



HAL
open science

VERS UNE SIMULATION SANS MAILLAGE DES PHÉNOMÈNES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Christophe Hérault

► **To cite this version:**

Christophe Hérault. VERS UNE SIMULATION SANS MAILLAGE DES PHÉNOMÈNES ÉLECTROMAGNÉTIQUES. Energie électrique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2000. Français. NNT: . tel-00689431

HAL Id: tel-00689431

<https://theses.hal.science/tel-00689431>

Submitted on 19 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Remerciement

Je tiens à remercier tous les membres de mon jury de thèse pour leur présence et leurs questions pertinentes.

Il est évident que je remercie très chaleureusement mon directeur de thèse Monsieur Yves Maréchal qui grâce à ses conseils et sa grande expérience m'a permis de mener mes travaux à leurs termes.

Je remercie d'autre part le directeur du laboratoire ainsi que Monsieur Jean Louis Coulomb qui a joué un rôle important dans le déroulement de mon DEA et ma thèse.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont accompagnées durant ces trois années passées au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble en n'oubliant pas tous les thésards qui m'ont fait part de leur expérience et les ingénieurs informaticiens qui par leur présence et leur disponibilité m'ont permis de poursuivre mes travaux en toute sérénité.

La liste est longue des personnes qui ont beaucoup compté pendant ma thèse je vais essayer de la rendre exhaustive : Monsieur Patrick Eustache que dire de plus à part merci..., Monsieur Patrice Labie merci pour ton humour singlant, Madame Etiennette Callegher : merci pour ta gentillesse et ta disponibilité, Monsieur Patrick Guillot merci pour ton courage et ta bonne humeur permanente.

Enfin je tiens à remercier de nombreux thésards qui ont rendu ces trois ans particulièrement joyeux : Singva, Kérim, Gérard, Vincent, Ali, Chulasa, Cristian, Afef, Emmanuel, Sami et bien d'autres encore...

Merci à tous,

A ma famille



Table des matières

Remerciement	3
Introduction	7
I Les fondements mathématiques	9
1 L'approximation sans maillage	11
1.1 Apports et limites de la méthode des éléments finis	11
1.1.1 Le maillage	11
1.1.2 Continuité de la solution	12
1.1.3 Autres handicaps	12
1.2 Objectifs d'une nouvelle méthode de simulation	13
1.2.1 Absence de Maillage	13
1.2.2 Continuité de la solution	14
1.2.3 L'adaptativité	14
1.2.4 Autres besoins	14
1.2.5 Bilan	14
1.3 État de l'art des méthodes sans maillage	15
1.3.1 Les origines	15
1.3.2 Une nouvelle famille de méthodes	15
1.3.3 Le choix de la méthode	15
1.4 Cadre de l'étude et vocabulaire	16
1.5 L'aspect local de l'approximation <i>HP-Clouds</i>	18
1.5.1 La zone d'influence	19
1.6 Principe fondamental de la méthode <i>HP-Clouds</i>	22
1.6.1 Les fonctions de forme	23
1.6.2 Fonctions de forme interpolantes ou non ?	25
1.6.3 L'ordre de l'approximation	25
1.6.4 L'ajout hiérarchique	26
1.7 L'approximation Moving Least Square (<i>M.L.S</i>)	27
1.8 Besoins et paramètres de l'approximation <i>HP-Clouds</i>	31
1.8.1 L'adaptativité	31
1.8.2 Le premier nuage de noeuds	31
1.8.3 Le recouvrement du domaine d'étude	31
1.9 Conclusion	32

2	La résolution	33
2.1	Méthode de résolution par l'exemple en électromagnétisme . . .	33
2.1.1	Les équations de Maxwell	33
2.1.2	Les différentes formulations en électromagnétisme	34
2.1.3	Formulation en potentiel scalaire total magnétique Φ [3]	34
2.1.4	La résolution	36
2.1.5	La méthode de Ritz-Galerkin	36
2.2	Les conditions aux limites	37
2.2.1	Fonction de forme interpolante	37
2.2.2	Les multiplicateurs de Lagrange [44]	39
2.2.3	La méthode de substitution généralisée	40
2.3	Les conditions aux interfaces	41
2.3.1	Troncature des boules	42
2.3.2	Multiplicateurs de Lagrange [33][34]	43
2.3.3	Ajout d'une fonction saut	44
2.4	Couplage éléments finis et méthode <i>HP-Clouds</i>	46
2.5	Conclusion sur la méthode de Ritz-Galerkin	48
2.6	La méthode de collocation par point	48
2.7	La méthode des moindres carrés	49
2.8	Sensibilité à la modification du rayon	51
2.9	Étude des propriétés de convergence	53
2.9.1	Convergence en h dans le cas unidimensionnel	54
2.9.2	Convergence en p dans le cas unidimensionnel	54
2.10	Conclusion	56
II	La génération et l'adaptation du nuage de noeuds	57
3	La génération du nuage de noeuds	59
3.1	Les différentes étapes	59
3.2	La carte de taille	60
3.2.1	Définition	60
3.2.2	Calcul de la fonction ∇	61
3.3	Insertion des noeuds et des boules	62
4	Réorganisation du nuage de noeuds	67
4.1	Introduction	67
4.2	Le déplacement des boules	68
4.2.1	Le modèle électrostatique	68
4.2.2	Le modèle du gaz parfait	70
4.3	Caractéristiques des deux modèles	71
4.4	Adaptativité de la densité de boules	71
4.5	Applications	72
4.5.1	Mouvement des boules pour la génération des noeuds .	72
4.5.2	Mouvement des boules après un maillage	73
4.5.3	Mouvement des boules pour des pièces en mouvement .	75
4.6	Critère de qualité	77

III	Méthodologies d'implémentation	79
5	Une nouvelle structure de données	81
5.1	La base de la structure	81
5.2	La connectivité	82
5.3	L'intersection de deux boules	83
5.4	Le recouvrement du domaine	84
5.5	Recherche d'une boule	85
5.6	Intégration sur un interboule	86
5.6.1	Méthode de Gauss	87
5.6.2	La méthode des rectangles	92
5.6.3	Comparaison des méthodes d'intégration	92
5.7	Conclusion	95
IV	Les applications	97
6	Les premières applications	99
6.1	Un contacteur simple	99
6.1.1	Principe	99
6.1.2	La structure	100
6.1.3	La résolution	100
6.1.4	Les résultats	102
6.1.5	Bilan	103
6.2	La pompe à induction	103
6.2.1	Principe de la pompe à induction	103
6.2.2	Création des boules	104
6.2.3	La résolution	105
6.2.4	Les résultats	105
6.2.5	Bilan	105
6.3	Contacteur multistatique	106
6.3.1	Principe du contacteur	106
6.3.2	La structure	107
6.3.3	La résolution	107
6.3.4	Les résultats	107
6.3.5	Bilan sur le problème du contacteur multistatique . . .	107
6.4	Conclusion	108
7	Approximation de fonctions objectifs par la méthode <i>HP-Clouds</i>	113
7.1	La méthode d'approximation	113
7.2	L'apport de la méthode <i>HP-Clouds</i>	114
7.3	Position du problème	114
7.4	Le calcul de la fonction d'approximation	115
7.5	Calcul des valeurs nodales	116
7.6	La création du nuage de points d'approximation	116
7.7	Adaptativité	117
7.8	Application : TEAM Workshop 25	117

7.8.1	Principe de base	117
7.8.2	Définition du problème	118
7.8.3	La fonction objectif	119
7.8.4	Paramètres et contraintes	119
7.8.5	Approximation de la fonction objectif	120
7.8.6	L'optimisation par algorithme génétique	121
7.9	Conclusion	122
	Conclusion générale	123

Introduction

Aujourd'hui, les méthodes de simulation numérique sont largement utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles régissant la physique des milieux continus, telles que les équations de Maxwell dans le cas de l'électromagnétisme. De plus en plus, elles permettent la résolution de problèmes riches et complexes.

Pour une grande part de la communauté scientifique, aussi bien dans le domaine industriel que de la recherche, la méthode des éléments finis s'est imposée comme la méthode de simulation numérique la plus fiable et la plus robuste. De plus, l'évolution actuelle des ordinateurs que ce soit en termes de rapidité ou d'espace mémoire donne à la méthode des éléments finis une souplesse et une capacité à prendre en compte des phénomènes non linéaires ou transitoires qu'il y a quelques temps, étaient hors d'atteinte en raison des temps de simulation qu'ils entraînaient. Pour l'électromagnétisme notamment, la résolution de problèmes tridimensionnels est monnaie courante.

Évidemment, la méthode des éléments finis garde quand même quelques inconvénients. D'une part, elle est basée sur un maillage, qui constitue encore une difficulté même pour l'utilisateur averti. D'autre part, les éléments finis fournissent une solution approchée dont la régularité est somme toute relativement faible, et qui ne représente pas nécessairement fidèlement les phénomènes locaux ou raides tels que les effets de pointes ou de peau.

Par la parution en 1991 d'un article de Nayroles, Touzot et Villon : *La méthode des éléments diffus* [13], une nouvelle famille de méthodes de simulation numérique ne faisant pas intervenir de maillage a vu le jour. À partir de cette date, de nombreux auteurs se sont intéressés aux simulations numériques sans maillage comme en témoigne la parution de nombreux articles et la création de nombreuses méthodes dites sans maillage.

La relative jeunesse de ces méthodes ne leur procurent pas encore des performances comparables à celles atteintes par la méthode des éléments finis qui est en pleine maturité. En effet, dans la grande majorité des cas, elles ne sont encore qu'au stade de développement, et ne peuvent pas prétendre pour le moment à une utilisation intensive dans le monde industriel.

Dans cette thèse nous allons nous attacher à la méthode sans maillage appelée *HP-Clouds*. Modestement, le but de ce travail n'est pas de remplacer la méthode des éléments finis mais de réussir à intégrer tous les concepts nécessaires à une simulation numérique fiable et robuste. Le deuxième objectif de cette thèse est de proposer des démarches permettant la résolution de problèmes réels en

électromagnétisme utilisant la méthode *HP-Clouds*. Bien entendu, la méthode des éléments finis sera dans nos travaux considérée comme une référence et sera l'objet de comparaisons continues.

Dans cet esprit, dans une première partie, nous allons mettre en place l'ensemble des concepts théoriques pour la méthode *HP-Clouds* en s'attachant plus particulièrement au calcul des fonctions de forme sans maillage. Nous décrirons aussi la procédure de résolution des équations de Maxwell pour l'électromagnétisme à l'aide de cette méthode.

Dans une seconde partie nous expliquons les techniques permettant la génération d'un nuage de noeuds, base de la méthode *HP-Clouds*, au même titre que pour la méthode des éléments finis.

Troisièmement, nous allons créer une nouvelle structure algorithmique pour la méthode *HP-Clouds* en vue de son insertion dans un logiciel de simulation.

Nous finirons par une série de validations représentatives des possibilités que procurent les méthodes sans maillage.

Pour information, l'implantation de la méthode *HP-Clouds* s'est faite dans le logiciel Flux3d, logiciel de simulation numérique pour les phénomènes électromagnétiques tridimensionnels utilisant initialement la méthode des éléments finis.

Première partie

Les fondements
mathématiques

Chapitre 1

L'approximation sans maillage

1.1 Apports et limites de la méthode des éléments finis

La physique des milieux continus a très souvent recours à la méthode des éléments finis (*M.E.F*) dans l'optique de fournir une solution approchée pour un problème donné. Le monde de l'électromagnétisme a adopté, dans une large mesure, cette méthode qui fournit des résultats robustes et fiables. L'évolution technique des ordinateurs autorise désormais la résolution de problèmes complexes par éléments finis, notamment la résolution de problèmes tridimensionnels [4], [9] et la prise en compte de modèles de matériaux aux propriétés non linéaires anisotropes voire hystérétiques [2].

Cependant, même si la *M.E.F* génère une approximation fiable, elle présente certains handicaps qui restreignent son application.

1.1.1 Le maillage

En premier lieu, le maillage est délicat à réaliser car l'élaboration d'un maillage correct est conditionnée par des critères contraignants : la taille des éléments joue sur la qualité de la solution, des éléments "petits" produisant une approximation plus juste. Par ailleurs, la forme de ces éléments modifie le conditionnement matriciel, des éléments "déformés" dégradant le conditionnement [1] [7]. Ainsi, le maillage idéal en simplexes serait composé d'éléments équilatéraux assez petits. Cette difficulté est illustrée par la figure 1.1 où certains éléments sont dits de mauvaise qualité car s'écartant fortement des critères précédents.

Dans le cas tridimensionnel, pour des raisons évidentes de coût, la taille des mailles se doit d'être adaptée localement aux besoins de la solution. Il faut alors faire appel à des méthodes itératives affinant le maillage aux emplacements le nécessitant.

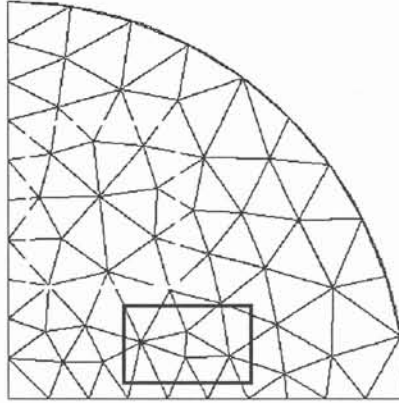


FIGURE 1.1: Maillage non isotrope

1.1.2 Continuité de la solution

En second lieu, la *M.E.F* génère une approximation de régularité limitée : à titre d'exemple, pour la formulation la plus couramment utilisée dans le cas bidimensionnel en électromagnétisme, à savoir le potentiel vecteur magnétique discrétisé en éléments finis nodaux, la composante normale de la dérivée du potentiel est discontinue. De nombreux travaux ont mis en évidence le caractère préjudiciable de cette discontinuité [12] sur la solution. Dans le cas de l'électromagnétisme, cette discontinuité peut être assimilée à l'ajout de petites sources fictives de courant à l'interface entre deux éléments. Prenons l'exemple de la figure 1.2 qui correspond à la résolution de $\Delta T = 2$ sur un carré unitaire avec des éléments finis du premier ordre pour un pavage régulier comportant 6 noeuds par direction (la solution exacte est $T(x) = x^2$). La discontinuité de la dérivée normale est bien mise en évidence par des paliers correspondant à chaque passage d'élément.

Bien sûr, nous savons tous que les éléments finis nodaux du premier ordre sont la plupart du temps insuffisants, et c'est pourquoi nous utilisons dès que possible des éléments du second ordre ou même au delà. Mais le problème de la discontinuité de la dérivée normale si il est atténué, n'en reste pas moins présent. Cependant, cette propriété est exploitée en électromagnétisme en particulier pour satisfaire les discontinuités physiques (B_T , induction tangente ou $\vec{H} \cdot \vec{n}$, $\vec{E} \cdot \vec{n}$...) aux interfaces entre matériaux. Dans ce sens, la *M.E.F* est capable de générer une approximation prenant facilement en compte ce type de discontinuités.

1.1.3 Autres handicaps

Enfin, à ce jour, avec la *M.E.F*, la prise en compte de phénomènes localisés (effets de peau dus à la présence de courants induits, effets de pointe) ou fortement anisotropes (entrefers ou tôles minces) constitue toujours une difficulté. En effet, la méthode des éléments finis a du mal à prendre en compte ces

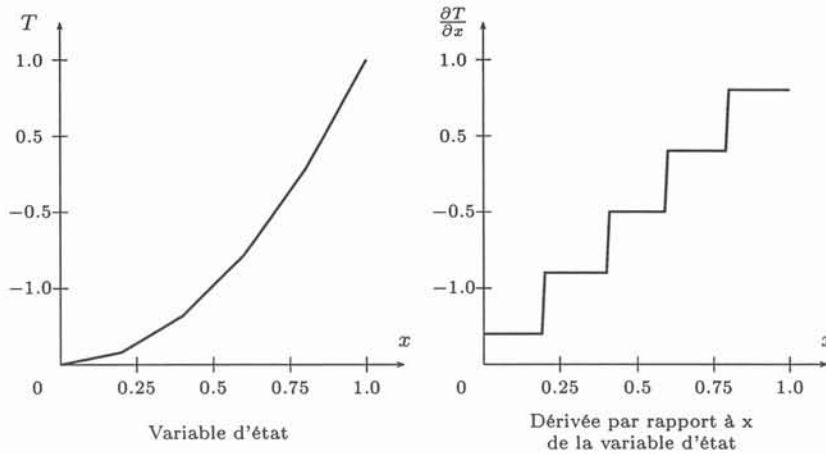


FIGURE 1.2: Discontinuité intrinsèque de la méthode des éléments finis aux interfaces entre éléments

phénomènes locaux ou raides, qui sont issus de la complexité de la physique résolue. En ce qui concerne l'effet de peau par exemple, pour palier le faible ordre de l'approximation éléments finis, l'augmentation du nombre d'inconnues et donc du nombre d'éléments est indispensable. Bien que des solutions variées aient été envisagées comme l'insertion d'éléments minces [8] [6] par exemple ou l'introduction de fonctions de forme dédiées contenant un terme exponentiel, ce genre de problèmes inhérents à la méthode des éléments finis reste à ce jour encore un handicap important.

1.2 Objectifs d'une nouvelle méthode de simulation

Les remarques de la section précédente, permettent de proposer une sorte de cahier des charges qu'une nouvelle méthode de simulation numérique devrait satisfaire.

1.2.1 Absence de Maillage

Le maillage posant de grandes difficultés, une nouvelle méthode de simulation numérique pourrait s'affranchir du maillage. En effet, outre les critères pour obtenir un bon maillage, la *M.E.F* nécessite dans de nombreux cas une approximation géométrique. Les problèmes résolus de nos jours possèdent souvent des irrégularités géométriques comme par exemple un rapport de dimension important ou bien des détails trop petits. Le maillage de la géométrie réelle n'est parfois pas réalisable (voire inutile), mais en tout état de cause, une adaptation de la géométrie aux contraintes des technologies de maillage est nécessaire.

1.2.2 Continuité de la solution

Il serait appréciable qu'une nouvelle méthode puisse fournir une approximation plus régulière que celle issue de la méthode des éléments finis. Un paramétrage aisé de l'ordre de l'approximation serait sans aucun doute un avantage indéniable. Cependant une nouvelle méthode d'approximation devra aussi autoriser des discontinuités de tout ordre afin de prendre en compte les discontinuités physiques présentes en électromagnétisme.

1.2.3 L'adaptativité

Une nouvelle méthode de simulation numérique devra facilement prendre en compte les besoins en matière de raffinement de la solution. En effet, la procédure de maillage auto-adaptatif, telle qu'elle est pratiquée dans le domaine des éléments finis, est certes efficace mais reste à ce jour relativement lourde à développer. Le fait de s'affranchir de la notion de maillage facilitera naturellement l'adaptativité.

1.2.4 Autres besoins

Toutes ces remarques permettent de définir les propriétés qu'une nouvelle méthode de simulation devrait avoir. Mais il faut aussi rappeler que la *M.E.F* possède des qualités numériques qui devront obligatoirement se retrouver dans une nouvelle méthode. Notamment, l'approximation d'un phénomène physique par la méthode des éléments finis est obtenue en résolvant un système matriciel creux généralement symétrique et bien conditionné. Cet aspect, qui permet de baisser considérablement le coût calcul, est issu du caractère local de l'approximation et de la quasi orthogonalité des fonctions de forme. C'est pour cette raison qu'il est indispensable qu'une nouvelle méthode de simulation génère une approximation locale.

De plus, la facilité de mise en oeuvre de la *M.E.F* est un avantage incontournable. Dans cette optique, pour suivre des contraintes commerciales et industrielles, une nouvelle méthode de simulation doit être si possible simple de mise en oeuvre et de développement et doit être facilement intégrable dans les logiciels de simulations actuellement utilisés dans l'industrie.

1.2.5 Bilan

En résumé, les besoins liés à une nouvelle méthode de simulation numérique en électromagnétisme peuvent être résumés par les caractéristiques énoncées ci-dessous.

- Absence de maillage,
- augmentation de la continuité de la solution : dérivée première voire seconde continue,
- approximation locale et orthogonalité des fonctions de forme,
- adaptativité facile,
- capacité à prendre en compte les discontinuités physiques aux interfaces entre matériaux,

– facilité d'implantation et efficacité du calcul.

En ce qui concerne la nouvelle méthode de simulation numérique, la qualité essentielle semble l'absence de maillage. Dans la littérature de nombreuses expériences ont déjà été tentées dans ce sens depuis quelques années. C'est pour cette raison que la section suivante parcourt les différentes méthodes dites sans maillage.

1.3 État de l'art des méthodes sans maillage

1.3.1 Les origines

Ces dernières années ont vu naître de nombreuses contributions théoriques concernant les méthodes de simulation numérique des milieux continus ne nécessitant pas de maillage. Bien que des essais furent tentés au début des années 80, il semble quand même raisonnable de retenir 1991 comme l'année où une nouvelle méthode sans maillage fût précisément énoncée par la parution d'un article de Nayroles, Touzot et Villon. Cet article présente les principes fondamentaux d'une nouvelle méthode de simulation numérique appelée *La Méthode des Éléments Diffus* [13], [14] qui satisfait dans une large mesure aux exigences énoncées dans la section 1.2.5. La méthode des éléments diffus est basée sur des aspects théoriques initialement destinés à l'approximation de courbes et surfaces géométriques énoncés par Lancaster et Salkaukas en 1981 [15].

1.3.2 Une nouvelle famille de méthodes

Depuis, de nombreux travaux ont porté sur les méthodes sans maillage. Les aspects théoriques sont maintenant relativement bien maîtrisés. Depuis peu, une nouvelle génération de méthodes sans maillage est apparue dans le monde de la simulation numérique. Cette famille de méthodes est basée sur le concept de la *partition de l'unité* [16] et se dérivent principalement en Moving Least Square Method (*M.L.S*) et *HP-Clouds Method* (*HP* rend compte de l'adaptativité possible en h et p pour cette méthode) [21], [17][18], [20]. Il existe désormais des articles de synthèse analysant les différentes méthodes sans maillage [19][22]. Récemment, les méthodes sans maillage ont abordé des applications complexes notamment pour des métiers comme l'électromagnétisme, la thermique ou la mécanique [24][25][30]. Bien que les méthodes sans maillage semblent diverses et variées, elles sont en réalité basées sur un support mathématique commun et leur nom diffèrent souvent par les métiers auxquelles elles sont rattachées ou par choix délibéré des auteurs.

1.3.3 Le choix de la méthode

Pour résumer, le tableau 1.1 récapitule l'évolution des méthodes sans maillage ainsi que leur auteurs. Ce tableau rapporte aussi les liens d'héritage entre les différents méthodes sans maillage.

La méthode *HP-Clouds* est une méthode sans maillage très intéressante car elle s'inspire dans une large part des autres en unifiant les fondements

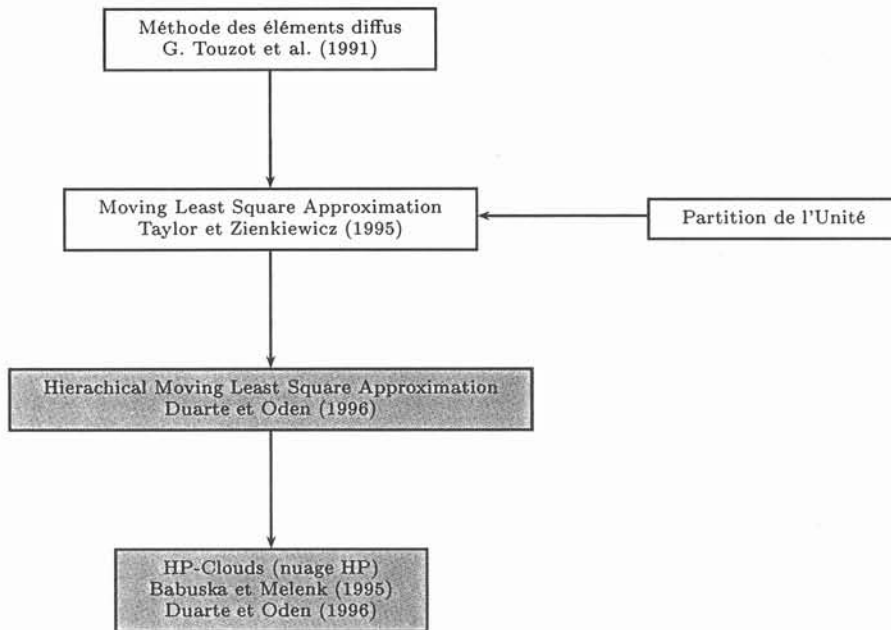


TABLEAU 1.1: Évolution des méthodes sans maillage

théoriques. Il faut garder en mémoire que la méthode *HP-Clouds* est basée sur une approximation des moindres carrés glissants, Moving Least Square (MLS) en anglais. Notre démarche s'est focalisée sur la méthode *HP-Clouds* tout en gardant à l'esprit l'origine de celle-ci ¹.

La méthode *HP-Clouds* est une méthode très récente et ses développements sont certes nombreux mais celle-ci n'a pas encore acquis une maturité comparable à celle obtenue par la *M.E.F* en laquelle de nombreux laboratoires et industriels ont toujours confiance et ce, à juste titre. En conséquence, un des objectifs de cette thèse est de mettre en place les procédures permettant de rendre la méthode *HP-Clouds* robuste, efficace et réellement utilisable.

Avant de développer les fondements mathématiques de la méthode *HP-Clouds*, une mise au point sur le vocabulaire employé et le cadre de l'étude doit être faite.

1.4 Cadre de l'étude et vocabulaire

Cette section va définir le vocabulaire de base indispensable à la bonne compréhension d'une nouvelle méthode de simulation numérique. Comme la plupart des méthodes de simulation numérique des milieux continus et au même titre que la *M.E.F*, le but des méthodes sans maillage est de créer une approximation discrète de grandeurs continues dans l'espace. Dans cette optique, une discrétisation du domaine d'étude, noté D_E , est indispensable. En effet, numé-

¹Cf. section 1.7

riquement, les grandeurs physiques continues dans l'espace sont représentées sous forme discrète en un nombre fini de points appelé *Noeuds* sur lesquels seront calculées les valeurs des variables d'état appelées *Valeurs nodales*. Ces valeurs sont obtenues par résolution d'un système matriciel.

Dans ce contexte nous pouvons alors définir un ensemble de noeuds de cardinalité N_N support de l'approximation. Dans toute la suite, N_N représentera le nombre de noeuds total associé au domaine D_E .

À partir de cet ensemble de noeuds, l'objectif de la plupart des méthodes numériques est de définir une base \mathcal{B}_ϕ sur laquelle sera projetée la solution. Si la base \mathcal{B}_ϕ est donnée par $\mathcal{B}_\phi = \{\phi_1(\vec{x}), \dots, \phi_{N_N}(\vec{x})\}$ alors l'approximation $\tilde{u}(\vec{x})$ de la grandeur scalaire $u(\vec{x})$ peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{u}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{i=N_N} \phi_i(\vec{x}) \cdot u_i \quad (1.1)$$

Dans l'expression 1.1, $\phi_i(\vec{x})$ sont les vecteurs de la base \mathcal{B}_ϕ associés à chaque noeud i , u_i sont les valeurs nodales associées au noeud i et \vec{x} un point du domaine D_E .

Remarque: 1.4.1 Dans toute la suite $\tilde{u}(\vec{x})$ signifiera l'approximation de $u(\vec{x})$.

Remarque: 1.4.2 Dans une hypothèse simplificatrice, l'expression 1.1 ne fait apparaître qu'une seule valeur nodale par noeud, mais elle s'étend sans problème quand le nombre de valeurs nodales dépasse 1. Dans ce cas, le nombre de vecteurs de la base augmente en conséquence.

Remarque: 1.4.3 Il est nécessaire de noter que la dimension du domaine D_E est quelconque et que pour simplifier la compréhension, nous avons décidé d'établir tous les résultats comme si le domaine était bidimensionnel, mais les résultats présentés restent valables pour des domaines de dimension 3 (ou plus).

Dans la plupart des méthodes de simulation numérique les vecteurs de la base \mathcal{B}_ϕ sont appelés *fonctions de forme*.

L'ensemble des fonctions de forme influe directement sur la qualité de l'approximation. Si les fonctions de forme sont continûment dérivables l fois ($\mathcal{C}^l(D_E)_{l \geq 0}$) sur le domaine D_E alors l'approximation sera elle aussi $\mathcal{C}^l(D_E)_{l \geq 0}$.

La pierre angulaire de l'approximation sans maillage se situe donc dans le calcul des fonctions de forme associées à l'ensemble des noeuds du domaine D_E .

Dans le cas de la *M.E.F*, des éléments sont créés à partir des noeuds. Ces éléments correspondent au support des fonctions de forme (Figure 1.3) : généralement, sur chaque élément ayant pour sommet le noeud i , une approximation polynomiale est réalisée. Pour des éléments classiques d'ordre 1, l'approximation éléments finis est polynomiale de degré 1 sur chaque élément.

La figure 1.3 montre que les fonctions de forme issues de la méthode des éléments finis (ordre 1) sont continues et seulement continues sur D_E . En conséquence, l'approximation éléments finis pour de telles fonctions de forme sera $\mathcal{C}^0(D_E)$.

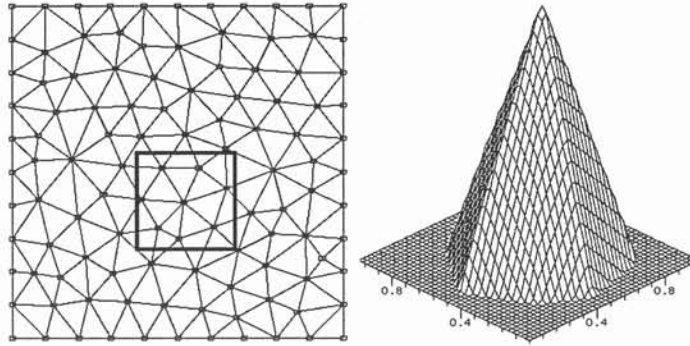


FIGURE 1.3: Fonctions de forme éléments finis sur un carré

En opérant par analogie avec la *M.E.F*, les fonctions de forme pour la méthode *HP-Clouds* vont être créées de telle sorte que l'approximation qu'elles génèrent soit locale et continûment dérivable d'un ordre supérieur à 1 ($C^1(D_E)$). La section suivante va présenter le moyen de rendre locale l'approximation *HP-Clouds*.

1.5 L'aspect local de l'approximation *HP-Clouds*

Le but de cette section est de mettre en évidence les fondements théoriques permettant de rendre une approximation sans maillage locale. Dans cette optique, la zone d'influence d'un noeud va être définie en établissant un parallèle avec les fonctions de forme des éléments finis.

Il a été vu précédemment que le support des fonctions de forme des éléments finis associés au noeud i correspondait aux éléments possédant comme sommet le noeud i . Nous pouvons donc définir les éléments associés au noeud i comme une *zone d'influence* du noeud i pour l'approximation éléments finis. Cette *zone d'influence* est à support limité ce qui rend l'approximation éléments finis locale. En d'autres termes, la zone d'influence d'un noeud i correspond au domaine où l'approximation *M.E.F* fait intervenir le noeud i . En effet, pour savoir si le noeud i participe à l'approximation en un point P , il faut savoir si ce point \vec{x}_P appartient à la *zone d'influence* associée au noeud i , c'est à dire si le point appartient aux éléments ayant comme sommet le noeud i (Figure 1.4). Dans un tel cas, l'expression de l'approximation éléments finis devient :

$$\tilde{u}(\vec{x}_P) = \sum_{N_e} \phi_i(\vec{x}_P).u_i \quad (1.2)$$

où N_e est le nombre d'éléments associés au point d'approximation \vec{x}_P .

La conséquence majeure de cet aspect local est le caractère creux de la matrice de résolution. Sa résolution en est facilitée.

En suivant cette démarche, nous allons créer pour la méthode *HP-Clouds*, une zone d'influence associée à chaque noeud du domaine D_E .

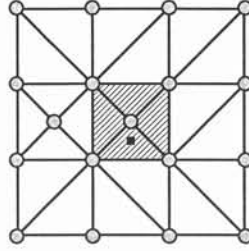


FIGURE 1.4: Zone d'influence éléments finis

1.5.1 La zone d'influence

A priori la zone d'influence d'un noeud pourrait être quelconque. Or, dans de nombreux cas, il est préférable de rendre cette zone d'influence isotrope, c'est à dire ne dépendant pas d'une direction particulière. Dans ce cas, les noeuds du domaine auront une influence isotrope sur l'approximation sans maillage, ce qui à notre sens semble préférable dans un premier temps. Il faut noter que l'isotropie de la zone d'influence n'est pas une obligation. Suivant les géométries et la physique résolue, certains noeuds pourraient privilégier certaines directions par rapport aux autres et en conséquence posséderaient des zones d'influence anisotropes. En électromagnétisme, de nombreux domaines d'étude font intervenir de fortes disparités dans les rapports géométriques. Dans le cas d'un entrefer mince par exemple, où une dimension est prépondérante par rapport à l'autre, il serait judicieux d'utiliser des zones d'influence rendant compte de cette sorte d'anisotropie. Cet aspect n'est pas étudié, voilà pourquoi nous nous contenterons par la suite de zones d'influence isotropes.

Une fonction de pondération, rendant compte mathématiquement de la zone d'influence, va être associée à chaque noeud. Cette fonction de pondération, notée $W_i(\vec{x})$ pour le noeud i , possède bien évidemment un support limité pour respecter l'aspect local de la zone d'influence :

$$W_i(\vec{x}) = \begin{cases} w(\vec{x}) & \text{pour } \|\vec{x} - \vec{x}_i\| \leq r_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.3)$$

où $w(\vec{x})$ est une fonction que l'on explicitera par la suite, \vec{x}_i les coordonnées du noeud i , $\|\vec{x}\|$ est une norme associée à l'espace du domaine D_E et r_i l'envergure de la zone d'influence. Étant indépendant de \vec{x} , r_i peut donc être assimilé à un rayon.

Le choix de la norme est important et délicat, car suivant celle-ci la zone d'influence aura une forme différente. En effet pour une norme 1, notée $\|\vec{x}\|_1$, il s'agira d'un carré et pour une norme 2, notée $\|\vec{x}\|_2$, il s'agira d'un cercle (Figure 1.5). Pour $\vec{x} = [x_1, \dots, x_D]$ (D est la dimension de l'espace) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|_1 &= \max((x_i)_{1 \leq i < D}) \\ \|\vec{x}\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{i=D} x_i^2} \end{aligned} \tag{1.4}$$

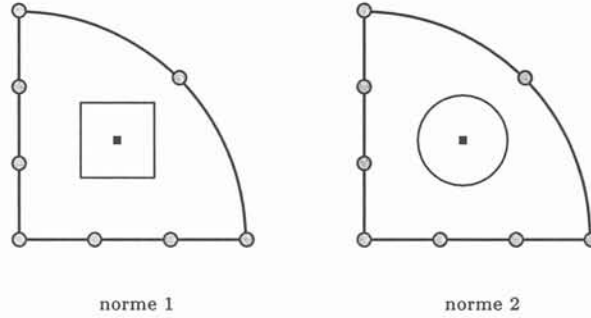


FIGURE 1.5: Les zones d'influence pour $D = 2$

La qualité de l'approximation sans maillage dépend (voir section 1.6.1) entre autres de la continuité des fonctions de pondération. De plus, les fonctions de pondération dépendent elles aussi de la norme associée à l'espace. La norme 1 étant discontinue dans l'espace, les fonctions de pondération utilisant la norme 1 seront en conséquence discontinues. La norme 2 étant continue, il devient donc logique de privilégier celle-ci.

Il s'agit maintenant de définir explicitement la fonction de pondération $W_i(\vec{x})$ en donnant l'expression de $w(\vec{x})$. Les tableaux 1.2 et 1.3 montrent respectivement les expressions et les allures des fonctions de pondération les plus utilisées.

Type	Expression
1	$w(\vec{x}) = 1$
2	$w(\vec{x}) = 1 - \frac{\ \vec{x}\ _2}{r_i}$
3	$w(\vec{x}) = \frac{e^{-4 \cdot \frac{\ \vec{x}\ _2}{r_i}} - e^{-4}}{1 - e^{-4}}$
4	$w(\vec{x}) = \left(1 - \left(\frac{\ \vec{x}\ _2}{r_i}\right)^2\right)^k$
5	$w(\vec{x}) = \begin{cases} 1 - 6 \cdot \ \vec{x}\ _2^2 + 6 \cdot \ \vec{x}\ _2^3 & \text{pour } \ \frac{\ \vec{x}\ _2}{r_i}\ _2 < 0.5 \\ 2 \cdot (1 - \ \vec{x}\ _2)^3 & \text{pour } 0.5 < \ \frac{\ \vec{x}\ _2}{r_i}\ _2 < 1 \end{cases}$

TABEAU 1.2: Expression des fonctions de pondération

Les allures des fonctions de pondération nous montrent bien que l'envergure des fonctions de pondération est limitée. De plus, il est intéressant de noter que la continuité des fonctions de pondération est différente suivant leur type. Il sera vu par la suite que la fonction de pondération doit être la plus continue possible. De ce fait, les fonctions de *type 4* et de *type 5* seront privilégiées.

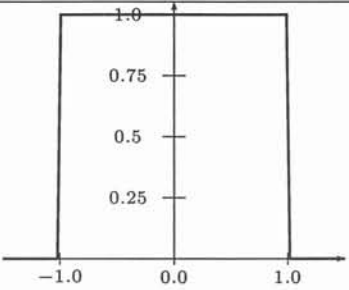
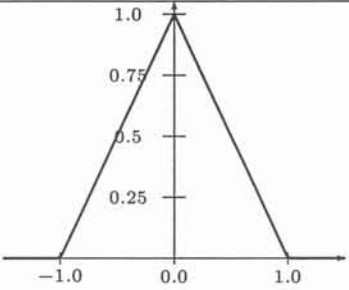
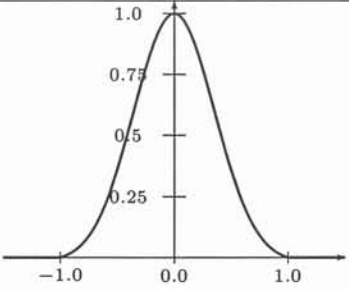
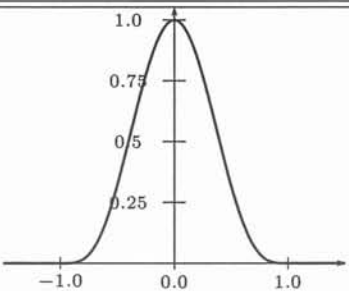
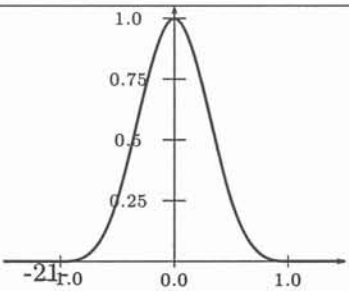
Type	Continuité	Allure
1		
2	$C^0(D_E)$	
3	$C^0(D_E)$	
4	$C^\infty(D_E)$	
5	$C^\infty(D_E)$	

TABLEAU 1.3: Allure des fonctions de pondération

Nous avons donc créé une zone d'influence associée à chaque noeud rendant par conséquent l'approximation sans maillage locale. Cette zone d'influence est mathématiquement représentée par une fonction de pondération. Mais il ne faut pas oublier que notre premier but est de créer les fonctions de forme pour l'approximation *HP-Clouds*. Les deux sections suivantes vont développer cet aspect par deux démarches différentes et complémentaires.

Remarque: 1.5.1 *Pour la méthode HP-Clouds la zone d'influence associée à chaque noeud est appelée nuage, traduction directe de l'anglais "Clouds".*

1.6 Principe fondamental de la méthode *HP-Clouds*

Les fonctions de forme sans maillage sont construites sur la base d'une partition de l'unité dont la démarche théorique est explicitée dans ce qui suit.

Supposons que le domaine d'étude D_E , associé à un espace E , possède un ensemble de noeuds Φ_{N_N} tel que :

$$\Phi_{N_N} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_{N_N}\} \quad (1.5)$$

où \vec{x}_i sont les coordonnées du noeud i et N_N le nombre total de noeuds dans le domaine D_E . Associons à chaque noeud du domaine une zone d'influence de support w_i , représentée mathématiquement par une fonction de pondération $W_i(\vec{x})$ (voir section précédente), telle que :

$$D_E \subseteq \bigcup_{i=1}^{i=N_N} w_i \quad (1.6)$$

Remarque: 1.6.1 *La propriété énoncée dans l'équation 1.6 est appelée recouvrement du domaine D_E .*

La méthode *HP-Clouds* comme la majorité des méthodes sans maillage est basée sur une famille de fonctions $\mathcal{PU}_{N_N} = \{\phi_i(\vec{x})\}_{1 < i < N_N}$ (les fonctions de forme) formant une partition (d'ordre l) de l'unité, c'est à dire respectant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \phi_i(\vec{x}) \in \mathcal{C}^l(D_E)_{l \geq 0} \\ \sum_{i=1}^{i=N_N} \phi_i(\vec{x}) = 1 \quad \text{pour } \vec{x} \in D_E \end{cases} \quad (1.7)$$

Cette propriété est la pierre angulaire du calcul des fonctions de forme pour la méthode *HP-Clouds*. Cette propriété assure que l'approximation *HP-Clouds* d'ordre 0 est exacte pour une fonction constante.

Remarque: 1.6.2 *Pour la démonstration de la propriété de partition de l'unité se référer à la section 1.7.*

1.6.1 Les fonctions de forme

L'expression des fonctions de forme, qui respectent la partition d'unité, peut être établie par :

$$\phi_i(\vec{x}) = \frac{W_i(\vec{x} - \vec{x}_i)}{\sum_{j=1}^{N_N} W_j(\vec{x} - \vec{x}_j)} \quad (1.8)$$

Cette fonction de forme est appelée fonction de Shepard.

Remarque: 1.6.3 *L'expression de la fonction de forme de Shepard peut être vue comme une moyenne pondérée sur l'ensemble des noeuds du domaine D_E des fonctions de pondération.*

Remarque: 1.6.4 *Les fonctions de Shepard forment une partition de l'unité d'ordre 0, c'est à dire $\sum_{i=1}^{N_N} \phi_i(\vec{x}) = 1$.*

Cette expression montre de manière évidente que la fonction de forme de Shepard ϕ_i associée au noeud i a un support limité correspondant exactement à celui de la fonction de pondération W_i . Il est donc possible de définir dans le cas d'une norme 2 le support des fonctions de forme comme des boules.

Définition 1.1 *Définissons la boule b_i support de la fonction de forme de Shepard ϕ_i telle que :*

$$b_i = \{ \vec{x} / \|\vec{x} - \vec{x}_i\|_2 \leq r_i \} \quad (1.9)$$

où \vec{x}_i correspond aux coordonnées du noeud, c'est à dire le centre de la boule b_i et r_i le rayon de la boule b_i .

Remarque: 1.6.5 *Pour une zone d'influence non isotrope, dans le cas où une direction est privilégiée, les zones d'influence de chaque noeud se transforment en des ellipsoïdes par exemple.*

Pour visualiser les fonctions de forme HP-Clouds formant la partition de l'unité, nous allons prendre le domaine D_E un carré unitaire sur lequel il y a 11 noeuds par direction (Figure 1.6).

Sur le carré interne nous traçons la fonction de forme de Shepard et sa dérivée par rapport à x pour une fonction de pondération de type 4.

Les figures 1.7 montrent le caractère continu et continûment dérivable des fonctions de formes de Shepard.

L'expression 1.8 des fonctions de forme de Shepard fait intervenir à priori l'ensemble de toutes les fonctions de pondération du domaine D_E .

En réalité il n'en est rien : Pour de nombreux noeuds, la valeur $W_j(\vec{x} - \vec{x}_j)$ est nulle car les zones d'influence auxquelles ils sont associés n'ont aucun point commun avec la zone d'influence associée au noeud i . En conséquence, il est possible de limiter le nombre de fonctions de pondération au dénominateur dans l'expression des fonctions de forme de Shepard. De ce fait, l'expression des fonctions de forme de Shepard devient :

$$\phi_i(\vec{x}) = \frac{W_i(\vec{x} - \vec{x}_i)}{\sum_{j=1}^{N_{C_i}} W_j(\vec{x} - \vec{x}_j)} \quad (1.10)$$

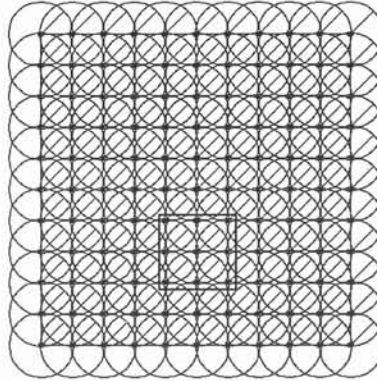


FIGURE 1.6: Domaine carré D_E pour la méthode *HP-Clouds*

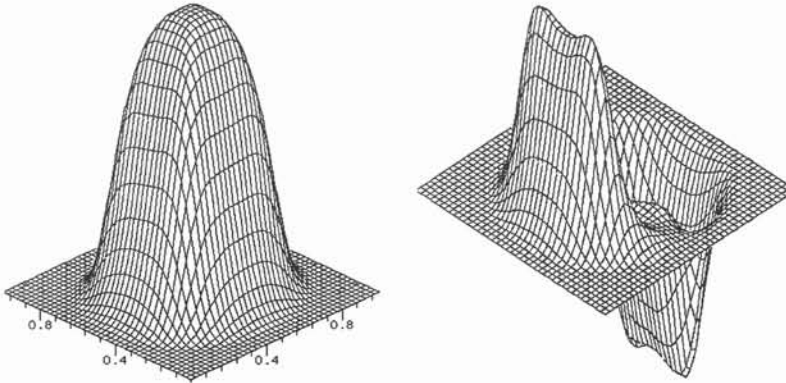


FIGURE 1.7: Fonction de forme de Shepard et sa dérivée par rapport à x

où N_{C_i} correspond au nombre de fonctions de pondération participant au calcul de la fonction de forme de Shepard ϕ_i . Il est donc possible de définir la *connectivité* associée à la boule b_i de la fonction de forme ϕ_i comme :

Définition 1.2 La connectivité de la boule b_i est :

$$\{b_j / \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|_2 \leq r_i + r_j\} \quad (1.11)$$

où \vec{x}_i , \vec{x}_j et r_i , r_j sont respectivement les centres et les rayons des boules b_i et b_j .

La cardinalité de la connectivité de la boule b_i est N_{C_i} .

La connectivité correspond au voisinage d'une boule. Elle peut, en effet, être mise en rapport avec le voisinage intrinsèquement présent dans la structure des éléments finis.

Remarque: 1.6.6 Les fonctions de forme de Shepard n'ont pas d'expression analytique à priori car elles dépendent et de la connectivité donc des rayons et de la topologie du nuage de noeud. Cette propriété entraînera quelques difficultés surtout lors de la résolution.

L'expression et l'allure des fonctions de forme prouvent que les fonctions de pondérations jouent un rôle important dans la régularité des fonctions de forme. En effet, la régularité des fonctions de formes de Shepard est identique à celle des fonctions de pondérations qui leurs sont associées. En somme, pour des fonctions de pondérations de type 4 ou 5, nous obtenons :

$$\phi_i(\vec{x})_{1 \leq i \leq N_N} \in C^\infty(D_E) \quad (1.12)$$

La conséquence majeure est que l'approximation *HP-Clouds* devient infiniment continûment dérivable sur l'ensemble du domaine D_E .

1.6.2 Fonctions de forme interpolantes ou non ?

Au même titre que pour la *M.E.F*, les fonctions de forme *HP-Clouds* peuvent être interpolantes ou non : la valeur de la fonction de forme associée au noeud i , est égale à 1 au noeud i :

$$\phi_i(\vec{x}_i) = 1 \quad (1.13)$$

où ϕ_i est la fonction de forme associée au noeud i et \vec{x}_i correspond aux coordonnées du noeud i .

Le caractère interpolant des fonctions de forme de Shepard est dépendant du numérateur de l'expression 1.8 des fonctions de Shepard. En conséquence, suivant le type de connectivité, il est possible d'obtenir une fonction de forme interpolante : il suffit d'avoir une connectivité telle que $W_j(\vec{x}_i - \vec{x}_j) = 0$. Au contraire, s'il existe une fonction de pondération W_j telle que $W_j(x_i) \neq 1$, alors la fonction de forme de Shepard associée au noeud i n'est pas interpolante. Pratiquement, le caractère interpolant des fonctions de forme dépend de l'envergure des fonctions de forme. En d'autres termes, ce caractère est dépendant du rayon des boules associées aux noeuds. Dans le cas de fonctions de forme non interpolantes, il faut noter que les valeurs nodales perdent leur caractère physique :

$$\tilde{u}(\vec{x}_i) \neq u_i \quad (1.14)$$

1.6.3 L'ordre de l'approximation

Nous avons établi que l'approximation *HP-Clouds* est une approximation locale (via les fonctions de pondération), continue et continûment dérivable. Cependant l'ordre de l'approximation est faible dans le sens où les fonctions de forme de Shepard ne génèrent qu'une approximation d'ordre 0.

Remarque: 1.6.7 Une approximation d'ordre 0 ne signifie pas que la solution correspond à un polynôme de degré 0 par morceau, car la solution issue d'une approximation *HP-Clouds* est continûment dérivable à l'infini.

Dans ce contexte, il est indispensable de pouvoir augmenter l'ordre de l'approximation. Cette augmentation via un ajout hiérarchique fera l'objet d'une étude dans la section suivante.

1.6.4 L'ajout hiérarchique

Dans le but d'augmenter l'ordre de l'approximation, la base $\mathcal{PU}_{N_N}^2$, formée par les fonctions de forme de Shepard, va être enrichie par des fonctions de forme supplémentaires [18].

Définissons la base $B_{D_E}^P$ d'ordre P de l'espace D_E par :

$$B_{D_E}^P = \{b_0(\vec{x}), b_1(\vec{x}), b_2(\vec{x}), \dots, b_{K_P}(\vec{x})\} \quad (1.15)$$

où $K_P + 1$ est le nombre de composantes dans la base $B_{D_E}^P$. Les nouvelles fonctions de forme sont calculées par produit entre les fonctions de Shepard et les vecteurs de la base $B_{D_E}^P$. Ainsi, l'approximation sans maillage hiérarchique devient :

$$\tilde{u}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{i=N_N} \left(\sum_{k=0}^{k=K_P} b_k(\vec{x}) \cdot \phi_i(\vec{x}) u_{ik} \right) \quad (1.16)$$

En somme, l'approximation sans maillage devient une projection sur l'espace $\mathcal{F}_{N_N}^P$ tel que :

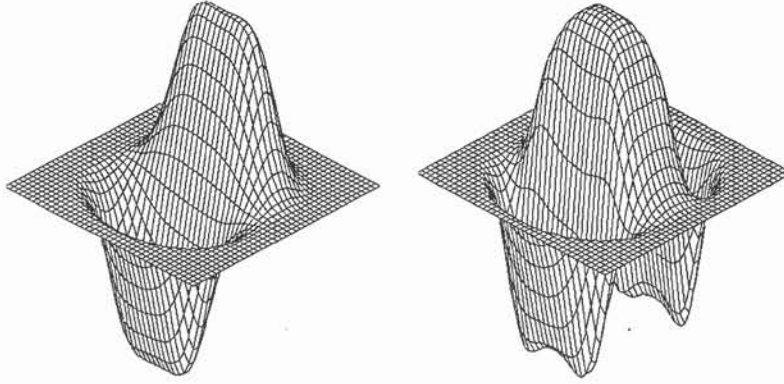
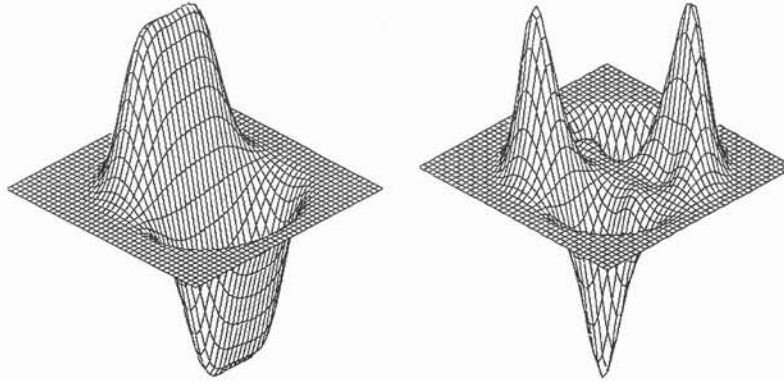
$$\mathcal{F}_{N_N}^P = \{\phi_i(\vec{x}), b_j(\vec{x})\}_{1 \leq i \leq N_N, 0 \leq j \leq K_P} \quad (1.17)$$

Remarque: 1.6.8 Dans la majorité des cas, la base $B_{D_E}^P$ correspond à la base polynomiale naturelle. Mais, un enrichissement hiérarchique avec une base différente peut être envisagé en particulier pour prendre en compte des phénomènes raides ou des singularités par exemple.

Dans ce cas l'approximation *HP-Clouds* obtenue est dite *d'ordre P*. Prenons le cas particulier de la dimension 2 avec $P = 1$, l'allure des fonctions de forme hiérarchiques (ou fonctions *HP-Clouds* [18]) est montrée sur les figures 1.8 et 1.9 (Pour le domaine D_E nous prenons la même configuration que pour les figures 1.7)

Cette approche hiérarchique permet une modulation très simple de l'ordre de l'approximation. Cependant, il ne faut pas perdre de vue que l'ajout hiérarchique augmente la dimension du système matriciel, par introduction de nouvelles valeurs nodales par noeuds. Pour une approximation d'ordre élevé, le nombre d'inconnues peut devenir considérable. Il est donc indispensable de trouver un compromis correct entre l'ordre de l'approximation *HP-Clouds* et la taille du système matriciel. Le tableau 1.4 récapitule le nombre de valeurs nodales par noeud pour une base hiérarchique polynomiale complète dans le cas bidimensionnel et tridimensionnel.

²Se référer à la section 1.6

FIGURE 1.8: Fonction de forme $x.\phi$ et sa dérivée par rapport à x FIGURE 1.9: Fonction de forme $y.\phi$ et sa dérivée par rapport à y

Cette section a permis de montrer comment augmenter l'ordre de l'approximation *HP-Clouds*. Il est désormais possible d'envisager que ce genre de méthode puisse modéliser des dispositifs complexes. La majorité des contraintes énoncées dans le cahier des charges ont été résolues. Un point reste cependant en suspend : la prise en compte des conditions de diffraction aux interfaces entre matériaux qui sera explicitée dans le chapitre suivant.

1.7 L'approximation Moving Least Square (*M.L.S*)

La méthode *HP-Clouds* que nous avons présentée dans les sections précédentes peut aussi s'aborder dans le cadre de la théorie sur les moindres carrés glissants *M.L.S*, méthodes que nous présentons dans cette section. Les développements théoriques qui suivent forment un deuxième éclairage qui ne remet pas en cause l'approche que nous avons effectuée précédemment.

Supposons que le domaine d'étude D_E , associé à un espace E , possède un ensemble de noeuds Φ_{N_N} tel que :

Ordre	Valeurs nodales / noeud (cas 2D)	Valeurs nodales / noeud (cas 3D)
0	1	1
1	3	4
2	6	10
3	10	20
4	15	32

TABLEAU 1.4: Nombre de valeurs nodales par noeud en fonction de l'ordre de l'approximation

$$\Phi_{N_N} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_{N_N}\} \quad (1.18)$$

supportant des valeurs nodales notée u_i . Définissons alors l'approximation d'une fonction $\tilde{u}(\vec{x})$ comme une projection sur un espace de fonctions de dimension $m+1$ où p_i sont les vecteurs de cette base et α_i les variables généralisées de $\tilde{u}(\vec{x})$ dans cette même base, alors l'approximation devient :

$$u(\vec{x}) \sim \tilde{u}(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{i=m} p_i(\vec{x})\alpha_i = \mathcal{P}^T(\vec{x})\alpha \quad (1.19)$$

Cette approximation est dite d'ordre m .

La méthode des moindres carrés glissants consiste à minimiser l'erreur quadratique commise sur l'approximation (Figure 1.10). Cette erreur commise sur chaque noeud est pondérée par une fonction notée W_i pour le noeud i qui procure le caractère "glissant" pondérant les moindres carrés. Le calcul des coefficients α_i entraîne donc la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$J(\vec{x}^*) = \sum_{k=1}^{k=N_N} W_k(\vec{x}_k - \vec{x}^*) \left(u_k - \mathcal{P}^T(\vec{x}_k)\alpha(\vec{x}^*) \right)^2 \quad (1.20)$$

où W_k est une fonction de pondération à support limitée et \vec{x}^* le point où est calculé la fonctionnelle. Il faut remarquer que les coefficients α_i dépendent du point où est calculée la fonctionnelle.

L'objectif étant de calculer les coefficients $\alpha(\vec{x}^*)$, la minimisation de l'équation 1.20 entraîne l'expression suivante des coefficients :

$$\alpha(\vec{x}^*) = \mathcal{A}^{-1}(\vec{x}^*) \sum_{j=1}^{j=N_N} \mathcal{B}_j(\vec{x}^*) u_j \quad (1.21)$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\vec{x}^*) = \sum_{j=1}^{j=N_N} W_j(\vec{x}^* - \vec{x}_j) \mathcal{P}(\vec{x}_j) \mathcal{P}^T(\vec{x}_j) \\ \mathcal{B}_j(\vec{x}^*) = W_j(\vec{x}^* - \vec{x}_j) \mathcal{P}(\vec{x}_j) \end{cases} \quad (1.22)$$

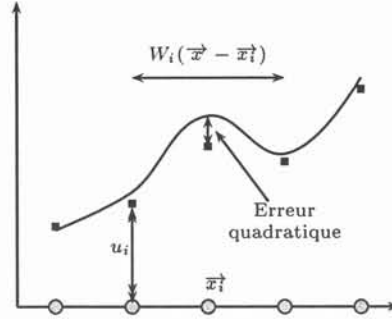


FIGURE 1.10: Erreur quadratique sur l'approximation

À partir de l'expression des coefficients $\alpha(\vec{x}^*)$, il est alors possible de définir l'expression des fonctions de forme $\phi_i^m(\vec{x})$ par :

$$\begin{cases} \tilde{u}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{i=N_N} \phi_i^m(\vec{x}) u_i \\ \phi_i^m(\vec{x}) = \mathcal{P}^T(\vec{x}) \mathcal{A}^{-1}(\vec{x}) \mathcal{B}_i(\vec{x}) \end{cases} \quad (1.23)$$

L'ordre de l'approximation est m car il est possible de démontrer que les vecteurs de la base de l'approximation *M.L.S*, à savoir p_i , sont "approximés" exactement c'est à dire pour $u(\vec{x}) = p_p(\vec{x})$ alors $\tilde{u}(\vec{x}) = p_p(\vec{x})$ pour $1 \leq p \leq m$.

Démonstration :

□

Soit :

$$\begin{cases} u(\vec{x}) = p_p(\vec{x}) = [\mathcal{P}^T(\vec{x})]_p \\ u_i = p_p(\vec{x}_i^*) = [\mathcal{P}^T(\vec{x}_i^*)]_p \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} \tilde{u}(\vec{x}) = \sum_1^{N_N} \phi_i^m(\vec{x}) [\mathcal{P}^T(\vec{x}_i^*)]_p \\ \tilde{u}(\vec{x}) = \left[\sum_1^{N_N} \phi_i^m(\vec{x}) \mathcal{P}^T(\vec{x}_i^*) \right]_p \end{cases}$$

D'après l'expression de $\phi_i^m(\vec{x})$:

$$\tilde{u}(\vec{x}) = \left[\sum_1^{N_N} \mathcal{P}^T(\vec{x}) \mathcal{A}^{-1}(\vec{x}) \mathcal{B}_i(\vec{x}) \mathcal{P}^T(\vec{x}_i^*) \right]_p$$

D'après l'expression de $B_i(\vec{x})$:

$$\tilde{u}(\vec{x}) = \left[\sum_1^{N_N} \mathcal{P}^T(\vec{x}) \mathcal{A}^{-1}(\vec{x}) W_i(\vec{x} - \vec{x}_i) \mathcal{P}(\vec{x}_i) \mathcal{P}^T(\vec{x}_i) \right]_p$$

En regroupant les termes :

$$\tilde{u}(\vec{x}) = \left[\mathcal{P}^T(\vec{x}) \mathcal{A}^{-1}(\vec{x}) \underbrace{\sum_1^{N_N} W_i(\vec{x} - \vec{x}_i) \mathcal{P}(\vec{x}_i) \mathcal{P}^T(\vec{x}_i)}_{\mathcal{A}(\vec{x})} \right]_p$$

d'où :

$$\tilde{u}(\vec{x}) = [\mathcal{P}^T(\vec{x})]_p = p_p(\vec{x})$$

■

L'expression 1.23 met en évidence que les fonctions de forme pour la méthode *M.L.S* sont calculées en inversant une matrice $(m+1) \times (m+1)$ pour chaque point de calcul. Ce calcul peut s'avérer très coûteux et il faut remarquer que l'ordre de l'approximation influence de manière capitale le coût. Pour un ordre 0 c'est à dire pour $m=0$ l'expression des fonctions de forme *M.L.S* devient :

$$\phi_i^0(\vec{x}) = \frac{W_i(\vec{x} - \vec{x}_i)}{\sum_{j=1}^{N_N} W_j(\vec{x} - \vec{x}_j)} \quad (1.24)$$

L'expression ci-dessus fait apparaître que les fonctions de forme d'ordre 0 pour la méthode *M.L.S* correspondent aux fonctions de forme de Shepard de la méthode *HP-Clouds*, d'où le lien d'héritage entre les deux méthodes.

Cette démarche permet d'expliquer pourquoi les fonctions de forme de Shepard forment une partition de l'unité. En effet si la base \mathcal{P} de l'espace correspond à la base polynomiale naturelle alors $p_0(\vec{x}) = 1$, en conséquence d'après la démonstration faite ci dessus :

$$p_0(\vec{x}) = 1 = \sum_{i=1}^{i=N_N} \phi_i^0(\vec{x}) \quad (1.25)$$

Les fonctions de forme *M.L.S* d'ordre 0 forment donc une partition de l'unité.

L'intérêt de cette méthode vient de sa capacité à pouvoir obtenir un ordre quelconque pour l'approximation sans faire appel à un ajout hiérarchique. Mais malheureusement, le calcul des fonctions de forme s'accompagne d'une résolution matricielle souvent lourde et coûteuse.

1.8 Besoins et paramètres de l'approximation *HP-Clouds*

1.8.1 L'adaptativité

Dans les explications précédentes nous avons augmenté l'ordre de l'approximation de façon homogène : l'ordre de l'approximation est augmenté globalement sur l'ensemble des noeuds. Or, il est bien entendu possible d'enrichir localement la solution, ce qui revient à augmenter l'ordre de l'approximation qu'en certains noeuds. Il s'agit de l'adaptativité en p .

Par ailleurs l'absence de maillage, facilite grandement l'insertion de nouveaux noeuds dans le domaine D_E . Il s'agit de l'adaptativité en h .

Ces deux sortes d'adaptativité ne sont viables que si il est possible de définir un critère d'erreur efficace concernant l'approximation *HP-Clouds*. Nous n'avons pas utilisé cet aspect de la méthode *HP-Clouds*. Mais certains auteurs ont déjà présenté avec succès des procédures d'adaptativité en h et p très efficaces [17].

1.8.2 Le premier nuage de noeuds

Il a été vu que l'approximation *HP-Clouds* est basée sur un ensemble de noeuds. De la même façon que pour les éléments finis cet ensemble de noeud influence énormément la qualité de la solution. Dans le cas des éléments finis ce nuage de noeuds est créé au moment de la génération du maillage. Dans notre cas, la phase de maillage est vouée à disparaître. Pourtant il faut pouvoir générer efficacement un nuage de noeuds en corrélation avec la géométrie et l'approximation *HP-Clouds*. Cette procédure n'est pas évidente à mettre en oeuvre et sera plus développée dans la partie 2.

1.8.3 Le recouvrement du domaine d'étude

Le recouvrement du domaine est une notion importante dans l'élaboration de l'approximation *HP-Clouds*. Il est nécessaire de s'assurer que chaque point du domaine d'étude soit atteint par au moins une des fonctions de forme de la base de l'approximation. Théoriquement, pour un point quelconque \vec{x}_p , il faut qu'au moins une fonction de forme issue de la base d'approximation vérifie $\phi(\vec{x}_p) \neq 0$. Pratiquement, les zones d'influence des fonctions de forme doivent recouvrir totalement le domaine d'étude. Supposons que le domaine D_E porte N_N boules b_i de rayon r_i et de centre \vec{x}_i , alors le recouvrement du domaine d'étude D_E est obtenu par l'expression suivante :

$$D_E \subseteq \bigcup_{i=1}^{i=N_N} b_i \quad (1.26)$$

Cette caractéristique indispensable à la consistance de l'approximation nécessite une attention toute particulière et une algorithmique adaptée qui sera présentée en partie 3 [22].

1.9 Conclusion

Nous avons établi une liste de qualités qu'une nouvelle méthode de simulation numérique pourrait apporter sous forme d'un cahier des charges succinct.

Ce cahier des charges établi, une approximation sans maillage, appelée approximation *HP-Clouds* a été construite, répondant le mieux possible au cahier des charges que nous nous étions imposé. Pour résumer, il est possible de rappeler les qualités de l'approximation *HP-Clouds* : il s'agit d'une approximation sans maillage capable de générer une approximation d'ordre élevé, une approximation locale et surtout une approximation augmentant la continuité de la solution par rapport à une approximation éléments finis.

Une approximation robuste étant réalisée, il est nécessaire maintenant d'établir les procédures permettant de résoudre une équation aux dérivées partielles comme c'est le cas en électromagnétisme avec les équations de Maxwell.

Chapitre 2

La résolution

Le monde de l'électromagnétisme est régi par un ensemble d'équations appelées les équations de Maxwell. Ces équations aux dérivées partielles font intervenir des grandeurs continues dans l'espace et dans le temps. Nous souhaitons donc mettre en place la structure permettant de résoudre de telles équations en faisant une approximation par une méthode sans maillage et plus particulièrement avec la méthode *HP-Clouds*. Voilà pourquoi ce chapitre va consacrer une section à la mise en place de la méthode de Ritz-Galerkin, méthode la plus utilisée pour résoudre des équations aux dérivées partielles, dans le contexte d'une approximation *HP-Clouds*. Pour terminer, nous consacrerons une section destinée à deux autres méthodes d'interpolation parfois utiles dans d'autres applications.

2.1 Méthode de résolution par l'exemple en électromagnétisme

2.1.1 Les équations de Maxwell

En électromagnétisme, les équations décrivant les phénomènes physiques sont les équations de Maxwell. Dans un repère fixe et dans l'hypothèse des régimes quasi-stationnaires, ces équations :

$$\text{Loi d'Ampère} \quad \text{rot}(\vec{H}) = \vec{J}$$

$$\text{Loi de Faraday} \quad \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Loi de Gauss} \quad \text{div}(\vec{D}) = \rho$$

$$\text{Induction à divergence nulle} \quad \text{div}(\vec{B}) = 0$$

où \vec{H} , \vec{E} , \vec{B} et \vec{D} sont respectivement les champs magnétique, électrique, l'induction magnétique et la conduction électrique. \vec{J} est la densité de courant électrique.

Ces quatre équations sont associées aux lois de comportement des milieux à savoir :

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} + \vec{B}_r \end{cases} \quad (2.1)$$

où ϵ_0 et ϵ_r sont respectivement la permittivité du vide et la permittivité relative, μ_0 et μ_r la perméabilité du vide et la perméabilité relative.

D'autre part, la loi d'Ohm peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.2)$$

2.1.2 Les différentes formulations en électromagnétisme

Dans le contexte des éléments finis, trois grandes familles de formulations sont applicables. Le tableau 2.1 récapitule de façon non exhaustive les différentes formulations disponibles dans les logiciels de simulation utilisant la *M.E.F* en électromagnétisme.

Type	Grandeurs	élé. finis	continuité
potentiel	$V, \vec{A}, \vec{T} \dots$	nodaux	V, A, \vec{T} continus
champs	$\vec{E}, \vec{H} \dots$	arêtes	\vec{E}_T continu
densité	$\vec{J}, \vec{B} \dots$	facette	$\vec{B} \cdot \vec{n}$ continu

TABLEAU 2.1: Formulations les plus utilisées pour la méthode des éléments finis

2.1.3 Formulation en potentiel scalaire total magnétique Φ [3]

Le choix des formulations étant important, pour simplifier l'approche théorique, nous nous plaçons ici dans le cas d'une formulation en potentiel scalaire total magnétique qui reste quand même assez simple. Cette étude peut par contre être menée dans le cas de formulation plus complexe sans remettre en cause le développement ci-après.

Quand il n'y a pas de source de courant, nous pouvons établir que le champ dérive d'un potentiel scalaire noté Φ :

$$\text{rot}(\vec{H}) = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi) \quad (2.3)$$

La conservation du flux de l'induction et la loi de comportement du milieu magnétique introduites dans l'équation précédente conduisent alors à :

$$-\text{div}(\mu_0 \mu_r \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi)) + \text{div}(\vec{B}_r) = 0 \quad (2.4)$$

Pour décrire complètement le comportement magnétique, il reste à étudier ce qui se passe aux interfaces entre matériaux et aux limites du domaine d'étude. Considérons deux régions de perméabilité μ_{r_1} et μ_{r_2} dans l'air. Γ_D représente les conditions aux limites de Dirichlet et Γ_N représente les conditions aux limites de Neumann. Enfin, Γ_{12} représente les conditions aux interfaces (Figure 2.1).

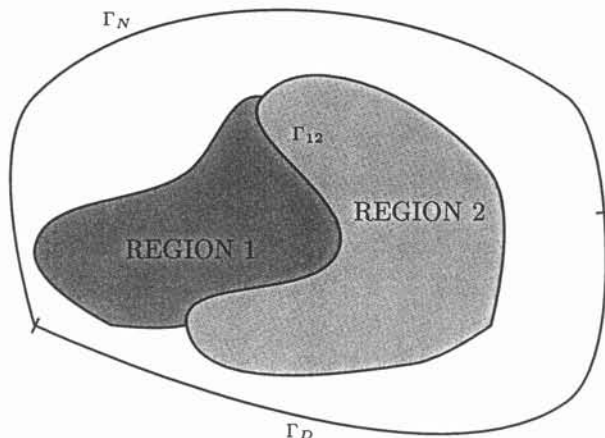


FIGURE 2.1: Problème général magnétostatique

Pour cette formulation les conditions aux limites de Dirichlet se traduisent par :

$$\begin{cases} \vec{H} \times \vec{n} = \vec{0} \\ \Phi = cst \end{cases} \quad (2.5)$$

où \vec{n} est le vecteur normal à la discontinuité.

Pour les conditions de Neumann homogènes, nous obtenons :

$$\begin{cases} \vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \\ -\mu_0 \mu_r \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi) \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Quant aux conditions aux interfaces, la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique est assurée naturellement par la continuité du potentiel. Par contre, la continuité de la composante normale de l'induction entraîne :

$$\mu_0 \mu_{r_1} \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi) \cdot \vec{n}_1 + \mu_0 \mu_{r_2} \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi) \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad (2.7)$$

2.1.4 La résolution

Nous nous plaçons ici dans le cas bidimensionnel pour une méthode sans maillage. Soit N_i une fonction de pondération scalaire continue. La forme intégrale de l'équation 2.4 s'écrit alors[3] :

$$\int \int_{\Omega} N_i \operatorname{div} \left(-\mu_0 \mu_r \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Phi) \right) d\Omega + \int \int_{\Omega} N_i \operatorname{div}(\overrightarrow{B}_r) d\Omega = 0 \quad (2.8)$$

L'application du théorème de Green permet d'obtenir ;

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(N_i) \mu_0 \mu_r \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Phi) d\Omega - \int \int_{\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(N_i) \overrightarrow{B}_r d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_N} N_i \mu_0 \mu_r \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Phi) \cdot \overrightarrow{n} dl - \int_{\Gamma_D} N_i \mu_0 \mu_r \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Phi) \cdot \overrightarrow{n} dl \\ & - \int_{\Gamma_{12}} N_i \mu_0 \mu_{r_1} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Phi) \cdot \overrightarrow{n}_1 dl - \int_{\Gamma_{12}} N_i \mu_0 \mu_{r_2} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Phi) \cdot \overrightarrow{n}_2 dl = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

D'après les conditions aux limites et aux interfaces, les intégrales sur Γ_N et Γ_{12} sont nulles. Pour la méthode *HP-Clouds*, le potentiel scalaire Φ s'écrit :

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{i=N_N} \phi_i(\vec{x}) u_i \quad (2.10)$$

où $\phi_i(\vec{x})$ sont les fonctions de forme *HP-Clouds*.

Dans ce contexte, la résolution de l'équation 2.4 conduit à la résolution d'un système matriciel $\mathcal{M}X = \mathcal{F}$ tel que :

$$\begin{cases} m_{i,j} &= \int \int_{\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(N_i) \mu_0 \mu_r \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\phi_j) d\Omega \\ f_i &= \int \int_{\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(N_i) \overrightarrow{B}_r d\Omega + \int_{\Gamma_D} N_i \mu_0 \mu_r \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\phi_i) \cdot \overrightarrow{n} dl \end{cases} \quad (2.11)$$

2.1.5 La méthode de Ritz-Galerkin

Cette méthode découle de la méthode des résidus pondérés énoncée ci-dessus. Dans celle-ci les fonctions N_i correspondent aux fonctions de forme *HP-Clouds*. En conséquence, les coefficients de la matrice de résolution peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} m_{i,j} &= \int \int_{\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\phi_i) \mu_0 \mu_r \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\phi_j) d\Omega \\ f_i &= \int \int_{\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\phi_i) \overrightarrow{B}_r d\Omega + \int_{\Gamma_D} \phi_i \mu_0 \mu_r \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\phi_i) \cdot \overrightarrow{n} dl \end{cases} \quad (2.12)$$

Le système matriciel ainsi obtenu est défini positif.

Les fonctions de forme *HP-Clouds* ayant une portée limitée aux boules, les termes matriciels deviennent :

$$\begin{cases} m_{i,j} &= \int \int_{b_i \cap b_j \cap \Omega} \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_i) \mu_0 \mu_r \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_j) d\Omega \\ f_i &= \int \int_{b_i \cap b_j \cap \Omega} \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_i) \overrightarrow{B}_r d\Omega + \int_{\Gamma_D} \phi_i \mu_0 \mu_r \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_i) \cdot \vec{n} dl \end{cases} \quad (2.13)$$

D'après la connectivité associée aux boules, support des fonctions de forme, le système matriciel obtenu est creux. En effet, pour deux boules b_i et b_j non connectées entre elles (par exemple b_j ne participant pas à la connectivité de b_i) alors le terme matriciel m_{ij} est nul.

Les termes matriciels sont calculés par intégration sur une intersection de deux supports de fonctions de forme. Le calcul des termes matriciels passe donc par une intégration efficace des fonctions de forme sur leurs supports. Cette phase est très délicate et nécessite en conséquence une attention particulière (partie 3).

Nous avons donc établi une matrice de résolution définie positive et creuse mais pour finaliser la phase de résolution par la méthode Ritz-Galerkin, il reste à mettre en place les conditions aux limites qui dans le cadre des méthodes sans maillage requièrent une attention toute particulière.

2.2 Les conditions aux limites

Dans le cas des éléments finis, les conditions aux limites de Dirichlet s'introduisent facilement en imposant la valeur nodale correspondante à la valeur de la condition aux limites. De ce fait, dans le système matriciel, la valeur nodale portant la condition aux limites de Dirichlet sera substituée par sa valeur. Cette méthode est appelée méthode de substitution.

En ce qui concerne les conditions de Neumann, dans le cas d'une formulation de type potentiel, les éléments finis autorisent naturellement ce genre de conditions ¹.

Par contre dans le cas de la méthode *HP-Clouds*, il est clair que les démarches précédentes ne sont plus valables car dans la majorité des cas les fonctions de forme *HP-Clouds* ne sont pas interpolantes ². Dans ce cas, les conditions de Neumann comme celles de Dirichlet devront subir un traitement adapté.

En résumé, le caractère non interpolant des fonctions de forme *HP-Clouds* est à la base de la difficulté de traitement des conditions aux limites. Pour bien prendre les conditions aux limites plusieurs solutions ont été explorées.

2.2.1 Fonction de forme interpolante

La méthode la plus évidente consiste à rendre les fonctions de forme *HP-Clouds* interpolantes. Pour cela, il suffit de diminuer le rayon des boules des fonctions de forme pour qu'elles deviennent interpolantes (Figure 2.2).

¹Se reporter à la section 1.1.2

²Se reporter à la section 1.6.2

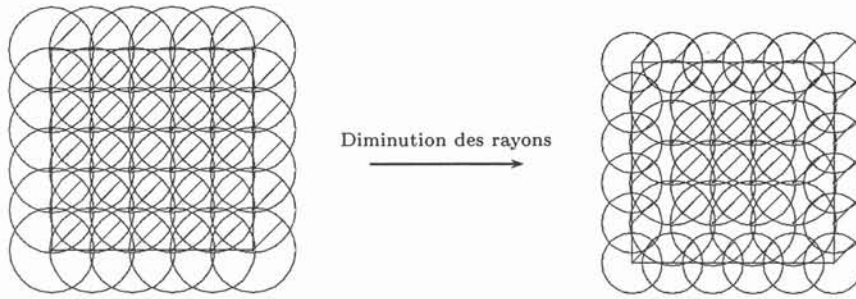


FIGURE 2.2: Diminution des rayons pour rendre les fonctions de forme interpolantes

Cette solution est a priori intéressante car elle nous ramène à la méthode de substitution telle qu'elle se pratique pour la méthode des éléments finis.

Cette solution apporte une solution au traitement des conditions aux limites. Cependant, nous l'avons écartée principalement parce qu'elle contraint la taille des boules sur les frontières du domaine, et par conséquent la distribution de noeuds car la propriété de recouvrement du domaine doit continuer à être assurée.

Remarquons aussi que cette approche conduit à des résultats de mauvaise qualité pour une approximation d'ordre 0. Pour cela, conduisons la résolution de $\Delta T = 0$ sur un carré unitaire avec des conditions $T = 0$ à gauche et $T = 1$ à droite. La solution exacte est naturellement une droite $T(\vec{x}) = \vec{x}$. L'approximation *HP-Clouds* d'ordre 0 avec des fonctions de forme interpolantes donne la figure 2.3 (11 noeuds équirépartis par direction).

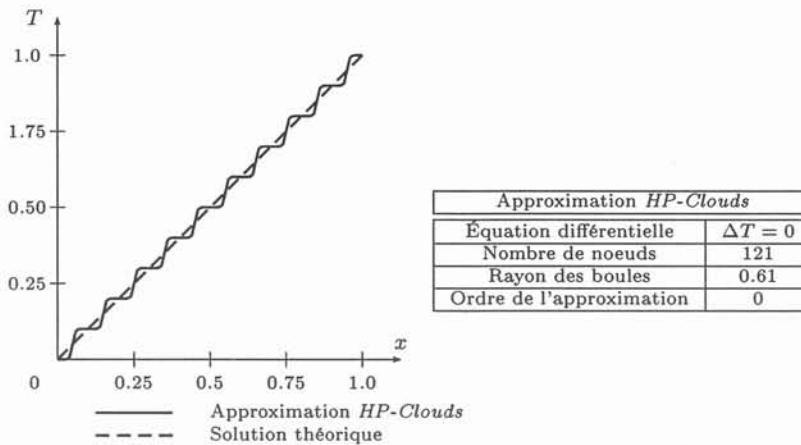


FIGURE 2.3: Oscillations obtenues avec une méthode d'interpolation sans maillage

Pour comprendre le phénomène d'oscillations observé sur la figure 2.3, il faut se rappeler que la méthode *HP-Clouds* réalise une approximation $C^\infty(D_E)$ sur tout le domaine d'étude et ce quel que soit l'ordre. Par ailleurs, le fait d'avoir des

fonctions de forme interpolantes impose à l'approximation de "passer" par les valeurs nodales aux noeuds. Comme par ailleurs l'approximation est d'ordre 0 il s'en suit la génération d'oscillations entre les noeuds pour satisfaire le caractère infiniment continue de l'approximation. Bien sûr, ce défaut disparaît dès que l'ordre de l'approximation est conforme à celui de la solution souhaitée.

2.2.2 Les multiplicateurs de Lagrange [44]

Une autre solution, qui a déjà fait ses preuves dans d'autres contextes, consiste à imposer les conditions aux limites sous une forme faible, en introduisant une fonctionnelle supplémentaire à la fonctionnelle (2.9) :

$$\int_{\Gamma_D} \lambda_D \cdot (V - V_{DIR}) d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \lambda_N \cdot (\phi_N + \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot \overrightarrow{n}) \cdot d\Gamma \quad (2.14)$$

où Γ_D et Γ_N sont respectivement les frontières de Dirichlet et de Neumann, λ_D et λ_N sont les multiplicateurs de Lagrange sur les frontières Γ_D et Γ_N et enfin, V_{DIR} et ϕ_N les valeurs prescrites pour la variable d'état et son flux sortant.

Cette approche est attirante car elle est indépendante de la méthode d'approximation. En particulier, dans le contexte des éléments finis, elle a déjà été utilisée avec succès. De même, dans celui des méthodes sans maillage, cette méthode assure une parfaite prise en compte des conditions aux limites qu'elles soient de type Dirichlet ou de Neumann[21]. Concrètement, la figure 2.4 prouve la validité d'une telle méthode pour une résolution simple ($\Delta T = \sin(2\pi x) \cdot \sin(2\pi y)$), sur un carré unitaire avec 7 noeuds par direction équirépartis, soit un total de 49 noeuds avec une base d'ordre 1, la résolution avec la méthode *HP-Clouds* est pour la première fois correcte.

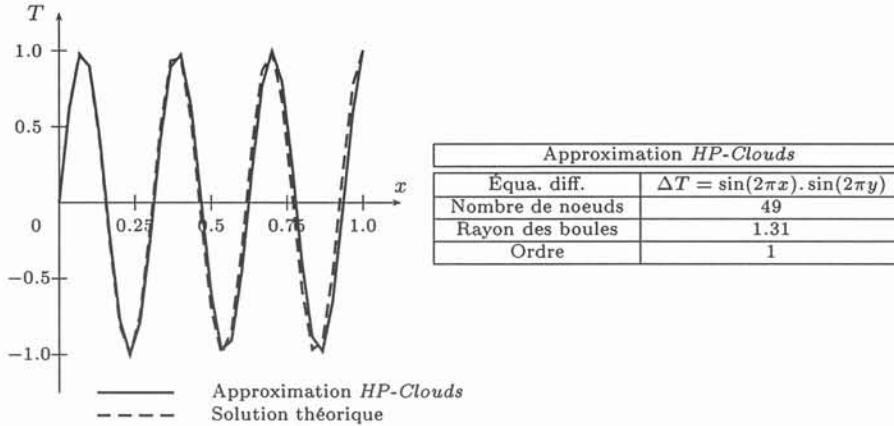


FIGURE 2.4: Utilisation des multiplicateurs de Lagrange

Cependant, l'ajout des multiplicateurs de Lagrange fait perdre le caractère défini positif de la matrice de résolution. Dans le cas de problèmes complexes où

le nombre d'inconnues devient conséquent, la perte du caractère défini positif peut s'avérer être un handicap sérieux puisque les algorithmes rapides tel que ICCG ne peuvent plus être utilisés. Dans ce cas, d'autres algorithmes se révèlent plus adaptés, notamment la méthode du résidu minimum et la méthode du gradient conjugué avec un préconditionnement diagonal [5]. Pour cette raison, la méthodes des multiplicateurs de Lagrange a été abandonnée au profit de la méthode suivante.

2.2.3 La méthode de substitution généralisée

La technique de substitution telle qu'elle est pratiquée dans le contexte des éléments finis n'est pas directement transposable à l'approche *HP-Clouds*, car les fonctions de forme *HP-Clouds* ne sont pas interpolantes. Pour prendre en compte les conditions aux limites dans le cas de la méthode *HP-Clouds*, il est indispensable de créer des combinaisons linéaires sur les valeurs nodales, et d'opérer des substitutions sur les combinaisons linéaires. En se mettant dans le cas d'une formulation de type potentiel scalaire, les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann correspondent aux combinaisons linéaires suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=N_N} \phi_i(\vec{x}) \cdot u_i = V_{DIR} \\ \sum_{i=1}^{i=N_N} \frac{\partial \phi_i(\vec{x})}{\partial n} \cdot u_i = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

où V_{DIR} est la valeur de la condition de Dirichlet, et \vec{x} les coordonnées des noeuds des frontières supportant les conditions aux limites.

La méthode de substitution est généralisable et peut se résumer ainsi [31] :

Soit une équation aux dérivées partielles entraînant la résolution du système $\mathcal{M} \cdot \mathcal{X} = \mathcal{G}$ de dimension $n \times n$.

\mathcal{X} représentant les valeurs nodales, il est possible de décomposer ce vecteur en \mathcal{X}_l et \mathcal{X}_{nl} qui correspondent respectivement aux valeurs nodales libres (aucun lien avec les conditions aux limites) et aux valeurs nodales liées à des conditions aux limites (par combinaison linéaire dans le cas des méthodes sans maillage). Les valeurs nodales peuvent alors s'exprimer sous la forme :

$$\mathcal{X} = \mathcal{S} \cdot \mathcal{X}_l + \mathcal{X}_{nl} \quad (2.16)$$

Le calcul des valeurs nodales revient alors à la résolution matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}' \cdot \mathcal{X}_l &= \mathcal{G}' \\ \text{avec } \begin{cases} \mathcal{M}' = \mathcal{S}^T \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{S} \\ \mathcal{G}' = \mathcal{S}^T \cdot \mathcal{G} - \mathcal{S}^T \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{X}_{nl} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Cette méthode est robuste et efficace comme le prouve la figure 2.5 qui correspond à la résolution de $\Delta T = \sin(2\pi x) \cdot \sin(2\pi y)$ sur un carré unitaire.

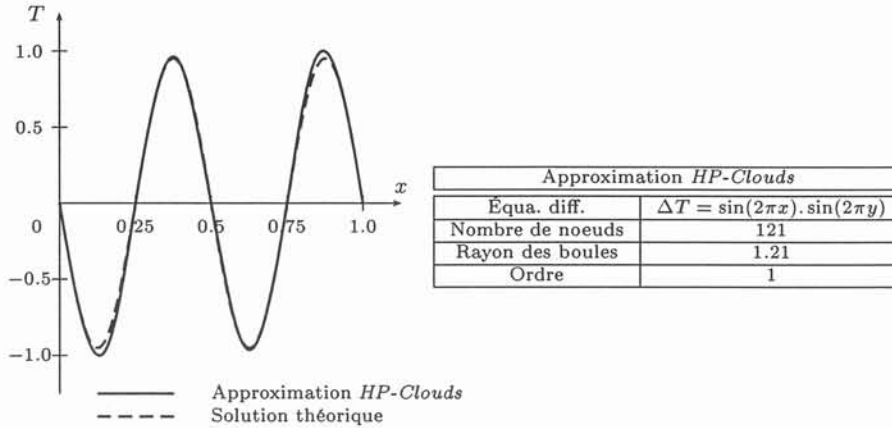


FIGURE 2.5: Utilisation de la méthode de substitution

Remarquons cependant que cette méthode peut entraîner quelques difficultés d'implantation [32] ce qui, par le passé, a ralenti son développement y compris dans le contexte de la *M.E.F.*

Pour des formulations en champs ou en potentiels vecteurs, les conditions aux limites peuvent se traiter en étendant l'approche présentée ci-dessus. Une difficulté supplémentaire réside dans la construction des combinaisons linéaires rendant compte des conditions aux limites et de la formulation qui souvent sont rattachées aux vecteurs normaux et tangents aux frontières du domaine. Malgré tout, c'est la méthode que nous préconisons et que nous conserverons tout au long de ce travail.

2.3 Les conditions aux interfaces

Dans cette section nous nous plaçons, pour des besoins d'illustration, dans le cas d'une formulation scalaire. Rappelons que, pour cette formulation le changement de régions en électromagnétisme (changement de matériaux par exemple) nécessite la discontinuité de la dérivée normale de la variable d'état. La méthode des éléments finis s'en sort très simplement car elle possède intrinsèquement ce genre de discontinuité³. Comme il a été vu dans le chapitre précédent, la méthode *HP-Clouds*, sans traitement spécial, génère une approximation infiniment continûment dérivable. En d'autres termes, l'approximation *HP-Clouds* lisse la solution à l'interface entre deux régions comme le montre la figure 2.6.

Cette qualité appréciable dans le cas de problème mono-région devient un handicap pour des problèmes faisant intervenir des discontinuités physiques comme la présence de plusieurs matériaux par exemple.

Actuellement, les tentatives de prise en compte des conditions aux interfaces restent infructueuses. Même si de quelques articles [17], [18] proposent

³Se reporter à la section 1.1.2

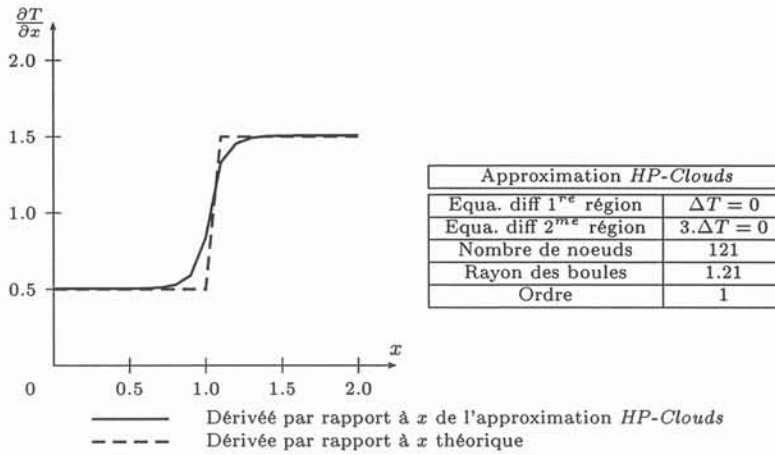


FIGURE 2.6: Lissage non physique d'une discontinuité à l'interface entre deux régions

des solutions à cet épineux problème, la prise en compte des conditions aux interfaces reste un point sensible lors de la résolution à l'aide d'une méthode sans maillage. Nos travaux dans ce domaine ont abouti à étudier trois méthodes différentes pour réaliser l'implantation des conditions aux interfaces [47].

2.3.1 Troncature des boules

Cette méthode est très intuitive car elle découle directement de la méthode des éléments finis. En effet, les éléments finis, au passage de deux régions génèrent une discontinuité brutale de la dérivée normale de la variable d'état tout simplement parce que l'approximation utilise deux éléments différents.

Un parallèle peut être fait dans le cas de la méthode *HP-Clouds* en tronquant les boules (Figure 2.7) se trouvant sur l'interface. En pratique, l'approximation en un point d'une région n'utilisera exclusivement que les noeuds de cette région.

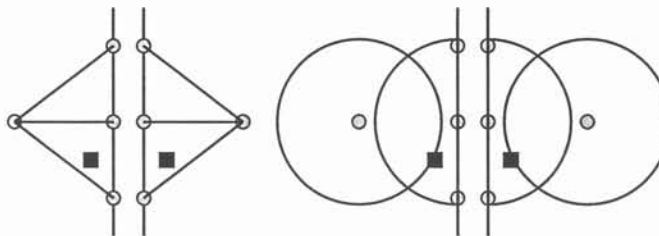


FIGURE 2.7: Troncature des boules à l'interface

Malheureusement, si l'objectif de prise en compte des effets de discontinuité de certaines composantes des champs est bien atteint ($\vec{H} \cdot \vec{n}$, $\vec{B} \times \vec{n}$), l'ap-

proximation elle même est discontinue, ce qui introduit aussi une discontinuité, certes faible mais bien réelle, sur les composantes des champs $(\vec{H} \cdot \vec{n}, \vec{B} \times \vec{n})$ qui physiquement n'a pas lieu d'être. En conséquence de quoi cette méthode doit être abandonnée.

2.3.2 Multiplicateurs de Lagrange [33][34]

Comme pour les conditions aux limites, les conditions aux interfaces peuvent être introduites sous une forme faible. En pratique, cette méthode est basée sur la troncature des boules en ajoutant un raccordement de l'approximation sur l'interface au moyen de multiplicateurs de Lagrange. Cette méthode entraîne donc l'ajout de la fonctionnelle suivante à la fonctionnelle (2.9) :

$$\int_{\Gamma_{12}} \lambda_C \cdot (V_1 - V_2) d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \lambda_{12} \cdot (p_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{V}_1) \cdot \vec{n} + p_2 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{V}_2) \cdot \vec{n}) \cdot d\Gamma \quad (2.18)$$

où Γ_{12} est l'interface entre les deux régions, λ_C et λ_D sont respectivement les multiplicateurs de Lagrange associés à la continuité de la variable d'état $\vec{H} \times \vec{n}$ et de $\vec{B} \cdot \vec{n}$, V_1 et V_2 les valeurs de la variable d'état sur les deux régions et enfin p_1 et p_2 les paramètres caractéristiques des propriétés physiques des deux régions.

Cette méthode est efficace et permet de garder l'aspect continu de l'approximation, aspect perdu lors d'une troncature simple comme le prouve la figure 2.8 qui correspond à un problème test comportant trois régions.

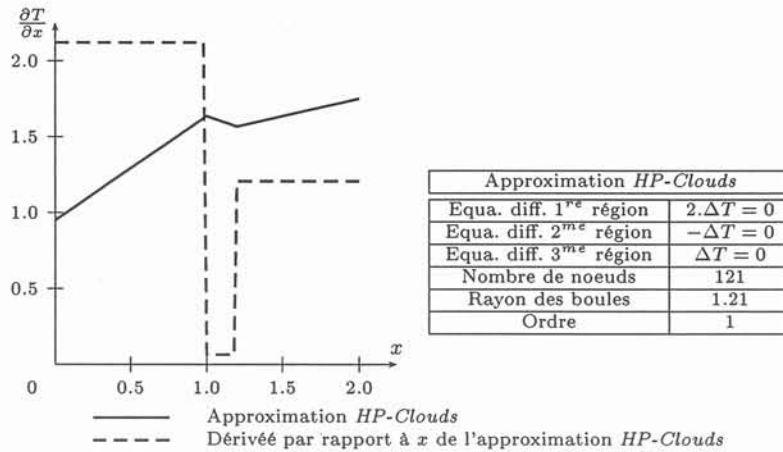


FIGURE 2.8: Résolution d'un problème test comportant 3 régions

Cependant, la remarque faite sur les conditions aux limites persiste : cette méthode cause la perte du caractère défini positif de la matrice de résolution. En conséquence de quoi cette méthode est aussi délaissée au profit de la suivante.

2.3.3 Ajout d'une fonction saut

Pour rester dans le contexte des méthodes sans maillage, une autre approche plus élégante est proposée [22]. Cette méthode consiste à rajouter à chaque noeud de l'interface une valeur nodale supplémentaire correspondant à l'ajout d'une fonction de forme dont la dérivée normale par rapport à l'interface est discontinue. Pour simplifier, considérons que l'espace est de dimension 2 et que la discontinuité est parallèle à une direction principale de l'espace (Figure 2.9).

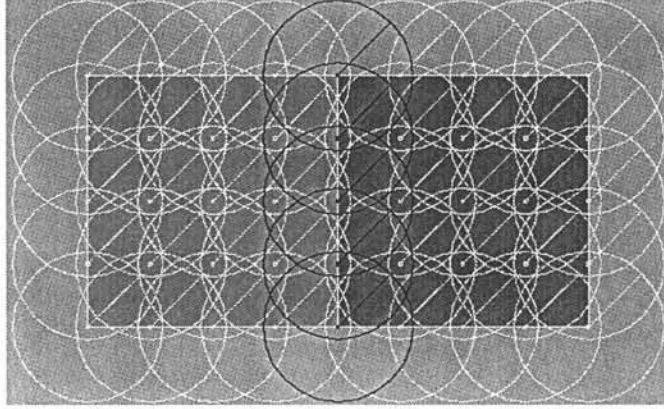


FIGURE 2.9: Topologie pour un problème à deux régions

La fonction de forme ajoutée (Figures 2.10 et 2.11) correspond au produit d'une fonction de forme de Shepard de dimension 1 dans la direction tangentielle à l'interface, ceci pour assurer la continuité de la dérivée tangentielle au passage de l'interface, avec une fonction notée f_S de dérivée discontinue dans la direction normale à l'interface. La fonction f_S a la particularité d'être continue et de posséder une dérivée première est discontinue. Une expression de f_S peut être :

$$f_S(r) = \begin{cases} -\frac{1}{6} \cdot r^3 + \frac{1}{2} \cdot r^2 - \frac{1}{2} \cdot r + \frac{1}{6} & \text{pour } r \leq 0 \\ 0 & \text{pour } r \geq 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Dans cette expression $r = \frac{\|\vec{x} - \vec{x}_{IN}\|_2}{r_S}$ où \vec{x}_{IN} correspond à l'abscisse de l'interface et r_S le rayon de la fonction saut (Figure 2.10).

Pour un axe de discontinuité de direction quelconque, la démarche ci-dessus peut être généralisée en prenant l'abscisse curviligne (dans le cas 2D) de la ligne supportant la discontinuité pour la fonction de Shepard et une direction normale à l'abscisse curviligne pour la fonction saut.

Cette démarche est très intéressante car elle évite l'opération délicate de troncature des boules. De plus elle garde le caractère défini positif éventuel de la matrice de résolution.

Pour tester cette démarche, prenons un exemple simple. Le cas de deux régions r_1 sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ et r_2 sur le carré $[1, 2] \times [0, 1]$. Les équations aux dérivées partielles à résoudre sont :

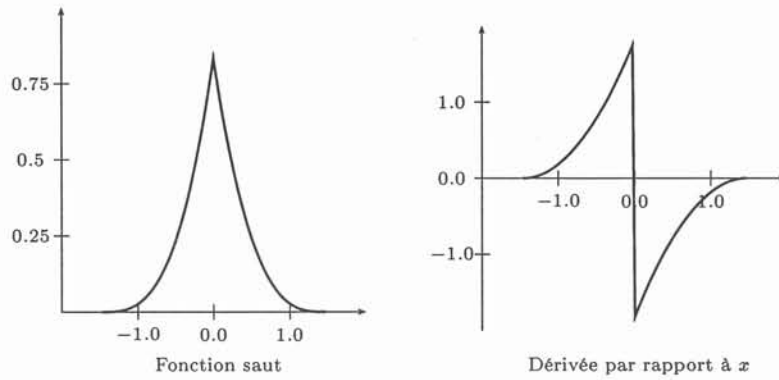
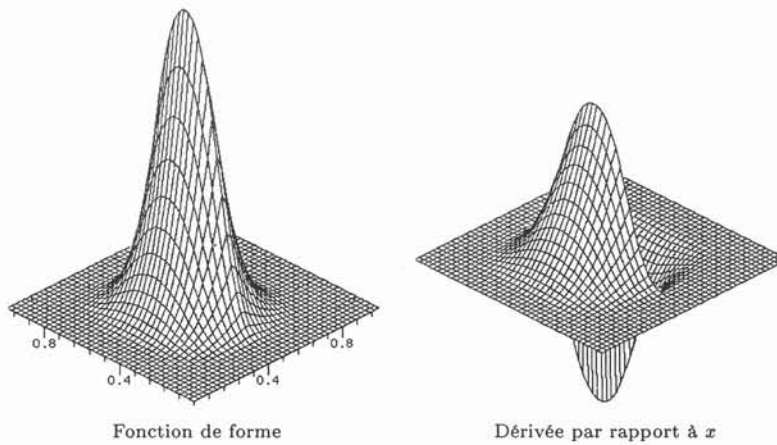
FIGURE 2.10: Fonction saut et sa dérivée par rapport à x 

FIGURE 2.11: Fonction de forme supplémentaire

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{sur } r_1 \\ 2.\Delta u(x, y) = 0 & \text{sur } r_2 \end{cases} \quad (2.20)$$

Le nuage de noeuds est isotrope et comporte 25 noeuds équirépartis par région. Les boules ont un rayon de 1.6 fois le pas inter-nodal (Figure 2.12). La fonction de pondération utilisée est la fonction de type 4 de degré 4.

La figure 2.13 montre la solution issue de la résolution sur une ligne au milieu du domaine D_E correspondant à $[(0, 0.5), (2, 0.5)]$.

Cette courbe est très intéressante car elle montre que la fonction saut génère bien la discontinuité voulue. A contrario, si la résolution ne faisait pas intervenir la fonction saut, l'approximation obtenue serait continûment dérivable à l'inter-région.

L'ajout de la fonction saut au niveau de l'inter-région permet de créer une discontinuité de la dérivée sur l'approximation *HP-Clouds*. Cette méthode est

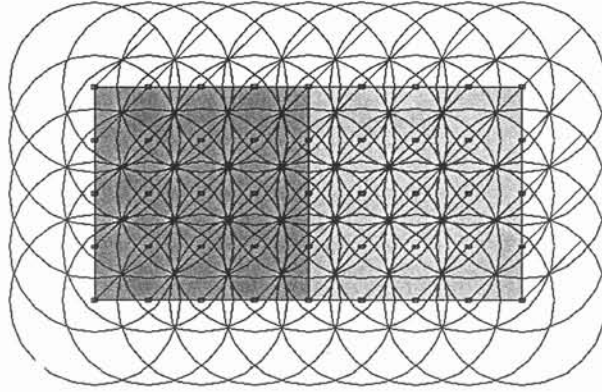


FIGURE 2.12: Résolution sur deux régions avec la fonction saut

robuste et fiable et permet d'envisager des résolutions plus complexes. Cependant, cette fonction saut fait perdre localement à l'approximation sa caractéristique de partition de l'unité, ce qui entraîne quelques déformations sur la dérivée de la solution comme le montre la figure 2.13. En conséquence, le saut de la dérivée est bien approché par l'ajout de la fonction saut, mais des oscillations apparaissent.

En ce qui concerne les conditions aux interfaces, il semble évident que l'ajout de la fonction saut semble la méthode la plus conforme à l'esprit de la méthode *HP-Clouds* dans son approche hiérarchique. Cependant, localement l'approximation perd son caractère partition de l'unité.

Remarque: 2.3.1 *Pour d'autres formulations l'ordre de la discontinuité de la fonction saut sera fonction de l'ordre de discontinuité de la variable d'état.*

2.4 Couplage éléments finis et méthode *HP-Clouds*

La grande majorité des logiciels de simulation sont basés actuellement sur la méthode des éléments finis. Outre le fait que la *M.E.F* est répandue, il faut bien avouer que les méthodes sans maillage ne sont pas encore en mesure de la concurrencer en général, car leur coût reste élevé⁴. Il est donc intéressant de penser à un couplage entre la méthode des éléments finis et une méthode sans maillage.

Le couplage entre les éléments finis et les méthodes sans maillage et plus particulièrement la méthode *HP-Clouds* n'est pas évident. Pour s'en convaincre il suffit de rappeler que les fonctions de forme éléments finis sont interpolantes alors que les fonctions de forme *HP-Clouds* ne le sont pas. Ainsi, dans ce genre de couplage, les noeuds à la frontière entre les deux types d'approximation portent les valeurs nodales des éléments finis ainsi que celles utilisées pour l'approximation *HP-Clouds* et ces deux valeurs nodales sont nécessairement différentes.

⁴Cf Partie 3

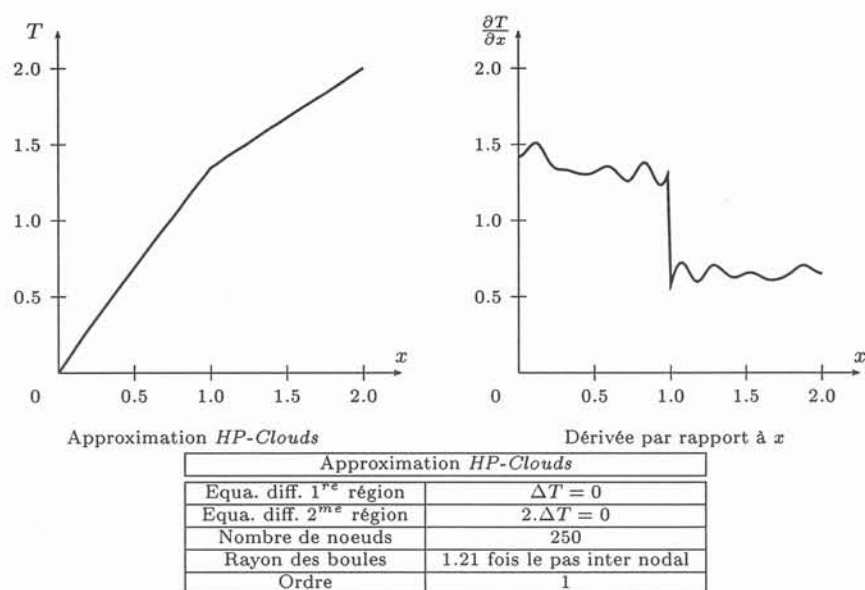


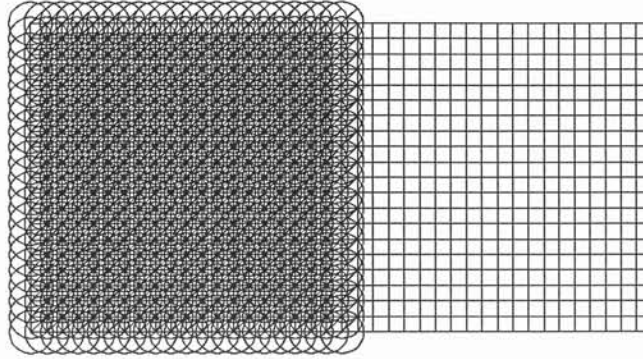
FIGURE 2.13: Résolution sur deux régions avec la fonction saut

Pour que la solution soit continue, il est nécessaire de “raccorder” l’approximation à la frontière. Pour cela, il faut introduire dans le système global des combinaisons linéaires reliant les deux formes d’approximation. Elles peuvent être présentées de la façon suivante. Supposons que les noeuds entre les deux régions portent des valeurs nodales u_{k_f} pour les éléments finis, la combinaison linéaire obtenue est :

$$\sum_{i=1}^{i=N_{ND}} \phi_i(\vec{x}_k) \cdot u_{i_D} = u_{k_F} \quad (2.21)$$

Pour validation, prenons le cas d’un problème bi-régions (Figure 2.14) bidimensionnel. La géométrie possède deux régions r_1 et r_2 carrées correspondant à $[0, 1] \times [0, 1]$ $[1, 2] \times [0, 1]$ et sur lesquelles les équations différentielles $\Delta T = 1$ et $\Delta T = 0$ sont respectivement résolues. Les conditions aux limites sont imposées sur les deux lignes extrêmes de la géométrie de gauche et de droite et sont $u = 0$ (Condition de Dirichlet). L’approximation *HP-Clouds* utilise 121 boules sur la région r_1 et une base d’ordre 1. Les résultats sont présentés sur la figure 2.15 qui représente l’approximation sur une ligne milieu de la géométrie $([(0, 0.5); (2, 0.5)])$.

L’approximation *HP-Clouds* dans un tel cas est très satisfaisante et permet d’envisager des résolutions où un tel couplage est pratique courante (voir partie 4). Remarquons cependant que l’approximation *HP-Clouds* étant d’ordre 1, l’approximation de la dérivée est d’ordre 0, ce qui donne lieu à quelques oscillations sur la courbe 2.15.

FIGURE 2.14: Couplage éléments finis, méthode *HP-Clouds*

2.5 Conclusion sur la méthode de Ritz-Galerkin

En ce qui concerne la résolution, les méthodes sans maillage ressemblent dans une grande mesure à la méthode des éléments finis dans le sens où la procédure de résolution est quasiment identique si on omet les conditions aux limites et les conditions aux interfaces.

En ce qui concerne les conditions aux limites, plusieurs solutions ont été expérimentées. La méthode de substitution généralisée s'est imposée facilement comme la plus robuste. Quant aux conditions aux interfaces, plusieurs méthodes ont été testées. Bien que l'ajout d'une fonction saut semble être particulièrement adaptée à ce genre de problème, il reste dans cette procédure quelques zones d'ombre qu'il faudra sans aucun doute lever.

Malgré ce dernier aspect, nous disposons de tous les outils pour résoudre désormais des équations différentielles avec des méthodes sans maillage.

Même si la méthode de Ritz-Galerkin est la plus utilisée, il ne faut pas pour autant oublier d'autres méthodes de résolution qui peuvent être utiles aussi dans le contexte des méthodes sans maillage (voir partie 3). C'est pour cette raison que nous avons décidé de présenter deux autres procédures de résolution utilisant les méthodes sans maillage et en particulier la méthode *HP-Clouds*.

2.6 La méthode de collocation par point

La méthode de collocation est particulièrement utile pour l'identification d'un modèle approximant de manière continue une grandeur discrète. Supposons une grandeur V connue sur un ensemble de points V_i pour $1 \leq i \leq N_N$, le but est de créer une approximation de la fonction V sur tout l'espace. Pour cela, nous allons créer une approximation *HP-Clouds* à partir des informations discrètes V_i . La construction d'une telle approximation conduit à la résolution d'un système matriciel $\mathcal{M}\mathcal{X} = \mathcal{F}$ où

$$\begin{cases} m_{i,j} &= \phi_j(\bar{x}_i) \\ f_i &= V_i \end{cases} \quad (2.22)$$

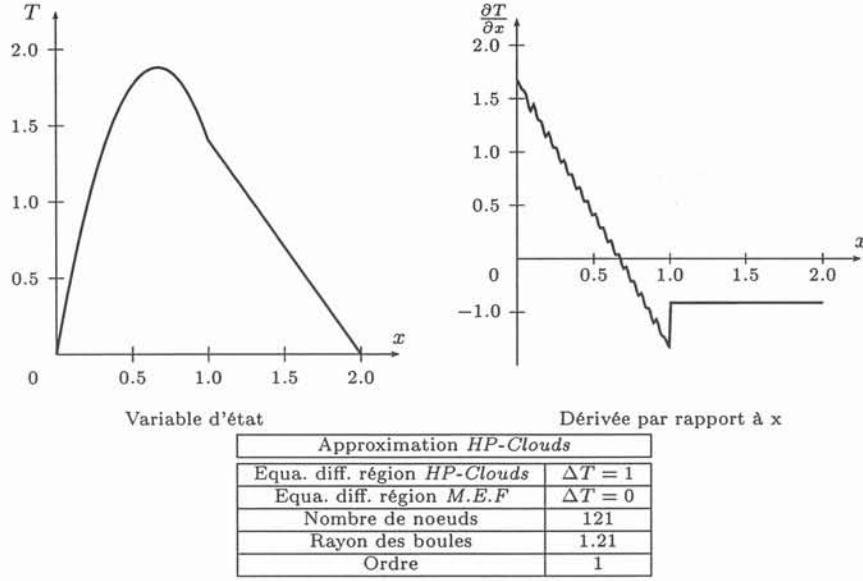


FIGURE 2.15: Solution pour le couplage *M.E.F* et *HP-Clouds*

où \vec{x}_i correspond aux coordonnées du point supportant la valeur V_i .
 Pour validation prenons une fonction V à trois paramètres telle que :

$$V(x, y, z) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \sin(2\pi z) \tag{2.23}$$

avec 7 points de discrétisation par direction, ce qui entraîne la résolution d'une matrice creuse de dimension (343×343) . Cette résolution, particulièrement peu coûteuse, permet d'obtenir une solution tout à fait satisfaisante (Figure 2.16).

L'expression des coefficients matriciels, montre que la matrice de résolution est creuse mais par contre cette matrice n'est pas symétrique, sauf dans le cas où les rayons des boules ainsi créées sont constants. De plus l'adaptativité en p n'est pas évidente, dans le sens où pour augmenter l'ordre de l'approximation, il est indispensable de connaître d'autres valeurs associées à chaque point comme par exemple les dérivées premières en ces points.

Bien que cette méthode soit facile à mettre en oeuvre, il faudra préférer une méthode de résolution générant un système matriciel symétrique comme la méthode des moindres carrés.

2.7 La méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés peut s'appliquer dans un contexte identique à la méthode précédente. Étant donné un ensemble de point supportant des valeurs associées à une grandeur continue $V(\vec{x})$, l'objectif de la méthode des moindres carrés est de calculer les valeurs nodales telles que :

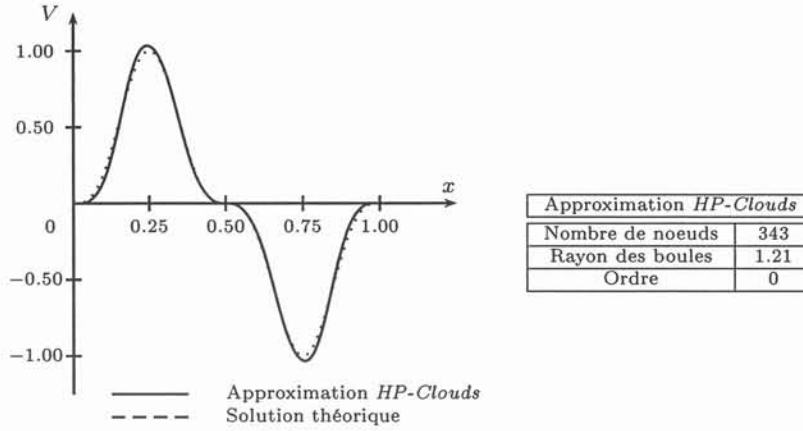


FIGURE 2.16: Résolution par collocation

$$\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^{i=N_N} (\tilde{V}(\bar{x}_i) - V(\bar{x}_i))^2 \right)}{\partial u_i} = 0 \quad (2.24)$$

La résolution de l'équation 2.24, conduit à un système matriciel de dimension $N_N \times N_N$ creux donné par :

$$\sum_{i=1}^{i=N_N} \phi_k(\bar{x}_i) V(\bar{x}_i) = \sum_{j=1} \left(\sum_{i=1}^{i=N_N} \phi_k(\bar{x}_i) \phi_j(\bar{x}_i) \right) V_j \quad (2.25)$$

Pour validation considérons d'une part la fonction à 4 paramètres $V_1(x, y, z, t)$ tel que :

$$V_1(x, y, z, t) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \sin(2\pi z) \sin(2\pi t) \quad (2.26)$$

et d'autre part la fonction à 2 paramètres $V_2(x, y)$ tel que :

$$V_2(x, y, z, t) = \left(1 - \frac{y^2}{100}\right) \sin\left(\frac{x}{3}\right) \quad (2.27)$$

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 2.17.

Cette méthode est très avantageuse, car elle génère une matrice de résolution symétrique, ce qui autorise des algorithmes de résolution optimisés dont le coût permet d'envisager la résolution de systèmes matriciels importants. De plus cette méthode est extensible à un contexte d'adaptativité en p , ainsi la solution peut facilement être enrichie.

La méthode des moindres carrés n'est pas fréquemment utilisée un contexte de résolution. Mais dans des applications d'identification cette méthode joue un rôle important.

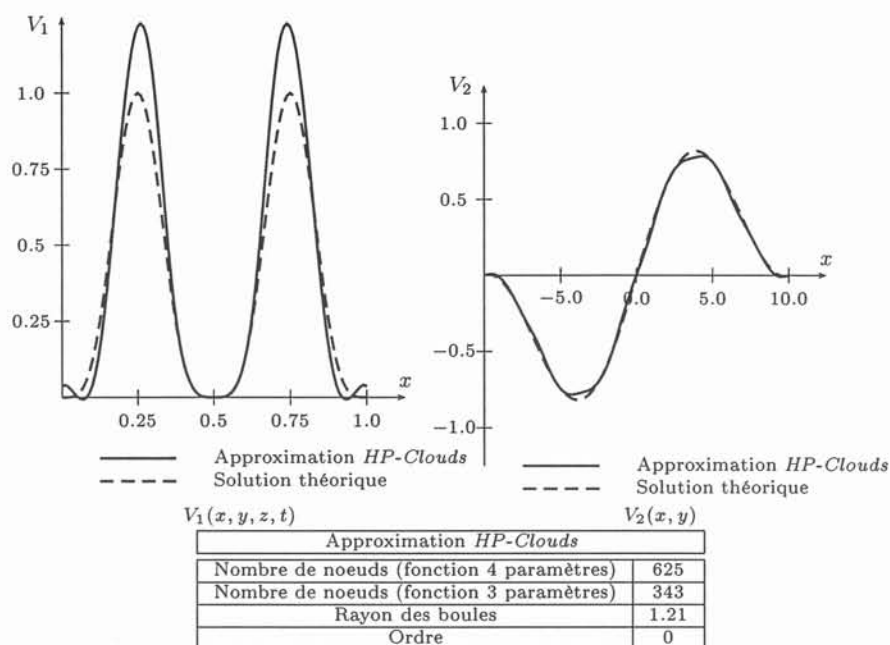


FIGURE 2.17: Résolution par la méthode des moindres carrés

2.8 Sensibilité à la modification du rayon

La qualité de l'approximation éléments finis est entre autres paramétrée par la position et la forme des éléments pour un nuage de noeuds donné. En somme, l'approximation est fortement dépendante de l'allure des zones d'influence. En ce qui concerne les méthodes sans maillage et plus particulièrement la méthode *HP-Clouds*, la paramétrage en fonction de la zone d'influence associée aux noeuds est évidemment toujours déterminant.

C'est pourquoi, il est nécessaire de connaître l'évolution de l'approximation *HP-Clouds* en fonction de ce paramètre. Nous avons mis en oeuvre un problème test pour étudier cette sensibilité : les tests seront effectués sur une résolution sur un domaine D_E carré pour l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8.\pi^2.\sin(2.\pi.x).\sin(2.\pi.y) \quad (2.28)$$

avec les conditions aux limites suivantes : sur chaque bord du carré $U = 0$. La solution exacte de ce problème peut s'écrire :

$$u(x, y) = \sin(2.\pi.x).\sin(2.\pi.y) \quad (2.29)$$

Dans ce cas test, le nuage de noeuds est isotrope et possède 6 noeuds par direction (36 boules). L'approximation est d'ordre 1. Le but de cette section est de faire varier le rayon en fonction du pas inter nodal. Le rayon des boules

prendra successivement les valeurs $[0.72, \dots, 2.51]$ relativement au pas inter-nodal. Dans tous les cas, le recouvrement du domaine par les boules est atteint.

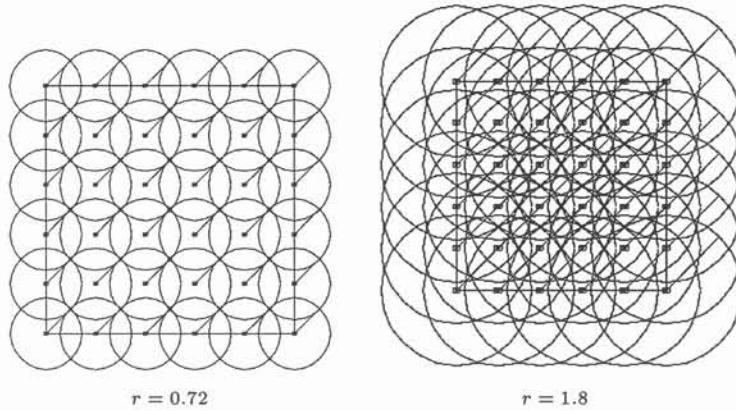


FIGURE 2.18: Boules pour des rayons de 0.72 et 1.8 fois le pas inter nodal

La figure 2.18 montre l'allure des boules pour les rayons correspondant à 0.72 et 1.8 fois le pas inter-nodal.

Afin de comparer la solution en fonction des rayons, l'erreur commise sur la solution sera calculée pour chaque pas sur un segment $[0, 0.8], [2, 0.8]$ par :

$$e = \int_{\Gamma} (u(x, y) - \tilde{u}(x, y))^2 . dl \quad (2.30)$$

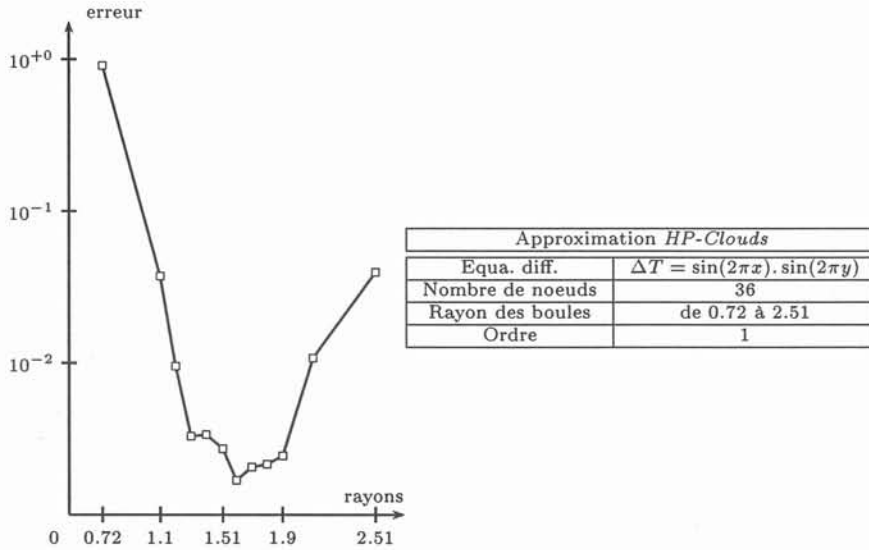


FIGURE 2.19: Erreur commise sur la solution en fonction du rayon des boules.

Pour les valeurs de rayons suscitées, la figure 2.19 représente l'erreur comise sur la ligne en fonction des rayons ramenés au pas inter nodal.

La figure 2.19 est remarquable car elle montre qu'il y a une zone où le rayon des boules minimise l'erreur sur l'approximation. Cette zone correspond à [1.51, 1.9]. Ceci peut s'expliquer intuitivement ainsi : avant la zone "optimale" les boules ne sont pas assez connectées entre elles. Comme la solution se "diffuse" au travers des boules par le biais des intersections entre les boules, dans le cas d'une faible connectivité la solution "peine" à se diffuser. Au delà de la zone optimale, la connectivité est tellement importante que l'approximation devient plus lisse que la solution souhaitée. Pour illustrer ce minimum, la figure 2.20 montre la solution sur le segment considéré. Pour comparaison la figure 2.21 montre la solution éléments finis sur le même segment.

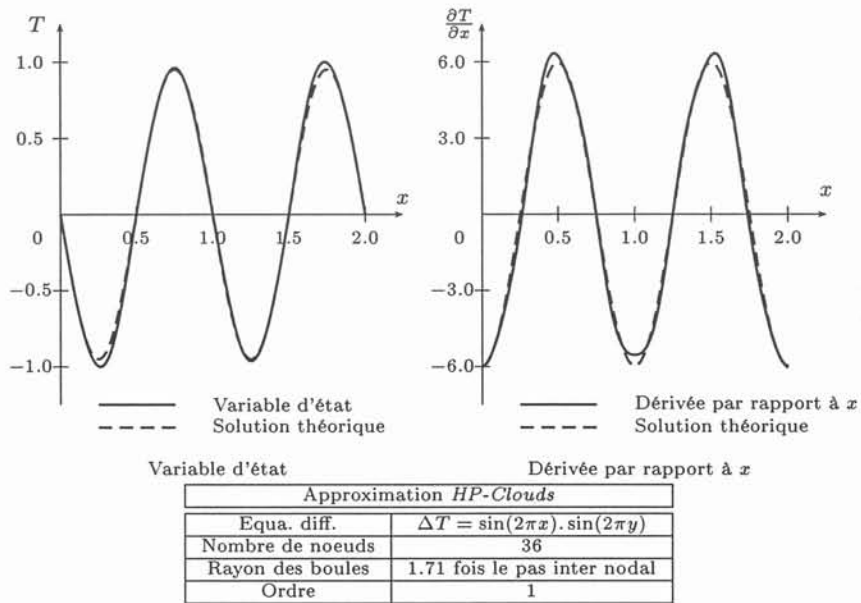


FIGURE 2.20: Approximation et sa dérivée par rapport à x pour la méthode *HP-Clouds*

Remarquons que l'approximation *HP-Clouds* permet dans cet exemple de générer une solution bien plus proche de la solution exacte que celle issue de la *M.E.F.*

Ce test de convergence en fonction des rayons est primordial et met en exergue pour ce paramètre un minimum très intéressant. En conclusion, il faut choisir pour les rayons des boules un bon compromis pour éviter un matrice trop pleine ou une solution trop lisse : un rayon de 1.3 fois le pas inter-nodal semble être une bonne solution.

2.9 Étude des propriétés de convergence

Les propriétés de convergence d'une méthode de simulation numérique permettent d'une part de valider le bon comportement de celle-ci et d'autre part

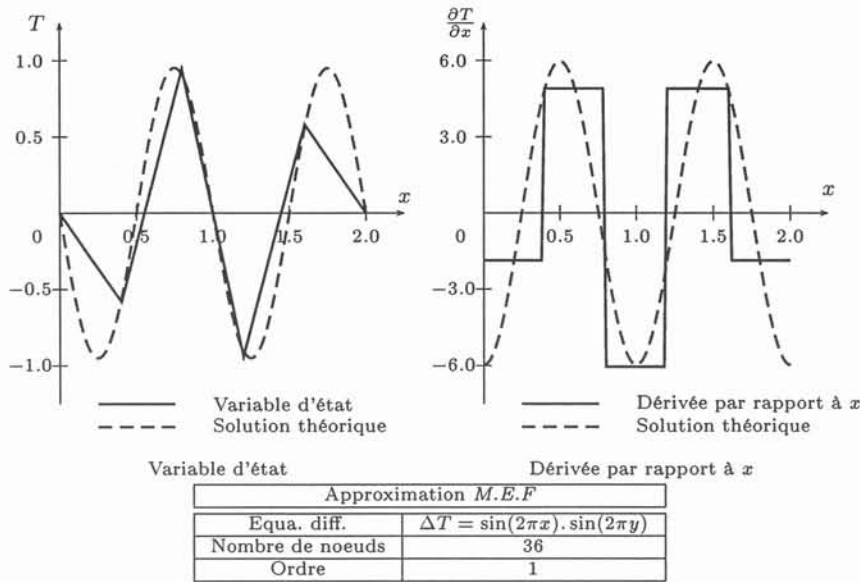


FIGURE 2.21: Approximation et sa dérivée par rapport à x pour la *M.E.F*

d'extrapoler un comportement dans certains cas extrêmes. Deux types de convergence sont à étudier : la convergence dite en h qui permet d'évaluer le comportement de la méthode en fonction de la discrétisation de l'espace c'est à dire le nombre de noeuds, et la convergence dite en p qui évalue le comportement de l'approximation en fonction de son ordre.

2.9.1 Convergence en h dans le cas unidimensionnel

Pour observer le comportement de la méthode *HP-Clouds* lors d'une étude de convergence en h , prenons le cas de deux résolutions d'équations différentielles simples dans le cas unidimensionnel. Premièrement, considérons l'équation différentielle $u(x)'' - u(x) = 0$ sur le segment $[0, 1]$ avec les conditions aux limites suivantes : $u(0) = 0$ et $u(1) = e$. La solution exacte de cette équation différentielle est $u(x) = e^x$

Deuxièmement, considérons l'équation différentielle $u(x)'' = 18.19.u(x)^{17}$ sur le segment $[0, 1]$ avec les conditions aux limites suivante : $u(0) = 0$ et $u(1) = 1$. La solution exacte de cette équation différentielle est $u(x) = x^{19}$.

La figure 2.22 montre l'erreur sur l'approximation *HP-Clouds* en fonction du nombre de noeuds et pour différents ordres d'approximation p ($p = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$).

La vitesse de convergence théorique d'une approximation d'ordre p est p [17][18]. Les pentes des différentes droites sont globalement en accord avec les valeurs théoriques de la vitesse de convergence.

2.9.2 Convergence en p dans le cas unidimensionnel

Pour observer le comportement de la méthode *HP-Clouds* pour une étude de convergence en p , prenons le cas de deux résolutions d'équations différen-

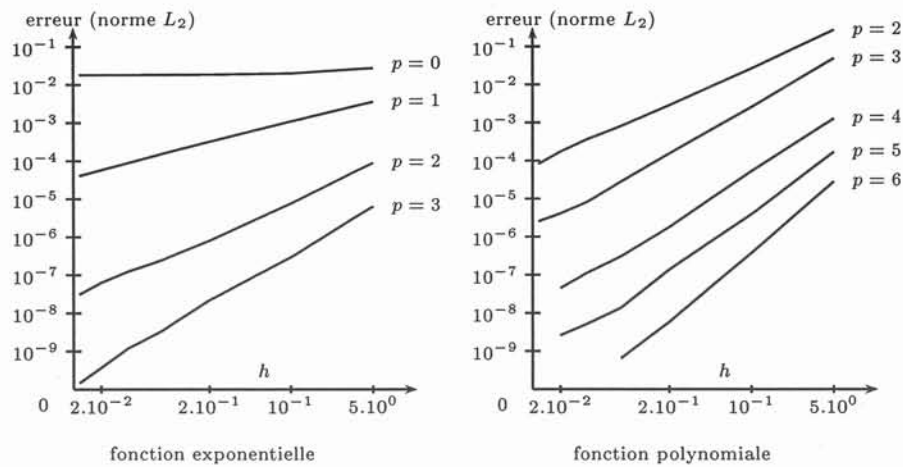


FIGURE 2.22: Convergence en h

tielles simples dans le cas unidimensionnel. Premièrement, considérons l'équation différentielle $u(x)'' - u(x) = 0$ sur le segment $[0, 1]$ avec les conditions aux limites suivante : $u(0) = 0$ et $u(1) = e$. La solution exacte de cette équation différentielle est $u(x) = e^x$. Deuxièmement, considérons l'équation différentielle $u(x)'' + (\frac{5\pi}{2})^2 \cdot u(x) = 0$ sur le segment $[0, 1]$ avec les conditions aux limites suivante : $u(0) = 0$ et $u(1) = 1$. La solution exacte de cette équation différentielle est $u(x) = \sin(\frac{5\pi}{2}x)$.

La figure 2.23 montre l'erreur sur l'approximation *HP-Clouds* en fonction de l'ordre de l'approximation et ceci pour différentes valeurs de nombre du noeuds [11, 21, 31].

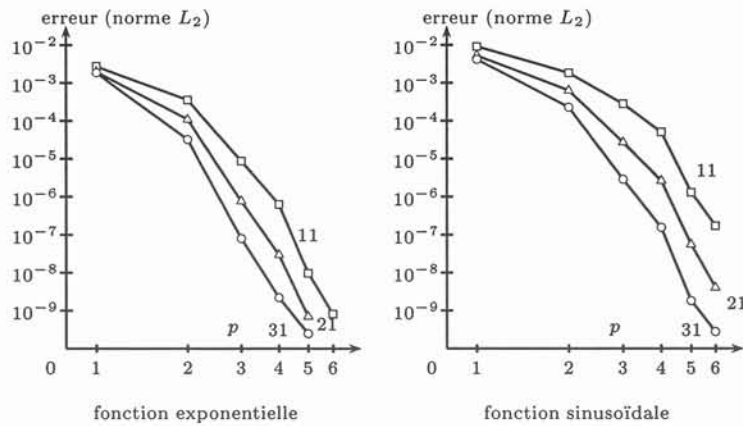


FIGURE 2.23: Convergence en p

Au même titre que la convergence en h , la convergence en p suit la théorie [17][18].

Il faut noter que plus l'approximation est d'ordre élevée, plus la matrice de résolution tend à être pleine. C'est pour cette raison qu'il est judicieux de

trouver un juste compromis entre l'ordre de l'approximation et le caractère creux de la matrice de résolution.

2.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décliné la méthode de résolution de Ritz-Galerkin dans le cadre des méthodes sans maillage.

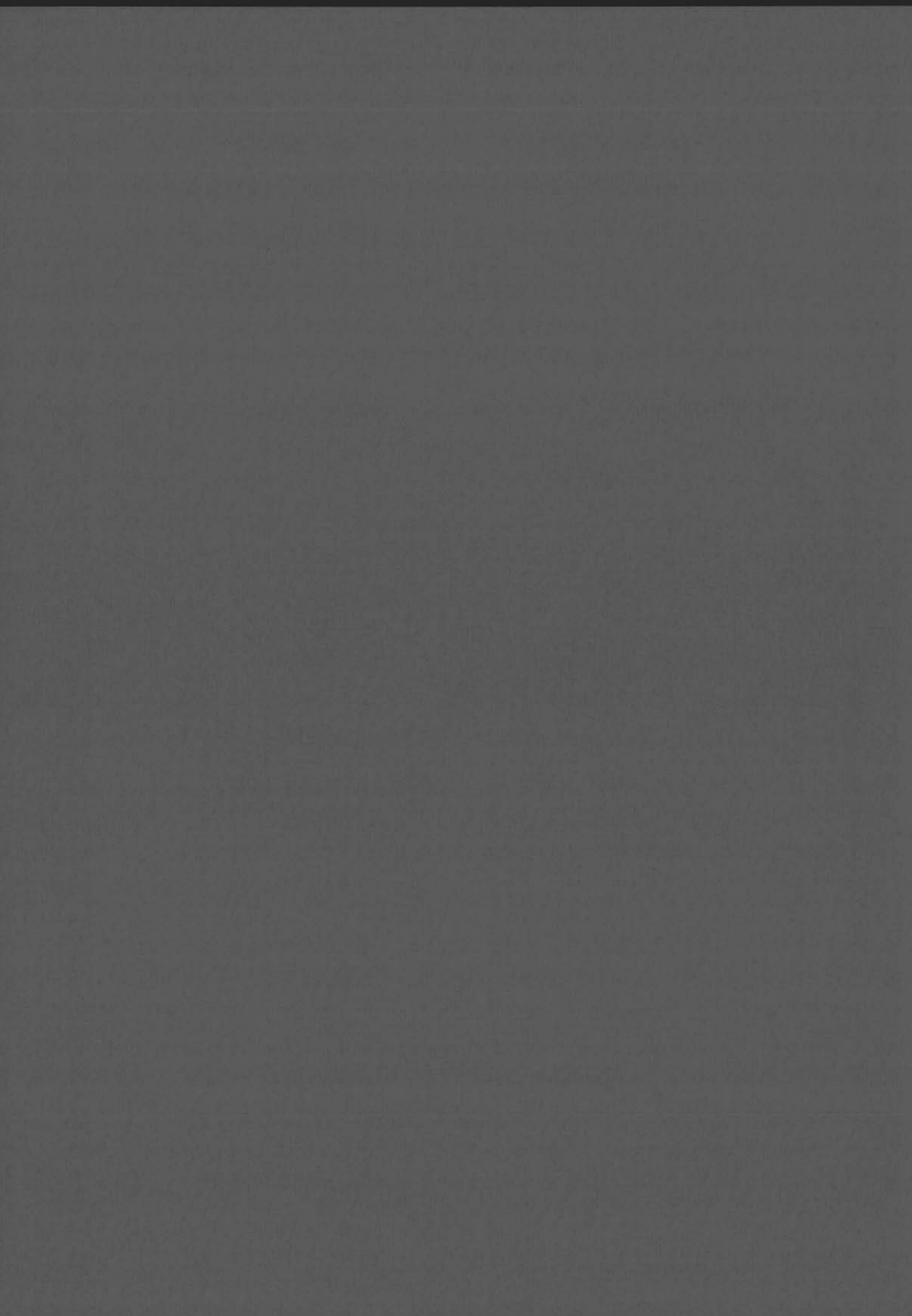
Une attention particulière a été portée au traitement des conditions aux limites diffractantes aux interfaces entre matériaux. Sur ce dernier point, un travail complémentaire doit cependant être effectué.

Nous avons aussi montré que les méthodes d'identification de type collocation ou moindres carrés pouvaient parfaitement être transposées dans le cadre des méthodes sans maillage.

Enfin, nous avons étudié la vitesse de convergence en h et p de l'approximation *HP-Clouds*.

Deuxième partie

La génération et l'adaptation
du nuage de noeuds



Chapitre 3

La génération du nuage de noeuds

Les méthodes sans maillage et parmi elles la méthode *HP-Clouds* sont des méthodes basées sur un nuage de noeuds. L'approximation *HP-Clouds* dépend a priori de la topologie du nuage de noeuds sur lequel s'effectue l'approximation. Contrairement à l'approximation éléments finis qui dépend d'une part de la distribution des noeuds et d'autre part de la forme des éléments finis associés, l'approximation *HP-Clouds* n'est paramétrée que par la topologie des noeuds et par les rayons des boules. Le nuage des noeuds apparaît donc comme un paramètre important pour l'efficacité des méthodes sans maillage, car deux nuages de noeuds différents généreront deux approximations *HP-Clouds* différentes. Sachant que les méthodes sans maillage sont des méthodes relativement récentes, la procédure de génération de noeuds n'est pas bien maîtrisée à ce jour : la plupart des auteurs s'appuient sur des nuages de noeuds construits à partir de techniques classiques de maillage (Delaunay, frontal ou autres...). C'est pourquoi nous proposons une procédure de génération du nuage de noeuds qui s'affranchit des méthodes classiques précitées.

3.1 Les différentes étapes

La génération du nuage de noeuds est une opération délicate qui peut être décomposée en trois étapes. Premièrement, un premier nuage de noeud est obtenu par extrapolation des exigences proposées par l'utilisateur. Pour un domaine D_E , l'utilisateur doit définir la densité de noeuds souhaitée, appelée *carte de taille* et notée $d(\vec{x})$, définie en tout point du domaine. Dans la grande majorité des cas, l'utilisateur ne définit que les densités sur les frontières du domaine. Dans ces circonstances, une extrapolation de la densité de noeuds désirée doit être réalisée sur tout le domaine d'étude. Deuxièmement, la carte de taille étant définie, l'insertion de noeuds dans la géométrie s'opère. Enfin, une adaptation du nuage de noeuds peut être réalisée pour le rendre plus efficace dans le contexte de la méthode *HP-Clouds* (Tableau 3.1).

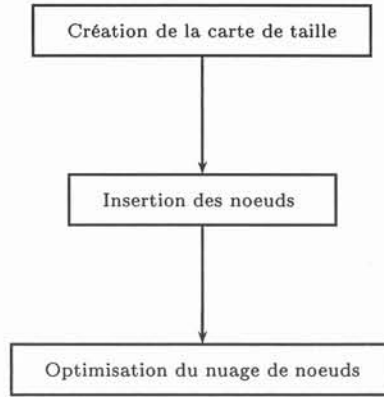


TABLEAU 3.1: Les étapes pour la génération du nuage de noeuds

Nous allons décrire ces trois étapes et proposer des méthodes et des techniques pour chacune d'entre elles.

3.2 La carte de taille

3.2.1 Définition

Dans cette section nous allons définir la densité de noeuds dans une région du domaine. La distribution des noeuds est paramétrée par un choix de l'utilisateur : l'utilisateur définit a priori une distribution sur les frontières du domaine (Figure 3.1), ainsi qu'éventuellement en certains points internes du domaine, qui doit être extrapolée sur tout le domaine. Le but est donc de définir la distribution $d(\vec{x})$ dans tout le domaine D_E .

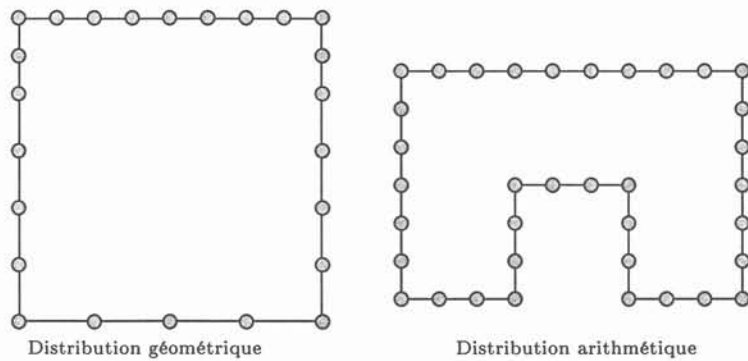


FIGURE 3.1: Distributions frontalières données par l'utilisateur

Pour la méthode des éléments finis, la densité de noeuds se traduit en une

carte de taille des éléments. Dans le contexte des méthodes sans maillage, les éléments ayant disparu, la densité de noeuds doit être associée à un autre concept géométrique. Naturellement, les boules forment le candidat idéal pour traduire la densité de noeuds. Reste à savoir comment. L'étude de la section 2.8 portant sur la variation de la précision en fonction du rayon des boules a montré qu'il existe un rayon optimal pour une distance inter-nodale donnée. Dès lors, la densité de noeuds peut être traduite par la carte de taille du rayon des boules associées à chaque noeud.

Les distributions frontalières proposées par l'utilisateur (Figure 3.1) permettent donc la création de boules frontalières. Pour le moment, les rayons de celles-ci sont calculés de façon à rendre les boules frontalières quasiment tangentes entre elles (Figure 3.2). Cette caractéristique a priori arbitraire sera explicitée dans le chapitre suivant.

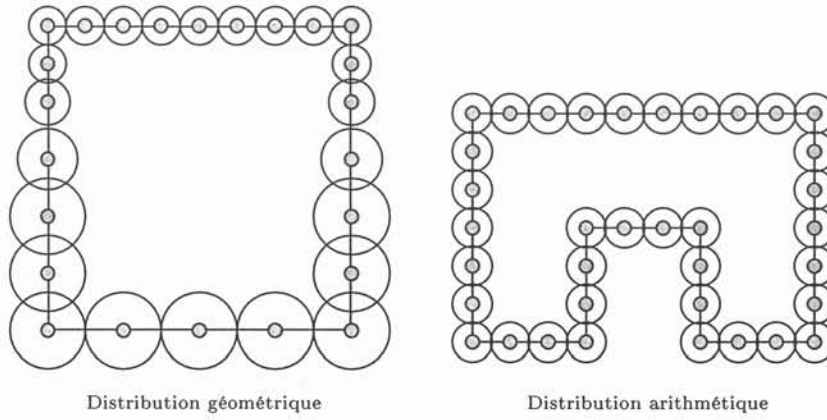


FIGURE 3.2: Création des boules frontalières

Quant à l'intérieur des domaines, la carte de taille est définie par la fonction $\nabla(\vec{x})$ qui pour tout point \vec{x} du domaine D_E calcule le rayon de la boule dont le centre serait placé en \vec{x} .

3.2.2 Calcul de la fonction ∇

L'objectif de cette section est de déterminer la fonction $\nabla(\vec{x})$ comme une fonction continue de l'espace. Étant donnée la distribution de noeuds sur les frontières du domaine, la fonction $\nabla(\vec{x})$ peut être calculée par extrapolation en tous points de l'espace. En supposant que sur un ensemble de noeuds frontaliers i , les valeurs des rayons r_i sont connues, la fonction $\nabla(\vec{x})$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$\nabla(\vec{x}) \approx \tilde{\nabla}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{i=N_f} \tilde{r}_i \cdot \phi_i^r(\vec{x}) \quad (3.1)$$

où N_f est le nombre de noeuds sur la frontière du domaine, et $\phi_i^r(\vec{x})$ une fonction rendant compte de l'influence du rayon r_i sur le reste du domaine. Nous avons décidé de donner une influence limitée aux boules des frontières car il est raisonnable de penser que la densité des noeuds internes n'est influencée que localement par la densité frontalière. Remarquons de plus que si les rayons de la frontière sont constants, $r_i = r_c$, le résultat attendu correspond à $\tilde{\nabla}(\vec{x}) = r_c$. En conséquence, nous devons nous assurer que l'ensemble des fonctions $\phi_i^r(\vec{x})$ forme une partition de l'unité.

$$\sum_{i=1}^{i=N_f} \phi_i^r(\vec{x}) = 1 \quad (3.2)$$

Les remarques précédentes nous poussent à considérer la fonction $\nabla(\vec{x})$ comme une approximation issue de la méthode *HP-Clouds* où $\phi_i^r(\vec{x})$ est la fonction de forme de Shepard associée au noeud i de la frontière et où \tilde{r}_i est la valeur nodale associée au noeud i . Ces valeurs nodales peuvent être calculées par identification en s'assurant que :

$$\tilde{\nabla}(\vec{x}_j) = \sum_{i=1}^{i=N_f} \tilde{r}_i \cdot \phi_i^r(\vec{x}_j) = r_j \quad (3.3)$$

où \vec{x}_j sont les coordonnées du noeud frontalier j . En conséquence, l'utilisation de la collocation ¹ s'impose pour calculer les valeurs nodales $(\tilde{r}_i)_{1 \leq i \leq N_f}$.

La génération de l'approximation *HP-Clouds*, $\tilde{\nabla}(\vec{x})$, est paramétrée par le rayon des fonctions de forme $\phi_i^r(\vec{x})$ associées aux noeuds des frontières. Ce calcul est délicat car le recouvrement du domaine doit être respecté. En conséquence, nous avons établi une procédure itérative permettant de calculer les rayons des fonctions de formes $\phi_i^r(\vec{x})$. Cette procédure est simple et est résumée dans le tableau 3.2.

Remarque: 3.2.1 *La procédure permettant de tester le recouvrement sera détaillée dans le paragraphe 5.4.*

Pour validation, procédons au calcul de la carte de taille sur un domaine D_E carré où la discrétisation sur les frontières est géométrique ainsi que sur un domaine plus complexe où la discrétisation frontalière est arithmétique (Figure 3.3 et Figure 3.4).

La carte de taille du rayon étant réalisée par résolution du système d'équation (3.3), la prochaine étape du processus de génération du nuage de noeuds consiste à créer les boules respectant cette carte de taille.

3.3 Insertion des noeuds et des boules

Pour réaliser l'insertion des noeuds dans le domaine D_E , nous allons utiliser le pavage grossier du domaine D_E qui a permis de construire la carte de taille.

¹Cf. Section 2.6

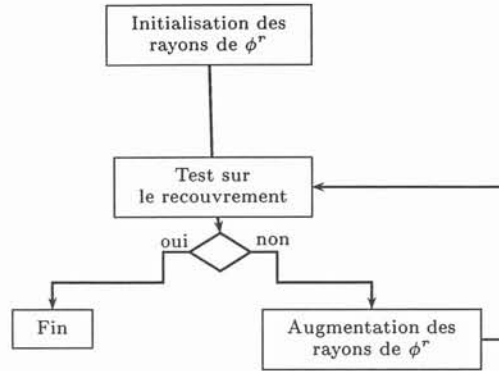


TABLEAU 3.2: Création itératives des rayons des fonctions de formes ϕ^r

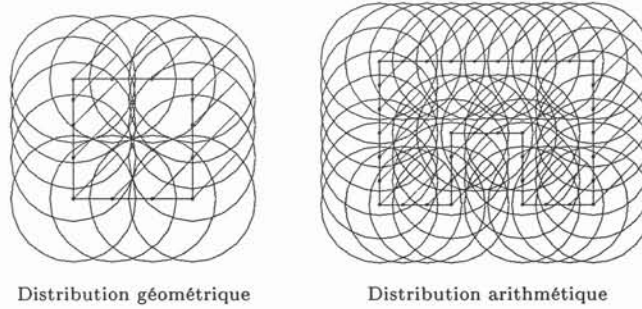


FIGURE 3.3: Carte de taille après calcul itératif

Définissons τ_{ij}^r le domaine réalisé par l'intersection de b_i^r et b_j^r deux boules associées respectivement aux fonctions de forme ϕ_i^r et ϕ_j^r . Le recouvrement du domaine est assuré et cette propriété s'exprime par :

$$D_E \subseteq \bigcup_{ij} \tau_{ij}^r \quad (3.4)$$

D'autre part il est possible d'établir que les intersections principales τ_{ii}^r forment aussi un pavage de l'espace D_E et vérifient :

$$D_E \subseteq \bigcup_i \tau_{ii}^r \quad (3.5)$$

Les intersections principales τ_{ii}^r sont à la base de l'insertion. Nous allons utiliser la transformation de Coons[11]² qui réalise une transformation d'un

²Pour de plus amples explications voir section 5.6.1

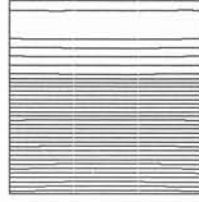


FIGURE 3.4: Isovaleurs de la carte de taille pour la distribution géométrique

domaine quelconque, à savoir l'interboule principal τ_{ii}^r , en un carré sur lequel il est facile de créer des boules (Tableau 3.3). Le respect de la carte de taille impose naturellement le nombre de boules en établissant le rapport entre l'aire de l'interboule et l'aire moyenne des boules insérées. Supposons que l'interboule τ_{ii}^r d'aire $\mathcal{A}_{\tau_{ii}^r}$ est associé à la boule b_i^r de rayon r_i , il est possible alors de définir le nombre n de boules à insérer dans l'interboule τ_{ii}^r par :

$$n \approx k \cdot \frac{\mathcal{A}_{\tau_{ii}^r}}{\pi r_i^2} \quad (3.6)$$

où k est un facteur de forme paramétrable pour obtenir une densité plus ou moins importante de boules dans les intersections principales.

Un calcul plus précis du nombre de boules à insérer dans τ_{ii}^r est donné par :

$$n \approx k \cdot \frac{\mathcal{A}_{\tau_{ii}^r}}{\int_{\tau_{ii}^r} \nabla(\vec{x})} \quad (3.7)$$

Bien que cette dernière proposition soit plus précise, elle suppose néanmoins une intégration sur une intersection principale qui est quelque peu coûteuse.

Le nombre de boules à insérer étant défini, la position des boules est établie par une répartition linéaire dans l'interboule.

L'ensemble des boules insérées (Figure 3.5) ne paraît pas convenir car d'une part les boules créées sont mal positionnées et d'autre part leur nombre ne correspond pas exactement à ce qu'attendait l'utilisateur.

Une procédure de réorganisation des boules devient donc indispensable. C'est pour cette raison, que nous proposons dans le chapitre suivant une méthode permettant d'organiser soit par mouvement, soit par retrait ou ajout des boules dans le domaine d'étude.

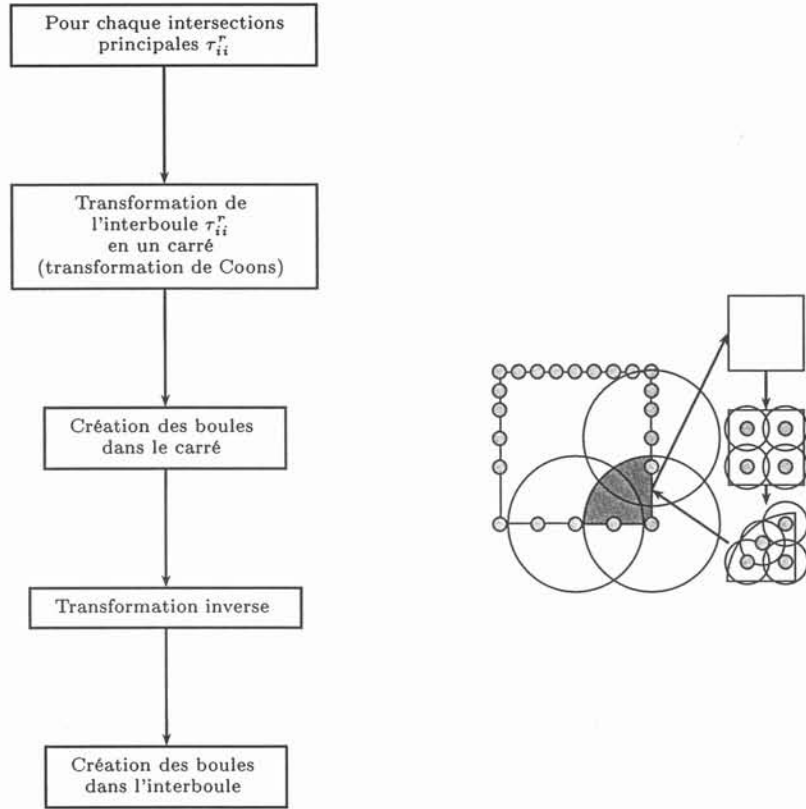


TABLEAU 3.3: Insertion des boules sur les intersections principales

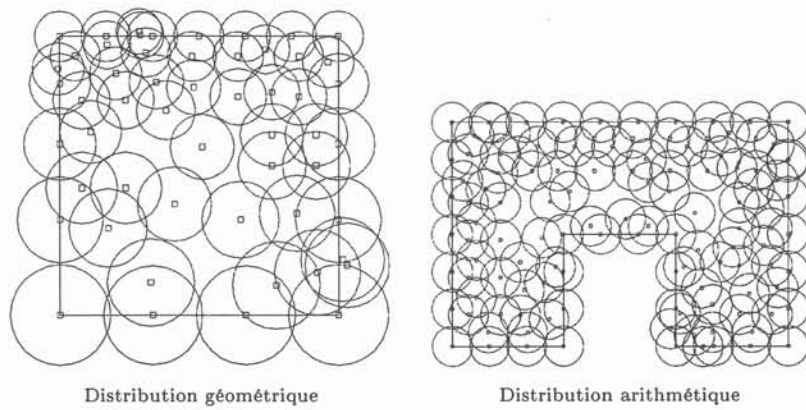


FIGURE 3.5: Boules après insertion

Chapitre 4

Réorganisation du nuage de noeuds

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit des techniques pour générer le premier nuage de noeuds. Dans l'état actuel de nos algorithmes, celui-ci est distribué de manière relativement inhomogène, nécessitant donc une réorganisation.

Nous allons développer des algorithmes de réorganisation du nuage de noeuds basés sur une analogie avec la physique des particules.

Nous montrerons par la suite trois applications dont une particulièrement intéressante pour le traitement de problèmes comportant de grandes déformations.

4.1 Introduction

La réorganisation des boules est basée sur un mouvement des boules dans le domaine d'étude. Ce mouvement s'inspire dans une large mesure de procédures de maillage récentes. En effet, depuis peu, de nouvelles méthodes de génération de maillage ont fait leur apparition notamment le *bubble meshing* qui permet de générer un maillage à l'aide d'un pavage sphérique de l'espace [38] [37] [35] [36]. Notre idée a donc été d'utiliser ces travaux pour gérer le déplacement des boules nécessaire à l'obtention d'une distribution de noeuds adéquate. Ces nouvelles techniques sont essentiellement basées sur une analogie avec un modèle physique d'interaction entre particules en transposant ces modèles au problème de maillage, les noeuds sont considérés comme des particules élémentaires en interaction entre elles suivant un modèle de forces. Il existe a priori plusieurs modèles physiques rendant compte de l'interaction entre des particules. Nous en avons exploré deux.

4.2 Le déplacement des boules

Les modèles physiques utilisés sont peu nombreux et peuvent être rassemblés en deux catégories. D'une part, le modèle dit *électrostatique* qui est utilisé par certains auteurs pour la génération de maillage pour la *M.E.F* [35] [36] [38] [37]. D'autre part le modèle dit du *gaz parfait* qui est utilisé pour la simulation de nappe en action pour la visualisation *3D* [39]. Dans ces deux modèles, les noeuds de la structure supportent une force interagissant avec le milieu extérieur par l'intermédiaire d'une zone d'influence qui est dans la plupart des cas représentée par une boule centrée au noeud. Cette force permet de rendre compte de l'interaction entre deux particules distinctes du modèle. L'ensemble des forces forme ainsi un système énergétique. Le but étant d'obtenir une position stable de chaque particule, le mouvement des particules tend à minimiser l'énergie déployée par l'ensemble des forces.

4.2.1 Le modèle électrostatique

Ce modèle assimile les boules à des charges électrostatiques subissant des forces de Wan Der Waals au même titre que des particules massiques dans l'espace. Dans ce cas, l'expression des forces entre deux boules est donnée par (Figure 4.1) :

$$f_{ij}(d) = 12 \cdot d_0^6 \cdot \epsilon \cdot \left(\frac{d_0^6}{d^{13}} - \frac{1}{d^7} \right) \quad (4.1)$$

où d_0 est la distance entre les centres des charges et ϵ l'énergie des charges. $f_{ij}(d)$ représente la force créée par la charge j sur la charge i en fonction de la distance des centres de celles-ci.

Pour faciliter la prise en compte de ce genre d'interactions, la force théorique de Wan der Waals peut dans une première approximation être remplacée par une fonction $g_{ij}(d)$ polynomiale du troisième ordre telle que (Figure 4.1) :

$$g_{ij}(d_0) = 0, g_{ij}(d_1) = 0, g'_{ij}(0) = 0 \text{ et } g'_{ij}(d_0) = k_0$$

d_0 est la position d'équilibre du système, ce qui correspond dans notre cas à la tangence des deux boules ($d_0 = r_i + r_j$). d_1 est la zone d'influence de la charge j sur la charge i telle que si $d > d_1$ alors $g_{ij}(d) = 0$. Il faut choisir d_1 pour que la zone d'influence associée à la particule i ne soit pas trop vaste. Par expérience nous avons décidé de choisir $d_1 = 2 \cdot d_0$ [37].

Dans tous les cas, cette force est une force d'attraction ou une force de répulsion suivant les positions des deux boules (Figure 4.2.1).

L'ensemble de toutes les forces forme un système énergétique qui devient stable pour un minimum énergétique. Le mouvement des boules est représenté par la seconde loi de Newton sous la forme de l'équation différentielle suivante :

$$m_i \cdot \frac{d^2 c_i}{dt^2} + C \cdot \frac{dc_i}{dt} = \sum_{i \neq j}^N f_{ij}^p(d) \quad (4.2)$$

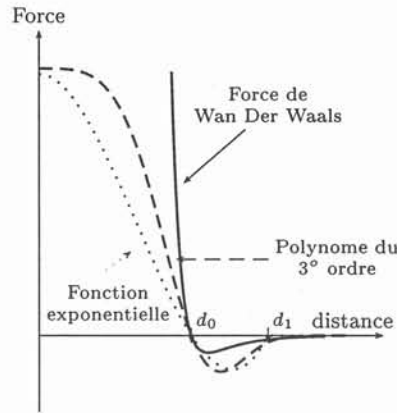


FIGURE 4.1: Force entre deux boules

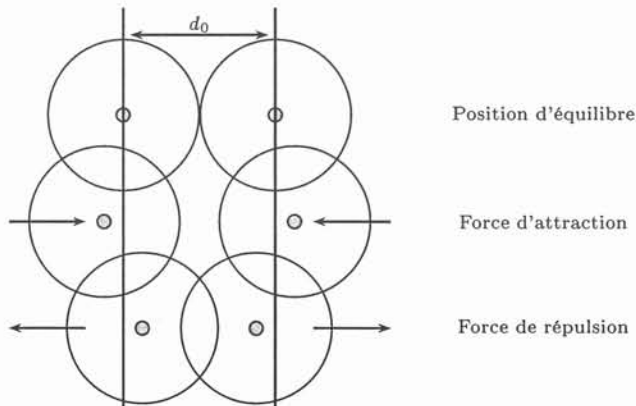


FIGURE 4.2: Type de force suivant la position relative des boules

où c_i est le centre de la boule b_i et où N est le nombre de boules du problème, m_i la masse de la boule et C le coefficient de viscosité. En ce qui concerne la masse, nous considérons que le milieu dans lequel évoluent les particules est homogène, la masse des particules est constante. L'ensemble de ces équations différentielles forme un système couplé qui sera résolu itérativement.

Les positions des boules sont donc calculées par la résolution de N équations différentielles successives. Pour cela, nous allons utiliser l'algorithme de *Runge Kutta* d'ordre 4 de pas h .

La stabilité de ce problème dépend a priori de 3 paramètres : m_i , C et h .

Calcul des coefficients m_i , C et h pour satisfaire le critère de stabilité

D'après l'allure de la courbe des forces, on peut voir qu'une position d'équilibre correspond à $d = d_0$. Dans cette configuration les boules b_i et b_j sont tangentes. Autour de ce point d'équilibre, une approximation linéaire de la force peut être établie. En conséquence, le système de deux boules peut être considéré comme un système à un ressort de raideur k_0 où k_0 est le coefficient

directeur de la tangente de $g_{ij}(d)$ pour $d = d_0$ (figure 4.3). Dans un système de ressort, il est possible de déterminer les paramètres cherchés pour qu'il y ait stabilité [37]. Pour avoir un système amorti il est nécessaire de définir les valeurs des paramètres comme :

$$\sigma = \frac{C}{2mk} = 0.7 \quad (4.3)$$

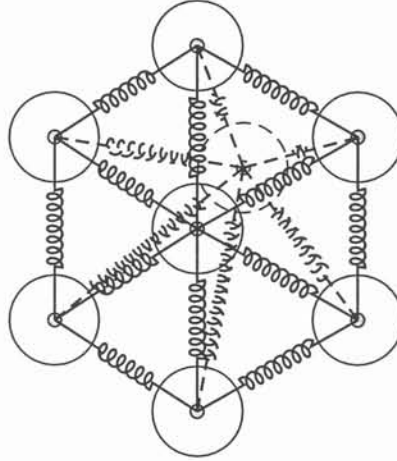


FIGURE 4.3: Système mécanique équivalent

Remarque: 4.2.1 Dans le chapitre précédent, lors de l'insertion des boules, nous avons choisi, a priori arbitrairement le rayon des boules pour qu'elles soient proches de la tangence. Le fait qu'elle soit déjà proche de la tangence facilite maintenant grandement leurs déplacements.

4.2.2 Le modèle du gaz parfait

Le modèle du gaz assimile les boules à des particules de gaz dans un volume V tel que $P.V = k$ où P est la pression de ce gaz. Dans ces circonstances, il suffit d'associer à chaque boule b_i une pression P_i représentant l'état de pression de la boule. Il est alors possible de définir la force entre deux boules par l'expression suivante :

$$f_{ij}(d) = (2 - d^2).e^{-d^4} \quad (4.4)$$

L'expression précédente fait apparaître que la force est uniquement répulsive, ce qui correspond bien au modèle physique du gaz parfait car les particules d'un tel gaz ont tendance à se répandre c'est à dire occuper le maximum d'espace possible. Au même titre que pour le modèle moléculaire, le mouvement des boules tend à minimiser l'énergie du système et conduit à la résolution de N équations différentielles.

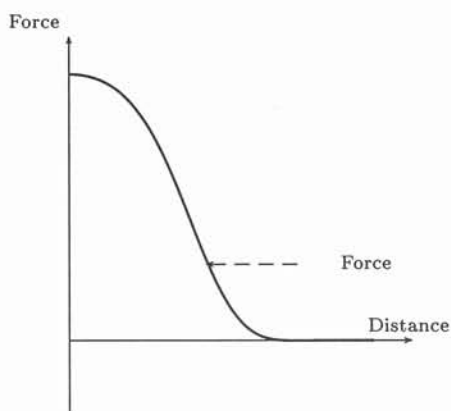


FIGURE 4.4: Force entre deux boules pour le modèle du gaz parfait

4.3 Caractéristiques des deux modèles

Nous avons proposés deux modèles physiques pour gérer l'organisation des boules. Ces modèles reposent sur des démarches proches mais diffèrent par l'expression des forces qui s'exercent sur les boules. En pratique, ces deux modèles conduisent à des configurations finales de boules très différentes.

Pour le modèle électrostatique, la position d'équilibre étant la tangence entre les boules, les boules ont tendance à se regrouper. Dans ces circonstances, si le nombre de boule n'est pas suffisant, le déplacement des boules introduira des espaces vides.

Dans le cas du modèle gaz parfait, les boules ont tendance à occuper le maximum d'espace. Si le nombre de boules est trop important, certaines zones comporteront un surplus de boules.

Quel que soit le modèle retenu, une adaptativité de la densité de boules est nécessaire et est destinée à repeupler les espaces vides ou au contraire à supprimer des boules dans des zones surpeuplées.

4.4 Adaptativité de la densité de boules

Le système formé par l'ensemble des boules est un système sous-contraint car les boules sont totalement libres et donc pourraient même, à la suite d'un mouvement conséquent, s'échapper du domaine d'étude. Pour éviter que les boules internes ne s'échappent du domaine d'étude, les boules sur les frontières du domaine d'étude ne participent pas au mouvement et forment en quelque sorte une barrière difficilement franchissable.

D'autre part, les caractéristiques des deux modèles nous obligent à mettre en place une procédure d'adaptativité de la densité de boules car dans de nombreux cas le déplacement des boules crée des espaces vides ou bien des accumulations de boules. Pour pouvoir localiser de tels problèmes, définissons une densité T_d qui à une boule fait correspondre le taux d'occupation de cette boule. Sachant que la configuration optimale de boules est un hexagone (Figure

4.5), la taux T_d définit donc l'erreur commise sur la configuration des boules par rapport à la configuration hexagonale. Le calcul d'un tel taux est réalisé en calculant le pourcentage d'occupation d'une boule par rapport à ses boules voisines. Le voisinage d'une boule est obtenu par une zone d'influence circulaire (une boule) de rayon le double de la boule sur laquelle le voisinage est cherché. Pour la boule b_i de rayon r_i , le taux T_d a pour expression :

$$T_d = \frac{\sum_k^{N_C} r_k}{r_i} * 100\% \quad (4.5)$$

où N_C est le nombre de boules connectées par rapport à la zone d'influence de rayon $2r$.

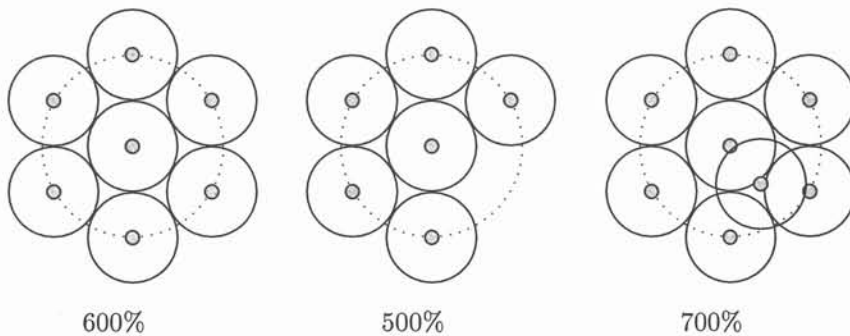


FIGURE 4.5: Taux de densité d'une boule

4.5 Applications

Les applications de cette procédure ne sont pas encore nombreuses. Dans nos travaux cette procédure a eu trois applications principales.

4.5.1 Mouvement des boules pour la génération des noeuds

Le chapitre précédent a laissé en suspend une étape importante dans la génération du nuage de noeuds. A la suite de l'insertion des boules dans le domaine d'étude, les boules sont relativement mal placées (figure 3.5). De plus, leur nombre même a besoin d'être retouché. Une procédure de déplacement des boules comme celle énoncée dans les sections précédentes pourrait d'une part réorganiser les boules et d'autre part définir le nombre correct de boules. Le tableau 4.1 récapitule alors les différentes étapes nécessaires. Cette procédure fait apparaître trois points importants.

Premièrement, le choix du modèle pour le déplacement des boules conditionne tout le processus. En fait, c'est l'allure de la topologie désirée des boules qui va déterminer le choix du modèle à employer. Ce choix dépend aussi du nombre de boules initial. En effet, pour une répartition initiale par défaut, le

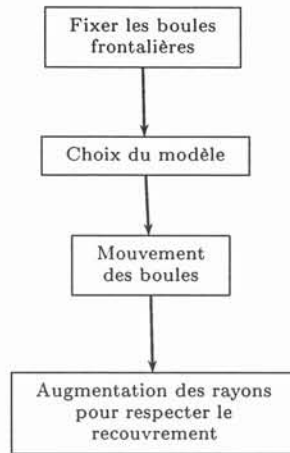


TABLEAU 4.1: Mouvement des boules après une insertion

modèle gaz parfait est indispensable pour que les boules occupent le maximum d'espace.

Deuxièmement, si la répartition initiale est trop dense quelques boules s'échapperont du domaine car les contraintes sur les boules frontalières seront trop fortes. Cette remarque souligne le fait que la densité initiale dans chaque interboule a de l'importance.

Enfin, pour le mouvement des boules, les rayons sont choisis de telle sorte que les boules soient tangentes. Cette caractéristique permet un mouvement plus fluide alors qu'un rayon plus important conduirait à des contraintes trop importantes pour une répartition correcte de boules. Seulement, cette distribution de rayons n'assure pas un recouvrement de l'espace. Un réajustement a posteriori des rayons des boules devient alors indispensable.

Pour valider toutes ces constatations, reprenons les exemples du chapitre précédente, à savoir la distribution géométrique (Figure 4.6) et la distribution arithmétique (Figure 4.7).

Les deux exemples (Figures 4.6 et 4.7) utilisent les deux types de modèles. Bien que la différence entre les deux modèles soit minime sur ces exemples, le modèle du gaz parfait semble relativement plus efficace. Dans les deux cas, la distribution de noeuds et donc de boules est tout à fait correct et acceptable.

Chaque boule en mouvement utilise la carte de taille précédemment calculée pour redéfinir son rayon en fonction de la position qu'elle occupe après son déplacement. Cette adaptativité du rayon est indispensable pour que les rayons des boules correspondent au mieux aux exigences de l'utilisateur.

4.5.2 Mouvement des boules après un maillage

Une autre utilisation de ce réarrangement des boules consiste à repositionner au mieux les noeuds d'un maillage éléments finis, le maillage pouvant être utile en tant que tel ou comme base de discrétisation pour les méthodes sans maillage.

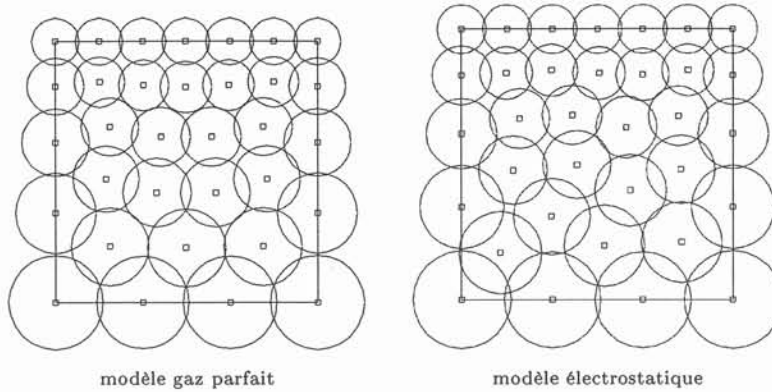


FIGURE 4.6: Topologie des boules après mouvement pour une distribution géométrique

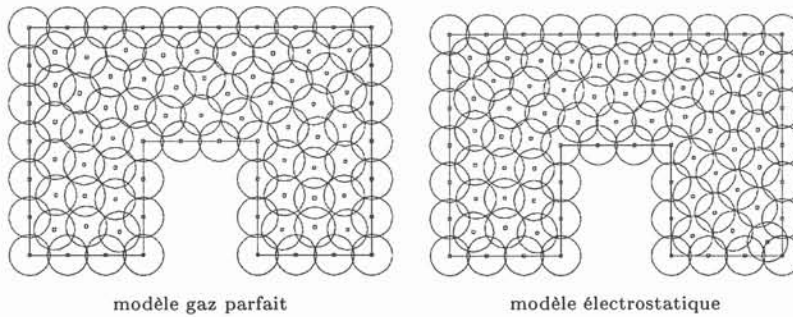


FIGURE 4.7: Topologie des boules après mouvement pour une distribution arithmétique

Le logiciel Flux3d par exemple permet de créer de façon efficace un nuage de noeuds en adéquation avec une géométrie donnée. La procédure que nous envisageons est de réutiliser ce nuage de noeuds pour la méthode *HP-Clouds*. Le but étant de créer les boules pour un nuage de noeuds donné, dans une première étape, nous allons réarranger la position des noeuds. Pour cela, nous créons préalablement des boules dont le rayon est tel qu'elles se rapprochent de la tangence (Figure 4.8).

Puis le déplacement des boules est effectué permettant ainsi de générer un ensemble de boules en adéquation avec la méthode *HP-Clouds* (Figure 4.9), moyennant une augmentation globale des rayons.

Dans cette procédure, il est indispensable de connaître le rayon des boules en chaque position du domaine d'étude, ce qui revient à disposer d'une carte de taille. Naturellement, celle-ci peut être issue de la discrétisation frontalière tel que nous l'avons décrit dans le chapitre 3. Mais dans ce cas particulier, la carte de taille est bien souvent déjà utilisée pour la génération du maillage éléments finis et peut être réemployée.

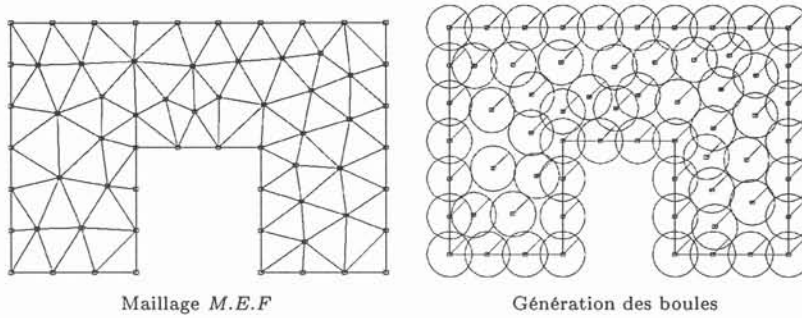


FIGURE 4.8: Génération des boules sur un maillage éléments finis

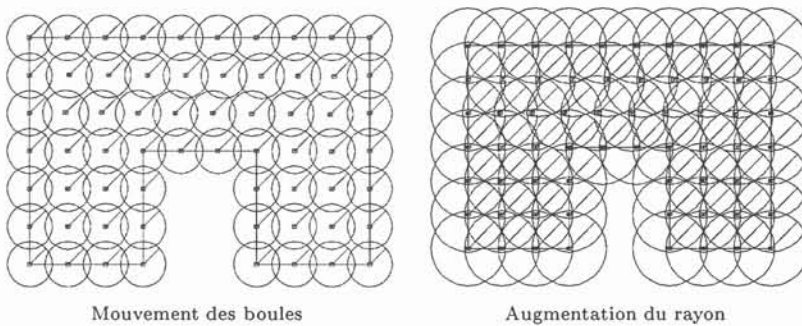


FIGURE 4.9: Réorganisation des boules après mouvement

4.5.3 Mouvement des boules pour des pièces en mouvement

La prise en compte de grandes déformations constitue la troisième application de notre procédure de réarrangement de noeuds. En électromagnétisme, l'air est un milieu conducteur et déformable. Il doit être maillé lorsque le dispositif est résolu en éléments finis. La prise en compte de pièces en mouvement constitue dans ces circonstances une vraie difficulté car il faut adapter en permanence le maillage éléments finis. Deux approches ont été pratiquées : soit un remaillage global de la zone déformable, méthode qui est réputée pour introduire du bruit numérique, soit un remaillage local autour de la pièce en mouvement, méthode qui malheureusement conduit souvent à une algorithmique complexe. Les méthodes de résolution sans maillage, couplées aux éléments finis, avec repositionnement automatique des noeuds fournissent une alternative particulièrement séduisante : pas de bruit numérique du fait de la disposition des arêtes, "repositionnement" local des noeuds, analogie de l'air avec un fluide visqueux, pas de limite de déformation. Nous avons donc décidé d'appliquer les techniques de repositionnement des boules à cette catégorie de problème.

La procédure de mouvement est quasiment identique à celle énoncée dans la section précédente. Elle diffère par le fait que lors d'un mouvement de la géométrie toutes les boules sont susceptibles de bouger (Tableau 4.2).

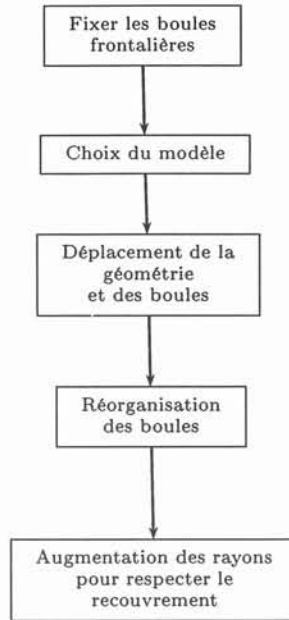


TABLEAU 4.2: Mouvement des boules après un mouvement de la géométrie

Cette procédure est intéressante car le mouvement de la géométrie s'exécute à noeuds constant. Par contre il tout à envisageable d'adapter le nombre de noeuds lors du mouvement. De plus, cette méthode permet un mouvement quelconque de la géométrie.

Pour validation, prenons l'exemple d'une palette en mouvement dans l'air, d'une part en translation (figure 4.10) et d'autre part en rotation (figure 4.11).

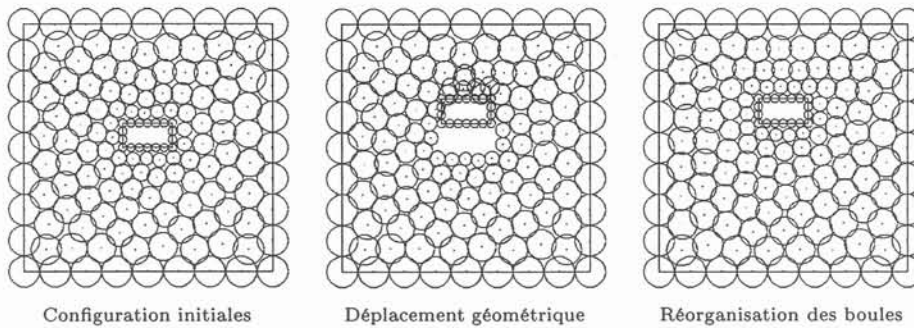


FIGURE 4.10: Réorganisation des boules lors d'une translation

La méthode que nous avons mise en place semble tout à fait convenir pour la résolution de problèmes faisant intervenir un mouvement, et ce quelque soit le mouvement. L'absence de maillage a permis d'éviter tout les problèmes de retournement d'éléments finis qui produisaient avec la méthode des éléments finis. Il faut quand même noter que même si l'on garde le nombre de noeuds

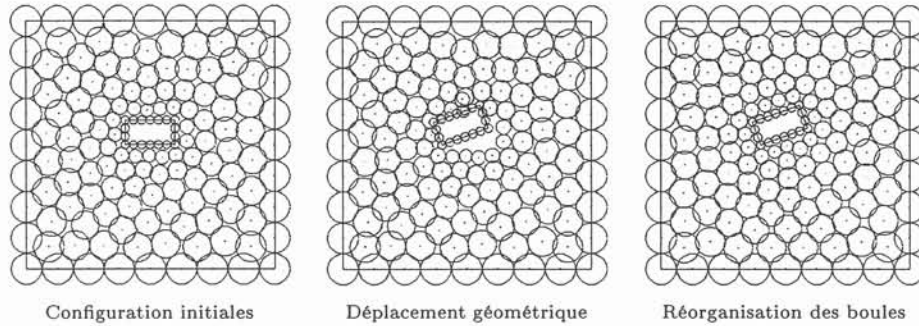


FIGURE 4.11: Réorganisation des boules lors d'une rotation

constant lors du mouvement, la topologie de la matrice de résolution peut être modifiée. En effet, localement, des changements de connectivité modifient la topologie interne de la matrice. Ces changements sont négligeables et n'entraînent pas de grandes perturbations dans la solution d'après les premiers essais que nous avons effectués. Cependant, cette affirmation demande à être confirmée par une étude détaillée.

4.6 Critère de qualité

Cette partie a proposée une approche pour réorganiser un nuage de noeuds, en utilisant une analogie physique. Intuitivement, les distributions de noeuds sont bien réparties, en tout cas selon les critères de l'analyse par éléments finis.

Qu'en est-il pour les méthodes sans maillage ? La question reste ouverte. Il n'existe pas à notre connaissance d'étude détaillée sur l'influence de la distribution de noeuds sur la solution. Certes le critère d'erreur pour les méthodes sans maillage ne fait pas intervenir de facteur de forme [18]. Mais est-ce suffisant pour dire qu'il n'existe pas d'influence de la distribution de noeuds sur le conditionnement matriciel ? Seule une étude détaillée sur cet aspect permettrait de répondre.

Troisième partie

Méthodologies
d'implémentation

Chapitre 5

Une nouvelle structure de données

Vue du côté implémentation, la méthode *HP-Clouds* nécessite une nouvelle structure de données. L'insertion d'une telle méthode dans un code de calcul déjà existant et utilisant la *M.E.F* passe obligatoirement par une restructuration des données, la structure liée à la *M.E.F* étant basée principalement sur les éléments finis eux mêmes. Dans cette optique, nous proposons dans ce chapitre une nouvelle structure de données pour la méthode *HP-Clouds*. Par ailleurs, nous développons les algorithmes clés, qui viendront remplacer ceux basés sur les éléments finis, rendant ainsi possible l'utilisation à grande échelle des méthodes sans maillage. Enfin nous étudierons avec beaucoup d'attention la procédure d'intégration des termes généraux du système linéaire à résoudre issu de la méthode de Galerkin.

5.1 La base de la structure

L'approximation *HP-Clouds* est basée sur un nuage de noeuds ¹. Plusieurs procédures de création de ce nuage de noeuds sont envisageables : soit en utilisant les techniques de maillage issues des éléments finis, soit en développant des méthodes nouvelles qui s'affranchissent du maillage.

Quoi qu'il en soit, l'utilisation d'une méthode sans maillage passe obligatoirement par la création des boules (support des fonctions de forme) à partir d'un nuage de noeuds (Figure 5.1).

En effectuant un parallèle avec la structure liée à la *M.E.F*, la base de la structure pour la méthode *HP-Clouds* correspond à l'objet "boule" support des fonctions de forme *HP-Clouds*. Cet objet comporte naturellement un centre correspondant au noeud portant la boule ainsi qu'un rayon, envergure de la fonction de forme. Il est possible d'établir d'ores et déjà une représentation graphique de cet embryon de structure de données (Tableau 5.1).

¹Cf. Chapitre 1

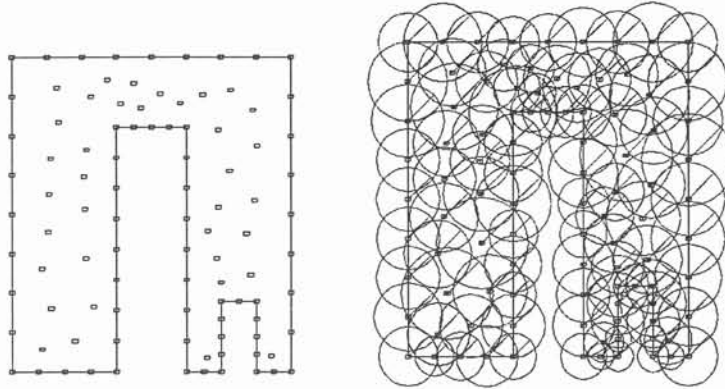


FIGURE 5.1: Création des boules à partir d'un nuage de noeuds initial

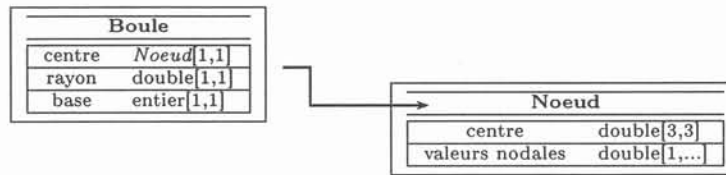


TABLEAU 5.1: Structure de la boule

Au même titre que pour la *M.E.F*, les valeurs nodales sont portées par les noeuds. La notion de voisinage présente dans la structure de données des éléments finis facilite grandement le calcul des fonctions de forme. Par analogie, le voisinage peut être assimilé à la connectivité associée à chaque boule dans le cas des méthodes sans maillage. Cette connectivité doit impérativement faire partie de la structure de la boule et il est nécessaire de mettre en place les procédures permettant de la calculer.

5.2 La connectivité

Rappelons que la connectivité de la boule b_i est définie par :

$$\{b_j / \|\overrightarrow{x_i - x_j}\|_2 \leq r_i + r_j\} \tag{5.1}$$

où $\overrightarrow{x_i}$, $\overrightarrow{x_j}$ et r_i , r_j sont respectivement les centres et les rayons des boules b_i et b_j .

La procédure la plus simple est de créer la connectivité en utilisant l'algorithme 5.1 dont le coût est en n^2 où n le nombre total de boules.

Cet algorithme est certes facile à mettre en oeuvre, mais son coût devient pénalisant lorsque le nombre de boules commence à être important comme c'est le cas en 3 dimensions. C'est pourquoi, nous proposons un autre algorithme plus efficace, plus robuste et surtout plus rapide (Algorithme 5.2).

```

□
Pour chaque boule  $b_i$ 
  Pour chaque boule  $b_j$ 
    Si  $\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|_2 \leq r_i + r_j$  alors
      Ajoute à la connectivité de  $b_i$  la boule  $b_j$ 
    Fin Si
  Fin Pour
Fin Pour
■

```

ALGORITHME 5.1: Création de la connectivité en n^2

La connectivité, au même titre que la notion de voisinage pour les éléments finis, est une donnée primordiale pour réduire le coût. En conséquence, la structure de la boule doit être enrichie par la connectivité (Tableau 5.2).

Un objet “*boule*” sera totalement défini lorsqu’une procédure de calcul du rayon sera proposée. Ce calcul est conditionné par la notion de recouvrement². Pour le moment, la structure de la boule est cohérente et remplit le rôle de base structurelle pour la méthode *HP-Clouds*.

5.3 L’intersection de deux boules

Le processus de résolution fait intervenir dans le cas de la méthode de Galerkin de nouvelles notions qu’il est nécessaire de mettre en place. Rappelons que les termes matriciels sont, pour une formulation en potentiel scalaire par exemple, de la forme générale :

$$\begin{cases} m_{i,j} &= \int \int_{b_i \cap b_j \cap D_E} \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_i) \mu_0 \mu_r \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_j) d\Omega \\ f_i &= \int \int_{b_i \cap b_j \cap D_E} \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_i) \overrightarrow{B}_r d\Omega + \int_{\Gamma_D} \phi_i \mu_0 \mu_r \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_i) \cdot \vec{n} dl \end{cases} \quad (5.2)$$

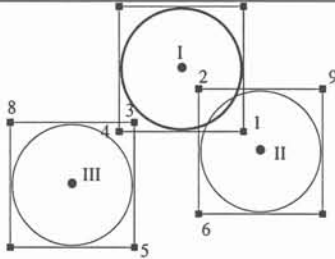
où b_i est la boule support de la fonction de forme $\phi_i(\vec{x})$, et D_E le domaine d’étude. Il faut noter que ces termes matriciels font intervenir une intégration sur une intersection de deux boules. Il apparaît alors naturel d’introduire dans la structure de données, un domaine géométrique correspondant à l’intersection τ_{ij} entre deux boules b_i et b_j . Ce domaine appelé *interboule* a priori en forme de ménisque, peut être dans certains cas plus complexe car ce domaine d’intégration est également limité par le domaine d’étude D_E (Figure 5.2).

Remarque: 5.3.1 *On appellera interboule principal τ_{ii} , l’intersection d’une boule avec elle-même.*

La notion d’interboule est peu voire pas présente dans la littérature et pourtant elle simplifie considérablement la mise en place des méthodes sans maillage. Par exemple, les interboules vont permettre de construire un algorithme robuste de résolution (Algorithme 5.3).

²Cf. chapitre 1

□
 Soit L_x la liste des abscisses des points des carrés englobants les boules.
 Soit L_y la liste des ordonnées des points des carrés englobants les boules.
 Tri de la liste L_x par ordre croissant.
 Tri de la liste L_y par ordre croissant.
 Pour chaque boule b_i de centre $\vec{x}_i = (x_i, y_i)$ et de rayon r_i ,
 Soit lr_x la liste des points de L_x triée
 inclus dans le segment $[x_i - r_i, x_i + r_i]$.
 Soit lr_y la liste des points de L_y triée
 inclus dans le segment $[y_i - r_i, y_i + r_i]$.
 Soit lb_x la liste des boules correspondantes aux points de lr_x .
 Soit lb_y la liste des boules correspondantes aux points de lr_y .
 Soit lc l'intersection de lb_x et lb_y sans doubles.
 Pour chaque boule $b_c \in lc$ de centre $\vec{x}_c = (x_c, y_c)$ et de rayon r_c ,
 Si $\|\vec{x}_i - \vec{x}_c\|_2 \leq r_i + r_c$ alors,
 Ajoute à la connectivité de b_i la boule b_c .
 Fin Si
 Fin Pour
 Fin Pour
 Fin Pour
 ■



Pour la boule b_I :

- $lr_x = \{4, 5, 3, 2, 6, 1\}$
- $lr_y = \{4, 1, 3, 8, 2, 9\}$
- $lb_x = \{I, III, III, II, II, I\}$
- $lb_y = \{I, I, III, III, II, II\}$
- $lc = \{I, II, III\}$
- $\{b_I, b_{II}\}$ connectées à b_I

ALGORITHME 5.2: Création de la connectivité dans le cas bidimensionnel (coût en n)

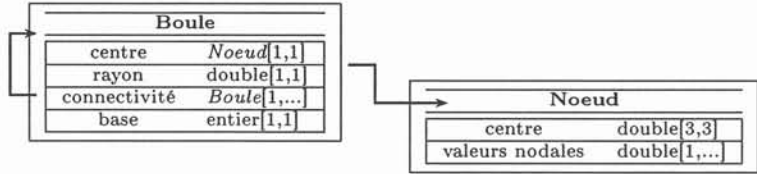


TABLEAU 5.2: Ajout de la connectivité à la structure de base de la boule

L'algorithme 5.3 est très simple et assure une bonne efficacité de l'étape de construction de la matrice de résolution dans le cadre de la méthode *HP-Clouds*. La notion d'interboule est donc une notion primordiale qui finalise la structure algorithmique de la méthode *HP-Clouds* (Tableau 5.3).

5.4 Le recouvrement du domaine

Une exigence incontournable de la méthode *HP-Clouds* est le recouvrement du domaine d'étude³. Il faut s'assurer que chaque point du domaine est atteint par au moins une boule pour obtenir une approximation consistante. Cette propriété est donc indispensable pour la procédure de résolution mais aussi pour le

³Cf. Chapitre 1

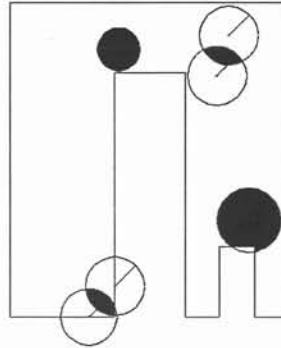
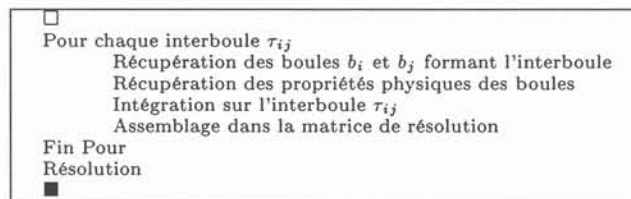


FIGURE 5.2: Différents interboules



ALGORITHME 5.3: Assemblage et résolution

post-processing. Le recouvrement du domaine est obtenu en choisissant correctement les rayons des boules (Figure 5.3) : pour un jeu de noeuds donné, la taille des boules doit être suffisamment importante pour assurer le recouvrement du domaine.

En utilisant les interboules, nous avons donc mis au point une procédure n'utilisant que des informations topologiques, permettant de mettre en évidence les non-recouvrements du domaine (Algorithme 5.4). De plus, il est possible désormais de calculer le rayon de l'ensemble des boules à partir d'un nuage de noeuds imposé. En effet, par extension de la procédure proposée, et de façon itérative, il est possible d'obtenir les rayons minima des boules pour qu'il y ait recouvrement. Bien sûr, à partir de cette configuration, le rayon peut être encore augmenté pour obtenir un recouvrement optimal tel qu'il a été défini au paragraphe 2.8.

5.5 Recherche d'une boule

Le post-processing repose sur le calcul de la valeur de l'approximation en un point donné du domaine. Rappelons que l'approximation *HP-Clouds* peut se mettre sous la forme :

$$\tilde{u}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{i=N_N} \phi_i(\vec{x}) \cdot u_i \quad (5.3)$$

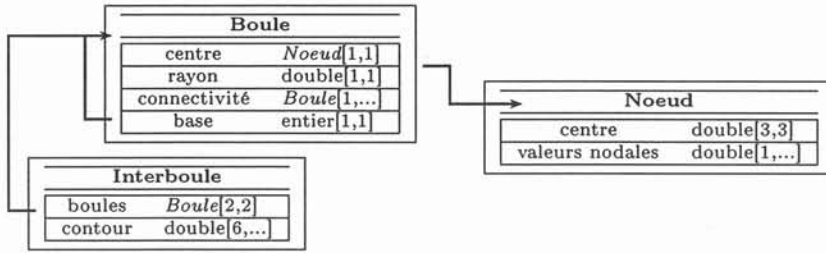


TABLEAU 5.3: Structure finale

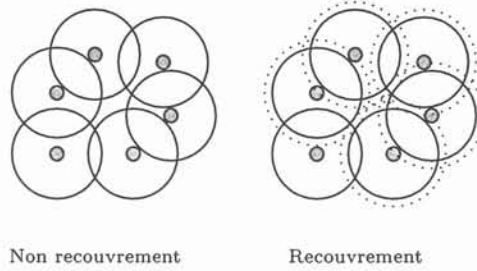


FIGURE 5.3: Recouvrement paramétré en fonction du rayon des boules

A priori pour un point donné du domaine D_E , un calcul de toutes les fonctions de forme en ce point doit être fait, d'où un coût important. Il est possible de réduire ce coût en utilisant la connectivité. En effet, si le point appartient à la boule b_k , l'approximation en ce point aura pour expression :

$$\tilde{u}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{i=N_{C_k}} (\phi_i(\vec{x}) \cdot u_i) \quad (5.4)$$

où N_{C_k} représente le nombre de boules connectées à la boule b_k .

Il reste néanmoins à mettre en place une procédure permettant de trouver la boule contenant un point (Algorithme 5.5).

Remarque: 5.5.1 *Si le point se trouve dans un interboule non principal, alors cet algorithme retourne la boule qui "voit" majoritairement le point.*

Cette procédure est efficace et constitue la base d'un post-processing rapide pour la méthode *HP-Clouds*.

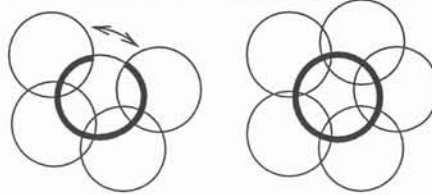
5.6 Intégration sur un interboule

L'intégration "exacte" des fonctions de forme sur un interboule est une étape primordiale car elle conditionne fortement la résolution. Comparée à ce qui se pratique pour la *M.E.F*, l'intégration des termes généraux du système matriciel les méthodes sans maillage se révèle être d'un tout autre niveau de difficulté. La difficulté de cette phase d'intégration vient du fait que les fonctions de forme

```

□
Pour chaque boule  $b_i$  de centre  $\bar{x}_i = (x_{ci}, y_{ci})$  et de rayon  $r_i$ ,
  Soit  $li_i$  la liste des interboules associées à la boule  $b_i$ .
  Soit  $\tau_{ii}$  l'interboule principal de la boule  $b_i$ .
  Initialisation de  $lc = \{ \}$ 
  Pour chaque interboule  $\tau_{ij}$  de  $li_i$ ,
    Soit  $lc_j$  la liste des contours communs à  $\tau_{ii}$  et  $\tau_{ij}$ .
    Soit  $lc = lc + lc_j$ .
  Fin Pour
  Si la liste des lignes  $lc$  ne forme pas l'intersection  $\tau_{ii}$  alors,
    Il existe un non recouvrement en  $b_i$ .
    Augmentation du rayon  $r_i$  pour qu'il y ait recouvrement.
  Fin Si
Fin Pour
■

```



Non recouvrement

recouvrement

ALGORITHME 5.4: Recouvrement du domaine D_E

HP-Clouds n'ont pas d'expression a priori ⁴, celle-ci dépend de la connectivité et de la position des noeuds. Par ailleurs, la fonction à intégrer et le domaine d'intégration constituent eux-mêmes des sources de problèmes : le degré de la fonction de forme est élevé, la fonction de forme est rationnelle et le domaine d'intégration peut être relativement quelconque. Pour comprendre la difficulté de ce genre d'intégration la figure 5.4 montre sur un interboule principal τ_{ii} la fonction à intégrer. Une intégration numérique devient donc indispensable.

Nous avons évalué alors deux méthodes d'intégration : la méthode de Gauss et l'intégration classique rectangle.

5.6.1 Méthode de Gauss

Une des méthodes d'intégration numérique les plus connues est la méthode de Gauss. Pour illustrer cette méthode, plaçons nous tout d'abord dans le cas unidimensionnel où le but est de calculer l'intégrale d'une fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$. La méthode de Gauss construit des points et poids de Gauss tels que l'intégrale se calcule par :

$$\int_a^b f(x).dx = \sum_{i=1}^{i=N_P} w_i.f(x_i) \quad (5.5)$$

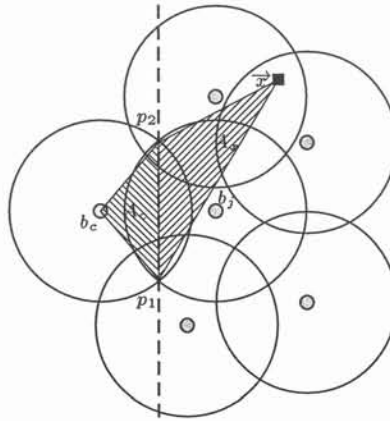
où w_i et x_i sont respectivement les poids et points de Gauss et N_P le nombre de points de Gauss. Les valeurs des points et poids de Gauss sont

⁴Cf. Chapitre 1

```

□
Soit  $x$  le point d'approximation
Soit  $b_c$  boule courante de centre le point  $p_c$ .
Tant Que la boule contenant le point  $\vec{x}$  n'est pas trouvée
  Boule trouvée =  $b_c$ .
  Soit  $l_b$  liste des boules connectées à  $b_c$ 
  Pour chaque boule  $b_j$  de centre le point  $p_j$  de  $l_b$ ,
    Calcul des points  $[p_1, p_2]$  segment intersection entre  $b_c$  et  $b_j$ .
    Calcul de l'aire orientée  $A_c$  du triangle  $[p_1, p_2, p_c]$ .
    Calcul de l'aire orientée  $A_x$  du triangle  $[p_1, p_2, x]$ .
    Si  $A_c$  et  $A_x$  sont de signes différents
      Boule non trouvée.
      Remplacer  $b_c$  par  $b_j$ .
      Marquer  $b_c$  comme non valable.
    Fin Si
  Fin Pour
Fin Tant Que
■

```



ALGORITHME 5.5: Recherche d'une boule à partir d'un point

obtenus classiquement en assurant une intégration exacte pour les polynômes de degré $2.N_P - 1$, ce qui donne pour tout $k \leq 2.N_P - 1$:

$$\int_a^b x^k . dx = \sum_{i=1}^{i=N_P} w_i . f(x_i) \quad (5.6)$$

Pour les cas bidimensionnels et tridimensionnels, la localisation des points et la valeur des poids de Gauss dépendent bien sûr du domaine sur lequel est calculée l'intégrale. L'existence de tables permet de définir les points et poids de Gauss pour des domaines simples comme le triangle, le carré, le rectangle ou bien le cercle. L'utilisation de la méthode de Gauss pour le calcul de l'intégrale sur les interboules n'est donc pas directe, ceux-ci étant décrits par une suite quasi quelconque de contours rectilignes ou curvilignes. En conséquence, soit nous devons transformer l'interboule dans un domaine de référence où est connue la distribution des points de Gauss, soit nous devons mener l'intégration

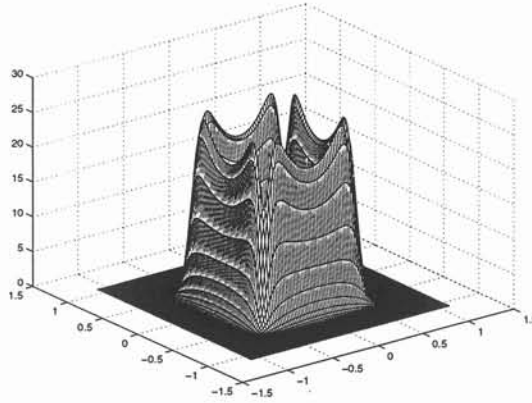


FIGURE 5.4: Allure de la fonction à intégrer sur un interboule

sur un domaine englobant l'interboule ce qui est possible dans la mesure où la valeur de la fonction à intégrer est nulle au delà des limites de l'interboule, mais cette dernière approche nécessitera certainement un nombre de points plus important qu'une utilisation directe du domaine formé par l'interboule.

Ainsi pour la méthode de Gauss, nous proposons trois approches utilisant un domaine englobant les interboules, et une méthode utilisant directement le domaine défini par l'interboule. Ces méthodes seront comparées entre elles sur une intégration typique.

Utilisation d'un maillage éléments finis

Nous pouvons opter pour l'utilisation du maillage éléments finis qui permet de placer les points de Gauss sur les éléments finis en vue d'une intégration des fonctions de forme *HP-Clouds* (Figure 5.5).

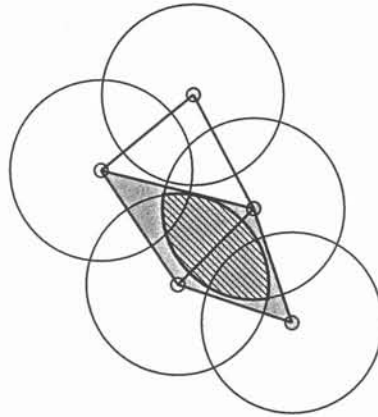


FIGURE 5.5: Réutilisation des éléments finis pour l'intégration sur des interboules

Les points et poids de Gauss sont alors construits à partir des éléments finis qui englobent l'interboule.

Utilisation d'un maillage grossier

Une autre approche consiste à utiliser un maillage plus grossier, pas nécessairement conforme, tel que les quadtree ou octree [19] (Figure 5.6).

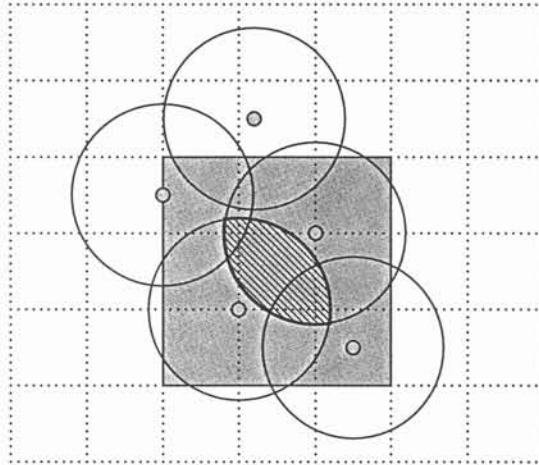


FIGURE 5.6: Utilisation d'un maillage destiné à l'intégration

Ces deux approches permettent d'obtenir une intégration de mise en oeuvre facile. Seulement, ces approches sont un peu en contradiction avec le principe des méthodes sans maillage et nous avons tenté de nous passer totalement de maillage dans toutes les parties de la procédure de résolution.

Utilisation d'un rectangle englobant

Il est possible d'éviter d'avoir recours à un maillage en utilisant toujours la méthode de Gauss sur un rectangle englobant le domaine de l'interboule (Figure 5.7). Dans ce contexte là, la méthode de Gauss est toujours valable puisqu'en dehors de l'interboule la fonction à intégrer est nulle.

Cette méthode est simple et surtout n'utilise pas de maillage intermédiaire.

Concernant les trois méthodes précédentes, il faut néanmoins regretter une certaine perte d'efficacité car les points et poids de Gauss ne sont pas "adaptés" vis à vis du domaine de l'interboule.

Utilisation de la transformation de Coons [11]

Une autre approche consiste à ne pas utiliser de domaine englobant l'interboule. Une utilisation directe du domaine de l'interboule peut paraître plus efficace car les points et poids seront calculés de façon adaptée à chaque domaine d'intégration. Pour cela, les interboules vont être transformés en rectangles par une transformation appelée transformation de Coons. Cette trans-

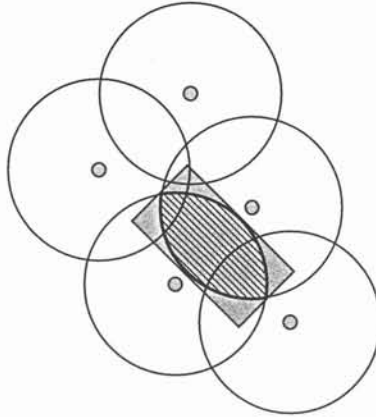


FIGURE 5.7: Utilisation de la méthode de Gauss sans Coons

formation permet de modifier un domaine quelconque à quatre “contours” en un carré (cas bidimensionnel) où il y est évidemment beaucoup plus aisé de déterminer les points et poids de Gauss car ceux-ci correspondent au produit des points et poids de Gauss sur un segment pour chaque direction. Le passage du carré au domaine réel peut se résumer en une matrice jacobienne, ce qui en définitive, revient à pondérer les poids du domaine carré par le déterminant de cette matrice.

$$\int_{\Omega} f(x).dx = \int_{\Omega_{ref}} f(u).det(J(u)).du = \sum f(u_i).w_i.det(J(u_i)) \quad (5.7)$$

où Ω_{ref} est le domaine de référence et Ω le domaine réel.

La transformation de Coons s’appuie sur la représentation paramétrique des bords du contour de l’interboule. À titre d’exemple, soit a_i les sommets et f_i les équations paramétriques des bords de l’interboule, soit (u, v) les coordonnées d’un point dans le carré et (x, y) les coordonnées d’un point dans l’interboule. Dans ce cas la transformation de l’interboule en un domaine carré peut s’écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} F(u, v) = [x, y] &= (1 - v)f_1(u) + vf_2(u) + (1 + u)f_4(v) + uf_2(v) \\ &- ((1 - u)(1 - v)a_1 + (1 - u)va_4 + \\ &(1 - v)ua_2 + uva_3) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Cette méthode est très satisfaisante car elle n’entraîne pas d’erreur sur le domaine d’intégration. Cependant elle nécessite un grand nombre de points de Gauss car le degré de la fonction à intégrer initialement est augmenté par le déterminant de la matrice jacobienne. En conséquence, nous avons dû expérimenter des alternatives à la méthode de Gauss, et en particulier nous orienter vers une méthode plus classique.

5.6.2 La méthode des rectangles

Une alternative consiste à utiliser la méthode des rectangles. Pour mettre en oeuvre une telle méthode, nous avons introduit un rectangle englobant l'interboule (Figure 5.8). Ce rectangle est lui-même subdivisé en sous rectangles sur lesquels est menée l'intégration.

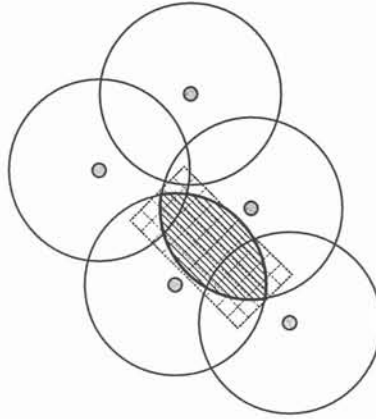


FIGURE 5.8: Méthodes des rectangles

Dans ce contexte, l'expression de l'intégrale peut se mettre sous la forme :

$$\sum_i \sum_j f(x_i, x_j) \cdot a_{ij} \quad (5.9)$$

où a_{ij} est l'aire d'un sous rectangle.

Cette méthode est efficace et permet un paramétrage simple et souple de la précision de l'intégration.

Une comparaison entre les méthodes d'intégration doit être entreprise dans l'optique de mettre en évidence la "meilleure" méthode d'intégration pour le type de fonctions à intégrer qui nous concerne.

5.6.3 Comparaison des méthodes d'intégration

Dans le but de trouver la meilleure méthode d'intégration pour les fonctions de forme, il est nécessaire de prendre en compte le degré de la fonction de forme à intégrer et en conséquence celui de la fonction de pondération qui a servi à sa construction. Dans notre étude, les deux fonctions de pondération utilisées du fait de leur régularité sont les fonctions de *type 4* et *type 5* d'expression ⁵ :

⁵Cf. Chapitre 1

Type	Expression
4	$w(\vec{x}) = \left(1 - \left(\frac{\ \vec{x}\ _2}{r_i}\right)^2\right)^k$
5	$w(\vec{x}) = \begin{cases} 1 - 6 \cdot \ \vec{x}\ _2^2 + 6 \cdot \ \vec{x}\ _2^3 & \text{pour } \ \frac{\ \vec{x}\ _2}{r_i}\ _2 < 0.5 \\ 2 \cdot (1 - \ \vec{x}\ _2)^3 & \text{pour } 0.5 < \ \frac{\ \vec{x}\ _2}{r_i}\ _2 < 1 \end{cases}$

Le degré k de la fonction de type 4 influe grandement le degré des fonctions de forme, donc en définitive le nombre de points d'intégration. Il est donc indispensable de mener la comparaison sur les méthodes pour les différents degrés des fonctions de pondération.

Comparaison entre les méthodes

Les figures 5.9 montrent la comparaison sur l'intégration d'un terme matriciel d'expression :

$$m_{i,j} = \int \int_{b_i \cap b_j \cap D_E} \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_i) \mu_0 \mu_r \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_j) d\Omega \quad (5.10)$$

pour une fonction de pondération de type 4 de degré 4 et une fonction de pondération de type 4 de degré 6. La valeur de l'intégrale exacte est obtenue par la méthode des rectangles avec 101 points d'intégration par direction.

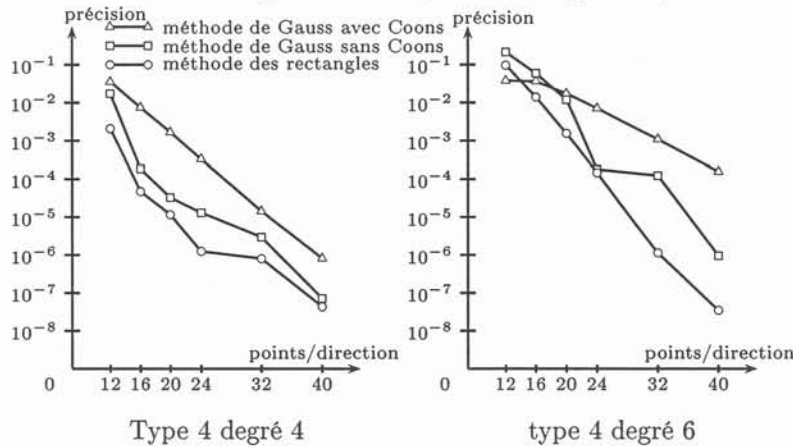


FIGURE 5.9: Comparaison de l'intégration en fonction de la méthode

Une première conclusion est que la méthode de Gauss classique ne permet pas d'obtenir une intégration aussi précise que nous l'espérons, espoirs basés sur l'efficacité de l'intégration de Gauss quand la fonction à intégrer est à variable séparée ce qui n'est pas notre cas.

En outre, dans notre cas, les fonctions de forme sont des fonctions rationnelles. Il est donc délicat de trouver une approximation adéquate de celles-ci par une base polynomiale. De plus, la méthode de Coons est très robuste comme en témoigne la pente quasi constante de la précision en fonction du nombre de points d'intégration, mais elle augmente l'ordre de la fonction à intégrer ce qui rend l'intégration moins précise à coût égal.

Ces raisons expliquent, dans les grandes lignes l'inefficacité dans notre cas de la méthode de Gauss. Il serait intéressant pour pallier ce problème de mettre en place une méthode de Gauss adaptée aux fonctions de forme qui sont les nôtres, ce qui revient à trouver un meilleur arrangement des points et poids. Cette approche n'a pas débouché pour l'instant.

Nous conserverons donc la méthode des rectangles pour l'intégration des fonctions de forme. Il faut noter que le nombre de points d'intégration par dimension est quand même conséquent, ce qui rendra le processus d'assemblage de la matrice de résolution beaucoup plus long qu'il n'est dans le cas de la *M.E.F.*

Il est aussi intéressant de tester la qualité de l'intégration par la méthode des rectangles pour des degrés différents de la fonction de pondération.

Précision sur l'intégration en fonction du degré de la fonction de pondération

La figure 5.10 montre l'erreur commise sur l'intégration en fonction du nombre de points d'intégration dans chaque direction pour la méthode des rectangles, ceci pour différents types et degrés de la fonction de pondération.

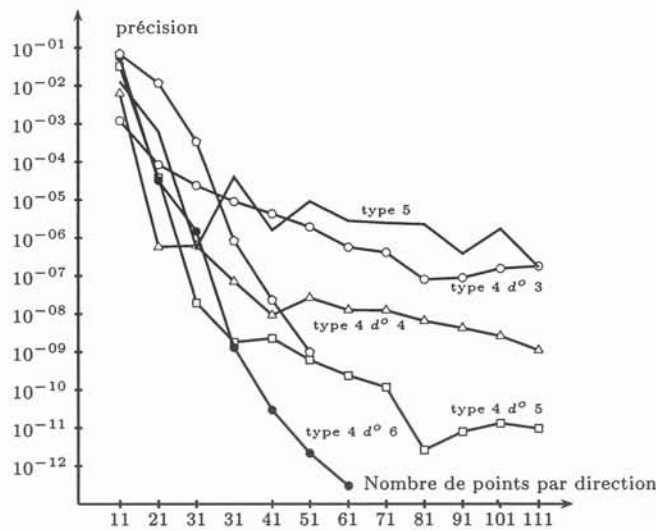


FIGURE 5.10: Comparaison de l'intégration en fonction du degré de la fonction de pondération

La figure 5.10 met en évidence le fait que pour un nombre de points d'intégration donné, il est difficile de choisir la meilleure fonction de pondération d'un point de vue de l'intégration. De plus, pour atteindre une intégration la plus exacte possible, il semble nécessaire d'augmenter le degré de la fonction de pondération et en parallèle, d'augmenter le nombre de points pour l'intégration. En conséquence de quoi, un compromis acceptable semble consister à choisir une fonction de pondération de type 4 de degré 4 d'expression :

$$w(\vec{x}) = \left(1 - \left(\frac{\|\vec{x}\|_2}{r_i} \right)^2 \right)^4 \quad (5.11)$$

avec 41 points d'intégration par dimension. Il paraît évident que la procédure d'assemblage en sera considérablement ralentie mais nous avons préféré privilégier la qualité au dépend de la rapidité. Bien sûr, l'intégration des fonctions de forme doit faire l'objet d'une attention toute particulière à l'avenir et prendra place naturellement dans les perspectives de recherche faisant suite à ce travail.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons détaillé les techniques d'implémentation d'une méthode sans maillage. Nous nous sommes attachés à ne pas utiliser de maillage même temporaire dans toutes les étapes de résolution et de post-traitement.

Nous avons pour cela proposé des structures de données et des algorithmes spécifiques, qui sans être tout à fait aussi efficaces que ceux utilisés par la méthode des éléments finis, s'approchent néanmoins de leurs performances.

Reste cependant un point faible dans notre proposition : il s'agit du coût de l'intégration des fonctions de forme. En effet, l'intégration des termes matriciels sur les interboules nécessite un nombre de points d'intégration important : alors que la *M.E.F* n'utilise classiquement qu'une dizaine de points d'intégration, 1681 points semblent être nécessaires pour la méthode *HP-Clouds* en deux dimensions. Remarquons à ce titre qu'il serait sans doute intéressant de tester une intégration de Gauss sur un découpage de la boîte englobant le domaine à intégrer tel que celui utilisé à la section 5.6.2. De plus, comme pour un nuage de noeuds donné, le nombre d'interboules est largement supérieur au nombre d'éléments finis, la procédure de résolution est considérablement ralentie.

Quatrième partie
Les applications

Chapitre 6

Les premières applications

L'objectif de ce chapitre est de proposer différentes applications représentatives des comportements de la résolution à l'aide de la méthode *HP-Clouds*, pour des problèmes complexes et surtout représentant des dispositifs "quasi industriels". Dans cette optique, nous allons résoudre trois problèmes distincts. D'une part, un contacteur simple qui utilisera toutes les notions que nous avons élaborées dans les chapitres précédents. Ensuite, nous allons tester le bon comportement du couplage *M.E.F/HP-Clouds* en résolvant un problème de pompe à induction. Et enfin, un problème dynamique comportant des pièces en mouvement sera résolu.

6.1 Un contacteur simple

6.1.1 Principe

Il s'agit d'un contacteur très simple comportant une bobine créant un champ \vec{B} qui est canalisé par la partie métallique supérieure (Figure 6.1).

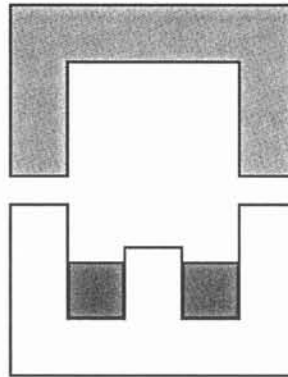


FIGURE 6.1: Un contacteur simple

La bobine crée un champ qui tend à faire baisser la reluctance globale du

système. Il se crée donc une force d'attraction entre les deux armatures tendant ainsi à minimiser l'entrefer.

6.1.2 La structure

Le nuage de noeuds initial est créé à partir d'une procédure de maillage éléments finis (Figure 6.2). A partir de ce premier nuage de noeuds, des boules sont générées de telle façon d'une part qu'il y ait recouvrement et d'autre part que leurs rayons correspondent en moyenne à 1.31 fois le pas inter-nodal (Figure 6.2).

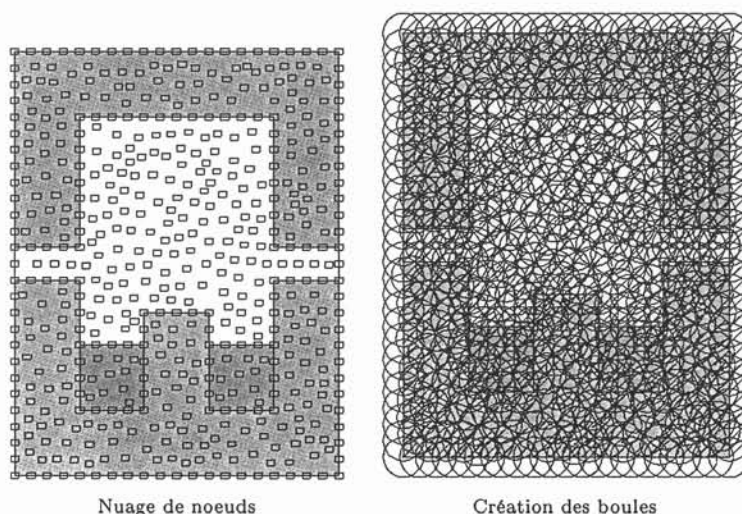


FIGURE 6.2: Structure de base pour le contacteur

Après réorganisation des boules en utilisant la procédure proposée dans le chapitre 3 (Figure 6.3), l'ensemble des boules forme un pavage du domaine d'étude (Figure 6.3) avec 526 boules. Le nombre d'interboules est de 5793, en conséquence la connectivité moyenne est de 20.

6.1.3 La résolution

Nous résolvons ce type de problème en magnétostatique en utilisant une formulation en \vec{A} qui, en deux dimensions ne conserve qu'une seule composante A_z normale au plan d'étude. Nous utilisons la fonction de pondération de type 4 pour le calcul des fonctions de forme. L'intégration sur les interboules utilise la méthode des rectangles avec 41 points par direction, soit 1681 points d'intégration pour chaque interboule.

Nous utilisons une base hiérarchique d'ordre 1 pour résoudre ce problème. En conséquence, chaque noeud du domaine porte 3 valeurs nodales. La matrice de résolution est de dimension (1578×1578) .

La matrice de résolution est une matrice symétrique et creuse. D'après la connectivité des boules, la largeur de bande de cette matrice est de 58.

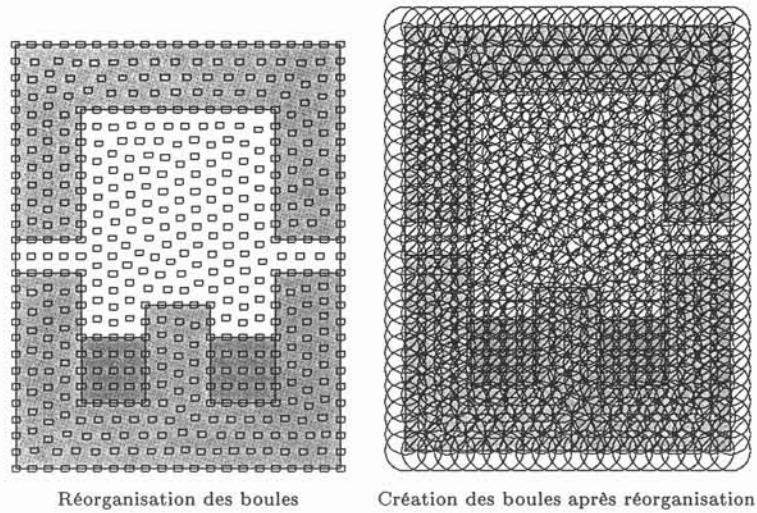


FIGURE 6.3: Structure finale pour le contacteur

L'algorithme de résolution utilisé est le même que celui utilisé dans le logiciel de simulation électromagnétique Flux3d, à savoir *ICCG*. Le nombre important de points d'intégration augmente considérablement le coût d'intégration. Pour information, dans cet exemple, le temps cumulé d'intégration, d'assemblage et de résolution est de 180 minutes sur un PC 400Mhz.

Le tableau 6.1 récapitule les caractéristiques de ce problème résolu à l'aide de la méthode *HP-Clouds*.

Nombre de Noeuds	526
Nombre de boules	526
Nombre d'interboules	5793
Type des fonctions de pondération	4
Méthode d'intégration	rectangle
Nombre de points d'intégration par interboule	1681
Ordre de l'approximation	1
Nombre de valeurs nodales par noeud	3
Nombre de lignes dans la matrice	1578
Largeur de bande	58
Algorithme de résolution	ICCG
Nombre d'itérations lors de la résolution <i>HP-Clouds</i>	17
Temps d'assemblage et de résolution	180 minutes

TABLEAU 6.1: Récapitulatif des caractéristiques de résolution *HP-Clouds* pour le contacteur simple

Pour comparaison résolvons le même dispositif en utilisant la méthode des éléments finis pour une approximation d'ordre 1. Le tableau 6.2 résume les caractéristiques d'une telle résolution.

Cette comparaison est étonnante car elle montre que pour un ordre donné, la matrice de résolution *HP-Clouds* est bien plus "pleine". En effet, la largeur de bande pour la résolution *M.E.F* est 10 fois plus importante que pour la résolution *HP-Clouds* car la connectivité est importante. De plus, la matrice

Nombre de Noeuds	526
Nombre d'éléments finis	1124
Ordre de l'approximation	1
Nombre de valeurs nodales par noeud	1
Nombre de lignes dans la matrice	526
Largeur de bande	6
Algorithme de résolution	ICCG
Nombre d'itérations lors de la résolution <i>M.E.F</i>	24
Temps d'assemblage et de résolution	30 secondes

TABLEAU 6.2: Récapitulatif des caractéristiques de résolution *M.E.F* pour le contacteur simple

de résolution obtenue avec la méthode *HP-Clouds* est probablement mieux conditionnée car le nombre d'itérations nécessaires est nettement inférieur à celui pour la méthode *M.E.F* : les fonctions de forme *HP-Clouds* semblent être plus proches de l'orthogonalité que les fonctions de forme éléments finis. En somme, d'un côté la matrice de résolution est moins creuse, d'un autre coté elle est mieux conditionnée.

6.1.4 Les résultats

Pour se rendre compte de l'efficacité de l'approximation *HP-Clouds*, traçons les isovaleurs du potentiel (variable d'état) sur le domaine d'étude (Figure 6.4). Pour comparaison, résolvons le même problème avec le même nombre de noeuds avec la méthode *M.E.F* et avec des éléments d'ordre 1 (Figure 6.4).

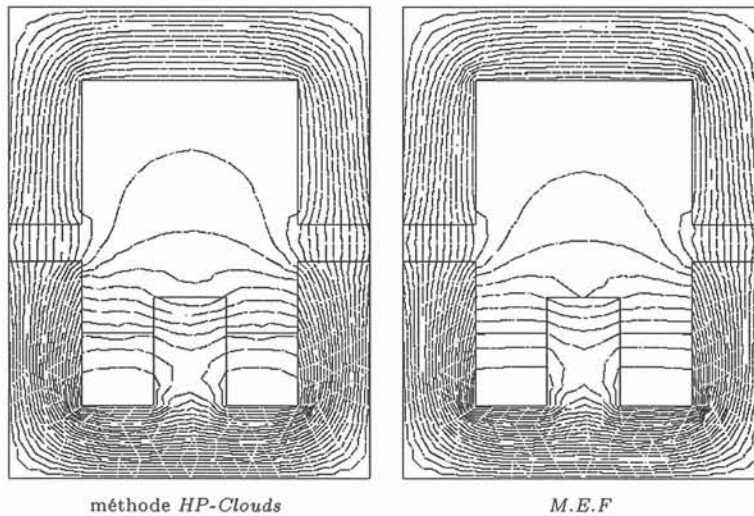


FIGURE 6.4: Isovaleurs après résolution pour le contacteur simple (*HP-Clouds*) (576 noeuds)

Il faut noter quand même que la visualisation des isovaleurs utilise dans les deux cas les éléments finis comme support de découpage pour le tracé. En ce qui concerne l'approximation *HP-Clouds* l'utilisation des éléments finis dans le tracé ne traduit pas avec fidélité les valeurs de la solution, mais par contre

donne une allure générale tout à fait satisfaisante. Pour être plus juste et pour que la comparaison soit plus précise, traçons l'allure de la variable d'état ainsi que sa dérivée par rapport à x le long d'une ligne au milieu de l'entrefer (Figure 6.5).

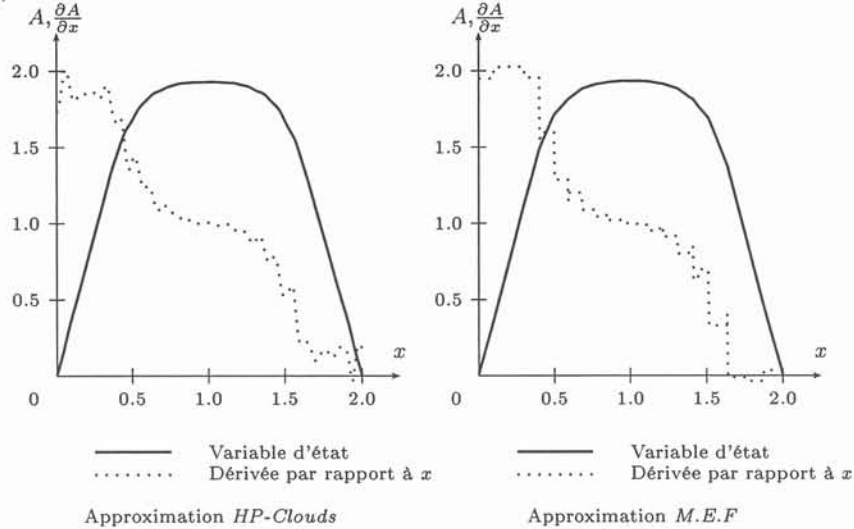


FIGURE 6.5: Allure de l'approximation sur une ligne

6.1.5 Bilan

Cet exemple, certes simple, montre que la méthode *HP-Clouds* est capable de générer une approximation correcte pour des dispositifs réels et relativement complexes. Par ailleurs, cet exemple valide l'ensemble de notre démarche puisqu'il utilise la quasi totalité des propositions énoncées dans les parties précédentes à savoir l'ajout de la fonction saut pour traiter les interfaces entre matériaux, les conditions aux limites, l'intégration sur les interboucles, etc.

6.2 La pompe à induction

6.2.1 Principe de la pompe à induction

La pompe à induction est un dispositif électromagnétique qui comporte un inducteur triphasé et un induit solide ou liquide (Figure 6.6).

Lorsque l'inducteur est alimenté en courant triphasé, il crée un champ magnétique \vec{B} glissant à une vitesse fixe, appelée vitesse de synchronisme. Dans l'induit se développent des courants \vec{J} , et donc s'exercent des forces \vec{F} telles que $\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}$. Ces forces tendent à déplacer l'induit dans le sens du champ, ce qui justifie l'appellation de pompe car il suffit d'imaginer dans l'induit un milieu conducteur liquide, par exemple du sodium.

Pratiquement, cette pompe peut être vue comme un moteur asynchrone "déroulé". Les différentes phases du courant sont distribuées de façon à obtenir

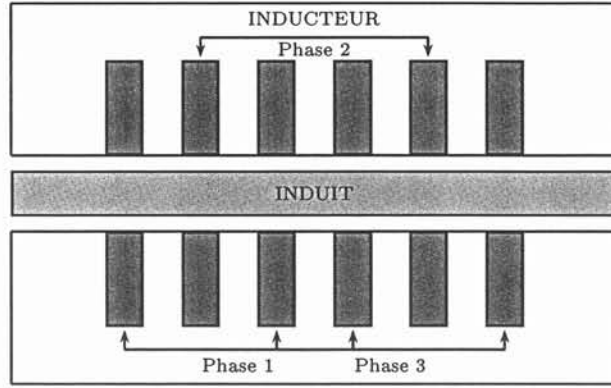


FIGURE 6.6: Pompe à induction

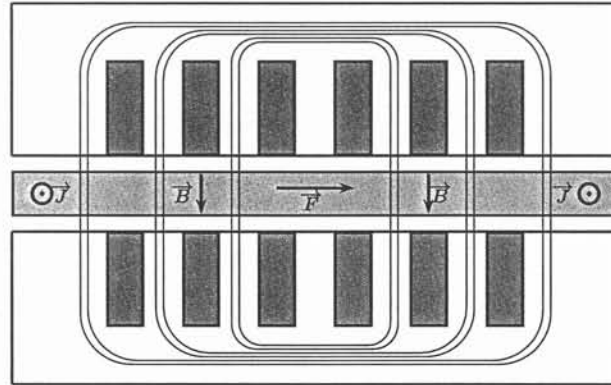


FIGURE 6.7: Pompe à induction : lignes de champs schématiques

un modèle plan et avec :

Phase 1	$I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$
Phase 2	$I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - 2 \cdot \frac{\pi}{3})$
Phase 3	$I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + 2 \cdot \frac{\pi}{3})$

La géométrie étant symétrique, il est possible de se ramener à un demi problème.

6.2.2 Création des boules

Les boules sont créées dans l'air à partir d'un maillage éléments finis (Figure 6.8).

Nous appliquons l'algorithme de réorganisation des boules ¹ pour obtenir une configuration optimale pour une résolution avec la méthode *HP-Clouds*. Puis le rayon des boules est augmenté pour respecter le recouvrement ² du domaine.

¹Cf. Chapitre 4

²Cf. Chapitre 1

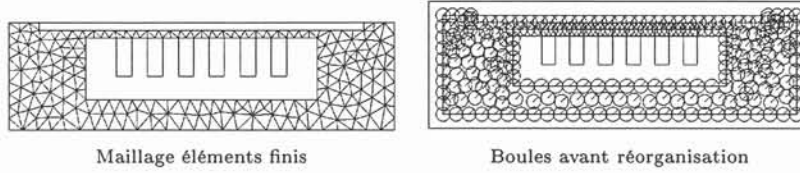


FIGURE 6.8: Génération des boules à partie du maillage éléments finis

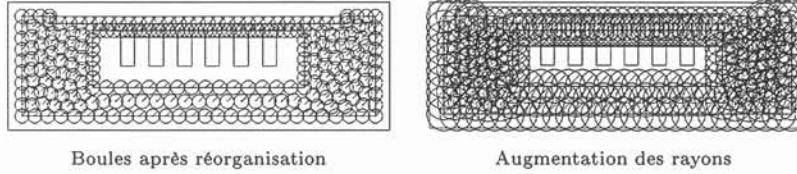


FIGURE 6.9: Génération des boules à partir du maillage éléments finis

Dans les parties de l'inducteur et de l'induit, nous conservons un maillage éléments finis.

6.2.3 La résolution

En toute logique, vu la présence de courants induits dans l'induit, il est nécessaire d'utiliser un modèle magnétodynamique. N'en disposant pas dans le cadre des méthodes sans maillage, nous nous sommes contentés d'une formulation en potentiel vecteur \vec{A} statique. Par contre ce problème fait intervenir le couplage *HP-Clouds/M.E.F.* Dans le même esprit que pour le contacteur simple, le tableau 6.3 récapitule les caractéristiques essentielles lors d'une résolution à l'aide de la méthode *HP-Clouds* pour le problème de la pompe à induction.

Pour comparaison reprenons le même dispositif, mais cette fois-ci sans couplage. Le tableau 6.4 résume les caractéristiques d'une telle résolution.

Nous pouvons faire les mêmes remarques que pour le problème précédent à savoir que la matrice de résolution est moins creuse mais par contre par rapport à celle pour la *M.E.F.*, elle est mieux conditionnée.

6.2.4 Les résultats

Réolvons ce problème avec quatre valeurs de courant différentes à savoir pour $\omega t = 0$, $\omega t = 30$ (Figure 6.10), $\omega t = 60$ et $\omega t = 90$ (Figure 6.10).

Pour comparaison, reprenons les mêmes résolutions en utilisant la méthode des éléments finis sur tout le domaine d'étude (Figures 6.12 et 6.13).

6.2.5 Bilan

Comme dans le cas du contacteur simple, la méthode *HP-Clouds* est très efficace. Ce problème est très intéressant car il met en avant la faculté réelle de

Modèle	Magnétostatique
Formulation	Potentiel vecteur \vec{A} 2D
Approximation dans l'air	<i>HP-Clouds</i>
Approximation dans les bobines	<i>M.E.F</i>
Approximation dans l'inducteur	<i>M.E.F</i>
Approximation dans l'induit	<i>M.E.F</i>
Nombre de Noeuds	435
Nombre de boules	256
Nombre d'interboules	1650
Type des fonctions de pondération	4
Méthode d'intégration	rectangle
Nombre de points d'intégration par interboule	441
Ordre de l'approximation	1
Nombre de valeurs nodales par noeud <i>HP-Clouds</i>	3
Nombre de valeurs nodales par noeud <i>M.E.F</i>	1
Nombre de lignes dans la matrice	909
Largeur de bande	69
Algorithme de résolution	ICCG
Nombre d'itérations lors de la résolution	16
Temps d'assemblage et de résolution	4 minutes

 TABLEAU 6.3: Récapitulatif des caractéristiques de résolution *HP-Clouds* pour la pompe à induction

Modèle	Magnétostatique
Formulation	Potentiel vecteur \vec{A} 2D
Approximation dans l'air	<i>M.E.F</i>
Approximation dans les bobines	<i>M.E.F</i>
Approximation dans l'inducteur	<i>M.E.F</i>
Approximation dans l'induit	<i>M.E.F</i>
Nombre de Noeuds	435
Nombre d'éléments	787
Ordre de l'approximation	1
Nombre de valeurs nodales par noeud	1
Nombre de lignes dans la matrice	435
Largeur de bande	6
Algorithme de résolution	ICCG
Nombre d'itérations lors de la résolution	23
Temps d'assemblage et de résolution	20 secondes

 TABLEAU 6.4: Récapitulatif des caractéristiques de résolution *M.E.F* pour la pompe à induction

coupler les méthodes *HP-Clouds* et *M.E.F* : l'approximation *HP-Clouds* peut désormais s'insérer en toute confiance dans des problèmes comportant des zones en éléments finis, permettant de tirer partie des avantages des deux méthodes.

6.3 Contacteur multistatique

6.3.1 Principe du contacteur

Ce problème modélise un contacteur en faisant intervenir le mouvement d'une pièce. Concrètement, une bobine crée un champ dans une palette mobile qui tend à faire diminuer la reluctance globale du système (Figure 6.14).

Les lignes de champ (Figure 6.14) montrent que le système tend à diminuer l'air entre la partie mobile et la partie fixe par création d'une force normale à la palette en mouvement. Le mouvement de la palette est une rotation (Figure 6.14).

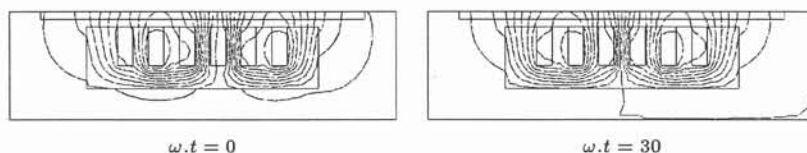


FIGURE 6.10: Lignes de champs pour $\omega.t = 0$ et $\omega.t = 30$ pour la pompe à induction(HP-Clouds)

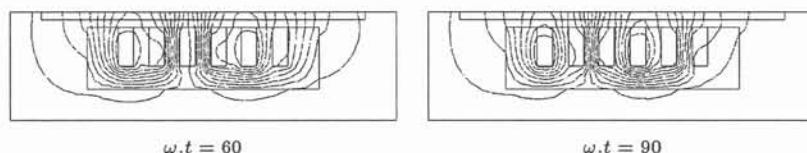


FIGURE 6.11: Lignes de champs pour $\omega.t = 60$ et $\omega.t = 90$ pour la pompe à induction(HP-Clouds)

6.3.2 La structure

Ce contacteur est résolu par couplage entre la *M.E.F* et la méthode *HP-Clouds*. Précisément, la palette ainsi que l'air déformable sont résolus à l'aide de la méthode *HP-Clouds* particulièrement adaptée pour sa faculté à prendre en compte des grandes déformations, le reste de la structure est résolu à l'aide de la *M.E.F*. Les noeuds sont créés grâce à une procédure de maillage éléments finis (Figure 6.15).

6.3.3 La résolution

Dans le même esprit que pour le contacteur simple, le tableau 6.6 récapitule les caractéristiques essentielles de la résolution couplant la méthode *HP-Clouds* et la *M.E.F* pour le problème du contacteur multistatique.

6.3.4 Les résultats

Un des intérêts de ce problème est l'aspect dynamique. Pour le prendre en compte, nous utilisons la méthode énoncée dans le chapitre 2, à savoir l'adaptation du pavage par boule lors d'un mouvement (Figure 6.16).

Nous présentons une résolution multistatique de ce problème pour différents angles de rotation (Figures 6.17 et 6.18).

Pour comparaison, résolvons ce problème à l'aide de la méthode des éléments finis (Figures 6.19 et 6.20).

6.3.5 Bilan sur le problème du contacteur multistatique

Lors de mouvements de partie mobile, la méthode *HP-Clouds* s'adapte parfaitement et permet en conséquence d'envisager des résolutions comportant de grandes déformations, ce qui reste un point délicat avec la méthode des éléments finis.

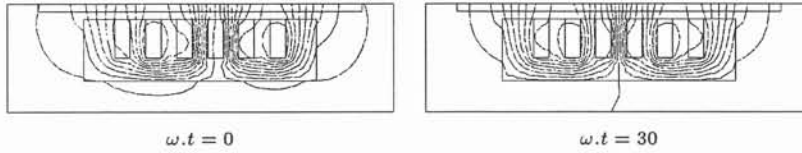


FIGURE 6.12: Lignes de champs pour $\omega.t = 0$ et $\omega.t = 30$ pour la pompe à induction (M.E.F)

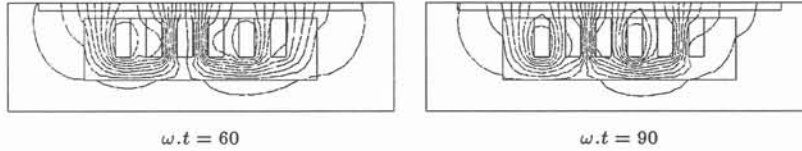


FIGURE 6.13: Lignes de champs pour $\omega.t = 60$ et $\omega.t = 90$ pour la pompe à induction (M.E.F)

6.4 Conclusion

Nous avons pris le temps de détailler trois problèmes différents qui couvrent toutes les étapes d'une résolution à l'aide de la méthode *HP-Clouds*. Dans un premier temps nous avons effectué une résolution complète utilisant de ce fait quasiment toutes les démarches que nous avons établies dans les parties précédentes.

Deuxièmement, nous avons testé le couplage éléments finis *HP-Clouds* qui a donné de bons résultats. Cette approche hybride semble particulièrement séduisante, car elle permet, tout en conservant des propriétés importantes du système matriciel (caractère creux, symétrique voire défini positif) de choisir la méthode la plus adaptée pour chaque domaine physique.

C'est ce que nous avons testé dans le troisième et dernier problème, où l'air, milieu déformable, utilise une méthode *HP-Clouds* et permet la prise en compte du mouvement de pièces avec beaucoup d'élégance.

D'une manière générale, ces trois exemples prouvent les capacités des méthodes sans maillage à traiter des dispositifs "quasi industriels".

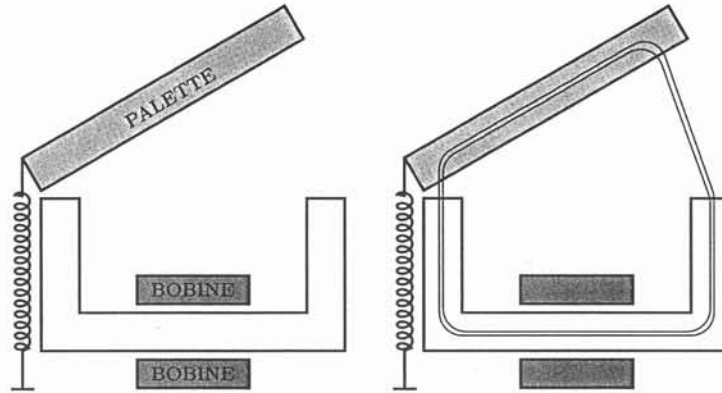


FIGURE 6.14: Un contacteur

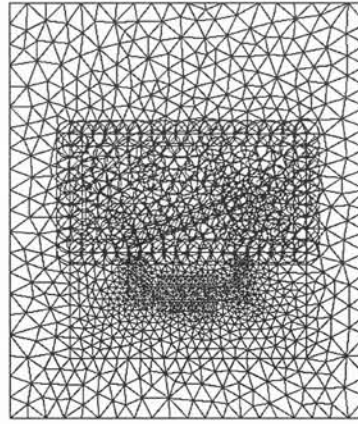


FIGURE 6.15: Structure du contacteur

Modèle	Magnétostatique / Multistatique
Formulation	Potentiel vecteur \vec{A} 2D
Approximation dans l'air	<i>M.E.F</i> et <i>HP-Clouds</i>
Approximation dans la palette	<i>HP-Clouds</i>
Approximation dans l'induit	<i>M.E.F</i>
Nombre de Noeuds	1255
Nombre de boules	229
Nombre d'interboules	1575
Type des fonctions de pondération	4
Méthode d'intégration	rectangle
Nombre de points d'intégration par interboule	441
Ordre de l'approximation	1
Nombre de valeur nodale par noeud	3
Nombre de lignes dans la matrice	1453
Largeur de bande	56
Algorithme de résolution	ICCG
Nombre pas lors de la résolution	26
Temps d'assemblage et de résolution	10 minutes

TABLEAU 6.5: Récapitulatif des caractéristiques de résolution *HP-Clouds* pour le contacteur multistatique

Modèle	Magnétostatique / Multistatique
Formulation	Potentiel vecteur \vec{A} 2D
Approximation dans l'air	<i>M.E.F</i>
Approximation dans la palette	<i>M.E.F</i>
Approximation dans l'induit	<i>M.E.F</i>
Nombre de Noeuds	1255
Nombre d'éléments	2428
Ordre de l'approximation	1
Nombre de valeur nodale par noeud	1
Nombre de lignes dans la matrice	1255
Largeur de bande	6
Algorithme de résolution	ICCG
Nombre pas lors de la résolution	36
Temps d'assemblage et de résolution	2 minutes

TABEAU 6.6: Récapitulatif des caractéristiques de résolution *M.E.F* pour le contacteur multistatique

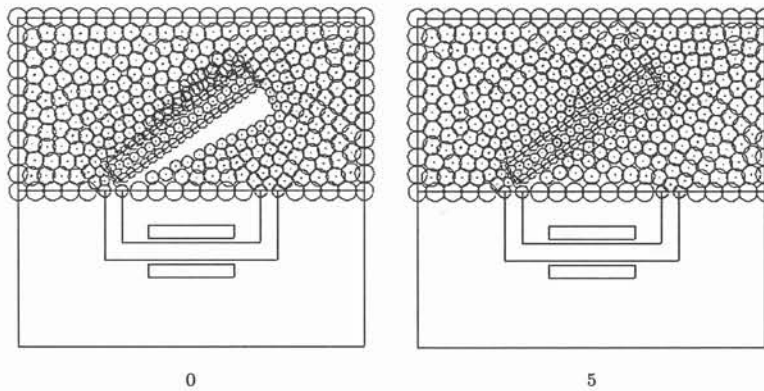


FIGURE 6.16: Mouvement des boules après une rotation de 10 degrés

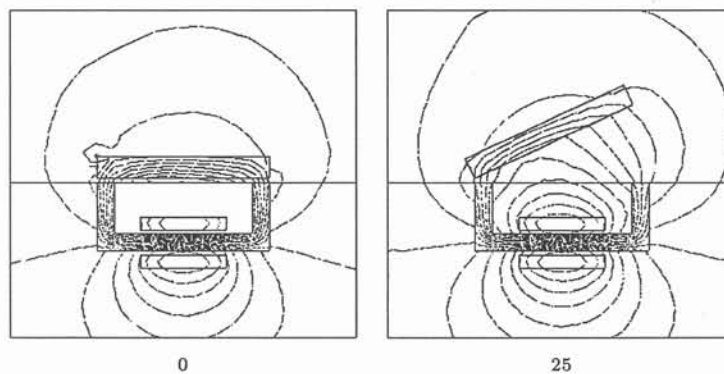


FIGURE 6.17: Isovaleurs sur le contacteur (*HP-Clouds*)

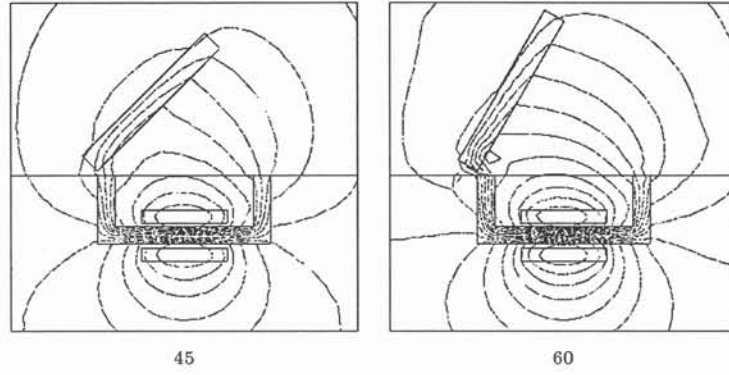


FIGURE 6.18: Isovaleurs sur le contacteur (*HP-Clouds*)

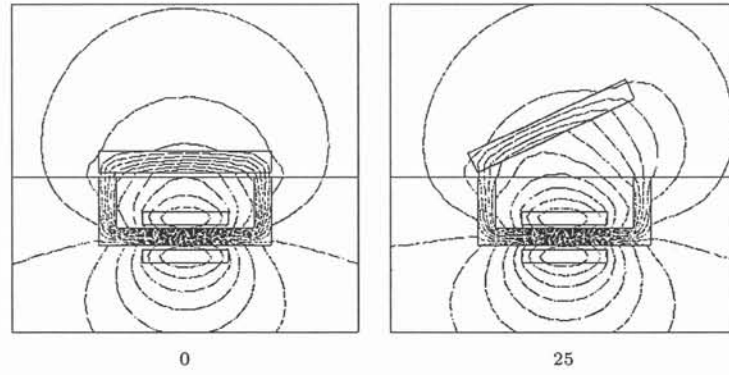


FIGURE 6.19: Isovaleurs sur le contacteur (*M.E.F*)

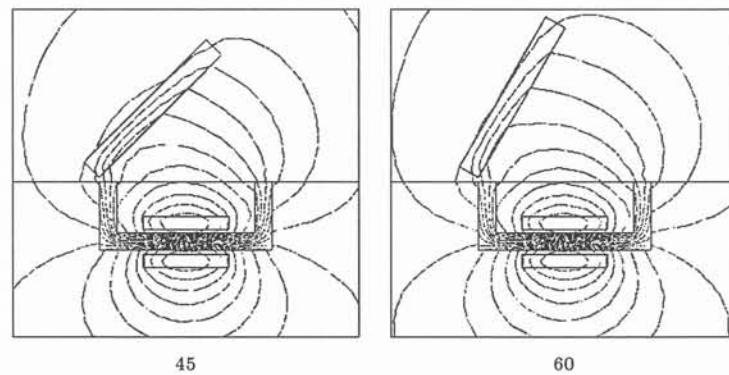


FIGURE 6.20: Isovaleurs sur le contacteur (*M.E.F*)

Chapitre 7

Approximation de fonctions objectifs par la méthode *HP-Clouds*

Dans ce dernier chapitre, nous allons présenter une application originale des méthodes sans maillage. Il s'agit de construire l'approximation d'une fonction objectif utilisée dans les techniques d'optimisation.

Nous nous plaçons dans le cadre des méthodes d'optimisation stochastiques, dont les caractéristiques peuvent se résumer par leur capacité à trouver l'optimum global d'une fonction objectif moyennant souvent un grand nombre d'évaluations. Parmi les méthodes stochastiques, nous considérerons plus précisément les algorithmes génétiques ou de recuit simulé, méthodes d'ordre 0, c'est à dire qui ne nécessitent que la connaissance de la fonction à optimiser.

Dans un tel contexte, si la fonction objectif est issue d'un calcul numérique de type éléments finis, le coût de la recherche d'un optimum global devient prohibitif.

Pour le rendre possible, la fonction objectif réelle est remplacée par une approximation dont le coût de construction peut être élevé mais dont le coût d'évaluation est quasi nul. Pour cela, il faut disposer d'une méthode d'approximation robuste, souple, rapide et surtout capable d'interpoler une fonction dans un espace à p dimension, où p est le nombre de paramètres de conception. P étant généralement supérieur à 3, ceci semble au moins dans une première approche exclure la méthode des éléments finis pour des problèmes de maillage.

Nous allons montrer l'intérêt des méthodes d'approximation sans maillage pour atteindre cet objectif.

7.1 La méthode d'approximation

Plusieurs méthodes d'approximation des fonctions objectifs ont été proposées ces dernières années [41] [40] [7]. Elles s'appuient essentiellement sur des fonctions à base radiale ("Radial based functions") [40] ou multiquadriques [41]

parfois couplées à des réseaux de neurones. Ces méthodes deviennent réellement populaires dans le domaine de l'optimisation couplée à la simulation numérique en électromagnétisme.

Cependant, elles possèdent des points faibles qui peuvent limiter leur utilisation :

- l'approximation conduit à résoudre un système matriciel plein, dont la taille peut très vite atteindre les limites des machines courantes,
- certains paramètres de ces méthodes d'approximation sont assez difficiles à régler,
- enfin, ces méthodes disposent d'une faible marge d'évolution.

L'idée est donc d'utiliser des méthodes sans maillage, et notamment la méthode *HP-Clouds*.

7.2 L'apport de la méthode *HP-Clouds*

La méthode *HP-Clouds* est tout à fait adaptée à ce genre de procédure puisque qu'elle permet d'assurer l'approximation d'une fonction à plusieurs paramètres. À ce titre, l'interpolation par éléments finis semble limitée par la contrainte du maillage à trois paramètres, même si cette limite peut sans doute être repoussée. Quoiqu'il en soit, les boules, base de l'approximation *HP-Clouds* sont généralisables pour des dimensions quelconques. Pour une dimension p telle que $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_p]$ alors la boule b_i associée au noeud i de coordonnées x_i est définie par :

$$b_i = \{ \vec{x} / \|\vec{x} - \vec{x}_i\|_2 \leq r_i \} \quad (7.1)$$

avec r_i le rayon de la boule b_i et dans ce cas :

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=p} x_i^2} \quad (7.2)$$

Le caractère convergent de l'approximation *HP-Clouds* constitue aussi une propriété indispensable à l'approximation fine des fonctions objectifs.

Enfin, la connaissance de la dérivée première de l'approximation permet d'envisager d'utiliser cette approximation pour piloter aussi des algorithmes déterministes de type quasi Newton.

7.3 Position du problème

L'objectif est de créer l'approximation *HP-Clouds* d'une fonction dont on cherchera par la suite les extremas (minima ou maxima). Dans la mesure où l'approximation *HP-Clouds* doit pouvoir s'insérer dans de multiples procédures d'optimisation comme les algorithmes génétiques ou bien la méthode des gradients, la procédure que nous proposons (Figure 7.1) est dans un premier temps

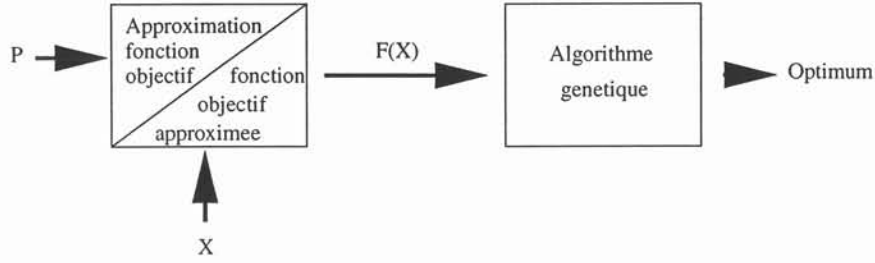


FIGURE 7.1: Procédure d'approximation de la fonction objectif

indépendante de la méthode d'optimisation. Par contre les différentes validations utiliseront un algorithme génétique.

Dans le schéma 7.1, P représente l'ensemble des paramètres et X un jeu de paramètres.

7.4 Le calcul de la fonction d'approximation

Soit $[\vec{x}_i]_{1 \leq i \leq k}$ l'ensemble des paramètres calculés en k points, \vec{x}_i étant un vecteur de dimension p , où p est le nombre de paramètres, soit :

$$\vec{x}_i = \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_p^i \end{bmatrix}$$

Soit Ω le domaine de dimension p formé par l'excursion des p paramètres, alors :

$$\Omega = \left\{ \vec{x} / (p_{i_{min}} \leq x_i \leq p_{i_{max}})_{1 \leq i \leq p} \right\} \quad (7.3)$$

Soit \mathcal{E}_K un espace de fonctions de dimension k tel que :

$$\mathcal{E}_K = \{[\phi_i(\vec{x})]_{1 \leq i \leq k}\}$$

où $[\phi_i(\vec{x})]_{1 \leq i \leq k}$ sont les fonctions de forme *HP-Clouds*.

L'approximation *HP-Clouds* $\tilde{F}(\vec{x})$ de la fonction objectif $F(\vec{x})$ est définie par :

$$\tilde{F}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{i=k} f_i \cdot \phi_i(\vec{x})$$

où f_i sont les valeurs nodales.

7.5 Calcul des valeurs nodales

L'utilisation de la collocation ou bien de la méthode des moindres carrés semble s'imposer naturellement. Considérons par exemple le cas de la collocation.

Supposons la connaissance de la fonction $F(\vec{x})$ en k points $[\vec{x}_i]_{1 \leq i \leq k}$, notés $[F(\vec{x}_i)]_{1 \leq i \leq k}$. Le calcul des valeurs nodales $[f_i]_{1 \leq i \leq k}$ s'effectue en s'assurant que :

$$\tilde{F}(\vec{x}_i) = \sum_{j=1}^{j=k} f_j \cdot \phi_j(\vec{x}_i) = F(\vec{x}_i) \quad (7.4)$$

Ce qui entraîne la résolution d'un système matriciel creux de dimension $(k \times k)$ (les fonctions de forme n'étant généralement pas interpolantes).

Au même titre que pour une résolution classique, l'approximation *HP-Clouds* de la fonction objectif est paramétrée par le nuage de noeuds. Cette procédure est expliquée dans la section suivante.

7.6 La création du nuage de points d'approximation

Le nuage de noeuds est naturellement défini par l'ensemble $[\vec{x}_i]_{1 \leq i \leq k}$.

Le premier nuage de noeuds peut être défini par une grille régulière de l'espace des paramètres, chaque direction dans cet espace pouvant être discrétisée plus ou moins finement en fonction de la sensibilité de la fonction objectif au paramètre considéré. Cette sensibilité peut être évaluée par une méthode de plans d'expérience.

Cependant, la difficulté vient de la contrainte de recouvrement.

Pour qu'il y ait recouvrement sur la cellule, il faut que le rayon soit au moins égal à la demi diagonale d'une cellule.

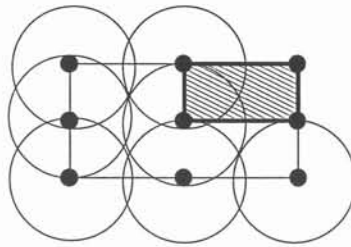


FIG. 7.1: Cellule de base pour la création du nuage de noeuds

Soit une cellule en p dimension définie par :

$$\vec{a} \leq \vec{x} \leq \vec{b}$$

avec :

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$$

c'est à dire pour $1 \leq i \leq p$:

$$a_i \leq x_i \leq b_i$$

La diagonale δ de la cellule est alors :

$$\delta = \left\{ \sum_{i=1}^{i=p} (b_i - a_i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Pour une cellule, nous pouvons en déduire la valeur de r^{min} pour la boule b_k :

$$r_k^{min} = \max \left(\frac{\delta_i}{2} \right)_{1 \leq i \leq N_k}$$

où N_k est le nombre de cellules touchant le noeud k .

Remarque: 7.6.1 Cette approche peut conduire à des tailles de boules très grandes si les excursions des paramètres sont dans des ordres de grandeurs différents. Pour surmonter ce problème, il est nécessaire de normaliser l'excursion des paramètres au préalable.

7.7 Adaptativité

Le nuage de noeuds initial peut s'avérer insuffisant. Il devient indispensable de mettre en place une procédure adaptative du nuage de noeuds.

D'une part, nous pouvons noter que l'adaptativité peut s'appliquer à deux étapes du processus d'optimisation :

- Adaptativité par rapport à l'extremum,
- Adaptativité par rapport à l'approximation elle même.

D'autre part, il est aussi possible d'augmenter l'ordre de l'approximation. Cette procédure nécessitera alors l'utilisation des moindres carrés pour la résolution.

Ces procédures d'adaptativité non pas été testées et ne sont donc pas présentées dans ce travail.

7.8 Application : TEAM Workshop 25

7.8.1 Principe de base

La figure 7.2 montre un dispositif de création d'aimants permanents à partir de poudre magnétique permettant la production d'aimants anisotropes. La

presse et l'électro-aimant sont en acier. La poudre magnétique est insérée dans la cavité. Le but de ce problème est d'optimiser la forme des moules afin d'obtenir un aimant à distribution radiale de flux.

Ce dispositif fait partie d'une série de problèmes tests internationaux permettant de valider les méthodes et les modèles.

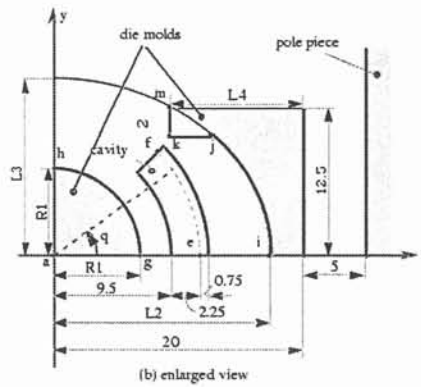
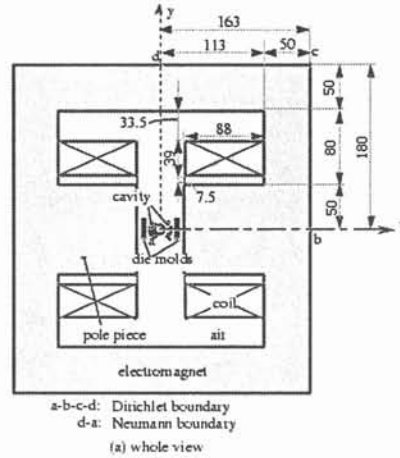
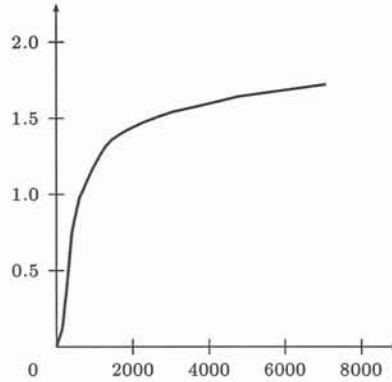


FIG. 7.2: Team Workshop numéro 25

7.8.2 Définition du problème

Le matériau magnétique constituant l'armature du dispositif aimanteur est non linéaire (Figure 7.3). Chaque enroulement de la bobine inductrice porte 4253 ampère-tours.

L'objectif recherché est de disposer le long de la courbe $e - f$ (Figure 7.2) une induction \vec{B} dont les composantes valent :

FIG. 7.3: Courbe $B(H)$

$$\begin{cases} B_x = 0.35 \cos \theta \\ B_y = 0.35 \sin \theta \end{cases} \quad (7.5)$$

où θ est l'angle par rapport à l'axe des abscisses.

7.8.3 La fonction objectif

L'obtention d'une distribution radiale de flux peut être résumée par la fonction objectif \mathcal{F} suivante :

$$\mathcal{F} = \sum_{i=1}^{i=n} \{ (B_{i_x} - 0.35 \cos \theta_i)^2 + (B_{i_y} - 0.35 \sin \theta_i)^2 \} \quad (7.6)$$

Cette fonction objectif représente l'erreur commise par l'induction vis à vis de la valeur de référence sur la courbe $e - f$ (Figure 7.2).

7.8.4 Paramètres et contraintes

Nous pouvons considérer la forme du moule interne comme un cercle de rayon R_1 . La forme intérieure du moule externe peut à son tour être représentée par une ellipse de grand axe L_2 et de petit axe L_3 coupé par un segment de droite parallèle à l'axe des abscisses et de longueur L_4 . En conséquence les paramètres spatiaux de ce problème d'optimisation sont R_1 , L_2 , L_3 et L_4 . Il est possible de limiter ces paramètres comme suit :

$$\begin{cases} 5 < R_1 < 9.4 \\ 12.6 < L_2 < 18 \\ 14 < L_3 < 45 \\ 4 < L_4 < 19 \end{cases} \quad (7.7)$$

En réalité, le segment de longueur L_4 ayant son extrémité sur l'ellipse, il est possible de réduire le nombre de paramètres à 3. En conséquence, la fonction objectif \mathcal{F} est une fonction à trois paramètres R_1 , L_2 et L_3 tels que :

$$\begin{cases} 5 < R_1 < 9.4 \\ 12.6 < L_2 < 18 \\ 14 < L_3 < 45 \end{cases} \quad (7.8)$$

7.8.5 Approximation de la fonction objectif

L'approximation de la fonction objectif \mathcal{F} à 3 paramètres utilise une distribution uniforme à 7 noeuds par direction, ce qui donne un total de 343 noeuds équirépartis sur un cube 3-d. Du fait de la disparité des limitations des paramètres, les paramètres seront normalisés en appliquant après coup une homothétie sur chaque direction. Précisément, l'ensemble des limitations des paramètres forme un hyperparallélépipède 3-d qui est transformé en un cube 3-d de côté 1 par une transformation géométrique inversible. Après approximation, la valeur effective des paramètres est calculée par transformation inverse.

Dans la suite nous verrons qu'il est raisonnable de limiter le nombre de paramètres à 2 en imposant L_3 à 14. Nous développerons une deuxième approximation, restreinte à deux paramètres R_1 et L_2 , mais possédant une discrétisation plus fine de 11 noeuds par direction soit 121 noeuds au total. La figure 7.4 représente l'allure de l'approximation de la fonction objectif à 2 paramètres.

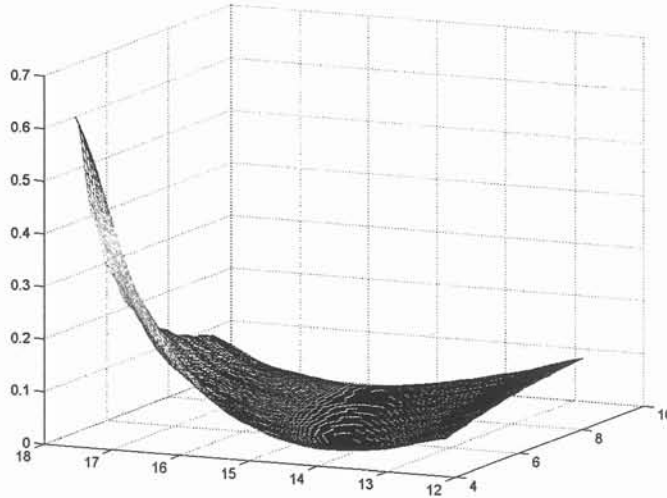


FIG. 7.4: Allure de la fonction objectif $\mathcal{F}(L_2, R_1)$

Ces deux approximations sont déterminées par collocation par point. L'ordre de l'approximation est 0. Le rayon des boules est défini par rapport au pas

inter-nodal, à savoir 1.21 fois le pas inter-nodal.

Rappelons enfin que chaque jeu de paramètres entraîne la résolution d'un modèle éléments finis.

7.8.6 L'optimisation par algorithme génétique

Dans un premier temps, réalisons l'optimisation sur la fonction objectif à trois paramètres. Le tableau suivant récapitule les résultats obtenus après environ 3000 pas de l'algorithme génétique, pour les valeurs optimales de R_1 , L_2 et L_3 .

Noeuds	R_1 (mm)	L_2 (mm)	L_3 (mm)	F_O
25	7.4032	14.6114	14.0	$3.67 \cdot 10^{-3}$
49	6.8715	13.8443	14.0	$3.07 \cdot 10^{-4}$

En comparaison, prenons les résultats fournis par [42].

R_1 (mm)	L_2 (mm)	L_3 (mm)	F_O
6.9075	13.566	14.08	$1.092 \cdot 10^{-3}$

Remarquons alors que le paramètre L_3 peut être enlevé de la procédure d'optimisation car sa valeur correspond à 14 c'est à dire la limite inférieure de la plage d'excursion de ce paramètre. Reconstituons alors une approximation de la fonction objectif pour plusieurs nombres de noeuds par direction. La figure 7.2 montre la valeur minimale de la fonction objectif réelle en fonction du nombre de noeuds par direction.

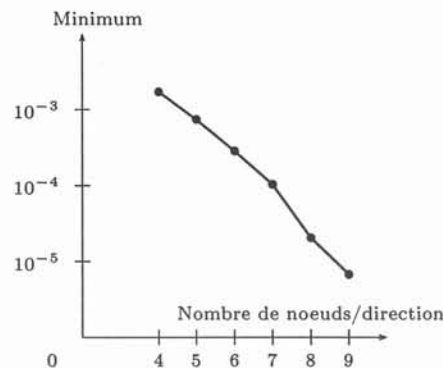


FIGURE 7.2: Minimum de la fonction objection en fonction du nombre de noeuds par direction

Cette figure est très intéressante car elle montre le caractère convergent de l'approximation vu indirectement via le caractère convergent du minimum de la fonction objectif. Elle montre aussi la bonne vitesse de convergence en fonction du nombre de noeuds pour l'approximation.

Pour se convaincre de l'utilité d'une telle procédure, comparons enfin les différents coûts pour l'optimisation de ce problème (Tableau 7.1).

Approximation		
Noeuds	Évaluations	coût
5	125	500 minutes
7	343	1500 minutes
Optimisation avec approximation		
	6000	5 minutes
Optimisation direct sans approximation		
	6000	20000 minutes

TABLEAU 7.1: Comparaisons des coûts

7.9 Conclusion

La méthode *HP-Clouds* s'insère facilement dans une procédure d'optimisation utilisant les algorithmes génétiques. En effet, cette approximation sans maillage est facile à mettre en oeuvre et assure une bonne qualité de l'approximation de la fonction objectif. De plus, cette méthode permet d'obtenir les différents gradients associés à la fonction objectif alors que dans de nombreux cas il ne sont pas disponibles. En conséquence, il est envisageable d'utiliser la fonction objectif approximée pour conduire une optimisation basée par exemple sur la méthode des gradients, cet aspect faisant l'objet de travaux actuellement au laboratoire.

Conclusion générale

Nos travaux ont porté sur l'application d'une méthode sans maillage pour la simulation numérique des phénomènes électromagnétiques. La méthode étudiée, appelée méthode *HP-Clouds* est basée, comme la méthode des éléments finis sur un nuage de noeuds. La nouveauté provient des supports des fonctions de forme qui ne sont plus des éléments (pour la *M.E.F*) mais des boules centrées aux noeuds. D'autre part, ces fonctions de forme ont une régularité accrue par rapport à celles des éléments finis qui généralement ne sont que continues. Dans notre cas, les fonctions de forme *HP-Clouds* sont infiniment continûment dérivables rendant par conséquent cette approximation sans maillage infiniment continûment dérivable.

Pour pouvoir résoudre les équations de Maxwell en électromagnétisme avec une telle méthode, nous avons mis en place une structure de données basée sur les boules et les intersections entre les boules que nous avons appelées *interboule*. Grâce à cette notion, les algorithmes pour la résolution sont considérablement simplifiés. Lors de la résolution de nombreux auteurs utilisent encore un maillage intermédiaire; nous avons préféré nous affranchir de toutes sortes de maillage même temporaires même si le coût calcul en est momentanément augmenté. Actuellement, la résolution est très coûteuse dû essentiellement à l'intégration sur les interboules qui est source de ralentissement considérable. Bien que cette intégration soit fiable, il faut envisager à court terme une amélioration significative des temps de calculs pour prétendre un jour rivaliser avec la méthode des éléments finis. D'autre part la prise en compte des conditions aux interfaces lors de problèmes comportant plusieurs matériaux par exemple, est encore mal maîtrisée et doit faire l'objet d'une attention toute particulière dans l'avenir.

Souhaitant couvrir l'intégralité des étapes d'une modélisation par la méthode *HP-Clouds*, nous avons proposé des techniques de génération et d'adaptation du nuage de noeuds tirant partie de l'absence de maillage.

Enfin, nous avons vérifié la validité de l'approximation *HP-Clouds* sur trois exemples concrets qui semblent assurer un avenir prometteur pour les méthodes sans maillage. Nous avons en particulier apporté une solution originale au traitement des problèmes comportant des pièces en mouvement par utilisation combinée des méthodes *MEF/HP-Clouds* associée à un algorithme de réorganisation des boules.

En somme, nos travaux ont montré la qualité et la fiabilité des méthodes sans maillage et plus particulièrement de la méthode *HP-Clouds* dans la réso-

lution des équations de Maxwell en électromagnétisme.

À l'avenir, nous souhaiterions développer aussi certains aspects que nous avons volontairement laissés de côté. L'adaptativité de la solution, tant h que p se trouve grandement facilitée par l'absence de maillage. Même si nous avons vérifié sur un cas pratique les vitesses de convergence théoriques, nous n'avons pas pu travailler sur l'efficacité des estimateurs d'erreurs classiques des éléments finis. Enfin, le traitement des régions minces et de l'effet pelliculaire doit être repensé dans le cadre de l'approximation sans maillage et ce pour deux raisons : premièrement, la disparition des facteurs de forme tels qu'ils existent en éléments finis doit permettre une discrétisation aisée des régions minces en utilisant au besoin des boules anisotropes. Deuxièmement, l'introduction de fonctions de forme adaptées au phénomène physique est rendue possible par l'approche hiérarchique retenue et la méthode même de construction des fonctions de forme. Ces trois aspects doivent faire l'objet d'études à moyen terme.

Bibliographie

- [1] F.-X. Zgainski, *Un pré processeur pour l'électromagnétisme, l'électromécanique et l'électro-acoustique*, Thèse INPG soutenue le 18 septembre 1996
- [2] L.-L. Rouve, *Prise en compte du comportement magnétique fréquentiel des tôles FeSi en modélisation électro- technique*, Thèse INPG, 1996
- [3] Y. Maréchal, *Modélisation des phénomènes magnétostatiques avec terme de transport, application aux ralentisseurs électromagnétiques*, Thèse INPG soutenue le 05 février 1991
- [4] V.-S. Duong, *Etude de l'intégration d'une protection par fusible dans les convertisseurs à IGBT*, Thèse de Doctorat, INPG, 1997
- [5] C. Golovanov, *Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique : application à la simulation de dispositifs électromagnétiques en mouvement*, Thèse de Doctorat, INPG, 1997
- [6] C. Guérin, *Détermination des pertes par courants de Foucault dans les cuves de transformateurs. Modélisation de régions minces et prise en compte de la saturation des matériaux magnétiques en régime harmonique*, Thèse de Doctorat, INPG, 1994
- [7] O.A. Mohammed, M. Kasper, S. Russenschuck, F.G. Uhler *Design Optimization of a Superferric Octupole Using Various Evolutionary and Deterministic Methods*, Invited paper presented at CEFC 96, Okajama, IEEE Transactions on Magnetics, Vol 33, 1997
- [8] L. Krähenbühl et D. Muller, *Thin Layers in electrical engineering. Example of shell models in analysing eddy-currents by boundary and finite element method*, IEEE Trans. Mag., Vol 29, 1993
- [9] C.W. Trowbridge, *Computing Electromagnetic Fields for Research and Industry : major achievements and future trends*, IEEE Trans. Mag VOL. 32 No 3, May 1996
- [10] F.-X. Zgainski, Y. Maréchal, J.-L. Coulomb, M. Vanti, A. Raizer, *An a priori Indicator of Finite Element Quality Based on the Condition Number of the Stiffness Matrix*, IEEE Trans Mag 1997
- [11] P.L. George, *Génération automatique de maillage : Application à la méthode des éléments finis*, Masson, Paris, 1990.
- [12] K. Reichter, R.E. Neubaurer, T Taernhuvud, *A New Approach Solving The Interface Problem of FE-field Calculation Methods by Means of Fictitious*

- Interface Current Sheets or Interface Charges*, IEEE Trans. Mag., vol. 28 pp. 1696-1699, 1992
- [13] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, *La méthode des éléments diffus*, Compte rendu à l'Académie des Sciences, 313, Série II, p. 133-138, Paris, France, 1991
- [14] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, *L'Approximation Diffuse*, Compte rendu à l'Académie des Sciences, 313, Série II, p. 293-296, Paris, France, 1991
- [15] P. Lancaster, K. Slakauskas, *Surfaces generated by moving least square methods*, Mathematics of Computation, 37(155), p. 144-158, 1981
- [16] I. Babuska, J.M. Melenk, *The Partition of Unity Finite Element Method*, Technical note BN-1185, Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, Avril 1995
- [17] C. Armando Duarte, *HP-Clouds- A Meshless Method to Solve Boundary-Value Problem*, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, rapport 95-05, 1995
- [18] C. Armando Duarte, J.T. Oden, *An H-p Adaptive Method Using Clouds*, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, rapport 96-05, 1996
- [19] C. Armando Duarte, J.T. Oden, *A review of Some Meshless Method to Solve Partial Differential Equations*, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, rapport 96-06, 1996
- [20] W. K. Liu, S. Li, T. Belytschko, *Moving Least Square method Reproducing Kernel Methods, Methodology and Convergence*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, June, 1996
- [21] R.L Taylor, O.C Zienkiewicz, E. Onate, S. Idelsohn, *Moving Least square Methods Approximation for Solution of Differential Equations*, Publication CIMNE, International Center of Numerical Methods in Engineering, n°74, décembre 1995
- [22] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Flemming, P. Krysl, *Meshless Methods : An Overview and Recent Developments*, Rapport technique main, 1996.
- [23] Y. Maréchal, G. Meunier, J.-L. Coulomb, H. Magnin, *A General Purpose Tool for Restoring InterElement Continuity*, IEEE Trans. Mag. vol. 28, mars 1992, p. 1728-1731, 1992
- [24] Y. Maréchal, G. Meunier, J.-L. Coulomb, G. Touzot, *Use of The Diffuse Approximation Method for electromagnetic field Computation*, IEEE Trans. Mag. vol. 29, n°2, mars 1993
- [25] Y. Maréchal, G. Meunier, J.-L. Coulomb, G. Touzot, *Use of The Diffuse Approximation Method for electromagnetic field Computation*, IEEE Trans. Mag. vol. 30, n°5, septembre 1994
- [26] Y. Maréchal, *A meshless Method for Electromagnetic Field Computation*, IEEE Trans. Mag. vol. 30, n°5, septembre 1996

- [27] Y. Maréchal, H.T Luong, G. Meunier, *Robust Generation of Complex Set of Boundary Conditions for Modelling 3D Electromagnetic Field*, IEEE Trans. Mag. vol. 30, n°5, septembre 1997
- [28] Y. Maréchal, *Some Meshless Methods for Electromagnetic Field*, IEEE Trans. Mag. vol. 30, n°5, septembre 1997
- [29] M. Marih, *Mise en oeuvre de l'approximation diffuse et des éléments diffus pour la résolution des problèmes mécaniques*, Thèse de Doctorat, Université Technologique de Compiègne, France, 1994
- [30] V. Cingoski, N. Miyamoto, H. Yamashita, *Element-free Galerkin Method for Electromagnetic Field Computation*, IEEE Trans. Mag., 1997.
- [31] F.C Gunther, W.K Liu, *Implementation of Boundary Conditions for Meshless Methods*, [http :// www.ticam.utexas.edu /users/ armando/ resume.html#publications](http://www.ticam.utexas.edu/users/armando/resume.html#publications)
- [32] H. T. Luong, *Amélioration de la formulation en potentiel scalaire magnétique et généralisation au couplage entre équations de champ et de circuit électrique*, Thèse de Doctorat, INPG, 1997
- [33] F. Rapetti, F. Bouillault, L. Santandrea, A. Buffa, Y. Maday, A. Razek, *Calculation of eddy currents with edge elements on non-matching grids in moving structures*, IEEE Trans. Mag. 1999, Volume 1, pp 366-367
- [34] A. Buffa, F. Rapetti, Y. Maday, *Calculation of eddy currents in moving structures by a sliding mesh-finite elements method*, IEEE Trans. Mag. 1999, Volume 1, pp 368-369
- [35] G. L. Miller, D. Talmor, S.-H. Teng, N. Walkington, H. Wang, *Control Volume Meshes using Sphere Packing : Generation, Refinement and Coarsening*, In 5th International Meshing Roundtable, October, 1996, Pittsburgh, PA
- [36] G. L. Miller, D. Talmor, S.-H. Teng, *Optimal Good-Aspect Ratio Coarsening for Unstructured Meshes*, In Proceedings of the Eighth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, January, 1997, New Orleans, LA
- [37] K. Shimada, D. C. Gossard, *Automatic triangular mesh generation of trimmed parametric surfaces for finite element analysis*, Computer Aided Geometric Design Volume 15, n°3 pp199-22, 1998
- [38] T. Yokoyama, V. Cingoski, K. Kaneda, H. Yamashita, *3-D Automatic Mesh Generation for FEA Using Dynamic Bubble System*, Présenté à la conférence Compumag 1999
- [39] M. Desbrun, M.-P. Gascuel, *Smoothed Particles : A new paradigm for animating highly deformable body*, [http ://www-imagis.imag.fr/ Mathieu.Desbrun/smoothed.html](http://www-imagis.imag.fr/Mathieu.Desbrun/smoothed.html)
- [40] P. Alotto and Al, *A Multiquadratic-based Algorithm for the Acceleration of Simulated Annealing Optimization Procedures*, IEEE Trans Mag Vol 32 May 1996 p1198-1201
- [41] A. Abakar, J.-L. Coulomb, Y. Maréchal, *Radial Basis function network for acceleration of genetic algorithm optimization procedures*, Proc. 9TH IGTE Symp. on Numerical Field Calculation in El. Eng. , Graz, Austria, 1998

- [42] B.R Branstatter, W. Ring, C. Magele and K.R Richter, *Shape Design with Great Geometrical Deformations Using Continuous ly Moving Finite Element Node*, IEEE Trans Mag Vol 34 n°5 Sept. 1998 pp 2877-2880
- [43] L. Saludjian, J.-L. Coulomb, A. Izabelle, *Algorithme génétique et développement de Taylor de la solut ion éléments finis pour l'optimisation d'un dispositif électromagnétique*, J. Phys. France 7 (1997) 1-20
- [44] Y. Maréchal et C. Hérault, *Méthode de Galerkin pour la simulation en électromagnétisme*, Revue Internationale de Génie Électrique Vol 1. n°1, 1998, pp 99-140
- [45] F.X Zgainski, Y. Maréchal, J.-L. Coulomb, M. Vanti, A. Raizer, *A a priori Indicator of Finite Element Quality Based on the Condition Number of Stiffness*, IEEE Trans. Mag., 1997
- [46] J. Simkin, C.W Trowbridge *On The Use of the Total Scalar Potential in the Numerical Solution of Field Problems in Electromagnetics*, Int. J. Num. Meth. Eng., p. 43-436, 1979
- [47] C. Hérault, Y. Maréchal, *Boundary and interface conditions in meshless methods*, IEEE Trans. Mag. 1999
- [48] C. Hérault, Y. Maréchal, *Galerkin Meshless Methods : Implementation Methodologies*, présentée à la conférence CEFC 1998
- [49] C. Hérault, M. C. Costa, Y. Maréchal, *A Meshless Approximation for the Acceleration of stochastic algorithm in optimization procedure*, présentée à la conférence COMPUMAG 1999
- [50] C. Hérault, Y. Maréchal, *Génération des noeuds pour les méthodes sans maillage*, soumis à la conférence NUMELEC 2000
- [51] C. Hérault, V. Leconte, Y. Maréchal, V. Mazauric, *Le pavage par boule pour l'amélioration du maillage éléments finis*, soumis à la conférence NUMELEC 2000
- [52] V. Leconte, C. Herault, Y. Maréchal, V. Mazauric, *Adaptation Optimale d'un Maillage Eléments Finis pour des Grandes Déformations*, soumis à la conférence NUMELEC 2000

Figures

1.1	Maillage non isotrope	12
1.2	Discontinuité intrinsèque de la méthode des éléments finis aux interfaces entre éléments	13
1.3	Fonctions de forme éléments finis sur un carré	18
1.4	Zone d'influence éléments finis	19
1.5	Les zones d'influence pour $D = 2$	20
1.6	Domaine carré D_E pour la méthode <i>HP-Clouds</i>	24
1.7	Fonction de forme de Shepard et sa dérivée par rapport à x	24
1.8	Fonction de forme $x.\phi$ et sa dérivée par rapport à x	27
1.9	Fonction de forme $y.\phi$ et sa dérivée par rapport à y	27
1.10	Erreur quadratique sur l'approximation	29
2.1	Problème général magnétostatique	35
2.2	Diminution des rayons pour rendre les fonctions de forme interpolantes	38
2.3	Oscillations obtenues avec une méthode d'interpolation sans maillage	38
2.4	Utilisation des multiplicateurs de Lagrange	39
2.5	Utilisation de la méthode de substitution	41
2.6	Lissage non physique d'une discontinuité à l'interface entre deux régions	42
2.7	Troncature des boules à l'interface	42
2.8	Résolution d'un problème test comportant 3 régions	43
2.9	Topologie pour un problème à deux régions	44
2.10	Fonction saut et sa dérivée par rapport à x	45
2.11	Fonction de forme supplémentaire	45
2.12	Résolution sur deux régions avec la fonction saut	46
2.13	Résolution sur deux régions avec la fonction saut	47
2.14	Couplage éléments finis, méthode <i>HP-Clouds</i>	48
2.15	Solution pour le couplage <i>M.E.F</i> et <i>HP-Clouds</i>	49
2.16	Résolution par collocation	50
2.17	Résolution par la méthode des moindres carrés	51
2.18	Boules pour des rayons de 0.72 et 1.8 fois le pas inter nodal	52
2.19	Erreur commise sur la solution en fonction du rayon des boules.	52
2.20	Approximation et sa dérivée par rapport à x pour la méthode <i>HP-Clouds</i>	53
2.21	Approximation et sa dérivée par rapport à x pour la <i>M.E.F</i>	54
2.22	Convergence en h	55

2.23	Convergence en p	55
3.1	Distributions frontalières données par l'utilisateur	60
3.2	Création des boules frontalières	61
3.3	Carte de taille après calcul itératif	63
3.4	Isovaleurs de la carte de taille pour la distribution géométrique	64
3.5	Boules après insertion	65
4.1	Force entre deux boules	69
4.2	Type de force suivant la position relative des boules	69
4.3	Système mécanique équivalent	70
4.4	Force entre deux boules pour le modèle du gaz parfait	71
4.5	Taux de densité d'une boule	72
4.6	Topologie des boules après mouvement pour une distribution géométrique	74
4.7	Topologie des boules après mouvement pour une distribution arithmétique	74
4.8	Génération des boules sur un maillage éléments finis	75
4.9	Réorganisation des boules après mouvement	75
4.10	Réorganisation des boules lors d'une translation	76
4.11	Réorganisation des boules lors d'une rotation	77
5.1	Création des boules à partir d'un nuage de noeuds initial	82
5.2	Différents interboules	85
5.3	Recouvrement paramétré en fonction du rayon des boules	86
5.4	Allure de la fonction à intégrer sur un interboule	89
5.5	Réutilisation des éléments finis pour l'intégration sur des interboules	89
5.6	Utilisation d'un maillage destiné à l'intégration	90
5.7	Utilisation de la méthode de Gauss sans Coons	91
5.8	Méthodes des rectangles	92
5.9	Comparaison de l'intégration en fonction de la méthode	93
5.10	Comparaison de l'intégration en fonction du degré de la fonction de pondération	94
6.1	Un contacteur simple	99
6.2	Structure de base pour le contacteur	100
6.3	Structure finale pour le contacteur	101
6.4	Isovaleurs après résolution pour le contacteur simple (<i>HP-Clouds</i>) (576 noeuds)	102
6.5	Allure de l'approximation sur une ligne	103
6.6	Pompe à induction	104
6.7	Pompe à induction : lignes de champs schématiques	104
6.8	Génération des boules à partir du maillage éléments finis	105
6.9	Génération des boules à partir du maillage éléments finis	105
6.10	Lignes de champs pour $\omega.t = 0$ et $\omega.t = 30$ pour la pompe à induction(<i>HP-Clouds</i>)	107
6.11	Lignes de champs pour $\omega.t = 60$ et $\omega.t = 90$ pour la pompe à induction(<i>HP-Clouds</i>)	107
6.12	Lignes de champs pour $\omega.t = 0$ et $\omega.t = 30$ pour la pompe à induction(<i>M.E.F</i>)	108

6.13	Lignes de champs pour $\omega.t = 60$ et $\omega.t = 90$ pour la pompe à induction (<i>M.E.F</i>)	108
6.14	Un contacteur	109
6.15	Structure du contacteur	109
6.16	Mouvement des boules après une rotation de 10 degrés	110
6.17	Isovaleurs sur le contacteur (<i>HP-Clouds</i>)	110
6.18	Isovaleurs sur le contacteur (<i>HP-Clouds</i>)	111
6.19	Isovaleurs sur le contacteur (<i>M.E.F</i>)	111
6.20	Isovaleurs sur le contacteur (<i>M.E.F</i>)	111
7.1	Procédure d'approximation de la fonction objectif	115
7.2	Minimum de la fonction objection en fonction du nombre de noeuds par direction	121

Algorithmes

5.1	Création de la connectivité en n^2	83
5.2	Création de la connectivité dans le cas bidimensionnel (coût en n)	84
5.3	Assemblage et résolution	85
5.4	Recouvrement du domaine D_E	87
5.5	Recherche d'une boule à partir d'un point	88

Tableaux

1.1	Évolution des méthodes sans maillage	16
1.2	Expression des fonctions de pondération	20
1.3	Allure des fonctions de pondération	21
1.4	Nombre de valeurs nodales par noeud en fonction de l'ordre de l'approximation	28
2.1	Formulations les plus utilisées pour la méthode des éléments finis	34
3.1	Les étapes pour la génération du nuage de noeuds	60
3.2	Création itératives des rayons des fonctions de formes ϕ^r	63
3.3	Insertion des boules sur les intersections principales	65
4.1	Mouvement des boules après une insertion	73
4.2	Mouvement des boules après un mouvement de la géométrie	76
5.1	Structure de la boule	82
5.2	Ajout de la connectivité à la structure de base de la boule	84
5.3	Structure finale	86
6.1	Récapitulatif des caractéristiques de résolution <i>HP-Clouds</i> pour le contacteur simple	101
6.2	Récapitulatif des caractéristiques de résolution <i>M.E.F</i> pour le contacteur simple	102
6.3	Récapitulatif des caractéristiques de résolution <i>HP-Clouds</i> pour la pompe à induction	106
6.4	Récapitulatif des caractéristiques de résolution <i>M.E.F</i> pour la pompe à induction	106
6.5	Récapitulatif des caractéristiques de résolution <i>HP-Clouds</i> pour le contacteur multistatique	109
6.6	Récapitulatif des caractéristiques de résolution <i>M.E.F</i> pour le contacteur multistatique	110
7.1	Comparaisons des coûts	122

Résumé

Récemment de nouvelles méthodes de simulation numérique ont fait leur apparition. Ces méthodes basées sur un nuage de noeuds ne font pas intervenir de maillage comme pour la méthode des éléments finis. Malgré leur nombre, leur base théorique est semblable. De plus, de part leur caractère récent, leurs développements sont encore à ce jour qu'aux prémices.

Ce travail récapitule les grandes lignes des procédures indispensables pour une résolution à l'aide d'une méthode sans maillage appelée méthode *HP-Clouds*. Entre autre, les fondements mathématiques par la création de nouvelles fonctions de forme sans maillage, supportées par des boules, sont présentés dans un premier chapitre. Puis, une procédure de résolution des équations de Maxwell en électromagnétisme à l'aide de la méthode *HP-Clouds* est présentée en décrivant précisément la méthode de Ritz-Galerkin dans un cas simple. Nous avons d'autre part mis l'accent sur la structure de données basée sur les boules, supports des fonctions de forme, permettant ainsi de faciliter l'insertion de la méthode *HP-Clouds* dans un logiciel de simulation numérique. Dans toutes ces étapes nous nous sommes astreint à ne pas utiliser de maillage même intermédiaire ou fictif.

Enfin, nous avons validé nos résultats sur trois problèmes concrets qui laisse présager un avenir prometteur pour les méthodes sans maillage.

Title

To A Meshless Simulation For Electromagnetic Field

Abstract

Recently new methods of numerical simulation have appeared. These methods based on a cloud of nodes do not use any mesh as for the finite element method. In spite of their number, their theoretical basis is similar. Moreover, to their recent character, their developments are still to the begining.

This work deals with the broad outline of the essential procedures for a resolution using a meshless method called *HP-Clouds* method. The mathematical basis by the creation of new meshless shape functions, supported by balls, are presented in a first chapter. Then, a procedure of resolution of the Maxwell's equations in electromagnetism using the *HP-Clouds* method is presented by precisely describing the method of Ritz-Galerkin in a simple case. We stressed upon the data structure based on the balls, supports of the shape functions, thus rending the insertion of the *HP-Clouds* easy in a software of numerical simulation. In all these stages we tend to avoid any kind of mesh even fictious.

Lastly, we validated our results on three concrete problems which lets predict a great future for the meshless methods.

Discipline : Génie Électrique

Mots Clés :

Méthode de simulation numérique
Méthode des Éléments Finis
Méthodes sans maillage
Méthode *HP-Clouds*
Équations de Maxwell
Méthode de Ritz-Galerkin

Lieu

Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble E.N.S.I.E.G- BP 46 38420 Saint Martin d'Hères Cedex