HAL
open science

Mod'ele statistique de chauffage de la couronne solaire calme

Elena Podlachikova

To cite this version:

Elena Podlachikova. Mod'ele statistique de chauffage de la couronne solaire calme. Planétologie et astrophysique de la terre [astro-ph.EP]. Université d'Orléans, 2002. Français. NNT : . tel-00689891

HAL Id: tel-00689891

https://theses.hal.science/tel-00689891v1

Submitted on 20 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse en co-tutelle présentée à
l'Université d'Orléans et à
l'Université Nationale de Kiev

Pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université d'Orléans (France)

et de

Docteur de Sciences Physique et Mathématique, Université Nationale de Kiev (Ukraine)

Discipline : Physique des plasmas

par

Elena PODLADCHIKOVA

Modèle statistique de chauffage de la couronne solaire calme

Soutenue publiquement le 21 février 2002

Membres du jury

M. I.A. Anissimov	Examinateur	Université Nationale de Kiev
M. J. Heyvaerts	Rapporteur	Observatoire Astronomique de Strasbourg
M. S. Koutchmy	Rapporteur	Institut d'Astrophysique-CNRS, Paris
M. V. Krasnosselskikh	Directeur de thèse	LPCE/CNRS, Université d'Orléans
M. S.M. Levitsky	Directeur de thèse	Université Nationale de Kiev
Mme N. Vilmer	Examinatrice invitée	Observatoire de Paris-Meudon
M. Yu.M. Voytenko	Rapporteur	Observatoire Principal de Kiev

Ça c'est la caisse. Le mouton que tu veux est dedans.
Antoine de Saint-Exupéry

Remerciements

Ma reconnaissance profonde va à mon directeur de thèse V. Krasnosselskikh, pour partager avec moi sa compréhension originale de la physique des plasmas et les traditions de son école scientifique. Merci de m'apprendre à croire en moi-même, de m'avoir tant encouragé et soutenu, de m'avoir apprit à aller droit au but. Je voudrais aussi remercier mon directeur de thèse de l'Université de Kiev, S.M. Levitsky, de m'avoir accueilli dans son équipe et pour ses encouragements à trouver ma propre voie.

Merci à mon microchef B.E. Lefebvre pour son exigence et son sens de l'humour. Merci à T. Dudok de Wit pour sa rigueur et son enthousiasme communicatifs. Je remercie aussi N. Vilmer pour sa bonne humeur et les explications qu'elle m'a inlassablement fournie tout au long de la thèse. Au cours de mes séjours au LPCE j'ai bénéficié de l'atmosphère chaleureuse et stimulante des autres collègues d'équipe V. Lobzine, F. Pereira, J. Soucek.

Je tiens à remercier mes rapporteurs, J. Heyvaerts, S. Koutchmy et Yu.M. Voytenko, pour avoir relu et commenté avec attention ce manuscrit et pour les critiques fécondes. Je remercie également les membres du jury d'avoir accepté d'y participer.

Le travail de cette thèse a aussi bénéficié de conversations et d'échanges avec de nombreuses personnes, dont A.O. Benz, S. Koutchmy, M. Aschwanden, G. Belmont, L. Klein, N. Crosby et G. Trottet.

La forme du manuscrit a été grandement améliorée grâce à la relecture de J.Y. Brochot, J. Nicoullaud et J.L. Pinçon qui l'ont patiemment relu et m'ont appris de nouveaux mots passionnants comme "stipuler".

Merci à F. Lefeuvre, directeur du LPCE, de m'avoir accueilli dans son laboratoire et soutenu au cours de ces années. Merci aussi à I. Langer pour s'être occupée avec beaucoup de gentillesse d'un nombre incalculable de formalités administratives. Merci encore à J. Nicoullaud et C. Révil qui m'ont aussi beaucoup aidé dans ces tâches difficiles. Merci à M. Parrot de m'avoir chaleureusement accueilli lors de mon premier séjour au LPCE. Merci à l 'équipe informatique d'avoir démêlé mes problèmes avec des machines capricieuses, et particulièrement à C. Koppreiter et L. Plançon pour leur gentillesse.

Je veux remercier les professeurs qui m'ont initié à la physique des plasmas, le département de physique de l'espace de l'Université de Kiev, N.Ya. Kotsarenko, V.N. Ivchenko, M.I. Dzubenko, O.P. Verhoglyadova, A.K. Yuhimuk, G.A. Rubo, et finalement G.V. Lizunov et I.A. Anissimov qui m'ont accompagné dans mes tous premiers pas dans la recherche. Je ne suis pas moins reconnaissante à mes 6 camarades de spécialisation

pour avoir formé un groupe si solidaire.

Merci à tous mes amis au laboratoire: Christelle, Elodie, Frédéric, Jean-Yves, Raphaël, Laurent, Camille, Franck, Delphine, Gwénaël, Xavier, Manu, Fabrice, Henri (il y en a encore beaucoup !). Merci pour votre soutien délicat pendant ces temps.

Merci à Monique, Edouard et Lydiane pour leur aide précieuse et leur gentillesse. Merci à ma petite soeur, Tanya, qui se moque de moi en permanence. C'est ça qui me donne des forces. Merci à mes parents et grand-mère pour leurs soutien infini.

Elena Podladchikova

Préface

Bien que le champ magnétique créé par la convection puisse fournir assez d'énergie pour chauffer le plasma de la couronne, la façon dont cette énergie est déposée, redistribuée et dissipée n'est pas complètement comprise. Les observations récentes montrent que la couronne est un milieu dynamique où des phénomènes couvrant toutes les échelles spatiales sont associés à la libération d'énergie magnétique sur des échelles de temps allant de quelques secondes à plusieurs heures. Un des mécanismes de chauffage les plus approprié est la dissipation par des couches de courants (mécanisme dit DC, par opposition aux mécanismes AC basés sur la dissipation par les ondes). Un exemple de ces mécanismes est donné par les éruptions solaires. Ces sont des phénomènes impulsifs les plus énergétiques de la couronne. Ils transmettent essentiellement leur énergie à l'accélération des ions et des électrons puis au chauffage, grâce à la reconnexion magnétique. Récemment, on observe aussi de nombreux phénomènes semblables mais associés à des échelles spatiales plus petites : points brillants-X, illuminations transitoires dans les régions actives, jets-X dans les trous coronaux. Ainsi, récemment des nanoéruptions au dessus du réseau magnétique et à l'intérieur des cellules dans les régions calmes ont été découvertes.

(Parker, 1988) a suggéré que les éruptions et les microéruptions pouvaient être vues comme une agrégation de nombreux phénomènes impulsifs de plus faible énergie (nanoéruptions). Ces événements étant beaucoup plus fréquents que ceux de grande échelle, ce sont de bon candidats pour expliquer le chauffage de la couronne calme. En effet, cette distribution suit une loi de puissance dans certains gammes d'énergies, et son exposant semble être plus grand que 2, bien que des doutes persistent quant à sa valeur exacte. L'étude de la distribution expérimentale de l'énergie totale émise en X-mou et en EUV par les micro- et nanoéruptions semble confirmer l'hypothèse que les événement de petite échelle sont responsables du chauffage. Les lois de puissance, connues depuis assez longtemps pour les éruptions, ont provoqué l'application de modèles statistiques inspirés de l'idée de criticalité auto-organisée. Le modèle que nous proposons dans cette thèse pour le chauffage de la couronne calme se situe dans cette mouvance, bien qu'il ne repose pas directement sur la criticalité auto-organisée pour des raisons que nous

expliquerons.

Notre travail est inspiré par diverses observations récentes sur les processus de chauffage et les petites échelles, parmi lesquelles on peut citer :

- Eric Priest et ses collègues (Priest *et al.*, 1998) ont montré que le chauffage dans les arcs de grande échelle est uniforme et résulte très probablement de la reconnexion turbulente de nombreuses couches de courants de petite échelle.
- Aschwanden et ses co-auteurs (Aschwanden *et al.*, 2000) ont montré que la distribution spatiale des nanoéruptions est homogène dans la couche transitoire des régions calmes. Ils ont prouvé également que les nanoéruptions observées au dessus du réseau magnétique sont des événements semblables aux éruptions, mais crées par des arcs de plus petites échelles.
- Benz et ses co-auteurs (Benz & Krucker, 1998 ; Benz & Krucker, 1999) ont montré que le chauffage se produit au niveau de la chromosphère. La couronne est renouvelée en permanence par un plasma issu de la chromosphère.
- (Schrijver *et al.*, 1998) ont montré, en analysant les magnétogrammes de SOHO, que le chauffage coronal de grande échelle peut être produit par de fréquentes reconnexions magnétiques dans les zones dipolaires de petite échelle qui peuvent se former et disparaître en quelques jours.
- Abramenko, Yurchyshyn & Carbone (Abramenko *et al.*, 1999) ont observé quelques cas de réorganisation de la structure de la vorticité magnétique photosphérique. Les tourbillons de petite échelle se réorganisent en tourbillon de plus grande échelle. Ceci s'appuie sur l'hypothèse qu'une cascade inverse d'hélicité se développe.

Ces résultats récents nous ont amené à examiner la possibilité d'un forçage des petites échelles du champ magnétique dans la couronne calme. Cela revient à supposer que des sources d'énergie magnétique sont associées à des boucles de petite échelle, distribués de façon homogène dans l'espace. Nous avons ainsi proposé et élaboré un modèle d'automates cellulaires pour décrire le chauffage de la couronne solaire avec un tel forçage et une dissipation de petite échelle. Nous avons essayé, autant qu'il nous a été possible, d'inclure dans ce modèle phénoménologique les effets qui correspondent à certains processus physiques bien présents dans la couronne solaire et étudiés par les observateurs ainsi que par des théoriciens.

Dans le premier chapitre nous commençons par des généralités sur le soleil et sur les mécanismes de chauffage le plus souvent discutés dans la littérature scientifique. Ensuite, nous présentons plus en détail les observations des phénomènes de petite échelle, leurs études statistiques et les mécanismes physiques de dissipation de l'énergie. Enfin, nous examinons la criticalité auto-organisée et notamment la

compatibilité de celle-ci avec ces modèles du chauffage coronal.

Dans le deuxième chapitre nous présentons le modèle que nous avons développé. Nous commençons par décrire les différentes sources de petite échelle utilisées : aléatoires et turbulentes ainsi que les mécanismes de dissipation locaux dus à la résistivité anormale et à la reconnexion. Puis nous discutons la physique de base de notre modèle.

Ensuite, nous étudions l'influence des sources et des mécanismes de dissipation de petite échelle sur les propriétés statistiques de la dissipation. La formation de corrélations de grande échelle à partir de processus locaux est discutées. La relation entre les corrélations spatiales du champ magnétique et les propriétés statistiques de la PDF (PDF-probability distribution fonction ou fonction de densité de probabilité) de l'énergie dissipée en fonction du temps est établie. Les propriétés semblable à celles de systèmes montrant de la criticalité-auto-organisé et celles qui en diffèrent sont discutées.

La question est de savoir comment des sources de petite échelle influent sur les structures du champ magnétique. On montre comment différentes sources turbulentes peuvent former des structures spatiales de différentes échelles. On analyse le problème qui consiste à caractériser ces échelles différentes en utilisant la technique de décomposition en valeurs singulières et une caractéristique telle que l'entropie.

Le chapitre suivant résume quelques résultats préliminaires et évoque les développements possibles du modèle. Nous avons introduit la génération des champs magnétiques par effet α. Encore, nous étudions l'effet des sources semblable à la turbulence développée. Nous avons montré que des sources ayant des propriétés non-browniennes (sous- ou super-diffusives) augmentent l'échelle caractéristique spatiale des structures du champ magnétique par rapport au forçage brownien.

Le dernier chapitre propose l'application d'une méthode statistique développée par K. Pearson pour analyser et classer plus précisément des fonctions de distribution. Cette méthode permet la classification des fonctions de distribution à partir de leurs quatres premiers moments, calculables à partir des données expérimentales. Car cette technique est suffisamment simple et robuste pour être utilisée sur des données réelles. Dans notre cas la technique est appliquée aux données simulées ; elle nous permis de classer nos distributions en fonction des paramètres du modèle.

Enfin nous terminons par une conclusion générale et la présentation des directions possibles dans lesquelles nous envisageons de poursuivre le développement de ce modèle.

Table des matières

1 Introduction **1**

1.1 La couronne solaire et le problème du chauffage 1

1.2 Chauffage "AC" par les ondes 4

1.2.1 Dissipation des ondes MHD 4

1.2.2 Exemple d'une cascade Alfvénique turbulente 5

1.3 Chauffage "DC" par dissipation de courants continus 9

1.3.1 La formation et la dissipation des couches de courants 10

1.3.2 Eruptions, nanoéruptions et phénomènes associés 11

1.4 Modèles statistiques sur réseau d'éruptions solaires 14

1.4.1 La Criticalité Auto-Organisée (SOC) 15

1.4.2 Modèles d'avalanche pour les éruptions solaires 16

1.4.3 Echelles et phénomènes physiques pour le chauffage 21

2 Description du modèle de petite échelle **23**

2.1 Sur l'importance des petites échelles. 24

2.2 Forçage et dissipation de petite échelle 25

2.2.1 Les termes source du modèle 27

2.2.2 Critères de dissipation 29

2.3 Mécanismes physiques de dissipation 32

2.3.1 Résistivité anormale 32

2.3.2 Reconnexion 33

2.4 Les principes de base du modèle 35

2.4.1 Les échelles de la source et de la dissipation 35

2.4.2 Echelles spatiales caractéristiques 36

2.4.3 Evolution du modèle sans dissipation 37

2.4.4 Equation de diffusion pour les automates cellulaires du tas de sable . 38

2.4.5 Equation de diffusion pour notre modèle 40

3 Statistique temporelle du flux total d'énergie dissipée en fonction du forçage **43**

3.1 Energie dissipée dans le temps et corrélation spatiale 43

3.1.1 Résultats 45

3.1.2 Résumé. Comparaison avec la SOC 51
3.2 Analyse détaillée des densités de probabilité 52
3.2.1 Etats transitoires et stationnaires 52
3.2.2 Effets de la taille de la grille 54
3.2.3 Sources aléatoires unipolaires 55
3.2.4 Source chaotique unipolaire 58
3.2.5 Applications de Geisel en réseau 59
3.2.6 Sources dipolaires 60
3.3 Discussion du rôle des mécanismes de dissipation 61

4 Structures magnétiques de grande échelle alimentées par des sources différentes 65
4.1 Caractérisation de la complexité spatiale 66
4.2 Complexité spatiale et propriétés de la source et de la dissipation 68
4.2.1 Corrélations spatiales 68
4.2.2 Valeurs singulières et modes spatiaux cohérents 72
4.2.3 Entropie du champ magnétique 75
4.3 Rôle des sources de petite échelle 76

5 Le rôle de la turbulence 79
5.1 Sources et turbulence développée 80
5.1.1 Sources turbulentes 80
5.1.2 Structure spatiale 81
5.1.3 Propriétés de l'énergie dissipée 85
5.2 La dynamo turbulente 87
5.2.1 Principe de l'effet α 87
5.2.2 Introduction de l'effet α dans le modèle 90
5.3 Sources super-diffusives 93

6 Méthode de Pearson pour la classification des densités de probabilité 95
6.1 Le problème de la caractérisation des distributions observées 96
6.2 Approximation visuelle d'une distribution statistique 98
6.3 Les courbes de Pearson pour l'approximation de distributions empiriques . . . 100
6.3.1 Les distributions de Pearson 101
6.3.2 Technique d'approximation par les courbes de Pearson. 105
6.3.3 Evaluation de l'écart entre les distributions théoriques et observées . . 106
6.4 Application de la technique de Pearson à des lois données 106
6.5 Estimation de la distribution de l'énergie magnétique dissipée 109
6.5.1 Application détaillée de la technique de Pearson 109
6.5.2 Probabilité des événements de haute énergie 111
6.5.3 Dépendance de la distribution aux paramètres du modèle 115
6.6 Discussion et conclusion 115

6.7 Annexe A: Estimation de l'exposant 117

7 Conclusions et prospectives **121**

Annexe A. Quiet Sun coronal heating: Sand-pile reconnection model **129**

Annexe B. Quiet Sun coronal heating, a statistical model **165**

Annexe C. Quiet Sun coronal heating: analyzing large scale magnetic structures driven by different small-scale uniform sources **181**

Annexe D. Classification of dissipated energy distributions in the solar corona on the basis of Pearson's curves family **193**

Annexe E. Liste de publications **195**

Bibliographie **197**

Index **206**

Chapitre 1

Introduction

§ 1.1 La couronne solaire et le problème du chauffage

L'énergie créée dans le coeur du soleil par les réactions nucléaire est tout d'abord transmise par rayonnement. La température y est d'environ 15 millions de Kelvin. Dans le tiers externe du soleil, 200 000 kilomètres sous la photosphére, un autre moyen de transport de l'énergie intervient : la convection. Elle résulte de l'effet de la gravitation et du gradient de température entre le coeur du soleil et sa surface (convection de Rayleigh-Bénard). Des cellules de convection se forment qui donnent l'impression d'une structure en nid d'abeille vues du dessus. C'est grâce à cette convection que se forme le champ magnétique du soleil.

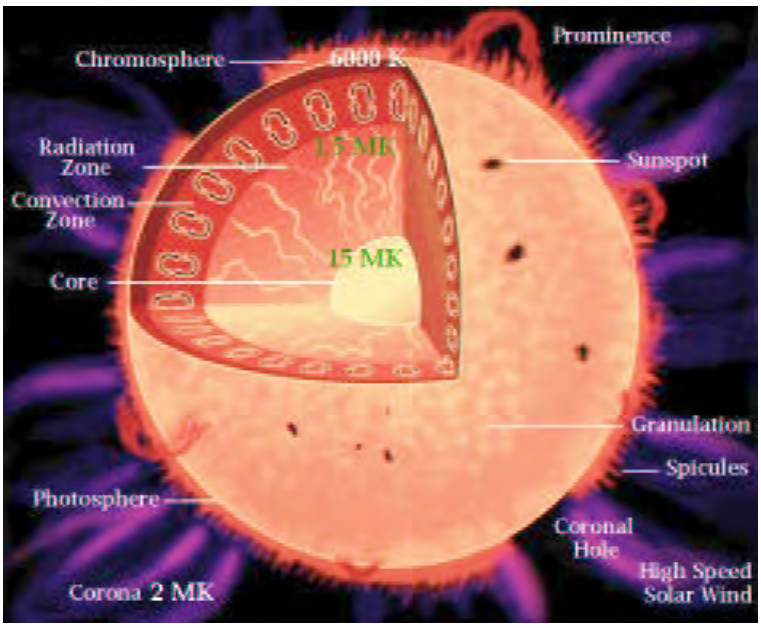

Fig. 1.1 – La structure du Soleil

Au dessus de la zone de convection, la photosphére est une fine couche qui est

la plus profonde observable par rayonnement électromagnétique. Immédiatement au-delà se trouve la chromosphère, fine couche qui émet dans le visible où l'on observe une légère augmentation de la température avec l'altitude.

L'enveloppe externe du soleil est la couronne, constituée par un plasma chaud et peu dense. C'est un milieu structuré par le champ magnétique qui possède une structure complexe (Démoulin & Klein, 2000 ; Koutchmy *et al.*, 2001). En effet, le rapport de la pression cinétique à la pression magnétique est

$$\beta = \frac{\text{pression cinétique}}{\text{pression magnétique}} \approx 1 - 10\%.$$

On y observe des zones actives constituées de grandes boucles où la température et la densité sont grandes, des zones calmes, des trous coronaux avec des lignes de champ ouvertes et aussi de nombreuses structures comme les taches, spicules, points brillants X, "blinckers", jets, plumes, etc. (voir figure 1.1).

La physique de la couronne est dominée par deux grandes questions : le problème de l'accélération du vent solaire et le problème du chauffage. Au dessus de la chromosphère on observe une fine zone de transition où la température augmente très brusquement et la densité décroît très fortement (Fig. 1.2). La température augmente de 10^4 K jusqu'à environ $2 \cdot 10^6$ K. Comment ce chauffage aussi brusque se réalise-t-il ? Des flux de chaleur provenant de la surface plus froide du Soleil étant interdits par les principes de la thermodynamique, d'autres mécanismes plus complexes doivent être recherchés.

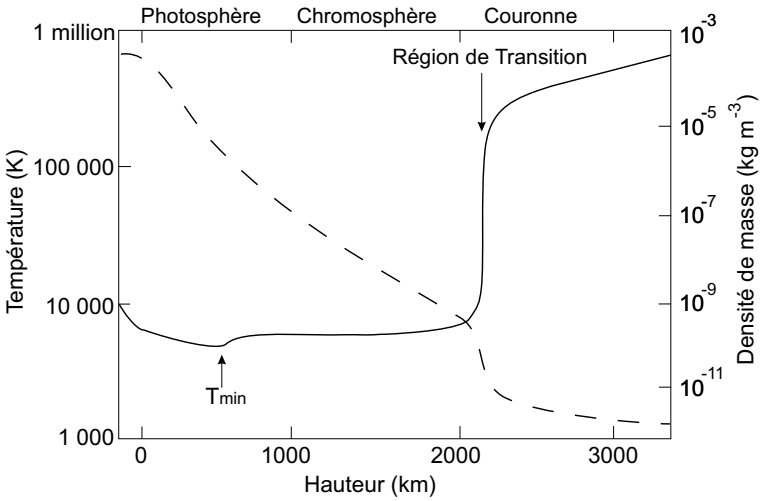

Fig. 1.2 – Profil vertical de la température et de la densité dans la chromosphère et la couronne.

La température n'est pas tout à fait homogène dans la couronne, elle est plus grande (environ $4 \cdot 10^6$ K) dans les zones actives, là où le champ magnétique est le plus fort. L'activité et la structure magnétique s'y manifeste de façon spectaculaire par de grandes boucles ou par des éruptions par exemple. Dans la couronne calme, la température est d'environ $2 \cdot 10^6$ K. Malgré son nom, les récentes observations montrent que la couronne calme est en réalité un milieu très dynamique dont la brillance change et le champ magnétique évoluent en permanence.

A cause de son rôle essentiel dans la structuration de la couronne, le champ magnétique est supposé jouer un rôle fondamental dans le chauffage. Le mécanisme considéré comme le plus réaliste est le dépôt d'énergie dans la couronne sous forme magnétique où elle serait dissipée pour chauffer.

La puissance nécessaire pour compenser les pertes radiatives et chauffer la couronne est estimée à (Withbroe & Noyes, 1977) :

Région calme	300 W·m^{-2}
Région active	(0,5-1) 10^4 W·m^{-2}
Trou coronal	800 W·m^{-2}

Or le flux de Poynting vers la couronne est de l'ordre de

$$\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu} \approx \frac{vB^2}{\mu} \approx 10^4 \; W \cdot m^{-2}$$

en supposant $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ avec $v = 0{,}1$ km·s^{-1} et $B = 100$ G. Cette estimation montre que suffisamment d'énergie magnétique est déposée dans la couronne pour la chauffage.

La source d'énergie réside dans la convection sub-photosphérique. Sous la photosphére, les lignes du champ magnétique sont convectées par le flot turbulent du plasma, dû au grand β. Ce mouvement produit un cisaillement et une torsion des lignes du champ magnétique dans la couronne, accumulant ainsi l'énergie magnétique.

Reste à trouver des mécanismes de chauffage efficaces. Une grande variété de mécanismes ont été proposés. Il est bien possible que certains opèrent dans certaines régions et d'autres dans d'autres régions (zones actives et zones calmes) ou dans différentes structures (par exemple les boucles coronales, les trous coronaux ou les points brillants en X).

Il a été proposé à la fin des années 40 que la couronne pouvait être chauffée par les ondes acoustiques générées par la convection dans les zones internes du soleil. Ces ondes, au cours de leur propagation, forment des chocs dans la couronne et chauffent le plasma par dissipation visqueuse. La difficulté de cette explication vient de ce que les ondes acoustiques sont atténuées et réfléchies par les gradients

de température et de densité dans la zone de transition. Elles ne déposent donc pas suffisamment d'énergie dans la couronne (par ex. (Kuperus *et al.*, 1981)). Avant de passer en revue les mécanismes de chauffage par dissipation de l'énergie magnétique, mentionnons aussi l'idée originale de Scudder (Scudder, 1992) qui estime que le chauffage de la couronne est en réalité l'effet des distributions de particules hors équilibre formées dans la chromosphère.

Les différents mécanismes de chauffage par dissipation des courants créés par le champ magnétique peuvent être divisés en deux classes : les mécanismes de chauffage par les ondes (mécanismes AC) ; les mécanismes de chauffage par dissipation de courants continus (mécanismes DC) (Kuperus *et al.*, 1981 ; Browning, 1991 ; Zirker, 1993). On peut cependant noter que ces deux aspects correspondent à deux descriptions différentes du même phénomène, c'est à dire la réponse de la couronne aux perturbations engendrées par la convection sub-photosphérique (Heyvaerts, 1990 ; Gómez *et al.*, 2000). La distinction est surtout liée aux échelles de temps. Si on note t_A le temps de transit caractéristique d'une onde d'Alfvén dans une boucle et t_p une période caractéristique de la convection photosphérique, alors les mécanismes AC sont favorisés si $t_A \gg t_p$, et les mécanismes DC si $t_A \ll t_p$.

§ 1.2 Chauffage "AC" par les ondes

A cause de la présence d'un fort champ magnétique dans la couronne, les ondes magnétohydrodynamiques (MHD) sont des candidates raisonnables pour le transport et le dépôt d'énergie à grande échelle dans la couronne. Ceci a été suggéré pour la première fois en 1947 par H. Alfvén. De fait, des ondes MHD, particulièrement des ondes d'Alfvén, émises par le soleil sont observées dans le vent solaire.

1.2.1 Dissipation des ondes MHD

Le flux de densité d'énergie transporté par les ondes d'Alfvén arrivant dans la couronne peut être estimé par

$$2\rho_0 \delta v_{\mathrm{rms}}^2 v_A,$$

où ρ_0 est la densité de masse, δv_{rms} l'amplitude des fluctuations de vitesse et $v_A = B_0(4\pi\rho_0)^{-1/2}$ est la vitesse d'Alfvén. En prenant des paramètres typiques des zones actives, ($\rho_0 = 5 \cdot 10^{-15}\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$, $v_A = 2 \cdot 10^8 \mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, et $\delta v_{\mathrm{rms}} = 30\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$), on arrive à une densité d'énergie de $1.8 \cdot 10^4$ W m^{-2}. Les ondes d'Alfvén semblent donc apporter suffisamment d'énergie pour chauffer la couronne.

Pourtant, cette explication se heurte aux difficulté suivantes : le mécanisme d'excitation de ces ondes est mal compris, et les ondes peuvent aussi être réfléchies

par la forte augmentation de v_A dans la zone de transition. Ceci encore plus vrai pour les modes lents et rapides que pour les ondes d'Alfvén. Un des mécanismes possibles de génération des ondes d'Alfvén dans la couronne est l'excitation de résonances dans les boucles coronales. Cela pose aussi quelques difficultés. Pour exciter des ondes d'Alfvén dans une boucle coronale, il faut que le temps caractéristique du mécanisme d'excitation soit plus court que le temps de propagation de l'onde dans la boucle. Or il c'est trouve que le temps de propagation est typiquement de l'ordre de 100s, alors que les temps caractéristiques de la convection des granules sont de l'ordre de 400–900s. Il existe cependant d'autres types d'oscillation des tubes de flux qui pourraient être excités plus facilement.

En admettant que les ondes amènent suffisamment d'énergie dans la couronne, il faut les dissiper pour chauffer le plasma coronal. Pour que le chauffage soit efficace, il faut que ces ondes se dissipent sur des longueurs de l'ordre de quelques longueurs d'onde. Or il est bien connu que les ondes d'Alfvén se dissipent très mal, sauf aux très petites échelles. Le problème essentiel est alors de former des fluctuations d'échelle suffisamment petite.

Un des mécanismes de dissipation possible est l'absorption résonante (Ionson, 1978 ; Hollweg, 1984) d'ondes d'Alfvén de surface existant dans les plasmas non-uniformes (stratifiés) avec un gradient de densité. Pour être efficace, cet effet requiert des ondes de très courte période (5-300s) (Davila, 1987) qui se dissipent avant de faire plusieurs aller-retour dans les boucles.

Le mélange de phases (phase mixing) (Heyvaerts & Priest, 1983) est un autre mécanisme de dissipation possible dû à l'inhomogénéité du plasma. Il permet de former rapidement des gradients de petite échelle. Ces gradients sont créés dans des régions suffisamment inhomogènes par des ondes d'Alfvén qui se propagent le long de lignes de champ parallèles à des vitesses différentes. Ces ondes peuvent aussi perdre leur énergie par des instabilités secondaires de type Kelvin-Helmholtz ou Tearing (Heyvaerts & Priest, 1983) ou par couplage non-linéaire avec d'autres ondes (Nocera *et al.*, 1986 ; Voitenko & Goossens, 2000).

Un troisième mécanisme possible est la dissipation d'ondes cyclotron ioniques générées par des sites de reconnexion de très petite échelle dans le réseau magnétique (McKenzie *et al.*, 1997).

1.2.2 Exemple d'une cascade Alfvénique turbulente

Les couplages entre ondes et la turbulence sont des mécanismes universels dans les fluides formant des fluctuations de petite échelle. La turbulence développée est schématisée par une cascade d'énergie allant des grandes échelles où l'énergie

est injectée, vers les petites échelles où elle est dissipée (Frisch, 1995). Dans les fluides conducteurs, le schéma peut être un peu différent en présence d'un champ magnétique moyen, mais les énergies magnétiques et cinétiques sont aussi dissipées après une cascade vers les petites échelles (Biskamp, 1993). Ces cascades aboutissent entre autre à la formation d'ondes d'Alfvén. Le schéma général contient donc les éléments suivant :

- la région source de grande échelle,
- le domain inertiel ou il n'y a ni dissipation ni génération, dans lequelle l'évolution est dominée par des processus non-linéaires combinés avec les effets de la propagation dans un milieu inhomogène,
- la région de dissipation.

Ici nous considérons une cascade d'ondes ou de vortex d'Alfvén. Les ondes d'Alfvén sont supposées être générées par les mouvements du plasma dans les cellules de grande échelle ou granules. L'échelle caractéristique des ondes générées est en principe de la même taille que l'échelle caractéristique de ces granules, c'est-à-dire de l'ordre de 10^3 km. Ces longueurs d'ondes correspondent à des fréquences caractéristiques de l'ordre de 10^{-5} Hz. Pour obtenir cette estimation nous avons supposé ici que le champ magnétique est de l'ordre de 10 G et la densité de l'ordre de 10^{16} cm^{-3} (Démoulin & Klein, 2000). La dissipation quant à elle a lieu lorsque la fréquence caractéristique est de l'ordre de la gyro-fréquence des ions. Celle-ci est de l'ordre de $10^4 - 10^5$ Hz dans la chromosphère et de l'ordre de 10^3 Hz dans la couronne.

La plupart des modèles, confirmés par les observations dans le vent solaire par exemple, montrent que le spectre de champ magnétique qui se réalise a la forme d'une loi de puissance entre l'échelle de la source et celle de la dissipation :

$$W_k \propto k^{-\alpha}$$

Ici W_k est le contenu d'énergie des ondes dont le vecteur d'onde est de l'ordre de k, et $\alpha \approx -11/3$. L'énergie totale contenue par les ondes peut être evaluée dans ce cas comme

$$W \approx \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} W_k dk \propto \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{k_{\min}^{\alpha-1}} - \frac{1}{k_{\max}^{\alpha-1}}\right)$$

Pour que ces ondes puissent jouer un rôle important dans le chauffage de la couronne solaire, il faut que les conditions suivantes soit remplies :

- le flux d'énergie des ondes transformé en énergie de particules doit être assez grand pour chauffer le plasma jusqu'à la température de la couronne,

– dans le cas de régions ouvertes, ce processus doit être assez rapide pour que la dissipation ait lieu pendant le passage du vent solaire entre la photosphère et la couronne,
– il faut que le spectre d'énergie des ondes se forme assez rapidement pour que l'énergie partant du domaine spectral de géneràtion arrive jusqu'à la région spectrale de dissipation.

L'énergie des ondes dans le domaine spectral de dissipation peut être estimée comme

$$W_{diss} \approx \int\limits_{k_{dis}=\frac{\Omega_i}{V_{Ti}}}^{k_{\max}} W_k dk \propto \frac{1}{\alpha-1}\left(\left(\frac{\Omega_i}{V_{Ti}}\right)^{-(\alpha-1)} - \frac{1}{k_{\max}^{\alpha-1}}\right)$$

En supposant que $k_{\max} \gg \frac{\Omega_i}{V_{Ti}}$ et $(\alpha-1)>0$ on obtient :

$$W_{diss} \approx \left(\frac{\Omega_i}{k_{\min}V_{Ti}}\right)^{-(\alpha-1)} \cdot W_{tot} \approx \left(\frac{\rho_i}{\lambda_{\max}}\right)^{\alpha-1} \cdot W_{tot}$$

En tenant compte du fait que l'échelle à laquelle a lieu la génération des ondes est très grande par rapport au rayon de Larmor, il résulte que l'énergie des ondes dans le domaine spectral de dissipation ne représente qu'une toute petite partie de l'énergie totale contenue par les ondes.

Nous allons estimer maintenant le taux de dissipation d'énergie, que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\frac{d\,(nT)}{dt} \approx \nu W_{diss},$$

où ν est le taux d'amortissement des ondes. Ce taux ne peut pas dépasser la gyro-fréquence des ions, d'où

$$\frac{dnT}{dt} \leq \Omega_i W_{diss}.$$

Si nous considérons le cas stationnaire, où:

$$\frac{d}{dt} = V_{SW}\frac{d}{dr}$$

où V_{SW} est la vitesse du vent solaire, nous obtenons comme borne supérieure

$$\frac{d\,(nT)}{dr} \approx \frac{\Omega_i}{V_{SW}}\left(\frac{\rho_i}{\lambda_{\max}}\right)^{\alpha-1} W_{tot}.$$

Si de plus nous faisons l'estimation fortement surestimée

$$\frac{W_{tot}}{nT} \approx 1,$$

nous obtenons

$$\frac{d\ln(nT)}{dr} \approx \frac{\Omega_i}{V_{SW}} \left(\frac{\rho_i}{\lambda_{\max}}\right)^{\alpha-1}.$$

L'échelle caractéristique du chauffage par les ondes d'Alfvén peut alors être estimée comme

$$L_{AC} \approx 5\frac{V_{SW}}{\Omega_i} \left(\frac{\lambda_{\max}}{\rho_i}\right)^{\alpha-1} \approx 5\lambda_{\max}\frac{V_{SW}}{V_{Ti}} \sim 50\lambda_{\max} \sim R_\odot.$$

Cette échelle est beaucoup plus grande que la taille caractéristique de la zone de transition. De plus, comme nous avons fortement suréstimé le taux de dissipation, il s'agit d'une échelle minimale. Ce mécanisme ne pas être un moyen de chauffer efficacement le plasma de la couronne, au moins dans les régions ouvertes.

A cela, il faut ajouter qu'une autre condition est nécessaire pour que la dissipation des ondes d'Alfvén ait lieu. Les ondes sont générées dans les très grandes échelles à la base de la couronne, et les processus non-linéaires doivent être suffisamment rapides pour acheminer l'énergie vers les petites échelles avant que l'énergie ne parte dans le vent solaire.

Le taux de transfert d'énergie peut être évalué en écrivant que le flux d'énergie dans l'espace des phases soit constant:

$$W_k\frac{dk}{dt} = const.$$

En supposant que ce flux est dû à une interaction non-linéaire entre les ondes de temps caractéristique τ_{NL}, on peut estimer que

$$\frac{dk}{dt} \approx \frac{k}{\tau_{NL}}.$$

Le temps τ_{NL} peut être estimé par exemple dans le cadre de la turbulence faible, dont les équations pour un ensemble d'interactions à 3 ondes est typiquement de la forme :

$$\frac{dN_k}{dt} = V_{NL}(k,k_1,k_2)\left(N_{k_1}N_{k_2} - N_kN_{k_1} - N_kN_{k_2}\right)$$

où $N_k = \frac{W_k}{\omega_k}$. Dans le cas d'interactions d'ondes d'Alfvén avec des ondes basses fréquences, on obtient

$$\tau_{NL}^{-1}(k,k_1,k_2) \sim V_{NL}(k,k_1,k_2)\,N_k \approx \omega_s\frac{W}{nT}.$$

où ω_s est la fréquence des ondes acoustiques ou magnétosonores lentes. Cela donne :

$$\frac{1}{\omega_s}\ln\left(\frac{\lambda_{\max}}{\rho_i}\right) \sim T \sim \frac{10}{\omega_s} \sim \frac{10\lambda_{\max}}{c_s}$$

Ici encore, il semble que ce temps caractéristique soit trop long pour que le spectre se développe jusqu'à l'échelle de dissipation.

§ 1.3 Chauffage "DC" par dissipation de courants continus

Les mécanismes dits "DC" requièrent un forçage plus lent que les mécanismes précédents. La source d'énergie réside dans l'agitation lente et aléatoire des pieds des lignes de champ. Les mouvements de cisaillement et de rotation accumulent l'énergie magnétique et génèrent des courants. La dissipation de ces courants peut produire un chauffage.

Diverses terminologies sont utilisées pour décrire les phénomènes observés et les mécanismes de dissipation des courants. Ces mécanismes de chauffage "direct" par dissipation des courants peuvent être classés en deux catégories (Spicer & Brown, 1980) : la dissipation des courants parallèles au champ magnétique, pour $\beta \ll 1$, et la dissipation de couches de courants perpendiculaires, pour $\beta \gg 1$, laquelle fait intervenir la reconnexion magnétique (Priest & Forbes, 2000).

Le rapport entre le transport du champ B par convection et la diffusion induite par la résistivité est mesuré par le nombre de Reynolds magnétique

$$R_m = \frac{VL}{\nu}$$

Celui ci vaut entre 10^6 et 10^{12} dans le Soleil. En conséquence le champ magnétique est considéré gelé dans le plasma à une bonne approximation, à l'exception notable des singularités où les lignes de champ magnétique peuvent se casser et se reconnecter en dissipant de leurs énergies magnétiques. De l'énergie magnétique est ainsi extraite. Le temps de diffusion du champ magnétique par résistivité, $t_\eta = l^2/\eta$, est très grand pour toutes les échelles observables, ce qui montre que la mécanisme de dissipation par la résistivité normale du plasma coronal n'est pas efficace. Par contre, la reconnexion dans des couches singulières est un processus rapide, de l'ordre de $t_A = l/V_A$ où V_A est la vitesse d'Alfvén, et est donc un mécanisme beaucoup plus efficace.

La reconnexion magnétique est un candidat naturel pour expliquer un certain nombre de phénomènes observé dans les zones fermées de la couronne : les éruptions, les événements explosifs, les points brillants en X ou les "blinckers". Il existe de plus quelques indications indirectes de son existence, comme par exemple la distribution de la température dans les grandes boucles coronales (voir (Priest *et al.*, 1998 ; Priest, 1999) et les références citées). Les mécanismes DC sont, à l'heure actuelle, les plus compatibles avec les observations de la couronne solaire et plus plausibles que les mécanismes AC (sauf dans les zones ouvertes).

1.3.1 La formation et la dissipation des couches de courants

Si les mouvements des lignes de champ dans la photosphére sont suffisamment lents, le champ peut approximativement évoluer de façon quasi-statique en suivant une série d'équilibres MHD. Pour $\beta \ll 1$ les équilibres sont souvent supposés être "force-free", $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$.

Parker (Parker, 1972 ; Parker, 1983) a suggéré que cette évolution quasi-statique ne peut en réalité pas évoluer vers de tels équilibres, et amène naturellement en MHD idéale à la formation de couches de courants singulières associées à des discontinuités tangentielles. A cause de la grande complexité topologique des lignes de champ dans un tel état, ce processus a été baptisé par Parker "dissipation topologique". Parker a montré que la dissipation des couches de courant ainsi formées peut suffire au chauffage de la couronne active.

Ce modèle a été critiqué par Ballegooijen (van Ballegooijen, 1985) qui suggère qu'un état d'équilibre homogène doit s'établir sans apparition de couches de courant singulières. La dissipation d'énergie serait dans ce cas assurée par une cascade d'énergie magnétique vers les petites échelles (van Ballegooijen, 1986).

On peut donner une explication à la formation de couches de courants un peu différente de schéma proposé par Parker. Un mécanisme possible et relativement simple est la formation des couches de courant à partir de points X [1] (Syrovatskii, 1971 ; Somov & Syrovatsky, 1977). Plusieurs mécanismes de formation à partir de configurations particulières ont été proposés (Browning, 1991 ; Priest & Forbes, 2000). Donc, même si le schéma proposé par Parker n'est pas entièrement juste, les couches de courant peuvent exister pour d'autres raisons. En effet, les simulations numériques MHD d'un système perturbé par un mouvement continu des lignes de champ montrent la formation de fines couches de courants (Longcope & Sudan, 1992 ; Galsgaard & Nordlund, 1996).

Un autre mécanisme naturel de formation de couches de courant aux petites échelles est la cascade turbulente, laquelle peut résulter de l'agitation lente des lignes de champs par les mouvements photosphériques. Quelques arguments qualitatifs peuvent être avancés pour décrire l'état vers lequel la turbulence va relaxer, comme par exemple la conservation approximative de l'hélicité magnétique (Heyvaerts & Priest, 1984). Dans les boucles coronales où le comportement est dominé par le champ magnétique, les fluctuations de champ magnétique et de vitesse se concentrent essentiellement dans le plan perpendiculaire au champ magnétique moyen. Ces fluctuations générées par interactions nonlinéaires tendent à former

1. un point X est une configuration 2D où le champ magnétique s'annule. Ce type de configuration est classique pour les modèles de reconnexion.

de fines couches de courant cohérentes après des temps de l'ordre de quelques t_p (Gómez & Ferro-Fontan, 1988 ; Heyvaerts & Priest, 1992 ; Einaudi *et al.*, 1996 ; Dmitruk & Gómez, 1997) (voir aussi la revue (Gómez *et al.*, 2000)).

Plusieurs mécanismes sont donc possibles pour former de fines couches de courants. Parker a baptisé les événements associés à leur dissipation "nanoéruptions" (Parker, 1988), car ce sont des événements semblables aux éruptions solaires.

1.3.2 Eruptions, nanoéruptions et phénomènes associés

Les éruptions sont les plus puissantes manifestations de l'activité solaire, pouvant libérer jusqu'à 10^{32} erg pendant 10^3 s. A certains instants particuliers, le dégagement d'énergie peut même être plusieurs fois plus important. La partie principale de l'énergie de l'éruption est convertie en éjections du plasma jusqu'à 1000 km·s^{-1}, des particules accélérées jusqu'à des énergies gigantesques et sous forme de rayonnement électromagnétique dans une très large gamme de fréquences. Les éruptions peuvent occuper une grande place (parfois jusqu'à 10^{-3} de la demi-sphère visible du Soleil) sous la forme de deux rubans éruptifs observables dans les raies chromosphériques. En général ces rubans sont disposés dans des domaines de champs magnétiques de polarité opposées. Lors d'éruptions, un intense rayonnement X et UV est également observé en provenance de la couronne, avec des profils temporels différents selon la longueur d'onde.

Les modèles théoriques et l'interprétation des données témoignent en faveur de la supposition que le principal processus qui conduit à une éruption est conditionné par l'accumulation de l'énergie libre magnétique dans la chromosphère supérieure et la couronne inférieure. L'énergie libre est l'énergie magnétique excédentaire par rapport à l'énergie du champ potentiel ayant les mêmes sources dans la photosphére. Ce processus d'accumulation est identique à celui discuté précédemment, dû à l'agitation des lignes de champ dans la photosphére. L'excédent d'énergie être libéré soudainement par reconnection magnétique lorsque une couche de courant singulière ou une ligne neutre apparaît.

Trois stades du développement de la couche du courant peuvent être distingués. La phase initiale, de relativement de longue durée (des heures ou des dizaines d'heures), est le stade de la formation ou de l'élargissement de la couche du courant dans un état de quasi-équilibre.

Lorsque l'accumulation d'énergie ne peut plus être compensée par l'effet Joule et les pertes radiatives, commence le deuxième stade appelé phase explosive (ou impulsive). Elle se caractérise par une réduction brutale de la conductivité de la couche en conséquence de l'excitation de la turbulence qui conduit à une pénétration

rapide du champ dans la couche et à une rupture rapide (de l'ordre de quelques dizaines de secondes) de la couche. Cette dissipation d'énergie s'accompagne de courants hydrodynamiques, de flots de chaleur et de particules accélérées (électrons, protons et ions plus lourds). Ces particules accélérées le long des lignes de champs produisent alors le rayonnement dans les rubans, séparés par la ligne neutre qui reste sombre.

Le troisième stade - la phase chaude de l'éruption - correspond au stade de l'existence de régions chaudes coronales dans le domaine de reconnexion des lignes magnétiques de force. Ici la dissipation d'énergie se fait principalement grâce à la résistivité anormale.

Des phénomènes de ce type sont observés dans plusieurs échelles et dans différentes d'énergie. Les nanoéruptions proposées par Parker appartiennent aussi à cette catégorie mais à des énergies beaucoup plus faibles.

Certains phénomènes d'échelle plus petite que les éruptions, les microéruptions, ont d'abord été détectées en X-mou par une expérience embarquée sous ballon par (Lin *et al.*, 1984). Le développement de nouveaux instruments embarqués sur satellite (YOHKOH, SOHO, TRACE) ou basés au sol (VLA) capables d'effectuer des observations dans différentes gammes de fréquences avec une résolution élevée à permis d'observer des événements éruptifs de plus petite taille (environ mille kilomètres). De tels phénomènes ont été observés dans des régions actives, mais aussi dans les régions calmes du Soleil et dans les trous coronaux. Les éruptions de petite intensité observées dans les régions actives se sont avérées très rares et insuffisamment puissantes pour expliquer le chauffage (Shimizu *et al.*, 1994). Ces observations ont été effectuées dans des régions de fort flux de fond et de fort bruit lumineux. Les mêmes microéruptions peuvent être plus facilement détectées dans la couronne calme. Des observations en X-mou (Benz *et al.*, 1997) et des observations en EUV (Harrison, 1997) ont révélé une émission d'énergie plus grande et un chauffage intense au-dessus du réseau magnétique. Des phénomènes semblables formant de petits jets sur le limbe ont été observés par Koutchmy et al. (Koutchmy *et al.*, 1997). Plus les instruments sont sensibles, plus le nombre de petits événements détectés est important.

Une autre façon d'éclairer le problème concernant les échelles caractéristiques des événements dissipatifs principaux consiste en l'étude statistique des différents paramètres observés. L'objectif principal d'une telle étude est d'obtenir la Fonction de Densité de Probabilité de l'énergie dissipée sur une grande gamme d'énergie.

Pour les éruptions régulières, qui arrivent principalement dans des régions actives, (Crosby *et al.*, 1993) ont constaté que l'énergie totale rayonnée par bremss-

trahlung en X-dur par les électrons accélérés par les éruptions possède une distribution en loi de puissance $f(E) \propto E^{\alpha}$ avec l'exposant $\alpha = -1.53 \pm 0.02$. Avec une telle distribution, l'énergie fournie par les éruptions dans les régions actives n'est pas suffisante pour expliquer le chauffage (Hudson, 1991).

Le facteur crucial qui détermine les caractéristiques du processus de chauffage et ses échelles est l'exposant de la loi de puissance de la PDF. S'il est plus grand que -2, le contribution principale lieu dans les événements dissipatifs intenses de grande échelles. S'il est inférieur à -2, la contribution principale au chauffage provient des petites échelles. La raison en est que, pour contribuer efficacement au chauffage, les événements de petite échelle (donc peu énergetiques) doivent étre beaucoup plus nombreux (Hudson, 1991).

Un résultat important qui soutient l'hypothèse de Parker a été annoncé par Krucker & Benz (Krucker & Benz, 1998). Ils ont trouvé, à partir des observations de Yohkoh/SXT, que la distribution d'énergie suit une loi de puissance dans la gamme d'énergie $10^{24} - 10^{26}$ ergs avec un exposant d'environ -2.59. Ce résultat a été obtenu en supposant que la hauteur de la région des éruptions est constante. Les auteurs n'ont pas seulement conclu que les événements éruptifs faibles gouvernent le processus de chauffage, mais ils ont aussi remarqué que les microéruptions de petite échelle les plus brillantes se trouvent au-dessus des éléments du réseau magnétique et que les régions les plus denses présentent un niveau de fluctuations plus élevé. Cela signifie que la couronne est continuellement alimentée par la matière chromosphérique qui a été chauffée. (Mitra-Kraev & Benz, 2001) ont discuté les mêmes observations, mais en supposant que la hauteur varie proportionnellement à la racine carrée de l'aire, et ont montré qu'avec cette hypothèse, l'exposant est un peu plus grand, mais toujours inférieur à -2. Ce résultat a été confirmé par (Parnell & Jupp, 2000), qui ont évalué l'exposant entre -2 et -2.1 en utilisant les données de TRACE. Cependant, (Aschwanden *et al.*, 2000) en utilisant les mêmes données ont trouvé une valeur de l'exposant significativement différente : -1.80, suggérant qu'il ne puisse pas y avoir assez d'énergie dans les microéruptions ou les nanoéruptions pour chauffer entièrement la couronne calme. Ces derniers auteurs mettent donc en doute l'hypothèse que le chauffage ait lieu aux petites échelles, qui selon eux, reste controversée.

Ces mêmes auteurs ont analysé des observations de nanoéruptions de TRACE dans la gamme d'énergie s'étendant de 10^{24} à 10^{26} ergs dans deux longueurs d'ondes, 171 Ået 195 Å. Ils ont montré que les nanoéruptions EUV représentent des versions miniatures des plus grandes éruptions observées en X-mous et X-durs réduites à des températures plus basses ($T_e < 2MK$), des densités inférieures

($n_e < 10^9\ cm^{-3}$) et des échelles spatiales plus petites ($l \approx 2$ à 20 Mm). Ils ont montré que le temps de refroidissement est défini par le refroidissement radiatif, mais la durée du refroidissement conducteur est d'un ordre de grandeur plus petit, suggérant des cycles de chauffage répétitifs. Ils ont admit l'hypothèse que le chauffage a lieu principalement autour des pieds des arcs, suggérant implicitement que l'échelle des sources puisse être encore plus petite que l'échelle des sites de dissipation. Ils ont présenté une distribution spatiale des nanoéruptions qui semble être tout à fait homogène (voir la figure 1 de leur article). Ils suggèrent que le chauffage peut avoir lieu dans les échelles encore plus petites que les échelles des nanoéruptions. Nous utilisons dans notre modèle l'idée tout à fait semblable que les sources devraient être distribuées homogènement dans l'espace.

Il faut encore mentionner que (Benz & Krucker, 1998) et (Berghmans *et al.*, 1998) ont remarqué que des événements dissipatifs arrivent non seulement sur les frontières du réseau magnétique, mais aussi à l'intérieur des cellules. Ils sont arrivés à la conclusion que ces événements ont une nature tout à fait semblable.

§ 1.4 Modèles statistiques sur réseau d'éruptions solaires

Dans le paragraphe précédent, nous avons discuté les particularités statistiques des éruptions solaires, et particulièrement les distributions en loi de puissance qui leur sont associées. Les éruptions solaires ne sont donc pas distribuées selon une Gaussienne, comme les fluctuations thermiques. La distribution en loi de puissance de l'énergie rayonnée dans certaines longueurs d'onde suggère qu'elles n'ont pas d'énergie caractéristique associée, du moins dans une large gamme d'énergie imposée par la physique et la résolution instrumentale. De grandes dévia- tions par rapport à l'énergie moyenne sont donc tout à fait possibles. Cette distribution est compatible avec l'hypothèse de Parker (Parker, 1988) qui stipule que les émissions en X sont dues à une multitude de dissipations de discontinuités tangentielles (nanoéruptions). Ce point de vue suppose donc une "organisation" ou coopération entre petites éruptions pour produire une grande éruption. De tels phénomènes sont difficile à approcher théoriquement ou numériquement d'une manière globale, à cause de la très grande diversité des échelles temporelles et spatiales mises en jeux.

Bak, Tang et Wiesenfeld (Bak *et al.*, 1987 ; Bak *et al.*, 1988), en introduisant le concept de criticalité auto-organisée ou SOC, ont proposé une explication phénoménologique de l'origine des lois de puissance et de l'invariance d'échelle par la coopération de nombreux degrés de liberté dans les systèmes complexes. Une

application de ce concept aux éruptions solaires a été proposée par Lu et Hamilton (Lu & Hamilton, 1991). Après avoir introduit plus en détail la SOC, nous décrirons les modèles d'éruptions qui s'en sont inspirés. Le chapitre se termine par une courte discussion de l'application de ces modèles au chauffage de la couronne solaire.

1.4.1 La Criticalité Auto-Organisée (SOC)

Bak et al. (Bak *et al.*, 1987 ; Bak *et al.*, 1988) ont remarqué que certains systèmes complexes[2] hors–équilibre peuvent partager certaines propriétés macroscopiques avec les systèmes en équilibre thermodynamique dans un état de transition de phase critique. Ces propriétés communes sont (Sornette, 2000) :

- des corrélations spatiales et temporelles à longue portée, décroissant en loi de puissance,
- les longues queues en loi de puissance des densités de probabilité.

Dans un tel état critique, une perturbation locale se propage dans tout le système, produisant des corrélations à très longue portée (de l'ordre de la taille du système). Les degrés de liberté du système sont alors tous corrélés les uns aux autres, et ne peuvent être considérés individuellement.

Dans ces systèmes hors équilibre, la lente décroissance en loi de puissance des densités de probabilité correspond à l'apparition de grandes fluctuations bien plus grandes que les fluctuations moyennes, lesquelles dans la nature pourraient prendre la forme de tremblements de terre, tornades, avalanches ou d'éruptions solaires.

Ce type de comportement a été baptisé par Bak et al. "Criticalité Auto-Organisée" (Self-Organized Criticality, ou SOC). Depuis, le concept s'est enrichi de nombreuses applications, mais manque encore d'une définition et d'une compréhension précise (Jensen, 1998 ; Sornette, 2000). Toutefois, on peut identifier quelques ingrédients essentiels :

- un grand nombre de degrés de liberté en interaction locale,
- l'interaction entre degrés de liberté domine la dynamique intrinsèque de chacun d'eux, qui est ici négligée,
- il existe un mécanisme d'instabilité dépendant d'un seuil,
- la relaxation de l'instabilité conserve certaines variables, telle que l'énergie, ce qui permet de créer une "avalanche" d'instabilités pouvant se propager loin de la perturbation initiale,

2. Un système complexe est formé par un très grand nombre de degrés de liberté interagissant localement (Badii & Politi, 1997).

– une nette séparation des échelles de temps de la source et de la relaxation, $\tau_{source} \gg \tau_{relax}$

Le concept de SOC a été illustré par Bak et al. par un tas de sable sur lequel on dépose un par un des grains de sable. Lorsque la pente du tas de sable dépasse un certain seuil (voir fig. 1.3) les grains de sable glissent ce qui permet de diminuer la pente à l'endroit de l'instabilité mais peut aussi créer de nouvelles instabilités plus loin, ce qui forme une avalanche. Après un régime transitoire, le tas de sable se met de lui-même dans un état métastable, où la pente est partout proche du seuil d'instabilité. Une fois que le tas de sable se place dans cet état, certaines variables comme la taille ou la durée des avalanches sont distribuées selon des lois de puissance (Bak *et al.*, 1988 ; Kadanoff *et al.*, 1989), et le spectre de puissance de la série temporelle des avalanches est aussi en loi de puissance (Bak *et al.*, 1988 ; Jensen, 1998). Un aspect remarquable de ce modèle est que l'existence des lois de puissance et la valeur de leurs exposants ne dépendent pas du seuil de l'instabilité. Le système se place donc de lui-même dans un état critique, sans qu'il soit nécessaire d'ajuster aucun paramètre. Cette affirmation doit cependant être nuancée par le fait que le rapport du temps de relaxation sur le temps de la source est un paramètre qui doit nécessairement tendre vers 0 pour que la SOC apparaisse (Sornette *et al.*, 1998 ; Vespignani & Zapperi, 1998 ; Sornette, 2000).

Depuis l'introduction du tas de sable de Bak, Tang et Wiesenfeld, des simulations numériques ont montré l'existence de SOC dans d'autres modèles (voir (Jensen, 1998) et les références qui y sont citées). Il a été aussi montré que certains modèles ne présentent une SOC seulement pour des systèmes de petite taille, laquelle disparaît lorsque cette taille augmente (voir (Grassberger & Kantz, 1991) pour un modèle de feux de forêts, et (Held *et al.*, 1990) pour une expérience réelle de tas de sable). Cependant, la SOC n'est pas toujours un effet numérique, car son existence a pu être rigoureusement prouvée dans un modèle de tas de sable particulier (Dhar, 1990). En fait, chaque modèle est un cas particulier, et une théorie complète de la SOC (par ex. (Grinstein *et al.*, 1990 ; Hwa & Kardar, 1992 ; Vespignani & Zapperi, 1998) manque toujours. Notons que beaucoup de modèles de SOC, par exemple le modèle d'avalanches, utilisent la notion plus ancienne d'automates cellulaires, qui sont des degrés de liberté distribués sur un réseau et qui peuvent prendre un nombre fini d'états (Wolfram, 1983 ; Badii & Politi, 1997).

1.4.2 Modèles d'avalanche pour les éruptions solaires

La criticalité auto-organisée étant une des possibilités pour expliquer les distributions en loi de puissance de certains paramètres physiques de systèmes com-

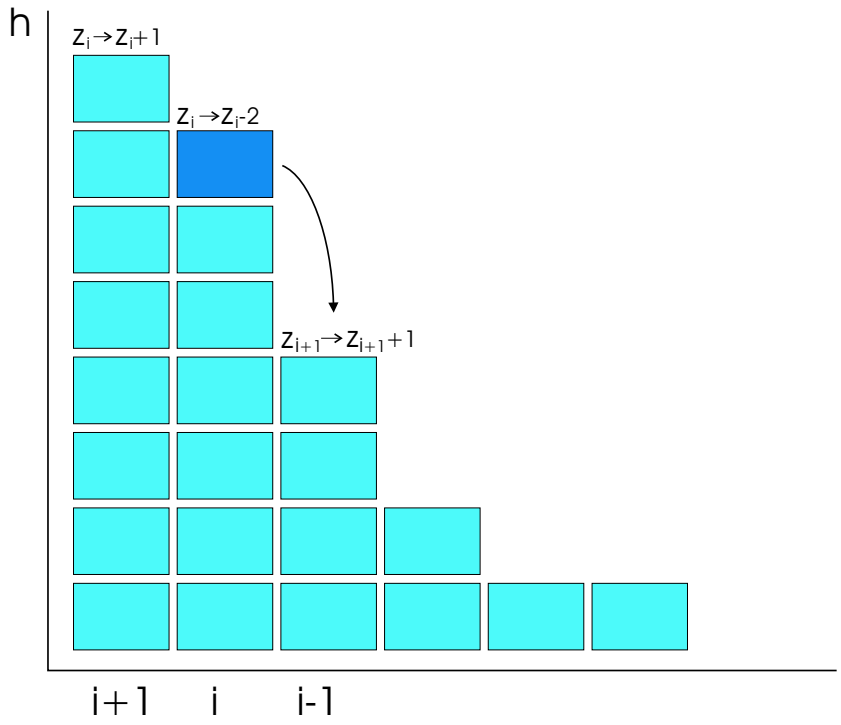

FIG. 1.3 – Modèle de tas de sable de Bak, Tang et Wiesenfeld (Bak *et al.*, 1988). Les grains de sable sont ajoutés un par un. Lorsque la pente $z_i = h_i - h_{i+1}$ est localement plus grande que z_c, un grain de sable tombe sur le site voisin $(i+1)$, et les variables h et z changent comme indiqué sur la figure. Le processus se répète au pas suivant partout où la pente est sur-critique, jusqu'à ce qu'elle soit partout sous-critique. Alors, on ajoute un nouveau grain de sable.

plexes, elle a été proposée pour expliquer l'origine des lois de puissance liées aux éruptions solaires.

Lu et Hamilton (Lu & Hamilton, 1991 ; Lu *et al.*, 1993 ; Lu, 1995) ont proposé un modèle tridimensionnel d'éruptions solaires très semblable au tas de sable de Bak et al. (table 1.1), où le sable est remplaçé par un "champ magnétique moyen". La perturbation dans ce modèle est formellement due à la torsion et l'enroulement des lignes de champ magnétique par la convection dans la photosphére d'où elles émergent. Le mécanisme d'instabilité est la reconnexion magnétique qui satisfait à deux des conditions nécessaire à la SOC : la relaxation par reconnexion est supposée être beaucoup plus rapide que la perturbation par torsion des lignes de champ magnétique et elle dépend d'un seuil.

En utilisant les règles décrites Table 1.1 supposées traduire la perturbation et

TAB. 1.1 – Comparaison du modèle de tas de sable de Bak et al. (Bak *et al.*, 1987) et du modèle d'éruptions solaires de (Lu & Hamilton, 1991) en 3D. Dans les 2 cas, la perturbation est placée en 1 seul point de la grille choisi au hasard. "ppv" désigne les plus proches voisins, et n_{ppv} le nombre de plus proches voisins.

	Tas de sable de BTW	Eruptions de Lu & Hamilton
Variable	hauteur h ou pente z	champ $\mathbf{B}$ ou "courant"dB
Perturbation	1 grain de sable ($\delta h_i = 1$)	$\delta B_i = 1$
Instabilité	$z_i = h_i - \frac{1}{n_{ppv}} \sum_{j=ppv} h_j > z_c$	$\lvert d\mathbf{B}_i \rvert = \lvert \mathbf{B}_i - \frac{1}{n_{ppv}} \sum_{j=ppv} \mathbf{B}_j \rvert > dB_c$
Relaxation	$\begin{cases} z_i \rightarrow z_i - n_{ppv} \\ z_{ppv} \rightarrow z_{ppv} + 1 \end{cases}$	$\begin{cases} d\mathbf{B}_i \rightarrow 0 \\ d\mathbf{B}_{ppv} \rightarrow d\mathbf{B}_{ppv} + \frac{1}{n_{ppv}} d\mathbf{B}_i \end{cases}$

la relaxation, Lu et Hamilton ont trouvé des paramètres distribués selon des lois d'échelles (Lu & Hamilton, 1991) en bon accord avec les histogrammes expérimentaux en énergie, luminosité maximale et durée des éruptions, déterminés par les observations d'éruptions en X–dur par ISEE 3/ICE, du moins pour les grandes valeurs de ces paramètres (Lu *et al.*, 1993).

Malgré cet accord satisfaisant entre mesures et simulations, le modèle pose un certain nombre de problèmes d'interprétation :

- L'interprétation de B comme champ magnétique est rendue difficile par le fait que $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$.
- La source n'est pas isotrope, et ne perturbe qu'une seule case. De plus, la perturbation est déposée directement à l'intérieur du volume, alors qu'elle est supposée venir du bas (la photosphére).
- Le mécanisme d'instabilité dépend de la valeur d'un gradient moyen de B que l'on peut supposer être un courant moyen. Pourtant lors de la relaxation le courant total est conservé et distribué aux plus proches voisins. Ce comportement est assez différent de ce que l'on peut attendre de la reconnexion.
- La petite taille du système (au maximum $50 \times 50 \times 50$) ne permet pas d'assurer que la SOC ne soit pas un effet artificiel, bien que le modèle ressemble beaucoup au tas de sable de Bak et al. et soit donc construit pour présenter de la SOC.
- Les temps d'attente entre 2 éruptions semblent être également distribués selon une loi de puissance (Pearce *et al.*, 1993 ; Crosby *et al.*, 1998 ; Wheatland *et al.*, 1998), tandis que les modèles d'avalanche suivent un processus de Poisson (distribution exponentielle).

– L'existence de SOC peut-être mise en doute dans un milieu aussi inhomogène (Jensen, 1998) que la couronne. De plus elle est difficilement compatible avec la présence de structures de relativement longue durée de vie, comme les points brillants ou les "blinckers", car tout le système est fréquemment balayé par des avalanches.

Certains de ces problèmes sont inhérents à la SOC, d'autres peuvent être partiellement résolus ou contournés par des modèles sur réseau appropriés. A la suite de Lu & Hamilton, d'autres modèles statistiques sur réseau d'éruptions, plus ou moins inspirés par la SOC, sont apparus. Nous présentons une brève (et nécessairement incomplète) revue de ces travaux.

– Plusieurs interprétations pour la variable B ont été proposées. La plus simple façon de contourner $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ en 3D, est de considérer B comme un scalaire (Vlahos *et al.*, 1995 ; Georgoulis & Vlahos, 1996). Des arguments pour soutenir l'interprétation de B comme un champ magnétique ont été proposés par (Vassiliadis *et al.*, 1998 ; Isliker *et al.*, 1998), lesquels voient les modèles d'avalanche comme une discrétisation de l'équation d'induction magnétique. Il y a cependant une divergence d'opinion entre ceux qui considèrent B comme le champ discrétisé (Vassiliadis *et al.*, 1998), et ceux qui le considèrent comme une sorte de champ magnétique moyen (Isliker *et al.*, 1998). En particulier, la limite continue pose un problème d'instabilité numérique du modèle.
  La variable peut aussi être interprétée comme un vecteur potentiel $\mathbf{A}$ (Lu *et al.*, 1993 ; Galsgaard, 1996 ; Einaudi & Velli, 1999). Ainsi, le problème de $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ est résolu, et la perturbation peut-être comprise comme une torsion des lignes de champ. (Isliker *et al.*, 2000 ; Isliker *et al.*, 2001) ont proposé un modèle d'avalanche où les dérivées de $\mathbf{A}$ sont calculées par interpolation par splines.
  D'autres interprétation ont aussi été proposées. Par exemple, (Zirker & Cleveland, 1993) associent la variable à la torsion interne des tubes de flux, et (Longcope & Noonan, 2000) ne considèrent pour seule variable que des courants qui se propagent sur une grille. Parfois, aucune interprétation n'est donnée (MacKinnon *et al.*, 1996).
– Quelques variantes de la source ont été proposées. D'une part on a peu d'informations expérimentales sur la source, et d'autre part la SOC est assez sensible à ses propriétés, ce qui limite la marge de manoeuvre. Dans la majorité des cas, la source ne s'applique qu'en un seul point choisi au hasard et est une variable aléatoire (de moyenne non-nulle) distribuée uniformément, d'amplitude moyenne plus petite que le seuil. Cependant, (Georgoulis &

Vlahos, 1996 ; Isliker *et al.*, 2000) la choisissent distribuée selon une loi de puissance. (Norman *et al.*, 2001) utilisent une source non-stationnaire dans le temps. Cela leur permet de retrouver une distribution des temps d'attente entre éruptions approximativement en loi de puissance. On peut cependant se demander si avec une telle source le système atteint un état statistiquement stationnaire. (Einaudi & Velli, 1999) ont utilisé une source due à des vortex de grande échelle. Cette approche est inspirée par les cascades turbulentes où l'énergie est injectée aux grandes échelles et dissipée aux petites.

– Les variantes du mécanisme d'instabilité dépendent entre autres de l'interprétation de la variable B, mais en général sont supposées correspondre d'une façon ou d'une autre à la dissipation d'une couche de courant.
  Dans les modèles d'avalanche qui utilisent le champ magnétique comme variable, l'énergie dissipée est calculée comme le changement de $\sum B_i^2$ dû à la relaxation. (Vlahos *et al.*, 1995) et (Georgoulis & Vlahos, 1996) ont choisi un critère d'instabilité anisotrope, reposant sur la différence du champ magnétique entre 2 cases voisines et redistribuent le champ dissipé sur toutes les cases voisines. Cela conduit à des loi de puissance décroissant plus rapidement que dans le cas isotrope.
  Les modèles qui utilisent A comme variable utilisent $J = \Delta A > J_c$ comme critère d'instabilité, et redistribuent la quantité dissipée aux voisins (Galsgaard, 1996) ou non (Einaudi & Velli, 1999). Dans ce dernier cas, le courant n'est pas totalement dissipée en un pas de temps. L'énergie dissipée est calculée comme $\sum J_{dissip}^2$. Cependant, le courant est encore calculé par des différences moyennes avec l'ensemble des cases voisines.
– Quelques modèles prennent en compte certaines structures "géométriques" de la couronne. Par exemple (Wheatland & Sturrock, 1996) étudient un modèle d'avalanches sur un ensemble de grilles modélisant un ensemble de zones actives. (Aletti, 2001) étudie un modèle de chauffage dans une boucle magnétique fermée, où la propagation de l'information est assurée par des ondes d'Alfvén.
– (MacKinnon *et al.*, 1996) ont proposé un modèle très différent des avalanches, inspiré d'un modèle encore plus simple de criticalité auto-organisée (les feux de forêt (Jensen, 1998).)

A la suite des travaux de Lu et Hamilton, on peut donc voir une tendance à réviser l'interprétation physique du modèle et à y ajouter des éléments nouveaux. Ces éléments nouveaux ajoutent des paramètres supplémentaires au modèle, dans le but de s'approcher encore plus des lois de puissance tirées des observations des

émissions en X et en EUV associées aux éruptions et microéruptions. De ce point de vue, ces modèles ont rencontrés des succès certains (voir par ex. (Georgoulis *et al.*, 2001) qui comparent les résultats numériques du modèle de (Georgoulis & Vlahos, 1996) aux observations de WATCH). Il convient finalement de noter que d'autres modèles phénoménologiques produisent également des lois de puissance (Rosner *et al.*, 1978 ; Litvinenko, 1994).

1.4.3 Echelles et phénomènes physiques pour le chauffage

La plupart des modèles décrits ci-dessus sont des modèles phénoménologiques ayant pour but de reproduire certaines propriétés statistiques du rayonnement en X et EUV émit par les éruptions solaires. L'approche phénoménologique par des modèles simplifiés d'éruptions solaires et de chauffage se justifie par la complexité et le nombre de phénomènes physiques impliqués, ainsi que la grande variété d'échelles mise en jeux. Bien que les modèles sur réseau ne permettent pas une description fine, ils permettent de modifier facilement les éléments physiques qu'on y inclue, et permettent des études statistiques approfondies, très difficilement accessibles par la théorie ou par des simulations numériques fluides ou cinétiques.

Pourtant, comme discuté ci-dessus, l'interprétation physique des modèles à base de SOC n'est pas toujours très claire. Cela est peut-être dû à la SOC elle-même, qui veut être une phénoménologie assez générale relativement indépendante de la physique sous-jacente (ainsi d'autres applications de la SOC ont été proposées pour d'autres phénomènes en physique des plasma, comme le transport dans les tokamaks (Newman *et al.*, 1996) ou les sous-orages magnétosphèriques (Consolini & Chang, 2001 ; Chapman & Watkins, 2001)). Malgré cette généralité apparente, la SOC n'est pas un phénomène universel (Jensen, 1998 ; Sornette, 2000), et son existence même peut-être mise en question dans un milieu inhomogène et structuré comme la couronne. La SOC n'est d'ailleurs pas une condition nécessaire pour produire des lois de puissance dans des milieux complexes (Sornette, 2000).

Pour pallier au défaut d'interprétation physique, certains modèles essaient de se rapprocher des équations de base de la MHD[3] (par ex. (Isliker *et al.*, 2000)), ou essaient au minimum d'être compatibles avec les équations de Maxwell. (Boffetta *et al.*, 1999) ont proposé la turbulence MHD comme un concurrent de la SOC pour produire les loi de puissances associées aux grandes éruptions. Cette approche plus familière, mais limitée en simulation à des cas simples, permet en effet de retrouver certaines propriétés statistiques des éruptions dans les cas où la turbulence présente

3. Remarquons que des automates cellulaires pour la MHD, sans viscosité ou résistivité, ont déjà été développés par (Montgomery & Doolen, 1987)

une très forte intermittence (Einaudi *et al.*, 1996 ; Dmitruk & Gómez, 1997 ; Galtier & Pouquet, 1998 ; Galtier, 1998 ; Georgoulis *et al.*, 1998). En effet, la dissipation intermittente aux petites échelles de la turbulence créée aux grandes échelles peut ressembler à des événements impulsifs. Pour cette raison, (Einaudi & Velli, 1999) ont proposé les modèles d'avalanches et turbulence MHD intermittente ne sont pas en réalité concurrents mais plutôt semblables.

Cette approche permet de faire ressortir le rôle des échelles. Les modèles de turbulence classiques supposent une source de grande échelle, dont l'énergie est transmises par interactions non-linéaires vers les petites échelles où la dissipation se produit (en MHD, cela correspond aux fréquences de l'ordre de la gyrofréquence ionique).

Les observations récentes montrent que le chauffage pourrait être produit par des événements impulsifs nombreux et fréquents de petite échelle et de petite énergie, soutenant ainsi l'hypothèse de Parker. Ainsi, les petites échelles, à la limite de la résolution des instruments actuels, peuvent jouer un rôle essentiel dans le problème du chauffage. Pour étudier ces phénomènes, une approche partant plus de la physique que de concepts "arbitraires" comme la SOC est nécessaire.

Chapitre 2

Description du modèle de petite échelle

Les observations récentes de (Krucker & Benz, 1998) soutiennent fortement l'hypothèse de Parker (Parker, 1988) que les événements dissipatifs de petite échelle (nanoéruptions dans la terminologie de Parker) contribuent principalement au chauffage de la couronne calme. Ils ont aussi montré que ces événements de petite échelle sont associés au champ magnétique produit non seulement aux frontières, mais aussi à l'intérieur des cellules (Benz & Krucker, 1998). En tenant compte des résultats de l'analyse effectuée par (Priest *et al.*, 2000) qui ont démontré que le chauffage est quasi-homogène le long des arcs, nous arrivons à la conclusion que les sources qui alimentent en énergie ces événements dissipatifs sont aussi de petite échelle. Typiquement, la taille des sources est de l'ordre de (ou plus petit que) la taille des événements observés, qui est inférieure à 2000 km.

Pour décrire les propriétés statistiques du chauffage de la couronne solaire calme par des microéruptions, nanoéruptions et des événements encore plus petits, nous considérons un modèle d'automate cellulaire soumis à une source de champ magnétique uniforme avec une dissipation de petite échelle. Le modèle est constitué de deux éléments : une source de champs magnétiques supposée être associée à la turbulence hydrodynamique de petite échelle de la photosphère et un mécanisme de dissipation local des courants de petite échelle. La dissipation est produite soit par la résistivité anormale, quand la densité de courant locale excède un certain seuil, soit par la reconnexion magnétique. Le problème principal étudié est comment les caractéristiques statistiques du flux d'énergie dissipée dépendent des caractéristiques de la source des champs magnétiques et des mécanismes physiques responsables de leurs dissipations.

§ 2.1 Sur l'importance des petites échelles.

Dans le chapitre précédent, nous avons discuté les indications expérimentales que les événements dissipatifs de petite échelle de type nanoéruption sont suffisamment fréquents pour apporter une contribution essentielle au chauffage.

L'idée du comportement intermittent de la dissipation de petite échelle a été élaborée dans des modèles théoriques par plusieurs auteurs. Par exemple, en utilisant une approche MHD, (Einaudi & Velli, 1994) ont examiné la dépendance de l'énergie dissipée selon les échelles. Différents types de "fragmentation de la dissipation" ont été discutés par Vlahos (Vlahos, 1994). Einaudi et al. (Einaudi *et al.*, 1996) et Georgoulis et al. (Georgoulis *et al.*, 1998) ont simulé des systèmes MHD 2D soumis à des forces de grande échelle avec une dissipation résistive. Leurs simulations 2D, alimentées en énergie par une paire de vortex de grande échelle avec des phases et des amplitudes aléatoires ont montré que la moyenne spatiale de la puissance dissipée avait une statistique non-Gaussienne. Après avoir soustrait la composante Gaussienne, ils suivent remarqué que les événements dissipatifs ont une distribution en loi d'échelle.

L'observation de distributions en loi de puissance du flux d'énergie émit par les plus grands événements dissipatifs, les éruptions et les microéruptions, a inspiré le développement de modèles basés sur l'idée de Criticalité Auto-Organisé discutés au chapitre précédent.

Notre modèle est aussi un modèle sur réseau de type automate cellulaire. Par rapport aux précédents, il suppose que, non seulement la dissipation a lieu aux petite échelle, mais aussi que les sources des champs magnétiques sont de petite échelle. Cette approche est en accord avec l'idée de Benz et Krucker (Benz & Krucker, 1998) que le chauffage peut avoir lieu au niveau de la chromosphère, impliquant que les structures des champs magnétiques ont des échelles de l'ordre de (ou inférieures) à sa hauteur. Cela résulte de l'analyse de Priest et al. (Priest *et al.*, 1998) qui ont montré que le chauffage est quasi-homogène sur la hauteur d'une boucle magnétique. Une autre indication du rôle possible des sources de petite échelle suit des observations d'Abramenko et al. (Abramenko *et al.*, 1999) de l'évolution de la composante verticale de l'hélicité magnétique du courant d'une région active pendant une transition d'un état bas d'éruption à un développé. Ils ont constaté qu'une réorganisation de la structure de la vorticité magnétique photosphérique survient quand les vortex de petite échelle se réorganisent en vortex de plus grande échelle, suggérant qu'une cascade inverse d'hélicité se développe.

Bien que l'on sache que les pieds des boucles se déplacent aléatoirement, on ne connaît pas les propriétés statistiques de leurs mouvements en détail. Ces

sources créent des courants forts aboutissant à des reconnexions, et provoquent des événements semblables à des éruptions. De tels événements éruptifs sont corrélés à la dissipation d'énergie magnétique, aux changements soudains de la topologie des champs magnétiques, à l'accélération de particules et au chauffage du plasma. La résistivité anormale est une autre possibilité de dissipation d'énergie. Elle résulte d'instabilités qui se développent quand les courants excèdent une certaine valeur seuil. La dissipation est dans ce cas semblable à la dissipation par effet de Joule mais dans un plasma sans collision. Cela aboutit à un chauffage relativement lent, mais ne provoque pas une accélération des particules comme pour le mécanisme de dissipation précédent. De plus, ce mécanisme n'est pas nécessairement confiné aux frontières du réseau magnétique.

Une différence importante avec les modèles précédents et qu'ici la distribution des sources de champs magnétique est homogène. Le problème traité dans cette étude est celui du rôle joué par les champs magnétiques de petite échelle, produits dans la photosphère ou la chromosphère, (principalement aux frontières entre les granules, mais aussi à l'intérieur) dans le chauffage de la couronne.

Nous nous sommes surtout intéressés aux échelles typiques des nanoéruptions et même plus petites. Dans ce cas, les source du champ magnétique et la dissipation d'énergie peuvent avoir des échelles spatiales caractéristiques comparables. Ainsi l'intervalle inertiel et la cascade d'énergie ne sont pas aussi importants dans notre modèle que dans les modèles de turbulence Alfvénique ou MHD. Mais le système considéré est capable de provoquer des "cascades inverses", influençant ainsi les structures du champ magnétique de plus grande échelle comme dans les systèmes de type SOC. Dans le chapitre suivant, nous étudions le flux d'énergie dissipée, et particulièrement la dépendance de ses caractéristiques statistiques avec les caractéristiques de la source des champs magnétique et avec le mécanisme de la dissipation. Pour l'instant, nous introduisons en détail notre modèle.

§ 2.2 Forçage et dissipation de petite échelle

Dans l'approximation MHD, l'évolution du champ magnétique est donnée par l'équation d'induction

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \text{terme dissipatif}, \tag{2.1}$$

où $\mathbf{B}$ est le champ magnétique, $\mathbf{u}$ est la vitesse du plasma. Sans le terme dissipatif, cette équation décrit le mouvement des lignes de champ magnétique gelées dans le plasma. Dans ce cas, la reconnexion est interdite. Quand on tient compte d'une

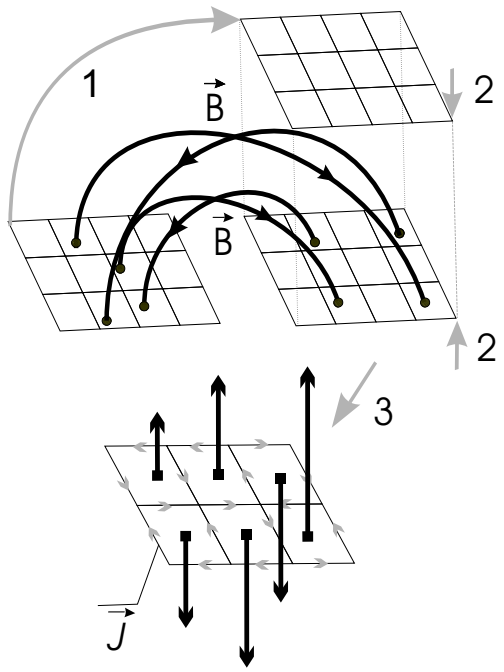

FIG. 2.1 – Représentation schématique de la procédure utilisée dans notre modèle pour simplifier la configuration des champs magnétiques.

conductivité finie σ dans la loi d'Ohm $\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}\right)$, où $\mathbf{j}$ est la densité de courant, le champ magnétique diffuse est n'est plus gelé. Dans l'équation (2.1) l'effet est décrit par un terme de dissipation $\eta\Delta\mathbf{B}$, où $\eta = 1/\sigma\mu_0$ et μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. Le temps de diffusion $t_\eta = l^2/\eta$ est généralement grand pour toutes les échelles, mais la diffusion peut être localement accélérée par la reconnexion rapide $t_A = l/V_A$, où V_A est la vitesse d'Alfvén. Il faut mentionner qu'à petite échelle, d'autres effets de dissipation peuvent devenir importants (voir par exemple (Biskamp, 1993).

Dans notre étude, nous utilisons un modèle sur réseau décrivant l'évolution dans l'espace et le temps du champs B. Plusieurs effets sont négliges par rapport à l'équation d'induction, mais cette approche nous permet d'en ajouter d'autres et de réaliser des études statistiques approfondies.

En supposant la courbure des lignes de champ magnétique négligeable, c'est à dire en assimilant les lignes de champ magnétique à des droites verticales, il ne faut considérer que les valeurs du champ sur les plans horizontaux délimitant le volume considéré. En se ramenant donc à 2 dimensions et avec des champs perpendiculaires à la surface, l'équation $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ est automatiquement satisfaite (voir la figure 2.1). En conséquence, les champs sur les plans inférieurs et supérieurs sont égaux ; il n'y a donc qu'un plan à considérer. Ce plan est alors pavé de cellules carrées.

Les conditions aux limites sont choisies périodiques.

Comme nous l'avons déjà mentionné, Krucker & Benz (Krucker & Benz, 1998) ont constaté que le chauffage se passe principalement au voisinage des points brillants de petite échelle. En utilisant l'analyse multi-longueurs-d'ondes Benz & Krucker (Benz & Krucker, 1999) ont montré que l'ordre temporel des observations d'émissions d'ondes différentes est semblable à celui dans les boucles magnétiques de grande échelle. Ils sont donc arrivés à la conclusion que les mécanismes physiques de dégagement d'énergie sont semblables dans les deux cas. Il suit alors que les dissipations de petite échelle observées sont aussi associées aux boucles magnétiques, mais de petite échelle. De plus, ils ont remarqué que les événements de chauffage arrivent non seulement sur les frontières du réseau magnétique, mais aussi à l'intérieur des cellules. Une analyse comparative des prédictions des modèles pour le chauffage du plasma dans les boucles magnétiques par une source d'énergie distribuée avec des observations effectuées par (Priest *et al.*, 1998) a permis de conclure que le chauffage est quasi-homogène le long de la boucle magnétique. Cela signifie que le processus de chauffage n'est pas confiné au voisinage proche d'un arc, mais plutôt dans le volume entier de l'arc. Il s'ensuit que l'échelle spatiale caractéristique des boucles des champs magnétiques qui fournissent le champ magnétique dissipé est du même ordre de grandeur que l'échelle caractéristique de la dissipation. Ainsi nous pouvons conclure que non seulement les processus dissipatifs, mais aussi les sources ont une petite échelle caractéristique. Une autre conclusion des observations est que les sources sont distribuées de façon homogène dans l'espace. Ce raisonnement nous mène au choix des sources et les mécanismes de dissipation utilisés dans notre modèle que nous décrivons dans ce chapitre.

Nous considérons trois types de sources avec des statistiques légèrement différentes.

2.2.1 Les termes source du modèle

Nous examinons le comportement statistique du système conduit par des sources unipolaires ou dipolaires aléatoires ou turbulentes. Ces sources sont utilisées pour modéliser les effets de convection des champs magnétiques turbulents décrits par le premier terme à droite de l'équation (2.1).

– **Source aléatoire unipolaire.** La source la plus simple d'énergie magnétique est un processus non corrélé de moyenne nulle, $\langle \delta B \rangle = 0$, prenant des valeurs aléatoirement choisies et équiprobables dans l'ensemble $\{-1,\ 0,\ 1\}$. A chaque pas de temps, ces δB sont ajoutés dans chaque cellule, et sont statistiquement indépendants les uns des autres.

- **Source aléatoire dipolaire.** La source précédente peut être rendue globalement "dipolaire" en divisant le réseau en deux parties. Pour les parties positives et négatives du réseau les nombres aléatoires δB sont choisis respectivement dans les ensembles $\{-0.5, 0.5, 1.5\}$ et $\{-1.5, -0.5, 0.5\}$. $\langle \delta B \rangle = 0.5$ pour la partie positive du réseau, $\langle \delta B \rangle = -0.5$ pour la partie négative.
- **Source chaotique.** La turbulence n'est certainement pas un processus complètement aléatoire et certains de ses aspects peuvent être simulés en utilisant des modèles déterministes. L'application d'Ulam fournit un des exemples les plus simples d'un système chaotique générique avec une non-linéarité quadratique (voir, par exemple,(Frisch, 1995)). La source δB ajoutée dans chaque cellule dépend de sa valeur précédente selon l'équation

$$\delta B_{n+1} = 1 - 2(\delta B_n)^2,$$

où les valeurs initiales de δB_0 sont aléatoirement et uniformément choisies dans l'intervalle [−1,1]. Dans ce cas, tous les δB_n appartiennent au même intervalle. Comme pour les sources aléatoires, la source agit dans chaque case et indépendamment des cases voisines.
- **Source de Geisel.** Dans les systèmes physiques, le terme source peut dépendre de la valeur de B lui-même. Quand la dissipation est absente, le champ magnétique dans chaque cellule évolue selon l'application

$$B_{n+1} = f(B_n).$$

Les valeurs initiales de B_0 sont aléatoirement choisies dans l'intervalle [−0.5,0.5]. Les systèmes de ce type sont habituellement appelés des Réseaux d'Applications Couplés (ou CML pour Coupled Map Lattice) (Kaneko, 1992) plutôt que des automates cellulaires. Nous utilisons une source basée sur l'application de Geisel (Geisel & Thomae, 1984) représentée sur la figure 2.2. Les points fixes de cette application, qui sont définis par $B_n = f(B_n)$, sont métastable. En conséquence, une intermittence se développe dans le système. La dynamique est lente et régulière aux voisinage des points fixes de l'application et rapide et chaotique en dehors. En conséquence, l'application qui décrit l'évolution temporelle du champ magnétique dans chaque cellule particulière présente un comportement semblable à la diffusion anormale (non-Brownienne), c'est-à-dire

$$\langle B^2 \rangle \propto t^\alpha, \quad \alpha < 1$$

(Geisel & Thomae, 1984).

(Lawrence & Schrijver, 1993 ; Lawrence *et al.*, 2001) ont émis l'hypothèse que lorsque la turbulence est consiste de cellules convectives, les lignes des champs magnétique photosphérique dans chaque cellule diffusent anormalement ($\alpha < 1$) contrairement à la façon classique (Brownienne) supposé par (Leighton, 1964). Remarquons cependant qu'il s'agit ici de diffusion spatio-temporelle et non purement temporelle.

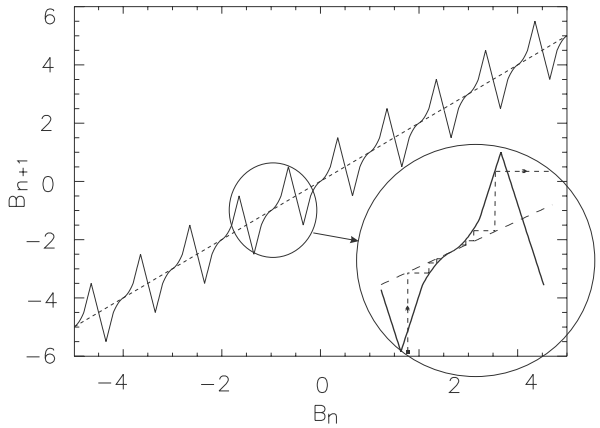

FIG. 2.2 – Représentation graphique de l'application de Geisel (trait continu). Les points fixes de l'application correspondent aux intersections de la courbe avec la droite $B_{n+1} = B_n$ (pointillés).

2.2.2 Critères de dissipation

La dissipation des champs magnétiques convertit l'énergie magnétique en énergie thermique et assure le couplage entre les éléments des champs magnétiques dans notre modèle. Phénoménologiquement, la reconnexion peut être traitée comme une dissipation de petites couches de courant de petits échelles quand la densité de courant excède une certaine valeur seuil (Somov & Syrovatsky, 1977 ; Syrovatskii, 1981 ; Syrovatskii, 1982 ; Priest & Forbes, 2000). Si nous négligeons le courant de déplacement, la densité de courant peut être calculée à l'aide de la loi de Maxwell-Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j},$$

dont la forme en différences finies peut être écrite comme

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta \mu_0} \begin{pmatrix} B\,(x,y) - B\,(x,y+\delta) \\ B\,(x+\delta,y) - B\,(x,y) \end{pmatrix},$$

Oú δ est le pas du réseau. Pour la simplicité de la notation, nous prenons $\delta = 1$ et $\mu_0 = 1$. Les courants sont ainsi calculés comme des gradients locaux et supposés se propager le long des frontières entre les cellules. On voit que l'analogue discret de l'équation de continuité de courant $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ est vérifié, c'est-à-dire, que la somme des courants entrants et sortants est égale à zéro à chaque noeud du réseau. Les mécanismes pour la dissipation des courants sont de deux types :

- **La résistivité anormale**, est due à une instabilité qui se manifeste quand le courant électrique excède une certaine valeur critique (qui peut être parfois très petite), ce qui provoque une augmentation de la résistivité du plasma non-collisionel. Ce phénomène décrit l'échange d'impulsion et d'énergie entre électrons et ions, ou entre différents groupes de particules de même nature par l'intermédiaire de la turbulence plasma générée par l'instabilité (Galeev & Sagdeev, 1979 ; Galeev & Sagdeev, 1984). En effet, suite au développement de l'instabilité, des ondes sont générées (par exemple des ondes de dérive, ou des ondes ioniques acoustiques, ou hybrides basses) qui absorbent une partie de l'énergie des électrons pour la redistribuer aux ions. Cela résulte en une dissipation du courant tout à fait semblable à la dissipation par effet Joule (voir le paragraphe suivant pour plus de détails). Finalement, il faut noter que la résistivité anormale n'exige pas de configuration particulière du champ magnétique, à part un courant fort. Elle peut survenir même en présence de champs magnétiques parallèles dirigés dans la même direction, par exemple dans des trous coronaux ou à l'intérieur des cellules. Dans notre modèle, nous supposons que les courants sont complètement annihilés chaque fois qu'ils excèdent un certain seuil,

$$|j| \geq j_{\max}.$$

- **La reconnexion** est généralement comprise comme un changement relativement soudain d'un état d'équilibre à un autre, impliquant un changement de la topologie du champ magnétique, accompagné par une transformation d'énergie magnétique en énergie cinétique (Priest & Forbes, 2000). Sous sa forme "primaire", le processus de reconnexion stationnaire représente la dissipation du champ magnétique au voisinage des points-X de la configuration des champs magnétique ou aux voisinage d'une couche de courant. Cela peut être interprété comme l'augmentation et l'explosion de minces couches de courant séparant des domaines avec des champs magnétiques opposés. Pour imiter ce processus nous supposons que les deux conditions suivantes doivent

être satisfaites simultanément :

$$\begin{aligned} |j| = |B - B'| &\geq j_{\max}, \\ B \cdot B' &< 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

où B et B' sont les amplitudes des champs magnétiques dans des cellules voisines. Un critère semblable est utilisé pour la reconnexion plane conventionnelle avec un point–X (Petschek, 1964 ; Syrovatskii, 1981). L'équation (2.2) aboutit à l'existence de courants qui peuvent excéder de beaucoup de la valeur du seuil. En exigeant que les champs magnétiques dans des cellules adjacentes aient des directions opposées, ont suppose donc l'existence d'un point où le champ magnétique est nul entre les cellules et donc un équilibre instable favorable à la reconnexion.

Ces conditions permettent de distinguer les deux mécanismes de dissipation dans le cadre d'un modèle d'automate cellulaire. La reconnexion nécessite une configuration spéciale (un point–X, par exemple), tandis que le seul critère pour la résistivité anormale est un courant plus grand qu'un seuil donné. La reconnexion magnétique correspond en effet à un changement important de la topologie du champ magnétique, contrairement à la résistivité anormale. Dans les conditions physiques réelles de la couronne, les deux processus peuvent coexister. Il faut toutefois noter que le seuil de courant pour la résistivité anormale est en général supposé beaucoup plus grand que pour la reconnexion avec des paramètres du plasma semblables. Cette nuance n'est cependant pas essentielle dans notre travail qui a pour but l'étude des relations entre les propriétés statistiques de l'énergie dissipée et les processus physiques mis en jeux.

Pour simplifier la formulation du problème, nous considérons ici que toute l'énergie magnétique dissipée est transformée en chauffage. Les règles sont les suivantes : quand le courant est annihilé, les valeurs des champs magnétiques dans les cellules voisines, B et B', sont remplacées par $(B + B')/2$ et l'énergie magnétique dissipée dans le processus est

$$\Delta E = \frac{1}{2}\,(B - B')^2 = \frac{1}{2}\,j^2 \gtrsim \frac{1}{2}\,j_{\max}^2.$$

La procédure modélisant la dissipation des courants est la même tant pour la résistivité anormale que pour la reconnexion. A chaque pas de temps, les courants satisfaisant le critère de dissipation sont dissipés avant que tous les courants ne deviennent sous-critiques (ou aient le même signe dans le cas de la reconnexion). Ensuite, nous passons au prochain pas de temps et réactivons la source. En effet, les mécanismes de dissipation sont supposés être plus rapides que le forçage. L'énergie

totale dissipée pour un pas de temps est la somme des énergies dissipées pour tous les courants.

§ 2.3 Mécanismes physiques de dissipation

2.3.1 Résistivité anormale

Dans ce paragraphe, nous expliquons plus en détail le phénomène physique que nous nommons "résistivité anormale". L'idée de la résistivité anormale est basée sur la possibilité de l'échange d'impulsion et d'énergie entre les électrons et les ions en raison du développement d'instabilités et de l'apparition d'un l'état turbulent dans le plasma. L'expression "conventionnelle" pour la conductivité collisionelle est

$$\sigma = \left(ne^2\right) / \left(m_e \nu\right),$$

où n est la densité de plasma, e est la charge des électrons, m_e est la masse des électrons et ν la fréquence de collision des électrons avec les ions. Dans un plasma sans collision, la fréquence de collision est négligeable et la conductivité collisionelle est infinie. Cependant les électrons (qui portent l'essentiel du courant électrique) peuvent exciter des oscillations collectives d'électrons aussi bien que d'ions et transférer une partie de leur impulsion et énergie à ces oscillations. Cela provoque en une perte anormale de l'impulsion électronique et, par conséquent, une diminution de leur vitesse dirigée, c'est-à-dire une diminution du courant. Un tel processus peut être caractérisé par une "fréquence de collision efficace" ν_{eff}.

Pour calculer cette fréquence caractéristique on peut considérer la loi de conservation de l'impulsion dans un système constitué d'électrons et d'ondes. Dans ce but, on peut évaluer cet effet comme l'action d'une force de friction qui ralentit le flux électronique. La perte d'impulsion par unité de temps peut être écrite comme suit :

$$\nu_{eff} m_e n \mathbf{U_d} = -\mathbf{F_{fr}}$$

où U_d est la vitesse dirigée du flux électronique qui porte le courant et F_{fr} la force de friction qui agit sur les électrons. La diminution de l'impulsion électronique peut être évaluée par l'augmentation de l'impulsion des ondes émises par les électrons en tenant compte que le changement d'impulsion des ondes est décrit par l'expression suivante :

$$\frac{dP_w}{dt} = 2 \int \gamma_k W_k \frac{\mathbf{k}}{\omega_k} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

où γ_k est l'incrément linéaire de l'instabilité et W_k est la densité d'énergie spectrale des ondes. L'hypothèse que l'impulsion du système constitué d'électrons et d'ondes

est conservée conduit à l'égalité de ces deux expressions. Ainsi la fréquence de collision efficace peut être définie comme :

$$\nu_{eff} = \frac{2}{m_e n U_d^2} \int \gamma_k W_k \frac{(\mathbf{U_d k})}{\omega_k} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}.$$

L'évaluation du niveau de turbulence des ondes tenant compte du mécanisme de saturation non-linéaire permet de résoudre le problème.

Quand le courant s'écoule dans une direction perpendiculaire au champ magnétique, les deux types principaux d'instabilités qui provoquent la résistivité anormale sont l'instabilité de Buneman modifiée et l'instabilité des modes électroniques acoustiques. L'effet final de la résistivité anormale est le transfert d'énergie des électrons aux ions, car l'amortissement de ces ondes a lieu principalement à cause de leur interaction avec les ions.

Une des caractéristiques physiques importantes du phénomène de résistivité anormale est le rapport de l'énergie dissipée par les électrons sur l'énergie dissipée par les ions. Si la vitesse de dérive des électrons relativement aux ions est $\mathbf{V_d}$, si la fréquence caractéristique des ondes excitées est $\omega_\mathbf{k}$ et leur vecteur d'onde caractéristique $\mathbf{k}$, cette proportion peut être évaluée par

$$\frac{dE_e}{dt} / \frac{dE_i}{dt} \approx \frac{\int \gamma_\mathbf{k} W_\mathbf{k} \frac{(\mathbf{kV_d})}{\omega_\mathbf{k}} d^3\mathbf{k}}{\int \gamma_\mathbf{k} W_\mathbf{k} d^3\mathbf{k}} \approx \frac{(\mathbf{kV_d})}{\omega_\mathbf{k}}$$

pour des instabilités typiques, où cette proportion est environ 1.

Ainsi, la résistivité anormale est tout à fait semblable au chauffage de Joule de la composante ionique du plasma. La dissipation d'énergie qui chauffe le plasma peut être représentée comme

$$Q = j^2/\sigma_{eff}.$$

où σ_{eff} est la conductivité efficace. Ce phénomène a été observé expérimentalement dans un plasma de laboratoire (Eselevich *et al.*, 1971).

2.3.2 Reconnexion

Il y a plusieurs différences entre la reconnexion et la résistivité anormale. L'une d'entre elles est le changement de la topologie des champs magnétiques dans le premier cas tandis que dans le deuxième il y a seulement des variations quantitatives des caractéristiques des champs magnétiques. Une autre différence est que le processus de dissipation par résistivité anormale produit du chauffage (comparable pour les ions et les électrons), tandis que la reconnexion convertit l'énergie magnétique surtout en énergie cinétique (principalement des ions). Après

les faisceaux énergétiques peuvent chauffer le plasma, mais c'est seulement une conséquence indirecte de la reconnexion. Une autre différence, mais tout à fait importante pour les observations, se situe dans les échelles de temps. On suppose que la reconnexion provoque un dégagement d'énergie rapide tandis que la résistivité anormale est un processus diffusif relativement lent.

De plus, comme il a été montré analytiquement ainsi que dans les simulations, le processus de reconnexion peut dans certaines conditions ressembler à un événement explosif. Pendant la reconstruction de la topologie du champ magnétique, la composante perpendiculaire au champ magnétique ambiant et à la direction du courant peut grandir si rapidement que sa variation est aussi rapide qu'une explosion. La dynamique du champ magnétique peut être décrite par l'expression suivante :

$$\mathbf{B} = B_{0x} \tanh\left(\frac{z}{L}\right) \mathbf{e}_x + B_z(t) \sin(kx)\, \mathbf{e}_z,$$

où

$$B_z(t) = \frac{B_{0z}}{1 - t/\tau_{expl}}.$$

(Galeev, 1984) pour plus de détails). Ici B_{0x} est l'amplitude du champ magnétique moyen dirigé selon x, qui est fourni par le courant porté le long des axes y, et τ_{expl} est le temps caractéristique des variations des champs magnétiques et électriques. B_{0x} a des signes opposés de deux côtés de la couche de courant. B_z est la magnitude initiale de la perturbation de la composante normale du champ magnétique que l'on suppose être périodique le long de l'axe x avec une longueur d'ondes $\lambda = 2\pi\mathbf{k}$. B_z croît jusqu'à l'infini en un temps fini τ_{expl}. Cette croissance explosive des perturbations non-linéaires aboutit à une augmentation semblable du champ électrique induit. Cependant cette solution formelle n'est seulement valable que lorsque l'amplitude de cette perturbation est plus petite que le champ ambiant, ce qui bien sûr limite la divergence. L'étape non-linéaire se développe avant que la composante normale du champ magnétique ne devienne comparable à B_{0x}. Ce processus aboutit à l'accélération rapide d'électrons et d'ions par le champ électrique induit dans la région où les particules sont nonmagnétisées.

Une autre particularité du processus de reconnexion est la présence de flux macroscopiques autour du site de reconnexion avec des vitesses caractéristiques de l'ordre de la vitesse d'Alfvén. Ces vitesses sont évaluées en utilisant le champ magnétique ambiant au voisinage du site. Ces flux peuvent provoquer le remplissage des régions de densité inférieures par le plasma du site de reconnexion si sa densité est plus grande ou comparable à la densité du plasma environnant. L'énergie transféré à des particules croit avec l'augmentation de leur masse comme $M^{1/3}$. Les plus lourds sont les plus efficacement accélérés (Vekstein &

Priest, 1995). Ces particules peuvent alors produire du chauffage et la radiation électromagnétique fournit des signatures expérimentales des événements chauffants.

§ 2.4 Les principes de base du modèle

2.4.1 Les échelles de la source et de la dissipation

Pour comparer l'effet de l'action d'une source dans une cellule avec une dissipation élémentaire entre 2 cellules, on peut analyser la transformation de Fourier spatiale de la source et de la dissipation d'énergie,

$$I_{\text{source}}(k) = \frac{16}{k_x^2 k_y^2} \sin^2\left(\frac{k_x}{2}\right) \sin^2\left(\frac{k_y}{2}\right),$$
$$I_{\text{diss}}(k) = \frac{16 j_{\max}^2}{k_x^2 k_y^2} \sin^4\left(\frac{k_x}{2}\right) \sin^2\left(\frac{k_y}{2}\right),$$

où $k_x, k_y \in [-\pi,\pi]$. La dernière équation correspond à la dissipation de la composante y du courant. Pour la composante x, k_x et k_y doivent être échangés.

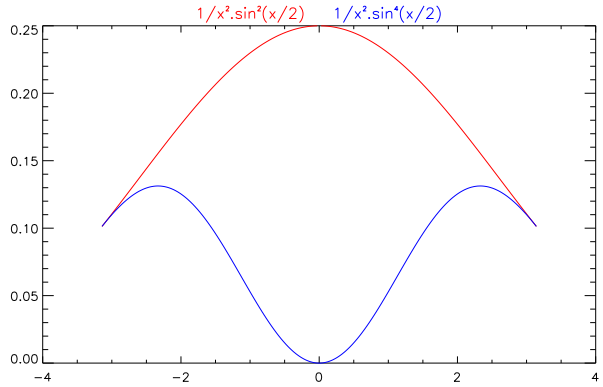

FIG. 2.3 – Spectre de puissance de l'action de la source (en rouge) et de la dissipation (en bleu) unitaires

On voit que la dépendance en k_x de ces deux spectres est tout à fait différente (voire la figure 2.3). Pour chaque k_y fixé, la dissipation d'énergie disparaît à $k_x = 0$ et augmente de manière monotone avec la croissance de $|k_x|$, tandis que la source du champ magnétique est maximale à $k_x = 0$ et diminue avec l'augmentation de $|k_x|$. Cette différence dans l'action de la source des champs magnétique et de la dissipation induit une certaine échelle intermédiaire dans l'espace des k où l'action de la source est approximativement compensée par l'action de la dissipation

d'énergie. Cette valeur caractéristique de k est étroitement liée à la longueur de corrélation caractéristique de la distribution spatiale des champs magnétiques. Le taux de croissance de l'énergie des champs magnétiques et le taux d'amortissement efficace sont non-nuls presque partout dans l'espace des k, mais le taux de croissance domine pour les petits k (aux grandes échelles spatiales) tandis que la dissipation domine pour les plus grand k (les échelles spatiales plus petites). Une telle situation correspond, en terme de cascade d'énergie, à la direction "normale" du flux d'énergie, c'est-à-dire, des grandes échelles vers les plus petites. Contrairement à la théorie classique de la turbulence, il n'y a pas d'intervalle inertiel puisque la dissipation agit à toutes les échelles.

Il faut aussi mentionner que l'utilisation d'un forçage uniforme sur la grille constitue une différence importante entre notre modèle et les modèles de SOC conventionnels, où la faiblesse et la lenteur extrême du forçage sont essentielles (Sornette *et al.*, 1998). Cette tenuosité rend le forçage nonlocal, dans le sens où il dépend de l'état du système entier, comme discuté par (Vespignani & Zapperi, 1998).

2.4.2 Echelles spatiales caractéristiques

Les mécanismes de dissipation et leurs seuils dépendent des paramètres du plasma de la couronne solaire, comme le champ magnétique moyen, la densité, etc. Puisque notre modèle est destiné à des régions locales de la couronne plutôt qu'à la couronne dans son ensemble, il est tout à fait naturel de supposer que le même critère de dissipation peut être appliqué à chaque cellule du réseau. Ceci amène à la question des tailles caractéristiques des courants dissipés. Les observations et les études théoriques montrent que l'échelle des couches de courants peut être plus petites que 1 km. Des échelles encore plus petites, de 10 m, sont considérées par (Einaudi & Velli, 1994), qui ont associé les régions de courants à des événements de reconnexion du type de Petschek.

Les échelles caractéristique des événements de dissipation par résistivité anormale peuvent être évalués de la façon suivante. En supposant que la résistivité est fournie par l'instabilité acoustique-ionique qui a un très faible seuil, nous pouvons facilement obtenir

$$|\nabla \times \mathbf{B}| \approx B/L > \frac{4\pi}{c} n_e e c_s,$$

où L est la largeur caractéristique de la couche de courant, c est la vitesse de la lumière, B est l'amplitude caractéristique du champ magnétique, n_e est la densité de plasma, $c_s = (T_e/m_i)^{1/2} = (m_e/m_i)^{1/2}\, v_{Te}$ est la vitesse du son ionique, T_e est la température électronique, v_{Te} est la vitesse thermique électronique et $m_{e,i}$ sont

les masses des ions et des électron. Alors

$$L < \frac{Bc}{4\pi n e v_{Te}} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} = \beta^{-1/2} \frac{c}{\omega_{pi}},$$

où ω_{pi} est la fréquence plasma ionique et β est le rapport de la pression cinétique à la pression magnétique. Dans la couronne basse, où β est supposé être de l'ordre de 1, nous avons $L \simeq 300$ m. Cette échelle est significativement plus petite que la résolution spatiale des instruments expérimentaux modernes. De plus, en utilisant les mesures de dispersion angulaire des fluctuations de densité électronique, l'échelle la plus petite qui peut être observée dans le vent solaire lent à $8R_\odot$ est environ de 6 km (Woo & Habbal, 1997). En supposant que les structures linéaires s'étendent radialement comme r, les structures à $1R_\odot$, (distance supposée où la dissipation a lieu) ont une taille de l'ordre de 1 km.

Ainsi, jusqu'à présent, seules les caractéristiques macroscopiques peuvent être observées. Les modèles statistiques microscopiques sont destinés à reproduire les particularités principales de ces observations. Dans le chapitre suivant nous étudions l'influence des propriétés statistiques de la source des champs magnétiques, du type de mécanisme de dissipation et leurs seuils sur les propriétés macroscopiques du flux total de l'énergie dissipée.

2.4.3 Evolution du modèle sans dissipation

Dans chacune des N^2 cellules on ajoute un incrément de champ magnétique ΔB avec la probabilité $p(\Delta B)$. Les ΔB_n sont indépendants en temps et en espace, ont une moyenne nulle et un écart type σ_Δ.

La valeur du champ magnétique dans une case après t pas de temps,

$$B = \sum_{i=1}^{t} \delta B_i,$$

tend pour les grands t vers une Gaussienne de moyenne nulle et de variance $t\sigma_\Delta^2$, d'après le théorème de la limite centrale.

La valeur moyenne du champ magnétique sur l'ensemble des N^2 cellules, que l'on note β, est aussi une variable aléatoire Gaussienne

$$P(\beta(t)) = A' \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\sigma_\beta^2}\right), \tag{2.3}$$

avec pour variance

$$\sigma_\beta^2 = \frac{t}{N^2}\sigma_\Delta^2. \tag{2.4}$$

Influence du type de source sur la distribution.

Lorsque les incréments ΔB prennent les valeurs $\{-1,0,1\}$ chacun avec la probabilité 1/3, la variance de la source est

$$\sigma_\Delta^2 = \frac{2}{3}.$$

La valeur de B dans chaque cellule étant donnée par une somme de variable aléatoires indépendantes, le champ B dans chaque case et le champ moyen sur la grille sont distribués selon les lois décrites ci-dessus, pour t et N suffisamment grands.

L'application d'Ulam,

$$x_t = 1 - 2x_t^2,$$

avec $x \in [0,1]$, est chaotique et mélangeante, ce qui signifie que la fonction d'autocorrélation de x décroît exponentiellement avec le temps. On peut alors montrer que x est distribué selon la loi

$$p(x_t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}},$$

de variance $\sigma^2 = 1/4$. Pour obtenir une variable aléatoire centrée, nous avons défini l'incrément de champ magnétique comme $\Delta B = 2x-1$. Le champ magnétique dans chaque case, $B_i(t) = \Delta B_1 + ... + \Delta B_t$, n'est pas influencé par l'ordre d'apparition des variables ΔB_t. On peut alors considérer B_i comme une somme de variables aléatoires indépendantes, et appliquer le résultat de la discussion précédente. Par contre, dans la cas de l'application de Geisel les points fixes métastables de l'application introduisent de longues corrélations temporelles à cause desquelles le théorème de la limite centrale ne s'applique plus et l'on peut s'attendre à des lois non-Gaussiennes.

Rôle de la dissipation du champ magnétique

La dissipations locale des courants s'effectue comme suit : lorsqu'on dissipe, le champ magnétique dans les cellules voisines est remplacé par leur moyenne arithmétique. Cette procédure ne change donc pas la valeur moyenne du champ magnétique sur N^2 cellules, mais les champs ne sont plus indépendants. La dissipation influe donc sur les moments d'ordres supérieurs.

2.4.4 Equation de diffusion pour les automates cellulaires du tas de sable

Nous étudions l'effet de la dissipation en commençant par les modèles de tas de sable discutés dans le 1er chapitre. Dans chaque cellule de la grille à 2 dimensions,

on va ajouter des grains de sable. Soit $\varphi(\mathbf{r},t)$ la pente locale du tas de sable au temps t et au point $\mathbf{r}$. L'instabilité a lieu si $\varphi(\mathbf{r},t) \geq \varphi_m$, où φ_m est une valeur limite.

L'évolution de la pente peut être décrite mathématiquement comme suit :

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,t+1) = \varphi(x,y,t) - \theta[\varphi(x,y,t) - \varphi_m] + \\ + (1/4)\,\theta[\varphi(x+\mathbf{1},y,t) - \varphi_m] + (1/4)\,\theta[\varphi(x-\mathbf{1},y,t) - \varphi_m] + \\ + (1/4)\,\theta[\varphi(x,y+\mathbf{1},t) - \varphi_m] + (1/4)\,\theta[\varphi(x,y-\mathbf{1},t) - \varphi_m],\end{aligned}$$

où $\theta[x]$ est la fonction de Heaviside, égale à 1 pour $x > 0$ et 0 si $x < 0$. On va introduire le pas de temps Δt et le pas de la grille $\Delta x = \Delta y$,. En discrétisant la dérivée en temps

$$\frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\varphi(x,y,t+1) - \varphi(x,y,t)}{\Delta t}$$

et en écrivant l'opérateur de Laplace ∇^2 comme

$$\nabla^2\varphi_{j,k} = \frac{\varphi_{j+1,k} + \varphi_{j-1,k} + \varphi_{j,k+1} + \varphi_{j,k-1} - 4\varphi_{j,k}}{(\Delta x)^2}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\nabla^2(\theta[\varphi(x,y,t) - \varphi_m]) = \frac{1}{4}\frac{\theta[\varphi(x+1,y,t) - \varphi_m] + \theta[\varphi(x-1,y,t) - \varphi_m]}{(\Delta x)^2} + \\ + \frac{\theta[\varphi(x,y+1,t) - \varphi_m] + \theta[\varphi(x,y-1,t) - \varphi_m] - 4\theta[\varphi(x,y,t) - \varphi_m]}{(\Delta x)^2},\end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{\varphi(x,y,t+1) - \varphi(x,y,t)}{\Delta t} = \frac{(\Delta x)^2}{4\Delta t}\nabla^2(\theta[\varphi(x+1,y,t) - \varphi_m])$$

ou à la limite lorsque $\Delta t \to 0$ et $\Delta x \to 0$

$$\frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial t} = \frac{D}{4}\nabla^2(\theta[\varphi(x+1,y,t) - \varphi_m]) - \eta(x,y,t)$$

où $D = (\delta x)^2/\Delta t$ est le coefficient de diffusion, $\eta(x,y,t)$ est le bruit lent adiabatique, la source de sable. L'équation de diffusion avec $\eta(x,y,t)$ est une équation de Langevin.

On ne peut pas analyser cette équation comme une équation de diffusion classique à cause de la fonction de Heaviside. On va prendre la dérivée en tenant compte du fait que la dérivée de la fonction de Heaviside est la fonction δ de Dirac :

$$\begin{aligned}\nabla^2(\theta[\varphi - \varphi_m]) = \nabla(\nabla\theta[\varphi - \varphi_m]) = \\ = \nabla(\nabla\varphi\cdot\delta[\varphi - \varphi_m]) = \nabla^2\varphi\cdot\delta[\varphi - \varphi_m] + \nabla\varphi\cdot\nabla(\delta[\varphi - \varphi_m]) = \\ = \nabla^2\varphi\cdot\delta[\varphi - \varphi_m] + \delta'[\varphi - \varphi_m]\cdot(\nabla\varphi)^2.\end{aligned}$$

Finalement, l'équation de diffusion prend la forme suivante :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{D}{4}\left[\nabla^2\varphi\cdot\delta\left[\varphi-\varphi_m\right]+\delta'\left[\varphi-\varphi_m\right]\cdot\left(\nabla\varphi\right)^2\right]-\eta\left(x,y,t\right)$$

Le coefficient de diffusion (le multiplicateur de $\nabla^2\varphi$), est égal à $\frac{D}{4}\delta\left[\varphi-\varphi_m\right]$. Au voisinage de $\varphi=\varphi_m$, $\delta\left[\varphi-\varphi_m\right]\to\infty$ et la diffusion devient singulièrement rapide et infini.

2.4.5 Equation de diffusion pour notre modèle

Nous allons décrire l'équation de diffusion pour notre automate cellulaire. L'évolution du champs magnétique se passe de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
b\left(x,y,t+\Delta t\right) &= b\left(x,y,t\right)+\\
+\frac{1}{2}\left[b\left(x,y+\Delta y,t\right)-b\left(x,y,t\right)\right]\Theta\left(\mid b\left(x,y+\Delta y,t\right)-b\left(x,y,t\right)\mid -j_m\right)&+\\
+\frac{1}{2}\left[b\left(x,y-\Delta y,t\right)-b\left(x,y,t\right)\right]\Theta\left(\mid b\left(x,y-\Delta y,t\right)-b\left(x,y,t\right)\mid -j_m\right)&+\\
+\frac{1}{2}\left[b\left(x+\Delta x,y,t\right)-b\left(x,y,t\right)\right]\Theta\left(\mid b\left(x+\Delta x,y,t\right)-b\left(x,y,t\right)\mid -j_m\right)&+\\
+\frac{1}{2}\left[b\left(x-\Delta x,y,t\right)-b\left(x,y,t\right)\right]\Theta\left(\mid b\left(x-\Delta x,y,t\right)-b\left(x,y,t\right)\mid -j_m\right)&+\\
&+\mu\left(x,y,t\right),
\end{aligned}$$

où $b\left(x,y,t\right)$ est le champ magnétique au point (x,y) à l'instant t , et j_m est le seuil de dissipation.

La même équation peut être réécrite comme suit:

$$\begin{aligned}
b\left(x,y,t+\Delta t\right)-b\left(x,y,t\right) &=\\
=\frac{1}{2}\left[b\left(x,y+\Delta y,t\right)-b\left(x,y,t\right)\right]\Theta\left(\mid b\left(x,y+\Delta y,t\right)-b\left(x,y,t\right)\mid -j_m\right)&-\\
-\frac{1}{2}\left[b\left(x,y,t\right)-b\left(x,y-\Delta y,t\right)\right]\Theta\left(\mid b\left(x,y-\Delta y,t\right)-b\left(x,y,t\right)\mid -j_m\right)&+\\
+\frac{1}{2}\left[b\left(x+\Delta x,y,t\right)-b\left(x,y,t\right)\right]\Theta\left(\mid b\left(x+\Delta x,y,t\right)-b\left(x,y,t\right)\mid -j_m\right)&-\\
-\frac{1}{2}\left[b\left(x,y,t\right)-b\left(x-\Delta x,y,t\right)\right]\Theta\left(\mid b\left(x-\Delta x,y,t\right)-b\left(x,y,t\right)\mid -j_m\right)&+\\
&+\mu\left(x,y,t\right)
\end{aligned}$$

On peut développer en série:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b}{\partial t}\Delta t = \\
= \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial y}(y+\Delta y)\,\Delta y\Theta\left(\mid \frac{\partial b}{\partial y}(y+\Delta y)\,\Delta y \mid -j_m\right) - \\
-\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial y}(y)\,\Delta y\Theta\left(\mid \frac{\partial b}{\partial y}(y)\,\Delta y \mid -j_m\right) + \\
+\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial x}(x+\Delta x)\,\Delta x\Theta\left(\mid \frac{\partial b}{\partial x}(x+\Delta x)\,\Delta x \mid -j_m\right) - \\
-\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial x}(x)\,\Delta x\Theta\left(\mid \frac{\partial b}{\partial x}(x)\,\Delta x \mid -j_m\right) + \mu\,(x,y,t)
\end{aligned}$$

En utilisant les relations :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial y}(y+\Delta y)\,\Delta y\Theta\left(\mid \frac{\partial b}{\partial y}(y+\Delta y)\,\Delta y \mid -j_m\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial y}(y)\,\Delta y\Theta\left(\mid \frac{\partial b}{\partial y}(y)\,\Delta y \mid -j_m\right) = \\
= \frac{1}{2}\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial b}{\partial y}(y)\,\Delta y\Theta\left(\mid \frac{\partial b}{\partial y}(y)\,\Delta y \mid -j_m\right)\right]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial x}(x+\Delta x)\,\Delta x\Theta\left(\mid \frac{\partial b}{\partial x}(x+\Delta x)\,\Delta x \mid -j_m\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial x}(x)\,\Delta x\Theta\left(\mid \frac{\partial b}{\partial x}(x)\,\Delta x \mid -j_m\right) = \\
= \frac{1}{2}\Delta x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial b}{\partial x}(x)\,\Delta x\Theta\left(\mid \frac{\partial b}{\partial x}(x)\,\Delta x \mid -j_m\right)\right]
\end{aligned}$$

et en prenant $\Delta t = \Delta x = \Delta y = 1$, alors:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial b}{\partial x}\Theta\left(\mid \frac{\partial b}{\partial x} \mid -j_m\right)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial b}{\partial y}\Theta\left(\mid \frac{\partial b}{\partial y} \mid -j_m\right)\right] + \mu\,(x,y,t)\,.$$

On peut voir, à partir de cette dernière équation, que notre automate cellulaire ne possède pas les propriétés de diffusion infinie comme dans le cas du tas de sable. Le coefficient de diffusion est toujours fini.

Cependant, on ne peut pas avancer très loin en analysant cette équation et donc nous allons poursuivre notre analyse à l'aide de simulations numériques.

Chapitre 3

Statistique temporelle du flux total d'énergie dissipée en fonction du forçage

On montre dans ce chapitre que des critères différents pour la dissipation de l'énergie magnétique provoquent une forte différence dans les propriétés statistiques de la dissipation de l'énergie.

§ 3.1 Energie dissipée dans le temps et corrélation spatiale

Les propriétés statistiques du système sont fortement dépendantes des "règles de dissipation de l'énergie". Nous considérerons ici deux types de mécanismes de dissipation qui correspondent à des processus physiques différents pouvant être impliqués dans la dissipation de l'énergie magnétique. Les questions importantes qui nous intéressent peuvent être formulées comme suit :

- les processus de dissipation locaux peuvent-ils fournir des corrélations spatiales longues ?
- comment la longueur de corrélation spatiale influe-t-elle sur la statistique de la dissipation de l'énergie ?

On montrera que la prise en compté de la dissipation par le mécanisme de résistivité anormale conduit la distribution de l'énergie dissipée à être proche d'une Gaussienne. La Gaussienne sera utilisée comme référence pour la comparaison avec le mécanisme de la reconnexion. Le mécanisme de reconnexion permet l'existence de courants largement plus grands que $j_{\max}$, pourvue que le courant maximal ne coïncide pas avec un site de reconnexion. Après l'apparition de tels courants, les processus de reconnexion/dissipation peuvent se propager vers les cellules voisines de façon semblable à une réaction en chaîne.

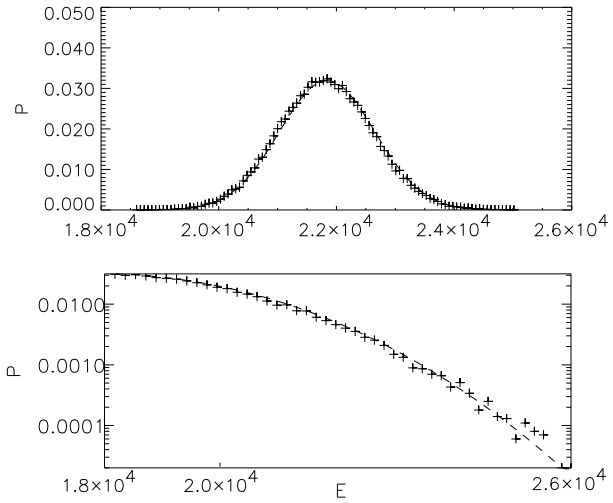

FIG. 3.1 – Distribution de l'énergie dissipée dans le cas où la résistivité anormale est utilisée comme mécanisme de dissipation, pour $j_{\max} = 5$. La figure supérieure utilise une échelle linéaire et celle du bas une échelle log-log. La ligne en pointillés correspond à la Gaussienne la mieux ajustée.

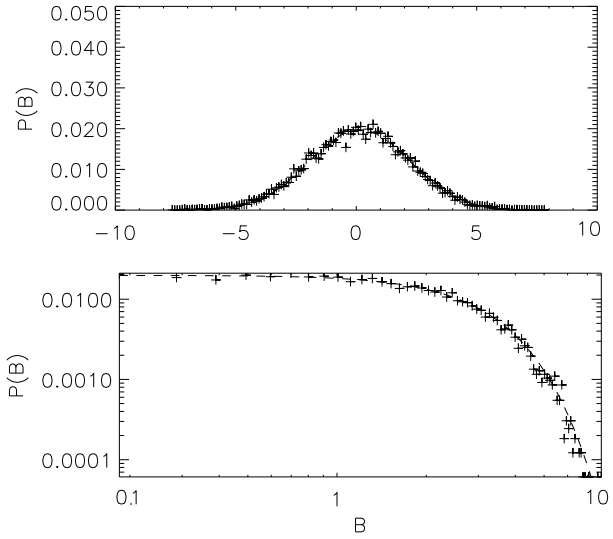

FIG. 3.2 – Densité de probabilité typique du champ magnétique en échelle linéaire (la figure supérieure) et en échelle log-log (en bas) dans les mêmes conditions qu'à la figure précédente, à $t = 5.10^4$ La ligne en pointillés correspond à la Gaussienne la mieux ajustée.

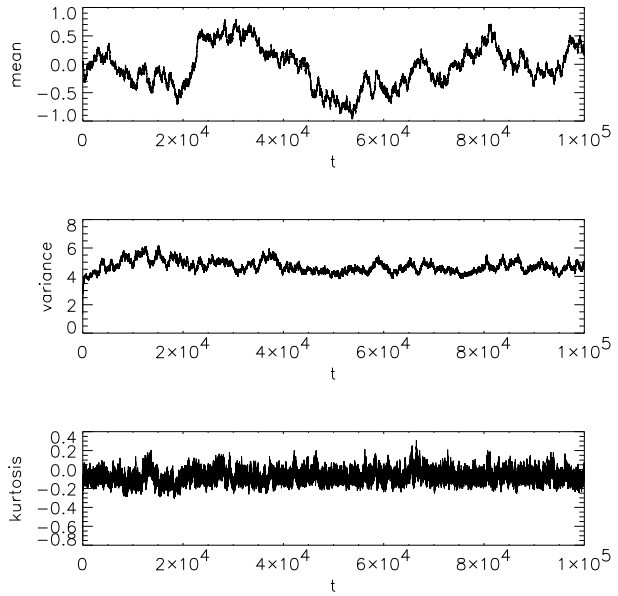

FIG. 3.3 – Evolution temporelle de moments (moyenne, variance, kurtosis) du champ magnétique. Mêmes conditions qu'aux figures 3.1-3.2. Les faibles valeurs du skewness et du kurtosis indiquent que le processus est Gaussien.

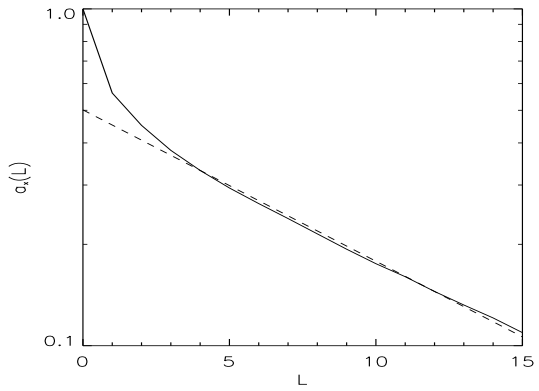

FIG. 3.4 – La corrélation spatiale des champs magnétiques moyennée en temps présentée en échelle semi-log. Mêmes conditions qu'aux figures précédentes. La longueur de corrélation estimée est $L = 11$.

3.1.1 Résultats

A chaque pas de temps l'incrément de champs magnétique δB ajoutée à chaque cellule du réseau est une variable aléatoire prenant les valeurs 0, 1, ou -1 avec

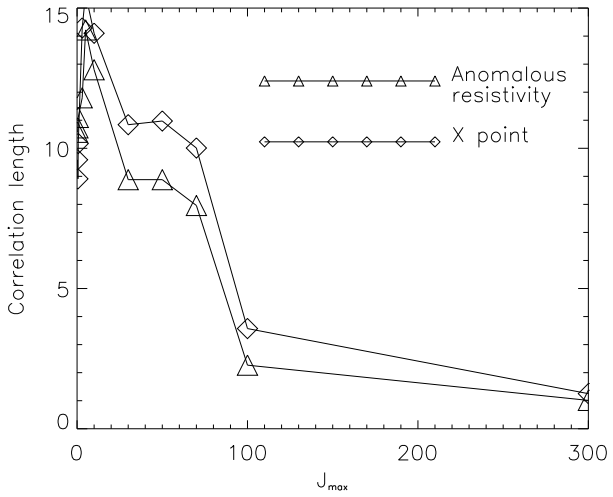

FIG. 3.5 – Dépendance de la longueur de corrélation en fonction du seuil de dissipation pour les deux mécanismes de dissipation. La résistivité anormale est représentée par des triangles et la reconnexion par des losanges.

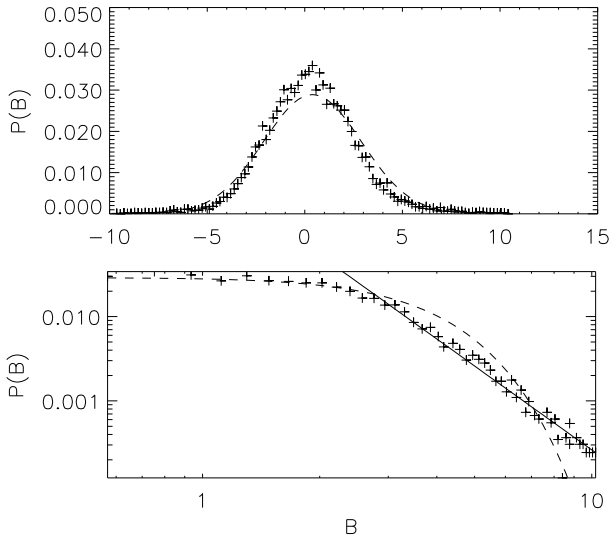

FIG. 3.6 – Distribution typique du champ magnétique en échelle linéaire en haut et log-log en bas à $t = 6.10^4$. Dissipation par reconnexion pour $j_{\max} = 5$. Les pointillés représentent la Gaussienne la mieux ajustée.

une probabilité égale. Ainsi, sans dissipation, le champ magnétique dans chaque cellule exécuterait un mouvement Brownien. La dissipation par les mécanismes de résistivité anormale ou de reconnexion peut modifier ce comportement. Ici nous présentons trois séries de résultats calculés pour les mêmes conditions : taille de

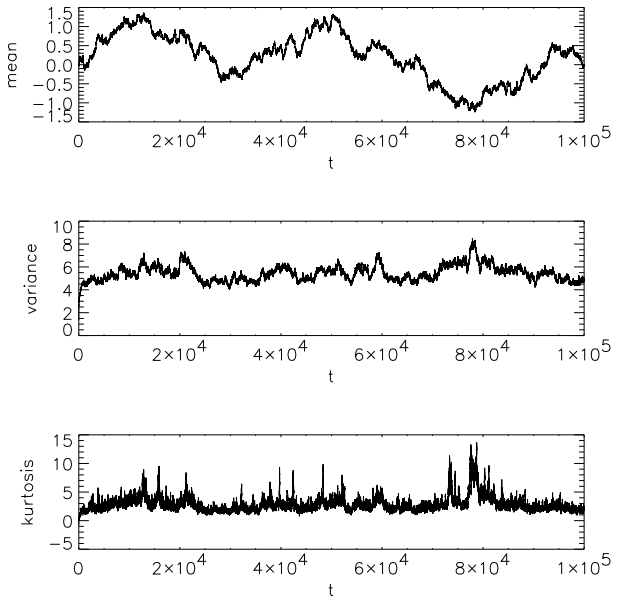

FIG. 3.7 – Evolution temporelle des moments (moyenne, variance et kurtosis) du champ magnétique. Le mécanisme de dissipation correspond à la reconnexion. Les grandes valeurs de kurtosis par rapport au cas de la résistivité anormale indiquent des déviations fortes par rapport à la Gaussiannité. Les pics du kurtosis sont corrélés avec l'augmentation de la variance de l'énergie dissipée.

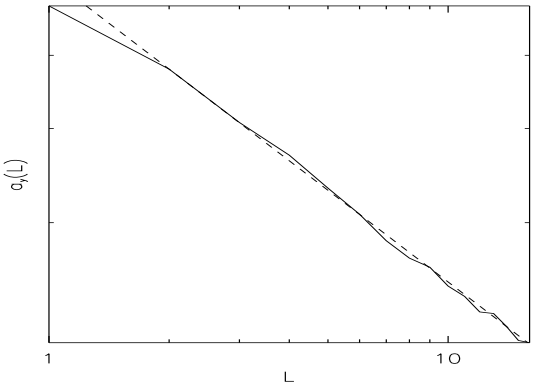

FIG. 3.8 – La corrélation spatiale des champs magnétique en échelle log-log ($t = 7.9 \times 10^4$). A ce moment, le kurtosis du champ magnétique a une très grande valeur et un grand dégagement d'énergie se produit (voir la figure 3.7). La pente est approximativement égale à 0.40.

128×128, $t_{\max} = 10^5$, $j_{\max} = 5$.

Le premier critère pour la dissipation s'énonce ainsi : lorsque le courant entre

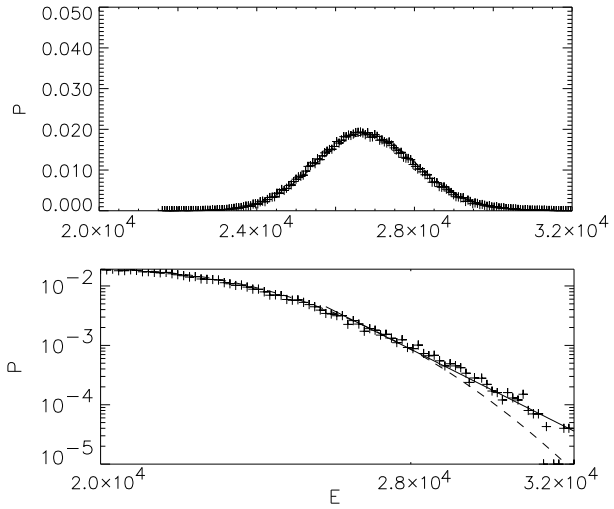

FIG. 3.9 – Distribution de l'énergie dissipée en échelles linéaire et log-log. Dissipation par reconnexion, pour $j_{\max} = 5$. La ligne en pointillés correspond à la Gaussienne la mieux ajustée.

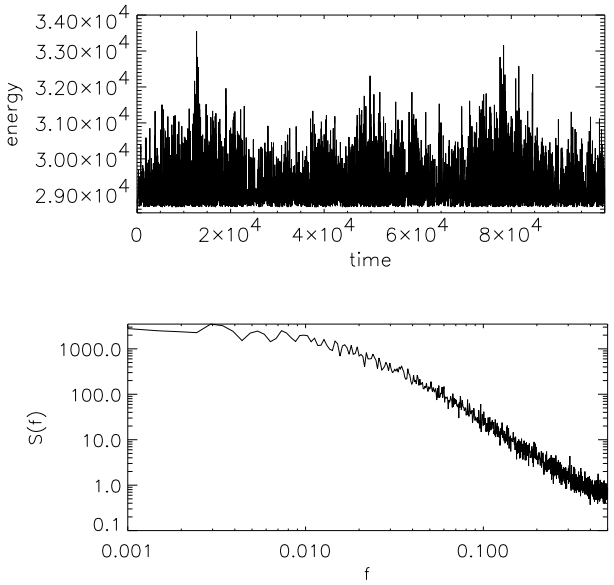

FIG. 3.10 – Filtrage des énergies plus basses qu'un certain seuil pour la dissipation par reconnexion. Série temporelle de l'énergie dissipée et son spectre de puissance.

deux cellules du réseau excède le seuil, il est dissipé et les champs magnétiques dans ces cellules voisines prennent une valeur égale à leur moyenne. Ce critère est appliqué à chaque pas de temps, après l'action de la source sur la grille entière. Le critère de dissipation est appliqué jusqu'à ce que tous les courants soient dissipés. Le calcul est relancé avec application de la source pour le pas de temps suivant.

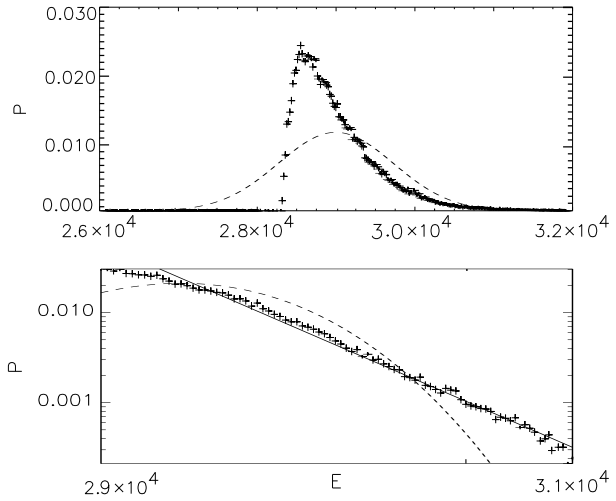

FIG. 3.11 – PDF de la dissipation d'énergie filtrée. Les pointillés correspondent à la Gaussienne la mieux ajustée.

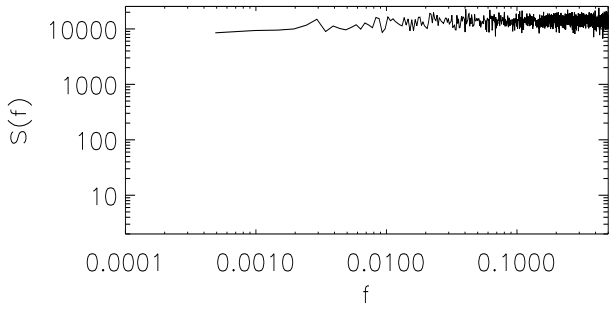

FIG. 3.12 – Le spectre de puissance d'énergie dissipée totale.

Dans une large gamme de seuils $j_{\max}$, de 0.1 à 100, la distribution de l'énergie dissipée est une Gaussienne ou a une enveloppe Gaussienne (pour les grandes valeurs du seuil). C'est également le cas de la distribution des champs magnétiques instantanés (voire figues 3.2, 3.3).

Des structures de courte durée de vie peuvent apparaître et disparaître dans le processus de simulation. Malgré l'interaction entre cellules voisines dues à la dissipation, les propriétés statistiques du système ressemblent au mouvement Brownien qui prévoit des distributions Gaussiennes. La dissipation limite donc l'amplitude du champ magnétique et de l'énergie dissipée. Cependant, elle ne semble pas dans ce cas introduire un couplage fort entre les cellules. L'évolution temporelle des moments des champs magnétiques calculés à chaque pas de temps sur la grille (la moyenne, la variance, le skweness –ou moment normalisé d'ordre 3– et le kurtosis –moment normalisé d'ordre 4) montrent qu'à tout moment la distribution de B

est proche d'une Gaussienne (figure 3.3). En effet, le skewness et le kurtosis sont proches de 0.

Le faible couplage entre cellules semble confirmé par les corrélations spatiales du champ magnétique, qui décroissent exponentiellement (figure 3.4).

Cependant, quantitativement, certaines fonctions dépendent du seuil choisi. Par exemple, la longueur de corrélation diminue avec $j_{\max}$ (figure 3.5).

La condition supplémentaire que la dissipation ne peut se produire que si les champs voisins ont des signes opposés, provoque une augmentation des longueurs de corrélation (voir figure 3.5). Avec les deux mécanismes de dissipation, les corrélations spatiales sont exponentielles. Quoique les corrélations spatiales moyennées soient toujours exponentielles (la longueur moyenne caractéristique est 14). Cependant de fortes différences d'amplitude du kurtosis du champ magnétique apparaissent. Le kurtosis est beaucoup plus grand en moyenne que dans le premier cas, mais ce qui est plus important encore est qu'il montre de grands pics atteignant des valeurs supérieures à 10 (figure 3.6), montrant que par instants, le champ magnétique possède une distribution fortement non-Gaussienne et atteint des valeurs très supérieures à sa déviation standard (figure 3.7).

Pendant ces pics de kurtosis, les corrélations spatiales prennent une forme en loi de puissance (figure 3.8), indiquant de longues corrélations spatiales.

Après le libération d'énergie, le système se relaxe et les corrélations deviennent de nouveau exponentielles. De tels pics de kurtosis sont souvent associés aux sursauts de variance ($\langle B^2 \rangle$), i.e. à la dissipation d'énergie. L'énergie totale dissipée à chaque instant s'écarte aussi de la Gaussienne, et de petites déviations en forme de loi de puissance sont visibles dans des queues des distributions (figure 3.9).

Il faut noter que la comparaison des observations expérimentales avec des modèles théoriques n'est pas une tâche facile. La sensibilité des instruments peut ajouter des ambiguïtés supplémentaires. Les expériences ne peuvent pas distinguer les micro- ou nanoéruptions d'énergie trop petite.

Pour nous rapprocher des conditions expérimentales, nous avons filtré les dégagements d'énergie trop petits. Pour ce but, les énergies inférieurs à un certain seuil ($E_{\min}$) ont été remplacées dans la série temporelle. Les valeurs inchangées (mesurables) correspondent aux grands événements dissipatifs, dans le cas où B a généralement un grand kurtosis (figure 3.7) et des corrélations spatiales en loi de puissance (figure 3.8). La série temporelle obtenue et son spectre en loi d'échelle sont visibles sur la figure (figure 3.10). Voir pour le comparaison le spectre de puissance d'énergie totale sur la figure 3.12.

La densité de probabilité de l'énergie filtrée suit une loi de puissance (figure

3.11), bien que la totalité de l'énergie ait une distribution différente. Cette analyse montre que la comparaison entre observations expérimentales et les modèles théoriques doit être effectuée avec beaucoup d'attention.

3.1.2 Résumé. Comparaison avec la SOC

Dans ce paragraphe nous nous sommes intéresse à la possibilité de créer des corrélations spatiales longues par des processus des petites échelles. La deuxième question examinée est la liaison entre les propriétés spatiales du champs magnétique (conditionnées par les sources et les différents mécanismes de dissipation) et l'énergie dissipée en temps. Les deux points marquant qui ressortent de cette analyse sont :

- Quand le champ magnétique est produit en ajoutant des valeurs aléatoires de l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$ et que le processus de dissipation a lieu quand le courant est plus grand qu'un certain seuil (le courant critique), le système ne montre pas de signature d'un comportement auto-organisé, et sa dynamique est tout à fait semblable au mouvement Brownien (la plupart des corrélations spatiales sont exponentielles, les densités de probabilités du champ magnétique aussi bien que de l'énergie dissipée est Gaussienne). Il n'y a aucun événement de dissipation semblable à une avalanche dans le système. Cependant, quelques points brillants et des petites structures de durée de vie courtes sont observés.
- Dans le même système, où on impose en plus la condition de reconnexion pour obtenir une dissipation (dissipation permise uniquement si les champs dans des cellules adjacentes ait des signes opposées), on observe des corrélations spatiales plus longues et une forte déviation de la distribution de l'énergie dissipée par rapport à la Gaussienne aux hautes énergies. Les corrélations spatiales montrent des dépendances en loi de puissance pendant les grands dégagements d'énergie et elles diminuent en devenant exponentielles quand il n'y a aucun grand dégagement dans le système. La distribution du champ magnétique dans l'espace est la plupart du temps fortement non-Gaussienne. La génération de grandes corrélations est due à la possibilité de l'existence de grands courants qui apparaissent à cause de la condition de reconnexion imposée au système. La queue de la distribution de l'énergie dissipée montre des caractéristiques en loi de puissance.

Dans les deux cas, la longueur caractéristique moyenne décroît avec l'augmentation du seuil de dissipation.

En filtrant les événements de faible énergie, la distribution suit une loi de puissance et présente aussi un spectre en loi de puissance.

§ 3.2 Analyse détaillée des densités de probabilité

Des résultats préliminaires concernant l'influence du type de dissipation d'énergie des champs magnétiques sur les propriétés statistiques du flux d'énergie total de radiation ont été présentés dans (Podladchikova *et al.*, 1999). On a montré que l'énergie dissipée a est distribuée approximativement suivent une loi normale, quand la source du champ magnétique est aléatoire et que la résistivité anormale produit la dissipation. Ce résultat a été obtenu pour un seuil de densité de courant modéré ($j_{\max} = 5$). Dans les mêmes conditions, mais avec une dissipation par reconnexion, des queues de distribution non-Gaussiennes ont été observées sur les distribution de l'énergie dissipée. Elles sont accompagnées par des grandes longueurs de corrélations spatiales (ce qui indique la présence de structures du champ magnétique de grande échelle). Ce résultat semble être tout à fait naturel car des courants peuvent excéder la valeur critique, mais sans se dissiper quand les champs magnétiques ont la même direction dans les cellules voisines. Les courants peuvent atteindre grandes amplitudes et produire des dégagements d'énergie plus intenses. Ces événements dissipatifs peuvent avoir lieu de façon isolée ou bien constituer de longues chaînes d'événements. Ces événements dissipatifs de grande énergie semblent suivre une loi d'échelle.

3.2.1 Etats transitoires et stationnaires

Nous avons étudié la dépendance des propriétés statistiques de notre système en fonction du seuil de dissipation des courants $j_{\max}$ de 0.01 à 300. Pour effectuer une analyse statistique correcte, l'état stationnaire du système doit être atteint. La durée du régime transitoire dépend du seuil. Si la dissipation était absente, le champ dans chaque cellule suivrait un mouvement Brownien sous l'influence de la source aléatoire. En conséquence, le champ magnétique dans chaque cellule, aussi bien que la moyenne sur la grille entière, aurait une distribution Gaussienne avec une variance croissant linéairement avec le temps, $\langle B^2 \rangle \propto t$. Les courants auraient un comportement semblable, la variance des courants augmentant comme

$$\langle j^2 \rangle (t) \approx 2 \langle \delta B^2 \rangle \, t,$$

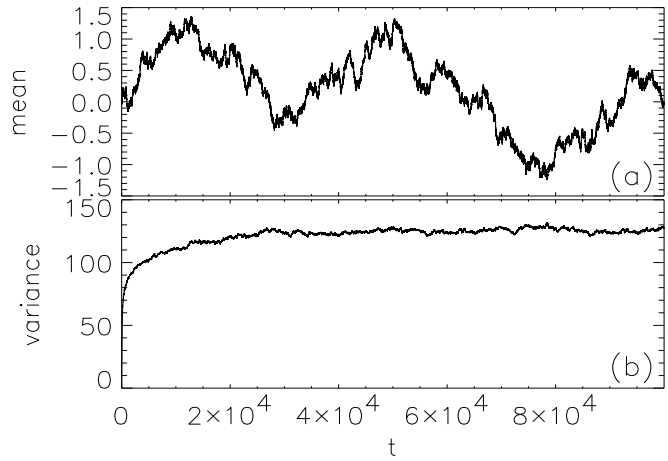

FIG. 3.13 – Evolution de la moyenne et de la variance du champ magnétique. Pour la variance, trois étapes sont observées : une augmentation linéaire, une étape non-linéaire et un état stationnaire. Les résultats sont obtenus pour la dissipation par résistivité anormale et une source aléatoire unipolaire avec un seuil $j_{\max} = 30$.

où pour la source aléatoire $\langle \delta B^2 \rangle = 2/3$. En moyenne, le courant est dissipé pour la première fois à l'instant

$$t_S \simeq \frac{j_{\max}^2}{2 < \delta B^2 >}.$$

Ce rapport donne aussi un temps caractéristique entre deux événements de dissipation qui arrivent dans la même cellule dans un état stationnaire. Pour obtenir une statistique fiable, le temps de simulation devait significativement excéder t_S. Selon $j_{\max}$, les simulations ont été exécutées avec 10^5-10^6 pas de temps.

La dissipation sature finalement la croissance de la variance (voir la figure 3.13b) et un état stationnaire est atteint. La moyenne du champs magnétique B complet subit des fluctuations fortes, mais sa moyenne en temps est nulle (figure 3.13a). Le nombre moyen n de courants dissipés à chaque pas de temps peut être évalué à partir de considérations de bilan d'énergie. Pour un pas de temps, l'apport d'énergie sur un réseau de taille $N \times N$ est

$$\delta E_{\text{in}} \simeq N^2 \langle \delta B^2 \rangle,$$

tandis que l'énergie dissipée est

$$\delta E_{\text{diss}} \simeq -n \, \frac{j_{\max}^2}{4}.$$

A l'équilibre $\delta E_{\text{in}} \simeq \delta E_{\text{diss}}$, dóù

$$\frac{n}{N^2} \simeq \frac{4 \langle \delta B^2 \rangle}{j_{\max}^2} \simeq \frac{2}{t_S}. \tag{3.1}$$

En supposant que ces courants sont uniformément distribués sur le réseau, la distance caractéristique entre eux est

$$l \simeq \frac{N}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\frac{j_{\max}}{\sqrt{\langle \delta B^2 \rangle}}.$$

3.2.2 Effets de la taille de la grille

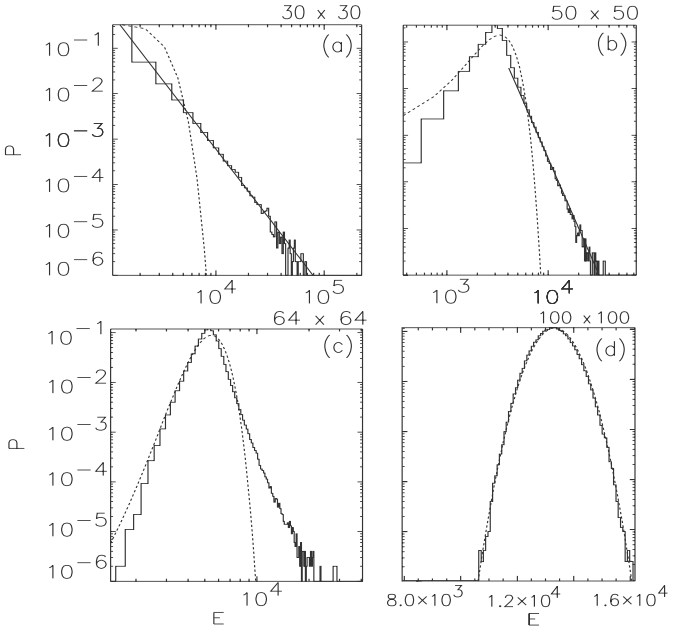

FIG. 3.14 – Fonction de densité de probabilité de l'énergie dissipée (traits pleins). Les traits pointillés représentent le meilleur ajustement par une distribution Gaussienne. Les résultats sont obtenus pour la dissipation par résistivité anormale et une source aléatoire unipolaire avec un seuil $j_{\max} = 5$. Les tailles de la grille sont les suivantes : **a)** 30×30; **b)** 50×50; **c)** 64×64; **d)** 100×100.

Pour examiner les effets de la taille du réseau, nous prenons des réseaux de 30×30 à 400×400 cellules, la dissipation est assurée par la résistivité anormale et $j_{\max} = 5$. Dans ce cas nous obtenons des distributions qui sont très proches de la Gaussienne pour le plus grand réseau. Toutes les simulations ont été effectuées sur 10^6 pas de temps. La figure 3.14 présente les résultats pour différentes tailles du réseau. Pour le réseau 30×30, la distribution est bien ajustée par une loi de puissance d'exposant -3.1 sur presque 3 décades d'énergie. Lorsque la taille du réseau augmente, la plus grande partie de la distribution est très proche d'une Gaussienne, tandis que la queue correspondant aux hautes énergies conserve une forme en loi de puissance. Pour le réseau 50×50 la forme de loi de puissance de la

queue est observée seulement sur une décade d'énergie, l'estimation de l'exposant est -2.9. Pour le réseau 64×64 la queue en loi de puissance est de nouveau plus courte et l'exposant est approximativement égal à -4.3. Pour le réseau 100×100 la distribution est pratiquement indiscernable de la Gaussienne dans toute la gamme d'énergie.

Finalement, pour les grandes tailles du réseau (plus grand que 100×100), la distribution entière devient Gaussienne. Cela signifie que le caractère des corrélations spatiales est changé. Pour de petits réseaux, les corrélations spatiales décroissent plutôt lentement et s'étendent sur le réseau entier. Pour les réseaux plus grands, des queues exponentielles apparaissent dans les corrélations spatiales, apportant des longueurs de corrélation plus petites que la taille du réseau. Le changement de forme de la fonction de corrélation spatiale correspond au changement de forme de la distribution de l'énergie dissipée. Une corrélation spatial en loi d'échelle correspond à une distribution en loi de puissance. Le fait que les distributions d'énergie en loi de puissance se transforment en Gaussienne avec l'augmentation de la taille du système considéré a déjà été observé dans quelques expériences de tas de sable réelles (Held *et al.*, 1990) et dans quelques modèles de feu de forêt (Grassberger & Kantz, 1991).

Dans la suite, les résultats des simulations sont discutés pour des sources unipolaires et dipolaires différentes, pour les deux mécanismes de dissipation, en utilisant des réseaux suffisamment grands pour éviter les effets non physiques liés à leur taille.

3.2.3 Sources aléatoires unipolaires

Les simulations sur un réseau 200×200 ont été effectuées sur 2×10^5 pas de temps et avec les deux types de mécanisme de dissipation (la résistivité anormale et la reconnexion). Les distributions de l'énergie dissipée par résistivité anormale pour les seuils $j_{\max} = 5$, 30, 100 sont présentées sur la figure 3.15. La figure 3.16 représente distributions avec les mêmes paramètres mais une dissipation par reconnexion. La raison pour laquelle la distribution montrée sur la figure 3.15c a de multiples extrema est facile à comprendre. Puisque l'énergie dissipée dans chaque événement est de la forme $(j_{\max} + \varepsilon)^2$, où $0 < \varepsilon < 2$, pour

$$j_{\max} > \sqrt{\langle \varepsilon^2 \rangle},$$

des pics séparés de $j_{\max}^2$ apparaissent dans la distribution. En supposant que ε est une variable aléatoire uniformément distribuée, nous pouvons obtenir que la largeur du pic numéro K est de l'ordre de $K\langle \varepsilon^2 \rangle$. De là, le caractère discret de la

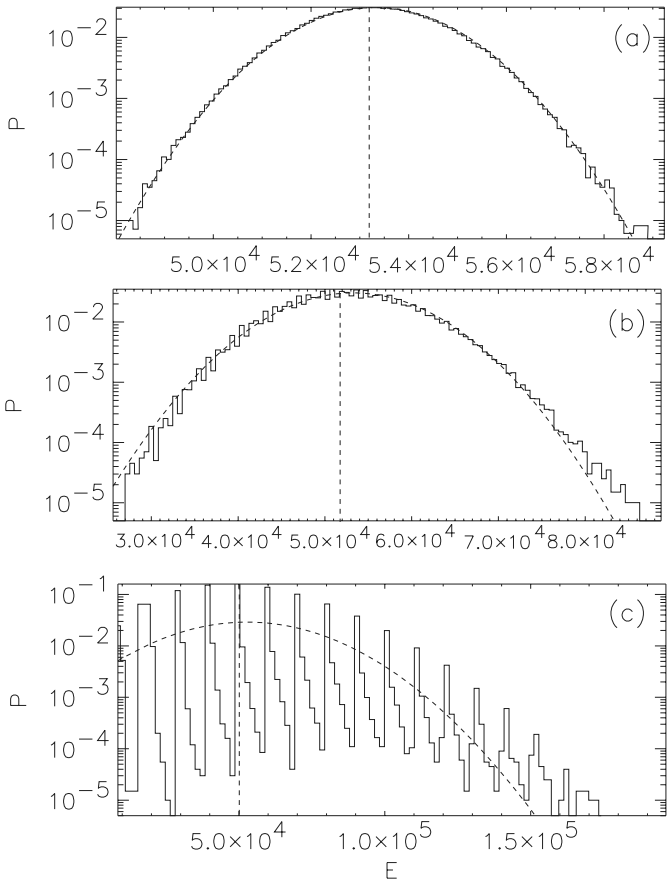

FIG. 3.15 – Fonction de distribution de l'énergie dissipée (lignes continues). Les lignes en pointillés représentent le meilleur ajustement par une distribution Gaussienne. Les résultats sont obtenus pour la dissipation par résistivité anormale et une source aléatoire unipolaire. Les courants de seuil $j_{\max}$ sont respectivement les suivants : **a)** $j_{\max} = 5$; **b)** $j_{\max} = 30$; **c)** $j_{\max} = 100$.

distribution apparaît pour les valeurs les plus petites de l'énergie dissipée et les grands $j_{\max}$ (voir les figures 3.15b, 3.15c).

Sur les figures 3.15 et 3.16, on peut voir qu'un seuil plus petit (en comparaison avec l'amplitude de la source) aboutit à une distribution de l'énergie dissipée qui est proche de la normale. Pour des $j_{\max}$ plus grands, une queue non-thermique apparaît aux hautes énergies. Bien que la valeur moyenne de l'énergie dissipée ne dépende pas de $j_{\max}$, les écarts avec la distribution Gaussienne dans la queue avec l'augmentation de $j_{\max}$ sont plus prononcées pour la dissipation par reconnexion. Dans ce cas, les trois distributions ont en effet des queues non-Gaussiennes qui peuvent être approximées par des lois de puissance. Quand $j_{\max}$ augmente, ces queues deviennent plus prolongées et l'exposant de la loi de puissance décroît.

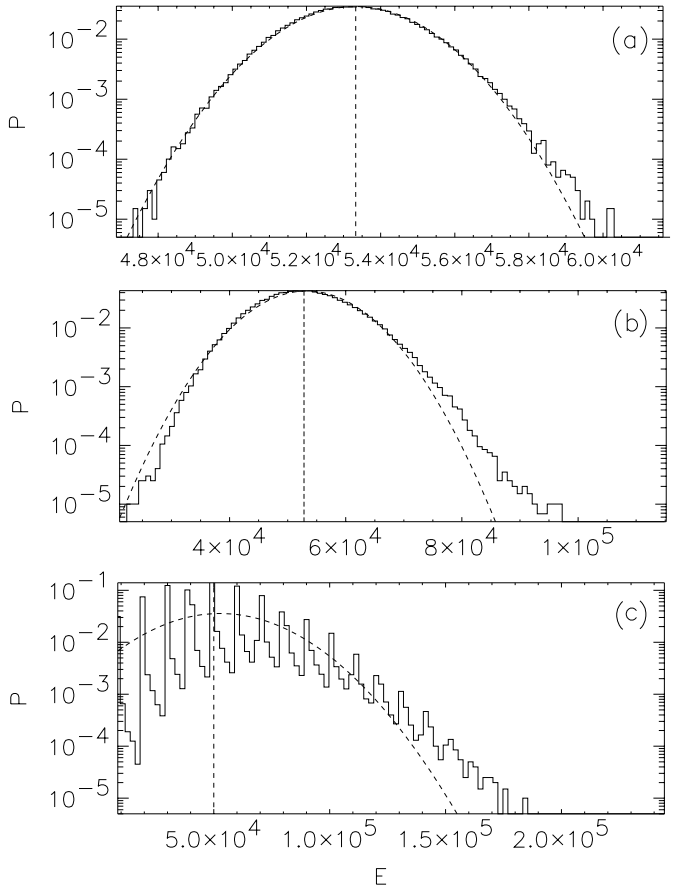

FIG. 3.16 – idem figure 3.15, mais pour la dissipation par reconnexion.

Cela signifie que les plus fortes déviations par rapport à la distribution Gaussienne apparaissent pour les plus grandes valeurs du seuil.

La formation d'une telle queue n'est pas associée à l'augmentation de la longueur de corrélation. En effet, la plus grande longueur de corrélation (~ 20) est obtenue avec le mécanisme de dissipation par reconnexion pour un seuil modéré, $j_{\max} = 5$. Remarquons aussi que la longueur de corrélation moyenne est plus petite quand on considère la dissipation par résistivité anormale et diminue avec l'augmentation de $j_{\max}$ (Podladchikova *et al.*, 1999).

Le nombre moyen de courants dissipés diminue avec l'augmentation du seuil, comme on le déduit de l'équation (3.1). Pour $j_{\max} = 1$ nous avons

$$\frac{n}{N^2} = \frac{4}{3},$$

Chaque courant est dissipé à chaque pas de temps et des événements dissipatifs se produisent presque partout sur le réseau, créant ainsi des corrélations longues. Pour un grand $j_{\max}$, le rapport n/N^2 devient petit, par exemple pour $j_{\max} = 100$

nous avons $n/N^2 \simeq 3{\cdot}10^{-4}$ qui correspond à des événements dissipatifs non corrélés avec un chevauchement relativement petit.

Ainsi, pour un grand $j_{\max}$ la dissipation est beaucoup plus rapide que l'action de la source de champs magnétique ; c'est-à-dire, que les conditions de séparation des échelles de temps sont mieux satisfaites.

3.2.4 Source chaotique unipolaire

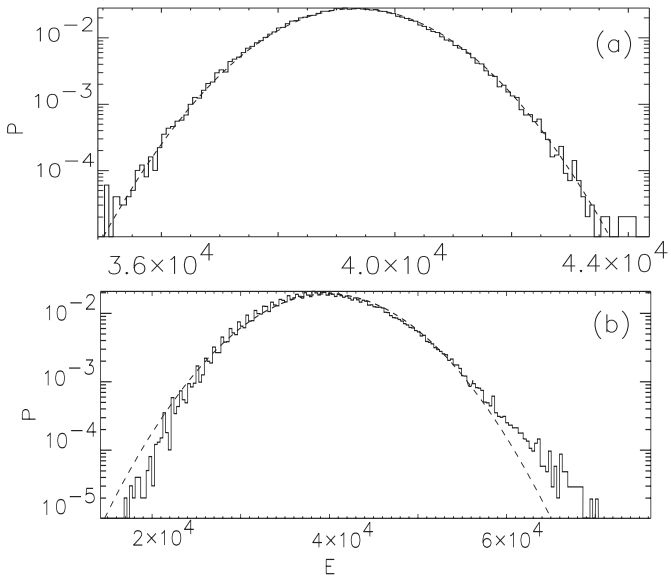

FIG. 3.17 – Fonction de distribution de l'énergie dissipée. Les lignes en pointillées représentent le meilleur ajustement par une distribution Gaussienne. Les résultats sont obtenus pour la source évoluant selon l'application d'Ulam et $j_{\max} = 30$. Les mécanismes de dissipation sont les suivants : **a)** dissipation par résistivité anormale; **b)** dissipation par reconnexion.

Malgré la nature déterministe de l'incrément des champs magnétique δB, le champ magnétique dans chaque cellule suit en absence de dissipation un mouvement Brownien avec une statistique Gaussienne après un grand nombre de pas. En effet, chaque δB a la même distribution avec une variance finie. La dépendance de la distribution en fonction du courant critique et du mécanisme de dissipation montre des tendances semblables dans le cas de sources aléatoires. La distribution pour un courant critique modéré, $j_{\max} = 5$, est proche de la Gaussienne, et pour $j_{\max} = 30$ de petites déviations de la distribution Gaussienne commencent à apparaître aux hautes énergies. Pour $j_{\max} = 100$, il y a une évidence claire d'une présence d'une queue suprathermique aux hautes énergies. La queue est beaucoup plus prononcée pour la dissipation par reconnexion (figure 3.17).

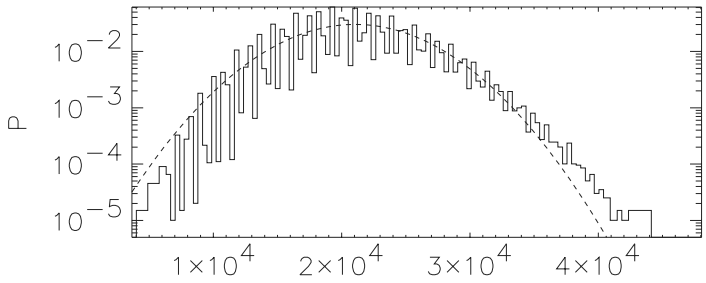

FIG. 3.18 – Fonction de distribution de l'énergie dissipée. Les lignes pointillées représentent le meilleur ajustement par une distribution Gaussienne. Les résultats sont obtenus pour la source évoluant selon l'application de Geisel et la dissipation par résistivité anormale. Seuil de courant $j_{\max} = 30$.

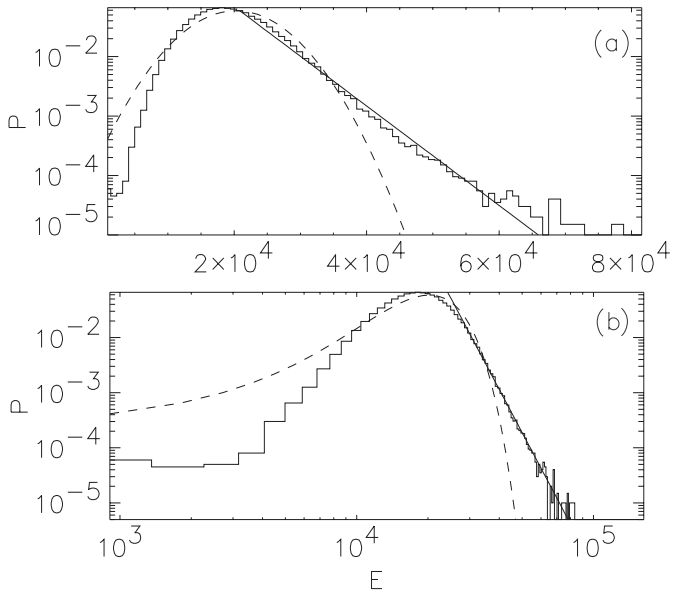

FIG. 3.19 – Fonction de distribution de l'énergie dissipée. Les lignes en pointillés représentent le meilleur ajustement par une distribution Gaussienne. Les résultats sont obtenus pour une source évoluant selon l'application de Geisel avec la dissipation par reconnexion. Seuil de courant est $j_{\max} = 30$. La figure supérieure utilise une échelle linéaire et celle du bas une échelle log-log.

3.2.5 Applications de Geisel en réseau

L'application de Geisel (Geisel & Thomae, 1984) fournit une autre représentation possible de la source de champ magnétique. Elle a été utilisée pour incrémenter le champ lui-même plutôt que pour simuler l'évolution propre de la source. Comme il a été discuté dans la description du modèle, cette application décrit l'évolution du champs magnétique de chaque cellule dans le temps et est tout à fait sem-

blable à la diffusion anormale (non-Brownienne). La croissance de la variance du champ magnétique est plus lente que pour le mouvement Brownien. Un tel comportement est appelé sous-diffusif. En conséquence, la variance est plus petite que pour une source aléatoire. Cela cause quelques différences sur la distribution de l'énergie dissipée. Si la résistivité anormale est la cause de la dissipation, la distribution obtenue avec cette application est très semblable à celle obtenue avec la source aléatoire, mise à part sa largeur de distribution. La figure 3.18 représente la distribution obtenue avec l'application de Geisel et $j_{\max} = 30$.

Un seuil de courant plus petit (comparé avec l'amplitude de la source) aboutit à une distribution de l'énergie dissipée proche de la distribution normale. Pour de $j_{\max}$ plus grands, la queue non-thermique aux hautes énergie apparaît. Les déviations par rapport à la distribution Gaussienne dans la queue augmentent avec $j_{\max}$ et la queue est plus prolongée.

Dans ce cas, la gamme d'énergies est légèrement plus étroite que pour l'application d'Ulam. Mis à part cette différences, les deux distribution sont très semblables.

La figure 3.19 montre la distribution obtenue pour la même source évoluant selon l'applications de Geisel avec le mécanisme de dissipation par reconnexion et $j_{\max} = 30$. La queue prononcée de la distribution confirme ainsi les tendances déjà observées pour d'autres types de sources. La figure 3.19 illustre la difficulté de l'analyse de telles distributions. Sur la figure 3.19a la distribution est représentée en échelle semi-logarithmique et elle semble avoir une queue exponentielle. Sur la figure 3.19b, où la même distribution est représentée en log-log, la même queue semble suivre une loi de puissance, avec un exposant de $-3{,}1$. Ce problème est lié au fait que la queue s'étend sur une gamme trop courte de seulement une décade d'énergie. Le problème de l'ajustement d'une distribution par une loi "bien choisie" sera traité au chapitre 6.

3.2.6 Sources dipolaires

Pour modéliser des sources dipolaires, le réseau est divisé en deux parties égales. Pour une moitié du réseau, la valeur de l'incrément des champs magnétiques est choisie aléatoirement dans l'ensemble $\{-1.5,\ -0.5, 0.5\}$, et pour l'autre moitié de la grille dans l'ensemble $\{1.5,\ 0.5,\ -0.5\}$. L'inhomogénéité globale de la source dipolaire aboutit à la formation d'une couche de courant fortement localisée dans la région de transition entre les deux parties du système. La taille du réseau utilisé dans ces simulations est 100×100.

La dissipation par reconnexion n'est pas toujours capable de stabiliser la croissance des champs. Cependant, dans le cas de la dissipation par résistivité anormale

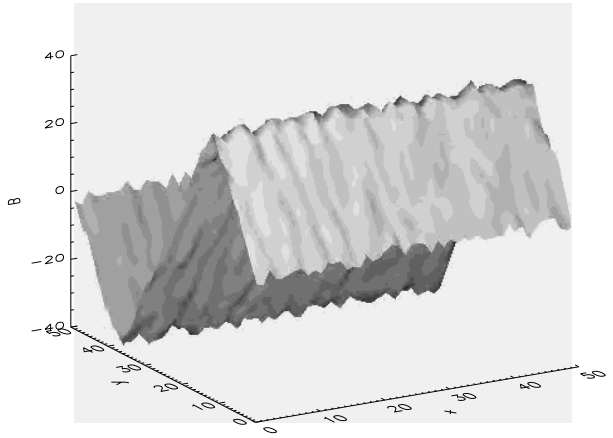

FIG. 3.20 – Structure du champs magnétique observée dans les simulations avec la dissipation par résistivité anormale, une source aléatoire dipolaire et un seuil de courant $j_{\max} = 5$.

un état stationnaire existe toujours.

Dans la suite, nous considérerons seulement la dissipation par résistivité anormale. L'énergie de la structure dipolaire grandit plus rapidement que dans le cas unipolaire et un état stationnaire est rapidement atteint. La structure dipolaire du champ magnétique dans l'état stationnaire est présentée sur la figure 3.20. Les corrélations spatiales du champ magnétique sont longues et quasi-stationnaires.

Ce système diffère beaucoup du système unipolaire avec une source aléatoire. Nous observons, comme on pouvait s'y attendre, que les événements dissipatifs sont plus intenses dans la région de transition où le champ magnétique change de signe. Lorsque le courant de seuil augmente, le maximum de la distribution de l'énergie dissipée est atteint à des énergies plus élevées. On peut expliquer une telle propriété par la présence de la couche de courant localisée au voisinage de la couche neutre. Les distributions de l'énergie dissipée dans le cas dipolaire présentent des queues d'énergies suprathermiques qui n'ont pas été observées dans le cas unipolaire avec la résistivité anormale (voir la figure 3.21). Si la distribution aux hautes énergies est approximé par $p(E) \simeq E^{\alpha}$ on peut trouver $\alpha \simeq -1.7,\ -1.9,\ -2.3$ ($j_{\max} = 50$, 100 et 230 respectivement). La figure 3.22 représente un extrait de la série temporelle de l'énergie dissipée pour $j_{\max} = 230$.

§ 3.3 Discussion du rôle des mécanismes de dissipation

La caractéristique à l'étude dans ce chapitre est l'énergie totale de tous les courants simultanément dissipés. Nos observations peuvent être résumées comme suit.

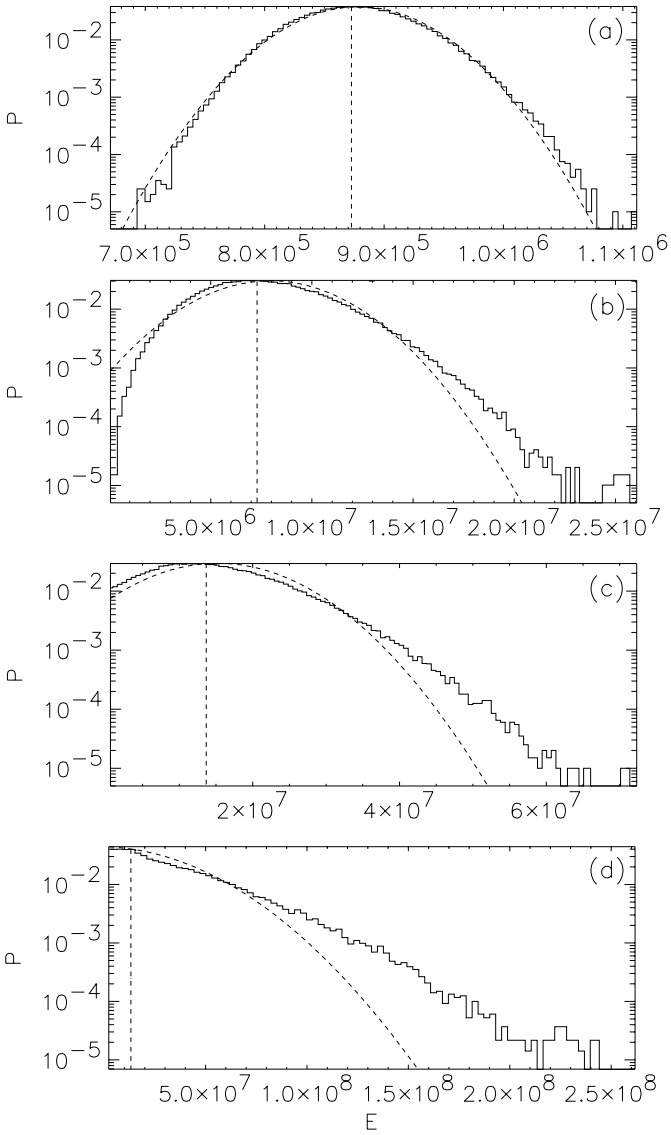

FIG. 3.21 – Fonction de distribution de l'énergie dissipée. Les lignes en pointillés représentent le meilleur ajustement par une distribution Gaussienne. Les résultats sont obtenus pour la dissipation par résistivité anormale et source aléatoire dipolaire. La durée des calculs est 2×10^5 pas de temps. Les courants de seuil $j_{\max}$ sont : **a)** $j_{\max} = 5$; **b)** $j_{\max} = 50$; **c)** $j_{\max} = 100$; **d)** $j_{\max} = 230$.

Des sources de champ magnétique de petite échelle et des mécanismes de dissipation d'énergie localisés peuvent aboutir à des corrélations de grande échelle du champ magnétique. Dans nos calculs, les sources d'énergie dominent dans les plus grandes échelles tandis que la dissipation domine dans les plus petites. Ainsi, le système se comporte comme s'il se produisait une cascade d'énergie des grandes échelles vers les plus petites. Cependant, durant l'évolution du système,

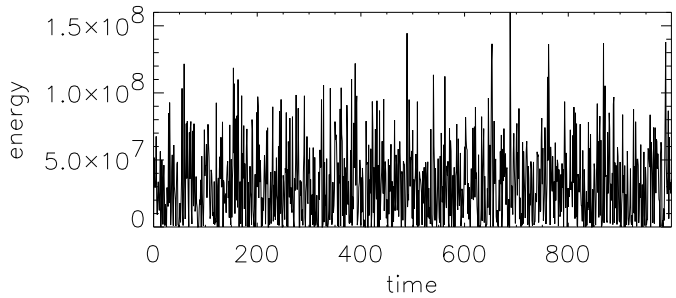

FIG. 3.22 – Fragment de série temporelle de l'énergie dissipée, pour $j_{\max} = 230$, source dipolaire aléatoire et dissipation par résistivité anormale.

des corrélations de grande échelle sont formées avec une longueur caractéristique significativement plus grande que celle de la source et de la dissipation.

Pour les trois types de source de champ magnétique considérées la distribution de l'énergie dissipée obtenue est proche de la distribution Gaussienne quand de relativement petits courants de seuil, $j_{\max} \leq 10$ sont utilisés. La dépendance de la distribution vis à vis des propriétés statistiques de la source pour les trois type des source considérées est faible et mérite néanmoins une analyse complémentaire minutieuse.

Dans le cas de la dissipation par la reconnexion, les déviations par rapport à la Gaussienne sont plus fortes que dans le cas de la dissipation par résistivité anormale. Pour les grandes valeurs du seuil de courant, nous observons une queue de distribution suprathermique aux hautes énergies qui a une forme en loi de puissance. Les corrélations spatiales moyennées sur le temps décroissent exponentiellement. De ce point de vue, on ne peut pas considérer notre modèle comme un système critique auto-organisé. Cependant, des corrélations longues (en loi de puissance) sont parfois observées.

Pour le modèle de champ magnétique avec une structure dipolaire globale, nous avons utilisé une distribution inhomogène de sources de champ magnétique. Cette source a une petite valeur moyenne positive dans une partie du réseau et négative dans l'autre. La moyenne sur la totalité du réseau est nulle. Le système n'atteint pas d'état stationnaire dans le cas d'une dissipation par reconnexion. Par contre, dans le cas de la résistivité anormale, il sature et un état stationnaire est établi. Dans ce cas, les déviations par rapport à la Gaussiannité deviennent plus fortes avec l'augmentation du seuil. Cet effet est associé à la diminution de l'épaisseur de la couche du courant où la dissipation est concentrée.

Aux hautes énergies, l'analyse statistique de la distribution des événements de la chauffage montre des distribution en loi de puissance. La valeur absolue de

l'exposant est plus grande quand le mécanisme de dissipation est produit par la reconnexion que par la résistivité anormale.

Cette tendance semble être similaire à celle trouvée dans (Benz & Krucker, 1998) qui ont étudié les augmentations de mesure d'émission. Ils ont montré que les propriétés statistiques des événements faibles qui se produisent dans les régions intra-cellulaires du Soleil calme manifestent de petites déviations par rapport à la distribution Gaussienne. Les nanoéruptions supposées être associées aux frontières du réseau magnétique, présentent des augmentations plus fortes. En prenant cela en considération, il est possible d'expliquer la différence quantitative entre les événements de chauffage faibles et forts annoncés dans (Krucker & Benz, 2000) grâce aux deux mécanismes de dissipation des champs magnétiques que nous avons utilisés dans notre modèle.

Chapitre 4

Structures magnétiques de grande échelle alimentées par des sources différentes

Les questions abordées dans ce chapitre sont : comment ces événements de petite échelle participent aux phénomènes observables de plus grandes échelles et comment l'information sur les petites échelles peut être extraite à partir des observations.

Pour cela, il est important de discuter le rôle et les propriétés des sources et des processus dissipatifs dans le cadre de modèles simplifiés. Une telle approche permet d'étudier la correspondance entre les propriétés des champs magnétiques de grande échelle et les caractéristiques des sources et des événements dissipatifs de petite échelle (plus petite que la résolution expérimentale). Dans ce travail, nous examinerons la possibilité d'obtenir de l'information sur les sources d'énergie magnétique de petite échelle en utilisant seulement le champ magnétique de grande échelle (échelle imposée par la résolution des instruments). Pour cela, nous appliquerons des tests statistiques différents à notre modèle.

Pour examiner les propriétés spatiales des champs magnétiques et des événements dissipatifs, des outils statistiques sont nécessaires. Ils peuvent être appliqués tant à la simulation qu'aux données expérimentales. Les outils comme l'entropie du champ magnétique et l'extraction des modes propres les plus énergétiques et de plus grande échelle spatiale au moyen de la Décomposition en Valeur Singulière (SVD) sont décrits dans le paragraphe 3.3. Leur application à notre modèle et leur capacité à distinguer des sources et des mécanismes de dissipation différents est discutée dans la paragraphe 3.4. Le paragraphe final propose une revue et une discussion critique des résultats.

Nous avons montré au chapitre précédent que les mécanismes de dissipation ont une influence significative sur la statistique de l'énergie dissipée. En effet le mécanisme de reconnexion montre l'écart le plus fort à la distribution Gaussienne aux hautes énergies. Cependant, nous avons montré que la densité de probabilité

de l'énergie dissipée est presque insensible à la nature des sources des champs magnétiques. Dans ce chapitre nous allons explorer davantage la dépendance des propriétés statistiques de grande échelle du champ magnétique en fonction des caractéristiques physiques des processus de dissipation. Cette étude sera menée en utilisant notre modèle. Notre objectif est donc d'étudier un problème inverse : comment les propriétés de grande échelle du champ magnétique nous permettent de caractériser les sources et les processus de dissipation. Pour ce faire, nous utiliserons des mesures différentes de complexité spatiale (**?**).

§ 4.1 Caractérisation de la complexité spatiale

La complexité spatiale peut être caractérisée de beaucoup de façons différentes (voir par exemple (Grassberger, 1986 ; Badii & Politi, 1997). Des propriétés linéaires sont traditionnellement étudiées en considérant la fonction de corrélation spatiale

$$C(\mathbf{r}) = \langle B(\mathbf{x},t)\ B(\mathbf{x}+\mathbf{r},t)\rangle_{\mathbf{x},t} / \langle B(\mathbf{x},t)^2\rangle_{\mathbf{x},t}\ . \tag{4.1}$$

où la moyenne est effectuée sur l'espace et le temps. Nous avons calculé la longueur de corrélation associée pour des sources, des mécanismes de dissipation et des seuils différents.

Une approche différente, utilisée en traitement d'image, est basée sur la Décomposition en Valeurs Singulières ou transformation de Karhunen-Loève (Golub & van Loan, 1996). A chaque pas de temps, l'intensité des champs magnétique $B(x,y)$ peut être vue comme une image 2D. Nous décomposons cette image en un ensemble de modes spatiaux séparables

$$B(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \mu_k\ f_k(x)\ g_k^*(y). \tag{4.2}$$

En rendant ces modes orthogonaux $\langle f_k f_l^* \rangle = \langle g_k g_l^* \rangle = \delta_{k,l}$, la décomposition devient unique. Les poids μ_k de ces modes, aussi appelés valeurs singulières, sont conventionnellement triés par l'ordre décroissant. Ils sont invariants par toutes transformations orthogonales de la matrice $B(x,y)$. Dans notre cas, le nombre N de modes est égal à la taille de la grille spatiale.

Une propriété clef de la SVD est qu'elle capture des structures à grande échelle dans des modes fortement pondérés, tandis que les modèles qui sont peu corrélés dans l'espace sont exprimés par des modes de faibles poids. La distribution des valeurs singulières est donc un bon indicateur du désordre spatial. Une distribution plate signifie qu'il n'y a aucune échelle spatiale caractéristique, et donc

que le champ magnétique ne devrait pas montrer de structures à grande échelle. Au contraire, une distribution fortement piquée suggère qu'il y ait des structures cohérentes (Dudok de Wit, 1995). Il faut souligner toutefois que cette approche est, comme la précédente, basée sur les moments des deux premiers ordres seulement.

A partir des modes SVD du champ magnétique 2D, on peut définir une mesure de la complexité spatiale, qui est appelée l'entropie SVD (Aubry *et al.*, 1991). Définissons

$$E_k = \mu_k^2 / \sum_i \mu_i^2$$

comme la quantité relative d'énergie qui est contenue dans le k ième mode. L'entropie SVD peut alors être définie comme la limite

$$H = -\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^{N} E_k \log E_k \ . \tag{4.3}$$

La valeur maximale $H = 1$ est atteinte quand le désordre spatial est maximal, c'est à dire quand $E_k = 1/N$ pour tout k. $H = 0$ signifie que toute l'énergie est contenue dans un mode simple. Cette valeur de l'entropie est, comme les valeurs singulières, invariant par toutes transformations orthogonales de la matrice B.

En pratique, il est rarement nécessaire de prendre la limite $N \to \infty$ dans l'équation 4.3. Définissons H_M comme l'entropie SVD calculée à partir d'un sous-ensemble de taille finie $M \times M$ (avec $M \leq N$)

$$H_M = -\frac{1}{\log M} \sum_{k=1}^{M} E_k \log E_k \ . \tag{4.4}$$

Cette quantité converge en pratique assez vite vers sa valeur asymptotique lorsque M augmente. Pour M assez grand, H_M est ainsi une quantité intensive (indépendante de la taille du sous-système M) et devrait ainsi plutôt être appelée une entropie-par-cellule, ou densité d'entropie.

La SVD peut aussi être utilisée comme un filtre linéaire pour extraire les structures de grande échelle d'un contexte avec des fluctuations de petite échelle. Pour cela, il faut effectuer la SVD et ensuite dans l'équation 4.2 n'effectuer la somme que sur les modes les plus énergétiques, pour obtenir un champ magnétique filtré. Il y a évidemment un certain arbitraire dans l'identification de ce que nous appelons des modes énergétiques, mais le processus peut être automatisé en utilisant des critères de choix robustes. Voir par exemple (Dudok de Wit, 1995).

Remarquons que, contrairement à plusieurs autres études, nous n'utilisons pas la dimension fractale (plus exactement, la dimension Haussdorf-Besicovitch) du champ magnétique comme mesure complémentaire de la complexité spatiale. En

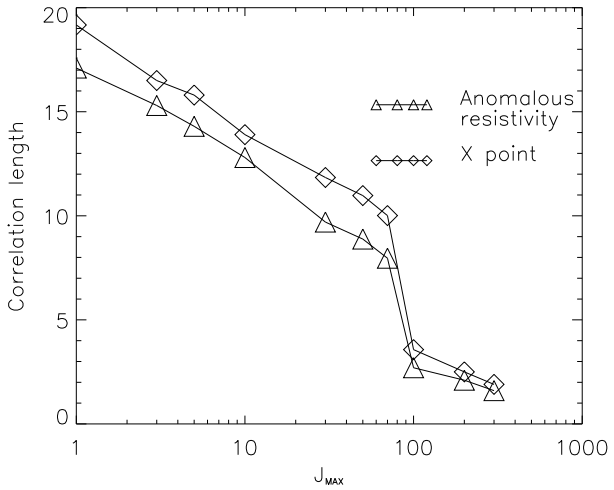

FIG. 4.1 – Dépendance de la longueur de corrélation en fonction du seuil de dissipation, pour les deux mécanismes de dissipation. La résistivité anormale est représentée par des triangles, la reconnexion par des losanges.

effet, nous avons constaté que les différences apportées par les mécanismes distincts étaient dans la plupart des cas trop petites. Les incertitudes inhérentes à l'évaluation de la dimension fractale m'auraient permis de rendre compte des ces différences. Mentionnons simplement que le champ magnétique 2D a généralement présenté une dimension fractale $D = 1{,}5$ à $1{,}7$.

§ 4.2 Complexité spatiale et propriétés de la source et de la dissipation

4.2.1 Corrélations spatiales

Les différentes mesures de la complexité spatiale décrites ci-dessus ont été appliquées au champ magnétique 2D, après que les transitoires initiaux se soient éteints.

La fonction de corrélation spatiale a été évaluée en utilisant l'équation 4.1. Pour les petites tailles de grille, de l'ordre de 30×30, la fonction de corrélation suit une loi de puissance. Comme indiqué dans (Krasnoselskikh *et al.*, 2001), la densité de probabilité de l'énergie totale dissipée dans ce cas aussi décroît comme une loi de puissance. Cette indication apparente d'un comportement auto-organisé critique est cependant un simple artefact dû à la petite taille du réseau, puisqu'il disparaît avec de plus grands réseaux. Pour les tailles de 100×100 et au-delà, la fonction de corrélation décroît presque exponentiellement, tandis que l'énergie

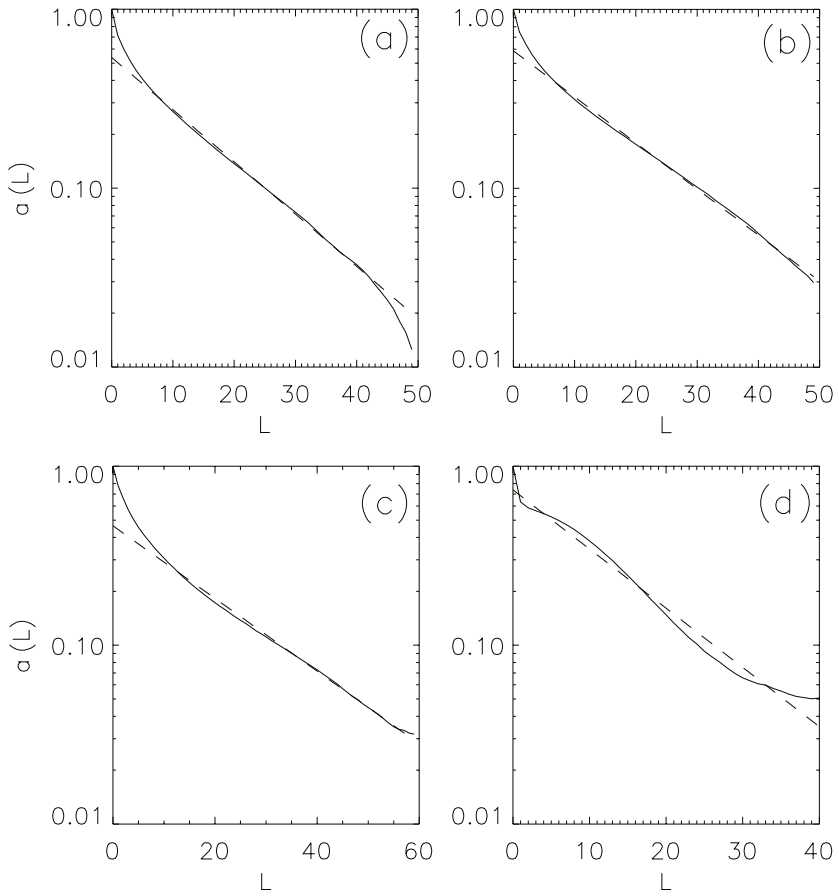

FIG. 4.2 – Coefficient de corrélation spatiale moyenne du champ magnétique(traits pleins), sur des axes semi-logarithmiques. Les lignes en pointillés représentent le meilleur ajustement par une fonction exponentielle. Les résultats sont obtenus pour des sources aléatoires et sous-diffusives avec un réseau de taille 200×200 et un seuil de dissipation $j_{\max} = 1$. **a)** sources aléatoires, dissipation par résistivité anormale, longueur de corrélation $L \approx 17$. **b)** sources aléatoires, dissipation par reconnexion, longueur de corrélation $L \approx 19$. **c)** source sous-diffusive, dissipation par résistivité anormale, longueur de corrélation $L \approx 23$. **d)** source sous-diffusive, dissipation par reconnexion.

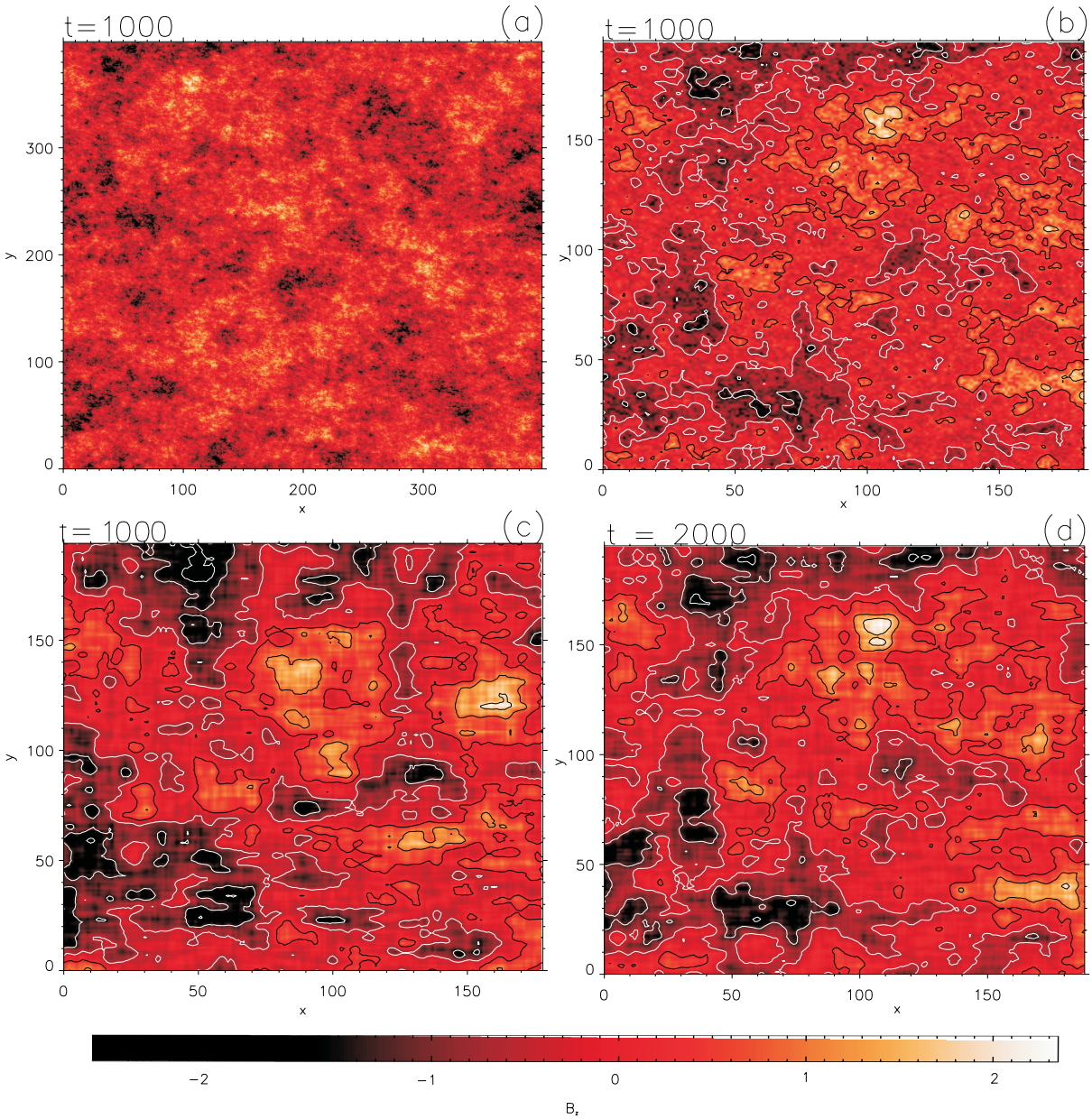

FIG. 4.3 – Champ magnétique obtenu pour une source aléatoire avec reconnexion, avec $j_{\max} = 1$. **a)** champ magnétique à $t = 1000$. **b)** zoom de l'image précédente. **c)** même zoom que dans b), mais avec le champ reconstruit en utilisant seulement les 20 plus forts modes SVD (sur les 400 au total). **d)** Même zoom que c), mais à un temps postérieur $t = 2000$. Les entropies SVD à $t = 1000$ et $t = 2000$ sont respectivement $H = 0.79$ et $H = 0.81$.

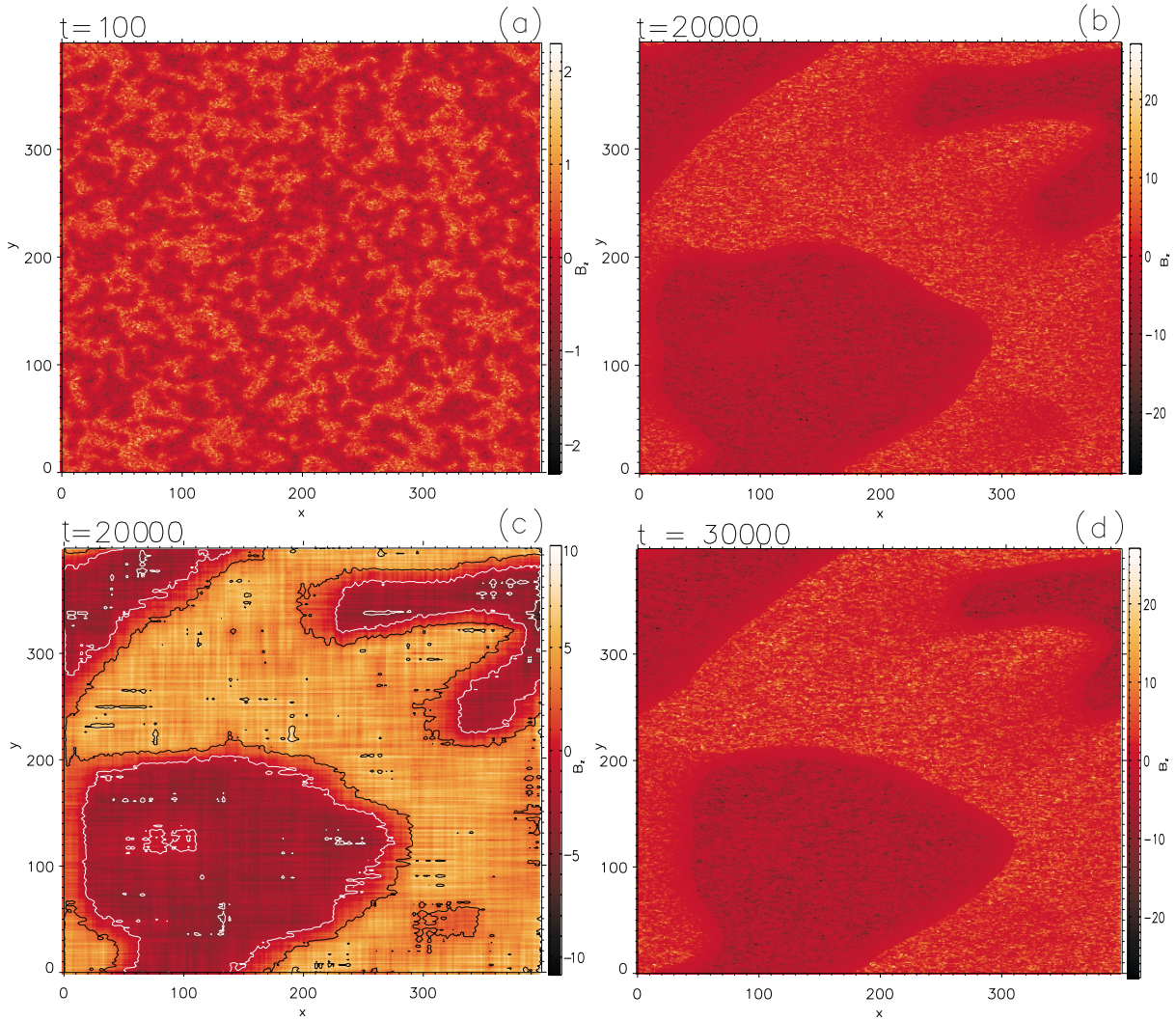

FIG. 4.4 – Extrait du champ magnétique obtenu pour une source sous-diffusive avec reconnexion, avec $j_{\max} = 1$. **a)** champ magnétique dans un état transitoire, à $t = 100$. **b)** champ magnétique dans un état stationnaire, à $t = 20000$; **c)** même que b), mais avec un champ reconstruit en utilisant seulement les 20 plus forts modes SVD. **d)** champ magnétique à un temps postérieur, $t = 30000$. Les entropies SVD à $t = 100$ et $t = 20000$ et $t = 30000$ sont respectivement $H = 0.73$, $H = 0.51$ et $H = 0.53$.

dissipée présente une distribution quasi-Gaussienne.

Pour des fonctions de corrélation décroissant exponentiellement, nous définissons la longueur de corrélation L comme

$$C(r) = \exp(-r/L).$$

Nous avons trouvé que L reste presque constante lorsque la taille du réseau excède environ 200 $\times$200. Dans ce cas, L est beaucoup plus petite que la taille du réseau. Il est donc légitime de s'attendre à ce que les résultats ne dépendent pas significativement de la taille du réseau ou des conditions de frontière. Dans le reste de ce chapitre, nous présenterons seulement des résultats pour des réseaux 400×400. Un petit seuil ($j_{\max} = 1$) sera utilisé, qui est de l'ordre de $\sqrt{\langle \delta B^2 \rangle}$.

Comme indiqué sur la figure 4.1, pour une source de champ magnétique aléatoire, la longueur de corrélation moyenne L est plus grande pour la dissipation de type reconnexion que pour la résistivité anormale. On peut expliquer cela par la présence de courants supercritiques $j > j_{\max}$. De plus, dans les deux cas les longueurs de corrélation diminuent en fonctions de $j_{\max}$ (la figure 4.1). Nous ne notons pas de différences significatives dans la dépendance fonctionnelle de la fonction de corrélation ou dans la longueur de corrélation en changeant de processus de dissipation. Une exception est l'application de la source de Geisel combinée à la reconnexion, pour laquelle la fonction de corrélation ne décroît, ni exponentiellement ni comme une loi de puissance, voir l'image 4.2d. Aucune longueur de corrélation précise ne peut être déduite dans ce cas.

Le résultat principal est que nous ne pouvons pas distinguer entre processus différents sur la base de la longueur de corrélation seulement. Pourtant, on observe des différences marquées en visualisant les champs magnétiques avec des sources différentes. Voir par exemple l'image 4.3b et l'image 4.4b). Ainsi, d'autres indicateurs du désordre spatial sont nécessaires.

4.2.2 Valeurs singulières et modes spatiaux cohérents

Comme discuté dans la section précédente et dans (**?**), la Décomposition en Valeurs Singulières fournit une décomposition orthogonale qui permet d'extraire les modes cohérents du champ magnétique.

La distribution des valeurs singulières révèle généralement quelques modes de grande amplitude, suivis par une longue queue de modes faibles, voir l'image 4.5. Une telle distribution suggère que les particularités saillantes du champ bidimensionnel soient capturées par quelques modes seulement. En effet, une longue queue indique que les fluctuations sont aléatoirement distribuées dans l'espace. Par

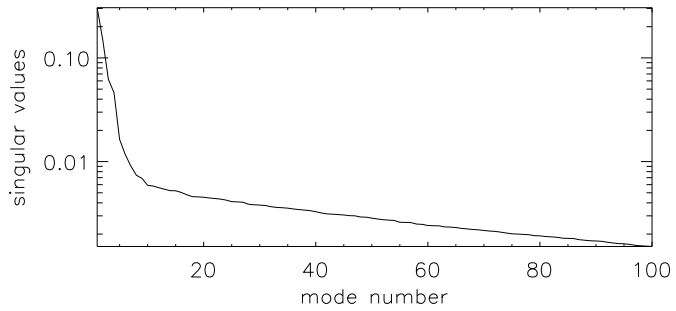

FIG. 4.5 – Distribution des valeurs singulières associées à une matrice de taille 400×400 de champs magnétique. On montre seulement les 100 premières valeurs singulières. Ce cas correspond à une source sous-diffusive avec de la reconnexion.

exemple, le mode le plus énergétique ($f_1(x)$ avec la notation d'équation 4.2) pour une source de Geisel avec une dissipation par reconnexion, révèle clairement une structure cohérente de grande échelle (voir figure 4.6).

Le fait que les modes les plus pondérés correspondent aux structures de grande échelle des champs magnétiques est illustré sur les figures 4.3 et 4.4. Sur les deux figures, les sous-figures b) et c) permettent de comparer le champ magnétique original et le champ reconstruit en utilisant seulement les 20 plus forts modes. Il apparaît que les modes les plus forts capturent la structure cohérente à grande échelle du champ magnétique.

Cependant, cette analyse, ne fournit qu'une décomposition du champ magnétique à un moment donné. Aucune information n'est obtenue sur la durée de vie de ces structures, qui est une quantité cruciale. Il apparaît, cependant, que les modes fortement pondérés persistent dans le temps, comparés au champ magnétique original. On peut voir cela en comparant le champ magnétique filtré à deux instants séparés de 10^4 pas de temps (figures 4.4 c et d). On peut en réalité voir dans les figures 4.4 a, b et c comment ces structures grandissent à partir d'un état initialement désordonné.

Ainsi les structures cohérentes extraites par SVD ont une longue durée de vie et produisent une décroissance lente de la fonction d'autocorrélation temporelle. Tandis que les structures de petite échelle apparaissent rapidement et disparaissent, celles de grande échelle évoluent lentement. En ce sens, ce sont vraiment des structures cohérentes.

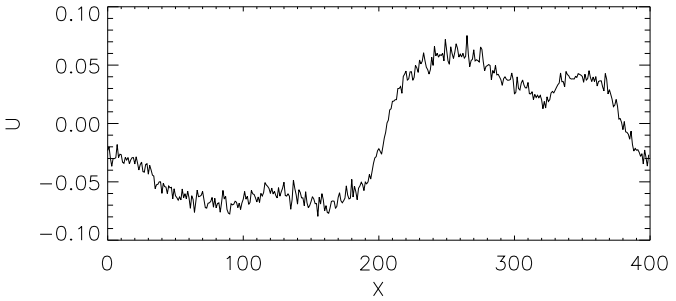

FIG. 4.6 – Profil spatial du mode spatial le plus énergétique $f_1(x)$ obtenus par la même Décomposition en Valeurs Singulières. Le jeu de données est le même que pour la figure 4.5.

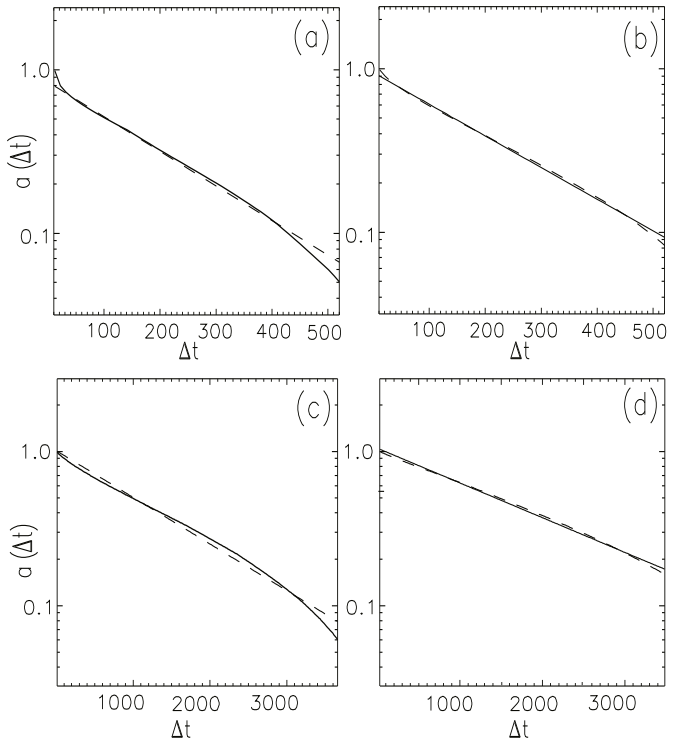

FIG. 4.7 – Fonction de corrélation temporelle moyenne du champ magnétique (traits pleins) en axes semi-log calculée avec une série de 4×10^4 pas de temps. Les lignes en pointillés représentent le meilleur ajustement par une fonction exponentielle. Les résultats sont obtenus pour des sources aléatoires et sous-diffusives, avec reconnexion et un seuil $j_{\max} = 1$. **a)** source aléatoire, temps de corrélation $\tau \approx 202$. **b)** comme précédemment, mais seulement pour les 20 premiers modes, $\tau \approx 220$. **c)** source sous-diffusive, $\tau \approx 1435$. **d)** comme (c), mais avec seulement les 20 premiers modes, $\tau \approx 2958$.

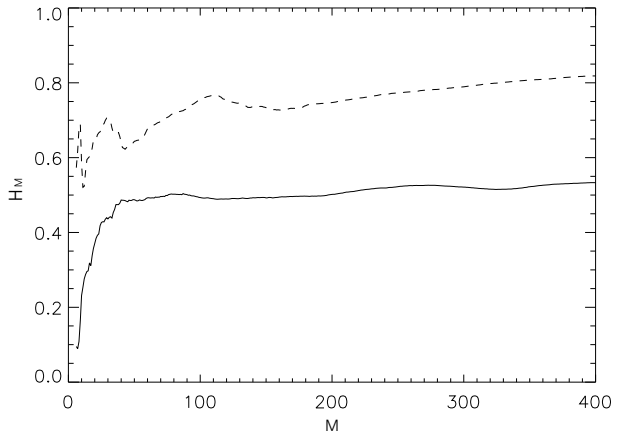

FIG. 4.8 – Entropies partielles H_M en fonction de la taille du réseau M. La ligne continue est pour une source sous-diffusive et la ligne en pointillés brisée pour une source aléatoire. Cette entropie est normalisée pour que $H = 1$ corresponde au désordre maximal.

4.2.3 Entropie du champ magnétique

Quantitativement, le degré de cohérence du champ magnétique peut être mesuré à l'aide de l'entropie spatiale (ou plus précisément de l'entropie-par-cellule) définie par l'équation 4.3. Cette définition implique de calculer une limite lorsque $N \to \infty$, mais en pratique, pour des tailles du réseau assez grandes, la quantité H_M définie dans l'équation 4.4, calculée pour un sous-ensemble $M \times M$ de B, converge vers cette limite lorsque M augmenté. En calculant cette entropie H_M pour des M croissants, nous obtenons les courbes la figure 4.8, qui montre que l'entropie H_M est déjà proche de H pour $M = 100$. Il semble que la convergence plus rapide pour la source sous-diffusive que pour la source aléatoire. Typiquement, H_M converge quand la taille du sous-système atteint approximativement la taille des structures cohérentes. Nous pouvons ainsi conclure que l'entropie H_M est relativement indépendante de la taille du réseau, à condition que celle ci excède une valeur minimale de 100×100.

L'entropie décroît de façon monotone en fonction du temps et converge vers une valeur finie à l'état stable (voir Tab. 4.1), indiquant à la fois une diminution de la complexité spatiale et la formation de structures de grands échelle dont l'évolution est lente.

Un résultat intéressent est que la valeur vers laquelle l'entropie converge est significativement différente suivant le type de source (voir Tab. 4.2).

t	100	500	20000	30000
H	0.73	0.69	0.51	0.527

TAB. 4.1 – Variation de la densité d'entropie en fonction du temps, pour une source sous-diffusive et dissipation par reconnexion (voir aussi la figure 4.4).

type de source	H
aléatoire	0.8
Ulam	0.78
Geisel	0.53

TAB. 4.2 – Entropie dans l'état stable pour différents types de source et dissipation par reconnexion.

§ 4.3 Rôle des sources de petite échelle

La question traitée dans ce chapitre est la suivante : si les mesures réelles ne peuvent pas résoudre l'échelle caractéristique du chauffage, de quelle manière les propriétés "macroscopiques" observables peuvent-elles être influencées par les propriétés des sources d'échelle plus petites ?

Dans ce but nous avons effectué l'analyse comparative d'estimateurs statistiques de caractéristiques spatiales de grande échelle du champ magnétique comme la longueur de corrélation, l'entropie et les modes propres les plus énergétiques pour différents types de source (aléatoire, chaotique et intermittent).

Les petite échelles "bruyantes" ont été filtrées pour étudier les grandes échelles du champ magnétique. Nous avons reconstruit le champ magnétique avec les modes propres donnés par SVD en ne conservant que les plus grands qui correspondent aux structures cohérentes énergétiques. Les modes les moins énergétiques, qui correspondent au niveau du bruit, ont été tronqués.

Les résultats peuvent être résumés comme suit :

Les caractéristiques de grande échelle spatiale du champ magnétique, comme la longueur de corrélation, l'entropie et les modes propres les plus énergiques dépendent significativement des propriétés statistiques de la source de petite échelle et du des mécanisme de dissipation.

– Il a été montré que la moyenne temporelle de la fonction de corrélation est exponentielle, i.e la longueur de corrélation est finie et non pas infinie comme cela est supposé dans les systèmes SOC. Cette longueur est un peu plus grande pour la dissipation par reconnexion et dépend aussi du seuil de

dissipation.

- Avec la source (Geisel) sous-diffusive et la reconnexion, la corrélation s'écarte significativement d'une exponentielle.
- La Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) permet d'extraire les structures des champs magnétiques les plus énergétiques, qui sont largement plus grands que la taille de la source et persistent longtemps. Ceci soutient l'idée que le plasma peut s'organiser sur de grandes échelles bien quíl soit contrôlé par des sources de petite échelle.
- De plus, l'entropie calculée à partir des valeurs singulières du champ magnétique produit par des sources intermittentes a été trouvée beaucoup plus petite (environ 20 à 30 %) pour une source sous-diffusive que pour d'autres sources. Les structures les plus intensives dans l'espace et de longue durée de vie sont essentiellement plus grandes dans ce cas aussi. Cela indique un niveau d'organisation plus élevé dans ce système que dans le cas de sources aléatoires.

On peut expliquer la nette différence des caractéristiques de complexité spatiale dans le cas de sources de Geisel de la façon suivante : cette application déterministe produit dans chaque cellule une diffusion de champ magnétique semblable à une diffusion aléatoire, mais plus lente que d'habitude (sous-diffusion). La dissipation produit une diffusion normale du champ, c'est-à-dire une relaxation des champs magnétiques plus rapides dans l'espace (en moyenne) et rapproche les propriétés temporelles de la source des propriétés spatiales. Cela explique pourquoi les sources avec une diffusion plus lente (Geisel) ont tendance à former des structures de plus grande échelle et de durée de vie plus longue que des sources avec diffusion normale (aléatoire, Ulam).

Ainsi nous avons montré par notre modèle que la structure spatiale du champ magnétique de grande échelle dans l'atmosphère solaire contient aussi une information statistique importante sur les mécanismes du chauffage de couronne. Une telle information peut être extraite par des techniques basées sur la SVD, qui sont aisément applicables aux données expérimentales et peuvent être utilisées en complément à l'analyse habituelle de l'énergie émise.

Chapitre 5

Le rôle de la turbulence

Le modèle est très flexible et permet beaucoup d'améliorations, en ajoutant des effets physiques les uns après les autres pour étudier leurs effets sur le chauffage. Puisque les expériences ne permettent pas de déduire directement les propriétés des sources d'énergie magnétique et des événements dissipatifs, il est nécessaire d'étudier l'influence des sources d'énergie magnétiques théoriquement admissibles et des mécanismes de dissipation sur les caractéristiques macroscopiques observables du flux d'énergie émis et des champs magnétiques. Une telle correspondance entre les caractéristiques de grande échelle des champs magnétiques, les caractéristiques des sources de petite d'échelle et les événements dissipatifs peut être obtenue dans le cadre de modèles statistiques relativement simples. A l'aide de simulations numériques, les techniques d'analyse des propriétés macroscopiques appropriées devraient aider à clarifier certaines questions expérimentales sur la nature des processus physiques divers étant à la base des observations.

Dans ce but, plusieurs effets peuvent être inclus dans le modèle, que nous décrivons dans ce chapitre. Un effet qui n'a jamais été étudié précédemment dans ce type de modèle est l'auto-génération de champ magnétique par le plasma de la couronne par effet de l'hélicité cinétique (effet α). D'autres termes sources ou critères de dissipation peuvent aussi être présentés pour parvenir à une meilleure compréhension de la physique. Plusieurs processus dissipatifs peuvent être simultanément étudiés, et leurs effets traduits plus précisément en chauffage et accélération de particules. Les sources peuvent également inclure des sources turbulentes présentant un spectre de puissance semblable à ceux observés dans les fluides et plasmas turbulents. Nous allons commencer par décrire cette possibilité.

§ 5.1 Sources et turbulence développée

5.1.1 Sources turbulentes

Les mouvements du plasma dans la zone de convection ne sont pas entièrement laminaires, mais sont parfois soumis à la turbulence générée en particulier par le cisaillement entre les cellules de convection (Nesis *et al.*, 1999).

La turbulence développée peut être décrite comme le mouvement apparemment désordonné d'un fluide soumis à une perturbation. Elle implique une cascade d'interactions non-linéaires transportant l'énergie de l'échelle d'injection vers les échelles de dissipation. Quelques propriétés universelles de cette cascade ont été prédites par A.N. Kolmogorov (Kolmogorov, 1941 ; Frisch, 1995) sous des hypothèses de stationarité, homogénéité, isotropie et constance du flux d'énergie transmis d'une échelle à l'autre (ou absence de dissipation dans une certaine gamme d'échelles). En particulier, un spectre universel des fluctuations turbulentes a été prédit, dont la densité spectrale a la forme

$$E(k) \propto k^{-5/3}.$$

Dans le cadre de la magnetohydrodynamique, l'hypothèse d'isotropie est parfois violée par la présence d'un champ magnétique moyen fort. Iroshnikov et R. Kraichnan ont alors prédit un spectre en

$$E(k) \propto k^{-3/2}.$$

On retiendra surtout la forme de loi de puissance de ces 2 spectres, supposée universelle, c'est-a-dire indépendante pour une large part des conditions aux limites, de la nature du forçage ou des processus dissipatifs.

Pour notre problème, les fluctuations horizontales du champ magnétique peuvent être décomposées par transformée de Fourier de la façon suivante :

$$B\,(x,y) = \int \widehat{B}\,(k_x,k_y)\, e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

Un spectre turbulent des fluctuations horizontales de B correspond à des amplitudes $\widehat{B}$ de la forme :

$$\left|\widehat{B}\,(k_x,k_y)\right|^2 = C\,|\mathbf{k}|^{-\alpha}\,.$$

La valeur de l'exposant α peut varier selon le type de turbulence. Pour référence nous prendrons $\alpha = \frac{5}{3}$, mais pour une étude complète nous comptons examiner l'effet des propriétés spectrales de la source pour des α différents ainsi que des nombres de modes différents. Cette étude permettra en particulier d'étudier le

rôle des échelles caractéristiques de la source en donnant plus ou moins de poids aux grandes échelles.

Dans notre modèle nous avons introduit des sources de champ magnétique avec un tel spectre isotope. La connaissance du spectre seul ne permettant pas de reconstruire le signal, nous avons tiré les phases $\varphi(k) = \arg(\widehat{B}(k))$ au hasard, en les supposant uniformément distribuées dans $[0,2\pi[$ et indépendamment les unes des autres, ce qui assure statistiquement l'homogénéité spatiale du champ magnétique et sa stationarité temporelle. Le spectre est supposé constant au cours du temps, mais les phases sont tirées à chaque pas de temps. La source de champ magnétique est donc donnée par la série de Fourier

$$\delta B(x,y) = B_0 \sum_{\substack{k_x,k_y=-N/2 \\ |\mathbf{k}|\neq 0}}^{N/2} |\mathbf{k}|^{-\alpha} \exp\left\{ i \left[(k_x x + k_y y)\frac{2\pi}{N} + \phi \right] \right\}.$$

où N est la longueur du côté de la boîte de simulation.

5.1.2 Structure spatiale

Les résultats sont présentés pour des grilles de taille 256×256 et 512×512. Le mécanisme de dissipation est la résistance anormale, qui se déclenche à partir du courant seuil $j_{\max} = 3$.

Les résultats préliminaires des simulations montrent une dépendance des spectres observés en fonction du spectre de la source. Le spectre en k du champ magnétique ressemble à une loi de puissance (voir figure 5.1), dont l'exposant est assez proche de $-5/3$, surtout pour les grands k. Il faut noter cependant que le spectre tend à s'aplatir vers les grands k, et qu'au contraire il décroît un peu plus rapidement que le spectre de Kolmogorov vers les petits k. Cela montre, d'une part, que les processus dissipatifs ralentissent la cascade aux grandes échelles (faibles k) et, d'autre part, que le comportement aux petites échelles (grands k) est assez peu influencé par les propriétés de la source. Le champ magnétique correspondant typique est montré sur la figure 5.2. Le caractère des structures ne dépend pratiquement pas de la taille de la grille (voir la figure 5.2). Le degré d'organisation spatiale peut être caractérisé par l'entropie introduite au chapitre 3. Ici, pour n'importe quelle grille, $H \to 0{,}15$, ce qui dénote un fort degré d'organisation aux grandes échelles (on rappelle que H est compris entre 0 et 1, et $H = 1$ correspond au désordre maximum. L'entropie est beaucoup plus petite que pour les sources turbulentes dont les propriétés de diffusion temporelle sont anormales (voir chapitre 3). La décomposition en valeur singulière montre que l'énergie est concentrée à 98,7% dans 5 premiers modes (figure 5.3).

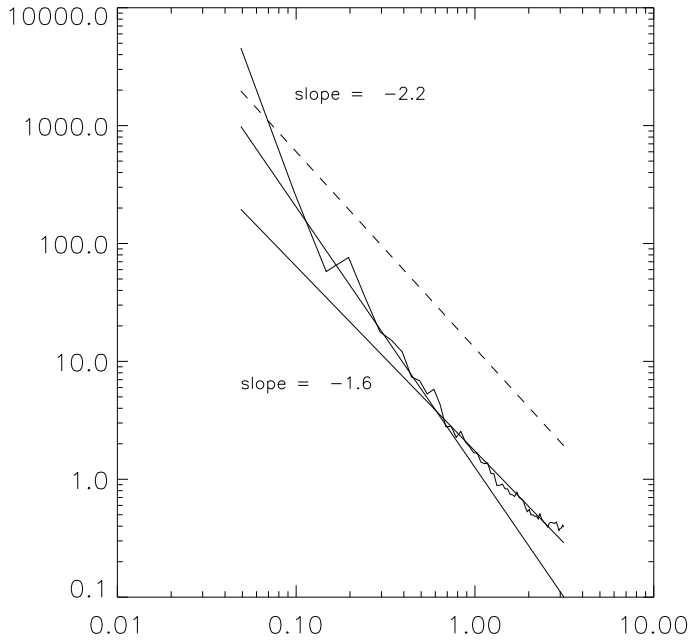

FIG. 5.1 – Spectre de puissance en k du champ magnétique (trait gras). Une échelle log-log est utilisée. Deux ajustements (fit) par des lois de puissances sont présentés en traits continus, un pour les petits k d'exposant -2,2 et un pour les grands k d'exposant -1,6. Un spectre de type Kolmogorov est dessiné en pointillés pour référence.

Cette cohérence se remarque aussi sur les fonctions d'autocorrélation moyennées en temps, dont la décroissance est lente (quasi-linéaire, voir figure 5.4).

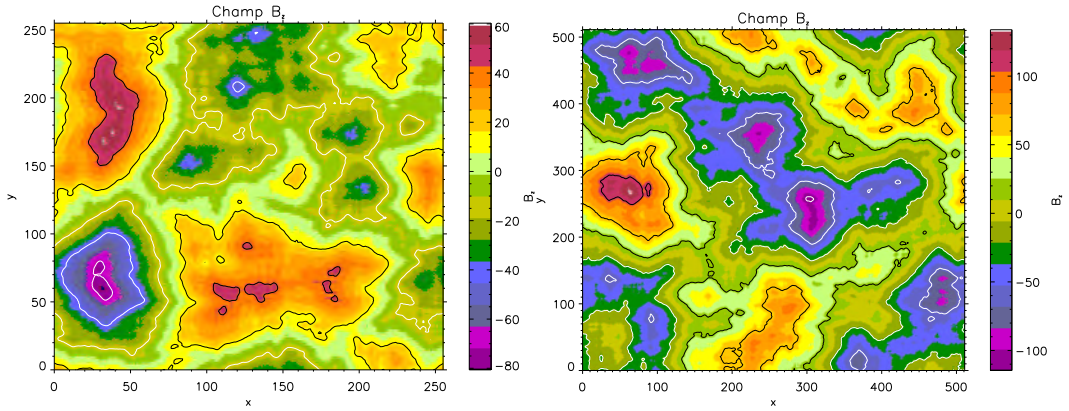

FIG. 5.2 – Structure spatiale du champ magnétique avec une source de type Kolmogorov (256×256 à droite, 512×512 à gauche). L'entropie est $H = 0{,}15$ dans les 2 cas.

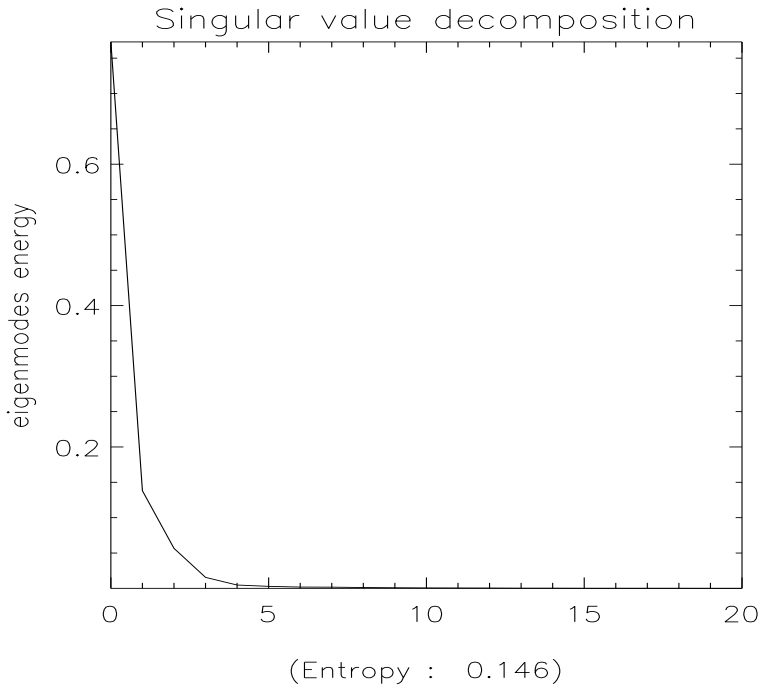

FIG. 5.3 – Valeurs singulières du champ magnétique au carré. La décroissance rapide montre que l'énergie est essentiellement contenue dans quelques modes cohérents.

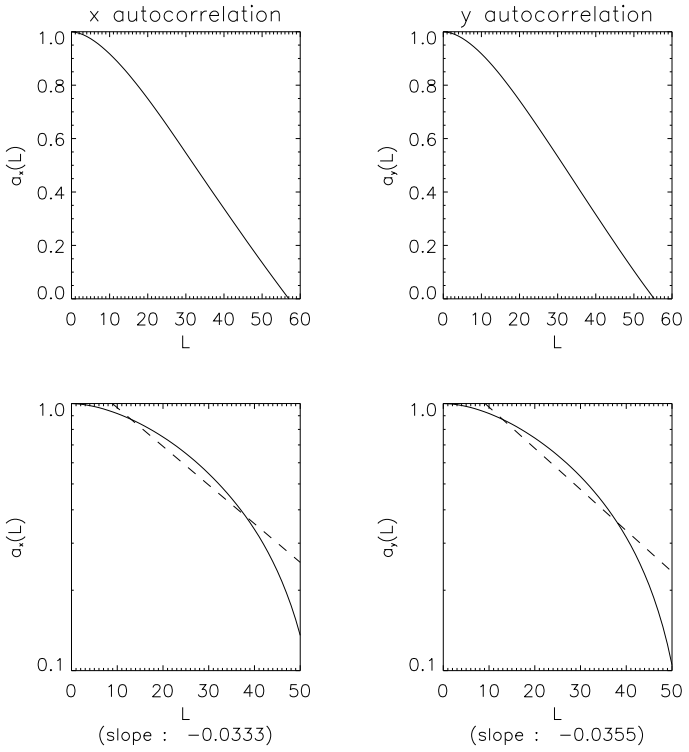

FIG. 5.4 – Fonction d'autocorrélation de B moyennée en temps.

5.1.3 Propriétés de l'énergie dissipée

Les séries temporelles de l'énergie totale dissipée sur la grille montrent un caractère plus irrégulier ou intermittent que pour les autres types de source (figure 5.5), même lorsqu'un état statistiquement stationnaire est atteint. Le spectre de

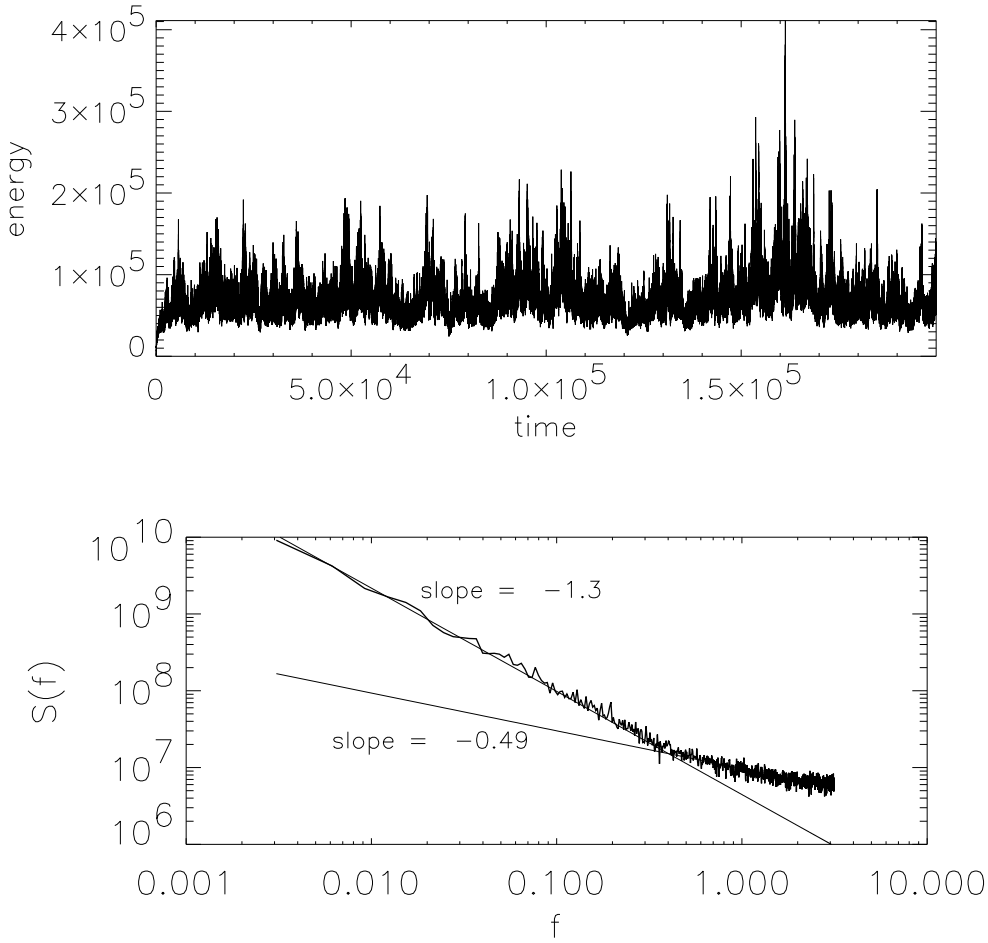

Fig. 5.5 – Série temporelle de l'énergie totale dissipée (haut) et spectre de puissance en temps (bas). Le spectre est ajusté par 2 lois de puissance indiquées en traits continus, aux petits ω (exposant -1,3) et aux hautes fréquences (exposant -0,5).

puissance (figure 5.5, panneau du bas) de ces séries temporelles présente la loi de puissance ayant 2 pentes distinctes aux hautes et aux basses fréquences. Aux basses fréquences, la loi de puissance du spectre a un exposant de -1,3, qui correspond à une décroissance plus lente du spectre que celle du spectre de Kolmogorov. Aux fréquences plus élevées, le spectre décroît encore plus lentement, en $k^{-0,49}$. Il faut noter que ce comportement est différent de celui de la cascade classique pour laquelle l'énergie est dissipée aux petites échelles et où le spectre decroît

plus rapidement. En raison des pics irréguliers de grande amplitude (fortement

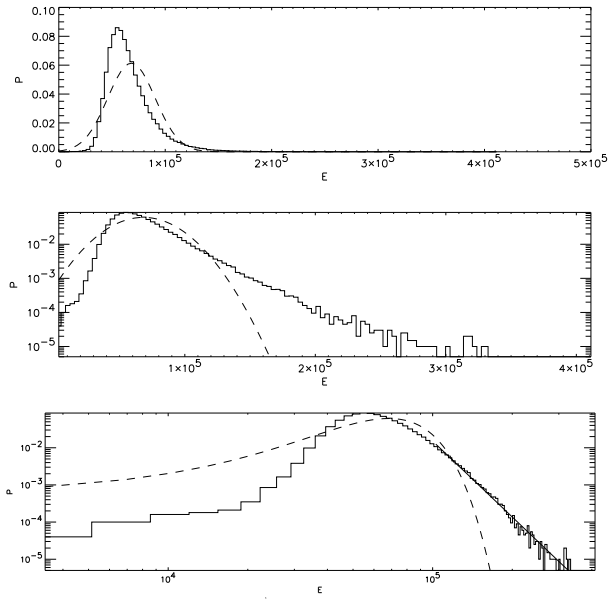

FIG. 5.6 – Densité de probabilité de l'énergie dissipée en échelle linéaire (haut), semilog (milieu) et log-log (bas). La Gaussienne est présentée en traits continus. L'exposant de la loi de puissance obtenue en ajustant la courbe du bas varie de -6 jusqu'à -1 en fonction de la valeur de l'énergie minimale prise en considération et il est égal -3.7 si on prend pour tel le point d'intersection avec la courbe Gaussienne.

supérieure à la déviation standard) apparaissant dans les séries temporelles de l'énergie dissipée, sa densité de probabilité (voir figure 5.6) est nettement différente de celle de la Gaussienne, et a une longue queue vers les hautes énergies. Il est difficile de dire si elle est exponentielle ou en loi de puissance. L'exposant estimé de la loi de puissance varie de -6 jusqu'à -1 en fonction de la valeur de l'énergie minimale prise en considération et il est égal -3.7 si on prend pour tel le point d'intersection avec la courbe Gaussienne.

La méthode de Pearson, que nous allons décrire au prochain chapitre, fait l'approximation suivante pour la densité de probabilité de l'énergie dissipée :

$$p(x) \sim c\,|x|^{-9} \exp(-\gamma/x)\,.$$

La queue de la distribution elle-même est approximée par une loi de la forme :

$$p(x) \sim c\,(x-c_1)^{0.35}\,(x-c_2)^{-11}$$

De ces résultats préliminaires, on peut conclure que les sources spectrales en loi d'échelle modifient les propriétés statistiques du système. La structure spatiale est sensiblement changée. La plus grande cohérence observée est due à la prédominance des modes de grande échelle. On observe, surtout, des changements sur les propriétés temporelles de l'énergie dissipée: d'une part, la série temporelle est plus irrégulière et présente un spectre en loi de puissance ; d'autre part, une queue aux hautes énergies apparaît dans la densité de probabilité de l'énergie dissipée, même lorsque, comme ici, la dissipation se produit par une résistivité anormale. Il serait donc intéressant de poursuivre cette étude en étudiant la dépendance des résultats en fonction de l'exposant α du spectre de la source pour déterminer quel cas s'ajuste le mieux aux résultats expérimentaux.

§ 5.2 La dynamo turbulente

5.2.1 Principe de l'effet α

La production de champ magnétique par le plasma dans la zone de convection a été mentionnée plusieurs fois dans cette thèse comme la source des champs magnétiques coronaux et solaire. Il est donc important de discuter le mécanisme de production de champ magnétique par les mouvements convectifs du plasma, ou mécanisme de dynamo (Moffatt, 1978 ; Zeldovich *et al.*, 1983). La dynamo peut encore intervenir directement dans l'évolution des champs magnétiques de la basse couronne, et non seulement comme source. C'est donc un effet qu'il peut être intéressant d'introduire dans notre modèle.

Le problème de la génération de champ magnétique par les étoiles ou les planètes magnétisées est un problème ancien mais encore non complètement résolu. L'origine la plus largement acceptée aujourd'hui est la convection du plasma, d'origine thermique et gravitationelle, même si une démonstration rigoureuse de la possibilité de dynamo par le plasma est toujours attendue. Des progrès importants dans la compréhension des dynamos solaire et terrestre ont été accomplis par Parker (Parker, 1955) et Steenbeck, Krause et Radler (Steenbeck *et al.*, 1966). Ils ont proposé un mécanisme connu sous le nom d'effet α dont l'origine est la vorticité du plasma.

Comme d'habitude, on suppose que l'évolution du champ magnétique est donnée par l'équation d'induction

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \nu \Delta \mathbf{B} \tag{5.1}$$

où ν caractérise la diffusion magnétique.

L'effet α appartient à la catégorie des dynamos *cinématiques*, où le champ de vitesse $\mathbf{V}$ est imposé (l'autre type de dynamo, la dynamo *MHD*, considère le couplage des champs de vitesse et magnétique). C'est donc en quelque sorte un problème linéaire, dont le but est de montrer la croissance d'une "graine" initiale de champ magnétique.

(Steenbeck *et al.*, 1966) ont introduit une "électro- dynamique de champ moyen", en séparant, d'une part, un champ magnétique de grande échelle et, d'autre part, des fluctuation turbulentes de petite échelle. On écrit alors

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{B}' \\ \mathbf{V} &= \langle \mathbf{V} \rangle + \mathbf{V}' \end{aligned}$$

où $\langle \bullet \rangle$ dénote la moyenne d'ensemble sur différentes réalisations de la turbulence, et le $'$ dénote la partie rapidement fluctuante. En introduisant cette notation dans l'équation d'induction 5.1, on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{V} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{V}' \times \langle \mathbf{B} \rangle + \langle \mathbf{V} \rangle \times \mathbf{B}' + \mathbf{V}' \times \mathbf{B}') + \nu \left(\Delta \langle \mathbf{B} \rangle + \Delta \mathbf{B}' \right).$$

En prenant la moyenne d'ensemble de cette équation, et en utilisant le fait que $\langle \mathbf{V}' \rangle = \langle \mathbf{B}' \rangle = 0$, on obtient l'équation d'induction pour le champ moyen

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{V} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \mathcal{E}) + \nu \Delta \langle \mathbf{B} \rangle \tag{5.2}$$

où $\mathcal{E} = \langle \mathbf{V}' \times \mathbf{B}' \rangle$ est la force électromotrice (fem) moyenne. Cette "fem" étant une moyenne sur les fluctuations turbulentes, elle peut être parallèle au champ magnétique moyen $\langle \mathbf{B} \rangle$, contrairement à la "fem" normale qui est toujours perpendiculaire au champ magnétique. C'est précisément cette "fem" parallèle qui permet l'effet dynamo, comme nous allons le montrer.

Par la suite, nous allons seulement considérer $\langle B \rangle$, et pour alléger la notation nous allons supprimer les crochets. En dynamo cinématique, $\mathcal{E}$ est une fonction de $\mathbf{B}$ que l'on peut développer localement en série de Taylor

$$\mathcal{E}_i = \sum_j \alpha_{ij} B_j + \sum_{j,k} \beta_{ijk} \frac{\partial B_j}{\partial x_k}.$$

En supposant la turbulence parfaitement isotrope, la "fem" s'exprime par

$$\mathcal{E} = \alpha \mathbf{B} - \beta \nabla \times \mathbf{B}. \tag{5.3}$$

C'est le premier terme de cette expression qui est responsable du courant parallèle. La constante α est donnée par

$$\alpha = -\frac{\tau_c}{3} \langle \mathbf{V}' \cdot \nabla \times \mathbf{V}' \rangle \tag{5.4}$$

où τ_c est un temps caractéristique de corrélation de la turbulence. La quantité entre crochets étant l'hélicité du fluide, on peut interpréter τ_c comme la période de rotation des vortex.

Pour que l'hélicité soit non nulle, il faut que $\mathbf{V}'$ et $\nabla \times \mathbf{V}'$ ne soient pas perpendiculaires, ce qui correspond à un mouvement de type vortex en déplacement. De plus, pour que l'hélicité moyenne soit non nulle, il faut que les vortex aient un sens de rotation préférentiel. Dans le cas du soleil, le sens de rotation préférentiel des vortex est dû à la force de Coriolis. Ce sens est diffèrent dans l'hémisphère nord et dans l'hémisphère sud. Le déplacement des vortex est, lui, dû aux mouvements ascendants des descendants dans la zone de convection. Pour que l'hélicité moyenne soit non-nulle, il faut donc encore qu'il y ait plus de vortex montants que de vortex descendants (voir la discussion dans (Parker, 1955)).

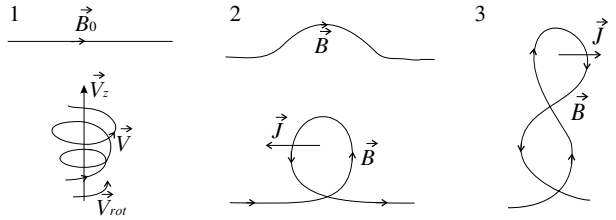

FIG. 5.7 – Hélicité et principe de l'effet α. Un vortex montant (1) déforme les lignes de champ magnétique en surface et forme une "bosse" (2). A cause du mouvement de rotation du plasma, la "bosse" de champ magnétique est tournée autour d'un axe de rotation vertical (2 et 3), augmentant ainsi l'énergie magnétique.

La constante β représente la diffusion turbulente et sa valeur est proportionnelle à l'intensité de la turbulence

$$\beta = \frac{\tau_c}{3}\langle V'^2 \rangle.$$

En introduisant l'expression 5.3 dans l'équation 5.2, et en négligeant $\nabla \times \langle \mathbf{V} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle$, on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \alpha \nabla \times \mathbf{B} + (\nu + \beta)\, \Delta \mathbf{B} = \alpha \langle \nabla \times \mathbf{B} \rangle + \nu_t \Delta \mathbf{B},$$

où ν_t est le coefficient de diffusion turbulent. Ici il apparaît que β joue un rôle très semblable à la résistance anormale.

Pour étudier la croissance du champ magnétique, on suppose une petite perturbation de $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, que l'on suppose de la forme

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}.$$

L'équation d'induction devient alors

$$-i\omega\mathbf{B} = i\alpha\mathbf{k}\times\mathbf{B} - \nu_t k^2\mathbf{B}.$$

Pour que ce système d'équation possède des solutions différentes de $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, il faut que

$$\left(i\omega - \nu_t k^2\right)^2 - \alpha^2 k^2 = 0.$$

De cette relation, on obtient la partie imaginaire de ω, $\Im\omega = -\nu_t k^2 \pm \alpha k$. L'amplitude du champ magnétique augmente donc avec le temps (ce qui correspond à l'effet dynamo), à condition que

$$|k| < \frac{\alpha}{\nu_t},$$

ce qui signifie que ce sont les modes de grande longueur d'onde qui vont grandir. On remarque aussi que la dynamo est absente si $\alpha = 0$. L'effet α permet donc de faire grandir des modes de grande échelle grâce aux fluctuations turbulentes de petite échelle, et permet donc l'organisation du plasma à grande échelle par les petites échelles.

D'autres types de dynamo sont décrits dans (Moffatt, 1978), et des développement récents dans (Proctor *et al.*, 1993).

5.2.2 Introduction de l'effet α dans le modèle

En ajoutant l'effet α, l'équation d'induction pour le champ moyen dans une case prend la forme :

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{V}\times\mathbf{B}) + \alpha\nabla\times\mathbf{B} + \nu_t\Delta\mathbf{B}.$$

Comme avant, le terme en $\nabla\times(\mathbf{V}\times\mathbf{B})$ est remplacé par un terme source aux propriétés aléatoires. Le terme de dissipation est toujours modélisé par la résistance anormale ou la reconnection, qui remplit le rôle de la diffusion turbulente dans les équations précédentes.

L'effet α étant essentiellement 3D, nous devons introduire les composantes B_x et B_y du champ magnétique dans le modèle, mais nous supposons la vorticité alignée avec l'axe des z. Comme précédemment, nous considérons un modèle 2D, en supposant que le milieu est homogène dans la direction des z, et que les variables ne dépendent que de x et y.

En ne conservant que l'effet α, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{dB_x}{dt} &= \alpha \frac{\partial B_z}{\partial y}, \\
\frac{dB_y}{dt} &= \alpha \left[-\frac{\partial B_z}{\partial x} \right], \\
\frac{dB_z}{dt} &= \alpha \left[\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right].
\end{aligned}$$

Ce terme décrit l'instabilité expliquée au paragraphe précédent, mais on remarque la présence de la densité de courant

$$j_z = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} B_y - \frac{\partial}{\partial y} B_x \right).$$

Les courants verticaux n'étant pas dissipés dans cette approche, on s'attend qu'à ce que le modèle ne soit valable que pour décrire la croissance et l'organisation transitoire du champ magnétique. Pour étudier plus en détail l'état stationnaire, il serait nécessaire de passer en 3D.

Nous avons réalisé quelques simulations incluant l'effet α. Les résultats préliminaires sont présentés pour différents paramètres $j_{\max}$, α et ν sur la figure 5.8.

Dans certaines de ces simulations, nous avons encore ajouté de la diffusion, sous forme d'un opérateur de Laplace discrétisé, avec un coefficient de diffusion ν. Les résultats sont présentés pour différents $j_{\max}$, α et ν. La source est aléatoire et les courants sont dissipés par la résistance anormale.

Pour les petits α, les résultats des simulations semblent inchangés. En augmentant α (figure 5.8, 2 panneaux du haut), on observe la croissance de structures de champ magnétique en amplitude et dans l'espace avec le temps. L'effet est le même pour d'autres valeurs de $j_{\max}$ (panneaux du milieu). L'effet de l'ajout d'un terme purement diffusif est montré sur les 2 panneaux inférieurs. Ce terme tend à augmenter le désordre, en amortissant le champ magnétique et en réduisant la taille des structures cohérentes.

Ces simulations préliminaires montrent que l'effet α, où la dynamo en général, peut s'avérer important dans l'organisation de grande échelle des champs magnétiques de petite échelle dans la couronne. C'est un effet qui vient renforcer nos remarques sur le fait que les structures de grande échelle peuvent s'organiser à partir des fluctuations de petite échelle. Cependant, dans des conditions réelles on peut s'attendre à ce que l'effet α soit plus faible à l'équateur (ou la vorticité est plus faible) que près des pôles. Enfin, pour une étude plus approfondie de son rôle dans la dynamique de l'énergie magnétique, et pour étudier les états stationnaires, il sera nécessaire d'étendre le modèle à 3 dimensions.

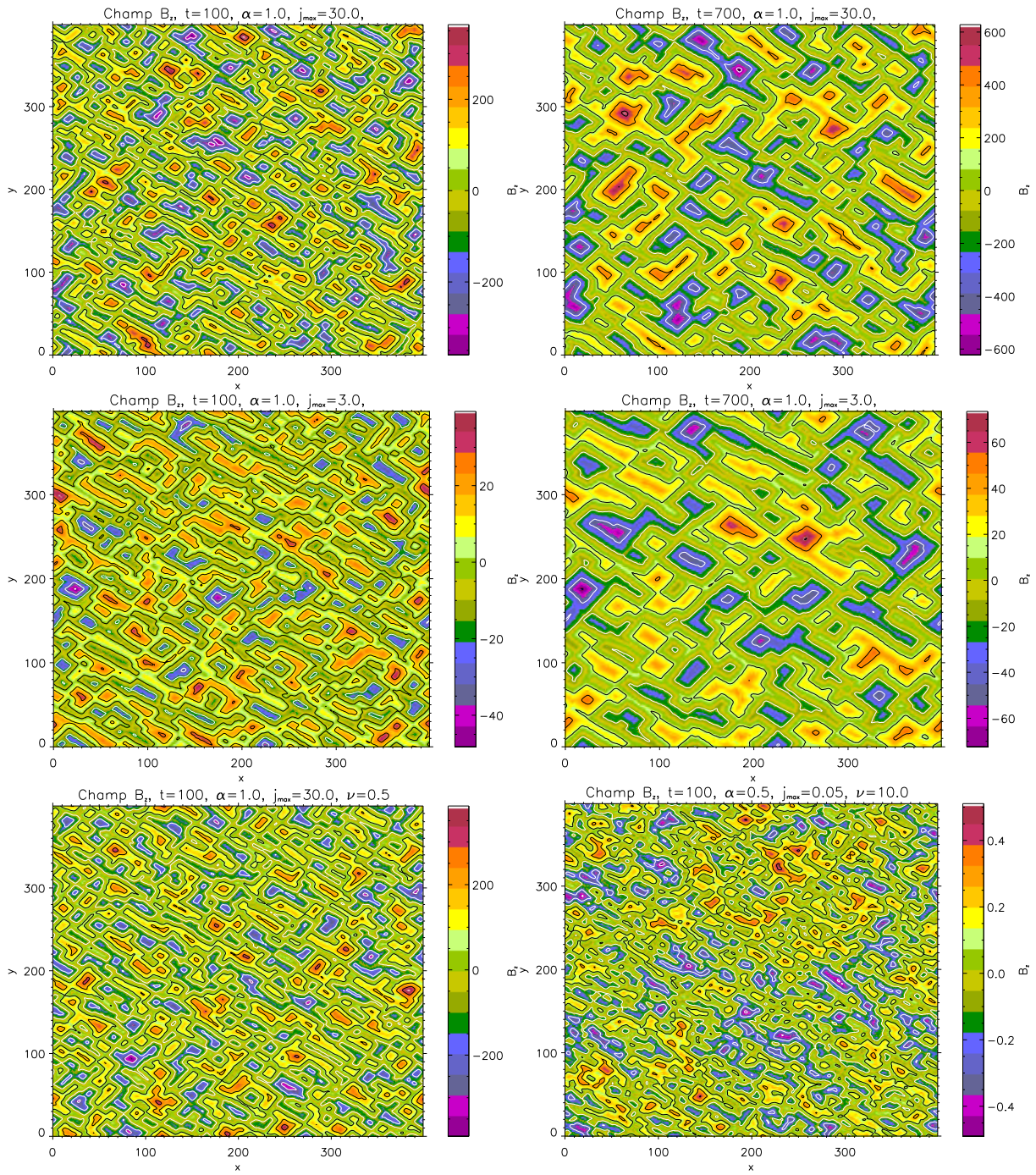

FIG. 5.8 – Structure spatiale du champ magnétique dans des simulations incluant l'effet α. Les grilles sont de 400×400, la source est aléatoire et les courants sont dissipés par la résistance anormale.

§ 5.3 Sources super-diffusives

Dans le Chapitre 4, on a montré que les grandes échelles spatiales du champ magnétique, la longueur de corrélation, l'entropie et les modes propres les plus énergétiques dépendent significativement des propriétés statistiques des sources de petite échelle des champs magnétiques.

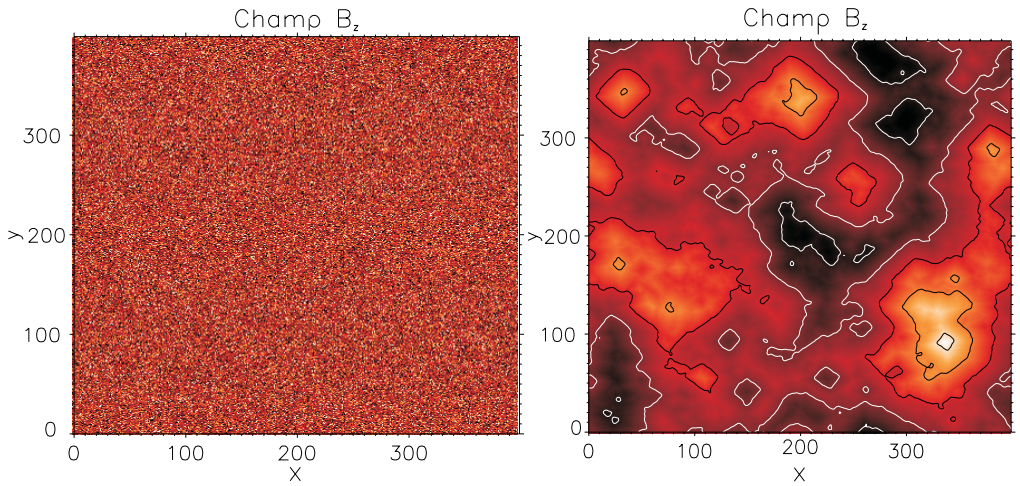

FIG. 5.9 – Structure spatiale du champ magnétique avec une source de type Cauchy (400×400, le champ initial est à gauche, le champ développé est à droite).

Des sources différentes ont été utilisées et, en particulier, nous avons montré que ces propriétés dépendent des propriétés statistiques des sources comme la diffusion anormale. Jusqu'à présent, nous avons traité le cas de la sous-diffusion, en choisissant l'application de Geisel. Un autre type de diffusion anormale est la super-diffusion, qui se fait plus rapidement que la diffusion Brownienne

$$\langle B^2 \rangle \propto t^{\gamma}, \text{ où } \gamma > 1.$$

L'entropie calculée par les valeurs singulières du champ magnétique produit par des sources intermittentes est beaucoup plus petite (environ 20-30%) pour la source sous-diffusive que pour d'autres sources. Les plus intenses de ces structures ont des durées de vie spatiale qui sont essentiellement plus grandes. Cela indique un niveau plus haut d'organisation dans le système que dans le cas de sources aléatoires.

Nous avons commencé à traiter le cas de la super-diffusion en introduisant des sources aléatoires δB distribuées selon la distribution Cauchy

$$p\left(\delta B\right) = \frac{1}{\pi\left(1 + \delta B^2\right)}$$

La somme de variables aléatoires distribuées selon cette loi est également distribuée selon une loi de Cauchy. On dit qu'elle est stable au sens de Lévy, comme la Gaussienne. Par contre, la variance de la loi de Cauchy est infinie et, en ce sens, cette marche aléatoire est un cas extrême de super-diffusion. Ces simulations ne présentent donc qu'une indication sur l'effet que pourraient avoir des sources super-diffusives.

Les structures de champs magnétiques sont visibles sur la figure 5.9. La source créé de forts gradients de champ magnétique qui s'étendent sur plusieurs cases, créant des structures de grande étendue spatiale. L'entropie est plus petite que celle l'entropie dans le cas de la source sous-diffusive.

On peut donc conclure que n'importe quelle source non-Brownienne permet la création de grandes structures de champ magnétique.

Chapitre 6

Méthode de Pearson pour la classification des densités de probabilité

Les résultats de notre modèle ont montré que les sources de petite échelle peuvent générer les champs magnétiques de d'une échelle beaucoup plus grande et que la statistique des émissions peut être caractérisée par des distributions dont le corps est Gaussien et les queues dévient fortement par rapport à la Gaussienne. Ces ces queues sont souvent caractérisées par des fonctions en loi d'échelle. Le problème qui se pose ici est de comparer les résultats des simulations avec des résultats expérimentaux. Il est assez difficile d'attendre une comparaison directe de deux approches statistiques et leur coïncidence exacte. Par contre, on peut s'attendre à ce que certaines propriétés des distributions soient semblables. Comment mettre en évidence une telle ressemblance avec une base de données pas très grande et des erreurs systématiques de types différents liées aux facteurs observationnels ainsi qu'aux simplifications faites dans le cadre de la modélisation ? Pour mener à bien ce genre de travail, nous avons besoin d'une méthode d'analyse robuste, et basée sur des caractéristiques de base qui peuvent être extraites de résultats de mesures, malgré toutes ces difficultés. Dans ce dernier chapitre, nous proposons d'utiliser la méthode de Pearson et présentons des résultats de l'analyses effectuées sur les données de modélisation.

Il est essentiel pour le problème du chauffage de la couronne solaire de produire une évaluation fiable des propriétés statistiques de la libération d'énergie magnétique et des événements éruptifs tels que micro- et nanoéruptions. Différents types de distributions pour le flux total, le taux de comptage des pics, les intensités des pixels, le flux d'énergie total ou l'augmentation des mesures d'émission ou les temps d'attente ont été publiés. Cela soulève la question d'une évaluation précise et de la classification de toutes ces distributions.

Dans ce but nous utilisons la technique proposée par K. Pearson au début du siècle, basée sur le rapport entre les 4 premiers moments de la distribution. La

technique de Pearson englobe et classifie une large gamme de distributions, y compris la Gaussienne et les lois de puissance (appelles loi de Pareto en économie) qui sont apparues dans la littérature sur le chauffage de la couronne. Cette technique est appliquée avec succès aux données simulées de notre modèle. Elle permet de fournir avec succès un ajustement aux distributions empiriques de l'énergie dissipée et de les classer en fonction des paramètres du modèle, comme les mécanismes de dissipation et le seuil.

§ 6.1 Le problème de la caractérisation des distributions observées

La compréhension des propriétés statistiques des distributions des micro- et des nanoéruptions est un pas en avant dans la résolution de l'énigme du chauffage de la couronne solaire.

En raison du théorème de la limite centrale les distributions Gaussiennes sont nombreuses dans la Nature. Beaucoup de propriétés peu communes peuvent être décrites comme une petite déviation par rapport à la Gaussienne. Par exemple, des événements rares peuvent être décrits par des queues décroissant algébriquement, ou des lois de puissance.

En physique solaire, il est commun d'approximer la densité de probabilité des éruptions rares et énergétiques (incluant les microéruptions) par un mélange de lois de puissance avec des exposants différents, ce qui suggère une invariance d'échelle entre les phénomènes observés et les événements plus fréquents et moins énergiques que sont les nanoéruptions. Cependant, il est très difficile d'ajuster une distribution selon une loi de puissance. Par exemple, il est souvent difficile de distinguer une exponentielle d'une loi de puissance. Pour cette raison, diverses approximations pour la distribution des éruptions solaires ont été proposées.

Parmi ces différentes approximations la plus populaire est probablement la loi de puissance. Le facteur crucial qui détermine les caractéristiques du processus de chauffage et ses échelles caractéristiques est l'exposant de la loi de puissance de la PDF. S'il est supérieur à -2, le chauffage est principalement dû à des événements dissipatifs de grande échelle. S'il est inférieur à -2, le chauffage résulte de phénomènes de petite échelle (Hudson, 1991). La raison est que pour fournir l'explication du chauffage de la couronne par les petites échelles, il est nécessaire d'avoir un excès dans le taux d'occurrence des événements de petite échelle par rapport aux événements de grande échelle.

Pour les éruptions standards (généralement situées dans les régions actives),

les premières analyses ont surtout porté sur les mesures de pics de flux ou de taux de comptage des pics. Les résultats sont représentés par des PDF (fonction de densité de probabilité) en loi de puissance simple avec des exposants α de l'ordre de 1.8 (Datlowe *et al.*, 1974 ; Lin *et al.*, 1984 ; Dennis, 1985 ; Crosby *et al.*, 1993 ; Crosby *et al.*, 1998). Ces derniers auteurs présentent aussi une étude approfondie de l'énergie totale rayonnée par les électrons accélérés lors des éruptions (rayonnement X dur par bremsstrahlung), trouvant $\alpha = 1.5 \pm 0.02$. Les pics du flux de rayonnement X mou correspondant aux éruptions régulières ont un exposant de loi de puissance entre 1.84 (Hudson *et al.*, 1969) et 1.75 (Drake, 1971). Les auteurs ultérieurs annoncent un exposant de fluance (le flux intégré en temps, proportionnel à l'énergie totale émise) de 1.44. Shimizu (Shimizu, 2001) trouve un exposant de loi de puissance entre 1.5 et 1.6 pour l'énergie thermique des éruptions d'énergie supérieure à 10^{27} ergs. Ce résultat a été déterminé à partir de l'émbrillancement en rayon X-mou dans les régions actives. Il estime que l'énergie fournie par ces nanoéruptions est de l'ordre de 20% de la quantité exigée pour le chauffage de la couronne dans les régions actives. La distribution relativement plate ($\alpha < 2$) suggère que les éruptions au-dessous de la limite de sensibilité ne suffisent pas à apporter l'énergie nécessaire au chauffage.

Cependant, un résultat important qui soutient l'hypothèse de Parker a été annoncé par (Krucker & Benz, 1998). Ils ont montré, à partir des observations de Yohkoh/SXT, que la dépendance de la PDF à l'énergie suit une distribution en loi de puissance dans la gamme d'énergies 10^{24} -10^{26} ergs avec un exposant d'environ -2.59. Ce résultat a été confirmé par (Parnell & Jupp, 2000) qui ont évalué l'exposant entre -2 et -2.1 en utilisant des données de TRACE et par Mitra & Benz (Mitra-Kraev & Benz, 2001). Cependant,(Aschwanden *et al.*, 2000), utilisant les mêmes données, ont trouvé un exposant significativement différent (-1.80), suggérant qu'il ne puisse pas y avoir assez d'énergie dans les microéruptions ou nanoéruptions pour chauffer la couronne.

En plus de ces lois de puissance avec des exposants différents, d'autres types de distributions ont été trouvées, comme la distribution χ^2 (quasi-Gaussienne) pour les intensités des pixels (Aletti *et al.*, 2000), avec une queue en loi de puissance dont l'exposant est environ -5.

Il faut mentionner que Benz & Krucker (Benz & Krucker, 1998) et Berghmans et al. (Berghmans *et al.*, 1998) ont remarqué que les événements de chauffage se produisent non seulement sur les frontières du réseau magnétique, mais aussi à l'intérieur des cellules. Ils sont arrivés à la conclusion que ces événements ont une nature tout à fait semblable. L'analyse statistique de la distribution de fréquence de

tels événements de chauffage montre toujours le même résultat. La valeur absolue de l'exposant pour les événements plus énergiques produits par la reconnexion est toujours plus grande que celle concernant les événements de chauffage produits par la résistivité anormale. Cette tendance semble être semblable à celle trouvée par (Benz & Krucker, 1998) qui ont étudié les augmentations de mesure d'émission. Ils ont montré que les propriétés statistiques des événements faibles qui proviennent des régions intra-cellulaires de la couronne calme manifestent de petites déviations par rapport à la Gaussienne. Les nanoéruptions, qui sont supposées être associées aux frontières du réseau, présentent quant à elles, des déviations plus fortes (voir aussi (Harra *et al.*, 2000)).

La connaissance précise de la densité de probabilité expérimentale est essentielle. Elle permet la confrontation entre les modèles et les mesures et devraient éclairer les processus physiques à l'origine des phénomènes observés.

Il est donc important de fournir une caractérisation de la distribution aussi précisément que possible. Fournir une approximation fiable de la distribution est essentiel pour la prédiction des phénomènes. Il peut être également important de pouvoir classer les distributions obtenues. Par exemple, elles pourraient être classifiées selon le processus physique de rayonnement d'énergie. Dans ce but, nous utilisons une technique puissante proposée par K. Pearson au début du siècle. Pearson a proposé une classification des distributions selon leurs quatre premiers moments. Chaque classe correspond à des distributions bien connues. Bien que cette technique ne soit pas largement utilisée dans la communauté de la physique solaire, elle peut être utile pour caractériser les mesures d'émission de pics, de flux, ou d'énergie sortant.

Dans ce chapitre, nous discuterons d'abord brièvement les difficultés d'une approximation selon une loi de puissance ; nous passerons ensuite à une description de la technique de Pearson. Le principe de la technique est décrit, ainsi que la procédure d'application à des données. Finalement, cette technique sera appliquée aux données simulées de notre modèle. Elle permet de mettre en lumière l'effet des mécanismes de dissipation sur les propriétés statistiques de l'énergie magnétique.

§ 6.2 Approximation visuelle d'une distribution statistique

Dans cette section, les techniques de base utilisées pour la description des distributions statistiques et un exemple de leur application aux données simulées sont analysés. La figure 6.1 montre la densité de probabilité de l'énergie dissipée calculée avec une valeur de seuil $j_{\max} = 32$, la dissipation par reconnexion locale

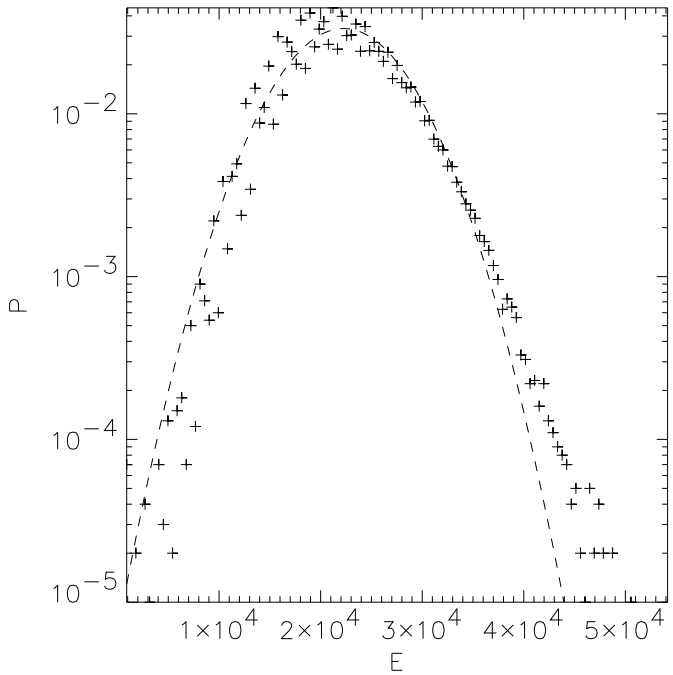

FIG. 6.1 – Densité de probabilité de l'énergie dissipée à $j_{\max} = 32$, reconnexion. La ligne pointillée montre la distribution Gaussienne avec la même moyenne et la même variance que la distribution du modèle.

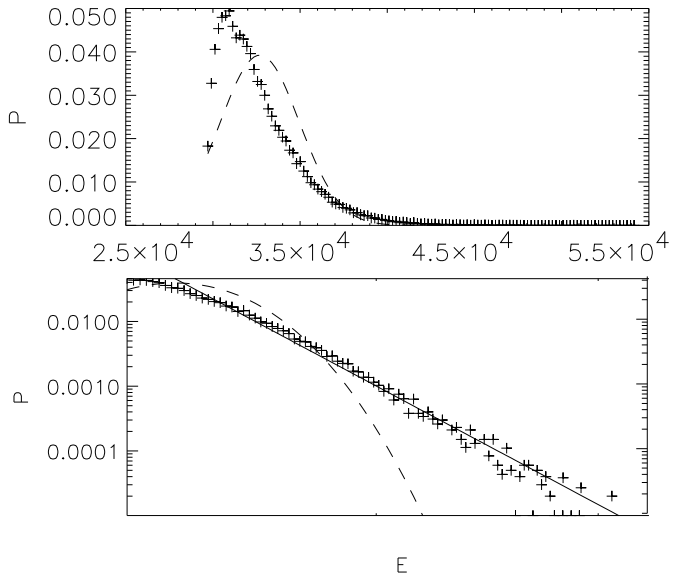

FIG. 6.2 – Densité de probabilité de l'énergie dissipée aux haute énergie de série. La ligne pleine indique le meilleure approximation par une loi de puissance de la distribution.

des lignes de champ magnétique sur une grille de taille 128×128 et avec une source aléatoire. La longueur de la série est ici 10^5.

La distribution approximée a été choisie Gaussienne, en se basant sur la forme apparente de l'histogramme et en utilisant les deux premiers moments (la moyenne et la variance). Cette Gaussienne est dessinée en pointillés sur la figure 6.1. Il est visible que la distribution dévie de la distribution Gaussienne essentiellement dans la queue, dans le secteur des hautes énergies. Sur la figure 6.2, cette queue est comparée à une loi de puissance de la forme :

$$p(x) = A(x - x_{min})^{-\alpha} \tag{6.1}$$

(avec une échelle linéaire sur le cadre du haut et une échelle log-log sur le cadre du bas.) Pour une normalisation appropriée,

$$A = (1 - \alpha) \big/ (x_{\max} - x_{min})^{1-\alpha}$$

où $x_{\max}$ et x_{min} définissent l'intervalle de hautes énergies. La valeur du paramètre α a été évaluée à l'aide d'une régression linéaire par la technique des moindres carrés. Pour une telle évaluation nous utilisons la fonction de répartition empirique qui permet de faire l'analyse linéaire (voir l'Annexe de ce chapitre).

$$\alpha = -3.1 \pm 0.01$$

Les valeurs de α dépendent aussi du point de réduction x_{min}. Le critère de χ^2 de Pearson est utilisé pour évaluer le degré de compatibilité entre distributions statistique et théorique (voire paragraphe 5.3.3). Les deux distribution essayées ici (Gaussienne et loi de puissance) sont rejetées par le test du χ^2. Autrement dit, elles ne fournissent pas une bonne approximation de la loi recherchée. Il faut donc proposer des familles de distributions plus générales pour ajuster la distribution empirique. Parmi celles-ci, nous allons étudier les courbes de Pearson.

§ 6.3 Les courbes de Pearson pour l'approximation de distributions empiriques

Une étude de distributions empiriques et leur ajustement par des distribution théoriques devraient remplir les conditions suivantes :

- Objectivité : Un ajustement "à la main" des mêmes données peut différer d'une personne à une autre et il est particulièrement difficile d'évaluer sans risque des lois de puissance comme celles parfois revendiquées. L'utilisation de distributions empiriques élimine un tel arbitraire.

- Automatisation : L'analyse de données devrait être automatisée autant que possible, pour permettre l'analyse rapide et simple de grands jeux de données.
- Parcimonie : Les résultats de l'essai devraient être exprimés de façon aussi concise et précise que possible, et constituer des petits jeux de paramètres.

Les distributions de Pearson permettent d'ajuster de façon unique et de classer les distribution de probabilité des événements dissipatifs observables. Cette technique permet des comparaisons plus précises entre les modèles d'automates incluant des effets physiques divers et pourrait ainsi permettre d'obtenir une meilleure compréhension sur les conditions physiques se rapportant aux observations.

Le biostatisticien Karl Pearson a proposé au début du vingtième siècle une riche famille de distributions (voir par exemple (Hahn & Shapiro, 1967)). Il a posé les principes des procédures d'adaptation de ces distributions aux données (voir la revue (Kendall & Stuart, 1958)). Les formules explicites pour chaque famille sont données dans (Elderton, 1957 ; Tihonov, 1982 ; Gruska *et al.*, 1989). La technique a été longtemps considérée comme difficile à appliquer, et une simplification a été proposée, utilisant seulement les percentiles des distributions. La technique pour calculer les percentiles de Pearson spécifiques est aussi décrite dans (Davis & Stephens, 1983). Dans ce cas, nous pouvons évaluer la probabilité pour qu'une variable aléatoire atteigne une valeur donnée sur un intervalle. Cependant, les problèmes de classification ne peuvent pas être résolus uniquement grâce à l'évaluation des percentiles (Johnson *et al.*, 1963 ; Pearson & Hartley, 1954). Cette technique est également mentionnée dans des revues récentes. Voir par exemple (Harrison Wadsworth (Editor), 1998). Toutes ces publication sur la technique de Pearson étant relativement peu détaillées, nous allons en donner ici un exposé complet.

6.3.1 Les distributions de Pearson

La famille compléte des densités de probabilités $p(x)$ de Pearson est donnée par les solutions de l'équation différentielle :

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{x-a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} p\left(x\right) \tag{6.2}$$

où a et les b_i sont des paramètres constants. Selon la valeur de ces paramètres, les solutions de l'équation 6.2 peuvent être classées en 12 types. Ces courbes sont fréquemment utilisées pour l'approximation des distributions statistiques. Par exemple, la distribution Normale (Gaussienne), et les distributions γ, β et χ^2 ou encore de Student satisfont toutes à (6.2) et sont donc des courbes de Pearson.

En utilisant les propriétés générales des densités de probabilité, nous pouvons exprimer des constantes de l'équation (6.2) pour des distributions unimodales ($dp/dx = 0$ en un unique $x = a$, qui est appelé un mode).

L'équation (6.2) peut s'écrire comme suit :

$$x^n \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2\right) \frac{dp\,(x)}{dx} = x^n\,(x-a)\,p\,(x)\,. \tag{6.3}$$

Supposons que les valeurs permises de la variable aléatoire ξ de densité de probabilité $p(x)$ se trouvent dans l'intervalle $[l_1,l_2]$. En intégrant par partie le côté de gauche de l'égalité (6.3) et en supposant que l'intégrale existe, nous obtenons

$$\left[x^n \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2\right) p\,(x)\right]_{l_1}^{l_2} - \int_{l_1}^{l_2} \left[n b_0 x^{n-1} + (n+1)\,b_1 x^n + \right. \tag{6.4}$$

$$\left. + (n+2)\,b_2 x^{n+1}\right] p\,(x)\,dx = \int_{l_1}^{l_2} x^{n+1} p\,(x)\,dx - a \int_{l_1}^{l_2} x^n p\,(x)\,dx$$

En supposant que la distribution décroît assez vite avec x

$$\lim_{x \to l_1,\, x \to l_2} x^{n+2} p\,(x) = 0.$$

L'expression entre crochets disparaît et nous obtenons la relation suivante entre les moments

$$-a m_n + n b_0 m_{n-1} + (n+1)\,b_1 m_n + (n+2)\,b_2 m_{n+1} = -m_{n+1}, \tag{6.5}$$

où m_n est le moment d'ordre de n. L'équation (6.5) définit une récurrence entre les moments et permet d'exprimer les paramètres constants de la distribution a et b_i en fonction de ces moments.

Pour $n = 0,1,2,3$, et en posant par convention $m_{-1} = 0$ (toute valeure finie de $m_{-1} = 0$ convient), l'équation (6.5) donne

$$\begin{aligned}
-a m_0 + b_1 m_0 + 2 b_2 m_1 &= -m_1, \\
-a m_1 + b_0 m_0 + 2 b_1 m_1 + 3 b_2 m_2 &= -m_2, \\
-a m_2 + 2 b_0 m_1 + 3 b_1 m_2 + 4 b_2 m_3 &= -m_3, \\
-a m_3 + 3 b_0 m_2 + 4 b_1 m_3 + 5 b_2 m_4 &= -m_4.
\end{aligned}$$

Pour que la distribution soit correctement normalisée, il faut avoir $m_0 = 1$. On peut supposer sans perte de généralité que la distribution est centrée ($m_1 = 0$). Le système d'équations devient

$$\begin{aligned}
-a + b_1 &= 0 \\
b_0 + 3 b_2 \mu_2 &= -\mu_2, \\
-a \mu_2 + 3 b_1 \mu_2 + 4 b_2 \mu_3 &= -\mu_3, \\
-a \mu_3 + 3 b_0 \mu_2 + 4 b_1 \mu_3 + 5 b_2 \mu_4 &= -\mu_4,
\end{aligned}$$

où μ_n sont les moments centrés de la distribution. De ce système d'équations on peut obtenir les coefficients désirés

$$a = b_1, b_0 = c_0/d, b_1 = c_1/d, b_2 = c_2/d \tag{6.6}$$

où

$$\begin{aligned} c_0 &= -\mu_2 \left(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2\right), \\ c_1 &= -sgn(\mu_3) \left(\mu_4 + 3\mu_2^2\right), \\ c_2 &= -2\mu_2\mu_4 + 6\mu_2^3 + 3\mu_3^2, \\ d &= 10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2. \end{aligned}$$

De là, puisque les coefficients a,b_0,b_1,b_2 de l'équation (6.2) peuvent être exprimés en fonction des moments m_1,μ_2,μ_3,μ_4, les distributions de Pearson sont entièrement déterminées par leurs quatre premiers moments (s'ils existent).

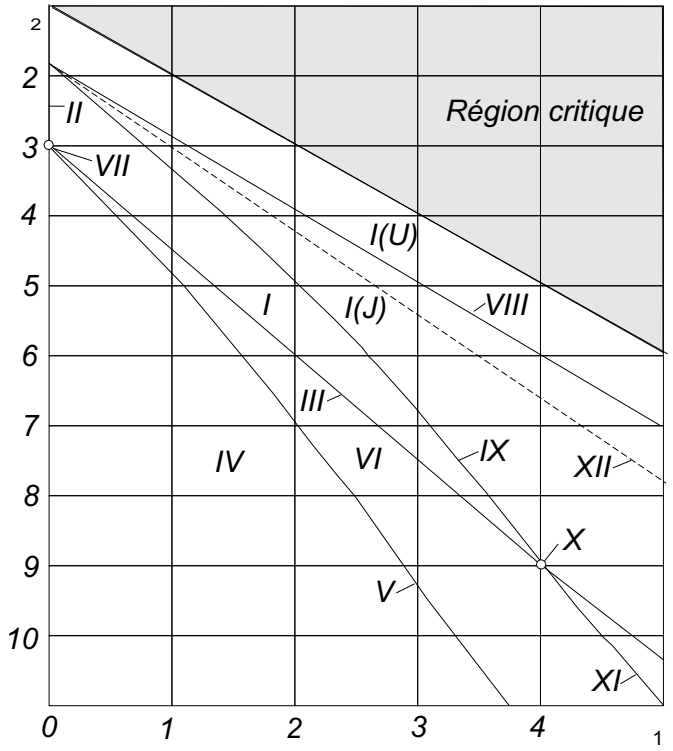

FIG. 6.3 – Diagramme présentant la famille des distributions de Pearson. Ici $\beta_1 = skewness^2$, $\beta_2 = kurtosis + 3$. Une présentation détaillée des différentes classes est donnée dans la Table 6.1.

En outre, l'expression analytique des distributions de Pearson peut être trouvée

à partir de l'équation (6.2). En remplaçant a par b_1 l'équation (6.2) devient

$$\frac{d}{dx}\ln p\left(x\right)=\frac{x-b_1}{b_0+b_1x+b_2x^2}$$

Les solutions de cette équation sont de la forme

$$p(x)=Ce^{\varphi(x)}, \tag{6.7}$$

où

$$\varphi\left(x\right)=\int_0^x\frac{s-b_1}{b_0+b_1s+b_2s^2}ds. \tag{6.8}$$

Les particularités de la courbe $\varphi\left(x\right)$ diffèrent fortement selon les solutions de l'équation

$$b_0+b_1s+b_2s^2=0. \tag{6.9}$$

Les racines sont

$$s_{1,2}=-\frac{b_1}{2b_2}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{1}{k}}\right),\ k=\frac{b_1^2}{4b_0b_2}. \tag{6.10}$$

Selon les valeurs de k, on distingue plusieurs cas :

- Si $k<0$, les racines sont réelles et ont des signes différents. Ce cas correspond à la distribution de type I dans la classification de Pearson, aussi appelée β-distribution . La distribution est définie sur $]s_1,s_2[$ (en supposant $s_1<s_2$) et p s'annule à l'extérieur de cet intervalle.
- si $k>1$, les racines sont réelles et ont des signes identiques (le type VI ou la β-distribution de 2ème type). Selon que ce signe est positif ou négatif, la distribution est strictement positive sur $]-\infty,s_1[$, ou sur $]s_2,\infty[$.
- si $0<k<1$, les racines sont complexes (distribution de type IV). Alors p est défini sur $]-\infty,\infty[$.

Pearson a proposé d'autres distinctions, tenant compte de distributions particulières et des frontières entre classes. La distribution normale (type VII) et l'exponentielle (type X) sont des exemples de distributions qui se trouvent à la frontière entre classes. Le nombre total de classes de Pearson est 12. Les classes, avec leurs formes analytiques sont représentées dans la Table 6.1 en fin de chapitre.

Puisque les courbes de Pearson peuvent être déterminées par leurs 4 premiers moments, en considérant des distributions centrées, la classification de Pearson peut être résumée selon un diagramme dans le plan (β_1,β_2), où β_1 et β_2 sont des paramètres sans dimension définis par

$$\beta_1=\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3},$$
$$\beta_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

(voir figure 6.3).

Certaines de ces distributions sont représentées par un simple point sur ce diagramme, comme la loi normale (en 0,3), la loi exponentielle (en 9,4), ou la distribution uniforme (en 0,9/5). D'autres distributions sont représentées par des courbes, comme la loi du t de Student (dont la loi normale est un cas particulier et qui appartient au type IV) ou la distribution γ (type III). Finalement, certaines classes plus générales comme les distributions β (type I) occupent un secteur fini sur le diagramme. En particulière, les lois de puissance appartiennent à cette dernière classe. Cependant, certaines distributions, comme la distribution de Cauchy (qui appartient formellement au type IV), ne peuvent pas être représentées sur le diagramme, car un des leurs quatre premiers moments n'existe pas.

Il faut aussi noter que les distributions de probabilité sont limitées à un certain secteur dans le plan (β_1,β_2). En effet, pour n'importe quelle variable aléatoire centrée ξ, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Buniakovski, nous avons

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \left\langle \frac{\xi}{\mu_2^{1/2}} \left(\frac{\xi^2}{\mu_2} - 1 \right) \right\rangle^2 \leq \frac{\langle \xi^2 \rangle}{\mu_2} \left\langle \left(\frac{\xi^2}{\mu_2} - 1 \right)^2 \right\rangle = \\ &= \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 1 = \beta_2 - 1\end{aligned}$$

De là, pour n'importe quelle distribution de probabilité l'inégalité

$$\beta_2 \geq \beta_1 + 1$$

doit être vérifiée. Le secteur impossible, qui ne vérifie pas cette inégalité, est indiqué en grisé sur la figure 6.3.

6.3.2 Technique d'approximation par les courbes de Pearson.

La technique paramétrique d'approximation des distributions observées déterminées à partir des séries temporelles par des courbes de Pearson peut être réduite aux étapes suivantes :

1. On calcule les 4 premiers moments de la série temporelle.
2. β_1 et β_2 sont calculés selon la formule (6.11), ce qui détermine la classe de la distribution.
3. On prend pour valeurs des moments de la distribution théorique choisie, les valeurs des moments expérimentaux en utilisant les expression (6.6).
4. En déterminant l'intégrale (6.8) et en substituant dans (6.7) on obtient la distribution de Pearson qui approxime la distribution observée.

Il reste à évaluer l'accord entre les distributions statistiques et théoriques, comme décrit dans le paragraphe suivant.

6.3.3 Evaluation de l'écart entre les distributions théoriques et observées

Pour évaluer si la densité de probabilité théorique choisie est bien en accord avec les observations, on utilise un critère de meilleur ajustement. Le plus utilisé (et le plus strict) est le critère du χ^2 proposé par K. Pearson (Bendat & Piersol, 1986).

Premièrement, on doit construire un histogramme de n observations indépendantes de la variable aléatoire, donnant dans chaque classe k la fréquence de comptage f_k dans l'intervalle de la classe. On donne une mesure du désaccord entre f_k et la probabilité théorique p_k comme

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - p_i)^2}{p_i}.$$

Le nombre total de classes k peut être choisi de diverses façons, mais il est recommandé d'avoir dans chaque intervalle pas moins de 5 à 10 observations.

Une propriété remarquable du critère χ^2 est que la distribution de la variable alàtoire X^2 ne dépend pratiquement pas de la distribution de la variable examinée et suit la loi χ^2 bien connue.

Le nombre de degrés de liberté de la loi du χ^2 est donné par

$$r = k - m - 1,$$

où m est le nombre de paramètres de la distribution théorique. Par exemple, pour une Gaussienne il y a 2 paramètres : le moyenne et la variance. L'hypothèse que la variable observée est distribuée selon la distribution théorique est alors acceptée avec un niveau de confiance α si

$$X^2 \leq \chi_r^2(\alpha).$$

Le niveau de confiance choisi est typiquement 0.05 ou 0.1.

§ 6.4 Application de la technique de Pearson à des lois données

Dans cette section, nous appliquons la technique de Pearson à des variables aléatoires artificiellement produites avec des distributions connues, tant pour illustrer la procédure que pour vérifier l'exactitude de la technique.

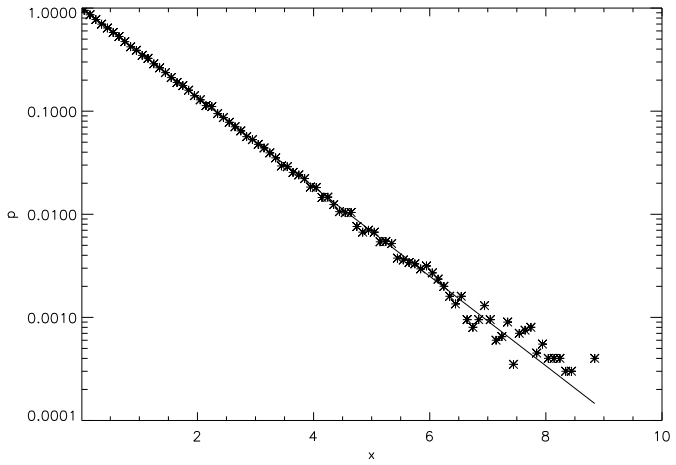

FIG. 6.4 – Histogramme d'une variable aléatoire distribuée exponentiellement. La ligne en trait plein est la densité de probabilité reconstruite au moyen des techniques de Pearson.

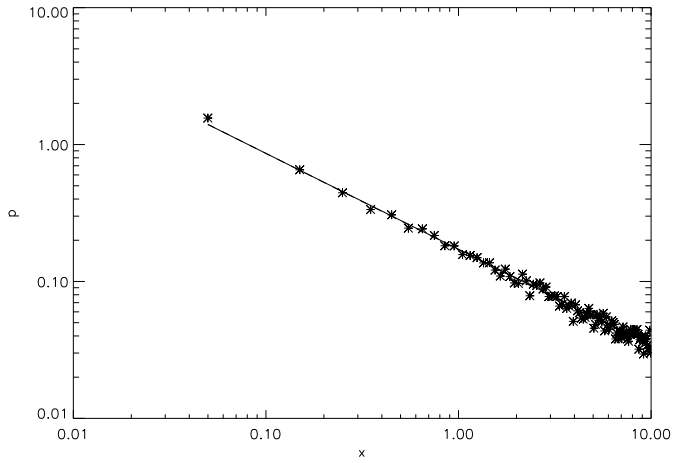

FIG. 6.5 – Histogramme d'une variable aléatoire distribuée selon une loi de puissance, avec $\alpha = 0.7$. La ligne pleine est la densité de probabilité théorique reconstruite par la technique de Pearson.

D'abord, nous avons produit une série distribuée selon la loi exponentielle

$$p\,(x) = Ae^{-x/B}$$

pour $x \in]0{,}10]$, $B = 1$ and $A = 1$.

La technique de Pearson donne les paramètres

$$k \ll -1,\, b_2 = 0.004,\, b_0 = -1.02,\, b_1 = -1.0,$$

ce qui indique que la distribution appartient au type III, ou distribution-γ est écrit

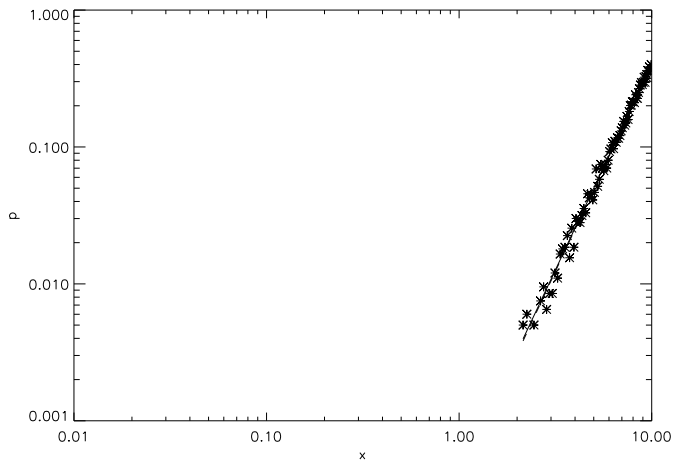

FIG. 6.6 – Idem fig. 6.5, avec $\alpha = -3$.

dans la Table 6.1). En outre, $b_0/b_1^2 = -1$ et

$$\beta_1 = 4.04; \beta_2 = 9.01$$

ce qui donne l'indication claire que la distribution est exponentielle (de type X). De là nous reconstruisons la distribution centrée

$$p(x) = \frac{1}{|b_1|} e^{\frac{-x-m_1-b_1}{b_1}}$$

ou

$$p(x) = \exp(-x + 0.01)$$

où $m_1 = 1.015$ est la moyenne. L'accord avec la distribution empirique est montré sur la figure 6.4.

Ensuite nous examinons sur le même intervalle ($x \in]0{,}10]$) une série distribuée selon une loi de puissance

$$p(x) = Bx^{-\alpha},$$

Pour $\alpha = 0.7$ et $B = 0.17$, on trouve $k = -0.31$ et des racines réelles de l'équation (6.9), $x_1 = -2.55$ et $x_2 = 7.43$, de signes différents. Ainsi, $x_1 + m_1 \leq x \leq x_2 + m_1$, où $m_1 = 2.6$ est la moyenne. Ainsi la distribution appartient au type I (β-distribution).

Dans notre cas, nous trouvons

$$g = -0.67,\ h = 0.02.$$

Considérant que $h \approx 0$, la distribution dégénère en type VIII (voir la figure 6.5) :

$$p(x) = \frac{(x - m_1 - x_1)^g}{\beta(g+1{,}1)(x_2 - x_1)^{g+1}} = 0.165 \times (x - 0.0\,5)^{-0.67}$$

ou

$$p(x) = 0.165 \times (x - 0.0\,5)^{-0.67}.$$

L'analyse de la même distribution pour $\alpha = -3.0$ donne $k = -0.57$ et les racines $x_1 = -8.0$ et $x_2 = 1.97$ de signes différents. On a $x_1 + m_1 \leq x \leq x_2 + m_1$, où $m_1 = 8.01$ est la moyenne. Ainsi la distribution est également de type I, où

$$g = 3.03,\ h = 8.0 \times 10^{-4}.$$

Considérant $h \approx 0$, la distribution dégénère de nouveau en type VIII (comme supposé) :

$$p(x) = 3.83 \times 10^{-4} \times (x - 0.0\,3)^{3.03}$$

(Fig. 6.6).

Maintenant que la technique de Pearson a été appliquée avec succès à quelques cas idéaux, nous l'appliquerons pour caractériser nos données simulées.

§ 6.5 Estimation de la distribution de l'énergie magnétique dissipée

6.5.1 Application détaillée de la technique de Pearson

On donne une application détaillée de la technique de Pearson pour les simulations des sources uniformément aléatoires de champ magnétique sur une grille de taille 128×128 durant $t = 10^5$ pas de temps. Les courants sont dissipés par la reconnexion magnétique quand ils dépassent la valeur critique $j_{\max} = 32$.

L'énergie dissipée est limitée par $E_{min} = 1024$ et $E_{\max} = 5.416 \cdot 10^4$. Cet intervalle est découpé en 120 intervalles égaux (classes). La figure 6.7 représente l'histogramme de l'énergie dissipée en régime stationnaire.

- Moments. La moyenne vaut $m_1 = 2.225 \cdot 10^4$, la variance $\mu_2 = 2.901 \cdot 10^7$, le skewness $\gamma_1 = 0.28$ et le kurtosis $\gamma_2 = 0.37$. De cela nous calculons

$$\beta_1 = \gamma_1^2 = 0.08,$$
$$\beta_2 = \gamma_2 + 3 = 3.37$$

- Type de distribution. Le caractère des racines de l'équation (6.9) dépend de la valeur $k = 0.13$, donnée par la formule (6.10). Puisque $0 < k < 1$, les racines de l'équation (6.9) sont complexes. Des racines complexes correspondent au type IV dans la classification de Pearson décrite sur la figure 6.3. Un cas particulier de cette distribution à $\beta_1 = 0$, $\beta_2 \leq 3$ est la distribution

de Student, $\beta_2 = 3$ correspondant à la loi de distribution normale (type VII dans la classification de Pearson).

– Les paramètres de distribution. En utilisant la relation (6.6), nous déterminons les paramètres de la distribution

$$b_0 = -2.6 \times 10^7,\, b_1 = -671.7,\, b_2 = -0.03$$

C'est ainsi tout à fait différent de la distribution normale, qui correspond à $b_1 = b_2 = 0$.

– La distribution. Pour trouver une expression explicite de la distribution, l'intégrale (6.8)

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{s - b_1}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2} ds$$

sera calculée avec les paramètres trouvés précédemment. L'integrand peut être écrit

$$\frac{s - b_1}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2} = \frac{1}{b_2} \frac{s + \frac{b_1}{2b_2} - b_1 \left(1 + \frac{1}{2b_2}\right)}{\left(s + \frac{b_1}{2b_2}\right)^2 + \frac{b_0}{b_2} - \frac{b_1^2}{4b_2^2}}.$$

En utilisant la notation

$$t = s + \frac{b_1}{2b_2},\, B = b_1 \left(1 + \frac{1}{2b_2}\right),\, A^2 = \frac{b_0}{b_2} - \frac{b_1^2}{4b_2^2},$$

on arrive à

$$\varphi(x) = \frac{1}{b_2} \int_{b_1/(2b_2)}^{x + b_1/(2b_2)} \frac{t}{t^2 + A^2} dt - \frac{B}{b_2} \int_{b_1/(2b_2)}^{x + b_1/(2b_2)} \frac{1}{(t^2 + A^2)} dt,$$

où

$$\varphi\left(x - \frac{b_1}{2b_2}\right) = \frac{1}{2b_2} \ln\left(x^2 + A^2\right) - \frac{B}{Ab_2} \arctan \frac{x}{A} + c.$$

Nous en déduisons la densité de probabilité selon l'expression (6.7) :

$$p\left(x - \frac{b_1}{2b_2}\right) = C \left[\left(\frac{x}{A}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2b_2}} e^{-\frac{B}{Ab_2} \arctan \frac{x}{A}}$$

pour $-\infty < x < \infty$. Avec les coefficients, $A = 2.6 \times 10^4$, $B = 9.5 \times 10^3$ et $b2 = -0.03$ on obtient

$$p(x) = 1.1 \times 10^{-5} \frac{\exp\left(11 \arctan f(x)\right)}{\left(f(x)^2 + 1\right)^{15}}$$

où $f(x) = \frac{x - 2.22 \times 10^4}{2.6 \times 10^4} + 0.39$. Le coefficient de normalisation c a été numériquement calculé pour que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1.$$

Remarquons que si l'on centre cette distribution, celle-ci ce retrouve décalée d'une valeur m_1.

La figure 6.7 montre la comparaison entre l'histogramme expérimental et la courbe de Pearson obtenue. L'accord semble satisfaisant, à la fois dans le coeur de la distribution (le secteur des hautes probabilités) et dans les queues (secteurs des faibles probabilités). En effet, le critère χ^2 de Pearson a été appliqué pour vérifier l'exactitude de cet ajustement. L'hypothèse que la distribution de Pearson corresponde à la distribution expérimentale est acceptée avec un très bon niveau de confiance $\alpha = 0.29$, à $r = 100$ (tandis que pour une hypothèse Gaussienne, $\alpha = 10^{-9}$).

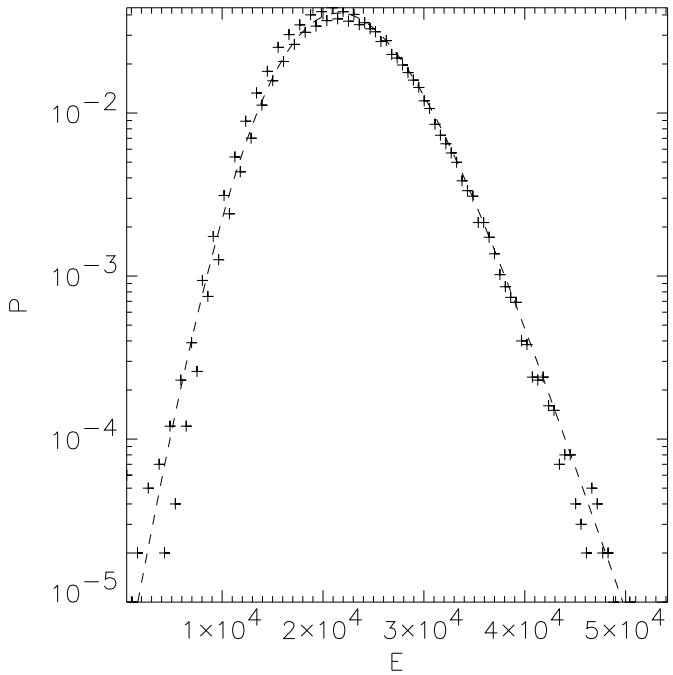

FIG. 6.7 – Densité de probabilité de l'énergie dissipée à $j_{\max} = 32$, reconnexion. La ligne en pointillés montre la distribution trouvée par la technique de Pearson. L'ajustement est accepté avec un niveau de confiance $\alpha = 0.29$ selon le critère de χ^2

6.5.2 Probabilité des événements de haute énergie

Comme nous l'avons vu précédemment, les fonctions de distribution de l'énergie dissipée sont souvent proches d'une Gaussienne. La différence la plus significative se trouve dans la queue de la distribution qui correspond aux événements de haute énergie. Une autre raison d'étudier les événements de haute énergie est que les expériences ne peuvent pas mesurer les micro- ou les nanoéruptions à des énergies très basses. Ceci définit un seuil d'énergie qui correspond à l'énergie et à l'échelle minimale observable.

Pour étudier les événements de haute énergie, nous avons simplement filtré les énergies inférieures à une énergie minimale E_0 et nous avons remplacé les valeurs de l'énergie dissipée plus petite que E_0 par du bruit blanc. Typiquement E_0 peut être pris de l'ordre de l'écart-type de la distribution, ou légèrement supérieur. Par commodité les données sont normalisées pour que E varie entre 0 et 1.

L'histogramme de l'énergie dissipée après un tel filtrage est présenté sur la figure 6.8. La série temporelle est la même que celle analysée dans la section précédente (la source aléatoire unipolaire, le grille fait 128×128, $t = 10^5$ pas de temps, les courants sont dissipés par la reconnexion et $j_{\max} = 32$). La valeur maximale de l'énergie est $E_{\max} = 5.4 \cdot 10^4$ et nous prenons $E_0 = 2.97 \cdot 10^4$. La gamme de valeurs d'énergie $E_{\max} - E_0$ est divisée en 120 intervalles égaux.

Bien que la distribution semble suivre une loi de puissance, le niveau de confiance trouvé $\alpha = 1 \times 10^{-12}$ par le critère χ^2, permet de rejeter cette hypothèse.

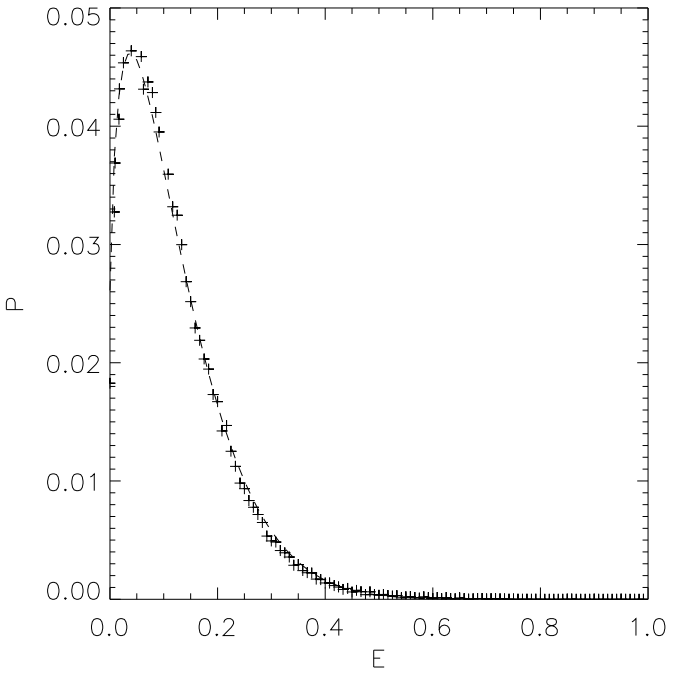

FIG. 6.8 – Queue de la densité de probabilité de la figure 6.7. Les énergies inférieures à $E_0 \approx 3 \times 10^4$ ont été coupées et les données ont été normalisées entre 0 et 1. La ligne pointillée montre la β-distribution trouvée par la technique de Pearson et acceptée avec une valeur de confiance $\alpha = 0.31$ par χ^2, pour $r = 30$.

Le choix de la densité de probabilité a été fait parmi la famille des courbes de Pearson. Ici nous obtenons

$$\beta_1 = 2.05, \beta_2 = 6.0,$$

et selon la formule (6.10) $k = -16.23$. Comme $k < 0$, cela correspond à une β-distribution) qui prend des valeurs non-nulles sur l'intervalle $]x_1,x_2[$.

Ecrivons l'integrand dans (6.8) comme

$$\frac{x - b_1}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} = \frac{x - b_1}{b_2 (x - x_1)(x - x_2)} = \frac{g}{x - x_1} + \frac{h}{x - x_2},$$

où

$$g = \frac{b_1 - x_1}{b_2 (x_2 - x_1)},\ h = \frac{x_2 - b_1}{b_2 (x_2 - x_1)}. \tag{6.11}$$

Alors

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^x \left(\frac{g}{s - x_1} + \frac{h}{s - x_2} \right) ds = \\ & g \ln |x - x_1| + h \ln |x - x_2| . \end{aligned}$$

Pour $x_1 \leq x \leq x_2$,

$$p(x) = C (x - x_1)^g (x_2 - x)^h . \tag{6.12}$$

Comme déjà noté, la loi de puissance est un cas spécial de cette distribution.

Le coefficient de normalisation vaut

$$C = \frac{1}{(x_2 - x_1)^{g+h+1} \beta (g + 1, h + 1)}$$

où $\beta(x,y)$ est la fonction β définie par

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 t^{p-1}(1-q)^{q-1} dt$$

(voir (Abramowitz & Stegun, 1974)).

En écrivant $z = (x - x_1) / (x - x_2)$, nous obtenons une forme plus habituelle pour cette distribution,

$$p(z) = \frac{\Gamma(\mu_1 + \mu_2)}{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)} z^{\mu_1 - 1} (1 - z)^{\mu_2 - 1} ,$$

dont les moments s'écrivent

$$\mu_1 = \frac{m_1 (m_1 - m_2)}{m_2 - m_1^2}; \mu_2 = \frac{(1 - m_1)(m_1 - m_2)}{m_2 - m_1^2}$$

où m_1 et m_2 sont respectivement le premier et deuxième moments de la distribution.

Après la même procédure que dans la section précédente et en utilisant les valeurs des moments, nous obtenons une densité de distribution de la forme suivante :

$$p(z) = 29.15 \times z^{0.4} (1 - z)^{9.0} .$$

Cette densité de probabilité est dessinée en pointillés sur la figure 6.8, et on voit la coïncidence avec la distribution empirique sur la totalité de l'intervalle d'énergies. Ce n'est pas une loi de puissance simple, mais une β - distribution un peu plus compliquée. On peut remarquer que le filtrage des énergies basses est plutôt doux, en raison de la présence du bruit blanc. Un contrôle par le critère χ^2 de Pearson donne un niveau de confiance $\alpha = 0.31$ à $r = 30$.

Si nous imposons une coupure brusque aux énergies basses, en annulant simplement toutes les énergies inférieures à E_0, la distribution trouvée appartiens aussi au type I (figure 6.9). Cependant, les paramètres sont légèrement différents et la courbe de Pearson trouvée s'écrit

$$p(z) = 9.47 \times z^{0.02} \, (1 - z)^{8.0}$$

Une assez bonne coïncidence des distributions statistique et théorique est visible sur la figure 6.8. Le test avec la critère χ^2 donne un niveau de confiance $\alpha = 0.33$ à $r = 30$.

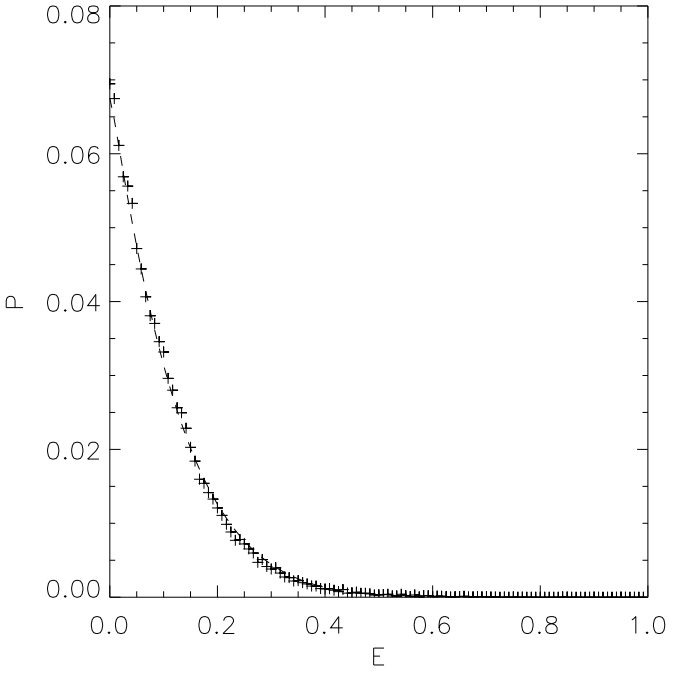

FIG. 6.9 – Queue de la densité de probabilité de l'énergie dissipée, pour les mêmes paramètres que la figure 6.8 mais avec un filtrage brusque des valeurs basses. La β-distribution obtenue par la technique de Pearson est montrée en pointillés. Elle est acceptée avec un niveau de confiance $\alpha = 0.33$ à $r = 30$ selon le critère χ^2.

6.5.3 Dépendance de la distribution aux paramètres du modèle

Une étude de la densité de probabilité de l'énergie dissipée a été menée ainsi que des fonctions de distribution approchées. Bien que l'on ait donné une présentation détaillée de la technique, la procédure peut être automatisée. Cela permet d'utiliser la technique de Pearson pour classer et étudier l'évolution des paramètres de la fonction de distribution avec la variation de paramètres du modèle.

Tandis que la distribution de l'énergie dissipée semble être insensible aux propriétés de la source, elle dépend fortement des processus de dissipation. En augmentant le seuil de dissipation $j_{\max}$, les distributions s'écartent de plus en plus de la distribution Gaussienne. Lorsque $j_{\max}$ croît, les queues de distributions aux hautes énergies deviennent importantes et rappellent visuellement des lois de puissance.

Plus précisément, une approximation de la densité de probabilité de l'énergie dissipée par la technique de Pearson a été systématiquement appliquée à plusieurs simulations avec différents seuils et différents mécanismes de dissipation. Les résultats peuvent être récapitulés comme suit :

- Pour n'importe quel type de source de champ magnétique et n'importe quel mécanisme de dissipation, pour un petit seuil de dissipation $j_{\max}$ (de l'ordre de 1 ou plus petit), la fonction de distribution de l'énergie dissipée est proche d'une loi normale. La meilleure approximation de la loi de distribution est une distribution de type IV dans la classification de Pearson. Ce résultat est validé par le critère du χ^2. Le cas limite de cette distribution est la loi normale lorsque $j_{\max}$ tend vers zéro (voir la figure 6.10 avec les trajectoires des distributions obtenues sur le diagramme de Pearson en fonction de $j_{\max}$).
- Lorsque $j_{\max}$ croît, les distributions se rapprochent d'une β-distribution pour tous les types de sources. Les premières β-distributions ont un maximum global. Pour des $j_{\max}$ encore plus grands, elles dégénèrent vers une distribution en loi de puissance décroissante et monotone (voir le Diagramme 6.10). Il est important de noter que l'approche de la distribution en loi de puissance avec l'augmentation de $j_{\max}$ est plus rapide avec la reconnexion que pour la résistivité anormale.

§ 6.6 Discussion et conclusion

Dans ce chapitre, la question de la caractérisation de la distribution d'énergie dissipée dans la couronne solaire a été étudiée et nous avons proposé une application de la technique de classification de Pearson. La dépendance des propriétés

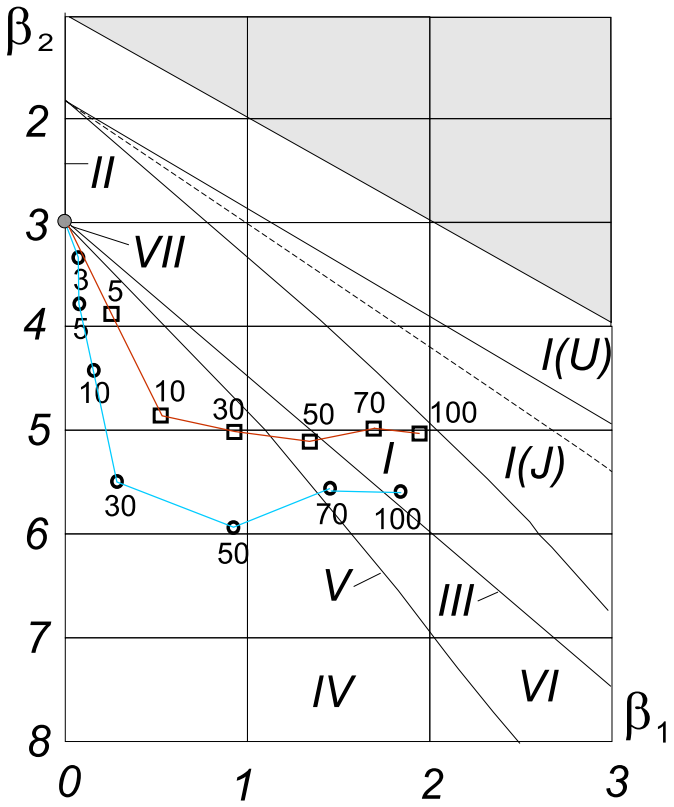

FIG. 6.10 – Evolution de la distribution de probabilité de l'énergie dissipée, avec des seuils de dissipation différents, pour une grille 200×200 et la reconnexion (carrés) ou la résistivité anormale (cercles), dans la classification de Pearson. La densité de probabilité passe du type IV (presque Gaussienne, point 3 sur le diagramme), à la β-distribution. Les deux courbes s'approchent de la loi de puissance (type I(J)) pour des grands $j_{\max}$, bien que les processus de reconnexion tendent plus rapidement vers la loi de puissance.

statistiques de l'énergie dissipée sur la source de champ magnétique et le caractère de sa dissipation ont été étudiés dans le cadre de notre modèle.

L'insuffisance de l'ajustement visuel des queues de distribution selon une loi de puissance a été soulignée. Après avoir décrit en détail la technique de Pearson, nous avons montré qu'elle permet un ajustement satisfaisant (au sens du critère χ^2 de Pearson) des distributions empiriques que nous avons rencontrées par des distributions théoriques.

Quant à la question de l'influence des sources d'énergie magnétique et des mécanismes de dissipation sur l'énergie totale dissipée, nous avons effectué une série de simulations avec des seuils de dissipation divers (variant de 1 à 100), différents mécanismes de dissipation (résistivité anormale et reconnexion locale) et des sources diverses de champ magnétique (aléatoire unipolaire et chaotique

(Ulam, Geisel)).

Nous avons constaté que pour n'importe quel type de source de champ magnétique, et quel que soit le mécanisme de dissipation, les paramètres β_1 et β_2 obtenus permettent d'utiliser la technique de Pearson. Cette technique nous a permis de classer les écarts à de la Gaussiannité avec l'augmentation du seuil de densité du courant et de suivre précisément la formation correspondante d'une queue en loi de puissance. Cette formation a été qualitativement expliquée dans (Krasnoselskikh *et al.*, 2001) ainsi que dans le chapitre 3. Les résultats des simulations sont récapitulés dans la figure 6.10. Ces résultats sont indépendants de la taille de la grille, dés lors que cette tailles soit est suffisamment grande.

Pour conclure, nous avons montré que la technique de classification de Pearson est utile pour caractériser et classer les fonctions de distribution empiriques observées dans nos simulations numériques du chauffage de la couronne solaire, pour des conditions physiques diverses. Cette méthode représente un instrument de comparaison quantitatif des distributions expérimentales et théoriques. Nous supposons qu'elle devrait également fournir une description plus précise et pertinente des distributions de probabilité observées expérimentalement.

§ 6.7 Annexe A: Estimation de l'exposant d'une loi de puissance à partir de la fonction de répartition empirique

L'évolution de l'exposant α d'une loi de puissance de la forme

$$p(x) = A(x - x_{min})^{-\alpha}$$

sur l'intervalle $[x_{\min}, x_{\max}]$ peut être réduite à un régression linéaire en utilisant sa fonction de répartition empirique :

$$F_\alpha(x) = \int_{x_{min}}^{x} p(x')dx' = \left(\frac{x - x_{min}}{x_{\max} - x_{min}}\right)^{1-\alpha}. \tag{6.13}$$

Ici A est définie par la condition $F_\alpha(x_{\max}) = 1$. En prenant le logarithme naturel des deux côtés de l'expression 6.13, nous obtenons l'équation linéaire

$$\ln F_\alpha(x) = (1 - \alpha) \ln \left(\frac{x - x_{min}}{x_{\max} - x_{min}}\right)$$

On utilise une régression linéaire par la technique des moindres carrés pour estimer $(1 - \alpha)$ à partir des variables :

$$y_i = \ln F_\alpha(x_i) \text{ and } z_i = \ln \left(\frac{x_i - x_{min}}{x_{\max} - x_{min}}\right)$$

L'échantillon est représenté par :

$$y_i = (1-\alpha)z_i + e_i$$

où e_i représente les erreurs aléatoires indépendantes. La valeur de α attendue est celle qui réduit au minimum la somme des résidus régressifs :

$$S = \sum_{i=1}^{r} e_i^2 = \sum_{i=1}^{r} (y_i - (1-\alpha)z_i)^2$$

(r est le nombre d'échantillons) et doit donc vérifier l'équation

$$\frac{dS}{d\alpha} = 2\sum_{i=1}^{r} z_i(y_i - (1-\alpha)z_i) = 0$$

L'évaluation de α donne

$$\hat{\alpha} = 1 - \left(\sum_{1}^{r} z_i y_i\right) \Big/ \left(\sum_{1}^{r} z_i^2\right)$$

Une ligne droite pleine montre la distribution de puissance évaluée sur la figure 6.2. La dispersion de l'erreur sur α est évaluée par (Seber, 1980)

$$\sigma^2 = \left(\sum_{1}^{r} (y_i - \hat{y}_i)^2\right) \Big/ \left((r-1)\sum_{1}^{r} z_i^2\right)$$

où :

$$\hat{y}_i = (1-\hat{\alpha})z_i.$$

L'intervalle à 95% de confiance est donné par

$$\alpha = \hat{\alpha} \pm c \times \sigma$$

où on prend $c = 2{,}5\%$.

TAB. 6.1 – Distributions de Pearson.

type	Paramètres	Densité de probabilité
I β–distribution	$k<0$, $x_1,x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1x_2<0$	$\begin{cases} p(x)=c\,\lvert x-x_1\rvert^g\,\lvert x-x_2\rvert^h \\ ou \\ p\,(x)=cx^{\mu_1-1}\,(1-x)^{\mu_2-1} \end{cases}$ $x\in[x_1,x_2]$
II β–distribution	$k=\pm\infty$ $x_1=x_2$ $g=h$	$p(x)=ce^{x/b_1}\,\lvert x+b_0/b_1\rvert^{1-b_0b_1^{-2}}$
III γ–distribution	$k=\pm\infty$ $b_2=0,b_0=-\mu_2$	si $b_1=-2$, $p(x)$ est la distribution χ^2
IV	$0<k<1$ $x_1,x_2\in\mathbf{C}$	$\begin{cases} p(x)=c\,(x^2+r^2)^{1/2b_2}\,e^{-\frac{s}{rb_2}\arctan\frac{x}{r}} \\ ou \\ p(x)=c\left(\frac{b_0}{b_2}\right)^{1/2b_2}\left(1+\frac{x^2}{b_0/b_2}\right)^{1/2b_2} \\ ou \\ p(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\frac{\Gamma((n+1)/n)}{\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \end{cases}$
V	$k=1$ $x_1=-\frac{b_1}{2b_2}=x_2\in\mathbf{R}$	$p\,(z)=\frac{\lvert\gamma\rvert^{q-1}}{\Gamma(q-1)}\left\lvert x+\frac{b_1}{2b_2}\right\rvert^{-q}e^{-\gamma/\ x+\frac{b_1}{2b_2}}$
VI β-distribution	$k>0$ $x_1x_2>0$ $x_1,x_2\in\mathbf{R}$	$\begin{cases} p(x)=c\,\lvert x-x_1\rvert^g\,\lvert x-x_2\rvert^h \\ ou \\ p(x)=\frac{1}{B(p,q)}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} \end{cases}$
VII Gaussienne	$b_1=b_2=0$, $\beta_1=0$, $\beta_2=3$.	$p(x)=\frac{1}{\sqrt{-2\pi b_0}}e^{-\frac{x^2}{-2b_0}}$
VIII	idem I, avec $g=0$, $-1<h<0$, ou $h=0$, $-1<g<0$.	$p(x)=\frac{(x_2-x_1)^{-h-1}}{B(1,h+1)}\,(x_2-x)^h$ $x\in[x_1,x_2]$
IX	idem I, avec $g=0$, $h>0$, ou $h=0$, $g>0$	
X exponentielle	idem III ou IX, avec $b_0/b_1^2=-1$ $\beta_1=4$, $\beta_2=9$	$p(x)=\frac{1}{\lvert b_1\rvert}e^{\frac{x-b_1}{b_1}}$ pour $x\geq b_1$
XI	idem VI, avec $h=0$ ou $g=0$	
XII		$p(x)=c\left(\frac{c_1+x}{c_2-x}\right)^m$

Chapitre 7

Conclusions et prospectives

Des satellite comme TRACE ou SoHO ont fournit une grande base de données d'observations à relativement petites échelles, permettant d'apporter un jour nouveau sur le problème de chauffage et de faire une étude statistique approfondie des propriétés temporelles des nano-événements, et des propriétés spatiales du champ magnétique.

Deux problèmes posés par ces données sont : quelles échelles contribuent essentiellement au chauffage et quelles sont les échelles des sources ?

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressé au rôle des sources et des processus dissipatifs de petites échelles. Et nous avons étudié consécutivement 2 aspects de cette question, en étudiant les propriétés statistiques temporelles et spatiales en fonction des propriétés physiques du système.

Pour étudier le chauffage de la couronne calme par dissipation de courants de petite échelle, nous avons proposé et développé un nouveau modèle de type "automates cellulaires". La différence principale de celui-ci avec les modèles précédents réside dans une distribution homogène de sources de petite échelle sur le réseau entier. L'idée de considérer des sources de petite échelle est inspirée des observations de (Benz & Krucker, 1999) qui ont analysé les émissions multi-fréquences et en sont venus à suggérer que le chauffage se produit au niveau de la chromosphère. Ces observations suggèrent que les échelles de champ magnétique et de la dissipation qui convertissent l'énergie magnétique en énergie thermique et suprathermique des particules sont petites aussi. Dans notre modèle, le champ magnétique dans chaque cellule du réseau est modifié à chaque pas de temps. Pour modéliser les processus physiques qui peuvent avoir lieu dans la couronne calme nous utilisons différentes types d'incrément pour le champ magnétique des cellules :

- une source aléatoire uniformément distribuée,
- une application chaotique déterministe dite d'Ulam,
- une source aléatoire ayant une distribution de Cauchy, correspondant à la

diffusion anormale super-diffusive.

Nous utilisons aussi une source décrivant l'évolution du champ lui-même (en absence de dissipation) :

- l'application de Geisel, qui représente une application couplée en réseau et qui décrit une évolution en temps du champ magnétique dans chaque cellule. Cette évaluation semblable à l'effet de la diffusion anormale sous-diffusive (non-Brownienne).

Nous avons considéré deux mécanismes de dissipation d'énergie magnétique de petite échelle :

- la résistivité anormale,
- la reconnexion locale.

- **La résistivité anormale** est produit comme le résultat du développement de certaines instabilités comme, par exemple, l'instabilité de Buneman modifiée. Elle apparaît quand le courant électrique excède un certain seuil dans un plasma non-collisionel. Dans notre modèle les courants sont simplement annihilés chaque fois qu'ils excèdent un certain seuil,

$$|j| \geq j_{\max} \ .$$

- **La reconnexion** est modélisée en prenant en considération le seuil de courant comme précédemment avec comme condition supplémentaire que le champ magnétique dans les cellules adjacentes sont de signes contraires. La première condition assure que la couche de courants est fine. La seconde traduit le fait, qu'un point où le champ magnétique est nul doit exciter entre les deux cellules. En résumé, une reconnexion a lieu entre deux cellules si

$$\begin{aligned} |j| = |B - B'| &\geq j_{\max} \ , \\ B \cdot B' &< 0 \ . \end{aligned} \tag{7.1}$$

  Lorsque la seconde condition, n'est pas satisfaite, des courants beaucoup plus grands que $j_{\max}$ peuvent exister.

Le premier mécanisme produit un effet de chauffage semblable à la dissipation de Joule dans un plasma non-collisionel. Chaque couche de courant locale dont l'amplitude excède une certain valeur doit être dissipée. Cela correspond à l'idée que si la vitesse relative des électrons par rapport aux ions est assez grande, des instabilités peuvent se développer dans le plasma et augmenter sa résistivité. Dans le deuxième cas, nous supposons que la dissipation entre aussi en jeu quand la

condition mentionnée ci-dessus est satisfaite (ce qui ne signifie pas dans le système physique réel que le seuil soit le même dans les deux cas).

Ce modèle a été utilisé pour l'étude de plusieurs caractéristiques statistiques du système.

Une des plus importantes caractéristiques est le taux de dissipation de l'énergie. L'énergie dissipée est évaluée comme la somme des carrés de tous les courants simultanément dissipés à chaque pas du temps. Nos observations peuvent être résumées comme suit :

Pour les trois types de sources de champs magnétiques considérés, la PDF de l'énergie dissipée est proche de la distribution Gaussienne quand les seuils de dissipation des courants sont relativement petits, $j_{\max} \leq 10$. La majeure partie des PDF's obtenues pour tous les types de source considérées dépend assez faiblement des propriétés statistiques des sources. La différence s'accentue dans les queues des distributions et exige l'application de méthodes d'analyse minutieuses.

Dans le cas d'une dissipation par reconnexion, les déviations par rapport à la distribution Gaussienne sont plus prononcées que pour la dissipation par résistivité anormale. Pour de grandes valeurs du seuil de courant, nous observons une queue suprathermique de la distribution aux hautes énergies dont la forme ressemble à une loi de puissance.

Pour former une structure de champ magnétique globalement dipolaire, nous avons utilisé une distribution inhomogène comme source de champ magnétique. Cette source a une petite valeur moyenne positive dans une moitié du réseau et négative dans l'autre. La moyenne sur la totalité du réseau étant égale à zéro. La dissipation par reconnexion ne permet pas au système d'atteindre un état stationnaire. Dans le cas de la dissipation par résistivité anormale, un état stationnaire s'établit. Dans ce dernier cas, les déviations par rapport à la Gaussiannité s'accroissent avec l'augmentation du seuil. Cet effet est associé à la diminution de l'épaisseur de la couche de courant dans les zones où la dissipation est concentrée.

La décroissance des distributions de l'énergie dissipée aux hautes énergies est plus lente lorsque la dissipation est assurée par reconnexion par reconnexion que par résistivité anormale. Cette tendance est semblable à celle trouvée par (Benz & Krucker, 1998) lors de l'étude des augmentations de mesure d'émissivité. Ils ont montré que les propriétés statistiques des événements faibles qui sont observés dans les régions intra-cellulaires calmes du Soleil manifestent de petites déviations par rapport à la distribution Gaussienne. Par contre, que les nanoéruptions, associées aux frontières du réseau, présentent une augmentation des déviations beaucoup plus fortes. En prenant cela en considération, nous arrivons à la conclusion que la

différence quantitative entre les événements de chauffage faibles et forts, annoncés (Krucker & Benz, 2000) peut être expliquée si on suppose que dans ces deux cas les mécanismes de dissipation des champs magnétiques sont différents. Une telle différence des propriétés statistiques a été mise en évidence dans notre modèle.

Après avoir examiné les caractéristiques temporelles du système, nous avons examiné ses caractéristiques spatiales. Les mesures réelles ne permettent pas d'observer à des échelles aussi petites que celles caractéristiques du chauffage dans la couronne calme. Cette constatation a motivé l'étude de l'influence des sources de petite échelle sur les propriétés observables "macroscopiques".

Dans ce but nous avons effectué l'analyse comparative des caractéristiques spatiales de grande échelle du champ magnétique, comme la longueur de corrélation, l'entropie et les modes propres les plus énergétiques. Ceci a été fait pour les différents types de source de notre modèle (aléatoire, chaotique et intermittente avec une diffusion temporelle anormale).

Les petites échelles "bruitées" ont été filtrées pour n'étudier que les grandes échelles du champ magnétique. Dans ce but nous avons reconstruit le champ magnétique à partir des modes propres donnés par SVD qui reflètent la plupart des structures énergétiques cohérentes. Les modes les moins énergétiques, qui correspondent au niveau du bruit, ont été tronqués.

Les résultats peuvent être résumés comme suit :

Les caractéristiques du champ magnétique aux grandes échelles spatiales comme la longueur de corrélation, l'entropie et les modes propres les plus énergiques dépendent significativement tant des propriétés statistiques des sources du champs magnétique de petite échelle que des mécanismes de dissipation.

- Il a été trouvé que la moyenne temporelle de la fonction de corrélation est exponentielle, i.e la longueur de corrélation est finie et pas infinie comme dans les systèmes SOC. Cette longueur est plus grande pour la dissipation par reconnexion et dépend aussi du seuil de dissipation.
- Avec la source (Geisel) sous-diffusive et la reconnexion, la fonction de corrélation dévie assez fortement de la fonction exponentielle.
- La longueur de corrélation ne suffit pas à caractériser les propriétés du système. Pour obtenir une caractérisation multi-dimensionnelle, nous avons utilisé la décomposition SVD. Elle permet d'extraire les structures des champs magnétiques les plus énergétiques. Ces structures sont beaucoup plus grandes que la taille de la source et persistent longtemps, soutenant l'idée que le plasma peut s'organiser sur de grandes échelles, bien qu'étant contrôlé par des sources de petite échelle.

- L'entropie calculée à partir des valeurs singulières du champ magnétique produit par des sources intermittentes est beaucoup plus petite (environ 20-30 %) pour la source sous-diffusive que pour les autres sources. Les structures les plus marquées dans l'espace et de longue durée de vie sont aussi plus grandes dans ce cas. Cela indique un niveau d'organisation plus élevé dans le système que dans le cas de sources aléatoires.
- L'entropie calculée pour le champ magnétique produit par des sources super-diffusives est encore plus petite que celle calculée dans le cas de sources sous-diffusives. Les structures des champs magnétiques sont plus grandes que les structures par les sources aléatoires. On peut donc conclure que les sources non-Browniennes de petite échelle jouissent de propriétés différentes et permettent la création de structures de champ magnétique de grande échelle.

On peut expliquer la nette différence des caractéristiques de complexité spatiale dans le cas de sources de Geisel de la façon suivante. Cette application déterministe produit dans chaque cellule une diffusion du champs magnétique semblable à une diffusion aléatoire, mais plus lente que la diffusion brownienne (la sous-diffusion). D'autre part, la dissipation produit une diffusion normale du champ, c'est-à-dire une relaxation des champs magnétiques dans l'espace plus rapides (en moyenne). En effet, les propriétés temporelles de la source se projettent sur les propriétés statistiques spatiales par intermédiaire de la dissipation. Cela explique pourquoi les sources avec une diffusion plus lente (Geisel) ont tendance à former des structures de plus grandes échelles et de durée de vie plus longue que les sources avec diffusion normale (aléatoire, Ulam).

Dans le cas de sources super-diffusives, les processus les plus rapides sont associes à des sources locales du champ magnétique. La diffusion spatiale joue un rôle moins important dans la formation des structures de grande échelle. Elles se forment grâce aux sources, mais leur durée de vie est plus courte, que dans le cas des sources de Geisel.

Ainsi nous avons démontré dans le cadre de notre modèle que la structure spatiale du champ magnétique de grande échelle dans l'atmosphère solaire contient aussi une information statistique importante sur les mécanismes du chauffage de la couronne. Cette information peut être extraite par des techniques basées sur la SVD, qui sont aisément applicables aux données expérimentales et peuvent être utilisées en complément à l'analyse habituelle de l'énergie émise.

L'analyse comparative des caractéristiques spectrales de la source et de la dissipation montre que des cascades d'énergie des grandes échelles vers les plus pe-

tites se produisent. Cependant, certains sources de champs magnétiques de petite échelle et des mécanismes de dissipation d'énergie locaux peuvent aboutir à des corrélations de grande échelle avec une longueur caractéristique significativement plus grande que celle de la source et de la dissipation. Le système possède alors une échelle caractéristique diffusive qui est une échelle intermédiaire nettement plus grande que l'échelle de dissipation et l'échelle de la source.

Les propriétés temporelles et spatiales que nous avons décrites sont liées. Puisque les corrélations spatiales moyennées sur le temps décroissent exponentiellement, on ne peut pas considérer que notre modèle soit un système critique auto-organisé. Lorsque l'énergie est dissipée grâce au mécanisme de reconnexion, la longueur de corrélation est plus grande. Dans ce cas, la distribution des hautes énergies dissipées dévie plus fortement de la Gaussienne.

Dans ce cas des corrélations longues (du type de la loi de puissance) sont parfois observées. Les grands dégagements d'énergie se reflètent par de grandes valeurs de la kurtosis du champ magnétique. En un certain point de vue, le système partage quelques propriétés avec les systèmes à base de SOC : présence de seuils de dissipation ; existence de corrélation en loi de puissance dans certains intervalles caractérises par une déviation à la Gaussiannité pour l'énergie dissipée ; également le temps caractéristiques d'attente d'action de dissipation pour chaque courant est plus grand dans ce cas, que pour la résistivité anormale à cause de la condition de dissipation supplémentaire. Cependant, le système ne présente pas des relaxations distribuées strictement en loi d'échelle et ne peut pas être considéré comme un système SOC (sauf dans des cas artificiels correspondant à de petits grilles).

Un des buts de ce travail est d'attirer l'attention sur le cas "extrême" où les sources de petite échelle provoquent le chauffage. Dans les conditions du plasma solaire il est plus probable que toutes les échelles y contribuent. En ajoutant à notre modèle des sources avec des propriétés spectrales bien définies, nous projetons d'étudier le rôle des sources d'échelles différentes sur le chauffage de la couronne solaire.

Le travail actuel ne représente qu'un premier pas vers le développement d'un modèle complet du chauffage de la couronne calme. Il peut être encore améliorer pour mieux s'adapter aux processus physiques réels. On peut par exemple essayer de mieux tenir compte des différentes structures dans la couronne, ou inclure de nouveaux effets pour la comparaison directe avec les observations. Le modèle devrait pouvoir fournir une description plus détaillée des échelles de temps respectives des instabilités, de l'accélération des particules, des processus thermiques ou non-thermiques et des flux sortants s'échappant de la région de reconnexion. On peut,

par exemple, supposer que dans le cas de la résistivité anormale, la dissipation du courant peut être seulement partielle. Dans ce cas, les deux mécanismes de dissipation peuvent aussi être combinés, la résistivité anormale pouvant coexister avec la reconnexion. On peut encore tenir compte de la redistribution de l'énergie entre les particule de différentes espèces, comme nous l'avons noté dans l'introduction du modèle. Dans l'état actuel de son développement notre modèle semblent être en bon accord qualitatif avec les résultats expérimentaux.

Les échelles du modèle sont trop petites pour être observées par les instruments actuels, mais les échelles observées apparaissent dans le modèle à titre de structures de grande échelle du champ magnétique et comme les queues des distributions dans les domaines de haute énergie. C'est pourquoi il est nécessaire d'élaborer des méthodes robustes qui permettent de trier les distributions observées en différentes classes. Dans ce but nous avons présenté la méthode de Pearson qui permet la reconstruction de la densité de la probabilité à partir de données expérimentales. Elle fournit une forme analytique unique statistiquement bien ajustée à la distribution empirique et permet la classification. Cette méthode a permit d'organiser et classer les distributions issues du modèle en fonction des paramètres et de définir quelques classes couvrant la transition de la loi normale vers la loi de puissance. Les paramètres essentiels qui contrôlent cette transition sont les mécanismes et les seuils de dissipation.

Un autre moyen d'obtenir un forçage par les sources de petite échelle est l'effet-α. Nous avons inséré l'effet-α dans notre modèle. Des simulations préliminaires montrent des structures du champs magnétique cohérentes de grande échelle générées par cet effet.

Il est aussi tout à fait possible d'insérer dans le modèle d'autres effets comme, par exemple, la rotation différentielle, ou les mouvements aléatoires des pieds des boucles. Ces évolutions permettent d'obtenir un modèle de plus en plus complet et réaliste.

Annexe A

Quiet Sun coronal heating: Sand-pile reconnection model

in Magnetic fields and Solar Processes, ESA SP-448, v.1, pp. 553-559, 1999.

QUIET SUN CORONAL HEATING: SAND PILE RECONNECTION MODEL

O.V. Podladchikova[1,2]*, **V. Krasnoselskikh**[1]†, **B. Lefebvre**[1]

[1]LPCE/CNRS, 3A av. de la Recherche Scientifique, 45071 Orléans, France
[2]Radiophysics Department, Kiev University, Glushkova 6, Kiev, Ukraine

ABSTRACT

We consider simple model of "cellular automata" to describe statistical properties of solar coronal heating by micro-flares. The model consists of two elements, the magnetic field source supposed to be associated with the small scale hydrodynamic turbulence convected from the photosphere and local dissipation of small scale currents. This last process is assumed to be performed due to either anomalous resistivity, when the current density exceeds certain limit (supposed to be the limit of stability) or due to reconnection process. It is shown that the different criteria for magnetic energy dissipation give rise to strong difference in statistical properties of the energy dissipation.

1. INTRODUCTION

The problem of the heating of solar corona still keeps opened questions in solar physics. It is quite clear that the convection can supply enough energy to heat coronal plasma, but the ways of the magnetic energy supply and dissipation are not completely understood. The "conventional" point of view is that the energetics in solar corona is determined mainly by energy releases during flare–like phenomena in different scales, coronal mass ejections and solar particle events [Priest 1999]. Parker was the first to propose the idea of the coronal heating due to multiple energy-release processes presumably associated with the reconnection, similar to small-scale flares [Parker 1988]. To notice their small-scale character they were called micro-flares. They can be detected in the fluxes of soft and hard X-rays, accelerated particles, etc.-

Small scale flares (microflares) were detected for the first time in soft X-ray [Lin et al. 1984]. An intriguing experimental fact is that microflares follow a power-law type distribution of number of flares upon their intensity in quite large range of intensities covering several decades (with exponent from $\alpha \simeq -1.1$ to $\alpha \simeq -2.2$) [Crosby et al. 1993; Crosby et al. 1998]. Power-law distributions were also supported by recent high-resolution observations of the dependence of number bright "spots" upon their intensities on the Sun surface [Reginier et al. 1998] in several wavelengths at different levels of Solar atmosphere.

It is commonly believed that microflares result from reconnection of magnetic field lines. These lines randomly emerge from a turbulent convective zone [Biskamp 1993] situated beneath the corona, thus creating configurations favorable to reconnection. Such events are related with a magnetic energy release, sudden changes of magnetic field topology, heating of plasma and acceleration of particles to high energies. It was suggested [Parker 1988] that flares of different intensity can appear as a result of evolution of magnetic field configurations similar to tangential discontinuities at borders of the photospheric dipolar regions (such as bright spots). Such magnetic field configurations can be formed as a result of random motions of the footpoints of magnetic field lines.

Reconnection can be interpreted in terms of raising and "burnout" of thin small scale current sheets when they achieve some critical value [Syrovatsky 1981; Syrovatsky 1982]. The magnetic energy released accelerates charged particles to large energies, and their radiation in soft X-ray provides experimental signatures of microflares.

The idea of small scale "intermittent" behavior of dissipation was proposed by several authors. Einaudi & Velli (1982) evaluated the distribution of energy dissipation dependence upon the scales on the basis of MHD approach combined with the reconnection in small scales, different kinds of "fragmentation of dissipation" were discussed by Vlahos (1982).

An appropriate theoretical approach to describe statistical properties of such type of complex systems was proposed by Bak & Tang (1988) and is called self-organized criticality (SOC). Such systems, often described by simple local rules, can nevertheless exhibit non-trivial statistical behavior, namely, long-range correlations, and as a consequence, are known to display power-law distributions of events.

SOC-type models were proposed to describe statistical properties of micro-flares in a phenomenological form [Lu & Hamilton 1993; Lu & Hamilton 1991]. The basic idea was the following: the magnetic field

*epodlad@cnrs-orleans.fr
†vkrasnos@cnrs-orleans.fr

evolves randomly until the difference of field amplitude in particular cell of the grid with respect to the average over six closest neighbors exceeds some threshold. Then a "reconnection" event dissipates magnetostatic energy distributing the difference between the "host" cell and "averaged neighbors" in such a way that it becomes equal to zero. The correlation length in this approach is imposed by involvement of quite large (seven) number of cells into an interaction process. The physical meaning of the introduced "current" is rather unclear. This makes physical interpretation of the results rather ambiguous. The second difficulty of this approach is related with the small linear size of the system, it is three dimensional box consisting of 30^3grids. The major idea of the SOC systems is related to the absence of the characteristic length, and it is supposed that this results to the self-similarity of the physical phenomena at all scales range and to long range correlations. To validate the absence of the characteristic scale the system length is too short. Similar model was discussed by Vlahos et al. (1995).

Einaudi & Velli (1996) and Georgoulis et al. (1998) have formulated the question whether the MHD system driven by the random forces can manifest statistical behavior similar to SOC and provide energy dissipation characteristics with power law dependencies. To this end they have carried out quite long two dimensional simulations with the large-scale random driving force that was chosen in the form of couple of vortex-type forces with random phases and amplitudes that were changed after each time period. They have shown that the spatial average of the dissipated power displays non-Gaussian statistics and that upon substraction of Gaussian component the power law dependence of number of "dissipative events" upon total energy dissipation is clearly manifested.

Our model relies on the idea of "cellular automata" with continuous states, as SOC does. However the questions we are interested in are formulated in a little different way, thus the realization is slightly different from previous studies as explained in next section.

The major point here is how the statistical characteristics depend upon characteristics of the magnetic field source and on physical mechanism responsible for the magnetic field dissipation.

2. MODEL DESCRIPTION

We shall start from the approach that mimics MHD approach in the following way. Magnetic field lines evolution is determined in MHD by

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \mathbf{dissipativeterm} \qquad (1)$$

Without the dissipative term, this equation describes magnetic field lines motions with a plasma flow frozen into the plasma. In such a case, reconnection is forbidden. Taking into account a finite conductivity σ, with Ohm's law written in the simple form $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$, one gets in Eq. (1) diffusive term $\eta \Delta \mathbf{B}$, with $\eta = 1/(\sigma \mu_0)$. The "diffusion" time $t_\eta = l^2/\eta$ is generally slow, except at small scales where it could be compared to an Alfvén time $t_A = l/v_A$, where fast reconnection can occur. Let us mention that at small scales further dissipative effects could be taken into account (see e.g. [Biskamp 1993)]. A direct approach of coronal heating based on MHD simulations was studied by Einaudi & Velli (1996) and by Georgoulis et al. (1998).

Here, we shall use a simplified model based on cellular automata somehow mimicking Eq. (1). We shall start from considering a 2D lattice where magnetic arcs are supposed to go from one cell to another. Neglecting effects associated to field line curvature we shift one grid from the "Sun surface" to the second horizontal surface of the 3D parallelepiped, getting magnetic field lines straight and being perpendicular to the surface (see Fig. 1).

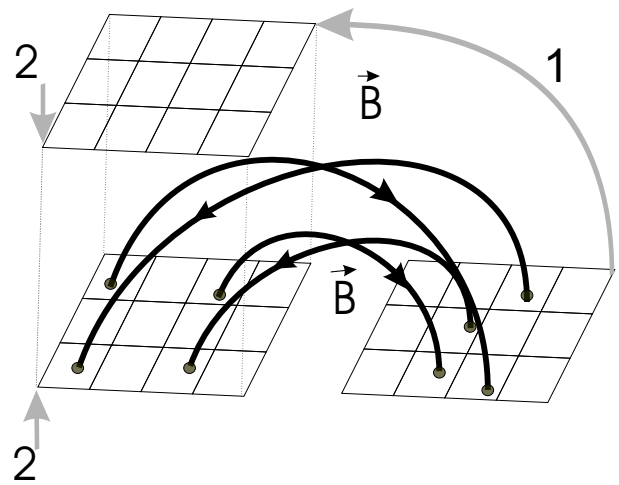

Figure 1. The procedure of simplification of magnetic field configuration neglecting magnetic field lines curvature, that is used in modeling (see text for more details).

The field on the lower and upper surfaces is equal, thus we can use only one single grid surface where we shall put "magnetic field portions" according to rules provided by the driving force applied to our system. In this paper we investigate statistical behavior of the system driven by a random source with zero-mean value (as in Lu & Hamilton 1993). The action of source consists in adding on each time step random numbers from the set {-1,0,1} to the previous number into each cell . This procedure corresponds to magnetic field convection from the generation region by "turbulence" In simulations presented in this paper, we used grids of 128×128 cells, and runned the computation up to 10^5 timesteps. The magnetic field is supposed so far to be perpendicular to the plane, that automatically implies $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

In the context of our problem, the first term in the right-hand side of Eq. (1) models magnetic field lines emerging into the solar corona from the turbulent convective zone. One of crucial questions here is what kind of source is produced by the turbulence rising from a convective zone. Recent studies of the evolution of the z-component of the helicity in the convective zone give arguments in favour of the small scale magnetic field generation source [Abramenko et al. 1999]. Another argument in favour of small scale

source is based on the fact that the turbulence of the velocity field in the shear flow that is supposed to occur in the convective zone has quite a large interval in scales, and the magnetic field that can be generated by such a turbulent flow should have wide range in the wave-vector space. Small scale source of the magnetic field has large band spectrum in wave-vector representation. This makes already an important difference with the Alfven turbulence where the sources are assumed to be large scale and the dissipation is supposed to be in small scales. We shall study the wideband wave vector energy sources as well as wideband (in a wave-vector space) energy dissipation region, that means that any notion of inertial interval is absent in such a consideration.

A phenomenological view of reconnection, seen as dissipation of small scale current sheets exceeding a critical value [Syrovatsky 1981; Somov & Syrovatsky 1977; Syrovatsky 1982], shall replace the second term. Neglecting the displacement current, as usual in MHD, the current density is computed from Maxwell-Ampère's law $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$. The discrete version reads (units where $\mu_0 = 1$ are used)

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{B(x,y) - B(x,y+\Delta)}{\Delta} \\ j_y &= \frac{B(x+\Delta,y) - B(x,y)}{\Delta} \end{aligned}$$

and it verifies $\nabla \cdot \mathbf{j} = \mathbf{0}$ (at each node, the incoming and outgoing currents are equal).

Statistical properties of the system are strongly dependent upon the "rules of energy dissipation". We shall consider here two types of the "dissipation rules", that correspond to different physical processes that can be involved into the magnetic field energy dissipation in real physical system. The important questions we are interested in can be formulated as follows:

- can local dissipation provide long range spatial correlations, and,

- how spatial correlation length influence statistics of the energy dissipation.

First type of dissipation was taken to be similar to physical effect of the anomalous resistivity. The notion of "anomalous resistivity" in plasma physics describes the phenomenon of pulse and energy exchange between electrons and ions, or between different groups of particles of the same nature by means of plasma turbulence in collisionless plasma [Galeev & Sagdeev 1979]. When the electric current in plasma exceeds certain threshold value plasma instabilities can be excited. In the particular case of the current perpendicular to the magnetic field the modes excited can be of the type of modified Buneman instability, or drift type instabilities, or low-hybrid waves. As a result of the development of instability excited waves being generated by electrons take part of their energy and pulse, and being dissipated by ions transfer this part of pulse and energy to ions. This results to the dissipation of current and if not to come into microscopic details of the dissipation process the macroscopic consequences are quite similar to Joule dissipation. We introduced the "dissipation rule" for our system that is inspired by such a process, where the dissipation occurs when the current reaches a critical value j_{max}. The dissipated energy has the form of Joule-type dissipation $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$, *i.e.* like $|j|^2$.

This model, as will be shown later, has statistical properties close to Gaussian statistics and will be used as the reference point for comparison with another one.

The second "dissipation rule" that we used in our modeling is related to the reconnection process. The dissipation in a particular cell of the grid can occur if two requirements are satisfied simultaneously in the same cell:

- magnetic field in two neighboring cells have opposite sign (it corresponds to the classical plane reconnection configuration [Syrovatsky 1981; Petchek 1964];

- the current should exceed some critical predetermined value as in the first case.

This additional condition allowed existence of currents, that are essentially higher then the critical value, when the maximum current does not coincide with the "reconnection cite". After arising of such currents the process of reconnection/dissipation can propagate similar to chain reaction up to many cells around.

We briefly review hereafter the first results of our modeling.

3. RESULTS

In each time step the δB added into each cell of the grid is a random variable from the set $0, 1, -1$ with equal probabilities. Thus without dissipation the magnetic field in each cell would perform a Brownian motion. The dissipation in the form of "anomalous resistivity" or "reconnection" can modify this picture. Here we present three series of results calculated for the same conditions : 128×128 cells, $t_{max} = 10^5$, $j_{max} = 5$.

The first criteria for dissipation is formulated in such a way that it occurs when the current between two cells of the grid exceeds the threshold, then it is dissipated and magnetic fields in neighboring cells are both put to be equal to their average value. The "check" of whether this criterium is satisfied is performed after each time-step of the source action along the whole grid. If it is the case the dissipation takes place and the check is repeated till the dissipation criterium is not anymore satisfied anywhere on the grid. Then the source operation process is switched on again.

In a wide range of $j_{\max}$ from 0.1 to 100 the probability distribution function (pdf) of the dissipated energy is a Gaussian or has Gaussian envelope (for the large values of the threshold) as well as the instant magnetic field probability (figs. 2, 3).

Short–lifetime structures can appear and disappear in the simulation process. In spite of the returns

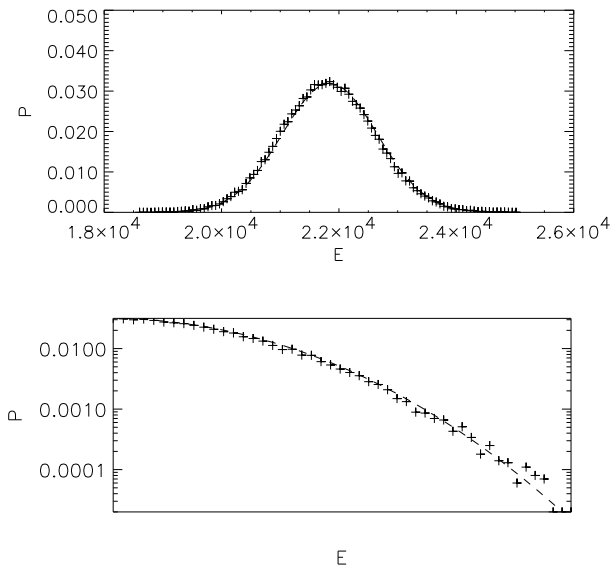

Figure 2. PDF of energy dissipation in a case of "anomalous resistivity" dissipation rule. Upper figure has linear-linear scale, bottom one has log–log scale. $jmax = 5$ (Dashed line corresponds to the best Gaussian fit).

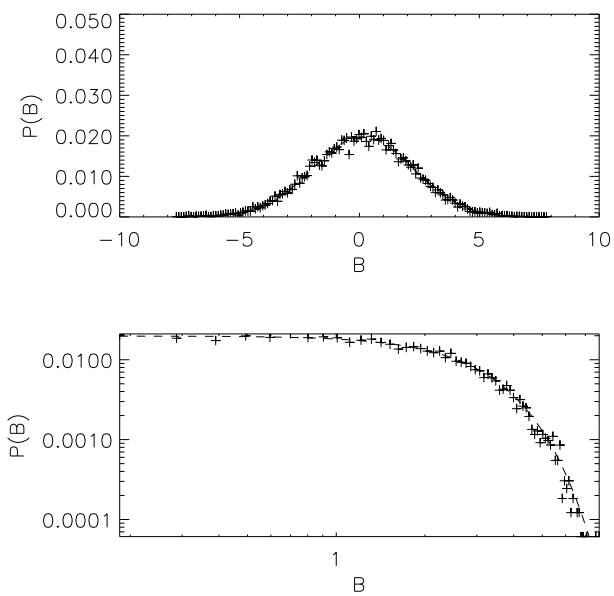

Figure 3. Typical PDF of magnetic field in linear-linear scale (upper figure) and log–log scale (bottom) under the same conditions as Fig. 2. $t = 5.10^4$ (Dashed line is the best Gaussian fit).

of the neighbors to their common average position the statistical properties of the system resembles the Brownian motion which indeed predicts Gaussian distributions. The time history of moments of the magnetic fieldmean, variance, skewness – normalized 3rd order moment – and kurtosis – normalized 4th order moment –. Skewness and kurtosis vanish for a Gaussian distribution show that at any moment the pdf of B is close to a Gaussian (fig. 4).

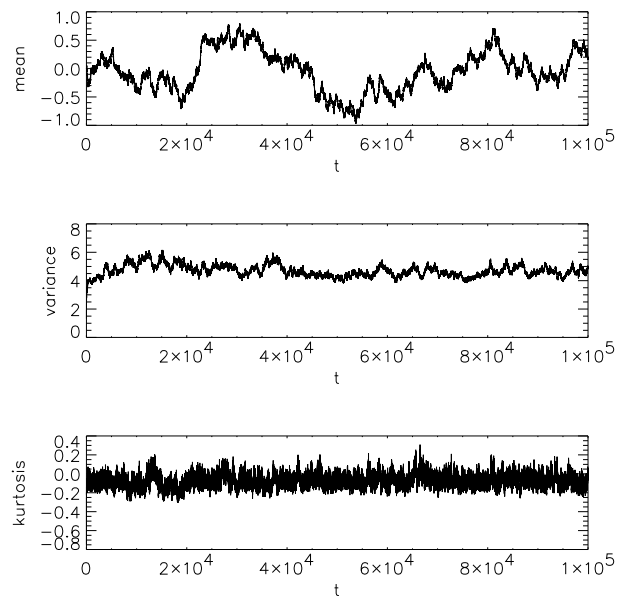

Figure 4. Evolution of moments (mean, variance, kurtosis) of the magnetic field in time. The same conditions as Figs. 2-3. Small value of kurtosis indicates that the process is Gaussian.

Spatial correlations of the magnetic field decrease exponentially (fig. 5).

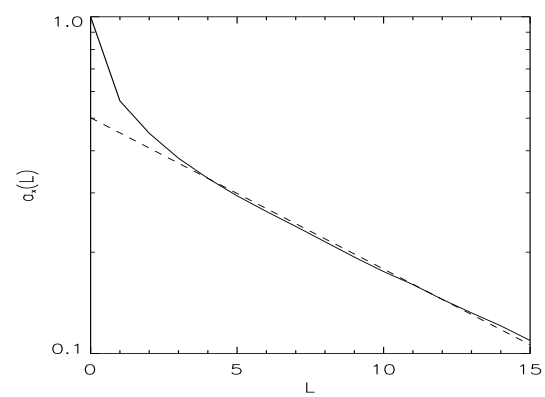

Figure 5. Averaged magnetic field spatial correlation function in linear-log plot. Conditions similar to previous figures. Correlation length $L = 11$. The decrease rate is 0.9.

However, some quantitative features depend upon the threshold chosen. For example, the correlation length decreases with $j_{\max}$ (fig. 6).

Addition of a condition that the dissipation takes place only if the neighboring fields have opposite signs gives rise to the noticable increase of correlation lengths (fig. 6), though the spatial correlations are still exponential in average (here the average characterictic length is 14). However there appear strong difference in the amplitude of the kurtosis of the magnetic field that is much larger in average than in the first case, but what more importantly is that it shows large bursts reaching values larger than 10 (fig. 7).

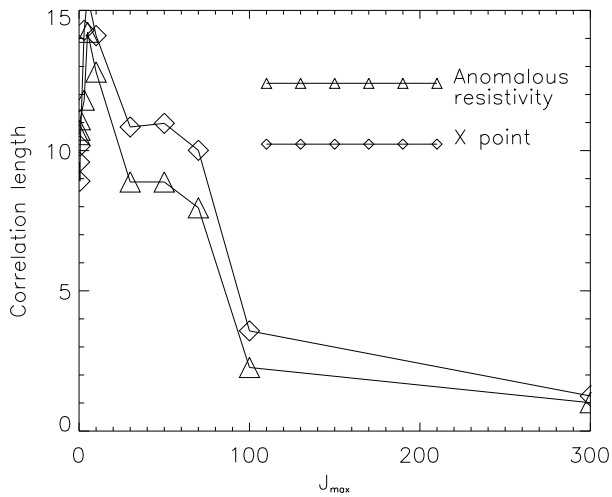

Figure 6. Correlation length dependence on the threshold of dissipation for both dissipation rules. Anomalous resistivity is marked by triangles, reconnection by squares.

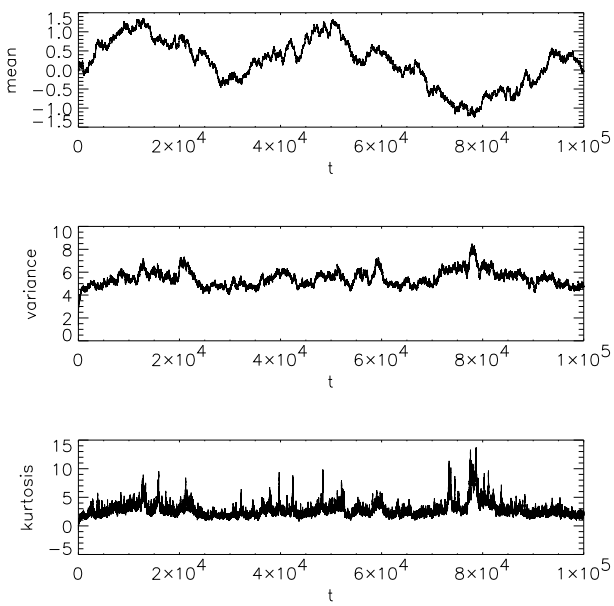

Figure 7. Moments (mean, variance, kurtosis) of the magnetic filed in time. The dissipation rule corresponds to reconnection. The large value of kurtosis with respect to anomalous resistivity case indicates strong deviations from Gaussianity. The bursts of the kurtosis are correlated with the decrease of the variance (energy releases).

This large value give an indication of strong deviations of the field distribution pdf from Gaussianity, as illustrated on Fig. 8.

During this peaks, spatial correlations become of a power–law type (see fig. 9).

After the energy release, the system relaxes and correlations become again exponential. Such large peaks of kurtosis are often associated to drops of the variance ($\langle B^2 \rangle$), hence to energy dissipation. The total

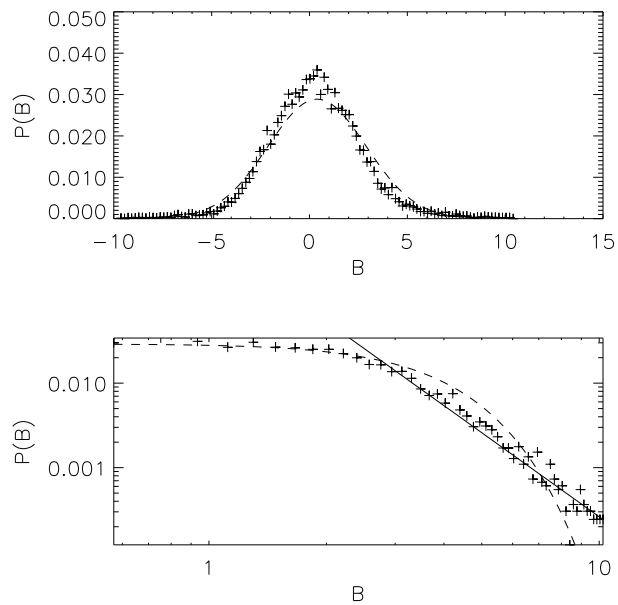

Figure 8. Typical PDF of magnetic field in linear-linear and log–log scales at $t = 6.10^4$. Dissipation rule describes the reconnection process, $jmax = 5$. (Dashed line is the best Gaussian fit.)

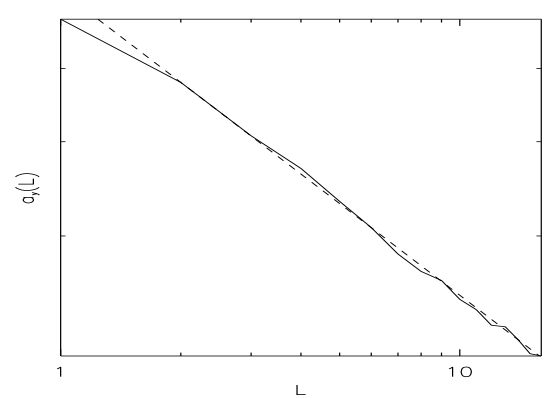

Figure 9. Magnetic field spatial correlation function in log–log scale ($t = 7.9\ 10^4$). At this moment kurtosis of the magnetic field has very large value and it is related with large energy release (see fig. 7.). The slope of the correlation function is approximately equal to 0.40.

dissipated energy at each timestep also departs from Gaussian, and these small power-law like deviations are seen in the tail of its pdf (fig. 10).

It is worth noting that the comparison of the experimental observations and theoretical models can be a not so easy task. The sensibility of instruments can introduce additional elements of ambiguity. Having in mind that experiments cannot resolve micro or nano-flares down to arbitrary small energy, we filtered out energy releases smaller than a minimal energy $E_{\min}$, and replaced in the time series of the dissipated energy values smaller than $E_{\min}$ by white noise. The remaining peaks correspond to large dissipative events, in which case B generally has large

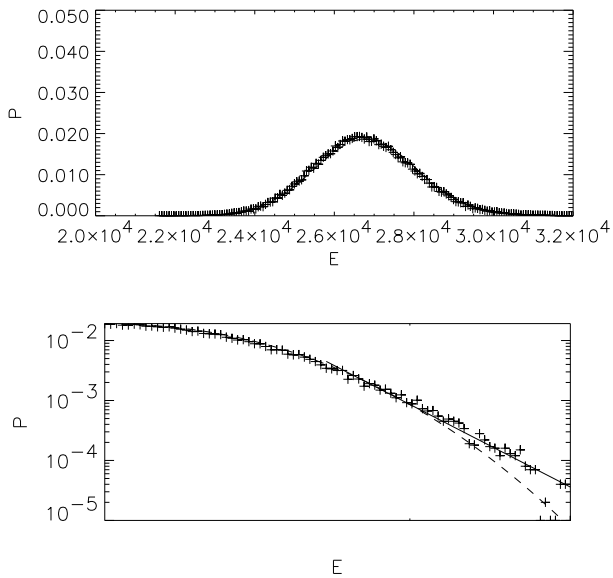

Figure 10. PDF of energy dissipation in linear-linear and log–log scales. Reconnection dissipation rule, $jmax = 5$. (Dashed line is the best Gaussian fit.)

kurtosis (fig. 7) and power law spatial correlations (fig. 9). The obtained time serie is shown in fig.11.a, and has a power-law power spectrum (fig. 11.b).

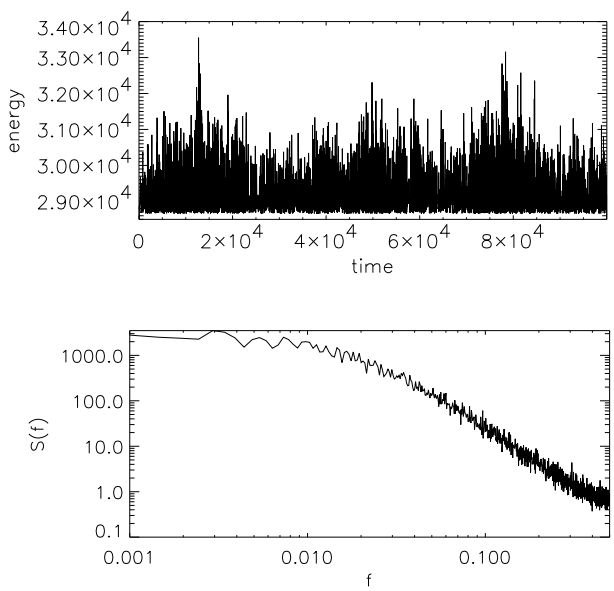

Figure 11. Filtering of energies lower than certain threshold for reconnection dissipation rule that represents the cut of the previous distribution. Energy dissipation dependence upon time and power spectrum (see the text for more details).

The pdf of the filtered energy displays a nice power-law (figs.12,13) though the bulk of the energy (before pre-treatment) had a different distribution. This analysis shows that the comparison of the experimental observations and theoretical models should be performed with care.

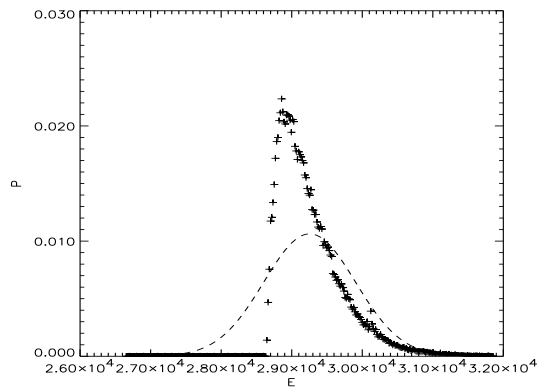

Figure 12. PDF of filtered energy dissipation (linear-linear plot). (Dashed line is the best Gaussian fit for this distribution).

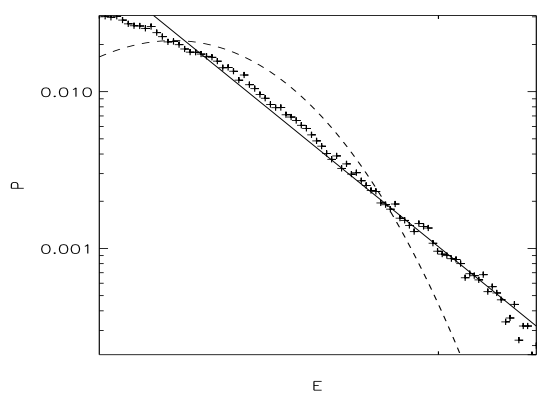

Figure 13. The same as previous figure in log–log scale. It clearly shows the power law dependence.

4. CONCLUSIONS

Two-dimensional sand-pile model for describing solar coronal heating by means of the multiple local small-scale dissipation is proposed.

1. When the magnetic field is generated by adding random values from the set {-1, 0, 1} and dissipation process takes place when the current is larger than a certain threshold (critical current), the system does not show any signatures of the self-organized behavior, moreover its dynamics is quite similar to the Brownian motion (most of spatial correlations are exponential, pdf of the magnetic field as well as the energy dissipation is Gaussian). There are no avalanche-like dissipation events in the system. However, some bright points and small short lifetime structures are observed.

2. The same system, but under additional reconnection condition imposed for dissipation to occur, when the field in neighboring cells of the grid has opposite sign is characterized by the slower spatial correlations and strong deviation of the tail of pdf of the energy dissipation from Gaussian.

The spatial correlations manifest power law dependencies during large energy releases and they decrease becoming similar to exponential when there are no such releases in the system. Pdf of magnetic field in space is most of the time strongly non-Gaussian. The large "bursts" occur in the spontaneously created bipolar areas. The reason for generation of such large range correlations is due to the possibility of existence of large currents that appear due to the additional condition imposed to the system. The tail of energy dissipation PDF shows power law scaling characteristics.

In both cases, the average mean characteristic length decreases with the increase of the dissipation threshold.

Filtering out low energy events, the high energy distribution strongly represent power law dependences and so does the power spectrum.

We are trying to enhance the model in several directions. The first is to model bipolar areas. In order to provide a simple simulation of dipolar areas, we cut the grid in two parts and took δB in -1.5, -0.5, 0.5 in one half and in 1.5, 0.5, -0.5 in the other half of the grid. We observed, as could be expected, that reconnection events were much more intense within the border between these bipolar regions. The dissipation is not always able to stabilize the field arising, which seems to be the pitfall of this approach but we consider several ways to overcome it.

Another possibility is to study the effects of the statistics of the source. As magnetic field is supposed to emerge from turbulent convection, some of its statistical features should be quite different from the simple random sampling. Thus, we investigated several types of magnetic field sources with the features of the deterministic chaos [Frish 1995; Beck & Schlogl 1993], or displaying anomalous diffusivity (using for example the Geisel map [Geisel 1984] which has a subdiffusive behavior). The main result of such models is the existence of nonlinear coherent structures of magnetic fields. But these questions come beyond the scope of this paper.

REFERENCES

Abramenko, V. I., V. B. Yurchyshyn, V. Carbone, ESA SP-448, this volume, (1999)

Bak, P., Ch. Tang, K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A, **36** (1988) 364

Beck, C., Schlogl, G., *Thermodynamics of chaotic systems*, Cambridge (1993)

Biskamp, D., *Nonlinear Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press (1993)

Crosby, N.B., Aschwandnen, Dennis, B.R., Sol. Phys., **143** (1993) 275

Crosby, N.B., Vilmer N., Lund, N., and Sunyaev, R., Astron. Astrophys. **334** (1998) 299

Einaudi G. and M. Velli, Space Sci. Rev., **68** (1982) 97

Einaudi, G., M. Velli, H. Politano and A. Pouquet, Astrophys. J., **457** (1996) L113

Frish ,U., *Turbulence*, Cambridge (1995)

Galeev, A. A., R. Z. Sagdeev, in Reviews of Plasma Physics, ed. by M. A. Leontovich, **7** (1979) 1

Geisel, T., and Thomae, S., Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1936

Georgoulis M. K., Velli M., Einaudi G., Astrophys. J., **497** (1998), 957

Lin, R.P., Schwartz, R.A., Kane S.R. Pelling, R.M., and Hurley, K.C, ApJ, 283 (1984) 421

Lu, E.T., Hamilton, R.J., Astrophys. J **380** (1991) L89

Lu, E. T., R. J. Hamilton, J. M. McTiernan, and K. R. Bromund, Astrophys. J., **412**, (1993) 841

Parker, E.N., Solar Phys., **121** (1989) 271

Parker, E.N., ApJ. **330** (1988) 474

Petchek, H.E., 1964, AAS/NASA, symposium on the Physics of Solar Flares, ed. W.N. Hess (NASA,Washington, DC) 425

Priest, E.R., ESA SP-448, this volume, (1999)

Reginier, S., K. Bocchialini, J.-C. Vial, J.-P. Delaboudiniere, W. Thompson, C.R. Acad. Sci. Paris, **326**, II b (1998) 211

Somov, B.V., Syrovatsky S.I., Sol. Phys., **35**(2) (1977) 393

Syrovatsky, S.I., Ann. Rev. Astron. Astrophys, **19** (1981) 161

Syrovatsky, S.I. Sol. Phys., **76**(1) (1982) 3

Vlahos, L., Space Sci. Rev., **68** (1982) 39

Vlahos L., M. Georgoulis, R. Kluiving and P. Paschos, Astron. & Astrophys., **299** (1995) 897

Annexe B

Quiet Sun coronal heating, a statistical model

Astronomy & Astrophysics, v. 382, pp. 699-712, 2002

A&A 382, 699–712 (2002)
DOI: 10.1051/0004-6361:20011677
© ESO 2002

Astronomy & Astrophysics

Quiet Sun coronal heating: A statistical model

V. Krasnoselskikh[1], O. Podladchikova[1], B. Lefebvre[2], and N. Vilmer[3]

[1] LPCE/CNRS UMR 6115, 3A Av. de la Recherche Scientifique, 45071 Orléans, France
[2] ESST, Kyushu University, 6-1 Kasuga-Koen, Fukuoka 816-0943, Japan
[3] DASOP, Paris-Meudon Observatory, 5 Pl. J. Janssen, 92195 Meudon, France

Received 5 March 2001 / Accepted 16 August 2001

Abstract. Recent observations of Krucker & Benz (1998) give strong support to Parker's hypothesis (1988) that small-scale dissipative events make up the main contribution to quiet Sun coronal heating. They also showed that these small-scale events are associated not only with the magnetic network, but also with the cell interiors (Benz & Krucker 1998). Taking into account in addition the results of the analysis performed by Priest with co-authors (2000) who demonstrated that the heating is quasi-homogeneous along the arcs, we come to the conclusion that the sources driving these dissipative events are also small-scale sources. Typically they are of the order of or smaller than the linear scale of the events observed, that is <2000 km. To describe statistical properties of quiet Sun corona heating by microflares, nanoflares, and even smaller events, we consider a cellular automata model subject to uniform small-scale driving and dissipation. The model consists of two elements, the magnetic field source supposed to be associated with the small scale hydrodynamic turbulence convected from the photosphere and local dissipation of small scale currents. The dissipation is assumed to be provided by either anomalous resistivity, when the current density exceeds a certain threshold value, or by the magnetic reconnection. The main problem considered is how the statistical characteristics of dissipated energy flow depend upon characteristics of the magnetic field source and on physical mechanism responsible for the magnetic field dissipation. As the threshold value of current is increased, we observe the transition from Gaussian statistics to power-law type. In addition, we find that the dissipation provided by reconnection results in stronger deviations from Gaussian distribution.

Key words. Sun: corona – Sun: flares – methods: statistical

1. Introduction

Although photospheric convection may supply enough energy to heat the coronal plasma, the way energy is supplied and dissipated in the corona is not completely understood (e.g. Priest et al. 2000; Einaudi & Velli 1994b). Parker (1988) suggested that the solar corona could be heated by the dissipation at many small-scale tangential discontinuities arising spontaneously in the coronal magnetic fields braided and twisted by random photospheric footpoint motions. To emphasize these events, he introduced the notion of nanoflares. This idea stimulated the intensive search of observational signatures of microflares and nanoflares as well as many theoretical developments on the contribution of small scales to energy dissipation in the solar corona. The solar flares, the most energetic impulsive phenomena in active regions, were observed and studied in detail for quite a long time. On a large scale, it is well known that the most energetic dissipative events occur in the vicinity of tangential discontinuities at the borders of the photospheric dipolar regions like bright spots. These sources create strong currents resulting in reconnection and flare-like events. Such eruptive events are related to magnetic energy releases, sudden changes of the magnetic field topology, and plasma heating. Therefore Parker's idea about solar corona heating by nanoflares used quite similar physical concepts about the nature of dissipative phenomena, but it pointed out the importance of small scales.

The smaller-scale phenomena, microflares, were first detected in soft X-rays in a balloon experiment by Lin et al. (1984). The development of new instrumentation allowed performing the multi-wave satellite (YOKOH, SOHO, TRACE) and ground based (VLA) high-resolution observations of smaller-scale (about a thousand of kilometer) lower energy phenomena. They were observed in active regions but also in the quiet regions of the Sun and in coronal holes. The small intensity flares observed in active regions were quite rare and not powerful enough for heating (Shimizu et al. 1994). These observations were

Send offprint requests to: V. Krasnoselskikh,
e-mail: vkrasnos@cnrs-orleans.fr

performed in the regions of high levels of background flux and strong stray light. The very same microflares can be more easily detected in the quiet corona. Soft X-ray observations (Benz et al. 1997) and EUV observations (Harrison 1997) have revealed enhanced emission and thus intense heating above the magnetic network. A similar phenomenon that forms small X-ray jets at the limb was reported by Koutchmy et al. (1997). It was found that the number of observed events increases with the sensitivity.

Another way to shed some light on the important problem concerning the characteristic scales of the major dissipative events consists of statistical study of different observed parameters. The major objective of such a study is to obtain the energy Probability Density Function (PDF) over a wide range of energies.

For regular flares that occur mainly in active regions, Crosby et al. (1993) have found that the total energy in the flare electrons observed in hard X-ray bremsstrahlung has a power law distribution $f(E) \sim E^{\alpha}$ with index $\alpha = -1.53 \pm 0.02$. But the energy supplied by the flares in the active regions is not sufficient for the corona heating.

The crucial factor that determines the characteristics of the heating process and its scales is related to the power law index of the PDF. If it is larger than minus two the major heating takes place in the intensive large-scale dissipative events. If it less than minus two it occurs in small scales. The reason is that to provide the explanation of the efficient coronal heating at small scales, it is necessary to have an excess in the occurrence rate of small-scale events. An important result that supports the hypothesis of Parker was reported by Krucker & Benz (1998) who have found from the Yohkoh/SXT observations that the PDF dependence upon the energy has a power law distribution in the energy range 10^{24}–10^{26} ergs with the index about -2.59. This result was obtained assuming that the flaring region has a constant height. The authors not only concluded that the weak flaring events rule the heating process, but they also noticed that the brightest small scale microflares lie above enhanced elements of the magnetic network, and the denser ones exhibit a higher level of fluctuations. This means that the corona is continuously replenished by underlying chromospheric material that has been heated to coronal temperatures. Mitra & Benz (2000) have discussed the same observations but supposing that the height varies proportionally to the square root of the area and have shown that the index becomes a little larger but still is smaller than minus two. This result was confirmed by Parnell & Jupp (2000), who estimated the index to be between -2 and -2.1 making use of the data of TRACE. However, Aschwanden et al. (2000), also using the data of TRACE, have found significantly different value of this index -1.80, suggesting that there may not be enough energy in microflares or nanoflares to heat the entire quiet corona. These last authors have cast doubt on the hypothesis that the heating takes place at small scales, which according to them remains controversial.

It is also worth mentioning that Benz & Krucker (1998) and Berghmans et al. (1998) have noticed that the heating events occur not only on the magnetic network boundaries but also in the cell interiors. They came to the conclusion that these events have a quite similar nature.

The idea of small-scale intermittent behavior of dissipation was elaborated in theoretical models by several authors. Using an MHD approach, Einaudi & Velli (1994a) investigated the dependence of the dissipated energy upon the scales. Different kinds of "fragmentation of dissipation" were discussed by Vlahos (1994). Einaudi et al. (1996) and Georgoulis et al. (1998) simulated 2D MHD systems driven by large-scale forces and with diffusive dissipation. Their 2D simulations, driven by a pair of large-scale vortices with random phases and amplitudes, showed that the spatial average of the dissipated power had non-Gaussian statistics. After substraction of the Gaussian component, the dissipated events were shown to have a scaling law distribution.

The observed power-law distributions of the energy flux for the largest dissipative events, flares, and microflares inspired the development of models based on the idea of Self-Organized Criticality (SOC) (Lu & Hamilton 1991; Lu et al. 1993; Vlahos et al. 1995; Georgoulis et al. 1995; Georgoulis & Vlahos 1996, 1998). Lu et al. (1993) and Georgoulis et al. (2001) compared the predictions of the models with the observations of the flares. SOC has appeared as a paradigm for slowly driven complex systems, which exhibit power-law-type relaxation events and correlations of infinite range (Jensen 1998). These models are similar to the original "sandpile" model (Bak et al. 1988), but the sand is replaced by the magnetic field flux. The dissipation occurs through small-scale reconnection, when a "current", which is defined in terms of the difference between the field in a particular cell and the average over all nearest neighbors, exceeds some threshold. In these models, a perturbation in a single cell can trigger quite a large cascade of reconnections. This results in a power-law energy distribution of dissipative events and power-law spatial correlations. However, one should take care in interpreting these results because a small grid size can result in an artificial form of the PDF's obtained. A heuristic justification of such models based on 2D MHD equations was proposed by Vassiliadis et al. (1998). It is also worth mentioning that, using a shell model of MHD turbulence, Boffetta et al. (1999) have demonstrated that there can exist alternative reasons for a scaling law to appear.

Our model is also based on the idea of cellular automata. Its difference with the previous ones consists in the assumption that not only the dissipation takes place in small scales but the magnetic field sources are also of small scale. This is in agreement with the idea of Benz & Krucker (1998) that the heating can take place on the level of the chromosphere, implying that the magnetic field structures have the scales of the order of or less than its height. This feature results from the analysis of Priest with co-authors (1998) who have shown that the heating is quasi-homogeneous over the height of the magnetic loop. Other indications about the possible role of the

small-scale sources follow from observations of Abramenko et al. (1999) of the evolution of the vertical component of the current helicity of an active region magnetic field during a transition from a low flaring state to an enhanced one. They found that the reorganization of the vortex structure of the photospheric magnetic field occurs, when small scale vortices re-organize into larger scale vortices, suggesting that an inverse helicity cascade develops.

Although the footpoints of the loops are known to move randomly, the statistical properties of their motions are not known in detail. These sources create strong currents resulting in reconnection and flare-like events. Such eruptive events are related to magnetic energy releases, sudden changes of the magnetic field topology, acceleration of particles and plasma heating. Another possible source of energy dissipation and coronal heating is provided by an anomalous resistivity resulting from current-driven instabilities which are developed when the currents exceed a certain threshold value. It provides Joule-like dissipation in collisionless plasma. This results in a relatively slow heating, but does not give rise to particle acceleration as for the previous dissipation mechanism. Moreover it may occur everywhere in the turbulent shear flows and not necessarily on the boundaries of the magnetic field network.

Another important feature that makes the difference from previous studies of CA type models is the homogeneous distribution of the magnetic field sources. The problem to be addressed in the present work is whether the small-scale magnetic fields generated in (or convected from) the photosphere or chromosphere (mainly at the boundaries between granulas, but also inside them) can make a significant contribution to the coronal heating.

We are mostly interested in the scales typical for nanoflares and even in smaller ones. In this case, the small-scale sources of the magnetic field and the energy dissipation can have comparable characteristic spatial scales. Thus the inertial interval as well as the energy cascade are not as important in such a model as for the conventional Alfvénic or MHD turbulence. But the system considered can possess the property of "inverse cascade", thereby influencing the structure of the larger-scale magnetic fields, as is supposed to be the case in the SOC-type systems. In this paper we concentrate on the study of the dissipated energy flow, in particular, on the dependence of statistical characteristics of dissipated energy flow upon the characteristics of the magnetic field source, and on the physical mechanism of the magnetic field dissipation.

2. Small scale driving and dissipation

We consider hereafter the sand-pile-type cellular automata, where sand piles are replaced by a magnetic field flux. In the model, the relaxation process consists of the dissipation of the magnetic field energy by means of the dissipation of currents, when their magnitudes exceed a certain threshold value, or due to the reconnection process.

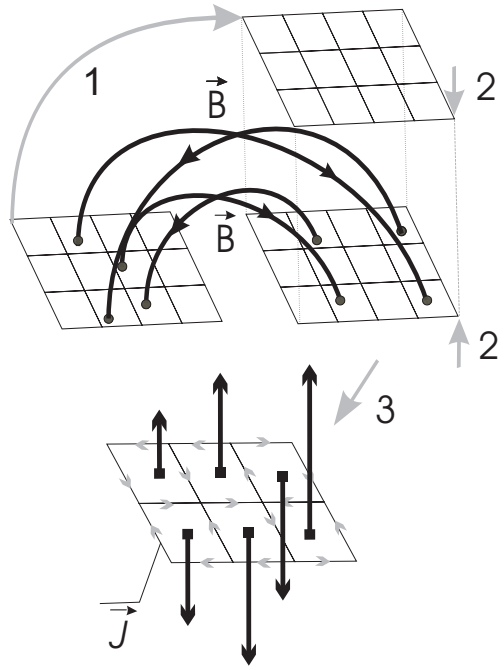

Fig. 1. A schematic representation of the procedure used in our model to simplify magnetic field configuration.

In MHD approximation the evolution of the magnetic field is governed by

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) + \text{dissipative term}, \tag{1}$$

where $\boldsymbol{B}$ is the magnetic field, $\boldsymbol{u}$ is the fluid velocity of the plasma. Without the dissipative term, this equation describes the motion of the magnetic field lines frozen into the plasma. In this case, the reconnection is forbidden. When a finite conductivity σ is taken into account in the form of Ohm's law $\boldsymbol{j} = \sigma\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B})$, where $\boldsymbol{j}$ is the current density, it gives rise to the diffusion effect. In Eq. (1) the effect is described by a dissipative term $\eta \Delta \boldsymbol{B}$, where $\eta = 1/\sigma\mu_0$ and μ_0 is the magnetic permeability of the free space. The diffusion time $t_\eta = l^2/\eta$ is generally large for all scales but small where it is comparable with the typical time for fast reconnection. In this case it has the same order of magnitude as an Alfvén time $t_{\rm A} = l/V_{\rm A}$, where $V_{\rm A}$ is the Alfvén velocity. It is worth mentioning that at small scales other dissipative effects can become important (see, e.g., Biskamp 1993).

In the present study, we use a simplified cellular automata model mimicking Eq. (1).

Assume that the curvature of the magnetic field lines is negligible. Then, in each cubic column only the upper and lower faces should be considered, i.e., magnetic field lines are straight and perpendicular to the surface. In this case the equation $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ is automatically satisfied (see Fig. 1). As a result, the fields on the lower and upper faces are equal, thus only one face will be considered. The 2D surface is then split into cells. In most of the simulations presented in the paper, grids of 200×200 cells are used

(unless otherwise stated). The boundary conditions are chosen to be periodic.

As we have mentioned already in the introduction Krucker & Benz (1998) have found that the main heating occurs in the small scale bright points. Making use of the multi-wavelength analysis Benz & Krucker (1999) have shown that the temporal sequence of observations of different wave emissions is similar to the one in the large scale magnetic loops. They came to the conclusion that the physical mechanisms of the energy release are similar in these two cases. It follows then that the dissipation process in the second case is also associated with the magnetic loops, but at a small scale. Moreover, they have noticed that the heating events occur not only on the boundaries of the magnetic network but in the interiors of the cells also. The comparative analysis of the model predictions for the plasma heating in the magnetic loop due to the distributed energy source with observations performed by Priest with co-authors (1998) led to the conclusion that the heating is quasi-homogeneous along the magnetic loop. This means that the heating process does not occur in the close vicinity of the foot points but rather in the whole arc volume. If one will put together these facts, it follows that the characteristic spatial scale of the magnetic field loops which supply the magnetic field dissipated is of the same order as the characteristic scale of the dissipation. Thus we may conclude that not only the dissipative process, but also the sources, have small characteristic length. Another conclusion from observations is that the sources are distributed quite homogeneously in space. This reasoning leads us to the choice of the sources and dissipation mechanisms used in our model that we describe further.

Three kinds of sources with slightly different statistics are considered.

2.1. Source terms

We investigate the statistical behavior of the system driven by a random and turbulent unipolar/dipolar sources. These sources are used to model the effects of turbulent magnetic field convection described by the first term on the right-hand-side in Eq. (1).

- **An unipolar random source.** The simplest source of magnetic energy is an uncorrelated process of zero mean, $\langle \delta B \rangle = 0$, the values of which are randomly chosen from the set $\{-1, 0, 1\}$, all the values being equiprobable. In each time step the action of the source consists of adding random numbers from the set mentioned above to the previous values in the cell. The numbers are independently chosen for each cell. This procedure automatically ensures that $\langle \delta B \rangle = 0$ for each cell.
- **A dipolar random source.** Such a source can be made dipolar by dividing the grid into two parts. For the positive and negative parts of the grid the random numbers $\langle \delta B \rangle = 0$ are chosen from the sets $\{-0.5, 0.5, 1.5\}$ and $\{-1.5, -0.5, 0.5\}$, respectively.
- **A chaotic source.** Turbulence is certainly not a completely random process, and some of its aspects can be simulated using deterministic models. The Ulam map provides one of the simplest examples of a generic chaotic system with quadratic non-linearity (see, e.g., Frisch 1995). The source δB in each cell evolves according to

  $$\delta B_{n+1} = 1 - 2(\delta B_n)^2,$$

  where the initial values of δB_0 are randomly chosen from the interval $[-1, 1]$. In this case, all other δB_n belong to the same interval. The action of the source is similar to the above described for random sources.
- **A Geisel map source.** In physical systems, the source term may depend on the value of B itself. When the dissipation is absent, the magnetic field in each cell evolves according to the map

  $$B_{n+1} = f(B_n).$$

  The initial values of B_0 are randomly chosen from the interval $[-0.5, 0.5]$. The systems like that are usually called Coupled Map Lattices (CML) (Kaneko 1992) rather than cellular automata. We use the source based on the Geisel map (Geisel & Thomae 1984) shown in Fig. 2. The fixed points of this map that are defined by $B_n = f(B_n)$ are metastable. As a result, an intermittency develops in the system, i.e., the dynamics is slow and regular in the vicinity of the fixed points of the map and fast and chaotic otherwise. As a consequence, the map that describes the time evolution of the magnetic field in each particular cell exhibits behavior similar to anomalous (non-Brownian) diffusion, i.e.

  $$\langle B^2 \rangle \propto t^{\alpha}, \quad \alpha < 1.$$

  The hypothesis has been suggested that when the turbulence consists of convective cells, magnetic field lines time evolution in each cell is similar to a subdiffusive behavior ($\alpha < 1$), which is, however, more complex than described above.

2.2. Dissipation criteria

The magnetic field dissipation provides the conversion of the magnetic energy into thermal energy and ensures the coupling between the magnetic field elements in our model. Phenomenologically, reconnection can be treated as a dissipation of small-scale current sheets when the current density exceeds a certain threshold value (Somov & Syrovatsky 1977; Syrovatsky 1981, 1982).

If we neglect the displacement current, the current density can be calculated from Maxwell-Ampère's law $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$, the finite-difference form of which can be written as

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta \mu_0} \begin{pmatrix} B(x,y) - B(x, y+\delta) \\ B(x+\delta, y) - B(x,y) \end{pmatrix},$$

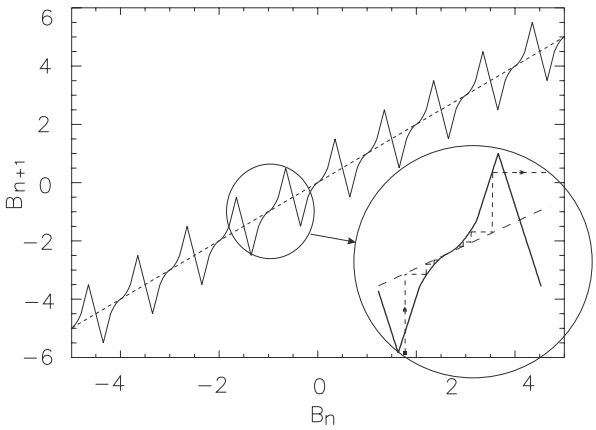

Fig. 2. Graphical representation of the Geisel map (solid line). The fixed points of the map correspond to the intersections of the graph with the straight line $B_{n+1} = B_n$ (dashed line).

where δ is the grid increment. For simplicity we let $\delta = 1$ and $\mu_0 = 1$. Currents are thus computed as local gradients, and supposed to be carried along the borders between the cells. It is seen that the discrete analog of the current continuity equation $\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$ holds, i.e., the sum of incoming and outgoing currents is equal to zero at each node of the grid.

The mechanisms for the current dissipation are of two types.

– **Anomalous resistivity** arises as the result of an instability when the electric current exceeds some critical value (which may be sometimes very small), and results in an increase of the plasma's resistivity. This phenomenon describes the phenomenon of pulse and energy exchange between electrons and ions, or between different groups of particles of the same nature by means of plasma turbulence in collisionless plasma (Galeev & Sagdeev 1979, 1984).
When the electric current in plasma exceeds a certain threshold value, plasma instabilities can be excited. As a result of the instability development, the waves are generated (e.g. drift waves, or ion-acoustic, or low-hybrid waves). The development of the instability gives rise to the absorption by the generated waves of a part of the electron's energy and pulse which is partly redistributed to ions. This results in a dissipation of the current quite similar to Joule heating (see Appendix A for more details). Finally, it is worth noting that anomalous resistivity does not require any particular configuration of the magnetic field, besides the strong current, and may occur even in the presence of parallel magnetic fields pointing in the same direction, as for example in coronal holes or cell interiors. In our model we assume that the currents are completely annihilated whenever they exceed a certain threshold,

$$|j| \geq j_{\max}.$$

– **Reconnection** is generally understood as a relatively sudden change from one equilibrium state to another, implying a change in the magnetic field's topology, accompanied by a transformation of magnetic energy into energy of particules (Priest & Forbes 2000). In its "primary form" the stationary reconnection process represents the dissipation of the magnetic field in the vicinity of the so-called X-points of the magnetic field configuration or in the vicinity of a current sheet. That can be interpreted as the rising and "burnout" of thin small-scale current sheets separating domains with oppositely directed magnetic fields. To mimic this process, we assume that the following two conditions should be satisfied simultaneously,

$$|j| = |B - B'| \geq j_{\max},$$
$$B \cdot B' < 0, \qquad (2)$$

where B and B' denote the magnitudes of the magnetic field in neighboring cells. These conditions are supposed to hold for conventional plane reconnection configuration with an X-point (Petchek 1964; Syrovatsky 1981). Equation (2) results in the existence of currents that can significantly exceed the critical value (more details can be found in Appendix B).
This is taken into account by requiring that magnetic fields in adjacent cells have opposite directions, which supposes the existence of a magnetic null point in between, and corresponds to an unstable equilibrium favorable to reconnection.

This seems to be enough to distinguish between the two dissipation mechanisms in the framework of the cellular automata model, imposing that the reconnection requires a special configuration (an X-point for instance), whereas the only criteria for anomalous resistivity is a current greater than a given threshold. Indeed, magnetic reconnections corresponds to an important change in the magnetic field's topology, whereas anomalous resistivity does not. In real physical conditions of the corona, both processes can be present. The threshold current for the anomalous resistivity is in general supposed to be much larger than for the reconnection under similar plasma parameters. However our task in this work is confined to the study of the statistical properties of the energy dissipation dependence upon parameters. Closer comparison with real parameters in the corona will be the object of a more detailed study in the future and is beyond the scope of this paper.

The rules that we use to describe the dissipation process are based on the magnetic field dissipation, that means for us transformation to particle energy or heating. For the sake of simplicity and pure formulation of the problem we consider here that all the magnetic field energy is transformed completely into heating. The rules are as follows: when the current is annihilated, magnetic field values in both neighboring cells, B and B', are replaced by $1/2(B + B')$, thus, the density of magnetic energy dissipated in a single event is given by

$$\Delta E = \frac{1}{2}(B - B')^2 = \frac{1}{2} j^2 \gtrsim \frac{1}{2} j_{\max}^2.$$

The procedure modeling the dissipation of currents is the same for both anomalous resistivity and reconnection. For each time step, the currents satisfying the dissipation criterion are dissipated until all the currents become subcritical (or have the same sign in the case of reconnection). Then, we proceed to the next time step and switch on the source. Indeed, dissipative processes are supposed to be faster than the driving ones. The total dissipated energy is calculated as a sum over all the dissipated currents for the time step considered.

To compare the effect of a single act of the magnetic field driver with that of the energy dissipation, one can analyze the spatial Fourier transform of the energy dissipation and the energy influx,

$$I_{\rm source}(k) = \frac{16}{k_x^2 k_y^2}\,\sin^2\left(\frac{k_x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{k_y}{2}\right),$$

$$I_{\rm diss}(k) = \frac{16 j_{\rm max}^2}{k_x^2 k_y^2}\,\sin^4\left(\frac{k_x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{k_y}{2}\right),$$

where k_x, $k_y \in [-\pi, \pi]$. The last equation holds for the dissipation of the y-component of current. For x-component k_x and k_y should be interchanged.

It is seen that the dependence of these two spectra on k_x are quite different. For each fixed k_y, the energy dissipation vanishes at $k_x = 0$ and increases monotonously with the growth of $|k_x|$, while the source of the magnetic field is maximum at $k_x = 0$ and decreases with the increase in $|k_x|$. It is worth noting that for large thresholds, one act of dissipation takes place after a large number of actions of the magnetic field influx, having different phases on each step, which are randomly distributed. This difference in the action of the magnetic field source versus dissipation introduces some intermediate scale in the k-space where the action of the source is approximately compensated by the action of energy dissipation. This characteristic value of k is closely related to the characteristic correlation length of the magnetic field spatial distribution. The growth rate of the magnetic field energy and the effective damping rate are non-vanishing almost everywhere in the k-space, but the growth rate dominates for small k's (large spatial scales) while dissipation dominates for larger k's (smaller spatial scales). Such a situation corresponds in terms of the energy cascade to the "normal" direction of the energy flux, i.e., from large scales to smaller ones. It is also worth mentioning that using uniform driving results in an important difference between our model and conventional SOC models, where the extreme tenuousness of the driving is essential (Sornette et al. 1995). This tenuousness makes the driver nonlocal, in the sense that it depends on the state of the whole system, as discussed by Vespigniani & Zapperi (1998).

2.3. Characteristic spatial scales

Dissipation mechanisms and their thresholds depend upon the parameters of the plasma of solar corona such as background magnetic field, density, etc. Since our model is aimed at describing local regions in the corona rather than the corona as a whole, it is quite natural to assume that the same dissipation criterion can be applied for each cell of the grid. Thus the question about the characteristic sizes of the dissipated currents arises. The observations and theoretical studies show that the scale of current sheets can be smaller than 1 km. The smallest scales, of about 10 m, which are considered by Einaudi & Velli (1999), are associated with the current regions for the Petchek-type reconnection events. Let us estimate the characteristic scales of the dissipation events due to anomalous resistivity. Assuming that the resistivity is provided by the ion sound instability that has quite a small threshold, we can easily obtain

$$|\nabla \times \boldsymbol{B}| \simeq B/L > \frac{4\pi}{c}\, n_{\rm e} e c_{\rm s},$$

where L is a characteristic width of the current sheet layer, c is the speed of light, B is the characteristic magnitude of the magnetic field, $n_{\rm e}$ is the plasma density, and $c_{\rm s} = (T_{\rm e}/m_{\rm i})^{1/2} = (m_{\rm e}/m_{\rm i})^{1/2}\, v_{T{\rm e}}$ is the ion-sound velocity, $T_{\rm e}$ is the electron temperature, $v_{T{\rm e}}$ is the electron thermal velocity, $m_{\rm e,i}$ are the electron and ion masses. Then

$$L < \frac{Bc}{4\pi n e v_{T{\rm e}}}\left(\frac{m_{\rm i}}{m_{\rm e}}\right)^{1/2} = \beta^{-1/2}\,\frac{c}{\omega_{\rm pi}},$$

where $\omega_{\rm pi}$ is ion plasma frequency and β is the ratio of the kinetic to magnetic pressure. In the low corona, where β is supposed to be of the order of 1, we have $L \simeq 300$ m. This scale is significantly smaller than the spatial resolution of modern experimental devices. Moreover, using the angular scattering measurements of the electron density fluctuations, the smallest scale that can be resolved in the slow solar wind at 8 $R_\odot$ is 6 km (Woo & Habbal 1997). Assuming that the linear structures expand radially as r, the structures at 1 $R_\odot$, where dissipation is supposed to occur, are of the order of 1 km.

Thus, until now, only macroscopic characteristics can be observed. The statistical microscopic models are aimed at reproducing the main features of these observations. In this paper we study the influence of the statistical properties of the magnetic field source, of the type of dissipation mechanisms and their thresholds on the macroscopic properties of the total flux of dissipated energy. This problem is related to the other ones. In particular, can the local mechanisms of dissipation result in long-range spatial correlations? In self-organized systems, the appearance of such correlations give rise to power law distributions of dissipated energy. Such properties may be caused by specific features of the source such as the deterministic chaos or non-Brownian diffusion.

3. Results

Preliminary results concerned with the influence of the type of magnetic field energy dissipation on statistical properties of the total radiation energy flux were presented

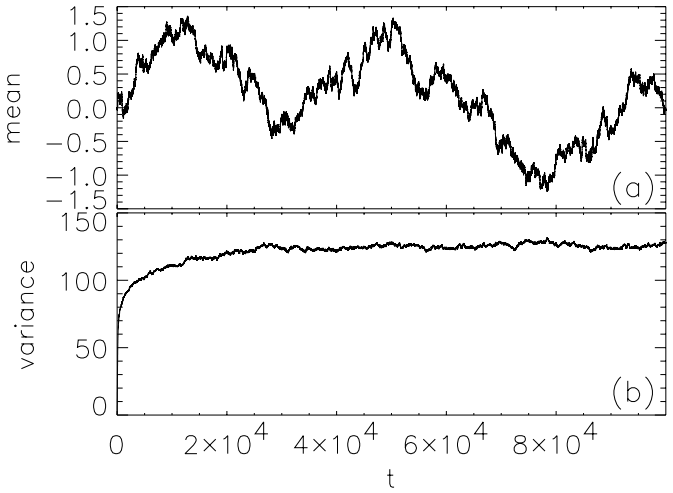

Fig. 3. Evolution of mean and variance of the magnetic field. For variance, observed are three stages – a linear increase, a nonlinear stage, and a stationary state. The results are obtained for unipolar random source and anomalous resistivity dissipation with a threshold $j_{\max} = 30$.

by Podladchikova et al. (1999). It was shown that the dissipated energy has approximately normal distribution when the source of the magnetic field is random and the dissipation is provided by anomalous resistivity. This result was obtained under the condition that the current density threshold for the dissipation to occur was moderate ($j_{\max} = 5$). Under the very same conditions, but for the dissipation due to reconnection, the non-Gaussian energy tails were observed as well as some other interesting features, in particular, large-scale spatial correlations of the magnetic field. This result seems to be quite natural because in this case some currents may exceed the critical value but not dissipate when the magnetic fields have the same direction in the neighboring cells (see Eq. (2)). The currents may grow to larger magnitudes and provide more intensive energy releases in a single dissipative event and sometimes longer chains of these events. The large energy events are those that result in significant deviations from the Gaussian distribution.

3.1. Transient and stationary states

We have studied the dependence of the statistical properties of our system upon the dissipation threshold $j_{\max}$ ranging from 0.01 to 300. To perform a statistical analysis correctly, the averaging procedures should be carried out for the stationary state of the system. The transient time depends on the threshold.

If the dissipation is absent, the field in each particular cell would follow a Brownian motion under the influence of the random source. As a result, the magnetic field in each particular cell, as well as the average over the whole box, would have a Gaussian distribution with a growing variance, $\langle B^2 \rangle \propto t$. The currents exhibit the similar behavior, the current variance growing as

$$\langle j^2 \rangle(t) \approx 2\,\langle \delta B^2 \rangle\, t,$$

where for the random source $\langle \delta B^2 \rangle = 2/3$. On the average, the current dissipates for the first time at time

$$t_{\rm S} \simeq \frac{j_{\max}^2}{2\langle \delta B^2 \rangle}.$$

This relationship also gives a characteristic time between two dissipation events that occur in the same cell in a stationary state. To obtain reliable statistics, the simulation time should significantly exceed $t_{\rm S}$. Depending on $j_{\max}$, the simulations performed have 10^5–10^6 time steps.

Dissipation finally saturates the growth of the variance (see Fig. 3b), and a stationary state is reached. The average magnetic field B over the whole grid undergoes strong fluctuations but its time average is zero, Fig. 3a). The average number n of dissipated currents at each time step can be estimated from the energy balance considerations. For a single time step, the energy input on a $N \times N$ grid is

$$\delta E_{\rm in} \simeq N^2 \langle \delta B^2 \rangle,$$

while the dissipated energy is

$$\delta E_{\rm diss} \simeq -n\,\frac{j_{\max}^2}{4}.$$

In the equilibrium state $\delta E_{\rm in} \simeq \delta E_{\rm diss}$, hence

$$\frac{n}{N^2} \simeq \frac{4\langle \delta B^2 \rangle}{j_{\max}^2} \simeq \frac{2}{t_{\rm S}}. \tag{3}$$

Assuming that these currents are uniformly distributed over the grid, the characteristic distance between them is

$$l \simeq \frac{N}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\frac{j_{\max}}{\sqrt{\langle \delta B^2 \rangle}}.$$

3.2. Grid size effects

To investigate the grid size effects, we take grids consisting of 30×30–400×400 cells, the conditions of anomalous resistivity dissipation, and $j_{\max} = 5$. In this case we obtain the distributions that are very close to Gaussian for the largest grid. All the simulations were performed during 10^6 time steps. The results are shown in Fig. 4 for different sizes of the grid. For the 30×30 grid, the distribution is nicely fit by a power law of index -3.1 for almost 3 energy decades. As the grid size is increased, the bulk of the distribution becomes closer to a Gaussian one, while the high-energy tail retains a power-law shape. For the 50×50 grid the power law shape of the tail is observed only for one energy decade, the estimate of the index being -2.9. For the 64×64 grid the power law tail is again shorter and the index is approximately equal to -4.3. For the grid 100×100 the distribution is practically indistinguishable from Gaussian over the whole energy range.

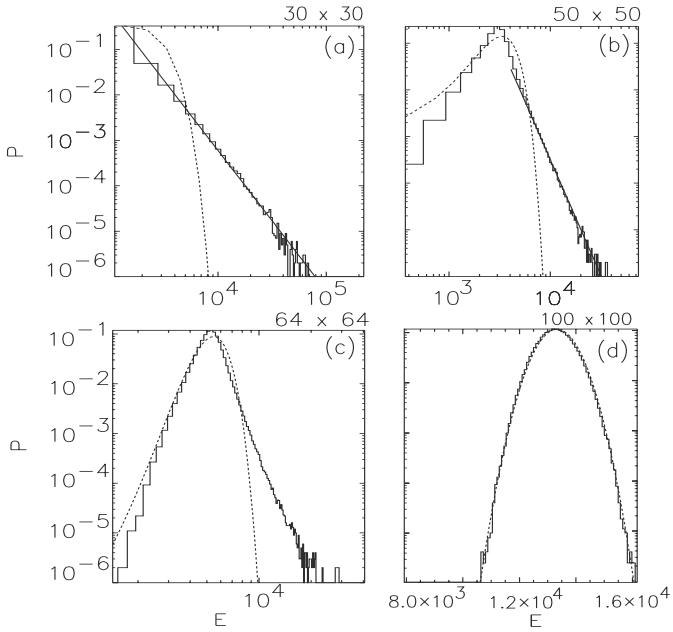

Fig. 4. Probability distribution function of the dissipated energy versus energy released (solid lines). Dotted lines represent the best fits by Gaussian distributions. The results are obtained for unipolar random source and anomalous resistivity dissipation with a threshold $j_{\max} = 5$. The grid sizes are the following: **a)** 30×30; **b)** 50×50; **c)** 64×64; **d)** 100×100.

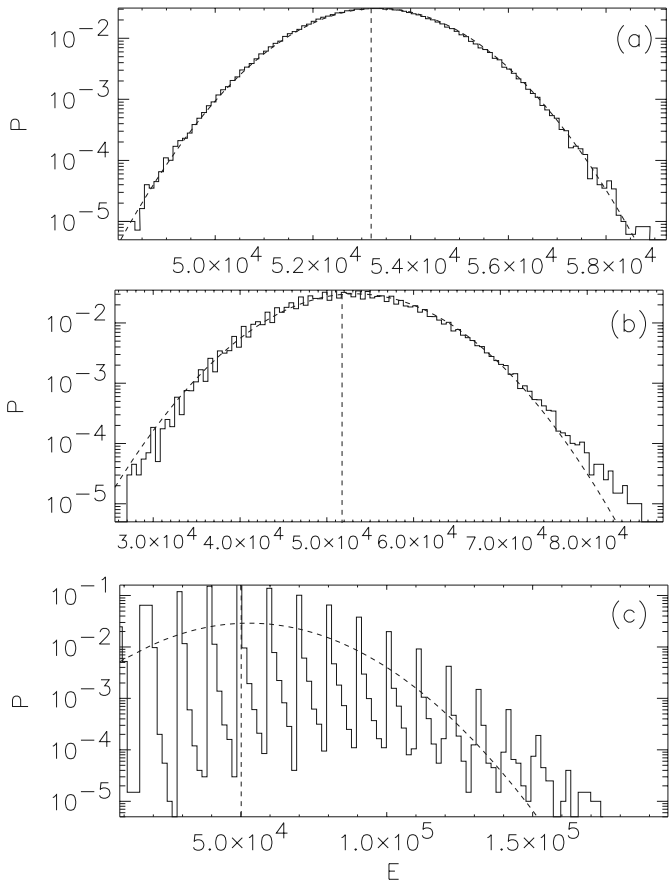

Fig. 5. Probability distribution function of the dissipated energy versus energy released (solid lines). Dotted lines represent the best fits by Gaussian distributions. The results are obtained for unipolar random source and anomalous resistivity dissipation. The threshold currents $j_{\max}$ are the following: **a)** $j_{\max} = 5$; **b)** $j_{\max} = 30$; **c)** $j_{\max} = 100$.

Eventually, for a large grid size the whole distribution becomes Gaussian. This means that the character of spatial correlations is changed. For small grids, spatial correlations decay rather slowly so that they extend over the whole grid. With the growth of the grid size, the exponential tails of the spatial correlations appear yielding the correlation length smaller than the grid size. The fact that the power-law distributions transform into Gaussian with the increase in the size of the system considered has already been observed in some real sandpile experiments (Held et al. 1990) and in some forest-fire models (Grassberger 1991).

Now we proceed to the discussion of simulation results for various unipolar and dipolar sources and for both dissipation criteria using sufficiently large grids to avoid unphysical effects.

3.3. Random unipolar sources

Simulations on a 200×200 grid were performed for 2×10^5 time steps and both types of dissipation (anomalous resistivity and reconnection). The distributions of dissipated energy due to anomalous resistivity with the thresholds $j_{\max} = 5, 30, 100$ are shown in Fig. 5. Figure 6 represents the same PDF but for dissipation provided by reconnection.

The reason for the PDF shown in Fig. 5c to have multiple extrema is easy to understand. Since the dissipated energy in each event is of the form $(j_{\max} + \varepsilon)^2$, where $0 < \varepsilon < 2$, for large $j_{\max}$, the peaks separated by $j_{\max}^2$ appear. Assuming that ε is a uniformly distributed random variable, we can get that the width of the peak number K is of the order of $K\langle\varepsilon^2\rangle$. Hence, the discrete character of the PDF appears for the smallest values of the dissipated energy and large $j_{\max}$ (see Figs. 5b–c).

From Figs. 5 and 6, one can see that the smaller current threshold (as compared to the source amplitude) results in a PDF of dissipated energy that is close to normal. With the growth of $j_{\max}$, a high energy nonthermal tail appears. Although the average value of the dissipated energy does not depend upon $j_{\max}$, the deviations from Gaussian distribution in the tail increase with $j_{\max}$ and are more pronounced for dissipation due to reconnection. For the dissipation due to reconnection, all three distributions have non-Gaussian tails that can be approximated by power-law. With the increase of $j_{\max}$ the tails become more extended and the index of the power-law distribution decreases. This signifies that the stronger deviations from a Gaussian distribution appear for larger values of the threshold.

The formation of such a tail is not related to the increase of the correlation length, because the largest

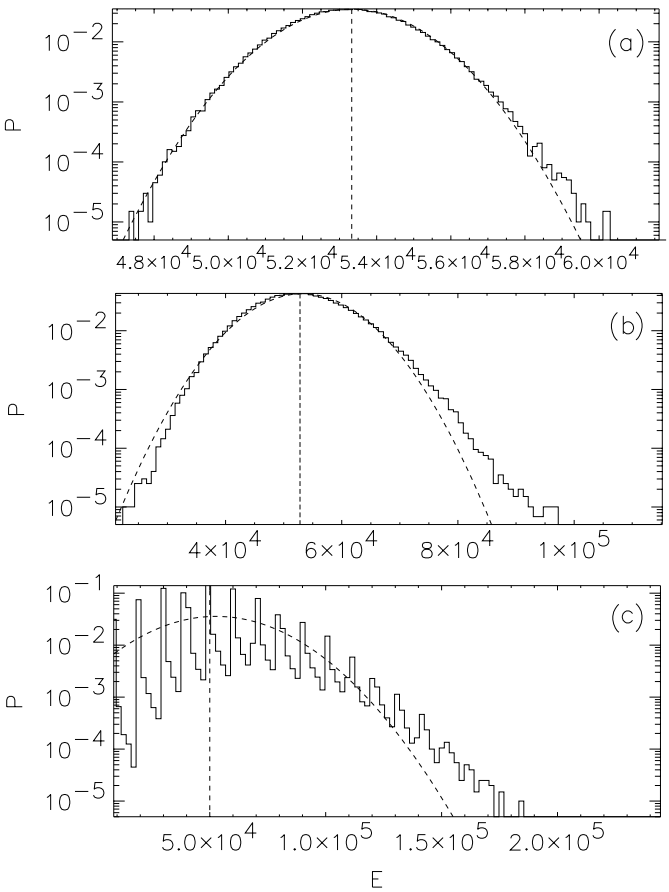

Fig. 6. Same as for Fig. 5, but for the reconnection-like dissipation.

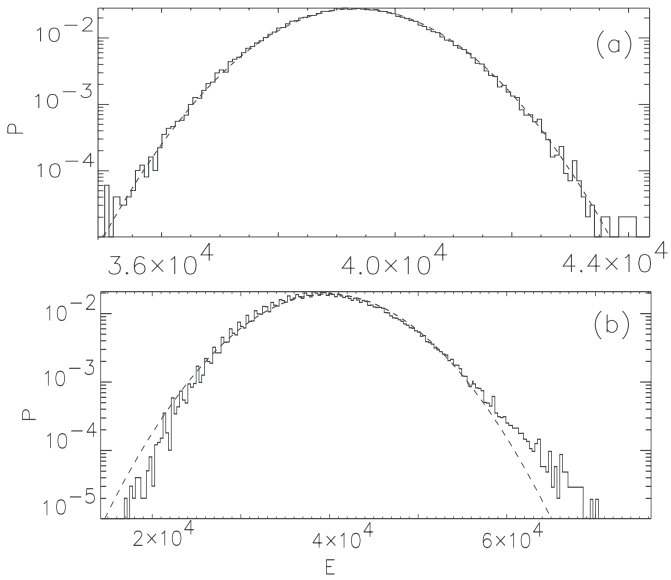

Fig. 7. Probability distribution function of the dissipated energy versus energy released (solid lines). Dotted lines represent the best fits by Gaussian distributions. The results are obtained for Ulam map source and $j_{\max} = 30$. The dissipation laws are the following: **a)** anomalous resistivity dissipation; **b)** reconnection-type dissipation.

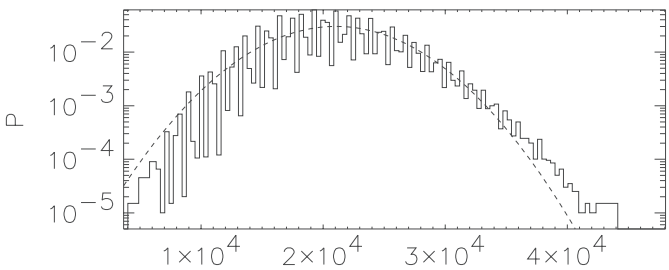

Fig. 8. Probability distribution function of the dissipated energy versus energy released (solid lines). Dotted lines represent the best fits by Gaussian distributions. The results are obtained for the Geisel map source and anomalous resistivity dissipation. Threshold current $j_{\max} = 30$.

magnetic field correlation length is about 20 for moderate threshold, $j_{\max} = 5$, in the case of reconnection-like dissipation. Let us also notice that the average correlation length is smaller when anomalous resistivity dissipation is considered and decreases as $j_{\max}$ increases (Podladchikova et al. 1999).

The average number of dissipated currents decreases with the increase of the threshold. Indeed, it easily seen from Eq. (3) that for $j_{\max} = 1$ we have

$$\frac{n}{N^2} = \frac{4}{3},$$

i.e., each current is dissipated at each time step and dissipative events occur almost everywhere on the grid thereby creating long-range correlations. For large $j_{\max}$, the ratio n/N^2 becomes small, e.g., for $j_{\max} = 100$ we have $n/N^2 \simeq 3 \times 10^{-4}$ that corresponds to the uncorrelated dissipative events with relatively small overlapping.

Thus, for large $j_{\max}$ the dissipation is much faster than the action of the magnetic field source, i.e., the conditions of time scale separation are better satisfied.

3.4. Ulam map source

Despite the deterministic nature of the magnetic field increment δB, without dissipation the magnetic field in each cell exhibits a Brownian motion with Gaussian statistics after a large number of steps. Indeed, each δB has the same PDF with a finite variance. Thus, the dependence of the PDF upon the critical current and the dissipation mechanism have manifested itself in similar tendencies as random sources do. The PDFs for moderate critical current, $j_{\max} = 5$, are close to Gaussian, for $j_{\max} = 30$ the small deviations from Gaussian distribution begin to appear for high energies, and for $j_{\max} = 100$ there is clear evidence of the presence of the high energy suprathermal tail. The tail is much better pronounced for the dissipation due to reconnection (Fig. 7).

3.5. Geisel map lattice

Another source of the magnetic field is provided by the Geisel map. It was used as a source of the field rather than the increment of the field. As it was discussed above,

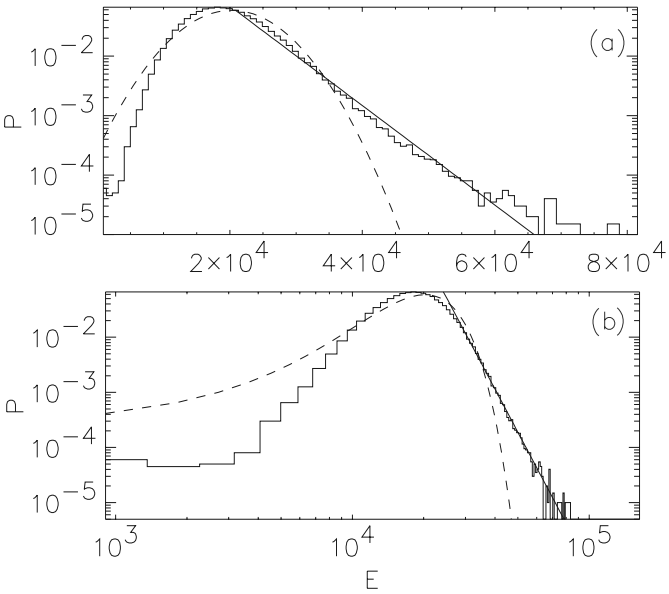

Fig. 9. Probability distribution function of the dissipated energy versus energy released (solid lines). Dotted lines represent the best fits by Gaussian distributions. The results are obtained for Geisel map source and dissipation due to reconnection. Threshold current is $j_{\max} = 30$.

this map exhibits the time evolution in each cell quite similar to anomalous (non-Brownian) diffusion. The growth of the magnetic field variance is slower than for Brownian motion. Such a behavior of the walker would be called subdiffusive. As a result, the variance is smaller than for the random source. This causes some differences observed in the behavior of the PDF of the dissipated energy. If the dissipation is provided by anomalous resistivity, the PDFs obtained with this map and the random source are quite similar except for the width of the distribution. Figure 8 represents the PDF obtained for the Geisel map and $j_{\max} = 30$.

The smaller current threshold (as compared to the source amplitude) results in a PDF of dissipated energy that is close to normal. With the growth of $j_{\max}$, a high energy non-thermal tail appears. The deviations from Gaussian distribution in the tail increase with $j_{\max}$. With the increase of $j_{\max}$ the tails become more extended.

In this case the range of energies is slightly less than for the Ulam map, the distribution being quite jagged, all the other features of the distributions seem to be similar.

Figure 9 shows the PDF obtained for the same Geisel map source, dissipation due to reconnection, and $j_{\max} = 30$. A pronounced tail of the distribution is evidenced, thereby confirming the tendencies already observed for other types of sources. A difficulty that one encounters when analyzing such PDFs is illustrated in Fig. 9. In Fig. 9a, the PDF is represented in semi-logarithmic scale and the distribution seems to have an exponential tail. In Fig. 9b the same distribution is shown in the log-log representation, where the same tail can be treated as a power-law-type distribution with the index -3.1. This problem

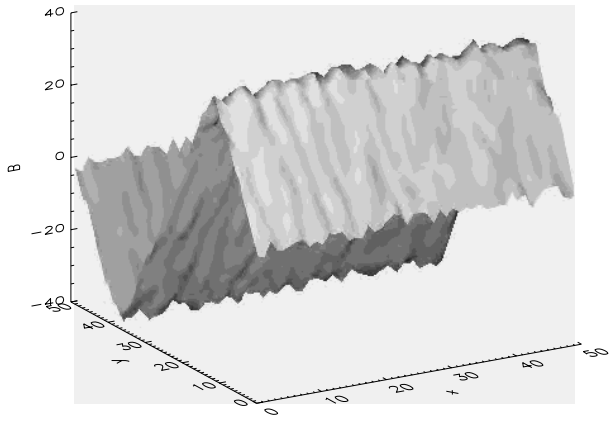

Fig. 10. Magnetic field structure observed in the simulations with the dipolar random source, anomalous resistivity dissipation, and a threshold current $j_{\max} = 5$.

is related to the fact that the tail extends over a rather short range of about one energy decade. This problem will be treated in more detail elsewhere (Podladchikova et al. 2001).

3.6. Dipolar source

When the effects due to the bi-polarity are modeled, the grid is split into two equal parts. For one half of the grid, the value of the magnetic field increment is chosen randomly from the set $\{-1.5, -0.5, 0.5\}$, for another half the set $\{1.5, 0.5, -0.5\}$ is used. The global inhomogeneity of the dipolar source results in the formation of a strongly localized current layer in the transition region between the two parts of the system. The grid size is 100×100.

The dissipation provided by reconnection is not always able to stabilize the field growth. However, for dissipation due to anomalous resistivity a stationary state always exists. Further we consider only the case with anomalous resistivity dissipation.

The energy of the dipolar structure grows faster than in the unipolar case, and a stationary state is quickly reached. The dipolar structure of the magnetic field is presented in Fig. 10. This structure is stationary. Therefore the spatial correlations of magnetic field are long and quasi-stationary.

Such a system differs from the unipolar one with the random source. We observe, as could be expected, that the dissipation events are more intense within the transition region where the magnetic field changes its sign. In addition, in the dipolar case the position of the PDF peak value on the energy axis is significantly shifted towards high energies with the increase of the threshold. Such a property can be explained by the presence of the localized current layer in the vicinity of the neutral sheet. The characteristic dependence of the PDFs upon the dissipated energy in dipolar case displays supra-thermal high energy tails which were not observed in the unipolar case with anomalous resistivity (see Fig. 11). The characteristic indices for $j_{\max} = 50$, 100, and 230 are approximately equal

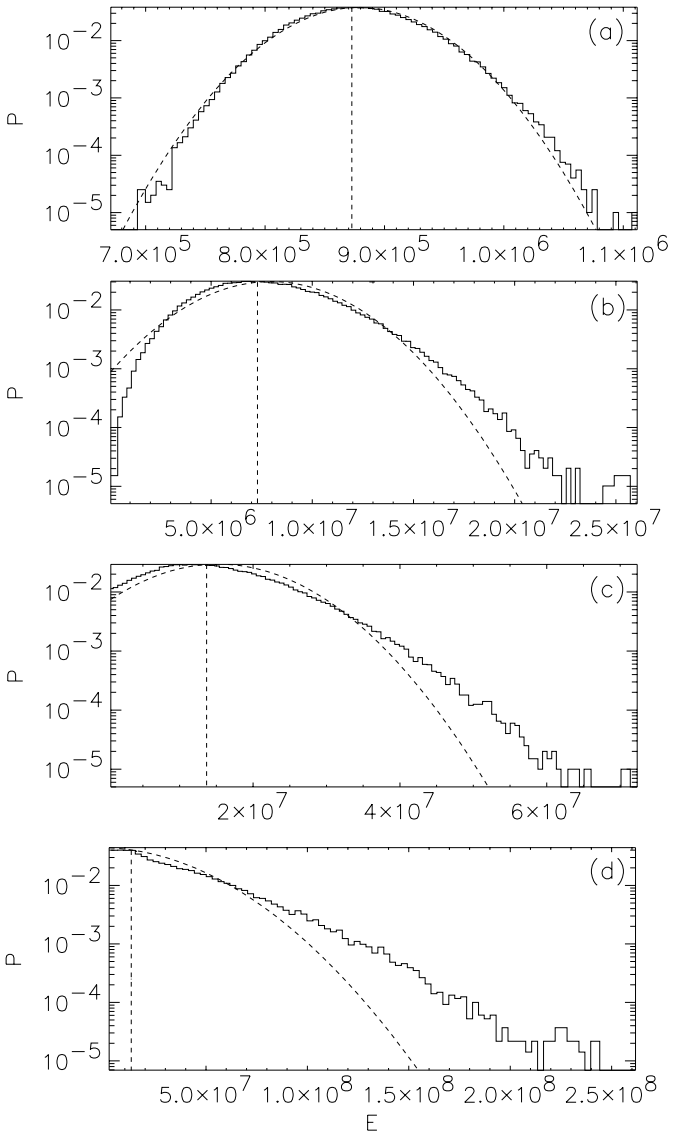

Fig. 11. Probability distribution function of the dissipated energy versus the energy released (solid lines). Dotted lines represent the best fits by Gaussian distributions. The results are obtained for dipolar random source and anomalous resistivity dissipation. The duration of calculations was 2×10^5 time steps. The threshold currents $j_{\max}$ are the following: **a)** $j_{\max} = 5$; **b)** $j_{\max} = 50$; **c)** $j_{\max} = 100$; **d)** $j_{\max} = 230$.

to −1.7, −1.9, and −2.3, respectively. For $j_{\max} = 230$, the time series of the dissipated energy is shown in Fig. 12.

4. Discussion and conclusions

To study coronal heating due to dissipation of small-scale current layers, we have performed a statistical analysis of a simple cellular automata model. Its principal difference to previous ones is that the system is driven by small-scale homogeneously distributed sources acting on the entire grid for each time step. The idea to consider small-scale sources is similar to the one proposed by Benz & Krucker, i.e. that the heating occurs on the level of the chromosphere, thus the magnetic field structures, the dissipation

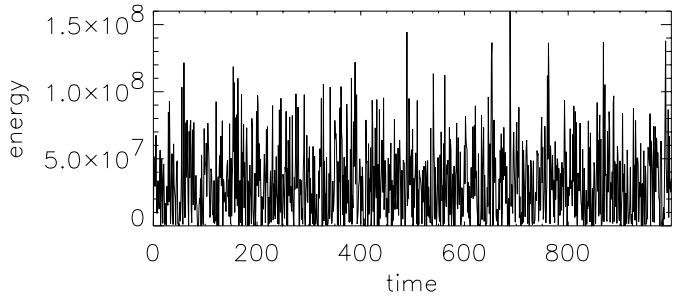

Fig. 12. Fragment of time series of the dissipated energy, for $j_{\max} = 230$, dipolar random source, anomalous resistivity dissipation.

of which supplies the energy for the heating, are also of a small scale.

The magnetic field sources we use are either of the following types:

- random source;
- deterministic chaotic map (Ulam map), both for the magnetic field increment;
- Geisel map (coupled map lattice) that describes the time evolution of the magnetic field in each cell similar to anomalous (non-Brownian) diffusion.

We consider two mechanisms of small-scale dissipation to occur:

- the first is used to model anomalous resistivity dissipation;
- the second is used to model the local reconnection.

The first one is supposed to be similar to Joule dissipation but in collisionless plasma. It relies on the criterion that any local current whose magnitude exceeds a predetermined threshold value must dissipate.

In the second case we assume that the dissipation occurs when the mentioned above condition is satisfied (this does not mean that the threshold in the real physical system should be the same in the two cases) and, in addition, the magnetic fields vectors in neighboring cells should have opposite signs. This mimics the presence of the null point of the magnetic field in the reconnection-type configurations.

The characteristic under investigation is the total energy of all simultaneously dissipated currents. Our observations can be summarized as follows.

Small-scale magnetic field sources and localized energy dissipation mechanisms can result in large-scale correlations of the magnetic field. In our calculations, the energy sources dominate in larger scales while the dissipation in the smaller ones. Thus, the system behaves as having the energy cascade from large scales to smaller ones. However, during the evolution of the system, large-scale correlations are formed with a characteristic length significantly larger than that of the source and dissipation.

For all three types of the magnetic field sources considered, the obtained PDF of the dissipated energy is close

to Gaussian distribution when relatively small threshold currents, $j_{\max} < 10$, are chosen. The dependence of the PDF of the dissipated energy upon statistical properties of the source for all three types of the sources considered is rather weak and requires an additional thorough analysis to be performed.

In the case of reconnection-type dissipation, the deviations from Gaussian distribution are stronger than for anomalous resistivity dissipation. For large values of the threshold current density, we observe a high-energy suprathermal tail which has a shape similar to a power-law distribution. The time-averaged spatial correlations are exponentially decaying. In this sense our model can not be considered as a self-organized critical system. However, sometimes long-range (power-law type) correlations are observed.

To model a dipolar global magnetic field structure, we used an inhomogeneous distribution of the magnetic field source. It takes a small average positive value in one part of the grid and a negative value in the other, such that the average over the whole grid is zero. The system does not reach any stationary state in the case of the reconnection type dissipation. In the case of anomalous resitivity it saturates and the stationary state is established. In this last case, the deviations from the Gaussian become stronger with the increase of the threshold. This effect is associated with the decrease of the thickness of the current layer where the dissipation is concentrated.

The statistical analysis of the frequency distribution of such heating events always shows a larger absolute value for the exponent for the more energetic reconnection-produced events than for the anomalous resistivity heating events. This tendency seems to be similar to that found by Benz & Krucker (1998) who studied the emission measure increases. They pointed out that the statistical properties of the faint events that occur in the intra-cell regions of the quiet Sun manifest quite small deviations from Gaussian distributions, while supposed nanoflares that are associated with the network boundaries have more prominent enhancements and stronger deviations. Taking this into account we come to the conclusion that the quantitative difference between faint and strong heating events reported in (Krucker & Benz 2000) can probably be explained by two different mechanisms of magnetic field dissipation that we used in our model.

However, our current work represents only the first step in the development of a model. In particular, several elements may be better adapted to real physical processes. Further effects should be included for direct comparison with the observations, such as more a detailed description of the respective time scales of the instabilities or particle acceleration, thermal/non-thermal processes or outgoing flows escaping from the reconnection region. Also, it can be reasonably assumed that in the case of the anomalous resistivity the dissipation of the current can be only partial, and that the two dissipation mechanisms can coexist. The energy re-distribution between different particle species, as noted in the Appendices, can also be taken more carefully into account. Thus, at this stage we can only conclude that some tendencies of our model seem to be in a good qualitative agreement with the experimental ones.

Acknowledgements. The authors would like to acknowledge Professor A. Benz for fruitful comments that helped to improve this paper. The authors are thankful to V. Lobzin, T. Dudok de Wit, S. Koutchmy and S. M. Levitsky for fruitful and useful discussions. B. Lefebvre is grateful to JSPS for financial support. O. Podladchikova is grateful to French Embassy in Ukraine for the financial support.

Appendix A: Anomalous resistivity

In this appendix, we explain in more detail the physics of the "anomalous resistivity" mentioned in our paper. The idea is based on the possibility of the exchange of the pulse and energy between the electrons and the ions due to the instability development and the appearance of the turbulent state in the plasma. The "conventional" expression for the conductivity reads

$$\sigma = \left(ne^2\right) / \left(m_{\mathrm{e}}\nu\right),$$

where n is the plasma density, e, m_{e}–electron charge and mass respectively, ν is the collision frequency of the electrons with ions. In collisionless plasma the collision frequency is negligible and the collisional conductivity is infinite. However the electrons (that carry the major part of the electric current) can excite collective oscillations of the electrons as well as ions, and transfer part of their impulse and energy to these oscillations. This results in an anomalous loss of the electron pulse and energy, and, consequently, to the decrease of their directed velocity, i.e. the decrease of the current. Such a process can be characterized by an "effective collision frequency" ν_{eff}. To calculate this characteristic frequency one can consider the pulse conservation law in the system that consists of electrons and waves. To this end one should evaluate this effect as the action of the friction force that decelerates the electron flow. The pulse loss per unit time can be written as follows:

$$\nu_{\mathrm{eff}} m_{\mathrm{e}} n \boldsymbol{U}_{\mathrm{d}} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{fr}}$$

where U_{d} is the directed velocity of the electron flow that carries the current, and F_{fr} the friction force that acts on the electrons. The same decrease of the electron pulse can be estimated as the increase of the pulse of the waves emitted by the electrons taking into account that the change of the pulse of the waves is described by the following expression:

$$\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{w}}}{\mathrm{d}t} = 2\int \gamma_k W_k \frac{\boldsymbol{k}}{\omega_k} \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}$$

where γ_k is the linear increment of the instability and W_k is the spectral energy density of waves. The assumption that the pulse of the system consisting of electrons and waves is conserved results in the equality of these two

expressions, thus the effective collision frequency can be defined as:

$$\nu_{\rm eff} = \frac{2}{m_{\rm e} n U_{\rm d}^2} \int \gamma_k W_k \frac{(\boldsymbol{U}_{\rm d}\boldsymbol{k})}{\omega_k} \frac{{\rm d}^3 k}{(2\pi)^3}.$$

Thus the estimate of the level of the wave turbulence taking into account the nonlinear saturation mechanism allows us to solve the problem.

When the current flows in the direction perpendicular to the magnetic field, the two major types of instability that give rise to the anomalous resistivity are modified Buneman instability and the instability with respect to the generation of the so-called electron-acoustic modes. The final effect of the anomalous turbulent resistivity is the transfer of the energy from the electrons to ions, because the damping of these waves takes place mainly due to their interaction with ions.

An important physical characteristics of the anomalous resistivity phenomenon is the ratio of the energy dissipated by ions and to the energy dissipated by the electrons. If the characteristic drift velocity of the electrons with respect to ions is $\boldsymbol{V}_{\rm d}$, and we have the knowledge of the spectral characteristics of the wave spectrum excited, let us assume for instance that the characteristic frequency of the waves excited due to the instability is $\omega_{\boldsymbol{k}}$, and that characteristic wave vector of the unstable waves is $\boldsymbol{k}$, then this ratio can be estimated by:

$$\frac{{\rm d}E_{\rm e}}{{\rm d}t} \Big/ \frac{{\rm d}E_{\rm i}}{{\rm d}t} \sim \frac{\int \gamma_{\boldsymbol{k}} W_{\boldsymbol{k}} \frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{V}_{\rm d})}{\omega_{\boldsymbol{k}}} {\rm d}^3\boldsymbol{k}}{\int \gamma_{\boldsymbol{k}} W_{\boldsymbol{k}} {\rm d}^3\boldsymbol{k}} \sim \frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{V}_{\rm d})}{\omega_{\boldsymbol{k}}}$$

for typical instabilities, where this ratio is approximately 1.

So, the final result of the anomalous resistivity is quite similar to the Joule heating of the ion component of the plasma. The energy dissipation that heats the plasma can be represented as:

$$Q = j^2/\sigma_{\rm eff}.$$

This phenomenon was observed experimentally in the laboratory plasma (Eselevich et al. 1971).

Appendix B: Reconnection

There are several differences between the reconnection process and anomalous resistivity. One of them is related to the change of the magnetic field topology in the first case while in the second there are only quantitative variations of the basic characteristics of the magnetic field configuration.

Another difference is that while the diffusion processes in the first case provide heating (comparable for ions and electrons, see appendix), reconnection converts magnetic energy mostly into particle (mainly ion) acceleration. Then energetic beams may provide heat, but this is only an indirect consequence of the reconnection. Another difference, quite important for observations, is a difference in time scales. The reconnection is supposed to be a rapid energy release while the anomalous resistivity is relatively slow diffusive process.

Moreover, as it was shown analytically and in computer simulations, the reconnection process can under certain conditions look like an explosive event. During the reconstruction of the magnetic field topology, the component of the magnetic field perpendicular to the background magnetic field and to the direction of the current can grow explosively. The spatio-temporal dynamics of the magnetic field can be described by the following expression:

$$\boldsymbol{B} = B_{0x} \tanh\left(\frac{z}{L}\right) \boldsymbol{e}_x + B_z(t) \sin(kx)\, \boldsymbol{e}_z,$$

where

$$B_z(t) = \frac{B_{0z}}{1 - t/\tau_{\rm expl}}.$$

(1984). Here B_{0x} is the magnitude of the background surrounding magnetic field that is supplied by the current carried along the y axes, and $\tau_{\rm expl}$ is the characteristic time of the magnetic and electric fields variations. B_{0z} is the initial amplitude of the perturbation of the normal component of the magnetic field. B_z grows to infinity in a finite time, although this formal solution is valid only when the amplitude of this perturbation is smaller than the background field $B_0 x$ and then saturates. This explosive growth of nonlinear perturbations results in the similar increase of the inductive electric field. This process results in the rapid acceleration of electrons and ions by the inductive electric field in the region where the particles are unmagnetized.

Another observational feature of the reconnection process consists of the presence of the macroscopic fluxes around the reconnection site, with the characteristic velocities of the order of the Alfvén speed in the vicinity of the reconnection site. These flows can give rise to the replenishing of the lower density regions by the material from the reconnection site if the density there is larger or even comparable with the density of the surrounding plasma. A part of the energy released is supposed to be transformed into the kinetic energy of accelerated charged particles. It is known that the energy transferred to particles grows with the increase of their mass as $M^{1/3}$, the heaviest ones being the most effectively accelerated (Vekstein & Priest 1995). In turn, these particles can generate electromagnetic radiation providing experimental signatures of the heating events.

References

Abramenko, V. I., Yurchyshyn, V. B., & Carbone, V. 1999, in Magnetic fields and Solar Processes, ESA SP-448, 2, 679

Aschwanden, M. J., Tarbell, T. D., Nightingale, R. W., et al. 2000, ApJ, 535, 1047

Bak, P., Tang, Ch., & Wiesenfeld, K. 1988, Phys. Rev. A, 36, 364

Benz, A. O., Krucker, S., Acton, L. W., et al. 1997, A&A, 320, 993

Benz, A. O., & Krucker, S. 1998, Sol. Phys., 182, 349

Benz, A. O., & Krucker, S. 1999, A&A, 341, 286
Berghmans, D., Clette, F., & Moses, D. 1998, A&A, 336, 1039
Biskamp, D. 1993, Nonlinear Magnetohydrodynamics (Cambridge University Press)
Boffetta, G., Carbone, V., Giuliani, P., et al. 1999, Phys. Rev. Lett., 83, 4662
Crosby, N. B., Aschwandnen, M. J., & Dennis, B. R. 1993, Sol. Phys., 143, 275
Einaudi, G., & Velli, M. 1994a, Space Sci. Rev., 68, 97
Einaudi, G., & Velli, M. 1994b, in Advances in Solar Physics, Lecture Notes in Physics, ed. G. Belvedere, M. Rodono, & G. M. Simnett (Springer, Berlin), 432, 149
Einaudi, G., & Velli, M. 1999, Plasma Phys., 6, 4146
Einaudi, G., Velli, M., Politano, H., et al. 1996, ApJ, 457, L113
Eselevich, V. G., Eskov, A. G., Kurtmulaev, R. H., et al. 1971, Zh. Eksp. Teor. Fiz, 60, 2079
Frisch, U. 1995, Turbulence (Cambridge University Press)
Galeev, A. A., & Sagdeev, R. Z. 1979, in Rev. Plasma Phys., ed. M. A. Leontovich, 7, 3
Galeev, A. A., & Sagdeev, R. Z. 1984, in Basics of Plasma Physics, ed. A. A. Galleev, & R. N. Sudan, vol. 2, 271
Galeev, A. A. 1984, in Basics of Plasma Physics, ed. A. A. Galleev, & R. N. Sudan, vol. 2, 305
Geisel, T., & Thomae, S. 1984, Phys. Rev. Lett., 52, 1936
Georgoulis, M. K., & Vlahos, L. 1996, ApJ, 469, L135
Georgoulis, M. K., Velli, M., & Einaudi, G. 1998, ApJ, 497, 957
Georgoulis, M. K., & Vlahos, L. 1998, A&A, 336, 721
Georgoulis, M. K., Kluiving, R., & Vlahos, L. 1995, Phys. A, 218, 191
Georgoulis, M. K., Vilmer, N., & Crosby, N. B. 2001, A&A, 367, 326
Grassberger, P., & Kantz, H. 1991, J. Stat. Phys., 63, 685
Harrison, R. A. 1997, in The Corona and Solar Wind Near Minimum Activity, ESA SP-404, 7
Held, G. A., Solina, D. H., Solina, H., et al. 1990, Phys. Rev. Lett., 65, 9, 1120
Jensen, H. J. 1998, Self-Organized Criticality (Cambridge University Press)
Isliker, H., Anastasiadis, A., Vassiliadis, D., et al. 1998, A&A, 335, 1085
Kaneko, K. (ed.) 1992, Chaos: Focus issue on coupled map lattices, Chaos 2(3)
Koutchmy, S., Hara, H., Suematsu, Y., et al. 1997, A&A, 320, L33
Krucker, S., & Benz, A. O. 1998, ApJ, 501, L213
Krucker, S., & Benz, A. O. 2000, Sol. Phys., 191, 341
Lin, R. P., Schwartz, R. A., Kane, S. R., et al. 1984, ApJ, 283, 421
Lu, E. T., & Hamilton, R. J. 1991, ApJ, 380, L89
Lu, E. T., Hamilton, R. J., McTiernan, J. M., et al. 1993, ApJ, 412, 841
Mitra Kraev, U., & Benz, A. O. 2001, A&A, in press
Parker, E. N. 1988, ApJ, 330, 474
Parnell, C. E., & Jupp, P. E. 2000, ApJ, 529, 554
Petchek, H. E. 1964, in AAS/NASA, Symp. Physics of Solar Flares, ed. W. N. Hess (NASA, Washington, DC), 425
Podladchikova, O., Krasnoselskikh, V., & Lefebvre, B. 1999, in Magnetic fields and Solar Processes, ESA SP-448, 1, 553
Podladchikova, O., & Krasnoselskikh, V. 2001, in preparation
Priest, E. R., Foley, C. R., Heyvaerts, J., et al. 1998, Nature, 393, 545
Priest, E. R., Foley, C. R., Heyvaerts, J., et al. 2000, ApJ, 539, 1002
Priest, E. R., & Forbes, T. 2000, Magnetic Reconnection (Cambridge University Press)
Shimizu, T., Tsuneta, A., Acton, L., et al. 1994, ApJ, 422, 906
Sornette, D., Johansen, A., & Dornic, I. 1995, J. Phys. I France, 5, 325
Somov, B. V., & Syrovatsky, S. I. 1977, Sol. Phys., 35(2), 393
Syrovatsky, S. I. 1981, ARA&A, 19, 161
Syrovatsky, S. I. 1982, Sol. Phys., 76(1), 3
Vassiliadis, D., Anastasiadis, A., Georgoulis, M., et al. 1998, ApJ, 509, 53
Vekstein, G. E., & Priest E. R. 1995, Phys. Plasmas, 2(8), 3169
Vespigniani, A., & Zapperi, S. 1998, Phys. Rev. E, 57(6), 6345
Vlahos, L. 1994, Space Sci. Rev., 68, 39
Vlahos, L., Georgoulis, M., Kluiving, R., et al. 1995, A&A, 299, 897
Woo, R., & Habbal, S. R. 1997, ApJ, 474, L139

Annexe C

Quiet Sun coronal heating: analyzing large scale magnetic structures driven by different small-scale uniform sources

Astronomy & Astrophysics, v. 382, pp. 713-721, 2002

A&A 382, 713–721 (2002)
DOI: 10.1051/0004-6361:20011637
© ESO 2002

Astronomy & Astrophysics

Quiet Sun coronal heating: Analyzing large scale magnetic structures driven by different small-scale uniform sources

O. Podladchikova, T. Dudok de Wit, V. Krasnoselskikh, and B. Lefebvre

LPCE/CNRS UMR 6115, 3A Av. de la Recherche Scientifique, 45071 Orléans, France

Received 29 August 2001 / Accepted 7 November 2001

Abstract. Recent measurements of quiet Sun heating events by Krucker & Benz (1998) give strong support to Parker's (1988) hypothesis that small-scale dissipative events make the main contribution to quiet heating. Moreover, combining their observations with the analysis by Priest et al. (2000), it can be concluded that the sources driving these dissipative events are also small-scale sources, typically of the order of (or smaller than) 2000 km and below the resolution of modern instruments. Thus the question arises of how these small scale events participate in the larger-scale observable phenomena, and how the information about small scales can be extracted from observations. This problem is treated in the framework of a simple phenomenological model introduced in Krasnoselskikh et al. (2002), which allows one to switch between various small-scale sources and dissipative processes. The large-scale structure of the magnetic field is studied by means of Singular Value Decomposition (SVD) and a derived entropy, techniques which are readily applicable to experimental data.

Key words. Sun: corona – Sun: magnetic fields

1. Why small-scale sources?

The anomalously high temperature of the solar corona is still a puzzling problem of solar physics, in spite of the considerable theoretical and experimental efforts involved for a long time (e.g. Priest et al. 2000; Einaudi & Velli 1994). Since the energy release in the largest heating events (flares and microflares) does not supply enough power to heat the corona, the statistical behavior of the smaller-scale and less energetic but much more frequent events may be the key to the problem, as was conjectured some time ago by Parker (1988).

Recently, Krucker & Benz (1998) reported an important result that supports Parker's hypothesis. Using Yohkoh/SXT observations, and assuming that the flaring region has a constant height, they found that in the energy range 10^{24}–10^{26} ergs, the energy probability density follows a power law with an exponent of about -2.59. Such an exponent below -2 suggests that heating takes place on small scales, whereas an exponent greater than -2 would suggest a prevalent role played by large-scale phenomena. The conclusion of Krucker & Benz was confirmed by Parnell & Jupp (2000), who estimated the exponent to be between -2 and -2.1 by making use of TRACE data and by supposing that the height is proportional to the square root of the area. Mitra & Benz (2000) discussed the same observations as Krucker & Benz by supposing a height variation similar to that used by Parnell & Jupp, and showed that the exponent, although larger, is still below -2.

Making use of multi-wavelength analysis, Benz & Krucker (1999) also showed that energy release mechanisms are similar in large scale loops and in the faintest observable events. They further noticed that the heating events occur not only on the boundaries of the magnetic network but within the cells too. Priest et al. (1998), by comparing observations with model predictions for plasma heating in the magnetic loop with distributed energy sources, have found that the thermoconductivity along the magnetic field lines due to electrons is high enough and concluded that the heating is quasi-homogeneous along the magnetic loop. These results support the hypothesis that the heating mechanism that is not located in the vicinity of the footpoints but is instead spread over the arc. It then follows that the characteristic spatial scale of the magnetic field loops that supply the dissipated magnetic field may be of the same order of magnitude as the characteristic dissipation scale. We may thus conclude that not only the dissipative process, but also the energy sources have small characteristic length.

However, Aschwanden with co-authors (2000) analyzed TRACE observations of the nano-flares in the energy range from 10^{24} to 10^{26} ergs in two wavelengths 171 Å and 195 Å. They have shown that "EUV nano-flares represent miniature versions of larger flares observedon soft X-rays

Send offprint requests to: O. Podladchikova,
e-mail: epodlad@cnrs-orleans.fr

(SXR) and hard X-rays (HXR) scaled to lower temperatures ($T_e < 2$ MK), lower densities ($n_e < 10^9$ cm^{-3}) and somewhat smaller spatial scales ($l \approx 2-20$ Mm)." They showed that the cooling time is defined by the radiative cooling, but the conductive cooling timescale is about an order of magnitude shorter suggesting repetitive heating cycles. They suggested that the heating mainly takes place around the footpoints, implicitly suggesting that the scale of sources can be even smaller than the scale of dissipation sites. They presented the spatial distribution of nano-flares that seem to be quite homogeneous (see Fig. 1 of their paper). They suggest that the heating takes place on even smaller scales than nanoflares. We use in our model the quite similar idea that the sources should be distributed homogeneously in space.

It is therefore important to discuss the role and the properties of sources and dissipative processes in the framework of simplified models. Such an approach allows us to study the correspondence between large-scale magnetic field properties and the characteristics of the small-scale (eventually smaller than the experimental resolution) sources and dissipative events. In this work we shall investigate the possibility of getting information about small-scale magnetic energy sources by making use only of the large-scale magnetic field, as would be the case with experimental data. To do so, we shall consider a phenomenological model and apply to it different statistical tests.

A phenomenological model allowing for different types of sources and physical dissipation mechanisms was recently proposed in Krasnoselskikh et al. (2002). The results concerning the temporal statistics of the total dissipated energy are briefly recalled in the next section. To investigate the spatial properties of the magnetic fields and the dissipative events, statistical tests are needed, which can be applied both to simulation and to experimental data. Tools such as the magnetic field entropy and extraction of the most energetic and large-scale spatial/temporal eigenmodes by means of Singular Value Decomposition (SVD) are described in Sect. 3. Their application to our model and their ability to discriminate between various sources and dissipative mechanisms are discussed in Sect. 4, and the final section proposes a review and a critical discussion of the results.

2. Small-scale driving and dissipation

Various phenomenological models of flare-like events and cooperative phenomena in the corona have been considered in the literature (e.g. Lu & Hamilton 1991; Vlahos et al. 1995; Georgoulis et al. 2001), mostly relying on the notion of Self-Organized Criticality (Jensen 1998). Such models usually exhibit infinite-range spatial correlations, and due to the tenuosity and localization of the driving do not provide an appropriate framework for our purpose.

Instead, we shall use the model introduced in Krasnoselskikh et al. (2002) and Podladchikova et al. (1999) which allows for a driving more distributed in space and dissipative processes relevant to heating studies. As usual, the model represents a simplification of the magnetohydrodynamic induction equation

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) + \text{dissipative term}. \quad (1)$$

The turbulent photospheric convection in some sense randomizes the first term on the right hand side, which can be replaced by various source terms with specified statistical properties. The dissipative terms may take into account different effects such as normal and anomalous resistivity or magnetic reconnection, which in general depend on the current density and magnetic field configuration. Their meaning and the differences between the two in this context are discussed at length in Krasnoselskikh et al. (2002).

A cellular automata model combining the direct solution of the MHD equations in a 3D geometry with the local magnetic field dissipation using large-scale energy sources associated with the vector potential $\boldsymbol{A}$ was studied by Isliker et al. (2000, 2001). The authors have shown that large scale variations of the vector potential in the framework of their model can give rise to the formation of the smaller-scale currents. The dissipation in their model is similar to "anomalous resistivity dissipation" that we study here.

The model is two-dimensional, the magnetic field being perpendicular to the grid, with periodic boundary conditions. A discrete description of the magnetic field in terms of cells is proposed, while the currents are computed from

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} B(x,y) - B(x,y+\delta) \\ B(x+\delta,y) - B(x,y), \end{pmatrix}$$

where δ is cell length ($\delta = 1$ in the following). The currents can be considered as propagating on the border between the cells, and satisfies Kirchoff's law at each node.

As discussed in the introduction, one may suppose that the source terms that represent the magnetic energy injection and the dissipative processes have comparable spatial scales. Therefore, the source terms that mimic the magnetic energy injection from the turbulent photosphere are assumed to have a vanishing time average; they act independently on each cell, at each time step. Three types of sources with different statistical properties are considered:

- **Random sources.** The simplest source consists of random variables δB from the set $\{-1, 0, 1\}$, which act individually on each cell. This source can be made dipolar by dividing the grid into two parts: random numbers from the same set, but with opposite signs are fed into each pair of cells.
- **A chaotic source.** Turbulence is certainly not a completely stochastic process, and some of its aspects are enlightened by deterministic models. In each cell the source evolves according to

  $$\delta B_{n+1} = 1 - 2(\delta B_n)^2,$$

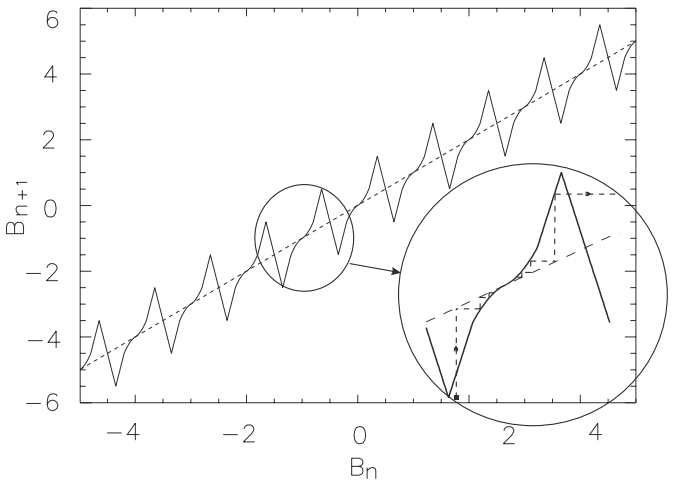

Fig. 1. Graphical representation of the Geisel map (solid line). The fixed points of the map correspond to the intersections of the graph with the straight line $B_{n+1} = B_n$ (dashed line).

where $\delta B \in [-1; 1]$ and the subscript $_n$ denotes the time step. This so-called Ulam map is closely related to the logistic map. Both are well known for their chaotic dynamics.

– **Geisel map source.** The map introduced by Geisel & Thomae (1984), hereafter called a Geisel map, provides another example of a source with chaotic dynamics

$$B_{n+1} = f(B_n).$$

Because of its marginally stable fixed points, this map may generate anomalous subdiffusion, since

$$\langle B^2 \rangle \propto t^\alpha, \quad \alpha < 1.$$

It is generally expected that magnetic field lines in a turbulent plasma exhibit a subdiffusive behavior, which is, however, more complex than described above.

We stress again that the sources act independently on each cell, and are updated at each time step. Dissipation is therefore the only mechanism by which neighboring cells can interact.

Dissipation allows for the conversion of magnetic energy into particle acceleration and thermal energy, and in our model provides the coupling between the magnetic field elements. Dissipative processes are most important where a current sheet carrying strong current density has formed. Neglecting resistivity, which is small in the corona, one is left with various instabilities of magnetic field configurations that can cause dissipation. We consider two of them:

– **Anomalous resistivity**, which arises from the development of certain instabilities such as modified Buneman instability when the electric current exceeds a certain threshold in collisionless plasma. In our model the currents are simply annihilated whenever they exceed a certain threshold,

$$|j| \geq j_{\max}.$$

– **Reconnection**, for which we require in addition the magnetic field to have an X-point configuration. Hence, the following two conditions should be satisfied simultaneously:

$$\begin{aligned} |j| = |B - B'| &\geq j_{\max}, \\ B \cdot B' &< 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Because of this new condition, currents may exist that largely exceed the threshold $j_{\max}$.

The main difference between these two processes is that reconnection represents a change in equilibrium, from one topology (here a X-point) to another, whereas anomalous resistivity does not require any particular topology and thus may also act on the interior of cells and not only at boundaries. Another important difference is that anomalous resistivity provides Joule-like heating, while reconnection yields accelerated outgoing flows and thus may be associated with non-thermal radiation.

When the current is annihilated, the values B and B' of the magnetic field in neighboring cells are replaced by $1/2(B + B')$, so the magnetic energy that is dissipated in a single event becomes (with $\mu_0 = 1$)

$$\Delta E = \frac{1}{4}(B - B')^2 = \frac{1}{4} j^2 \gtrsim \frac{1}{4} j_{\max}^2.$$

The procedure for modeling the current dissipation is the same regardless of the dissipation mechanism. At each time step, the currents satisfying the dissipation criterion are dissipated until all of them are subcritical (or have the same sign in the case of reconnection). Then, we proceed to the next time step and switch on the source. Indeed, dissipative processes are supposed to be faster than the driving terms. The total dissipated energy is calculated as the sum over all the dissipated currents for the considered time step.

In Podladchikova et al. (1999) and Krasnoselskikh et al. (2002), the influence of the dissipative processes and source terms on the statistical properties of the dissipated energy were studied. The dissipation was found to have a significant influence on the statistics of dissipated energy. Indeed the reconnection mechanism was shown to yield the strongest deviation from a Gaussian distribution in the large energies. However, the probability density of the dissipated energy was shown to be rather insensitive to the nature of the magnetic field sources. In the present paper, we would like to further explore the dependence of the statistical properties of the large-scale magnetic field upon the physical characteristics of the source and dissipation processes. This will be done in the framework of our model. Our objective therefore is to study an inverse problem: how do the large-scale properties of the magnetic field allow us to characterize the sources and the dissipative processes? To do so, we shall use various measures of spatial complexity.

3. Characterization of spatial complexity

Spatial complexity can be characterized in many different ways (e.g. Grassberger 1986). Linear properties are traditionally studied by considering the time averaged spatial correlation function

$$C(\boldsymbol{r}) = \langle B(\boldsymbol{x},t)\ B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t)\rangle_{\boldsymbol{x},t} / \langle B(\boldsymbol{x},t)^2\rangle_{\boldsymbol{x},t}, \tag{3}$$

where the average is carried out over different positions and times (or events). We have computed the characteristic decay length of this correlation function for various sources, dissipation mechanisms, and thresholds.

A different approach, which is commonly used in image processing, is based on the Singular Value Decomposition (SVD) or Karhunen-Loève Transform, see Golub & van Loan (1996). For each time step, the bivariate magnetic field intensity $B(x,y)$ can be viewed as 2D image. We decompose this image into a set of separable spatial modes

$$B(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \mu_k\ f_k(x)\ g_k^*(y). \tag{4}$$

By making these modes orthogonal $\langle f_k f_l^* \rangle = \langle g_k g_l^* \rangle = \delta_{k,l}$, the decomposition becomes unique. The weights μ_k of these modes, also called singular values, are conventionally sorted in decreasing order, and are invariant with respect to all orthogonal transformations of the matrix $B(x,y)$. In our case, the number N of modes is equal to the spatial grid size.

A key property of the SVD is that it captures large-scale structures in heavily weighted modes, whereas patterns that are little correlated in space are deferred to modes with small weights. The distribution of the singular values is therefore indicative of the spatial disorder: a flat distribution means that there is no characteristic spatial scale and hence, the magnetic field should not show large-scale patterns. Conversely, a peaked distribution suggests that there are coherent structures (Dudok de Wit 1995). It must be stressed that this approach is, like the previous one, based on second order moments only, since the spatial modes and their singular values issue from the eigenstructure of the spatial correlation matrix of the magnetic field.

From the SVD modes of the 2D magnetic field, one can define a measure of spatial complexity, which is called the SVD entropy (Aubry et al. 1991). Let $E_k = \mu_k^2 / \sum_i \mu_i^2$ be the fractional amount of energy which is contained in the kth mode. The SVD entropy can then be defined as the limit

$$H = -\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^{N} E_k \log E_k. \tag{5}$$

The maximum value $H = 1$ is reached when spatial disorder is maximum, that is when $E_k = 1/N$ for all k. $H = 0$ means that all the variance is contained in a single mode. Note that Aubry et al. (1991) also introduced a purely temporal and a spatio-temporal entropy, but in this paper we shall focus on the spatial entropy only.

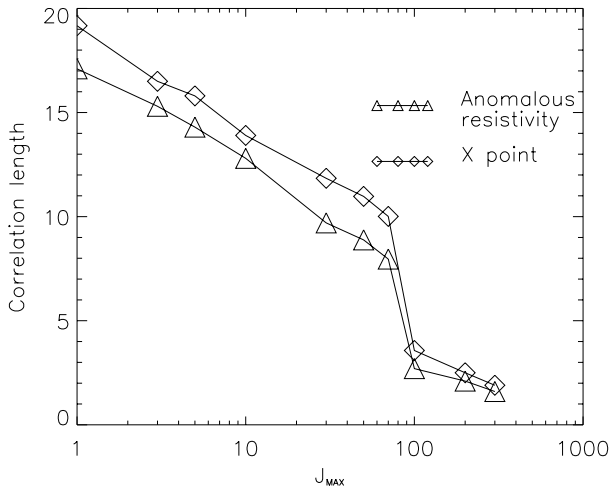

Fig. 2. Dependence of the correlation length on the threshold of dissipation, for both dissipation rules. Anomalous resistivity is marked by triangles, reconnection by squares.

In practice, it is rarely necessary to take the limit $N \to \infty$ in Eq. (5). Let H_M be the SVD entropy as computed from a subset of finite size $M \times M$ (with $M \leq N$)

$$H_M = -\frac{1}{\log M} \sum_{k=1}^{M} E_k \log E_k. \tag{6}$$

This quantity shall converge fast enough toward its asymptotic value. For large enough M, H_M is thus an intensive quantity (independent of the subsystem size M) and thus should rather be called an entropy-per-cell.

The SVD can also be used as a linear filter to extract large scale patterns from a background with small-scale fluctuations. To do so, one should perform the SVD and then in Eq. (4) sum over the strongest modes only, to obtain a filtered magnetic field. There is obviously some arbitrariness involved in the identification of what we call strong modes, but the process can be automated by using robust selection criteria, see for example Dudok de Wit (1995).

Notice that in contrast to several other studies, we shall not use the fractal dimension (more exactly, the Haussdorf-Besicovitch dimension) of the magnetic field as an additional measure of spatial complexity. Indeed, we found that in most cases, the differences observed between the different sources and/or dissipation mechanisms was too small relative to the numerous uncertainties that are inherent to the estimation of such a quantity. We note, though, that the 2D magnetic field was generally found to have fractal properties, with a dimension $D = 1.5{-}1.7$.

4. Spatial complexity and properties of the source and dissipation

4.1. Spatial correlations

The different measures of spatial complexity described above were applied to the 2D magnetic field, after

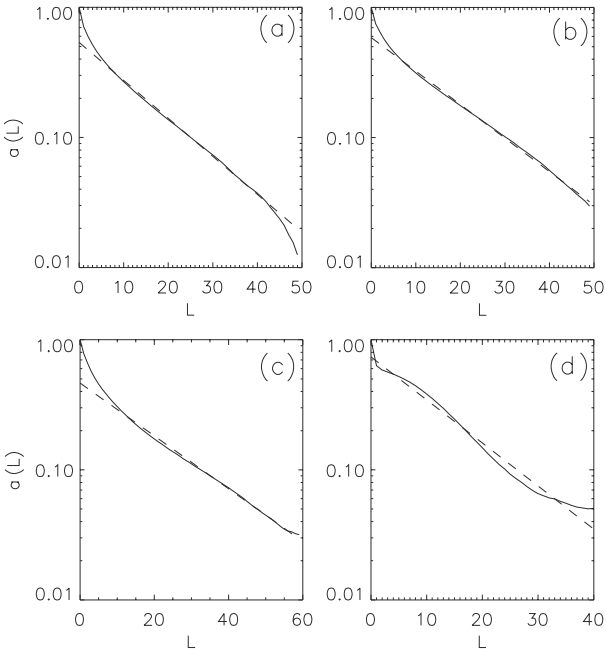

Fig. 3. Averaged spatial correlation coefficient of the magnetic field, with semilogarithmic axes (solid lines). Dotted lines represent the best fit by an exponential function. The results are obtained for random and subdiffusive sources with a 200×200 grid size and a dissipation threshold $j_{\max} = 1$. **a)** Random source, anomalous resistivity dissipation, correlation length $L \approx 17$; **b)** random source, reconnection dissipation, correlation length $L \approx 19$; **c)** subdiffusive source, anomalous resistivity dissipation, correlation length $L \approx 23$; **d)** subdiffusive source, reconnection dissipation.

initial transients had died out. In the following, we consider time averages.

The spatial correlation function was estimated using Eq. (3). For the small grid sizes, of the order of 30×30, the correlation function decays as a power-law. As shown in Krasnoselskikh et al. (2002), the probability density of the total dissipated energy in this case also decays as a power-law. This apparent indication for self-organized critical behavior, however, is a mere artifact of the small grid size, since it disappears with larger grids. Indeed, for grid sizes of about 100×100 and beyond, the correlation functions decay almost exponentially, while the dissipated energy exhibits a quasi-Gaussian distribution.

From the exponentially decaying correlation functions, we define the correlation length L as

$$C(r) = \exp(-r/L).$$

We found L to remain almost constant as soon as the grid size exceeds about 200×200. In that case, L is much smaller than the grid size. It is therefore legitimate to expect the results not to depend significantly on the grid size or on the boundary conditions. In the remainder of this paper, we shall only present results for 400×400 grids. A small threshold ($j_{\max} = 1$) will be used, which is of the order of $\sqrt{\langle \delta B^2 \rangle}$.

As shown in Fig. 2, for a random magnetic field source the average correlation length L is larger for reconnection type dissipation than for anomalous resistivity. This may be explained by the presence of supercritical currents $j > j_{\max}$. Moreover, in both cases the correlation lengths are decreasing functions of $j_{\max}$ (see Fig. 2). We do not find significant differences in the functional dependence of the correlation function or in the correlation length when changing the processes. The single exception is the Geisel map source with reconnection, for which the correlation function decays neither exponentially nor as a power-law, see Fig. 3d. No accurate correlation length can be inferred in that case.

The main result here is that we cannot distinguish between different processes solely on the basis of the correlation length. This is in contrast with the marked differences one observes when visualizing the magnetic fields with different sources, see for example Figs. 4b and 5b. Thus, alternative indicators are needed.

4.2. Singular values and coherent spatial modes

As discussed in the previous section, the Singular Value Decomposition provides an orthogonal decomposition which allows us to extract coherent patterns that may possibly exist in the bivariate magnetic field.

The distribution of singular values generally reveals a few large-amplitude modes, followed by a long tail of weak modes, see Fig. 6. Such a distribution suggests that the salient features of the bi-dimensional wavefield are captured by a few modes only. Indeed, a long tail is indicative of fluctuations that are randomly distributed in space. For instance, the most energetic mode ($f_1(x)$ in the notation of Eq. (4)) for a Geisel source with dissipation by reconnection, clearly reveals a large-scale coherent structure (Fig. 7).

The fact that the most heavily weighted modes correspond to large-scale magnetic field structures, can also be seen by comparing Figs. 4 and 5. In both figures, the subfigures b) and c) compare the original magnetic field, and the field that has been reconstructed using 20 only of the strongest modes. It appears that the strongest modes capture the large-scale coherent structure of the magnetic field.

This analysis, however, only provides a decomposition of the magnetic field at a given time. No information is obtained about the lifetime of these structures, which is a crucial quantity. It appears, however, that the heavily weighted modes persist for long times, as compared to the original magnetic field. This can be seen by comparing the filtered magnetic field at two instants separated by 2000 time steps (Figs. 5c and d). One can actually see in Figs. 5a–c how these structures grow from an initially disordered state.

Thus the coherent structures extracted by SVD have a long lifetime and produce a slow decay of the temporal autocorrelation function. While small-scale structures

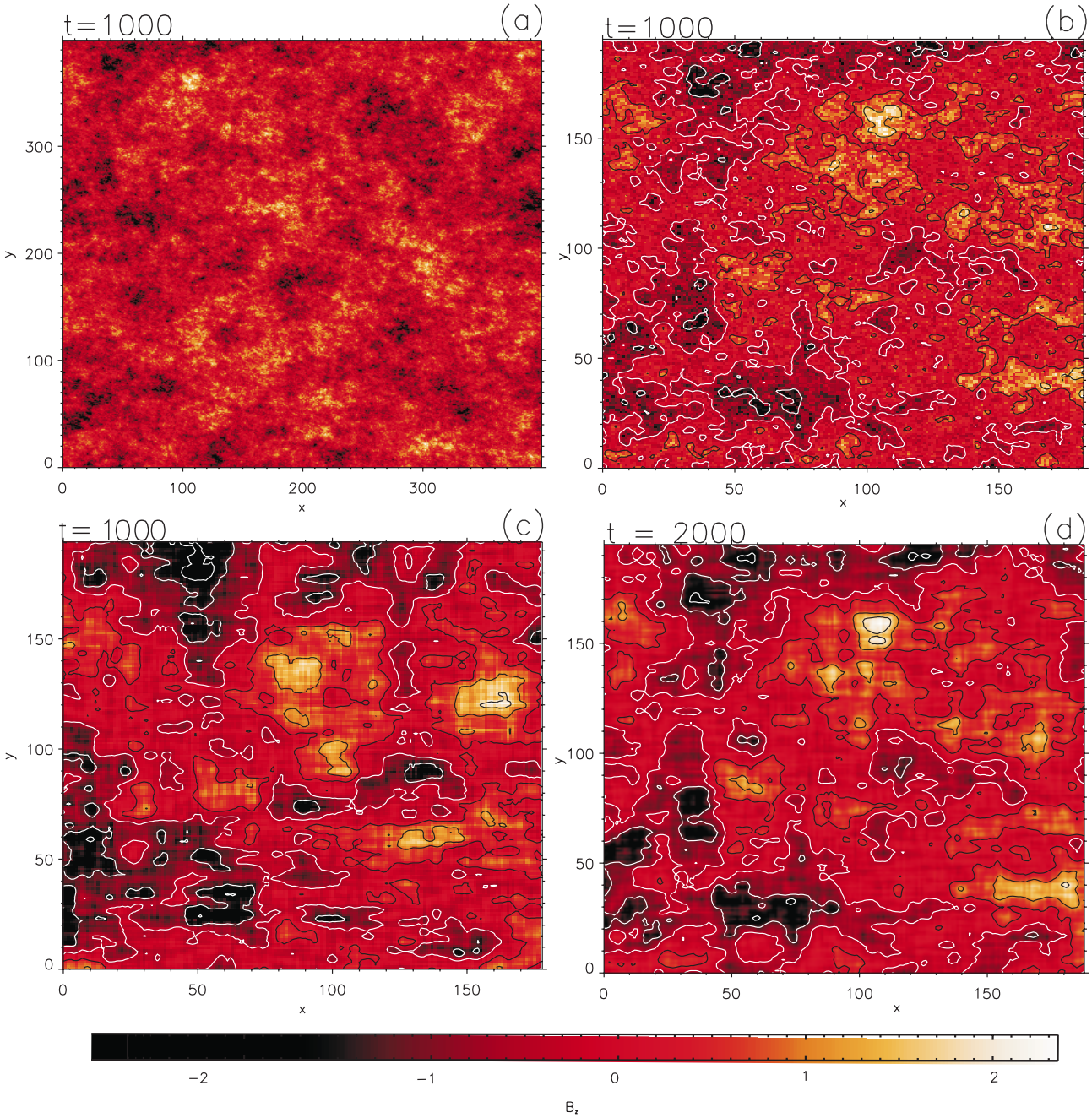

Fig. 4. Excerpt of the magnetic field obtained for a random source with reconnection, with $j_{\max} = 1$. **a)** Magnetic field at $t = 1000$; **b)** zoom of the preceding image; **c)** same zoom as in **b)**, but with the wavefield reconstructed using 20 only of the strongest SVD modes, out of 400; **d)** same zoom as **c)**, but at a later time $t = 2000$. The SVD entropies at $t = 1000$ and $t = 2000$ are respectively $H = 0.79$ and $H = 0.81$.

rapidly appear and disappear, the large-scale ones evolve slowly. In that sense, they are truly coherent structures.

4.3. Magnetic field entropy

Quantitatively, the degree of coherence of the magnetic field can be measured by the spatial entropy (or more exactly entropy-per-cell) defined by Eq. (5) from the singular values. This definition involves a limit $N \to \infty$, but in practice, for large enough grid sizes, it can be checked that the quantity defined in Eq. (6), computed for a $M \times M$ subset of B, converges toward a well-defined limit as M increases. Computing this entropy H_M for increasing M, we obtain the curves displayed in Fig. 9, which show that the entropy already converges for matrix sizes of about 100×100. It seems that the convergence is even faster for the subdiffusive source than for the random source. Typically, H_M converges when the subsystem size approximately reaches the size of coherent structures. We may thus conclude that the entropy H is fairly independent of

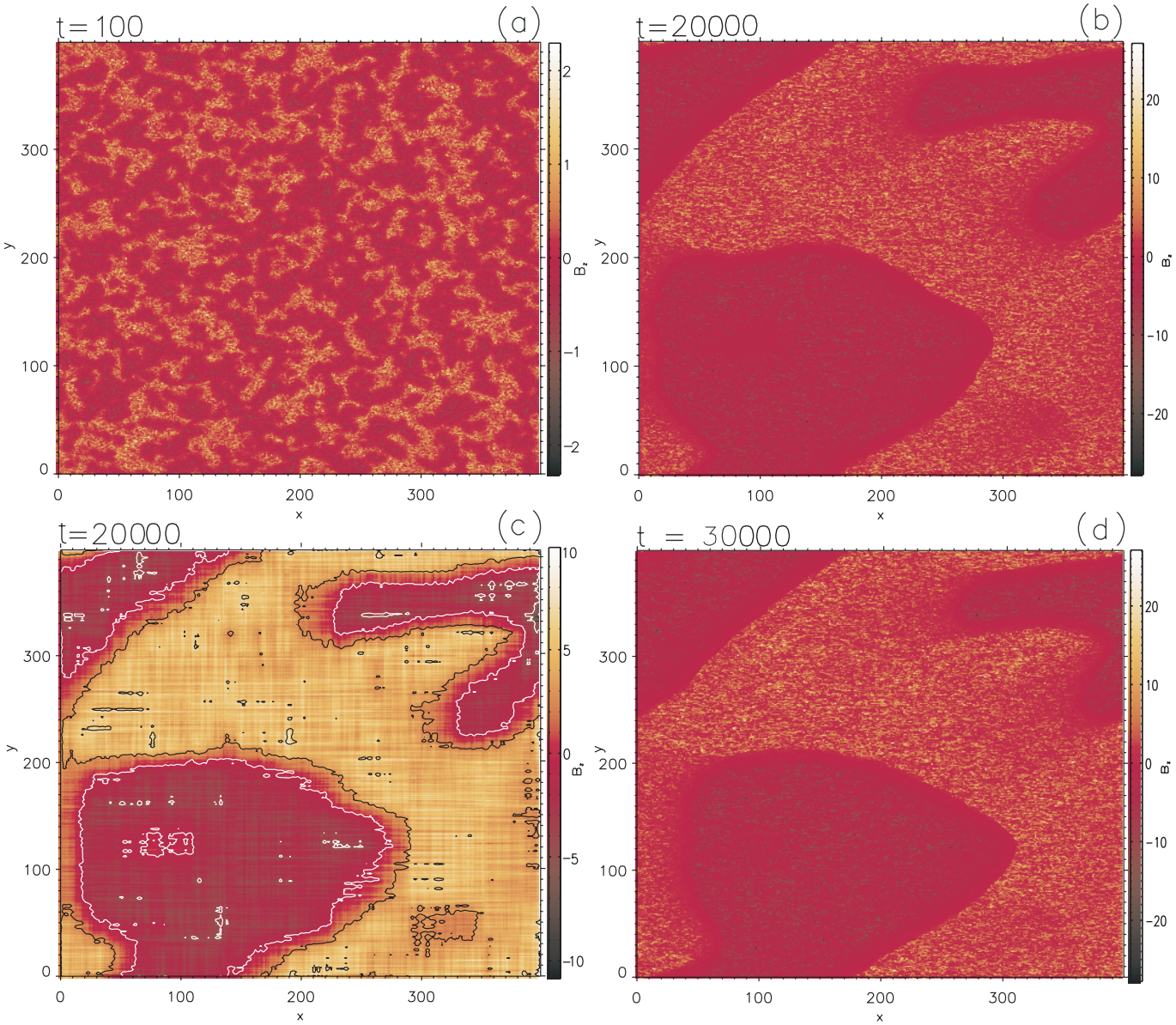

Fig. 5. Excerpt of the magnetic field obtained for a subdiffusive source with reconnection, with $j_{\max} = 1$. **a)** Magnetic field in a transient state, at $t = 100$; **b)** magnetic field in a stationary state, at $t = 20\,000$; **c)** same as in **b)**, but with the wavefield reconstructed using 20 only of the strongest SVD modes, out of 400; **d)** magnetic field at a later time, $t = 30\,000$. The SVD entropies at $t = 100$ and $t = 20\,000$ and $t = 30\,000$ are respectively $H = 0.73$, $H = 0.51$ and $H = 0.53$.

Table 1. Variation of the entropy in time, for the subdiffusive source and reconnection (see also Fig. 5).

t	100	500	20 000	30 000
H	0.73	0.69	0.51	0.527

Table 2. Entropy in the steady state for various source types, and dissipation by reconnection.

source type	H
random	0.8
Ulam	0.78
Geisel	0.53

the grid size, provided that the grid size exceeds a threshold value of about 100×100.

The entropy has a monotonous decay in time and converges toward a finite value in the steady state (see Table 1), indicating the simultaneous decrease of spatial complexity and the formation of slowly evolving large-scale magnetic field structures.

The major result here is that the value toward which the entropy converges in time exhibits significant differences when the different sources are used, as summarized in Table 2.

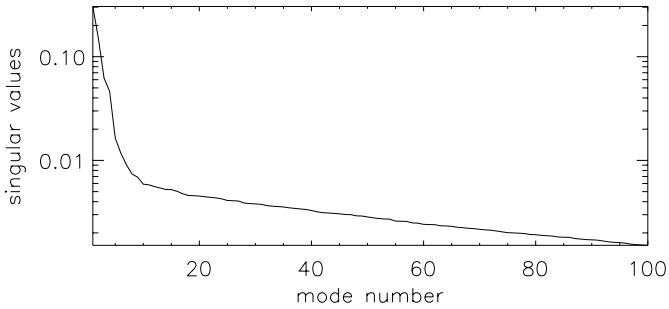

Fig. 6. Distribution of the singular values associated with a 400×400 magnetic field matrix. Only the 100 first singular values are shown. This case corresponds to a subdiffusive source with reconnection dissipation.

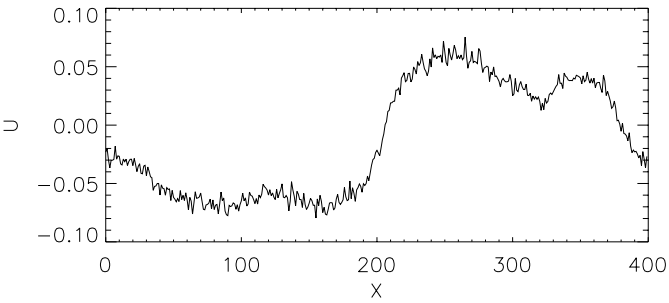

Fig. 7. Spatial profile of the most energetic spatial mode $f_1(x)$ obtained by the same Singular Value Decomposition. The data set is the same as in Fig. 6.

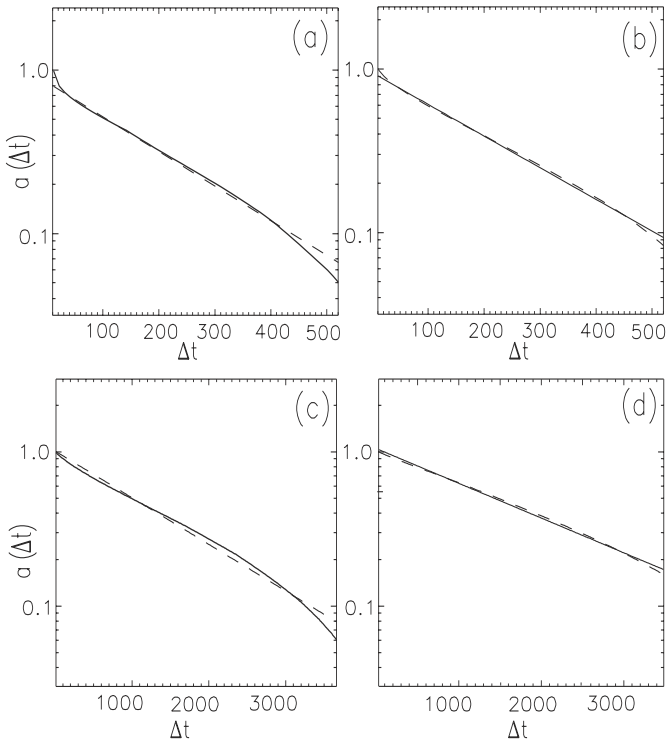

Fig. 8. Averaged temporal correlation function of the magnetic field (solid lines) in log-linear plot calculated from 4×10^4 times steps. Dotted lines represent the best fits by an exponential function. The results are obtained for random and subdiffusive sources, reconnection dissipation, with a threshold of dissipation $j_{\max} = 1$. **a)** Random source, correlation time $\tau \approx 202$; **b)** the same as previous, but only for the first 20 modes, $\tau \approx 220$; **c)** subdiffusive source, $\tau \approx 1435$; **d)** the same as **c)**, but only for first 20 modes, $\tau \approx 2958$.

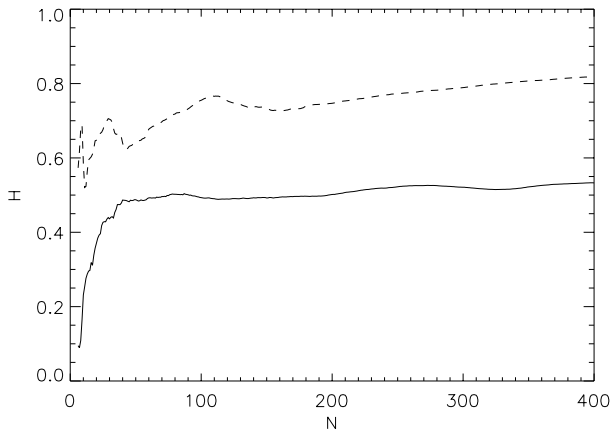

Fig. 9. Partial entropies H_M as a function of the grid size M. The continuous line is for the subdiffusive source, and the dashed one for the random source. This entropy is normalized so that $H = 1$ corresponds to maximum disorder.

5. Conclusion and discussion

To study coronal heating due to dissipation of small-scale current layers, we have performed a statistical analysis of a simple model. The model was introduced in Krasnoselskikh et al. (2002), and its principal difference to previous ones is that the system is driven by small-scale homogeneously distributed sources acting on the entire grid for each time step. The idea to consider small-scale sources is motivated by observations by Benz & Krucker (1998, 1999) that heating occurs on the level of the chromosphere, thus, the magnetic field structures, dissipation of which supplies the energy for the heating, are also of a small scale.

The question addressed in this paper is the following: if the actual measurements cannot resolve the characteristic scale of the heating, in what sense are the "macroscopic" observable properties influenced by the properties of the smaller-scale sources?

To answer this question we have carried out a comparative analysis of statistical estimations of the large-scale spatial characteristics of the magnetic field such as the correlation length, entropy and most energetic eigenmodes for the different source types that were used in the model (random, chaotic and intermittent with anomalous temporal diffusion).

The "noisy" small scales were filtered out in order to study the large-scale characteristics of the magnetic field. For this purpose we have reconstructed the magnetic field from eigenmodes given by SVD that corresponds to the most energetic coherent structures. The less energetic modes that correspond to the noise level were truncated.

The results can be summarized as follows:

The large-scale spatial characteristics of the magnetic field such as the correlation length, entropy and most energetic eigenmodes depend significantly on both the statistical properties of small-scale magnetic field sources and the dissipation mechanisms.

- It was found that the temporal average of the correlation function is exponential, i.e. the correlation length is finite and not infinite, as supposed in SOC systems. This length is a little bit larger for the reconnection dissipation and also it depends on the dissipation threshold.
- With the subdiffusive (Geisel) source and reconnection dissipation, the correlation significantly departs from the exponential.
- The Singular Value Decomposition (SVD) allows us to extract the most energetic magnetic field structures, which are essentially larger than the source size and persist for long times, supporting the idea that the plasma can organize on large scales while being driven by small-scale sources.
- Moreover, the entropy computed from the singular values of the magnetic field generated by intermittent sources was found to be much smaller (about 20–30%) for the subdiffusive source than for other sources. The most intensive in space and long-lived structures are essentially larger in this case also. This indicates a higher level of organization in the system than in the random source case.

The clear difference of the characteristics of spatial complexity in the case of Geisel map sources can be explained in the following way. This deterministic map produces in each cell a random-like diffusion slower than usual (subdiffusion) of magnetic field intensity. On the other hand, the dissipation produces a normal diffusion of the field, i.e. faster magnetic field relaxation along the spatial grid (on average), and relates the temporal properties of the source to spatial properties. This explains why sources with slower diffusion (Geisel) tend to form larger-scale and longer-lived structures than sources with normal diffusion (random, Ulam).

Thus we have shown in the framework of our model that the large-scale spatial structure of the magnetic field in the solar atmosphere also contains important statistical information about the mechanisms of the coronal heating. Such information can be extracted by SVD-based techniques, which are readily applicable to experimental data and can be used as a complement to the usual analysis of radiated energy.

Acknowledgements. O. Podladchikova is grateful to the French Embassy in Ukraine for the financial support.

References

Abramenko, V. I., Yurchyshyn, V. B., & Carbone, V. 1999, in Magnetic fields and Solar Processes, ESA SP-448, 2, 679
Aschwanden, M. J., Tarbell, T. D., Nightingale, R. W., et al. 2000, ApJ, 535, 1047
Aubry, N., Guyonnet, R., & Lima, R. 1991, J. Stat. Phys., 64, 683
Benz, A. O., & Krucker, S. 1998, Sol. Phys., 182, 349
Benz, A. O., & Krucker, S. 1999, A&A, 341, 286
Dudok de Wit, T. 1995, Plasma Phys. Contr. Fusion, 37, 117
Geisel, T., & Thomae, S. 1984, Phys. Rev. Lett., 52, 1936
Einaudi, G., & Velli, M. 1994, in Advances in Sol. Phys., Lecture Notes in Physics, ed. G. Belvedere, M. Rodono, & G. M. Simnett (Springer, Berlin), 432, 149
Georgoulis, M. K., Vilmer, N., & Crosby, N. B. 2001, A&A, 367, 326
Golub, G., & van Loan, C. F. 1996, Matrix Computations, 3rd edition (Johns Hopkins University Press).
Grassberger, P. 1986, Int. J. Theor. Phys., 25, 907
Jensen, H. J. 1998, Self-Organized Criticality (Cambridge University Press)
Isliker, H., Anastasiadis, A., & Vlahos, L. 2000, A&A, 363, 1134
Isliker, H., Anastasiadis, A., & Vlahos, L. 2000, A&A, in press
Krasnoselskikh, V., Podladchikova, O., Lefebvre, B., & Vilmer, N. 2002, A&A, 382, 699
Krucker, S., & Benz, A. O. 1998, ApJ, 501, L213
Lu, E. T., & Hamilton, R. J. 1991, ApJ, 380, L89
Mitra Kraev, U., & Benz, A. O. 2001, A&A, in press
Parker, E. N. 1988, ApJ, 330, 474
Parnell, C. E., & Jupp, P. E. 2000, ApJ, 529, 554
Podladchikova, O., Krasnoselskikh, V., & Lefebvre, B. 1999, in Magnetic fields and Solar Processes, ESA SP-448, 1, 553
Priest, E. R., Foley, C. R., Heyvaerts, J., et al. 1998, Nature, 393, 545
Priest, E. R., Foley, C. R., Heyvaerts, J., et al. 2000, ApJ, 539, 1002
Vlahos, L., Georgoulis, M., Kluiving, R., et al. 1995, A&A, 299, 897

Annexe D

Classification of dissipated energy distributions in the solar corona on the basis of Pearson's curves family

LPCE/NTS/079.A, Décembre 2001

Classification of probability density distributions on the basis of Pearson's curves family. Application to coronal heating simulations

O. Podladchikova, V. Krasnoselskikh, B. Lefebvre, V. Podladchikov

LPCE/NTS/079.A
Décembre 2001

Laboratoire de Physique et Chimie de l'Environnement
Centre National de la Recherche Scientifique

3A Av. de la Recherche Scientifique – 45071 Orléans, France
Téléphone : +33 238.25.52.64 – Fax: +33 238.63.12.34

Numéro/Reference N^o LPCE/NTS/079.A

Titre/Title: Classification of probability density distributions on the basis of Pearson's curves family – Application to coronal heating simulations

Auteurs/Authors : O. Podladchikova, V. Krasnoselskikh, B. Lefebvre, V. Podladchikov

Mots-clés/Keywords : Statistiques, Classification, Densités de probabilité, Ajustement, Chauffage de la couronne solaire

Résumé

Produire une évaluation fiable des propriétés statistiques de libération de l'énergie magnétique et des événements éruptifs tels que micro- et nano-éruptions est essentiel pour le problème du chauffage de la couronne solaire. Pourtant, différents types de distributions pour les mesures d'émissions ou les intensités des pixels sont apparus dans la littérature. Pour classer et caractériser les densités de probabilité empiriques, nous utilisons la technique proposée par K. Pearson, basée sur l'estimation des 4 premiers moments de la distribution. Cette technique englobe et classifie une large gamme de distributions connues. Elle est appliquée à des données simulées d'un modèle de chauffage de la couronne.

Abstract

An important task for the problem of coronal heating is to produce reliable evaluation of the statistical properties of energy release and eruptive events such as micro- and nanoflares in the solar corona, although quite different distributions were published in the litterature. For this purpose, we use Pearson's method, based on the relationship between the first 4 moments of the distribution, which allows to model and classify empirical distributions. This technique is applied to simulated data from the model of Krasnoselskikh et al. (2001).

Visa de relecture / Referees	Nom / Name	Date	Signature
Scientifique	JL. Pinçon		
Documentaliste LPCE	M. Schillewaert		

Table des matières

1 Introduction **4**

2 A statistical model of magnetic energy dissipation in the corona **5**

3 Approximation of statistical distribution under its graphics **6**

4 Pearson curves for approximation of statistical distributions **8**
4.1 Pearson distributions 8
4.2 Approximation technique by means of Pearson curves. 12
4.3 Estimation of the divergence between theoretical and statistical distributions . . . 13

5 Application of Pearson technique to given laws **13**

6 Estimation of dissipated magnetic energy distribution **15**
6.1 Detailed application of Pearson's technique 15
6.2 Probability of high-energy events 17
6.3 Dependence of the distribution on model parameters 19

7 Discussion and conclusion **21**

1 Introduction

The understanding of the statistical properties of micro- and nanoflares distribution is a step forward in solving solar corona heating puzzle.

Due to the central limit theorem, Gaussian distributions are widespread in Nature. Many unusual properties can be described as small deviation from the Gaussian such as rare events modeled by algebraically decaying tails, or power-law.

In solar physics, it is common to approximate the probability density of rare and energetic flares (including micro-flares) by a mixture of power-laws with different indices which suggests scale invariance of the observed phenomena down to more frequent and less energetic events such as nanoflares. However, it is notoriously difficult to fit a distribution by a power-law, as for example it often cannot be easily distinguished from an exponential at large values of the argument, which results in the various approximations proposed for the solar flare distribution.

However, quite different approximations were found for such distributions in the literature, the most popular being the power-law. The crucial factor that determines the characteristics of the heating process and its scales is related to the power law index of the PDF. If it is larger than -2 the major heating takes place in the intensive large-scale dissipative events. If it less than minus two it occurs in small scales. The reason is that to provide the explanation of the efficient coronal heating at small scales, it is necessary to have an excess in the occurrence rate of small-scale events.

For regular flares (generally located in active regions), the observations have mostly been analyzed by peak flux or peak count rate measurements. The results are power-law, $f(E) \sim E^{\alpha}$, distributions with indices α around 1.8 (Datlowe et al. (1974); Lin et al. (1984); Dennis, (1985); Crosby et al. (1993); Crosby et al. (1998)). The later authors also present a substantial investigation of the total energy in the flare electrons observed in hard X-Ray bremsstrahlung, finding $\alpha = 1.5 \pm 0.02$. Soft X-Ray peak fluxes of regular flares have a power-law index between 1.84 (Hudson, Peterson & Schwartz (1969)) and 1.75 (Drake (1971)). The later authors reports an exponent of the fluence (time-integrated flux, proportional to the total radiated energy) of 1.44. Shimizu (1994) finds a power-law index between 1.5 and 1.6 for flare thermal energy inputs larger than 10^{27} ergs, as determined from soft X-Ray brightenings in active regions. He estimates that the energy supplied by these small flares is most 20% of the required amount to heat the corona in active regions. The flat distribution ($\alpha < 2$) suggests that the flare below the sensitivity limit cannot be responsible for the rest of the energy input.

The very same microflares can be more easily detected in the quiet corona. Soft X-ray observations (Benz et al. (1997)) and EUV observations (Harrison (1997)) have revealed enhanced emission and thus intense heating above the magnetic network. A similar phenomenon that forms small X-ray jets at the limb was reported by Koutchmy et al. (1997). It was found that the number of observed events increases with the sensitivity. It is worth noting that observations of high-temperature iron lines in EUV originate directly from the corona, and allow the derivation of the coronal emission measure with less noise than previous soft X-Ray observations.

However, an important result that supports the hypothesis of Parker was reported by Krucker & Benz (1998) who have found from the Yohkoh / SXT observations that the PDF dependence upon the energy has a power law distribution in the energy range 10^{24}–10^{26} ergs with the index about -2.59. This result was confirmed by Parnell & Jupp (2000), who estimated the index to be between -2 and -2.1 making use of the data of TRACE and by Mitra & Benz (2000). However, Aschwanden et al. (2000), from the same data, have found significantly different value of this index (-1.80), suggesting that there may not be enough energy in microflares or nanoflares to heat the corona.

In addition to these various power-laws with different exponents, non-power-law distributions were found, such as the χ^2-distribution (quasi-Gaussian) for intensities of pixels (Aletti et al. (1993)), with a power-law tail of index about -5.

It is also worth mentioning that Benz & Krucker (1998) and Berghmans et al. (1998) have noticed that the heating events occur not only on the magnetic network boundaries but also in the cell interiors. They came to the conclusion that these events have a quite similar nature. The statistical analysis of the frequency distribution of such heating events always shows a larger absolute value for the exponent for the more energetic reconnection-produced events than for the anomalous resistivity heating events. This tendency seems to be similar to that found by Benz & Krucker (1998) who studied the emission measure increases. They pointed out that the statistical properties of the faint events that occur in the intra-cell regions of the quiet Sun manifest quite small deviations from Gaussian distributions, while supposed nanoflares that are associated with the network boundaries have more prominent enhancements and stronger deviations. See also Harra, Gallagher & Phillips (2000).

The precise knowledge of the experimental probability densities is an essential feature for the comparison with theories and models, and should shed some light on the physical processes at the origin of the observed phenomena.

Hence it is important to provide a characterization of the distribution as unambiguous as possible. Providing a reliable approximating distribution is essential for the problem of forecasting and comparison with theories and models, and moreover it can be equally important to be able to classify distributions for instance according to the physical process of energy radiation. For this purpose we use a powerful method proposed by K. Pearson at the beginning of the century. Pearson proposed a classification of distributions according to their first four moments, each class corresponding to well-known distributions. Then the agreement between the empirical distribution and the theoretical one can be checked by standard goodness-of-fit check. Although this method is not widely used in the Solar physics community, we propose that it could useful for the characterization of peak-flux emission measures or energy release.

In the present paper, we first briefly discuss the difficulties in approximating a distribution by a power-law, and then proceed to a description of Pearson's method. Finally, the method is applied to simulated data from a simple model proposed in Krasnoselskikh et al. (2001). The model allows for various sources and magnetic field as well as various magnetic energy dissipation mechanisms. The way how they affect the probability distribution of dissipated energy is studied by means of Pearson's method. We shall proceed to describe the model.

2 A statistical model of magnetic energy dissipation in the corona

The model consists of a 2D grid representing a cross-section of the low solar atmosphere, were a magnetic field perpendicular to the grid is distributed in each cell. At each time step, magnetic energy is deposed into the system. In each cell, a quantity δB is added to the previous value, where δB is given according either to:

- δB is chosen at random in -1,0,1,
- δB is given by a deterministic chaotic map (Ulam map) of its previous value,
- in the absence of dissipation, the magnetic field evolves according to an intermittent map (Geisel map) which presents anomalous diffusion.

The magnetic energy dissipation depends on the currents. Currents are computed as $\nabla \times B$, and circulate on the border between cells. Two dissipation mechanisms relevant for coronal physics are considered:

- anomalous resistivity, which arises when the current exceeds a threshold for micro-instabilities such as modified Buneman. Here, currents are dissipated whenever they exceed a given threshold

$$j > j_{max}$$

- reconnection, which here is supposed to occur when a configuration similar to a X-point occurs (B has opposite signs in neighboring cells) and when the current exceeds the threshold j_{max}.

The energy dissipated over the grid is computed as the sum of the dissipated j^2. The model is described in much more detail in (Krasnoselkikh et al. (2001); Podladchikova et al. (2001); Podladchikova et al. (1999).

3 Approximation of statistical distribution under its graphics

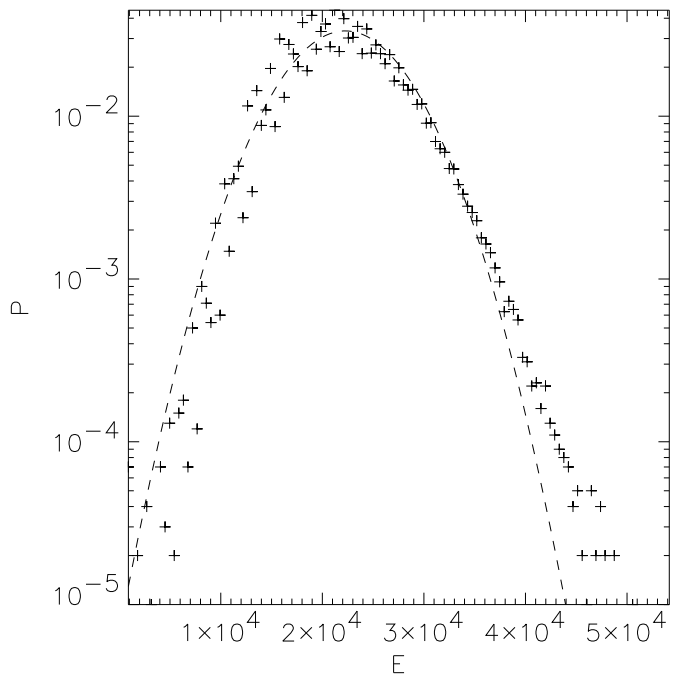

Figure 1: PDF of dissipated energy at $j_{max} = 32$, reconnection. Dotted line show Gaussian distribution with the same mean and variance as statistical one.

In this section the basic techniques used for the description of statistical distributions and an opportunity of their application to the measured energy flux of solar atmosphere are analyzed.

On the Figure 1 the histogram of density of distribution of dissipated energy computed from the model is given at a threshold value $j_{max} = 32$, which dissipate on the mechanism of local reconnection of magnetic field lines on a grid 128×128 (random source). The sample length 10^5.

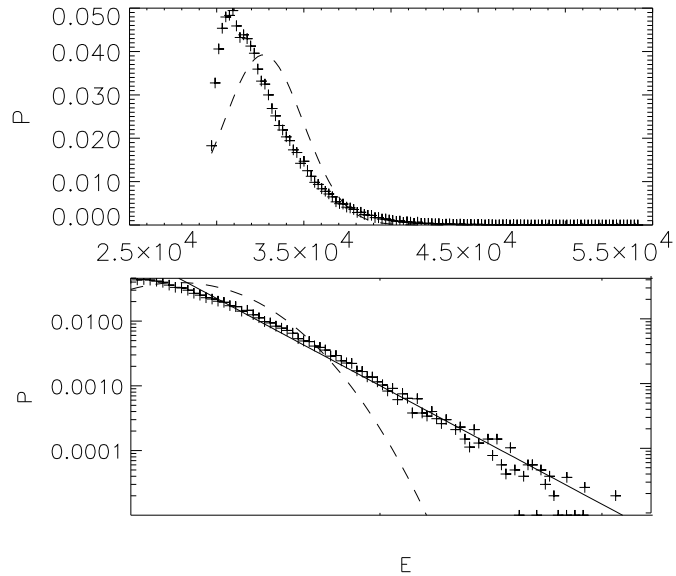

Figure 2: PDF of dissipated only high energy of precedent series. Solid line is the best fit least square power law distribution.

Approximated distribution was chosen to be Gaussian one starting from the apparent form of the histogram and fitted using the first two moments (average and variance). The Gaussian on the figure is shown by a dotted curve. It is visible that the essential deviation of Gaussian distributions from statistical one takes place on a right tail of distribution, in the area of high energy releases. In Figure 2, this tail is compared to a power-law

$$p(x) = A(x - x_{min})^{-\alpha} \tag{1}$$

in a linear and log-log scale. Here according to normalization conditions

$$A = (1-\alpha) \Big/ (x_{max} - x_{min})^{1-\alpha}$$

where x_{max} and x_{min} are the top and bottom of the range of high energy values.

The value of the parameter α was estimated with the help of linear regression by the least squares estimations. PDF (1) does not represent linear function from α directly. However the estimation can be reduced to linear having entered the concept of the "partition function"

$$F_\alpha(x) = \int_{x_{min}}^{x} p(x')dx' = \left(\frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}\right)^{1-\alpha} \tag{2}$$

where A is obtained by the condition

$$F_\alpha(x_{max}) = 1$$

Taking the natural logarithm of both of parts of expression 2, we shall receive the linear equation

$$\ln F_\alpha(x) = (1-\alpha)\ln\left(\frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}\right)$$

One can use the linear regression by the least squares method to estimate $1-\alpha$. Then

$$\alpha = -3.1 \pm 0.01$$

The values of α also depend on the cutting point.

For an estimation of the compatibility degree of theoretical and statistical distributions, in both cases Pearson's χ^2 criteria is used. It is well known that it does not depend on the kind of distribution. For both of distribution tried the graphs of statistical and theoretical distributions differ a little bit. However as χ^2 - square has shown, the probability of their divergence on a account of only casual reasons is insignificantly small. Thus the chosen distribution seems to contradict the theoretical ones. Therefore there is a need for more general classes of distributions to fit the empirical one, among which are Pearson curves.

4 Pearson curves for approximation of statistical distributions

A study of empirical distributions and their fit by theoretical ones should fulfill the following conditions:

1. Objectivity. A freehand "fit" to the same data may differ from person to person, and it is particularly uneasy to safely estimate power-laws such as those sometimes claimed. The use of empirical distributions eliminates such arbitrariness.

2. Automatization. The data analysis should be as much automatized as possible, in order to allow for fast and economical analysis of large data sets.

3. The results of the test should be put in a form as compact and unambiguous form as possible, like a small set of parameters.

Pearson's distributions opens an opportunity to carry out an exact univalent choice of probability distributions and to classify probability distribution functions of observable dissipative events. Such technique allows in particular more precise comparisons between the automata models including various physical effects, and thus could allow to obtain insight on physical conditions yielding the observations.

The basic work devoted to a construction technique of groups of distributions families proposed by Karl Pearson in the beginning of the twentieth century (see e.g. Hahn & Shapiro (1967)). The underlying principles of the procedures for fitting Pearson distributions to data are briefly reviewed in (Kendall, (1958)). Formulas for each family are given in (Elderton, (1957); Tihonov (1982) and Gruska, Mirkhani, (1989). This method was often considered as rather difficult, and sometimes instead of obtaining the expression for the approximating Pearson distribution it is sufficient to estimate only its percentiles. A method for computing specific Pearson percentiles is also described in Davis & Stephens (1983). In this case we can estimate probability of attain of the given level of energy in the certain interval. However the problems of classification can not be solved on the basis of an estimation of percentiles only (Johnson et al. (1963); Pearson & Hartley (1954). For the recent reviews e.g. see Harrison (1998). These reviews being relatively short, we give a detailed description of the method.

4.1 Pearson distributions

Various properties of probabilities density of $p(x)$ are given by the system of Pearson's curves set by the differential equation:

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{x-a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} p\,(x) \tag{3}$$

where a and b_i are constant parameters of distribution. Depending the value of certain parameters, as the solution of (3) 12 types of curves can be obtained. These curves are frequently use for approximation of statistical distributions. For instance, Normal distribution, $\gamma-, \beta, \chi^2$ -

distributions, Student distribution and others satisfy to (3). Hence, they are special cases of the family of Pearson curves.

Using general properties of probabilities densities, we shall derive expressions for the constants of Eq. (3) for unimodal distributions ($dp/dx = 0$ at a unique $x = a$, which is called a mode).

Eq. (3) can be written as follows

$$x^n \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2\right) \frac{dp\,(x)}{dx} = x^n\,(x-a)\,p\,(x) \tag{4}$$

Let allowable values of a random variable ξ with probability density $p(x)$ be in the interval $[l_1, l_2]$. Integrating by part the left hand side of equality (4), and supposing the integrals exist, we shall obtain

$$\left[x^n \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2\right) p\,(x)\right]_{l_1}^{l_2} - \int_{l_1}^{l_2} \left[n b_0 x^{n-1} + (n+1)\,b_1 x^{n+}\right. \tag{5}$$

$$\left. + (n+2)\,b_2 x^{n+1}\right] p\,(x)\,dx = \int_{l_1}^{l_2} x^{n+1} p\,(x)\,dx - a \int_{l_1}^{l_2} x^n p\,(x)\,dx$$

Assuming that the distribution decays fast enough at large x

$$\lim_{x \to l_1 x \to l_2} x^{n+2} p\,(x) \to 0.$$

the expression between brackets vanishes and we get the following relationship between moments

$$-a m_n + n b_0 m_{n-1} + (n+1)\,b_1 m_n + (n+2)\,b_2 m_{n+1} = -m_{n+1}, \tag{6}$$

Where m_n is the n-th order moment. The equation (6) defines a recurrence between moments and allows to express the constant parameters of distribution a and b_i from the moments.

For $n = 0, 1, 2, 3$, and taking into account that $m_{-1} = 0$, Eq. (6) yields

$$\begin{aligned}
-a m_0 + b_1 m_0 + 2 b_2 m_1 &= -m_1, \\
-a m_1 + b_0 m_0 + 2 b_1 m_1 + 3 b_2 m_2 &= -m_2, \\
-a m_2 + 2 b_0 m_1 + 3 b_1 m_2 + 4 b_2 m_3 &= -m_3, \\
-a m_3 + 3 b_0 m_2 + 4 b_1 m_3 + 5 b_2 m_4 &= -m_4.
\end{aligned}$$

For the distribution to be properly normalized, one must have $m_0 = 1$. Then one may assume without loss of generality the distribution is centered ($m_1 = 0$). Then the system of the equations becomes

$$\begin{aligned}
-a + b_1 &= 0 \\
b_0 + 3 b_2 \mu_2 &= -\mu_2, \\
-a \mu_2 + 3 b_1 \mu_2 + 4 b_2 \mu_3 &= -\mu_3, \\
-a \mu_3 + 3 b_0 \mu_2 + 4 b_1 \mu_3 + 5 b_2 \mu_4 &= -\mu_4,
\end{aligned}$$

where μ_n are the central moments of the distribution. From this set of equations one can get the desired coefficients

$$a = b_1, b_0 = c_0/d, b_1 = c_1/d, b_2 = c_2/d \tag{7}$$

where

$$\begin{aligned}
c_0 &= -\mu_2 \left(4 \mu_2 \mu_4 - 3 \mu_3^2\right), \\
c_1 &= -sgn \mu_3 \left(\mu_4 + 3 \mu_2^2\right), \\
c_2 &= -2 \mu_2 \mu_4 + 6 \mu_2^3 + 3 \mu_3^2, \\
d &= 10 \mu_2 \mu_4 - 18 \mu_2^3 - 12 \mu_3^2.
\end{aligned}$$

Table 1: Pearson distributions

Type	Parameters	Probability density
I β–distribution	$k<0$, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 x_2 < 0$	$\begin{cases} p(x) = c\,\lvert x-x_1\rvert^g \lvert x-x_2\rvert^h \\ ou \\ p(x) = cx^{\mu_1-1}(1-x)^{\mu_2-1} \end{cases}, x \in [x_1, x_2]$
II β–distribution	$k=\pm\infty$ $x_1 = x_2$ $g = h$	$p(x) = ce^{x/b_1} \lvert x + b_0/b_1\rvert^{1-b_0 b_1^{-2}}$
III γ–distribution	$k=\pm\infty$ $b_2 = 0, b_0 = -\mu_2$	if $b_1 = -2$, $p(x)$ is the χ^2 distribution
IV	$0<k<1$ $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$	$\begin{cases} p(x) = c\left(x^2+r^2\right)^{1/2b_2} e^{-\frac{s}{rb_2}\arctan\frac{x}{r}} \\ where \\ p(x) = c\left(\frac{b_0}{b_2}\right)^{1/2b_2}\left(1+\frac{x^2}{b_0/b_2}\right)^{1/2b_2} \\ where \\ p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\frac{\Gamma((n+1)/n)}{\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \end{cases}$
V	$k=1$ $x_1 = -\frac{b_1}{2b_2} = x_2 \in \mathbf{R}$	$p(z) = \frac{\lvert\gamma\rvert^{q-1}}{\Gamma(q-1)}\left\lvert x+\frac{b_1}{2b_2}\right\rvert^{-q} e^{-\gamma/\left(x+\frac{b_1}{2b_2}\right)}$
VI β-distribution	$k>0$ $x_1 x_2 > 0$ $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$	$\begin{cases} p(x) = c\,\lvert x-x_1\rvert^g \lvert x-x_2\rvert^h \\ ou \\ p(x) = \frac{1}{B(p,q)}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} \end{cases}$
VII Gaussian	$b_1 = b_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 3$.	$p(x) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi b_0}} e^{-\frac{x^2}{-2b_0}}$
VIII	idem I, with $g=0$, $-1<h<0$, where $h=0$, $-1<g<0$.	$p(x) = \frac{(x_2-x_1)^{-h-1}}{B(1,h+1)}(x_2-x)^h \; x \in [x_1, x_2]$
IX	idem I, with $g=0$, $h>0$, where $h=0$, $g>0$	
X exponential	idem III where IX, with $b_0/b_1^2 = -1$ $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 9$	$p(x) = \frac{1}{\lvert b_1\rvert} e^{\frac{x-b_1}{b_1}}$ pour $x \geq b_1$
XI	idem VI, with $h=0$ where $g=0$	
XII		$p(x) = c\left(\frac{c_1+x}{c_2-x}\right)^m$

Hence, since the coefficients a, b_0, b_1, b_2 in Eq. (3) can be expressed in terms of m_1, μ_2, μ_3, μ_4, the Pearson distributions are entirely determined by their first four moments (provided they exist).

Furthermore, analytical expression of Pearson distributions can be found from Eq. (3). For

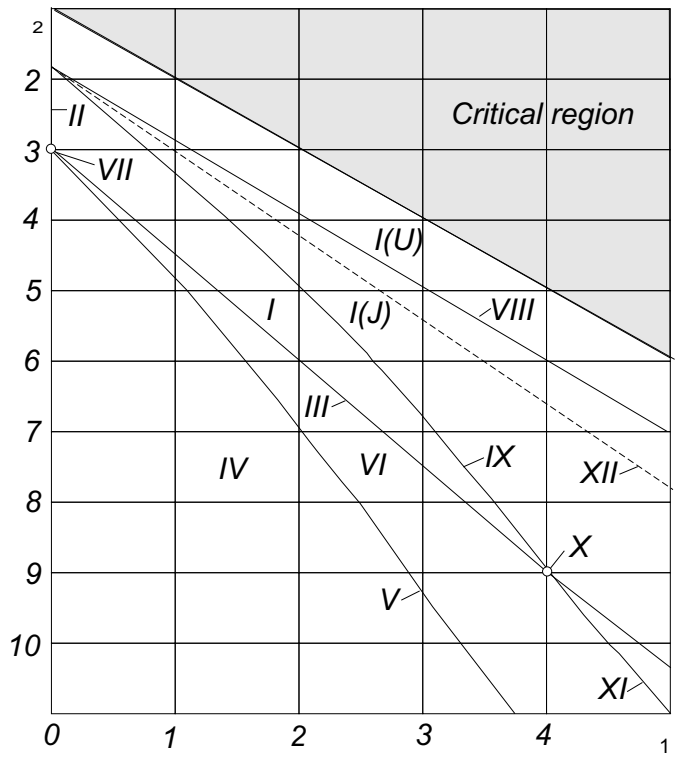

Figure 3: The diagram of different distributions of Pearson curves family. Here $\beta_1 = skewness^2, \beta_2 = kurtosis + 3$. Detailed presentation of the different classes is given in the Table 1.

the centered distribution $a = b_1$. Then Eq. (3) reads

$$\frac{d}{dx} \ln p\left(x\right) = \frac{x - b_1}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

The solution of this equation can be presented as

$$p(x) = Ce^{\varphi(x)}, \tag{8}$$

where

$$\varphi\left(x\right) = \int_0^x \frac{s - b_1}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2} ds. \tag{9}$$

Features of the curve $\varphi\left(x\right)$ strongly differ depending on the solutions of the equation

$$b_0 + b_1 s + b_2 s^2 = 0. \tag{10}$$

The roots are

$$s_{1,2} = -\frac{b_1}{2b_2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{k}}\right), \; k = \frac{b_1^2}{4b_0 b_2}. \tag{11}$$

Depending on k, several cases are distinguished:

- If $k < 0$, roots are real and have different signs. This case corresponds to type-I distribution in Pearson's classification, also called β-distribution. The distribution is defined in $]s_1, s_2[$ (assuming $s_1 < s_2$), and p vanishes outside of this interval.

- If $k > 1$, roots are real and have identical signs (type-VI or β-distribution of 2-nd kind). Depending on this sign, the distribution is non-zero on $]-\infty, s_1[$, or $]s_2, \infty[$.
- If $0 < k < 1$, roots are complex (type-IV distribution). Then p is defined on $]-\infty, \infty[$.

Further distinction were proposed by Pearson, taking into account particular distributions and boundaries between classes. The normal (type VII) and exponential (type X) distributions are examples of such distributions that fall at the boundary between classes. The total number of classes devised by Pearson is 12. They are summarized together with their analytical form in Table 1.

Since Pearson curves are determined by their first 4 moments, and considering centered distributions, Pearson's classification can be summarized by a diagram (fig. 3) in the (β_1, β_2) plane, where β_1 and β_2 are dimensionless parameters defined by

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3},$$
$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

Certain distributions are represented by a single point on such a diagram, such as the normal at (0,3), the exponential at (9,4), or uniform distribution at (0,9/5). Other distributions are represented by curves, such as student-t (of which the normal is a particular case, and which belong to type IV) or the γ–distribution (type III). Finally, certain more general classes such as β–distributions (type I) occupy finite area on the diagram. In particular, power-laws belong to the later class. However, certain distributions, such as the Cauchy distribution (which formally belongs to type IV), cannot be represented on the diagram, if at least one of the first four moment does not exist.

It is also worth noting that probability distributions are confined to a certain area in the (β_1, β_2) plane. Indeed, for any centered random variable ξ, and making use of Cauchy-Buniakovski inequality, we have

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \left\langle \frac{\xi}{\mu_2^{1/2}} \left(\frac{\xi^2}{\mu_2} - 1 \right) \right\rangle^2 \leq \frac{\langle \xi^2 \rangle}{\mu_2} \left\langle \left(\frac{\xi^2}{\mu_2} - 1 \right)^2 \right\rangle = \\ &= \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 1 = \beta_2 - 1\end{aligned}$$

Hence, for any probability distribution the inequality

$$\beta_2 \geq \beta_1 + 1$$

must be true. The impossible area is indicated in grey on fig. 3.

4.2 Approximation technique by means of Pearson curves.

The parametric technique of approximation of observed distributions determined from time series by Pearsons curves can be reduced to the following stages:

1. From the time series, one computes the first 4 moments.
2. β_1 and β_2 are computed according to the formula (12), which determines the distribution's class.

3. According to expressions (7) one takes the values of experimental moments as the moments of chosen theoretical distribution.

4. Determining the integral (9) and substituting in (8) one can find the required distribution.

The next step is to estimate the agreement between the statistical and theoretical distributions, as described in the following paragraph.

4.3 Estimation of the divergence between theoretical and statistical distributions

To estimate if the chosen theoretical probability density agrees well with the results of observations, one can use the best-fit criteria. The most used (and strictest) one is probably Pearson's χ^2 criteria (Bendat & Piersol (1986)).

The first step is to build an histogram from n independent observations of the random variable, giving frequency of f_k counts in the k-th class interval. A measure of disagreement between f_k and the theoretical probability p_k is given by

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - p_i)^2}{p_i}.$$

The total number of classes k can be chosen in various ways, but it is recommended to have in each interval not less than 5-10 observations.

A remarkable property of χ^2-criteria is that the distribution of X^2 practically does not depend on the distribution of the investigated variable and is universally determined by the well-known χ^2–distribution.

Noting by m the number of parameters of the theoretical distribution estimated from experimental results, the number of degrees of freedom of the χ^2–law is $r = k - m - 1$. Then the hypothesis that the observed variable is sampled from the theoretical distribution is accepted at a level of significance α if

$$X^2 \leq \chi_r^2(\alpha).$$

The level of significance is typically chosen as 0.05 or 0.1.

5 Application of Pearson technique to given laws

In this section, we apply Pearson's technique to artificially generated random variables with known distributions, both to illustrate the procedure and to check the accuracy of the method.

First, we have generated a series distributed according to the exponential law

$$p(x) = Ae^{-x/B}$$

for $x \in]0, 10]$, $B = 1$ and $A = 1$.

Pearson's technique gives the parameters

$$k \ll -1,\ b_2 = 0.004,\ b_0 = -1.02,\ b_1 = -1,$$

which indicate that the distribution belongs to the type III, or (γ)-distributions (see. Table 1). Furthermore, $b_0/b_1^2 = -1$, and

$$\beta_1 = 4.04; \beta_2 = 9.01$$

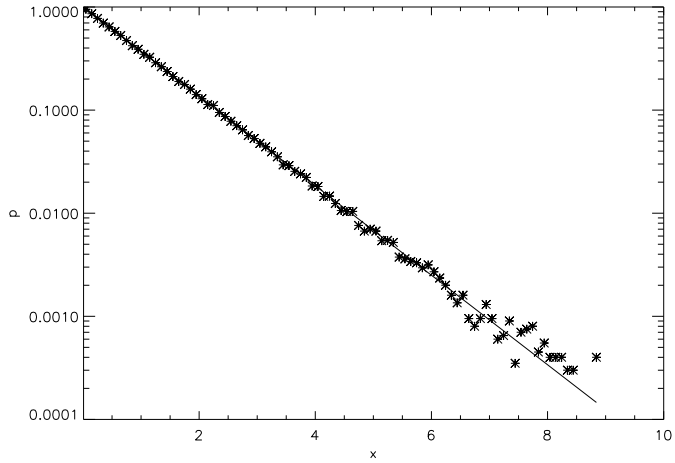

Figure 4: Histogram of an exponentially distributed random variable. The solid line is the PDF reconstructed by means of Pearson techniques.

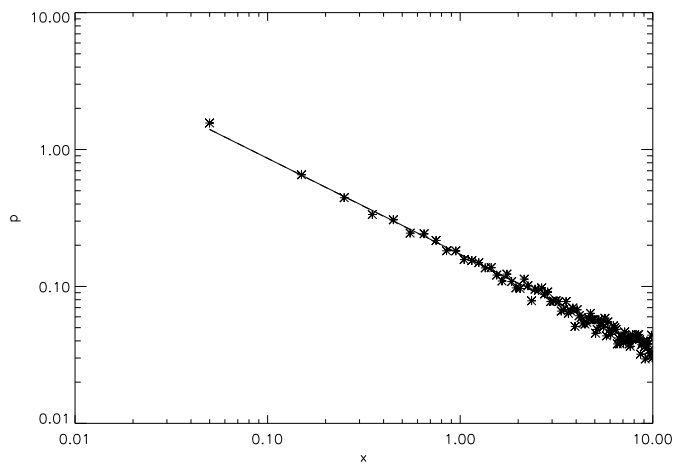

Figure 5: Histogram of a power-law distributed random variable, with $\alpha = 0.7$. The solid line is the theoretical PDF reconstructed by Pearson techniques.

which give clear indication that the distribution is exponential (type X). Hence we reconstruct the centered distribution

$$p(x) = \frac{1}{|b_1|} \exp\left(\frac{-x - m_1 - b_1}{b_1}\right)$$

or

$$p(x) = \exp(-x + 0.01)$$

where $m_1 = 1.015$ is average, which is indeed close to the original distribution (see Figure 4).

Next we investigate on the same interval ($x \in]0, 10]$) the series distributed according to a power-law

$$p(x) = Bx^{-\alpha},$$

which is supposed to be of interest for solar flare-related data. For $\alpha = 0.7$ and $B = 0.17$, Pearson estimations give $k = -0.31$ and real solutions of Eq.(10) $x_1 = -2.55, x_2 = 7.43$ of different signs.

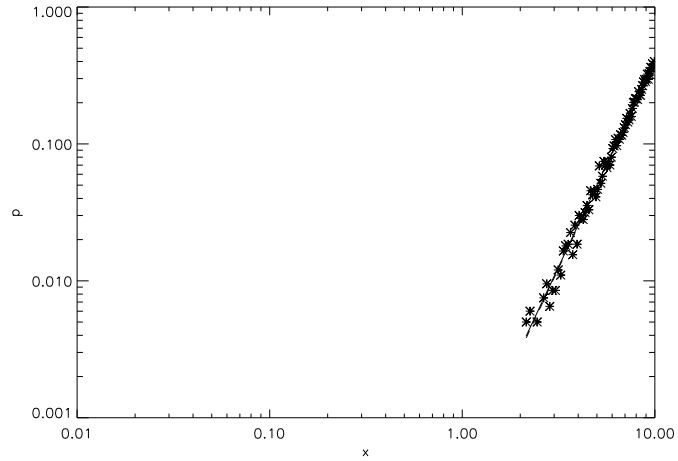

Figure 6: Same as fig. 5, with $\alpha = -3$

Here $x_1 + m_1 \leq x \leq x_2 + m_1$, where $m_1 = 2.6$ is average. Thus the distribution belongs to type-I (β–distribution).

$$p\left(x\right) = \frac{\left(x - m_1 - x_1\right)^g}{\beta\left(g+1,1\right)\left(x_2 - x_1\right)^{g+1}}$$

or

$$p\left(x\right) = 0.165 \times \left(x - 0.0\,5\right)^{-0.67}.$$

Analysing the same distribution for $\alpha = -3.0$ gives $k = -0.57$ and roots $x_1 = -8.0$ and $x_2 = 1.97$ of different signs. Here $x_1 + m_1 \leq x \leq x_2 + m_1$, where $m_1 = 8.01$ is average. Thus the distribution is also of type–I, where

$$g = 3.03,\ h = 8.0 \times 10^{-4}.$$

Considering $h \approx 0$ the distribution again degenerates to type–VIII (as supposed to be):

$$p\left(x\right) = 3.83 \times 10^{-4} \times \left(x - 0.0\,3\right)^{3.03}$$

(Fig. 6).

Now that Pearson technique was successfully applied to idealized cases, we shall apply the technique to characterize our simulated data.

6 Estimation of dissipated magnetic energy distribution

6.1 Detailed application of Pearson's technique

A detailed application of Pearson's technique is given for simulations of uniformly random sources of magnetic field on a 128×128 grid during $t = 10^5$. The currents dissipate by magnetic reconnection when they achieve the critical value $j_{max} = 32$.

The dissipated energy is bounded by $E_{min} = 1024$ and $E_{max} = 5.416 \cdot 10^4$. This interval is broken into 120 equal intervals (classes). The histogram of dissipated energy, in the stationary regime, is shown on Figure 1.

The procedure is decomposed into the following steps:

- Moments. The average is $m_1 = 2.225 \cdot 10^4$, the variance $\mu_2 = 2.901 \cdot 10^7$, the skewness $\gamma_1 = 0.28$ and the kurtosis $\gamma_2 = 0.37$. From this we compute

$$\beta_1 = \gamma_1^2 = 0.08,$$
$$\beta_2 = \gamma_2 + 3 = 3.37$$

- Distribution type. The character of roots of the equation (10) is determined by the value of $k = 0.13$, given by formula (11). Since $0 < k < 1$, the roots of the equation (10) are complex. Complex roots correspond to type-IV in Pearson's classification depicted on Figure 3.

  A special case of this distribution at $\beta_1 = 0$, $\beta_2 \leq 3$ is the Student distribution, and $\beta_2 = 3$ corresponds to the normal distribution law (type VII in Pearson's classification).

- Distribution's parameters. Using the ratio (7), we shall determine the distribution's parameters

$$b_0 = -2.6 \times 10^7,\ b_1 = -671.7,\ b2 = -0.03$$

  It is thus quite different from the normal distribution, which corresponds to $b_1 = b_2 = 0$.

- The distribution. To find an explicit expression of the distribution, the integral (9)

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{s - b_1}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2} ds$$

  shall be computed with the previously found parameters. The integrand can be re-written

$$\frac{s - b_1}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2} = \frac{1}{b_2} \frac{s + \frac{b_1}{2b_2} - b_1\left(1 + \frac{1}{2b_2}\right)}{\left(s + \frac{b_1}{2b_2}\right)^2 + \frac{b_0}{b_2} - \frac{b_1^2}{4b_2^2}}$$

  Using the notation

$$t = s + \frac{b_1}{2b_2},\ B = b_1\left(1 + \frac{1}{2b_2}\right),\ A^2 = \frac{b_0}{b_2} - \frac{b_1^2}{4b_2^2},$$

  one gets

$$\varphi(x) = \frac{1}{b_2} \int_{b_1/(2b_2)}^{x + b_1/(2b_2)} \frac{t}{t^2 + A^2} dt - \frac{B}{b_2} \int_{b_1/(2b_2)}^{x + b_1/(2b_2)} \frac{1}{(t^2 + A^2)} dt$$

  or

$$\varphi\left(x - \frac{b_1}{2b_2}\right) = \frac{1}{2b_2} \ln\left(x^2 + A^2\right) - \frac{B}{Ab_2} \arctan \frac{x}{A} + c$$

  Hence the probability density according to expression (8) reads

$$p\left(x - \frac{b_1}{2b_2}\right) = c\left[\left(\frac{x}{A}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2b_2}} e^{-\frac{B}{Ab_2} \arctan \frac{x}{A}}$$

  for $-\infty < x < \infty$, with $A = 2.6 \times 10^4$, $B = 9.5 \times 10^3$ and $b2 = -0.03$. Given these coefficients,

$$p(x) = 1.1 \times 10^{-5} \frac{e^{11 \arctan f(x)}}{(f(x)^2 + 1)^{15}}$$

where $f(x) = \frac{x-2.22\times10^4}{2.6\times10^4} + 0.39$. The normalizing coefficient c was numerically found by numerical methods from the condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.$$

Let us notice that this distribution is centered, and thus shifted with respect to the original one by m_1.

A comparison between the experimental histogram and the obtained Pearson curve is shown on Figure 7. The agreement seems satisfactory both in the core of the distribution (area of high probabilities) and in its tails (in the areas of small probabilities). Indeed, Pearson's χ^2-criteria was applied to check the accuracy of this fit. The hypothesis that Pearson's distribution fits the experimental one is accepted with a very high level of the significance $\alpha = 0.29$, at $r = 100$ (while for a Gaussian hypothesis, $\alpha = 10^{-9}$).

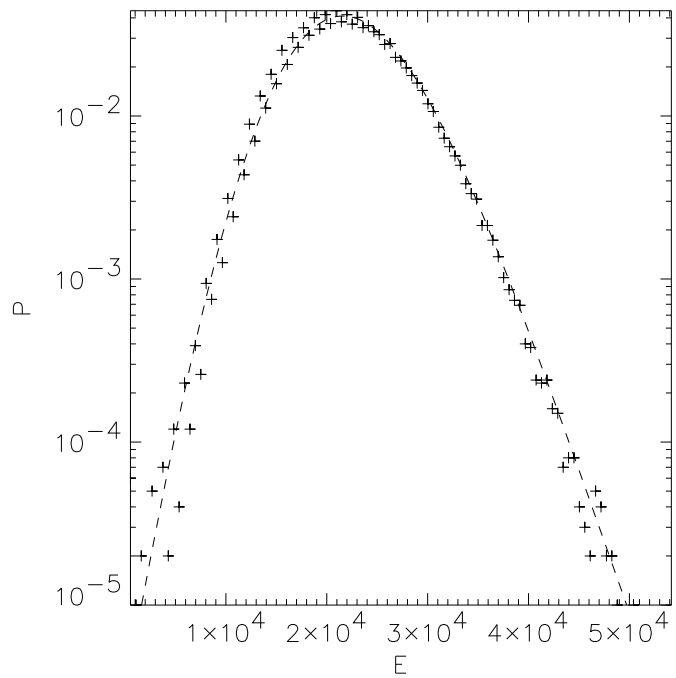

Figure 7: Probability density of dissipated energy at $j_{\max} = 32$, reconnection. The dotted line shows the distribution found by Pearson's method. The fit is accepted with a significance value $\alpha = 0.29$ according to χ^2-criteria.

6.2 Probability of high-energy events

As we have previously seen, distribution functions of the dissipated energy are often rather close to the Gaussian, the most significant difference being in the tail of the distribution which correspond to high energy events. Another reason to study high-energy events is that experiments cannot resolve micro- or nano-flares down to arbitrary small energy, and thus introduce some sort of low-energy cut-off corresponding to the minimal energy and scale of the observed events.

To study high-energy events, we have simply filtered out energy releases smaller than a minimal energy E_0, and replaced the time series of the dissipated energy values smaller than E_0 by

white noise. Typically, $E_{\min}$ can be taken of the order of the standard deviation or slightly higher. Then data are conveniently normalized so that E varies between 0 and 1.

The histogram of dissipated energy after such a filtering is presented on Figure8. The time series is the same as the one analyzed in the previous section (unipolar random source, the grid is 128×128, $t = 10^5$, currents dissipate by reconnection and $j_{max} = 32$). The maximum value of energy is $E_{max} = 5.4 \cdot 10^4$ and we take $E_0 = 2.97 \cdot 10^4$. The range of energy values $E_{max} - E_0$ is broken into 120 equal intervals.

Although the distribution seems to follow a power-law, the found significance value $\alpha = 1 \times 10^{-12}$ from χ^2-criteria rejects this hypothesis.

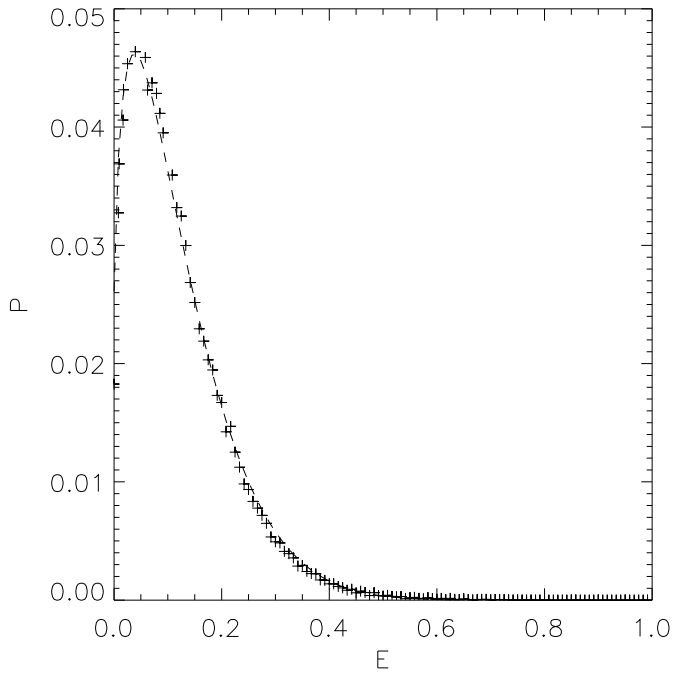

Figure 8: Tail of the PDF of fig. 7. Energies below $E_0 \approx 3 \times 10^4$ were cut, and data was rescaled between 0 and 1. The β-distribution found by Pearson's method is shown by a dotted line, and accepted with a significance value $\alpha = 0.31$ by χ^2-criteria, for $r = 30$.

Therefore the choice of probability density was made from the family of Pearson curves. Here we get

$$\beta_1 = 2.05,\ \beta_2 = 6.0,$$

and according to formula (11) $k = -16.23$. As $k < 0$, this corresponds to a β-distribution) which is non-zero in the interval $]x_1, x_2[$.

Let us write the integrand in (9) as

$$\frac{x - b_1}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} = \frac{x - b_1}{b_2 (x - x_1)(x - x_2)} = \frac{g}{x - x_1} + \frac{h}{x - x_2},$$

where

$$g = \frac{b_1 - x_1}{b_2 (x_2 - x_1)},\ h = \frac{x_2 - b_1}{b_2 (x_2 - x_1)}. \tag{12}$$

Then

$$\varphi(x) \quad = \quad \int_0^x \left(\frac{g}{s - x_1} + \frac{h}{s - x_2} \right) ds =$$

$$g \ln |x - x_1| + h \ln |x - x_2| \,.$$

Since $x_1 \leq x \leq x_2$, then

$$p\,(x) = C\,(x - x_1)^g\,(x_2 - x)^h\,. \tag{13}$$

As already noted, the power-law is a special case of this distribution.

The normalizing coefficient is found to be

$$C = \frac{1}{(x_2 - x_1)^{g+h+1}\,\beta\,(g+1, h+1)}$$

where $\beta(x, y)$ is the beta-function defined by

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 t^{p-1}(1-q)^{q-1}dt$$

(see Abramowitz & Stegun (1974))

Writing $z = (x - x_1)\,/\,(x - x_2)$, we get a more habitual form for this distribution

$$p(z) = \frac{\Gamma\,(\mu_1 + \mu_2)}{\Gamma\,(\mu_1)\,\Gamma\,(\mu_2)} z^{\mu_1 - 1}\,(1 - z)^{\mu_2 - 1}\,,$$

whose moments read

$$\mu_1 = \frac{m_1\,(m_1 - m_2)}{m_2 - m_1^2}; \mu_2 = \frac{(1 - m_1)\,(m_1 - m_2)}{m_2 - m_1^2}$$

where m_1 and m_2 are respectively the first and second order moment of the distribution.

Following the same procedure as in the previous section, and using the values of the moments, we obtain an approximated distribution density of the following form :

$$p(z) = 29.15 \times z^{0.4}\,(1 - z)^{9.0}\,.$$

This PDF is shown in Figure 8 as a dashed curve, and is seen to coincide with the statistical PDF on the whole interval of energies. It is not a simple power-law, but a slightly more complicated β–distribution. One can notice that the cut-off at low-energies is rather smooth, although rather abrupt, due to the presence of white noise. A check by Pearson's χ^2–criteria gives a significance value $\alpha = 0.31$ at $r = 30$.

If we impose a sharp cut-off at low-energies, by simply cancelling all energies smaller than E_0, the distribution is also found to belong to type–I (Figure 9). However, the parameters are slightly different, and the found Pearson curve reads

$$p(z) = 9.47 \times z^{0.02}\,(1 - z)^{8.0}$$

The rather good coincidence of statistical distribution with theoretical one is visible on a figure. Pearson's best fit χ^2–criteria give the significance value $\alpha = 0.33$ at $r = 30$.

6.3 Dependence of the distribution on model parameters

A study of dissipated energy probability density function was presented, and fitted model distribution functions were presented. Although a detail presentation of the method was given, all the procedure can be done rather automatically. This allows to take great advantage of Pearson's

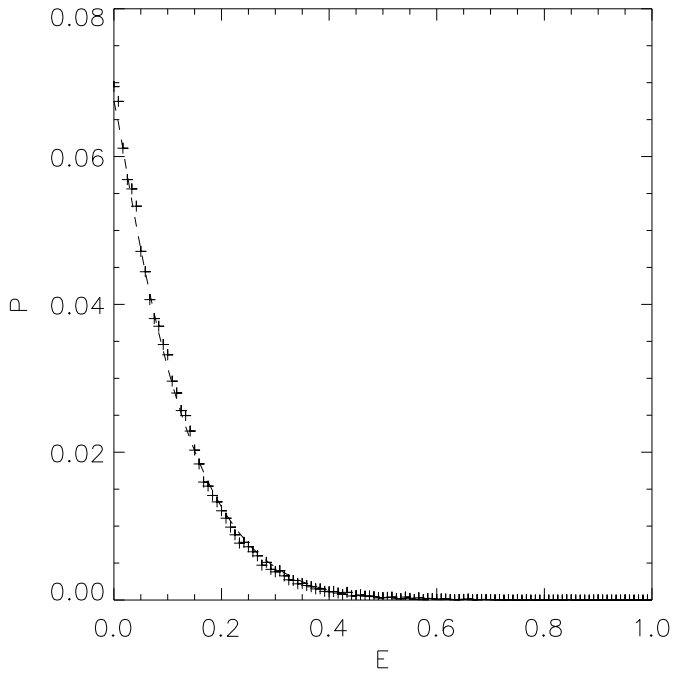

Figure 9: Tail of the dissipated energy PDF, for the same parameters as in Fig. 8 but with a sharp cut-off at low values. The obtained β-distribution by Pearson's method in shown by a dotted line. It accepted with significance level $\alpha = 0.33$ at $r = 30$ according to χ^2 best-fit criteria.

method by classifying and studying parameters's evolution of the distribution function as the model's parameters are varied.

Whereas dissipated energy distribution appears to be rather insensitive to the source's properties, it strongly depends on the dissipative processes. Increasing the dissipation threshold j_{max}, PDFs more and more strongly depart from thermal (Gaussian) distribution. With the growth of j_{max} supra-thermique tails of distributions become appreciable, and a supra-thermique tail forms at high energies (with different rates for different sources) and visually remind the power law.

More precisely, an approximation of the dissipated energy PDF by Pearson curves method was systematically applied to several simulation runs with different thresholds and dissipation mechanisms. The results can be summarized as follows :

- For any type of source of magnetic field and dissipation mechanism, for small (of the order of 1 or smaller) dissipation threshold j_{max} the distribution function of dissipated energy is close to normal. The best approximation of the statistical law of distribution is the type-IV distribution in Pearson's classification. This result is validated by goodness of fit criteria. A limit case, a normal law, of this distribution is reached at small thresholds (see a fragment of the Diagram 3 with trajectories of the obtained functions of distributions on Figure 10).

- With the growth of j_{max}, the distributions tends to β-distribution for all types of sources. The first β-distributions have a global maximum, while when the threshold is further increased it degenerates to the monotonous decreasing case, the power-law distribution (see Diagram 10). It is important to note that the approach to power-law distribution with the increasing of j_{max} is faster with reconnection than for anomalous resistivity.

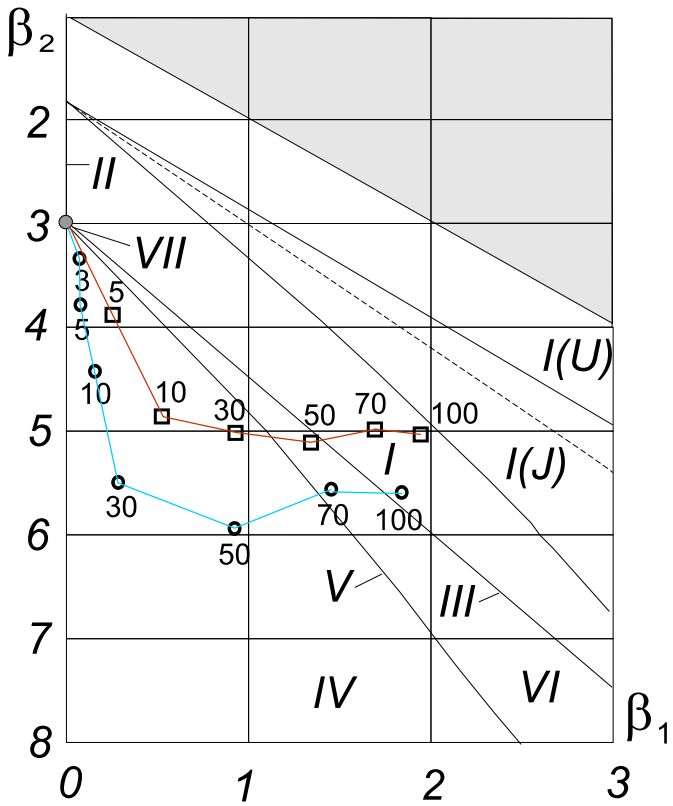

Figure 10: Evolution of probability distribution of dissipated energy, with various dissipation thresholds, for the grid 200×200, and reconnection (squares) or anomalous resistivity (circles), in Pearson's classification. Distribution density evolve from type-IV (nearly Gaussian, point 3 on the diagram), to β-distributions. Both curves approach the power-law (type I(J)) for large current density thresholds, although reconnection processes tend faster toward the power-law.

7 Discussion and conclusion

In the present work, the question of characterizing the dissipated energy distribution in the solar corona was studied and an application of Pearson's classification technique was proposed. The dependence of the statistical properties of the dissipated energy on the source of magnetic field and the character of its dissipation was studied in the framework of a statistical model.

Insufficiency of visually fitting a distribution's tail by a power-law was stressed. For the question how the processes of magnetic energy supplying and dissipation influence on the total energy flux in the solar corona we carried out a series of simulations with various dissipation thresholds ($j_{max} = 1; 5; 30; 100$), various mechanisms of dissipation (anomalous resistivity and local reconnection), and various sources of magnetic field (random unipolar and chaotic (Ulam, Geisel).

The statistical distribution of dissipated energy was approximated by Pearson techniques. The results of simulations are summarized in Figure 10. They were found to be independent of grid size for sufficiently large grids.

We have found that for any source type of magnetic field and dissipation mechanism, the parameters β_1 and β_2 belong to the range of possible distribution permitted by the Pearson approximation. Thus a Pearson technique can be used. This technique allowed us to classify

the deviations from Gaussianity as the current density threshold was increased, and to follow precisely the corresponding formation of a power-law tail. The formation of a power-law tail was qualitatively explained by the increase of the energy storage time between dissipative events (Krasnoselskikh et al. (2001)).

In conclusion, we have shown that Pearson's classification technique is useful to characterize and classify empirical distribution function observed in numerical simulations of solar coronal heating under various physical conditions. We suppose that it should equally provide more precise and insightful description of experimentally observed probability distribution of energy fluxes radiated from the Corona.

Acknowledgements

The authors thank J.Y. Brochot for a careful reading of the manuscript and fruitful comments.

Bibliographie

Abramowitz, M. & Stegun, I.A. 1974, Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover

Aletti, V., Velli, M., Bocchialini, K., Einaudi, G., et al. 2000, ApJ 544, 550

Aschwanden, M.J., Tarbell, T.D., Nightingale, R.W. et al. 2000, ApJ 535, 1047

Bendat, J.S. & Piersol, A.G. 1986, Random Data. Analysis and measurement procedures., Wiley-Interscience publication

Benz, A.O., Krucker, S., Acton L.W., et al. 1997, A&A 320, 993

Benz, A.O., & Krucker, S. 1998, Sol. Phys. 182, 349

Berghmans, D., Clette, F., & Moses,D. 1998, A&A,336,1039

Crosby, N.B., Aschwandnen, M.J., & Dennis, B.R. 1993, Sol. Phys. 143, 275

Crosby, N.B., Vilmer, N., Lund, N., et al. 1998, A&A 334, 299

Datlowe, D. W., Eclan, M. J., & Hudson, H. S., 1974, Sol. Phys., 39, 155

Davis, C. S., & Stephens, M. A., 1983, Approximate percentage points using Pearson curves. Applied Statistics, 32, 322-327

Dennis, B. R., 1985, Sol. Phys., 100, 489

Drake, J. F., 1971, Sol. Phys., 16, 152

Gruska, G. F., Mirkhani, K., & Lamberson, L. R., 1989, Non-Normal data Analysis. Garden City, MI: Multiface Publishing.

Elderton, W.P., 1957, Frequency curves and Correlations, 4th ed. Cambridge Univesrity Press

Johnson, N.L., Nixon, E., & Amos, D. E., 1963, Tables of Percentage Points of Pearson Curves for given $sqrt(\beta_1)\beta_2$, expressed as Standard Mesures, Biometrika 50, 459

Hahn, G. J., & Shapiro, S. S., 1967, Statistical models in engineering. New York: Wiley

Harra, L., Gallagher & Phillips K.J.H, 2000, A&A 362, 371

Harrison, R.A., 1997, In: The Corona and Solar Wind Near Minimum Activity, ESA SP-404, 7

by Harrison, M. Wadsworth (Editor), 2nd edition, March 11, 1998, Handbook of Statistical Methods for Engineers and Scientists, McGraw-Hill Professional Publishing

Hudson, H. S., Peterson, L.E., & Scwartz, D. A. 1969, APJ, 157, 389

Kendall M.G., and Stuart A., 1958, The advances Theory of Statistics, vol.1, Hafner Publishing Company, New York

Koutchmy, S., Hara, H., Suematsu, Y., et al. 1997, A&A 320, L33

Krasnoselskikh, V., Podladchikova, O., Lefebvre, B. & Vilmer, N. 2001, A&A, in press

Krucker, S., & Benz, A.O. 1998, ApJ 501, L213

Lin, R.P., Schwartz, R.A., Kane, S.R., et al. 1984, ApJ 283, 421

Mitra Kraev, U., & Benz, A.O. 2001, A&A in press

Parker, E.N. 1988, ApJ. 330, 474

Parnell, C.E. & Jupp, P.E. 2000, ApJ 529, 554

Pearson, E.S., & Hartley, Biometrika Tables for Statisticians, Vol.1, Cambridge University Press, Cambridge, 1954.

Podladchikova, O., Krasnoselskikh, V., & Lefebvre, B. 1999, In: Magnetic fields and Solar Processes, ESA SP-448, vol. 1, 553

Podladchikova, O., Dudok de Wit, T., Krasnoselskikh, V., Lefebvre, B. 2001, submitted to A&A

Shimizu,T., 1995, PASJ, 47, 251

Tihonov, V.I., 1982, Statistical radio engineering, Moscow, Radio and communication

Annexe E

Liste de publications

Publications dans des revues à comité de lecture

- Podladchikova, O., T. Dudok de Wit, V. Krasnoselskikh et Lefebvre, B., *Quiet sun coronal heating: analyzing large scale magnetic structures driven by different small-scale uniform sources*, Astronomy & Astrophysics **382** (2002) 713-721
- Krasnoselskikh, V., Podladchikova, O., Lefebvre, B. et Vilmer, N., *Quiet sun coronal heating: a statistical model*, Astronomy & Astrophysics **382** (2002) 699-712
- Levitsky, S., Anisimov, I., Lizunov, G., Podladchikova, O., *Penetration of plasma waves through the transparency barrier due to electron beam modulation* Physical News : Radiophysics and Electronics, Kiev University Press **2** (2000) 10-16
- Lizunov G.V., Podladchikova O.V. *On the problem of bursty generation of Langmuir waves by 'monoenergetic' electron beam.* Ukrainian Physical Journal **43** (1998) 182 - 187

Autres publications

- Podladchikova, O., Krasnosel'skikh, V., Lefebvre B., Podladchikov, V., *Classification of probability density distributions on the basis of Pearson's curves family. Application to coronal heating simulaions* , preprint LPCE/NTS/079.A (2001)
- Podladchikova, O., Krasnoselskikh, V., Levitsky, S., Pokhotelov, O., *Earthquake induced electromagnetic perturbations in the ionosphere and the role of the Earth surface profile* Proceedings of Interball International Symposium, Kiev, **2** (2000) 167 - 170
- O.V. Podladchikova, V. Krasnosel'skikh, B. Lefebvre, *Quiet sun coronal heating: sand-pile reconnection model*, in Proceedings of the 9th European Meeting on Solar Physics, ESA Publications **SP-448** (1999) 553
- Podladchikova, O., Krasnoselskikh, V., Lefebvre, B., *Solar Corona: Sand Pile reconnection processes*, Proceedings of the WDS'99, Praha (1999) **2** 185-190

– Lizunov G.V., Podladchikova E.V., *Strong plasma turbulence generated by an electron beam: results of computer simulation* Proceedings of 3rd International Symposium Plasma "97", Opole, June (1997) 85-88

Présentations orales

Conférences internationales :

Plasma 97 (Varsovie) ; IAGA 1999 (Birmingham) ; 9th European Meeting on Solar Physics 1999 (Florence, Invited talk) ; EGS General Assembly 2000, 2001, 2002 (Nice) ; Solar Wind 2002 (Pise)

Conférences nationales :

Colloque du PNST sur la reconnexion, 1998 (Garchy) ; Colloque du PNST sur les processus nonlinéaires dans les plasmas spatiaux, 2001 (Garchy) ; Colloque du PNST sur l'accelélération et le chauffage, 2001, (Garchy)

Posters

EGS 1997 (La Haye) ; Interball International Symposium 2000 (Kiev) ; SOC-meeting 2000 (London) ; AGU 1999, 2000, 2001 (San-Francisco) ; Colloques du PNST (Nouan le Fouzelier, 2000 ; Orsay 2001)

Bibliographie

Abramenko, V.I., Yurchyshyn, V.B., & Carbone, V. (1999). Flare Associated Changes in the Helicity of Magnetic Fields. In *Ninth European Meeting on Solar Physics: Magnetic Fields and Solar Processes. Florence, Italy, 12-18 September, 1999. Proceedings published in ESA SP Series (SP-448), ed. A. Wilson.*, page 679.

Abramowitz, M. & Stegun, I. A. (1974). *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Dover.

Aletti, V. (2001). *Chauffage intermittent de la couronne solaire : diagnostique, étude statistique et modélisation des points brillants observés par SOHO.* Thèse de doctorat de l'Université Paris-Sud.

Aletti, V., Velli, M., Bocchialini, K., Einaudi, G., Georgoulis, M., & Vial, J.-C (2000). Microscale Structures on the Quiet Sun and Coronal Heating. *ApJ*, 544:550–557.

Aschwanden, M. J., Tarbell, T. D., Nightingale, R. W., Schrijver, C. J., Title, A., Kankelborg, C. C., Martens, P., & Warren, H. P. (2000). Time Variability of the "Quiet" Sun Observed with TRACE. II. Physical Parameters, Temperature Evolution, and Energetics of Extreme-Ultraviolet Nanoflares. *ApJ*, 535:1047–1065.

Aubry, N., Guyonnet, R., & Lima, R. (1991). Spatiotemporal Analysis of Complex Signals: Theory and Applications. *J. Stat. Phys.*, 64:683–739.

Badii, R. & Politi, A. (1997). *Complexity : Hierarchical Structures and Scaling in Physics.* Cambridge University Press.

Bak, P., Tang, C., & Wiesenfeld, K. (1987). Self-organized criticality - An explanation of 1/f noise. *Phys. Rev. Lett.*, 59:381–384.

Bak, P., Tang, C., & Wiesenfeld, K. (1988). Self-organized criticality. *Phys. Rev. A*, 38:364–374.

Bendat, J. S. & Piersol, A. G. (1986). *Random Data. Analysis and measurement procedures. 2nd ed.* Wiley-Interscience publication.

Benz, A.O. & Krucker, S. (1998). Heating Events in the Quiet Solar Corona. *Sol. Phys.*, 182:349–363.

Benz, A.O. & Krucker, S. (1999). Heating events in the quiet solar corona: multiwavelength correlations. *A&A*, 341:286–295.

Benz, A. O., Krucker, S., Acton, L. W., & Bastian, T. S. (1997). Fine structure of the X-ray and radio emissions of the quiet solar corona. *A&A*, 320:993–1000.

Berghmans, D., Clette, F., & Moses, D. (1998). Heating Events in the Quiet Solar Corona. *A&A*, 336:1039.

Biskamp, D. (1993). *Nonlinear Magnetohydrodynamics.* Cambridge University Press.

Boffetta, G., Carbone, V., Giuliani, P., Veltri, P., & Vulpiani, A. (1999). Power Laws in Solar Flares: Self-Organized Criticality or Turbulence? *Phys. Rev. Lett.*, 83:4662–4665.

Browning, P.K. (1991). Mechanisms of solar coronal heating. *Plasma Phys. Cont. Fusion*, 33:539–571.

Chapman, S. & Watkins, N. (2001). Avalanching and self-organized criticality, a paradigm for geomagnetic activity? *Space Sci. Rev.*, 95:293–308.

Consolini, G. & Chang, T. S. (2001). Magnetic Field Topology and Criticality in Geotail Dynamics: Relevance to Substorm Phenomena. *Space Sci. Rev.*, 95:309–321.

Crosby, N. B., Aschwandnen, M. J., Dennis, B.R., & Brian, R. (1993). Frequency distributions and correlations of solar X-ray flare parameters. *Sol. Phys.*, 143:275–299.

Crosby, N. B., Vilmer, N., Lund, N., & Sunyaev, R. (1998). Deka-keV X-ray observations of solar bursts with WATCH/GRANAT: frequency distributions of burst parameters. *A&A*, 334:299–313.

Datlowe, D. W., Eclan, M. J., & Hudson, H.S. (1974). OSO-7 observations of solar X-rays in the energy range 10-100 keV. *Sol. Phys.*, 39:155–174.

Davila, J. M. (1987). Heating of the solar corona by the resonant absorption of Alfven waves. *ApJ*, 317:514–521.

Davis, C. S. & Stephens, M. A. (1983). Approximate percentage points using Pearson curves . *Applied Statistics*, 32:322–327.

Démoulin, P. & Klein, K.L. (2000). Structuring of the solar plasma by the magnetic field. In *Lect. Notes Phys. 553, Transport and energy conversion in the Heliosphere, J.P. Rozelot, L. Klein and J.C. Vial eds., Springer-Verlag*, pages 99–135.

Dennis, B. R. (1985). Solar hard X-ray bursts. *Sol. Phys*, 100:465–490.

Dhar, D. (1990). Self-organized critical state of sandpile automaton models. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1613–1616.

Dmitruk, P. & Gómez, D. O. (1997). Turbulent Coronal Heating and the Distribution of Nanoflares. *ApJL*, 484:L83.

Drake, J. F. (1971). Characteristics of Soft Solar X-Ray Bursts. *Sol. Phys*, 16:152–185.

Dudok de Wit, T. (1995). . *Plasma Phys. Contr. Fusion*, 37:117.

Einaudi, G. & Velli, M. (1994). Nanoflares and current sheet dissipation. *Space Sci. Rev.*, 68:97.

Einaudi, G. & Velli, M. (1999). The distribution of flares, statistics of magnetohydrodynamic turbulence and coronal heating. *Phys. Plasmas*, 6:4146–4153.

Einaudi, G., Velli, M., Politano, H., & Pouquet, A. (1996). Energy Release in a Turbulent Corona. *ApJ*, 457:L113.

Elderton, W. P. (1957). *Frequency curves and Correlations, 4th ed.* Cambridge Univesrity Press.

Eselevich, V. G., Eskov, A. G., & H., Kurtmulaev R. (1971). . *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, 60:2079.

Frisch, U. (1995). *Turbulence: the legacy of A.N. Kolmogorov.* Cambridge University Press.

Galeev, A.A. (1984). Spontaneous reconnection of magnetic field lines in a collisionless plasma. In *Reviews of Plasma Physics, Ed. Galeev A.A. and Sudan R.N., vol. 2*, pages 305–336.

Galeev, A.A. & Sagdeev, R.Z. (1979). . In *Reviews of Plasma Physics, Ed. Leontovich M.A., vol. 7*, page 3.

Galeev, A.A. & Sagdeev, R.Z. (1984). Current instabilities and anomalous resistivity of plasma. In *Reviews of Plasma Physics, Ed. Galeev A.A. and Sudan R.N. vol. 2*, pages 271–304.

Galsgaard, K. (1996). Investigations of numerical avalanches in a 3D vector field. *A&A*, 315:312–318.

Galsgaard, K. & Nordlund, Åke (1996). Heating and activity of the solar corona 1. Boundary shearing of an initially homogeneous magnetic field. *J. Geophys. res.*, 101:13445–13460.

Galtier, S. (1998). *Turbulence et intermittence en magnétohydrodynamique : application à la couronne solaire.* Thèse de Doctorat de l'Université Grenoble I.

Galtier, S. & Pouquet, A. (1998). Solar Flare Statistics with a One-Dimensional MHD Model. *Solar Physics*, 179:141–165.

Geisel, T. & Thomae, S. (1984). Anomalous diffusion in intermittent chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 52:1936–1939.

Georgoulis, M.K., Velli, M., & Einaudi, G. (1998). Statistical Properties of Magnetic Activity in the Solar Corona. *ApJ*, 497:957.

Georgoulis, M.K. & Vlahos, L. (1996). Coronal Heating by Nanoflares and the Variability of the Occurence Frequency in Solar Flares. *ApJ*, 469:L135.

Georgoulis, M. K., Vilmer, N., & Crosby, N. B. (2001). A comparison between statistical properties of solar X-ray flares and avalanche predictions in cellular automata statistical flare models. *A&A*, 367:326–338.

Golub, G. & van Loan, C.F. (1996). *Matrix Computations, 3rd edition.* Johns Hopkins University Press.

Gómez, D. & Ferro-Fontan, C. (1988). Coronal heating by selective decay of MHD turbulence. *Solar Physics*, 116:33–44.

Gómez, D. O., Dmitruk, P. A., & Milano, L. J. (2000). Recent theoretical results on coronal heating. *Solar Phys.*, 195:299–318.

Grassberger, P. (1986). . *Int. J. Theor. Phys.*, 25:907.

Grassberger, P. & Kantz, H. (1991). . *J. Stat. Phys.*, 63:685.

Grinstein, G., Lee, D.-H., & Sachdev, S. (1990). Conservation laws, anisotropy, and "self-organized criticality" in noisy nonequilibrium systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1927–1930.

Gruska, G. F., Mirkhani, K., & Lamberson, L. R. (1989). *Non-Normal data Analysis.* Garden City, MI: Multiface Publishing.

Hahn, G. J. & Shapiro, S. S. (1967). *Statistical models in engineering.* New York: Wiley.

Harra, L., Galalgher, P.T., & Phillips, K. J. H. (2000). Characteristics of quiet Sun cell and network brightenings. *A&A*, 362:371–378.

Harrison, R.A. (1997). One Year of CDS: Highlights from Observations using the Coronal Diagnostic Spectrometer on SOHO. In *The Corona and Solar Wind Near Minimum Activity, Proceedings published in ESA SP Series (SP-404*, page 7.

Harrison Wadsworth (Editor), M. (1998). *Handbook of Statistical Methods for Engineers and Scientists, 2nd edition.* McGraw-Hill Professional Publishing.

Held, G. A., Solina, D. H., Solina, H., Keane, D. T., Haag, W. J., Horn, P. M., & Grinstein, G. (1990). Experimental study of critical-mass fluctuations in an evolving sandpile. *Phys. Rev. Lett.*, 65:1120–1123.

Heyvaerts, J. (1990). Coronal heating by d.c. currents. In *IAU Symp. 142: Basic Plasma Processes on the Sun*, volume 142, pages 207–212.

Heyvaerts, J. & Priest, E. R. (1983). Coronal heating by phase-mixed shear Alfven waves. *A&A*, 117:220–234.

Heyvaerts, J. & Priest, E. R. (1984). Coronal heating by reconnection in DC current systems - A theory based on Taylor's hypothesis. *A&A*, 137:63–78.

Heyvaerts, J. & Priest, E. R. (1992). A self-consistent turbulent model for solar coronal heating. *ApJ*, 390:297–308.

Hollweg, J. V. (1984). Resonances of coronal loops. *ApJ*, 277:392–403.

Hudson, H. S. (1991). Solar flares, microflares, nanoflares, and coronal heating. *Solar Physics*, 133:357–369.

Hudson, H. S., Peterson, L. E., & Schwartz, D. A. (1969). The Hard Solar X-Ray Spectrum Observed from the Third Orbiting Solar Observatory. *APJ*, 157:389–416.

Hwa, T. & Kardar, M. (1992). Avalanches, hydrodynamics, and discharge events in models of sandpiles. *Phys. Rev. A*, 45:7002–7023.

Ionson, J. A. (1978). Resonant absorption of Alfvénic surface waves and the heating of solar coronal loops. *ApJ*, 226:650–673.

Isliker, H., Anastasiadis, A., Vassiliadis, D., & Vlahos, L. (1998). Solar flare cellular automata interpreted as discretized MHD equations. *A&A*, 335:1085–1092.

Isliker, H., Anastasiadis, A., & Vlahos, L. (2000). MHD consistent cellular automata (CA) models I: Basic Features. *A&A*, 363:1134–1135.

Isliker, H., Anastasiadis, A., & Vlahos, L. (2001). MHD consistent cellular automata (CA) models II: Applications to solar flares, in press. *A&A*.

Jensen, H.J. (1998). *Self-Organized Criticality.* Cambridge University Press.

Johnson, N. L., Johnson, E., & Amos, D. E. (1963). Tables of Percentage Points of Pearson Curves for given $\sqrt{\beta_1}\beta_2$, expressed as Standard Mesures. *Biometrika*, 50:459+.

Kadanoff, L. P., Nagel, S. R., Wu, L., & Zhou, S. (1989). Scaling and universality in avalanches. *Phys. rev. A*, 39:6524–6537.

Kaneko, K. (ed.) (1992). Chaos: Focus issue on coupled map lattices. *Chaos*, 2:1.

Kendall, M. G. & Stuart, A. (1958). *The advances Theory of Statistics, vol.1.* Hafner Publishing Company, New York.

Kolmogorov, A.N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 30:9–13.

Koutchmy, S., Hara, H., Suematsu, Y., & Reardon, K. (1997). SXR Coronal Flashes. *A&A*, 320:L33–L36.

Koutchmy, S. L., Merzlyakov, V. L., & Molodenskii, M. M. (2001). The Three-Dimensional Structure of the Solar Corona. *Astronomy Reports*, 45:834–840.

Krasnoselskikh, V., Podladchikova, O., Lefebvre, B., & Vilmer, N. (2001). Quiet Sun coronal heating: a statistical model. *A&A in press*, 382:699–712.

Krucker, S. & Benz, A.O. (1998). Energy Distribution of Heating Processes in the Quiet Solar Corona. *ApJ*, 501:L213.

Krucker, S. & Benz, A.O. (2000). Are Heating Events in the Quiet Solar Corona Small Flares? Multiwavelength Observations of Individual Events. *Sol. Phys.*, 191:341.

Kuperus, M., Ionson, J. A., & Spicer, D. S. (1981). On the theory of coronal heating mechanisms. *ARAA*, 19:7–40.

Lawrence, J. K., Cadavid, A. C., Ruzmaikin, A., & Berger, T. E. (2001). Spatiotemporal Scaling of Solar Surface Flows. *Phys. Rev. Lett.*, 86:5894–5897.

Lawrence, J. K. & Schrijver, C. J. (1993). Anomalous diffusion of magnetic elements across the solar surface. *ApJ*, 411:402–405.

Leighton, R. B. (1964). Transport of Magnetic Fields on the Sun. *ApJ*, 140:1547+.

Lin, R. P., Schwartz, R. A., Kane, S. R., Pelling, R. M., & Hurley, K. C. (1984). Solar hard X-ray microflares. *ApJ*, 283:421–425.

Litvinenko, Y. E. (1994). An explanation for the solar flare frequency energy dependence. *Solar Physics*, 151:195–198.

Longcope, D. W. & Noonan, E. J. (2000). Self-organized Criticality from Separator Reconnection in Solar Flares. *ApJ*, 542:1088–1099.

Longcope, D. W. & Sudan, R. N. (1992). Quasi-static evolution of coronal magnetic fields. *ApJ*, 384:305–318.

Lu, E. T. (1995). The Statistical Physics of Solar Active Regions and the Fundamental Nature of Solar Flares. *ApJL*, 446:L109+.

Lu, E. T. & Hamilton, R. J. (1991). Avalanches and the distribution of solar flares. *ApJ*, 380:L89–L92.

Lu, E. T., Hamilton, R. J., McTiernan, J. M., & Bromund, K. R. (1993). Solar flares and avalanches in driven dissipative systems. *ApJ*, 412:841–852.

MacKinnon, A. L., MacPherson, K. P., & Vlahos, L. (1996). Cellular automaton models of solar flare occurence. *A&A*, 310:L9–L12.

McKenzie, J. F., Axford, W. I., & Banaszkiewicz, M. (1997). The fast solar wind. *Geophys. Res. Lett.*, 24:2877+.

Mitra-Kraev, U. & Benz, A. O. (2001). A nanoflare heating model for the quiet solar corona. *A&A*, 373:318–328.

Moffatt, H. K. (1978). *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge, Cambridge University Press.

Montgomery, D. & Doolen, G. D. (1987). Magnetohydrodynamic cellular automata. *Phys. Lett. A*, 120:229–231.

Nesis, A., Hammer, R., Kiefer, M., Schleicher, H., Sigwarth, M., & Staiger, J. (1999). Dynamics of the solar granulation. VI. Time variation of the granular shear flow. *A&A*, 345:265–275.

Newman, D. E., Carreras, B. A., Diamond, P. H., & Hahm, T. S. (1996). The dynamics of marginality and self-organized criticality as a paradigm for turbulent transport. *Physics of Plasmas*, 3:1858–1866.

Nocera, L., Priest, E. R., & Hollweg, J. V. (1986). Nonlinear development of phase-mixed Alfven waves. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 35:111–129.

Norman, J. P., Charbonneau, P., McIntosh, S. W., & Liu, H. (2001). Waiting-Time Distributions in Lattice Models of Solar Flares. *ApJ*, 557:891–896.

Parker, E. N. (1955). Hydromagnetic Dynamo Models. *ApJ*, 122:293+.

Parker, E. N. (1972). Topological Dissipation and the Small-Scale Fields in Turbulent Gases. *ApJ*, 174:499–510.

Parker, E. N. (1983). Magnetic Neutral Sheets in Evolving Fields - Part Two - Formation of the Solar Corona. *ApJ*, 264:642–647.

Parker, E. N. (1988). Nanoflares and the solar X-ray corona. *ApJ*, 330:474–479.

Parnell, C. E. & Jupp, P. E. (2000). Statistical Analysis of the Energy Distribution of Nanoflares in the Quiet Sun. *ApJ*, 529:554–569.

Pearce, G., Rowe, A. K., & Yeung, J. (1993). A statistical analysis of hard X-Ray solar flares. *APSS*, 208:99–111.

Pearson, E. S. & Hartley (1954). *Tables for Statisticians, Vol.1.* Cambridge University Press, Cambridge.

Petschek, H.E. (1964). . In *AAS/NASA, Symp. Physics of Solar Flares, Hess W.N. (ed.), NASA, Washington, DC*, page 425.

Podladchikova, O., Krasnoselskikh, V., & Lefebvre, B. (1999). Quiet Sun coronal heating: sand-pile reconenction model. In *Ninth European Meeting on Solar Physics: Magnetic Fields and Solar Processes. Florence, Italy, 12-18 September, 1999. Proceedings published in ESA SP Series (SP-448), ed. A. Wilson.*, pages 553–559.

Priest, E.R. & Forbes, T. (2000). *Magnetic Reconnection.* Cambridge University Press.

Priest, E. R. (1999). Heating the solar corona by magnetic reconnection. *Astrophys. Space Science*, 264:77–100.

Priest, E. R., Foley, C. R., Heyvaerts, J., Arber, T.D., Culhane, J.L., & Acton, L.W. (1998). Nature of the heating mechanism for the diffuse solar corona. *Nature*, 393:545–547.

Priest, E. R., Foley, C. R., Heyvaerts, J., Arber, T. D., Mackay, D., Culhane, J. L., & Acton, L. W. (2000). A Method to Determine the Heating Mechanisms of the Solar Corona. *ApJ*, 539:1002–1022.

Proctor, M. R. E., Matthews, P. C., & Rucklidge, A. M. (1993). *Lectures on Solar and Planetary Dynamos (Publications of the Newton Institute, 2).* Cambridge University Press.

Rosner, R., Tucker, W. H., & Vaiana, G. S. (1978). Dynamics of the quiescent solar corona. *ApJ*, 220:643–645.

Schrijver, C.J., Title, A.M., Harvey, K.L., Sheeley, N.R., Wang, J.Y., van den Oord, G.H.J., Shine, R.A., Tarbell, T.D., & Hurlburt, N.E. (1998). Large scale coronal heating by the dynamic, small scale field of the Sun. *Nature*, 394:152–154.

Scudder, J. D. (1992). On the causes of temperature change in inhomogeneous low-density astrophysical plasmas. *ApJ*, 398:299–318.

Seber, G. A. F. (1980). *Linear Regression Analysis.* John Wiley and Sons, New York.

Shimizu, T. (2001). Energetics and Occurrence Rate of Active-Region Transient Brightenings and Implications for the Heating of the Active-Region Corona. *PASJ*, 47:251–263.

Shimizu, T., Tsuneta, S., Acton, L. W., Lemen, J. R., Ogawara, Y., & Uchida, Y. (1994). Morphology of active region transient brightenings with the YOHKOH Soft X-ray Telescope. *ApJ*, 422:906–911.

Somov, B.V. & Syrovatsky, S.I. (1977). Current sheets as the source of heating for solar active regions. *Sol. Phys.*, 55:393–399.

Sornette, D. (2000). *Critical Phenomena in Natural Sciences : Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder.* Springer series in synergetics, Springer-Verlag.

Sornette, D., Johansen, A., & Dornic, J. (1998). Mapping Self-Organized Criticality onto Criticality. *J. Phys. (France)*, I5:325.

Spicer, D. S. & Brown, J. C. (1980). A classification scheme for solar flare models. *Solar Phys.*, 67:385–392.

Steenbeck, M., Krause, F., & Radler, K. H. (1966). Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke $V \times B$ für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflusster Bewegung. *Z. Naturforsch.*, 21a:369–376.

Syrovatskii, S. I. (1971). *Sov. Phys. JETP*, 33:93.

Syrovatskii, S. I. (1981). Pinch sheets and reconnection in astrophysics. *ARAA*, 19:163–229.

Syrovatskii, S. I. (1982). Model for flare loops, fast motions, and opening of magnetic field in the corona. *Solar Physics*, 76:3–20.

Tihonov, V. I. (1982). *Statistical radio engineering*. Radio and communication, Moscow.

van Ballegooijen, A. A. (1985). Electric currents in the solar corona and the existence of magnetostatic equilibrium. *ApJ*, 298:421–430.

van Ballegooijen, A. A. (1986). Cascade of magnetic energy as a mechanism of coronal heating. *ApJ*, 311:1001–1014.

Vassiliadis, D., Anastasiadis, A., Georgoulis, M., & Vlahos, L. (1998). Derivation of Solar Flare Cellular Automata Models from a Subset of the Magnetohydrodynamic Equations. *ApJ*, 509:L53–L56.

Vekstein, G. E. & Priest, E. R. (1995). Nonlinear magnetic reconnection with collisionless dissipation. *Phys. Plasmas*, 2(8):3169–3178.

Vespignani, A. & Zapperi, S. (1998). How self-organized criticality works: A unified mean-field picture. *Phys. Rev. E*, 57:6345–6362.

Vlahos, L. (1994). Theory of fragmented energy release in the sun. *Space Sci. Rev.*, 68:39.

Vlahos, L., Georgoulis, M., Kluiving, R., & Pashos, P. (1995). The statistical flare. *A&A*, 299:897.

Voitenko, Y. & Goossens, M. (2000). Competition of damping mechanisms for the phase-mixed Alfvén waves in the solar corona. *A&A*, 357:1086–1092.

Wheatland, M. S. & Sturrock, P. A. (1996). Avalanche Models of Solar Flares and the Distribution of Active Regions. *ApJ*, 471:1044+.

Wheatland, M. S., Sturrock, P. A., & McTiernan, J. M. (1998). The Waiting-Time Distribution of Solar Flare Hard X-Ray Bursts. *ApJ*, 509:448–455.

Withbroe, G. L. & Noyes, R. W. (1977). Mass and energy flow in the solar chromosphere and corona. *ARAA*, 15:363–387.

Wolfram, S. (1983). Statistical mechanics of cellular automata. *Rev. Mod. Phys.*, 55:601–644.

Woo, R. & Habbal, S.R. (1997). Finest Filamentary Structures of the Corona in the Slow and Fast Solar Wind. *ApJ Lett.*, 474:L139.

Zeldovich, I. B., Ruzmaikin, A. A., & Sokolov, D. D. (1983). *Magnetic fields in astrophysics*. New York, Gordon and Breach Science Publishers (The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics. Volume 3).

Zirker, J. B. (1993). Coronal heating. *Solar Phys.*, 148:43–60.

Zirker, J. B. & Cleveland, F. M. (1993). Avalanche models of active region heating and flaring. *Solar Phys.*, 145:119–128.

Index

A

Automates cellulaires 17

C

Convection photosphérique . 3, 9, 29, 80
Corrélations spatiales 44, 68
Couche de courant 11
Criticalité auto-organisée . 15, 36, 51, 55

D

Décomposition en valeurs singulières . 66
    et structures cohérentes 72
Dissipation
    résistivité anormale 30
    reconnexion 30
Dynamo (effet α) 87

E

Energie dissipée
    filtrée 44
    moments statistiques 44
    PDF 44, 62, 86, 110
Entropie spatiale (densité d') . 67, 75, 81
Equation de diffusion 40
Eruptions 11
    micro-éruptions 12
    nano-éruptions 11, 14, 23
    statistiques des 13, 97

L

Lu et Hamilton (modèle de) 17

O

Ondes acoustiques 4
Ondes cyclotrons ioniques 6
Ondes d'Alfvén 4, 6
    absorption résonante 5
    phase mixing 5

P

Parker
    hypothèse de 14
    modèle de 10
Pearson
    critère χ^2 de 106
    distributions de 102, 120
    technique de 86, 101, 106, 110

R

Réseau d'applications couplées 29
Résistivité anormale 32
Reconnexion magnétique 9, 26, 33

S

Sources
    aléatoires 27, 55
    chaotiques 28
    dipolaires 28, 60
    sous-diffusives 29, 59
    super-diffusives 93
    turbulentes 80

T

Tas de sable de Bak et al. 16
Turbulence 6, 80
    Alfvénique 6
    et chauffage 11, 22
    intermittance 22

Z

Zone de transition 2

Modèle statistique de chauffage de la couronne solaire calme.

Résumé : La température anormalement élevée de la couronne reste un des problèmes majeurs de la physique solaire. Toutefois, les observations récentes des satellites SoHO, Yohkoh ou TRACE semblent indiquer que les processus responsables du chauffage des régions fermées se situent dans la basse couronne ou dans la chromosphère, donc proches de la surface solaire, et sont associés à la dissipation de couches de courant continu. L'analyse statistique de données suggère que les mécanismes de chauffage résulteraient donc de nombreux événements de dissipation de couches de courant de petite échelle et de faible énergie, à la limite de la résolution des instruments modernes.

Nous proposons un modèle statistique sur réseau, résultant d'une approche plus physique que la criticalité auto-organisée, constitué d'une source d'énergie magnétique de petite échelle et de mécanismes de dissipation des courants, qui peuvent être associés soit à la reconnection magnétique soit à la résistivité anormale. Les différents types de sources et de mécanismes de dissipation permettent d'étudier leur influence sur les propriétés statistiques du système, en particulier sur l'énergie dissipée. Dans le but de quantifier ces comportements et de permettre des comparaisons approfondies entres les modèles et les observations, des techniques d'analyse peu utilisées en physique solaire, telles que la décomposition en valeurs singulières, des entropies, ou la technique de Pearson de classification des densités de probabilité, sont introduites et appliquées à l'étude des propriétés spatiales et temporelles du modèle.

Statistical model of quiet Sun coronal heating.

Abstract : The high temperature of the solar corona is still a puzzling problem of solar physics. However, the recent observations of satellites SoHO, Yohkoh or TRACE seem to indicate that the processes responsible for the heating of the closed regions are situated in the low corona or in the chromosphere, thus close to the sun surface, and are associated to the direct currents dissipation. Statistical data analysis suggest that the heating mechanisms result thus from numerous events of current layers dissipation of small scale and weak energy, on the resolution limit of modern instruments.

We propose a statistical lattice model, resulting from an approach more physical than self-organized criticality, constituted by a magnetic energy source at small scales and by dissipation mechanisms of the currents, which can be associated either to magnetic reconnection or to anomalous resistivity. The various types of sources and mechanisms of dissipation allow to study their influence on the statistical properties of the system, in particular on the energy dissipation. With the aim of quantifying this behavior and allowing detailed comparisons between models and observations, analysis techniques little used in solar physics, such as the singular values decomposition, entropies, or Pearson technique of PDF classification are introduced and applied to the study of the spatial and temporal properties of the model.