Analyse et synthèse de tolérance pour la conception et le dimensionnement des systèmes mécatroniques

Mariem El Feki

▶ **To cite this version:**

Mariem El Feki. Analyse et synthèse de tolérance pour la conception et le dimensionnement des systèmes mécatroniques. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2011. Français. NNT : 2011ECDL0019 . tel-00688247

HAL Id: tel-00688247

https://theses.hal.science/tel-00688247

Submitted on 17 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2011-19

Thèse de l'Université de Lyon

délivrée par
L'Ecole Centrale de Lyon

Spécialité : Énergie et Systèmes

soutenue publiquement le 5 Juillet 2011

par
Mme Mariem El Feki

préparée au
Laboratoire Ampère - Département Méthodes pour l'Ingénierie des Systèmes

Analyse et synthèse de tolérance pour la conception et le dimensionnement des systèmes mécatroniques

École Doctorale Électronique, Électrotechnique, Automatique

Composition du jury :

Rapporteurs :	M. Jean-François Lafay	Professeur, Ecole Centrale de Nantes
	M. Xavier Roboam	DR, Université de Toulouse
	M. Roger Fotsu Ngwompo	Lecturer, University of Bath
Examinateurs :	M. Jean Buisson	Professeur, SUPELEC
	M. Daniel Thomasset	Professeur émérite, INSA de Lyon
Directeurs :	M. Laurent Krähenbühl	DR, Ecole Centrale de Lyon
	M. Wilfrid Marquis-Favre	Maître de conférences HDR, INSA de Lyon

ÉCOLE CENTRALE LYON **Direction de la recherche**

Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'Ecole Centrale de Lyon

Nom-Prénom	Corps grade	Laboratoire ou à défaut département ECL	Etablissement
AURIOL Philippe	professeur	AMPERE	ECL
BEROUAL Abderrahmane	professeur	AMPERE	ECL
BURET François	professeur	AMPERE	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
MARTELET Claude	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Alain	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
SCORLETTI Gérard	professeur	AMPERE	ECL
SIMONET Pascal	chargé de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
THOMAS Gérard	professeur	AMPERE	ECL
VOLLAIRE Christian	professeur	AMPERE	ECL
		Nbre AMPERE 12	
HELLOUIN Yves	maître de conférences	DER EEA	ECL
LE HELLEY Michel	professeur	DER EEA	ECL
		Nbre DER EEA 2	
GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	professeur	DER STMS	ECL
		Nbre DER STMS 2	
LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	professeur émérite	ICJ	ECL
MARION Martine	professeur	ICJ	ECL
MIRONESCU Elisabeth	professeur	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	professeur	ICJ	ECL
MUSY François	maître de conférences	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	ICJ	ECL
		Nbre ICJ 7	
DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL
		Nbre ICTT 1	
CALLARD Anne-Ségolène	maître de conférences	INL	ECL
CLOAREC Jean-Pierre	maître de conférences	INL	ECL
GAFFIOT Frédéric	professeur	INL	ECL
GAGNAIRE Alain	maître de conférences	INL	ECL
GARRIGUES Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GENDRY Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL

GRENET Geneviève	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
HOLLINGER GUY	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
JOSEPH Jacques	professeur	INL	ECL
KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	INL	ECL
LETARTRE Xavier	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
MARTIN Jean-René	professeur émérite	INL	ECL
O'CONNOR Ian	professeur	INL	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	professeur	INL	ECL
ROBACH Yves	professeur	INL	ECL
SAINT-GIRONS Guillaume	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SEASSAL Christian	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
TARDY Jacques	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL

Nbre INL 20

CHEN Liming	professeur	LIRIS	ECL

Nbre LIRIS 1

BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BOGEY Christophe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur émérite	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT Geneviève	professeur émérite	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	professeur	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GOROKHOVSKI Mikhail	professeur	LMFA	ECL
HENRY Daniel	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
LE RIBAULT Catherine	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
SHAO Liang	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	maître de conférences	LMFA	ECL

Nbre LMFA 23

BENAYOUN Stéphane	professeur	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	maître de conférences	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	maître de conférences	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfrid	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	past	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	professeur	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
JUVE Denyse	ingénieur de recherche	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL

LE BOT Alain	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	professeur	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférences	LTDS	ECL
SALVIA Michelle	maître de conférences	LTDS	ECL
SIDOROFF François	professeur	LTDS	ECL
SINOU Jean-Jacques	maître de conférences	LTDS	ECL
STREMSDOERFER Guy	professeur	LTDS	ECL
THOUVEREZ Fabrice	professeur	LTDS	ECL
TREHEUX Daniel	professeur	LTDS	ECL
VANNES André-Bernard	professeur émérite	LTDS	ECL
VINCENS Eric	maître de conférences	LTDS	ECL
		Nbre LTDS 26	

Total HdR ECL	**91**

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au sein du laboratoire Ampère et plus précisément au sein du département Méthodes pour l'Ingénierie des Systèmes. À ce titre, je tiens à remercier le directeur du laboratoire, M. Laurent Nicolas, directeur de recherche CNRS et le responsable du département M. Eric Bideaux, professeur à l'INSA de Lyon, pour leur accueil.

C'est avec une certaine émotion et beaucoup de sincérité que je voudrais remercier ceux qui m'ont suivi et soutenu pendant ces années de travail. Merci à mon directeur de thèse M. Wilfrid Marquis-Favre, habilité à diriger des recherches, pour son encadrement attentionné, son dévouement, son enthousiasme pour la recherche et surtout pour ses qualités humaines dont il a fait preuves tout au long de la réalisation de ces travaux. Mes remerciements vont conjointement à mon co-directeur de thèse M. Laurent Krähenbühl, directeur de recherche CNRS, pour sa disponibilité, sa confiance et pour ses remarques pertinentes qui m'ont permis de prendre du recul par rapport à mon travail. Je tiens à remercier également M. Daniel Thomasset, professeur émérite, pour sa bienveillance et ses précieux conseils qui m'ont été d'un grand profit.

Par ailleurs, j'exprime toute ma gratitude envers chacun des membres du jury de thèse pour avoir accepté d'évaluer mon travail. À ce titre, je remercie vivement les rapporteurs M. Jean-François Lafay, professeur à l'Ecole Centrale de Nantes, M. Xavier Roboam, directeur de recherche CNRS, et M. Roger Fotsu Ngwompo, lecturer à l'université de Bath, qui m'ont accordé de leur temps pour examiner mon mémoire et pour leurs remarques constructives. Mes remerciements vont également au président de jury et examinateur M. Jean Buisson, professeur à Supelec, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

Mes remerciements s'adressent ensuite à tous les membres du laboratoire Ampère pour leur sympathie et leur soutien constant tout le long de ma thèse. Merci aux chercheurs permanents (Eric, Xavier, Sylvie, Damien, Minh-Tu, Mohamed, Mickaël, Richard, Gérard, Tanguy, Jean-Pierre,...) pour leur aide et leur gentillesse. Merci aussi à tous les doctorants que j'ai pu croiser et avec qui j'ai pu partager des moments amicales : à Yoazhong, à Grégory , à Rosario, à Gérardo, à Quyen, aux deux Salam, à Mingming,... et à Audrey pour les nombreux échanges scientifiques fructueux et pour ses encouragements. Un merci tout particulier à Lilia, pour son amitié et sa présence dans les moments difficiles. Je n'oublie pas non plus d'adresser un mot de gratitude à l'égard de Maguy, secrétaire du laboratoire, et à Christophe, technicien du laboratoire, pour leur soutien logistique.

D'un point de vue plus personnel, je voudrais remercier les personnes qui comptent beaucoup pour moi et qui ont contribué par leur encouragement et leur soutien à la réalisation de ce travail :

- ma belle-famille,
- mes frères et sœurs et en particulier Elyes qui a toujours gardé un œil bienveillant sur mes études,
- mon père qui m'a toujours couvert de son amour, sa générosité et son soutien indéfectible sans lesquels cette thèse n'aurait pas pu avoir lieu. Ma reconnaissance envers lui est inexprimable,

– et mon cher époux Melek qui a toujours été à mes cotés surtout dans les moments difficiles, qui avait toujours les mots pour me réconforter et qui a accepté tant de sacrifices durant ces années. Merci du fond du cœur.

Enfin, je ne pourrai terminer ces remerciements sans évoquer ma défunte mère ravie quelques mois avant l'aboutissement de cette thèse et sans avoir l'occasion d'apprécier cet événement et de vivre le couronnement de son dévouement. De son vivant et malgré sa maladie, elle m'était d'un grand soutien et une source inépuisable de tendresse. Sans ses encouragements et sans ses sacrifices, cette thèse n'aurait pu être possible. Je n'oublierai jamais qu'elle passait sous silence ses souffrances pour ne pas me perturber dans mon travail. Je n'aurai jamais assez de mots pour honorer sa mémoire.

À la mémoire de ma mère
à mon père
à Melek

Table des matières

Introduction générale **v**

1 Le dimensionnement des systèmes mécatroniques présentant des incertitudes paramétriques **1**
Introduction . . . 2
1.1 Les systèmes mécatroniques vus comme des systèmes incertains . . . 2
1.1.1 Les systèmes mécatroniques : historique et définition . . . 2
1.1.2 Architecture énergétique d'un système mécatronique . . . 4
1.1.3 Les facteurs incertains dans un système mécatronique . . . 5
1.2 Outils de modélisation et d'étude des incertitudes paramétriques . . . 6
1.2.1 Représentation d'état des systèmes incertains . . . 6
1.2.2 L'analyse de sensibilité pour l'étude des incertitudes paramétriques . . . 8
1.2.3 Arithmétique par intervalles . . . 9
1.2.4 Approche probabiliste . . . 11
1.3 Le dimensionnement par inversion . . . 12
1.3.1 La conception des systèmes mécatroniques . . . 12
1.3.2 Le dimensionnement selon la formulation du problème . . . 13
1.3.3 Inversion d'un modèle bond graph . . . 14
1.3.4 Le dimensionnement sur des critères dynamiques et énergétiques . . . 19
1.4 La méthodologie de dimensionnement pour la synthèse paramétrique . . . 22
1.4.1 Problème de synthèse paramétrique . . . 23
1.4.2 Synthèse de tolérance paramétrique par analyse par intervalles . . . 23
1.5 L'analyse structurelle et comportementale . . . 24
1.5.1 Les outils de l'analyse structurelle . . . 25
1.5.2 Différentes approches...différents niveaux d'analyse . . . 26
Conclusion . . . 28

2 Contribution à la modélisation des incertitudes paramétriques par approche bond graph **31**
Introduction . . . 32
2.1 Modélisation des incertitudes paramétriques par l'approche bond graph . . . 32
2.1.1 Bond graph de sensibilité . . . 33
2.1.2 Bond graph incrémental . . . 36
2.1.3 Bond graph incertain . . . 39
2.2 Contribution à la représentation bond graph du Modèle Standard d'Interconnexion : éléments 1-port et éléments TF et GY 2-ports . . . 49
2.2.1 Éléments 1-port . . . 49
2.2.2 Éléments TF et GY 2-ports . . . 51
2.3 Contribution à la représentation bond graph du Modèle Standard d'Interconnexion : éléments multiport . . . 56
2.3.1 Décomposition des éléments multiport . . . 56

2.3.2 Modèle standard d'interconnexion des éléments multiport 65
Conclusion 71

3 Contribution à l'analyse et la synthèse d'un problème de conception pour les systèmes incertains 73
Introduction 74
3.1 Analyse du cahier des charges : éléments théoriques 75
3.1.1 Résultats de référence de l'approche modèle d'état 75
3.1.2 L'analyse structurelle et comportementale à partir du modèle bond graph direct 87
3.1.3 L'analyse structurelle et comportementale à partir du modèle bond graph inverse 98
3.1.4 Interprétations 108
3.2 Analyse de l'adéquation spécifications/structure du modèle et synthèse de tolérance 110
3.2.1 Vérification de l'adéquation par niveaux d'analyse 110
3.2.2 De la vérification de l'adéquation à la synthèse de tolérance : cas d'une suspension quart de véhicule 121
Conclusion 134

4 Synthèse de tolérance par l'approche probabiliste 137
Introduction 138
4.1 Approche probabiliste : théorie 139
4.1.1 Fonction de densité de probabilité pour la description de l'incertitude . . . 140
4.1.2 Fonction d'une variable/processus aléatoire 142
4.1.3 Grandeurs caractéristiques des variables/processus aléatoires 143
4.2 Propagation de la densité de probabilité au sein d'un système dynamique stochastique 147
4.2.1 Principe de conservation de la probabilité 147
4.2.2 Problème stochastique inverse 150
4.3 Bond graph probabiliste pour la synthèse des tolérances 154
4.3.1 Cahier des charges 155
4.3.2 Remontée des spécifications probabilistes 156
4.3.3 Synthèse de tolérances paramétriques 166
4.3.4 Exemple : synthèse de tolérances d'une chaîne d'actionnement 172
Conclusion 184

Conclusion générale 187

Bibliographie 193

Bibliographie 207

A Le langage Bond Graph 209
A.1 Variables de puissance et d'énergie 209
A.1.1 Variables de puissance 209
A.1.2 Variables d'énergie 210
A.2 Éléments bond graph 211
A.2.1 Éléments passifs 211
A.2.2 Éléments actifs 211
A.2.3 Éléments de jonction et de transduction 212
A.2.4 Éléments d'analyse 214
A.3 Construction d'un modèle bond graph 214
A.4 Multi-bond graph 216

A.5 Schémas de calcul associés à un modèle bond graph 216
A.5.1 Causalité 217
A.5.2 Bicausalité 220

B Synthèse de tolérance paramétrique par analyse par intervalles : Exemple 225

C Détermination de la représentation d'état canonique à partir du modèle bond graph incertain 229

D Généralités sur les éléments bond graph multiport linéaires 233
D.1 Élément multiport dissipatif linéaire 233
D.2 Élément multiport de stockage d'énergie (I et C) linéaire 234

E Outils de l'analyse structurelle et comportementale 237
E.1 Algèbre pour l'analyse structurelle et comportementale 237
E.2 Approche modèle d'état 238
E.2.1 Représentation matricielle 238
E.2.2 Représentation graphique : digraphe 240
E.3 Approche bond graph 240
E.3.1 Analyse d'un modèle bond graph 240
E.3.2 Détermination du modèle d'état à partir du modèle bond graph 242
E.3.3 Détermination graphique du déterminant de la matrice système 244
E.3.4 Commandabilité et observabilité structurelles 246

F Analyse comportementale à partir du modèle bond graph 249
F.1 Analyse comportementale à partir du modèle bond graph direct 249
F.1.1 Ordres des zéros à l'infini 249
F.1.2 Ordre relatif 250
F.1.3 Odres d'essentialité 250
F.2 Analyse comportementale à partir du modèle bond graph inverse 251
F.2.1 Ordres des pôles à l'infini 251
F.2.2 Ordres relatifs 257
F.2.3 Odres d'essentialité 267

G Analyse de l'adéquation spécifications/structure du modèle : cas des systèmes multivariables 271
G.1 Vérification de l'adéquation par niveaux d'analyse 271
G.2 Exemple 275

H Analyse de l'adéquation spécifications/structure : composant n-ports 283
H.1 Vérification de l'adéquation par niveaux d'analyse 283
H.2 Exemple 287

I Notions de base sur l'approche probabiliste 293
I.1 Espace probabilisé 293
I.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle 294
I.3 Processus stochastique 296
I.4 Fonctions de variables/processus aléatoires 296
I.4.1 Fonction de variable/processus aléatoire : cas d'une fonction non inversible 296
I.4.2 Fonction d'un vecteur de variables/processus aléatoires 297

Introduction générale

Pendant longtemps, les systèmes pluridisciplinaires ont consisté en une juxtaposition de différentes technologies issues de différents domaines physiques sans qu'il y ait une réelle synergie entre ces domaines. L'absence de transversalité était l'origine de la faiblesse de ces systèmes qui ne pouvaient plus répondre à l'exigence accrue du marché en termes de performances, confort, sécurité, consommation d'énergie et d'innovation. Les systèmes à concevoir doivent apporter une réponse toujours plus imaginative et plus adaptée aux problématiques qui lui sont soumises : gain de poids et une sécurité accrue en aéronautique, souplesse dans les machines textiles, précision dans les outils d'usinage etc... Afin de faire face à la complexité des cahiers des charges actuels, les systèmes mécatroniques sont apparus. Composés d'une chaîne d'actionnement (partie opérative pluridisciplinaire) contrôlée par des algorithmes de commande, ces systèmes ont la particularité de combiner des technologies concourantes et de réduire la distance entre les différentes disciplines par un intégration en synergie. Leur apparition a fait franchir une nouvelle étape dans l'optimisation des fonctions et dans la capacité d'adaptation des systèmes.

L'approche classique de conception qui consistait à adopter une démarche d'ingénierie séquentielle n'est plus adaptée pour les systèmes mécatroniques puisque cette démarche décompose le système en plusieurs sous-systèmes (selon sa discipline) et étudie ces sous-systèmes de manière séparée. Par son interactivité entre les différentes technologies, la mécatronique exige de concevoir le système de manière transverse en gardant une vue d'ensemble sur le produit. Dans ce contexte, les concepts d'ingénierie concourante et de cycle de conception en V sont apparus. L'ingénierie concourante permet de décomposer le système en sous-systèmes (pluridisciplinaires cette fois) et vise à améliorer la communication et l'échange entre les différents partenaires du projet. Le cycle de conception en V permet de décomposer le travail de conception en deux phases : descendante (spécification des besoins et développement) et ascendante (intégration et validation) telles qu'à la base de ce cycle on trouve la réalisation de prototypes physiques. Ce cycle de conception est parcouru plusieurs fois totalement ou partiellement jusqu'à trouver une solution optimale : c'est une démarche itérative. En fonction du nombre d'itérations et de la durée de chacune d'entre elles, cette démarche peut être coûteuse en temps d'étude et par conséquent, les délais de mise sur le marché peuvent être importants. Afin de réduire au mieux la durée de chaque itération et par conséquent, de suivre l'évolution du marché et faire face à la concurrence, les concepteurs ont recours au prototypage virtuel au lieu du prototypage physique et ce, en modélisant et en simulant le comportement du système à chaque itération.

Cette thèse s'inscrit dans ce contexte de conception des systèmes mécatroniques et porte, plus particulièrement, sur le dimensionnement de chaînes d'actionnement et les méthodes à mettre en œuvre pour réduire au mieux le temps de développement.

Motivations

La conception d'une chaîne d'actionnement peut être réalisée à différents niveaux :
- synthèse d'architecture (niveau système) : elle consiste à choisir l'architecture du système conformément au cahier des charges ;
- sélection de sous-systèmes ou de composants sur étagère (niveau sous-système) : elle consiste à déterminer dans un catalogue les sous-systèmes adéquats pour satisfaire le cahier des charges imposé ;
- synthèse paramétrique (niveau composant) : elle consiste à déterminer, pour des spécifications données, un ou plusieurs paramètres du modèle de la chaîne d'actionnement.

Une fois l'architecture du système *a priori* définie, le dimensionnement consiste à choisir les différents composants de la chaîne d'actionnement tout en respectant les spécifications imposées par le cahier des charges. Deux approches peuvent être envisagées pour aborder ce problème de dimensionnement : l'approche par modèle direct et l'approche par modèle inverse. Sur l'exemple du dimensionnement d'un actionneur, l'approche par modèle direct consiste, de manière simplifiée, à :
- sélectionner un actionneur dans un catalogue d'actionneurs disponibles :
- modéliser l'actionneur sélectionné ;
- spécifier l'entrée du modèle (actionneur+charge) ;
- lancer une simulation afin de calculer la trajectoire en sortie ;
- comparer la trajectoire obtenue avec la trajectoire spécifiée dans le cahier des charges ;
- recommencer la procédure si la trajectoire obtenue ne satisfait pas les critères fixés dans le cahier des charges.

Le nombre d'itérations de cette démarche dépend de la pertinence du choix *a priori* de l'actionneur. C'est pour cette raison que Newton Jr [New50] et Cœuillet [Coe69] ont proposé des méthodes de sélection de composants sur étagère. Ces méthodes sont basées sur des critères statiques obtenus en considérant des situations dites critiques. Bien qu'elles permettent d'affiner la sélection initiale, ces méthodes ne garantissent pas, si elle existe, une solution idéale au problème posé.

D'une manière générale, les données du problème de dimensionnement sont les spécifications sur les sorties du modèle retenu et les grandeurs recherchées sont les entrées de ce modèle. Ainsi, la formulation du problème correspond plus à la formulation d'un modèle inverse qu'à celle d'un modèle direct. L'approche par modèle inverse a été utilisée pour des problèmes de sélection en robotique dans les travaux de Potkonjak et Jaksic [Pot86], de Vukobratović *et al.* [Vuk87] et de Dequidt [Deq98, Deq00]. Ensuite, dans le Laboratoire d'Automatique Industrielle (LAI), devenu aujourd'hui le laboratoire Ampère, Scavarda *et al.* [Sca91, Ama91] ont introduit une méthodologie de dimensionnement des systèmes mécatroniques sur des critères dynamiques et énergétiques se basant sur l'inversion du modèle. Cette méthodologie a été formalisée par la suite par Ngwompo *et al.* [Ngw96, Ngw97]. Elle repose sur l'inversion des modèles bond graph en exploitant la notion de bicausalité introduite par Gawthrop [Gaw95]. Elle consiste à :
- vérifier l'inversibilité du modèle et l'adéquation des spécifications du cahier des charges à la structure retenue pour le modèle de conception (phase d'analyse structurelle),
- construire le modèle bond graph inverse,
- exploiter le modèle bond graph inverse obtenu pour déterminer les inconnues du problème de dimensionnement à partir des spécifications imposées.

Par rapport à l'approche classique, cette méthodologie présente les avantages suivants :
- réduction du nombre d'itérations,
- dimensionnement des composants sur des critères dynamiques,
- spécification du gabarit d'un nouvel actionneur si aucun des existants ne répond aux exigences,

- évaluation des marges de sur- ou sous-dimensionnement,
- aide à la rédaction du cahier des charges, notamment pendant la phase d'analyse structurelle.

La méthodologie de dimensionnement peut être utilisée dans plusieurs aspects de la conception des systèmes mécatroniques :

- dimensionnement/sélection de composants consistant à sélectionner puis valider un ou plusieurs composants de la chaîne d'actionnement (cf. les travaux de Amara [Ama91], Ngwompo [Ngw97, Ngw01a, Ngw01b] et de Gandanegara *et al.* [Gan03, Gan07]),
- comparaison d'architectures différentes soumises au même cahier des charges selon des critères bien spécifiques sur leurs performances (cf. les travaux de Laffite [Laf04]),
- vérification de l'adéquation du cahier des charges avec la structure retenue pour le modèle de conception et ce, en menant une analyse structurelle puis comportementale. En cas d'inadéquation, la méthodologie peut apporter une aide à la rédaction du cahier des charges et/ou à la synthèse d'architecture,
- détermination de la commande en boucle ouverte à partir de la remontée des spécifications tout le long de la structure du modèle de conception (cf. les travaux de Ngwompo [Ngw01a, Ngw01b] et Jardin [Jar10]),
- synthèse paramétrique qui consiste à dimensionner, à partir des spécifications des sorties, un ou plusieurs paramètres du modèle de la chaîne d'actionnement (cf. les travaux de Ngwompo [Ngw98] et Laffite [Laf04]).

Pour qu'elle soit exploitable dans les bureaux d'étude, certains aspects de la méthodologie doivent être améliorés et/ou développés. En effet, il peut être intéressant d'approfondir l'étape de vérification de l'adéquation du cahier des charges à la structure retenue pour envisager au plus tôt la reconception du système lorsque l'adéquation n'est pas vérifiée et pour donner des pistes pour cette reconception. Le développement de cette étape peut apporter un gain de temps considérable dans le travail de conception. Comme elle est formulée actuellement, la méthodologie de dimensionnement nécessite de pouvoir exprimer les spécifications sur les sorties comme des fonctions temporelles. Cependant, cette formulation du cahier des charges peut constituer une contrainte forte car d'une part, le concepteur doit spécifier précisément le comportement des sorties du modèle de conception (dans ce contexte, certains travaux se basant sur l'optimisation dynamique ont permis de relâcher cette contrainte [Che06, Jar08b, Jar10]), et d'autre part, cette manière de procéder ne permet pas de prendre en compte les incertitudes de fabrication et le vieillissement de certains composants qui peuvent entraîner une dégradation considérable des performances du système par rapport aux performances nominales prévues initialement. Ainsi, la considération de ces incertitudes dans la phase de conception et du dimensionnement doit permettre d'anticiper cette dégradation et ce, dans le problème de remontée des spécifications pour déterminer des entrées de commande ou dans le problème de synthèse paramétrique.

Dans ce contexte, ce mémoire tente de contribuer à ces problématiques en visant les objectifs énoncés ci-dessous.

Objectifs

Depuis quelques années, une méthodologie de dimensionnement des systèmes mécatroniques se basant sur des critères dynamiques et énergétiques est développée au sein du laboratoire Ampère dans l'objectif de répondre aux attentes des industriels en termes d'optimisation de la durée d'étude et de robustesse de la solution. Dans ce contexte, le travail de recherche proposé a les objectifs suivants :

- une contribution à la modélisation des incertitudes paramétriques par le formalisme bond

graph, formalisme à la base de la méthodologie de dimensionnement, dans le but de prendre en compte ces incertitudes dans la démarche de dimensionnement par inversion,

- le développement de la phase de vérification de l'adéquation du cahier des charges à la structure retenue pour le modèle de conception dans le contexte d'analyse structurelle et comportementale. En cas d'inadéquation, cette phase doit apporter une aide à la rédaction du cahier des charges, en premier lieu, à un niveau d'analyse purement structurel (en tenant compte uniquement de la structure du modèle), ensuite à un niveau d'analyse comportemental (en tenant compte des différentes lois physiques intervenant dans le système) et enfin, à un niveau d'analyse numérique.

- la prise en compte des incertitudes sur les spécifications des sorties afin de remonter aux tolérances sur les entrées (dans un problème de remontée des spécifications) ou aux tolérances sur certains paramètres (dans un problème de synthèse de tolérance sur les paramètres).

Plan du mémoire

Pour répondre aux objectifs fixés, ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres.

Le premier chapitre, essentiellement bibliographique, présente le contexte général de nos travaux de recherche. Une brève introduction aux systèmes mécatroniques, à leur architecture générique d'un point de vue énergétique et aux différents facteurs d'incertitude affectant ces systèmes est établie. Différents outils de modélisation et d'étude des systèmes (mécatroniques) incertains sont rappelés, notamment la représentation d'état des systèmes incertains, l'analyse de sensibilité, l'arithmétique par intervalles et l'approche probabiliste. Ensuite, le problème de conception et de dimensionnement des systèmes mécatroniques est abordé. Différentes méthodes et approches de la littérature élaborées pour réaliser cette tâche sont présentées, en particulier, la méthodologie de dimensionnement sur des critères dynamiques et énergétiques développée par le laboratoire Ampère. La synthèse paramétrique par cette méthodologie de dimensionnement est ensuite évoquée. Enfin, l'analyse structurelle et l'analyse comportementale, qui font entre autres l'originalité de cette méthodologie de dimensionnement, sont également présentées.

Les chapitres suivants sont principalement dédiés à la présentation de nos contributions à la méthodologie de dimensionnement des systèmes mécatroniques par modèles bond graph inverses. Ces contributions portent sur la modélisation des incertitudes paramétriques par approche bond graph (chapitre 2), sur la phase d'analyse structurelle et comportementale notamment pour la vérification de l'adéquation des spécifications à la structure retenue pour le modèle de conception (chapitre 3), et sur la prise en compte des incertitudes dans la démarche de dimensionnement par une approche probabiliste (chapitre 4).

Dans le deuxième chapitre, différents aspects de l'analyse et de la modélisation des incertitudes paramétriques sont abordés. Tout d'abord, une étude bibliographique est menée sur les différents travaux qui ont été réalisés sur la représentation des incertitudes paramétriques dans le formalisme bond graph. Plus précisément, cette étude concerne :

- les travaux de Gawthrop et Ronco [Gaw99, Gaw00] qui permettent l'analyse de sensibilité, dans le domaine temporel, du comportement d'un système par rapport à la variation de certains paramètres et ce, à partir du modèle bond graph de sensibilité,
- les travaux de Borutzky *et al.* [Bor01,Bor02,Bor04,Bor06] qui permettent la construction du modèle bond graph incrémental afin d'établir l'analyse de sensibilité dans le domaine de Laplace,
- et les travaux de Dauphin-Tanguy et Kam [Dau99b, Kam01, Kam05] qui permettent la

détermination des modèles d'état des systèmes linéaires incertains adaptés à l'analyse de la robustesse et à la commande robuste à partir du bond graph incertain. Ce dernier est défini pour les éléments 1-port et les transducteurs 2-ports.

Ensuite, nous proposons des contributions à l'exploitation du bond graph incertain. Ces contributions consistent en des procédures alternatives pour la détermination graphique du modèle d'état canonique et du modèle standard d'interconnexion (représentations d'état adaptées aux systèmes linéaires incertains). Enfin, nous proposons une modélisation standard d'interconnexion pour les éléments bond graph (R, I et C) multiport. La représentation bond graph standard d'interconnexion de ces éléments repose sur une procédure de décomposition. Ainsi, deux nouvelles procédures de décomposition sont proposées.

Le troisième chapitre est consacré à la vérification de l'adéquation du cahier des charges à la structure retenue pour le modèle de conception. Cette vérification représente une des phases clés de la méthodologie de dimensionnement et fait appel aux différents niveaux de description et d'analyse introduits par Rahmani [Rah93,Rah97] et précisés par Jardin [Jar10]. Dans une première partie, nous proposons de nouvelles procédures graphiques permettant la détermination des différents invariants caractérisant la structure d'un modèle (pôles à l'infini, ordres relatifs et ordres d'essentialité) à partir du modèle bond graph bicausal. Ces invariants permettent de vérifier si les spécifications peuvent être portées par la structure retenue. Dans une seconde partie, nous approfondissons davantage cette étape en proposant une procédure, tenant compte des différents niveaux d'analyse, pour la vérification de l'adéquation des spécifications, définies sous forme de comportement type, à la structure retenue pour le modèle de conception dans le contexte de la synthèse paramétrique. En cas d'inadéquation, des recommandations pour la remise en question des spécifications ou de la structure du modèle de conception sont proposées. Enfin, nous établissons la relation entre la vérification de l'adéquation au niveau de l'analyse numérique (le niveau d'analyse le plus bas) et la synthèse paramétrique qui peut être utilisée pour la synthèse des tolérances.

Dans le dernier chapitre, l'approche probabiliste est utilisée pour la prise en compte des incertitudes dans la démarche de dimensionnement des systèmes dynamiques basée sur l'inversion des modèles bond graph. Nous commençons ce chapitre par rappeler certaines notions de base de l'approche probabiliste telles que la fonction de densité de probabilité et les grandeurs caractéristiques (espérance et variance). Ensuite, nous nous intéressons à l'évolution de la densité de probabilité au sein d'un système stochastique dynamique : la formulation stochastique proposée dans la littérature par Li et Chen [Li 06b, Li 08, Che09b, Li 09] pour un modèle physique dynamique incertain est présentée. Une adaptation de cette formulation à un modèle dynamique inverse est établie : les deux cas d'inversion entrées/sorties (pour la remontée de spécifications) et paramètres/sorties (pour la synthèse de tolérances paramétriques) sont abordés. Enfin, les règles d'exploitation d'un modèle bond graph probabiliste sont proposées et illustrées par un exemple. Ces règles permettent d'associer à un système incertain un modèle bond graph permettant la propagation des fonctions de densité de probabilité et des grandeurs caractéristiques (espérance et variance) tout le long de la structure énergétique du système.

La conclusion de ce mémoire présente une synthèse de nos contributions proposées dans les différents chapitres ainsi que plusieurs perspectives de recherche qu'il serait intéressant de développer pour compléter et élargir ces travaux.

Enfin, nous complétons ce mémoire par un certain nombre d'annexes dont certaines peuvent être lues de manière indépendante et d'autres viennent en appui de certains chapitres. L'annexe A présente des notions de base sur le langage bond graph. En complément du premier chapitre, l'annexe B traite un exemple de synthèse de tolérance paramétrique par inversion du modèle et

par analyse par intervalles. L'annexe C permet de rappeler les travaux de KAM et DAUPHIN-TANGUY [Kam01, Kam05] portant sur la détermination graphique du modèle d'état canonique (modèle pour représenter les systèmes linéaires présentant des incertitudes paramétriques). L'annexe D rappelle quelques généralités sur les éléments bond graph multiport dissipatifs et de stockage d'énergie qui font l'objet d'une partie du deuxième chapitre. Les annexes E, F, G et H sont rattachées au chapitre 3. L'annexe E a pour objectif de présenter un certain nombre de définitions et de concepts de base de l'analyse structurelle et comportementale que ce soit par une approche modèle d'état (représentation matricielle et représentation graphique), ou bien par une approche bond graph. L'annexe F présente l'extension au niveau d'analyse comportemental des résultats proposés dans le chapitre 3 sur la détermination graphique de certains invariants au niveau d'analyse structurel. L'annexe G propose une extension aux systèmes multivariables de la procédure définie dans le chapitre 3 pour la vérification de l'adéquation spécifications/structure dans le cas de systèmes monovariabes. Dans le chapitre 3 et dans l'annexe G, la vérification de l'adéquation du cahier des charges est établie par rapport à la structure d'un composant 1-port. Dans l'annexe H, la vérification de l'adéquation est établie par rapport à un composant n-ports. Enfin, l'annexe I représente un complément au dernier chapitre en rappelant un certain nombre de définitions et de concepts de base nécessaires pour la compréhension et la mise en œuvre de l'approche probabiliste.

Chapitre 1

Le dimensionnement des systèmes mécatroniques présentant des incertitudes paramétriques

Sommaire

Introduction **2**
1.1 Les systèmes mécatroniques vus comme des systèmes incertains . . **2**
1.1.1 Les systèmes mécatroniques : historique et définition 2
1.1.2 Architecture énergétique d'un système mécatronique 4
1.1.3 Les facteurs incertains dans un système mécatronique 5
1.2 Outils de modélisation et d'étude des incertitudes paramétriques . **6**
1.2.1 Représentation d'état des systèmes incertains 6
1.2.2 L'analyse de sensibilité pour l'étude des incertitudes paramétriques . . . 8
1.2.3 Arithmétique par intervalles 9
1.2.4 Approche probabiliste 11
1.3 Le dimensionnement par inversion **12**
1.3.1 La conception des systèmes mécatroniques 12
1.3.2 Le dimensionnement selon la formulation du problème 13
1.3.3 Inversion d'un modèle bond graph 14
1.3.4 Le dimensionnement sur des critères dynamiques et énergétiques 19
1.4 La méthodologie de dimensionnement pour la synthèse paramétrique **22**
1.4.1 Problème de synthèse paramétrique 23
1.4.2 Synthèse de tolérance paramétrique par analyse par intervalles 23
1.5 L'analyse structurelle et comportementale **24**
1.5.1 Les outils de l'analyse structurelle 25
1.5.2 Différentes approches...différents niveaux d'analyse 26
Conclusion **28**

Introduction

Les systèmes mécatroniques sont apparus afin de répondre aux nouvelles exigences en terme de performance, confort, sécurité et consommation d'énergie. Néanmoins, la conception de ces systèmes demeure un vrai défi malgré l'apparition de nouvelles méthodes. En effet, la pluridisciplinarité de ces systèmes conduit au constat suivant : envisager des solutions innovatrices exige une synergie entre les différentes disciplines pour optimiser les fonctions du système. De plus, les incertitudes de construction et le vieillissement de certains composants peuvent entraîner une dégradation considérable des performances des systèmes dans le temps. Ainsi, la considération de ces incertitudes dans la phase de la conception et du dimensionnement doit permettre de limiter et surtout d'anticiper cette dégradation.

Dans ce chapitre, le contexte général de nos travaux de recherche est présenté. Tout d'abord, une brève introduction aux systèmes mécatroniques et aux différents facteurs d'incertitude affectant ces systèmes est établie. Par la suite, différents outils de modélisation et d'étude des systèmes incertains sont présentés. Dans une troisième section, les différentes méthodes et approches de conception et de dimensionnement des systèmes mécatroniques sont rappelées et notamment une méthodologie de dimensionnement sur des critères dynamiques et énergétiques. L'aspect de synthèse paramétrique par la méthodologie de dimensionnement est ensuite abordé. Enfin, l'analyse structurelle et l'analyse comportementale, qui font l'originalité de la méthodologie de dimensionnement, sont présentées.

1.1 Les systèmes mécatroniques vus comme des systèmes incertains

Dans cette section, nous proposons une introduction à la mécatronique. L'architecture générique et énergétique d'un système mécatronique est présentée et les différents facteurs incertains qui peuvent affecter ce système sont cités.

1.1.1 Les systèmes mécatroniques : historique et définition

Le terme *MECHATRONICS* a été vraisemblablement introduit par un ingénieur de l'entreprise japonaise "Yaskawa Electric Corporation" en 1969 [Mor69, Kyu96] pour caractériser un système intégrant une partie mécanique et une partie électronique, et ce, en concaténant les termes *MECHAnics* et *elecTRONICS*. Récemment, la définition de la mécatronique a évolué avec la complexification des systèmes [Ise05, Ise08]. En effet, plusieurs définitions existent dans la littérature : la définition du journal *Mechatronics* [Dan91], ou celle du journal *IEEE Transactions on Mechatronics* [Kyu96] ou encore celle choisie en 2000 par l'IFAC Technical Committee on Mechatronics Systems [IFA10]. Ces références définissent la mécatronique comme étant l'intégration de systèmes mécaniques et électromécanique (éléments mécaniques, machines, mécanique de précision) avec des systèmes électroniques (microélectronique, électronique de puissance, capteurs, actionneurs) et la technologie d'information (théorie des systèmes, modélisation, automatique, logiciels, intelligence artificielle) (figure 1.1). En France, le terme « mécatronique » est apparu officiellement en 2005. L'association Française de Normalisation (AFNOR) a proposé en 2008 une définition de la mécatronique pour la communauté scientifique et industrielle [AFN08] : « *Une démarche visant l'intégration en synergie de la mécanique, l'électronique, l'automatique et l'information dans la conception et la fabrication d'un produit en vue d'augmenter et/ou d'optimiser sa fonctionnalité* ».

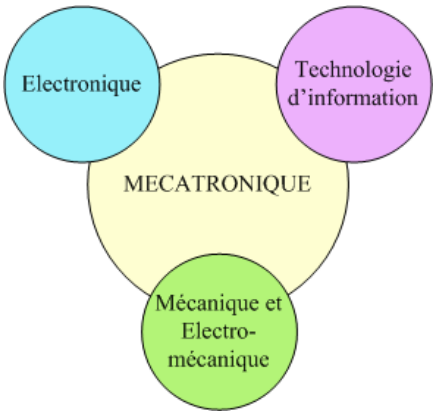


FIG. 1.1 – La mécatronique : synergie de différentes disciplines [Ise05, Ise08].

Aujourd'hui, la mécatronique est très présente dans notre vie quotidienne ainsi que dans le milieu industriel. Elle touche de nombreuses applications dans des domaines variés :

- la consommation grand public (figure 1.2) : appareil photo et vidéo, robot aspirateur,...
- la production (figure 1.3) : machines-outils, robots industriels,...
- le transport (figure 1.4) : véhicule hybride, transporteur personnel,...
- le médical (figure 1.5) : aussi bien dans le matériel (robot de chirurgie par exemple) que dans l'assistance ou le remplacement d'organes humains (prothèse « intelligente » par exemple), on parle alors de biomécatronique ;
- la recherche spatiale (figure 1.6) : satellite, robot explorateur,...

(a) Appareil photo numérique (b) Robot Aspirateur

FIG. 1.2 – Systèmes mécatroniques pour la consommation grand public.

(a) Fraiseuse (b) Robot industriel

FIG. 1.3 – Systèmes mécatroniques pour la production.

(a) Véhicule hybride

(b) Transporteur personnel

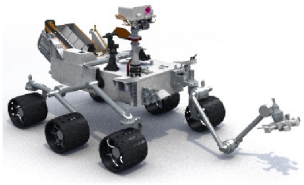
FIG. 1.4 – Systèmes mécatroniques pour le transport.

(a) Robot de chirurgie

(b) Prothèse

FIG. 1.5 – Systèmes mécatroniques pour le domaine médical.

(a) Satellite



(b) Robot explorateur

FIG. 1.6 – Systèmes mécatroniques pour la recherche spatiale.

1.1.2 Architecture énergétique d'un système mécatronique

Un système mécatronique peut être vu comme des chaînes d'actionnement (partie opérative) contrôlées par des algorithmes de commande et le tout, éventuellement, piloté par une interface Homme-Machine (figure 1.7). Une chaîne d'actionnement regroupe les fonctions suivantes [Laf04] :

- l'alimentation énergétique du système représentée par le sous-système *dispositifs de fourniture d'énergie*,
- la modulation de puissance, permettant de piloter le transfert d'énergie entre les dispositifs de fourniture d'énergie et les actionneurs, représentée par le sous-système *modulateurs de puissance*,
- la conversion et la transmission de l'énergie pour l'adapter aux besoins de la charge représentées par les sous-systèmes *actionneurs* et éléments d'*adaptation d'énergie*,
- l'objet de l'actionnement caractérisé par ses degrés de liberté énergétiques et représenté par le sous-système *charge*.

Remarque : L'architecture présentée sur la figure 1.7 est une architecture simple. D'autres configurations, décrites dans la thèse de LAFFITE [Laf04], peuvent exister comme par exemple l'association de plusieurs chaînes d'actionnement. Néanmoins, la cascade des différents dispositifs (dispositifs de fourniture d'énergie, modulateurs de puissance, etc.) est supposée toujours vérifiée.

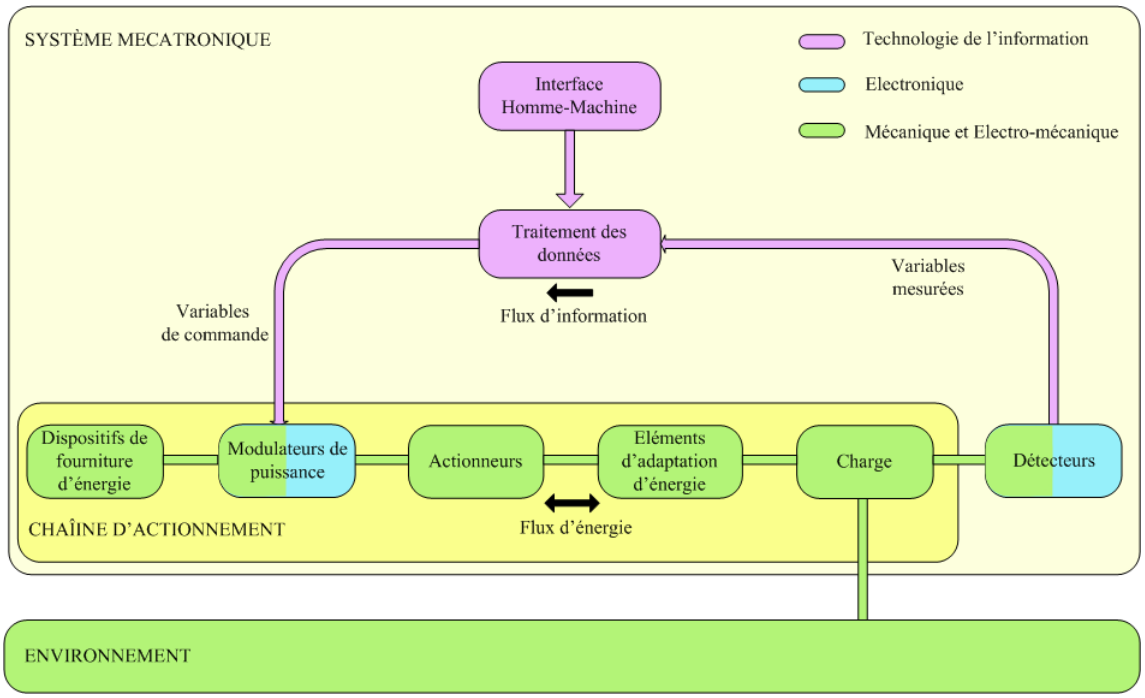


FIG. 1.7 – Architecture générique d'un système mécatronique d'un point de vue énergétique [Jar10].

1.1.3 Les facteurs incertains dans un système mécatronique

Les systèmes mécatroniques connaissent aujourd'hui des innovations importantes qui permettent de faire face aux nouvelles exigences en terme de performance, confort, sécurité et environnement. Malgré ces avancées technologiques, des dégradations considérables sur les performances des systèmes sont observées par rapport aux performances optimales prévues théoriquement. Ces dégradations sont dues aux incertitudes qui modifient le comportement du système. On distingue deux classes de facteurs incertains [Ala99] : les perturbations externes et les variations du modèle dynamique.

Les perturbations externes

Les perturbations externes regroupent tous les signaux et les actions qui viennent du milieu environnant pour perturber le système : perturbations de la commande pour les systèmes bouclés (actions parasites sur les actionneurs, erreurs de discrétisation de la commande...) ; perturbations en sortie (actions extérieures imprévisibles) et les bruits de mesure au niveau des capteurs. Ces actions externes ne modifient pas les caractéristiques internes du système (temps de réponse, dépassement etc.) mais seulement la trajectoire de ses sorties. Dans le cadre de ce travail nous ne nous intéressons pas à cette classe de facteurs incertains.

Les variations du modèle dynamique

Un modèle dynamique est utilisé pour représenter les phénomènes physiques mis en jeu dans un système[1]. Il peut ensuite servir à la détermination et l'implémentation des lois de commande. On distingue deux types d'incertitudes qui peuvent causer des variations au niveau du modèle dynamique du système :

[1]Dans ce contexte, le terme « système » désigne la partie opérative ou encore la chaîne d'actionnement.

Les incertitudes non structurées
Ces incertitudes sont dites aussi incertitudes *dynamiques* ou encore *fréquentielles*. Elles rassemblent les dynamiques négligées du modèle. En effet, le modèle dynamique n'est qu'une approximation de la réalité, ses carences peuvent être multiples et les plus importantes sont issues des hypothèses simplificatrices et des dynamiques négligées. Ces dernières représentent les dynamiques rapides du système. Les incertitudes non structurées s'expriment bien dans le cas d'une représentation fréquentielle du modèle linéaire ou linéarisé et décrit par une matrice de transfert $G(s)$ soumise à des variations $\Delta G(s)$. La seule information disponible sur l'incertitude fréquentielle $\Delta G(s)$ est une borne supérieure sur sa norme dans chaque bande de fréquence. Aux basses fréquences, cette borne est relativement faible et croit dans les hautes fréquences où les dynamiques (rapides) négligées deviennent considérables.

Les incertitudes paramétriques
Les incertitudes paramétriques, ou encore incertitudes *structurées*, sont dues aux erreurs d'identification ou aux variations de certains paramètres physiques du système. En fait, certains paramètres du système peuvent varier sensiblement avec le temps ou avec les conditions de fonctionnement. Il existe trois types d'incertitudes paramétriques [Fra78] :

- *Incertitudes de type* α : ce sont des variations autour de la valeur nominale α_n qui doit être non nulle ($\alpha_n \neq 0$). Ces variations ne doivent pas affecter l'ordre du modèle. Les causes de ces incertitudes sont généralement les incertitudes de fabrication : tolérances dans des cotations de pièces ou dans des valeurs de composants électroniques.
- *Incertitudes de type* β : elles consistent en des variations des conditions initiales autour de leurs valeurs nominales β_n. Les origines de ces variations sont principalement les erreurs de mesures.
- *Incertitude de type* γ : ce sont des variations autour d'une valeur nominale nulle ($\gamma_n = 0$). Affectant l'ordre du modèle, ces incertitudes proviennent essentiellement d'une idéalisation dans le développement mathématique des modèles (dynamiques négligées) ou des erreurs d'identification de l'ordre du modèle.

Dans la suite de ce mémoire, nous nous intéressons aux systèmes mécatroniques présentant des incertitudes paramétriques de type α.

1.2 Outils de modélisation et d'étude des incertitudes paramétriques

Le comportement du modèle dynamique, représentant les phénomènes physiques d'un système mécatronique, peut s'écarter du comportement nominal désiré théoriquement et ce, à cause des variations des valeurs numériques de certains paramètres caractérisant les composants du système. Plusieurs outils de modélisation et d'étude ont été développés dans la littérature pour la caractérisation de ce type de système et pour la mesure de l'impact de ces imprécisions sur son comportement ainsi que sur sa durée de vie. Avant d'aborder le problème du dimensionnement, nous citons dans cette section, et sans être exhaustif, ces outils.

1.2.1 Représentation d'état des systèmes incertains

En automatique, une représentation d'état permet de modéliser un système dynamique sous la forme matricielle suivante :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$) est le vecteur d'entrée (resp. de sortie). La représentation d'état permet de fournir des informations liées aux grandeurs physiques des systèmes. De ce fait, elle est un bon outil pour l'analyse et la commande des systèmes. La description des systèmes incertains par une représentation d'état adaptée permet l'étude de la robustesse du système ainsi que la synthèse de lois de commande robustes. En effet, la robustesse reflète la résistance du comportement du système à un certain nombre de phénomènes perturbateurs d'origine interne comme les variations paramétriques ou externes. Plusieurs travaux ont été réalisés sur ce sujet, (cf. par exemple les références [Doy82, Mor85, Cas94, Lu,97, Had03]). Les différentes représentations d'état établies dans la littérature permettent la séparation de la partie nominale du modèle de la partie incertaine pour pouvoir décrire l'écart entre le comportement nominal et le comportement réel. Dans le cadre de nos travaux, nous nous sommes intéressés uniquement à la représentation d'état des systèmes linéaires incertains car d'une part, les systèmes non linéaires sont souvent linéarisés et d'autre part, les travaux réalisés sur le sujet par l'approche bond graph concernent ce type de systèmes (cf. chapitre 2). Deux principales formes de représentation d'état existent dans la littérature pour modéliser les systèmes linéaires incertains : le modèle canonique et le modèle standard d'interconnexion (ou boucle de retour interne). Ces deux formes servent à l'étude de la robustesse ainsi qu'à la synthèse de la commande robuste des systèmes linéaires présentant des incertitudes paramétriques.

Modèle d'état canonique

Le modèle d'état canonique est une représentation d'état permettant la séparation des valeurs nominales des paramètres dans des matrices nominales et les incertitudes dans des matrices incertaines [Mor85, Gu,89, Mar96, Liu97, Xie98]. Il représente les incertitudes comme des incertitudes additives (absolues). Le modèle canonique s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A_n} + \mathbf{\Delta A})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B_n} + \mathbf{\Delta B})\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = (\mathbf{C_n} + \mathbf{\Delta C})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{D_n} + \mathbf{\Delta D})\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{1.2}$$

Les matrices $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_n}$, $\mathbf{C_n}$ et $\mathbf{D_n}$ contiennent uniquement les valeurs nominales tandis que les matrices $\mathbf{\Delta A}$, $\mathbf{\Delta B}$, $\mathbf{\Delta C}$ et $\mathbf{\Delta D}$ regroupent des expressions en fonction des incertitudes ainsi que des valeurs nominales.

Modèle standard d'interconnexion

Le modèle standard d'interconnexion est un cas particulier de la transformation linéaire fractionnaire (ou fractionnelle selon certaines références "Linear Fractionnel Transformation" (LFT)). Cette dernière est une représentation mathématique utilisée dans de nombreux problèmes de modélisation et de commande des systèmes dynamiques. Pour les systèmes présentant des incertitudes paramétriques, le modèle standard d'interconnexion permet de séparer les valeurs nominales des paramètres du modèle dans une matrice M, dite augmentée, et toutes les incertitudes relatives dans une matrice diagonale Δ (figure 2.10). Des entrées w et des sorties z auxiliaires sont ajoutées afin de faire apparaître les incertitudes sous la forme d'un retour interne [Doy82, Saf82, Mor85].

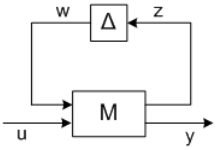


FIG. 1.8 – Modèle standard d'interconnexion.

Le modèle standard d'interconnexion d'un système linéaire incertain non commandé (en boucle ouverte) est décrit par le système d'équations suivant, avec $\Delta = diag(\delta_i I_{n_i})$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A_n}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B_1}\mathbf{w}(t) + \mathbf{B_{2n}}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C_1}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D_{11}}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D_{12}}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C_{2n}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D_{21}}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D_{22n}}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{w}(t) = \Delta\mathbf{z}(t) \end{cases} \tag{1.3}$$

$\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^l$ (resp. $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^l$) est le vecteur d'entrée (resp. sortie) auxiliaire. δ_i représente l'i$^{\text{ème}}$ incertitude relative ($|\delta_i| \leq 1$) et n_i est la dimension de cette incertitude à savoir le nombre de paires d'entrée/sortie auxiliaires associées à cette incertitude.

Avant d'exprimer le modèle standard d'interconnexion, certaines conditions doivent être vérifiées sur ce modèle d'état initial (système d'équations 1.1) :

- Le modèle doit être propre : la vérification de la propreté du modèle revient à démontrer que le degré du dénominateur de chaque transmittance de la matrice de transfert est supérieur ou égal au degré de son numérateur.
- Le modèle doit être stabilisable : si le système est commandable alors nous pouvons déduire directement qu'il est stabilisable sinon il faut vérifier que les pôles non commandables sont stables.
- Le modèle doit être détectable : si le système est observable alors nous pouvons déduire directement qu'il est détectable sinon il faut vérifier que les pôles non observables sont stables.

1.2.2 L'analyse de sensibilité pour l'étude des incertitudes paramétriques

La problématique posée dans ce mémoire est la synthèse des incertitudes paramétriques des systèmes mécatroniques. Néanmoins l'analyse de ces incertitudes représente un outil complémentaire. En fait, les bonnes pratiques de la modélisation d'un système incertain exige une évaluation du niveau de confiance dans le modèle dynamique. Cette évaluation peut être établie à travers une analyse de sensibilité qui permet de prédire l'effet de variation de chaque paramètre incertain sur la dispersion du comportement du modèle. D'une part, la complexité du modèle peut être réduite en éliminant les paramètres pour lesquels l'analyse de sensibilité a montré qu'ils n'avaient pas d'effet significatif sur le comportement du système ; d'autre part, cette analyse permet de juger l'impact de la variation d'un paramètre sur le comportement du système et notamment sur sa durée de vie [Cod98].

L'analyse de sensibilité a été introduite par Distefano [DiS67], Tomović et Vukobratović [Tom68, Tom72], Director et Rohrer [Dir68], Dorato [Dor68], Frank [Fra78] et Wierzbicki [Wie84]. Dans la littérature, il n'existe pas une définition standard de l'analyse de sensibilité. Les définitions varient selon l'objectif : soit identifier un jeu de paramètres pour le calibrage du modèle, soit juger la qualité du modèle, soit identifier parmi plusieurs modèles celui ou ceux qui décrivent le mieux le système réel etc... Kam [Kam01] a proposé dans sa thèse la définition suivante pour la sensibilité paramétrique : « *Un système est sensible aux variations d'un paramètre p si ses propriétés ou son comportement sont affectés par ses variations* ». Plusieurs recommandations de modélisation (celle de l'agence de protection environnementale des Etats-Unis par exemple) ou d'évaluation (celle de la Commission Européenne par exemple) décrivent l'analyse de sensibilité comme un outil pour assurer la qualité du modèle dynamique et décrivent l'analyse d'incertitude comme un outil qui permet de quantifier les incertitudes par exemple sous la forme de distributions probabilistes[2]. L'analyse de sensibilité et l'analyse d'incertitude sont

[2]L'analyse d'incertitude par l'approche probabiliste sera développée dans la section 1.2.4 et dans le chapitre 4.

deux outils complémentaires qui permettent la caractérisation de l'incertitude.

L'analyse de sensibilité a été utilisée dans plusieurs domaines d'ingénierie : l'analyse de stabilité d'une commande d'un robot [Kaz88], l'estimation de paramètre [Eyk74, Gaw00], l'optimisation [Cab95], ainsi que dans d'autres domaines d'application comme la chimie, l'écologie, la médecine et l'économie. De nos jours, différentes méthodes existent pour établir l'analyse de sensibilité d'un modèle mathématique et dynamique. Il est possible de grouper ces méthodes en trois classes : les méthodes de Screening appelé aussi méthode de criblage, l'analyse de sensibilité globale et l'analyse de sensibilité locale. Ces méthodes sont largement décrites dans le livre de SALTELLI *et al.* [Sal00]. La méthode de criblage[3] est une méthode qualitative qui permet d'établir une hiérarchie au sein des paramètres en fonction de leur influence sur la variabilité de la réponse du modèle [Sal00, Jac05]. L'analyse de sensibilité globale est une méthode quantitative qui permet d'estimer l'effet de chaque paramètre sur la variance de la réponse du modèle. Les techniques statistiques comme l'étude de la variance et les coefficients de corrélation sont utilisées pour la mise en œuvre de cette méthode. L'analyse de sensibilité locale consiste en la détermination des coefficients (ou encore des fonctions) de sensibilité [Tom72]. Deux principales fonctions de sensibilité sont utilisées dans la littérature : les fonctions de sensibilité absolue et relative. La fonction de sensibilité absolue est définie par la dérivée partielle d'une variable (la sortie y par exemple) par rapport à un paramètre p : $\frac{\partial y}{\partial p}$. Elle permet de quantifier la variation de la variable par rapport à la variation du paramètre. Cette fonction est utilisée dans le cas où les paramètres sont indépendants. La fonction de sensibilité relative est définie comme suit : $\frac{\partial y}{\partial p}\frac{p}{y}$. Elle est utilisée quand les paramètres sont dépendants. Pour faciliter la détermination des fonctions de sensibilité, différentes approches bond graph ont été développées dans la littérature (cf. chapitre 2).

1.2.3 Arithmétique par intervalles

L'arithmétique par intervalles [Moo66, Moo79, Neu90, Han92, Jau01] est l'un des outils utilisés pour la caractérisation et la prise en compte des incertitudes paramétriques apparaissant dans un modèle dynamique. Elle permet de manipuler les incertitudes comme des enveloppes tenant compte des plages de variation et de définir les frontières du comportement du modèle dynamique. Ainsi, on ne parle plus d'un comportement de référence, mais d'un ensemble de comportements possibles.

Contrairement aux idées reçues, l'arithmétique par intervalles est un concept assez ancien. En effet, au 3$^{\text{ème}}$ siècle avant J.C., ARCHIMÈDE a eu l'idée d'encadrer π entre une borne supérieure et une borne inférieure [Hea53, Ram05]. Pourtant, il faut attendre les années trente pour que la première opération réalisée sur un ensemble soit introduite par YOUNG [You31]. Une trentaine d'années plus tard, les bases de la théorie de l'arithmétique par intervalles[4] ont été établies par MOORE [Moo59, Moo66]. La première application de l'arithmétique par intervalles était la prise en compte des erreurs de quantification introduites par la représentation en virgule flottante[5] des nombres réels. Aujourd'hui, cet outil est utilisé pour résoudre de nombreux problèmes : la localisation de robot ou de véhicule mobile [Jau01,Dro02,Bou02], la commande robuste [Lho04,Vil05], le diagnostic [Adr00, Sai02, Fag04], l'optimisation [Hen04b, Raï04, Bra05], l'estimation paramétrique [Mil96, Bra02], etc...

Malgré la diversification des domaines d'application, l'arithmétique par intervalles peut géné-

[3] La méthode de criblage se base sur les techniques des plans d'expériences.

[4] Dans certaines références bibliographiques, on appelle cet outil l'approche ensembliste parce qu'il permet de réaliser des opérations sur des ensembles.

[5] La représentation en virgule flottante est la représentation utilisée dans un ordinateur pour définir des valeurs non entières : c'est une approximation des nombres réels.

rer des résultats insatisfaisants. En effet, l'inconvénient majeur de cet outil est la surestimation (ou l'encadrement trop large) des résultats [Rev01]. Deux phénomènes sont à l'origine de ce problème :

- **L'effet enveloppant "*wrapping effect*"** : cet effet est dû à une propriété fondamentale de cette arithmétique qui est la fonction d'inclusion $[f]([x])$, telle que $[x]$ est un vecteur intervalle. En effet, cette fonction est un surencadrement de la fonction intervalle réelle[6] $f([x])$ (figure 1.9) : $f([x]) \subset [f]([x])$. On parle alors de résultat *pessimiste*. La fonction d'inclusion $[f]([x])$, dite *naturelle*[7], n'est pas toujours optimale en terme de longueur des intervalles. Ainsi, une fonction d'inclusion *minimale* $[f]^*([x])$ peut être définie[8]. L'arithmétique par intervalles ne garantit pas comme résultat l'intervalle le plus petit, au sens de l'inclusion, mais simplement une enveloppe du résultat exacte.

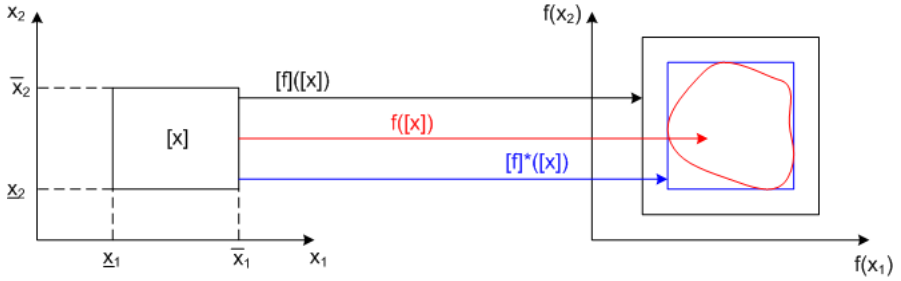


FIG. 1.9 – Fonction d'inclusion naturelle $[f]$ et minimale $[f]^*$ d'une fonction intervalle réelle f de dimension deux [Jau01, Alh05].

- **dépendance des données "*data dependency*"** : l'effet enveloppant devient plus important lorsqu'il y a des paramètres à occurrences multiples[9] ou lorsqu'il y a des dépendances entre les paramètres dans le modèle. Considérons comme exemple la fonction $f(x) = x - x$. Pour $[x] = [0,\ 1]$ et en appliquant les règles de l'arithmétique par intervalles, le résultat $[f]([x]) = [-1,\ 1]$ vérifie la propriété d'inclusion mais il est plus large que le résultat réel attendu $f([x]) = 0$. Néanmoins, dans certains cas, les occurrences multiples d'un paramètre peuvent être réduites en manipulant l'expression formelle de la fonction f. Considérons comme exemple la fonction $f(x) = x^2 + x$ qui peut s'écrire sous les différentes formes suivantes :

$$\begin{cases} f_1(x) = x^2 + x \\ f_2(x) = x \times x + x \\ f_3(x) = x(x+1) \\ f_4(x) = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \end{cases} \tag{1.4}$$

  Pour $[x] = [-1,\ 1]$, $[f_1]([x]) = [-1,\ 2]$, $[f_2]([x]) = [f_3]([x]) = [-2,\ 2]$, et $[f_4]([x]) = [-\frac{1}{4},\ 2]$. Ainsi, $[f_4]([x])$, où il n'apparait qu'une seule occurrence de x, correspond à la fonction d'inclusion minimale $[f]^*$ qui est égale, dans ce cas, à la fonction réel $f([x])$.

Plusieurs solutions ont été proposées pour améliorer la précision dans le cas de paramètres dépendants (ou encore à occurrences multiples de paramètres) : arithmétique généralisée par in-

[6] La fonction intervalle réelle $f([x])$ désigne l'image de $[x]$ par la fonction f et elle correspond à la solution exacte.

[7] La fonction d'inclusion naturelle d'une fonction f peut être obtenue en remplaçant dans l'expression de f chaque variable incertaine x_i par sa variable intervalle correspondante $[x_i]$ et chaque opération arithmétique par son équivalente intervalle.

[8] Il n'existe pas de méthode systématique pour retrouver la fonction d'inclusion minimale.

[9] Deux occurrences d'un même paramètre sont considérées comme deux paramètres indépendants l'un de l'autre. Ainsi, les incertitudes se combinent pour donner un résultat plus pessimiste.

tervalles [Han75,Krä06,El-06], modèles de Taylor intervalles [Rob83,Loh87,Rih94], arithmétique affine [Hen04a,Com93a], la librairie ALIAS [Mer00,Cha04,Lee04], etc... La pluspart des méthodes proposées ne garantit pas la solution exacte. Les algorithmes de la librairie ALIAS garantissent cette solution avec une précision fixée à l'avance mais ils peuvent être couteux en temps de calcul. Autre faiblesse de l'arithmétique par intervalles : les opérations sur les intervalles ne vérifient pas les propriétés algébriques des opérations sur les scalaires, en particulier, la soustraction n'est pas la réciproque de l'addition et la division n'est pas la réciproque de la multiplication. Par exemple : $[1,\ 3]+[-2,\ 5] = [-1,\ 8]$ mais $[-1,\ 8]-[-2,\ 5] = [-6,\ 10] \neq [1,\ 3]$ sachant que $[1,\ 3] \subset [-6,\ 10]$.

L'analyse par intervalle, qui s'appuie sur l'arithmétique par intervalles, a été utilisée dans le contexte du dimensionnement tolérant par approche inverse [Hoc02,Ly,04], (cf. section 1.4).

1.2.4 Approche probabiliste

Dans les traductions d'Aristote, le mot *probabilité* ne désigne pas une quantification du caractère aléatoire d'une variable mais le fait qu'une idée est admise par tous. Au cours du moyen âge puis à la renaissance, la probabilité finit par désigner la vraisemblance d'une idée. Il faut attendre le 17$^{\text{ème}}$ siècle pour que ce mot prenne son sens actuel avec sa formulation mathématique par Blaise Pascal et Pierre de Fermat. Vers la fin du 19$^{\text{ème}}$ siècle et le début du 20$^{\text{ème}}$ siècle, la théorie moderne des probabilités fait son apparition en mathématiques grâce aux travaux de Borel, Lebesgue, Lévy et Markov. La théorie des probabilités atteint sa maturité au cours de la seconde moitié du 20$^{\text{ème}}$ siècle et depuis, les domaines d'application de la théorie des probabilités sont variés : chimie, mécanique, théorie des jeux, biologie moléculaire, finance, etc...

La théorie des probabilités peut être définie comme étant l'étude mathématique des phénomènes caractérisés par le hasard et l'incertitude. Elle permet de définir des variables non déterministes, appelées aussi variables aléatoires (section I.2, annexe I), qui peuvent parfois évoluer dans le temps d'une manière aléatoire. Initialement, la théorie des probabilités ne considérait que des variables discrètes et ses méthodes étaient principalement combinatoires. Mais les concepts analytiques introduits par Kolmogorov [Kol60] ont favorisé l'apparition des variables aléatoires continues dans la théorie. Ces variables permettent de représenter tout type de facteur incertain (cf. section 1.1.3). Dans la littérature, il existe deux représentations probabilistes des incertitudes [Soi09] : le modèle probabiliste *a priori* et le modèle probabiliste *a posteriori*.

- le modèle probabiliste *a priori*, appelé aussi modèle probabiliste *mathématique*, est une représentation qui ne nécessite aucune expérience pour déterminer les probabilités sur les variables aléatoires. Ce modèle *a priori* peut être utilisé pour étudier la propagation des incertitudes dans le système incertain analysé.
- le modèle probabiliste *a posteriori*, appelé aussi modèle probabiliste *statistique*, est une représentation qui permet de calculer les probabilités des variables aléatoires à partir des mesures expérimentales.

Dans nos travaux, nous cherchons à quantifier les incertitudes paramétriques présentes dans un système mécatronique et ce, dès la phase de conception et sans mesure expérimentale. Ainsi, nous nous intéressons uniquement à la modélisation probabiliste *a priori*. L'*approche probabiliste paramétrique* [Soi09], qui est une représentation *a priori* permettant la modélisation des paramètres incertains d'un modèle continu par des variables aléatoires continues[10], offre des outils analytiques performants pour caractériser la propagation des incertitudes dans le système. Les notions de base de cette approche sont présentées dans l'annexe I. Dans le chapitre 4, l'approche probabiliste paramétrique est utilisée dans une formulation inverse pour le dimensionnement

[10]Chaque variable aléatoire continue est caractérisée par une loi de probabilité (définition 63, annexe I).

tolérant.

1.3 Le dimensionnement par inversion

Les différents outils présentés dans la section précédente permettent de travailler, qualitativement ou quantitativement, avec les incertitudes présentes dans un système. Ils permettent d'étudier, après la conception du système, les effets de ces incertitudes sur les trajectoires des sorties. Ces effets ne peuvent être évités. Par contre, ils peuvent être maîtrisés grâce à des commandes robustes qui permettent de réduire, en boucle fermée, la sensibilité du comportement du système aux variations paramétriques [Arz03]. Néanmoins, si nous souhaitons limiter l'impact des incertitudes en boucle ouverte en définissant une zone de fonctionnement admissible, il faut tenir compte des incertitudes dans le cycle de conception.

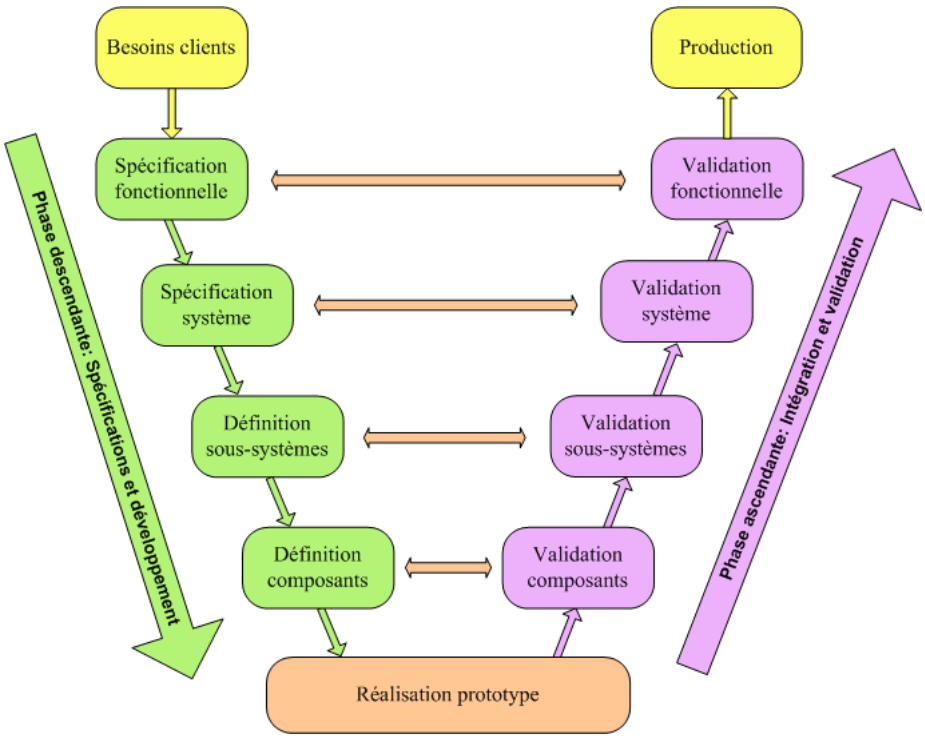


FIG. 1.10 – Le cycle de conception en V [Ise05, Ise08, Jar10].

1.3.1 La conception des systèmes mécatroniques

L'approche classique de conception était de décomposer le système en plusieurs sous-systèmes (selon la discipline) et d'étudier chaque sous-système séparément : c'est l'*ingénierie séquentielle* ou encore l'*approche métier*. L'évolution des systèmes à concevoir (notamment l'apparition des systèmes mécatroniques) a entraîné l'évolution de la méthode de conception car l'ingénierie séquentielle ne répondait pas aux exigences de ces systèmes (le découplage lors de la conception fait que les différents sous-systèmes au final, n'interagissent pas de façon optimale). Ainsi, l'*ingénierie concourante* (appelée encore *ingénierie simultanée*, *approche mécatronique* ou *approche système*) a fait son apparition. Cette approche se base sur la communication et l'échange entre les concepteurs des sous-systèmes. Aujourd'hui, la conception d'un système mécatronique se base sur un cycle en V qui est constitué de deux branches (figure 1.10) : la branche descendante correspond aux phases de spécification et de développement ; la branche ascendante correspond aux étapes d'intégration et de validation des différentes technologies. Le niveau système correspond à toute l'architecture générique du système mécatronique décrite par la figure 1.7. Les dispositifs de

fourniture d'énergie, les actionneurs, les capteurs, la charge etc... représentent chacun un sous-système. Chaque sous-système est un ensemble de composants. Le cycle en V est successivement parcouru plusieurs fois totalement ou partiellement jusqu'à trouver une solution optimale : c'est une démarche itérative. Pour plus de détails, le lecteur peut se référencer aux travaux de Lebrun [Leb03] et de Isermann [Ise08].

Deux phases principales existent dans le cycle de conception [Dau99a] : la phase de conception de la partie opérative (la chaîne d'actionnement) du système et la phase de détermination et d'implémentation des lois de commande. Conformément au cycle de conception en V, ces deux phases peuvent être menées en parallèle. Dans le cadre de nos travaux, nous nous intéressons uniquement à la conception de la chaîne d'actionnement d'un système mécatronique aux niveaux système, sous-système et composant (cf. figure 1.10).

La conception d'une chaîne d'actionnement peut prendre plusieurs aspects :
- synthèse d'architecture (niveau système) : elle consiste à choisir l'architecture du système conformément au cahier des charges , cet aspect a été traité par exemple dans la thèse de Lichiardopol [Lic07a] ;
- sélection de sous-systèmes ou de composants sur étagère (niveau sous-système) : elle consiste à déterminer dans un catalogue les sous-systèmes adéquats pour satisfaire le cahier des charges imposé [Ull92,Ngw97] ;
- synthèse paramétrique : elle consiste à déterminer, pour des spécifications données, un ou plusieurs paramètres du modèle de la chaîne d'actionnement [Laf04]. Dans ce cas, pour des spécifications données, nous nous intéressons non seulement à la détermination d'un actionneur en tant que sous-système préexistant mais aussi à la détermination des composants élémentaires de cet actionneur à concevoir [Ngw98]. Ceci revient à situer le problème à un niveau hiérarchique plus bas : niveau composant.

Ces aspects seront approfondis dans ce mémoire et plus précisément dans les chapitres 3 et 4.

1.3.2 Le dimensionnement selon la formulation du problème

Une fois l'architecture du système définie, le dimensionnement consiste à choisir les différents composants de la chaîne d'actionnement tout en respectant les spécifications imposées par le cahier des charges. Deux approches peuvent être envisagées pour aborder ce problème de dimensionnement : l'approche par modèle direct et l'approche par modèle inverse (figure 1.11).

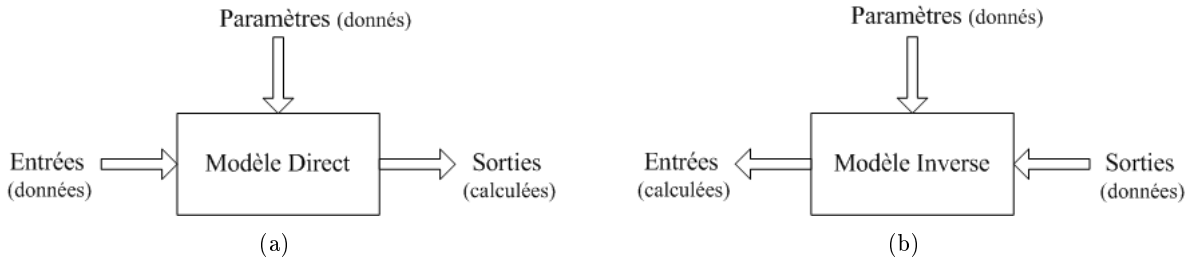


Fig. 1.11 – Exploitation d'un modèle direct (a) et d'un modèle inverse (b) pour le dimensionnement.

Approche par modèle direct : méthode essai-erreur-correction

Sur l'exemple du dimensionnement d'un actionneur, cette approche consiste à [Jar08c] :

1. sélectionner un actionneur dans un catalogue d'actionneurs disponibles,
2. modéliser l'actionneur sélectionné,

3. spécifier l'entrée du modèle (actionneur+charge),
4. lancer une simulation afin de calculer la trajectoire en sortie,
5. comparer la trajectoire obtenue avec la trajectoire spécifiée dans le cahier des charges,
6. recommencer la procédure si la trajectoire obtenue ne satisfait pas les critères fixés dans le cahier des charges.

Le modèle utilisé dans cette approche, le *modèle direct*, est un modèle qui respecte le principe de la causalité physique[11] entre les entrées et les sorties du système physique. Cette approche aboutit très rarement à une solution acceptable dès la première simulation, ce qui fait qu'elle est coûteuse en temps.

Approche par modèle inverse

Dans un problème de synthèse d'architecture et/ou de sélection de sous-systèmes, les données du problème de conception sont les spécifications sur les sorties et les valeurs des différents paramètres. Ainsi, il est plus judicieux de poser ce problème comme étant un problème inverse (figure 1.13(b)). Dans cette approche, les modèles ne respectent plus le principe de causalité et une inversion entrées/sorties du modèle physique est nécessaire. Cette opération n'est possible que si le modèle est inversible et les critères d'inversibilité sont présentés dans la section suivante.

Sur la figure 1.11, seuls les aspects synthèse d'architecture et/ou sélection de sous-systèmes ont été considérés. En effet, dans un problème de synthèse paramétrique, les entrées et les sorties sont des données et l'objectif est de déterminer un ou plusieurs paramètres. Dans une formulation directe, les mêmes étapes citées ci-dessus seront reproduites à la seule différence que dans l'étape 3, ce sont les valeurs des paramètres qui sont choisies (les trajectoires des entrées sont données dans le cahier des charges). Dans ce cas, la figure 1.13(a) reste inchangée.

Pour un problème de synthèse paramétrique dans une approche par modèle inverse, le schéma d'exploitation est donné figure 1.12 et, dans ce cas, l'inversibilité paramètres/sorties doit également être vérifiée.

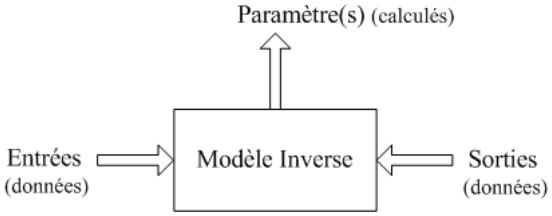


FIG. 1.12 – Problème de synthèse paramétrique par modèle inverse.

Remarque : Dans le cahier des charges, les spécifications des sorties sont exprimées soit sous la forme de fonctions temporelles (domaine temporel) pour les systèmes linéaires et non linéaires, soit sous la forme de fonctions rationnelles en « s » (domaine fréquentiel) pour les systèmes linéaires (cf. chapitre 3).

1.3.3 Inversion d'un modèle bond graph

La méthodologie de dimensionnement élaborée au sein du laboratoire Ampère et basée sur des critères dynamiques et énergétiques repose sur l'inversion des modèles bond graph (section 1.3.4).

[11] Le principe de la causalité physique traduit les relations de cause à effet : si un phénomène *cause* produit un autre phénomène *effet*, alors l'*effet* ne peut précéder (chronologiquement) la *cause*.

Avant d'aborder cette méthodologie, l'inversion d'un modèle bond graph est donc décrite dans cette section.

En sciences, poser un problème par l'approche conventionnelle revient à donner les causes et le modèle décrivant l'évolution de ces causes en effets observables expérimentalement (figure 1.13(a)), c'est ce qu'on appelle un *problème direct*. Néanmoins certaines problématiques en ingénierie favorisent le *problème inverse* qui revient à déterminer les causes d'un phénomène à partir des observations expérimentales de ses effets (figure 1.13(b)). La résolution mathématique de ce problème a toujours été qualifiée de difficile car le problème peut être mal posé (les observations expérimentales disponibles ne suffisent pas à déterminer tous les phénomènes causes) [Gro99]. Dans ce cas, il est donc nécessaire d'ajouter des contraintes qui permettent de réduire l'espace des possibilités de façon à aboutir à une solution unique.

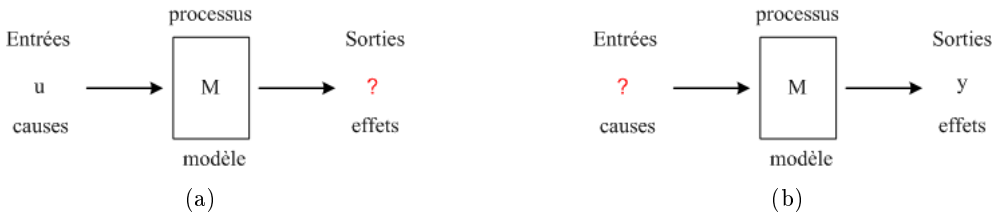


FIG. 1.13 – Problème direct (a) et problème inverse (b) en sciences [Gro99].

Dans le cadre de représentation algebro-différentielle qui ne repose pas sur les mesures expérimentales et qui est fortement utilisée en automatique, le problème d'inversion d'un modèle a fait son apparition en 1963 avec ZADEH et DESOER [Zad63] et WEISS [Wei64]. BROCKETT et MESAROVIĆ [Bro65a] introduisent en 1965 le premier algorithme d'inversion des systèmes linéaires monovariables à temps invariant. YOULA et DORATO [You66, Dor69] proposent une extension de cet algorithme aux cas multivariables. En 1969, SILVERMAN [Sil69] généralise l'algorithme de BROCKETT et MESAROVIĆ [Bro65a, Bro65c] aux systèmes discrets et aux systèmes linéaires à temps variant. Depuis, l'inversion des modèles physiques a fait l'objet de plusieurs travaux : SAIN et MASSEY [Sai69], PORTER [Por69], WILLSKY [Wil74], ROSENBROCK et VAN DER WEIDEN [Ros77]. L'inversion des modèles non linéaires a été traitée par HIRSCHORN [Hir79], SINGH [Sin81], NIJMEIJER [Nij82, Nij86] et FLIESS [Fli86] et celle des modèles singuliers, par TAN et VANDEWALLE [Tan88].

Avant de présenter les critères d'inversibilité et la procédure d'inversion d'un modèle physique par approche bond graph, une brève présentation de ce langage et de ses différents concepts est donnée.

Le langage Bond Graph

Le langage bond graph, appelé aussi *graphe à liens*, a été fondé par PAYNTER en 1959 et publié pour la première fois en 1961 [Pay61]. Le livre de KARNOPP et ROSENBERG [Kar68] paru en 1968 est le premier livre de référence sur ce langage. Depuis, plusieurs autres éditions ont paru [Kar75, Kar90, Kar00, Kar06]. Cet outil a fait son apparition en Europe à la fin des années soixante-dix notamment aux Pays-Bas (université Twente) et en France (société Alstom). Le langage bond graph est un outil de modélisation pluridisciplinaire basé sur la description graphique des transferts d'énergie au sein d'un système, ce qui fait de lui un formalisme adapté pour la modélisation des systèmes mécatroniques. Plusieurs travaux l'ont confirmé, le lecteur peut se référencer à ceux de GAWTHROP [Gaw91], DAUPHIN-TANGUY [Dau99a], DAMIĆ et MONTGOMERY [Dam03] et VAN AMERONGEN [Van03]. De plus, cet outil a fait ses preuves dans de nombreux problèmes de conception et d'analyse [Jar10] et ce, en :

- facilitant l'interprétation physique vu qu'un modèle bond graph par construction est fortement lié aux phénomènes physiques impliqués dans le système,
- offrant la possibilité de traiter différents problèmes relatifs aux différents niveaux du cycle de conception en V.

Le concept de causalité en bond graph permet d'orienter les équations d'un modèle bond graph pour le transformer en un modèle de simulation. Ce concept rejoint le principe physique de la causalité dans le sens où un phénomène cause produit un autre phénomène effet. Néanmoins, contrairement à la causalité physique, ce concept ne respecte pas nécessairement l'ordre chronologique d'apparition des phénomènes physiques. Le concept de bicausalité, introduit par Gawthrop [Gaw95] en 1995, permet d'envisager de nouveaux schémas de calcul qui non pas de sens physiques. En se basant sur ce concept, Ngwompo [Ngw96, Ngw97, Ngw05] a développé la procédure SCAPI (i.e. Sequential Causality Assignment Procedure for Inversion) permettant la construction du modèle bond graph inverse (modèle bond graph bicausal). Plus de détails sur le langage bond graph et ses différents concepts (causalité, bicausalité, procédure SCAPI,...) sont donnés dans l'annexe A.

Critères d'inversibilité

Avant de procéder aux tests d'inversibilité, considérons dans cette section et jusqu'à la fin de ce chapitre l'hypothèse suivante :

hypothèse 1. *Les systèmes sont carrés : le nombre d'entrées du modèle est égal au nombre de sorties.*

Approche algébrique

Afin de tester l'inversibilité d'un modèle par approche algébrique, plusieurs critères *directs*[12] d'inversibilité ont été établis dans la littérature : critère de Brockett et Mesarović [Bro65c], celui de Sain et Massey [Sai69] ou encore celui de Respondek [Res90]. Ces critères ont été définis uniquement pour les systèmes linéaires. Pour les systèmes non linéaires, les conditions nécessaires et suffisantes d'inversibilité se déduisent au cours de la construction du modèle inverse, on parle de critères *indirects*. Ainsi, définissons une deuxième hypothèse :

hypothèse 2. *Les systèmes sont linéaires et invariants dans le temps.*

Malgré la diversification des critères directs, le critère d'inversibilité le plus utilisé reste le suivant :

Critère d'inversibilité 1. *Soit Σ le système défini par l'équation 1.1 vérifiant l'hypothèse 2. De plus, le système Σ est supposé vérifier l'hypothèse 1 ($m = p$). La matrice de transfert associée est donnée par $\mathbf{T}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$. La matrice système associée $\mathbf{P}(s)$ est donnée par la définition 29 de l'annexe E. Le système Σ est inversible si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

1. $det(\mathbf{T}(s)) \neq 0$,
2. $det(\mathbf{P}(s)) \neq 0$.

Approche bond graph

Rahmani a défini, dans sa thèse [Rah93], le premier critère bond graph *direct* d'inversibilité qui repose sur les notions des chemins causaux E/S différents (définitions 17, 19 de l'annexe A et définition 43 de l'annexeE) :

Critère d'inversibilité 2. *Soit un modèle bond graph qui vérifie les hypothèses 1 et 2*

[12] Les critères directs d'inversibilité permettent de tester directement, à partir de la représentation d'état ou de la matrice de transfert ou encore à partir de la matrice système, l'inversibilité du modèle sans la détermination du modèle inverse.

1. *Si le modèle bond graph ne contient pas m chemins causaux E/S différents, alors le système est non inversible.*
2. *Si le modèle bond graph contient un seul choix possible de m chemins causaux E/S différents, alors le système est inversible.*
3. *Si le modèle bond graph contient plusieurs choix possibles de m chemins causaux E/S différents, alors il faut calculer le déterminant de la matrice système (procédures 27 et 29, annexe E) pour conclure sur l'inversibilité du système.*

NGWOMPO [Ngw97, Ngw01a, Ngw01b, Ngw05] a défini, par la suite, un autre critère d'inversibilité qui repose sur les notions des lignes de puissances E/S disjointes (définitions 14, 15 et 16 de l'annexe A) et les chemins causaux E/S disjoints. Ce critère est applicable pour des systèmes linéaires et non linéaires :

Critère d'inversibilité 3. *Soit un modèle bond graph qui vérifie l'hypothèse 1, le modèle est inversible si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- ***Condition nécessaire 1** : il existe au moins un ensemble de m lignes de puissance (E/S) disjointes sur le modèle bond graph acausal. Si cette condition n'est pas vérifiée alors le système n'est pas inversible.*
- ***Condition nécessaire 2** : il existe au moins un ensemble de chemins causaux E/S disjoints sur le modèle bond graph causal. Si cette condition n'est pas vérifiée alors le système n'est pas inversible.*
- *Si le modèle contient plusieurs ensembles de m chemins causaux E/S disjoints, alors :*
  - *choisir un ensemble de m lignes de puissance E/S disjointes associé à un ensemble de m chemins causaux E/S disjoints (définition 20, annexe A) ;*
  - *construire le modèle bond graph bicausal correspondant en propageant la bicausalité le long des m lignes de puissance E/S disjointes choisies.*
- ***Condition nécessaire 3** : La structure de jonction du modèle bond graph bicausal résultant doit être résoluble[13]. Si quel que soit l'ensemble de m lignes de puissance E/S disjointes choisi et quelles que soient les affectations causales retenues pour le modèle bond graph bicausal une structure de jonction non résoluble apparaît alors le système n'est pas inversible.*

Remarques :

- Ce critère peut être considéré comme un critère *semi-indirect* car nous ne pouvons conclure sur l'inversibilité du modèle que si le modèle inverse (le modèle bond graph bicausal) est construit graphiquement. Il peut être résumé par l'organigramme illustré sur la figure 1.14.
- Ce critère reste valable même pour les systèmes non linéaires à condition que les relations caractéristiques des éléments soient inversibles et permettent donc toutes les possibilités d'affectation de la causalité sur les élements[14].

[13] La résolubilité d'une structure de jonction d'un modèle bond graph a été traitée dans les références [Ros79, Wla91, Van94]

[14] Les éléments à caractéristiques non inversibles sont des élements à causalité obligatoire qui peuvent, de ce fait, empêcher la propagation de la bicausalité rendant ainsi un système non inversible.

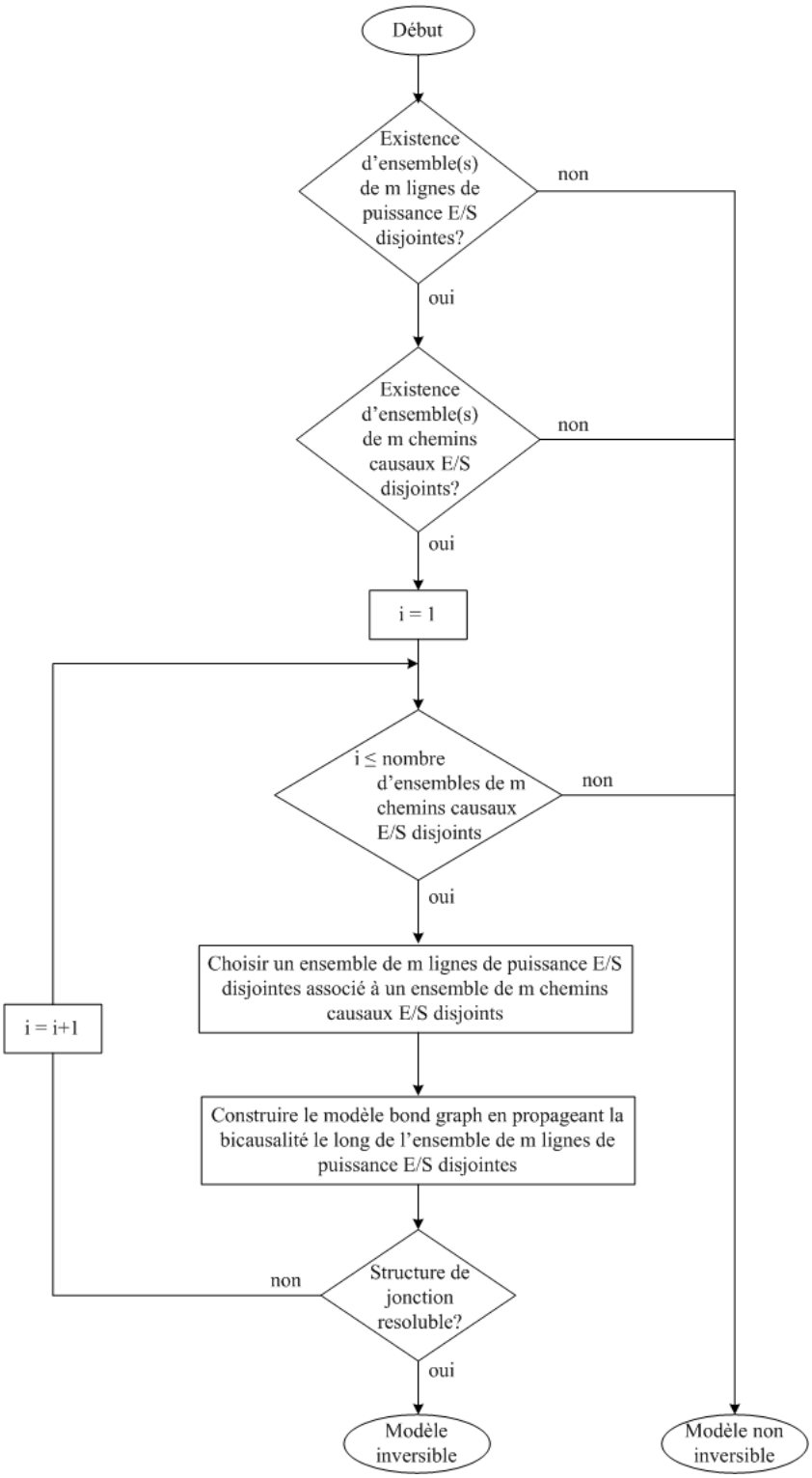


FIG. 1.14 – Organigramme illustrant le critère d'inversibilité 3.

Interprétations :

- ***condition nécessaire 1*** : Cette première condition est nécessaire mais non suffisante. En effet, la disjonction des lignes de puissance E/S n'implique pas nécessairement une propagation correcte de la bicausalité lors de la construction du modèle inverse et donc à ce stade, nous ne pouvons pas conclure sur l'inversibilité du modèle. Néanmoins, en cas de non inversiblité, l'analyse acausale permet d'arrêter l'étude de l'inversibilité à un niveau

plus simple qui ne nécessite pas l'orientation des équations.
- ***condition nécessaire 2*** : Bien que cette deuxième condition soit plus complète que la première (puisqu'elle élimine un certain nombre de cas qui ne peuvent pas être détectés par l'analyse des lignes de puissance), elle n'est pas suffisante pour conclure sur l'inversibilité du modèle. En effet, l'existence d'un ensemble de chemins causaux E/S disjoints assure seulement la propagation de la bicausalité le long des lignes de puissance E/S lors de la construction du modèle inverse. Mais ceci ne garantie pas que l'affectation de la causalité au reste du modèle n'aboutisse pas à une boucle causale non résoluble.
- ***condition nécessaire 3*** : Cette condition d'inversibilité est toujours vérifiée sur des modèles bond graph présentant une structure arborescente (sans cycle de liens bond graph) [Ngw97].

Modèle bond graph d'ordre minimal

L'inversion d'un modèle d'état (linéaire ou non linéaire) permet l'obtention d'un *modèle inverse d'ordre plein* qui possède un espace d'état de même dimension que celui du modèle direct. Néanmoins, Silverman [Sil68] a démontré que la dimension de l'espace d'état du modèle inverse peut être réduite. Cette réduction permet l'obtention du *modèle inverse d'ordre minimal* dont toutes ses variables d'état sont indépendantes. Ce type de modèle permet la simplification des différentes manipulations comme la commande découplante ou la synthèse paramétrique (section 1.4). Ngwompo [Ngw97, Ngw05] a définit une procédure bond graph (procédure 1) permettant de retrouver directement le modèle inverse d'ordre minimal à partir de la notion d'ordre d'un ensemble de chemins causaux disjoints (définition 42, annexe E).

Procédure 1. *Soit un modèle bond graph vérifiant l'hypothèse 1 et inversible (vérifiant le critère d'inversibilité 3). Un modèle inverse d'ordre minimal peut être obtenu comme suit [Ngw97, Ngw05] :*

1. *Choisir un ensemble de m chemins causaux E/S disjoints d'ordre minimal ;*
2. *Déterminer l'ensemble de m lignes de puissance E/S disjointes associé à cet ensemble de chemins causaux E/S disjoints ;*
3. *Construire le modèle bicausal en propageant la bicausalité le long des lignes de puissance appartenant à l'ensemble déterminé à l'étape précédente.*

Remarque : $n - \omega_{min}$ représente la dimension minimal que l'espace d'état du modèle inverse peut avoir [Ngw97], où n est la dimension de l'espace d'état du modèle direct et ω_{min} est l'ordre minimal qu'un ensemble de m chemins causaux E/S disjoints peut avoir.

1.3.4 Le dimensionnement sur des critères dynamiques et énergétiques

L'approche directe, présentée dans la section 1.3.2, a été la première approche utilisée pour résoudre le problème de dimensionnement, en particulier, le problème de sélection de composants sur étagère avec les méthodes de Newton Jr [New50] et de Cœuillet [Coe69]. Ces méthodes sont basées sur des critères statiques obtenus en considérant des situations dites critiques. L'approche inverse a été utilisée, par la suite, pour des problèmes de sélection en robotique dans les travaux de Potkonjak et Jaksic [Pot86], de Vukobratović *et al.* [Vuk87] et de Dequidt [Deq98, Deq00].

Les premiers travaux réalisés au sein du Laboratoire d'Automatique Industrielle (LAI), devenu aujourd'hui le laboratoire Ampère, sur le dimensionnement des systèmes mécatroniques s'inscrivent dans le cadre des travaux de Scavarda *et al.* [Sca91, Ama91]. Ensuite, Ngwompo *et al.* [Ngw96, Ngw97] proposent une méthodologie de dimensionnement des systèmes mécatroniques en se basant sur des critères dynamiques et énergétiques. Cette méthodologie repose sur

l'inversion des modèles bond graph (cf. section 1.3.3 et annexe A). Elle se restreint aux systèmes à paramètres localisés : le niveau géométrique, où les comportements dynamiques sont influencés par la dimension spatiale des composants, n'est pas considéré. Néanmoins, une extension aux systèmes à paramètres répartis a été établie dans la thèse de DERKAOUI [Der05]. Dans le cadre de nos travaux, nous nous intéressons uniquement au dimensionnement des systèmes à paramètres localisés.

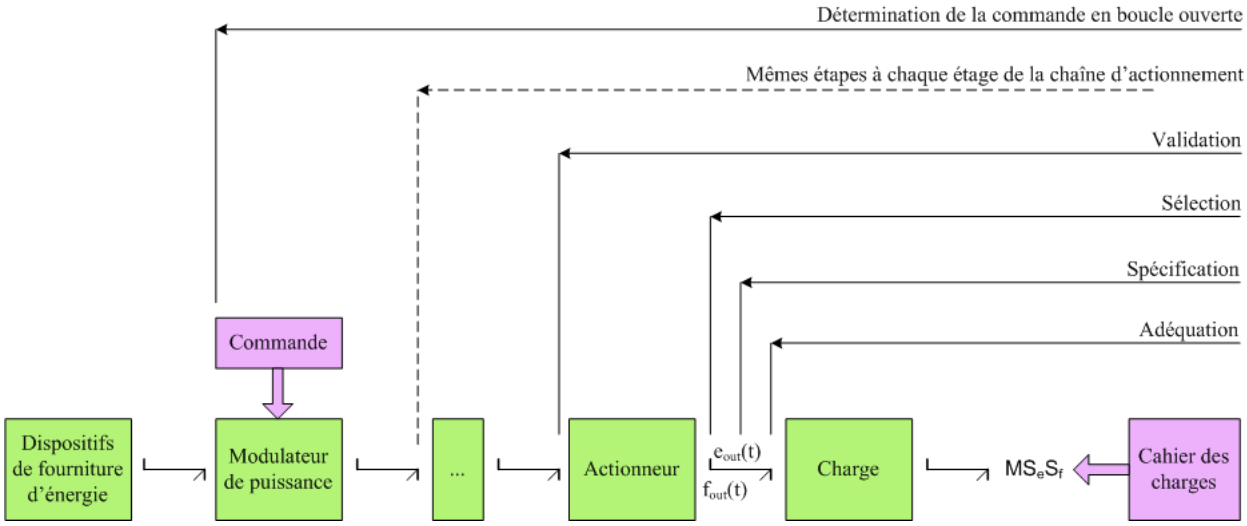


FIG. 1.15 – Dimensionnement par modèles bond graph inverses : dimensionnement étage par étage [Jar10].

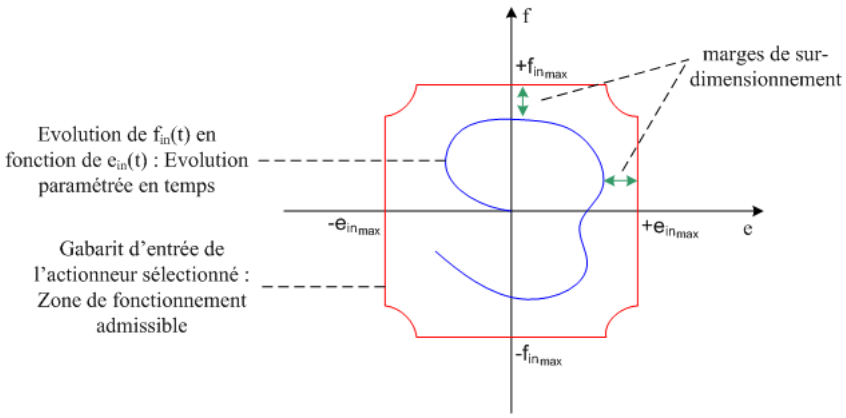
Les différentes étapes de la méthodologie

Dans le cas d'une chaîne d'actionnement simple, les étapes décrites ci-dessous permettent de dimensionner l'actionneur. Dans le cas d'une chaîne d'actionnement complète (cascade de plusieurs chaînes d'actionnement par exemple), les spécifications sont remontées tout le long de la structure grâce à des inversions successives (inversion du modèle de la charge puis inversion du modèle (charge+actionneur) et ainsi de suite) afin de dimensionner les différents composants (figure 1.15). Ainsi, les différentes étapes de la méthodologie sont appliquées pour chaque étage. Finalement, la commande en boucle ouverte du système peut être déterminée.

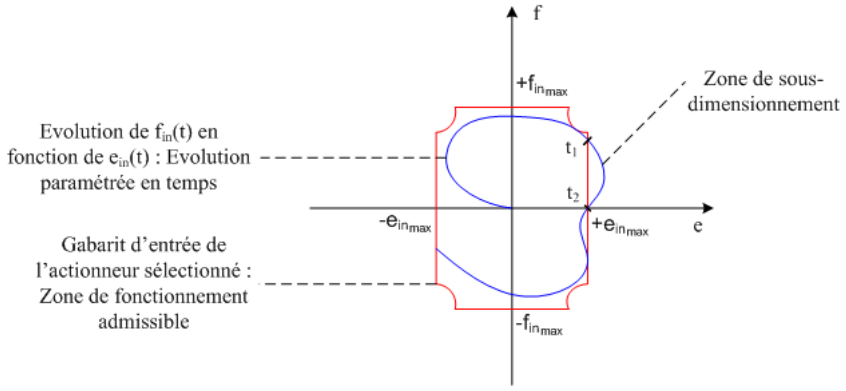
1. **Adéquation** : Cette étape consiste à vérifier l'inversibilité du modèle de l'étage en question (charge par exemple) et le bon choix des spécifications des trajectoires dans le cahier des charges : le concepteur s'assure qu'il y a une adéquation entre la structure du modèle et les spécifications.
2. **Spécification** : Cette étape consiste à construire le modèle bond graph inverse (cf. annexe A) du modèle de l'étage et à calculer ses variables de puissance en entrée qui permettent d'obtenir les trajectoires spécifiées en sortie.
3. **Sélection** : Cette étape consiste à exploiter les résultats obtenus lors de l'étape précédente afin de choisir un actionneur dans le catalogue des actionneurs disponibles. En effet, les variables de puissance en entrée ($e_{out}(t)$ et $f_{out}(t)$) de l'étage en aval correspondent aux variables de puissance que doit fournir en sortie l'étage en amont. Seuls les actionneurs capables de fournir les valeurs maximales de $e_{out}(t)$, de $f_{out}(t)$ et de la puissance $e_{out}(t)f_{out}(t)$ sont sélectionnés. Des critères supplémentaires, comme le prix, l'encombrement ou encore la consommation d'énergie par exemple, peuvent affiner la sélection.

4. **Validation** : Cette étape consiste à valider le choix de l'actionneur réalisé à l'étape précédente. Pour ce faire, il faut :
   (a) modéliser l'actionneur choisi ;
   (b) coupler le modèle de l'actionneur aux modèles des sous-systèmes en aval (la charge dans le cas d'une chaîne d'actionnement simple) ;
   (c) vérifier, pour le modèle ainsi obtenu l'adéquation entre la structure et le cahier des charges (étape 1) ;
   (d) si le modèle obtenu est inversible alors construire le modèle bond graph inverse correspondant et déduire les évolutions des variables de puissance $e_{in}(t)$ et $f_{in}(t)$ en entrée de l'actionneur pour que la charge satisfasse les spécifications du cahier des charges ;
   (e) tracer les évolutions de $e_{in}(t)$ et $f_{in}(t)$ dans un plan (effort, flux), superposer le gabarit d'entrée[15] de l'actionneur sélectionné et valider ou refuser le choix de l'actionneur (figure 1.16).

Remarque : L'étape de validation de l'actionneur correspond également à l'étape de spécification pour l'étage en amont.



(a) Cas d'un actionneur validé



(b) Cas d'un actionneur refusé

FIG. 1.16 – Méthodologie de dimensionnement : étape de validation.

Avantages par rapport à l'approche classique

Comparée aux méthodes de l'approche classique, cette méthodologie permet de :

[15] Le gabarit d'entrée (resp. de sortie) d'un actionneur correspond aux variables d'effort et de flux ainsi qu'à la puissance maximales que cet actionneur peut accepter en entrée (resp. fournir en sortie). Ces grandeurs sont déterminées par le constructeur.

- réduire le nombre d'itérations de simulation,
- sélectionner les composants sur des critères dynamiques,
- spécifier le gabarit d'un nouvel actionneur si aucun des existants ne répond aux exigences,
- évaluer les marges de sur- ou sous-dimensionnement, (figure 1.16),
- aider à la rédaction du cahier des charges.

La méthodologie a été utilisée, dans un contexte académique notamment pour résoudre un problème de conception de systèmes actifs (cf. travaux de MILED [Mil03]) et dans un contexte plus industriel pour :

- l'étude d'une chaîne de traction ferroviaire (cf. travaux de GANDANEGARA *et al.* [Gan03, Gan07]),
- dimensionnement d'une direction assistée électrique (cf. travaux MECHIN [Mec03a,Mec03b]),
- et dimensionnement d'une chaîne de traction automobile (cf. travaux LAFFITE [Laf04]).

1.4 La méthodologie de dimensionnement pour la synthèse paramétrique

La méthodologie de dimensionnement présentée dans la section précédente peut être utilisée dans plusieurs aspects de la conception des systèmes mécatroniques :

1. **Dimensionnement/Sélection de composant** : Cet aspect consiste à sélectionner puis valider un ou plusieurs composants de la chaîne d'actionnement (cf. section 1.3.4).
2. **Détermination de la commande en boucle ouverte** : Cet aspect consiste à remonter les spécifications tout le long de la structure jusqu'à déterminer la commande en boucle ouverte (figure 1.17).
3. **Comparaison d'architectures** : Cet aspect consiste à imposer le même cahier des charges à des architectures différentes et à comparer, après leur inversion, leurs performances selon des critères de comparaison (cf. [Laf04]).
4. **Vérification de l'adéquation cahier des charges/structure** : Cet aspect consiste à effectuer une analyse structurelle[16] afin de vérifier si les spécifications du cahier des charges peuvent être supportées par la structure modélisée du système. En cas d'inadéquation, la méthodologie peut apporter une aide à la rédaction du cahier des charges et/ou à la synthèse d'architecture.
5. **Synthèse paramétrique** : Comme il a été précisé dans la section 1.3.1, la synthèse paramétrique consiste à dimensionner, à partir des spécifications des sorties, un ou plusieurs paramètres du modèle de la chaîne d'actionnement [Ngw98, Laf04]. Cet aspect de la méthodologie sera développé dans la suite de cette section.

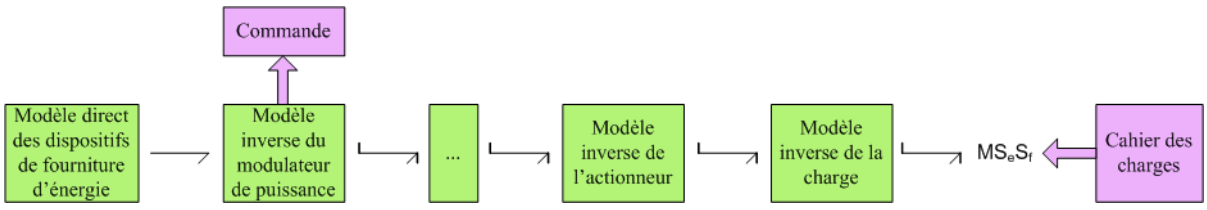


FIG. 1.17 – Détermination de la commande en boucle ouverte par la méthodologie de dimensionnement sur des critères dynamiques et énergétiques.

La vérification de l'adéquation cahier des charges/structure et la synthèse paramétrique seront approfondies dans le chapitre 3.

[16] L'analyse structurelle sera abordée dans la section 1.5 et détaillée dans le chapitre 3.

1.4.1 Problème de synthèse paramétrique

Il existe une grande différence entre un problème de synthèse paramétrique et un problème d'identification paramétrique. Un problème d'identification permet la détermination des paramètres inconnus d'une structure, choisie *a priori*, en exploitant des résultats de mesures ou de simulations obtenus pour des entrées données [Wal94]. Ces entrées sont compatibles (au bruit près) avec les sorties puisque les évolutions de ces sorties ont été obtenues pour ces entrées [Dec02]. En revanche, un problème de synthèse paramétrique (figure 1.18) vise la détermination des paramètres inconnus d'une structure donnée à partir de la connaissance des spécifications sur les sorties et des commandes [Ngw98]. Ces données, spécifiques à un problème de synthèse paramétrique, exigent la compatibilité des commandes et des spécifications avec la structure du modèle.

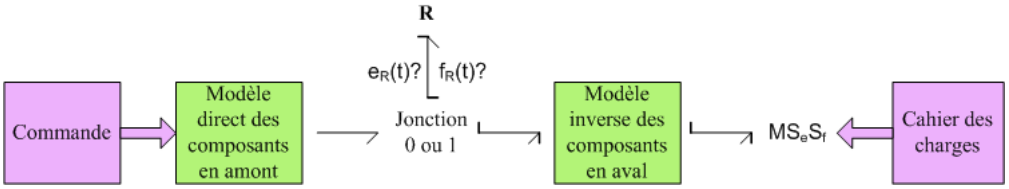


FIG. 1.18 – Synthèse paramétrique d'un élément dissipatif R.

Dans un problème de sélection/validation d'un composant de la chaîne d'actionnement, les variables de puissance de ce composant, obtenues par inversion, sont superposées dans un plan (effort, flux) à des gabarits d'actionneurs disponibles (figure 1.16). Dans un problème de synthèse paramétrique, où il existe des relations entres les variables de puissance obtenues par inversion, l'étude est menée dans ce type de plan en fonction de la nature du composant bond graph en question. Par exemple pour la synthèse paramétrique du composant dissipatif R (figure 1.18), les variables de puissance obtenues par inversion ($e_R(t)$ et $f_R(t)$) sont tracées dans un plan (effort, flux)[17]. Pour un élément bond graph linéaire, la loi d'évolution obtenue dans le plan (effort, flux) est une droite dont la pente correspond à la valeur du paramètre. Par contre, une incompatibilité des commandes et des spécifications avec la structure du système se traduit par une caractéristique non linéique. Dans ce cas, le tracé dans le plan (effort, flux) peut correspondre à une caractéristique d'un sous-système.

Remarque : Pour assurer la compatibilité des commandes et des spécifications avec la structure du modèle, LAFFITE [Laf04] propose un bouclage E/S qui consiste en une fonction de transfert dans le cas linéaire et une relation temporelle dans le cas non linéaire traduisant le comportement E/S désiré[18] (figure 1.19).

1.4.2 Synthèse de tolérance paramétrique par analyse par intervalles

Les travaux de NGWOMPO [Ngw98] et de LAFFITE [Laf04] sur la synthèse paramétrique par la méthodologie de dimensionnement ne tiennent pas compte des incertitudes paramétriques. En effet, dans ces travaux, les spécifications des sorties sont des trajectoires temporelles nominales. Cependant, ces spécifications sont des contraintes assez fortes parce qu'elles ne tiennent pas compte des incertitudes admissibles sur les trajectoires des sorties. Définir un domaine de fonctionnement admissible pour chaque sortie permettra de déterminer les tolérances paramétriques dans la phase du dimensionnement appelée dans ce cas *synthèse de tolérance paramétrique*. Dans

[17] Pour un élément C (resp. I), l'inversion permet de déterminer les variables $e_C(t)$ et $q_C(t)$ (resp. $p_I(t)$ et $f_I(t)$) qui seront tracées dans un plan (e, q) (resp. (p, f)).

[18] Le comportement E/S désiré, éventuellement spécifié dans le cahier des charges, doit être différent du modèle inverse de la structure du système sinon nous risquons d'imposer *a priori* la valeur du paramètre recherchée.

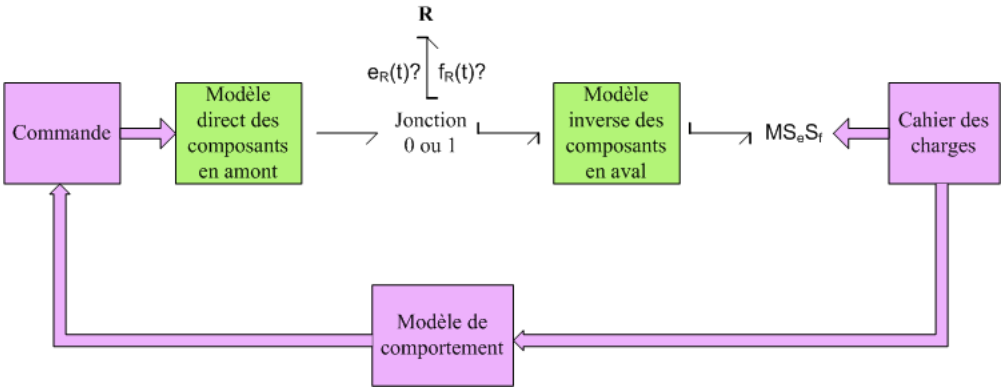


FIG. 1.19 – Compatibilité des commandes avec les spécifications dans un problème de synthèse paramétrique.

ce contexte, l'analyse par intervalles[19] a été utilisée pour caractériser les tolérances sur les paramètres à partir des incertitudes spécifiées sur les sorties [Hoc02,Ly,04]. Ainsi, les trajectoires des sorties et de leurs dérivées successives[20] sont caractérisées par une marge de variation : chaque sortie et chaque dérivée est décrite par un intervalle et ce, pour chaque instant t_i. La procédure alors proposée pour la synthèse de tolérance paramétrique peut être résumée par les étapes suivantes :

1. Remonter les spécifications, par inversion, au niveau de l'élément portant le paramètre incertain comme il a été expliqué dans la section précédente.
2. Exprimer les variables de puissance et/ou les variables d'énergie en fonction des entrées, des sorties, de leurs dérivées successives et des paramètres connus.
3. Déduire l'expression de la loi caractéristique de l'élément en fonction des entrées, des sorties, de leurs dérivées successives et des paramètres connus.
4. A partir des intervalles de tolérance imposés sur les sorties et sur leurs dérivées successives pour chaque instant t_i et à partir de la connaissance des entrées et des autres paramètres, calculer par arithmétique par intervalles l'intervalle de variation du paramètre inconnu pour chaque instant t_i.
5. L'intervalle résultat est obtenu par l'union de tous les intervalles calculés.

Cette procédure a été appliquée dans l'annexe B pour la synthèse paramétrique de la résistance électrique d'un moteur à courant continu.

Remarque : Les enveloppes sur les trajectoires nominales des sorties et sur les dérivées successives peuvent être définies par des courbes ayant des formes différentes de celles nominales. Ces enveloppes représentent des intervalles fonctions du temps.

1.5 L'analyse structurelle et comportementale

Les méthodes classiques de conception et de dimensionnement reposent le plus souvent sur une analyse dépendante des valeurs numériques des différents paramètres. Cependant, en présence d'incertitudes paramétriques, ce type d'analyse doit être mené pour chaque valeur possible

[19] L'analyse par intervalles, basée sur l'arithmétique par intervalles, permet de caractériser les domaines de variation des variables de sortie d'un modèle lorsque les variables d'entrée varient dans des ensembles ou des intervalles donnés *a priori* [Kie99].

[20] L'inversion d'un modèle entraîne l'apparition des dérivées successives des différentes sorties. Pour plus de détails, voir chapitre 3.

de chaque paramètre, ce qui peut faire augmenter considérablement le temps de conception. L'une des originalités de la méthodologie de dimensionnement sur des critères énergétiques et dynamiques, développée au sein du laboratoire Ampère, est sa phase d'analyse structurelle. Cette analyse permet au concepteur, indépendamment des valeurs numériques, de vérifier si les spécifications du cahier des charges sont en adéquation avec la structure du modèle de conception et si ce dernier est inversible. RAHMANI [Rah93] a proposé la définition suivante pour une propriété dite *structurelle* et ce, dans le contexte d'une représentation bond graph :

Définition 1. *Une propriété d'un système est dite* ***structurelle*** *si [Rah93] :*
- *elle ne dépend que du type d'éléments bond graph qui composent le modèle du système et de la façon dont ils sont interconnectés, non pas des valeurs numériques de ses paramètres ;*
- *elle est vérifiée pour toutes les valeurs des paramètres sauf éventuellement pour quelques valeurs particulières.*

1.5.1 Les outils de l'analyse structurelle

Plusieurs travaux ont été réalisés sur l'analyse structurelle des systèmes. Les premiers [Lin74, Shi76, Glo76, Fra79a, Fra79b, Sch81] portent sur l'étude de la commandabilité et l'observabilité structurelles. Par la suite, plusieurs approches ont été développées pour mener cette analyse : approche modèle d'état [Dio82, Var82, Com86, Laf90, Her93], approche matrice système [Ros70], approche géométrique [Des82, Com82, Des85, Des88], approche système structuré [Van91, Dio93, Kar05, Kar07, Com10], approche digraphe [Eva79, Yam85, Rei88] et récemment l'approche bond graph [Sud86, Sue91, Rah93, Ngw97, Jar10]. À travers ces différentes approches, l'analyse structurelle a permis d'étudier et de résoudre plusieurs problèmes comme l'analyse de la structure finie et infinie, l'inversion, le découplage, le placement de pôles, le rejet de perturbations, l'étude de la dualité, la commandabilité et l'observabilité. En respectant les hypothèses 1 et 2, JARDIN [Jar10] a établi une comparaison entre différentes approches de l'analyse structurelle afin de déterminer le domaine de validité de chacune d'entre elles. Les approches concernées par cette comparaison sont : l'approche modèle d'état, l'approche système structuré et l'approche bond graph. Avant de présenter cette étude comparative, nous proposons une brève présentation de chaque approche.

Approche modèle d'état

Un modèle d'état d'un système Σ linéaire et invariant dans le temps peut s'exprimer sous une forme matricielle (système d'équations 1.1) ou sous une forme graphique par l'intermédiaire d'un *digraphe* qui est un graphe dont les arcs sont orientés. Le digraphe associé au système Σ comprend [Yam85, Rah97] :
- un ensemble de sommets $V = U \cup X \cup Y$ où $U = \{u_1, ..., u_m\}$, $X = \{x_1, ..., x_n\}$ et $Y = \{y_1, ..., y_m\}$ sont les ensembles de sommets associés respectivement aux variables d'entrée, d'état et de sortie du modèle ;
- un ensemble d'arcs $E = E_{\mathbf{A}} \cup E_{\mathbf{B}} \cup E_{\mathbf{C}} \cup E_{\mathbf{D}}$ avec :

$$E_{\mathbf{A}} = \{(x_j, x_i) | a_{ij} \neq 0\}$$
$$E_{\mathbf{B}} = \{(u_j, x_i) | b_{ij} \neq 0\}$$
$$E_{\mathbf{C}} = \{(x_j, y_i) | c_{ij} \neq 0\}$$
$$E_{\mathbf{D}} = \{(u_j, y_i) | d_{ij} \neq 0\}$$

(x_j, x_i) représente l'arc orienté partant du sommet $x_j \in X$ vers $x_i \in X$ et a_{ij} correspond au coefficient situé sur la i$^{\text{ème}}$ ligne et la j$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\mathbf{A}$. Il en est de même pour $E_{\mathbf{B}}$, $E_{\mathbf{C}}$ et $E_{\mathbf{D}}$ avec respectivement la matrice $\mathbf{B}$ (sommets $u_j \in U$ et $x_i \in X$, b_{ij} coefficient de $\mathbf{B}$), la matrice $\mathbf{C}$ (sommets $x_j \in X$ et $y_i \in Y$, c_{ij} coefficient de $\mathbf{C}$) et la matrice $\mathbf{D}$ (sommets $u_j \in U$ et $y_i \in Y$, d_{ij} coefficient de $\mathbf{D}$).

Approche système structuré

Comme pour le modèle d'état, un système structurée peut s'exprimer sous la forme d'une représentation matricielle ou sous la forme d'une représentation graphique.

Représentation matricielle

Un système structuré Σ_λ est décrit par le modèle suivant :

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_\lambda \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_\lambda \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_\lambda \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_\lambda \mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{1.5}$$

Les coefficients nuls des matrices $\mathbf{A}_\lambda$, $\mathbf{B}_\lambda$, $\mathbf{C}_\lambda$ et $\mathbf{D}_\lambda$ sont connus. Les valeurs des autres coefficients qui sont supposés indépendants[21] sont inconnus. Ils sont représentés par λ_i.

Représentation graphique

Un système structuré Σ_λ peut être représenté par un *digraphe structuré* qui comprend [Dio03] :

- un ensemble de sommets $V = U \cup X \cup Y$;
- un ensemble d'arcs $E_\lambda = E_{\mathbf{A}_\lambda} \cup E_{\mathbf{B}_\lambda} \cup E_{\mathbf{C}_\lambda} \cup E_{\mathbf{D}_\lambda}$;

Les ensembles V et E_λ sont définis de la même manière que pour un digraphe classique à la seule différence que chaque arc orienté (x_j, x_i) (resp. (u_j, x_i), (x_j, y_i), (u_j, y_i)) d'un digraphe structuré a un poids égal au coefficient non nul situé sur la i$^{\text{ème}}$ ligne et la j$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\mathbf{A}_\lambda$ (resp. $\mathbf{B}_\lambda$, $\mathbf{C}_\lambda$, $\mathbf{D}_\lambda$).

Approche bond graph

Le modèle bond graph consiste en une représentation graphique des transferts d'énergie au sein d'un système. Cependant, le modèle mathématique associé peut être déduit à partir de l'exploitation cette représentation (procédure 25, annexe E). Contrairement aux deux autres approches qui sont des représentations causales (issues d'équations orientées), un modèle bond graph peut être une représentation tantôt acausale et tantôt causale. Par exemple, pour l'étude de l'inversibilité d'un modèle bond graph (section 1.3.3), le modèle bond graph acausal est analysé avant de passer au modèle causal et ce, pour assurer une analyse du modèle par niveau. Cet aspect est développé dans ce qui suit.

1.5.2 Différentes approches...différents niveaux d'analyse

Les trois approches décrites ci-dessus se distinguent entre elles par un niveau d'information et un niveau de description différents sur le comportement du système (figure 1.20) :

- L'approche système structuré est une représentation globale où seule la structure mathématique du modèle d'état correspondant est modélisée. Le niveau d'information associé est structurel.
- L'approche modèle d'état est une représentation globale où les dépendances entre les différents coefficients matriciels (liés au comportement physique du système) sont considérées en plus de la structure mathématique. Le niveau d'information associé est le niveau d'information comportemental si les valeurs numériques des coefficients ne sont pas considérées.
- L'approche bond graph est une représentation locale qui tient compte d'une part de la structure du système (niveau d'information structurel) et d'autre part des lois caractéristiques des phénomènes physiques mis en jeu (niveau d'information comportemental).
- Une résolution numérique à partir du modèle d'état ou du modèle bond graph peut être menée, ce qui n'est pas le cas pour un modèle structuré. Le niveau d'information associé est alors numérique.

[21] Les coefficients des différentes matrices sont tous indépendants entre eux.

Remarque : Un modèle bond graph est un modèle de connaissance qui permet de décrire la structure énergétique du système de manière *locale* notamment par la représentation des différents phénomènes physiques (dissipation et stockage d'énergie etc...). Par contre, les approches systèmes structurés et modèle d'état offrent une vision plus *globale* du système et ce, en éliminant implicitement certaines variables de puissance locales. En effet, un coefficient d'une matrice figurant dans une représentation d'état correspond à la somme des gains de certains chemins causaux (cf. procédure 25, annexe E). Ainsi, en analysant une représentation d'état, il est difficile d'identifier que tel paramètre est associé à tel phénomène physique. C'est pour cette raison que l'approche bond graph facilite l'interprétation physique des systèmes.

L'utilisation d'une approche plutôt qu'une autre dépend de l'objectif de l'étude et des informations disponibles sur le système étudié. L'approche modèle d'état peut être préférée parce qu'elle facilite les manipulations mathématiques et l'implémentation des lois de commande. L'approche bond graph peut être choisie pour ses caractéristiques graphiques et parce qu'elle favorise les interprétations physiques. Pour l'approche système structuré, bien qu'elle couvre un niveau d'information plus restreint, elle peut s'avérer appropriée pour la synthèse d'architecture.

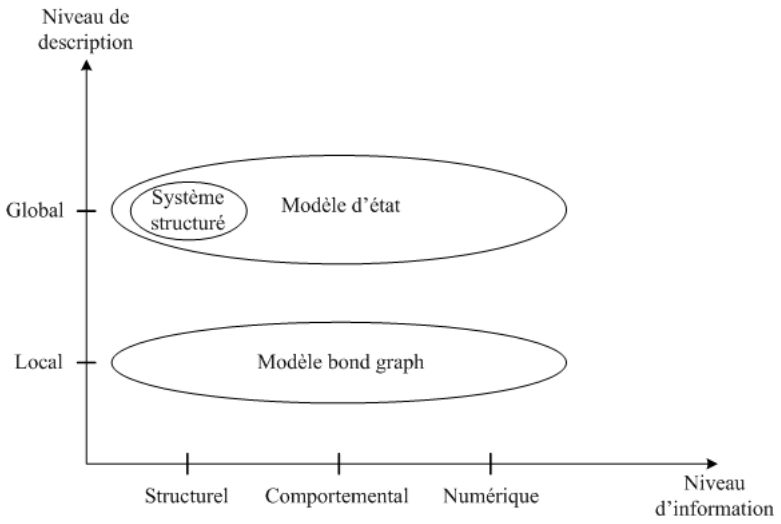


FIG. 1.20 – Niveaux de description et d'information des différentes approches [Jar10].

Ces différences aux niveaux information et description impliquent différents niveaux d'analyse qui ont été évoqués, pour la première fois, par RAHMANI [Rah93, Rah97] et qui ont été précisés par JARDIN [Jar10] :

- **le niveau d'analyse structuré** où seule la structure du modèle est considérée. Les coefficients matriciels du modèle sont supposés indépendants.
- **le niveau d'analyse BG-structurel** où seule la structure locale énergétique du modèle est considérée. Les dépendances entre les phénomènes physiques ne sont prises en compte.
- **le niveau d'analyse comportemental** où non seulement la structure du modèle est prise en compte mais aussi certaines dépendances phénoménologiques.
- **le niveau d'analyse numérique** où les paramètres sont remplacés par leur valeur numérique.

Ainsi, l'approche système structuré peut conduire au niveau d'analyse structuré, l'approche modèle d'état permet d'établir trois niveaux d'analyse : le niveau structuré, le niveau comportemental et le niveau numérique. Enfin, l'approche bond graph permet d'établir également trois niveaux d'analyse : le niveau BG-structurel, le niveau comportemental et le niveau numérique.

Remarques :

- Le critère d'inversibilité 3 (cf. section 1.3.3) répond à différents niveaux d'analyse : le niveau BG-structurel en analysant les lignes de puissance E/S sur le modèle bond graph acausal et les chemins causaux E/S sur le modèle bond graph causal et ce, sans tenir compte de leur gain. L'étude de la résolubilité de la structure de jonction du modèle bond graph inverse implique un niveau d'analyse comportemental. Le critère d'inversibilité 2 relève quant à lui d'un niveau d'analyse comportemental.
- Dans la suite de ce mémoire, on appellera une *propriété comportementale* toute propriété déduite analytiquement d'un modèle d'état ou d'un modèle bond graph par considération des gains des chemins causaux.
- Le niveau d'*analyse structurel* fera référence au niveau structuré pour une représentation non énergétique et au niveau BG-structurel pour une représentation bond graph.

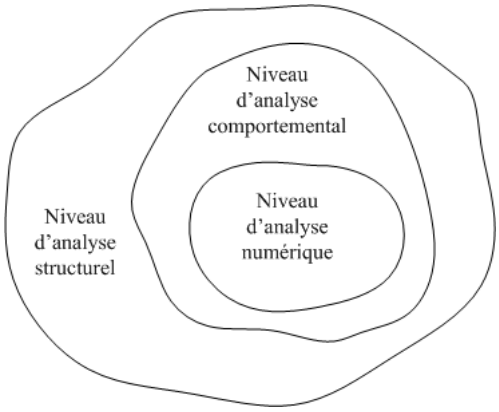


FIG. 1.21 – Classification des niveaux d'analyse par ordre d'inclusion.

Une classification des différents niveaux d'analyse par ordre d'inclusion est donnée figure 1.21. Cette classification permet l'analyse globale suivante :

- si une propriété est fausse à un certain niveau d'analyse alors il est inutile de passer au niveau d'analyse inférieur,
- si une propriété n'est pas vérifiée au niveau d'analyse structurel alors le concepteur doit revoir la structure du système,
- si une propriété est vérifiée au niveau d'analyse structurel et non vérifiée au niveau d'analyse comportemental alors le concepteur doit revoir les lois phénoménologiques mises en jeu,
- si une propriété est vérifiée aux niveaux d'analyse structurel et comportemental et non vérifiée au niveau d'analyse numérique alors le concepteur doit revoir les valeurs numériques des différents paramètres.
- une propriété vérifiée au niveau d'analyse numérique est nécessairement vérifiée aux niveaux d'analyse structurel et comportemental.

L'intérêt de ces niveaux d'analyse réside dans la possibilité de mettre en place une démarche chronologique dans le travail de conception ou de reconception. Cette démarche sera détaillée dans le chapitre 3.

Conclusion

Dans ce premier chapitre, une brève présentation de la mécatronique et de ses différents domaines d'application a été établie. Ensuite, l'architecture d'un système mécatronique a été présentée de manière simple comme l'association d'une chaîne d'actionnement et d'une partie commande. Malgré les avancées technologiques, le comportement du système mécatronique peut s'écarter du comportement nominal désiré théoriquement et ce, à cause des facteurs incertains

qui ont été cités dans ce chapitre. Nos travaux se restreignent aux variations des valeurs numériques de certains paramètres du système. Plusieurs outils de modélisation et d'étude ont été développés dans la littérature pour la caractérisation des systèmes incertains et pour la mesure de l'impact de ces incertitudes sur le comportement du système. Ainsi, un état de l'art sur ces outils, et plus précisément sur l'étude de sensibilité, la représentation d'état, l'approche ensembliste et l'approche probabiliste, a été établi. Cependant, la prise en compte des incertitudes paramétriques dans le cycle de conception permet de limiter et de prévoir la zone de fonctionnement admissible. Dans ce contexte, le cycle de conception et le dimensionnement d'un système mécatronique ont été présentés. Puisque la méthodologie de dimensionnement par inversion des modèles bond graph a montré un intérêt et comme nos travaux de recherche représentent une contribution à cette méthodologie, ses différentes étapes et ses différents aspects ont donc été développés. Ensuite, la synthèse paramétrique contribuant au dimensionnement a fait l'objet de la section suivante. Des travaux récents sur la synthèse paramétrique par inversion du modèle bond graph et faisant appel à l'analyse par intervalles ont également été discutés. L'analyse structurelle et l'analyse comportementale qui représentent l'une des originalités de la méthodologie de dimensionnement ont fait l'objet de la dernière section. Ces aspects permettent au concepteur de vérifier, indépendamment des valeurs numériques, si les spécifications du cahier des charges sont en adéquation avec la structure du modèle de conception. Différentes approches utilisées pour établir ces analyses ont été brièvement présentées. Ces approches se distinguent entre elles par un niveau d'information et un niveau de description différents sur le comportement du système, ce qui implique différents niveaux d'analyse. L'analyse structurelle et comportementale seront reprises et illustrées dans le chapitre 3.

Dans le chapitre suivant, différents aspects de l'analyse et de la modélisation des incertitudes paramétriques sont abordés. Tout d'abord, un état de l'art est établi sur les différents travaux qui ont été réalisés sur la représentation bond graph des incertitudes paramétriques. Ensuite, nous proposons des contributions au bond graph incertain (l'une des approches développées). Ces contributions consistent en des procédures alternatives pour la détermination graphique du modèle d'état canonique et du modèle standard d'interconnexion. Enfin, une modélisation standard d'interconnexion est proposée pour les éléments bond graph multiport. La représentation bond graph standard d'interconnexion de ces éléments fait appel à une procédure de décomposition. Dans ce contexte, deux nouvelles procédures de décomposition sont proposées.

Le troisième chapitre est consacré principalement à l'étape de la vérification de l'adéquation des spécifications du cahier des charges à la structure retenue pour le modèle de conception. Dans une première partie, nous proposons de nouvelles procédures graphiques permettant la détermination des différents invariants caractérisant la structure d'un modèle à partir du modèle bond graph bicausal afin de vérifier si les spécifications peuvent être portées par la structure retenue notamment en terme de dérivabilité. Dans une seconde partie, nous cherchons à approfondir davantage cette étape de vérification de l'adéquation. Ainsi, nous proposons une procédure de vérification de l'adéquation pour des spécifications des sorties définies sous forme de comportement type. Dans cette étude, les différents niveaux d'analyse sont considérés. Si cette adéquation n'est pas vérifiée alors des recommandations pour la remise en question des spécifications ou de la structure du modèle de conception sont proposées. Enfin, nous établissons la relation entre la vérification de l'adéquation au niveau d'analyse numérique et la synthèse paramétrique qui peut être déployée pour la synthèse des tolérances.

Dans le dernier chapitre, nous nous intéressons de plus près à la prise en compte des incertitudes dans la démarche de dimensionnement des systèmes mécatroniques par inversion et ce, en utilisant une approche probabiliste. Tout d'abord, certaines notions de base de l'approche probabiliste, utilisées dans ce travail, telles que la fonction de densité de probabilité et les grandeurs

caractéristiques sont rappelées. Ensuite, nous reformulons les travaux de Li et Chen [Li 06b, Li 08, Che09b, Li 09], sur la description de l'évolution de la densité de probabilité au sein d'un système stochastique dynamique, pour un modèle dynamique inverse. Cette reformulation permet la détermination des tolérances sur les entrées et sur les paramètres à partir des spécifications des incertitudes sur les sorties. Enfin, les règles de construction et d'exploitation d'un modèle bond graph probabiliste sont proposées.

Ce travail est une contribution à la méthodologie de dimensionnement des systèmes mécatroniques se basant sur des critères dynamiques et énergétiques et, plus précisément, à :

- la phase d'analyse structurelle et comportementale permettant, en premier lieu, la vérification de l'adéquation des spécifications du cahier des charges avec la structure retenue pour le modèle de conception et en deuxième lieu, l'aide à la rédaction du cahier des charges en cas d'inadéquation,
- la prise en compte des spécifications des incertitudes sur les sorties pour la synthèse des tolérances paramétriques ou pour la détermination des tolérances sur les entrées.

Chapitre 2

Contribution à la modélisation des incertitudes paramétriques par approche bond graph

Sommaire

Introduction **32**

2.1 Modélisation des incertitudes paramétriques par l'approche bond graph **32**

2.1.1 Bond graph de sensibilité 33

2.1.2 Bond graph incrémental 36

2.1.3 Bond graph incertain 39

2.2 Contribution à la représentation bond graph du Modèle Standard d'Interconnexion : éléments 1-port et éléments TF et GY 2-ports . **49**

2.2.1 Éléments 1-port 49

2.2.2 Éléments TF et GY 2-ports 51

2.3 Contribution à la représentation bond graph du Modèle Standard d'Interconnexion : éléments multiport **56**

2.3.1 Décomposition des éléments multiport 56

2.3.2 Modèle standard d'interconnexion des éléments multiport 65

Conclusion **71**

Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux aspects de l'analyse et de la modélisation des incertitudes paramétriques. En effet, certains travaux ont été réalisés sur la représentation des incertitudes paramétriques tenant compte de critères énergétiques et dynamiques et utilisant le formalisme bond graph. Les travaux de Gawthrop et Ronco [Gaw99, Gaw00] permettent d'analyser dans le domaine temporel la sensibilité du comportement du système à la variation de certains paramètres et ce, à partir du modèle bond graph de sensibilité. Par ailleurs, les travaux de Borutzky *et al.* [Bor01,Bor02,Bor04,Bor06] permettent de construire le modèle bond graph incrémental qui sert à l'analyse de sensibilité dans le domaine de Laplace. Enfin, les travaux de Dauphin-Tanguy et Kam [Dau99b,Kam01,Kam05] permettent d'établir des modèles d'état des systèmes linéaires incertains adaptés pour l'analyse de la robustesse et pour la commande robuste et ce, à partir du bond graph incertain. Ce dernier a été établi pour les éléments 1-port et les transducteurs 2-ports.

L'objectif de ce chapitre est de rappeler ces approches et d'apporter des contributions au bond graph incertain. Ces contributions peuvent se résumer en des procédures alternatives (cf. procédure 2 et section 2.2) pour la détermination graphique du modèle d'état canonique et du modèle standard d'interconnexion (représentations d'état adaptées aux systèmes linéaires incertains). Pour la modélisation standard d'interconnexion et en plus des éléments 1-port et des transducteurs 2-ports, le cas des éléments multiport est traité (contributions introduites dans la section 2.3 notamment par les procédures 5 et 6). La représentation bond graph standard d'interconnexion de ces éléments multiport (R, I et C) repose sur une procédure de décomposition. Dans ce sens, deux nouvelles procédures de décomposition sont proposées dans ce chapitre (procédures 3 et 4).

Les contributions de ce chapitre portent sur la représentation bond graph des incertitudes paramétriques et ce, dans l'objectif d'utiliser cette représentation dans la méthodologie du dimensionnement (qui se base sur le formalisme bond graph) notamment pour la synthèse des tolérances.

2.1 Modélisation des incertitudes paramétriques par l'approche bond graph

Trois approches différentes ont été principalement développées pour la modélisation et l'étude des incertitudes paramétriques par le formalisme bond graph : *bond graph de sensibilité*, *bond graph incrémental* et *bond graph incertain*. Le bond graph de sensibilité et le bond graph incrémental permettent d'établir graphiquement les fonctions de sensibilité respectivement dans le domaine temporel et dans le domaine de Laplace. L'analyse de sensibilité permet ensuite de prédire l'effet de la variation de chaque paramètre incertain sur le comportement du modèle (cf. section 1.2.2, chapitre 1). Le bond graph incertain permet d'établir graphiquement un modèle d'état adapté pour l'analyse et la commande des systèmes incertains. Deux principales formes de représentation d'état existent dans la littérature pour la modélisation des systèmes incertains : le modèle canonique et le modèle standard d'interconnexion. Ces formes permettent de simplifier l'étude de la robustesse et la synthèse de lois de commande robustes.

Dans cette section, ces trois approches sont détaillées et nous proposons une procédure alternative pour la détermination graphique du modèle d'état canonique (cf. procédure 2, section 2.1.3). Cette procédure permet d'éviter certains calculs intermédiaires de la procédure bond graph existante.

2.1.1 Bond graph de sensibilité

L'analyse de sensibilité est l'un des outils pour l'étude de l'impact des incertitudes paramétriques sur le comportement d'un modèle dynamique (cf. section 1.2.2, chapitre 1). Cette analyse permet d'évaluer l'effet de la variation des paramètres sur la variation de l'état et de la sortie et donc, sur le comportement du système (résultat qualitatif) tandis que l'analyse d'incertitude permet de quantifier l'incertitude induite sur la sortie du modèle en tenant compte des incertitudes affectant les paramètres et les entrées du modèle (résultat quantitatif). L'analyse de sensibilité locale des systèmes dynamiques a été développée par TOMOVIĆ et VUKOBRATOVIĆ [Tom68, Tom72]. Elle consiste en la détermination des fonctions de sensibilité. Deux fonctions de sensibilité principales sont utilisées dans la littérature : la fonction de sensibilité absolue définie par la dérivée partielle de la sortie par rapport à un paramètre p : $\frac{\partial y}{\partial p}$ (cas de paramètres indépendants) et la fonction de sensibilité relative définie par $\frac{\partial y}{\partial p}\frac{p}{y}$ (cas de paramètres dépendants).

Pour faciliter la détermination des fonctions de sensibilité, deux approches bond graph ont été développées de manière indépendante : le bond graph de sensibilité ou encore *sensitivity bond graph* permettant le calcul des fonctions de sensibilité dans le domaine temporel et le bond graph incrémental ou encore *Incremental bond graph* permettant le calcul des fonctions de sensibilité dans le domaine de LAPLACE. Ce dernier sera présenté dans la section 2.1.2.

Pour établir l'analyse de sensibilité d'un modèle bond graph dans le domaine temporel, CABANELLAS *et al* [Cab95] et ROE et THOMAS [Roe00] ont utilisé les pseudo bond graphs[1] où les variables associées aux liens ne sont pas des variables de puissance mais des dérivées partielles du premier ordre de l'effort et du flux. Le bond graph de sensibilité proposé par GAWTHROP et RONCO [Gaw99, Gaw00] est une amélioration du pseudo bond graph. Sur le modèle bond graph, on associe aux liens, en plus des variables de puissance, les dérivées partielles (par rapport aux paramètres) de ces variables. Ainsi, le modèle bond graph de sensibilité est un modèle bond graph multi-liens qui est utilisé principalement pour l'optimisation, l'identification temps réel et l'estimation d'état. Cette approche tient compte des deux hypothèses suivantes :

hypothèse 3. *Les incertitudes considérées sont des incertitudes paramétriques (structurées).*

hypothèse 4. *Les différents paramètres sont indépendants.*

Principe

Sur un modèle bond graph, la relation constitutive d'un élément peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Phi(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\theta}) = 0$$

où $\boldsymbol{v}(t) = \begin{bmatrix} e(t) & f(t) \end{bmatrix}^T$ et $\boldsymbol{\theta}$ est le vecteur contenant les paramètres du système. Pour les éléments linéaires, cette relation constitutive peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{A^T}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{v}(t) = 0$$

La sensibilité du vecteur $\boldsymbol{v}(t)$ par rapport au j$^{\text{ème}}$ paramètre θ_j est donnée par :

$$^{j}\boldsymbol{v}(t) = \frac{\partial \boldsymbol{v}(t)}{\partial \theta_j}$$

[1] Le pseudo bond graph a également été défini dans un tout autre contexte pour modéliser les systèmes thermodynamiques où les variables associées aux liens bond graph ne sont pas des variables de puissance [Tho00, Kar06].

La relation constitutive de sensibilité de l'élément par rapport au j^{ème} paramètre θ_j s'écrit comme suit :

$$^{j}\Phi(\boldsymbol{^{j}v}(t), \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\theta})^T}{\partial \boldsymbol{v}(t)} \boldsymbol{^{j}v}(t) + \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = 0$$

Pour les éléments linéaires, cette relation constitutive de sensibilité peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{A^T}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{^{j}v}(t) + \frac{\partial \mathbf{A^T}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \boldsymbol{v}(t) = 0$$

Considérons comme exemple l'élément dissipatif R ayant la loi caractéristique linéaire suivante :

$$\Phi(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A^T} \boldsymbol{v}(t) = e_R - R f_R = 0$$

où $\boldsymbol{v}(t) = \begin{bmatrix} e_R(t) & f_R(t) \end{bmatrix}^T$ et $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 1 & -R \end{bmatrix}^T$.
La relation constitutive de sensibilité par rapport au paramètre R peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial e_R}{\partial R} - R \frac{\partial f_R}{\partial R} - f_R = 0$$

La relation constitutive de sensibilité par rapport à un paramètre θ_j différent de R peut être exprimée comme suit :

$$\frac{\partial e_R}{\partial \theta_j} - R \frac{\partial f_R}{\partial \theta_j} = 0$$

Considérons à présent, un élément R ayant la loi caractéristique non linéaire suivante :

$$e_R - R f_R^{\alpha} = 0$$

La relation constitutive de sensibilité par rapport au paramètre α est la suivante :

$$\frac{\partial e_R}{\partial \alpha} - R\alpha f_R^{\alpha-1} \frac{\partial f_R}{\partial \alpha} - R ln\left(f_R\right) f_R^{\alpha} = 0$$

La relation constitutive de sensibilité par rapport à un autre paramètre θ_j est la suivante :

$$\frac{\partial e_R}{\partial \theta_j} - \alpha R f_R^{\alpha-1} \frac{\partial f_R}{\partial \theta_j} = 0$$

La propagation de la sensibilité tout le long du modèle bond graph se fait exactement de la même manière que la propagation de la puissance (tableau 2.1).

TAB. 2.1 – Propagation de la sensibilité dans la structure de jonction du modèle bond graph.

Élément de structure de jonction	Propagation de la puissance	Propagation de la sensibilité
Jonction 0	$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i f_i = 0 \\ e_1 = \ldots = e_n \end{cases}$	$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} = 0 \\ \frac{\partial e_1}{\partial \theta_j} = \ldots = \frac{\partial e_n}{\partial \theta_j} \end{cases} \forall j$
Jonction 1	$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i e_i = 0 \\ f_1 = \ldots = f_n \end{cases}$	$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \frac{\partial e_i}{\partial \theta_j} = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \theta_j} = \ldots = \frac{\partial f_n}{\partial \theta_j} \end{cases} \forall j$
Élément TF	$\begin{cases} e_1 = m e_2 \\ f_2 = m f_1 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial e_1}{\partial \theta_j} = m \frac{\partial e_2}{\partial \theta_j} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_j} = m \frac{\partial f_1}{\partial \theta_j} \\ \frac{\partial e_1}{\partial m} = e_2 + m \frac{\partial e_2}{\partial m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial m} = f_1 + m \frac{\partial f_1}{\partial m} \end{cases} \forall j$
Élément GY	$\begin{cases} e_1 = r f_2 \\ e_2 = r f_1 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\partial e_1}{\partial \theta_j} = r \frac{\partial f_2}{\partial \theta_j} \\ \frac{\partial e_2}{\partial \theta_j} = r \frac{\partial f_1}{\partial \theta_j} \\ \frac{\partial e_1}{\partial r} = f_2 + r \frac{\partial f_2}{\partial r} \\ \frac{\partial e_2}{\partial r} = f_1 + r \frac{\partial f_1}{\partial r} \end{cases} \forall j$

Exemple

Considérons comme exemple le circuit électrique de la figure 2.1(a). Le modèle bond graph de sensibilité associé est donné figure 2.1(b) : c'est un modèle multi-bond graph ou encore modèle bond graph vectoriel (cf. section A.4 de l'annexe A). Ce modèle représente la juxtaposition du modèle bond graph initial (où des variables de puissance sont associées aux liens) et de différents modèles bond graph découplés tel que chaque modèle permet de propager les dérivées partielles par rapport à un paramètre incertain donné. La lettre « s » rajoutée devant les différents éléments bond graph permet de faire la différence avec un modèle bond graph classique et par conséquent d'exploiter le modèle bond graph autrement (en utilisant les règles expliquées ci-dessus).

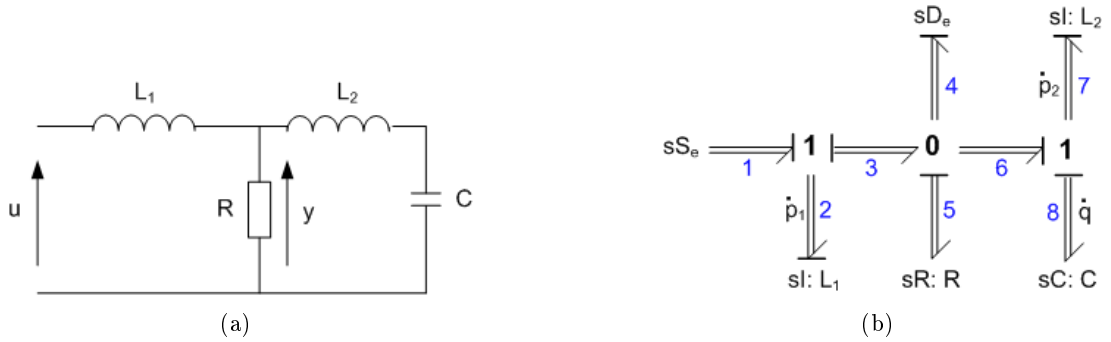
Les différents paramètres étant supposés incertains et indépendants, les fonctions de sensibilité de la sortie par rapport aux différents paramètres sont données par les équations 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4. Ces équations sont obtenues en exploitant le modèle bond graph de sensibilité.

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial R} = \frac{\partial e_5}{\partial R} &= R\frac{\partial f_5}{\partial R} + f_5 = R\left(\frac{\partial f_3}{\partial R} - \frac{\partial f_6}{\partial R}\right) + \frac{p_1}{L_1} - \frac{p_2}{L_2} \\ &= \frac{R}{L_1}\frac{\partial p_1}{\partial R} - \frac{R}{L_2}\frac{\partial p_2}{\partial R} + \frac{p_1}{L_1} - \frac{p_2}{L_2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial L_1} = \frac{\partial e_5}{\partial L_1} &= R\frac{\partial f_5}{\partial L_1} = R\left(\frac{\partial f_3}{\partial L_1} - \frac{\partial f_6}{\partial L_1}\right) \\ &= \frac{R}{L_1}\frac{\partial p_1}{\partial L_1} - \frac{R}{L_2}\frac{\partial p_2}{\partial L_1} - \frac{R}{L_1^2}p_1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial L_2} &= \frac{\partial e_5}{\partial L_2} = R\frac{\partial f_5}{\partial L_2} = R\left(\frac{\partial f_3}{\partial L_2} - \frac{\partial f_6}{\partial L_2}\right) \\ &= \frac{R}{L_1}\frac{\partial p_1}{\partial L_2} - \frac{R}{L_2}\frac{\partial p_2}{\partial L_2} + \frac{R}{L_2^2}p_2\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial C} &= \frac{\partial e_5}{\partial C} = R\frac{\partial f_5}{\partial C} = R\left(\frac{\partial f_3}{\partial C} - \frac{\partial f_6}{\partial C}\right) \\ &= \frac{R}{L_1}\frac{\partial p_1}{\partial C} - \frac{R}{L_2}\frac{\partial p_2}{\partial C}\end{aligned} \tag{2.4}$$



(a) (b)

FIG. 2.1 – (a) Circuit électrique et (b) le modèle bond graph de sensibilité associé.

2.1.2 Bond graph incrémental

Le bond graph incrémental a été développé par BORUTZKY *et al.* [Bor01,Bor02,Bor04,Bor06] afin de déterminer la fonction de sensibilité absolue du premier ordre dans le domaine de LAPLACE et ce, à partir du modèle bond graph. Cette approche s'applique pour des systèmes linéaires et invariants dans le temps (hypothèse 2, page 16) dont les différents paramètres sont indépendants (hypothèse 4, page 33) et dont les incertitudes sont des incertitudes paramétriques (hypothèse 3, page 33).

Principe

Le bond graph incrémental permet de modéliser les variations Δe et Δf des variables de puissance e et f dues à des petites variations des paramètres du système. Les variations paramétriques sont représentées sur le modèle bond graph incrémental par le biais de sources modulées par une variable de puissance nominale provenant du bond graph initial (où les variations paramétriques sont supposées nulles). Ainsi, le bond graph incrémental fait appel au bond graph initial. Dans ce qui suit, les modèles bond graph incrémental d'éléments passifs 1-port (R et I) sont présentés. Le principe de modélisation reste inchangé pour l'élément de stockage C. Cette représentation bond graph est similaire à celle présentée par KARNOPP [Kar77a].

Cas d'un élément dissipatif R. La relation constitutive de l'élément dissipatif R dont le paramètre varie de ΔR par rapport à sa valeur nominale R_n s'écrit comme suit :

$$e_R + \Delta e_R - (R_n + \Delta R)\,(f_R + \Delta f_R) = 0$$

où Δe_R (resp. Δf_R) est la variation de la variable de puissance e_R (resp. f_R). Après une approximation du premier ordre, la relation constitutive variationnelle peut être déduite :

$$\Delta e_R - R_n \Delta f_R - \Delta R f_R = 0$$

Le modèle bond graph incrémental de l'élément R est donné figure 2.2(a).

Cas d'un élément de stockage I. La relation constitutive de l'élément I dont le paramètre varie de ΔI par rapport à sa valeur nominale I_n est donnée par :

$$(p + \Delta p) - (I_n + \Delta I)\,(f_I + \Delta f_I) = 0$$

où Δf_I (resp. Δp) est la variation de la variable de puissance f_I (resp. du moment généralisé p). Après une approximation du premier ordre, la relation constitutive variationnelle peut être déduite :

$$\Delta p - I_n \Delta f_I - \Delta I f_I = 0$$

Le modèle bond graph incrémental de l'élément I est donné figure 2.2(b).

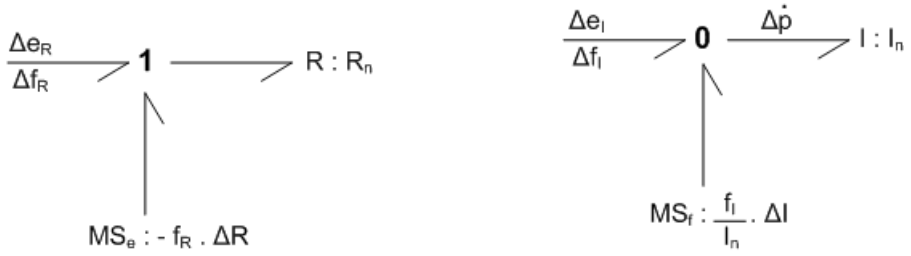


FIG. 2.2 – Modèles bond graph incrémental (a) d'un élément R et (b) d'un élément I.

La représentation d'état du modèle bond graph nominal (les variations paramétriques sont supposées nulles) est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A_n}(\theta)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B_n}(\theta)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C_n}(\theta)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D_n}(\theta)\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{2.5}$$

où :

- $\mathbf{x}(t)$ est le vecteur d'état constitué des variables d'énergie associées aux éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale ($\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_{I(I)}}$ où $n_{I(I)}$ est le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale) ;
- $\mathbf{u}(t)$ (resp. $\mathbf{y}(t)$) est constitué des variables d'entrée (resp. de sortie) associées aux éléments sources (resp. détecteurs).
- Les matrices $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_n}$, $\mathbf{C_n}$ et $\mathbf{D_n}$ dépendent du vecteur θ invariant dans le temps et regroupent les différents paramètres du modèle.

À partir du bond graph incrémental, la représentation d'état suivante peut être déduite :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A_n}(\theta)\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \theta)\boldsymbol{\Delta}\theta \\ \boldsymbol{\Delta}\mathbf{y}(t) = \mathbf{C_n}(\theta)\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \theta)\boldsymbol{\Delta}\theta \end{cases} \tag{2.6}$$

où :

- $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}(t)$ est le vecteur constitué des variations des variables d'énergie associées aux éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale ($\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_{I(I)}}$ où $n_{I(I)}$ est le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale) ;
- $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{y}(t)$ est constitué des variations des variables de sortie associées aux détecteurs ;

- $\mathbf{\Delta}\theta$ est le vecteur regroupant les variations des paramètres ;
- $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathbf{A_n}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B_n}\mathbf{u}(t)\right)$ et $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathbf{C_n}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D_n}\mathbf{u}(t)\right)$.

Une fois les différentes matrices ($\mathbf{A_n}$, $\mathbf{C_n}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ et $\tilde{\mathbf{D}}$) déterminées à partir du modèle bond graph incrémental, la matrice des fonctions de sensibilité peut être calculée dans le domaine de LAPLACE où $\mathcal{L}$ désigne la transformée de LAPLACE :

$$\mathbf{S}(s) = \frac{\partial \mathcal{L}y}{\partial\theta} = \left(\mathbf{C_n}\left(sI - \mathbf{A_n}\right)^{-1}\mathcal{L}\tilde{\mathbf{B}} + \mathcal{L}\tilde{\mathbf{D}}\right)(s) \tag{2.7}$$

Remarques :

- Le bond graph incrémental est indépendant de la causalité.
- La faiblesse du bond graph incrémental par rapport au bond graph de sensibilité est due au fait que la matrice décrite par l'équation 2.7 n'est pas déductible directement du modèle bond graph car il est nécessaire de faire des calculs matriciels *a posteriori* ce qui n'est pas le cas pour le bond graph de sensibilité.
- Les commandes en boucle ouverte sont des grandeurs nominales et ainsi, sur le modèle bond graph incrémental qui est un modèle variationnel, les variations de ces commandes sont nulles.
- À partir du modèle bond graph de sensibilité, nous pouvons retrouver la variation de la sortie (directement générée par ailleurs avec le bond graph incrémental) en appliquant la relation suivante :

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n_\theta} \frac{\partial y}{\partial\theta_i}\Delta\theta_i$$

où θ_i, $i = \{1,\ldots,n_\theta\}$, sont les paramètres incertains du système. $\Delta\theta_i$, $i = \{1,\ldots,n_\theta\}$, sont les variations de ces paramètres et $\frac{\partial y}{\partial\theta_i}$, $i = \{1,\ldots,n_\theta\}$, sont les fonctions de sensibilité de la sortie par rapport aux paramètres.

Exemple

Considérons comme exemple le circuit RLC (figure 2.3) tel que les différents paramètres sont supposés indépendants. Le modèle bond graph incrémental associé est construit en remplaçant les éléments bond graph incertains par les modèles bond graph incrémentaux correspondants (figure 2.4). La représentation d'état associée au modèle bond graph nominal (resp. incrémental) est obtenue par l'exploitation du modèle bond graph. Elle est définie par le système d'équations 2.5 (resp. système d'équations 2.6) où :
$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix}^T$; $\mathbf{\Delta}\theta = \begin{bmatrix} \Delta R & \Delta L & \Delta C \end{bmatrix}^T$; $\mathbf{A_n} = \begin{bmatrix} -\frac{R_n}{L_n} & -\frac{1}{C_n} \\ \frac{1}{L_n} & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B_n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{C_n} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_n} \end{bmatrix}$; $\mathbf{D_n} = 0$; $\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_n}p & \frac{R_n}{L_n^2}p & \frac{1}{C_n^2}q \\ 0 & -\frac{1}{L_n^2}p & 0 \end{bmatrix}$ et $\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_n^2}q \end{bmatrix}$. La matrice des fonctions de sensibilité est donnée par :

$$\mathbf{S}(s) = \frac{1}{s\left(s + \frac{R_n}{L_n}\right) + \frac{1}{L_nC_n}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_nL_n^2}\mathbf{p}(s) & -\frac{s}{C_nL_n^2}\mathbf{p}(s) & \frac{1}{C_n^2}\left(\frac{1}{C_nL_n} - 1\right)\mathbf{q}(s) \end{bmatrix}$$

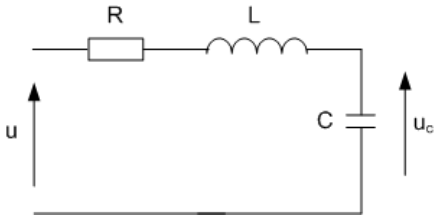


FIG. 2.3 – Circuit RLC.

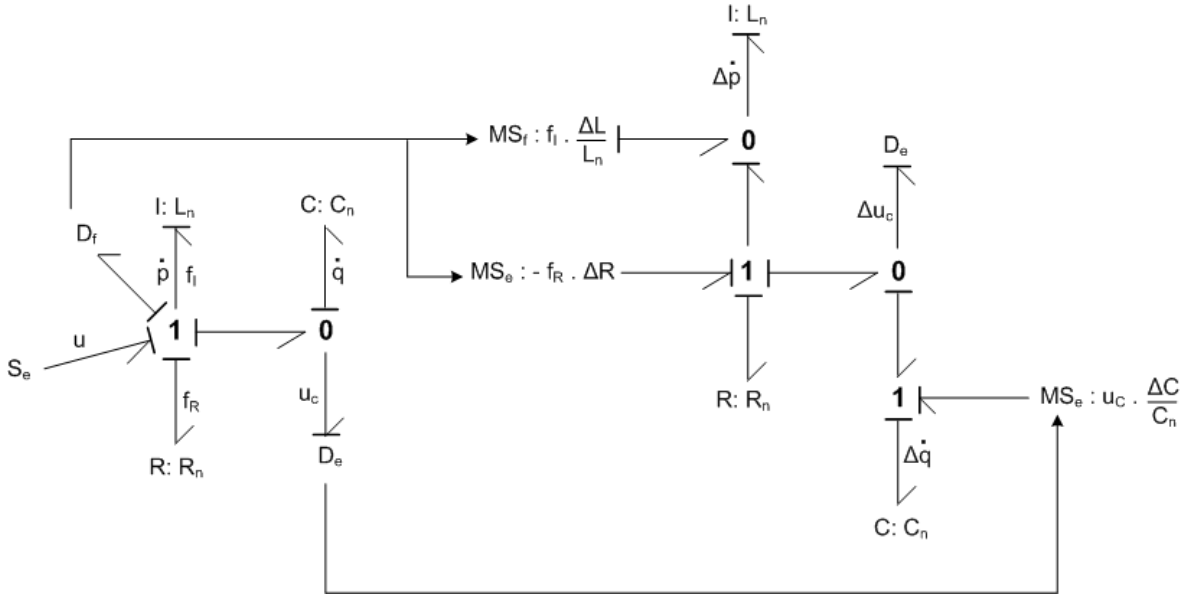


FIG. 2.4 – Modèles bond graph nominal et incrémental associés au circuit RLC.

2.1.3 Bond graph incertain

En automatique, la représentation d'état représente un bon outil pour l'analyse et la commande des systèmes. Dans la section 1.2 du chapitre 1, nous avons vu que la description des systèmes incertains se fait à travers une représentation d'état adaptée. Généralement, cette représentation d'état est établie de sorte que la partie nominale et la partie incertaine du modèle soient séparées afin de pouvoir décrire l'écart entre le comportement nominal et le comportement tenant compte des incertitudes. Deux principales formes de représentation d'état existent pour modéliser les systèmes linéaires incertains : le modèle canonique et le modèle standard d'interconnexion (cf. section 1.2, chapitre 1). Ces deux formes permettent l'étude de la robustesse ainsi que la synthèse de lois de commande robustes des systèmes linéaires présentant des incertitudes paramétriques. Bien que l'objectif de ce travail s'inscrive dans le cadre de la conception et non dans celui de la synthèse de commande, nous nous intéressons à ces deux formes car elles permettent de séparer la partie nominale de la partie incertaine ce qui peut être une bonne approche pour la synthèse de tolérance.

Afin de faciliter la détermination du modèle canonique et du modèle standard d'interconnexion, le bond graph incertain ou encore *uncertain bond graph* a été développé par DAUPHIN-TANGUY, KAM et NIESNER [Dau99b,Kam01,Kam05,Nie05]. Dans ce contexte, seuls les systèmes linéaires et invariants dans le temps sont considérés (hypothèse 2, page 16) dont les paramètres sont indépendants (hypothèse 4, page 33) et tel que les incertitudes prises en compte sont uniquement des incertitudes paramétriques (hypothèse 3). De plus, les deux hypothèses suivantes sont prises en considération.

hypothèse 5. *Les incertitudes considérées sont des incertitudes paramétriques de type α (cf. section 1.1.3, chapitre 1). Ainsi l'ordre du modèle reste inchangé.*

hypothèse 6. *Les incertitudes considérées sont uniquement des incertitudes sur les paramètres des éléments bond graph passifs.*

Modèle canonique

Le modèle d'état canonique est une représentation d'état permettant la séparation des valeurs nominales des paramètres dans des matrices nominales et les incertitudes dans des matrices incertaines [Mor85,Gu,89,Mar96,Liu97,Xie98]. Il manipule les incertitudes comme des incertitudes additives (absolues) et s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A_n} + \mathbf{\Delta A})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B_n} + \mathbf{\Delta B})\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = (\mathbf{C_n} + \mathbf{\Delta C})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{D_n} + \mathbf{\Delta D})\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{2.8}$$

Les matrices $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_n}$, $\mathbf{C_n}$ et $\mathbf{D_n}$ contiennent uniquement les valeurs nominales tandis que les matrices $\mathbf{\Delta A}$, $\mathbf{\Delta B}$, $\mathbf{\Delta C}$ et $\mathbf{\Delta D}$ regroupent des expressions en fonction des incertitudes ainsi que des valeurs nominales.

Le modèle d'état canonique peut être déterminé graphiquement à partir du modèle bond graph [Dau99b,Kam01,Dau03,Kam05]. Pour ce faire, chaque élément bond graph présentant une incertitude paramétrique est remplacé par le modèle bond graph correspondant qui tient compte de l'incertitude additive. Les modèles bond graph canoniques sont déterminés en respectant les règles suivantes :

- chaque élément bond graph incertain est dissocié en deux éléments de même type connectés par une structure de jonction simple (jonctions 0 et 1),
- les éléments nominaux gardent leur causalité,
- les éléments de stockage incertains caractérisés par les incertitudes ΔI et ΔC ont une causalité dérivée imposée quelle que soit la causalité des éléments de stockage nominaux caractérisés par les valeurs nominales I_n et C_n,
- les éléments incertains sont causalement liés aux éléments nominaux qui leur sont associés mais n'auront aucun autre couplage possible avec le reste du modèle bond graph.

Pour les éléments TF et GY 2-ports incertains, le paramètre associé à l'élément bond graph incertain dépend de la causalité affectée.

À titre d'illustration, deux exemples de bond graph canonique sont maintenant présentés pour l'élément I et l'élément TF.

Cas d'un élément I 1-port : le paramètre caractérisant cet élément est la somme d'une valeur nominale I_n et d'une incertitude ΔI (figure 2.5(a)). La relation acausal caractérisant cet élément est donnée par : $p-(I_n+\Delta I)f_I = 0$. Le modèle bond graph canonique acausal associé est donné figure 2.5(b).

Cas d'un élément TF 2-ports : Soit un élément TF présentant une incertitude paramétrique sur son module. Les relations décrivant cet élément en causalité m (figure 2.6(a)) s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = (m_n + \Delta m)\, e_2 \\ f_2 = (m_n + \Delta m)\, f_1 \end{cases} \tag{2.9}$$

Le modèle bond graph canonique associé est donné figure 2.6(b). Les équations mathématiques

associées à l'élément TF incertain en causalité $\frac{1}{m}$ (figure 2.7(a)) sont données par :

$$\begin{cases} e_2 = \frac{1}{m_n+\Delta m} e_1 \\ f_1 = \frac{1}{m_n+\Delta m} f_2 \end{cases} \tag{2.10}$$

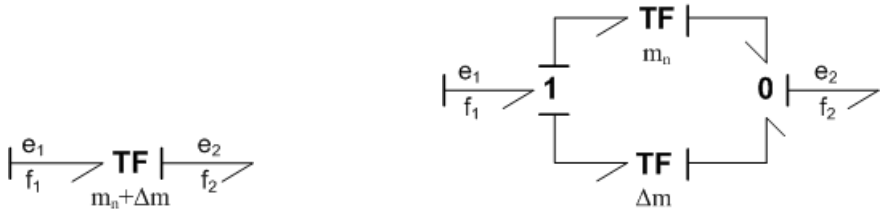
$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_2 = \left(\frac{1}{m_n} + \frac{1}{\Delta TF}\right) e_1 \\ f_1 = \left(\frac{1}{m_n} + \frac{1}{\Delta TF}\right) f_2 \end{cases}$$

où $\Delta TF = -\frac{m_n(m_n+\Delta m)}{\Delta m}$. Le modèle bond graph canonique associé est donné figure 2.7(b).

(a) Élément I incertain

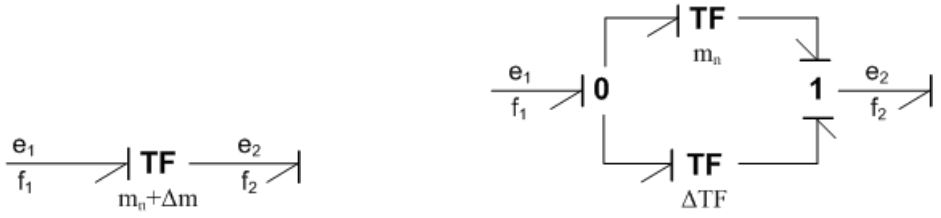
(b) Modèle bond graph canonique acausal

FIG. 2.5 – Élément I incertain et le modèle bond graph canonique acausal associé.



(a) (b)

FIG. 2.6 – (a) Élément TF incertain en causalité m et (b) le modèle bond graph canonique associé.



(a) (b)

FIG. 2.7 – (a) Élément TF incertain en causalité $\frac{1}{m}$ et (b) le modèle bond graph canonique associé.

Une fois le modèle bond graph canonique construit (en remplaçant tous les éléments incertains par leur modèle bond graph canonique), la représentation d'état canonique peut être déduite graphiquement (cf. les travaux de KAM et DAUPHIN-TANGUY [Kam01, Kam05]). Dans ces travaux, les matrices de la représentation d'état canonique sont exprimées en fonction d'autres matrices dont les valeurs sont calculées à partir des gains des chemins causaux (définition 46, annexe E)

et à partir de la règle de MASON (procédure 23, annexe C, page 229). Le principe de détermination de ces matrices est donné en annexe C. La détermination de ces matrices semble fastidieuse et ce, à cause de la détermination des matrices intermédiaires qui permettent de prendre en compte les boucles algébriques et la dépendance entrainées par la dissociation de l'élément bond graph initial en un élément nominal et un autre incertain. En se basant sur les travaux de NGWOMPO [Ngw97] et JARDIN [Jar10] qui permettent la prise en compte des boucles algébriques lors de la détermination graphique de la représentation d'état, nous proposons la procédure 2 qui permet la simplification de la détermination graphique de la représentation d'état canonique.

Procédure 2. *Soit un modèle bond graph canonique en causalité préférentielle intégrale représentant un système linéaire incertain. Le modèle d'état canonique associé s'écrit sous la forme suivante :*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A_n} + \mathbf{\Delta A})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B_n} + \mathbf{\Delta B})\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = (\mathbf{C_n} + \mathbf{\Delta C})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{D_n} + \mathbf{\Delta D})\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{2.11}$$

où :

- $\mathbf{x}(t)$ *est le vecteur d'état constitué des variables d'énergie associées aux éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale (*$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_{I(I)}}$ *où* $n_{I(I)}$ *est le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale) ;*
- $\mathbf{u}(t)$ *(resp.* $\mathbf{y}(t)$*) est constitué des variables d'entrée (resp. de sortie) associées aux éléments sources (resp. détecteurs).*

À partir du modèle bond graph nominal associé (modèle bond graph où toutes les incertitudes paramétriques sont supposées nulles), les coefficients des matrices $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_n}$, $\mathbf{C_n}$ *et* $\mathbf{D_n}$ *sont calculés comme suit :*

$$\begin{cases} a_{n_{ij}} = \displaystyle\sum_{ⓚ|\omega_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)=1} \frac{\tilde{G}^n_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)}{\prod_i \left(1 - \left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i\right)} \\ b_{n_{ij}} = \displaystyle\sum_{ⓚ|\omega_k(u_j,\dot{x}_i)=0} \frac{\tilde{G}^n_k(u_j,\dot{x}_i)}{\prod_i \left(1 - \left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i\right)} \\ c_{n_{ij}} = \displaystyle\sum_{ⓚ|\omega_k(\dot{x}_j,y_i)=1} \frac{\tilde{G}^n_k(\dot{x}_j,y_i)}{\prod_i \left(1 - \left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i\right)} \\ d_{n_{ij}} = \displaystyle\sum_{ⓚ|\omega_k(u_j,y_i)=0} \frac{\tilde{G}^n_k(u_j,y_i)}{\prod_i \left(1 - \left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i\right)} \end{cases}$$

où sur le modèle bond graph nominal, $\tilde{G}^n_k(\upsilon_i,\upsilon_j)$ *correspond au gain statique du chemin causal* ⓚ *existant entre les variables* υ_i *et* υ_j *et dont l'ordre est* $\omega_k(\upsilon_i,\upsilon_j)$ *et* $\left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i$ *correspond au gain statique de la* $i^{ème}$ *boucle algébrique possédant une variable commune (autre que la variable d'arrivée* υ_j*)*[2] *avec le chemin causal* ⓚ*. Si le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale ne présente pas de boucle algébrique alors pour* $\forall\ i \quad \left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i = 0$.

À partir du modèle bond graph incertain canonique (modèle bond graph où les incertitudes paramétriques sont considérées), les coefficients des matrices $\mathbf{\Delta A}$, $\mathbf{\Delta B}$, $\mathbf{\Delta C}$ *et* $\mathbf{\Delta D}$ *sont calculés*

[2]Si seule la variable d'arrivée υ_j est une variable commune avec une boucle algébrique alors cette dernière n'est pas considérée car sa prise en compte correspond à un chemin causal généralisé (cf. définition 48, annexe E) qui passe une infinité de fois par cette boucle et ne s'arrête pas à la variable υ_j.

comme suit :

$$\begin{cases} \Delta a_{ij} = \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)=1} \dfrac{\tilde{G}_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}_{k0}\right)_i\right)} - \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)=1} \dfrac{\tilde{G}^n_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i\right)} \\ \Delta b_{ij} = \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(u_j,\dot{x}_i)=0} \dfrac{\tilde{G}_k(u_j,\dot{x}_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}_{k0}\right)_i\right)} - \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(u_j,\dot{x}_i)=0} \dfrac{\tilde{G}^n_k(u_j,\dot{x}_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i\right)} \\ \Delta c_{ij} = \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(\dot{x}_j,y_i)=1} \dfrac{\tilde{G}_k(\dot{x}_j,y_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}_{k0}\right)_i\right)} - \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(\dot{x}_j,y_i)=1} \dfrac{\tilde{G}^n_k(\dot{x}_j,y_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i\right)} \\ \Delta d_{ij} = \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(u_j,y_i)=0} \dfrac{\tilde{G}_k(u_j,y_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}_{k0}\right)_i\right)} - \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(u_j,y_i)=0} \dfrac{\tilde{G}^n_k(u_j,y_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i\right)} \end{cases}$$

où sur le modèle bond graph incertain, $\tilde{G}_k(\upsilon_i,\upsilon_j)$ correspond au gain statique du chemin causal $\textcircled{k}$ existant entre les variables υ_i et υ_j et dont l'ordre est $\omega_k(\upsilon_i,\upsilon_j)$ et $\left(\tilde{G}_{k0}\right)_i$ correspond au gain statique de la $i^{ème}$ boucle algébrique possédant une variable commune (autre que la variable d'arrivée υ_j) avec le chemin causal $\textcircled{k}$.

Démonstration. La représentation d'état associée à un modèle bond graph nominal (modèle ne présentant pas d'incertitudes paramétriques) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A_n}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B_n}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C_n}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D_n}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{2.12}$$

où les coefficients des matrices $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_n}$, $\mathbf{C_n}$ et $\mathbf{D_n}$ sont calculés à partir du modèle bond graph nominal suivant la procédure 25 (annexe E) étendue aux modèles présentant des boucles algébriques et/ou des éléments de stockage en causalité dérivée quand la causalité préférentielle intégrale est affectée :

$$\begin{cases} a_{n_{ij}} = \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)=1} \dfrac{\tilde{G}^n_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i\right)} \\ b_{n_{ij}} = \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(u_j,\dot{x}_i)=0} \dfrac{\tilde{G}^n_k(u_j,\dot{x}_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i\right)} \\ c_{n_{ij}} = \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(\dot{x}_j,y_i)=1} \dfrac{\tilde{G}^n_k(\dot{x}_j,y_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i\right)} \\ d_{n_{ij}} = \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(u_j,y_i)=0} \dfrac{\tilde{G}^n_k(u_j,y_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i\right)} \end{cases}$$

tels que sur le modèle bond graph nominal, $\tilde{G}^n_k(\upsilon_i,\upsilon_j)$ correspond au gain statique du chemin causal $\textcircled{k}$ entre les variables υ_i et υ_j et dont l'ordre est $\omega_k(\upsilon_i,\upsilon_j)$ et $\left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i$ correspond au gain statique du i^{ème} boucle algébrique possédant une variable commune (autre que la variable d'arrivée υ_j) avec le chemin causal $\textcircled{k}$. Les matrices $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_n}$, $\mathbf{C_n}$ et $\mathbf{D_n}$ ne contiennent que les valeurs nominales des différents paramètres du système.

Si les incertitudes paramétriques sont considérées alors la représentation d'état associée au modèle bond graph incertain correspondant est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{2.13}$$

où les coefficients des matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont calculés à partir du modèle bond graph incertain suivant la procédure 25 (annexe E) étendue aux modèles présentant des boucles algébriques et/ou des éléments de stockage en causalité dérivée quand la causalité préférentielle intégrale est affectée :

$$\begin{cases} a_{ij} = \sum\limits_{\text{ⓚ}|\omega_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)=1} \dfrac{\tilde{G}_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}_{k0}\right)_i\right)} \\ b_{ij} = \sum\limits_{\text{ⓚ}|\omega_k(u_j,\dot{x}_i)=0} \dfrac{\tilde{G}_k(u_j,\dot{x}_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}_{k0}\right)_i\right)} \\ c_{ij} = \sum\limits_{\text{ⓚ}|\omega_k(\dot{x}_j,y_i)=1} \dfrac{\tilde{G}_k(\dot{x}_j,y_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}_{k0}\right)_i\right)} \\ d_{ij} = \sum\limits_{\text{ⓚ}|\omega_k(u_j,y_i)=0} \dfrac{\tilde{G}_k(u_j,y_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}_{k0}\right)_i\right)} \end{cases}$$

tels que sur le modèle bond graph incertain, $\tilde{G}_k(\upsilon_i,\upsilon_j)$ correspond au gain statique du chemin causal ⓚ existant entre les variables υ_i et υ_j et dont l'ordre est $\omega_k(\upsilon_i,\upsilon_j)$ et $\left(\tilde{G}_{k0}\right)_i$ correspond au gain statique de la i$^{\text{ème}}$ boucle algébrique possédant une variable commune (autre que la variable d'arrivée υ_j) avec le chemin causal ⓚ.

Les matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ peuvent s'écrire sous la forme canonique suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{A_n} + \mathbf{\Delta A} \\ \mathbf{B} = \mathbf{B_n} + \mathbf{\Delta B} \\ \mathbf{C} = \mathbf{C_n} + \mathbf{\Delta C} \\ \mathbf{D} = \mathbf{D_n} + \mathbf{\Delta D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{\Delta A} = \mathbf{A} - \mathbf{A_n} \\ \mathbf{\Delta B} = \mathbf{B} - \mathbf{B_n} \\ \mathbf{\Delta C} = \mathbf{C} - \mathbf{C_n} \\ \mathbf{\Delta D} = \mathbf{D} - \mathbf{D_n} \end{cases}$$

Ce qui permet de démontrer le bien fondé de la procédure 2 : les coefficients des matrices $\mathbf{\Delta A}$, $\mathbf{\Delta B}$, $\mathbf{\Delta C}$ et $\mathbf{\Delta D}$ peuvent être déterminés comme suit :

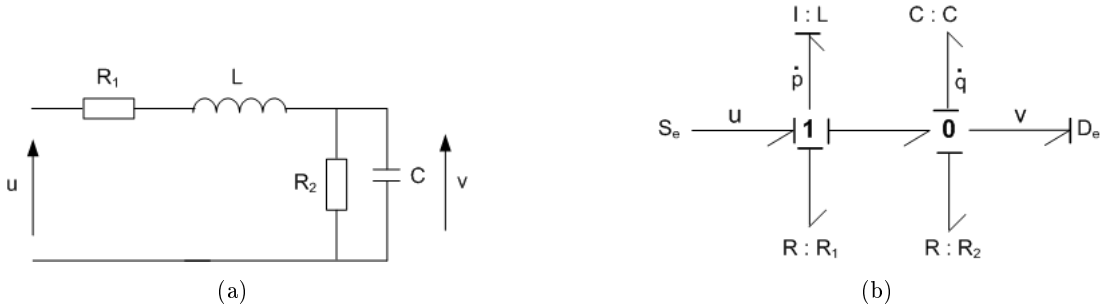
$$\begin{cases} \Delta a_{ij} = a_{ij} - a_{n_{ij}} = \sum\limits_{\text{ⓚ}|\omega_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)=1} \dfrac{\tilde{G}_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}_{k0}\right)_i\right)} - \sum\limits_{\text{ⓚ}|\omega_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)=1} \dfrac{\tilde{G}^n_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i\right)} \\ \Delta b_{ij} = b_{ij} - b_{n_{ij}} = \sum\limits_{\text{ⓚ}|\omega_k(u_j,\dot{x}_i)=0} \dfrac{\tilde{G}_k(u_j,\dot{x}_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}_{k0}\right)_i\right)} - \sum\limits_{\text{ⓚ}|\omega_k(u_j,\dot{x}_i)=0} \dfrac{\tilde{G}^n_k(u_j,\dot{x}_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i\right)} \\ \Delta c_{ij} = c_{ij} - c_{n_{ij}} = \sum\limits_{\text{ⓚ}|\omega_k(\dot{x}_j,y_i)=1} \dfrac{\tilde{G}_k(\dot{x}_j,y_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}_{k0}\right)_i\right)} - \sum\limits_{\text{ⓚ}|\omega_k(\dot{x}_j,y_i)=1} \dfrac{\tilde{G}^n_k(\dot{x}_j,y_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i\right)} \\ \Delta d_{ij} = d_{ij} - d_{n_{ij}} = \sum\limits_{\text{ⓚ}|\omega_k(u_j,y_i)=0} \dfrac{\tilde{G}_k(u_j,y_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}_{k0}\right)_i\right)} - \sum\limits_{\text{ⓚ}|\omega_k(u_j,y_i)=0} \dfrac{\tilde{G}^n_k(u_j,y_i)}{\prod\limits_i \left(1-\left(\tilde{G}^n_{k0}\right)_i\right)} \end{cases}$$

Fin de la démonstration.

La procédure 2 est formulée de telle façon qu'elle peut être appliquée sur des modèles bond graph en causalité préférentielle intégrale présentant des boucles algébriques et/ou des éléments de stockage en causalité dérivée. Elle se base sur les travaux de Ngwompo [Ngw97] et Jardin [Jar10] (abordés brièvement dans l'annexe E) qui permettent la prise en compte des boucles algébriques (en absence d'élément de stockage d'énergie en causalité dérivée) lors de la détermination graphique de la représentation d'état. Néanmoins, ces travaux peuvent être généralisés

pour la détermination d'un modèle d'état associé à un modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale présentant des éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée.

Exemple. Considérons comme exemple le circuit électrique de la figure 2.8(a) dont le modèle bond graph initial est donné figure 2.8(b). Le vecteur d'état $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix}^T$ regroupe les variables d'énergie flux magnétique total associé à la bobine d'inductance L et charge associée au condensateur de capacité C. Nous supposons que la résistance, l'inductance et la capacité présentent des incertitudes paramétriques : $R = R_n + \Delta R$, $L = L_n + \Delta L$ et $C = C_n + \Delta C$. Le modèle bond graph incertain permettant la détermination de la représentation d'état canonique est donné figure 2.9. La représentation d'état canonique est donnée par le système d'équations 2.8. Les matrices intervenant dans cette représentation d'état sont déterminées, tout d'abord, par la procédure existante et ensuite par la procédure proposée (procédure 2).



(a) (b)

FIG. 2.8 – (a) Circuit électrique et (b) le modèle bond graph associé.

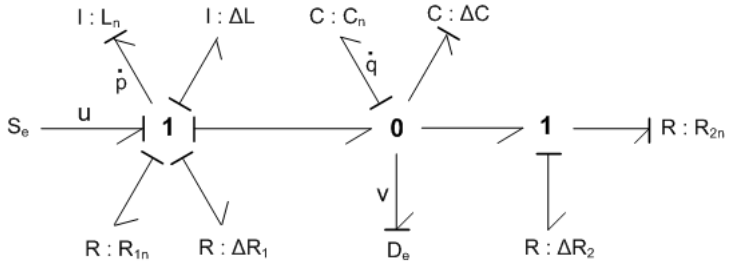


FIG. 2.9 – Modèle bond graph canonique associé au circuit électrique.

Détermination de la représentation canonique par la procédure existante
Selon les travaux de KAM et DAUPHIN-TANGUY [Kam01, Kam05], les matrices incertaines de la représentation d'état canonique s'expriment en fonction d'autres matrices (cf. annexe C) :

$$\begin{cases} \mathbf{A_n} = \mathbf{A_1} \\ \mathbf{\Delta A} = \mathbf{A_1}[\mathbf{W} - \mathbf{I}] + \mathbf{K_A M Q_A W} \\ \mathbf{B_n} = \mathbf{B_1} \\ \mathbf{\Delta B} = \mathbf{K_B M Q_B} \\ \mathbf{C_n} = \mathbf{C_1} \\ \mathbf{\Delta C} = \mathbf{C_1}[\mathbf{W} - \mathbf{I}] + \mathbf{K_C M Q_C W} \\ \mathbf{D_n} = \mathbf{D_1} \\ \mathbf{\Delta D} = \mathbf{K_D M Q_D} \end{cases} \tag{2.14}$$

À partir de l'analyse des gains des différents chemins causaux sur le modèle bond graph de la figure 2.9, il peut être déduit que : $\mathbf{A_n} = \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{1n}}{L_n} & -\frac{1}{C_n} \\ \frac{1}{L_n} & -\frac{1}{R_{2n}C_n} \end{bmatrix}$; $\mathbf{B_n} = \mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{C_n} =$

$\mathbf{C_1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_n} \end{bmatrix}$; $\mathbf{D_n} = \mathbf{D_1} = 0$; $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{L_n}{L_n+\Delta L} & 0 \\ 0 & \frac{C_n}{C_n+\Delta C} \end{bmatrix}$; $\mathbf{M} = \frac{1}{1+\frac{\Delta R_2}{R_{2n}}} \begin{bmatrix} 1+\frac{\Delta R_2}{R_{2n}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;
$\mathbf{K_A} = \mathbf{K_B} = \begin{bmatrix} -\Delta R_1 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta R_2}{R_{2n}} \end{bmatrix}$; $\mathbf{K_C} = \mathbf{K_D} = 0$; $\mathbf{Q_A} = \mathbf{Q_C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{2n}C_n} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{Q_B} = \mathbf{Q_D} = 0$.
Ainsi, les matrices $\mathbf{\Delta A}$, $\mathbf{\Delta B}$, $\mathbf{\Delta C}$ et $\mathbf{\Delta D}$ sont données par :
$\mathbf{\Delta A} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta L R_{1n} - \Delta R_1 L_n}{L_n(L_n+\Delta L)} & \frac{\Delta C}{C_n(C_n+\Delta C)} \\ -\frac{\Delta L}{L_n(L_n+\Delta L)} & \frac{\Delta C(R_{2n}+\Delta R_2)+\Delta R_2 C_n}{R_{2n}C_n(R_{2n}+\Delta R_2)(C_n+\Delta C)} \end{bmatrix}$; $\mathbf{\Delta B} = 0$; $\mathbf{\Delta C} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\Delta C}{C_n(C_n+\Delta C)} \end{bmatrix}$ et
$\mathbf{\Delta D} = 0$.

Détermination de la représentation canonique par la procédure 2
En appliquant la procédure 2, les matrices nominales ($\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_n}$, $\mathbf{C_n}$ et $\mathbf{D_n}$) peuvent être retrouvées à partir du modèle bond graph de la figure 2.9 si les variations paramétriques ΔR, ΔL et ΔC sont supposées nulles. Par rapport à la procédure existante (procédure 24, annexe C), ces matrices sont déterminées de la même manière (en analysant les mêmes chemins causaux). Les matrices incertaines sont calculées suivant la procédure 2 :

$$\mathbf{\Delta A} = \begin{bmatrix} \frac{-\frac{R_{1n}}{L_n}-\frac{\Delta R_1}{L_n}}{1+\frac{\Delta L}{L_n}} + \frac{R_{1n}}{L_n} & \frac{-\frac{1}{C_n}}{1+\frac{\Delta C}{C_n}} + \frac{1}{C_n} \\ \frac{\frac{1}{L_n}}{1+\frac{\Delta L}{L_n}} - \frac{1}{L_n} & \frac{-\frac{1}{R_{2n}C_n}}{\left(1+\frac{\Delta R_2}{R_{2n}}\right)\left(1+\frac{\Delta C}{C_n}\right)} + \frac{1}{R_{2n}C_n} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\Delta L R_{1n} - \Delta R_1 L_n}{L_n(L_n+\Delta L)} & \frac{\Delta C}{C_n(C_n+\Delta C)} \\ -\frac{\Delta L}{L_n(L_n+\Delta L)} & \frac{\Delta C(R_{2n}+\Delta R_2)+\Delta R_2 C_n}{R_{2n}C_n(R_{2n}+\Delta R_2)(C_n+\Delta C)} \end{bmatrix};$$

$\mathbf{\Delta B} = 0$; $\mathbf{\Delta C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\frac{1}{C_n}}{1+\frac{\Delta C}{C_n}} - \frac{1}{C_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\Delta C}{C_n(C_n+\Delta C)} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{\Delta D} = 0$.

Modèle standard d'interconnexion

Le modèle standard d'interconnexion (SIM) permet de séparer les valeurs nominales des paramètres du modèle dans une matrice $\mathbf{M}$, dite augmentée, et toutes les incertitudes relatives dans une matrice diagonale $\mathbf{\Delta}$ (figure 2.10). Des entrées w et des sorties z auxiliaires sont ajoutées afin de faire apparaître les incertitudes sous la forme d'un retour interne [Doy82, Saf82, Mor85].

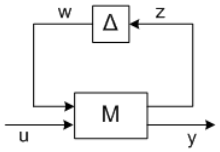


FIG. 2.10 – Modèle standard d'interconnexion.

Le modèle standard d'interconnexion d'un système linéaire incertain en boucle ouverte est décrit par le système d'équations suivant, avec $\mathbf{\Delta} = diag(\delta_i I_{n_i})$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A_n}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B_1}\mathbf{w}(t) + \mathbf{B_{2n}}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C_1}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D_{11}}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D_{12}}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C_{2n}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D_{21}}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D_{22n}}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{w}(t) = \Delta\mathbf{z}(t) \end{cases} \tag{2.15}$$

$\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^l$ (resp. $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^l$) est le vecteur d'entrée (resp. sortie) auxiliaire. δ_i représente l'i$^{\text{ème}}$ incertitude relative ($|\delta_i| \leq 1$) et n_i est la dimension de cette incertitude à savoir le nombre de

paires d'entrée/sortie auxiliaires associées à cette incertitude.

Le modèle standard d'interconnexion peut être déterminé à partir d'une représentation bond graph associée [Dau99b,Kam01,Kam05]. Avant d'établir le modèle standard d'interconnexion, il est nécessaire de vérifier si le système en question est propre, stabilisable et détectable. Sur une représentation bond graph, il est possible de vérifier graphiquement la propreté, la commandabilité et l'observabilité[3] des systèmes linéaires (procédures 30, 31 et 32 de l'annexe E). Ensuite, si la commandabilité et l'observabilité du système sont vérifiées alors il peut être déduit que le système est stabilisable et détectable [Bor93].

La modélisation d'un élément bond graph sous forme standard d'interconnexion dépend de la relation associée qui dépend elle-même de la causalité affectée. Ainsi, pour un même élément bond graph, le modèle standard d'interconnexion change quand on change sa causalité. Dans les travaux de Dauphin-Tanguy et Kam [Dau99b,Kam01,Kam05], il a été montré que le principe de la modélisation de tous les éléments bond graph est le même : il suffit de faire apparaître explicitement les incertitudes relatives dans l'expression de l'élément et de traduire cette relation en modèle bond graph. Pour ce faire, il faut rajouter des sources modulées (MS_e et MS_f) et des détecteurs (D_e et D_f). Les sources rajoutées sont associées à des entrées de signal et représentent la part de puissance liée à l'incertitude relative. Le SIM décrit par le système d'équations 2.15 peut être déduit du modèle bond graph incertain en remplaçant tous éléments bond graph présentant des incertitudes paramétriques par les modèles bond graph standard d'interconnexion (BG-SIM) associés. Les matrices $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_{2n}}$, $\mathbf{C_{2n}}$ et $\mathbf{D_{22n}}$ sont calculées de la même manière que celles d'un modèle bond graph nominal (cf. procédure 25, annexe E). En particulier, les coefficients des matrices $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{D_{11}}$, $\mathbf{D_{12}}$ et $\mathbf{D_{21}}$ sont calculés comme suit[4] :

$$\begin{cases} b_{1_{ij}} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(\omega_j,\dot{x}_i)=0} \tilde{G}_k(\omega_j,\dot{x}_i) \\ c_{1_{ij}} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(\dot{x}_j,z_i)=1} \tilde{G}_k(\dot{x}_j,z_i) \\ d_{11_{ij}} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(\omega_j,z_i)=0} \tilde{G}_k(\omega_j,z_i) \\ d_{12_{ij}} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(u_j,z_i)=0} \tilde{G}_k(u_j,z_i) \\ d_{21_{ij}} = \sum\limits_{ⓚ|\omega_k(\omega_j,y_i)=0} \tilde{G}_k(\omega_j,y_i) \end{cases}$$

où $\tilde{G}_k(\upsilon_i,\upsilon_j)$ correspond au gain statique du chemin causal ⓚ existant entre les variables υ_i et υ_j et dont l'ordre est $\omega_k(\upsilon_i,\upsilon_j)$. La matrice $\mathbf{\Delta}$ est une matrice diagonale contenant toutes les incertitudes relatives exprimées dans la partie signal du modèle bond graph incertain. La dimension de cette matrice est égale au nombre de paires de source/détecteur présents dans le modèle bond graph incertain.

Dans ce qui suit, les BG-SIM de certains éléments sont présentés. Pour plus de détails, le lecteur peut se reporter aux travaux de Dauphin-Tanguy et Kam [Dau99b,Kam01,Kam05].

[3] Sur un modèle bond graph, la propreté, la commandabilité et l'observabilité sont vérifiées au niveau d'analyse BG-structurel.

[4] Dans ce calcul, il est supposé que le modèle bond graph incertain ne présente ni boucle algébrique, ni élément de stockage en causalité dérivée. Néanmoins, ce calcul peut être étendu à ces cas en appliquant les résultats de Ngwompo [Ngw97] et Jardin [Jar10] (abordés dans la section 2.1.3 et dans l'annexe E) et ce, en tenant compte des boucles d'ordre 0.

BG-SIM d'un élément R 1-port en causalité résistance : Considérons l'élément incertain R en causalité résistance dont le paramètre associé est la somme d'une valeur nominale R_n et d'une incertitude ΔR. La relation caractérisant cet élément est donnée par :

$$e_R = (R_n + \Delta R)\, f_R = R_n\,(1 + \delta_R)\, f_R \tag{2.16}$$

où $\delta_R = \frac{\Delta R}{R_n}$ est l'incertitude relative. Le BG-SIM associé est donné figure 2.11(a).

BG-SIM d'un élément I 1-port en causalité intégrale : Considérons l'élément incertain I en causalité intégrale dont le paramètre associé est la somme d'une valeur nominale I_n et d'une incertitude ΔI. La relation associée s'écrit sous la forme suivante :

$$f_I = \frac{1}{I_n + \Delta I} p = \frac{1}{I_n}\left(1 + \delta_{1/I}\right) p \tag{2.17}$$

où $\delta_{1/I} = -\frac{\Delta I}{I_n + \Delta I}$ est l'incertitude relative. Le BG-SIM associé est donné figure 2.11(b).

(a) (b)

FIG. 2.11 – BG-SIM (a) d'un élément R en causalité résistance et (b) d'un élément I en causalité intégrale.

BG-SIM d'un élément TF 2-ports en causalité m : Considérons l'élément incertain TF 2-ports en causalité m caractérisé par le système d'équations 2.9. Ces relations peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} e_1 = m_n\,(1 + \delta_{TF})\, e_2 \\ f_2 = m_n\,(1 + \delta_{TF})\, f_1 \end{cases} \tag{2.18}$$

où $\delta_{TF} = \frac{\Delta m}{m_n}$ est l'incertitude relative. Le BG-SIM associé est donné figure 2.12.

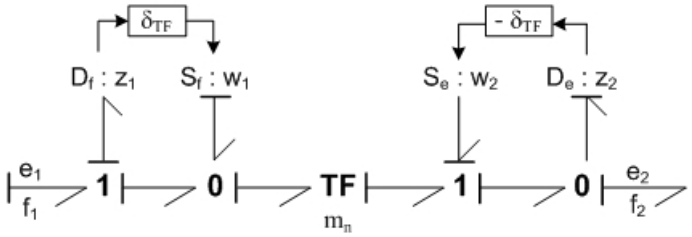


FIG. 2.12 – BG-SIM d'un élément TF 2-ports en causalité m.

Il peut être déduit, à partir de ces représentations bond graph, que la matrice Δ contient des signes (-) ce qui affecte les matrices $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{D_{11}}$, $\mathbf{D_{12}}$ et $\mathbf{D_{21}}$ par rapport à l'approche classique (représentation d'état).

Remarque : Il est à noter que pour le même système, la somme $y + \Delta y$ trouvée à partir du modèle bond graph incrémental est différente de la sortie du modèle bond graph incertain (modèle

canonique ou modèle standard d'interconnexion). Ceci est dû au fait que le modèle bond graph incrémental est une approximation du premier ordre alors que le modèle bond graph incertain est un modèle exact.

2.2 Contribution à la représentation bond graph du Modèle Standard d'Interconnexion : éléments 1-port et éléments TF et GY 2-ports

Dans cette section, nous proposons une procédure alternative pour retrouver graphiquement le modèle standard d'interconnexion [El 10]. Par rapport à la méthode décrite dans la section 2.1.3, l'avantage de cette procédure alternative est la simplification graphique du modèle bond graph incertain résultant. Ce travail concerne des systèmes linéaires et invariants dans le temps (hypothèse 2, page 16) à paramètres indépendants (hypothèse 4, page 33) et dont les facteurs incertains sont des incertitudes paramétriques (hypothèse 3, page 33) qui n'affectent pas l'ordre du modèle (hypothèse 5, page 40). Ainsi, sur le modèle bond graph associé, les incertitudes considérées sont uniquement des incertitudes sur les éléments bond graph passifs (hypothèse 6, page 40).

2.2.1 Éléments 1-port

La représentation bond graph alternative du modèle standard d'interconnexion associée aux éléments bond graph 1-port est traitée élément par élément :

- Pour un élément R incertain en causalité résistance, l'incertitude relative est donnée par $\delta_R = \frac{w}{z} = \frac{\Delta R}{R_n}$ (équation 2.16) et le BG-SIM associé est présenté figure 2.13(a). Pour un élément R incertain en causalité conductance, la relation associée peut être écrite sous la forme suivante :
$$f_R = \frac{1}{R_n + \Delta R} e_R = \frac{1}{R_n}\left(1 + \delta_{1/R}\right) e_R$$
où $\delta_{1/R} = \frac{w}{z} = -\frac{\Delta R}{R_n + \Delta R}$ est l'incertitude relative. Le BG-SIM associé est donné figure 2.13(b).

(a) (b)

FIG. 2.13 – BG-SIM d'un élément R en causalité (a) résistance et (b) conductance.

- Pour un élément I incertain en causalité intégrale, l'incertitude relative est égale à $\delta_{1/I} = \frac{w}{z} = -\frac{\Delta I}{I_n + \Delta I}$ (équation 2.17) et le BG-SIM associé est donné figure 2.14(a). Un élément I incertain en causalité dérivée est caractérisé par la relation suivante :
$$p = (I_n + \Delta I) f_I = I_n \left(1 + \delta_I\right) f_I$$
où $\delta_I = \frac{w}{z} = \frac{\Delta I}{I_n}$ est l'incertitude relative. Le BG-SIM associé est donné figure 2.14(b).
- Pour un élément C incertain en causalité intégrale dont le paramètre associé est la somme d'une valeur nominale C_n et d'une incertitude ΔC, la relation associée est définie par :
$$e_C = \frac{1}{C_n + \Delta C} q = \frac{1}{C_n}\left(1 + \delta_{1/C}\right) q$$

(a) (b)

FIG. 2.14 – BG-SIM d'un élément I en causalité (a) intégrale et (b) dérivée.

où $\delta_{1/C} = \frac{w}{z} = -\frac{\Delta C}{C_n+\Delta C}$ est l'incertitude relative. Le BG-SIM associé est donné figure 2.15(a). L'équation mathématique décrivant un élément C incertain en causalité dérivée peut être écrite comme suit :

$$q = (C_n + \Delta C)e_C = C_n\,(1 + \delta_C)\,e_C$$

où $\delta_C = \frac{w}{z} = \frac{\Delta C}{C_n}$ est l'incertitude relative. Le BG-SIM associé est donné figure 2.15(b).

(a) (b)

FIG. 2.15 – BG-SIM d'un élément C en causalité (a) intégrale et (b) dérivée.

Comparée à l'approche existante (section 2.1.3), la première étape est inchangée : faire apparaître les incertitudes relatives dans les relations mathématiques. Néanmoins, l'entrée/sortie auxiliaire est une variable interne qu'il suffit de faire apparaître sur le modèle bond graph. Elle apparaît quand l'élément bond graph est dissocié en un élément nominal et un élément incertain (de même nature que l'élément initial). La sortie (resp. l'entrée) auxiliaire correspond à une variable de puissance associée à l'élément nominal (resp. incertain) : c'est la variable de puissance sortante de l'élément nominal (resp. incertain). Le BG-SIM de chaque élément bond graph doit vérifier la relation associée à l'élément initial. Ainsi, le BG-SIM dépend de la causalité affectée à l'élément initial. Les deux éléments (nominal et incertain) ont la même causalité qui correspond à la causalité de l'élément initial. L'incertitude relative n'apparaît pas explicitement sur le modèle bond graph du fait qu'une seule jonction est considérée sur le BG-SIM mais elle reste égale à la fraction $\frac{w}{z}$. Considérons comme exemple un élément dissipatif R en causalité résistance. Cet élément peut être représenté par deux schémas bloc (figure 2.16(a) et figure 2.16(b)). Le premier schéma bloc (figure 2.16(a)) fait apparaître explicitement l'incertitude relative. Le modèle bond graph équivalent contient nécessairement deux joncions et l'incertitude relative est représentée par une partie signal parce qu'elle correspond à une relation entre deux variables de puissance de même nature (variables d'effort dans ce cas). Ainsi, le modèle bond graph équivalent correspond au BG-SIM trouvé par la procédure décrite dans la section 2.1.3. Sur le second schéma bloc, l'incertitude relative n'apparaît pas explicitement. Le modèle bond graph équivalent ne contient qu'une seule jonction mais la relation entre w et z ne peut être exprimée directement à partir du modèle bond graph causal. Ainsi, le modèle bond graph équivalent correspond au BG-SIM trouvé par la procédure alternative proposée ci-dessus. Il peut donc être déduit que la simplification de la structure du modèle engendre la perte de la lecture directe de l'incertitude relative à partir du modèle bond graph. Néanmoins, comme l'incertitude relative est connue dès la première étape

de la procédure, ce résultat demeure intéressant.

FIG. 2.16 – Schémas bloc associés à un élément dissipatif R en causalité résistance.

Remarque : Cette nouvelle procédure duplique les éléments de stockage d'énergie (I et C) en causalité intégrale. Néanmoins, si la causalité dérivée est affectée au BG-SIM des éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale (figures 2.14(a) et 2.15(a)), il peut être remarqué qu'un seul élément de stockage d'énergie passe en causalité dérivée (figures 2.17). Ainsi, il peut être conclu que l'élément nominal et l'élément incertain sont dépendants dynamiquement.

FIG. 2.17 – Affectation de la causalité dérivée aux éléments de stockage d'énergie (a) I et (b) C initialement en causalité intégrale.

2.2.2 Éléments TF et GY 2-ports

Comme pour les éléments 1-port, la représentation bond graph du modèle standard d'interconnexion associée aux éléments TF et GY 2-ports est traitée élément par élément et selon la causalité affectée :

- Pour l'élément TF incertain en causalité m, l'incertitude relative est égale à $\delta_{TF} = \frac{\omega_1}{z_1} = \frac{\omega_2}{z_2} = \frac{\Delta m}{m_n}$ (déduite à partir du système d'équations 2.18) et le BG-SIM associé donné figure 2.18(a). Pour un élément TF incertain en causalité $\frac{1}{m}$, les relations associées sont définies par :

$$\begin{cases} e_2 = \frac{1}{m_n+\Delta m} e_1 = \frac{1}{m_n}\left(1+\delta_{1/TF}\right) e_1 \\ f_1 = \frac{1}{m_n+\Delta m} f_2 = \frac{1}{m_n}\left(1+\delta_{1/TF}\right) f_2 \end{cases}$$

  où $\delta_{1/TF} = \frac{\omega_1}{z_1} = \frac{\omega_2}{z_2} = -\frac{\Delta m}{m_n+\Delta m}$ est l'incertitude relative. Le BG-SIM associé est donné figure 2.18(b).
- Pour un élément GY incertain en causalité r, les relations mathématiques associées sont définies par :

$$\begin{cases} e_1 = (r_n + \Delta r) f_2 = r_n\left(1+\delta_{GY}\right) f_2 \\ e_2 = (r_n + \Delta r) f_1 = r_n\left(1+\delta_{GY}\right) f_1 \end{cases}$$

  Le BG-SIM associé est donné figure 2.19(a) où $\delta_{GY} = \frac{\omega_1}{z_1} = \frac{\omega_2}{z_2} = \frac{\Delta r}{r_n}$ est l'incertitude

relative. Un élément GY incertain en causalité $\frac{1}{m}$ peut être décrit par les relations suivantes :

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{r_n+\Delta r} e_2 = r_n \left(1+\delta_{1/GY}\right) e_2 \\ f_2 = \frac{1}{r_n+\Delta r} e_1 = r_n \left(1+\delta_{1/GY}\right) e_1 \end{cases}$$

Le BG-SIM associé est donné figure 2.19(b) où $\delta_{1/GY} = \frac{\omega_1}{z_1} = \frac{\omega_2}{z_2} = -\frac{\Delta r}{r_n+\Delta r}$ est l'incertitude relative.

FIG. 2.18 – BG-SIM d'un élément TF en causalité (a) m et (b) $\frac{1}{m}$.

FIG. 2.19 – BG-SIM d'un élément GY en causalité (a) r et (b) $\frac{1}{r}$.

Comme pour les éléments 1-port, un élément TF ou un élément GY est dissocié en un élément nominal et un élément incertain. Cependant, pour ces éléments, malgré le fait qu'ils sont caractérisés par un seul paramètre incertain, une unique paire d'E/S auxiliaires ne sera pas suffisante. En effet, si une unique paire d'E/S auxiliaires est considérée, la valeur incertaine apparaîtra dans la matrice d'interconnexion $\mathbf{M}$ et par conséquent, le principe de modélisation standard d'interconnexion ne sera pas respecté. Ainsi, les BG-SIM des éléments TF et GY contiennent nécessairement chacun deux paires d'E/S auxiliaires. Les variables de puissance sortantes de l'élément nominal (resp. incertain) correspondent aux sorties z (resp. entrées w) auxiliaires. L'élément nominal et l'élément incertain ont la même causalité qui correspond à la causalité de l'élément initial. L'incertitude relative n'est pas déduite en exploitant la causalité mais elle est égale aux fractions $\frac{\omega_1}{z_1} = \frac{\omega_2}{z_2}$. Le type des jonctions rajoutées dépend de la causalité affectée et est tel que le BG-SIM résultant vérifie les relations associées à l'élément non décomposé.

Remarque : Le modèle standard d'interconnexion décrit par le système d'équations 2.15 peut être déduit directement à partir du modèle bond graph incertain après la substitution de tous les éléments dont les paramètres présentent une incertitude par les modèles bond graph standard d'interconnexion associés comme il a été expliqué dans la section 2.1.3. La dimension de la matrice $\mathbf{\Delta}$ correspond au nombre de paires d'E/S auxiliaires associées aux incertitudes relatives.

Exemple. Considérons le moteur à courant continu donné figure 2.20. Le vecteur d'état $\mathbf{x} = [p_1 \;\; p_2]^T$ est constitué des variables d'énergie associées à la bobine d'inductance L et à

l'inertie J. Nous supposons que tous les paramètres du système (R, L, k, J et b) sont des paramètres incertains : $R = R_n + \Delta R$; $L = L_n + \Delta L$; $k = k_n + \Delta k$; $J = J_n + \Delta J$ et $b = b_n + \Delta b$. Le modèle bond graph nominal associé est donné figure 2.21. La propreté, la commandabilité (et par conséquent la stabilisabilité) et l'observabilité (et par conséquent la détectabilité) de ce modèle bond graph sont vérifiées avec les procédures 30, 31 et 32 (cf. section E.3.4 de l'annexe E). Ainsi, le modèle standard d'interconnexion peut être construit. La procédure existante (section 2.1.3) et la nouvelle procédure sont appliquées pour déterminer le modèle standard d'interconnexion.

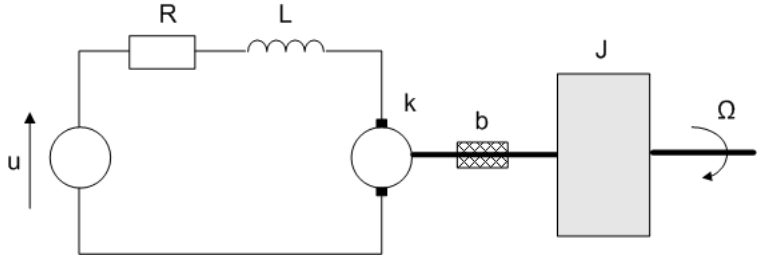


FIG. 2.20 – Schéma technologique du moteur à courant continu.

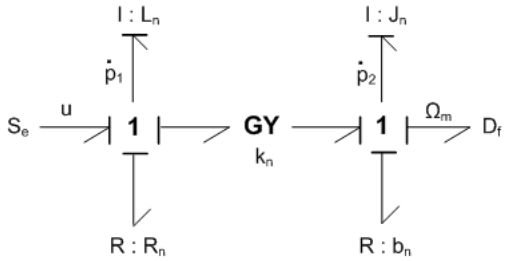


FIG. 2.21 – Modèle bond graph nominal causal associé au moteur à courant continu.

Modèle bond graph incertain selon l'approche existante : En appliquant la procédure existante, le modèle bond graph obtenu est donné par la figure 2.22. Les vecteurs d'E/S auxiliaires sont définis par : $\omega = \begin{bmatrix} \omega_R & \omega_b & \omega_L & \omega_J & \omega_1 & \omega_2 \end{bmatrix}^T$ et $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_R & z_b & z_L & z_J & z_1 & z_2 \end{bmatrix}^T$. Le modèle standard d'interconnexion est décrit par le système d'équations 2.15, où :
$\mathbf{A_n} = \begin{bmatrix} -\frac{R_n}{L_n} & -\frac{k_n}{J_n} \\ \frac{k_n}{L_n} & -\frac{b_n}{J_n} \end{bmatrix}$; $\mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & R_n & k_n & 0 & k_n \\ 0 & 1 & -k_n & b_n & k_n & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B_{2n}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{C_{2n}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_n} \end{bmatrix}$;
$\mathbf{C_1} = \begin{bmatrix} \frac{R_n}{L_n} & 0 \\ 0 & \frac{b_n}{J_n} \\ \frac{1}{L_n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_n} \\ \frac{1}{L_n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_n} \end{bmatrix}$; $\mathbf{D_{11}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -R_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{D_{21}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et
$\mathbf{D_{12}} = \mathbf{D_{22n}} = 0$. $\mathbf{\Delta} = diag\left(-\delta_R, -\delta_b, -\delta_{1/L}, -\delta_{1/J}, \delta_{GY}, -\delta_{GY}\right)$; tel que : $\delta_R = \frac{\Delta R}{R_n}$; $\delta_b = \frac{\Delta b}{b_n}$; $\delta_{1/L} = -\frac{\Delta L}{L_n + \Delta L}$; $\delta_{1/J} = -\frac{\Delta J}{J_n + \Delta J}$; $\delta_{GY} = \frac{\Delta k}{k_n}$.

Modèle bond graph incertain selon la nouvelle procédure : En appliquant la nouvelle procédure, le modèle bond graph obtenu est donné figure 2.23. Les vecteurs d'E/S auxiliaires sont donnés par $\omega' = \begin{bmatrix} \omega'_R & \omega'_b & \omega'_L & \omega'_J & \omega'_1 & \omega'_2 \end{bmatrix}^T$ et $\mathbf{z'} = \begin{bmatrix} z'_R & z'_b & z'_L & z'_J & z'_1 & z'_2 \end{bmatrix}^T$. Le modèle standard d'interconnexion associé est décrit par le système d'équations 2.15, où :

$$\mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -R_n & -k_n & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k_n & -b_n & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{D_{11}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{C_1} = \begin{bmatrix} \frac{R_n}{L_n} & 0 \\ 0 & \frac{b_n}{J_n} \\ \frac{1}{L_n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_n} \\ 0 & \frac{k_n}{J_n} \\ \frac{k_n}{L_n} & 0 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{D_{21}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\mathbf{\Delta} = diag\left(\delta_R, \delta_b, \delta_L, \delta_J, \delta_1, \delta_2\right)$; tel que : $\delta_R = \frac{\Delta R}{R_n}$; $\delta_b = \frac{\Delta b}{b_n}$; $\delta_L = -\frac{\Delta L}{L_n + \Delta L}$; $\delta_J = -\frac{\Delta J}{J_n + \Delta J}$; $\delta_1 = \delta_2 = \frac{\Delta k}{k_n}$. Les matrices $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_{2n}}$, $\mathbf{C_{2n}}$, $\mathbf{D_{12}}$, $\mathbf{D_{22n}}$ sont inchangées.

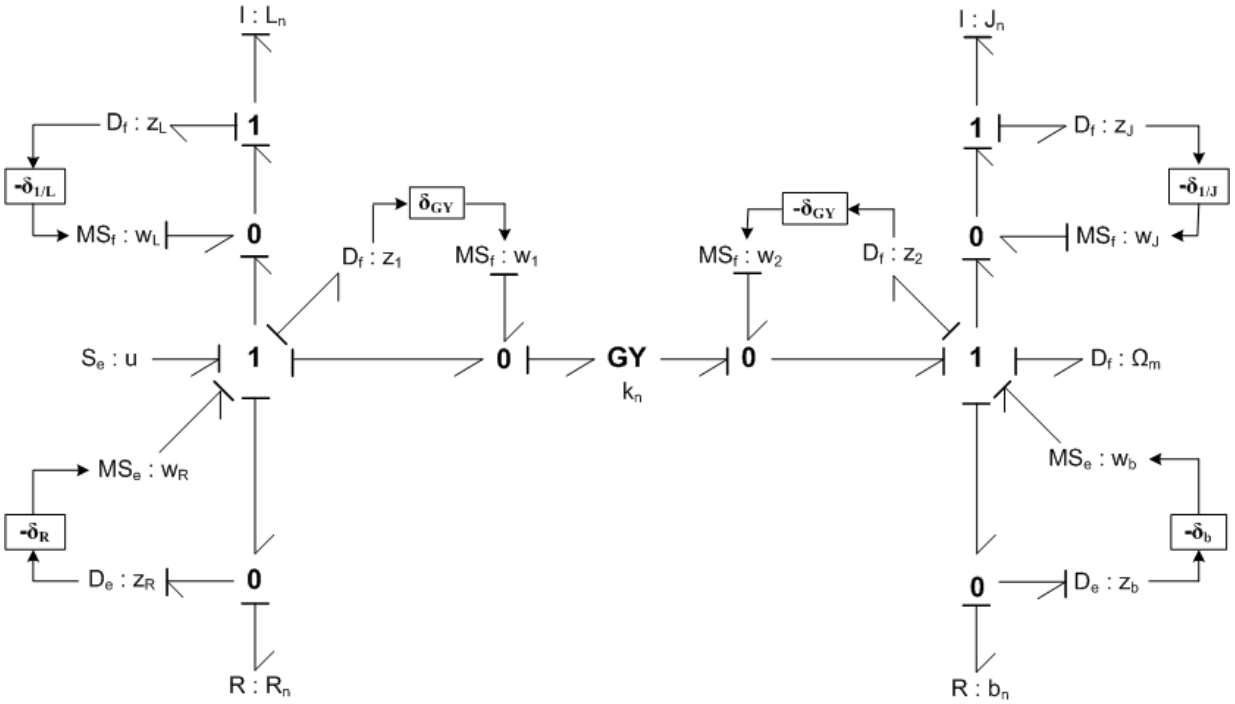


FIG. 2.22 – Modèle bond graph incertain du moteur à courant continu selon la procédure existante.

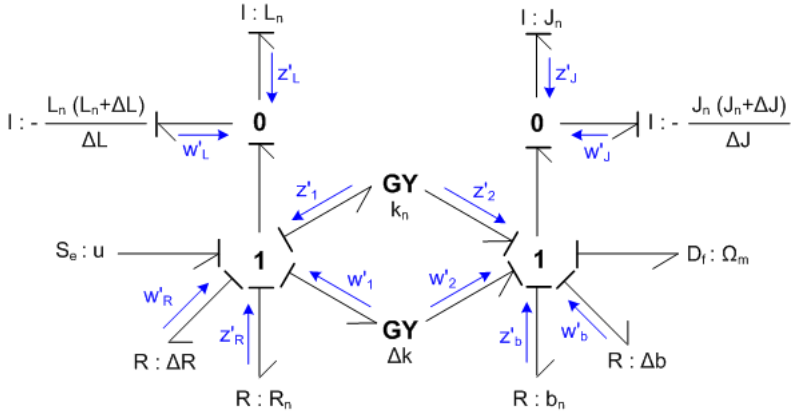
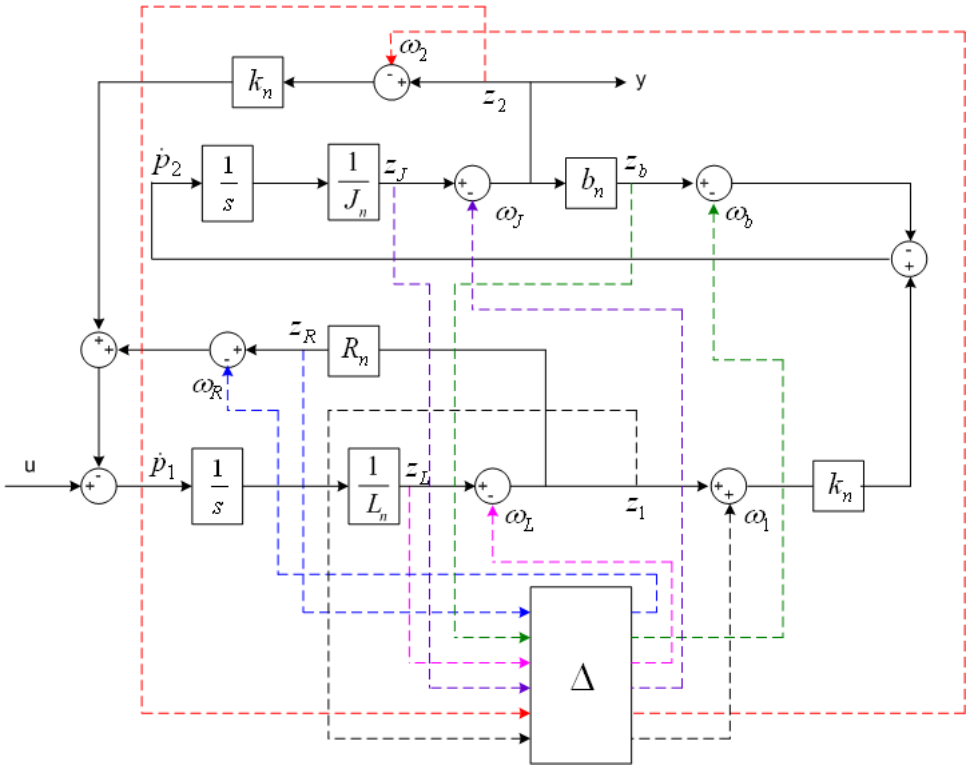
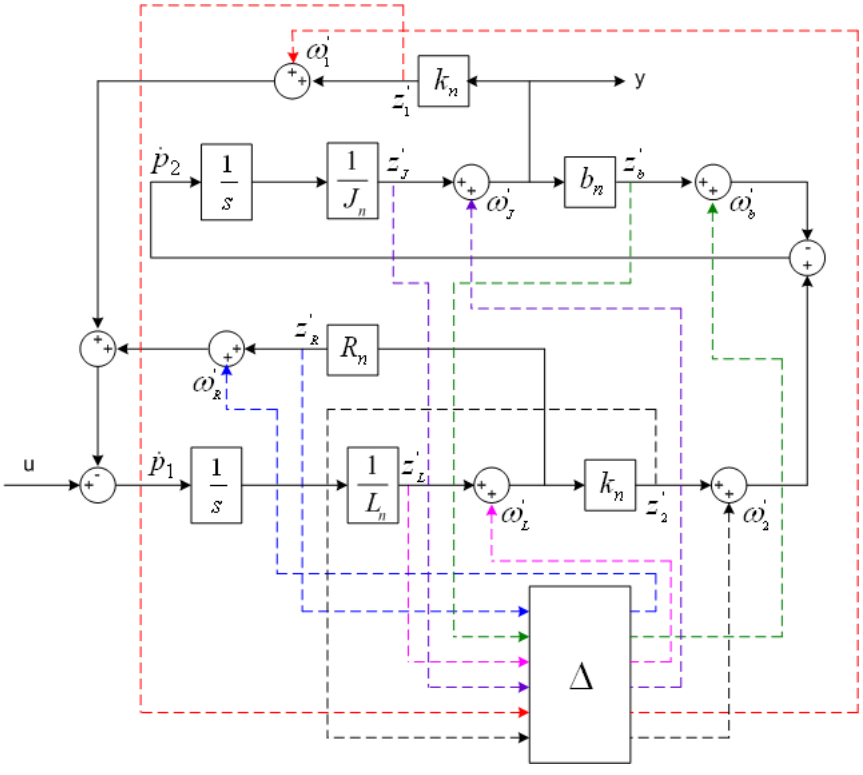


FIG. 2.23 – Le modèle bond graph incertain du moteur à courant continu selon la nouvelle procédure.



(a)



(b)

FIG. 2.24 – Schémas bloc du moteur à courant continu présentant des incertitudes paramétriques.

Si les résultats trouvés par les deux procédures sont comparés alors quelques différences dans les matrices $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{D_{11}}$ et $\mathbf{D_{21}}$ peuvent être observées. Ces différences sont dues à des schémas de calcul différents illustrés par les schémas bloc associés aux modèles bond graph (figure 2.22 et 2.23). Le modèle bond graph causal trouvé par la procédure existante est équivalent au schéma

bloc illustré par la figure 2.24(a) avec $\mathbf{\Delta} = diag\left(-\frac{\Delta R}{R_n}, -\frac{\Delta b}{b_n}, \frac{\Delta L}{L_n+\Delta L}, \frac{\Delta J}{J_n+\Delta J}, \frac{\Delta k}{k_n}, -\frac{\Delta k}{k_n}\right)$ et le modèle bond graph causal trouvé par la nouvelle procédure est équivalent au schéma bloc illustré par la figure 2.24(b) avec $\mathbf{\Delta} = diag\left(\frac{\Delta R}{R_n}, \frac{\Delta b}{b_n}, -\frac{\Delta L}{L_n+\Delta L}, -\frac{\Delta J}{J_n+\Delta J}, \frac{\Delta k}{k_n}, \frac{\Delta k}{k_n}\right)$. Les différences résident en des schémas bloc différents représentant le couplage électromécanique de paramètre k : en effet, sur la figure 2.24(a) si nous observons de près la partie représentant le couplage électromécanique (caractérisé par le paramètre k) alors nous remarquons que le sommateur apparaît avant le bloc de paramètre k_n contrairement au second schéma bloc (figure 2.24(b)) où le bloc de paramètre k_n intervient après le sommateur. Cette différence revient à des choix différents d'E/S auxiliaires. Comme il a été suggéré par un membre du jury, en permutant les entrées (resp. sorties) auxiliaires ω_1' et ω_2' (resp. z_1' et z_2') associées à l'incertitude paramétrique sur le gyrateur, les matrices $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$ et $\mathbf{D_{11}}$ des deux modèles standard d'interconnexion ont une structure complètement équivalente en terme de position des éléments nuls.

2.3 Contribution à la représentation bond graph du Modèle Standard d'Interconnexion : éléments multiport

Dans le contexte de la représentation bond graph du modèle standard d'interconnexion et à l'exception des transducteurs (TF et GY) 2-ports, le cas des éléments multiport n'a pas été traité. Ainsi, dans cette section, nous proposons d'établir les BG-SIM des éléments multiport[5] dissipatifs (R) et de stockage d'énergie (I et C). Plus de détails sur ces éléments multiport et sur leurs propriétés liées à la physique sont fournis dans l'annexe D.

En présence d'incertitudes paramétriques, un élément multiport linéaire est caractérisé par une matrice constitutive contenant les paramètres incertains. Ainsi, en procédant de la même manière que pour les éléments 1-port et les transducteurs 2-ports, le BG-SIM associé doit faire apparaître une ou plusieurs paire(s) d'entrée(s)/sortie(s) auxiliaire(s) associée(s) à chaque paramètre incertain figurant dans la matrice constitutive. Néanmoins, l'identification de ces E/S auxiliaires s'est avérée difficile. Pour cette raison, nous proposons que la détermination du BG-SIM d'un élément multiport soit basée sur une décomposition de ce dernier. Ainsi, dans une première partie, nous abordons la décomposition des éléments multiport tout en proposant deux nouvelles procédures de décomposition (procédures 3 et 4). Ensuite, la détermination des BG-SIM des éléments multiport est établie par deux procédures : une procédure basée sur la décomposition canonique (procédure 5) et une autre basée sur la décomposition dite auxiliaire (procédure 6).

2.3.1 Décomposition des éléments multiport

Dans cette section, nous montrons dans une première partie le besoin de procéder à une décomposition de l'élément multiport (R, I ou C) pour faire apparaître les E/S auxiliaires sur le BG-SIM. Dans une seconde partie, nous rappelons les décompositions existantes dans la littérature [Bre84b, Bre84a, Bre95, Kub96b, Kub96a] et nous proposons deux nouvelles décompotions : la *décomposition canonique congruente étendue* et la *décomposition auxiliaire*.

La décomposition : étape préliminaire pour la modélisation standard d'interconnexion

La décomposition des éléments multiport est un outil pour diverses exploitations des modèles bond graph comme la simplification, l'analyse structurelle, etc... Dans le contexte de la représentation bond graph du modèle standard d'interconnexion, le besoin de décomposer l'élément multiport vient du fait qu'il ne semble pas évident d'identifier, sur le modèle bond graph,

[5] Les éléments multiport (R, I et C) sont désignés aussi par les champs dissipatifs (R) et les champs de stockage d'énergie (I et C).

les E/S auxiliaires associées à chaque paramètre incertain apparaissant dans les relations associées à l'élément multiport. Afin d'illustrer ce fait, considérons l'élément R 2-ports en causalité résistance donné figure 2.25(a). Pour cet élément, les paramètres r_{ij} ; $i, j = \{1, 2\}$; figurant dans les relations mathématiques sont des paramètres incertains : $r_{ij} = r_{ij_n} + \Delta r_{ij}$, où r_{ij_n} est la valeur nominale et Δr_{ij} est la valeur incertaine. Ainsi, en appliquant les étapes de la modélisation bond graph standard d'interconnexion des éléments 1-port et des transducteurs 2-ports (section 2.2), l'élément multiport est dissocié en un élément nominal et un élément incertain (figure 2.25(b)) et il peut être déduit que :

$$\begin{cases} e_3 = r_{11_n} f_1 + r_{12_n} f_2 \\ e_5 = r_{21_n} f_1 + r_{22_n} f_2 \\ e_4 = \Delta r_{11} f_1 + \Delta r_{12} f_2 \\ e_6 = \Delta r_{21} f_1 + \Delta r_{22} f_2 \end{cases}$$

où e_3 et e_5 (resp. e_4 et e_6) représentent les variables de puissance sortantes de l'élément R 2-ports nominal (resp. incertain). Ces variables dépendent chacune de deux paramètres nominaux (resp. incertains) et par conséquent, les fractions $\frac{e_4}{e_3}$ et $\frac{e_6}{e_5}$ sont différentes des incertitudes relatives des paramètres. Par ailleurs, il ne semble pas systématique de trouver des combinaisons de variables de puissance qui correspondent à des E/S auxiliaires. Le même problème est observé pour différents éléments multiport en différentes configurations causales d'où le besoin d'une décomposition pour résoudre le problème.

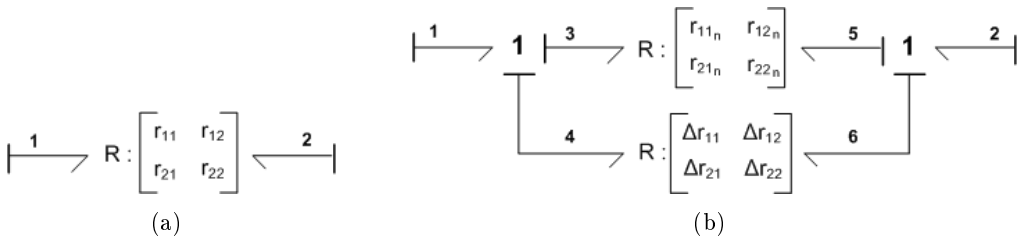


FIG. 2.25 – Élément R 2-ports en causalité résistance.

Procédures de décomposition

Dans le contexte de la représentation bond graph du modèle standard d'interconnexion, nous avons noté le besoin d'une décomposition des éléments multiport (R, I et C) afin d'associer un couple d'E/S auxiliaires à chaque paramètre incertain et par conséquent, de traiter chaque paramètre incertain indépendamment les uns des autres : associer une incertitude relative à chaque paramètre. Dans la littérature, deux types de décomposition existent : décompositions canoniques et décomposotion récurrente.

Décompositions canoniques

Il a été démontré dans les travaux de BREEDVELD [Bre84b] que dans le cas linéaire, un élément multiport peut toujours être décomposé en des éléments 1-port connectés par une structure de jonction. La décomposition est désignée par décomposition canonique si le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour caractériser l'élément multiport est égal au nombre d'éléments obtenus par la décomposition [Bre95, Bre08]. Deux types de décomposition canonique ont été établis [Bre95, Bre84b] :

- *Décomposition canonique directe ou immédiate* : L'élément multiport est décomposé en des éléments 1-port connectés par une structure de jonction simple (jonctions 0 ou 1).
- *Décomposition canonique congruente* : L'élément multiport est décomposé en des éléments 1-port connectés par une structure de jonction généralisée et plus précisément via un trans-

formateur multiport linéaire (figure 2.26) où $\mathbf{T}$ est une matrice symétrique triangulaire :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ t_{12} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ t_{1m} & \dots & t_{(m-1)m} & 1 \end{bmatrix}$$

Le transformateur multiport linéaire (figure 2.26) peut être décomposé en des transformateurs 2-ports connectés par une structure de jonction simple [Bre84b]. La décomposition canonique congruente sera utilisée dans la section 2.3.2 pour déterminer les BG-SIM des éléments multiport.

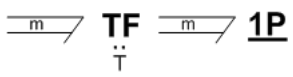


FIG. 2.26 – Décomposition canonique congruente des éléments multiport (R, I ou C).

Décomposition récurrente
L'élément n-ports peut être décomposé, dans une première étape, en un élément (n-1)-ports connecté à un élément 1-port par une structure de jonction généralisée [Kub96b, Kub96a]. Dans une deuxième étape, l'élément (n-1)-ports résultant de l'étape précédente peut être décomposé en un élément (n-2)-ports connecté à un élément 1-port par une structure de jonction généralisée. Cette opération peut être reproduite jusqu'à ce que l'élément multiport doit être décomposé en n éléments 1-port. Des conditions mathématiques doivent être respectées à chaque étape de la décomposition : la transition d'une étape à la suivante est caractérisée par le rajout de conditions supplémentaires.

Remarque : Une décomposition d'un élément multiport dépend de la causalité affectée à cet élément.

À présent, nous proposons deux nouvelles décompositions (décomposition canonique congruente étendue et décomposition auxiliaire) afin de pouvoir associer un couple d'E/S auxiliaires à chaque paramètre figurant dans la matrice constitutive de l'élément multiport. Dans la suite, on désignera par :

- causalité simple (resp. mixte) une même causalité (resp. une causalité différente) affectée aux différents ports d'un élément multiport,
- $\mathbf{R}_{\{\mathbf{R},\mathbf{C},\mathbf{M}\}}$ la matrice résultante de l'écriture causale de la relation constitutive de l'élément multiport R : $\mathbf{R_R}$ (resp. $\mathbf{R_C}$, $\mathbf{R_M}$) pour l'affectation d'une causalité résistance (resp. conductance, mixte) à l'élément multiport R.

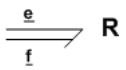


FIG. 2.27 – Elément multiport R.

Décomposition canonique congruente étendue
Cette décomposition ne concerne que les éléments R multiport (figure 2.27). Comme pour la décomposition canonique congruente, la version étendue permet de décomposer l'élément R multiport en des éléments 1-port connectés par une structure de jonction généralisée. Néanmoins, quand une causalité simple est affectée à l'élément R multiport, les gyrateurs sont utilisés dans

cette version étendue, ce qui n'est pas le cas pour la décomposition classique qui n'utilise que des transformateurs.

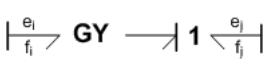
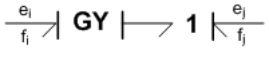
Procédure 3. *La décomposition d'un élément R multiport peut être établie comme suit :*

- ***Étape 1** : connecter l'$i^{ème}$ lien de l'élément R multiport initial à une jonction J_i. Le type de cette jonction dépend de la causalité affectée à l'$i^{ème}$ lien (cf. tableau 2.2).*
- ***Étape 2** : connecter un élément R 1-port à chaque jonction J_i. Le paramètre associé dépend de la causalité affectée à l'$i^{ème}$ lien (cf. tableau 2.2). $r_{\{R,C,M\}ii}$ correspond au paramètre apparaissant sur l'$i^{ème}$ ligne et l'$i^{ème}$ colonne de la matrice $\mathbf{R}_{\{\mathbf{R},\mathbf{C},\mathbf{M}\}}$ (matrice résultante de l'écriture causale de la relation constitutive).*
- ***Étape 3** : affecter à l'$i^{ème}$ élément R 1-port la même causalité que celle affectée à l'$i^{ème}$ lien de l'élément R multiport initial.*
- ***Étape 4** : connecter chaque jonction J_i à chaque jonction J_j $(j > i)$ avec un transducteur tel que le lien est orienté de J_i à J_j. Le type du transducteur dépend de la causalité affectée aux $i^{ème}$ et $j^{ème}$ liens (cf. tableau 2.3).*

TAB. 2.2 – Décomposition canonique congruente étendue : éléments R

Causalité	Jonction J_i $i = \{1, \ldots, m\}$	paramètre associé de l'i^{ème} élément R 1-port
Résistance	1	$r_{\{R,C,M\}ii}$
Conductance	0	$\frac{1}{r_{\{R,C,M\}ii}}$

TAB. 2.3 – Décomposition canonique congruente étendue : transducteurs.

Couplage entre les jonctions i et j		Transducteur	Paramètre associé	Relations mathématiques
Même causalité sur les liens i et j	Résistance		$r_{\{R,C,M\}ij}$	$\begin{cases} e_i = r_{\{R,C,M\}ij} f_j \\ -e_j = r_{\{R,C,M\}ij} f_i \end{cases}$
	Conductance		$-\frac{1}{r_{\{R,C,M\}ij}}$	$\begin{cases} f_i = r_{\{R,C,M\}ij} e_j \\ f_j = -r_{\{R,C,M\}ij} e_i \end{cases}$
Causalités différentes sur les liens i et j			$r_{\{R,C,M\}ij}$	$\begin{cases} e_i = r_{\{R,C,M\}ij} e_j \\ f_j = r_{\{R,C,M\}ij} f_i \end{cases}$

Démonstration. Afin de démontrer cette procédure de décomposition, il est nécessaire et suffisant de démontrer que la relation associée à la décomposition obtenue est équivalente à celle de l'élément multiport initial. Pour ce faire, considérons un élément R multiport illustré par la figure 2.27 et décrit par l'équation suivante :

$$\upsilon_{\mathbf{O}} = \mathbf{R}_{\{\mathbf{R},\mathbf{C},\mathbf{M}\}} \upsilon_{\mathbf{I}} \tag{2.19}$$

où $v_{\mathbf{O}}$ (resp. $v_{\mathbf{I}}$) est le vecteur de sortie (resp. d'entrée)[6] et $\mathbf{R}_{\{\mathbf{R},\mathbf{C},\mathbf{M}\}}$ est la matrice associée à la configuration causale[7] de l'élément R multiport ($\mathbf{R_R}$ (resp. $\mathbf{R_C}$, $\mathbf{R_M}$) si la causalité résistance (resp. conductance, mixte) est affectée). Une fois que les différentes étapes de la décomposition canonique congruente étendue sont appliquées, la relation mathématique associée au modèle bond graph obtenu peut être écrite comme suit :

$$v_{\mathbf{O}} = v_{\mathbf{O_R}} + v_{\mathbf{O_T}}$$

où :

- $v_{\mathbf{O_R}}$ est le vecteur des variables de puissance sortantes associé aux éléments R 1-port :

$$v_{\mathbf{O_R}} = \begin{bmatrix} r_{\{R,C,M\}_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & r_{\{R,C,M\}_{mm}} \end{bmatrix} v_{\mathbf{I}}$$

- $v_{\mathbf{O_T}}$ est le vecteur somme des variables de puissance sortantes associé aux transducteurs :

$$v_{\mathbf{O_T}} = \begin{bmatrix} \sum_{j\neq 1} \sigma_{1j} v_{\mathbf{O_{T1j}}} \\ \vdots \\ \sum_{j\neq i} \sigma_{ij} v_{\mathbf{O_{Tij}}} \\ \vdots \\ \sum_{j\neq m} \sigma_{mj} v_{\mathbf{O_{Tmj}}} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

où $\sigma_{ij} = -\sigma_{ji} = 1$ $(i < j)$ selon l'orientation des liens des transducteurs et $v_{\mathbf{O_{Tij}}}$ est le vecteur des variables de puissance sortantes associé aux transducteurs entre les jonctions J_i et J_j. À partir de l'équation 2.20 et du tableau 2.3, l'équation 2.21 peut être déduite telle que, dans le cas d'une causalité simple : $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} = 1$ $(i < j)$; $i, j = \{1, \ldots, m\}$ et dans le cas d'une causalité mixte : $\epsilon_{ij} = 1$ et $\epsilon_{ji} = -1$.

$$v_{\mathbf{O_T}} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_{12} r_{\{R,C,M\}_{12}} & \cdots & \epsilon_{1m} r_{\{R,C,M\}_{1m}} \\ \epsilon_{21} r_{\{R,C,M\}_{12}} & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \epsilon_{(m-1)m} r_{\{R,C,M\}_{(m-1)m}} \\ \epsilon_{m1} r_{\{R,C,M\}_{1m}} & \cdots & \epsilon_{m(m-1)} r_{\{R,C,M\}_{(m-1)m}} & 0 \end{bmatrix} v_{\mathbf{I}} \tag{2.21}$$

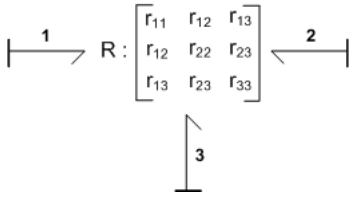
Ainsi, il peut être déduit que la relation associée au modèle bond graph obtenu correspond à celle associée à l'élément R multiport initial (équation 2.19). **Fin de la démonstration.**

Remarque : pour la causalité mixte, la décomposition obtenue correspond à la décomposition canonique congruente.

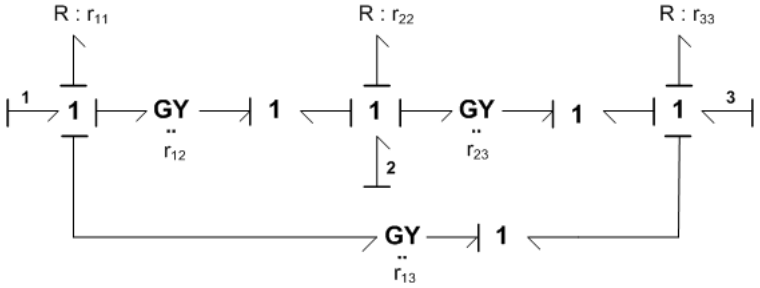
Exemple 1. Considérons un élément R 3-ports en causalité résistance donné figure 2.28(a). Le modèle bond graph obtenu par la décomposition canonique congruente étendue est donné figure 2.28(b).

[6] $v_{\mathbf{O}}$ et $v_{\mathbf{I}}$ sont composés des variables de puissance.

[7] Les matrices $\mathbf{R_R}$ et $\mathbf{R_C}$ sont des matrices symétriques et la matrice $\mathbf{R_M}$ possède des termes antisymétriques et ce, grâce aux propriétés physiques de l'élément R (cf. annexe D).



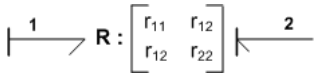
(a) Élément R 3-ports



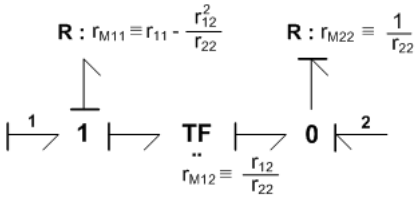
(b) Décomposition canonique congruente étendue de l'élément R

FIG. 2.28 – Décomposition canonique congruente étendue de l'élément R 3-ports en causalité résistance.

Exemple 2. Considérons l'élément R 2-ports en causalité mixte donné figure 2.29(a). Le modèle bond graph obtenu par la décomposition canonique congruente étendue est donné figure 2.29(b).



(a) Élément R 2-ports en causalité mixte



(b) Décomposition canonique congruente étendue

FIG. 2.29 – Décomposition canonique congruente étendue d'un élément R 2-ports en causalité mixte.

Décomposition auxiliaire

La décomposition canonique congruente étendue ne concerne que les éléments R multiport parce que dans le cas des éléments de stockage d'énergie, cette décomposition ne conserve pas les opérations d'intégration et de dérivation. Ainsi, une nouvelle procédure de décomposition est proposée. Cette procédure permet de décomposer un élément m-ports (R, I ou C) en m éléments m-ports connectés par une structure de jonction simple.

Procédure 4. *La décomposition d'un élément multiport (R, I ou C) peut être établie comme suit (figure 2.30) :*

- ***Étape 1** : décomposer l'élément m-ports en m éléments multiport tels que dans la matrice de chaque élément multiport, apparaisse un et un seul paramètre par ligne et par colonne. Cette matrice correspond à la configuration causale de l'élément multiport ;*
- ***Étape 2** : connecter les $i^{ème}$ liens des nouveaux éléments multiport à une jonction commune J_i. Le type de la jonction J_i dépend de la causalité affectée à l'élément multiport initial (cf. tableau 2.4) ;*
- ***Étape 3** : affecter la même causalité aux $i^{ème}$ liens des nouveaux éléments multiport que celle affectée à l'$i^{ème}$ lien de l'élément multiport initial.*

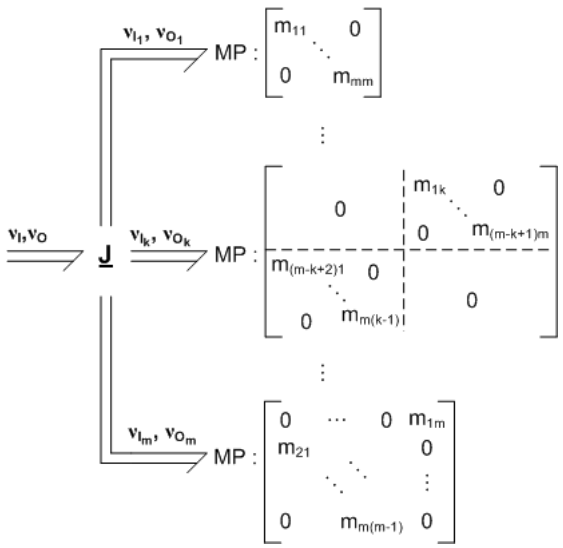


FIG. 2.30 – Décomposition auxiliaire d'un élément multiport (R, I ou C).

TAB. 2.4 – Décomposition auxiliaire : type de jonctions.

Élément	Causalité affectée à l'i^{ème} lien	Jonction J_i $i = \{1, \ldots, m\}$
R	Résistance	1
	Conductance	0
C	Intégrale	1
	Dérivée	0
I	Intégrale	0
	Dérivée	1

Démonstration. Afin de démontrer cette procédure de décomposition, il est nécessaire et suffisant de démontrer que la relation associée à la décomposition obtenue est équivalente à celle associée à l'élément multiport initial. Pour ce faire, considérons un élément multiport (R, I ou C) caractérisé par la relation suivante :

$$\boldsymbol{v_O} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} O_{11} & \cdots & O_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m1} & \cdots & O_{mm} \end{bmatrix} (\boldsymbol{v_I}) \tag{2.22}$$

où

- $\mathbf{M}$ la matrice associée à la configuration causale de l'élément multiport (R, I ou C) : $\mathbf{R_R}$, $\mathbf{R_C}$, $\mathbf{R_M}$, $\mathbf{I_I}$, $\mathbf{I_D}$, $\mathbf{I_M}$, $\mathbf{C_I}$, $\mathbf{C_D}$ ou $\mathbf{C_M}$ (cf. annexe D),
- $\boldsymbol{v_I}$ (resp. $\boldsymbol{v_O}$) le vecteur de variables de puissance entrantes (resp. sortantes),
- O_{ij} l'opérateur dépendant du type d'élément en question (R, I ou C) et de la causalité affectée aux liens i et j (cf. tableau 2.5).

Une fois que les différentes étapes de la procédure de la décomposition auxiliaire sont appliquées, le modèle bond graph donné figure 2.30 est obtenu où MP désigne un élément bond graph multiport dissipatif (R) ou de stockage d'énergie (I ou C). L'équation associée à ce modèle bond graph peut être écrite comme suit :

$$\boldsymbol{v_O} = \boldsymbol{v_{O_1}} + \ldots + \boldsymbol{v_{O_m}}$$

où $\boldsymbol{v_{O_k}}$; $k = \{1, \ldots, m\}$; est le vecteur des variables de puissance sortantes associé au k$^{\text{ème}}$ élément multiport. Chaque composante $v_{O_{ki}}$; $i = \{1, \ldots, m\}$; du vecteur $\boldsymbol{v_{O_k}}$ dépend d'un et un seul paramètre m_{ij} d'après la première étape de la procédure de décomposition et où $j \in \{1, \ldots, m\}$ est l'indice de la colonne sur laquelle cet unique paramètre apparaît. Ainsi, il peut être déduit que $v_{O_{ki}} = m_{ij} O_{ij}(v_{I_{kj}})$ où $v_{I_{kj}}$ est la variable de puissance entrante associée au j$^{\text{ème}}$ lien du k$^{\text{ème}}$ élément multiport. $v_{O_{ki}}$ peut être nul dans le cas où sur l'i$^{\text{ème}}$ ligne de la matrice du k$^{\text{ème}}$ élément multiport aucun paramètre n'apparaît : cas où un zéro apparaît dans la matrice associée à la configuration causale.

TAB. 2.5 – Opérateur suivant l'élément et la causalité affectée.

Élément	Causalité affectée aux liens i et j	O_{ij}
R	Résistance	I_d
	Conductance	I_d
	mixte	I_d
C	Intégrale	$\int dt$
	Dérivée	$\frac{d}{dt}$
	mixte	I_d
C	Intégrale	$\int dt$
	Dérivée	$\frac{d}{dt}$
	mixte	I_d

À partir de l'étape 2 et à partir du type de jonction qui dépend de la causalité affectée à l'élément initial, il peut être déduit que $\boldsymbol{v_{I_k}} = \boldsymbol{v_I}$, alors $v_{O_{ki}} = m_{ij} O_{ij}(v_{I_j})$ où v_{I_j} est la j$^{\text{ème}}$ composante du vecteur $v_{\mathbf{I}}$. L'expression de $v_{\mathbf{O}}$ peut être alors donnée par :

$$v_{\mathbf{O}} = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & \cdots & m_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{11}(v_{I_1}) & \cdots & O_{1m}(v_{I_m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m1}(v_{I_1}) & \cdots & O_{mm}(v_{I_m}) \end{bmatrix}$$

Ainsi, il peut être déduit que l'équation associée au modèle bond graph obtenu correspond à celle associée à l'élément multiport initial (équation 2.22).

Fin de la démonstration.

Exemple 1. Considérons l'élément R 3-ports en causalité résistance donné figure 2.28(a). Le modèle bond graph obtenu à partir de la décomposition auxiliaire est donné figure 2.31.

Exemple 2. Considérons l'élément R 2-ports en causalité mixte donné figure 2.29(a). Le modèle bond graph obtenu à partir de la décomposition auxiliaire est donné figure 2.32 où $r_{M_{11}} = r_{11} - \frac{r_{12}^2}{r_{22}}$, $r_{M_{12}} = \frac{r_{12}}{r_{22}}$ et $r_{M_{22}} = \frac{1}{r_{22}}$. Comme l'élément R 2-ports est en causalité mixte alors $r_{M_{21}} = -r_{M_{12}}$ (cf. annexe D pour plus de détails sur les propriétés des éléments multiport).

Exemple 3. Considérons l'élément C 2-ports en causalité dérivée donné figure 2.33(a). Le modèle bond graph obtenu à partir de la décomposition auxiliaire est donné figure 2.33(b).

Remarques :

- Pour le même élément multiport, différents modèles bond graph peuvent être obtenus à partir de la décomposition auxiliaire car il existe différentes méthodes pour accomplir la première étape de la procédure 4.

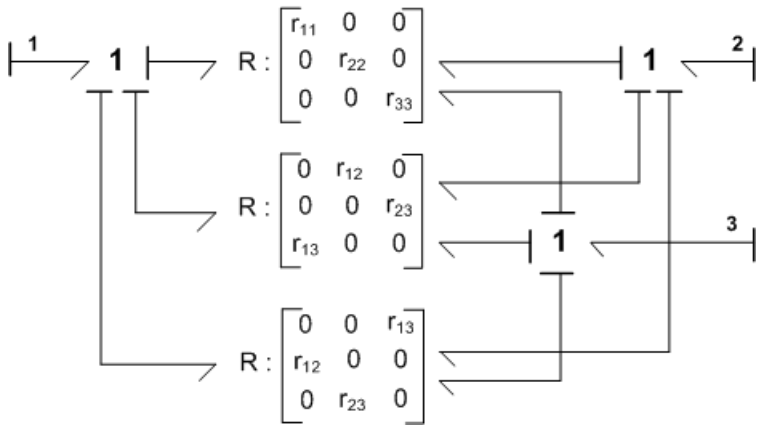
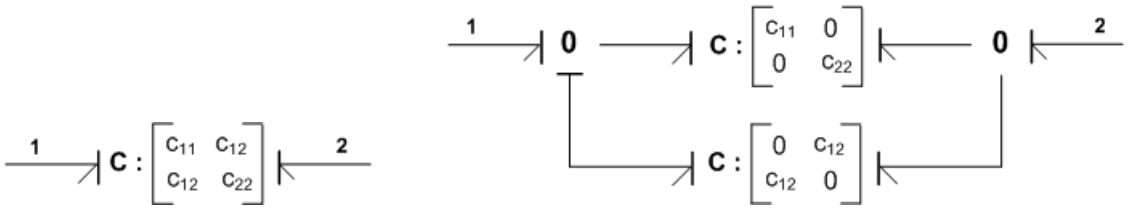


FIG. 2.31 – Décomposition auxiliaire d'un élément R 3-ports en causalité résistance.

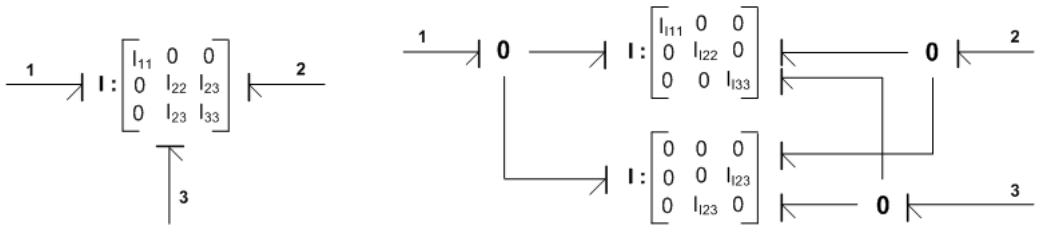
FIG. 2.32 – Décomposition auxiliaire d'un élément R 2-ports en causalité mixte.



(a) Élément C 2-ports (b) Décomposition auxiliaire

FIG. 2.33 – Décomposition auxiliaire de l'élément C 2-ports en causalité dérivée.

- Certains paramètres m_{ij} $(i \neq j)$ de la matrice constitutive de l'élément R, I ou C peuvent être nuls. Dans ce cas, l'élément multiport initial est décomposé en un nombre inférieur à m d'éléments multiport. Le nombre d'éléments multiport obtenus à partir de la décomposition auxiliaire est égal au plus grand nombre de paramètres apparaissant sur une même ligne ou sur une même colonne de la matrice. Au minimum, ce nombre est égal à 1 (ce qui correspond à des éléments 1-port découplés) et au maximum, il est égal au nombre de ports. Comme exemple, considérons un élément I 3-ports en causalité intégrale donné figure 2.34(a). Le modèle bond graph obtenu à partir de la décomposition auxiliaire est donné figure 2.34(b). Cet élément 3-ports est décomposé en deux éléments 3-ports parce que le plus grand nombre de paramètres apparaissant sur une même ligne ou colonne correspond à 2.
- Pour les transducteurs multiport (TF et GY), la décomposition canonique [Bre84b] permet de décomposer ces éléments en des transducteurs 2-ports connectés par une structure de jonction simple. Chaque transducteur 2-ports est caractérisé par un seul paramètre. Ainsi, la décomposition canonique des transducteurs multiport permet de découpler les paramètres ce qui n'est pas le cas pour les éléments multiport dissipatifs et de stockage d'énergie.



(a) Élément I 3-ports (b) Décomposition auxiliaire

FIG. 2.34 – Décomposition auxiliaire d'un élément I 3-ports en causalité intégrale.

2.3.2 Modèle standard d'interconnexion des éléments multiport

Dans cette section, la procédure énoncée dans la section 2.2 pour la détermination du modèle standard d'interconnexion des éléments 1-port et des transducteurs 2-ports est étendue aux éléments multiport R, I et C. Cette modélisation dépend de la causalité affectée à l'élément multiport et nécessite une procédure de décomposition comme il a été expliqué dans la section 2.3.1. Ainsi, pour la détermination du BG-SIM d'un élément multiport (R, I ou C), nous proposons tout d'abord une première procédure basée sur la décomposition canonique congruente classique ou étendue et ensuite, une deuxième procédure basée sur la décomposition auxiliaire (décomposition proposée dans la section 2.3.1). Enfin, la détermination graphique du modèle standard d'interconnexion d'un exemple électrique est établie suivant les deux procédures proposées.

BG-SIM basé sur la décomposition canonique congruente (étendue)

Considérons un élément multiport (R, I ou C) incertain dont les paramètres associés m_{ij}, $i, j = \{1, \ldots, m\}$, sont la somme de valeurs nominales m_{ij_n} et de valeurs incertaines Δm_{ij} : $m_{ij} = m_{ij_n} + \Delta m_{ij}$. Le BG-SIM associé à cet élément multiport peut être déterminé après sa décomposition canonique congruente classique (dans le cas d'un élément R, I ou C) ou étendue (dans le cas d'un élément multiport dissipatif R) :

Procédure 5. *La détermination du BG-SIM d'un élément multiport (R, I ou C) est établie comme suit :*

- ***Étape 1** : appliquer la décomposition canonique congruente pour les éléments I ou C et la version étendue pour les éléments R ;*
- ***Étape 2** : appliquer l'approche énoncée dans la section 2.2 à chaque élément*[8] *(élément 1-port ou transducteur 2-ports) pour dissocier cet élément en un élément nominal et un élément incertain.*
- ***Étape 3 :** affecter la même causalité aux éléments nominal et incertain que celle affectée à l'élément initial (élément 1-port ou transducteur 2-ports obtenu après décomposition) ;*
- ***Étape 4 :** identifier sur le modèle bond graph les variables d'E/S auxiliaires, qui sont des variables de puissance internes. La sortie (resp. entrée) auxiliaire z_{ij} (resp. w_{ij}) associée au paramètre m_{ij} correspond à la variable de puissance sortante de l'élément nominal (resp. incertain).*

Démonstration. Dans les travaux de BREEDVELD [Bre95, Bre84b] et dans la section 2.3.1, il a été démontré que les relations mathématiques décrivant la décomposition canonique congruente classique et étendue sont équivalentes à celles décrivant l'élément multiport initial. Par ailleurs, il a été démontré dans la section 2.2 que la ou les relation(s) associée(s) à un élément présentant une incertitude paramétrique (élément 1-port et transducteur 2-ports) correspond(ent) à celle(s) du BG-SIM de celui-ci. Ainsi, il peut être conclu que les relations associées au BG-SIM basé sur la décomposition canonique congruente (classique ou étendue) correspondent à celles de l'élément

[8] Le paramètre associé à cet élément dépend de la configuration causale de l'élément initial.

multiport initial. **Fin de la démonstration.**

Exemple 1. Considérons l'élément R 3-ports en causalité résistance donné figure 2.28(a). Le BG-SIM basé sur la décomposition canonique congruente étendue est donné figure 2.35. Les paramètres r_{12}, r_{13} et r_{23} possèdent chacun deux paires d'E/S auxiliaires.

Exemple 2. Le BG-SIM de l'élément R 2-ports en causalité mixte (figure 2.29(a)) obtenu à partir de la procédure 5 est donné figure 2.36 où $\delta_{1/r_{M22}} = -\frac{\Delta r_{M22}}{r_{M22_n}+\Delta r_{M22}}$.

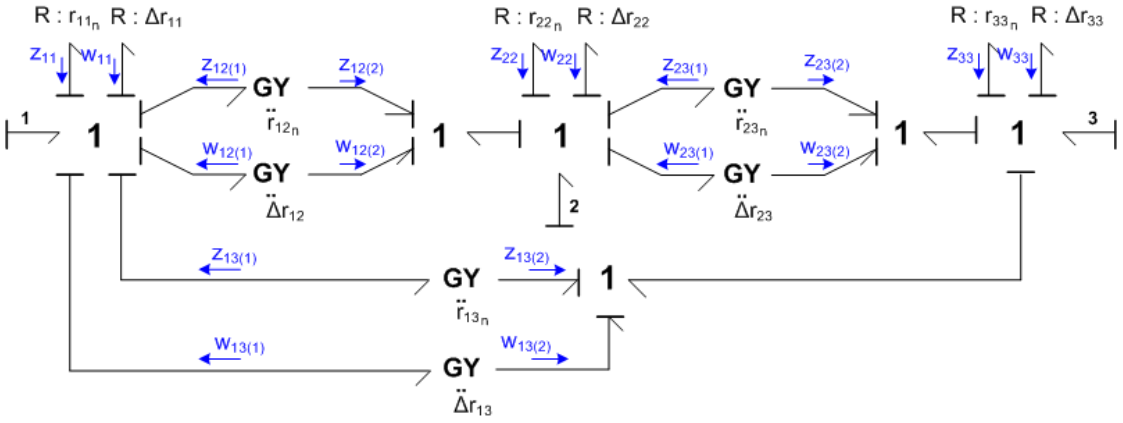


FIG. 2.35 – BG-SIM basé sur la décomposition canonique congruente étendue d'un élément R 3-ports en causalité résistance.

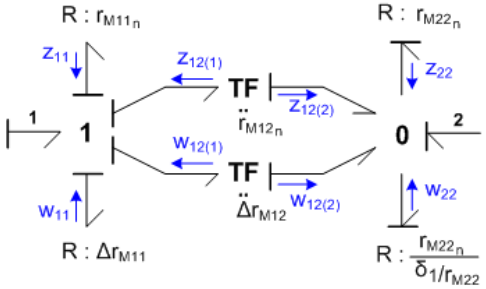


FIG. 2.36 – BG-SIM basé sur la décomposition canonique congruente de l'élément R 2-ports en causalité mixte.

BG-SIM basé sur la décomposition auxiliaire

Considérons un élément multiport incertain (R, I ou C), noté MP, dont les paramètres associés à une configuration causale m_{ij}, $i,j = \{1,\ldots,m\}$, sont les sommes de valeurs nominales m_{ij_n} et de valeurs incertaines Δm_{ij} : $m_{ij} = m_{ij_n} + \Delta m_{ij}$. Le BG-SIM associé à cet élément peut être déterminé après la décomposition auxiliaire de ce dernier :

Procédure 6. *La détermination du BG-SIM d'un élément multiport (R, I ou C) est établie comme suit (figure 2.37) :*

- ***Étape 1 :*** *appliquer la décomposition auxiliaire (cf. section 2.3.1, procédure 4) ;*
- ***Étape 2 :*** *dissocier chaque élément multiport MP_k du modèle bong graph obtenu*[9] *en un élément multiport nominal MP_{k_n} et en un élément multiport incertain MP_{k_u}. La matrice*

[9] À cette étape, aucune jonction n'est rajoutée car l'i^{ème} lien de l'élément nominal (resp. incertain) est connecté à la jonction J_i qui a été rajoutée lors de la décomposition auxiliaire (procédure 4).

associée au $k^{ème}$ élément multiport nominal MP_{k_n} (resp. incertain MP_{k_u}) contient les valeurs nominales m_{ij_n} (resp. incertaines Δm_{ij}) ;

- ***Étape 3 :*** *affecter la même causalité aux éléments muliports (nominaux et incertains) que celle affectée à l'élément multiport initial ;*
- ***Étape 4 :*** *identifier sur le modèle bond graph les variables d'E/S auxiliaires, qui sont des variables de puissance internes. La sortie (resp. entrée) auxiliaire z_{ij} (resp. w_{ij}) associée au paramètre m_{ij} correspond à la variable de puissance sortante sur l'$i^{ème}$ lien de l'élément multiport nominal MP_{k_n} (resp. incertain MP_{k_u}).*

La démonstration de la procédure 6 est analogue à celle de la procédure 4 sauf qu'il faut tenir compte de termes nominaux et de termes incertains dus à la dissociation de chaque élément multiport en deux éléments (nominal et incertain).

Remarque : Le BG-SIM d'un élément multiport (R, I ou C) est une représentation causale. Néanmoins, sur la figure 2.37, la causalité n'est pas affectée pour ne pas prendre d'option *a priori* sur le positionnement des traits causaux..

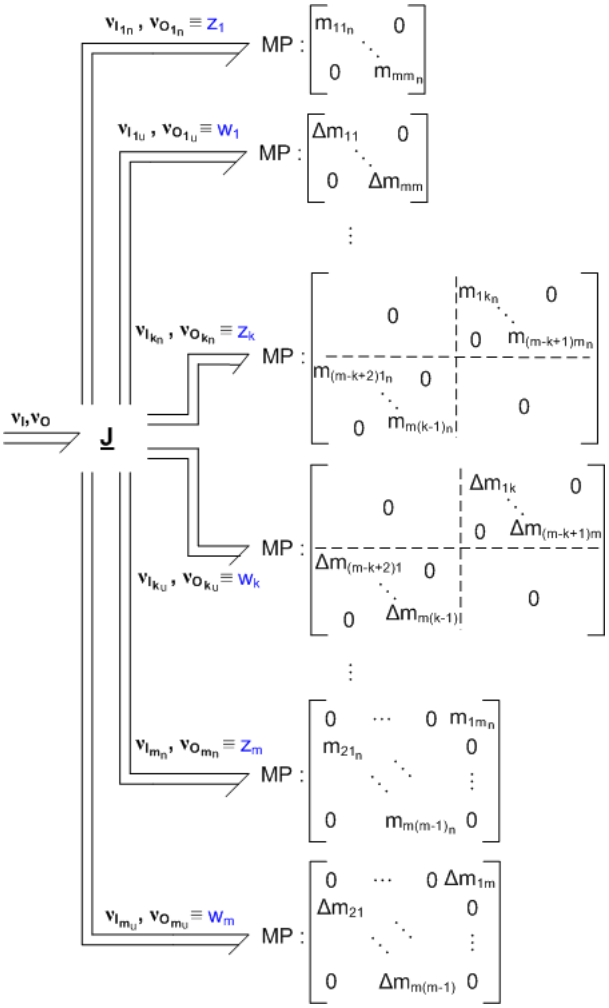


FIG. 2.37 – BG-SIM basé sur la décomposition auxiliaire d'un élément multiport (R, I ou C).

Exemple 1. Considérons l'élément R 3-ports en causalité résistance donné figure 2.28(a). Le BG-SIM basé sur la décomposition auxiliaire est donné figure 2.38.

Exemple 2. Le BG-SIM de l'élément R 2-ports en causalité mixte (figure 2.29(a)) obtenu à

partir de la procédure 6 est donné figure 2.39. Comme l'élément R 2-ports est en causalité mixte alors $r_{M21_n} = -r_{M12_n}$ et $\Delta r_{M21} = -\Delta r_{M12}$ (termes antisymétriques).

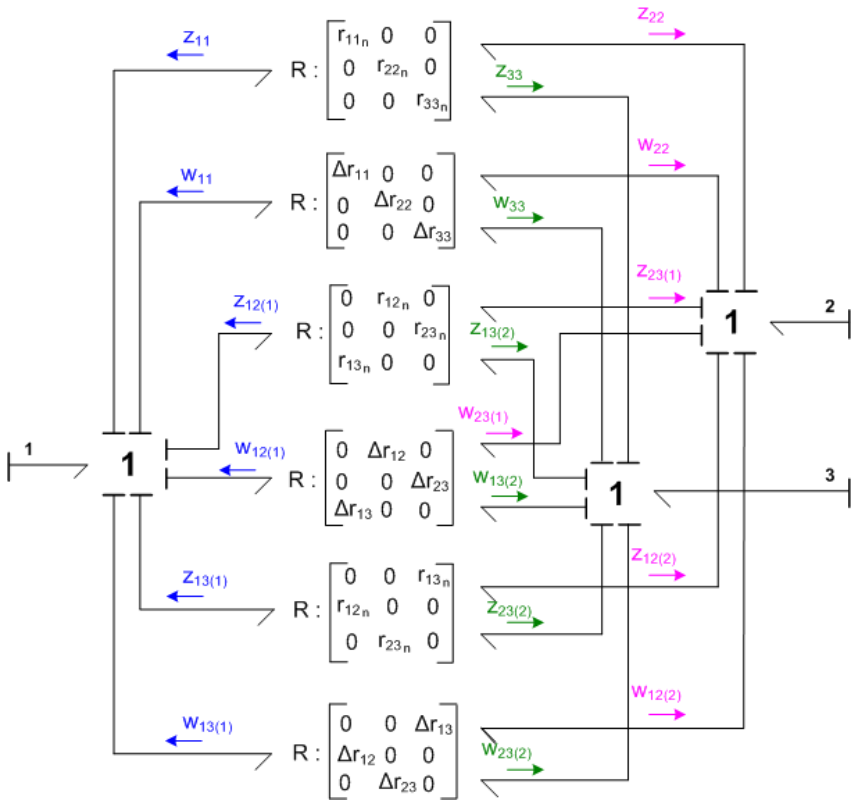


FIG. 2.38 – BG-SIM basé sur la décomposition auxiliaire d'un élément R 3-ports en causalité résistance.

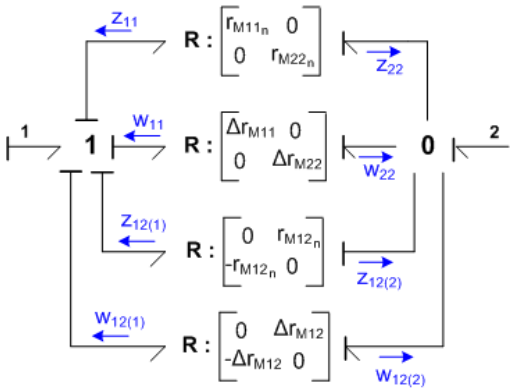


FIG. 2.39 – BG-SIM basé sur la décomposition auxiliaire d'un élément R 2-port en causalité mixte.

Exemple 3. Considérons l'élément C 2-ports en causalité dérivée donné figure 2.33(a). Le BG-SIM basé sur la décomposition auxiliaire associé à cet élément est donné figure 2.40.

Le modèle standard d'interconnexion décrit par le système d'équations 2.15 peut être déduit directement à partir du modèle bond graph incertain après la substitution de tous les éléments incertains (1-port et multiport) par les modèles bond graph standard d'interconnexion associés comme il a été expliqué dans la section 2.1.3.

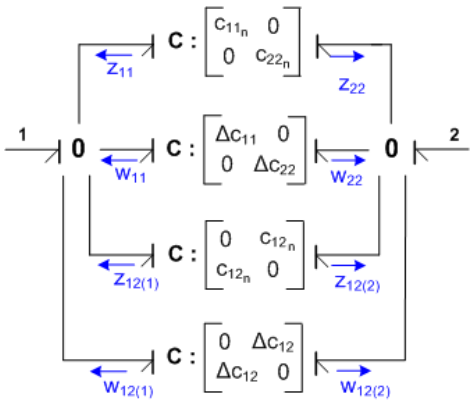


FIG. 2.40 – BG-SIM basé sur la décomposition auxiliaire d'un élément C 2-ports en causalité dérivée.

Remarques :

- Rappelons que la matrice caractérisant une configuration causale d'un élément multiport (R, I ou C) peut avoir des termes symétriques ou antisymétriques selon la causalité affectée (cf. annexe D). Ainsi, certains paramètres figurant dans cette matrice peuvent avoir deux paires d'E/S auxiliaires. Par exemple sur la figure 2.37, $m_{1m} = \pm m_{m1}$ selon la condition de symétrie/antisymétrie. Ainsi, deux paires d'E/S auxiliaires sont associées au paramètre m_{1m} ou au paramètre m_{m1}.
- Afin d'établir le BG-SIM d'un transducteur multiport, la première étape est d'appliquer la décomposition canonique congruente afin de décomposer l'élément en des transducteurs 2-ports connectés avec une structure de jonction simple. Ensuite, chaque transducteur 2-ports est remplacé par le BG-SIM correspondant établi dans la section 2.2.2.

Exemple

Afin d'illustrer la détermination du modèle standard d'interconnexion à partir d'un modèle bond graph contenant un élément multiport, considérons le circuit électrique de la figure 2.41(a) contenant une inductance mutuelle M. Le modèle bond graph associé en causalité préférentielle intégrale est donné figure 2.41(b). Seuls les paramètres L_1, L_2 et M sont supposés des paramètres incertains.

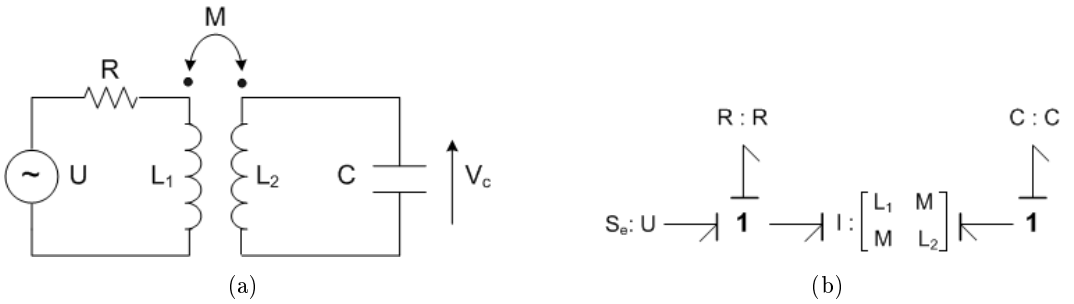


FIG. 2.41 – (a) Circuit électrique avec une inductance mutuelle et (b) le modèle bond graph en causalité intégrale associé.

D'une part, le BG-SIM basé sur la décomposition canonique congruente est établi (figure 2.42) où $I_{11} = L_1$, $I_{12} = \frac{M}{L_1}$ et $I_{22} = L_{22} - \frac{M^2}{L_1}$. Les vecteurs d'E/S auxiliaires sont définis par : $\omega = \left[\begin{array}{cccc} \omega_{I_{11}} & \omega_{I_{22}} & \omega_{I_{12(1)}} & \omega_{I_{12(2)}} \end{array} \right]^T$ et $\mathbf{z} = \left[\begin{array}{cccc} z_{I_{11}} & z_{I_{22}} & z_{I_{12(1)}} & z_{I_{12(2)}} \end{array} \right]^T$. La représentation

d'état associée peut se mettre sous la forme standard d'interconnexion (système d'équations 2.15) où :

$$\mathbf{A_n} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{I_{11_n}} & \frac{RI_{12_n}}{I_{22_n}} & 0 \\ \frac{RI_{12_n}}{I_{11_n}} & -\frac{RI_{12_n}^2}{I_{22_n}} & -\frac{1}{C} \\ 0 & \frac{1}{I_{22_n}} & 0 \end{bmatrix} ; \mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} -R & RI_{12_n} & R & 0 \\ RI_{12_n} & -RI_{12_n}^2 & -RI_{12_n} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \mathbf{B_{2n}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -I_{12_n} \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

$$\mathbf{C_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{11_n}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{22_n}} & 0 \\ 0 & \frac{I_{12_n}}{I_{22_n}} & 0 \\ -\frac{RI_{12_n}}{I_{11_n}} & \frac{RI_{12_n}^2}{I_{22_n}} & 0 \end{bmatrix} ; \mathbf{D_{11}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{22_n} & 0 & 0 \\ -RI_{12_n} & RI_{12_n}^2 & RI_{12_n} & 0 \end{bmatrix} ; \mathbf{D_{12}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{12_n} \end{bmatrix} ;$$

$\mathbf{C_{2n}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{D_{21}} = \mathbf{D_{22n}} = 0$. La matrice diagonale d'incertitude est donnée par : $\Delta = diag\left(\delta_{1/I_{11}}, \delta_{1/I_{22}}, \delta_{I_{12}}, \delta_{I_{12}}\right)$, où $\delta_{1/I_{11}} = -\frac{\Delta I_{11}}{I_{11_n}+\Delta I_{11}}$; $\delta_{1/I_{22}} = -\frac{\Delta I_{22}}{I_{22_n}+\Delta I_{22}}$ et $\delta_{I_{12}} = \frac{\Delta I_{12}}{I_{12_n}}$.

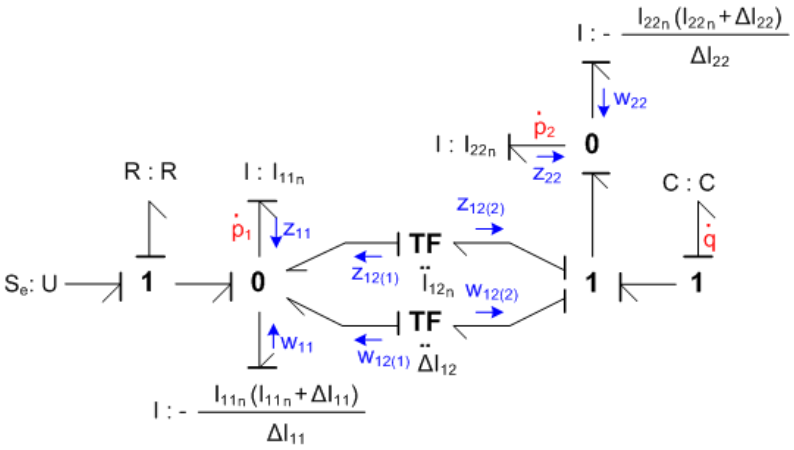


FIG. 2.42 – BG-SIM basé sur la décomposition canonique congruente du circuit électrique de la figure 2.41(a).

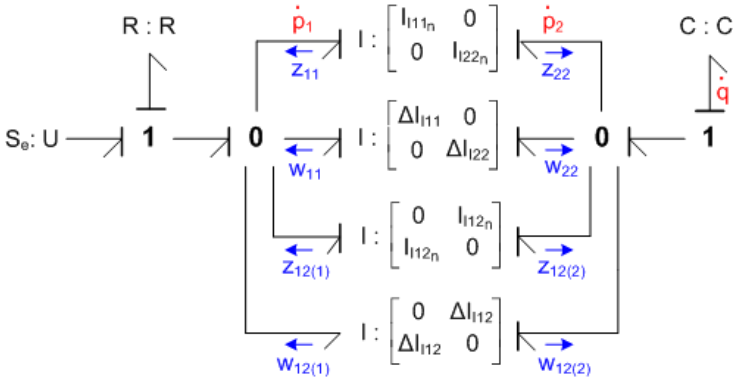


FIG. 2.43 – BG-SIM basé sur la décomposition auxiliaire du circuit électrique de la figure 2.41(a).

D'autre part, le BG-SIM basé sur la décomposition auxiliaire est établi (figure 2.43) où $I_{I11} = \frac{L_2}{L_1L_2-M^2}$, $I_{I12} = -\frac{M}{L_1L_2-M^2}$ et $I_{I22} = \frac{L_1}{L_1L_2-M^2}$. Les vecteurs d'E/S auxiliaires ω et $\mathbf{z}$ sont inchangés. Le modèle standard d'interconnexion (système d'équations 2.15) est défini par les matrices suivantes :

$\mathbf{A_n} = \begin{bmatrix} -RI_{I11_n} & -RI_{I12_n} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C} \\ I_{I12_n} & I_{I22_n} & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} -R & 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B_{2n}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{D_{11}} = \mathbf{D_{12}} = \mathbf{D_{21}} = \mathbf{D_{22n}} = 0$; $\mathbf{C_1} = \begin{bmatrix} I_{I11_n} & 0 & 0 \\ 0 & I_{I22_n} & 0 \\ 0 & I_{I12_n} & 0 \\ I_{I12_n} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{C_{2n}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix}$. La matrice d'incertitude est donnée par : $\Delta = diag\left(\delta_{I_{I11}}, \delta_{I_{I22}}, \delta_{I_{I12}}, \delta_{I_{I12}}\right)$, où : $\delta_{I_{I11}} = \frac{\Delta I_{I11}}{I_{I11_n}}$, $\delta_{I_{I22}} = \frac{\Delta I_{I22}}{I_{I22_n}}$ et $\delta_{I_{I12}} = \frac{\Delta I_{I12}}{I_{I12_n}}$.

Conclusion

Dans le chapitre précédent, les différents facteurs incertains affectant les systèmes mécatroniques ont été présentés. Ensuite, différents outils de modélisation et d'étude de ces systèmes incertains ont été rappelés. Enfin, différentes approches de conception et de dimensionnement des systèmes mécatroniques ont été abordées et plus précisément la méthodologie de dimensionnement sur des critères dynamiques et énergétiques . Dans ce chapitre, nous nous sommes focalisés sur la prise en compte de ces incertitudes dans un modèle bond graph (outil support de la méthodologie de dimensionnement). Ainsi, un état de l'art sur les différentes approches bond graph pour l'analyse et la modélisation des incertitudes paramétriques a été établi. Les contributions de ce chapitre portent sur l'une de ces approches : le bond graph incertain qui permet de retrouver graphiquement le modèle d'état canonique et le modèle standard d'interconnexion. Plus précisément :

- **Au niveau de la représentation d'état canonique** : une procédure alternative à celle existante dans la littérature pour la détermination graphique du modèle d'état canonique (procédure 2, page 42). Cette procédure permet d'éviter des calculs intermédiaires nécessaires par ailleurs dans la procédure existante.
- **Au niveau de la représentation bond graph standard d'interconnexion des éléments 1-port et des transducteurs 2-ports** : une procédure alternative pour la détermination graphique du modèle standard d'interconnexion (section 2.2, page 49). Elle concerne les modèles bond graph linéaires comportant des éléments 1-port et des transducteurs 2-ports. Par rapport à la procédure existante, cette procédure permet la simplification graphique du modèle bond graph incertain.
- **Au niveau de la décomposition des éléments multiport** : deux nouvelles décompositions des éléments multiport (R, I ou C) : décomposition canonique congruente étendue (procédure 3, page 59) et décomposition auxiliaire (procédure 4, page 61). La procédure 3, qui concerne uniquement les éléments multiport dissipatifs, permet de décomposer l'élément multiport en éléments R 1-port connectés par une structure de jonction généralisée. La procédure 4 permet de décomposer l'élément multiport en un ensemble d'éléments multiport connectés par une structure de jonction simple.
- **Au niveau de la représentation bond graph standard d'interconnexion des éléments multiport (R, I et C)** : une procédure basée sur la décomposition canonique congruente étendue (procédure 5, page 65) et une procédure basée sur la décomposition auxiliaire (procédure 6, page 66). Ainsi, le BG-SIM de l'élément multiport (R, I ou C) peut être déterminé selon deux procédures différentes.

Ces contributions s'inscrivent dans le contexte de la méthodologie de dimensionnement basée sur le formalisme bond graph. En effet, l'intérêt que nous portons pour la modélisation bond graph des incertitudes paramétriques a pour objectif d'utiliser cette modélisation dans la démarche de dimensionnement par inversion des modèles bond graph. L'inversion d'un modèle bond graph qui met en évidence l'incertitude (absolue ou relative) permet de remonter à cette

incertitude à partir de la connaissance des spécifications des incertitudes sur les sorties.

Le chapitre suivant est consacré aux contributions à la phase d'analyse structurelle et comportementale qui fait l'originalité de la méthodologie de dimensionnement reposant sur des critères énergétiques et dynamiques.

Chapitre 3

Contribution à l'analyse et la synthèse d'un problème de conception pour les systèmes incertains

Sommaire

Introduction 74
3.1 Analyse du cahier des charges : éléments théoriques 75
3.1.1 Résultats de référence de l'approche modèle d'état 75
3.1.2 L'analyse structurelle et comportementale à partir du modèle bond graph direct 87
3.1.3 L'analyse structurelle et comportementale à partir du modèle bond graph inverse 98
3.1.4 Interprétations 108
3.2 Analyse de l'adéquation spécifications/structure du modèle et synthèse de tolérance 110
3.2.1 Vérification de l'adéquation par niveaux d'analyse 110
3.2.2 De la vérification de l'adéquation à la synthèse de tolérance : cas d'une suspension quart de véhicule 121
Conclusion 134

Introduction

Lors du premier chapitre, nous avons vu que l'originalité de la méthodologie de dimensionnement reposant sur des critères dynamiques et énergétiques consiste en sa phase d'analyse structurelle et comportementale [Ngw97,Ngw01a,Ngw01b,Ngw05,Jar08a,Jar10]. Cette phase est établie lors de l'étape de vérification de l'adéquation (cf. section 1.3.4, chapitre 1) afin de vérifier, d'une part l'inversibilité du modèle de conception (cf. section 1.3.3, chapitre 1), et d'autre part, si les spécifications peuvent être portées par la structure retenue. Pour mener cette dernière vérification, il s'avère nécessaire de déterminer les différents invariants caractérisant la structure d'un système (ordres des zéros[1]/pôles à l'infini, ordres relatifs[2] et ordres d'essentialité[3]) qui sont habituellement utilisés pour résoudre des problèmes de commande [Fal67,Des82,Com82,Com86,Com93b]. En effet, connaissant ces ordres, les sorties peuvent être spécifiées correctement : les spécifications sont en adéquation avec la structure du système si et seulement si, pour toute sortie y_i, la spécification correspondante est au moins n_{ie} fois dérivable (car l'ordre d'essentialité n_{ie} peut être interprété comme étant l'ordre maximal de dérivation de la sortie y_i apparaissant dans le modèle inverse d'ordre minimal [Com86, Glu92]).

Dans la littérature, des procédures graphiques pour la détermination de ces invariants ont été établies sur le modèle bond graph causal[4]. Formulées selon le niveau d'analyse souhaité (BG-structurel ou comportemental), elles permettent de mettre en place une démarche chronologique dans le travail de conception ou de reconception. Dans ce chapitre, nous proposons dans une première partie, de nouvelles procédures graphiques (procédures 16, 17 et 18) permettant la détermination des différents invariants à partir du modèle bond graph bicausal afin de simplifier l'analyse structurelle et comportementale du modèle de conception. Les démonstrations de ces procédures reposent sur un certain nombre de résultats intermédiaires qui sont énoncés et démontrés (théorèmes 2 et 4, proposition 1, équation 3.22, procédures 13, 14, 15 et 36 de l'annexe F). Indépendamment des valeurs numériques attribuées aux paramètres du modèle (valeurs qui sont sujettes aux incertitudes), les propriétés structurelles et comportementales ainsi déterminées se révèlent d'une grande aide lors de la conception des systèmes mécatroniques.

Dans une seconde partie de ce chapitre, nous nous intéressons plus particulièrement à la vérification de l'adéquation des spécifications dans le contexte de la synthèse paramétrique. En effet, dans un problème de conception par modèles inverses, il faut s'assurer que le comportement désiré en sortie pour une entrée donnée peut être assuré par la structure retenue pour le composant à concevoir. Comme les sorties peuvent être spécifiées sous forme de comportements type (fonction ou matrice de transfert), nous proposons alors d'étudier l'adéquation spécifications/structure pour ce cas (procédure 19 page 113 pour les systèmes monovariables, procédure 40 de l'annexe G pour les systèmes multivariables et l'annexe H pour le cas d'un composant multiport). Si cette adéquation n'est pas vérifiée alors des recommandations pour la remise en question des spécifications ou de la structure du système sont proposées. Dans cette étude, les différents niveaux d'analyse sont dégagés. En particulier, nous établissons le lien entre la vérification de l'adéquation au niveau de l'analyse numérique (le niveau d'analyse le plus bas) et la synthèse paramétrique qui représente l'un des aspects de la méthodologie de dimensionnement (cf. section 1.4, chapitre 1). En présence d'incertitudes, la procédure proposée (procédure 19) permet d'établir la synthèse de tolérances paramétriques.

[1] les ordres des zéros à l'infini sont également désignés par *ordres des zéros globaux*.

[2] Les ordres relatifs sont également désignés par *degrés relatifs,ordres de zéros à l'infini par ligne* ou encore *indices caractéristiques*.

[3] Les ordres d'essentialité sont également désignés par *ordres essentiels*.

[4] Dans la suite, le modèle bond graph causal fera référence au modèle bond graph modélisant le système physique et auquel la causalité a été affectée (cf. section A.5.1, annexe A).

3.1 Analyse du cahier des charges : éléments théoriques

Le but de cette section est de rajouter à l'étape de vérification de l'adéquation (cf. section 1.3.4), de nouvelles procédures graphiques permettant la détermination des invariants (ordres des zéros/pôles à l'infini, ordres relatifs et ordres d'essentialité) à partir du modèle bond graph inverse bicausal, notamment, afin de simplifier l'analyse structurelle et comportementale du modèle de conception retenue pour le système à concevoir. En effet, dans [El 08a], une procédure permettant la détermination des ordres d'essentialité à partir du modèle bond graph bicausal a été proposée. La détermination de ces ordres s'avère en effet plus simple sur le modèle bond graph inverse que sur le modèle direct (du fait de leur interprétation sur le modèle inverse). Enfin, une discussion sur les procédures causales (appliquées sur le modèle bond graph direct) et bicausales (appliquées sur le modèle bond graph inverse) est établie.

Tout le long de cette section, les systèmes étudiés sont des systèmes carrés (hypothèse 1, page 16) et linéaires (hypothèse 2, page 16) supposés inversibles et nous nous intéressons aux modèles inverses d'ordre minimal.

3.1.1 Résultats de référence de l'approche modèle d'état

Plusieurs outils ont été développés pour mener l'analyse structurelle et comportementale (cf. section 1.5, chapitre 1). Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéressons principalement à l'approche modèle d'état et l'approche bond graph. L'approche modèle d'état tient compte des lois physiques et de leur paramétrage. Le niveau d'analyse associé est le niveau d'analyse comportemental.

La structure à l'infini, les ordres relatifs et les ordres d'essentialité ont été définis par l'approche modèle d'état[5] et des procédures bond graph ont été mises en place pour les déterminer graphiquement. De ce fait, les résultats obtenus par l'approche modèle d'état seront désignés résultats de référence.

Dans une première partie, nous rappelons les définitions algébriques des propriétés structurelles recherchées. Une relation entre les ordres des pôles à l'infini de la matrice de transfert du modèle inverse et les degrés des mineurs de la matrice système du modèle inverse est proposée. De plus, nous proposons une procédure algébrique pour calculer les ordres relatifs à partir de la structure à l'infini du modèle inverse. Dans une seconde partie, nous nous intéressons à la représentation graphique d'un modèle d'état inverse en définissant un digraphe représentant ce modèle. Une procédure digraphe est établie pour calculer le déterminant de la matrice système du modèle inverse. Les contributions proposées seront utilisées pour faciliter la mise en place des procédures bond graph (cf. section 3.1.3).

Représentation matricielle

Considérons Σ le système linéaire carré (hypothèse 1, page 16) et invariant dans le temps décrit par :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

Rappelons que la matrice de transfert associée est strictement propre et définie par :

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \tag{3.2}$$

[5] Ces invariants ont été définis par d'autres approches comme l'approche géométrique [Des82, Com82, Des85, Des88].

Le modèle inverse est obtenu à partir du modèle direct par les dérivations successives de chaque sortie afin d'exprimer la commande en boucle ouverte $\mathbf{u}$ en fonction du vecteur d'état et des dérivées des composantes de $\mathbf{y}$. Ainsi, le modèle inverse d'ordre minimal peut être exprimé comme suit [Ngw97] :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{inv}}(t) = \mathbf{A}_{\mathbf{inv}}\mathbf{x}_{\mathbf{inv}}(t) + \mathbf{B}_{\mathbf{inv}}\mathbf{u}_{(\alpha)\mathbf{inv}}(t) \\ \mathbf{y}_{\mathbf{inv}}(t) = \mathbf{C}_{\mathbf{inv}}\mathbf{x}_{\mathbf{inv}}(t) + \mathbf{D}_{\mathbf{inv}}\mathbf{u}_{(\alpha)\mathbf{inv}}(t) \end{cases} \tag{3.3}$$

où $\mathbf{x}_{\mathbf{inv}}(t) \in \mathbb{R}^{n_{inv}}$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u}_{(\alpha)\mathbf{inv}}(t) = \mathbf{y}_{(\alpha)}(t) \in \mathbb{R}^{\alpha}$ (resp. $\mathbf{y}_{\mathbf{inv}}(t) = \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{m}$) est le vecteur d'entrée (resp. de sortie). Le vecteur $\mathbf{u}_{(\alpha)\mathbf{inv}}(t) = \mathbf{y}_{(\alpha)}(t)$ regroupe les composantes du vecteur de sortie $\mathbf{y}(t)$ du modèle direct Σ (système d'équations 3.1) et de leurs dérivées successives apparaissant lors de la construction du modèle inverse[6]. Les matrices $\mathbf{A}_{\mathbf{inv}}$, $\mathbf{B}_{\mathbf{inv}}$, $\mathbf{C}_{\mathbf{inv}}$ et $\mathbf{D}_{\mathbf{inv}}$ sont des matrices constantes de dimensions respectives $(n_{inv} \times n_{inv})$, $(n_{inv} \times \alpha)$, $(m \times n_{inv})$ et $(m \times \alpha)$.

Dans le domaine de Laplace, le modèle inverse (équation 3.3) peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{s}\mathbf{X}_{\mathbf{inv}}(s) - \mathbf{x}_{\mathbf{inv}}(0) = \mathbf{A}_{\mathbf{inv}}\mathbf{X}_{\mathbf{inv}}(s) + \mathbf{B}_{\mathbf{inv}}(s)\mathbf{U}_{\mathbf{inv}}(s) \\ \mathbf{Y}_{\mathbf{inv}}(s) = \mathbf{C}_{\mathbf{inv}}\mathbf{X}_{\mathbf{inv}}(s) + \mathbf{D}_{\mathbf{inv}}(s)\mathbf{U}_{\mathbf{inv}}(s) \end{cases} \tag{3.4}$$

où $\mathbf{U}_{\mathbf{inv}}(s) = \mathbf{Y}(s)$ (resp. $\mathbf{Y}_{\mathbf{inv}}(s) = \mathbf{U}(s)) \in \mathbb{R}^{m}$. $\mathbf{B}_{\mathbf{inv}}(s)$ et $\mathbf{D}_{\mathbf{inv}}(s)$ sont des matrices polynomiales[7] en s de dimensions respectives $(n_{inv} \times m)$ et $(m \times m)$. $\mathbf{x}_{\mathbf{inv}}(\mathbf{0})$ est supposé nul dans la suite des développements.

La matrice de transfert $\mathbf{T}_{\mathbf{inv}}(s)$ du modèle inverse est une matrice rationnelle non propre[8] définie par :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{inv}}(\mathbf{s}) = \mathbf{C}_{\mathbf{inv}}(\mathbf{sI} - \mathbf{A}_{\mathbf{inv}})^{-1}\mathbf{B}_{\mathbf{inv}}(s) + \mathbf{D}_{\mathbf{inv}}(s) \tag{3.5}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}_{\mathbf{inv}} \in \mathbb{R}^{n_{inv} \times n_{inv}}$ est égale à $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\mathbf{inv}})$. Ce polynôme peut être écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{A}_{\mathbf{inv}}}(s) = s^{n_{inv}} + \sum_{i=1}^{n_{inv}} \alpha_i s^{n_{inv}-i} \tag{3.6}$$

La matrice système $\mathbf{P}_{\mathbf{inv}}(s) \in \mathbb{R}^{(n_{inv}+m)\times(n_{inv}+m)}$ du modèle inverse (équation 3.4) est définie par[9] :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{inv}}(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\mathbf{inv}} & \mathbf{B}_{\mathbf{inv}}(s) \\ -\mathbf{C}_{\mathbf{inv}} & \mathbf{D}_{\mathbf{inv}}(s) \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Ordres des zéros/pôles à l'infini

La structure à l'infini d'un système propre Σ est caractérisée par les ordres des zéros à l'infini qui sont définis et calculés grâce à la factorisation de Smith-McMillan à l'infini [Var82].

[6] Le vecteur $\mathbf{y}_{(\alpha)}(t)$ peut s'écrire sous la forme suivante : $\mathbf{y}_{(\alpha)}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & \frac{dy_1(t)}{dt} & \frac{d^2y_1(t)}{dt^2} & \cdots & y_2(t) & \frac{dy_2(t)}{dt} & \cdots & y_m(t) & \frac{dy_m(t)}{dt} & \cdots \end{bmatrix}^T$

[7] Le vecteur $\mathbf{Y}(s)$ est obtenu par la transformation de Laplace du vecteur $\mathbf{y}(t)$ qui représente le vecteur regroupant les sorties du système physique (représenté par le modèle direct 3.1). En passant dans le domaine de Laplace, les opérations de dérivations figurant dans le vecteur $\mathbf{y}_{(\alpha)}(t)$ sont transformées et reportés dans la matrice $\mathbf{B}_{\mathbf{inv}}(s)$.

[8] La définition 25 de l'annexe E présente les caractéristiques d'une matrice rationnelle propre.

[9] Cette matrice est obtenue en écrivant le système d'équations 3.4, caractérisant le modèle inverse dans le domaine de Laplace, sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\mathbf{inv}} & \mathbf{B}_{\mathbf{inv}}(s) \\ -\mathbf{C}_{\mathbf{inv}} & \mathbf{D}_{\mathbf{inv}}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\mathbf{inv}}(s) \\ -\mathbf{U}_{\mathbf{inv}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{inv}}(0) \\ -\mathbf{Y}_{\mathbf{inv}}(s) \end{bmatrix}$$

Théorème 1. *Pour toute matrice rationnelle* $\mathbf{G}(s)$ *de dimension* $(p \times m)$ *(qui n'est pas nécessairement strictement propre ou même propre) de rang* r*, la factorisation de* Smith-McMillan *à l'infini est définie par [Var82, Mur00] :*

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{B_1}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B_2}(s) \tag{3.8}$$

avec $\mathbf{B_1}(s)$ *et* $\mathbf{B_2}(s)$ *des matrices bipropres*[10] *(propre et d'inverse propre) : det* $\left(\lim_{s\to\infty} \mathbf{B_i}(s)\right) \neq 0$ *;* $i = \{1, 2\}$ *; et* $\mathbf{\Delta}(s) = diag\left(s^{t_1}, \ldots, s^{t_r}\right)$*,* $t_1 \geq \ldots \geq t_r$*.* t_i *;* $i = \{1, \ldots, r\}$ *; peut être calculé à partir des mineurs de* $\mathbf{G}(s)$ *:*

$$t_i = \delta_i - \delta_{i-1}$$

où δ_i *est le degré*[11] *le plus élevé des mineurs d'ordre* i *de* $\mathbf{G}(s)$*,* $\delta_0 = 0$*.*

- *Si* $t_i > 0$ *alors* $n_i = t_i$ *est un ordre de pôle à l'infini ;*
- *Si* $t_i < 0$ *alors* $n_i = -t_i$ *est un ordre de zéro à l'infini.*

La matrice de transfert $\mathbf{T(s)}$ du système Σ ne possède que des zéros à l'infini [Dio82]. Par conséquent, la matrice de transfert $\mathbf{T_{inv}}(s)$ du modèle inverse ne possède que des pôles à l'infini[12].

Remarque : Dans certaines références [Des82, Com86, Des88, Ber97b], l'ordre de zéro à l'infini est noté n'_i et l'ordre relatif est noté n_i. Dans d'autres références [Dio93, Rah96, Dau00], la notation est inversée. Dans ce mémoire, nous avons adopté cette dernière pour être cohérent avec les travaux du laboratoire.

Dans ce qui suit, nous proposons de définir la relation entre les degrés des mineurs de la matrice de transfert $\mathbf{T_{inv}}(s)$ (resp. d'une sous-matrice de la matrice de transfert $\mathbf{T_{inv}}(s)$) et les degrés des mineurs de la matrice système $\mathbf{P_{inv}}(s)$ (resp. d'une sous-matrice de la matrice système $\mathbf{P_{inv}}(s)$). Cette relation peut être vue comme une procédure algébrique pour la détermination des ordres des pôles à l'infini à partir de la matrice système $\mathbf{P_{inv}}(s)$ du modèle inverse (équation 3.4).

Théorème 2. *Considérons* $\mathbf{T_{inv}}(s)^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} \in \mathbb{R}^{i\times i}$ *une sous-matrice déduite de la matrice* $\mathbf{T_{inv}}(s)$ *en sélectionnant les lignes* $h_1, \ldots, h_i$ *et les colonnes* $j_1, \ldots, j_i$ *tel que det*$(\mathbf{T_{inv}}(s)^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}) \neq 0$*. Soit* $\delta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}$ *le degré de ce déterminant*[13]*, alors :*

$$\delta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}} = \beta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}} - n_{inv} \tag{3.9}$$

où :

- n_{inv} *est la dimension de l'état du modèle inverse ;*
- $\beta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}$ *est le degré de* $\det\left(\mathbf{P_{inv}}(s)^{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\ldots,n_{inv}+j_i}_{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\ldots,n_{inv}+h_i}\right)$ *;*
- $\mathbf{P_{inv}}(s)^{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\ldots,n_{inv}+j_i}_{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\ldots,n_{inv}+h_i} \in \mathbb{R}^{(n_{inv}+i)\times(n_{inv}+i)}$ *est déduit de la matrice système* $\mathbf{P_{inv}}(s)$ *en ne sélectionnant que les lignes* $1, \ldots, n_{inv}, n_{inv}+h_1, \ldots, n_{inv}+h_i$ *et les colonnes* $1, \ldots, n_{inv}$*,* $n_{inv} + j_1, \ldots, n_{inv} + j_i$ *(les* n_{inv} *premières lignes des* n_{inv} *premières colonnes de* $\mathbf{P_{inv}}(s)$ *sont conservées).*

De plus, $\delta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}$ *est nécessairement maximal pour* $\beta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}$ *maximal, alors*

$$\delta_i = \beta_i - n_{inv} \tag{3.10}$$

[10] Les propriétés d'une matrice bipropre sont données par la définition 27 de l'annexe E.

[11] Le degré d'une fonction rationnelle est donné par la définition 24 (Annexe E).

[12] Ce résultat peut être déduit directement à partir de la factorisation de Smith-McMillan à l'infini de la matrice de transfert du modèle direct Σ.

[13] Les mineurs nuls de $\mathbf{T_{inv}}(s)$ n'ont pas d'effet sur la structure à l'infini.

où $\delta_i = \max_{\substack{j_1,\ldots,j_i \in ([\![1,m]\!])^i \\ h_1,\ldots,h_i \in ([\![1,m]\!])^i}} \{\delta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}\}$ *le plus haut degré des mineurs d'ordre* i *de* $\mathbf{T_{inv}}(s)$ *et* $\beta_i = \max_{\substack{j_1,\ldots,j_i \in ([\![1,m]\!])^i \\ h_1,\ldots,h_i \in ([\![1,m]\!])^i}} \{\beta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}\}$ *le plus haut degré des mineurs d'ordre* i *de* $\mathbf{P_{inv}}(s)$.

Démonstration. En appliquant la formule de SCHUR (cf. définition 22, section E.1, annexe E), le déterminant de la matrice système peut être exprimé comme suit :

$$\det(\mathbf{P_{inv}}(s)) = \mathbf{P_{A_{inv}}}(s)\det(\mathbf{T_{inv}}(s))$$

où $\mathbf{P_{A_{inv}}}(s)$ est le polynôme caractéristique du modèle inverse défini par l'équation 3.6. Ainsi, en généralisant aux mineurs, le résultat suivant est obtenu :

$$\det\left(\mathbf{P_{inv}}(s)^{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\ldots,n_{inv}+j_i}_{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\ldots,n_{inv}+h_i}\right) = \mathbf{P_{A_{inv}}}(s)\det\left(\mathbf{T_{inv}}(s)^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\right)$$

$\mathbf{P_{inv}}(s)$ est une matrice polynomiale alors $\det\left(\mathbf{P_{inv}}(s)^{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\ldots,n_{inv}+j_i}_{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\ldots,n_{inv}+h_i}\right)$ est polynomial en s. Comme $\det\left(\mathbf{T_{inv}}(s)^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\right) \neq 0$, alors

$$\det\left(\mathbf{T_{inv}}(s)^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\right) \underset{s\longrightarrow+\infty}{\sim} s^{-n_{inv}+\deg\left(\det\left(\mathbf{P_{inv}}(s)^{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\ldots,n_{inv}+j_i}_{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\ldots,n_{inv}+h_i}\right)\right)}$$

puisque[14] $\mathbf{P_{A_{inv}}}(s) \underset{s\longrightarrow+\infty}{\sim} s^{n_{inv}}$ (équation 3.6). Ainsi, il peut être déduit que : $\delta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}} = \beta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}} - n_{inv}$ et pour les maxima $\delta_i = \beta_i - n_{inv}$. **Fin de la démonstration.**

Exemple. Considérons le modèle inverse suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{1} = \frac{1}{C_1}\mathbf{x_2} - \mathbf{y_2} \\ \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{2} = -\frac{1}{I_2}\mathbf{x_1} + \mathbf{y_1} \\ \mathbf{u_1} = \frac{1}{C_1}\mathbf{x_2} + I_1\dot{\mathbf{y}}_\mathbf{1} \\ \mathbf{u_2} = \frac{I_3}{C_1 I_2}\mathbf{x_2} - (1+\frac{I_3}{I_2})\mathbf{y_2} - C_2 I_3\ddot{\mathbf{y}}_\mathbf{2} \end{cases}$$

Dans le domaine de LAPLACE, ce modèle est caractérisé par les matrices : $\mathbf{A_{inv}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{I_2} & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B_{inv}}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C_{inv}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & \frac{I_3}{C_1 I_2} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{D_{inv}}(s) = \begin{bmatrix} I_1 s & 0 \\ 0 & -(1+\frac{I_3}{I_2}+C_2 I_3 s^2) \end{bmatrix}$. La matrice de transfert $\mathbf{T_{inv}}(s)$ et la matrice système $\mathbf{P_{inv}}(s)$ correspondantes sont données par :

$$\mathbf{T_{inv}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{I_2 s}{C_1 I_2 s^2+1} + I_1 s & \frac{1}{C_1 I_2 s^2+1} \\ \frac{I_3 s}{C_1 I_2 s^2+1} & \frac{I_3}{I_2(C_1 I_2 s^2+1)} - (1+\frac{I_3}{I_2}+C_2 I_3 s^2) \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{P_{inv}}(s) = \begin{bmatrix} s & -\frac{1}{C_1} & 0 & -1 \\ \frac{1}{I_2} & s & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_1} & I_1 s & 0 \\ 0 & -\frac{I_3}{C_1 I_2} & 0 & -(1+\frac{I_3}{I_2}+C_2 I_3 s^2) \end{bmatrix}.$$

Calculons le plus haut degré δ_1 des mineurs d'ordre 1 de $\mathbf{T_{inv}}(s)$ à partir du plus haut degré β_1 des mineurs d'ordre $n_{inv}+1$ de $\mathbf{P_{inv}}(s)$. En effet, pour calculer β_1, il est nécessaire d'étudier les sous-matrices d'ordre $n_{inv}+1$ de la matrice $\mathbf{P_{inv}}(s)$. En respectant les notations précédentes,

[14] La notation $\underset{s\longrightarrow+\infty}{\sim}$ représente la limite quand s tend vers $+\infty$.

nous obtenons alors le tableau 3.1. Ainsi, $\beta_1 = \max\{\beta_{1^{1,2,3}_{1,2,3}}, \beta_{1^{1,2,4}_{1,2,3}}, \beta_{1^{1,2,3}_{1,2,4}}, \beta_{1^{1,2,4}_{1,2,4}}\} = 4$ et par conséquent : $\delta_1 = \beta_1 - n_{inv} = 4 - 2 = 2$.

Calculons, à présent, le plus haut degré δ_2 des mineurs d'ordre 2 de $\mathbf{T_{inv}}(s)$ à partir du plus haut degré β_2 des mineurs d'ordre $n_{inv}+2$ de $\mathbf{P_{inv}}(s)$. Pour ce faire, il suffit de calculer le déterminant de $\mathbf{P_{inv}}(s)$ qui est l'unique mineur d'ordre $n_{inv}+2$:

$$det(\mathbf{P_{inv}}(s)) = -C_2 I_1 I_3 s^5 - \left(I_1 + \frac{I_1 I_3}{I_2} + \frac{C_2 I_3}{C_1} + \frac{C_2 I_1 I_3}{C_1 I_2}\right) s^3 - \left(\frac{1}{C_1} + \frac{I_3}{C_1 I_2} + \frac{I_1}{C_1 I_2}\right) s$$

Ainsi, $\beta_2 = 5$ et par conséquent : $\delta_2 = \beta_2 - n_{inv} = 5 - 2 = 3$.

TAB. 3.1 – Détermination des degrés des mineurs de $\mathbf{P_{inv}}(s)$.

Sous-matrice	Déterminant	Le degré du déterminant correspondant
$\mathbf{P_{inv}}(s)^{1,2,3}_{1,2,3}$	$I_1 s^3 + \frac{1}{C_1}(1 + \frac{I_1}{I_2})s$	$\beta_{1^{1,2,3}_{1,2,3}} = 3$
$\mathbf{P_{inv}}(s)^{1,2,4}_{1,2,3}$	$\frac{1}{C_1 I_2}$	$\beta_{1^{1,2,4}_{1,2,3}} = 0$
$\mathbf{P_{inv}}(s)^{1,2,3}_{1,2,4}$	$\frac{I_3 s}{C_1 I_2}$	$\beta_{1^{1,2,3}_{1,2,4}} = 1$
$\mathbf{P_{inv}}(s)^{1,2,4}_{1,2,4}$	$-C_2 I_3 s^4 - (1 + \frac{I_3}{I_2} + \frac{C_2 I_3}{C_1 I_2})s^2 - \frac{1}{C_1 I_2}$	$\beta_{1^{1,2,4}_{1,2,4}} = 4$

À travers cet exemple, nous remarquons que le passage par la matrice système est fastidieux, néanmoins cet outil algébrique facilite l'interprétation graphique et reste utile pour les démonstrations des procédures bond graph. Plus particulièrement, le théorème 2 sera utilisé pour énoncer les procédures bicausales 16 et 37 pour la détermination des ordres des pôles à l'infini (cf. section 3.1.3).

Ordre relatif

L'ordre relatif n'_i de la sortie y_i correspond au *nombre minimal de dérivations de la sortie y_i nécessaire pour faire apparaître une des composantes du vecteur d'entrée dans l'expression $y_i^{(n'_i)}$*. Dans le problème de conception, l'ordre relatif d'une sortie y_i peut être imposé par le cahier des charges. Dans ce cas, la structure ainsi retenue doit répondre à cette spécification. Plusieurs méthodes de calcul algébrique ont été proposées dans la littérature pour déterminer les ordres relatifs à partir d'un modèle linéaire et invariant dans le temps décrit par la représentation d'état 3.1.

Théorème 3. *L'**ordre relatif** peut être calculé par l'une de ces trois méthodes :*

- *n'_i est égal au minimum des degrés des transmittances composant la ligne $\mathbf{t_i}(s)$ de la matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ [Bro65b, Dau00].*
- *n'_i peut être calculé de sorte que [Bro65b, Des82, Com86] :*

$$n'_i = \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \{k \mid \mathbf{c}_i \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \neq \mathbf{0}\} \tag{3.11}$$

- *n'_i est égal à l'ordre du zéro à l'infini de $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{c}_i)$ (ou zéro à l'infini par ligne) tel que [Bro65b, Des82] :*

$$n'_i = \inf_{k \in \mathbb{N}} \{k \mid \lim_{s \to \infty} s^k \mathbf{t}_i(s) \neq \mathbf{0}\} \tag{3.12}$$

où $\mathbf{c}_i$ est l'$i^{ème}$ ligne de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{t}_i(s) = \mathbf{c}_i(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$.

Dans la suite, nous proposons une procédure algébrique pour la détermination de l'ordre relatif n'_i associé à la sortie y_i (du modèle physique direct Σ) à partir des ordres des pôles à l'infini du modèle inverse décrit dans le domaine de LAPLACE par le système d'équations 3.4. Cette procédure algébrique servira par la suite, notamment dans la section 3.1.3, pour établir une procédure bond graph permettant la détermination des ordres relatifs à partir du modèle bond graph inverse.

Théorème 4. *Pour un système carré inversible, l'**ordre relatif** n'_i de la sortie y_i peut être exprimé par :*

$$n'_i = \sum_{j=1}^{m} n_j - \sum_{j=1}^{m-1} \overline{n}_{ij} \tag{3.13}$$

où :

- *n_j est l'ordre du $j^{ème}$ pôle à l'infini du système $(\mathbf{A_{inv}}, \mathbf{B_{inv}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \mathbf{D_{inv}}(s))$;*
- *$\overline{n}_{ij}$ est l'ordre du $j^{ème}$ pôle à l'infini du système $\left(\mathbf{A_{inv}}, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_i}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_i}}(s)\right)$ avec :*

$$\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_i}}(s) = \left[\begin{array}{cccccc} b_{inv_1}(s) & \dots & b_{inv_{i-1}}(s) & b_{inv_{i+1}}(s) & \dots & b_{inv_m}(s) \end{array}\right]$$

$$\overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_i}}(s) = \left[\begin{array}{cccccc} d_{inv_1}(s) & \dots & d_{inv_{i-1}}(s) & d_{inv_{i+1}}(s) & \dots & d_{inv_m}(s) \end{array}\right]$$

et $\forall k \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}$, $b_{inv_k}(s)$ (resp. $d_{inv_k}(s)$) est la $k^{ème}$ colonne de $\mathbf{B_{inv}}(s)$ (resp. $\mathbf{D_{inv}}(s)$).

Démonstration.[15] La matrice de transfert du modèle inverse $\mathbf{T_{inv}}(s)$ peut être factorisée comme suit :

$$\mathbf{T_{inv}}(s) = [\mathbf{T_{inv_1}}(s) | t_{inv_i}(s) | \mathbf{T_{inv_2}}(s)]$$

avec $t_{inv_i}(s)$ l'i^{ème} colonne de $\mathbf{T_{inv}}(s)$.

La première étape de cette démonstration consiste en une permutation de colonnes afin de simplifier les manipulations de la matrice $\mathbf{T_{inv}}(s)$. Ainsi, il peut être écrit que :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{inv}}(s) &= \mathbf{T_{inv}}(s)\mathbf{M} \\ &= [t_{inv_i}(s) | \mathbf{T_{inv_1}}(s) | \mathbf{T_{inv_2}}(s)] \end{aligned}$$

où $\mathbf{M}$ est la matrice de permutation définie par :

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|ccc|ccc} 0 & 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & & 1 \end{array}\right]$$

[15] Cette démonstration est similaire à celle du théorème pour la détermination de l'ordre d'essentialité (théorème 5) présentée dans [Com86]. La seule différence est que cette démonstration est appliquée au modèle inverse (système d'équations 3.4) tandis que la démonstration des ordres d'essentialité est appliquée au modèle direct Σ.

Ainsi, $\overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{inv}}(s)$ et $\mathbf{T}_{\mathbf{inv}}(s)$ ont la même structure à l'infini et l'ordre du pôle à l'infini de la première colonne de $\overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{inv}}(s)$ correspond à l'ordre du pôle à l'infini de l'i$^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbf{T}_{\mathbf{inv}}(s)$. Par conséquent, l'ordre du zéro à l'infini de l'i$^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbf{T}(s) = \mathbf{T}_{\mathbf{inv}}^{-\mathbf{1}}(s)$ correspond à l'ordre du zéro à l'infini de la première ligne de $\overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{inv}}^{-\mathbf{1}}(s)$.

La deuxième étape de cette démonstration est d'exprimer la relation entre $\overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{inv}}(s)$ et la factorisation de Smith-McMillan à l'infini du sous-système $\left(\mathbf{A_{inv}}, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_i}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_i}}(s)\right)$ où :

$$\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_i}}(s) = \left[\begin{array}{cccccc} b_{inv_1}(s) & \dots & b_{inv_{i-1}}(s) & b_{inv_{i+1}}(s) & \dots & b_{inv_m}(s) \end{array} \right]$$

$$\overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_i}}(s) = \left[\begin{array}{cccccc} d_{inv_1}(s) & \dots & d_{inv_{i-1}}(s) & d_{inv_{i+1}}(s) & \dots & d_{inv_m}(s) \end{array} \right]$$

et $\forall\, k \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}$, $b_{inv_k}(s)$ (resp. $d_{inv_k}(s)$) est la k$^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbf{B_{inv}}(s)$ (resp. $\mathbf{D_{inv}}(s)$).

La factorisation de Smith-McMillan à l'infini du sous-système $\left(\mathbf{A_{inv}}, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_i}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_i}}(s)\right)$, caractérisé par la matrice de transfert $[\mathbf{T_{inv_1}}(s)|\mathbf{T_{inv_2}}(s)]$, est définie par :

$$[\mathbf{T_{inv_1}}(s)|\mathbf{T_{inv_2}}(s)] = \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{1}}(s)\overline{\mathbf{\Lambda}}(s)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{2}}(s)$$

avec $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{1}}(s)$ et $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{2}}(s)$ des matrices bipropres de dimensions respectives (m×m) et (m-1×m-1) et $\overline{\mathbf{\Lambda}}(s) = \left[\begin{array}{c} \overline{\mathbf{\Delta}}(s) \\ \hline 0 \end{array} \right]$, où $\overline{\mathbf{\Delta}}(s) = diag\left(s^{\overline{n}_{i1}}, \dots, s^{\overline{n}_{i(m-1)}}\right)$. $\overline{n}_{i1}, \dots, \overline{n}_{i(m-1)}$ sont les ordres des pôles à l'infini du sous-système $\left(\mathbf{A_{inv}}, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_i}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_i}}(s)\right)$. Ainsi $\overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{inv}}(s)$ peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{inv}}(s) &= \left[t_{inv_i}(s) \,\middle|\, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{1}}(s)\overline{\mathbf{\Lambda}}(s)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{2}}(s) \right] \\ &= \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{1}}(s) \left[\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{1}}^{-\mathbf{1}}(s) t_{inv_i}(s) \,\middle|\, \overline{\mathbf{\Lambda}}(s)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{2}}(s) \right] \end{aligned} \tag{3.14}$$

Sous l'action gauche de la transformation bipropre, la structure à l'infini des colonnes de $\overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{inv}}(s)$ correspond à celle de $\left[\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{1}}^{-\mathbf{1}}(s) t_{inv_i}(s) \,\middle|\, \overline{\mathbf{\Lambda}}(s)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{2}}(s) \right]$. Ce résultat peut être démontré grâce aux propriétés de la matrice bipropre et grâce à la définition suivante de l'ordre du pôle à l'infini de la colonne $\mathbf{g}_i(s)$ [Com90] :

$$\inf_{k \in \mathbb{N}^*} \{k \;\mid\; \lim_{s \to \infty} s^{-k} \mathbf{g}_i(s) \neq \mathbf{0}\} \tag{3.15}$$

Il peut être déduit que, sous l'action droite de la matrice bipropre $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{1}}^{-\mathbf{1}}(s)$, la structure à l'infini des lignes de $\overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{inv}}^{-\mathbf{1}}(s)$ correspond à celle de $\left[\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{1}}^{-\mathbf{1}}(s) t_{inv_i}(s) \,\middle|\, \overline{\mathbf{\Lambda}}(s)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{2}}(s) \right]^{-1}$.

De plus,

$$\left[\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{1}}^{-\mathbf{1}}(s) t_{inv_i}(s) \,\middle|\, \overline{\mathbf{\Lambda}}(s)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{2}}(s) \right] = \overline{\mathbf{T}}(s) \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{2}}(s) & \\ 0 & & & \end{array} \right] \tag{3.16}$$

avec $\overline{\mathbf{T}}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{1}}^{-\mathbf{1}}(s) t_{inv_i}(s) & \overline{\mathbf{\Lambda}}(s) \end{array} \right]$. Ainsi,

$$\left[\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{1}}^{-\mathbf{1}}(s)t_{inv_i}(s)\,\middle|\,\overline{\mathbf{\Lambda}}(s)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{2}}(s)\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{2}}^{-\mathbf{1}}(s) & \\ 0 & & & \end{array}\right] \overline{\mathbf{T}}^{-\mathbf{1}}(s) \tag{3.17}$$

Grâce à la forme particulière de la matrice bipropre figurant dans l'équation 3.17, la première ligne de $\left[\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{1}}^{-\mathbf{1}}(s)t_{inv_i}(s)\,\middle|\,\overline{\mathbf{\Lambda}}(s)\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{2}}(s)\right]^{-1}$ correspond à la première ligne de $\overline{\mathbf{T}}^{-\mathbf{1}}(s)$. Ainsi, il peut être déduit que les premières lignes de $\overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{inv}}^{-\mathbf{1}}(s)$ et $\overline{\mathbf{T}}^{-\mathbf{1}}(s)$ ont le même ordre du zéro à l'infini et par conséquent, l'i$^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbf{T}(s)$ possède le même ordre du zéro à l'infini.

À présent, déterminons la première ligne de $\overline{\mathbf{T}}^{-\mathbf{1}}(s)$. En effet, l'inverse de la matrice $\overline{\mathbf{T}}(s)$ est définie par :

$$\overline{\mathbf{T}}^{-\mathbf{1}}(s) = \frac{1}{det\left(\overline{\mathbf{T}}(s)\right)} adj\left(\overline{\mathbf{T}}(s)\right)$$

La première ligne d' $adj\left(\overline{\mathbf{T}}(s)\right)$ est définie par :

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & \dots & 0 & (-1)^{(m-1)}\prod_{j=1}^{m-1} s^{\overline{n}_{ij}} \end{array}\right]$$

Par ailleurs, d'après les équations 3.14 et 3.16 :

$$\overline{\mathbf{T}}(s) = \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{1}}^{-\mathbf{1}}(s)\overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{inv}}(s)\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{2}}^{-\mathbf{1}}(s) & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

La factorisation de Smith-McMillan à l'infini de $\mathbf{T}_{\mathbf{inv}}(s)$ quant à elle, peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{inv}}(s) = \mathbf{B}_{\mathbf{1}}(s)\mathbf{\Lambda}(s)\mathbf{B}_{\mathbf{2}}(s)$$

avec $\mathbf{B}_{\mathbf{1}}(s)$ et $\mathbf{B}_{\mathbf{2}}(s)$ des matrices bipropres et $\mathbf{\Lambda}(s) = diag\left(s^{n_1}, \dots, s^{n_m}\right)$ où $\{n_1, \dots, n_m\}$ sont les ordres des pôles à l'infini de $\mathbf{T}_{\mathbf{inv}}(\mathbf{s})$. Ainsi,

$$\overline{\mathbf{T}}(s) = \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{1}}^{-\mathbf{1}}(s)\mathbf{B}_{\mathbf{1}}(s)\mathbf{\Lambda}(s)\mathbf{B}_{\mathbf{2}}(s)\mathbf{M}\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{2}}^{-\mathbf{1}}(s) & \\ 0 & & & \end{array}\right] \tag{3.18}$$

Le déterminant de $\overline{\mathbf{T}}(s)$ peut donc s'écrire :

$$det\left(\overline{\mathbf{T}}(s)\right) = b(s)\prod_{j=1}^{m} s^{n_j}$$

où $b(s)$ est une fonction bipropre provenant des déterminants des matrices bipropres $\mathbf{B_1}(s)$, $\mathbf{B_2}(s)$, $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{1}}^{-\mathbf{1}}(s)$ et $\overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{2}}^{-\mathbf{1}}(s)$ (équation 3.18). Par conséquent, la première ligne de $\overline{\mathbf{T}}^{-\mathbf{1}}(s)$ est définie par :

$$\left[\begin{array}{ccccc} 0 & \dots & 0 & \dfrac{(-1)^{(m-1)}\prod_{j=1}^{m-1} s^{\overline{n}_{ij}}}{b(s)\prod_{j=1}^{m} s^{n_j}} \end{array}\right]$$

Nous pouvons en déduire alors que l'ordre du zéro à l'infini de la première ligne de $\overline{\mathbf{T}}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{s})$, et par conséquent de l'i$^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbf{T}(\mathbf{s})$ correspond à : $n'_i = -\left(\sum_{j=1}^{m-1} \overline{n}_{ij} - \sum_{j=1}^{m} n_j\right)$. L'ordre du zéro à l'infini de l'i$^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbf{T}(\mathbf{s})$ est défini comme étant l'ordre relatif de y_i. Alors, l'ordre relatif associé à y_i est défini par :

$$n'_i = \sum_{j=1}^{m} n_j - \sum_{j=1}^{m-1} \overline{n}_{ij}$$

Fin de la démonstration.

Le théorème 4 sera utilisé dans la section 3.1.3 pour définir la procédure bond graph pour la détermination des ordres relatifs à partir du modèle bond graph bicausal (cf. procédures 17 et 38).

Ordre d'essentialité

À partir de la notion de la ligne essentielle introduite par CREMER en 1971 [Cre71], l'ordre d'essentialité n_{ie} associé à une sortie du système Σ a été introduit pour la première fois en 1986 par COMMAULT *et al.* [Com86] pour résoudre le problème de découplage ligne par ligne et ce en appliquant un retour d'état statique. En outre, l'ordre d'essentialité n_{ie} peut être interprété comme étant *l'ordre maximal de dérivation de la sortie y_i apparaissant dans le modèle inverse d'ordre minimal.* Cette interprétation est d'un grand intérêt dans le contexte du dimensionnement des systèmes mécatroniques par modèles inverses. En effet, la détermination de ces ordres permettent de vérifier si le cahier des charges est bien rédigé et notamment, de donner les conditions de dérivabilité à imposer aux trajectoires spécifiées. Afin de déterminer ces ordres d'essentialité, le théorème suivant, faisant appel aux ordres des zéros à l'infini du système Σ (cf. théorème 1), a été établi.

Théorème 5. *Pour un système inversible*[16] $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$*, l'**ordre d'essentialité** n_{ie} de la sortie y_i est défini par [Com86] :*

$$n_{ie} = \sum_{j=1}^{m} n_j - \sum_{j=1}^{m-1} \overline{n}_{ij} \tag{3.19}$$

où :

- *n_j est l'ordre du j^{ème} zéro à l'infini du système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$;*
- *$\overline{n}_{ij}$ est l'ordre du j^{ème} zéro à l'infini du système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i)$ avec :*

$$\overline{\mathbf{C}}_i = \left[\begin{array}{cccccc} c_1^T & \dots & c_{i-1}^T & c_{i+1}^T & \dots & c_m^T \end{array}\right]^T$$

et $\forall k \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}$, $\mathbf{c}_k$ est la k^{ème} ligne de $\mathbf{C}$.

[16] À l'origine, cette proposition a été énoncée par COMMAULT *et al.* [Com86] pour les systèmes inversibles à droite.

Représentation graphique

Nous proposons de définir, dans un premier temps, un modèle digraphe « digraphe de LAPLACE »représentant un modèle inverse décrit dans le domaine de LAPLACE par le système d'équations 3.4 et, dans un second temps, de définir une procédure permettant la détermination graphique du déterminant de la matrice système du modèle inverse à partir du « digraphe de LAPLACE ». Ces résultats sont utiles pour les démonstrations des procédures bond graph énoncées dans la section 3.1.3.

Le « digraphe de Laplace »
Un modèle d'état direct Σ peut s'exprimer sous une forme matricielle ou sous une forme graphique par l'intermédiaire d'un digraphe. Nous définissons le « digraphe de LAPLACE » comme l'adaptation d'une représentation digraphe classique [Yam85,Rei88] (cf. chapitre1, section 1.5.1) dans le domaine de LAPLACE où les poids de certains arcs peuvent être fonction de l'opérateur de LAPLACE s. Quelques notions de base d'une représentation digraphe sont détaillées dans la section E.2.2 de l'annexe E.

Proposition 1. *Considérons le modèle inverse décrit par le système d'équations 3.4, le digraphe associé est caractérisé par :*

- *Un ensemble de sommets* $V = U_{inv} \cup X_{inv} \cup Y_{inv}$ *où* $U_{inv} = \{y_1, ..., y_m\}$, $X_{inv} = \{x_1, ..., x_{n_{inv}}\}$ *et* $Y_{inv} = \{u_1, ..., u_m\}$ *sont respectivement les ensembles des sommets d'entrée, d'état et de sortie ;*
- *Un ensemble d'arcs* $E = E_{\mathbf{A_{inv}}} \cup E_{\mathbf{B_{inv}}} \cup E_{\mathbf{C_{inv}}} \cup E_{\mathbf{D_{inv}}}$ *avec :*

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{A_{inv}}} &= \{(x_j, x_i) | a_{ij} \neq 0\} \\ E_{\mathbf{B_{inv}}} &= \{(y_j, x_i) | b_{ij}(s) \neq 0\} \\ E_{\mathbf{C_{inv}}} &= \{(x_j, u_i) | c_{ij} \neq 0\} \\ E_{\mathbf{D_{inv}}} &= \{(y_j, u_i) | d_{ij}(s) \neq 0\} \end{aligned}$$

où (x_j, x_i) *représente l'arc orienté partant du sommet* $x_j \in X_{inv}$ *vers le sommet* $x_i \in X_{inv}$ *et* $a_{ij} \neq 0$ *signifie que le coefficient de la matrice* $\mathbf{A_{inv}}$*, situé sur l'*$i^{ème}$ *ligne et la* $j^{ème}$ *colonne est différent de zéro (le même type de convention s'applique aux autres ensembles* $E_{\mathbf{B_{inv}}}$, $E_{\mathbf{C_{inv}}}$ *et* $E_{\mathbf{D_{inv}}}$*). Chaque arc* (x_j, x_i) *(resp.* (y_j, x_i), (x_j, u_i), (y_j, u_i)*) a un poids égal à l'élément (i, j) de la matrice* $\mathbf{A_{inv}}$ *(resp.* $\mathbf{B_{inv}}(s)$, $\mathbf{C_{inv}}$, $\mathbf{D_{inv}}(s)$*). Par conséquent, les poids des arcs* (y_j, x_i) *et* (y_j, u_i) *sont des polynômes de l'opérateur de* LAPLACE s.

Les règles d'exploitation du « digraphe de LAPLACE » représentant le modèle inverse (système d'équations 3.4) sont les mêmes que celles du digraphe classique (cf. section 1.5.1, chapitre 1 et annexe E). Pour plus de détails sur ces règles, le lecteur peut consulter [Yam85, Rei88].

Exemple. Considérons le modèle inverse suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{y_1} - \mathbf{y_2} \\ \mathbf{u_1} = \frac{1}{C}\mathbf{q} + I_1\dot{\mathbf{y}}_\mathbf{1} + R\mathbf{y_1} - R\mathbf{y_2} \\ \mathbf{u_2} = -\frac{1}{C}\mathbf{q} + I_2\dot{\mathbf{y}}_\mathbf{2} - R\mathbf{y_1} + R\mathbf{y_2} \end{cases} \tag{3.20}$$

Dans le domaine de LAPLACE, ce modèle est caractérisé par les matrices suivantes : $\mathbf{A_{inv}} = 0$, $\mathbf{B_{inv}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C_{inv}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{C} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{D_{inv}}(s) = \begin{bmatrix} I_1 s + R & -R \\ -R & I_2 s + R \end{bmatrix}$.

Le digraphe associé est donné figure 3.1.

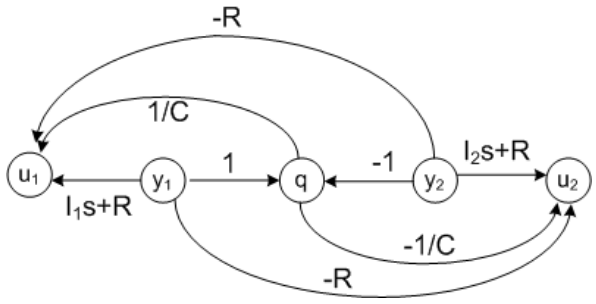


FIG. 3.1 – Exemple de représentation digraphe d'un modèle inverse.

Détermination du déterminant de la matrice système $\mathbf{P_{inv}}(s)$ du modèle inverse à partir du « digraphe de Laplace »

La matrice système $\mathbf{P}(s)$ (cf. définition 29, annexe E) du modèle direct Σ a été utilisée dans l'analyse structurelle des systèmes linéaires et invariant dans le temps notamment dans les travaux de ROSENBROCK [Ros70]. Cette matrice a servi ensuite à démontrer certaines procédures bond graph pour l'analyse structurelle, par exemple celle de la détermination des ordres des zéros à l'infini (cf. procédure 10, section 3.1.2). Ainsi, deux procédures bond graph existent pour calculer le déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ du modèle direct Σ (cf. procédures 27 et 29, annexe E). Ces dernières ont été définies en se basant sur l'analogie bond graph-digraphe et les travaux de REINSCHKE [Rei88] qui a établi une procédure digraphe pour la détermination de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ du modèle direct Σ. Nous rappelons ici cette procédure.

Procédure 7. *Considérons $\mathcal{G}(\Sigma)$ le digraphe associé au système Σ. Le déterminant de la matrice système $\mathbf{P}(s)$ est donné par l'expression suivante [Rei88] :*

$$\det(\mathbf{P}(s)) = \sum_{k=0}^{n} \rho_k^{\{m\}} s^{n-k} \tag{3.21}$$

où :

- *n correspond au nombre de sommets d'état et m correspond au nombre des sommets d'entrée ;*
- *$\mathcal{G}(\Sigma')$ est le digraphe obtenu à partir du digraphe $\mathcal{G}(\Sigma)$ en ajoutant un arc de poids (-1) entre chaque sommet de sortie et chaque sommet d'entrée ;*
- *$\rho_k^{\{m\}}$ correspond, sur le digraphe $\mathcal{G}(\Sigma')$, à la somme des poids des familles de cycles contenant k sommets d'état et au moins m arcs de retour. Dans ce calcul, le poids de chaque famille doit être multiplié par $(-1)^d$ où d étant le nombre de cycles disjoints contenus dans la famille. Le poids doit également être multiplié par $(-1)^{\sigma_k}$ où σ_k est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sommets de sortie de la famille de cycles dans l'ordre initial des sommets de sortie lorsque les cycles de la famille sont ordonnés dans l'ordre initial des sommets d'entrée.*

Remarque : La procédure 7 a été définie dans le cas où $\mathbf{D} = 0$ mais la démonstration est facilement généralisable dans le cas contraire.

L'équation 3.21 peut être adaptée à un modèle inverse décrit par le système d'équations 3.4 et par conséquent, le déterminant de la matrice système $\mathbf{P_{inv}}(s)$ du modèle inverse peut être donné par l'expression suivante :

$$\det(\mathbf{P_{inv}}(s)) = \sum_{k=0}^{n_{inv}} \rho_k^{\{m\}}(s) s^{n_{inv}-k} \tag{3.22}$$

où :

- n_{inv} est le nombre de sommets d'état et m correspond au nombre des sommets d'entrée ;
- la somme des poids de chaque famille de cycles contenant k sommets d'état et au moins m arcs de retour dépend de l'opérateur de LAPLACE s.

Cette déduction directe est possible parce que la seule différence entre le digraphe représentant le modèle inverse et le digraphe représentant le modèle direct est l'apparition de l'opérateur de LAPLACE dans les poids de certains arcs ((y_j, x_i) et (y_j, u_i)) sur le « digraphe de LAPLACE ». Cela ne change rien dans le calcul du déterminant d'une matrice (cf. [Rei88]) et par conséquent dans le calcul du déterminant de la matrice système $\mathbf{P_{inv}}(s)$.

Exemple. Le déterminant de la matrice système du modèle inverse (équation 3.20) retrouvé par l'approche modèle d'état est donné par :

$$det\left(\mathbf{P_{inv}}(s)\right) = I_1 I_2 s^3 + R(I_1 + I_2)s^2 + \frac{(I_1 + I_2)}{C}s \tag{3.23}$$

Calculons maintenant ce déterminant en appliquant la procédure digraphe (équation 3.22). Le digraphe $\mathcal{G}(\Sigma')$ (digraphe avec des arcs de retour) est donné figure 3.2. L'analyse des familles de cycles est illustrée par la figure 3.3 et peut être résumée par le tableau 3.2. Ainsi, l'expression du déterminant de la matrice système $\mathbf{P_{inv}}(s)$ (équation 3.23) est déterminée graphiquement.

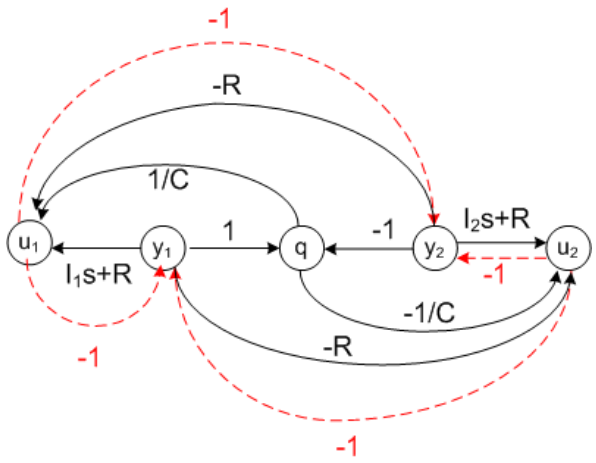
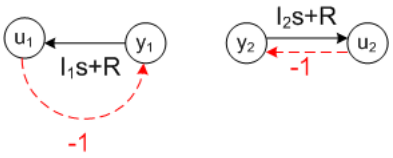


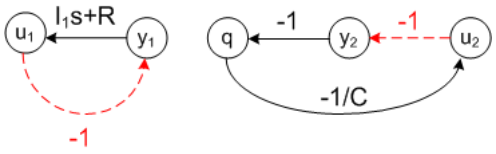
FIG. 3.2 – Le digraphe $\mathcal{G}(\Sigma')$ pour la détermination du déterminant de la matrice système $\mathbf{P_{inv}}(s)$.

TAB. 3.2 – Détermination du déterminant de la matrice système $\mathbf{P_{inv}}(s)$ à partir du digraphe $\mathcal{G}(\Sigma')$: analyse des familles de cycles.

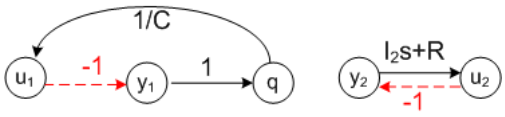
Famille	$\rho_k^{\{m\}}(s) \cdot s^{n_{inv}-k}$	d	σ_k
$\mathcal{F}_1$	$(-(I_1 s + R)) \cdot (-(I_2 s + R)) \cdot s^{(1-0)}$	2	0
$\mathcal{F}_2$	$(-(I_1 s + R)) \cdot (-\frac{1}{C}) \cdot s^{(1-1)}$	2	0
$\mathcal{F}_3$	$(-\frac{1}{C}) \cdot (-(I_2 s + R)) \cdot s^{(1-1)}$	2	0
$\mathcal{F}_4$	$(\frac{1}{C}) \cdot (R) \cdot s^{(1-1)}$	2	1
$\mathcal{F}_5$	$(R) \cdot (R) \cdot s^{(1-0)}$	2	1
$\mathcal{F}_6$	$(R) \cdot (\frac{1}{C}) \cdot s^{(1-1)}$	2	1



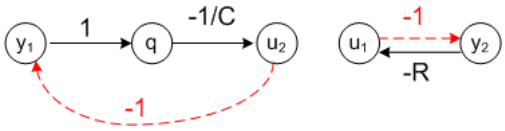
(a) Famille $\mathcal{F}_1$



(b) Famillle $\mathcal{F}_2$

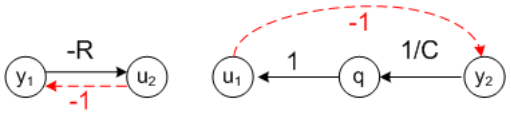


(c) Famille $\mathcal{F}_3$



(d) Famille $\mathcal{F}_4$

(e) Famille $\mathcal{F}_5$



(f) Famille $\mathcal{F}_6$

FIG. 3.3 – Analyse des familles de cycles.

L'équation 3.22 est utilisée dans la section 3.1.3 pour démontrer la procédure bond graph du calcul du déterminant de la matrice système $\mathbf{P_{inv}}(s)$ du modèle inverse. Cette démonstration repose sur l'analogie bond graph-digraphe (cf. procédure 26, annexe E).

3.1.2 L'analyse structurelle et comportementale à partir du modèle bond graph direct

Dans la méthodologie du dimensionnement par modèles bond graph inverses, l'étape de l'adéquation consiste à vérifier d'une part l'inversibilité du modèle considéré (cf. section 1.3.3) et, d'autre part, que les spécifications imposées par le cahier des charges permettent de trouver une solution physiquement réalisable (une entrée dans le cas de la remontée de spécifications et de la détermination de la commande en boucle ouverte ou un paramètre dans le cas de la synthèse paramétrique). Dans ce mémoire, nous nous intéressons uniquement à ce deuxième aspect de l'étape de l'adéquation qui repose sur la détermination graphique de propriétés structurelles (ordres des zéros à l'infini, ordres relatifs et ordres d'essentialité) du système à concevoir. Des procédures graphiques ont été établies pour déterminer ces propriétés à partir d'un modèle bond

graph en causalité préférentielle intégrale. Par rapport à l'approche modèle d'état qui relève d'un niveau d'analyse comportemental, l'approche bond graph tient compte d'une part, de la structure du système (niveau d'analyse BG-structurel), et d'autre part, des lois caractéristiques des phénomènes physiques mis en jeu (niveau d'analyse comportemental). Pour ce faire, la détermination de toute propriété structurelle à partir d'un modèle bond graph est formulée selon le niveau d'analyse souhaité et par conséquent, une démarche chronologique dans le travail de conception peut être mise en place. Dans cette section, nous rappelons ces procédures bond graph pour l'analyse structurelle relevant du niveau d'analyse BG-structurel. Celles relevant du niveau d'analyse comportemental sont présentées dans l'annexe F.

Zéros à l'infini

Sur un modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale, la détermination du nombre et des ordres des zéros à l'infini repose sur l'analyse des chemins causaux E/S disjoints (cf. définitions 17, 19 et 20, annexe A).

Le nombre de zéros à l'infini

Le nombre de zéros à l'infini d'un système linéaire et invariant dans le temps Σ est égal au rang r de sa matrice de transfert $\mathbf{T}(s)$ (cf. théorème 1). Ceci peut être interprété par le fait :

- qu'au moins un mineur d'ordre r est non nul ;
- et que tout mineur d'ordre strictement supérieur à r est nécessairement nul.

L'existence d'un mineur d'ordre r non nul peut être interprété, sur un modèle bond graph, par l'existence d'un sous-système de dimension r inversible et donc l'existence d'au moins un ensemble de r chemins causaux E/S disjoints assurant cette inversibilité (cf. section 1.3.3, chapitre 1). Au contraire, si tout mineur d'ordre supérieur à r est nul alors tout sous-système de dimension strictement supérieure à r est non inversible et ce, soit parce qu'il n'existe aucun ensemble contenant plus de r chemins causaux E/S disjoints (non inversibilité BG-structurelle), soit parce qu'il existe plusieurs ensembles contenant plus de r chemins causaux E/S disjoints mais que la somme signée de leurs gains s'annule (non inversibilité comportementale). Ainsi, le nombre de zéros à l'infini peut être calculé par approche bond graph selon le niveau d'analyse considéré.

Procédure 8. ***niveau d'analyse BG-structurel***
Sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale, le ***nombre de zéros à l'infini*** *du système est égal au nombre maximal de chemins qu'un ensemble de chemins causaux d'E/S disjoints puisse contenir [Dau00, Jar10].*

Procédure 9. ***niveau d'analyse comportemental***
Sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale, le ***nombre de zéros à l'infini*** *du système est égal au nombre maximal de chemins qu'un ensemble de chemins causaux E/S disjoints puisse contenir* ***pour assurer l'inversibilité d'un sous-système de dimension r*** *[Jar10].*

Remarque : Dans la littérature, certaines références préconisent l'étude des chemins causaux E/S différents (cf. définition 43, annexe E) tandis que d'autres parlent de chemins causaux E/S disjoints. Les deux approches ont été discutées dans les travaux de Jardin [Jar10] :

- Pour le niveau d'analyse BG-structurel, il faut considérer les chemins causaux E/S disjoints (chemins qui assurent l'inversibilité structurelle[17] du modèle).
- Pour le niveau d'analyse comportemental, la considération des chemins causaux E/S différents ou disjoints conduit au même résultat. Néanmoins, les chemins causaux E/S différents

[17] L'inversibilité structurelle est vérifiée en analysant les lignes de puissance E/S et les chemins causaux E/S associés et ce, sans tenir compte de leurs gains (cf. conditions nécessaires 1 et 2 du critère d'inversibilité 3, section 1.3.3, chapitre 1). La condition 3 relève d'un niveau d'analyse comportemental puisqu'elle permet d'étudier la résolubilité de la structure de jonction obtenue et ce, en étudiant les gains des chemins causaux.

peuvent entraîner un temps d'analyse plus important.

Ordres des zéros à l'infini
Les ordres des zéros à l'infini du modèle direct Σ sont calculés par l'approche bond graph selon le niveau d'analyse considéré.

Procédure 10. ***niveau analyse BG-structurel***
Les ***ordres des zéros à l'infini*** *peuvent être calculés comme suit [Ber97b, Ber00, Jar10] :*

$$\begin{cases} n_1 = L_1 \\ n_i = L_i - L_{i-1} \end{cases} \tag{3.24}$$

où, sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale, L_i représente la longueur[18] *minimale qu'un ensemble de i chemins causaux E/S* ***différents*** *puisse avoir.*

La procédure relevant du niveau d'analyse comportemental est donnée dans l'annexe F.

Remarques :
- Cette procédure permet de classer les ordres des zéros à l'infini dans l'ordre croissant.
- Le calcul des ordres des zéros à l'infini implique les chemins causaux E/S différents et non uniquement les chemins causaux E/S disjoints (que ce soit au niveau BG-structurel ou comportemental) [Jar10].

Ordre relatif

Le cahier des charges peut imposer les ordres relatifs des sorties. Sur un modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale, l'ordre relatif est déterminé en analysant les ordres des chemins causaux (cf. définition 40, annexe E).

Procédure 11. ***niveau d'analyse BG-structurel***
*Sur un modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale, l'****ordre relatif*** *de la sortie y_i est égal l'ordre minimal qu'un chemin causal peut avoir entre la sortie y_i et n'importe quelle entrée [Wu 95, Ngw99, Jar10].*

Cependant Wu et Youcef-Toumi [Wu 95] ont souligné que cette procédure présente une exception. En effet, s'il existe deux chemins causaux E/S entre une entrée u_j et une sortie y_i de même ordre minimal ω_{min_i} et dont la somme des gains est nulle, alors l'ordre relatif de la sortie associée (l'ordre relatif au sens de l'approche algébrique) est plus grand que ω_{min_i}. Ainsi, la procédure bond graph pour la détermination des ordres relatifs a été reformulée par Jardin [Jar10] pour tenir compte des différents niveaux d'analyse. Elle permet ainsi une reconception plus précise et au plus tôt du système lorsque les ordres relatifs imposés par le cahier des charges ne sont pas obtenus. Cette procédure relevant du niveau d'analyse comportemental englobe le cas particulier énoncé par Wu et Youcef-Toumi [Wu 95] et est donnée dans l'annexe F.

Remarque : S'il existe un unique chemin causal entre les variables u_j et y_i, une analyse de niveau BG-structurel suffit à obtenir un résultat identique à l'approche algébrique : le cas d'une somme de gains statiques nulles n'est pas envisageable dans ce cas. Ainsi, la prise en compte des différents niveaux d'analyse permet dans certains cas de diminuer le temps d'analyse.

[18] La notion de longueur d'un chemin causal est introduite dans la définition 40 de l'annexe E.

Ordre d'essentialité

Par l'approche modèle d'état, les ordres d'essentialité sont définis en fonction des ordres des zéros à l'infini n_j $(j = 1, \ldots, m)$ du système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ et des ordres des zéros à l'infini $\overline{n}_{ij}$ $(j = 1, \ldots, m-1)$ du sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i)$ (cf. théorème 5). Dans le contexte bond graph, les ordres des zéros à l'infini n_j $(j = 1, \ldots, m)$ et $\overline{n}_{ij}$ $(j = 1, \ldots, m-1)$ sont déterminés respectivement sur le modèle bond graph initial (cf. procédure 10) et sur le modèle bond graph obtenu en supprimant l'i$^{\text{ème}}$ détecteur du modèle bond graph initial.

Remarque : La suppression d'un détecteur ne change pas la causalité affectée au reste du modèle. De plus, si le système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ admets m zéros à l'infini alors chaque sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i)$ admets $m-1$ zéros à l'infini.

Cas particulier

Dans les références [El 08a, El 08b], il a été énoncé que pour un modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale, l'ordre d'essentialité n_{ie} de la sortie y_i peut être déterminé comme suit :

$$n_{ie} = L_m - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} n'_j \tag{3.25}$$

où :

- L_m est la longueur minimale qu'un ensemble de m chemins causaux E/S différents puisse avoir sur le modèle bond graph initial ;
- n'_j est l'ordre relatif de la sortie y_j.

L'équation 3.25 est valable uniquement dans le cas où le sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i)$ est découplable par retour statique[19].

Démonstration. À partir de la procédure de calcul des ordres des zéros à l'infini sur un modèle bond graph (procédure 10), il peut être déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} n_j &= L_1 + \sum_{j=2}^{m} (L_j - L_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{m} L_j - \sum_{j=1}^{m-1} L_j \\ &= L_m \end{aligned} \tag{3.26}$$

Ainsi, les équations 3.19 et 3.25 sont équivalentes si et seulement si $\sum_{j=1}^{m-1} \overline{n}_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} n'_j$.

Considérons le sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i)$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$ déduit d'un système inversible $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ à m entrées et m sorties :

- Comme le système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ admet m zéros à l'infini, le sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i)$ possède $m-1$ zéros à l'infini. Leurs ordres sont notés $\{\overline{n}_{i1}, \ldots, \overline{n}_{i(m-1)}\}$.
- L'ordre relatif d'une sortie y_j avec $j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m\}$ demeure inchangé en passant du système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ au sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i)$.

[19] La section 3.1.1 de l'annexe E présente plus de détails sur le découplage par retour d'état statique.

Écrire $\sum_{j=1}^{m-1} \overline{n}_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} n'_j$ implique l'égalité entre la somme des $m-1$ ordres des zéros à l'infini du sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i)$ et la somme des ordres relatifs de ses $m-1$ sorties. Ainsi d'après le critère de découplabilité (critère 1, Annexe E), le sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i)$ est découplable par retour d'état statique. **Fin de la démonstration.**

Exemple 1. Considérons le système composé de trois masses en série (figure 3.4). La liaison entre les masses m_1 et m_2 est modélisée par un ressort et un amortisseur en parallèle. La liaison entre les masses m_2 et m_3 est modélisée par un ressort. Deux efforts F_1 et F_2 sont imposés respectivement sur les masses m_1 et m_3 et les vitesses V_1 et V_2 des masses m_1 et m_2 sont mesurées. Ainsi, les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie sont donnés par $x = [p_1, p_2, p_3, q_1, q_2]^T$, $u = [F_1, F_2]^T$ et $y = [V_1, V_2]^T$ où p_i, $i = \{1, 2, 3\}$, et q_j, $j = \{1, 2\}$, sont respectivement la quantité de mouvement de l'i$^{\text{ème}}$ masse et l'élongation du j$^{\text{ème}}$ ressort.

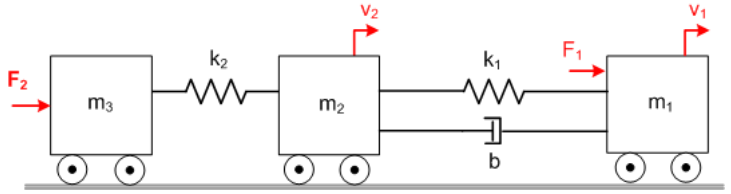


FIG. 3.4 – Trois masses en série.

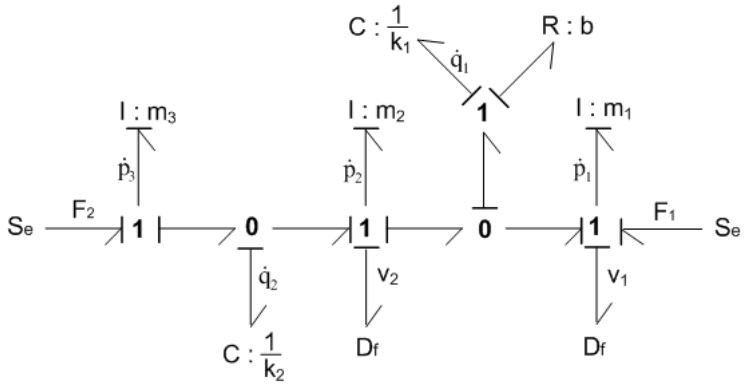


FIG. 3.5 – Modèle bond graph causal associé.

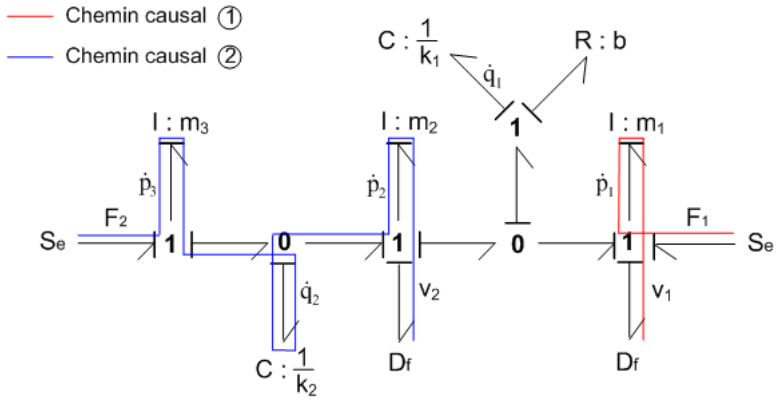
Le modèle bond graph correspondant peut être construit (figure 3.5) et la causalité préférentielle intégrale est affectée suivant la procédure SCAP (cf. procédure 21, annexe A). La représentation d'état correspondante est caractérisée par les matrices suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{m_1} & \frac{b}{m_2} & 0 & k_1 & 0 \\ \frac{b}{m_1} & -\frac{b}{m_2} & 0 & -k_1 & k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_2 \\ -\frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_2} & \frac{1}{m_3} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

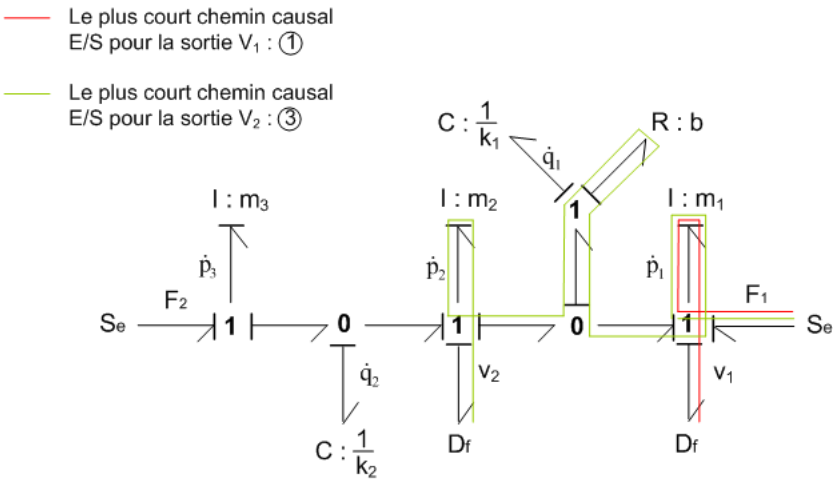
L'application du théorème 5 (approche modèle d'état) permet la détermination des ordres d'essentialité du système : $n_{1e} = 2$ et $n_{2e} = 3$. Ceci représente le résultat de référence auquel le

résultat bond graph sera comparé.

Pour cet exemple, les sous-systèmes $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_1)$ et $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_2)$ contiennent chacun une seule sortie et par conséquent, ils sont nécessairement découplables par retour statique : la détermination des ordres d'essentialité à partir de l'équation 3.25 peut être réalisée.



(a) Ensemble de chemins causaux E/S différents



(b) Détermination des ordres relatifs

FIG. 3.6 – Modèle bond graph causal : analyse des chemins causaux E/S.

Afin de déterminer les ordres d'essentialité, l'analyse des chemins causaux E/S est établie (figure 3.6). La longueur (resp. l'ordre) du chemin causal ⓚ reliant la variable v_i à la variable v_j est notée $\ell_k(v_i \rightarrow v_j)$ (resp. $\omega_k(v_i \rightarrow v_j)$). Ainsi, nous remarquons que :

- Un ensemble unique $S_1 = \{①, ②\}$ de deux chemins causaux E/S différents existe entre la paire d'entrées (F_1, F_2) et la paire de sorties (V_1, V_2) (figure 3.6(a)). Ainsi $L_2 = \ell_1(F_1 \rightarrow V_1) + \ell_2(F_2 \rightarrow V_2) = 1 + 3 = 4$.
- Le plus court chemin causal entre la sortie V_1 (resp. V_2) et n'importe quelle entrée correspond au chemin ① (resp. ③) entre V_1 (resp. V_2) et F_1 comme il est indiqué sur la figure 3.6(b). Ainsi $n'_1 = \omega_1(F_1 \rightarrow V_1) = 1$ et $n'_2 = \omega_3(F_1 \rightarrow V_2) = 2$.

Par conséquent, conformément à l'équation 3.25 (la procédure énoncée dans [El 08a, El 08b]) : $n_{1e} = L_2 - n'_2 = 2$ et $n_{2e} = L_2 - n'_1 = 3$. Ce résultat correspond à celui trouvé par l'approche modèle d'état (théorème 5).

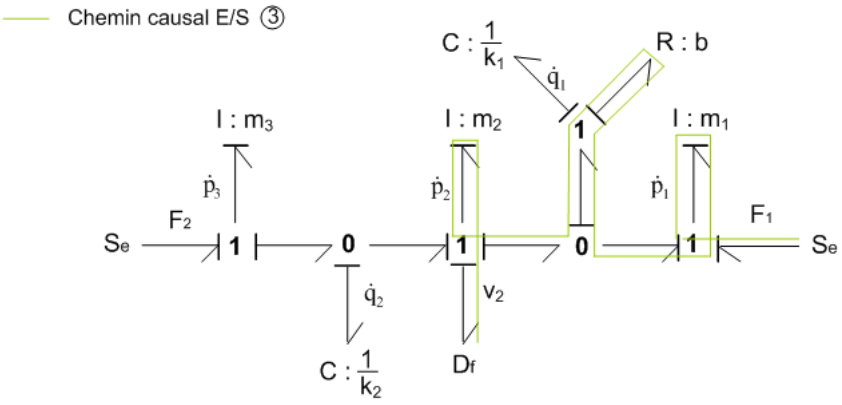
Cas général
Une procédure bond graph est proposée pour le cas général. À travers un exemple, il est montré que par rapport à la procédure 10, la procédure proposée permet de réduire le temps de calcul.

Procédure 12. ***niveau d'analyse BG-structurel***
*Sur un modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale, l'**ordre d'essentialité** n_{ie} de la sortie y_i peut être calculé comme suit [Jar10, El 11a] :*

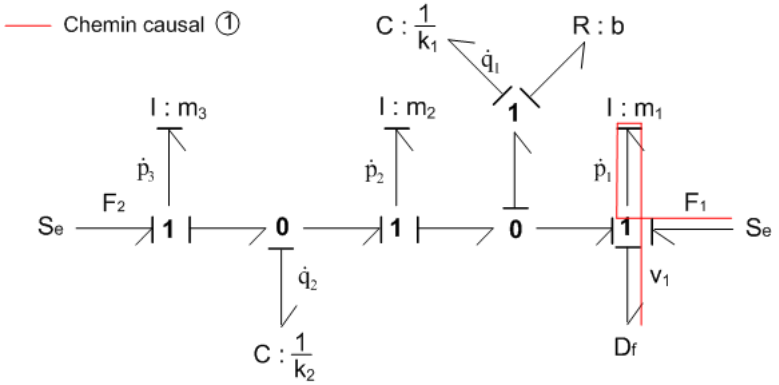
$$n_{ie} = L_m - L_{m-1}^{(i)} \tag{3.27}$$

où :
- *L_m est la longueur minimale qu'un ensemble de m chemins causaux E/S différents puisse avoir sur le modèle bond graph initial ;*
- *$L_{m-1}^{(i)}$ est la longueur minimale qu'un ensemble de $m-1$ chemins causaux E/S différents puisse avoir sur le modèle bond graph obtenu en supprimant du modèle bond graph initial son $i^{ème}$ détecteur.*

Démonstration. Cette procédure substitue simplement l'équation 3.26 dans l'équation 3.19 pour le calcul de la somme des ordres des zéros à l'infini respectivement pour $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ et $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i)$. **Fin de la démonstration.**



(a) Pour le sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_1)$.



(b) Pour le sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_2)$.

FIG. 3.7 – Analyse causale : détermination des ordres d'essentialité.

Exemple 1. Considérons le système illustré par la figure 3.4. Afin de déterminer l'ordre minimal que le sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_1)$ (resp. $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_2)$) puisse avoir, considérons le modèle bond graph

donné par la figure 3.7(a) (resp. figure 3.7(b)), où l'élément $D_f : V_1$ (resp. $D_f : V_2$) a été supprimé à partir du modèle bond graph initial. L'analyse causale permet de déduire que :

$$\begin{cases} L_1^{(1)} = \ell_3(F_1 \rightarrow V_2) = 2 \\ L_1^{(2)} = \ell_1(F_1 \rightarrow V_1) = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} n_{1e} = L_2 - L_1^{(1)} = 2 \\ n_{2e} = L_2 - L_1^{(2)} = 3 \end{cases}$$

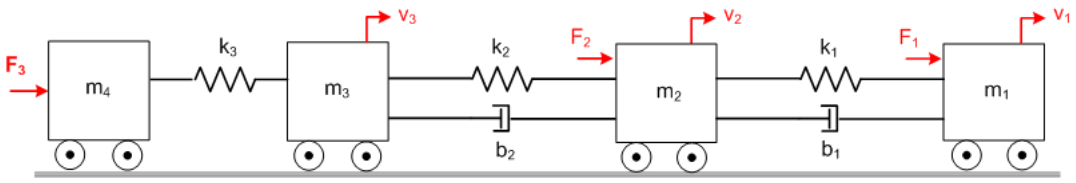


FIG. 3.8 – Quatre masses en série.

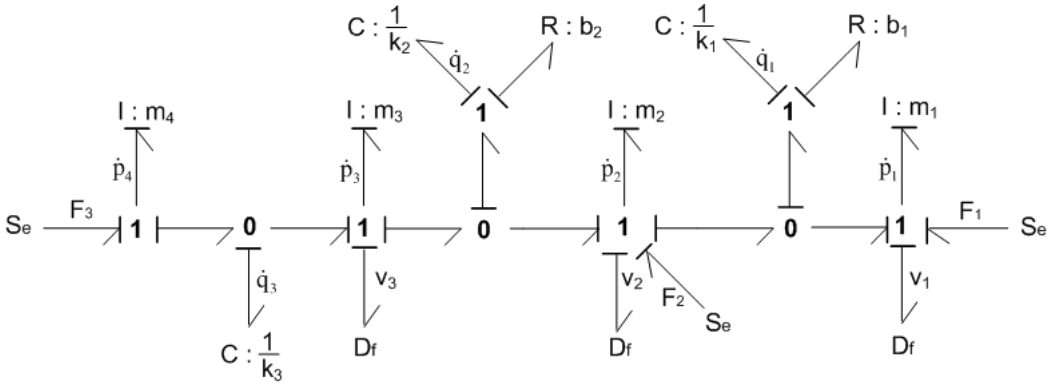


FIG. 3.9 – Modèle bond graph causal.

Exemple 2. Considérons le système composé de quatre masses en série (figure 3.8). Les liaisons entre les masses (m_1, m_2) et (m_2, m_3) sont modélisées par un ressort et un amortisseur en parallèle. La liaison entre les masses m_3 et m_4 est modélisée par un ressort. Les efforts F_1, F_2 et F_3 sont imposés aux masses m_1, m_2 et m_4 respectivement et les vitesses V_1, V_2 et V_3 des masses m_1, m_2 et m_3 sont mesurées. Ainsi, les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie sont donnés par $x = [p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3]^T$, $u = [F_1, F_2, F_3]^T$ et $y = [V_1, V_2, V_3]^T$ où p_i, $i = \{1, \ldots, 4\}$, et q_j, $j = \{1, 2, 3\}$, sont respectivement la quantité de mouvement de l'i$^{\text{ème}}$ masse et l'élongation du j$^{\text{ème}}$ ressort. Après la construction du modèle bond graph associé (figure 3.9), le modèle d'état décrit par les matrices suivantes peut être déduit :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_2} & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ \frac{b_1}{m_1} & -\frac{b_1+b_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_3} & 0 & -k_1 & k_2 & 0 \\ 0 & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_3} & 0 & 0 & -k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_3 \\ -\frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_2} & \frac{1}{m_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m_3} & \frac{1}{m_4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par l'approche modèle d'état, l'application du théorème 5 permet de déduire les ordres d'essentialité du système : $n_{1e} = 1$, $n_{2e} = 2$ et $n_{3e} = 3$. Ces ordres représentent le résultat de référence auquel les résultats trouvés par l'approche bond graph seront comparés.

Une première analyse des chemins causaux E/S du modèle bond graph conduit à déduire qu'un unique ensemble $S_1 = \{①, ②, ③\}$ de chemins causaux E/S différents existe entre les entrées (F_1, F_2, F_3) et les sorties (V_1, V_2, V_3) (figure 3.10).
Ainsi $L_3 = \ell_1(F_1 \to V_1) + \ell_2(F_2 \to V_2) + \ell_3(F_3 \to V_3) = 1 + 1 + 3 = 5$.

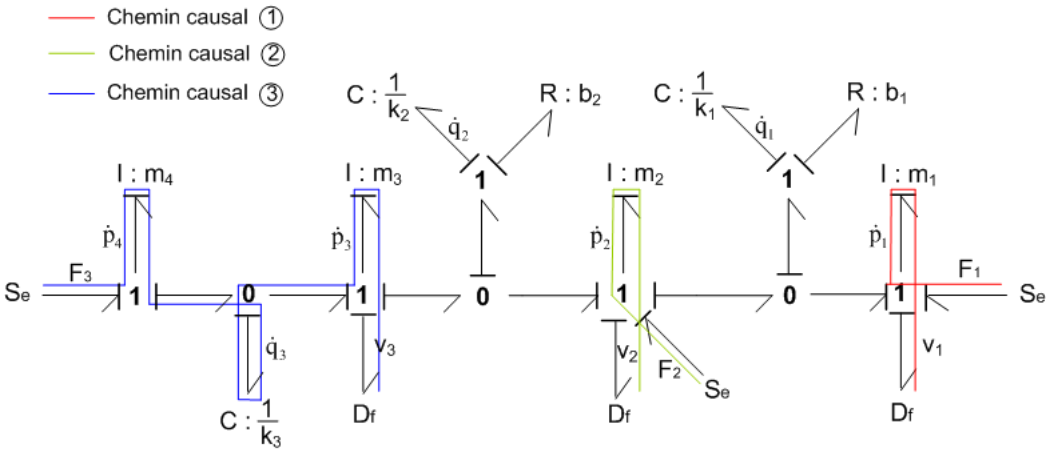


FIG. 3.10 – Analyse causale : ensemble de chemins causaux E/S différents.

L'analyse causale des sous-systèmes $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_1)$ (figure. 3.11(a)), $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_2)$ (figure 3.11(b)) et $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_3)$ (figure 3.11(c)) conduit au résultats suivants :

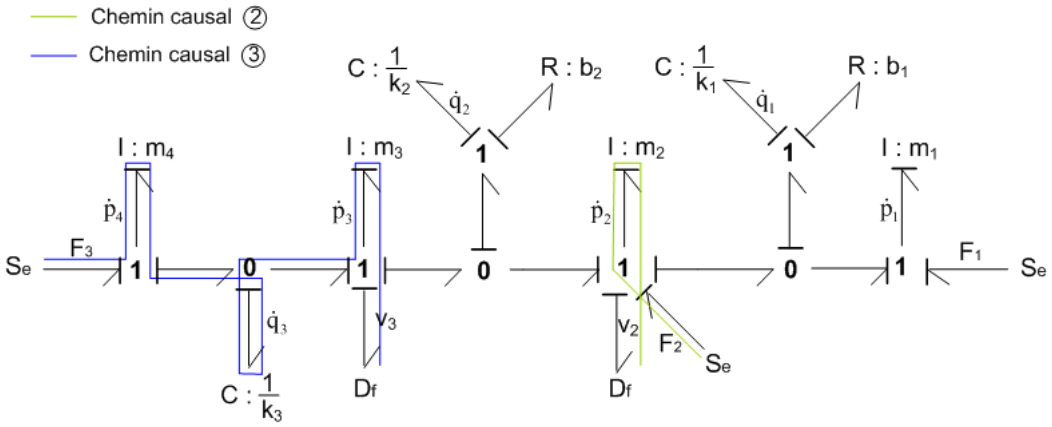
$$\begin{cases} L_2^{(1)} = \ell_2(F_2 \to V_2) + \ell_3(F_3 \to V_3) = 1 + 3 = 4 \\ L_2^{(2)} = \ell_1(F_1 \to V_1) + \ell_4(F_2 \to V_3) = 1 + 2 = 3 \\ L_2^{(3)} = \ell_1(F_1 \to V_1) + \ell_2(F_2 \to V_2) = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

Ainsi, à partir de la procédure 12, il peut être déduit que :

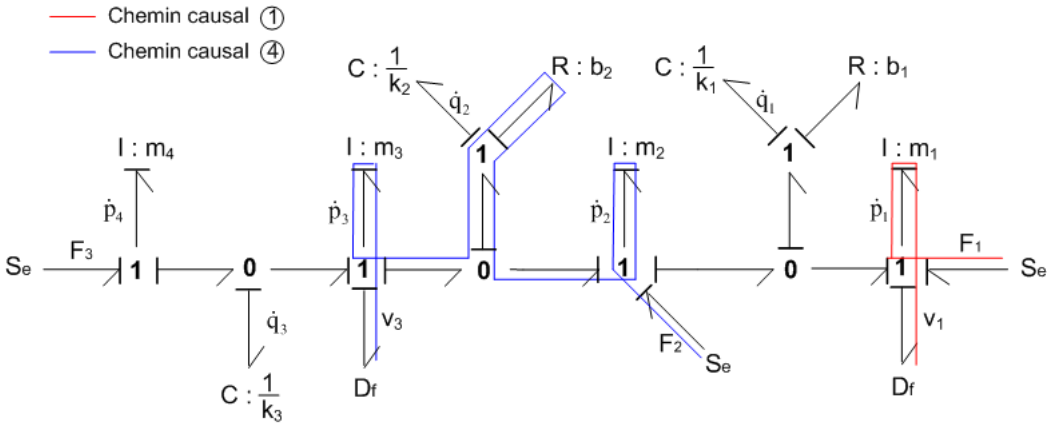
$$\begin{cases} n_{1e} = L_3 - L_2^{(1)} = 1 \\ n_{2e} = L_3 - L_2^{(2)} = 2 \\ n_{3e} = L_3 - L_2^{(3)} = 3 \end{cases}$$

Ces résultats correspondent bien à ceux trouvés par l'approche modèle d'état (théorème 5).

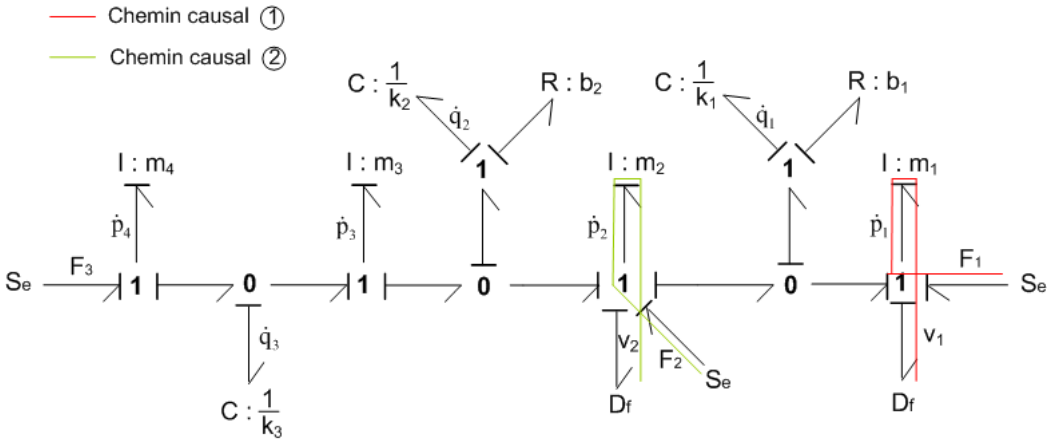
Si la procédure donnée pour le cas particulier est appliquée à cet exemple alors le plus court chemin causal entre la sortie V_1 et n'importe quelle entrée correspond au chemin causal ③ entre V_1 et F_1 : ainsi $n'_1 = \omega_1(F_1 \to V_1) = 1$. De même, $n'_2 = \omega_2(F_2 \to V_2) = 1$ et $n'_3 = \omega_4(F_2 \to V_3) = 2$ (figure 3.12). Nous pouvons conclure alors que $L_3 - n'_2 - n'_3 = 2 \neq n_{1e}$, $L_3 - n'_1 - n'_3 = 2 = n_{2e}$ et $L_3 - n'_1 - n'_2 = 3 = n_{3e}$; et puisque $\overline{n}_{11} + \overline{n}_{12} \neq n'_2 + n'_3$ alors le sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_1)$ n'est pas découplable par retour d'état statique et par conséquent le deuxième exemple représente bien un cas où l'équation 3.25 ne peut pas être appliquée.



(a) Pour le sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_1)$.



(b) Pour le sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_2)$.



(c) Pour le sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_3)$.

FIG. 3.11 – Analyse causale : détermination des ordres d'essentialité.

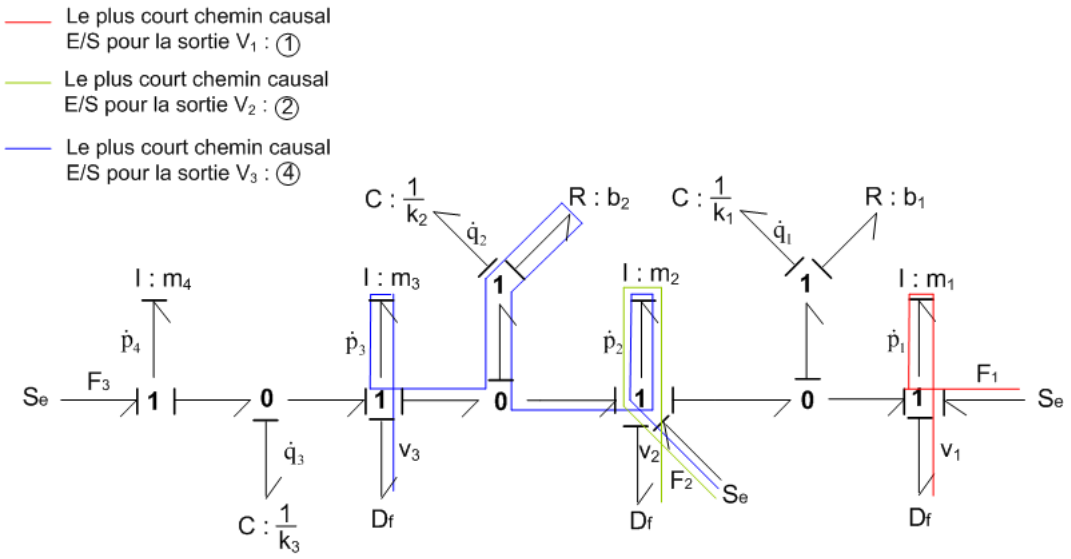


FIG. 3.12 – Détermination des ordres relatifs.

À présent, déterminons les ordres d'essentialité en appliquant la procédure 10. Une analyse causale conduit aux résultats suivants :

– dans le cas du modèle bond graph représentant le système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ (figure 3.10) :

$$\begin{cases} L_1 = \ell_1(F_1 \to V_1) = 1 \\ L_2 = \ell_1(F_1 \to V_1) + \ell_2(F_2 \to V_2) = 2 \\ L_3 = \ell_1(F_1 \to V_1) + \ell_2(F_2 \to V_2) + \ell_3(F_3 \to V_3) = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_1 = L_1 = 1 \\ n_2 = L_2 - L_1 = 1 \\ n_3 = L_3 - L_2 = 3 \end{cases}$$

– dans le cas du modèle bond graph représentant le sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_1)$ (figure 3.11(a)) :

$$\begin{cases} L_1 = \ell_2(F_2 \to V_2) = 1 \\ L_2 = \ell_2(F_2 \to V_2) + \ell_3(F_3 \to V_3) = 1 + 3 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{n}_{11} = L_1 = 1 \\ \overline{n}_{12} = L_2 - L_1 = 3 \end{cases}$$

– dans le cas du modèle bond graph représentant le sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_2)$ (figure 3.11(b)) :

$$\begin{cases} L_1 = \ell_1(F_1 \to V_1) = 1 \\ L_2 = \ell_1(F_1 \to V_1) + \ell_4(F_2 \to V_3) = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{n}_{21} = L_1 = 1 \\ \overline{n}_{22} = L_2 - L_1 = 2 \end{cases}$$

– dans le cas du modèle bond graph du sous-système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_3)$ (figure 3.11(c)) :

$$\begin{cases} L_1 = \ell_1(F_1 \to V_1) = 1 \\ L_2 = \ell_1(F_1 \to V_1) + \ell_2(F_2 \to V_2) = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{n}_{31} = L_1 = 1 \\ \overline{n}_{32} = L_2 - L_1 = 1 \end{cases}$$

Ainsi, nous pouvons déduire que $n_{1e} = n_1+n_2+n_3-\overline{n}_{11}-\overline{n}_{12} = 1$, $n_{2e} = n_1+n_2+n_3-\overline{n}_{21}-\overline{n}_{22} = 2$ et $n_{3e} = n_1 + n_2 + n_3 - \overline{n}_{31} - \overline{n}_{32} = 3$. Ces résultats sont en accord avec ceux de référence (trouvés par l'approche modèle d'état). Cependant, d'un point de vue bond graph, ils impliquent des manipulations causales supplémentaires par rapport à la procédure 12.

Ces résultats relèvent d'un niveau d'analyse BG-structurel. Une procédure relevant d'un niveau d'analyse comportemental a également été proposée dans [Jar10] et est donnée dans l'annexe F.

3.1.3 L'analyse structurelle et comportementale à partir du modèle bond graph inverse

Dans la méthodologie du dimensionnement par modèles bond graph inverses, les propriétés structurelles (structure à l'infini, ordres relatifs et ordres d'essentialité) représentent une aide à la rédaction du cahier des charges. Dans la section 3.1.1, les définitions (par approche modèle d'état) de ces propriétés ont été rappelées. Dans la section 3.1.2, des procédures graphiques pour la détermination de ces propriétés à partir d'un modèle bond graph causal ont été présentées suivant le niveau d'analyse souhaité. Le but de cette section est de rajouter à la méthodologie de dimensionnement, de nouvelles procédures graphiques permettant la détermination de ces propriétés à partir du modèle bond graph bicausal. Certaines simplifient l'analyse structurelle et comportementale de la structure retenue pour le modèle de conception. En effet, une procédure permettant la détermination des ordres d'essentialité à partir du modèle bond graph bicausal, est proposée. Le calcul de ces ordres s'avère plus simple sur le modèle inverse que sur le modèle direct grâce à leur interprétation sur le modèle inverse. Les procédures proposées dans cette section sont formulées selon le niveau d'analyse BG-structurel. Cependant, d'autres procédures proposées dans l'annexe F sont formulées selon le niveau d'analyse comportemental afin de favoriser la démarche chronologique de conception (ou de reconception). Enfin, une discussion sur les procédures causales et bicausales est établie.

Ordres des pôles à l'infini

Rappelons que le modèle Σ (système d'équations 3.1) est supposé être un modèle propre qui ne possède que des zéros à l'infini. Ainsi, le modèle inverse décrit dans le domaine de LAPLACE par le système d'équations 3.4 ne possède que des pôles à l'infini. Le nombre de ces pôles à l'infini correspond au nombre des zéros à l'infini du modèle Σ et, pour un modèle inversible, à m, le nombre de paires E/S.

L'analyse structurelle et comportementale établie sur le modèle bond graph direct a montré que le calcul des mineurs de la matrice système, ainsi que le calcul de leur degré est d'un grand intérêt dans les démonstrations des procédures bond graph. Afin de procéder de la même manière avec le modèle inverse, une procédure bond graph permettant la détermination du déterminant de la matrice système $\mathbf{P_{inv}}(s)$ du modèle inverse est proposée et démontrée.

Procédure 13. *Sur un modèle bond graph bicausal, le déterminant de la matrice système* $\mathbf{P_{inv}}(s)$ *est donné par l'expression suivante :*

$$\det(\mathbf{P_{inv}}(s)) = \sum_{k=-n_D}^{n_{inv}} \rho_k^{\{m\}} s^{n_{inv}-k} \tag{3.28}$$

où :

- n_{inv} *(resp.* n_D*) correspond au nombre d'éléments de stockage en causalité intégral (resp. en causalité dérivée) et* m *correspond au nombre d'entrées/sorties.*

– $\rho_k^{\{m\}}$ *correspond à la somme des gains statiques des familles bond graph d'ordre* k *et contenant* m *chemins causaux E/S différents. Dans ce calcul, le gain de chaque famille bond graph doit être multiplié par* $(-1)^d$*,* d *étant le nombre de cycles contenus dans la famille bond graph. De plus, le gain statique de chaque famille doit être multiplié par* $(-1)^{\sigma_k}$*, où* σ_k *est le nombre de permutations nécessaires afin d'ordonner les sorties dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand les* m *chemins causaux E/S de la famille sont ordonnés dans l'ordre du vecteur d'entrée initial*[20]*.*

Démonstration. Considérons l'équation 3.22 définie pour le calcul du déterminant de la matrice système $\mathbf{P_{inv}}(s)$ à partir d'un digraphe. En exploitant la correspondance entre les cycles disjoints présentant des arcs de retour sur un digraphe et les chemins causaux E/S différents sur le modèle bons graph [Rah93], le résultat suivant peut être déduit :

$$\det(\mathbf{P_{inv}}(s)) = \sum_{j=0}^{n_{inv}} \rho_j^{\{m\}}(s) s^{n_{inv}-j} \tag{3.29}$$

où sur le modèle bond graph bicausal, $\rho_j^{\{m\}}(s)$ correspond à la somme des gains des familles contenant j éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale et m chemins causaux E/S différents. Le gain de chaque famille est calculé comme suit : si l'élément de stockage traversé est en causalité intégrale alors le gain statique est considéré et si l'élément de stockage traversé est en causalité dérivée alors le gain est considéré. Ainsi, l'apparition de l'opérateur de Laplace dans le gain de la famille est due aux éléments de stockage en causalité dérivée rencontrés tout le long de la famille bond graph. Pour cette raison, il est plus intéressant de considérer l'ordre k de la famille bond graph. Dans ce cas, les gains statiques $\rho_k^{\{m\}}$ des familles bond graph sont considérés. Néanmoins, l'ordre minimal qu'une famille puisse avoir est égal à $-n_D$ (la famille considérée ne contient que des éléments de stockage en causalité dérivée) et l'ordre maximal est égal à n_{inv} (la famille considérée ne contient que des éléments de stockage en causalité intégrale). Ainsi, l'équation 3.29 est équivalente à l'équation 3.28. **Fin de la démonstration.**

Exemple. Considérons le bond graph bicausal illustré par la figure 3.13 et correspondant au système d'équations 3.20. L'analyse des familles bond graph est illustrée par les figures 3.14 et 3.15 et peut être résumée par le tableau 3.3. Ainsi, le déterminant de la matrice système $\mathbf{P_{inv}}(s)$ (équation. 3.23) est déterminé à partir du modèle bond graph bicausal.

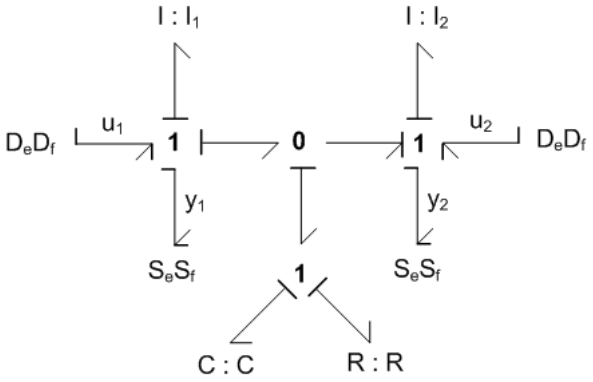
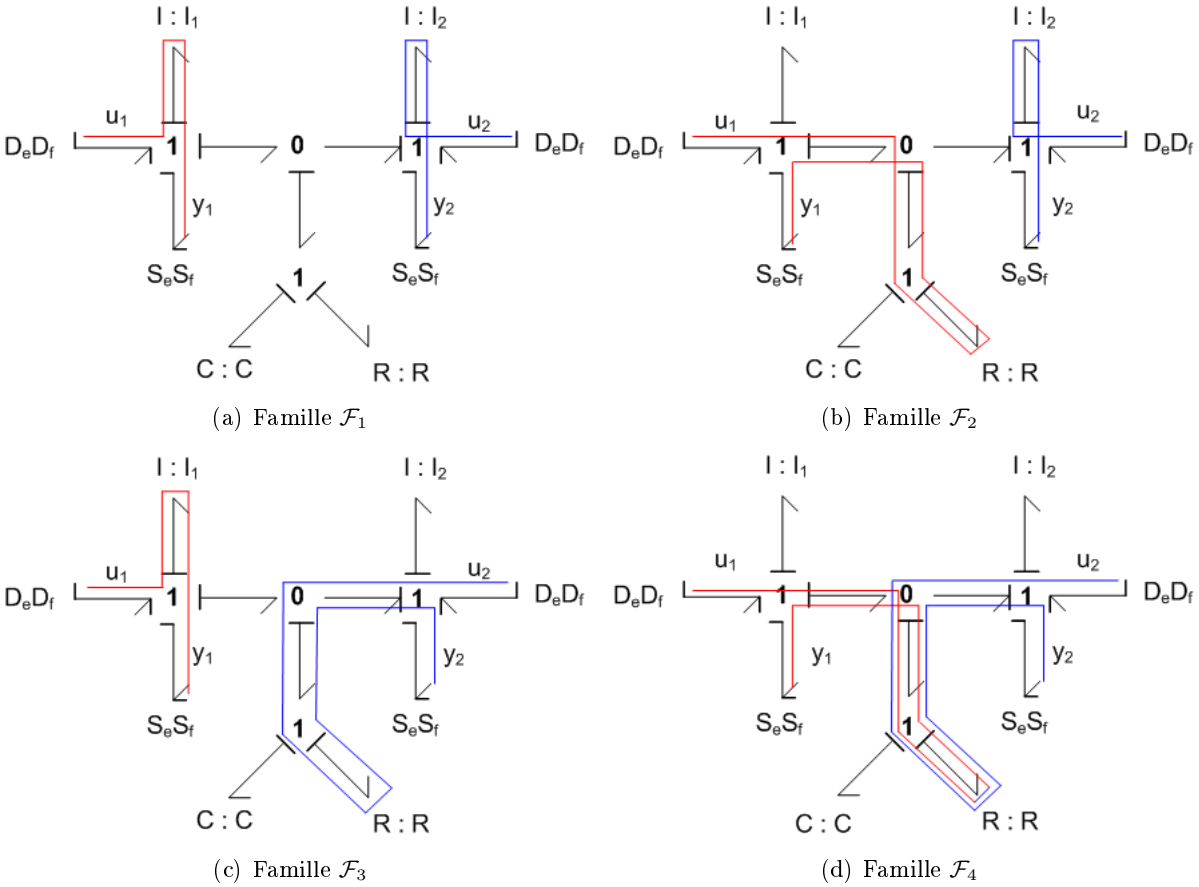


Fig. 3.13 – Exemple d'un modèle bond graph bicausal.

[20]Le vecteur de sortie fait référence à $u_1, \ldots, u_m$ qui représente les sorties du modèle bond graph bicausal et non pas les sorties du système physique Σ. De même le vecteur d'entrée fait référence à $y_1, \ldots, y_m$.

TAB. 3.3 – Analyse des familles bond graph

Famille	k	$\rho_k^{\{m\}}(s) \cdot s^{n_{inv}-k}$	d	σ_k
$\mathcal{F}_1$	-2	$I_1 I_2 \cdot s^{1-(-2)}$	0	0
$\mathcal{F}_2$	-1	$RI_2 \cdot s^{1-(-1)}$	0	0
$\mathcal{F}_3$	-1	$RI_1 \cdot s^{1-(-1)}$	0	0
$\mathcal{F}_4$	0	$\frac{I_1}{C} \cdot s^{1-0}$	0	0
$\mathcal{F}_5$	0	$R^2 \cdot s^{1-0}$	0	0
$\mathcal{F}_6$	0	$R^2 \cdot s^{1-0}$	0	1
$\mathcal{F}_7$	0	$\frac{I_2}{C} \cdot s^{1-0}$	0	0
$\mathcal{F}_8$	1	$\frac{R}{C} \cdot s^{1-1}$	0	0
$\mathcal{F}_9$	1	$\frac{R}{C} \cdot s^{1-1}$	0	0
$\mathcal{F}_{10}$	1	$\frac{R}{C} \cdot s^{1-0}$	0	1
$\mathcal{F}_{11}$	1	$\frac{R}{C} \cdot s^{1-0}$	0	1



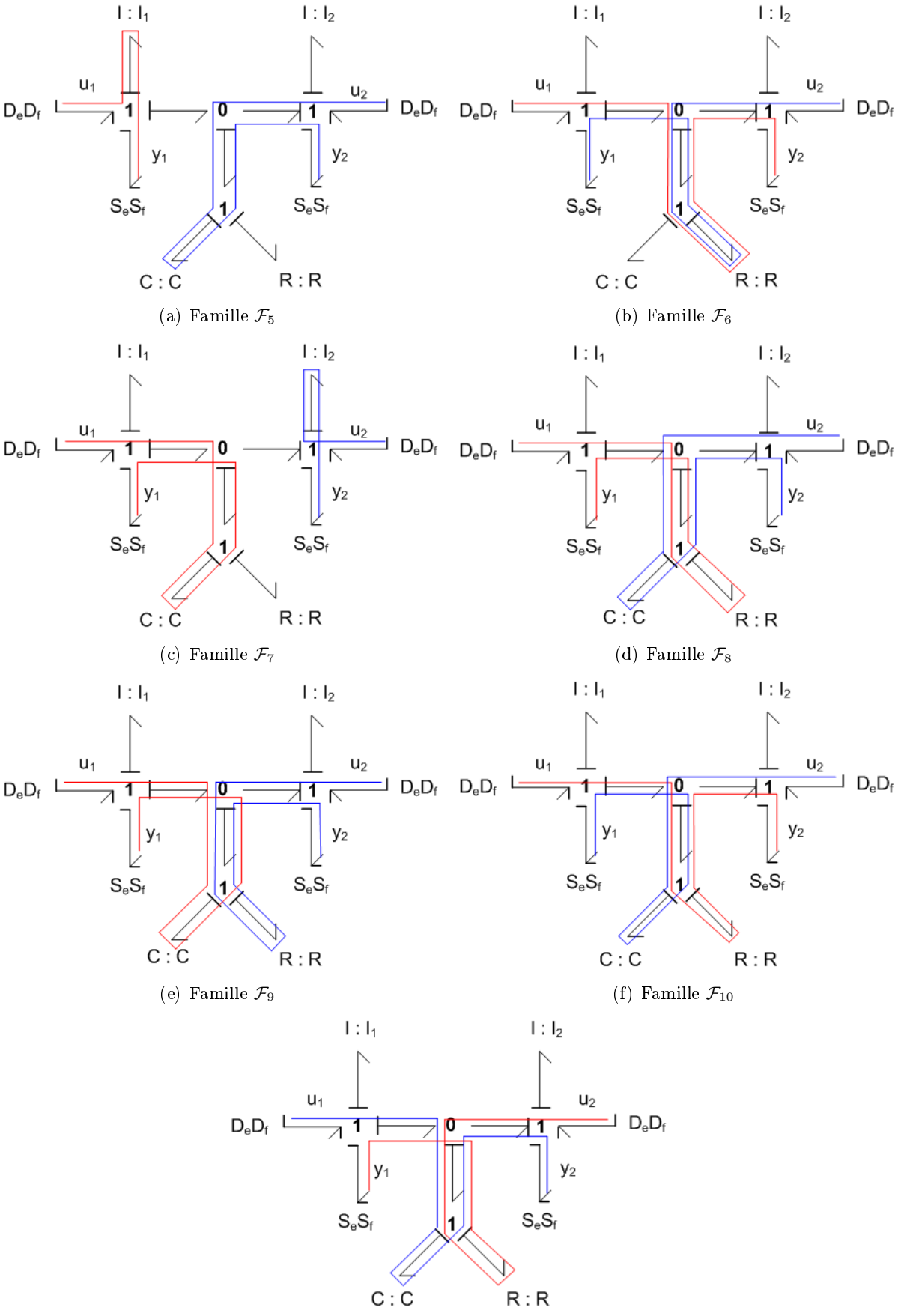
(a) Famille $\mathcal{F}_1$

(b) Famille $\mathcal{F}_2$

(c) Famille $\mathcal{F}_3$

(d) Famille $\mathcal{F}_4$

FIG. 3.14 – Analyse des familles bond graph $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_4$.



(a) Famille $\mathcal{F}_5$

(b) Famille $\mathcal{F}_6$

(c) Famille $\mathcal{F}_7$

(d) Famille $\mathcal{F}_8$

(e) Famille $\mathcal{F}_9$

(f) Famille $\mathcal{F}_{10}$

(g) Famille $\mathcal{F}_{11}$

FIG. 3.15 – Analyse des familles bond graph $\mathcal{F}_5$ à $\mathcal{F}_{11}$.

En généralisant le résultat obtenu à tous les mineurs de la matrice système $\mathbf{P_{inv}}(s)$ du modèle inverse, la procédure 14 peut être déduite.

Procédure 14. *Sur le modèle bond graph bicausal, les mineurs de la matrice système* $\mathbf{P_{inv}}(s)$ *sont donnés par l'expression suivante :*

$$\det\left(\mathbf{P_{inv}}(s)_{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\dots,n_{inv}+h_i}^{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\dots,n_{inv}+j_i}\right) = \sum_{k=-n_D}^{n_{inv}} \rho_k^{\left\{i_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}\right\}} s^{n_{inv}-k} \tag{3.30}$$

où :

- n_{inv} *(resp.* n_D*) correspond au nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale (resp. en causalité dérivée) et* m *correspond au nombre d'entrées/sorties ;*
- $\rho_k^{\left\{i_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}\right\}}$ *correspond à la somme des gains statiques des familles bond graph d'ordre* k *et contenant uniquement* i *chemins causaux E/S différents entre* $y_{j_1},\dots,y_{j_i}$ *et* $u_{h_1},\dots,u_{h_i}$*. Dans ce calcul, le gain statique de chaque famille bond graph doit être multiplié par* $(-1)^d$*,* d *étant le nombre de cycles contenus dans la famille bond graph. Le gain statique de chaque famille doit être multiplié aussi par* $(-1)^{\sigma_k}$ *où* σ_k *est le nombre des permutations nécessaires pour ordonner les sorties dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand les* i *chemins causaux E/S de la famille sont ordonnés dans l'ordre du vecteur d'entrée initial.*

Remarque : $\det\left(\mathbf{P_{inv}}(s)_{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\dots,n_{inv}+h_i}^{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\dots,n_{inv}+j_i}\right)$ est calculé à partir du bond graph bicausal où uniquement les doubles sources associées à $y_{j_1},\dots,y_{j_i}$ et les doubles détecteurs associés à $u_{i_1},\dots,u_{i_i}$ sont considérés dans ce calcul. Les autres double sources et double détecteurs ne sont pas supprimés afin de ne pas changer l'affectation de la causalité.

D'après le théorème 1, les ordres des pôles à l'infini peuvent être calculés en fonction des degrés des mineurs de la matrice de transfert $\mathbf{T_{inv}}(s)$. Ainsi, une procédure bond graph permettant la détermination graphique du plus haut degré des mineurs d'ordre i de la matrice de transfert $\mathbf{T_{inv}}(s)$ du modèle inverse est proposée et démontrée et ce, selon le niveau d'analyse BG-structurel.

Procédure 15. ***niveau d'analyse BG-structurel***
Soit δ_i *le plus haut degré des mineurs d'ordre* i *de* $\mathbf{T_{inv}}(s)$*, alors*

$$\forall i \in \{1\dots m\}, \delta_i = -L_i \tag{3.31}$$

où, sur le modèle bond graph bicausal, L_i *correspond à l'ordre minimal qu'un ensemble de* i *chemins causaux E/S différents puisse avoir.*

Démonstration. Soit δ_i le plus haut degré des mineurs d'ordre i de $\mathbf{T_{inv}}(s)$, β_i le plus haut degré des mineurs d'ordre i de $\mathbf{P_{inv}}(s)$ et L_i l'ordre minimal qu'un ensemble de i chemins causaux E/S différents puisse avoir sur le modèle bond graph bicausal.

À partir du théorème 2, on a $\delta_i = \beta_i - n_{inv}$. Chaque β_i peut être calculé comme suit :

$$\beta_i = \max_{\substack{j_1,\dots,j_i \in ([\![1,m]\!])^i \\ h_1,\dots,h_i \in ([\![1,m]\!])^i}} \{\beta_{i_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}}\}$$

où $\beta_{i_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}} = \deg\left(\det\left(\mathbf{P_{inv}}(s)_{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\dots,n_{inv}+h_i}^{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\dots,n_{inv}+j_i}\right)\right)$.

Si $\det\left(\mathbf{P_{inv}}(s)_{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\dots,n_{inv}+h_i}^{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\dots,n_{inv}+j_i}\right) = 0$ alors ce déterminant n'est pas à considérer pour le calcul des ordres des zéros à l'infini.

Si $\det\left(\mathbf{P_{inv}}(s)_{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\dots,n_{inv}+h_i}^{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\dots,n_{inv}+j_i}\right) \neq 0$, alors à partir de la procédure 14 :

$$\det\left(\mathbf{P_{inv}}(s)_{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\dots,n_{inv}+h_i}^{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\dots,n_{inv}+j_i}\right) = \sum_{k=-n_D}^{n_{inv}} \rho_k^{\left\{i_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}\right\}} s^{n_{inv}-k}$$

Ainsi :

$$\det\left(\mathbf{P_{inv}}(s)_{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\dots,n_{inv}+h_i}^{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\dots,n_{inv}+j_i}\right) \underset{+\infty}{\sim} \rho_{\omega_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}}^{\left\{i_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}\right\}} s^{n_{inv}-L_i{}_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}}$$

où $\rho_{\omega_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}}^{\left\{i_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}\right\}}$ est la somme des gains statiques des familles bond graph d'ordre $\omega_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}$ et contenant uniquement i chemins causaux E/S différents entre $y_{j_1},\dots,y_{j_i}$ et $u_{h_1},\dots,u_{h_i}$. $L_i{}_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}$ est l'ordre minimal qu'une famille bond graph puisse avoir :

$$L_i{}_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i} = \min_{\omega_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i} \in (\llbracket -n_D, n_{inv} \rrbracket)} \left\{\omega_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}\right\}$$

Au niveau d'analyse BG-structurel, $\rho_{\omega_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}}^{\left\{i_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}\right\}}$ est *a priori* différent de zéro donc dans ce cas $\beta_{i_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}} = \deg\left(\det\left(\mathbf{P}(s)_{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\dots,n_{inv}+h_i}^{1,\dots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\dots,n_{inv}+j_i}\right)\right) = n_{inv} - L_i{}_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}$ et par conséquent $\delta_{i_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}} = -L_i{}_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}$. Puisque $\delta_i = \max_{\substack{j_1,\dots,j_i \in (\llbracket 1,m \rrbracket)^i \\ h_1,\dots,h_i \in (\llbracket 1,m \rrbracket)^i}} \{\delta_{i_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}}\}$ et $L_i = \min_{\omega_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i} \in (\llbracket -n_D, n_{inv} \rrbracket)}$ $\left\{L_i{}_{h_1,\dots,h_i}^{j_1,\dots,j_i}\right\}$ alors $\delta_i = -L_i$. **Fin de la démonstration.**

Au niveau d'analyse comportemental, une procédure bond graph permettant la détermination graphique du plus haut degré des mineurs d'ordre i de la matrice de transfert $\mathbf{T_{inv}}(s)$ du modèle inverse est proposée et démontrée dans l'annexe F (procédure 36). Au niveau d'analyse BG-structurel et à partir de la procédure 15, une procédure bond graph permettant la détermination graphique des ordres des pôles à l'infini du modèle inverse est maintenant déduite. Dans l'annexe F, une procédure bond graph au niveau d'analyse comportemental (procédure 37) pour la détermination de ces ordres à partir du modèle inverse est donnée et illustrée par un exemple.

Procédure 16. ***niveau d'analyse BG-structurel***
Le nombre des pôles à l'infini est égal à m et chaque ***ordre d'un pôle à l'infini*** *n_i peut être calculé de sorte que [El 11b] :*

$$\begin{cases} n_1 = -L_1 \\ n_i = L_{i-1} - L_i \end{cases} \tag{3.32}$$

où, sur le modèle bond graph bicausal, L_i est l'ordre minimal qu'un ensemble de i chemins causaux E/S différents puisse avoir.

Démonstration.

- Pour $i = 1$, à partir du théorème 1, nous avons : $n_1 = \delta_1$. De plus, il a été démontré dans la procédure 15 que $\delta_i = -L_i$. Ainsi, le résultat $n_1 = -L_1$ est immédiatement déduit.
- Pour $i \geq 2$ et à partir du théorème 1 et de la procédure 15 :

$$\begin{aligned} n_i &= -\delta_{i-1} + \delta_i \\ &= L_{i-1} - L_i \end{aligned}$$

Fin de la démonstration.

Remarque : Cette procédure permet de classer les ordres des pôles à l'infini dans l'ordre décroissant.

Exemple. Afin d'illustrer la procédure 16, considérons le système composé de trois masses en série (figure 3.4). Le critère d'inversibilité 3 (section 1.3.3, chapitre 1) est vérifié et le modèle bond graph bicausal (figure 3.16) peut être construit grâce à la procédure SCAPI (procédure 22, section A.5, annexe A). À partir du modèle bond graph bicausal, le modèle inverse d'ordre minimal peut être déduit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{1} = \mathbf{V_2} - \mathbf{V_1} \\ \mathbf{F_1} = -k_1\mathbf{q_1} + m_1\dot{\mathbf{V}}_\mathbf{1} + b(\mathbf{V_1} - \mathbf{V_2}) \\ \mathbf{F_2} = k_1\mathbf{q_1} + \frac{m_2m_3}{k_2}\dddot{\mathbf{V}}_\mathbf{2} + \frac{m_3b}{k_2}(\ddot{\mathbf{V}}_\mathbf{2} - \ddot{\mathbf{V}}_\mathbf{1}) - \frac{m_3k_1}{k_2}\dot{\mathbf{V}}_\mathbf{1} + (m_2 + m_3(1 + \frac{k_1}{k_2}))\dot{\mathbf{V}}_\mathbf{2} + b(\mathbf{V_2} - \mathbf{V_1}) \end{cases} \tag{3.33}$$

Dans le domaine de LAPLACE, ce modèle est caractérisé par les matrices suivantes :

$$\mathbf{A_{inv}} = 0,\ \mathbf{B_{inv}}(s) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{C_{inv}} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\mathbf{D_{inv}}(s) = \begin{bmatrix} m_1 s + b & -b \\ -\frac{m_3 b}{k_2}s^2 - \frac{m_3 k_1}{k_2}s - b & \frac{m_2 m_3}{k_2}s^3 + \frac{m_3 b}{k_2}s^2 + \left(m_2 + m_3\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right)\right)s + b \end{bmatrix}.$$

La matrice de transfert du modèle inverse est donnée par :

$$\mathbf{T_{inv}}(s) = \begin{bmatrix} m_1 s + b + \frac{k_1}{s} & -b - \frac{k_1}{s} \\ -\frac{m_3 b}{k_2}s^2 - \frac{m_3 k_1}{k_2}s - b - \frac{k_1}{s} & \frac{m_2 m_3}{k_2}s^3 + \frac{m_3 b}{k_2}s^2 + \left(m_2 + m_3\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right)\right)s + b + \frac{k_1}{s} \end{bmatrix}$$

Par l'approche modèle d'état et d'après le théorème 1, les ordres des pôles à l'infini sont calculés :

$$\begin{cases} n_1 = \delta_1 = 3 \\ n_2 = \delta_2 - \delta_1 = 4 - 3 = 1 \end{cases} \tag{3.34}$$

L'équation 3.34 représente le résultat de référence auquel le résultat bond graph sera comparé.

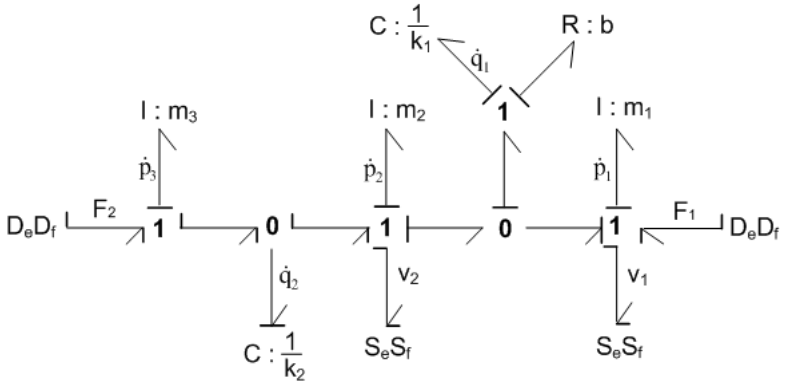


FIG. 3.16 – Modèle bond graph bicausal.

Afin de déterminer les ordres des pôles à l'infini à partir du modèle bond graph bicausal, l'analyse des chemins causaux E/S est établie (figure 3.17) : $S_2 = \{④, ⑤\}$ est l'unique ensemble d'ordre

minimal des chemins causaux E/S différents entre la paire (V_1, V_2) et la paire (F_1, F_2). Ainsi :

$$\begin{cases} L_1 = \omega_4(V_2 \rightarrow F_2) = -3 \\ L_2 = \omega_4(V_2 \rightarrow F_2) + \omega_5(V_1 \rightarrow F_1) = -3 - 1 = -4 \end{cases} \tag{3.35}$$

Alors, nous pouvons déduire que :

$$\begin{cases} n_1 = -L_1 = 3 \\ n_2 = L_1 - L_2 = -3 + 4 = 1 \end{cases}$$

Ce résultat correspond bien au résultat trouvé par l'approche modèle d'état (équation 3.34).

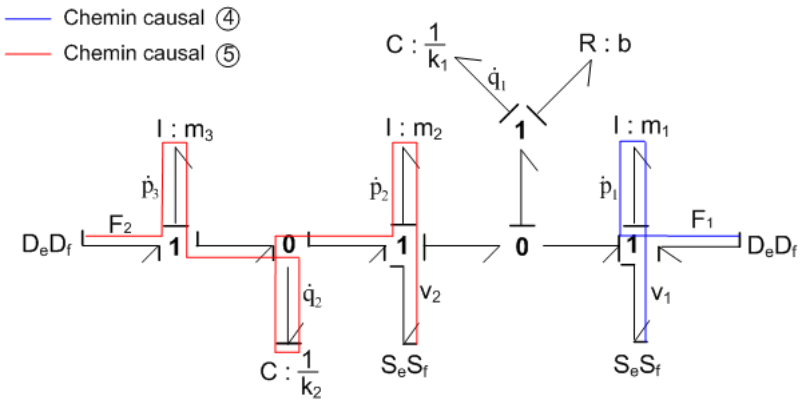


FIG. 3.17 – Détermination des ordres des pôles à l'infini.

Remarque : La procédure 37 (page 253) pour la détermination des ordres des pôles à l'infini à un niveau d'analyse comportemental donne le même résultat.

Ordre relatif

Plusieurs méthodes algébriques existent pour calculer l'ordre relatif (cf. théorème 3, section 3.1.1). Une nouvelle méthode (théorème 4) a été proposée dans la même section permettant de calculer ces ordres à partir du modèle inverse et plus précisément, à partir des ordres des pôles à l'infini du modèle inverse. À partir du théorème 4 et à partir de la procédure 16, une procédure permettant la détermination des ordres relatifs sur le modèle bond graph bicausal est définie et ce, selon le niveau d'analyse BG-structurel. Au niveau d'analyse comportemental, la procédure 38 de l'annexe F permet la détermination de ces ordres sur le modèle bond graph bicausal.

Procédure 17. ***niveau d'analyse BG-structurel***
*L'**ordre relatif** n'_i de y_i peut être calculé de sorte que [El 11b] :*

$$n'_i = L^{(i)}_{m-1} - L_m \tag{3.36}$$

où :

- *L_m est l'ordre minimal qu'un ensemble de m chemins causaux E/S différents puisse avoir sur le modèle bond graph bicausal ;*
- *$L^{(i)}_{m-1}$ est l'ordre minimal qu'un ensemble de $m-1$ chemins causaux E/S différents puisse avoir et obtenu sans la considération, sur le modèle bond graph bicausal, de l'$i^{ème}$ double source*[21].

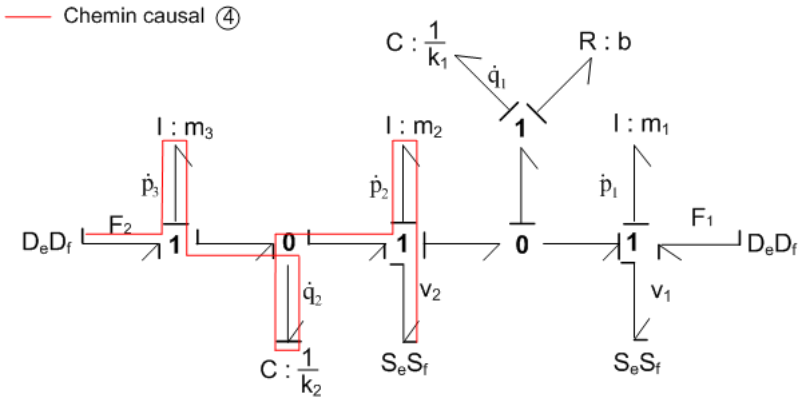
[21] L'$i^{ème}$ double source n'est pas supprimée du modèle bond graph bicausal afin de pas changer l'affectation de la causalité.

Démonstration. À partir de la procédure 16, il peut être déduit que $\sum_{j=1}^{m} n_j = -L_m$ et $\sum_{j=1}^{m-1} \overline{n}_{ij} = -L_{m-1}^{(i)}$. Ainsi, à partir de ces résultats et à partir du théorème 4, cette procédure 17 en est déduite. **Fin de la démonstration.**

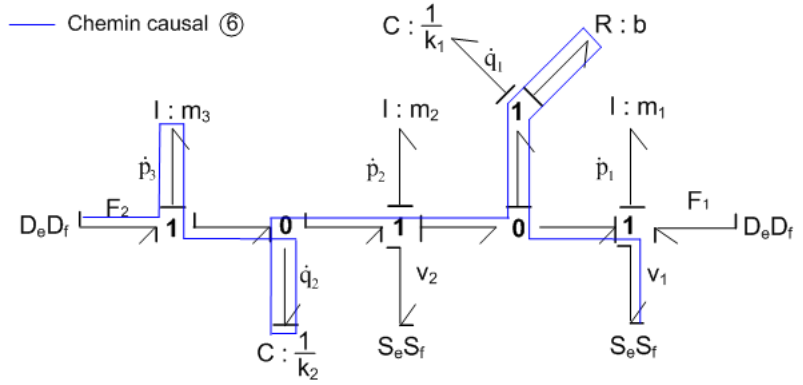
Exemple. Considérons le système composé de trois masses en série (figure 3.4) dont la représentation d'état du modèle direct a été présentée dans la section 3.1.2. À partir de cette représentation, nous pouvons déduire les ordres relatifs par approche algébrique :

- $\mathbf{c_1 B} \neq 0$ alors $n'_1 = 1$.
- $\mathbf{c_2 B} = 0$ alors $n'_2 > 1$.
- $\mathbf{c_2 AB} \neq 0$ alors $n'_2 = 2$.

Ce résultat correspond bien au résultat bond graph trouvé par analyse des chemins causaux E/S sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale (cf. section 3.1.2).



(a) Pour le sous-système $\left(\mathbf{A_{inv}}, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_1}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_1}}(s)\right)$



(b) Pour le sous-système $\left(\mathbf{A_{inv}}, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_2}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_2}}(s)\right)$

FIG. 3.18 – Détermination des ordres relatifs.

Le modèle bond graph bicausal associé au système étudié est donné figure 3.16. Afin de calculer les ordres relatifs à partir du modèle bond graph bicausal, l'ordre minimal que le sous-système $\left(\mathbf{A_{inv}}, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_1}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_1}}(s)\right)$ (resp. $\left(\mathbf{A_{inv}}, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_2}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_2}}(s)\right)$) puisse avoir doit être déterminé. Pour ce faire, considérons les modèles bond graph respectivement des figures 3.18(a) et 3.18(b) où les éléments $S_eS_f : V_1$ et $S_eS_f : V_2$ sont respectivement ignorés. À partir de cette

analyse causale, nous pouvons déduire que :

$$\begin{cases} L_2 = -4 \quad \text{(figure 3.17 et équation 3.35)} \\ L_1^{(1)} = \omega_4(V_2 \to F_2) = -3 \\ L_1^{(2)} = \omega_4(V_1 \to F_2) = -2 \end{cases}$$

Ainsi, d'après la procédure 17, il peut être déduit que :

$$\begin{cases} n_1' = L_1^{(1)} - L_2 = -3 + 4 = 1 \\ n_2' = L_1^{(2)} - L_2 = -2 + 4 = 2 \end{cases}$$

Ce résultat correspond bien au résultat trouvé par l'approche modèle d'état et par la procédure causale (procédure 11). Pour cet exemple, il n'y a pas de dépendance phénoménologique ainsi la procédure 38 qui relève d'un niveau d'analyse comportemental donne le même résultat.

Ordres d'essentialité

Par l'approche modèle d'état, la détermination des ordres d'essentialité repose sur la détermination des ordres des zéros à l'infini du système étudié et des sous-systèmes associés (cf. théorème 5). Par l'approche bond graph, la détermination des ordres d'essentialité peut se faire de manière graphique. Cependant, les procédures causales (procédures 12 et 35), définies pour le cas général, repose sur la détermination de l'ordre minimal qu'un ensemble de m (resp. $m-1$) chemins causaux E/S différents puisse avoir sur le modèle bond graph initial (resp. sur le modèle bond graph obtenu en supprimant un détecteur). Dans la section 3.1.2, il a été montré, à travers un exemple, que ces procédures permettent de réduire les manipulations causales par rapport aux manipulations nécessaires si les ordres des zéros à l'infini du système et de sous-systèmes sont déterminés. Par ailleurs, dans [El 08a], une procédure graphique permettant la détermination des ordres d'essentialité à partir du modèle bond graph bicausal a été proposée et s'est avérée simplifier davantage les manipulations causales. Dans ce qui suit, cette procédure est définie et démontrée selon le niveau d'analyse BG-structurel. La procédure 39 de l'annexe F est une reformulation de la procédure 18 au niveau d'analyse comportemental.

Procédure 18. ***niveau d'analyse BG-structurel***
*Sur le modèle bond graph bicausal, l'**ordre d'essentialité** n_{ie} de la sortie y_i peut être calculé de sorte que [El 11a] :*

$$n_{ie} = -\min_{k,j} \{\omega_k(y_i \to u_j)\} \tag{3.37}$$

où $\omega_k(y_i \to u_j)$ est l'ordre du chemin causal (k) entre la double source associée à y_i et le double détecteur associée à u_j.

Démonstration. Premièrement, l'i$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de transfert $\mathbf{T_{inv}}(s)$ du modèle inverse correspond aux transmittances associées à y_i. Deuxièmement, l'ordre d'essentialité n_{ie}, par définition, correspond à l'ordre de dérivation maximal de y_i apparaissant dans le modèle inverse d'ordre minimal. Ainsi, il peut être déduit que pour $j \in [\![1, \ldots, m]\!]$, $\deg\left\{t_{inv_{ji}}(s)\right\} \leq n_{ie}$. De plus, il existe nécessairement un ordre d'essentialité n_{ie} associé à y_i tel que :

$$n_{ie} = \max_{j \in [\![1,\ldots,m]\!]} \left\{\deg(t_{inv_{ji}}(s))\right\}$$

Notons que sur un modèle bond graph bicausal, $t_{inv_{ji}}$ est déterminé à partir des gains des chemins causaux entre y_i et u_j. Ainsi, on a :

$$t_{inv_{ji}} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{(l)|\omega_l(y_i \to u_j) = \omega_k(y_i \to u_j)} \tilde{G}_l(y_i \to u_j) s^{-\omega_k(y_i \to u_j)}$$

où $\tilde{G}_l(y_i \rightarrow u_j)$ est le gain statique du chemin causal ⓛ d'ordre $\omega_l(y_i \rightarrow u_j) = \omega_k(y_i \rightarrow u_j)$, $\omega_k(y_i \rightarrow u_j)$ est l'ordre minimal qu'un chemin causal entre y_i et u_j puisse avoir. Au niveau d'analyse BG-structurel, $\sum_{ⓛ|\omega_l(y_i \rightarrow u_j)=\omega_k(y_i \rightarrow u_j)} \tilde{G}_l(y_i \rightarrow u_j) \neq 0$ *a priori*. Dans ce cas, $\deg(t_{inv_{ji}}(s))$ est égal à l'opposé de l'ordre minimal qu'un chemin causal puisse avoir entre y_i et u_j.

Rappelons que la matrice de transfert du modèle direct ne possède que des zéros à l'infini [Com86] et par conséquent la matrice de transfert du modèle inverse ne possède que des pôles à l'infini. Ce fait garantit que $\max_{j\in[\![1,\ldots,m]\!]} \left\{\deg(t_{inv_{ji}}(s))\right\}$ est ≥ 0. Ainsi, il existe nécessairement un chemin causal entre y_i et un double détecteur u_j d'ordre ≤ 0.

Comme $n_{ie} = \max_{j\in[\![1,\ldots,m]\!]} \left\{\deg(t_{inv_{ji}}(s))\right\}$, l'ordre d'essentialité de y_i est alors déduit :

$$n_{ie} = -\min_{k,j} \{\omega_k(y_i \rightarrow u_j)\}$$

Fin de la démonstration.

Remarque : Il est important de signaler que les procédures bicausales (procédures 18 et 39) pour la détermination des ordres d'essentialité doivent être appliquées uniquement sur un modèle bond graph bicausal d'ordre minimal. En effet, dans le cas où l'inversion du modèle bond graph peut engendrer la construction de plusieurs modèles bicausaux, seuls les modèles d'ordre minimal sont retenus pour établir l'analyse structurelle et comportementale. L'analyse des autres modèles bicausaux permet d'obtenir des ordres différents de ceux trouvés par l'approche modèle d'état. Dans les travaux de Jardin [Jar10], le lecteur peut trouver un exemple illustrant cette remarque.

Exemple. Considérons le système composé de trois masses en série (figure 3.4). Sur le modèle bond graph bicausal (figure 3.16), le chemin causal d'ordre minimal entre V_1 (resp. V_2) et un double détecteur correspond au chemin causal ⑥ (resp. ④) entre V_1 (resp. V_2) et F_2 (figure 3.18(b) (resp. figure 3.18(a))). Ainsi, d'après la procédure 18, il peut être conclu que :

$$\begin{cases} n_{1e} = -\omega_6(V_1 \rightarrow F_2) = 2 \\ n_{2e} = -\omega_4(V_2 \rightarrow F_2) = 3 \end{cases}$$

Ces résultats sont en accord avec ceux trouvés par l'approche modèle d'état (cf. section 3.1.2) et avec le nombre de dérivations de chaque sortie figurant dans le modèle inverse d'ordre minimal (système d'équations 3.33).

3.1.4 Interprétations

A propos de la structure à l'infini

Les procédures causales (procédures 10 et 33) permettent de déterminer graphiquement les ordres des zéros à l'infini à partir du modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale. Les procédures bicausales (procédures 16 et 37) permettent de déterminer graphiquement les ordres des pôles à l'infini à partir du modèle bond graph bicausal. Les procédures causales et bicausales se basent sur l'analyse des chemins causaux E/S différents tout en tenant compte du niveau d'analyse souhaité. La détermination des ordres des zéros à l'infini se base sur l'analyse des longueurs des chemins causaux E/S différents sur le bond graph causal tandis que la détermination des ordres des pôles à l'infini se base sur l'analyse des ordres de ces chemins sur le bond graph bicausal.

Importance des ordres d'essentialité dans la méthodologie du dimensionnement

Par définition, l'ordre d'essentialité n_{ie} associé à une sortie y_i correspond au nombre de dérivations maximal de cette sortie apparaissant dans le modèle inverse d'ordre minimal. Ainsi, spécifier correctement une sortie y_i est donc indispensable pour simuler le modèle inverse. Si une sortie spécifiée y_i n'est pas au moins n_{ie} fois dérivable par rapport au temps, alors les grandeurs calculées par inversion ne seront pas physiquement réalisables. Ce fait a mené au critère suivant :

Critère 1. ***Simulation d'un modèle inverse***
Pour simuler un modèle inverse, chaque sortie spécifiée y_i doit être au moins n_{ie} fois dérivable par rapport au temps [Jar08a].

Dans la méthodologie de dimensionnement des systèmes mécatroniques, les ordres d'essentialité interviennent lors de la rédaction du cahier des charges indiquant au concepteur si ses spécifications sont en adéquation avec la structure du modèle de conception retenue et de les reformuler si elles ne sont pas suffisamment dérivables.

A propos des ordres relatifs et des ordres d'essentialité

Les procédures causales et bicausales pour la détermination graphique des ordres relatifs et des ordres d'essentialité sont fondées sur l'analyse des chemins causaux E/S et tiennent compte du niveau d'analyse considéré. D'une part :

- les procédures causales (procédures 11 et 34) permettent la détermination des ordres relatifs à partir du modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale par analyse des ordres des chemins causaux E/S,
- les procédures bicausales (procédures 17 et 38) permettent la détermination des ordres relatifs à partir du modèle bond graph bicausal et par analyse des ordres des pôles à l'infini du système $(\mathbf{A_{inv}}, \mathbf{B_{inv}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \mathbf{D_{inv}}(s))$ et des sous-systèmes $(\mathbf{A_{inv}}, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_i}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_i}}(s))$.

D'autre part :

- les procédures causales (procédures 12 et 35) permettent la détermination des ordres d'essentialité à partir du modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale par analyse des ordres des zéros à l'infini du système $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ et des sous-systèmes $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \overline{\mathbf{C}}_i)$,
- les procédures bicausales (procédures 18 et 39) permettent la détermination des ordres d'essentialité à partir du modèle bond graph bicausal par analyse des ordres des chemins causaux E/S.

Ainsi, les procédures causales pour la détermination des ordres relatifs sont les duales des procédures bicausales pour la détermination des ordres d'essentialité et les procédures causales pour la détermination des ordres d'essentialité sont les duales des procédures bicausales pour la détermination des ordres relatifs. Dans ce contexte, la dualité s'inscrit dans le cadre de l'inversion et non pas dans le cadre du système dual. Par dualité, nous faisons référence à la correspondance réciproque entre deux catégories d'objets mathématiques O_1 et O_2, permettant de déduire d'une relation entre certains objets de O_1 et de O_2, une relation analogue entre leurs correspondants respectifs dans O_2 et O_1. Dans ce cas, les objets O_1 et O_2 correspondent respectivement aux procédures causales et bicausales pour la détermination des invariants. Par approche modèle d'état et comme il a été suggéré par l'un des rapporteurs, cette correspondance est facilement détectée grâce à la notion d'intéracteur [Laf90, Her93].

Toutefois, il est à noter que :

- les procédures causales pour la détermination des ordres relatifs sont plus simples à mettre en œuvre que les procédures bicausales tandis que les procédures bicausales pour la détermination des ordres d'essentialité sont plus simples à mettre en œuvre que les procédures causales. Ainsi, le choix d'un modèle bond graph plutôt qu'un autre dépend du but de l'analyse ;

– quelle que soit la représentation bond graph (causale ou bicausale), la sortie y_i fait toujours référence à la même grandeur physique. Le fait de calculer les ordres relatifs et les ordres d'essentialité sur le modèle bond graph bicausal n'implique pas les sorties du modèle inverse qui sont en fait les entrées du système physique.

3.2 Analyse de l'adéquation spécifications/structure du modèle et synthèse de tolérance

L'étape de vérification de l'adéquation est l'une des étapes clés de la méthodologie de dimensionnement par inversion des modèles bond graph (cf. section 1.3.3). Cependant, le problème de la spécification des sorties, qui consiste à traduire les objectifs du cahier des charges, n'a pas été abordé. En effet, les sorties désirées peuvent être décrites soit sous forme de réponse temporelle (trajectoire désirée) ou fréquentielle (bande passante désirée), soit sous forme d'un comportement type (comportement d'un second ordre par exemple). La spécification des sorties est une tâche qui n'est pas évidente à mettre en œuvre car il s'agit dans certains cas de traduire des notions qualitatives voire subjectives (le confort du passager dans le cas d'une suspension de véhicule par exemple).

Les contributions de cette section consistent en l'approfondissement de cette étape de vérification de l'adéquation afin de nous intéresser de plus près à la spécification des sorties et de vérifier si ces spécifications peuvent être portées par la structure retenue. Ainsi, les sorties sont spécifiées sous forme de comportements type dans le domaine de Laplace (pour les systèmes linéaires (hypothèse 2, page 16)) et nous proposons des procédures permettant de vérifier l'adéquation de ces spécifications à une sous-structure du système (désignée dans la suite par composant). La considération d'une sous-structure au lieu de toute la structure revient au fait que dans une démarche de conception, certains sous-systèmes (désignés dans la suite par charge) ne peuvent être remis en question (par exemple la masse du véhicule pour une suspension). Dans les travaux de Smaoui [Sma01], cette vérification de l'adéquation a été proposée dans le cas où les sorties sont spécifiées sous forme de trajectoires temporelles et dans le cas où la sous-structure en question est une sous-structure R-C ou R-I-C.

Dans la section 3.2.1, nous traitons le cas des systèmes linéaires monovariables et plus précisément la vérification de l'adéquation des spécifications à la structure retenue pour un composant 1-port (procédure 19). Dans l'annexe G (resp. H), l'analyse de l'adéquation spécifications/composant 1-port (resp. spécifications/composant n-ports) est menée pour des systèmes linéaires multivariables. Dans la section 3.2.2, nous proposons d'exploiter le travail d'analyse de l'adéquation spécifications/structure et de le rapprocher du travail de synthèse paramétrique et de synthèse de tolérance pour une suspension quart de véhicule.

3.2.1 Vérification de l'adéquation par niveaux d'analyse

La vérification de l'adéquation spécifications/structure est établie par niveaux d'analyse (cf. section 1.5, chapitre 1). Tout d'abord, l'analyse de l'adéquation est réalisée au niveau d'analyse BG-structurel où seule la structure énergétique du modèle de conception est considérée. Si l'adéquation n'est pas vérifiée à ce niveau alors il est inutile de vérifier l'adéquation aux niveaux d'analyse inférieurs et la remise en question du cahier des charges peut avoir lieu en se basant sur les aspects structurels. Si l'adéquation est vérifiée au niveau d'analyse BG-structurel alors l'analyse peut ensuite être menée au niveau d'analyse comportemental où les lois phénoménologiques sont prises en considération. Si l'adéquation n'est pas vérifiée à ce niveau alors il est inutile de vérifier l'adéquation au niveau d'analyse inférieur et la remise en question du cahier des charges doit se baser sur les aspects phénoménologiques. Si l'adéquation est vérifiée au niveau d'ana-

lyse comportemental alors l'analyse peut être menée au niveau numérique. Si l'adéquation n'est pas vérifiée à ce niveau alors la remise en question du cahier des charges concerne les valeurs numériques. Cette démarche permet d'identifier au plus tôt l'origine de l'inadéquation ce qui représente une aide à la rédaction du cahier des charges : le concepteur saura si l'inadéquation est due à une incompatibilité structurelle, comportementale ou numérique et par conséquent, la remise en question du cahier des charges est réalisée au niveau d'analyse qui pose problème. Dans cette démarche, le formalisme bond graph offre la possibilité d'une lecture graphique de certaines propriétés structurelles et comportementales et permet d'établir les trois niveaux d'analyse.

La vérification de l'adéquation au niveau d'analyse numérique est étroitement liée à la synthèse paramétrique qui peut être traitée par la méthodologie du dimensionnement des systèmes mécatroniques basée sur l'inversion des modèles bond graph (cf. section 1.4, chapitre 1). La synthèse paramétrique vise à déterminer un ou plusieurs paramètres inconnus du modèle de conception à partir des spécifications. Néanmoins, elle exige l'adéquation de ces spécifications à la structure du modèle. Dans cette section, le lien entre adéquation et synthèse paramétrique est étudié.

Position du problème et outils

Nous proposons dans cette partie de rappeler certains outils et d'introduire la notion de famille de Mason afin d'établir dans la suite la vérification d'adéquation. Cette vérification de l'adéquation spécifications/structure vise à étudier le choix *a priori* d'un composant. Sur un modèle bond graph, représentant la structure retenue pour le modèle de conception, les variables de puissance entrante et sortante d'un composant 1-port illustré par la figure 3.19(a) sont définies suivant l'affectation de la causalité. En effet, si nous considérons l'affectation causale donnée par la figure 3.20(a), la fonction de transfert de ce composant s'écrit $\frac{\mathbf{F}(s)}{\mathbf{E}(s)}$ car $\mathbf{E}(s)$ est la transformée de Laplace de la variable de puissance entrante (variable d'effort e) du composant et $\mathbf{F}(s)$ est la transformée de Laplace de la variable de puissance sortante du composant (variable de flux f). Par contre, si nous considérons l'affectation causale donnée par la figure 3.20(b), f est la variable de puissance entrante au composant et e est la variable de puissance sortante du composant. Par conséquent, la fonction de transfert s'écrit dans ce cas $\frac{\mathbf{E}(s)}{\mathbf{F}(s)}$. Dans le présent mémoire, nous adoptons la convention suivante [Red93] :

- le rapport $\frac{\mathbf{E}(s)}{\mathbf{F}(s)}$ correspond à l'impédance du composant,
- le rapport $\frac{\mathbf{F}(s)}{\mathbf{E}(s)}$ correspond à l'admittance du composant.

Remarque : pour les composants multiports (figure 3.19(b)), il ne s'agit plus de fonction de transfert mais de matrice de transfert puisque ce type de composant possède plusieurs variables d'entrée et de sortie.

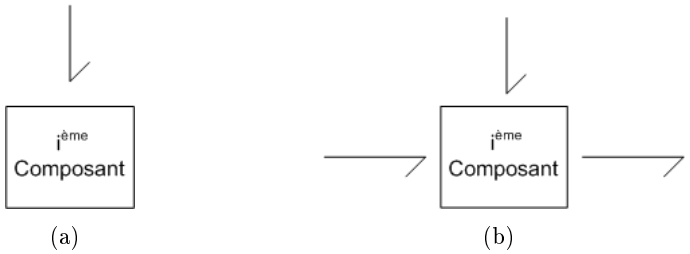
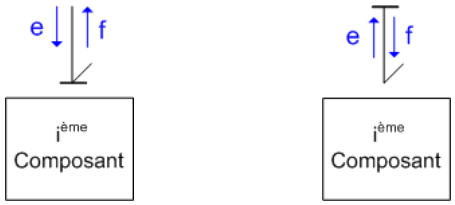


Fig. 3.19 – Composants (a) 1-port et (b) n-ports.



(a) (b)

FIG. 3.20 – Affectation causale d'un composant : composants caractérisés par une (a) admittance, (b) impédance.

La procédure proposée pour analyser l'adéquation se base sur la règle de MASON (procédure 23, annexe C) appliquée à un modèle bond graph [Bro72] permettant la détermination des transmittances caractérisant un système linéaire. La règle de MASON peut être appliquée à un modèle bond graph causal ou bicausal. Dans les deux cas, une causalité préférentielle dérivée est privilégiée afin d'éviter des manipulations supplémentaires de l'expression ainsi déterminée. En effet, la causalité préférentielle dérivée permet d'obtenir des expressions polynomiales contrairement à la causalité préférentielle intégrale qui entraîne des expressions fractionnelles.

Afin de pouvoir étudier l'adéquation des spécifications à un composant 1-port au niveau d'analyse BG-structurel (cf. procédure 19), nous proposons de définir la notion de famille de MASON.

Définition 2. *Une famille de* MASON *dans une représentation bond graph causale ou bicausale est constituée de boucles causales et d'un chemin causal E/S disjoint de ces boucles.*

La notion de famille bond graph donnée par la définition 52 (annexe E) et utilisée dans la section 3.1 pour démontrer certaines propriétés structurelles ne peut être utilisée dans ce contexte car elle est composée de cycles causaux et de chemins causaux E/S différents, or la vérification de l'adéquation des spécifications à un composant se base sur la règle de MASON qui exploite les notions de boucles causales et chemins causaux E/S disjoints. L'exploitation de la famille de MASON se fait de la même manière que celle d'une famille bond graph : calcul de gain, ordre, etc...

Dans l'analyse de l'adéquation des spécifications à un composant 1-port, deux cas de figure sont présentés : le cas des systèmes monovariables et le cas des systèmes multivariables. Dans ce qui suit, nous présentons le cas des systèmes monovariables. Le cas des systèmes multivariables est traité dans l'annexe G.

Vérification de l'adéquation : cas des systèmes monovariables

Considérons des systèmes linéaires mono-entrée mono-sortie qui peuvent être représentés par la figure 3.21 où **S** représente une source d'effort ou de flux et **D** représente un détecteur d'effort ou de flux. La procédure 19 permet de vérifier l'adéquation spécifications/composant 1-port pour les systèmes linéaires monovariables.

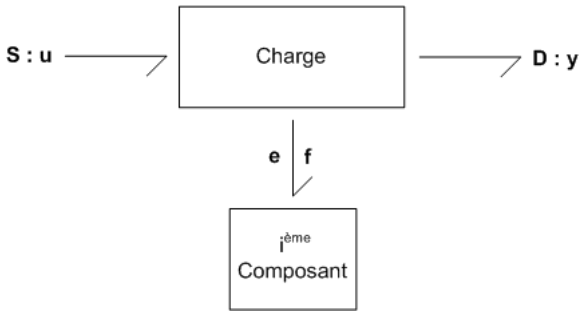


FIG. 3.21 – Structure d'un système monovariable avec un composant 1-port.

Procédure 19. *Dans le cas d'un système linéaire monovariable, l'analyse de l'adéquation des spécifications à la structure retenue pour un composant 1-port est constituée de 6 étapes :*

- ***Étape 1 : Vérification de l'inversibilité entre l'$i^{ème}$ composant et la sortie***
  Les trois conditions nécessaires du critère 3 (section 1.3.3, chapitre 1) sont à vérifier pour conclure sur l'inversibilité[22] *entre l'$i^{ème}$ composant et la sortie* $\mathbf{y}$*. Dans ce cas, le critère demeure le même à l'exception qu'il faut :*
  - *analyser les lignes de puissance et les chemins causaux entre le composant en question et la sortie* $\mathbf{y}$*,*
  - *remplacer le composant par un double détecteur D_eD_f. La commande* $\mathbf{u}$ *reste une entrée sur le modèle inverse,*
  - *après la propagation de la bicausalité, affecter la causalité préférentielle dérivée afin d'éviter des manipulations ultérieures sur les expressions déterminées à partir de la règle de* MASON.

  Si l'inversibilité n'est pas vérifiée alors la remise en question de la structure du modèle du système peut avoir lieu.
- ***Étape 2 : Analyse de la structure du composant à partir du modèle bond graph causal***
  Considérer uniquement le composant et en appliquant la règle de MASON*, déterminer l'expression de l'impédance/admittance ($\mathbf{I_d}(s)/\mathbf{A_d}(s)$) du composant à partir du modèle bond graph en causalité préférentielle dérivée associé au modèle physique. Si le composant peut être caractérisé par une impédance ou une admittance (cas de causalité arbitraire) alors le choix de la nature de la fonction de transfert est lui aussi arbitraire.*
- ***Étape 3 : Vérification de l'adéquation au niveau d'analyse BG-structurel***
  Soient :
  - $n_{\{N_d\}}$ *(resp.* $n_{\{D_d\}}$*) est le degré du numérateur de l'impédance (resp. admittance) de la structure retenue pour le composant 1-port et* $n_{\{D_d\}}$ *(resp.* $n_{\{N_d\}}$*) est le degré du dénominateur de l'impédance (resp. admittance) de cette structure,*
  - $n_{\{N_y\}}$ *(resp.* $n_{\{D_y\}}$*) est le degré du numérateur (resp. dénominateur) de* $\mathbf{Y}(s)$*,*
  - $n_{\{N_u\}}$ *(resp.* $n_{\{D_u\}}$*) est le degré du numérateur (resp. dénominateur) de* $\mathbf{U}(s)$*,*
  - $n_{y\longrightarrow f}$ *(resp.* $n_{y\longrightarrow e}$*) est l'opposé de l'ordre minimal qu'une famille de* MASON*, contenant un chemin causal entre* y *et la variable de puissance* f *(resp.* e*) du composant, puisse avoir,*
  - $n_{u\longrightarrow f}$ *(resp.* $n_{u\longrightarrow e}$*) est l'opposé de l'ordre minimal qu'une famille de* MASON*, contenant un chemin causal entre* u *et la variable de puissance* f *(resp.* e*) du composant, puisse avoir*[23]*.*

[22] Le critère d'inversibilité 3 permet de vérifier l'inversibilité entrée/sortie. Ce critère s'applique également dans cette section en considérant comme entrée une variable d'effort ou de flux sur le lien du composant déterminée par l'affectation causale.

[23] S'il n'existe pas de famille de MASON contenant un chemin causal entre deux variables v_i et v_j tel que v_i est l'entrée u ou la sortie y et v_j est la variable d'effort e ou de flux f alors le terme $n_{v_i\longrightarrow v_j} + n_{\{N.\}} + n_{\{D.\}}$ n'est

Si

$$n_{\{D_d\}} + \max\left\{\left(n_{y\longrightarrow e} + n_{\{N_y\}} + n_{\{D_u\}}\right);\left(n_{u\longrightarrow e} + n_{\{N_u\}} + n_{\{D_y\}}\right)\right\} > n_{\{N_d\}} + \max\left\{\left(n_{y\longrightarrow f} + n_{\{N_y\}} + n_{\{D_u\}}\right);\left(n_{u\longrightarrow f} + n_{\{N_u\}} + n_{\{D_y\}}\right)\right\}$$

resp.

$$n_{\{D_d\}} + \max\left\{\left(n_{y\longrightarrow e} + n_{\{N_y\}} + n_{\{D_u\}}\right);\left(n_{u\longrightarrow e} + n_{\{N_u\}} + n_{\{D_y\}}\right)\right\} < n_{\{N_d\}} + \max\left\{\left(n_{y\longrightarrow f} + n_{\{N_y\}} + n_{\{D_u\}}\right);\left(n_{u\longrightarrow f} + n_{\{N_u\}} + n_{\{D_y\}}\right)\right\}$$

et si

$$n_{y\longrightarrow e} + n_{\{N_y\}} + n_{\{D_u\}} \neq n_{u\longrightarrow e} + n_{\{N_u\}} + n_{\{D_y\}}$$

resp.

$$n_{y\longrightarrow f} + n_{\{N_y\}} + n_{\{D_u\}} \neq n_{u\longrightarrow f} + n_{\{N_u\}} + n_{\{D_y\}}$$

et si pour l'argument de la fonction max du membre à gauche (resp. droite) prenant la valeur du maximum, une seule famille de Mason *est impliquée dans la détermination du degré $n_{.\longrightarrow e}$ (resp. $n_{.\longrightarrow f}$) qui lui est associé alors l'adéquation ne peut être vérifiée au niveau d'analyse inférieur et la remise en question de la structure des spécifications ou de la structure du composant doit avoir lieu (étape 5).*
Sinon les spécifications (de l'entrée et de la sortie) et la structure du composant sont a priori en adéquation (condition nécessaire) et par conséquent, l'adéquation doit être vérifiée au niveau d'analyse comportemental (étape 4).

- ***Étape 4 : Vérification de l'adéquation au niveau d'analyse comportemental***
  Les spécifications (de l'entrée et de la sortie) et la structure du composant sont en adéquation au niveau d'analyse comportemental si :

$$\begin{aligned}&\left[\mathbf{N_{y\rightarrow e}}(s)\mathbf{N_y}(s)\mathbf{D_u}(s) + \mathbf{N_{u\rightarrow e}}(s)\mathbf{N_u}(s)\mathbf{D_y}(s)\right]\mathbf{D_d}(s)\\ &= \left[\mathbf{N_{y\rightarrow f}}(s)\mathbf{N_y}(s)\mathbf{D_u}(s) + \mathbf{N_{u\rightarrow f}}(s)\mathbf{N_u}(s)\mathbf{D_y}(s)\right]\mathbf{N_d}(s)\end{aligned} \tag{3.38}$$

  où :
  - $\mathbf{N_d}(s)$ *et* $\mathbf{D_d}(s)$ *dépendent de la nature de la fonction de transfert caractérisant le composant (cf. étape 2) : s'il est caractérisé par une impédance (resp. admittance) alors* $\mathbf{N_d}(s)$ *(resp.* $\mathbf{D_d}(s)$*) est le numérateur et* $\mathbf{D_d}(s)$ *(resp.* $\mathbf{N_d}(s)$*) est le dénominateur de cette impédance (resp. admittance) ;*
  - $\mathbf{N_u}(s)$ *(resp.* $\mathbf{D_u}(s)$*) est le numérateur (resp. dénominateur) de la spécification de l'entrée* $\mathbf{U}(s)$ *;*
  - $\mathbf{N_y}(s)$ *(resp.* $\mathbf{D_y}(s)$*) est le numérateur (resp. dénominateur) de la spécification de la sortie* $\mathbf{Y}(s)$ *;*
  - $\mathbf{N_{y\rightarrow e}}(s)$ *(resp.* $\mathbf{N_{y\rightarrow f}}(s)$*) est le numérateur de la transmittance entre* $\mathbf{Y}(s)$ *et la variable de puissance* $\mathbf{E}(s)$ *(resp.* $\mathbf{F}(s)$*) du composant ;*
  - $\mathbf{N_{u\rightarrow e}}(s)$ *(resp.* $\mathbf{N_{u\rightarrow f}}(s)$*) est le numérateur de la transmittance entre* $\mathbf{U}(s)$ *et la variable de puissance* $\mathbf{E}(s)$ *(resp.* $\mathbf{F}(s)$*) du composant.*
- ***Étape 5 : Remise en question de la structure des spécifications ou de la structure du composant (niveaux d'analyse BG-structurel et comportemental)***
  Si l'adéquation des spécifications à la structure du composant n'est pas vérifiée alors la

pas considéré.

structure des spécifications ou la structure du composant peuvent être remises en question (selon la flexibilité donnée par le cahier des charges)[24] :

- ***Remise en question de la structure des spécifications :*** *La structure du composant est supposée inchangée. La structure de l'une des spécifications (l'entrée* $\mathbf{U}(s)$ *ou la sortie* $\mathbf{Y}(s)$*) est remise en question :*
  - *Remise en question de la structure de l'entrée* $\mathbf{U}(s)$[25] *: La structure de la sortie spécifiée est supposée inchangée. Une première analyse permet de calculer a priori le degré*[26] *de* $\mathbf{U}(s)$ *et par conséquent de conclure sur sa réalisabilité (niveau d'analyse BG-structurel) :*

$$\begin{aligned} deg\left(\mathbf{U}(s)\right) = &\left(n_{\{N_y\}} + \max\left\{\left(n_{y\longrightarrow f} + n_{\{N_d\}}\right); \left(n_{y\longrightarrow e} + n_{\{D_d\}}\right)\right\}\right) \\ &- \left(n_{\{D_y\}} + \max\left\{\left(n_{u\longrightarrow e} + n_{\{D_d\}}\right); \left(n_{u\longrightarrow f} + n_{\{N_d\}}\right)\right\}\right) \end{aligned} \tag{3.39}$$

Si

$$deg\left(\mathbf{U}(s)\right) > 0$$

et si

$$n_{y\longrightarrow f} + n_{\{N_d\}} \neq n_{y\longrightarrow e} + n_{\{D_d\}}$$

et si pour l'argument de la fonction max du premier terme de l'équation 3.39 prenant la valeur du maximum, une seule famille de Mason *est impliquée dans la détermination du degré* $n_{y\longrightarrow.}$ *qui lui est associé, alors la structure n'est pas causale.*
Si $deg\left(\mathbf{U}(s)\right) \leq 0$ *et* $\mathbf{N_{u\rightarrow e}}(s)\mathbf{D_d}(s) - \mathbf{N_{u\rightarrow f}}(s)\mathbf{N_d}(s) \neq 0$ *alors la structure de l'entrée* $\mathbf{U}(s)$ *qui satisfait le cahier des charges peut être calculée à partir de la sortie* $\mathbf{Y}(s)$ *et de la structure de l'impédance/admittance du composant et du modèle du système (niveau d'analyse comportemental) :*

$$\mathbf{U}(s) = \frac{\mathbf{N_{y\rightarrow f}}(s)\mathbf{N_d}(s) - \mathbf{N_{y\rightarrow e}}(s)\mathbf{D_d}(s)}{\mathbf{N_{u\rightarrow e}}(s)\mathbf{D_d}(s) - \mathbf{N_{u\rightarrow f}}(s)\mathbf{N_d}(s)}\mathbf{Y}(s) \tag{3.40}$$

  - *Remise en question de la structure de la sortie* $\mathbf{Y}(s)$ *: La structure de l'entrée spécifiée est supposée inchangée. Une première analyse permet de calculer le degré a priori de* $\mathbf{Y}(s)$ *et par conséquent de conclure sur sa réalisabilité (niveau d'analyse BG-structurel) :*

$$\begin{aligned} deg\left(\mathbf{Y}(s)\right) = &\left(n_{\{N_u\}} + \max\left\{\left(n_{u\longrightarrow f} + n_{\{N_d\}}\right); \left(n_{u\longrightarrow e} + n_{\{D_d\}}\right)\right\}\right) - \\ &\left(n_{\{D_u\}} + \max\left\{\left(n_{y\longrightarrow e} + n_{\{D_d\}}\right); \left(n_{y\longrightarrow f} + n_{\{N_d\}}\right)\right\}\right) \end{aligned} \tag{3.41}$$

Si

$$deg\left(\mathbf{Y}(s)\right) > 0$$

et si

$$n_{u\longrightarrow f} + n_{\{N_d\}} \neq n_{u\longrightarrow e} + n_{\{D_d\}}$$

et si pour l'argument de la fonction max du premier terme de l'équation 3.41 prenant la valeur du maximum, une seule famille de Mason *est impliquée dans la détermination*

[24] Cette étape permet de redéfinir un nouveau couple d'entrée/sortie si la structure du composant ne peut pas être remise en question (spécification ferme dans le cahier des charges) ou de redéfinir une nouvelle structure du composant si le couple d'entrée/sortie n'est pas modifiable.

[25] La remise en question de la structure de l'entrée $\mathbf{U}(s)$ (resp. sortie $\mathbf{Y}(s)$) correspond à exploiter un modèle inverse entrée/sortie (resp. direct). Néanmoins, l'exploitation du modèle inverse composant/sortie présente les deux avantages suivants : d'une part les différents polynômes $\mathbf{N}_{.\longrightarrow.}$, $\mathbf{N_d}(s)$ et $\mathbf{D_d}(s)$ sont déjà calculés, et d'autre part, cette façon de procéder met en évidence le composant et la charge ce qui n'est pas le cas des autres modèles.

[26] Le degré d'une fonction rationnelle est donné par la définition 24 et la notion de fraction rationnelle propre ou causale est donnée par la défintion 23 (annexe E).

du degré $n_{u\longrightarrow .}$ qui lui est associé, alors la structure n'est pas causale.
Si $deg\left(\mathbf{Y}(s)\right) \leq 0$ *et* $\mathbf{N_{y\rightarrow e}}(s)\mathbf{D_d}(s) - \mathbf{N_{y\rightarrow f}}(s)\mathbf{N_d}(s) \neq 0$*, la structure de la sortie* $\mathbf{Y}(s)$ *qui satisfait le cahier des charges peut être calculée à partir de la structure de l'entrée* $\mathbf{U}(s)$ *et de la structure de l'impédance/admittance du composant et du modèle du système (niveau d'analyse comportemental) :*

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{\mathbf{N_{u\rightarrow f}}(s)\mathbf{N_d}(s) - \mathbf{N_{u\rightarrow e}}(s)\mathbf{D_d}(s)}{\mathbf{N_{y\rightarrow e}}(s)\mathbf{D_d}(s) - \mathbf{N_{y\rightarrow f}}(s)\mathbf{N_d}(s)}\mathbf{U}(s) \tag{3.42}$$

- ***Remise en question de la structure du composant :*** *Les spécifications structurelles* ($\mathbf{u}(s)$ *et* $\mathbf{y}(s)$*) sont supposées inchangées. Une première information sur la réalisabilité de l'impédance/admittance* $\mathbf{I_i}(s) = \frac{\mathbf{N_i}(s)}{\mathbf{D_i}(s)}$ */*$\mathbf{A_i}(s) = \frac{\mathbf{D_i}(s)}{\mathbf{N_i}(s)}$ *peut être obtenue comme suit (niveau d'analyse BG-structurel) :*

$$\begin{cases} deg(\mathbf{I_i}(s)) = \max\left\{\left(n_{y\longrightarrow e} + n_{\{N_y\}} + n_{\{D_u\}}\right); \left(n_{u\longrightarrow e} + n_{\{N_u\}} + n_{\{D_y\}}\right)\right\} \\ \qquad\qquad - \max\left\{\left(n_{y\longrightarrow f} + n_{\{N_y\}} + n_{\{D_u\}}\right); \left(n_{u\longrightarrow f} + n_{\{N_u\}} + n_{\{D_y\}}\right)\right\} \\ deg(\mathbf{A_i}(s)) = \max\left\{\left(n_{y\longrightarrow f} + n_{\{N_y\}} + n_{\{D_u\}}\right); \left(n_{u\longrightarrow f} + n_{\{N_u\}} + n_{\{D_y\}}\right)\right\} \\ \qquad\qquad - \max\left\{\left(n_{y\longrightarrow e} + n_{\{N_y\}} + n_{\{D_u\}}\right); \left(n_{u\longrightarrow e} + n_{\{N_u\}} + n_{\{D_y\}}\right)\right\} \end{cases} \tag{3.43}$$

Si

$$deg(\mathbf{I_i}(s)) > 0$$

resp.

$$deg(\mathbf{A_i}(s)) > 0$$

et si

$$n_{y\longrightarrow e} + n_{\{N_y\}} + n_{\{D_u\}} \neq n_{u\longrightarrow e} + n_{\{N_u\}} + n_{\{D_y\}}$$

resp.

$$n_{y\longrightarrow f} + n_{\{\mathbf{N_y}\}} + n_{\{D_u\}} \neq n_{u\longrightarrow f} + n_{\{N_u\}} + n_{\{D_y\}}$$

et si pour l'argument de la fonction max du premier terme de la soustraction prenant la valeur du maximum, une seule famille de Mason *est impliquée dans la détermination du degré $n_{.\longrightarrow .}$ qui lui est associé, alors la structure n'est pas causale.*
Si $deg(\mathbf{I_i}(s)) \leq 0$ *(resp.* $deg(\mathbf{A_i}(s)) \leq 0$ *alors la structure du composant qui répond au cahier des charges est caractérisée par l'impédance/admittance* $\mathbf{I_i}(s) = \frac{\mathbf{N_d}(s)}{\mathbf{D_d}(s)}$ */* $\mathbf{A_i}(s) = \frac{\mathbf{D_d}(s)}{\mathbf{N_d}(s)}$ *telle que (niveau d'analyse comportemental) :*

$$\begin{cases} \mathbf{N_d}(s) = \mathbf{N_{y\rightarrow e}}(s)\mathbf{N_y}(s)\mathbf{D_u}(s) + \mathbf{N_{u\rightarrow e}}(s)\mathbf{N_u}(s)\mathbf{D_y}(s) \\ \mathbf{D_d}(s) = \mathbf{N_{y\rightarrow f}}(s)\mathbf{N_y}(s)\mathbf{D_u}(s) + \mathbf{N_{u\rightarrow f}}(s)\mathbf{N_u}(s)\mathbf{D_y}(s) \end{cases} \tag{3.44}$$

- ***Étape 6 : Vérification de l'adéquation au niveau d'analyse numérique et synthèse paramétrique***
La vérification d'adéquation au niveau d'analyse comportemental (étape 4) permet d'établir un système d'équations polynomiales en termes des paramètres à synthétiser (linéaires ou non linéaires). Si les solutions trouvées suite à la résolution de ce système d'équation sont acceptables (répondent aux contraintes physiques) alors l'adéquation est vérifiée et la synthèse paramétrique des paramètres du composant peut être entreprise. Dans le cas contraire, il faut remettre en question les spécifications numériques.

Démonstration. Nous proposons dans ce qui suit, une démonstration des étapes 3 et 4 pour la vérification de l'adéquation aux niveaux d'analyse BG-structurel et comportemental.

Les variables de puissance $\mathbf{E}(s)$ et $\mathbf{F}(s)$, déterminées à partir du modèle bond graph bicausal, sont calculées comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(s) = \mathbf{T_{y\to e}}(s)\mathbf{Y}(s) + \mathbf{T_{u\to e}}(s)\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{F}(s) = \mathbf{T_{y\to f}}(s)\mathbf{Y}(s) + \mathbf{T_{u\to f}}(s)\mathbf{U}(s) \end{cases} \tag{3.45}$$

où

- $\mathbf{T_{y\to e}}(s)$ (resp. $\mathbf{T_{y\to f}}(s)$) est la transmittance entre $\mathbf{Y}(s)$ et la variable de puissance $\mathbf{E}(s)$ (resp. $\mathbf{F}(s)$) du composant,
- $\mathbf{T_{u\to e}}(s)$ (resp. $\mathbf{T_{u\to f}}(s)$) est la transmittance entre $\mathbf{U}(s)$ et la variable de puissance $\mathbf{E}(s)$ (resp. $\mathbf{F}(s)$) du composant.

Le système d'équations 3.45 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(s) = \frac{\mathbf{N_{y\to e}}(s)}{\mathbf{D}(s)}\mathbf{Y}(s) + \frac{\mathbf{N_{u\to e}}(s)}{\mathbf{D}(s)}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{N_{y\to f}}(s)}{\mathbf{D}(s)}\mathbf{Y}(s) + \frac{\mathbf{N_{u\to f}}(s)}{\mathbf{D}(s)}\mathbf{U}(s) \end{cases}$$

où :

- $\mathbf{N_{y\to e}}(s)$ (resp. $\mathbf{N_{y\to f}}(s)$) est le numérateur de la transmittance entre $\mathbf{Y}(s)$ et la variable de puissance $\mathbf{E}(s)$ (resp. $\mathbf{F}(s)$) sur le port du composant,
- $\mathbf{N_{u\to e}}(s)$ (resp. $\mathbf{N_{u\to f}}(s)$) est le numérateur de la transmittance entre $\mathbf{U}(s)$ et la variable de puissance $\mathbf{E}(s)$ (resp. $\mathbf{F}(s)$) sur le port du composant,
- $\mathbf{D}(s)$ est le dénominateur commun.

Ainsi l'expression de l'impédance/admittance ($\mathbf{I_i}(s)/\mathbf{A_i}(s)$) du composant déterminée à partir du modèle bond graph inverse s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{I_i}(s) = \frac{\mathbf{E}(s)}{\mathbf{F}(s)} = \frac{\mathbf{N_{y\to e}}(s)\mathbf{y}(s)+\mathbf{N_{u\to e}}(s)\mathbf{u}(s)}{\mathbf{N_{y\to f}}(s)\mathbf{y}(s)+\mathbf{N_{u\to f}}(s)\mathbf{u}(s)} \\ \mathbf{A_i}(s) = \frac{\mathbf{F}(s)}{\mathbf{E}(s)} = \frac{\mathbf{N_{y\to f}}(s)\mathbf{y}(s)+\mathbf{N_{u\to f}}(s)\mathbf{u}(s)}{\mathbf{N_{y\to e}}(s)\mathbf{y}(s)+\mathbf{N_{u\to e}}(s)\mathbf{u}(s)} \end{cases}$$

Les spécifications (de l'entrée et de la sortie) et la structure du composant sont en adéquation si et seulement si :

$$\mathbf{I_i}(s) = \mathbf{I_d}(s)$$

ou (suivant la causalité affectée au composant)

$$\mathbf{A_i}(s) = \mathbf{A_d}(s)$$

où $\mathbf{I_d}(s)/\mathbf{A_d}(s)$ est l'impédance/admittance associée au composant et déterminée à l'étape 2 à partir du modèle bond graph causal. Ainsi, les spécifications (de l'entrée et de la sortie) et la structure du composant sont en adéquation si et seulement si :

$$\left[\mathbf{N_{y\to e}}(s)\mathbf{y}(s) + \mathbf{N_{u\to e}}(s)\mathbf{u}(s)\right]\mathbf{D_d}(s) = \left[\mathbf{N_{y\to f}}(s)\mathbf{y}(s) + \mathbf{N_{u\to f}}(s)\mathbf{u}(s)\right]\mathbf{N_d}(s) \tag{3.46}$$

où $\mathbf{N_d}(s)$ et $\mathbf{D_d}(s)$ dépendent de la nature de la fonction de transfert caractérisant le composant : s'il est caractérisé par une impédance (resp. admittance) alors $\mathbf{N_d}(s)$ (resp. $\mathbf{D_d}(s)$) est le numérateur et $\mathbf{D_d}(s)$ (resp. $\mathbf{N_d}(s)$) est le dénominateur de cette impédance (resp. admittance).

L'équation 3.46 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\left[\mathbf{N_{y\to e}}(s)\mathbf{N_y}(s)\mathbf{D_u}(s) + \mathbf{N_{u\to e}}(s)\mathbf{N_u}(s)\mathbf{D_y}(s)\right]\mathbf{D_d}(s) \\ &= \left[\mathbf{N_{y\to f}}(s)\mathbf{N_y}(s)\mathbf{D_u}(s) + \mathbf{N_{u\to f}}(s)\mathbf{N_u}(s)\mathbf{D_y}(s)\right]\mathbf{N_d}(s) \end{aligned} \tag{3.47}$$

où :

- $\mathbf{N_u}(s)$ (resp. $\mathbf{D_u}(s)$) est le numérateur (resp. dénominateur) de la spécification de l'entrée $\mathbf{U}(s)$,

– et $\mathbf{N_y}(s)$ (resp. $\mathbf{D_y}(s)$) est le numérateur (resp. dénominateur) de la spécification de la sortie $\mathbf{Y}(s)$.

Les polynômes $\mathbf{N_{y\to f}}(s)$, $\mathbf{N_{y\to e}}(s)$, $\mathbf{N_{u\to f}}(s)$, $\mathbf{N_{u\to e}}(s)$, $\mathbf{N_y}(s)$, $\mathbf{D_y}(s)$, $\mathbf{N_u}(s)$, $\mathbf{D_u}(s)$, $\mathbf{N_d}(s)$ et $\mathbf{D_d}(s)$ peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{N_{y\to f}}(s)=\sum_{k_1}\rho_{k_1}(y\longrightarrow f)s^{-k_1}\ ;\ \mathbf{N_{y\to e}}(s)=\sum_{k_2}\rho_{k_2}(y\longrightarrow e)s^{-k_2};$$

$$\mathbf{N_{u\to f}}(s)=\sum_{k_3}\rho_{k_3}(u\longrightarrow f)s^{-k_3}\ ;\ \mathbf{N_{u\to e}}(s)=\sum_{k_4}\rho_{k_4}(u\longrightarrow e)s^{-k_4};$$

$$\mathbf{N_y}(s)=\sum_{k_5=0}^{n_{\{N_y\}}}\alpha_{k_5}^{\{N_y\}}s^{k_5}\ ;\ \mathbf{D_y}(s)=\sum_{k_6=0}^{n_{\{D_y\}}}\alpha_{k_6}^{\{D_y\}}s^{k_6};$$

$$\mathbf{N_u}(s)=\sum_{k_7=0}^{n_{\{N_u\}}}\alpha_{k_7}^{\{N_u\}}s^{k_7}\ ;\ \mathbf{D_u}(s)=\sum_{k_8=0}^{n_{\{D_u\}}}\alpha_{k_8}^{\{D_u\}}s^{k_8}.$$

$$\mathbf{N_d}(s)=\sum_{k_9=0}^{n_{\{N_d\}}}\alpha_{k_9}^{\{N_d\}}s^{k_9}\ ;\ \mathbf{D_d}(s)=\sum_{k_{10}=0}^{n_{\{D_d\}}}\alpha_{k_{10}}^{\{D_d\}}s^{k_{10}}.$$

où

– $\rho_{k_i}(\upsilon_i\to\upsilon_j), i=\{1,\ldots,4\}$ est la somme des gains statiques des familles de MASON d'ordre k_i et comportant un chemin causal E/S entre la variable υ_i et la variable υ_j ;
– $n_{\{N_y\}}$ (resp. $n_{\{D_y\}}$, $n_{\{N_u\}}$, $n_{\{D_u\}}$, $n_{\{N_d\}}$, $n_{\{D_y\}}$) est le degré du polynôme $\mathbf{N_y}(s)$ (resp. $\mathbf{D_y}(s)$, $\mathbf{N_u}(s)$, $\mathbf{D_u}(s)$, $\mathbf{N_d}(s)$, $\mathbf{D_d}(s)$) ;
– $\alpha_{k_i}^{\{.\}}, i=\{5,\ldots,10\}$ est le coefficient du monôme de degré k_i. Le polynôme correspondant est soit donné par le cahier des charges (cas de $\mathbf{N_y}(s)$, $\mathbf{D_y}(s)$, $\mathbf{N_u}(s)$ et $\mathbf{D_u}(s)$), soit déterminé à partir du modèle bond graph causal (cas de $\mathbf{N_d}(s)$ et de $\mathbf{D_d}(s)$).

Ainsi, les spécifications et la structure du composant sont en adéquation si et seulement si :

$$\begin{aligned}&\sum_{k_9=0}^{n_{\{N_d\}}}\alpha_{k_9}^{\{N_d\}}s^{k_9}\left[\sum_{k_2}\rho_{k_2}(y\longrightarrow e)s^{-k_2}\sum_{k_5=0}^{n_{\{N_y\}}}\alpha_{k_5}^{\{N_y\}}s^{k_5}\sum_{k_8=0}^{n_{\{D_u\}}}\alpha_{k_8}^{\{D_u\}}s^{k_8}+\sum_{k_4}\rho_{k_4}(u\longrightarrow e)s^{-k_4}\right.\\&\left.\sum_{k_7=0}^{n_{\{N_u\}}}\alpha_{k_7}^{\{N_u\}}s^{k_7}\sum_{k_6=0}^{n_{\{D_y\}}}\alpha_{k_6}^{\{D_y\}}s^{k_6}\right]=\sum_{k_{10}=0}^{n_{\{D_d\}}}\alpha_{k_{10}}^{\{D_d\}}s^{k_{10}}\left[\sum_{k_1}\rho_{k_1}(y\longrightarrow f)s^{-k_1}\sum_{k_5=0}^{n_{\{N_y\}}}\alpha_{k_5}^{\{N_y\}}s^{k_5}\right.\\&\left.\sum_{k_8=0}^{n_{\{D_u\}}}\alpha_{k_8}^{\{D_u\}}s^{k_8}+\sum_{k_3}\rho_{k_3}(u\longrightarrow f)s^{-k_3}\sum_{k_7=0}^{n_{\{N_u\}}}\alpha_{k_7}^{\{N_u\}}s^{k_7}\sum_{k_6=0}^{n_{\{D_y\}}}\alpha_{k_6}^{\{D_y\}}s^{k_6}\right]\end{aligned}\tag{3.48}$$

Si

$$\begin{aligned}&n_{\{D_d\}}+\max\left\{\left(n_{y\longrightarrow e}+n_{\{N_y\}}+n_{\{D_u\}}\right);\left(n_{u\longrightarrow e}+n_{\{N_u\}}+n_{\{D_y\}}\right)\right\}>\\&n_{\{N_d\}}+\max\left\{\left(n_{y\longrightarrow f}+n_{\{N_y\}}+n_{\{D_u\}}\right);\left(n_{u\longrightarrow f}+n_{\{N_u\}}+n_{\{D_y\}}\right)\right\}\end{aligned}$$

respectivement

$$\begin{aligned}&n_{\{D_d\}}+\max\left\{\left(n_{y\longrightarrow e}+n_{\{N_y\}}+n_{\{D_u\}}\right);\left(n_{u\longrightarrow e}+n_{\{N_u\}}+n_{\{D_y\}}\right)\right\}<\\&n_{\{N_d\}}+\max\left\{\left(n_{y\longrightarrow f}+n_{\{N_y\}}+n_{\{D_u\}}\right);\left(n_{u\longrightarrow f}+n_{\{N_u\}}+n_{\{D_y\}}\right)\right\}\end{aligned}$$

où $n_{y\longrightarrow f}$ (resp. $n_{u\longrightarrow f}$, $n_{y\longrightarrow e}$, $n_{u\longrightarrow e}$) est égal à l'opposé de l'ordre minimal qu'une famille de MASON contenant un chemin causal entre y et f (resp. u et f, y et e, u et e) puisse avoir, alors deux cas de figure peuvent se présenter :

- cas où dans le polynôme de plus haut degré, le monôme de plus haut degré ne présente pas de somme signée dans son coefficient. Ce qui revient à vérifier que $n_{y\longrightarrow e}+n_{\{N_y\}}+n_{\{D_u\}} \neq n_{u\longrightarrow e}+n_{\{N_u\}}+n_{\{D_y\}}$ (resp. $n_{y\longrightarrow f}+n_{\{N_y\}}+n_{\{D_u\}} \neq n_{u\longrightarrow f}+n_{\{N_u\}}+n_{\{D_y\}}$) et que pour l'argument de la fonction max du membre de gauche (resp. droite) prenant la valeur du maximum, une seule famille de MASON est impliquée dans la détermination du degré $n_{.\longrightarrow e}$ (resp. $n_{.\longrightarrow f}$) qui lui est associé. Dans ce cas l'adéquation ne peut être vérifiée et l'analyse s'arrête à ce niveau (niveau d'analyse BG-structurel).
- cas où dans le polynôme de plus haut degré, le monôme de plus haut degré présente une somme signée dans son coefficient. Dans ce cas, l'adéquation ne peut être vérifiée au niveau d'analyse BG-structurel et la vérification de l'adéquation doit être réalisée au niveau d'analyse inférieur : l'équation 3.47 ou encore l'équation 3.48 doit être vérifiée.

Fin de la démonstration.

L'organigramme de la figure 3.22 permet de résumer la procédure 19. Au niveau d'analyse numérique (étape 6), les valeurs numériques de certains paramètres intervenant dans la charge ou dans les spécifications d'entrée/sortie peuvent être données par le retour d'expérience du concepteur. Les valeurs des autres paramètres peuvent être synthétisées à cette étape.

Une implémentation logicielle de la procédure 19 permet d'automatiser les différentes étapes et d'assurer un gain de temps important dans la démarche de conception.

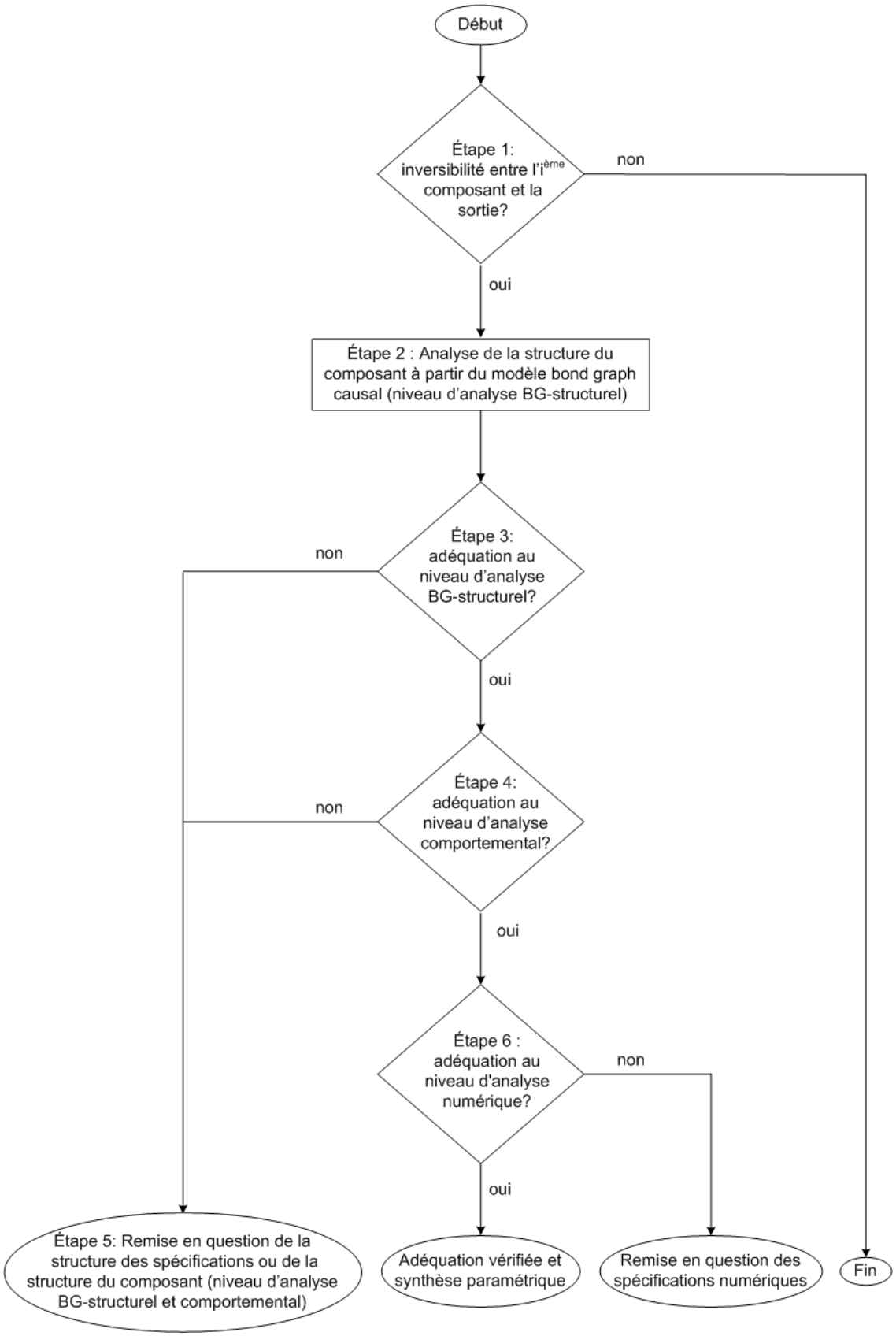


FIG. 3.22 – Procédure 19 : organigramme récapitulatif.

3.2.2 De la vérification de l'adéquation à la synthèse de tolérance : cas d'une suspension quart de véhicule

Dans cette section et dans une première partie, nous proposons d'analyser l'adéquation spécifications/structure pour une suspension quart de véhicule et ce, à partir de la procédure 19. La vérification de l'adéquation au niveau d'analyse numérique (étape 6 de la procédure 19) débouche tout naturellement sur une synthèse paramétrique. Ce travail est ensuite approfondi dans une seconde partie où le rapprochement avec les travaux de Ngwompo [Ngw98] est établi.

Considérons une suspension quart de véhicule (figure 3.23(a)), avec :

- k_s : raideur de la suspension,
- b_s : coefficient de frottement visqueux de l'amortisseur,
- k_r : raideur du pneumatique,
- m_v : masse de la caisse (masse suspendue),
- m_r : masse de la roue (masse non suspendue),
- V_r : vitesse de débattement vertical du point de contact roue/sol,
- V_v : vitesse de pompage du véhicule.

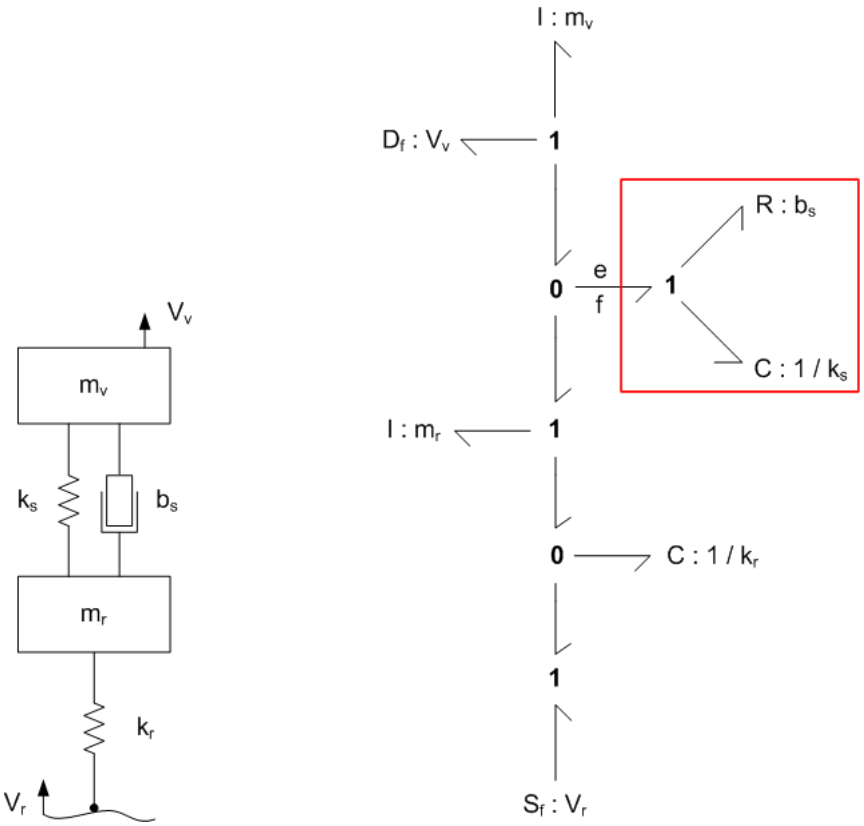


Fig. 3.23 – (a) Suspension quart de véhicule et (b) son modèle bond graph acausal.

Le modèle bond graph acausal associé est donné figure 3.23(b). Il représente un modèle linéarisé autour de la position d'équilibre du véhicule : c'est pour cette raison que les sources d'effort liées au poids ne sont pas considérées.

Vérification de l'adéquation et aide à la rédaction du cahier des charges

Dans le contexte industriel, le composant objet de la conception est la suspension caractérisée par les paramètres k_s et b_s. La figure 3.23(b) met en évidence le composant en question. Nous souhaitons vérifier l'adéquation de la structure choisie pour ce composant avec les spécifications d'entrée et de sortie suivantes :

$$\mathbf{V_r}(s) = \frac{k_1}{s+\alpha} \tag{3.49}$$

$$\mathbf{V_v}(s) = \frac{1}{k_3 s^2 + k_2 s + 1} \tag{3.50}$$

avec k_1, k_2, k_3 et α sont non nuls.

- Étape 1 : L'inversibilité est vérifiée :
  - sur le modèle bond graph acausal, il existe une ligne de puissance entre le composant et la sortie (figure 3.24(a)),
  - sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale, il existe un chemin causal entre la variable de puissance sortante (effort) du composant et la sortie (figure 3.24(b)),
  - le modèle bond graph bicausal est construit (figure 3.25). La structure de jonction du modèle inverse est résoluble.

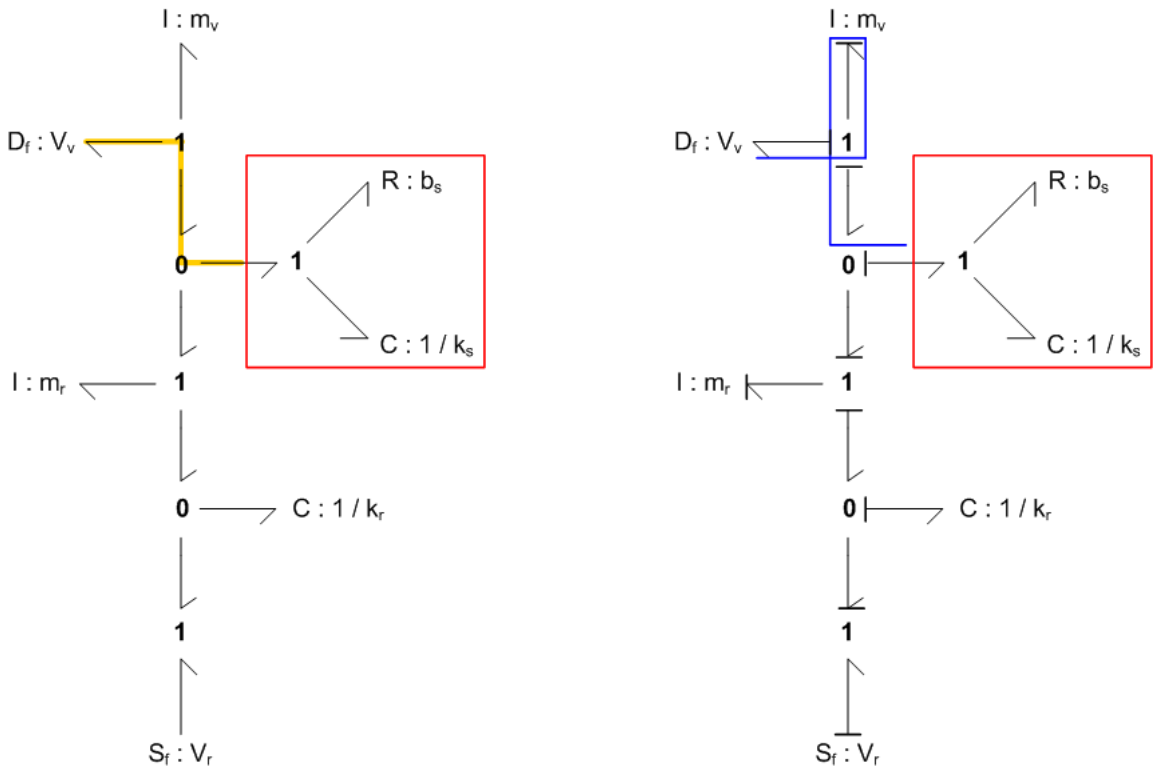


FIG. 3.24 – Analyse (a) des lignes de puissance sur le modèle bond graph acausal et (b) des chemins causaux sur le modèle bond graph en causalité intégrale.

- Étape 2 : Seul le composant « suspension » est considéré auquel la causalité préférentielle dérivée a été affectée (figure 3.26). L'admittance associée est donnée par :

$$\mathbf{A_d}(s) = \frac{\mathbf{D_d}(s)}{\mathbf{N_d}(s)} = \frac{s}{b_s s + k_s}$$

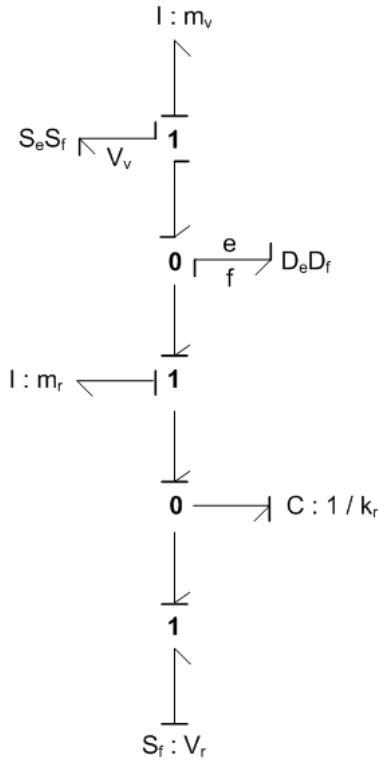


FIG. 3.25 – Modèle bond graph bicausal de la suspension.

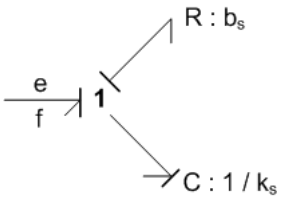


FIG. 3.26 – Le modèle bond graph du composant « suspension » en causalité préférentielle dérivée.

– Étape 3 : À partir de l'étape 2 et à partir des spécifications données par les équations 3.49 et 3.50, il peut être déduit que : $n_{\{D_d\}} = n_{\{N_d\}} = 1$, $n_{\{N_u\}} = n_{\{N_y\}} = 0$, $n_{\{D_u\}} = 1$ et $n_{\{D_y\}} = 2$. Sur le modèle bond graph bicausal, l'analyse des familles de MASON contenant un chemin causal entre $\mathbf{V_v}$ et la variable d'effort $\mathbf{e}$ (resp. de flux $\mathbf{f}$) du composant permet de déduire qu'il existe deux (resp. trois) familles de MASON d'ordre -1 et -3 (resp. 0, -2 et -2) (figure 3.27 (resp. figure 3.28)). Ainsi, $n_{y \longrightarrow e} = 3$ et $n_{y \longrightarrow f} = 2$. L'analyse des familles de MASON contenant un chemin causal entre $\mathbf{V_r}$ et la variable de flux $\mathbf{f}$ du composant permet de déduire qu'il existe une seule famille de MASON d'ordre 0 (figure 3.29) et donc $n_{u \longrightarrow f} = 0$. Il n'existe pas de famille de MASON qui contient un chemin causal entre $\mathbf{V_r}$ et la variable d'effort $\mathbf{e}$. Ainsi, il peut être déduit que :

$$1 + \max\{3 + 0 + 1\} > 1 + \max\{(2 + 0 + 1); (0 + 0 + 2)\}$$

et tel que dans le calcul du degré 5 (à gauche de l'inégalité), une seule famille de MASON d'ordre minimal est impliquée : c'est la seule famille de MASON contenant un chemin causal entre $\mathbf{V_v}$ et la variable d'effort $\mathbf{e}$ du composant (figure 3.27(b)). Ainsi, il peut être conclu que l'adéquation des spécifications imposées à la structure retenue pour le composant « suspension » n'est pas vérifiée au niveau d'analyse BG-structurel et par conséquent, elle ne sera pas vérifiée au niveau d'analyse inférieur. Nous passons alors à la remise en question

des spécifications ou de la structure du composant (étape 5) pour apporter une aide à la rédaction du cahier des charges.

- Étape 5 :
  - Remise en question de la structure de l'entrée $\mathbf{V_r}(s)$: calculons, tout d'abord, le degré de l'entrée qui permet *a priori* de satisfaire le cahier des charges :

$$deg(\mathbf{V_r}(s)) = (0 + \max\{(2+1);(3+1)\}) - (2 + \max\{0+1\}) = 4 - 3$$

$deg(\mathbf{V_r}(s)) > 0$, $(2+1) \neq (3+1)$ et il existe une seule famille de MASON pour déterminer $n_{y \longrightarrow e} = 3$ (figure 3.27). Les conditions de réalisabilité ne sont pas remplies alors il est inutile de déterminer sa structure complète et nous pouvons conclure que l'entrée ne peut être remise en question sans remettre en question autre chose d'abord.

  - Remise en question de la structure de la sortie $\mathbf{V_v}(s)$: calculons, tout d'abord, le degré de la sortie qui permet *a priori* de satisfaire le cahier des charges :

$$deg(\mathbf{V_v}(s)) = (0 + \max\{0+1\}) - (1 + \max\{(3+1);(2+1)\}) = 1 - 5$$

La transmittance est causale et elle a la structure suivante :

$$\mathbf{V_v}(s) = \frac{k_r k_1 (b_s s + k_s)}{(s+\alpha)\left[m_r m_v s^4 + b_s(m_v + m_r)s^3 + (k_s(m_v + m_r) + m_v k_r)s^2 + k_r b_s s + k_s k_r\right]}$$

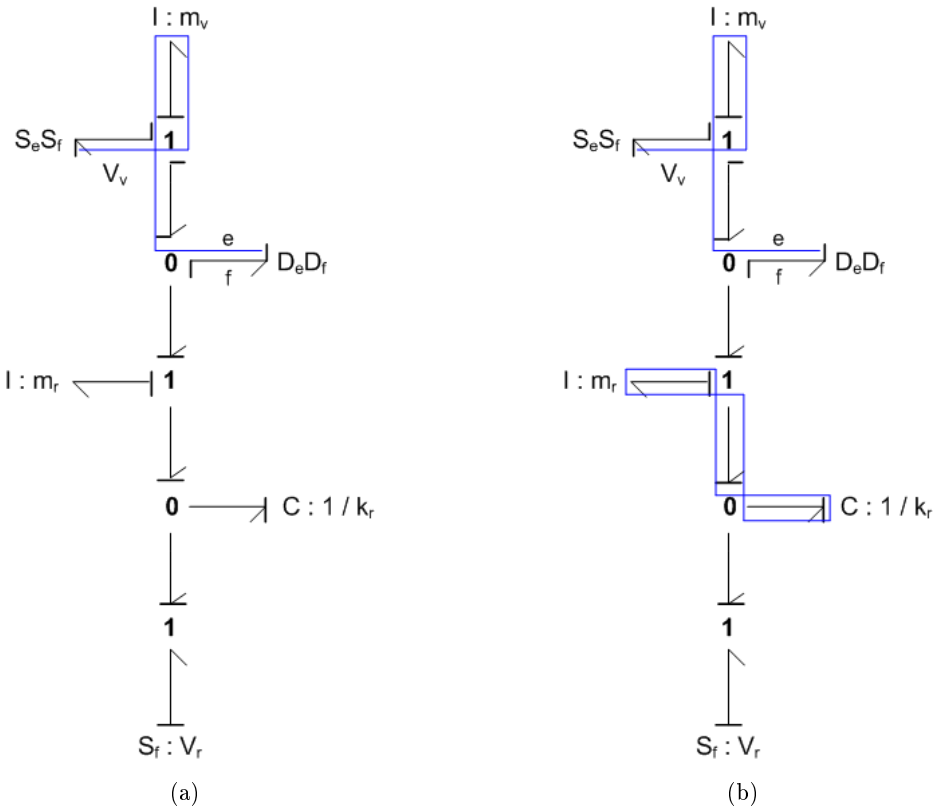


FIG. 3.27 – Analyse des familles de MASON contenant un chemin causal entre $\mathbf{V_v}$ et la variable d'effort **e**.

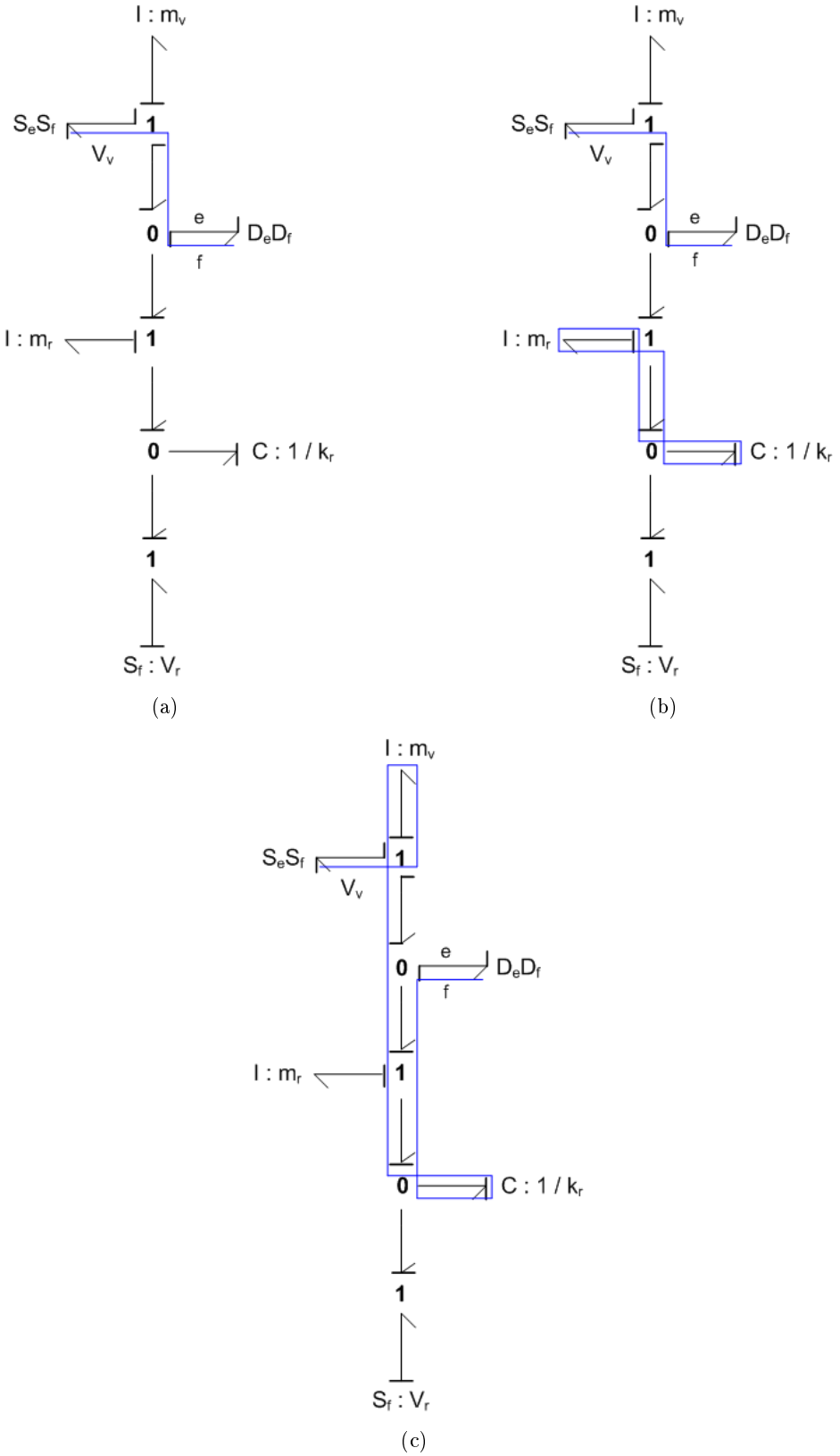


FIG. 3.28 – Analyse des familles de MASON contenant un chemin causal entre $\mathbf{V_v}$ et la variable de flux $\mathbf{f}$.

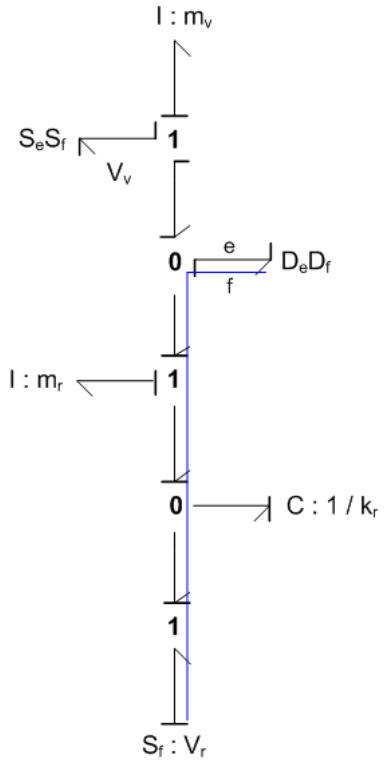


FIG. 3.29 – Analyse des familles de MASON contenant un chemin causal entre $\mathbf{V_r}$ et la variable de flux $\mathbf{f}$.

– Remise en question de la structure du composant « suspension » : calculons, tout d'abord, les degrés du numérateur $\mathbf{D_i}(s)$ et dénominateur $\mathbf{N_i}(s)$ de l'admittance $\mathbf{A_i}(s)$ qui permettent de satisfaire le cahier des charges :

$$\begin{cases} n_{\{\mathbf{D_i}\}} = \max\{(2+0+1);(0+0+2)\} = 3 \\ n_{\{\mathbf{N_i}\}} = \max\{3+0+1\} = 4 \end{cases}$$

L'admittance est causale et la structure du composant « suspension » qui répond aux spécifications (équations 3.49 et 3.50) est donnée par :

$$\mathbf{A_i}(s) = \frac{-(m_r+m_v)s^3 + (k_1k_3k_r - \alpha(m_r+m_v))s^2 + k_r(k_1k_2-1)s + k_r(k_1-\alpha)}{m_v s\,(m_r s^3 + \alpha m_r s^2 + k_r s + \alpha k_r)}$$

Considérons maintenant la spécification structurelle de sortie suivante (la spécification d'entrée et la structure du composant restent inchangées) :

$$\mathbf{V_v}(s) = \frac{k_{10}(k_{11}s + k_{12})}{k_4 s^5 + k_5 s^4 + k_6 s^3 + k_7 s^2 + k_8 s + k_9} \tag{3.51}$$

avec $k_4, \ldots, k_{12} \neq 0$. Cette spécification structurelle a été déduite de la remise en question de la sortie établie à l'étape 5. Ainsi k_4 est connu et égal à $m_r m_v$. Reprenons alors la procédure :

– Étape 3 : nous avons $n_{\{D_d\}} = n_{\{N_d\}} = 1$, $n_{\{N_u\}} = 0$, $n_{\{N_y\}} = 1$, $n_{\{D_u\}} = 1$, $n_{\{D_y\}} = 5$, $n_{y\longrightarrow e} = 3$, $n_{y\longrightarrow f} = 2$ et $n_{u\longrightarrow f} = 0$. Alors :

$$1 + \max\{3+1+1\} = 1 + \max\{(2+1+1);(0+0+5)\}$$

Ainsi, il peut être conclu que l'adéquation est vérifiée au niveau d'analyse BG-structurel et que l'analyse peut être menée au niveau d'analyse inférieur.

– Étape 4 : il y a adéquation au niveau d'analyse comportemental si :

$$
\begin{aligned}
&m_v m_r k_{10} k_{11} s^6 + m_v m_r k_{10}(k_{12} + \alpha k_{11}) s^5 + m_v k_{10}(\alpha m_r k_{12} + k_r k_{11}) s^4 + m_v k_r k_{10}(k_{12} + \alpha k_{11}) s^3 \\
&+ \alpha m_v k_r k_{10} k_{12} s^2 = b_s k_r k_1 k_4 s^6 + \left[b_s(k_r k_1 k_5 - k_{10} k_{11}(m_v + m_r)) + k_s k_r k_1 k_4\right] s^5 + \\
&+ \left[b_s(k_r k_1 k_6 - k_{10}(m_v + m_r)(k_{12} + \alpha k_{11})) + k_s(k_r k_1 k_5 - k_{10} k_{11}(m_v + m_r))\right] s^4 + \\
&\left[b_s(k_r(k_1 k_7 - k_{10} k_{11}) - \alpha k_{10} k_{12}(m_r + m_v)) + k_s(k_r k_1 k_6 - k_{10}(m_r + m_v)(k_{12} + \alpha k_{11}))\right] s^3 \\
&+ \left[b_s k_r(k_1 k_8 - k_{10}(\alpha k_{11} + k_{12})) + k_s(k_r(k_1 k_7 - k_{10} k_{12}) - \alpha k_{10} k_{12}(m_r + m_v))\right] s^2 \\
&+ k_r \left[b_s(k_1 k_9 - \alpha k_{10} k_{12}) + k_s(k_1 k_8 - k_{10}(\alpha k_{11} + k_{12}))\right] s + k_s k_r(k_1 k_9 - \alpha k_{10} k_{12})
\end{aligned}
$$

Ainsi, il faut et il suffit de vérifier le système d'équations 3.52 :

$$
\begin{cases}
m_v m_r k_{10} k_{11} = b_s k_r k_1 k_4 \\
m_v m_r k_{10}(k_{12} + \alpha k_{11}) = b_s(k_r k_1 k_5 - k_{10} k_{11}(m_v + m_r)) + k_s k_r k_1 k_4 \\
m_v k_{10}(\alpha m_r k_{12} + k_r k_{11}) = b_s(k_r k_1 k_6 - k_{10}(m_v + m_r)(k_{12} + \alpha k_{11})) + k_s(k_r k_1 k_5 - k_{10} k_{11}(m_v + m_r)) \\
m_v k_r k_{10}(k_{12} + \alpha k_{11}) = b_s(k_r(k_1 k_7 - k_{10} k_{11}) - \alpha k_{10} k_{12}(m_r + m_v)) + k_s(k_r k_1 k_6 - k_{10}(m_r + m_v)(k_{12} + \alpha k_{11})) \\
\alpha m_v k_r k_{10} k_{12} = b_s k_r(k_1 k_8 - k_{10}(\alpha k_{11} + k_{12})) + k_s(k_r(k_1 k_7 - k_{10} k_{12}) - \alpha k_{10} k_{12}(m_r + m_v)) \\
k_r \left[b_s(k_1 k_9 - \alpha k_{10} k_{12}) + k_s(k_1 k_8 - k_{10}(\alpha k_{11} + k_{12}))\right] = 0 \\
k_s k_r(k_1 k_9 - \alpha k_{10} k_{12}) = 0
\end{cases}
\tag{3.52}
$$

L'analyse du système d'équations 3.52 revient à vérifier que les conditions supposées sur les paramètres sont respectées quelles que soient les valeurs de ces paramètres, ce qui revient à vérifier que le problème est bien posé. Dans notre cas, il n' y a pas de conditions particulières à l'exception qu'ils soient non nuls, par conséquent l'adéquation est *a priori* vérifiée.

– Étape 6 : Les paramètres de valeurs connues sont : m_r, m_v, k_r et $k_4 = m_r m_v$. Nous supposons que l'industriel est capable de spécifier les valeurs numériques de certains coefficients (α, k_1, k_9, k_{10}, k_{11}, k_{12}) intervenant dans les spécifications. Ainsi, les valeurs des paramètres k_5, k_6, k_7, k_8, b_s et k_s peuvent être déterminées par la résolution du système d'équations 3.52. La résolution de ce type de système d'équations (polynomiales et pas nécessairement linéaires) peut faire appel par exemple à la base de GRÖBNER (ou base standard, ou base de BUCHBERGER), utilisée par plusieurs outils informatiques comme Maple et Matlab. S'il existe des solutions acceptables (physiquement) à ces paramètres alors nous avons simultanément vérifié l'adéquation et déterminé les valeurs des paramètres. Sinon, l'adéquation n'est pas vérifiée et il faut remettre en question les spécifications numériques.

Les spécifications données par les équations 3.49 et 3.50 ne peuvent être portées par la structure retenue pour le composant « suspension » et ce, indépendamment des paramètres choisis. En effet, ces spécifications ne sont pas compatibles avec la structure retenue quelles que soient les lois phénoménologiques considérées. Ainsi, l'adéquation n'est pas vérifiée à un niveau d'analyse BG-structurel donc il n'y a pas d'intérêt à vérifier cette adéquation à des niveaux d'analyse inférieurs car elle ne sera pas vérifiée à ces niveaux.

Les spécifications données par les équations 3.49 et 3.51 peuvent être compatibles avec la structure retenue pour le composant « suspension » s'il y a adéquation des lois phénoménologiques intervenant dans le système aux paramètres caractérisant les spécifications imposées (ce qui revient à vérifier formellement le système d'équations 3.52). Dans ce cas, l'adéquation est analysée à un niveau d'analyse comportemental. Enfin, si l'adéquation est vérifiée à ce niveau, l'étude peut être approfondie à un niveau d'analyse numérique pour s'assurer de la compatibilité de la structure retenue avec les spécifications au niveau le plus bas.

Cet exemple illustre bien l'intérêt d'adopter une démarche chronologique dans le problème de conception et du dimensionnement, notamment dans l'étape de vérification de l'adéquation.

Synthèse paramétrique

Dans les travaux de NGWOMPO [Ngw98], la synthèse paramétrique d'une suspension quart de véhicule (figure 3.23(a)) a été mise en place[27]. L'objectif était de déterminer les valeurs des paramètres du composant « suspension » pour des spécifications adéquates de la vitesse de débattement vertical du point de contact roue/sol (entrée) et de la vitesse de pompage de la caisse (sortie). Dans cette section, nous reprenons ces travaux afin d'établir le lien avec l'étape 6 de la procédure de vérification de l'adéquation spécifications/structure (procédure 19).

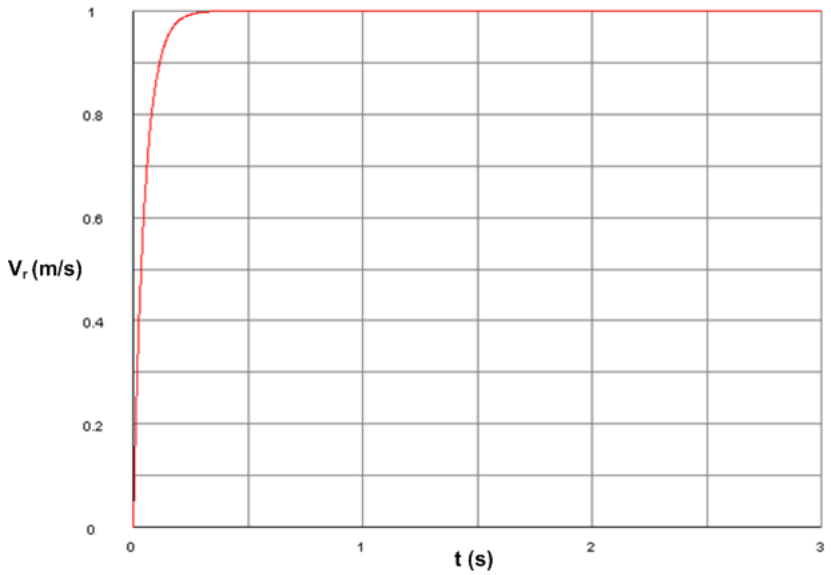


FIG. 3.30 – Spécification de la vitesse de débattement vertical du point de contact roue/sol.

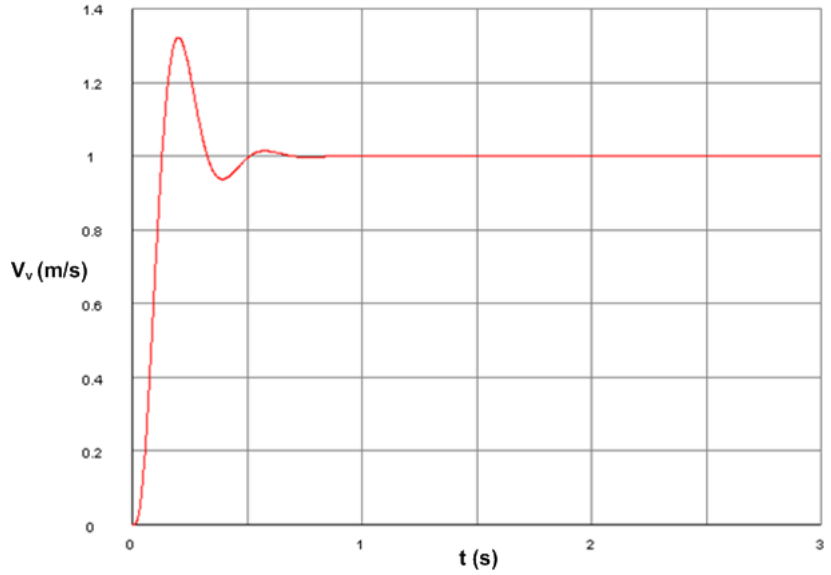


FIG. 3.31 – Spécification de la vitesse de pompage du véhicule.

Rappelons que dans le contexte industriel, le composant objet du dimensionnement est la suspension caractérisée par les paramètres k_s et b_s. Les valeurs des différents paramètres de la suspension (à l'exception des paramètres du composant « suspension ») sont données :

[27] La suspension traitée dans ces travaux est une suspension hydropneumatique.

$m_c = 203\ kg$
$m_r = 25\ kg$
$k_p = 170000\ N/m$

La trajectoire spécifiée pour la vitesse de débattement vertical du point de contact roue/sol (resp. vitesse de pompage du véhicule) est donnée figure 3.30 (resp. figure 3.31). La spécification de la vitesse de pompage du véhicule est suffisamment dérivable pour l'inversion du modèle. Nous supposons que ces spécifications du cahier des charges sont en adéquation avec la structure retenue pour le modèle de conception. Nous proposons de mettre en œuvre la synthèse paramétrique du composant « suspension » et donc de déterminer les valeurs des paramètres k_s et b_s caractérisant respectivement la raideur du ressort et le coefficient de frottement visqueux de l'amortisseur.

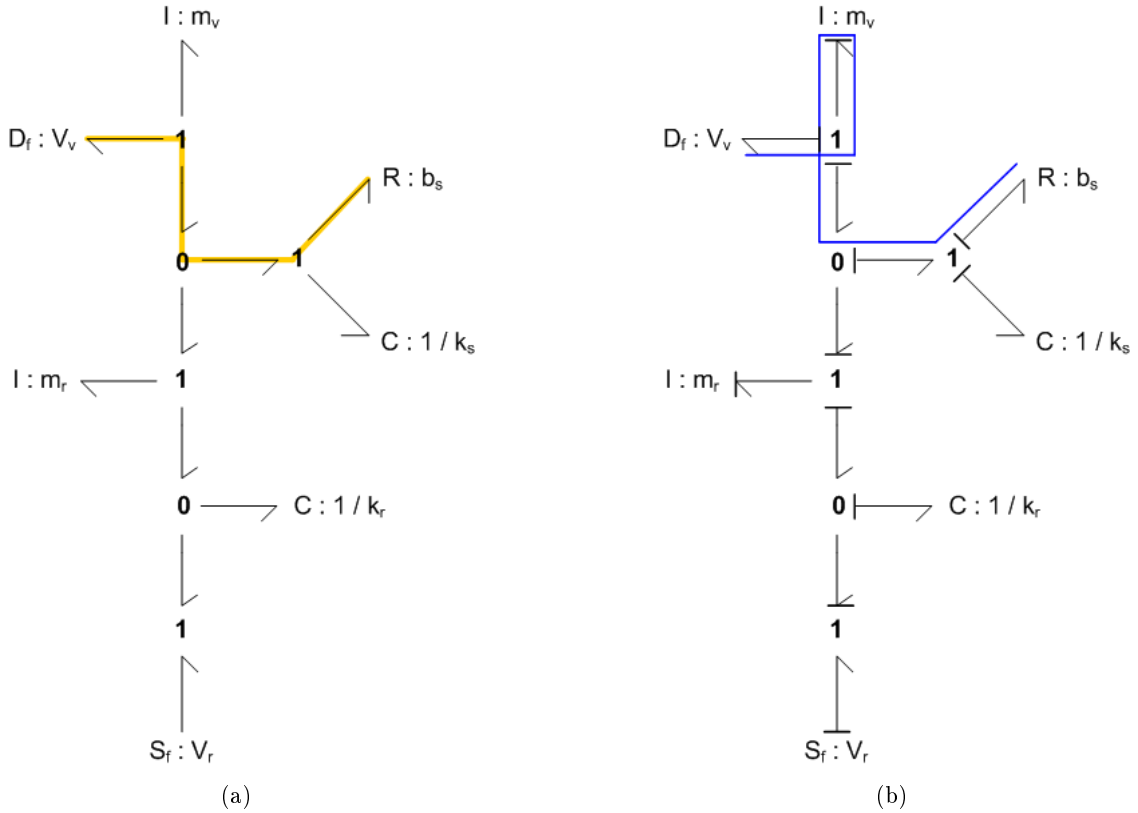


FIG. 3.32 – Analyse (a) des lignes de puissance sur le modèle bond graph acausal et (b) des chemins causaux sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale reliant l'élément R du composant en question et le détecteur portant la sortie V_v.

Sur le modèle bond graph acausal (resp. en causalité préférentielle intégrale), il existe une ligne de puissance (resp. un chemin causal) reliant l'élément R du composant en question et le détecteur portant la sortie V_v (figure 3.32(a) (resp. figure 3.32(b))). Ainsi, le modèle bond graph bicausal pour la synthèse paramétrique de l'élément R (caractérisé par le paramètre b_s) est construit en propageant la bicausalité tout le long de la ligne de puissance et en affectant la causalité préférentielle intégrale au reste du modèle (figure 3.33). Ensuite, nous affectons une valeur quelconque au paramètre k_s ($k_s = 30000\ N/m$) et nous procédons à une simulation du modèle inverse en tenant compte du cahier des charges imposé. Les variables de puissance obtenues par inversion ($e_R(t)$ et $f_R(t)$) sont tracées dans un plan (flux, effort) (figure 3.34). La caractéristique ainsi trouvée, pour $k_s = 30000\ N/m$, est différente d'une caractéristique d'un élément dissipatif puisqu'elle ne demeure pas uniquement dans le 1er et dans le 3ème quadrants du plan (flux, effort). En faisant varier la valeur de k_s dans un large intervalle et en observant

l'évolution des variables de puissance dans le plan (flux, effort), nous remarquons que la courbe (figure 3.35) sous forme de spirale s'aplatit jusqu'à devenir linéique pour une valeur donnée de k_s ($k_s = 60000\ N/m$). En dépassant cette valeur, la spirale s'élargit tout en changeant de sens d'évolution. La courbe linéique correspond bien à une caractéristique d'un élément dissipatif linéaire. La valeur de la pente définit la valeur du paramètre : $b_s = 5000\ Ns/m$. Ainsi, en faisant varier la valeur de l'élément de stockage C et en observant la caractéristique de l'élément R, la synthèse paramétrique du composant « suspension » est établie : le couple de paramètres qui permet de répondre au cahier des charges est ($b_s = 5000\ Ns/m$, $k_s = 60000\ N/m$). Nous arrivons à trouver une solution (un couple de valeurs pour b_s et k_s) car les spécifications imposées dans le cahier des charges et la structure retenue pour le modèle de conception sont en adéquation.

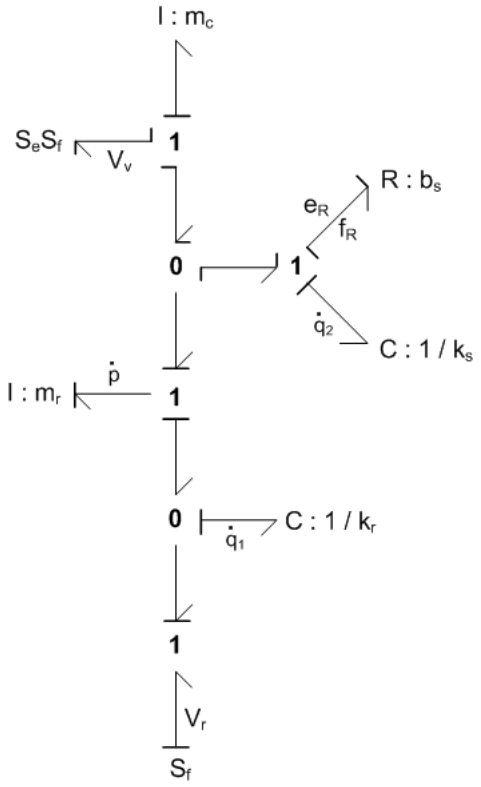


FIG. 3.33 – Bond graph bicausal pour la synthèse paramétrique.

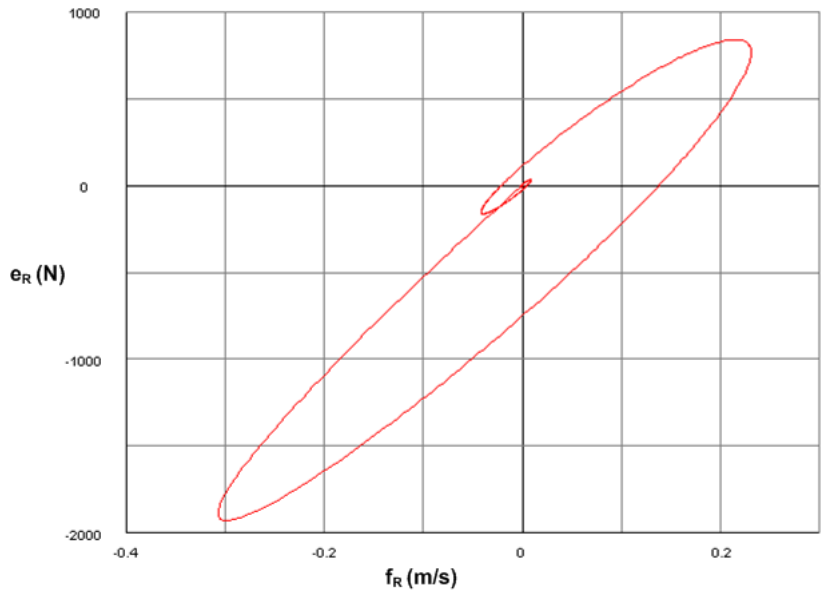


FIG. 3.34 – Tracé des variables de puissance de l'élément R du composant « suspension ».

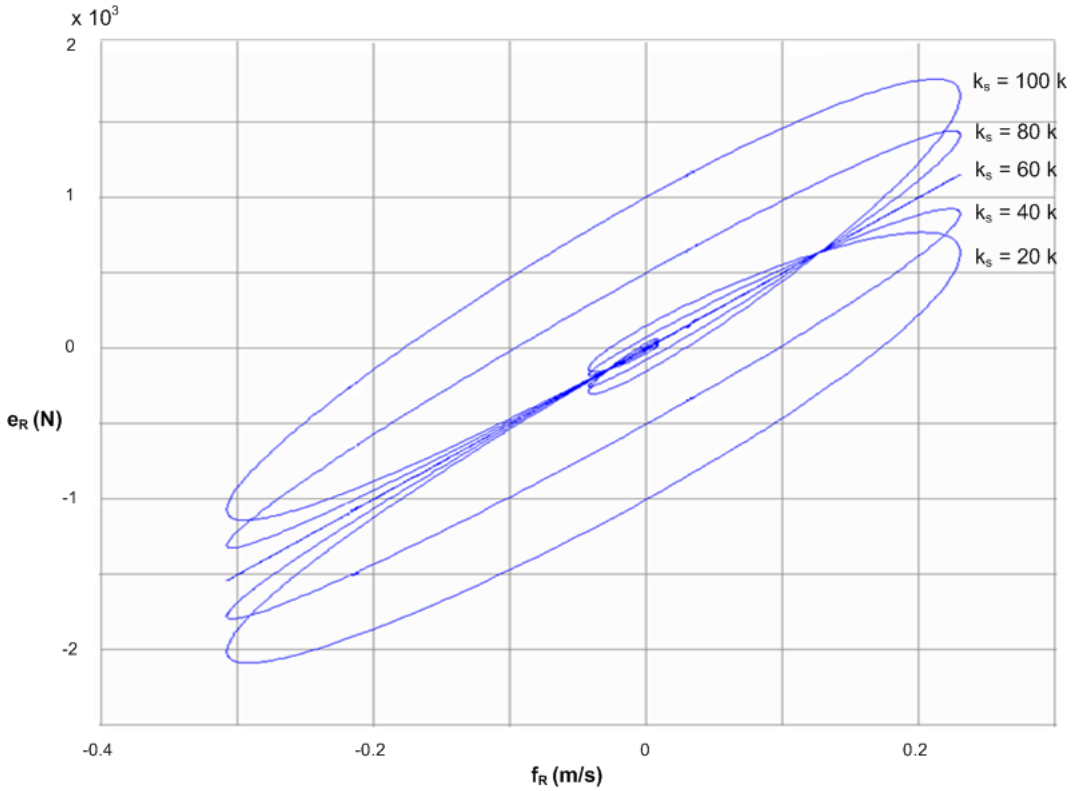


FIG. 3.35 – Caractéristique de l'élément R du composant « suspension » pour différentes valeurs de k_s.

Sous condition d'adéquation spécifications/structure, les caractéristiques obtenues pour $k_s \neq 60000\ N/m$ peuvent être interprétées par le fait qu'elles ne correspondent pas seulement à une caractéristique d'un élément dissipatif mais aussi à un élément de stockage de type C qui compenserait l'écart par rapport à la valeur de k_s. Si $k_s < 60000\ N/m$ alors cet écart est positif et l'élément C correspondant est caractérisé par un paramètre de valeur positive. Par contre, si $k_s > 60000\ N/m$ alors l'écart est négatif et l'élément C correspondant est caractérisé par un

paramètre de valeur négative. Ainsi, le signe de l'écart par rapport à la valeur de k_s explique le changement de sens d'évolution de la spirale.

La forme spirale obtenue peut être expliquée par le fait que les variables de puissance associées à l'élément dissipatif R, qui représentent les coordonnées cartésiennes de cette caractéristique, ont un comportement pseudo-périodique. Ainsi, au lieu de faire varier k_s (et par conséquent faire un certain nombre de simulations), il est possible à partir d'une unique simulation et à partir des expressions temporelles de ces variables de puissance (qu'il faut établir à partir des expressions temporelles des spécifications) d'exploiter les caractéristiques de la spirale (les différentes tangentes par exemple) pour établir la synthèse paramétrique.

Dans ce qui suit, nous présentons un résumé de la procédure décrite ci-dessus et établie dans les travaux de NGWOMPO [Ngw98]. En effet, sous condition d'adéquation spécifications/structure, la synthèse paramétrique d'un composant passif composé de deux éléments de type R, I ou C peut se faire comme suit :

- Inversion du modèle bond graph afin de remonter à l'un des éléments du composant en question.
- Faire varier la valeur du paramètre du second élément du composant.
- Tracer la caractéristique de l'élément en question dans le plan (flux, effort) (resp. (déplacement généralisé,effort), (moment généralisé, flux)) s'il s'agit d'un élément R (resp. C, I).
- Dans le cas particulier où la caractéristique prend la forme d'une spirale (cas où les variables associées à l'élément en question ont un comportement pseudo-périodique) alors l'évolution de la spirale en fonction de la variation du paramètre du second élément permet de guider le concepteur dans la synthèse paramétrique : plus la spirale s'aplatit plus on se rapproche de la valeur recherchée ; si la spirale change de sens alors la valeur recherchée est dépassée et il faut changer le sens de variation du paramètre.
- Lorsqu'une caractéristique linéique est obtenue alors relever la pente associée et retenir la valeur du second paramètre qui permet d'avoir cette caractéristique. Ainsi, la synthèse paramétrique du composant est réalisée.
- Si aucune caractéristique linéique n'est obtenue alors si pour une valeur donnée du second élément, la caractéristique évolue dans le 1^{er} et dans le $3^{ème}$ quadrants alors l'élément en question est non linéaire et décrit par cette caractéristique non linéique et la valeur du second paramètre est retenue. Si l'évolution de la caractéristique sort du 1^{er} et $3^{ème}$ quadrants, alors l'adéquation spécifications/structure n'est pas vérifiée.

La synthèse paramétrique présentée dans cette section est analogue à la procédure de vérification de l'adéquation spécifications/structure (procédure 19) proposée dans la section 3.2.1. En effet, la procédure 19 permet à la fois de vérifier si les spécifications peuvent être portées par la structure du modèle et de synthétiser les valeurs des paramètres qui permettent de satisfaire le cahier des charges. Ainsi, s'il existe des valeurs de paramètres qui répondent au cahier des charges alors nous pouvons conclure sur l'adéquation spécifications/structure. Par contre, l'approche décrite dans cette section suppose que cette adéquation soit vérifiée et s'intéresse uniquement à la synthèse paramétrique. S'il n'existe pas de solution alors l'adéquation n'est pas vérifiée. Dans ce qui suit, nous proposons d'effectuer le rapprochement entre ces deux approches à travers le système traité (la suspension quart de véhicule).

Les spécifications du cahier des charges (figures 3.30 et 3.31) peuvent être exprimées par les fonctions de transfert des équations 3.49 et 3.51. Pour ces spécifications, l'adéquation est vérifiée aux niveaux d'analyse BG-structurel et comportemental. Nous choisissons les valeurs suivantes pour les différents paramètres intervenant dans les fonctions de transfert (équations 3.49 et 3.51) : $k_1 = \alpha = 20$, $k_4 = 5075$, $k_5 = 12.415\ 10^5$, $k_6 = 70,99\ 10^6$, $k_7 = 1.8138\ 10^9$ $k_8 = 2.72\ 10^{10}$,

$k_9 = 2.04\ 10^{11}$, $k_{10} = 34\ 10^5$, $k_{11} = 5\ 10^3$ et $k_{12} = 6\ 10^4$. Ces valeurs vérifient bien les deux dernières relations du système d'équations 3.52 (système d'équations établi pour la vérification de l'adéquation au niveau d'analyse numérique et pour la synthèse paramétrique). À partir de la première relation, la valeur associée au paramètre b_s peut être déduite :

$$b_s = \frac{m_v m_r k_{10} k_{11}}{k_r k_1 k_4} = 5000\ Ns/m$$

Pour cette valeur de b_s et à partir de la deuxième relation du système d'équations 3.52, la valeur associée au paramètre k_s peut être déduite :

$$k_s = \frac{m_v m_r k_{10}(k_{12} + \alpha k_{11}) - b_s(k_r k_1 k_5 - k_{10} k_{11}(m_v + m_r))}{k_r k_1 k_4} = 60000\ N/m$$

L'ensemble des valeurs spécifiées et calculées vérifie la troisième, quatrième et cinquième équations du système 3.52. Alors l'adéquation spécifications/structure est vérifiée et la synthèse paramétrique du couple (b_s, k_s) est établie. Il est à noter que par les deux approches (celle proposée par Ngwompo [Ngw98] et celle définie par la procédure 19), la même solution ($b_s = 5000\ Ns/m$, $k_s = 60000\ N/m$) est retrouvée.

La synthèse paramétrique pour la synthèse des tolérances

Dans les deux paragraphes précédents (sections 3.2.2 et 3.2.2), l'adéquation des spécifications du cahier des charges (données par les équations 3.49 et 3.51) à la structure retenue pour le composant « suspension » (figure 3.23) a été vérifiée au niveau de l'analyse BG-structurel et comportemental. Nous avons vu qu'au niveau de l'analyse numérique, la vérification de l'adéquation coïncide avec la synthèse des paramètres b_s et k_s caractérisant le composant « suspension » et ce, à partir du système d'équations 3.52 (résultant de l'étape 6 de la procédure 19). Dans ce paragraphe, nous supposons une incertitude sur la spécification de la sortie (vitesse de pompage du véhicule) et nous proposons de déterminer les tolérances sur les paramètres b_s et k_s. L'incertitude sur la spécification de la sortie peut être traduite en termes d'incertitudes sur certains paramètres (paramètres intervenant dans l'équation 3.51) :

- $k_5 = k_{5_n} + \Delta k_5$ où $k_{5_n} = 12.415\ 10^5$ et $\Delta k_5 = 1.14\ 10^5$. Ainsi $k_5 = 13.555\ 10^5$,
- $k_6 = k_{6_n} + \Delta k_6$ où $k_{6_n} = 70,99\ 10^6$ et $\Delta k_6 = 4.56\ 10^5$. Ainsi $k_6 = 75.55\ 10^6$,
- $k_7 = k_{7_n} + \Delta k_7$ où $k_{7_n} = 1.8138\ 10^9$ et $\Delta k_7 = 0.1306\ 10^9$. Ainsi $k_7 = 1.9444\ 10^9$,
- $k_8 = k_{8_n} + \Delta k_8$ où $k_{8_n} = 2.72\ 10^{10}$ et $\Delta k_8 = 0.36\ 10^9$. Ainsi $k_8 = 3.06\ 10^{10}$,
- $k_9 = k_{9_n} + \Delta k_9$ où $k_{9_n} = 2.04\ 10^{11}$ et $\Delta k_9 = 0.34\ 10^{11}$. Ainsi $k_9 = 2.38\ 10^{11}$,
- $k_{11} = k_{11_n} + \Delta k_{11}$ où $k_{11_n} = 5\ 10^3$ et $\Delta k_{11} = 5\ 10^2$. Ainsi $k_{11} = 5.5\ 10^3$,
- $k_{12} = k_{12_n} + \Delta k_{12}$ où $k_{12_n} = 6\ 10^4$ et $\Delta k_{12} = 1\ 10^4$. Ainsi $k_{12} = 7\ 10^4$.

Les valeurs des paramètres k_4 et k_{10} sont inchangées : $k_4 = k_{4_n} = 5075$ et $k_{10} = k_{10_n} = 34\ 10^5$. Aucune incertitude n'est considérée sur la spécification de l'entrée (vitesse de débattement vertical du point de contact roue/sol) : $k_1 = \alpha = 20$.

Ces valeurs vérifient bien les deux dernières relations du système d'équations 3.52. À partir de la première relation, la valeur associée au paramètre b_s (qui est la somme d'une valeur nominale égale à $b_{s_n} = 5000\ Ns/m$ et d'une tolérance Δb_s) peut être déduite :

$$b_s = b_{s_n} + \Delta b_s = \frac{m_v m_r k_{10_n}\,(k_{11_n} + \Delta k_{11})}{k_r k_{1_n} k_{4_n}} = 5500\ Ns/m$$

ainsi $\Delta b_s = 500\ Ns/m$. Pour cette valeur de b_s et à partir de la deuxième relation du système d'équations 3.52, la valeur associée au paramètre k_s (qui est la somme d'une valeur nominale égale à $k_{s_n} = 60000\ Ns/m$ et d'une tolérance Δk_s) peut être déduite :

$$k_s = k_{s_n} + \Delta k_s = \frac{m_v m_r k_{10_n}(k_{12} + \alpha k_{11}) - b_s(k_r k_1 k_5 - k_{10_n} k_{11}(m_v + m_r))}{k_r k_1 k_{4_n}} = 70000\ N/m$$

et par conséquent $\Delta k_s = 10000\ N/m$. L'ensemble des valeurs spécifiées et calculées vérifie la troisième, quatrième et cinquième équations du système 3.52. Alors l'adéquation spécifications/ structure est vérifiée et la synthèse des tolérances paramétriques du couple (b_s, k_s) est établie. Ainsi, la vérification de l'adéquation spécifications/structure au niveau de l'analyse numérique (étape 6 de la procédure 19) peut peut également servir à un problème de synthèse de tolérances paramétriques dans le cas où les valeurs nominales sont données ou déterminées *a priori*.

Conclusion

Dans le premier chapitre, nous avons vu que les méthodes classiques de conception et de dimensionnement reposent le plus souvent sur une analyse dépendante des valeurs numériques des différents paramètres. En présence d'incertitudes paramétriques, ce type d'analyse doit être mené pour chaque valeur possible de chaque paramètre. L'une des originalités de la méthodologie de dimensionnement reposant sur des critères énergétiques et dynamiques, développée au sein du laboratoire Ampère, est sa phase d'analyse structurelle et comportementale. Basée sur l'étude de la structure et/ou des lois phénoménologiques du modèle, cette analyse permet au concepteur de vérifier si les spécifications du cahier des charges sont en adéquation avec la structure du modèle de conception et ce, suivant le niveau d'analyse considéré. En effet, la considération des différents niveaux d'analyse permet de mettre en place une démarche chronologique dans le travail de conception ou de reconception. La connaissance du niveau d'analyse où la propriété recherchée n'est pas vérifiée permet d'identifier à quel niveau le problème se pose (la structure du modèle, les lois phénoménologiques intervenant dans le modèle ou les valeurs numériques des différents paramètres). Ainsi, en amont de toute simulation numérique, l'intérêt de l'analyse structurelle et comportementale est de détecter au plus tôt tout problème de conception mal posé et de proposer une aide dans la rédaction du cahier des charges. Dans ce chapitre (et dans les annexes support E, F, G et H), cette phase d'analyse structurelle et comportementale a été approfondie en proposant d'une part des procédures graphiques permettant la détermination des propriétés structurelles et comportementales à partir du modèle bond graph inverse, et d'autre part, des procédures visant plus particulièrement à vérifier l'adéquation spécifications/structure de modèle dans le contexte de la synthèse paramétrique et de tolérance.

Les contributions de ce chapitre peuvent être résumées comme suit :

- **Au niveau représentation d'état** : ces contributions algébriques et graphiques ont servi à énoncer et à démontrer les procédures bond graph pour la détermination de certaines propriétés structurelles et comportementales. Elles consistent en :
  - une procédure algébrique permettant la détermination des ordres des pôles à l'infini à partir de la matrice système du modèle inverse (théorème 2, page 78),
  - une procédure algébrique permettant la détermination des ordres relatifs à partir des ordres des pôles à l'infini du modèle inverse (théorème 4, page 80),
  - une adaptation de la représentation digraphe au modèle inverse (digraphe de Laplace) telle que les règles d'exploitation sont les mêmes que celles du digraphe classique (proposition 1, page 84) et une adaptation de la procédure digraphe pour la détermination du déterminant de la matrice système du modèle inverse (équation 3.22, page 85).
- **Au niveau de la rédaction du cahier des charges** : ces contributions bond graph représentent une aide à la l'analyse du cahier des charges dans la méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses. Elles consistent en :
  - des procédures bond graph permettant la détermination des ordres d'essentialité à partir de l'analyse du modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale. L'équation 3.25 (page 90) est énoncée pour des cas particuliers de systèmes linéaires [El 08a, El 08b] et la procédure 12 (page 93) est énoncée pour tout système linéaire [Jar10, El 11a].
  - une procédure bond graph permettant le calcul du déterminant (ainsi que des mineurs)

de la matrice système du modèle inverse est proposée et démontrée (procédures 13 et 14, page 98 et page 102). En effet, l'analyse structurelle et comportementale établie sur le modèle bond graph inverse a montré que le calcul des mineurs de la matrice système ainsi que le calcul de leur degré (procédures 15 et 36, page 102 et page 251) est d'un grand intérêt dans les démonstrations des procédures bond graph. Ces procédures ont été présentées selon les niveaux d'analyse (BG-structurel et comportemental),
- une procédure par niveau d'analyse pour la détermination des ordres des pôles à l'infini (resp. ordres relatifs, ordres d'essentialité) du modèle inverse à partir du modèle bond graph bicausal,
- des procédures permettant la vérification de l'adéquation entre le modèle d'un composant 1-port et les spécifications imposées dans le domaine de LAPLACE (spécifications sous forme de comportement type) et ce, selon le niveau d'analyse (procédure 19 (page 113) pour les systèmes monovariables et procédure 40 (annexe G) pour les systèmes multivariables). L'annexe H traite le cas d'un composant multiport.

– **Au niveau de la synthèse paramétrique et des tolérances** : ces contributions concernent la détermination des paramètres et de leurs tolérances dans la méthodologie du dimensionnement. Elles consistent en la procédure 19, 40 et 41 permettant non seulement la vérification de l'adéquation spécifications/structure mais aussi la détermination des valeurs numériques des paramètres qui permettent de garantir cette adéquation. Ainsi, cette procédure peut être utilisée pour la synthèse paramétrique ou encore pour la synthèse des tolérances.

Dans le chapitre suivant, nous adoptons l'approche probabiliste pour la propagation des tolérances dans la structure du modèle. Ainsi, nous proposons d'étudier la propagation des incertitudes, décrites par des fonctions de densité de probabilité ou par des grandeurs caractéristiques, dans la structure du modèle et ce, en définissant un bond graph probabiliste.

Chapitre 4

Synthèse de tolérance par l'approche probabiliste

Sommaire

Introduction 138
4.1 Approche probabiliste : théorie 139
4.1.1 Fonction de densité de probabilité pour la description de l'incertitude . 140
4.1.2 Fonction d'une variable/processus aléatoire 142
4.1.3 Grandeurs caractéristiques des variables/processus aléatoires 143
4.2 Propagation de la densité de probabilité au sein d'un système dynamique stochastique 147
4.2.1 Principe de conservation de la probabilité 147
4.2.2 Problème stochastique inverse 150
4.3 Bond graph probabiliste pour la synthèse des tolérances 154
4.3.1 Cahier des charges 155
4.3.2 Remontée des spécifications probabilistes 156
4.3.3 Synthèse de tolérances paramétriques 166
4.3.4 Exemple : synthèse de tolérances d'une chaîne d'actionnement 172
Conclusion 184

Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la synthèse de tolérances par l'approche probabiliste. Cette approche permet l'étude mathématique des phénomènes caractérisés par le hasard et l'incertitude. Elle permet de définir des variables non déterministes, appelées aussi variables aléatoires (section I.2, annexe I) qui peuvent, dans certains cas, évoluer dans le temps d'une manière aléatoire : on parle alors de processus stochastiques (section I.3, annexe I). Comme il a été évoqué dans la section 1.2.4 du chapitre 1, il existe dans la littérature deux représentations probabilistes des incertitudes : le modèle probabiliste *a priori* et le modèle probabiliste *a posteriori*. Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons uniquement au modèle probabiliste *a priori*, appelé aussi modèle probabiliste mathématique, qui permet la modélisation des paramètres incertains d'un système continu par des variables aléatoires continues réelles et offre des outils analytiques performants pour caractériser la propagation des incertitudes dans le système stochastique.

Les systèmes mécatroniques présentant des incertitudes peuvent être vus comme étant des systèmes dynamiques stochastiques. L'approche probabiliste est fortement utilisée dans plusieurs domaines de l'ingénierie (génie mécanique, génie civil..) pour analyser ces systèmes. Cette approche s'avère efficace pour quantifier l'impact des incertitudes sur le comportement du système. Dans les systèmes dynamiques stochastiques, l'aléa est classé en trois types selon sa source :

- aléa dû aux conditions initiales,
- aléa dû aux excitations externes (entrées de commande et de perturbation),
- aléa dû aux variations des paramètres du système (incertitudes paramétriques).

Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons au cas des systèmes dynamiques stochastiques dont l'aléa est dû uniquement aux excitations externes et/ou aux incertitudes paramétriques.Ces incertitudes doivent être définies en terme stochastique. Les types de paramètres incertains que l'on peut définir dans les modèles stochastiques sont les suivants [Pue04] :

- Les variables aléatoires réelles, à valeurs dans $\mathbb{R}$, sont caractérisées chacune par une fonction de densité de probabilité (FDP) ou une fonction de répartition (cf. section I.2, annexe I). Une description complète de ces variables est caractérisée par la donnée d'une loi conjointe de probabilité (définition 3, page 140).
- Les champs stochastiques sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, dépendant à la fois de l'aléa θ et de l'espace. Ces champs sont caractérisés chacun par des grandeurs caractéristiques (espérance et variance) dépendant de l'espace et par une fonction de covariance entre deux points de l'espace. Par exemple, les champs stochastiques peuvent représenter les paramètres mécaniques incertains pour lesquels la prise en compte de la variabilité spatiale est nécessaire.
- Les processus aléatoires ou processus stochastiques sont des fonctions dépendant de l'aléa θ et du temps t (cf. section I.3, annexe I). Ces processus sont au temps ce que les champs stochastiques sont à l'espace, ce qui permet des traitements analogues.

Dans un système dynamique stochastique (système mécatronique par exemple), les variables aléatoires réelles représentent les incertitudes paramétriques et les processus stochastiques permettent de définir la variabilité de l'état et des sorties du modèle suite aux effets des incertitudes paramétriques et des aléas des entrées. Dans la littérature, les aléas dus aux excitations externes sont représentés par des processus stochastiques. À partir de cette description stochastique des différentes grandeurs et paramètres intervenant dans le système dynamique, un traitement probabiliste peut être effectué en manipulant par exemple des fonctions de densité de probabilité ou des grandeurs caractéristiques (espérance, variance, etc...) associées à ces variables et processus aléatoires[1]. Ainsi, à partir de la connaissance des fonctions de densité de probabilité associées aux

[1]En plus des fonctions de densité de probabilité et des grandeurs caractéristiques, les variables et les processus

variables aléatoires intervenant dans le système (variables aléatoires associées aux incertitudes paramétriques et aux aléas dus aux excitations externes), les fonctions de densité de probabilité associées aux différentes sorties du système peuvent être déterminées grâce aux différents outils de l'approche probabiliste.

Dans ce chapitre, l'approche probabiliste est utilisée pour la prise en compte des incertitudes dans la démarche du dimensionnement des systèmes dynamiques basée sur l'inversion de modèle, démarche détaillée dans la section 1.3.4 du chapitre 1. Cette démarche inverse permet la remontée des incertitudes spécifiées sur les sorties. Tout d'abord, la formulation stochastique d'un modèle dynamique inverse (incertain) est présentée. Indépendamment du formalisme bond graph, la résolution de cette formulation stochastique est effectuée de manière globale : l'information est globalisée en calculant la FDP conjointe (cf. définition 3) à toutes les variables aléatoires. Ensuite, des règles d'exploitation d'un modèle bond graph probabiliste sont proposées. Ces règles associent à un système incertain, un modèle bond graph permettant la propagation des fonctions de densité de probabilité et des grandeurs caractéristiques (espérance et variance) tout le long de sa structure énergétique. L'exploitation du modèle bond graph probabiliste, par rapport à la démarche de formulation globale, consiste en un traitement local de l'incertitude où la FDP (resp. grandeurs caractéristiques) associée(s) à chaque variable de puissance est (resp. sont) déterminée(s). De plus, le modèle bond graph probabiliste offre la possibilité d'effectuer l'analyse structurelle associée aux incertitudes par l'analyse structurelle de la propagation des fonctions de densité de probabilité (resp. grandeurs caractéristiques) tout le long du modèle bond graph bicausal probabiliste. Ce chapitre représente une première prise en main de l'approche probabiliste dans la démarche du dimensionnement par inversion de modèles bond graph.

Dans une première section, certains concepts de base de l'approche probabiliste sont rappelés tels que la fonction de densité de probabilité et les grandeurs caractéristiques. Cette section ne prétend pas l'exhaustivité : certains aspects sont traités très rapidement (comme la fonction de répartition) et d'autres passés sous silence malgré leur importance (comme la fonction caractéristique, médiane etc...). L'annexe I propose un complément à cette section en rappelant un certain nombre de définitions et de concepts de base nécessaires pour la compréhension et la mise en œuvre de l'approche probabiliste. Dans une seconde section, nous nous intéressons à l'évolution (ou encore la propagation) de la densité de probabilité au sein d'un système stochastique dynamique. Ce principe représente l'une des formulations possibles du problème stochastique sachant que d'autres formulations peuvent exister comme les processus de Markov[2]. Ainsi, dans cette section, la formulation stochastique proposée dans la littérature par Li et Chen [Li 06b, Li 08, Che09b, Li 09] pour un modèle physique (direct) dynamique incertain est présentée. Ensuite, nous proposons une adaptation de cette formulation à un modèle dynamique inverse : les deux cas d'inversion entrées/sorties (pour la remontée de spécifications) et paramètres/sorties (pour la synthèse de tolérance) sont traités. Dans la section 4.3, les règles d'exploitation d'un modèle bond graph probabiliste sont proposées et illustrées par un exemple. Dans la conclusion, nous proposons différentes perspectives à ce travail.

4.1 Approche probabiliste : théorie

La théorie des probabilités a connu une maturation progressive surtout après la mise en place de plusieurs concepts analytiques par Kolmogorov [Kol60]. Ainsi, de nombreux outils ont été développés au cours de la seconde moitié du vingtième siècle avec la forte émergence des moyens informatiques. Ces outils sont utilisés dans plusieurs domaines de la physique pour l'étude de

aléatoires peuvent être caractérisés par des fonctions de répartition, des fonctions caractéristiques, etc...

[2]Un processus stochastique est dit processus de Markov s'il vérifie la propriété suivante connue sous le nom propriété de Markov : la prédiction du « futur », sachant le « présent », est indépendante du « passé ».

grandeurs mal connues ou sujettes aux incertitudes.

Dans cette section, nous proposons de rappeler certaines notions de l'approche probabiliste qui sont utilisées dans la suite du chapitre pour mettre en place une démarche de synthèse de tolérances pour les systèmes mécatroniques. Tout d'abord, les différents types de fonctions de densité de probabilité sont présentés ainsi que l'utilité de chacune d'entre elles. Ensuite, les différentes opérations qui peuvent être réalisées sur des fonctions de variables/processus aléatoires sont présentées. Enfin, nous rappelons certaines grandeurs caractéristiques notamment l'espérance et la variance qui peuvent être associées à des variables/processus aléatoires.

4.1.1 Fonction de densité de probabilité pour la description de l'incertitude

Une variable aléatoire réelle absolument continue (que l'on désignera dans la suite du chapitre par variable aléatoire continue ou variable aléatoire) peut être caractérisée par sa fonction de densité de probabilité. Dans le cas d'un ensemble de variables aléatoires, la caractérisation séparée de chacune des variables ne permet pas de prendre en compte les liens pouvant exister entre elles. La fonction de densité de probabilité conjointe[3] permet de remédier à ce problème.

Définition 3. ***Fonction de densité de probabilité conjointe***
Soit un ensemble de variables aléatoires $\{\Theta_1, \ldots, \Theta_n\}$*, la fonction de densité de probabilité conjointe* $\phi_{\Theta_1,\ldots,\Theta_n}(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ *décrit la probabilité d'événements définis en terme de* $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$*. Dans le cas de deux variables aléatoires, on parle de distribution bivariable. Pour n variables aléatoires, il s'agit d'une distribution multivariable [Bré97, Ros07, Dal08].*

Définition 4. ***Fonction de densité de probabilité marginale***
Les fonctions de densité de probabilité marginales sont les fonctions de densité de probabilité des variables aléatoires $\{\Theta_1, \ldots, \Theta_n\}$ *prises séparément. La fonction de densité de probabilité marginale associée à* Θ_i *est notée* $\phi_{\Theta_i}(\theta_i)$ *[Sap90].*

À partir de la FDP conjointe, la FDP marginale de chaque variable aléatoire peut être déduite. Par contre, la FDP conjointe ne peut être obtenue à partir des FDP marginales sauf dans le cas où les variables sont indépendantes[4] (cf. équation 4.4).

Théorème 6. *La fonction de densité de probabilité marginale de la variable aléatoire* Θ_i *peut être calculée à partir de la FDP conjointe* $\phi_{\Theta_1,\ldots,\Theta_n}(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ *comme suit [Bré97, Ros07, Dal08] :*

$$\phi_{\Theta_i}(\theta_i) = \int_{\Omega_{\Theta_1}} \cdots \int_{\Omega_{\Theta_{i-1}}} \int_{\Omega_{\Theta_{i+1}}} \cdots \int_{\Omega_{\Theta_n}} \phi_{\Theta_1,\ldots,\Theta_n}(\theta_1, \ldots, \theta_n) d\theta_1 \ldots d\theta_{i-1} d\theta_{i+1} \ldots d\theta_n \quad (4.1)$$

Définir un ensemble de variables aléatoires ainsi que les grandeurs associées permet de déduire des informations sur l'une des variables lorsqu'on dispose d'informations sur les autres variables et ce, en exploitant le lien existant entre elles. La fonction de densité de probabilité conditionnelle s'inscrit dans ce contexte.

Définition 5. ***Fonction de densité de probabilité conditionnelle***
Pour un couple de variables aléatoires (Θ_1, Θ_2)*, la fonction de densité de probabilité conditionnelle* $\phi_{\Theta_1|\Theta_2=\theta_2}(\theta_1|\theta_2)$ *(resp.* $\phi_{\Theta_2|\Theta_1=\theta_1}(\theta_2|\theta_1)$*) est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire* Θ_1 *(resp.* Θ_2*) conditionnée par la réalisation de l'événement* $\Theta_2 = \theta_2$ *(resp.* $\Theta_1 = \theta_1$*). Pour un ensemble de variables aléatoires* $\{\Theta_1, \ldots, \Theta_n\}$*, la fonction de densité de probabilité conditionnelle* $\phi_{\Theta_i|\Theta_1=\theta_1,\ldots,\Theta_{i-1}=\theta_{i-1},\Theta_{i+1}=\theta_{i+1},\ldots,\Theta_n=\theta_n}(\theta_i|\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_n)$ *est la fonction de densité de probabilité de* Θ_i *conditionnée par la réalisation des événements* $\Theta_1 = \theta_1, \ldots, \Theta_{i-1} = \theta_{i-1}, \Theta_{i+1} = \theta_{i+1}, \ldots, \Theta_n = \theta_n$ *[Bog06].*

[3] La FDP conjointe peut être désignée dans certaines références par FDP *simultanée* ou FDP *jointe*.
[4] La notion d'indépendance a été introduite dans l'annexe I.

Les fonctions de densité de probabilité marginale, conjointe et conditionnelle peuvent être déduites les unes à partir des autres et ce, grâce au théorème 7.

Théorème 7. *Soit deux variables aléatoires Θ_1 et Θ_2, la FDP conjointe associée ϕ_{Θ_1,Θ_2} peut s'écrire en fonction des FDP conditionnelles ($\phi_{\Theta_1|\Theta_2=\theta_2}$ et $\phi_{\Theta_2|\Theta_1=\theta_1}$) et des FDP marginales (ϕ_{Θ_1} et ϕ_{Θ_2}) [Bré97, Ros07, Dal08] :*

$$\phi_{\Theta_1,\Theta_2}(\theta_1,\theta_2) = \phi_{\Theta_1|\Theta_2=\theta_2}(\theta_1|\theta_2)\phi_{\Theta_2}(\theta_2) = \phi_{\Theta_2|\Theta_1=\theta_1}(\theta_2|\theta_1)\phi_{\Theta_1}(\theta_1) \tag{4.2}$$

Pour des variables aléatoires multiples $\{\Theta_1,\ldots,\Theta_n\}$, la relation entre les FDP conjointe, conditionnelle et marginale est donnée par :

$$\begin{aligned}\phi_{\Theta_1,\ldots,\Theta_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n) &= \phi_{\Theta_n|\Theta_1=\theta_1,\ldots,\Theta_{n-1}=\theta_{n-1}}(\theta_n|\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})\phi_{\Theta_1,\ldots,\Theta_{n-1}}(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) \\ &= \phi_{\Theta_n|\Theta_1=\theta_1,\ldots,\Theta_{n-1}=\theta_{n-1}}(\theta_n|\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) \\ &\cdot \phi_{\Theta_{n-1}|\Theta_1=\theta_1,\ldots,\Theta_{n-2}=\theta_{n-2}}(\theta_{n-1}|\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}) \\ &\cdot \ldots \\ &\cdot \phi_{\Theta_2|\Theta_1=\theta_1}(\theta_1|\theta_2) \\ &\cdot \phi_{\Theta_1}(\theta_1)\end{aligned} \tag{4.3}$$

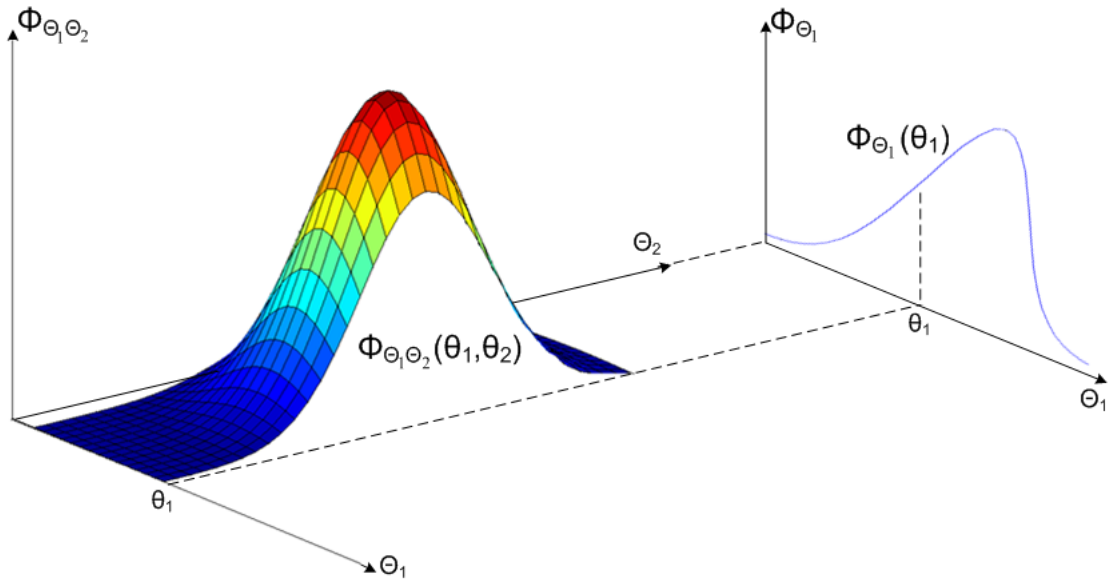


FIG. 4.1 – Interprétation de la fonction de densité de probabilité conditionnelle.

Pour un couple de variables aléatoires, chacune des fonctions de densité de probabilité conditionnelles correspond à une coupe effectuée dans la fonction de densité de probabilité conjointe à laquelle a été appliquée une normalisation par la fonction de densité de probabilité marginale [Bog06] (exemple figure 4.1 pour la FDP $\phi_{\Theta_2|\Theta_1=\theta_1}(\theta_2|\theta_1)$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\Theta_2|\Theta_1=\theta_1}(\theta_2|\theta_1)d\theta_2 = 1$). Cette interprétation de la fonction de densité de probabilité conditionnelle peut s'étendre à n variables aléatoires. Dans le cas où les variables aléatoires $\Theta_1,\ldots,\Theta_n$ sont *indépendantes* (ou encore *orthogonales*) alors pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, la FDP conditionnelle $\phi_{\Theta_i|\Theta_1=\theta_1,\ldots,\Theta_{i-1}=\theta_{i-1},\Theta_{i+1}=\theta_{i+1},\ldots,\Theta_n=\theta_n}(\theta_i|\theta_1,\ldots,\theta_{i-1},\theta_{i+1},\ldots,\theta_n)$ correspond à la FDP marginale $\phi_{\Theta_i}(\theta_i)$. Dans ce cas, la FDP conjointe $\phi_{\Theta_1,\ldots,\Theta_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ s'écrit comme suit :

$$\phi_{\Theta_1,\ldots,\Theta_n}(\theta_1,\ldots,\theta_n) = \prod_{i=1}^{n}\phi_{\Theta_i}(\theta_i) \tag{4.4}$$

Ainsi, nous avons recours à la fonction de densité de probabilité conditionnelle dans le cas où les variables aléatoires sont dépendantes.

Dans certaines références [Lut04, Li 06a, Zha07, Li 08, Cha08, Khu09] et dans le contexte de l'analyse des systèmes stochastiques (statiques ou dynamiques), la fonction de densité de probabilité conditionnelle $\phi_{\Theta_1|\Theta_2=\theta_2}(\theta_1|\theta_2)$, où Θ_1 et Θ_2 sont deux variables aléatoires telles que $\Theta_1 = g(\Theta_2)$, est caractérisée par la mesure de DIRAC δ (cf. définition 66 de l'annexe I) :

$$\phi_{\Theta_1|\Theta_2=\theta_2}(\theta_1|\theta_2) = \delta(\theta_1 - g(\theta_2))$$

La mesure de DIRAC traduit bien la FDP conditionnelle dans le sens où :
- l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la mesure de DIRAC est égal à 1 ;
- elle est égale à 1 quand θ_1 est égale à $g(\theta_2)$ et 0 sinon.

Ainsi, dans le cas de deux vecteurs aléatoires $\boldsymbol{\Theta} = [\Theta_1 \ \cdots \ \Theta_n]^T$ et $\mathbf{p} = [\mathbf{p_1} \ \cdots \ \mathbf{p_n}]^T$ où $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{g}(\mathbf{p})$, la FDP conditionnelle $\phi_{\boldsymbol{\Theta}|\mathbf{p}=p}(\Theta|p)$ peut être définie par :

$$\phi_{\boldsymbol{\Theta}|\mathbf{p}=p}(\Theta|p) = \prod_{i=1}^{n} \delta(\theta_i - g_i(p_i))$$

Les différents types des fonctions de densité de probabilité peuvent être étendus au processus stochastiques où chaque processus $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ est défini comme étant une évolution dans le temps d'une variable aléatoire : $\boldsymbol{\mathcal{P}}(t)$. Dans ce cas, toutes les FDP sont paramétrées par le temps. Ainsi pour les processus aléatoires $\{\boldsymbol{\mathcal{P}_1}, \ldots, \boldsymbol{\mathcal{P}_n}\}$:
- la FDP conjointe à ces processus s'écrit $\phi_{\boldsymbol{\mathcal{P}_1},\ldots,\boldsymbol{\mathcal{P}_n}}(\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n, t)$ où $\mathcal{P}_i$, $i = \{1, \ldots, n\}$ est une réalisation de $\boldsymbol{\mathcal{P}_i}$;
- la FDP marginale associée au processus $\boldsymbol{\mathcal{P}_i}$ est notée $\phi_{\boldsymbol{\mathcal{P}_i}}(\mathcal{P}_i, t)$;
- la FDP du processus $\boldsymbol{\mathcal{P}_i}$ conditionnée par la réalisation des événements $\boldsymbol{\mathcal{P}_1} = \mathcal{P}_1, \ldots, \boldsymbol{\mathcal{P}_{i-1}} = \mathcal{P}_{i-1}, \boldsymbol{\mathcal{P}_{i+1}} = \mathcal{P}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{\mathcal{P}_n} = \mathcal{P}_n$ s'écrit $\phi_{\boldsymbol{\mathcal{P}_1}=\mathcal{P}_1,\ldots,\boldsymbol{\mathcal{P}_{i-1}}=\mathcal{P}_{i-1},\boldsymbol{\mathcal{P}_{i+1}}=\mathcal{P}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{\mathcal{P}_n}=\mathcal{P}_n}(\mathcal{P}_i, t|\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_{i-1}, \mathcal{P}_{i+1}, \ldots, \mathcal{P}_n)$.

4.1.2 Fonction d'une variable/processus aléatoire

Dans un problème stochastique statique (resp. dynamique) simple, la variable (resp. processus) aléatoire d'intérêt peut être une variable difficile à caractériser. Néanmoins, cette variable (resp. processus) est généralement liée par l'intermédiaire d'une fonction continue à une autre variable (resp. processus) dont la FDP est donnée ou aisément obtenue. Ceci peut être généralisable à un vecteur de variables/processus aléatoires. Cette formulation du problème stochastique permet de décrire la propagation de la densité de probabilité au sein d'un modèle dans le but de déterminer la FDP d'une ou plusieurs variables/processus aléatoires à partir de la connaissance des FDP d'autres variables/processus aléatoires. Dans cette section, nous abordons le cas de variables aléatoires statiques mais les théorèmes présentés peuvent être généralisés aux processus stochastiques qui peuvent être vus comme étant des variables aléatoires évoluant dans le temps.

Dans le cas où une variable aléatoire d'intérêt Θ_2 s'exprime en fonction d'une autre variable aléatoire Θ_1 dont la FDP associée est donnée, alors la FDP de la variable aléatoire Θ_2 peut être déterminée. Le cas général ainsi que le cas d'une fonction inversible sont exposés.

Cas général

Soit la fonction g qui relie les deux variables aléatoires Θ_1 et Θ_2 ($\Theta_2 = g(\Theta_1)$) par une fonction quelconque, alors il est possible de déterminer la FDP et la fonction de répartition (cf. définition 64, annexe I) associées à Θ_2 en identifiant des événements[5] équivalents A défini sur Θ_2

[5] La notion d'événement est introduite dans l'annexe I.

et B défini sur Θ_1 de telle sorte que la probabilité de la réalisation de l'événement A est égale à la probabilité de la réalisation de l'événement B : $P(A) = P(B)$.

Théorème 8. *Si l'événement B est équivalent à l'événement $A \equiv (\Theta_2 \leq \theta_2)$ et donc $P(A) = \Phi_{\Theta_2}(\theta_2) = P(B)$ où Φ_{Θ_2} est la fonction de répartition associée à Θ_2 alors :*

$$\Phi_{\Theta_2}(\theta_2) = \int_B \phi_{\Theta_1}(\theta_1) d\theta_1 \tag{4.5}$$

où ϕ_{Θ_1} est la FDP associée à Θ_1. La FDP ϕ_{Θ_2} associée à Θ_2 s'obtient ensuite en dérivant la fonction de répartition par rapport à Θ_2 : $\phi_{\Theta_2}(\theta_2) = \frac{d\Phi_{\Theta_2}(\theta_2)}{d\theta_2}$.

Cas d'une fonction inversible

Si la fonction g qui relie les deux variables aléatoires Θ_1 et Θ_2 est strictement monotone croissante ou décroissante alors la fonction réciproque existe. Dans ce cas, il est possible de définir la FDP associée à la variable aléatoire Θ_2 à partir de la connaissance de la FDP associée à Θ_1 et sans passer par la fonction de répartition.

Théorème 9. *Soit Θ_1 une variable aléatoire ayant $\phi_{\Theta_1}(\theta_1)$ comme fonction de densité de probabilité marginale et soit Θ_2 une autre variable aléatoire telle que $\Theta_2 = g(\Theta_1)$, alors la fonction de densité de probabilité associée $\phi_{\Theta_2}(\theta_2)$ peut être calculée comme suit si la fonction g est strictement monotone et inversible [Bré97, Ros07, Dal08] :*

$$\phi_{\Theta_2}(\theta_2) = \left|\frac{d\theta_1}{d\theta_2}\right| \phi_{\Theta_1}(\theta_1) = \frac{\phi_{\Theta_1}(\theta_1)}{|g'(\theta_1)|} = \frac{\phi_{\Theta_1}(g^{-1}(\theta_2))}{|g'(g^{-1}(\theta_2))|} \tag{4.6}$$

où g^{-1} est la fonction inverse de g et g' est sa dérivée par rapport à Θ_1.

Le cas d'une fonction non inversible ainsi que le cas d'une fonction d'un vecteur de variables/processus aléatoires sont traités dans la section I.4 de l'annexe I.

4.1.3 Grandeurs caractéristiques des variables/processus aléatoires

La section 4.1.1 et l'annexe I présentent les notions de variables et de processus aléatoires que l'on peut caractériser d'une façon complète à l'aide des fonctions de densité de probabilité. Il est également possible de définir des grandeurs permettant de spécifier certaines caractéristiques de ces variables/processus. Ces grandeurs ne sont pas toujours suffisantes pour caractériser les variables et les processus aléatoires de façon complète mais elles sont très utiles lorsqu'il s'agit d'en donner un aperçu synthétique. Les principales d'entre elles, à savoir l'espérance, la variance et la covariance sont présentées dans cette section.

Espérance

L'espérance ou encore moyenne mathématique est une mesure de centralité de la variable aléatoire. Si elle existe[6], elle peut être définie comme suit :

Définition 6. *L'espérance est la valeur que l'on s'attend à observer en moyenne pour la variable aléatoire. Pour une variable aléatoire continue Θ, elle peut être calculée comme suit [Bog06] :*

$$\mu = E[\Theta] = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta \phi_{\Theta}(\theta) d\theta \tag{4.7}$$

où $\phi_{\Theta}(\theta)$ est la FDP associée à la variable aléatoire Θ.

[6] L'espérance peut ne pas exister si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta \phi_{\Theta}(\theta) d\theta$ diverge.

Dans le cas d'un vecteur de variables aléatoires $\mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{\Theta})$ où $\mathbf{\Theta}$ est un autre vecteur aléatoire, le vecteur d'espérances associé à $\mathbf{p}$ peut être calculé suivant le théorème 10.

Théorème 10. *Soient* $\mathbf{p}$ *et* $\mathbf{\Theta}$ *deux vecteurs aléatoires tels que* $\mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{\Theta})$ *où* $\mathbf{g}$ *est une fonction quelconque. Le vecteur d'espérances associé à* $\mathbf{p}$ *est défini par [Bog06] :*

$$\mu_{\mathbf{p}} = E[\mathbf{p}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\Theta)\phi_{\mathbf{\Theta}}(\theta)d\theta \tag{4.8}$$

où $\phi_{\mathbf{\Theta}}$ *est la FDP conjointe associée à* $\mathbf{\Theta}$*.*

Ce théorème reste valable pour deux variables aléatoires où l'une est fonction de l'autre. La propriété principale de l'espérance est la linéarité :

Propriété 1. *Soient* $\mathbf{p}$ *et* $\mathbf{\Theta}$ *deux vecteurs aléatoires tels que* $\mathbf{p} = \mathbf{M_a}\mathbf{\Theta} + \mathbf{M_b}$ *où* $\mathbf{M_a}$ *et* $\mathbf{M_b}$ *sont des matrices réelles. Le vecteur d'espérances associé à* $\mathbf{p}$ *est défini par [Bog06] :*

$$E[\mathbf{p}] = \mathbf{M_a}E[\mathbf{\Theta}] + \mathbf{M_b} \tag{4.9}$$

où $E[\mathbf{\Theta}]$ *est le vecteur d'espérances associé à* $\mathbf{\Theta}$*.*

Cas particulier : Soient deux variables aléatoires Θ_1 et Θ_2 telles que $\Theta_2 = a\Theta_1 + b$ où a et $b \in \mathbb{R}$. L'espérance associée à Θ_2 est donnée par :

$$E[\Theta_2] = aE[\Theta_1] + b$$

où $E[\Theta_1]$ est l'espérance associée à la variable aléatoire Θ_1.

D'une manière générale, l'espérance du produit de deux variables aléatoires Θ_1 et Θ_2 est différente du produit des espérances de ces deux variables : $E[\Theta_1\Theta_2] \neq E[\Theta_1]E[\Theta_2]$. L'égalité n'est vraie que pour des variables aléatoires indépendantes. L'absence de la multiplicativité amène à étudier la covariance et la corrélation (cf. page 146).

Variance

La variance $Var[\Theta]$ (ou encore σ^2_Θ) d'une variable aléatoire Θ est une mesure de la dispersion des valeurs de cette variable autour de sa moyenne. On appelle également *écart-type* la valeur $\sigma_\Theta = \sqrt{Var[\Theta]}$. Plus formellement, la variance est donnée par la définition suivante :

Définition 7. *La variance* $Var[\Theta]$ *ou* σ^2_Θ *associée à une variable aléatoire* Θ *est définie par [Bog06] :*

$$\begin{aligned} Var[\Theta] = \sigma^2_\Theta &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\theta - \mu_\Theta)^2 \phi_\Theta(\theta)d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^2 \phi_\Theta(\theta)d\theta - \mu^2_\Theta \end{aligned} \tag{4.10}$$

où ϕ_Θ *(resp.* μ_Θ*) est la FDP (resp. espérance) associée à* Θ*.*

Pour une variable aléatoire Θ, la variance peut s'exprimer en fonction de l'espérance :

$$Var[\Theta] = E[\Theta^2] - E^2[\Theta]$$

Dans le cas d'une fonction linéaire, une application directe de la propriété de linéarité pour l'espérance (propriété 1) permet de montrer la propriété suivante pour la variance :

Propriété 2. *Soient* $\mathbf{p}$ *et* $\mathbf{\Theta}$ *deux vecteurs aléatoires tels que* $\mathbf{p} = \mathbf{M_a}\mathbf{\Theta} + \mathbf{M_b}$ *où* $\mathbf{M_a}$ *et* $\mathbf{M_b}$ *sont des matrices réelles. Le vecteur de variances associé à* $\mathbf{p}$ *est défini par [Bog06] :*

$$Var[\mathbf{p}] = \mathbf{M_a} Var[\mathbf{\Theta}] \mathbf{M_a^T} \tag{4.11}$$

où $Var[\mathbf{\Theta}]$ *est le vecteur de variances associé à* $\mathbf{\Theta}$*.*

Cas particulier : Soient deux variables aléatoires Θ_1 et Θ_2 telles que $\Theta_2 = a\Theta_1 + b$ où a et $b \in \mathbb{R}$. La variance associée à Θ_2 est donnée par [Bog06] :

$$Var[\Theta_2] = a^2 Var[\Theta_1]$$

où $Var[\Theta_1]$ est la variance associée à la variable aléatoire Θ_1.

La propriété 3 permet d'obtenir la variance d'une fonction d'une variable aléatoire Θ_1. Elle peut être généralisée à une fonction de n variables aléatoires.

Propriété 3. *La variance d'une fonction quelconque* g *d'une variable aléatoire* Θ_1 *peut être définie par [Bog06] :*

$$Var[g(\Theta_1)] = E[g^2(\Theta_1)] - E^2[g(\Theta_1)] \tag{4.12}$$

Cas particulier : La variance du produit de deux variables aléatoires Θ_1 et Θ_2 indépendantes peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Var[\Theta_1\Theta_2] = Var[\Theta_1]Var[\Theta_2] + Var[\Theta_1]E^2[\Theta_2] + Var[\Theta_2]E^2[\Theta_1]$$

Interprétation physique de l'espérance et de la variance

Contrairement aux fonctions de densité de probabilité, l'espérance et la variance ne permettent pas de caractériser les variables/processus aléatoires d'une façon complète. Néanmoins, elles permettent de donner plus de précision sur la centralité d'une variable/processus aléatoire ainsi que la dispersion des valeurs de cette variable/processus autour de sa moyenne. La détermination des grandeurs caractéristiques doit être complétée par l'interprétation physique de ces grandeurs, notamment l'interprétation de la dispersion. Cette interprétation passe par la détermination d'un intervalle de confiance

Définition 8. *On appelle intervalle de confiance ou encore intervalle de dispersion au niveau* p *un intervalle* $[a, b]$ *tel que* $P(a \leq \Theta \leq b) = p$ *où* Θ *est une variable aléatoire. En d'autres termes, on peut affirmer que la valeur* θ *(réalisation de* Θ*) peut être observée dans l'intervalle* $[a, b]$ *à une probabilité égale à* p *[Bog06].*

Le plus souvent, l'intervalle de confiance est choisi de telle sorte que la probabilité d'être à gauche de a est identique à la probabilité d'être à droite de b : on parle alors d'intervalle de confiance symétrique. Cependant, il est possible de poser l'une des bornes a ou b comme étant égale à la plus petite ou à la plus grande valeur possible (intervalle de confiance unilatéral inférieur, respectivement supérieur). Pour une variable aléatoire continue et à condition que $p \in]0, 1[$, l'intervalle de confiance peut être déterminé à partir de la fonction quantile qui n'est autre que la fonction inverse de la fonction de répartition associée à cette variable aléatoire : Φ^{-1}.

Théorème 11. *L'intervalle de confiance de niveau* p *associé à une variable aléatoire* Θ *peut être défini par [Yca11] :*

$$\left[\Phi_\Theta^{-1}(\beta), \Phi_\Theta^{-1}(p+\beta)\right] \quad avec \quad p \in]0, 1[\tag{4.13}$$

où

- Φ_Θ^{-1} *est la fonction inverse de la fonction de répartition* Φ_Θ *associée à la variable aléatoire* Θ *;*
- $\beta = \frac{1-p}{2}$ *(resp.* $\beta = 0$*,* $\beta = 1 - p$*) s'il s'agit d'un intervalle de confiance symétrique (resp. unilatéral inférieur, unilatéral supérieur).*

Covariance

Pour deux variables aléatoires, l'espérance et la variance associées à chacune des variables représentent des grandeurs caractéristiques de ces variables considérées séparément. Par conséquent, ces grandeurs n'apportent aucune information quant au lien pouvant exister entre ces deux variables. Or, étudier un couple de variables aléatoires nécessite d'étudier ce lien. Ainsi, une grandeur permettant de mesurer « l'intensité » du lien entre les variables est la covariance.

Définition 9. *Pour un couple de variables aléatoires* (Θ_1, Θ_2)*, la covariance* $\sigma_{\Theta_1\Theta_2}$ *(ou encore* $Cov[\Theta_1, \Theta_2]$*) est définie par [Bog06] :*

$$\begin{aligned} \sigma_{\Theta_1\Theta_2} = Cov[\Theta_1, \Theta_2] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\theta_1 - \mu_{\Theta_1})(\theta_2 - \mu_{\Theta_2})\phi_{\Theta_1,\Theta_2}(\theta_1, \theta_2)d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta_1\theta_2\phi_{\Theta_1,\Theta_2}(\theta_1, \theta_2)d\theta_1 d\theta_2 - \mu_{\Theta_1}\mu_{\Theta_2} \end{aligned} \tag{4.14}$$

où :

- μ_{Θ_1} *(resp.* μ_{Θ_2}*) est l'espérance associée à la variable aléatoire* Θ_1 *(resp.* Θ_2*),*
- ϕ_{Θ_1,Θ_2} *est la FDP conjointe associée au couple aléatoire* (Θ_1, Θ_2)*.*

La covariance peut être définie en fonction de l'espérance [Bog06] :

$$Cov[\Theta_1, \Theta_2] = E[(\Theta_1 - \mu_{\Theta_1})(\Theta_2 - \mu_{\Theta_2})] = E[\Theta_1\Theta_2] - E[\Theta_1]E[\Theta_2]$$

La covariance est une grandeur qui n'est pas adimensionnelle : elle s'exprime en fonction du produit des unités des variables aléatoires. Ceci peut rendre peu commode l'interprétation de la valeur de covariance. Pour remédier à ce problème, le coefficient de corrélation qui représente la valeur normalisée de la covariance a été défini :

Définition 10. *Pour un couple de variables aléatoires* (Θ_1, Θ_2)*, le coefficient de corrélation* $\rho_{\Theta_1\Theta_2}$ *ou* $Corr[\Theta_1, \Theta_2]$ *est la valeur définie par [Bog06] :*

$$\rho_{\Theta_1\Theta_2} = \frac{\sigma_{\Theta_1\Theta_2}}{\sigma_{\Theta_1}\sigma_{\Theta_2}} \qquad avec \quad -1 \leq \rho_{\Theta_1\Theta_2} \leq 1 \tag{4.15}$$

où :

- $\sigma_{\Theta_1\Theta_2}$ *est la covariance associée aux variables aléatoires* Θ_1 *et* Θ_2*,*
- σ_{Θ_1} *(resp.* σ_{Θ_2}*) est l'écart-type associé à la variable aléatoire* Θ_1 *(resp.* Θ_2*).*

La covariance et le coefficient de corrélation permettent de mesurer l'association linéaire entre deux variables aléatoires, autrement dit l'intensité du lien linéaire pouvant exister entre deux variables. Une covariance nulle (resp. coefficient de corrélation nul) correspond à l'absence d'association linéaire entre les deux variables, ce qui ne veut pas dire pour autant que les variables sont indépendantes :

Propriété 4. *Si deux variables aléatoires* Θ_1 *et* Θ_2 *sont indépendantes (orthogonales) alors la covariance* $\sigma_{\Theta_1\Theta_2}$ *et le coefficient de corrélation sont nuls mais la réciproque n'est pas toujours vraie.*

Remarque : La covariance et le coefficient de corrélation sont symétriques :

$$\begin{cases} \sigma_{\Theta_1\Theta_2} = \sigma_{\Theta_2\Theta_1} \\ \rho_{\Theta_1\Theta_2} = \rho_{\Theta_2\Theta_1} \end{cases}$$

4.2 Propagation de la densité de probabilité au sein d'un système dynamique stochastique

Les systèmes mécatroniques présentant des incertitudes peuvent être vus comme des systèmes dynamiques stochastiques. L'approche probabiliste est fortement utilisée dans plusieurs domaines de l'ingénierie et notamment en génie mécanique pour analyser ces systèmes stochastiques. Parmi les résultats intéressants pour traiter ces systèmes figure l'équation de Liouville qui reflète la FDP conjointe des états du système où l'aléa est lié exclusivement aux conditions initiales [Koz61, Sys67, Soo73], et l'équation de Fokker-Planck qui est une équation aux dérivées partielles que doit satisfaire la densité de probabilité d'un processus de Markov [Str63, Lin67, Gih75, Itô06]. Les travaux de Dostupov et Pugachev [Dos57], permettant de transformer le modèle comportant des commandes stochastiques en un modèle comportant des variables aléatoires, définissent une équation aux dérivées partielles (désignée par l'équation de Dostupov-Pugachev) ayant la même forme que l'équation de Liouville à la différence près qu'elle contient des variables aléatoires.

Les équations de Liouville, de Fokker-Planck et de Dostupov-Pugachev représentent différents types d'équation d'évolution ou encore de propagation de la densité de probabilité. Li et Chen [Li 06b,Li 08,Che09b,Li 09] proposent une équation généralisée d'évolution de la densité de probabilité (EGEDP) où les aléas peuvent être dus aux conditions initiales, aux excitations externes ou encore aux incertitudes paramétriques. Ces différents outils mathématiques offrent une description de la conservation de la probabilité au sein d'un système dynamique stochastique.

Dans cette section, nous proposons de rappeler dans une première partie le principe de conservation de la probabilité suivant ses différentes descriptions. Dans une seconde partie, nous présentons la formulation proposée par Li et Chen [Li 06b, Li 08, Che09b, Li 09] du problème stochastique pour un système physique (modélisé par un modèle direct). Dans une troisième partie, nous proposons d'adapter cette formulation stochastique au modèle inverse : les cas d'inversion entrées/sorties et paramètres/sorties sont traités. Cette formulation stochastique du modèle inverse représente le cœur de la synthèse de tolérances basée sur l'approche probabiliste. En effet, à partir des spécifications des FDP associées aux sorties, les FDP associées aux entrées (dans le cas de la détermination des entrées de commande ou de perturbation) ou les FDP associées aux paramètres (dans le cas de synthèse de tolérances) sont déterminées sur la base de la formulation stochastique appliquée au modèle inverse.

4.2.1 Principe de conservation de la probabilité

Le principe de conservation de la probabilité traduit le fait que la probabilité totale est constante dans l'évolution du système. Deux descriptions de ce principe existent dans la littérature : une description eulérienne (description de l'espace d'état) et une autre lagrangienne (description des événements aléatoires).

Définition 11. ***Description eulérienne***
Dans un domaine arbitraire de l'espace d'état, l'incrément de la probabilité durant un intervalle de temps est égal à la probabilité propagée à travers la frontière du domaine durant le même intervalle de temps [Li 08, Che09b].

Définition 12. ***Description lagrangienne***
Dans un système stochastique dynamique, la probabilité est conservée si sur un intervalle de temps donné, aucun nouveau facteur aléatoire n'apparait et aucun facteur aléatoire existant ne disparait [Li 08].

La définition 11 est une définition analogue à la description eulérienne de la conservation de masse en mécanique des milieux continus [Fun94,Bon98,Daf00]. Karnopp [Kar76,Kar77b,Kar78]

a évoqué le fait qu'à un modèle bond graph, il peut être associé une description eulérienne ou lagrangienne. Ce rapprochement entre le formalisme bond graph et la description du principe de conservation de la probabilité, nous a motivé pour la construction d'un modèle bond graph probabiliste (cf. section 4.3).

Les équations de LIOUVILLE et de FOKKER-PLANCK offrent une description eulérienne du principe de conservation de probabilité. L'équation de DOSTUPOV-PUGACHEV et l'EGEDP représentent une description lagrangienne du principe de conservation de probabilité[7]. Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéressons à la description lagrangienne du problème stochastique car elle prend en compte les différentes sources d'aléas.

Dans ce qui suit, nous présentons brièvement les travaux de LI et CHEN [Li 06b,Li 08,Che09b, Li 09] où ils proposent l'EGEDP. Considérons un système physique dynamique stochastique dont les aléas respectent l'hypothèse suivante :

hypothèse 7. *Les aléas dans le système dynamique sont dus aux incertitudes paramétriques et/ou aux excitations externes (entrées de commande ou de perturbation).*

Les conditions initiales sont supposées connues et données par des valeurs déterministes.[8]. Le modèle associé au système dynamique stochastique peut être défini par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\Theta},t) = F(\mathbf{u}(\boldsymbol{\Theta},t),\mathbf{x}(\boldsymbol{\Theta},t),\boldsymbol{\Theta}) \\ \mathbf{y}(\boldsymbol{\Theta},t) = G(\mathbf{u}(\boldsymbol{\Theta},t),\mathbf{x}(\boldsymbol{\Theta},t),\boldsymbol{\Theta}) \end{cases} \tag{4.16}$$

où $\mathbf{x}(\boldsymbol{\Theta},t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u}(\boldsymbol{\Theta},t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $\mathbf{y}(\boldsymbol{\Theta},t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de sortie et $\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{R}^{n_\Theta}$ est le vecteur des variables aléatoires. Ce vecteur comprend d'une part, les incertitudes paramétriques, et d'autre part, les variables aléatoires intervenant dans les entrées stochastiques ($\mathbf{u}(\boldsymbol{\Theta},t)$). En effet, les commandes en boucle ouverte sont supposées des processus stochastiques qui peuvent être exprimés en fonction de variables aléatoires et du temps. Toutes les variables aléatoires composant le vecteur $\boldsymbol{\Theta}$ sont supposées *indépendantes*. La FDP conjointe associée est alors donnée par $\phi_{\boldsymbol{\Theta}}(\theta) = \prod_{i=1}^{n_\Theta} \phi_{\Theta_i}(\theta_i)$ où $\phi_{\Theta_i}(\theta_i)$ est la FDP marginale de la variable aléatoire Θ_i ($i = 1,\ldots,n_\Theta$) et θ_i est une réalisation de Θ_i. Les conditions initiales des variables d'état sont données par :

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\Theta},t_0) = \mathbf{x_0} \tag{4.17}$$

Problème stochastique direct : principe de conservation de la densité de probabilité

Si le problème est bien posé, il existe une solution au modèle dynamique décrit par le système d'équations 4.16. En tenant compte des conditions initiales (équation 4.17), cette solution est unique. Le vecteur de sortie $\mathbf{y}$ dépend de $\boldsymbol{\Theta}$ et peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{y} = H(\boldsymbol{\Theta},t) \tag{4.18}$$

Ainsi, chaque sortie y_j ; $j = \{1,\ldots,m\}$; peut être définie par :

$$y_j = H_j(\boldsymbol{\Theta},t) \tag{4.19}$$

[7] Les travaux de CHEN et LI [Che09b] décrivent l'équation de DOSTUPOV-PUGACHEV comme étant une description hybride du principe de conservation de probabilité car d'une part, cette équation représente une description lagrangienne et d'autre part, la FDP gouvernée par cette équation (FDP conjointe du couple (états, paramètres)) est associée au modèle dynamique qui lui représente une description eulérienne.

[8] Si les conditions initiales ne sont pas connues avec certitude alors cette formulation du problème stochastique peut être étendue pour tenir compte de ces incertitudes [Li 08].

La FDP conditionnelle $\phi_{\mathbf{y}|\mathbf{\Theta}=\theta}$ de $\mathbf{y}$ sous la condition $\mathbf{\Theta}=\theta$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\phi_{\mathbf{y}|\mathbf{\Theta}=\theta}(y,t|\theta)=\delta(y-H(\theta,t))=\prod_{j=1}^{m}\delta(y_j-H_j(\theta,t)) \tag{4.20}$$

En dérivant par rapport au temps l'équation 4.20, on en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi_{\mathbf{y}|\mathbf{\Theta}=\theta}(y,t|\theta)}{\partial t}&=\frac{\partial\delta(y-H(\theta,t))}{\partial t}\\&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\prod_{j=1}^{m}\delta(y_j-H_j(\theta,t))\right)\\&=-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H_j(\theta,t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\prod_{j=1}^{m}\delta(y_j-H_j(\theta,t))\right)\\&=-\sum_{j=1}^{m}\dot{y}_j(t)\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\prod_{j=1}^{m}\delta(y_j-H_j(\theta,t))\right)\end{aligned}$$

Ainsi, il peut être conclu que :

$$\frac{\partial\phi_{\mathbf{y}|\mathbf{\Theta}=\theta}(y,t|\theta)}{\partial t}+\sum_{j=1}^{m}\dot{y}_j(t)\frac{\partial\phi_{\mathbf{y}|\mathbf{\Theta}=\theta}(y,t|\theta)}{\partial y_j}=0$$

D'un autre coté, nous avons :

$$\phi_{\mathbf{y},\mathbf{\Theta}}(y,\theta,t)=\phi_{\mathbf{y}|\mathbf{\Theta}=\theta}(y,t|\theta)\phi_{\mathbf{\Theta}}(\theta)$$

d'où :

$$\phi_{\mathbf{y}|\mathbf{\Theta}=\theta}(y,t|\theta)=\frac{\phi_{\mathbf{y},\mathbf{\Theta}}(y,\theta,t)}{\phi_{\mathbf{\Theta}}(\theta)}$$

Ainsi la relation suivante peut être déduite :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi_{\mathbf{y},\mathbf{\Theta}}(y,\theta,t)}{\phi_{\mathbf{\Theta}}(\theta)}\right)+\sum_{j=1}^{m}\dot{y}_j(t)\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\phi_{\mathbf{y},\mathbf{\Theta}}(y,\theta,t)}{\phi_{\mathbf{\Theta}}(\theta)}\right)=0$$

d'où :

$$\frac{\partial\phi_{\mathbf{y},\mathbf{\Theta}}(y,\theta,t)}{\partial t}+\sum_{j=1}^{m}\dot{y}_j(t)\frac{\partial\phi_{\mathbf{y},\mathbf{\Theta}}(y,\theta,t)}{\partial y_j}=0 \tag{4.21}$$

Si nous nous intéressons à une seule sortie y_j ; $j=\{1,\ldots,m\}$; le même développement permet de déduire la relation suivante :

$$\frac{\partial\phi_{\mathbf{y_j},\mathbf{\Theta}}(y_j,\theta,t)}{\partial t}+\dot{y}_j(t)\frac{\partial\phi_{\mathbf{y_j},\mathbf{\Theta}}(y_j,\theta,t)}{\partial y_j}=0 \tag{4.22}$$

L'équation 4.21 est désignée par l'équation généralisée d'évolution de la densité de probabilité. Elle reflète le principe de conservation de la probabilité (description lagrangienne). En effet, si à un instant t_1, le vecteur de sortie $\mathbf{y}(\theta,t_1)$ dépend de l'aléa θ alors à un deuxième instant t_2, $\mathbf{y}(\theta,t_2)$ dépend du même aléa θ.

Il est à noter que la relation 4.21 suppose implicitement que **chaque sortie y_j est au moins une fois dérivable**. En effet, ce développement a été réalisé dans la littérature [Li 06a, Li 06b, Li 08, Che09a] pour des systèmes mécaniques multidimensionnels qui s'écrivent sous la forme : $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{\Theta},t)=F(\mathbf{x}(\mathbf{\Theta},t),\mathbf{u}(\mathbf{\Theta},t),\mathbf{\Theta})$ où $\mathbf{x}$ est le vecteur d'état (et aussi le vecteur sortie du système) et dans ce cas, la question de la dérivabilité ne se pose pas. Pour généraliser ce concept aux systèmes 4.16, il faut vérifier que chaque sortie soit au moins une fois dérivable.

Problème stochastique direct : détermination des fonctions de densité de probabilité

La détermination de la fonction de densité de probabilité (marginale) relative à chaque sortie y_j, $j = \{1, \ldots, m\}$ passe par la détermination de la FDP conjointe $\phi_{\mathbf{y_j},\mathbf{\Theta}}$ de la sortie en question avec les différentes variables aléatoires $\mathbf{\Theta}$. Ensuite, cette FDP conjointe est intégrée sur le domaine de distribution de l'aléa $\mathbf{\Theta}$ pour retrouver la FDP marginale $\phi_{\mathbf{y_j}}$ associée à la sortie y_j :

– *Étape 1* : détermination de la FDP conjointe $\phi_{\mathbf{y_j},\mathbf{\Theta}}$:

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{y_j},\mathbf{\Theta}}(y_j,\theta,t) &= \phi_{\mathbf{y_j}|\mathbf{\Theta}=\theta}(y_j,t|\theta)\phi_{\mathbf{\Theta}}(\theta)\\ &= \delta(y_j - H_j(\theta,t))\phi_{\mathbf{\Theta}}(\theta)\end{aligned}$$

où $H_j(\theta,t)$ est la solution unique du système dynamique 4.16 pour la sortie y_j en tenant compte des conditions initiales données par l'équation 4.17.

– *Étape 2* : détermination de la FDP marginale $\phi_{\mathbf{y_j}}$:

$$\phi_{\mathbf{y_j}}(y_j,t) = \int \cdots \int_{\Omega_\Theta} \phi_{\mathbf{y_j},\mathbf{\Theta}}(y,\theta,t)d\theta$$

où Ω_Θ est le domaine de distribution des aléas $\mathbf{\Theta}$.

Remarque : La résolution de l'équation 4.22 qui décrit le principe de conservation de la probabilité permet de déduire la FDP conjointe $\phi_{\mathbf{y_j},\mathbf{\Theta}}$ de la sortie en question avec les différentes variables aléatoires. La condition initiale nécessaire pour cette résolution est $\phi_{\mathbf{y_j},\mathbf{\Theta}}(y_j,\theta,t_0) = \delta(y_j - H_j(\theta,t_0))\phi_{\mathbf{\Theta}}(\theta)$. Cette résolution[9] peut remplacer l'étape 1.

4.2.2 Problème stochastique inverse

Le développement qui a été réalisé dans la section 4.2.1 pour le modèle stochastique physique 4.16 est étendu, dans cette section, aux modèles dynamiques stochastiques inverses. En fait, la méthodologie de dimensionnement des systèmes mécatroniques basée sur des critères dynamiques et énergétiques (cf. section 1.3.4, chapitre 1) utilise le modèle inverse pour remonter aux entrées ou aux paramètres (selon l'aspect considéré de cette méthodologie) à partir des spécifications sur les sorties et la structure du système. Dans ce contexte, le tolérancement par l'approche probabiliste revient à définir un modèle dynamique stochastique inverse associé à la structure retenue pour le modèle de conception. L'exploitation probabiliste de ce modèle doit viser à dimensionner les tolérances sur les entrées ou sur les paramètres et ce, à partir des spécifications probabilistes (fonctions de densité de probabilité) imposées sur les sorties. Ainsi dans cette section, nous proposons une démarche stochastique pour la détermination des tolérances sur les entrées (entrées de commande et de perturbation) dans une première partie et pour la synthèse des tolérances paramétriques dans une seconde partie. Il est à noter que dans cette section, la formulation et la résolution du problème de synthèse de tolérances sont données indépendamment du formalisme bond graph (formalisme utilisé dans la méthodologie de dimensionnement des systèmes mécatroniques basée sur des critères dynamiques et énergétiques (cf. section 1.3.4, chapitre 1)). Néanmoins, le couplage entre l'approche probabiliste et le bond graph est établie dans la section 4.3.

Problème stochastique inverse entrées/sorties

Dans cette section, nous nous intéressons à l'aspect détermination des entrées par inversion du modèle dynamique (l'un des aspects de la démarche de dimensionnement par inversion) et ce, en tenant compte des incertitudes. En effet, les sorties $\mathbf{y}$ de la structure retenue pour le modèle

[9] La détermination des fonctions de densité de probabilité par la résolution de l'équation 4.22 peut être coûteuse en temps de calcul.

de conception (qui représentent les entrées du modèle inverse) sont spécifiées par des trajectoires temporelles qui s'expriment en terme de variables aléatoires $\mathbf{\Theta_1}$ (des constantes de temps aléatoires par exemple) : $\mathbf{y}(\mathbf{\Theta_1}, t)$. Les fonctions de densité de probabilité de ces variables aléatoires sont données par le cahier des charges. Nous supposons que ces variables aléatoires sont **indépendantes**, la FDP conjointe est donnée alors par $\phi_{\mathbf{\Theta_1}}(\theta_1) = \prod_{i=1}^{n_{\Theta_1}} \phi_{\Theta_{1_i}}(\theta_{1_i})$ où $\phi_{\Theta_{1_i}}(\theta_{1_i})$ est la FDP de la variable aléatoire Θ_{1_i} $(i = 1, \ldots, n_{\Theta_1})$, θ_{1_i} est une réalisation de Θ_{1_i}. D'autre part, le modèle de conception peut renfermer des paramètres internes incertains qui sont représentés par des variables aléatoires $\mathbf{\Theta_2}$. Ces variables aléatoires sont supposées **indépendantes**, la FDP conjointe est donnée alors par $\phi_{\mathbf{\Theta_2}}(\theta_2) = \prod_{i=1}^{n_{\Theta_2}} \phi_{\Theta_{2_i}}(\theta_{2_i})$ où $\phi_{\Theta_{2_i}}(\theta_{2_i})$ est la FDP de la variable aléatoire Θ_{2_i} $(i = 1, \ldots, n_{\Theta_2})$, θ_{2_i} est une réalisation de Θ_{2_i}. Ainsi, nous pouvons définir un seul vecteur de variables aléatoires **indépendantes** $\mathbf{\Theta} = \left[\mathbf{\Theta_1}^T \quad \mathbf{\Theta_2}^T\right]^T$, la FDP conjointe est donnée alors par $\phi_{\mathbf{\Theta}}(\theta) = \phi_{\mathbf{\Theta_1}}(\theta_1)\phi_{\mathbf{\Theta_2}}(\theta_2)$.

Sous condition d'inversibilité entrées/sorties, un modèle dynamique stochastique inverse d'ordre minimal peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{inv}}(\mathbf{\Theta}, t) = F_{inv}(\mathbf{x}_{\mathbf{inv}}(\mathbf{\Theta}, t), \mathbf{y}(\mathbf{\Theta_1}, t), \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{\Theta_1}, t), \ldots, \mathbf{y}^{(\alpha)}(\mathbf{\Theta_1}, t), \mathbf{\Theta_2}) \\ \mathbf{u}(\mathbf{\Theta}, t) = G_{inv}(\mathbf{x}_{\mathbf{inv}}(\mathbf{\Theta}, t), \mathbf{y}(\mathbf{\Theta_1}, t), \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{\Theta_1}, t), \ldots, \mathbf{y}^{(\alpha)}(\mathbf{\Theta_1}, t), \mathbf{\Theta_2}) \end{cases} \tag{4.23}$$

où $\mathbf{x}_{\mathbf{inv}}(\mathbf{\Theta}, t) \in \mathbb{R}^{n_{inv}}$ est le vecteur d'état, $\mathbf{y}(\mathbf{\Theta_1}, t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $\mathbf{u}(\mathbf{\Theta}, t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de sortie et $\mathbf{\Theta} = \left[\mathbf{\Theta_1}^T \quad \mathbf{\Theta_2}^T\right]^T \in \mathbb{R}^{n_{\Theta_1}+n_{\Theta_2}}$ est le vecteur de variables aléatoires. $\mathbf{y}$ (resp. $\mathbf{u}$) représente le vecteur des sorties (resp. entrées) du modèle stochastique direct (équation 4.16). $\dot{\mathbf{y}}, \ldots, \mathbf{y}^{(\alpha)}$ sont les dérivées successives par rapport au temps de $\mathbf{y}$ (dérivées apparaissant lors de la construction du modèle inverse). Pour chaque entrée y_i, l'ordre de dérivation maximal associé correspond à l'ordre d'essentialité n_{ie}. Ainsi, la spécification temporelle de y_i doit être au moins n_{ie} dérivable.

Les conditions initiales des variables d'état sont données par :

$$\mathbf{x}_{\mathbf{inv}}(\mathbf{\Theta}, t_0) = \mathbf{x}_{\mathbf{inv_0}} \tag{4.24}$$

Principe de conservation de la probabilité
Si le problème est bien posé, la solution du modèle dynamique inverse 4.23, tenant compte des conditions initiales (équation 4.24), existe et est unique. Le vecteur de sortie $\mathbf{u}$ dépend de Θ et s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{u} = H_{inv}(\mathbf{\Theta}, t) \tag{4.25}$$

Ainsi, chaque sortie du modèle inverse u_j ; $j = \{1, \ldots, m\}$; peut être définie par :

$$u_j = H_{inv_j}(\mathbf{\Theta}, t) \tag{4.26}$$

Le même développement concernant le principe de conservation de la densité de probabilité que celui détaillé dans la section 4.2.1 et appliqué au système 4.23 permet d'écrire :

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{u},\mathbf{\Theta}}(u, \theta, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} \dot{u}_j(t) \frac{\partial \phi_{\mathbf{u},\mathbf{\Theta}}(u, \theta, t)}{\partial u_j} = 0 \tag{4.27}$$

Si nous nous intéressons à une seule sortie u_j du modèle inverse ; $j = \{1, \ldots, m\}$; ce développement permet de déduire la relation suivante :

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{u_j},\mathbf{\Theta}}(u_j, \theta, t)}{\partial t} + \dot{u}_j(t) \frac{\partial \phi_{\mathbf{u_j},\mathbf{\Theta}}(u_j, \theta, t)}{\partial u_j} = 0 \tag{4.28}$$

L'équation 4.27 représente l'équation généralisée d'évolution de la densité de probabilité pour le modèle dynamique stochastique inverse 4.23. Elle reflète le principe de conservation de probabilité pour ce modèle. Néanmoins, les équations 4.27 et 4.28 ne sont valables que si **chaque sortie du modèle inverse u_j est au moins une fois dérivable**, condition à vérifier lors de la résolution du modèle dynamique 4.23 et la détermination de l'équation 4.26.

Détermination des fonctions de densité de probabilité

La détermination de la fonction de densité de probabilité relative à chaque sortie u_j du modèle inverse, $j = \{1, \ldots, m\}$ passe par la détermination de la FDP conjointe $\phi_{\mathbf{u_j},\mathbf{\Theta}}$. Ensuite, cette FDP conjointe est intégrée sur le domaine de distribution de l'aléa $\mathbf{\Theta}$ pour retrouver la FDP marginale $\phi_{\mathbf{u_j}}$ associée à u_j :

- *Étape 1* : détermination de la FDP conjointe $\phi_{\mathbf{u_j},\mathbf{\Theta}}$:

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{u_j},\mathbf{\Theta}}(u_j,\theta,t) &= \phi_{\mathbf{u_j}|\mathbf{\Theta}=\theta}(u_j,t|\theta)\phi_{\mathbf{\Theta}}(\theta)\\ &= \delta(u_j - H_{inv_j}(\theta,t))\phi_{\mathbf{\Theta}}(\theta)\end{aligned}$$

  où $H_{inv_j}(\theta,t)$ est la solution unique du système dynamique 4.23 pour la sortie u_j en tenant compte des conditions initiales données par l'équation 4.24.
- *Étape 2* : détermination de la FDP marginale $\phi_{\mathbf{u_j}}$:

$$\phi_{\mathbf{u_j}}(u_j,t) = \int \cdots \int_{\Omega_\Theta} \phi_{\mathbf{u_j},\mathbf{\Theta}}(u_j,\theta,t)d\theta$$

  où Ω_Θ est le domaine de distribution des aléas $\mathbf{\Theta}$.

Remarque : La résolution de l'équation 4.28 qui décrit le principe de conservation de la probabilité permet de déduire la FDP conjointe $\phi_{\mathbf{u_j},\mathbf{\Theta}}$. Cette résolution peut remplacer l'étape 1.

Le traitement stochastique proposé dans cette section pour le problème de synthèse de tolérances permet d'extraire des renseignements significatifs sur le tolérancement de l'entrée $\mathbf{u}$ du modèle de conception à partir de sa fonction de densité de probabilité comme :

- les valeurs de l'entrée de plus forte probabilité et ce à chaque instant,
- l'évolution de la valeur moyenne de l'entrée au cours du temps,
- l'évolution de la dispersion (la variance) au cours du temps,
- l'enveloppe probabiliste des réponses possibles.

Problème stochastique inverse paramètres/sorties

Dans cette section, nous nous intéressons à la démarche stochastique de la synthèse de tolérances. Ainsi, nous supposons que nous avons autant de sorties spécifiées (avec leur fonction de densité de probabilité) que de paramètres aléatoires à caractériser. Les spécifications de $\mathbf{y}$ (les entrées du modèle inverse) sont données en fonction de variables aléatoires $\mathbf{\Theta}$ et en fonction du temps : $\mathbf{y}(\mathbf{\Theta},t)$. Les fonctions de densité de probabilité de ces variables aléatoires sont données et nous supposons que ces variables sont **indépendantes**. La FDP conjointe est donnée alors par $\phi_{\mathbf{\Theta}}(\theta) = \prod_{i=1}^{n_\Theta} \phi_{\Theta_i}(\theta_i)$ où $\phi_{\Theta_i}(\theta_i)$ est la FDP de la variable aléatoire Θ_i $(i = 1, \ldots, n_\Theta)$ et θ_i est une réalisation de Θ_i. Nous supposons que le modèle de conception ne renferme pas de paramètres internes incertains (autre que ceux à synthétiser).

Nous rappelons que l'objectif est de retrouver les fonctions de densité de probabilité des paramètres incertains du modèle de conception à partir des fonctions de densité de probabilité spécifiées pour les aléas $\mathbf{\Theta}$ intervenant dans la spécification temporelle de $\mathbf{y}$. Après la vérification de l'inversibilité, le modèle dynamique stochastique inverse d'ordre minimal obtenu suite à une inversion paramètres/sorties peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{inv}}(\mathbf{\Theta}, t) = F_{invp}(\mathbf{x}_{\mathbf{inv}}(\mathbf{\Theta}, t), \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(\mathbf{\Theta}, t), \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{\Theta}, t), \ldots, \mathbf{y}^{(\alpha)}(\mathbf{\Theta}, t)) \\ \mathbf{p}(\mathbf{\Theta}, t) = G_{invp}(\mathbf{x}_{\mathbf{inv}}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(\mathbf{\Theta}, t), \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{\Theta}, t), \ldots, \mathbf{y}^{(\alpha)}(\mathbf{\Theta}, t)) \end{cases} \tag{4.29}$$

où $\mathbf{x}_{\mathbf{inv}}(\mathbf{\Theta}, t) \in \mathbb{R}^{n_{inv}}$ est le vecteur d'état, $\mathbf{y}(\mathbf{\Theta}, t) \in \mathbb{R}^{n_p}$ est le vecteur des spécifications des sorties du modèle physique (entrée du modèle inverse), $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$ est le vecteur des paramètres à synthétiser (sorties du modèle inverse) et $\mathbf{\Theta} \in \mathbb{R}^{n_\Theta}$ est le vecteur de variables aléatoires. $\dot{\mathbf{y}}, \ldots, \mathbf{y}^{(\alpha)}$ sont les dérivées successives par rapport au temps de $\mathbf{y}$ (dérivées apparaissant lors de la construction du modèle inverse). Pour chaque entrée y_i, l'ordre de dérivation maximal associé correspond à l'ordre d'essentialité[10] n'_{ie}. Ainsi, la spécification temporelle de y_i doit être au moins n'_{ie} dérivable.

Les conditions initiales des variables d'état sont données par :

$$\mathbf{x}_{\mathbf{inv}}(\mathbf{\Theta}, t_0) = \mathbf{x}_{\mathbf{inv_0}} \tag{4.30}$$

Principe de conservation de la probabilité
Si le problème est bien posé, la solution du modèle dynamique inverse 4.29, en tenant compte des conditions initiales (équation 4.30), existe et elle est unique. Il est à noter que dans cette démarche de synthèse de tolérance, la dérivée du vecteur de sortie $\mathbf{p}$ par rapport au temps doit être nulle ($\dot{\mathbf{p}} = 0$) si le cahier des charges est en adéquation avec la structure retenue pour le modèle de conception. Dans la suite, nous supposons que cette adéquation est préalablement vérifiée (cf. chapitre 3). La solution du modèle dynamique inverse 4.29 peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{p} = H_{inv}(\mathbf{\Theta}, t) \tag{4.31}$$

Ainsi, chaque sortie du modèle inverse p_j ; $j = \{1, \ldots, n_p\}$; peut être définie par :

$$p_j = H_{inv_j}(\mathbf{\Theta}, t) \tag{4.32}$$

Le même développement concernant le principe de conservation de la densité de probabilité que celui détaillé dans la section 4.2.1 et appliqué au système 4.29 permet d'écrire :

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{p},\mathbf{\Theta}}(p, \theta, t)}{\partial t} = 0 \tag{4.33}$$

Si nous nous intéressons à une sortie p_j ; $j = \{1, \ldots, n_p\}$; ce développement permet de déduire la relation suivante :

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{p_j},\mathbf{\Theta}}(p_j, \theta, t)}{\partial t} = 0 \tag{4.34}$$

Alors, il peut être conclu que **la fonction de densité de probabilité conjointe $\phi_{\mathbf{p_j},\mathbf{\Theta}}$ est constante au cours du temps** et par conséquent, elle peut s'écrire : $\phi_{\mathbf{p_j},\mathbf{\Theta}}(p_j, \theta)$. Les équations 4.33 et 4.34 reflètent le principe de conservation de probabilité : la probabilité totale est préservée au cours du temps.

Détermination des fonctions de densité de probabilité
La détermination de la fonction de densité de probabilité relative à chaque sortie p_j du modèle inverse, $j = \{1, \ldots, m\}$ passe par la détermination de la FDP conjointe $\phi_{\mathbf{p_j},\mathbf{\Theta}}$. Ensuite, cette FDP conjointe est intégrée sur le domaine de distribution de l'aléa $\mathbf{\Theta}$ pour retrouver la FDP marginale $\phi_{\mathbf{p_j}}$ associée à p_j :

[10] L'ordre d'essentialité pour un problème inverse paramètres/sorties , noté n'_{ie}, est différent de l'ordre d'essentialité pour un problème inverse entrées/sorties, noté n_{ie}.

– *Étape 1* : détermination de la FDP conjointe $\phi_{\mathbf{p_j},\mathbf{\Theta}}$:

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{p_j},\mathbf{\Theta}}(p_j,\theta) &= \phi_{\mathbf{p_j}|\mathbf{\Theta}=\theta}(p_j|\theta)\phi_{\mathbf{\Theta}}(\theta)\\ &= \delta(p_j - H_{inv_j}(\theta))\phi_{\mathbf{\Theta}}(\theta)\end{aligned}$$

où $H_{inv_j}(\theta)$ est la solution unique du modèle dynamique 4.29 pour la sortie p_j en tenant compte des conditions initiales données par l'équation 4.30.

– *Étape 2* : détermination de la FDP marginale $\phi_{\mathbf{p_j}}$:

$$\phi_{\mathbf{p_j}}(p_j) = \int \cdots \int_{\Omega_\Theta} \phi_{\mathbf{p_j},\mathbf{\Theta}}(p_j,\theta)d\theta$$

où Ω_Θ est le domaine de distribution des aléas $\mathbf{\Theta}$.

Comme la FDP conjointe $\phi_{\mathbf{p_j},\mathbf{\Theta}}$ est constante au cours du temps, alors l'intégrale de cette FDP sur le domaine de distribution de $\mathbf{\Theta}$ est nécessairement constante au cours du temps. Ainsi, si le problème est bien posé (adéquation spécifications/structure vérifiée), la FDP marginale $\phi_{\mathbf{p_j}}$ associée au paramètre p_j ne dépend pas du temps. Si ce n'est pas le cas, alors le problème est mal posé et il faut remettre en question soit le cahier des charges soit la structure retenue pour le modèle de conception (cf. section 3.2 du chapitre 3).

Le traitement stochastique de la synthèse des incertitudes paramétriques permet d'extraire des informations significatives sur chaque paramètre incertain à partir de sa fonction de densité de probabilité :

– les valeurs du paramètre de plus forte probabilité,
– l'estimation de la valeur moyenne (l'espérance),
– estimation de la dispersion (écart-type ou variance) autour de la valeur moyenne.

4.3 Bond graph probabiliste pour la synthèse des tolérances

Dans la section 4.2.2 et dans le contexte du dimensionnement des systèmes mécatroniques par modèles inverses, le tolérancement a été pris en compte en définissant un modèle dynamique stochastique inverse associé à la structure retenue pour le modèle de conception. L'exploitation probabiliste de ce modèle inverse vise à synthétiser les tolérances sur les entrées (de commande ou de perturbation) ou sur les paramètres et ce, à partir des spécifications probabilistes imposées par le cahier des charges sur les sorties. Indépendamment du formalisme bond graph, formalisme sur lequel est basée la méthodologie du dimensionnement des systèmes mécatroniques (cf. section 1.3.4, chapitre 1), cette démarche représente une analyse d'incertitude globale car l'information est globalisée en calculant la FDP conjointe à toutes les variables aléatoires et ensuite, la FDP marginale associée à une variable ou à un processus aléatoire en particulier est déduite. Une analogie peut être établie avec l'analyse structurelle et comportementale établie par approche modèle d'état qui offre une vision globale et ce, en éliminant implicitement certaines variables physiques intermédiaires.

En vue d'exploiter le formalisme bond graph de manière probabiliste, nous définissons le bond graph probabiliste :

Définition 13. *Un bond graph probabiliste est un bond graph pour lequel à chaque variable de puissance et d'énergie et à chaque paramètre incertain sont associées leur fonction de densité de probabilité, leur espérance et leur variance.*

Remarque : Nous verrons dans l'exemple du paragraphe 4.3.4 que l'on peut associer une représentation multibond graph à un bond graph probabiliste.

Un modèle bond graph probabiliste permet d'une part de propager des tolérances tout le long de la structure du modèle de conception, et d'autre part, d'offrir une description à la fois énergétique et probabiliste. À ce modèle bond graph, nous associons un schéma de calcul bicausal car il est défini dans le contexte de synthèse de tolérances par approche inverse. Également, le rapprochement existant entre le principe de conservation de la probabilité et le principe de conservation de puissance dans un modèle bond graph représente un argument supplémentaire pour l'exploitation d'un modèle bond graph probabiliste. Ce dernier offre une description locale de la tolérance et de sa propagation tout le long de la structure du modèle de conception. L'intérêt d'une démarche locale est d'associer une description probabiliste (fonction de densité de probabilité ou une grandeur caractéristique) à chaque variable de puissance et d'énergie du modèle et par conséquent, de mesurer l'effet des différentes incertitudes prises en compte sur chaque élément physique et énergétique du système. Une analogie peut être établie avec l'analyse structurelle et comportementale par approche bond graph qui tient compte de la structure du système et donne une interprétation physique à cette analyse.

Dans une première partie, nous définissons le cahier des charges commun à un problème de remontée des spécifications probabilistes sur les sorties (pour la détermination des tolérances sur les entrées de commande/perturbation) et à un problème de synthèse de tolérances sur les paramètres. Dans une seconde partie, nous traitons le problème de remontée des spécifications probabilistes en proposant des règles de propagation des fonctions de densité de probabilité et des grandeurs caractéristiques tout le long d'un modèle bond graph probabiliste. Enfin, nous nous intéressons au problème de la synthèse de tolérances sur les paramètres en proposant des outils bond graph probablistes adaptés.

4.3.1 Cahier des charges

Avant de proposer les règles de construction d'un modèle bond graph probabiliste, il est nécessaire de définir un cahier des charges adapté. En effet, les grandeurs sujettes aux incertitudes sont caractérisées dans le cahier des charges par des fonctions de densité de probabilité. Néanmoins, ces grandeurs ne sont pas toujours directement exploitables par le bond graph probabiliste car elles ne représentent pas une variable de puissance. Par exemple, dans la spécification temporelle d'une sortie, une constante de temps peut être considérée comme étant une variable aléatoire et par conséquent, caractérisée par une fonction de densité de probabilité. Néanmoins, la sortie et ses dérivées successives sont exploitées dans le modèle bond graph bicausal (probabiliste). Ainsi, il est nécessaire de déterminer les fonctions de densité de probabilité associées à cette sortie et à ses dérivées pour pouvoir propager l'incertitude le long de la structure du modèle.

Dans la formulation du problème, nous supposons que le cahier des charges spécifie des trajectoires temporelles pour les sorties $\mathbf{y}$ (qui représentent les entrées du modèle inverse) de la structure retenue pour le modèle de conception. Ces spécifications temporelles s'expriment en fonction de variables aléatoires $\mathbf{\Theta_1}$: $\mathbf{y}(\mathbf{\Theta_1}, t)$. Les fonctions de densité de probabilité de ces variables aléatoires sont également données par le cahier des charges. Elles sont supposées **indépendantes** et donc la FDP conjointe est donnée par $\phi_{\mathbf{\Theta_1}}(\theta_1) = \prod_{i=1}^{n_{\Theta_1}} \phi_{\Theta_{1_i}}(\theta_{1_i})$ où $\phi_{\Theta_{1_i}}(\theta_{1_i})$ est la FDP de la variable aléatoire Θ_{1_i} $(i = 1, \ldots, n_{\Theta_1})$ et θ_{1_i} est une réalisation de Θ_{1_i}. La fonction de densité de probabilité associée à chaque sortie y_j peut être déduite selon l'approche décrite dans la section 4.2.1. Ainsi, à ce niveau, un calcul probabiliste est nécessaire pour la mise en forme du cahier des charges.

À partir des spécifications temporelles des sorties $\mathbf{y}(\mathbf{\Theta_1}, t)$, les spécifications sur leurs dérivées successives peuvent être déduites à condition que la spécification de chaque sortie y_i soit au

moins n_{ie} fois dérivable où n_{ie} est l'ordre d'essentialité[11] associé à cette sortie (cf. section 3.1, chapitre 3). Ainsi, à partir des expressions temporelles obtenues $(\dot{y}_i(\mathbf{\Theta_1}, t), \ldots, y_i^{(n_{ie})}(\mathbf{\Theta_1}, t)\,;\ i = \{1, \ldots, m\})$ et à partir de la FDP conjointe $\phi_{\mathbf{\Theta_1}}$ associée aux variables aléatoires, les FDP marginales $(\phi_{\dot{\mathbf{y}}_\mathbf{i}}(\dot{y}_i, t), \ldots, \phi_{\mathbf{y}_\mathbf{i}^{(\mathbf{n_{ie}})}}(y_i^{(n_{ie})}, t)\,;\ i = \{1, \ldots, m\})$ associées aux différentes dérivées peuvent être calculées selon l'approche décrite dans la section 4.2.1.

D'autre part, le modèle de conception peut renfermer des paramètres internes incertains qui sont représentés par des variables aléatoires $\mathbf{\Theta_2}$. Ces variables aléatoires sont supposées **indépendantes** et chaque FDP marginale $\phi_{\Theta_{2_i}}$ associée à chaque variable aléatoire Θ_{2_i}, $(i = 1, \ldots, n_{\Theta_2})$, est spécifiée par le cahier des charges.

Il est à noter que dans un problème de synthèse de tolérances sur les paramètres, les entrées (entrées de commande ou de perturbation) doivent être spécifiées. Dans ce travail, ces grandeurs sont supposées déterministes.

4.3.2 Remontée des spécifications probabilistes

Dans cette section, nous proposons les règles d'exploitation du modèle bond graph probabiliste pour la remontée étage par étage des spécifications considérées sur les sorties. Sur ce modèle bond graph, une fonction de densité de probabilité et deux grandeurs caractéristiques (espérance et variance) sont associées à chaque variable de puissance et d'énergie et aux paramètres considérés incertains. Dans la suite, nous partageons le problème en deux cas :

- cas où les paramètres internes du système sont des grandeurs déterministes. Ce cas est un problème de propagation des incertitudes tout le long de la structure du modèles,
- cas où certains paramètres internes du système sont des grandeurs aléatoires. Dans ce cas, les aléas apparaissant au fur et à mesure de la propagation des incertitudes le long de la structure du modèle, doivent être pris en compte.

Tout d'abord, la remontée des fonctions de densité de probabilité et des grandeurs caractéristiques est établie dans le cas où les paramètres internes du système sont considérés comme des grandeurs déterministes (paragraphes « Remontée des fonctions de densité de probabilité » et « Remontée des grandeurs caractéristiques »). Ensuite, le cas où certains paramètres internes du système sont considérés comme des grandeurs aléatoires est évoqué (paragraphe « Prise en compte des incertitudes paramétriques »).

Remarque : Lors de la remontée des spécifications étage par étage, si la variable de puissance rencontrée est une entrée de commande et/ou de perturbation alors on est dans le cas d'une synthèse de tolérance sur cette entrée.

Remontée des fonctions de densité de probabilité

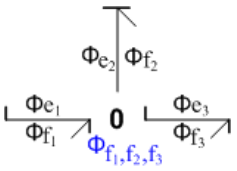
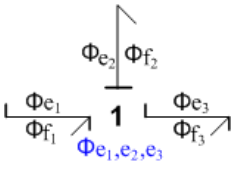
Dans ce paragraphe et en tenant compte des affectations bicausales, nous proposons les règles d'exploitation d'un modèle bond graph probabiliste où une fonction de densité de probabilité est associée à chaque variable de puissance et d'énergie (considérée alors comme des processus aléatoires).

Le tableau 4.1 présente les différentes FDP associées aux éléments de jonction (jonctions 0 et 1) ainsi que les schémas de calcul associés. Ces schémas de calcul représentent une exploitation bicausale du modèle bond graph probabiliste. Les FDP associées aux variables de puissance sortantes sont déduites des FDP marginales ou conjointes des variables de puissance entrantes. Dans

[11] L'ordre d'essentialité n_{ie} n'est pas le même selon le problème posé : l'ordre d'essentialité dans un problème de remontée à une entrée est différent de celui d'un problème de synthèse de tolérance paramétrique.

cette manipulation, ces dernières doivent être données (à partir des spécifications par exemple) ou déterminées (à partir du reste de la représentation bond graph).

TAB. 4.1 – Remontée des FDP à travers des éléments de jonction.

Élément BG	**Bicausalité possible**	**Schémas de calcul associés**
Jonction 0 (exemple à 3 liens)		$\begin{cases} \phi_{\mathbf{e_1}}(e_1,t) = \phi_{\mathbf{e_3}}(e_3,t) \\ \phi_{\mathbf{e_2}}(e_2,t) = \phi_{\mathbf{e_3}}(e_3,t) \\ \phi_{\mathbf{f_1}}(f_1,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{f_1},\mathbf{f_2},\mathbf{f_3}}(f_1,f_2,f_3,t)df_2df_3 \\ \qquad\qquad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f_1-(f_2+f_3))\phi_{\mathbf{f_2},\mathbf{f_3}}(f_2,f_3,t)df_2df_3 \end{cases}$
Jonction 1 (exemple à 3 liens)		$\begin{cases} \phi_{\mathbf{f_1}}(f_1,t) = \phi_{\mathbf{f3}}(f_3,t) \\ \phi_{\mathbf{f_2}}(f_2,t) = \phi_{\mathbf{f_3}}(f_3,t) \\ \phi_{\mathbf{e_1}}(e_1,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}}(e_1,e_2,e_3,t)de_2de_3 \\ \qquad\qquad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(e_1-(e_2+e_3))\phi_{\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}}(e_2,e_3,t)de_2de_3 \end{cases}$

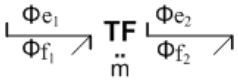
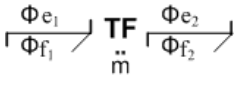
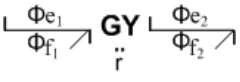
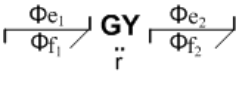
Le tableau 4.2 présente les FDP intervenant dans les éléments de transduction ainsi que les règles de propagation de la densité de probabilité et les différents schémas de calcul associés. Les règles de propagation proposées se démontrent aisément en considérant les lois caractéristiques associées aux différentes configurations causales de ces éléments et en appliquant le théorème 9. Sur un modèle bond graph bicausal, ces configurations permettent la remontée des spécifications à travers l'élément.

Le tableau 4.3 présente les FDP intervenant dans les éléments passifs (de dissipation et de stockage d'énergie) ainsi que les règles de propagation de la densité de probabilité et les différents schémas de calcul qui peuvent apparaître sur un modèle inverse pour la remontée des spécifications. Dans le cas d'éléments dissipatifs (en causalité résistance ou conductance), et d'éléments de stockage d'énergie linéaires en causalité dérivée, les règles de propagation proposées peuvent être démontrées en considérant les lois caractéristiques associées aux différentes configurations causales de ces éléments et en appliquant le théorème 9. Pour les éléments de stockage en causalité intégrale, l'équation d'évolution de la densité de probabilité est établie où $\phi_{\mathbf{p},\mathbf{e}}$ (resp. $\phi_{\mathbf{q},\mathbf{f}}$) est la FDP conjointe à la variable d'énergie $\mathbf{p}$ pour les éléments I (resp. $\mathbf{q}$ pour les éléments C) avec la variable de puissance entrante. La résolution de cette équation permet de définir $\phi_{\mathbf{p},\mathbf{e}}$ (resp. $\phi_{\mathbf{q},\mathbf{f}}$). Ensuite l'intégration de cette FDP conjointe sur le domaine associé à $\mathbf{e}$ (resp. $\mathbf{f}$) permet de déduire la FDP marginale associée à la variable d'énergie $\mathbf{p}$ (resp. $\mathbf{q}$). Enfin la FDP marginale associée à la variable de puissance sortante $\mathbf{f}$ (resp. $\mathbf{e}$) peut être déduite en considérant la loi caractéristique associée et en appliquant le théorème 9.

Remarques :

- Sur le modèle bond graph probabiliste, le produit des FDP associées à un lien de puissance ne représente pas une puissance. Le fait d'associer une FDP à un lien de puissance doit être interprété comme une notation conventionnelle.
- L'affectation causale/bicausale permet d'identifier les FDP qui doivent être connues pour pouvoir propager les incertitudes.

TAB. 4.2 – Remontée des FDP à travers des éléments de transduction.

Élément bond graph	**Bicausalité possible**	**Schémas de calcul associés**
TF		$\begin{cases} \phi_{\mathbf{e_1}}(e_1,t) = \frac{1}{\lvert m\rvert}\phi_{\mathbf{e_2}}(\frac{e_1}{m},t) \\ \phi_{\mathbf{f_1}}(f_1,t) = \lvert m\rvert\phi_{\mathbf{f_2}}(mf_1,t) \end{cases}$
		$\begin{cases} \phi_{\mathbf{e_2}}(e_2,t) = \lvert m\rvert\phi_{\mathbf{e_1}}(me_2,t) \\ \phi_{\mathbf{f_2}}(f_2,t) = \frac{1}{\lvert m\rvert}\phi_{\mathbf{f_1}}(\frac{f_2}{m},t) \end{cases}$
GY		$\begin{cases} \phi_{\mathbf{e_1}}(e_1,t) = \frac{1}{\lvert r\rvert}\phi_{\mathbf{f_2}}(\frac{e_1}{r},t) \\ \phi_{\mathbf{f_1}}(f_1,t) = \lvert r\rvert\phi_{\mathbf{e_2}}(rf_1,t) \end{cases}$
		$\begin{cases} \phi_{\mathbf{f_2}}(f_2,t) = \lvert r\rvert\phi_{\mathbf{e_1}}(rf_2,t) \\ \phi_{\mathbf{e_2}}(e_2,t) = \frac{1}{\lvert r\rvert}\phi_{\mathbf{f_1}}(\frac{e_2}{r},t) \end{cases}$

TAB. 4.3 – Remontée des FDP à travers des éléments passifs.

Élément BG	**Causalité possible**	**Schémas de calcul associés**	**Schémas de calcul (cas linéaire)**
R		$\phi_{\mathbf{e}}(e,t) = \frac{\phi_{\mathbf{f}}(\Gamma_R^{-1}(e),t)}{\lvert\Gamma'_R(\Gamma_R^{-1}(e))\rvert}$	$\phi_{\mathbf{e}}(e,t) = \frac{1}{\lvert R\rvert}\phi_{\mathbf{f}}(\frac{e}{R},t)$
		$\phi_{\mathbf{f}}(f,t) = \frac{\phi_{\mathbf{e}}(\Gamma_R(f),t)}{\lvert(\Gamma_R^{-1})'(\Gamma_R(f))\rvert}$	$\phi_{\mathbf{f}}(f,t) = \lvert R\rvert\phi_{\mathbf{e}}(Rf,t)$
I		$\phi_{\mathbf{e}}(e,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)df$ $= \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(e - H_I(f))\phi_{\mathbf{f}}(f,t)df$ où $e = H_I(f)$	$\phi_{\mathbf{e}}(e,t) = \frac{1}{\lvert I\rvert}\phi_{\dot{\mathbf{f}}}(\frac{e}{I},t)$
		$\begin{cases}\frac{\partial\phi_{\mathbf{p},\mathbf{e}}(p,e,t)}{\partial t} + \dot{p}\frac{\partial\phi_{\mathbf{p},\mathbf{e}}(p,e,t)}{\partial p} = 0\\ \phi_{\mathbf{p}}(p,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\mathbf{p},\mathbf{e}}(p,e,t)de\\ \phi_{\mathbf{f}}(f,t) = \frac{\phi_{\mathbf{p}}(\Gamma_I(f),t)}{\lvert(\Gamma_I^{-1})'(\Gamma_I(f))\rvert}\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{\partial\phi_{\mathbf{p},\mathbf{e}}(p,e,t)}{\partial t} + \dot{p}\frac{\partial\phi_{\mathbf{p},\mathbf{e}}(p,e,t)}{\partial p} = 0\\ \phi_{\mathbf{p}}(p,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\mathbf{p},\mathbf{e}}(p,e,t)de\\ \phi_{\mathbf{f}}(f,t) = \lvert I\rvert\phi_{\mathbf{p}}(If,t)\end{cases}$
C		$\phi_{\mathbf{f}}(f,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)de$ $= \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(f - H_C(e))\phi_{\mathbf{e}}(e,t)de$ où $f = H_C(e)$	$\phi_{\mathbf{f}}(f,t) = \frac{1}{\lvert C\rvert}\phi_{\dot{\mathbf{e}}}(\frac{f}{C},t)$
		$\begin{cases}\frac{\partial\phi_{\mathbf{q},\mathbf{f}}(q,f,t)}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial\phi_{\mathbf{q},\mathbf{f}}(q,f,t)}{\partial q} = 0\\ \phi_{\mathbf{q}}(q,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\mathbf{q},\mathbf{f}}(q,f,t)df\\ \phi_{\mathbf{e}}(e,t) = \frac{\phi_{\mathbf{q}}(\Gamma_C(e),t)}{\lvert(\Gamma_C^{-1})'(\Gamma_C(e))\rvert}\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{\partial\phi_{\mathbf{q},\mathbf{f}}(q,f,t)}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial\phi_{\mathbf{q},\mathbf{f}}(q,f,t)}{\partial q} = 0\\ \phi_{\mathbf{q}}(q,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\mathbf{q},\mathbf{f}}(q,f,t)df\\ \phi_{\mathbf{e}}(e,t) = \lvert C\rvert\phi_{\mathbf{q}}(Ce,t)\end{cases}$

Remontée des grandeurs caractéristiques

Dans ce paragraphe et en tenant compte des affectations bicausales, nous proposons les règles d'exploitation d'un modèle bond graph probabiliste où une espérance et une variance sont associées à chaque variable de puissance et d'énergie (considérées alors comme des processus aléatoires). Nous rappelons que dans ce paragraphe les paramètres internes du modèle sont considérés comme des grandeurs déterministes.

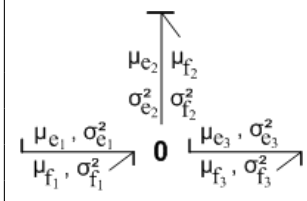
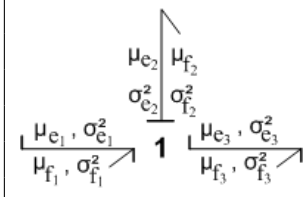
L'interprétation des grandeurs caractéristiques trouvées en sortie du modèle inverse se base sur la notion d'intervalle de confiance (cf. définition 8). Dépendant du temps dans le cas d'un problème de détermination des tolérances sur les entrées (de commande et/ou de perturbation), l'intervalle de confiance permet d'affirmer que la variable ou le processus aléatoire recherché évolue dans cet intervalle à une probabilité donnée. Cet intervalle fait appel à la notion de fonction de répartition (cf. définition 64 de l'annexe I). En effet, à partir du modèle bond graph probabiliste, une première analyse causale permet de déduire la fonction de densité de probabilité associée au processus/variable en question. La fonction de répartition associée à ce processus ou à cette variable peut être déduite. Une seconde analyse causale du modèle bond graph probabiliste permet de déduire les grandeurs caractéristiques qui offrent des informations plus synthétiques. À partir de la connaissance de ces grandeurs caractéristiques et de la fonction de répartition, l'intervalle de confiance peut être défini pour offrir au concepteur une interprétation plus physique de l'incertitude quantifiée.

Dans la section 4.3.1, les FDP associées aux différentes sorties du modèle de conception ont été définies. À partir de ces FDP, il est possible de définir les spécifications sur les sorties en terme d'espérance et de variance (cf. section 4.1.3). En tenant compte de l'affectation bicausale, nous proposons les règles de propagation de ces grandeurs caractéristiques pour les différents éléments bond graph. Le tableau 4.4 présente les différentes espérances et variances associées à des éléments de jonction. Les schémas de calcul associés représentent une exploitation bicausale du modèle bond graph probabiliste. Les grandeurs caractéristiques associées aux variables de puissance sortantes sont déduites des grandeurs caractéristiques associées aux variables de puissance entrantes et ce, pour la remontée des grandeurs caractéristiques tout le long de la structure du modèle de conception.

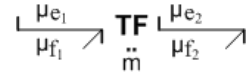
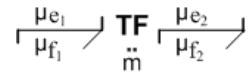
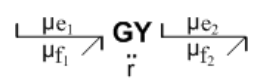
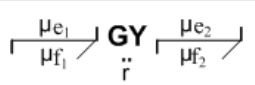
Le tableau 4.5 (resp. 4.6) présente les espérances (resp. variances) intervenant dans les éléments de transduction ainsi que les règles de propagation de ces grandeurs caractéristiques et les différents schémas de calcul associés. Les règles de propagation proposées peuvent être démontrées en considérant les lois caractéristiques associées aux différentes configurations causales de ces éléments et en appliquant le théorème 9.

Le tableau 4.7 porte sur les grandeurs caractéristiques intervenant dans les éléments passifs linéaires (de dissipation et de stockage d'énergie) ainsi que les règles de propagation de ces grandeurs selon les différents schémas de calcul qui peuvent apparaître sur ces éléments dans un problème de remontée de spécifications probabilistes. Dans le cas d'éléments dissipatifs (en causalité résistance ou conductance), et d'éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée, les règles de propagation proposées peuvent être démontrées en considérant les lois caractéristiques associées aux différentes configurations causales de ces éléments et en appliquant le théorème 9. Pour les éléments de stockage en causalité intégrale, il faut déterminer les grandeurs caractéristiques associées aux variables d'énergie. Ces grandeurs sont données en respectant le théorème 10 et la propriété 3 (section 4.1.3). Ensuite, les grandeurs caractéristiques associées aux variables de puissance sortantes peuvent en être déduites.

TAB. 4.4 – Espérances et variances des éléments de jonction.

Élément BG	**Bicausalité possible**	**Schémas de calcul associés (espérances et variances)**
Jonction 0 (exemple à 3 liens)		$\begin{cases} \mu_{\mathbf{e_1}}(t) = \mu_{\mathbf{e_3}}(t) \\ \mu_{\mathbf{e_2}}(t) = \mu_{\mathbf{e_3}}(t) \\ \mu_{\mathbf{f_1}}(t) = \mu_{\mathbf{f_2}}(t) + \mu_{\mathbf{f_3}}(t) \\ \sigma^2_{\mathbf{e_1}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{e_3}}(t) \\ \sigma^2_{\mathbf{e_2}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{e_3}}(t) \\ \sigma^2_{\mathbf{f_1}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{f_2}}(t) + \sigma^2_{\mathbf{f_3}}(t) + 2\sigma_{\mathbf{f_2 f_3}}(t) \end{cases}$
Jonction 1 (exemple à 3 liens)		$\begin{cases} \mu_{\mathbf{f_1}}(t) = \mu_{\mathbf{f_3}}(t) \\ \mu_{\mathbf{f_2}}(t) = \mu_{\mathbf{f_3}}(t) \\ \mu_{\mathbf{e_1}}(t) = \mu_{\mathbf{e_2}}(t) + \mu_{\mathbf{e_3}}(t) \\ \sigma^2_{\mathbf{f_1}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{f_3}}(t) \\ \sigma^2_{\mathbf{f_2}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{f_3}}(t) \\ \sigma^2_{\mathbf{e_1}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{e_2}}(t) + \sigma^2_{\mathbf{e_3}}(t) + 2\sigma_{\mathbf{e_2 e_3}}(t) \end{cases}$

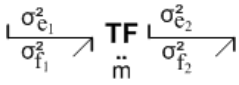
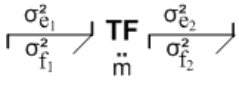
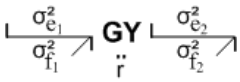
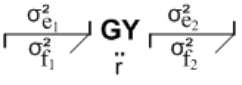
TAB. 4.5 – Remontée des espérances à travers des éléments de transduction.

Élément BG	**Bicausalité possible**	**Schémas de calcul associés**
TF		$\begin{cases} \mu_{\mathbf{e_1}}(t) = m\mu_{\mathbf{e_2}}(t) \\ \mu_{\mathbf{f_1}}(t) = \frac{1}{m}\mu_{\mathbf{f_2}}(t) \end{cases}$
		$\begin{cases} \mu_{\mathbf{e_2}}(t) = \frac{1}{m}\mu_{\mathbf{e_1}}(t) \\ \mu_{\mathbf{f_2}}(t) = m\mu_{\mathbf{f_1}}(t) \end{cases}$
GY		$\begin{cases} \mu_{\mathbf{e_1}}(t) = r\mu_{\mathbf{f_2}}(t) \\ \mu_{\mathbf{f_1}}(t) = \frac{1}{r}\mu_{\mathbf{e_2}}(t) \end{cases}$
		$\begin{cases} \mu_{\mathbf{f_2}}(t) := \frac{1}{r}\mu_{\mathbf{e_1}}(t) \\ \mu_{\mathbf{e_2}}(t) := r\mu_{\mathbf{f_1}}(t) \end{cases}$

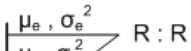
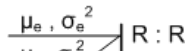
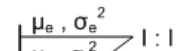
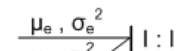
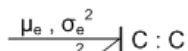
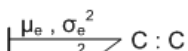
Remarques :

- Sur le modèle bond graph probabiliste, le produit des espérances (resp. variances) associées à un lien de puissance ne représente pas une puissance. Le fait d'associer une grandeur caractéristique à un lien de puissance doit être interprété comme une notation conventionnelle.
- La propagation des grandeurs caractéristiques nécessite la propagation des FDP également (cf. tableau 4.7).

TAB. 4.6 – Remontée des variances à travers des éléments de transduction.

Élément bond graph	**Bicausalité possible**	**Schémas de calcul associés**
TF		$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{e_1}}(t) = m^2\sigma^2_{\mathbf{e_2}}(t)\\ \sigma^2_{\mathbf{f_1}}(t) = \frac{1}{m^2}\sigma{\mathbf{f_2}}^2(t)\end{cases}$
		$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{e_2}}(t) = \frac{1}{m^2}\sigma^2_{\mathbf{e_1}}(t)\\ \sigma^2_{\mathbf{f_2}}(t) = m^2\sigma^2_{\mathbf{f_1}}(t)\end{cases}$
GY		$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{e_1}}(t) = r^2\sigma^2_{\mathbf{f_2}}(t)\\ \sigma^2_{\mathbf{f_1}}(t) = \frac{1}{r^2}\sigma^2_{\mathbf{e_2}}(t)\end{cases}$
		$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{f_2}}(t) = \frac{1}{r^2}\sigma^2_{\mathbf{e_1}}(t)\\ \sigma^2_{\mathbf{e_2}}(t) = r^2\sigma^2_{\mathbf{f_1}}(t)\end{cases}$

TAB. 4.7 – Remontée des espérances et des variances à travers des éléments passifs linéaires.

Élément BG	**Causalité possible**	**Schémas de calcul associés (espérances)**	**Schémas de calcul associés (variances)**
R		$\mu_{\mathbf{e}}(t) = R\mu_{\mathbf{f}}(t)$	$\sigma^2_{\mathbf{e}}(t) = R^2\sigma^2_{\mathbf{f}}(t)$
		$\mu_{\mathbf{f}}(t) = \frac{1}{R}\mu_{\mathbf{e}}(t)$	$\sigma^2_{\mathbf{f}}(t) = \frac{1}{R^2}\sigma^2_{\mathbf{e}}(t)$
I		$\begin{cases}\mu_{\mathbf{e}}(t) = I\mu_{\dot{\mathbf{f}}}(t) \\ \mu_{\dot{\mathbf{f}}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{f}\phi_{\mathbf{f}}(f,t)df\end{cases}$	$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{e}}(t) = I^2\sigma^2_{\dot{\mathbf{f}}}(t) \\ \sigma^2_{\dot{\mathbf{f}}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\dot{f})^2\phi_{\mathbf{f}}(f,t)df - \mu^2_{\dot{\mathbf{f}}}(t)\end{cases}$
		$\begin{cases}\mu_{\mathbf{p}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t e(\tau)d\tau + p_0\right)\phi_{\mathbf{e}}(e,t)de \\ \mu_{\mathbf{f}}(t) = \frac{1}{I}\mu_{\mathbf{p}}(t)\end{cases}$	$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{p}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t e(\tau)d\tau + p_0\right)^2\phi_{\mathbf{e}}(e,t)de - \mu^2_{\mathbf{p}}(t) \\ \sigma^2_{\mathbf{f}}(t) = \frac{1}{I^2}\sigma^2_{\mathbf{p}}(t)\end{cases}$
C		$\begin{cases}\mu_{\mathbf{f}}(t) = C\mu_{\dot{\mathbf{e}}}(t) \\ \mu_{\dot{\mathbf{e}}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{e}\phi_{\mathbf{e}}(e,t)de\end{cases}$	$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{f}}(t) = C^2\sigma^2_{\dot{\mathbf{e}}}(t) \\ \sigma^2_{\dot{\mathbf{e}}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\dot{e})^2\phi_{\mathbf{e}}(e,t)de - \mu^2_{\dot{\mathbf{e}}}(t)\end{cases}$
		$\begin{cases}\mu_{\mathbf{q}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t f(\tau)d\tau + q_0\right)\phi_{\mathbf{f}}(f,t)df \\ \mu_{\mathbf{e}}(t) = \frac{1}{C}\mu_{\mathbf{q}}(t)\end{cases}$	$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{q}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t f(\tau)d\tau + q_0\right)^2\phi_{\mathbf{f}}(f,t)de - \mu^2_{\mathbf{q}}(t) \\ \sigma^2_{\mathbf{e}}(t) = \frac{1}{C^2}\sigma^2_{\mathbf{q}}(t)\end{cases}$

Prise en compte des incertitudes paramétriques

Dans les deux paragraphes précédents, nous avons supposé qu'aucun paramètre interne du système n'était incertain et que les incertitudes portaient uniquement sur les spécifications des sorties. Néanmoins, il peut être également spécifié dans le cahier des charges que certains paramètres internes (supposés ici indépendants) sont des paramètres incertains caractérisés par des fonctions de densité de probabilité et des grandeurs caractéristiques. Dans ce cas, il faut tenir compte de ces incertitudes au fur et à mesure de la propagation des spécifications probabilistes le long de la structure du modèle.

Prise en compte des incertitudes paramétriques dans la remontée des fonctions de densité de probabilité

Les règles proposées dans le tableau 4.1 pour la propagation de la fonction de densité de probabilité dans une jonction (1 ou 0) restent identiques. Par contre, pour les éléments de transduction, de dissipation et de stockage d'énergie, les tableaux 4.2 et 4.3 ne sont plus valables. Néanmoins pour ces éléments bond graph, la FDP associée à la variable de puissance sortante peut être calculée en intégrant la FDP conjointe associée aux variables de puissance entrante et sortante et au paramètre incertain. Cette FDP conjointe est égale au produit de la FDP conditionnelle (de la variable de puissance sortante connaissant la variable de puissance entrante et le paramètre) et de la FDP conjointe associée à la variable de puissance entrante et au paramètre. En tenant compte de l'indépendance entre la variable de puissance entrante et le paramètre, la FDP conjointe associée à ces deux grandeurs aléatoires est égale au produit de leurs FDP marginales. Par exemple, pour un élément dissipatif linéaire en causalité résistance, la FDP associée à la variable d'effort peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\phi_e(\mathbf{e},t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{R}}(e,f,R,t)dfdR \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(e-Rf)\phi_{\mathbf{f},\mathbf{R}}(f,R,t)dfdR \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(e-Rf)\phi_{\mathbf{f}}(f,t)\phi_{\mathbf{R}}(R)dfdR\end{aligned}$$

où $\phi_{\mathbf{R}}$ (resp. $\phi_{\mathbf{f}}$) est la FDP marginale associée au paramètre $\mathbf{R}$ (resp. à la variable de flux $\mathbf{f}$). Pour un élément $\mathbf{C}$ linéaire en causalité dérivée, la FDP associée à la variable de flux peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{f}}(f,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\mathbf{f},\dot{\mathbf{e}},\mathbf{C}}(f,\dot{e},C,t)d\dot{e}dC \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(f-C\dot{e})\phi_{\dot{\mathbf{e}},\mathbf{C}}(\dot{e},C,t)d\dot{e}dC \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(f-C\dot{e})\phi_{\dot{\mathbf{e}}}(\dot{e},t)\phi_{\mathbf{C}}(C)d\dot{e}dC\end{aligned}$$

où $\phi_{\mathbf{C}}$ (resp. $\phi_{\dot{\mathbf{e}}}$) est la FDP marginale associée au paramètre $\mathbf{C}$ (resp. à la dérivée de la variable d'effort $\mathbf{e}$). Pour les éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale, les règles proposées dans le tableau 4.3 restent valables parce que l'incertitude sur la variable d'énergie ne dépend que de l'incertitude sur la variable de puissance entrante. Par contre, l'incertitude sur la variable de puissance sortante est due aux aléas considérés sur le paramètre et sur la variable d'énergie. Dans ce cas, la procédure décrite ci-dessus est appliquée pour retrouver la FDP associée. Par exemple, pour un élément $\mathbf{I}$ linéaire en causalité intégrale, la FDP conjointe à la variable d'énergie et à la variable d'effort satisfait la relation suivante :

$$\frac{\partial\phi_{\mathbf{p},\mathbf{e}}(p,e,t)}{\partial t}+\dot{p}\frac{\partial\phi_{\mathbf{p},\mathbf{e}}(p,e,t)}{\partial p}=0$$

La résolution de cette équation permet de déduire $\phi_{\mathbf{p},\mathbf{e}}$ et l'intégration de cette FDP conjointe sur $\mathbb{R}$ permet d'exprimer $\phi_{\mathbf{p}}$. Ensuite, la FDP associée à la variable de flux peut être définie comme suit :

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{f}}(f,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\mathbf{f},\mathbf{p},\mathbf{I}}(f,p,I,t)dpdI \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{p}{I})\phi_{\mathbf{p},\mathbf{I}}(p,I,t)dpdI \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{p}{I})\phi_{\mathbf{p}}(p,t)\phi_{\mathbf{I}}(I)dpdI\end{aligned}$$

où $\phi_{\mathbf{I}}$ (resp. $\phi_{\mathbf{p}}$) est la FDP marginale associée au paramètre $\mathbf{I}$ (resp. à la variable d'énergie $\mathbf{p}$).

Prise en compte des incertitudes paramétriques dans la remontée des grandeurs caractéristiques

Les spécifications des espérances et des variances associées aux paramètres incertains internes du modèle de conception peuvent être soit données explicitement soit déduites des fonctions de densité de probabilité (cf. définitions 6 et 7, section 4.1.3). Les règles proposées dans le tableau 4.4 pour la propagation des grandeurs caractéristiques dans une jonction (1 ou 0) restent identiques. Par contre, les tableaux 4.5, 4.6 et 4.7 ne sont plus valables. Pour les éléments de transduction, de dissipation et de stockage d'énergie en causalité dérivée, les grandeurs caractéristiques associées aux variables de puissance sortantes sont calculées à partir des définitions 6 et 7 et ce, en exploitant les FDP associées. Par exemple, pour un élément dissipatif linéaire en causalité résistance, l'espérance associée à la variable d'effort peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbf{e}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(Rf)\phi_{\mathbf{R},\mathbf{f}}(R,f,t)dRdf \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(Rf)\phi_{\mathbf{R}}(R)\phi_{\mathbf{f}}(f,t)dRdf\end{aligned}$$

où $\phi_{\mathbf{R}}$ (resp. $\phi_{\mathbf{f}}$) est la FDP marginale associée au paramètre $\mathbf{R}$ (resp. à la variable de flux $\mathbf{f}$). La variance associée à la variable d'effort peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma^2_{\mathbf{e}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(Rf)^2\phi_{\mathbf{R}}(R)\phi_{\mathbf{f}}(f,t)dRdf - \mu^2_{\mathbf{R}}\mu^2_{\mathbf{f}}(t)$$

Pour les éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale, les règles proposées dans le tableau 4.7 restent partiellement valables parce que l'incertitude sur la variable d'énergie ne dépend que de l'incertitude sur la variable de puissance entrante. Par contre, l'incertitude sur la variable de puissance sortante est due aux aléas considérés sur le paramètre et sur la variable d'énergie (qui sont deux variables indépendantes). Dans ce cas, la démarche décrite ci-dessus est appliquée pour retrouver les grandeurs caractéristiques associées. Par exemple, pour un élément $\mathbf{I}$ linéaire en causalité intégrale, l'espérance et la variance associées à la variable d'énergie sont définies par :

$$\begin{cases}\mu_{\mathbf{p}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^t e(\tau)d\tau + p_0\right)\phi_{\mathbf{e}}(e,t)de \\ \sigma^2_{\mathbf{p}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^t e(\tau)d\tau + p_0\right)^2\phi_{\mathbf{e}}(e,t)de - \mu^2_{\mathbf{p}}(t)\end{cases}$$

Par contre, l'espérance et la variance associées à la variable de flux sont définies par :

$$\begin{cases}\mu_{\mathbf{f}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{p}{I}\right)\phi_{\mathbf{I}}(I)\phi_{\mathbf{p}}(p,t)dIdp \\ \sigma^2_{\mathbf{f}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{p}{I}\right)^2\phi_{\mathbf{I}}(I)\phi_{\mathbf{p}}(p,t)dIdp - \mu^2_{\frac{1}{\mathbf{I}}}\mu^2_{\mathbf{p}}(t)\end{cases}$$

Cette présentation n'est pas exhaustive car nous avons présenté uniquement certains éléments bond graph dans une certaine configuration causale. Néanmoins, l'approche décrite dans ce paragraphe reste valable pour tous les éléments bond graph et dans toutes les configurations causales.

4.3.3 Synthèse de tolérances paramétriques

Après la remontée des spécifications étage par étage décrite dans la section 4.3.2, nous proposons, dans cette section, les règles d'exploitation du modèle bond graph probabiliste pour la synthèse de tolérances paramétriques.

Remarque : Si les spécifications probabilistes sont remontées sur un élément de transduction modulé en bicausalité débouchante, alors il s'agit d'une synthèse de tolérance sur une entrée de commande. Dans ce cas, et contrairement à une synthèse de tolérance paramétrique, la FDP et les grandeurs caractéristiques associées dépendent du temps.

Détermination des fonctions de densité de probabilité

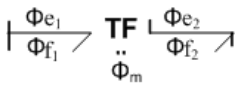
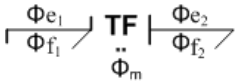
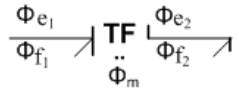
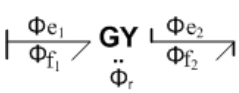
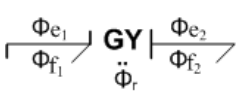
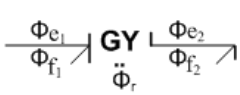
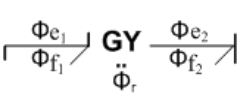
Dans ce paragraphe, nous proposons les règles d'exploitation du modèle bond graph probabiliste pour la synthèse des fonctions de densité de probabilité associées au paramètres incertains à dimensionner. Le tableau 4.8 présente les FDP associées à un élément de transduction en bicausalité débouchante. Pour la synthèse de tolérance sur m ou r, il faut déterminer la FDP conjointe associée à ce paramètre et aux variables de puissance figurant dans la relation caractéristique et ensuite, en tenant compte de cette relation, la FDP marginale associée au paramètre en question peut être déterminée selon la procédure proposée dans la section 4.2.2.

Le tableau 4.9 présente la FDP associée au paramètre d'un élément passif (R, I ou C). À partir de la remontée de la densité de probabilité et à partir de la relation existante entre les variables de puissance associées à l'élément en question, la FDP conjointe de ces variables peut être déduite. Ensuite, à partir de cette FDP conjointe et de la loi caractéristique de l'élément, la FDP associée au paramètre est calculée.

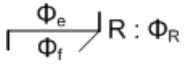
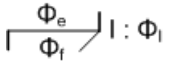
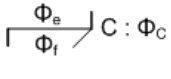
Détermination des grandeurs caractérisitiques

Dans ce paragraphe, nous proposons les règles d'exploitation du modèle bond graph probabiliste pour la détermination des grandeurs caractéristiques (espérance et variance) associées aux paramètres incertains. Le tableau 4.10 (resp. 4.11) présente les espérances (resp. variances) associées à un élément de transduction en bicausalité débouchante. L'espérance (resp. variance) associée au paramètre m ou r est calculée à partir de la relation constitutive et de la FDP conjointe des variables de puissance débouchantes. Comme le paramètre m ou r est considéré comme une variable aléatoire alors la propagation de l'espérance (resp. variance) se fait à partir du théorème 10 (resp. propriété 3). Ce théorème et cette propriété appliqués à des éléments passifs linéaires (auxquels un schéma de calcul bicausal est affecté) permettent d'établir le tableau 4.12.

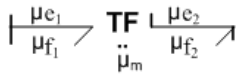
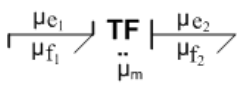
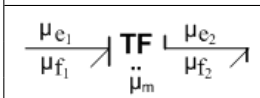
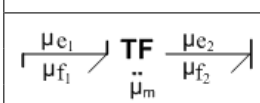
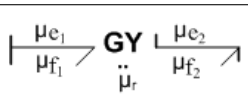
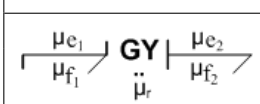
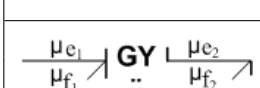
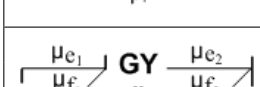
TAB. 4.8 – FDP des éléments de transduction pour la synthèse des tolérances paramétriques.

Élément BG	Bicausalité possible	Schémas de calcul associés
TF		$\begin{cases} \phi_{\mathbf{m}}(m) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{m},\mathbf{f_1},\mathbf{f_2}}(m,f_1,f_2,t)df_1df_2 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(m-\frac{f_2}{f_1})\phi_{\mathbf{f_1},\mathbf{f_2}}(f_1,f_2,t)df_1df_2 \\ \phi_{\mathbf{e_1}}(e_1,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{m},\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}}(m,e_1,e_2,t)dmde_2 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(e_1-me_2\right)\phi_{\mathbf{m},\mathbf{e_2}}(m,e_2,t)dmde_2 \end{cases}$
		$\begin{cases} \phi_{\mathbf{m}}(m) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{m},\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}}(m,e_1,e_2,t)de_1de_2 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(m-\frac{e_1}{e_2})\phi_{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}}(e_1,e_2,t)de_1de_2 \\ \phi_{\mathbf{f_2}}(f_2,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{m},\mathbf{f_1},\mathbf{f_2}}(m,f_1,f_2,t)dmdf_1 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(f_2-mf_1\right)\phi_{\mathbf{m},\mathbf{f_1}}(m,f_1,t)dmdf_1 \end{cases}$
		$\begin{cases} \phi_{\mathbf{m}}(m) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{m},\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}}(m,e_1,e_2,t)de_1de_2 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(m-\frac{e_1}{e_2})\phi_{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}}(e_1,e_2,t)de_1de_2 \\ \phi_{\mathbf{f_1}}(f_1,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{m},\mathbf{f_1},\mathbf{f_2}}(m,f_1,f_2,t)dmdf_2 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(f_1-\frac{f_2}{m}\right)\phi_{\mathbf{m},\mathbf{f_2}}(m,f_2,t)dmdf_2 \end{cases}$
		$\begin{cases} \phi_{\mathbf{m}}(m) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{m},\mathbf{f_1},\mathbf{f_2}}(m,f_1,f_2,t)df_1df_2 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(m-\frac{f_2}{f_1})\phi_{\mathbf{f_1},\mathbf{f_2}}(f_1,f_2,t)df_1df_2 \\ \phi_{\mathbf{e_2}}(e_2,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{m},\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}}(m,e_1,e_2,t)dmde_1 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(e_2-\frac{e_1}{m}\right)\phi_{\mathbf{m},\mathbf{e_1}}(m,e_1,t)dmde_1 \end{cases}$
GY		$\begin{cases} \phi_{\mathbf{r}}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{r},\mathbf{e_2},\mathbf{f_1}}(r,e_2,f_1,t)de_2df_1 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r-\frac{e_2}{f_1})\phi_{\mathbf{e_2},\mathbf{f_1}}(e_2,f_1,t)de_2df_1 \\ \phi_{\mathbf{e_1}}(e_1,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{r},\mathbf{e_1},\mathbf{f_2}}(r,e_1,f_2,t)drdf_2 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(e_1-rf_2\right)\phi_{\mathbf{r},\mathbf{f_2}}(r,f_2,t)drdf_2 \end{cases}$
		$\begin{cases} \phi_{\mathbf{r}}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{r},\mathbf{e_2},\mathbf{f_1}}(r,e_2,f_1,t)de_2df_1 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r-\frac{e_2}{f_1})\phi_{\mathbf{e_2},\mathbf{f_1}}(e_2,f_1,t)de_2df_1 \\ \phi_{\mathbf{f_2}}(f_2,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{r},\mathbf{e_1},\mathbf{f_2}}(r,e_1,f_2,t)drde_1 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(f_2-\frac{e_1}{r}\right)\phi_{\mathbf{r},\mathbf{e_1}}(r,e_1,t)drde_1 \end{cases}$
		$\begin{cases} \phi_{\mathbf{r}}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{r},\mathbf{e_1},\mathbf{f_2}}(r,e_1,f_2,t)de_1df_2 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r-\frac{e_1}{f_2})\phi_{\mathbf{e_1},\mathbf{f_2}}(e_1,f_2,t)de_1df_2 \\ \phi_{\mathbf{f_1}}(f_1,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{r},\mathbf{e_2},\mathbf{f_1}}(r,e_2,f_1,t)drde_2 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(f_1-\frac{e_2}{r}\right)\phi_{\mathbf{r},\mathbf{e_2}}(r,e_2,t)drde_2 \end{cases}$
		$\begin{cases} \phi_{\mathbf{r}}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{r},\mathbf{e_1},\mathbf{f_2}}(r,e_1,f_2,t)de_1df_2 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r-\frac{e_1}{f_2})\phi_{\mathbf{e_1},\mathbf{f_2}}(e_1,f_2,t)de_1df_2 \\ \phi_{\mathbf{e_2}}(e_2,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{r},\mathbf{e_2},\mathbf{f_1}}(r,e_2,f_1,t)drdf_1 \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(e_2-rf_1\right)\phi_{\mathbf{r},\mathbf{f_1}}(r,f_1,t)drdf_1 \end{cases}$

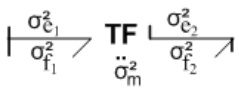
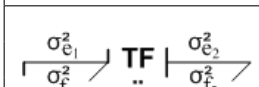
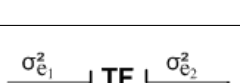
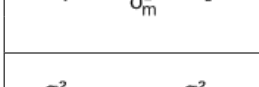
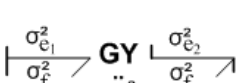
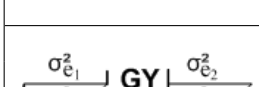
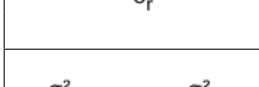
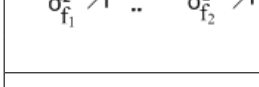
TAB. 4.9 – FDP des éléments passifs pour la synthèse des tolérances paramétriques.

Élément BG	**Bicausalité possible**	**Schémas de calcul associés**	**Schémas de calcul (cas linéaire)**
R		$\phi_{\mathbf{R}}(R) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\mathbf{R},\mathbf{e},\mathbf{f}}(R,e,f,t)dedf$ $= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(R-\Psi_{\mathbf{R}}(e,f))\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf$ où $R = \Psi_{\mathbf{R}}(e,f)$	$\phi_{\mathbf{R}}(R) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(R-\frac{e}{f}\right)\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf$
I		$\phi_{\mathbf{I}}(I) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\mathbf{I},\mathbf{e},\mathbf{f}}(I,e,f,t)dedf$ $= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(I-\Psi_{\mathbf{I}}(e,f))\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf$ où $I = \Psi_{\mathbf{I}}(e,f)$	$\phi_{\mathbf{I}}(I) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(I-\frac{e}{f}\right)\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf$ $= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(I-\frac{\int_0^t e(\tau)d\tau+p_0}{f}\right)\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf$
C		$\phi_{\mathbf{C}}(C) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{\mathbf{C},\mathbf{e},\mathbf{f}}(C,e,f,t)dedf$ $= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(C-\Psi_{\mathbf{C}}(e,f))\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf$ où $C = \Psi_{\mathbf{C}}(e,f)$	$\phi_{\mathbf{C}}(C) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(C-\frac{f}{e}\right)\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf$ $= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(C-\frac{\int_0^t f(\tau)d\tau+q_0}{e}\right)\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf$

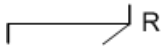
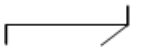
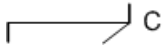
TAB. 4.10 – Espérances des éléments de transduction pour la synthèse des tolérances paramétriques.

Élément BG	Bicausalité possible	Schémas de calcul associés
TF		$\begin{cases}\mu_{\mathbf{m}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2}{f_1}\phi_{\mathbf{f_1},\mathbf{f_2}}(f_1,f_2,t)df_1df_2 \\ \mu_{\mathbf{e_1}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (me_2)\,\phi_{\mathbf{m},\mathbf{e_2}}(m,e_2,t)dmde_2\end{cases}$
		$\begin{cases}\mu_{\mathbf{m}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e_1}{e_2}\phi_{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}}(e_1,e_2,t)de_1de_2 \\ \mu_{\mathbf{f_2}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (mf_1)\,\phi_{\mathbf{m},\mathbf{f_1}}(m,f_1,t)dmdf_1\end{cases}$
		$\begin{cases}\mu_{\mathbf{m}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e_1}{e_2}\phi_{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}}(e_1,e_2,t)de_1de_2 \\ \mu_{\mathbf{f_1}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f_2}{m}\right)\phi_{\mathbf{m},\mathbf{f_2}}(m,f_2,t)dmdf_2\end{cases}$
		$\begin{cases}\mu_{\mathbf{m}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2}{f_1}\phi_{\mathbf{f_1},\mathbf{f_2}}(f_1,f_2,t)df_1df_2 \\ \mu_{\mathbf{e_2}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e_1}{m}\right)\phi_{\mathbf{m},\mathbf{e_1}}(m,e_1,t)dmde_1\end{cases}$
GY		$\begin{cases}\mu_{\mathbf{r}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e_2}{f_1}\phi_{\mathbf{e_2},\mathbf{f_1}}(e_2,f_1,t)de_2df_1 \\ \mu_{\mathbf{e_1}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (rf_2)\,\phi_{\mathbf{r},\mathbf{f_2}}(r,f_2,t)drdf_2\end{cases}$
		$\begin{cases}\mu_{\mathbf{r}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e_2}{f_1}\phi_{\mathbf{e_2},\mathbf{f_1}}(e_2,f_1,t)de_2df_1 \\ \mu_{\mathbf{f_2}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e_1}{r}\right)\phi_{\mathbf{r},\mathbf{e_1}}(r,e_1,t)drde_1\end{cases}$
		$\begin{cases}\mu_{\mathbf{r}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e_1}{f_2}\phi_{\mathbf{e_1},\mathbf{f_2}}(e_1,f_2,t)de_1df_2 \\ \mu_{\mathbf{f_1}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e_2}{r}\right)\phi_{\mathbf{r},\mathbf{e_2}}(r,e_2,t)drde_2\end{cases}$
		$\begin{cases}\mu_{\mathbf{r}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e_1}{f_2}\phi_{\mathbf{e_1},\mathbf{f_2}}(e_1,f_2,t)de_1df_2 \\ \mu_{\mathbf{e_2}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (rf_1)\,\phi_{\mathbf{r},\mathbf{f_1}}(r,f_1,t)drdf_1\end{cases}$

TAB. 4.11 – Variances des éléments de transduction pour la synthèse des tolérances paramétriques.

Élément BG	Bicausalité possible	Schémas de calcul associés
TF		$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{m}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2\phi_{\mathbf{f_1},\mathbf{f_2}}(f_1,f_2,t)df_1df_2 - \mu^2_{\mathbf{m}}\\ \sigma^2_{\mathbf{e_1}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(me_2)^2\,\phi_{\mathbf{m},\mathbf{e_2}}(m,e_2,t)dmde_2 - \mu^2_{\mathbf{e_1}}(t)\end{cases}$
		$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{m}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2\phi_{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}}(e_1,e_2,t)de_1de_2 - \mu^2_{\mathbf{m}}\\ \sigma^2_{\mathbf{f_2}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(mf_1)^2\,\phi_{\mathbf{m},\mathbf{f_1}}(m,f_1,t)dmdf_1 - \mu^2_{\mathbf{f_2}}(t)\end{cases}$
		$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{m}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e_1}{e_2}\right)^2\phi_{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}}(e_1,e_2,t)de_1de_2 - \mu^2_{\mathbf{m}}\\ \sigma^2_{\mathbf{f_1}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{f_2}{m}\right)^2\phi_{\mathbf{m},\mathbf{f_2}}(m,f_2,t)dmdf_2 - \mu^2_{\mathbf{f_1}}(t)\end{cases}$
		$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{m}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2\phi_{\mathbf{f_1},\mathbf{f_2}}(f_1,f_2,t)df_1df_2 - \mu^2_{\mathbf{m}}\\ \sigma^2_{\mathbf{e_2}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e_1}{m}\right)^2\phi_{\mathbf{m},\mathbf{e_1}}(m,e_1,t)dmde_1 - \mu^2_{\mathbf{e_2}}(t)\end{cases}$
GY		$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{r}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e_2}{f_1}\right)^2\phi_{\mathbf{e_2},\mathbf{f_1}}(e_2,f_1,t)de_2df_1 - \mu^2_{\mathbf{r}}\\ \sigma^2_{\mathbf{e_1}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(rf_2)^2\,\phi_{\mathbf{r},\mathbf{f_2}}(r,f_2,t)drdf_2 - \mu^2_{\mathbf{e_1}}(t)\end{cases}$
		$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{r}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e_2}{f_1}\right)^2\phi_{\mathbf{e_2},\mathbf{f_1}}(e_2,f_1,t)de_2df_1 - \mu^2_{\mathbf{r}}\\ \sigma^2_{\mathbf{f_2}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e_1}{r}\right)^2\phi_{\mathbf{r},\mathbf{e_1}}(r,e_1,t)drde_1 - \mu^2_{\mathbf{f_2}}(t)\end{cases}$
		$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{r}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e_1}{f_2}\right)^2\phi_{\mathbf{e_1},\mathbf{f_2}}(e_1,f_2,t)de_1df_2 - \mu^2_{\mathbf{r}}\\ \sigma^2_{\mathbf{f_1}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e_2}{r}\right)^2\phi_{\mathbf{r},\mathbf{e_2}}(r,e_2,t)drde_2 - \mu^2_{\mathbf{f_1}}(t)\end{cases}$
		$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{r}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e_1}{f_2}\right)^2\phi_{\mathbf{e_1},\mathbf{f_2}}(e_1,f_2,t)de_1df_2 - \mu^2_{\mathbf{r}}\\ \sigma^2_{\mathbf{e_2}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(rf_1)^2\,\phi_{\mathbf{r},\mathbf{f_1}}(r,f_1,t)drdf_1 - \mu^2_{\mathbf{e_2}}(t)\end{cases}$

TAB. 4.12 – Espérances et variances des éléments passifs linéaires pour la synthèse des tolérances paramétriques.

Élément BG	**Causalité possible**	**Schémas de calcul associés (espérances)**	**Schémas de calcul associés (variances)**
R		$\mu_{\mathbf{R}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e}{f}\right)\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf$	$\sigma^2_{\mathbf{R}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e}{f}\right)^2\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf - \mu^2_{\mathbf{R}}$
I		$\mu_{\mathbf{I}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e}{f}\right)\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf$ $= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\int_0^t e(\tau)d\tau+p_0}{f}\right)\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf$	$\sigma^2_{\mathbf{I}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e}{f}\right)^2\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf - \mu^2_{\mathbf{I}}$ $= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\int_0^t e(\tau)d\tau+p_0}{f}\right)^2\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf - \mu^2_{\mathbf{I}}$
C		$\mu_{\mathbf{C}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{f}{\dot{e}}\right)\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf$ $= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\int_0^t f(\tau)d\tau+q_0}{e}\right)\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf$	$\sigma^2_{\mathbf{C}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{f}{\dot{e}}\right)^2\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf - \mu^2_{\mathbf{C}}$ $= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\int_0^t f(\tau)d\tau+q_0}{e}\right)^2\phi_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(e,f,t)dedf - \mu^2_{\mathbf{C}}$

4.3.4 Exemple : synthèse de tolérances d'une chaîne d'actionnement

Afin d'illustrer les règles introduites dans les sections 4.3.2 et 4.3.3 et leur utilisation à la synthèse de tolérance, considérons comme exemple une charge en rotation actionnée par un moteur à courant continu (figure 4.2). Le modèle associé est caractérisé par :

- un circuit électrique composé d'une source de tension u, d'une résistance électrique R et d'une bobine de paramètre constant L en série,
- un couplage électromécanique de constante de couple k_c,
- un arbre moteur d'inertie J_m et soumis à des frottements visqueux de coefficient b_m,
- un réducteur de rapport $\frac{1}{n}$,
- un arbre de charge d'inertie J_c et soumis à des frottements visqueux de coefficient b_c.

Nous supposons que les différents paramètres (L, k_c, J_m, b_m, n, J_c et b_c) ont des valeurs strictement positives.

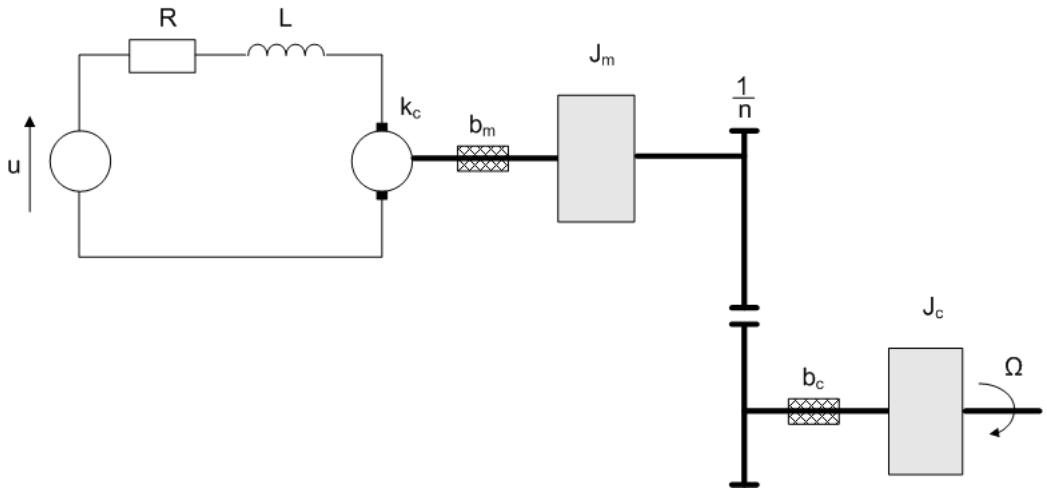


FIG. 4.2 – Charge en rotation actionnée par un moteur à courant continu.

La tension u représente l'entrée du système. La vitesse de rotation de l'arbre de charge représente la sortie du système. Le modèle bond graph acausal associé à ce système est donné figure 4.3.

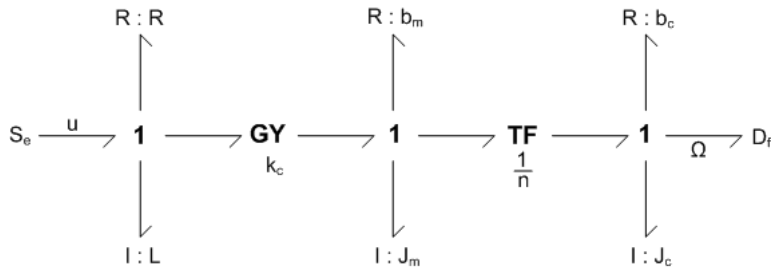


FIG. 4.3 – Modèle bond graph acausal.

Dans le problème de conception par inversion, la trajectoire de la sortie est spécifiée par l'évolution temporelle suivante :

$$\Omega(t) = Ae^{-\alpha t}sin(\omega t) \tag{4.35}$$

où A, α et ω sont des paramètres constants au cours du temps. Dans le cadre de la synthèse de tolérances, nous supposons que le paramètre A est une variable aléatoire caractérisée par une loi gaussienne : $\phi_{\mathbf{A}}(A) = \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$. À partir du théorème 9, une FDP peut être définie pour la

sortie $\Omega(t)$:

$$\phi_{\mathbf{\Omega}}(\Omega,t)=\frac{1}{|e^{-\alpha t}sin(\omega t)|}\phi_A\left(\frac{\Omega}{e^{-\alpha t}sin(\omega t)}\right) \tag{4.36}$$

Dans la section 1.4 du chapitre 1, nous avons vu que la méthodologie de dimensionnement basée sur des critères dynamiques et énergétiques peut être utilisée dans plusieurs aspects de la conception des systèmes mécatroniques. En tenant compte des incertitudes spécifiées, nous nous intéressons, dans une première partie à la détermination de la tolérance sur la commande en boucle ouverte et, dans une seconde partie, à la synthèse de tolérance sur des paramètres du modèle.

Synthèse de tolérance sur la commande en boucle ouverte

Dans cette section, nous cherchons à déterminer la commande en boucle ouverte et la tolérance sur cette commande à partir des spécifications sur la trajectoire de la sortie et de son incertitude. Les différents paramètres intervenant dans le système sont supposés déterministes.

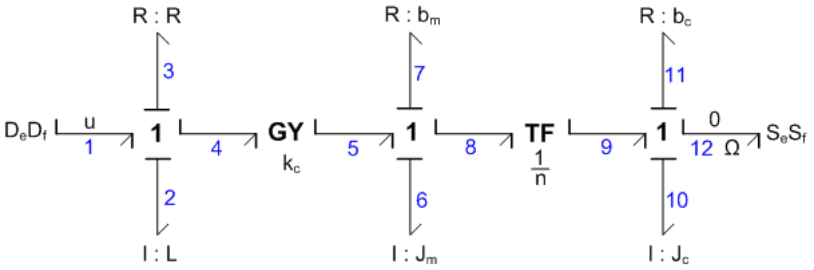


FIG. 4.4 – Modèle bond graph bicausal pour la détermination de la commande en boucle ouverte.

Le critère d'inversibilité 3 (section 1.3.3, chapitre 1) est vérifié et le modèle bond graph bicausal (figure 4.4) peut être construit grâce à la procédure SCAPI (procédure 22, section A.5, annexe A). L'analyse structurelle du modèle bond graph bicausal permet de déduire l'ordre d'essentialité $n_{1e}=2$ associé à la vitesse de la charge $\Omega(t)$ qui est l'ordre de dérivation maximal nécessaire pour exprimer le modèle inverse d'ordre minimal (cf. procédure 18, page 107). Ainsi, dans le cadre du dimensionnement par inversion du modèle bond graph, la trajectoire spécifiée pour la sortie $\Omega(t)$ doit être au moins deux fois dérivable : condition vérifiée par l'équation 4.35. Les spécifications temporelles des dérivées première et seconde de la sortie $\Omega(t)$ sont données par :

$$\begin{cases}\dot{\Omega}(t)=Ae^{-\alpha t}\left[\omega cos(\omega t)-\alpha sin(\omega t)\right]\\ \ddot{\Omega}(t)=Ae^{-\alpha t}\left[(\alpha^2-\omega^2)sin(\omega t)-2\alpha\omega cos(\omega t)\right]\end{cases}$$

Puisque la variable A intervenant dans la spécification temporelle de la vitesse $\Omega(t)$ (équation 4.35) est une variable aléatoire qui suit la loi gaussienne $\phi_{\mathbf{A}}(A)=\mathcal{N}(\mu_A,\sigma_A^2)$, les FDP associées à l'accélération $\dot{\Omega}(t)$ et au jerk $\ddot{\Omega}(t)$ peuvent être déduites à partir du théorème 9 :

$$\phi_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(\dot{\Omega},t)=\frac{1}{|e^{-\alpha t}\left[\omega cos(\omega t)-\alpha sin(\omega t)\right]|}\phi_{\mathbf{A}}\left(\frac{\dot{\Omega}}{e^{-\alpha t}\left[\omega cos(\omega t)-\alpha sin(\omega t)\right]}\right) \tag{4.37}$$

$$\phi_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(\ddot{\Omega},t)=-\frac{1}{|e^{-\alpha t}\left[(\alpha^2-\omega^2)sin(\omega t)-2\alpha\omega cos(\omega t)\right]|}\phi_{\mathbf{A}}\left(\frac{\ddot{\Omega}}{e^{-\alpha t}\left[(\alpha^2-\omega^2)sin(\omega t)-2\alpha\omega cos(\omega t)\right]}\right) \tag{4.38}$$

Les espérances mathématiques associées à la vitesse $\Omega(t)$, à l'accélération $\dot{\Omega}(t)$ et au jerk $\ddot{\Omega}(t)$ sont données respectivement par les équations 4.39, 4.40 et 4.41.

$$\mu_{\mathbf{\Omega}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(t)\phi_{\mathbf{\Omega}}(\Omega, t)d\Omega \tag{4.39}$$

$$\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\Omega}(t)\phi_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(\dot{\Omega}, t)d\dot{\Omega} \tag{4.40}$$

$$\mu_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{\Omega}(t)\phi_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(\ddot{\Omega}, t)d\ddot{\Omega} \tag{4.41}$$

Les variances associées à la vitesse $\Omega(t)$, à l'accélération $\dot{\Omega}(t)$ et au jerk $\ddot{\Omega}(t)$ sont données respectivement par les équations 4.42, 4.43 et 4.44.

$$Var[\mathbf{\Omega}](t) = \sigma^2_{\mathbf{\Omega}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega^2(t)\phi_{\mathbf{\Omega}}(\Omega, t)d\Omega - \mu^2_{\mathbf{\Omega}}(t) \tag{4.42}$$

$$Var[\dot{\mathbf{\Omega}}](t) = \sigma^2_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\Omega}^2(t)\phi_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(\dot{\Omega}, t)d\dot{\Omega} - \mu^2_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t) \tag{4.43}$$

$$Var[\ddot{\mathbf{\Omega}}](t) = \sigma^2_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{\Omega}^2(t)\phi_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(\ddot{\Omega}, t)d\ddot{\Omega} - \mu^2_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(t) \tag{4.44}$$

Maintenant, le cahier des charges étant défini, le bond graph probabiliste associé au système étudié pour la détermination de la tolérance sur la commande en boucle ouverte peut être construit (figure 4.5) : c'est un modèle bond graph multiliens qui permet de propager à la fois la puissance, les variables de puissance, la fonction de densité de probabilité et les grandeurs caractéristiques (espérances et variances) où $\mathbf{T_{e_i}} = [e_i \;\; \phi_{\mathbf{e_i}} \;\; \mu_{\mathbf{e_i}} \;\; \sigma^2_{\mathbf{e_i}}]^T$, $\mathbf{T_{f_i}} = [f_i \;\; \phi_{\mathbf{f_i}} \;\; \mu_{\mathbf{f_i}} \;\; \sigma^2_{\mathbf{f_i}}]^T$ et $\mathbf{T_\Omega} = [\Omega \;\; \phi_{\mathbf{\Omega}} \;\; \mu_{\mathbf{\Omega}} \;\; \sigma^2_{\mathbf{\Omega}}]^T$.

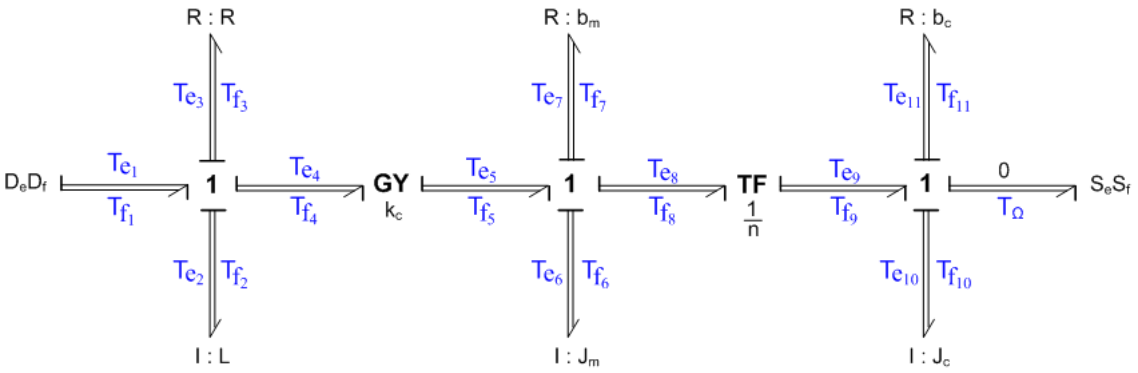


FIG. 4.5 – Modèle bond graph probabiliste bicausal pour la détermination de la tolérance sur la commande en boucle ouverte.

Propagation de la densité de probabilité

L'analyse causale du modèle bond graph probabiliste permet d'écrire les relations suivantes qui gouvernent les différentes FDP associées aux variables de puissance (considérées comme des processus aléatoires) et la manière dont elles sont déduites les unes à partir des autres en respectant les règles énoncées dans la section 4.3.2 :

– L'analyse causale autour de la jonction 1 qui relie les liens 9-10-11-12 permet d'écrire que :

$$\begin{cases} \phi_{\mathbf{f_9}} = \phi_{\mathbf{\Omega}} \\ \phi_{\mathbf{f_{10}}} = \phi_{\mathbf{\Omega}} \\ \phi_{\mathbf{f_{11}}} = \phi_{\mathbf{\Omega}} \end{cases} \tag{4.45}$$

et

$$\phi_{\mathbf{e_9}}(e_9,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(e_9-(e_{10}+e_{11}))\phi_{\mathbf{e_{10}},\mathbf{e_{11}}}(e_{10},e_{11},t)de_{10}de_{11}$$

La FDP conjointe $\phi_{\mathbf{e_{10}},\mathbf{e_{11}}}$ peut être exprimée comme suit :

$$\phi_{\mathbf{e_{10}},\mathbf{e_{11}}}(e_{10},e_{11},t)=\phi_{\mathbf{e_{10}}|\mathbf{e_{11}}=e_{11}}(e_{10},t|e_{11})\phi_{\mathbf{e_{11}}}(e_{11},t)=\phi_{\mathbf{e_{11}}|\mathbf{e_{10}}=e_{10}}(e_{11},t|e_{10})\phi_{\mathbf{e_{10}}}(e_{10},t)$$

En exploitant la causalité sur les liens 10 et 11, les FDP associées aux variables d'effort e_{10} et e_{11} peuvent être déduites des éléments $I:J_C$ et $R:b_c$ et des relations 4.45 en fonction des FDP associées à la vitesse $\Omega(t)$ et à l'accélération $\dot{\Omega}(t)$ de la charge :

$$\phi_{\mathbf{e_{10}}}(e_{10},t)=\frac{1}{J_c}\phi_{\dot{\mathbf{f}}_{\mathbf{10}}}(\frac{e_{10}}{J_c},t)=\frac{1}{J_c}\phi_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(\frac{e_{10}}{J_c},t)$$

$$\phi_{\mathbf{e_{11}}}(e_{11},t)=\frac{1}{b_c}\phi_{\mathbf{f_{11}}}(\frac{e_{11}}{b_c},t)=\frac{1}{b_c}\phi_{\mathbf{\Omega}}(\frac{e_{11}}{b_c},t)$$

L'exploitation du modèle bond graph bicausal permet de déduire que $e_{10}=J_c\dot{\Omega}$ et que $e_{11}=b_c\Omega$. Ainsi, une relation mathématique peut être déduite entre e_{10} et e_{11} : $e_{10}=\frac{J_c}{b_c}\dot{e}_{11}=h_1(e_{11})$. Ensuite la FDP conditionnelle $\phi_{\mathbf{e_{10}}|\mathbf{e_{11}}=e_{11}}$ peut s'écrire : $\phi_{\mathbf{e_{10}}|\mathbf{e_{11}}=e_{11}}=\delta(e_{10}-h_1(e_{11}))$. Ainsi, la FDP $\phi_{\mathbf{e_9}}$ peut être déduite :

$$\phi_{\mathbf{e_9}}(e_9,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(e_9-(e_{10}+e_{11}))\delta(e_{10}-h_1(e_{11},t))\phi_{\mathbf{e_{11}}}(e_{11},t)de_{10}de_{11}$$

Il est à noter que la détermination de la relation mathématique entre e_{10} et e_{11} ne paraît pas systématique car cette relation n'est pas obtenue en exploitant les relations causales du modèle bond graph (gains des chemins et des boucles causaux par exemple) mais les expressions de e_{10} et de e_{11} sont d'abord écrites en fonction de la vitesse $\Omega(t)$ et de l'accélération $\dot{\Omega}(t)$ et ensuite la relation en est déduite. Le choix du sens de la relation a été arbitraire. La proposition d'une méthode bond graph générique pour la détermination de ce type de relation servant à exprimer des fonctions de densité de probabilité conjointes représente l'une des perspectives de ce travail.

Remarque : La variable d'effort e_9 peut s'écrire : $e_9=J_c\dot{\Omega}+b_c\Omega$. La FDP associée $\phi_{\mathbf{e_9}}$ peut être également déterminée à partir de cette relation. Néanmoins dans ce cas, la fonction de densité de probabilité n'est pas déduite du bond graph probabiliste et le bond graph n'intervient que pour exprimer e_9.

L'étape suivante est de passer au calcul numérique pour expliciter la fonction de densité de probabilité. Pour ce faire, Il faut :

1. discrétiser en sélectionnant des ensembles de points dans les domaines de définition. Plusieurs méthodes plus ou moins complexes peuvent être utilisées pour définir ce maillage,
2. évaluer les fonctions intervenant dans les mesures de DIRAC pour chaque point du maillage,
3. approcher chaque mesure de DIRAC δ par une distribution δ_λ (qui peut être uniforme, normale ou harmonique.) tel que $\lim_{\lambda\longrightarrow 0}\delta_\lambda=\delta$. Par exemple la mesure de DIRAC $\delta(e_{10}-h_1(e_{11},t))$ apparaissant dans l'expression de $\phi_{\mathbf{e_9}}$ peut être approchée par une distribution normale : $\delta_\lambda(e_{10}-h_1(e_{11},t))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{1}{2\lambda^2}(e_{10}-h_1)^2\right)$. Le paramètre λ doit être suffisamment petit,

4. utiliser une méthode d'intégration numérique pour évaluer la densité de probabilité $\phi_{\mathbf{e_9}}$.

– L'analyse causale du transformateur permet de déduire que :

$$\begin{cases} \phi_{\mathbf{e_8}} = n\phi_{\mathbf{e_9}}(ne_8, t) \\ \phi_{\mathbf{f_8}} = \frac{1}{n}\phi_{\mathbf{f_9}}(\frac{f_8}{n}, t) \end{cases}$$

– L'analyse causale autour de la jonction 1 qui relie les liens 5-6-7-8 permet d'écrire :

$$\begin{cases} \phi_{\mathbf{f_5}} = \phi_{\mathbf{f_8}} \\ \phi_{\mathbf{f_6}} = \phi_{\mathbf{f_8}} \\ \phi_{\mathbf{f_7}} = \phi_{\mathbf{f_8}} \end{cases}$$

et

$$\phi_{\mathbf{e_5}}(e_5, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(e_5 - (e_6 + e_7 + e_8))\phi_{\mathbf{e_6},\mathbf{e_7},\mathbf{e_8}}(e_6, e_7, e_8, t)de_6de_7de_8$$

La FDP conjointe $\phi_{\mathbf{e_6},\mathbf{e_7},\mathbf{e_8}}$ peut être exprimée par exemple comme suit (cf. théorème 7) :

$$\phi_{\mathbf{e_6},\mathbf{e_7},\mathbf{e_8}}(e_6, e_7, e_8, t) = \phi_{\mathbf{e_8}|\mathbf{e_6}=e_6,\mathbf{e_7}=e_7}(e_8, t|e_6, e_7)\phi_{\mathbf{e_6}|\mathbf{e_7}=e_7}(e_6, t|e_7)\phi_{\mathbf{e_7}}(e_7, t)$$

L'analyse causale sur les liens 6 et 7 permet d'écrire :

$$\begin{cases} \phi_{\mathbf{e_6}} = \frac{1}{J_m}\phi_{\dot{\mathbf{f}}_\mathbf{6}} \\ \phi_{\mathbf{e_7}} = \frac{1}{b_m}\phi_{\mathbf{f_7}} \end{cases} \tag{4.46}$$

L'exploitation du modèle bond graph bicausal permet d'écrire :

$$\begin{cases} e_6 = J_m\dot{f}_8 = nJ_m\dot{f}_9 = nJ_m\dot{\Omega} \\ e_7 = nb_m\Omega \\ e_8 = \frac{1}{n}e_9 = \frac{J_c}{n}\dot{\Omega} + \frac{b_c}{n}\Omega \end{cases} \tag{4.47}$$

Ainsi, il peut être déduit que :

– $e_8 = k_1e_6 + k_2e_7 = h_2(e_6, e_7)$ où $k_1 = \frac{J_c}{n^2J_m}$ et $k_2 = \frac{b_c}{n^2b_m}$ et par conséquent, la FDP conditionnelle $\phi_{\mathbf{e_8}|\mathbf{e_6}=e_6,\mathbf{e_7}=e_7} = \delta(e_8 - h_2(e_6, e_7))$,

– $e_6 = \frac{J_m}{b_m}\dot{e}_7 = h_3(e_7)$ et par conséquent, la FDP conditionnelle $\phi_{\mathbf{e_6}|\mathbf{e_7}=e_7}(e_6, t|e_7) = \delta(e_6 - h_3(e_7))$.

Par conséquent, la FDP $\phi_{\mathbf{e_5}}$ peut s'écrire :

$$\phi_{\mathbf{e_5}}(e_5, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(e_5-(e_6+e_7+e_8))\delta(e_8-h_2(e_6, e_7))\delta(e_6-h_3(e_7))\phi_{\mathbf{e_7}}(e_7, t)de_6de_7de_8 \tag{4.48}$$

– L'analyse causale du gyrateur permet de déduire que :

$$\begin{cases} \phi_{\mathbf{e_4}} = \frac{1}{k_c}\phi_{\mathbf{f_5}} \\ \phi_{\mathbf{f_4}} = k_c\phi_{\mathbf{e_5}} \end{cases}$$

– Pour la jonction 1 qui relie les liens 1-2-3-4, l'analyse causale permet d'écrire :

$$\begin{cases} \phi_{\mathbf{f_1}} = \phi_{\mathbf{f_4}} \\ \phi_{\mathbf{f_2}} = \phi_{\mathbf{f_4}} \\ \phi_{\mathbf{f_3}} = \phi_{\mathbf{f_4}} \end{cases}$$

et

$$\phi_{\mathbf{e_1}}(e_1,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(e_1-(e_2+e_3+e_4))\phi_{\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}|\mathbf{e_4}=e_4}(e_2,e_3,t|e_4)\phi_{\mathbf{e_4}}(e_4,t)de_2de_3de_4$$

L'exploitation du modèle bond graph bicausal permet d'écrire :

$$\begin{cases} e_2=\frac{L}{k_c}\left((nJ_m+\frac{J_c}{n})\ddot{\Omega}+(nb_m+\frac{b_c}{n})\dot{\Omega}\right)\\ e_3=\frac{R}{k_c}\left((nJ_m+\frac{J_c}{n})\dot{\Omega}+(nb_m+\frac{b_c}{n})\Omega\right)\\ e_4=nk_c\Omega \end{cases}$$

Ainsi, il peut être déduit que :
- $e_2=\frac{L}{nk_c^2}\left((nJ_m+\frac{J_c}{n})\ddot{e}_4+(nb_m+\frac{b_c}{n})\dot{e}_4\right)=h_4(e_4)$
- $e_3=\frac{R}{nk_c^2}\left((nJ_m+\frac{J_c}{n})\dot{e}_4+(nb_m+\frac{b_c}{n})e_4\right)=h_5(e_4)$

Par conséquent la FDP conditionnelle $\phi_{\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}|\mathbf{e_4}=e_4}$ peut s'écrire : $\phi_{\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}|\mathbf{e_4}+e_4}(e_2,e_3,t|e_4)=\delta(e_2-h_4(e_4))\delta(e_3-h_5(e_4))$. Ainsi, la FDP $\phi_{\mathbf{e_1}}=\phi_{\mathbf{u}}$ peut être déduite :

$$\phi_{\mathbf{u}}(u,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(u-(e_2+e_3+e_4))\delta(e_2-h_4(e_4))\delta(e_3-h_5(e_4))\phi_{\mathbf{e_4}}(e_4,t)de_2de_3de_4 \tag{4.49}$$

Les relations décrites ci-dessus assurent la propagation de l'incertitude caractérisée par une fonction de densité de probabilité tout le long de la structure du modèle et ce, de la double source associée à la vitesse de la charge au double détecteur associée à la tension d'alimentation du système. Néanmoins, la propagation de l'incertitude peut également être décrite en utilisant des grandeurs caractéristiques à savoir l'espérance et la variance.

Propagation des grandeurs caractéristiques (espérance et variance)

Pour la propagation de l'espérance tout le long de la structure du système, l'analyse causale du modèle bond graph probabiliste (figure 4.5) permet d'écrire les relations qui gouvernent les différentes espérances associées aux différentes variables de puissance :

- L'analyse causale autour de la jonction 1 qui relie les liens 9-10-11-12 permet d'écrire que :

$$\begin{cases} \mu_{\mathbf{f_9}}(t)=\mu_{\mathbf{\Omega}}(t)\\ \mu_{\mathbf{f_{10}}}(t)=\mu_{\mathbf{\Omega}}(t)\\ \mu_{\mathbf{f_{11}}}(t)=\mu_{\mathbf{\Omega}}(t) \end{cases}$$

et

$$\mu_{\mathbf{e_9}}(t)=\mu_{\mathbf{e_{10}}}(t)+\mu_{\mathbf{e_{11}}}(t)$$

En exploitant la causalité sur les liens 10 et 11, les espérances associées aux variables d'effort e_{10} et e_{11} peuvent être déduites à partir de la connaissance des espérances associées à la vitesse $\Omega(t)$ et à l'accélération $\dot{\Omega}(t)$ de la charge :

$$\mu_{\mathbf{e_{10}}}(t)=J_c\mu_{\dot{\mathbf{f}}_{\mathbf{10}}}(t)=J_c\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t)$$

$$\mu_{\mathbf{e_{11}}}(t)=b_c\mu_{\mathbf{f_{10}}}(t)=b_c\mu_{\mathbf{\Omega}}(t)$$

Par conséquent, l'espérance associée à la variable de puissance e_9 peut s'écrire :

$$\mu_{\mathbf{e_9}}(t)=J_c\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t)+b_c\mu_{\mathbf{\Omega}}(t)$$

– L'analyse causale du transformateur permet de déduire que :

$$\begin{cases} \mu_{\mathbf{e_8}}(t) = \frac{1}{n}\mu_{e_9}(t) = \frac{1}{n}\left(J_c\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t) + b_c\mu_{\mathbf{\Omega}}(t)\right) \\ \mu_{\mathbf{f_8}}(t) = n\mu_{\mathbf{f_9}}(t) = n\mu_{\mathbf{\Omega}}(t) \end{cases}$$

– L'analyse causale autour de la jonction 1 qui relie les liens 5-6-7-8 permet d'écrire que :

$$\begin{cases} \mu_{\mathbf{f_5}}(t) = \mu_{\mathbf{f_8}}(t) = n\mu_{\mathbf{\Omega}}(t) \\ \mu_{\mathbf{f_7}}(t) = \mu_{\mathbf{f_8}}(t) = n\mu_{\mathbf{\Omega}}(t) \\ \mu_{\mathbf{f_6}}(t) = \mu_{\mathbf{f_8}}(t) = n\mu_{\mathbf{\Omega}}(t) \end{cases}$$

et

$$\mu_{\mathbf{e_5}}(t) = \mu_{\mathbf{e_6}}(t) + \mu_{\mathbf{e_7}}(t) + \mu_{\mathbf{e_8}}(t)$$

Les espérances associées aux variables d'effort e_6 et e_7 peuvent être déduites en exploitant la causalité sur les liens 6 et 7 :

$$\begin{cases} \mu_{\mathbf{e_6}}(t) = J_m\mu_{\dot{\mathbf{f}}_\mathbf{6}}(t) = J_m\mu_{\dot{\mathbf{f}}_\mathbf{8}}(t) = nJ_m\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t) \\ \mu_{\mathbf{e_7}}(t) = b_m\mu_{\mathbf{f_7}}(t) = nb_m\mu_{\mathbf{\Omega}}(t) \end{cases}$$

Ainsi, l'espérance associée à e_5 est donnée par :

$$\mu_{\mathbf{e_5}}(t) = \left(nJ_m + \frac{J_c}{n}\right)\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t) + \left(nb_m + \frac{b_c}{n}\right)\mu_{\mathbf{\Omega}}(t)$$

– L'analyse causale du gyrateur permet d'écrire :

$$\begin{cases} \mu_{\mathbf{e_4}}(t) = k_c\mu_{\mathbf{f_5}}(t) = nk_c\mu_{\mathbf{\Omega}}(t) \\ \mu_{\mathbf{f_4}}(t) = \frac{1}{k_c}\mu_{\mathbf{e_5}}(t) = \frac{1}{k_c}\left(nJ_m + \frac{J_c}{n}\right)\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t) + \frac{1}{k_c}\left(nb_m + \frac{b_c}{n}\right)\mu_{\mathbf{\Omega}}(t) \end{cases}$$

– L'analyse causale autour de la jonction 1 interconnectant les liens 1-2-3-4 permet d'écrire :

$$\begin{cases} \mu_{\mathbf{f_1}}(t) = \mu_{\mathbf{f_4}}(t) \\ \mu_{\mathbf{f_2}}(t) = \mu_{\mathbf{f_4}}(t) \\ \mu_{\mathbf{f_3}}(t) = \mu_{\mathbf{f_4}}(t) \end{cases}$$

et

$$\mu_{\mathbf{u}}(t) = \mu_{\mathbf{e_1}}(t) = \mu_{\mathbf{e_2}}(t) + \mu_{\mathbf{e_3}}(t) + \mu_{\mathbf{e_4}}(t)$$

En exploitant la causalité sur le lien 3, l'espérance associée au processus aléatoire e_3 peut être déduite :

$$\mu_{\mathbf{e_3}}(t) = R\mu_{\mathbf{f_3}}(t) = R\left[\frac{1}{k_c}\left(nJ_m + \frac{J_c}{n}\right)\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t) + \frac{1}{k_c}\left(nb_m + \frac{b_c}{n}\right)\mu_{\mathbf{\Omega}}(t)\right]$$

En exploitant la causalité sur le lien 2, l'espérance associée au processus aléatoire e_2 peut être déduite :

$$\mu_{\mathbf{e_2}}(t) = L\mu_{\dot{\mathbf{f}}_\mathbf{2}}(t) = L\mu_{\dot{\mathbf{f}}_\mathbf{4}}(t) = \frac{L}{k_c}\mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{5}}(t) = \frac{L}{k_c}\left(\mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}}(t) + \mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(t) + \mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(t)\right)$$

Or

$$\begin{cases} \mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}}(t) = J_m\mu_{\ddot{\mathbf{f}}_\mathbf{6}}(t) = nJ_m\mu_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(t) \\ \mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(t) = b_m\mu_{\dot{\mathbf{f}}_\mathbf{7}}(t) = nb_m\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t) \\ \mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(t) = \frac{1}{n}\left(J_c\mu_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(t) + b_c\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t)\right) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\mu_{\mathbf{e_2}}(t) = \frac{L}{k_c}\left[\left(nJ_m + \frac{J_c}{n}\right)\mu_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(t) + \left(nb_m + \frac{b_c}{n}\right)\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t)\right]$$

et par conséquent, l'espérance associée à la tension d'alimentation u peut être déduite :

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbf{u}}(t) =& \frac{L}{k_c}\left(nJ_m + \frac{J_c}{n}\right)\mu_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(t) + \frac{1}{k_c}\left[L\left(nb_m + \frac{b_c}{n}\right) + R\left(nJ_m + \frac{J_c}{n}\right)\right]\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t) \\ &+ \left[\frac{R}{k_c}\left(nb_m + \frac{b_c}{n}\right)\mu_{\mathbf{R}} + nk_c\right]\mu_{\mathbf{\Omega}}(t)\end{aligned}$$

Nous remarquons que dans un système linéaire, l'espérance se propage comme des valeurs nominales déterministes et ce grâce, à sa propriété de linéarité (propriété 1).

Pour la propagation de la variance, l'analyse causale du modèle bond graph probabiliste permet d'écrire les relations suivantes :

– L'analyse causale autour de la jonction 1 reliant les liens 9-10-11-12 permet d'écrire :

$$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{f_9}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{\Omega}}(t) \\ \sigma^2_{\mathbf{f_{10}}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{\Omega}}(t) \\ \sigma^2_{\mathbf{f_{11}}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{\Omega}}(t)\end{cases}$$

et

$$\sigma^2_{\mathbf{e_9}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{e_{10}}}(t) + \sigma^2_{\mathbf{e_{11}}}(t) + 2\sigma_{\mathbf{e_{10}e_{11}}}(t)$$

Les variances associées aux processus aléatoires e_{10} et e_{11} peuvent être déduites en exploitant la causalité sur les liens 10 et 11 :

$$\sigma^2_{\mathbf{e_{10}}}(t) = J_c^2\sigma^2_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t)$$

$$\sigma^2_{\mathbf{e_{11}}}(t) = b_c^2\sigma^2_{\mathbf{\Omega}}(t)$$

et la covariance $\sigma_{\mathbf{e_{10}e_{11}}}(t)$ s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathbf{e_{10}e_{11}}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e_{10}e_{11}\phi_{\mathbf{e_{10},e_{11}}}(e_{10},e_{11},t)de_{10}de_{11} - \mu_{\mathbf{e_{10}}}(t)\mu_{\mathbf{e_{11}}}(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e_{10}e_{11}\phi_{\mathbf{e_{10}|e_{11}}=e_{11}}(e_{10},t|e_{11})\phi_{\mathbf{e_{11}}}(e_{11},t)de_{10}de_{11} - \mu_{\mathbf{e_{10}}}(t)\mu_{\mathbf{e_{11}}}(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e_{10}e_{11}\delta(e_{10} - h_1(e_{11}))\phi_{\mathbf{e_{11}}}(e_{11},t)de_{10}de_{11} - \mu_{\mathbf{e_{10}}}(t)\mu_{\mathbf{e_{11}}}(t)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sigma^2_{\mathbf{e_9}}(t) = J_c^2\sigma^2_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t) + b_c^2\sigma^2_{\mathbf{\Omega}}(t) + 2\sigma_{\mathbf{e_{10}e_{11}}}(t)$$

– L'analyse causale du transformateur permet d'écrire :

$$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{e_8}}(t) = \frac{1}{n^2}\sigma^2_{\mathbf{e_9}}(t) = \frac{1}{n^2}\left(J_c^2\sigma^2_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t) + b_c^2\sigma^2_{\mathbf{\Omega}}(t) + 2\sigma_{\mathbf{e_{10}e_{11}}}(t)\right) \\ \sigma^2_{\mathbf{f_8}}(t) = n^2\sigma^2_{\mathbf{f_9}}(t) = n^2\sigma^2_{\mathbf{\Omega}}(t)\end{cases}$$

– Pour la jonction 1 reliant les liens 5-6-7-8, l'analyse causale permet d'écrire :

$$\begin{cases}\sigma^2_{\mathbf{f_5}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{f_8}}(t) = n^2\sigma^2_{\mathbf{\Omega}}(t) \\ \sigma^2_{\mathbf{f_6}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{f_8}}(t) = n^2\sigma^2_{\mathbf{\Omega}}(t) \\ \sigma^2_{\mathbf{f_7}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{f_8}}(t) = n^2\sigma^2_{\mathbf{\Omega}}(t)\end{cases}$$

et

$$\sigma^2_{\mathbf{e_5}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{e_6}}(t) + \sigma^2_{\mathbf{e_7}}(t) + \sigma^2_{\mathbf{e_8}}(t) + 2\sigma_{\mathbf{e_6e_7}}(t) + 2\sigma_{\mathbf{e_6e_8}}(t) + 2\sigma_{\mathbf{e_7e_8}}(t)$$

où

$$\begin{cases} \sigma^2_{\mathbf{e_6}}(t) = J_m^2 \sigma^2_{\dot{\mathbf{f}}_\mathbf{6}}(t) = n^2 J_m^2 \sigma^2_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t) \\ \sigma^2_{\mathbf{e_7}}(t) = b_m^2 \sigma^2_{\mathbf{f_7}}(t) = n^2 b_m^2 \sigma^2_{\mathbf{\Omega}}(t) \end{cases}$$

Les covariances $\sigma_{\mathbf{e_6e_7}}(t)$, $\sigma_{\mathbf{e_6e_8}}(t)$ et $\sigma_{\mathbf{e_7e_8}}(t)$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{e_6e_7}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e_6 e_7 \phi_{\mathbf{e_6},\mathbf{e_7}}(e_6, e_7, t) de_6 de_7 - \mu_{\mathbf{e_6}}(t)\mu_{\mathbf{e_7}}(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e_6 e_7 \delta(e_6 - h_3(e_7))\phi_{\mathbf{e_7}}(e_7, t) de_6 de_7 - \mu_{\mathbf{e_6}}(t)\mu_{\mathbf{e_7}}(t) \end{aligned}$$

$$\sigma_{\mathbf{e_6e_8}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e_6 e_8 \phi_{\mathbf{e_6},\mathbf{e_8}}(e_6, e_8, t) de_6 de_8 - \mu_{\mathbf{e_6}}(t)\mu_{\mathbf{e_8}}(t)$$

$$\sigma_{\mathbf{e_7e_8}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e_7 e_8 \phi_{\mathbf{e_7},\mathbf{e_8}}(e_7, e_8, t) de_7 de_8 - \mu_{\mathbf{e_7}}(t)\mu_{\mathbf{e_8}}(t)$$

où $\phi_{\mathbf{e_6},\mathbf{e_8}}(e_6, e_8, t) = \phi_{\mathbf{e_8}|\mathbf{e_6}=e_6}(e_8, t|e_6)\phi_{\mathbf{e_6}}(e_6, t)$ et $\phi_{\mathbf{e_7},\mathbf{e_8}}(e_7, e_8, t) = \phi_{\mathbf{e_8}|\mathbf{e_7}=e_7}(e_8, t|e_7)$ $\phi_{\mathbf{e_7}}(e_7, t)$. À partir du système d'équations 4.47 exprimé à partir du modèle bond graph bicausal, il peut être déduit[12] que $e_8 = k_1 e_6 + k_3 \int e_6 dt = h_6(e_6)$ et $e_8 = k_2 e_7 + k_4 \dot{e}_7 = h_7(e_7)$ où $k_1 = \frac{J_c}{n^2 J_m}$, $k_2 = \frac{b_c}{n^2 b_m}$, $k_3 = \frac{b_c}{n^2 J_m}$ et $k_4 = \frac{J_c}{n^2 b_m}$. Ainsi, les FDP conditionnelles $\phi_{\mathbf{e_8}|\mathbf{e_6}=e_6}$ et $\phi_{\mathbf{e_8}|\mathbf{e_7}=e_7}$ peuvent être exprimées comme suit : $\phi_{\mathbf{e_8}|\mathbf{e_6}=e_6} = \delta(e_8 - h_6(e_6))$ et $\phi_{\mathbf{e_8}|\mathbf{e_7}=e_7} = \delta(e_8 - h_7(e_7))$. Les FDP marginales $\phi_{\mathbf{e_6}}$ et $\phi_{\mathbf{e_7}}$ sont données par l'équation 4.46. Ensuite, les covariances $\sigma_{\mathbf{e_6e_8}}(t)$ et $\sigma_{\mathbf{e_7e_8}}(t)$ peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_{\mathbf{e_6e_8}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e_6 e_8 \delta(e_8 - h_6(e_6))\phi_{\mathbf{e_6}}(e_6, t) de_6 de_8 - \mu_{\mathbf{e_6}}(t)\mu_{\mathbf{e_8}}(t)$$

$$\sigma_{\mathbf{e_7e_8}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e_7 e_8 \delta(e_8 - h_7(e_7))\phi_{\mathbf{e_7}}(e_7, t) de_7 de_8 - \mu_{\mathbf{e_7}}(t)\mu_{\mathbf{e_8}}(t)$$

– L'analyse causale du gyrateur permet d'écrire :

$$\begin{cases} \sigma^2_{\mathbf{e_4}}(t) = k_c^2 \sigma^2_{\mathbf{f_5}}(t) = n^2 k_c^2 \sigma^2_{\mathbf{\Omega}}(t) \\ \sigma^2_{\mathbf{f_4}}(t) = \frac{1}{k_c^2} \sigma^2_{\mathbf{e_5}}(t) \end{cases} \tag{4.50}$$

– L'analyse causale autour de la jonction 1 reliant les liens 1-2-3-4 permet d'écrire :

$$\begin{cases} \sigma^2_{\mathbf{f_1}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{f_4}}(t) \\ \sigma^2_{\mathbf{f_2}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{f_4}}(t) \\ \sigma^2_{\mathbf{f_3}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{f_4}}(t) \end{cases}$$

et

$$\sigma^2_{\mathbf{u}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{e_1}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{e_2}}(t) + \sigma^2_{\mathbf{e_3}}(t) + \sigma^2_{\mathbf{e_4}}(t) + 2\sigma_{\mathbf{e_2e_3}}(t) + 2\sigma_{\mathbf{e_2e_4}}(t) + 2\sigma_{\mathbf{e_3e_4}}(t) \tag{4.51}$$

La variance $\sigma^2_{\mathbf{e_3}}(t)$ associée à la variable de puissance e_3 est donnée par

$$\sigma^2_{\mathbf{e_3}}(t) = R^2 \sigma^2_{\mathbf{f_3}}(t) = \frac{R^2}{k_c^2} \sigma^2_{\mathbf{e_5}}(t)$$

[12] Par abus de notation, nous désignerons la primitive par $\int dt$.

La variance $\sigma^2_{\mathbf{e_2}}(t)$ associée à la variable de puissance e_2 est donnée par

$$\sigma^2_{\mathbf{e_2}}(t) = L^2\sigma^2_{\dot{\mathbf{f}}_\mathbf{2}}(t) = L^2\sigma^2_{\dot{\mathbf{f}}_\mathbf{4}}(t) = \frac{L^2}{k_c^2}\sigma^2_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{5}}(t) \tag{4.52}$$

Or, la variance associée à la dérivée de la variable de puissance $e_5(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{5}}(t) &= \sigma^2_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}}(t) + \sigma^2_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(t) + \sigma^2_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(t) + 2\sigma_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(t) + 2\sigma_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(t) + 2\sigma_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(t)\\ &= n^2J_m^2\sigma^2_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(t) + n^2b_m^2\sigma^2_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t) + \frac{b_c^2}{n^2}\sigma^2_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t) + \frac{J_c^2}{n^2}\sigma^2_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(t) + \frac{2}{n^2}\sigma_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{10}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{11}}(t) + 2\sigma_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(t)\\ &+ 2\sigma_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(t) + 2\sigma_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(t)\end{aligned}$$

Les covariances $\sigma_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{10}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{11}}(t)$, $\sigma_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(t)$, $\sigma_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(t)$ et $\sigma_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(t)$ sont données par :

$$\begin{aligned}\sigma_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{10}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{11}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{e}_{10}\dot{e}_{11}\phi_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{10}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{11}}(\dot{e}_{10},\dot{e}_{11},t)d\dot{e}_{10}d\dot{e}_{11} - \mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{10}}(t)\mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{11}}(t)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{e}_{10}\dot{e}_{11}\delta(\dot{e}_{10} - h_8(\dot{e}_{11}))\phi_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{11}}(\dot{e}_{11},t)d\dot{e}_{10}d\dot{e}_{11} - \mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{10}}(t)\mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{11}}(t)\end{aligned}$$

où $h_1(\dot{e}_{11}) = \frac{J_c}{b_c}\ddot{e}_{11}$, $\phi_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{11}}(\dot{e}_{11},t) = \frac{1}{b_c}\phi_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(\frac{\dot{e}_{11}}{b_c},t)$, $\mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{10}}(t) = J_c\mu_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(t)$ et $\mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{11}}(t) = b_c\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t)$.

$$\begin{aligned}\sigma_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{e}_6\dot{e}_7\phi_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(\dot{e}_6,\dot{e}_7,t)d\dot{e}_6d\dot{e}_7 - \mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}}(t)\mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(t)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{e}_6\dot{e}_7\delta(\dot{e}_6 - h_3(\dot{e}_7))\phi_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(\dot{e}_7,t)d\dot{e}_6d\dot{e}_7 - \mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}}(t)\mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(t)\end{aligned}$$

où $h_3(\dot{e}_7) = \frac{J_m}{b_m}\ddot{e}_7$, $\phi_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(\dot{e}_7,t) = \frac{1}{nb_m}\phi_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(\frac{\dot{e}_7}{nb_m},t)$, $\mu_{\dot{e}_6}(t) = nJ_m\mu_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(t)$ et $\mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(t) = nb_m\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t)$.

$$\begin{aligned}\sigma_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{e}_6\dot{e}_8\phi_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(\dot{e}_6,\dot{e}_8,t)d\dot{e}_6d\dot{e}_8 - \mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}}(t)\mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(t)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{e}_6\dot{e}_8\delta(\dot{e}_8 - h_6(\dot{e}_6))\phi_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}}(\dot{e}_6,t)d\dot{e}_6d\dot{e}_8 - \mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}}(t)\mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(t)\end{aligned}$$

où $h_6(\dot{e}_6) = \frac{J_c}{n^2J_m}\dot{e}_6 + \frac{b_c}{n^2J_m}\int \dot{e}_6dt$, $\phi_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}}(\dot{e}_6,t) = \frac{1}{nJ_m}\phi_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(\frac{\dot{e}_6}{nJ_m},t)$, $\mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{6}}(t) = nJ_m\mu_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(t)$ et $\mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(t) = \frac{1}{n}\left(J_c\mu_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(t) + b_c\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t)\right)$.

$$\begin{aligned}\sigma_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{e}_7\dot{e}_8\phi_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(\dot{e}_7,\dot{e}_8,t)d\dot{e}_7d\dot{e}_8 - \mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(t)\mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(t)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{e}_7\dot{e}_8\delta(\dot{e}_8 - h_7(\dot{e}_7))\phi_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(\dot{e}_7,t)d\dot{e}_7d\dot{e}_8 - \mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(t)\mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{8}}(t)\end{aligned}$$

où $h_7(\dot{e}_7) = \frac{b_c}{n^2b_m}\dot{e}_7 + \frac{J_c}{n^2b_m}\ddot{e}_7$, $\phi_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(\dot{e}_7,t) = \frac{1}{nb_m}\phi_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(\frac{\dot{e}_7}{nb_m},t)$ et $\mu_{\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{7}}(t) = nJ_m\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t)$.

Les covariances $\sigma_{\mathbf{e_2e_3}}(t)$, $\sigma_{\mathbf{e_2e_4}}(t)$ et $\sigma_{\mathbf{e_3e_4}}(t)$ figurant dans l'équation 4.51 sont définies par :

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathbf{e_2e_3}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e_2e_2\phi_{\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}}(e_2,e_3,t)de_2de_3 - \mu_{\mathbf{e_2}}(t)\mu_{\mathbf{e_3}}(t)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e_2e_3\delta(e_2 - h_8)(e_3)\phi_{\mathbf{e_3}}(e_3,t)de_2de_3 - \mu_{\mathbf{e_2}}(t)\mu_{\mathbf{e_3}}(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathbf{e_2e_4}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e_2e_4\phi_{\mathbf{e_2},\mathbf{e_4}}(e_2,e_4,t)de_2de_4 - \mu_{\mathbf{e_2}}(t)\mu_{\mathbf{e_4}}(t)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e_2e_4\delta(e_2-h_4(e_4))\phi_{\mathbf{e_4}}(e_4,t)de_2de_4 - \mu_{\mathbf{e_2}}(t)\mu_{\mathbf{e_4}}(t)\end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathbf{e_3e_4}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e_3e_4\phi_{\mathbf{e_3},\mathbf{e_4}}(e_3,e_4,t)de_3de_4 - \mu_{\mathbf{e_3}}(t)\mu_{\mathbf{e_4}}(t)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e_3e_4\delta(e_3-h_5(e_4))\phi_{\mathbf{e_4}}(e_4,t)de_3de_4 - \mu_{\mathbf{e_3}}(t)\mu_{\mathbf{e_4}}(t)\end{aligned}$$

où $h_8(e_3) = \frac{L}{R}\dot{e}_3(t)$, $h_4(e_4) = \frac{L}{nk_c^2}\left((nJ_m + \frac{J_c}{n})\ddot{e}_4 + (nb_m + \frac{b_c}{n})\dot{e}_4\right)$ et
$h_5(e_4) = \frac{R}{nk_c^2}\left((nJ_m + \frac{J_c}{n})\dot{e}_4 + (nb_m + \frac{b_c}{n})e_4\right)$.

En complément des grandeurs caractéristiques ($\mu_u(t)$ et $\sigma_u^2(t)$) associée à la tension d'alimentation u, la notion d'intervalle de confiance peut être utilisée (cf. section 4.1.3). Pour déterminer l'intervalle de confiance à un certain niveau (c'est-à-dire pour donner un intervalle de solutions garanti à un certain pourcentage), il faut calculer la fonction de répartition associée à la commande u qui n'est d'autre que la primitive de la fonction de densité de probabilité marginale associée à u définie par l'équation 4.49.

Synthèse de tolérance sur la résistance R

Dans cette section, nous cherchons à déterminer la tolérance sur la résistance R du système étudié (figure 4.2) en tenant compte des spécifications sur la trajectoire de la sortie et de son incertitude. Le critère d'inversibilité 3 (section 1.3.3, chapitre 1) est vérifié et le modèle bond graph bicausal associé à cet aspect du dimensionnement est donné figure 4.6. L'analyse structurelle du modèle bond graph bicausal permet de déduire l'ordre l'essentialité $n'_{1e} = 2$ associé à a vitesse de la charge qui est l'ordre de dérivation maximal nécessaire pour exprimer le modèle inverse d'ordre minimal. Ainsi la trajectoire spécifiée (équation 4.35) pour la sortie est suffisamment dérivable.

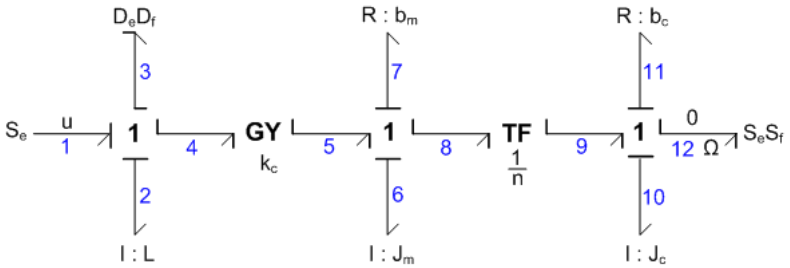


FIG. 4.6 – Modèle bond graph bicausal pour la synthèse paramétrique de la résistance R.

Nous supposons que la source de tension délivre une tension u constante au cours du temps. Dans le cadre de la synthèse de tolérance, cette entrée représente une donnée déterministe du cahier des charges. La vitesse de la charge est considérée comme un processus stochastique dont l'évolution au cours du temps dépend d'une variable aléatoire A (équation 4.35). Nous supposons que le cahier des charges est en adéquation avec la structure retenue pour le modèle de conception. Les FDP associées à ce processus et aux dérivées première et seconde sont données par les équations 4.36, 4.37 et 4.38. La figure 4.7 présente le modèle bond graph probabiliste

associé à ce problème de synthèse de tolérance : c'est un modèle bond graph multiliens qui permet de propager à la fois la puissance, les variables de puissance, les FDP et les deux grandeurs caractéristiques (espérance et variance) où $\mathbf{T_{e_i}} = [e_i \quad \phi_{\mathbf{e_i}} \quad \mu_{\mathbf{e_i}} \quad \sigma^2_{\mathbf{e_i}}]^T$, $\mathbf{T_{f_i}} = [f_i \quad \phi_{\mathbf{f_i}} \quad \mu_{\mathbf{f_i}} \quad \sigma^2_{\mathbf{f_i}}]^T$ et $\mathbf{T_\Omega} = [\Omega \quad \phi_{\mathbf{\Omega}} \quad \mu_{\mathbf{\Omega}} \quad \sigma^2_{\mathbf{\Omega}}]^T$.

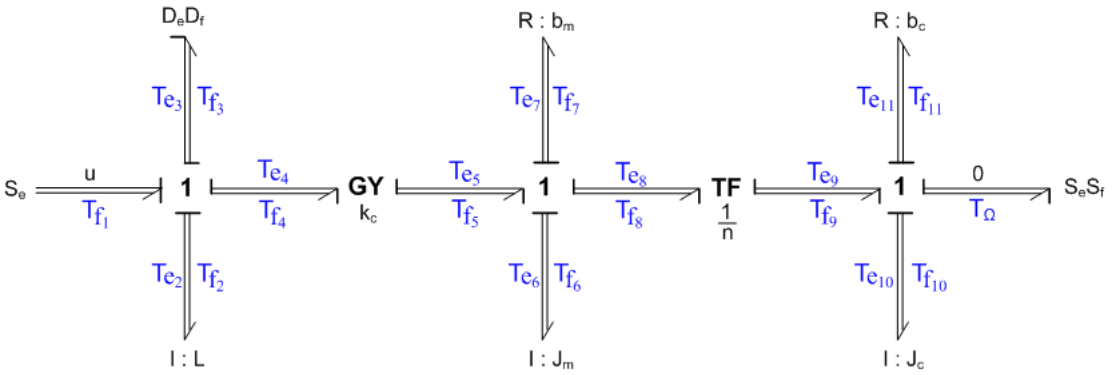


FIG. 4.7 – Modèle bond graph probabiliste pour la synthèse de tolérance sur la résistance R.

Détermination de la fonction de densité de probabilité

L'analyse causale des jonctions 1 reliant les liens 9-10-11-12 et les liens 5-6-7-8, du transformateur et du gyrateur donne les mêmes équations que celles obtenues pour la synthèse de tolérance sur la commande en boucle ouverte. L'analyse causale de la jonction 1 reliant les liens 1-2-3-4 permet d'écrire :

$$\phi_{\mathbf{f_3}} = \phi_{\mathbf{f_4}} = k_c \phi_{\mathbf{e_5}}$$

où $\phi_{\mathbf{e_5}}$ est la FDP définie par l'équation 4.48 et

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathbf{e_3}}(e_3, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4}}(e_2, e_3, e_4, t) de_2 de_4 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(e_3 - (u - e_2 - e_4)) \phi_{\mathbf{e_2},\mathbf{e_4}}(e_2, e_4, t) de_2 de_4 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(e_3 - (u - e_2 - e_4)) \delta(e_2 - h_4(e_4)) \phi_{\mathbf{e_4}}(e_4, t) de_2 de_4
\end{aligned}$$

où $h_4(e_4) = \frac{L}{nk_c^2}\left((nJ_m + \frac{J_c}{n})\ddot{e}_4 + (nb_m + \frac{b_c}{n})\dot{e}_4\right)$.

La détermination de la fonction de densité de probabilité associée à la résistance R passe par la détermination de la fonction de densité de probabilité conjointe $\phi_{\mathbf{e_3},\mathbf{f_3}}$ qui est différente du produit des deux FDP marginales $\phi_{\mathbf{e_3}}$ et $\phi_{\mathbf{f_3}}$ (car les deux processus aléatoires sont dépendants) :

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathbf{R}}(R) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{R},\mathbf{e_3},\mathbf{f_3}}(R, e_3, f_3, t) de_3 df_3 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(R - \left(\frac{e_3}{f_3}\right)\right) \phi_{\mathbf{e_3},\mathbf{f_3}}(e_3, f_3, t) de_3 df_3
\end{aligned}$$

L'exploitation du modèle bond graph bicausal permet d'écrire :

$$\begin{cases}
f_3 = \frac{1}{k_c}\left[\left(nJ_m + \frac{J_c}{n}\right)\dot{\Omega} + \left(nb_m + \frac{b_c}{n}\right)\Omega\right] \\
e_3 = u - k_c f_5 - L f_3
\end{cases}$$

Or $f_3 = \frac{1}{k_c}\left[\left(nJ_m + \frac{J_c}{n}\right)\frac{1}{n}\dot{f}_5 + \left(nb_m + \frac{b_c}{n}\right)\frac{1}{n}f_5\right] = h_9(f_5)$. Par conséquent, $e_3 = u - k_c h_9^{-1}(f_3) - Lf_3 = h_{10}(f_3)$. Ainsi, $\phi_{\mathbf{R}}$ peut être donnée par :

$$\phi_{\mathbf{R}}(R) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(R - \left(\frac{e_3}{f_3}\right)\right)\delta(e_3 - h_{10}(f_3))\phi_{\mathbf{f_3}}(f_3, t)de_3df_3$$

Détermination des grandeurs caractéristiques (espérance et variance)
L'analyse causale des jonctions 1 reliant les liens 9-10-11-12 et les liens 5-6-7-8, du transformateur et du gyrateur donne les mêmes équations que celles obtenues pour la synthèse de tolérance sur la commande en boucle ouverte. L'analyse causale de la jonction 1 reliant les liens 1-2-3-4 permet d'écrire :

$$\mu_{\mathbf{f_3}}(t) = \mu_{\mathbf{f_4}}(t) = \frac{1}{k_c}\mu_{\mathbf{e_5}}(t) = \frac{1}{k_c}\left[\left(nJ_m + \frac{J_c}{n}\right)\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t) + \left(nb_m + \frac{b_c}{n}\right)\mu_{\mathbf{\Omega}}(t)\right]$$

et

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbf{e_3}}(t) &= \mu_{\mathbf{e_1}}(t) - \mu_{\mathbf{e_2}}(t) - \mu_{\mathbf{e_4}}(t)\\ &= u - \frac{L}{k_c}\left[\left(nJ_m + \frac{J_c}{n}\right)\mu_{\ddot{\mathbf{\Omega}}}(t) + \left(nb_m + \frac{b_c}{n}\right)\mu_{\dot{\mathbf{\Omega}}}(t)\right] - nk_c\mu_{\mathbf{\Omega}}(t)\end{aligned}$$

L'analyse causale des variances autour de la jonction 1 reliant les liens 1-2-3-4 permet de déduire :

$$\sigma^2_{\mathbf{f_3}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{f_4}}(t)$$

avec $\sigma^2_{\mathbf{f_4}}(t)$ définie par l'équation 4.50 et

$$\sigma^2_{\mathbf{e_3}}(t) = \sigma^2_{\mathbf{e_1}}(t) + \sigma^2_{\mathbf{e_2}}(t) + \sigma^2_{\mathbf{e_4}}(t) + 2\sigma_{\mathbf{e_1e_2}}(t) + 2\sigma_{\mathbf{e_1e_4}}(t) + 2\sigma_{\mathbf{e_2e_4}}(t)$$

avec $\sigma^2_{\mathbf{e_1}}(t) = \sigma_{\mathbf{e_1e_2}}(t) = \sigma_{\mathbf{e_1e_4}}(t) = 0$ parce que $e_1(t) = u(t)$ est une grandeur déterministe, $\sigma^2_{\mathbf{e_2}}(t)$ (resp. $\sigma^2_{\mathbf{e_4}}(t)$, $\sigma_{\mathbf{e_2e_4}}(t)$) est définie par l'équation 4.52 (resp. équation 4.50, équation 4.53).

La détermination des grandeurs caractéristiques associées à la résistance R se fait à partir de la fonction de densité de probabilité conjointe $\phi_{\mathbf{e_3},\mathbf{f_3}}$:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbf{R}} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e_3}{f_3}\right)\phi_{\mathbf{e_3},\mathbf{f_3}}de_3df_3\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e_3}{f_3}\right)\delta(e_3 - h_{10}(f_3))\phi_{\mathbf{f_3}}(f_3, t)de_3df_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\mathbf{R}} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e_3}{f_3}\right)^2\phi_{\mathbf{e_3},\mathbf{f_3}}de_3df_3 - \mu^2_{\mathbf{R}}\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e_3}{f_3}\right)^2\delta(e_3 - h_{10}(f_3))\phi_{\mathbf{f_3}}(f_3, t)de_3df_3 - \mu^2_{\mathbf{R}}\end{aligned}$$

Conclusion

Dans le chapitre 2, nous nous sommes intéressés à la modélisation bond graph (outil support de la méthodologie de dimensionnement) des incertitudes paramétriques qui peuvent être présentes dans les systèmes mécatroniques. Dans le chapitre 3, nous nous sommes intéressés à l'aspect synthèse paramétrique de la méthodologie, notamment pour la prise en compte des incertitudes (synthèse de tolérances). Dans ce chapitre, le travail de synthèse est approfondi en utilisant les outils probabilistes. Les contributions de ce chapitre peuvent être résumées comme suit :

- Présentation du problème stochastique dynamique inverse : le principe de conservation de probabilité a été établi pour un modèle dynamique stochastique inverse (inversion entrées /sorties et inversion paramètres/sorties) et une méthode générique pour la détermination des fonctions de densité de probabilité a été mise en place (ce travail est une adaptation des travaux de Li et Chen [Li 06b, Li 08, Che09b, Li 09] portant sur des systèmes dynamiques stochastiques directs). Indépendamment du formalisme bond graph, cette formulation représente un traitement global du problème.
- Proposition d'un modèle bond graph probabiliste qui permet d'établir la propagation des fonctions de densité de probabilité et des grandeurs caractéristiques (espérance et variance) tout le long de la structure du modèle. Ce modèle bond graph offre une description énergétique et probabiliste à la fois. En effet, une fonction de densité de probabilité et des grandeurs caractéristiques sont associées à chaque variable d'énergie et de puissance du modèle bond graph. La propagation de ces grandeurs le long du modèle bond graph probabiliste repose en grande partie sur une analyse causale : c'est la causalité/bicausalité qui permet d'orienter cette propagation de l'incertitude. Ainsi, par rapport à la démarche globale, le modèle bond graph probabiliste permet une démarche locale dans la propagation de l'aléa tout le long de la structure du modèle de conception. Cette démarche peut être avantageuse dans le cas où le concepteur veut synthétiser l'impact de l'incertitude considérée en entrée du modèle inverse sur les différents composants du système à concevoir.

Ce travail représente une première réflexion sur l'approche probabiliste dans la démarche du dimensionnement sur des critères dynamiques et énergétiques.

Conclusion générale

Le premier chapitre, essentiellement bibliographique, a présenté le contexte général dans lequel s'inscrit cette thèse. Après une brève introduction aux systèmes mécatroniques et à leur architecture générique d'un point de vue énergétique, les différents facteurs d'incertitude affectant ces systèmes ont été présentés. Dans ce contexte de la prise en compte des incertitudes, différents outils de modélisation et d'étude des systèmes mécatroniques incertains ont été rappelés, notamment la représentation d'état des systèmes incertains, l'analyse de sensibilité, l'arithmétique par intervalles et l'approche probabiliste. Ensuite, le problème de conception et de dimensionnement des systèmes mécatroniques a été abordé de manière générale. Aujourd'hui, l'approche classique de conception qui consistait à adopter une démarche d'ingénierie séquentielle n'est plus adaptée pour les systèmes mécatroniques. Par contre, les concepts d'ingénierie concourante, de cycle de conception en V et de prototypage virtuel permettent de réduire les coûts et les temps d'étude de la phase de conception. Puisque la méthodologie de dimensionnement par inversion des modèles bond graph a montré un intérêt et comme nos travaux représentent une contribution à cette méthodologie, ses différentes étapes et ses différents aspects, notamment pour la synthèse paramétrique, ont donc été développés. Enfin, l'analyse structurelle et l'analyse comportementale qui représentent l'une des originalités de la méthodologie de dimensionnement ont été présentées. Ces aspects permettent au concepteur de vérifier si les spécifications du cahier des charges sont en adéquation avec la structure du modèle de conception.

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés à la prise en compte des incertitudes paramétriques dans un modèle bond graph (outil support de la méthodologie de dimensionnement). Ainsi, un état de l'art sur les différentes approches bond graph (bond graph de sensibilité, bond graph incrémental et bond graph incertain) pour la modélisation et l'analyse des incertitudes paramétriques a été établi. Ensuite, nous avons proposé des contributions au bond graph incertain qui permettent de retrouver graphiquement le modèle d'état canonique et le modèle standard d'interconnexion. Adaptées aux systèmes incertains, ces représentations d'état sont établies de sorte que la partie nominale et la partie incertaine du modèle soient séparées afin de pouvoir décrire l'écart entre le comportement nominal et le comportement tenant compte des incertitudes. Ces contributions ont concerné non seulement les éléments bond graph 1-port et les transducteurs 2-ports mais aussi les éléments bond graph multiport (R, I et C) en mettant en place une représentation bond graph standard d'interconnexion adaptée à ces éléments. Comme cette représentation fait appel à une procédure de décomposition, des contributions sur ce sujet ont également été proposées.

Le troisième chapitre a été dédié à l'approfondissement de la phase d'analyse structurelle et comportementale en proposant un ensemble de procédures permettant la vérification de l'adéquation du cahier des charges à la structure retenue pour le modèle de conception. Tout d'abord, des procédures graphiques ont été proposées pour analyser le cahier des charges et pour vérifier si les spécifications des sorties sont suffisamment dérivables pour inverser le modèle et pour remonter ces spécifications tout le long de la structure du modèle de conception. Ensuite, nous nous sommes intéressés à un autre aspect de l'analyse du problème de conception qui consiste à vérifier si les spécifications données sous forme de comportement type peuvent être portées par

la structure retenue. En cas d'inadéquation, des recommandations pour la remise en question des spécifications ou de la structure d'un composant à concevoir ont été proposées. Cette vérification a été établie par niveau d'analyse : du niveau d'analyse BG-structurel au niveau d'analyse numérique où cette vérification peut être utilisée pour la synthèse paramétrique ou pour la synthèse de tolérance.

Le quatrième chapitre constitue une première réflexion sur la synthèse de tolérance par l'approche probabiliste où un couplage entre cette approche et la méthodologie de dimensionnement par inversion des modèles bond graph a été proposée. Tout d'abord, certains concepts de base de l'approche probabiliste utilisés dans ce travail ont été rappelés. Ensuite, nous nous sommes intéressés à l'évolution de la densité de probabilité dans un système stochastique dynamique direct ainsi qu'au principe de conservation de la probabilité. Nous avons proposé une adaptation de ce principe au problème stochastique dynamique inverse ainsi que les étapes nécessaires pour la détermination des fonctions de densité de probabilité de la sortie du modèle inverse à partir de la connaissance des spécifications probabilistes sur ses entrées. Enfin, un modèle bond graph probabiliste permettant la propagation de la densité de probabilité et des grandeurs caractéristiques (espérance et variance) tout le long du modèle inverse a été proposé.

Résumé des contributions

Dans le deuxième chapitre et après une brève présentation de l'état de l'art sur la modélisation bond graph des incertitudes paramétriques, nos contributions ont porté sur l'approche bond graph incertain et plus particulièrement sur l'obtention graphique du modèle d'état canonique et du modèle standard d'interconnexion. Ainsi :

- au niveau de la représentation d'état canonique, une procédure alternative à celle existante dans l'état de l'art est proposée pour la détermination graphique du modèle d'état canonique (procédure 2, page 42). Cette procédure permet d'éviter des calculs intermédiaires nécessaires par ailleurs dans la procédure existante.
- au niveau de la représentation bond graph standard d'interconnexion des éléments 1-port et des transducteurs 2-ports, une approche alternative est proposée pour la détermination graphique du modèle standard d'interconnexion (section 2.2, page 49). Par rapport à l'approche existante, cette procédure permet la simplification graphique du modèle bond graph incertain associé.

Ensuite, nous nous sommes intéressés à la représentation standard d'interconnexion des éléments bond graph multiport (R, I ou C). Dans une représentation standard d'interconnexion, des entrées/sorties auxiliaires doivent être identifiées pour représenter les incertitudes relatives sous forme de retours internes. Cette identification s'est avérée difficile dans le cas des éléments bond graph multiport. Pour cette raison, nous avons proposé que la détermination de la représentation bond graph standard d'interconnexion d'un élément multiport soit basée sur une décomposition de ce dernier. Ainsi :

- au niveau de la décomposition des éléments multiport, deux nouvelles décompositions des éléments multiport (R, I ou C) ont été proposées : la décomposition canonique congruente étendue (procédure 3, page 59) et la décomposition auxiliaire (procédure 4, page 61).
- au niveau de la représentation bond graph standard d'interconnexion des éléments multiport (R, I et C), la procédure 5 (page 65) basée sur la décomposition canonique congruente étendue et la procédure 6 (page 66) basée sur la décomposition auxiliaire ont été proposées. Ainsi, la représentation standard d'interconnexion d'un élément multiport (R, I ou C) peut être déterminé selon deux procédures.

Ces contributions avaient pour objectif d'exploiter la modélisation bond graph des incertitudes paramétriques dans la démarche de dimensionnement par inversion. L'inversion d'un modèle bond graph qui met en évidence l'incertitude (absolue ou relative) doit ainsi permettre la remon-

tée des spécifications des sorties et leur incertitude sur les entrées et les tolérances paramétriques.

Dans le troisième chapitre (et dans les annexes support F, G et H), la phase d'analyse structurelle et comportementale a été approfondie en proposant des procédures permettant la vérification de l'adéquation du cahier des charges à la structure retenue pour le modèle de conception. En cas d'inadéquation, ces procédures permettent d'apporter une aide à la rédaction du cahier des charges. Dans une première partie, nous avons proposé des procédures graphiques pour la détermination de différents invariants (ordres de zéros/pôles à l'infini, ordres relatifs et ordres d'essentialité) dont l'utilisation s'est avérée intéressante dans la démarche dimensionnement des systèmes mécatroniques. Tout d'abord, des contributions (algébriques et graphiques) au niveau représentation d'état ont été énoncées pour pouvoir démontrer par la suite les procédures bond graph comme par exemple une procédure algébrique permettant la détermination des ordres relatifs à partir des ordres des pôles à l'infini du modèle inverse (théorème 4, page 80).
Ensuite :

- des procédures bond graph permettant le calcul du déterminant (ainsi que des mineurs) de la matrice système du modèle inverse sont proposées et démontrées (procédures 13 et 14, page 98 et page 102). En effet, l'analyse structurelle et comportementale établie sur le modèle bond graph inverse a montré que le calcul des mineurs de la matrice système ainsi que le calcul de leur degré (procédures 15 et 36, page 102 et page 251) est d'un grand intérêt dans les démonstrations des procédures bond graph. Ces procédures ont été présentées selon les niveaux d'analyse (BG-structurel et comportemental),
- une procédure par niveau d'analyse pour la détermination des ordres des pôles à l'infini (resp. ordres relatifs, ordres d'essentialité) du modèle inverse à partir du modèle bond graph bicausal (procédures 16, 17 et 18 (pages 103, 105 et 107) et annexe F) [El 11b].

Dans une deuxième partie du troisième chapitre (ainsi que dans les annexes support G et H), des procédures permettant la vérification de l'adéquation entre le modèle d'un composant 1-port et les spécifications imposées en entrée et en sortie dans le domaine de Laplace (spécifications sous forme de comportements type) ont été établies (procédure 19 (page 113) pour les systèmes monovariables et procédure 40 (annexe G) pour les systèmes multivariables). L'annexe H traite le cas d'un composant multiport. Dans ces procédures, les différents niveaux d'analyse ont été mis en évidence. En cas d'inadéquation, les résultats énoncés permettent d'identifier le niveau d'analyse auquel le problème se pose et offrent une aide à la rédaction du cahier des charges. Au niveau de l'analyse numérique (le niveau d'analyse le plus bas), la vérification de l'adéquation structure/spécifications coïncide avec la synthèse paramétrique ou encore la synthèse de tolérances.

Dans le quatrième chapitre, une réflexion sur la synthèse de tolérances a été engagée en utilisant l'approche probabiliste. Nous avons commencé par formuler le problème stochastique dynamique inverse puis le principe de conservation de probabilité a été établi pour un modèle dynamique stochastique inverse. Ensuite, une méthode générique pour la détermination des fonctions de densité de probabilité des sorties du modèle inverse (*i.e.* les entrées de commande ou de perturbation ou les paramètres) à partir de la connaissance des fonctions de densité de probabilité des entrées (i.e. les sorties du modèle physique) a été mise en place. Les deux cas d'inversion entrées/sorties et paramètres/sorties ont été traités. Ce travail représente une adaptation des travaux de Li et Chen [Li 06b, Li 08, Che09b, Li 09] portant sur des systèmes dynamiques stochastiques directs. Indépendamment du formalisme bond graph, cette formulation correspond à un traitement global du problème probabiliste. Ensuite, nous avons proposé un modèle bond graph probabiliste qui permet la propagation des fonctions de densité de probabilité et des grandeurs caractéristiques (espérance et variance) tout le long de la structure du modèle. Ce modèle bond graph offre une description énergétique et probabiliste à la fois car une fonction de densité

de probabilité et des grandeurs caractéristiques sont associées à chaque variable d'énergie et de puissance du modèle bond graph. La propagation de ces grandeurs le long du modèle bond graph probabiliste repose en grande partie sur une analyse causale puisque c'est la causalité/bicausalité qui permet d'orienter cette propagation. Ainsi, par rapport à la démarche globale, le modèle bond graph probabiliste permet une démarche locale dans la propagation des tolérances tout le long de la structure du modèle de conception. Cette démarche trouve son intérêt dans le cas où le concepteur veut synthétiser, à partir des incertitudes considérées sur les sorties du modèle physique, les tolérances admissibles sur les différents composants du système à concevoir.

Perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire contribuent au développement de la méthodologie de dimensionnement des systèmes mécatroniques par modèles bons graph inverses. Néanmoins, certaines questions restent sans réponses et certains points sont à approfondir, ainsi plusieurs perspectives peuvent être envisagées.

Au niveau de la représentation bond graph des incertitudes paramétriques, une comparaison des différentes approches (bond graph de sensibilité, bond graph incrémental et bond graph incertain avec ses deux représentations : canonique et standard d'interconnexion) serait intéressante dans un contexte de synthèse de tolérances par inversion. L'utilisation de l'approche bond graph incertain dans ce contexte permettrait de distinguer les avantages et les inconvénients des procédures existantes et alternatives. Enfin, cette étude comparative permettrait de quantifier l'impact de l'approximation opérée dans les bond graphs incrémental et de sensibilité ce qui n'est pas le cas dans le bond graph incertain qui tient compte de l'incertitude de manière exacte. Cette comparaison n'a pas été réalisée dans ces travaux parce qu'il fallait tout d'abord trouver l'outil efficace pour mettre en œuvre la synthèse de tolérances. En premier lieu, nous nous sommes intéressés à l'arithmétique par intervalles qui a été abandonnée pour son effet enveloppant. Ensuite, nous avons abordé l'approche probabiliste qui s'est avérée un outil intéressant pour la synthèse de tolérances. La représentation bond graph des incertitudes paramétriques et le problème de synthèse de tolérances ont été développés simultanément et faute de temps, la comparaison n'a pas eu lieu.

Au niveau de la vérification de l'adéquation du cahier des charges à la structure retenue pour le modèle de conception et plus précisément au niveau d'analyse BG-structurel, la détermination graphique des invariants caractérisant la structure (ordres des zéros/pôles à l'infini, ordres relatifs et ordres d'essentialité) reste inchangée par conjecture pour les systèmes non linéaires. Cette conjecture repose sur le fait que l'analyse des chemins causaux est inchangée pour les systèmes non linéaires vu que la non linéarité dans les modèles bon graphs surgit sur les lois caractéristiques associées aux différents éléments. Néanmoins, la démonstration de cette conjecture reste à faire. Sans être exhaustifs, nous pouvons citer les travaux de Lichiardopol et Sueur [Lic07a,Lic07b] sur l'extension de certaines propriétés bond graph dans le cas de systèmes linéaires à paramètres variants dans le temps ou bien les travaux de Glumineau et Moog [Glu89] sur les ordres d'essentialité des systèmes non linéaires affines en la commande qui pourront être mis à profit pour cette démonstration. Dans la démarche de conception, ces invariants permettent de conclure sur l'ordre de dérivation minimal nécessaire pour pouvoir inverser le modèle et sur la découplabilité du modèle de conception. Dans ce contexte, une étude de la platitude semble être intéressante. Les travaux de Gil *et al.* [Gil97] et de Richard *et al.* [Ric02] pourront être mis à profit.

Toujours au niveau de la vérification de l'adéquation du cahier des charges à la structure retenue pour le modèle de conception, l'implémentation logicielle des procédures 19, 40 et 41 semble nécessaire afin d'automatiser les différentes étapes et d'assurer un gain de temps impor-

tant dans la démarche de conception. Cette implémentation fera appel en premier lieu à l'analyse des chemins et des boucles causaux (comme celle déjà proposée par le logiciel MS1) pour le niveau d'analyse BG-structurel et en second lieu à un solveur de calcul formel pour le niveau d'analyse comportemental et enfin à un solveur de calcul numérique pour le niveau d'analyse numérique et pour la synthèse paramétrique/de tolérances.

Au niveau de la synthèse de tolérances par approche probabiliste, cette première réflexion doit être approfondie notamment au niveau de la détermination générique des fonctions de densité de probabilité conjointes associées à des variables/processus aléatoires sur le modèle bond graph probabiliste car dans les travaux présentés, ces fonctions sont supposées connues ou pouvant être déterminées de manière plus ou moins heuristique à partir de l'exploitation du modèle bond graph. En effet, la fonction de densité de probabilité conjointe associée à deux variables de puissance par exemple (variables qui sont dépendantes) s'exprime en fonction d'une mesure de Dirac qui fait appel à la relation existante entre ces deux variables. Dans l'exemple du chapitre 4, cette relation a été déduite en exprimant chaque variable de puissance en fonction de la sortie et de ses dérivées successives et en établissant le lien entre ces deux expressions. Néanmoins, l'analyse de certains chemins et boucles causaux impliquant ces deux variables de puissance pourrait définir une méthode générique pour déterminer cette relation et par conséquent pour déterminer la fonction de densité de probabilité associée aux variables de puissance. Outre le fait qu'une méthode générique permette une détermination systématique de ces fonctions de densité de probabilité, elle contribuerait également à pouvoir s'intéresser aux aspects d'analyse structurelle dans le domaine probabiliste afin d'exprimer éventuellement des invariants associés au modèle stochastique.

Pour la prise en compte des incertitudes paramétriques rencontrées en remontant les tolérances (sur les spécifications) tout le long de la structure du modèle bond graph probabiliste, une méthode générale pour prendre en compte ces incertitudes paramétriques a été évoquée et illustrée sur un exemple mais sans être détaillée pour les différents éléments bond graph et les différentes configurations causales. Cette prise en compte fait appel à la fonction de densité de probabilité conjointe ce qui fait que la détermination de cette distribution représente un point clé pour le développement du bond graph probabiliste.

Le bond graph probabiliste proposé s'intéresse à la densité de probabilité et aux grandeurs caractéristiques associées aux variables de puissance. Néanmoins, il serait intéressant de déterminer la densité de probabilité associée à la puissance qui est différente du produit des densités de probabilité des variables d'effort et de flux. Enfin, une implémentation logicielle du modèle bond graph probabiliste est également nécessaire afin d'automatiser le calcul des fonctions de densité de probabilité et des grandeurs caractéristiques associées aux différentes variables de puissance et d'énergie. Le calcul numérique d'une fonction de densité de probabilité associée à une variable de puissance fait appel en premier lieu à une méthode de discrétisation afin de définir un maillage et à une méthode d'intégration numérique. Si cette fonction de densité de probabilité s'exprime en fonction d'une densité de probabilité conjointe alors il est nécessaire d'approcher chaque mesure de Dirac par une distribution.

Bibliographie

[Adr00] Adrot, A. *Diagnostic à base de modèles incertains utilisant l'analyse par intervalles : l'approche bornante.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2000.

[AFN08] AFNOR. Mécatronique - vocabulaire. Norme NF E01-010, novembre 2008.

[Ala99] Alazard, D. *Robustesse et commande optimale.* 1999. ISBN 285428516.

[Alh05] Alhaj Dibo, M. *Validation de données et diagnostic des systèmes incertains à l'aide de l'analyse par intervalle.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Juillet 2005.

[Ama91] Amara, M. *Contribution à l'étude des aspects énergétiques en robotique mobile.* Thèse de doctorat, Institut Nationales des Sciences Appliquées de Lyon, France, Juin 1991.

[Arz03] Arzelier, D. Bernussou, J., Henrion, D., Peaucelle, D. Optimisation et théorie de la commande robuste. *Journal sur l'Enseignement des Sciences et Technologies de l'Information et des Systèmes, J3EA*, 2(hors-série 1), Juin 2003.

[Ber97a] Bertrand, J.M. *Analyse structurelle et comande par découplage entrée-sortie des modèles bond graphs.* Thèse de doctorat, Université des sciences et technologies de Lille, France, 1997.

[Ber97b] Bertrand, J.M., Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. On the finite and infinite structures of bond-graph models. In *IEEE Conference on Computational Cybernetics and Simulation*, volume 3, pages 2472–2477, 1997.

[Ber00] Bertrand, J.M., Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. Input-output decoupling with stability for bond graph models. In *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, volume 1, pages 39–58, 2000.

[Bid01] Bideaux, E. , Martin de Argenta, D., Marquis-Favre, W., Scavarda, S. Applying causality and bicausality to multi-port elements in bond graphs. In *International Conference on Bond Graph Modelling and Simulation*, 2001.

[Bog06] Bogaert, P. *Probabilités pour scientifiques et ingénieurs.* De boeck, 2006.

[Bon75] Bonderson, L.S. Vector bond graphs applied to one-dimensional distributed systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 97(1) :75–82, 1975.

[Bon98] Bontempi, F., Faravelli, L. Langrangian/eulrian description of dynamic system. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(8) :901–911, 1998.

[Bor92] Borne, P., Dauphin-Tangy, G., Richard, J.P., Rotella, F., Zambettakis, I. Modélisation et identification des processus. In *Méthodes et techniques de l'ingénieur*, volume 2. Editions TECHNIP, 1992.

[Bor93] Borne, P., Richard, J.P., Dauphin-Tanguy, G., Zambettakis, I. *Analyse et régulation des processus industriels : régulation numérique.* Editions TECHNIP, Paris, 1993.

[Bor01] Borutzky, W., Granda, J. Determining sensitivities from an incremental true bond graph. In *International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, ICBGM'2001*, volume 33 of *Simulation Series*, pages 3–8. SCS Publishing, 2001.

[Bor02] Borutzky, W., Granda, J. Bond graph based frequency domain sensitivity analysis of multidisciplinary systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part I - Journal of Systems and Control Engineering*, 216(1) :85–99, 2002.

[Bor04] Borutzky, W., Dauphin-Tanguy, G. Incremental bond graph approach to the derivation of state equations for robustness study. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 12(1) :41–60, Avril 2004.

[Bor06] Borutzky, W., Dauphin-Tanguy, G., Kam, C. Relations between two bond graph approaches to sensitivity analysis and study of robustness. In *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, volume 12, pages 141 – 157. Taylor and Francis Ltd, 2006.

[Bou02] Bouron, P. *Méthodes ensemblistes pour le diagnostic, l'estimation d'etat et la fusion de données temporelles.* Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2002.

[Bré97] Brémaud, P. *Introduction aux probabilités - Modélisation des phénomènes aléatoires.* Springer, 1997.

[Bra02] Braems, I. *Méthodes ensemblistes garanties pour l'estimation de grandeurs physiques.* Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, 2002.

[Bra05] Braems, I., Ramdani, N., Boudenne, A., Jaulin, L., Ibos, L., Walter, E., Candau, Y. New setmembership techniques for parameter estimation in presence of model uncertainty. In *International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory, Practice*, Cambridge, UK, Juillet 2005.

[Bre82a] Breedveld, P.C. Proposition for an unambiguous vector bond graph notation. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 104(3) :267–270, 1982.

[Bre82b] Breedveld, P.C. Thermodynamic bond graphs and the problem of thermal inertance. *Journal of Franklin Institute*, 314(1) :15–40, July 1982.

[Bre84a] Breedveld, P.C. Decomposition of multiport elements in a revised multibond graph notation. *Journal of Franklin Institute*, 318(4) :253–273, 1984.

[Bre84b] Breedveld, P.C. *Physical systems theory in terms of bond graphs.* Thèse de doctorat, Twente University of Technology, Enschede, Pays-Bas, 1984.

[Bre85] Breedveld, P.C. A definition of multibond graph language. In *Proceedings of the 11th International Association for Mathematics and Computers in Simulation (IMACS) World Congress on Scientific Computation*, volume 4, pages 325–328, Olso, Norway, Août 1985.

[Bre95] Breedveld, P.C. Exhaustive canonical decompositions of linear two-ports. In *International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, volume 27, pages 11–16, 1995.

[Bre08] Breedveld ,P.C. Modeling and simulation of dynamic systems using bond graphs. *Control Systems, Robotics and Automation*, 2008.

[Bro65a] Brockett, R.W. Poles, zeros, and feedback : State space interpretation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 10(2) :129–135, Avril 1965.

[Bro65b] Brockett, R.W. Poles, zeros, and feedback : State space interpretation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-10 :129–135, 1965.

[Bro65c] Brockett, R.W., Mesarović, M.D. The reproducibility of multivariable systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 11 :548–563, 1965.

[Bro72] Brown, F.T. Direct application of the loop rule to bond graphs. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 94(3) :253–261, Septembre 1972.

[Cab95] Cabanellas, J.M., Felez, J., Vera, C. A formulation of the sensitivity analysis for dynamic systems optimization based on pseudo bond graphs. In *International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, ICBGM'95*, volume 27, pages 135–144, 1995.

[Cas94] Castro-Linares, R., Moog, C.H. Structure invariance for uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(10) :2154–2158, Octobre 1994.

[Cha04] Chablat, D., Wenger, P., Majou, F., Merlet, J.P. An interval analysis based study for the design and the comparison of three-dof parallel kinematic machines. *International Journal of Robotics Research*, 23(6) :615–624, 2004.

[Cha08] Chakraborty, S. Some applications of dirac's delta function in statistics for mre than one random variable. *Applications and applied mathematics*, 3(1) :2008, Juin 2008.

[Che06] Chereji, B., Mouhib, O., Marquis-Favre, W., Thomasset, D., Pousin, J., Picq, M. An optimal control problem : bond graph representation and solver implementation. In *Proceedings of the 5th Vienna International Conference on Mathematical Modelling*, page 814, Vienna, Austria, 2006.

[Che09a] Chen, J.B, Fan, W., Li, J. Solution of generized density evolution equation via a family of delta sequences. *Chinese Journal of Theoretical and Applied*, 41(3) :398–409, 2009.

[Che09b] Chen, J.B, Li , J. A note on the principle of preservation of probability and probability density evolution equation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 24 :51–59, 2009.

[Cod98] Codron, P., Le Ballois, S. *Automatique : Systèmes linéaires et continus.* Dunod, Paris, 1998. ISBN 210 003826 5.

[Coe69] Coeuillet, J. Choix des moteurs de servomécanismes. *Automatisme-Tome XIV*, 2(2) :56–67, Février 1969.

[Com82] Commault, C., Dion, J.M. . Structure at infinity of linear multivariable systems : a geometric approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-27(3) :693–696, 1982.

[Com86] Commault, C., Descusse, J., Dion, J.M., Lafay, J.F., Malabre, M. New decoupling invariants : the essential orders. *International Journal of Control*, 44(3) :689–700, 1986.

[Com90] Commault, C., Dion, J.M, Torres, J. Invariant spaces at infinity of linear systems application to block decoupling. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-35(5) :618–623, Mai 1990.

[Com93a] Comba, J.L.D., Stolfi, J. Affine arithmetic and its applications to computer graphics. In *SIBGRAPI'93*, Brézil, Octobre 1993.

[Com93b] Commault, C., Dion, J.M, Benahcene, M. On dynamic decoupling of structured systems. In *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1330–1335, San Antonio, USA, Décembre 1993.

[Com10] Commault, C., Dion, J.M. Analyse structure des systèmes, une approche graphique. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Nancy, France, Juin 2010.

[Cre71] Cremer, M. A precompensator of minimal order for decoupling a linear multi-variable system. *International Journal of Control*, 14(6) :1089–1103, 1971.

[Daf00] Dafermos, C.M. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics.* Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[Dal08] Dalang, R.C., Conus, D. *Introduction à la théorie des probabilités.* Presses polytechniques et universitaires romandes, 2008.

[Dam03] Damić, V., Montgomery, J. *Mechatronics by Bond-Graphs - An Object-Oriented Approach to Modelling and Simulation.* Springer, 2003.

[Dan91] Daniel, R.W., Hewit, J.R. Editorial. *Mechatronics*, 1(1) :i–ii, 1991.

[Dau99a] Dauphin-Tanguy, G. Les bond graphs et leur application en mécatronique. In *Techniques de l'ingénieur*, number S7222, 1999.

[Dau99b] Dauphin-Tanguy, G., Kam, C.S. How to model parameter uncertainties in a bond graph framework. *European Simulation Symp.*, 33 :121–125, 1999.

[Dau00] Dauphin-Tanguy, G. et al. *Les bond graphs.* Hermès Sciences, Paris, 2000.

[Dau03] Dauphin-Tanguy G. , Kam, C.S., Kubiak, P. Uncertainties in multiport elements. In *International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, ICBGM'03*, 2003.

[Dec02] Decotte, B. *Identifiabilité structurelle des modèles bond graphs.* Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille, France, 2002.

[Deq98] Dequidt, A. *Contribution à une approche interdisciplinaire de la conception des systèmes mécaniques commandés - Application aux axes des machines.* Thèse de doctorat, Université de Valenciennes, France, 1998.

[Deq00] Dequidt, A., Castelain, J.-M., Valdès, E. Mechanical pre-design of high performance motion servomechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 35(8) :1047–1063, 2000.

[Der05] Derkaoui, A. *Dimensionnement pour des critères dynamiques et énergétiques de systèmes mécatroniques comportant des sous-systèmes à paramètres répartis.* Thèse de doctorat, Institut Nationale des Sciences Appliquées et de Technologie de Lyon, France, Novembre 2005.

[Des82] Descusse, J., Dion, J.M. On the structure at infinity of linear square decoupled systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-27(4) :971–974, 1982.

[Des85] Descusse, J., Lafay, J.F., Malabre, M. Solution of the satic-state feedback decoupling problem for linear systems with two outputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30(9) :914–918, 1985.

[Des88] Descusse, J., Lafay, J.F., Malabre, M. Solution to morgan problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(8) :732–739, 1988.

[Dio82] Dion, J.M., Commault, C. Smith-mcmillan factorisations at infinity of rational matrix functions and their control interpretation. *Systems and Control Letters*, 1 :312–320, 1982.

[Dio93] Dion, J.M., Commault, C. Feedback decoupling of structured systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(7) :1132–1135, 1993.

[Dio03] Dion, J.M., Commault, C., Van Der Woude, J. Generic properties and control of linear structured systems : a survey. *Automatica*, 39(7) :1125–1144, Juillet 2003.

[Dir68] Director, S.W., Roher, R.A. On the efficient computation of the first-order network sensitivities for frequency domain studies of lumped, linear, time-invariant networks. In *Second IFAC, System sensitivity and adaptivity*, pages B.54–B.69, Dubrovnik, Yugoslavie, 1968.

[DiS67] DiStefano, J., Stubberud, A.J., Williams, I.J. *Theory and problems of feedback and control systems.* Shaum's Outline Series. 1967.

[Dor68] Dorato, P. Noise-intensity sensitivity in optimal stochastic systems. In *Second IFAC, System sensitivity and adaptivity*, pages C.52–C.58, Dubrovnik, Yugoslavie, 1968.

[Dor69] Dorato, P. On the inverse of linear dynamical systems. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, 5(1) :43–48, 1969.

[Dos57] Dostupov, B.G., Dostupov, V.S. The equation for the integral of a system of ordinary differential equations containing random parameters. *Automatika i Telemekhanika*, 18 :620–630, 1957.

[Doy82] Doyle, J. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *IEEE Proc. Part D : Control Theory and Applications*, 129(3) :242–250, 1982.

[Dro02] Drocourt, C. *Localisation et modélisation de l'environnement d'un robot mobile par coopération de deux capteurs omnidirectionnels.* Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, Février 2002.

[El-06] El-Owny, H. Hansen's generalized interval arithmetic realized in c-xsc. Rapport technique, Bergische Universität Wuppertal, 2006.

[El 08a] El Feki, M., Di Loreto, M., Bideaux, E., Thomasset, D., Marquis-Favre, W. On the role of essential orders on feedback decoupling and model inversion : bond graph approach. In *ECMS'08*, pages 457–463, Nicosie, Chypre, Juin 2008.

[El 08b] El Feki, M., Di Loreto, M., Bideaux, E., Thomasset, D., Ngwompo, R.F. Structural properties of inverse models represented by bond graph. In *17th IFAC World Congress*, volume 17, pages 236–241, Seoul, Corée du sud, Juillet 2008.

[El 10] El Feki, M., Marquis-Favre, W., Krähenbühl, Thomasset, D. Bond graph representation of standard interconnection model. In *Proceedings of International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, Orlando, USA, Avril 2010.

[El 11a] El Feki M., Jardin, A., Marquis-Favre, W., Krähenbühl, L., Bideaux, E., Thomasset, D. Determination of essential orders from a bond graph model. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2011. (accepté).

[El 11b] El Feki, M, Jardin, A., Marquis-Favre, W., Krähenbühl, L., Thomasset, D. Structural analysis by bond graph approach : Duality between causal and bicausal procedures. *IMechE Part I Journal of Systems and Control Engineering*, 2011. (accepté).

[Eva79] Evans, F.J., Schizas, C. Digraph analysis of large-scale systems : the system primitive. *Electronics Letters*, 15(20) :613–614, Septembre 1979.

[Eyk74] Eykhoff, P. *System identification.* Wiley, New York, 1974.

[Fag04] Fagarasan, I., Ploix, S., Gentil, S. Causal fault detection and isolation based on a setmembership approach. *Automatica*, 40(13) :2099–2110, 2004.

[Fal67] Falb, P.L., Wolovich, W.A. Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12(6) :651–659, Décembre 1967.

[Fav97] Favre, W. *Contribution à la représentation bond graph des systèmes mécaniques multicorps.* Thèse de doctorat, INSA de Lyon, Villeurbanne, France, 1997.

[Fli86] Fliess, M. A note on the invertibility of nonlinear input-output differential systems. *System & Control Letters*, 8(2) :147–151, Décembre 1986.

[Fra78] Frank, P.M. *Introduction to system sensitivity theory.* Academic press, New York, 1978.

[Fra79a] Franksen, O.I., Falster, P., Evans, F.J. Structural aspects of controllability and observability - i. tensorial aggregation. *Journal of Franklin Institute*, 308(2) :79–104, Août 1979.

[Fra79b] Franksen, O.I., Falster, P., Evans, F.J. Structural aspects of controllability and observability - ii. digraph decomposition. *Journal of Franklin Institute*, 308(2) :105–124, Août 1979.

[Fun94] Fung, Y.C. *A first course in continuum mechanics.* Prentice-Hall, 1994.

[Gan66] Gantmacher, F.R. *Théorie des matrices - Tome 1.* Dunod, Paris, 1966.

[Gan03] Gandanegara, G. *Méthdologie de conception systémique en génie éectrique à l'aide de l'outil bond graph - applicationà une chaîne de traction ferrovière.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnque de Toulouse, 2003.

[Gan07] Gandanegara, G., Roboam, G., Charles Maré, J., Serena, B. Synthesis oan electro-hydrosttic actuator from bicausal bod graphs. In *Proceedings of the International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, pages 71–78, San Diego, USA, Janvier 2007.

[Gaw91] Gawthrop, P.J. Bond graphs : a representation for mechatronic system. *Mechatronics*, 1(2) :127–156, 1991.

[Gaw95] Gawthrop, P.J. bicausal bond graphs. In *International Conference on Bond Graph modeling and Simulation, ICBGM'95*, pages 83–88, Las Vegas, USA, Janvier 1995.

[Gaw99] Gawthrop, P.J., Ronco, E. A sensitivity bond graph approach to estimation and control of mechatronic systems. *Control Engineering Practice*, 8(11) :137–148, 1999.

[Gaw00] Gawthrop, P.J., Ronco, E. Estimation and control of mechatronics systems using sensitivity bond graphs. *Control Engineering Practice*, 8(11) :1237–1248, Novembre 2000.

[Gih75] Gihman, I.I. *Theory of stochastic Processes.* Springer-Verlag, New-York, 1975.

[Gil69] Gilbert, E.G. Decoupling of multivariable systems by state feedback. *SIAM Journal of Control*, 7(1) :50–63, 1969.

[Gil97] Gil, J.C. Pedraza, A. Delgado, M. Sira-Ramirez, H. . Flatness and passivity from a bond graph. In *IEEE Systems, Man, and Cybernetics*, volume 2, pages 1516–1521, Orlando, USA, Octobre 1997.

[Glo76] Glover, K., Silverman, L.M. Characterization of structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic control*, 21(4) :534–537, Août 1976.

[Glu89] Glumineau, A., Moog, C.H. Essential orders and the non-linear decoupling problem. *International Journal of Control*, 50(5) :1825–1834, 1989.

[Glu92] Glumineau, A., Moog, C.H. Nonlinear morgan's problem : Case of $(p+1)$ inputs and p outputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(7) :1067–1072, 1992.

[Gro99] Groetsch, C.W. *Inverse problems.* The Mathematical Association of America, 1999. ISBN. 0-88385-716-2.

[Gu,89] Gu, K., Zohdy, M.A., Loh, N.K. Necessary and sufficient conditions of quadratic stability of uncertain linear systems. *Proc. IEEE Conf. Decision and Control incl. Symp. Adaptative Processes*, 1 :464–468, 1989.

[Had03] Haddad, W.M., Hayakawa, T., Chellaboina, V. Robust adaptative control for nonlinear uncertain systems. *Automatica*, 39 :551–556, 2003.

[Han75] Hansen, E.R. *Generalized interval arithmetic.* In Interval mathematics : Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[Han92] Hansen, E. *Global optimization using interval analysis.* Marcel Dekker, 1992.

[Hea53] Heath,T.L. *The Works of Archimedes.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1953.

[Hen04a] Henrique de Figueiredo, L., Stolfi, J. Affine arithmetic : concepts and applications. *Numerical Algorithms*, 37 :147–158, 2004.

[Hen04b] Hensen, E., Walster, G.W. *Global optimization using interval analysis.* Marcel Dekker, New York, 2004.

[Her93] Herrera, A.N., Lafay, J.F. New results about morgan's problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(12) :1834–1838, 1993.

[Hir79] Hirschorn, R.M. Invertibility of multivariable nonlinear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(6) :855–865, Décembre 1979.

[Hoc02] Hocine, A. Robustesse paramétrique sur les systèmes mécatroniques, dimensionnement de l'actionneur par le calcul des intervalles et bond graph. Master de recherche, Institut Nationale des Sciences Appliquées de Lyon, Juillet 2002.

[IFA10] IFAC Technical Committies. http ://tc.ifac-control.org/4/2/scope (consulté le 18.05.2010). 2010.

[Ise05] Isermann, R. *Mechatronics Systems Fundamentals.* Springer-Vergla, Londre, 2005. ISBN. 1-85233-930-6.

[Ise08] Isermann, R. Mechatronic systems - innovative products with embedded control. *Control Engineering Practice*, 16(1) :14–29, Janvier 2008.

[Itô06] Itô, k. *Essentials of stochastic Processes.* American Mathematical Society, 2006.

[Jac05] Jacques, J. *Contributions à l'analyse de sensibilité et à l'analyse discriminante généralisée.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble 1, décembre 2005.

[Jar08a] Jardin, A., El Feki, M., Marquis-Favre, W., Thomasset, D., Bideaux E. Use of structural analysis in a bond graph-based methodology for sizing mechatronic systems. In *Proceedings of the 7th edition of France-Japan, 5th Europe-Asia Congress on Mechatronics*, Le Grand Bornand, France, mai 2008.

[Jar08b] Jardin, A., Marquis-Favre, W., Thomasset, D. Représentation bond graph de problèmes d'optimisation dynamique : extension aux systèmes à stockages d'énergie nonlinéaires. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Bucarest, Roumanie, septembre 2008.

[Jar08c] Jardin, A., Marquis-Favre, W., Thomasset, D., Guillemard, F., Lorenz, F. Study of a sizing methodology and a modelica code generator for the bond graph tool ms1. In *Proceedings of the 6th International Modelica Conference*, pages 125–134, Bielefeld, Allemagne, mars 2008.

[Jar10] Jardin, A. *Contribution à une méthodologie de dimensionnement des systèmes mécatroniques : analyse structurelle et couplage à l'optimisation dynamique.* Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France, Janvier 2010.

[Jau01] Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O., Walter, E. *Applied interval analysis.* Spring-Verlag, Londre, 2001. ISBN. 1852332190.

[Jun01] Junco, S. A bond graph approach to control systems synthesis. In *Proceedings of the International Conference on Bond Graph Model ling and simulation*, Phoenix, USA, Janvier 2001.

[Kam01] Kam, C.S. *les bond graphs pour la modélisation des systèmes linéaires.* Thèse de doctorat, Université des Sciences et de Technologie de Lille, 2001.

[Kam05] Kam, C.S., Dauphin-Tanguy, G. Bond graph models of structured parameter uncertainties. *J. Franklin Inst.*, 342(4) :379–399, 2005.

[Kar68] Karnopp, D.C., Rosenberg, R.C. *Analysis and simulation of multiport systems : The bond graph approach to physical system dynamics.* The M.I.T. Press, Cambridge, 1968.

[Kar75] Karnopp, D.C., Rosenberg, R.C. *Systems Dynamics : A Unified Dynamics.* Jhon Wiley & Sons, New York, 1975. ISBN. 0471459402.

[Kar76] Karnopp, D.C. bond graph for vehicle dynamics. *Vehicle Systems Dynamics*, 5(3) :171–184, 1976.

[Kar77a] Karnopp, D.C. . Power and energy in linearized physical systems. *Journal of the Franklin Institute*, 303 :85–98, 1977.

[Kar77b] Karnopp, D.C. Lagrange's equations for complex bond graph systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 99(4) :300–306, 1977.

[Kar78] Karnopp, D.C. The ebergetic structure of multibody dynamic systems. *Journal of Franklin Institute*, 306(2) :165–181, 1978.

[Kar90] Karnopp, D.C., Margolis, D.L., Rosenberg, R.C. *System Dynamics : A Unified Approach.* John Wiley & Sons, New York, 2nd edition, 1990.

[Kar00] Karnopp, D.C., Margolis, D.L., Rosenberg R.C. *System dynamics modeling and simulations of mechatronic systems.* John Wiley & Sons, New-York, Cichester Weinheim, 2000.

[Kar05] Karcanias, N., Sagianos, E., Milonidis, E. Structural identification : The computation of the generic mcmillan degree. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, CDC-ECC'05*, pages 7222–7227, 2005.

[Kar06] Karnopp, D.C., Margolis, D.L., Rosenberg, R.C. *System Dynamics : Modeling and Simulation of Mechatronic Systems.* John Wiley & Sons, 2006. ISBN-13 :978-0-471-70965-7.

[Kar07] Karcanias, N., Sagianos, E., Milonidis, E. Structured transfer function matrices and integer matrices : The computation of the generic mcmillan degree and infinite zero structure. *International Jornal of Control*, 80(9) :1404–1420, 2007.

[Kaz88] Kazerooni, H. Compliance control and stability analysis of cooperating robot manipulators. *Robotica*, 7 :191–198, 1988.

[Khu09] Khuri, A.I. Applications of dirac's delta function in statistics. Rapport technique, North Carolina State University, Février 2009.

[Kie99] Kieffer, M. *Estimation ensembliste par analyse par intervalles - Application à la localisation d'un véhicule.* Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Centre Scientifique d'Orsay, Janvier 1999.

[Kol60] Kolmogorov, A.N. *Foundations of the Theory of Probability.* Chelsea Publishing Co., 2ème edition, 1960. Publié pour la première fois en 1933.

[Koz61] Kozin, F. On the probability densities of the output of some random systems. *Journal of Applied Mechanics*, 28(2), 1961.

[Krä06] Krämer, W. Generalized intervals and the dependency problem. In *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, volume 6, pages 683–684, 2006.

[Kub96a] Kubiak, P. *Analyse symbolique des systèmes physiques modélisés par bond graph et comportement des élements multiports.* Thèse de doctorat, Université Sciences et Technologies, Lille 1, 1996.

[Kub96b] Kubiak, P., Azmani, A., Dauphin-Tanguy, G. Generalization of the recurrent decomposition method of a multiport element for bond graph models. *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 3 :1640–1645, 1996.

[Kyu96] Kyura, N., Oho, H. Mechatronics - an industrial perspective. *IEEE/ ASME Transactions on Mechatronics*, 1(1) :10–15, mars 1996.

[Laf90] Lafay, J.F., Zagalak, P., Herrera, A., Icart, S. . Structural results about the interactor. In *IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1048–1049, 1990.

[Laf04] Laffite, J. *Aide à la conception et au dimensionnement énergétique et dynamique des systèmes mécatroniques par approche inverse : application aux chaînes de transmission automobiles.* Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France, 2004.

[Leb03] Lebrun, M. Simulation et cao en automatique et mécatronique. In *Techniques de l'ingénieur*, number s7260, 2003.

[Lee04] Lee, E., Mavroidis, C., Merlet, J.P. Five precision point synthesis of spatial rrr manipulators using interval analysis. *Transactions of the ASME, Journal Mechanical Design*, 126 :842–849, Septembre 2004.

[Lho04] Lhommeau, M., Hardouin, L., Cottenceau, B., Jaulin, L. Interval analysis and dioid : application to robust controller design for timed event graphs. *Automatica*, 40(11) :1923–1930, 2004.

[Li 06a] Li , J., Chen, J.B. The dimension-reduction strategy via mapping for probability density evolution analysis of nonlinear stochastic systems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21(4) :442–453, 2006.

[Li 06b] Li , J., Chen, J.B. The probability density evolution method for dynamic response analysis of non-linear stochastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65(5) :882–903, 2006.

[Li 08] Li , J., Chen, J.B. The principle of preservation of probability and the generalized density evolution equation. *Structural Safety*, 30(1) :65–77, Janvier 2008.

[Li 09] Li , J., Chen, J.B. *Stochastic dynamics of structures.* Jhon Wiley & Sons, Singapore, 2009.

[Lic07a] Lichiardopol, A.M. *Approche bond graph pour la découverte technologique.* Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille, Octobre 2007.

[Lic07b] Lichiardopol, S., Sueur, C. Decoupling of non-linear bond-graph models. *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, pages 2237–2242, 2007.

[Lin67] Lin, Y.K. *Probablistic theory of structural dynamics.* McGraw Hill, New-York, 1967.

[Lin74] Lin, C.T. Structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(3) :201–208, 1974.

[Liu97] Liu, J. Design of stable systems with uncertainties and constrained performance variation. *International Journal of Control*, 69(1) :23–32, 1997.

[Loh87] Lohner, R. J. Enclosing the solutions of ordinary initial and boundary value problems. In *Computer Arithmetic : Scientific Computation and Programming Languages*, pages 255–286, 1987.

[Lu,97] Lu, W.M., Doyle, J.C. A state space approach to robustness analysis and synthesis for nonlinear uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(12) :1654–1662, Décembre 1997.

[Lut04] Lutes, L.D., Sarkani, S. *Random vibrations : analysis of structural and mechanical systems.* Elsevier, 2004.

[Ly,04] Ly, M.G. Dimensionnement tolérant d'un système mécatronique par approche intervalle. Master de recherche, Institut Nationale des Sciences Appliquées de Lyon, Juillet 2004.

[Mar96] Marsh, C., Wei, H. Robustness bounds for systems with parametric uncertainty. *Automatica*, 32(10) :1447–1454, 1996.

[Mec03a] Mechin, O. *Conception des systèmes de la liaison au sol : Contribution à la définition du cahier des charges.* Thèse de doctorat, INSA de Lyon, Villeurbanne, France, 2003.

[Mec03b] Mechin, O., Marquis-Favre, W., Scavarda, S., Ferbach, P. Sizing of an electric power steering system on dynamic and energetic criteria. In *Proceedings of the International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, pages 137–147, Orlando, USA, 2003.

[Mer00] Merlet, J.P. Alias : an interval analysis based library for solving and analyzing system of equations. In *SEA*, Toulouse, France, Juin 2000.

[Mil96] Milanese, M., Norton, J.P., Piet-Lahanier, H., Walter, E. *Bounding approaches to system identification.* Plenum, New York, 1996.

[Mil03] Miled, F. *Contribution à une méthodologie de conception des systèmes dynamiques actifs.* Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté et Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, France, 2003.

[Moo59] Moore, R.E. Automatic error analysis in digital computation. Rapport technique, Lockheed Missiles and Space Division, 1959.

[Moo66] Moore, R.E. *Interval Analysis.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA, 1966.

[Moo79] Moore, R.E. *Methods and applications of interval analysis.* Studies in applied mathematics. SIAM, 1979. ISBN. 0898711614.

[Mor69] Mori, T. Mecha-tronics. Rapport technique, Yaskawa Internal Trademark Application, Juillet 1969.

[Mor85] Morton, B.G. New application of mu to real-parameter variation problems. *Proc. IEEE Conf. Decision and Control incl. Symp. Adaptative Processes*, 24 :233–238, 1985.

[Mur00] Murota, K. *Matrices and matroids for systems analysis*, volume 20 of *Algorithms and Combinatorics.* Hardcover, 2000.

[Neu90] Neumaier,A. *Interval methods for systems of equations.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.

[New50] Newton Jr, G.C. What size motor for proper operation of servomechanism ? *Machine Design*, 22 :125–130 & 200–202, 1950.

[Ngw96] Ngwompo, R.F., Scavarda, S., Thomasset, D. Inversion of linear time-invariant siso systems modelled by bond graph. *Journal of Franklin Institute*, 333(2) :157–174, Mars 1996.

[Ngw97] Ngwompo, R. F. *Contribution au dimensionnement des systèmes sur des critères dynamiques et énergétiques - approche par Bond Graph.* Thèse de doctorat, INSA-Lyon, 1997.

[Ngw98] Ngwompo, R. F. Développement d'une méthodlogie de dimensionnement des éléments d'un système : application au cas d'une suspension hydropneumatique. Rapport technique, Laboratoire d'Automatique Industrielle, INSA de Lyon, France, 1998.

[Ngw99] Ngwompo, R.F., Scavarda S. Dimensioning problems in system design using bicausal bond graphs. *Simulation Practice and Theory*, 7(5) :577–587, 1999.

[Ngw01a] Ngwompo, R.F. , Scavarda, S., Thomasset, D. Physical model-based inversion in control systems design using bond graph representation, part 1 : theory. *Proceedings of ImechE Journal of Systems and Control Engineering*, 215(12) :95–103, 2001.

[Ngw01b] Ngwompo, R.F., Scavarda, S., Thomasset, D. Physical model-based inversion in control systems design using bond graph representation, part 2 : applications. *Proceedings of ImechE Journal of Systems and Control Engineering*, 215(12) :105–112, 2001.

[Ngw05] Ngwompo, R.F., Bideaux, E., Scavarda, S. On the role of power lines and causal paths in bond graph-based model inversion. In *ICBGM'05*, pages 78–85, 2005.

[Nie05] Niesner, C. *Sensibilité et robustesse à l'incertitude paramétrique, une approche bond graph.* Thèse de doctorat, Université des Sciences et de Technologie de Lille, 2005.

[Nij82] Nijmeijer, H. Inversibility of affine nonlinear control systems : a geometric approach. *System & Control Letters*, 2(3) :163–168, Octobre 1982.

[Nij86] Nijmeijer, H. Right invertibility for a class of nonlinear control systems : a geometric approach. *System & Control Letters*, 7(2) :125–132, Avril 1986.

[Ons31] Onsager, L. Reciprocal relations in irreversibles processes i. *Phys. Rev.*, 37 :405–426, 1931.

[Pay61] Paynter, H. *Analysis and Design of Engineering Systems.* The M.I.T. Press, Cambridge, USA, 1961. ISBN.0262160048.

[Por69] Porter, W.A. Decoupling of and inverses for time-varying linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14(4) :378–380, Août 1969.

[Pot86] Potkonjak, V., Jaksic, N. Contribution to a computer-aided choice of d.c. motors for manipulation robots. *Robotica*, 4 :37–41, 1986.

[Pue04] Puel, G. *Sur une théorie des mécanismes en dynamique des structures.* Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Decembre 2004.

[Raï04] Raïssi, T., Ramdani, N.,Ibos, L., Candau, y. Analyse de propriétés diélectriques dans un contexte à erreurs bornées. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'04*, Douz, Tunisie, Novembre 2004.

[Rah92] Rahmani, A., Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. Formal determination of controllability/observability matrices for multivariable systems modelled by bond graph. In *Proceedings of IMACS/SICE International Symposium of Robotics, Mechatronics and Manufacturing System*, pages 573–580, 1992.

[Rah93] Rahmani, A. *Etude structurelle des systèmes linéaires par l'approche Bond Graph.* Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1993.

[Rah96] Rahmani, A., Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. On the infinite structure of systems modelled by bond graph : feedback decoupling. In *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, volume 3, pages 1617–1622, 1996.

[Rah97] Rahmani, A., Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. Approche des bond graphs pour l'analyse structurelle des systèmes linéaires. *Linear Algebra and its Applications*, 259 :101–131, Juillet 1997.

[Rah98] Rahmani, Dauphin-Tanguy, G. Symbolic determination of state matrices from bond graph model with derivative causality. In *IEEE-SMC IMACS Multiconference Computation Engineering in System Applications*, pages 499–515, Hammamet, Tunisie, Avril 1998.

[Ram05] Ramdani, N. *Méthodes ensemblistes pour l'estimation.* Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris-Est Créteil Val de Marne, 2005.

[Red93] Redfield, R.C., Krishnan, S. Dynamic system synthesis with a bond graph approach : Part i - synthesis of one-port impedances. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 115(3) :357–363, Septembre 1993.

[Rei88] Reinschke, K.J. *Multivariable control : A Graph-theoretic approach.* Lecture notes in control and information sciences. Springer-Verlag, 1988.

[Res90] Respondek, W. *Nonlinear controllability and optimal control, chapter Right and left invertibility of nonlinear control systems, pages 133-176.* Marcel Dekker Inc., 1990. ISBN. 0-8247-8258-5.

[Rev01] Revol, N. Introduction à l'arithmétique par intervalles. Rapport technique, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Octobre 2001.

[Ric01] Richard, J.P. *Algèbre et analyse pour l'automatique.* Systèmes Automatisés : Information - Commande - Communication. Hermès Science Publications, Paris, 2001. ISBN 2-7462-0198-4.

[Ric02] Richard, P.Y., Buisson, J., Cormerais, H. Analysis of flatness using bond graphs and bicausality. In *IFAC World Congress*, Barcelonne, 2002.

[Rih94] Rihm,R. Interval methods for initial value problems in odes, in topics in validated computations. In *proceeding of the IMACS-GAMM*, New York, 1994.

[Rob83] Robertson, S.A. *Polytopes and Symmetry.* Cambridge University Press, New York, 1983.

[Roe00] Roe P.H., Thomas, J.U. A new bond graph approach to sensitivity analysis. In *MathMod : Conference on Mathematical Modelling*, pages 743–746, 2000.

[Ros70] Rosenbrock, H.H. *State-Space and Multivariable Theory.* Thomas Nelson and Sons, Grande Bretagne, 1970.

[Ros77] Rosenbrock, H.H., Van Der Weiden, A.J.J. Inverse systems. *International Journal of Control*, 25(3) :389–392, Mars 1977.

[Ros79] Rosenberg, R.C., Andry, A.N. Solvability of bond graph junction strucutres with loops. *IEEE Transactions on circuits and systems*, 26(2) :130–137, 1979.

[Ros07] Ross, S.M. *Initiation aux probabilités.* Presses polytechniques et universitaires romandes, 2007.

[Saf82] Safonov, M.G. Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems. *IEEE Proc. Part D : Control Theory and Applications*, 129(6) :251–256, 1982.

[Sai69] Sain, M.K., Massey, J.L. Invertibility of linear time-invariant dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14(2) :141–149, Avril 1969.

[Sai02] Sainz, M.A., Armengol, J., Vehí, J. Fault detection and isolation of the three-tank system using the modal interval analysis. *Journal of Process Control*, 12(2) :325–338, 2002.

[Sal00] Saltelli, A., Chan, k., Scott, M. *Sensitivity analysis.* Probability and Statistics. Jhon Wiley and sons, New York, 2000.

[Sap90] Saporta, G. *Propriétés analyse des données et statistique.* Editions TECHNIP, Paris, 1990.

[Sca91] Scavarda, S., Amara, M., Richard, E. Determination of the input power in terms of output variables using bond graph. In *IMACS-IFAC Symposium MCTS 91 Modelling and Control of Technological Systems*, page 15, Lille, France, 1991.

[Sch81] Schizas, C., Evans, F.J. A graph theoretic approach to multivariable control system design. *Automatica*, 17(2) :371–377, 1981.

[Shi76] Shields, R.W., Boyd Pearson, J. Structural controllability of multi-input linear systems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 21(2) :203–212, Avril 1976.

[Sil68] Silverman, L.M. Properties and application of inverse systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13(4) :436–437, Août 1968.

[Sil69] Silverman, L.M. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14(3) :270–276, Juin 1969.

[Sin81] Singh, S.N. A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2) :595–598, Avril 1981.

[Sma01] Smaoui, M. Adaptation et choix des paramètres d'une sous-structure dans le cadre de la conception d'un système mécatronique. Master de recherche, INSA de Lyon, 2001.

[Soi09] Soize, C. Modélisation probabiliste, identification et propagation des incertitudes dans les modèles numériques des systèmes mécaniques complexes. In *9^e Colloque National en Calcul des Strucutres*, Mai 2009.

[Sol06] Solaiman, B. *Processus stochastiques pour l'ingénieur.* Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006.

[Soo73] Soong, T.T. *Random differential equations in science and engineering.* Academic Press, New-York et London, 1973.

[Str63] Stratonovich, R.L. *Topics in the theory of random noise.* Gordon and Breach, New-York, 1963.

[Sud86] Suda, N., Hatanaka, T. Structural properties of systems represented by bond graphs. In *Proceedings of the World IMACS Conference on Complex and Distributed Systems : Analysis, Simulation and Control*, volume 4, pages 73–80, Paris, France, 1986.

[Sue89] Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. Structural controllability/observability for linear systems represented by bond graphs. *Journal of Franklin Institute*, 326(6) :869–883, 1989.

[Sue91] Sueur, C., Dauphin-Tanguy, G. Bond graph approach for structural analysis of mimo linear systems. *Journal of Franklin Instiute*, 328(1) :55–70, 1991.

[Sys67] Syski, R. *Stochastic differential equations*. McGraw-Hill, New-York, 1967.

[Tan88] Tan, S., Vandewalle, J. Inversion of singular systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35(5) :583–587, Mai 1988.

[Tho00] Thomas, J., Ould Bouamama, B. *Modelling and simulation in thermal and chemical engineering - A bond graph approach*. Spring-Verlag, Berlin, 2000.

[Tom68] Tomovic, R., Vukobratovic, M. Contribution to the sensitivity of large systems. In *Second IFAC, System sensitivity and adaptivity*, pages A.95–A.105, Dubrovnik, Yogaslavie, 1968.

[Tom72] Tomovic, R., Vukobratovic, M. *General sensitivity theory*. Modern Analytic and computational methods in science and mathematics. Elsevier, New York, 1972.

[Ull92] Ullman, D.G. *The mechanicl design process*. McGraw-Hill, New York, 1992.

[Van91] Van Der Woude, J. W. On the structure at infinity of a structured system. *Linear algebra and its applications*, 148 :145–169, 1991.

[Van94] Van Dijk, J. *On the role of bond graph causality in modelling mechatronic systems*. Thèse de doctorat, University of Twente, Pays-Bas, 1994.

[Van03] Van Amerongen, J. Mechatronic design. *Mechatronics*, 13(10) :1045–1066, Décembre 2003.

[Var82] Vardulakis, A.I.G., Limebeer, D.J.N., Karcanias, N. Structure and smith-macmillan form of a rational matrix at infinity. *International Journal of Control*, 35(4) :701–725, 1982.

[Vil05] Villamizar Mejia, R. *Robust Control of Systems subjected to uncertain disturbances and actutaor dynamics*. Thèse de doctorat, Universitat de Girona, Espagne, 2005.

[Vuk87] Vukobratović, M., Katic, D., Potkonjak, V. Computer-assisted choice of electrohydraulic servosystem for manipulation robots using complete mathematical models. *Mechanism and Machine Theory*, 22(5) :431–439, 1987.

[Wal94] Walter, E., Pronzato, L. *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*. Masson, Paris, 1994.

[Wei64] Weiss, L. On a question related to the control of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 9(2) :176–177, Avril 1964.

[Wie84] Wierzbicki, A. *Models and sensitivity of Control Systems*. Elsevier science publishing company, Inc., 1984.

[Wil74] Willsky, A.S. On the invertibility of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(2) :272–274, 1974.

[Wla91] Wlasowski, M., Lorenz, F. How determine the solvability of bond graph linear junction strucutres. *Journal of the Franklin Institute*, 328(5-6) :855–869, 1991.

[Wu 95] Wu , S.T., Youcef-Toumi, K. . On relative degrees and zero dynamics from physical system modeling. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 117(2) :205–217, 1995.

[Xie98] Xie, S., Xie, L., De Souza, C.E. Robust dissipative control for linear systems with dissipative uncertainty. *International Journal of Control*, 70(2) :169–191, Mai 1998.

[Yam85] Yamada, T., Saga, T. A sufficient condition for structural decouplability of linear nonsquare systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(9) :918–921, Septembre 1985.

[Yca11] Ycart, B. *Modèles probabilistes*. Université René Descartes, UFR mathématiques et informatique, 2011.

[You31] Young, R.C. The algebra of multi-valued quantities. In *Mathematische Annalen*, 1931.

[You66] Youla, D.C., Dorato, P. On the inverse of linear dynamical systems. Rapport technique, Polytechnic Institute of Brooklyn, New York, USA, Mars 1966.

[Zad63] Zadeh, L.A., Desoer, C.A. *Linear systems theory : The state space approach*. Series in Systems Science. McGraw-Hill, 1963.

[Zha07] Zhang, L., Li, J. Probability density evolution analysis on dynamic response and reliability estimation of wind-excited transmission towers. *Wind and Structures*, 10(1) :45–60, 2007.

Bibliographie personnelle

[Jar08a] Jardin, A., El Feki, M., Marquis-Favre, W., Thomasset, D., Bideaux E. Use of structural analysis in a bond graph-based methodology for sizing mechatronic systems. In *Proceedings of the 7th edition of France-Japan, 5th Europe-Asia Congress on Mechatronics*, Le Grand Bornand, France, mai 2008.

[El 08a] El Feki, M., Di Loreto, M., Bideaux, E., Thomasset, D., Marquis-Favre, W. On the role of essential orders on feedback decoupling and model inversion : bond graph approach. In *ECMS'08*, pages 457-463, Nicosie, Chypre, Juin 2008.

[El 08b] El Feki, M., Di Loreto, M., Bideaux, E., Thomasset, D., Ngwompo, R.F. Structural properties of inverse models represented by bond graph. In *17th IFAC World Congress*, volume 17, pages 236-241, Seoul, Corée du sud, Juillet 2008.

[El 10] El Feki, M., Marquis-Favre, W., Krähenbühl, Thomasset, D. Bond Graph Representation of Standard Interconnection Model. In *Proceedings of International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, Orlando, USA, Avril 2010.

[El 11a] El Feki M., Jardin, A., Marquis-Favre, W., Krähenbühl, L., Bideaux, E., Thomasset, D. Determination of essential orders from a bond graph model. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2011. (accepté).

[El 11b] El Feki, M, Jardin, A., Marquis-Favre, W., Krähenbühl, L., Thomasset, D. Structural analysis by bond graph approach : Duality between causal and bicausal procedures. *IMechE Part I Journal of Systems and Control Engineering*, 2011. (accepté).

Annexe A

Le langage Bond Graph

Cette annexe présente les notions de base sur le langage bond graph. Comme compléments d'information, le lecteur pourra consulter les références suivantes [Dau00,Kar06].

Le langage bond graph est un outil de modélisation basé sur la description graphique des transferts d'énergie au sein d'un système physique. Une représentation uniforme par rapport aux différents domaines de la physique fait de lui un langage pluridisciplinaire qui permet de modéliser les différents phénomènes énergétiques ainsi que la manière dont ces phénomènes sont interconnectés. Un modèle bond graph peut être vu comme un modèle intermédiaire entre une représentation technologique et un modèle analytique.

A.1 Variables de puissance et d'énergie

Les transferts d'énergie au sein d'un modèle bond graph sont caractérisés par deux variables de puissance et une puissance. L'état du système est représenté par les variables d'énergie du modèle bond graph.

A.1.1 Variables de puissance

Sur un modèle bond graph, le transfert d'énergie entre deux sous-systèmes Σ_A et Σ_B est représenté par une demi-flèche appelée « lien de puissance » ou « bond » (figure A.1). Ce transfert est caractérisé par deux variables de puissance : une variable dite d'effort $e(t)$ et l'autre de flux $f(t)$ dont le produit est la puissance instantanée $P(t)$ associée au transfert d'énergie :

$$P(t) = e(t)f(t) \tag{A.1}$$

Par convention :

- le sens de la demi-flèche du lien de puissance indique l'orientation positive du flux d'énergie ;
- la variable de flux $f(t)$ est placée du côté de la demi-flèche et par conséquent, la variable d'effort est placée de l'autre côté du lien.

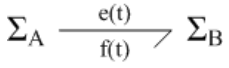


FIG. A.1 – Flux d'énergie entre deux sous-systèmes.

A.1.2 Variables d'énergie

L'énergie transférée entre les deux sous-systèmes Σ_A et Σ_B (figure A.1) peut être calculée par intégration de la puissance instantanée $P(t)$ par rapport au temps :

$$E(t) = E(t_0) + \int_{t_0}^{t} e(\tau) f(\tau) d\tau \tag{A.2}$$

Les variables d'énergie, associées aux phénomènes de stockage d'énergie dans un système, caractérisent son état énergétique et sont définies par les intégrales des variables de puissance :

$$p(t) = p(t_0) + \int_{t_0}^{t} e(\tau) d\tau \tag{A.3}$$

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau \tag{A.4}$$

Les variables $p(t)$ et $q(t)$ sont appelées respectivement *moment généralisé* et *déplacement généralisé*. À partir des équations A.3 et A.4, les relations suivantes sont déduites directement :

$$\dot{p}(t) = e(t) \tag{A.5}$$

$$\dot{q}(t) = f(t) \tag{A.6}$$

Le tableau A.1 présente la nature des variables d'énergie et de puissance dans différents domaines de la physique.

Tab. A.1 – Les variables de puissance et d'énergie associées à différents domaines de la physique.

Domaine physique	**Variables de puissance**		**Variables d'énergie**	
	Effort	**Flux**	**Moment généralisé**	**Déplacement généralisé**
Mécanique de translation	Force (N)	Vitesse (m/s)	Quantité de mouvement $(kg.m/s)$	Déplacement (m)
Mécanique de rotation	Couple $(N.m)$	Vitesse angulaire (rad/s)	Moment cinétique $(kg.m^2/s)$	Angle (rad)
Hydraulique	Pression (Pa)	Débit volumique (m^3/s)	Moment de pression $(Pa.s)$	Volume (m^3)
Électrique	Tension (V)	Courant (A)	Flux magnétique (Wb)	Charge (C)
Magnétique	Force magnétomotrice (A)	Dérivée du flux magnétique (Wb/s)		Flux magnétique (Wb)
Chimie	Potentiel chimique (J/mol)	Débit molaire (mol/s)		Mole (mol)
Thermo-dynamique	Température (K)	Débit d'entropie (W/K)		Entropie (J/K)

A.2 Éléments bond graph

Dans cette section, les principaux éléments bond graph sont présentés. Ces éléments peuvent être classés en quatre catégories : les éléments passifs, les éléments actifs, les éléments de jonction et de transduction et les éléments d'analyse[1]. Les relations associées appelées *lois caractéristiques* ou encore *lois constitutives* caractérisent ces éléments et sont utilisées pour la mise en équation du système. Par ailleurs, ces relations restent acausales malgré leur écriture orientée (une expression à droite et une expression à gauche du signe « = »), autrement dit, elles ne préjugent pas d'un schéma de calcul particulier.

A.2.1 Éléments passifs

Les éléments passifs correspondent à des phénomènes physiques qui transforment l'énergie fournie en énergie stockée (éléments bond graph I ou C) ou dissipée (élément bond graph R). Par convention, les liens de puissance associés sont orientés vers les éléments (Tableau A.2). Pour les éléments de stockage d'énergie (I et C), l'énergie stockée s'exprime en fonction du moment généralisé $p(t)$ (pour un élément I) et du déplacement généralisé $q(t)$ (pour un élément C).

Remarque : Les lois caractéristiques inverses existent à condition que les fonctions Φ soient inversibles.

TAB. A.2 – Éléments bond graph passifs.

Élément bond graph	**Représentation graphique, loi caractéristique et énergie**	**Exemples physiques**
C Stockage d'énergie sans dissipation	e(t) / f(t) C $q(t) - \Phi_C(e(t)) = 0$ $q(t) - Ce(t) = 0$ (linéaire) $E(q) = E(q_0) + \int_{q_0}^{q} e(\tau)d\tau$	Ressort, capacité électrique, réservoir hydraulique,...
I Stockage d'énergie sans dissipation	e(t) / f(t) I $p(t) - \Phi_I(f(t)) = 0$ $p(t) - If(t) = 0$ (linéaire) $E(p) = E(p_0) + \int_{p_0}^{p} f(\tau)d\tau$	Masse, inertie, inductance électrique,...
R dissipation d'énergie	e(t) / f(t) R $e(t) - \Phi_R(f(t)) = 0$ $e(t) - Rf(t) = 0$ (linéaire) $E(t) = E(t_0) + \int_{t_0}^{t} e(\tau)f(\tau)d\tau$	Frottements secs, visqueux, résistance électrique, restriction hydraulique,...

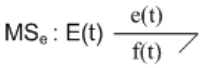
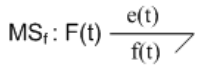
A.2.2 Éléments actifs

Les éléments actifs correspondent à une source idéale d'énergie capable d'imposer une variable d'effort (élément bond graph S_e) ou une variable de flux (élément bond graph S_f). Par convention,

[1] Les éléments d'analyse peuvent représenter des capteurs.

les liens de puissance associés sont sortants (Tableau A.3).

TAB. A.3 – Éléments bond graph actifs[2].

Élément bond graph	Représentation graphique	Exemples physiques
S_e Source d'énergie imposant l'effort	 $e(t)$ est imposé au système	Source de pression, source de tension,...
S_f Source d'énergie imposant le flux	 $f(t)$ est imposé au système	Source de courant,...

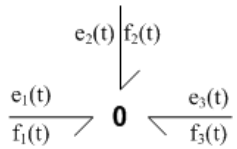
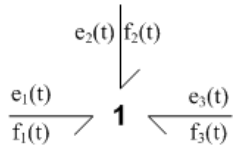
A.2.3 Éléments de jonction et de transduction

Les éléments de jonction et de transduction permettent de décrire l'interconnexion et les couplages entre les différents phénomènes énergétiques présents dans un système tout en respectant le principe de conservation de puissance.

Éléments de jonction

Les éléments de jonction permettent d'interconnecter des phénomènes énergétiques qui partagent la même variable d'effort (jonction 0) ou la même variable de flux (jonction 1). Les signes apparaissant dans les lois caractéristiques de ces éléments dépendent de l'orientation des liens de puissance connectés : une variable est pondérée par un signe + si le lien correspondant est entrant et par un signe - si le lien est sortant. Le tableau A.4 présente une jonction avec trois liens de puissance. Néanmoins le principe est généralisable à n liens de puissance.

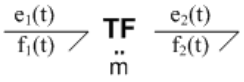
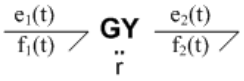
TAB. A.4 – Éléments de jonction.

Élément bond graph	Représentation graphique et lois caractéristiques	Exemples physiques
Jonction 0 de conservation de puissance	 $e_1(t) = e_2(t) = e_3(t)$ $f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0$	Contrainte cinématique, loi des mailles,...
Jonction 1 de conservation de puissance	 $e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0$ $f_1(t) = f_2(t) = f_3(t)$	Équation de NEWTON-EULER loi des nœuds,...

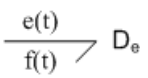
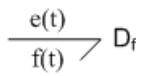
Éléments de transduction

Les éléments de transduction permettent de coupler des phénomènes énergétiques appartenant à des domaines physiques différents. Ces couplages peuvent s'exprimer sous la forme de relations entre deux variables de puissance de même nature (élément bond graph TF) ou sous la forme de relations entre deux variables de puissance de natures différentes (élément bond graph GY) (tableau A.5).

Tab. A.5 – Éléments de transduction.

Élément bond graph	**Représentation graphique et lois caractéristiques**	**Exemples physiques**
TF transformateur, transducteur instantané et sans dissipation d'énergie	 $e_1(t) - me_2(t) = 0$ $mf_1(t) - f_2(t) = 0$ où m est le module du transformateur	réducteur mécanique, bras de levier, système de poulies, transformateur électrique,...
GY gyrateur, transducteur instantané et sans dissipation d'énergie	 $e_1(t) - rf_2(t) = 0$ $rf_1(t) - e_2(t) = 0$ où r est le module du gyrateur	gyroscope, capteur à effet Hall, conversion électromécanique d'un moteur à courant continu,...

Tab. A.6 – Éléments bond graph d'analyse.

Élément bond graph	**Représentation graphique et loi caractéristique**	**Exemples physiques**
D_e Détecteur d'effort imposant un flux nul	 $f(t) = 0$	Voltmètre, dynamomètre,...
D_f Détecteur de flux imposant un effort nul	 $e(t) = 0$	Ampèremètre, débitmètre,...

A.2.4 Éléments d'analyse

Pour des besoins d'analyse[3], il peut être utile de faire apparaître les sorties du système. Pour cela, des éléments passifs ont été introduits : le détecteur d'effort (élément bon graph D_e) et le détecteur de flux (élément bond graph D_f) (tableau A.6). Ces éléments sont placés dans le modèle bond graph pour indiquer la présence d'un capteur ou d'un instrument de mesure supposé idéal (qui ne consomme pas de puissance). Placés sur des jonctions adéquates, leur ajout ne modifie pas le comportement dynamique du modèle.

Remarques :

- Le tétraèdre de Paynter (figure A.2) résume les relations entre les variables de puissance et d'énergie associées aux éléments passifs (R, I et C).

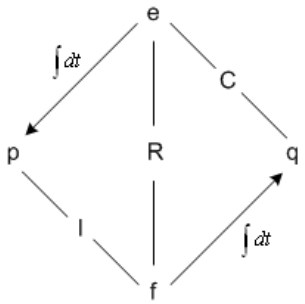


Fig. A.2 – Tétraèdre de Paynter.

- Les éléments actifs, les éléments de dissipation (R) et les éléments de transduction peuvent être modulés par un signal. Leur symbole est alors précédé par « M » et leur loi caractéristique est fonction d'un signal de modulation.

A.3 Construction d'un modèle bond graph

La construction d'un modèle bond graph d'un système physique se fait en trois étapes :

1. La première étape consiste en une *approche systémique* : décomposer le système en sous-systèmes et chaque sous-système en composants. L'interconnexion de ces différents composants est modélisée par des liens de puissance. L'ensemble forme le *modèle bond graph à mots* ou *word bond graph*.
2. La deuxième étape consiste en le *principe fondamental de conservation d'énergie* : l'énergie absorbée est la somme de l'énergie stockée et de l'énergie dissipée. Cette conservation est représentée par les jonctions 1 et 0 et par les couplages entre les domaines.
3. La troisième étape consiste en une *approche phénoménologique* : identifier les phénomènes énergétiques et associer à chaque phénomène (dissipation ou stockage d'énergie) une loi caractéristique décrivant la relation entre les variables de puissance.

La procédure 20 permet de reprendre ces trois étapes afin de construire un modèle bond graph d'un système à paramètres localisés issu des domaines de l'électrique, de l'hydraulique et de la mécanique (de translation ou de rotation).

Procédure 20. ***Construction du modèle bond graph***
Pour les systèmes à paramètres localisés des domaines de l'électrique, de l'hydraulique, de la mécanique de translation et de la mécanique de rotation [Fav97] :

1. *Identifier les différents domaines de la physique présents dans le système.*

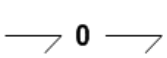
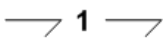
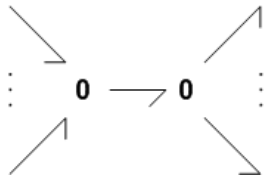
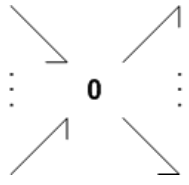
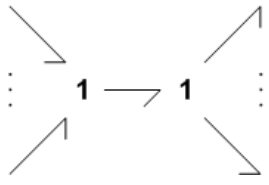
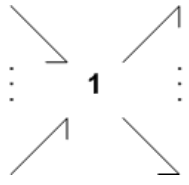
[3]Notamment pour établir une analyse structurelle et comportementale (cf. chapitre 3).

2. *Choisir une référence de potentiel, de pression, de vitesse de translation et de rotation.*
3. *À chaque nœud distinct de potentiel, de pression, attacher une jonction 0 et, à chaque vitesse de translation et de rotation, attacher une jonction 1. Nommer les variables liées à ces potentiels et ces vitesses.*
4. *Insérer une jonction 1 entre les jonctions 0 et inversement pour les domaines de la mécanique.*
5. *Placer les liens de puissance faisant alors apparaître les différences de potentiels, de pressions, de vitesses de translation et de rotation (Figure A.3).*

FIG. A.3 – Jonctions et liens de puissance faisant apparaître (a) les différences de potentiels et de pressions, (b) les différences de vitesses.

6. *Placer les éléments de transduction appropriés entre les différents domaines du système.*
7. *Connecter les éléments dissipatifs R et les éléments de stockage d'énergie I et C aux liens libres correspondant aux phénomènes modélisés et en indiquant leur paramètre ou leur loi caractéristique.*
8. *Rajouter les sources et les éléments d'analyse.*
9. *Éliminer les liens de puissance nulle et simplifier la structure de jonction selon le tableau A.7.*

TAB. A.7 – Règles de simplification d'un modèle bond graph.

Règle	Structure partielle	structure partielle simplifiée
1		
2		
3		
4		

Remarque : Pour les systèmes mécaniques multicorps, des procédures plus complexes ont été établies [Kar06, Fav97].

A.4 Multi-bond graph

Le *multi-bond graph* ou le *bond graph multi-liens* ou encore le *bond graph vectoriel* a été introduit par Bonderson [Bon75] et formalisé par Breedveld [Bre82a,Bre85]. Il représente une version vectorielle du bond graph. le multilien bond graph (figure A.4) est la juxtaposition de plusieurs liens. La puissance associé à ce multilien est égale à la somme des puissances individuelles sur chaque lien. La dimension n est indiquée sur le multilien et les variables d'effort et de flux associées se présentent sous forme vectorielle. Les jonctions tableaux (figure A.5) sont aussi la juxtaposition de jonctions possédant chacune leurs relations caractéristiques. De même, les éléments de transduction peuvent se présenter sous forme multiport : la figure A.6 présente un transformateur multiport.

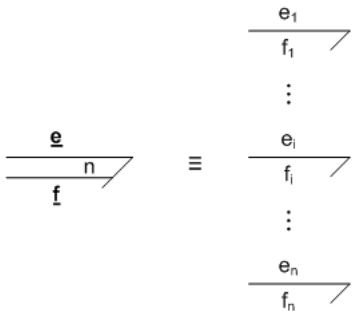


Fig. A.4 – Multilien bond graph.

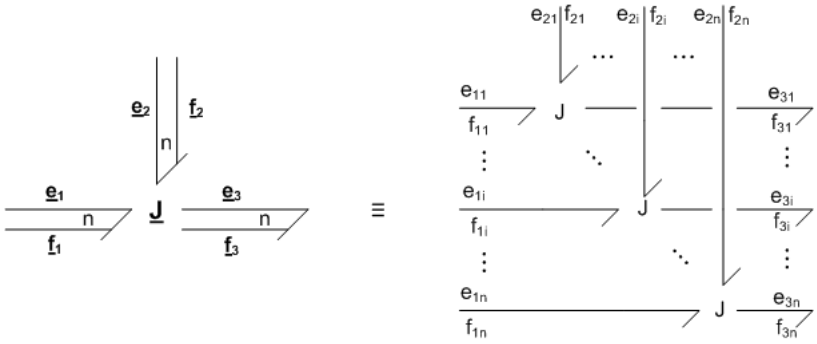


Fig. A.5 – Jonction tableau (jonction 0 ou 1).

Les éléments de stockage et de dissipation d'énergie multiport (figure A.7) ne représentent une juxtaposition d'éléments 1-port que dans le cas où il n'existe pas de couplage entre les différents ports. Aux éléments de stockage, il peut être associé un vecteur moment généralisé ou déplacement généralisé. L'annexe D est réservé à ces éléments multiports.

A.5 Schémas de calcul associés à un modèle bond graph

Chaque élément bond graph est associé à une (ou plusieurs) relation(s) mathématique(s) : on parle alors de loi(s) caractéristique(s). Ces relations ont été présentées dans la section A.2 sans tenir compte d'aucune orientation. Le modèle bond graph ainsi construit est appelé modèle *acausal* : il ne reflète que les phénomènes énergétiques impliqués dans le système et la manière dont ils sont interconnectés. Cependant, pour des besoins de simulation et d'analyse, l'orientation des équations est également nécessaire. Dans ce cas, les grandeurs inconnues peuvent être déterminées à partir des grandeurs connues. Cette section présente deux schémas de calcul qui

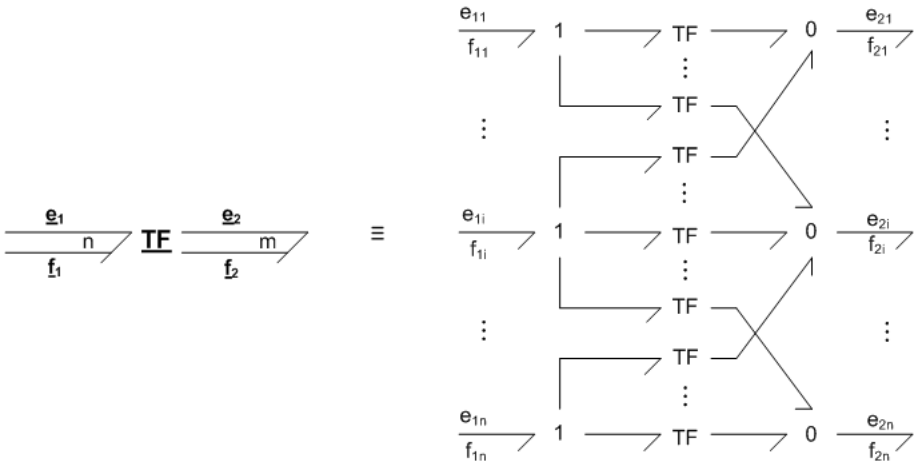
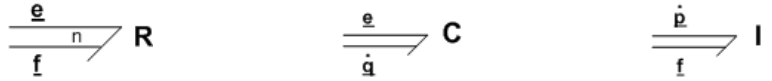


FIG. A.6 – Un transformateur multiport.



(a) Élément dissipatif multiport R

(b) Élément de stockage multiport C

(c) Élément de stockage multiport I

FIG. A.7 – Éléments dissipatif et de stockage multiports.

peuvent être associés à un modèle bond graph : le schéma causal et le schéma bicausal. La causalité (resp. la bicausalité) permet d'aboutir à un modèle bond graph *causal* (resp. *bicausal*). Le symbole « := » utilisé dans cette section indique un sens précis de calcul, à savoir, l'expression à gauche est déterminée par l'évaluation de l'expression à droite.

A.5.1 Causalité

Considérons les deux sous-systèmes Σ_A et Σ_B de la figure A.8 avec leurs variables d'effort et de flux associées (e_A, f_A) et (e_B, f_B). Ces variables respectent les relations suivantes :

$$\begin{cases} e_A - e_B = 0 \\ f_A - f_B = 0 \end{cases} \tag{A.7}$$

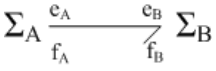


FIG. A.8 – Sous-systèmes Σ_A et Σ_B avec leurs variables d'effort et de flux associées.

Selon le principe de la causalité physique, deux scénarios peuvent avoir lieu :

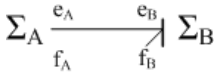
- soit le sous-système Σ_A impose l'effort au sous-système Σ_B qui réagit à son tour en imposant le flux à Σ_A.

$$\begin{cases} e_B := e_A \\ f_A := f_B \end{cases} \tag{A.8}$$

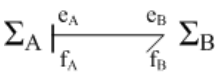
- soit le sous-système Σ_A impose le flux au sous-système Σ_B qui réagit à son tour en imposant l'effort à Σ_A.

$$\begin{cases} e_A := e_B \\ f_B := f_A \end{cases} \tag{A.9}$$

La causalité au sens des bond graphs rejoint le principe de la causalité physique dans le sens où un phénomène cause produit un autre phénomène effet. Ces relations de cause à effet sont représentées par l'ajout d'un *trait causal* sur le lien de puissance placé, par convention, du coté du sous-système auquel l'effort est imposé (figure A.9).



(a) correspondant au schéma de calcul A.8



(b) correspondant au schéma de calcul A.9

FIG. A.9 – Représentation bond graph de la causalité.

Causalité des éléments bond graph

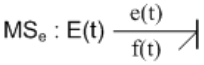
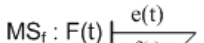
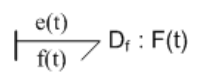
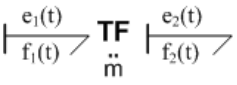
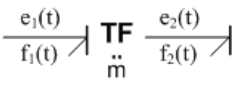
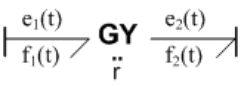
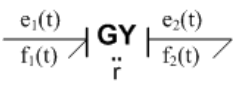
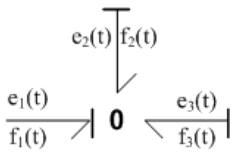
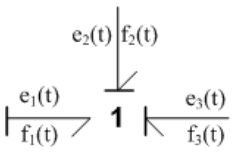
L'affectation de la causalité aux éléments bond graph respecte les règles suivantes :
- les éléments bond graph S_e, S_f, D_e et D_f ont une causalité imposée (*e.g.* un capteur d'effort impose un flux nul et le trait causal associé est donc nécessairement placé du côté de l'élément D_e),
- un et un seul trait causal doit être placé près d'une jonction 0,
- un et un seul trait causal doit être placé éloigné d'une jonction 1,
- pour les éléments dissipatifs R, l'existence de certaines causalités dépend de l'inversibilité de leurs lois caractéristiques.

Les tableaux A.8 et A.9 récapitulent les différents schémas de calcul possibles pour chacun des éléments bond graph.

TAB. A.8 – Causalité des éléments passifs.

Élément bond graph	**Causalité possible**	**Représentation graphique**	**Schéma de calcul associé**
C	Causalité intégrale		$e(t) := \Phi_C^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + q(t_0)\right)$
	Causalité dérivée		$f(t) := \frac{d}{dt}\left(\Phi_C(e(t))\right)$
I	Causalité intégrale		$f(t) := \Phi_I^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} e(\tau)d\tau + p(t_0)\right)$
	Causalité dérivée		$e(t) := \frac{d}{dt}\left(\Phi_I(f(t))\right)$
R	Causalité résistance		$e(t) := \Phi_R(f(t))$
	Causalité conductance		$f(t) := \Phi_R^{-1}(e(t))$

TAB. A.9 – Causalité des éléments actifs, d'analyse, de jonction et de transduction.

Élément bond graph	Causalité possible	Représentation graphique	Schéma de calcul associé
S_e	Causalité unique et imposée		$e(t) := E(t)$
S_f	Causalité unique et imposée		$f(t) := F(t)$
D_e	Causalité unique et imposée		$f(t) := 0$
D_f	Causalité unique et imposée		$e(t) := 0$
TF	Causalité m		$\begin{cases} e_1(t) := me_2(t) \\ f_2(t) := mf_1(t) \end{cases}$
	Causalité $\frac{1}{m}$		$\begin{cases} e_2(t) := \frac{1}{m}e_1(t) \\ f_1(t) := \frac{1}{m}f_2(t) \end{cases}$
GY	Causalité r		$\begin{cases} e_1(t) := rf_2(t) \\ e_2(t) := rf_1(t) \end{cases}$
	Causalité $\frac{1}{r}$		$\begin{cases} f_2(t) := \frac{1}{r}e_1(t) \\ f_1(t) := \frac{1}{r}e_2(t) \end{cases}$
Jonction 0	Un seul et unique trait causal près de la jonction (un seul et unique effort est imposé sur la jonction)	exemple : 	$\begin{cases} e_2(t) := e_1(t) \\ e_3(t) := e_1(t) \\ f_1(t) := -f_2(t) - f_3(t) \end{cases}$
Jonction 1	Un seul et unique trait causal éloigné de la jonction (un seul et unique flux est imposé sur la jonction)	exemple : 	$\begin{cases} e_1(t) := -e_2(t) - e_3(t) \\ f_2(t) := f_1(t) \\ f_3(t) := f_1(t) \end{cases}$

Affectation de la causalité à un modèle bond graph

L'affectation de la causalité à un modèle bond graph revient à attribuer un trait causal à chaque lien de puissance. La propagation de la causalité tout le long d'un modèle est guidée en partie par les éléments bond graph qui le composent. Le reste de la causalité est propagé par des choix intermédiaires sur les liens où la causalité est indéterminée *a priori*. La procédure SCAP[4] (procédure 21) permet d'obtenir un modèle bond graph causal. Par la suite, l'exploitation

[4] *i.e.* Sequential Causality Assignement Procedure.

de ce modèle permettra soit de déterminer le modèle d'état associé[5], soit d'établir une analyse structurelle et comportementale du modèle (cf. chapitre 3).

Procédure 21. ***Affectation de la causalité préférentielle intégrale (procédure SCAP)***

1. *Pour chaque élément à causalité imposée (sources, détecteurs et éléments non inversibles), affecter la causalité obligatoire et la propager tout le long du modèle bond graph en respectant les contraintes de causalité des éléments de jonction 0 et 1 et des éléments TF et GY.*
2. *Pour chaque élément de stockage d'énergie, affecter une causalité préférentielle intégrale si possible. Propager la causalité tout le long du modèle bond graph comme décrit précédemment.*
3. *S'il reste des éléments dissipatifs R non déterminés causalement, affecter une causalité arbitraire à l'un de ces éléments et la propager comme précédemment.*
4. *Répéter l'étape 3 jusqu'à ce que tous les éléments R soient causalement déterminés.*
5. *Si le modèle bond graph n'est pas entièrement causal, affecter une causalité arbitraire et la propager comme précédemment.*
6. *Répéter l'étape 5 juqu'à ce que le modèle bond graph soit entièrement déterminé causalement.*

Remarques :

- Si des conflits de causalité apparaissent, les causalités arbitraires ou non obligatoires doivent être changées avant de propager à nouveau la causalité tout le long du modèle bond graph[6]. Cette procédure aboutit à des modèles bond graph contenant éventuellement des éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée. Dans ce cas, le modèle d'état du système présente des équations algébriques.
- La procédure MSCAP[7] proposée par Van Dijk [Van94] permet d'anticiper l'apparition des conflits de causalité.

A.5.2 Bicausalité

Du point de vue mathématique, deux autres schémas de calcul peuvent être déduits des relations A.7 :

- le sous-système Σ_A impose à la fois l'effort et le flux au sous-système Σ_B :

$$\begin{cases} e_B := e_A \\ f_B := f_A \end{cases} \tag{A.10}$$

- le sous-système Σ_B impose à la fois l'effort et le flux au sous-système Σ_A :

$$\begin{cases} e_A := e_B \\ f_A := f_B \end{cases} \tag{A.11}$$

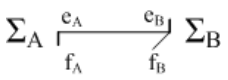
Ces schémas de calcul ne reflètent pas une réalité physique. Néanmoins, ils peuvent être utilisés pour exprimer le modèle inverse. Ces nouvelles possibilités de calcul ont été introduites en langage bond graph par Gawthrop [Gaw95] grâce au concept de bicausalité. Le trait causal est coupé en deux demi-traits causaux afin de dissocier l'affectation des variables d'effort de celle des variables de flux (figure A.10)[8].

[5] Une causalité préférentielle intégrale est affectée aux éléments de stockage d'énergie afin de simplifier la détermination du modèle d'état. Une causalité préférentielle dérivée peut être affectée dans certains cas, notamment pour déterminer la fonction de transfert grâce à la règle de Mason [Bro72].

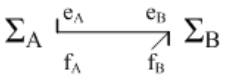
[6] Si, malgré tous les changements possibles, les conflits persistent alors il faut changer le modèle.

[7] *i.e.* Modified Sequential Causality Assignment Procedure.

[8] Une autre notation de la bicausalité a été proposée par Junco [Jun01].



(a) correspondant au schéma de calcul A.10



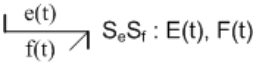
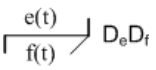
(b) correspondant au schéma de calcul A.11

FIG. A.10 – Représentation bond graph de la bicausalité.

Bicausalité des éléments bond graph

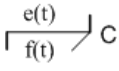
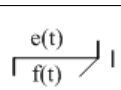
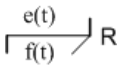
Les sources (resp. détecteurs) introduits dans la section A.2.2 (resp. section A.2.4) sont incapables d'imposer (resp. d'analyser) à la fois la variable d'effort et la variable de flux. Ainsi, de nouveaux éléments bond graph sont introduits : les double sources et les double détecteurs (tableau A.10).

TAB. A.10 – Eléments bond graph pour la propagation de la bicausalité.

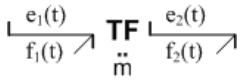
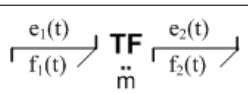
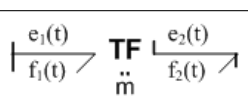
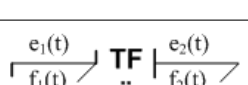
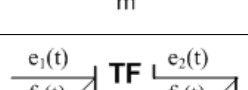
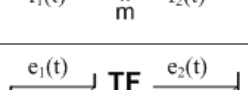
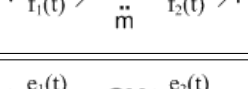
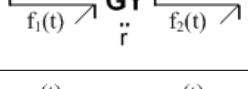
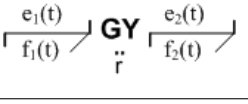
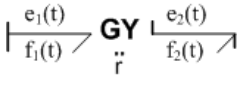
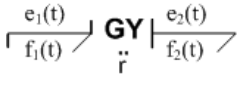
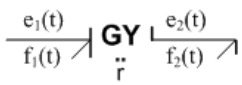
Élément bond graph	**Représentation graphique**	**Schéma de calcul associé**	**Utilisation**
S_eS_f double source imposant l'effort et le flux		$\begin{cases} e(t) := E(t) \\ f(t) := F(t) \end{cases}$	Départ d'affectation bicausale
D_eD_f double détecteur d'effort et de flux		$e(t)?, f(t)?$	Arrivée d'affectation bicausale

Les tableaux A.11, A.12 et A.13 récapitulent les différentes affectations possibles de la bicausalité pour chacun des éléments bond graph ainsi que leurs éventuelles utilisations.

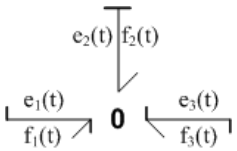
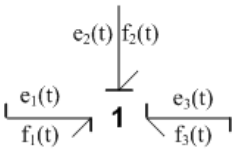
TAB. A.11 – Bicausalité des éléments passifs.

Élément bond graph	**Bicausalité possible**	**Schéma de calcul associé**	**Utilisations**
C		$e(t), f(t) \rightarrow \Phi_C()?$	Synthèse paramétrique, identification, caractérisation
I		$e(t), f(t) \rightarrow \Phi_I()?$	
R		$e(t), f(t) \rightarrow \Phi_R()?$	

TAB. A.12 – Biausalité des éléments de transduction.

Élément bond graph	Bicausalité possible	Schémas de calcul associé	Utilisations
TF		$\begin{cases} e_1(t) := m e_2(t) \\ f_1(t) := \frac{1}{m} f_2(t) \end{cases}$	Propagation de la bicausalité (bicausalité traversante)
		$\begin{cases} e_2(t) := \frac{1}{m} e_1(t) \\ f_2(t) := m f_1(t) \end{cases}$	
		$\begin{cases} m := \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \\ e_1(t) := m e_2(t) \end{cases}$	Synthèse paramétrique, identification, caractérisation, synthèse de loi de commande en boucle ouverte (bicausalité débouchante)
		$\begin{cases} m := \frac{e_1(t)}{e_2(t)} \\ f_2(t) := m f_1(t) \end{cases}$	
		$\begin{cases} m := \frac{e_1(t)}{e_2(t)} \\ f_1(t) := \frac{1}{m} f_2(t) \end{cases}$	
		$\begin{cases} m := \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \\ e_2(t) := \frac{1}{m} e_1(t) \end{cases}$	
GY		$\begin{cases} e_1(t) := r f_2(t) \\ f_1(t) := \frac{1}{r} e_2(t) \end{cases}$	Propagation de la bicausalité (bicausalité traversante)
		$\begin{cases} f_2(t) := \frac{1}{r} e_1(t) \\ e_2(t) := r f_1(t) \end{cases}$	
		$\begin{cases} r := \frac{e_2(t)}{f_1(t)} \\ e_1(t) := r f_2(t) \end{cases}$	Synthèse paramétrique, identification, caractérisation, synthèse de loi de commande en boucle ouverte (bicausalité débouchante)
		$\begin{cases} r := \frac{e_2(t)}{f_1(t)} \\ f_2(t) := \frac{1}{r} e_1(t) \end{cases}$	
		$\begin{cases} r := \frac{e_1(t)}{f_2(t)} \\ f_1(t) := \frac{1}{r} e_2(t) \end{cases}$	
		$\begin{cases} r := \frac{e_1(t)}{f_2(t)} \\ e_2(t) := r f_1(t) \end{cases}$	

TAB. A.13 – Bicausalité des éléments de jonction.

Élément bond graph	Bicausalité possible	Schémas de calcul associé	Utilisations
Jonction 0		$\begin{cases} e_2(t) := e_3(t) \\ e_1(t) := e_3(t) \\ f_1(t) := -f_2(t) - f_3(t) \end{cases}$	Propagation de la bicausalité (bicausalité traversante)
Jonction 1		$\begin{cases} e_1(t) := -e_2(t) - e_3(t) \\ f_2(t) := f_3(t) \\ f_1(t) := f_3(t) \end{cases}$	

Affectation de la bicausalité à un modèle bond graph

L'affectation de la bicausalité à un modèle bond graph revient à propager la bicausalité des éléments double sources S_eS_f vers les éléments double détecteurs D_eD_f. Une causalité (au sens classique) est affectée aux autres éléments du modèle. La procédure SCAPI[9] (procédure 22) permet d'obtenir un modèle bond graph bicausal. Cette procédure repose sur les notions de ligne de puissance et de chemin causal. L'exploitation du modèle ainsi obtenu permettra de déterminer le modèle d'état inverse associé.

Définition 14. *Sur un modèle bond graph acausal, une* ***ligne de puissance*** *est une série de liens bond graph et d'éléments multiports connectant deux composants. Elle représente le chemin de transmission d'énergie entre deux points du système [Wu 95, Ngw05].*

Définition 15. *Une* ***ligne de puissance entrée/sortie (E/S)*** *est une ligne de puissance entre un élément portant une variable d'entrée et un élément portant une variable de sortie du modèle.*

Définition 16. ***Deux lignes de puissance*** *sont dites* ***disjointes*** *si et seulement si elles ne possèdent aucune puissance en commun [Ngw01a].*

Définition 17. *Sur un modèle bond graph causal, un* ***chemin causal*** *reliant deux éléments bond graph est une suite de variables (d'effort et/ou de flux) ordonnée suivant l'affectation de la causalité [Wu 95, Ngw01a].*

Définition 18. *Une* ***boucle causale*** *est un chemin causal fermé entre deux éléments de type R, I ou C. Par définition, une boucle causale ne peut pas passer deux fois par la même variable de puissance et traverse au maximum deux éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale*[10] *[Rah93, Dau00].*

Définition 19. ***Un chemin causal entrée/sortie (E/S)*** *est un chemin causal entre une variable d'entrée et une variable de sortie du modèle.*

[9] *i.e.* Sequential Causality Assignment Procedure for Inversion

[10] La boucle causale est un cas particulier de la notion du cycle causal (définition 49, page 244) qui lui peut contenir plusieurs éléments de stockage d'énergie distincts. Cette définition du cycle causal rejoint celle de VAN DIJK [Van94] le définit comme étant un chemin causal fermé le long d'une *boucle de liens* c'est à dire le long d'une cascade alternée de liens et d'éléments bond graph constituant une chaîne fermée. Ainsi, la boucle causale est un cas particulier de la boucle de liens définie par VAN DIJK.

Définition 20. ***Deux chemins causaux*** *(resp. deux boucles causales) sont dits* ***disjoints*** *si et seulement s'ils ne possèdent aucune variable (d'effort ou de flux) en commun [Ngw01a].*

Définition 21. *Un ensemble de m chemins causaux E/S disjoints est dit associé à un ensemble de m lignes de puissance E/S disjointes si chaque jonction appartenant à une des lignes de puissance de ce dernier est également traversée par au moins un des chemins causaux de l'ensemble des chemins causaux disjoints [Ngw05].*

Procédure 22. ***Affectation de la bicausalité (procédure SCAPI)*** *[Ngw97, Ngw05]*

1. *Sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale, choisir un ensemble de lignes de puissance E/S disjointes associées à des chemins causaux E/S disjoints. S'il n'existe pas de tel ensemble alors le modèle n'est pas inversible et la procédure s'arrête.*
2. *Sur le modèle bond graph acausal, remplacer les éléments de modulation (resp. les détecteurs) associées aux entrées (resp. aux sorties) par des double détecteurs D_eD_f (resp. des double sources S_eS_f).*
3. *Pour chaque élément dont la causalité est imposée (source, détecteur), affecter cette causalité obligatoire et propager cette causalité à travers la structure de jonction en respectant les contraintes de causalité des jonctions 0 et 1 et des éléments TF et GY.*
4. *Le long de chaque ligne de puissance choisie à l'étape 1, propager la bicausalité de la double source vers le double détecteur. Puis, propager la causalité tout le long du modèle bond graph en respectant les contraintes de causalité des jonctions 0 et 1 et des éléments TF et GY. Si des conflits de causalité ou des boucles causales non résolubles apparaissent, recommencer les étapes précédentes avec un autre ensemble de lignes de puissance E/S disjointes. Si aucun de ces ensembles ne résout les conflits de causalité, alors le système n'est pas inversible et la procédure s'arrête.*
5. *Pour les éléments de stockage d'énergie, affecter une causalité préférentielle intégrale si possible et la propager à travers le modèle bond graph comme à l'étape précédente.*
6. *S'il reste des éléments dissipatifs R non déterminés causalement, affecter une causalité arbitraire sur un de ces éléments et la propager comme précédemment.*
7. *Répéter l'étape 6 jusqu'à ce que chaque élément R soit déterminé causalement.*
8. *Si le modèle bond graph n'est pas complètement déterminé causalement, affecter une causalité arbitraire sur un lien bond graph sans trait causal et la propager comme précédemment.*
9. *Répéter l'étape 8 jusqu'à ce que le modèle bond graph soit complètement déterminé causalement.*

Remarque : Inspirée de la procédure MSCAP [Van94], la procédure MSCAPI[11] [Ngw97] permet d'éviter l'apparition de conflits de causalité sur le modèle bond graph inverse lorsque le modèle considéré contient des cycles de liens.

[11] *i.e.* Modified Sequential Causality Assignment Procedure for Inversion

Annexe B

Synthèse de tolérance paramétrique par analyse par intervalles : Exemple

Pour illustrer la procédure décrite dans la section 1.4.2, considérons comme exemple un moteur à courant continu (figure B.1) alimenté par une source de tension u. Il est caractérisé par une résistance électrique R, une inductance L et un couplage électromécanique de paramètre k. L'arbre moteur d'inertie J est soumis à un frottement visqueux b. La vitesse de rotation $\Omega(t)$ de l'arbre moteur représente la sortie du système.

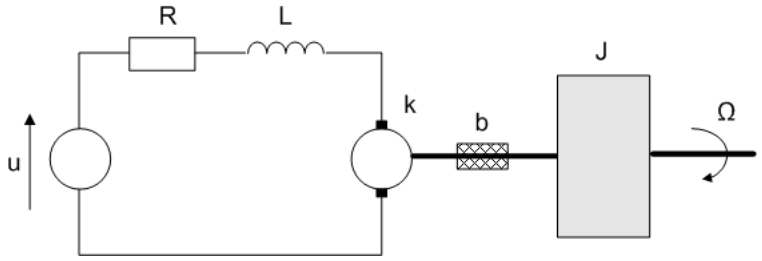


FIG. B.1 – Schéma technologique du moteur à courant continu.

Le cahier des charges impose les spécifications nominales présentées sur la figure B.3. $\Omega_n(t)$ est la trajectoire nominale de la vitesse de l'arbre moteur, $\dot{\Omega}_n(t)$ est la trajectoire nominale de l'accélération angulaire et $\ddot{\Omega}_n(t)$ est la trajectoire nominale du jerk angulaire. Les enveloppes spécifiées sur ces grandeurs sont des variations de $\pm 5\%$ par rapport aux trajectoires nominales.

Nous souhaitons estimer la marge de variation de la résistance R pour les spécifications données et pour les caractéristiques suivantes du système : $u = 24\ V$, $L = 0.001\ H$, $k = 0.031\ N.m/A$, $J = 18\ 10^{-6}\ kg.m^2$ et $b = 1,656\ 10^{-3}\ N.m/(rad/s)$.

1. L'adéquation entre le cahier des charges et la structure du modèle est vérifiée. Le modèle bond graph bicausal qui permet de remonter à la résistance R est donné figure B.2.
2. Cette inversion permet d'écrire les expressions des variables de puissance $e_R(t)$ et $f_R(t)$:

$$\begin{cases} e_R(t) = u - k\Omega(t) - \frac{Lb}{k}\dot{\Omega}(t) - \frac{LJ}{k}\ddot{\Omega}(t) \\ f_R(t) = \frac{b}{k}\Omega(t) + \frac{J}{k}\dot{\Omega}(t) \end{cases} \tag{B.1}$$

3. Si pour tout instant t_i, $\Omega(t_i)$ et $\dot{\Omega}(t_i)$ sont différents de zéro alors l'expression de R peut être déduite :

$$\frac{e_R(t)}{f_R(t)} = \frac{u - k\Omega(t) - \frac{Lb}{k}\dot{\Omega}(t) - \frac{LJ}{k}\ddot{\Omega}(t)}{\frac{b}{k}\Omega(t) + \frac{J}{k}\dot{\Omega}(t)} \tag{B.2}$$

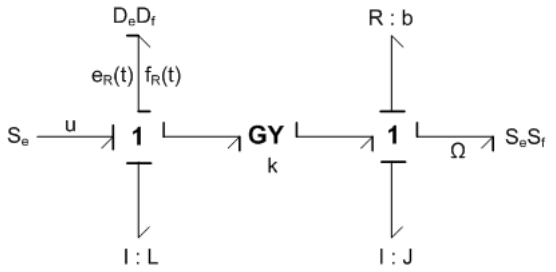


FIG. B.2 – Modèle bond graph bicausal du moteur à courant continu pour la synthèse paramétrique.

4. Pour différents instants t_i, nous relevons à partir des spécifications (figure B.3) les intervalles sur la sortie $\Omega(t)$ et sur ses dérivées $\dot{\Omega}(t)$ et $\ddot{\Omega}(t)$:

$t_i(s)$	$[\Omega(t_i)]$(rad/s)	$[\dot{\Omega}(t_i)](rad/s^2)$	$[\ddot{\Omega}(t_i)](rad/s^3)$
0.01	[30.98, 34.24]	[1852.69, 2047.71]	[-202226, -182967]
0.02	[42.75, 47.25]	[690.09, 762.73]	[-75325.4, -68151.5]
0.03	[47.14, 52.1]	[257.04, 284.10]	[-28057.2, -25385.1]

Pour tout instant t_i, l'intervalle de tolérance sur le paramètre R peut être déterminé par la division de l'intervalle de tolérance sur e_R par l'intervalle de tolérance sur f_R :

$t_i(s)$	$[R](\Omega)$
0.01	[7.6, 8.44]
0.02	[7.59, 8.45]
0.03	[7.61,8.45]

5. L'union de ces intervalles donne : $[R] = [7.59, 8.45]\ \Omega$.

L'équation B.2 peut être réécrite sous la forme suivante :

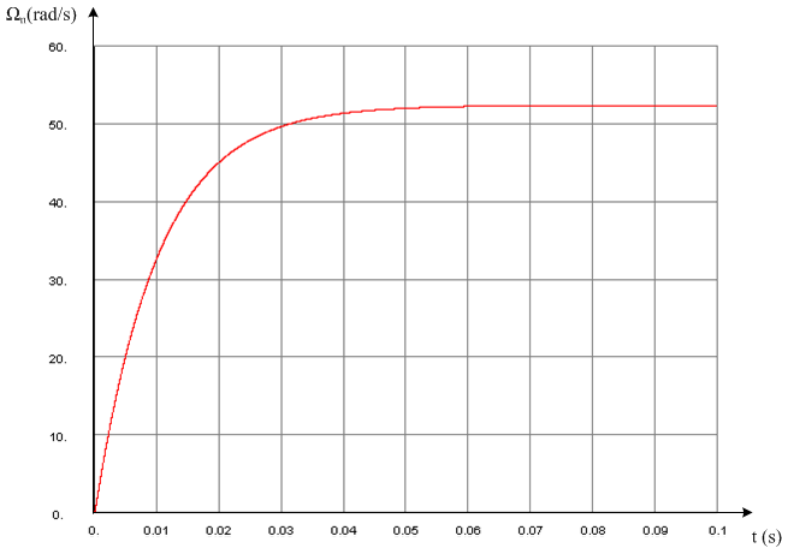
$$\frac{e_R(t)}{f_R(t)} = \frac{u}{D} - \frac{k\Omega(t)}{D} - \frac{\frac{LJ}{k}\ddot{\Omega}(t)}{D} - \frac{\frac{LJ}{k}\dot{\Omega}(t)}{D} \tag{B.3}$$

avec $D = \frac{b}{k}\Omega(t) + \frac{J}{k}\dot{\Omega}(t)$. Pour tout instant t_i, chaque terme de l'équation B.3 est calculé séparément puis l'intervalle de tolérance sur le paramètre R est déduit :

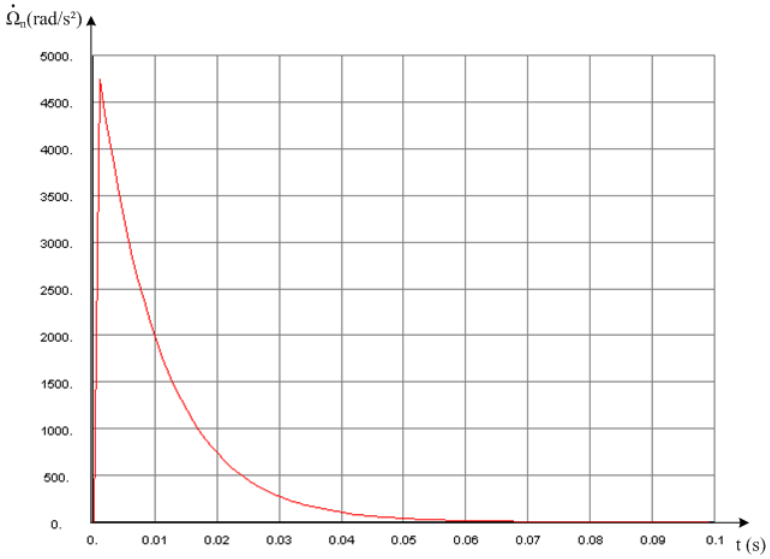
$t_i(s)$	$[R](\Omega)$
0.01	[7.56, 8.48]
0.02	[7.54, 8.49]
0.03	[7.55,8.5]

L'union de ces intervalles donne : $[R] = [7.54, 8.5]\ \Omega$. Ainsi, il peut être conclu que la première méthode de calcul (la division de l'intervalle de tolérance sur e_R par l'intervalle de tolérance sur f_R) garantit un intervalle résultat moins large.

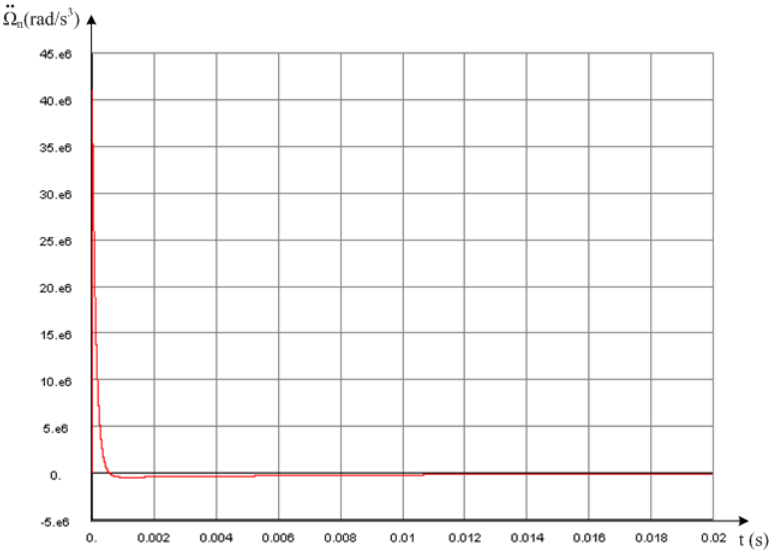
Comme il a été expliqué dans la section 1.2.3, l'arithmétique par intervalles ne garantit pas la solution exacte dû à un effet enveloppant ainsi, il n'y a aucune certitude que toutes les valeurs de R comprises dans l'intervalle résultat assurent un fonctionnement dans l'enveloppe spécifiée dans le cahier des charges. De plus, le problème de dimensionnement par inversion fait apparaître plusieurs variables dépendantes comme la sortie et ses dérivées ce qui peut favoriser cet effet enveloppant surtout pour les systèmes complexes. Enfin, fixer les spécifications sur les trajectoires des dérivées successives des sorties peut s'avérer une tâche heuristique surtout si ces grandeurs ne permettent pas une interprétation physique claire (exemple : dérivée du jerk,...).



(a) Spécifications de $\Omega(t)$



(b) Spécifications de $\dot{\Omega}(t)$



(c) Spécifications de $\ddot{\Omega}_n(t)$

FIG. B.3 – Spécifications pour la synthèse paramétrique du moteur à courant continu.

Annexe C

Détermination de la représentation d'état canonique à partir du modèle bond graph incertain

Dans cette annexe, nous rappelons la procédure graphique proposée dans les travaux de KAM et DAUPHIN-TANGUY [Kam01, Kam05] pour la détermination du modèle d'état canonique (modèle pour représenter les systèmes linéaires présentant des incertitudes paramétriques) donné par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A_n} + \mathbf{\Delta A})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B_n} + \mathbf{\Delta B})\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = (\mathbf{C_n} + \mathbf{\Delta C})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{D_n} + \mathbf{\Delta D})\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{C.1}$$

où les matrices $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_n}$, $\mathbf{C_n}$ et $\mathbf{D_n}$ contiennent uniquement les valeurs nominales tandis que les matrices $\mathbf{\Delta A}$, $\mathbf{\Delta B}$, $\mathbf{\Delta C}$ et $\mathbf{\Delta D}$ regroupent des expressions en fonction des incertitudes ainsi que des valeurs nominales.

La procédure proposée par KAM et DAUPHIN-TANGUY [Kam01, Kam05] pour la détermination graphique du modèle d'état canonique fait appel à la règle de MASON.

Procédure 23. ***Règle de*** MASON

Chaque transmittance de la matrice de transfert associée à un modèle bond graph reliant une variable d'entrée u_j et une variable de sortie y_i peut être calculée comme suit [Bro72, Dau00] :

$$t_{ij}(s) = \frac{\sum_i \mathbf{T_i}(s)\mathbf{D_i}(s)}{\mathbf{D}(s)} \tag{C.2}$$

telle que $\mathbf{D}(s) = 1 - \sum_i \mathbf{B_i} + \sum_{i,j} \mathbf{B_i B_j} - \sum_{i,j,k} \mathbf{B_i B_j B_k} + \cdots$

où :

- $\sum_i \mathbf{B_i}$ *est la somme des gains des boucles causales entre deux éléments R, C ou I et des gains des mailles ;*
- $\sum_{i,j} \mathbf{B_i B_j}$, $\sum_{i,j,k} \mathbf{B_i B_j B_k}, \cdots$ *est la somme des produits 2 à 2, 3 à 3, etc... des gains des boucles causales disjointes (cf. définition 20, annexe A) ;*
- $\mathbf{T_i}(s)$ *est le gain de l'$i^{ème}$ chemin causal E/S ;*
- $\mathbf{D_i}(s)$ *se calcule de la même manière que* $\mathbf{D}(s)$ *mais en ne considérant que les boucles causales disjointes de l'$i^{ème}$ chemin causal E/S.*

$\mathbf{D}(s)$ *et* $\mathbf{D_i}(s)$ *sont désignés respectivement par le déterminant et le déterminant réduit de* MASON.

La détermination graphique du modèle d'état canonique se fait à partir de la représentation bond graph canonique décrite dans la section 2.1.3 du chapitre 2 et ce, à partir de la procédure suivante :

Procédure 24. *Les différentes matrices de la représentation d'état canonique C.1 sont déterminées à partir de la représentation bond graph canonique comme suit [Kam01, Kam05] :*

$$\begin{cases} \mathbf{A_n} = \mathbf{A_1} \\ \mathbf{\Delta A} = \mathbf{A_1}[\mathbf{W} - \mathbf{I}] + \mathbf{K_A M Q_A W} \\ \\ \mathbf{B_n} = \mathbf{B_1} \\ \mathbf{\Delta B} = \mathbf{K_B M Q_B} \\ \\ \mathbf{C_n} = \mathbf{C_1} \\ \mathbf{\Delta C} = \mathbf{C_1}[\mathbf{W} - \mathbf{I}] + \mathbf{K_C M Q_C W} \\ \\ \mathbf{D_n} = \mathbf{D_1} \\ \mathbf{\Delta D} = \mathbf{K_D M Q_D} \end{cases} \tag{C.3}$$

où :

- *les coefficients $a_{1_{ij}}$ (resp. $b_{1_{ij}}$, $c_{1_{ij}}$, $d_{1_{ij}}$) de la matrice de $\mathbf{A_1}$ (resp. $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{D_1}$) sont calculés de sorte que seuls les éléments nominaux sont considérés et tels que :*

$$\begin{cases} a_{1_{ij}} = \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)=1} \tilde{G}_k^n(x_j, \dot{x}_i) \\ b_{1_{ij}} = \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(u_j,\dot{x}_i)=0} \tilde{G}_k^n(u_j, \dot{x}_i) \\ c_{1_{ij}} = \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(\dot{x}_j,y_i)=1} \tilde{G}_k^n(\dot{x}_j, y_i) \\ d_{1_{ij}} = \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(u_j,y_i)=0} \tilde{G}_k^n(u_j, y_i) \end{cases}$$

  avec $\tilde{G}_k^n(\upsilon_i, \upsilon_j)$ correspond au gain statique du chemin causal $\textcircled{k}$ existant entre les variables υ_i et υ_j et dont l'ordre est $\omega_k(\upsilon_i, \upsilon_j)$.

- *pour le calcul des coefficients des autres matrices, les incertitudes sont prises en considération :*

  - *les coefficients m_{ij} (resp. w_{ij}) de la matrice de $\mathbf{M}$ (resp. $\mathbf{W}$) sont calculés de sorte que :*

$$\begin{cases} m_{ii} = \frac{det_{ii}^R}{det^R} \\ m_{ij} = 0 \quad pour\ i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{ii} = \frac{det_{ii}^d}{det^d} \\ w_{ij} = 0 \quad pour\ i \neq j \end{cases}$$

  avec det^R (resp. det^d) le déterminant de Mason *calculé sur le modèle avec les boucles causales*[1] *uniquement entre les éléments R_n (resp. I_n ou C_n en causalité intégrale) et*

[1] Il est à noter que les boucles causales impliquées dans ce calcul sont des boucles algébriques et par conséquent l'opérateur de Laplace n'intervient pas dans le calcul.

les éléments ΔR (resp. ΔI ou ΔC), det_{ii}^{R} (resp. det_{ii}^{d}) le déterminant réduit calculé en supprimant de det^{R} (resp. det^{d}) les termes associés à ΔR_i (resp. ΔC_i ou ΔI_i) impliqués dans le chemin causal.

- *Les coefficients $k_{A_{ij}}$ (resp. $k_{C_{ij}}$) de la matrice de $\mathbf{K_A}$ (resp. $\mathbf{K_C}$) sont calculés de sorte que :*

$$\begin{cases} k_{A_{ij}} = \sum_{\text{(k)}} \tilde{G}_k(\Delta R_j, x_{n_i}) \tilde{g}(\Delta R_j) \\ k_{C_{ij}} = \sum_{\text{(k)}} \tilde{G}_k(\Delta R_j, y_i) \tilde{g}(\Delta R_j) \end{cases}$$

avec $\tilde{G}_k(\Delta R_j, x_{n_i})$ (resp. $\tilde{G}_k(\Delta R_j, y_i)$) le gain statique du $k^{ème}$ chemin causal (passant par des éléments R_n) allant de l'élément ΔR_j à l'élément de stockage I_n ou C_n associé à x_{n_i} (resp. un détecteur d'effort ou de flux associé à y_i), $\tilde{g}(\Delta R_j)$ le gain statique de l'élément bond graph associé à ΔR_j.

- *Les coefficients $q_{A_{ij}}$ (resp. $q_{B_{ij}}$) de la matrice de $\mathbf{Q_A}$ (resp. $\mathbf{Q_B}$) sont calculés de sorte que :*

$$\begin{cases} q_{A_{ij}} = \sum_{\text{(k)}} \tilde{G}_k(x_{n_j}, \Delta R_i) \tilde{g}(x_{n_j}) \\ q_{B_{ij}} = \sum_{\text{(k)}} \tilde{G}_k(u_j, \Delta R_i) \end{cases}$$

avec $\tilde{G}_k(x_{n_j}, \Delta R_i)$ (resp. $\tilde{G}_k(u_j, \Delta R_i)$) le gain statique du $k^{ème}$ chemin causal (passant par un élément dissipatif R_n) allant de l'élément de stockage I_n ou C_n associé à x_{n_j} (resp. une source d'effort ou de flux associée à u_j) à l'élément associé à ΔR_i. $\tilde{g}(x_{n_j})$ le gain statique de l'élément bond graph nominal (I_n ou C_n) associé à x_{n_j}.

- $\mathbf{K_B} = \mathbf{K_A}$, $\mathbf{K_D} = \mathbf{K_C}$, $\mathbf{Q_C} = \mathbf{Q_A}$ *et* $\mathbf{Q_D} = \mathbf{Q_B}$.

Annexe D

Généralités sur les éléments bond graph multiport linéaires

Dans cette annexe, nous rappelons quelques généralités sur les éléments multiport dissipatifs (R) et de stockage d'énergie (I ou C).

D.1 Élément multiport dissipatif linéaire

La relation constitutive d'un élément R linéaire multiport est définie sous la forme suivante :

$$\mathbf{e} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{f} = 0 \tag{D.1}$$

où $\mathbf{R}$ est la matrice constitutive et, $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ sont respectivement les vecteurs d'effort et de flux de dimension m. Si la causalité résistance est affectée à l'élément R multiport (figure D.1(a)) alors l'équation D.1 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{e} = \mathbf{R_R} \cdot \mathbf{f}$$

où $\mathbf{R_R} = \mathbf{R}$. Si une causalité conductance est affectée à l'élément R multiport (figure D.1(b)) et si la matrice constitutive $\mathbf{R}$ est inversible alors l'équation D.1 peut s'écrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{f} = \mathbf{R_C} \cdot \mathbf{e}$$

où $\mathbf{R_C} = \mathbf{R^{-1}}$. Si la causalité mixte est affectée à l'élément R multiport (figure D.1(c)) alors l'équation D.1 peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e_R} \\ \mathbf{f_C} \end{bmatrix} = \mathbf{R_M} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{f_R} \\ \mathbf{e_C} \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{e_R}$ et $\mathbf{e_C}$ (resp. $\mathbf{f_R}$ et $\mathbf{f_C}$) sont les vecteurs d'effort (resp. de flux) de dimensions l et $m-l$ respectivement sur les multiports en causalité résistance et conductance.

Dans ce travail, seuls les champs R explicites[1] sont considérés, et donc, un élément R multiport en causalité simple (causalité résistance ou conductance) ou en causalité mixte, obéit au principe de réciprocité d'Onsager [Ons31, Kar06, Bre82b, Bre08]. Ainsi, quand il est exprimé sous sa forme résistance ou conductance, $\mathbf{R_R}$ et $\mathbf{R_C}$ sont des matrices symétriques ($\mathbf{R^T_{\{R,C\}}} = \mathbf{R_{\{R,C\}}}$) et, quand une causalité mixte est affectée, la matrice $\mathbf{R_M}$ possède des termes extradiagonaux antisymétriques. Dans ce dernier cas, la réciprocité d'Onsager peut être désignée par la forme de Casimir [Kar06]. Les matrices $\mathbf{R_R}$, $\mathbf{R_C}$ et $\mathbf{R_M}$ sont définies positives selon le second principe de la thermodynamique.

[1] Un champ R, I ou C explicite est décrit par un ensemble de n relations. Par contre, un champ R, I ou C implicite est un ensemble d'éléments 1-port interconnectés par une structure de jonction simple ou généralisée [Kar06].

(a) (b) (c)

FIG. D.1 – Élément R multiport en causalité (a) résistance, (b) conductance et (c) mixte.

D.2 Élément multiport de stockage d'énergie (I et C) linéaire

La relation constitutive d'un élément C multiport linéaire est définie comme suit :

$$\mathbf{q} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{e} = 0 \tag{D.2}$$

où $\mathbf{C}$ est la matrice constitutive et, $\mathbf{e}$ et $\mathbf{q}$ sont les vecteurs d'effort et de déplacement généralisé de dimension m. Si la causalité dérivée est affectée à l'élément C multiport (figure D.2(a)), alors l'équation D.2 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{q} = \mathbf{C_D} \cdot \mathbf{e}$$

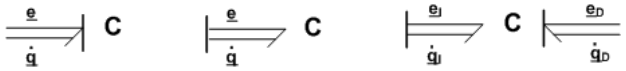
où $\mathbf{C_D} = \mathbf{C}$. Si la causalité intégrale est affectée à l'élément C multiport (figure D.2(b)), alors l'équation D.2 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{e} = \mathbf{C_I} \cdot \mathbf{q}$$

où $\mathbf{C_I} = \mathbf{C^{-1}}$. Si une causalité mixte est affectée à l'élément C multiport (figure D.2(c)) alors l'équation D.2 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e_I} \\ \mathbf{q_D} \end{bmatrix} = \mathbf{C_M} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q_I} \\ \mathbf{e_D} \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{e_I}$ et $\mathbf{e_D}$ (resp. $\mathbf{q_I}$ et $\mathbf{q_D}$) sont les vecteurs d'effort (resp. de déplacement généralisé) de dimensions l et $m - l$ respectivement sur les ports en causalité intégrale et dérivée.



(a) (b) (c)

FIG. D.2 – Élément C multiport en causalité (a) dérivée, (b) intégrale et (c) mixte.

La relation constitutive d'un élément I multiport linéaire peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{p} - \mathbf{I} \cdot \mathbf{f} = 0 \tag{D.3}$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice constitutive et $\mathbf{f}$ et $\mathbf{p}$ sont respectivement les vecteurs de flux et de moment généralisé de dimension m. Si la causalité dérivée est affectée à l'élément I multiport (figure D.3(a)), alors l'équation D.3 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{p} = \mathbf{I_D} \cdot \mathbf{f}$$

où $\mathbf{I_D} = \mathbf{I}$. L'affectation de la causalité intégrale à l'élément I multiport (figure D.3(b)) permet d'écrire :

$$\mathbf{f} = \mathbf{I_I} \cdot \mathbf{p}$$

où $\mathbf{I_I} = \mathbf{I}^{-1}$. Si l'élément multiport est en causalité mixte (figure D.3(c)), alors l'équation D.3 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f_I} \\ \mathbf{p_D} \end{bmatrix} = \mathbf{I_M} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p_I} \\ \mathbf{f_D} \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{f_I}$ et $\mathbf{f_D}$ (resp. $\mathbf{p_I}$ et $\mathbf{p_D}$) sont les vecteurs de flux (resp. de moment généralisé) de dimensions l et $m - l$ respectivement sur les ports en causalité intégrale et dérivée.

Les relations constitutives des éléments multiport de stockage d'énergie obéissent à la condition de réciprocité de Maxwell [Bre82b,Bre08] afin de satisfaire le principe de réversibilité d'un phénomène de stockage d'énergie. Ainsi, si la causalité simple (causalité dérivée ou intégrale) est affectée à l'élément multiport de stockage d'énergie, alors les matrices $\mathbf{C_{\{I,D\}}}$ et $\mathbf{I_{\{I,D\}}}$ sont symétriques. Sinon, si une causalité mixte est affectée à l'élément multiport, alors les matrices $\mathbf{C_{\{M\}}}$ et $\mathbf{I_{\{M\}}}$ possèdent des termes extradiagonaux antisymétriques. Les matrices $\mathbf{C_D}$, $\mathbf{C_I}$, $\mathbf{C_M}$, $\mathbf{I_D}$, $\mathbf{I_I}$ et $\mathbf{I_M}$ sont définies positives [Bre08].

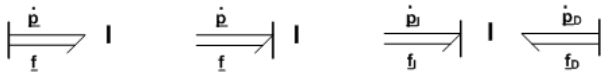


Fig. D.3 – Élément I multiport en causalité (a) dérivée, (b) intégrale et (c) mixte.

Remarques :
- le nombre de variables d'état d'un élément multiport de stockage d'énergie est égal au nombre de ports en causalité intégrale de cet élément,
- dans les travaux de Bideaux et al. [Bid01], les conditions d'existence d'une configuration causale ou bicausale d'un élément multiport linéaire ont été établies.

Annexe E

Outils de l'analyse structurelle et comportementale

Cette annexe a pour objectif de présenter un certain nombre de définitions et de concepts nécessaires pour la compréhension et la mise en œuvre de l'analyse structurelle et comportementale[1] que ce soit par une approche modèle d'état (représentation matricielle et représentation graphique), ou bien par une approche bond graph.

Hypothèses : De même qu'au chapitre 3 et sauf mention contraire, les hypothèses suivantes sont posées :
- système linéaire et invariant dans le temps (hypothèse 2, page 16) ;
- système carré (hypothèse 1, page 16) ;

E.1 Algèbre pour l'analyse structurelle et comportementale

Dans cette section, nous proposons quelques notions de base de l'algèbre auxquelles nous avons fait appel pour établir l'analyse structurelle et comportementale.

La formule de SCHUR est utilisée pour démontrer le théorème 2 (page 78) permettant le calcul des ordres des pôles à l'infini du modèle inverse à partir des degrés des mineurs de la matrice système du modèle inverse.

Définition 22. ***Formule de*** SCHUR
Soit une matrice $\mathbf{M}$ *définie par bloc :*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M_{11}} & \mathbf{M_{12}} \\ \mathbf{M_{21}} & \mathbf{M_{22}} \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{M_{11}}$ *et* $\mathbf{M_{22}}$ *sont des matrices carrées. Si en plus, la matrice* $\mathbf{M_{11}}$ *est régulière alors le déterminant de la matrice* $\mathbf{M}$ *peut s'écrire sous la forme suivante :*

$$det(\mathbf{M}) = det(\mathbf{M_{11}})det(\mathbf{M_{22}} - \mathbf{M_{21}}{\mathbf{M_{11}}}^{-1}\mathbf{M_{12}})$$

Les notions de fraction/matrice rationnelle propre permettent la représentation de tout système physique et elles sont évoquées tout le long de ce mémoire notamment dans le chapitre 3.

Définition 23. *Une* ***fraction rationnelle*** $\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{D}(s)}$ *est* ***propre*** *ou encore* ***causale*** *(resp. strictement propre ou encore strictement causale) si* $deg(\mathbf{D}(s)) \geq deg(\mathbf{N}(s))$ *(resp.* $deg(\mathbf{D}(s)) > deg(\mathbf{N}(s))$*) [Ric01].*

[1] L'analyse structurelle et comportementale est évoquée dans le chapitre 1 et développée dans le chapitre 3.

Définition 24. *Le **degré d'une fraction rationnelle** $\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{D}(s)}$ est défini par [Mur00] :*

$$deg(\mathbf{F}(s)) = deg(\mathbf{N}(s)) - deg(\mathbf{D}(s)) \tag{E.1}$$

Définition 25. *Une **matrice rationnelle** (resp. **rationnelle propre, rationnelle strictement propre**) est une matrice dont les éléments sont des fractions rationnelles (resp. rationnelles propres, rationnelles strictement propres) [Ric01].*

La factorisation de Smith-McMillan à l'infini (théorème 1, page 77) d'une matrice rationnelle est utilisée dans le chapitre 3 pour caractériser la structure à l'infini d'un modèle donné. Cette factorisation fait appel aux notions de fraction/matrice rationnelle bipropre.

Définition 26. *Une **fraction rationnelle** est **bipropre** (ou bicausale) si elle est propre et d'inverse propre ce qui revient à dire que $deg(\mathbf{D}(s)) = deg(\mathbf{N}(s))$ [Ric01].*

Définition 27. *une **matrice bipropre** (ou encore bicausale) $\mathbf{B}(s)$ est caractérisée par les propriétés équivalentes suivantes [Ric01] :*

- *$det\,(\mathbf{B}(s))$ est une fraction rationnelle bicausale non nulle,*
- *$det\left(\lim_{s\to\infty} \mathbf{B}(s)\right) = \lim_{s\to\infty} det\,(\mathbf{B}(s))$ est une constante non nulle,*
- *$\mathbf{B}(s) = \mathbf{B_0} + \mathbf{P}(s)$ avec $\mathbf{B_0}$ matrice constante inversible et $\mathbf{P}(s)$ strictement propre.*

Les matrices bipropres sont utilisées dans la section 3.1.1 du chapitre 3 pour proposer une nouvelle méthode de calcul des ordres relatifs.

E.2 Approche modèle d'état

Dans cette section, nous rappelons quelques outils de base pour établir l'analyse structurelle et comportementale par approche modèle d'état sous forme matricielle et graphique.

E.2.1 Représentation matricielle

Considérons Σ le système linéaire, carré et invariant dans le temps suivant :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \tag{E.2}$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$) est le vecteur d'entrée (resp. de sortie) .

Définition 28. *Le **polynôme caractéristique** d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est égal à $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Il peut s'écrire sous la forme [Gan66, Ric01] :*

$$P_{\mathbf{A}}(s) = s^n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s^{n-i} \tag{E.3}$$

Définition 29. *La **matrice système** $\mathbf{P}(s)$ associée au système Σ (système d'équations E.2) est une matrice polynomiale de dimension $(n+m)\times(n+m)$ et définie par*[2] *:*

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \tag{E.4}$$

La notion de découplabilité du système linéaire Σ par retour d'état statique est abordée dans le chapitre 3. Un problème de découplage par retour d'état consiste à trouver un contrôleur régi, dans le domaine de LAPLACE, par l'équation $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{L}\mathbf{v}(t)$ ($\mathbf{K}$ est une matrice constante et $\mathbf{L}$ est une matrice constante non singulière) telle que chaque variable d'entrée u_i commande une variable de sortie y_j sans affecter les autres variables de sortie. Dans ce qui suit, nous présentons deux critères permettant la vérification de la découplabilité d'un système linéaire et invariant dans le temps.

Critère de découplabilité 1. *Le système linéaire Σ défini par le triplet $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$ est découplable par un retour d'état statique de la forme $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{L}\mathbf{v}(t)$ ($\mathbf{L}$ est une matrice non singulière) si et seulement si [Dio93] :*

$$\sum_{j=1}^{m} n_j = \sum_{j=1}^{m} n'_j \tag{E.5}$$

où :

- *$\{n_1,\ldots,n_m\}$ sont les m ordres des zéros à l'infini de $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$,*
- *n'_j est l'ordre du zéro à l'infini de $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{c}_j)$ où $\mathbf{c}_j$ est la $j^{ème}$ ligne de $\mathbf{C}$. n'_j désigne l'ordre relatif associé à la sortie y_j.*

Critère de découplabilité 2. *Le système linéaire Σ défini par le triplet $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$ est découplable par un retour d'état statique de la forme $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{L}\mathbf{v}(t)$ ($\mathbf{L}$ est une matrice non singulière) si et seulement si [Com86] :*

$$n_{je} = n'_j \quad \forall\ j = \{1,\ldots,m\} \tag{E.6}$$

où n_{je} (resp. n'_j) est l'ordre d'essentialité (resp. ordre relatif) associé à la sortie y_j.

Le découplage et l'inversibilité sont deux concepts étroitement liés. En effet l'inversibilité d'un modèle est une condition nécessaire mais non suffisante de la découplabilité du système. GILBERT [Gil69] a montré qu'il existe une classe de systèmes inversibles et non découplables par retour d'état statique. Une extension dynamique est nécessaire pour assurer la découplabilité de ce type de systèmes. On parle alors de découplage par retour d'état dynamique. Dans ce cas, la matrice $\mathbf{K}$ dépend de l'opérateur de LAPLACE s et l'ordre d'essentialité associé à la sortie y_j est strictement supérieur au degré relatif associé. Pour plus de détails sur le problème de découplage, le lecteur peut consulter les références [Fal67, Des82, Com82, Com86, Com93b, Dio93].

---

[2] Cette matrice est obtenue en écrivant le système d'équations E.2, caractérisant le modèle Σ, dans le domaine de LAPLACE :

$$\begin{cases} \mathbf{s}\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) \end{cases}$$

et en l'exprimant, ensuite, sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(s) \\ -\mathbf{U}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ -\mathbf{Y}(s) \end{bmatrix}$$

D'autres références définissent la matrice système (appelée aussi matrice de ROSENBROCK) telle que $\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$. Cependant, ceci ne change rien quant à la valeur de son déterminant.

E.2.2 Représentation graphique : digraphe

Un modèle d'état linéaire et invariant dans le temps peut s'exprimer sous une forme matricielle ou sous une forme graphique grâce à une représentation digraphe (cf. section 1.5.1 du chapitre 1). Dans ce paragraphe, nous présentons les notions de base de cette représentation qui servent dans la section 3.1 du chapitre 3 pour exploiter un modèle digraphe associé à un modèle inverse.

Définition 30. *Un **chemin (orienté)** est une séquence d'arcs orientés dans le même sens et où le sommet de départ de l'arc suivant correspond au sommet d'arrivée de l'arc précédent [Yam85, Rei88].*

Définition 31. *Un **chemin orienté entrée/sortie (E/S)** est un chemin orienté dont le sommet de départ correspond à une entrée du modèle et le sommet d'arrivée correspond à une sortie [Yam85, Com93b].*

Définition 32. *Le **poids d'un chemin** est égal au produit des poids de tous les arcs composant la séquence [Yam85].*

Afin de calculer graphiquement le déterminant d'une matrice et notamment le déterminant de la matrice système, Reinschke [Rei88] a également introduit des arcs de retour sur la représentation digraphe et a proposé d'étudier ensuite les familles de cycles comportant ces arcs de retour.

Définition 33. *Un **arc de retour** est un arc de poids (-1) entre un sommet associé à une sortie et un sommet associé à une entrée [Rei88].*

Définition 34. *Un **cycle digraphe** est un chemin dont les sommets de départ et d'arrivée coïncident [Rei88].*

Définition 35. *Le **poids d'un cycle** est égal au poids du chemin orienté fermé correspondant. [Rei88].*

Définition 36. ***Deux cycles** sont dits **disjoints** s'ils n'ont aucun sommet ni arc en commun [Rei88].*

Définition 37. *Une **famille de cycles** est un ensemble de cycles disjoints [Rei88].*

Définition 38. *Le **poids d'une famille** de cycles est égal au produit des poids des cycles digraphes composant la famille considérée [Rei88].*

E.3 Approche bond graph

Dans cette section, nous proposons de donner les outils nécessaires pour l'analyse d'un modèle bond graph puis de présenter les procédures permettant le passage d'un modèle bond graph à une représentation d'état (sous forme matricielle ou graphique). Ensuite, nous rappelons les concepts nécessaires pour déterminer à partir d'un modèle bond graph (causal ou bicausal) le déterminant de la matrice système associée. Enfin, nous présentons des procédures graphiques pour la détermination de certaines propriétés structurelles (la commandabilité et l'observabilité).

E.3.1 Analyse d'un modèle bond graph

Dans ce paragraphe, nous présentons les propriétés d'un modèle bond graph qui permettent de mener l'analyse structurelle et comportementale. La notion de chemin causal a été présentée dans l'annexe A.

Définition 39. *Sur un modèle bond graph causal ou bicausal, la* ***longueur*** $l(\upsilon_i, \upsilon_j)$ ***d'un chemin causal*** *entre les variables* υ_i *et* υ_j *est égale au nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale rencontrés le long de ce chemin. L'existence d'éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée laisse la longueur inchangée [Rah92].*

Définition 40. *L'***ordre** $\omega(\upsilon_i, \upsilon_j)$ ***d'un chemin causal*** *entre deux variables* υ_i *et* υ_j *est défini par [Wu 95, Ngw97] :*

$$\omega(\upsilon_i, \upsilon_j) = n_I - n_D$$

où n_I *(resp.* n_D*) est le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale (resp. dérivée) rencontrés le long de ce chemin.*

Dans les travaux de BERTRAND et al. [Ber97b, Ber97a], cet ordre a été désigné par longueur généralisée.

Définition 41. *Sur un modèle bond graph, la* ***longueur d'un ensemble de chemins causaux*** *est égal à la somme des longueurs de tous les chemins constituant cet ensemble [Rah93].*

Définition 42. *Sur un modèle bond graph, l'***ordre d'un ensemble de chemins causaux disjoints** *est égal à la somme des ordres de tous les chemins constituant cet ensemble [Ngw97].*

Définition 43. ***Deux chemins causaux*** *sont dits* ***différents*** *si et seulement s'ils ne possèdent aucun élément de stockage d'énergie en causalité intégrale en commun [Rah92, Rah93].*

Ainsi, deux chemins causaux disjoints (cf. définition 20, annexe A) sont nécessairement différents. Cependant, la réciproque n'est pas toujours vérifiée.

L'ordre d'un système d'équations associé à un modèle bond graph est donné par la définition 44 et l'ordre d'un modèle bond graph est donné par la définition 45.

Définition 44. *L'***ordre d'un système d'équations** *représenté par un modèle bond graph est donné par* $n_{I(I)} - n_{I(D)}$ *où* $n_{I(I)}$ *(resp.* $n_{I(D)}$*) représente le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale lorsque le modèle bond graph est en causalité préférentielle intégrale (resp. dérivée). Cet ordre correspond au nombre de variables d'état dynamiquement indépendantes. Ainsi, il correspond également au rang de la matrice d'état correspondante* $\mathbf{A}$ *pour un modèle associé à un système linéaire et invariant dans le temps [Ngw97, Van94].*

Définition 45. *L'***ordre d'un modèle bond graph** *est égal au nombre* $n_{I(I)}$ *d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale lorsque le modèle est en causalité préférentielle intégrale. Ce nombre correspond à la dimension du vecteur d'état et donc au nombre de conditions initiales pour la solution du modèle d'état associé. Il est égal au nombre de variables d'état qui sont statiquement indépendantes [Ngw97].*

L'analyse comportementale par approche bond graph tient compte des gains des chemins causaux. Ces gains se calculent en fonction des transmittances des éléments bond graph passifs. Le tableau E.1 présente ces transmittances selon la causalité affectée et ce, dans le cas linéaire.

Définition 46. *Le* ***gain*** $G_k(s)$ *(resp.* ***gain statique*** $\tilde{G}_k$*) d'un chemin causal est défini par [Bor92, Rah93, Rah96, Dau00] :*

$$G_k(s) = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i (m_i)^{k_i} \prod_j (r_j)^{l_j} \prod_e g_e(s) \tag{E.7}$$

où :

TAB. E.1 – Transmittances des éléments passifs linéaires 1-port.

Élément bond graph	Causalité	Gain	Gain statique
R	Résistance	R	R
	Conductance	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{R}$
I	Intégrale	$\frac{1}{Is}$	$\frac{1}{I}$
	Dérivée	Is	I
C	Intégrale	$\frac{1}{Cs}$	$\frac{1}{C}$
	Dérivée	Cs	C

- n_0 *(resp.* n_1*) correspond au nombre total de changement d'orientation des liens au niveau des jonctions 0 (resp. des jonctions 1) quand la variable de flux (resp. d'effort) est suivie,*
- m_i *(resp.* r_j*) correspond au module du* $i^{ème}$ *élément* TF *(resp.* $j^{ème}$ *élément* GY*) rencontré le long du chemin causal, avec* $k_i = \pm 1$ *(resp.* $l_i = \pm 1$*) suivant la causalité du* $i^{ème}$ *élément* TF *(resp.* $j^{ème}$ *élément* GY*) rencontré le long du chemin causal,*
- $\prod_e g_e(s)$ *correspond au produit des gains* $g_e(s)$ *(resp. gains statiques* g_e*) des éléments R, I et C rencontrés le long du chemin causal*[3]*. Si aucun de ces éléments n'intervient dans ce chemin causal alors* $g_e(s)$ *(resp.* g_e*) vaut 1.*

E.3.2 Détermination du modèle d'état à partir du modèle bond graph

La détermination du modèle d'état associé à un modèle bond graph est possible que ce soit sous forme d'une représentation matricielle ou bien d'un digraphe.

Représentation matricielle

Une fois que la causalité préférentielle intégrale est affectée au modèle bond graph (procédure SCAP, annexe A), le modèle d'état peut être obtenu par calcul des gains des chemins causaux.

Procédure 25. *Soit un modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale représentant un système linéaire et invariant dans le temps et qui ne présente ni boucle algébrique*[4]*, ni élément de stockage en causalité dérivée. Le modèle d'état associé s'écrit sous la forme suivante [Ngw97, Dau00, Kar06] :*

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{E.8}$$

où :

- $\mathbf{x}(t)$ *est le vecteur d'état constitué des variables d'énergie associées aux éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale (*$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_{I(I)}}$*) ;*
- $\mathbf{u}(t)$ *(resp.* $\mathbf{y}(t)$*) est constitué des variables d'entrée (resp. de sortie) associées aux éléments sources (resp. détecteurs).*

Les coefficients des matrices $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$*,* $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{D}$ *sont calculés comme suit :*

[3] Le tableau E.1 présente les valeurs des gains selon la causalité affectée.

[4] Une boucle algébrique correspond sur un modèle bond graph à une boucle causale d'ordre 0.

$$\begin{cases} a_{ij} = \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i)=1} \tilde{G}_k(\dot{x}_j,\dot{x}_i) \\ b_{ij} = \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(u_j,\dot{x}_i)=0} \tilde{G}_k(u_j,\dot{x}_i) \\ c_{ij} = \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(\dot{x}_j,y_i)=1} \tilde{G}_k(\dot{x}_j,y_i) \\ d_{ij} = \sum\limits_{\textcircled{k}|\omega_k(u_j,y_i)=0} \tilde{G}_k(u_j,y_i) \end{cases}$$

où $\tilde{G}_k(\upsilon_i,\upsilon_j)$ correspond au gain statique du chemin causal Ⓚ *existant entre les variables υ_i et υ_j et dont l'ordre est $\omega_k(\upsilon_i,\upsilon_j)$.*

Remarques :

- Rahmani et Dauphin-Tanguy [Rah98] ont montré que la procédure précédente peut être étendue aux modèles bond graph présentant des éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée (lorsque les modèles sont en causalité préférentielle intégrale).
- La procédure 25 a été énoncée dans le cas de modèles bond graph ne présentant pas de boucle algébrique. Cependant, pour préciser les réflexions de Ngwompo [Ngw97], Jardin [Jar10] a proposé une extension de cette procédure pour tenir compte de l'existence de boucles algébriques résolubles (l'hypothèse d'absence d'éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée est conservée). En effet, la différence réside dans l'étude de chemins causaux qui ne sont plus uniquement des chemins élémentaires (définition 47) mais aussi des chemins généralisés (définition 48) : la détermination des coefficients matriciels doit tenir compte des chemins causaux passant une infinité de fois dans les boucles algébriques. Dans ce cas, la limite de la série des gains statiques de ces chemins est calculée. Considérons comme exemple un chemin causal élémentaire Ⓚ entre deux variables υ_i et υ_j d'ordre ω_k, de gain statique $\tilde{G}_k$ et possédant une variable commune (autre que la variable d'arrivée υ_j) avec une boucle algébrique de gain $\tilde{G}_0$. Il existe alors une infinité de chemins causaux entre les variables υ_i et υ_j telle que la somme des gains statiques associés est donnée par $\sum\limits_{l=0}^{\infty} \tilde{G}_k \left(\tilde{G}_0\right)^l = \dfrac{\tilde{G}_k}{1-\tilde{G}_0}$.

Définition 47. *Un **chemin causal** (resp. un cycle causal) est dit **élémentaire** si et seulement si, dans la suite ordonnée de variables qui le caractérise, chaque variable (d'effort ou de flux) n'apparaît qu'une seule et unique fois [Jar10].*

Définition 48. *Un **chemin causal** (resp. un cycle causal) est dit **généralisé** si et seulement si, dans la suite ordonnée de variables qui le caractérise, au moins une variable (d'effort ou de flux) apparaît plusieurs fois [Jar10].*

Représentation graphique

Deux procédures ont été présentées par Rahmani [Rah93] pour effectuer le passage d'un modèle bond graph à un modèle digraphe :

- la première procédure consiste à déterminer le modèle d'état à partir du modèle bond graph (cf. procédure 25) et à en déduire ensuite le digraphe correspondant (cf. section 1.5.1, chapitre 1),
- la seconde procédure consiste à déterminer le digraphe correspondant directement à partir du modèle bond graph en étudiant les chemins causaux appropriés et leurs gains statiques (procédure 26).

Procédure 26. *Soit un modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale représentant un système linéaire et invariant dans le temps, et qui ne présente ni boucle causale entre deux éléments R, ni élément de stockage en causalité dérivée. Le digraphe correspondant est obtenu en appliquant les règles suivantes [Rah93] :*

1. *Chaque variable d'énergie associée à un élément de stockage d'énergie en causalité intégrale, chaque variable d'entrée associée à une source d'effort ou de flux et chaque variable de sortie associée à un détecteur d'effort ou de flux sont respectivement représentées par un sommet d'état x_i, d'entrée u_i et de sortie y_i sur le digraphe.*
2. *Un chemin causal d'ordre 1 reliant une variable d'énergie x_i associée à un élément de stockage d'énergie en causalité intégrale à une autre variable d'énergie x_j associée à un élément distinct de stockage d'énergie en causalité intégrale est représenté par un arc reliant le sommet d'état x_i au sommet d'état x_j.*
3. *Un chemin causal d'ordre 1 reliant une variable d'énergie x_i associée à un élément de stockage d'énergie en causalité intégrale à elle-même (boucle causale) est représenté par un arc reliant le sommet d'état correspondant x_i à lui-même (boucle).*
4. *Un chemin causal d'ordre 0 reliant une variable d'entrée u_i associée à une source à une variable d'énergie x_j associée à un élément de stockage d'énergie en causalité intégrale est représenté par un arc reliant le sommet d'entrée u_i au sommet d'état x_j.*
5. *Un chemin causal d'ordre 0 reliant une variable d'énergie x_i associée à un élément de stockage d'énergie en causalité intégrale à une variable de sortie y_j associée à un détecteur est représenté par un arc reliant le sommet d'état x_i au sommet de sortie y_j.*
6. *Un chemin causal d'ordre 0 reliant une variable d'entrée u_i associée à une source à une variable de sortie y_j associée à un détecteur est représenté par un arc reliant le sommet d'entrée u_i au sommet de sortie y_j.*
7. *Chaque arc a un poids égal au gain statique du chemin causal à partir duquel il a été construit.*

Remarques :

- Lorsque plusieurs chemins causaux existent entre deux variables v_i et v_j, deux cas de figure peuvent se présenter :
  - soit la somme de leurs gains statiques est nulle et dans ce cas, aucun arc n'est à ajouter sur le digraphe correspondant,
  - soit la somme de leurs gains statiques est non nulle et dans ce cas, le poids de cet arc est égal à cette somme.
- La détermination du modèle bond graph à partir d'un modèle digraphe n'est pas aussi évidente parce que la représentation digraphe (ainsi que la représentation matricielle) globalise un certain nombre d'informations telles que les phénomènes énergétiques apparaissant dans le système et la manière dont ils sont interconnectés. Par conséquent, si aucune autre information n'est ajoutée, la traduction de cette représentation d'état en un modèle bond graph peut aboutir à plusieurs modèles bond graph possibles.

E.3.3 Détermination graphique du déterminant de la matrice système

Dans cette section, nous présentons les concepts bond graph qui permettent de calculer le déterminant de la matrice système (du modèle direct ou inverse) à partir d'un modèle bond graph (causal ou bicausal). Ces concepts sont utilisés dans la section 3.1 du chapitre 3.

Définition 49. *Un **cycle causal** est un chemin causal fermé qui peut contenir plusieurs éléments de stockage d'énergie distincts [Rah93, Van94].*

Définition 50. *Le **gain** (resp. gain statique) **d'un cycle causal** est égal au gain (resp. gain statique) du chemin causal fermé correspondant [Rah93].*

Définition 51. *Deux **cycles causaux** sont dits **différents** s'ils ne possèdent aucun élément de stockage d'énergie en causalité intégrale en commun [Rah93].*

Définition 52. *Une **famille bond graph** est un ensemble de cycles causaux et de chemins causaux E/S différents [Jar10].*

Définition 53. *Le **gain** (resp. gain statique) **d'une famille bond graph** est égal au produit des gains (resp. des gains statiques) des cycles et des chemins causaux contenus dans la famille en question [Jar10].*

Définition 54. *La **longueur d'un cycle causal** (resp. d'une famille bond graph) est égal au nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale rencontrés le long de ce cycle (resp. contenus dans cette famille) [Rah93].*

Définition 55. *L'**ordre d'un cycle causal** (resp. d'une famille bond graph) est égal à la différence entre le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale et le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée rencontrés le long de ce cycle (resp. contenus dans cette famille) [Rah93].*

Remarque : la notion de cycle causal est une généralisation de la notion de boucle causale qui elle, ne pouvait contenir au maximum que deux éléments de stockage d'énergie (définition 18, annexe A).

Deux procédures (procédures 27 et 29) existent dans la littérature pour déterminer, à partir d'un modèle bond graph causal, le déterminant de la matrice système du modèle d'état Σ. Ces procédures ont été évoquées dans la section 3.1, du chapitre 3.

Procédure 27. *Le déterminant de la matrice système $P(s)$ est donné par l'expression suivante [Rah93, Ber97a] :*

$$det(\mathbf{P}(s)) = \sum_{i=1}^{q} (-1)^{\sigma\varepsilon_i} \tilde{G}_{\mathcal{E}_i} P_{R,\mathcal{E}_i}(s) \tag{E.9}$$

où, sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale :
- *q est le nombre d'ensembles de m chemins causaux E/S différents,*
- *$\tilde{G}_{\mathcal{E}_i}$ est le produit des gains statiques des m chemins causaux appartenant à l'ensemble ϵ_i,*
- *$P_{R,\mathcal{E}_i}(s)$ est le polynôme caractéristique du bond graph réduit associé à l'ensemble $\mathcal{E}_i$,*
- *$\sigma_{\mathcal{E}_i}$ est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sorties de l'ensemble $\mathcal{E}_i$ dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand les m chemins causaux de l'ensemble $\mathcal{E}_i$ sont ordonnés dans l'ordre du vecteur d'entrée initial.*

Un résultat identique est obtenu quelle que soit la numérotation choisie pour les ensembles $\mathcal{E}_i$ de m chemins causaux E/S différents. La notion de modèle bong graph réduit a été introduite par Rahmani [Rah93] et détaillée par Bertrand [Ber97a].

Définition 56. *Soit un modèle bond graph possédant un ensemble $\mathcal{E}_k$ de chemins causaux E/S différents. Le **modèle bond graph réduit** est le modèle bond graph obtenu en supprimant tous les éléments en causalité intégrale contenus dans cet ensemble $\mathcal{E}_k$ [Rah93, Ber97a].*

Le polynôme caractéristique du modèle bond graph réduit est calculé suivant la procédure 28.

Procédure 28. *La valeur de chaque coefficient α_i $(1 \leq i \leq n)$ du polynôme caractéristique $\mathbf{P_A}(s)$ peut être déterminée à partir du modèle bond graph comme suit [Rah93] :*

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{n_{\mathcal{F}_i}} (-1)^{d_k} \tilde{G}_{\mathcal{F}_{i_k}} \tag{E.10}$$

où sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale :

- $\mathcal{F}_{i_k}$ *est la* $k^{ème}$ *famille de cycles causaux de longueur* i,
- $n_{\mathcal{F}_i}$ *est le nombre des familles de cycles causaux de longueur* i,
- $\tilde{G}_{\mathcal{F}_{i_k}}$ *est le gain statique de la famille de cycles causaux* $\mathcal{F}_{i_k}$,
- d_k *est le nombre de cycles causaux différents contenus dans la famille* $\mathcal{F}_{i_k}$.

Pour plus de détails sur la construction du modèle bond graph réduit, le lecteur peut consulter la référence [Ber97a].

La procédure 29 permet d'écrire le déterminant directement sous la forme d'un polynôme en s, ce qui peut être avantageux dans certains cas et permet d'éviter une manipulation supplémentaire dans certains développements..

Procédure 29. *Sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale, le déterminant de la matrice système* $\mathbf{P}(s)$ *est donné par l'expression suivante [Jar10] :*

$$\det(\mathbf{P}(s)) = \sum_{k=0}^{n} \rho_k^{\{m\}} s^{n-k} \tag{E.11}$$

où :

- n *et* m *correspondent respectivement au nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale et au nombre d'entrées,*
- $\rho_k^{\{m\}}$ *correspond à la somme des gains statiques des familles bond graph d'ordre* k *et contenant* m *chemins causaux E/S BG-différents. Dans ce calcul, le gain statique de chaque famille bond graph doit être multiplié par* $(-1)^d$ *où* d *est le nombre de cycles contenus dans la famille bond graph. Le gain statique de chaque famille doit également être multiplié par* $(-1)^{\sigma_k}$ *où* σ_k *est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sorties dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand les* m *chemins causaux de la famille sont ordonnés dans l'ordre du vecteur d'entrée initial.*

E.3.4 Commandabilité et observabilité structurelles

Dans cette section, nous proposons de rappeler les procédures graphiques permettant de conclure sur certaines propriétés structurelles d'un modèle : propreté, commandabilité et observabilité. Ces propriétés sont évoquées dans le chapitre 2.

Procédure 30. *Un système linéaire invariant dans le temps est propre si le modèle bond graph associé ne contient aucun élément de stockage d'énergie en causalité dérivée lorsque le modèle bond graph est en causalité préférentielle intégrale et réciproquement [Sue89, Sue91, Dau00].*

Procédure 31. *Un modèle bond graph est structurellement commandable en état si et seulement si les deux conditions suivantes sont respectées [Sue89, Sue91, Dau00] :*

1. *Sur le modèle bond graph en causalité intégrale, il existe un chemin causal entre tous les éléments de stockage d'énergie (I et C) en causalité intégrale et une source de commande* MS_e *ou* MS_f. *Cette condition est équivalente à la condition d'atteignabilité.*
2. *Tous les éléments de stockage d'énergie (I et C) admettent une causalité dérivée sur le modèle bond graph en causalité dérivée. Si des éléments de stockage d'énergie (I ou C) restent en causalité intégrale, la dualisation des sources de commande* MS_e *et* MS_f *doit permettre de les mettre en causalité dérivée.*

Procédure 32. *Un modèle bond graph est structurellement observable en état si et seulement si les deux conditions suivantes sont respectées [Sue89, Sue91, Dau00] :*

1. *Sur le modèle bond graph en causalité intégrale, il existe un chemin causal entre tous les éléments de stockage d'énergie (I et C) en causalité intégrale et un détecteur (*D_e *ou* D_f*).*

2. *Tous les éléments de stockage d'énergie (I et C) admettent une causalité dérivée sur le modèle bond graph en causalité dérivée. Si des éléments de stockage d'énergie (I ou C) restent en causalité intégrale, la dualisation des détecteurs D_e et D_f doit permettre de les mettre en causalité dérivée.*

Remarques :
- Dualiser une source ou un détecteur consiste à inverser sa causalité. Par exemple, dualiser une source d'effort MS_e revient à la rendre une source de flux MS_f.
- Pour les procédures 31 et 32, nous supposons que la commande apparaît uniquement comme une modulation sur les sources de commande MS_e et MS_f du modèle bond graph et non comme une modulation d'éléments R par exemple.
- Les procédures 30, 31 et 32 représentent des conditions suffisantes.

Annexe F

Analyse comportementale à partir du modèle bond graph

Dans le troisième chapitre, des contributions à l'analyse structurelle, notamment à la détermination graphique des ordres des pôles à l'infini, des ordres relatifs et des ordres d'essentialité, établies à partir du modèle bond graph inverse ont été présentées. Après un rappel sur les résultats de l'analyse comportementale menée sur le modèle bond graph direct, cette annexe présente l'extension de ces contributions au niveau de l'analyse comportemental.

F.1 Analyse comportementale à partir du modèle bond graph direct

Nous proposons dans cette section de rappeler les procédures graphiques établies au niveau de l'analyse comportemental pour la détermination des ordres des zéros à l'infini, des ordres relatifs et des ordres d'essentialité à partir du modèle bond graph direct.

F.1.1 Ordres des zéros à l'infini

Le nombre des zéros à l'infini peut être calculé au niveau d'analyse comportemental selon la procédure 9 (page 88). À ce niveau d'analyse, les ordres de ces zéros sont donnés par la procédure 33.

Procédure 33. ***niveau d'analyse comportemental***
Les ***ordres des zéros à l'infini*** *peuvent être calculés de sorte que [Jar10] :*

$$\begin{cases} n_1 = L_1 \\ n_i = L_i - L_{i-1} \end{cases} \tag{F.1}$$

et tels que, sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale :

$$L_i = \min_{\substack{j_1,\dots,j_i \in ([\![1,m]\!])^i \\ h_1,\dots,h_i \in ([\![1,m]\!])^i}} \left\{ \min_{l^{j_1,\dots,j_i}_{h_1,\dots,h_i} \in ([\![0,n]\!])} \left\{ l^{j_1,\dots,j_i}_{h_1,\dots,h_i} \;\middle|\; \rho^{\left\{ i^{j_1,\dots,j_i}_{h_1,\dots,h_i} \right\}}_{l^{j_1,\dots,j_i}_{h_1,\dots,h_i}} \neq 0 \right\} \right\}$$

où :

- *n et m sont respectivement le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale et le nombre d'entrées ;*
- *$\rho^{\left\{ i^{j_1,\dots,j_i}_{h_1,\dots,h_i} \right\}}_{l^{j_1,\dots,j_i}_{h_1,\dots,h_i}}$ correspond à la somme des gains statiques des familles bond graph de longueur $\ell^{j_1,\dots,j_i}_{h_1,\dots,h_i}$ et contenant comme chemins causaux uniquement i chemins causaux E/S* ***différents*** *entre les variables d'entrée $u_{j_1},\dots,u_{j_i}$ et des variables de sortie $y_{h_1},\dots,y_{h_i}$. Dans ce*

calcul, le gain statique de chaque famille bond graph doit être multiplié par $(-1)^d$ *où* d *étant le nombre de cycles contenus dans la famille bond graph. Le gain statique doit également être multiplié par* $(-1)^{\sigma_k}$ *où* σ_k *est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sorties* $y_{h_1}, \ldots, y_{h_i}$ *dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand les* i *chemins causaux de la famille bond graph sont ordonnés dans l'ordre du vecteur d'entrée initial.*

Remarques :
- Cette procédure permet de classer les ordres des zéros à l'infini dans l'ordre croissant.
- Les notions de cycle causal, de famille bond graph etc... utilisées dans la procédure 33 ont été présentées dans la section E.3 de l'annexe E.
- Le calcul des ordres des zéros à l'infini implique les chemins causaux E/S différents et non uniquement les chemins causaux E/S disjoints (que ce soit au niveau BG-structurel ou comportemental) [Jar10].

F.1.2 Ordre relatif

Au niveau de l'analyse comportemental, les ordres relatifs peuvent être déduits du modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale et ce, en appliquant la procédure 34.

Procédure 34. ***niveau d'analyse comportemental***
*Sur un modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale, l'**ordre relatif** n'_i de la sortie y_i peut être calculé de sorte que [Jar10] :*

$$n'_i = min \left\{ \omega_k \quad | \sum_{ⓛ | \omega_l(u_j,y_i)=\omega_k} \tilde{G}_l(u_j, y_i) \neq 0 \right\} \tag{F.2}$$

où $\tilde{G}_l(u_j, y_i)$ *est le gain statique du chemin causal* ⓛ *d'ordre* ω_l *entre une entrée* u_j *et la sortie* y_i.

F.1.3 Odres d'essentialité

Au niveau de l'analyse comportemental, les ordres d'essentialité peuvent être déterminés à partir du du modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale et ce, en appliquant la procédure 35.

Procédure 35. ***niveau d'analyse comportemental***
*Sur un modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale, l'**ordre d'essentialité** n_{ie} de la sortie y_i peut être calculé comme suit [Jar10] :*

$$n_{ie} = L_m - L_{m-1}^{(i)} \tag{F.3}$$

où :
- *sur le modèle bond graph initial :*

$$L_m = \min_{\substack{j_1,\ldots,j_m \in ([\![1,m]\!])^m \\ h_1,\ldots,h_m \in ([\![1,m]\!])^m}} \left\{ \min_{\ell^{j_1,\ldots,j_m}_{h_1,\ldots,h_m} \in ([\![0,n]\!])} \left\{ \ell^{j_1,\ldots,j_m}_{h_1,\ldots,h_m} \quad | \quad \rho^{\left\{i^{j_1,\ldots,j_m}_{h_1,\ldots,h_m}\right\}}_{\ell^{j_1,\ldots,j_m}_{h_1,\ldots,h_m}} \neq 0 \right\} \right\}$$

- *sur le modèle bond graph obtenu en supprimant du modèle bond graph initial son* $i^{ème}$ *détecteur :*

$$L_{m-1}^{(i)} = \min_{\substack{j_1,\ldots,j_{m-1} \in ([\![1,m]\!]\setminus\{i\})^{m-1} \\ h_1,\ldots,h_{m-1} \in ([\![1,m]\!]\setminus\{i\})^{m-1}}} \left\{ \min_{\ell^{j_1,\ldots,j_{m-1}}_{h_1,\ldots,h_{m-1}} \in ([\![0,n]\!])} \left\{ \ell^{j_1,\ldots,j_{m-1}}_{h_1,\ldots,h_{m-1}} \quad | \quad \rho^{\left\{i^{j_1,\ldots,j_{m-1}}_{h_1,\ldots,h_{m-1}}\right\}}_{\ell^{j_1,\ldots,j_{m-1}}_{h_1,\ldots,h_{m-1}}} \neq 0 \right\} \right\}$$

où :

- *n et m sont respectivement le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale et le nombre d'entrées ;*
- $\rho^{\left\{i^{j_1,\ldots,j_m}_{h_1,\ldots,h_m}\right\}}_{\ell^{j_1,\ldots,j_m}_{h_1,\ldots,h_m}}$ *(resp.* $\rho^{\left\{i^{j_1,\ldots,j_{m-1}}_{h_1,\ldots,h_{m-1}}\right\}}_{\ell^{j_1,\ldots,j_{m-1}}_{h_1,\ldots,h_{m-1}}}$*) correspond à la somme des gains statiques des familles bond graph de longueur* $\ell^{j_1,\ldots,j_{m-1}}_{h_1,\ldots,h_{m-1}}$ *(resp.* $\ell^{j_1,\ldots,j_{m-1}}_{h_1,\ldots,h_{m-1}}$*) et contenant m (resp. $m-1$) chemins causaux E/S différents entre les variables d'entrée $u_{j_1},\ldots,u_{j_m}$ (resp. $u_{j_1},\ldots,u_{j_{m-1}}$) et les variables de sortie $y_{h_1},\ldots,y_{h_m}$ (resp. $y_{h_1},\ldots,y_{h_{m-1}}$). Dans ce calcul, le gain statique de chaque famille bond graph doit être multiplié par $(-1)^d$ où d étant le nombre de cycles contenus dans la famille bond graph. Le gain statique doit également être multiplié par $(-1)^{\sigma_k}$ où σ_k est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sorties $y_{h_1},\ldots,y_{h_m}$ (resp. $y_{h_1},\ldots,y_{h_{m-1}}$) dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand les m (resp. $m-1$) chemins causaux de la famille bond graph sont ordonnés dans l'ordre du vecteur d'entrée initial.*

Remarque : les résultats sur les exemples étudiés dans la section 3.1.2 pour illustrer les procédures bond graph pour la détermination des ordres d'essentialité à partir du modèle direct Σ restent valables puisqu'ils concernent des cas où les ensembles des chemins causaux étudiés correspondent à des coefficients $\rho^{\left\{i^{j_1,\ldots,j_m}_{h_1,\ldots,h_m}\right\}}_{\ell^{j_1,\ldots,j_m}_{h_1,\ldots,h_m}}$ et $\rho^{\left\{i^{j_1,\ldots,j_{m-1}}_{h_1,\ldots,h_{m-1}}\right\}}_{\ell^{j_1,\ldots,j_{m-1}}_{h_1,\ldots,h_{m-1}}}$ différents de 0.

F.2 Analyse comportementale à partir du modèle bond graph inverse

Dans cette section, nous proposons l'extension, au niveau de l'analyse comportemental, les procédures données dans le troisième chapitre pour la détermination graphique des ordres des pôles à l'infini, des ordres relatifs et des ordres d'essentialité.

F.2.1 Ordres des pôles à l'infini

D'après le théorème 1 (page 77), les ordres des pôles à l'infini peuvent être calculés en fonction des degrés des mineurs de la matrice de transfert $\mathbf{T_{inv}}(s)$. La procédure 15 du chapitre 2 permet la détermination graphique du plus haut degré des mineurs d'ordre i de la matrice de transfert $\mathbf{T_{inv}}(s)$ du modèle inverse et ce, au niveau d'analyse BG-structurel. Au niveau d'analyse comportemental, ce degré est déterminé graphiquement par la procédure 36.

Procédure 36. ***niveau d'analyse Comportemental***
Soit δ_i le plus haut degré des mineurs d'ordre i de $\mathbf{T_{inv}}(s)$, alors

$$\forall i \in \{1\ldots m\}, \delta_i = -L_i \tag{F.4}$$

tel que sur le modèle bond graph bicausal :

$$L_i = \min_{\substack{j_1,\ldots,j_i \in ([\![1,m]\!])^i \\ h_1,\ldots,h_i \in ([\![1,m]\!])^i}} \left\{ \min_{\omega^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} \in ([\![-n_D, n_{inv}]\!])} \left\{ \omega^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} \;\middle|\; \rho^{\left\{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\right\}}_{\omega^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}} \neq 0 \right\} \right\}$$

où :

- *m est le nombre d'entrées ;*
- *n_{inv} et n_D sont respectivement le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale et le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée ;*

- $\rho^{\left\{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\right\}}_{\omega^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}$ *correspond à la somme des gains statiques des familles bond graph d'ordre* $\omega^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}$ *et contenant uniquement* i *chemins causaux E/S différents entre* $y_{j_1},\ldots,y_{j_i}$ *et* $u_{h_1},\ldots,u_{h_i}$. *Dans ce calcul, le gain statique de chaque famille bond graph doit être multiplié par* $(-1)^d$, d *étant le nombre de cycles contenus dans la famille bond graph. Le gain statique de chaque famille doit être multiplié aussi par* $(-1)^{\sigma_k}$ *où* σ_k *est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sorties dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand les* i *chemins causaux E/S de la famille sont ordonnés dans l'ordre du vecteur d'entrée initial.*

Démonstration. Soit δ_i le plus haut degré des mineurs d'ordre i de $\mathbf{T_{inv}}(s)$, β_i le plus haut degré des mineurs d'ordre i de $\mathbf{P_{inv}}(s)$ et L_i l'ordre minimal qu'un ensemble de i chemins causaux E/S différents puisse avoir sur le modèle bond graph bicausal.

À partir du théorème 2, on a $\delta_i = \beta_i - n_{inv}$. Chaque β_i peut être calculé comme suit :

$$\beta_i = \max_{\substack{j_1,\ldots,j_i \in ([\![1,m]\!])^i \\ h_1,\ldots,h_i \in ([\![1,m]\!])^i}} \{\beta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}\}$$

où $\beta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}} = \deg\left(\det\left(\mathbf{P_{inv}}(s)^{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\ldots,n_{inv}+j_i}_{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\ldots,n_{inv}+h_i}\right)\right)$.

Si $\det\left(\mathbf{P_{inv}}(s)^{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\ldots,n_{inv}+j_i}_{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\ldots,n_{inv}+h_i}\right) = 0$ alors ce déterminant n'est pas à considérer pour le calcul des ordres des zéros à l'infini.

Si $\det\left(\mathbf{P_{inv}}(s)^{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\ldots,n_{inv}+j_i}_{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\ldots,n_{inv}+h_i}\right) \neq 0$, alors à partir de la procédure 14 :

$$\det\left(\mathbf{P_{inv}}(s)^{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\ldots,n_{inv}+j_i}_{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\ldots,n_{inv}+h_i}\right) = \sum_{k=-n_D}^{n_{inv}} \rho_k^{\left\{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\right\}} s^{n_{inv}-k}$$

Ainsi :

$$\det\left(\mathbf{P_{inv}}(s)^{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\ldots,n_{inv}+j_i}_{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\ldots,n_{inv}+h_i}\right) \underset{+\infty}{\sim} \rho^{\left\{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\right\}}_{\omega^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}} s^{n_{inv}-L_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}}$$

où $L_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}$ est l'ordre minimal qu'une famille bond graph puisse avoir :

$$L_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}} = \min_{\omega^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} \in ([\![-n_D,n_{inv}]\!])} \left\{\omega^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\right\}$$

avec $\omega^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}$ l'ordre d'une famille bond graph contenant contient i chemins causaux E/S différents entre $y_{j_1},\ldots,y_{j_i}$ et $u_{h_1},\ldots,u_{h_i}$. Deux cas de figure peuvent alors se présenter :

- cas 1 : $\rho^{\left\{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\right\}}_{\omega^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}} \neq 0$

  Dans ce cas, $\beta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}} = \deg\left(\det\left(\mathbf{P}(s)^{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+j_1,\ldots,n_{inv}+j_i}_{1,\ldots,n_{inv},n_{inv}+h_1,\ldots,n_{inv}+h_i}\right)\right) = n_{inv} - L_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}$ et par conséquent $\delta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}} = -L_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}$. Puisque $\delta_i = \max_{\substack{j_1,\ldots,j_i \in ([\![1,m]\!])^i \\ h_1,\ldots,h_i \in ([\![1,m]\!])^i}} \{\delta_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}\}$ et $L_i = \min_{\omega^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} \in ([\![-n_D,n_{inv}]\!])} \left\{L_{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}}\right\}$ alors $\delta_i = -L_i$.

- cas 2 : $\rho^{\left\{i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}\right\}}_{\omega^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}} = 0$

  Dans ce cas, les familles bond graph d'ordre $\omega^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} + 1$ doivent être considérées et le

coefficient correspondant $\rho_{\omega_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}+1}^{\left\{i_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}\right\}}$ est testé. Si ce coefficient est égal à zéro alors l'ordre $\omega_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}$ doit être incrémenté de manière récursive de 1 jusqu'à ce que le coefficient correspondant soit différent de zéro. Alors :

$$L_{i\,h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i} = \min_{\omega_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i} \in (\llbracket -n_D, n_{inv} \rrbracket)} \left\{ \omega_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i} \;\middle|\; \rho_{\omega_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}}^{\left\{i_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}\right\}} \neq 0 \right\}$$

et par conséquent $\delta_i = -L_i$ où :

$$L_i = \min_{\substack{j_1,\ldots,j_i \in (\llbracket 1,m \rrbracket)^i \\ h_1,\ldots,h_i \in (\llbracket 1,m \rrbracket)^i}} \left\{ \min_{\omega_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i} \in (\llbracket -n_D, n_{inv} \rrbracket)} \left\{ \omega_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i} \;\middle|\; \rho_{\omega_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}}^{\left\{i_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}\right\}} \neq 0 \right\} \right\}$$

Ainsi, soit nous restreignons l'étude au niveau d'analyse BG-structurel où les gains des familles sont supposés indépendants et nous considérons le cas 1 (cf. procédure 15, page 102). Soit l'étude se place au niveau d'analyse comportementale et le cas 2 est considéré.

Fin de la démonstration.

À partir de la procédure 36 et au niveau d'analyse comportemental, une procédure bond graph permettant la détermination graphique des ordres des pôles à l'infini du modèle inverse est maintenant déduite.

Procédure 37. ***niveau d'analyse Comportemental***

Le nombre des pôles à l'infini est égal à m et chaque ***ordre d'un pôle à l'infini*** *n_i peut être calculé de sorte que :*

$$\begin{cases} n_1 = -L_1 \\ n_i = L_{i-1} - L_i \end{cases} \tag{F.5}$$

tel que sur le modèle bond graph bicausal :

$$L_i = \min_{\substack{j_1,\ldots,j_i \in (\llbracket 1,m \rrbracket)^i \\ h_1,\ldots,h_i \in (\llbracket 1,m \rrbracket)^i}} \left\{ \min_{\omega_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i} \in (\llbracket -n_D, n_{inv} \rrbracket)} \left\{ \omega_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i} \;\middle|\; \rho_{\omega_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}}^{\left\{i_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}\right\}} \neq 0 \right\} \right\}$$

où :

- *m est le nombre d'entrées ;*
- *n_{inv} et n_D sont respectivement le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale et le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée ;*
- *$\rho_{\omega_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}}^{\left\{i_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}\right\}}$ correspond à la somme des gains statiques des familles bond graph d'ordre $\omega_{h_1,\ldots,h_i}^{j_1,\ldots,j_i}$ et contenant uniquement i chemins causaux E/S différents entre $y_{j_1},\ldots,y_{j_i}$ et $u_{h_1},\ldots,u_{h_i}$. Dans ce calcul, le gain statique de chaque famille bond graph doit être multiplié par $(-1)^d$, où d étant le nombre de cycles contenus dans la famille bond graph. Le gain statique de chaque famille doit être multiplié aussi par $(-1)^{\sigma_k}$ où σ_k est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner les sorties dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand les i chemins causaux E/S de la famille sont ordonnés dans l'ordre du vecteur d'entrée initial.*

Démonstration.

– Pour $i = 1$, à partir du théorème 1, nous avons : $n_1 = \delta_1$. De plus, il a été démontré dans la procédure 36 que $\delta_i = -L_i$ où :

$$L_i = \min_{\substack{j_1,\ldots,j_i \in (\llbracket 1,m \rrbracket)^i \\ h_1,\ldots,h_i \in (\llbracket 1,m \rrbracket)^i}} \left\{ \min_{\omega^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} \in (\llbracket -n_D, n_{inv} \rrbracket)} \left\{ \omega^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} \mid \rho^{\left\{ i^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i} \right\}}_{\omega^{j_1,\ldots,j_i}_{h_1,\ldots,h_i}} \neq 0 \right\} \right\} \tag{F.6}$$

Ainsi, le résultat $n_1 = -L_1$ est immédiatement déduit.

– Pour $i \geq 2$ et à partir du théorème 1 et de la procédure 36, nous avons :

$$\begin{aligned} n_i &= -\delta_{i-1} + \delta_i \\ &= L_{i-1} - L_i \end{aligned}$$

où L_i est défini par l'équation F.6. **Fin de la démonstration.**

Remarque : Cette procédure permet de classer les ordres des pôles à l'infini dans l'ordre décroissant.

Exemple. Afin d'illustrer la procédure 37, considérons le circuit électrique de la figure F.1 où les deux résistances ont la même valeur R. Les sorties y_1 et y_2 sont respectivement les intensités traversant la bobine d'inductance L_2 et L_4. Le modèle bond graph acausal associé est donné figure F.2. Le critère d'inversibilité 3 (section 1.3.3, chapitre 1) est vérifié et le modèle bond graph bicausal (figure F.3) peut être construit grâce à la procédure SCAPI (procédure 22, section A.5.2, annexe A). Le modèle inverse d'ordre minimal s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{u_1} = I_1 I_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \ddot{\mathbf{y}}_\mathbf{1} + I_1 I_4 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \ddot{\mathbf{y}}_\mathbf{2} + (I_1 + I_2)\, \dot{\mathbf{y}}_\mathbf{1} \\ \mathbf{u_2} = I_2 I_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \ddot{\mathbf{y}}_\mathbf{1} + I_3 I_4 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \ddot{\mathbf{y}}_\mathbf{2} + (I_3 + I_4)\, \dot{\mathbf{y}}_\mathbf{2} \end{cases}$$

Dans le domaine de Laplace, le modèle est caractérisé par les matrices suivantes : $\mathbf{A_{inv}} = 0$, $\mathbf{B_{inv}}(s) = 0$, $\mathbf{C_{inv}} = 0$ et $\mathbf{D_{inv}}(s) = \begin{bmatrix} I_1 I_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) s^2 + (I_1 + I_2)\, s & I_1 I_4 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) s^2 \\ I_2 I_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) s^2 & I_3 I_4 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) s^2 + (I_3 + I_4)\, s \end{bmatrix}$. La matrice de transfert du modèle inverse est donnée par :

$$\mathbf{T_{inv}}(s) = \mathbf{D_{inv}}(s)$$

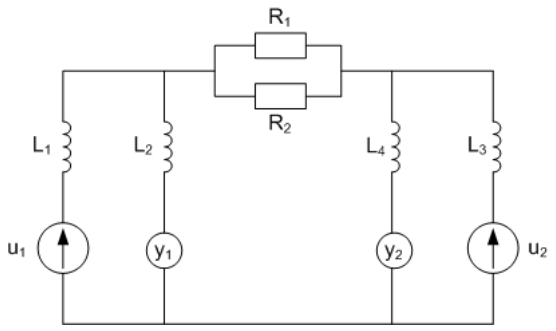


Fig. F.1 – Circuit électrique.

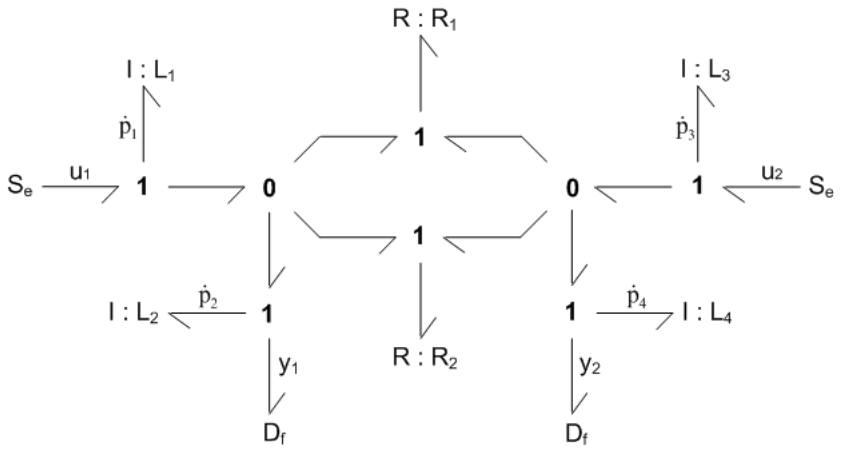


FIG. F.2 – Modèle bond graph acausal.

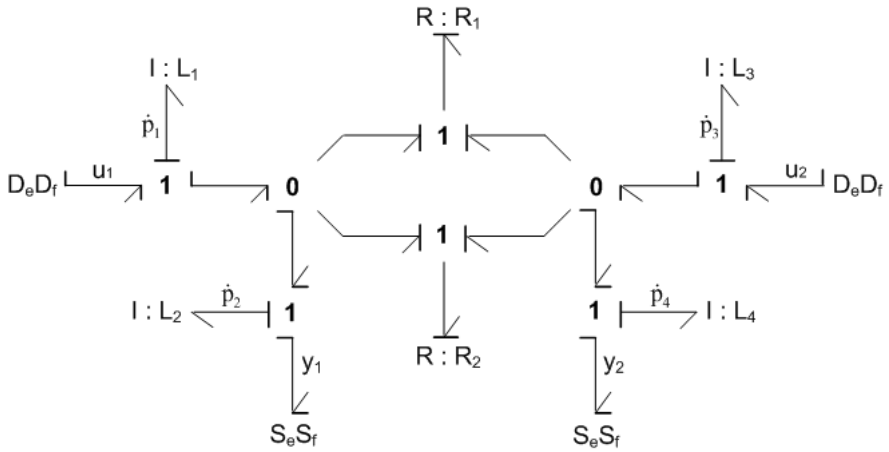


FIG. F.3 – Modèle bond graph bicausal.

Par l'approche modèle d'état et d'après le théorème 1, les ordres des pôles à l'infini sont calculés :

$$\begin{cases} n_1 = \delta_1 = 2 \\ n_2 = \delta_2 - \delta_1 = 3 - 2 = 1 \end{cases} \tag{F.7}$$

L'équation F.7 représente le résultat de référence auquel le résultat bond graph sera comparé.

Afin de déterminer les ordres des pôles à l'infini à partir du modèle bond graph bicausal, l'analyse des chemins causaux E/S est menée (figures F.4, F.5 et F.6) : huit ensembles de chemins causaux E/S différents d'ordre minimal (-4) existent entre la paire (y_1, y_2) et la paire (u_1, u_2). Si nous restreignons notre étude à un *niveau d'analyse BG-structurel* en considérant l'un des ensembles (par exemple l'ensemble S_1 donné figure F.4(a)), on a :

$$\begin{cases} L_1 = \omega_1(y_1 \rightarrow u_1) = -2 \\ L_2 = \omega_1(y_1 \rightarrow u_1) + \omega_2(y_2 \rightarrow u_2) = -2 - 2 = -4 \end{cases}$$

Alors, nous pouvons déduire que :

$$\begin{cases} n_1 = -L_1 = 2 \\ n_2 = L_1 - L_2 = -2 + 4 = 2 \end{cases}$$

Ce résultat, qui ne correspond pas au résultat trouvé par l'approche modèle d'état (équation F.7), n'est valide qu'au niveau d'analyse BG-structurel.

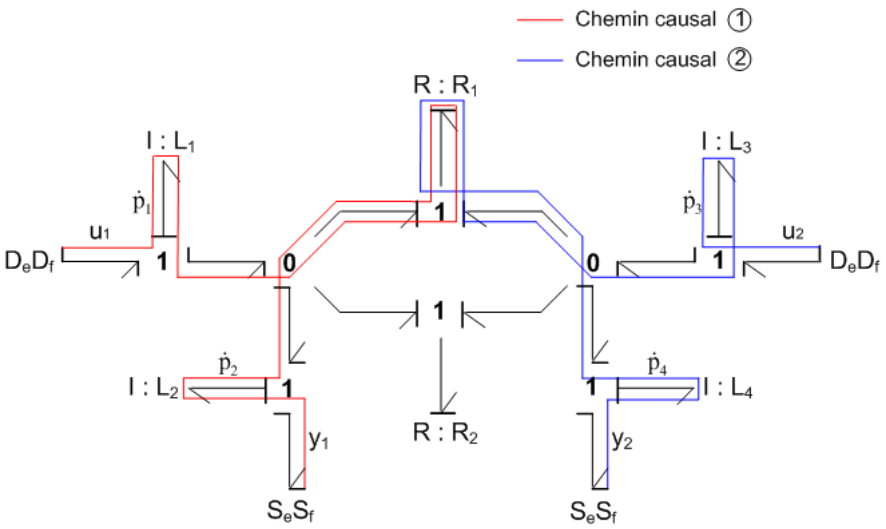
Maintenant, reprenons l'analyse précédente mais en considérant les gains des chemins causaux E/S (*niveau d'analyse comportemental*). Nous pouvons constater alors que la somme des gains statiques des huit familles bond graph d'ordre -4 s'annule : $\rho_{-4}^{\{2\}} = \frac{I_1 I_2 I_3 I_4}{R_1^2} - \frac{I_1 I_2 I_3 I_4}{R_1^2} + \frac{I_1 I_2 I_3 I_4}{R_2^2} - \frac{I_1 I_2 I_3 I_4}{R_2^2} + \frac{I_1 I_2 I_3 I_4}{R_1 R_2} - \frac{I_1 I_2 I_3 I_4}{R_1 R_2} + \frac{I_1 I_2 I_3 I_4}{R_1 R_2} - \frac{I_1 I_2 I_3 I_4}{R_1 R_2} = 0$. Ainsi, pour calculer les ordres des pôles à l'infini, il faut considérer les familles bond graph d'ordre -3 et vérifier que la somme signée de leurs gains statiques est différente de zéro. Huit familles d'ordre -3 existent (figures F.7, F.8 et F.9). La somme des gains statiques des familles bond graph d'ordre -3 est différente de zéro : $\rho_{-3}^{\{2\}} = \frac{I_1 I_2 I_3}{R_1} + \frac{I_1 I_2 I_3}{R_2} + \frac{I_1 I_2 I_4}{R_1} + \frac{I_1 I_2 I_4}{R_2} + \frac{I_2 I_3 I_4}{R_1} + \frac{I_1 I_3 I_4}{R_2} + \frac{I_1 I_3 I_4}{R_1} + \frac{I_2 I_3 I_4}{R_2} \neq 0$. Ainsi, nous pouvons déduire que :

$$\begin{cases} L_1 = \omega_1(y_1 \rightarrow u_1) = -2 \\ L_2 = \omega_1(y_1 \rightarrow u_1) + \omega_9(y_2 \rightarrow u_2) = -2 - 1 = -3 \end{cases}$$

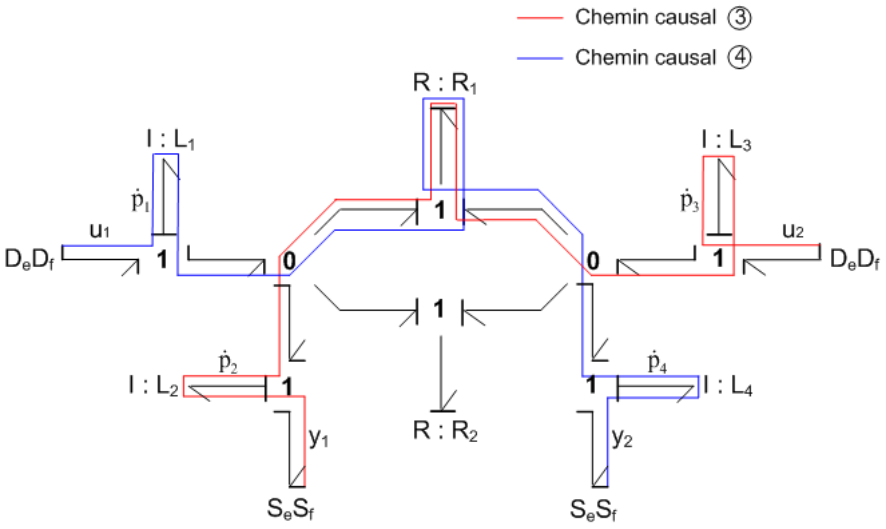
et par conséquent :

$$\begin{cases} n_1 = -L_1 = 2 \\ n_2 = L_1 - L_2 = -2 + 3 = 1 \end{cases}$$

Ce résultat au niveau d'analyse comportemental correspond bien au résultat trouvé par l'approche modèle d'état (équation F.7).



(a) Ensemble S_1 de chemins causaux E/S différents



(b) Ensemble S_2 de chemins causaux E/S différents

FIG. F.4 – Analyse des chemins causaux E/S différents d'ordre -4 : ensembles S_1 et S_2.

F.2.2 Ordres relatifs

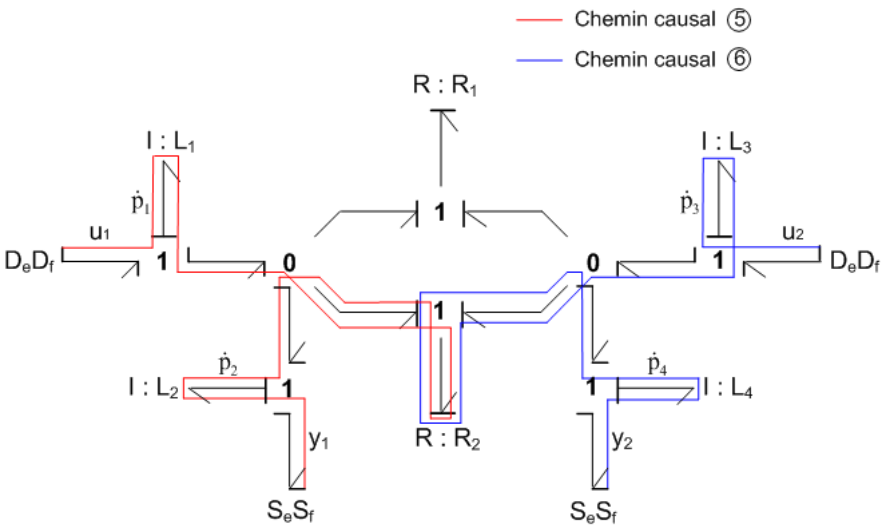
Une nouvelle méthode (théorème 4) a été proposée dans la section 3.1.1 permettant le calcul des ordres relatifs à partir du modèle inverse et plus précisément, à partir des ordres des pôles à l'infini du modèle inverse. À partir du théorème 4 et à partir de la procédure 37, la procédure 38 permettant la détermination des ordres relatifs sur le modèle bond graph bicausal est définie et ce, au niveau d'analyse comportemental. La procédure 17 (section 3.1.3, chapitre 3) permet la détermination de ces ordres sur le modèle bond graph bicausal au niveau d'analyse BG-structurel.

Procédure 38. ***niveau d'analyse comportememtal***
*L'**ordre relatif** n'_i de y_i peut être calculé de sorte que :*

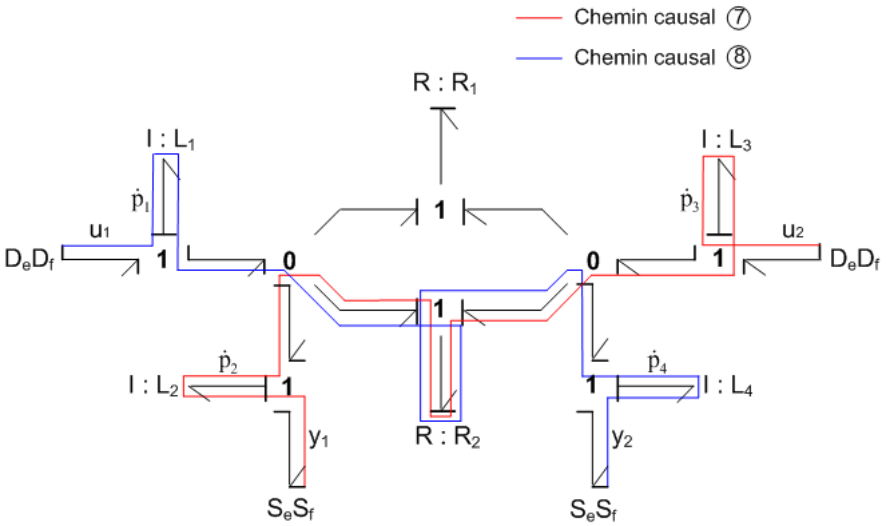
$$n'_i = L^{(i)}_{m-1} - L_m \tag{F.8}$$

tel que sur le modèle bond graph bicausal :

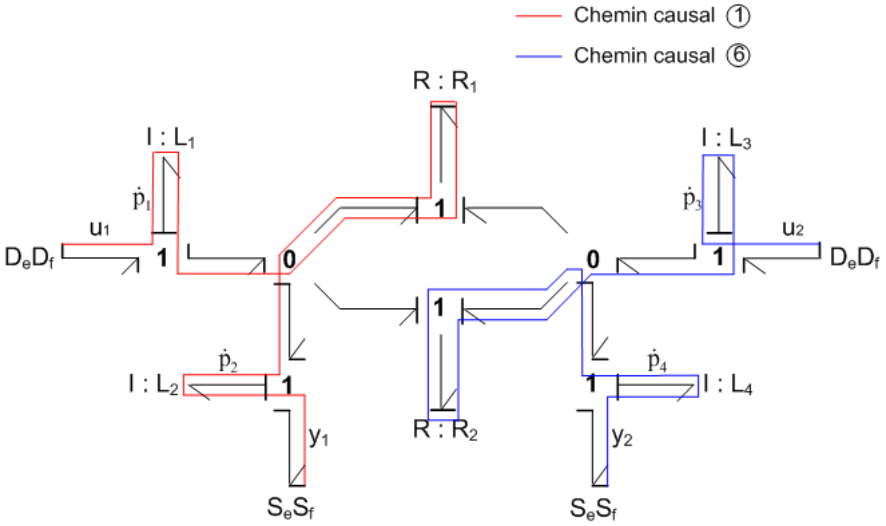
$$L_m = \min_{\substack{j_1,\dots,j_m \in ([\![1,m]\!])^m \\ h_1,\dots,h_m \in ([\![1,m]\!])^m}} \left\{ \min_{\omega^{j_1,\dots,j_m}_{h_1,\dots,h_m} \in ([\![-n_D, n_{inv}]\!])} \left\{ \omega^{j_1,\dots,j_m}_{h_1,\dots,h_m} \mid \rho^{\left\{i^{j_1,\dots,j_m}_{h_1,\dots,h_m}\right\}}_{\omega^{j_1,\dots,j_m}_{h_1,\dots,h_m}} \neq 0 \right\} \right\}$$



(a) Ensemble S_3 de chemins causaux E/S différents

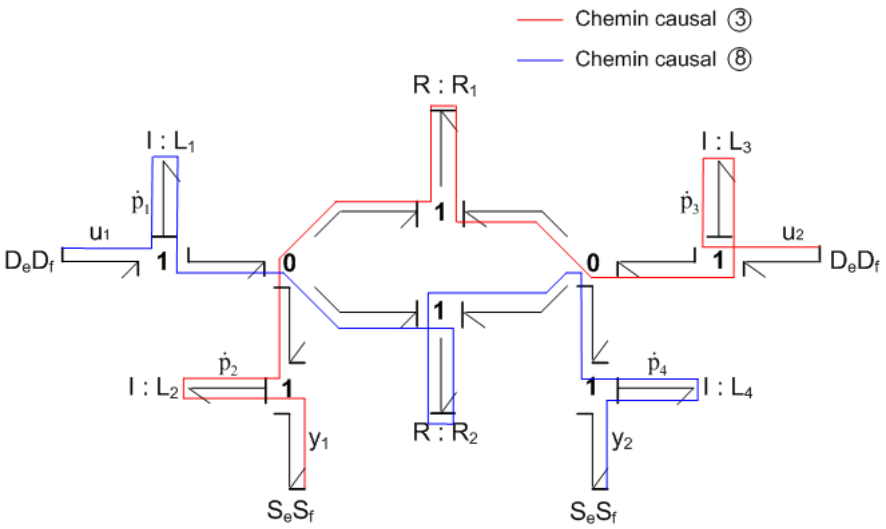


(b) Ensemble S_4 de chemins causaux E/S différents

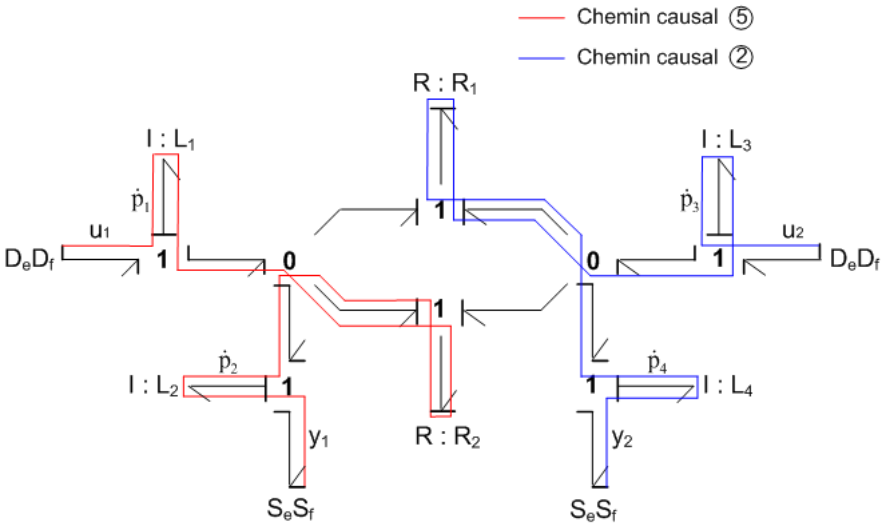


(c) Ensemble S_5 de chemins causaux E/S différents

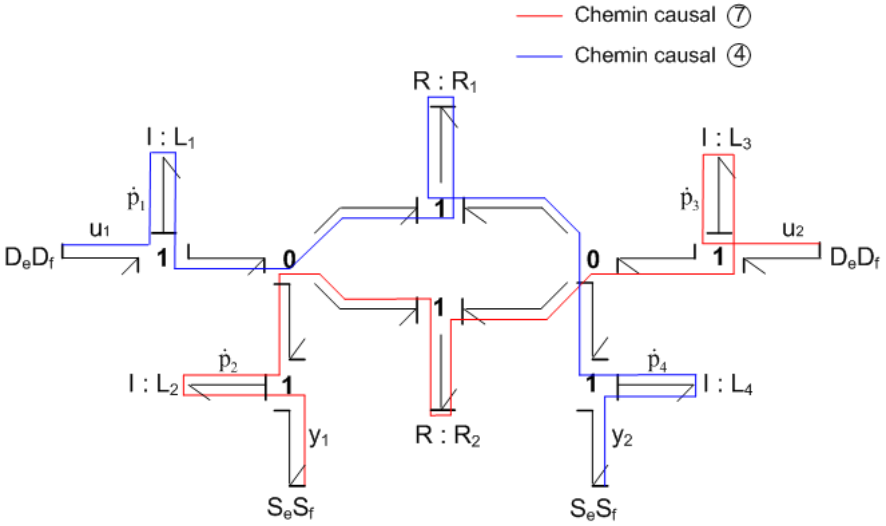
FIG. F.5 – Analyse des chemins causaux E/S différents d'ordre -4 : ensembles S_3, S_4 et S_5.



(a) Ensemble S_6 de chemins causaux E/S différents

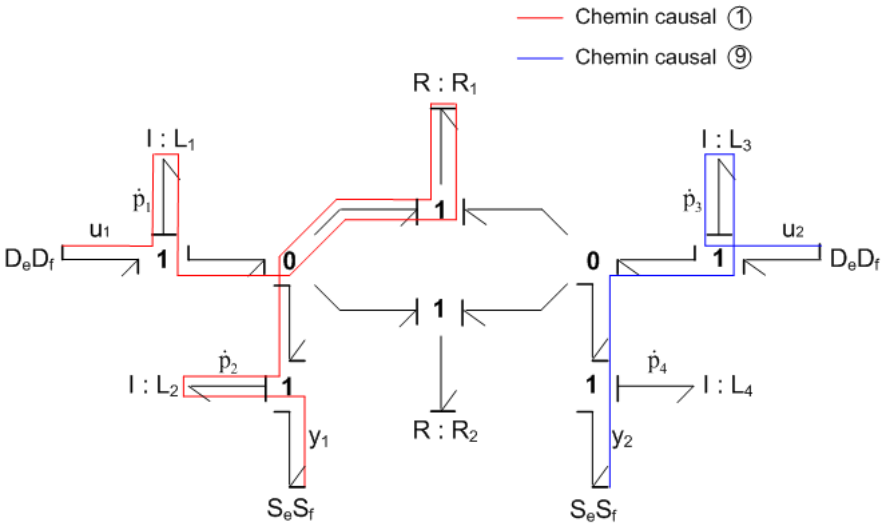


(b) Ensemble S_7 de chemins causaux E/S différents

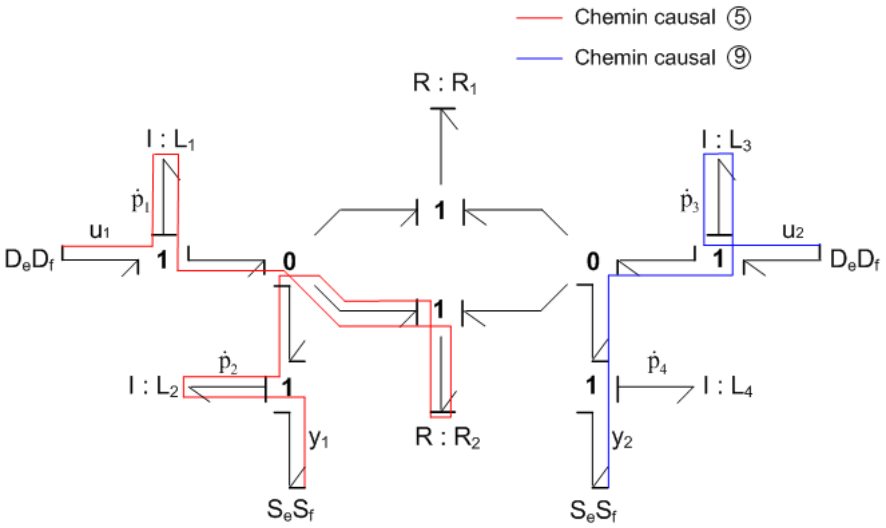


(c) Ensemble S_8 de chemins causaux E/S différents

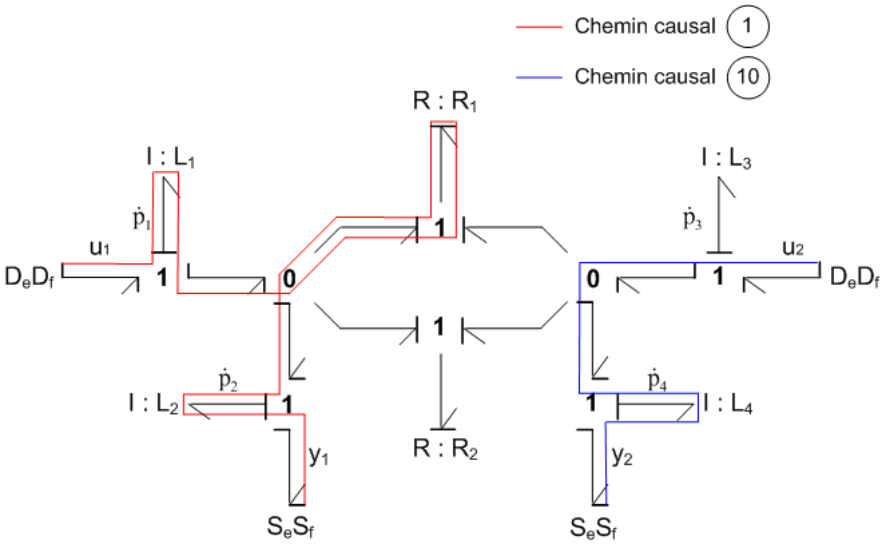
FIG. F.6 – Analyse des chemins causaux E/S différents d'ordre -4 : ensembles S_7, S_6 et S_8.



(a) Ensemble S_9 de chemins causaux E/S différents

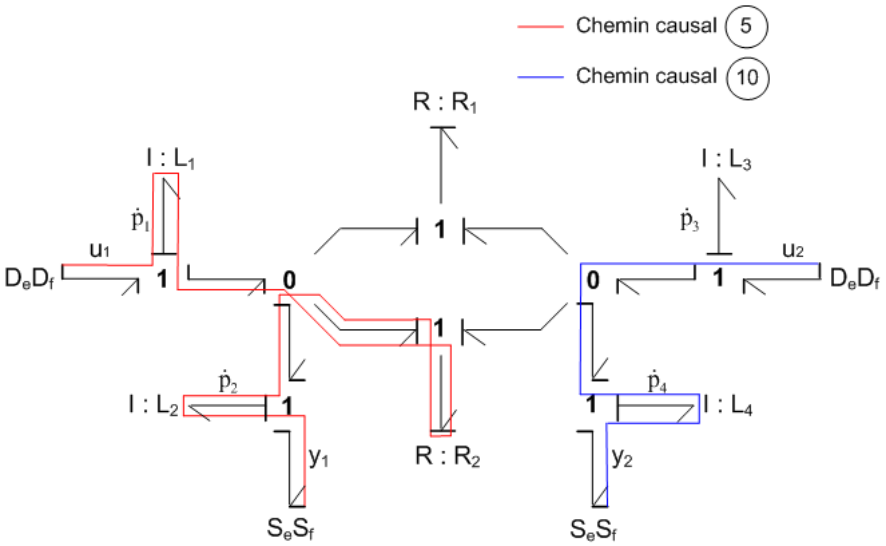


(b) Ensemble S_{10} de chemins causaux E/S différents

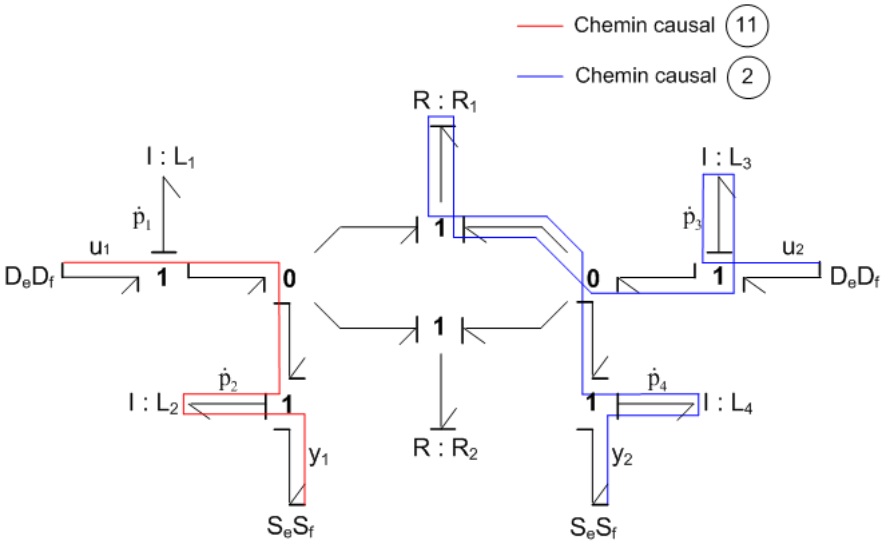


(c) Ensemble S_{11} de chemins causaux E/S différents

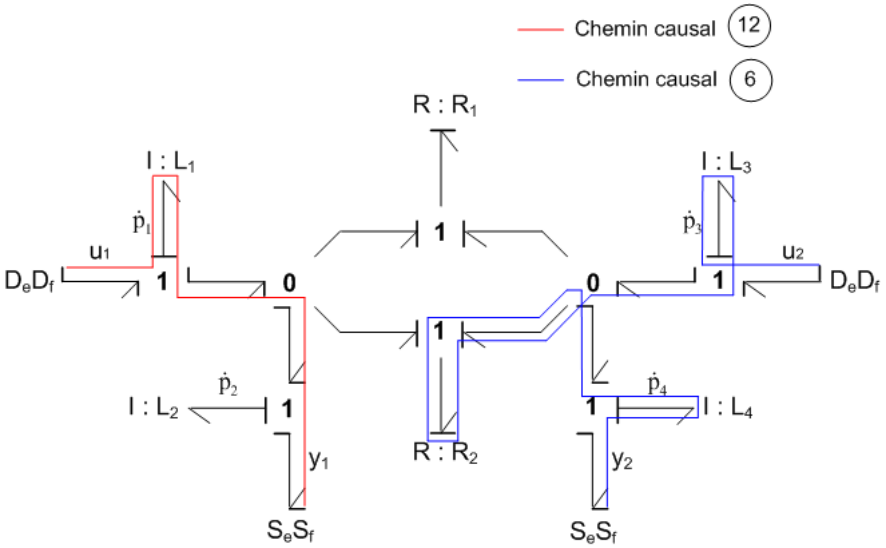
FIG. F.7 – Analyse des chemins causaux E/S différents d'ordre -3 : ensembles S_9, S_{10} et S_{11}.



(a) Ensemble S_{12} de chemins causaux E/S différents

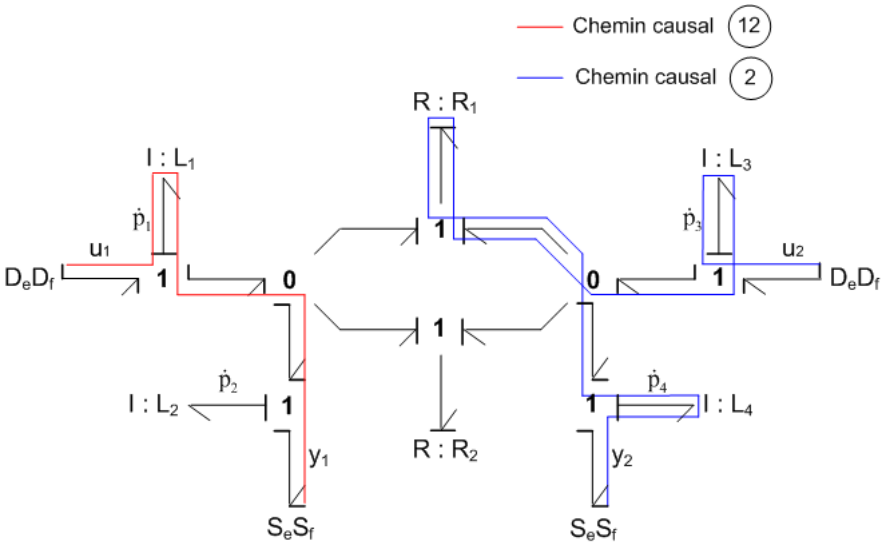


(b) Ensemble S_{13} de chemins causaux E/S différents

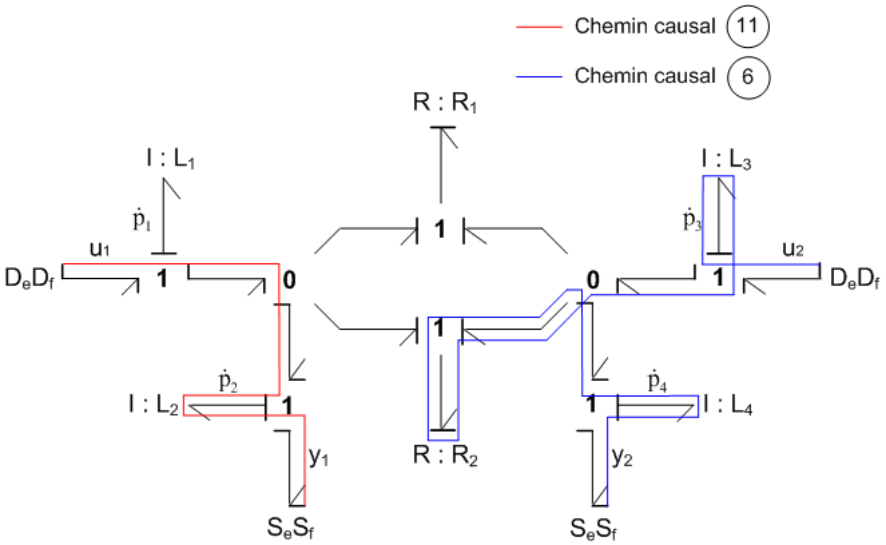


(c) Ensemble S_{14} de chemins causaux E/S différents

FIG. F.8 – Analyse des chemins causaux E/S différents d'ordre -3 : ensembles S_{12}, S_{13} et S_{14}.



(a) Ensemble S_{15} de chemins causaux E/S différents



(b) Ensemble S_{16} de chemins causaux E/S différents

FIG. F.9 – Analyse des chemins causaux E/S différents d'ordre -3 : ensembles S_{15} et S_{16}.

et sur le modèle bond graph bicausal sans la considération de l'$i^{ème}$ double source :

$$L_{m-1}^{(i)} = \min_{\substack{j_1,\dots,j_{m-1} \in (\llbracket 1,m \rrbracket \setminus \{i\})^{m-1} \\ h_1,\dots,h_{m-1} \in (\llbracket 1,m \rrbracket \setminus \{i\})^{m-1}}} \left\{ \min_{\omega_{h_1,\dots,h_{m-1}}^{j_1,\dots,j_{m-1}} \in (\llbracket -n_D, n_{inv} \rrbracket)} \left\{ \omega_{h_1,\dots,h_{m-1}}^{j_1,\dots,j_{m-1}} \mid \rho_{\omega_{h_1,\dots,h_{m-1}}^{j_1,\dots,j_{m-1}}}^{\left\{ i_{h_1,\dots,h_{m-1}}^{j_1,\dots,j_{m-1}} \right\}} \neq 0 \right\} \right\}$$

où :

- *m est le nombre d'entrées ;*
- *n_{inv} et n_D sont respectivement le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité intégrale et le nombre d'éléments de stockage d'énergie en causalité dérivée ;*
- *$\rho_{\omega_{h_1,\dots,h_m}^{j_1,\dots,j_m}}^{\left\{ i_{h_1,\dots,h_m}^{j_1,\dots,j_m} \right\}}$ (resp. $\rho_{\omega_{h_1,\dots,h_{m-1}}^{j_1,\dots,j_{m-1}}}^{\left\{ i_{h_1,\dots,h_{m-1}}^{j_1,\dots,j_{m-1}} \right\}}$) correspond à la somme des gains statiques des familles bond graph d'ordre $\omega_{h_1,\dots,h_m}^{j_1,\dots,j_m}$ (resp. $\omega_{h_1,\dots,h_{m-1}}^{j_1,\dots,j_{m-1}}$) et contenant uniquement m (resp. $m-1$) chemins causaux E/S différents entre $y_{h_1},\dots,y_{h_m}$ (resp. $y_{h_1},\dots,y_{h_{m-1}}$) et $u_{j_1},\dots,u_{j_m}$ (resp. $u_{j_1},\dots,u_{j_{m-1}}$). Dans ce calcul, le gain statique de chaque famille bond graph doit*

être multiplié par $(-1)^d$ *où* d *étant le nombre de cycles contenus dans la famille bond graph. Le gain statique doit également être multiplié par* $(-1)^{\sigma_k}$ *où* σ_k *est le nombre de permutations nécessaires pour ordonner* $u_{j_1}, \ldots, u_{j_m}$ *(resp.* $u_{j_1}, \ldots, u_{j_{m-1}}$*) dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand les* m *(resp.* $m-1$*) chemins causaux de la famille bond graph sont ordonnés dans l'ordre du vecteur d'entrée initial.*

Démonstration. À partir de la procédure 37, il peut être déduit que $\sum_{j=1}^{m} n_j = -L_m$ et $\sum_{j=1}^{m-1} \overline{n}_{ij} = -L_{m-1}^{(i)}$ tel que :

$$L_m = \min_{\substack{j_1,\ldots,j_m \in ([\![1,m]\!])^m \\ h_1,\ldots,h_m \in ([\![1,m]\!])^m}} \left\{ \min_{\omega_{h_1,\ldots,h_m}^{j_1,\ldots,j_m} \in ([\![-n_D, n_{inv}]\!])} \left\{ \omega_{h_1,\ldots,h_m}^{j_1,\ldots,j_m} \;\middle|\; \rho_{\omega_{h_1,\ldots,h_m}^{j_1,\ldots,j_m}}^{\left\{ i_{h_1,\ldots,h_m}^{j_1,\ldots,j_m} \right\}} \neq 0 \right\} \right\}$$

et

$$L_{m-1}^{(i)} = \min_{\substack{j_1,\ldots,j_{m-1} \in ([\![1,m]\!] \setminus \{i\})^{m-1} \\ h_1,\ldots,h_{m-1} \in ([\![1,m]\!] \setminus \{i\})^{m-1}}} \left\{ \min_{\omega_{h_1,\ldots,h_{m-1}}^{j_1,\ldots,j_{m-1}} \in ([\![-n_D, n_{inv}]\!])} \left\{ \omega_{h_1,\ldots,h_{m-1}}^{j_1,\ldots,j_{m-1}} \;\middle|\; \rho_{\omega_{h_1,\ldots,h_{m-1}}^{j_1,\ldots,j_{m-1}}}^{\left\{ i_{h_1,\ldots,h_{m-1}}^{j_1,\ldots,j_{m-1}} \right\}} \neq 0 \right\} \right\}$$

Ainsi, à partir de ces résultats et à partir du théorème 4, cette procédure 38 en est déduite. **Fin de la démonstration.**

Exemple. Considérons le circuit électrique de la figure F.10. Le modèle bond graph acausal associé est donné figure F.11. Nous supposons que le cahier des charges impose un ordre relatif égal à 1 pour la première sortie y_1 et égal à 0 pour la deuxième sortie y_2. Nous cherchons à valider cette spécification. Le critère d'inversibilité 3 (section 1.3.3, chapitre 1) est vérifié et le modèle bond graph bicausal (figure F.12) peut être construit grâce à la procédure SCAPI (procédure 22, section A.5.2, annexe A).

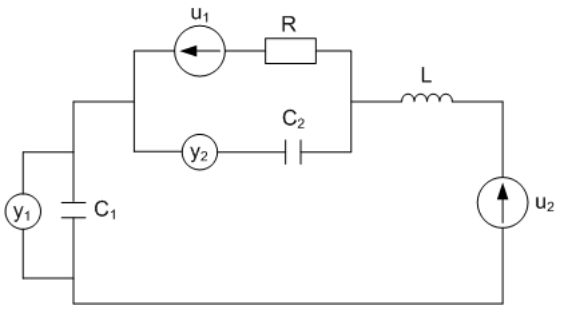


FIG. F.10 – Circuit électrique.

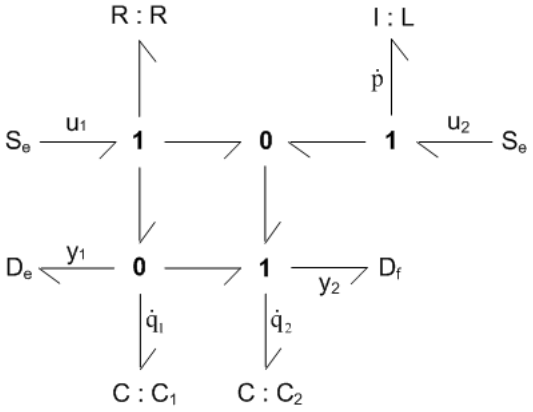


FIG. F.11 – Modèle bond graph acausal.

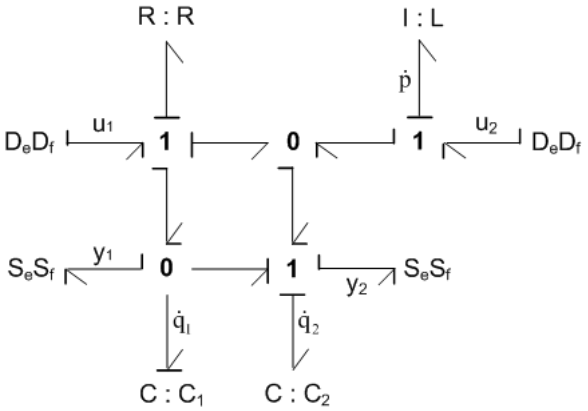
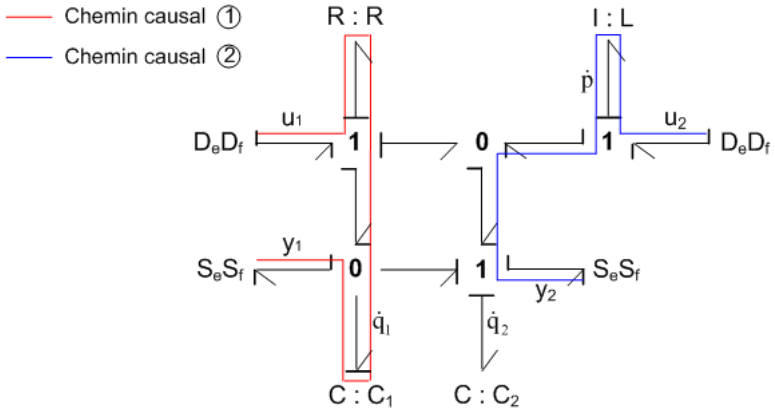


FIG. F.12 – Modèle bond graph acausal.

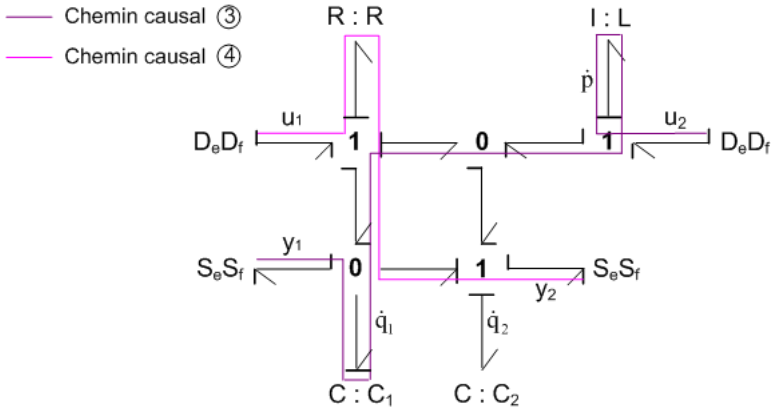
Afin de déterminer les ordres relatifs à partir du modèle bond graph bicausal, l'analyse des chemins causaux E/S est effectuée (figure F.13) : trois ensembles de chemins causaux E/S différents d'ordre minimal (égal à -2) existent : $S_1 = \{①, ②\}$ (figure F.13(a)), $S_2 = \{③, ④\}$ (figure F.13(b)) et $S_3 = \{①, ⑤\}$ (figure F.13(c)). La somme signée des gains statiques de ces familles bond graph est différente de zéro : $\rho_{-2}^{\{2\}} = RLC_1 + RLC_1 - RLC_1 \neq 0$, ainsi $L_2 = -2$. Par ailleurs, l'analyse causale des sous-systèmes $\left(\mathbf{A_{inv}}, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_1}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_1}}(s)\right)$ et $\left(\mathbf{A_{inv}}, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_2}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_2}}(s)\right)$ est effectuée respectivement sur les figures F.14(a) et F.14(b)) où les éléments $S_eS_f : y_1$ et $S_eS_f : y_2$ sont respectivement ignorés. Si nous restreignons notre

étude à un niveau d'*analyse BG-structurel*, on a :

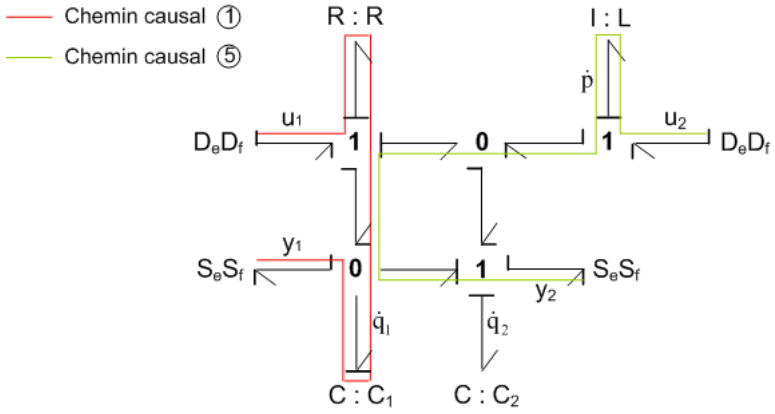
$$\begin{cases} L_1^{(1)} = \omega_2(y_2 \rightarrow u_2) = -1 \\ L_1^{(2)} = \omega_3(y_1 \rightarrow u_2) = -2 \end{cases}$$



(a) Ensemble S_1 de chemins causaux E/S différents



(b) Ensemble S_2 de chemins causaux E/S différents



(c) Ensemble S_3 de chemins causaux E/S différents

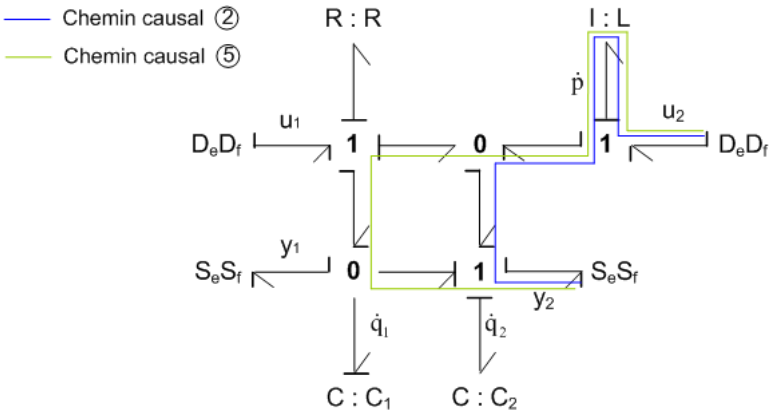
FIG. F.13 – Analyse des chemins causaux E/S différents.

En effet, pour la détermination de $L_1^{(1)}$, deux chemins causaux d'ordre minimal (égal à -1) existent entre y_2 et un double détecteur. Au niveau d'analyse BG-structurel, il suffit de retenir l'ordre de l'un des deux chemins sans tenir compte des gains statiques associés. Pour la détermination de $L_1^{(2)}$, un seul chemin causal d'ordre minimal existe entre y_1 et un double détecteur. Que ce soit

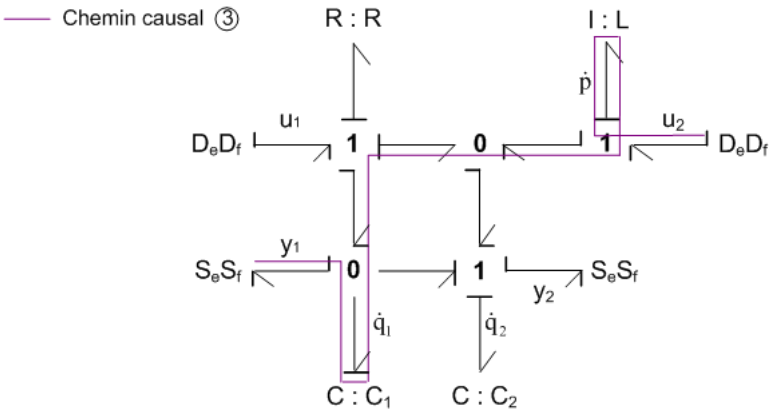
au niveau d'analyse BG-structurel ou comportemental, il suffit de retenir l'ordre de ce chemin. Ainsi, d'après la procédure 17, il peut être déduit que :

$$\begin{cases} n'_1 = L_1^{(1)} - L_2 = -1 + 2 = 1 \\ n'_2 = L_1^{(2)} - L_2 = -2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Ce résultat correspond bien aux spécifications données par le cahier des charges. Ainsi, la structure retenue pour le système à concevoir répond *a priori* au cahier des charges et l'analyse comportementale peut être menée.



(a) sous-système $\left(\mathbf{A_{inv}}, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_1}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_1}}(s)\right)$



(b) sous-système $\left(\mathbf{A_{inv}}, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_2}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_2}}(s)\right)$

FIG. F.14 – Analyse causale des sous-systèmes $\left(\mathbf{A_{inv}}, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_1}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_1}}(s)\right)$ et $\left(\mathbf{A_{inv}}, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_2}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_2}}(s)\right)$ au niveau BG-structurel.

En considérant les gains des chemins causaux E/S (*niveau d'analyse comportemental*), nous pouvons constater alors que la somme des gains statiques des deux chemins causaux d'ordre minimal existant entre y_2 et le même double détecteur s'annule : $\rho_{-1}^{\{1\}} = L - L = 0$. Ainsi, pour calculer $L_1^{(1)}$, et par conséquent, pour calculer les ordres relatifs, les familles bond graph contenant un unique chemin causal et d'ordre 0 doivent être considérées.

Une seule famille d'ordre 0 existe : elle est constituée du chemin causal ④ (figure F.13(b)). Nous pouvons déduire alors que $L_1^{(1)} = 0$ et par conséquent $n'_1 = L_1^{(1)} - L_2 = 0 + 2 = 2$.

Ce résultat ne correspond pas aux spécifications données par le cahier des charges et par conséquent, le modèle retenu n'est donc pas adéquate pour satisfaire la spécification $n'_1 = 1$. Ainsi, il faut remettre en question soit le cahier des charges, soit le modèle retenu pour le système à concevoir.

Remarque : Le modèle inverse d'ordre minimal associé au modèle bond graph bicausal (figure F.12) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{\dot{q}_2} = \mathbf{y_2} \\ \mathbf{u_1} = \frac{1}{C_2} q_2 + RC_1 \mathbf{\dot{y}_1} + R\mathbf{y_2} \\ \mathbf{u_2} = \frac{1}{C_2} q_2 - LC_1 \mathbf{\ddot{y}_1} - \mathbf{y_1} \end{cases} \tag{F.9}$$

Dans le domaine de LAPLACE, le modèle est caractérisé par les matrices suivantes : $\mathbf{A_{inv}} = 0$, $\mathbf{B_{inv}}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C_{inv}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{D_{inv}}(s) = \begin{bmatrix} RC_1 s & R \\ -LC_1 s^2 - 1 & 0 \end{bmatrix}$.
La matrice de transfert du modèle inverse est donnée par :

$$\mathbf{T_{inv}}(s) = \begin{bmatrix} RC_1 s & R + \frac{1}{C_2 s} \\ -LC_1 s^2 - 1 & \frac{1}{C_2 s} \end{bmatrix}$$

Nous proposons de calculer les ordres relatifs par l'approche modèle d'état (théorème 4). Pour ce faire, calculons tout d'abord les ordres des pôles à l'infini du système $(\mathbf{A_{inv}}, \mathbf{B_{inv}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \mathbf{D_{inv}}(s))$ et des sous-systèmes $\left(\mathbf{A_{inv}}, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_1}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_1}}(s)\right)$ et $\left(\mathbf{A_{inv}}, \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{inv_2}}(s), \mathbf{C_{inv}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{inv_2}}(s)\right)$:

$$\begin{cases} n_1 = \delta_1 = 2 \\ n_2 = \delta_2 - \delta_1 = 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \overline{n}_{11} = 0 \\ \overline{n}_{21} = 2 \end{cases}$$

Ainsi d'après le théorème 4 :

$$\begin{cases} n'_1 = n_1 + n_2 - \overline{n}_{11} = 2 + 0 - 0 = 2 \\ n'_2 = n_1 + n_2 - \overline{n}_{21} = 2 + 0 - 2 = 0 \end{cases} \tag{F.10}$$

Ce résultat correspond bien au résultat trouvé par l'approche bond graph au niveau d'analyse comportemental.

F.2.3 Odres d'essentialité

Dans la section 3.1.3 du chapitre 3, une procédure graphique permettant la détermination des ordres d'essentialité à partir du modèle bond graph bicausal a été proposée et démontrée au niveau d'analyse BG-structurel. Par rapport à la procédure causale (procédure 12, section 3.1.2, chapitre 3), la procédure bicausale permet de simplifier davantage les manipulations causales. Dans cette section, nous proposons la procédure 39 qui est une reformulation de la procédure 18 au niveau d'analyse comportemental.

Procédure 39. ***niveau d'analyse comportemental***
*Sur le modèle bond graph bicausal, l'**ordre d'essentialité** n_{ie} de la sortie y_i peut être calculé de sorte que :*

$$n_{ie} = -\min_{k,j}\left\{\omega_k(y_i \to u_j) \;\middle|\; \sum_{\textcircled{l}|\omega_l(y_i\to u_j)=\omega_k(y_i\to u_j)} \tilde{G}_l(y_i \to u_j) \neq 0\right\} \tag{F.11}$$

où $\tilde{G}_l(y_i \to u_j)$ est le gain statique du chemin causal $\textcircled{l}$ d'ordre $\omega_l(y_i \to u_j)$ entre la double source associée à y_i et le double détecteur associé à u_j.

Démonstration. Premièrement, l'i$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de transfert $\mathbf{T_{inv}}(s)$ du modèle inverse correspond aux transmittances associées à y_i. Deuxièmement, l'ordre d'essentialité n_{ie}, par définition, correspond à l'ordre de dérivation maximal de y_i apparaissant dans le modèle inverse d'ordre minimal. Ainsi, il peut être déduit que pour $j \in [\![1,\ldots,m]\!]$, $\deg\left\{t_{inv_{ji}}(s)\right\} \leq n_{ie}$. De plus, il existe nécessairement un ordre d'essentialité n_{ie} associé à y_i tel que :

$$n_{ie} = \max_{j\in[\![1,\ldots,m]\!]}\left\{\deg(t_{inv_{ji}}(s))\right\}$$

Notons que sur un modèle bond graph bicausal, $t_{inv_{ji}}$ est déterminé à partir des gains des chemins causaux entre y_i et u_j. Ainsi, on a :

$$t_{inv_{ji}} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{\textcircled{l}|\omega_l(y_i\to u_j)=\omega_k(y_i\to u_j)} \tilde{G}_l(y_i \to u_j)s^{-\omega_k(y_i\to u_j)}$$

où $\tilde{G}_l(y_i \to u_j)$ est le gain statique du chemin causal $\textcircled{l}$ d'ordre $\omega_l(y_i \to u_j) = \omega_k(y_i \to u_j)$, $\omega_k(y_i \to u_j)$ est l'ordre minimal qu'un chemin causal entre y_i et u_j puisse avoir. Deux cas de figure peuvent alors se présenter :

- cas 1 : $\displaystyle\sum_{\textcircled{l}|\omega_l(y_i\to u_j)=\omega_k(y_i\to u_j)} \tilde{G}_l(y_i \to u_j) \neq 0$
  Dans ce cas, $\deg(t_{inv_{ji}}(s))$ est égal à l'opposé de l'ordre minimal qu'un chemin causal puisse avoir entre y_i et u_j.
- cas 2 : $\displaystyle\sum_{\textcircled{l}|\omega_l(y_i\to u_j)=\omega_k(y_i\to u_j)} \tilde{G}_l(y_i \to u_j) = 0$
  Dans ce cas, les chemins causaux E/S entre y_i et u_j d'ordre $\omega_k + 1$ sont à considérer et la somme des gains statiques associée est analysée. Si cette somme est égale à zéro alors l'ordre des chemins analysés est incrémenté de manière récursive de 1 jusqu'à ce que la somme des gains statiques associée à ces chemins soit différente de zéro. Alors :

$$\deg(t_{inv_{ji}}(s)) = -\min_{k}\left\{\omega_k(y_i \to u_j) \;\middle|\; \sum_{\textcircled{l}|\omega_l(y_i\to u_j)=\omega_k(y_i\to u_j)} \tilde{G}_l(y_i \to u_j) \neq 0\right\}$$

Rappelons que la matrice de transfert du modèle direct ne possède que des zéros à l'infini [Com86] et par conséquent, la matrice de transfert du modèle inverse ne possède que des pôles à l'infini. Ce fait garantit que $\max_{j\in[\![1,\ldots,m]\!]}\left\{\deg(t_{inv_{ji}}(s))\right\}$ est ≥ 0. Ainsi, il existe nécessairement un chemin causal entre y_i et u_j d'ordre ≤ 0.

Comme $n_{ie} = \max_{j\in[\![1,\ldots,m]\!]}\left\{\deg(t_{inv_{ji}}(s))\right\}$, l'ordre d'essentialité de y_i est alors déduit selon le niveau d'analyse souhaité :

- niveau d'analyse BG-structurel : $n_{ie} = -\min_{k,j}\{\omega_k(y_i \to u_j)\}$ (cf. procédure 18, page 107)

– niveau d'analyse Comportemental :

$$n_{ie} = -\min_{k,j} \left\{ \omega_k(y_i \rightarrow u_j) \;\middle|\; \sum_{l \,|\, \omega_l(y_i \rightarrow u_j) = \omega_k(y_i \rightarrow u_j)} \tilde{G}_l(y_i \rightarrow u_j) \neq 0 \right\}$$

Fin de la démonstration.

Exemple. Considérons le modèle bond graph acausal illustré par la figure F.11 et qui correspond à une structure retenue dans la phase de conception. Nous supposons que le cahier des charges impose un nombre de dérivations maximal égal à 2 pour la première sortie y_1 et égal à 1 pour la deuxième sortie y_2. Nous cherchons à valider cette spécification par l'analyse du modèle bond graph bicausal associé (figure F.12). L'analyse causale menée sur cette représentation permet de déduire que :

– Le chemin causal ③ est l'unique chemin causal d'ordre minimal entre y_1 et un double détecteur (figure F.14(b)). Que ce soit au niveau d'analyse BG-structurel ou comportemental, il suffit de retenir l'ordre de ce chemin.
– Les deux chemin causaux ② et ⑤ sont les chemins causaux d'ordre minimal entre y_2 et un double détecteur (figure F.14(a)). Au niveau d'analyse BG-structurel, il suffit de retenir l'ordre de ces chemins sans tenir compte des gains statiques associés.

Ainsi, au *niveau d'analyse BG-structurel* et d'après la procédure 18, on a :

$$\begin{cases} n_{1e} = \omega_3(y_1 \rightarrow u_2) = 2 \\ n_{2e} = \omega_2(y_2 \rightarrow u_2) = \omega_5(y_2 \rightarrow u_2) = 1 \end{cases}$$

Ce résultat correspond bien aux spécifications données par le cahier des charges. Ainsi, la structure retenue du modèle de conception répond *a priori* au cahier des charges et l'analyse comportementale peut être établie.

La considération des gains des chemins causaux E/S (*niveau d'analyse comportemental*) permet de constater que la somme des gains statiques des deux chemins causaux d'ordre minimal (égal à -1) existant entre y_2 et le même double détecteur s'annule. Ainsi, pour déterminer l'ordre d'essentialité associé à y_2, une analyse des gains statiques des chemins causaux d'ordre supérieur s'impose. Le modèle bond graph bicausal présente un seul chemin causal d'ordre 0 entre y_2 et un double détecteur qui correspond au chemin causal ④ (figure F.13(b)). Ainsi, $n_{2e} = 0$. Le modèle retenu n'est donc pas adéquate pour satisfaire la spécification $n_{2e} = 1$. Ainsi, il faut remettre en question soit le cahier des charges, soit le modèle de conception du système à concevoir. Cependant, il est à noter que d'après le critère de découplabilité (critère 2, section E.2, annexe E), le modèle retenu est découplable par retour d'état statique.

Remarque : L'analyse du modèle inverse d'ordre minimal (système d'équations F.9) permet de déduire les ordres d'essentialité : $n_{1e} = 2$ et $n_{2e} = 0$. Ainsi, nous pouvons conclure que le résultat obtenu par l'approche bond graph au niveau d'analyse comportemental correspond bien à celui obtenu par l'approche modèle d'état.

Annexe G

Analyse de l'adéquation spécifications/structure du modèle : cas des systèmes multivariables

Dans cette annexe, nous proposons une procédure permettant de vérifier l'adéquation spécifications/structure du modèle pour les systèmes linéaires multivariables et d'apporter une aide à la rédaction du cahier des charges dans le cas d'inadéquation.

G.1 Vérification de l'adéquation par niveaux d'analyse

La procédure 40 permet de vérifier l'adéquation des spécifications des entrées et des sorties à la structure de l'i$^{\text{ème}}$ composant 1-port. De plus, si cette adéquation n'est pas vérifiée et si le cahier des charges l'autorise, cette procédure permet de remettre en question la structure du composant ou les spécifications. Dans ce cas de figure, le cahier des charges spécifie toutes les entrées $(u_1, \ldots, u_m)$ et la sortie y_1.

Procédure 40. *Dans le cas d'un système linéaire multivariable, l'analyse de l'adéquation des spécifications à la structure retenue pour un composant 1-port est constituée de 6 étapes :*

- ***Étape 1 : Vérification de l'inversibilité structurelle entre l'i^{ème} composant et la sortie*** y_1
  Les trois conditions nécessaires du critère 3 (section 1.3.3, chapitre 1) sont à vérifier pour conclure sur l'inversibilité entre l'i^{ème} composant et la sortie $\mathbf{y_1}$*. Dans ce cas, le critère demeure le même à l'exception qu'il faut :*
  - *analyser les lignes de puissance et les chemins causaux entre le composant en question et la sortie* $\mathbf{y_1}$*,*
  - *remplacer le composant par un double détecteur* D_eD_f*. La commande* $\mathbf{u}$ *reste une entrée sur le modèle inverse,*
  - *après la propagation de la bicausalité, affecter la causalité préférentielle dérivée afin d'éviter des manipulations ultérieures sur les expressions déterminées à partir de la règle de* Mason *(procédure 23, page 229).*

  Si l'inversibilité n'est pas vérifiée alors cette procédure ne peut être appliquée.
- ***Étape 2 : Analyse de la structure du composant à partir du modèle bond graph causal***
  Considérer uniquement le composant et en appliquant la règle de Mason*, déterminer l'expression de l'impédance/admittance (*$\mathbf{I_d}(s)/\mathbf{A_d}(s)$*) du composant à partir du modèle bond graph en causalité préférentielle dérivée. Si le composant peut être caractérisé par une impédance ou une admittance (cas de causalité arbitraire) alors le choix de la nature de la fonction de transfert est lui aussi arbitraire.*

- ***Étape 3 : Vérification de l'adéquation au niveau d'analyse BG-structurel***
  Soient :
  - $n_{\{N_d\}}$ *(resp.* $n_{\{D_d\}}$*) est le degré du numérateur de l'impédance (resp. admittance) de la structure retenue pour le composant 1-port et* $n_{\{D_d\}}$ *(resp.* $n_{\{N_d\}}$*) est le degré du dénominateur de l'impédance (resp. admittance) de cette structure,*
  - $n_{\{y_1\}}$ *est le degré*[1] *de la spécification* $\mathbf{Y_1}(s)$*,*
  - $n_{\{u_j\}}$ *est le degré de la spécification* $\mathbf{U_j}(s)$*,* $j = \{1, \ldots, m\}$*,*
  - $n_{y_1 \longrightarrow f}$ *(resp.* $n_{y_1 \longrightarrow e}$*) est l'opposé de l'ordre minimal qu'une famille de* Mason[2]*, contenant un chemin causal entre* y_1 *et la variable de puissance* f *(resp.* e*) du composant, puisse avoir,*
  - $n_{u_j \longrightarrow f}$ *(resp.* $n_{u_j \longrightarrow e}$*) est l'opposé de l'ordre minimal qu'une famille de* Mason*, contenant un chemin causal entre* u_j *;* $j = \{1, \ldots, m\}$ *; et la variable de puissance* f *(resp.* e*) du composant, puisse avoir*[3]*.*

  Si

$$n_{\{D_d\}} + \max\left\{n_{y_1 \longrightarrow e} + n_{\{y_1\}}; n_{u_1 \longrightarrow e} + n_{\{u_1\}}; \cdots; n_{u_m \longrightarrow e} + n_{\{u_m\}}\right\} > n_{\{N_d\}} + \max\left\{n_{y_1 \longrightarrow f} + n_{\{y_1\}}; n_{u_1 \longrightarrow f} + n_{\{u_1\}}; \cdots; n_{u_m \longrightarrow f} + n_{\{u_m\}}\right\}$$

  resp.

$$n_{\{D_d\}} + \max\left\{n_{y_1 \longrightarrow e} + n_{\{y_1\}}; n_{u_1 \longrightarrow e} + n_{\{u_1\}}; \cdots; n_{u_m \longrightarrow e} + n_{\{u_m\}}\right\} < n_{\{N_d\}} + \max\left\{n_{y_1 \longrightarrow f} + n_{\{y_1\}}; n_{u_1 \longrightarrow f} + n_{\{u_1\}}; \cdots; n_{u_m \longrightarrow f} + n_{\{u_m\}}\right\}$$

  et si pour le membre majorant de cette inégalité, il existe un seul argument de la fonction max égal à ce maximum
  et si pour cet argument, une seule famille de Mason *est impliquée dans la détermination du degré* $n_{. \longrightarrow e}$ *(resp.* $n_{. \longrightarrow f}$*) qui lui est associé, alors l'adéquation ne peut être vérifiée au niveau d'analyse inférieur et la remise en question de la structure des spécifications ou de la structure du composant doit avoir lieu (étape 5).*
  Sinon, les spécifications (de l'entrée et de la sortie) et la structure du composant sont a priori en adéquation (condition nécessaire) et par conséquent, l'adéquation doit être vérifiée au niveau d'analyse comportemental (étape 4).
- ***Étape 4 : Vérification de l'adéquation au niveau d'analyse comportemental***
  Les spécifications (des entrées et de la sortie) et la structure du composant sont en adéquation au niveau d'analyse comportemental si :

$$\left[\mathbf{N_{y_1 \to e}} \mathbf{Y_1} + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{N_{u_k \to e}} \mathbf{U_k}\right] \mathbf{D_d}(s) = \left[\mathbf{N_{y_1 \to f}} \mathbf{Y_1} + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{N_{u_k \to f}} \mathbf{U_k}\right] \mathbf{N_d}(s) \qquad \text{(G.1)}$$

  où :
  - $\mathbf{N_d} = \mathbf{N_d}(s)$ *et* $\mathbf{D_d} = \mathbf{D_d}(s)$ *dépendent de la nature de la fonction de transfert caractérisant le composant : s'il est caractérisé par une impédance (resp. admittance) alors* $\mathbf{N_d}(s)$ *(resp.* $\mathbf{D_d}(s)$*) est le numérateur et* $\mathbf{D_d}(s)$ *(resp.* $\mathbf{N_d}(s)$*) est le dénominateur de cette impédance (resp. admittance),*
  - $\mathbf{Y_1} = \mathbf{Y_1}(s)$ *est la spécification de la sortie* y_1*,*
  - $\mathbf{N_{y_1 \to e}} = \mathbf{N_{y_1 \to e}}(s)$ *(resp.* $\mathbf{N_{y_1 \to f}} = \mathbf{N_{y_1 \to f}}(s)$*) est le numérateur de la transmittance entre* y_1 *et la variable de puissance* e *(resp.* f*) du composant,*

[1] Le degré d'une fonction rationnelle est donné par la définition 24 de l'annexe E.

[2] La famille de Mason est introduite dans définition 2, page 112.

[3] S'il n'existe pas de famille de Mason contenant un chemin causal entre deux variables v_l et v_k tel que v_l est l'entrée u_j ; $j = \{1, \ldots, m\}$; ou la sortie y_1 et v_k est la variable d'effort e ou de flux f alors le terme $n_{v_l \longrightarrow v_k} + n_{\{N.\}} + n_{\{D.\}} + \cdots + n_{\{D.\}}$ n'est pas considéré.

- $\mathbf{U_j} = \mathbf{U_j}(s)$ *est la spécification de l'entrée* u_j *;* $j = \{1, \ldots, m\}$,
- $\mathbf{N_{u_j \to e}} = \mathbf{N_{u_j \to e}}(s)$ *(resp.* $\mathbf{N_{u_j \to f}} = \mathbf{N_{u_j \to f}}(s)$*);* $j = \{1, \ldots, m\}$ *; est le numérateur de la transmittance entre* u_j *et la variable de puissance e (resp. f) du composant.*

- ***Étape 5 : Remise en question de la structure des spécifications ou de la structure du composant (niveaux d'analyse BG-structurel et comportemental)***
  Si l'adéquation des spécifications à la structure du composant n'est pas vérifiée alors la structure des spécifications ou la structure du composant peuvent être remises en question (selon la flexibilité donnée par le cahier des charges) :
  - ***Remise en question de la structure des spécifications :*** *La structure du composant est supposée inchangée. L'une des spécifications est remise en question :*
    - *Remise en question de la structure de l'entrée* u_j *: les spécifications de* y_1 *et de* u_k *;* $k = \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m\}$ *; sont supposées inchangées. Une première analyse permet de calculer le degré de* $\mathbf{U_j}(s)$ *et par conséquent de conclure sur sa réalisabilité (niveau d'analyse BG-structurel) :*

$$\begin{aligned} deg(\mathbf{U_j}(s)) = \max \Big\{ \Big(n_{\{\mathbf{y_1}\}} + \max \Big\{ n_{\{D_d\}} + n_{y_1 \longrightarrow e}; n_{\{N_d\}} + n_{y_1 \longrightarrow f} \Big\} \Big) ; \\ \max_{k \in [\![1,m]\!]/j} \Big\{ n_{\{u_k\}} + \max \Big\{ n_{\{D_d\}} + n_{u_k \longrightarrow e}; n_{\{N_d\}} + n_{u_k \longrightarrow f} \Big\} \Big\} \Big\} \\ - \max \Big\{ n_{\{D_d\}} + n_{u_j \longrightarrow e}; n_{\{N_d\}} + n_{u_j \longrightarrow f} \Big\} \end{aligned} \tag{G.2}$$

Si $deg\,(\mathbf{U_j}(s)) > 0$
et si pour le premier terme de la soustraction, un seul argument de la fonction max est égal à ce maximum
et si pour la fonction max dans cet argument, un seul argument est égal à ce maximum et si pour ce dernier argument, une seule famille de Mason *est impliquée dans la détermination du degré* $n_{\cdot \longrightarrow \cdot}$ *qui lui est associé, alors la structure n'est pas causale.*
Si $deg(\mathbf{U_j}(s)) \leq 0$ *et* $\mathbf{D_d}(s)\mathbf{N_{u_j \to e}}(s) - \mathbf{N_d}(s)\mathbf{N_{u_j \to f}}(s) \neq 0$ *alors la structure de l'entrée* u_j *qui satisfait le cahier des charges peut être calculée à partir de l'impédance/ admittance* $\mathbf{I_d}(s)/\mathbf{A_d}(s)$*, de la sortie* $\mathbf{Y_1}(s)$ *et des entrées* $\mathbf{U_1}(s), \ldots, \mathbf{U_{j-1}}(s), \mathbf{U_{j+1}}(s), \ldots, \mathbf{U_m}(s)$ *(niveau d'analyse comportemental)*[4] *:*

$$\begin{aligned} \mathbf{U_j}(s) = \Big[\mathbf{D_d}\mathbf{N_{u_j \to e}} - \mathbf{N_d}\mathbf{N_{u_j \to f}} \Big]^{-1} \left[\left(\mathbf{N_d}\mathbf{N_{y_1 \to f}} - \mathbf{D_d}\mathbf{N_{y_1 \to e}} \right) \mathbf{Y_1} + \right. \\ \left. \left[\mathbf{N_d} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \mathbf{N_{u_k \to f}} \mathbf{U_k} - \mathbf{D_d} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \mathbf{N_{u_k \to e}} \mathbf{U_k} \right] \right] \end{aligned} \tag{G.3}$$

  - *Remise en question de la structure de la sortie* y_1 *: la structure des entrées spécifiées est supposée inchangée. Une première analyse permet de calculer le degré de* $\mathbf{Y_1}(s)$ *et par conséquent de conclure sur sa réalisabilité (niveau d'analyse BG-structurel) :*

$$\begin{aligned} deg(\mathbf{Y_1}(s)) = \max_{k \in [\![1,m]\!]} \Big\{ n_{\{u_k\}} + \max \Big\{ n_{\{D_d\}} + n_{u_k \longrightarrow e} n_{\{N_d\}} + n_{u_k \longrightarrow f} \Big\} \Big\} \\ - \max \Big\{ n_{\{D_d\}} + n_{y_1 \longrightarrow e}; n_{\{N_d\}} + n_{y_1 \longrightarrow f} \Big\} \end{aligned} \tag{G.4}$$

Si $deg\,(\mathbf{Y_1}(s)) > 0$
et si pour le premier terme de la soustraction, un seul argument de la fonction max est

[4] Pour des raisons de simplification, nous faisons abstraction de l'opérateur de Laplace dans les expressions de $\mathbf{U_j}(s)$ et de $\mathbf{Y_1}(s)$.

égal à ce maximum
et si pour la fonction max dans cet argument un seul argument est égal à ce maximum et si pour ce dernier argument une seule famille MASON *est impliquée dans la détermination du degré* $n_{u_k \longrightarrow .}$ *qui lui est associé, alors la structure n'est pas causale.*
Si $deg(\mathbf{Y_1}(s)) \leq 0$ *et si* $\mathbf{D_d}(s)\mathbf{N_{y_1 \to e}}(s) - \mathbf{N_d}(s)\mathbf{N_{y_1 \to f}}(s) \neq 0$ *alors la structure de la sortie* y_1 *qui satisfait le cahier des charges peut être calculée en fonction de l'impédance/admittance* $\mathbf{I_d}(s)/\mathbf{A_d}(s)$ *et des spécifications des entrées* $\mathbf{U_1}(s), \ldots, \mathbf{U_m}(s)$ *(niveau d'analyse comportemental) :*

$$\mathbf{Y_1}(s) = \left[\mathbf{D_d}\mathbf{N_{y_1 \to e}} - \mathbf{N_d}\mathbf{N_{y_1 \to f}}\right]^{-1} \sum_{k=1}^{m} \left(\mathbf{N_d}\mathbf{N_{u_k \to f}} - \mathbf{D_d}\mathbf{N_{u_k \to e}}\right) \mathbf{U_k} \tag{G.5}$$

- ***Remise en question de la structure du composant :*** *Les spécifications des entrées et de la sortie étant inchangées, une première information sur la réalisabilité de l'impédance/admittance* $\mathbf{I_i}(s) = \frac{\mathbf{N_i}(s)}{\mathbf{D_i}(s)}/\mathbf{A_i}(s) = \frac{\mathbf{D_i}(s)}{\mathbf{N_i}(s)}$ *peut être obtenue comme suit (niveau d'analyse BG-structurel) :*

$$\begin{cases} deg(\mathbf{I_i}(s)) = \max\left\{n_{y_1 \longrightarrow e} + n_{\{\mathbf{y_1}\}}; \max\limits_{k \in [\![1,m]\!]}\left\{n_{u_k \longrightarrow e} + n_{\{u_k\}}\right\}\right\} \\ \qquad\qquad - \max\left\{n_{y_1 \longrightarrow f} + n_{\{\mathbf{y_1}\}}; \max\limits_{k \in [\![1,m]\!]}\left\{n_{u_k \longrightarrow f} + n_{\{u_k\}}\right\}\right\} \\ deg(\mathbf{A_i}(s)) = \max\left\{n_{y_1 \longrightarrow f} + n_{\{\mathbf{y_1}\}}; \max\limits_{k \in [\![1,m]\!]}\left\{n_{u_k \longrightarrow f} + n_{\{u_k\}}\right\}\right\} \\ \qquad\qquad - \max\left\{n_{y_1 \longrightarrow e} + n_{\{\mathbf{y_1}\}}; \max\limits_{k \in [\![1,m]\!]}\left\{n_{u_k \longrightarrow e} + n_{\{u_k\}}\right\}\right\} \end{cases} \tag{G.6}$$

Si $deg(\mathbf{I_i}(s)) > 0$ *(resp.* $deg(\mathbf{A_i}(s)) > 0$*) et si pour le premier terme de la soustraction, un seul argument de la fonction max est égal à ce maximum et si pour la fonction max dans cet argument un seul argument est égal à ce maximum et si pour ce dernier argument une seule famille* MASON *est impliquée dans la détermination du degré* $n_{. \longrightarrow e}$ *(resp.* $n_{. \longrightarrow f}$*) qui lui est associé, alors la structure n'est pas causale.*
Si $deg(\mathbf{I_i}(s)) \leq 0$ *(resp.* $deg(A_i(s)) \leq 0$*) alors la structure du composant qui répond à ces spécifications est caractérisée par les polynômes suivants tels que* $\mathbf{I_i}(s) = \frac{\mathbf{N_i}(s)}{\mathbf{D_i}(s)}$ *ou* $\mathbf{A_i}(s) = \frac{\mathbf{D_i}(s)}{\mathbf{N_i}(s)}$ *(niveau d'analyse comportemental) :*

$$\begin{cases} \mathbf{N_i}(s) = \mathbf{N_{y_1 \to e}}(s)\mathbf{Y_1}(s) + \sum\limits_{k=1}^{m} \mathbf{N_{u_k \to e}}(s)\mathbf{U_k}(s) \\ \mathbf{D_i}(s) = \mathbf{N_{y_1 \to f}}(s)\mathbf{Y_1}(s) + \sum\limits_{k=1}^{m} \mathbf{N_{u_k \to f}}(s)\mathbf{U_k}(s) \end{cases} \tag{G.7}$$

- ***Étape 6 : Vérification de l'adéquation au niveau d'analyse numérique et synthèse paramétrique***
La vérification de l'adéquation au niveau d'analyse comportemental (étape 4) permet d'établir un système d'équations polynomiales (linéaires ou non linéaires). Si les solutions trouvées suite à la résolution numérique de ce système d'équations sont acceptables (répondent aux contraintes physiques) alors l'adéquation est vérifiée et la synthèse paramétrique de certains paramètres du composant peut être entreprise. Sinon, il faut remettre en question les spécifications numériques.

La démonstration de cette procédure est la même que celle donnée pour la procédure 19 (page 113, chapitre 3) définie pour les systèmes monovariables sauf que pour les systèmes multivariables, il faut tenir compte des termes supplémentaires correspondants aux différentes entrées.

G.2 Exemple

Considérons comme exemple le système académique composé de deux masses reliées par une raideur et un amortisseur, permettant de caractériser les propriétés d'un matériau par exemple, (figure G.1) avec :

- F_1 (resp. F_2) est la force exercée sur la masse m_1 (resp. m_2),
- v_2 est la vitesse de la masse m_2.

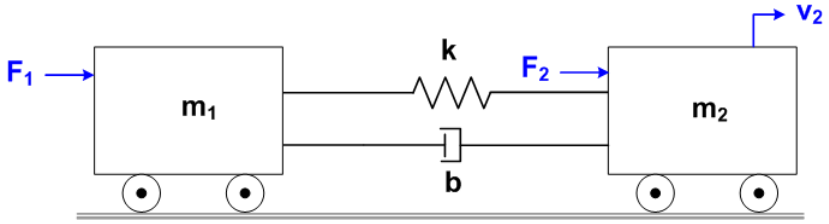


FIG. G.1 – Système académique : deux masses en série.

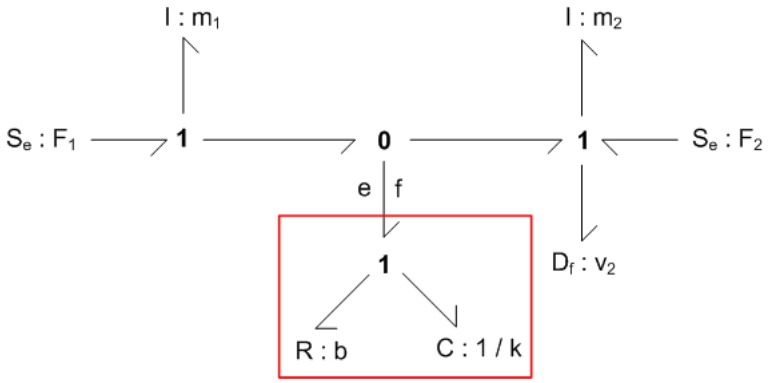


FIG. G.2 – Modèle bond graph acausal.

Le modèle bond graph acausal associé est donné figure G.2. Le composant susceptible d'être remis en question est celui qui représente les caractéristiques du matériau : « ressort-amortisseur ». La figure G.2 met en évidence le composant en question. Nous souhaitons vérifier l'adéquation de la structure choisie pour ce composant avec les spécifications suivantes :

$$\mathbf{F_1}(s) = \frac{k_1}{s + \alpha_1} \tag{G.8}$$

$$\mathbf{F_2}(s) = \frac{k_2}{s + \alpha_2} \tag{G.9}$$

$$\mathbf{V_2}(s) = \frac{1}{k_3 s^2 + k_4 s + 1} \tag{G.10}$$

avec k_i et α_j non nuls, $i = \{1, \ldots, 4\}$ et $j = \{1, 2\}$.

- Étape 1 : L'inversibilité entre v_2 et le composant en question est vérifiée :
  - sur le modèle bond graph acausal, il existe une ligne de puissance entre le composant et v_2 (figure G.3(a)),
  - sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale, il existe un chemin causal entre le composant et v_2 (figure G.3(b)),
  - le modèle bond graph bicausal est construit (figure G.4). La structure de jonction du modèle inverse est résoluble.

– Étape 2 : Considérons le composant « ressort-amortisseur » auquel nous avons affecté la causalité préférentielle dérivée (figure G.5). Le composant en question est caractérisé par une admittance donnée par :

$$\mathbf{A_d}(s) = \frac{s}{b_1 s + k_1}$$

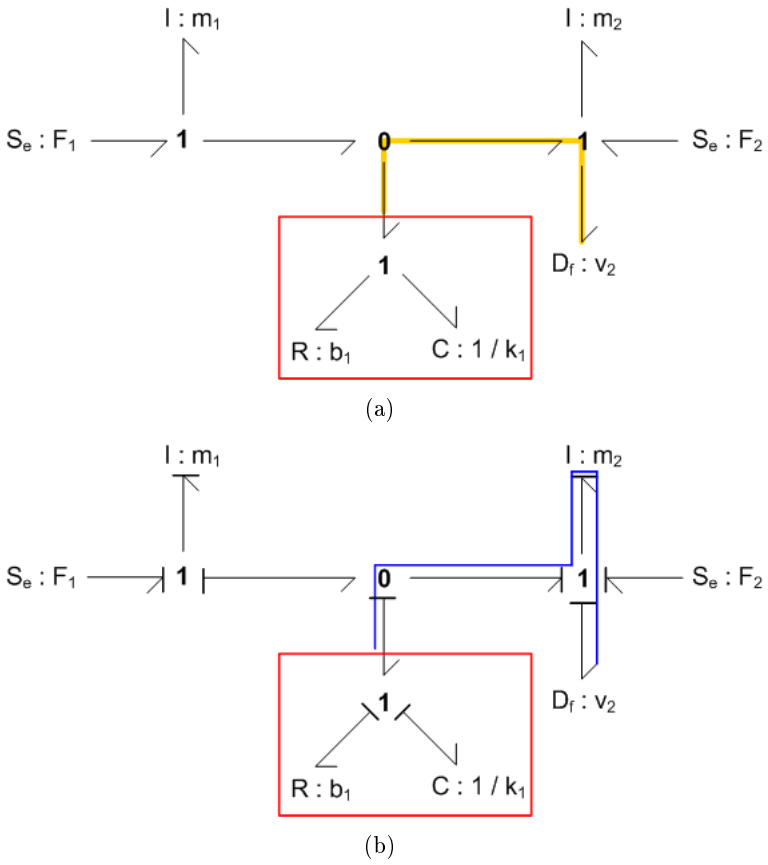


FIG. G.3 – Analyse (a) des lignes de puissance sur le modèle bond graph acausal et (b) des chemins causaux sur le modèle bond graph en causalité préférentielle intégrale.

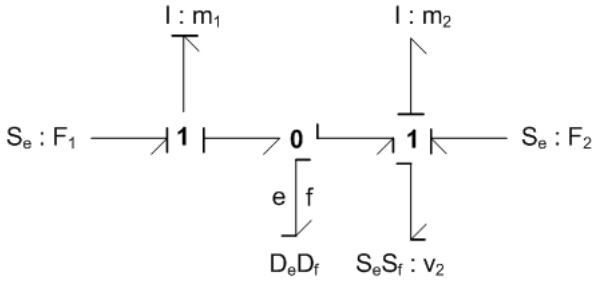


FIG. G.4 – Modèle bond graph bicausal.

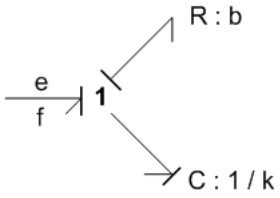


FIG. G.5 – Le modèle bond graph du composant « ressort-amortisseur » en causalité préférentielle dérivée.

- Étape 3 : À partir de l'étape 2 et à partir des spécifications données par les équations G.8, G.9 et G.10, il peut être déduit que : $n_{\{D_d\}} = n_{\{N_d\}} = 1$, $n_{\{F_1\}} = n_{\{F_2\}} = -1$ et $n_{\{v_2\}} = -2$. L'analyse des familles de MASON sur le modèle bond graph bicausal permet de déduire que :
  - il existe une seule famille de MASON (resp. deux familles de MASON) contenant un chemin causal entre v_2 et la variable d'effort **e** (resp. de flux **f**) du composant d'ordre -1 (resp. 0) (figure G.6 (resp. figure G.7)),
  - il existe une seule famille de MASON contenant un chemin causal entre F_1 et la variable de flux **f** du composant d'ordre 1 (figure G.8). Par contre, il n'existe aucune famille de MASON contenant un chemin causal entre F_1 et la variable d'effort **e**.
  - il existe une seule famille de MASON contenant un chemin causal entre F_2 et la variable d'effort **e** (resp. de flux **f**) du composant d'ordre 0 (resp. 1) (figure G.9 (resp. figure G.10)).

  Ainsi, il peut être déduit que :

$$1 + \max\{(1-2);(0-1)\} > 1 + \max\{(0-2);(-1-1);(-1-1)\}$$

  et tel que pour le degré supérieur de cette inégalité, les deux arguments de la fonction max sont égaux. Les conditions de l'étape 3 ne sont donc pas remplies et l'analyse doit être menée au niveau comportemental (étape 4).

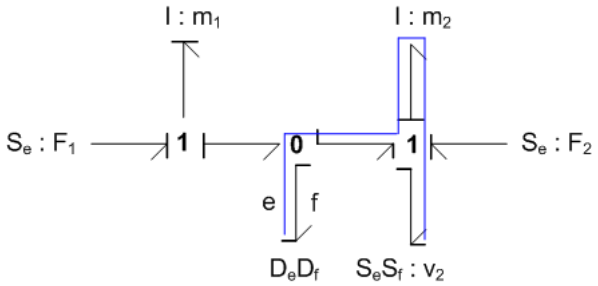
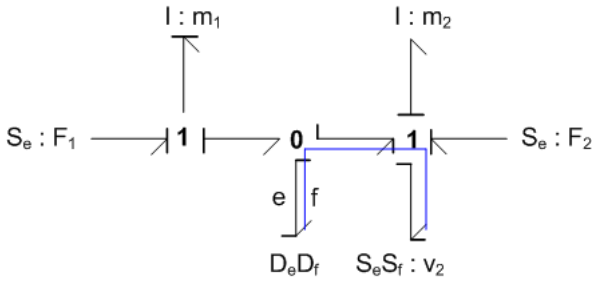
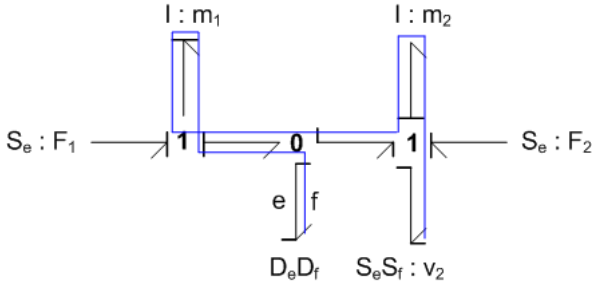


FIG. G.6 – Analyse des familles de MASON contenant un chemin causal entre v_2 et la variable d'effort **e** du composant.



(a)



(b)

FIG. G.7 – Analyse des familles de MASON contenant un chemin causal entre v_2 et la variable d'effort **f** du composant.

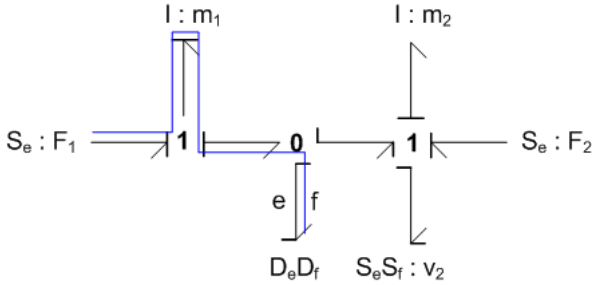


FIG. G.8 – Analyse des familles de MASON contenant un chemin causal entre F_1 et la variable d'effort **f** du composant.

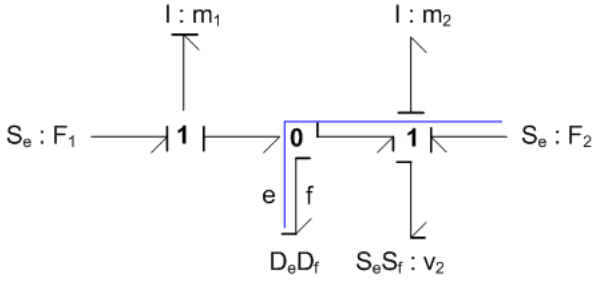


FIG. G.9 – Analyse des familles de MASON contenant un chemin causal entre F_2 et la variable d'effort **e** du composant.

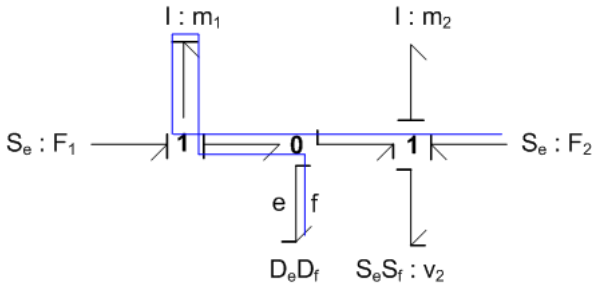


FIG. G.10 – Analyse des familles de MASON contenant un chemin causal entre F_2 et la variable d'effort $\mathbf{f}$ du composant.

– Étape 4 : Au niveau d'analyse comportemental, la structure du composant « ressort-amortisseur » est en adéquation avec les spécifications si et seulement si :

$$\mathbf{D_d}\left[\mathbf{N_{v_2\to e}V_2}+\mathbf{N_{F_1\to e}F_1}+\mathbf{N_{F_2\to e}F_2}\right]=\mathbf{N_d}\left[\mathbf{N_{v_2\to f}V_2}+\mathbf{N_{F_1\to f}F_1}+\mathbf{N_{F_2\to f}F_2}\right]$$

Ce qui revient à écrire :

$$\begin{aligned}
&(m_2-k_2k_3)s^4+(m_2(\alpha_1+\alpha_2)-k_2(k_4+\alpha_1k_3))s^3+(\alpha_1(\alpha_2m_2-k_2k_4)-k_2)s^2\\
&-\alpha_1k_2s=b\left(\frac{k_3}{m_1}(k_1+k_2)-\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right)s^3+\left[b\left(\frac{k_3(\alpha_2k_1+\alpha_1k_2)+k_4(k_1+k_2)}{m_1}\right.\right.\\
&\left.\left.-(\alpha_1+\alpha_2)\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right)+k\left(\frac{k_3}{m_1}(k_1+k_2)-\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right)\right]s^2+\\
&\left[b\left(\frac{k_4(\alpha_2k_1+\alpha_1k_2)+k_1+k_2}{m_1}-\alpha_1\alpha_2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right)+k\left(\frac{k_3(\alpha_2k_1+\alpha_1k_2)+k_4(k_1+k_2)}{m_1}\right.\right.\\
&\left.\left.-(\alpha_1+\alpha_2)\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right)\right]s+k\left[\frac{k_4(\alpha_2k_1+\alpha_1k_2)+k_1+k_2}{m_1}-\alpha_1\alpha_2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right]\\
&\left(\frac{\alpha_2k_1+\alpha_1k_2}{m_1}\right)\frac{k}{s}
\end{aligned}$$

Afin de vérifier l'adéquation au niveau d'analyse comportemental, il est nécessaire de vérifier le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}
m_2-k_2k_3=0\\
m_2(\alpha_1+\alpha_2)-k_2(k_4+\alpha_1k_3)=b\left(\frac{k_3}{m_1}(k_1+k_2)-\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right)\\
\alpha_1(\alpha_2m_2-k_2k_4)-k_2=b\left(\frac{k_3(\alpha_2k_1+\alpha_1k_2)+k_4(k_1+k_2)}{m_1}-(\alpha_1+\alpha_2)\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right)\\
\qquad\qquad+k\left(\frac{k_3}{m_1}(k_1+k_2)-\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right)\\
-\alpha_1k_2=b\left(\frac{k_4(\alpha_2k_1+\alpha_1k_2)+k_1+k_2}{m_1}-\alpha_1\alpha_2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right)+k\left(\frac{k_3(\alpha_2k_1+\alpha_1k_2)+k_4(k_1+k_2)}{m_1}\right.\\
\qquad\left.-(\alpha_1+\alpha_2)\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right)\\
k\left[\frac{k_4(\alpha_2k_1+\alpha_1k_2)+k_1+k_2}{m_1}-\alpha_1\alpha_2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right]=0\\
k\left(\frac{\alpha_2k_1+\alpha_1k_2}{m_1}\right)=0
\end{cases}\tag{G.11}$$

L'analyse du système d'équations G.11 revient à vérifier si les conditions supposées sur les paramètres (dans ce cas paramètres non nuls) sont respectées indépendamment des valeurs des paramètres. Dans notre cas, le système d'équations G.11 ne présente apparemment pas d'incohérence par rapport aux conditions sur les paramètres et donc l'adéquation est *a priori* vérifiée.

– Étape 6 : Au niveau d'analyse numérique, l'industriel doit spécifier les valeurs de certains paramètres. La résolution du système d'équations G.11 permet de déterminer 6 autres

paramètres dont les paramètres k et b caractérisant le composant à dimensionner et 4 autres paramètres que le concepteur n'arriverait pas à spécifier en posant son problème de conception. La résolution de ce type de systèmes d'équations (polynomiale) peut faire appel à la base de GRÖBNER (ou base standard, ou base de BUCHBERGER), utilisée par plusieurs outils informatiques comme Maple et Matlab. S'il existe des solutions acceptables (physiquement) à ces paramètres alors nous avons simultanément vérifié l'adéquation et déterminé les valeurs des paramètres. Sinon l'adéquation n'est pas vérifiée et il faut remettre en question les spécifications numériques.

Considérons maintenant que la spécification de v_2 est définie par $\mathbf{V_2}(s) = \frac{1}{k_3 s+1}$ et reprenons la procédure de vérification de l'adéquation spécifications/structure du modèle :

- Étape 3 : nous avons $n_{\{D_d\}} = n_{\{N_d\}} = n_{v_2 \to e} = 1$, $n_{v_2 \to f} = n_{F_2 \to e} = 0$ et $n_{\{F_1\}} = n_{\{F_2\}} = n_{\{v_2\}} = n_{F_1 \to f} = n_{F_2 \to f} = -1$. Alors :

$$1 + \max\{(1-1);(0-1)\} > 1 + \max\{(0-1);(-1-1);(-1-1)\}$$

  et tel que pour le degré supérieur de cette inégalité, un seul argument de la fonction max (le premier) est égal à ce maximum et pour cet argument, une seule famille de MASON est impliquée dans le calcul du degré $n_{v_2 \to e}$ qui lui est associé. Les conditions de l'étape 3 sont donc remplies. Ainsi, il peut être conclu que l'adéquation structure/spécifications n'est pas vérifiée au niveau d'analyse BG-structurel et par conséquent, elle ne le sera pas au niveau d'analyse inférieur. Nous passons alors à la remise en question des spécifications ou de la structure du composant (étape 5) pour apporter une aide à la rédaction du cahier des charges.
- Étape 5 :
  - Remise en question de l'entrée F_1
    Calculons tout d'abord le degré de F_1 qui permet de satisfaire le cahier des charges :

$$\begin{aligned} deg(\mathbf{F_1}(s)) = \max\Big\{&\Big(n_{\{\mathbf{v_2}\}} + \max\Big\{(n_{\{D_d\}} + n_{v_2 \to e});(n_{\{N_d\}} + n_{v_2 \to f})\Big\}\Big);\\ &\Big(n_{\{F_2\}} + \max\Big\{\Big(n_{\{N_d\}} + n_{F_2 \to f}\Big);\Big(n_{\{D_d\}} + n_{F_2 \to e}\Big)\Big\}\Big)\Big\}\\ &- \max\Big\{n_{\{N_d\}} + n_{F_1 \to f}\Big\}\\ &= \max\{(-1 + \max\{(1+1);(1+0)\});(-1 + \max\{(1-1);(1+0)\})\}\\ &- \max\{1-1\} = 1 \end{aligned}$$

    $deg(\mathbf{F_1}(s)) > 0$ et, pour le premier terme de la soustraction, seul le premier argument de la fonction max est égal à ce maximum. De même, pour la fonction max dans cet argument, seul le premier argument est égal au maximum (2). Enfin, pour cet argument, une seule famille de MASON est impliquée dans le calcul du degré $n_{v_2 \to e}$ qui lui est associé. Par conséquent, le résultat du degré de $\mathbf{F_1}(s)$ ne peut pas être modifié au niveau d'analyse inférieur. Donc la transmittance n'est pas causal et alors il est inutile de déterminer sa structure complète et nous pouvons conclure que l'entrée F_1 ne peut être remise en question.
  - Remise en question de l'entrée F_2

Calculons tout d'abord le degré de F_2 qui permet de satisfaire le cahier des charges :

$$\begin{aligned} deg(\mathbf{F_2}(s)) &= \max\left\{\left(n_{\{v_2\}} + \max\left\{(n_{\{D_d\}} + n_{v_2\to e}); (n_{\{N_d\}} + n_{v_2\to f})\right\}\right); \\ &\quad \left(n_{\{F_1\}} + \max\left\{n_{\{N_d\}} + n_{F_1\to f}\right\}\right)\right\} - \max\left\{(n_{\{D_d\}} + n_{F_2\to e}); \\ &\quad (n_{\{N_d\}} + n_{F_2\to f})\right\} \\ &= \max\left\{(-1 + \max\left\{(1+1); (1+0)\right\}); (-1 + \max\left\{1-1\right\})\right\} \\ &\quad - \max\left\{(1+0); (1-1)\right\} = 0 \end{aligned}$$

La transmittance est *a priori* causale et la structure de l'entrée F_2 est donnée par $\mathbf{F_2}(s) = \frac{\mathbf{N_{F_2}}(s)}{\mathbf{D_{F_2}}(s)}$ où :

$\mathbf{N_{F_2}}(s) = m_2 s^3 + \left(\alpha_1 m_2 + b\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\right) s^2 + \left((k + \alpha_1 b)\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) - \frac{bk_1k_3}{m_1}\right) s - \frac{k_1(b+kk_3)}{m_1} - \frac{kk_1}{m_1 s}$

et

$\mathbf{D_{F_2}}(s) = k_3 s^3 + \left(1 + \alpha_1 k_3 + \frac{bk_3}{m_1}\right) s^2 + \left(\alpha_1 + \frac{kk_3}{m_1}\right) s + \frac{b(1+\alpha_1+\alpha_1 k_3)}{m_1} + \frac{k(1+\alpha_1 k_3)+\alpha_1 k}{m_1 s}$

– Remise en question de la sortie v_2
Calculons tout d'abord le degré de v_2 qui permet de satisfaire le cahier des charges :

$$\begin{aligned} deg(\mathbf{V_2}(s)) &= \max\left\{\left(n_{\{F_1\}} + \max\left\{n_{\{N_d\}} + n_{F_1\to f}\right\}\right); \right. \\ &\quad \left.\left(n_{\{F_2\}} + \max\left\{(n_{\{D_d\}} + n_{F_2\to e}); (n_{\{N_d\}} + n_{F_2\to f})\right\}\right)\right\} \\ &\quad - \max\left\{(n_{\{D_d\}} + n_{v_2\to e}); (n_{\{N_d\}} + n_{v_2\to f})\right\} \\ &= \max\left\{(-1 + \max\left\{1-1\right\}); (-1 + \max\left\{(1+0); (1-1)\right\})\right\} \\ &\quad - \max\left\{(1+1); (1+0)\right\} = -2 \end{aligned}$$

La transmittance donc causale au niveau d'analyse BG-structurel et la structure de la sortie v_2 est donnée par $\mathbf{V_2}(s) = \frac{\mathbf{N_{v_2}}(s)}{\mathbf{D_{v_2}}(s)}$ où :

$\mathbf{N_{v_2}}(s) = k_2 s^2 + \left(\alpha_1 k_2 + \frac{b}{m_1}(k_1 + k_2)\right) s + \frac{k(k_1+k_2)+b(\alpha_1 k_2+\alpha_2 k_1)}{m_1} + \frac{k(\alpha_1 k_2+\alpha_2 k_1)}{m_1 s}$

et

$\mathbf{D_{v_2}}(s) = m_2 s^4 + \left(m_2(\alpha_1+\alpha_2) + b\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right) s^3 + (\alpha_1\alpha_2 m_2 + (k + b(\alpha_1+\alpha_2))$
$\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\right) s^2 + (\alpha_1\alpha_2 b + k(\alpha_1+\alpha_2))\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) s + \alpha_1\alpha_2 k\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)$

– Remise en question de la structure du composant
Calculons tout d'abord le degré de l'admittance $\mathbf{A_i}(s)$ qui permet de satisfaire le cahier des charges (le composant est caractérisé par une admittance comme le montre l'étape 2) :

$$\begin{aligned} deg(\mathbf{A_i}(s)) &= \max\left\{\left(n_{v_2\to f} + n_{\{v_2\}}\right); \left(n_{F_1\to f} + n_{\{F_1\}}\right); \left(n_{F_2\to f} + n_{\{F_2\}}\right)\right\} \\ &\quad - \max\left\{\left(n_{v_2\to e} + n_{\{v_2\}}\right); \left(n_{F_2\to e} + n_{\{F_2\}}\right)\right\} \\ &= \max\left\{(0-1); (-1-1); (-1-1)\right\} - \max\left\{(1-1); (0-1)\right\} = -1 \end{aligned} \tag{G.12}$$

L'admittance est *a priori* causale ($deg(\mathbf{A_i}(s)) \leq 0$) alors la structure du composant qui répond aux spécifications du cahier des charges est caractérisée par l'admittance $\mathbf{A_i}(s) = \frac{\mathbf{D_i}(s)}{\mathbf{N_i}(s)}$ où :
$\mathbf{D_i}(s) = -\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) s^2 + \left(\frac{k_3(k_1+k_2)}{m_1} - (\alpha_1 + \alpha_2)\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\right) s + \left(\frac{k_3(\alpha_1 k_2 + \alpha_2 k_1) + k_1 + k_2}{m_1}\right.$
$\left. -\alpha_1\alpha_2\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\right) + \frac{\alpha_1 k_2 + \alpha_2 k_1}{m_1 s}$

et

$$\mathbf{N_i}(s) = m_2 s^3 + (m_2(\alpha_1 + \alpha_2) - k_2 k_3)\, s^2 + (\alpha_1\alpha_2 m_2 - k_2(1 + \alpha_2 k_3))\, s - \alpha_2 k_2$$

Cet exemple illustre bien l'intérêt d'adopter une démarche chronologique dans la vérification de l'adéquation spécifications/structure du modèle.

Annexe H

Analyse de l'adéquation spécifications/structure : composant n-ports

Dans la section 3.2.1 du chapitre 3, nous proposons une procédure permettant de vérifier l'adéquation des spécifications à la structure retenue pour un composant passif 1-port et ce, dans le cas d'un système linéaire monovariable. Dans l'annexe G, le cas des systèmes multivariables est traité. Dans cette annexe, nous proposons l'extension de ce travail aux sous-systèmes n-ports (figure 3.19(b), page 111). Dans ce cas, l'adéquation ne peut pas être vérifiée sur un modèle mono-sortie. En effet, afin de pouvoir inverser le système, il faut avoir **autant de sorties que de nombre de ports du composant** et il faut que **chaque port soit atteignable par une sortie**.

H.1 Vérification de l'adéquation par niveaux d'analyse

La procédure 41 présente les différentes étapes de la vérification de l'adéquation spécifications/structure et de la remise en question du cahier des charges si cette dernière n'est pas vérifiée.

Procédure 41. *L'analyse de l'adéquation des spécifications avec la structure retenue pour un composant n-ports est constituée de 6 étapes :*

- ***Étape 1 : Vérification de l'inversibilité***
  Le critère d'inversiblité 3 (section 1.3.3, chapitre 1) est à vérifier pour conclure sur l'inversibilité entre les ports du composant et les sorties. Dans ce cas, le critère demeure inchangé à l'exception qu'il faut :
  - *analyser les lignes de puissance et les chemins causaux entre les ports du composant et les sorties,*
  - *remplacer chaque port du composant par un double détecteur D_eD_f,*
  - *après la propagation de la bicausalité, affecter la causalité préférentielle dérivée au reste du modèle.*

  Si l'inversibilité n'est pas vérifiée alors cette procédure ne peut être appliquée.
- ***Étape 2 : Analyse de la structure du composant à partir du modèle bond graph causal***
  Considérer uniquement le composant et en appliquant la règle de Mason *(procédure 23, page 229), déterminer la matrice de transfert reliant les différentes variables de puissance*

entrantes et sortantes :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V_{s_1}}(s) \\ \vdots \\ \mathbf{V_{s_n}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M_{11}}(s) & \cdots & \mathbf{M_{1n}}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{M_{n1}}(s) & \cdots & \mathbf{M_{nn}}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V_{e_1}}(s) \\ \vdots \\ \mathbf{V_{e_n}}(s) \end{bmatrix} \tag{H.1}$$

où $\mathbf{V_{s_1}};\cdots;\mathbf{V_{s_n}}$ *(resp.* $\mathbf{V_{e_1}};\cdots;\mathbf{V_{e_n}}$*) sont les variables de puissance sortantes (resp. entrantes).*

- ***Étape 3 : Vérification de l'adéquation au niveau d'analyse BG-structurel***

  Soient :
  - $n_{\{y_j\}}$ *est le degré*[1] *de la spécification* $\mathbf{Y_j}(s)$ *;*$j = \{1,\ldots,n\}$,
  - $n_{\{u_j\}}$ *est le degré de la spécification* $\mathbf{U_j}(s)$ *;* $j = \{1,\ldots,m\}$,
  - $n_{m_{ik}}$ *est le degré de la transmittance* $\mathbf{M_{ik}}(s)$ *déterminée à l'étape 2,*
  - $n_{y_j \longrightarrow v_{s_i}}$ *(resp.* $n_{y_j \longrightarrow v_{e_k}}$*) est l'opposé de l'ordre minimal qu'une famille de* Mason[2] *, contenant un chemin causal entre* y_j *;* $j = \{1,\ldots,n\}$ *; et la variable de puissance sortante* v_{s_i} *(resp. entrante* v_{e_k}*) du composant, puisse avoir,*
  - $n_{u_j \longrightarrow v_{s_i}}$ *(resp.* $n_{u_j \longrightarrow v_{e_k}}$*) est l'opposé de l'ordre minimal qu'une famille de* Mason*, contenant un chemin causal entre* u_j *;* $j = \{1,\ldots,m\}$ *; et la variable de puissance sortante* v_{s_i} *(resp. entrante* v_{e_k}*) du composant, puisse avoir*[3]*.*

  $\forall\ i \in \{1,\ldots,n\}$ *où* n *est le nombre de ports du composant,*
  Si

$$\max_{\substack{k\in[\![1,m]\!]\\ l\in[\![1,n]\!]}} \left\{(n_{u_k \longrightarrow v_{s_i}} + n_{\{u_k\}}); (n_{y_l \longrightarrow v_{s_i}} + n_{\{y_l\}})\right\} >$$

$$\max_{\substack{k\in[\![1,m]\!]\\ l\in[\![1,n]\!]}} \left\{\left(n_{\{u_k\}} + \max_{l'\in[\![1,n]\!]}\left\{n_{m_{il'}} + n_{u_k \longrightarrow v_{e_{l'}}}\right)\right\}; \left(n_{\{y_l\}} + \max_{l'\in[\![1,n]\!]}\left\{n_{m_{il'}} + n_{y_l \longrightarrow v_{e_{l'}}}\right\}\right)\right\}$$

  resp.

$$\max_{\substack{k\in[\![1,m]\!]\\ l\in[\![1,n]\!]}} \left\{(n_{u_k \longrightarrow v_{s_i}} + n_{\{u_k\}}); (n_{y_l \longrightarrow v_{s_i}} + n_{\{y_l\}})\right\} <$$

$$\max_{\substack{k\in[\![1,m]\!]\\ l\in[\![1,n]\!]}} \left\{\left(n_{\{u_k\}} + \max_{l'\in[\![1,n]\!]}\left\{n_{m_{il'}} + n_{u_k \longrightarrow v_{e_{l'}}}\right)\right\}; \left(n_{\{y_l\}} + \max_{l'\in[\![1,n]\!]}\left\{n_{m_{il'}} + n_{y_l \longrightarrow v_{e_{l'}}}\right\}\right)\right\}$$

  et si pour le membre majorant de cette inégalité, il existe un seul argument de la fonction max égal à ce maximum
  et si pour cet argument (resp. et que pour la fonction max de cet argument, il n'existe également qu'un seul argument égal à ce maximum), une seule famille de Mason *est impliquée dans la détermination du degré* $n_{\cdot \longrightarrow v_{s_i}}$ *(resp.* $n_{\cdot \longrightarrow v_{e_{l'}}}$*) qui lui est associé, alors l'adéquation ne peut être vérifiée au niveau d'analyse inférieur et la remise en question de la structure des spécifications ou de la structure du composant doit avoir lieu (étape 5).*
  Sinon, les spécifications (de l'entrée et de la sortie) et la structure du composant sont a priori en adéquation (condition nécessaire) et par conséquent, l'adéquation doit être vérifiée au niveau d'analyse comportemental (étape 4).

[1] Le degré d'une fonction rationnelle est donné par la définition 24 de l'annexe E.

[2] La famille de Mason est introduite dans la définition 2, page 112.

[3] S'il n'existe pas de famille de Mason contenant un chemin causal entre deux variables alors tout le terme correspondant n'est pas considéré dans l'équation 41.

- ***Étape 4 : Vérification de l'adéquation au niveau d'analyse comportemental***
  Les spécifications et la structure du composant en question sont en adéquation au niveau d'analyse comportemental[4] *si et seulement si* $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ *:*

$$\sum_{k=1}^{m} \mathbf{N_{u_k \to v_{s_i}}} \mathbf{U_k} + \sum_{l=1}^{n} \mathbf{N_{y_l \to v_{s_i}}} \mathbf{Y_l} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l'=1}^{n} \mathbf{M_{il'}} \mathbf{N_{u_k \to v_{e_{l'}}}} \mathbf{U_k} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{l'=1}^{n} \mathbf{M_{il'}} \mathbf{N_{y_l \to v_{e_{l'}}}} \mathbf{Y_l} \tag{H.2}$$

  où :
  - $\mathbf{Y_j} = \mathbf{Y_j}(s)$ *est la spécification de la sortie* y_j *;* $j = \{1,\dots,n\}$,
  - $\mathbf{N_{y_j \to v_{s_i}}} = \mathbf{N_{y_j \to v_{s_i}}}(s)$ *(resp.* $\mathbf{N_{y_j \to v_{e_k}}} = \mathbf{N_{y_j \to v_{e_k}}}(s)$*) est le numérateur de la transmittance entre* y_j *;* $j = \{1,\dots,n\}$ *; et la variable de puissance sortante* v_{s_i} *(resp. entrante* v_{e_k}*) du composant,*
  - $\mathbf{U_j} = \mathbf{U_j}(s)$ *est la spécification de l'entrée* u_j *;* $j = \{1,\dots,m\}$,
  - $\mathbf{N_{u_j \to v_{s_i}}} = \mathbf{N_{u_j \to v_{s_i}}}(s)$ *(resp.* $\mathbf{N_{y_j \to v_{e_k}}} = \mathbf{N_{y_j \to v_{e_k}}}(s)$*) est le numérateur de la transmittance entre* u_j *;* $j = \{1,\dots,m\}$ *; et la variable de puissance sortante* v_{s_i} *(resp. entrante* v_{e_k}*) du composant.*
- ***Étape 5 : Remise en question de la structure des spécifications ou de la structure du composant (niveaux d'analyse BG-structurel et comportemental)***
  Si l'adéquation des spécifications à la structure du composant n'est pas vérifiée alors la structure des spécifications ou la structure du composant peut être remise en question :
  - ***Remise en question de la structure des spécifications :*** *La structure du composant est supposée inchangée. L'une des spécifications est remise en question :*
    - *Remise en question de l'entrée* u_j *à partir de la* $t^{ème}$ *relation de H.2 : les autres spécifications sont supposées inchangées. Une première analyse permet de calculer le degré de* $\mathbf{U_j}(s)$ *qui doit satisfaire le cahier des charges et par conséquent, de conclure sur sa réalisabilité (niveau d'analyse BG-structurel) :*

$$\begin{aligned} deg(\mathbf{U_j}(s)) = \max_{\substack{k \in [\![1,m]\!]/j \\ l \in [\![1,n]\!]}} \Bigg\{ & n_{\{u_k\}} + \max\left\{ n_{u_k \longrightarrow v_{s_t}} ; \max_{l' \in [\![1,n]\!]} \left\{ n_{m_{tl'}} + n_{u_k \longrightarrow v_{e_{l'}}} \right\} \right\} ; \\ & n_{\{y_l\}} + \max\left\{ n_{y_l \longrightarrow v_{s_t}} ; \max_{l' \in [\![1,n]\!]} \left\{ n_{m_{tl'}} + n_{y_l \longrightarrow v_{e_{l'}}} \right\} \right\} \Bigg\} \\ & - \max\left\{ n_{u_j \longrightarrow v_{s_t}} ; \max_{l \in [\![1,n]\!]} \left\{ n_{m_{tl}} + n_{u_j \longrightarrow v_{e_l}} \right\} \right\} \end{aligned} \tag{H.3}$$

    Si $deg(\mathbf{U_j}(s)) > 0$
    et si dans le premier terme de l'équation H.3, il n'existe qu'un seul argument de la fonction max égal à ce maximum
    et que pour la fonction max de cet argument, il n'existe également qu'un seul argument égal à ce maximum
    et si pour ce dernier argument, une seule famille de Mason *est impliquée dans la détermination du degré* $n_{.\longrightarrow.}$ *qui lui est associé alors la structure n'est pas causale.*
    Si $deg(\mathbf{U_j}(s)) \leq 0$
    et si pour les n-1 ($i \in [\![1,n]\!]/t$*) conditions de l'étape 3 ne sont pas vérifiées*
    et si $\mathbf{N_{u_j \to v_{s_t}}}(s) - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M_{tk}}(s) \mathbf{N_{u_j \to v_{e_k}}}(s) \neq 0$ *alors la structure de l'entrée* u_j *qui satisfait le cahier des charges peut être calculée comme suit (niveau d'analyse comportemental) :*

[4] Pour des raisons de simplification, nous faisons abstraction de l'opérateur de Laplace.

$$\mathbf{U_j}(s) = \left[\mathbf{N_{u_j \to v_{s_t}}} - \sum_{l=1}^{n} \mathbf{M_{tl}} \mathbf{N_{u_j \to v_{e_l}}}\right]^{-1}$$
$$\left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \left(\sum_{l=1}^{n} \mathbf{M_{tl}} \mathbf{N_{u_k \to v_{e_l}}} - \mathbf{N_{u_k \to v_{s_t}}}\right) \mathbf{U_k} + \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{l'=1}^{n} \mathbf{M_{tl'}} \mathbf{N_{y_l \to v_{e_{l'}}}} - \mathbf{N_{y_l \to v_{s_t}}}\right) \mathbf{Y_l}\right] \tag{H.4}$$

Cette nouvelle spécification doit vérifier les (n-1) autres relations données à l'étape 4 (équation H.2) : relations $1, \ldots, t-1, t+1, \ldots, n$.

– *Remise en question de la structure de la sortie* y_j *à partir de la* $t^{ème}$ *relation de H.2 : Les autres spécifications sont supposées inchangées. Une première analyse permet de calculer le degré de* $\mathbf{Y_j}(s)$ *qui doit de satisfaire le cahier des charges et par conséquent, de conclure sur sa réalisabilité (niveau d'analyse BG-structurel) :*

$$\begin{aligned} deg(\mathbf{Y_j}(s)) = \max_{\substack{k \in [\![1,m]\!] \\ l \in [\![1,n]\!]/j}} \Bigg\{ & n_{\{u_k\}} + \max\left\{ n_{u_k \longrightarrow v_{s_t}}; \max_{l' \in [\![1,n]\!]} \left\{ n_{m_{tl'}} + n_{u_k \longrightarrow v_{e_{l'}}} \right\} \right\}; \\ & n_{\{y_l\}} + \max\left\{ n_{y_l \longrightarrow v_{s_t}}; \max_{l' \in [\![1,n]\!]} \left\{ n_{m_{tl'}} + n_{y_l \longrightarrow v_{e_{l'}}} \right\} \right\} \Bigg\} \\ & - \max\left\{ n_{y_j \longrightarrow v_{s_t}}; \max_{l \in [\![1,n]\!]} \left\{ n_{m_{tl}} + n_{y_j \longrightarrow v_{e_l}} \right\} \right\} \end{aligned} \tag{H.5}$$

Si $deg(\mathbf{Y_j}(s)) > 0$
et si dans le premier terme de l'équation H.5, il n'existe qu'un seul argument de la fonction max égal à ce maximum
et que pour la fonction max de cet argument, il n'existe également qu'un seul argument égal à ce maximum
et si pour ce dernier argument, une seule famille de MASON *est impliquée dans la détermination du degré* $n_{\cdot \longrightarrow \cdot}$ *qui lui est associé, alors la structure n'est pas causale.*
Si $deg(\mathbf{Y_j}(s)) \leq 0$
et si pour les n-1 ($i \in [\![1,n]\!]/t$*) conditions de l'étape 3 ne sont pas vérifiées*
et si $\mathbf{N_{y_j \to v_{s_t}}}(s) - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M_{tk}}(s) \mathbf{N_{y_j \to v_{e_k}}}(s) \neq 0$*, la structure de l'entrée* y_j *qui satisfait le cahier des charges peut être calculée comme suit (niveau d'analyse comportemental) :*

$$\mathbf{Y_j}(s) = \left[\mathbf{N_{y_j \to v_{s_t}}} - \sum_{l=1}^{n} \mathbf{M_{tl}} \mathbf{N_{y_j \to v_{e_l}}}\right]^{-1}$$
$$\left[\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{n} \mathbf{M_{tl}} \mathbf{N_{u_k \to v_{e_l}}} - \mathbf{N_{u_k \to v_{s_t}}}\right) \mathbf{U_k} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} \left(\sum_{l'=1}^{n} \mathbf{M_{tl'}} \mathbf{N_{y_l \to v_{e_{l'}}}} - \mathbf{N_{y_l \to v_{s_t}}}\right) \mathbf{Y_l}\right] \tag{H.6}$$

Cette nouvelle spécification doit vérifier les (n-1) autres relations données à l'étape 4 : relations $1, \ldots, t-1, t+1, \ldots, n$.

- ***Remise en question de la structure du composant :*** *La structure du composant qui répond aux spécifications est caractérisée par les transmittances* $\mathbf{M_{ij}}(s)$ *qui vérifient le système d'équations de l'étape 4 (équation H.2).*

- ***Étape 6 : Vérification de l'adéquation au niveau d'analyse numérique et synthèse paramétrique***
  La vérification d'adéquation au niveau d'analyse comportemental (étape 4) permet d'établir un système d'équations polynomiale. Si les solutions trouvées suite à la résolution numérique de ce système d'équation sont acceptables (répondent aux contraintes physiques) alors l'adéquation est vérifiée et la synthèse paramétrique de certains paramètres a été établie. Sinon, il faut remettre en question les spécifications numériques.

H.2 Exemple

Considérons comme exemple le système électrique de la figure H.1 possédant deux entrées u_1 et u_2 et deux sorties y_1 et y_2, avec :
- i est le courant imposé par la source de courant ;
- u est la tension imposée par la source de tension ;
- i_{R1} (resp. i_{R2}) est le courant qui traverse la résistance R_1 (resp. R_2).

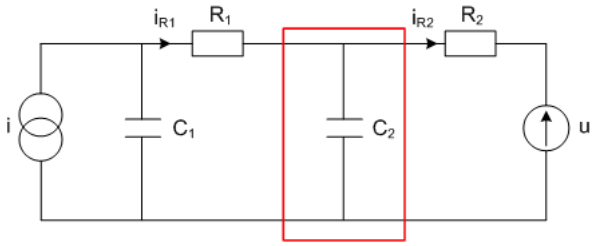


FIG. H.1 – Système électrique.

Le modèle bond graph acausal associé mettant en évidence le composant 2-ports (indiqué dans le cadre rouge sur la figure H.1) à étudier est donné (figure H.2).

Nous souhaitons vérifier l'adéquation de la structure choisie pour ce composant avec les spécifications des entrées et des sorties suivantes :

$$\mathbf{I}(s) = \frac{k_1}{s} \tag{H.7}$$

$$\mathbf{U}(s) = \frac{k_2}{s} \tag{H.8}$$

$$\mathbf{I_{R1}}(s) = \frac{k_3 s + k_4}{k_5 s^2 + k_6 s + 1} \tag{H.9}$$

$$\mathbf{I_{R2}}(s) = \frac{1}{k_7 s^2 + k_8 s + 1} \tag{H.10}$$

avec k_i non nuls, $i = \{1, \ldots, 8\}$. Nous supposons que seules les spécifications de i_{R2} et la structure du composant à l'étude peuvent être remises en cause.

- Étape 1 :
  Sur le modèle bond graph acausal, il existe une ligne de puissance entre le premier port du composant et la sortie i_{R1} et une ligne de puissance entre le deuxième port du composant

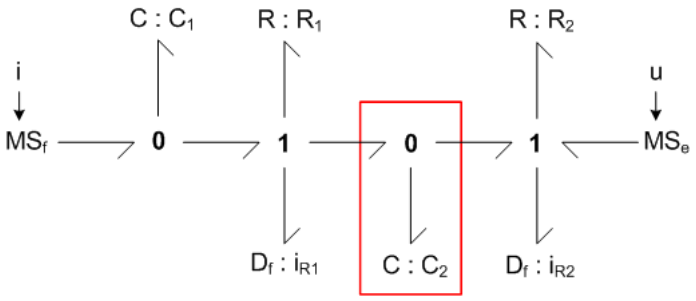
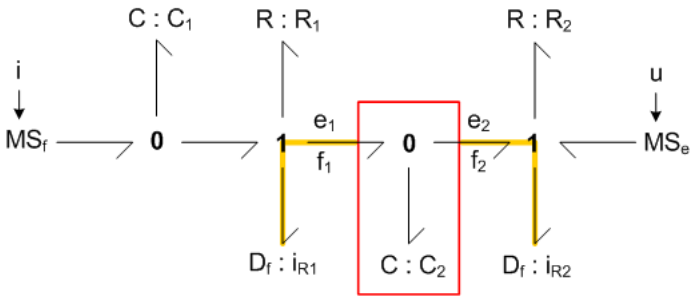
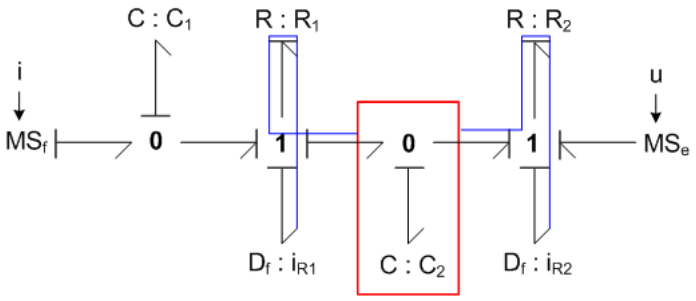


FIG. H.2 – Modèle bond graph acausal du système électrique.



(a)



(b)

FIG. H.3 – Analyse (a) des lignes de puissance et (b) des chemins causaux du modèle bond graph du système électrique.

et la sortie i_{R2} (figure H.3(a)). Sur le modèle en causalité préférentielle intégrale, il existe un chemin causal entre le premier port du composant et la sortie i_{R1} et un chemin causal entre le deuxième port du composant et la sortie i_{R2} (figure H.3(b)). Le modèle bond graph bicausal est donné (figure H.4). La structure de jonction du modèle inverse est soluble.

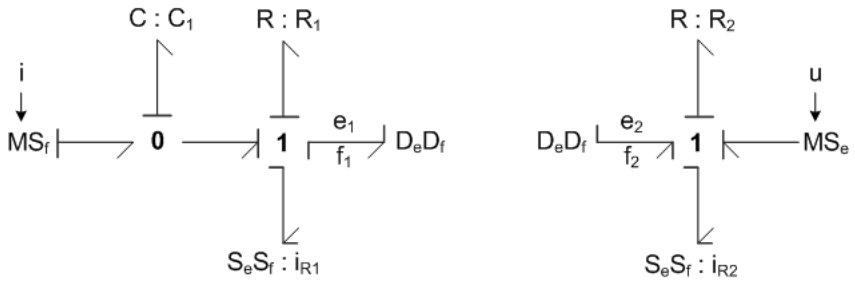


FIG. H.4 – Modèle bond graph bicausal du système électrique.

– Étape 2 :

Considérons le composant 2-ports auquel nous affectons une causalité préférentielle dérivée. Deux affectations de causalité préférentielle dérivée sont possibles, le choix est fait arbitrairement. Les variables de puissance entrantes sont f_1 et e_2 et les variables de puissance sortantes sont e_1 et f_2. Les expressions des transmittances sont données par la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E_1}(s) \\ \mathbf{F_2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -C_2 s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F_1}(s) \\ \mathbf{E_2}(s) \end{bmatrix}$$

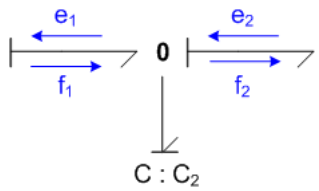


FIG. H.5 – Modèle bond graph du composant 2-ports en causalité préférentielle dérivée.

– Étape 3 :
À partir de l'étape 2 et à partir des spécifications données par les équations H.7, H.8, H.9 et H.10, il peut être déduit que : $n_{m_{12}} = n_{m_{21}} = 0$, $n_{m_{22}} = 1$, $n_{\{i\}} = n_{\{u\}} = n_{\{i_{R1}\}} = -1$ et $n_{\{i_{R2}\}} = -2$. L'analyse des familles de MASON sur le modèle bond graph bicausal permet de déduire que :
  – il existe une seule famille de MASON contenant un chemin causal entre i (resp. u) et la variable d'effort e_1 (resp. e_2) du composant d'ordre -1 (resp. 0) (figure H.6 (resp. figure H.7)),
  – il existe deux familles (resp. une seule famille) de MASON contenant un chemin causal entre i_{R1} et la variable d'effort e_1 (resp. de flux f_1) du composant d'ordre 0 (figure H.8 (resp. H.9)).
  – il existe une seule famille de MASON contenant un chemin causal entre i_{R2} et la variable d'effort e_2 (resp. de flux f_2) du composant d'ordre 0 (figure H.10 (resp. figure H.11)).

Ainsi, il peut être déduit que :

$$\begin{cases} \max\left\{(n_{i\to e_1} + n_{\{i\}}); (n_{i_{R1}\to e_1} + n_{\{i_{R1}\}})\right\} > \max\left\{\left(n_{\{u\}} + \max\left\{n_{m_{12}} + n_{u\to e_2}\right\}\right); \right. \\ \qquad\qquad \left.\left(n_{\{i_{R2}\}} + \max\left\{n_{m_{12}} + n_{i_{R2}\to e_2}\right\}\right)\right\} \\ \max\left\{n_{i_{R2}\to f_2} + n_{\{i_{R2}\}}\right\} < \max\left\{\left(n_{\{u\}} + \max\left\{n_{m_{22}} + n_{u\to e_2}\right\}\right); \right. \\ \qquad\qquad \left(n_{\{i_{R1}\}} + \max\left\{n_{m_{21}} + n_{i_{R1}\to f_1}\right\}\right); \\ \qquad\qquad \left.\left(n_{\{i_{R2}\}} + \max\left\{n_{m_{22}} + n_{i_{R2}\to e_2}\right\}\right)\right\} \end{cases}$$

et par conséquent,

$$\begin{cases} \max\{1-1); (0-1)\} > \max\{(-1 + \max\{0+0\}); (-2 + \max\{0+0\})\} \\ \max\{0-2\} < \max\{(-1 + \max\{1+0\}); (-1 + \max\{0+0\}); (-2 + \max\{1+0\})\} \end{cases}$$

et tel que :
  – dans le calcul du degré $(n_{i\to e_1} + n_{\{i\}})$ (à gauche de la première inégalité), une seule famille de MASON d'ordre minimal est impliquée,
  – dans le calcul du degré $\left(n_{\{u\}} + \max\left\{n_{m_{22}} + n_{u\to e_2}\right\}\right)$ (à droite de la deuxième inégalité), une seule famille de MASON d'ordre minimal est impliquée.

Ainsi, il peut être conclu que l'adéquation des spécifications à la structure du composant n'est pas vérifiée au niveau d'analyse BG-structurel et par conséquent, aux niveaux d'analyse inférieurs.

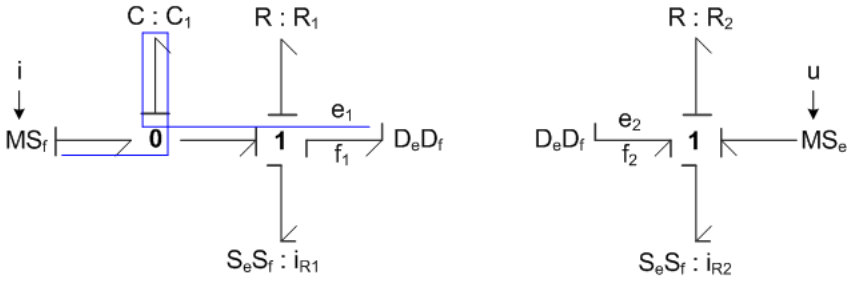


FIG. H.6 – Analyse des familles de MASON contenant un chemin causal entre i et la variable d'effort e_1 du composant.

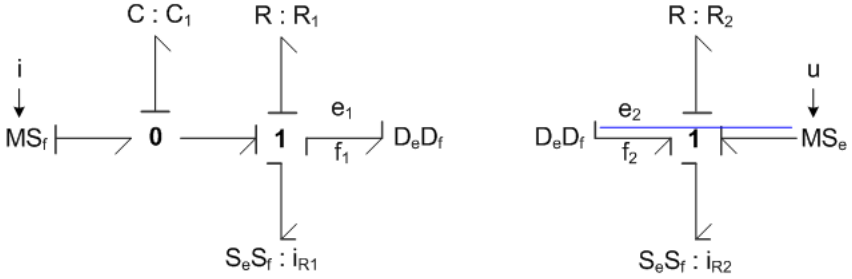


FIG. H.7 – Analyse des familles de MASON contenant un chemin causal entre u et la variable d'effort e_2 du composant.

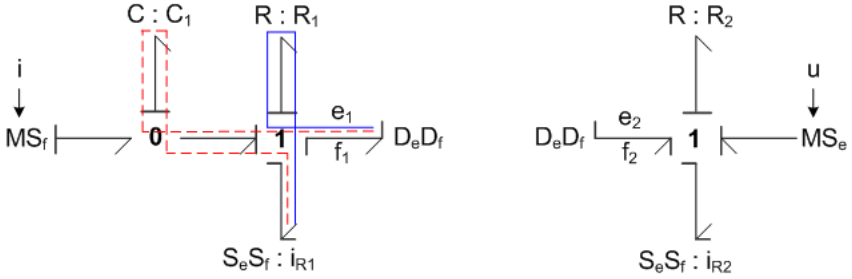


FIG. H.8 – Analyse des familles de MASON contenant un chemin causal entre i_{R1} et la variable d'effort e_1 du composant.

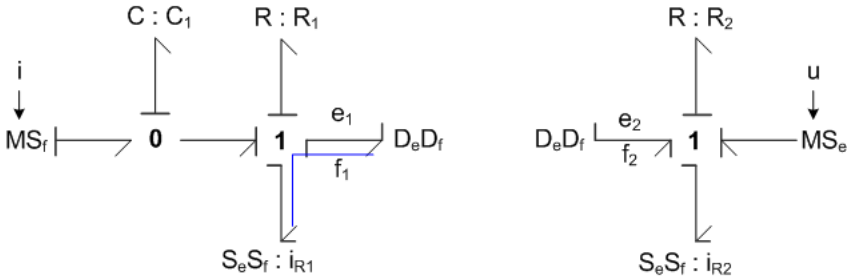


FIG. H.9 – Analyse des familles de MASON contenant un chemin causal entre i_{R1} et la variable d'effort f_1 du composant.

- Étape 5 :
  - Remise en question de la structure de la sortie i_{R2}
    Les spécifications de i, u et de i_{R1} et la structure du composant sont inchangées. Nous calculons le degré de la nouvelle spécification de i_{R2} à partir de la deuxième variable

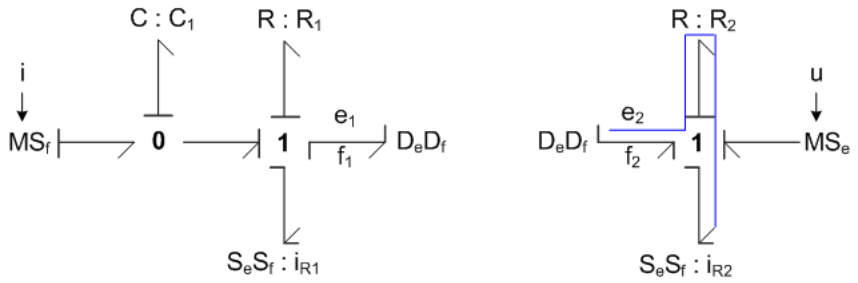


FIG. H.10 – Analyse des familles de MASON contenant un chemin causal entre i_{R2} et la variable d'effort e_2 du composant.

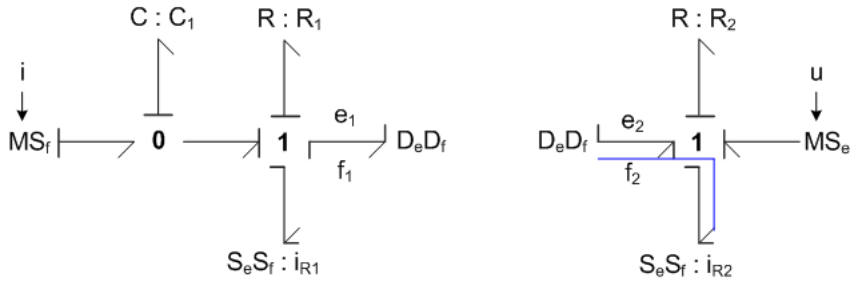


FIG. H.11 – Analyse des familles de MASON contenant un chemin causal entre i_{R2} et la variable d'effort f_2 du composant.

sortante f_2 :

$$\begin{aligned} deg(\mathbf{I_{R2}}(s)) &= \max\left\{\left(n_{\{u\}} + \max\left\{n_{u\to e_2}; (n_{m_{22}} + n_{i_{R2}\to e_2})\right\}\right); \right. \\ &\quad \left.\left(n_{\{i_{R1}\}}; \max\left\{n_{m_{21}} + n_{i_{R1}\to f_1}\right\}\right)\right\} - \max\left\{n_{i_{R2}\to f_2}; (n_{m_{22}} + n_{i_{R2}\to e_2})\right\} \\ &= \max\{(1+0-1); (0+0-1)\} - \max\{0; (1+0)\} \\ &= 0 - 1 = -1 = n_{\{y_2\}} \end{aligned}$$

et tel que pour les spécifications H.7, H.8 et H.9 et pour $n_{\{y_2\}} = -1$, on a :

$$\begin{aligned} \max\left\{(n_{u_1\to e_1} + n_{\{\mathbf{u_1}\}}); (n_{y_1\to e_1} + n_{\{\mathbf{y_1}\}})\right\} = \max\left\{\left(n_{\{\mathbf{u_2}\}} + \max\left\{n_{m_{12}} + n_{u_2\to e_2}\right\}\right); \right. \\ \left.\left(n_{\{\mathbf{y_2}\}} + \max\left\{n_{m_{12}} + n_{y_2\to e_2}\right\}\right)\right\} \end{aligned} \tag{H.11}$$

Ainsi la première condition de l'étape 3 n'est pas vérifiée et la remise en question de la sortie i_{R2} peut être établie au niveau d'analyse comportemental (à partir de la deuxième variable sortante f_2) :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y_2}(s) &= \frac{\mathbf{M_{22}}(s)\mathbf{N_{u\to e_2}}(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{M_{21}}(s)\mathbf{N_{i_{R1}\to f_1}}(s)\mathbf{I_{R2}}(s)}{\mathbf{N_{i_{R2}\to f_2}}(s) - \mathbf{m_{22}}(s)\mathbf{N_{i_{R2}\to e_2}}(s)} \\ &= \frac{k_2C_2(k_5s^2 + k_6s + 1) + k_3s + k_4}{(R_2C_2s + 1)(k_5s^2 + k_6s + 1)} \end{aligned}$$

tel que la relation suivante doit être vérifiée pour cette nouvelle spécification :

$$\frac{1}{C_1s}\mathbf{I}(s) - \left(R_1 + \frac{1}{C_1s}\right)\mathbf{I_{R1}}(s) = -\mathbf{U}(s) - R_2\mathbf{I_{R2}}(s)$$

Ce qui revient à vérifier :

$$R_2C_1C_2(k_1k_5-k_3)s^4+\left[C_1\left(R_2C_2(k_1k_6-k_4)-k_3+k_1k_5\right)-k_3R_1R_2C_2\right]s^3$$
$$+\left[C_1\left(k_1R_2C_2+k_1k_6-k_4\right)-R_1\left(k_3+k_4R_2C_2\right)\right]s^2+\left(k_1C_1-k_4R_1\right)s=$$
$$-2k_2k_5R_2C_1C_2s^4-C_1\left[k_2\left(k_5+2k_6R_2C_2\right)+k_3R_2\right]s^3-C_1\left[k_2\left(k_6+R_2C_2\right)+k_4R_2\right]s^2$$
$$-k_2C_1\left(1+R_2C_2\right)s$$

et par conséquent, vérifier :

$$\begin{cases} R_2C_1C_2(k_1k_5-k_3)=-2k_2k_5R_2C_1C_2 \\ C_1\left(R_2C_2(k_1k_6-k_4)-k_3+k_1k_5\right)-k_3R_1R_2C_2=-C_1\left[k_2\left(k_5+2k_6R_2C_2\right)+k_3R_2\right] \\ C_1\left(k_1R_2C_2+k_1k_6-k_4\right)-R_1\left(k_3+k_4R_2C_2\right)=-C_1\left[k_2\left(k_6+R_2C_2\right)+k_4R_2\right] \\ k_1C_1-k_4R_1=-k_2C_1\left(1+R_2C_2\right) \end{cases}$$

– Remise en question de la structure du composant 2-ports
Les spécifications des différentes entrées et sorties sont inchangées. La structure du composant est définie par un ensemble de transmittances qui vérifient les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{1}{C_1s}\mathbf{I}(s)-\left(R_1+\frac{1}{C_1s}\right)\mathbf{I_{R1}}(s)=\mathbf{M_{11}}(s)\mathbf{I_{R1}}(s)+\mathbf{M_{12}}(s)(R_2\mathbf{I_{R2}}(s)-\mathbf{U}(s)) \\ \mathbf{I_{R2}}(s)=\mathbf{M_{21}}(s)\mathbf{I_{R1}}(s)+\mathbf{M_{22}}(s)(R_2\mathbf{I_{R2}}(s)-\mathbf{U}(s)) \end{cases}$$

L'une des solutions causales possibles permettant de satisfaire ces deux relations est :

$$\begin{cases} \mathbf{M_{11}}(s)=-\left(R_1+\frac{1}{C_1s}\right) \\ \mathbf{M_{12}}(s)\left(R_2\mathbf{I_{R2}}(s)-\mathbf{U}(s)\right)=\frac{1}{C_1s}\mathbf{I}(s) \\ R_2\mathbf{M_{22}}(s)=1 \\ -\mathbf{M_{22}}(s)\mathbf{U}(s)+\mathbf{M_{21}}(s)\mathbf{I_{R1}}(s)=0 \end{cases}$$

Ainsi, les transmittances sont définies par :

$$\begin{cases} \mathbf{M_{11}}(s)=-\left(R_1+\frac{1}{C_1s}\right) \\ \mathbf{M_{12}}(s)=\frac{k_1(k_7s^2+k_8s+1)}{C_1s(R_2s-k_2(k_7s^2+k_8s+1)} \\ \mathbf{M_{21}}(s)=\frac{k_2(k_5s^2+k_6s+1)}{R_2s(k_3s+k_4)} \\ \mathbf{M_{22}}(s)=\frac{1}{R_2} \end{cases}$$

Annexe I

Notions de base sur l'approche probabiliste

Cette annexe a pour objectif de présenter un certain nombre de définitions et de concepts de base nécessaires pour la compréhension et la mise en œuvre de l'approche probabiliste qui fait l'objet du chapitre 4.

I.1 Espace probabilisé

Nous proposons dans cette section de rappeler les notions d'*univers*, d'*espace probabilisable* et *probabilisé* et ce, à travers la formalisation d'une expérience aléatoire où intervient le « hasard ». En effet, une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est imprévisible. Répétée dans des conditions identiques, elle peut donner lieu à des résultats différents. Le résultat de cette expérience peut être représenté par un élément ω de l'ensemble Ω de tous les résultats possibles. L'ensemble Ω est désigné par l'*ensemble fondamental* ou encore l'*univers*. Par exemple, si l'expérience aléatoire consiste à lancer deux dés parfaitement équilibrés alors l'ensemble Ω comprend tous les couples de chiffres de 1 à 6 : $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots\}$. La somme des points marqués par les deux dés peut être définie par l'ensemble $E = \{2,3,4,\ldots,12\}$.

Un événement A est un sous-ensemble de l'univers Ω tel qu'à l'issue de l'expérience aléatoire, il est possible de déterminer si l'événement A s'est produit ou non. Par exemple dans le cas de l'expérience des deux dés, l'événement « la somme des points est supérieure à 10 » est réalisé quand les résultats suivants (qui représentent une partie de Ω) sont obtenus : $\{(4,6),(5,6),(6,4),(6,5)\}$. L'événement élémentaire est une partie de Ω réduite à un seul élément.

Définition 57. *Le couple (Ω,φ) forme l'**espace probabilisable** où φ constitue une tribu de parties de Ω [Sap90].*

Définition 58. *La **probabilité** sur (Ω,φ) est définie par l'application $\mathbf{P}$ de φ dans [0, 1] telle que [Sap90] :*

- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,
- *pour tout ensemble dénombrable d'événements incompatibles ou encore disjoints (l'intersection de ces événements forme l'ensemble vide) $A_1, A_2, \ldots, A_n$, on a $\mathbf{P}(\cup A_i) = \sum \mathbf{P}(A_i)$.*

Définition 59. *Le triplet $(\Omega,\varphi,\mathbf{P})$ forme l'**espace probabilisé** [Sap90].*

Ces définitions trouvent leur origine dans la théorie de la mesure car cette dernière représente la théorie « mère » des probabilités.

I.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Dans plusieurs cas, les événements élémentaires ω s'expriment naturellement sous la forme de nombres comme dans le cas du jet d'un dé ou dans le cas de la mesure d'une grandeur physique (température, poids, pression etc...). De ce fait, il est apparu l'intérêt d'associer à chaque événement $\omega \in \Omega$ un nombre $\theta \in \mathbb{R}$. Spécifier une règle associant les événements ω et les nombres θ revient à définir une variable aléatoire réelle. Dans le cadre de ces travaux, nous nous intéressons exclusivement aux variables aléatoires réelles.

Définition 60. *Une variable aléatoire réelle Θ est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle qu'à tout ω correspond une valeur $\Theta(\omega) = \theta \in \mathbb{R}$ [Bog06].*

Plus formellement, une variable aléatoire réelle peut être définie par :

Définition 61. *Une variable aléatoire réelle est une application mesurable de $(\Omega, \varphi, \mathbf{P})$ dans $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne [Sap90].*

Définition 62. *L'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire réelle Θ est désigné par le domaine de variation ou le support de Θ [Bog06].*

Exemple. Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés parfaitement équilibrés décrite dans la section précédente. L'application de Ω dans l'ensemble des points marqués $E = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$ tel que $E \subseteq \mathbb{R}$ définie une variable aléatoire réelle Θ (figure I.1). Le domaine de variation de la variable aléatoire Θ est $\{2, 3, 4, \ldots, 12\}$. Il peut être remarqué que cette application n'est pas forcément bijective, tout événement élémentaire ω est associé à une seule valeur θ mais à une même valeur θ peut correspondre plusieurs événements élémentaires.

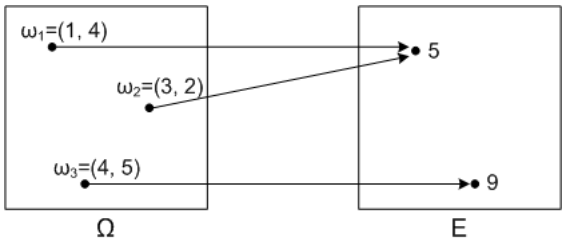


FIG. I.1 – Variable aléatoire réelle Θ - Application de Ω dans $E \subseteq \mathbb{R}$.

La variable aléatoire présentée dans l'exemple ci-dessus est définie sur un domaine composé de nombre fini de valeurs possibles. Cependant, il existe d'autres situations où la variable est continue par nature et par conséquent, pouvant prendre une infinité de valeurs réelles (par exemple la température de l'air ambiant) : on parle alors de *variable aléatoire continue*. La notion de variable aléatoire continue se confond avec celle de variable admettant une densité de probabilité.

Définition 63. *Soit Θ une variable aléatoire continue, une loi de probabilité ou une fonction de densité de probabilité (FDP) associée est une fonction ϕ_Θ telle que [Bré97, Ros07, Dal08] :*

- $\phi_\Theta(\theta) \geq 0$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\Theta(\theta) d\theta = 1$; *c'est-à-dire l'aire totale sous la courbe est égale à 1.*

La probabilité que Θ prenne des valeurs comprises entre a et b $(a, b \in \mathbb{R})$ est donnée par : $P(a \leq \Theta \leq b) = \int_a^b \phi_\Theta(\theta) d\theta$ ce qui correspond à l'aire sous la courbe entre a et b (figure I.2).

Remarque : Il n' y a pas de limite à la valeur que peut prendre une fonction de densité de probabilité du moment que son intégrale reste égale à 1.

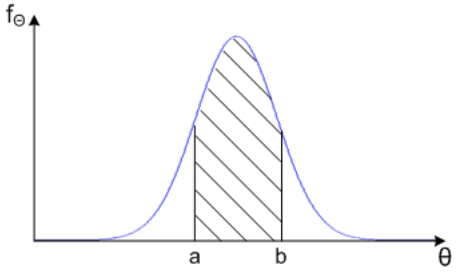


FIG. I.2 – La probabilité que la variable aléatoire Θ prenne des valeurs comprises entre a et b

L'attribution des lois de probabilité aux paramètres incertains d'un système physique vus alors comme des variables aléatoires repose sur plusieurs critères : la considération de symétries, l'étude des fréquences d'apparition, etc... Toutefois, la *loi normale*[1] reste la loi de probabilité la plus utilisée. Une variable aléatoire réelle suit une loi normale d'espérance (moyenne) μ et d'écart-type σ strictement positif (donc de variance σ^2) si cette variable aléatoire réelle Θ admet pour densité de probabilité la fonction $\phi_\Theta(\theta)$ définie, pour tout nombre réel θ, par :

$$\phi_\Theta(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{I.1}$$

Une telle variable aléatoire est alors dite variable gaussienne. Cette loi, notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, est affectée à une variable aléatoire Θ si les causes de variation de Θ sont nombreuses et si aucune d'elles n'est prépondérante.

Une variable aléatoire peut être caractérisée non seulement par une fonction de densité de probabilité, mais aussi par une fonction de répartition. Cette fonction associe à chaque réalisation (événement élémentaire) de la variable aléatoire la probabilité de ne pas excéder cette valeur. La fonction de densité de probabilité représente la dérivée par rapport à la variable aléatoire de la fonction de répartition. Ainsi, cette dernière peut être définie comme suit :

Définition 64. *La fonction de répartition Φ_Θ d'une variable aléatoire Θ peut être définie par :*

$$\Phi_\Theta = P(\Theta \leq \theta) \tag{I.2}$$

où θ est une réalisation de Θ. La fonction de répartition Φ_Θ peut être définie à partir de la fonction de densité de probabilité ϕ_Θ associée à la variable aléatoire Θ :

$$\Phi_\Theta(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta} \phi_\Theta(\tau) d\tau \tag{I.3}$$

Si nous nous intéressons à un ensemble de variables aléatoires, il est important d'identifier le lien existant entre ces variables avant de commencer une analyse probabiliste car le niveau de difficulté de cette analyse dépend de la dépendance/indépendance entre ces variables aléatoires. En effet, la notion d'*indépendance* est un concept clé en théorie des probabilités :

Définition 65. *Deux variables aléatoires Θ_1 et Θ_2 sont indépendantes ou encore orthogonales ($\Theta_1 \perp \Theta_2$) si l'une n'a aucune influence sur l'autre.*

Dans le cas où les variables aléatoires sont dépendantes, étudier l'ensemble des variables au lieu de considérer chaque variable indépendamment permet de déduire des informations sur l'une des variables lorqu'on dispose d'informations sur les autres variables et ce, en exploitant le lien existant entre elles. La fonction de densité de probabilité conditionnelle (définition 5, chapitre 4) s'inscrit dans ce contexte. Cette FDP est généralement caractérisée par la mesure de DIRAC δ définie par :

[1] La loi normale est désignée aussi par la loi de GAUSS ou la loi de LAPLACE-GAUSS.

Définition 66. *La mesure de* DIRAC *ou la masse de* DIRAC *est une mesure supportée par le singleton* $\{0\}$ *et de masse totale 1 :*

$$\begin{cases}\delta(\{0\}) = 1\\ \delta(Q) = 0\end{cases}$$

où Q *est une tribu borélienne définie sur* $\mathbb{R}^n$

Remarque. La mesure de DIRAC d'un vecteur Θ de n composants s'écrit sous la forme suivante :

$$\delta(\Theta) = \prod_{i=1}^{n} \delta(\Theta_i) \tag{I.4}$$

I.3 Processus stochastique

L'analyse et l'étude des variables aléatoires et des grandeurs qui s'y rattachent : fonction de répartition, fonction de densité de probabilité, etc..., se font souvent en statique. Ceci est souvent insuffisant dans la pratique car ces variables (et par conséquent les grandeurs qui s'y rattachent) peuvent dépendre du temps. Par exemple, si la tension électrique du réseau est observée sur une période de temps T, il peut être constaté que cette tension varie. Cette variation est due aux différentes sources de perturbation électrique dans l'environnement du système de mesure. Si l'ensemble de ces sources de perturbation est décrit par l'événement aléatoire ω, alors la tension électrique peut s'écrire $u(\omega, t)$. Cet exemple illustre bien le concept de base des processus stochastiques.

Définition 67. *Un processus stochastique est une fonction de deux arguments* (ω, t) *:* $(\omega, t) \rightarrow \Theta(\omega, t)$ *où* ω *est un élément de l'espace probabilisé* $(\Omega, \varphi, \mathbf{P})$ *et* t *est le temps [Sol06].*

La réalisation du processus $\Theta(\omega, t)$ associée à un événement ω_i est une fonction non aléatoire du temps : $t \rightarrow \Theta(\omega_i, t)$. Cette réalisation est appelée la *trajectoire* associée à l'événement ω_i. La réalisation du processus $\Theta(\omega, t)$ associée à un instant donné t_i est une variable aléatoire définie par : $\omega \rightarrow \Theta(\omega, t_i)$.

I.4 Fonctions de variables/processus aléatoires

Dans un problème stochastique statique (resp. dynamique), la variable (resp. processus) aléatoire d'intérêt peut être une variable difficile à caractériser. Néanmoins, cette variable (resp. processus) est généralement liée par l'intermédiaire d'une fonction continue à une autre variable (resp. processus) dont la FDP est donnée ou aisément obtenue. Cette formulation du problème stochastique permet de décrire la propagation de la densité de probabilité au sein d'un modèle dans le but de déterminer la FDP d'une ou plusieurs variables/processus aléatoires à partir de la connaissance des FDP d'autres variables/processus aléatoires. Dans la section 4.1.2 du chapitre 4, le cas d'une fonction de variable/processus aléatoire (le cas général ainsi que le cas d'une fonction inversible) est présenté. Dans cette section, nous rappelons le cas d'une fonction non inversible ainsi que le cas multivariable (fonction de vecteur de variables/processus aléatoires). Nous nous focalisons sur le cas de variables aléatoires statiques mais les théorèmes présentés peuvent être généralisés aux processus stochastiques qui peuvent être vus comme étant des variables aléatoires évoluant dans le temps.

I.4.1 Fonction de variable/processus aléatoire : cas d'une fonction non inversible

Si la fonction g qui relie les deux variables aléatoires Θ_1 et Θ_2 n'est pas bijective alors la FDP associée à Θ_2 peut être déterminée à partir de la FDP associée à Θ_1 selon le

théorème 12 et ce, sans passer par la détermination de la fonction de répartition.

Théorème 12. *Soit Θ_1 une variable aléatoire ayant $\phi_{\Theta_1}(\theta_1)$ comme fonction de densité de probabilité et soit Θ_2 une autre variable aléatoire telle que $\Theta_2 = g(\Theta_1)$. Si la fonction g n'est pas bijective alors la fonction de densité de probabilité $\phi_{\Theta_2}(\theta_2)$ associée à la variable Θ_2 est calculée comme suit [Bré97] :*

$$\phi_{\Theta_2}(\theta_2) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\phi_{\Theta_1}(g_i^{-1}(\theta_2))}{\left|g'(g_i^{-1}(\theta_2))\right|} \tag{I.5}$$

où k est le nombre de morceaux continus en Θ_1 pour l'équation $\Theta_2 = g(\Theta_1)$ et $g_i^{-1}(\Theta_2)$, $i = \{1, \ldots, k\}$, sont les solutions.

I.4.2 Fonction d'un vecteur de variables/processus aléatoires

Dans le cas où un vecteur de variables aléatoires $\mathbf{p}$ s'exprime en fonction d'un autre vecteur de variables aléatoires $\mathbf{\Theta}$ dont la FDP conjointe associée est donnée, alors la FDP conjointe associée au vecteur $\mathbf{p}$ peut être déterminée. Le cas général est exposé, certains cas particuliers sont ensuite examinés.

Cas général

La fonction de répartition associée au vecteur aléatoire $\mathbf{p} = (\mathbf{p_1}, \ldots, \mathbf{p_{n_p}})$ peut être déterminée en associant à tout événement A défini sur ce vecteur un événement B équivalent défini sur le vecteur $\mathbf{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_{n_\Theta})$ (avec en général $n_\mathbf{p} \leq n_\mathbf{\Theta}$) tel que la probabilité de la réalisation de l'événement A est égale à la probabilité de la réalisation de l'événement B : $P(A) = P(B)$.

Théorème 13. *Si l'événement B est équivalent à l'événement $A \equiv (\mathbf{p_1} \leq p_1 \cap \cdots \cap \mathbf{p_{n_p}} \leq p_{n_\mathbf{p}})$ et donc $P(A) = \Phi_\mathbf{p}(p) = P(B)$ où $\Phi_\mathbf{p}$ est la fonction de répartition associée au vecteur $\mathbf{p}$ alors :*

$$\Phi_\mathbf{p}(p) = \int \cdots \int_B \phi_\mathbf{\Theta}(\theta) d\theta \tag{I.6}$$

où $\phi_\mathbf{\Theta}$ est la FDP conjointe associée à $\mathbf{\Theta}$. La FDP conjointe $\phi_\mathbf{p}$ associée à $\mathbf{p}$ s'obtient ensuite en dérivant la fonction de répartition : $\phi_\mathbf{p}(p) = \frac{\partial^{n_\mathbf{P}} \Phi_\mathbf{p}(p)}{\partial p_1 \cdots \partial p_{n_\mathbf{p}}}$.

Cas d'une application inversible

Si l'application $\mathbf{g}$ qui relie les deux vecteurs aléatoires $\mathbf{\Theta}$ et $\mathbf{p}$ est inversible alors la FDP conjointe associée au vecteur $\mathbf{p}$ peut être déterminée à partir du théorème 14.

Théorème 14. *Soit $\mathbf{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ et $\mathbf{p} = (\mathbf{p_1}, \ldots, \mathbf{p_n})$ deux vecteurs de n variables aléatoires chacun tels que $\mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{\Theta})$ et $\mathbf{h} = \mathbf{g^{-1}}$ ($\mathbf{\Theta} = \mathbf{h}(\mathbf{p})$). Connaissant la FDP conjointe $\phi_\mathbf{\Theta}$ de $\mathbf{\Theta}$, il est possible de déduire la FDP conjointe $\phi_\mathbf{p}$ de $\mathbf{p}$, si $\mathbf{h}$ est continûment différentiable, comme suit [Bré97, Ros07] :*

$$\begin{aligned} \phi_\mathbf{p}(p) &= |J_g|^{-1} \phi_\mathbf{\Theta}(\theta) = |J_g|^{-1} \phi_\mathbf{\Theta}(\mathbf{h}(p)) \\ &= |J_h| \phi_\mathbf{\Theta}(\theta) = |J_h| \phi_\mathbf{\Theta}(\mathbf{h}(p)) \end{aligned} \tag{I.7}$$

où $J_g = det \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n(\theta)}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial g_n(\theta)}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}$ $\left(resp.\ J_h = det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(p)}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial h_1(p)}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n(p)}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial h_n(p)}{\partial p_n} \end{bmatrix} \right)$ *est le Jacobien (ou encore le déterminant Jacobien) de $\mathbf{g}$ (resp. de $\mathbf{h}$).*

Cas d'une application non inversible

Si l'application $\mathbf{g}$ n'est pas bijective alors la FDP conjointe associée à $\mathbf{p}$ peut être déterminée à partir de la FDP conjointe associée à $\mathbf{\Theta}$ selon le théorème 15 (sans passer par la détermination de la fonction de répartition).

Théorème 15. *Soit* $\mathbf{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ *et* $\mathbf{p} = (\mathbf{p_1}, \ldots, \mathbf{p_n})$ *deux vecteurs de n variables aléatoires chacun tels que* $\mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{\Theta})$. *Si l'application* $\mathbf{g}$ *n'est pas bijective alors le domaine* $\mathbf{U}$ *sur lequel est défini* $\mathbf{g}$ *est supposé pouvoir être partitionné comme suit [Bré97] :*

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{U_i} \tag{I.8}$$

où $\mathbf{U_i}$ *sont les domaines sur lesquels* $\widehat{g}_i$ *(les restrictions de g) sont définies et bijectives (Figure I.3). Soit* $\mathbf{V_i}$ *l'image de* $\mathbf{U_i}$ *par* $\mathbf{g}$ *(ou, ce qui revient au même, par* $\widehat{g}_i$*). Les différents* $\mathbf{V_i}$ *ne sont pas nécessairement disjoints. Dans ce cas, la FDP conjointe* $\phi_{\mathbf{p}}$ *de* $\mathbf{p}$ *est définie par :*

$$\phi_{\mathbf{p}}(p) = \sum_{i=1}^{k} \phi_{\mathbf{\Theta}}(\widehat{g}_i^{-1}(p))\,|J_{h_i}| = \sum_{i=1}^{k} \frac{\phi_{\mathbf{\Theta}}(\widehat{g}_i^{-1}(p))}{|J_{g_i}|} \tag{I.9}$$

où $\phi_{\mathbf{\Theta}}$ *est la FDP conjointe associée à* $\mathbf{\Theta}$ *et* $\widehat{g}_1^{-1}(p), \ldots, \widehat{g}_k^{-1}(p)$ *sont les k morceaux continus en* $\mathbf{\Theta}$ *associés à* $\mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{\Theta})$.

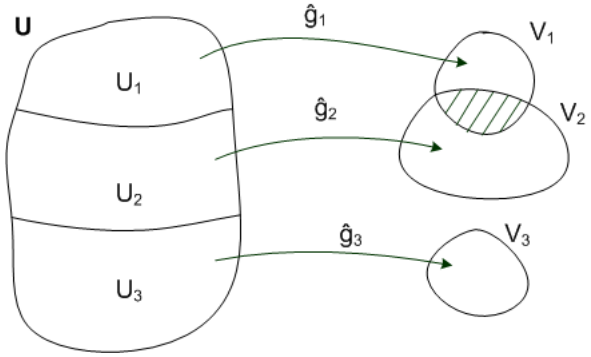


FIG. I.3 – Application non inversible : partition du domaine $\mathbf{U}$.

Remarque : Les théorèmes 14 et 15 exigent que les vecteurs de variables aléatoires $\mathbf{\Theta}$ et $\mathbf{p}$ soient de même dimension. Dans leur forme, ces théorèmes ne permettent pas d'obtenir la FDP conjointe associée à $\mathbf{p}$ si le nombre de variables aléatoires contenues dans ce vecteur est inférieur à celui des variables aléatoires contenues dans le vecteur $\mathbf{\Theta}$, ce qui est un cas rencontré fréquemment. Pour remédier à ce problème, des variables « fictives » peuvent être rajoutées de manière à obtenir des dimensions identiques pour les vecteurs aléatoires. Supposons que $\mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{\Theta})$ est de dimension n_p et $\mathbf{\Theta}$ est de dimension n_Θ (avec $n_p < n_\Theta$) alors nous pouvons définir le système carré suivant où les $(n_\Theta - n_p)$ sorties rajoutées représentent les $(n_\Theta - n_p)$ dernières variables de $\mathbf{\Theta}$:

$$\begin{cases} \mathbf{p_1} = g_1\left(\mathbf{\Theta_1}, \ldots, \mathbf{\Theta_{n_\Theta}}\right) \\ \vdots \\ \mathbf{p_{n_p}} = g_{n_p}\left(\mathbf{\Theta_1}, \ldots, \mathbf{\Theta_{n_\Theta}}\right) \\ \mathbf{p_{n_p+1}} = \mathbf{\Theta_{n_p+1}} \\ \vdots \\ \mathbf{p_{n_\Theta}} = \mathbf{\Theta_{n_\Theta}} \end{cases} \tag{I.10}$$

Ensuite, la propagation de densité de probabilité le long de ce modèle peut être établie à partir du théorème 14 ou du théorème 15 selon l'inversibilité de l'application $\mathbf{g}$.

Dans la littérature, certaines opérations classiques sur les fonctions de densité de probabilité ont été établies comme la somme de deux variables aléatoires indépendantes : la FDP marginale de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est égale au produit de convolution des FDP marginales de ces variables aléatoires [Bré97].

Thèse soutenue devant L'Ecole Centrale de Lyon

Nom : **El Feki**
Prénom : **Mariem**

Date de soutenance : **5 Juillet 2011**

Titre :
Analyse et synthèse de tolérance pour la conception et le dimensionnement des systèmes mécatroniques

Ecole doctorale : **Électronique, Électrotechnique, Automatique**

Spécialité : **Énergie et Systèmes**

Résumé : Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la conception des systèmes mécatroniques et porte, plus particulièrement, sur le dimensionnement de chaînes d'actionnement et les méthodes à mettre en uvre pour satisfaire le cahier des charges et réduire au mieux le temps de développement. Afin de suivre l'évolution du marché et faire face à la concurrence croissante, les concepteurs ont eu recours au cycle de conception en V et au prototypage virtuel. Pour réduire davantage la durée du processus de conception, la formulation du problème de conception sous la forme d'un problème inverse est une solution intéressante. Dans ce contexte, le laboratoire Ampère propose une méthodologie de dimensionnement par modèles bond graph inverses. Ainsi, l'objectif de cette thèse est de contribuer au développement de cette méthodologie d'une part dans sa phase de vérification de l'adéquation des spécifications du cahier des charges à la structure retenue pour le modèle de conception et, d'autre part, par la prise en compte des tolérances dans le problème de conception.
Pour la phase de vérification de l'adéquation spécifications/structure, le mémoire présente tout d'abord, l'analyse structurelle du cahier des charges qui permet de vérifier, avant toute simulation et à partir du modèle bond graph, si le problème de conception par modèle inverse est bien posé. Différents niveaux d'analyse sont supposés pour renforcer la démarche chronologique du travail de conception ou de reconception proposée par la méthodologie de dimensionnement. Ensuite, ces niveaux d'analyse sont mis à profit pour définir une procédure de vérification de l'adéquation des spécifications, définies sous forme de comportements type, au modèle de conception. En cas d'inadéquation, des recommandations pour la remise en question des spécifications ou de la structure du modèle de conception sont proposées et ce, selon le niveau d'analyse considéré. Au niveau de l'analyse numérique (le niveau d'analyse le plus bas), cette procédure peut être utilisée pour la synthèse paramétrique ou encore pour la synthèse de tolérance en cas de prise en compte des incertitudes dans le problème de conception.
Concernant cet aspect, le mémoire présente également une contribution à la représentation des incertitudes paramétriques dans le formalisme bond graph, formalisme de base de la méthodologie de dimensionnement.
Enfin, l'approche probabiliste est utilisée pour la modélisation des incertitudes dans la démarche de dimensionnement des systèmes dynamiques par inversion des modèles bond graph : les deux cas d'inversion, entrées/sorties d'une part (pour la remontée de spécifications), et paramètres/sorties d'autre part (pour la synthèse de tolérances paramétriques), sont abordés. Les règles d'exploitation d'un modèle bond graph probabiliste permettant la propagation des fonctions de densité de probabilité et des grandeurs caractéristiques (espérance et variance) tout le long de la structure énergétique du système sont proposées et illustrées par un exemple.

Mots-Clés : systèmes mécatroniques, dimensionnement, inversion de modèles dynamiques, bond graph, analyse structurelle du cahier des charges, adéquation spécifications/structure, modélisation d'incertitudes, synthèse de tolérance.

Laboratoire de recherche : **Laboratoire AMPERE UMR CNRS 5005**

Directeurs de thèse : **Laurent Krähenbühl** et **Wilfrid Marquis-Favre**

Président du jury : **Jean Buisson**

Composition du jury :
Rapporteurs : **Roger Fotsu Ngwompo**, **Xavier Roboam** et **Jean-François Lafay**
Examinateurs : **Jean Buisson** et **Daniel Thomasset**
Directeurs : **Laurent Krähenbühl** et **Wilfrid Marquis-Favre**