



HAL
open science

Modélisation du comportement des géomatériaux : apport des méthodes numériques de changement d'échelle

Senjun Wu

► **To cite this version:**

Senjun Wu. Modélisation du comportement des géomatériaux : apport des méthodes numériques de changement d'échelle. Autre. Université d'Orléans, 2011. Français. NNT : 2011ORLE2053 . tel-00688951

HAL Id: tel-00688951

<https://theses.hal.science/tel-00688951>

Submitted on 19 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ D'ORLÉANS



ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES

LABORATOIRE PRISME

THÈSE présentée par :

Senjun WU

Soutenue le 13 décembre 2011

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université d'Orléans**

Discipline : Génie civil

Modélisation du comportement des géomatériaux: apport des
méthodes numérique de changement d'échelle.

JURY

Olivier MILLET	Professeur, Université de la Rochelle	Président du jury
Albert GIRAUD	Professeur, ENSG	Rapporteur
Nourreddine BENSEDDIQ	Professeur, Université de Lille1	Rapporteur
Dashnor HOXHA	Professeur, Université d'Orléans	Directeur de thèse
Naima BELAYACHI	Maître de conférences, Université d'Orléans	Co-encadrant
Duc phi DO	Maître de conférences, Université d'Orléans	Examinateur



UNIVERSITÉ D'ORLÉANS



ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES

LABORATOIRE PRISME

THÈSE présentée par :

Senjun WU

Soutenue le 13 décembre 2011

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université d'Orléans**

Discipline : Génie civil

Modélisation du comportement des géomatériaux: apport des
méthodes numérique de changement d'échelle.

JURY

Olivier MILLET	Professeur, Université de la Rochelle	Président du jury
Albert GIRAUD	Professeur, ENSG	Rapporteur
Nourreddine BENSEDDIQ	Professeur, Université de Lille1	Rapporteur
Dashnor HOXHA	Professeur, Université d'Orléans	Directeur de thèse
Naima BELAYACHI	Maître de conférences, Université d'Orléans	Co-encadrant
Duc phi DO	Maître de conférences, Université d'Orléans	Examineur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma plus profonde gratitude envers mon directeur de thèse, Monsieur Dashnor HOXHA, pour m'avoir proposé un sujet de recherche ouvert m'entraînant vers de nouvelles réflexions durant ces trois années. Ses conseils, tout au long de cette thèse, ont été très précieux. Ses conseils promulgués durant ma thèse m'ont permis d'élargir mes horizons. Je tiens également à remercier mon co-encadrant, Mme Naima Belayachi. Ses qualités scientifiques et pédagogiques ont été pour moi très riches d'enseignement. Je n'oublierai jamais ses encouragements et sa disponibilité qui me permettent de surmonter les difficultés pendant les trois années de thèse.

Je remercie aussi les membres du jury devant lesquels j'ai eu l'honneur de présenter ma thèse. Monsieur Albert Giraud, professeur de INPL, ainsi que Monsieur Nourreddine Benseddiq, professeur à l'Université de Lille 1-Sciences et Technologie, pour leur remarques et suggestions pour continuer ce travail. Je remercie vivement Monsieur Olivier Millet pour l'honneur qu'il nous a fait de présider ce jury.

Je remercie également Monsieur Duc Phi Do, pour m'avoir suivi dans ce travail, ses réflexions sur le sujet m'ont permis de persévérer dans mes recherches et d'expérimenter des idées intéressantes.

Qu'il me soit également permis de remercier mes collègues et amis doctorants : Ha, Laura, Jianxi, Yin, Amine, Bui,pour leur disponibilité, leur bonne humeur.

Mes remerciements les plus affectueux vont à ma femme Yu SU, à toute ma famille et mes amis qui m'ont toujours soutenu dans mes choix.

Résumé

Modélisation du comportement des géomatériaux: apport des méthodes numérique de changement d'échelle.

Les travaux de modélisations présentes dans cette thèse concernent l'étude du comportement hydro-poro-mécanique des géomatériaux par l'approche numérique de changement d'échelle. Il s'agit d'exploiter un modèle géomatériaux conceptuel, du code de calcul par la méthode élément finis étendu (XFEM) ou IIM, conjointement avec des techniques d'homogénéisation, pour l'obtention des lois de comportement macroscopique tirées des relations de passage Micro-Macro. Dans ce modèle conceptuel, le volume élémentaire représentatif des milieux hétérogène est composé d'une matrice argileuse contenant des inclusions de minéraux de quartz et de calcite ou des pores. D'abord, cette procédure avec XFEM a été effectuée pour la détermination des propriétés effectives isotropes. Ensuite, Une étude sur l'influence de la distribution, la morphologie, et l'orientation des inclusions sur le comportement équivalent dans le domaine de l'élasticité linéaire a été réalisée par traverser nombreuse études numériques. Dans un troisièmes temps, nous avons modélisée le comportement mécanique non linéaire des géomatériaux en utilisant XFEM et la méthode Newton-Raphson modifiée. Enfin, la modélisation du comportement hydraulique est réalisée par la méthode IIM, elle a été validée par la comparaison avec l'approche analytique.

Mots-clés : géomatériaux, comportement hydro-poro-mécanique linéaire, élasto-plastique, homogénéisation, XFEM, IIM

Summary

Modeling of the behavior of the geomaterials: contribution of the numerical method of up-scaling.

The work of modeling present in this thesis relates to the study of the hydro-poro-mechanics behavior of geomaterials with the numerical approach of up-scaling. This work is based on the conceptual geomaterials model, of finite element extended (XFEM) code developed in Matlab or IIM, coupling with the homogenization method to obtain the laws of macroscopic behavior drawn from the relations of Micro-Macro passage. In this model, the elementary volume representative of the medium heterogeneous is composed of an argillaceous matrix containing calcite and quartz mineral inclusions or of the pores. Firstly, this procedure with XFEM was carried out for the determination of the effective properties linear of the geomaterial. Then, a study on the influence of the distribution, morphology, and the orientation of inclusions on the equivalent behavior in the field of linear elasticity was carried out by crossing many numerical studies. In the third time, we modeled the mechanical behavior non linear of the geomaterial by using XFEM and the modified method Newton-Raphson. Lastly, the modeling of the hydraulic behavior is carried out by IIM, it was validated by the comparison with the analytical approach.

Key-words: geomaterial, hydro-poro-mechanics behavior, elastoplastic, homogenization, XFEM, IIM

Table des matières

Introduction Générale.....	11
Chapitre I Modélisation du comportement des milieux poreux et hétérogènes : Éléments Bibliographiques	17
I.1 Introduction.....	18
I.2 Cadre théorique de la mécanique des milieux poreux.....	18
I.2.1 Représentation d'un milieu poreux	19
I.2.2 Lois de conduction et de conservation de la masse fluide	20
I.2.3 Comportement thermo-poro-élastique saturé.....	20
I.2.4 Concept de contrainte effective.....	25
I.3 Approche micromécanique de modélisation des matériaux hétérogènes.....	27
I.3.1 Introduction à la stratégie de modélisation des matériaux hétérogènes	27
I.3.2 Processus d'homogénéisation	28
I.3.3 Problème cellulaire Hydro-poro-élastique	31
I.4 Homogénéisation numérique sur un VER.....	33
I.5 Méthodologie d'homogénéisation non linéaire analytique	35
I.6 Méthodologie de modélisation du comportement Hydro-Mécanique des matériaux poreux	36
I.7 Conclusion	39
Chapitre II La méthode des éléments finis étendus (XFEM) : principes fondamentaux.....	41
II.1 Introduction	42
II.2 Le recours à la méthode XFEM.....	42
II.3 Description des discontinuités par la méthode des fonctions de niveau (level-set method).....	45
II.3.1 Fonction de niveau.....	46
II.3.2 Fonction de niveau dans le cas inclusion ou vide	48
II.4 Approximation du déplacement, fonction d'enrichissement.....	50
II.4.1 Enrichissement dans le cas d'une fissure.....	51
II.4.2 Enrichissement dans le cas de vides et inclusions	53
II.5 Sur la technique d'intégration numérique dans XFEM	55
II.5.1 Discrétisation	56
II.5.2 Intégration numérique, découpage en sous éléments.....	57
II.6 Validation de la méthode XFEM pour des problèmes d'homogénéisation.....	59
II.6.1 Matériau contenant un vide	60
II.6.2 Matériau contenant une inclusion matérielle	63
II.7 Conclusion.....	66
Chapitre III Application de XFEM à l'homogénéisation du comportement mécanique des matériaux hétérogènes.....	67
III.1 Introduction	68
III.2 Comportement mécanique linéaire.....	69
III.2.1 Matériau périodique à inclusions sphériques de même rayon	69
III.2.2 Influence de la distribution spatiale des inclusions sur les propriétés effectives.....	70
III.2.3 Influence de l'orientation des inclusions sur les propriétés effectives	76
III.2.4 Influence de la morphologie des inclusions sur les propriétés effectives.....	78
III.2.5 Homogénéisation du comportement élastique d'un géomatériau polycristalin biphasique.....	85
III.2.6 Homogénéisation du comportement élastique de l'argilite de Meuse Haute Marne	88
III.2.7 Conclusion.....	92

III.3 Estimation par homogénéisation numérique des coefficients poro-élastiques linéaires d'un milieu poreux.....	92
III.4 Modélisation par homogénéisation numérique du comportement plastique des géomatériaux	94
III.4.1 Comportement élastoplastique et modèle utilisé	96
III.4.2 Intégration du modèle de Drucker-Prager dans le code de calcul XFEM	97
III.4.3 Modélisation nonlinéaire du comportement mécanique d'un milieu biphasique	100
III.4.4 Conclusion.....	110
Chapitre IV Modélisation des écoulements des milieux poreux par la méthode d'interface immergée.....	111
IV.1 Introduction	112
IV.2 Principe de la méthode « Immersed Interface Method »	113
IV.2.1 Repère local tangent à l'interface.	115
IV.2.2 Les relations d'interface.	116
IV.2.3 Schéma numérique.....	117
IV.3 Détermination de la perméabilité effective.....	120
IV.3.1 L'influence de la fraction volumique des inclusions et du contraste des perméabilités des phases sur la perméabilité effective.....	124
IV.3.2 L'influence de la distribution des inclusions sur la perméabilité effective	126
IV.3.3 L'influence du rapport d'aspect des inclusions sur la perméabilité effective	131
IV.4 Conclusion.....	134
Conclusions et perspectives	137
Références:.....	141
Annexe A: Schéma Mori-Tanaka.....	157
Annexe B: Components du tenseur d'Eshelby pour l'inclusion cylindrique and sphérique	159

Introduction Générale

Les géomatériaux tant naturels (sols, roches) qu'artificiels (bétons) sont des matériaux fortement hétérogènes. Ce caractère hétérogène, clairement identifié par des méthodes expérimentales d'observations microstructurales, a un impact très important sur leur comportement macroscopique. En effet, plusieurs phénomènes trouvent leur origine à l'échelle des interactions des mécanismes physiques réagissant au niveau de la microstructure. Le comportement global des matériaux micro-hétérogènes dépend fortement de la forme, de la taille, la distribution spatiale et des propriétés des constituants de la microstructure et leurs interfaces respectives. L'utilisation des géomatériaux dans de nombreuses applications relevant des technologies de pointe tel que, pour n'en citer que quelques unes du domaine de génie civil, l'exploitation des champs pétroliers, le stockage des déchets radioactifs ou encore le stockage du gaz carbonique en profondeur, induit inévitablement la nécessité d'une prédiction précise et efficace de leur comportement et de leur capacité de résistance à long terme une fois incorporées dans les structures en service.

Dans la plupart des situations rencontrées en ingénierie, les géomatériaux sont soumis à des sollicitations complexes hydriques, mécaniques et thermiques. En particulier leur espace poreux peut être saturé ou non par différents fluides (liquide ou gaz) rendant ainsi particulièrement complexe leur modélisation qui doit prendre en compte à la fois la superposition des phases solide et liquide, les informations de la microstructure et le couplage des sollicitations.

L'approche classique des milieux continus de modélisation du comportement des matériaux hétérogènes basée, d'une part, sur des modèles thermo-hydro-mécanique et des lois de comportement non linéaires sophistiquées et d'autre part, sur des résultats d'essais de laboratoire a fait ses preuves d'efficacité et est à présent celle la plus utilisée en pratique.

Parallèlement, le développement des outils de modélisation et d'observation micromécanique au cours des années, a rendue possible la compréhension des mécanismes impliqués à une échelle inférieure, celle où on distingue les caractéristiques géométriques et matérielles de chaque constituant, et in fine a rendu possible la prédiction du comportement macroscopique à partir de ces informations microstructurales. Les différents schémas analytiques et semi-analytiques basés sur la solution d'Eshelby ont été développés et continuent de se développer donnant un aperçu assez fidèle des mécanismes gouvernant le comportement des géomatériaux, Afin d'aller au delà des limites naturelles de ces schémas et de prendre en compte plus précisément les interactions entre différents constituants notamment dans les

structures complexes, des approches micromécaniques numériques ont été développées, appuyées par une évolution rapide des outils numériques. De telles approches permettent notamment d'étudier d'une façon unifiée et relativement simple le comportement des matériaux à microstructures complexes et les comportements nonlinéaires des constituants. Bien maîtrisée, la méthode des éléments finis, qui se trouve à la base de la plupart des approches numériques, présente l'avantage d'être numériquement rigoureuse et utilisable pour la plupart des problèmes. En principe, les calculs aux éléments finis sont effectués sur un volume élémentaire représentatif (VER) et les propriétés effectives sont déterminées à partir des champs moyens sur le VER. Néanmoins, très souvent, même un VER représente une structure tellement complexe qu'il est difficile à reproduire fidèlement dans un maillage aux éléments finis appelant ainsi à des simplifications nécessaires. Dans le cadre d'une représentation simplifiée d'un VER l'hypothèse d'une structure périodique est celle qui est le plus souvent utilisée. Bien qu'attractive, par sa simplicité, la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques présente une limite par ce concept de cellule unitaire périodique via des conditions de périodicité sur ses frontières qui n'est évidemment pas adapté à tous les matériaux. Ces conditions de périodicité sont parfois traduites par des déplacements ou contraintes imposées sur les frontières pour assurer la compatibilité des déformations des cellules voisines d'une microstructure périodique. Dans d'autres cas ces frontières sont simplement libres. En particulier cette condition de périodicité est à la base des approches asymptotiques avec des applications multiples en ingénierie.

Parmi les méthodes numériques on citera encore celle basée sur les Transformées de Fourier (FFT) qui pourrait être employée pour l'analyse micromécanique des éléments de volume représentatifs dans les conditions périodiques [MOU 98]. Celle-ci devient d'autant plus attractive qu'elle est simple à mettre en place et que certaines difficultés de convergence dans le cas de composites avec un contraste infini des constituants semblent être résolues [MIC 99, BRI 10]

La méthode d'homogénéisation numérique bénéficiant à la fois du cadre mathématique de la micromécanique et de la capacité d'application dans des domaines variés de la méthode des éléments finis s'impose comme la méthode la plus utilisée dans les problèmes d'ingénierie. Cependant son principal défaut reste la dépendance au maillage malgré tout les efforts de remaillage automatique à chaque pas de chargement pour résoudre des problèmes avec des microstructures complexes contenant différentes discontinuités (microfissures, inclusions, pores...).

Pour palier à ces difficultés, des méthodes numériques alternatives ont été développées. Parmi celles qui ont suscités l'intérêt des scientifiques, les méthodes sans maillage (Meshless Methods) [BEL 96] comme la dite méthode Moving Least Square, Element Free Galekin ou encore Diffuse Element Method. Toutes ces méthodes sont basées sur la notion de partition de l'unité et une discrétisation uniquement nodale [BEL 96, MEL 96]. Si ces méthodes ont montré l'avantage de dépasser les contraintes d'un maillage, elles ont d'autres problématiques comme l'imposition des conditions aux limites, le système d'équations et le schéma d'intégration qui est supérieur à la méthode des éléments finis et donc qui revient finalement à des calculs longs et coûteux.

Plus récemment, deux méthodes ont été développées dans le but de résoudre les difficultés liées à l'intégration des équations aux dérivées partielles (EDP) dans les méthodes sans maillages: la méthode des éléments finis généralisées (Generalized finite element method) [BEL 99], et la méthode des éléments finis étendus [BEL 99, MOE 99]. Les deux méthodes utilisent un maillage de fond pour intégrer les EDP et permettent d'enrichir les fonctions de formes pour gérer les frontières, mais XFEM offre en plus la dépendance par rapport à la connaissance de la forme des solutions. Cette avancée a été initialement proposée pour résoudre le problème de propagation de fissures sans remaillage et très vite XFEM s'est imposée grâce à son efficacité pour d'autres domaines comme la nucléation des fissures [MOE 99], les fluides multiphasiques [CHE 03-2] et les problèmes d'homogénéisation facilitant la représentation plus réaliste des microstructures.

L'objectif du travail de cette thèse est de développer, valider et utiliser une approche numérique basée sur XFEM pour l'étude du comportement des géo matériaux. En particulier a été visé le comportement de l'argilite de Meuse Haute-Marne, en complétant ainsi les modèles micromécaniques et macroscopiques développés existants. Néanmoins l'approche et les outils développés sont suffisamment larges est universelles pour permettre leur utilisation à tout autre géomatériau pour peu que l'information sur sa microstructure soit accessible. Numériquement, ceci se traduit par le couplage de la méthode XFEM qui sera donc utilisée pour décrire la microstructure complexe du géomatériau, définir les champs locaux de contraintes et de déformations et la méthode d'homogénéisation qui offrira ce cadre théorique, et en formulant rigoureusement les relations de moyenne et de périodicité pour obtenir le comportement macroscopique. L'intérêt principal de cette étude tient dans le fait que le comportement de la matrice sera non linéaire, les hétérogénéités (pores et inclusions minérales) seront distribués aléatoirement avec un nombre plus important par rapport aux études précédentes utilisant XFEM pour la méthode d'homogénéisation. Cet outil numérique

nous permettra d'obtenir le comportement hydromécanique de l'argilite en mettant en œuvre le couplage via une méthode dite Immersed Interface Method (IIM) basé sur la méthode de différences finies qui est employée pour le problème d'écoulement du fluide.

Ce travail est présenté dans ce document en cinq chapitres : le premier revête un caractère bibliographique et illustratif du comportement poromécanique des géomatériaux, le deuxième présente la méthode XFEM et son principe général avec une validation du programme développé. Le troisième expose le comportement mécanique du matériau tant en linéaire qu'en non linéaire en relevant l'influence de la distribution spatiale des constituants et de leur forme. Dans le quatrième chapitre, le couplage des deux méthodes XFEM et la méthode des interfaces immergée est proposé pour décrire le comportement hydromécanique du milieu poreux; et enfin, le dernier présente quelques simulations validant ce dernier couplage.

Le premier chapitre rappelle dans un premier temps les fondements de la poro-mécanique quant à la simulation du comportement des milieux poreux saturés et non-saturés. Puis, propose brièvement l'approche micromécanique et le formalisme de l'homogénéisation par rapport aux nombre important de travaux publiés dans le cas des matériaux hétérogènes et en particulier les milieux poreux. Une présentation des modélisations analytiques et numériques proposées dans la littérature utilisant la méthode d'homogénéisation pour la prédiction du comportement macroscopique des matériaux à microstructure aléatoire ou périodique est par ailleurs faite pour positionner notre travail.

Le second chapitre présente une description de la méthode des éléments finis étendus comme une méthode alternative à la méthode des éléments finis classique pour gérer le problème des interfaces dans une microstructure. Son aptitude à décrire cette interface initialement pour les fissures, lui permettra d'acquérir un large éventail d'applications. Son couplage avec la méthode level set lui offre un intérêt considérable dans l'homogénéisation des matériaux hétérogènes pour son efficacité à décrire précisément les pores et les inclusions. Nous nous plaçons donc dans ce contexte pour traiter le problème d'homogénéisation numérique d'un matériau biphasique (matrice contenant un vide/une inclusion). Finalement, un test simple permettra de valider la procédure d'homogénéisation en comparant avec la célèbre solution d'Eshelby. Pour montrer d'avantage la précision de XFEM, les résultats sont comparés aux résultats de la méthode classique sur une cellule unitaire.

Après avoir présentés les différentes approches utilisées dans ce travail, nous proposons dans **le troisième chapitre** des applications avec des microstructures différentes pour mettre en évidence l'effet de la distribution et de la forme des inclusions sur les propriétés effectives du

géomatériau. Notre étude s'intéressant à la précision de décrire la microstructure, en plus du comportement macroscopique, les champs locaux de contraintes et déformations sont présentés. Ces derniers permettent d'examiner les lieux de concentration de contraintes qui sont des lieux privilégiés d'endommagement du matériau et donc de son comportement non linéaire. Le comportement des constituants est considéré tout d'abord élastique ; et puis élastoplastique à partir d'un modèle de Drucker-Prager pour mettre en lumière les mécanismes locaux à l'échelle microscopique et le comportement réel des constituants.

Le quatrième chapitre soulève le problème d'écoulement du fluide dans un milieu poreux. Après quelques rappels bibliographiques de la méthode des interfaces immergées, le couplage avec la méthode micromécanique précédente est spécifiquement décrit. La modélisation micromécanique proposée et la combinaison des lois de transport et de comportement mécanique permet d'étudier le comportement hydromécanique d'un matériau poreux dont une exploration des possibilités et des difficultés est faite dans le dernier chapitre.

**Chapitre I Modélisation du
comportement des milieux poreux et
hétérogènes : Éléments
Bibliographiques**

I.1 Introduction

L'étude du comportement des milieux poreux intéresse de nombreux domaines d'ingénierie. En effet, un milieu poreux est vu comme un milieu dans lequel l'eau interstitielle interagit avec la structure matricielle et montre des états hiérarchisés dans les différentes échelles structurales. Cependant, il est essentiel de prendre en compte aussi bien les interactions des phases solides et fluides via les couplages que les relations des différentes échelles pour une compréhension propre et efficace de son comportement.

L'objet de ce chapitre est de fournir les éléments de base de la mécanique des milieux poreux d'une part et des approches micromécaniques d'autre part en se basant sur les études antérieures. Ce rappel bibliographique permettra au lecteur de se situer le cadre de notre étude. Après une synthèse des formalismes et des équations fondamentales de la poro-mécanique dans le cas d'un milieu poreux saturé et partiellement saturé, une brève description des méthodes de changement d'échelles est donnée. Enfin, un résumé bibliographique du comportement hydromécanique et thermo-hydro-mécanique sera présenté.

I.2 Cadre théorique de la mécanique des milieux poreux

La présence de fluides dans les pores agit sur le comportement mécanique du milieu poreux, puisque ces fluides supportent une part des contraintes au sein du matériau. Certains auteurs conservent un cadre mécanique pure. D'autres utilisent le concept de contrainte effective. De plus la description du comportement peut être réalisée à deux échelles distinctes microscopique ou macroscopique. Dans la première, on distingue géométriquement les deux phases solide et fluide alors que dans la deuxième le milieu est considéré comme la superposition de deux milieux continus.

La description macroscopique du comportement des milieux poreux saturés est bien établie depuis longtemps par les travaux de Terzaghi [TER 34]. Ensuite, Biot a proposée une première formulation générale du comportement réversible des milieux poreux [BIO 41]. Plus récemment, des développements pour la formulation des équations de comportement des milieux poreux ont été apportés par Coussy [COU 91, COU 04] en se basant sur des considérations thermodynamique.

Nous n'avons pas la prétention de détailler toute la théorie de la poromécanique dans cette

section, mais nous tentons de rappeler les concepts fondamentaux.

Pour une étude plus exhaustive, le lecteur souhaitant plus de détail concernant la poromécanique pourra se référer à [BIO 41, COU 91, COU 04].

I.2.1 Représentation d'un milieu poreux

En se plaçant à l'échelle macroscopique, le milieu poreux est considéré comme un milieu continu multiphasique, résultant de la superposition d'un premier milieu continu, le squelette qui est la partie solide, et d'un second milieu continu, le fluide, qui occupe l'espace poreux (Fig. 1.1). Le squelette est constitué de particules solides et peut être lui-même poreux. L'espace poreux connecté, ou non, peut être saturé par un ou plusieurs fluides. Cette échelle macroscopique a été adoptée d'abord par Biot [BIO 41] puis par Coussy [COU 91, COU 95]. Lorsque l'espace poreux est occupé par une seule phase fluide, le milieu est dit saturé, alors que la présence de plusieurs fluides définit des milieux partiellement saturés. Dans la plupart des problèmes, la phase fluide des milieux saturés est assimilée à une phase liquide, et dans le cas des milieux partiellement saturés, l'espace poreux est formé par deux phases, une phase liquide et une phase gazeuse, cette dernière étant constituée par un mélange de vapeur d'eau et d'air sec.

L'élément de volume à l'échelle macroscopique est composé d'une particule de squelette et d'une particule de fluide, occupant le même point géométrique et animées de cinématiques a priori distinctes.

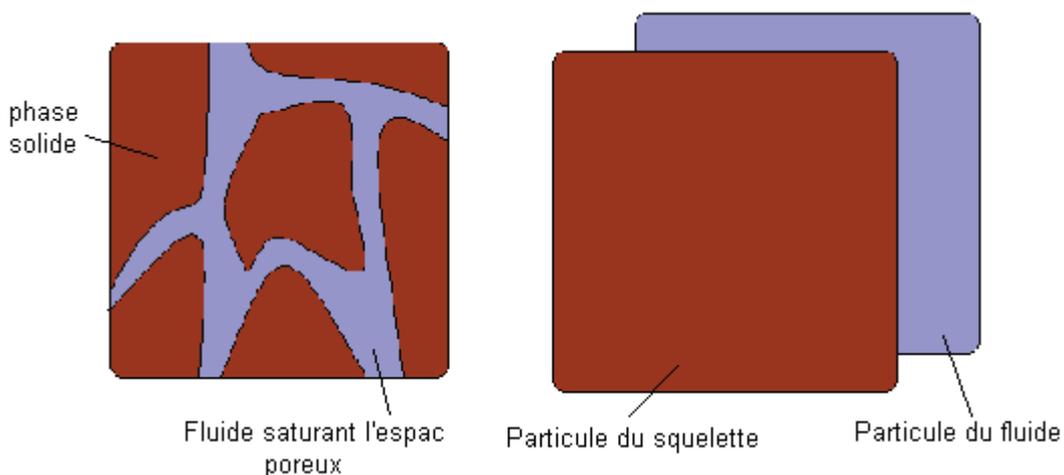


Fig. 1.1 : Représentation d'un milieu poreux saturé comme la superposition de deux milieux continus à l'échelle macroscopique.

Il est à noter qu'il convient de distinguer l'espace poreux connecté et l'espace poreux occlus. L'espace connecté est l'espace par l'intermédiaire duquel s'effectuent les échanges de masse fluide. L'espace poreux occlus est constitué par les vides compris dans le squelette solide. La

porosité totale d'un volume donné est le rapport du volume non solide au volume total. La porosité connectée est le rapport du volume de l'espace interstitiel précédemment défini au volume total.

I.2.2 Lois de conduction et de conservation de la masse fluide

La conservation de la masse fluide s'écrit sous la forme différentielle :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_a^f) + \text{div}(\rho_a^f \underline{\mathbf{u}}^f) = 0 \quad [1.1]$$

Où $\underline{\mathbf{u}}^f$ est la vitesse du fluide, ρ_a^f est la mass volumique apparente du fluide, avec $\rho_a^f = \phi \rho^f$, ϕ est la porosité, et ρ^f est la mass volumique du fluide.

En 1856, Darcy montre expérimentalement que le débit du fluide à travers une colonne de sable homogène est proportionnel au gradient de pression entre les extrémités de la colonne. En prenant compte les faibles vitesses de circulations de l'eau dans les milieux poreux que nous nous intéressons et pour lesquels la charge hydraulique h s'exprime par $h = \frac{p}{\rho g} + z$ la

loi de Darcy s'écrit sous la forme suivante

$$\underline{\mathbf{q}} = -K \underline{\nabla} h = -K \underline{\nabla} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) \quad [1.2]$$

où K une constante appelée conductivité hydraulique ou coefficient de perméabilité, p est la pression, g l'accélération de la pesanteur, ρ la masse volumique et z la hauteur.

Notons en passage que souvent en pratique on utilise une loi de Darcy généralisée dans le cas d'un écoulement multiphasique (le cas d'écoulement dans un milieu partiellement saturé par exemple). Elle exprime les flux massiques des différentes phases en introduisant la notion de perméabilité relative. La perméabilité relative pondère la perméabilité intrinsèque pour chacun des deux fluides et permet de dissocier la perméabilité du liquide et celle du gaz. La notion de perméabilité relative est encore aujourd'hui un sujet de discussion [YAN 08].

I.2.3 Comportement thermo-poro-élastique saturé

Les équations gouvernant le comportement couplé thermo-poro-élastique résumées brièvement dans cette section s'appuient sur la théorie des milieux poreux définie par Coussy [COU 91, COU95]. Cette théorie établie initialement par Biot [BIO 41, BIO 57] considère

qu'un milieu poreux est un milieu continu ouvert composé de deux phases ayant ou non un échange de matière avec l'extérieur [COU 91]. Cependant, le système peut être soit ouvert et permet l'échange de matière avec l'extérieur et donc la dissipation des surpressions interstitielles (cas drainé), soit fermé sans échange de matière où les surpressions interstitielles influencent le comportement du squelette (cas non drainé). La formulation générale du comportement poroélastique de Coussy [COU 91] a été définie en développant les principes thermodynamiques des milieux continus ouverts.

- Thermodynamique du fluide saturant :

Le comportement du fluide saturant est défini par son enthalpie libre qui est fonction de la température T et de la pression p . Les équations reliant la variation d'entropie massique ΔS_m et la variation de masse volumique du fluide $\Delta \rho^f$ à des variations de température et de pression sont écrites sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\rho^f} = \frac{\partial g_m}{\partial p} \quad s_m = -\frac{\partial g_m}{\partial T} \quad [1.3]$$

En supposant des petites variations de température ($T - T_0$) et de pression ($p - p_0$), l'enthalpie libre $g_m(p, T)$ peut être définie au second ordre par :

$$g_m(p, T) = g_m^0 - (T - T_0)s_m^0 + \frac{p - p_0}{\rho_0^f} - \frac{1}{2}c(T - T_0)^2 + 3\alpha_f(T - T_0)\frac{p - p_0}{\rho_0^f} - \frac{(p - p_0)^2}{2\rho_0^f K_f} \quad [1.4]$$

où g_m^0, s_m^0, ρ_0^f représentent respectivement l'enthalpie libre massique du fluide, l'entropie massique du fluide et la masse volumique du fluide à un état de référence, c la chaleur massique du fluide, α_f le coefficient de dilatation thermique du fluide et K_f le module de compressibilité isotherme du fluide saturant.

A partir de ce dernier développement et des relations d'état énergétique, les équations linéarisées du fluide sont les suivantes :

$$\frac{1}{\rho^f} = \frac{1}{\rho_0^f} \left(1 + 3\alpha_f(T - T_0) - \frac{p - p_0}{K_f} \right) \quad [1.5]$$

$$s_m = s_m^0 + c(T - T_0) + 3\alpha_f \frac{p - p_0}{\rho_0^f}$$

- Lois d'état du milieu poroélastique

Dans le cas d'un comportement réversible (dissipation intrinsèque nulle), le milieu poreux est

défini par l'énergie libre ψ qui dépend seulement des variables d'états $T, \mathbf{\Delta}$ (tenseur des déformations de Green Lagrange) et m (la masse de fluide échangée avec l'extérieur par unité de volume). La loi de comportement thermoporoélastique reliant les variables d'état aux forces thermodynamiques associées est définie par les équations d'état suivantes :

$$S = \frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad \boldsymbol{\pi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{\Delta}} \quad \text{et} \quad g_m = \frac{\partial \psi}{\partial m} \quad [1.6]$$

où S désigne l'entropie du système fluide et du réseau solide, $\boldsymbol{\pi}$ le tenseur des contraintes totales de Piola-Kirchoff et g_m l'enthalpie libre massique.

Sous les hypothèses de déformation infinitésimales et de petites variations d'échange de fluide et après développement de l'énergie libre par rapport à un état de référence, la loi de comportement thermo-poro-élastique linéaire s'obtient explicitement sous la forme [COU 91, COU 95, BAR 07] :

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}^0 + \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - M \mathbf{B} \frac{m}{\rho_{fl}^0} - \mathbf{A}(T - T^0) \quad [1.7]$$

$$p = p^0 + M \left(-\mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{m}{\rho_{fl}^0} \right) + \rho_{fl}^0 l (T - T^0) \quad [1.8]$$

$$S = S^0 + m s_m^0 + \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon} - l m + \beta (T - T^0) \quad [1.9]$$

où $\boldsymbol{\pi}^0$: le tenseur des contraintes totales de Piola Kirchoff à l'état de référence ;

S^0 : l'entropie du système squelette et fluide saturant à l'état de référence ;

ρ_{fl}^0 : la masse volumique du fluide à l'état de référence ;

s_m^0 : l'entropie massique du fluide à l'état de référence ;

\mathbb{C} : le tenseur de rigidité des modules d'élasticité isothermes non drainés ;

M : le module de Biot ;

\mathbf{B} : tenseur des coefficients de Biot ;

\mathbf{A} : le tenseur de couplage thermo-élastique avec $\mathbf{A}T^0$ le tenseur des chaleurs latentes des déformations non drainées ;

β : un paramètre matériau avec $C_{\Delta} = \beta T$ la chaleur volumique par unité de volume initial à déformation constante ;

l : un paramètre matériau avec $T^0 l$ la chaleur latente d'apport de masse fluide à déformation constante.

Sous l'hypothèse des transformations infinitésimales, le tenseur de Green Lagrange peut être remplacé par sa forme linearisé $\boldsymbol{\varepsilon}$ et le tenseur des contraintes de Piola Kirchoff par le

tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$. Le système d'équation (1.7-1.9) peut être écrit alors en deux systèmes d'équations selon que l'évolution est non drainée ou drainée.

Ainsi, ces relations s'écrivent pour un milieu non drainée sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - M \mathbf{B} \frac{m}{\rho_{fl}^0} - \mathbf{A}(T - T^0) \quad [1.10]$$

$$p = p^0 + M(-\mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{m}{\rho_{fl}^0}) + 3 \alpha_m M (T - T^0) \quad [1.11]$$

$$S = S^0 + m s_m^0 + \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon} - 3\alpha_m M \frac{m}{\rho_{fl}^0} + \frac{C_{\Delta}(T - T^0)}{T^0} \quad [1.12]$$

Et pour un milieu drainé :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{B}(p - p^0) - \mathbf{A}_0(T - T^0) \quad [1.13]$$

$$p = p^0 + M(-\mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{m}{\rho_{fl}^0}) + 3 \alpha_m M (T - T^0) \quad [1.14]$$

$$S = S^0 + m s_m^0 + \mathbf{A}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} - 3\alpha_m (p - p^0) + \frac{C_{\Delta}^0(T - T^0)}{T^0} \quad [1.15]$$

Où les tenseur \mathbb{C} et \mathbb{C}_0 désigne les tenseurs de rigidité des modules d'élasticité isothermes, \mathbf{A} et \mathbf{A}_0 les tenseurs de couplage thermo-mécanique, C_{Δ} et C_{Δ}^0 les capacités de chaleur volumique par unité de volume initial et à déformation constante respectivement en condition non drainée et drainée et α_m le coefficient d'apport de mass fluide thermique dans un essai non drainé à déformation nulle. Pour un matériau sans précontrainte à l'état initial naturel, le tenseur $\boldsymbol{\sigma}^0$ est nul.

Puis selon [1.10] on a :

$$\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{B} p = \boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbf{B} p^0 + \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}_0(T - T^0) \quad [1.16]$$

Faisant ainsi apparaitre une contrainte dite effective définie par :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{B} p \quad [1.17]$$

Cette contrainte présente l'avantage d'être reliée directement à la déformation et la température sans dépendance de pression du fluide.

Si le milieu poreux présente de plus un comportement isotrope, ces lois se simplifient sous la forme suivante pour un milieu non drainé :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + (k - \frac{2\mu}{3}) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} - bM \frac{m}{\rho_{fl}^0} \mathbf{1} - 3 \alpha k (T - T^0)\mathbf{1} \quad [1.18]$$

$$p = p^0 + M(-b \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{m}{\rho_{fl}^0}) + 3 \alpha_m M (T - T^0) \quad [1.19]$$

$$S = S^0 + m s_m^0 + 3\alpha k \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) - 3\alpha_m M \frac{m}{\rho_{fl}^0} + \frac{C^0(T - T^0)}{T^0} \quad [1.20]$$

Et sous la forme suivante pour un milieu drainé :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + (k_0 - \frac{2\mu}{3}) \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} - b(p - p_0)\mathbf{1} - 3 \alpha_0 k_0 (T - T^0)\mathbf{1} \quad [1.21]$$

$$p = p^0 + M(-b \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{m}{\rho_{fl}^0}) + 3 \alpha_m M (T - T^0) \quad [1.22]$$

$$S = S^0 + m s_m^0 + 3\alpha_0 k_0 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) - 3\alpha_m (p - p_0) + \frac{C^0(T - T^0)}{T^0} \quad [1.23]$$

où k_0 et k sont respectivement les modules de compressibilité drainée et non drainée, μ le module de cisaillement, b le coefficient de Biot, α_0 et α les coefficients de dilatation thermique respectivement en conditions drainées et non drainées.

Le comportement thermo-poro-élastique linéaire isotrope apparait donc caractérisé par 4 coefficients poro-élastique isothermes et 3 coefficients thermo-élastiques. Des relations entre les caractéristiques drainées et non drainées peuvent être par ailleurs établies à partir des expressions de la variation de la masse de fluide fonction de la déformation volumique et des variations de la pression interstitielle et de la température [COU 91].

En particulier, les 4 paramètres poro-élastiques peuvent être déterminés par des essais en conditions isothermes. Pour ces conditions, on obtient en non drainé :

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0) = 3 k \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) - 3 b M \left(\frac{m}{\rho_{fl}^0}\right) \quad [1.24]$$

$$p = p^0 + M(-b \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{m}{\rho_{fl}^0}) \quad [1.25]$$

Et en drainé :

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0) = 3 k_0 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) - 3 b (p - p^0) \quad [1.26]$$

$$\frac{m}{\rho_{fl}^0} = \frac{1}{M} \left(1 + \frac{b^2 M}{k_0}\right) (p - p^0) + \frac{b}{3k_0} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) \quad [1.27]$$

où k_0 et k sont les modules de compressibilité, $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^0$ les contraintes volumiques totales

respectivement à l'état de référence et à l'instant t et $tr(\boldsymbol{\varepsilon})$ la déformation volumique.

Au cours d'un essai de compression isotrope en condition drainée ($p = p^0$) on peut déterminer directement le module de compressibilité drainé k_0 et le coefficient de Biot b à partir des mesures de la déformation volumique de fluide entrant ou sortant de l'éprouvette. On a, en effet, dans ce cas :

$$k_0 = \frac{\Delta\sigma_v}{9\varepsilon_v}, \quad b = \frac{m}{\rho_{fl}^0} \frac{1}{\varepsilon_v} \quad [1.28]$$

Où $\Delta\sigma_v = tr(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0)$ est la variation de la contrainte volumique et la déformation volumique moyenne.

Un essai de compression isotrope en condition non drainée, pour lequel au cours d'un chargement/déchargement en contrainte isotrope totale, tout échange de fluide, entre l'éprouvette et le milieu extérieur, est nul ($m = 0$), permet la détermination directe du module de compressibilité non draine k , du coefficient de Skempton B_s et du produit bM , à partir des mesures de la déformation volumique et de la pression interstitielle. On obtient :

$$k = \frac{\Delta\sigma_v}{9\varepsilon_v}, \quad B_s = \frac{\Delta p}{\Delta\sigma_v} \quad \text{et} \quad bM = \frac{\Delta p}{\varepsilon_v} \quad [1.29]$$

Où $\Delta p = p - p_0$ la variation de pression interstitielle au cours de l'essai.

On utilisera plus loin ces expressions pour l'identification des paramètres de couplage poroélastiques effectifs via des essais numériques d'homogénéisation. Notons que dans le cas des matériaux anisotropes des chargements adaptés peuvent être utilisés pour la détermination de ces paramètres poroélastiques (voir par exemple [ESC 02]).

1.2.4 Concept de contrainte effective

L'équation [1.17] fait apparaître une contrainte effective dans le sens que les déformations du matériau poreux chargé mécaniquement par une contrainte et une pression fluide se déforme comme ce même matériau chargé uniquement par la contrainte effective. De ce point de vu la contrainte effective est bien un concept purement rhéologique [COU 04]. Notons que la notion de contrainte effective a été proposé la toute première fois en mécanique des sols par Terzagui [TER 34] du fait que la contrainte appliquée se répartissait de manière additive entre, d'une part, la contrainte dans le solide, et d'autre part la pression dans le fluide. La contrainte effective est donc définie dans le cas des sols saturés par :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_l \mathbf{I} \quad [1.30]$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ et p_l représentent respectivement la contrainte totale et la pression interstitielle de la phase liquide, \mathbf{I} le tenseur identité d'ordre 2.

Bien maîtrisé dans le cas des milieux poreux saturés, le concept de contrainte effective suscite jusqu'à présent l'intérêt de la communauté scientifique pour un éventuel élargissement dans le cas non saturé. Plusieurs tentatives ont vu le jour en introduisant dans les relations de comportement la succion (la différence entre la pression de gaz et de liquide), commençant par le travail pionnier de Bishop [BIS 59] qui a proposé la forme suivante de la contrainte effective :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_g \mathbf{I} + \chi(p_g - p_l) \mathbf{I} \quad [1.31]$$

avec p_g la pression de gaz et p_l la pression de liquide. La fonction χ varie entre 0 (sa valeur pour un sol sec) et 1 (sol saturé). Dans ces deux cas limites, la définition [1.31] se simplifie et permet de retrouver l'équation [1.30] de la contrainte effective de Terzaghi. Le point clé dans la proposition de Bishop réside dans l'identification de cette fonction χ . Elle dépend à priori principalement de l'état de saturation mais également de la structure du sol et de l'histoire de chargement ayant conduit à l'état de saturation actuel [BIS 63]. D'autres relations de contraintes effectives similaires à celle de Bishop sont proposées pour les milieux partiellement saturés comme la contrainte généralisée de Bishop, de Lewis et Schrefler [LEW 82, GRA 01] ou la forme plus connue et incrémentale de la contrainte effective basée sur une approche énergétique proposée par Coussy [COU 95].

Des expressions alternatives de la contrainte effective et de l'influence de la succion ont été aussi présentées dans les travaux de Khalili et Khabbaz [KHA 98], Khalili [KHA 04] et [HOX 07]. La différence principale de ces expressions avec le concept initial de Bishop est le fait que χ devient une fonction de la succion.

Toutes ces tentatives pour décrire le comportement des milieux non saturés en utilisant la contrainte effective reposent sur une approche macroscopique. Par ailleurs, une contrainte effective d'origine micro-structurale a été définie dans les travaux de Château et Dormieux [CHA 98, CHA 02], sur des considérations micromécaniques et dans le cadre de la micro-mécanique des milieux poreux. Des travaux similaires plus récents dans ce domaine sont ceux de [GIL 02, LI 03, JIA 04, GRA 09].

Malgré toutes les polémiques autour de sa validité, la contrainte effective reste le moyen de base dans les problèmes des milieux poreux non saturés grâce à sa simplicité et son applicabilité.

I.3 Approche micromécanique de modélisation des matériaux hétérogènes

I.3.1 Introduction à la stratégie de modélisation des matériaux hétérogènes

Les matériaux fortement hétérogènes et poreux sont souvent utilisés dans la conception de structures d'ingénierie de pointe car présentant des avantages de performance spécifiques comparés aux matériaux conventionnels. Ainsi, le développement d'outils de modélisation du comportement de ce type de matériaux multiphasiques, apparaît l'indispensable manière de compléter les essais expérimentaux permettant une analyse prédictive pertinente.

La méthode la plus simple qui mène aux propriétés homogénéisées des matériaux hétérogènes est basée sur une loi de mélange et la fraction volumique des constituants. Cette approche considère seulement une caractéristique microstructurale, la fraction volumique, et nie l'influence d'autres aspects.

Une méthode plus sophistiquée est l'approximation moyenne effective à la base de l'approche micromécanique. Cette approche consiste, par un changement d'échelle, à caractériser le comportement effectif macroscopique du milieu hétérogène réel à partir de l'exploitation des propriétés des constituants à l'échelle microscopique et d'une connaissance pouvant être complète ou partielle de la distribution spatiale de ces constituants. Le matériau hétérogène est ainsi remplacé à travers ce processus par un matériau homogène équivalent. On qualifie ce procédé de processus d'homogénéisation [BOR 01].

Les méthodes d'homogénéisation demeurent alors les plus privilégiées car non seulement elles offrent la possibilité de prédire les propriétés macroscopiques mais également les divers mécanismes tels que l'initiation de dommage et la propagation des fissures peuvent être étudiés à travers ce type d'analyse [XIA 03].

En plus grâce à ces méthodes couplées à une analyse inverse, il est possible de calibrer des paramètres liés aux modèles micromécaniques. En effet, tout changement de milieu même s'il s'agit par exemple d'une légère modification de la porosité, nécessite une ré-identification du comportement mécanique. Compte tenu du coût élevé des campagnes expérimentales d'identification des comportements, l'approche micromécanique peut ainsi s'avérer pertinente.

Le principe de cette méthode est un passage d'une échelle inférieure microscopique où on distingue les hétérogénéités à une échelle macroscopique où l'ensemble est homogène, c'est-à-dire, on caractérise les propriétés physiques et les comportements à l'échelle

macroscopique à partir d'une description microstructurale du matériau en utilisant le processus d'homogénéisation.

A partir de la solution du problème de l'inclusion ellipsoïdale dans un milieu infini par L Eshelby [ESH 57], plusieurs techniques de changement d'échelles ont été développées (Hashin [HAS 62], Budiansky [BUD 65], Mori-Tanaka [MOR 73, HIL 65] pour ne citer que quelques sommets des travaux dans le domaine). Des progrès significatifs d'estimation des propriétés des composites ont été réalisées via l'utilisation des méthodes variationnelles, ([HAS 63], Willis [WIL 81] et Ponte Castaneda [CAS 95], Suquet [SUQ 95]). Ces méthodes basées sur le principe variationnel permettent l'encadrement des propriétés effectives étudiées en fournissant leurs bornes supérieures et inférieures.

Une autre approche d'homogénéisation est basée sur la théorie mathématique asymptotique [SAN 80]. Cette méthode applique une expansion asymptotique du déplacement et des champs de contraintes sur un paramètre normal de longueur qui est le rapport d'une taille caractéristique des hétérogénéités et une mesure de la macrostructure [GUE 90]. L'homogénéisation asymptotique fournit aussi bien les propriétés effectives que les champs locaux de contrainte et déformation. Cependant, habituellement les considérations de ces méthodes sont limitées aux simples géométries microscopiques, assortie avec une hypothèse de périodicité de la microstructure.

La prise en compte d'un comportement de complexité croissante des constituants fait de l'approche d'homogénéisation numérique basée sur la cellule unitaire une méthode plus attractive. Cette méthode a été utilisée dans un grand nombre d'applications [VAN 01, DOG 03, BEL 08]

Cette approche micromécanique, largement développée dans le domaine des matériaux hétérogènes multiphasiques [ZAO 02], apporte également une bonne connaissance du comportement mécanique des milieux poreux [AUR 77, DOR 02] et des phénomènes de transport dans ces milieux [ENE 75, BEA 91, LEM 01]. Les approches micromécaniques permettent donc d'introduire une modélisation fine de phénomènes en particuliers couplés à l'échelle de la microstructure. Néanmoins, il faut bien noter que ces approches doivent être nécessairement appuyées par des essais expérimentaux qui permettent d'identifier les paramètres et les phénomènes physiques influant à l'échelle de la microstructure. Nous nous proposons de rappeler au paragraphe suivant le principe général de cette méthodologie.

I.3.2 Processus d'homogénéisation

Les approches de changement d'échelle ont pour objectif principal de déterminer le

comportement macroscopique à partir des comportements élémentaires des différentes phases constituant le matériau composite afin de remplacer le matériau réel hétérogène par un matériau effectif, homogène équivalent [BOR 01]. Une fois soumis aux mêmes chargements, ce matériau est censé se comporter de la même façon que le matériau réel. Toute la complexité de la méthode réside donc dans la possibilité de décrire rigoureusement la structure hétérogène observable à une échelle plus fine. Parmi ces approches, l'homogénéisation périodique qui repose sur l'hypothèse de périodicité de la morphologie et le comportement macroscopique est déterminé à partir d'un problème posé sur la célèbre cellule de base à géométrie connue, et l'homogénéisation des matériaux aléatoires ou la microstructure est caractérisé que de façon statistique.

La démarche consiste alors de mener les calculs permettant d'analyser le comportement des structures d'une manière beaucoup plus simple sur un échantillon hétérogène de la structure macroscopiquement homogène. Cet échantillon est ce qu'on appelle dans la théorie d'homogénéisation, un volume élémentaire représentatif (VER) (voir Fig. 1.2). Ce choix de VER implique donc la séparation des échelles, microscopique et macroscopique.

Lors de la liaison de ces échelles, plusieurs problèmes se posent. Parmi eux: comment appliquer le chargement au VER à partir de la déformation ou contrainte macroscopique au point correspondant à l'échelle macroscopique, résoudre les problèmes aux limites sur le VER et calculer la réponse macroscopique correspondante à ce problème. Tout d'abord, des précisions sur la séparation des échelles doit être données. Suivant le travail de Zaoui [ZAO 02], les tailles caractéristiques de ce problème sont listées :

- d : la taille caractéristique des hétérogénéités des matériaux.
- l : la taille du volume élémentaire représentatif.
- L : la taille caractéristique de la structure.

Le choix de l'échelle de départ à adopter est guidé par deux préoccupations : ne pas descendre inutilement à un niveau plus fin qu'il n'est nécessaire pour rendre compte des propriétés que l'on veut analyser ; s'assurer que l'échelle retenue est encore justifiable par les éléments de la mécanique des milieux continus [BOR 01].

Par conséquent, l doit être proportionnée tant par rapport à d qu'à L , c'est à dire : $d \ll l \ll L$, de manière à respecter une double condition :

- $l \ll L$: pour pouvoir traiter la structure comme un milieu continu et y déterminer des champs continus de contraintes et de déformations (volume élémentaire).
- $l \gg d$: pour pouvoir affecter aux points macroscopiques de la structure un comportement homogène si son matériau constitutif est considéré comme

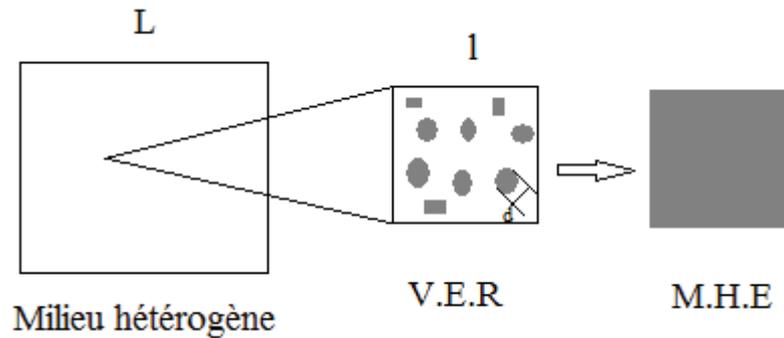


Fig. 1.2 : Séparation d'échelle ($d \ll l \ll L$)

Le VER du matériau hétérogène considéré qui reste suffisamment petit par rapport aux dimensions caractéristiques des structures macroscopiques et dont le comportement mécanique global peut être affecté aux points de ces structures comme comportement effectif ou comportement homogène équivalent [BOR 01]. A la fin, le milieu hétérogène réel peut être remplacé par un milieu homogène équivalent (MHE) ou milieu effectif de sorte que les lois de comportement macroscopique de deux matériaux soient les mêmes. Ces derniers sont réalisés en moyennant des champs locaux du matériau hétérogène réel.

Dans le cas d'un milieu périodique, il suffit que la taille de la cellule de base soit petite devant celle de la structure en respectant certaines règles de périodicité sur les conditions aux limites et de chargement.

Le VER du matériau est soumis à un chargement uniforme de déformation macroscopique \mathbf{E} (ou de contrainte $\mathbf{\Sigma}$), induisant des champs locaux de déformation et de contrainte au sein du VER. Le comportement homogène équivalent est alors défini comme la relation entre la moyenne des contraintes et le chargement \mathbf{E} (ou encore entre la moyenne des déformations et le chargement $\mathbf{\Sigma}$) de sorte que, pour des phases élastiques linéaires, la loi de comportement homogène équivalent est définie par [BOR 01] :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad [1.32.a]$$

Respectivement pour le chargement en contrainte on obtient :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon} dV = \mathbb{S} : \mathbf{\Sigma} \quad [1.32.b]$$

Dans ces expressions \mathbb{C} et \mathbb{S} désignent respectivement le tenseur de quatrième ordre de rigidité et de souplesse homogène équivalent et où les « : » désignent le produit tensoriel doublement contracté.

De par la linéarité du problème. Les grandeurs microscopiques sont directement reliées aux grandeurs macroscopiques grâce aux tenseurs dits de localisation (ou de concentration pour le cas d'un chargement en contrainte):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{A} : \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{B} : \boldsymbol{\Sigma} \quad [1.33]$$

On peut démontrer en reportant dans la relation, que la moyenne volumique du tenseurs \mathbb{A} (ou) \mathbb{B} est un tenseur identique d'ordre quatre. ç.à.d :

$$\langle \mathbb{A}(\mathbf{X}) \rangle_V = \mathbb{I} \quad \text{et} \quad \langle \mathbb{B}(\mathbf{X}) \rangle_V = \mathbb{I} \quad [1.34]$$

Notons que généralement les deux méthodes en approche déformation imposée ou en approche contrainte imposée conduisent à des comportements homogénéisés différents, de sorte que \mathbb{C} et \mathbb{S} ne sont pas les inverses l'un de l'autre. Cette approche est dite directe, les coefficients élastiques homogénéisés relient les déformations moyennes et les contraintes moyennes sur le volume représentatif. La procédure d'homogénéisation passe donc par trois étapes que sont la représentation de la microstructure (choix du VER), la localisation (champs locaux de déformations et de contraintes) et finalement l'homogénéisation (comportement macroscopique).

1.3.3 Problème cellulaire Hydro-poro-élastique

On rappelle brièvement dans cette sous partie les résultats principaux de l'homogénéisation du comportement poro-élastique linéaire d'un milieu poreux saturé [DOR 06, XU 04, DO 08, BIE 10].

Considérons un milieu poreux, constitué d'une partie solide élastique linéaire et d'une partie de fluide saturant. La phase poreuse est modélisée par un ensemble de pore repartis dans la phase solide et fluide par l'intermédiaire d'une pression porale. Le VER de ce milieu poreux constitué de Ω_s la partie occupée par le squelette et Ω_p la partie occupée par les vides. Ce V.E.R est soumis à un chargement Hydromécanique couplé à travers une déformation moyenne imposée \mathbf{E} pour le chargement mécanique, une pression pour le chargement hydraulique uniforme appliqué dans les pores.

Désignons par $\underline{\mathbf{u}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ les champs de déplacement, de déformation et de contrainte locaux régnant en un point du VER induits par ce chargement macroscopique. Ces champs sont solutions du problème cellulaire suivant [BIE 10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_i : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}_i \quad (\Omega_i, i = s, p) \\ \text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (\Omega_s) \\ \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) = \mathbf{E} \cdot \underline{\mathbf{x}} \\ \|\boldsymbol{\sigma}\| \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0, \quad \|\underline{\mathbf{u}}\| = 0 \quad (\omega_{sp}) \end{array} \right. \quad [1.35]$$

Avec $\boldsymbol{\tau}_p = -p_l \boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\tau}_s = 0$

Où ω_{sp} désigne l'interface entre la phase solide et la phase liquide, p_l est la pression de phase liquide, $\boldsymbol{\delta}$ est le tenseur identité du second ordre.

Donc, pour résoudre ce problème, on peut le décomposer en deux sous-problèmes élémentaires :

-Le premier sous-problème correspond à un chargement purement mécanique :

$$\mathbf{E} \neq 0, p_l = 0$$

-Le deuxième correspond au problème élastique linéaire avec précontrainte (un chargement purement hydrique) : $\mathbf{E} = 0, p_l \neq 0$

La solution du premier sous-problème est connue comme :

$$\boldsymbol{\Sigma}' = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} \quad [1.36]$$

La solution du deuxième sous-problème peut être déterminée en utilisant le théorème de Levin [DOR 06],

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}'' &= -p_l \mathbf{B} \\ \mathbf{B} &= f_p \boldsymbol{\delta} : \mathbb{A}_p \end{aligned} \quad [1.37]$$

Où \mathbf{B} est le tenseur de Biot et $\boldsymbol{\delta}$ le tenseur d'identité de deuxième ordre.

Donc on peut obtenir la solution de ce problème :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} + \langle \boldsymbol{\tau}_i : \mathbb{A} \rangle \\ &= \mathbb{C}_{\text{hom}} : \mathbf{E} - p_l \mathbf{B} \end{aligned} \quad [1.38]$$

Et la variation de porosité s'écrit sous la forme [DOR 06] :

$$\phi - \phi_0 = \mathbf{B} : \mathbf{E} + \frac{p_l}{N} \quad [1.39]$$

Où N peut s'écrire :

$$\frac{1}{N} = \boldsymbol{\delta} : (\mathbb{C}_s - \mathbb{C}_p)^{-1} : (\mathbf{B} - f_p \boldsymbol{\delta}) \quad [1.40]$$

Où ϕ_0 et ϕ présentent respectivement la porosité lagrangienne à l'état initial et celle à l'état actuel et f_p la fraction volumique de l'espace poreux (la porosité eulérienne).

Dans le cas particulier d'un comportement isotrope du solide et d'un comportement macroscopique isotrope, l'expression du module de Biot b est défini par :

$$\mathbf{B} = b \boldsymbol{\delta}, \quad b = 1 - \frac{k_{\text{hom}}}{k_s} \quad [1.41]$$

La variation du volume de l'espace poreuse s'écrit dans ce cas :

$$\phi - \phi_0 = \mathbf{B} : \mathbf{E} + \frac{p_l}{N} = b \text{tr} \mathbf{E} + \frac{p_l}{N} \quad [1.42]$$

Avec le module de Biot du solide :

$$\frac{1}{N} = \frac{b - \phi}{k_s} \quad [1.43]$$

Notons au passage que le module de Biot du solide N représente la contribution du solide seul dans le module de Biot M défini précédemment et qui comporte lui aussi la contribution de la compressibilité du fluide. Par rapport aux milieux poreux saturés, les milieux poreux non saturés présentent certaines spécificités que l'on doit considérer au plan de la modélisation macroscopique [CHA 95, CHA 98, CHA 02]. En effet, en plus des efforts intérieurs dans les phases volumiques représentés par des tenseurs de contrainte de Cauchy, il convient de rendre compte de l'existence d'efforts intérieurs localisés dans les interfaces entre les phases volumiques (tension de surface). Comme pour les milieux poreux saturés, il est possible d'étudier un milieu poreux non saturé en se plaçant à deux échelles d'espace distinctes.

I.4 Homogénéisation numérique sur un VER

Plusieurs raisons d'ordres différents motivent l'orientation actuelle des techniques de changement d'échelle vers l'homogénéisation numérique basée sur l'utilisation de la méthode des éléments finis. Déjà la possibilité de calculs sur un VER au lieu d'une structure complexe fait de l'homogénéisation numérique un outil efficace pour gagner en temps et couts de calculs. En plus, le développement des méthodes numériques pour prendre en compte le comportement non linéaire des hétérogénéités, décrire les microstructures et les mécanismes les plus complexes, et éviter les limitations des méthodes analytiques en termes de conditions

aux limites et de chargement font de l'homogénéisation numérique une méthode pour dépasser tout les défis et attaquer tout problème d'ingénierie n'ayant pas trouvé une réponse par les approches macroscopiques classiques. Il faut signaler toute de suite que cette attractivité est aussi due à l'homogénéisation périodique et à sa définition mathématique rigoureuse du comportement homogénéisé ([VAN 01, BEL 08, ABO 08]). Les méthodes de cellule de base atteignent un objectif double : elles fournissent aussi bien une information valable des champs microstructuraux que les propriétés effectives du matériau. Ces propriétés sont généralement déterminées en adaptant la moyenne des champs microscopiques de contrainte déformation, résultante de l'analyse d'une cellule représentative à un certain pas de chargement et avec une loi de comportement établie préalablement. La plupart des autres techniques connus d'homogénéisation sont non appropriées dès que le comportement constitutif devient non linéaire, et il est extrêmement difficile de prendre en compte les changements géométriques et physiques de la microstructure à des pas de chargement complexes. Dans ce domaine les méthodes d'homogénéisation numériques trouvent leur entière justification comme le montrent de nombreux travaux dans des domaines très variés ([SAN 80, SUQ 95, SMI 98, TER 00, KOU 04]).

En dépit d'autres efforts informatiques, l'homogénéisation numérique a permis de soulever d'autres défis important comme l'utilisation de la cellule de Voronoi par Ghosh et ses collaborateurs [GHO 95, GHO 96], la plasticité cristalline par [MIE 99-2].

Si la technique d'homogénéisation numérique a connu un succès incontournable, elle a aussi montré un désavantage quand à la description de la microstructure. En effet, la majeure partie des études sur ce sujet utilise la méthode des éléments finis impliquant le fait que le maillage doit se conformer à ces irrégularités afin de séparer les différents constituants de la microstructure, un élément du maillage ne doit contenir qu'un seul matériau. Cependant, le principal défaut des méthodes actuelles pour certains problèmes (ex. problèmes de fissuration) est la gestion du maillage. En effet, celui-ci doit respecter scrupuleusement la géométrie d'inclusion. Plusieurs alternatives ont été proposées pour réduire la dépendance au maillage : la théorie asymptotique variationnelle [TAN 08], quelques auteurs ont appliqué une méthode numérique basée sur la Transformée de Fourier (FFT) qui pourrait être employé pour l'analyse micromécanique des éléments de volume représentatifs dans les conditions périodiques [MOU 98], [MIC 99].

Alternativement aux techniques de remaillage une réponse à ces problèmes a été apportée par le développement de la méthode aux éléments finis étendus ou XFEM [BEL 99] [MOE 99]. Grâce à de nombreux développements par plusieurs équipes de recherche, les résultats et les

performances obtenus sont tels que les industriels n'hésitent plus à l'intégrer à leur méthodologie de calculs. Le principal atout de cette méthode est de proposer une simple extension basé sur la méthode des éléments finis en profitant du maillage indépendant de la géométrie du matériau. Bénéficiant de cette possibilité de représenter une discontinuité (interface, vides, inclusion), sans avoir à modifier le maillage, la méthode XFEM trouve son application dans des domaines variées tel que la rupture dynamique, la multi-fissuration ou encore le domaine qui nous intéresse ici l'homogénéisation numérique. L'utilisation de la méthode level set à grandement facilité la modélisation des vides et de bi-matériaux [SUK 01, NAG 03, HET 06] et d'autres microstructures plus complexes [MOE 03]. C'est donc vers la méthode d'homogénéisation numérique basée sur XFEM que s'oriente notre préférence pour résoudre notre problème ici qui est la prédiction du comportement macroscopique des matériaux hétérogènes et poreux.

I.5 Méthodologie d'homogénéisation non linéaire analytique

Si la méthode d'homogénéisation numérique a connu un intérêt important à l'aide des méthodes numériques lui offrant la possibilité de prendre en compte le comportement non linéaire des matériaux hétérogènes, il serait très judicieux de rappeler les progrès des méthodes d'homogénéisation analytiques dans le domaine nonlinéaire [DO 08, BAR 07, REK 05].

La méthode d'homogénéisation non linéaire s'appuie souvent sur la linéarisation des lois constitutives locales en utilisant le concept d'un milieu linéaire de comparaison (MLC) [WIL 81]. Cette notion de MLC sera systématisée ultérieurement par Ponte Castaneda [CAS 91]. Ce concept permet d'appliquer la procédure d'homogénéisation linéaire à un matériau hétérogène de comportement non linéaire. L'idée principale consiste donc de remplacer le VER du milieu hétérogène original (avec des propriétés mécaniques changeant par rapport à l'espace et au temps) par un VER qui a des propriétés variant seulement avec le temps, et à chaque temps fixé, le comportement des constituants associé à chaque phase est linéarisé. La réponse macroscopique du milieu hétérogène initial repose donc sur celle du milieu linéaire de comparaison (M.L.C). Dans la littérature, plusieurs méthodes ont été proposées pour homogénéiser le comportement non linéaire d'un matériau hétérogène. La limitation de chaque méthode a été montrée par plusieurs auteurs dans des synthèses sur la correction des différentes méthodes d'homogénéisation non linéaire [SUQ 97, BOR 01, DO 08, REK 07, CAS 91, DVO 92].

La procédure d'homogénéisation du milieu hétérogène non linéaire peut être classée en deux

catégories [SUQ 97, BOR 01, DO 08, REK 07]:

- les approches en champ moyen : où la contrainte homogène est déterminée par le moyen des champs de contrainte des phases dans le MLC. De tel type d'approche sont par exemple la méthode d'analyse des champs de transformation (ACT) proposée par Dvorak et Benveniste [DVO 92] et l'approche incrémentale de Hill [HIL 65]. Ces deux méthodes conduisent à des réponses macroscopiques trop raides par rapport à la méthode numérique (méthode des éléments finis), la méthode ACT étant plus précise quand le nombre des sous-domaines de chaque phase augmente. Des formulations ACT, incrémentale et affine sont utilisées par Chaboche et al. [CHA 05] pour étudier le comportement élasto-plastique des métaux. De plus, dans les travaux [DOG 03, GON 00], l'approche incrémentale modifiée en utilisant le module tangent isotropisé mène à des résultats plus souples en meilleur accord avec les calculs éléments finis.
- les approches par potentiel : le comportement effectif du composite peut alors être déduit rigoureusement à travers d'une formulation variationnelle qui étend les théorèmes énergétiques. Les résultats de la méthode sécante classique de Hutchinson [HUT 76] basée sur cette approche sont plus raides que ceux obtenus par calculs aux éléments finis. De même les résultats de la méthode sécante modifiée de Suquet [SUQ 97] et de l'approche variationnelle de Ponte-Castaneda [CAS 91], restent assez éloignés des résultats obtenus numériquement (par la méthode éléments finis) en termes des déformations microscopiques.

Notons que pour toute solution analytique ou semi-analytique d'un matériau hétérogène non-linéaire la comparaison dans la littérature est faite avec des solutions numériques, les seules à l'heure actuelle de pouvoir donner une réponse plus au moins fiable. Cela impactera notre choix lorsque la question viendra de modéliser le comportement non-linéaire des matériaux hétérogènes.

I.6 Méthodologie de modélisation du comportement Hydro-Mécanique des matériaux poreux

L'importance du couplage hydromécanique et sa modélisation dans le cadre d'une approche couplée poroélastique ont été discutées précédemment dans le cadre de la théorie poroélastique de Biot. Certes, cette approche est celle la plus utilisée en pratique permettant de traiter un spectre très large de problèmes allant de la modélisation géomécanique (avec le but primaire pour modéliser le comportement de déformation ou contrainte), simulation de

réservoir (essentiellement modélisant l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur dans des milieux poreux), mécanique de rupture etc. De nombreuses études expérimentales menées sur le comportement poromécanique des géomatériaux [TOR 87, NEV 00, YUR 04, JIA 08], confirment l'importance de ce couplage hydromécanique notamment dans le cadre de la problématique de stockage et qui sera un exemple d'étude dans notre travail [CHI 00, HOM 00, ZHA 04]. A la lumière des essais expérimentaux, de nombreux modèles ont été proposé couplés ou non à l'endommagement [ALO 90, GEN 90, BOU 02, SHA 06, HOX 07].

Une approche alternative de modélisation des couplages hydromécaniques en saturé, purement numérique, est souvent utilisée dans les dites simulateurs géomécaniques à grande échelle de réservoirs (notamment pétroliers [SET 98, SET 01, THO 03, DEA 06, JHA 07] donnant lieu à des différents méthodes de couplage. Ces méthodes peuvent être classées en quatre types : couplage total, couplage itératif, couplage explicite ou découplé [SET 01]. L'approche partiellement couplée se nomme explicitement couplée si la méthodologie est seulement exécutée une fois pour chaque pas, et itérative si la méthodologie est répétée à convergence des inconnus de contraintes et de flux de fluide [SET 01, THO 02, DEA 03]. Dans la méthode de couplage total, les équations d'écoulement et de géomécanique sont résolues simultanément à chaque pas de temps [LEW 93, JHA 07]. L'approche est stable, mais demande un développement unifié d'écoulement et de géomécanique dans un seul simulateur et donc peut être informatiquement cher. L'analyse couplée itérative par contre décompose le système d'équations en sous-systèmes d'équations correspondant chacun au simulateur de réservoir ou d'écoulement et au modèle géomécanique. Elle résout le système couplé itérativement en échangeant des valeurs de variables partagée entre les deux simulateurs par une interface d'échange de données, tandis que chaque modèle résout séparément leur sous ensembles d'équations. La méthode itérative a une meilleure efficacité de calcul par rapport à la méthode de couplage totale. En plus, à travers l'interface d'échange, la procédure itérative peut être facilement implémentée avec des simulateurs existants. L'approche explicite est un cas particulier de la méthode itérative, ou seulement une itération est prise en compte [SET 01, THO 02, DEA 03].

Enfin dans la méthode découplée, le couplage entre les deux problèmes est résolu seulement après un certain nombre d'itérations de temps d'écoulement [DEA 06, SAM 07]. Cette méthode est moins coûteuse que les autres mais elle est moins précise et exige des évaluations fiables quand à la mise à jour de la réponse mécanique.

Dans la littérature, l'approche de couplage partiel emploie souvent la méthode des différences finies [OSO 98, STO 00] pour le problème d'écoulement du fluide et la méthode des éléments

finis [LEW 98, GUT 98, KOU 98, CHI 98] pour le problème géomécanique. En raison du coût de calcul réduit, la méthode explicite [FUN 92, KOU 98, SET 99-2] est souvent préférée à celle itérative [SET 94, SET 98, CHI 99]. Comme il été souligné par [SET 99-2], la méthode itérativement couplée assure le même résultat que la méthode à couplage total. L'approche de couplage partiel se fonde sur une reformulation du couplage de contrainte-écoulement, tels qu'un code conventionnel d'analyse des contraintes qui peut recevoir des charges thermique et de pression par échange à travers l'interface. En raison de ce principe, la méthode de couplage partiel bénéficie des derniers développements dans la physique et les techniques numériques dans les simulateurs de réservoirs. Ces efforts de développement sont concentrés sur le code d'interface entre les simulateurs. En fait, de plus grandes étapes de temps peuvent effectivement réduire le coût de calcul mécanique, qui peut être énorme comparé au coût de calcul de réservoir.

Un exemple de formulation générale du problème couplé dans le travail de Settari [SET 01] est donné sous la forme suivante pour illustrer les différents schémas de couplage (voir aussi [MAR 06]):

$$\begin{bmatrix} [K] & [L] \\ [L]^T & [E] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_t \underline{\delta} \\ \Delta_t \underline{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}} \\ \underline{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \quad [1.44]$$

Où $[K]$ est la matrice de rigidité, $\underline{\delta}$ est le vecteur du déplacement, $[L]$ est la matrice couplage à l'écoulement inconnus, $\underline{\mathbf{P}}$ est le vecteur de réservoir inconnus (de pression, saturation et de température), $[E]$ est la matrice de l'écoulement. A droite d'équation, $\underline{\mathbf{F}}$ est le vecteur des forces appliquées, $\underline{\mathbf{R}}$ est le côté droit des équations d'écoulement.

Autrement, la matrice $[E]$ peut s'écrire sous la forme: $[E] = [T] - [D]$, $[T]$ est la matrice symétrique de transmissibilité, $[D]$ est la matrice d'accumulation (diagonale). La matrice $\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{Q}} - [T]\underline{\mathbf{P}}^n$, $\underline{\mathbf{Q}}$ est le vecteur des conditions aux limites.

Le symbole Δ_t représente le changement d'une quantité au cours d'un pas de temps.

$$\begin{aligned} \Delta_t \underline{\delta} &= \underline{\delta}^{n+1} - \underline{\delta}^n \\ \Delta_t \underline{\mathbf{P}} &= \underline{\mathbf{P}}^{n+1} - \underline{\mathbf{P}}^n \end{aligned} \quad [1.45]$$

Le couplage explicite peut être réalisé par un ralentissement du terme de couplage avec un pas de temps précédent. En commençant par la solution du réservoir et le changement de contrainte lors du pas précédent, $\Delta_t \underline{\delta}^n$, on résout en premier :

$$([T]-[D])\Delta_t \underline{\mathbf{P}}^{n+1} = \underline{\mathbf{Q}} - [T]\underline{\mathbf{P}}^n - [L]\Delta_t \underline{\boldsymbol{\delta}}^n \quad [1.46]$$

Puis en utilisant la solution d'écoulement $\Delta_t \underline{\mathbf{P}}^{n+1}$, la solution de contrainte est donnée par :

$$[K]\Delta_t \underline{\boldsymbol{\delta}}^{n+1} = \underline{\mathbf{F}} - [L]\Delta_t \underline{\mathbf{P}}^{n+1} \quad [1.47]$$

La méthode itérative consiste en une solution répétée des équations d'écoulement et de contrainte durant les pas de temps selon :

$$\begin{aligned} ([T]-[D])\Delta_t \underline{\mathbf{P}}^{(v+1)} &= \underline{\mathbf{Q}} - [T]\underline{\mathbf{P}}^n - [L]\Delta_t \underline{\boldsymbol{\delta}}^{(v)} \\ \text{et } [K]\Delta_t \underline{\boldsymbol{\delta}}^{(v+1)} &= \underline{\mathbf{F}} - [L]\Delta_t \underline{\mathbf{P}}^{(v+1)}, \nu = 1, \dots\dots \\ \text{avec } \Delta_t \underline{\boldsymbol{\delta}}^{(v)} &= \underline{\boldsymbol{\delta}}^{(v)} - \underline{\boldsymbol{\delta}}^n, \Delta_t \underline{\mathbf{P}}^{(v+1)} = \underline{\mathbf{P}}^{(v)} - \underline{\mathbf{P}}^n. \end{aligned} \quad [1.48]$$

Évidemment quand l'itération (l'équation [1.48]) converge, la solution est identique à celle de la méthode de couplage total de l'équation [1.45].

Cette dernière méthode augmente l'efficacité de calcul sans sacrifier la précision des résultats.

I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, une revue très brève de la mécanique des milieux poreux et des approches d'homogénéisations a d'abord été présentée. Ensuite une synthèse des études expérimentales et numériques les plus remarquables sur le couplage hydromécanique a été dressée principalement en saturé, bien que certaines indications ont été données pour le cas non saturé. Ces rappels bibliographiques permettent de situer le travail présenté dans les chapitres qui suivent et de justifier les choix faits par la suite et notamment le suivi d'une homogénéisation numérique pour modéliser le comportement poromécanique d'un géomatériau tel que l'argilite de Meuse Haute-Marne. De nombreuses approches numériques développées et proposées pour la modélisation du comportement des matériaux fortement hétérogènes sont particulièrement adaptées au comportement non-linéaire des constituants. Néanmoins des difficultés s'apparaissent quand à l'utilisation de la méthode des éléments finis tel que l'hypothèse des milieux périodiques, le raffinement de maillage pour les discontinuités ou la conformité du maillage et de la géométrie dans le cas des microstructures complexes. Cela conditionne en grande partie le choix d'une méthode numérique libérée de la contrainte d'un maillage régulière telle que la méthode XFEM. Finalement, en termes de couplages hydromécanique, tout en explorant les possibilités offertes par la théorie classique poroélastique et la méthodologie de changement d'échelle, les autres méthodes plus numériques, utilisées notamment dans les simulateurs hydro-géomécaniques seront étudiées.

Chapitre II La méthode des éléments finis étendus (XFEM) : principes fondamentaux

II.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à une description approfondie des principes de base de la méthode des éléments finis étendus (XFEM). L'objectif est de donner les détails de l'approche en discutant ses avantages et ses inconvénients à travers les nombreuses études réalisées dans la littérature. Le chapitre commence par un examen approfondi de la formulation de XFEM, son apparition et son évolution extraordinaire.

Le concept de l'enrichissement sera ensuite expliqué en détail pour montrer l'avantage qu'offre cette approche grâce à l'enrichissement de la base d'éléments finis classiques. Les différentes techniques disponibles et les fonctions d'enrichissement sont présentées y compris celles basées sur les fonctions de niveau (level set) qui permet le saut d'un matériau à un autre séparé par une interface dans un même élément de maillage. La Formulation du problème aux conditions aux limites, de sa discrétisation en utilisant la méthode XFEM, des règles d'intégration numérique de Gauss, sous-quad et les méthodes de sous-triangles, seront expliqués. Le problème de propagation de fissure à la base de l'apparition de la méthode XFEM sera l'exemple d'illustration de l'emploi de level set. Le chapitre se termine par des exemples qui donnent des résultats comparables pour un certain nombre de problèmes bien connus dans la littérature en guise de validation du développement réalisé dans le cadre de ce travail, avant l'application plus large de la méthode dans un certain nombre de problèmes dans les chapitres suivantes.

II.2 Le recours à la méthode XFEM

L'origine de la méthode XFEM se trouve en la nécessité de modéliser des structures complexes et souvent contenant de nombreuses discontinuités, éventuellement évolutives et les difficultés que les méthodes classiques, y compris les méthodes numériques basées sur les éléments finis rencontrent à traiter le maillage de ces structures complexes. Le problème de la fissure est symptomatique et expliquant le mieux l'apport de la méthode. La première dans ce cas est liée au calcul de l'état de contrainte dans un milieu avec une fissure, nécessitant le traitement des discontinuités. Dans les méthodes traditionnelles, cette difficulté est gérée par un maillage conforme à la discontinuité. Ça nécessite, cependant un calcul couteux par la génération-régénération d'un maillage, faisant de la méthode des éléments finis un outil lourd à manipuler spécialement pour les problèmes 3D. La deuxième difficulté réside dans la nature singulière en fond de fissure. Afin de résoudre cette singularité, en utilisant la méthode des éléments finis, un raffinement de maillage est exigé pour chaque pas de chargement (ou de

propagation) dans cette région. D'ailleurs, pour des structures géométriques réelles, ceci induit un temps de calcul particulièrement long et rend prohibitive la simulation numérique.

La modélisation de la croissance des fissures utilisant la méthode des éléments finis et des éléments de frontières a été étudiée intensivement dans l'objectif de résoudre les différentes difficultés. Un des exemples des méthodes alternatives est celle basée sur la méthode de Schartz-Neumann appliquée pour les fissures arbitraires dans une configuration tridimensionnelle [NIS 83] et des fissures non-planaires [NIK 01]. Les fissures en 3D ont été modélisées également comme une distribution continue de boucles de dislocation dans un cadre vibrationnel [XU 93, XU 94]. D'autres méthodes et techniques ont été utilisées [MUR 94] ou la méthode de la fissure auto-similaire [XU 99] qui a permis un calcul exact des paramètres de rupture en 3D.

Dans le même contexte, la méthode des éléments de Galerkin (Element Free Galerkin Method) [BEL 94] qui fait partie de la classe des méthodes Free-mesh a été appliquée avec succès aux problèmes de fissures bidimensionnels et tridimensionnels en statique [SUK 97] et dynamique [KRY 99]. Tandis que certaines de ces méthodes ont été employées avec succès en obtenant des solutions aux problèmes d'ingénierie, leur incorporation dans des codes de calcul est difficile puisque la procédure numérique ne peut pas être facilement superposée à l'architecture existante. Par conséquent, il était nécessaire de retravailler complètement d'autres algorithmes et donc des interventions considérables.

La méthode des éléments finis étendus a émergé comme une alternative fiable aux méthodes décrites ci-dessus et allège les deux imperfections liées à la discontinuité du champ de déplacement et la singularité des champs de contraintes en fond de fissure. La méthode XFEM est liée à la méthode des éléments finis généralisée (GFEM) qui permet d'enrichir l'espace des fonctions de forme, grâce à la connaissance à priori des propriétés de la solution du problème. La méthode des éléments finis généralisée (GFEM) est basée sur la méthode de la partition de l'unité introduite initialement par les travaux de [BAB 94], et développée par Babuska et Melenk [MEL 96, 97]. La méthode GFEM a été elle-même développée plus récemment par Duarte et Strouboulis [DUA 00, STR 00] en combinant la méthode des éléments finis standard et la partition de l'unité pour incorporer dans l'approximation des fonctions spéciales (handbook functions) avec une intégration numérique robuste (dite fast remeshing approach) pour gérer les vides, les inclusions et les coins, chose qui a augmenté la précision de la solution de cette méthode qui est capable d'utiliser un maillage indépendant partiellement ou totalement de la géométrie du domaine. Mathématiquement, la partition de l'unité est définie par un ensemble de fonctions dont la somme des valeurs en un point est

égale à 1 [MEL 96]. L'idée de la méthode de partition de l'unité est d'utiliser, dans l'approximation éléments finis des fonctions permettant de capturer au mieux la singularité du champ de déplacement.

Belytschko et Black [BEL 99] ont appliqué la partition de l'unité de [MEL96] au problème des fissures en incorporant les formules des champs asymptotiques dans l'approximation du déplacement. Les travaux de Moës ont ensuite donné la forme du déplacement avec la fonction Heaviside représentant le saut du champ de déplacement [MOE 99]. Par l'incorporation d'un enrichissement discontinu dans l'approximation du déplacement, la nécessité pour le remaillage et le raffinement du maillage est éliminée. Cependant même si la méthode montre une indépendance du maillage, il faut garder une certaine densité du maillage autour du front de fissure pour calculer exactement le facteur d'intensité de contrainte. L'utilisation du concept de partition de l'unité permet de trouver les fonctions d'enrichissement pour l'approximation du déplacement. Un des avantages majeur de la méthode des éléments finis étendus est que les fissures peuvent être introduites directement dans le maillage utilisé pour l'analyse de la structure, donnant ainsi une économie de temps de calcul et permettant de sauvegarder les scénarios d'endommagement à analyser rapidement.

Très vite, la méthode XFEM sort du cadre de la mécanique de rupture et envahie de multiples domaines scientifiques : modélisation des vides et des bi-matériaux [SUK 01, HET 06], la plasticité [ELG 06], l'étude des microstructures des composites [MOE 03], nucléation des fissures [BEL 03], ou encore les bio-matériaux [BUD 06] et les matériaux piezo-electriques [BEC 08]. Il faut noter la rapidité avec laquelle l'approche est passée du monde scientifique (début des travaux en 1999) au monde industriel par son intégration aux codes de calcul (ASTER, SAMCEF, et ABAQUS). De nombreux scientifiques s'y intéressent également, ce qui a permis de réaliser des études comparatives avec d'autres stratégies comme la comparaison entre l'approche des fortes discontinuités (SDA) et la XFEM réalisée par Jirasek et Belytschko [BEL 02]. Actuellement, les développements récents concernant la XFEM visent à rendre la méthode plus robuste [BEC 05] afin d'atteindre les taux de convergence optimaux attendus [LAB 05].

Toujours dans le contexte d'amélioration de XFEM, son couplage avec la technique ou la méthode Level set utilisé initialement en mécanique des fluides [OSH 88, SET 99-1] a été d'un succès considérable et a été un précurseur en plus pour le développement de l'approche et à son intégration au codes de calcul. La méthode level-set supprime la nécessité de faire évoluer la géométrie de l'interface dans le schéma numérique et fournis un traitement normal du déplacement des interfaces dans une dimension arbitraire [MOE 02, SUK 03]. Dans cette

méthode l'interface est représenté comme le niveau zéro d'une fonction de distance de dimension plus élevée que la dimension de l'interface.

D'autres travaux très récents concernent XFEM d'ordre supérieur pour améliorer la représentation géométrique de l'interface [CHE 09, DRE 10]. Les fonctions d'enrichissement sont usuellement définies avec l'aide des fonctions de niveau (level set) pour accéder à la distance de l'interface à n'importe quel point. XFEM est utilisé dans la plupart des cas avec une approximation linéaire d'une fonction de forme et une fonction level set linéaire. Des éléments d'ordre supérieur sont utilisés avec des fonctions de forme quadratique pour accélérer la convergence, et des fonctions level set d'ordre 2 sont choisies pour donner une représentation exacte de l'interface.

Le couplage de la méthode XFEM et level set, rend cette approche très avantageuse pour la prédiction du comportement macroscopique des géomatériaux via une approche d'homogénéisation numérique. Dans les sections suivantes, on détaillera les différents points de développement d'XFEM abordés dans cette section.

II.3 Description des discontinuités par la méthode des fonctions de niveau (level-set method)

La méthode de fonction de niveau (level set method) a été initialement développée par S. Osher et A. Sethian [OSH 88, SET 00], pour calculer la propagation spatiale d'une interface au cours du temps. Dans cette méthode, l'interface est représentée comme un ensemble de points qui ont la même valeur de fonction (iso-contour). La méthode a supprimé le besoin de faire évoluer explicitement la géométrie d'une interface et la représente implicitement à l'aide de la ligne de niveau d'un champ scalaire. La courbe évolue en mettant à jour une fonction de niveau à des coordonnées fixes en fonction du temps. L'approximation de la courbe de niveau est faite sur un maillage fixe, ceci évite le cheminement de régénération ou de mouvement de maille. En plus, ceci permettra de coupler level set avec la méthode XFEM. Par conséquent, la mise à jour de la courbe de niveau à chaque itération peut utiliser la même maille qui est employée pour les calculs d'éléments finis. Les propriétés géométriques intrinsèques de l'interface (vecteur normal, courbure) sont facilement déterminés par la fonction de niveau.

Pour réduire le cout de calcul, la méthode de bande étroite (Narrow band level set method) et la méthode Fast Marching ont été développées. La méthode Fast Marching [SET 96, SET 99-1] est un cas particulier de la méthode Narrow band où la largeur de la bande se réduit à un élément simple et est applicable uniquement aux font de propagation monotone.

XFEM trouve de nombreuses applications grâce à son coulage avec XFEM qui était un atout considérable pour repérer, mettre à jour la position d'une interface automatiquement avec un maillage régulier fixe. Pour traiter un problème de croissance de fissures en 2D dans un contexte d'élasticité linéaire, Stolarska [STO 01] utilise la méthode XFEM en conjonction avec level set, et ensuite, Sukumar [SUK 03] l'utilise pour modéliser la croissance d'une seule fissure en 3D [MOE 02] ou des fissures multiples [CHO 03]. Elle était également appliquée à des problèmes de solidification et des interfaces fluides [CHE 02]. Level set a permis à d'autres auteurs d'utiliser la méthode XFEM comme base d'une approche d'homogénéisation numérique pour la description des microstructures complexes ainsi que pour la prédiction des propriétés effectives [YVE 08 , DRE 10].

II.3.1 Fonction de niveau

Pour représenter la méthode level set d'une manière simple, soit Γ une interface séparant deux milieux (Fig. 2.1). La fonction level set ϕ est définie dans un domaine Ω de telle sorte que la courbe de niveau zéro ($\phi=0$) définisse l'interface Γ d'une surface fermée et qu'elle soit une fonction distance continue ($|\nabla\phi|=1$).

A un instant t :

$$\Gamma(t) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \phi(\underline{\mathbf{x}}, t) = 0\} \quad [2.1]$$

Le déplacement de l'interface est obtenu en déterminant l'évolution dans le temps de la fonction level set. La méthode level set consiste à faire évoluer la surface globale que constitue ϕ . L'interface est déterminée par simple localisation de l'ensemble $\Gamma(t)$ pour lequel ϕ est nulle.

La fonction de niveau a les propriétés suivantes par exemple (Fig. 2.1) :

$$\begin{aligned} \phi(\underline{\mathbf{x}}, t) &> 0 \text{ pour } \underline{\mathbf{x}} \in \Omega \\ \phi(\underline{\mathbf{x}}, t) &< 0 \text{ pour } \underline{\mathbf{x}} \notin \bar{\Omega} \\ \phi(\underline{\mathbf{x}}, t) &= 0 \text{ pour } \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega = \Gamma(t) \end{aligned} \quad [2.2]$$

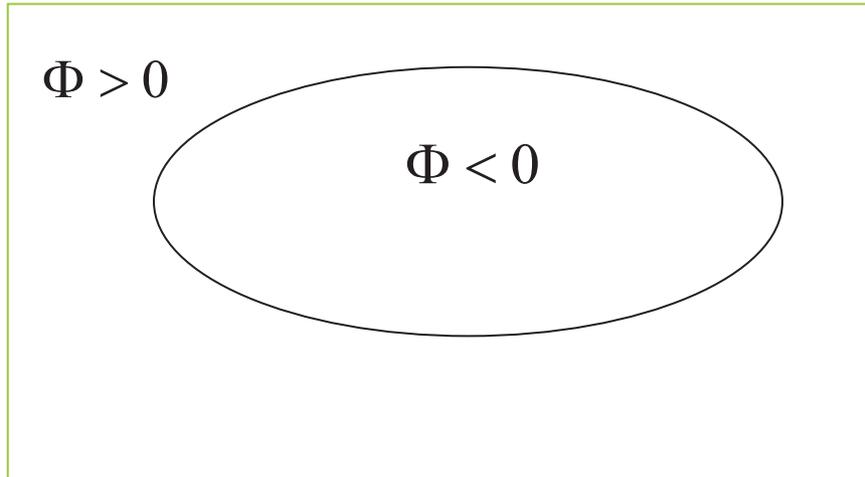


Fig. 2.1: Interface entre deux milieux $\Phi(\mathbf{x}) = 0$

Osher et Setian ont défini la fonction level-set comme une fonction distance signée à l'interface :

$$\begin{cases} \Gamma(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} | \Phi(\mathbf{x}) = 0\} \\ \phi_i = \text{sign}((\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_\Gamma) \cdot \mathbf{n}) \cdot |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_\Gamma| \end{cases} \quad [2.3]$$

Où \mathbf{x} représente le vecteur position d'un point courant, et \mathbf{x}_Γ représente le point se situant sur l'interface, \mathbf{n} est la normale de cette interface (Fig. 2.2).

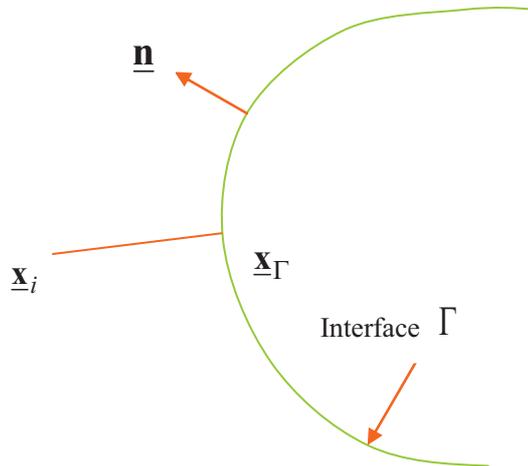


Fig. 2.2: Propriétés géométriques d'une interface.

Ainsi si d est la distance à l'interface définie par :

$$d(\mathbf{x}) = \min |\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Gamma| \quad [2.4]$$

Les valeurs de la fonction de niveau seront (Fig. 2.3) :

$$\begin{cases} \phi(\underline{\mathbf{x}}, t) = d \text{ pour } \underline{\mathbf{x}} \in \overline{\Omega} \\ \phi(\underline{\mathbf{x}}, t) = -d \text{ pour } \underline{\mathbf{x}} \in \Omega \\ \phi(\underline{\mathbf{x}}, t) = 0 \text{ pour } \underline{\mathbf{x}} \in \Gamma \end{cases} \quad [2.5]$$

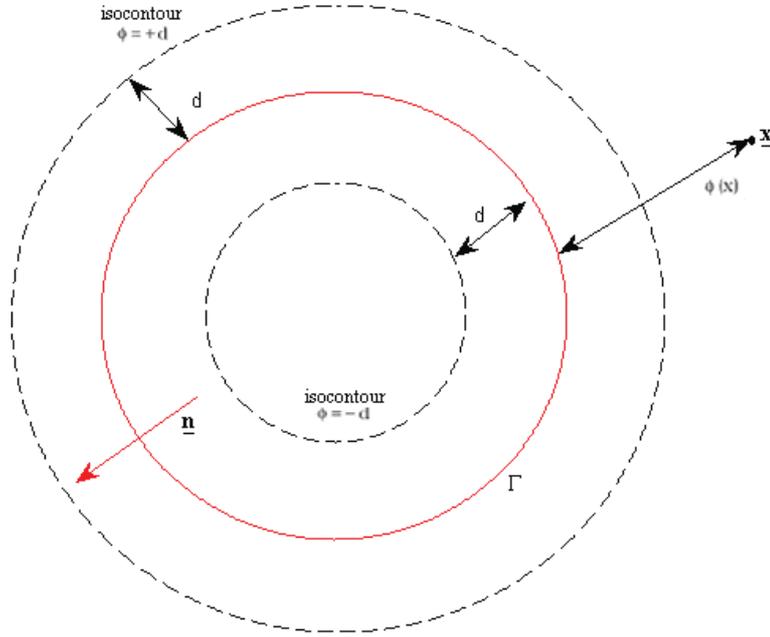


Fig. 2.3: Fonction distance signée à l'interface

II.3.2 Fonction de niveau dans le cas inclusion ou vide

Dans le cas le plus simple d'un ensemble de n inclusions sphériques, par exemple, la valeur de cette fonction en un point $\underline{\mathbf{x}}$ qui est donnée par [SUK 01, YVE 08]:

$$\phi(\underline{\mathbf{x}}) = \min_{\substack{\underline{\mathbf{x}}_c^i \in \Omega_c^i \\ i=1,2,\dots,n}} \{ \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}_c^i\| - r_c^i \} \quad [2.6]$$

où $\underline{\mathbf{x}}_c^i$ and r_c^i sont respectivement le centre et le rayon de l'inclusion i .

Pour les inclusions en formes polygonales et elliptiques, la fonction de niveau a été construite à partir de l'équation [2.6]. Elle est définie par:

$$\phi(\underline{\mathbf{x}}) = \min_{\substack{\underline{\mathbf{x}}_c^i \in \Omega_c^i \\ i=1,2,\dots,n}} \{ \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}_c^i\| - L \} \quad [2.7]$$

où L est la distance entre le centre $\underline{\mathbf{x}}_c^i$ et $\underline{\mathbf{x}}_I$ ($\underline{\mathbf{x}}_I$ étant l'intersection entre $\{\underline{\mathbf{x}}_c^i - \underline{\mathbf{x}}\}$ et la frontière de l'inclusion) i.e:

$$L = \|\underline{\mathbf{x}}_c^i - \underline{\mathbf{x}}_I\| \quad [2.8]$$

Dans le cas des inclusions de forme non-convexe, le rayon r_c^i de l'équation [2.6] est remplacé par la fonction suivante (coordonnées cylindriques):

$$r_c(\theta) = r_0 + a \cos(b\theta) \quad [2.9]$$

Où r_0 est le rayon de référence, a est l'amplitude d'oscillation, b indique le nombre d'oscillations (Fig. 2.4)

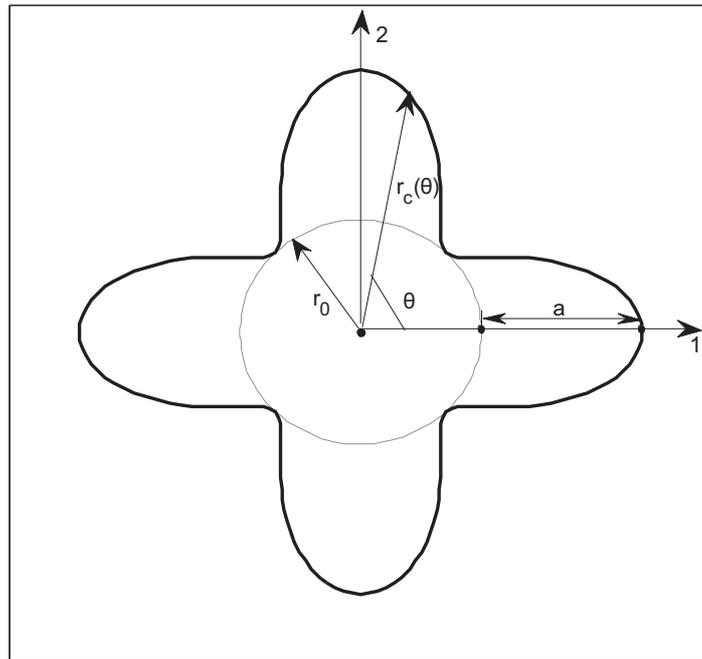


Fig. 2.4: La géométrie de l'inclusion non-convexe.

La description physique de l'interface est convertie en une représentation fonctionnelle discrète par la fonction $\phi(\underline{\mathbf{x}})$. La fonction de niveau est calculée en chaque nœud du maillage, et est interpolée par la fonction de forme classique :

$$\Phi(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_J N_J(\underline{\mathbf{x}}) \phi_J \quad [2.10]$$

où $N_J(\underline{\mathbf{x}})$ est fonction de la forme associée au nœud i , ϕ_J est la valeur nodale de la fonction de niveau. Ainsi la fonction ϕ est déterminée à l'aide des degrés de liberté géométrique et par conséquent l'interface est localisée.

En plus, la fonction ϕ est utilisée pour construire la fonction d'enrichissement pour

II.4 Approximation du déplacement, fonction d'enrichissement

Utilisant la technique ou le concept de partition de l'unité [MEL 96, BEL 99], Moës [MOE 99] a introduit l'approximation du champ de déplacement d'XFEM. L'enrichissement de la base d'éléments finis classique permet de calculer le déplacement sans maillage explicite de la fissure et sans remaillage au cours de sa propagation. Dans le cas de fissures l'approximation du champ de déplacement est enrichie d'un côté à l'aide d'une fonction saut (fonction Heaviside) qui permet de gérer la discontinuité à travers les lèvres de la fissure, et d'un autre côté par des fonctions asymptotiques pour représenter le comportement en fond de fissure. L'approximation enrichie est écrite sous sa forme générale [MOE 03] sous la forme :

$$\underline{\mathbf{u}}^{\text{XFEM}} \equiv \underline{\mathbf{u}}^{\text{FEM}} + \underline{\mathbf{u}}^{\text{ENR}} \quad [2.11]$$

On rappelle l'expression de l'approximation du champ de déplacement de la méthode éléments finis :

$$\underline{\mathbf{u}}^{\text{FEM}} = \sum_{i \in I} N_i(\underline{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{u}}_i \quad [2.12]$$

Où I est l'ensemble des nœuds du maillage, $N_i(\underline{\mathbf{x}})$ est la fonction de la forme associée au nœud i , $\underline{\mathbf{u}}_i$ est le degré de liberté (DDL) classique au nœud i .

Et selon Moës et collaborateur dans le cas des microstructures qui nous intéresse en particulier dans notre travail, l'expression générale de la partie enrichie du déplacement $\underline{\mathbf{u}}^{\text{ENR}}$ est la suivante:

$$\underline{\mathbf{u}}^{\text{ENR}} = \sum_J \underline{\mathbf{a}}_J N_J(\underline{\mathbf{x}}) F(\underline{\mathbf{x}}) \quad [2.13]$$

où J est l'ensemble des nœuds des éléments coupés par la coupe ($J \subset I$), $\underline{\mathbf{a}}_J$ représente les nouveaux degrés de liberté, $N_J(\underline{\mathbf{x}})$ est la fonction de forme associée au nœud j (les fonctions de formes classiquement utilisées en éléments finis vérifient la propriété de partition de l'unité $\sum_J N_J(\underline{\mathbf{x}}) = 1$), $F(\underline{\mathbf{x}})$ est la fonction d'enrichissement.

L'approximation du champ de déplacement peut s'écrire finalement :

$$\underline{\mathbf{u}}^{\text{XFEM}} \equiv \sum_{i \in I} N_i(\underline{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{u}}_i + \sum_J \underline{\mathbf{a}}_J N_J(\underline{\mathbf{x}}) F(\underline{\mathbf{x}}) \quad [2.14]$$

La fonction d'enrichissement dépend de la nature du problème étudié. Elle peut être choisie de façon à capturer efficacement la solution du problème traité. Il s'agit généralement de

discontinuités géométriques ou matériaux. Il est possible d'utiliser plusieurs fonctions d'enrichissement si la discontinuité qu'on veut modéliser ne peut être capturée avec une seule fonction. L'idée de la méthode XFEM est de n'utiliser la propriété de partition de l'unité que localement, afin de ne pas alourdir l'approximation éléments finis.

II.4.1 Enrichissement dans le cas d'une fissure

Dans les premiers travaux de Belytshko [BEL 99] en mécanique linéaire de la rupture, tous les nœuds dont le support est coupé par la fissure sont enrichis par des fonctions provenant du développement asymptotique du déplacement en fond de fissure provenant des travaux de Fleming sur les méthodes sans maillage [FLE 97]. Ensuite, avec les travaux de Moës [MOE 99], apparaît la fonction Heaviside généralisée qui permet de modéliser la discontinuité des déplacements à l'intérieur de la ligne de fissure. Finalement pour la fissuration, deux types d'enrichissements sont considérés :

- Un enrichissement discontinu pour les éléments dont le support est traversé par la fissure. Celui-ci utilise la fonction de type Heaviside $H(\underline{x})$ telle que :

$$H(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{x} \text{ est au dessus de la fissure} \\ -1 & \text{si } \underline{x} \text{ est au dessous de la fissure} \end{cases} \quad [2.15]$$

Cet enrichissement permet de représenter le saut de déplacement dans les éléments contenant la fissure (Fig. 2.5 : les nœuds marqués par un point noir).

Pour modéliser le fond de fissure et améliorer la représentation de la singularité, un enrichissement basé sur le développement asymptotique du déplacement en pointe de fissure pour les éléments dont le support contient la pointe de fissure (Fig. 2.5 : les nœuds marqués par un cercle). L'enrichissement consiste en une fonction décrivant le comportement radial et angulaire du champ de déplacement asymptotique en pointe de fissure. Cette fonction est définie par exemple :

$$F_l^i(\underline{x}) = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\} \quad [2.16]$$

où (r, θ) représentent les coordonnées polaires dans un repère local à la pointe de fissure.

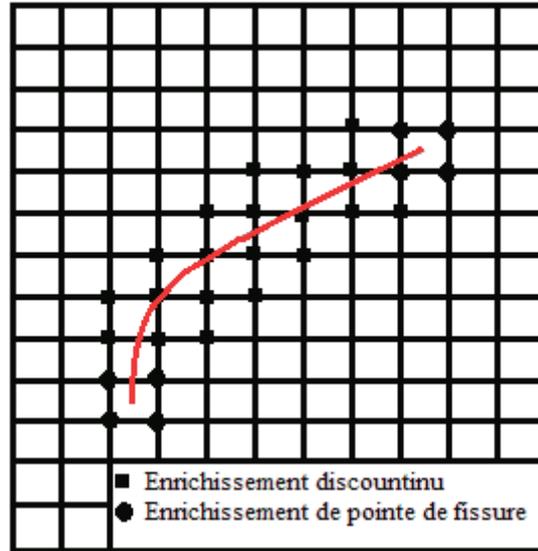


Fig. 2.5: Différents types d'enrichissement dans le cas d'une fissure

L'expression finale du déplacement dans la méthode XFEM est donnée par :

$$\underline{\mathbf{u}}^{\text{XFEM}} = \sum_{i \in I} N_i \underline{\mathbf{u}}_i + \sum_{j \in J} \underline{\mathbf{b}}_j N_j H(\underline{\mathbf{x}}) + \sum_{k \in K_1} N_k \left(\sum_{l=1}^4 \underline{\mathbf{c}}_k^{l1} F_l^1(\underline{\mathbf{x}}) \right) + \sum_{k \in K_2} N_k \left(\sum_{l=1}^4 \underline{\mathbf{c}}_k^{l2} F_l^2(\underline{\mathbf{x}}) \right) \quad [2.17]$$

Où :

I est l'ensemble des nœuds du maillage,

$\underline{\mathbf{u}}_i$ est le degré de liberté classique au nœud i ,

N_i est la fonction de la forme associée au nœud i ,

J est l'ensemble des nœuds enrichis pour tenir compte du passage de la fissure, n'inclut pas les nœuds associés la pointe de la fissure,

$\underline{\mathbf{b}}_j$ est le degré de liberté enrichi par la fonction Heaviside,

K_1 est l'ensemble des nœuds enrichis pour tenir compte de la première pointe de fissure,

K_2 est l'ensemble des nœuds enrichis pour tenir compte de la deuxième pointe de fissure,

$\underline{\mathbf{c}}_k^{l1}$ sont les degrés de liberté enrichis par la fonction $F_l^1(\underline{\mathbf{x}})$,

$\underline{\mathbf{c}}_k^{l2}$ sont les degrés de liberté enrichis par la fonction $F_l^2(\underline{\mathbf{x}})$.

Des travaux récents [BEC 05, LAB 05] proposent des améliorations notamment pour la robustesse de la méthode XFEM en termes de taux de convergence. Mettant en cause la stratégie d'enrichissement limitée aux seuls éléments contenant le fond de fissure, les auteurs

proposent une zone d'enrichissement singulier de taille fixe d'un rayon R indépendant du pas du maillage (Fig. 2.6). Chaque du maillage situé dans cette zone est enrichie par les fonctions de forme singulière. Les auteurs montrent donc que cette méthode permet d'obtenir un taux de convergence optimal mais avec une augmentation forte des degrés de liberté supplémentaires.

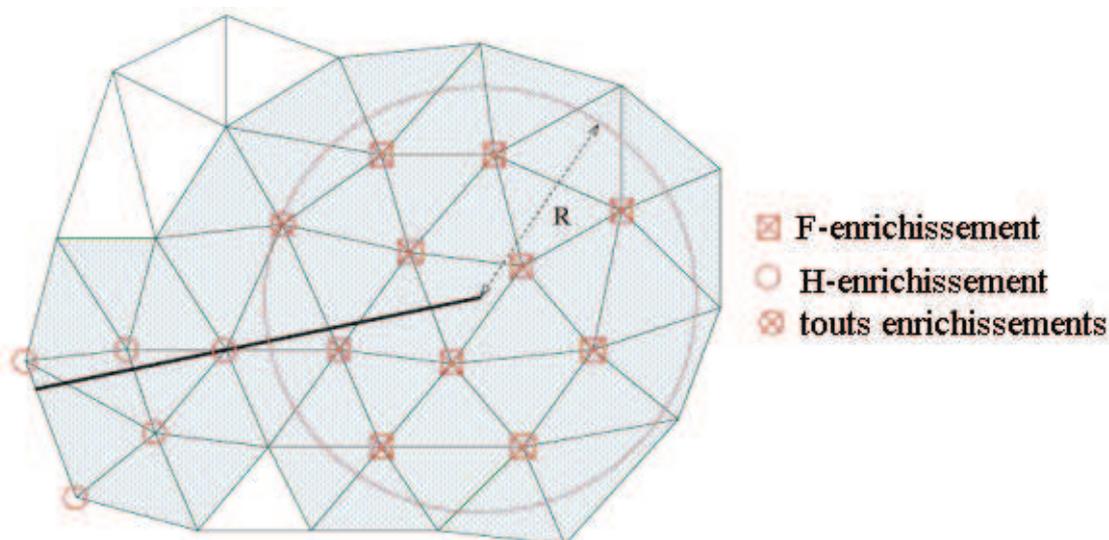


Fig. 2.6: Enrichissement singulier dans une zone d'enrichissement fixe [LAB 05].

En gardant cet enrichissement de taille fixe, Laborde et al. [LAB 05] proposent une fonction d'enrichissement global. En plus des améliorations de l'enrichissement, les auteurs [BEC 05, LAB 05] proposent des formules d'intégration « quasi-polaire » plus précises que les méthodes de sous découpage classique (qui consiste à raffiner plusieurs fois les triangles), en introduisant la transformation géométrique du carré en triangle et permet de construire des formules de quadratures sur un triangle à partir des formules sur le carré.

II.4.2 Enrichissement dans le cas de vides et inclusions

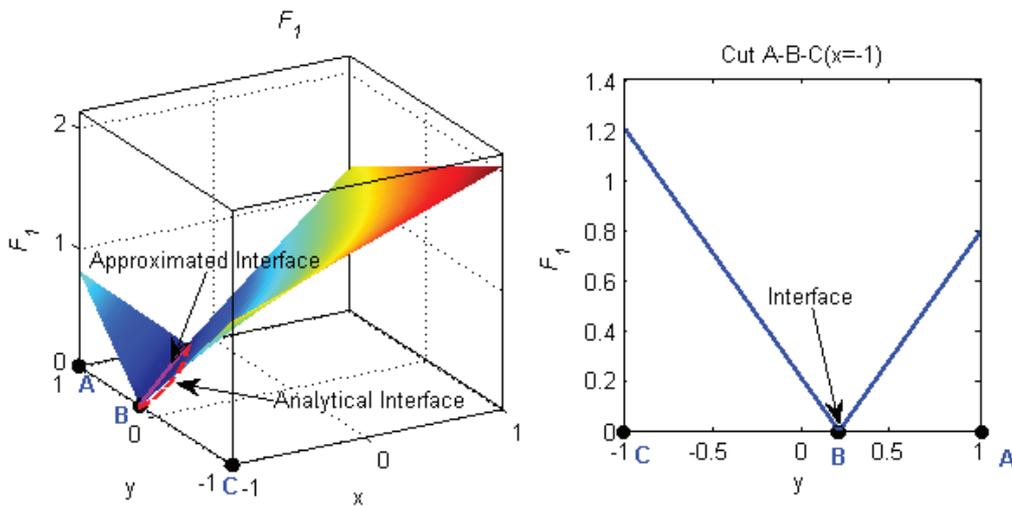
Le traitement des vides avec XFEM consiste à l'utilisation d'une fonction d'enrichissement pour les nœuds qui sont intersectés par l'interface du vide. Si le nœud se trouve en dehors du vide la fonction est égale à 1, et à zéro si le nœud est à l'intérieur du vide [DAU 00]. Les degrés de liberté associés aux nœuds pour lesquels le support est complètement hors de la matière sont éliminés du système d'équation. L'intégration est faite uniquement sur les parties non-vides des éléments [DAU 00, SUK 01]. Pour représenter les vides Sukumar et al. [SUK 01] utilise la méthode level set pour proposer la première fonction d'enrichissement basé sur les courbes de niveau. Elle est exprimée par :

$$F_1(\mathbf{x}) = \left| \sum_J \phi_J N_J(\mathbf{x}) \right| \quad [2.18]$$

Chessa et al. [CHE 03] ont ensuite essayé d'améliorer l'ordre de convergence et d'éliminer les erreurs des éléments partiellement enrichis (Blending) en utilisant une approximation spécifique d'utilisation des éléments de type Blending. D'autres auteurs ont montré une convergence optimale avec un enrichissement uniquement des termes d'ordre n-1 d'un élément de degré n [LEG 05] avec la même fonction d'enrichissement. Sans avoir à utiliser ces dernières stratégies Moës et al. [MOE 03], propose une nouvelle fonction d'enrichissement qui donnait une convergence optimale au moins pour les éléments linéaires. Cette fonction s'exprime ainsi :

$$F_2(\mathbf{x}) = \sum_J |\phi_J| N_J(\mathbf{x}) - \left| \sum_J \phi_J N_J(\mathbf{x}) \right| \quad [2.19]$$

Pour des fins d'illustration des problèmes pouvant apparaître avec l'utilisation de la première fonction, les deux fonctions d'enrichissement sont tracées pour un cas simple d'une inclusion circulaire avec des éléments de référence quadrilatère à 4 nœuds.



(a)

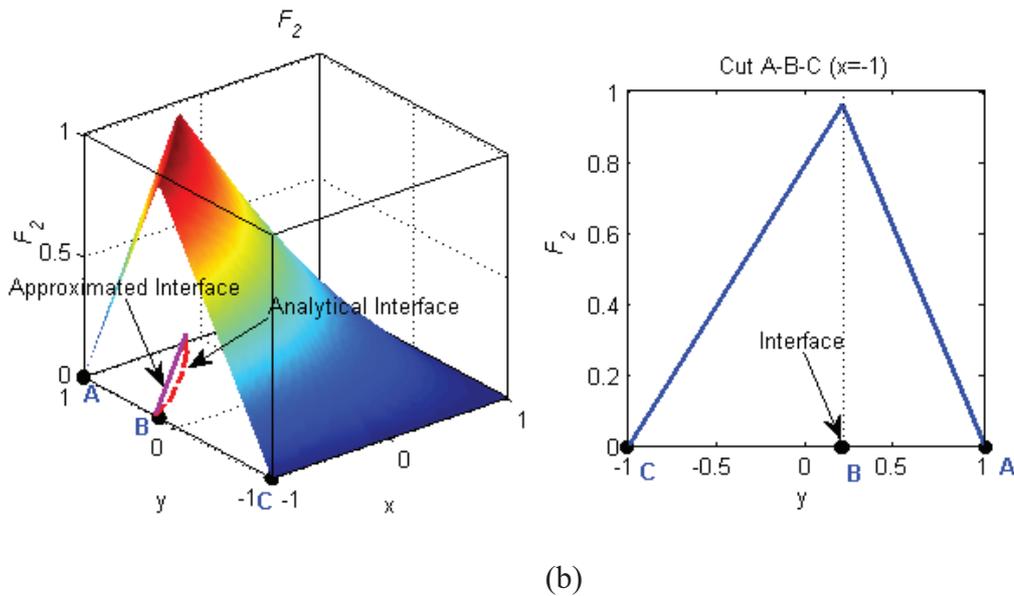


Fig. 2.7: Deux fonctions d'enrichissement pour un élément quadrilatère linéaire à 4-nœuds: (a) La fonction d'enrichissement $F_1(\underline{x})$. (b) La fonction d'enrichissement $F_2(\underline{x})$.

Dans la Fig. 2.7, les points A et B représentent, le centre et l'interface de l'inclusion, respectivement. Comme on le voit, la fonction $F_1(\underline{x})$ a une valeur nulle sur l'interface des inclusions et elle atteint son maximum à la limite de l'élément, tandis que la fonction $F_2(\underline{x})$ a une valeur zéro à la limite de l'élément (Fig. 2.7.b) et c'est ainsi pour tous les éléments qui ne sont pas traversés par l'interface [MOE 03], en évitant les erreurs de mélange à cause des éléments semi-enrichis ou blending [CHE 03]. L'objectif de ce travail étant la prédiction du comportement macroscopique d'un matériau à microstructure complexe, nous considéreront la fonction d'enrichissement de Moës [MOE 03] pour représenter l'interface matérielle entre les différents constituants.

II.5 Sur la technique d'intégration numérique dans XFEM

Bien que la méthode des éléments finis étendue a connue des avancées considérables par rapport aux méthodes concurrentes de remaillage, de relâchement de nœuds et d'élimination d'éléments..., des difficultés pouvant nuancées ses avantages, notamment l'intégration numérique complexe due à la présence des fonctions discontinues ou singulières. En effet, sur un élément traversé par une interface, les gradients des déplacements peuvent être discontinus, et dans ce cas l'intégration numérique de Gauss-Legendre sur la totalité de l'élément n'est pas applicable. Cependant, celle-ci nécessite d'adopter d'autres stratégies pour

II.5.1 Discrétisation

Dans la méthode XFEM, les inconnus supplémentaires $\underline{\mathbf{a}}_J$ associés aux fonctions d'enrichissement augmentent simplement la taille du vecteur des déplacements $\underline{\mathbf{u}}_i$ et le problème est résolu de la même manière que le problème matriciel habituel en élément finis.

L'approximation XFEM du champ de déplacement est écrite sous forme vectorielle :

$$\{\underline{\mathbf{u}}^{\text{XFEM}}\} = \{N_i \quad N_J(\underline{\mathbf{x}})F(\underline{\mathbf{x}})\} * \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_i \\ \underline{\mathbf{a}}_J \end{Bmatrix} \quad [2.20]$$

Soit encore sous la forme $\{\underline{\mathbf{u}}^{\text{XFEM}}\} = \{N\} * \{\underline{\mathbf{u}}\}$

Où $\{N\}$ est le vecteur de la base enrichie des fonctions de forme et $\{\underline{\mathbf{u}}\}$ le vecteur des déplacements.

Les déformations s'écrivent : $\{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [B] * \{\underline{\mathbf{u}}\}$

Où $[B]$ est la matrice des dérivées des fonctions de formes.

$$[B] = \{(N_i)' \quad (N_J)' * F(\underline{\mathbf{x}}) + N_J * (F(\underline{\mathbf{x}}))'\} \quad [2.21]$$

Ainsi le formalisme du problème XFEM peut s'écrire :

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{g} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ua} \\ K_{au} & K_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u^{\text{ext}} \\ f_a^{\text{ext}} \end{bmatrix} \quad [2.22]$$

Avec :

$$\begin{aligned} K_{uu} &= \int_V B^T C B \\ K_{ua} &= \int_V \tilde{B}^T C B = K_{au} = \int_V B^T C \tilde{B} \\ K_{aa} &= \int_V \tilde{B}^T C \tilde{B} \end{aligned} \quad [2.23]$$

Où B est la matrice des dérivées des fonctions de forme classiques, \tilde{B} est la matrice des dérivées des fonctions de forme XFEM et C la matrice de Hooke symétrique.

Les matrices additionnelles liées aux éléments supportant des degrés de liberté supplémentaires sont les matrices K_{aa} et $K_{ua} = K_{au}$. La taille de la matrice de raideur est égale au nombre de degrés de liberté conventionnels additionné du nombre de degrés de liberté XFEM. Ceci augmente non seulement la taille des matrices mais pourrait poser des problèmes de gestion de mémoire pour des problèmes complexes. Néanmoins, en pratique le nombre d'éléments enrichis n'est pas significatif par rapport aux éléments conventionnels et le problème ne se pose pas.

II.5.2 Intégration numérique, découpage en sous éléments

La difficulté majeure dans le cas des éléments XFEM consiste à pouvoir effectuer l'intégration numérique correctement de part et d'autre de l'interface (Fig. 2.8). Pour les éléments où l'enrichissement discontinu est utilisé, un schéma d'intégration de Gauss modifié basé sur des sous-éléments est employé [MOE 99, SUK 00]. En effet, afin d'éviter l'introduction d'erreurs dans les matrices éléments finis, et le mal-conditionnement du système, chaque élément coupé par l'interface est divisé en sous-domaines qui ne coupent pas la discontinuité (souvent en triangles). C'est sur ceux-ci qu'est effectuée l'intégration. Ce principe est résumé en 2D pour un élément de référence sur la Fig. 2.9. Il faut préciser que cette division n'est effectuée que pour l'intégration numérique, c'est-à-dire qu'elle n'introduit pas de degrés de liberté supplémentaire. Le partitionnement est utilisé seulement pour la stratégie d'intégration numérique.

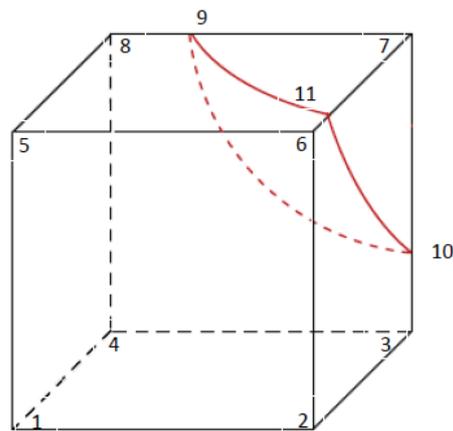


Fig. 2.8: Un élément de référence avec une interface d'inclusion en 3D (la ligne rouge représente l'interface).

Ensuite, pour chaque sous-élément convexe l'intégration est effectuée de manière classique en utilisant soit quatre points d'intégration (en 3D) ou trois (en 2D) [MOE 03]. Si une interpolation du premier ordre est choisie, comme c'est le cas ici (mais aussi pour la majorité des travaux publiés dans le domaine), les interfaces interpolées sont linéaires, ce qui rend facile la création et l'intégration des sous-éléments. Il semble que la précision de l'intégration justifie ce choix, malgré les erreurs liées à la linéarisation des interfaces en supposant que la taille de l'élément d'intégration ne soit pas trop grande par rapport à la longueur caractéristique de l'interface [SUK 01, DRE 10]. Une meilleure solution consiste à maintenir

une approximation linéaire et utiliser une représentation par morceaux de l'interface tel que proposée par Dréau et al. [DRE 10] pour une méthode XFEM d'ordre supérieur.

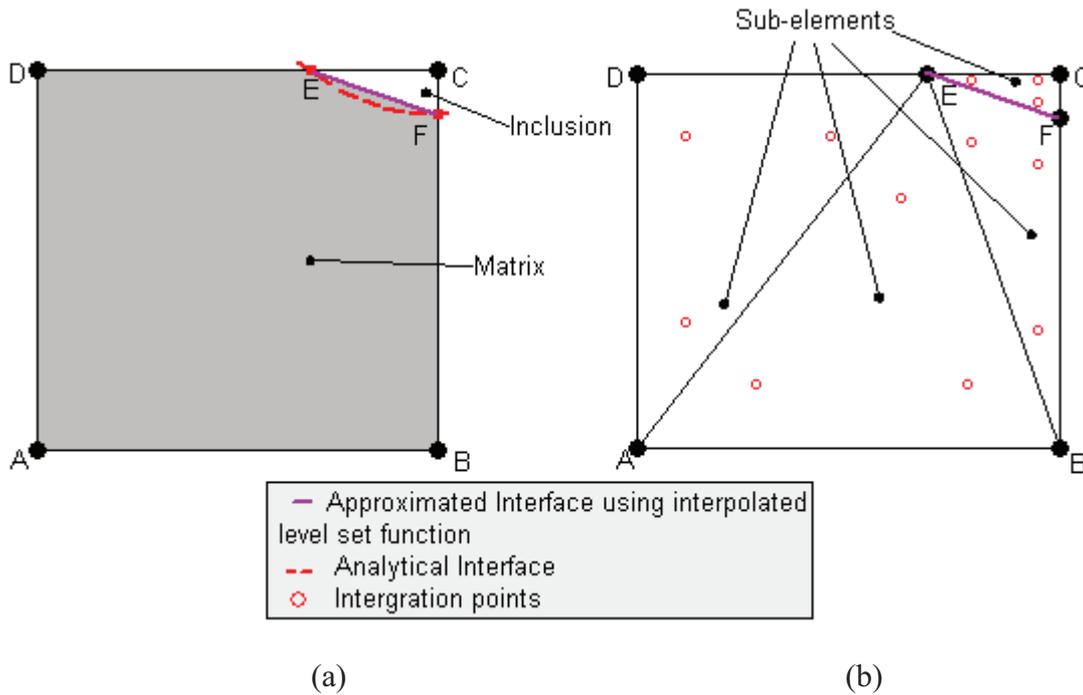


Fig. 2.9: (a) Élément enrichi (2D). (b) Sous-éléments et points d'intégration de l'élément enrichi.

Dans la quasi-totalité des travaux utilisant XFEM [MOE 99, MOE 03, SUK 00], pour un maillage en élément quadrilatère, la division souvent adoptée est triangulaire, les éléments enrichis concernés étant divisés en triangles. Malgré l'utilisation d'algorithmes complexes d'intégration numérique sur les partitions triangulaires (6 points d'intégration sur chaque triangle [SUK 03]), des difficultés ont été constatées, notamment à cause de la différence entre les fonctions de forme spécifiques aux éléments quadrilatéraux et celles des éléments triangulaires. Face à ces difficultés, Nistor et al. [NIS 05] propose de garder les mêmes fonctions de formes que celles correspondant aux quadrilatères, pour les partitions obtenues après la division des éléments. Au lieu de triangles, les nouvelles partitions sont des quadrilatères, le nombre et la position des points d'intégrations sont les mêmes que pour l'élément de référence.

D'autres travaux qui concernent des résultats d'ordre supérieur sont par exemple ceux de [LAB 05, BEC 05] qui proposent des formules d'intégration dites « quasi-polaire » et montrent leur précision par rapport au sous-découpage classique. L'élément contenant le fond de fissure est divisé en 3 sous-triangles (Fig. 2.9 a). La singularité sera donc localisée sur un sommet de chaque sous-triangle. Pour avoir plus de points d'intégration près du fond de

fissure, la transformation géométrique suivante :

$$\tau : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad [2.24]$$

Qui transforme un carré en triangle (Fig. 2.9 b), et permet ainsi de construire des formules de quadratures sur un triangle à partir des formules sur le carré. Ces formules auront donc plus de points près du fond de fissure.

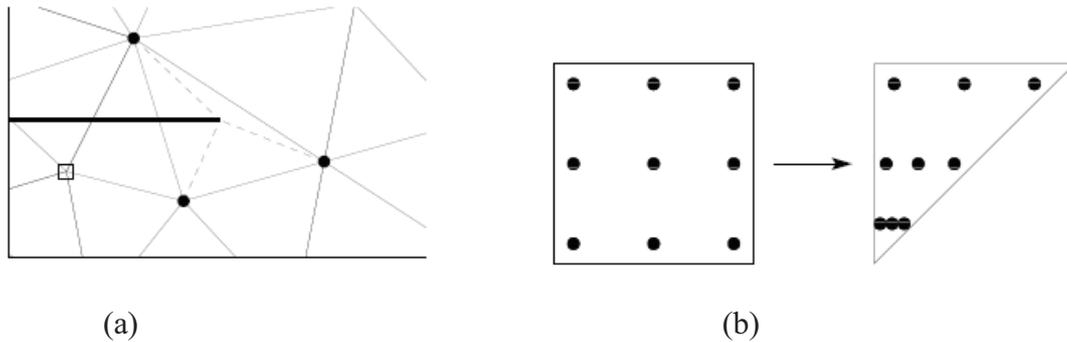


Fig. 2.10 : (a) Sous découpage de l'élément contenant le fond de fissure (b) Transformation d'une méthode d'intégration sur un carré en une méthode définie sur un triangle [LAB 05].

D'autres auteurs ont traité des interfaces courbes [ZI 03] ou pour des fins d'intégration la courbure est négligée, ou dans [LEG 05] ou une quadrature est proposée pour l'interface courbe. Kwok et Fries [KWO 10] propose à leur tour une approximation d'ordre supérieur de la représentation de la fonction de niveau pour l'interface. Ils utilisent une stratégie de subdivision avec des éléments de référence d'ordre supérieur.

II.6 Validation de la méthode XFEM pour des problèmes d'homogénéisation

Afin de réaliser des calculs utilisant différentes microstructures pour la prédiction du comportement macroscopique des matériaux hétérogènes, il faut tout d'abord valider le développement en MATLAB de la méthode XFEM telle qu'elle est décrite dans les sections précédentes. Nous avons choisi d'utiliser la fonction d'enrichissement F2 [MOE 03] et l'intégration numérique par découpage des éléments traversés par l'interface utilisée dans la majorité des travaux de la littérature utilisant XFEM. Seulement le comportement élastique linéaire est considéré dans cette partie du travail. Pour illustrer l'efficacité de la méthode pour résoudre les problèmes d'homogénéisation et de changement d'échelle, nous avons considéré des cas tests simples dans le cas d'interface matrice/vide ou inclusion. Ce choix des cas

simples comme celui d'un cube contenant un vide ou une inclusion est motivé par l'existence d'une solution analytique qui nous permettra de valider la méthode XFEM pour des applications en homogénéisation numérique. En fait, l'outil numérique que nous cherchons à construire dans ce travail doit en premier lieu permettre de reproduire les microstructures les plus complexes là où les méthodes classiques ont montré des difficultés ou des limites.

II.6.1 Matériau contenant un vide

II.6.1.1 Cas test en 2D

Le problème que nous considérons ici est une plaque contenant un vide circulaire au centre de rayon. L'espace bidimensionnel choisi ainsi que le maillage régulier (41x41) sont utilisés dans le calcul. On se place dans le cas d'une compression uniaxial simple en imposant des conditions de déplacement fixe selon y pour le bord inférieur et pression uniforme de 10 N (Fig. 2.11). Les bords latéraux restent libres. Nous modélisons ce problème en imposant une pression équivalente à la contrainte exacte, induite par la pression uniforme à l'infini, sur les bords d'un carré de dimensions finies. Les caractéristiques mécaniques pour le matériau en considérant un comportement élastique linéaire sont $E=7600\text{MPa}$, $\nu=0.1$. Le rayon du vide et la dimension du côté de la plaque sont respectivement $a=0.2\text{ mm}$ et $L=1\text{ mm}$. Le calcul est réalisé donc d'une part avec XFEM en utilisant la fonction d'enrichissement F2, et d'autre part avec le code de calcul éléments finis ABAQUS.

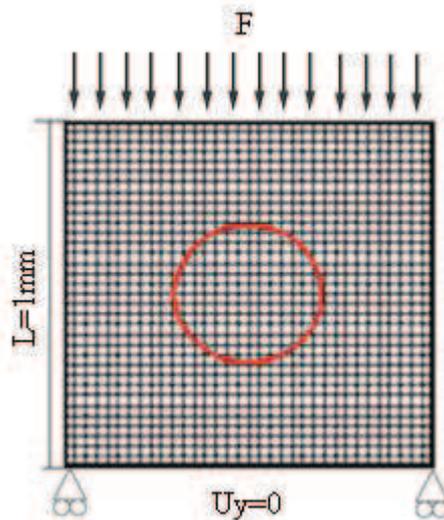


Fig. 2.11: Plaque contenant un vide circulaire

Nous illustrons les résultats en termes de contrainte sur la direction y sur la Fig. 2.12.

Remarquons que pour ce cas simple la concordance des deux résultats est parfaite sauf une petite différence d'environ 6% à l'interface. Ceci est dû à la différence qui est entre les deux méthodes à représenter l'interface. En effet, avec la méthode XFEM, étant donné que l'on effectue une subdivision des éléments tout autour de l'interface, on peut se permettre d'intégrer de manière précise autour du contour.

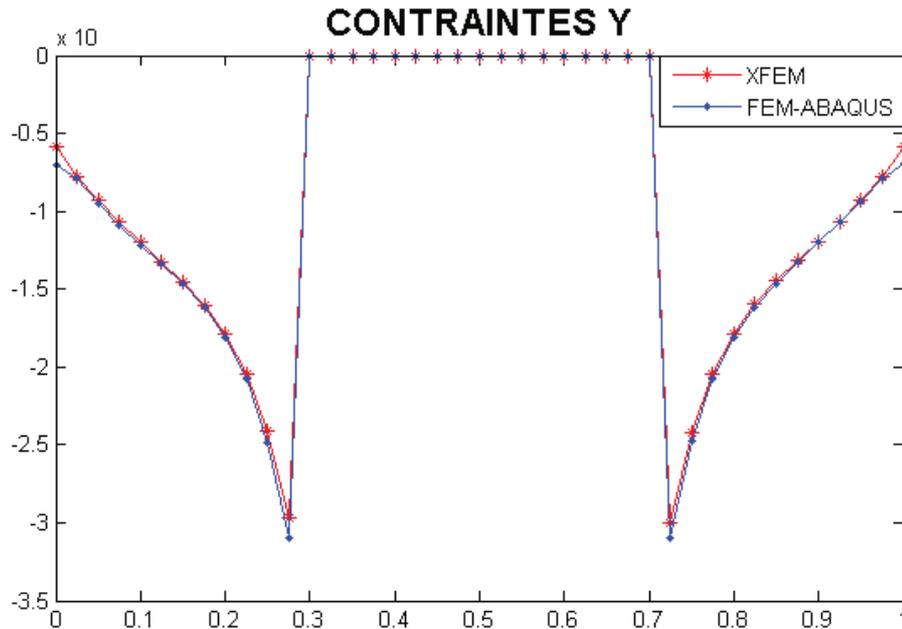


Fig. 2.12: Les contraintes selon la direction y en utilisant XFEM et FEM.

II.6.1.2 Cas test en 3D

L'espace tridimensionnel a été choisi ici, afin d'évaluer la capacité de l'approche XFEM dans le cas d'un vide sphérique au sein d'un milieu infini (problème d'Eshelby). Dans le modèle numérique, un cube de côté L avec une cavité au centre est considérée (Fig. 2.13). Le maillage correspondant utilisé dans le code développé XFEM est de $51 \times 51 \times 51$ nœuds. Les propriétés mécaniques de la matrice sont le module de Young $E = 7600 \text{ MPa}$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0.1$ utilisé dans le calcul précédent. La fraction volumique de vide utilisée dans ce cas est de 3,35%.

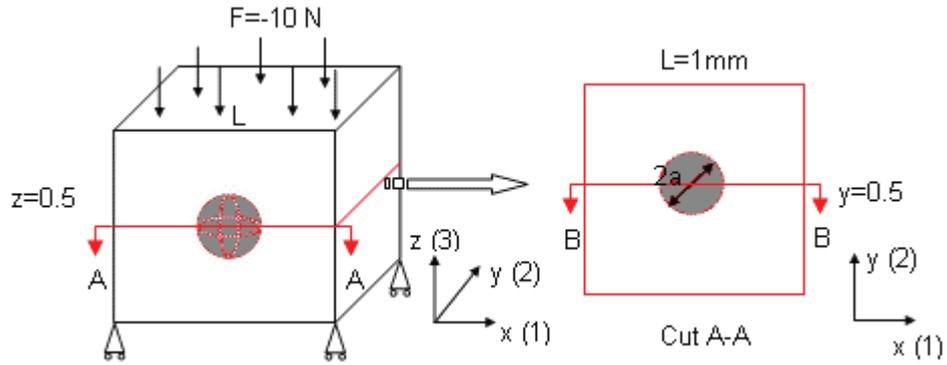


Fig. 2.13: Cube contenant un vide sphérique central

La Fig. 2.14 représente les contraintes selon l'axe Z, pour une ligne dans le plan moyen du cube. Les résultats numériques de la méthode XFEM et FEM sont comparés aux résultats analytiques en utilisant la célèbre solution d'Eshelby donnée dans l'Annexe B. L'accord des résultats est très satisfaisant pour valider le développement XFEM et pour la qualifier comme un outil pertinent pour des applications d'homogénéisation numérique pour une fraction volumique des hétérogénéités qui est faible dans ce cas.

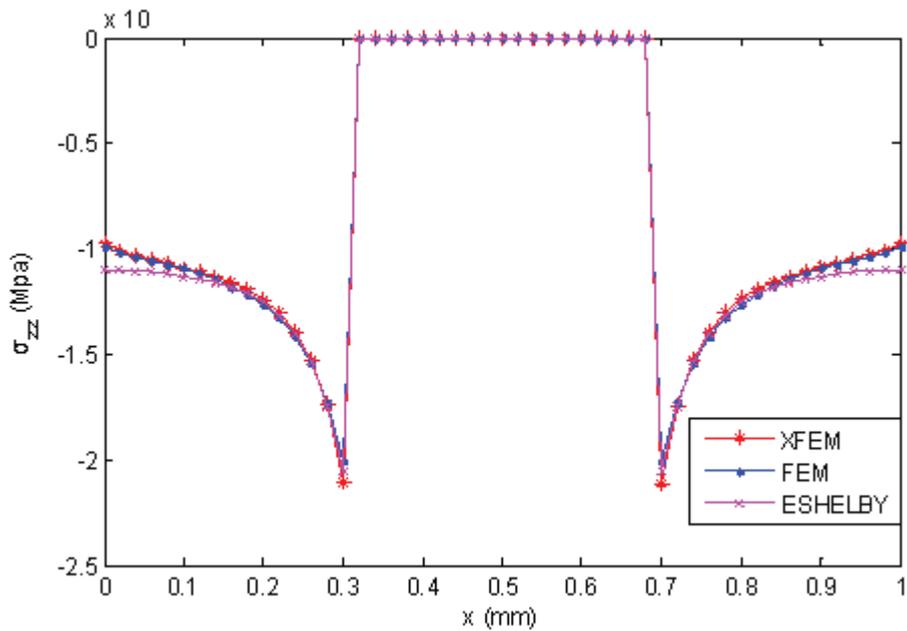


Fig. 2.14: Les contraintes principales selon la direction Z sur selon une coupe au milieu du cube

II.6.2 Matériau contenant une inclusion matérielle

Dans la plupart des études de modélisation du comportement macroscopique des composites particuliers contenant des inclusions, la procédure d'homogénéisation est basée sur le concept de cellule de base à inclusion unique. Afin de se placer dans les mêmes conditions, nous avons considéré un matériau composite à matrice argileuse et inclusions de calcite. Ce cas est plus proche d'un géomatériau, est étudié avec la même géométrie que le calcul précédent en remplaçant tout simplement le vide par une inclusion. Les caractéristiques de la microstructure du matériau ont été choisies pour être proches d'un géomatériau très connu dans la communauté scientifique en mécanique des roches nommé argilite de Meuse Haute Marne [ZHA 04, HOX 07]. Les propriétés élastiques de ce matériau numérique sont données dans le tableau 2.1 [VU 06].

II.6.2.1 Cas test en 2D

Nous modélisons dans un premier temps, le problème en 2D en considérant un volume élémentaire représentatif sous forme d'une plaque carrée de 1mm de côté et une inclusion circulaire. Le tableau 2.1 résume les propriétés mécaniques du matériau composite. Notons que le rapport du module d'Young de la matrice et l'inclusion est de 0,09, tandis que celui du coefficient de Poisson est de 1 / 3.

Le test de compression uniaxiale est réalisé en imposant les mêmes conditions aux limites et de chargement du cas avec un vide (Fig. 2.15.). Un maillage régulier de 41x41 nœuds est utilisé pour réaliser le calcul XFEM.

Propriétés élastiques	Matrice	Inclusion
Module de YOUNG	7600 MPa	84000 MPa
Le coefficient de poisson	0.1	0.3

Tableau 2.1. Les propriétés élastiques des constituants.

Les contraintes selon la direction y et une ligne à $y=0.5$ au milieu du VER sont représentées sur la Fig. 2.16. La comparaison entre les deux méthodes numériques (XFEM et FEM) dans ce cas, montre que les courbes sont presque confondues sauf à l'interface matrice/inclusion.

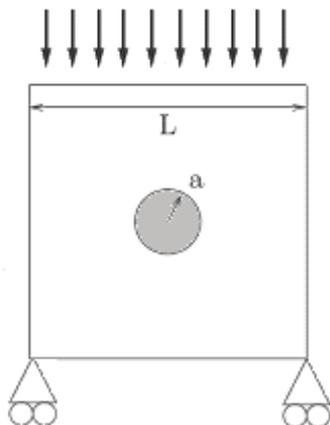


Fig. 2.15: Plaque contenant une inclusion circulaire

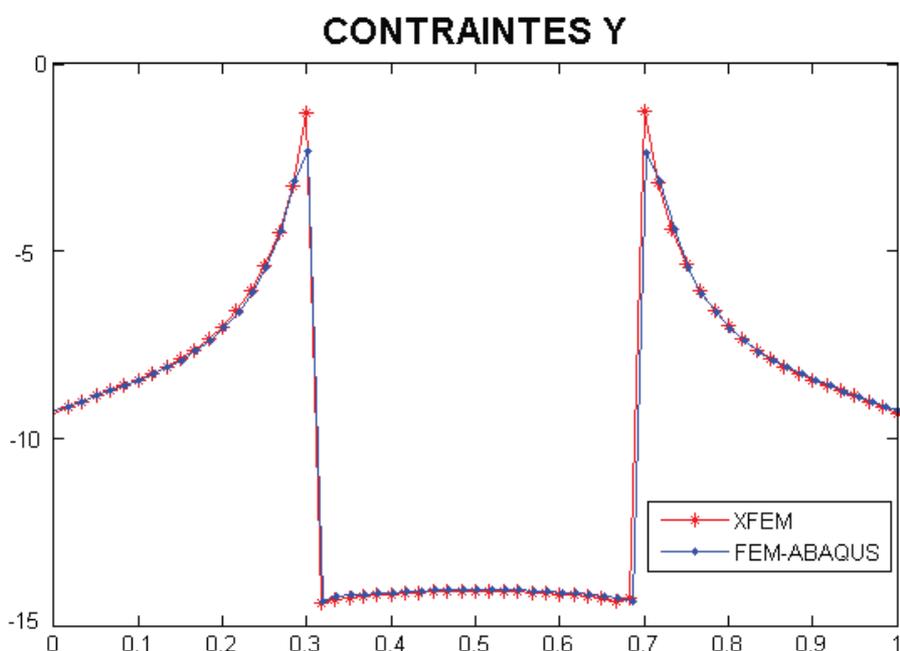


Fig. 2.16: Comparaison des contraintes selon la direction y entre un calcul XFEM et FEM.

II.6.2.2 Cas test en 3D

En utilisant les mêmes caractéristiques géométriques du cas tridimensionnel avec un vide, nous étudions ici le matériau avec une inclusion centrale sphérique. Pour des fins de validation en plus des calculs numériques, la solution d'Eshelby est utilisée pour résoudre le problème d'une inclusion dans un milieu infini (Annexe A). La Fig. 2.17 illustre les conditions aux limites et le chargement correspondant à ce calcul.

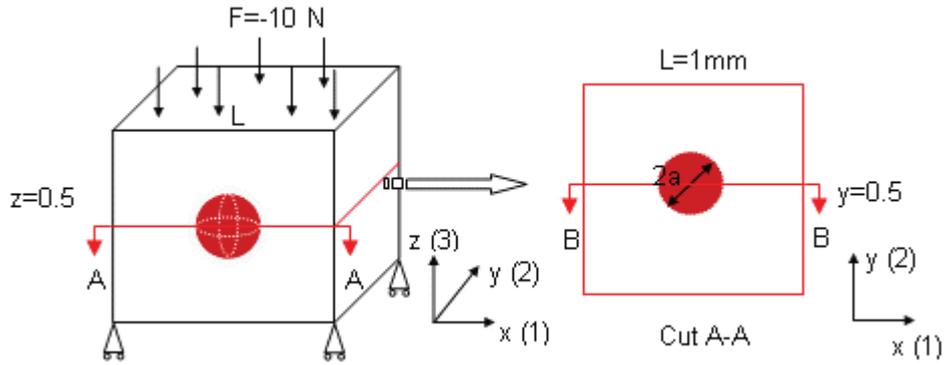


Fig. 2.17: Les conditions aux limites et de chargement pour l'inclusion sphérique.

Les profils des contraintes selon une coupe passant par le centre d'inclusion sont présentés sur la figure (Fig. 2. 18) et sont comparés, dans ce cas, d'une part avec les résultats obtenus de la méthode des éléments finis (calcul ABAQUS) et d'autre part avec la solution analytique d'Eshelby. Ces résultats indiquent une très bonne concordance entre les résultats XFEM et FEM, et une différence avec la solution analytique inférieure à 4%. Cette différence est principalement due au fait que les conditions d'un milieu infini supposé dans la solution analytique ne sont pas satisfaites dans le calcul numérique.

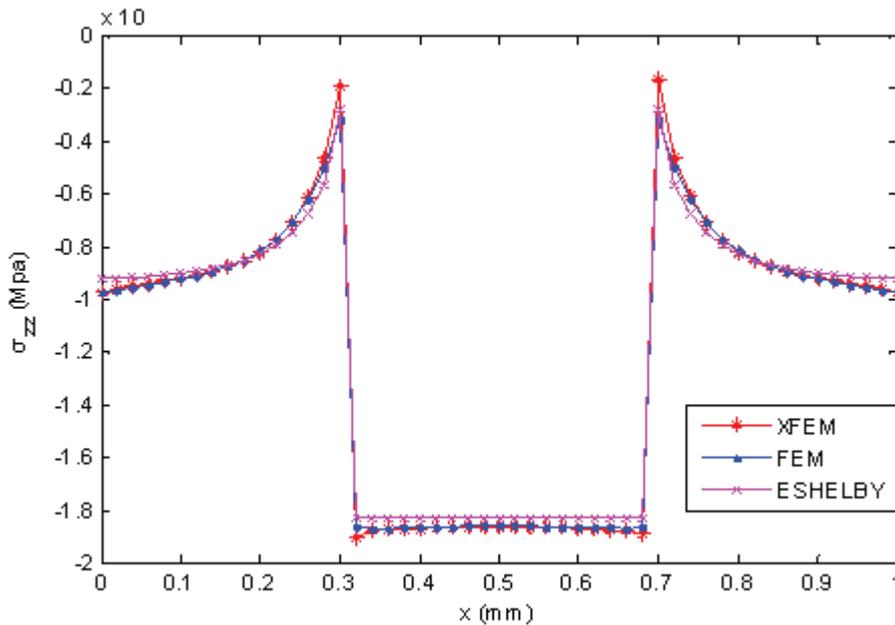


Fig. 2.18: Comparaison des contraintes selon une coupe horizontale (coupe B-B) au milieu du cube contenant une inclusion.

II.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le cadre théorique de la méthode XFEM afin de définir et justifier les choix qui seront utilisés dans les chapitres suivants. Nous avons également, montré la pluralité des domaines utilisant la méthode XFEM dans la littérature tout en mettant l'accent sur son efficacité à représenter des microstructures complexes. Les fonctions d'enrichissement sont définies à l'aide des fonctions de niveau pour évaluer la distance de l'interface à n'importe quel point donné. Il faut noter aussi que, bien que la méthode XFEM a connu une avancée notable, d'autres efforts sont nécessaires pour améliorer sa robustesse et son implémentation dans les codes de calcul notamment en proposant de nouvelles méthodes d'intégration et de nouvelles fonctions d'enrichissement.

Nous avons ensuite, étudié des exemples de validation qui nous ont permis de montrer l'efficacité de XFEM à résoudre le problème des microstructures pour les applications d'homogénéisation. La comparaison des résultats de la méthode XFEM, FEM et analytiques a mis en lumière la différence entre l'approche analytique et numérique quant à la prise en compte des conditions d'un milieu infini. Finalement, nous disposons d'un outil numérique validé basé sur des maillages non conformes à la discontinuité, qui sera appliqué dans ce travail pour des applications d'homogénéisation numérique ou directement sur des structures complexes dans un autre cadre. Cette validation est effectuée pour un milieu diphasique de type matrice inclusion sphérique. Nous tentons dans le chapitre suivant d'utiliser la procédure pour différentes formes et plusieurs phases.

Chapitre III Application de XFEM à l'homogénéisation du comportement mécanique des matériaux hétérogènes

III.1 Introduction

L'existence des hétérogénéités vides et inclusions modifie significativement le comportement des matériaux. D'un point de vue mécanique, la distribution spatiale, la forme ainsi que le comportement micromécanique des constituants d'un matériau hétérogène, entraînent un comportement macroscopique et des propriétés effectives différentes.

On s'attache, dans ce chapitre à étudier le comportement mécanique d'un matériau hétérogène (plus souvent une matrice contenant des vides ou des inclusions) dans le but de vérifier le bien fondé de certaines hypothèses simplificatrices souvent utilisées dans la pratique des prédictions des propriétés effectives par des méthodes analytiques et/ou numériques. On utilise pour cela le couplage de l'approche d'homogénéisation et XFEM proposé et validé dans le chapitre précédent. Les simulations sont effectuées à l'aide d'une part XFEM avec un VER et une description détaillée de la microstructure, et d'autre part FEM et une méthode en cellule unique périodique. Nous comparons lorsque cela est possible les résultats ainsi obtenus avec les prévisions du schéma de Mori-Tanaka choisi ici parmi les méthodes analytiques pour sa simplicité.

On discutera en particulier l'effet de la distribution et de la forme des hétérogénéités sur le comportement linéaire macroscopique de matériau. Des formes usuelles ont été choisies pour les inclusions pour arriver à la fin à une microstructure plus complexe, polycristalline en grains. Dans tout les cas, la distribution des champs locaux de contraintes est donnée afin d'examiner les sites de concentrations de contraintes et déformations souvent à l'origine de nucléation d'endommagement et de microfissures dans ce type de matériau matrice/inclusion. Nous nous intéressons également dans ce chapitre au comportement non linéaire du matériau en proposant de décrire le comportement de la matrice par un modèle de Drucker-Prager. La détermination du comportement macroscopique non linéaire en utilisant les mêmes formes et distribution des inclusions a été examinée afin de montrer l'amplitude des phénomènes dans le cas non linéaire.

III.2 Comportement mécanique linéaire

III.2.1 Matériau périodique à inclusions sphériques de même rayon

Ce problème concerne les propriétés effectives d'un milieu périodique constitué d'une matrice solide et des inclusions sphériques (Fig. 3.1). Les propriétés élastiques de la matrice, des inclusions sont celles du tableau 2.1 (les mêmes que le chapitre précédents) avec une fraction volumique de 21%. Le calcul de référence, basé sur XFEM, est réalisé sur une cellule de base en appliquant les conditions de périodicité (Fig. 3.1.a). Cette procédure sera appelé Méthode effective dans la suite du paragraphe. Le calcul XFEM global quant à lui contient l'ensemble des inclusions et un maillage de fond régulier (Fig. 3.1.b). Les conditions aux limites et de chargement sont appliqués pour réaliser un test de compression uniaxiale. La charge sur la face supérieure est de -10N .

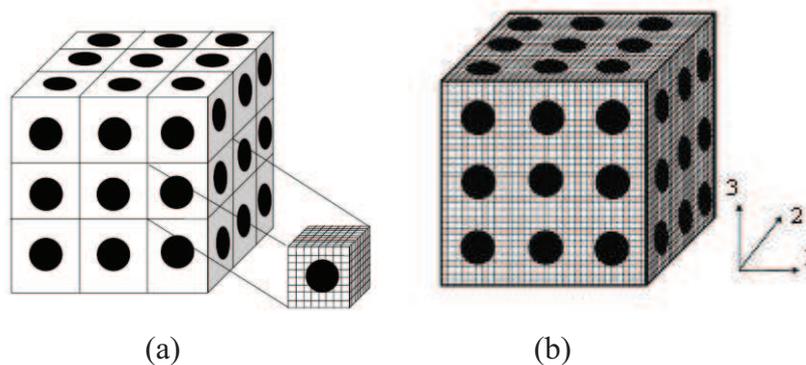


Fig. 3.1: Cube contenant des inclusions sphériques selon une distribution périodique, (a) Calcul XFEM avec cellule de base, (b) Calcul XFEM global.

Les propriétés effectives (module d'Young et coefficient de Poisson) obtenues par les deux procédures sont présentées dans le tableau 3.1. Les différences entre les résultats du calcul de référence et XFEM global proviennent principalement du niveau de discrétisation différent utilisé dans les deux calculs. En général, et comme cela a été mis en évidence par différents auteurs [BEL 03, MOE 03], un maillage suffisamment fin est nécessaire pour obtenir des résultats précis.

Propriétés effectives	Cellule de base	Méthode XFEM	Différence entre les deux méthodes (%)
Module de Young (MPa)	10761.1	11130.3	3.3
Coefficient de Poisson	0.1374	0.1255	8.6

Tableau 3.1 : Comparaison des propriétés effectives d'un matériau périodique à inclusions sphériques.

III.2.2 Influence de la distribution spatiale des inclusions sur les propriétés effectives

Dans les approches analytiques basées sur la solution Eshelby, la distribution spatiale des inclusions est négligée ou traitée d'une certaine façon par diverses simplifications. Par exemple dans le schéma dit de Mori-Tanaka [MOR 73], il est supposé que la distribution spatiale des inclusions est la même que la forme des inclusions. Dans le schéma énergétique de Ponte-Castañeda [CAS 95], il est possible de décrire une distribution spatiale ellipsoïdale des inclusions. D'un autre côté, malgré que le modèle auto-cohérent classique est censé prendre en compte l'interaction des inclusions, il n'est toujours pas clair de quelle façon l'interaction entre les inclusions est produite. Même si de telles méthodes ont la possibilité de tenir compte de la distribution générale, elles ne sont pas sensibles à la distance centre à centre des inclusions. Par contre, dans la méthode de la cellule unique numérique nommée généralement cellule de base, la distribution spatiale est considérée par la géométrie de la cellule unitaire, censé être répétée périodiquement à l'infini. L'effet de la distribution est examiné à travers deux configurations bidimensionnelle (2D) et tridimensionnelle (3D) dans les deux sections suivantes.

III.2.2.1 Distribution bidimensionnelle (2D)

Dans un premier temps, le problème est traité avec une configuration 2D en utilisant un maillage régulier de 433x433 nœuds (voir Fig. 3.2, où le maillage local est également représenté). L'analyse sera limitée ici pour les quatre coefficients de rigidité (C_{1111} , C_{2222} , C_{1122} et C_{2211}) obtenu par deux chargement indépendants (respectivement dans les directions horizontale et verticale indiquée par les indices 1 et 2).

Tout d'abord, la distribution spatiale des inclusions circulaire a été étudiée. Chaque inclusion a

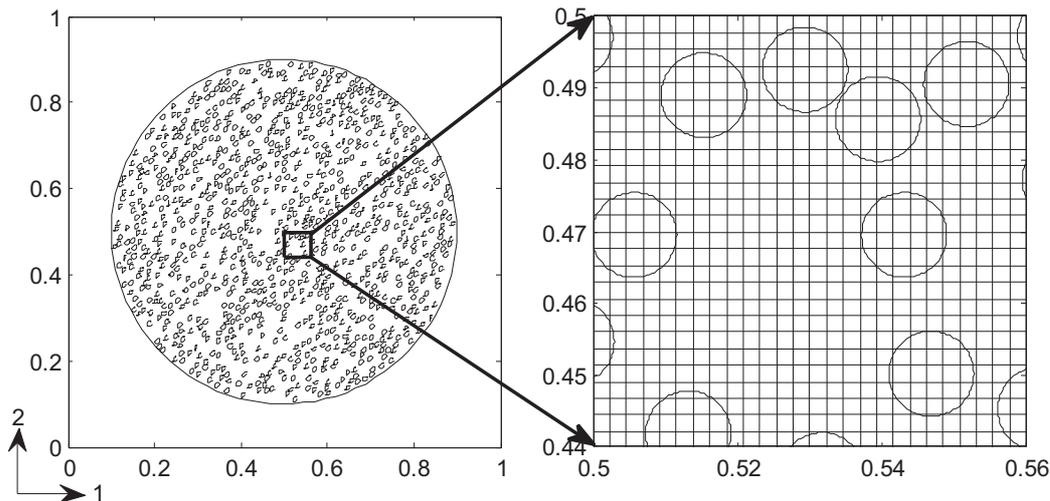
une section circulaire d'un rayon de $5.9 \mu\text{m}$. Dans les deux cas de la Fig.3.2, 1000 inclusions sont générées de façon aléatoire à l'intérieur des régions prédéfinies de forme circulaire et elliptique, respectivement. C'est une situation typique où la méthode directe FEM est très difficile à mettre en œuvre (difficulté de description de la microstructure et de maillage), en raison d'un grand nombre d'inclusions et d'une grande complexité de la microstructure.

Pour les deux calculs, les propriétés élastiques utilisées pour la matrice et les inclusions sont présentées dans le tableau 3.2 avec une fraction volumique des inclusions égale à 11%.

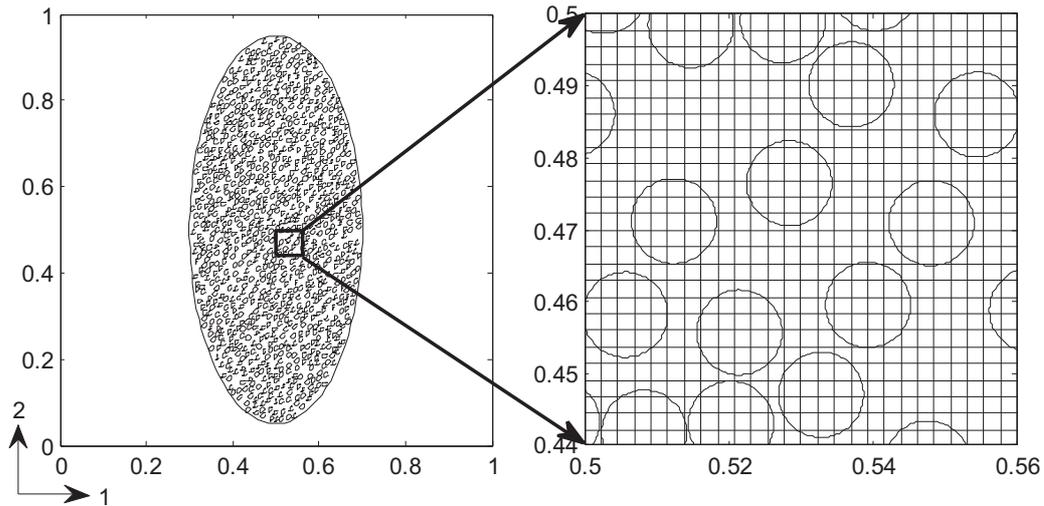
Propriétés élastiques	Matrice	Inclusion
Modules de Young	7600 MPa	84000 MPa
Le coefficient de Poisson	0.1	0.3

Tableau 3.2: Les propriétés élastiques des constituants

La première distribution (Fig. 3.2 (a)) est censée coïncider avec l'hypothèse du schéma de Mori-Tanaka (inclusions de forme circulaire et distribution circulaire). Pour le second cas (Fig. 3.2 (b), la distribution elliptique et des inclusions circulaire) le rapport des diamètres principaux de la concentration elliptique est de 0,44. Dans la Fig. 3.2, sont également indiqués le maillage de fond XFEM et des informations locales de la distribution des inclusions. Les conditions aux limites de périodicité et de chargement classique sont appliquées sur le VER ainsi défini.



(a) Distribution spatiale circulaire et aléatoire des inclusions circulaires.



(b) Distribution elliptique aléatoire des inclusions circulaires.

Fig. 3.2: Deux exemples de distributions aléatoires d'inclusions dans la matrice isotrope.

Les coefficients de rigidité effectifs obtenus dans les deux exemples sont représentés dans les tableaux 3.3 et 3.4, et sont comparés avec les prédictions de la procédure de Mori-Tanaka (Voir l'annexe A et B). Il faut noter que les valeurs brut (sans symétrisations) sont présentées ce qui implique quelques différences dues à l'imprécision numérique.

Il est connu que le modèle de Mori-Tanaka suppose que la forme de distribution est identique avec celle de l'inclusion elle-même. Ainsi, puisque la forme et la fraction volumique sont les mêmes dans les deux cas représentés dans la Fig. 3.2 (a) et 3.2 (b), les prédictions de Mori-Tanaka directes sont les mêmes, même si les distributions spatiale réelle des inclusions ne le sont pas. Afin de tenir compte de la distribution spécifique des inclusions dans la Fig. 3.2 (b) en utilisant le schéma de Mori-Tanaka, on pourrait suivre une approche d'homogénéisation en deux étapes censées donner à la méthode une sorte de sensibilité à l'égard de la distribution spatiale des inclusions d'une forme différente de celle des inclusions. La première étape de cette procédure consiste à déterminer les propriétés effectives de la région elliptique indiquée sur la Fig. 3.2 (b) en utilisant le schéma de Mori-Tanaka pour les inclusions et la matrice de cette même région. Ensuite, pour la deuxième étape, ces propriétés calculées du domaine elliptique sont utilisées pour déterminer les propriétés globales du matériau dans le cas d'une inclusion elliptique dans un milieu infini.

Propriétés effectives	XFEM	Mori-Tanaka directe	Différences relative(%)
C_{1111} (MPa)	9171	9133	0.4
C_{2222} (MPa)	9173	9133	0.4
C_{1122} (MPa)	1232	1227	0.4
C_{2211} (MPa)	1232	1227	0.4

Tableau 3.3: Coefficients effectifs de rigidité du matériau avec la distribution circulaire des inclusions circulaires

Comme attendu, pour la distribution elliptique, XFEM et Mori-Tanaka en deux étapes indique un comportement anisotrope dû à la distribution spatiale des inclusions. Dans ce cas la différence entre la méthode de Mori-Tanaka en deux étapes et XFEM est de 3%. La concordance des deux méthodes pour la distribution circulaire est également assez bonne avec des différences plus ou moins de 0.5 %.

Propriétés effectives	XFEM	Deux étapes Mori-Tanaka	Différences relative(%)
C_{1111} (MPa)	9069	9078	0.1
C_{2222} (MPa)	9430	9310	1.3
C_{1122} (MPa)	1230	1266	2.8
C_{2211} (MPa)	1229	1266	2.8

Tableau 3.4: Coefficients de rigidité effectifs du matériau avec la distribution elliptique des inclusions circulaires.

III.2.2.2 Distribution tridimensionnelle (3D)

Dans un second temps, le problème de l'influence de la distribution aléatoire des inclusions sur les propriétés effectives a été étudié dans cette partie via deux exemples simples concernant des distributions non-périodiques avec une configuration tridimensionnelle. Pour les deux cas une comparaison a été effectuée entre les résultats obtenus par un calcul XFEM global et la procédure dite effective.

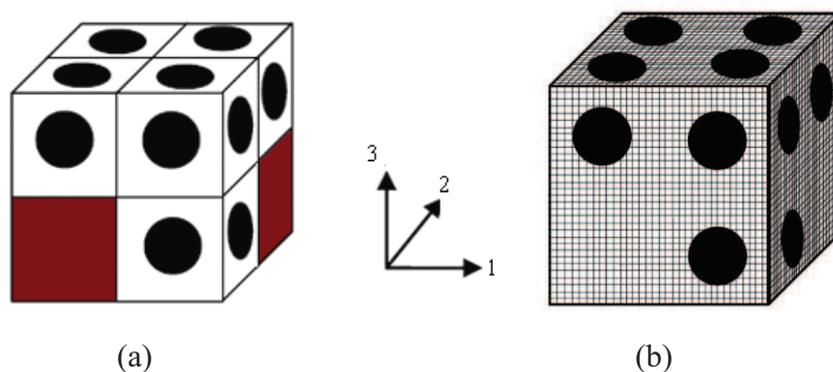


Fig. 3.3: Cube contenant des inclusions sphériques selon une distribution aléatoire simplifiée, (a) procédure effective avec cellule de base, (b) méthode XFEM globale.

Rappelons ici que selon cette procédure, les propriétés effectives sont calculées en deux temps. Premièrement, pour chaque élément cubique (Fig. 3.3. (a)) lorsque celui-ci contient une inclusion, les propriétés effectives sont calculées en utilisant XFEM et une cellule élémentaire de base similaire à celles de la Fig. 3.3 (a). Les éléments cubiques ne contenant pas d'inclusions préservent les propriétés de la matrice. Ensuite, les propriétés ainsi définies sont injectées dans un calcul aux éléments finis contenant uniquement des éléments cubiques, homogène au niveau d'un seul élément, mais variable d'un élément à l'autre.

Pour le calcul XFEM global on préserve le même maillage que dans le calcul précédent en ajoutant les mêmes inclusions que pour le calcul « effectif » (Fig. 3.3 (b)).

La simulation est réalisée avec les mêmes propriétés élastiques des phases du tableau 3.2 et une fraction volumique de 21% pour les deux cas de calculs. Les résultats des propriétés effectives selon différents axes pour les deux méthodes sont donnés dans le tableau 3.5 (où l'on s'est limité uniquement dans la présentation des modules de Young).

Propriétés effectives	Méthode effective	XFEM	Différence entre les deux méthodes (%)
E_3 (MPa)	10633.2	10634.1	0.008
E_2 (MPa)	10755.1	10795.9	0.4
E_1 (MPa)	10779.2	10904.5	1.15

Tableau 3.5. Comparaison des résultats entre la méthode effective et le calcul direct pour le cas d'inclusions sphériques et une distribution 3D non périodique.

La même fraction volumique et les mêmes propriétés ont été utilisées pour effectuer deux autres calculs en prenant deux distributions aléatoires des inclusions (Fig. 3.4.a et 3.4.b).

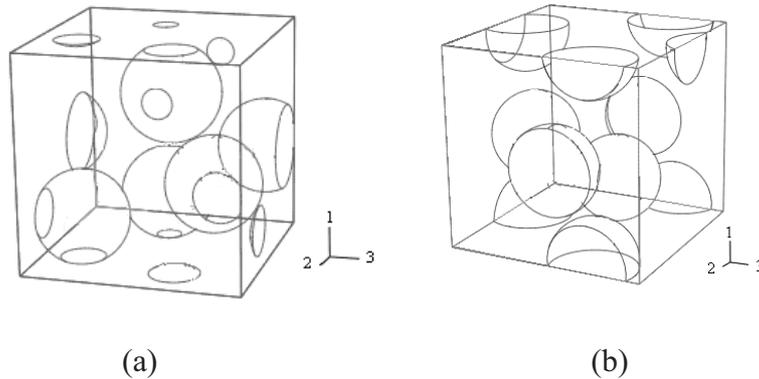


Fig. 3.4: Deux exemples de distributions aléatoires des inclusions.

Les positions des inclusions sphériques sont définies par un algorithme aléatoire et lorsqu'une nouvelle sphère est intersectée par une sphère déjà présente, une nouvelle position du centre est définie. Enfin, lorsqu'une sphère est coupée par une face du cube, son image périodique sur l'autre face est réalisée. Les résultats des propriétés effectives sont donnés dans le tableau 3.6.

Propriétés effectives	Distribution (a)	Distribution (b)	Différences entre deux distributions (%)
E_3 (MPa)	10664.2	10828.8	1.5%
E_2 (MPa)	10988.9	10531.4	4.2%
E_1 (MPa)	10821.7	10782.3	0.4%

Tableau 3.6 : Module de Young effectif des matériaux à inclusions sphériques selon les deux distributions aléatoires des Fig. 3.4.a et 3.4b.

Les résultats présentés ici montrent qu'en dépit du faible nombre d'inclusions qui ne favorisent pas des distributions fortement aléatoires, et malgré le nombre limité des cas étudiés une tendance globale de prise en compte de l'interaction entre les inclusions a été mise en évidence via les calculs XFEM. Ces interactions sont parfois faibles et leur contribution dans la réponse globale du matériau est négligeable. Cependant en vue des derniers résultats ces interactions sont susceptibles de devenir d'autant plus importantes que la structure du matériau devient complexe et le nombre d'inclusions augmente. La méthode XFEM globale deviendra alors un outil appréciable pour tenir compte de ces interactions.

III.2.3 Influence de l'orientation des inclusions sur les propriétés effectives

Notre objectif ici est d'analyser l'effet de l'orientation des inclusions sur les propriétés effectives du matériau. Le type d'inclusion retenu est une forme elliptique ayant la possibilité de présenter différentes directions. Cependant, le cas des inclusions elliptiques aléatoirement orientées et distribuées est étudié en utilisant 100 inclusions (Fig. 3.5). L'angle d'orientation α (angle entre le plus long diamètre de l'inclusion elliptique et la direction horizontale) pour chaque inclusion est obtenu à partir d'une distribution uniforme dans la gamme $[0, 2\pi]$. Les inclusions ont toutes les mêmes caractéristiques géométriques avec les semi-axes $a_1=0.1 \times a_2$, $a_2=80\mu\text{m}$ (Fig. 3.5.b). On se propose aussi d'étudier un autre échantillon avec les mêmes inclusions ellipsoïdales mais toutes orientées selon la direction verticale (Fig.3.5.a) en guise de comparaison.

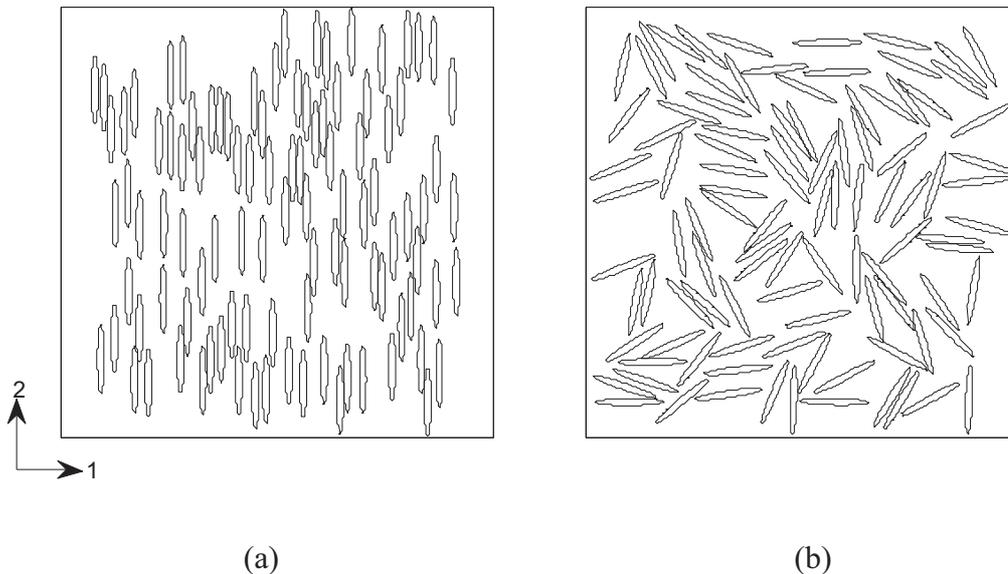


Fig. 3.5: a) Inclusions elliptique avec une orientation uniforme ($\alpha = \pi / 2$). b) Inclusions elliptiques orientées aléatoirement ($\alpha [0, 2\pi]$).

Les résultats des deux cas sont présentés dans le tableau 3.7. Il est à noter que les valeurs présentées dans ce tableau sont des valeurs moyennes obtenues à partir de l'établissement d'une moyenne pour quatre réalisations différentes des distributions pour chaque cas. Afin d'obtenir statistiquement des valeurs moyennes significatives, il serait nécessaire d'effectuer plus de simulations. Les faibles dispersions dans les coefficients effectifs de rigidité signifieraient que ces valeurs sont déjà tout à fait représentatives.

Il est facile de voir les différences sur les valeurs du tableau 3.7. En raison de l'orientation

préférentielle des inclusions elliptiques une anisotropie structurelle est observée dans le premier cas (comme prévu), alors qu'un comportement presque isotrope est observé dans le cas des inclusions orientées de façon aléatoire. Par conséquent les différences entre ces deux cas, des coefficients de rigidité sont très importantes. En même temps, il semble que ces différences sont moins importantes (environ 8%) pour les termes (C_{1122}, C_{2211}) que pour les termes (C_{1111}, C_{2222}), pour lesquels ces différences sont presque trois fois plus grande.

		C_{1111} (MPa)	C_{2222} (MPa)	C_{1122} (MPa)	C_{2211} (MPa)
Cas A (Inclusion alignée $\alpha=\pi/2$)	XFEM	9700	15751	1630	1644
	Mori-Tanaka	9651	15594	1620	1620
	Différences relative (%)	0.5	1.0	0.6	1.5
Cas B (Orientation aléatoire $\alpha \in [0, 2\pi]$)	XFEM	11854	11469	1772	1781
	Mori-Tanaka	12118	12118	2288	2288
	Différences relative(%)	2.2	5.7	29.1	28.5
Différences relative de XFEM entre cas A et B (%)		22.2	27.2	8.7	8.3
Différences relative de Mori-Tanaka entre ca A et B (%)		25.6	22.3	41.2	41.2

Tableau 3.7 : Propriétés effectives des deux matériaux avec les inclusions elliptiques (alignées ou aléatoirement distribuées).

Manifestement, les prévisions de XFEM sont proches de celle des méthodes traditionnelles d'évaluation (FEM avec cellule unitaire et analytique) où ces dernières méthodes sont employées dans leurs conditions optimales. Les différences observées dans diverses conditions montrent l'effet de la distribution spatiale des inclusions. Cet élément qui est considéré d'une manière simplifiée dans les approches analytiques et numériques avec cellule de base périodique, et, selon des situations, pourrait conduire à des différences non négligeables.

III.2.4 Influence de la morphologie des inclusions sur les propriétés effectives

Dans la plupart des travaux, soulevant la question de l'effet de la forme des inclusions dans les matériaux de type matrice/inclusion, et en particulier les approches analytiques, il est classique de considérer des formes simples le plus souvent sphériques, elliptiques et cylindriques. En effet, cette simplification offre une exactitude suffisante pour les objectifs de la plupart des problématiques pratiques même si la question de l'effet de cette simplification sur les propriétés effectives n'a pas encore une réponse claire.

Dans cette section, cette question est étudiée par XFEM à travers un certain nombre de problèmes 2D en déformation plane. Pour cela, quatre formes différentes d'inclusion ont été choisies et sont présentées sur la Fig.3.6 : inclusions circulaires, elliptiques, triangulaires et non convexes. Pour chaque forme, un ensemble de réalisations aléatoires des inclusions a été effectué chacune contenant 100 inclusions. Pour tous les cas, la même fraction volumique des inclusions a été considérée ($f=20\%$) et les mêmes propriétés que dans les cas précédents sont employées (tableau 3.2). Toutes les inclusions de forme circulaire ont le même rayon de $25 \mu\text{m}$.

Pour les inclusions de forme elliptique les semi-axes sont respectivement $a_1=0.3333 \times a_2$, $a_2=44 \mu\text{m}$ (de façon à avoir un facteur de forme de $1 / 3$). Enfin, les inclusions de forme triangulaire ont un côté de longueur égale à $68 \mu\text{m}$. Pour les formes dont l'orientation a un sens, une orientation est constante pendant toutes les réalisations, de sorte que l'aspect aléatoire concerne seulement les centres des inclusions.

Les réalisations des inclusions non-convexes de la Fig. 3.6 ont été effectuées en utilisant l'équation [2.7 et 2.9], avec $b = 4$, $a = 0,4 \times r_0$ ($r_0 = 24 \mu\text{m}$). Le chargement est toujours de nature compressive sur la face supérieure avec une face inférieure fixe selon la direction 2 et des faces latérales libres.

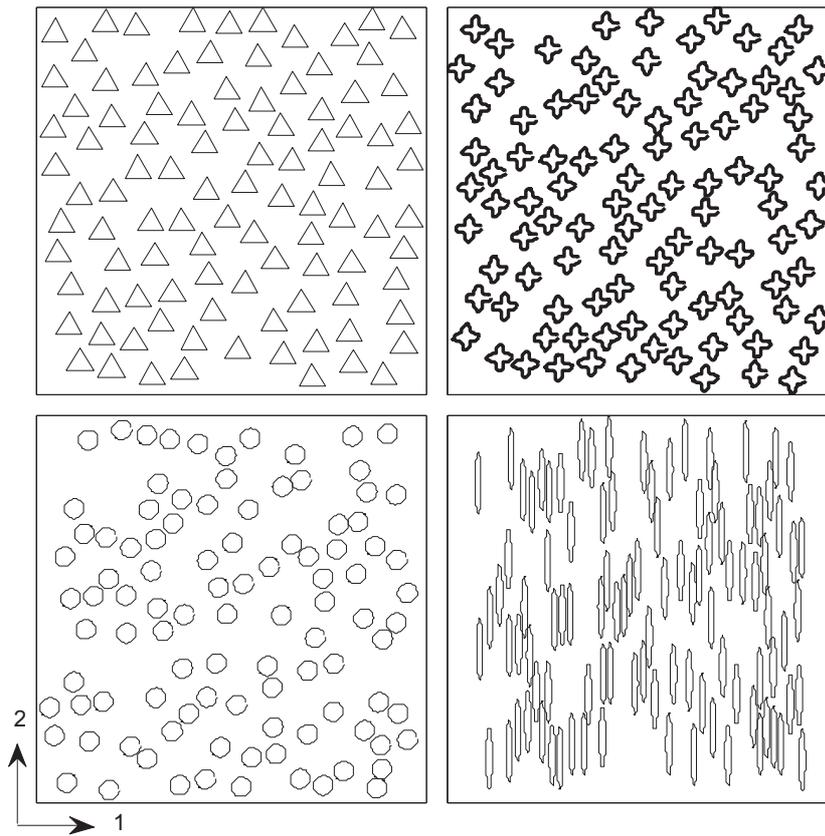


Fig. 3.6: Forme d'inclusion utilisée dans les simulations numériques.

Les valeurs moyennes des propriétés en terme de coefficients effectifs (C_{1111} , C_{2222} , C_{1122} and C_{2211}) obtenues à partir de l'établissement d'une moyenne sur les quatre réalisations aléatoires de chaque forme d'inclusion, sont représentées dans le tableau 3.8. La comparaison est réalisée ici avec les résultats FEM en moyennant sur une cellule de base à inclusion unique avec les mêmes conditions citées plus haut. Pour ces conditions les différences entre les propriétés effectives de XFEM et FEM sont faibles et même dans le cas des inclusions non convexes, ces différences restent inférieures à 8%.

Ces résultats semblent justifier dans une certaine mesure, au moins comme une première approximation, l'utilisation de la méthode de la cellule unitaire (de base) dans les prédictions des matériaux aléatoires pour lesquels la périodicité n'est pas toujours vérifiée. Il est important de noter également que dans la mesure où la fraction volumique d'inclusions est identique, la forme des inclusions pour les cas étudiés ici, a seulement un impact modéré sur les propriétés mécaniques effectives.

Forme de l'inclusion	Différent méthodes et Différences relative	C_{1111} (MPa)	C_{2222} (MPa)	C_{1122} (MPa)	C_{2211} (MPa)
Inclusion circulaire	XFEM	10596	10546	1597	1597
	FEM (ABAQUS) (inclusion unique)	10362	10362	1535	1535
	Différences relative (%)	2.2	1.7	3.9	3.8
Inclusion elliptique	XFEM	9958	12129	1587	1593
	FEM (ABAQUS) (inclusion unique)	9728	11658	1535	1566
	Différences relative (%)	2.3	3.8	3.2	1.6
Inclusion triangulaire	XFEM	10999	10940	1685	1684
	FEM (ABAQUS) (inclusion unique)	10908	10700	1599	1582
	Différences relative (%)	0.8	2.2	5.1	6.0
Inclusion non-convex	XFEM	11068	11077	1717	1715
	FEM (ABAQUS) (inclusion unique)	10701	10701	1589	1589
	Différences relative (%)	3.3	3.4	7.5	7.4

Tableau 3.8: Propriétés effectives pour différentes formes d'inclusion pour un matériau de type composite matrice/inclusion.

En effet, même si on considère l'évolution de C_{1111} (le coefficient le plus sensible à la forme des inclusions dans nos simulations) on pourrait observer que sans se soucier du fait que la différence devient plus importante entre la forme circulaire et non convexe (avec les valeurs les plus élevées pour cette dernière, tableau 3.8), les différences entre la circulaire et des inclusions de forme non convexe sont moins de 5%.

Sur les figures (Fig. 3.7-3.10), les champs locaux de contraintes sont représentés selon la direction 2. A travers ces distributions, et contrairement aux faibles différences des propriétés effectives, on peut voir que localement il y'a un impact important de la forme des inclusions. L'état d'hétérogénéité des contraintes est très différent d'une forme à une autre. La zone de localisation des contraintes et d'apparition de contraintes de traction dans la matrice autour des inclusions sont plus importante pour la forme elliptique (Fig. 3.8). Par contre, la concentration de contrainte la plus importante se situant aux frontières matrice inclusions est pour tout les cas.

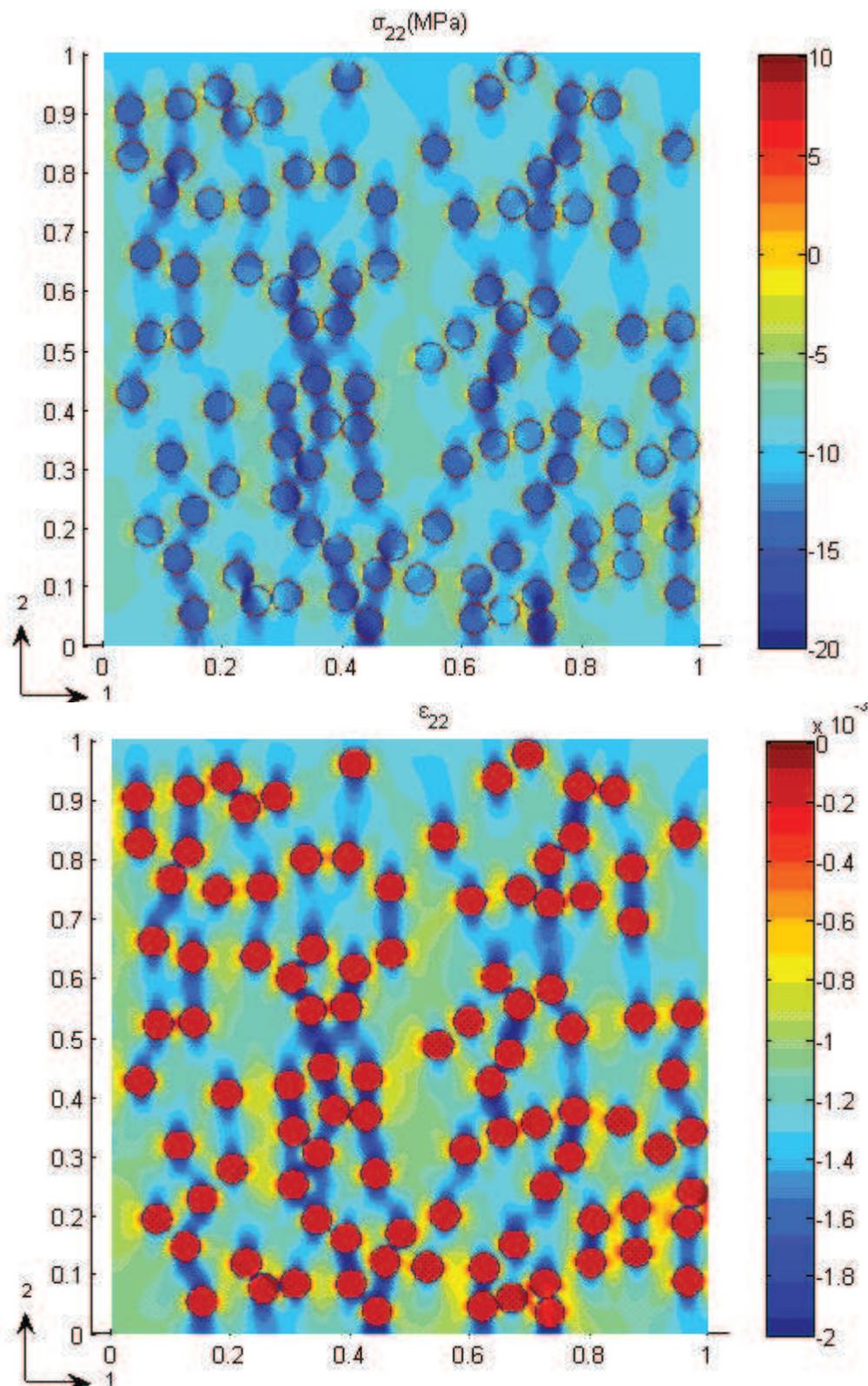


Fig. 3.7: Champ des contraintes (σ_{22}) et champ des déformations (ϵ_{22}) pour un matériau contenant une distribution d'inclusions circulaires

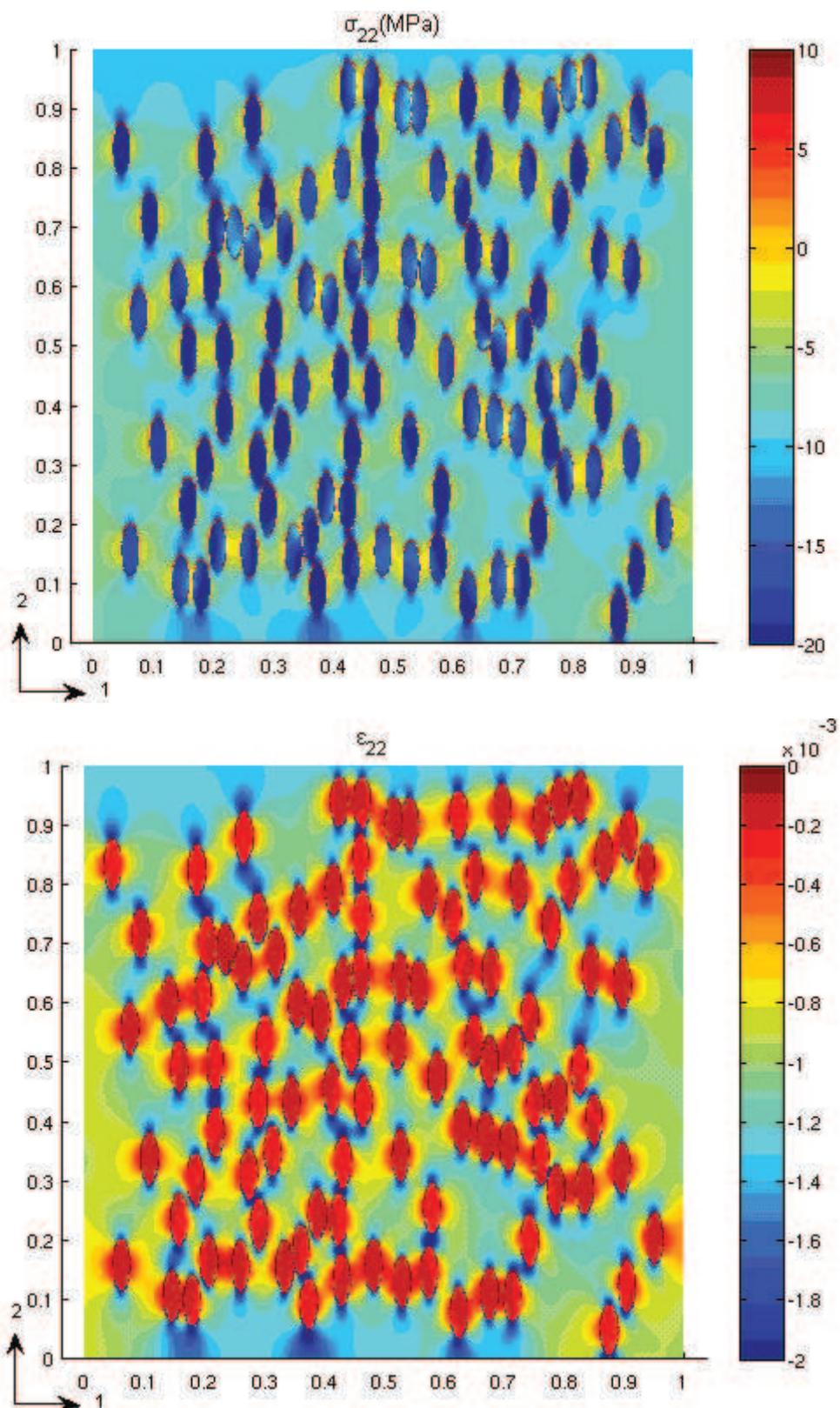


Fig. 3.8: Champ de contraintes (σ_{22}) et champ des déformations (ϵ_{22}) pour d'un matériau contenant une distribution d'inclusions elliptiques

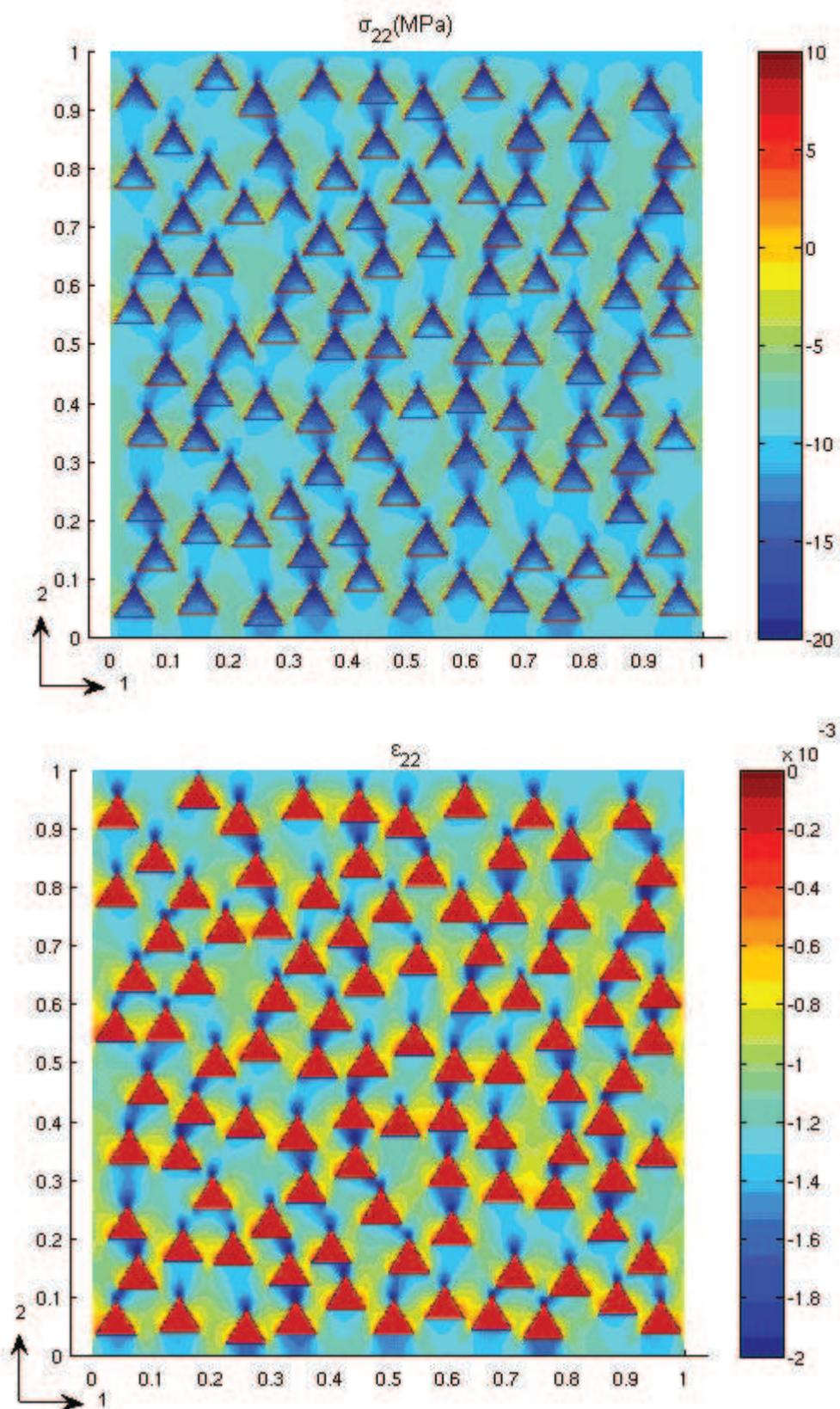


Fig. 3.9: Champ de contraintes (σ_{22}) et champ des déformations (ϵ_{22}) pour un matériau contenant une distribution d'inclusions triangulaires

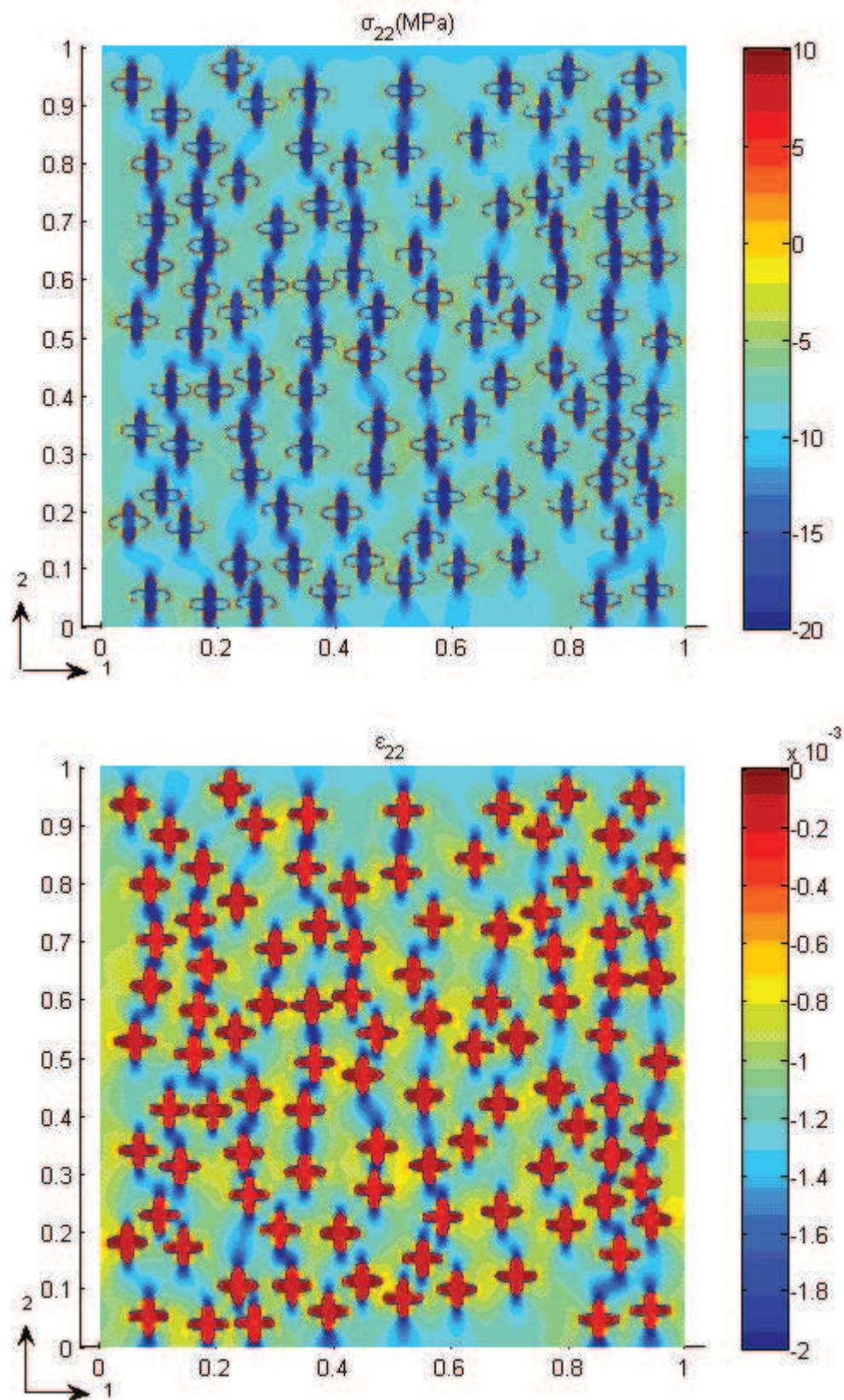


Fig. 3.10: Champ de contraintes (σ_{22}) et champ des déformations (ϵ_{22}) pour un matériau contenant une distribution d'inclusions non-convexes

III.2.5 Homogénéisation du comportement élastique d'un géomatériau polycristalin biphasique

Bien que la microstructure matrice-inclusion utilisée dans les paragraphes précédents décrit assez bien le comportement d'un grand nombre de géomatériaux et de composites industriels, dans d'autres cas, une microstructure grain-à-grain dite polycristalline est plus appropriée pour décrire leur microstructure d'une manière plus réaliste.

Dans les exemples traités ici, cette microstructure polycristalline grain-à-grain est obtenue en utilisant une tessellation de Voronoï (Voronoi aggregate), comme c'est souvent le cas dans les travaux publiés dans le domaine [AUR 91]. Alternativement à certains travaux précédents qui emploient l'analyse par éléments finis et la mosaïque de Voronoï pour l'évaluation de l'effet de taille des constituants sur les propriétés effectives des matériaux hétérogènes [KAN 03, FOR 00], nous employons ici cette microstructure granulaire avec la procédure XFEM développé dans les paragraphes précédents. Seulement les cas bidimensionnels 2D seront traités ici par souci de simplicité, et de comparaison avec les cas étudiés précédemment. Premièrement, et afin de faire une comparaison avec les résultats du matériau à microstructure matrice-inclusion, une décomposition de Voronoï biphasique est considérée (Fig.3.11) en grains d'argile et de calcite, utilisant un total de 1000 grains pour une fraction volumique de calcite de 20%. Afin de réaliser la microstructure de Voronoï, un jeu de points est tiré aléatoirement, ces points constitueront les centres des grains ou les sites. Ensuite, on trace la médiatrice de chaque segment reliant un point central à ses voisins les plus proches. L'opération est ainsi répétée pour tous les points pour former les polygones qui seront les grains de la microstructure (Fig. 3.11). Comme dans les cas précédents, quatre réalisations sont définies. Pour chaque phase les propriétés des constituants sont les mêmes que celles utilisées pour le composite diphasique précédent (tableau 3.2).

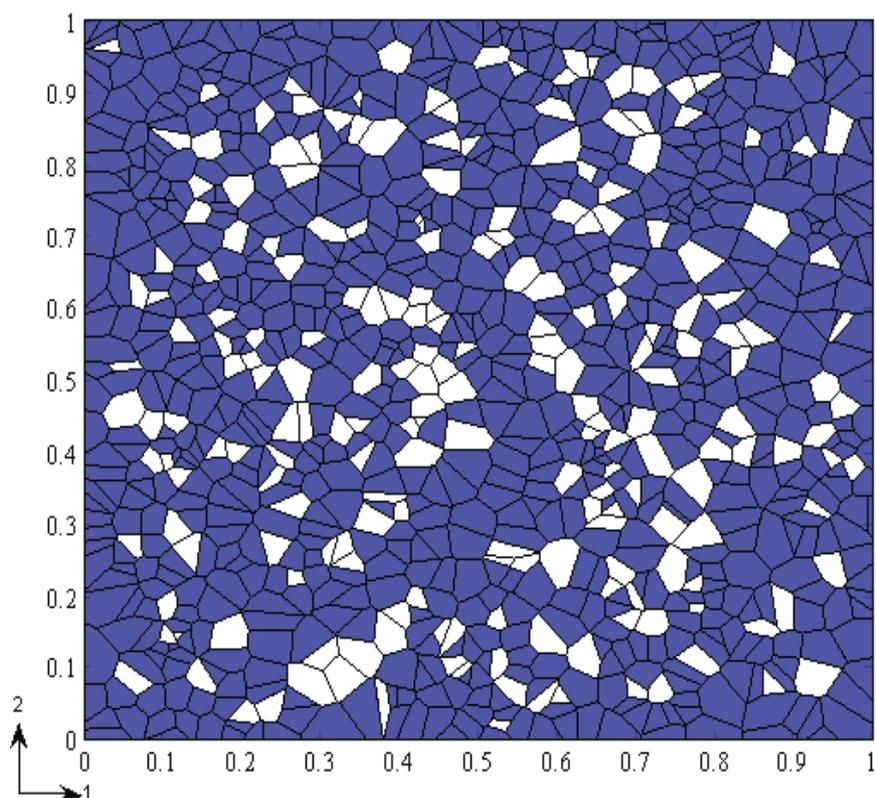


Fig. 3.11: Décomposition de Voronoi pour le matériau diphasique contenant mille grains (les grains gris représentent les inclusions de calcite; bleu la matrice argileuse).

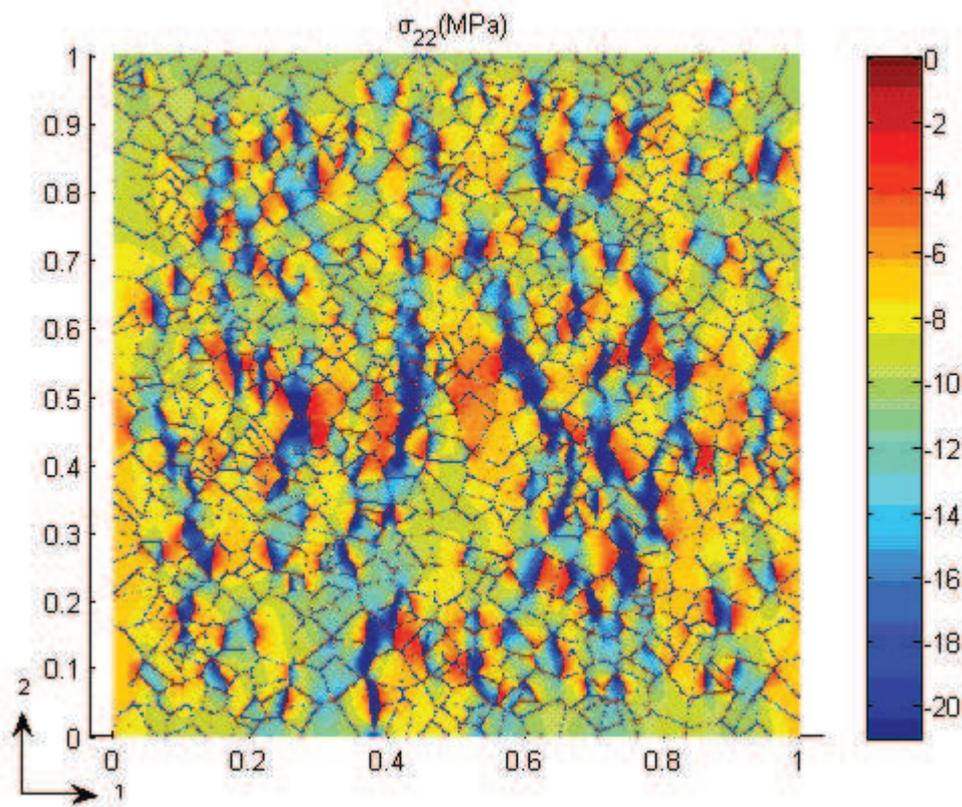
Les propriétés effectives du géomatériau diphasique polycristallin sont données dans le tableau 3.9 comparées à celles des inclusions circulaires et triangulaires étudiées dans la section ci-dessus. Les résultats obtenus en utilisant un agrégat de Voronoï s'éloignent de ceux obtenus utilisant les inclusions triangulaires avec des différences qui restent inférieures à 5%.

	C_{1111} (MPa)	C_{2222} (MPa)	C_{1122} (MPa)	C_{2211} (MPa)
Case 1 Inclusions Circulaires	10596	10546	1597	1597
Case 2 Inclusions Triangulaires	10999	10940	1685	1684
Case 3 2-phase Voronoï	11121	11162	1767	1766
Différences (1) and (3) (%)	5.1	5.8	10.7	10.6
Différences (2) and (3) (%)	1.1	2.0	4.9	4.9

Tableau 3.9: Comparaison des coefficients effectifs du matériau diphasique en grain de Voronoi avec les cas de structure matrice-inclusion.

Ces différences s'élèvent jusqu'à 10 % dans le cas des comparaisons faites entre les inclusions circulaires et l'agrégat de Voronoï. Ceci indique que même si pour la simplicité l'utilisation des inclusions circulaires à la place des formes réelles des inclusions est une pratique courante, elle pourrait mener à la déviation des valeurs réelles qui pourraient être non négligeables.

La Fig. 3.12 représente la distribution des champs locaux de contraintes pour la microstructure polycristalline du matériau. Les champs montrent une hétérogénéité importante avec des zones de concentration dans la matrice. Même si le chargement est de nature compressive la aussi, des contraintes de traction apparaissent aux frontières des grains de calcite qui pourraient être à l'origine d'endommagement et du comportement non linéaire d'un géomatériau.



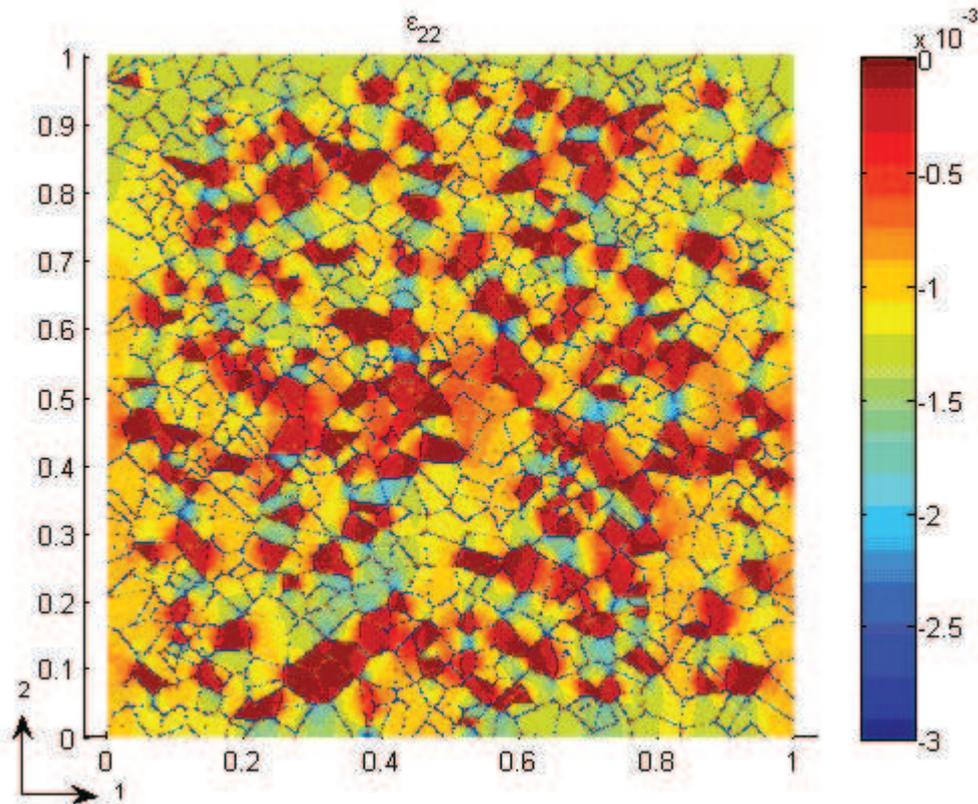


Fig. 3.12: Champs de contraintes (σ_{22}) et champ des déformations (ε_{22}) pour un matériau biphasique polycristallin.

III.2.6 Homogénéisation du comportement élastique de l'argilite de Meuse Haute Marne

Il s'agit d'utiliser XFEM et le diagramme de Voronoï pour la prédiction des propriétés élastiques de l'argilite de Meuse/Haute-Marne (M/HM), une roche intensivement étudiée dans le laboratoire de recherche souterrain de Bure (France) en relation avec des la problématique de stockage des déchets radioactifs. Les observations microscopiques sur cette roche [YVE 07] montrent une microstructure polycristalline à quatre phases : les grains d'argile (feuillets d'argile et microporosité), des inclusions minérales de calcite et de quartz et des macropores. La plupart de la porosité (~90% de la porosité ou 16% du volume de VER) est occluse dans les grains d'argile et non visible à l'échelle mésoscopique (échelle des grains). Les grains minéraux de quartz et de calcite constituent environ 40 % de volume alors que les macropores ne représentent qu'environ 2 % du volume du VER.

Notons que la plupart des travaux de modélisation micromécanique publiés sur cette roche, a été réalisé sur une microstructure de type matrice-inclusion [ZHE 01, GIR 07-1, GIR 07-2, GIR 08-1]. En vue des résultats du paragraphe précédent on pourrait se demander si cette

description simplifiée de la structure de l'argilite ait une influence sur les valeurs prédites des propriétés effectives.

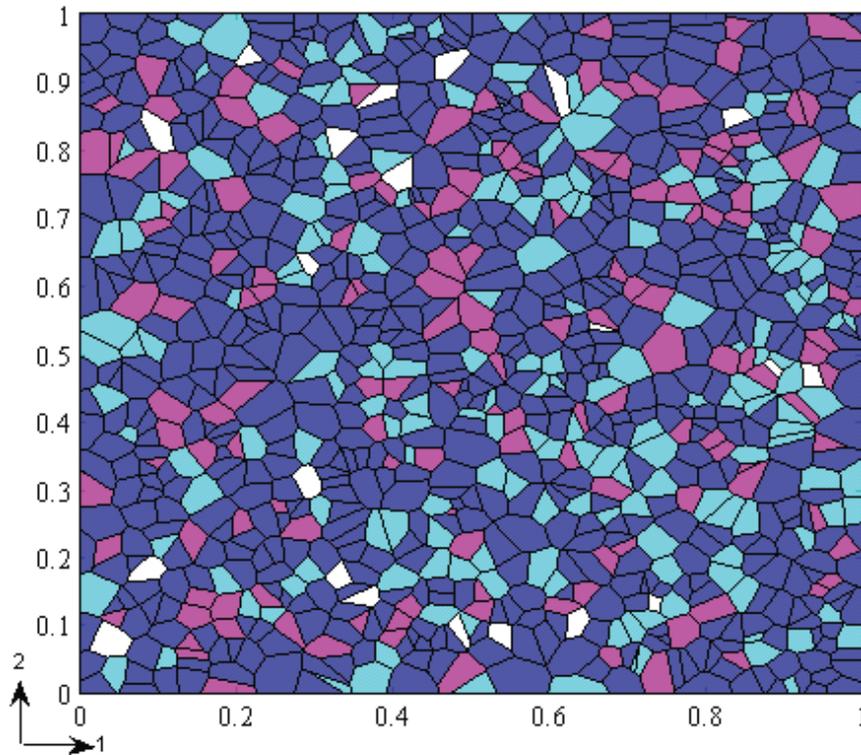


Fig. 3.13: Réalisation de la décomposition de Voronoi avec quatre phase contenant mille grains (le code couleur est utilisé: bleu - grains d'argile; rose- les grains de quartz; cyan-calcite; blanc – pores).

En se basant sur les observations microscopiques des études précédentes ([YVE 07]) plusieurs réalisations d'une microstructure à quatre phases ont été réalisées à l'aide du diagramme de Voronoi. Un exemple de réalisation est montré sur la Fig. 3.13. Les fractions volumiques des phases ainsi que leurs propriétés élastiques [VU 06] sont données dans le tableau 3.10. Les propriétés des macropores sont prises égales à zéro pour simplifier la construction des champs internes de contrainte-déformation.

Propriétés élastique	Calcite	Quartz	Matrice	Pore
module de Young (MPa)	84000	96400	7600	0.0
Coiffent de Poisson	0.3	0.08	0.1	0.0
Fraction Volumique	19%	15%	64%	2%

Tableau 3.10: Les propriétés élastiques des quatre phases.

Les propriétés effectives du matériau numérique ainsi construit ont été définies à partir des chargements simples et les conditions classiques. Dans le tableau 3.11 sont présentés les résultats numériques basés sur XFEM avec la microstructure polycristalline à quatre phase d'une part et ceux du schéma classique de Mori-Tanaka équivalent à la technique utilisée dans les études précédentes (une microstructure matrice/pores et inclusions de quartz et de calcite [GIR 07-1, GIR 07-2]). Au-delà des différences dues au fait que le matériau polycristallin n'est pas tout à fait isotrope, les résultats montrent une sous-estimation systématique d'environ 11% des propriétés issues du calcul analytique conforme à ce qu'on a trouvé précédemment.

Propriétés effectives	XFEM (4-phase Voronoï)	Mori-Tanaka	Différences relatives (%)
C_{1111} (MPa)	14084	12304	12
C_{2222} (MPa)	13616	12304	11
C_{1122} (MPa)	2632	2284	11
C_{2211} (MPa)	2616	2284	11

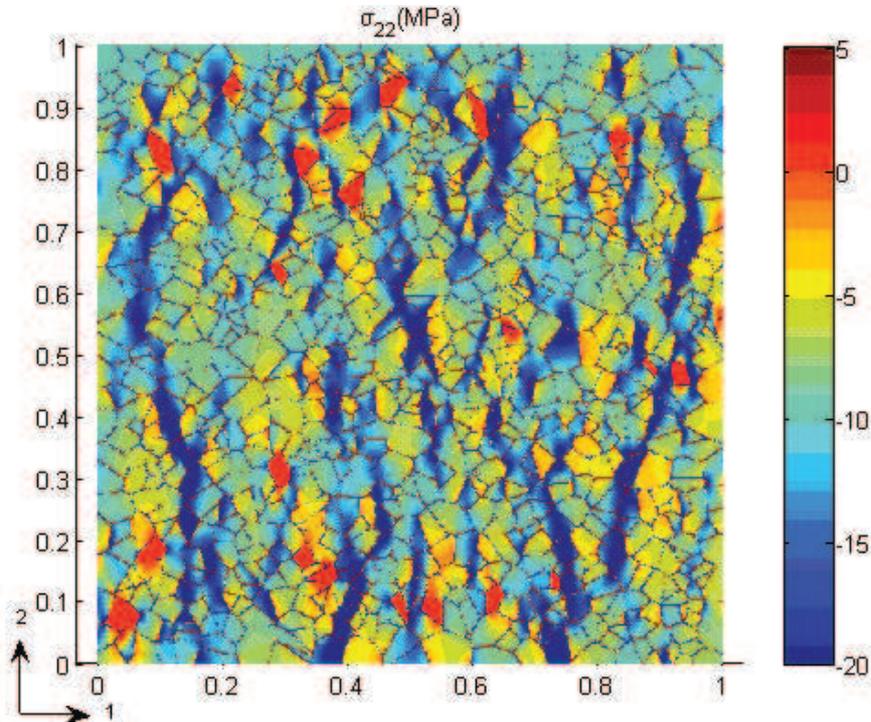
Tableau 3.11: Comparaison des coefficients effectifs du matériau en grain de Voronoï à quatre phases.

Ce résultat est important notamment en vue des procédures d'estimation des propriétés élastiques de la roche in situ. En fait, si toutes les propriétés du tableau 3.10 sont issues de la littérature, notamment des propriétés des minéraux, les propriétés des particules d'argile constituant la matrice argileuse sont identifiées en pratique par une analyse inverse en connaissant d'une part les propriétés du quartz, de la calcite, leurs fractions volumiques et d'autre part les propriétés effective macroscopiques obtenues à partir des tests classiques au laboratoire [GIR 07-1].

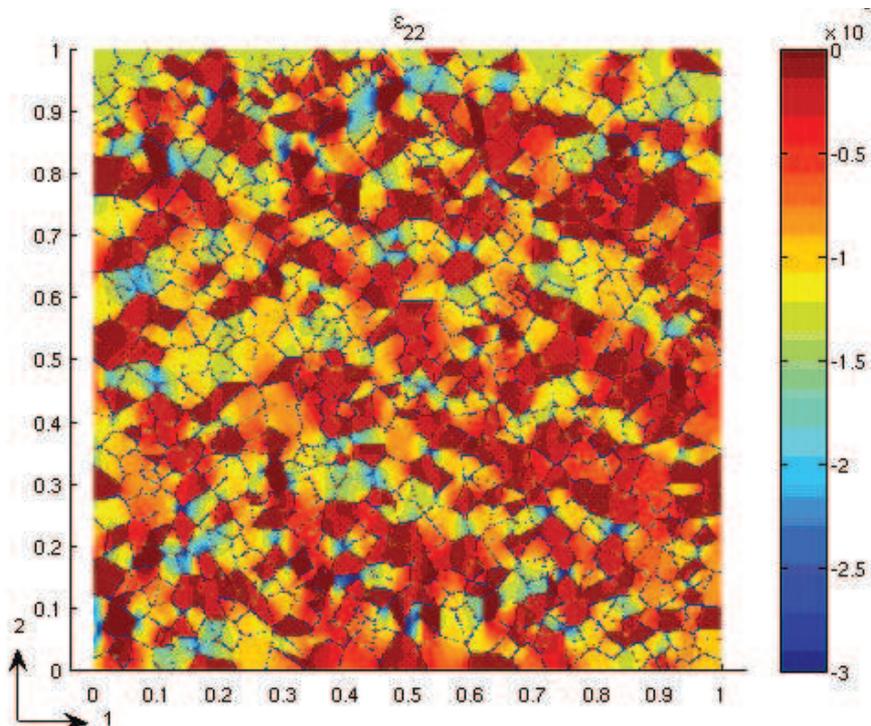
A la lumière des résultats obtenus à partir du matériau à microstructure polycristalline, il semble que cette évaluation inverse peut conduire à une surestimation d'environ 10% de ces propriétés.

Les champs internes de contraintes et déformations pour l'argilite de M/HM et pour un chargement uniaxial dans la direction 2 sont présentés sur la Fig. 3.14. La distribution des contraintes et déformations montre une très forte hétérogénéité, due à la distribution spatiale

des grains et des contacts des grains à propriétés élastique contrastés. En particulier, un gradient fort de déformations est observé autour des grains de quartz et de calcite qui pourrait signifier que c'est sont ces inclusions et leurs interfaces qui s'endommagent de préférence



(a)



(b)

Fig. 3.14: Champs internes dans l'argilite de Meuse Haute-Marne modélisé comme un matériau polycristallin à quatre phases :(a) distribution des contraintes. (b) distribution des déformations.

III.2.7 Conclusion

L'approche d'homogénéisation utilisant XFEM fournit des résultats similaires à ceux obtenus par la méthode des éléments finis classique et la méthode analytique dans beaucoup de cas, justifiant ainsi l'utilisation et l'attractivité des approches analytiques et de cellule de base périodique dans des situations différentes. Cependant, les prédictions de XFEM démontrent qu'en négligeant ou simplifiant la forme des constituants ou de leur distribution spatiale, même lorsqu'une cellule unitaire périodique est employée mènerait aux différences qui pourraient, selon les cas, être non négligeables. Par exemple la comparaison des résultats en utilisant un matériau matrice/inclusion circulaires avec ceux utilisant une microstructure en grain de Voronoi mène à des différences jusqu'à 10% pour un comportement élastique linéaire. On imagine que de telles différences seraient amplifiées dans le cas du comportement non linéaire.

III.3 Estimation par homogénéisation numérique des coefficients poro-élastiques linéaires d'un milieu poreux

En vue des équations [1.12-1.17] il est possible d'identifier les coefficients de couplage poroélastiques en connaissant le tenseur de rigidité drainé et non-drainé d'un milieu poreux [BIO 56, BIO 62, BIO 72, COU 95].

Il est en effet possible de calculer le tenseur de Biot à partir de considérations micromécanique comme cela a été déjà proposé par plusieurs auteurs (voir par exemple Chateau et al [CHA 98], Dormieux, et al [DOR 06], DO [DO 08]):

$$\mathbf{B} = (\mathbb{I} - \mathbb{C}^{\text{hom}} : \mathbb{S}^s) : \boldsymbol{\delta} \quad [3.1]$$

avec \mathbb{C}^{hom} étant le tenseur des modules d'élasticité macroscopique du milieu poreux dans le cas sec, \mathbf{B} le tenseur de Biot, \mathbb{S}^s le tenseur des souplesses de la phase solide et \mathbb{I} le tenseur identité d'ordre 4.

Par ailleurs, on montre que le module de Biot solide s'écrit [LEM 01] :

$$\frac{1}{N} = \boldsymbol{\delta} : \mathbb{S}^s : (\mathbf{B} - \phi \boldsymbol{\delta}) \quad [3.2]$$

où N est le module de Biot solide, \mathbb{S}^s est le tenseur des souplesses de la phase solide, ϕ est la fraction volumique de pore.

Compte tenu des relations [3.1, 3.2], la détermination du tenseur Biot et le module de Biot se

résume à la reconnaissance des propriétés élastiques du squelette, la microstructure du solide et enfin au calcul de \mathbb{C}^{hom}

Il est donc clair que pour chacun des cas étudiés dans le paragraphe précédent on pourra calculer les coefficients et le module de Biot non pas par une comparaison des propriétés drainées et non-drainées qui demanderait dans ce cas des calculs supplémentaires en non-drainé, mais en faisant usage des équations [3.1 et 3.2]. Notons que les formules [3.1] et [3.2] font intervenir le tenseur effectif complet \mathbb{C}^{hom} dont l'identification des termes dépendant de la direction 3 rend nécessaire les calculs 3D et des chargements-test impliquant la direction 3. De tels calculs sont possibles en utilisant XFEM mais ils restent néanmoins coûteux en termes du temps de calcul lorsqu'un nombre suffisant de vides doit être considéré. A fin de pouvoir comparer les résultats des calculs numériques et quantifier le rôle des formes de l'inclusion et de leur distribution on fait le choix ici de rester en 2D. Cela implique qu'on ne calculera pas les coefficients et le module de Biot du matériau mais leurs équivalents 2D hors tout terme dépendant de la direction 3. Par abus de langage on appellera ces coefficients 2D respectivement « tenseur de Biot 2D » (noté par \mathbf{B}^*) et module de Biot 2D su solide (noté par $\frac{1}{N^*}$)

Pour chacun des cas étudié précédemment et impliquant des vides à morphologie différente (inclusions circulaires, elliptiques, triangulaires et non convexes, voire Fig. 3.6) et en gardant la même fraction volumique des pores ($f=20\%$) pour tous les exemples et même nombre de vides (une population de 100 pores pour chaque cas) on identifie les coefficients poroélastiques 2D. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 3.12, où la comparaison est faite avec les résultats obtenus par la même méthodologie en utilisant une cellule élémentaire contenant 1 seule vide et des calculs FEM (réalisé dans ABAQUS).

Comme attendu l'a quasi isotropie des propriétés effectives mécaniques se traduit par une quasi isotropie du tenseur de Biot 2D. Les coefficients de Biot augmentent lorsqu'on passe d'un pore de forme circulaire vers un pore de forme non convexe montrant ainsi l'impact de la morphologie des pores sur les propriétés effectives poroélastiques mis en évidence par plusieurs auteurs [ULM 05, DOR 06, GIR 08-2]. L'écart maximal en termes de \mathbf{B}_{11}^* est celui entre le pore circulaire et le pore elliptique (environ 37% d'écart).

On constate également le fait que les calculs en considérant une cellule unique ne sont pas loin des résultats obtenus en considérant une population de pores laissant entendre que les effets des interactions entre les pores ont peu d'influence sur les propriétés effectives.

On attire l'attention sur le fait que dans ces estimations la matrice est considérée comme

homogène et non-poreuse et donc les coefficients de Biot calculés sont uniquement dus à la porosité à l'échelle étudiée. Si la porosité à d'autres échelles était à considérer la procédure utilisée ici (et basée sur les équations [3.1 et 3.2]) ne serait plus adaptée et des calculs à plusieurs échelles pourraient se révéler nécessaires [GIR 07-2].

Forme de l'vide	Différent méthodes et Différences relative	B_{11}^*	B_{22}^*	$\frac{1}{N^*}$
Vide circulaire	XFEM	0.367	0.378	1.344 E-4
	FEM (ABAQUS) (vide unique)	0.370	0.370	1.348 E-4
	Différences relative (%)	1	2	0.3
Vide elliptique	XFEM	0.589	0.225	1.695 E-4
	FEM (ABAQUS) (vide unique)	0.600	0.210	1.713 E-4
	Différences relative (%)	2	6	1
Vide triangulaire	XFEM	0.523	0.519	1.630 E-4
	FEM (ABAQUS) (vide unique)	0.5357	0.449	1.643 E-4
	Différences relative (%)	2	13	1
Vide non-convex	XFEM	0.497	0.497	1.585 E-4
	FEM (ABAQUS) (vide unique)	0.510	0.510	1.610 E-4
	Différences relative (%)	3	3	2

Tableau 3.12 : Estimation numérique des coefficients poroélastiques effectifs 2D d'un milieu poreux (population de 100 vides)

III.4 Modélisation par homogénéisation numérique du comportement plastique des géomatériaux

La plupart des géomatériaux, tels que roches et bétons, présentent un comportement fortement non linéaire observé en laboratoire à travers des essais uniaxiaux et triaxiaux. Les mécanismes à l'origine de ce comportement sont multiples et dépendent fortement de la nature des matériaux, leur composition, leur histoire géologiques et l'histoire du chargement. Dans les paragraphes précédents nous avons mis en évidence l'hétérogénéité et les forts gradients des champs de déformations et de contraintes au sein d'un matériau poreux en spéculant que de

telles concentrations pouvaient conduire à l'endommagement de grains minéraux et/ou des interfaces entre différents composants. Au-delà même de cet endommagement induit par les chargements externes, les composants peuvent avoir un comportement intrinsèque non linéaire. Les sols sont réputés d'avoir un comportement non-linéaire même sous des faibles chargements. Pour l'argilite de Meuse Haute Marne cité précédemment et qui constitue une roche bien consolidée les déformations macroscopiques plastiques sont provoquées principalement par le glissement des feuillets de l'argile dans la matrice argileuse tandis que le comportement différé est le résultat d'un couplage de la viscoplasticité matricielle et l'endommagement soit de la matrice elle-même soit des grains [HOX 07, ZHU 10, JIA 11].

Les approches alternatives de modélisation microscopiques du comportement nonlinéaire des géomatériaux ont été citées dans le §.1.5. On s'intéresse ici de la modélisation du comportement d'un matériau hétérogène et poreux avec au moins une phase (plus souvent la matrice) dotée d'un comportement plastique

L'implantation d'un modèle élastoplastique dans un code de calcul nécessite l'emploi d'algorithmes de résolution fiables et dans la mesure du possible économiques. Les algorithmes de résolutions couramment utilisés, dans les codes de calcul aux méthodes éléments finis étendus de type déplacements, sont des algorithmes incrémentaux et itératifs, présentant parfois des difficultés de convergence liées le type de chargements appliqués. Ces difficultés entraînent des temps de calcul considérables ce qui pose la question du choix des algorithmes pour optimiser la résolution du problème.

D'une façon générale, pour un code aux éléments finis, un algorithme non linéaire est composé de deux niveaux :

- un niveau global, où est effectué le calcul du champ de déplacements aux nœuds de la structure discrétisée par l'inversion d'un système d'équations algébriques non linéaires via un algorithme bien choisi (plus souvent une version de la méthode de Newton) ;

- un niveau local, où est effectué le calcul du tenseur de contraintes en un point matériel (point d'intégration interne) à partir du tenseur de déformations et de l'histoire d'un certain nombre de quantités tensorielles ou scalaires. En termes numériques, cette loi de comportement est intégrée à l'aide d'un algorithme de retour radial.

Ces deux niveaux ont une grande influence réciproque sur le processus de résolution : par sa part, le niveau local de calcul du tenseur de contraintes est actuellement bien maîtrisé, même dans les cas complexes de lois de comportement incrémentales, par les schémas d'intégration

implicites ou explicites. Comme il est difficile de réduire encore plus le temps de calcul à ce niveau, pour gagner du temps il faut chercher à améliorer le schéma global de résolution.

A ce niveau un schéma de Newton-Raphson modifié a été adopté pour la suite des calculs élastoplastiques avec le test de convergence basé sur les normes relatives en déplacements qui reste la plus répandu en pratique [DHA 96]).

III.4.1 Comportement élastoplastique et modèle utilisé

En adoptant l'hypothèse des petites déformations qui reste pertinente dans le domaine des sollicitations et pour les matériaux type argilite de Meuse Haute-Marne on peut écrire les déformations totales comme étant la somme des déformations élastiques et déformations plastique :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad [3.3]$$

Du point de vue de la thermodynamique des milieux continus, le tenseur des déformations plastiques reste une variable d'état cachée dont la force thermodynamiquement associée est le tenseur de contraintes. En règle générale et pour un écrouissage isotrope on utilise à la place du tenseur de déformations plastiques une variable scalaire, la déformation équivalente plastique (notée par la suite par p , à ne pas confondre avec la pression des pores plus loin). Un modèle élastoplastique fournit des réponses aux questions : Quand une déformation plastique se produit ? Quelle est l'intensité et la direction de l'écoulement plastique ? La réponse à ces questions est connue dès que la fonction de charge, le potentiel d'écoulement et les fonctions d'écrouissages sont connues.

Dans la suite de ce travail on considéré le modèle de type Drucker-Prager associé [DRU 52, FER 08] La fonction de charge de ce modèle est donnée dans l'espace des invariants de contraintes sous la forme :

$$F(\boldsymbol{\sigma}, p) = \sigma_{eq} + A I_1 - R(p) \quad [3.4]$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes, qui ne dépend que de $\boldsymbol{\varepsilon}$ et son histoire, A est un coefficient donné, propriétés du matériaux étudié et R est la fonction d'écrouissage qui dans le cas étudié ici est une fonction parabolique de la déformation plastique équivalente cumulée p , [FER 08]:

$$R(p) = \begin{cases} \sigma_y \left(1 - \left(1 - \sqrt{\frac{\sigma_{yultm}}{\sigma_y}} \frac{p}{p_{ultm}}\right)^2\right) & \text{si } p \in [0, p_{ultm}] \\ \sigma_{yultm} & \text{si } p > p_{ultm} \end{cases} \quad [3.5]$$

Les coefficients A , σ_y , σ_{yultm} sont donnés : $A = \frac{2 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}$ $\sigma_{yultm} = \alpha^2 \sigma_y$ $\sigma_y = \frac{6c \cos \varphi}{3 - \sin \varphi}$

avec les paramètres α , p_{ultm} représentant des paramètres du modèle contrôlant la vitesse d'érouissage tandis que φ , c les propriétés classiques connus sous les noms de l'angle de frottement et de la cohésion respectivement.

III.4.2 Intégration du modèle de Drucker-Prager dans le code de calcul XFEM

Le non linéarité du comportement des constituants conduit au non linéarité du système des équations obtenu après la discrétisation de la forme faible de l'équation de l'équilibre. Il n'existe pas de méthodes générales de résolution directe de tels systèmes : ils sont toujours solutionnés par la résolution de plusieurs problèmes linéaires successifs où les conditions non linéaires sont satisfaites à une certaine tolérance [WEG 75].

Dans le cas du problème de l'équilibre résolu par éléments finis la technique utilisée est celle des résidus : On calcul les contraintes à partir du champ de déplacements et des lois constitutives. Ces contraintes sont statiquement équivalentes à un système de forces nodales internes qui doivent équilibrer les forces externes. Généralement ces deux systèmes de forces ne sont pas égaux et la différence entre les deux constitue le vecteur des forces résiduelles. Ces dernières doivent être annulées pour assurer l'équilibre.

Le principe de la méthode mixte est la subdivision du vecteur chargement en plusieurs incréments, pas forcément égaux. Durant chaque incrément de charge l'équation est supposée être linéaire avec une valeur constante de la matrice de rigidité globale $[K]$ déduite des résultats de l'incrément précédent. Les déplacements nodaux sont obtenus pour chaque incrément et sont additionnés aux déplacements cumulés précédemment. Le processus est répété jusqu'au chargement final. Un certain nombre d'itérations sont nécessaire pour chaque incrément afin d'obtenir une norme du vecteur résidu inférieure à une précision donnée. Le calcul de l'incrément de contraintes à chaque point de Gauss demande une procédure de projection de la contrainte initialement considérée comme élastique sur la surface de charge.

Pour toute itération donc la loi de comportement est intégrée à l'aide d'un algorithme de retour radial (projection) qui consiste à faire initialement une prédiction élastique (notée σ^e) que l'on corrige si le critère est violé. Si l'on considère que l'incrément des déformations à l'instant de calcul est $\tilde{\varepsilon}$ le correcteur plastique s'écrira [FER 09] :

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{\sigma} &= 2\mu \tilde{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}) - 3\mu \cdot \frac{\Delta p}{\sigma_{eq}^e} \cdot \tilde{\sigma}^e \\ Tr(\Delta \sigma) &= 3K \cdot Tr(\varepsilon(\Delta \mathbf{u})) - 9K \cdot A \cdot \Delta p\end{aligned}\quad [3.6]$$

Dans ces expressions Δp est l'incrément de la déformation plastique cumulée, l'inconnue à calculer. En injectant les deux équations [3.6] dans l'équation de la fonction de charge [3.4] on obtient une équation à résoudre par rapport au Δp :

$$\sigma_{eq}^e - (3\mu + 9K \cdot A^2) \cdot \Delta p + A \cdot Tr(\sigma^e) - R(p^- + \Delta p) = 0 \quad [3.7]$$

Dans cette expression les p^- indique la déformation plastique cumulée au début du pas de chargement. Dans la phase de prédiction élastique on choisit $\Delta p = 0$ tandis qu'à la fin de la solution de l'équation [3.7] on réactualise la valeur de la déformation plastique équivalente en

$$p = p^- + \Delta p \quad [3.8]$$

L'organigramme de mise en œuvre de la modélisation du comportement élastoplastique des matériaux hétérogènes est présenté sur la Fig. 3.15, l'implémentation a été effectuée sous Matlab.

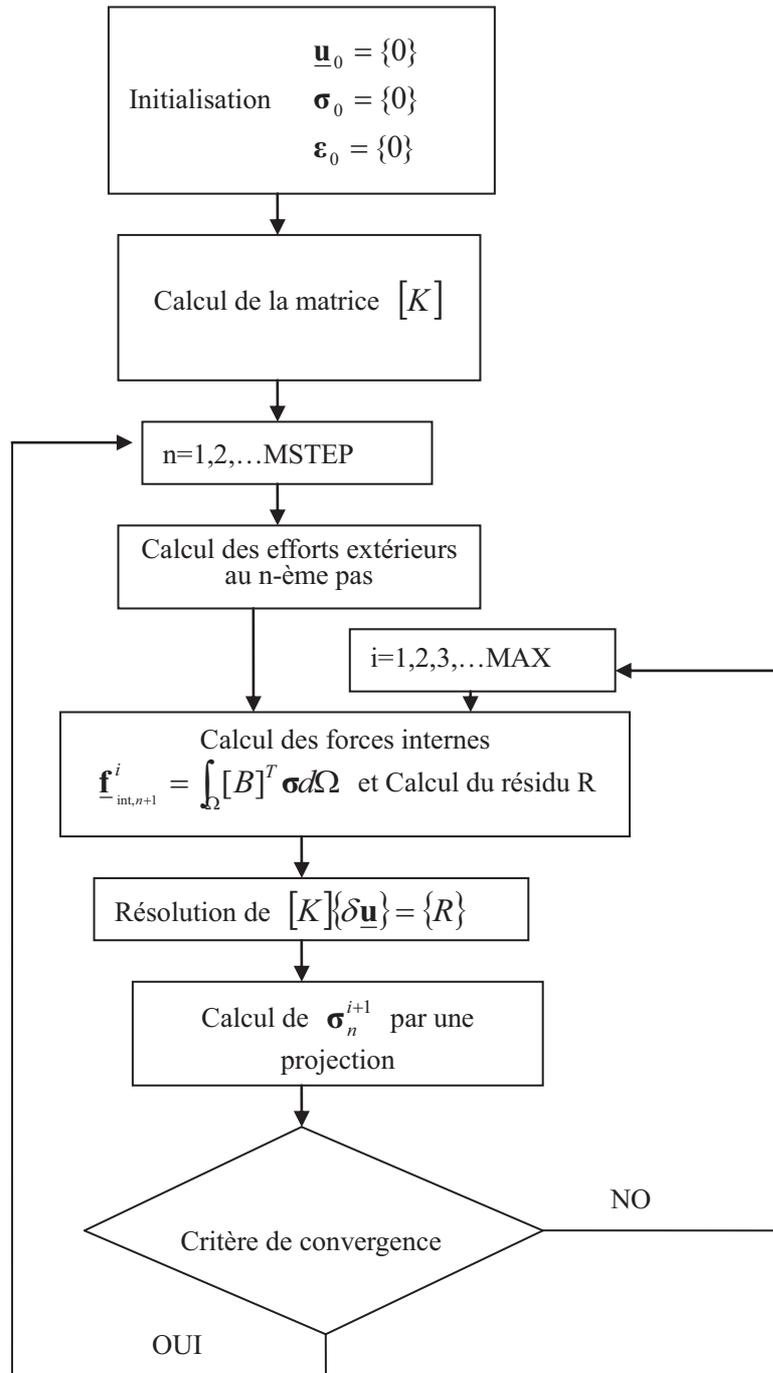


Fig. 3.15 : Diagramme représentant les différentes étapes du calcul XFEM

La validation de l'implantation de l'algorithme nonlinéaire dans le code XFEM a été effectuée par comparaison des résultats sur un échantillon homogène élastoplastique constitué d'un matériau de Drucker-Prager à écrouissage parabolique avec des paramètres indiqués dans le tableau 3.13. Les résultats obtenus coïncident parfaitement avec ceux indiqués par [FER 08] qui a utilisé le même modèle et les mêmes paramètres dans un calcul avec Code-Aster (voir Fig. 3.16.)

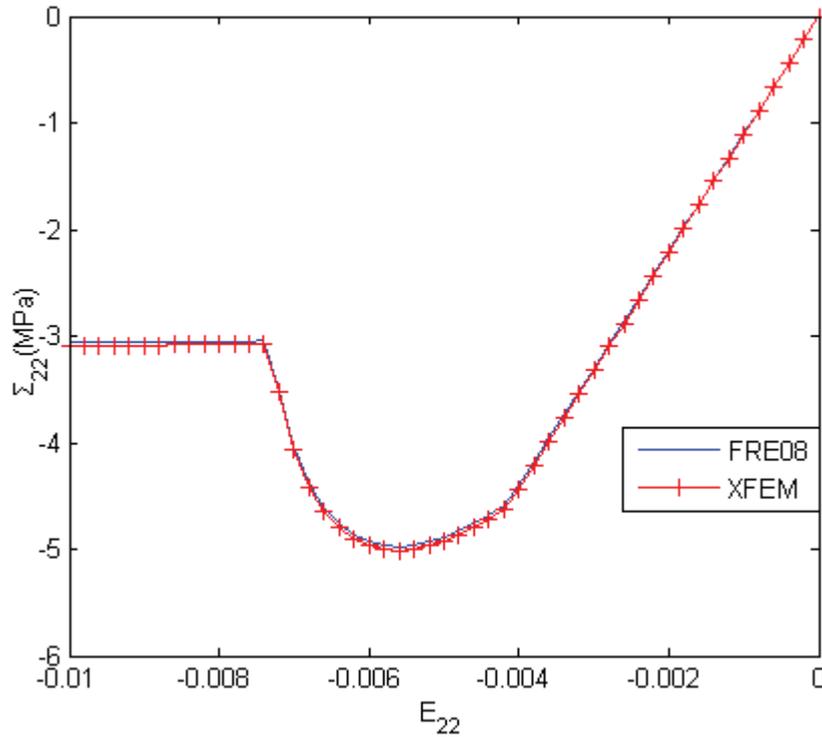


Fig. 3.16 : Contrainte équivalente en fonction de la déformation axiale

Propriétés élastiques pour matrice	Loi de Drucker-Prager			
	E=7600MPa	$c = 1 \text{ MPa}$	$\varphi = 25^\circ$	A=0.3279
$\nu=0.1$	$p_{ultm}=0.012247$	$\alpha=1.3$	$\sigma_y = 2.1098$	

Tableau 3.13: Les propriétés élastoplastiques de la matrice.

Un deuxième cas de validation est présenté au début du paragraphe suivant dans le problème d’une cavité cylindrique dans un milieu élastoplastique.

III.4.3 Modélisation nonlinéaire du comportement mécanique d’un milieu biphasique

On retourne à la modélisation du comportement des matériaux hétérogènes et on s’intéresse du comportement effectif non-linéaire dû notamment à un comportement plastique de la matrice. On utilise comme microstructure les mêmes utilisées dans le cas linéaire et on se restreint dans le cas 2D déformation plane. Le matériau considéré se compose d’une matrice

solide et d'un espace poreux ou des inclusions rigides de différente forme. La matrice solide suit un comportement élastoplastique de type Drucker-Prager à écrouissage parabolique avec des paramètres indiqués dans le tableau 3.13 [FER 08] qui sont proches de ceux de la matrice argileuse de l'argilite de Meuse-Haute Marne

III.4.3.1 Le cas du milieu poreux

Afin d'avoir un deuxième cas de validation de l'implantation du modèle de Drucker-Prager dans le code XFEM on considère tout d'abord le cas d'un milieu poreux isotrope élastoplastique avec une cavité cylindrique de section circulaire sous chargement plane isotrope. Compte tenu de la symétrie du problème seul un quart du domaine est maillé (Fig. 3.17) Les propriétés du milieu sont celles du tableau 3.13, et un maillage uniforme de 69x69 nœuds a été utilisé pour le calcul. Le même calcul a été réalisé avec le Code_Aster en utilisant un maillage linéaire (triangles à 3 nœuds, ou T3) le but étant la comparaison pour le même type d'approximation nodale. Avant tout commentaire sur les résultats on souligne le fait que l'approximation nodale utilisée est connue pour étant trop raide et mal adaptée pour les problèmes non-linéaires. Néanmoins dans la mesure où la méthode XFEM des ordres supérieure à un, reste encore un sujet de recherches non résolue, ces calculs en T3 permettront de faire une idée de la pertinence de la solution non linéaire XFEM.

Dans le cas traité ici le domaine est chargé progressivement en allant d'un état non chargé à un état élastique, puis plastique. L'évolution des contraintes et des déplacements est suivie selon une coupe radiale et comparée avec les mêmes quantités obtenues par le calcul avec le Code_Aster.

Les figures (Fig. 3.18 et Fig. 3.19) représentent les comparaisons des déplacements et des contraintes selon une coupe radiale pour un chargement faible qui assure un comportement purement élastique du milieu. Dans ces conditions un bon accord général est trouvé entre les prédictions du Code_Aster et le code XFEM. Notons néanmoins quelques différences notamment en termes de contraintes orthoradiales dont l'origine pourrait être expliquée d'une part par un maillage qui n'est pas tout à fait le même et surtout par la méthode de calcul des contraintes en post-traitement : dans le cas de XFEM une fois les contraintes calculés au point de Gauss leur transfert aux nœuds est fait selon le principe du voisin le plus proche, alors

qu'une interpolation est utilisée dans le Code_Aster. En fait les calculs en élasticité (voir le début de ce chapitre) dans des conditions similaires montrent que lorsque l'approximation nodale dans les codes de calculs externes (ABAQUS, Code_Aster) est quadratique, les concordances avec les prédictions XFEM sont meilleures.

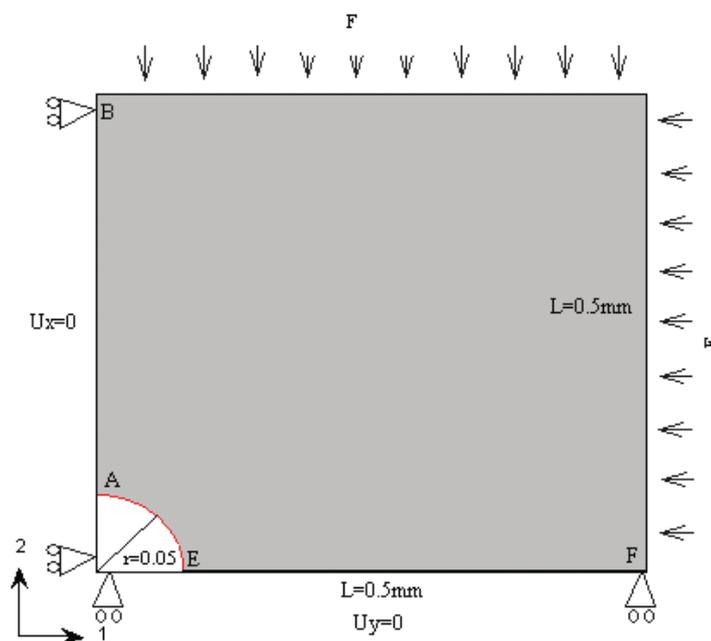


Fig. 3.17 : Conditions aux limites et de chargement du matériau poreux

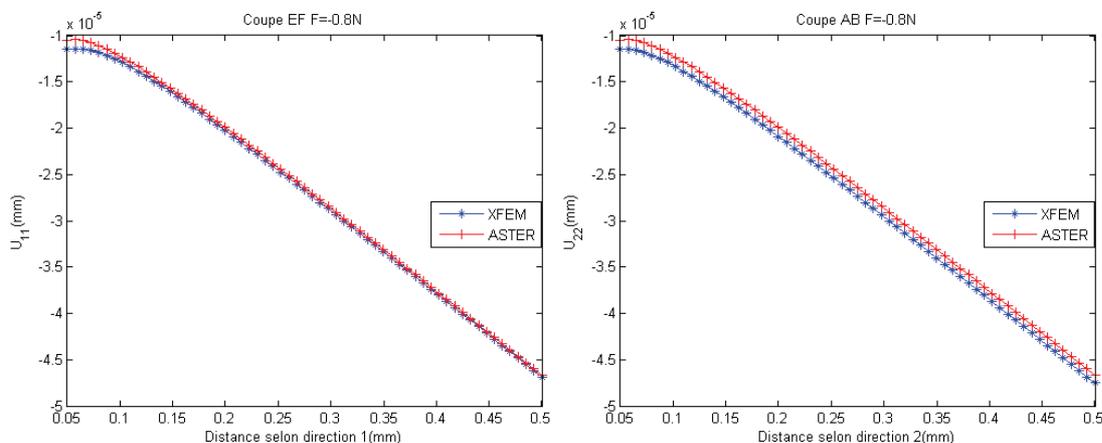


Fig. 3.18 : Comparaison des déplacements selon une coupe horizontale (coupe E-F) et une coupe verticale (coupe A-B) au milieu poreux pour le cas élastique

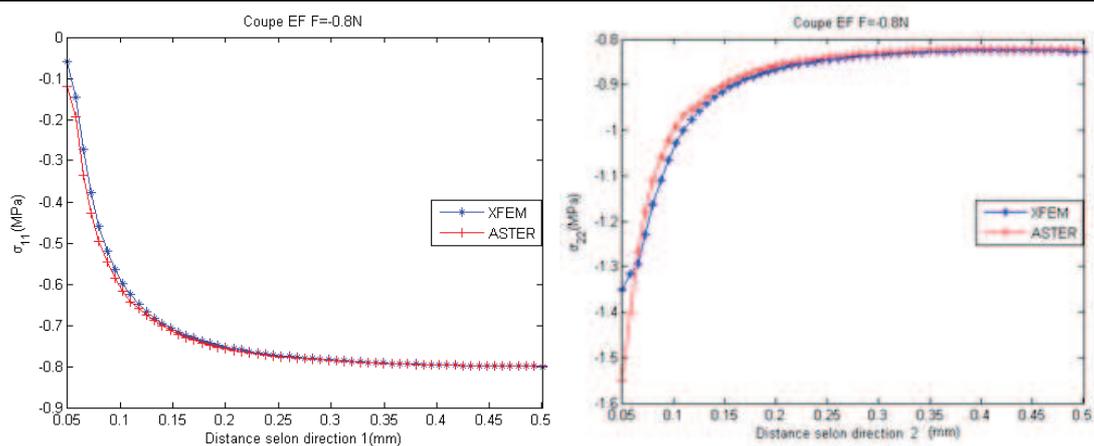


Fig. 3.19 : Comparaison des contraintes selon une coupe radiale (cavité sphérique en élasticité F=0.8N)

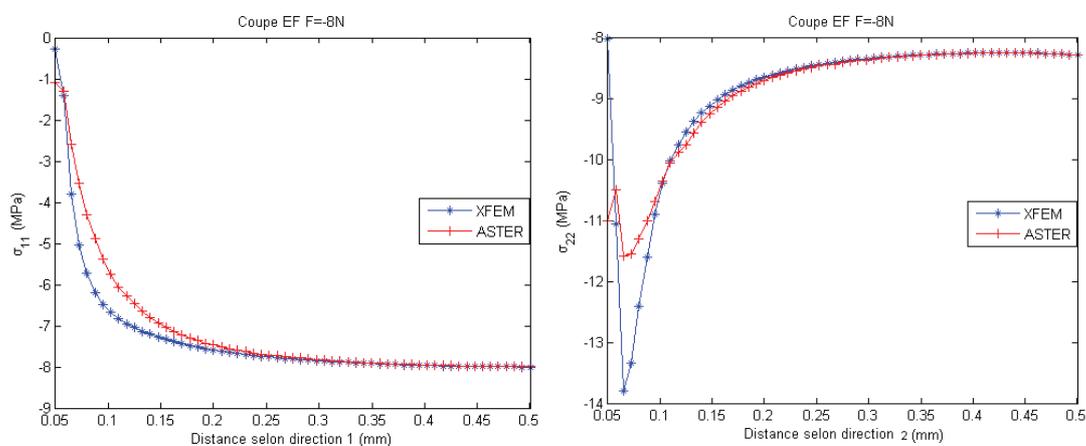


Fig. 3.20 : Comparaison des contraintes selon une coupe radiale (cavité de section circulaire en plasticité F=8N)

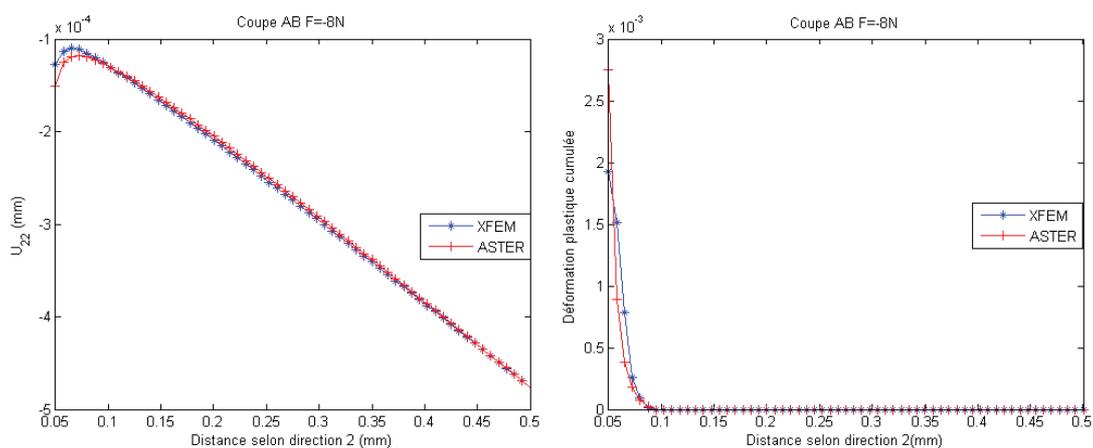


Fig. 3.21 : Comparaison des déformations plastiques cumulées et des déplacements selon une coupe radiale (cavité de section circulaire en plasticité F=8N)

Pour le cas plastique, les profils des contraintes, des déplacements et de la déformation plastique cumulée ont présentés sur les Fig 3.20 et Fig. 3.21 montrant encore des différences entre les prédictions XFEM et Code_Aster, qui sont plus importante pour les contraintes, notamment orthoradiales et dont l'origine est la même que les différences observées en élasticité. Ces différences soulèvent la nécessité d'aller vers une approximation d'ordre plus élevée en XFEM, sans quoi les résultats souffrent d'une imprécision qui pourrait devenir contraignant dans un certain nombre de cas. On retient néanmoins que pour le même niveau d'approximation nodale XFEM semble plus précis, notamment grâce à l'enrichissement de l'approximation aux interfaces.

III.4.3.2 Comportement nonlinéaire d'un matériau biphasique : matrice élastoplastique contenant des inclusions élastique

Le comportement d'un matériau élastoplastique contenant des inclusions élastiques a été étudié en utilisant la même approche que dans le cas élastique : un volume élémentaire représentatif du matériau a été réalisé contenant à chaque fois le même nombre d'inclusions (100 inclusions) et la même fraction volumique ($f=20\%$) mais avec une morphologie différente des inclusions. Comme pour le cas élastique on utilise une population d'inclusions de forme circulaire, elliptique, triangulaire et non convexe. Les caractéristiques géométriques des inclusions sont identiques à celle utilisées dans les calculs élastiques (§.III.2.4) Dans les quatre cas, un maillage de 273×273 nœuds sont utilisés pour les calculs. Les propriétés des inclusions et de la matrice plastique sont indiquées dans le tableau 3.14. Ces propriétés coïncident plus au moins avec celles de la matrice argileuse de l'argilite de Meuse Haute Marne et d'une inclusion de quartz pour ce qui concerne les propriétés élastiques des inclusions (ces propriétés coïncident avec celles du tableau 3.10). En différence du cas élastique étudié au début du chapitre l'objectif de ces calculs n'est plus d'identifier le tenseur de rigidité effectif mais d'établir une courbe contrainte déformation sur un chemin de chargement défini. Pour des raisons de simplicité, mais aussi parce que cela représente le chemin de contrainte le plus étudié, on se met dans les conditions de chargement où une des contraintes macroscopique est nulle. Ainsi pour tous les cas étudiés ici un chargement vertical est réalisé (direction 2) en laissant libres les déplacements dans la direction horizontale

(direction 1). Sur chaque courbe quelques points caractéristiques ont été choisis et les champs de contraintes (notamment σ_{22}) ont été étudiés.

Inclusion	Matrice				
	Propriétés élastiques	Paramètres de Drucker-Prager			
E=84000MPa	E=7600MPa	$c = 1 \text{ MPa}$	$\varphi = 25^\circ$	A=0.3279	$\sigma_{yultm} = 3.56 \text{ MPa}$
$\nu=0.3$	$\nu=0.1$	$p_{ultm} = 0.0122$ 47	$\alpha = 1.3$	$\sigma_y = 2.1098$	

Tableau 3.14: Les propriétés des matériaux utilisées dans les calculs non-linéaires.

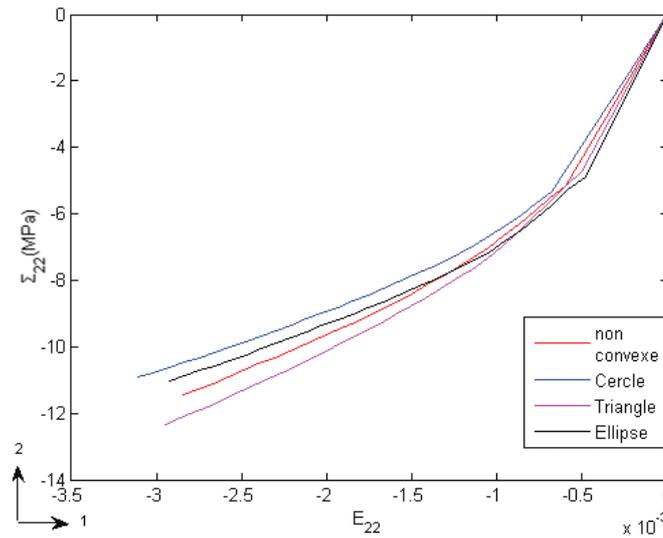


Fig. 3.22 : Courbes contrainte macroscopique appliquée-déformation macroscopique pour des échantillons à population de renforts élastiques de morphologies différentes.

Sur la Fig. 3.22 sont présentées les courbes contraintes axiale macroscopique versus déformation axiale macroscopique issues d'un processus standard d'homogénéisation (moyennes volumiques) effectué sur chacun des paliers de chargement. Les premières phases de ces courbes coïncident avec la phase du comportement élastique linéaire de la matrice où conformément avec les résultats de l'analyse élastique le matériau représente une rigidité qui est fonction de la morphologie d'inclusion, l'échantillon à inclusions elliptique avec le grand axe selon la direction de chargement étant le plus raide. En suite, une fois la plasticité active, les courbes présentent des rigidités tangentés qui évoluent en fonction du chargement, tant et si bien que l'échantillon avec une population d'inclusions de forme triangulaires représente la matrice tangente la plus raide. Cela s'explique avec le fait que l'étendue de la zone plastique est moins importante autour des coins des triangles qu' autour des inclusions elliptiques.

Les champs de contraintes à différents moments de chargement sont en suite présenté pour chacun des échantillons (voir Fig. 3.23-3.30). Outre qu'une amplification des hétérogénéités des champs de contraintes avec le chargement ces cartes illustrent la possibilité qu'ouvre la méthode XFEM dans l'étude des origines des mécanismes dissipatifs.

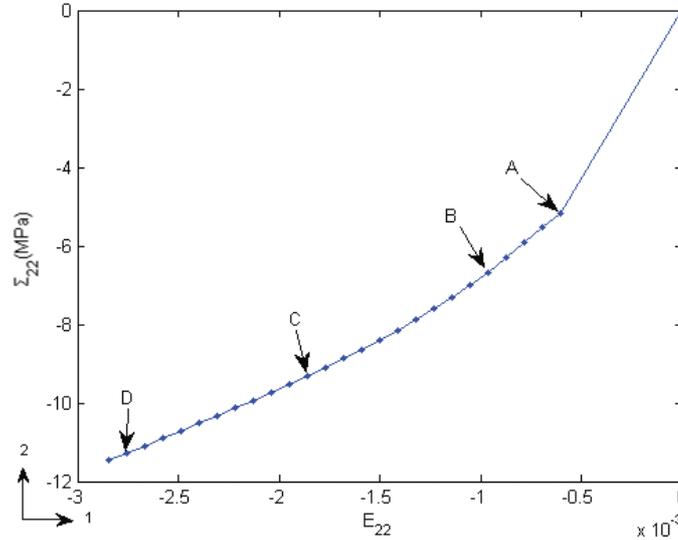


Fig. 3.23 : Contrainte équivalente en fonction de déformation axiale pour les inclusions en formes circulaires

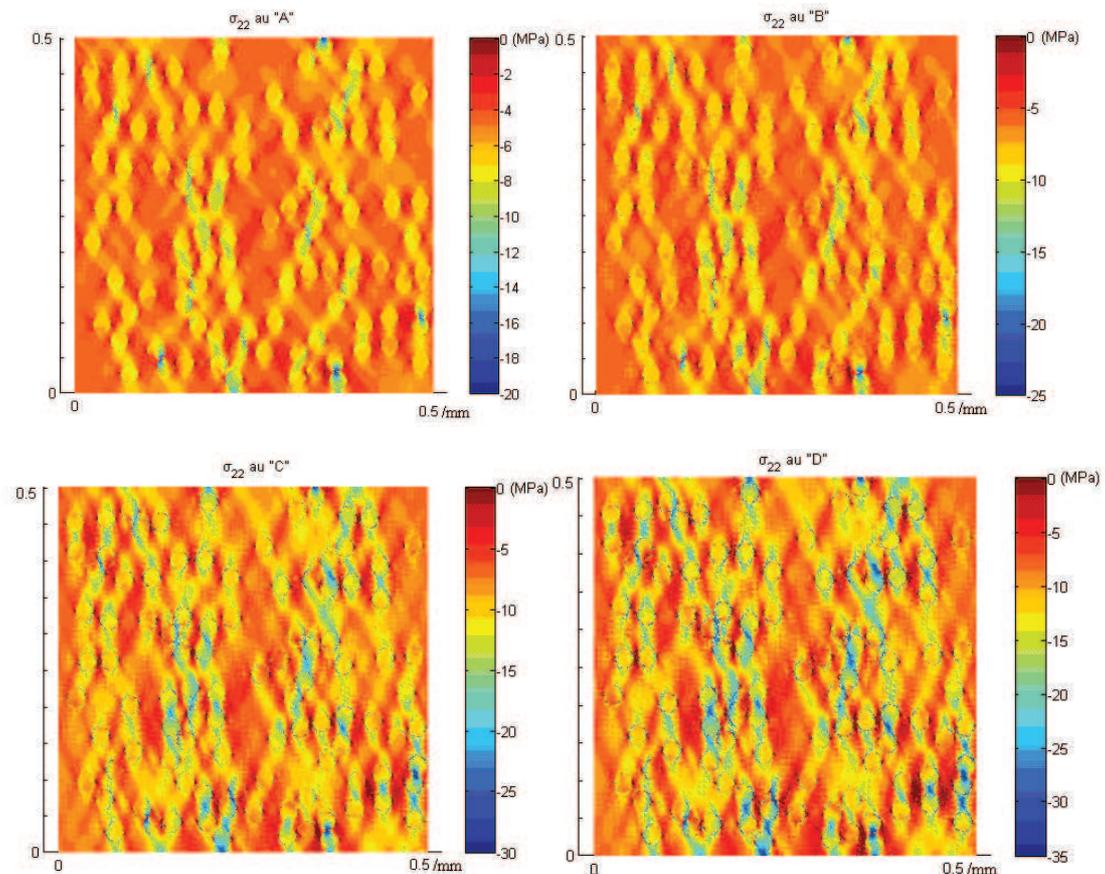


Fig. 3.24 : Champ des contraintes aux différents des pas de chargement pour le cas des inclusions en formes circulaires

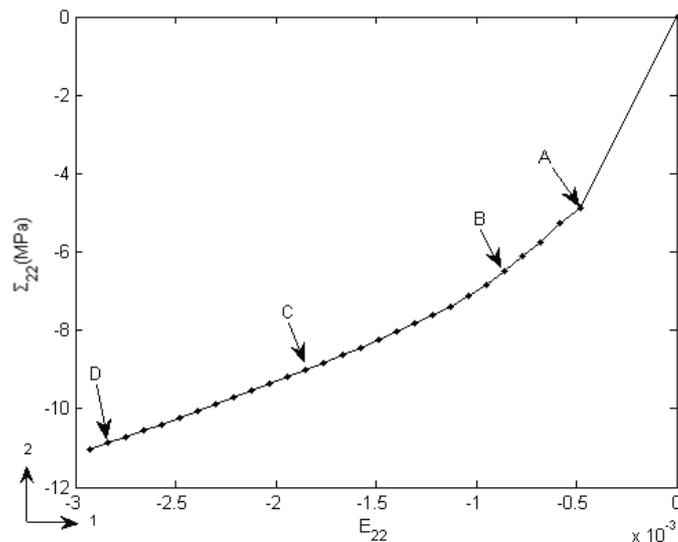


Fig. 3.25 : Contrainte équivalente en fonction de déformation axiale pour les inclusions en formes ellipses

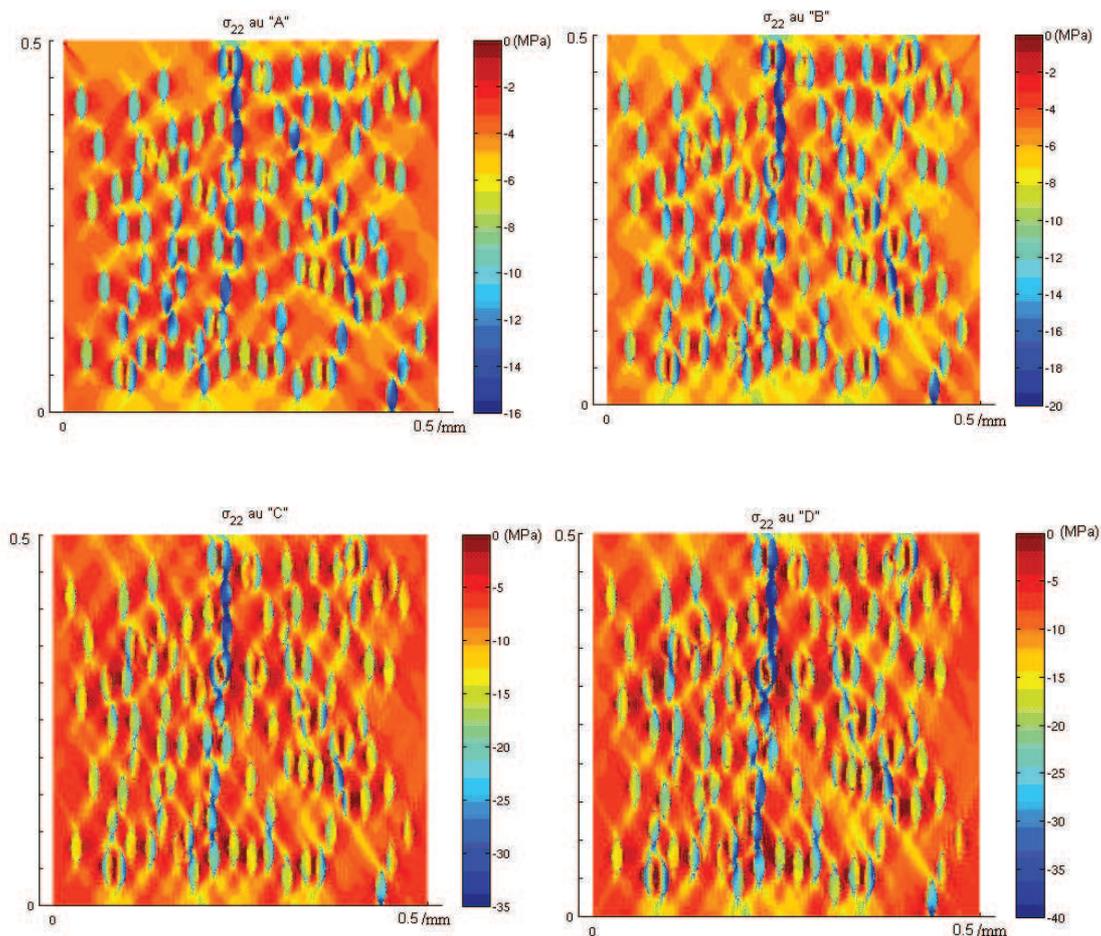


Fig. 3.26 : Champ des contraintes aux différents des pas de chargement pour le cas des inclusions en formes ellipses

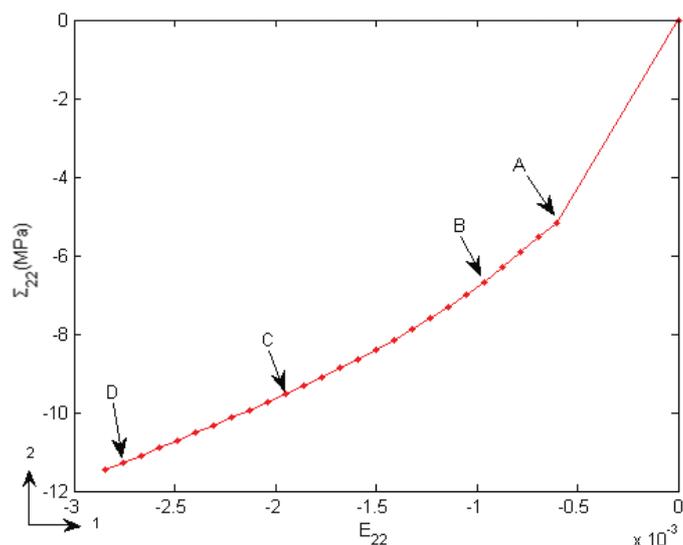


Fig. 3.27: Contrainte équivalente en fonction de déformation axiale pour les inclusions en formes non convexes

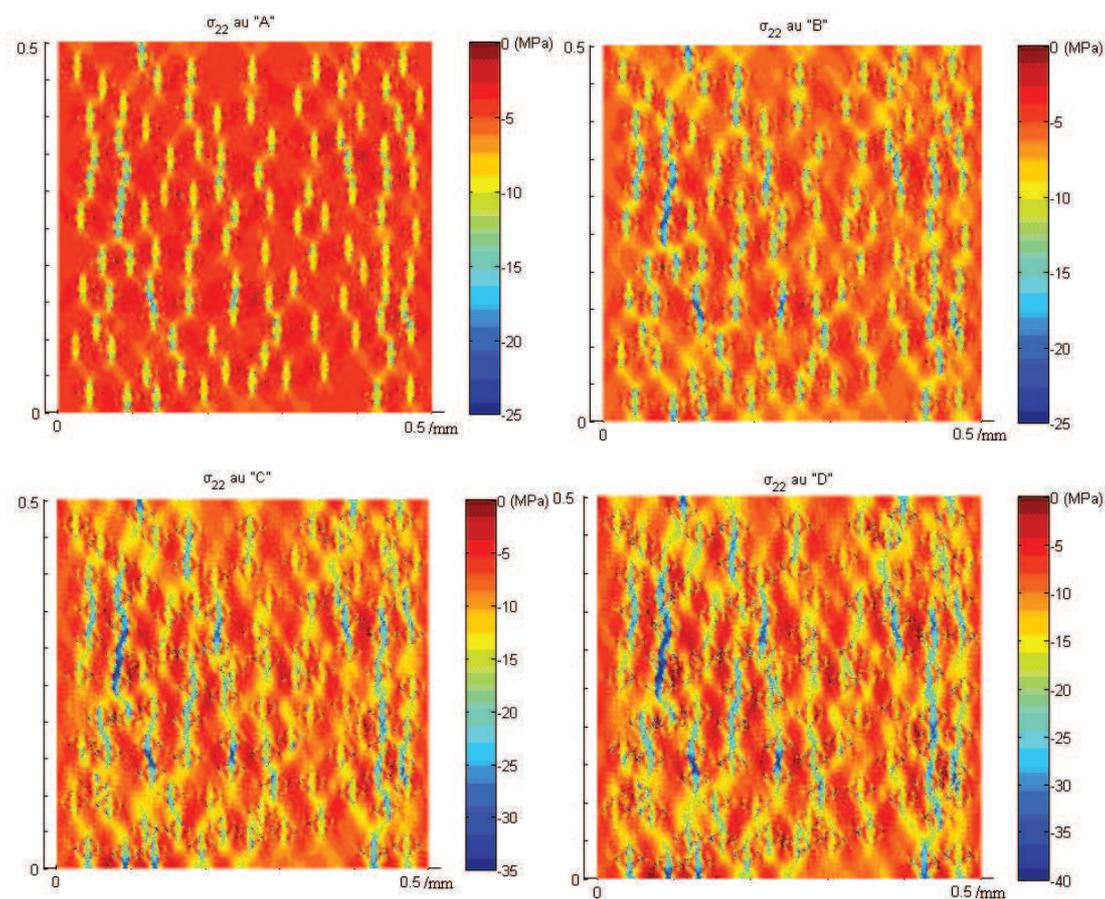


Fig. 3.28 : Champ des contraintes aux différents des pas de chargement pour le cas des inclusions en formes non convexes

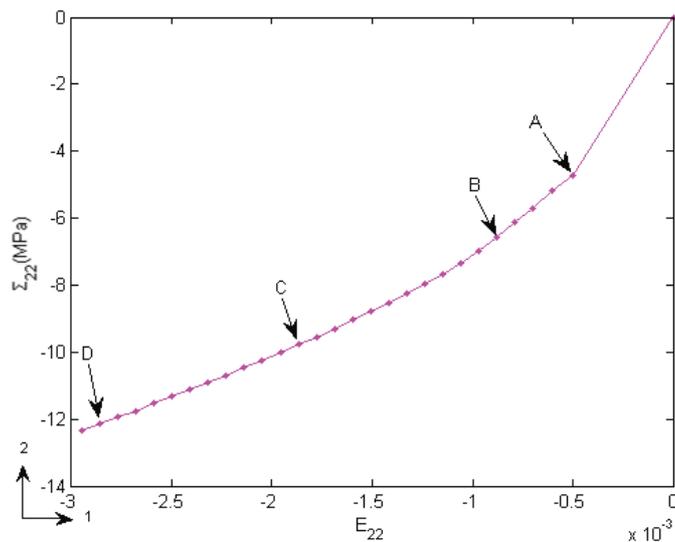


Fig. 3.29 : Contrainte équivalente en fonction de déformation axiale pour les inclusions en formes triangulaires

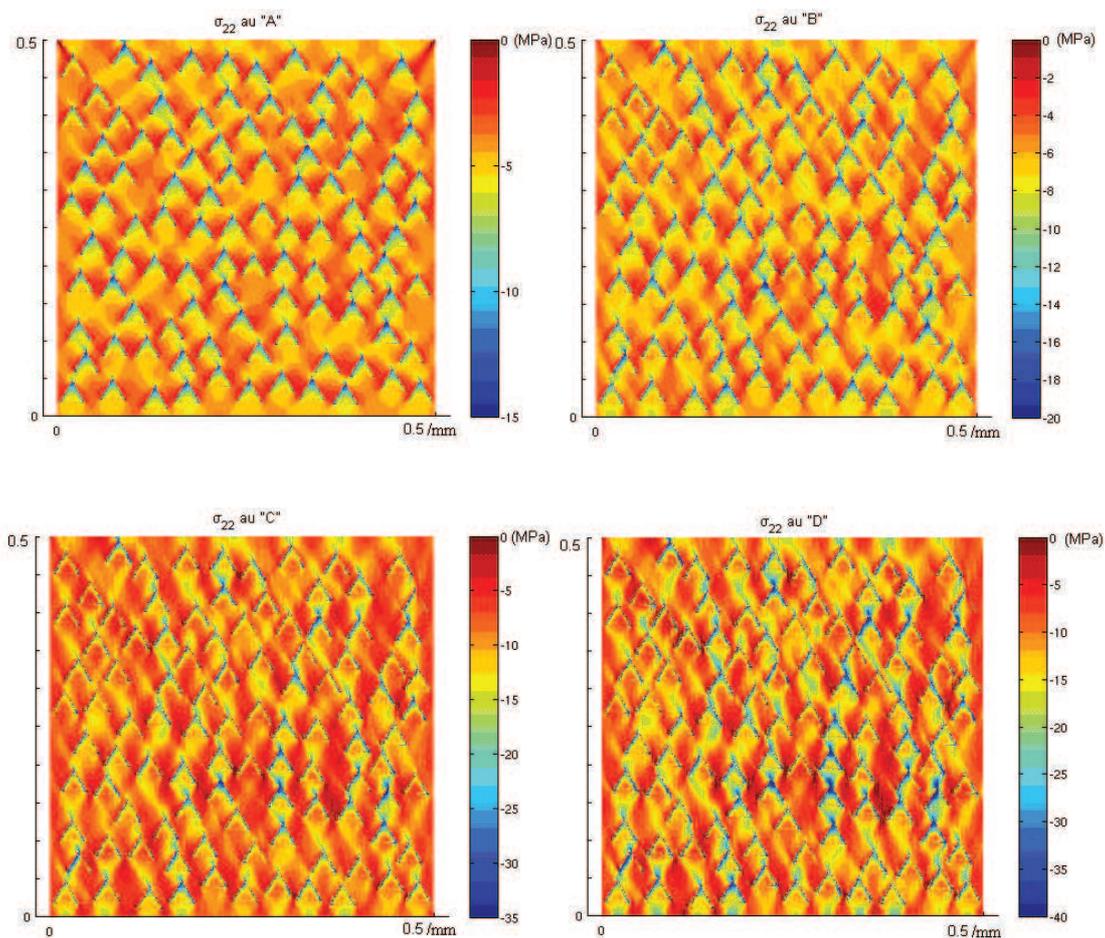


Fig. 3.30 : Champ des contraintes aux différents des pas de chargement pour le cas des inclusions en formes triangulaires

III.4.4 Conclusion

L'objet de cette section était de modéliser le comportement élastoplastique des géomatériaux (typiquement les roches argileuses ont été visées dans les exemples) par la méthode XFEM. Dans la modélisation des comportements homogénéisés non linéaires que nous proposons ici, les renforts (inclusions) sont supposés rester élastiques, alors que la matrice est élastoplastique avec une loi d'écrouissage isotrope. La méthode de résolution du problème non-linéaire a été choisie pour son efficacité et sa simplicité : en gardant la matrice de rigidité constante entre deux pas de chargements imposés, certes un nombre d'itérations plus important est nécessaire pour arriver à la précision souhaitée de la résolution, mais ce choix permet de faire des économies en termes du temps global de calcul, notamment par une réduction essentielle du temps d'assemblage de la matrice tangente. Par-dessus tout ce choix permet d'éviter les divergences qui peuvent résulter de la singularité de la matrice de rigidité lors de la plastification totale de la section. Les tests de validation de l'implantation du module nonlinéaire dans le code XFEM, probants pour les calculs sur des matériaux homogènes, ont fait apparaître les limites de l'approximation nodale linéaire et de la méthode d'intégration par sous-domaines (voir §. II.5.2). Le modèle de comportement nonlinéaire utilisé est celui de Drucker-Prager et les microstructures de type matrice-inclusions ont été testées. Les résultats de ces calculs nonlinéaires montrent que la rigidité tangente dépende de la forme de l'inclusion. La comparaison de la rigidité élastique avec la rigidité tangente plastique indique que la dépendance de la rigidité effective en la morphologie de l'inclusion est fonction du niveau de chargement. Ainsi si pour un chargement élastique la rigidité maximale coïncide dans nos calculs avec des inclusions de forme ellipsoïdale et alignées, pour des niveaux de chargement plus importants sont les inclusions en forme triangulaire qui procurent une rigidité plus grande.

Le but de la présentation des champs internes de contraintes et de déformations était de montrer les possibilités offertes par la méthode XFEM en l'étude des mécanismes à l'origine du comportement non-linéaire en indiquant les zones de concentration des contraintes et/ou déformations. Une analyse plus fine (par exemple géostatistique) donnera plus d'indications dans ce sens, notamment quantitatives et sera inscrite dans les perspectives de ce travail.

Chapitre IV Modélisation des écoulements des milieux poreux par la méthode d'interface immergée

IV.1 Introduction

Dans le cadre de la modélisation numérique du comportement hydromécanique des géomatériaux il est nécessaire de pouvoir modéliser les écoulements dans des milieux hétérogènes. En fait si l'identification des paramètres poroélastiques a pu être menée en acceptant certaines hypothèses notamment celle de l'uniformité de la pression sur l'ensemble du VER (plus précisément sur l'ensemble du réseau de pores connectés) il est nécessaire à un moment de se libérer de cette hypothèse et de garder en détails l'influence de l'hétérogénéité de la microstructure sur la distribution de pressions de pores et de flux fluide. Dans ce contexte la prédiction de la perméabilité effective d'un matériau poreux hétérogène n'est qu'une partie de problème à résoudre : l'autre partie, celle des couplages hydro-mécaniques au sein d'un matériau hétérogène, doit être traitée dans un deuxième temps.

On s'intéresse donc dans un premier temps au problème d'écoulement hydrique des fluides dans un géomatériau et à la détermination de sa perméabilité effective. Le problème est important pas seulement en génie civil mais aussi dans des domaines aussi larges que la géologie ou la médecine [GRO 05].

Comme indiqué dans le chapitre I, à l'échelle macroscopique l'écoulement dans les milieux poreux est régi par l'équation Darcy (et en non saturé par la loi de Darcy généralisée)

Pour des milieux dont les pores sont de très petite taille (à l'échelle microscopique), le mouvement du fluide, supposé newtonien, est régi par les équations de Navier-Stokes et l'écoulement capillaire. Pour résoudre ces équations aux dérivées partielles régissant l'écoulement de fluide aux milieux poreux, différentes classes de schéma existent, schéma dont les propriétés sont démontrées en milieux homogènes, et perdues en présence d'interfaces : la solution numérique est alors dégradée par des diffractions parasites une chute de l'ordre de convergence, voire des instabilités si le contraste des paramètres physiques est important. La plupart des schémas numériques ne prennent pas en compte les propriétés physiques aux interfaces entre deux solides qui pourraient pour tant jouer un rôle important dans l'écoulement. Une solution pour surmonter ce défaut consiste alors à utiliser une méthode numérique permettant de prendre en compte les propriétés physiques et géométriques des interfaces dans des schémas numériques classiques. Parmi les méthodes numériques applicables à notre problème nous avons choisi la méthode dite de l'interface classique ou encore - 'Immersed Interface Method' (IMM). Comme on verra par la suite, de même que la méthode XFEM utilisée pour le cas mécanique, IMM intègre les équations de l'écoulement en se basant sur un maillage régulier de fond ce qui faciliterait, du moins en

principe, le couplage ultérieure externe entre le code XFEM développé et calculs hydriques par IMM.

Nous présentons d'abord le principe de la méthode d'interface classique - 'Immersed Interface Method' (IIM). Les problèmes d'interface sont ceux dans lesquels les données d'entrée (telles que les coefficients des équations différentielles, les termes sources etc.) peuvent être discontinues ou même singulières à travers une ou plusieurs interfaces qui ont la dimension inférieure à celle de l'espace où le problème est défini. Cette méthode numérique permet d'imposer à la solution calculée numériquement le respect des conditions physiques aux interfaces. L'IIM a été développée par Li et Levesque en 1994 dans le contexte des équations elliptiques linéaires [LI 94-1,94-2,97-1,97-2], puis appliquée à des équations paraboliques non linéaires et aux équations de Navier-Stokes [CAL-99, CAL-00], et enfin étendu par Zhang en 1996 au cas des systèmes hyperboliques linéaires de l'acoustique et de l'élastodynamique [ZHA 96, ZHA 97].

La solution du problème traité par IIM peut, donc, être non- lisse ou même discontinue à travers les interfaces. On se restreint néanmoins dans le cas de problèmes avec les interfaces douces et les solutions liées. En suite on utilise cette méthode (IIM) pour modéliser les écoulements aux milieux poreux hétérogènes et déterminer la perméabilité effective et les champs de pressions au sein d'un matériau poreux.

IV.2 Principe de la méthode « Immersed Interface Method »

Par souci de simplicité, nous présentons dans cette section le principe de la méthode l'IIM dans le cadre des études en 2D. Sur la Fig. 4.1 est présentée une grille de maillage régulière obtenue après la discrétisation géométrique du milieu considéré. L'interface est caractérisée par une courbe lisse qui limite le domaine occupé par l'inhomogénéité immergée dans le milieu. On définit les points dits réguliers comme étant ceux n'appartenant pas à aucun maillage intersecté par les interfaces. Autrement les points sont « irréguliers ». Sur la Fig. 4.1 les points en noirs sont des points réguliers, tandis que les points rouges sont considérés comme les points irréguliers.

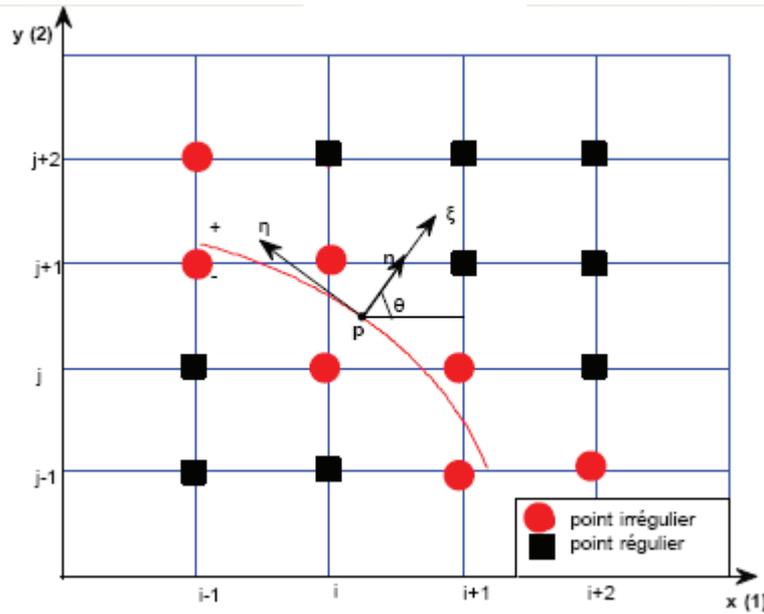


Fig. 4.1 : L'interface immergée dans le maillage cartésien uniforme, avec les points irrégulier et les points réguliers

On suppose que l'écoulement dans les deux milieux est caractérisé par la loi de Darcy qui s'écrit sous la forme :

$$\underline{\mathbf{q}} = -\frac{k}{\mu} \underline{\text{grad}}(p) \quad [4.1]$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\text{div}(\underline{\mathbf{q}})$$

où $\underline{\mathbf{q}}$ est le flux (ou la vitesse de Darcy), k la perméabilité, μ la viscosité et p la pression.

Dans le cas des milieux isotropes (l'hypothèse que l'on adopte à la suite de ce travail), l'équation de l'écoulement en 2D est exprimée comme la suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = K \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \quad [4.2]$$

avec $K = k / \mu$ le coefficient de perméabilité (ou la conductivité hydraulique $[K]=[m/s]$)

Dans les interfaces, l'écoulement respecte la continuité de la pression et des flux à l'interface qui s'écrit :

$$p^+ = p^- \quad [4.3]$$

$$K^- \frac{\partial p^-}{\partial \underline{\mathbf{n}}} = K^+ \frac{\partial p^+}{\partial \underline{\mathbf{n}}} \quad [4.4]$$

Les symboles « + » et « - » présentent les valeurs déterminées aux limites intérieure et extérieure de l'interface (ou de l'inclusion). Dans l'expression de la dérivée normale de la pression $p_{\underline{n}} = \frac{\partial p}{\partial \underline{n}} = \nabla p \cdot \underline{n}$ le vecteur \underline{n} désigne le vecteur unitaire normale de l'interface (Fig. 4.1).

Dans la méthode des différences finies, la dérivée de la pression par rapport au temps en un point quelconque (x_i, y_j) est exprimée [LI 94-1] :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{i,j}^n = \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n}{\Delta t} \quad [4.5]$$

avec Δt le pas du temps de calcul et $t_n = n \Delta t$.

Aux points réguliers, l'approximation des dérivées secondes de la pression par rapport aux variables d'espace peut s'écrire sous la forme suivante en utilisant un schéma implicite:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{p_{i+1,j}^{n+1} + p_{i-1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1}}{(h_x)^2} + \frac{p_{i,j+1}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1}}{(h_y)^2} \quad [4.6]$$

où h_x, h_y désignent les pas uniformes de calcul par rapport aux variables x et y.

Pour ce qui concerne les points irréguliers, l'approximation des dérivées seconde de la pression par rapport aux variables de l'espace s'écrit de la manière générale:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \sum_{m=1}^{ns} \gamma_m p_{i+im, j+jm}^{n+1} \quad [4.7]$$

Dans l'équation [4.7], $p_{i+im, j+jm}^{n+1}$ désignent les pressions des points au voisinage du point irrégulier considéré. Les dérivées à un point quelconque sont donc connues sous réserve que les coefficients γ_m le soient.

IV.2.1 Repère local tangent à l'interface.

Pour chaque point irrégulier (x_i, x_j) , nous devons trouver un « point voisin » $P(x_i^*, x_j^*)$ sur l'interface qui pourrait être par exemple la projection de (x_i, x_j) sur l'interface (si cette dernière est lisse). Autrement nous pouvons accepter n'importe quel point sur l'interface dans le voisinage du point (x_i, x_j) . Dans certains cas il pourrait être pratique de choisir comme « point voisin » celui qui se trouve sur une ligne du même rang que le point (x_i, x_j) et le plus proche de ce dernier. Après avoir déterminé $P(x_i^*, x_j^*)$, nous appliquons une transformation de repère en utilisant un repère local (ξ, η) associé dont l'origine se situe au point P. Les

formules classiques de changement de repères sont :

$$\begin{aligned}\xi &= (x - x^*) \cos \theta + (y - y^*) \sin \theta, \\ \eta &= -(x - x^*) \sin \theta + (y - y^*) \cos \theta\end{aligned}\quad [4.8]$$

où θ est l'angle entre le x-axis et la direction normale \mathbf{n} qui présente la direction vers l'extérieure de l'interface (direction notée (+) sur la Fig. 4.1)

Dans ce repère local, une interface lisse peut être exprimée explicitement comme la suivante :

$$\xi = \chi(\eta) \quad [4.9]$$

où χ est une fonction supposée suffisamment régulière. En outre, au point d'origine du repère local, nous avons :

$$\chi(0) = 0, \quad \chi'(0) = 0 \quad [4.10]$$

IV.2.2 Les relations d'interface.

Soit un point M le long de l'interface, de coordonnées $(\xi = \chi(\eta), \eta)$ dans le repère local (P, ξ, η) . La condition de la continuité de la pression en M, [4.3] conduit à l'équation suivante [LI 01, ADA 02]:

$$p^-(\chi(\eta), \eta) = p^+(\chi(\eta), \eta) \quad [4.11]$$

En introduisant le saut de la pression à travers de l'interface la dernière équation peut s'écrire sous la forme :

$$[p'] = [p_\xi] \chi' + [p_\eta] \quad [4.12]$$

Dans cette équation [4.12], le symbole $[f] = f(M^+, t) - f(M^-, t)$ désigne le saut d'une fonction $f(x, y, t)$ déterminé au point M.

Il est possible, lorsque cela est nécessaire, d'introduire les conditions de saut pour les dérivées première et seconde de la pression comme suivante :

$$[p''] = [p_{\xi\xi}] \chi'^2 + 2[p_{\xi\eta}] \chi' + [p_\xi] \chi'' + [p_{\eta\eta}] \quad [4.13]$$

En considérant l'hypothèse de continuité des dérivées de la pression à l'interface, la combinaison des équations [4.10], [4.12] et [4.13] nous avons les relations suivantes:

$$\begin{aligned}[p_\eta] &= 0 \\ [p_\xi] \chi'' + [p_{\eta\eta}] &= 0\end{aligned}\quad [4.14]$$

La dérivée de la pression suivant la direction normale à un point s'écrit dans le repère local comme [LI 94-1] :

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \chi'^2}} (p_\xi - p_\eta \chi') \quad [4.15]$$

En utilisant cette dernière équation, la condition de continuité de flux (l'équation [4.4]) s'écrit sous la forme :

$$\left[K \frac{\partial p}{\partial \underline{n}} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 + \chi'^2}} [K(p_{\xi} - p_{\eta} \chi')] = 0 \quad [4.16]$$

La dérivation de l'équation [4.16] par rapport à η , donne:

$$[K(p_{\xi\xi} \chi' + p_{\xi\eta} - p_{\eta} \chi'' - p_{\xi\eta} \chi'^2 - p_{\eta\eta} \chi')] = 0 \quad [4.17]$$

Nous remarquons qu'à $\eta = 0$, nous avons $X'(0) = 0$. Donc les équations [4.16-4.17] sont écrites simplement sous la forme :

$$\begin{aligned} [K p_{\xi}] &= 0, \\ [K(p_{\xi\eta} - p_{\eta} \chi'')] &= 0 \end{aligned} \quad [4.18]$$

Pour résumer, l'expression des conditions de saut à l'interface détaillée dans les équations [4.11], [4.14] et [4.18] conduit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} p^+ &= p^- \\ p_{\eta}^+ &= p_{\eta}^- \\ p_{\xi}^+ &= \rho p_{\xi}^- \\ p_{\xi\eta}^+ &= \rho p_{\xi\eta}^- + (1 - \rho) p_{\eta}^- \chi'' \\ p_{\eta\eta}^+ &= p_{\eta\eta}^- + (1 - \rho) p_{\xi}^- \chi'' \\ p_{\xi\xi}^+ &= \rho p_{\xi\xi}^- + (\rho - 1) p_{\eta\eta}^- + (\rho - 1) p_{\xi}^- \chi'' \end{aligned} \quad [4.19]$$

où $\rho = K^- / K^+$

IV.2.3 Schéma numérique

La méthode de différences finies appliquée pour un point irrégulier (x_i, x_j) est réécrite comme la suivante [LI 94-1,94-2,97-1,97-2, LI 01] :

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + \Delta t \sum_{m=1}^{ns} \gamma_m p_{i+im,j+jm}^{n+1} \quad [4.20]$$

où le paramètre $ns = 9$ désigne le nombre de points intervenant dans l'approximation de la dérivée second ordre de la pression du point (x_i, x_j) (voir Fig. 4.2). Les indices $im jm$ qui prennent des valeurs dans l'ensemble $\{0, \pm 1\}$ présentent les points au voisinage du point considéré.

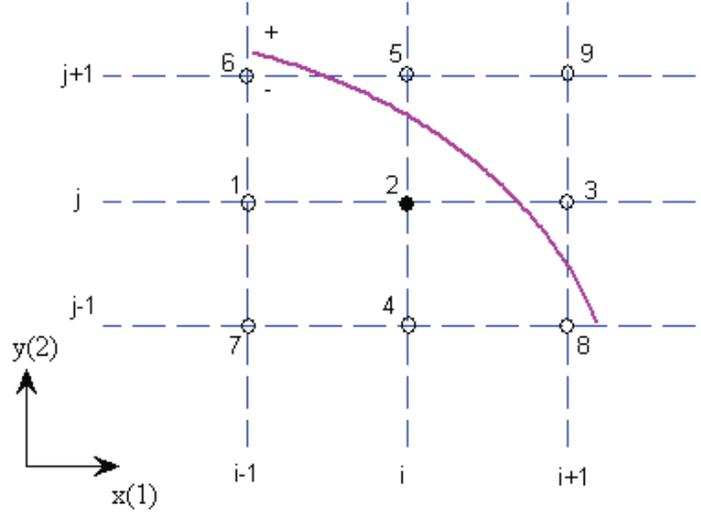


Fig. 4.2: Illustration du principe des points ‘stencil’ (numérotés de 1 à 9) utilisés par l’IIM au point irrégulier (x_i, y_j) .

Les coefficients γ_m sont déterminés à partir de l’analyse de l’erreur de troncature locale au point (x_i^*, x_j^*) :

$$T_{ij} = \sum_{m=1}^{ns} \gamma_m p_{i+im, j+jm}^{n+1} - C_{ij} \quad [4.21]$$

L’expansion de Taylor de la pression de chaque point (x_{i+im}, y_{j+jm}) par rapport au point (x_i^*, x_j^*) dans le repère local nous donne :

$$\begin{aligned} p(x_{i+im}, y_{j+jm}, t) &= p(\xi_m, \eta_m, t) \\ &= p^\pm + \xi_m p_{\xi}^\pm + \eta_m p_{\eta}^\pm + \frac{1}{2} \xi_m^2 p_{\xi\xi}^\pm + \frac{1}{2} \eta_m^2 p_{\eta\eta}^\pm + \xi_m \eta_m p_{\xi\eta}^\pm + O(h^3) \end{aligned} \quad [4.22]$$

où (ξ_m, η_m) sont les coordonnées du point (x_{i+im}, y_{j+jm}) dans le repère local. Les symboles (+) ou (-) désignent les valeurs déterminées à l’extérieure ou à l’intérieure de l’interface qui dépend donc la position du point (x_{i+im}, y_{j+jm}) .

Par conséquent l’erreur locale de troncature T_{ij} peut être exprimée comme une combinaison linéaire des valeurs $p^\pm, p_{\xi}^\pm, p_{\eta}^\pm, p_{\xi\xi}^\pm, p_{\eta\eta}^\pm, p_{\xi\eta}^\pm$:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= a_1 p^- + a_2 p^+ + a_3 p_{\xi}^- + a_4 p_{\xi}^+ + a_5 p_{\eta}^- + a_6 p_{\eta}^+ + a_7 p_{\xi\xi}^- + a_8 p_{\xi\xi}^+ + a_9 p_{\eta\eta}^- + a_{10} p_{\eta\eta}^+ \\ &\quad + a_{11} p_{\xi\eta}^- + a_{12} p_{\xi\eta}^+ - C_{ij} + O(\max_m |\gamma_m| h^3) \end{aligned} \quad [4.23]$$

On remarque que les coefficients a_j dépendent seulement de la position relative des points

par rapport à l'interface. Ils sont indépendant des fonctions p . Nous définissons M^- et M^+ les deux ensembles des points considérés à l'intérieure et à l'extérieure par rapport à l'interface. Les coefficients a_{ij} sont:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \sum_{m \in M^-} \gamma_m & a_3 &= \sum_{m \in M^-} \xi_m \gamma_m & a_5 &= \sum_{m \in M^-} \eta_m \gamma_m \\
 a_7 &= \frac{1}{2} \sum_{m \in M^-} \xi_m^2 \gamma_m & a_9 &= \frac{1}{2} \sum_{m \in M^-} \eta_m^2 \gamma_m & a_{11} &= \sum_{m \in M^-} \xi_m \eta_m \gamma_m \\
 a_2 &= \sum_{m \in M^+} \gamma_m & a_4 &= \sum_{m \in M^+} \xi_m \gamma_m & a_6 &= \sum_{m \in M^+} \eta_m \gamma_m \\
 a_8 &= \frac{1}{2} \sum_{m \in M^+} \xi_m^2 \gamma_m & a_{10} &= \frac{1}{2} \sum_{m \in M^+} \eta_m^2 \gamma_m & a_{12} &= \sum_{m \in M^+} \xi_m \eta_m \gamma_m
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

En utilisant les relations [4.19], nous éliminons les quantités d'un côté particulier (par exemple les points à l'extérieure) dans [4.23], donc l'expression du [4.23] peut s'écrire en termes de l'autre côté. On obtient une expression de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 T_{ij} &= (a_1 + a_2)p^- + \{a_3 + a_4\rho + a_8(\rho - 1)\chi'' + a_{10}(1 - \rho)\chi''\}p_{\xi}^- \\
 &\quad + \{a_5 + a_6 + a_{12}(1 - \rho)\chi''\}p_{\eta}^- + \{a_7 + a_8\rho - K^-\}p_{\xi\xi}^- \\
 &\quad + \{a_9 + a_{10} + a_8(\rho - 1) - K^-\}p_{\eta\eta}^- + \{a_{11} + a_{12}\rho\}p_{\xi\eta}^- \\
 &\quad + (C_{ij} - \hat{T}_{ij}) + O(h)
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Après des manipulations algébriques simples mais encombrantes, on peut établir l'ensemble des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 a_1 + a_2 &= 0, \\
 a_3 + a_4\rho + a_8(\rho - 1)\chi'' + a_{10}(1 - \rho)\chi'' &= 0, \\
 a_5 + a_6 + a_{12}(1 - \rho)\chi'' &= 0, \\
 a_7 + a_8\rho - K^- &= 0, \\
 a_9 + a_{10} + a_8(\rho - 1) - K^- &= 0, \\
 a_{11} + a_{12}\rho &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Les coefficients a_i sont des fonctions de γ_m et donc le problème consiste à déterminer ces coefficients tels que le système des équations linéaire soit satisfait. On vient donc d'obtenir une discrétisation cohérente pour la limite de diffusion. Néanmoins cela, ne garantit pas la stabilité, pour laquelle il faudra encore imposer le principe de maximum discret :

$$\gamma_m \geq 0 \quad \text{si } (i_m, j_m) \neq (0, 0), \quad \gamma_m < 0 \quad \text{si } (i_m, j_m) = (0, 0) \tag{4.27}$$

Le système d'équations [4.26] est constitué de six équations et comporte 9 inconnues. Il est résolu comme un problème d'optimisation en cherchant le minimum de la fonction quadratique suivante [LI 01, LI 03, ADA 02]:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|\gamma - g\|_2^2 \right\} \quad [4.28]$$

$$A\gamma = b, \gamma_m \geq 0 \text{ si } (i_m, j_m) \neq (0, 0), \gamma_m < 0 \text{ si } (i_m, j_m) = (0, 0) \quad [4.29]$$

où $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{ns}]^T$ sont les coefficients de l'équation différence finis. $A\gamma = b$ est le système d'équations linéaires, tandis que les composants du $g \in R^{ns}$ seront :

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{\beta_{i+ik, j+jk}}{h^2}, & \text{si } (ik, jk) \in \{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}; \\ g_k &= -\frac{4\beta_{i, j}}{h^2}, & \text{si } (ik, jk) = 0; \\ g_k &= 0, & \text{autrement} \end{aligned} \quad [4.30]$$

Si $[K] = 0$, la solution de ce problème est les coefficients de l'équation différence en utilisant le 9-ponits 'stencil'[LI 01, LI 03].

IV.3 Détermination de la perméabilité effective

La résolution du problème d'écoulement par la méthode d'interface immergée permet d'étudier les champs de pression et de flux hydrique et d'identifier, le cas échéant, la perméabilité effective en calculant les valeurs moyennes des deux champs.

Dans cette section, la méthode d'IIM est utilisée pour déterminer la perméabilité effective d'un milieu hétérogène. La capacité de cette méthode est mise en évidence à travers des exemples numériques. On remarque que due à la similarité entre différents problèmes de transport, les résultats de ces études peuvent être appliqués de manière direct pour d'autre problèmes comme la conduction thermique, la conduction électrique, la diffusion etc.

Pour la simplicité, les études numériques restent en 2D et les inclusions immergées dans la phase matrice sont caractérisées par des interfaces de forme circulaire ou elliptique dont les propriétés physiques sont différentes à celles de la matrice. Ces interfaces sont décrites de manière générale par une fonction $F(x, y)$ par rapport à coordonnées cartésiennes. Par exemple dans le cas d'une inclusion circulaire nous avons l'équation $F(x, y) = (x - xc)^2 + (y - yc)^2 - rc^2 = 0$ avec xc, yc, rc représentant la position du centre et le rayon de l'inclusion.

Considérons maintenant un milieu hétérogène constitué d'une matrice homogène qui entoure une inclusion circulaire comme indiqué schématiquement sur la Fig. 4.3. Les coefficients de la perméabilité de la matrice et de l'inclusion sont respectivement K_0 et K_1 . La détermination

numérique du coefficient de perméabilité effective est réalisée en solvant dans un premier temps le problème à conditions aux limites homogènes aux frontières de milieux. Plus précisément, pour les frontières en haute et en bas nous imposons les deux pressions constants avec un gradient de pression de Δp alors que sur les frontières à gauche et à droite, les conditions de flux nulle sont utilisées. Ces conditions aux limites nous permettent de déterminer la perméabilité effective K_{22} suivant la direction Y. L'application des conditions de chargement hydrique similaires mais dans la direction X, permet d'obtenir la perméabilité K_{11} suivant cette direction.

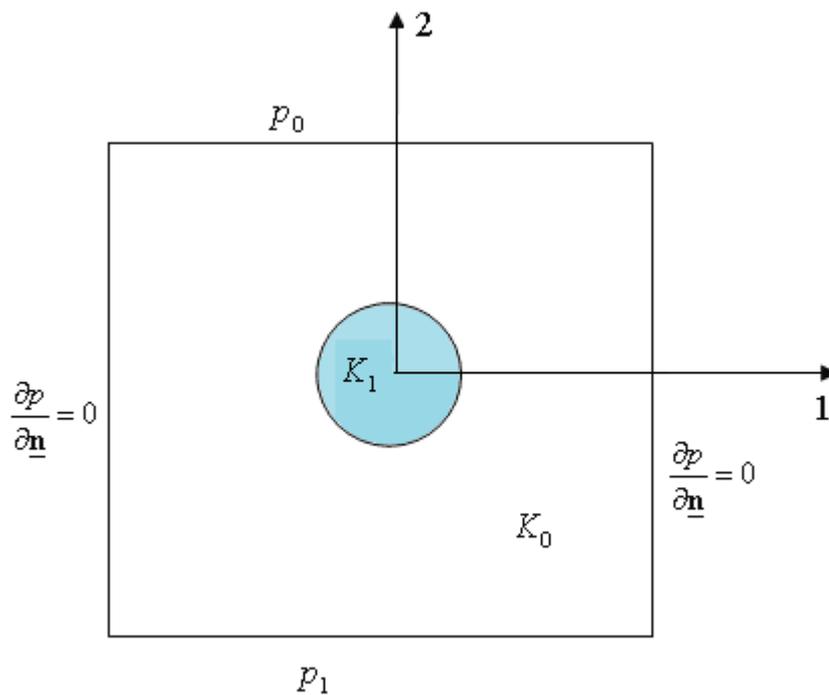
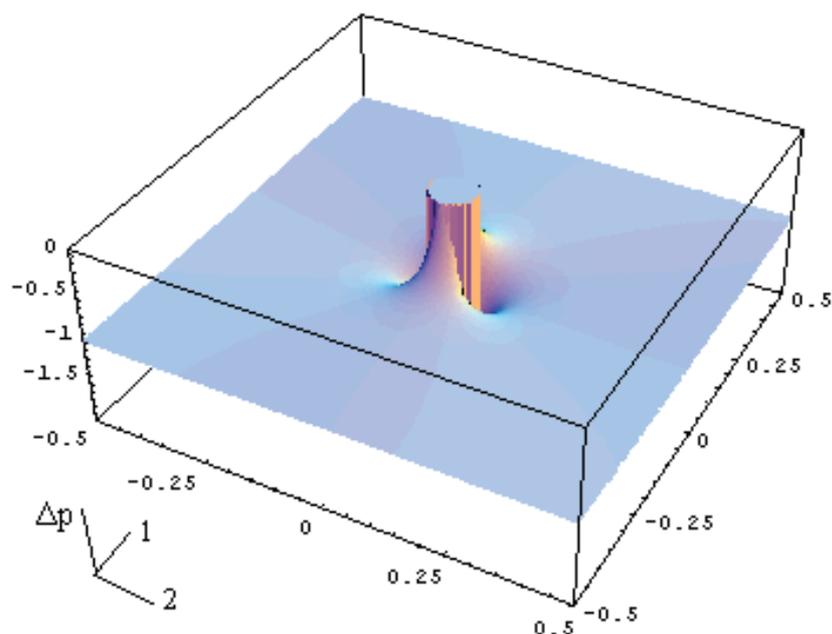


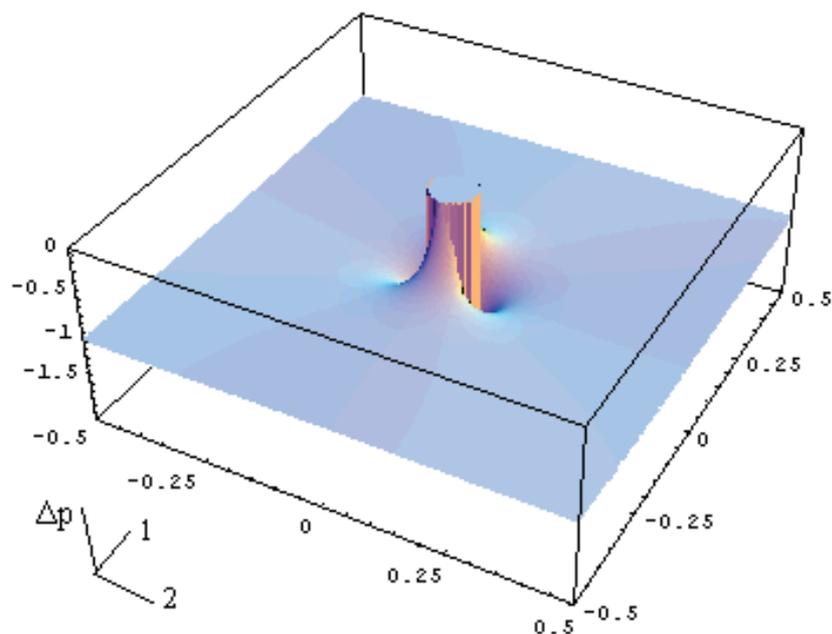
Fig. 4.3 : Les conditions aux limites pour le cas d'une interface circulaire

A titre de validation de la méthode numérique sur les figures (Fig. 4.4 à Fig. 4.6), sont présentés les champs du gradient de pression dans l'inclusion et dans la matrice. Les résultats numériques confirment ceux connus des études analytiques ([ESH 57, TOR 02]) qui montrent que le champ de pression dans l'inclusion est uniforme. Dans le cas où la taille de l'inclusion est faible $rc = 0.05mm$ (la fraction volumique donc égale à 0.8%), une très bonne concordance est obtenue entre les résultats de la méthode numérique et l'approche analytique (Fig. 4.5). Cette concordance devient moins bonne au fur et à mesure que la taille de l'inclusion (et donc la fraction volumique) augmente. Néanmoins, même lorsque la fraction volumique de l'inclusion est de $f=5\%$ (ou la taille de l'inclusion $rc = 0.126mm$), l'écart entre les prédictions numériques et analytiques reste modéré. Cet écart peut être expliqué par le fait

que la condition de chargement à l'infini sur laquelle se base la méthode analytique n'est pas vraiment assurée dans le calcul numérique. Précisons que dans ces études, la conductivité de la matrice et de l'inclusion sont respectivement $K_0=0.05\text{mm/s}$ et $K_1=0.5\text{mm/s}$ et un maillage régulier de 640×640 a été utilisé.



(a)



(b)

Fig. 4.4 : Champ de gradient de pression dans le milieu hétérogène

a) solution analytique, b) solution d'IIM

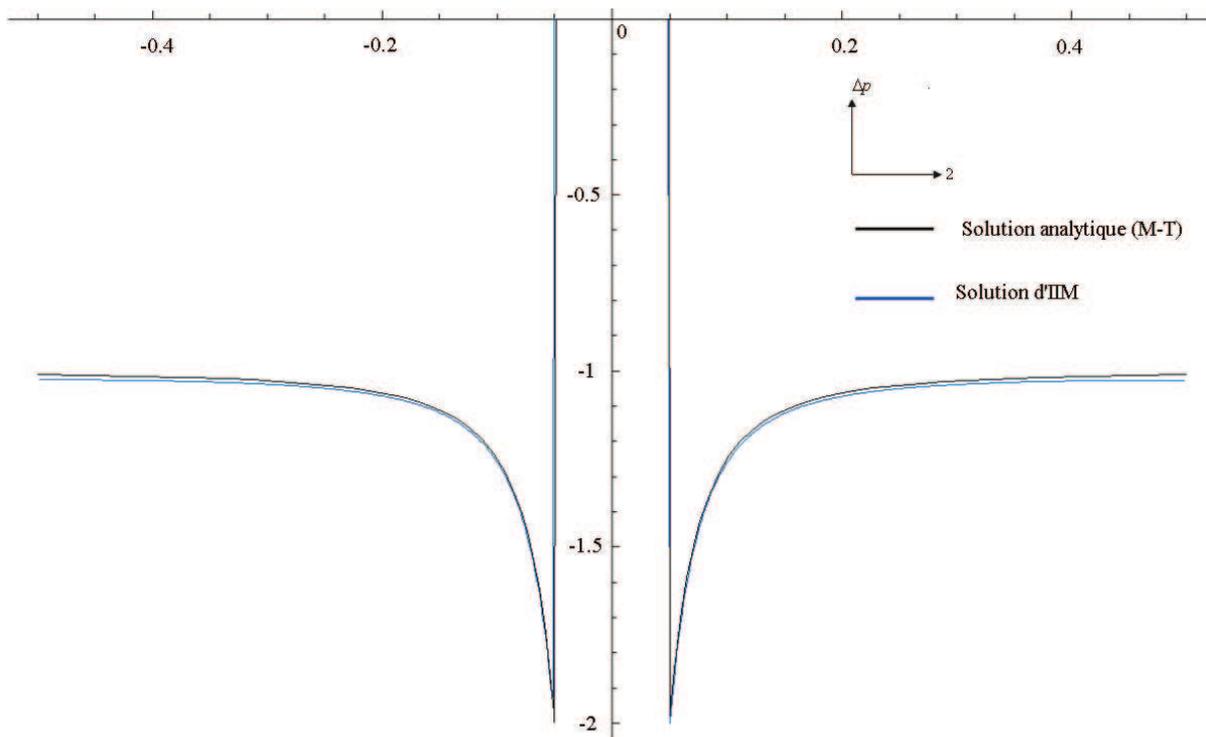


Fig. 4.5 : Comparaison du champ de gradient de pression dans le milieu hétérogène suivant une coupe verticale passant le centre de l’inclusion circulaire ($f=0.8\%$)

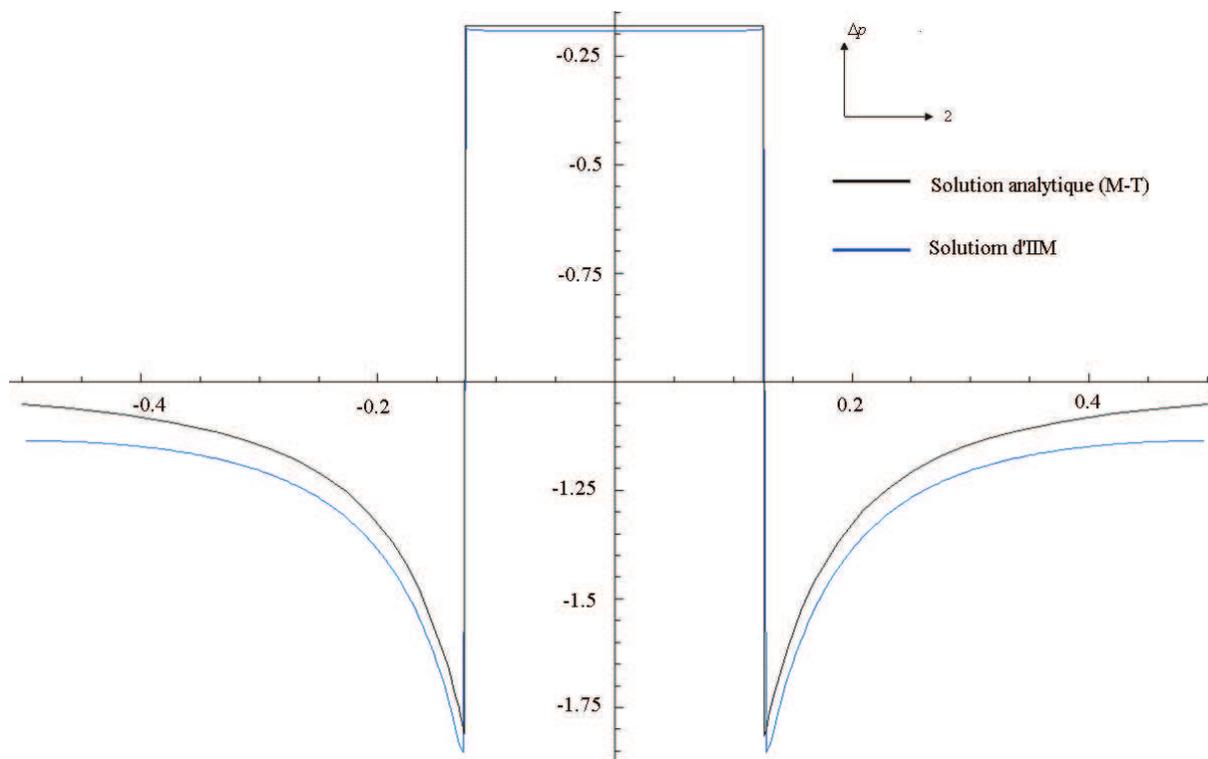


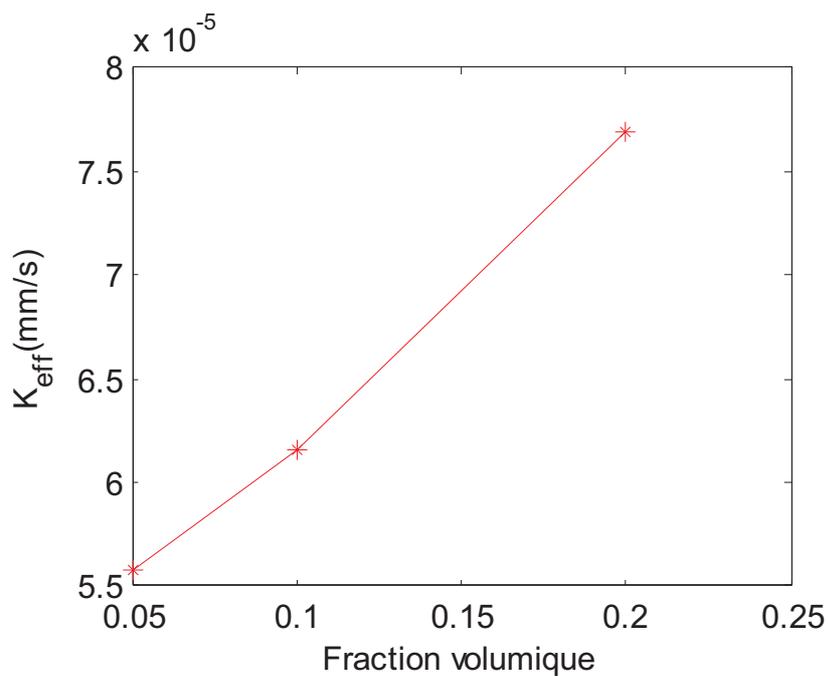
Fig. 4.6 : Comparaison du champ de gradient de pression dans le milieu hétérogène suivant une coupe verticale passant le centre de l’inclusion circulaire ($f= 5\%$)

IV.3.1 L'influence de la fraction volumique des inclusions et du contraste des perméabilités des phases sur la perméabilité effective

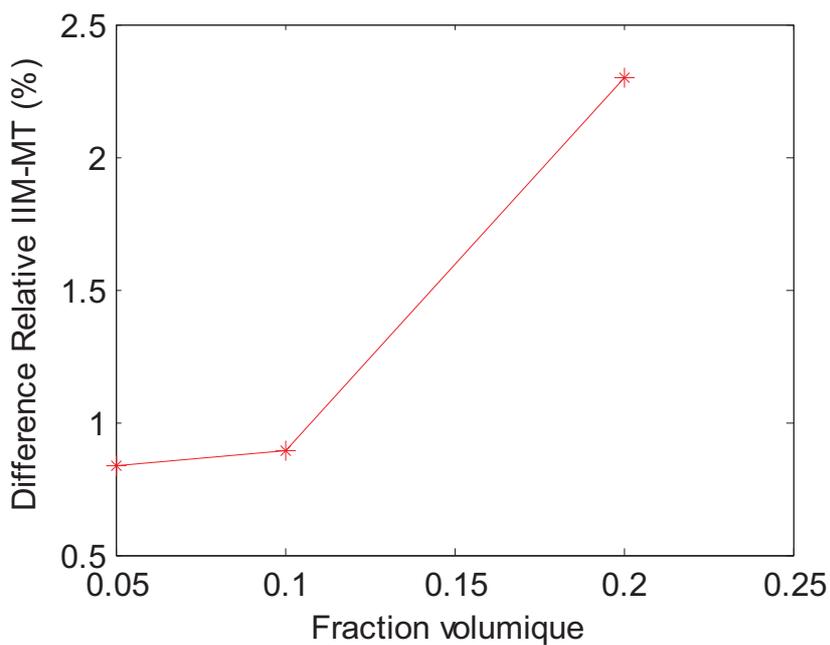
Donc dans cette section, l'influence de la fraction volumique de l'inclusion et du contraste des propriétés hydrique de la matrice et de l'inclusion sur les propriétés effectives hydrique a été étudiée. Dans ces calculs une seule inclusion de forme circulaire a été considérée.

Sur la figure (Fig. 4.7a) est illustré l'impact de la fraction volumique de l'inclusion sur la perméabilité effective. Dans ces calculs, la perméabilité de la phase matrice est de l'ordre de $K_0=10^{-5}$ (mm/s) alors que celle de l'inclusion circulaire est 10^4 fois plus importante. Comme attendu, l'augmentation de fraction volumique d'inclusion fait accroître la perméabilité homogénéisée. De la même façon, une augmentation de la différence relative entre les résultats numériques et analytiques est observée lorsque la fraction volumique d'inclusion est plus importante (Fig. 4.7b). On remarque que la solution analytique de la perméabilité effective est déterminée à partir du schéma de Mori Tanaka (voir l'annexe A).

L'influence du contraste de la perméabilité des phases constituantes est présentée sur la figure (Fig. 4.8). Dans ces études, la fraction volumique d'inclusion est choisie égale à 10%. Le rapport de la perméabilité d'inclusion par rapport à celle de la phase matrice est pris de 1 à 10^4 . Sur la figure (Fig. 4.8.), on retrouve l'augmentation des différences entre les résultats numériques et analytiques avec l'accroissement du contraste de la perméabilité, des différences qui restent néanmoins petites.



(a)



(b)

Fig. 4.7 : (a) L'évolution de la perméabilité effective en fonction de la fraction volumique des inclusions. (b) Différence relative entre la solution numérique et analytique en fonction de fraction volumique

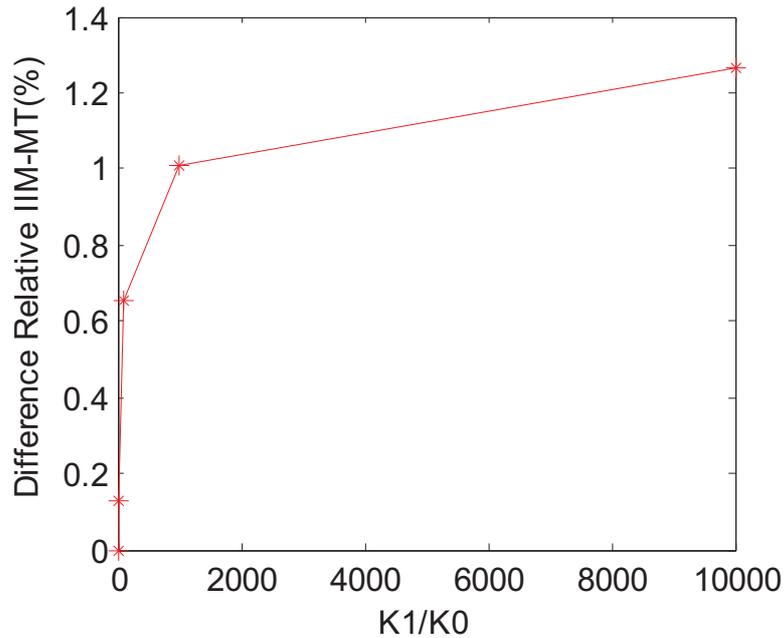


Fig. 4.8 : Différence relative entre la solution numérique et analytique en fonction du contraste de la perméabilité des phases

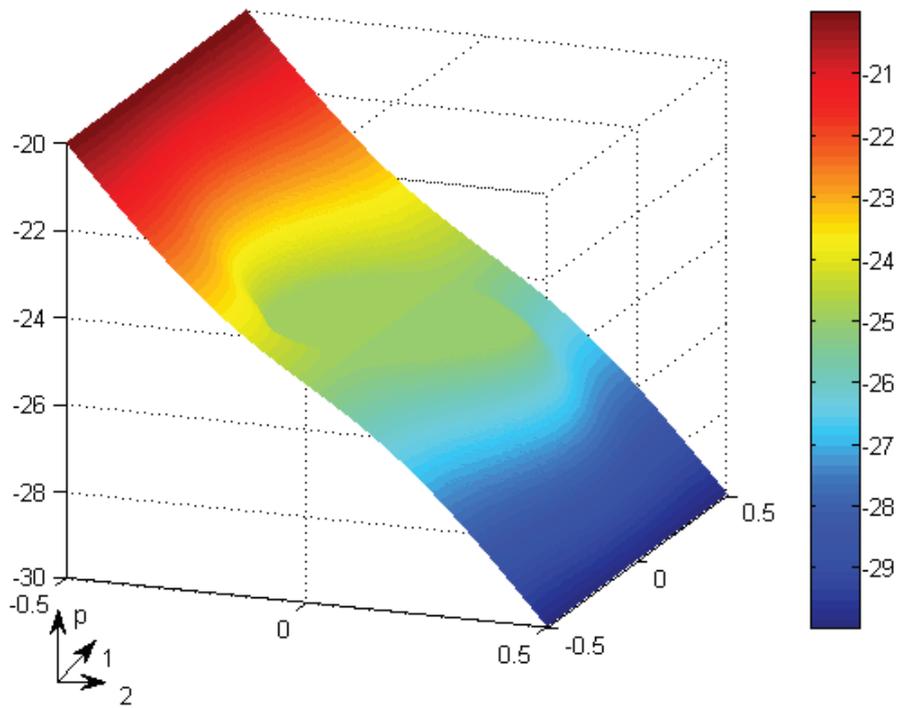
IV.3.2 L'influence de la distribution des inclusions sur la perméabilité effective

Dans cette sous section, la perméabilité effective du milieu hétérogène est déterminée sous différentes configurations de distribution d'inclusions. Pour cela, dans des calculs alternatifs réalisés, la fraction volumique des inclusions dans la matrice homogène est maintenu constant et égale à $f_i = 20\%$ de même que le contraste entre les perméabilités entre l'inclusion et la matrice maintenu à $K_1/K_0=10^4$ avec $K_0=5 \times 10^{-5}$ mm/s. Les résultats sont obtenus à partir d'un maillage régulier de 480×480 nœuds.

On considère la première configuration dans laquelle une seule inclusion circulaire de rayon $rc = \sqrt{f_i / \pi} = 0.2523$ mm située au centre du domaine étudié. La figure (Fig. 4.9) représente le champ de pression dans le milieu hétérogène, tandis que dans le tableau (4.1) sont comparés les résultats de la perméabilité homogénéisée numériquement et les prédictions analytiques de la méthode de Mori Tanaka. L'accord entre les prédictions est très bon avec des différences de l'ordre de 2%.

En suite le nombre des inclusions augmente graduellement en passant d'une inclusion à 4, puis en 10, 20 et 30 inclusions toujours en gardant la même fraction volumique et la même morphologie de l'inclusion. Les champs de pression et les profils de pression selon différentes

coupes sont détaillés pour ces différents cas sur les figures 4.9 à 4.11, tandis que les comparaisons entre les prédictions numériques et analytiques (Mori-Tanaka) de la perméabilité effective pour chacun des cas sont résumées dans le tableau 4.1 Les différences entre les prédictions numériques et prédictions analytiques sont plus remarquées lorsque le nombre des inclusions augmente. La différence est plus importante (de l'ordre de 9.4% suivant la direction X) pour la distribution de 30 inclusions. Cette différence est principalement due au fait que la distribution des inclusions dans la solution analytique ne sont pas bien pris en compte et les conditions d'un milieu infini supposées dans la solution analytique ne sont pas satisfaites dans le calcul numérique.



(a)

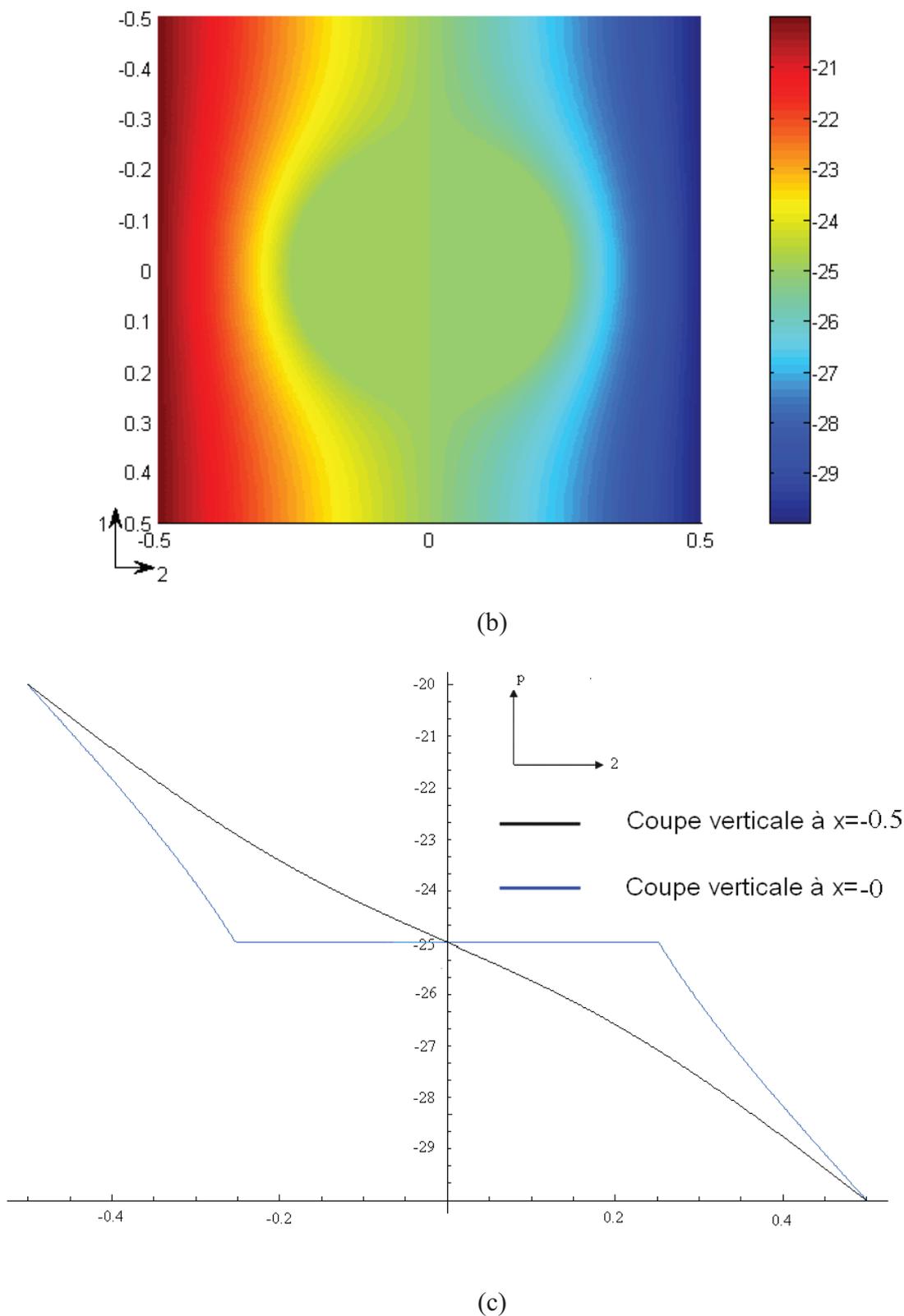
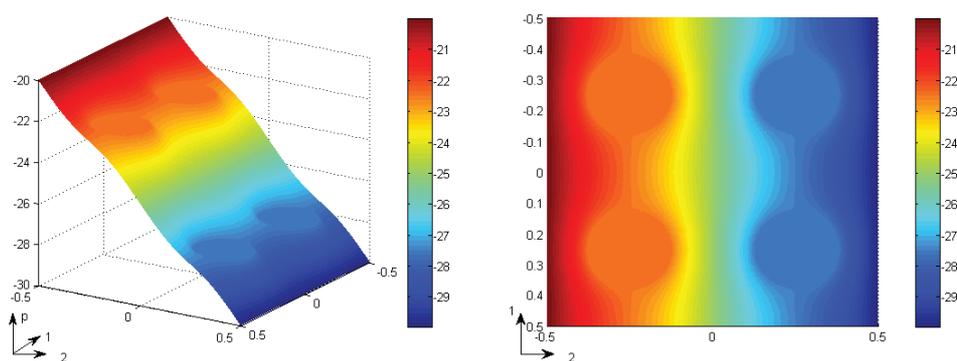


Fig. 4.9 : Champ de pression dans le milieu hétérogène dans le cas d'une seule inclusion circulaire (a) vue 3D ; (b) dans le plan Oxy ; (c) suivant les coupes verticales

Propriété effective		$K_{11\text{eff}}(\text{mm/s})$	$K_{22\text{eff}}(\text{mm/s})$
N=1	IIM	7.65 E-5	7.65 E-5
	Mori-Tanaka(MT)	7.5 E-5	7.5 E-5
	Différence relative(%) (MT-IIM)	2.0	2.0
N=4	IIM	7.75 E-5	7.75 E-5
	Mori-Tanaka(MT)	7.5 E-5	7.5 E-5
	Différence relative(%) (MT-IIM)	3.2	3.2
N=10	IIM	8.05 E-5	7.81 E-5
	Mori-Tanaka(MT)	7.5 E-5	7.5 E-5
	Différence relative(%) (MT-IIM)	7.4	4.0
N=20	IIM	8.12 E-5	8.23 E-5
	Mori-Tanaka(MT)	7.5 E-5	7.5 E-5
	Différence relative(%) (MT-IIM)	8.4	9.7
N=30	IIM	8.20 E-5	8.21 E-5
	Mori-Tanaka(MT)	7.5 E-5	7.5 E-5
	Différence relative(%) (MT-IIM)	9.4	9.4

Tableau 4.1 : Perméabilité effective pour les différentes cas : comparaison la solution numérique et analytique



(a)

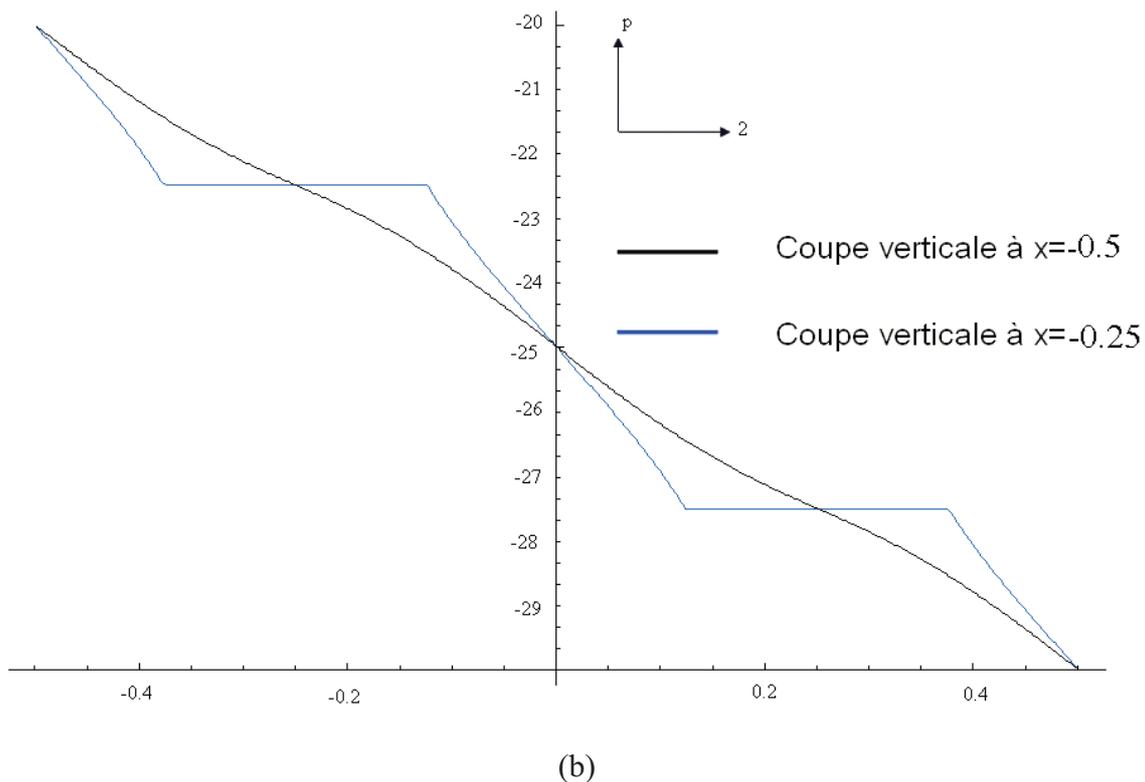
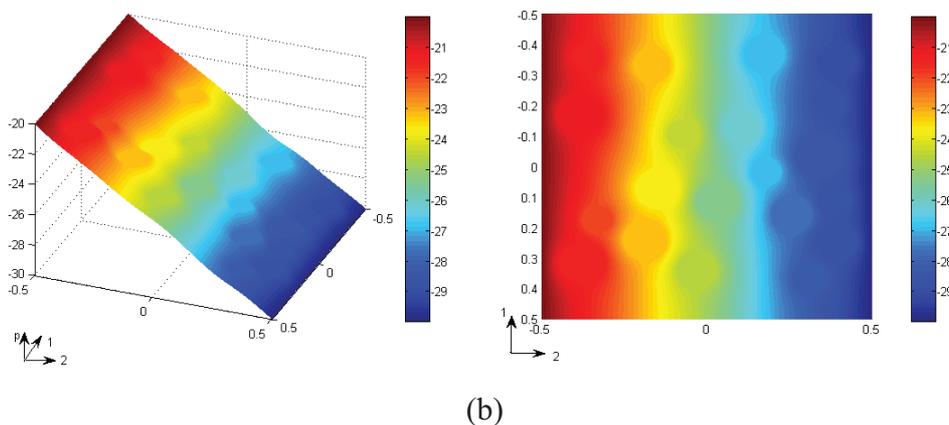
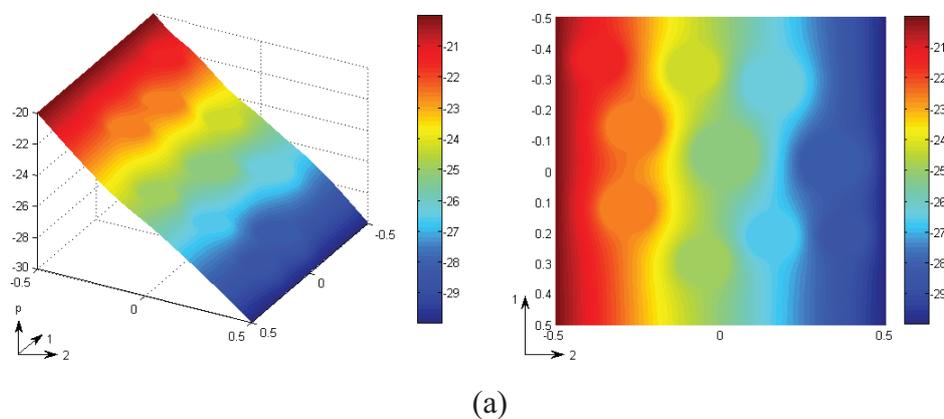
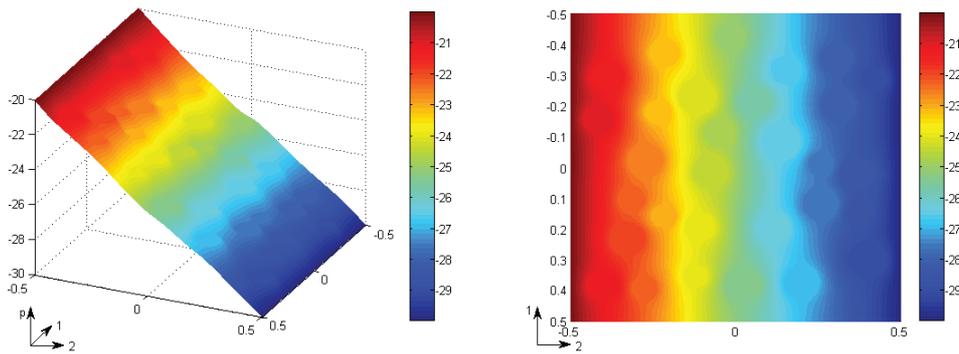


Fig. 4.10 : Champ de pression dans le milieu hétérogène dans le cas de 4 inclusions circulaires distribuées symétriquement (a) vue 3D et dans le plan Oxy ; (b) suivant les coupes verticales





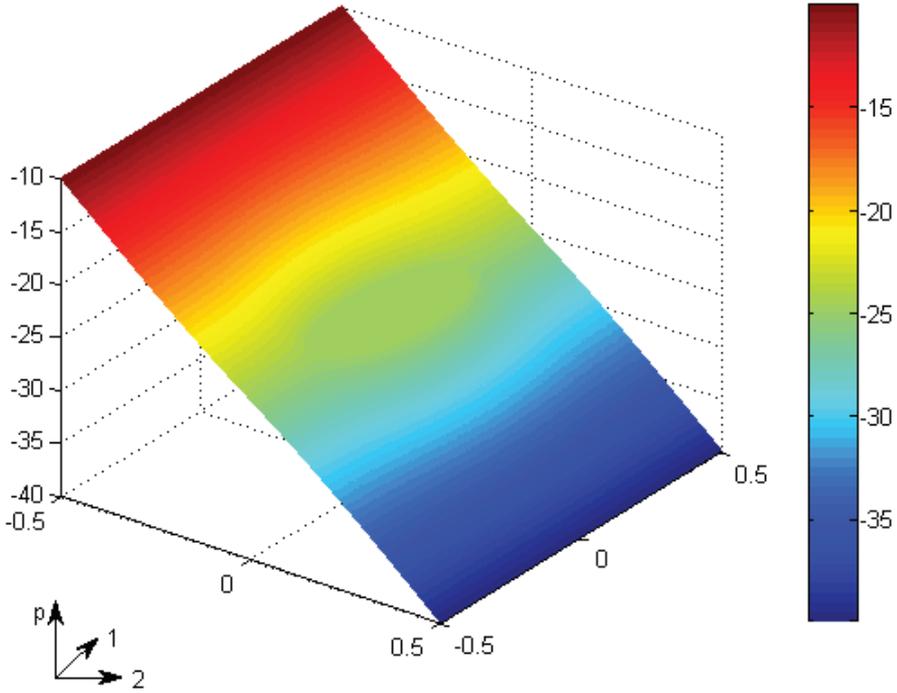
(c)

Fig. 4.11 : Champ de pression dans le milieu hétérogène sous différentes cas de distribution aléatoire des inclusions (a) cas de 10 inclusions ; (b) cas de 20 inclusions; (c) cas de 30 inclusions

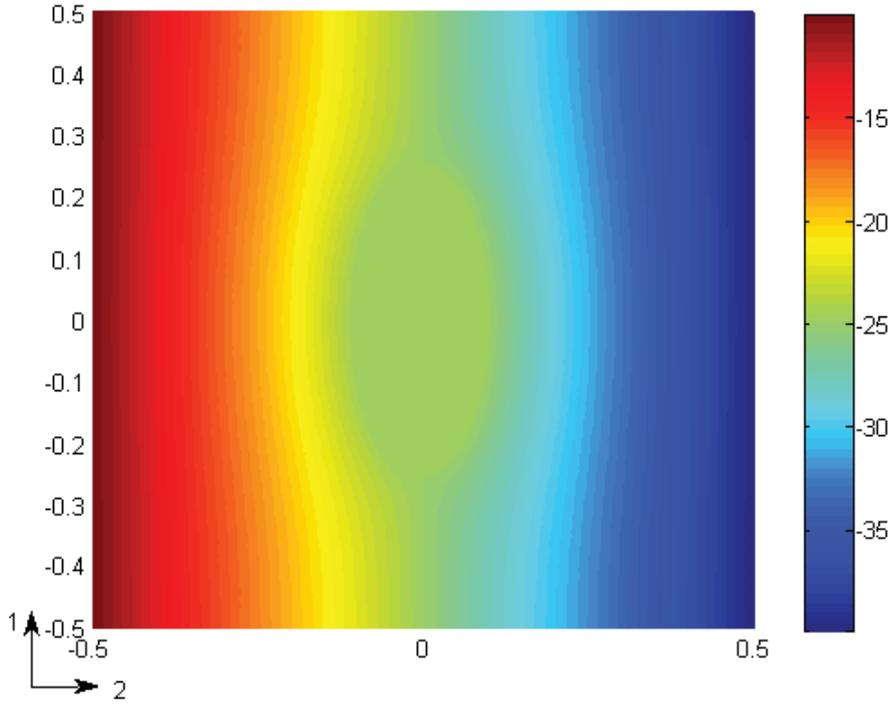
IV.3.3 L'influence du rapport d'aspect des inclusions sur la perméabilité effective

Dans cette partie, on utilise la méthode IIM pour déterminer la perméabilité effective des milieux hétérogènes contenant des inclusions de forme elliptique en se restreint donc sur des interfaces lisses. Bien qu'en principe la méthode pourrait être utilisée pour des interfaces lisses par morceaux sa mise en œuvre sous ces conditions devient beaucoup plus lourde. On reste donc dans cette partie sur des inclusions de forme ellipsoïdale mais de coefficients de forme variant de 0.2 et 1.

Pour toutes les simulations la fraction volumique des inclusions est constant égal à 8%. Comme les études précédentes, les perméabilités de la matrice et d'inclusion sont prises égales à $K_0=5 \times 10^{-5} \text{ mm/s}$ et $K_1=0.5 \text{ mm/s}$. Par ailleurs, dans ces calculs, le maillage régulier de 640×640 est utilisé. L'évolution de la perméabilité effective selon les deux directions principales de l'ellipsoïde d'inclusion en fonction du coefficient de forme est présentée en forme de tableau (tableau 4.4) et graphiquement sur la figure 4.12. Comme attendu une anisotropie de la perméabilité effective du milieu homogène est observée qui s'amplifie avec la diminution du coefficient de forme.



(a)



(b)

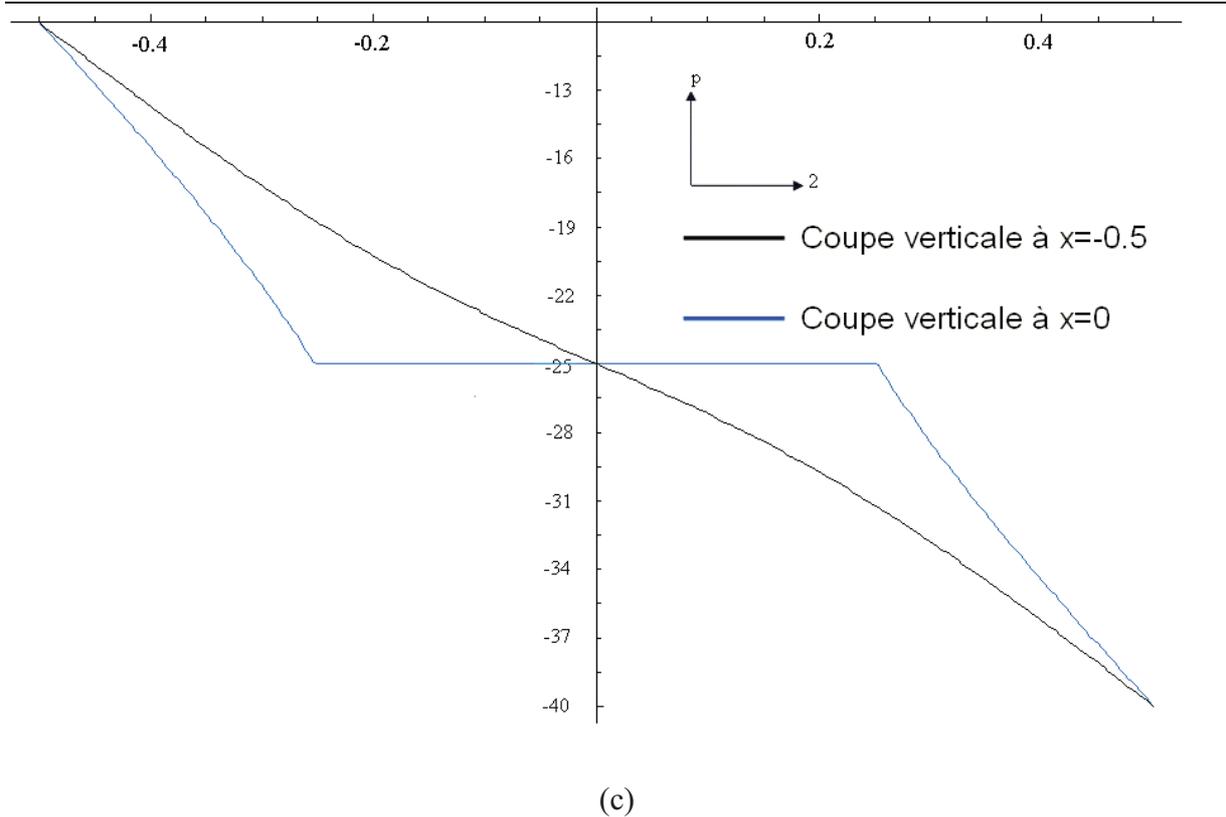


Fig. 4.12 : Champ de pression dans le milieu hétérogène dans le cas d’une seule inclusion elliptique dont le rapport d’aspect $\varepsilon=0.4$ (a) vue 3D ; (b) dans le plan Oxy ; (c) suivant les coupes verticales

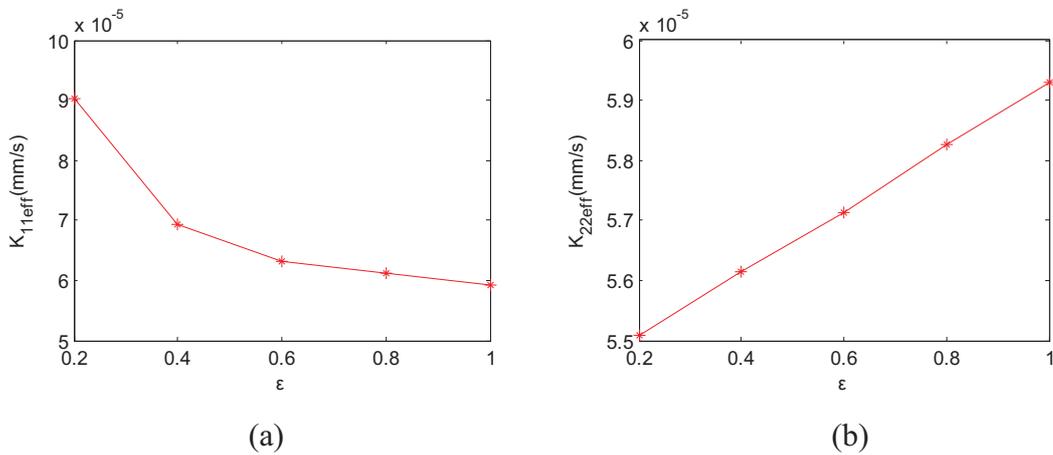


Fig. 4.13 : L’évolution de la perméabilité effective en fonction du rapport d’aspect ε (a) suivant la direction X (b) suivant la direction Y

Sur la figure (Fig.4.13), nous pouvons observer l’influence du rapport d’aspect d’inclusion sur la perméabilité homogénéisée. Ces résultats montrent une anisotropie de la perméabilité effective du milieu homogène isotrope entourant l’inclusion elliptique. L’anisotropie est plus importante lorsque le rapport d’aspect est plus faible ($\varepsilon=0.2$ dans ces études). Quand ce

rapport d'aspect augmente, l'anisotropie est plus faible due à l'augmentation de la perméabilité effective suivant la direction Y ($K_{22\text{eff}}$) et à la diminution de celle suivant la direction X ($K_{11\text{eff}}$). On retrouve le milieu macroscopique isotrope quand $\varepsilon=1$.

Dans le tableau 4.2, la comparaison des résultats prédictifs par le schéma Mori-Tanaka et ceux de la méthode d'IIM est présentée avec une valeur de 8% de la fraction volumique d'inclusion. Nous constatons une différence relative entre les deux méthodes est le plus faible dans le cas d'inclusions circulaire ($\varepsilon=1$) qui est de l'ordre de 1%. La diminution du rapport d'aspect conduit à une différence plus importante de la perméabilité effective particulièrement suivant la direction X. A $\varepsilon=0.2$, nous avons une différence de l'ordre de 15%. Encore une fois, cette différence peut être expliquée par les conditions d'un milieu infini supposé dans la solution analytique qui ne sont pas satisfaites dans les calculs numériques.

Propriété effective		$K_{11\text{eff}}(\text{mm/s})$	$K_{22\text{eff}}(\text{m/s})$
$\varepsilon=0.2$	Mori-Tanaka	7.61E-5	5.52E-5
	IIM	9.03E-5	5.51 E-5
	Différence relative(%)	15	0.2
$\varepsilon=0.4$	Mori-Tanaka	6.52E-05	5.60E-05
	IIM	6.94E-05	5.61E-05
	Différence relative(%)	6	0.1
$\varepsilon=0.6$	Mori-Tanaka	6.16E-05	5.69E-05
	IIM	6.33E-05	5.71E-05
	Différence relative(%)	2.6	0.3
$\varepsilon=0.8$	Mori-Tanaka	5.98E-05	5.78E-05
	IIM	6.13E-05	5.82E-05
	Différence relative(%)	2.5	0.7
$\varepsilon=1$	Mori-Tanaka	5.87E-05	5.87E-05
	IIM	5.93E-05	5.93E-05
	Différence relative(%)	1	1

Tableau 4.2 : Perméabilités effectives des milieux hétérogènes contenant des inclusions elliptiques : comparaison des résultats numériques et analytiques.

IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre, consacré à la modélisation numérique de l'écoulement dans les milieux poreux la méthode d'interface immergée (IIM) a été initialement présentée, en suite implantée et validée avant d'être utilisée pour modéliser le comportement hydraulique des matériaux hétérogènes. La validation de la méthode a été effectuée en comparant les résultats prédictifs

de la méthode en termes de distribution de pressions et des gradients de pression avec ceux de la méthode d'analytique de l'inclusion isolée (problème d'Eshelby). Une très bonne concordance entre les deux méthodes lorsque la taille d'inclusion est faible a été observée. Néanmoins, lorsque la fraction volumique d'inclusion dans le milieu hétérogène est importante, l'écart entre la solution numérique et analytique est plus remarqué. Les différences entre les prédictions numériques et analytiques seront à amputer pour une part à l'hypothèse d'infinité du milieu de l'approche numérique et d'autre part des erreurs numériques de la méthode numériques pour des rayons de courbature faibles. Tout en montrant la capacité de l'IIM dans la description de l'écoulement aux milieux hétérogènes les études réalisées dans ce chapitre ont mise en évidence le rôle de la densité, de la distribution et de la forme des inclusions sur la perméabilité effective. La méthode IIM de part sa philosophie d'intégration des équations sur une grille de fond régulière présente un moyen efficace pour la modélisation du comportement hydraulique et un très bon candidat pour le couplage externe avec le code XFEM développé en mécanique.

Conclusions et perspectives

En conclusions, au cours de ce travail, nous nous sommes intéressés à la modélisation du comportement hydro-poro-mécanique linéaire et du comportement mécanique non linéaire des matériaux hétérogènes et poreux et plus spécifiquement des géomatériaux par l'approche micromécanique. Donc une stratégie de calcul de changement d'échelle, répondant à la problématique d'une analyse local-globale pour la modélisation du comportement des matériaux hétérogènes est présentée. Cette approche met en synergie deux techniques. L'approche micro-macro est utilisée pour effectuer une séparation d'échelles. Pour la deuxième technique de cette approche, notre choix s'est porté sur une alternative aux problèmes impliquant des géométries complexes ou aléatoires, en terme de convergence, de l'approche XFEM[BEL 99] avec la fonction d'enrichissement F2 employée pour représenter au mieux le saut de déformation au sein des éléments [MOE 03]. Autrement dit, nous avons mis en place une méthode capable de prendre en compte l'influence d'un détail sur une structure de grande envergure grâce à une approche à deux échelles en résolvant le problème microscopique à l'aide de la méthode des éléments finis étendus.

La validation de cette technique a été présentée dans le deuxième chapitre à travers des exemples simples d'interfaces. Les applications traitées nous ont permis de confronter notre approche aux approches utilisant la méthode des éléments finis pour résoudre ces problèmes micromécaniques, les résultats des simulations ont été également comparés aux résultats obtenus avec des modèles analytiques d'homogénéisation (schéma de Mori-Tanaka). La spécificité de cette approche numérique, par rapport aux modèles analytiques d'homogénéisation, est surtout de donner accès aux champs locaux solutions des problèmes cellulaires, et de permettre ainsi d'analyser les zones les plus chargées au sein de la microstructure. L'autre point de l'approche est de pouvoir résoudre les problèmes d'homogénéisation avec des comportements non linéaires des phases. Par rapport aux méthodes numériques classiques XFEM représente l'avantage de pouvoir décrire des structures très complexes. De part sa philosophie de séparation de la description de la géométrie du maillage d'intégration des équations cette méthode surpasse les difficultés rencontrées par la méthode des éléments finis classiques ayant besoin de mailles puissantes et

des ressources numériques importants dès un certain niveau de complexité de la structure.

Une étude sur l'influence de la distribution, la morphologie, et l'orientation des inclusions sur le comportement équivalent dans le domaine de l'élasticité linéaire a été réalisée dans le troisième chapitre.

Dans la partie non linéaire, le comportement élastoplastique a été étudié en utilisant la méthode des éléments finis étendus (XFEM) aboutissant à un système d'équations non-linéaires résolu par la méthode Newton-Raphson modifiée. Le modèle de Drucker-Prager avec écrouissage parabolique [FER 08, FER 09] a été implanté dans le code XFEM et la validation de l'implantation a été faite par comparaison avec les calculs réalisés avec Code_Aster. Cela a permis en suite d'étudier les champs internes et de modéliser la réponse effective d'un matériau élastoplastique à inclusions élastiques et à morphologie d'inclusions variée.

Le développement et l'implantation de la méthode d'Interface Immersée (IIM) et son utilisation dans la modélisation du comportement hydraulique d'un matériau hétérogène a été présenté par la suite. La même méthodologie de comparaison des résultats de la méthode numérique avec les prédictions analytiques a été utilisée pour valider l'implantation numérique et pour en suite démontrer l'avantage de l'utilisation d'une méthode numérique dans la modélisation du comportement hydraulique des géomatériaux. En particulier le rôle de la distribution des inclusions et de leurs morphologies a pu être mis en évidence.

Le travail présenté ici s'inscrit dans une démarche de développement des outils numériques nécessaires pour la modélisation thermo-hydro mécanique des géomatériaux. Dans ce contexte les deux outils développés et validés constituent les premiers éléments qui nécessitent sûrement un développement et une extension future. Dans les perspectives de la continuité de ce travail on pourrait énumérer :

- Développement d'une approche XFEM d'ordre supérieur, à l'instar des travaux récents de [CHE 10] et [DRE 10], semble nécessaire non seulement pour accélérer la convergence et la précision dans les calculs non-linéaires mais aussi pour une meilleure description des fonctions de niveaux. Cela permettrait de faire des calculs avec un maillage moins important et donc de traiter des problèmes à microstructure plus complexe
- Si jusqu'à présent l'interface entre différentes phases d'un géomatériau a été considérée

parfaites les outils numériques actuels permettent de lui conférer un comportement non linéaire qui pourrait alors être utilisée à modéliser l'endommagement progressif par décohésion des inclusions minérales de la matrice. Cette perspective semble d'autant plus séduisante que la méthode IIM de modélisation de comportement hydraulique des matériaux hétérogènes permet inclus déjà un comportement de l'interface. Le couplage hydro-mécanique au sein du matériau serait alors complet.

- Au niveau du comportement non-linéaire de la matrice, afin de mieux rendre compte du comportement réel des géomatériaux le comportement différé doit être pris en compte. Pour des matériaux tels que l'argilite de Meuse Haute-Marne ce comportement est une question ouverte et une modélisation adéquate hydro-mécanique de ce comportement reste un sujet de recherches intensives

- La méthode IIM utilisée pour la modélisation de l'écoulement hydrique semble une méthode puissante qui permettrait en principe de modéliser également l'écoulement multiphasique. Une perspective ouverte est alors celle de la modélisation des écoulements non-saturés. En fait dans ce cas il y'aura dans les pores partiellement saturée une interface entre les deux fluides (air-eau) dont le comportement pourra être prise en compte sans difficultés par l'outil actuel. Néanmoins la mise en ouvre pratique de la méthode pour ce cas demandera la résolution des problèmes de suivi d'interfaces (ménisques) et de l'instabilité hydrodynamique de leur formation et disparition qui sont des problèmes théoriques pour lesquels des solutions restent encore à être trouvée

- La perspective la plus immédiate et la plus importante serait sans doute le couplage entre les deux codes mécaniques et hydriques. Un travail prospective, non détaillé ici, montrent déjà des résultats encourageants qui doivent être validés et confirmés dans une future très proches. A l'instar des travaux de [SET 94, SET 98, SET 01] une approche de couplage partiel dite itérative, similaire à celle utilisée pour le couplage des codes éléments finis – volumes finis a été choisie et développé. Selon cette approche, à chaque pas de temps, on résout les problèmes de l'équilibre mécanique et d'écoulement hydrique séparément en deux codes séparés en injectant les résultats qu'on obtient d'un des codes dans l'autre. Dans notre cas, la résolution de ces équations dans le travail initial déjà effectué, est fait respectivement par le code XFEM (pour l'équation de l'équilibre mécanique) et le code IIM (pour l'écoulement hydrique) Un

certain nombre de problèmes liés à la convergence et à la stabilité de la méthode ont été déjà résolus, mais de nombreux problèmes persistent encore, notamment ceux du contrôle de pas de temps et d'espace et de l'ordre de chaînage des calculs mécaniques et hydriques.

- Une perspective plus lointaine serait la continuité d'une réflexion déjà menée à la fin de ce travail concernant le développement et la mise en place d'une méthode « XFEM fluide ». Un certain nombre d'éléments de cette future approche sont déjà dans la méthode actuelle IIM (notamment le comportement à travers l'interface), mais l'idée est d'aller vers une approche unifiée mécanique et hydrique en facilitant le couplage et surtout en unifiant la description des interfaces via l'utilisation des fonctions de niveaux.

Références:

- [ABO 08] A. Abou-Chakra Guéry, F. Cormery, J.F Shao, and D. Kondo. A micromechanical model of elastoplastic and damage behaviour of a cohesive geomaterial. *International Journal of Solids and structures*, 45 (2008) 1406-1429.
- [ADA 02] L. Adams and Z. Li. The immersed interface/multigrid methods for interface problems, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24 (2002) 463-479.
- [ALO 90] E.E. Alonso, A. Gens and A. Josa. A constitutive model for partially saturated soils, *Geotechnique*, 40 (1990) 405-430.
- [AUR 77] J.L. Auriault and J. Sanchez-Palencia. Étude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable. *Journal de Mécanique*, 16 (1977) 575-603.
- [AUR 91] F. Aurenhammer. Voronoï diagrams survey of a fundamental geometric data structure, *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 23 (1991) 345-405.
- [BAB 94] I. Babuška, G. Caloz, and J. E. Osborn. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31 (1994) 945–981.
- [BAR 07] S.S BARBOURA. Modélisation micromécanique du comportement de milieux poreux non linéaires : Applications aux argiles compactées. PhD these Université de Pierre et Marie Curie, 2007.
- [BEA 91] J. Bear and Y. Bachmat. Introduction to modeling of transport phenomena in porous media. In Bear J. (Ed.), *Theory and applications of transport in porous media*. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [BEC 05] E. Bechet, H. Minnebo, N. Moës. And B. Burgardt. Improved implementation and robustness study of the XFEM for stress analysis around cracks. *International Journal For Numerical Method in Engineering*, 64 (2005) 1033-1056.
- [BEC 08] E. Béchet, M. Scherzer and M. Kuna. Fracture of piezoelectric materials with the X-FEM, *European Journal of Computational Mechanics*, 17 (2008) 637-649.
- [BEL 94] T. Belytschko, Y.Y. Lu and L. Gu. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 (1994) 229–256.
- [BEL 99] T. Belytschko and T. Black. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45 (1999) 601-620.

Références:

- [BEL 08] N. Belayachi, N. Benseddiq and M. Nait-Abdelaziz. Behaviour of the heterogeneous glassy polymers: Computational modelling and experimental approach, *Composites Science and Technology*, 68 (2008) 367-375.
- [BIE 10] N.N. Bien. Modélisation micromécanique des roches poreuses. : Application aux calcaires oolithiques. PhD thesis, I.N.P.L - Nancy, 2010.
- [BIO 41] M.A. Biot. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, 12 (1941) 155-164.
- [BIO 56] M. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. *Journal of Acoustic Society of America*, 28 (1956) 168-191.
- [BIO 62] M. Biot. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of Applied Physics*, 33 (1962)1482-1498.
- [BIO 72] M. Biot. Theory of finite deformations of porous solids. *Indiana University Mathematical Journal*, 21 (1972) 597-620.
- [BIS 59] A.W. Bishop. The principle of effective stress. *Teknisk Ukeblad*, 106 (1959) 859-863.
- [BIS 63] A.W. Bishop. G. E. Blight, Some aspects of effective stress insaturated and partly saturated soils. *Geotechnique*,13 (1963)177-197
- [BOR 01] M. BORNERT. Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 et 2. 2001.
- [BOU 02] F. Bourgeois, N. Burlion, and J.F. Shao. Modelling of elastoplastic damage in concrete due to desiccation shrinkage, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26 (2002) 759-774.
- [BRI 10] S. Brisard, L. Dormieux. FFT-based methods for the mechanics of composites: A general variational framework, *Computational Materials Science*, 49 (2010) 663-671.
- [BUD 65] B. Budiansky. On the elastic moduli of some heterogeneous materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 (1965) 223-227
- [BUD 06] E. Budyn, L. Henry and T. Hoc. Multiple crack growth failure in cortical bone by the extended finite element method, *Proceeding of the Seventh World Congress on Computational Mechanics*, (2006) 16-22, Los Angeles (USA).
- [CAL 99] D. Calhoun. A Cartesian grid method for solving the streamfunction vorticity equations in irregular geometries, PhD. thesis, University of Washington, Seattle, WA, 1999.
- [CAL 00] D. Calhoun, R. J. LeVeque. Solving the advection-diffusion equation in irregular geometries, *Journal of Computational Physics*, 156 (2000) 1–38.
- [CAS 91] P. P. Castañeda. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39 (1991) 45-71.

Références:

- [CAS 95] P. P. Castañeda and J.R. Willis. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43 (1995) 1919-1951.
- [CHA 95] X. Chateau, L. Dormieux. Homogénéisation d'un milieu poreux non saturée : lemme de Hill et application, *C.R.Acad.Sci.Serie 2B*, 320 (1995) 627-634.
- [CHA 98] X. Chateau, L. Dormieux. Approche micromécanique du comportement d'un matériau poreux non saturée. *C.R.Acad.Sci.Serie 2B*, 326 (1998) 533-538.
- [CHA 02] X. Chateau, L. Dormieux. Micromechanics of saturated and unsaturated porous media, *International journal Numerical Methods Geomechanics*, 26 (2002) 831-844.
- [CHA 05] J. L. Chaboche, P. Kanoute, and A. Roos. On the capabilities of mean-field approaches for the description of plasticity in metal matrix composites. *International Journal of Plasticity*, 21 (2005) 1409–1434.
- [CHE 03] J. Chessa, H. Wang and T. Belytschko. On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57 (2003) 1015-1038.
- [CHE 03-2] J. Chessa and T. Belytschko. An extended finite element for two-phase fluids, *Journal of Applied Mechanics*, 70 (2003).
- [CHE 09] K.W. Cheng and T.P. Fries. Higher-order XFEM for curved strong and weak discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 82 (2009) 564-590.
- [CHI 98] L.Y. Chin, R. Raghavan and L.K. Thomas. Fully-Coupled Geomechanics and Fluid-Flow Analysis of Wells with Stress-Dependent Permeability. *SPE International Conference and Exhibition, Beijing, China, 2-6 Nov, (1998) 269-284.*
- [CHI 99] L.Y. Chin and L.K. Thomas. Fully Coupled Analysis of Improved Oil Recovery by Reservoir Compaction. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, Texas, 3-6 October, (1999) 393-401.*
- [CHI 00] A. S. Chiarelli. Etude expérimentale et modélisation du comportement mécanique de l'argilite de l'Est. PhD thesis, Université Lille 1, Lille, 2000.
- [CHI 03] A.S. Chiarelli, J.F. Shao, and N. Hoteit. Modeling of elastoplastic damage behavior of a claystone, *International Journal of Plasticity*, 19 (2003) 23-45.
- [CHO 03] D. L. Chopp and N. Sukumar. Fatigue Crack Propagation of Multiple Coplanar Cracks with the Coupled Extended Finite Element/Fast Marching Method, *International Journal of Engineering Science*, 41 (2003) 845–869
- [COU 91] O. Coussy. *Mécanique des milieux poreux*. Edition Technip, (1991) 427.

Références:

- [COU 95] O. Coussy. *Mechanics of Porous Continua*, Wiley Ltd., New York, (1995) 455.
- [COU 04] O. Coussy. *Poromechanics*, John Wiley & Sons, 2004, 315.
- [CUI 96] Y. J. Cui, P. Delage, D. Marcial, J.M. Terpereau, and G. Marchadier. Sur la susceptibilité à l'effondrement des loess du Nord de la France, *Proceedings of the 16th International Conference on Soil Mechanic and Geotechnical Engineering*, Osaka, Balkema, 1 (2005) 495–498.
- [DAR 56] H.P.G. Darcy. *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon, Exposition et Application des Principes à Suivre et des Formules à Employer dans les Questions de Distribution d'Eau*. Paris, France, Victor Dalmont Ed, 1856.
- [DAU 00] C. Daux, N. Moës, J. Dolbow, N. Sukumar and T. Belytschko. Arbitrary branched and intersectiong cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48 (2000) 1741-1760.
- [DEA 06] R.H. Dean, S. Gai, C.M. Stone, and S.E. Minkoff. A comparison of techniques for coupling porous flow and geomechanics. *SPE J*, 11 (2006) 132–140.
- [DHA 96] G. Dhatt, G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Deuxième édition. MAOINE S.A. EDITEUR, Paris, 1996.
- [DO 08] D. P. DO. *Application des approches d'homogénéisation a l'étude des propriétés thermo-hydro-mécaniques des roches : Application aux argilites*, PhD thesis, I.N.P.L - Nancy, 2008.
- [DOG 03] I. Doghri and A. Ouair. Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures: Study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithms, *International Journal of Solids and structures*, 40 (2003) 1681-1712.
- [DOR 98] X. Chatea, L. Dormieux. A micromechanical approach to the behaviour of a non-saturated porous medium. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Astronomy*, 326 (1998) 533-538.
- [DOR 02] L. Dormieux, A. Molinari, and D. Kondo. Micromechanical approach to the behavior of poroelastic materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 (2002) 2203-2231.
- [DOR 06] L. Dormieux, D. Kondo, and F. J. Ulm. *Microporomechanics*. John Wiley and Sons, 2006.
- [DRE 10] K. Dréau, N. Chevaugon and N. Moës. Studied XFEM enrichment to handle material interfaces with higher order finite element, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 (2010) 1922-1936.
- [DEA 03] R. H. Dean, X. Gai, C. M. Stone, and S. Minkoff. A comparison of techniques for

Références:

- coupling porous flow and geomechanics. In SPE Reservoir Simulation Symposium, pages 1–9, Houston, Texas, February 2003. SPE. University of Texas at Austin and Sandia National Laboratories.
- [DUA 00] C.A. Duarte, I. Babuška, and J.T. Oden. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems, *Computers & Structures*, 77 (2000) 215-232.
- [DVO 92] G. J. Dvorak and Y. Benveniste. On transformation strains and uniform fields in multiphaseelastic media. *Proc. R. Soc. Lond*, 37 (1992)291–310.
- [ELG 06] T. Elguedj, A. Gravouil, and A. Combescure. Appropriate extended functions for XFEMsimulation of plastic fracture mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 (2006) 501-515.
- [ENE 75] H. ENE and E. Sanchez-Palencia. Équations et phénomènes de surface pour l'écoulement dans un modèle de milieu poreux. *Journal de Mécanique* 14 (1975) 73-108.
- [ESC 02] S. Escoffier. Caractérisation expérimentale du comportement hydromécanique des argilites de Meuse/Haute-Marne. PhD thesis, I.N.P.L - Nancy, 2002.
- [ESH 57] J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 241 (1957) 376-396.
- [FER 77] D.G Ferdlund and N.R Morgenstern. Stress state variables for unsaturated soils. *Journal geotechnic Engineering DIV*, 103 (1977) 447-466.
- [FER 08] R. Fernandes, C. Chanant, and R. Chambon. A simplified second gradient model for dilatants materials: Theory and numerical implementation. *International Journal of Solide ans Structures*, 45 (2008) 5289-5307.
- [FER 09] R. Fernandes. Intégration du comportement mécanique élasto-plastique de Drucker-Prager et post-traitements. Manuel de référence de CODE_ASTER. R7.01.16. 2009.
- [FLE 97] M. Fleming, Y. Chu , B. Moran, and T. Belytschko. Enriched element free Galerkin methods for singular fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 (1997) 1483-1504.
- [FOR 00] S. Forest, F. Barbe and G. Cailletaud. Cosserat modeling of size effects in the mechanical behaviour of polycrystals and multi-phase materials, *International Journal of Solids and Structures*, 37 (2000) 7105-7126.
- [GEN 90] A. Gens, I. Carol, E.E. Alonso. A constitutive model for rock joints formulation and numerical implementation, *Computers and Geotechnics*, 9 (1990) 3-20.

Références:

- [GHO 95] S. Ghosh and S. Moorthy. Elastic-plastic analysis of arbitrary heterogeneous materials with the Voronoï cell finite element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 121 (1995) 373-409.
- [GHO 96] S. Ghosh, K. Lee, and S. Moorthy. Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenisation and voronoi cell finite element model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 132 (1996) 63-116.
- [GIL 02] J.A. Gili and E.E Alonso. Microstructural deformation mechanisms of unsaturated granular soils. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 26 (2002) 433–468.
- [GIR 07-1] A. Giraud, Q.V. Huynh, D. Hoxha, and D. Kondo. Application of results on Eshelby tensor to the determination of effective poroelastic properties of anisotropic rocks-like composites, *International Journal of Solids and Structures*, 44 (2007) 3756-3772.
- [GIR 07-2] A. Giraud, Q.V. Huynh, D. Hoxha, D. Kondo. Effective poroelastic properties of transversely isotropic rocks-like composites with arbitrarily oriented ellipsoidal inclusions, *Mechanics of Materials*, 39 (2007) 1006–1024.
- [GIR 08-1] A. Giraud, D. Hoxha, Q.V. Huynh, D.P. Do and V. Magnenet. Effective porothermoelastic properties of transversely isotropic rock-like composites, *International Journal of Engineering Science*, 46 (2008) 527-550.
- [GIR 08-2] A. Giraud, D. Hoxha, D.P. Do, V. Magnenet. Effect of pore shape on effective thermoporoelastic properties of isotropic rocks, *International Journal of Solids and Structures*, 45 (2008) 1–23.
- [GON 00] C. Gonzalez and J. Llorca. A self-consistent approach to the elasto-plastic behaviour of two-phase materials including damage. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 48 (2000) 675–692.
- [GRA 01] W.G. Gray and B.A. Schrefler. Thermodynamic approach to effective stress in partially saturated porous media. *European Journal of Mechanics, A/Solids* 20, (2001) 521–538.
- [GRA 09] W. G.Gray, B.A.Schrefler , F. Pesavento. The solid phase stress tensor in porous media mechanics and the Hill–Mandel condition. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57 (2009) 539–554.
- [GRO 05] F.A. Grondin. Modélisation multi-échelles du comportement THM des matériaux hétérogènes application aux matériaux cimentaire sous sollicitations sévères. PhD thesis, Université PARIS 6 - Paris, 2005.

Références:

- [GUE 90] J. M. Guedes, and N. Kikuchi. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 83(1990) 143-198.
- [GUT 98] M. Gutierrez and M. Lewis. The Role of Geomechanics in Reservoir Simulation. SPE/ISRM Eurock'98, Trondheim, Norway, 8-10 July (1998), 439-448.
- [HAS 62] Z. Hashin, and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials, *Journal of Applied Physics*, 33 (1962) 3125-3131.
- [HAS 63] Z. Hashin, and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11 (1963) 127-140.
- [HET 06] T. Hettich, and E.Ramm. Interface material failure modeled by the extended finite-element method and level sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 (2006) 4753–4767.
- [HIL 65] R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of Mechanics And Physics of Solids*, 13 (1965) 213–222.
- [HOM 00] F. Homand, D. Hoxha, T. Belem, M.N. Pons, and N.Hoteit. Geometric analysis of damaged microcracking in granites, *Mechanics of Materials*, 32 (2000) 361-376.
- [HOX 07] D. Hoxha, A. Giraud, F. Homand and C. Auvray. Saturated and unsaturated behaviour modelling of Meuse-Haute-Marne argillite, *International Journal of Plasticity*, 23 (2007) 733-766.
- [HUT 76] J.W. Hutchinson. Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 348 (1976)101–127.
- [JHA 07] B. Jha and R. Juanes. A locally conservative finite element framework for the simulation of coupled flow and reservoir geomechanics. *Acta Geotechnica*, 2 (2007)139–153.
- [JIA 04] M.J. Jiang, S. Leroueil, and J.M. Konrad. Insight into shear strength functions of unsaturated granulates by demi analyses. *Computers and Geotechnics*, 31(2004) 473–489.
- [JIA 08] Y. Jia, H.B. Bian, G. Duveau, K. Sub, and J.F. Shao. Hydromechanical modelling of shaft excavation in Meuse/Haute-Marne laboratory. *Physics and Chemistry of the Earth*, 33 (2008) 422–435.
- [JIA 11] T. Jiang, J.F Shao and W.Y. Xu. A micromechanical analysis of elastoplastic behavior of porous materials, *Mechanics Research Communications*, 38 (2011)437 – 442.

Références:

- [KAN 03] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet and V. Mounoury. Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach, *International Journal of Solids and Structures*, 40 (2003) 3647-3679.
- [KHA 98] N. Khalili, and M. H. Khabbaz. A unique relationship for χ for the determination of the shear strength of unsaturated soils. *Geotechnique*, 48 (1998), 1–7.
- [KHA 04] N. Khalili, F. Geiser, G.E. Blight. Effective stress in unsaturated soils: reviews with new evidence. *International Journal Geomechanic*, 4 (2004) 115-126.
- [KOU 98] N.C. Koutsabeloulis, and S.A. Hope. Coupled Stress/Fluid/Thermal Multi-Phase Reservoir Simulation Studies Incorporating Rock Mechanics. SPE/ISRM Eurock'98, Trondheim, Norway, 8-10 July (1998) 449-454.
- [KOU 04] V.G. Kouznetsova, M.G.D. Geers, W.A.M. Brekelmans. Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials: a nested finite element solution strategy Original. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 (2004) 5525-5550.
- [KRY 99] P. Krysl, and T. Belytschko. A library to compute the element free Galerkin shape functions. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190 (1999) 2181-2206.
- [LAB 05] P. Laborde, J. Pommier. Y. Renard and M. Salaun. High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64 (2005) 354-381.
- [LEG 05] A. Legay, H. W. Wang and T. Belytschko. Strong and weak arbitrary discontinuities in spectral finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64 (2005) 991-1008.
- [LEM 01] E. Lemarchand. Contribution de la micromécanique à l'étude des phénomènes de transport et de couplage poromécanique dans les milieux poreux: Application aux phénomènes de gonflement des géomatériaux., Thèse de Doctorat, ENPC, Marne la vallée, 2001.
- [LEW 82] R.W. Lewis and B.A. Schrefler. A finite element simulation of the subsidence of gas reservoirs undergoing a water drive. In: Gallagher, R.H., Norrie, D.H., Oden, J.T., Zienkiewicz, O.C. (Eds.), *Finite Elements in Fluids*, Wiley, Chichester, 4 (1982) 179–199.
- [LEW 93] R. W. Lewis, and Y. Sukirman. Finite-element modeling of 3-phase flow in deforming saturated oil-reservoirs. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 17 (1993) 577–598.

Références:

- [LEW 98] R.W. Lewis and B.A. Schrefler. *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*, Second Edition, Wiley, New York. 1998
- [LI 94-1] Z. Li. *The Immersed Interface Method - A Numerical Approach for Partial Differential Equations with Interfaces*, PhD. thesis, University of Washington, Seattle, WA, 1994.
- [LI 94-2] Z. Li and R. J. LeVeque. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31 (1994) 1019–1044.
- [LI 97-1] Z. Li and R. J. LeVeque. Immersed interface methods for Stokes flow with elastic boundaries or surface tension, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18 (1997) 709–735.
- [LI 97-2] Z. Li, and R. J. LeVeque. Immersed interface methods for moving interface problems, *Numerical Algorithms*, 14 (1997) 269–293.
- [LI 01] Z. Li and K. Ito. Maximum principle preserving schemes for interface problems with discontinuous coefficients, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 23 (2001) 339–361.
- [LI 03] X.S. Li. Effective stress in unsaturated soil: A microstructural analysis. *Géotechnique*, 53 (2003.) 273–277.
- [MEL 96] J. M. Melenk and I. Babuska. The partition of unity finite element method: Basic theory and application, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 10 (1996) 815–823.
- [MIC 99] J.C. Michel, H. Moulinec and P. Suquet. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 172 (1999) 109–143.
- [MIE 99-1] C. Miehe, J.Schotte, and J. Schröder. Computational micro-macro transitions and overall moduli in the analysis of polycrystals at large strains. *Computational Materials Science*, 16 (1999) 372–382.
- [MIE 99-2] C. Miehe, J. Schröder, and J.Schotte. Computational homogenization analysis in finite plasticity. Simulation of texture development in polycrystalline materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 171 (1999) 387–418.
- [MOE 99] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytshko. A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46 (1999) 131–150.
- [MOE 02] N. Moës and T. Belytschko. Extended finite element method for cohesive crack

Références:

- growth, *Engineering Fracture Mechanics*, 69 (2002) 813-833.
- [MOE 03] N. Moës, M. Cloirec, and P. Cartraud. A computational approach to handle complex microstructure geometries, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 (2003) 3163-3177.
- [MOU 98] H. Moulinec and P. Suquet. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157 (1998) 69-94.
- [MOR 73] T. Mori and K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metallurgica*, 21 (1973) 571-574.
- [MUR 94] Y. Murakami, and S. Nemat-Nasser. Interacting dissimilar semi-elliptical surface flaws under tension and bending. *Engineering Fracture Mechanics*, 16 (1994), 373-386.
- [NAG 03] N. NAGASHIMA, Y. OMOTO and S. TANI. Stress intensity factor analysis of interface cracks using X-FEM, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56 (2003) 1151-1173.
- [NEV 00] A. M. Neville. *Propriétés des bétons*, Eyrolles, Paris, France, 2000.
- [NIK 01] G.P. Nikishkov, J.H. Park and S.N. Atluri. SGBEM-FEM alternating method for analyzing 3-D non-planar cracks and their growth in structural components. *Computer Modeling in Engineering and Science*, 2 (2001) 401-422.
- [NIS 83] T. Nishioka and S.N. Atluri. Path independent integrals, energy release rates and general solutions of near-tip fields in mixed-mode dynamic fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 18 (1983) 1-22.
- [NIS 05] I. Nistor, O. Pantalé, and S. Caperaa. On the modeling of the dynamic crack propagation by extended finite element method: numerical implementation in dynela code. VIII International Conference on Computational Plasticity COMPLAS VIII, CIMNE, Barcelona, 2005.
- [OSH 88] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *Journal of computational physics*, 79 (1988) 12-49.
- [OSO 98] J.G. Osorio, H.Y. Chen, L. Teufel and S. Schaffer. A Two-Domain, Fully Coupled Fluid-Flow/Geomechanical Simulation Model for Reservoirs with Stress-Sensitive Mechanical and Fluid-Flow Properties. SPE/ISRM Eurock'98, Trondheim, Norway, 8-10 July (1998), 455-464.
- [POU 05] A. Pouya. Tenseur de perméabilité équivalente d'un domaine hétérogène fini. *Géoscience*, 337 (2005) 581-588.

Références:

- [REK 05] A. Rejik, M. Bornert, F. Auslender, and A. Zaoui. A methodology for an accurate evaluation of the linearization procedures in nonlinear mean field homogenization. *C. R. Mécanique*, 333 (2005) 789–795.
- [REK 07] A. Rejik, F. Auslender, M. Bornert, and A. Zaoui. Objective evaluation of linearization procedures in nonlinear homogenization : A methodology and some implications on the accuracy of micromechanical schemes. *International Journal of Solid and Structure*, 44 (2007) 3468–3496.
- [RIC 31] L.A. Richards. Capillary conduction of liquids through porous media, *Physics* 1, 318-333, 1931.
- [RIL 97] M.R. Riley, F.J. Muzzio and S. C. Reyes. Calculation of effective diffusivities and reactivities in immobilized cell systems using finite difference methods, *Computers and chemical Engineering*, 22 (1997) 525-534.
- [SAM 07] P. Samier and S. Gennaro. A practical iterative scheme for coupling geomechanics with reservoir simulation. *SPE Europec/EAGE (SPE 107077)*, London, 11-14 Jun. 2007.
- [SAN 80] E. Sanchez-Palencia. *Non homogeneous media and vibration theory*, Springer, Heidelberg (1980).
- [SCH 90] B.A Schrefler and R.E Gori. A composite beam model for the mechanical analysis of superconducting magnet pancakes, *Fusion Engineering and Design*, 13 (1990) 103-123.
- [SCH 04] B.A. Schrefler and F. Pesavento. Multiphase flow in deforming porous material, *Computers and Geotechnics*, 31 (2004) 237-250.
- [SET 94] A. Settari and F.M. Mourits. Coupling of geomechanics and Reservoir Simulation Models. *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, (1994) 2151-2158.
- [SET 96] J. A. Sethian. A Fast Marching Level Set Method for Monotonically Advancing Fronts, *The Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 93 (96) 1591–1595.
- [SET 98] A. Settari and F.M. Mourits. A Coupled Reservoir and Geomechanical Simulation System. *SPE Journal*, (1998) 219-226.
- [SET 99-1] J.A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods*, Cambridge University Press, 2nd edition, 1999.
- [SET 99-2] A. Settari and D.A. Walters. *Advances in Coupled Geomechanical and Reservoir Modeling With Applications to Reservoir Compaction*. *SPE Reservoir Simulation Symposium*, Houston, Texas, 14-17 February. (1999).
- [SET 00] J.A. Sethian. *Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in*

Références:

- computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science, Cambridge University Press, New York, 2000.
- [SET 01] A. Settari and D.A. Walters. Advances in coupled geomechanical and reservoir modeling with application to reservoir compaction. *Society of Petroleum Engineers Journal*, (2001) 334-342.
- [SHA 06] J.F. Shao, Y. Jia, D. Kondo, and A.S. Chiarelli. A coupled elastoplastic damage model for semi-brittle materials and extension to unsaturated conditions, *Mechanics of Materials*, 38 (2006) 218-232.
- [SMI 98] R. J. M. Smit, W. A. M. Brekelmans and H. E. H. Meijer. Prediction of the mechanical behaviour of non-linear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155 (1998) 181–192.
- [STO 00] T. Stone, B. Garfield and P. Papanastasiou. Fully Coupled Geomechanics in a Commercial Reservoir Simulator. *SPE European Petroleum Conference*, Paris, France, 24-25 (2000) 45-52.
- [STO 01] M. Stolarska, D. L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51 (2001) 943-960.
- [STR 00] T. Strouboulis, I. Babuška, and K. Copps. The generalized finite element method: An example of its implementation and illustration of its performance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47 (2000) 1401–1417.
- [SUK 01] N. Sukumar, D.L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko. Modeling holes and inclusions by levelsets in the extended finite-element method, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190 (2001) 6183-6200.
- [SUK 03] N. Sukumar, D. L. Chopp and B. Moran. Extended Finite Element Method and Fast Marching Method for Three-Dimensional Fatigue Crack Propagation, *Engineering Fracture Mechanics*, 70 (2003) 29–48.
- [SUQ 95] P. Suquet. Overall properties of nonlinear composites: a modified secant moduli theory and its link with Ponte Castaneda's nonlinear variational procedure. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 320 (1995) 563-571.
- [SUQ 97] P. Suquet. Effective behavior of nonlinear composites. In: *Continuum micromechanics*, P. Suquet ed., Springer Verlag Wien, (1997) 197-264.
- [SUV 02] A.P. Suvorov and G.J. Dvorak. Rate form of the Eshelby and Hill tensors, *International Journal of Solids and Structures*, 39 (2002) 5659-5678.

Références:

- [TAN 08] T. Tang, W. Yu. Variational asymptotic micromechanics modelling of heterogeneous piezoelectric material, *Mechanics of materials*, 40 (2008) 812-824.
- [TER 34] K. Terzaghi. Pressure due to capillarity in Drying Concrete Bodies. *Bauingenieur*, 15 (1934) 303-306.
- [TER 00] K. Terada, M. Hori, T. Kyoya and N. Kikuchi. Simulation of the multi-scale convergence in computational homogenisation approaches. *International Journal of Solids and Structures*, 37 (2000) 2285-2311.
- [THO 02] L. K. Thomas, L. Y. Chin, R. G. Pierson, and J. E. Sylte. Coupled geomechanics and reservoir simulation. *Society of Petroleum Engineers Journal*, (2002).
- [THO 03] L.K. Thomas, L.Y. Chin, R.G. Pierson and J.E. Sylte. Coupled geomechanics and reservoir simulation. *SPE J*, 8(2003) 350–358.
- [TOR 02] S. Torquato. *Random Heterogenous Materials. Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer-Verlag, 2002.
- [ULM 05] F.J. Ulm, A. Delafargue and G. Constantinides. Experimental microporomechanics, L. Dormieux, J.F. Ulm, Editors , *Applied Micromechanics of Porous Materials*, Springer (2005).
- [VAN 01] O. Van der Sluis, P. J. G. Schreurs, W. A. M. Brekelmans, and H. E. H. Meijer. Overall behaviour of heterogeneous elastoviscoplastic materials: effect of microstructural modelling. *Mechanics of Materials*, 32 (2000) 449–462.
- [VU 06] Vu H. Q. Estimations des propriétés poromécaniques effectives des argilites : apport des méthodes d’homogénéisation. Thèse de l’Institut national polytechnique de Lorraine, 2006.
- [WIL 81] J.R. Willis. Variational and Related Methods for the Overall Properties of Composites, *Advances in Applied Mechanics*, 21 (1981)1-78.
- [XIA 03] Z.H. Xia , Y.F Zhang, and F. Ellyin. A unified periodical boundary conditions for representative volume elements of composites and applications, *International Journal of Solids and Structures*, 40 (2003) 1907–1921.
- [XU 93] G. Xu and M. Ortiz. A variational boundary integral method for the analysis of 3-D cracks of arbitrary geometry modeled as continuous distributions of dislocation loops, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36 (1993) 3675–3701.
- [XU 94] G. Xu, A.F. Bower and M. Ortiz. An analysis of non-planar crack growth under mixed mode loading, *International Journal of Solids and Structures*, 31 (1994) 2167-2193.
- [XU 99] Y. Xu, B. Moran, and T. Belytschko. Self-similar crack expansion method for

Références:

- three-dimensional cracks under mixed mode loading conditions. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 66 (1999) 1.
- [XU 04] Y. XU. Thèse : Approche multi- échelle pour l'étude du comportement des systèmes polyphasiques application aux milieux poreux non saturés, PhD Thèse, ENPC paris 2004.
- [YAN 08] D. Yang, Thèse de Doctorat Caractérisation par la mesure de perméabilité au gaz de l'endommagement mécanique et hydrique dans l'EDZ des argilités du Callovo-Oxfordien, PhD Thèse, École des mines de Paris. 2008.
- [YUA 08] G. Yuan Z. Sheng. Monotone finite volume schemes for diffusion equations on polygonal meshes, *Journal of computational physics* , 227 (2008) 6288–6312.
- [YUR 04] I. Yurtdas, N. Burlion, and F. Skoczylas. Triaxial mechanical behaviour of mortar: Effects of drying, *Cement and Concrete Research*, 34 (2004) 1131-1143.
- [YVE 07] B. Yven, S. Sammartino, Y. Geraud, H. Homand, and F. Villieras. Mineralogy, texture and porosity of Callovo-Oxfordian argillites of the Meuse/Haute-Marne region (Eastern Paris Basin), *Mémoires de la Société géologique de France*, 178 (2007) 73-90.
- [YVO 08] J. Yvonnet, H.L. Quang and Q.C. He. An XFEM/level set approach to modeling surface/interface effects and to computing the size-dependent effective properties of nanocomposites, *Computational Mechanics*, 42 (2008) 119-131.
- [ZHA 96] C. Zhang. Immersed Interface Method for Hyperbolic Systems of Partial Differential Equations with Discontinuous Coefficients, PhD. thesis, University of Washington, Seattle, WA,1996.
- [ZHA 97] C. Zhang, R. J. LeVeque. The immersed interface method for acoustic wave equations with discontinuous coefficients, *Wave Motion*, 25 (1997) 237–263.
- [ZHA 04] C. Zhang and T. Rothfuchs. Experimental study of the hydro-mechanical behaviour of the callovo-oxfordian argilite, *Applied Clay Science*, 26 (2004) 325-336.
- [ZHE 01] Q.S. Zheng and D.X. Du. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49 (2001) 2765–2788.
- [ZHU 10] Q.Z Zhu, J.F. Shao and M. Mainguy. A micromechanics-based elastoplastic damage model for granular materials at low confining pressure, *International Journal of Plasticity*, 26 (2010) 586-602.
- [ZI 03] G. Zi , and T. Belytschko. New crack-tip elements for XFEM and applications to

Références:

cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57 (2003) 2221–22.

Annexe A: Schéma Mori-Tanaka

Une brève description du schéma Mori-Tanaka utilisé en ce document pour des évaluations analytiques est présentée ici après les travaux de Mori-Tanaka[8].

Le principe de ce schéma est de considérer l'inhomogénéité (phase $i=2\dots N$ immergée dans la matrice solide (phase 1), soumise à une déformation macroscopique (\mathbf{E}_0) à l'infinie. La solution du problème d'inhomogénéité nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_1 &= \mathbf{E}_0 \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i &= [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)]^{-1} \cdot \mathbf{E}_0 \end{aligned} \quad [\text{A.1}]$$

Avec la valeur moyenne $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle &= (1 - \sum_{i=2}^N f_i) \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_1 + \sum_{i=2}^N f_i \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i \\ &= (1 - \sum_{i=2}^N f_i) \mathbf{E}_0 + \sum_{i=2}^N f_i [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)]^{-1} \cdot \mathbf{E}_0 \end{aligned} \quad [\text{A.2}]$$

où \mathbb{P}_i est le tenseur Hill \mathbb{C}_1 , \mathbb{C}_i sont les tenseurs des module élasticité de la matrice et des inclusions respectivement, \mathbb{I} est le tenseur l'unité de quatre ordre et f_i indique le fraction volumique de la phase i . l'inversion de (A.2) conduit à la relation suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbb{A}_1^{\text{MT}} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbb{A}_1^{\text{MT}} &= \left[(1 - \sum_{i=2}^N f_i) \mathbb{I} + \sum_{i=2}^N f_i [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)]^{-1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad [\text{A.3}]$$

où \mathbb{A}_1^{MT} le tenseur de localisation de la phase 1, et le moyenne du tenseur de localisation de la phase i \mathbb{A}_i^{MT} peut s'écrire:

$$\mathbb{A}_i^{\text{MT}} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1)]^{-1} : \mathbb{A}_1^{\text{MT}} \quad [\text{A.4}]$$

Dans le cas du matériau diphasique, reportant Eq. (A.4) dans la relation:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle : \mathbf{E} = \mathbb{C}_{\text{MT}}^{\text{hom}} : \mathbf{E} \quad [\text{A.5}]$$

On obtient l'estimation du tenseur des modules d'élasticité homogénéisés:

$$\mathbb{C}_{\text{MT}}^{\text{hom}} = \mathbb{C}_2 - (1 - f_2)(\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1) : ((1 - f_2)\mathbb{I} + f_2[\mathbb{I} + \mathbb{P}_2 : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)]^{-1})^{-1} \quad [\text{A.6}]$$

Le schéma Mori-Tanaka [MOR 73] pour l'estimation des vecteurs de la perméabilité

homogène considère comme en élasticité un volume constitue d'une inclusion noyée dans un milieu homogène de coefficient de perméabilité \mathbf{K}^{MT} recherchée. L'estimation des vecteurs de la perméabilité homogène peut être donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{K}^{MT} = \mathbf{K}_1 + \sum_{i=2}^N f_i (\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_1) \cdot \mathbf{A}_i^{MT} \quad [\text{A.7}]$$

où \mathbf{K}_i et \mathbf{K}_1 désignent coefficients de perméabilité des inclusions et de la matrice, f_i est la fraction volumique d'inclusion, et le concentration tenseur :

$$\mathbf{A}_i^{MT} = \langle [\mathbf{I} + \mathbf{P}_i \cdot (\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_1)]^{-1} \rangle \cdot \mathbf{A}_{\text{int}}^{MT} \quad [\text{A.8}]$$

et $\mathbf{A}_{\text{int}}^{MT}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{A}_{\text{int}}^{MT} = \left[\left(1 - \sum_{i=2}^N f_i \right) \mathbf{I} + \sum_{i=2}^N f_i [\mathbf{I} + \mathbf{P}_i \cdot (\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_1)]^{-1} \right]^{-1} \quad [\text{A.9}]$$

Annexe B: Components du tenseur d'Eshelby pour l'inclusion cylindrique and sphérique

La méthode de Mori-Tanaka employée dans la 2D et 3D se sert des inclusions cylindriques et sphériques du tenseur d'Eshelby par le tenseur de Hill. Comme dans la référence [SUV 02, TOR 02], les composants du tenseur d'Eshelby pour la déformation plane et l'inclusion cylindrique ($a_3/a_1 \rightarrow \infty, a_3/a_2 \rightarrow \infty$, a_3 est l'axe selon la direction de l'axe du cylindre) peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbb{S}_{1111} = \frac{\alpha(3 - 2\nu + 2\alpha(1 - \nu))}{2(1 + \alpha)^2(1 - \nu)} \quad [\text{B.1}]$$

$$\mathbb{S}_{2222} = \frac{\alpha(3 - 2\nu) + 2(1 - \nu)}{2(1 + \alpha)^2(1 - \nu)} \quad [\text{B.2}]$$

$$\mathbb{S}_{1122} = \frac{\alpha(-(1 - 2\nu) + 2\alpha\nu)}{2(1 + \alpha)^2(1 - \nu)} \quad [\text{B.3}]$$

$$\mathbb{S}_{2211} = \frac{2\nu - \alpha(1 - 2\nu)}{2(1 + \alpha)^2(1 - \nu)} \quad [\text{B.4}]$$

$$\mathbb{S}_{1212} = \frac{1 - \nu + \alpha(1 - 2\nu) + \alpha^2(1 - \nu)}{2(1 + \alpha)^2(1 - \nu)} \quad [\text{B.5}]$$

où ν est le coefficient de Poisson de la matrice, et $\alpha = \alpha_2 / \alpha_1$.

Pour le cas de l'inclusion sphérique dans un milieu isotrope, les composants du tenseur de l'Eshelby sont donnés ci-dessous [34]:

$$\mathbb{S}_{1111} = \mathbb{S}_{2222} = \mathbb{S}_{3333} = \frac{7 - 5\nu}{15(1 - \nu)} \quad [\text{B.6}]$$

$$\mathbb{S}_{1122} = \mathbb{S}_{2233} = \mathbb{S}_{3311} = \mathbb{S}_{1133} = \mathbb{S}_{2211} = \mathbb{S}_{3322} = \frac{5\nu - 1}{15(1 - \nu)} \quad [\text{B.7}]$$

$$\mathbb{S}_{1212} = \mathbb{S}_{2323} = \mathbb{S}_{3131} = \frac{4 - 5\nu}{15(1 - \nu)} \quad [\text{B.8}]$$

où ν est le coefficient de Poisson de la matrice.

Senjun WU

Modélisation du comportement des géomatériaux: apport des méthodes numérique de changement d'échelle.

Résumé :

Les travaux de modélisations présentes dans cette thèse concernent l'étude du comportement hydro-poro-mécanique des géomatériaux par l'approche numérique de changement d'échelle. Il s'agit d'exploiter un modèle géomatériaux conceptuel, du code de calcul par la méthode élément finis étendu (XFEM) ou IIM, conjointement avec des techniques d'homogénéisation, pour l'obtention des lois de comportement macroscopique tirées des relations de passage Micro-Macro. Dans ce modèle conceptuel, le volume élémentaire représentatif des milieux hétérogène est composé d'une matrice argileuse contenant des inclusions de minéraux de quartz et de calcite ou des pores. D'abord, cette procédure avec XFEM a été effectuée pour la détermination des propriétés effectives isotropes. Ensuite, Une étude sur l'influence de la distribution, la morphologie, et l'orientation des inclusions sur le comportement équivalent dans le domaine de l'élasticité linéaire a été réalisée par traverser nombreuse études numériques. Dans un troisième temps, nous avons modélisée le comportement mécanique non linéaire des géomatériaux en utilisant XFEM et la méthode Newton-Raphson modifiée. Enfin, la modélisation du comportement hydraulique est réalisée par la méthode IIM, elle a été validée par la comparaison avec l'approche analytique.

Mots-clés : géomatériaux, comportement hydro-poro-mécanique linéaire, élasto-plastique, homogénéisation, XFEM, IIM

Modeling of the behavior of the geomaterials: contribution of the numerical method of up-scaling.

Summary :

The work of modeling present in this thesis relates to the study of the hydro-poro-mechanics behavior of geomaterials with the numerical approach of up-scaling. This work is based on le the conceptual geomaterials model, of finite element extended (XFEM) code develop in Matlab or IIM, coupling with the homogenization method to obtain the laws of macroscopic behavior drawn from the relations of Micro-Macro passage. In this model, the elementary volume representative of the mediums heterogeneous is composed of an argillaceous matrix containing of calcite and quartz mineral inclusions or of the pores. Firstly, this procedure with XFEM was carried out for the determination of the effective properties linear of the geomaterial. Then, a study on the influence of the distribution, morphology, and the orientation of inclusions on the equivalent behavior in the field of linear elasticity was carried out by crossing many numerical studies. In the third time, we modeled the mechanical behavior non linear of the geomaterial by using XFEM and the modified method Newton-Raphson. Lastly, the modeling of the hydraulic behavior is carried out by IIM, it was validated by the comparison with the analytical approach.

Key-words: geomaterial, hydro-poro-mechanics behavior, elastoplastic, homogenization, XFEM, IIM

**L'Institut Pluridisciplinaire de Recherche en Ingénierie des Systèmes,
Mécanique et Énergétique (PRISME)**