les équations du modèle décomposé permet de dégager les conclusions suivantes :

i) - Il est préférable d'utiliser la méthode de DU FORT-FRANKEL pour les schémas explicites, comme pour les modèles du bilan local.

ii) - Pour des pas de temps petits ($\Delta t^* = 8.10^{-6}$ pour l'argile) tous les schémas implicites sont convergents. Les modes de calcul de \bar{C}^* et \bar{K}^* dans le temps n'ont pratiquement aucune influence sur la solution numérique.

iii) - Le schéma du type CRANK-NICOLSON DEC.E4 (le seul qui soit stable en cinétique d'humidification) est moins sensible à une augmentation de pas de temps que le schéma totalement implicite correspondant DEC.B7.

iv) - Il est préférable d'utiliser le mode de la prédiction implicite de "h" pour linéariser les équations dans le cas des schémas de CRANK-NICOLSON.

v) - Au vu de cette analyse, il est possible de dégager pour chaque type de linéarisation un meilleur schéma :

- DEC.A2 pour les schémas explicites ;
- DEC.B7 pour les schémas totalement implicites ;
- DEC.E4 pour les schémas de type CRANK-NICOLSON.

vi) - Les conclusions précédentes sont indépendantes du sol utilisé.

2.3 - Etude des modèles de KIRCHHOFF

On a vu précédemment que la mise en oeuvre des modèles de KIRCHHOFF ne pose pas le problème de la pondération : les conductivités hydrauliques sont considérées aux noeuds de calcul. On est donc ramené ici à étudier uniquement le problème de la linéarisation.

2.3.1 - Schémas explicites ($\sigma = 0$)

Le schéma KIR.A1 est stable pour $M^* = 0.5$ et devient très rapidement instable ($M^* \geq 2$) aussi bien en cinétique d'humidification, qu'en régime asymptotique. Les écarts à la solution exacte dans les sections $z^* = 0.04$ et 0.06 , pour $M^* = 20$ et 50 (Figure V-21) traduisent des instabilités numériques de grande période. On peut noter que le schéma de type DU FORT-FRANKEL appliqué au modèle de KIRCHHOFF améliore les résultats. La solution numérique correspondante est stable jusqu'à $M^* = 10$.

2.3.2 - Schémas totalement implicites ($\sigma = 1$)

Comme pour les modèles du bilan local et décomposé, une analyse du mode de calcul de \bar{C}^* et \bar{K}^* montre que les meilleurs résultats en cinétique d'humidification sont obtenus avec une estimation de ces coefficients au pas de temps précédent (KIR.B). Le régime asymptotique n'est pas affecté par le mode de calcul de \bar{C}^* et \bar{K}^* .

2.3.3 - Schémas du type CRANK-NICOLSON ($\sigma = \frac{1}{2}$)

a) - Cinétique d'humidification

Les figures (V-22a, b et c) montrent les évolutions en fonction du temps des écarts à la solution quasi-analytique générés par KIR/E2/E3/E4 aux trois cotes $z^* = 0.004, 0.04$ et 0.06 et pour les valeurs $M^* = 0.5, 20$ et 50 . Elles conduisent aux remarques suivantes :

i) - Pour $M^* = 0.5$, ces trois schémas donnent la même cinétique d'humidification des différentes cotes, qui se trouve être identique à celle donnée par KIR.B (Figure V-21). L'analyse des erreurs de

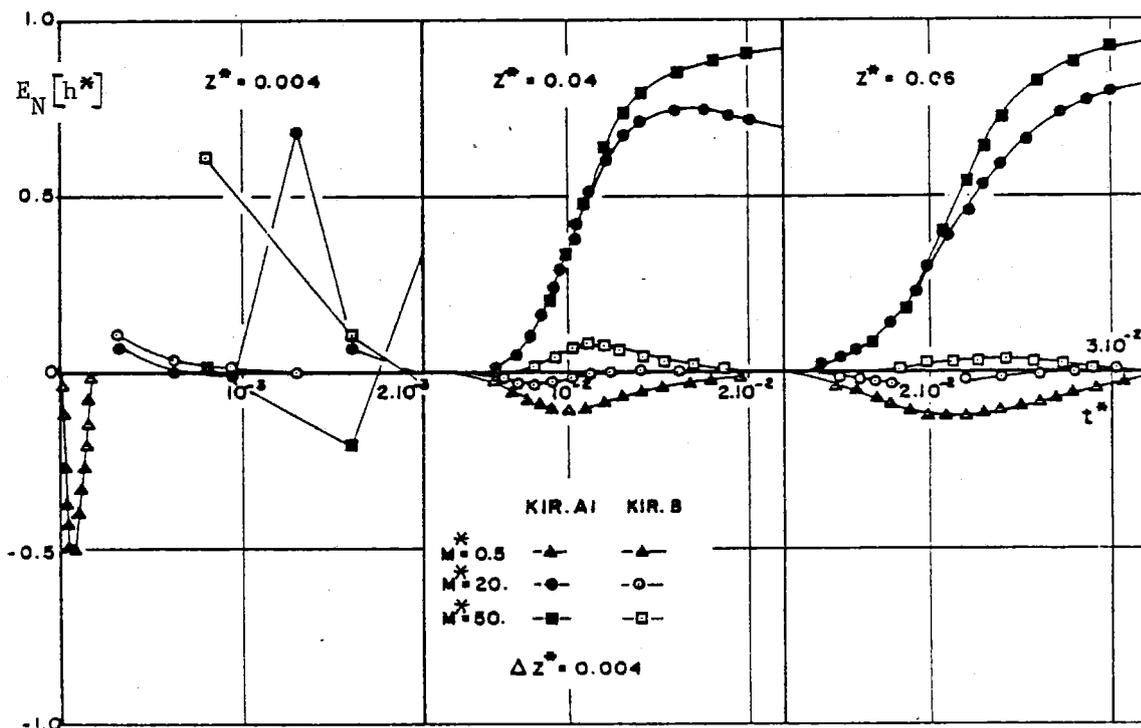


Figure V-21 : Evolution en fonction du temps des écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques obtenus par les schémas explicite et totalement implicite appliqués au modèle de KIRCHHOFF.

discrétisation (Tableau V-5) montre que tous les schémas de KIRCHHOFF génèrent la même erreur spatiale ($R33(\Delta z^{*2})$) mais des erreurs temporelles différentes pour ce qui concerne KIR.B ($R11(\Delta t^*) + R25(\Delta t^{*2})$) et les schémas KIR.E ($R35(\Delta t^{*2})$). Toutes les solutions numériques étant néanmoins identiques, cela prouve que pour cette valeur particulière de M^* , les erreurs liées au pas de temps sont négligeables devant celles liées au pas d'espace qui sont négatives.

ii) - Pour d'autres valeurs de M^* ($M^* = 20, M^* = 50$), on constate une différenciation dans le comportement des schémas de type CRANK-NICOLSON, bien qu'ils génèrent formellement les mêmes erreurs globales (Tableau V-5). Cependant, les solutions numériques sont affectées différemment par le mode de prédiction de \bar{C}^* et \bar{K}^* au temps $t^* + \frac{1}{2} \Delta t^*$.

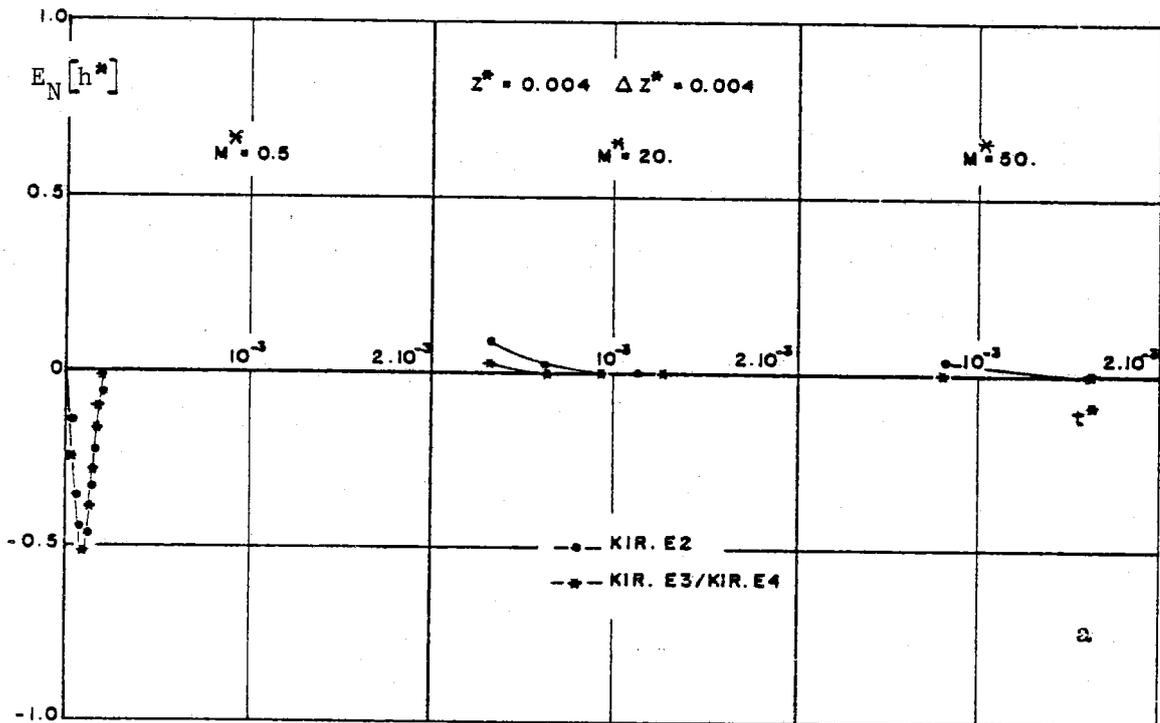
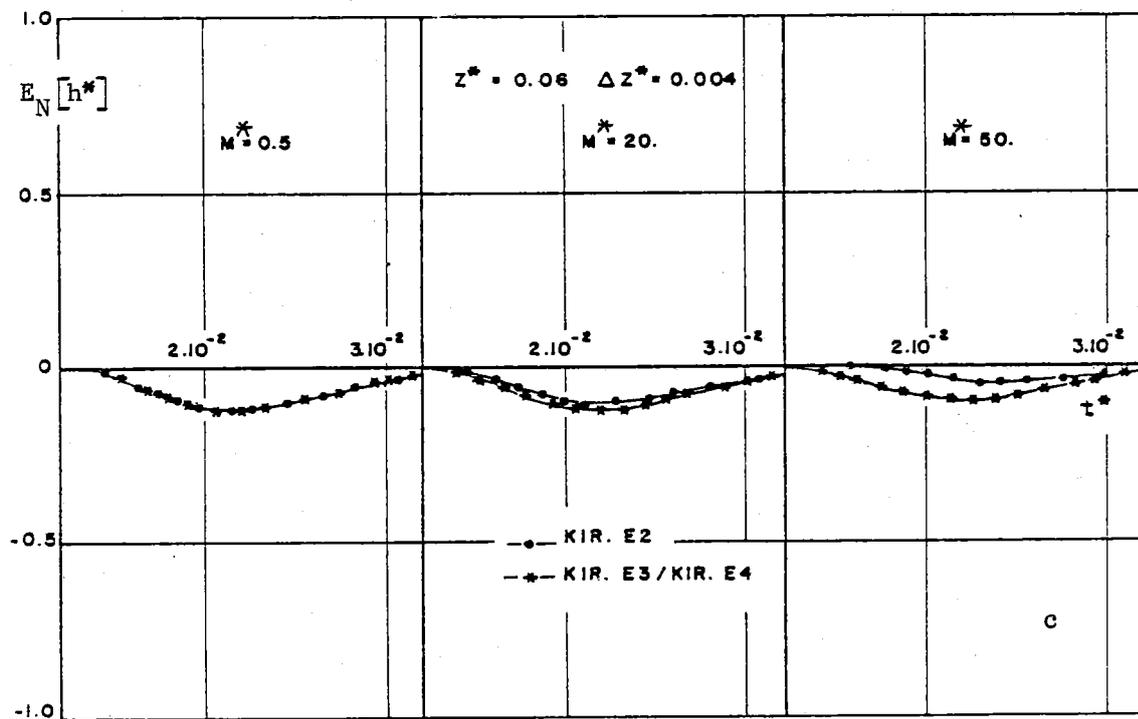
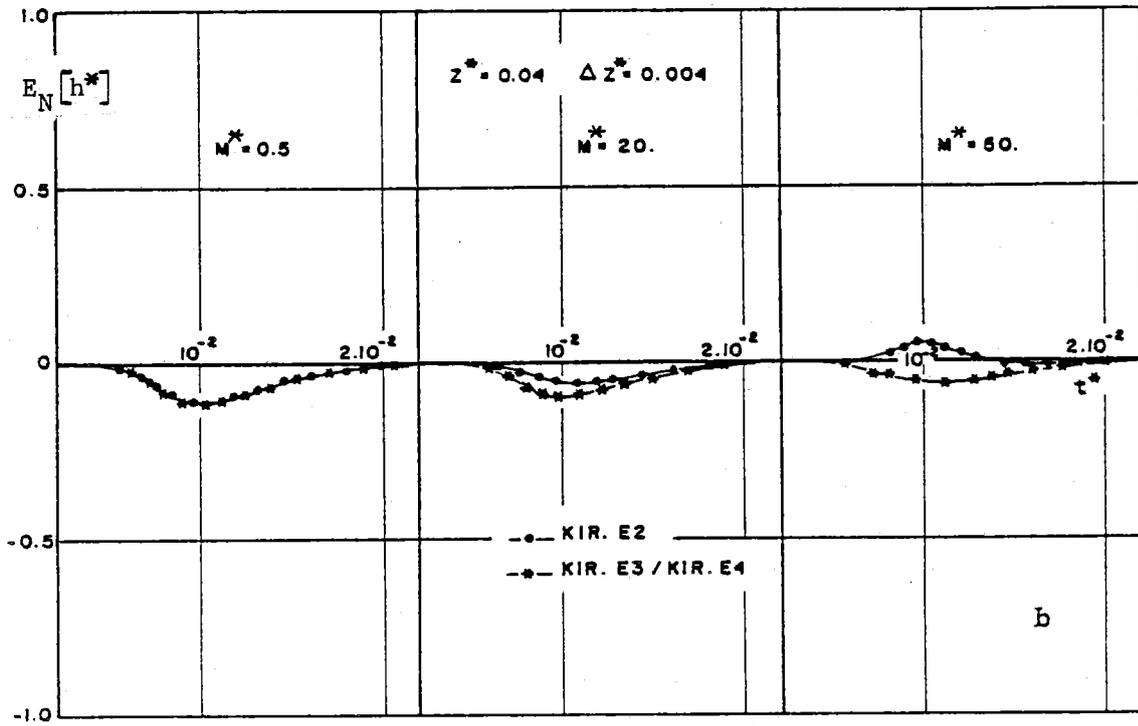


Figure V-22a : Ecart en fonction du temps entre les solutions quasi-analytique et numériques de type CRANK-NICOLSON appliqués au modèle de KIRCHHOFF.



Figures V-22b et c : Ecart en fonction du temps entre les solutions quasi-analytique et numériques de type CRANK-NICOLSON appliqués au modèle de KIRCHHOFF.

● Contrairement aux schémas LOC.E2 et DEC.E2 le schéma KIR.E2 est stable dans la gamme du pas de temps considérée. Cela est lié au fait que les variations de U dans le temps sont plus faibles que celles de h (en raison de la transformation intégrale $U = \int K(h)dh$) et l'extrapolation correspondante est plus précise.

● Les schémas KIR.E3 et KIR.E4 sont stables et donnent la même solution numérique quelles que soient les valeurs de M^* . On notera en particulier que le schéma KIR.E3 est stable malgré le mode explicite de prédiction de U au temps $t^* + \frac{1}{2} \Delta t^*$. La phase de correction inhibe les éventuelles instabilités numériques qui pourraient prendre naissance dans la phase de prédiction, comme cela a été vu à propos de KIR.A1. Cela constitue l'un des aspects positifs des schémas de CRANK-NICOLSON par rapport aux schémas explicites.

● Le schéma KIR.E2 est plus sensible à une augmentation de M^* donc de Δt^* , que KIR.E3 et KIR.E4. L'augmentation de l'erreur temporelle correspondante induit une augmentation algébrique de l'erreur de discrétisation globale, donc une surestimation de moins en moins importante. Ce résultat qualitatif n'a pu être démontré théoriquement, car on ne peut pas étudier l'influence des erreurs commises dans la phase de prédiction, sur la solution numérique donnée par la phase de correction. Le comportement du schéma KIR.E2 est intéressant car il améliore les valeurs numériques des erreurs globales quand M^* augmente, ce qui peut justifier son choix pour des valeurs élevées de M^* .

On remarquera que les solutions numériques données par les 3 schémas considérés ici sont restées stables jusqu'à $M^* = 70$.

b) - Comportement asymptotique

L'étude du régime asymptotique montre que les trois schémas de KIRCHHOFF considérés ici sont convergents et stables. Ils donnent la même solution asymptotique.

2.3.4 - Conclusions

Cette étude des différentes façons de linéariser les équations du modèle de KIRCHHOFF permet de dégager les conclusions suivantes :

i) - Pour les schémas explicites, la méthode de DU FORT-FRANKEL est plus stable que la méthode traditionnelle et sa mise en oeuvre plus économique car elle permet l'utilisation d'un pas de temps plus grand.

ii) - Pour des pas de temps petits ($\Delta t^* = 8.10^{-6}$ pour l'argile) tous les schémas totalement implicites sont convergents. Les modes de calcul de \bar{C}^* et \bar{K}^* dans le temps n'ont pratiquement aucune influence sur la solution numérique, aussi bien pour la phase de cinétique d'humidification que pour le régime asymptotique.

iii) - Les schémas de type CRANK-NICOLSON sont tous stables dans la gamme de variation du pas de temps considérée et même au-delà ($M^* = 70$), contrairement aux autres modèles. Ils sont moins sensibles à une augmentation du pas de temps que le schéma totalement implicite.

iv) - Il est préférable d'utiliser le mode de prédiction par extrapolation linéaire de "U" pour linéariser les équations dans le cas des schémas de CRANK-NICOLSON.

v) - Au vu de cette analyse, il est possible de dégager pour chaque type de linéarisation, un meilleur schéma :

- KIR.A2 pour les schémas explicites ;
- KIR.B pour les schémas totalement implicites ;
- KIR.E2 pour les schémas de type CRANK-NICOLSON.

vi) - Les conclusions précédentes sont indépendantes du sol utilisé.

V.3 - CONCLUSIONS

L'étude des différentes façons de calculer les valeurs internodales de \bar{K}^* et de \bar{C}^* dans l'espace (pondération) et dans le temps (linéarisation), a permis de dégager un "schéma optimal" pour chaque type de discrétisation (explicite, implicite, CRANK-NICOLSON) et ce, pour les trois modèles de départ (bilan local, décomposé et KIRCHHOFF). Le choix du "schéma optimal" était fondé sur le critère de précision de la solution donné par l'équation (IV-56) :

$$E_N[h^*] = [h_A^*(z, t) - h_i^{*j}]$$

En ce qui concerne le problème de pondération relatif aux modèles de bilan local et décomposés (Chapitre V-1), la moyenne géométrique sur les valeurs nodales de K^* se révèle être systématiquement la meilleure façon d'estimer les valeurs internodales de K^* . Ce résultat était obtenu d'une part à partir d'une analyse des erreurs de discrétisation et d'autre part à partir d'une comparaison avec le modèle de KIRCHHOFF qui ne pose pas ce problème.

En ce qui concerne le mode de linéarisation la conclusion est plus problématique (Chapitre V-2) ; en effet, pour chaque valeur de σ et modèle de départ, il existe un "schéma optimal". Pour dégager un meilleur schéma eu égard au critère de précision, il faut donc comparer entre eux les "schémas optimaux" des différents modèles pour chaque type de discrétisation.

i) - Discrétisation explicite

Les solutions numériques données par les schémas DU FORT-FRANKEL (LOC.A2, DEC.A2 et KIR.A2) ont toutes été trouvées identiques pour $M^* = 0.5$, aussi bien pour la phase d'humidification que pour le régime asymptotique. Pour des valeurs de M^* supérieures à 0.5, les schémas explicites ne deviennent plus applicables en raison d'instabilités numériques.

ii) - Discrétisation totalement implicite

Les figures (V-23a, b et c) montrent la comparaison entre les écarts à la solution quasi-analytique générés par les schémas LOC1.B3, DEC.B7 et KIR.B pour la cinétique d'humidification des trois cotes ($z^* = 0.004, 0.04$ et 0.06) et pour trois valeurs de $M^* = 0.5, 20$ et 50).

● Le schéma KIR.B donne les écarts les plus faibles, car sa mise en oeuvre ne pose pas le problème de la pondération. Il est le moins sensible à une augmentation de M^* , donc de Δt^* . Cela constitue un avantage économique qui se trouve partiellement tamponné par le fait qu'il nécessite le calcul du tableau $U(h)$ effectué une seule fois et la recherche à chaque pas de temps des valeurs de $h(U)$. De plus, il convient de noter que la précision de la solution numérique dépend grandement de la précision avec

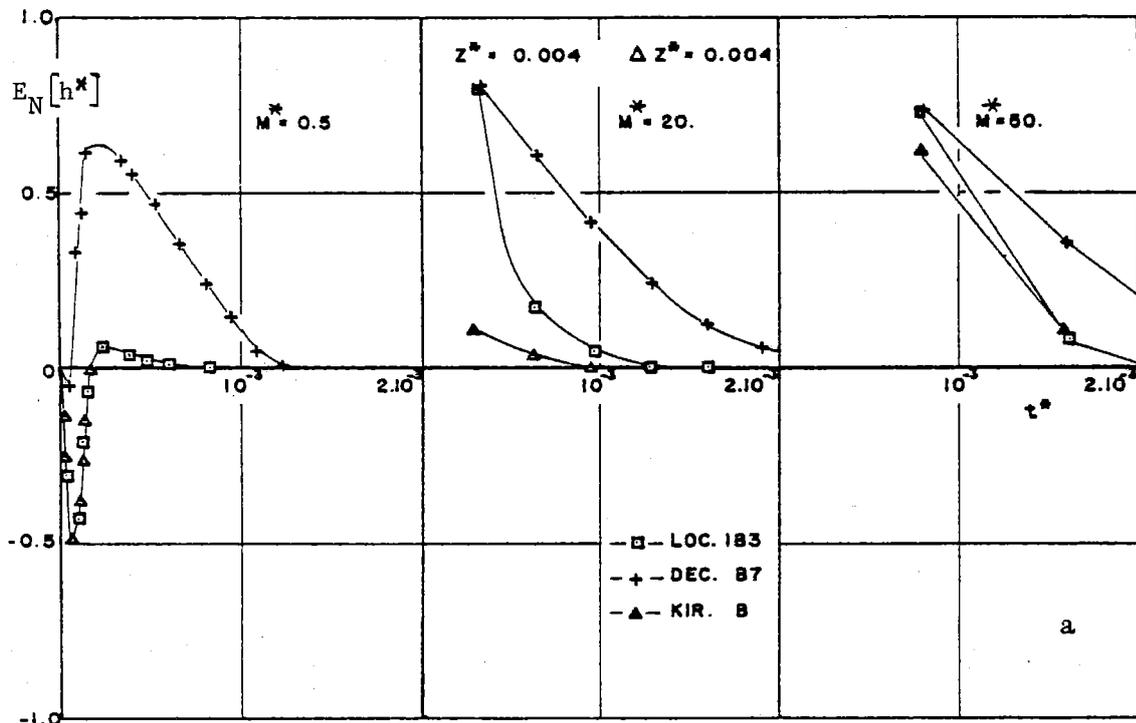
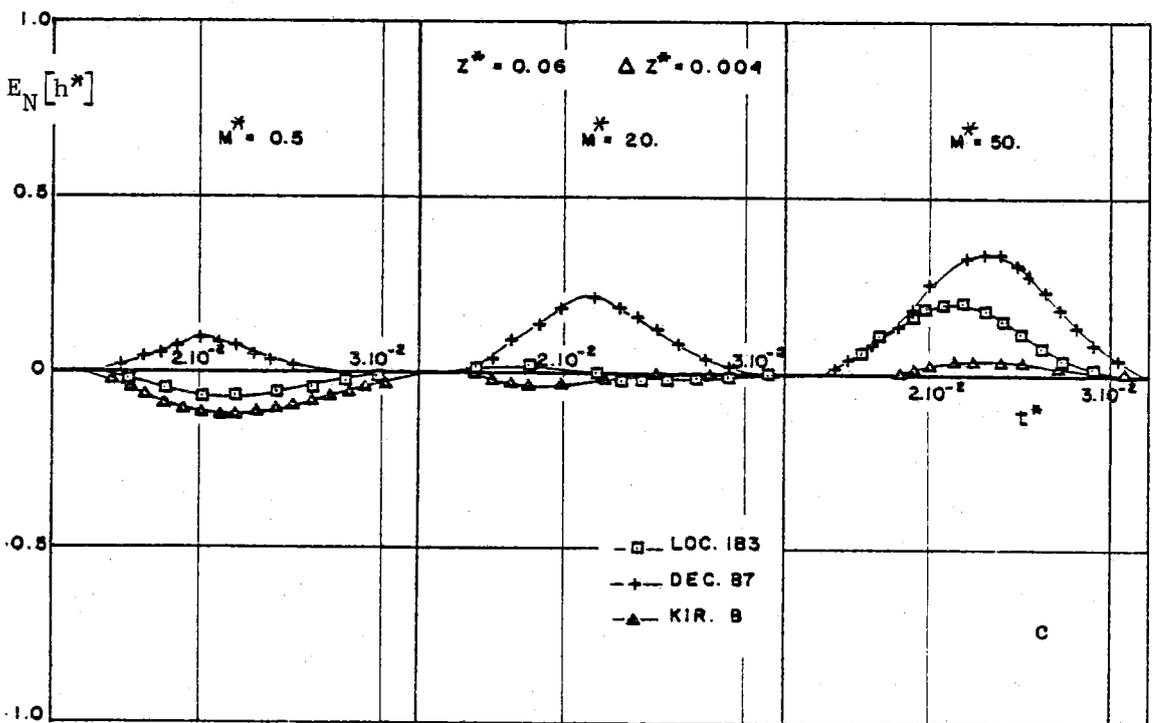
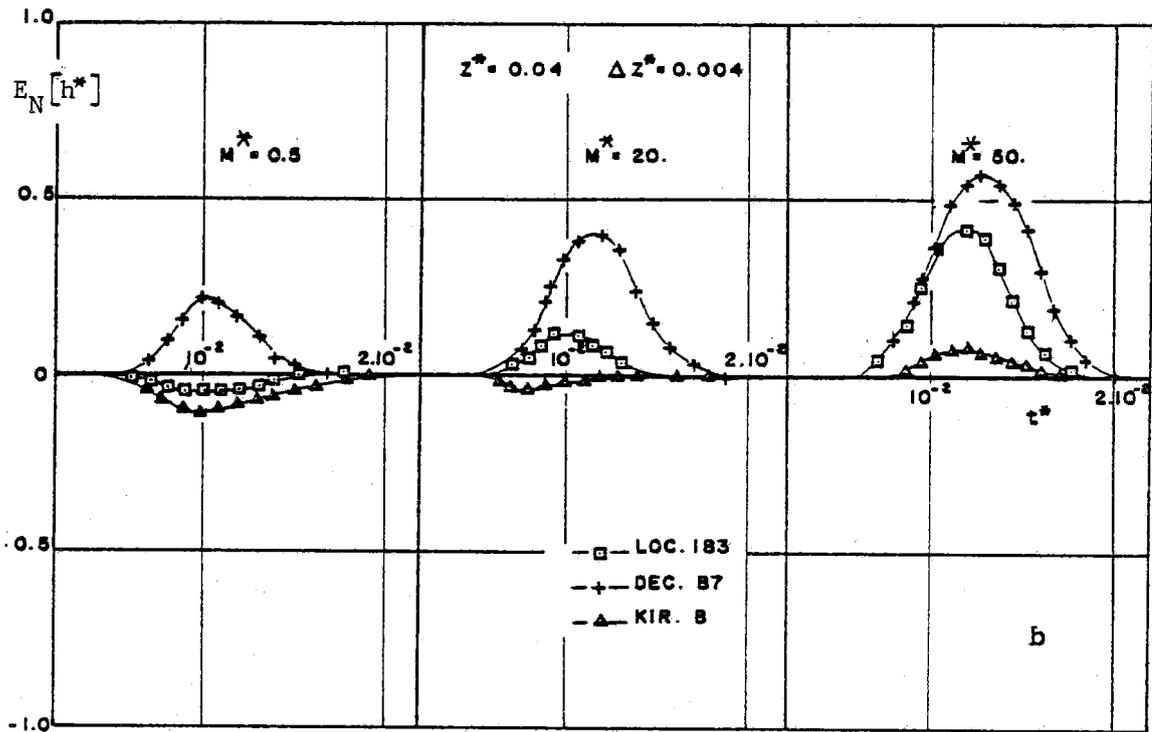


Figure V-23a : Evolution en fonction du temps des écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques de type totalement implicite appliquées aux modèles du bilan local, décomposé et de KIRCHHOFF.



Figures V-23b et c : Evolution en fonction du temps des écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques de type totalement implicites appliquées aux modèles du bilan local, décomposé et de KIRCHHOFF.

laquelle les valeurs $U(h)$ sont calculées. Bien qu'il soit difficile, avec la méthode des différences finies, de restituer numériquement, d'une manière correcte, la rupture d'équilibre en forme d'échelon ($E_N[h^*]$ atteint 0.5 dans $z^* = 0.004$), on notera que ce schéma donne très nettement les meilleurs résultats dans la section $z^* = 0.004$.

- Bien que le schéma LOC1.B3 soit conservatif (comme tous les modèles du bilan local), il ne donne pas les meilleurs résultats, car ils sont légèrement affectés par le problème de pondération, dont on a montré précédemment l'importance.

- Le schéma DEC.B7 n'est pas conservatif ; sa mise en oeuvre pose le problème de la pondération : il donne les plus mauvais résultats.

En revanche, ces trois schémas donnent le même régime asymptotique pour de faibles valeurs de M^* . Pour ce type de discrétisation, il apparaît donc qu'il est préférable d'utiliser le modèle KIR.B.

iii) - Discrétisation de type CRANK-NICOLSON

Les figures (V-24a, b et c) montrent la comparaison entre les écarts à la solution quasi-analytique générés par les schémas LOC.C, DEC.E4 et KIR.E2 pour la cinétique d'humidification des trois cotes ($z^* = 0.004$, 0.04 et 0.06) et pour trois valeurs de $M^* = (0.5, 20 \text{ et } 50)$. Comme pour la discrétisation totalement implicite et pour les mêmes raisons, le schéma KIR.E2 donne les meilleurs résultats et le schéma DEC.E4 les plus mauvais. Cela est particulièrement clair dans la première section de calcul : $z^* = 0.004$.

Ce type de discrétisation rend les schémas correspondants moins sensibles à une augmentation du pas de temps que la discrétisation totalement implicite. Cela est particulièrement net pour KIR.E2 par rapport à KIR.B. Ainsi, pour une précision identique, la mise en oeuvre des schémas de type CRANK-NICOLSON pourra s'effectuer avec des pas de temps plus grands que les schémas totalement implicites.

Les schémas de type "prédicteur-corrector" nécessitent deux résolutions des systèmes d'équations à chaque pas de temps et le coût économique est pratiquement deux fois plus élevé que pour les schémas totalement implicites. Ces schémas devront donc être rejetés au profit des schémas de CRANK-NICOLSON dans lesquels la linéarisation se fait d'une manière plus directe et donc plus rapide, tel KIR.E2.

A l'aide de ces résultats, il devient possible d'analyser d'une façon différente et plus contraignante la précision des six modèles implicites.

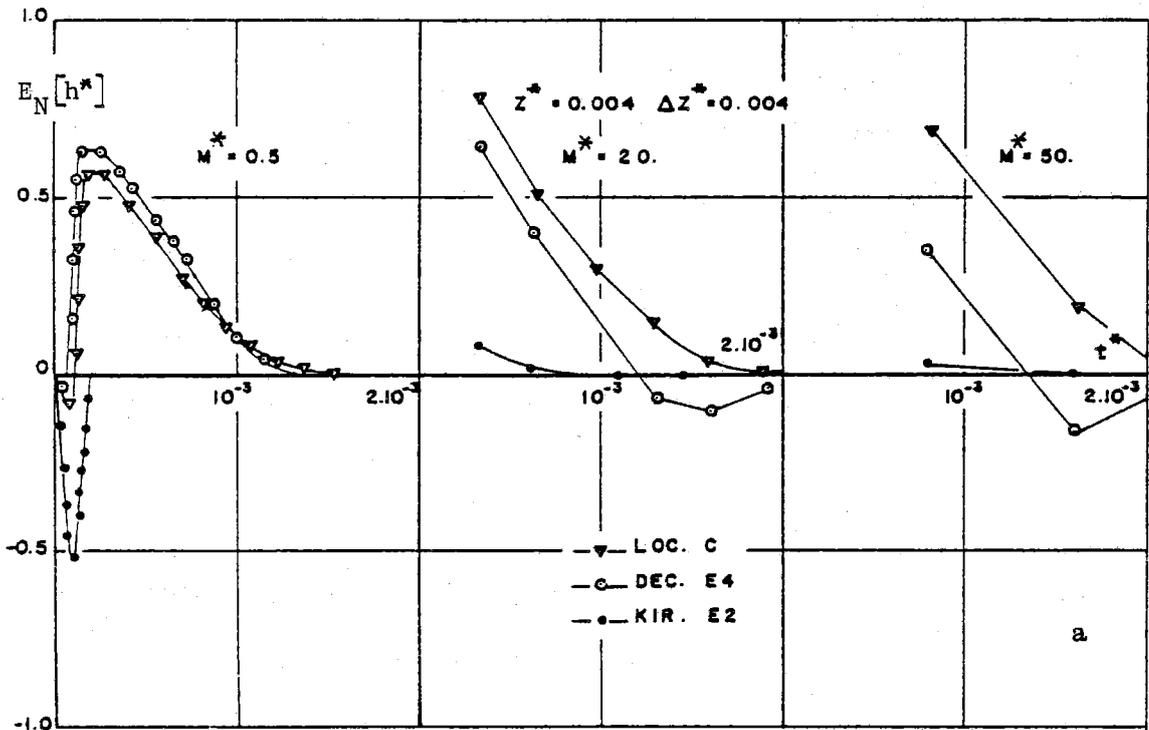
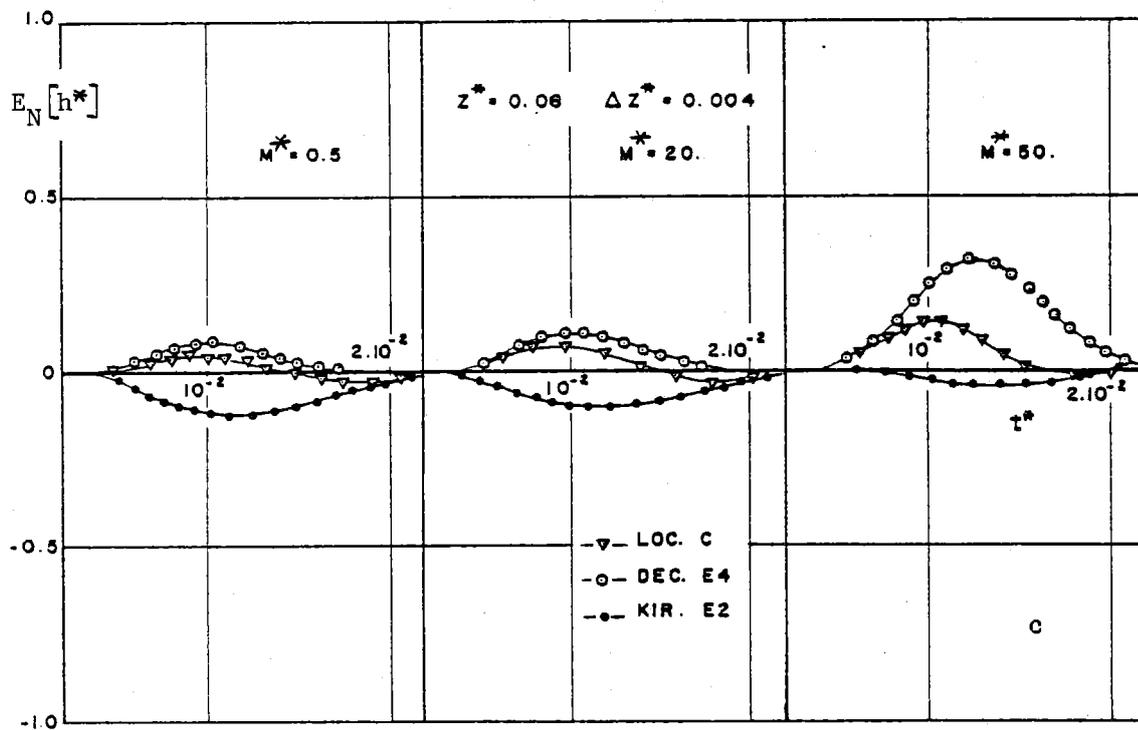
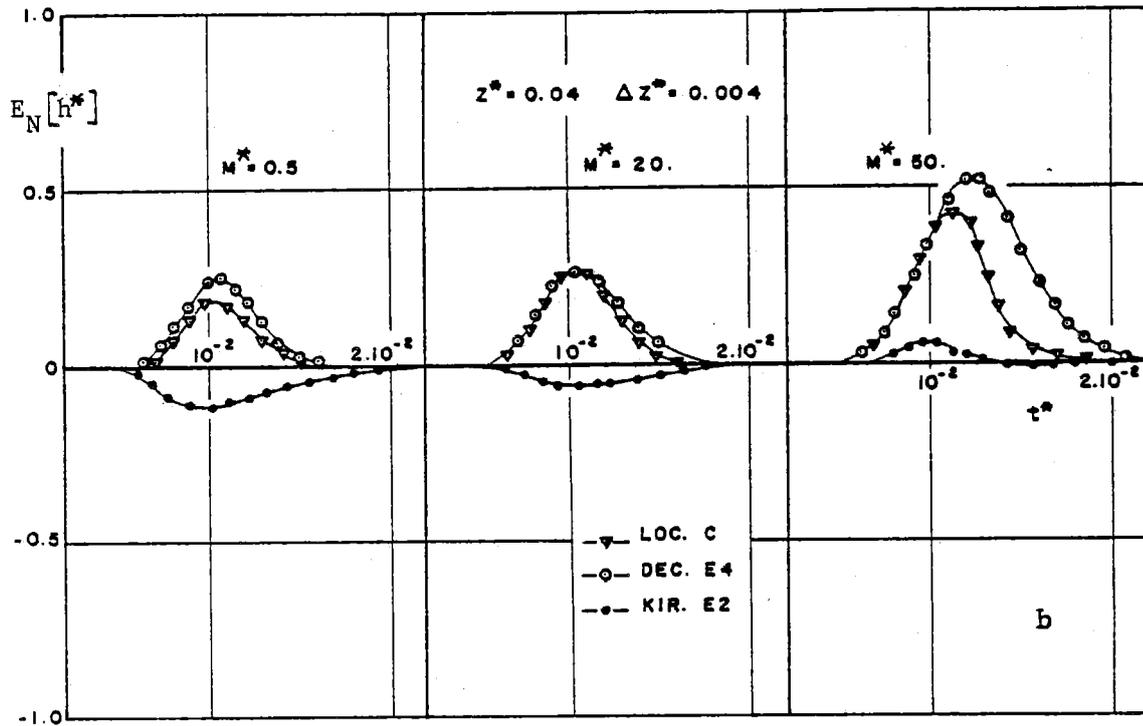


Figure V-24a : Evolution en fonction du temps des écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques de type CRANK-NICOLSON appliquées aux modèles du bilan local, décomposé et de KIRCHHOFF.



Figures V-24b et c : Evolution en fonction du temps des écarts entre les solutions quasi-analytique et numériques de type CRANK-NICOLSON appliquées aux modèles du bilan local, décomposé et de KIRCHHOFF.

Considérant l'écart relatif maximum entre les solutions quasi-analytique et numérique :

$$E_{N,MAX}^*[h^*] = \left| \frac{h_A^*(z,t) - h_i^{*j}}{h_A^*(z,t)} \right|_{MAX} \quad (V-29)$$

La figure (V-25a) montre l'évolution en fonction de M^* de $E_{N,MAX}^*[h^*]$ obtenue à la cote $z^* = \Delta z^* = 0.004$ (soit 2.52 cm pour l'argile). Le choix de cette cote s'impose par le fait que les erreurs les plus importantes se trouvent dans la section de calcul située la plus proche de la frontière où se produit la rupture d'équilibre comme le montrent les figures (V-23a) et (V-24a).

La figure (V-25a) conduit aux remarques suivantes :

- Quelque soit le modèle utilisé on ne peut espérer obtenir une précision meilleure que 56 % avec $M^* = 0.5$. Cela est lié à la méthode des différences finies qui est, comme on l'a déjà signalé, mal adaptée pour résoudre un problème de rupture d'équilibre.

- L'erreur commise sur la solution numérique augmente avec le pas de temps de calcul utilisé. De ce point de vue, les schémas de type CRANK-NICOLSON sont moins sensibles que les schémas totalement implicites à une augmentation du pas de temps.

- Seuls les modèles de KIRCHHOFF (KIR.B et KIR.E2) et le modèle LOC1.B3 pour de faibles valeurs de M^* sont utilisables si l'on veut obtenir la meilleure solution numérique possible dans la 1ère section de calcul.

Bien que le coût économique d'exploitation des différents modèles était encore un critère de choix important il y a quelques années, l'évolution rapide de l'informatique rend inutile la mesure du temps de calcul de chaque modèle en valeurs absolues. Par contre, une comparaison des différents temps de calcul (C.P.U.) permet d'apprécier la rapidité et donc la faisabilité d'exploitation des modèles.

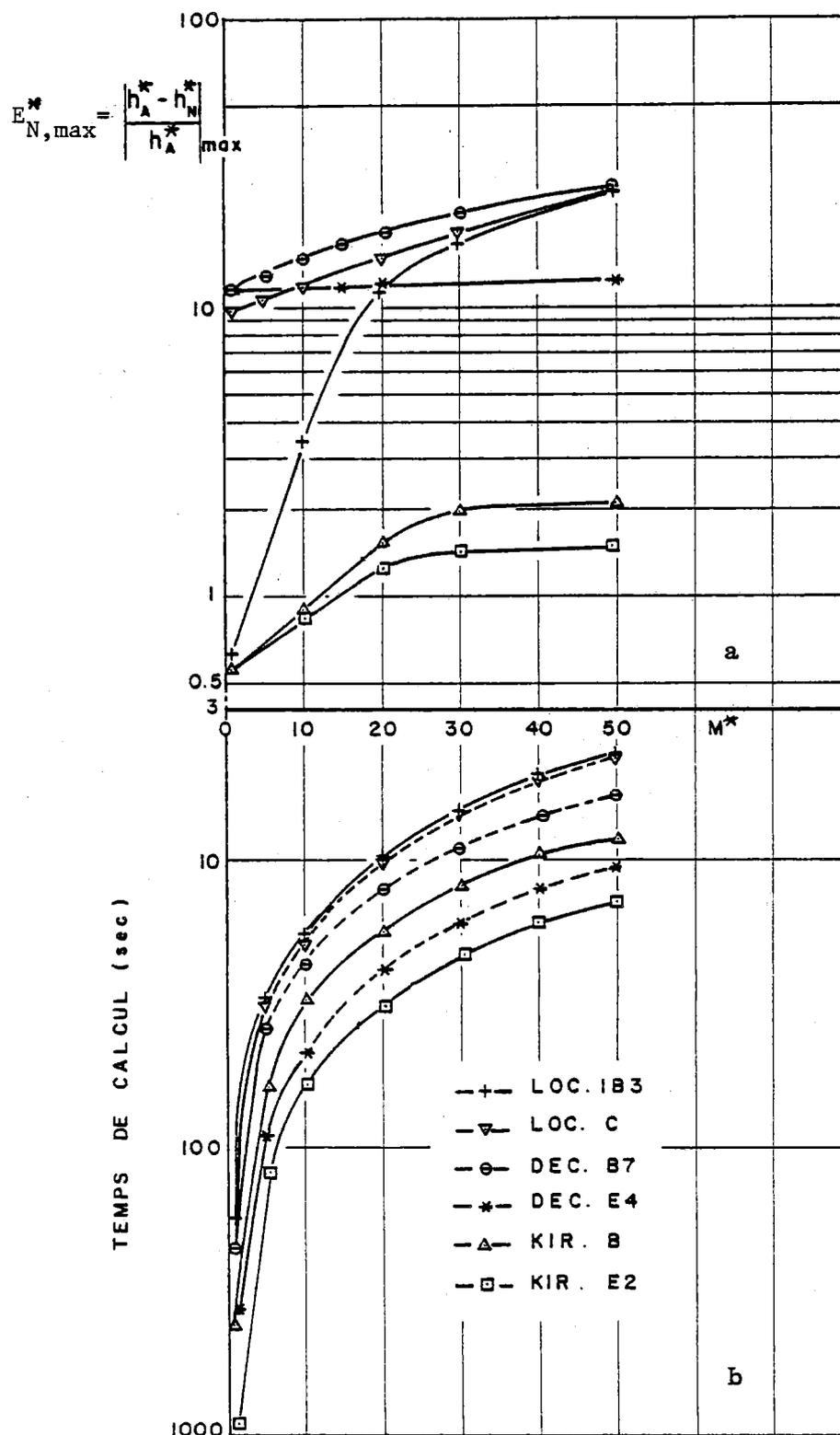


Figure V-25 : Ecart relatif maximum sur la pression dans la section $z^* = \Delta z^* = 4.10^{-3}$ en fonction de M^* (a) et du temps de calcul (IBM 360-67) pour simuler 112 h d'infiltration (b).

Ainsi, la figure (V-25b) donne la relation entre le temps de calcul (IBM 36MO-67) pour simuler 112 h. d'infiltration et le paramètre M^* pour les six modèles implicites. On notera que pour les modèles de KIRCHHOFF, il convient d'ajouter le temps de calcul du tableau $U(h)$. Pour chaque schéma les limites de M^* au-delà desquelles des oscillations apparaissent sont reportées également : (courbes tracées en pointillés).

La figure montre que pour le même point de fonctionnement $[\Delta z^* ; \Delta t^*]$ le schéma LOC1.B3 est nettement plus rapide que les schémas KIR.B et KIR.E2 ; en revanche, il est moins précis. Une diminution du pas de temps Δt^* et donc M^* , permet de réaliser une solution comparable au schéma KIR.B ou KIR.E2 du point de vue précision et temps de calcul.

A la faveur de ces résultats, nous retenons dans la suite les deux modèles totalement implicites LOC1.B3 et KIR.B comme "optimaux" eu égard à la précision et la faisabilité d'exploitation.

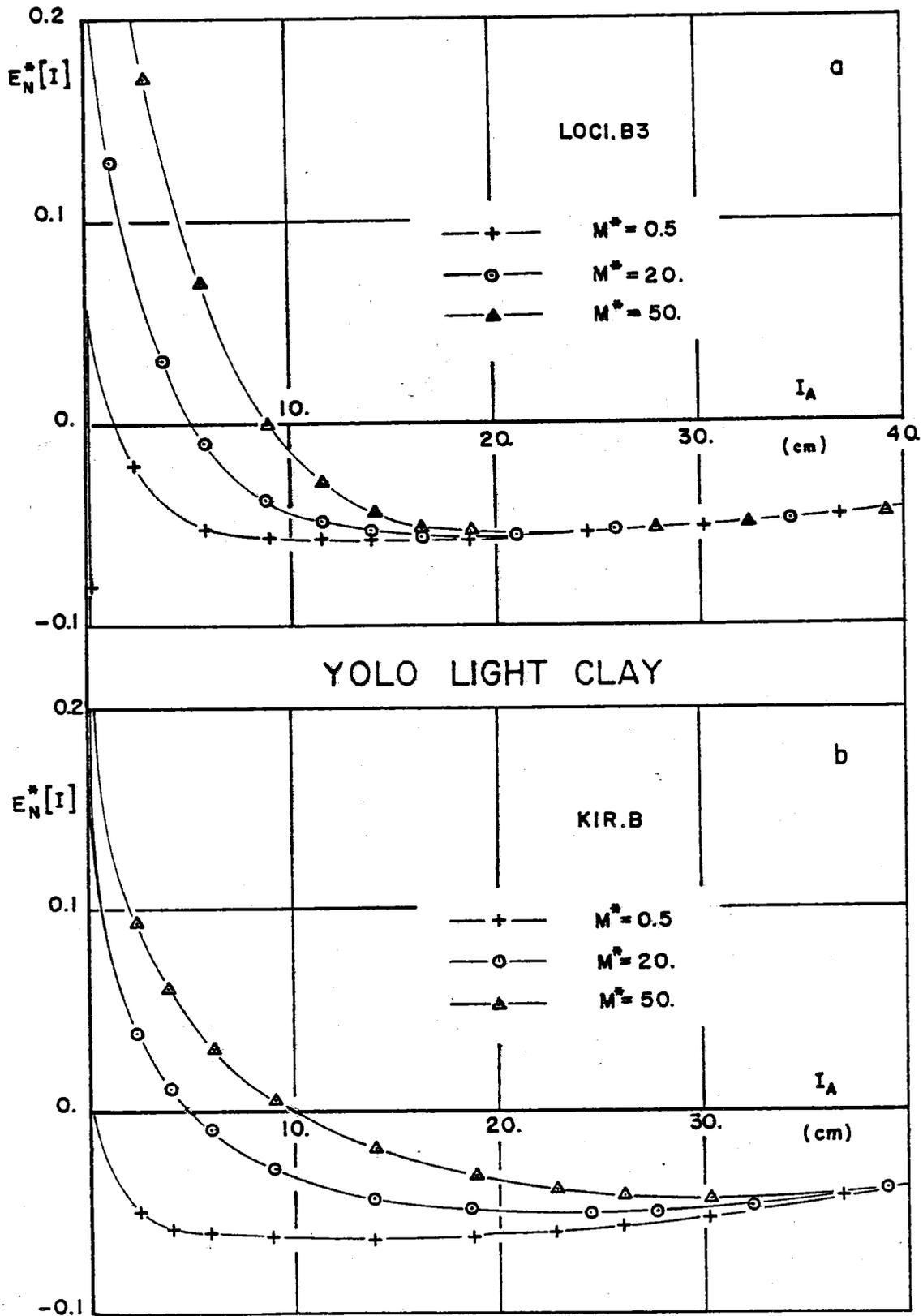
Pour des applications agronomiques ou hydrologiques, il existe souvent le besoin de connaître la précision globale sur le volume d'eau infiltré plutôt que sur la pression à une cote z^* donnée. Pour répondre à cet objectif, la norme suivante peut être considérée :

$$E_N^*[I] = \left[\frac{I_A(t) - I_N(t)}{I_A(t)} \right] \quad (V-30)$$

où $I_A(t)$ est la lame d'eau infiltrée (volume d'eau par unité de surface de sol) calculée avec la solution quasi-analytique (Eq. III-16) avec $M = 5$ et $N = 250$ (Chapitres III.2.3) et $I_N(t)$ est la lame d'eau calculée par intégration numérique des profils hydriques :

$$I_N(t) = K_o t + \int_0^\infty [\theta(z,t) - \theta_o] dz \quad (V-31)$$

Les figures (V-26a et b) montrent l'évolution, en fonction de I_A , des erreurs relatives $E_N^*[I]$ obtenues pour les deux modèles retenus:



Figures V-26a et b : Evolution en fonction de I_A des erreurs relatives $E_N^*[I]$ obtenues pour les modèles totalement implicites : LOC1.B3 et KIR.B.

LOC1.B3 et KIR.B et concernant le Yolo Light Clay.

Les résultats amènent les remarques suivantes :

- Les erreurs globales commises sur le calcul des lames d'eau infiltrées sont principalement conditionnées par les erreurs générées localement lors du passage du front d'humidification.

Prenons l'exemple du modèle LOC1.B3 avec $M^* = 20$. La figure (V-23) montre en effet que l'erreur $E_N[h^*]$ initialement positive dans les premières sections de calcul, change de signe au temps $t^* = 1.2 \cdot 10^{-2}$ (soit $t \approx 44$ h) lors du passage du front d'humidification à la cote $z^* = 0.06$. Ce temps correspond au moment où l'erreur $E_N^*[I]$ devient négative (Figure V-26a). Le comportement des autres courbes obtenues pour LOC1.B3 et KIR.B peut être expliqué de la même façon.

- Indépendamment du modèle utilisé, il est illusoire de chercher à obtenir une bonne précision pour les faibles valeurs de I au début de l'infiltration. Au fur et à mesure que le temps d'infiltration augmente, l'erreur $E_N^*[I]$ diminue en valeurs numériques, ce qui est liée directement à la diminution de $E_N[h^*]$ lors de l'avancement du front d'humidification dans le profil.

- Pour les deux modèles et pour les différentes valeurs de M^* les erreurs numériques $E_N^*[I]$ tendent (plus ou moins vite) vers une même valeur, puis convergent vers $E_N^*[I] \rightarrow 0$ pour des temps longs ($I_A \rightarrow \infty$).

Il convient de remarquer que le critère de convergence utilisé ($E_N^*[I]$) est entaché de l'erreur d'intégration commise sur le calcul du stock hydrique $I_N(t)$, Eq. (V-31). En effet, VAUCLIN et al. (1979) montrent qu'une forte diminution de l'erreur $E_N^*[I]$ peut être obtenue en utilisant comme procédure d'intégration la méthode de SIMPSON au lieu de la méthode des rectangles (employé dans notre cas).

D'autre part, il est important de noter que ces mêmes modèles (LOC1.B3 et KIR.B) testés pour une condition de flux (NEUMANN) à la surface du sol, ont une nette tendance à approcher plus vite vers une erreur

$E_N^* [I] \simeq 0$ (VAUCLIN et al., 1979), soulignant ainsi une fois de plus que la condition choisie pour notre étude : la rupture d'équilibre en forme d'échelon unitaire, est une des plus draconiennes à résoudre pour les modèles numériques en différences finies.

CHAPITRE VI

CONCLUSIONS GENERALES

Notre étude est orientée vers une analyse critique d'un grand nombre de solutions numériques de l'équation de transfert d'eau dans la zone non saturée du sol. Les modèles numériques ont été testés vis à vis de la convergence, la précision et le coût économique, par comparaison avec une solution quasi-analytique présélectionnée dans la première partie de notre étude.

L'approche quasi-analytique de PHILIP (1957) constituée d'une solution en série, est retenue comme base de référence pour les solutions numériques. Une analyse des problèmes de sa mise en oeuvre nous a permis d'établir des points de fonctionnement optimaux concernant le choix de la procédure d'intégration et du nombre de termes de la série. Une équation de récurrence développée dans cette étude pour le calcul des différents termes de la série, est sensiblement plus rapide que la méthodologie proposée par PHILIP (1957).

L'intervalle du temps sur lequel la solution en série est applicable, peut très nettement être augmenté en utilisant une approximation plus précise du rayon de convergence que celle préconisée par PHILIP (1969). Pour des temps au-delà de ce seuil d'applicabilité, nous avons développé une nouvelle solution déterministe fondée sur la méthode de double intégration, qui se révèle très prometteuse pour des utilisations plus générales sous d'autres conditions initiales et aux limites.

La précision de la solution de référence étant établie (inférieure à 1.0 % sur le positionnement des profils hydriques et les volumes d'eau infiltrés), il a été possible de tester systématiquement une quarantaine de

modèles numériques en fonction de différents modes de pondération et de linéarisation et du choix de l'équation de départ.

Le mode d'estimation des valeurs internodales de la conductivité hydraulique (problème de la pondération), a une influence prépondérante sur la précision des résultats. Le modèle de KIRCHHOFF n'utilisant pas ce type d'interpolation, doit alors être préféré. Si pour des contraintes de simulation (profils stratifiés) ce modèle n'a pas été retenu, la moyenne géométrique doit être utilisée.

En ce qui concerne le mode d'estimation des valeurs internodales de la conductivité hydraulique et de la capacité capillaire, (problème de la linéarisation), cette étude montre aussi bien pour les modèles totalement implicites que pour les schémas de type CRANK-NICOLSON, les tendances suivantes :

- indépendamment du choix de l'équation de départ, l'erreur due à la linéarisation s'accroît lorsque le pas de temps augmente, amenant une sous-estimation de plus en plus importante. D'autre part, l'erreur décroît lorsque le front d'humidification avance dans le profil ; ceci conduisant à une surestimation de plus en plus importante, peut avoir un effet compensatoire par rapport au phénomène précédent.

- les meilleurs résultats sont obtenus avec les coefficients de conductivité et capacité capillaire considérés constants durant un pas de temps et égaux aux valeurs prises au temps précédent.

Il s'avère que parmi les modèles explicites et implicites, les schémas totalement implicites sont préférables. A précision égale, ils présentent moins de contraintes du point de vue de la stabilité et du temps de calcul.

A la faveur de cette étude, il n'est pas possible de dégager un "meilleur" schéma dans le cas général :

Pour une précision "optimale", nous préconisons l'utilisation du modèle totalement implicite de type KIRCHHOFF (KIR.B) en raison de la nature intégrale de sa variable descriptive (le potentiel d'écoulement) et de l'absence du problème de pondération. En revanche, quand on est préoccupé par la prédiction globale de l'infiltration d'eau dans une tranche de sol, le modèle totalement implicite de type "bilan local" (LOC1.B3) peut avantageusement être utilisé en raison de son coût économique plus faible.

Indépendamment du choix du modèle, les résultats montrent que les schémas numériques en différences finies sont tous entachés d'une erreur numérique importante au début de la simulation. A ce niveau, un couplage entre les solutions analytique et numérique pourrait apporter une nette amélioration de la précision. En effet, au démarrage de la simulation, la solution analytique pourrait être utilisée pour s'affranchir du problème de la singularité posé par les conditions initiales et aux limites.

Comme il a été souligné au début du chapitre IV, la stabilité des modèles numériques a été testée pseudo-empiriquement par rapport à une solution quasi-analytique conditionnée ainsi par la précision de cette solution de référence. Pour les deux modèles retenus à la fin de notre étude (LOC1.B3 et KIR.B), il serait intéressant de vérifier si l'utilisation d'un autre critère de stabilité (NEUMANN) fondé sur un bruitage artificiel des variables descriptives (la pression d'eau h , dans notre cas) avec un facteur d'amplification, amène les mêmes résultats au niveau du choix du pas de temps et d'espace en fonction des caractéristiques hydrodynamiques $h(\theta)$ et $K(\theta)$.

Le sujet est donc loin d'être épuisé et il constitue un domaine de recherches riche. Nous espérons simplement que cette étude permettra une meilleure compréhension des problèmes de simulation de transfert d'eau dans la zone non-saturée.

BIBLIOGRAPHIE

- APPEL, C.A., 1976.
A note on computing finite difference interblock transmissivities.
Water Resources Res., 12 (3), pp : 561-563.
- BABU, D.K., 1976a.
Infiltration analysis and perturbation methods, 1 : absorption with exponential diffusivity.
Water Resources Res., 12(1), pp : 89-93.
- BABU, D.K., 1976b.
Infiltration analysis and perturbation methods, 2 : horizontal absorption.
Water Resources Res., 12(5), pp : 1013-1018.
- BABU, D.K., 1976c.
Infiltration analysis and perturbation methods, 3 : Vertical infiltration.
Water Resources Res., 12(5), pp : 1019-1024.
- BHUIAN, S.I., E.A. HILER, C.M.M. VAN BAVEL et A.R. ASTON, 1971.
Dynamic simulation of vertical infiltration into unsaturated soils.
Water Resources Res., 7(6), pp : 1597-1606.
- BLAIR, P.M. et C.F. WEINAUG, 1969.
Solution of two-phase flow problems using implicit difference equations.
Soc. Pet. Eng. J., 9, pp : 417-424.
- BROOKS, R.M. et A.T. COREY, 1964.
Hydraulic properties of porous media.
Hydrology paper 3, Colorado State Univ., FORT COLLINS, Colo.
- BRUCE, R.R. et A. KLUTE, 1956.
The measurement of soil water diffusivity.
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 20, pp : 458-462.
- BUCKINGHAM, E., 1907.
Studies on the movement of soil moisture.
U.S. Dept. of Agro. Bur. of Soils, Bull. 38.
- CHILDS, E.C. et N. COLLIS-GEORGE, 1950.
The permeability of porous materials.
Proc. R. Soc. London. Ser. A (201), pp : 392-405.
- CHILDS, E.C., 1969.
An introduction to the physical basis of soil water phenomena.
Wiley (Interscience), NEW-YORK.

- COLLINS, R.E., 1961.
Flow of fluids through porous materials.
Rheinhold.
- DAVIDSON, J.M., J.W. BIGGAR et D.R. NIELSEN, 1966.
The dependence of soil water pressure uptake and release upon the
applied pressure increment.
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 30, pp : 298-304.
- DIXON, R.M. et D.R. LINDEN, 1972.
Soil air pressure and water infiltration under border irrigation.
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 36, pp : 948-953.
- J. DOUGLAS, J. Jr. et B.F. JONES, 1963.
On predictor-corrector methods of non-linear parabolic
differential equations.
J. Soc. Indust. Appl. Math., 11(2), pp : 195-204.
- DU FORT, E.C. et S.P. FRANKEL, 1953.
Stability conditions in the numerical treatment of parabolic
differential equations.
Math. Tab. Wash., 7, pp : 135-152.
- ELRICK, D.E. et M.J. ROBIN, 1981.
Estimating the sorptivity of soils.
Soil Sci., 132(2), pp : 127-133.
- GARDNER, W.R., 1958.
Some steady state solutions of the unsaturated moisture flow
equation with application to evaporation from a water table.
Soil Sci. 85, pp : 228-233.
- GARDNER, W.R., 1960.
Soil Water relations in arid and semi-arid conditions.
Unesco (15), pp : 37-61.
- GAUDET, J.P., 1978.
Transferts d'eau et de soluté dans les sols non saturés. Mesures
et simulation.
Thèse de Docteur ès-Sciences Physiques, Université Scientifique et
Médicale de Grenoble, France.
- GREEN, W.H. et G.A. AMPT, 1911.
Studies on soil physics : I. Flow of air and water through soils.
J. Agro. Sci., 4, pp : 1-24.
- HANKS, R.J. et S.A. BOWERS, 1962.
Numerical solution of the moisture flow equation for infiltration
into layered soils.
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 26, pp : 530-534.
- HAVERKAMP, R., M. VAUCLIN, J. TOUMA, P. WIERENGA et G. VACHAUD, 1977.
A comparison of numerical simulation models for one dimensional
infiltration.
Soil Sci. Soc. Amer. J. 41(2), pp : 194-285.

- HAVERKAMP, R et M. VAUCLIN, 1979.
A note on estimating finite-difference interblock hydraulic conductivity values for transient unsaturated flow problems.
Water Resources Res. 15, pp : 181-185.
- HILL, D.E. et J.Y. PARLANGE, 1972.
Wetting front instability in layered soils.
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 36, pp : 697-702.
- HILLEL, D., H.D. KRENTOS et Y. STYLIANOY, 1972.
Procedure and test of an internal drainage method for measuring soil hydraulic characteristics in-situ.
Soil Sci., 114, pp : 395-400.
- HILLEL, D., 1980.
Fundamentals of soil physics.
Acad. Press. NEW-YORK.
- LAASONEN, P., 1949.
Über eine methode zur lösung der wärmeleitungs-gleichung.
Acta Math., Vol. 81, pp : 309
- LIAKOPOULOS, A.C., 1966.
Theoretical prediction of evaporation losses from groundwater.
Water Resources Res., 2(3), pp : 227-240.
- MAC DONALD, R.C. et K.H. COATS, 1970.
Methods for numerical simulation of water and gas coning.
Soc. Pet. Eng. J., 10, pp : 425-436.
- MAC WHORTER, O.B., 1971.
Infiltration affected by flow of air.
Hydrol. Paper 49, Colo. State Univ., FORT-COLLINS, Colo.
- MILLER, E.E. et R.D. MILLER, 1955.
Theory of capillary flow : I. Practical implications.
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 19, pp : 267-271.
- MILLER, E.E. et R.D. MILLER, 1956.
Physical theory for capillary flow phenomena.
J. Appl. Phys., 27, pp : 324-332.
- MOLZ, F.J. et I. REMSON, 1970.
Extraction term models of soil moisture use by transpiring plants.
Water Resources Res., 6(5), pp : 1346-1356.
- MOORE, R.E., 1939.
Water conduction from shallow water tables.
Hilgardia, 12(6), pp : 383-426.
- MOREL-SEYTOUX, H.J., 1973.
Two-phase flows in porous media.
Adv. Hydrosc., 9, Acad. Press, NEW-YORK, pp : 119-202
- MOREL-SEYTOUX, H.J. et J. KHANJI, 1975.
Equation of infiltration with compression and counterflow effects.
Bulletin des Sciences Hydrologiques, XX(4), pp : 505-517.

- NIELSEN, D.R., R.D. JACKSON, J.W. CARY et D.D. EVANS, 1972.
Soil Water.
Am. Soc. Agron., Madison, Wisconsin.
- PARLANGE, J.Y., 1971.
Theory of water movement in soils : 2. One-dimensional infiltration.
Soil Sci., 111(3), pp : 170-174.
- PARLANGE, J.Y., 1975.
A note on the Green and Ampt equation.
Soil Sci. 119(6), pp : 466-467.
- PARLANGE, J.Y., R.D. BRADDOCK, I. LISLE et R.E. SMITH, 1982.
Three parameter infiltration equation.
Soil Sci., 133, pp : 337-341.
- PARLANGE, J.Y., R. HAVERKAMP et J. TOUMA, 1983.
Infiltration under ponded conditions, I. Optimal analytical solution and comparison with experimental observations.
Accepté pour publication Soil Sci.
- PEACEMAN, D.W. et H.H. RACHFORD Jr., 1962.
Numerical calculation of multidimensional miscible displacement.
Soc. Pet. Eng. J., 2, pp : 327-339.
- PECK, A.J., 1965.
Moisture profile development and air compressibility during water uptake by bounded porous bodies : 3.
Soil Sci., 100, pp : 44-51.
- PERROUX, K.M., D.E. SMILES et I. WHITE, 1981.
Water movement in uniform soils during constant-flux infiltration.
Soil Sci. Soc. Amer. J., 45, pp : 237-240.
- PHILIP, J.R., 1955.
Numerical solution of equations of the diffusion type with diffusivity concentration-dependent I.
Trans. Faraday Soc., 51, pp : 885-892.
- PHILIP, J.R., 1957a.
Numerical solution of equations of the diffusion type with diffusivity concentration-dependent II.
Austr. Jour. of Physics, 10(2), pp : 29-42.
- PHILIP, J.R., 1957b.
The theory of infiltration : 1. The infiltration equation and its solution.
Soil Sci., 83, pp : 345-357.
- PHILIP, J.R., 1957c.
The theory of infiltration : 2. The profile of infinity.
Soil Sci., 83, pp : 435-448.
- PHILIP, J.R., 1964.
Similarity hypothesis for capillary hysteresis in porous materials.
J. Geophys. Res., 69, pp : 1553-1562.

- PHILIP, J.R., 1969.
Theory of infiltration.
Adv. Hydrosc., 5, pp : 215-305, Academic Press, NEW-YORK.
- PHILIP, J.R., 1973.
On solving the unsaturated flow equation : 1. The flux-
concentration relation.
Soil Sci., 116, pp : 328-335.
- PHILIP, J.R. et J.H. KNIGHT, 1974.
On solving the unsaturated flow equation : 3. New quasi-
analytical technique.
Soil Sci., 117(1), pp : 1-13.
- PHILIP, J.R., 1975.
Stability analysis of infiltration.
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 39, pp : 1042-1049.
- PHUC, L.V. et H.J. MOREL-SEYTOUX, 1972.
Effect of soil air movement and compressibility on infiltration
rates.
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 36(2), pp : 237-241.
- PIKUL, M.F., R.L. STREET et I. REMSON, 1974.
A numerical model based on coupled one-dimensional Richards and
Boussinesq equations.
Water Resources Res., 10(2), pp : 295-302.
- RAATS, P.A.C., 1973.
Unstable wetting fronts in uniform and non-uniform soils.
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 37, pp : 681-685.
- RAATS, P.A.C., 1971.
Some properties of flows in unsaturated soils with an exponential
dependence of hydraulic conductivity upon the pressure head.
J. of Hydr., 14, pp : 129-138.
- REMSON, I., G.M. HORNBERGER et F.J. MOLZ, 1971.
Numerical methods in subsurface hydrology, John Wiley & Sons, Inc.,
NEW-YORK, pp : 168-170.
- RICHARDS, L.A., 1931.
Capillary conduction of liquids through porous medium.
Physics, 1, pp : 318-333.
- ROSE, C.W., W.R. STERN et J.E. DRUMMOND, 1965.
Determination of hydraulic conductivity as a function of depth and
water content for soils in-situ.
Austr. J. Soil Res., 3, pp : 1-9.
- ROSEMA, A., 1975.
Simulation of the thermal behaviour of bare soils for remote
sensing purposes : Heat and mass transfer in the biosphere.
D.A. de VRIES, N.H. AFGAN, John Wiley & Sons, pp : 109-123.

- RUBIN, J. et R. STEINHARDT, 1963.
Soil water relations during rain infiltrations : I. Theory.
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 27(3), pp : 246-251.
- RUBIN, J., 1966.
Numerical analysis of ponded rainfall infiltration.
IASH-Proceedings of the Wageningen Symposium, Water in the
unsaturated zone, pp : 440-451.
- RUBIN, J., 1967.
Numerical method for analyzing hysteresis. Affected post-
infiltration redistribution of soil moisture.
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 31(1), pp : 13-20.
- RUBIN, J., 1968.
Theoretical analysis of two-dimensional, transient flow of water
in unsaturated and partly unsaturated soils.
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 32(5), pp : 607-615.
- RYTEMA, P.E., 1959.
Calculation of capillary conductivity from pressure plate outflow
data with non negligible membrane impedance.
Neth. J. Agr. Sci., 7, pp : 209-215.
- SCHAUM, 1968.
Theory and problems of Numerical analysis.
Shaum's Outline series, Mc. Graw-Hill, NEW-YORK, pp : 107-124.
- SLICHTER, C.S., 1899.
U.S. Geol. Sur. Ann. Rep., 19(II), pp : 295-384.
- SMITH, R.E. et D.A. WOOLHISER, 1971.
Mathematical simulation of infiltration watersheds.
Hydrology paper 47, Colorado State Univ., Fort Collins, Colo.
- SMITH, R.E. et J.Y. PARLANGE, 1978.
A parameter efficient hydrologic infiltration model.
Water Resources Res., 14, pp : 533-538.
- STAPLE, W.J., 1966.
Infiltration and redistribution of water in vertical columns of
loam soil.
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 30, pp. 553-558.
- STARR, J.L., H.C. DE ROO, C.R. FRINK et J.Y. PARLANGE, 1978.
Leaching characteristics of a layered field soil.
Soil Sci. Soc. Amer. J., 42, pp : 386-391.
- THONY, J.L., 1970.
Etude expérimentale des phénomènes d'hystérésis dans les
écoulements en milieu poreux non-saturé.
Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Scientifique et Médicale
de Grenoble, France.
- TODD, M.R., P.M. O'DELL et G.H. HIRASAKI, 1972.
Methods for increased accuracy in numerical reservoirs simulators.
Soc. Petrol. Eng. J., pp : 515-530.

- TOLIKAS, P.K., D.K. TOLIKAS et C.D. TZIMOPOULOS, 1983.
Vertical infiltration of water into unsaturated soils with variable diffusivity and conductivity.
J. of Hydr., 62(4), pp : 321-332.
- TOUMA, J., G. VACHAUD et J.Y. PARLANGE, 1983.
Air and water flow in a sealed ponded vertical soil column.
Accepté pour publication à Soil Science.
- VACHAUD, G., 1968.
Contribution à l'étude des problèmes d'écoulement en milieux poreux non-saturés.
Thèse de Docteur ès-Sciences Physiques, Grenoble, France.
- VACHAUD, G. et J.L. THONY, 1971.
Hysteresis during infiltration and redistribution in a soil column at different initial water contents.
Water Resources Res., 7, pp : 111-127.
- VACHAUD, G., M. VAUCLIN, D. KHANJI et N. WAKIL, 1973.
Effects of air pressure on water flow in an unsaturated stratified vertical column of sand.
Water Resources Res., 9(1), pp : 160-173.
- VACHAUD, G., J.P. GAUDET et V. KURAZ, 1974.
Air and water flow during ponded infiltration in a bounded column of soil.
J. of Hydr., 22, pp : 89-108.
- VAN DER PLOEG, R.R., 1974.
Simulation of moisture transfer in soils : one dimensional infiltration.
Soil Sci., 118(6), pp : 349-357.
- VAN GENUCHTEN, M.Th., 1980.
A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils.
Soil Sci. Soc. Amer. J., 44, pp : 892-898.
- VAN KEULEN, H. et C.G.E.M. VAN BEEK, 1971.
Water movement in layered soils ; a simulation model.
Neth. J. Agric. Sci., 19, pp : 138-153.
- VAN QUY, 1976.
Etude numérique des écoulements diphasiques multicomposants en milieux poreux avec miscibilité partielle et échange entre phases.
Thèse de Doctorat en Mathématiques, Université de PARIS VI.
- VAUCLIN, M., 1971.
Effets dynamiques sur la relation succion-teneur en eau lors d'écoulement en milieu non-saturé.
Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, France.

- VAUCLIN, M., 1975.
Etude expérimentale et numérique du drainage de nappes à surface libre.
Thèse de Docteur ès-Sciences Physiques, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, France.
- VAUCLIN, M., D. KHANJI et G. VACHAUD, 1976.
Etude expérimentale et numérique du drainage et de la recharge des nappes à surface libre, avec prise en compte de la zone non saturée.
J. de Mécanique, 15(2), pp : 307-340.
- VAUCLIN, M., R. HAVERKAMP et G. VACHAUD., 1979.
Résolution numérique d'une équation de diffusion non-linéaire.
Presses Universitaires de Grenoble.
- VAUCLIN, M. et G. VACHAUD, 1981.
Bilan hydrique dans le Sud-Tunisien : II. Modélisation numérique et prévision des transferts hydriques en sol stratifié.
J. of Hydr., 49, pp : 53-73.
- WARRICK, A.W., 1974.
Time dependent linearized infiltration : I. Point sources.
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 38, pp : 383-386.
- WATSON, K.K., 1966.
An instantaneous profile method for determining the hydraulic conductivity of unsaturated porous materials.
Water Resources Res., 2, pp : 709-715.
- WHISLER, F.D. et A. KLUTE, 1965.
The numerical analysis of infiltration considering hysteresis into a vertical soil column at equilibrium under gravity.
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 29, pp : 489-494.
- WHISLER, F.D. et K.K. WATSON, 1968.
One-dimensional gravity drainage of uniform columns of porous materials.
Journ. of Hydr., 6, pp : 277-296.
- WIERENGA, P.J. et C.T. DE WIT, 1970.
Simulation of heat transfer in soils.
Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 34, pp : 845-848.
- YOUNGS, E.G., 1960.
The drainage of liquids from porous materials.
Journ. of Geophys. Res., 5, pp : 4025-4030.

ANNEXE

SCHEMAS ET MAILLAGES DE DISCRETISATION

Modèle "BILAN LOCAL"

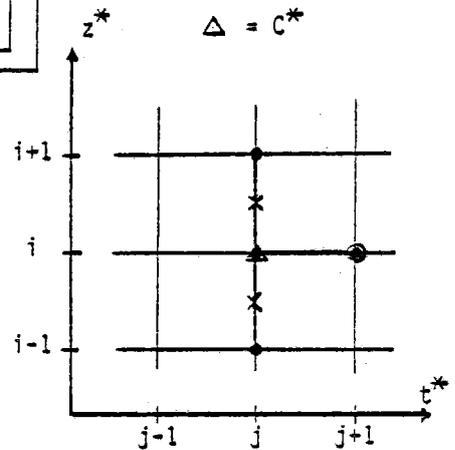
$$C^*(h) \cdot \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left[K^*(h) \cdot \left(\frac{\partial h^*}{\partial z^*} - 1 \right) \right]$$

● = h^*
 × = K^*
 Δ = C^*

LOC.A1 : Explicite traditionnel (STAPLE)

$$C_i^{*j} \cdot \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = \frac{1}{\Delta z^*} \left[K_{i+1/2}^{*j} \left(\frac{h_{i+1}^{*j} - h_i^{*j}}{\Delta z^*} - 1 \right) - K_{i-1/2}^{*j} \left(\frac{h_i^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{\Delta z^*} - 1 \right) \right]$$

1° ordre en Δt^* ; 2° ordre en Δz^* .

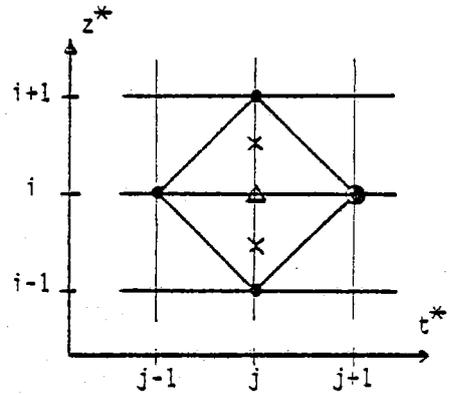


LOC.A2 : Explicite type DU FORT-FRANKEL (ROSEMA)

$$C_i^{*j} \cdot \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j-1}}{2 \Delta t^*} = \frac{1}{\Delta z^*} \left[K_{i+1/2}^{*j} \left(\frac{h_{i+1}^{*j} - h_i^{*j}}{\Delta z^*} - 1 \right) - K_{i-1/2}^{*j} \left(\frac{h_i^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{\Delta z^*} - 1 \right) \right]$$

avec : $h_i^{*j} = 0.5 (h_i^{*j+1} + h_i^{*j-1})$

2° ordre en Δt^* ; 2° ordre en Δz^* .



LOC1.B : Totalement implicite (LAASONEN)

$$C_i^{*j} \cdot \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = \frac{1}{\Delta z^*} \left[K_{i+1/2}^{*j} \left(\frac{h_{i+1}^{*j+1} - h_i^{*j+1}}{\Delta z^*} - 1 \right) - K_{i-1/2}^{*j} \left(\frac{h_i^{*j+1} - h_{i-1}^{*j+1}}{\Delta z^*} - 1 \right) \right]$$

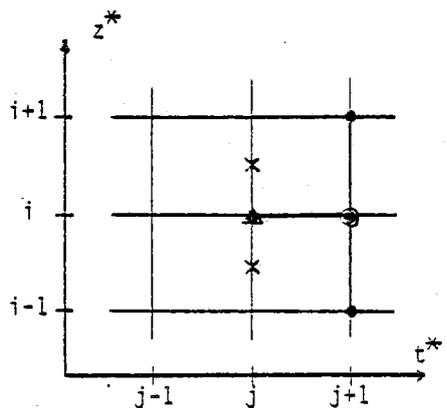
1° ordre en Δt^* ; 2° ordre en Δz^* .

Etude de la pondération sur K^* :

(LOC1.B1, LOC1.B2, LOC1.B3, LOC1.B4, LOC1.B5, LOC1.B6)

Etude de la linéarisation sur C^* :

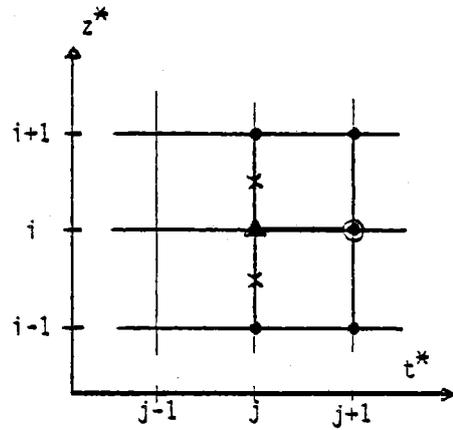
(LOC1.B3, LOC2.B3, LOC3.B3, LOC4.B3, LOC5.B3)



LOC.C (HANKS - BOWERS)

$$C_i^{*j+\omega} \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = \frac{1}{2 \Delta z^*} \left[K_{i+1/2}^{*j} \left(\frac{h_{i+1}^{*j+1} - h_i^{*j+1}}{\Delta z^*} - 2 + \frac{h_{i+1}^{*j} - h_i^{*j}}{\Delta z^*} \right) - K_{i-1/2}^{*j} \left(\frac{h_i^{*j+1} - h_{i-1}^{*j+1}}{\Delta z^*} - 2 + \frac{h_i^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{\Delta z^*} \right) \right]$$

1° ordre en Δt^* ; 2° ordre en Δz^* .

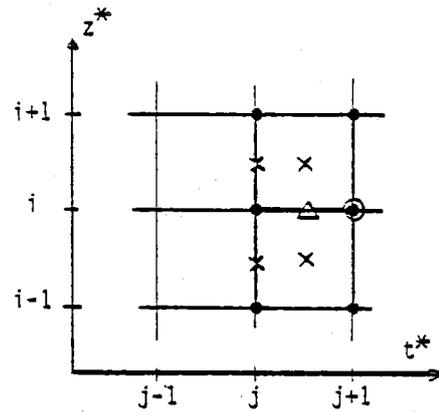


LOC.D (PIKUL et al.)

$$C_i^{*j+1/2} \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = \frac{1}{2 \Delta z^*} \left[K_{i+1/2}^{*j+1/2} \left(\frac{h_{i+1}^{*j+1} - h_i^{*j+1}}{\Delta z^*} - 1 \right) - K_{i-1/2}^{*j+1/2} \left(\frac{h_i^{*j+1} - h_{i-1}^{*j+1}}{\Delta z^*} - 1 \right) + K_{i+1/2}^{*j} \left(\frac{h_{i+1}^{*j} - h_i^{*j}}{\Delta z^*} - 1 \right) - K_{i-1/2}^{*j} \left(\frac{h_i^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{\Delta z^*} - 1 \right) \right]$$

2° ordre en Δt^* ; 2° ordre en Δz^* .

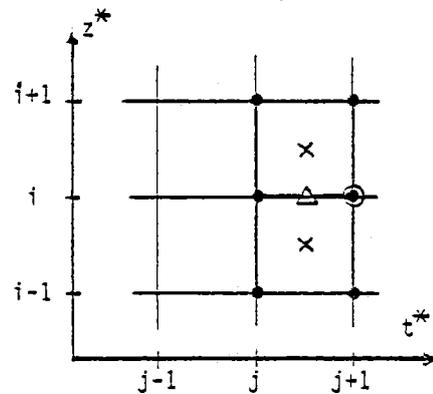
Linéarisation par prédiction implicite de $h_i^{*j+1/2}$
Pondération par moyenne arithmétique sur $K_{i+1/2}^{*j+1/2}$



LOC.E : Formulation générale

$$C_i^{*j+1/2} \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = \frac{1}{\Delta z^*} \left[K_{i+1/2}^{*j+1/2} \cdot \left(\frac{h_{i+1}^{*j+1} - h_i^{*j+1}}{2 \Delta z^*} + \frac{h_{i+1}^{*j} - h_i^{*j}}{2 \Delta z^*} - 1 \right) - K_{i-1/2}^{*j+1/2} \cdot \left(\frac{h_i^{*j+1} - h_{i-1}^{*j+1}}{2 \Delta z^*} + \frac{h_i^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{2 \Delta z^*} - 1 \right) \right]$$

2° ordre en Δt^* ; 2° ordre en Δz^* .



• LOC.E1

Linéarisation par extrapolation linéaire :

$$C_i^{*j+1/2} = 1.5 C_i^{*j} - 0.5 C_i^{*j-1} \quad (\text{Eq. IV-31})$$

$$K_{i\pm 1/2}^{*j+1/2} = 1.5 K_{i\pm 1/2}^{*j} - 0.5 K_{i\pm 1/2}^{*j-1}$$

Pondération par moyenne géométrique sur K_i^{*j} et K_{i+1}^{*j}

• LOC.E2 (RUBIN et STEINHARDT)

Linéarisation et pondération par extrapolation linéaire sur h^* :

$$h_{i+k}^{*j+1/2} = 1.5 h_{i+k}^{*j} - 0.5 h_{i+k}^{*j-1} \quad (k = 0, +1/2, -1/2) \quad (\text{Eq. IV-32})$$

$$h_{i\pm 1/2}^{*j} = 0.5 (h_i^{*j} + h_{i\pm 1}^{*j})$$

• LOC.E3 (RUBIN)

Linéarisation par prédiction explicite de $h_i^{*j+1/2}$:

$$h_i^{*j+1/2} = h_i^{*j} + \frac{\Delta t^*}{2 C_i^{*j} \Delta z^*} \left[K_{i+1/2}^{*j} \left(\frac{h_{i+1}^{*j} - h_i^{*j}}{\Delta z^*} - 1 \right) - K_{i-1/2}^{*j} \left(\frac{h_i^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{\Delta z^*} - 1 \right) \right]$$

Pondération par moyenne arithmétique sur $K_i^{*j+1/2}$ et $K_{i\pm 1}^{*j+1/2}$

• LOC.E4

Linéarisation par prédiction implicite de $h_i^{*j+1/2}$

$$C_i^{*j} \frac{h_i^{*j+1/2} - h_i^{*j}}{1/2 \Delta t^*} = \frac{1}{\Delta z^*} \left[K_{i+1/2}^{*j} \left(\frac{h_{i+1}^{*j+1/2} - h_i^{*j+1/2}}{\Delta z^*} - 1 \right) - K_{i-1/2}^{*j} \left(\frac{h_i^{*j+1/2} - h_{i-1}^{*j+1/2}}{\Delta z^*} - 1 \right) \right]$$

Pondération par moyenne géométrique sur K_i^{*j} et $K_{i\pm 1}^{*j}$

• LOC.E5 (WHISLER et KLUTE)

(Eq. IV-33)

Linéarisation par calcul itératif

$$C_i^{*j+1/2} = 0.5 (C_i^{*j} + C_i^{*j+1}) \quad ; \quad K_{i\pm 1/2}^{*j+1/2} = 0.5 (K_{i\pm 1/2}^{*j} + K_{i\pm 1/2}^{*j+1})$$

Pondération par moyenne arithmétique sur K_i^{*j} et $K_{i\pm 1}^{*j}$

ETUDE DE LA PONDERATION SUR K^*

LOC.B1 (WHISLER et al.; RUBIN; PIKUL et al.; VAUCLIN et al.)
(C.S.M.P.)

$$K_{i\pm 1/2}^* = 0.5 (K_i^* + K_{i\pm 1}^*) \quad (\text{Eq. IV-47})$$

LOC.B2 (SMITH et WOOLHISER)

$$K_{i\pm 1/2}^* = \frac{2 \cdot K_i^* \cdot K_{i\pm 1}^*}{K_i^* + K_{i\pm 1}^*} \quad (\text{Eq. IV-48})$$

LOC.B3

$$K_{i\pm 1/2}^* = \sqrt{K_i^* \cdot K_{i\pm 1}^*} \quad (\text{Eq. IV-49})$$

LOC.B4 (PHUC)

$$K_{i+1/2}^* = K_i^* \quad ; \quad K_{i-1/2}^* = K_{i-1}^* \quad (\text{Eq. IV-50})$$

LOC.B5 (van QUY)

$$K_{i\pm 1/2}^* = K_i^* \pm 1/2 \Delta z^* \cdot \left(\frac{\partial K^*}{\partial z^*} \right)_i \quad (\text{Eq. IV-51})$$

LOC.B6 (TODD)

$$K_{i+1/2}^* = 1.5 K_i^* - 0.5 K_{i-1}^* \quad (\text{Eq. IV-52})$$

$$K_{i-1/2}^* = 1.5 K_{i-1}^* - 0.5 K_{i-2}^*$$

LOC.B7 (RUBIN et STEINHARDT)

$$K_{i\pm 1/2}^* = K^* \left\{ 0.5 (h_i + h_{i\pm 1}) \right\} \quad (\text{Eq. IV-53})$$

LOC.B8

$$K_{i\pm 1/2}^* = K^* \left\{ \frac{2 \cdot h_i \cdot h_{i\pm 1}}{h_i + h_{i\pm 1}} \right\} \quad (\text{Eq. IV-54})$$

LOC.B9

$$K_{i\pm 1/2}^* = K^* \left\{ \sqrt{h_i \cdot h_{i\pm 1}} \right\} \quad (\text{Eq. IV-55})$$

ETUDE DE LINEARISATION SUR \bar{K}^*

LOC1.8

$$\bar{K}^* \equiv K_{i+k}^{*j} \quad \text{avec } k = 0, +1/2, -1/2$$

LOC6.8

$$\bar{K}^* \equiv K_{i+k}^{*j+1/2} = 1.5 K_{i+k}^{*j} - 0.5 K_{i+k}^{*j-1} \quad (k = 0, +1/2, -1/2)$$

Extrapolation linéaire sur K^* .

LOC7.8

$$\bar{K}^* \equiv K_{i+k}^{*j+1/2} = K_{i+k}^* \left\{ h_i^{j+1/2} \right\} \quad (k = 0, +1/2, -1/2)$$

avec une prédiction explicite de $h \left\{ h_i^{*j+1/2} \right\}$:

$$h_i^{*j+1/2} = h_i^{*j} + \frac{\Delta t^*}{2.C_i^{*j} \cdot \Delta z^*} \left[K_{i+1/2}^{*j} \left(\frac{h_{i+1}^{*j} - h_i^{*j}}{\Delta z^*} - 1 \right) - K_{i-1/2}^{*j} \left(\frac{h_i^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{\Delta z^*} - 1 \right) \right]$$

LOC8.8

$$\bar{K}^* \equiv K_{i+k}^{*j+1/2} = K_{i+k}^* \left\{ h_i^{j+1/2} \right\} \quad (k = 0, +1/2, -1/2)$$

avec une prédiction implicite de $h \left\{ h_i^{*j+1/2} \right\}$:

$$C_i^{*j} \cdot \frac{h_i^{*j+1/2} - h_i^{*j}}{1/2 \Delta t^*} = \frac{1}{\Delta z^*} \left[K_{i+1/2}^{*j} \left(\frac{h_{i+1}^{*j+1/2} - h_i^{*j+1/2}}{\Delta z^*} - 1 \right) - K_{i-1/2}^{*j} \left(\frac{h_i^{*j+1/2} - h_{i-1}^{*j+1/2}}{\Delta z^*} - 1 \right) \right]$$

LOC9.8

$$\bar{K}^* \equiv K_{i+k}^{*j+1} = 2 K_{i+k}^{*j} - K_{i+k}^{*j-1} \quad (k = 0, +1/2, -1/2)$$

Extrapolation linéaire sur K^* .

ETUDE DE LINEARISATION SUR \bar{c}^*

LOC1.B

$$\bar{c}_i^* = c_i^{*j}$$

LOC2.B

$$\bar{c}_i^* = 1.5 c_i^{*j} - 0.5 c_i^{*j-1} \quad (\text{Eq. IV-22})$$

LOC3.B

$$\bar{c}_i^* = c^* \{ h_i^{j+1/2} \} \quad (\text{Eq. IV-23})$$

avec une prédiction explicite de $h \{ h_i^{*j+1/2} \}$:

$$h_i^{*j+1/2} = h_i^{*j} + \frac{\Delta t^*}{2 \cdot c_i^{*j} \cdot \Delta z^*} \left[k_{i+1/2}^{*j} \left(\frac{h_{i+1}^{*j} - h_i^{*j}}{\Delta z^*} - 1 \right) - k_{i-1/2}^{*j} \left(\frac{h_i^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{\Delta z^*} - 1 \right) \right]$$

LOC4.B

$$\bar{c}_i^* = c^* \{ h_i^{j+1/2} \} \quad (\text{Eq. IV-23})$$

avec une prédiction implicite de $h \{ h_i^{*j+1/2} \}$:

$$c_i^{*j} \cdot \frac{h_i^{*j+1/2} - h_i^{*j}}{1/2 \Delta t^*} = \frac{1}{\Delta z^*} \left[k_{i+1/2}^{*j} \cdot \left(\frac{h_{i+1}^{*j+1/2} - h_i^{*j+1/2}}{\Delta z^*} - 1 \right) - k_{i-1/2}^{*j} \left(\frac{h_i^{*j+1/2} - h_{i-1}^{*j+1/2}}{\Delta z^*} - 1 \right) \right]$$

LOC5.B

$$\bar{c}_i^* = c^* \{ h_i^{j+\omega} \} \quad (\text{Eq. IV-24})$$

avec $h_i^{*j+\omega} = \omega \cdot (h_i^{*j} - h_i^{*j-1}) + h_i^{*j}$ et $0.7 \leq \omega < 1$

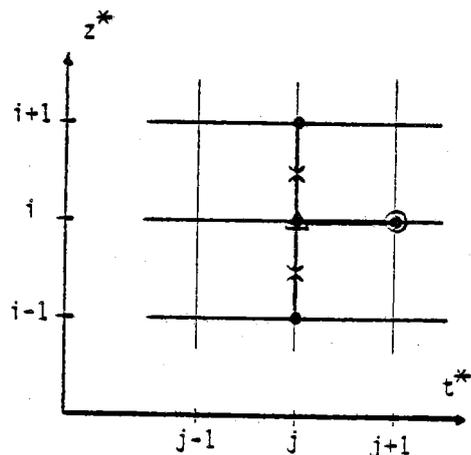
Modèle "DECOMPOSE"

$$C(h^*) \cdot \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = K \cdot \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial K^*}{\partial z^*} \left(\frac{\partial h^*}{\partial z^*} - 1 \right)$$

DEC.A1 : Explicite traditionnel

$$h_i^{*j+1} = h_i^{*j} + \frac{\Delta t^*}{C_i^{*j}} \left[\frac{K_{i+1/2}^{*j} - K_{i-1/2}^{*j}}{\Delta z^*} \cdot \left(\frac{h_{i+1}^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{2 \Delta z^*} - 1 \right) + K_i^{*j} \cdot \frac{h_{i+1}^{*j} - 2h_i^{*j} + h_{i-1}^{*j}}{\Delta z^{*2}} \right]$$

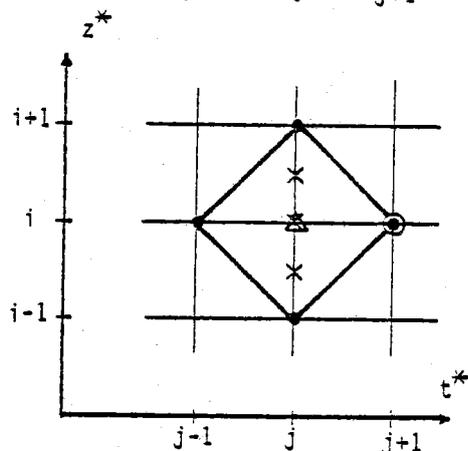
1° ordre en Δt^* ; 2° ordre en Δz^* .



DEC.A2 : Explicite type DU FORT-FRANKEL

$$C_i^{*j} \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j-1}}{2 \Delta t^*} = K_i^{*j} \cdot \frac{h_{i+1}^{*j} - h_i^{*j+1} - h_i^{*j-1} + h_{i-1}^{*j}}{\Delta z^{*2}} + \frac{1}{\Delta z^*} \left[(K_{i+1/2}^{*j} - K_{i-1/2}^{*j}) \left(\frac{h_{i+1}^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{2 \Delta z^*} - 1 \right) \right]$$

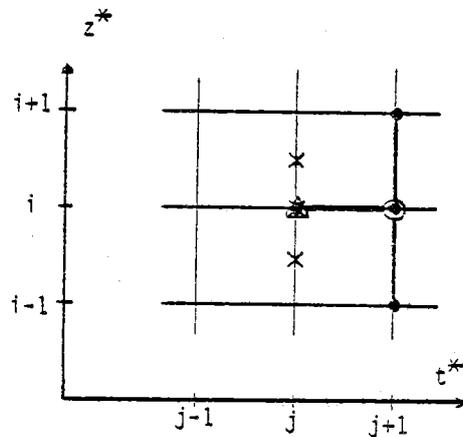
2° ordre en Δt^* ; 2° ordre en Δz^* .



DEC.B :

$$C_i^{*j} \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = K_i^{*j} \cdot \frac{h_{i+1}^{*j+1} - 2h_i^{*j+1} + h_{i-1}^{*j+1}}{\Delta z^{*2}} + \frac{1}{\Delta z^*} \left[K_{i+1/2}^{*j} \left(\frac{h_{i+1}^{*j+1} - h_{i-1}^{*j+1}}{2 \Delta z^*} - 1 \right) - K_{i+1/2}^{*j} \left(\frac{h_{i+1}^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{2 \Delta z^*} - 1 \right) \right]$$

1° ordre en Δt^* ; 2° ordre en Δz^*



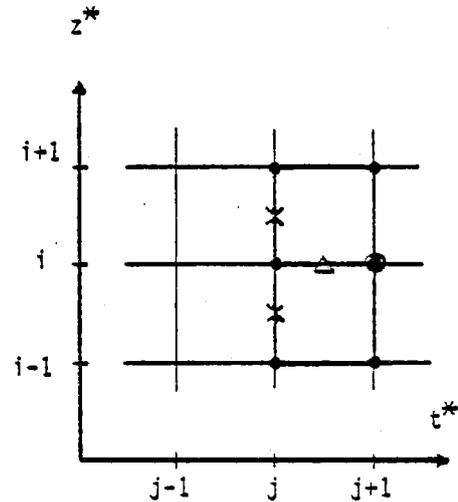
DEC.C : (HANKS - BOWERS)

$$C_i^{*j+\omega} \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = K_i^{*j}$$

$$\left[\frac{h_{i+1}^{*j+1} - 2h_i^{*j+1} + h_{i-1}^{*j+1} + h_{i+1}^{*j} - 2h_i^{*j} + h_{i-1}^{*j}}{2\Delta z^{*2}} \right] +$$

$$+ \frac{K_{i+1/2}^{*j}}{2\Delta z^*} \left[\frac{h_{i+1}^{*j+1} - h_{i-1}^{*j+1} + h_{i+1}^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{2\Delta z^*} - 2 \right] -$$

$$- \frac{K_{i-1/2}^{*j}}{2\Delta z^*} \left[\frac{h_{i+1}^{*j+1} - h_{i-1}^{*j+1} + h_{i+1}^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{2\Delta z^*} - 2 \right]$$



1° ordre en Δt^* ; 2° ordre en Δz^* .

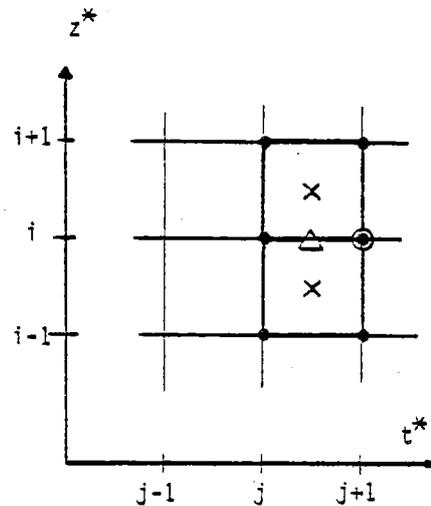
DEC.E : Formulation générale

$$C_i^{*j+1/2} \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = K_i^{*j+1/2}$$

$$\left[\frac{h_{i+1}^{*j+1} - 2h_i^{*j+1} + h_{i-1}^{*j+1} + h_{i+1}^{*j} - 2h_i^{*j} + h_{i-1}^{*j}}{2\Delta z^{*2}} \right] +$$

$$+ \frac{K_{i+1/2}^{*j+1/2}}{2\Delta z^*} \left[\frac{h_{i+1}^{*j+1} - h_{i-1}^{*j+1} + h_{i+1}^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{2\Delta z^*} - 2 \right] -$$

$$- \frac{K_{i-1/2}^{*j+1/2}}{2\Delta z^*} \left[\frac{h_{i+1}^{*j+1} - h_{i-1}^{*j+1} + h_{i+1}^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{2\Delta z^*} - 2 \right]$$



2° ordre en Δt^* ; 2° ordre en Δz^* .

• DEC.E2

Linéarisation et pondération par extrapolation linéaire sur h^* :

$$h_{i+k}^{*j+1/2} = 1.5 h_{i+k}^{*j} - 0.5 h_{i+k}^{*j-1} \quad (k = 0, +1/2, -1/2)$$

$$h_{i\pm 1/2}^{*j} = 0.5 (h_i^{*j} + h_{i\pm 1}^{*j})$$

● DEC.E4

Linéarisation par prédiction implicite de $h_i^{*j+1/2}$:

$$C_i^{*j} \frac{h_i^{*j+1/2} - h_i^{*j}}{1/2 \Delta t^*} = K_i^{*j} \cdot \frac{h_{i+1}^{*j+1/2} - 2h_i^{*j+1/2} + h_{i-1}^{*j+1/2}}{\Delta z^{*2}} +$$

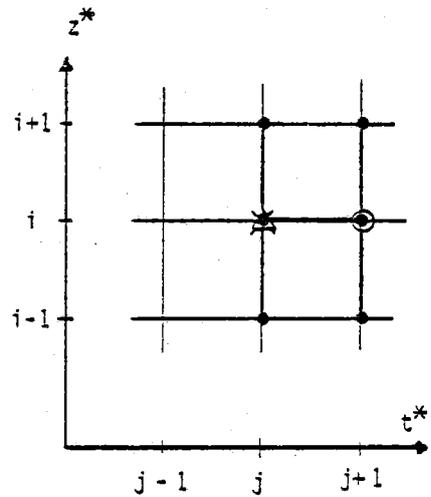
$$\frac{1}{\Delta z^*} \left[K_{i+1/2}^{*j} \left(\frac{h_{i+1}^{*j+1/2} - h_{i-1}^{*j+1/2}}{2\Delta z^*} - 1 \right) - K_{i-1/2}^{*j} \left(\frac{h_{i+1}^{*j+1/2} - h_{i-1}^{*j+1/2}}{2\Delta z^*} - 1 \right) \right]$$

DEC.F (LIAKOPOULOS)

$$C_i^{*j} \frac{h_i^{*j+1} - h_i^{*j}}{\Delta t^*} = K_i^{*j} \cdot \frac{h_{i+1}^{*j+1} - 2h_i^{*j+1} + h_{i-1}^{*j+1}}{\Delta z^{*2}} +$$

$$+ \left(\frac{dK}{dh} \right)_i^{*j} \cdot \left(\frac{h_{i+1}^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{2\Delta z^*} \right) \cdot \left(\frac{h_{i+1}^{*j} - h_{i-1}^{*j}}{2\Delta z^*} - 1 \right)$$

1° ordre en Δt^* ; 2° ordre en Δz^* .



Modèle "KIRCHHOFF"

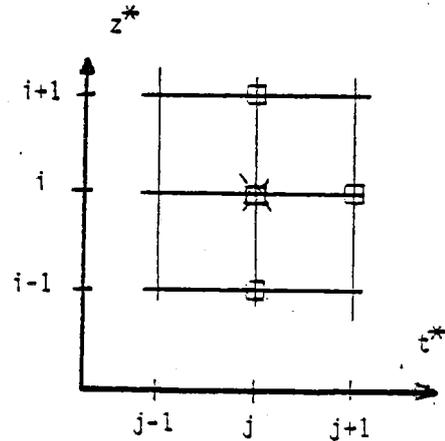
$$\frac{C^*}{K^*} \cdot \frac{\delta U^*}{\delta t^*} = \frac{\delta^2 U^*}{\delta z^{*2}} - \frac{1}{K^*} \cdot \frac{dK^*}{dh^*} \cdot \frac{\delta U^*}{\delta z^*}$$

□ = U*
 X = K*
 Δ = C*

KIR.A1

$$\frac{C_i^{*j}}{K_i^{*j}} \cdot \frac{U_i^{*j+1} - U_i^{*j}}{\Delta t^*} = \frac{U_{i-1}^{*j} - 2U_i^{*j} + U_{i+1}^{*j}}{\Delta z^{*2}} - \frac{1}{K_i^{*j}} \cdot \left(\frac{dK}{dh}\right)_i^{*j} \cdot \left(\frac{U_{i+1}^{*j} - U_{i-1}^{*j}}{2\Delta z^*}\right)$$

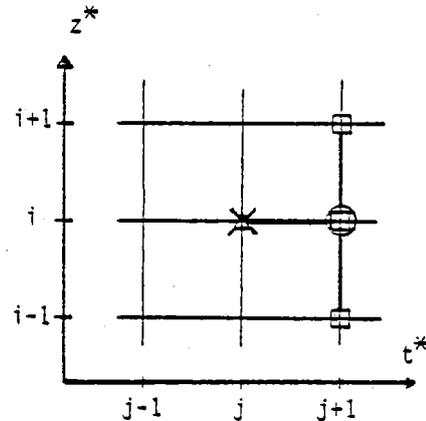
1° ordre en Δt^* ; 2° ordre en Δz^* .



KIR.B :

$$\frac{C_i^{*j}}{K_i^{*j}} \cdot \frac{U_i^{*j+1} - U_i^{*j}}{\Delta t^*} = \frac{U_{i-1}^{*j+1} - 2U_i^{*j+1} + U_{i+1}^{*j+1}}{\Delta z^{*2}} - \frac{1}{K_i^{*j}} \cdot \left(\frac{dK}{dh}\right)_i^{*j} \cdot \left(\frac{U_{i+1}^{*j+1} - U_{i-1}^{*j+1}}{2\Delta z^*}\right)$$

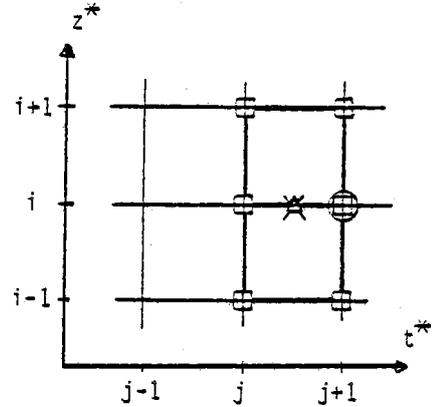
1° ordre en Δt^* ; 2° ordre en Δz^* .



KIR.E : Formulation générale

$$\frac{C_i^{*j+1/2}}{K_i^{*j+1/2}} \cdot \frac{U_i^{*j+1} - U_i^{*j}}{\Delta t^*} = \frac{U_{i-1}^{*j+1} - 2U_i^{*j+1} + U_{i+1}^{*j+1} + U_{i-1}^{*j} - 2U_i^{*j} + U_{i+1}^{*j}}{2\Delta z^{*2}} - \frac{1}{K_i^{*j+1/2}} \cdot \left(\frac{dK}{dh}\right)_i^{*j+1/2} \cdot \left[\frac{U_{i+1}^{*j+1} - U_{i-1}^{*j+1} + U_{i+1}^{*j} - U_{i-1}^{*j}}{4\Delta z^*}\right]$$

2° ordre en Δt^* ; 2° ordre en Δz^* .



● KIR.E2

Linéarisation par extrapolation linéaire sur U^* :

$$U_i^{*j+1/2} = 1.5 U_i^{*j} - 0.5 U_i^{*j-1}$$

● KIR.E3 (RUBIN)

Linéarisation par prédiction explicite de $U_i^{*j+1/2}$

$$U_i^{*j+1/2} = U_i^{*j} + \frac{\Delta t^*}{2 \cdot C_i^{*j}} \left[K_i^{*j} \left(\frac{U_{i-1}^{*j} + 2 U_i^{*j} + U_{i+1}^{*j}}{\Delta z^{*2}} \right) - \left(\frac{dK}{dh} \right)_i^{*j} \cdot \left(\frac{U_{i+1}^{*j} - U_{i-1}^{*j}}{2 \Delta z^*} \right) \right]$$

● KIR.E4

Linéarisation par prédiction implicite de $U_i^{*j+1/2}$

$$\frac{C_i^{*j}}{K_i^{*j}} \cdot \frac{U_i^{*j+1/2} - U_i^{*j}}{\Delta t^*/2} = \frac{U_{i-1}^{*j+1/2} - 2 U_i^{*j+1/2} + U_{i+1}^{*j+1/2}}{\Delta z^{*2}} - \frac{1}{K_i^{*j}} \cdot \left(\frac{dK}{dh} \right)_i^{*j} \cdot \left(\frac{U_{i+1}^{*j+1/2} - U_{i-1}^{*j+1/2}}{2 \Delta z^*} \right)$$

7301300

dernière page de la thèse

AUTORISATION DE SOUTENANCE

VU les dispositions de l'article 5 de l'arrêté du 16 Avril 1974,

VU les rapports de M. ... G. VACHAUD

M. ... J. DELLEUR

M. ... J.Y. PARLANGE

M. HAVERKAMP Randel est autorisé
à présenter une thèse en soutenance pour l'obtention du grade de
DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES.

Fait à GRENOBLE, le 15 NOV. 1983

Le Président de l'U.S.M.G.

M. Tanche

Le Président

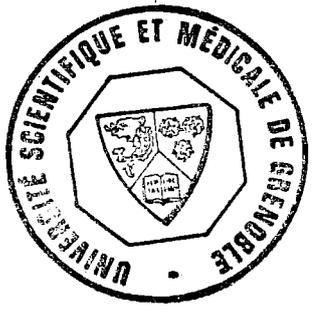
M. TANCHE

Le Président de l'I.N.P.G.

D. BLOCH
Président
de l'Institut National Polytechnique
de Grenoble

P.O. le Vice-Président,

[Signature]



THESE de DOCTEUR ès-SCIENCES PHYSIQUES

Titre de l'ouvrage :

**RESOLUTION DE L'EQUATION DE L'INFILTRATION
DE L'EAU DANS LE SOL
APPROCHES ANALYTIQUES ET NUMERIQUES**

Nom de l'auteur : Randel HAVERKAMP

Etablissement : Université Scientifique et Médicale de Grenoble

RESUME

L'étude porte sur la recherche systématique de solutions analytiques et numériques de l'équation de l'infiltration mono-dimensionnelle de l'eau dans le sol.

Dans une première partie les différentes approches quasi-analytiques sont analysées. La solution en série de PHILIP, retenue pour cette étude est améliorée et complétée. Elle est ensuite utilisée comme base de référence pour tester les solutions numériques.

Dans une seconde partie, un grand nombre de modèles numériques sont comparés afin d'essayer de dégager un ou plusieurs schémas présentant un « optimum » vis-à-vis des critères de convergence, précision et coût économique.

MOTS-CLES

Infiltration en milieu poreux non saturé ; Equation de diffusion non-linéaire ; Modèle aux différences finies.