HAL
open science

Simulation des convertisseurs électromécaniques

Vincent Leconte

To cite this version:

Vincent Leconte. Simulation des convertisseurs électromécaniques. Energie électrique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2000. Français. NNT : . tel-00689550

HAL Id: tel-00689550

https://theses.hal.science/tel-00689550v1

Submitted on 19 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : Génie Électrique

préparée au **Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble**
dans le cadre de
l'École Doctorale Electronique Electrotechnique Automatique Télécommunications Signal

présentée et soutenue publiquement

par

Vincent Leconte
(Ingénieur ENSIEG, INPG)

le 11 octobre 2000

Titre :

SIMULATION DES CONVERTISSEURS ÉLECTROMÉCANIQUES

Directeur de thèse : Gérard Meunier

JURY

Monsieur	Marcel Jufer	Président
Monsieur	Alain Bossavit	Rapporteur
Monsieur	Sheppard Salon	Rapporteur
Monsieur	Albert Foggia	Examinateur
Monsieur	Vincent Mazauric	Examinateur
Monsieur	Yves Maréchal	Examinateur
Monsieur	Gérard Meunier	Directeur de thèse

Les travaux présentés dans ce rapport sont le fruit d'une collaboration entre le Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble et Schneider Electric dans le cadre d'une bourse CIFRE de l'ANRT.

En premier lieu, je tiens à remercier :
- Monsieur Marcel Jufer, Professeur à Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne et directeur du Laboratoire d'électromécanique et de Machines Electriques, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse,
- Monsieur Alain Bossavit, conseiller scientifique à Electricité De France, et Monsieur Sheppard Joel Salon, Professeur au Rensselaer Polytechnique Institute, pour avoir accepté d'être rapporteur et pour les remarques qu'ils ont apportées.
- Monsieur Albert Foggia, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, pour avoir accepté de participer au jury.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Vincent Mazauric, de la Direction Scientifique et Technique de Schneider Electric, Monsieur Gérard Meunier, Directeur de Recherche CNRS et Monsieur Yves Maréchal, Maître de Conférences à l'ENSIEG qui ont co-encadré ce travail.

Pendant mes trois années de thèse, j'ai eu le plaisir d'être entouré par ce trio de choc formé par Gérard, Vincent et Yves. Je les remercie vivement pour la confiance qu'ils m'ont témoignée, pour leur disponibilité, leur soutien scientifique, les nombreuses relectures et toutes les discussions que nous avons partagées, sans oublier leur patience et leur bonne humeur. Ils m'ont offert d'excellentes conditions pour travailler dans une ambiance particulièrement agréable et motivante. Je dois aussi remercier Vincent ainsi que Michel Barrault qui m'ont permis de valoriser au mieux mon travail au sein de Schneider Electric.

Merci également à Jean-Louis Coulomb pour m'avoir accueilli dans l'équipe Modélisation et pour ses avis éclairés.

Je voudrais aussi remercier les personnes du LEG ou de Schneider Electric qui m'ont aidé dans mon travail :
- Daniel Tomasik pour son aide dans mes recherches de documents,
- Monique Boizard, Danielle Colin, Elise Riado, Jacqueline Delaye, Anne Rassendren et Benedicte Kuntz, qui ont toujours répondu avec le sourire aux tracasseries administratives.
- Patrick Guillot et Etiennette Callegher, toujours souriants et disponibles dans leur difficile tâche de gestion du reseau informatique,
- Patrick Eustache, l'homme aux mille astuces sur Unix et Linux,
- Patrice Labie, célèbre dénicheur de Bugs en tous genres et explorateur des recoins les plus secrets de Flux3D.

Il y a également tous mes camarades, qui m'ont permi de passer ces trois ans dans la bonne humeur. Tout d'abord la "Linux Gang" et autres "Latex Warriors" : Christophe Hérault (avec qui je me suis bien amusé avec les "Bubbles"), Ali Abakar, Gérald Claeys, Singva Ma, Jean-Daniel Arnould. Mais aussi Emmanuel Vinot (Le Manu des montagnes), Frederic Lepoitevin (un p'tit gars du pays : GAEC No 34178 au Mesnil-Auzouf), Jean-Michel Guichon, Eric Atienza, Christophe Cartier Millon (dit CCM), Fabien Faure, Bertrand Raison, Bertrand Legrand, Patrice Joyeux (la concurrence), Thierry Chevalier, Delphine Riu (spécialiste en aliments pour bébé), Kerim Mekki, Olivier Defour, Olivier Chadebec (le Gars de la Marine), Christophe

Sauvey, Yann Lefloch, Armando Fonseca, Basma Bel-Habib, Maxime Besacier, Jean-Christophe Crebier, Khaled Laouamri, Fabiano Garcia, Victor Fernandez, Mauricio Caldora, Alita Dewi, Ambroise Schellmans, Jérôme Péchoux, Cristian Golovanov. Mes remerciements vont également à Cécile Venet et Michel Abadie pour leur accueil toujours agréable à A2.

Merci à Delphine, ma femme, pour le soutien constant qu'elle m'a apporté.

Enfin, je remercie mes parents pour m'ont toujours soutenu dans mes études et m'ont ainsi donné la chance d'en arriver là.

Table des matières

Introduction générale 11

I Vers un modèle discret pour la simulation des régimes transitoires électromécaniques 15

Introduction 17

1 Formulations pour les régimes transitoires électromécaniques 19
1.1 Introduction 19
1.2 Définition du problème à résoudre 19
1.3 Equations de Maxwell et mouvement 20
1.4 Descriptions Eulérienne et Lagrangienne 22
1.5 Formulations magnétiques transitoires 24
1.5.1 Formulation $\mathbf{A}V$-$\mathbf{A}$ 24
1.5.2 Conditions aux limites 24
1.5.3 Conditions de passage 25
1.6 Couplage avec les équations de circuit 26
1.6.1 Définition des besoins et du type de couplage 26
1.6.2 Equations du couplage 26
1.7 Couplage avec les équations cinématiques 28
1.7.1 Mouvement général. 28
1.7.2 Mouvement à un degré de liberté. 29
1.8 Conclusion 30

2 Vers le modèle discret : Méthode des éléments finis 31
2.1 Introduction 31
2.2 Formulation faible $\mathbf{A}V$-$\mathbf{A}$ 31
2.2.1 Définitions 31
2.2.2 Un problème plus simple 32
2.2.3 Formulation faible pour le problème complet 33
2.3 Discrétisation spatio-temporelle. 33
2.3.1 Discrétisation temporelle 34
2.3.2 Choix des fonctions de forme 36
2.4 Application au cas 2D 38
2.4.1 Méthode de Newton-Raphson et discrétisation 38
2.4.2 Couplage avec les équations de circuit 38
2.5 Conclusion 40

II Méthodes pour la prise en compte du mouvement 41

Introduction 43

3 Couplage des intégrales de frontières avec la méthode des éléments finis 45
3.1 Introduction . . . 45
3.2 Intégrales de frontières et couplage . . . 46
3.2.1 Seconde identité de Green et application au potentiel vecteur magnétique . . . 46
3.2.2 Domaines avec des symétries . . . 47
3.2.3 Problème ouvert . . . 48
3.2.4 Discrétisation et couplage avec les éléments finis. . . . 49
3.2.5 Cas particulier du couplage en axisymétrique . . . 50
3.2.6 Mise en œuvre . . . 51
3.2.7 Exemples . . . 53
3.3 Post-traitement . . . 56
3.3.1 Exploitation des grandeurs locales dans la zone E.I.F. . . . 56
3.3.2 Calcul de grandeurs globales : forces et couples . . . 58
3.4 Conclusion . . . 63

4 Procédures de remaillage 65
4.1 Introduction . . . 65
4.2 Remaillage "brutal" . . . 66
4.2.1 Expériences 2D . . . 66
4.2.2 Expériences 3D . . . 69
4.3 Maillage par boules . . . 71
4.3.1 Boules et modèle physique . . . 71
4.3.2 Adaptation du nuage de nœuds . . . 73
4.3.3 La procédure de remaillage . . . 75
4.3.4 Application . . . 77
4.4 Traitement des entrefers fins . . . 81
4.4.1 Position du problème . . . 81
4.4.2 Utilisation du maillage par boules . . . 81
4.4.3 Utilisation d'éléments spéciaux . . . 83
4.5 Conclusion . . . 85

III Simulation de dispositifs électromécaniques 87

5 Validation et simulation de dispositifs 89
5.1 Introduction . . . 89
5.2 Validation sur le cas du MITOP . . . 90
5.2.1 Présentation du dispositif . . . 90
5.2.2 Définition des données de simulations . . . 91
5.2.3 Résultats . . . 92
5.3 Exemple avec grandes déformations : le R5 . . . 94
5.3.1 Présentation du dispositif . . . 94
5.3.2 Définition des données de simulations . . . 94
5.3.3 Difficultés de simulation . . . 95

5.3.4 Influence des courants de Foucault 97
5.4 Electro-aimant de commande de moteurs 97
5.4.1 Présentation du dispositif 97
5.4.2 Difficultés 99
5.4.3 Résultats 101
5.5 Conclusion 103

Conclusion générale 105

Annexe 109

Bibliographie 113

Introduction générale

Un grand nombre de produits de l'offre Schneider Electric font appel à des convertisseurs électromécaniques. Déclencheurs à noyau plongeur, contacteurs, relais à décrochement ou à effet Thomson, sont autant d'actionneurs capables de convertir une énergie électrique en une action mécanique. D'une manière générale, le basculement de ces convertisseurs électromécaniques se déroule suivant quatre phases de fonctionnement :

- Un régime stationnaire magnéto-statique résultant de la magnétisation (généralement par un aimant) d'un circuit réluctant à entrefer.
- Un régime transitoire d'excitation électrique forcée, mécaniquement statique car précédant le basculement.
- Un régime électromécanique évolutif induisant un régime électrique se superposant à l'excitation électrique forcée.
- Un état basculé, de nouveau statique mécaniquement.

Étant donné le fonctionnement essentiellement transitoire de ces dispositifs, la détermination de données dynamiques, comme le temps de réponse ou les relations force/position et force/courant, est essentielle pour leur conception. Pour leur étude, on peut faire appel à deux types de modèles complémentaires : les modèles numériques (typiquement des éléments finis) [1] et les modèles analytiques (typiquement des réseaux de réluctances) [2]. Le but de ce travail est de proposer des modèles numériques, pour la simulation des régimes transitoires électromécaniques avec mouvement.

Actuellement, les logiciels éléments finis permettent de modéliser correctement les étapes statiques mécaniquement. Pendant le régime transitoire électromécanique, des pièces magnétiques et conductrices sont en mouvement. Dans le cas particulier de la translation, certains logiciels rendent possible l'étude de cette phase. Pour un mouvement plus général (la rotation d'une palette par exemple), les outils numériques actuels ne permettent généralement que des calculs multi-statiques. Cette approche ne prend pas en compte les effets induits liés à la dynamique du système tels que les courants de Foucault, ce qui peut conduire à une surestimation des performances de l'objet modélisé.

Les différents aspects devant être traités par la modélisation sont :

- les géométries de formes complexes,
- les saturations magnétiques,
- les courants induits dûs à la fois aux variations du courant de commande et au mouvement de pièces.
- le circuit d'alimentation électrique connecté à la bobine du dispositif,
- le déplacement de parties de la structure,

Dans le contexte de la méthode des éléments finis, qui est basée sur un maillage, un des enjeux actuels est de prendre en compte la déformation des zones d'air entourant les pièces mobiles des dispositifs. Proposer des méthodes permettant de traiter ce point est la motivation principale de nos travaux.

Ce mémoire est divisé en trois parties. La première d'entre elles est consacrée à la mise en équations des phénomènes à simuler dans les transitoires électromécaniques. Les couplages entre les phénomènes magnétiques, électriques et mécaniques y sont traités. Elle présente également la discrétisation spatiale et temporelle des équations. La deuxième partie décrit, évalue et compare des techniques permettant de traiter le problème du mouvement dans les simulations. La dernière partie est consacrée à l'application des méthodes que nous avons implémentées pour simuler des dispositifs réels.

Première partie

Vers un modèle discret pour la simulation des régimes transitoires électromécaniques

Introduction

Cette partie est consacrée à la recherche d'un modèle permettant de simuler les régimes transitoires électromécaniques. Les phénomènes physiques à prendre en compte peuvent être décrits à l'aide d'équations aux dérivées partielles (EDP). Étant donné la complexité des géométries rencontrées, on ne peut trouver la solution analytique exacte de ces équations. Pour résoudre celles-ci, nous devrons donc les mettre sous une forme discrète permettant de trouver une solution numérique approchée.

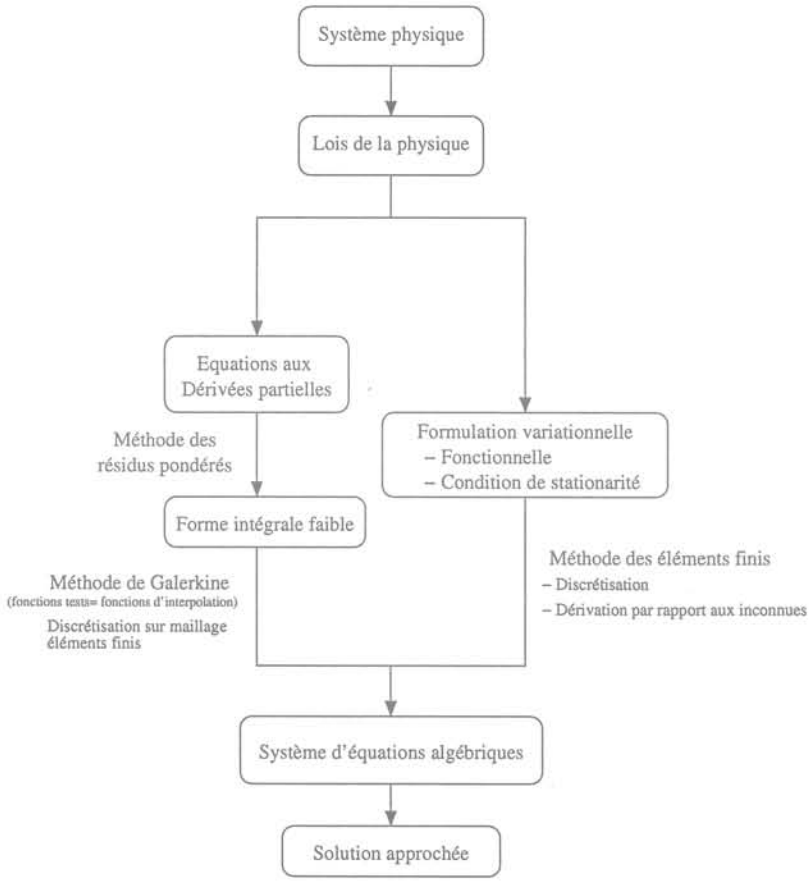


FIG. 1: Méthodes pour la simulation de phénomènes physiques

La Fig.1 présente deux voies classiques pour aboutir à un modèle discret [3, 4]. L'approche variationnelle consiste à trouver une fonctionnelle dont l'expression est liée à l'énergie du système et à trouver une condition qui la rend stationnaire. Lorsqu'on formule cette condition, on doit trouver les EDPs du problème à résoudre. La solution qui rend stationnaire la fonctionnelle est alors aussi solution de ces EDPs.

Une technique plus directe est d'employer la méthode des résidus pondérés. Celle-ci est plus générale car elle peut être appliquée sans qu'une description variationnelle soit possible. Elle permet de formuler le problème sous une forme intégrale faible. Cette formulation est encore continue. Pour en trouver une solution discrète, on utilise une subdivision du domaine d'étude en éléments géométriques simples sur laquelle on interpole la fonction inconnue. Nous utilisons la méthode de Galerkine pour laquelle les fonctions de pondération sont choisies égales aux fonctions d'interpolation.

La démarche que nous avons utilisée est celle qui vient d'être décrite. Le premier chapitre consiste à exposer l'ensemble des équations à résoudre pour prendre en compte les phénomènes physiques présents lors des transitoires électromécaniques. Le second présente l'application de la méthode de Galerkine pour aboutir à la forme intégrale discrétisée des équations.

Les formulations proposées sont basées sur l'utilisation du potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A}$. L'évaluation des méthodes que nous avons implémentées ainsi que les applications traitées étant bidimensionnelles, c'est en effet une formulation robuste adaptée à nos problèmes. Au cours de cette partie, on présente aussi le problème 3D mais les discrétisations ne sont menées qu'en 2D.

Chapitre 1

Formulations pour les régimes transitoires électromécaniques

1.1 Introduction

Pour simuler le comportement des dispositifs électromécaniques, les aspects mécaniques, électriques et magnétiques doivent être pris en compte simultanément. Le but de ce chapitre est de décrire les formulations mathématiques adaptées au problème magnétique des courants de Foucault avec mouvement et de présenter les couplages nécessaires avec le domaine électrique et mécanique.

1.2 Définition du problème à résoudre

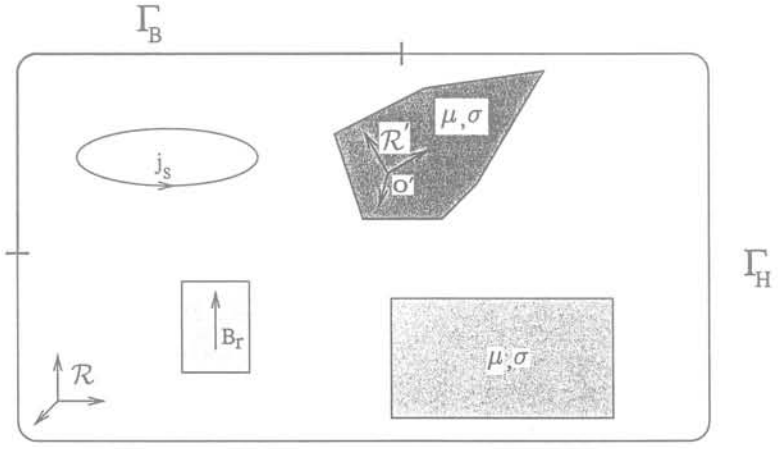


FIG. 1.1: Définition du problème type à résoudre

Le type de problème que l'on cherche à résoudre comporte des parties fixes où se trouvent des courants sources, des aimants, des pièces magnétiques et conductrices

(Fig. 1.1). Il comprend également des parties rigides magnétiques et conductrices en mouvement. Le problème peut comporter des symétries.

Sans nuire à la généralité, nous ne considérons qu'une seule partie mobile à laquelle nous attachons le repère mobile $\mathcal{R}'$. La transformation permettant de passer du repère fixe $\mathcal{R}$ au repère mobile $\mathcal{R}'$ est définie par :

$$\mathbf{x} = R(t)\mathbf{x}' + \mathbf{x}_{O'}(t)\,, \tag{1.1}$$

où $R(t)$ correspond à une matrice de rotation et $\mathbf{x}_{O'}(t)$ est la position de l'origine de $\mathcal{R}'$. En dérivant (1.1) par rapport au temps, on obtient :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{x}'\,. \tag{1.2}$$

On a ainsi décomposé le mouvement de la partie mobile en une translation de O' et d'une rotation autour d'un axe passant par O'. $\mathbf{\Omega}$ désigne le vecteur rotation qui a pour direction l'axe de rotation et pour module la vitesse angulaire de rotation.

Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}'$ les expressions respectives d'un même vecteur dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Elles sont liées par la relation de changement de repère suivante :

$$R(t)\mathbf{A}' = \mathbf{A}\,. \tag{1.3}$$

Pour la dérivation temporelle, on a la formule de changement de repère :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = R(t)\left(\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} + \Omega' \times \mathbf{A}'\right)\,. \tag{1.4}$$

1.3 Equations de Maxwell et mouvement

Les équations mathématiques permettant de décrire un système électromagnétique à basse fréquence sont les équations de Maxwell dans lesquelles on néglige les courants de déplacement. Dans le référentiel fixe $\mathcal{R}$, elles s'expriment par :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{J} + \mathbf{J}_s\,, && (1.5)\\ \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0\,, && (1.6)\\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,. && (1.7) \end{aligned}$$

On a distingué ici les courants sources décrits par $\mathbf{J}_s$ des courants induits $\mathbf{J}$.

Ces équations doivent être complètées par les lois de comportement des matériaux qui, pour un corps immobile, s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu(\mathbf{H})\mathbf{H}\,, && (1.8)\\ \mathbf{J} &= \sigma\mathbf{E}\,. && (1.9) \end{aligned}$$

La dépendance en $\mathbf{H}$ de la perméabilité magnétique μ permet de considérer des matériaux non-linéaires. Dans le cas général, μ peut être défini comme un tenseur d'ordre deux, afin de prendre en compte une éventuelle anisotropie du matériau. Pour nos applications, nous le considérerons comme scalaire. D'autre part, on caractérise les

aimants permanents par leur induction rémanente notée $\mathbf{B}_r$. Pour ce type de matériau on remplace (1.8) par :

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mathbf{B}_r \,. \tag{1.10}$$

Sur les plans de symétries ou aux bords du domaine, une des conditions aux limites suivantes s'applique :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad sur \quad \Gamma_B \,, \tag{1.11}$$

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \quad sur \quad \Gamma_H \,. \tag{1.12}$$

A l'interface entre deux milieux aux propriétés physiques différentes et où il n'y a pas de courants surfaciques on a :

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \,, \tag{1.13}$$

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n} = 0 \,, \tag{1.14}$$

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} = 0 \,, \tag{1.15}$$

$$(\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \,. \tag{1.16}$$

Notre but est de trouver quelle forme prennent les équations de Maxwell dans le référentiel $\mathcal{R}'$ et quelles sont les transformations à appliquer aux champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ pour passer de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$. On sait que les équations de Maxwell sont conservées lorsqu'on applique la transformation de Lorentz [5]. Pour un mouvement de translation uniforme avec de faibles vitesses ($\| \mathbf{v} \| << c$), la transformation de Lorentz pour les champs prend la forme simplifiée :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{J}' = \mathbf{J} \,, \tag{1.17}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H} \,, \tag{1.18}$$

où $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

Dans notre cas, $\mathcal{R}'$ peut être en rotation par rapport à $\mathcal{R}$. Nous verrons plus loin que l'accélération produite par cette rotation peut être négligée. Pour exprimer les grandeurs dans le système de coordonnées du repère $\mathcal{R}'$, la transformation doit néanmoins tenir compte de la position des axes dans le changement de coordonnées. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} R(t)\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad &, \quad R(t)\mathbf{J}' = \mathbf{J} \,, \\ R(t)\mathbf{B}' = \mathbf{B} \quad &, \quad R(t)\mathbf{H}' = \mathbf{H} \,. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Avec ces transformations, les équations (1.5),(1.6) et (1.7) prennent la même forme dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

En revanche la loi d'Ohm prend une expression différente selon que le conducteur est fixe ou en mouvement. Le modèle de Drude encore appelé "boules de billard" [6, 7] permet d'interpréter la loi d'Ohm et permet de conclure à la proportionnalité entre la vitesse de dérive des électrons de conduction et le champ électrique dans le conducteur. Le courant étant proportionnel à la vitesse de dérive, on a donc $\mathbf{J}' = \sigma\mathbf{E}'$, où σ est la conductivité du matériau en $S \cdot m^{-1}$. Ce qui s'écrit dans $\mathcal{R}$:

$$\mathbf{J} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \,. \tag{1.20}$$

Evaluons maintenant l'effet produit par une accélération du conducteur. Lorsque le métal est accéléré, une force d'inertie supplémentaire agit sur les électrons de conduction [8]. La force qu'elle exerce sur un électron de masse m vaut $-m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$. Elle équivaut

à l'action sur une charge e d'un champ électrique valant $\frac{m}{e}\frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Le champ électrique responsable de la conduction devient donc $\mathbf{E}+\frac{m}{e}\frac{d\mathbf{v}}{dt}$. L'équation (1.7) pour le conducteur accéléré s'écrit donc :

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{m}{e}\operatorname{rot}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right).$$

En utilisant (1.2) et en développant on obtient [8] :

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{2m}{e}\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}.$$

On note ici que seule une rotation variable dans le temps affecte l'équation de Maxwell-Faraday. L'équation précédente peut encore se mettre sous la forme :

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{B} + \frac{2m}{e}\mathbf{\Omega}\right).$$

Pour que $\mathbf{B}$ et $\frac{2m}{e}\mathbf{\Omega}$ soient du même ordre de grandeur on doit avoir :

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{eB}{m}\right).$$

$\frac{eB}{m}$ est appelée pulsation cyclotron de l'électron [9]. Pour avoir une influence sous une induction de $1T$, le conducteur doit tourner à la vitesse $\Omega = 8.8\,10^{10}\,rd/s$. Ce qui n'est pas envisageable pour une pièce d'un transducteur électromécanique (!).

Donc en pratique, pour l'étude des courants induits avec des corps en mouvement, le choix du référentiel n'influe pas sur la forme des équations de Maxwell. On doit cependant prendre en compte le mouvement dans l'écriture de la loi d'Ohm. Dans la suite, on envisage deux types de description du problème suivant que l'on se place dans $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}'$.

1.4 Descriptions Eulérienne et Lagrangienne

Dans l'approche Eulérienne, le problème est décrit dans le repère fixe $\mathcal{R}$. Toutes les grandeurs sont exprimées dans ce repère. On se place ainsi dans le référentiel du laboratoire depuis lequel on observe le mouvement et les variations des champs et potentiels. Nous allons trouver l'expression générale des courants induits avec mouvement avec une telle description.

Développons l'expression de la loi d'Ohm (1.20) en introduisant le potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A}$ et le potentiel scalaire électrique V tels que :

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{1.21}$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{1.22}$$

On peut donc réécrire (1.20) :

$$\mathbf{J} = \sigma\left(-\operatorname{grad}V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}\right). \tag{1.23}$$

D'autre part, on a l'identité vectorielle :

$$\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{A} - \operatorname{grad}_{\mathbf{v}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) .$$

Calculons le terme $\operatorname{grad}_{\mathbf{v}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})$:

$$\operatorname{grad}_{\mathbf{v}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = \begin{cases} A_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + A_y \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + A_z \dfrac{\partial v_z}{\partial x} \\ \\ A_x \dfrac{\partial v_x}{\partial y} + A_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + A_z \dfrac{\partial v_z}{\partial y} \\ \\ A_x \dfrac{\partial v_x}{\partial z} + A_y \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + A_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{cases} .$$

Développons l'expression (1.2) de la vitesse :

$$\mathbf{v} = \begin{cases} v_{O'_x} + \Omega_y(z - z_{O'}) - \Omega_z(y - y_{O'}) \\ v_{O'_y} + \Omega_z(x - x_{O'}) - \Omega_x(z - z_{O'}) \\ v_{O'_z} + \Omega_x(y - y_{O'}) - \Omega_y(x - x_{O'}) \end{cases} .$$

On a donc :

$$\operatorname{grad}_{\mathbf{v}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = \begin{cases} A_y\Omega_z - A_z\Omega_y \\ -A_x\Omega_z + A_z\Omega_x \\ A_x\Omega_y - A_y\Omega_x \end{cases} = \mathbf{A} \times \mathbf{\Omega} ,$$

d'où

$$\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{\Omega} .$$

Reprenons l'expression (1.23) :

$$\mathbf{J} = \sigma \left(- \operatorname{grad} V + \operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{\Omega} \right) .$$

Ce qui pour $\mathbf{J}$ donne l'expression générale :

$$\mathbf{J} = \sigma \left(- \operatorname{grad} V' - \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \mathbf{A} \times \mathbf{\Omega} \right) , \tag{1.24}$$

avec

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{A} \quad et \quad V' = V - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} .$$

Le terme $\mathbf{A} \times \mathbf{\Omega}$ apparaît dans l'expression des courants induits. Notons qu'en 2D, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{\Omega}$ sont tous les deux normaux au plan de calcul et donc ce terme s'annule. Dans le cas le plus général en 3D, ce terme doit être calculé.

Dans la description Lagrangienne, chaque partie du problème est décrite dans un référentiel où elle est au repos. Nous avons vu plus haut que pour le problème des courants induits avec mouvement, on avait le choix du référentiel. Ainsi, pour notre problème, on peut adopter une approche Lagrangienne : les parties fixes sont décrites dans $\mathcal{R}$, et toutes les grandeurs liées à la partie mobile sont exprimées dans le repère $\mathcal{R}'$. On observe alors les différents phénomènes du point de vue "matériel".

Pour trouver l'expression des courants induits dans $\mathcal{R}'$, reprenons l'expression (1.24) à laquelle on applique la formule de dérivation temporelle (1.4). On obtient l'expression simple :

$$\mathbf{J}' = \sigma \left(-\operatorname{grad} V' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} \right) . \tag{1.25}$$

Aucun terme vitesse n'apparait explicitement. On voit qu'il est donc avantageux d'adopter une telle description puisqu'on se ramène aux mêmes expressions que celles obtenues en l'absence de mouvement. Au chapitre 2, lors de la discrétisation des équations, nous indiquerons comment celle-ci peut être mise en œuvre.

1.5 Formulations magnétiques transitoires

Pour traiter le problème des courants de Foucault, on peut utiliser directement les champs $\mathbf{H}$ et $\mathbf{E}$ comme variables de travail. En les complétant avec des potentiels scalaires, on aboutit aux formulations en champs $\mathbf{H}$-Φ [10, 11] ou $\mathbf{E}$-ψ [12].

Sans utiliser directement les champs, des potentiels peuvent être introduits pour résoudre les équations de Maxwell. L'utilisation du potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A}$ mène à la formulation classique en $\mathbf{A}V$-$\mathbf{A}$. Une autre formulation consiste à utiliser le potentiel vecteur électrique $\mathbf{T}$ associé au potentiel scalaire magnétique Φ [13].

Nous avons choisi d'utiliser une formulation $\mathbf{A}V$-$\mathbf{A}$ qui est la plus adaptée pour les applications 2D que nous avons développées.

1.5.1 Formulation $\mathbf{A}V$-$\mathbf{A}$

En utilisant (1.5),(1.8) et (1.21), pour les parties fixes non-conductrices, seule l'inconnue $\mathbf{A}$ est nécessaire :

$$\operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s + \operatorname{rot}(\nu \mathbf{B}_r) = \tilde{\mathbf{J}}_s . \tag{1.26}$$

Dans les parties conductrices, éventuellement en mouvement, on ajoute la loi d'Ohm (1.23) :

$$\operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}) - \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{grad} V \right) = \mathbf{0} . \tag{1.27}$$

Dans ces régions on utilise les deux inconnues $\mathbf{A}$ et V. L'unicité du potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A}$ doit être assurée en utilisant une jauge. Avec des éléments nodaux, la plus utilisée est la jauge de Coulomb $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ souvent introduite par pénalité [14, 15]. Pour les éléments d'arêtes, une jauge de type $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = 0$ est mieux adaptée [16].

1.5.2 Conditions aux limites

Pour prendre en compte la condition aux limites (1.11), on impose :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_B .$$

En effet dans ce cas :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = \operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{n}) = 0 \text{ sur } \Gamma_B .$$

Sur Γ_H, la condition (1.12) ne pourra être imposée que faiblement.

1.5.3 Conditions de passage

Sur toute surface intérieure au domaine de calcul, et au passage entre les domaines physiques, les conditions (1.13) à (1.16) doivent être assurées. Remarquons qu'elles le sont implicitement si on comprend 1.21 au sens des distributions. Examinons néanmoins les conditions que le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ doit vérifier sur ces surfaces.

Considérons le cas le plus général qu'est l'interface entre deux milieux ① et ② aux caractéritiques physiques différentes (Fig. 1.2).

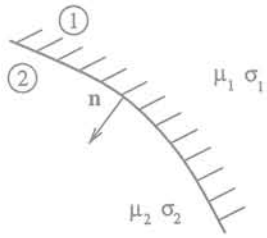


FIG. 1.2: Passage entre deux domaines physiques aux caractéristiques différentes.

- *Pour la composante normale de l'induction :*

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = \operatorname{div}((\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \times \mathbf{n}) = 0\,,$$

si $\mathbf{A} \times \mathbf{n}$ est continu à l'interface.
Notons que cette condition est nécessaire pour donner un sens à "rot $\mathbf{A}$".

- *Conservation de la composante tangentielle du champ électrique :*

$$\begin{aligned}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} &= -\frac{\partial(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)}{\partial t} \times \mathbf{n} - \operatorname{grad}(V_1 - V_2) \times \mathbf{n} \\ &= -\frac{\partial(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{n} - \mathbf{A}_2 \times \mathbf{n})}{\partial t} + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \\ &\quad - \operatorname{grad}(V_1 - V_2) \times \mathbf{n}\,.\end{aligned}$$

Supposons que le milieu 1 est en mouvement, le changement de direction de la frontière s'écrit : $\dfrac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{n}$. De plus V est continu, ainsi :

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} = -\frac{\partial(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{n} - \mathbf{A}_2 \times \mathbf{n})}{\partial t} - (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{n} - \mathbf{A}_2 \times \mathbf{n}) \times \Omega\,.$$

Ces termes s'annulent si $\mathbf{A} \times \mathbf{n}$ est continu à l'interface.

- *La continuité de la composante tangentielle du champ magnétique* s'écrit :

$$(\nu_1 \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 - \nu_2 \operatorname{rot} \mathbf{A}_2) \times \mathbf{n} = 0\,. \tag{1.28}$$

Notons que cette condition est nécessaire pour donner un sens à "rot(ν rot $\mathbf{A}$)".

- *La continuité de la composante normale du courant* entre deux conducteurs se traduit par :

$$\sigma_1 \left(-\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 - \operatorname{grad} V_1 \right) \cdot \mathbf{n} \tag{1.29}$$
$$-\sigma_2 \left(-\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}_2 - \operatorname{grad} V_2 \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \,.$$

Ces deux dernières conditions pourront être imposées dans la formulation intégrale du problème.

1.6 Couplage avec les équations de circuit

1.6.1 Définition des besoins et du type de couplage

Les relais électromécaniques sont commandés par un circuit d'alimentation électrique relié à la bobine du dispositif. Le circuit peut comprendre des résistances, des capacités,des inductances, des sources de courant et des sources de tension. De plus en plus, on y trouve aussi des composants électroniques. Il convient de prendre en compte les interactions entre ces composants et le dispositif. Il faut donc écrire les équations du circuit électrique et surtout les relier à celles décrivant les phénomènes magnétiques.

Outre les composants électriques précédents, nous considérons des composants à la fois magnétiques et conducteurs : les conducteurs filaires et les conducteurs massifs. Les conducteurs filaires représentent des bobines réalisées avec des fils que l'on considère trop fins pour que des courants induits puissent s'y développer. Pour les conducteurs massifs, on tient compte des courants induits.

De nombreuses études de dispositifs électromécaniques [17, 18, 19] couplent seulement faiblement les équations électriques et magnétiques. Des simulations magnétostatiques permettent de tabuler les valeurs de l'inductance de la bobine en fonction de la position de la partie en mouvement. Ces valeurs sont ensuite utilisées pour résoudre les équations du circuit électrique. Ce type de méthode ne permet pas de prendre en compte les courants induits dûs aux variations du courant dans la bobine ou au mouvement. Au contraire, nous proposons un couplage dit "fort" qui consiste à résoudre les équations magnétiques et électriques simultanément et permet ainsi de prendre en compte les interactions fortes entre les deux systèmes.

1.6.2 Equations du couplage

Problème 3D

En 3D, ce type de couplage fait l'objet de nombreux travaux. Les difficultés principales en 3D sont de décrire la trajectoire du courant et d'établir la relation courant-tension pour les conducteurs [20, 21, 22]. Envisageons la mise en œuvre du couplage en $\mathbf{A}V$-$\mathbf{A}$:

- *Pour les conducteurs filaires*, il faut décrire le bobinage à l'aide d'une densité de courant $\mathbf{j}_0$. Pour cela la méthodes des courants linéiques [20] permet de prendre en compte des formes quelconques. On peut aussi utiliser le potentiel $\mathbf{T}_0$ tel

que $\mathbf{j}_0 = \mathrm{rot}\,\mathbf{T}_0$ [23]. Pour des géométries simples, $\mathbf{T}_0$ peut être calculé analytiquement. Dans le cas général, un pré-calcul est nécessaire pour le déterminer numériquement [24].

- *Pour les conducteurs massifs*, la présence du potentiel V permet un couplage direct avec les équations de circuit [25]. Une autre approche, proposée dans [26], consiste à décomposer le courant en deux contributions : l'une due à la tension d'alimentation, l'autre aux courants induits.

Remarque : Le couplage est aussi possible pour les formulations $\mathbf{T}$-Φ. *Il passe par la définition du potentiel* $\mathbf{T}_0$ *tel que* $\mathbf{J} = \mathrm{rot}\,\mathbf{T}_0$ *dans le conducteur [27, 24].*

Equations du couplage en 2D

Dans un problème 2D, on a une invariance suivant une direction $\mathbf{e}_z$. Le courant est supposé selon cette direction et le calcul peut s'effectuer dans un plan perpendiculaire à $\mathbf{e}_z$. Le couplage avec les équations de circuit est beaucoup plus simple qu'en 3D. Considérons le conducteur de longueur L de la Fig. 1.3. Soit ΔV la chute de tension à ses bornes et I le courant qui le traverse.

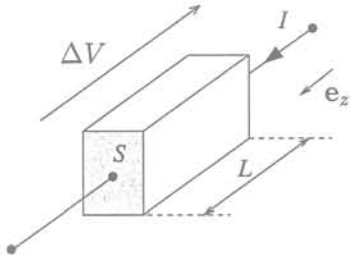


FIG. 1.3: Définition d'un conducteur pour le 2D

On a alors :

$$\frac{\partial V}{\partial z}\,\mathbf{e}_z = -\frac{\Delta V}{L}\mathbf{e}_z\,. \tag{1.30}$$

Rappelons en 2D, les équations à résoudre suivant le composant envisagé [28].

- *Pour les composants filaires :*
  Pour représenter une bobine en 2D, on considère une coupe de celle-ci dans le plan de calcul (Fig. 1.4). On obtient deux régions surfaciques. Chacune d'elle est traitée par un composant filaire. Les deux composants sont reliés par une équation de circuit traduisant l'égalité du courant dans les spires.
  Considérons un composant de section S et composé de n spires parcourues par le même courant I. La densité de courant est supposée constante dans toute la région surfacique correspondante et peut être exprimée par :

$$\mathbf{J} = \frac{n}{S} I\,\mathbf{e}_z\,. \tag{1.31}$$

  On résout alors :

$$\mathrm{rot}(\nu\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) = \frac{n}{S} I\,\mathbf{e}_z\,. \tag{1.32}$$

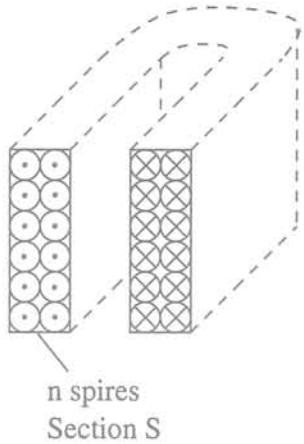


FIG. 1.4: Bobine en fils fins traitée en 2D

Avec les conventions choisies, la relation courant-tension s'écrit dans ce cas :

$$\Delta V = RI + L\frac{n}{S}\int_S \frac{d\mathbf{A}}{dt}ds\,, \tag{1.33}$$

où R est la résistance du composant bobiné.

- *Pour les conducteurs massifs :*
  On est amené à résoudre :

$$\mathrm{rot}(\nu\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) + \sigma\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} - \frac{\Delta V}{L}\mathbf{e}_z\right) = \mathbf{0}\,. \tag{1.34}$$

Une relation entre le courant total et la tension peut être trouvée en écrivant :

$$I = \int_S \left(-\sigma\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \sigma\frac{\Delta V}{L}\mathbf{e}_z\right) ds\,. \tag{1.35}$$

Elle peut être aussi écrite sous la forme :

$$\Delta V = RI + R\int_S \sigma\frac{d\mathbf{A}}{dt}ds\,. \tag{1.36}$$

1.7 Couplage avec les équations cinématiques

Nous considérons le mouvement de corps rigides (non-déformables). Un mouvement général 3D est tout d'abord envisagé. On se restreint ensuite à un mouvement dont on connaît la trajectoire comme c'est le cas pour les systèmes électromécaniques classiques.

1.7.1 Mouvement général.

Le mouvement le plus général, en trois dimensions, peut-être décrit à l'aide de 6 degrés de liberté correspondant aux trois coordonnées du centre d'inertie du solide considéré et de trois angles qui définissent l'orientation du mobile.

On suppose que l'origine du repère $\mathcal{R}'$ de la Fig. 1.1 est confondue avec le centre d'inertie du mobile. Choisissons de plus les axes de $\mathcal{R}'$ afin qu'ils coïncident avec les axes principaux du solide. Pour décrire leur orientation par rapport aux axes de $\mathcal{R}$, il est commode d'utiliser les angles d'Euler Φ,Θ et Ψ [29].
La transformation $R(t)$ définie par (1.1) est alors définie par la matrice :

$$\begin{bmatrix} \cos\Phi\cos\Psi - \sin\Phi\cos\Theta\sin\Psi & \sin\Phi\cos\Psi + \cos\Phi\cos\Theta\sin\Psi & \sin\Theta\sin\Psi \\ -\cos\Phi\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Theta\sin\Psi & -\sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Theta\cos\Psi & \sin\Theta\cos\Psi \\ \sin\Phi\sin\Theta & -\cos\Phi\sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix}. \tag{1.37}$$

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au solide en mouvement, et en l'écrivant dans $\mathcal{R}'$, on obtient le système :

$$\begin{cases} m\left(\dfrac{dv_{x'}}{dt} + \Omega_{y'}v_{z'} - \Omega_{z'}v_{y'}\right) = F_{x'} \\ m\left(\dfrac{dv_{y'}}{dt} + \Omega_{z'}v_{x'} - \Omega_{x'}v_{z'}\right) = F_{y'} \\ m\left(\dfrac{dv_{z'}}{dt} + \Omega_{x'}v_{y'} - \Omega_{y'}v_{x'}\right) = F_{z'} \end{cases}. \tag{1.38}$$

Trois autres équations sont obtenues en écrivant le théorème du moment cinétique appliqué en O' :

$$\begin{cases} I_{x'}\dfrac{d\Omega_{x'}}{dt} + (I_{z'} - I_{y'})\Omega_{y'}\Omega_{z'} = \Gamma_{x'} \\ I_{y'}\dfrac{d\Omega_{y'}}{dt} + (I_{x'} - I_{z'})\Omega_{z'}\Omega_{x'} = \Gamma_{y'} \\ I_{z'}\dfrac{d\Omega_{z'}}{dt} + (I_{y'} - I_{x'})\Omega_{x'}\Omega_{y'} = \Gamma_{z'} \end{cases}, \tag{1.39}$$

où m est la masse du solide et $I_{x'}$, $I_{y'}$ et $I_{z'}$ sont ces moments principaux d'inertie. Lorsqu'on connait les composantes des forces $F_{x'}$, $F_{y'}$ et $F_{z'}$ appliquées au solide, ainsi que leurs moments par rapport à O', les six équations précédentes permettent de déterminer les inconnues $v_{x'}$, $v_{y'}$, $v_{z'}$, $\Omega_{x'}$, $\Omega_{y'}$ et $\Omega_{z'}$ qui correspondent respectivement aux composantes de la vitesse et de la vitesse angulaire du solide exprimées dans $\mathcal{R}'$. On peut ensuite revenir aisément aux degrés de liberté décrivant la position du mobile. En pratique, on a besoin d'un tel calcul dans les applications de type sustentation magnétique.

1.7.2 Mouvement à un degré de liberté.

Dans les convertisseurs électromécaniques, le mouvement des pièces est guidé et les trajectoires suivies déterminées. On est alors réduit à un problème beaucoup plus simple où seul un degré de liberté est nécessaire pour décrire le mouvement. Le guidage des pièces mécaniques induit par ailleurs des contacts et des frottements qui apparaissent dans l'équation du mouvement.

Cas de la translation.

Tous les points du solide ont la même vitesse v qui se déduit de la résolution de :

$$m\frac{dv}{dt} = F_{ext} + f(v)\,, \tag{1.40}$$

où F_{ext} est la résultante sur l'axe de translation des forces extérieures appliquées au mobile. Dans le type d'exemple que nous avons à traiter, on a affaire à des forces magnétiques et à l'action de ressorts. $f(v)$ peut s'exprimer sous la forme $\lambda_0 + \lambda_1 v + \lambda_2 v^2 + ...$, où les deux premiers termes correspondent respectivement aux frottements secs et visqueux. Il est souvent difficile en pratique de les évaluer.

Cas de la rotation.

Soit Δ l'axe de la rotation. La vitesse angulaire à laquelle tourne le mobile est trouvée en résolvant :

$$I\frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_{ext} + f(\Omega)\,, \tag{1.41}$$

où Γ_{ext} est la résultante sur Δ des couples extérieurs appliqués au mobile.

1.8 Conclusion

Pour le problème à courants induits avec mouvement, nous avons choisi d'utiliser une formulation $\mathbf{A}V$-$\mathbf{A}$. Elle permet le couplage avec les équations de circuit et nous avons explicité les équations du couplage dans le cas 2D. D'autre part nous avons établi les équations cinématiques du mouvement.

Un résultat important de ce chapitre est que les équations de Maxwell, dans l'approximation quasi-statique (c'est-à-dire en négligeant les courants de déplacement), peuvent s'écrire, pour nos applications limitées aux faibles vitesses et accélérations, dans le repère de notre choix. Pour décrire le problème des courants induits avec mouvement, nous pouvons donc adopter une description Lagrangienne dans laquelle les équations sont écrites sous forme "matérielle". Si cette description n'apporte rien dans le cas 2D, elle est la mieux adaptée pour les études tridimensionnelles.

Chapitre 2

Vers le modèle discret : Méthode des éléments finis

2.1 Introduction

Au chapitre précédent, nous avons obtenu une description continue du système physique à travers des équations aux dérivées partielles. En vue de résoudre ces équations pour des géométries complexes grâce à des outils informatiques, on cherche à les discrétiser pour obtenir un système d'équations algébriques qui fournira une solution approchée du problème. C'est ce que propose la méthode des résidus pondérés [3, 1]. Dans ce chapitre, nous présentons l'application de cette méthode à notre problème physique.

Dans un premier temps, une forme intégrale des équations permet de formuler le problème en prenant en compte de manière faible certaines conditions aux limites et conditions aux interfaces.

Il convient ensuite, dans le cadre des éléments finis, de choisir la base de projection la mieux adaptée au problème traité.

Le système subit alors non seulement une discrétisation spatiale mais aussi temporelle. Celle-ci est explicitée en 2D, avec les équations de circuit.

2.2 Formulation faible AV-A .

L'objet de cette section est de réécrire les équations (1.26) et (1.27) sous forme intégrale. Dans cette section, on se place dans le cas 3D.

2.2.1 Définitions

Dans la méthode des résidus pondérés, les fonctions de pondération (ou fonctions tests) doivent appartenir au même espace fonctionnel que l'espace des solutions admissibles. Dans le domaine d'étude Ω, l'énergie magnétique est finie. Elle est donnée par :

$$W = \int_{\Omega} \left(\int_{0}^{\mathbf{B}} \mathbf{H} d\mathbf{B} \right) d\Omega \,. \tag{2.1}$$

Notons $\mathbb{L}^2(\Omega)$ l'espace des fonctions vectorielles à valeurs complexes de carré du module sommable, c'est-à-dire les fonctions $\mathbf{W}$ telles que :

$$\int_\Omega \| \mathbf{W} \|^2 \, d\Omega < \infty .$$

Comme $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, on doit chercher $\mathbf{A}$ dans l'espace de Hilbert suivant :

$$\mathbb{L}^2_{\text{rot}}(\Omega) = \left\{ \mathbf{W} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \; ; \; \operatorname{rot} \mathbf{W} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \right\} .$$

Etant donné les conditions aux limites que doit vérifier $\mathbf{A}$, on restreint l'espace dans lequel on recherche les solutions à :

$$\mathbb{A} = \left\{ \mathbf{W} \in \mathbb{L}^2_{\text{rot}}(\Omega) \; ; \; \mathbf{W} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B \right\} .$$

D'autre part, soit $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions scalaires de carré intégrable sur Ω. On définit $L^2_{\text{grad}}(\Omega)$ par :

$$L^2_{\text{grad}}(\Omega) = \left\{ \alpha \in L^2(\Omega) \; ; \; \operatorname{grad} \alpha \in \mathbb{L}^2(\Omega) \right\} .$$

Nous choisissons les fonctions de pondération scalaires dans l'ensemble suivant :

$$\mathbb{V} = \left\{ \alpha \in L^2_{\text{grad}}(\Omega) \; ; \; \alpha = 0 \text{ sur } \Gamma_B \right\} .$$

2.2.2 Un problème plus simple

Dans cette section, nous considérons le problème statique simple présenté sur la Fig. 2.1.

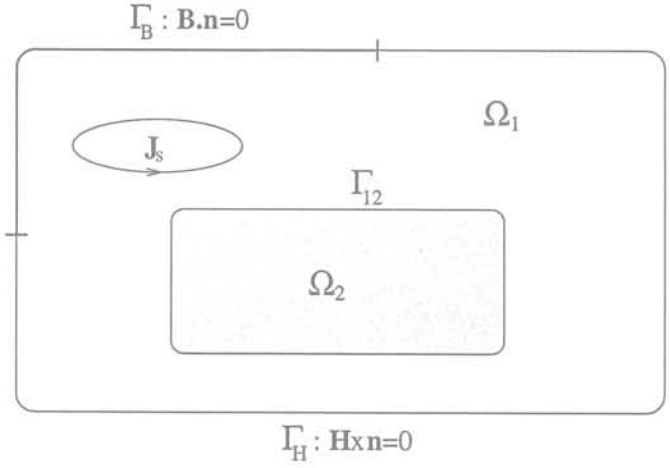


FIG. 2.1: Définition d'un problème statique plus simple

Sachant que l'inconnue $\mathbf{A}$ est cherchée dans l'ensemble $\mathbb{A}$, la formulation "forte" pour ce problème s'énonce :

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}) - \mathbf{J}_s = 0 \text{ dans } \Omega_1 \text{ et } \Omega_2 , \\ \nu \operatorname{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_H , \\ [\nu \operatorname{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n}] = \nu_1 \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 \times \mathbf{n} - \nu_2 \operatorname{rot} \mathbf{A}_2 \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur l'interface } \Gamma_{12} . \end{cases} \tag{2.2}$$

Remarque : sur Γ_B, $\mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0$ assure $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Cherchons maintenant une formulation faible équivalente. Soit $\mathbf{W} \in \mathbb{A}$, une intégration par parties permet d'obtenir l'égalité suivante : :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (\operatorname{rot} \mathbf{W} \cdot \nu \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_s)\, d\Omega = \\
&\int_{\Omega_1} \mathbf{W} \cdot (\operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}) - \mathbf{J}_s)\, d\Omega + \int_{\Omega_2} \mathbf{W} \cdot (\operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}) - \mathbf{J}_s)\, d\Omega \\
&+ \int_{\Gamma_B} (\mathbf{W} \times \mathbf{n}) \cdot \nu \operatorname{rot} \mathbf{A}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_H} \mathbf{W} \cdot (\nu \operatorname{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n})\, d\Gamma \\
&+ \int_{\Gamma_{12}} \mathbf{W} \cdot [\nu \operatorname{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n}]\, d\Gamma .
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Comme $\mathbf{W} \in \mathbb{A}$, l'intégrale sur Γ_B s'annule. Grâce à l'égalité (2.3), on voit que si on trouve $\mathbf{A} \in \mathbb{A}$ qui résout (2.2), alors $\mathbf{A}$ est aussi solution de :

$$\int_\Omega (\operatorname{rot} \mathbf{W} \cdot \nu \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_s)\, d\Omega = 0 \ , \ \forall \mathbf{W} \in \mathbb{A}. \tag{2.4}$$

On peut montrer qu'il y a équivalence entre (2.2) et (2.4). La forme faible (2.4) permet de résoudre à la fois les équations dans le domaine et les conditions aux limites et aux interfaces [30].

2.2.3 Formulation faible pour le problème complet

Revenons à notre problème initial, défini au chap. 1. En adoptant la démarche qui a été présentée à la section précédente, on aboutit à la formulation faible du problème des courants induits avec mouvement qui s'énonce de la manière suivante : Trouver $\mathbf{A} \in \mathbb{A}$ tel que :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\operatorname{rot} \mathbf{W} \cdot \nu \operatorname{rot} \mathbf{A})\, d\Omega - \int_\Omega \mathbf{W} \cdot \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{grad} V \right) d\Omega \\
= \int_\Omega \mathbf{W} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_s\, d\Omega \ , \ \forall \mathbf{W} \in \mathbb{A}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

On doit déterminer deux inconnues que sont $\mathbf{A}$ et V. On introduit généralement une deuxième équation qui est en fait une conséquence de (2.5) (en prenant $\mathbf{W} = \operatorname{grad} \alpha$)[15, 31, 32] :

$$\int_\Omega \operatorname{grad} \alpha \cdot \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{grad} V \right) d\Omega \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{V}. \tag{2.6}$$

(2.6) est la formulation faible de : $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$, $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_H et $[\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}] = 0$ aux interfaces.

Différentes techniques de jauge permettent par ailleurs de déterminer $\mathbf{A}$ de manière unique [14, 15, 33].

2.3 Discrétisation spatio-temporelle.

On cherche maintenant à obtenir une solution approchée des équations précédentes. Pour cela il faut choisir une base de fonctions tests sur laquelle on projette les

051 098048 7

équations. Il convient aussi de choisir une discrétisation des inconnues. Nous utilisons la méthode de Galerkine pour laquelle les fonctions d'interpolation des variables sont utilisées comme fonctions tests. La discrétisation spatiale peut se faire en utilisant des éléments finis. Il reste à faire le choix du type des éléments le plus adapté à notre problème. D'autre part, les équations à résoudre mettent en jeu le temps, il faut donc appliquer une discrétisation temporelle à notre système.

2.3.1 Discrétisation temporelle

Lorsque la géométrie est invariante dans la direction de la vitesse, et que les sources d'alimentations sont constantes, une formulation en $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ permet d'évaluer les courants induits dûs à la vitesse en une seule résolution. Pour des vitesses élevées, des instabilités numériques apparaissent et des fonctions de forme adaptées doivent être utilisées [34].

Dans le cas général, on doit utiliser une procédure pas-à-pas dans le temps (Fig. 2.2). Les équations magnétiques et électriques sont résolues simultanément à chaque pas de temps. L'équation mécanique est couplée faiblement au système. Elle est résolue de manière explicite à la fin de chaque pas de temps, en considérant que la force ou le couple magnétique sont constants entre deux pas. Ce choix de mise en œuvre a été fait en raison de sa simplicité. Un couplage fort est aussi possible mais plus complexe [35].

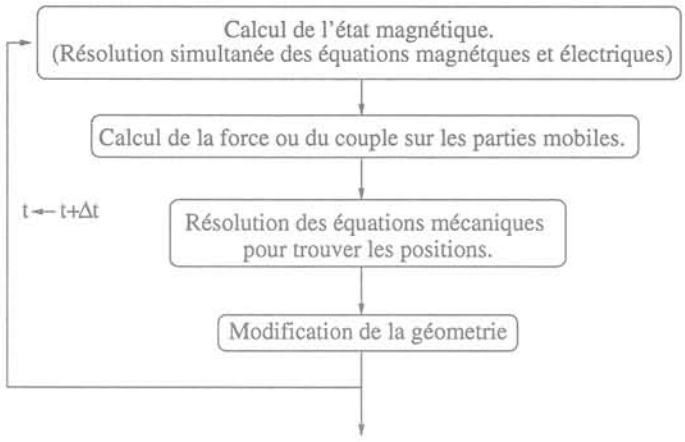


FIG. 2.2: Procédure pas-à-pas dans le temps utilisée.

A chaque pas de temps, le système à résoudre est du type :

$$\mathrm{MX} + \mathrm{S}\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \mathbf{F}\,. \tag{2.7}$$

On utilise un θ-schéma pour discrétiser X dans le temps :

$$\mathbf{X} = \theta \mathbf{X}_{n+1} + (1-\theta)\mathbf{X}_n\,. \tag{2.8}$$

La dérivée temporelle est approximée par différences finies :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} \simeq \frac{\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n}{\Delta t}\,,$$

où les indices n et $n+1$ indiquent les valeurs aux pas de temps respectifs t_n et t_{n+1} séparés par l'intervalle Δt. Une discrétisation possible de l'équation (2.7) est alors :

$$\left(\theta\,\mathbf{M}_{n+1} - \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\Delta t}\right)\mathbf{X}_{n+1} = \left(\frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\Delta t} - (1-\theta)\mathbf{M}_{n+1}\right)\mathbf{X}_n + \theta\,\mathbf{F}_{n+1} + (1-\theta)\mathbf{F}_n\,. \quad (2.9)$$

On a obtenu un système d'équations différentielles algébriques. Suivant le choix de la valeur de θ, on aboutit à différents schémas d'Euler classiques [36, 37] :

- $\theta = 0$: explicite,
- $\theta = 1/2$: Crank-Nicolson,
- $\theta = 2/3$: Galerkine,
- $\theta = 1$: implicite.

Stabilité

Pour $\theta \geqslant \frac{1}{2}$, le méthode est inconditionnellement stable. Pour $\theta < 0.5$, le domaine de stabilité est défini par :

$$\Delta t \leqslant \frac{2}{(1-2\theta)\lambda_{max}}\,,$$

où λ_{max} est la plus grande valeur propre du système. Il existe aussi un domaine de stabilité sans oscillations défini par :

$$(1-\theta)\Delta t \leqslant \frac{1}{\lambda_{max}}\,.$$

On voit que pour $\theta \neq 1$, le choix du pas de temps est conditionné par λ_{max}. Or λ_{max} est difficile à estimer dans le cas général.

Convergence

L'erreur commise lorsqu'on utilise l'algorithme d'Euler peut s'écrire :

$$e = (1-2\theta)O(\Delta t) + O(\Delta t^2)\,.$$

Seule la valeur $\theta = 0.5$ permet d'obtenir une erreur quadratique.

Choix de la méthode

Nous avons choisi d'utiliser un schéma d'Euler implicite car c'est le plus simple à mettre en œuvre. En effet, pour calculer le potentiel à l'instant $t + \Delta t$, les autres schémas nécessitent la connaissance de la solution à l'instant t. Si on utilise une procédure de remaillage dans une zone déformable, il faut projeter la solution trouvée au temps t sur le nouveau maillage. Une telle interpolation entre deux maillages est lourde à mettre en œuvre et source de bruit numérique.

Un second avantage du schéma d'Euler implicite est qu'il garantit l'absence d'oscillations. Le fait qu'il soit moins précis peut engendrer quelques difficultés de choix du pas de temps pour traiter les problèmes raides. Dans ce cas, un algorithme de prédiction-correction [38] permet une adaptation du pas de temps. D'autres méthodes de type Runge-Kutta implicite à s pas (sDIRK) [39, 40] paraissent particulièrement bien adaptées aux problèmes raides. Elles sont en effet d'ordres supérieurs et permettent une adaptation du pas de temps. Elles peuvent par contre s'avérer plus coûteuses qu'une simple méthode d'Euler implicite.

2.3.2 Choix des fonctions de forme

Lorsqu'on approxime un champ de vecteur sur un maillage éléments finis par des éléments nodaux, on approche chacune de ses composantes par une interpolation scalaire. Ainsi, pour le potentiel vecteur magnétique au point M, on écrit :

$$\mathbf{A} = \sum_i \alpha_i \mathbf{A_i} \,,$$

où les $\mathbf{A_i}$ sont les valeurs nodales du potentiel aux nœuds de l'élément du maillage dans lequel est situé le point M.

Une autre discrétisation possible est l'utilisation d'éléments de Whitney. Ils permettent de représenter les champs et potentiels lorsque ceux-ci ont été identifiés en tant que formes différentielles. Par exemple, le potentiel vecteur magnétique peut-être vu comme une 1-forme qui pourra être approximée par des éléments de Whitney de degré 1, aussi appelés éléments d'arêtes. On écrit alors :

$$\mathbf{A} = \sum_i \mathbf{W_i} A_i \,.$$

Les degrés de liberté A_i sont ici associés aux arêtes du maillage. Ces éléments sont conformes dans $\mathbb{L}^2_{\mathrm{rot}}$ et sont donc les mieux adaptés à la représentation du potentiel vecteur magnétique. Cette discrétisation permet de plus une formulation sous forme "matérielle" ou encore Lagrangienne [41]. Nous avons vu précédemment (cf. 1.4) que c'est la représentation qui semble la plus adaptée dans le cas 3D.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que contrairement aux éléments nodaux, les éléments d'arêtes permettent de calculer correctement le terme relatif aux courants induits lors d'une procédure en pas-à-pas dans le temps avec mouvement.

Pour évaluer les courants induits dans les pièces conductrices en mouvement, on utilise classiquement une méthode de différences finies qui consiste à effectuer une différence entre valeurs de potentiels à l'instant $t + \Delta t$ et t.

Quel que soit le type d'approximation choisie, on a interêt à garder le maillage des parties, mobiles ou non, qui sont le siège de courants de Foucault. En effet, si leur maillage change, une interpolation sur le nouveau maillage de la solution à l'instant t est nécessaire pour évaluer les courants induits par différences finies. Pour la suite, nous considérons donc que les parties non-déformables de la géométries gardent le même maillage au cours du temps.

Examinons ce que la méthode des différences finies nous permet de calculer pour chaque type d'approximation. Dans le calcul qui suit, toutes les grandeurs vectorielles sont exprimées dans le référentiel du laboratoire.

- *Pour l'interpolation nodale :*

  Pour chaque nœud i, on approche $\dfrac{d\mathbf{A}_i}{dt}$ par $\dfrac{\mathbf{A}_i(t+\Delta t) - \mathbf{A}_i(t)}{\Delta t}$.

  Calculons la variation totale de $\mathbf{A}$ vue du référentiel du laboratoire en fonction des variations des variables nodales :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_i \frac{d\alpha_i}{dt}\mathbf{A}_i + \sum_i \alpha_i \frac{d\mathbf{A}_i}{dt} \,.$$

  Or, α_i est un scalaire seulement fonction de la place du point M dans l'élément dans lequel M est situé. Puisque le maillage se déplace avec M, on a $\dfrac{d\alpha_i}{dt} = 0$.

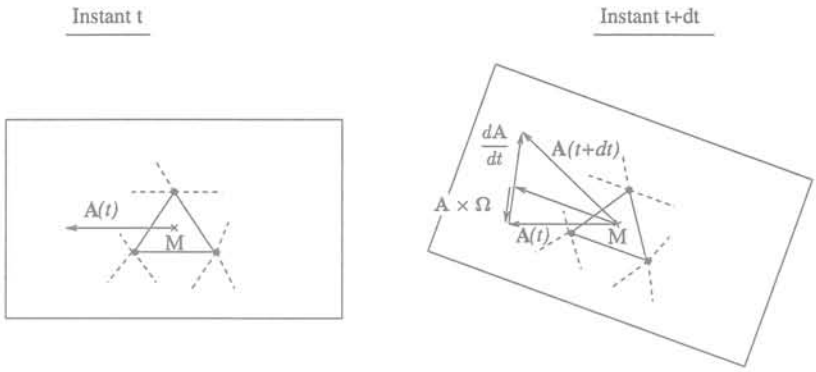


FIG. 2.3: Variations du vecteur **A** au point mobile M entre deux pas de temps

Ainsi, en nodal, les différences finies permettent de calculer :

$$\sum_i \alpha_i \frac{d\mathbf{A}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt}. \tag{2.10}$$

- *Pour l'interpolation d'arête :*
  On fait une différence entre valeurs d'arêtes : $\dfrac{dA_i}{dt} \simeq \dfrac{A_i(t+\Delta t) - A_i(t)}{\Delta t}$.
  Vues du laboratoire, les variations de **A** s'écrivent cette fois :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{W}_i}{dt} A_i + \sum_i \mathbf{W}_i \frac{dA_i}{dt}.$$

  Appliquons la formule de dérivation (1.1). Comme le maillage bouge avec la partie mobile, $\dfrac{\partial \mathbf{W}_\mathbf{i}'}{\partial t} = 0$ et donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \sum_i (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{W}_i) A_i + \sum_i \mathbf{W}_i \frac{dA_i}{dt} \\ &= \mathbf{\Omega} \times \sum_i \mathbf{W}_i A_i + \sum_i \mathbf{W}_i \frac{dA_i}{dt}. \end{aligned}$$

  Ainsi, les différences finies permettent cette fois d'évaluer :

$$\sum_i \mathbf{W}_\mathbf{i} \frac{dA_i}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{A} \times \mathbf{\Omega}. \tag{2.11}$$

Lorsqu'on utilise des éléments d'arêtes, les fonctions de forme "tournent" avec la géométrie. Pour les éléments nodaux, c'est le vecteur inconnue qui subit la rotation. Or seule la variation locale de l'inconnue doit être prise en compte. Rappelons l'expression (1.24) de **J** :

$$\mathbf{J} = \sigma \left(-\operatorname{grad} V' - \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \mathbf{A} \times \mathbf{\Omega} \right).$$

L'expression (2.10) montre que si on utilise des éléments nodaux avec une description Eulérienne, c'est-à-dire en exprimant $\mathbf{A}$ dans le repère fixe $\mathcal{R}$, il faut calculer explicitement le terme $\mathbf{A} \times \mathbf{\Omega}$. Pour éviter cela, il faut adopter une description Lagrangienne dans laquelle on exprime $\mathbf{A}$ dans $\mathcal{R}'$ pour la partie mobile. Les éléments d'arêtes nous placent "automatiquement" dans une description Lagrangienne. Ils permettent ainsi d'obtenir directement par différences finies les termes nécessaires pour évaluer les courants induits.

2.4 Application au cas 2D

Pour traiter un problème en deux dimensions, on suppose une invariance de la géométrie et des phénomènes magnétiques selon une direction $\mathbf{k}$. De plus, le courant est selon cette direction. L'étude peut se faire dans un plan perpendiculaire à $\mathbf{k}$ et le potentiel vecteur magnétique a pour expression $\mathbf{A} = A\mathbf{k}$. On peut ainsi utiliser une approximation nodale pour la grandeur scalaire A. Nous avons montré au 1.4 qu'en 2D, utiliser cette approximation suffit pour prendre correctement en compte le mouvement. Il suffit de fixer le potentiel A en un point pour en assurer l'unicité.

2.4.1 Méthode de Newton-Raphson et discrétisation

Pour prendre traiter d'éventuelles non-linéarités des propriétés des matériaux, nous utilisons la méthode de Newton-Raphson [37, 36].

Pour les régions non connectées à des circuits extérieurs, on discrétise l'équation (2.5) que l'on simplifie pour le cas 2D. A chaque itération de Newton-Raphson, le résidu à annuler pour le nœud i est :

$$R_i = \int_S \left(\operatorname{rot} \mathbf{W}_i \cdot \nu \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mathbf{W}_i \cdot \sigma \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \mathbf{W}_i \cdot \tilde{\mathbf{J}}_s \right) ds \,. \tag{2.12}$$

Bien que nous ayons choisi un schéma de type Euler implicite, nous présentons les équations pour un θ-schéma quelconque. Soient $X_j(t+\Delta t)$ les inconnues du système. La méthode de Newton-Raphson conduit à résoudre à chaque itération le système :

$$\mathbf{S}\,\Delta\mathbf{X} = -\mathbf{R}\,, \tag{2.13}$$

où $\mathbf{S}$ est une matrice dont les termes sont $Sij = \dfrac{\partial R_i(t+\theta\Delta t)}{\partial X_j(t+\Delta t)}$,
et le vecteur résidu $\mathbf{R}$ est tel que $R_i = R_i(t+\theta\Delta t)$.

Pour l'interpolation nodale en 2D, on choisit comme fonction test associée au nœud i : $\mathbf{W}_i = \alpha_i \mathbf{k}$. En utilisant la discrétisation temporelle décrite au 2.3 et en dérivant chaque résidu par rapport aux inconnues $A_j(t+\theta\Delta t)$, on obtient les termes du système matriciel à résoudre :

$$S_{ij} = \theta \int \operatorname{grad} \alpha_i \cdot \nu \operatorname{grad} \alpha_j + \frac{\sigma \alpha_i \alpha_j}{\Delta t} ds \,. \tag{2.14}$$

2.4.2 Couplage avec les équations de circuit

Pour l'analyse du circuit électrique, trois méthodes différentes peuvent être envisagées selon les inconnues qui sont utilisées. FLUX2D utilise la méthode des courants

de maille [42] ; dans MV2DYN [43], ce sont les potentiels électriques nodaux qui sont utilisés ; les méthodes de FLUX3D sont basées sur les potentiels nodaux intégrés [44].

Le L.E.G. possède à travers plusieurs travaux [20, 23] une bonne expérience de cette dernière méthode en 3D. Nous avons choisi de l'utiliser et de l'appliquer au cas bidimensionnel.

Les variables utilisées sont les potentiels électriques intégrés dans le temps aux nœuds du circuit :

$$\psi = \int_0^t V d\tau \,. \tag{2.15}$$

Avec cette variable, le système d'équations décrivant le circuit peut se mettre sur la forme générale [23] :

$$\mathbf{NI} + \mathbf{NGN}^{\mathrm{t}} \frac{d\mathbf{\Psi}}{dt} + \mathbf{NL}^{-1}\mathbf{N}^{\mathrm{t}}\mathbf{\Psi} + \mathbf{NCN}^{\mathrm{t}} \frac{d^2\mathbf{\Psi}}{dt^2} = -\mathbf{NI_g} \,, \tag{2.16}$$

où

- $\mathbf{N}$ est une matrice d'incidence des branches aux nœuds,
- $\mathbf{G}$ la matrice des conductances,
- $\mathbf{L}$ la matrice des inductances,
- $\mathbf{C}$ la matrice des capacités,
- $\mathbf{I_g}$ le vecteur des courants des générateurs et courants initiaux des inductances.

Les conducteurs filaires et massifs nécessitent à la fois des équations de circuit et des termes éléments finis. Pour chacun de ces composants, les inconnues sont :

- les valeurs nodales A_i de la région E.F. concernée,
- le courant I traversant le composant,
- les potentiels ψ_1 et ψ_2 aux bornes du composant.

Pour un conducteur filaire

Reprenons les équations (1.31) et (1.32) auxquelles on ajoute les équations de circuit associées au composant. Les résidus à annuler sont alors :

$$\begin{aligned}
R_i &= \int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{W}_i \cdot \nu \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{A} ds - \frac{n}{S} I \int \alpha_i ds \,, \\
r_1 &= \frac{n}{S} L \int \frac{dA}{dt} ds - \frac{d\psi_1}{dt} + \frac{d\psi_2}{dt} \,, \\
r_2 &= I \,, \\
r_3 &= -I \,.
\end{aligned}$$

La résistance du composant filaire n'a pas été prise en compte ici. Pour y remédier, on doit ajouter une résistance dans la description du circuit électrique connecté au composant. La contribution matricielle au système global de ce composant s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{C} & 0 & 0 \\ {}^t\mathbf{C} & 0 & \theta & -\theta \\ 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & -\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{A} \\ \Delta I \\ \Delta\psi_1 \\ \Delta\psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R} \\ -r_1 \\ -r_2 \\ -r_3 \end{bmatrix} , \tag{2.17}$$

avec $S_{ij} = L\theta \int \operatorname{grad} \alpha_i \cdot \nu \operatorname{grad} \alpha_j ds$ et $C_i = -L\theta \frac{n}{S} \int \alpha_i ds$.

Pour un conducteur massif

Les équations (1.34) et (1.35) sont reprises et discrétisées en y ajoutant les équations de circuit du composant. Après élimination de l'inconuue I, on aboutit aux résidus :

$$\begin{aligned} R_i &= \int \left(\operatorname{rot} \mathbf{W}_i \cdot \nu \operatorname{rot} \mathbf{A} ds + \mathbf{W}_i \cdot \sigma \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \frac{\sigma \alpha_i}{L} \left(\frac{d\psi_1}{dt} - \frac{d\psi_2}{dt} \right) \right) ds \,, \\ r_1 &= I = -\int \left(\sigma \frac{dA}{dt} + \frac{\sigma}{L} \left(\frac{d\psi_1}{dt} - \frac{d\psi_2}{dt} \right) \right) ds \,, \\ r_2 &= -I = -R_2 \,. \end{aligned}$$

Après discrétisation et symétrisation, on obtient le système :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} & -\mathbf{C} & \mathbf{C} \\ -{}^t\mathbf{C} & g & -g \\ {}^t\mathbf{C} & -g & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{A} \\ \Delta \psi_1 \\ \Delta \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R} \\ -r_1 \\ -r_2 \end{bmatrix} . \tag{2.18}$$

avec $S_{ij} = L\theta \int \left(\operatorname{grad} \alpha_i \cdot \nu \operatorname{grad} \alpha_j + \frac{\sigma \alpha_i \alpha_j}{\Delta t} \right) ds$ et $C_i = \int \frac{\sigma \alpha_i}{\Delta t} ds$ et $g = \int \frac{\sigma}{\Delta t} ds$.

2.5 Conclusion

Nous avons présenté les problèmes liés à la discrétisation pour traiter les courants de Foucault avec mouvement.

En 2D, la formulation $\mathbf{A}V$-$\mathbf{A}$ complète avec équations de circuit a été décrite. Dans ce cas, une approche nodale dans laquelle on fait bouger le maillage avec la géométrie permet d'évaluer correctement les courants induits. La formulation $\mathbf{A}V$-$\mathbf{A}$ peut aussi être utilisée en 3D et permet de traiter le problème complet. Dans ce cas, l'utilisation des éléments d'arêtes semble être la mieux adaptée. Celle-ci facilite en effet une description Lagrangienne du problème.

Deuxième partie

Méthodes pour la prise en compte du mouvement

Introduction

Au cours de la simulation temporelle d'un dispositif électromécanique, la géométrie change avec le mouvement des parties mobiles du dispositif. Le maillage sur lequel sont basés nos calculs doit donc s'adapter à ces changements.

Comme nous l'avons montré au 2.3.2, le choix le plus adapté et le plus naturel est de garder le même maillage pour les pièces du dispositif qui sont supposées indéformables. En revanche, il convient de pouvoir gérer les déformations des entrefers ou plus généralement de l'air entourant les pièces.

De nombreuses méthodes ont été proposées dans la littérature pour traiter le mouvement dans les machines tournantes. Dans ce cas, on peut toujours définir un entrefer dont la forme est invariante au cours du mouvement. On obtient ainsi une bande qui est le lien entre la partie fixe constituée par le stator et la partie mobile qu'est le rotor. On peut raccorder la solution des deux parties analytiquement en utilisant un macro-élément [45]. Une autre méthode consiste à mettre une couche d'éléments dans la bande (cf. Fig. 2.4 (a)) et de reconnecter les nœuds du rotor et du stator au fur et à mesure de la rotation [46]. Comme il est proposé dans [31] et [47], la connection peut s'effectuer non pas à travers une bande comme précédemment mais sur une surface de glissement comme le montre la Fig. 2.4 (b). Pendant le mouvement, les nœuds du stator et du rotor ne coïncident pas sur la surface. Cela génère des approximations non-conformes qui sont traitées grâce à des multiplicateurs de Lagrange.

Pour les déplacements linéaires en 2D, on peut utiliser une technique analogue à celle de la bande de roulement. Celle-ci est présentée Fig. 2.5. Elle permet seulement de traiter la translation de pièces ayant des formes particulières [48].

Dans le cas particulier des machines électriques ou des mouvements linéaires en 2D, les techniques de remaillage sont simples et sont à nombre de nœuds constants. Pour des mouvements plus généraux ou des formes de mobiles quelconques, d'autres méthodes doivent être envisagées.

La difficulté consiste donc à adapter le maillage de l'air lorsque celui-ci subit de grandes déformations. Une stratégie consiste à utiliser pour l'air une méthode qui ne nécessite pas de maillage et de la coupler avec les éléments finis utilisés dans les autres parties du dispositif. Une voie nouvelle est de traiter l'air grâce à des méthodes sans maillages. Des résultats très prometteurs ont été obtenus par Hérault dans [49]. Néanmoins des difficultés restent à surmonter pour rendre la méthode plus concurrentielle vis-à-vis de méthodes plus anciennes et mieux maîtrisées. Plus classiquement on peut utiliser pour l'air des intégrales de frontière [50, 51, 39]. Cette méthode bien connue est très générale et robuste. Son coût élevé limitait jusqu'ici son utilisation à des cas simples.

Pour garder une méthode purement éléments finis, il faut trouver une procédure de

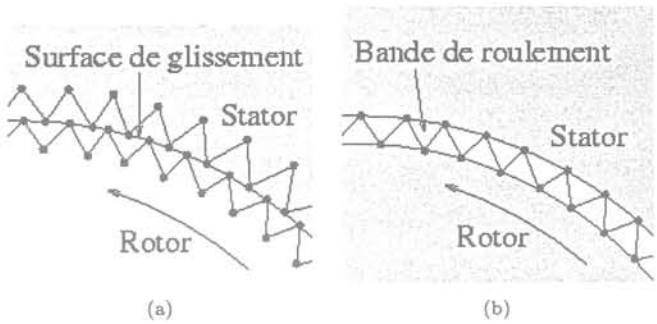


FIG. 2.4: (a) Surface de glissement avec connection de maillage.
(b) Bande de roulement.

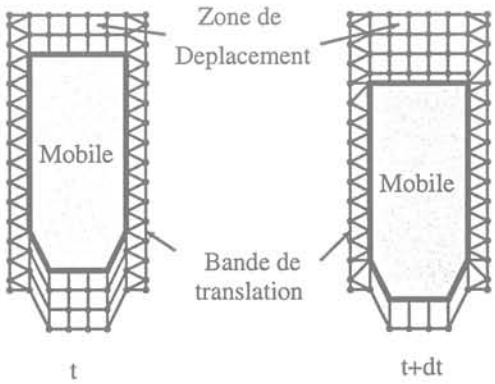


FIG. 2.5: Bande de translation pour les mouvements linéaires en 2D.

remaillage de l'air. Dans [52], les parties mobiles et fixes sont maillées séparément et leurs maillages sont intersectés et reconnectés pour chaque nouvelle position. Si la méthode paraît assez générale, elle n'apporte aucune garantie sur la qualité du maillage. Le même auteur propose de faire bouger les nœuds du maillage en paramétrant leurs coordonnées en fonction de la géométrie. Cette méthode apporte une solution satisfaisante dans certains cas simples [53]. Néanmoins elle ne paraît pas adaptée au grandes déformations. En effet, elle conduit à des maillages ayant des éléments très distordus, voire à des impossibilités de maillage (retournement d'éléments).

Pour rester très général, on doit alors se tourner vers des procédures de remaillage automatiques dans lesquelles la place et le nombre des nœuds doit pouvoir évoluer ainsi que la connection entre nœuds, c'est-à-dire la topologie du maillage. Il est intéressant de montrer l'utilisabilité d'un tel remaillage pour le calcul de champs. On peut étudier par exemple l'impact du remaillage sur la qualité de la solution temporelle.

Dans la suite, nous proposons d'analyser et de comparer deux solutions qui nous paraissent les plus générales et les mieux adaptées pour traiter les grandes déformations dans le domaine de l'électromagnétisme :

- le couplage E.F.- E.I.F.
- des techniques de remaillage automatique.

Chapitre 3

Couplage des intégrales de frontières avec la méthode des éléments finis

3.1 Introduction

La méthode des intégrales de frontière est utilisée depuis longtemps dans le domaine de la mécanique [54]. Ses performances permettent aussi de traiter des problèmes en électromagnétisme. C'est par exemple la méthode utilisée par le logiciel PHI3D [55]. Le couplage entre la méthode des éléments finis et les équations intégrales de frontières a déjà fait l'objet de nombreux travaux. Une des motivations principales de son utilisation est la prise en compte de l'infini dans les problèmes ouverts [50, 56]. Dans le logiciel Trifou, le couplage a été implémenté avec des formulations en **H** et éléments d'arêtes pour traiter les problèmes ouverts en présence de courants induits [10]. Il a déjà aussi été envisagé pour traiter des problèmes avec mouvement [57]. Un contacteur électromécanique est traité en 2D par Nicolet dans [39] par cette technique. Plus récemment, Kurz propose son utilisation en 3D avec une description Lagrangienne en $\mathbf{A}V$-$\mathbf{A}$ [51].

Ce couplage est particulièrement bien adapté aux problèmes avec courants induits et mouvement que nous avons à traiter. Il permet en effet de bénéficier des avantages des deux méthodes. Côté éléments finis, on peut prendre en compte les non-linéarités des matériaux, les courants de Foucault et les couplages avec des circuits électriques. Côté intégrales de frontière, l'absence de maillage volumique offre une grande liberté de déformation de la zone concernée et c'est donc une méthode très générale pour prendre en compte le mouvement.

Nous avons choisi de l'implémenter dans le code de calcul FLUX3D. Pour la suite, nous le désignerons sous le nom de couplage EF-EIF. Ce chapitre établit les équations du couplage en 2D et présente les différents aspects de l'implémentation de la méthode ainsi que ses performances sur des exemples simples en magnéto-statique.

3.2 Intégrales de frontières et couplage

3.2.1 Seconde identité de Green et application au potentiel vecteur magnétique

Considérons le domaine Ω de frontière Γ de la Fig. 3.1

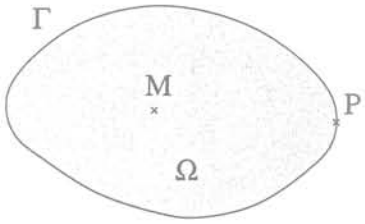


FIG. 3.1: Domaine traité par intégrales de frontières

Seconde identité de Green

La seconde identité de Green appliquée aux fonctions scalaires u et v s'écrit :

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\, d\Omega = \int_{\Gamma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma \tag{3.1}$$

Fonctions de Green

On définit les fonctions de Green associées à l'opérateur Laplacien dans Ω par :

$$\text{En 2D} : G_M(P) = -\frac{1}{2\pi} \ln MP \ ; \ \text{en 3D} : G_M(P) = \frac{1}{4\pi MP}$$

Ces fonctions ont la propriété suivante :

$$\Delta G_M = -\delta_M$$

En appliquant (3.1) avec $v = G$, on obtient :

$$c(M)u(M) - \int_{\Omega} G\Delta u d\Omega = \int_{\Gamma} \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma \tag{3.2}$$

Cœfficient c(M)

$c(M)$ est un cœfficient angulaire qui peut s'exprimer de la manière suivante :

- En 2D : $c(M) = \dfrac{\alpha}{2\pi}$ où α est l'angle sous lequel M voit Γ
- En 3D : $c(M) = \dfrac{\Omega_s}{4\pi}$ où Ω_s est l'angle solide sous lequel M voit Γ.

Selon la position du point M, il prend les valeurs :

- $c(M) = 0$ si M est à l'extérieur de Ω
- $c(M) = 1$ si M est à l'intérieur de Ω
- $c(M) = 1/2$ en un point régulier de la frontière Γ

De manière générale, ce cœfficient peut se calculer par :

$$c(M) = -\int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \tag{3.3}$$

Application au potentiel vecteur magnétique

Dans l'air, le potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A}$ est à Laplacien nul. Appliquons l'égalité (3.2) à chacune de ses composantes, on obtient :

$$c(M)\mathbf{A}(M) = \int_{\Gamma} \left(\mathbf{A}\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} \right) d\Gamma \tag{3.4}$$

On peut donc calculer $\mathbf{A}$ en tout point de Ω en connaissant seulement la valeur de $\mathbf{A}$ et de sa dérivée normale sur la frontière Γ.

3.2.2 Domaines avec des symétries

Pour réduire le domaine d'étude, il convient d'utiliser les symétries ou antisymétries des champs et potentiels. Nous allons montrer qu'il suffit pour cela d'utiliser une fonction de Green modifiée [58].

Supposons une symétrie selon le plan yOz comme présentée sur la Fig. 3.2.

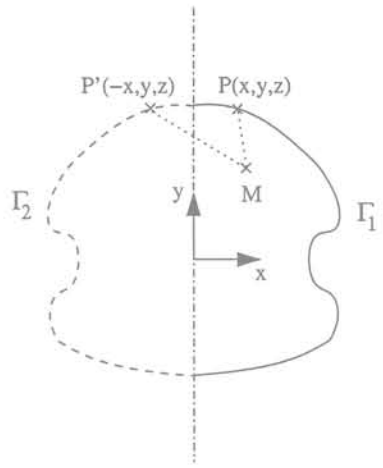


FIG. 3.2: Description d'un problème avec une symétrie

Considérons la composante k du vecteur $\mathbf{A}$:

$$A_k(-x) = \epsilon_{kx} A_k(x)$$

où ϵ_{kx} vaut 1 ou -1 selon qu'il s'agit d'une symétrie à champ magnétique normal ou tangent. La frontière peut être découpée en deux parties symétriques Γ_1 et Γ_2. Par un changement de variable, on peut se ramener à une intégrale sur Γ_1

Dans ce cas, l'équation (3.4) peut être ré-écrite :

$$\begin{aligned} cA_k(M) &= \int_{\Gamma_1} \left(A_k(x) \frac{\partial G(x)}{\partial n} - G(x) \frac{\partial A_k(x)}{\partial n} \right) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_1} \left(\epsilon_{kx} A_k(x) \frac{\partial G(-x)}{\partial n} - G(-x) \frac{\partial \epsilon_{kx} A_k(x)}{\partial n} \right) d\Gamma \end{aligned}$$

Réarrangeons les termes :

$$cA_k(M) = \int_{\Gamma_1} \left(A_k(x) \frac{\partial \left(G(x) + \epsilon_{kx} G(-x) \right)}{\partial n} - \left(G(x) + \epsilon_{kx} G(-x) \right) \frac{\partial A_k(x)}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.5)$$

On voit donc qu'il suffit de prendre ici comme fonction de Green : $G(x) + \epsilon_{kx} G(-x)$.

Ceci peut aussi s'effectuer avec les symétries selon les plans xOy et xOz. Lorsqu'il y en a plusieurs, la contribution de chacune est ajoutée dans la fonction de Green modifiée. Le tableau présenté en annexe donne les fonctions de Green à employer suivant les symétries rencontrées.

3.2.3 Problème ouvert

Considérons le domaine Ω délimité par les frontières Γ_1 et Γ_2 de la Fig. 3.3. L'équation intégrale (3.4) sur ce domaine peut s'écrire :

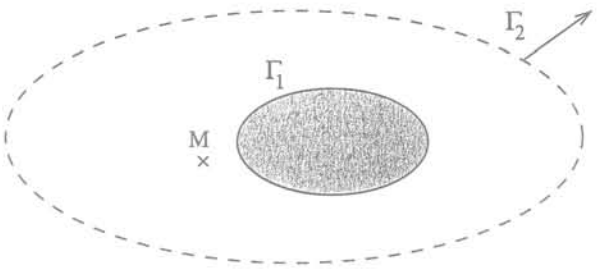


FIG. 3.3: Description d'un problème ouvert

$$\left(c_1(M) + c_2(M) \right) \mathbf{A}(M) = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \left(\mathbf{A} \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.6)$$

Si la frontière Γ_2 est repoussée vers l'infini, les sources de champs magnétique restant proches de Γ_1, l'intégrale sur Γ_2 de l'équation (3.6) s'annule. Par contre l'angle sous lequel on voit Γ_2 depuis le point M reste inchangé dès lors que M reste intérieur à Γ_2. Ainsi on obtient pour ce problème dit "ouvert" :

$$\left(1 - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \right) \mathbf{A}(M) = \int_{\Gamma_1} \left(\mathbf{A} \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.7)$$

On voit donc que les intégrales de frontières permettent de prendre en compte l'infini pour les problèmes ouverts.

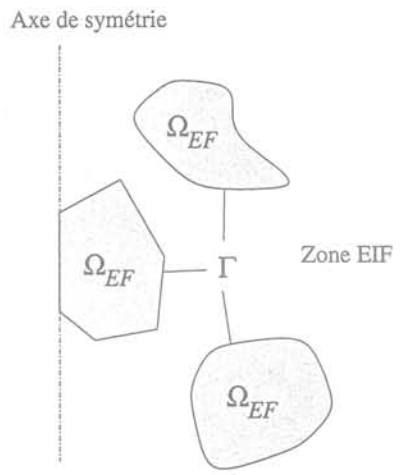


FIG. 3.4: Problème traité avec couplage E.F.- E.I.F.

3.2.4 Discrétisation et couplage avec les éléments finis.

La Fig. 3.4 montre un problème traité par couplage E.F.-E.I.F. Pour simplifier la présentation de cette partie, nous considérons le couplage en magnéto-statique. Le couplage en régime transitoire n'introduit aucune difficulté supplémentaire.

Seul un maillage frontalier du domaine E.I.F. est nécessaire. Dans notre cas, il correspond à la trace du maillage du domaine éléments finis.

Pour discrétiser les équations intégrales, on peut utiliser une méthode de Galerkine. Pour cela on pondère l'équation (3.4) avec des fonctions tests $\mathbf{W}_i$ et on écrit [59] :

$$\int_\Gamma c\,\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{A}\,d\Gamma = \int_\Gamma \left(\int_\Gamma \mathbf{W}_i \cdot \left(\mathbf{A}\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} \right) d\Gamma \right) d\Gamma \tag{3.8}$$

Une autre possibilité est d'utiliser une méthode de collocation qui consiste à utiliser directement l'équation (3.4). La méthode variationnelle est plus précise mais elle est aussi plus coûteuse puisqu'elle nécessite une double intégration [59]. C'est pourquoi nous avons choisi la collocation.

Pour la discrétisation des équations intégrales, nous nous plaçons maintenant en 2D. Dans ce cas, la collocation consiste à écrire en chaque nœud i :

$$c_i A_i = \int_\Gamma \left(A\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial A}{\partial n} \right) d\Gamma \tag{3.9}$$

Du fait de sa continuité, il est préférable d'utiliser la grandeur H_t plutôt que $\frac{\partial A}{\partial n}$ pour réaliser le couplage [56]. En utilisant une interpolation nodale pour A et H_t, la discrétisation des équations intégrales donne :

$$[\mathbf{DG}][\mathbf{A}_j] + [\mathbf{G}][\mathbf{H}_{t_j}] = 0 \tag{3.10}$$

avec $DG_{ij} = \int_\Gamma \alpha_j \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma - c_i \delta_{ij}$ et $G_{ij} = -\int_\Gamma \frac{\alpha_j G}{\nu_0} d\Gamma$.

Il manque des équations pour pouvoir résoudre les degrés de liberté situés sur la frontière. La partie E.F. permet d'apporter les équations nécessaires. Pour cela, on écrit la formulation éléments finis dans laquelle on garde les termes sur la frontière E.F.-E.I.F. :

$$\int_{\Omega_{EF}} (\operatorname{grad} \alpha_i \cdot \nu \operatorname{grad} A)\, d\Omega + \int_{\Gamma} \alpha_i H_t \, d\Gamma = \int_{\Omega_{EF}} \alpha_i j \, d\Omega \tag{3.11}$$

Après discrétisation, on obtient :

$$[\mathbf{S}][\mathbf{A}_j] + [\mathbf{Q}][\mathbf{H}_{t_j}] = [\mathbf{J}] \tag{3.12}$$

avec $S_{ij} = \int_{\Omega_{EF}} (\operatorname{grad} \alpha_i \cdot \nu \operatorname{grad} \alpha_j)\, d\Omega$, $Q_{ij} = \int_{\Gamma} \alpha_i \alpha_j \, d\Gamma$ et $J_i = \int_{\Omega_{EF}} \alpha_i j \, d\Omega$.

Avec (3.12) et (3.10), nous avons le nombre d'équations nécessaires. Tous les nœuds de la frontière E.F.-E.I.F. sont couplés et le système (3.10) est plein et dissymétrique. L'utilisation de cette méthode implique donc l'intégration d'un grand nombre de termes. Cette intégration est d'autant plus longue que les noyaux à intégrer comportent des singularités. Ce système plein engendre de plus des temps de calculs plus longs que pour une méthode purement éléments finis. Dans la suite nous aborderons tous ces problèmes liés à la mise en œuvre du couplage.

3.2.5 Cas particulier du couplage en axisymétrique

Nous donnons directement le résultat de ce couplage sans développer les calculs qui peuvent être trouvés dans [56, 60]. Cette formulation sera utilisée pour traiter le premier cas test du chapitre 5.

Les inconnues les plus adaptées pour ce couplage sont rA_θ et rH_t. On utilise des fonctions tests modifiées : $\alpha_i^{'} = r\alpha_i$ ainsi que des fonctions de Green adaptées G_{axi}. Le système discrétisé s'écrit :

$$\begin{cases} [\mathbf{DG}][\mathbf{rA}_{\theta_j}] + [\mathbf{G}][\mathbf{rH}_{t_j}] = 0 \\ .[\mathbf{S}][\mathbf{rA}_{\theta_j}] + [\mathbf{Q}][\mathbf{rH}_{t_j}] = [\mathbf{J}] \end{cases} \tag{3.13}$$

avec

$$\begin{cases} S_{ij} = \displaystyle\int_{\Omega_{EF}} \nu \left(\frac{\partial \alpha_i^{'}}{\partial r} \frac{\partial \alpha_j^{'}}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i^{'}}{\partial z} \frac{\partial \alpha_j^{'}}{\partial z} \right) \frac{1}{r} d\Omega \\ Q_{ij} = \displaystyle\int_{\Gamma} \alpha_i^{'} \alpha_j^{'} \, d\Gamma \\ J_i = \displaystyle\int_{\Omega_{EF}} \alpha_i j \, d\Omega \\ DG_{ij} = \displaystyle\int_{\Gamma} \alpha_j^{'} \frac{\partial G_{axi}}{\partial n} d\Gamma - c_i \delta_{ij} \\ G_{ij} = -\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{\alpha_j^{'} G_{axi}}{\nu_0} d\Gamma \end{cases}$$

3.2.6 Mise en œuvre

Intégration

Les noyaux à intégrer comportent des singularités du type lnr, $\frac{1}{r}$ ou $\frac{1}{r^2}$, où r désigne la distance entre le point d'observation M et le point d'intégration P. Lorsque M devient proche ou appartient à l'élément d'intégration, des difficultés de quadrature numérique apparaissent.

Nous utilisons une intégration de type Gauss qui est la même pour tous les noyaux. Un grand nombre de points de Gauss est alors nécessaire pour obtenir une bonne précision sur les noyaux singuliers. Néanmoins, on doit prendre garde qu'aucun de ces points ne soit confondu avec un nœud de la discrétisation. Par exemple, les formules de Gauss de degré impair ne peuvent être utilisées avec des éléments quadratiques [58].

Notre démarche n'est pas optimale puisque l'intégration des noyaux réguliers nécessite une formule de quadrature de degré bien moins élevé. Malgré cela, sa mise en œuvre est la plus simple et permet une vectorisation des opérations d'intégration. La vectorisation consiste à regrouper les opérations nécessaire à l'intégration et l'assemblage des termes matriciels. Elle permet de limiter l'accès aux zones mémoires de la machine et réduit ainsi considérablement les temps d'exécution. Cette méthode permet d'obtenir des temps d'intégration et une précision satisfaisants. Néanmoins la précision des calculs se dégrade lorsque des frontières sont proches. Ces frontières doivent alors être discrétisées assez finement pour obtenir une précision satisfaisante. Une stratégie plus adaptée consiste à isoler les noyaux singuliers et à leur appliquer

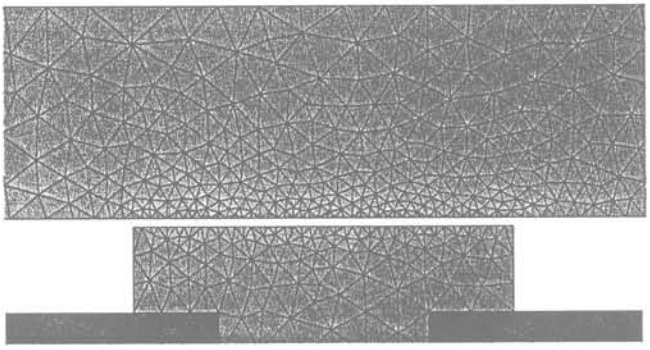


FIG. 3.5: Illustration de la finesse du maillage lorsqu'on est proche d'un entrefer

un traitement spécial. Par le passé de nombreux travaux ont été menés pour calculer ce type de singularités. Nous citons deux manières de traiter le problème :

- extraire la singularité et la traiter analytiquement [61, 58]
- utiliser une formule de quadrature de Gauss modifiée par des transformations permettant de mieux répartir les points de Gauss autour de la singularité [62, 63]

Les traitements analytiques sont très précis mais coûteux. La solution la plus adaptée semble être l'utilisation d'une formule de Gauss modifiée. La difficulté, pour garder un code de calcul efficace, est d'introduire ces traitements spéciaux dans une procédure d'intégration vectorisée.

Résolution du système

Nous avons choisi de résoudre les systèmes (3.10) et (3.12) simultanément. La Fig. 3.6 donne une image du système matriciel obtenu. N_{int} désigne le nombre total de nœuds interne à la région Ω_{EF} et N_{fr} le nombre de nœuds sur la frontière. A_{int} fait référence aux inconnues internes à Ω_{EF} et A_{fr} à celles situées sur la frontière.

La matrice obtenue n'est pas symétrique et les blocs correspondants aux intégrales de frontières sont pleins. Ce type de système est beaucoup plus long à résoudre qu'un système bande et symétrique comme celui généré par la méthode des EF. La taille des blocs pleins dépend directement de N_{fr}. Pour réduire les temps de calculs, il est donc intéressant de choisir une frontière qui minimise ce nombre de nœuds.

$$
\begin{array}{c}
N_{int} \\ \\ N_{fr} \\ \\ N_{fr}
\end{array}
\left[\begin{array}{c:c:c}
\multicolumn{2}{c:}{\multirow{2}{*}{$\displaystyle\int_{\Omega_{EF}} (\operatorname{grad}\alpha_i \cdot \nu \cdot \operatorname{grad}\alpha_j)\, d\omega$}} & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \int_\Gamma \alpha_i\alpha_j\, d\gamma \\
\hdashline
0 & \int_\Gamma \alpha_j \frac{\partial G}{\partial n} d\gamma - c_i\delta_{ij} & -\int_\Gamma \frac{\alpha_j G}{\nu_0} d\gamma
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
A_{int} \\ \cdots \\ A_{fr} \\ \hdashline H_t
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
\displaystyle\int_{\Omega_{EF}} \alpha_i j\, d\omega \\ \cdots \\ \cdots \\ \hdashline 0
\end{array}\right]
$$

FIG. 3.6: Système matriciel obtenu en couplant directement les E.I.F avec les E.F.

Une autre méthode consiste à d'abord inverser le système (3.10) :

$$[\mathbf{H}_{t_j}] = -[\mathbf{G}]^{-1}[\mathbf{DG}][\mathbf{A}_j]$$

Il reste ensuite à résoudre :

$$\left([\mathbf{S}] - [\mathbf{Q}][\mathbf{G}]^{-1}[\mathbf{DG}]\right)[\mathbf{A}_j] = [\mathbf{J}]$$

La matrice $[\mathbf{R}] = [\mathbf{Q}][\mathbf{G}]^{-1}[\mathbf{DG}]$ est appelée généralement matrice de rigidité. L'inversion de matrice nécessaire à son calcul peut être très coûteuse si le nombre de nœuds sur la frontière est important. En revanche, elle ne dépend que de la géométrie. Ainsi, s'il n'y a pas de mouvement, son calcul ne doit être effectué qu'une seule fois. Dans la pratique, c'est une approximation raisonnable de symétriser $[\mathbf{R}]$ en la remplaçant par $([\mathbf{R}] + {}^t[\mathbf{R}])/2$ [64, 59].

3.2.7 Exemples

Nous présentons deux exemples en magnéto-statique permettant de valider nos calculs.

Comparaison avec une solution analytique

Pour ce premier exemple, nous avons choisi un cas très simple dont le calcul peut s'effectuer analytiquement. Il s'agit de deux fils de longueur infinie et de section circulaire parcourus par un courant de même intensité mais de sens opposés. La Fig. 3.7 présente la géométrie ainsi que le maillage utilisés. Ce problème nous permet de tester

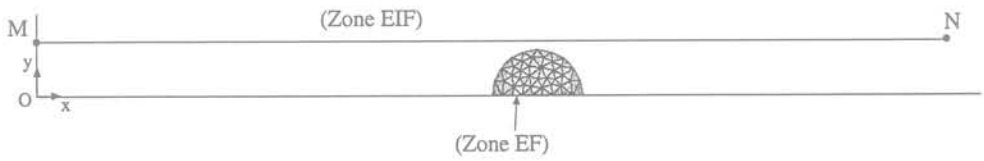


FIG. 3.7: Description du problème

les deux types de symétries : symétrie avec champ tangent sur (Oy) et avec champ champ normal sur (Ox). Pour établir la comparaison, nous calculons le potentiel A sur la ligne MN (Fig. 3.8). L'erreur relative maximale obtenue est de 1.7%.

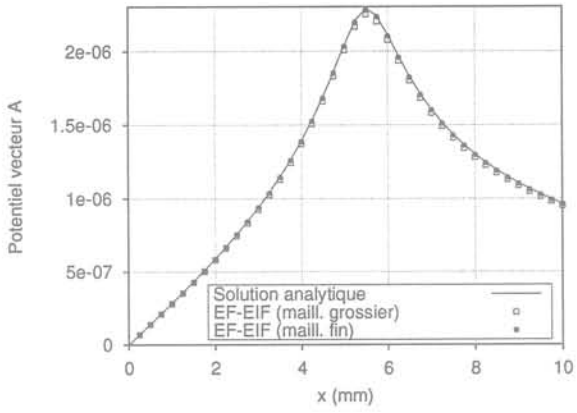


FIG. 3.8: Résultat du couplage comparé à la solution analytique

Comparaison avec une solution éléments finis

Prenons un exemple plus proche d'une situation réelle. Il s'agit d'un électro-aimant (Fig. 3.9) constitué d'un circuit magnétique en fer ($\mu_r = 1000$) et d'une bobine. Les symétries du problème sont utilisées et la frontière E.F.-E.I.F. est située directement à l'interface des régions physiques (Fig. 3.10). Ce choix de frontière procure généralement des résultats moins précis que lorsque la frontière est placée dans l'air [56]. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par une résolution purement E.F. où l'infini a

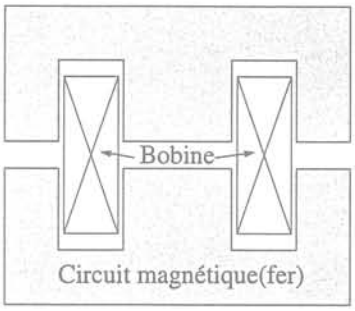


FIG. 3.9: Géométrie de l'électro-aimant

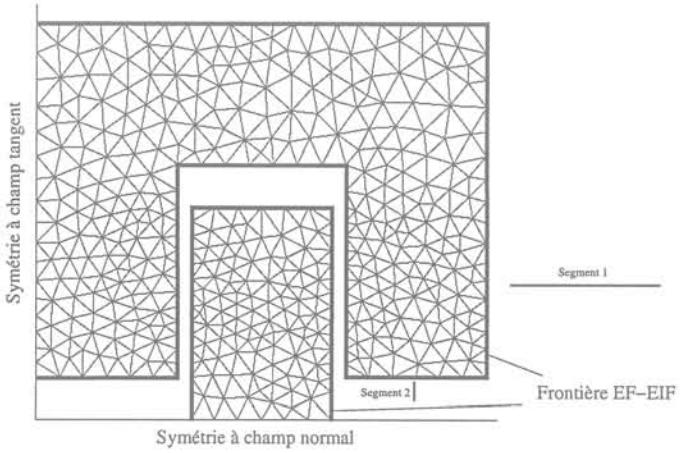


FIG. 3.10: Maillage et frontières de couplage utilisées

été pris en compte grâce à des transformations géométriques [56] qui est une méthode fiable et dont les résultats nous servent ici de référence. A part pour l'air, le maillage est le même pour les deux types de résolution et les éléments générés sont du second ordre. Le tracé des lignes équiflux (Fig. 3.11) nous indique que les solutions trouvées dans les deux cas sont proches. Si on calcule le flux dans une branche du dispositif, on trouve une différence inférieure à 1% entre les deux résultats.

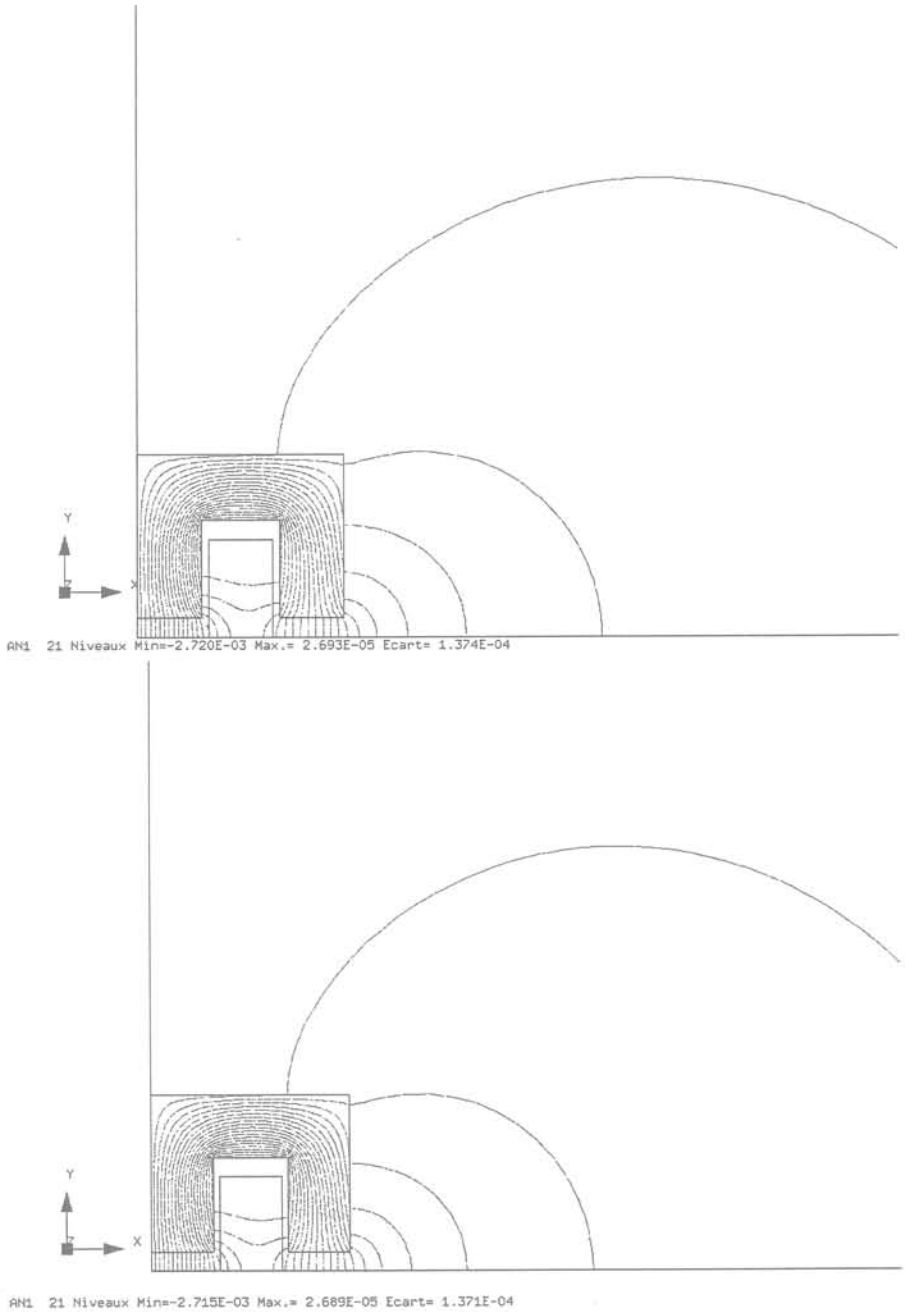


FIG. 3.11: Tracé des équiflux pour les résultats EF et le couplage EF-EIF.

3.3 Post-traitement

Si un maillage éléments finis existe dans la zone traitée par les E.I.F, on peut calculer le potentiel en chaque nœud de ce maillage. Il suffit pour cela d'opérer une nouvelle intégration sur la frontière E.F.- E.I.F. en utilisant (3.4) avec $c(M) = 1$. Ceci permet de bénéficier ensuite de tous les outils usuels de calcul et de visualisation implémentés pour les éléments finis. Le but visé dans notre utilisation des E.I.F. étant de s'affranchir du maillage dans une zone déformable, il convient de développer d'autres moyens pour calculer les grandeurs intéressantes directement à partir de la solution E.I.F., c'est à dire à partir de la valeur du potentiel et de sa dérivée sur la frontière.

3.3.1 Exploitation des grandeurs locales dans la zone E.I.F.

Calcul de l'induction magnétique d'après la solution E.I.F

Dans l'air les grandeurs locales intéressantes sont le champ et l'induction magnétique. On peut calculer leur valeur en dérivant l'expression (3.4). Sachant qu'à l'intérieur de la zone E.I.F., le cœfficient angulaire $c(M)$ vaut 1. Dans le cas général, on obtient par exemple pour l'induction magnétique :

$$\mathbf{B}(M) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(M) = \int_\Gamma \operatorname{rot}\left(\mathbf{A}\frac{\partial G(M)}{\partial n} - G(M)\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n}\right) d\Gamma \tag{3.14}$$

Dans cette expression, seules la fonction de Green et sa dérivée dépendent du point de calcul M. Ainsi :

$$\mathbf{B}(M) = \int_\Gamma \left(\operatorname{grad}\left(\frac{\partial G(M)}{\partial n}\right) \times \mathbf{A} - \operatorname{grad}(G(M)) \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n}\right) d\Gamma \tag{3.15}$$

Dans le cas 2D, en utilisant H_t et après discrétisation, on a :

$$\mathbf{B}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\partial A(x,y)}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial A(x,y)}{\partial x} \end{cases} = \begin{cases} \sum_i \left[\left(\int_\Gamma \alpha_i \dfrac{\partial G}{\partial y} d\Gamma\right) A_i - \left(\int_\Gamma \alpha_i \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial G}{\partial n} d\Gamma\right) H_{t_i}\right] \\ \sum_i \left[\left(\int_\Gamma \alpha_i \dfrac{\partial G}{\partial x} d\Gamma\right) A_i - \left(\int_\Gamma \alpha_i \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial G}{\partial n} d\Gamma\right) H_{t_i}\right] \end{cases} \tag{3.16}$$

Avec la dérivation, l'ordre des singularités des noyaux augmente. Le calcul numérique des intégrales précédentes devient imprécis lorsqu'on se rapproche de la frontière.

Application et comparaison avec une solution analytique

Pour illustrer l'utilisation du calcul précédent, nous reprenons l'exemple du calcul analytique du 3.2.7 pour lequel on trace les composantes x et y de l'induction magnétique sur le segment MN. On compare (Fig. 3.12) la solution calculée à la solution analytique. L'intégration a été faite avec trois points de Gauss par élément. Les éléments utilisés sont du premier ordre. Les résultats obtenus (Fig. 3.12) sont très satisfaisants étant donné la faible discrétisation utilisée. Les valeurs de **B** sont approchées avec une précision relative inférieure à 2%. Cependant le problème physique traité ici est très simple.

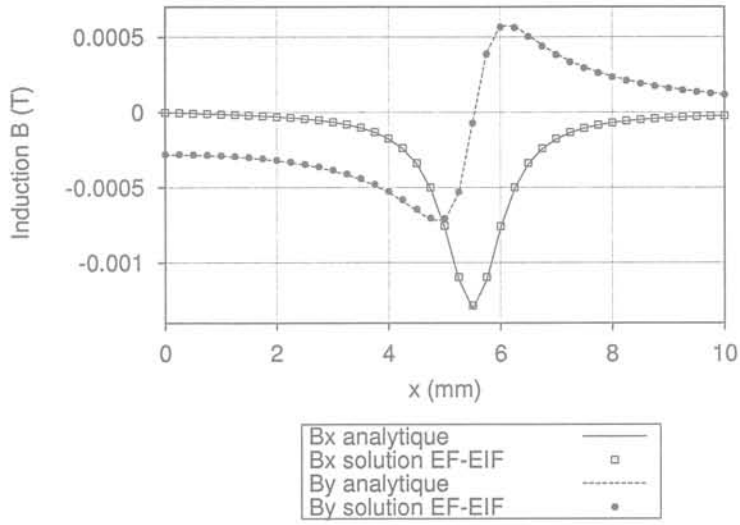


FIG. 3.12: Calcul de l'induction **B** sur le segment MN et comparaison avec une solution analytique

Comparaison de méthodes pour le calcul de l'induction

Reprenons maintenant l'exemple de l'électro-aimant du 3.2.7 qui constitue un problème physique plus complet. Nous allons nous en servir pour comparer deux méthodes de calcul. La première consiste à faire un calcul direct avec (3.16). La deuxième utilise un maillage élément fini pour lequel le potentiel A_i est calculé d'après la solution E.I.F. en chaque nœud i. De la même manière que pour une solution E.F., l'induction peut ensuite être obtenue classiquement en utilisant une interpolation nodale :

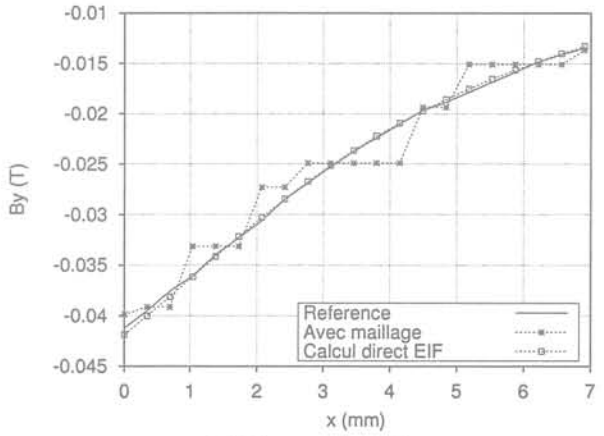
$$\mathbf{B}(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} A_i \\ \\ \displaystyle -\sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} A_i \end{cases} \tag{3.17}$$

L'induction a été tracée sur deux segments (Fig. 3.13). Les résultats des deux méthodes d'exploitation sont comparés à la solution obtenue avec un modèle E.F. finement maillé (maillage avec des éléments du second ordre) qui nous sert de référence.

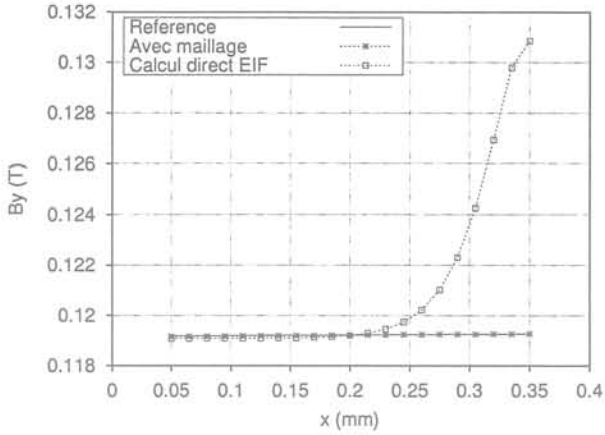
- *Segment no.1 : choisi loin de la frontière E.F.- E.I.F.*
  Avec une exploitation utilisant un maillage, on observe des discontinuités. Celles-ci correspondent à l'interpolation des valeurs nodales calculées sur un maillage du premier ordre. L'intégration de la solution E.I.F. donne des résultats beaucoup plus lisses.

- *Segment no.2 : L'extrémité $x = 0.4$ est choisie proche de la frontière E.F.- E.I.F.*
  L'interpolation sur le maillage donne une solution correcte alors que la méthode d'intégration directe se comporte mal lorsqu'on se rapproche de la frontière ($x = 0.4$). Il y a une bande "interdite" où l'intégration directe ne peut être

utilisée de manière fiable. Pour réduire cette bande, la méthode d'intégration numérique doit être améliorée. Une intégration analytique permettrait d'éliminer cette zone. L'utilisation du maillage permet au contraire d'interpoler les valeurs dans cette bande.



(a) Segment no.1



(b) Segment no.2

FIG. 3.13: Comparaison de deux méthodes de calcul de l'induction

3.3.2 Calcul de grandeurs globales : forces et couples

Pour simuler les dispositifs avec du mouvement, il est essentiel de bien évaluer les forces et couples magnétiques qui s'exercent sur les parties mobiles. Les deux méthodes les plus couramment employées sont celles des travaux virtuels [65] et du tenseur de Maxwell [2, 66]. Généralement, dans un contexte purement éléments finis, les méthodes basées sur les travaux virtuels utilisent les éléments du maillage de l'air entourant la partie sur laquelle on calcule la force. On y calcule la dérivée d'une énergie par rapport au déplacement virtuel des nœuds. Pour utiliser cette méthode dans le contexte du couplage EF-EIF, il est alors nécessaire d'introduire une couche

d'éléments d'air comme le montre la Fig. 3.14. Définir cette couche est contraignant, notamment en présence de petits entrefers. Ainsi, la méthode du tenseur de Maxwell paraît mieux adaptée pour notre calcul.

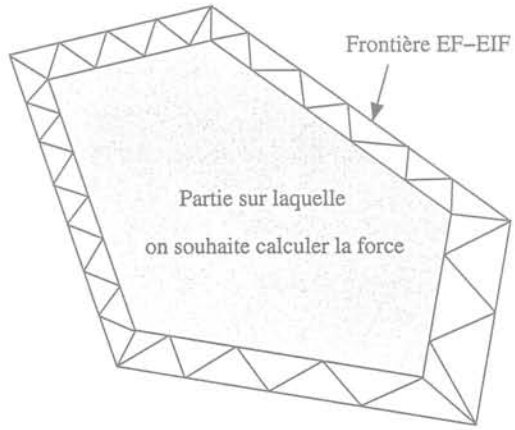


FIG. 3.14: Application des travaux virtuels dans le contexte du couplage EF-EIF

Rappelons rapidement en quoi consiste cette méthode. La composante i de la densité volumique de force peut s'écrire [66] :

$$f_i = \operatorname{div} \mathbf{T}_i$$

où $\mathbf{T}$ est le tenseur de Maxwell défini par :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \end{bmatrix} = [\tau_{ij}]_{i,j\in\{1,2,3\}} \tag{3.18}$$

avec

$$\tau_{ij} = \mu_0 \left(H_i H_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} H^2 \right)$$

Soit Ω le domaine sur lequel on calcule la force. Chaque composante de la force globale s'exerçant sur Ω est donnée par :

$$F_i = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{T}_i \, d\Omega \tag{3.19}$$

Le théorème d'Ostogradski nous permet de transformer l'intégrale volumique en une intégrale surfacique sur une surface fermée entourant Ω et orientée vers l'extérieur :

$$F_i = \int_\Gamma \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \tag{3.20}$$

Pour le calcul du couple on a :

$$\mathbf{C} = \int_\Omega \mathbf{r} \times \mathbf{f} \, d\Omega \tag{3.21}$$

où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur depuis l'axe de rotation au point courant. Chaque composante de la densité de couple a donc pour expression :

$$c_i = r_j \operatorname{div} \mathbf{T}_k - r_k \operatorname{div} \mathbf{T}_j$$

or, on a l'identité vectorielle :

$$\operatorname{div}(r_j \mathbf{T}_k) = r_j \operatorname{div} \mathbf{T}_k + \tau_{kj}$$

d'où

$$c_i = \operatorname{div}(r_j \mathbf{T}_k) - \operatorname{div}(r_k \mathbf{T}_j) - \tau_{kj} + \tau_{jk}$$

Le tenseur de Maxwell étant symétrique, on obtient :

$$c_i = \operatorname{div}(r_j \mathbf{T}_k - r_k \mathbf{T}_j)$$

Comme pour la force, on peut maintenant obtenir l'expression de chaque composante du couple global par le théorème d'Ostogradski :

$$C_i = \int_\Gamma (r_j \mathbf{T}_k - r_k \mathbf{T}_j) \cdot \mathbf{n} \, d\Omega \tag{3.22}$$

Le couple s'écrit finalement :

$$\mathbf{C} = \int_\Gamma \mathbf{r} \times \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix} d\Gamma \tag{3.23}$$

Calcul de la force ou du couple d'après une solution EF-EIF

L'application de la méthode du tenseur de Maxwell revient à calculer l'intégrale :

$$\mathbf{F} = \oint_\Gamma \left[(B_n H_t)\mathbf{t} + \frac{1}{2}\left(\frac{B_n^2}{\mu_0} - \mu_0 H_t^2 \right) \mathbf{n} \right] d\Gamma \tag{3.24}$$

Cette intégrale peut-être calculée sur toute surface fermée entourant la partie sur laquelle on veut connaître la force. De manière générale, la qualité du résultat dépend de la surface choisie.

Dans le contexte des éléments finis, lorsqu'on choisit l'interface matériau-air, il est difficile d'obtenir une bonne précision à la fois pour H_t et B_n et le résultat est donc souvent imprécis [67]. En effet, pour les formulations de type $\mathbf{A}$ (respectivement Φ), la continuité de H_t (respectivement B_n) est résolue de manière faible. Lorsqu'on utilise une méthode E.F.- E.I.F., on bénéficie sur la frontière du couplage de deux inconnues qui permettent de calculer B_n et H_t avec une meilleure précision [68] :

- En $\mathbf{A}$:
  - H_t est directement une variable du problème
  - La continuité de $\mathbf{A} \times \mathbf{n}$ assure celle de B_n qui peut être calculé côté EF par $B_n = \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$.
- En Φ :
  - B_n est une variable du problème

- La continuité de Φ assure celle de H_t qui peut se calculer côté EF par $H_t\mathbf{t} = \mathbf{n} \times (-\operatorname{grad}\Phi \times \mathbf{n})$.

Comme le montre la Fig. 3.15, on peut également choisir une surface d'intégration placée dans l'air. Pour calculer le tenseur de Maxwell sur cette surface, il suffit de connaître $\mathbf{B}$. Celui-ci peut être calculé d'après la solution E.I.F. comme nous l'avons montré au 3.3.1. Nous présentons des résultats basés sur la formulation en $\mathbf{A}$ en 2D

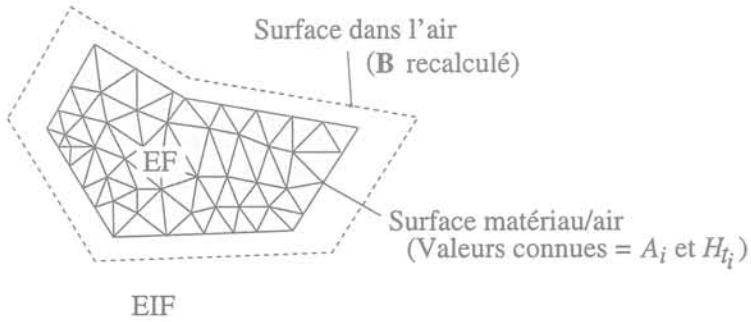


FIG. 3.15: Choix de la surface pour intégrer le tenseur de maxwell

ainsi que des résultats 3D utilisant une formulation de type Φ, pour les deux types de surfaces d'intégration.

Exemples en 2D

On considère deux barreaux de longueur infinie selon z représentés sur la Fig. 3.16. On suppose qu'ils sont aimantés tous les deux selon y. On considère une aimantation rigide. C'est-à-dire que l'aimantation est considérée constante partout dans le matériau. Les caractéristiques choisies pour nos aimants sont : $\mu_r = 1$ et $B_r = 0.85T$. Le tableau 3.1 confronte plusieurs méthodes de calcul de force avec la solution analytique donnée dans [69]. Le tenseur de Maxwell (TMS) est intégré sur différentes surfaces. Une comparaison est aussi faite avec une méthode purement E.F. utilisant la méthode des travaux virtuels (TV). Les résultats sont donnés pour un mètre de barreau.

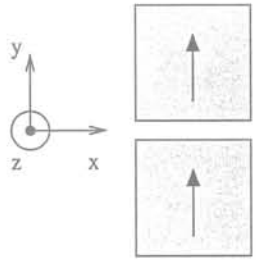


FIG. 3.16: Barreaux aimantés de longueur infinie

Le même type de comparaison a été effectuée sur le cas de l'électro-aimant précédemment défini au 3.2.7. Ne disposant pas de calcul analytique pour cet exemple, notre calcul de référence est une résolution E.F. avec un maillage du second ordre très dense. Le tableau 3.2 résume nos expériences numériques.

	Force selon y sur un barreau en N					
	TMS surface aimant/air		TMS surface air		EF avec TV	
	Valeur	Erreur	Valeur	Erreur	Valeur	Erreur
1er ordre	−1010.5	0.26%	−1010.7	0.26%	−1029.3	2%
2nd ordre	−1009.8	0.20%	−1007.8	–	−1011.2	0.33%
Analytique	−1007.85					

TAB. 3.1: Comparaison de calcul de forces sur un barreau aimanté

	Force selon y sur l'armature du haut en N					
	TMS surface fer/air		TMS surface air		EF avec TV	
	Valeur	Erreur	Valeur	Erreur	Valeur	Erreur
1er ordre	−1.156	7.5%	−1.230	1.6%	−1.211	3%
2nd ordre	−1.190	4.8%	−1.250	–	−1.248	0.16%
Référence	−1.250					

TAB. 3.2: Comparaison de calcul de forces sur l'armature de l'électro-aimant

On constate que le choix de la surface d'intégration dans l'air donne de meilleurs résultats que sur une surface correspondant à l'interface entre matériaux. Comparés à l'utilisation de la méthode des travaux virtuels après une résolution par éléments finis, nos calculs se comportent bien.

Exemple en 3D

Nous prenons ici l'exemple de deux aimants cubiques de 1cm^3 placés face à face et caractérisés tous les deux par $\mu_r = 1$ et $B_r = 0.85T$. Le calcul analytique de la force globale d'attraction entre les deux aimants est donnée dans [70]. Pour ce cas 3D statique, nous avons choisi la formulation utilisant le potentiel total magnétique Φ explicitée dans [56]. Nous comparons des résolutions effectués avec le couplage E.F.-E.I.F et utilisant le tenseur de Maxwell sur une surface choisie dans l'air avec des résolutions E.F. avec un calcul de force réalisé avec la méthode des travaux virtuels.

Force selon z entre aimants en N							
EIF 1er ordre avec TMS		EIF 2nd ordre avec TMS		EF 1er ordre avec TV		EF 2nd ordre avec TV	
Valeur	Erreur	Valeur	Erreur	Valeur	Erreur	Valeur	Erreur
−4.66	1.7%	−4.71	0.6%	−4.19	12%	−4.70	0.8%
Analytique −4.74							

TAB. 3.3: Comparaison de calcul de forces sur deux aimants cubiques

La méthode de couplage permet d'atteindre une précision un peu meilleure. Le calcul de B par réintégration de la solution E.I.F. pour évaluer le tenseur de Maxwell dans l'air, fournit des valeurs précises et des variations lisses de l'induction. Par contre, la méthode nécessite une double intégration qui est très coûteuse surtout en 3D.

La principale difficulté est de définir la surface d'intégration dans l'air de manière automatique.

Pour nos applications, nous choisissons de calculer les forces et les couples par intégration du tenseur de Maxwell sur les interfaces EF-EIF. En effet, cette méthode apporte une précision suffisante. De plus, la définition de la surface d'intégration est systématique et facile à implémenter d'un point de vue informatique.

3.4 Conclusion

Le couplage E.F. - E.I.F. a été développé dans le logiciel éléments finis FLUX3D. Nous avons montré des exemples simples de validation du modèle magnéto-statique 2D. Le dernier chapitre traitera de cas complets utilisant les formulations magnétiques transitoires. Des algorithmes spécifiques ont été implémentés pour exploiter les grandeurs intéressantes après résolution. Leur performance et leur robustesse en 2D et 3D a été montrée. Le tableau suivant résume les formulations qui ont été implémentées.

Modèle	Variables EF	Variables du couplage
Magnéto-statique 2D	A	A et H_t
Magnéto-statique axisymétrique	rA	rA et rH_t
Magnétique transitoire 2D	A,Ψ	A et H_t
Magnétique transitoire axisymétrique	rA,Ψ	rA et rH_t
Magnéto-statique 3D	Φ	Φ et B_n

TAB. 3.4: Formulations implémentées avec couplage EF-EIF

L'inconvénient majeur de la méthode de couplage est son coût important. Néanmoins la puissance des machines de calcul actuelles permettent son utilisation courante dans le cas 2D. A ce point de vue, des gains considérables de temps de calcul peuvent être obtenus en améliorant notre implémentation. Nous avons en effet réutilisé le solveur du logiciel FLUX3D qui n'est pas adapté aux types de matrices générées par la méthode. De plus, les choix d'implémentation que nous avons faits obligent à mailler très finement dans les zones où les frontières sont très proches. On augmente alors artificiellement la taille du problème à traiter. Une méthode d'intégration mieux adaptée serait à développer pour ce cas.

Chapitre 4

Procédures de remaillage

4.1 Introduction

Notre but est ici de proposer des méthodes de remaillage de l'air à chaque pas de temps. Il est aussi d'évaluer les conséquences d'un tel remaillage sur une solution temporelle. Rappelons qu'avec le schéma implicite que nous utilisons, le calcul de la solution d'un pas de temps, ne nécessite aucune connaissance de la solution dans l'air aux pas précédents (cf. 2.3.1).

Nous nous plaçons dans le cadre des maillages en simplexes, c'est-à-dire avec des triangles dans le cas 2D et des tétraèdres en 3D. Comme il s'agit de ne remailler qu'une partie du domaine, le maillage de celle-ci doit respecter les frontières qui sont déjà maillées. Si on autorise l'ajout de nœuds sur ces frontières sans modifier le reste du maillage, il apparaît alors des éléments non-conformes qu'il faut traiter [31].

Le mailleur développé au sein du laboratoire est basé sur le critère de Delaunay. Ce dernier permet de générer une triangulation de l'enveloppe convexe d'un ensemble de nœuds. Lorsque la géométrie à mailler n'est pas convexe, la discrétisation frontalière n'est pas systématiquement respectée. Il faut alors forcer le mailleur à inclure celle-ci dans le maillage. En 2D, cette opération est assez simple et peut se résoudre par des opérations de retournement d'arêtes [71]. En 3D le processus de récupération d'arêtes et de facettes frontalières peut être difficile [72]. En pratique, le respect de la frontière est une contrainte assez facile à respecter si la frontière est maillée assez finement.

D'autres types de mailleurs paraissent mieux adaptés pour mailler une zone dont le maillage frontalier est donné. Les méthodes frontales par exemple partent des éléments du contour et les simplexes sont construits progressivement vers l'intérieur de la géométrie formant ainsi un front (cf. Fig. 4.1). Beaucoup d'expérience est nécessaire pour maîtriser ce type de mailleur. De nombreuses règles heuristiques sont en effet nécessaires pour générer les nouveaux nœuds du maillage ainsi que pour régler les problèmes qui se posent lorsque plusieurs fronts se rencontrent [73, 74]. Dans le domaine de la simulation de formage (moulage de pièces), Coupez a présenté une méthode très originale et puissante de remaillage automatique [75]. Par des opérations topologiques sur le maillage, il recherche une topologie qui contient les mailles frontalières et qui rend la triangulation optimale. Sa méthode s'inspire des travaux de Talon [71]. Citons également une autre approche adoptée par Joe ainsi que par Kettunen et al. [76, 77]. Ils décomposent la géométrie en sous-ensembles convexes élémentaires. Ceux-ci sont ensuite maillés par une procédure employant des opérations topologiques

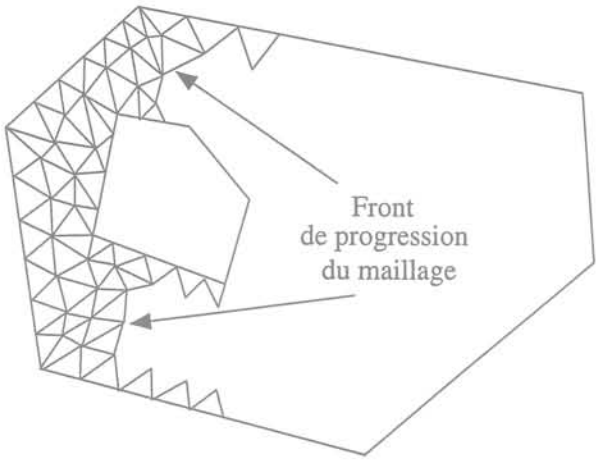


FIG. 4.1: Méthode de maillage frontal

pour maximiser les angles solides des tétraèdres.

Développer entièrement un nouveau mailleur est un travail très long et difficile et qui ne correspond pas aux objectifs que nous nous sommes fixés. Nous préférons donc utiliser des méthodes basées sur une triangulation de type Delaunay pour lesquelles nous avons de bonnes connaissances.

Nous avons mené deux expériences différentes. La première, que nous avons nommé remaillage "brutal", consiste à utiliser le mailleur tel qu'il est implanté dans le logiciel FLUX3D. On reconstruit alors dans l'air un maillage sans tenir compte du maillage précédent. La deuxième expérience consiste à adapter le nuage de nœuds existant à la nouvelle géométrie pour générer la nouvelle triangulation. Ceci afin d'obtenir une évolution plus continue du maillage au cours du temps.

4.2 Remaillage "brutal"

La mise en œuvre de ces expériences numériques est assez simple. Il s'agit de faire remailler à chaque pas de temps une zone de la géométrie prédéfinie par l'utilisateur. On doit de plus interdire au mailleur de toucher à la discrétisation frontalière de la zone.

Des tests sont effectués en deux et trois dimensions. Ils sont basés sur des cas simples destinés seulement à mettre en évidence les problèmes liés à une telle méthode. Des comparaisons avec le couplage EF-EIF (cf. chap. 3) sont faites, afin d'identifier les points forts et les points faibles de chacune des méthodes. Ensuite nous présentons les difficultés apportées par la présence d'entrefers fins pendant les phases de mouvement.

4.2.1 Expériences 2D

Nous prenons l'exemple du contacteur présenté Fig. 4.2. L'intérêt de ce cas est le mouvement de rotation de la palette. Celui-ci engendre de larges déformations que les techniques de type "bande de translation" (Fig. 2.5) ne peuvent pas prendre en

compte. On ne cherche pas à reproduire le fonctionnement réel du dispositif. Lors des

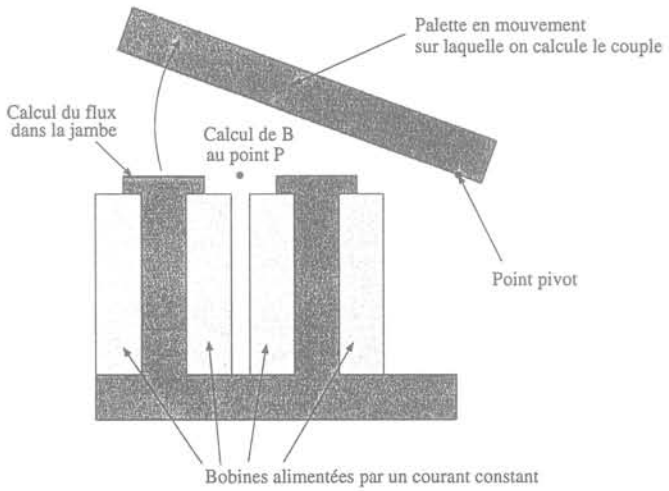


FIG. 4.2: Description du cas test

simulations, on suppose que les bobines sont alimentées par un courant constant et on impose la rotation de la palette autour de son point pivot avec une vitesse angulaire constante.

Grandeurs globales et locales

Pour chaque position sont calculés :
- le couple sur la palette (grandeur globale),
- le flux dans la jambe gauche du dispositif (grandeur globale),
- l'induction magnétique **B** au point P situé dans l'entrefer (grandeur locale).

Ces calculs sont effectués en utilisant d'une part le couplage EF-EIF et d'autre part un remaillage de l'air, le maillage des autres parties du dispositif étant le même dans les deux cas. Le calcul du couple est réalisé à l'aide des travaux virtuels pour le remaillage et par intégration du tenseur de Maxwell sur une surface EF-EIF (cf. 3.3.2) pour le couplage EF-EIF. Les courbes des Fig. 4.3 et 4.4 comparent les résultats obtenus.

On observe une bonne correspondance des résultats pour le calcul du flux et du couple. La procédure de remaillage génère un maillage qui reste de bonne qualité pour toutes les positions de la palette. Elle permet ainsi d'approcher finement à chaque pas de temps, les grandeurs physiques globales, et reproduit donc les variations lisses de celles-ci au cours du mouvement. Ce n'est pas le cas pour les grandeurs locales telles que **B**. Le couplage EF-EIF produit des résultats lisses (car obtenus par intégration), alors que le remaillage perturbe localement beaucoup la solution. Notons que le point P a été volontairement choisi dans une zone où le maillage subit des modifications importantes.

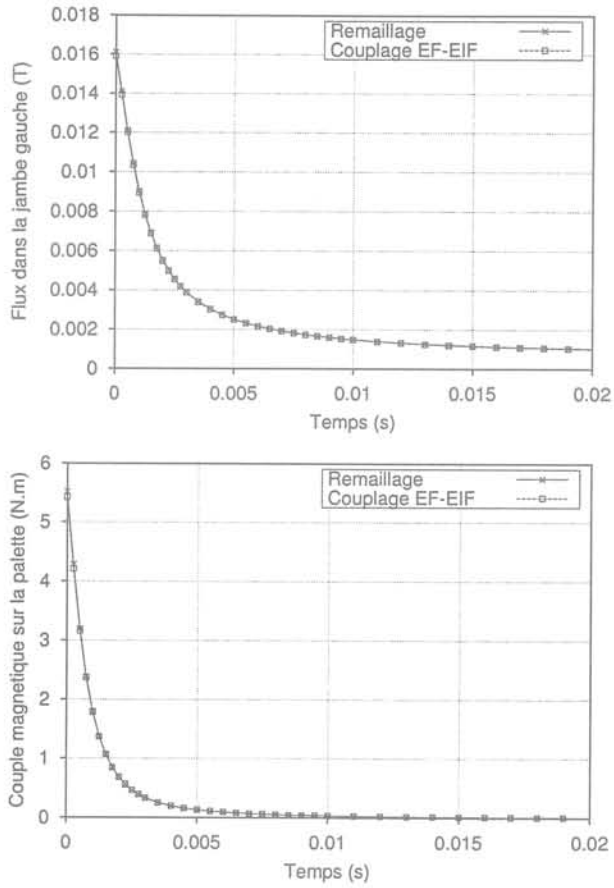


FIG. 4.3: Comparaison des deux méthodes à travers un calcul de flux et de couple

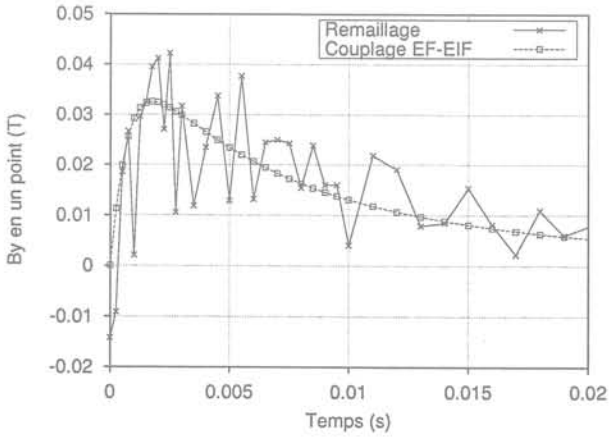


FIG. 4.4: Comparaison sur le calcul de **B** au point P.

Statistiques de la mise en œuvre

Le tableau 4.1 montre quelques éléments de comparaison entre les deux méthodes. La ligne "taux de remplissage" mesure le caractère creux de la matrice de la Fig. 3.6.

	EF-EIF	Remaillage
Nombre d'inconnues (N_i)	2821	min. 2934 max. 5339
Nombre de termes (N_t) matriciels non-nuls	332071	min. 17556 max. 31997
Taux de remplissage (N_t/N_i^2)	4%	0.15% (moyenne)
Temps total (43 pas)	37mn	18mn

TAB. 4.1: Statistiques pour la comparaison entre remaillage et couplage EF-EIF en 2D

On remarque que le nombre d'inconnues a presque doublé lors du remaillage suivant la position de la palette. Ceci est dû à la variation du nombre de nœuds. Côté couplage, ce nombre reste constant. Le nombre de termes matriciels non-nuls ainsi que les temps de calcul nous indiquent le coût plus important du couplage EF-EIF par rapport à celui du remaillage. Sur l'exemple traité ici, le prix du couplage reste largement "abordable".

Dans la procédure de remaillage, le maillage est détruit à la fin de chaque pas de temps. Avant cette destruction, sont calculées de manière automatique des grandeurs physiques prédéfinies par l'utilisateur. Lorsqu'on exploite les résultats d'une telle simulation, seules ces grandeurs sont alors disponibles. Pour pouvoir faire une exploitation complète (tracé de lignes équiflux dans l'air par exemple) après résolution, il est donc nécessaire de stocker le maillage de la partie déformable pour chaque pas. Le coût de ce stockage sur fichier n'a pas été évalué ici. La taille standard des disques actuels est telle que cela ne pose pas de problème en 2D. Ce point sera plus contraignant pour le 3D.

4.2.2 Expériences 3D

Des expériences de même type qu'en 2D sont menées mais sur un exemple différent. La structure modélisée est celle décrite sur la Fig. 4.5. On effectue des simulations en magnéto-statique pour plusieurs positions de la partie mobile qui peut bouger selon l'axe (Oz). Pour cela nous utilisons une formulation en potentiel scalaire magnétique total.

Évolution du flux et de la force

Sur la Fig. 4.6 est présentée l'évolution de plusieurs grandeurs en fonction de la position. De manière générale, les résultats obtenus avec le couplage E.F.-E.I.F.sont très lisses. En revanche, certains calculs effectués avec la méthode de remaillage sont fortement bruités par le changement de maillage. Le calcul de la force est particulièrement sensible à ce bruit. Ceci est dû au fait que le calcul par la méthode des travaux virtuels que nous utilisons [78], dépend non seulement de la solution éléments finis, mais aussi de la forme des éléments du maillage entourant la partie sur laquelle on effectue le calcul.

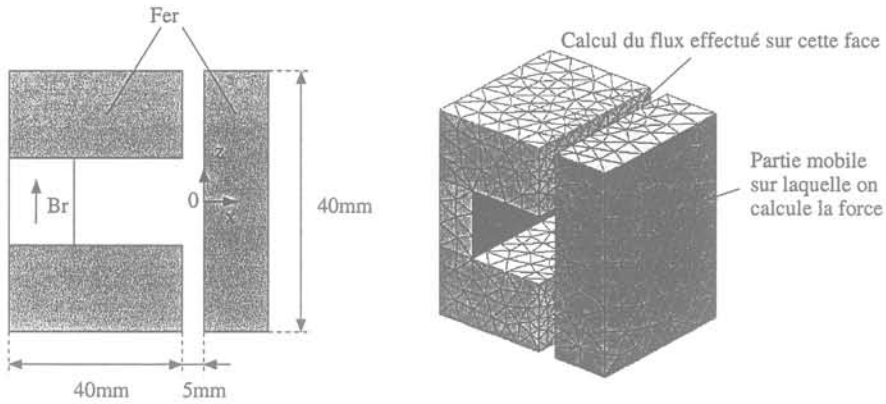


FIG. 4.5: Description du cas test et maillage utilisé

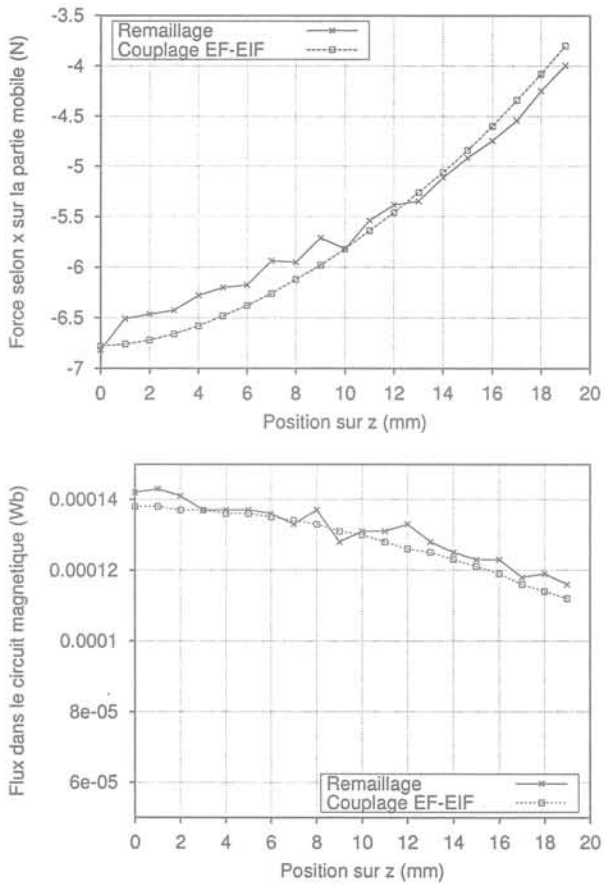


FIG. 4.6: Résultats de simulations en multi-statique

Statistiques de la mise en œuvre

	E.F.-E.I.F.	Remaillage
Nombre d'inconnues (N_i)	2589	min. 2493 max. 2973
Nombre de termes (N_t) matriciels non-nuls	2110580	min. 19338 max. 23158
Taux de remplissage (N_t/N_i^2)	31%	0.3% (moyenne)
Temps total (6 positions)	2h36mn	9mn30s

TAB. 4.2: Statistiques pour la comparaison entre remaillage et couplage EF-EIF en 3D

On observe sur le tableau 4.2 que les différences de coût calcul entre les deux méthodes sont accentuées en 3D. Pour cet exemple simple, le couplage E.F.-E.I.F. reste utilisable avec la discrétisation frontalière choisie (cf. Fig. 4.5). Pour des problèmes complets, la limite des capacités des machines standards actuelles est vite atteinte. Ainsi le remaillage paraît être une alternative intéressante, à condition de pouvoir générer un nouveau maillage 3D de haute qualité de la partie déformable à chaque pas de temps.

4.3 Maillage par boules

Le critère de Delaunay permet seulement de construire une triangulation à partir d'un nuage de nœuds. Hermeline a proposé une technique très efficace et rapide qui génère les nœuds dans un algorithme basé sur le critère de Delaunay [79]. C'est habituellement cette méthode (Hermeline-Delaunay) que nous utilisons dans notre mailleur. Certaines techniques peuvent être utilisées en post-traitement pour améliorer la forme des éléments du maillage obtenu. Le "maillage par boules" (ou "bubble meshing") est une de ces techniques. Elle permet d'adapter un nuage de nœuds à la géométrie du problème [80, 81, 82]. Son originalité repose sur l'utilisation de boules centrées aux nœuds du maillage. Un modèle physique et une procédure itérative font bouger les nœuds pour optimiser leur arrangement spatial. Les maillages générés sont de haute qualité.

Nous proposons d'utiliser cette technique dans une procédure originale de remaillage dans laquelle le mouvement des boules adapte le nuage de nœuds aux déformations de la géométrie. Nous présentons les aspects théoriques permettant de décrire le mouvement des boules, ainsi que notre procédure de remaillage.

Les résultats présentés ici sont le fruit d'un travail commun avec C. Hérault qui utilise le mouvement des boules dans le contexte des méthodes sans maillages [49].

4.3.1 Boules et modèle physique

Définition des boules

Soit Ω un domaine comportant N nœuds. Chaque nœud est considéré comme le centre d'une particule, l'ensemble des particules représentant un fluide. La particule i, dont le centre a pour coordonnées $\mathbf{x}_i$, est soumise à la force $\mathcal{F}_\mathbf{i}$ définie par :

$$\mathcal{F}_\mathbf{i} = \sum_{i \neq j}^{N} f_{ij} \mathbf{u_{ij}} \qquad avec \quad \mathbf{u_{ij}} = \frac{\mathbf{x_i} - \mathbf{x_j}}{\|\mathbf{x_i} - \mathbf{x_j}\|}. \tag{4.1}$$

où f_{ij} est la force d'interaction entre les particules j et i. Cette force est une force

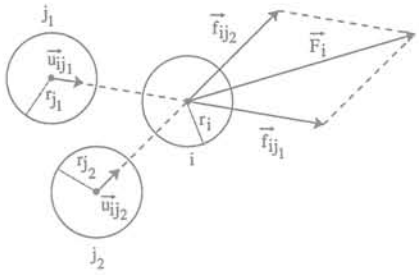


FIG. 4.7: Les boules et les forces d'interaction

locale et peut donc être définie par :

$$\begin{cases} f_{ij} = g(d_{ij}) & pour \quad d_{ij} \leq 2 \\ f_{ij} = 0 & sinon \end{cases} \tag{4.2}$$

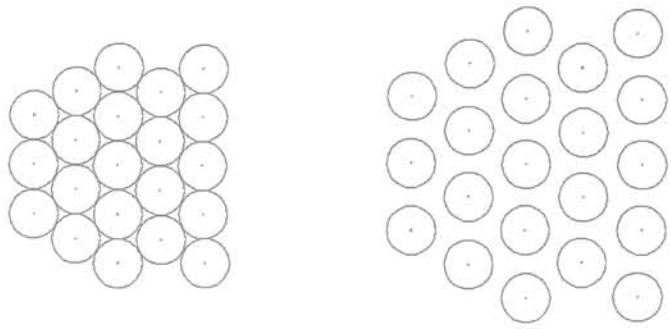
où d_{ij} est la distance normalisée : $d_{ij} = \dfrac{\| \mathbf{x_j} - \mathbf{x_i} \|}{r_i + r_j}$. Cette expression fait apparaître que chaque particule a une zone d'influence. Dans notre modèle, celle-ci est isotrope et la particule i est donc représentée par une boule dont le rayon r_i mesure l'influence sur les autres boules. Il est aussi possible d'utiliser des modèles de force anisotropes. Dans ce cas, les boules sont remplacées par des ellipsoïdes. Ceci est utilisé pour générer des maillages anisotropes [82]. Pour calculer la force totale $\mathcal{F}_\mathbf{i}$ s'exerçant sur la boule i, la somme dans (4.1) peut être réduite aux boules voisines de i. Il convient maintenant de définir l'expression de la fonction g.

Modèle physique

Le choix du modèle physique conduit à préciser l'expression de g et détermine le comportement de l'ensemble de particules représentées par les boules. Les modèles utilisés s'inspirent de la physique des gaz pour laquelle il y a indiscernabilité des particules et isotropie des interactions. Ces propriétés conduisent à un arrangement hexagonal des particules et donc pour nous à des triangles équilatéraux au niveau du maillage. La force généralement utilisée dans les différents articles est inspirée d'un modèle de Van der Waals [82, 81, 80]. Comme le montre la Fig. 4.9, ce type de force comporte une partie attractive et une autre répulsive. Avec un tel modèle, la position d'équilibre entre deux particules est la tangence. Les particules ont alors tendance à se répartir dans l'espace tout en restant bien groupées (Fig. 4.8). Au contraire, pour notre application, nous avons besoin d'un fluide qui occupe tout l'espace disponible. Ainsi, nous avons choisi un modèle s'approchant de celui du gaz parfait. Ce modèle est utilisé pour la simulation en dynamique des fluides ou encore pour simuler les corps hautement déformables en images de synthèse [83]. Il conduit à une force purement répulsive. La force que nous utilisons est comparée à une force de type électrostatique sur la Fig. 4.9.

Son expression est la suivante :

$$g(d) = (2 - d^2)e^{-d^4} \tag{4.3}$$



(a) modèle électrostatique (b) modèle du gaz parfait

FIG. 4.8: Comportement de l'ensemble de particules suivant le modèle physique utilisé.

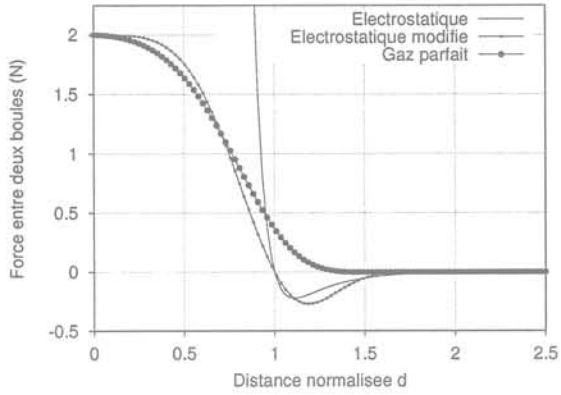


FIG. 4.9: Comparaison de modèles de forces

Cette force ne dépend que de la distance entre boules. Des forces dérivant d'autres types d'énergie peuvent être utilisées. Dufour [84] déplace par exemple les nœuds du maillage pour minimiser l'énergie magnétique du système dans une procédure auto-adaptative.

4.3.2 Adaptation du nuage de nœuds

Mouvement des boules

Le mouvement de la boule i est gouverné par l'équation du second ordre suivante :

$$m_i \frac{d^2 \mathrm{x_i}}{dt^2} + C \frac{d\mathrm{x_i}}{dt} = \mathcal{F}_\mathrm{i}(x) \tag{4.4}$$

où m_i correspond à la masse de la particule et C au coefficient de frottement visqueux. Le système de particules évolue vers une position d'équilibre qui minimise son énergie globale. Le plus souvent, la disposition trouvée s'approche d'une disposition hexagonale pour laquelle chaque boule a six boules voisines.

Numériquement, les N équations différentielles du mouvement sont résolues par un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4. Afin d'obtenir une convergence rapide du système et pour éviter les oscillations, les coefficients m_i, C et le pas de l'algorithme h doivent être choisis judicieusement. Pour cela, on peut faire une analogie avec la mécanique d'un système à ressorts [80, 49].

Seules les boules internes peuvent bouger. Celles qui sont situées sur la frontière sont fixes et constituent les contraintes du système. Comme les forces que nous utilisons sont purement répulsives, les boules ont tendance à s'éloigner le plus possible les unes des autres, ainsi les boules frontières doivent former une véritable barrière pour empêcher les boules internes de sortir du domaine.

Notre but n'est pas de simuler de manière rigoureuse le mouvement des particules, mais d'arriver le plus rapidement possible à une position d'équilibre conduisant à une répartition satisfaisante des boules. Pour cela, nous introduisons plusieurs opérations élémentaires pouvant intervenir pendant la résolution du système. Nous les décrivons dans ce qui suit.

Adaptation du rayon des boules

Les centres des boules, rappelons-le, seront les nœuds du futur maillage. Ainsi, le rayon des boules est représentatif de la longueur des arêtes du maillage et de la taille des éléments. La répartition spatiale des rayons est donc une image fidèle de la carte de taille des éléments. Par conséquent, on peut représenter cette dernière par la fonction scalaire $r(\mathbf{x})$ qui représente le rayon d'une boule lorsqu'elle est centrée en $\mathbf{x}$. L'idéal serait d'avoir une expression de cette fonction. En général, elle n'est pas connue à l'intérieur du domaine et les seules données connues sont les discrétisations frontalières. De plus, dans une procédure de remaillage avec changement de la géométrie, cette fonction doit être recalculée à chaque déformation. Dans [85], Ruppert propose d'utiliser un autre maillage plus grossier permettant de calculer et d'approximer la carte de taille à partir des données frontalières. Un autre moyen est d'approximer r à l'aide de méthodes sans maillage [49].

Nous proposons d'utiliser une technique assez simple qui consiste à calculer le rayon d'une boule à partir de son voisinage. Ainsi le rayon s'adapte en fonction de l'environnement proche de la boule. Pour la boule i, on utilise un moyennage pondéré du rayon :

$$r(\mathbf{x_i}) = \frac{\sum_{j \in N_i} w_j(\mathbf{x_i}) r_j}{\sum_{j \in N_i} w_j(\mathbf{x_i})} \tag{4.5}$$

où $w_j(\mathbf{x})$ est une fonction de pondération à support limité de rayon $2r_j$ et N_i est le nombre de boules voisines de i. Cette procédure permet d'obtenir une répartition très lisse des rayons. La Fig. 4.10 montre un premier exemple de répartition obtenue. On voit que la taille des boules internes s'est adaptée à celle des boules frontalières.

Ces méthodes d'adaptation des rayons des boules permettent d'obtenir une bonne carte de taille des éléments. Lorsque la géométrie est changée dans une procédure de remaillage, la carte de taille est automatiquement adaptée avec le mouvement des boules.

Contrôle de la population

Dans certaines situations, il est nécessaire d'adapter le nombre de boules mises en jeu. Pour détecter les trous ou au contraire les zones trop peuplées, comme proposé

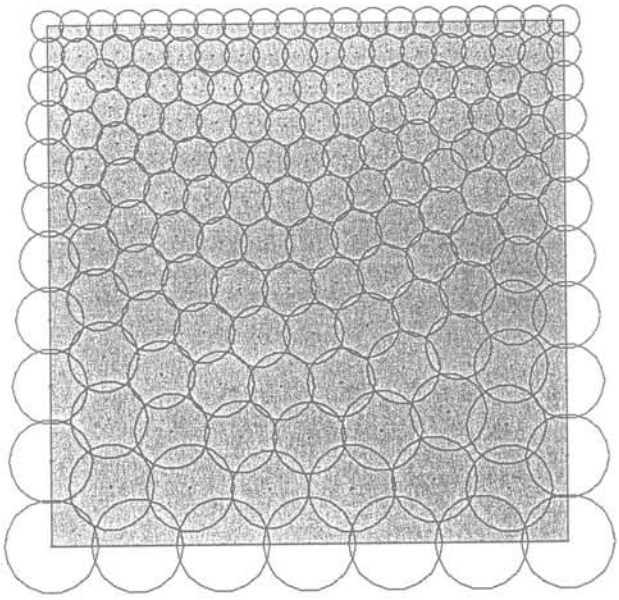


FIG. 4.10: Adaptation du rayon des boules.

par Shimada dans [80], nous calculons pour chacune des boules un coefficient de recouvrement β_i :

$$\beta_i = \frac{1}{r_i} \sum_{j \in N_i} (2r_i + r_j + d_{ij}) \tag{4.6}$$

La valeur de β_i correspondant à un arrangement hexagonal est 6. Pour des valeurs supérieures, on doit détruire au moins une boule dans le voisinage de i. Pour des valeurs inférieures, il faut faire au contraire des ajouts. Pour avoir un bon contrôle de ce processus d'ajout/destruction, on doit faire une seule opération à la fois dans un même voisinage.

4.3.3 La procédure de remaillage

La procédure de remaillage que nous proposons est résumée par la Fig. 4.11. Au premier pas de temps de la résolution E.F., toute la géométrie doit être maillée. A ce stade, nous utilisons un maillage par boules pour obtenir un premier maillage de qualité. Pour les autres pas, seule la partie déformable est remaillée.

Premier maillage de la géométrie

Tout d'abord, une première triangulation de Delaunay est obtenue dans laquelle les nœuds internes à insérer ont été créés par la méthode de Hermeline [79]. Ceci permet d'obtenir rapidement un premier nuage de nœuds. Ensuite chaque nœud est considéré comme le centre d'une boule. Les rayons sont calculés afin que les boules internes soient proches de la tangence. Sur les frontières, on préfère avoir des boules

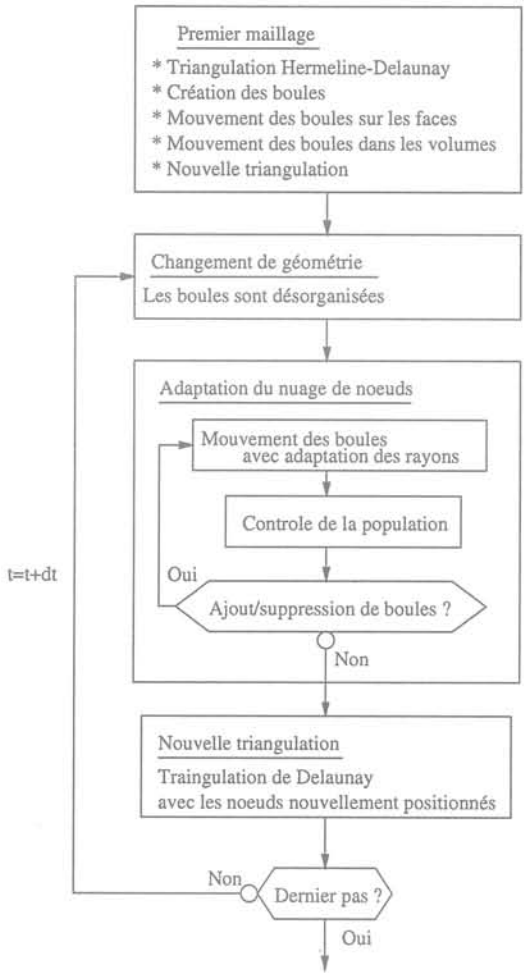


FIG. 4.11: La procédure de remaillage employée

qui se chevauchent pour bien contraindre les boules internes. Intervient alors le mouvement des boules vers une position d'équilibre sur les faces de la géométrie qui sont traitées séparément. La Fig. 4.12 présente un exemple simple en 2D. Une nouvelle triangulation pour chaque face est alors trouvée en utilisant une triangulation de Delaunay ayant pour nœuds internes les centres des boules. Dans le cas 3D, une étape supplémentaire est nécessaire pour mailler les volumes. Les boules des faces étant fixées, on laisse les boules internes aux volumes rejoindre une position stable.

Adaptation du nuage de nœuds aux déformations de la géométrie

Lorsqu'intervient un changement de géométrie, la partie mobile en bougeant, désorganise l'agencement des boules. On laisse alors les boules se réorganiser et adapter ainsi le nuage de nœuds à cette nouvelle position comme le montre la Fig. 4.13. C'est ici que le choix du modèle de force prend son importance. En effet, le choix du modèle du gaz parfait permet aux boules d'occuper tout l'espace et ainsi rem-

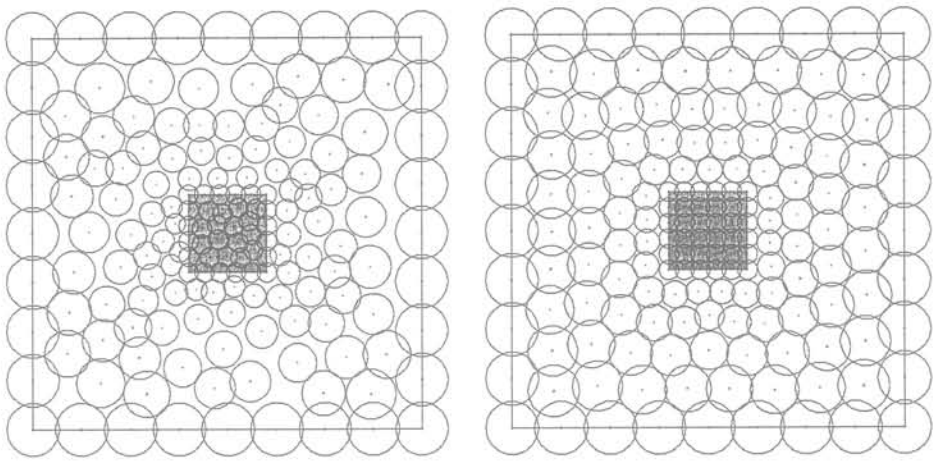


FIG. 4.12: Auto-arrangement des boules pour un exemple simple

plir les trous créés par le déplacement de la partie mobile. Le processus de contrôle de la population de boules n'est activé que si nécessaire. Dans un premier temps, notre algorithme essaye de garder un nombre de nœuds constant. C'est le cas dans l'exemple de la Fig. 4.13. Une fois le nouveau nuage de nœuds stabilisé, une nouvelle triangulation est construite.

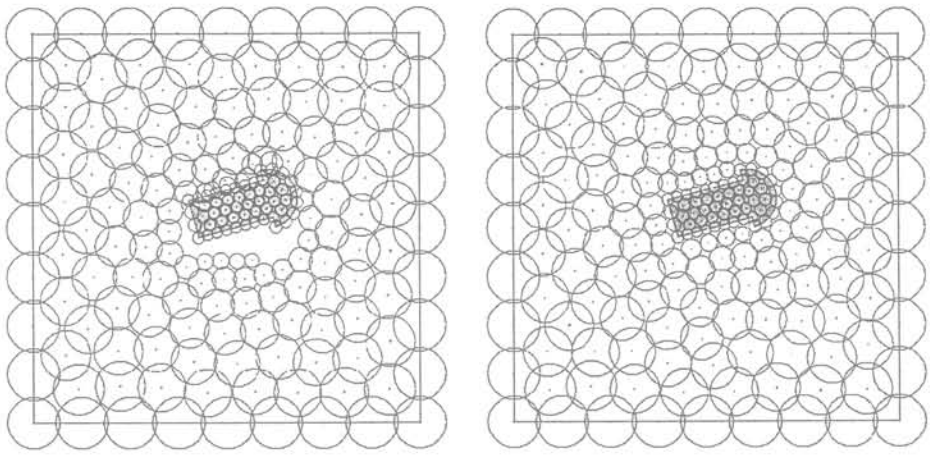


FIG. 4.13: Les boules s'adaptent à la nouvelle position du mobile

4.3.4 Application

L'efficacité et la précision de la méthode des éléments finis dépend beaucoup de la qualité du maillage utilisé. Lorsqu'on effectue un remaillage automatique en pas-à-pas dans le temps, la qualité du maillage doit rester bonne malgré les changements importants de maillage au cours du temps. Une grande variation de la qualité du maillage introduirait en effet des discontinuités inacceptables dans la solution tem-

porelle. Pouvoir générer des maillages de haute qualité est donc un atout majeur de la méthode du maillage par boules. Les premiers exemples qui suivent donnent un aperçu de la qualité pouvant être obtenue grâce à cette méthode. La procédure que nous avons présentée étant basée sur les boules, cette qualité pourra être maintenue à chaque remaillage.

D'autres exemples permettront d'évaluer la capacité de la méthode à mieux contrôler le nuage de nœuds lors de grandes déformations.

Amélioration de maillage

Pour minimiser l'erreur d'interpolation, les simplexes du maillage doivent s'approcher de l'équilatéralité [86]. Ce critère est purement géométrique et la forme optimale des éléments dépend en fait de la solution du problème. Néanmoins c'est ce critère défini a priori que nous utilisons pour qualifier la qualité des éléments du maillage.

Plusieurs types d'opérations de régularisation du maillage sont possibles pour améliorer sa qualité. Parmi les plus utilisées, il y a le barycentrage qui consiste à placer un nœud au barycentre de ses voisins [87]. D'autres techniques sont basées sur des opérations topologiques (ajout, suppression ou retournement d'arête) [71, 75]. Dans notre méthode, les boules tendent à prendre une configuration hexagonale, ce qui correspond à des simplexes équilatéraux.

Dans les exemples qui suivent, nous partons d'un maillage de Hermeline-Delaunay ayant déjà subi des opérations de régularisation. Nous lui appliquons la méthode décrite au 4.3.3. La Fig. 4.14 montre sur un cas 2D très simple l'amélioration obtenue.

Beaucoup de critères [88, 89] permettent d'évaluer l'équilatéralité des tétraèdres en 3D. Le critère que nous utilisons est défini de la manière suivante :

$$Q = 1 - \frac{C}{C_e} \tag{4.7}$$

où C est le rapport du volume de la sphère inscrite au tétraèdre sur le volume du tétraèdre. C_e est la valeur de ce rapport pour un triangle équilatéral. Ainsi, Q tend vers 1 pour les éléments aplatis et il vaut 0 pour un tétraèdre équilatéral. La Fig. 4.15 montre la répartition de la qualité des éléments avant et après repositionnement des nœuds à l'aide des boules. On observe l'augmentation nette du nombre de bons éléments. Un autre exemple est présenté Fig. 4.16 montrant la régularisation obtenue sur une géométrie 3D.

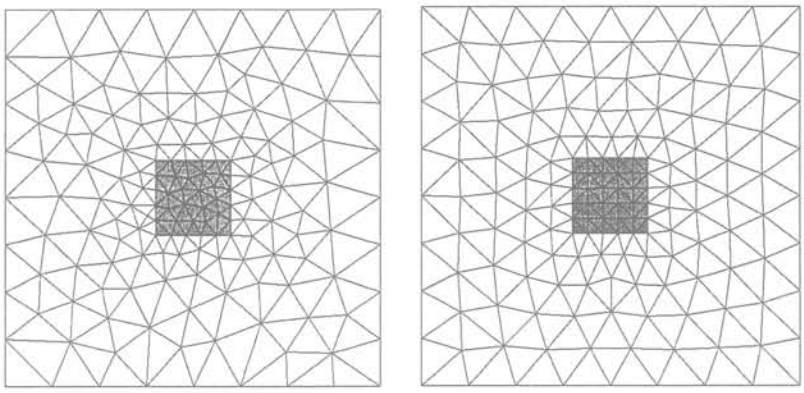


FIG. 4.14: Amélioration de maillage sur un exemple 2D simple

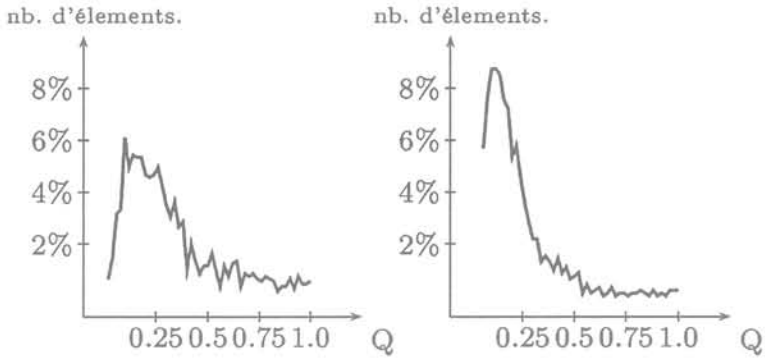


FIG. 4.15: Répartition de la qualité des éléments avant et après le mouvement des boules

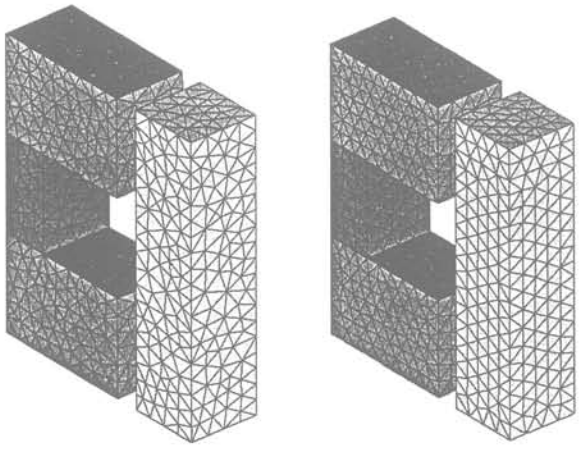


FIG. 4.16: Amélioration de maillage en 3D

Adaptation du maillage aux déformations

Revenons au but initial de notre méthode qui est d'adapter le maillage à une déformation de la géométrie. Pour les petits changements géométriques, un simple repositionnement des nœuds est suffisant. Dans ce cas, le maillage par boules agit comme un mailleur "élastique" (Fig. 4.17). Pour des déplacements plus importants

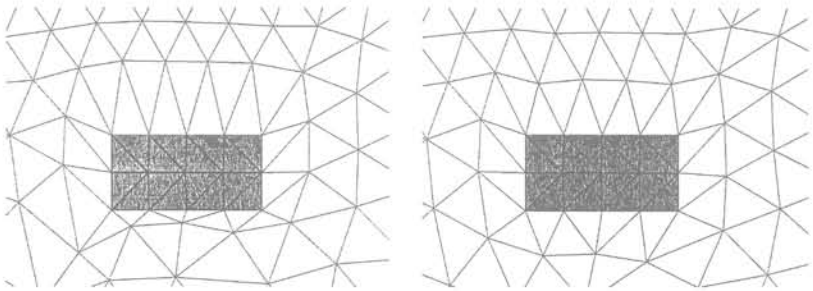


FIG. 4.17: Adaptation "élastique" du maillage

de la partie mobile, comme sur la Fig. 4.18, des changements topologiques sont inévitables. En effet, les nœuds en bougeant déforment les éléments et peuvent rendre invalide la triangulation. Pour rétablir la validité du maillage, nous reconstruisons entièrement la triangulation après mouvement des nœuds à partir de la nouvelle répartition. Malgré cette reconstruction totale, on voit sur l'exemple de la Fig. 4.18 que les changements topologiques interviennent majoritairement près du mobile. Nous n'avons pas pour l'instant d'outils capable de localiser les endroits du maillage nécessitant des opérations topologiques. Un tel outil permettrait de minimiser le nombre d'opérations à effectuer sur le maillage. A travers ces exemples, on voit que la pro-

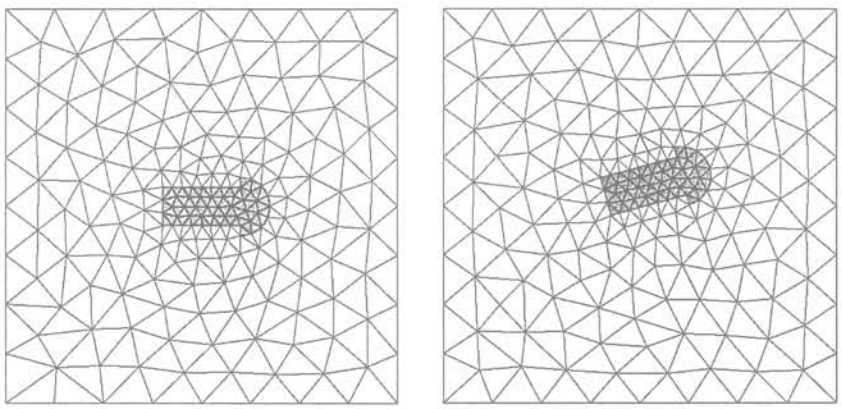


FIG. 4.18: Le maillage est adapté au déplacement de la partie mobile

cédure de remaillage proposée adapte le maillage aux déformations de la géométrie. Par rapport à un remaillage "brutal", elle produit une évolution plus "continue" du maillage au cours du temps. Elle permet aussi d'avoir un meilleur contrôle de la carte de taille des éléments dans les parties remaillées. Un autre point important est que le maillage reste de bonne qualité tout au long de la phase de mouvement. Tout cela peut

contribuer à rendre le remaillage plus efficace et la solution éléments finis temporelle plus lisse lors de la simulation de transitoires électromécaniques.

4.4 Traitement des entrefers fins

4.4.1 Position du problème

Comme nous l'avons vu précédemment, et comme le montre la Fig. 4.19, les déformations d'un entrefer fin peuvent occasionner une variation importante du nombre de nœuds du maillage de l'air. Notons que ce type de situation engendre des problèmes similaires pour la méthode de couplage EF-EIF (cf. 3.2.6).

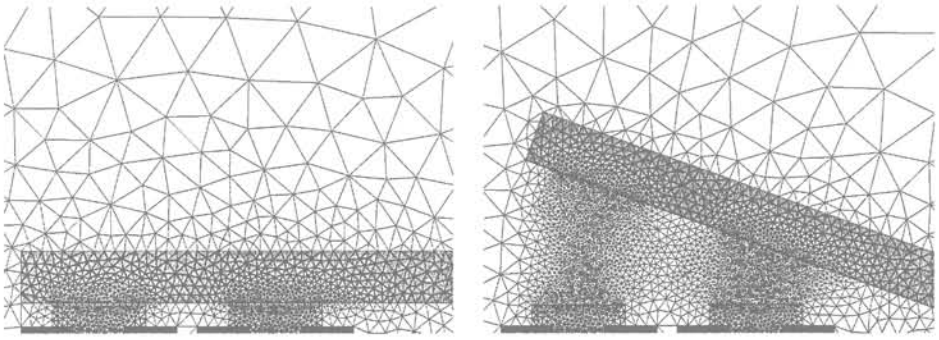


FIG. 4.19: Détail du maillage de l'électro-aimant en position fermé et ouvert

Dans la procédure de remaillage "brutal" réalisée, l'utilisateur n'a que très peu de contrôle sur les nœuds internes générés. La seule information qu'il doit fournir est la discrétisation frontalière de la région. La densité de nœuds demandée est alors propagée à l'intérieur de la géométrie. La présence d'entrefers fins au cours du mouvement, oblige à mailler finement autour de ceux-ci. Lorsque l'entrefer s'élargit, le mailleur ajoute alors un grand nombre de nœuds dans une zone qui ne nécessite pas une discrétisation aussi fine. Ce phénomène est d'autant plus amplifié que les entrefers de départ sont petits. Dans le cas 3D, ceci peut mener à une "explosion" du nombre de nœuds.

Pour un meilleur contrôle du nombre de nœuds internes, le mailleur devrait pouvoir prendre en compte une donnée utilisateur indiquant la densité de nœuds désirée à l'intérieur de la zone à remailler. Dans ce qui suit, nous montrons qu'un tel contrôle peut être introduit assez simplement dans les procédures de maillage par boules.

4.4.2 Utilisation du maillage par boules

Dans le cas de grandes déformations et surtout en présence d'entrefers fins, l'ajout ou le retrait de nœuds est inévitable dans la procédure de remaillage. La technique de contrôle de la population des boules doit alors être mise en jeu. Pour éviter l'ajout excessif de nœuds, il est alors intéressant de faire grossir artificiellement les boules à mesure qu'elles s'éloignent de la frontière comme on le voit sur la Fig. 4.20.

On obtient un tel comportement lorsqu'on remplace la formule (4.5) de calcul du rayon par :

$$r(\mathbf{x_i}) = \min\left\{\alpha * \min_{j \in N_i}(r_j), r_{max}\right\} \tag{4.8}$$

où α est un coefficient défini par l'utilisateur indiquant le facteur de grossissement et r_{max} est le rayon maximal désiré pour la face. La Fig. 4.21 compare les deux types de

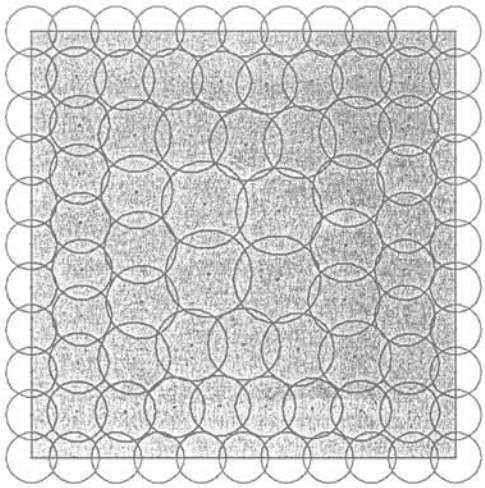
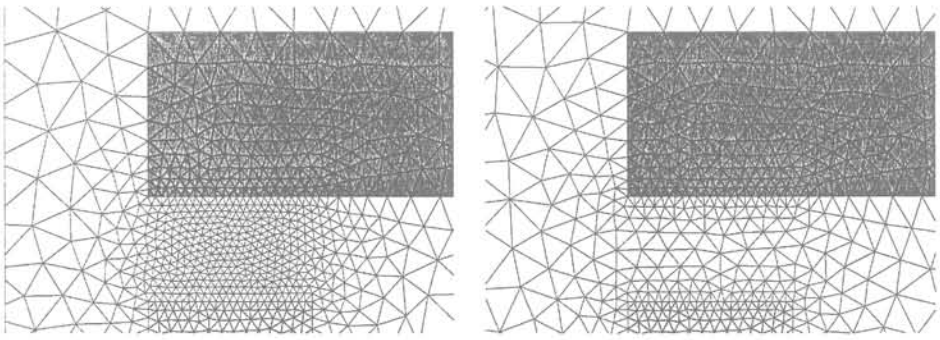


FIG. 4.20: Adaptation du rayon des boules.

calcul de rayon (4.5) et (4.8). Le résultat (a) a été obtenu en utilisant le moyennage (4.5). L'augmentation du nombre de nœuds dans ce cas est de 33%. Le résultat (b) présente une augmentation de seulement 5% qui a été obtenue grâce au grossissement artificiel des rayons (4.8). Le facteur de grossissement α était ici de 1.4.



(a) (b)

FIG. 4.21: Application de deux méthodes d'adaptation du rayon.

4.4.3 Utilisation d'éléments spéciaux

Nous proposons ici une toute autre méthode pour traiter les entrefers minces. Celle-ci peut s'appliquer indifféremment dans une stratégie de remaillage ou avec une méthode de couplage EF-EIF.

Présentation de la méthode

De manière classique, pour traiter des zones minces d'un problème, on utilise des éléments fins ou encore éléments coques [56, 90]. Cette technique consiste à ne pas décrire géométriquement l'épaisseur de la zone et à utiliser des éléments spéciaux d'une dimension inférieure à celle de l'espace de calcul. Plaçons nous dans le cas 2D. Dans un entrefer fin, la composante tangentielle de l'induction peut être considérée comme nulle. Le potentiel vecteur magnétique est donc constant sur toute ligne traversant perpendiculairement l'entrefer (cf. Fig. 4.22).

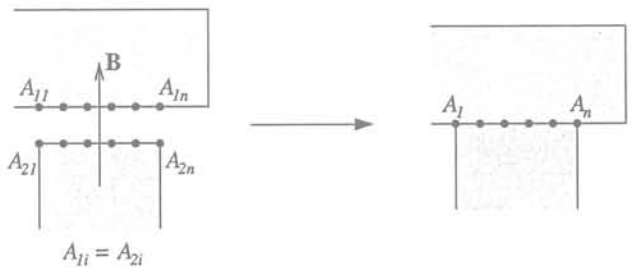


FIG. 4.22: Élément mince sans saut de potentiel

Pour le calcul de la contribution de l'entrefer au système global, on remplace le terme matriciel habituel (2.14) par :

$$\int_V \operatorname{grad} \alpha_i \cdot \nu \operatorname{grad} \alpha_j \, dv = \int_S \operatorname{grad} \alpha_i \cdot \nu \operatorname{grad} \alpha_j \, Ep \, ds \tag{4.9}$$

où Ep est l'épaisseur de la région mince. La Fig. 4.22 schématise la technique employée. L'entrefer n'étant plus maillé, il n'est plus nécessaire d'avoir une discrétisation fine.

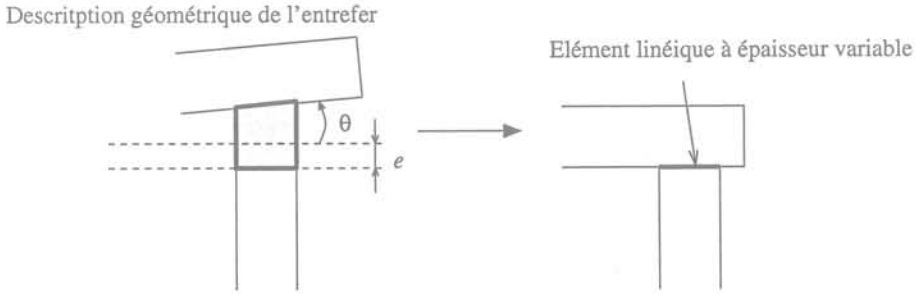


FIG. 4.23: Description des éléments minces à épaisseur variable considérés

Pour prendre en compte la déformation des entrefers au cours du mouvement, on définit une épaisseur variable au sein de l'élément comme le montre la Fig. 4.23. Elle

dépend non seulement de l'espace mais aussi du temps lorsqu'il y a mouvement. On a :

$$Ep(x,t) = e(t) + l(x)\tan\theta(t) \tag{4.10}$$

où $l(x)$ est la distance entre l'axe de rotation du mobile et le point courant. Ce modèle permet de décrire des mouvements de rotation et de translation de la partie mobile. Cependant, il ne reste valable que pour de petites valeurs d'entrefers. Lorsque ceux-ci sont trop déformés, il faut revenir à un modèle où l'entrefer est décrit géométriquement.

Le passage d'un modèle à l'autre change la topologie de la géométrie du problème. Les opérations de ce changement topologique à effectuer peuvent se décomposer de la manière suivante :

- destruction des éléments d'entrefer,
- dédoublement des lignes d'entrefer et de leurs discrétisations,
- reconstruction des faces,
- réaffectation des formulations.

Ce qui rend délicat ce changement brutal est le fait que l'on doit assurer la continuité de la solution entre les deux modèles.

Application

On reprend l'exemple du 4.2.1 auquel on applique cette technique. On a tracé l'évolution du flux dans les jambes de l'électro-aimant. Le raccordement de solution perturbe assez peu ces grandeurs qui caractérisent le fonctionnement du dispositif. Le tableau 4.3 donne les statistiques de la simulation et les compare aux résultats du

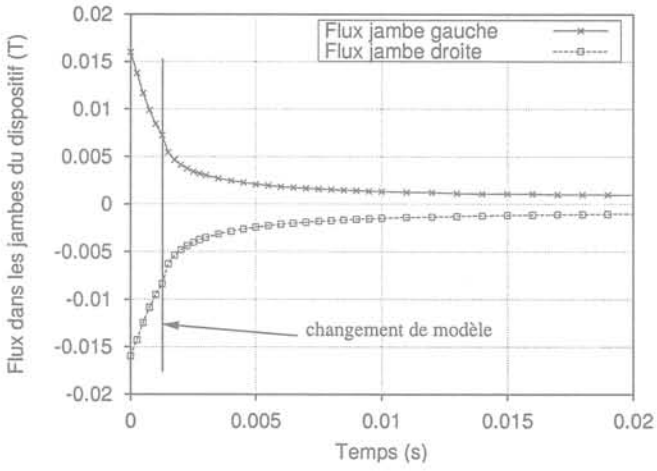


FIG. 4.24: Flux dans les jambes de l'électro-aimant pour la simulation avec enchaînement de modèle

tableau 4.1. On mesure ici le gain important apporté par cette méthode. Le nombre de nœuds a assez peu varié et le temps de calcul a été divisé par deux. Changer de modèle au cours d'une simulation temporelle est une démarche assez générale. On doit pouvoir en effet choisir à chaque pas de temps le modèle le mieux adapté. Nous avons montré sur cet exemple la faisabilité d'un changement de modèle particulier.

	E.F.-E.I.F.	Remaillage	Remaillage avec éléments spéciaux
Nombre d'inconnues	2821	min. 2934 max. 5339	2416 2725
Nombre de termes matriciels non-nuls	332071	min. 17556 max. 31997	14459 16311
Temps total (6 positions)	37mn	18mn	8mn30s

TAB. 4.3: Statistiques sur la simulation avec adaptation de modèle et comparaison

4.5 Conclusion

Dans un contexte de mailleur de Delaunay avec respect de la frontière, nous avons présenté deux procédures de remaillage pour traiter les déformations d'une zone de la géométrie. Par rapport au couplage EF-EIF, ces méthodes ont l'avantage de garder le caractère purement EF de la résolution. Elles sont ainsi moins coûteuses et pour cette raison apportent actuellement la solution qui semble la plus adaptée pour traiter des cas 3D.

Néanmoins, les expériences numériques que nous avons menées ont mis en évidence deux principales difficultés liées au remaillage : le bruit numérique engendré par les changements de maillage et la gestion du nuage de nœuds lorsqu'il y a de grandes déformations en présences d'entrefers minces.

Le maillage par boules est une technique originale qui apporte des éléments de réponse à ces problèmes. Elle permet en effet d'avoir un bon contrôle sur le nuage de nœuds. La qualité des maillages générés ainsi que l'évolution progressive du maillage que propose cette méthode sont deux caractéristiques qui doivent permettre de réduire le bruit de maillage. Cette première expérience de maillage par boules nous a montré qu'une implémentation soignée était nécessaire pour donner de la rapidité et de la robustesse à cette technique. D'autres expériences sont à mener pour mesurer les gains apportés par cette méthode sur les solutions des simulations.

Le problème des entrefers minces est en réalité le même qu'en magnéto-statique. Lorsqu'ils sont décrits géométriquement et qu'ils doivent être maillés, ils introduisent un nombre de nœuds très important. Dans ces situations, utiliser des éléments spéciaux est la solution la plus adaptée. Nous avons proposé une méthode permettant d'introduire ce type de modèle dans les simulations avec mouvement.

Troisième partie

Simulation de dispositifs électromécaniques

Chapitre 5

Validation et simulation de dispositifs

5.1 Introduction

Au cours de notre travail, nous avons développé les fonctionnalités de notre outil de calcul numérique nécessaires à la simulation des régimes transitoires électromécaniques. L'objet de ce chapitre est de montrer leur application à des cas industriels à travers l'étude de trois dispositifs conçus au sein de Schneider Electric.

Contrairement aux cas "d'école" résolus précédemment, nous allons traiter ici des cas complets avec prise en compte des aspects mécaniques et électriques. Les simulations sont toutes effectuées avec le couplage EF-EIF.

Le tableau suivant résume les difficultés et motivations de chaque étude.

Dispositif	Motivations et difficultés à surmonter
MITOP ECO (partie 5.2)	• Validation de la méthode par comparaison avec la bande de translation • Problème axisymétrique • Circuit électrique : décharge capacitive • Mécanique : butées, ressort
Relais R5 (partie 5.3)	• Mouvement de rotation : grandes déformations des entrefers • Circuit électrique : tension imposée • Mécanique : butées, ressorts
Electro-aimant (partie 5.4)	• Géométrie 3D à ramener en 2D • Entrefer multiple • Saturation magnétique • Circuit électrique : tension imposée • Mécanique : butées, ressorts et frottements secs

TAB. 5.1: Cas industriels traités

L'ordre dans lequel sont présentés ces trois dispositifs correspond chronologiquement à l'évolution de nos travaux de thèse. La première étude repose sur un exemple simple que l'on savait déjà traiter, mais qui nous a permis de valider nos formulations transitoires avec les différents couplages. Le deuxième dispositif met réellement en jeu

l'outil que nous avons développé étant donné les grandes déformations des entrefers qu'il comporte. Il nous a permis de mieux cerner les difficultés de mise en oeuvre de nos modèles dans un cas général. Ayant une meilleure maîtrise de nos outils, nous avons pu mener une étude plus complète sur un troisième exemple pour lequel on a pu confronter nos résultats à des données expérimentales.

5.2 Validation sur le cas du MITOP

Objectif

Valider notre méthode de couplage dans une simulation complète, c'est-à-dire en transitoire, avec équations de circuit et mécanique.

Une étude et une optimisation de ce dispositif a été réalisée dans le cadre d'un stage de DEA par M. Perrault [91].

5.2.1 Présentation du dispositif

Le dispositif MITOP intervient dans une chaîne différentielle (Fig. 5.1). Lorsqu'un défaut est détecté au niveau du circuit de puissance, un signal de commande est envoyé à l'interrupteur de l'alimentation du MITOP. Le rôle du dispositif est alors de transformer l'énergie électrique, fournie par un condensateur préalablement chargé, en énergie mécanique capable par percussion de déclencher le mécanisme d'ouverture des contacts de puissance.

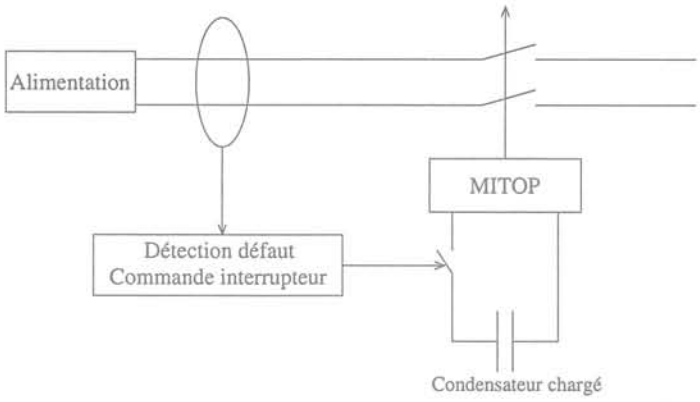


FIG. 5.1: Le MITOP dans la chaîne de protection contre les courts-circuits.

La Fig. 5.2 montre la structure du MITOP. Le flux généré par l'aimant crée une force magnétique sur le noyau plongeur qui s'oppose à celle du ressort. Lorsque la bobine n'est pas alimentée, la force résiduelle obtenue maintient le noyau sur son support. L'apparition d'un courant de la polarité adaptée dans la bobine permet de diminuer la force magnétique. Lorsque celle-ci devient assez faible, il y a mouvement du noyau plongeur qui est propulsé par le ressort.

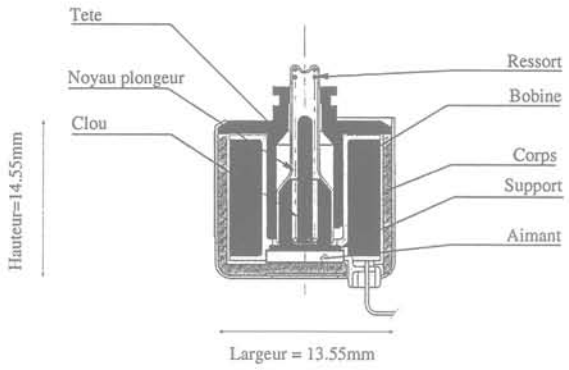


FIG. 5.2: Description du dispositif MITOP

5.2.2 Définition des données de simulations

- Matériaux
  L'ensemble du circuit magnétique et le noyau plongeur sont massifs et sont caractérisés par leur perméabilité magnétique relative $\mu_r = 1000$ et leur conductivité électrique : $\sigma = 10^6(S \cdot m)^{-1}$. L'aimant est caractérisé par son induction rémanente B_r et sa perméabilité relative. Il s'agit ici d'un aimant de type Samarium-cobalt.
- Circuit électrique
  Il s'agit d'une décharge capacitive. Le circuit électrique simulé est montré sur la Fig. 5.3. La résistance R correspond à la résistance de la bobine.

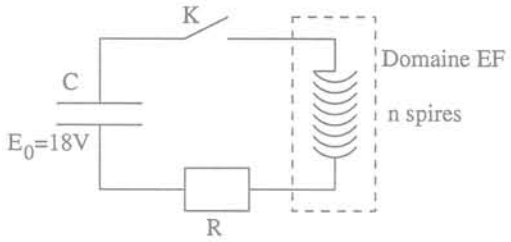


FIG. 5.3: Circuit électrique d'alimentation du MITOP

- Mécanique
  Le noyau a un mouvement de translation qui est limité par une butée basse et une butée haute. Sa masse est de $4,1g$. Il est propulsé par un ressort qui crée une force décrite par $F_{ressort} = -k(z - z_0)$. Le ressort est monté en compression. On a donc $z < z_0$.

Pour simuler le fonctionnement dynamique, on doit partir d'un état statique correspondant à la magnétisation du circuit réluctant par l'aimant. On peut pour cela partir des résultats d'une simulation statique. Dans nos simulations, nous l'atteignons à la suite d'un transitoire numérique de quelques pas. Une fois atteint, on ferme l'interrupteur K. On note $t = 0$ l'instant de cette fermeture.

5.2.3 Résultats

La structure du MITOP étant axisymétrique, l'étude du dispositif peut se ramener en deux dimensions. De plus la forme très simple du noyau plongeur et son mouvement linéaire rendent possibles l'utilisation de la bande de translation de FLUX2D pour modéliser son transitoire électromécanique. Ces simulations nous servent de références pour valider notre modèle basé sur le couplage EF-EIF en axisymétrique (cf. 3.2.5).

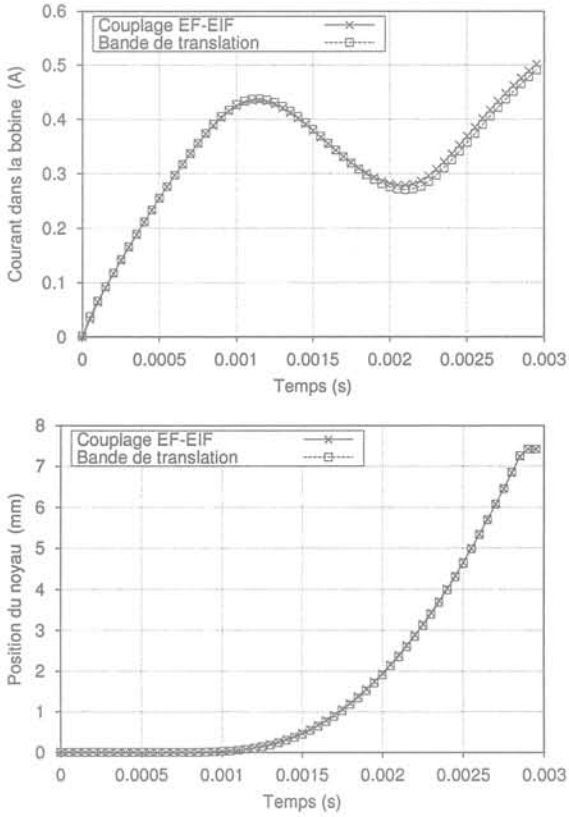


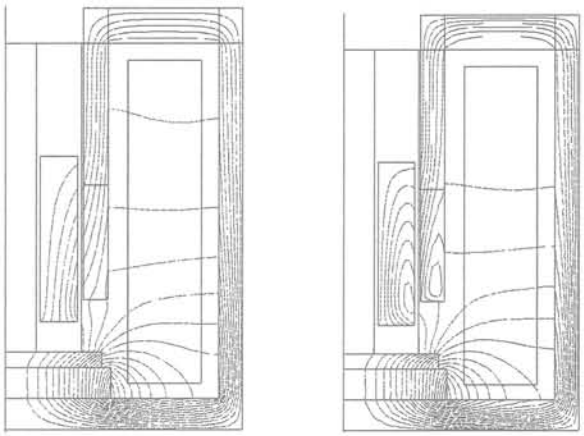
FIG. 5.4: Comparaison du couplage EF-EIF avec la méthode de la bande de translation

Les courbes de la Fig. 5.4 tracent le courant dans la bobine ainsi que la position en fonction du temps. Les résultats obtenus sont très proches. Après les validations statiques du couplage EF-EIF faites au chapitre 3, ce résultat valide la formulation complète. Le tableau 5.2 Comme on le voit sur la Fig. 5.5, les courants de Foucault

	EF-EIF	Bande de translation
Nombre d'inconnues	4200	4200
Termes matriciels non-nuls	572000	21700
Temps total (50 pas)	1H30mn	10mn

TAB. 5.2: Statistiques sur les simulations du MITOP

modifient la répartition des lignes de flux. En fait ils retardent la pénétration du flux



Sans courants de Foucault Avec courants de Foucault

FIG. 5.5: Lignes équiflux sans et avec prise en compte des courants de Foucault

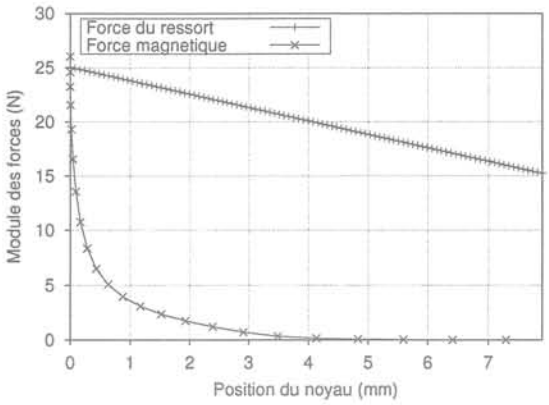


FIG. 5.6: Forces mises en jeu dans le MITOP

magnétique dans le noyau et donc le moment du décollage. En revanche, ils modifient très peu le mouvement lui-même qui est gouverné essentiellement par la force du ressort. En effet, la force magnétique décroît très vite avec la position du noyau et l'effort du ressort devient très vite prépondérant (Fig. 5.6). Dans une stratégie d'optimisation du temps d'ouverture du dispositif, il est important de prendre en compte les courants de Foucault qui retardent la pénétration du flux dans le noyau. Leur non prise en compte conduit donc à une surévaluation des performances de la structure proposée par l'optimisation [91].

5.3 Exemple avec grandes déformations : le R5

Objectif

Simuler le fonctionnment d'un dispositif qu'on ne pouvait pas traiter avant. Evaluer notre outil sur un cas général.

Une étude et une optimisation de ce dispositif a été réalisée dans le cadre d'un stage de DEA par B. Roussin [92].

5.3.1 Présentation du dispositif

Comme le dispositif précédent, le R5 fait partie d'une chaîne différentielle et son fonctionnement est analogue à celui du MITOP. La différence fondamentale est que l'énergie électrique lui est fournie par le courant de défaut lui-même. Pour ce dispositif dit "à propre courant", l'énergie électrique nécessaire pour déclencher le mouvement est très faible ($< 1W$). En Europe, l'utilisation de ce type de relais à haute sensibilité est recommandée dans les installations domestiques ou pour des applications similaires (Standards EN 61008 et 61009).

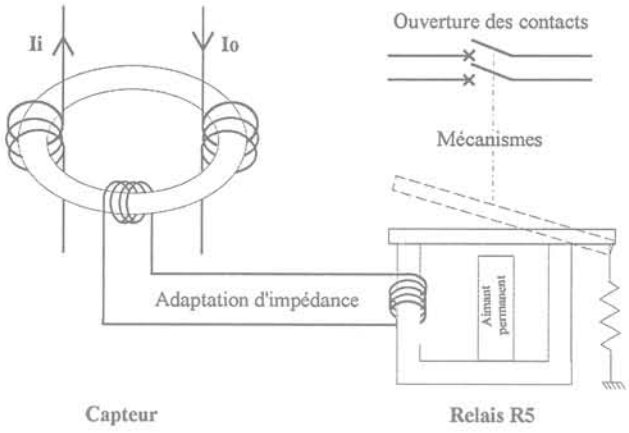


FIG. 5.7: Le dispositif R5 dans la chaîne différentielle

La structure du R5 est présentée Fig. 5.8. Sur cet exemple, on peut mesurer l'intérêt de la méthode de couplage EF-EIF. La palette a en effet un mouvement de pivot qui engendre de grandes déformations des entrefers.

5.3.2 Définition des données de simulations

- Matériaux
  L'ensemble du circuit magnétique et la palette sont massifs. Ils sont caractérisés par leur perméabilité magnétique relative très élevée et leur conductivité électrique. L'aimant est caractérisé par son induction rémanente B_r et sa perméabilité relative. Il s'agit ici d'un aimant de type AlNiCo
- Circuit électrique
  On impose une tension aux bornes de la bobine à l'instant $t = 0$. Le circuit électrique simulé est montré sur la Fig. 5.9. La résistance R correspond à la résistance de la bobine.

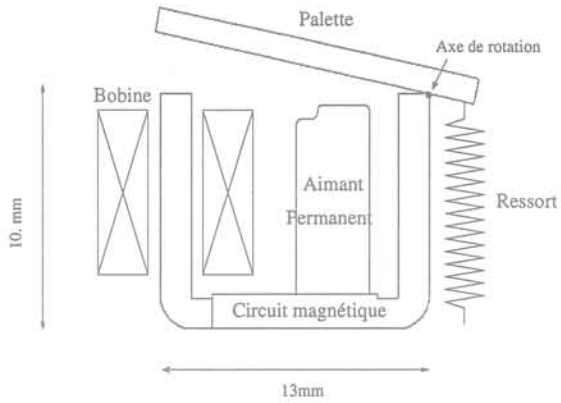


FIG. 5.8: Description du dispositif R5

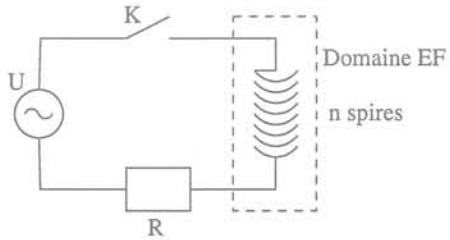


FIG. 5.9: Circuit électrique d'alimentation du R5

- Mécanique
  La palette a un mouvement de rotation autour d'un axe. Il est limité par une butée basse et une butée haute (20°). Son moment d'inertie est $J = 3.3\,10^{-8} kg.m^2$. Le couple du ressort est supposé constant au cours du mouvement et vaut $3.72 N.mm$.

5.3.3 Difficultés de simulation

Quelques précautions doivent être prises pour effectuer les simulations.

Pièces massives magnétiques et conductrices

Remarquons tout d'abord que dans une pièce massive non reliée à un circuit électrique, la somme des courants induits dans le matériaux doit être nulle. Pour imposer un courant total nul, chaque pièce massive est considérée comme un composant massif d'un circuit électrique relié à une source de courant nul. Ceci est réalisé grâce au couplage avec les équations de circuit. Une différence de potentiel peut alors apparaître aux bornes des pièces. Comme le montre la Fig. 5.10, ce traitement est nécessaire pour obtenir une répartition correcte des équiflux.

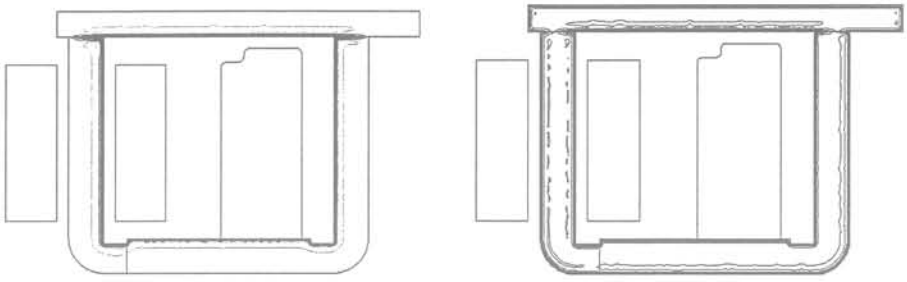


FIG. 5.10: Equiflux en imposant ou non un courant total nul dans les pièces massives

Entrefers et épaisseur de peau

Le matériau dont sont composés le circuit magnétique et la palette est tel que les épaisseurs de peau mises en jeu sont très petites ($\delta = 0.15\,mm$ à 50Hz). Les pièces doivent donc être maillées très finement près de leur surface (cf. Fig. 5.11). D'autre part, les entrefers sont très minces (quelques μm). Comme indiqué au 3.2.6, il est alors nécessaire de mailler finement les frontières proches de ces entrefers. La méthode consistant à utiliser des éléments minces déformables que nous avons proposée au 4.4.3 n'a pas pu être utilisée ici pour simuler le fonctionnement du R5. En effet, nous ne disposons pas pour l'instant du calcul du couple en présence d'éléments minces. Afin de minimiser la taille du système matriciel ainsi que le temps de calcul, nous avons choisi une frontière EF-EIF particulière. Malgré ce choix, traiter le problème réel a un coût calcul trop lourd (6000000 de termes non-nuls, 1H50 par pas de temps sur PIII 500MHZ). Nous avons alors modifié la taille des entrefers résiduels ($60\mu m$). Aucune comparaison ne pourra donc être faite avec des grandeurs expérimentales. Seules des indications sur le fonctionnement global du dispositif et les ordres de grandeurs pourront être obtenus grâce aux simulations. Le temps de calcul est ramené à quelques minutes par pas.

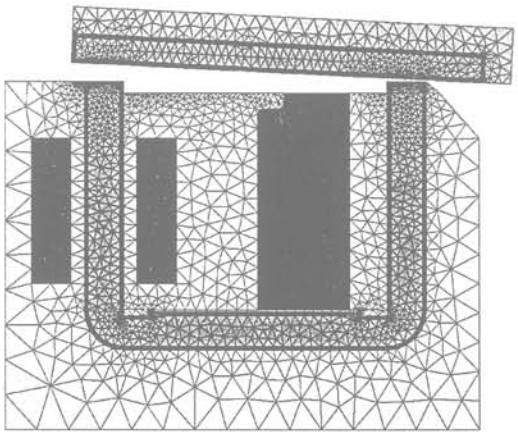


FIG. 5.11: Maillage utilisé lors des simulations avec couplage EF-EIF.

5.3.4 Influence des courants de Foucault

Pour modéliser le fonctionnement du R5, on impose à $t = 0$ une tension sinusoïdale à 50Hz aux bornes de la bobine. Pour cela, on fait appel au couplage avec les équations du circuit électrique. Le composant utilisé ici est de type conducteur filaire.

Deux calculs sont réalisés, l'un avec courants de Foucault, l'autre sans en imposant une conductivité σ nulle dans les matériaux. La Fig. 5.12 montre que dans la première simulation, la palette a décollé puis recollé alors qu'une ouverture totale à été obtenue en l'absence de courants de Foucault. Ceci montre l'importance des effets induits qui conduisent à un non fonctionnement du dispositif. On voit ici tout l'intérêt des formulations utilisées ainsi que des méthodes de prise en compte du mouvement développées.

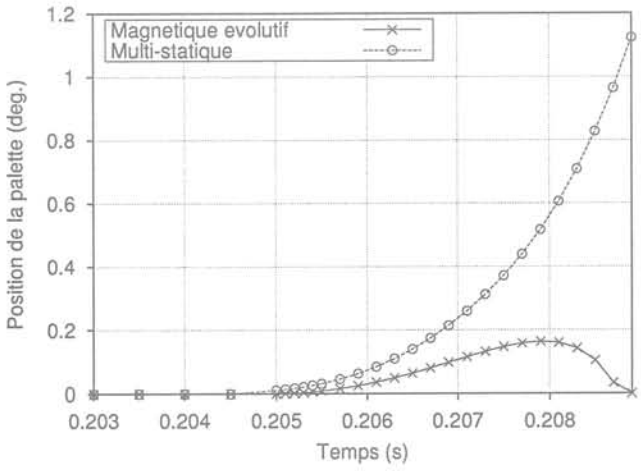


FIG. 5.12: Influence des courants de Foucault sur un cas de fonctionnement

L'énergie apportée par le courant de défaut a été dissipée par effet Joule par les courants de Foucault. La prise en compte de tels phénomènes est un enjeu important pour la miniaturisation des dispositifs électromécaniques, car l'énergie d'excitation sera diminuée.

5.4 Electro-aimant de commande de moteurs

Objectif

Etude d'un dispositif à entrefer multiple. Comparaison expérimentale. Influence de paramètres sur le fonctionnement.

Une étude de ce dispositif a été réalisée dans le cadre d'un stage de DEA par B. Morel [93].

5.4.1 Présentation du dispositif

Description

Dans son offre, Schneider Electric propose des dispositifs de protection et de commande de moteurs. Ils permettent le démarrage et l'arrêt des moteurs et assurent

leur protection contre les courts-circuits ou les surintensités. Ils comprennent deux actionneurs électromécaniques qui ont des rôles très différents et complémentaires :

- Un déclencheur (de type MITOP par exemple), permet une ouverture rapide des contacts à la suite de la détection d'un défaut. Il a un rôle de protection.
- Un électro-aimant de commande qui ferme les contacts lorsqu'on l'alimente. En absence d'alimentation, il revient en position de repos et laisse les contacts ouverts.

Notre étude se porte sur le fonctionnement dynamique de cet électro-aimant de commande.

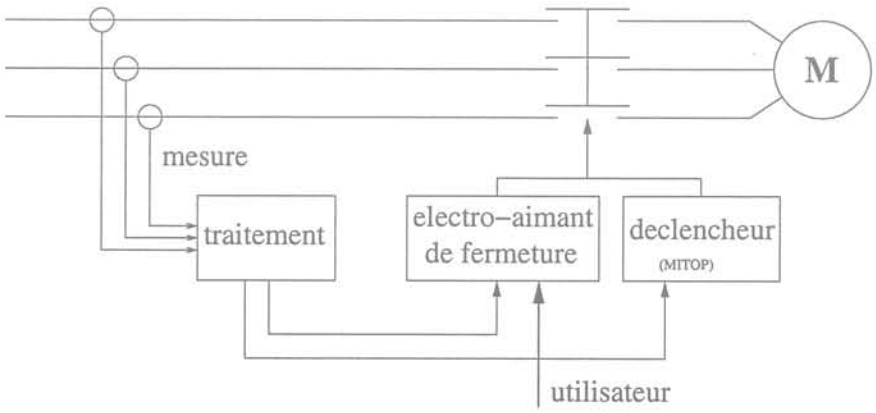


FIG. 5.13: L'électro-aimant dans le dispositif de protection et de commande d'un moteur

La Fig. 5.14 montre un quart de sa géométrie en 3D. Il comporte plusieurs sources de flux magnétique : deux aimants et une bobine entourant le noyau mobile (non représentée sur la géométrie 3D). Le flux créé par la bobine est moteur du déplacement du noyau et doit maintenir celui-ci en position de travail, c'est-à-dire contacts fermés. Ce n'est pas le cas pour le MITOP ou le R5 où la bobine a seulement un rôle de "décrochage".

Fonctionnement

L'électro-aimant sans action extérieure et sans alimentation est bistable. Pour le rendre monostable (il doit revenir en position de repos en absence d'alimentation), il est nécessaire de lui adjoindre un ressort de rappel (cf. Fig. 5.15). D'autre part, en position de travail, les contacts ne sont plus liés mécaniquement au noyau : ils sont maintenus par les ressorts de pôle. Avant la fermeture des contacts, le noyau subit l'action des ressorts de pôles et de rappel. Après fermeture, il est seulement soumis à la force du ressort de rappel.

Pour passer de la position de repos à la position de travail lors d'une phase de fermeture, on voit que si la force magnétique ou l'inertie du noyau n'arrive pas à vaincre l'action du ressort de rappel, les contacts peuvent se ré-ouvrir. Généralement, le courant continue à augmenter dans la bobine et le noyau peut repartir pour fermer à nouveau les contacts. Ce phénomène de fermeture dite "en deux temps" peut-être observé en pratique. Ce type de comportement est néfaste pour le dispositif. En effet, à la première fermeture des contacts, le courant de démarrage du moteur commence

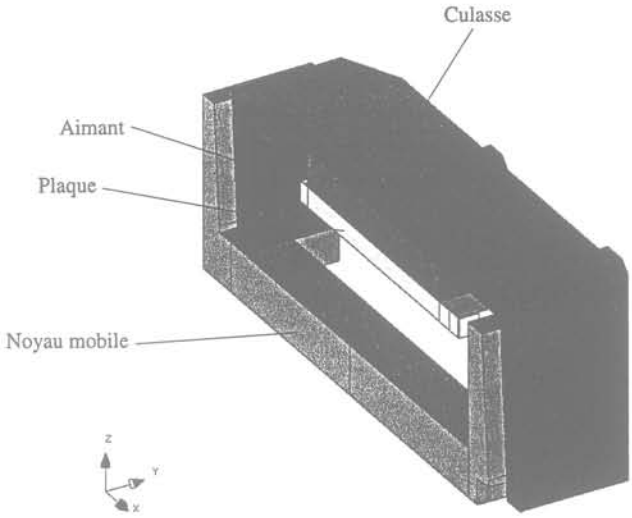


FIG. 5.14: Description de l'électro-aimant

à s'établir. Lors de la réouverture, il y a alors formation d'un arc électrique qui endommage les contacts et les fait fondre en partie. Il y a même risque de soudure à la refermeture.

Les normes imposent d'avoir une fermeture "en un temps" pour une tension de commande de l'électro-aimant supérieure à 0.7 fois sa valeur nominale. La conception du dispositif doit impérativement respecter cette norme. Les enjeux principaux des simulations sont donc de mieux comprendre le comportement dynamique de l'électro-aimant et de connaître les paramètres qui influent sur le phénomène de fermeture en deux temps.

5.4.2 Difficultés

La simulation du fonctionnement transitoire de l'électro-aimant utilise l'ensemble des possibilités de nos formulations et méthodes puisqu'elle doit traiter :

- une géométrie avec des aspects 3D,
- une symétrie,
- la déformation des entrefers,
- l'alimentation en tension de la bobine,
- les courants induits,
- la présence de ressorts et de frottements secs,
- la saturation dans les matériaux magnétiques.

La méthode de la bande de translation permet de prendre en compte des déformations d'entrefers du même type que celles rencontrées ici. Cependant, la géométrie de notre dispositif rend cette méthode difficilement utilisable. La méthode de couplage EF-EIF paraît être la plus adaptée au problème.

L'utilisation d'un couplage circuit avec un composant filaire pour la bobine est nécessaire. La somme nulle des courants induits dans la culasse est imposée, comme dans l'exemple précédent, à l'aide d'un composant massif couplé à une source de

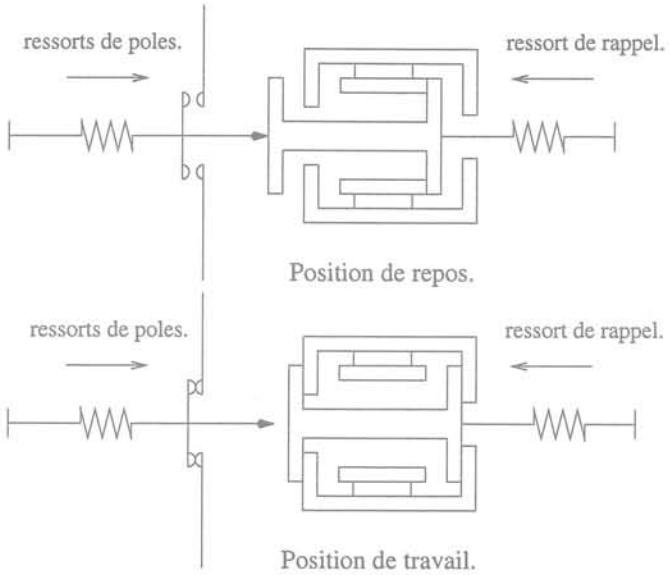


FIG. 5.15: Efforts extérieurs en fonction de la position du noyau mobile

courant nul. Le noyau ne nécessite pas le même traitement car les courants s'y annulent par symétrie.

La caractéristique des ressorts et des frottements secs ont été déterminés expérimentalement. Ces forces sont tracées sur la Fig. 5.16 Une des difficultés pour modéliser

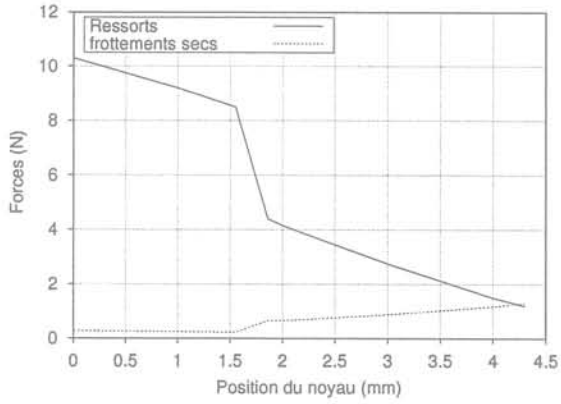


FIG. 5.16: Forces extérieures appliquées au noyau

cet électro-aimant est sa structure qui comporte des aspects 3D non négligeables. Nos formulations et méthodes étant seulement établies pour le 2D, nous avons construit un modèle 2D "équivalent" en essayant de respecter au mieux les valeurs des réluctances principales du dispositif. Pour vérifier la bonne concordance avec un modèle 3D, des simulations 2D et 3D statiques pour différentes valeurs de la position et du courant ont été menées en parallèle.

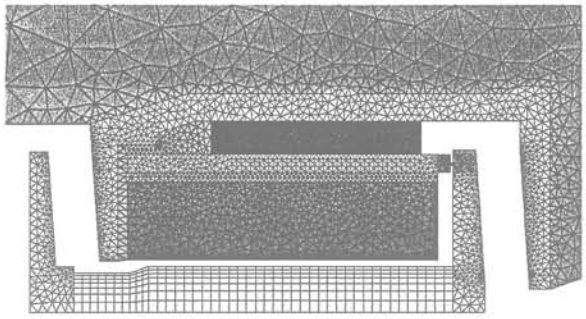


FIG. 5.17: Détail de la géométrie et du maillage utilisé pour les simulations

5.4.3 Résultats

L'approximation 2D de ce problème 3D, ainsi que la mauvaise connaissance de certaines données expérimentales importantes comme l'entrefer de départ ou la caractéristique exacte des matériaux (tôles empilées non-isolées électriquement), font qu'il est difficile d'approcher avec précision les temps de montée obtenus lors des essais. Néanmoins, les simulations reproduisent de manière satisfaisante les allures des courbes expérimentales et respectent les ordres de grandeur (moins de 20%). Le modèle réalisé permet d'étudier l'influence de certains paramètres sur le fonctionnement du dispositif. La Fig. 5.19 compare par exemple deux essais pour deux valeurs de

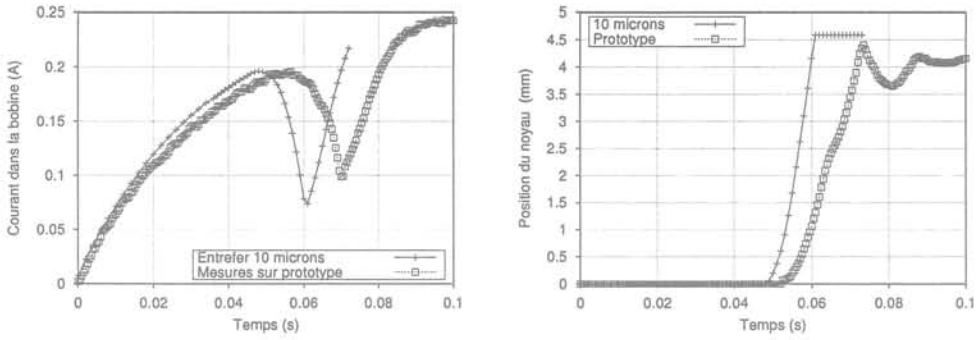


FIG. 5.18: Courbes expérimentales

l'entrefer de départ. La saturation des matériaux magnétiques joue un rôle important (Fig. 5.20).

Pour simuler une situation proche d'une montée en deux temps, nous avons artificiellement durci le ressort de rappel dans notre modèle. On obtient alors les courbes de la Fig. 5.21. Ce type de comportement peut être observé en pratique.

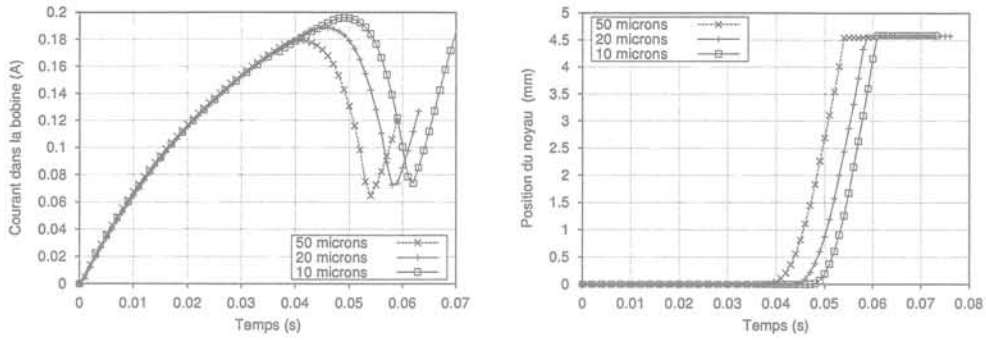


FIG. 5.19: Influence de l'entrefer de départ sur le fonctionnement

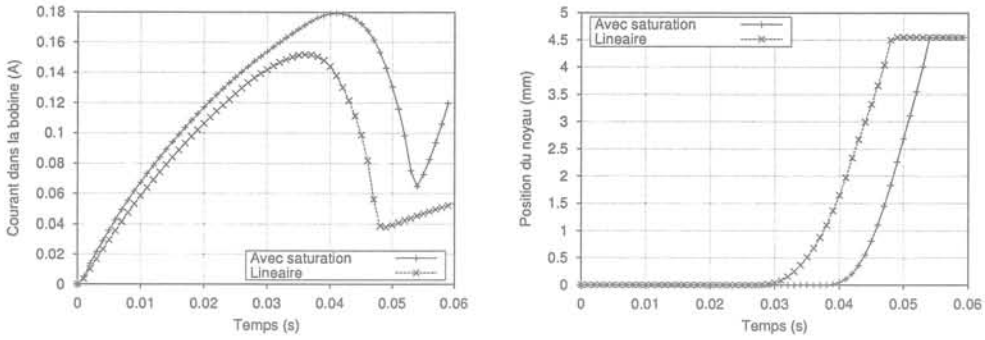


FIG. 5.20: Influence de la saturation sur le fonctionnement

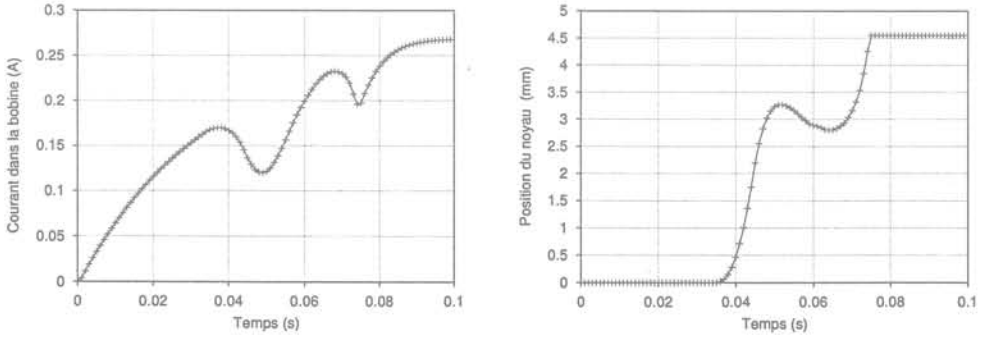


FIG. 5.21: Simulation d'un fonctionnement proche du deux temps.

5.5 Conclusion

Les outils développés permettent de reproduire le comportement dynamique de dispositifs électromécaniques. Ils peuvent être utilisés pour déterminer des grandeurs dynamiques caractéristiques telles que le temps d'ouverture ou la valeur crête du courant dans le circuit de commande, qui sont en général des données critiques pour la conception des dispositifs. Ils permettent aussi de mesurer l'influence de paramètres géométriques ou physiques ainsi que l'importance de phénomènes tels que la saturation ou les courants de Foucault.

Néanmoins, la lourdeur de ces modèles ne permet pas de les utiliser directement pour réaliser un dimensionnement ou une optimisation. Pour cela, on peut faire appel à des modèles basés sur un réseau de réluctances [2]. Ils sont moins précis mais ont l'avantage de permettre des calculs très rapides. L'environnement PASCOSMA développé au L.E.G. au sein de l'équipe Conception et Diagnostic Intégrés permet de plus de les utiliser pour faire de l'optimisation sous contraintes. A partir d'une structure initiale, un cahier des charges et une fonction objectif, le logiciel propose une géométrie optimisée. On voit donc que les modèles réluctants sont complémentaires avec les modèles éléments finis. Ainsi, pour l'étude des dispositifs électromécaniques, il est intéressant d'adopter une démarche utilisant les deux types de modèles. [94]. Une telle démarche est présentée sur la Fig. 5.22.

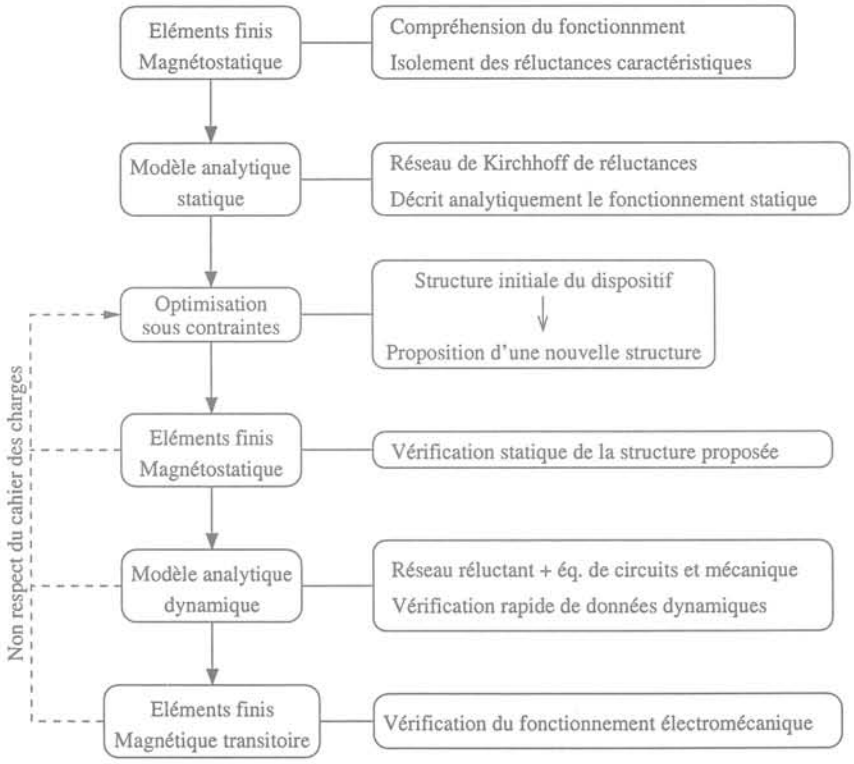


FIG. 5.22: Une démarche de conception alliant modèles éléments finis et modèles analytiques.

L'optimisation par PASCOSMA étant basée sur un modèle statique simple, des vérifications utilisant une modélisation plus élaborée doivent être effectuées. Il est notamment nécessaire de vérifier si la structure proposée respecte toutes les contraintes dynamiques. Nos simulations prennent toute leur importance pour effectuer ce type de vérification.

Conclusion générale

Les performances des machines informatiques actuelles rendent plus abordables les simulations numériques de régimes transitoires. D'autre part, un besoin fort au niveau industriel est de doter les logiciels de conception électrotechnique d'outils destinés à modéliser complètement les convertisseurs mécaniques. Une évaluation fidèle des performances électromécaniques est en effet nécessaire pour arbitrer entre les différentes technologies de déclenchement. Ainsi, il est intéressant de développer des modèles permettant la simulation des régimes transitoires électromécaniques, dans lesquelles les aspects magnétiques, électriques et mécaniques sont pris en compte.

En premier lieu, nous nous sommes intéressés à la description des problèmes des courants de Foucault en présence de pièces en mouvement. Nous avons montré qu'en 3D, il était avantageux d'adopter une approche Lagrangienne des champs et potentiels. L'utilisation des éléments d'arêtes permet une telle description et elle est donc recommandée pour traiter ce type de problèmes.

Notre travail a surtout porté sur la prise en compte du mouvement dans un contexte éléments finis. La méthode couplant les intégrales de frontière aux éléments finis apporte une solution générale et robuste. D'autre part, des expériences de méthodes de remaillage de la partie déformable ont été menées. Elles ont montré que ces techniques étaient performantes, à condition toutefois de veiller à garder une discrétisation volumique de bonne qualité, afin de réduire le bruit numérique introduit lors des changements de maillage. Ceci est une contrainte assez forte en 3D. La généralité et la qualité de la solution apportée par le couplage EF-EIF rendent son utilisation intéressante pour traiter les transitoires électromécaniques en 2D, mais son coût très élevé en ressources informatiques réduit son utilisation 3D au traitement de cas simples. Dans l'avenir proche, pour le traitement du mouvement en 3D, les méthodes de remaillages semblent être les mieux indiquées.

Une expérience originale que nous avons menée est celle du maillage par boules. Nous avons mis en évidence des propriétés intéressantes de cette méthode pour la prise en compte du mouvement. Elle permet en effet de garantir une très bonne qualité de maillage et offre aussi la possibilité de mieux contrôler le nuage de nœuds. Nous avons ainsi proposé une méthode de remaillage qui rend les changements de maillages moins brutaux, dans le but de réduire le bruit numérique de maillage dans les simulations. Pour être réellement compétitive dans le traitement de cas concrets, cette technique doit être retravaillée et améliorée. En particulier, il serait intéressant de mesurer les gains apportés par la méthode.

La présence d'entrefers fins au cours du mouvement introduit des difficultés. Nous avons proposé une technique qui peut être utilisée aussi bien pour le couplage EF-EIF que pour les méthodes de remaillage. Elle consiste à utiliser, lorsque cela est nécessaire, des éléments spéciaux. Les premiers résultats sur des cas particuliers sont encourageants. Son implémentation dans le cas général demande des investigations plus poussées.

Nous avons développé des outils numériques qui rendent possibles en 2D la simulation numérique du régime transitoire de convertisseurs électromécaniques. Après une validation sur des exemples simples, nos modèles ont été utilisés pour traiter des cas industriels. Ils ont permis de calculer des valeurs pertinentes du fonctionnement pour la conception des dispositifs et ils ont aidé à mieux connaître l'influence

de phénomènes tels que les courants de Foucault ou la saturation magnétique sur leur comportement dynamique. Une suite logique de ces travaux est de continuer à développer des techniques pour le mouvement afin de les utiliser dans des études tridimensionnelles.

Annexe

Expression des fonctions de Green modifiées pour la prise des symétries

Symétrie	Fonction de Green
En 2D	
$/Ox$	$G(x,y)+\epsilon_y G(x,-y)$
$/Oy$	$G(x,y)+\epsilon_x G(-x,y)$
$/Ox,Oy$	$G(x,y)+\epsilon_x G(-x,y)+\epsilon_y G(x,-y)+\epsilon_x\epsilon_y G(-x,-y)$
En 3D	
$/yOz$	$G(x,y,z)+\epsilon_x G(-x,y,z)$
$/xOz$	$G(x,y,z)+\epsilon_y G(x,-y,z)$
$/xOy$	$G(x,y,z)+\epsilon_z G(x,y,-z)$
$/yOz,xOz$	$G(x,y,z)+\epsilon_x G(-x,y,z)+\epsilon_y G(x,-y,z)+\epsilon_x\epsilon_y G(-x,-y,z)$
$/yOz,xOz,xOy$	$G(x,y,z)+\epsilon_x G(-x,y,z)+\epsilon_y G(x,-y,z)+\epsilon_z G(x,y,-z)+$ $\epsilon_x\epsilon_y G(-x,-y,z)+\epsilon_x\epsilon_z G(-x,y,-z)+\epsilon_y\epsilon_z G(x,-y,-z)+$ $\epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z G(-x,-y,-z)$

TAB. 5.3: Fonctions de Green modifiées pour les symétries

Bibliographie

[1] J.L. Coulomb et J.C. Sabonnadière, *Eléments finis et CAO en électrotechnique*, Hermes publishing, 1985.

[2] M. Jufer, *Traité d'Electricité de l'E.P.F.L.*, vol. IX,Transducteurs électromécaniques, Presses Polytechniques Romandes, 1985.

[3] G. Dhatt and G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Collection Université de Compiègne. Maloine, 1984.

[4] M.V.K. Chari and S.J. Salon, *Numerical methods in electromagnetism*, Academic Press, 2000.

[5] W.G.V. Rosser, *Classical electromagnetism via relativity : an altermative approach to Maxwells equations*, Butterworths, London, 1968.

[6] P. Robert, *Traité d'électricité*, vol. II, Matériaux pour l'Electrotechnique, Presses Polytechniques Romandes, 1979.

[7] N.W. Aschcroft and N.D. Mermin, *Solid state physics*, Holt Saunders International Editions, 1976.

[8] L. Landau and E. Lifchitz, *Electrodynamique des milieux continus*, Moscou : Ed. Mir, 1969.

[9] J.L. Delcroix et A. Bers, *Physique des plasmas*, Intereditions, CNRS Editions, Paris, 1994.

[10] A. Bossavit, "Le calcul des courants de Foucault en trois dimensions, en présence de corps à haute perméabilité magnétique", *Revue de Physique Appliquée*, vol. 23, pp. 1147–1205, 1988.

[11] L. Kettunen, K. Forsman, and A. Bossavit, "Formulation of the eddy current problem in multiply connected regions in terms of h.", *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 41, pp. 935–954, 1998.

[12] A. Bossavit, "Le calcul des courants de foucault en dimension 3, avec le champ électrique comme inconnue. I : principes.", *Revue de Physique Appliquée*, vol. 25, pp. 189–197, 1990.

[13] O. Biro, K. Preis, W. Renhart, G. Vrisk, and F.R. Richter, "Computation of 3D current driven skin effect problems using a current vector potential", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 29, pp. 1325–1332, 1993.

[14] J.L. Coulomb, *Analyse tridimensionnelle des champs électriques et magnétiques par la méthode des éléments finis*, Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1981.

[15] O. Biro and K. Preis, "On the use of the magnetic vector potential in the finite elment analysis of three-dimensionnal eddy currents", *IEEE Trans.on Mag.*, vol. 25, no. 4, pp. 3145–3149, July 1989.

[16] R. Albanese and G. Rubinacci, "Magnetostatic field computations in terms of two component vector potential", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, pp. 515–532, 1990.

[17] K. Srairi, B. Benjima, M. Feliachi, and G. Develey, "Numerical and experimental studies of a linear electromagnetic actuator supplied by capacitor discharge voltages", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 33, pp. 2061–2064, 1997.

[18] S.M Wang, T. Miyano, and Hubbard M., "Electromagnetic field analysis and dynamic simulation of a two-valve solenoid actuator", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 29, no. 2, pp. 1741–1746, March 1993.

[19] L. Erping and P.M. McEwan, "Analysis of a circuit breaker solenoid actuator system using the decoupled CAD-FE-integral technique", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 28, pp. 1279–1282, 1998.

[20] T. Dreher, *Couplage de le méthode des éléments finis tridimensionnels avec une méthode d'analyse du circuit électrique : application à la modélisation des machines électriques tournantes*, Thèse de doctorat, INPG, 1994.

[21] S. Bouissou, F. Piriou, C. Kieny, and G. Tanneau, "Numerical simulation of a power transformer using 3D finite element method coupled to circuit equations", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 30, no. 5, pp. 3224–3227, September 1994.

[22] S. Bouissou and F. Piriou, "Comparison between two formulations in terms of potential for the coupling of magnetic and electric circuit equations", *IEE Proceedings*, vol. 141, pp. 486–490, 1994.

[23] C. Golovanov, *Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique : application à la simulation de dispositifs électromagnétiques en mouvement*, Thèse de doctorat, INPG, 1997.

[24] Huu Tuan Luong, *Amélioration de la formulation en potentiel scalaire magnétique et généralisation au couplage entre équations de champ et de circuit électrique.*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997.

[25] J.S. Wang, "A nodal analysis approach for 2D and 3D magnetic-circuit coupled problems", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 32, no. 3, pp. 1857–1860, May 1996.

[26] G. Meunier, S. Salon, J.L. Coulomb, and L. Krähenbühl, "Hybrid finite element - boundary element solutions for 3D scalar potential problems", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 22, no. 5, 1986.

[27] O. Biro, K. Preis, G. Vrisk, K.R. Richter, and I. Ticar, "Computation of 3D magnetostatic fields using a reduced scalar potential", *IEEE Trans.on Mag*, vol. 29, no. 2, pp. 1329–1332, March 1993.

[28] P. Lombard and G. Meunier, "A general purpose method for electric and magnetic combined problems for 2D, axisymmetric and transient systems", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 29, pp. 1737–1740, 1993.

[29] L.D. Landau and E. Lifchitz, *Physique théorique : Mécanique*, Moscou : Ed. Mir, 1966.

[30] A. Bossavit, *Computational electromagnetism : Variational formulations, complementarity, edge elements*, Electromagnetism. Academic Press, San Diego, USA, 1998.

[31] C. Golovanov, J.L. Coulomb, Y. Maréchal, and G. Meunier, "3D mesh connection techniques applied to movement simulation", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 34, no. 5, pp. 3359–3362, 1998.

[32] T. Tarhasaari, Forsman K. Koski A., and Kettunen L., "Hybrid formulations for eddy current problem with moving objects", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 34, no. 5, pp. 2660–2663, September 1998.

[33] J. Forsman, K.and Kangas, Salonen J., Arkko A., and Kettunen L., "Properties of 3D magnetostatic hybrid formulations", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 34, no. 5, pp. 2437–2440, September 1997.

[34] Y. Maréchal, *Modélisation des phénomènes magnétostatique avec terme de transport : application aux ralentisseurs electromagnétiques*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1991.

[35] Z. Ren and A. Razek, "A strong coupled model for analysing dynamic behaviours of non-linear electromechanical systems", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 30, no. 5, pp. 3252–3255, September 1994.

[36] J. Stoer and R. Burlisch, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer Verlag, New-York, 1994.

[37] J.N. Reddy, *An introduction to the Finite ELement Method*, McGraw-Hill International Editions, 1985.

[38] E. Vassent, *Contribution à la modélisation des moteurs asynchrônes par la méthode des éléments finis*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1990.

[39] A. Nicolet and F. Delincé, "Implicit runge-kutta methods for transient magnetic field computation", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 32, no. 3, pp. 1405–1408, 1996.

[40] F Cameron, R. Piché, and K. Forsman, "Variable step size integration methods for transient eddy current problems", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 34, no. 5, pp. 3319–3322, 1998.

[41] A. Bossavit, *Electromagnétisme, en vue de la modélisation*, vol. 14 of *Mathématiques et applications*, Springer-Verlag France, Paris, France, 1993.

[42] P. Lombard and G. Meunier, "A general purpose method for electric and magnetic combined problems for 2D, axisymetric and transient systems", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. MAG-29, no. 2, pp. 1737–1740, 1993.

[43] S. Brisset, *Outil et méthodologie pour la conception des moteurs à réluctance varaible à double saillance*, Thèse de doctorat, Université de Lille, 1995.

[44] J. Brauer, B.E. MacNeal, L.A. Larkin, and V.D. Overbye, "New method for modelling electronic circuits coupled to 3D electromagnetic finite elements models", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 27, no. 5, pp. 4085–4088, 1991.

[45] A. A. Razek, J.L. Coulomb, M. Feliachi, and J.C. Sabonadière, "Conception of an air-gap element for the dynamic analysis of the electromagnetic field in electric machines", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 18, pp. 655–659, 1982.

[46] B. Davat, Z. Ren, and M. Lajoie-Mazenc, "The movement in field modelling", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 21, no. 6, pp. 2296–2298, 1985.

[47] A. Buffa, F. Rapetti, and Y. Maday, "Calculation of eddy currents in moving structures by a sliding mesh-finite elements method.", in *COMPUMAG*, Sapporo, 1999, pp. 368–369.

[48] M. Jarnieux, D. Grenier, G. Reyne, and G. Meunier, "F.e.m. computation of eddy current and forces in moving systems, application to linear induction launcher", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 29, no. 2, pp. 1989–1992, 1993.

[49] C. Hérault, *Vers une simulation sans maillage des phénomènes électromagnétiques*, Thèse de doctorat, INPG, 2000.

[50] S.J. Salon, "The hybrid finite element - boundary element method in electromagnetics", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 21, no. 5, pp. 1040–1042, 1985.

[51] S. Kurz, J. Fetzer, G. Lehner, and W.M. Rucker, "A novel formulation for 3D eddy current problems with moving bodies using a lagrangian description and BEM-FEM coupling", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 34, pp. 3068–3073, 1998.

[52] K. Tani, T. Yamada, and Y. Kawase, "A new technique for 3D dynamic finite element analysis of electromagnetic problems with relative movement", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 34, no. 5, pp. 3371–3374, 1998.

[53] Y. Kawase, T. Yamaguchi, M. Yoshida, and K. Hirata, "3D finite element analysis of rotary oscillatory actuator using a new auto mesh method", in *Proceedings of CEFC'2000 Milwaukee*, 2000, p. 401.

[54] J. Mackerle and C.A. Brebbia, *The boundary element reference book*, Computational Mechanics,Sringer Verlag, 1988.

[55] L. Krahënbühl, *La méthode des équations intégrales de frontière pour la résolution des problèmes de potentiel en électrotechnique et sa formulation axisymétrique*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1983.

[56] X. Brunotte, *Modélisation de l'infini et prise en compte de régions magnétiques minces. Application à la modélisation des aimantations des navires*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1991.

[57] F. Bouillault and A. Razek, "Hybrid numerical methos for movement consideration in electromagnetic systems", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 24, no. 1, pp. 259–261, January 1988.

[58] B. Ancelle, *Emploi de la méthode des équations intégrales de frontière et mise en oeuvre de la conception assistée par ordinateur dans le calcul des systèmes électromagnétiques.*, Thèse d'état es-science, Institut National Polytchnique de Grenoble, 1979.

[59] Z. Ren, F. Bouillault, A. Razek, and J.C. Vérité, "Comparison of different boundary integral formulations when coupled with finite elements in three dimensions", *IEE proceedings*, 1988, vol. 135, pp. 501–507.

[60] L. Pichon and A. Razek, "Hybrid finite-element method and boundary-element method using time-stepping for eddy current calculation in axisymmetric problems", *IEE Proceedings*, vol. 136, no. 4, pp. 217–222, July 1989.

[61] Bidjan Haghi-Ashtiani, *Méthodes d'assemblage rapide et de résolution itérative pour un solveur adaptatif en équations intégrales de frontières destiné à l'électromagnétisme.*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1998.

[62] K. Hayami, "High precision numerical integration methods for 3D boundary element analysis", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 26, no. 2, mars 1990.

[63] J.C. Huber, W.M. Rucker, R. Hoschek, and K.R. Richter, "A new method for the numerical calculation of cauchy principal value integrals in BEM applied to electromagnetics", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 33, no. 2, pp. 1386–1389, 1997.

[64] Guy Carron de la Morinais, *Contribution à la modélisation des phénomènes magnétodynamiques en 3 dimensions*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1990.

[65] J.L. Coulomb and G. Meunier, "Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 20, no. 5, pp. 1894–1896, 1984.

[66] H.A. Woodson and J.R. Melcher, *ELectromechanical Dynamics - Part II : fields, forces and motion*, John Wiley and sons, 1990.

[67] Z. Ren, "Comparison of different force calculation methods in 3D finite element modelling", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 30, no. 5, pp. 3471–3474, 1994.

[68] J. Fetzer, S. Kurz, G. Lehner, and M. Rucker, "Some aspects of force computation using FEM-BEM coupling", in *7th International IGTE Symposium*, 1996, pp. 336–340.

[69] J.P. Yonnet, *Etude des paliers magnétiques passifs*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1980.

[70] G. Akoun and J.P. Yonnet, "3D analytical calculation of forces exerted between two cuboidal magnets", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 20, no. 5, pp. 1962–1964, September 1984.

[71] J.Y. Talon, *Génération et amélioration de maillages 2D et 3D pour éléments finis.*, Thèse de doctorat, INPG, 1989.

[72] P.L. George, F. Hecht, and E. Satel, "Automatic mesh generator with specified boundary", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 92, pp. 269–288, 1991.

[73] R. Lohner, "Progress in grid generation via advancing front technique", *Engineering with computers*, vol. 12, pp. 186–210, 1996.

[74] P. Moller and P. Hansbo, "On advancing front mesh generation in three dimensions", *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 38, pp. 3551–3569, 1995.

[75] T. Coupez, *Grandes transformations et remaillage automatique*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1991.

[76] B. Joe, "Delaunay versus max-min solid angle triangulations for three-dimensional mesh generation", *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 31, pp. 987–997, 1991.

[77] L. Kettunen and K. Forsman, "Tetrahedral mesh generation in convex primitives", *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 38, pp. 99–117, 1995.

[78] J.L. Coulomb, "A methodology for the determination of global elctromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces,torques and stiffness", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 19, no. 6, 1983.

[79] F. Hermeline, "Triangulation automatique d'un polyèdre en dimension n", *RAIRO,Analyse Numérique*, vol. 13, no. 3, pp. 211–242, 1982.

[80] K. Shimada and D.C. Gossard, "Automatic triangular mesh generation of trimmed parametric surfaces for finite element analysis", *Computer Aided Geometric Design*, vol. 15, pp. 199–222, 1998.

[81] V. Cingoski, R. Murakawa, K. Kaneda, and H. Yamashita, "Automatic mesh generation in finite element analysis using dynamic bubble system", *Journal of Applied Physics*, vol. 81, no. 8, pp. 4085–4087, 1997.

[82] F. Bossen, "Anisotropic mesh generation with particles", Tech. Rep. CMU-CS-96-134, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, May 13 1996.

[83] M. Desbrun and M.P. Gascuel, "Smoothed particles : a new paradigm for animating highly deformable bodies", Tech. Rep., GRAVIR-IMAG.

[84] S. Dufour, G. Vinsard, and B. Laporte, "2D adaptive mesh with movement", in *Proceedings of CEFC'2000 Milwaukee*, p. 322.

[85] J. Ruppert, "A new and simple algorithm for quality-2D mesh generation", in *4th ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms*, 1993, pp. 83–92.

[86] Ph.G. Ciarlet, *The finite element methods for elliptic problems - Studies in mathematics and its applications*, North-Holland Publishing Company, 1978.

[87] J.B. Albertini, *Contribution à la réalisation d'un logiciel de modélisation de phénomènes électromagnétiques en 3D par la méthode des élements finis : FLUX3D*, Thèse de doctorat, INPG, 1988.

[88] Lucas Saludjian, *Optimisations en électrotechnique par algorithmes génétiques*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997.

[89] F.X. Zgainski, *Un pré-processeur pour l'électromagnetisme, l'électromécanique et l'électroacoustique.*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.

[90] Christophe Guérin, *Determination des pertes par courants de Foucault dans les cuves de transformateurs : modelisation de regions minces et prise en compte de la saturation des materiaux magnetiques en regime harmonique.*, Thèse de doctorat, Institut National Polytchnique de Grenoble, 1994.

[91] M. Perrault, "Optimisation d'un déclencheur à noyau plongeur. Intérêt de l'approche PASCOSMA", DEA génie électrique, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1998.

[92] B. Roussin, "Modélisation et optimisation d'un relais haute sensibilité. mise en évidence des courants de Foucault.", DEA génie électrique, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1999.

[93] B. Morel, "Modélisation d'un bistable à double entrefer", DEA génie électrique, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2000.

[94] V. Leconte, V. Mazauric, B. Roussin, and E. Atienza, "Optimisation and sizing methodology for electromechanical actuators", in *Proceedings of ICEM2000.*

[95] V. Leconte, C. Hérault, Y. Maréchal, G. Meunier, and V. Mazauric, "Optimal adaptation of a finite element mesh for large air-gap deformations.", *submitted to European Physical Journal*, 2000.

[96] C. Hérault, V. Leconte, V. Mazauric, G. Meunier, and Y. Maréchal, "Mesh quality improvement by bubble regularisation", in *Proceedings of CEFC2000*, p. 245.

[97] V. Leconte, V. Mazauric, G. Meunier, and Y. Maréchal, "Remeshing procedures compared to FEM-BEM coupling to simulate the transients of electromechanical devices", in *Proceedings of CEFC2000*, p. 227.

[98] V. Leconte, V. Mazauric, G. Meunier, and Y. Maréchal, "Prise en compte des effets induits dans un relais electromécanique avec un couplage EF-EIF", in *Proceedings of NUMELEC2000*, p. 96.

[99] V. Leconte, C. Hérault, Y. Maréchal, G. Meunier, and V. Mazauric, "Using buble meshing for large air-gap deformations", in *Proceedings of CEFC2000*, p. 318.

[100] V. Leconte, V. Mazauric, G. Meunier, and Y. Maréchal, "Comparing FEM-BEM coupling to a remeshing technique to simulate the transients of an axisymmetrical plunger release", in *Proceedings of EMF2000*.