



**HAL**  
open science

# Problèmes d'écoulements d'eau dans les sols non saturés

Georges Vachaud

► **To cite this version:**

Georges Vachaud. Problèmes d'écoulements d'eau dans les sols non saturés. Hydrologie. Université de Grenoble, 1963. Français. NNT : . tel-00694386

**HAL Id: tel-00694386**

**<https://theses.hal.science/tel-00694386>**

Submitted on 4 May 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

T H E S E

Présentée.

à la Faculté des Sciences de l'Université  
de Grenoble

Pour obtenir le Grade de Docteur de Spécialités

(Troisième Cycle d'Hydrodynamique Supérieure,  
Option Dynamique des Nappes Souterraines et Mécanique des Sols).

par

Georges VACHAUD  
Ingénieur E.N.S.H.G.

---

"PROBLEMES D'ECOULEMENTS D'EAU  
DANS LES SOLS NON SATURES"

---

Soutenu le 11 Juillet 1963, devant la Commission d'Examen

MM. SANTON, Président

BIAREZ )  
CURTET ) Examineurs

GRENOBLE



S O M M A I R E

Pages

- INTRODUCTION

I. STATIQUE DES FLUIDES DANS LES SOLS NON SATURES.

1. Hypothèses de base .....	I.1
2. Caractéristiques du sol en tant que milieu po- reux .....	I.2
2.1. Porosité	
2.2. Surface spécifique	
2.3. Perméabilité	
2.4. Teneur en eau	
3. Relations énergétiques entre les fluides .....	I.4
3.1. Pression capillaire .....	I.4
3.2. Pression de vapeur dans les sols .....	I.13
3.3. Osmose .....	I.15
4. Distribution statique des fluides .....	I.15
5. Bibliographie relative au chapitre I .....	I.22

II. EQUATION DU MOUVEMENT DE L'EAU DANS LES SOLS NON SATURES.

1. Loi de Darcy - Sols saturés .....	II.2
2. Loi de Darcy généralisée - Sols non saturés ...	II.3
3. Equation du pouvement isotherme de l'eau .....	II.7
4. Mouvement de l'eau dans un champ thermique ....	II.9
5. Conclusion .....	II.17
6. Bibliographie relative au chapitre II .....	II.20

.../...



III. MESURE DE LA CONDUCTIVITE CAPILLAIRE ET DE LA  
DIFFUSIVITE.

- |   |        |
|---|--------|
| 1. Mesure de $k'$ à l'aide de colonnes de sable .....               | III.2  |
| 2. Mesure de $k'$ par déplacement de la phase mouil-<br>lante ..... | III.4  |
| 2.1. Méthode HASSLER  |        |
| 2.2. Méthode "PENN-STATE"   |        |
| 2.3. Méthode WELDGE   |        |
| 3. Mesure en écoulement transitoire .....                           | III.10 |
| 4. Résultats - Valeurs de $k'$ ( $\psi$ ) et $D$ ( $\theta$ ) ..... | III.21 |
| 5. Bibliographie relative au chapitre III .....                     | III.27 |

IV. RESOLUTION DE L'EQUATION DE L'ECOULEMENT DE  
L'EAU DANS LES SOLS NON SATURES.

- |   |       |
|---|-------|
| 1. Cas d'un écoulement permanent unidimensionnel .    | IV.2  |
| Application à l'évaporation au dessus d'une<br>nappe. |       |
| - recherche de la loi $\psi(z)$ .....                 | IV.5  |
| - valeur du débit limite d'évaporation .....          | IV.6  |
| 2. Ecoulement non permanent unidimensionnel .....     | IV.7  |
| Application à l'infiltration dans un sol.             |       |
| 2.1. Ecoulement horizontal non permanent .....        | IV.8  |
| 2.2. Ecoulement vertical non permanent .....          | IV.17 |
| 2.2.1. Résolution de l'équation du mou-<br>vement.    |       |
| 2.2.2. Cas de $t$ grand                               |       |
| 2.2.3. Sorptivité                                     |       |
| 2.2.4. Analyse de l'étude de J.R. PHILIP              |       |
| 2.2.5. Vérifications expérimentales                   |       |
| 3. Bibliographie relative au chapitre IV .....        | IV.33 |

.../...



V. MISE AU POINT D'UN APPAREIL DE MESURE DE LA  
CONDUCTIVITE CAPILLAIRE.

1. Principe de la mesure .....	V.1
2. Description de l'appareillage .....	V.5
2.1. Schéma simplifié .....	V.5
2.2. Description détaillée .....	V.7
2.2.1. Echantillon	
2.2.2. Réservoir	
2.2.3. Burette	
2.2.4. Balance	
2.3. Mesures à effectuer .....	V.13
2.3.1. Mesure de débit	
2.3.2. Mesure de différence de charge	
2.3.3. Mesure du degré de saturation	
2.4. Principe de fonctionnement .....	V.15
2.4.1. Circuit amont	
2.4.2. Circuit aval	
2.4.3. Pesée	
3. Caractéristiques physiques des matériaux uti- lisés .....	V.21
3.1. Caractéristique du sol .....	V.21
3.1.1. Poids spécifique	
3.1.2. Densité sèche	
3.1.3. Teneur en eau de saturation	
3.1.4. Porosité	
3.1.5. Courbe de pF	
3.1.6. Conductivité hydraulique (saturée)	
3.2. Caractéristiques des plaques .....	V.24
3.2.1. Plaques en Alucer	
3.2.2. Plaques en Poral	

.../...



Pages

4. Influence de la conductivité des plaques ..... V.25

5. Résultats ..... V.30

    5.1. Loi  $k'$  ( $\Psi$ )

    5.2. Loi  $k'$  ( $S$ )

    5.3. Loi  $D$  ( $\theta$ )

6. Application au calcul de l'évaporation au-des-  
sus d'une nappe ..... V.41

- Bibliographie relative au chapitre V ..... V.47

- CONCLUSION



LISTE DES SYMBOLES

Unités employées (sauf contre indications) : système cgs.

- $a$  = contenu volumétrique d'air du milieu. ( $\text{cm}^3$  d'air /  $\text{cm}^3$  de sol)  
 $A$  = surface spécifique ( $\text{cm}^{-1}$ )  
 $A_E$  = surface spécifique effective  
 $A_G$  = surface spécifique du système gazeux  
 $A_L$  = surface spécifique du système liquide  
 $D$  = coefficient de diffusivité ( $\text{cm}^2/\text{sec}$ )  
 $D_{\text{Dliq}}$  = coefficient de diffusivité isotherme de l'eau  
 $D_{\text{Tliq}}$  = coefficient de diffusivité thermique de l'eau  
 $D_{\text{Dvap}}$  = coefficient de diffusivité isotherme de la vapeur  
 $D_{\text{Tvap}}$  = coefficient de diffusivité thermique de l'eau  
 $D_{\text{atm.}}$  = coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air  
 =  $0,274 \text{ cm}^2/\text{sec}$  à  $20^\circ\text{C}$ .  
 $g$  = accélération de la pesanteur ( $981 \text{ cm}/\text{sec}^2$ )  
 $G$  = énergie libre (dyne.cm)  
 $H$  = humidité relative (%)  
 $K$  = perméabilité (saturée) (Darcy ou  $\text{cm}^2$ )  
 $K'$  = coefficient de conductivité saturée =  $\frac{K\rho g}{\mu}$  ( $\text{cm}/\text{sec}$ )  
 $k_L$  = perméabilité effective au liquide (non saturé)  
 $k'$  = conductivité capillaire (non saturée) = ( $\text{cm}/\text{sec}$ )  
 $K_L$  = perméabilité relative au liquide =  $\frac{k_L}{K} = \frac{k'}{K'}$   
 $I$  = aire de contact spécifique liquide-gaz ( $\text{cm}^{-1}$ )  
 $M$  = masse moléculaire (pour l'eau  $18 \text{ g}/\text{mole}$ )  
 $p$  ou  $P$  = pression ou pression de vapeur  
 $P_0$  = pression atmosphérique  
 $P_c$  = pression capillaire  
 $pF$  = logarithme décimal de  $-\Psi$  ( $\Psi$  = succion en cm)  
 $q$  = flux de fluide - volume d'eau par unité d'aire normale à l'écoulement par unité de temps ( $\text{cm}/\text{sec}$ )  
 $q_M$  = flux de matière ( $\text{g}/\text{cm}^2 \times \text{sec}$ )

.../...



- $r$  = rayon de courbure des ménisques (en cm)  
 $R$  = constante universelle des gaz ( $8,315 \cdot 10^{-7}$  erg/mole $\cdot$ c)  
 $R_L$  = aire de contact spécifique liquide-solide ( $\text{cm}^{-1}$ )  
 $R_G$  = aire de contact spécifique gaz-solide ( $\text{cm}^{-1}$ )  
 $S$  = degré de saturation (%)  
 $S_0$  = degré de saturation irréductible en liquide  
 $S'$  = degré de saturation réduite =  $\frac{S-S_0}{1-S_0}$   
 $t$  = temps (sec)  
 $T$  = température en  $^{\circ}$  K  
 $u$  = pression interstitielle de l'eau dans le sol  
 $V_{\text{ou } Q}$  = volume ( $\text{cm}^3$ )  
 $z$  = cote - Potentiel gravitaire (cm)  
 $\alpha$  = angle de contact entre deux fluides et solide  
 $\gamma_{ij}$  = énergie libre spécifique de contact au courbe ij (dynes. $\text{cm}^{-1}$ )  $\gamma$  = tension de surface (dynes. $\text{cm}^{-1}$ )  
 $\mu$  = viscosité dynamique (poises)  
 $\theta$  = teneur en eau à base volumique ( $\text{cm}^3$  d'eau /  $\text{cm}^3$  de sol)  
 $\rho$  = masse spécifique ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )  
 $\varphi$  = variable de Boltzman =  $xt$   
 $\Phi$  = potentiel total de l'eau du sol non saturé  
 =  $(\Psi + z)$  en cm  
 $\bar{\Phi}$  = potentiel de l'eau dans un sol saturé (cm)  
 $\tau$  = facteur de tortuosité  
 $\Psi$  = succion ( $-z$ ) en cm  
 $\chi, \psi, \omega$  = variables de Boltzman employée par Philip

$$\Sigma s = -\frac{n}{\gamma} \int_1^s p_c ds$$

$$\Sigma s_0 = -\frac{n}{\gamma} \int_1^{s_0} p_c ds$$

$$\Sigma w = -\frac{n}{\gamma} \int_s^{s_0} p_c ds = \Sigma s_0 - \Sigma s$$



INTRODUCTION

---

Alors que le comportement hydraulique des sols saturés (réseaux de puits, de drains, etc...) est relativement bien connu, grâce à l'avancement de l'hydraulique des milieux poreux durant le dernier quart de siècle, le domaine de l'hydraulique des sols non saturés est, malgré l'importance des problèmes rencontrés, resté encore relativement fermé aux recherches, ceci provenant de la complexité des phénomènes mis en jeu.

Ce domaine englobe des phénomènes aussi communs, et aussi essentiels, que ceux de l'infiltration de l'eau dans les sols, de l'évaporation au dessus des nappes, etc ..., et c'est pourquoi depuis une dizaine d'années une équipe de chercheurs a décidé de résoudre ces problèmes, dans les régions où ils se posent le plus : l'Ouest des Etats Unis et l'Australie, où l'irrigation est une question vitale, mais où également le manque d'eau impose une irrigation rationnelle.

Parallèlement se poursuivent d'autres recherches qui, bien que basées sur les mêmes phénomènes d'écoulement de deux phases non miscibles, intéressent une branche tout à fait différente, mais d'une importance vitale, de l'économie moderne ; celle du pétrole. Le problème ici est de savoir quelle est la plus grande quantité de pétrole que l'on peut retirer d'une roche en injectant un autre fluide (eau ou gaz).

Ces deux champs d'études différents ont permis cependant de mettre au point une théorie correcte des écoulements dits "biphasiques". Ces études étant cependant très dispersées et fort mal connues en France, notre but a d'abord été de faire



un ouvrage bibliographique général, adapté à l'écoulement de l'eau dans les sols non saturés, à partir de la comparaison des théories et expériences effectuées dans les pays Anglo-Saxons. Dans cette partie bibliographique, qui intéresse les quatre premiers chapitres de notre thèse, nous étudierons successivement la statique des fluides dans les milieux non saturés, les équations du mouvement de l'eau dans les sols non saturés, les méthodes de mesure de la conductivité et de la diffusivité des sols, caractéristiques de la facilité avec laquelle se produit un écoulement dans un sol non saturé, et enfin les méthodes de résolution des équations de l'écoulement dans les cas les plus importants. On trouvera après chaque chapitre une liste des principaux ouvrages traitant des questions développées, car cette partie bibliographique a pour but d'être une synthèse des idées actuelles mais aussi une base de départ pour des recherches ultérieures à mener dans ce Laboratoire.

Nous avons ensuite essayé de mettre au point un appareil destiné à mesurer la caractéristique physique essentielle des problèmes d'écoulements en milieu non saturés : la conductivité capillaire, analogue au coefficient de perméabilité des écoulements en milieu saturé, et la mise au point de l'appareillage et les résultats des mesures forment notre dernier chapitre. A l'appui des résultats obtenus, nous avons essayé de faire une application pratique au problème de l'évaporation, application qui devrait être vérifiée expérimentalement par des mesures faites par M. BENBLIDIA.



## I. STATIQUE DES FLUIDES DANS LES SOLS NON SATURES

---

On connaît bien les problèmes hydrauliques relatifs aux sols saturés car, dans ce cas, tous les vides entre les grains de sol (pores) sont remplis par de l'eau, et seules les forces extérieures agissent sur l'équilibre statique du milieu.

Lorsqu'il n'y a pas assez de liquide pour remplir tous les vides, du gaz ou de la vapeur remplissent les espaces lacunaires, et le milieu est appelé "non saturé". La distribution des fluides en présence est alors déterminée par les relations énergétiques de surface entre les fluides, et entre fluide et solide, et, sous des conditions statiques, l'équilibre est atteint lorsque les forces extérieures, comme le poids ou la pression imposée sont égales aux forces intérieures du système, forces créées par les relations énergétiques, comme la pression capillaire, la pression de vapeur, l'adsorption.

Enfin, la forme des vides d'un sol étant d'une complexité infinie, on conçoit aisément qu'il sera impossible de calculer, sous des conditions statiques d'équilibre, le volume des fluides en présence dans chaque pore. Il sera seulement possible de connaître un nombre macroscopique : volume d'eau dans un certain volume de pore par exemple.

### 1) HYPOTHESE DE BASES -

Ces hypothèses ne sont formulées que pour délimiter notre étude d'une façon bien définie, elles ne sont d'ailleurs nullement restrictives, sauf peut-être la dernière.

1/ Nous considérerons le sol comme un milieu homogène isotrope - permanent. Il est vrai que de tels cas sont peu fréquents dans la nature, mais une fois les solutions des pro-



blèmes qui nous intéressent obtenues pour un tel type "idéal" il est plus facile de les transposer aux cas rencontrés réellement dans la nature que de faire l'inverse.

2/ Le sol est occupé par de l'eau et de l'air (ou de la vapeur d'eau). Les propriétés physiques du liquide sont uniformes : masse spécifique, viscosité, La pression absolue dans le gaz est constante et égale à la pression atmosphérique. Les propriétés du couple air-eau sont constantes et bien définies (tension de surface, angle de contact).

3/ Sauf spécification, le système sol-liquide-gaz sera considéré comme isotherme.

4/ On suppose que les deux phases sont continues, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de bulles d'air ni de gouttes d'eau isolées dans le système.

Seule cette dernière hypothèse est vraiment restrictive, car notre étude ne s'appliquera pas aux sols trop secs ni aux sols trop humides (près de la saturation). Mais la tranche de teneur en eau qui reste est la plus représentative des système air-eau dans les sols (MILLER-MILLER, 1956).

## 2) CARACTERISTIQUES DU SOL EN TANT QUE MILIEU POREUX -

Par milieux poreux, il faut entendre un solide contenant des vides, connectés ou non. Le sol fait donc partie de cette catégorie.

Les caractéristiques hydrauliques d'un milieu poreux sont sa porosité, sa surface spécifique, sa perméabilité, sa teneur en eau.

2.1. Porosité - Désignée par le nombre  $n$

$$n = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume de sol}} \quad (1.1)$$



On peut distinguer "porosité effective", espace poreux interconnecté et "porosité réelle", espace poreux absolu. En effet, les fluides ne seront présents que dans l'espace poreux interconnecté (COLLINS, 1961).

Cette porosité est un nombre moyen macroscopique et n'est représentative du milieu que si l'on considère un volume suffisant de sol. Ce nombre est fonction naturellement de la compacité du sol, et de la granulométrie.

2.2. Surface spécifique -  $A$ , surface de contact entre les grains de sol et les fluides, par unité de volume de sol (Donc dimension  $L^{-1}$ ).

Alors que la porosité servira pour définir le volume moyen des fluides présents dans les sols, la surface spécifique sera une caractéristique des forces de contact entre fluides et sols.

2.3. Perméabilité -  $K$  -, caractéristique de la facilité d'écoulement d'un fluide dans un milieu. Dans les sols non saturés, on parlera encore de la "perméabilité effective" pour chaque fluide, et cette variable sera liée aux deux précédentes. Nous insisterons sur cette variable dans le chapitre III.

2.4. Teneur en eau  $\theta$ , que nous définirons par

$$\theta = \frac{\text{volume d'eau}}{\text{volume de sol}} \quad (1.2)$$

Nous utiliserons également le degré de saturation en fluide dans le milieu par

$$S_n = \frac{\text{volume du fluide } n \text{ dans le milieu}}{\text{volume des vides du milieu}} \quad (1.3)$$



Soit :  $S_w$  le degré de saturation en eau  
 $S_g$  le degré de saturation en air

on aura toujours :

$$S_w + S_g = 1 \quad (1.4)$$

De plus,  $S_w$  et  $\theta$  sont liés par

$$\theta = S_w n \quad (1.5)$$

Il faut noter que  $S$  et  $\theta$  sont des caractéristiques macroscopiques qui ne tiennent absolument pas compte de la distribution relative des fluides dans le sol (COLLINS, 1961).

### 3) RELATIONS ENERGETIQUES ENTRE LES FLUIDES -

Ces relations, dues à l'existence d'un état d'énergie interne provenant des forces d'interactions non compensées entre eau et gaz aux frontières de séparation entre ces deux phases, caractérisent le fait essentiel que l'eau n'est thermodynamiquement pas libre dans les sols non saturés. Comme son énergie potentielle est plus faible que dans un sol saturé, elle sera donc retenue dans le sol, en dépit des forces extérieures (GARDNER, 1961).

Ces forces d'interactions se situent sur les différents plans suivants :

- entre les deux fluides et le solide : pression capillaire,
- entre l'eau et sa phase vapeur : pression de vapeur
- entre deux zones d'eau à concentration différente séparées par une couche d'argile : osmose.

#### 3.1. Pression capillaire.

Il est bien connu que lorsque deux phases non miscibles sont en contact avec un solide, une phase "mouille" le



solide, l'autre non. Ces deux phases sont de plus séparées par une interface courbe, intersectant le solide selon un certain angle, constante caractéristique du contact bifluide-solide, et la courbure de l'interface est fonction de la différence de pression existant entre phase non-mouillante et phase mouillante. (Pression capillaire).

La condition de "mouillabilité" d'une phase, et de "non-mouillabilité" de l'autre pour un solide donné, est liée aux relations énergétiques qui existent entre les phases fluides et le solide.

Selon SCHEIDEGGER (1959), nous définirons trois caractéristiques de mouillabilité du système bifluide-solide

$\gamma_{12}$  = énergie libre spécifique du contact fluide 1 - fluide 2, ou tension de surface du couple (1-2) ;

$\gamma_{s1}$  = énergie libre spécifique du contact solide-fluide 1, ou tension d'adhésion du fluide 1 au solide ;

$\gamma_{s2}$  = énergie libre spécifique du contact solide-fluide 2, ou tension d'adhésion du fluide 2 au solide,

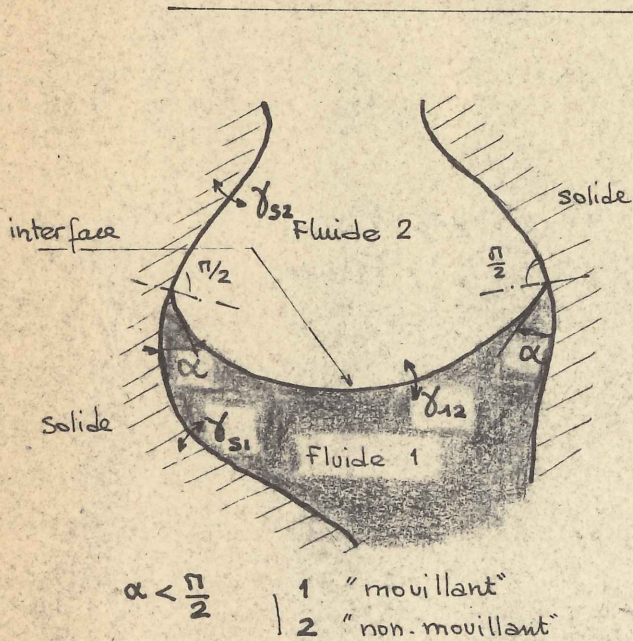


Fig 1.

et l'interface fluide 1 - fluide 2 intersecte le solide suivant un angle  $\alpha$  tel que :

$$\cos \alpha = \frac{\gamma_{s1} - \gamma_{s2}}{\gamma_{12}} \quad (1.1)$$

Si  $\gamma_{s1} > \gamma_{s2}$  ,  $\alpha < \frac{\pi}{2}$

et le fluide 1 est dit "mouillant"

•  $\gamma_{s1} < \gamma_{s2}$  ,  $\alpha > \frac{\pi}{2}$

et le fluide 1 est dit "non-mouillant" (en cgs,  $\gamma$  = dyne/cm).



On peut obtenir la relation entre la pression capillaire et la courbure de l'interface soit par des considérations dynamiques classiques, en écrivant l'équilibre entre les forces dues à la courbure et à la tension superficielle de l'interface, soit par des considérations énergétiques en écrivant que l'équilibre stable d'une surface d'énergie libre (interface) correspond au niveau minimum d'énergie libre qui peut être atteinte par cette surface.

Ainsi, si on appelle  $P_c$  la différence de pression de chaque côté de l'interface dans un pore, l'équation classique liant cette différence de pression à la courbure de l'interface est donnée par :

$$P_c = \gamma_{12} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (1.6)$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont les rayons de courbure principaux du ménisque. La courbure du ménisque étant positive du côté du fluide non mouillant, on voit donc que la pression sera supérieure dans le fluide non mouillant que dans le fluide mouillant.

Donc :

$$P_c = P_{nw} - P_w$$

(  $w$  = fluide mouillant  
 $nw$  = fluide non mouillant )

et  $P_c$  est appelée pression capillaire.

Si l'on considère le système sol-air-eau, qui nous intéresse, avec les hypothèses de base que nous avons posées on a :

- fluide mouillant = eau, fluide non-mouillant = air
- $\alpha = 0$
- $\gamma_{12} = 76 \text{ dynes/cm à } 20^\circ\text{C}$
- $P_{nw} = P_{air} = \text{pression atmosphérique} = P_0$



Dans ce cas, la pression capillaire est donc égale à la dépression de l'eau dans les sols non saturés :

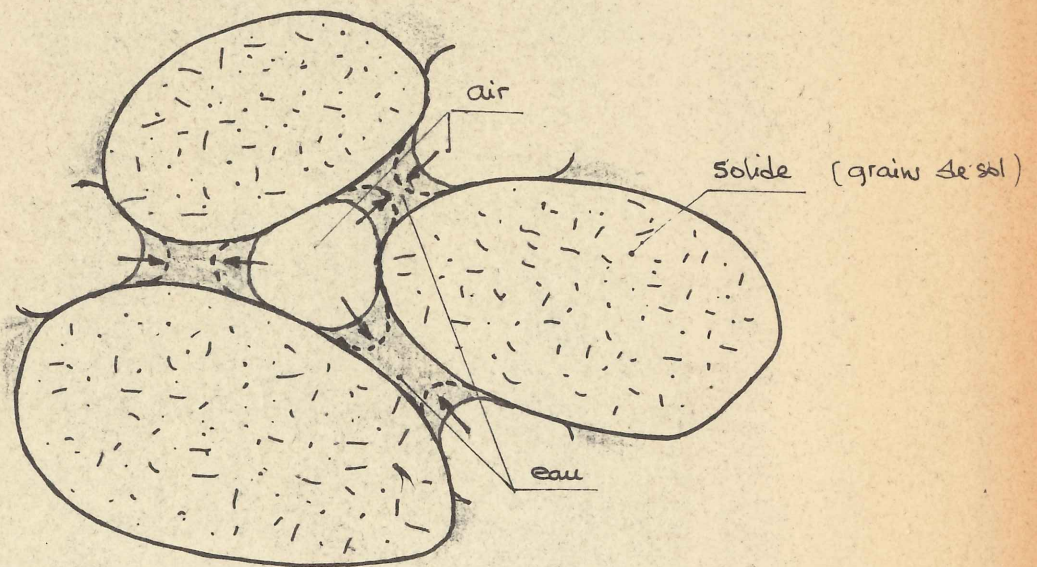
$$P_c = P_0 - P_{eau} = -P_{eau} \quad (1.7) \quad (P_{eau} < 0, \text{ donc } P_c > 0)$$

On peut exprimer cette dépression en terme de hauteur d'eau  $z$

$$z = \frac{P_0 - P_{eau}}{\rho g} = \frac{2\gamma}{\rho g r} \quad (1.8a)$$

où  $\rho g$  est le poids spécifique de l'eau et  $r$  le rayon de courbure moyen de l'interface, mais on utilise aussi assez souvent la différence de pression entre l'eau du sol et la pression atmosphérique, différence appelée succion  $\Psi$  et exprimée en cm d'eau. Cette différence est alors négative et :

$$\Psi = \frac{P_{eau} - P_0}{\rho g} = -z \quad (1.8b)$$



— Menisques de rayon  $r$  pour  $P_c = \frac{2\gamma}{r}$   
 --- Menisques de rayon  $r' < r$  pour  $P'_c > P_c$

$\alpha = 0$  (air-eau-sol)

Fig.2 - Relation - pression capillaire - degré de saturation.



Considérons donc le cas d'un sol partiellement saturé. L'eau dans ce sol sera distribuée sous forme d'un réseau de canaux interconnectés entre les grains et ce réseau sera entrelacé avec un réseau d'air interconnecté (continuité des phases). De plus la frontière entre ces deux réseaux ne sera pas quelconque, mais ce sera une surface courbe.

- de courbure définie par la différence de pression entre l'air et l'eau, donc par la dépression dans l'eau
- interceptant (si elle l'intercepte), la surface solide (grain) selon un angle  $\alpha$  bien déterminé.

Enfin, dans les conditions d'équilibre stable, la distribution de l'eau sera telle qu'elle couvre la plus grande surface possible des grains, du fait que  $\gamma_{\text{eau-sol}} > \gamma_{\text{air-sol}}$  et celle de l'air telle qu'elle couvre la plus petite surface possible des grains. On aura ainsi par exemple la distribution schématisée sur la figure 2, pour une pression capillaire, ou succion, déterminée. Si l'on veut désaturer le sol, il faut augmenter la dépression dans l'eau ; la courbure de ménisque augmentera (en pointillé fig. 2), et, du fait de la condition imposée d'angle de contact nul, l'eau se retirera dans les interstices les plus fins. Inversement, si la pression capillaire diminue, la courbure des ménisques diminue, et le volume de la phase liquide augmente.

On voit donc intuitivement qu'il doit exister une relation entre pression capillaire -ou succion - et degré de saturation en eau.

Cette relation, bien connue sous la forme pression capillaire-teneur en eau, ou succion-teneur en eau, ou encore



$pF$  - teneur en eau, est une relation classique de physique des sols (voir cours de M. SANTON). Malheureusement, la loi  $p_c(s)$  n'est pas bi-univoque, mais présente un cycle d'hystérésis : la teneur en eau est plus forte, à même saturation, si l'on sèche un échantillon que si on l'humidifie. De nombreuses théories ont été émises pour expliquer ce phénomène et, bien qu'aucune ne soit parfaitement satisfaisante, celle de MILLER et MILLER (1958) semble la plus plausible.

En écrivant la loi de Laplace (1.2) sous forme différentielle, MILLER et MILLER montrent que cette loi peut s'exprimer sous la forme d'une équation de Poisson. Il est donc normal de s'attendre à une multiplicité des solutions. Pour expliquer cette multiplicité, les auteurs proposent le schéma suivant (voir fig. 3). Considérons un pore rempli d'eau que l'on désature. A chaque valeur de la pression capillaire, il doit correspondre une position bien déterminée de l'interface

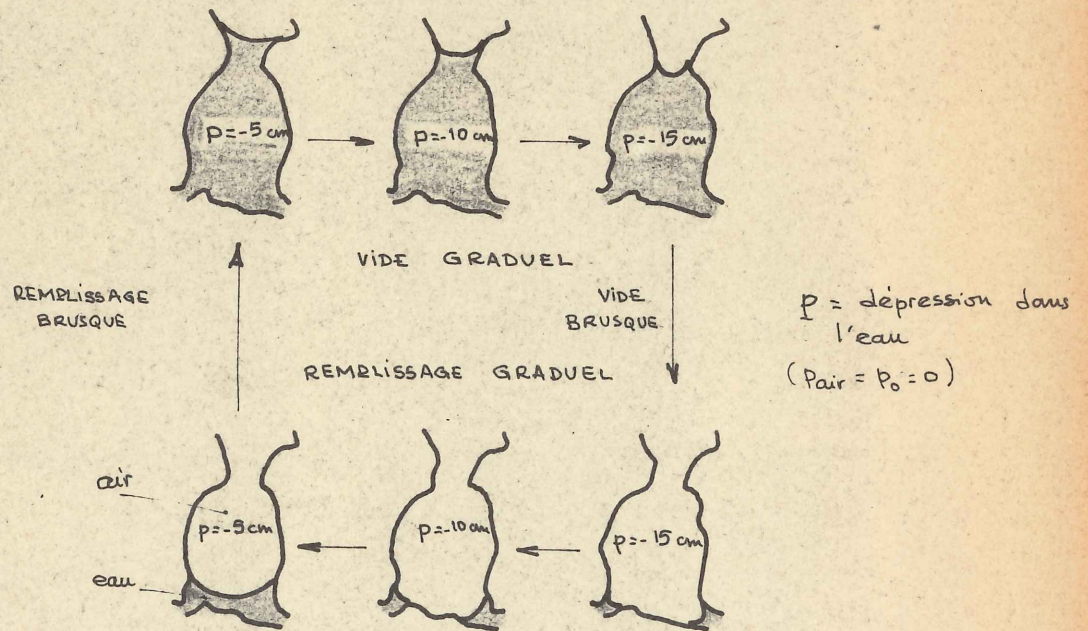


Fig.3 : Multiplicité des solutions pour la loi  $p_c(s)$ .  
MILLER and MILLER 1958.



liquide-gaz, position définie par la courbure du ménisque correspondant à la pression capillaire et par la condition d'angle de contact. Pour une certaine valeur de la pression, on peut arriver à une condition d'équilibre instable de cette interface, la solution n'existant plus au delà de cette pression. Si l'on fait alors varier continuellement la pression capillaire, jusqu'à ce que la solution existante atteigne son point final, l'interface ne peut que passer d'une façon discontinue à une autre solution possible à cette pression. Donc chaque point final d'une solution doit être lié à un point initial d'une autre solution. Ceci est schématisé sur la fig. 3, où la pression capillaire varie continuellement de 5 cm à 15 cm. Sous la pression de 15 cm, l'interface atteint une solution instable, le ménisque arrivant à un élargissement brusque du pore, et le pore se vide brusquement. Si l'on diminue la pression capillaire, le pore se remplit graduellement et, du fait d'un resserrement des parois, l'interface atteint une position instable sous la pression capillaire de 5 cm, et le pore se remplit brusquement.

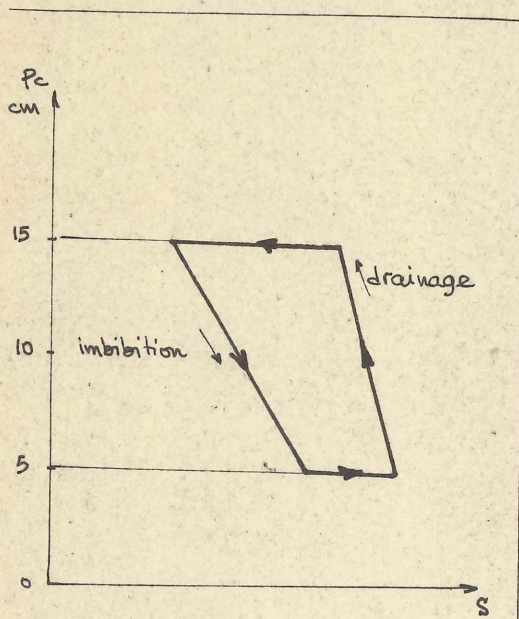


Fig 4

Le schéma proposé par MILLER et MILLER se ramène donc à la loi ci-contre. Bien que cette loi soit une forme simplifiée de ce que l'on trouve dans les sols, elle permet cependant la compréhension des phénomènes. On suppose dans cette théorie, que les pores sont suffisamment fins pour négliger la gravité. Cette loi ne dépend pas du temps mais seulement de la variation de la pression capillaire, MILLER et MILLER ont formé le terme "fonction hystérésis" pour la relation  $p_c(s)$



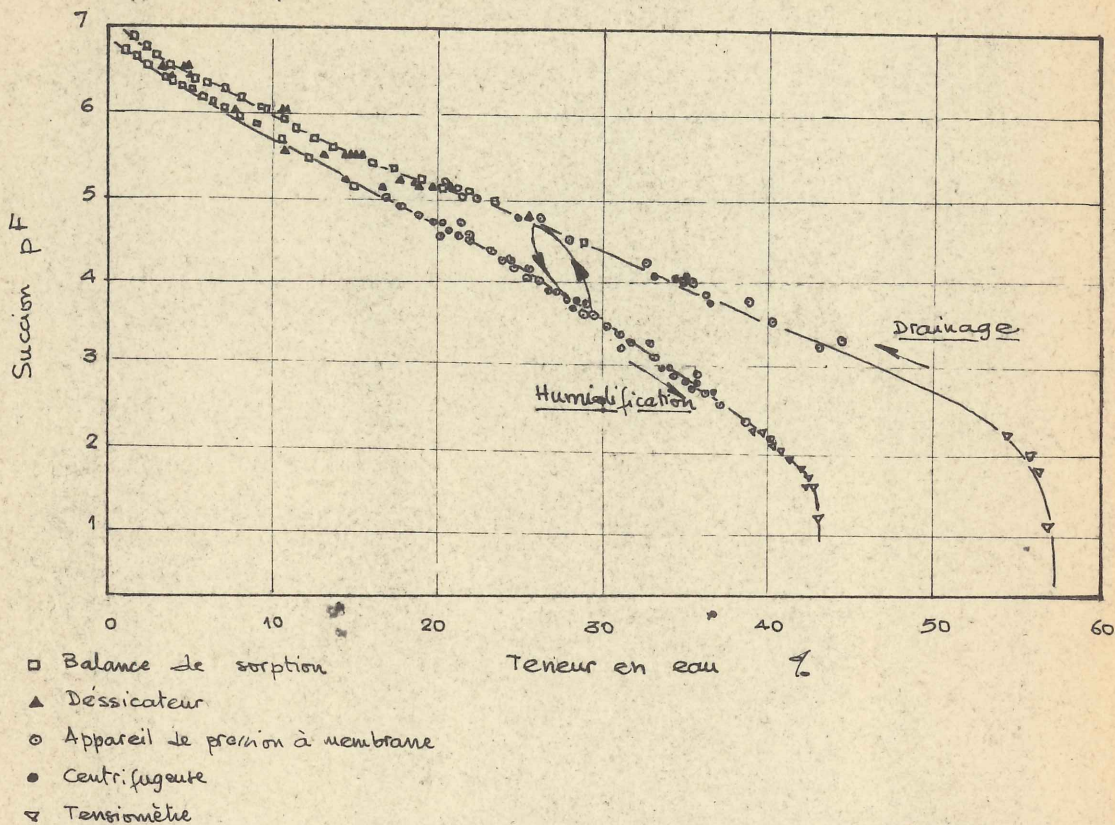


Fig.5 : Relation  $pF$  - teneur en eau pour une argile de Gault (CRONEY, COLEMAN, Highway Research Board, Spec. Rep. 40, 1958).

On trouvera sur la figure 5 une loi réelle obtenue dans un sol. Il est nécessaire d'appliquer de très fortes succions dans les sols pour arriver à une désaturation complète et, au lieu de  $\psi$ , on emploie souvent  $pF = \log_{10} (-\psi_{cm})$

Ainsi, si l'on veut chasser l'eau qui se trouve comprise dans des interstices de  $1\mu$ , il faut que

$$-\psi = \frac{2\gamma}{\rho g r} = \frac{150}{10^3 \times 10^{-4}} = 1.500 \text{ cm}$$



Un cycle de pression capillaire normal nécessite un champ de  $p^F$  variant de 1 à 7. On trouvera dans le cours de Monsieur SANTON les techniques de mesures des  $p^F$ .

Notons simplement qu'il est nécessaire d'employer plusieurs types de mesures, chaque type étant limité dans la gamme des  $p^F$ , pour couvrir une courbe  $p^F(S)$  complète. En général, on utilise :

- le tensiomètre pour  $p^F < 3$
- l'appareil Richards pour  $2 < p^F < 4$
- les dessicateurs pour  $p^F > 4$  (fig 5)

Si on arrête l'humidification pour une certaine valeur de la succion et qu'on sèche l'échantillon, on retombe sur la courbe de drainage, et vice-versa.

En général, les courbes de pression capillaire-saturation présentent toujours au départ une branche verticale ; le degré de saturation reste constant, et égal à 1, pour des valeurs de la succion variant de  $P_c = 0$  à  $P_e$ .  $P_e$  correspond à la depression qu'il faut créer dans l'eau du sol pour que l'air commence à rentrer dans le sol, donc à crever le plus gros menisque : pression d'entrée d'air.  $P_e$  est donc naturellement fonction de la granulométrie du sol, et pour des sols grossiers, elle sera nulle. Ensuite, pour  $P_c > P_e$ , la courbe a une allure hyperbolique normale (Campbell et Richards (1950) ont proposé la formule suivante comme représentative de la courbe de drainage, pour  $10 \text{ cm} < P_c < 10^4 \text{ cm}$  :

$$w = a P_c^{-b}$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes

$$w = \text{teneur en eau, base de poids: } w = \frac{\text{poids eau}}{\text{poids sol sec}} \quad )$$

Enfin, pour des succions très fortes, on peut soit désaturer



complètement les sols (cas des sables) soit atteindre une saturation résiduelle irréductible en eau (cas des sols argileux) (COREY, 1959).

### 3.2. Pression de vapeur dans les sols.

Lorsqu'il existe simultanément dans un milieu poreux un liquide en équilibre avec sa phase vapeur, la pression de vapeur dépend de la courbure de l'interface liquide vapeur. Comme la courbure de cette interface est fonction de la saturation, il en résulte que la pression de vapeur doit, elle aussi, être fonction du degré de saturation en liquide (COLLINS, 1961).

Pour prouver cette hypothèse, Collins emploie une démonstration thermodynamique originale. Nous avons vu que l'interface est une surface d'énergie libre, et que la condition d'équilibre stable de cette interface correspondait à son état d'énergie libre minimum.

Supposons que l'on fasse varier la pression dans le liquide de  $dP$ . Il en résulte une variation  $dG_l$  d'énergie libre du liquide. Il faut donc que la pression de vapeur varie de  $dP$  tel que la variation d'énergie libre de la vapeur  $dG_g$  soit égale à celle du liquide (énergie libre minimum de l'interface). Pour lier ces variations d'énergie libre aux variations de pression, considérons, sous des conditions isothermes, les volumes moléculaires spécifiques des fluides : volume occupé par une molécule gramme de fluide.

Soit  $V_l$  le volume occupé par une molécule gramme de liquide.

$$V_l = \frac{M}{\rho} \quad \text{où } M = \text{masse moléculaire de liquide} \\ = 18 \text{ g/mole} \quad \text{pour l'eau}$$



$\rho$  = masse spécifique de l'eau  $1 \text{ g/cm}^3$

$V_g$  le volume occupé par une molécule gramme de gaz

$$V_g = \frac{RT}{P} \quad \text{où } R = \text{cte universelle des gaz} = 8,315 \cdot 10^{-7} \text{ ergs/mole} \cdot ^\circ\text{C}$$

$T$  = température en  $^\circ\text{K}$

$P$  = pression de vapeur saturante du gaz.

on aura alors  $dG_l = V_l dp$  ,  $dG_g = V_g dP$

et à l'équilibre, il faut que  $V_l dp = V_g dP$

Soit :  $\frac{M}{\rho} dp = \frac{RT}{P} \cdot dP$  ou  $\frac{dP}{P} = \frac{M}{\rho RT} dp$

Si l'on intègre pour  $p$  variant de  $p_0$  à  $p$  et  $P$  de  $P_0$  à  $P$

$$P = P_0 \exp \left[ -\frac{M}{\rho RT} (p - p_0) \right] \quad (1.9)$$

Or dans les sols l'air est à pression constante, et la dépression dans l'eau égale à la pression capillaire. Si  $p_0$  est la pression dans l'eau correspondant à la pression atmosphérique, et si l'on prend  $p$  négatif, on aura :

$$P = P_0 \exp \left[ -\frac{M}{\rho RT} p_c \right] \quad (1.10)$$

ou, en s'exprimant en terme de succion :  $\psi = \frac{-p_c}{\rho g} = \frac{-2\gamma}{\rho g r}$

$$\frac{P}{P_0} = \exp \left[ \frac{Mg\psi}{RT} \right] = \exp \left[ \frac{2\gamma}{\rho r} \cdot \frac{M}{RT} \right] \quad (1.11a)$$

$\frac{P}{P_0}$  définit l'humidité relative  $H$ . Si l'on écrit

$$R' = \frac{R}{M} \quad (4 \cdot 10^{-8} \text{ erg/gr. pour la vapeur d'eau})$$

La formule (1.11a) prend sa forme définitive :

$$H = \exp \left[ \frac{g\psi}{R'T} \right] = \exp \left[ \frac{2\gamma}{\rho r} \cdot \frac{1}{R'T} \right] \quad (1.11 b)$$

Donc à chaque succion correspondra dans le sol une certaine pression de vapeur saturante au niveau des ménisques



et l'on peut dire que les phénomènes de pression capillaire et de pression de vapeur ne peuvent pas être distingués.

On utilise cette relation pour amener un sol à de très basses teneur en eau, ce qui nécessite de très fortes valeurs du  $p^F$ , en plaçant un échantillon de sol dans une enceinte où la pression de vapeur est fixée à une valeur très faible et connue (dessiccation). Il y aura diffusion de vapeur entre sol et air jusqu'à ce que la pression de vapeur dans le sol soit égale à celle fixée dans l'enceinte, donc distillation de l'eau du sol jusqu'à ce que la courbure des ménisques soit telle que chaque ménisque soit en équilibre avec la pression de vapeur imposée (Cours de M. SANTON).

### 3.3. Osmose.

Bien que se produisant assez rarement dans les sols non saturés, on pourra trouver ce phénomène lorsqu'il existe deux régions contenant de l'eau avec une substance dissoute, la concentration de soluté étant différente dans chaque région, séparées par une membrane osmotique = membrane qui laisse passer l'eau mais non les sels dissous. (Couche d'argile ou de sable par exemple). Il se produit alors un écoulement de la région de plus forte concentration à la région de plus faible concentration, et il faut appliquer une certaine différence de potentiel (osmotique) de part et d'autre de la membrane pour éviter cet écoulement.

## 4) DISTRIBUTION STATIQUE DES FLUIDES.

L'eau dans un sol non saturé possède donc, comme nous l'avons vu auparavant, un certain état d'énergie, que nous appellerons "potentiel capillaire", en négligeant les autres



états d'énergie dus à l'osmose et à l'adsorption, étant entendu que dans les phénomènes capillaires la pression capillaire, la courbure des ménisques et la pression de vapeur au niveau des ménisques sont intimement liés.

Buckingham le premier (1909) a senti que les phénomènes capillaires devaient obéir à une loi de potentiel. Démontrons l'existence de ce potentiel.

Si l'on exprime la pression capillaire en terme de hauteur d'eau, on sait que

$$z = \frac{P_0 - P_{eau}}{\rho g} = \frac{2\gamma}{\rho g r} \quad (1.8a)$$

On a longtemps schématisé les sols comme formés de tube capillaire de rayon  $r$  (nous reviendrons d'ailleurs sur cette schématisation), et on a écrit que la relation (1.8a) revenait à dire que, comme dans les tubes capillaires, l'eau devait s'élever de  $z$  dans le tube pour que l'équilibre du ménisque soit obtenu.

Cet état d'esprit est naturellement incorrect puisque

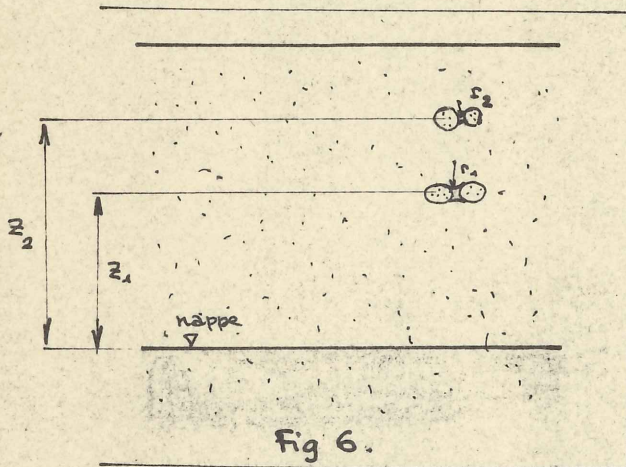


Fig 6.

le sol n'est pas formé de canaux réguliers mais d'espaces interconnectés absolument irréguliers, et il faut raisonner sur le rayon de courbure des ménisques et non sur le rayon des pores (on se demande d'ailleurs de quel rayon on pourrait parler). On peut alors dire que la relation (1.8a) revient à :

l'eau s'élève dans les sols au dessus d'une nappe de la côte  $z$  jusqu'à cette côte le rayon



de courbure des ménisques entre les grains soit lié à  $z$  par la formule (1.8a). Ceci suppose naturellement la continuité de la phase eau. Si donc on considère deux côtes  $z_1$  et  $z_2$  au dessus d'une nappe, telle que  $z_1 < z_2$  le rayon de courbure  $r_1$  des ménisques à la côte  $z_1$  sera plus grand que  $r_2$ , à la côte  $z_2$  donc la teneur en eau  $\theta_1$  sera plus grande à la côte  $z_1$  qu'à la côte  $z_2$ .

De plus, on a

$$\begin{aligned} z_1 \cdot \rho g &= p_0 - P_1 && (P_i = \text{pression dans} \\ &&& \text{l'eau à la côte } z_i) \\ z_2 \cdot \rho g &= p_0 - P_2 \end{aligned}$$

puisque l'air est à pression atmosphérique  $p_0$ , d'où

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} = \frac{p_0}{\rho g} \quad (1.12)$$

(1.12) montre que la dépression dans l'eau et la côte seront liée par une relation identique à celle que l'on trouve dans l'hydrodynamique classique : charge constante.

L'énergie potentielle de l'eau du sol par unité de masse de fluide sera donc  $z + \frac{P}{\rho g}$ , où  $P$  est la dépression de l'eau ( $P < 0$ ), et, si l'on raisonne en terme de suction on sait que :

$$\frac{P}{\rho g} = - \frac{P_c}{\rho g} = \psi$$

Le potentiel total de l'eau du sol peut donc être considéré comme formé par

$\psi$	potentiel capillaire
$z$	composante gravitaire

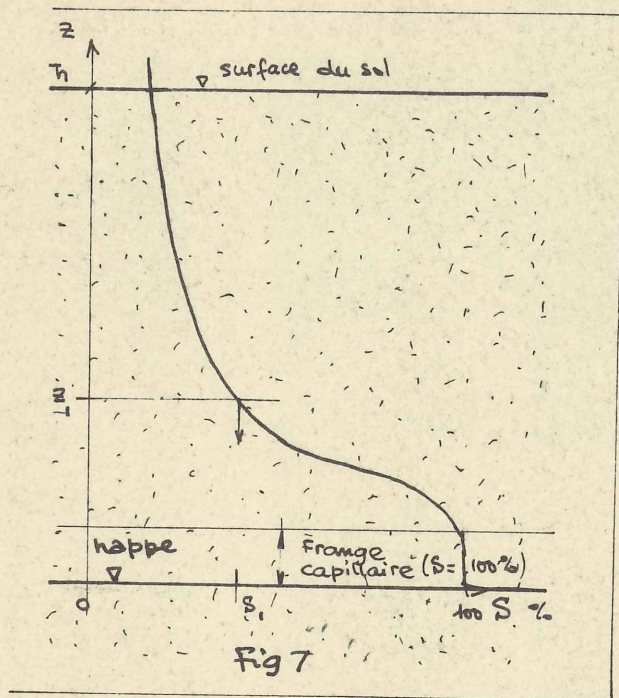
et

$$\boxed{\Phi = \psi + z} \quad (1.13)$$

où  $\psi$ , qui exprime l'état d'énergie de l'eau, est négligé et  $z$  est la côte au dessus d'une surface à pression capillaire nulle (nappe phréatique).



Si donc on considère une couche de sol au dessus d'une



nappe d'eau, il faudra qu'à la côte  $z_1$  au dessus de la nappe (à la côte  $z=0$ ), la dépression dans l'eau soit telle que :

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} = z_0 + \frac{P_0}{\rho g}$$

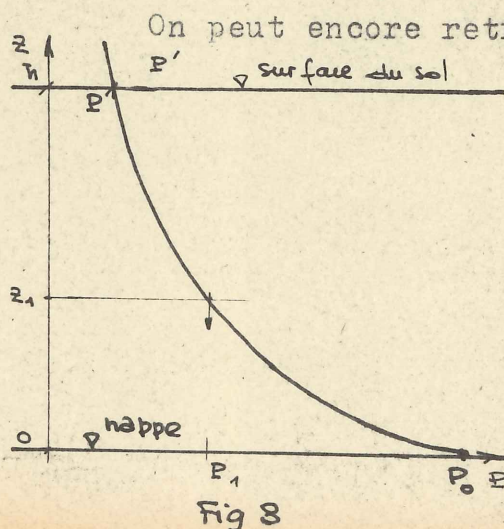
Soit

$$z_1 = - \frac{P_1}{\rho g} = - \psi_1$$

Donc en chaque point, la pression capillaire dans le sol à l'équilibre sera donnée par

$$z = \frac{P_c}{\rho g} \quad (1.13)$$

Connaissant la relation pression capillaire-degré de saturation en eau, on aura donc la teneur en eau à chaque côte à l'équilibre, donc à la surface  $h$ . Si la teneur en eau réelle à la surface du sol est supérieure à la teneur en eau calculée, il y aura condensation et la nappe remontera jusqu'à égalité entre les deux teneurs en eau. Si la teneur en eau réelle à la surface du sol est inférieure à la teneur en eau calculée, il y aura évaporation et la nappe descendra jusqu'à égalité entre les deux teneurs en eau.



On peut encore retrouver ce résultat d'une façon

simple en considérant les relations de pression de vapeur.

On sait que la variation de la pression de vapeur avec la côte est :

$$P = P_0 \exp \left[ \frac{-g z}{RT} \right] \quad (1.14)$$



ou  $P_0$  = pression de vapeur saturante à la cote  $z_0 = 0$   
 $P$  = pression de vapeur saturante à la cote  $z$

A la cote  $z_1$ , la pression de vapeur saturante dans le sol doit donc être donnée par  $P_1 = \exp[-gz_1/RT]$  et, en vertu de ce que nous avons vu au paragraphe 3.2, il y aura diffusion de pression de vapeur de la cote  $z_0 = 0$  à la cote  $z_1$ , avec distillation en  $z_0 = 0$  et condensation à la cote  $z_1$  jusqu'à ce que la pression de vapeur au niveau du ménisque formé par cette condensation soit égale à la pression de vapeur dans le gaz à la cote  $z_1$

$$P_0 \exp[-gz_1/RT] = P_0 \exp[g\psi_1/RT]$$

Soit  $\psi_1 = -z_1$

d'où la pression capillaire  $P_c = -\psi_1$  à la cote  $z_1$ , le rayon des ménisques  $r_1$  et le degré de saturation  $S_1$  d'après la loi  $P_c(S)$

Soit  $P$  la pression de vapeur dans le sol à la cote  $z = h$  donné par (1.14) et  $P'$  la pression de vapeur dans l'air à la cote  $z = h$  (surface du sol).

- . Si  $P = P'$ , équilibre de la nappe, et teneur en eau dans le sol donné par la loi  $P_c(S)$ , ou  $z(S)$ .
- . Si  $P > P'$  évaporation de la nappe jusqu'à ce que  $P = P'$ .  
Donc la nappe descend.
- . Si  $P < P'$  condensation, jusqu'à ce que  $P = P'$ , et la nappe remonte.

On peut enfin envisager le cas de sols hétérogènes : si on a, par exemple, deux sols A et B séparés par une frontière horizontale bien définie à la cote  $z_1$  et avec des courbes  $P_{cA}(S)$  et  $P_{cB}(S)$  connues, d'après (1.13), à chaque

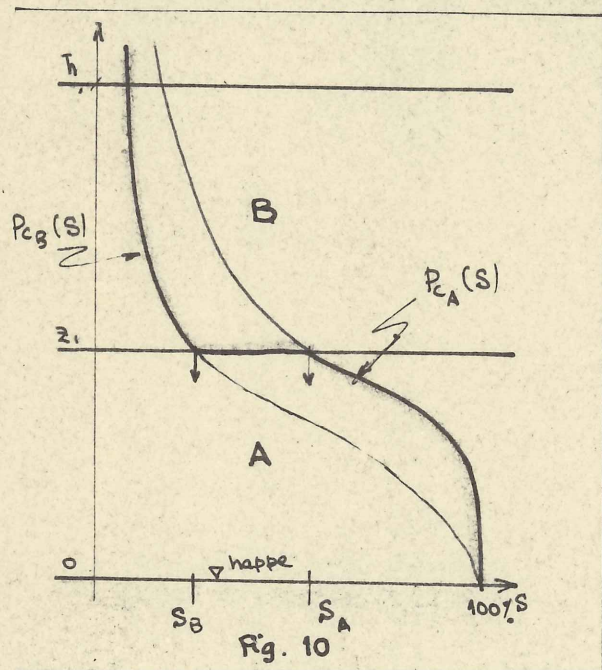


côte  $z$ , la pression capillaire sera donnée par  $z = \frac{p_c}{\rho g}$   
 Notamment à la côte  $z_1$ , on aura :

- pour le sol A  $z_1 = \frac{p_{cA}}{\rho g}$

- pour le sol B  $z_1 = \frac{p_{cB}}{\rho g}$

Donc à la surface de séparation des sols  $p_{cA} = p_{cB}$



Si l'on regarde les courbes  $p_{cA}(S)$  et  $p_{cB}(S)$  on aura donc à la zone de séparation une discontinuité de degré de saturation en eau :  $S_A - S_B$

La relation  $p_{cA} = p_{cB}$  peut d'ailleurs être simplement obtenue en considérant la continuité des deux phases.

Soit  $h$  la côte de la surface libre, si l'on trace  $p_c/\rho g$  pour chaque sol, on aura la variation de degré de saturation en eau avec la côte dans le sol A, pour  $0 < z < z_1$ ,

en appliquant la courbe  $p_{cA}/\rho g = f(S)$ , et de même dans le sol B, pour  $z > z_1$ , en utilisant  $p_{cB}/\rho g = f(S)$

D'où la loi  $S(z)$  en trait plein sur la figure 10

On peut appliquer ce processus au cas de plusieurs couches horizontales hétérogènes (COLLINS, 1961).

Notons pour terminer que, dans toute cette partie, nous n'avons pas utilisé les modèles capillaires. Durant une



longue période, un rapprochement assez néfaste a été fait entre les écoulements dans les tubes capillaires et les écoulements "capillaires" dans les sols non saturés. On a pour cette raison essayé de construire des modèles capillaires plus ou moins complexes (tubes parallèles, tubes parallèles connectés, tubes tronconiques, etc....) pour essayer de représenter le sol comme un assemblage de capillaires et d'obtenir les lois de l'écoulement, par généralisation des lois de Poiseuille (voir SCHILTER, BUCKINGHAM, ADZUMI, CHILD and COLLIS-GEORGE, FLOOD ...) Les principales objections que l'on puisse faire à ces modèles sont relatives à la non représentativité des écoulements, et surtout à la non-similitude entre modèles capillaires et sol. Comment peut on parler de rayon de pores ? De plus, ces modèles ne permettent pas de tenir compte des phénomènes d'hystéresis. (PHILIP, 1958)

On peut enfin nous objecter de n'avoir considéré que le potentiel capillaire dans l'état d'énergie de l'eau retenue dans les sols non saturés. Les forces d'adsorption ne sont prédominantes qu'aux très faibles saturations, où la continuité des phases n'est en général plus assurée (PHILIP, 1958), et le potentiel osmotique, s'il existe, est très difficilement mesurable (LOW & DE MING, 1953).

C'est pourquoi nous confondrons potentiel total de l'eau retenue et potentiel capillaire.



## BIBLIOGRAPHIE

---

### a) Ouvrages de bases -

- M. BORELI - 1961 - Cours d'Écoulement biphasique - 3e Cycle d'Hydrodynamique Supérieure - Grenoble -
- A.T. COREY - 1959 - Fluid Mechanics of Porous Solids - Course Outline-Colorado State University - Dept. of Civil Engineering.
- COLLINS - 1961 - Flow of Fluids through Porous Materials Reinhold Chemical Eng. - New-York.
- GARDNER - 1961 - Les relations entre le sol et l'eau dans les climats arides et semi-arides. Recherches sur la zone aride. Compte-rendu de recherches de l'UNESCO.
- MILLER & MILLER R.D. - 1955 - Physical theory for capillary flow phenomena - Journal of Applied Physics, vol. 27, p. 324-332.
- PHILIP J.R. - 1958 - Physics of Water Movement in Porous Solid Highway Res. Board, Spec. Rep. 40, p. 147-163.
- M.L. SANTON - Cours de Physique des Sols - 3e Cycle d'Hydrodynamique supérieure - Grenoble.
- SCHEIDEGGER A.E. - 1957 - The Physics of Flow through Porous Media - Macmillan Co, New-York.

### b) Ouvrages annexes -

- ADZUMI - 1937 - On the flow in Gases through a Porous wall. Bull. Chem. Japan, n° 12, p. 304-312.
- BUCKINGHAM - 1939 - Studies on the movement of Soil Moisture - US. Department Agr. Bureau, Soils Bull. n° 38.

.../...



CAMPBELL - RICHARDS - 1960 - Some Moisture and Salinity Relationships in Peat Soils.  
Agron. Journ. Vol 42 - P. 582-585.

CHILD - COLLIS GEORGE - 1950 - The Permeability of Porous Materials - Proc. Roy Soc London 201 A.  
p. 392 - 405.

LOW - DEMING - 1953 - Movement and Equilibrium of water in heterogeneous Systems with reference to soils.  
Soil Sci. vol. 75 - p. 187-202.

L.A. RICHARDS - 1931 - Capillary conduction of liquids through Porous media - Physics, vol. 1 - p. 318.



## II. EQUATION DU MOUVEMENT DE L'EAU DANS LES SOLS NON SATURES

---

A la suite de ce premier chapitre, reprenons la comparaison entre sols saturés et sols non saturés. Nous savons que :

- dans les sols saturés, l'eau occupe tous les pores, et si l'on applique une différence de potentiel entre les deux faces d'un échantillon saturé (différence de côte) l'eau s'écoule dans le sol selon une loi bien connue, la loi de Darcy.
- dans les sols non saturés, l'eau occupe une partie des pores, et il existe dans ces pores des interactions entre l'eau et l'air, interactions qui se résument ainsi : l'eau dans le sol est en depression par rapport à la pression atmosphérique, et elle est soumise à un potentiel total donné par :

$$\Phi = \psi + z$$

- où  $\psi$  est la succion en cm ( $\psi$  est négatif) (potentiel capillaire )  
 $z$  est la côte au-dessus d'un plan de référence (potentiel gravitaire).

Comme on sait par intuition que, dans les sols, l'eau s'écoule des zones les plus humides (potentiel capillaire très faible) aux zones les plus sèches (potentiel capillaire fort), de nombreux chercheurs ont été tentés de faire un rapprochement entre les écoulements en milieux poreux saturés, et les écoulements en milieux poreux non saturés, essayant de voir si ces deux phénomènes ne pouvaient pas répondre à un même type de loi.



Nous allons donc rechercher s'il existe une équation similaire à la loi de Darcy, qui permette de relier les débits aux forces motrices dans les sols non saturés, puis, en ajoutant l'équation de conservation de la matière, nous essayerons d'obtenir une équation générale du mouvement de l'eau, soit sous des conditions isothermes, soit sous un champ thermique.

### 1) LOI DE DARCY - SOLS SATURÉS -

Si l'on considère un sol saturé où règne un écoulement de charge sous l'influence d'un gradient  $\nabla \bar{\Phi}$ , la loi de Darcy exprime que la quantité d'eau qui s'écoule dans l'unité de temps à travers l'unité de surface du matériau est reliée au gradient de charge par une constante caractéristique du matériau ou du couple fluide - matériau.

Cette loi peut s'écrire :

$$q = - \frac{\kappa \rho g}{\mu} \text{ grad } \bar{\Phi}$$

ou

$$q = - \kappa' \text{ grad } \bar{\Phi} \quad (2.1)$$

avec  $q$  = volume d'eau traversant l'unité d'aire normale à la direction de l'écoulement pendant l'unité de temps - en  $\text{cm}^3/\text{cm}^2 \times \text{sec} = \text{cm}/\text{sec}$ .

$\bar{\Phi}$  = charge =  $\frac{P}{\rho g} + z$ , où  $P$  est la pression dans le liquide,  $\rho$  la masse spécifique du fluide et  $z$  la cote au dessus d'un plan de référence - en cm

$\mu$  = viscosité dynamique du liquide - en poises

et  $\kappa$  = coefficient de perméabilité du milieu, en Darcy\* ou  $\text{cm}^2$

$\kappa' = \frac{\kappa \rho g}{\mu}$  = coefficient de conductivité, en cm/sec.

Ainsi, sous la première forme, le coefficient de proportionnalité entre débit et force motrice :  $\kappa$ , est une cons-

\* 1 Darcy =  $\frac{1 \text{ cm}^3/\text{sec} \times 1 \text{ CP}}{1 \text{ cm}^2 \times 1 \text{ atm}/\text{cm}}$



tante du milieu, indépendante de la nature du fluide, alors que, sous la seconde forme,  $K'$  est une constante du couple "fluide-milieu", pour un fluide donné (JACOB, 1946).

Cette équation est très utilisée sous les deux formes ; les Anglo-Saxons utilisent surtout la première forme, alors que nous n'utilisons que la seconde. Mais il apparaît que  $K$ , pour un même milieu varie selon la nature des phases. KLINKENBERG (1941), a montré que la valeur de  $K$  obtenue dans un milieu donné pour l'écoulement d'un gaz est invariablement supérieure à celle obtenue pour l'écoulement d'un liquide. Même dans les liquides, la valeur trouvée pour l'eau est plus faible que celle obtenue avec des hydrocarbures.

Pour cette raison, et pour ne pas avoir à introduire la viscosité dans nos formules, nous adopterons la 2<sup>o</sup> forme de la loi de Darcy :

$$q = -K' \text{ grad } \bar{\Phi} \quad (2.2.)$$

et, comme on ne considère que des écoulements d'eau dans les sols saturés, nous appellerons  $K'$  la conductivité hydraulique.

Ceci se limite naturellement, selon nos hypothèses de bases, aux milieux isotropes.

## 2) LOI DE DARCY GENERALISEE - SOLS NON SATURES -

Cette loi a été étendue au cas des sols non saturés en remplaçant la notion de charge hydraulique par celle de potentiel capillaire, pour tenir compte des interactions eau-air, et en tenant compte de la variation de teneur en eau, se traduisant par une variation de la conductivité.



Si l'on considère en effet le processus de désaturation d'un sol, en introduisant la teneur en eau volumique (chap. I),  $\theta$ , volume d'eau par volume de sol, la section de passage de l'écoulement de liquide diminue fortement à mesure que  $\theta$  diminue, car les gros pores se vident les premiers et, aux faibles teneurs en eau, il ne reste de l'eau que dans les interstices très fins. D'où l'idée de RICHARDS (1931) d'écrire que dans un milieu non saturé, les conditions d'écoulements seraient les mêmes que dans un milieu saturé, en remplaçant les bulles d'air par des grains de sables.

RICHARDS suppose alors qu'il y a proportionnalité entre le débit liquide et le gradient de potentiel capillaire, le facteur de proportionnalité étant la conductivité capillaire  $k'$ , analogue à la conductivité hydraulique, mais fonction de la teneur en eau, donc de la pression capillaire. Comme la loi  $p_c(\theta)$  est une fonction hystéresis, il s'en suit que  $k'(p_c)$  doit être également une fonction hystéresis de même que  $k'(S)$ .

$k'$  est donc la caractéristique des sols non saturés exprimant avec quelle facilité se fait l'écoulement de l'eau sous un certain gradient de potentiel capillaire.

Ceci suppose naturellement que la continuité des phases est assurée (hypothèse de base), et la loi de Darcy généralisée s'exprime sous la forme :

$$q = -k' \text{ grad } \Phi \quad (2.3)$$

où  $q$  = débit d'eau par unité d'aire normale à la direction d'écoulement et par unité de temps (cm/sec)

$k'$  = conductivité capillaire (cm/sec)



$$\begin{aligned} \phi &= \text{potentiel total de l'eau du sol} \\ &= \psi + z \quad \text{où } \psi = \text{potentiel capillaire (suction)} \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad z = \text{potentiel gravitaire (côte)} \end{aligned}$$

Cette équation de Darcy généralisée, suggérée par RICHARDS en 1931, n'a en fait été vérifiée expérimentalement qu'en 1950 par CHILD and COLLIS-GEORGE sur un grand nombre de matériau graveleux. Elle sera l'équation de base de toute notre étude, et on voit l'analogie qui existe entre (2.3) et (2.2).

Les différences essentielles entre ces deux équations sont que  $k'$  varie avec la teneur en eau alors que  $k'$  est une constante, et surtout que  $\phi$  tient compte de l'énergie propre de l'eau, exprimée sous la forme de la dépression de l'eau par rapport à la pression atmosphérique, alors que, dans  $\bar{\phi}$ , l'eau est énergiquement libre. On pourrait faire entrer dans  $\phi$  d'autres composantes, telles que composantes d'adsorption, d'osmose, etc...., mais ces composantes sont encore mal connues.

Pour obtenir l'équation du mouvement de l'eau dans les sols non saturés, il suffit d'ajouter à la loi de Darcy généralisée l'équation de conservation de la matière.

Pour ceci, nous prendrons la teneur en eau en terme volumique

$$\theta = \frac{\text{volume eau}}{\text{volume total sol}} = \frac{\text{volume eau}}{\text{volume sol} + \text{gaz} + \text{liquide}}$$

On voit aisément que  $\theta$  est toujours inférieur à l'unité et, pour la saturation en eau, il sera égal à la porosité, constante du milieu si le sol est incompressible.



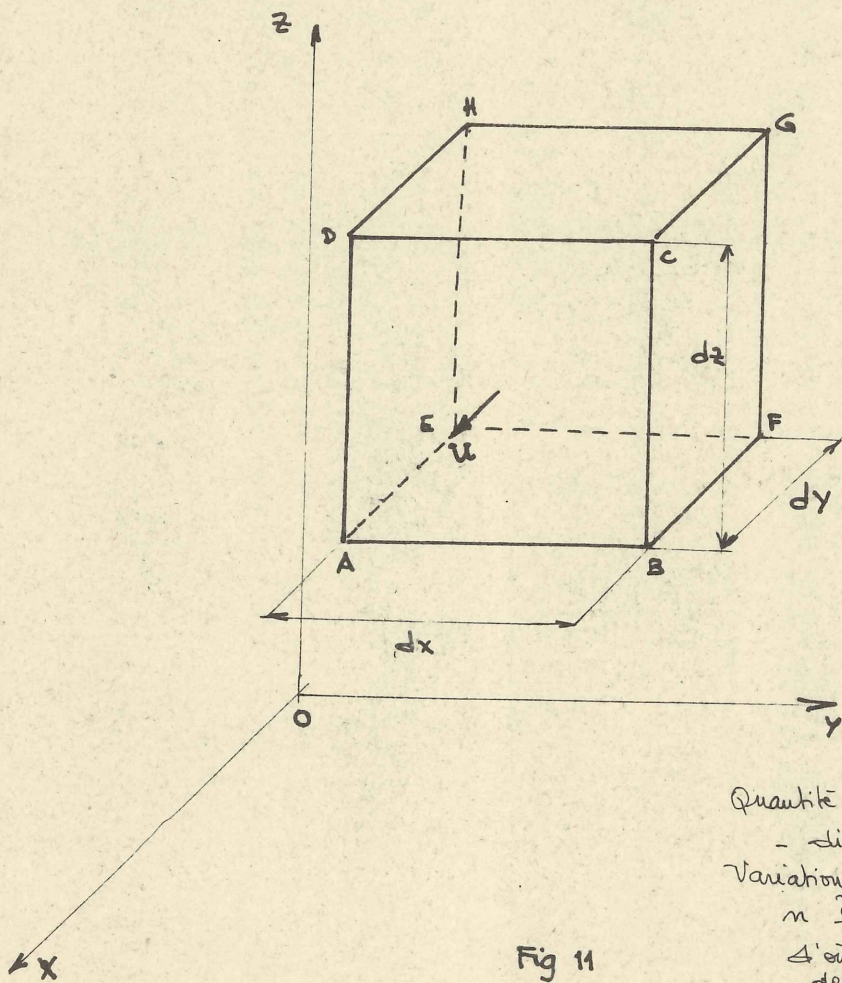
Entre le degré de saturation en eau  $S$  et la teneur en eau  $\theta$  on a :

$$\theta = S \cdot n \quad (2.4)$$

Si l'on considère un cube élémentaire  $dx, dy, dz$  (fig) il faut que la quantité d'eau sortant du cube pendant un temps  $dt$  soit égale à la variation de masse du fluide, soit :

$$- \operatorname{div} \rho q \cdot dx dy dz dt = n \frac{\partial \rho S}{\partial t} dx dy dz dt$$

d'où 
$$n \frac{d\rho S}{dt} = - \operatorname{div} \rho q$$



Soit  $u$  la composante de la vitesse sur  $x$

- Projection sur  $ox$
- quantité de fluide entrée par EFGH pendant  $dt$  :  $\rho u dy dz dt$
- quantité de fluide sorti par ABCD pendant  $dt$  :  $(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx) dy dz dt$
- quantité de fluide sorti du cube pendant  $dt$  (proj. sur  $ox$ ) :  $\frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz dt$

De même en projetant sur les autres axes

Quantité totale sorti du cube pendant  $dt$  :

-  $\operatorname{div} \rho q dx dy dz dt$   
 Variation de masse de fluide dans le cube  
 $n \frac{\partial \rho S}{\partial t} dx dy dz dt$   
 d'où l'équation  

$$n \frac{d\rho S}{dt} = - \operatorname{div} \rho q$$

Fig 11



Pour un liquide incompressible (eau), on obtient, avec  $\rho = 1g/cm^3$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \operatorname{div} q \quad (2.5)$$

C'est à partir de ces 3 équations de base (2.3 ; 2.4 ; 2.5), et de la connaissance de la courbe  $P_c(S)$  que nous allons établir l'équation du mouvement de l'eau, en considérant d'abord un écoulement isotherme, où seule l'eau s'écoule, puis en se plaçant ensuite dans un champ thermique, ce qui produit un écoulement simultané d'eau et de vapeur d'eau.

### 3) EQUATION DU MOUVEMENT ISOTHERME DE L'EAU.

Le déplacement de l'eau des zones les plus humides aux zones les plus sèches sera dû à un gradient de potentiel capillaire, lié à un gradient de teneur en eau par la courbe  $P_c(S)$ , mais, dans un champ gravitaire, l'influence de ce gradient sera contrebalancée par le champ de forces extérieures.

En combinant les équations (2.3) et (2.5), on obtient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \operatorname{div} q = - \operatorname{div} (- k'(\theta) \operatorname{grad} \phi) \quad (2.6)$$

Si l'on exprime le potentiel total de l'eau du sol  $\phi$  sous la forme :

$$\phi = \psi + z \quad , \quad \begin{array}{l} \psi = \text{potentiel capillaire} \\ z = \text{potentiel gravitaire} \end{array}$$

(2.6) devient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div} [ k'(\theta) \operatorname{grad} (\psi + z) ] \quad (2.7)$$

Pour résoudre cette équation, on peut soit prendre  $\theta$  comme variable indépendante, puisque  $\psi = \psi(\theta)$ , soit prendre  $\psi$ . RICHARDS (1931) a tenté de résoudre (2.7) en choisissant  $\psi$ , mais il s'est avéré par la suite (CHILD and COLLIS-GEORGE 1950), KLUTE (1952) que le choix de  $\theta$  conduisant à un



raisonnement plus simple.

On peut écrire (2.7) sous la forme :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div} (k' \text{grad } \psi) + \frac{\partial k'}{\partial z} \quad (2.8)$$

où  $\psi$  et  $k'$  sont des fonctions de  $\theta$  seul.

Introduisons une nouvelle variable  $D$  comme :

$$D = k' \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (2.9)$$

Alors (2.7) devient

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div} (D \text{grad } \theta) + \frac{\partial k'}{\partial z} \quad (2.10)$$

Le premier terme de cette équation est l'analogie de l'équation de diffusion étudiée par Crank (1960) et c'est pour cette raison qu'on a appelé  $D$  coefficient de diffusivité (Child and Collis - 1950, Klute 1952).  $D$  est une fonction de  $\theta$ , mais l'emploi du terme "coefficient de diffusivité" ne doit pas prêter à confusion avec le terme "diffusion", qui signifie un transport moléculaire en réponse à un gradient de concentration (Corey 1959). L'écoulement du fluide n'est pas lié à un gradient de concentration, mais à un gradient de potentiel de la phase fluide, alors que, pour un écoulement avec gradient de température, nous verrons que l'écoulement de la vapeur d'eau est réellement un écoulement par diffusion.

$$\text{On a : } D = k' \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

et l'on sait que quand  $\theta$  diminue

$k'$  décroît très rapidement

$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$  croît assez remarquablement.



Il en ressort donc que  $D$  tend à diminuer, mais pas si rapidement que  $k'$ . Des fonctions typiques ont été données par Klute (1952), Philip (1955, 1957), Gardner (1958), et il semble qu'on puisse, avec une bonne approximation, admettre une loi de la forme :

$$D = D_0 e^{\beta(\theta - \theta_0)}$$

où  $D_0$  est la diffusivité pour la teneur en eau de saturation.

Les valeurs maximales de  $D$  peuvent varier de  $10^2$   $\text{cm}^2/\text{sec}$  pour des sols sableux à  $10^{-2}$   $\text{cm}^2/\text{sec}$  ou moins pour des sols fins.

Nous étudierons dans un chapitre suivant les méthodes permettant de résoudre l'équation de l'écoulement, ainsi que les principales solutions connues de cette équation.

#### 4) Mouvement de l'eau dans un champ thermique.

Dans les conditions isothermiques, la théorie de la circulation de l'eau est assez bien connue quand on sait résoudre l'équation (2.10), et le gradient de pression de vapeur est d'ordinaire insuffisant pour provoquer un mouvement important de vapeur d'eau. Comme la pression de vapeur réagit fortement aux variations de température, s'il existe un champ thermique dans un sol non saturé, les gradients thermiques même relativement faibles peuvent déterminer des forts gradients de pression de vapeur d'eau dans le sol et un écoulement de vapeur d'eau par diffusion = transport moléculaire lié à un gradient de concentration.

On est alors en présence d'un système rempli par deux phases : l'eau, et la vapeur d'eau, qui ne sont pas in-



dépendantes l'une de l'autre, car la tension de vapeur d'eau  $P$  et la succion  $\Psi$  ( $\Psi = -\frac{P_e}{\rho g}$ ) sont reliées par :

$$H = \frac{P}{P_0} = e^{-\frac{\Psi g M}{RT}} \quad (2.13)$$

où  $P_0$  = tension de vapeur d'eau saturante à la température absolue  $T_0$  ( $^{\circ}K$ )

$P$  = tension de vapeur d'eau à la température absolue  $T$

$R$  = constante universelle des gaz =  $8,315 \cdot 10^{-7}$  erg/mole  $^{\circ}C$

$M$  = masse moléculaire de l'eau = 18 g/mole

$H$  = humidité relative (%)

(Equation de KELVIN, voir p. I, 15 (I.II.b)).

On aura donc à tenir compte d'une part d'un mouvement de la phase vapeur sous diffusion, d'autre part d'un mouvement de la phase liquide, mouvement laminaire, mais qui sera influencé par le gradient de température, puisque  $\Psi = \Psi(\theta, T)$

Etudions d'abord le mouvement de liquide. Pour tenir compte à la fois du gradient de succion et du gradient de température, l'équation (2.11) a été modifiée par Philip et de Vries (1957), pour être écrite sous la forme :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div} (D_{\theta liq} \text{grad} \theta) + \text{div} (D_{T liq} \text{grad} T) + \frac{\partial k'}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (2.14)$$

où  $D_{\theta liq} = k' \frac{d\Psi}{d\theta}$  est la diffusivité isotherme de l'eau, définie par (2.9)

$D_{T liq} = k' \frac{d\Psi}{dT}$  (2.15) est la diffusivité thermique de l'eau

Ceci revient donc en fait, puisque  $\frac{\partial \theta}{\partial z} = -\text{div} q$ , à considérer que le débit total de liquide est obtenu en faisant la somme de 3 composantes :



- l'une due au gradient de teneur en eau :  $q_{\theta} = - D_{\theta liq} \text{ grad } \theta$
- l'autre due au gradient de température :  $q_T = - D_{T liq} \text{ grad } T$
- la 3e due à la gravité :  $q_z = - k' \text{ grad } z$

Nous avons étudié la variation de  $D_{\theta liq}(\theta)$  au paragraphe précédent. Il est difficile d'obtenir la variation de  $D_{T liq}(\theta)$  car la valeur de  $\frac{\partial \psi}{\partial T}$  est mal connue près de la saturation.

Philip et de Vries (1957) ont trouvé que, sur un sable fin,  $D_{T liq}(\theta)$  présentait un pic près de la saturation, et que  $D_{T liq} = 0$  pour la teneur en eau de saturation et pour  $\theta$  très faible. Pour ce sable la valeur maximum de  $D_{T liq} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{sec} \cdot \text{C}$  (voir graphique p. II. 19).

Donc  $D_{T liq}$  est très petit devant  $D_{\theta liq}$ , et pratiquement on peut dire que les transferts en phase liquide sont exclusivement provoqués par les gradients de succion.

Nous pouvons signaler que  $D_{\theta liq}$  et  $D_{T liq}$  varient également avec  $T$ , mais cette variation est très lente, et on la néglige le plus souvent.

On peut traiter d'une façon analogue le mouvement de l'eau sous phase vapeur, en se rappelant que ce mouvement ne se fait plus sous une forme laminaire, mais par diffusion, et en signalant que les équations du mouvement sont très complexes et très mal connues. Cette étude a été faite par de nombreux chercheurs, Pennman, 1940, Krischer-Rohnater 1940 Van Bavel 1952, Rollins 1954, Habib-Soiero, 1957, en partant de l'équation classique de la diffusion de la vapeur d'eau, modifiée pour tenir compte de la porosité du milieu et du cheminement (loi de Fick) que l'on peut écrire sous la forme :

$$q_v = - \tau a D_{atm} \text{ grad } p \quad (2.15)$$



- où  $q_N$  = flux de matière par unité de surface pendant l'unité de temps ( $g \cdot cm^{-2} \cdot sec^{-1}$ )  
 $\tau$  = facteur de tortuosité du milieu  
 $D_{atm.}$  = coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air ( $cm^2/sec$ )  
 $a$  = contenu volumétrique d'air du milieu ;  $cm^3$  d'air par  $cm^3$  ( $a = \theta - n$ )  
 $\rho$  = masse spécifique de la vapeur d'eau. ( $g/cm^3$ )

Si l'on admet que la vapeur d'eau est un gaz parfait on a, en utilisant l'équation (2.13), qu'on peut aussi écrire

$$\rho = \rho_0 H \quad (\rho_0 = \text{masse spécifique vapeur d'eau saturée})$$

$$grad \rho = H grad \rho_0 + \rho_0 grad H \quad (2.16)$$

Philip et de Vries montrent que, pour une valeur constante de  $\theta$  on peut supposer, avec une bonne approximation que  $H$  est indépendant de  $T$ . Il en ressort donc que  $H = H(\theta)$  et  $\rho_0 = \rho_0(T)$ , soit  $grad \rho = H \cdot \frac{d\rho_0}{dT} grad T + \rho_0 \frac{dH}{d\theta} grad \theta$  (2.17)

d'où d'après (2.17):

$$\frac{q_{\text{vap}}}{\rho_w} = - D_{T \text{ vap}} grad T - D_{\theta \text{ vap}} grad \theta \quad (2.18)$$

où  $D_{T \text{ vap}}$  = coefficient de diffusivité de la phase vapeur sous l'action d'un gradient de température

$$D_{T \text{ vap}} = D_{atm.} \tau a \cdot H \cdot \frac{d\rho_0}{dT} \cdot \frac{1}{\rho_w} \quad (2.19)$$

$D_{\theta \text{ vap}}$  = coefficient de diffusivité de la phase vapeur sous l'action d'un gradient de teneur en eau

$$D_{\theta \text{ vap}} = D_{atm.} \tau a \rho_0 \cdot \frac{dH}{d\theta} \cdot \frac{1}{\rho_w} = \frac{D_{atm.} \tau a \rho_0}{\rho_w RT} \cdot \frac{dH}{d\theta}$$

On sépare donc ainsi le flux de vapeur en deux composantes, l'une due au gradient de température, l'autre au gradient de teneur en eau.



De nombreuses études expérimentales ont été effectuées par Gurr 1952, Taylor - Cavazza, 1954, Rollins 1954, Kuzmak-Sereda 1957, mais ces études montraient invariablement que le flux de vapeur obtenu était de 5 à 10 fois supérieur à celui prévu par cette théorie, avec de plus un décalage de la teneur en eau correspondant au flux maximum. Comme les deux facteurs affectant le flux de vapeur sont  $D_{\text{vap}}$ , dont l'évaluation donnée par Philip (1955) ne pose aucun problème et  $D_{\text{TVap}}$ , Philip et de Vries se sont penchés sur la détermination de ce coefficient qui, d'après la théorie précédente, doit être donnée par (2.19).

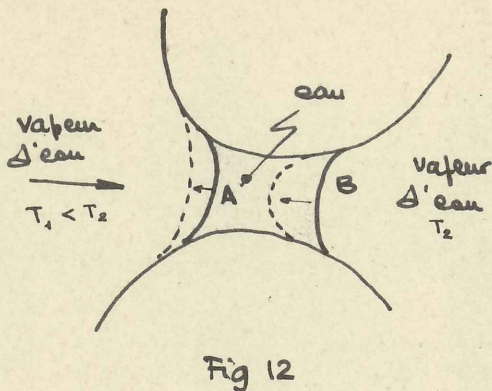
$$D_{\text{TVap}} = D_{\text{atm}} \tau \alpha H \frac{dp_0}{dT} \cdot \frac{1}{\rho_w}$$

Or cette théorie a été établie par Penmann en considérant la diffusion de  $\text{CS}_2$  et  $\text{CH}_3\text{COCH}_3$ , aucun de ces corps n'ayant d'interaction avec les phases liquides ou solides du milieu, et a été ensuite appliquée par Penmann and Schofield (1939), Philip (1953), Taylor Cavazza (1954), Rollins (1954) à l'équation de la vapeur d'eau sans tenir compte des interactions de la vapeur d'eau avec le liquide et le solide. D'où la différence entre les résultats expérimentaux et théoriques.

Considérant ce fait, Philip et de Vries (1957) ont émis une théorie tenant compte à la fois des interactions entre l'eau et la vapeur d'eau et des différences de gradients de température dans des pores remplis d'air et dans le milieu global, pour un milieu presque sec.

Envisageons donc un milieu si sec qu'il n'y ait plus de continuité de la phase liquide. Entre deux





grains de sol voisins il y aura, à l'équilibre, une goutte d'eau formant un "filot" avec égalité des rayons de courbure des 2 ménisques et, de chaque côté, de la vapeur d'eau. (fig 12)

Supposons qu'il existe un gradient de température entre les deux champs de vapeur d'eau ; il y aura production d'un flux de vapeur dans le sens de la

flèche, avec condensation en A, évaporation en B, donc augmentation de la courbure en B, diminution en A. Ceci continue jusqu'à ce que l'écoulement capillaire dû aux différences de courbure dans l'filot égalise le débit d'évaporation en B et de condensation en A. Les ménisques prennent alors la position finale marquée sur la figure en pointillés. Notons que dans la théorie classique, on considère cet filot comme un obstacle bloquant l'écoulement de la vapeur d'eau.

On peut donc regarder le transfert d'humidité sous des gradients de température dans ces milieux presque secs comme un processus d'écoulement parallèle dans des régions de vapeur et de liquide, l'écoulement de vapeur étant déterminé par le gradient de pression de vapeur dans les pores pleins d'air, alors que l'écoulement de liquide dans les flots doit être égal au flux de vapeur.

Pour faire une analyse détaillée de ce phénomène, il faudrait connaître les champs de températures et de <sup>pressions de</sup> vapeur dans tous les pores pleins d'air. Au lieu de cela, nous allons faire une hypothèse simplificatrice en considérant un gradient moyen de température pour tous les pores pleins d'air. Le flux de matière de vapeur dû à ce gradient moyen dans un pore plein d'air peut s'écrire :

$$q_{\text{vap}} = - D_{\text{atm}} \cdot H \frac{dp_0}{dT} (\text{grad } T)_a \quad (2.20)$$



obtenu à partir de (2.18) et (2.19) en remplaçant  $a\tau$  par 1 (on a un pore plein d'air  $\rightarrow a = 1$  et  $\tau = 1$ ). Ceci donne aussi le flux moyen de matière à travers tous les pores pleins d'air si  $(\text{grad } T)_a$  est le gradient moyen de température dans les pores, qui peut être de l'ordre de 2 fois supérieur au gradient de la température dans le milieu global.

Puisque la section totale d'écoulement est égale à celle occupée par l'air et l'eau, et comme nous avons vu que le flux moyen de matière dans les flots liquides est égal au flux dans les pores pleins d'air, le flux total de matière dû au gradient de température peut s'écrire :

$$\frac{q_{\text{tot}}}{\rho_w} = -(a+\theta) D_{\text{atm}} \frac{H}{\rho_w} \frac{dp_0}{dT} (\text{grad } T)_a = -D'_{\text{tvap}} \text{grad } T \quad (2.21)$$

où  $D'_{\text{tvap}}$  désigne la valeur de la diffusivité de vapeur du aux gradients thermiques dans cette théorie révisée.

Le rapport  $\gamma$  entre le transfert de vapeur donné par cette théorie est celui donné par la théorie primitive vaut donc :

$$\gamma = \frac{a+\theta}{\tau a} \cdot \frac{(\text{grad } T)_a}{\text{grad } T} \quad (2.22)$$

et, pour les milieux pratiquement secs, ce rapport vaut environ 5. Si bien qu'il recouvre l'écart qui existait avant cette théorie entre le flux de vapeur mesuré et le flux obtenu théoriquement.

De Vries (1952), donne une méthode de calcul du rapport  $(\text{grad } T)_a / \text{grad } T$  ainsi qu'une table permettant d'obtenir ce rapport en fonction de  $\gamma$  et de  $a+\theta$

Lorsque le milieu s'humidifie, cette théorie n'est plus valable, mais on montre que le flux de transfert de va-



peur est négligeable devant le flux de liquide.

Cette analyse a permis de confirmer les résultats obtenus expérimentalement et, en appliquant cette nouvelle théorie, on peut donc connaître le flux de vapeur dû à des gradients de température.

L'équation (2.14) permet donc de calculer le débit de liquide dans un milieu soumis à un champ thermique, l'équation (2.18), corrigée par (2.22), le flux de matière de vapeur; en les ajoutant on obtient donc le flux total de matière par

$$\frac{q}{\rho_w} = - D_\theta \text{grad} \theta - D_T \text{grad} T - k' i \quad (2.23)$$

où  $i$  est le vecteur unitaire dans la direction  $z$ , avec

$$\begin{aligned} q &= q_{\text{vat}} + q_{\text{liq}} \\ D_\theta &= D_{\theta \text{liq}} + D_{\theta \text{vat}} \\ D_T &= D_{T \text{liq}} + D'_{T \text{vat}} = D_{T \text{liq}} + \eta D_{T \text{vat}} \end{aligned} \quad (2.24)$$

ou, si l'on veut la teneur en eau, avec  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \text{div} q$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div} (D_\theta \text{grad} \theta) + \text{div} (D_T \text{grad} T) + \frac{dk'}{dt} \quad (2.25)$$

Les équations (2.23), (2.24) et (2.25) peuvent être considérée comme les équations générales du mouvement de l'eau dans un milieu non saturé, isotherme ou non.

Philip et de Vries ont calculé pour une argile connue (Yolo Clay), sur les bases des résultats de Moore (1939) donnant  $\Psi(\theta)$  et  $k'(\theta)$ , les valeurs de  $D_{T \text{liq}}$ ,  $D_{T \text{vat}}$ ,  $D'_{T \text{vat}}$ ,  $D_T$  en prenant comme variable  $\tau = 2/3$  (Penmann),  $D_{\text{atm}} = 0,274 \text{ cm}^2/\text{sec}$  à  $20^\circ\text{C}$ ,  $\rho_0 = 1,73 \cdot 10^{-5} \text{ g/cm}^3$  à  $20^\circ\text{C}$ ,  $\rho_w = 1 \text{ g/cm}^3$ .



et ils ont obtenu la courbe donnée page II.19

On voit sur ce graphique la différence entre le  $D_{Tvat}$  donné par l'ancienne théorie et le  $D'_{Tvat}$  donné par la nouvelle théorie. On remarquera également la valeur très faible de  $D_T$ , dont le maximum vaut environ

$$27. 10^{-8} \text{ cm}^3 / \text{sec} / ^\circ \text{C}$$

alors que, pour le même sol,  $D_{\theta \text{ liq max}} = 10^{-2} \text{ cm}^2 / \text{sec}$ . (voir également le graphique en page II.19). Les mouvements dus aux gradients de températures seront donc toujours très faibles devant les mouvements dus aux gradients de potentiel capillaire.

#### 5) CONCLUSION -

On peut donc ramener le mouvement de l'eau dans les sols non saturés à une équation semblable à l'équation de diffusion et donnée par :

$$\frac{q}{\rho_w} = - D_\theta \text{ grad } \theta - D_T \text{ grad } T - k' i \quad (2.23)$$

avec  $q = q_{vat} + q_{\theta i}$  (flux de matière)

Cependant, dans la majorité des problèmes d'écoulements en milieu non saturé sous nos climats, les gradients de températures ne sont pas suffisamment forts pour influencer sur l'écoulement (alors qu'ils sont prépondérants sous les climats désertiques). D'autre part, sous cette forme cette équation est difficile à intégrer, et l'on a surtout étudié le cas d'un écoulement isotherme et unidimensionnel, c'est à dire que si l'on passe en

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = - \text{div } q$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial k'}{\partial z}$$

l'équation (2.25) devient pour un écoulement vertical (2.10)



$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)}$$
 pour un écoulement horizontal (2.26)

où  $D(\theta)$  est le coefficient de diffusivité isotherme de l'eau donné par :

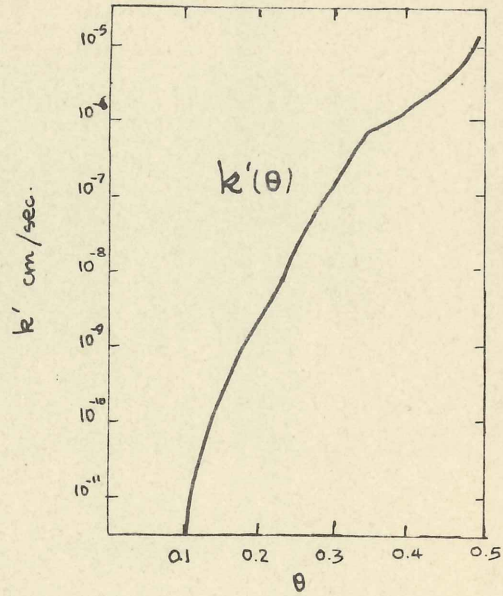
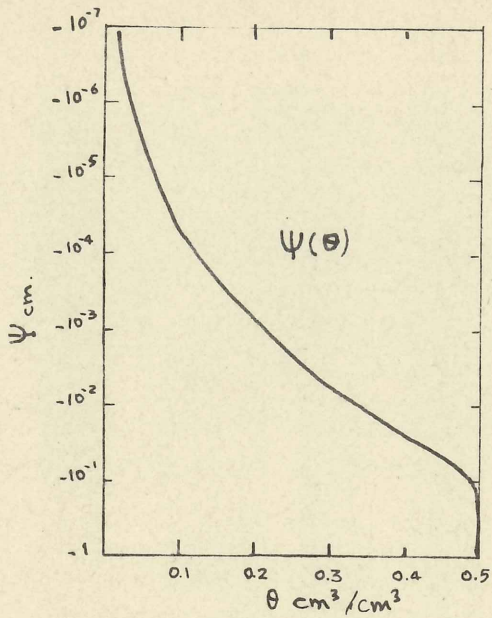
$$D(\theta) = k' \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

Pour connaître  $D(\theta)$  il est donc nécessaire d'avoir  $k'(\theta)$ . Nous allons étudier quelles sont les méthodes de mesure de la conductivité capillaire, et, par là-même, de la diffusivité, puis, à l'aide de ces données nous verrons quels sont les moyens de résolutions de l'équation du mouvement de l'eau dans des sols non saturés, sous la forme (2.26) et (2.10), en fonction des données aux limites.



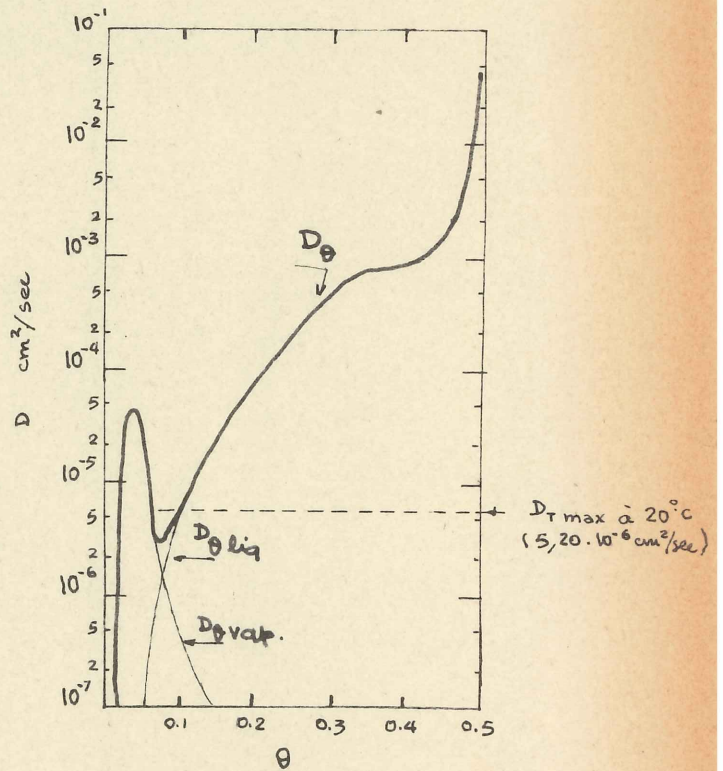
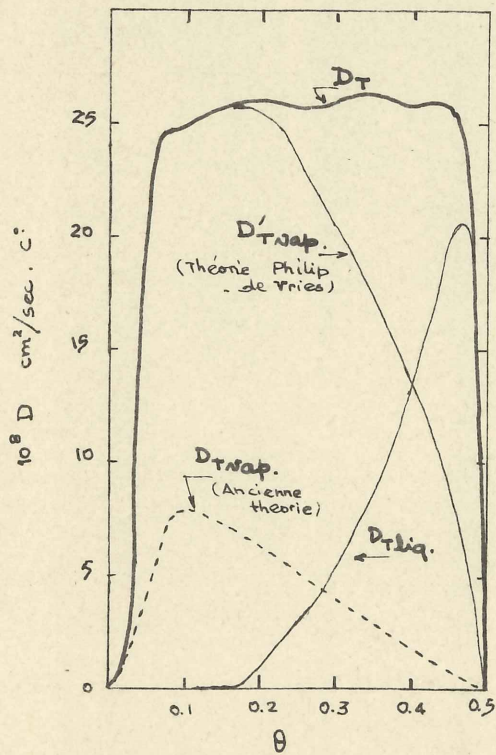
Caracteristiques hydrauliques de l'

argile "Yolo light clay" - d'après Philip 1957.



Courbes  $\psi(\theta)$  et  $k'(\theta)$  d'après les données de Moore

Courbes  $D_T(\theta)$  et  $D_\theta(\theta)$  calculés par Philip de Vries (1957)



$D_T$  liq,  $D_T$  vap (ancienne théorie) et  $D_T$  vap (nouvelle théorie) et  $D_T$  en fonction de  $\theta$  à 20°C. Pour  $\theta < 0.17$ ,  $D_T = D_T$  vap.

$D_\theta$  liq,  $D_\theta$  vap et  $D_\theta$  en fonction de  $\theta$  à 20°C. Pour  $\theta > 0.07$ ,  $D_\theta = D_\theta$  liq



## BIBLIOGRAPHIE

a) Ouvrages de base -

- CHILD - COLLIS GEORGE - 1950 - The permeability of Porous materials. Proc. Roy. Soc. London, 201 A, 392.405.
- A.T. COREY - 1959 - Fluid Mechanics of Porous solids. Colorado State University.
- CRANK - 1960 - The Mathematics of Diffusion. Oxford - Clarendon Press.
- GARDNER - 1958 - Mathematics of Isothermal water Conduction in unsaturated soils. Highway, Res. Board, spec. Rep. 40, p. 79.88.
- GARDNER - 1961 - Relations entre sol et eau dans les climats arides et semi arides, Recherche sur la zone Aride, UNESCO, p. 41.66.
- KLUTE - 1952 - Some theoretical aspects of the Flow of water in unsaturated soils. Soil sci. Soc. Proc. vol. 16, p. 144.148.
- PHILIP - 1955 - The concept of Diffusion applied to soil water - Proc. Nat. Acad. Sci. India, 24A, p.93.104.
- PHILIP - 1958 - Physics of water Movement in Porous solids. Highway Res. board, Spec. Rep. 40, p. 147.163.



PHILIP - de VRIES - 1957 - Moisture movement in Porous materials under temperature gradients.

Trans. Amer. Geophys. un n°38; p.222.232.

RICHARDS L.A. - 1931 - Capillary conduction of liquids through porous mediums.

Physics, vol 1, p. 318;333.

b) Ouvrages annexes -

De VRIES - 1952 - The thermal Conductivity of Granular materials  
Annexe 1952.

Bul. Inst. Intern. du Froid, p.115.131.

HABIB - SOIERO - 1957 - Les mouvements de l'eau dans les sols sous l'influence de la température.

Cahiers de la recherche theorique et Exp. n°3

JACOB - 1946 - Report of the sub committee on permeability,  
App. A.

Trans of Amer. Geophys. Union, vol 27. p. 245.256.

KLINKENBERG - 1954 - The Permeability of porous media to liquids and gases.

Amer. Petroleum Inst. Drilling and Production,  
Pratica 200.

PENMANN - 1940 - Gas and vapour movement in soils

J. Agri. Science n°30, p. 437.462.

PHILIP - 1957 - The physical principles of Soil water movement during the irrigation cycle.

Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Congr. Irrig. Drainage, 8, 125.



ROLLINS, SPANGLER, KIRKHAM - 1954 - Movement of Soil moisture  
under a thermal gradient.  
Highway Research Board Proc. , n°33, p. 492.508.

TAYLOR - CAVAZZA - 1954 - The movement of Soil moisture in  
response to temperature gradient.  
Soil. Sci. Soc. Amer. Proc n°18, p. 351.358.



## III. MESURE DE LA CONDUCTIVITE CAPILLAIRE ET DE LA DIFFUSIVITE.

Puisque la conductivité capillaire dépend de la saturation, et que la loi reliant  $k'$  et  $S$  n'est pas, à priori, linéaire, la mesure de  $k'$  sera très délicate, car il sera nécessaire d'établir dans tout l'échantillon une saturation constante, et d'avoir un écoulement.

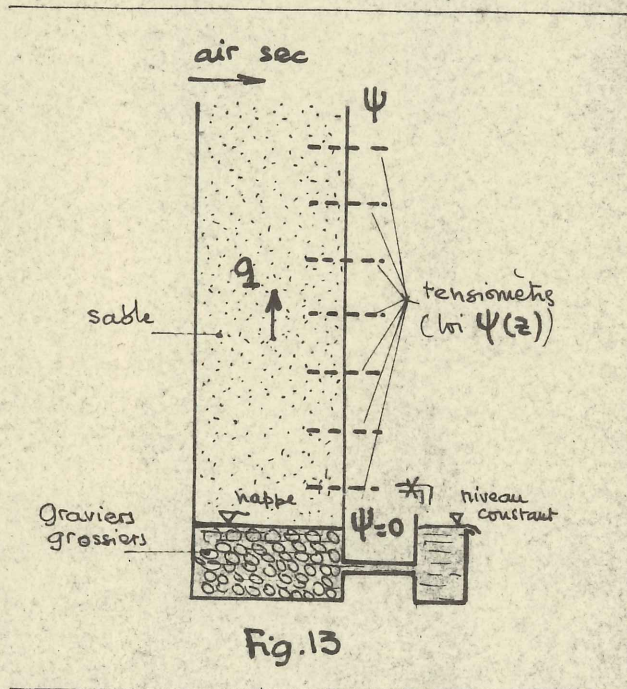
Les méthodes de mesure que nous allons étudier ont été mises au point à la fois par des agronomes et ingénieurs du sol, intéressés par les problèmes d'écoulement d'eau dans des sols non saturés où l'air est à la pression atmosphérique, et par des pétroliers, intéressés par les conditions d'écoulement dans les champs pétrolifères lorsqu'on chasse le pétrole par de l'eau ou de l'air. On trouvera donc deux optiques très différentes ; soit mesurer la perméabilité à une seule phase, la 2<sup>e</sup> étant au repos, soit mesurer la perméabilité à deux phases s'écoulant toutes les deux. De plus, les problèmes des agronomes sont relatifs à des écoulements à faible profondeur, souvent unidimensionnels (évaporation au dessus d'une nappe, drainage vertical), qu'il sera facile de recréer par modèle : colonnes verticales emplies de sable avec une nappe à hauteur constante et un débit d'infiltration imposé, et sur lesquelles on pourra mesurer la perméabilité pour différentes branches, alors que les problèmes des pétroliers sont relatifs à des écoulements à fortes profondeurs, sous de fortes pressions et des températures importantes que l'on essaiera de reproduire en laboratoire sur de petites carottes. D'où deux méthodes de mesure très différentes, mais qui nécessitent l'obtention d'un régime permanent. Nous les étudierons toutes les deux car la seconde peut être applicable,



avec quelques modifications à la mesure de la conductivité capillaire. Nous verrons ensuite une 3e méthode servant à mesurer  $k'$  avec des écoulements non permanents.

1) MESURE DE  $k'$  A L'AIDE DE COLONNES DE SOL.

Méthode mise au point par MOORE (1939), qui consiste à fixer un certain débit d'évaporation dans une colonne de sable



contenant une nappe à niveau constant à sa base. Il suffit pour cela d'imposer une pression de vapeur saturante dans l'air au sommet de la colonne inférieure à celle qui règnerait à l'équilibre dans la colonne, (en envoyant par exemple de l'air sec au sommet de la colonne), et, la nappe étant maintenue fixe, il se produit un écoulement vers le haut (p. I.19). On mesure le débit d'évaporation par le degré hygrométrique

de l'air sec, après passage sur la colonne, la succion, en différents points de la colonne, par des tensiètres, et le degré de saturation par rayons  $\gamma$ , ou neutrons. Lorsque le débit d'évaporation est permanent, le degré de saturation est constant dans chaque tranche et, à la hauteur  $z$  au-dessus de la nappe la charge est  $\phi = \psi + z$  (p.I. 17).

En régime permanent, on aura d'après la loi de Darcy généralisée :

$$q = -k' \text{ grad } (\psi + z)$$

soit :

$$q = -k' \left( \frac{d\psi}{dz} + 1 \right)$$



puisque l'écoulement est vertical

d'où

$$k' = \frac{q}{\frac{d\psi}{dz} + 1} \quad (3.1)$$

Si, avec les mesures des tensiomètres on trace  $\psi(z)$ , on a aussi  $\frac{d\psi}{dz}(z)$  donc  $k'(z)$ . Comme on a aussi  $S(z)$ , on aura donc  $k'(S)$

Avec des colonnes de 100 cm on peut obtenir un large rang de suction. Cette méthode étant l'objet de la thèse de M. BENBLIDIA, nous n'insisterons pas d'avantage dessus.

Le principe a été repris par Child and Collis - Georges (1950) en versant lentement l'eau au sommet d'une colonne de sable.

Pour des succions plus fortes (au dessus du champ de mesure des tensiomètres), Richards and Moore (1952) ont préconisé une méthode indirecte. Il s'agit de placer les échan-

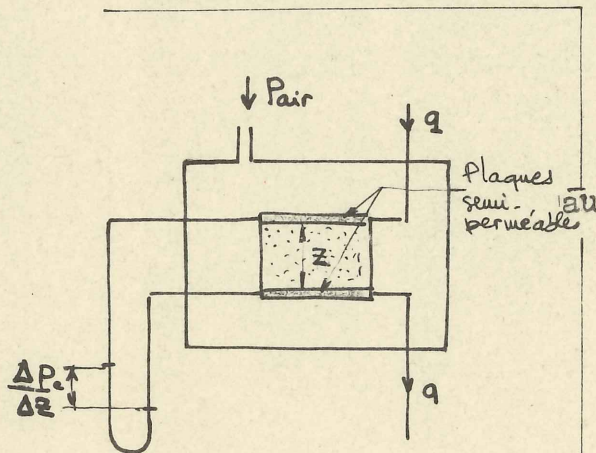


Fig 14

tillons dans une chambre de pression contenant de l'air et élever la pression de l'air de façon à amener la pression de l'eau dans l'échantillon au niveau de la pression atmosphérique.

Plus la pression de l'air croît, plus

$P_c$  augmente ( $P_c = P_{air} - P_{eau} = P_{air}$ ) et l'échantillon se désature. On établit un écoulement d'eau avec arrivée par une plaque poreuse au dessus de l'échantillon et départ par une plaque poreuse en dessous (fig 14). De plus, on mesure le gradient de



pression capillaire à la traversée de l'échantillon par un manomètre différentiel branché entre les deux plaques. A chaque valeur de  $p_c$  correspond une certaine valeur de  $S$ , donc de  $k'$ , et à chaque valeur de grad  $p_c$  correspond un débit donné par la loi de Darcy. Si l'on néglige le terme gravitaire

$$q = -k' \text{grad } p_c = -k' \frac{\Delta p_c}{\Delta z}$$

Si l'on attend que, pour  $p_c$  donné,  $q$  entré =  $q$  sortie, on aura :

$$k' = \frac{q}{\Delta p_c / \Delta z} \quad (3.2)$$

et on connaîtra la saturation correspondante par mesure de la quantité d'eau sortie.

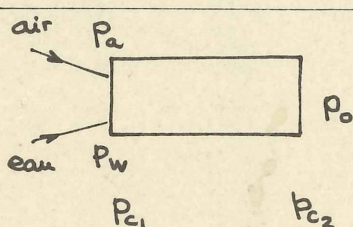
## 2) MESURE DE $k'$ PAR DEPLACEMENT DE LA PHASE MOUILLANTE.

On arrive donc à une méthode de déplacement de l'eau (fluide mouillant) par l'air (non mouillant), plus généralement comme "méthode de déplacement de la phase mouillante".

Les méthodes de mesure différencieront par la façon de désaturer l'échantillon. On peut en effet

- soit contrôler le potentiel des deux phases et mesurer les débits et les saturations (Méthode Hassler)
- soit contrôler les débits séparés des deux phases et mesurer les potentiels résultants (Méthode Penn-State)
- soit chasser le liquide par du gaz à une pression très forte (Méthode Welge).

Mais toutes ces méthodes se heurtent à la même difficulté : il faut que la saturation soit constante dans l'échantillon.



Considérons par exemple un échantillon de sol où il y a un écoulement d'eau et d'air, et supposons que nous injectons les deux



60

phases à l'entrée, sous deux pressions différentes  $P_w$  et  $P_a$  et que la sortie de l'échantillon soit à la pression atmosphérique. Il existe plusieurs perturbations dans l'échantillon.

1) il y aura à l'entrée une zone de transition où la saturation en chaque fluide sera mal définie

2) à la sortie, les deux phases passeront d'une zone de pression capillaire finie (l'échantillon), à l'air où la pression capillaire est nulle. Il y aura donc tendance à la rétention de la phase mouillante (l'eau) par l'échantillon, donc on aura une saturation d'eau assez forte à la sortie (Effet de bout).

3) la pression capillaire  $p_a - p_w$  va varier de  $p_{c1} = p_a - p_w$  à l'entrée de l'échantillon à  $p_{c2} = 0$  à la sortie. Comme  $p_c = p_c(S)$  la variation de pression capillaire entraîne la variation de saturation dans l'échantillon.

Ces 3 remarques montrent que la saturation ne sera pas constante dans l'échantillon. Comme les mesures de saturation ne sont que des mesures moyennes (pesée, résistivité, etc...), si la loi  $k'(S)$  n'est pas une loi linéaire, ni  $k'(\psi)$  on n'aura pas le droit de relier une valeur moyenne de  $k'$  à une valeur moyenne de la saturation. Il faut donc dans tous les cas garder la saturation de chaque phase constante, ou, ce qui revient au même, la pression capillaire constante dans tout l'échantillon.

Les trois méthodes citées ci-dessus ont été mises au point pour tenir compte de ce fait. Nous ne donnerons ici que les principes mêmes de ces méthodes laissant au lecteur le soin de se reporter aux articles cités en référence pour une étude plus détaillée.

2.1. La première méthode, dite "Méthode Hassler" ou "Méthode



Capillaire", consiste, en gros, à sertir l'échantillon entre deux plaques semi-perméables, ne laissant passer que la phase mouillante, mais rainurées sur leurs faces internes pour permettre d'envoyer un débit de gaz dans l'échantillon.

Désignons par l'indice L la phase mouillante et par l'indice A la phase non mouillante, on impose une perte de pression  $\Delta_A P$  à la phase non mouillante et une perte de pression  $\Delta_L P$  à la phase mouillante

Soient  $L P_1$  et  $L P_2$  les pressions d'entrée et de sortie imposées au liquide,

$A P_1$  et  $A P_2$  les pressions d'entrée et de sortie imposées au gaz. ( $A P_2 = P_0$ ) (fig 15)

La pression capillaire à l'entrée sera  $A P_1 - L P_1$  et la pression capillaire à la sortie sera

$$A P_2 - L P_2 = (A P_1 - \Delta_A P) - (L P_1 - \Delta_L P)$$

Si l'on s'arrange pour que

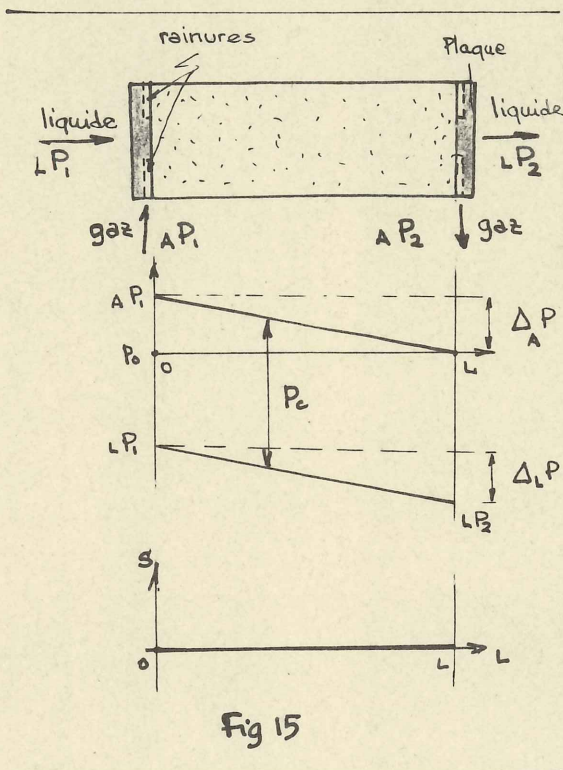


Fig 15

$\Delta_A P = \Delta_L P$  alors la pression capillaire est constante dans tout l'échantillon, donc la saturation. Cette méthode, mise au point par L. A. Richards (1931) puis Hassler (1944) a été étudiée par Osoba - Richardson (1951), Pottier (1959) et reprise par A.T. Corey (1956) pour l'adapter au mouvement d'eau dans les sols, avec écoulement d'air.

Pour une pression capillaire choisie, donc pour une saturation choisie (courbe  $P_c(s)$ ), l'air et l'eau sont injectées de façon que

$$\text{Pression de l'air} = \text{Pression de l'eau} + P_c$$



On injecte généralement l'air sous une pression  $> p_0$  à l'entrée pour le recueillir à la sortie sous la pression atmosphérique, et l'eau est injectée et recueillie sous pression négative de façon à ce que la perte de charge soit la même dans l'eau que dans le gaz (voir schéma) on obtient la désaturation en liquide en augmentant  $p_c$

Pour chaque valeur de  $p_c$  choisie, on attend que le régime soit permanent ( $q$  entrée =  $q$  sortie), et pour chaque phase on a

$$q_i = -k'_i \text{ grad } \phi \quad (i=1,2)$$

$$\text{Or ici grad } \phi = \frac{\Delta_L P}{\Delta L} = \frac{\Delta_{\Delta P}}{\Delta L}$$

il suffit donc de mesurer le débit dans chaque phase, le gradient de pression dans une phase (eau par exemple) et la saturation pour avoir

$$\boxed{k'_i = \frac{q_i}{\Delta P / \Delta L}} \quad (3.3)$$

Cependant, cette méthode est rendue délicate par le fait qu'il faille rainurer les plaques semi-perméables pour produire un écoulement d'air.

Soiero (1961) a essayé avec la même méthode de faire circuler seulement l'eau, en gardant la pression d'air constante et égale à la pression atmosphérique; l'eau circule encore sous vide, mais il y a nécessairement un gradient de pression capillaire, donc de saturation. Nous tenterons dans la partie expérimentale de notre thèse de produire un appareil qui permette d'éliminer l'influence de ce gradient de pression capillaire, avec écoulement d'eau seulement.

2.2. La seconde méthode, dite "Penn-State Method" ou "Méthode



dynamique" est tout à fait différente dans son principe. Mise au point par Morse - Terwilliger - Yuster (1949), elle consiste à injecter séparément les deux phases dans l'échantillon,

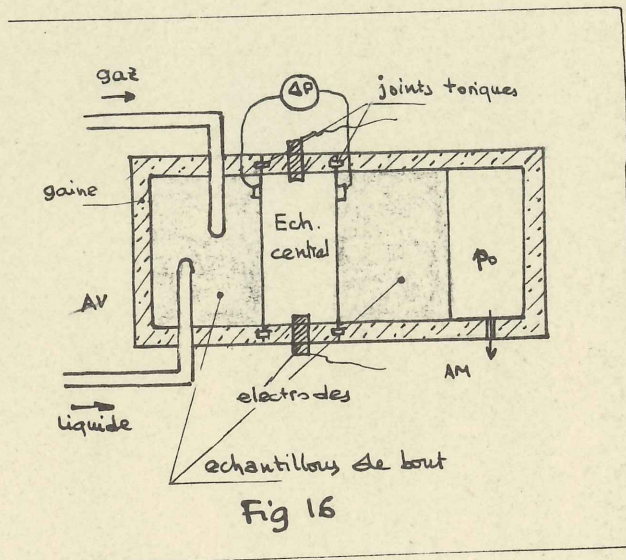


Fig 16

sans plaques semi-perméables. Pour éviter à la fois les perturbations à l'entrée de l'échantillon, l'effet de bout et le gradient de saturation, l'échantillon est découpé en 3 morceaux. Deux morceaux extrêmes, dits "échantillons de bout" serviront à encaisser les perturbations à l'entrée et l'effet de bout, alors que les mesures seront faites

sur un échantillon central en contact capillaire étroit avec les échantillons de bout, très mince (en général  $\varnothing$  30 mm,  $L = 15$  mm) et où la pression capillaire est pratiquement constante (fig 16)

La saturation est mesurée par résistivité, le gradient de pression par un manomètre différentiel branché sur les deux faces de l'échantillon central, mais cette mesure est très délicate, et ne peut se faire que sur des échantillons consolidés (grès).

L'échantillon est d'abord saturé en phase mouillante (huile, saumure) et on le désature en envoyant un débit de gaz. On opère par palier, de façon que la somme des deux débits, soit toujours une constante.

Mesure délicate, et absolument inadaptée à la mesure de la conductivité capillaire dans les sols, du fait de



la texture non consolidée des matériaux envisagés. Elle est cependant beaucoup utilisée dans la recherche de la perméabilité relative dans les grès constituant les champs pétrolifères, et on pourra trouver une analyse détaillée des facteurs influençant les mesures dans l'article de Geffen, Owens, Parish and Morse (1950), ainsi qu'un compte-rendu d'expérience dans celui de Albert et Chaumet (1954).

2.3. Quant à la troisième méthode, nous ne la citerons que pour mémoire, car elle consiste à déplacer le liquide mouillant un milieu poreux en le chassant par un écoulement de gaz à forte pression, de façon à rendre les gradients de pression capillaire négligeables devant la pression du gaz, car le liquide est initialement au repos, et pendant un instant très court. Cette méthode ne permet que d'obtenir la perméabilité relative au gaz (Weldge 1952).

De ces trois méthodes de déplacement de fluide mouillant dans un échantillon saturé, soit par écoulement capillaire, soit par écoulement dynamique, nous ne retiendrons donc que la première comme apte à fournir des résultats intéressants pour la mesure de  $k' (p_c)$  dans les sols non saturés, et nous chercherons comment modifier cette méthode pour pouvoir l'appliquer à un échantillon où l'air est à pression constante.

On trouvera une description plus détaillée de ces 3 méthodes dans l'article de Osoba-Richardson-Kerver-Hafford et Blair (1951) qui établissent une comparaison des résultats obtenus par ces 3 méthodes pour obtenir la perméabilité relative d'une roche en huile et gaz, en fonction de la saturation respective en chacun de ces fluides, ainsi que l'analyse des facteurs affectant la mesure. Cette mesure est surtout faite par les ingénieurs de l'industrie du pétrole pour trou-



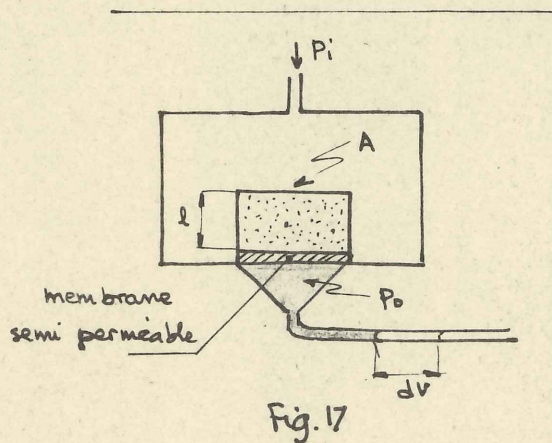
ver à partir de quelle saturation la perméabilité à l'huile d'une roche imprégnée devient négligeable.

### 3) MESURE EN ECOULEMENT TRANSITOIRE.

Les deux types précédents de mesure, soit sur des colonnes de sable, soit par déplacement de la phase mouillante présentent le même défaut; ce sont des méthodes lentes car il faut attendre que le régime soit permanent.

Une méthode rapide et intéressante a été mise au point par W.R. Gardner (1956), permettant de déterminer la conductivité capillaire et la diffusivité en fonction du volume d'eau chassée d'un échantillon par une application de pression d'air. Gardner reprend donc le principe de Richards and Moore - (1952), mais il modifie son expérience de façon à arriver à un écoulement identique à celui donné par Terzaghi pour la consolidation unidimensionnelle. Cette identité n'est cependant qu'apparente car nous raisonnons sur des matériaux incompressibles, alors que Terzaghi a établi sa théorie sur des matériaux compressibles.

Le principe expérimental consiste à utiliser l'appareil de pression à membrane mis



au point par L.A. Richards et utilisé couramment pour les mesures de pressions capillaires (pour  $p^F > 2$  et  $< 5$ ) (voir cours de M. SANTON) (Fig 17) L'échantillon est maintenu à sa partie inférieure en équilibre hydraulique avec de l'eau à la pression atmosphérique, par l'intermédiaire d'une membrane semi-perméable, et il



est soumis sur son pourtour à une pression isotrope d'air. Le contenu hydrique de l'échantillon est modifié par une petite augmentation de la pression d'air, et il y a écoulement d'eau jusqu'à ce que l'eau interstitielle de l'échantillon soit en équilibre hydraulique avec l'eau extérieure. La quantité d'eau chassée par l'incrément de pression est mesurée et peut être directement reliée à la conductivité capillaire.

Il y a donc une grande analogie avec les essais de consolidation unidimensionnelle oedométrique avec drainage sur une face et écoulement d'eau, sous l'action d'une augmentation de contrainte extérieure jusqu'à ce que la pression interstitielle s'annule, mais il y a une différence hydraulique fondamentale entre ces deux essais, différence qu'il est important de signaler :

- 1) dans la consolidation, l'échantillon est saturé en début de mesure et reste saturé durant toute la mesure, la quantité d'eau chassée étant directement reliée à la contrainte appliquée par la variation de volume des pores de l'échantillon.
- 2) dans l'essai de Gardner, l'échantillon est saturé en début de l'échantillon et se désature durant la mesure, la quantité d'eau chassée étant reliée à la contrainte appliquée par la loi de l'écoulement en milieu poreux non saturé, le volume des pores restant constant et indéformable.

Il faut enfin signaler que la membrane semi-perméable sert non seulement à établir l'équilibre hydraulique, mais surtout à empêcher que des bulles d'air passent de l'échantillon à l'intérieur du tube capillaire servant à mesurer la quantité d'eau chassée de l'échantillon.



Le principe théorique repose sur la linéarisation de l'équation (2.7) de l'écoulement de l'eau dans un milieu isotherme non saturé :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div} [k'(\theta) \text{grad} (\psi + z)] \quad (2.7)$$

Si l'on suppose que l'échantillon est suffisamment mince pour négliger l'influence de la côte (on peut, pour une meilleure approximation, fixer la pression  $p_0$  dans le tube capillaire extérieur dans le plan médian de l'échantillon), et que l'écoulement est unidimensionnel vers le bas, (2.7) devient

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k'(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \quad (3.5)$$

Supposons que l'on ait atteint l'équilibre (écoulement nul) au bout d'un certain temps sous la pression  $p_i$  dans le gaz. Si à cet instant on augmente la pression dans le gaz de  $\Delta p$ , la pression dans l'eau va augmenter de  $\Delta p$  et l'eau va s'écouler par la base jusqu'à ce que la pression interstitielle devienne nulle.

Soit  $p_f = p_i + \Delta p$  la pression dans le gaz  
 $u$  la pression de l'eau dans l'échantillon

Pour  $\Delta p$  donné,  $u$  va varier de  $\Delta p$  (pour  $t = 0$ ) à 0 (pour  $t$  grand), et la pression capillaire

$$p_c = p_{\text{air}} - p_{\text{eau}} = p_f - u$$

va varier durant l'expérience de  $p_{c_1} = p_f - u_1 = p_i$  à  $p_{c_2} = p_f$  (fig 18)

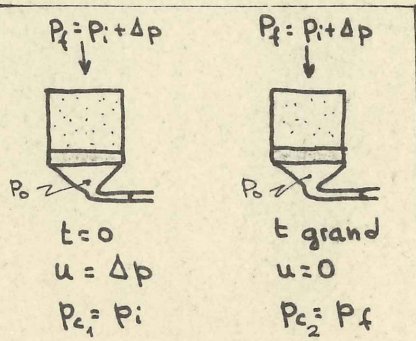


Fig 18

Dans la formule (3.5),  $\psi$  est le potentiel capillaire exprimé en terme de hauteur d'eau.

En fonction de la pression, on a :

$$\psi = -\frac{p_c}{\rho g} = -\frac{(p_f - u)}{\rho g}$$



où  $u$  est seul variable. L'équation (3.5) peut donc s'écrire

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial}{\partial z} \left[ k'(\theta) \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad (3.6)$$

. Cette équation est une équation différentielle non linéaire.

Pour la linéariser on suppose :

- 1) que  $\Delta p$  est suffisamment petit pour que  $k'$  reste constant pendant l'application de  $\Delta p$
- 2) que durant la variation de pression capillaire de  $p_i$  à  $p_f$  la teneur en eau est une fonction linéaire de la pression capillaire.

Donc pour  $p_{c1} = p_i < p_c < p_{c2} = p_f$  on suppose que :

- .  $k' = \text{cte}$
- .  $\theta = a' + b' p_c$

Comme  $p_c = p_f - u$ , on peut aussi écrire  $\theta = a + b u$

En portant ces deux hypothèses dans (3.6) on obtient

$$b \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k'}{\rho g} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

et, si l'on pose  $D = k' \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{k'}{\rho g b}$  (3.7)

(voir p II.8 pour définition de  $D$ )

On aura finalement :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \quad (3.8)$$

où  $D$  est le coefficient de diffusivité.

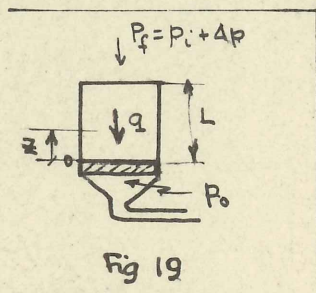
On voit donc l'analogie entre (3.8) et l'équation de



consolidation unidimensionnelle

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

La résolution de (3.8) ne pose pas de problème, les conditions aux limites étant (fig 19)



$$z = 0$$

$$p_c(0, t) = 0$$

$$z = L$$

$$\left(\frac{\partial p_c}{\partial z}\right)_{z=L} = 0$$

pas d'écoulement  
par face supérieure

$$t = 0$$

$$\Delta u(z, 0) = \Delta p$$

On obtient :

$$u(z, t) = \frac{4\Delta p}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{L} z e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 C_v t} \quad (3.9)$$

Calculons la variation du volume d'eau dans l'échantillon en fonction du temps, sous la pression extérieure

Soit  $V_w(t)$  le volume d'eau dans l'échantillon

$V$  le volume de l'échantillon

la teneur en eau volumique est  $\theta = \frac{V_w}{V}$

Si  $A$  est la section de l'échantillon, on a

$$V_w(t) = \int_{z=0}^L A \theta(z, t) dz \quad (3.10)$$

avec  $\theta = a + bu$

en substituant la valeur de  $u$  donnée par (3.9) et en intégrant (3.10) on obtient :

$$V_w(t) = aV + \frac{8bV\Delta p}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 C_v t} \quad (3.11)$$



Les valeurs extrêmes pour  $V_w(t)$  sont :

$$\begin{array}{llll} t=0 & u=\Delta p & \theta = a+b\Delta p & V_{w_0} = aV + bV\Delta p \\ t=\infty & u=0 & \theta = a & V_{w_\infty} = aV \end{array}$$

Soit  $\Delta Q$  la quantité d'eau sortant de l'échantillon pendant  $\Delta t$ . La quantité d'eau  $Q_0$  sortie entre  $t=0$  et  $t=\infty$  est

$$Q_0 = V_{w_0} - V_{w_\infty} = bV\Delta p$$

d'où

$$b = \frac{Q_0}{V\Delta p} \quad (3.12)$$

La quantité d'eau  $Q$  sortie entre  $t=0$  et  $t$  est

$$Q = V_{w_0} - V_{w_t} = bV\Delta p - \frac{8bV\Delta p}{n^2} e^{-\left(\frac{n}{L}\right)^2 Dt} \quad (3.13)$$

si l'on s'arrête pour  $V_{w_t}$  au 1er terme de la série, qui converge très rapidement.

Donc au temps  $t$  il sera sorti de l'échantillon

$$Q = bV\Delta p - \frac{8bV\Delta p}{n^2} e^{-\left(\frac{n}{L}\right)^2 Dt} = Q_0 - \frac{8Q_0}{n^2} e^{-\left(\frac{n}{L}\right)^2 Dt}$$

d'où

$$Q - Q_0 = \frac{8Q_0}{n^2} e^{-\left(\frac{n}{L}\right)^2 Dt}$$

Soit

$$\text{Log}(Q - Q_0) = \text{Log} \frac{8Q_0}{n^2} - \left(\frac{n}{L}\right)^2 Dt \quad (3.14)$$

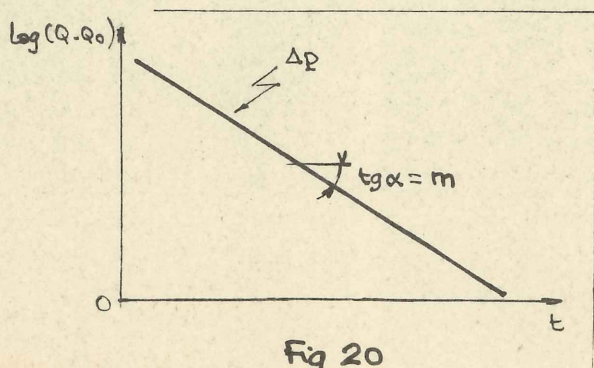


Fig 20

Si donc l'on trace  $\text{log}(Q - Q_0) = f(t)$  on obtient une droite (fig. 20)  
 . d'ordonnée à l'origine  $\text{Log} \frac{8Q_0}{n^2}$   
 . de pente  $m = \left(\frac{n}{L}\right)^2 D$

Donc si pour un  $\Delta p$  donné on mesure le volume d'eau  $Q(t)$  sorti



de l'échantillon au moyen d'une burette, et si  $Q_0$  est le débit total sorti à l'équilibre, en reportant  $\log(Q - Q_0) = f(t)$  on obtient une droite de pente :

$$m = \left(\frac{n}{L}\right)^2 D t$$

et on aura :  $k' = D \cdot b \rho g = D \cdot \frac{Q_0}{V \Delta P} \rho g$

en fonction de la pente  $m$  on aura donc, pour chaque  $\Delta p = p_f - p_i$ :

$$k' = \frac{m \cdot \rho g Q_0}{V \Delta P \left(\frac{n}{L}\right)^2} \quad (3.15)$$

Il suffit de recommencer par palier de pression croissant pour tracer  $k' = f(p_c)$

Cette méthode a le gros avantage de pouvoir être utilisée à des pressions capillaires atteignant 20 kg/cm<sup>2</sup> et d'être relativement rapide. Elle a été reprise par Miller et Elrick (1958) puis Rijtema (1959) pour tenir compte de l'influence de la membrane. Si l'on définit l'impédance comme le rapport  $\frac{k}{L}$ , on trouvera dans l'article de Rijtema des abaques permettant de tenir compte de l'influence de la membrane en fonction du rapport impédance membrane sur impédance échantillon.

Soit  $\frac{z_p}{z}$  ce rapport, Rijtema montre que pour :

.  $\frac{z_p}{z} = 30$  l'erreur que l'on fait sur  $k'$  si l'on ne tient pas compte de la membrane est de 6 %

.  $\frac{z_p}{z} = 100$  l'erreur est de 1,8 %

Comme  $\frac{z_p}{z} = \frac{k'_p}{L_p} \cdot \frac{L}{k'}$

ou  $k'_p$  et  $k'$  = conductivités de la membrane et de l'échantillon  
 $L$  et  $L'$  = hauteur de membrane et de l'échantillon.

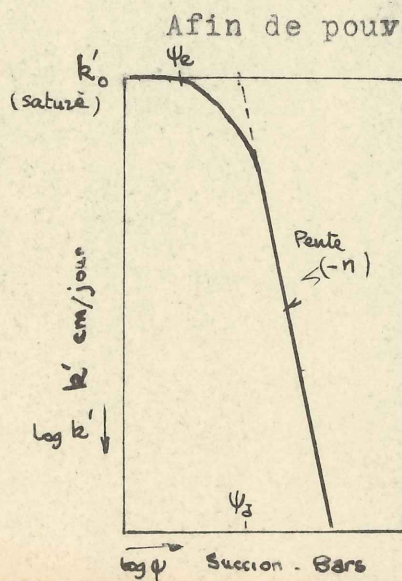


on arrive très vite, avec des membranes minces et de relativement fortes perméabilités à des rapports  $\frac{z_p}{z'}$  très supérieurs à 100, si bien qu'on peut négliger l'influence de cette membrane.

#### 4) RESULTATS - VALEURS DE $k'(\theta)$ et $D(\theta)$ .

Toutes ces méthodes conduisent à la conclusion suivante : dans tous les matériaux, la conductivité capillaire  $k'$  décroît très rapidement au fur et à mesure que la teneur en eau diminue. On trouvera p. III. 18 un graphique, en coordonnées linéaires, montrant la variation de  $k'$  avec la succion pour des sols dont la conductivité hydraulique (saturée) varie de  $5,5 \cdot 10^{-5}$  à  $5 \cdot 10^{-3}$  cm/sec.

On voit que la décroissance est très rapide, et que la valeur de  $k'$  est négligeable sitôt que la pression capillaire atteint 100 cm (Richards and Moore 1952). On s'est longtemps demandé (Richards 1936) si la conductivité ne s'annulait pas pour une certaine pression capillaire. En fait, des expériences faites avec l'appareil à membrane décrit ci-avant ont montré que chaque incrément de pression s'accompagnait d'une variation de volume d'eau même pour des pressions atteignant 200 atmosphères.



(D'après A.T. Corey 1959) Fig 21

donnant  $k'(\psi)$  et  $D(\psi)$  qui puisse permettre la résolution des équations du mouvement de l'eau dans les sols, W.R. Gardner a reporté ses résultats dans des graphiques log-log. On trouvera p. III. 20 (fig 23) les courbes de  $k(\psi)$  données par W.R. Gardner and M. Fireman (1958), pour



# VARIATION $k'$ ( $\Psi$ ) POUR DIFFERENTS SOLS (échelle linéaire)

d'après RICHARDS and MOORE - 1952.

## Expériences de Richards-Moore - 1952

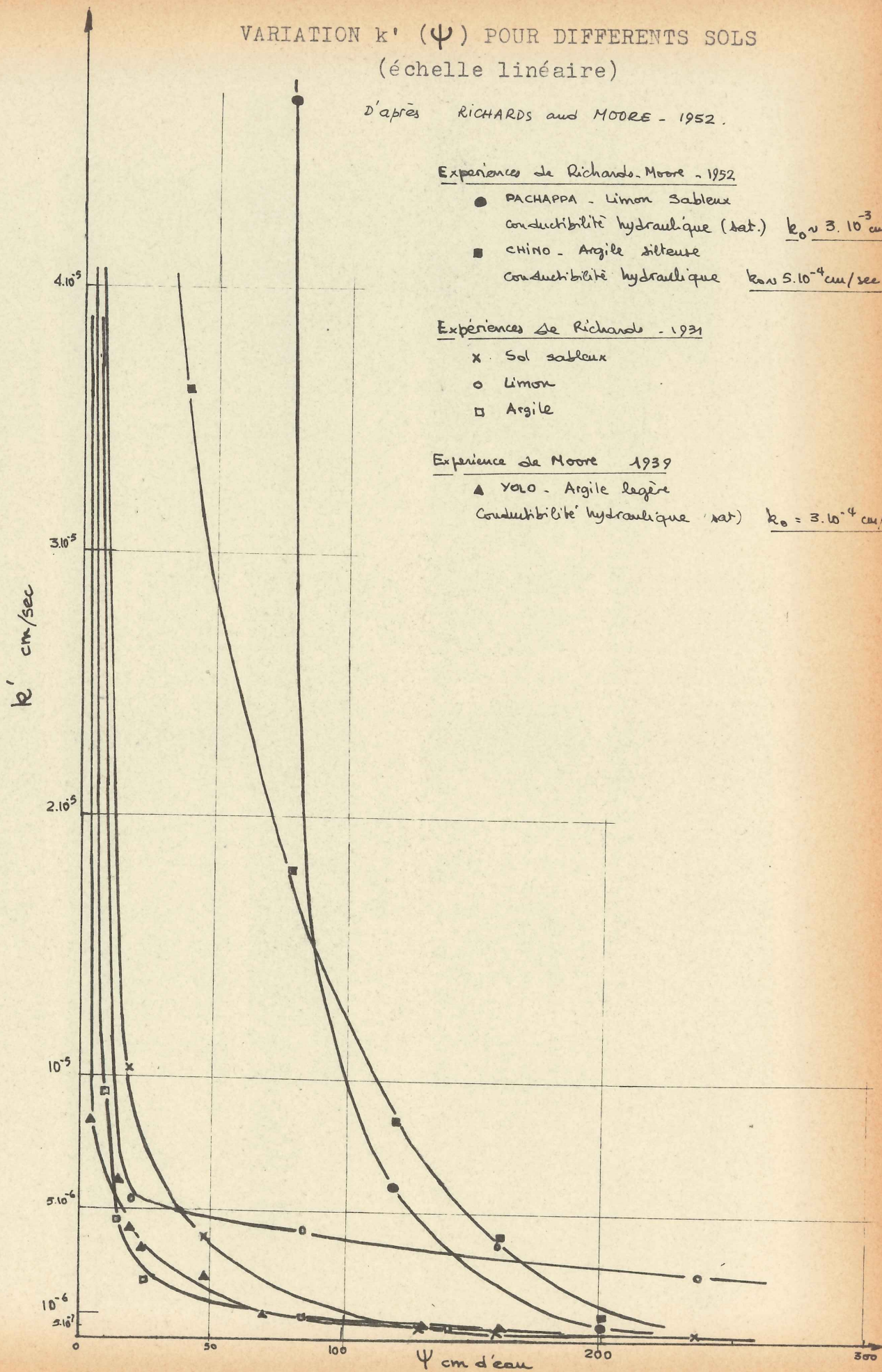
- PACHAPPA - Limon sableux  
conductibilité hydraulique (sat.)  $k_0 \approx 3 \cdot 10^{-3}$  cm/sec
- CHINO - Argile silteuse  
conductibilité hydraulique  $k_0 \approx 5 \cdot 10^{-4}$  cm/sec

## Expériences de Richards - 1931

- x Sol sableux
- o Limon
- Argile

## Expérience de Moore 1939

- ▲ YOLO - Argile légère  
conductibilité hydraulique (sat.)  $k_0 = 3 \cdot 10^{-4}$  cm/sec





une argile, un sol limoneux et un sol argileux. A la succion de 15 bars, la conductivité capillaire représente le 1/1000 de la conductivité hydraulique, mais on voit que  $k'$  ne s'annule pas sous de fortes succions. Ces courbes montrent de plus que  $k'$  est constant jusqu'à une certaine succion  $\Psi_e$  qui correspond à la rentrée d'air, et qu'ensuite  $k'$  est proportionnel à  $\Psi^{-n}$  (Corey 1959). (fig 21)

Gardner suggère une équation :

$$k' = \frac{a}{\Psi^{n+b}} \quad (3.13)$$

pour la majorité des sols, où  $a$  et  $b$  sont des constantes,  $n$  varie de 1 à 4 pour les sols à textures fines et peut atteindre 15 à 20 pour des sols assez grossiers.

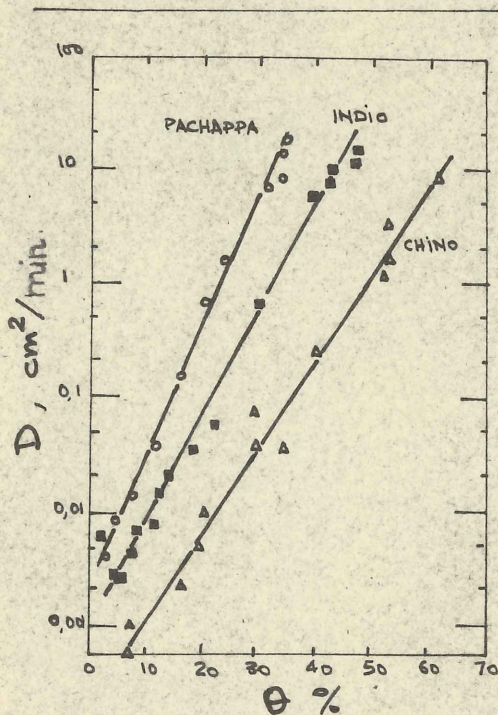
Gardner and Mayhugh (1958) ont également étudié la variation  $D(\theta)$ .  $D$  varie avec la teneur en eau, mais dans un rang beaucoup plus faible que  $k'$ .

En reportant  $\log D = f(\theta)$  on trouve pour la majorité des sols :

$$D = D_0 e^{\beta(\theta - \theta_0)} \quad (3.14)$$

où  $D_0$  est la diffusivité pour  $\theta_0$ .

On trouvera sur le graphique ci-contre les courbes  $D(\theta)$  pour les mêmes sols que ceux considérés ci-dessus. (fig 22)



INDIO = Limon sableux  
 PACHAPPA = Limon sableux fin  
 CHINO = Sol argileux

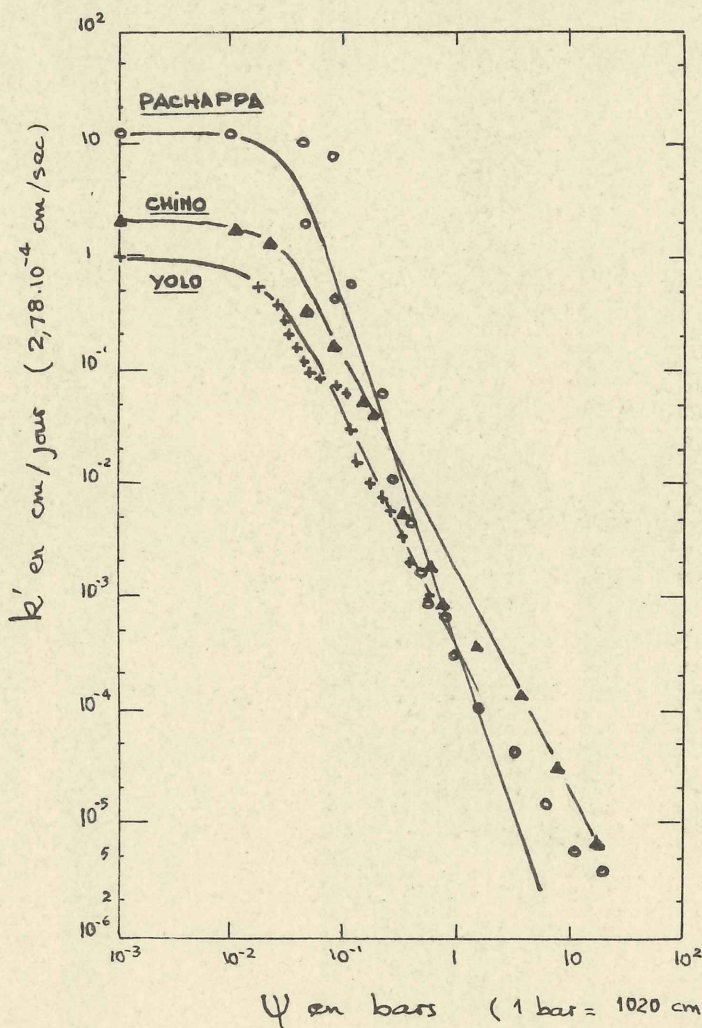
Fig 22



RELATION  $k'(\psi)$  POUR PLUSIEURS TYPES DE SOL  
(Echelle log-log)

$$\text{Loi } k' = \frac{a}{\psi^{n+B}}$$

(d'après W.R. GARDNER, M. FIREMAN, 1958).



PACHAPPA -

Limon sableux fin.

$$k' = \frac{32}{\psi^{3 \cdot 10^{-4} + 2,6}} \text{ cm/j}$$

$\psi$  en millibars.

CHINO

Sol argileux

$$k' = \frac{1100}{\psi^2 + 565} \text{ cm/j}$$

$\psi$  en millibars.

YOLO LIGHT CLAY

Argile

$$k' = \frac{400}{\psi^3 + 400} \text{ cm/j}$$

$\psi$  en cm d'eau

Fig 23.



Il faut enfin signaler l'étude intéressante de RAPOPORT et LEAS, tendant à obtenir une expression théorique  $k' (S)$  à partir de la courbe de pression capillaire.

Les auteurs partent de la formule de Kozeny, donnant la perméabilité d'un milieu saturé sous la forme :

$$K = \frac{1}{\tau} \frac{n^3}{A^2} \quad (15)$$

- où  $n$  est la porosité du milieu  
 $A$  la surface spécifique des grains de sol  
 $\tau$  la constante de Kozeny (tortuosité) valant environ 5.

Dans le cas où le milieu n'est pas saturé, (3.15) peut être adapté en :

- remplaçant la porosité absolue  $n$  par la porosité effective  $S_n$ , représentant la matrice d'écoulement du fluide à chaque degré de saturation ;
- substituant à la surface spécifique  $A$  (surface totale des pores), la surface spécifique  $A_L$  représentant la frontière de la phase liquide.

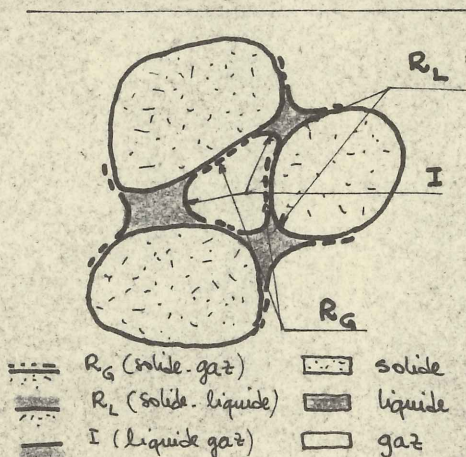


fig 24.

Ceci revient à l'hypothèse faite par Richards pour généraliser la loi de Darcy aux écoulements en milieux non saturés.

En considérant le système fluide-gaz à l'équilibre, les auteurs définissent les surfaces suivantes (fig 24)

$$A_L = R_L + I = \text{surface spécifique du système liquide (mouillant)}.$$



$A_G = R_G + I$  = surface spécifique du système gazeux (non mouillant)

$A = R_G + R_L$  = surface spécifique du solide, où  $R_G$  représente l'aire de contact gaz-solide,  $R_L$  l'aire de contact liquide-solide, et  $I$  l'aire de contact liquide-gaz.

La perméabilité effective au liquide, obtenue à partir de (3.15) est alors :

$$k_L = \frac{S^3 \tau^3}{\tau A_L^2} \quad (3.16)$$

et la perméabilité relative au liquide, définie par  $k_L = \frac{k_L}{K}$  est

$$K_L = \frac{k_L}{K} = \frac{S^3}{\left(\frac{A_L}{A}\right)^2} \quad (3.17)$$

Pour obtenir une expression plus maniable de la perméabilité relative, on tient compte des considérations suivantes : lorsqu'il existe une saturation minimum irréductible en liquide (pour laquelle la perméabilité effective au liquide est nulle), le liquide qui reste doit être traité comme une partie du squelette formé par les grains. On définit ainsi une surface spécifique effective  $A_E$ , représentant la surface de séparation entre le fluide qui s'écoule et le fluide stationnaire. De plus, au lieu d'utiliser le degré de saturation en liquide  $S$ , on utilise un degré de saturation réduite  $S'$

$$S' = \frac{S - S_0}{1 - S_0} \quad (3.18)$$

Par substitution dans (3.17), l'expression donnant la perméabilité relative au liquide est :

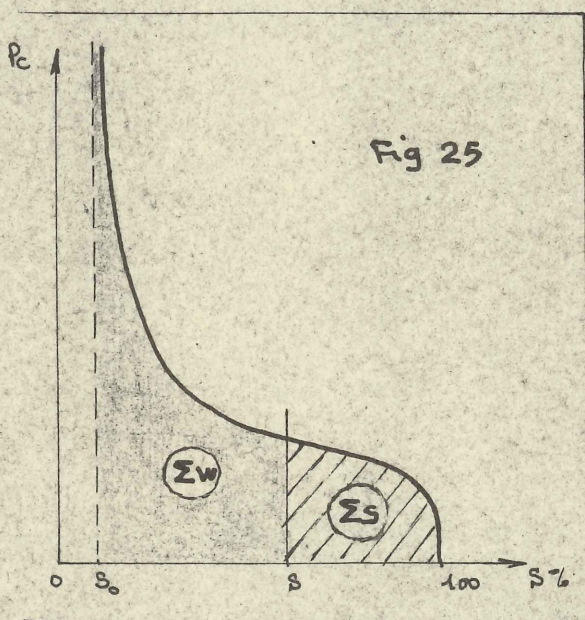
$$K_L = \frac{S'^3}{\left(\frac{A_L}{A_E}\right)^2} = \left(\frac{S - S_0}{1 - S_0}\right)^3 \times \left(\frac{A_E}{A_L}\right)^2 \quad (3.19)$$



Ceci implique :

- que les couches moléculaires aux interfaces solide/liquide et gaz/liquide restent stationnaires ;
- que  $\tau$  reste constant dans le milieu.

Pour calculer  $K_L$ , il est nécessaire de connaître les surfaces spécifiques  $A_E$  et  $A_L$ .



Par un raisonnement thermodynamique, les auteurs montrent que

$$A_G = \Sigma s = - \frac{n}{\gamma} \int_1^s P_c dS \quad (3.20)$$

$$A_E = \Sigma s_0 = - \frac{n}{\gamma} \int_1^{s_0} P_c dS \quad (3.21)$$

$$A_L = \Sigma w + 21 = - \frac{n}{\gamma} \int_s^{s_0} P_c dS + 21 \quad (3.22)$$

où les intégrales indiquent les aires comprises entre la courbe  $P_c(S)$  et l'axe  $S$  dans les limites indiquées (fig 25) ( $\bar{a} - \frac{n}{\gamma} p r \bar{a}$ )

On obtient ainsi un système de 3 équations pour 4 variables  $A_E$ ,  $A_G$ ,  $A_L$  et  $I$ , et on ne peut pas avoir de solutions séparées pour  $A_L$  et  $I$ .

Pour avoir  $A_L$ , RAPOPORT et LEAS proposent une hypothèse supplémentaire relative à la distribution des fluides dans le milieu. Pour ceci, ils considèrent les conditions limites de distribution des fluides, correspondant à la continuité des phases, et satisfaisant toujours la condition thermodynamique de base, à savoir que l'on ait dans le milieu la plus grande surface possible de contact liquide-solide compatible avec la surface minimum de contact liquide - gaz. Il est en effet impossible d'avoir une analyse plus détaillée, qui nécessiterait



la prise en compte de la géométrie des pores. Ces valeurs limites conduisent alors, pour chaque degré de saturation, à des valeurs limites de  $K_L$ .

Suivant les formules (3.20) à (3.22), on peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma w &= A_L - 2I \\ \Sigma s &= A_G = R_G + I \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

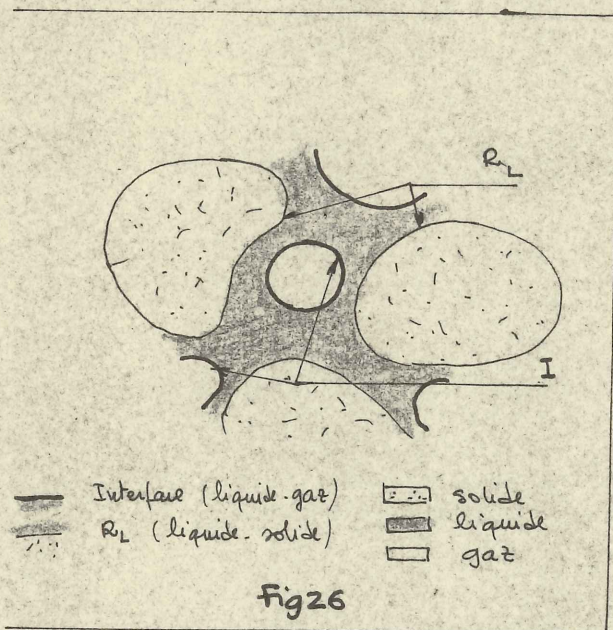
Pour chaque saturation,  $\Sigma w$  et  $\Sigma s$  sont bien définies et constants, et on aura un maximum pour  $A_L$  si  $I$  est maximum. Le maximum de  $I$  est atteint quand  $R_G$  est nul. Donc la valeur

maximum de  $A_L$  pour chaque saturation est, avec  $I = \Sigma s$

$$A_L = \Sigma w + 2\Sigma s = \Sigma s_0 + \Sigma s \quad (3.24)$$

En fonction de (3.19), on voit donc que la valeur minimum de  $K_L$  correspondant à chaque saturation à une valeur maximum de la surface spécifique  $A_L$  sera donnée par

$$K_{Lmin} = S'^3 \left[ \frac{\Sigma s_0}{\Sigma s_0 + \Sigma s} \right]^2 \quad (3.25)$$



Physiquement, ceci correspond au cas où le gaz existe dans le milieu sous forme d'un réseau de canaux interconnectés, et sans contact avec le solide. (fig 26)

Si l'on se reporte de nouveau à (3.23), on voit que le minimum absolu théorique de  $A_L$  correspondrait à  $I = 0$  soit  $A_L = \Sigma w$ , ou  $R_G = A_G$ . C'est-à-dire que les phases liquides et gazeuses seraient seulement limitées par le solide (pas d'interfaces).



Cette hypothèse est beaucoup trop restrictive, car il doit exister des interfaces (ménisques) dans le milieu. RAPOPORT et LEAS évaluent la valeur minimum du rapport  $I/R$ , en utilisant les relations générales de pression capillaire :

$$I/R_G > \frac{Sn}{1-n} \left( \frac{P_m}{P_c} \right)^2 \quad (3.26)$$

où  $P_c$  = pression capillaire à la saturation  $S$   
 $P_m$  = valeur moyenne de  $P_c$  pour  $S$  compris entre  $S$  et  $S_0$ .

Cette inégalité conduit à la valeur minimum suivante pour  $A_L$

$$A_{L \min} = \Sigma w + \frac{2 \Sigma s}{1 + \frac{1-n}{Sn} \left( \frac{P_c}{P_m} \right)^2} \quad (3.27)$$

d'où

$$K_{L \max} = S^3 \frac{\Sigma s_0^2}{\left[ \Sigma w + \frac{2 \Sigma s}{1 + \frac{1-n}{Sn} \left( \frac{P_c}{P_m} \right)^2} \right]^2} \quad (3.28)$$

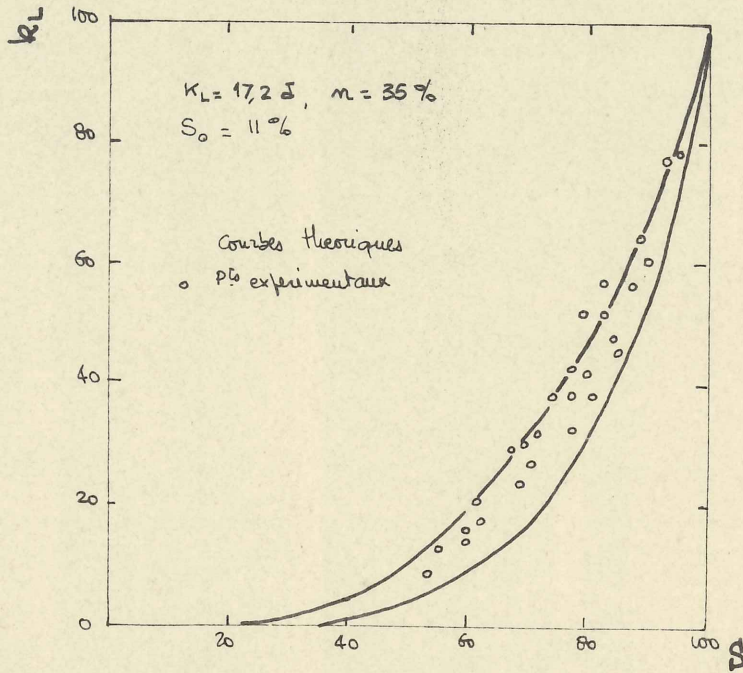
On trouvera ci-joint la comparaison entre les résultats de la perméabilité relative obtenue par les courbes limites et les résultats expérimentaux (par la méthode Penn State), pour un échantillon naturel (sable non consolidé) et un échantillon artificiel.

On voit que la majorité des points tombent dans la limite des valeurs calculées, et que la dispersion expérimentale est du même ordre de grandeur que l'écart entre les courbes d'où l'intérêt de cette méthode, qui n'utilise que les données  $P_c(S)$ .

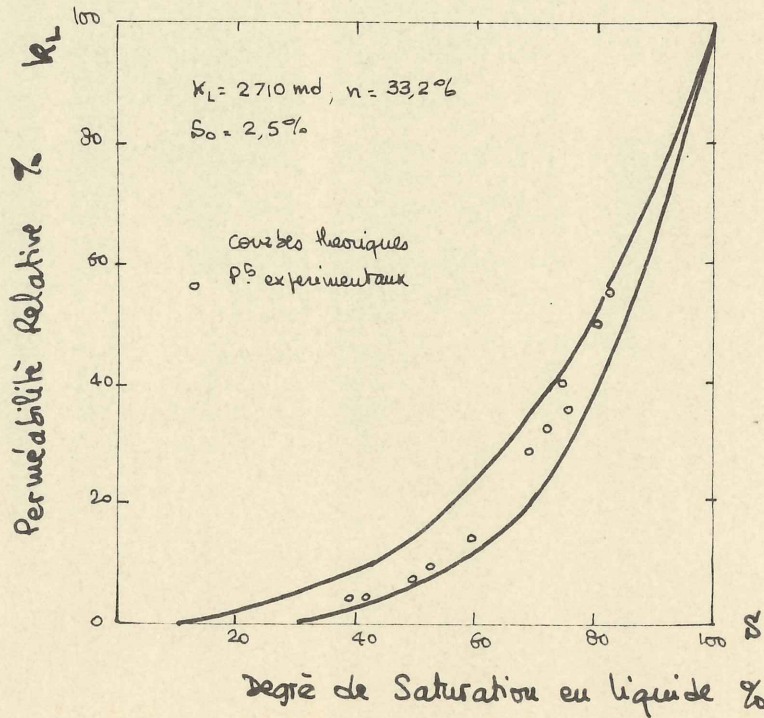


Comparaison entre les résultats théoriques obtenus par RAPOPORT et LEAS, et les valeurs de perméabilité relative obtenues expérimentalement (Méthode PENN-STATE).

Sable non consolidé



Echantillon synthétique





BIBLIOGRAPHIEa) Ouvrages de base -

- A.T. COREY - 1956 - Measurements of water-air Permeabilities in unsaturated soils.  
Soil Sci. Soc. Proc. Vol 21, P.7-10.
- A.T. COREY - 1959 - Fluid Mechanics of Porous Solids - University of Colorado.
- W.R. GARDNER - 1956 - Calculation of Capillary conductivity from Pressure Plate out flow.  
Soil Sci. Proc. Vol. 20, p. 317-320.
- W.R. GARDNER and MAYHUGH - 1958 - Solution and Tests of the diffusion, equation for the movement of water.  
Soil Sci. Soc. Proc. Vol. 22, p. 197-201.
- E.E. MILLER - DE. ELRICK - 1958 - Dynamic determination of capillary conductivity extended for Non Negligible Membrane Impedance.  
Soil Sci. Soc. Proc, vol 22, p. 483-486.
- R.E. MOORE - 1939 - Water conduction from shallow water tables Hilgardia, n° 12, p. 383-421.
- OSOBA - RICHARDSON - KERVER - HAFFORD - BLAIR - 1951 - Laboratory measurements of relative permeability.  
Petroleum transactions, AIME, vol. 192, p. 44-56.
- L.A. RAPOPORT et W.J. LEAS - 1951 - Relative permeability to liqui in liquid-gaz systems. **Petrol.** trans. AIME, vol. 192, p. 83-96.
- L.A. RICHARDS - 1931 - Capillary conduction of liquids through Porous media. Physics, vol. 1, p. 318-333.



P.E. RIJTEMA - 1959 - Calculation of Capillary Conductivity from Pressure Plate outflow Data with non negligible Membrane Impedance.  
Netherlands Journ. of Agri. Sci. Vol 7, p.209-215.

b) Ouvrages annexes -

ALBERT - CHAUMET - 1954 - La mesure des perméabilités relatives  
Revue de l'IFP - vol IX p. 483-502.

BROOKS - COREY - 1961. 1962 - Fluid Mechanics of Porous Media  
Hydraulics characteristics of Porous Media.  
U.S. Dept. of Agriculture - Agricultural Research Service, Northern Plains Branch.

BURDINE N.T. - 1953 - Relative permeability calculations from pore - size distribution data.  
Trans AINE 198 - P. 71.

CHILD - COLLIS-GEORGE - 1950 - The permeability of Porous Materials - Proc. Roy Society - London, vol A, P. 392-405.

GEFFEN - OWENS - PARISH - MORSE - Experimental Investigations of factors affecting Laboratory Permeability Measurements.  
Petrol Technology Avril 1951.

GARDNER - 1958 - Mathematics of Isothermal water conduction in insaturated soils.  
Highway Research Board, Spec. rep. 70 - P.79.88.



- GARDNER-FIREMAN - 1958 - Laboratories study of evaporation from soil columns in the presence of a water table. Soil Science, vol. 85, p. 295.304.
- MORSE - TERWILLIGER - YUSTER - 1957 - Relative permeability measurement on small core samples.  
Oil and gas journal, August 1947, p. 109;
- RICHARDS & MOORE - 1952 - Influence of Capillary Conductivity and Depth of wetting on moisture retention in soil.  
Trans. Amer. Geophys. Union. vol. 33, p. 531.540.
- SOIERO - 1961 - Coefficient de perméabilité des matériaux non saturés, application à l'étude du mouvement de l'eau dans les sols.  
5e Congrès de Méca Sols et Travaux de Fondations, Paris 1961, p. 359. 365.
- WELDGE - 1952 - A simplified method for computation oil recovery by gas or water drive.  
Petrol. Trans. AIME, vol 195. p. 91.98.
- WYLLIE - GARDNER - 1958 - The generalized Kozeny - Carman Equation.  
World Oil - April 1958.



#### IV. RESOLUTION DE L'EQUATION DE L'ECOULEMENT DE L'EAU DANS DES SOLS NON SATURES

---

L'équation générale de l'écoulement, telle que nous l'avons étudiée dans le chapitre II, se présentant sous la forme d'une équation différentielle, sa résolution, c'est à dire la connaissance de la teneur en eau  $\theta$ , du potentiel capillaire  $\psi$  et du flux  $q$  à tout instant et en tout point, doit pouvoir se faire si l'on connaît les conditions initiales (suction et teneur en eau) ainsi que la suction ou le gradient de suction aux limites du système.

Cependant, cette équation de l'écoulement n'étant pas linéaire, du fait de la présence des coefficients  $D(\theta)$  ou  $k'(\theta)$ , sa résolution n'a été possible que pour des problèmes présentant des conditions initiales et aux limites très simples, notamment dans le cas d'écoulements isothermes. De plus, cette équation peut être intégrée pour des problèmes d'écoulement en régime permanent, alors que pour un écoulement transitoire l'intégration ne pourra se faire que numériquement.

Signalons enfin que les problèmes à résoudre se ramènent en général à deux types :

- a/. ou bien on recherche, dans un écoulement permanent, le débit connaissant les conditions initiales et aux limites (hauteur de la nappe, teneur en eau à la surface du sol) : par exemple recherche du débit d'évaporation au dessus d'une nappe à hauteur constante.
- b/. ou bien on recherche, dans un écoulement transitoire,



la variation dans le temps et l'espace de la teneur en eau et du flux, connaissant les conditions initiales et aux limites, jusqu'à ce que l'on arrive au régime permanent. Par exemple : recherche de la variation du débit d'infiltration dans un sol en fonction du temps.

Pour arriver à la résolution de ces problèmes, on est amené à utiliser soit la forme analytique des fonctions  $k(\psi)$  ou  $D(\theta)$ , soit leur connaissance numérique. C'est pour ceci que nous avons étudié dans le chapitre précédent les méthodes de mesure de ces deux fonctions.

Nous nous plaçons dans le cas d'un milieu isotrope et isotherme non saturé.

#### 1) CAS D'UN ECOULEMENT PERMANENT UNIDIMENSIONNEL.

Ce cas est le plus simple qu'il soit donné de résoudre, et l'un des problèmes pratiques les plus intéressants qui s'y rapporte est le suivant : comment déterminer le débit d'évaporation au dessus d'une nappe à hauteur constante connaissant la succion appliquée à la surface du sol et la cote de la nappe?

Nous avons vu (chap.III) que ce problème avait été étudié expérimentalement par Moore (1939) et Richards and Weeks (1952). Gardner-Fireman (1950), Veihmeyer-Brooks (1954) se sont également penchés sur la résolution expérimentale de ce problème. Une étude théorique très intéressante en a été faite par Gardner (1958), en utilisant sa formulation pour  $k(\psi)$  et par Philip (1957 - d) par intégration numérique.



En régime permanent dans un matériau isotherme non saturé, on sait que les équations de l'écoulement sont :

$$0 = \operatorname{div} (D \operatorname{grad} \theta) + \frac{\partial k'}{\partial z} \quad (2.10) \quad \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \right)$$

ou

$$q = -D \operatorname{grad} \theta - k' \quad \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\operatorname{div} q \right)$$

où  $q$  est le flux d'eau à la surface du sol. ( $\text{cm}^3/\text{cm}^2 \times \text{sec}$ )

Considérons le cas d'un écoulement unidimensionnel vers le haut depuis une nappe à la cote  $z = z_w$  ( $z_w < 0$ ) avec une teneur en eau  $\theta_0$  imposée à la surface du sol (Philip, 1957 - d).

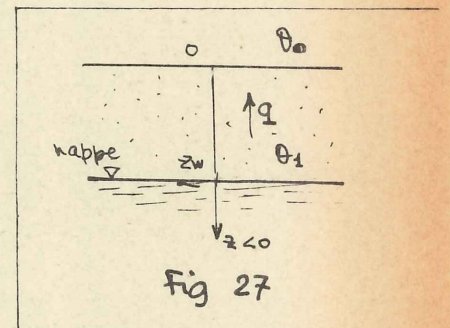
L'équation de l'écoulement s'écrit :

$$q = -D \frac{d\theta}{dz} - k' \quad (4.1)$$

Cherchons  $q(\theta, z)$

(4.1) peut s'écrire :  $\frac{d\theta}{dz} = -\frac{k'+q}{D}$

soit 
$$z_w = \int_{\theta_1}^{\theta_0} \frac{D}{k'+q} d\theta \quad (4.2)$$
  
( $z_w < 0$ )



où  $\theta_1$  = teneur en eau à la hauteur de la nappe ( $z = z_w$ ,  $\theta_1 = \theta_{sat}$ )  
 $\theta_0$  = teneur en eau au niveau du sol :  $z = 0$ ,  $\theta_0$  imposé  
 (fig 27)

L'intégration de (4.2) donnera une relation de la forme  $z_w = z_w(q, \theta)$ , et il suffit de l'inverser pour avoir

$$q = q(\theta, z_w) \quad (\text{Philip, 1957 - d})$$

Pour intégrer (4.2) Philip procède par intégration numérique.



On peut aussi fixer la succion  $\Psi$  à la surface du sol (Gardner 1958). Comme  $D = k' \frac{\partial \Psi}{\partial z}$

$$(4.1) \text{ s'écrit : } q = -D \frac{\partial \theta}{\partial z} - k' = -k' \frac{\partial \Psi}{\partial z} - k'$$

$$\text{Soit } \frac{d\Psi}{dz} = -\left(\frac{q}{k'} + 1\right)$$

et, avec  $z_w < 0$ , l'intégration donne :

$$z_w = \int_{\Psi_1}^{\Psi_0} \frac{d\Psi}{\frac{q}{k'} + 1} \quad (4.3)$$

avec  $\Psi_1 =$  succion à la cote de la nappe ( $z = z_w$ )  $\Psi_1 = 0$   
 $\Psi_0 =$  succion à la surface du sol ( $z = 0$ )  $\Psi_0$  imposé ( $\Psi_0(\theta_0)$ )

Les formules (4.3) et (4.2) sont d'ailleurs identiques, mais pour résoudre (4.2) Gardner emploie l'expression analytique  $k'(\Psi)$  trouvée par sa méthode de mesure :

$$k' = \frac{a}{\Psi^n + b} \quad (3.13)$$

En posant  $\alpha = \frac{a}{b}$ ,  $\beta = \alpha b + 1$  ( $\beta$  très voisin de 1)

(4.3) s'écrit

$$z_w = \int_0^{\Psi_0} \frac{d\Psi}{\alpha \Psi^n + \beta} \quad (4.4)$$

Gardner (1958) donne la valeur  $z_w = z_w(q, \Psi)$  obtenue par la résolution de (4.4) pour des valeurs de  $n$  variant de 1 à 4, et aussi pour une fonction de la forme  $k' = a \exp(-b\Psi)$ . Il suffit d'inverser pour avoir  $q = q(z_w, \Psi)$ . Il faut signaler que de nombreux autres chercheurs ont résolu le problème en prenant pour  $k'(\Psi)$  d'autres valeurs, ainsi

Richards (1931)	$k' = a\Psi + b$
Ramson-Fox (1955)	$k' = a\Psi^{-1}$
Wind (1955)	$k' = a\Psi^{-3/2}$



Mais il semble que ce soient les valeurs données par Gardner qui permettent l'intégration la plus générale. Si l'écoulement est horizontal,  $\alpha = q/a$  et  $\beta = a/b$  mais (4.4) reste identique.

Par l'une de ces deux méthodes on voit donc que si l'on connaît  $q$  en régime permanent on peut étudier la variation  $\psi(z)$ , où  $z$  est la cote au dessus de la nappe et que si l'on se fixe  $z_w$  on peut, en faisant varier  $\psi_0$  à la surface du sol étudier la variation  $q(\psi_0)$  pour chaque  $z_w$ .

Gardner (1958), en fonction de ces résultats, a calculé

- pour un débit d'évaporation donné la variation du potentiel capillaire  $\psi$  avec la hauteur au dessus d'une nappe à cote constante, pour un sol bien connu : Yolo Clay, en comparant ses résultats avec les résultats expérimentaux trouvés par Moore en 1939 sur une colonne de même matériau ( $\psi(z)$  étant mesuré avec des tensiomètres) pour le même débit;
- pour une nappe à une cote fixe la variation du débit d'évaporation en fonction de la succion à la surface du sol pour différents types de sols connus.

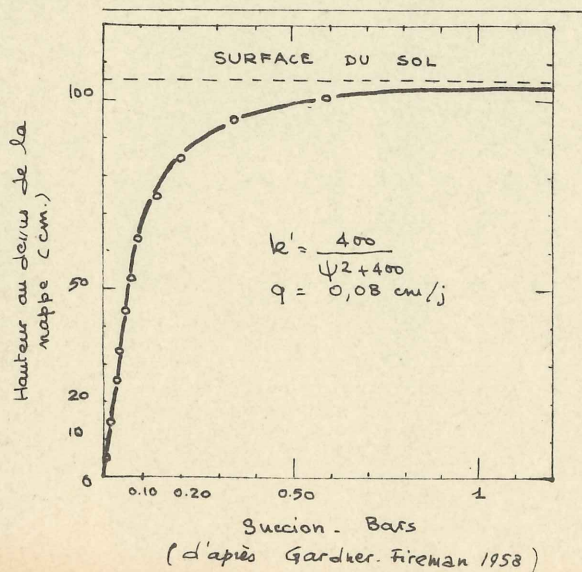
On trouve ci-contre la courbe  $\psi(z)$  obtenue théo-

riquement par Gardner pour ce sol : Yolo Clay, ainsi que les valeurs expérimentales (cercles) obtenus par Moore pour le même sol avec le même flux

$$= q = 0,08 \text{ cm/jour (fig 28)}$$

Pour ce sol, la loi  $k'(\psi)$  trouvée par la méthode de Gardner est

$$k' = \frac{400}{\psi^2 + 400} = \frac{a}{\psi^2 + b}$$





et, pour  $n = 2$ ,  $z = f(q, \Psi)$  obtenu par la résolution de (4.4) est

$$z = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \Psi + \kappa \quad (4.5)$$

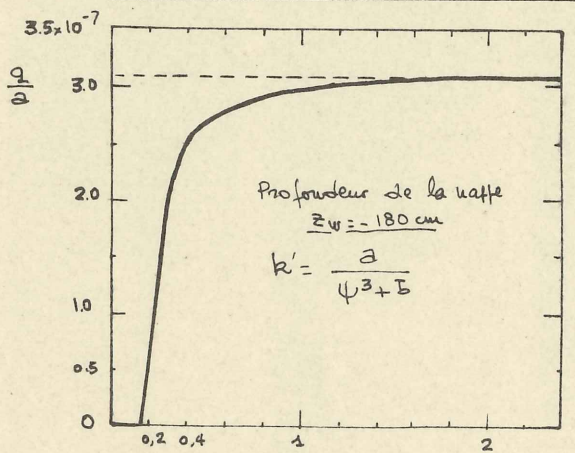
avec  $\alpha = \frac{q}{a}$ ,  $\beta = ab + 1$  et  $\kappa$  fixé par les conditions aux limites.

Si on prend  $\Psi_1 = 0$  à la surface de la nappe ( $z=0$ )  $\kappa = 0$ , et la loi  $\Psi(z)$  est

$$\Psi = \sqrt{\alpha\beta} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot z \quad (4.6)$$

Avec  $q = 0,08$  cm/jour,  $a = b = 400$ . On a la courbe théorique, et très bonne concordance avec les résultats expérimentaux.

Mais la seconde expérience est beaucoup plus riche en résultats, Gardner démontre en effet que pour toutes les lois  $k'(\Psi)$  étudiées,  $n$  variant de 1 à 4, et avec la loi  $k' = a \exp(-b\Psi)$ , lorsque la nappe est à une cote constante  $z_w$  et que l'on augmente la succion (ou qu'on diminue la teneur en eau) à la surface du sol, le débit d'évaporation croît très vite pour des faibles valeurs de la succion à la surface pour tendre très rapidement vers une valeur limite, sitôt que la succion devient  $> 1$  bar, sauf pour  $n = 1$



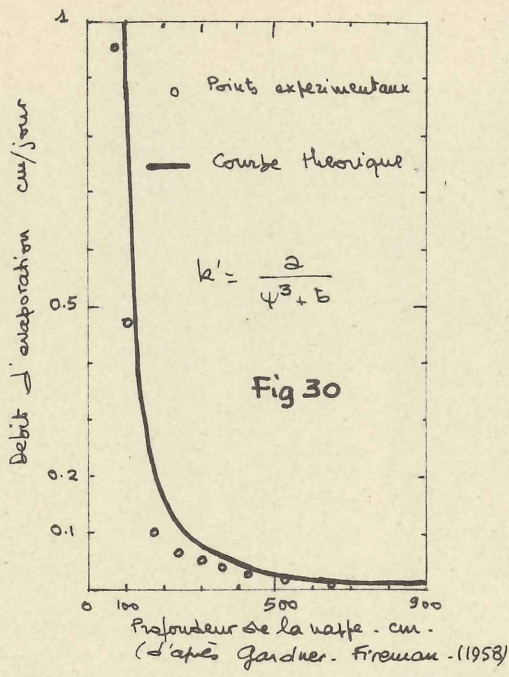
Succion à la surface du sol (bars)  
(d'après Gardner. 1958)

Fig 29

On trouvera ci-joint la courbe donnant la variation du flux relatif  $\frac{q}{a}$  en fonction de la succion à la surface pour un sol bien connu : limon sableux de Pachappa  $n = 3$ , avec une nappe à la cote  $z_w = -180$  cm. (Fig 29)

Quelque soit le sol, sauf  $n = 1$ , toutes les courbes  $\frac{q}{a}(\Psi)$  sont simi-





lares, et la valeur limite ne dépend que de la profondeur de la nappe, et du sol par  $n$ . Plus la nappe est superficielle, plus le domaine sous lequel le débit est contrôlé par les variations extérieures est important, et plus  $q_{lim.}$  est fort.

Le flux limite peut être relié à la profondeur de la nappe et au  $n$  du sol par :

$$q_{lim} = A_n \cdot \frac{a}{z_w^n} \quad (4.7)$$

$q_{lim}$  = flux maximum d'évaporation (cm/jour)

$z_w$  = profondeur de la nappe en cm

$a, n$  = cte tirées de (3.13)

$A_n$  = constante dépendant de  $n$ . Pour  $n = 3$ ,

$A_n = 1,76$  (Gardner 1958).

On trouvera la courbe  $q_{lim} = q(z_w)$  pour un limon sableux de Pachappa, et la comparaison avec les points expérimentaux (cercles) obtenus par Gardner and Fireman (1958) mais en fixant la succion à 16,5 cm en dessous de la surface du sol. D'où le décalage. Malgré tout, très bonne concordance. (fig 30)

## 2) ÉCOULEMENT NON-PERMANENT UNIDIMENSIONNEL.

Le problème type que l'on a à résoudre dans ce cas est par exemple le suivant : comment varie, dans le temps et dans l'espace, l'avancement unidimensionnel d'un front d'humidification dans un milieu non saturé, les conditions aux limites étant connues. La résolution est beaucoup plus complexe



et nécessite une technique tout à fait différente. Ce problème a été étudié en détail plus spécialement par Philip, (1957 b, 1958 a) qui a consacré une suite de 6 articles à l'étude de l'infiltration, et par Ar. Klute (1952).

La formule générale du mouvement est donnée dans ce cas par

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div} (D \text{grad } \theta) + \frac{\partial k'}{\partial z}$$

Pour simplifier l'exposé, nous allons d'abord envisagé le cas d'un écoulement horizontal, où le terme  $\frac{\partial k'}{\partial z}$  disparaît, puis nous étudierons un écoulement vertical.

### 2.1. Ecoulement horizontal non permanent.

L'équation de base sera :

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)} \quad (4.8)$$

avec, dans la majorité des cas  $D = D_0 e^{\beta(\theta - \theta_0)}$

On a donc une équation type "équation de diffusion" avec un coefficient de diffusivité fonction de la concentration  $\theta$ . Ce type d'équation a été étudié en détail par Crank (1949, 1960) pour les phénomènes de diffusion moléculaire dans des gaz, mais il faut bien se rappeler que cette équation ne veut pas dire que le mouvement de l'eau se fait sous forme de diffusion. C'est un mouvement laminaire, et seule l'équation du mouvement est analogue à l'équation de la diffusion au sens classique.

Childs (1936, 1938) et Nicholson and Childs (1936) ont les premiers essayé de résoudre cette équation (4.8), mais en supposant  $D$  constant. Il est évident que ceci simplifie



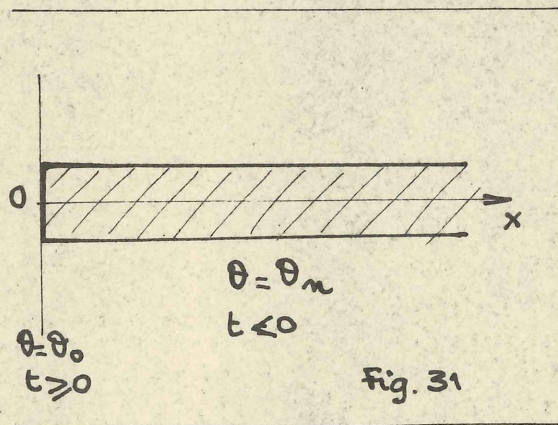
beaucoup de choses, car on se ramène à

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

mais les résultats trouvés ne s'accordent pas du tout à la réalité.

Ce n'est qu'en 1952 que Klute, suivi en 1957 par Philip, a trouvé une méthode d'intégration numérique de (4.8) qui soit en accord avec les résultats expérimentaux et qui, de plus, indique l'existence d'un front mouillant qui avance au fur et à mesure que le sol s'imbibe ; mais alors que la méthode numérique de Klute n'est applicable qu'à la résolution d'un écoulement horizontal et offre une faible convergence, celle de Philip est rapide et applicable à un écoulement vertical (infiltration). C'est pourquoi nous étudierons cette dernière.

Considérons une colonne horizontale semi-indéfinie



initialement à la teneur en eau uniforme  $\theta_n$ . A partir du temps  $t = 0$ , on impose à l'origine une teneur en eau  $\theta_0$ . Quelle est la loi  $\theta(x, t)$  ? Quel est le débit  $q(x, t)$  ?

L'équation du mouvement est :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (4.8)$$

et les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_n & x &> 0 & t &< 0 \\ \theta &= \theta_0 & x &= 0 & t &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$



Si  $\theta_0 > \theta_m$  (4.8) décrit le phénomène d'humidification de la colonne

$\theta_0 < \theta_m$  (4.8) décrit le drainage de la colonne par application d'une succion constante  $\theta_0$  à l'origine.

(4.8) est une équation différentielle non linéaire, mais il est facile et commode de la ramener en une équation différentielle ordinaire en utilisant la transformation de Boltzman (Crank Henry - 1949).

Soit  $\underline{\varphi = x \cdot t^{-1/2}}$  (4.10) une nouvelle variable. Par changement de variable on voit que (4.8) et (4.9) se ramènent au système différentiel :

$$\boxed{-\frac{\varphi}{2} \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left( D(\theta) \frac{d\theta}{d\varphi} \right)} \quad (4.11)$$

$\theta = \theta_0 \quad \varphi = 0$

[Klute (1952) utilise pratiquement la même méthode pour ramener le système (4.8) - (4.9) en un système linéaire, bien qu'il passe en variable adimensionnelle, en utilisant la valeur  $D_0$  du coefficient de diffusivité pour  $\theta = \theta_0$  (et  $x = x_0$ ), et qu'il se serve d'une autre valeur du coefficient de Boltzman :  $\eta = x/2\sqrt{D_0 t}$ . Mais à partir de ce point, il se sert d'une méthode numérique, due à Crank and Henry (1949), pour obtenir la loi  $\theta = \theta(x, t)$ ]

Considérons donc :  $-\frac{\varphi}{2} \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left( D \frac{d\theta}{d\varphi} \right)$

en multipliant les deux côtés par  $\frac{d\varphi}{d\theta}$ , on obtient

$$-\frac{\varphi}{2} = \frac{d}{d\theta} \left( D \frac{d\theta}{d\varphi} \right)$$

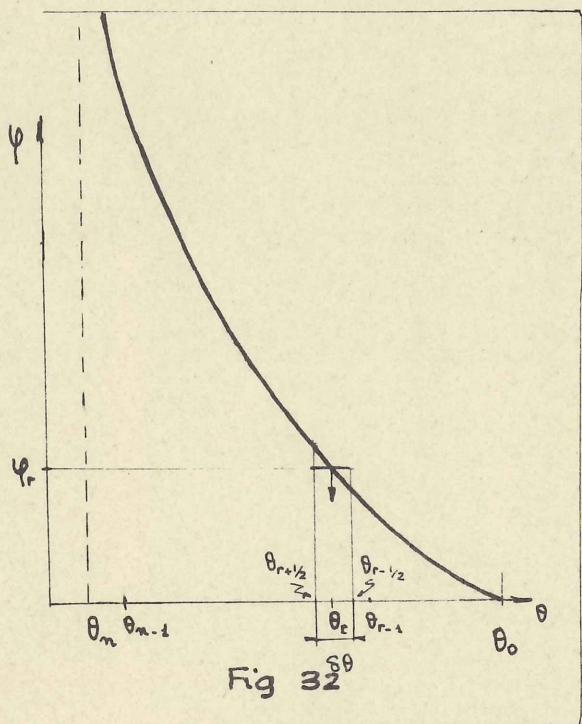
et en intégrant, (4.11) devient

$$\boxed{\int_{\theta_n}^{\theta_0} \varphi d\theta = -2D \frac{d\theta}{d\varphi}} \quad (4.12)$$

$\theta = \theta_0 \quad \varphi = 0$   
 $\theta \rightarrow \theta_n \quad \varphi \rightarrow \infty$



Ce système peut être facilement réduit en utilisant la méthode des différences finies (Philip 1955,a) en commençant à partir d'une valeur d'essai



La méthode consiste à diviser l'intervalle de variation  $\theta_0 - \theta_n$  en  $n$  élément  $\delta\theta$ , et à remplacer la courbe  $(\varphi, \theta)$  par l'histogramme  $(\varphi_r, \theta_r)$ ,  $\varphi_r$  et  $\theta_r$  étant les coordonnées du point central de pas  $\epsilon$  :

$$\theta_r = \theta_0 - \epsilon \delta\theta \quad (\theta_0 > \theta_n)$$

(fig 32)

Ecrivons

$$\int_{\theta_r}^{\theta_{r+1/2}} \varphi_r d\theta = -\varphi_r \frac{\delta\theta}{2}$$

$$\int_{\theta_{r-1/2}}^{\theta_r} \varphi_r d\theta = -\varphi_r \frac{\delta\theta}{2}$$

et supposons que 
$$\left( D \frac{d\theta}{d\varphi} \right)_{r+1/2} = -\bar{D}_{r+1/2} \frac{\delta\theta}{\varphi_{r+1} - \varphi_r}$$

où 
$$\bar{D}_{r+1/2} = \frac{\int_{\theta_{r+1}}^{\theta_r} D d\theta}{\int_{\theta_{r+1}}^{\theta_r} d\theta}$$

coeff. de diffusivité moyen à  $r+1/2$

En substituant ces expressions dans (4.12)

$$\int_{\theta_n}^{\theta_0} \varphi d\theta = -2 \left( D \frac{d\theta}{d\varphi} \right)$$

pour  $\theta = \theta_{r+1/2}$  
$$\int_{\theta_n}^{\theta} \varphi d\theta = \int_{\theta_n}^{\theta_r} \varphi d\theta - \varphi_r \frac{\delta\theta}{2}$$

et (4.12) devient

$$\int_{\theta_n}^{\theta_r} \varphi d\theta - \varphi_r \frac{\delta\theta}{2} = 2 \bar{D}_{r+1/2} \frac{\delta\theta}{\varphi_{r+1} - \varphi_r}$$



Si l'on pose

$$I_{r+1/2} = \frac{1}{8\theta} \int_{\theta_n}^{\theta_r} \varphi d\theta - \frac{\varphi_r}{2}$$

On a donc

$$\varphi_{r+1} - \varphi_r = 2 \frac{\bar{D}_{r+1/2}}{I_{r+1/2}} \quad (4.13)$$

et

$$I_{r+1/2} - I_{r-1/2} = -\varphi_r \quad (4.14)$$

Le procédé de Philip consiste donc à :

- 1) tabuler  $\bar{D}_{r+1/2}$  d'après la fonction  $D(\theta)$  connue
- 2) adopter un intervalle  $I_{1/2}$ . Utiliser la condition  $\varphi_0 = 0$  et (4.13) pour avoir  $\varphi_1$
- 3) utiliser  $I_{1/2}$  et  $\varphi_1$  pour avoir  $I_{3/2}$
- 4) continuer alternativement (4.13) et (4.14) pour avoir  $\varphi_r$  et  $I_{r+1/2}$  pour les valeurs de  $r$  variant de 1 à  $n-1$

Lorsque  $\theta \rightarrow \theta_n$ ,  $\varphi_n \rightarrow \infty$ . Philip fait un calcul pour  $\theta$  voisin de  $\theta_n$  en prenant un intervalle  $[\theta_{n-\varepsilon}, \theta_n]$  où  $\varepsilon$  est suffisamment petit pour qu'on puisse considérer  $D$  constant dans cet intervalle :

$$\bar{D} = \frac{1}{\varepsilon 8\theta} \int_{\theta_{n-\varepsilon}}^{\theta_n} D d\theta$$

Si l'on prend  $\theta_{n-1}$  à  $\theta_n$ , et  $D_{n-1/2}$  comme valeur moyenne, on est amené à intégrer

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \bar{D}_{n-1/2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \text{dans l'intervalle } \theta_{n-1}, \theta_n \quad \text{selon} \quad (4.8) \quad \text{avec } \bar{D} = \text{cte}$$

avec

$\theta = \theta_{n-1}$	$x = \varphi_{n-1} t^{1/2}$	( Boltzman)
$\theta \rightarrow \theta_n$	$x \rightarrow \infty$	



L'intégration donne

$$\varphi = 2 (\bar{D}_{n-1/2})^{1/2} \operatorname{inverfc} \left[ \frac{\theta - \theta_n}{s\theta} \operatorname{erfc} \frac{\varphi_{n-1}}{2(\bar{D}_{n-1/2})^{1/2}} \right] \quad (4.15)$$

où  $\operatorname{inverfc} x$  est l'inverse de la fonction

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-y^2) dy$$

(4.15) donne la valeur de  $\varphi$  près de  $\theta = \theta_n$ . En utilisant ( $I_{r+1/2}$ ) on trouve

$$I_{n-1/2} = \frac{\varphi_{n-1}}{2} + \frac{2 \bar{D}_{n-1/2}}{\varphi_{n-1}} A \left[ \frac{\varphi_{n-1}}{2(\bar{D}_{n-1/2})^{1/2}} \right] \quad (4.16)$$

où  $A = 2x \frac{\operatorname{ierfc} x}{\operatorname{erfc} x}$  ( $\operatorname{ierfc} x = \int_x^{\infty} \operatorname{erfc} y dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) - x \operatorname{erfc} x$ ) est tabulé.

Par (4.16) on obtient donc une valeur  $(I_{n-1/2})_{ii}$  qu'on peut comparer avec la valeur  $(I_{n-1/2})_i$  obtenue par le processus normal. ((4) page précédente).

Soit  $\Delta i = (I_{n-1/2})_i - (I_{n-1/2})_{ii}$

On répètera le procédé en prenant au lieu de  $I_{1/2}$  comme intervalle adopté (2) l'intervalle  $(I_{1/2})' = I_{1/2} - \frac{\Delta i}{2}$  et on recommence l'intégration numérique jusqu'à ce que  $\Delta i$  soit négligeable.

Pour le choix de l'intervalle  $I_{1/2}$ , Philip recommande de faire une première estimation en prenant une diffusivité constante

$$D' = 2 \int_{\theta_n}^{\theta_0} \frac{D(\theta - \theta_n)}{(\theta_0 - \theta_n)^2} d\theta$$

ce qui donne

$$\boxed{I_{1/2} = 2n \cdot \left( \frac{D'}{n} \right)^{1/2}} \quad (4.17)$$

Ce procédé peut sembler long, mais il est très rapi-



de en fait, car la valeur A est tabulée,

On arrive ainsi à obtenir très rapidement la loi  $\theta(x,t)$  dans l'échantillon.

Il apparaît également un concept intéressant dans la formulation de ces équations le concept de front d'humidification. Si en effet on considère la variable.

$$\varphi = x t^{-1/2} \quad (4.16)$$

pour un plan de teneur en eau  $\theta$  constante,  $\varphi = \text{cte}$  donc

$$x = c \sqrt{t} \quad (4.17)$$

C'est à dire que si l'on considère l'avancement d'un front d'humidification, l'avancement de ce front  $x$  est proportionnel à la racine carrée du temps. On démontre de même que le volume d'eau admis dans l'échantillon est inversement proportionnel à  $\sqrt{t}$ , mais que le volume d'eau cumulé est directement proportionnel à  $\sqrt{t}$ .

Gardner and Mayhugh (1958) ont fait toute une série d'expériences sur des colonnes horizontales de sol, ainsi que à deux ou trois dimensions, pour prouver la véracité de l'hypothèse faite ci-avant et comparer la répartition expérimentale  $\theta(x,t)$  avec la loi  $\theta(x,t)$  obtenue pour le même matériau d'après la théorie de Philip, les teneurs en eau étant déterminées par destruction de l'échantillon.

Ces auteurs commencent par donner sous forme d'abaque la loi  $\theta(x,t)$ , obtenue par la théorie de Philip, pour n'importe quel matériau dont la loi  $D(\theta)$  peut s'écrire sous la forme  $D = D_0 \exp \beta (\theta - \theta_0)$ , en fonction de dif-



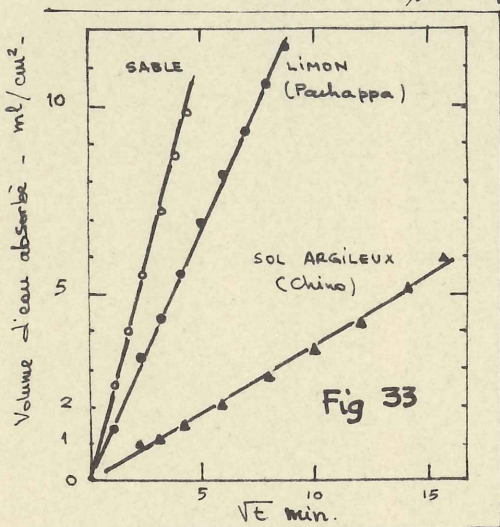
férentes valeurs de  $D_o/D_m$  où

$$D_o = \text{diffusivité à la teneur en eau } \theta_o \quad (\alpha=0, t>0)$$

$$D_m = \text{ " " " " } \theta_m \quad (\alpha>0, t=0)$$

On trouvera cette abaque p. IV.16. Pour tout écrire sous forme adimensionnelle, les variables sont mises sous la forme

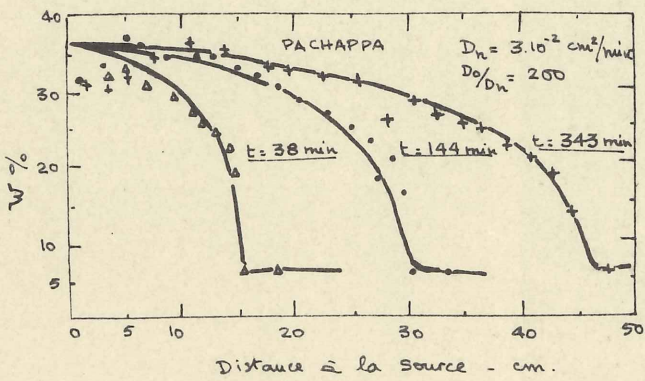
$$\lambda = (\theta - \theta_m) / (\theta_o - \theta_m), \quad \varphi' = \alpha / \sqrt{D_o t}$$



Les volumes d'infiltration cumulée sous charge constante dans des échantillons horizontaux avec écoulement unidimensionnel (processus expérimental : Gardner-Fireman 1958, p.198.199) reportés en fonction de  $\sqrt{t}$  pour divers échantillons donnent les courbes fig. 33. On voit bien que, pour tous ces échantillons, la quantité d'eau totale infiltrée est directement proportionnelle à  $\sqrt{t}$ , la

constante dépendant de la nature des grains. Pour un écoulement horizontal à 2 dimensions, une série de graphiques analogues montre que le volume cumulé est proportionnel au temps  $t$ . Pour un écoulement à 3 dimensions, l'expérience montre la proportionnalité à  $t^{3/2}$ .

Enfin, en reportant les valeurs  $\theta(\alpha)$  obtenues sur 3 échantillons de limon sableux Pachappa dans un écoulement unidimensionnel à 3 instants différents, - Gardner and Mayhugh ont les valeurs expérimentales ci-contre (fig 34)



Les courbes en trait plein sont les valeurs  $\theta(\alpha)$  obtenues pour les mêmes  $t$  d'après la théorie de

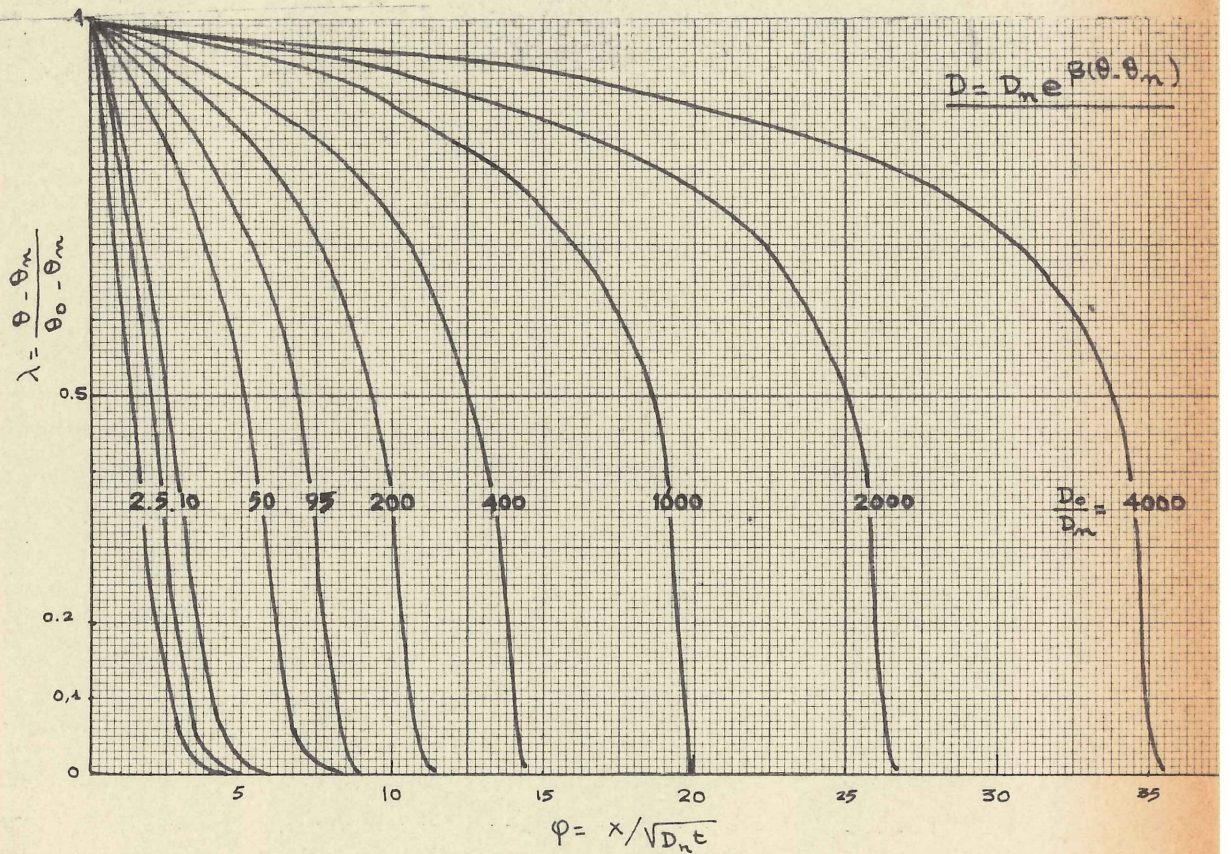
Fig 34



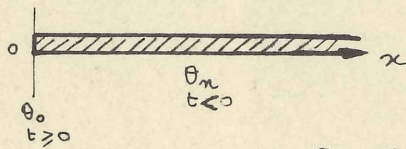
Solution de l'équation de diffusion durant l'absorption horizontale pour un coefficient de diffusion :

$$D = D_m e^{\beta(\theta - \theta_m)}$$

Fig. 36



Conditions aux limites



$\theta = \theta_0$      $x = 0$      $t \geq 0$      $D_0$   
 $\theta = \theta_m$      $x = x$      $t < 0$      $D_m$   
 $\theta_0 > \theta_m$

Courbes  $\lambda = \lambda(\varphi)$  pour différents  $\frac{D_0}{D_m}$   
 ( $D_0 =$  diffusivité à l'origine)

(d'après Gardner-Mayhugh 1958)



Philip pour ce même sol, avec  $D_m = 3 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{sec}$  et  $D_0 / D_m = 200$ . L'agrément est bon entre expérience et théorie, sauf pour les faibles valeurs de  $\alpha$ ; ceci provient certainement d'irrégularité de porosité à l'origine (compactage). Les essais ont été fait pour une teneur en eau initialè uniforme  $w_m = 6 \%$ , avec application d'une teneur en eau à l'origine  $w_0 = 36 \%$  ( $w =$  teneur en eau sur la base du poids sec).

Mais ces résultats, pour intéressants qu'ils soient, sont relativement peu applicables à la réalité, où l'on trouve surtout le même genre de problème mais avec écoulement unidimensionnel vertical : drainage ou infiltration. La présence du terme gravitaire venant troubler complètement les équations du mouvement il est nécessaire d'envisager un élargissement de cette théorie.

## 2.2. Ecoulement vertical non permanent.

Le mouvement vertical de l'eau dans un sol est alors décrit par l'équation générale du mouvement :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial k'}{\partial z} \quad (4.19)$$

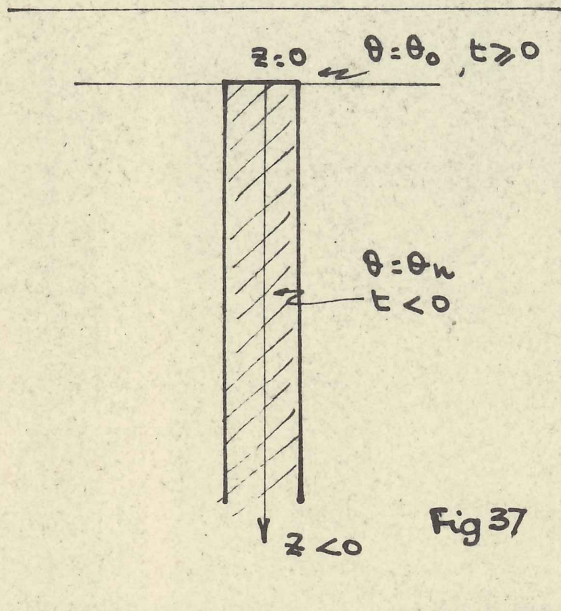
la résolution de cette équation différentielle non linéaire se complique du fait de la présence du terme  $\frac{\partial k'}{\partial z}$

Le seul exemple de résolution connu est celui donné par J.R. Philip, qui a consacré une somme de 7 articles de base à la théorie de l'infiltration dans les sols, et la méthode est, comme dans le cas d'un mouvement horizontal, de linéariser cette équation afin de pouvoir la résoudre, connaissant les conditions initiales et aux limites régissant le système.



2.2.1. Résolution de l'équation du mouvement.

Pour ceci, considérons une colonne semi indéfinie, selon l'image donnée p. IV.9, mais verticale ( $z \leq 0$ ), et à la teneur en eau uniforme  $\theta_m$ .



A partir du temps  $t = 0$ , on impose à l'origine la teneur en eau  $\theta = \theta_0$  (fig 37). Quelle est la loi  $\theta(z, t)$ ? Quel est le débit  $q(z, t)$ ?

Les conditions aux limites sont donc :

$$\left. \begin{aligned} \theta = \theta_m & \quad z \leq 0 & \quad t < 0 \\ \theta = \theta_0 & \quad z = 0 & \quad t \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Si,  $\theta_0 > \theta_m$ , (4.20) décrit l'infiltration dans la colonne.

Dans les cas les plus courants, on a d'ailleurs  $\theta_0 = \theta_{sat}$ . Comme  $z < 0$ , introduisons la variable

$$x = -z$$

le système différentiel décrivant le mouvement de l'eau est donc :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial k'}{\partial x} & (4.21) \\ \theta = \theta_m & \quad t < 0 & \quad x > 0 \\ \theta = \theta_0 & \quad t \geq 0 & \quad x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

avec  $\theta_0 > \theta_m$  (infiltration), et ce système doit être comparé aux systèmes (4.8) (4.9) obtenus pour un écoulement horizontal.



Pour linéariser ce système, Philip introduit un système différentiel supplémentaire, similaire au système (4.8), (4.9), pour obtenir une première approximation de la loi  $x(\theta, t)$  : soit

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( D \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x'} \right) \quad (4.23)$$

soumis à :

$$\left. \begin{array}{l} \theta = \theta_m \quad t < 0 \quad x' > 0 \\ \theta = \theta_0 \quad t \geq 0 \quad x' = 0 \end{array} \right\} \quad (4.24)$$

La solution  $x'(\theta, t)$  est connue sous la forme  $x' = \varphi \cdot t^{-1/2}$  et on peut utiliser une méthode de superposition pour avoir  $x(\theta, t)$ , répondant à (4.21), (4.22), à partir de (4.23), (4.24).

On peut aussi reprendre la méthode de résolution du système (4.8) - (4.9), en écrivant (4.21) et (4.23) avec  $\theta$  comme variable indépendante. On obtient ainsi :

$$- \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial k'}{\partial \theta} \quad (4.25)$$

$$- \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D \frac{\partial \theta}{\partial x'} \right) \quad (4.26)$$

et, par soustraction, on a :

$$\frac{\partial (x - x')}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial (x - x')}{\partial x} \right) + \frac{\partial k'}{\partial \theta} \quad (4.27)$$

$$\text{soit} \quad y = x - x' \quad (4.28)$$

Si l'on suppose que  $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x'}$ , (4.27) - (4.26) devient

$$\frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{\partial y'}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial k'}{\partial \theta} \quad (4.29)$$



où  $y'$  est écrit pour  $y$ , puisque (4.29) ne peut pas donner exactement  $y$ .

Si l'on applique la transformation de Boltzman, sous la forme :

$$\chi = y' t^{-1} \quad (4.30)$$

à (4.29), cette équation est réduite à l'équation différentielle linéaire :

$$\chi = \frac{d}{d\theta} \left( P \frac{d\chi}{d\theta} \right) + \frac{dk'}{d\theta} \quad (4.31)$$

où  $P(\theta) = D \left( \frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 \quad (4.31a)$

et  $\varphi = x' t^{-1/2} \quad (4.31b)$

$P(\theta)$  et  $\varphi(\theta)$  sont donc obtenus à partir de la solution du système (4.23) - (4.24).

En intégrant (4.31), on obtient

$$\int_{\theta_n}^{\theta_0} \chi d\theta = P \frac{d\chi}{d\theta} + (k' - k'_n) \quad (4.32)$$

sujet à

$$\theta = \theta_0 \quad \chi = 0$$

où  $k'_n$  est la valeur de  $k'$  pour  $\theta = \theta_n$

La résolution de l'équation (4.32) peut se faire par une méthode numérique similaire à celle utilisée p. IV.11 ; mais la forme linéaire de l'équation aux différences finies permet d'obtenir directement les résultats, sans être obligés d'employer de solution itérative.

On pourra trouver dans Philip (1957a) une méthode numérique simple de résolution des équations différentielles



de la forme

$$\left. \begin{aligned} \int_{\theta_n}^{\theta} f d\theta &= \alpha \frac{df}{d\theta} - \beta \\ \theta &= \theta_0, \quad f = 0 \end{aligned} \right\}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions connues de  $\theta$ . Il utilise de plus une solution analytique pour  $\theta$  proche de  $\theta_n$  ( $\theta \rightarrow \theta_n, f \rightarrow \infty$ ).

La valeur  $y'$  ainsi obtenue est différente de  $y$  donné par (4.27). En introduisant une nouvelle variable

$$z = y - y' \quad (4.33)$$

et en soustrayant (4.29) de (4.27), on obtient :

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ D \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x'} \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y'}{\partial x'} \right) \right] \quad (4.34)$$

soit, avec  $\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x'}$ ,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ D \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x'} \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x'} \right) \right] \quad (4.35)$$

Si l'on suppose que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial x'}; \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial x'}$$

(4.34) devient

$$\frac{\partial z'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ D \frac{\partial \theta}{\partial x'} \left\{ \frac{\partial z'}{\partial x'} - \left( \frac{\partial y'}{\partial x'} \right)^2 \right\} \right] \quad (4.36)$$

où  $z'$  est écrit pour  $z$ , puisque (4.36) ne peut donner exactement  $z$ .

En utilisant les valeurs de  $\varphi$ ,  $P$  et  $\chi$  données par (4.31b), (4.31c) et (4.31), on peut encore écrire (4.36)

$$\frac{\partial z'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{P}{t} \frac{\partial z'}{\partial \theta} - Q t^{1/2} \right] \quad (4.37)$$

où

$$Q = D \cdot \frac{d\theta}{d\varphi} \left( \frac{d\chi}{d\varphi} \right)^2$$



Introduisant alors la transformation de Boltzman sous la forme :

$$\psi = z' t^{-3/2} \tag{4.38}$$

(4.39) peut être réduite à une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{3}{2} \psi = \frac{d}{d\theta} [ P \frac{d\psi}{d\theta} - Q ] \tag{4.39}$$

En intégrant, on obtient :

$$\frac{3}{2} \int_{\theta_m}^{\theta} \psi d\theta = P \frac{d\psi}{d\theta} - Q \tag{4.40}$$

$\theta = \theta_0, \quad \psi = 0$

sujet à

L'équation (4.40) se ramène au système général

$$\int_{\theta_m}^{\theta} f d\theta = \alpha \frac{df}{d\theta} - \beta$$

$\theta = \theta_0, \quad f = 0$

et peut donc être résolue par la même méthode numérique que (4.32)

En répétant encore cette théorie et en introduisant de nouvelles erreurs résiduelles :  $w = z - z'$ , etc... jusqu'à obtenir la précision requise, on obtient  $x$  sous la forme d'une série :

$$x = x' + y' + z' + w' + \dots + g_m(\theta, t) + \dots \tag{4.41}$$

qu'on peut encore écrire

$$x = \varphi t^{-1/2} + \chi t + \psi t^{3/2} + \omega t^2 + \dots + f_m t^{m/2} + \dots \tag{4.42}$$

ou  $f_m(\theta)$  est donné par

$$\frac{1}{2} m \int_{\theta_m}^{\theta} f_m d\theta = P \frac{d}{d\theta} (f_m) - R_m \tag{4.43}$$



sujet à  $\theta = \theta_0$  ,  $f_m = 0$

où  $R_m$  est une fonction de  $\theta$  déterminée par  $D, \varphi, \chi, \psi, \dots$

La série (4.42) converge très rapidement, et seuls les 3 premiers termes de cette équation sont nécessaires. On peut également appliquer ce calcul à l'évaporation.

L'équation (4.42) permet donc de connaître à tout instant le profil hydrique sous la forme  $x(\theta)$  ou  $\theta(x)$ . Une autre expression théorique utile donnée par Philip est celle donnant le débit d'infiltration (flux à la côte  $x_0 = 0$ ) sous la forme

$$v_0 = \frac{1}{2} t^{-1/2} \int_{\varphi} + \left( k'_m + \int_{\chi} \right) + \frac{3}{2} t^{1/2} \int_{\psi} + \dots \\ + \frac{m}{2} t^{-\frac{m}{2}} \int_{f_m} + \dots \quad (4.44)$$

où  $\int_{f_m} = \int_{\theta_m}^{\theta} f_m d\theta$

et  $k'_m$  est la conductivité capillaire correspondant à  $\theta_m$ .

Connaissant  $v_0$ , le volume d'eau infiltré au bout du temps  $t$  sera

$$i = \int_0^t v_0 dt$$

soit  $i = t^{1/2} \int_{\varphi} + t(k'_m + \int_{\chi}) + t^{3/2} \int_{\psi} + \dots + t^{\frac{m}{2}} \int_{f_m} + \dots \quad (4.45)$

### 2.2.2. Cas de t grand.

Les équations (4.42), (4.44) et (4.45) convergent très rapidement, tant que  $t$  n'est pas trop fort, mais pour  $t > t'$  la convergence tombe en défaut et il est nécessaire d'obtenir



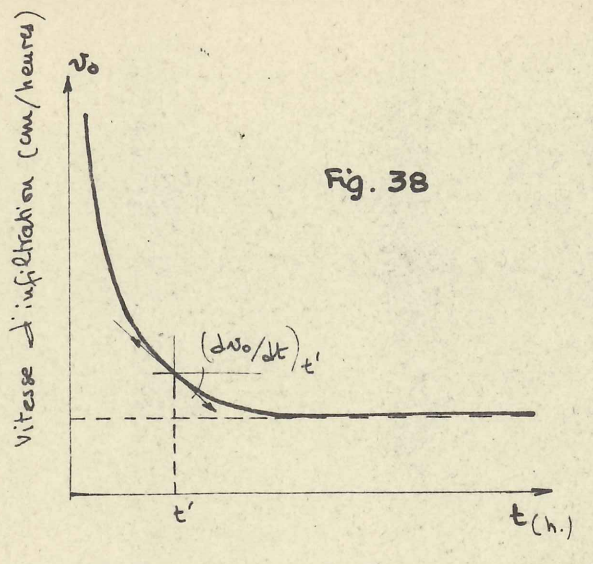


Fig. 38

une autre formulation. Philip considère alors la courbe  $v_0 = f(t)$  jusqu'au temps  $t'$  à partir duquel la série diverge et, à partir de ce point, il remplace cette courbe par une exponentielle ayant la même pente en A et asymptotique à la droite d'ordonnée  $k'$ . L'équation de cette courbe exponentielle est de la forme

$$v_0 = k_0 + (v_0 - k_0) \exp[-a(t-t')] \quad (4.46)$$

où  $a$  est une constante

$v_0$  est la valeur de  $v_0$  pour  $t = t'$

$k_0$  est la conductivité correspondant à  $\theta_0$ .

$a$  est obtenu en écrivant que pour  $t = t'$  la pente des deux courbes est la même.

Pour  $t > t'$ , le volume d'eau infiltré est alors donné par (4.47) :

$$\int_{t'}^t v_0 dt = k_0(t-t') + \frac{1}{a} (v_0 - k_0) \{1 - e^{-a(t-t')}\} \quad (4.47)$$

La validité de cette hypothèse est discutée par Philip qui utilise les équations aux différences finies pour calculer la forme du profil hydrique au bout d'un temps infini.

### 2.2.3. Sorptivité.

Si l'on considère l'équation (4.45), en la réduisant à ses deux premiers termes on peut obtenir une équation plus simple du volume infiltré sous la forme :

$$Q = St^{1/2} + At$$

(4.48)



avec

$$\left| \begin{array}{l} S = \int \varphi = \int_{\theta_m}^{\theta_0} \varphi \cdot d\theta \\ A = k'_m + \int \chi \end{array} \right. \quad (4.49)$$

On voit que pour des valeurs du temps faible, la solution se ramène à celle de l'écoulement horizontal. Philip propose d'appeler "sorptivité" du sol, le terme S, qui est une propriété caractéristique d'un sol donné (puisque fonction de k et de D), fixant le taux d'infiltration ou d'évaporation. S serait donc une variable aussi importante, du point de vue microhydrologique, que k, puisque permettant, en fonction des conditions aux limites données, de connaître le débit d'infiltration de l'eau dans un sol.

#### 2.2.4. Analyse de l'étude de Philip.

Avant de terminer sur cette question, il nous semble important de résumer les travaux effectués par J.R. Philip dans sa "Theory of Infiltration". Ces travaux sont en effet remarquables par leur originalité (Philip ayant été le seul chercheur à s'intéresser à ces questions) et par leur domaine d'application.

Cette théorie se compose de 7 articles, parus dans la revue "Soil Science" de 1957 à 1958, consacrés respectivement :

- a) à la résolution de l'équation du mouvement vertical, telle que nous l'avons exposée, et à l'application à un cas pratique (1. The Infiltration equation and its solutions - Soil Science, 83, 345-357).
- b) à l'application de sa théorie dans le cas où  $t > t'$ , en considérant la solution du problème à la limite. L'auteur établit trois théorèmes établissant que lorsque t croît jusqu'à l'infini, le profil hydrique se rapproche d'un profil constant



avançant dans la colonne à vitesse constante. Puis, il donne une méthode numérique permettant de calculer ce profil "à l'infini" et les caractéristiques d'infiltration (débit et volume infiltré) (2. The Profile at Infinity, Soil Sci. 83, 435-448).

c) à l'analyse des hypothèses mathématiques de base de la théorie et à une recherche de simplifications possibles dans certains cas (milieu initialement sec). L'auteur montre en outre que les résultats analytiques obtenus pour des colonnes semi-infinies peuvent, dans un large domaine, s'appliquer à des colonnes finies (3. Moisture profiles and relation to experiment, Soil Sci. 84, 163-178).

d) à la définition de la sorptivité "S" et à la discussion des équations de l'infiltration obtenues en utilisant cette variable (4. Sorptivity and Algebraic infiltration equations. Soil Sci. 84, 257-264).

e) à l'étude de l'influence de la teneur en eau initiale du sol sur l'infiltration. En général, si la teneur en eau initiale croît, ceci produit, en début de l'infiltration, la réduction du débit d'eau infiltrée, mais augmente la vitesse d'avancement du front mouillant. Lorsque le temps augmente, l'influence de la valeur de la teneur en eau initiale sur le débit d'infiltration devient négligeable, alors qu'elle persiste sur la vitesse d'avancement du front mouillant (5. The influence of the initial moisture content, Soil Sci. 84, 329-339).

f) à l'étude de l'infiltration dans un sol dans le cas où il existe à la surface du sol une nappe d'eau d'épaisseur non nulle. Initialement, et pour de faibles valeurs d'épaisseur  $h$  de la nappe, lorsque  $h$  croît le débit d'infiltration et le volume d'eau infiltré augmentent d'environ 2 % par cm de  $h$ . Quand le temps augmente, l'influence de la nappe devient négligeable.

L'épaisseur de la zone de sol saturé augmente aussi avec  $h$ ,



mais cet effet persiste avec le temps. (6. Effect of water depth over soil. Soil Sci. 85, 278-286).

g) à l'étude de la dépendance entre sorptivité ( $S$ ) et épaisseur de la nappe d'eau ( $h$ ) au-dessus du sol, en fonction des résultats de l'article 6. Lorsque  $h$  augmente, certaines simplifications permettent de conduire à un modèle approché et on peut même, pour de fortes valeurs de  $h$ , négliger les termes capillaires dans l'expression du gradient de l'eau dans les sols. Philip considère également le problème de l'entrée de l'air dans les sols, et il définit une nouvelle caractéristique hydrologique ; il appelle milieu "tensio-saturé" un milieu possédant la même teneur en eau qu'un milieu saturé, mais avec un potentiel négatif. (7. Soil Science 85, 333-337 - 1958).

Cette étude, très complète, montre quel peut être le champ d'application de cette méthode, à partir des seules données  $k'(\theta)$  et  $D(\theta)$ . La théorie est naturellement plus complexe que dans le champ d'un écoulement horizontal, mais le domaine d'application en est beaucoup plus étendu, et l'emploi de calculateurs devrait permettre de passer rapidement sur les difficultés de calcul numérique.

Pour être plus complète, il faudrait que cette théorie puisse s'appliquer aux cas d'infiltration après un séchage prolongé du sol, ou de drainage, après une forte infiltration. Mais la solution de ces problèmes, mettant en jeu l'hystérésis des courbes  $k'(\theta)$  et  $D(\theta)$ , est encore trop complexe.

#### 2.2.5. Vérfications expérimentales.

Philip n'a pas étayé sa théorie d'études expérimentales, se bornant à comparer ses résultats théoriques à ceux



obtenus expérimentalement par MOORE (1939), sur une argile "Yolo Light Clay", en utilisant, pour ses calculs, les valeurs de  $k'(\theta)$  et  $D(\theta)$  obtenues par Moore.

Les équations de Philip ont été vérifiées avec succès par YOUNGS (1957), utilisant des colonnes de billes de verre homogènes, et surtout par NIELSEN et DON KIRKHAM (1961), sur des sols en place.

Les difficultés expérimentales rencontrées tiennent principalement à la nature des hypothèses de la théorie de PHILIP:

-  $D$ ,  $\psi$  et  $k'$  sont supposées être des fonctions bi-univoques de  $\theta$ . Ceci signifie que la théorie s'applique soit à un processus d'humidification, soit à un processus de séchage, et que les valeurs expérimentales déterminées pour le calcul doivent être relatives au même cycle hydrique.

. La théorie de Philip s'applique à des milieux poreux homogènes. Les quantités  $\theta_0$  et  $\theta_m$  doivent être des constantes dans tout le milieu.

Cette deuxième hypothèse est naturellement la plus restrictive pour l'application de cette théorie aux problèmes d'infiltration en place.

Les essais de NIELSEN et DON KIRKHAM ont été effectués dans deux limons silteux : limon de "Monoma" et de "Ida" ayant été saturés préalablement durant un temps assez long ; et le but recherché était de comparer les profils hydriques obtenus, au bout d'un certain temps, par la théorie de Philip et expérimentalement (mesure à différentes profondeurs par neutrons). Des échantillons de sols étaient ensuite pris tous les 15, 2 cm



(intervalles de mesure au rayon neutron), afin de mesurer la conductivité capillaire de ces échantillons, à leur teneur en eau en place, au moyen de l'appareil de RICHARDS (Méthode de mesure décrite par NIELSEN, DON KIRKHAM et PERRIER (1960)).

Pour calculer le profil hydrique expérimentalement, ces sols n'étant pas entièrement homogènes, les auteurs ont considérés comme caractéristiques physiques des sols les caractéristiques obtenues dans les 30 premiers centimètres. Ce choix semble raisonnable si le sol est homogène jusqu'à 30 cm et au-dessous ( $\theta_n$  doit être constant avec la profondeur). S'il n'est pas homogène, l'utilisation d'une valeur moyenne pour  $(\theta_0 - \theta_n)$  supérieure à celle qui existe dans les 30 premiers cm surestime le volume d'eau infiltré, et inversement pour une valeur plus petite (éq. 4.45).

La teneur en eau initiale  $\theta_n$  pour les 30 cm de surface des limons de Monoma et Ida était respectivement de 0,305 et 0,28  $\frac{\text{cm}^3}{\text{cm}^3}$ , les teneurs en eau imposées de 0,455 et 0,47  $\text{cm}^3$  par  $\text{cm}^3$  (teneur en eau à la saturation totale = indice des vides

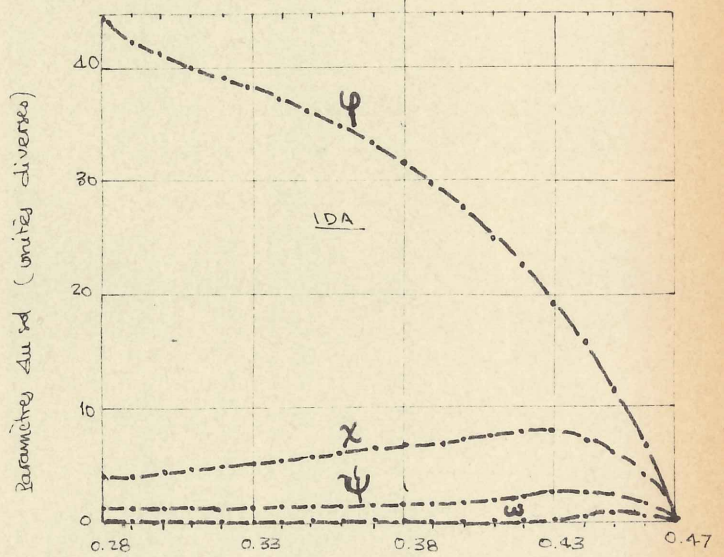
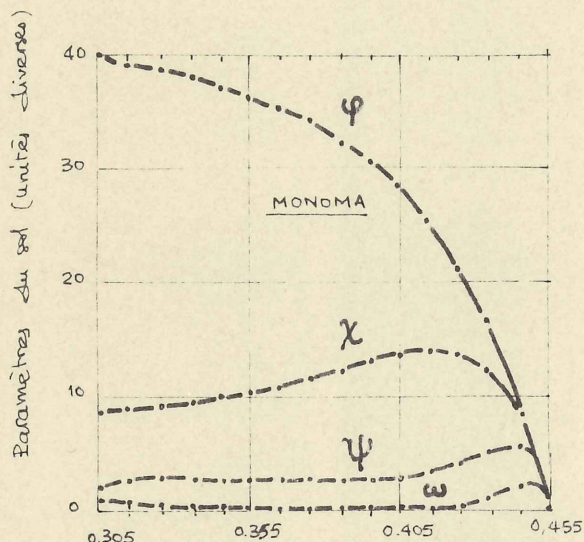
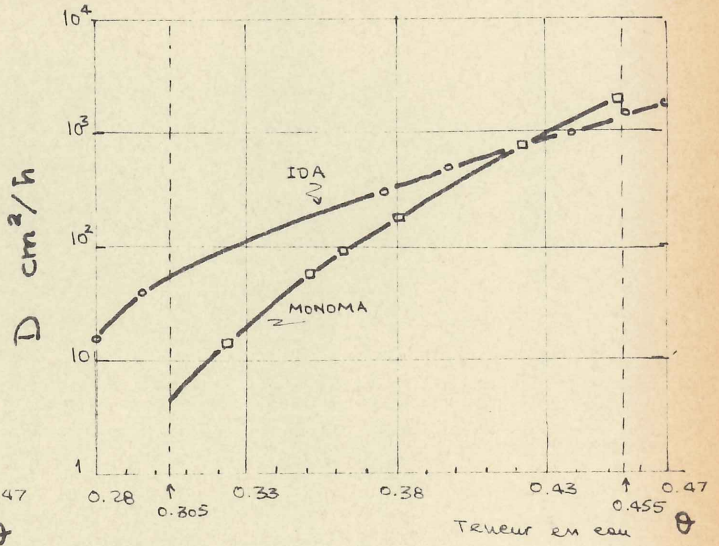
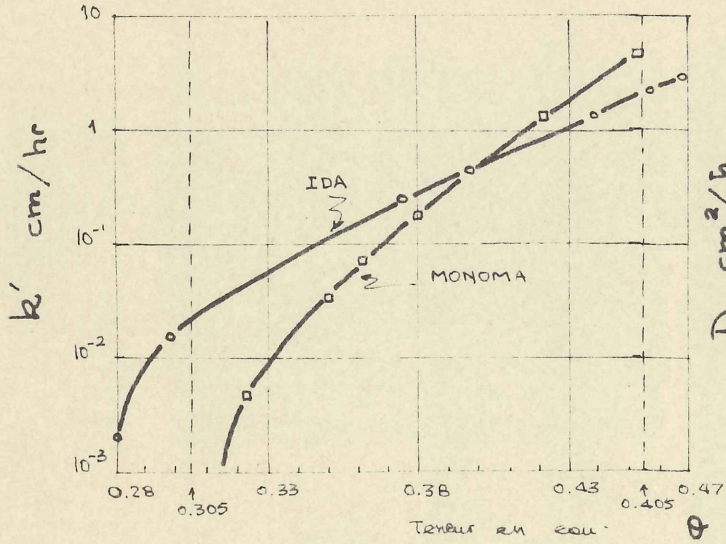
On trouvera page suivante les courbes  $k'(\theta)$  et  $D(\theta)$  relatives à la couche de 30 cm de surface pour ces deux sols, ainsi que les courbes donnant les paramètres  $\varphi$ ,  $\chi$ ,  $\psi$  et  $\omega$ .

Le volume d'eau infiltré au bout de 3,4 h et 2,4 h respectivement pour les limons de Monoma et Ida a été calculé d'après les formules (4.45) et (4.47). En utilisant alors la méthode de Philip pour calculer la forme du profil hydrique au bout d'un temps  $t > t'$  (pour ces sols,  $t'$ , qui est le temps au bout duquel la série diverge, vaut 1/2 h.), les auteurs ont obtenus les profils hydriques reportés sur la figure 3 page IV.31. Ils ont reportés sur ces graphiques les profils ex-



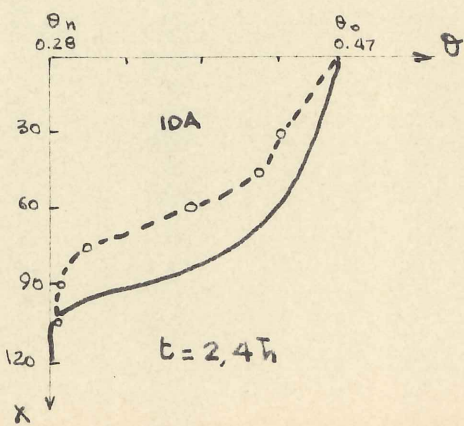
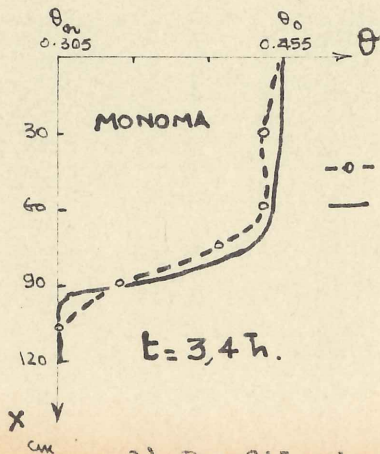
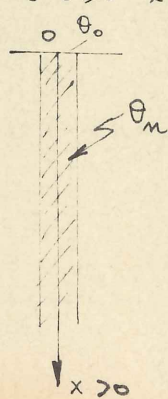
ESSAIS DE NIELSEN & DON KIRKHAM (1960) : Détermination du débit d'infiltration dans un sol en place. Comparaison avec la théorie de Philip.

1) Courbes  $k'(\theta)$  et  $D(\theta)$  pour les deux sols.



2) Paramètres du sol  $\phi$ ,  $\chi$ ,  $\psi$  et  $\omega$ , en fonction de  $\theta$  pour les 2 sols. Unités :  $\phi$  en cm.h<sup>-1/2</sup>,  $\chi$  en cm.h<sup>-1</sup>,  $\psi$  en cm.h<sup>-3/2</sup>,  $\omega$  en cm.h<sup>-2</sup>

$\theta = \theta_n$   $t < 0$   $x > 0$   
 $\theta = \theta_0$   $t \geq 0$   $x = 0$



3) Profils hydriques théoriques et expérimentaux.



périmentaux obtenus par neutrons (sauf à la surface du sol où la méthode n'est pas valable).

L'agrément entre résultats expérimentaux et théoriques est bon pour le sol de Monoma, qui est relativement homogène, alors que pour le sol de Ida, assez hétérogène, on obtient sans cesse, à la même côte, une valeur bien supérieure du profil hydrique. Il suffit du reste qu'il puisse exister dans le sol un écoulement latéral (dû à l'existence d'une zone de perméabilité plus faible par exemple), pour que le volume d'eau infiltré réellement soit plus faible que celui calculé.

Il semble donc que, pour une couche de sol homogène, cette méthode permette de connaître assez bien le volume d'eau infiltré et le profil hydrique. Si les résultats ne sont pas encore très bons, du moins offre-t-elle l'avantage d'être la seule méthode permettant d'avoir une idée approximative des phénomènes.



B I B L I O G R A P H I E1) OUVRAGES DE BASES -

- CRANK : Mathematics of Diffusion. (1961)
- GARDNER 1957 : Some steady - state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. Soil Sci. 85, 228-232.
- GARDNER 1958 : Mathematics of Isothermal water conduction in unsaturated soil - Highway Research Board, Spec. Rep. 40, p. 78-87.
- GARDNER and FIREMAN 1957 : Laboratory Studies of Evaporation from soil columns in the Presence of a water Table. Soil Sci. 85, 244-249.
- GARDNER and MAYHUGH 1958 : Solutions and Tests of Diffusion Equation for the movement of water in Soil - Soil Sci. Soc. Proc, p. 197-201.
- KLUTE 1952 : A numerical Method for solving the flow equation for water in unsaturated Materials - Soil Sci, 73, 105-116.
- NIEL SEN - DON KIRKHAM - VAN WIJK 1961 - Diffusion Equation Calculations of Field Soil Water Infiltration Profiles - Soil Sci. Soc. of Amer. Proc. vol 25, p. 165-168.
- PHILIP 1955 a - Numerical solution of Equation of the Diffusion Type with Diffusivity Concentration Dependent Trans. Faraday Soc. 51, 885-892.
- PHILIP 1955 b - The Concept of Diffusion applied to soil water. Proc. Nat. Acad Sci, India, 24 A, 93-104.



- PHILIP 1957 a : Numerical solution of Equations of the Diffusion type with Diffusivity concentration. Dependent II - Anstr. Journal of Physics, 10 - 29-42.
- PHILIP 1957 b : The Theory of Infiltration 1. Soil Sci. 83, 345-357.
- 1957 c : The Theory of Infiltration 2. Soil Sci. 83, 435-448.
- 1957 d : The Theory of Infiltration 3. Soil Sci. 84, 163-178.
- 1957 e : The Theory of Intiltration 4. Soil Sci. 84, 257-264.
- 1957 f : The Theory of Infiltration 5. Soil Sci. 84, 329-339.
- 1958 a : The Theory of Infiltration 6. Soil Sci. 85, 278-286.
- 1958 b : The Theory of Infiltration 7. Soil Sci. 85, 333-337.
- YOUNGS, E.G. 1957 : Moisture Profiles During Vertical Infiltration - Soil Sci. 84, 283-290.

2) OUVRAGES ANNEXES -

- CHILDS 1936 : The Transport of Water through Heavy clay Soils I. Journal Agr. Sci. 26, 114-137.
- II. " " " 26, 527-545.
- CRANK and HENRY 1949 : Diffusion in media with variable properties - I, II, Trans. Faraday Soc. 45, 636-642 et 1119-1128.
- MOORE - Water Conduction from shallow water tables - Hilgardia 12 , 383-401.



- NIELSEN, DON KIRKHAM and PERRIER 1960 : Soil Capillary conductivity, comparaisn of measured and calculated values. Soil Sci. Soc. Amer. Proc. 24, 157-160.
- VEIHMEYER , BROOKS 1954 : Measurement of cumulative evaporation from bare soil.  
Trans. Amer. Geophys-Union, 35, 601-607.



## V. MISE AU POINT D'UN APPAREIL DE MESURE DE LA CONDUCTIVITE CAPILLAIRE

---

Toute l'étude bibliographique précédente nous a montré quelle était l'importance des coefficients de conductivité capillaire et de diffusivité, et de la loi  $P_c(S)$ . Entre autre, la connaissance de ces coefficients devrait permettre de prévoir les mouvements d'eau dans les sols, sous des conditions initiales et aux limites connues, et ceci offre un intérêt majeur pour les problèmes d'hydraulique et de génie civil (sous-pressions).

Nous avons aussi montré combien la détermination de ces coefficients était délicate. C'est certainement pour cette raison qu'ils sont si mal connus, et nous avons essayé de mettre au point un appareil simple qui permette, selon certaines hypothèses simplificatrices, de déterminer ces coefficients en laboratoire.

Les résultats obtenus ne seront certainement pas applicables immédiatement aux cas réels de sol, car nous avons éliminé de nombreux facteurs secondaires comme l'anisotropie, la compressibilité, l'existence de matière organique, etc ..., mais ils devraient au moins permettre une meilleure compréhension des phénomènes rencontrés.

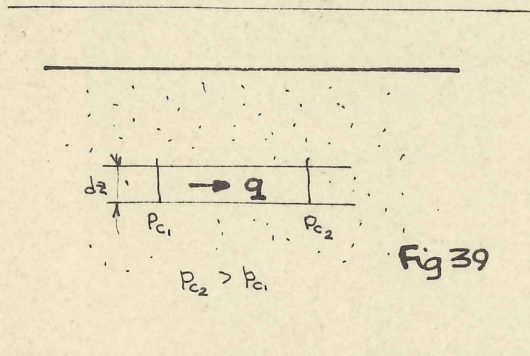
### 1) PRINCIPE DE LA MESURE.

Notre but a été de déterminer le coefficient de conductivité capillaire d'un sol idéal (sable pur de granulométrie



étroite) en utilisant la méthode "Hassler", ou méthode de "déplacement capillaire" (p. III.5), sur un échantillon soumis à un écoulement d'eau en présence d'air à la pression atmosphérique.

Nous avons décidé de prendre cette méthode car les conditions expérimentales sont les plus proches de ce qui se passe dans la réalité. Cette méthode revient en effet à imposer



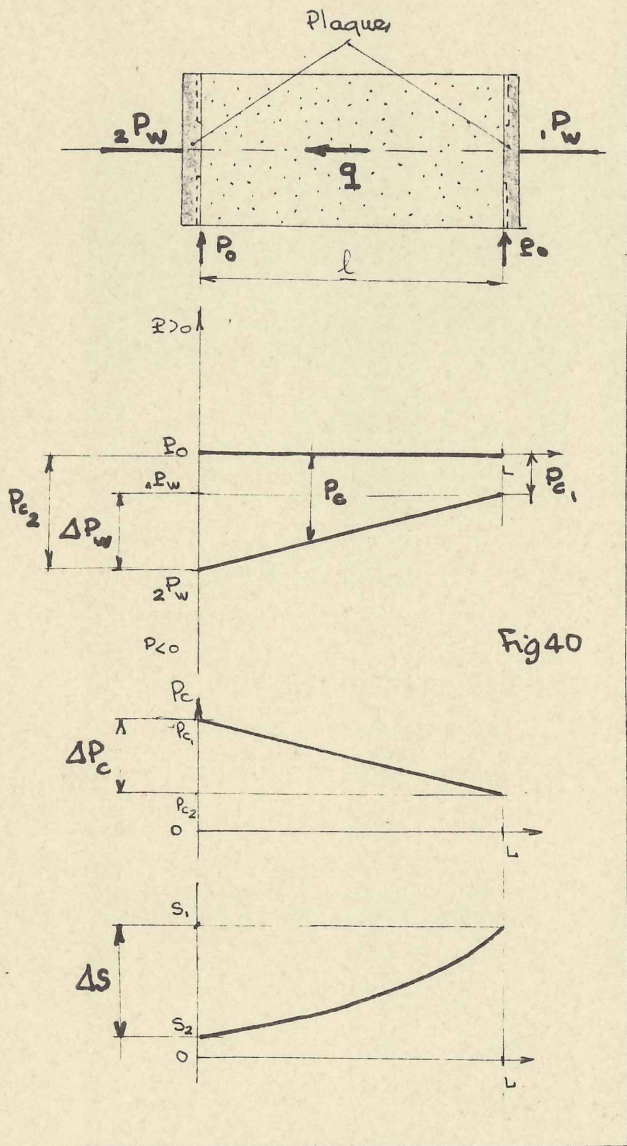
un certain gradient de succion aux extrémités de l'échantillon et à mesurer le débit dû à ce gradient de succion, et l'écoulement dans l'échantillon est semblable à celui qui aurait lieu dans une tranche de sol soumis au même gradient de succion. Comme dans le

sol nous avons supposé, (Hypothèse de base, p.I, 1), que l'air était présent sous une phase continue et toujours à la pression atmosphérique, ceci motive notre choix pour la pression de l'air, et seule l'eau s'écoule dans l'échantillon.

On voit alors apparaître une objection immédiate, inhérente à ce genre de mesure, et que nous avons signalée p. II, 6 : il existera un gradient de pression capillaire, donc de saturation, dans l'échantillon.

Reprenons en effet le principe de cette méthode. Considérons un échantillon de sol, de longueur L, serti entre deux plaques semi-perméables, ne laissant passer que l'eau. Par l'intermédiaire de ces plaques, on impose une différence de pression d'eau entre la face amont et la face aval, ce qui produit un écoulement d'eau. De plus, on injecte de l'air





entre les plaques et l'échantillon.

Soit :

- \$1P\_w\$ la pression amont de l'eau
- \$2P\_w\$ la pression aval de l'eau
- \$P\_0\$ la pression de l'air

\$1P\_w\$ et \$2P\_w\$ sont des pressions négatives (fig. 40).

Le gradient de pression moteur est donc :

$$\frac{\Delta P_w}{l} = - \frac{(2P_w - 1P_w)}{l}$$

et la pression capillaire à l'entrée de l'échantillon sera

$$P_{c_1} = P_0 - 1P_w$$

et la sortie :

$$P_{c_2} = P_0 - 2P_w$$

Il y aura donc un gradient de pression capillaire

$$\frac{\Delta P_c}{l} = - \frac{\Delta P_w}{l} \tag{5.1}$$

Comme \$S = S(p\_c)\$, ce gradient de pression capillaire produira un gradient de saturation \$-\Delta S/l\$ dans l'échantillon (gradient négatif, car le degré de saturation varie en fonction inverse de la pression capillaire).

La détermination du degré de saturation en eau se faisant par pesée, la valeur ainsi obtenue sera une valeur moyenne. L'existence de ce gradient de saturation ne serait pas gênante



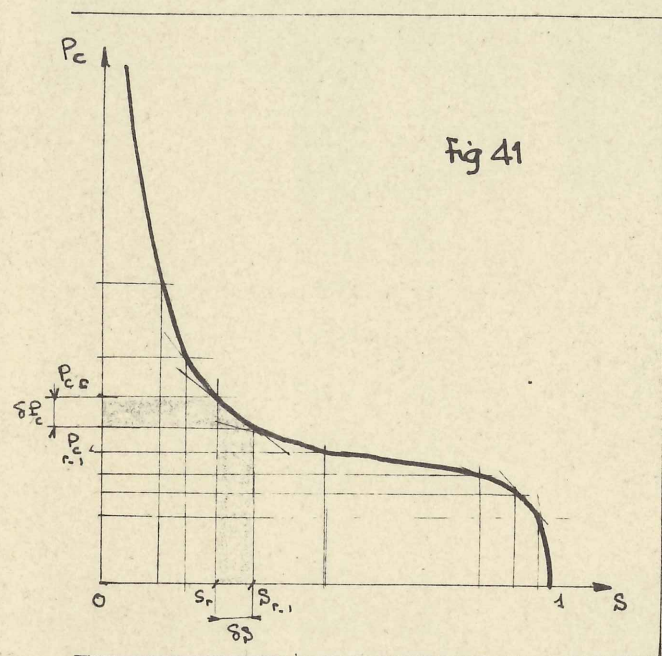
si la loi  $S(p_c)$  était linéaire, mais il n'en est rien.

Dans la méthode normale, on injecte de l'air dans l'échantillon sous une pression  ${}_1P_A$  à l'entrée et on le recueille sous une pression  ${}_2P_A$  à la sortie, telles que :

$${}_2P_A - {}_1P_A = {}_2P_w - {}_1P_w, \text{ soit } p_c = \text{cte.}$$

On évite ainsi l'existence de ce gradient de saturation.

Comme l'écoulement ainsi obtenu n'est pas représentatif de ce qui se passe dans les sols, nous avons adopté une autre méthode qui consiste à opérer par linéarisation de la courbe  $p_c(S)$ . Connaissant cette courbe, nous l'avons découpée en n segments où la loi  $p_c(S)$  peut être considérée comme linéaire. Pour chaque essai on applique, par l'intermédiaire



des plaques semi perméables, les pressions capillaires

- $p_{c_{r-1}}$  à l'amont
- $p_{c_r}$  à l'aval

A l'équilibre, le degré de saturation à l'amont sera  $S_{r-1}$  et  $S_r$  à l'aval, tel que sur l'intervalle  $[S_r, S_{r-1}]$  (fig 41)

$$p_c = a_r + b_r S \tag{5.2}$$

et on peut alors déterminer le degré de saturation moyenne de l'échantillon, sur l'intervalle  $(S_r, S_{r-1})$  par pesée.



Soit  $\bar{S}_r$  ce degré de saturation, et  $q_r$  le flux dans l'échantillon correspondant au gradient de pression  $\frac{\Delta_r P_w}{l}$ ,  $q_r$  étant mesuré en régime permanent, la conductivité capillaire correspondant à  $\bar{S}_r$  sera :

$$\bar{k}'_r = q_r \cdot \frac{l}{\Delta_r P_w} \quad (5.3)$$

En recommençant n fois cette mesure, on obtient alors la courbe  $k'$  (S) complète ou  $k'(\theta)$ , la valeur de la conductivité capillaire étant, pour chaque essai, affectée à la valeur moyenne du degré de saturation sur l'intervalle de pression capillaire correspondant à l'essai.

L'avantage de cette méthode est donc, en jouant sur les pressions imposées à l'aval et à l'amont de pouvoir linéariser la courbe  $p_c$  (S) et, par là même, de s'affranchir de l'existence du gradient de saturation.

## 2) DESCRIPTION DE L'APPAREILLAGE.

### 2.1. Schéma simplifié.

L'appareillage utilisé se compose :

- d'un cylindre de plexiglass rempli de sable, fermé aux deux extrémités par deux plaques semi-perméables (voir fig 42.p. 19)
- d'un réservoir plat de 6,25 l servant à alimenter l'échantillon en eau.
- de deux tubes capillaires utilisés pour mesurer les débits entrant et sortant de l'échantillon.
- d'une balance Mettler K-7, pour mesurer la saturation de l'échantillon.
- de deux bouteilles de 5 l, l'une servant à remplir le réservoir plat, l'autre à recueillir l'eau sortant de l'échantillon.



- d'un chronomètre pour les mesures de débit ;
- de deux vacuo.régulateurs "Met O" servant à fixer la pression (négative) de l'eau dans le circuit amont (vide  $h_1$ ) et dans le circuit aval (vide  $h_2$ ). Ces vacuo.régulateurs sont alimentés par un circuit primaire (vide  $h$ ).
- d'une pompe à vide, (circuit primaire), remplacé par la suite par une trompe à eau, la pompe ayant une marge trop grande entre le déclenchement et l'enclenchement (66 - 40 cm), et étant trop fréquemment sujette à des arrêts dus à des coupures de courant ou à des pannes. Un réservoir tampon de 30 l. est situé entre le circuit de vide primaire ( $h$ ) et l'appareil.
- d'un manomètre en U, pour mesurer la différence de pression entre l'amont et l'aval de l'échantillon.

L'échantillon peut être soit alimenté par le réservoir plat, soit par la burette amont (mesure de débit), de même il est relié à l'aval soit à la bouteille de 5 l., soit à la burette aval (mesure de débit).

Ces liaisons sont faites par l'intermédiaire de Robinets "Vestale" à 3 voies et à volume constant, et on trouvera au paragraphe 2.4 une description du principe de fonctionnement du circuit.

## 2.2. Description détaillée.

### 2.2.1. Echantillon.

L'échantillon de sol est enfermé dans un cylindre de plexiglass,  $\varnothing_{int} = 40$  mm,  $\varnothing_{ext} = 50$  mm, composé de 3 parties (fig. 1 p. 8).

- Une partie centrale, de 50 mm de long, remplie de sable ;
- Deux embouts de 25 mm de long chacun, fermés à une extrémité par une plaque semi-perméable, et à l'autre par un disque de plexiglass.



VUE D'ENSEMBLE DU  
MONTAGE EXPERIMENTAL

---

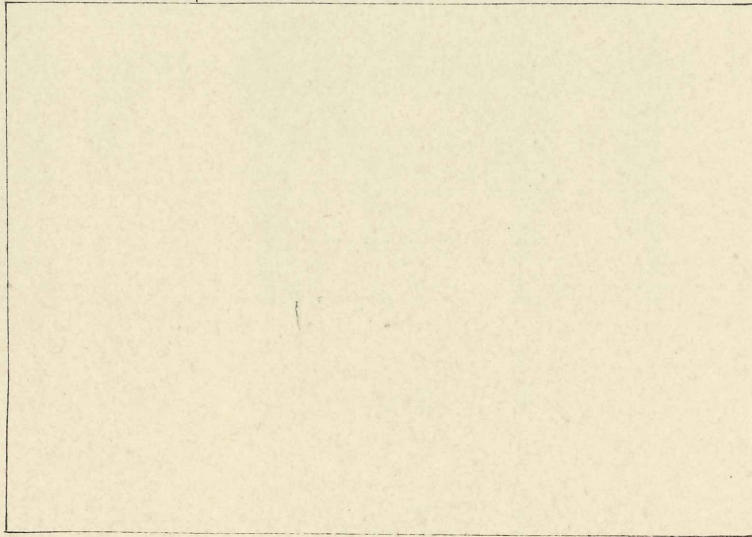


Photo n°1

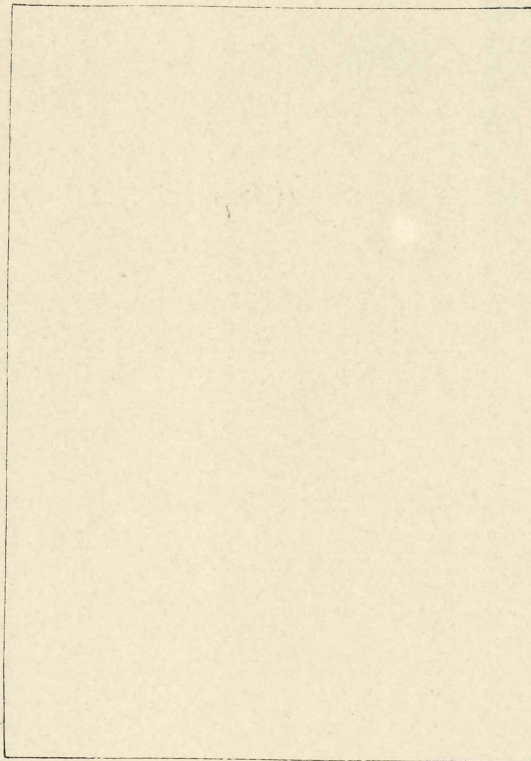


Photo n°2

1. Echantillon
2. Réservoir plat
3. Burettes horizontales
4. Balance Mettler K.7
5. Bouteilles d'alimentation  
et de vidange.
6. Vacuo-régulateur
7. Tube manométrique en U



Les plaques semi-perméables utilisées sont des disques d'Alumine frittée, produits par la "Compagnie Générale d'Electrocéramique" (ALUCER 993 P) et des disques de bronze fritté, produits par "Ugine Carbone" (disques PORAL-0-15).

Ces plaques de diamètre  $\varnothing 40 \pm 0,2$  mm (diamètre normalisé pour les Alucer, les plaques en Poral ont été tournées aux Laboratoires) et d'épaisseur  $3 \pm 0,1$  mm (épaisseur normalisée pour les deux) présentent un diamètre de pore de 1 et 25 respectivement.

Les plaques en Alucer seront donc beaucoup plus imperméables et présenteront une forte pression d'entrée d'air (la pression d'entrée d'air est donnée, en cm d'eau par :

$$h = \frac{4\gamma}{\rho g d} = \frac{300}{10^3 \cdot 9,8}$$

$d$  = diamètre des pores en cm). Elles seront utilisées pour les fortes succions ( $> 40$  cm). Les plaques en Poral, beaucoup plus perméables (voir 3.2) seront utilisées aux pressions inférieures.

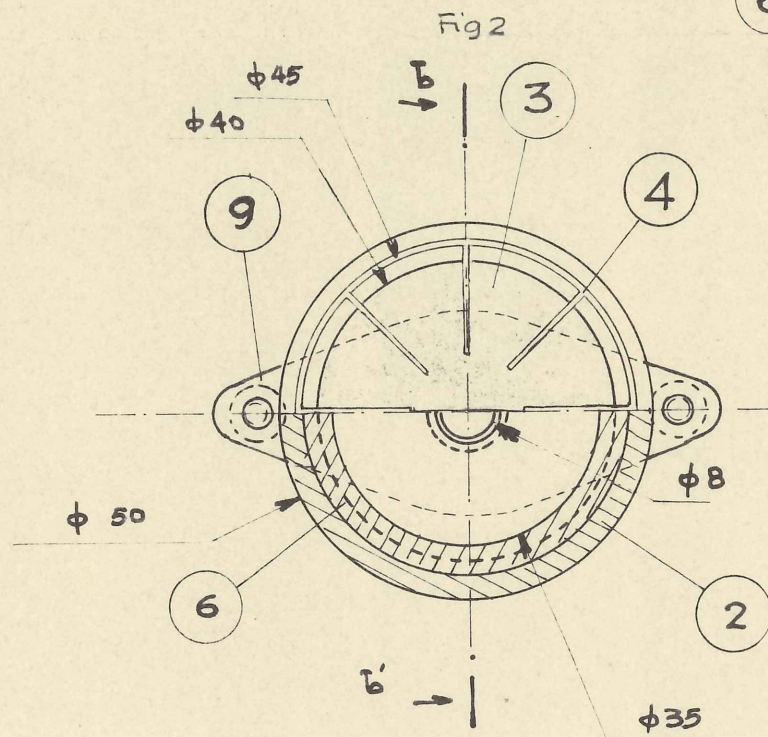
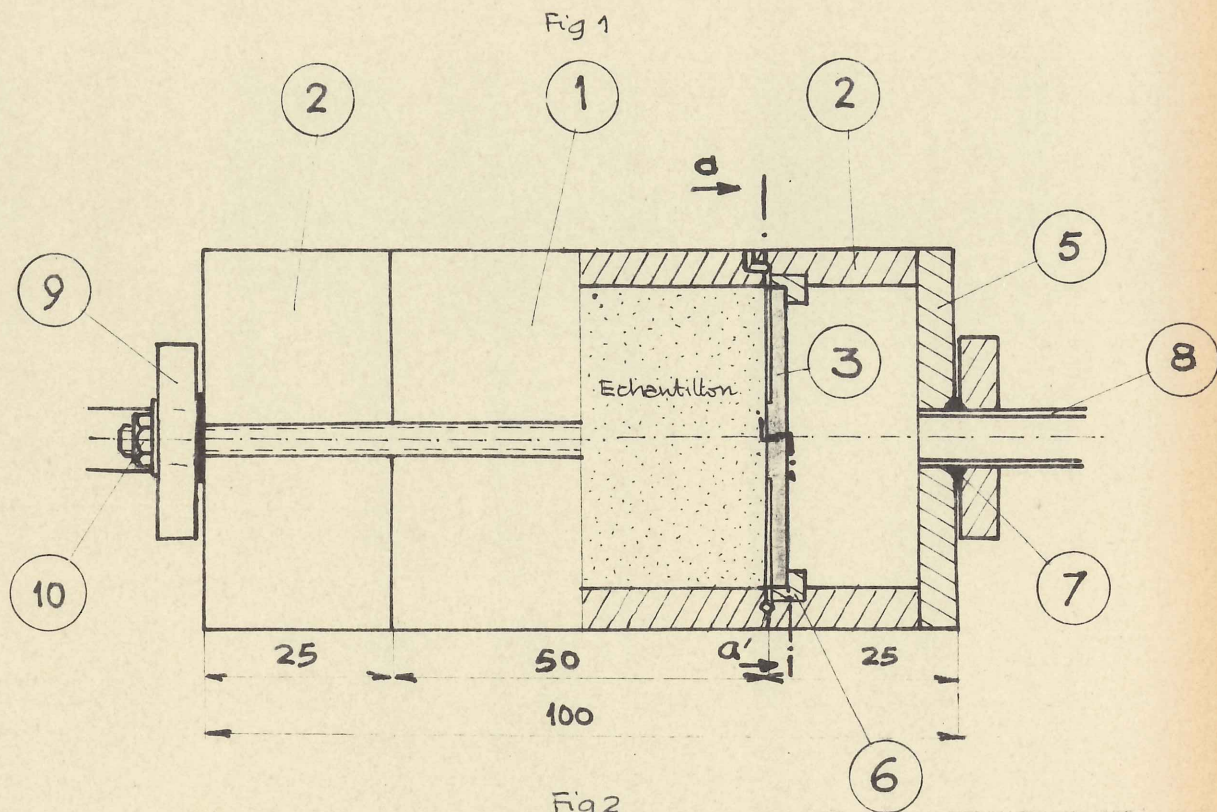
Ces plaques sont serties dans l'embout de plexiglass et collées à l'Araldite, ce qui donne un joint absolument étanche entre plaque et embout.

Une rainure circulaire de  $\varnothing 45$  mm est faite sur chacune des faces de la partie centrale et sur la face des embouts supportant la plaque. De plus le moule central en plexiglass est percé de chaque côté, le trou étant en contact avec la rainure (fig. 42, p. V.8). Lorsque l'échantillon est assemblé, l'air pénètre par ce trou, à la pression atmosphérique, et il est réparti sur toute la section de l'échantillon par la rainure circulaire et les rainures radiales dans les plaques (seules les plaques en Alucer sont rainurées).



Fig 42

DETAIL DE L'ECHANTILLON ET PORTE ECHANTILLON.

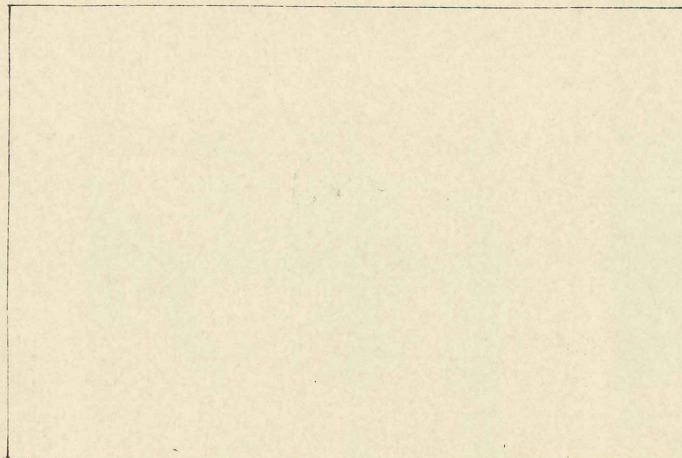


- 1: Corps central  
(plexiglas, e: 5mm)
- 2: Embouts (plexiglas)
- 3: Plaque semi-perméable  
(Alucer 993 P, e: 3mm)
- 4 Rainures circulaire  
et radiales
- 5 Disque en plexiglas  
e: 5mm, collé
- 6 Support en plexiglas  
des plaques
- 7 Joint torique. Caoutchouc
- 8 Arrivée de robinet  
(Verre Pyrex)
- 9 Plaques d'appui  
(Plexiglas, e: 5mm)
- 10 Tiges filetées (φ 4mm)  
et écrou de serrage

Echelle 1



## MONTAGE DE L'ECHANTILLON

Photo n°3

Détail du montage des plaques semi-perméables  
(ALUCER)

Photo n°4

Détail de l'assemblage tube central-embout

Photo n°5

1. Tube central et échantillon
2. Embouts avec plaques semi-perméables
3. Robinet à 3 voies
4. Joint torique
5. Système de serrage
6. Arrivée du circuit amont

Vue de l'ensemble échantillon-porte-échantillon  
(croquis p. V.9)  
(Photo réalisée pendant une pesée)



Côté opposé aux plaques, les embouts sont fermés par un disque en plexiglass,  $\varnothing$  50 mm, collés à l'ALTUFIX, (dissolution de plexiglass). Les embouts sont reliés à l'extérieur par un robinet qui vient s'encastrier dans le disque, percé en son centre. Le raccord est rendu étanche par l'intermédiaire d'un joint torique n° 5A.

L'ensemble partie centrale-embouts est maintenu par l'intermédiaire de deux plaques en plexiglass, reliées par deux tiges filetées et qui, après serrage viennent écraser les joints toriques, assurant ainsi l'étanchéité du joint entre embout et robinet.

### 2.2.2. Réservoir plat.

L'alimentation de l'échantillon est, en temps ordinaire, assurée par l'intermédiaire d'un réservoir plat en tôle galvanisée d'une capacité de 5 litres. La hauteur de ce réservoir (3cm) a été choisie inférieure au diamètre de l'échantillon (4cm), afin de ne pas avoir à tenir compte des variations de charge.

L'axe horizontal du réservoir et l'axe de l'échantillon sont situés dans un même plan.

Afin d'assurer une capacité suffisante, la surface de ce réservoir est de  $2185 \text{ cm}^2$  (95 . 23 cm). Comme tout le circuit amont, ce réservoir sera soumis à un certain vide, par l'intermédiaire du vacuo-régulateur amont, vide pouvant varier de 0 à  $300 \text{ g/cm}^2$ . Pour cette raison, nous avons choisi la tôle comme matériau de construction, et le châssis est fortement armé et soudé, afin de ne pas s'écraser sous l'effet du vide.



L'alimentation du réservoir est assurée par une bouteille remplie d'eau désaérée. A cet effet, nous avons mis au point le procédé suivant de désaération d'eau distillée :

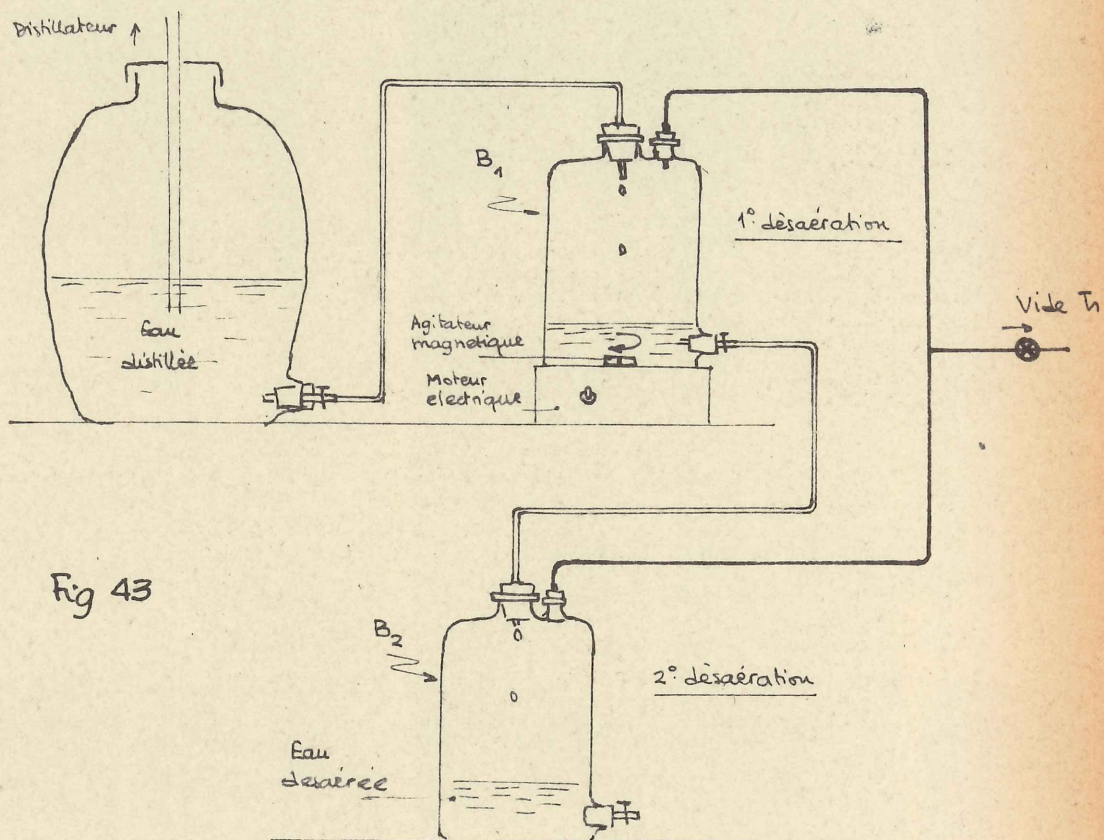


Fig 43

Deux bouteilles de 5 litres, B<sub>1</sub> et B<sub>2</sub> (fig 43) sont reliées en série avec une bonbonne d'eau distillée. Chaque bouteille est elle même reliée au circuit général de vide (environ 65 cm de mercure). La première bouteille B<sub>1</sub> est placée sur un agitateur magnétique. L'eau distillée y tombe goutte à goutte sous vide, et cette eau est ensuite envoyée goutte à goutte dans la bouteille B<sub>2</sub>.

Une fois la bouteille B<sub>2</sub> pleine, le circuit de vide est coupé, et la bouteille B<sub>2</sub> est transportée au dessus du



réservoir. Le réservoir étant sous vide, l'eau contenue dans B<sub>2</sub> ne peut donc pas s'aérer durant le remplissage.

Nous avons surtout pris de l'eau désaérée afin de saturer plus facilement le circuit général, sous vide.

2.2.3. Burette.

L'échantillon peut être alimenté aussi par les barettes pour faire des mesures de débit. Ces burettes sont constituées de 2 tubes capillaires de 60 cm de long, et le tarage au mercure a donné les sections suivantes :

- burette amont :  $s = 3,746 \text{ mm}^2$
- burette aval :  $s' = 3,803 \text{ mm}^2$

2.2.4. Balance.

La mesure du degré de saturation de l'échantillon se faisant par pesée, il est nécessaire d'avoir une balance précise (capable de peser au moins le décigramme), supportant néanmoins un poids relativement important (l'échantillon total pesant environ 400 g). De plus, la mesure doit être rapide et facile. Pour cette raison, nous avons choisi une balance METTLER K.7, d'une portée de 700 g, graduée par 0,1 g. et d'une précision de  $\pm 0,02 \text{ g}$ .

2.3. Mesures à effectuer.

Pour avoir la loi  $k' (S)$  d'après la formule (5.3), les mesures à effectuer sont :

- une mesure de débit,
- une mesure de différence de charge,
- une mesure de degré de saturation.



### 2.3.1. Mesure de débit.

Se fait simplement en mesurant le déplacement d'un ménisque d'air dans 2 tubes capillaires. Chaque tube et, pour cela, placé devant une règle graduée. Soit  $l$  le déplacement du ménisque dans un tube de section  $s$  pendant le temps  $t$ , on a

$$Q = sl/t$$

Mesure du débit amont et aval, en régime permanent.

Précision de la mesure :

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta t}{t}$$

$s$  est obtenue par pesée d'un index de mercure de longueur

$$L - s = \frac{P}{\rho g L}$$

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta \rho g}{\rho g} + \frac{\Delta L}{L}$$

Pour  $s = 3,802 \text{ mm}^2$ , l'index mesure  $378 \pm 0,5 \text{ mm}$  et pèse  $19,48 \pm 0,02 \text{ gr.}$

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{0,04}{19,48} + \frac{0,01}{13,56} + \frac{1}{378} \approx 5 \cdot 10^{-3}$$

Erreur systematique sur la mesure du débit.

$$\Delta t = 1/10 \text{ sec, et en général } t > 10' \quad , \quad \frac{\Delta t}{t} < 10^{-4}$$

Il reste 
$$\frac{\Delta q}{q} \approx \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta l}{l}$$

$\Delta l = 0,5 \text{ mm}$  à chaque extrémité.



$$\text{Si } l = 10 \text{ cm} \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{100} \quad \frac{\Delta q}{q} = \frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{1}$$

$$l = 30 \text{ cm} \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{300} \quad \frac{\Delta q}{q} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{1}$$

d'où l'intérêt d'avoir les déplacements les plus longs.

### 2.3.2. Mesure du vide différentiel.

De chaque côté de l'échantillon fait un branchement conduisant à un tube en U formé par un capillaire de 1 mm. Ce capillaire, rempli de mercure, est placé devant un papier millimétré.

$\Delta H$  peut être apprécié au 1/2 mm dans chaque branche, soit  $\Delta H$  total  $\sim 10$  mm d'eau.

H varie de 50 à 1700 mm d'eau :

$$\text{pour } H = 50 \text{ mm} \quad \frac{\Delta H}{H} = \frac{1}{5} \sim 20\%$$

$$H = 500 \text{ mm} \quad \frac{\Delta H}{H} = \frac{1}{50} = 2 \cdot 10^{-2}$$

Précision de la mesure de k :  $k = \frac{q}{H/l'}$

où  $l'$  est la longueur de l'échantillon ( $l' = 50 \pm 0,5$  mm)

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta q}{q} + \frac{\Delta H}{H} + \frac{\Delta l'}{l'}$$



$$\frac{\Delta l'}{l'} = 10^{-2} \text{ (erreur systématique).}$$

Au pire ( $H = 50 \text{ mm}$ ) on aura :

$$\frac{\Delta k}{k} \sim \underline{20\%}$$

### 2.3.3. Mesure du degré de saturation.

Pour permettre cette mesure, l'échantillon est relié au circuit extérieur par des rodages sphériques, et il est placé juste derrière le plateau de la balance.

Pour mesurer le degré de saturation, il suffit d'isoler l'échantillon du circuit, de débrancher les rodages et de le porter sur la balance.

Connaissant le poids initial (et le degré de saturation initial) on a donc ainsi le degré de saturation correspondant à l'équilibre (régime permanent). Très bonne précision (lectures faites à  $\pm 0,02 \text{ g.}$ ).

## 2.4. Principe de fonctionnement

La somme des manoeuvres étant assez complexes, on trouvera les schémas de fonctionnement respectifs pour les circuits amont et aval.

### 2.4.1. Circuit amont.

Comme nous l'avons déjà vu l'échantillon peut être, soit alimenté par le réservoir, soit par la burette amont, les deux étant soumis au même vide  $h_1$ , par l'intermédiaire du



vacuo régulateur amont, et ce vide se transmet ainsi à l'embout amont.

Partant du vacuo régulateur, le circuit de vide  $h_1$  sera relié à la burette amont et au réservoir (p. X.15)

Le circuit amont comporte 4 robinets à 3 voies,  $R_1$ ,  $R_3$ ,  $R_5$  et  $R_6$ , ayant les rôles suivants :

- $R_1$  permet d'alimenter l'échantillon soit par le réservoir, soit par la burette
- $R_2$  permet de couper le circuit d'alimentation de l'échantillon, pour le peser (mesure de saturation)
- $R_5$  permet d'alimenter l'échantillon par la burette, ou de remplir la burette à partir du réservoir.
- $R_6$  permet de relier l'extrémité amont de la burette soit au vide  $h_1$  soit au vide primaire  $h$  (pompe à vide), pour le remplissage de la burette.

La position de ces robinets durant les trois temps de la mesure :

- alimentation de l'échantillon par le réservoir ;
- alimentation par la burette amont ; mesure du débit AM ;
- mesure de la saturation par pesée-remplissage de la burette.

est donnée sur le schéma de fonctionnement p. X.15

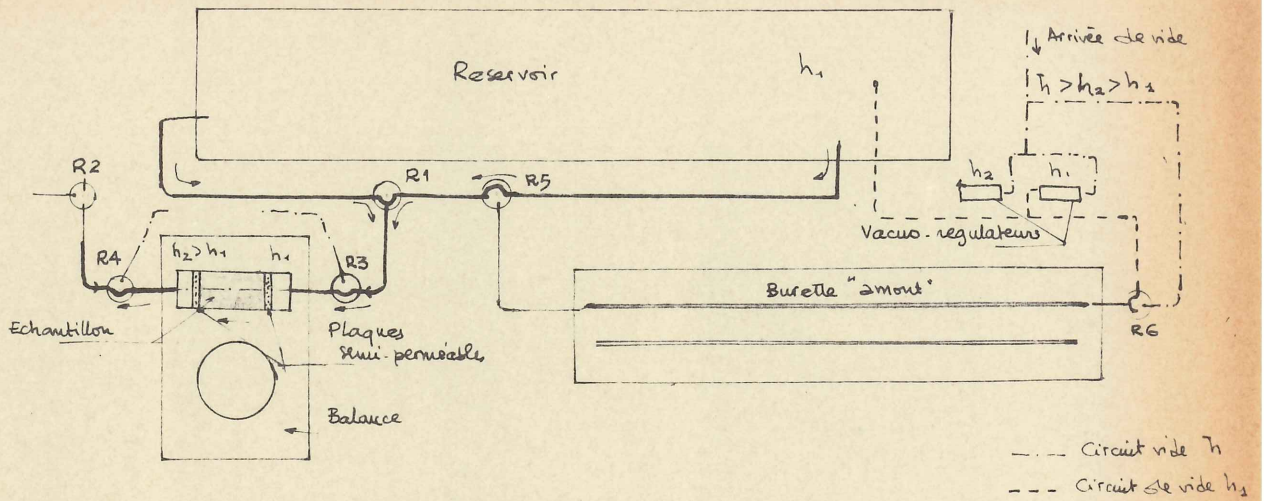
#### 2.4.2. Circuit aval.

Le débit sortant de l'échantillon peut être soit dirigé sur une bouteille, soit sur la burette aval (mesure du débit sortant). D'après le même principe que le circuit amont, la bouteille et la burette sont soumises au même vide  $h_2$ , par l'intermédiaire du vacuo régulateur aval, et ce vide se transmet à l'embout aval.

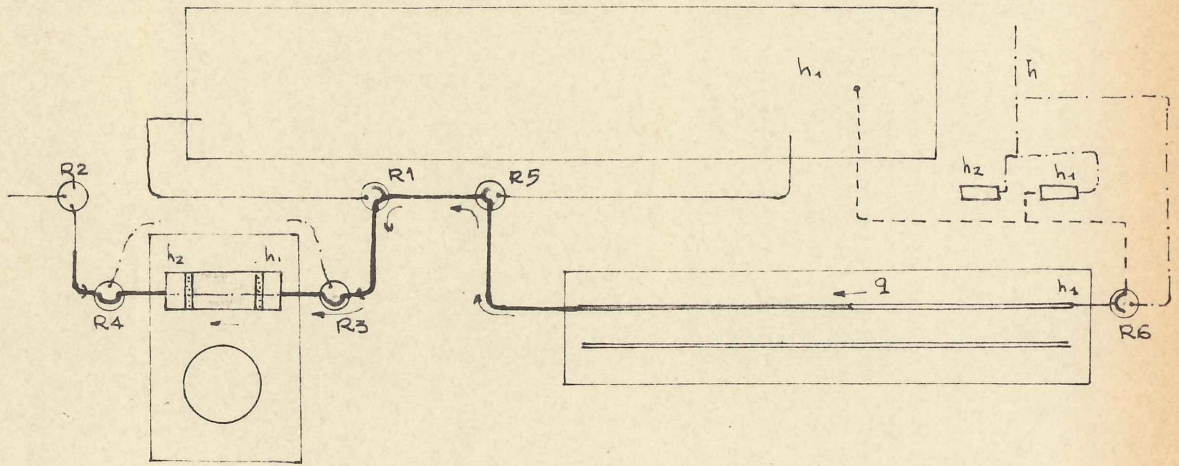


CIRCUIT AMONT

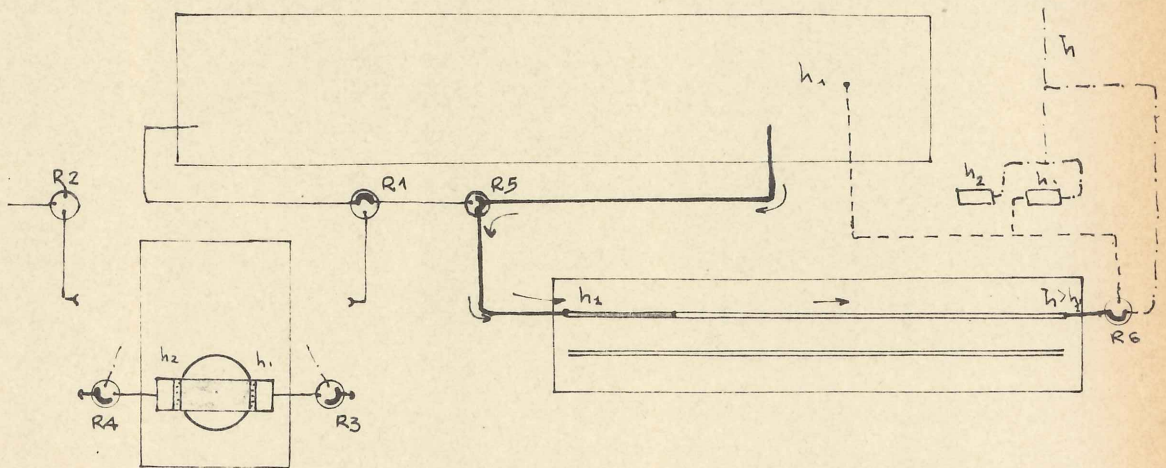
Schéma de fonctionnement



1. Alimentation de l'échantillon par le réservoir



2. Alimentation de l'échantillon par la burette AM. Mesure de débit

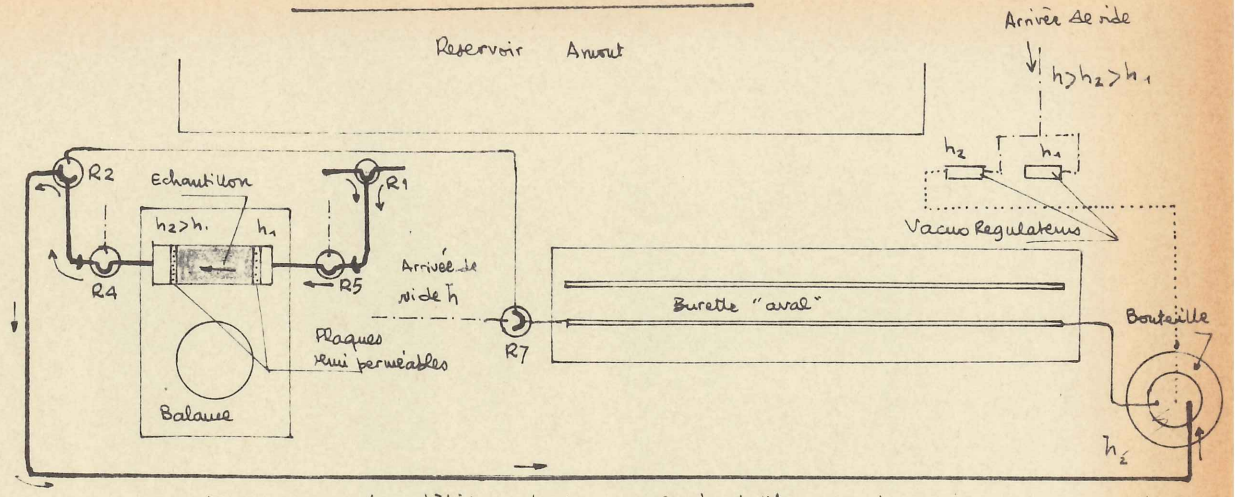


3. Mesure de la saturation de l'échantillon par pesée  
Remplissage de la burette AM



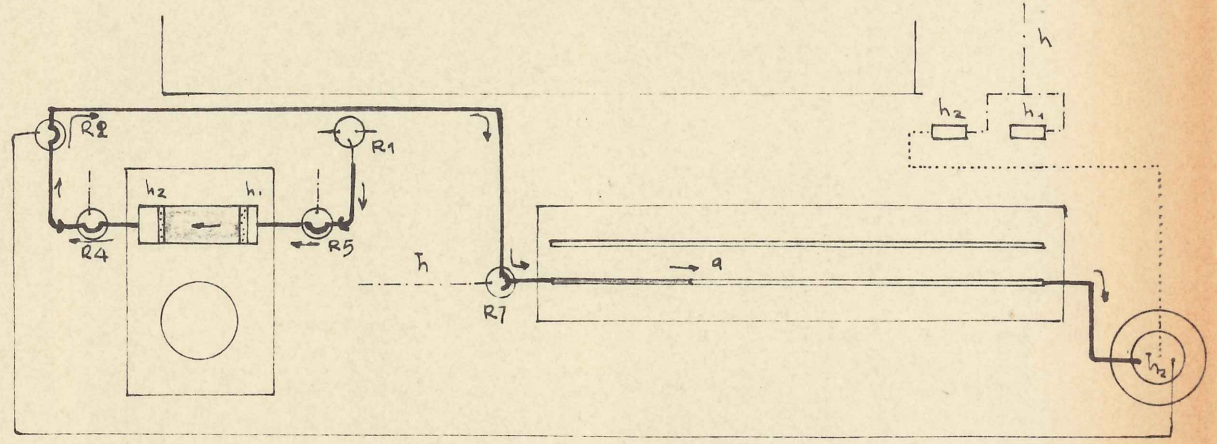
# CIRCUIT AVAL

## Schéma de fonctionnement

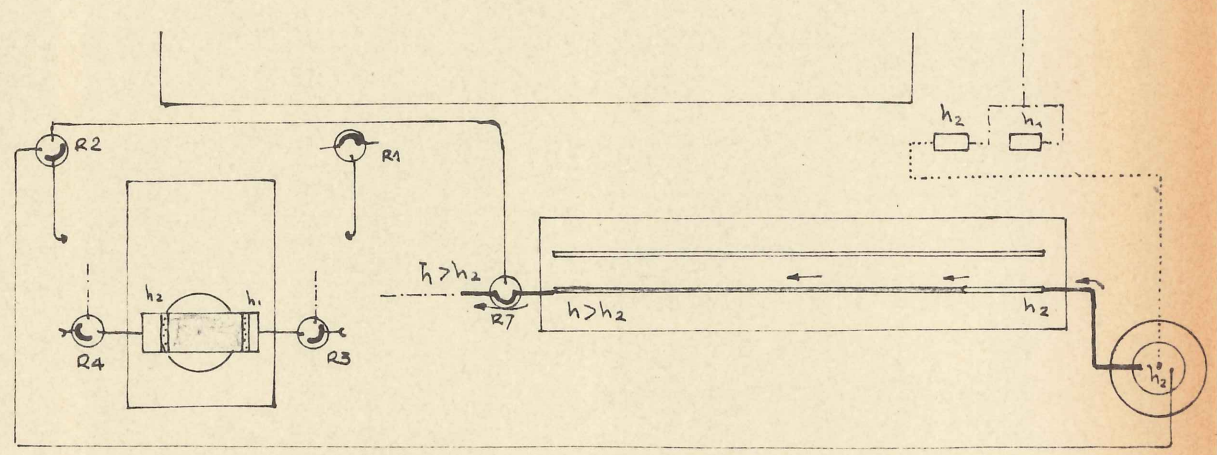


1. Evacuation du débit sortant vers la bouteille de vidage

--- Circuit vide  $h_1$   
..... Circuit vide  $h_2$



2. Mesure du débit sortant par la burette A



3. Mesure de la saturation de l'échantillon par pesée  
Vidange de la burette A



Partant donc du vacuo régulateur, le circuit de vide  $h_2$  sera relié à la bouteille et à la burette aval.

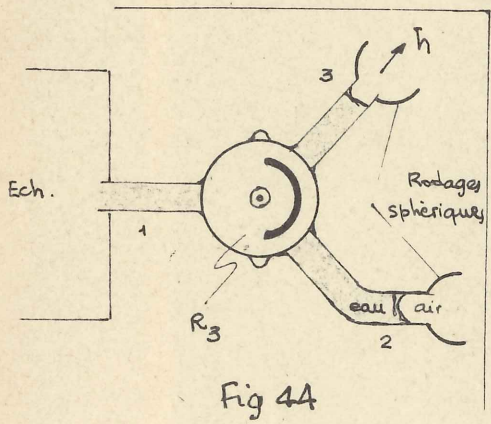
Le circuit aval comporte 3 robinets à trois voies,  $R_2$ ,  $R_4$  et  $R_7$  ayant les rôles suivants :

- $R_2$  permet d'envoyer le débit sortant de l'échantillon soit vers la bouteille, soit vers la burette ;
- $R_4$  permet de couper le circuit d'alimentation de l'échantillon pour le peser ;
- $R_5$  permet de relier l'extrémité aval de la burette soit à l'échantillon, soit au circuit de vide primaire  $h$  (pompe à vide), pour permettre de vider cette burette.

La position de ces robinets durant les trois temps de la mesure (comme pour le circuit amont) est donnée sur le schéma de fonctionnement p.V.17

2.4.3. Pesée.

Après avoir fermé les robinets  $R_3$  et  $R_4$ , on débranche les rodages sphériques (voir 2.3.2) et on porte l'échantillon sur la balance.

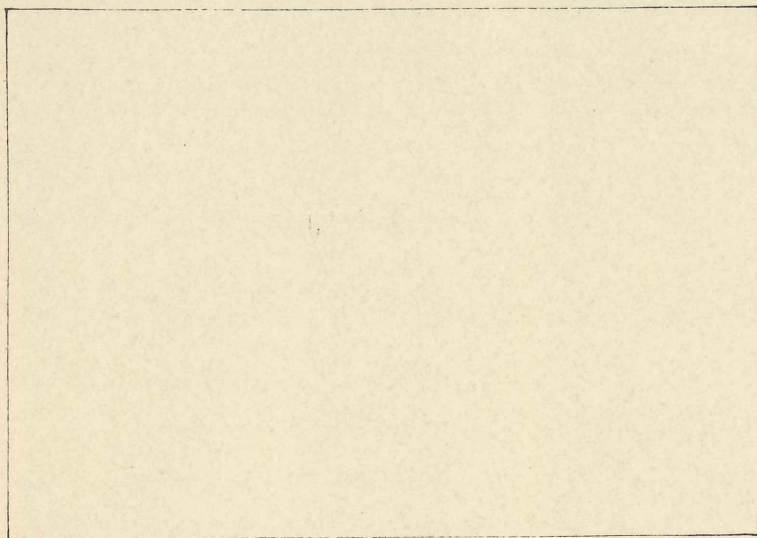


En remettant l'échantillon en place, on introduit un index d'air dans les rodages, c'est pour cette raison que nous avons choisi des robinets à 3 voies pour  $R_3$  et  $R_4$ , la 3e voie étant branchée sur le circuit de vide primaire  $h$  ce qui permet d'aspirer ces bulles et de saturer le circuit.



SYSTEME D'ALIMENTATION  
MESURE DE LA SATURATION.

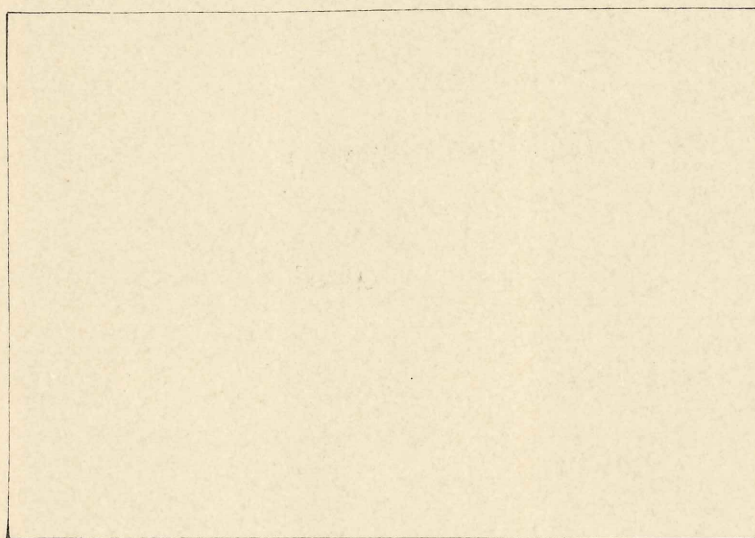
---



Vers le manomètre en U  
(Mesure de perte de charge).

Alimentation amont de l'échantillon.

Photo n°6



1. Echantillon
2. Burettes horizontales
3. Tube manométrique
4. Départ de la prise de pression amont
5. Alimentation amont
6. Arrivée de vide (pour la saturation du circuit).

Mesure de la saturation de l'échantillon  
par pesée

Photo n°7



Afin de toujours peser le même volume, des index de références ont été pris sur les branches des robinets, et l'eau est enlevée, avec un papier filtre, jusqu'à ces index avant chaque pesée. La saturation du circuit se fait ensuite sans problème grâce à la 3e voie.

### 3) CARACTERISTIQUES PHYSIQUES DES MATERIAUX UTILISES.

#### 3.1. Caractéristiques du sol.

Sable fin 100 - 200  $\mu$ , dit sable "B". Nous avons recherché, avant toute expérience, ses caractéristiques physiques : conductivité (saturée), porosité, densité sèche, poids spécifique. De plus, la courbe pc (S), déterminée les années précédentes, nous a été aimablement communiquée.

##### 3.1.1. Poids spécifique G.

Déterminé au picnomètre sur trois échantillons de 13,93 g, 15,55 g et 15 g de sol, le poids spécifique moyen trouvé est :

$$G = \underline{2,607 \text{ g/cm}^3}$$

##### 3.1.2. Densité sèche $\gamma_d$ .

Déterminée lors de la mise en place de l'échantillon dans le moule en plexiglass. Cette mise en place s'est faite en versant le sable dans le moule plein d'eau et en arasant.

Le volume du moule (échantillon central) est :  
 $V = 61,52 \text{ cm}^3$ .

Le poids de sable sec versé s'élève à 91,55 g.

d'où

$$\gamma_d = \frac{91,55}{61,52} = \underline{1,488 \text{ g/cm}^3}$$



3.1.3. Teneur en eau de saturation  $w_A$ .

$$w_A = \frac{1}{\gamma_d} - \frac{1}{G} = \frac{1}{1,488} - \frac{1}{2,607} = 28,85 \%$$

3.1.4. Porosité.

Définie par le volume des vides sur le volume total. Quand l'échantillon est saturé, tous les vides sont remplis d'eau, et le poids d'eau est :

$$P_w = w_A \times P_d = 0,2885 \cdot 91,55 = 26,3 \text{ gr}$$

d'où le volume des vides :  $26,3 \text{ cm}^3$   
 et avec  $V = 61,52 \text{ cm}^3$   $n = \theta_A = \frac{26,3}{61,52} = 42,93 \%$

3.1.5. Courbe de  $p^F$

Cette courbe complète (p. v. 23 ) a été établie pour un cycle de séchage en utilisant tensiomètre (  $p^F < 3$  ), centrifugeuse (  $2 < p^F < 4$  ), appareil Richards (  $3 < p^F < 5$  ) et dessiccateur (  $p^F > 5$  ). On observera :

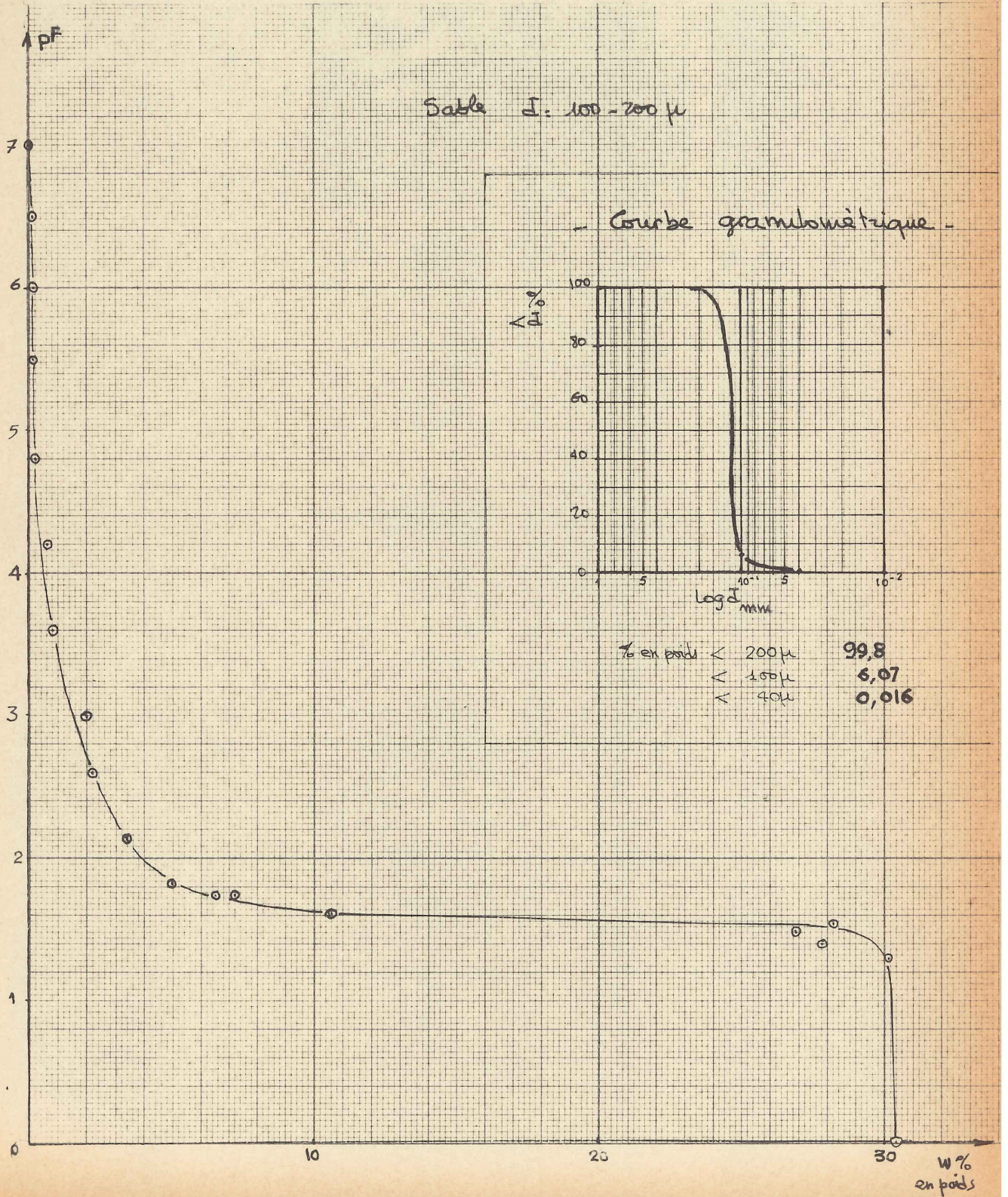
- 1) que ce sable présente une assez forte entrée d'air =  $\psi_2 \approx 20 \text{ cm d'eau}$
- 2) qu'une fois la désaturation commencée, il existe un palier pratiquement horizontal, le degré de saturation variant de 90 % à 35 % pour une variation de  $p^F$  de 1,50 à 1,62 (variation de la succion de 35 à 42 cm d'eau).
- 3) qu'il n'existe pas de saturation irréductible en eau.

1) et 2) résultent de l'étroite granulométrie du matériau utilisé, ce qui conduit à une répartition relativement étroite du volume des vides, bien qu'il ne soit pas possible de lier granulométrie à grandeur des vides d'une façon précise.

La variation brutale du degré de saturation dû au palier de la courbe  $p^F$  (S) devrait donc se traduire par une variation brutale de la conductivité capillaire lorsque la succion augmente.



### COURBE pf (s)





### 3.1.6. Conductivité hydraulique (saturée).

$$\underline{k_s} = 6,6 \cdot 10^{-4} \text{ cm/sec (voir page V.33)}$$

## 3.2. Caractéristiques des plaques.

Les caractéristiques intéressantes sont le diamètre maximum des pores, la pression d'entrée d'air et la perméabilité.

### 3.2.1. Plaques en Alucer 993 P.

Diamètre des plus gros pores  $1 \mu$   
(donné par catalogue)

Pression d'entrée d'air (estimée) :

$$h = \frac{4 \cdot \gamma}{\rho g J} = \frac{300}{10^3 \cdot 10^{-4}} = 30 \text{ m d'eau.}$$

Conductivité, mesurée en faisant de nombreuses mesures de débit pour une charge variant de 10 cm à 4 m d'eau.

$$\underline{k_p} = 3,7 \cdot 10^{-7} \text{ cm/sec}$$

### 3.2.2. Plaques en PORAL 0.15.

Diamètres des plus gros :  $25 \mu$   
(donné par catalogue).

Pression d'entrée d'air : mesurée : 40 cm d'eau ce qui correspond à un diamètre effectif des plus gros pores de  $75 \mu$ .

Conductivité, mesurée en faisant des mesures de débit pour une charge variant de 20 à 60 cm d'eau :

$$\underline{k_p} = 3,7 \cdot 10^{-4} \text{ cm/sec}$$

(Perméabilité donnée par catalogue :  $3,6 \cdot 10^{-4}$ ).



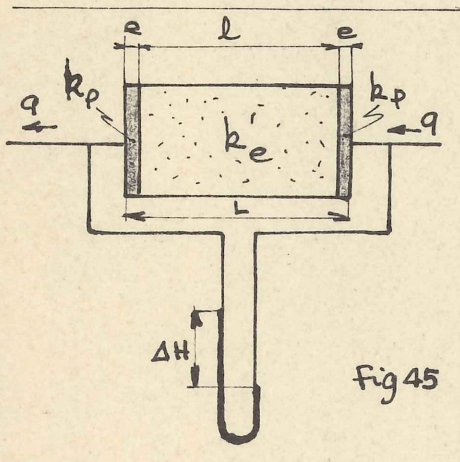
Le choix des plaques est fixé par la valeur de leurs conductivités et de la pression d'entrée d'air : il faut, pour que la mesure de la conductivité de l'échantillon soit précise, que l'impédance des plaques ( $Z_p = \frac{2e}{k_p}$ ) soit du même ordre de grandeur, ou mieux inférieure, à celle de l'échantillon ( $Z_e = \frac{l}{k_e}$ ). Il faut aussi que les plaques soient toujours saturées, donc que la succion à laquelle elles sont soumises soit inférieure à la pression d'entrée d'air.

Pour cette raison, nous avons choisi les plaques de Poral pour de faibles succions ( $0 < \psi < 40$  cm), la conductivité de l'échantillon variant dans cet intervalle de  $10^{-3}$  à  $5 \cdot 10^{-4}$  cm/sec, et les plaques en Alucer pour des succions supérieures à 40 cm.

Avant d'entamer le chapitre des essais proprement dits, il faut considérer le facteur le plus important de la mesure : comment prendre en compte la perméabilité des plaques dans les mesures de conductivité ?

#### 4) INFLUENCE DE LA CONDUCTIVITE DES PLAQUES.

Considérons en effet notre système tel que nous l'avons défini p. V.3, et la formule (5.3) :



$$k' = \frac{q}{\Delta P_w / l}$$

Dans cette formule,  $\Delta P_w / l$  est le gradient de pression à travers l'échantillon, mais ce que l'on mesure est  $\Delta H / L$ , gradient de pression à travers l'ensemble échantillon-plaques; donc, si on ne fait pas de corrections



on obtient une conductivité totale  $\mathcal{K}$ , donnée par :

$$\mathcal{K} = \frac{q}{\Delta H/l} \tag{5.4}$$

au lieu de  $k'$ .

Soit  $k_p$  la conductivité des plaques d'épaisseur  $e$

$k'$  la conductivité de l'échantillon d'épaisseur  $l$

$\mathcal{K}$  la conductivité de l'ensemble d'épaisseur :  $l + 2e$

en écrivant que le flux  $q$  est le même dans les plaques et dans l'échantillon, on a :

$$q = k_p \cdot \frac{\Delta H_p}{2e} = k' \frac{\Delta H_e}{l} = \mathcal{K} \frac{\Delta H}{l+2e} \tag{5.5}$$

où  $\Delta H_p$  est la perte de charge dans les deux plaques

$\Delta H_e$  est la perte de charge dans l'échantillon

$\Delta H$  est la perte de charge totale.

Or 
$$\Delta H = \Delta H_p + \Delta H_e$$

Soit 
$$q \cdot \frac{l+2e}{\mathcal{K}} = q \cdot \frac{2e}{k_p} + q \cdot \frac{l}{k'}$$

ou 
$$\frac{l+2e}{\mathcal{K}} = \frac{2e}{k_p} + \frac{l}{k'}$$

Soit

$$k'_e = \frac{l}{\frac{l+2e}{\mathcal{K}} - \frac{2e}{k_p}} \tag{5.7}$$

(5.7) permet donc d'obtenir  $k'$ , conductivité de l'échantillon, en fonction de la conductivité des plaques  $k_p$  et de la conductivité mesurée  $\mathcal{K}$ ; (5.6) peut aussi s'écrire :

$$Z = Z_p + Z_e$$



où  $Z$  est l'impédance de l'ensemble. On voit donc sous cette forme que si  $Z_p$  est bien supérieur à  $Z_e$ , l'impédance mesurée sera celle des plaques et non celle de l'échantillon.

Afin de simplifier les calculs, nous avons tracé une abaque donnant  $k'$  en fonction de  $\mathcal{K}$  mesuré pour notre échantillon, avec :

$$l = 5 \text{ cm}$$

$$e = 0,3 \text{ cm}$$

et  $k_p$  variant de  $3,7 \cdot 10^{-7}$  à  $10^{-3}$  cm/sec (p. V. 28 ).

- Cette abaque (en échelle log-log) montre notamment que pour
- $k_p = 3,7 \cdot 10^{-7}$  (plaques en Alucer), la courbe  $\mathcal{K} = f(k'_e)$  présente une asymptote, et qu'il n'est pas possible de mesurer des conductivités de l'échantillon supérieure à  $10^{-4}$  cm/sec.
  - pour  $k_p = 3,7 \cdot 10^{-4}$  (plaques en PORAL), l'erreur que l'on fait en confondant  $\mathcal{K}$  et  $k'_e$  est négligeable tant que  $k'_e < 10^{-4}$  cm/sec, mais les plaques sont inutilisables dans ce domaine, l'air entrant dans les plaques.

Pour cette raison, nous utiliserons les plaques en Alucer pour  $k'_e < 10^{-4}$  cm, les plaques en PORAL pour  $k'_e > 10^{-4}$  cm.

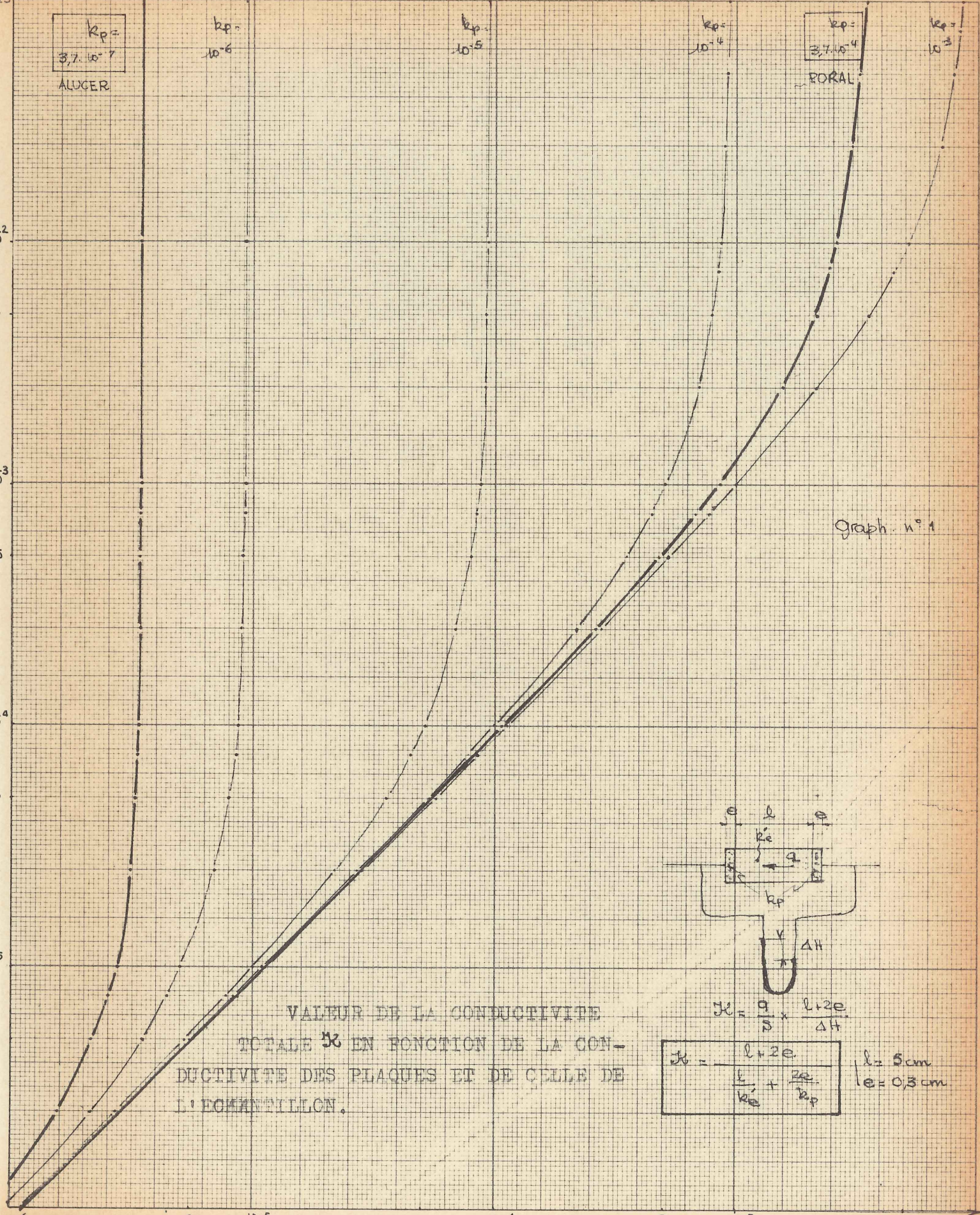
On trouvera p. V. 29 et p. V. 30 des courbes à plus grande échelle donnant  $k'_e$  en fonction de  $\mathcal{K}$  (courbes semi-log) pour les plaques en Alucer (graphique 2) et celles en PORAL (graphique 3) dans leur domaine d'utilisation.

## 5) RESULTATS.

Les mesures nécessitant l'obtention du régime permanent sont longues, surtout aux fortes succions. Il faut compter

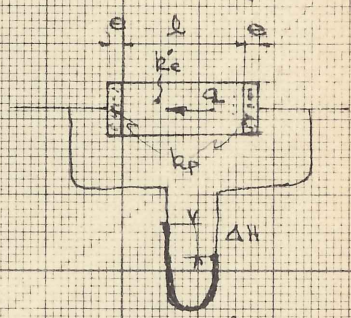


$\log k_{pe}$  cm/sec



Graph n° 1

VALEUR DE LA CONDUCTIVITE  
 TOTALE  $k_t$  EN FONCTION DE LA CON-  
 DUCTIVITE DES PLAQUES ET DE CELLE DE  
 L'ECHANTILLON.



$$k_t = \frac{Q}{S} \times \frac{l+2e}{\Delta H}$$

$$k_t = \frac{l+2e}{\frac{l}{k_p} + \frac{2e}{k_{pe}}}$$

$l = 5 \text{ cm}$   
 $e = 0.3 \text{ cm}$

$\log k_t$   
 cm/sec



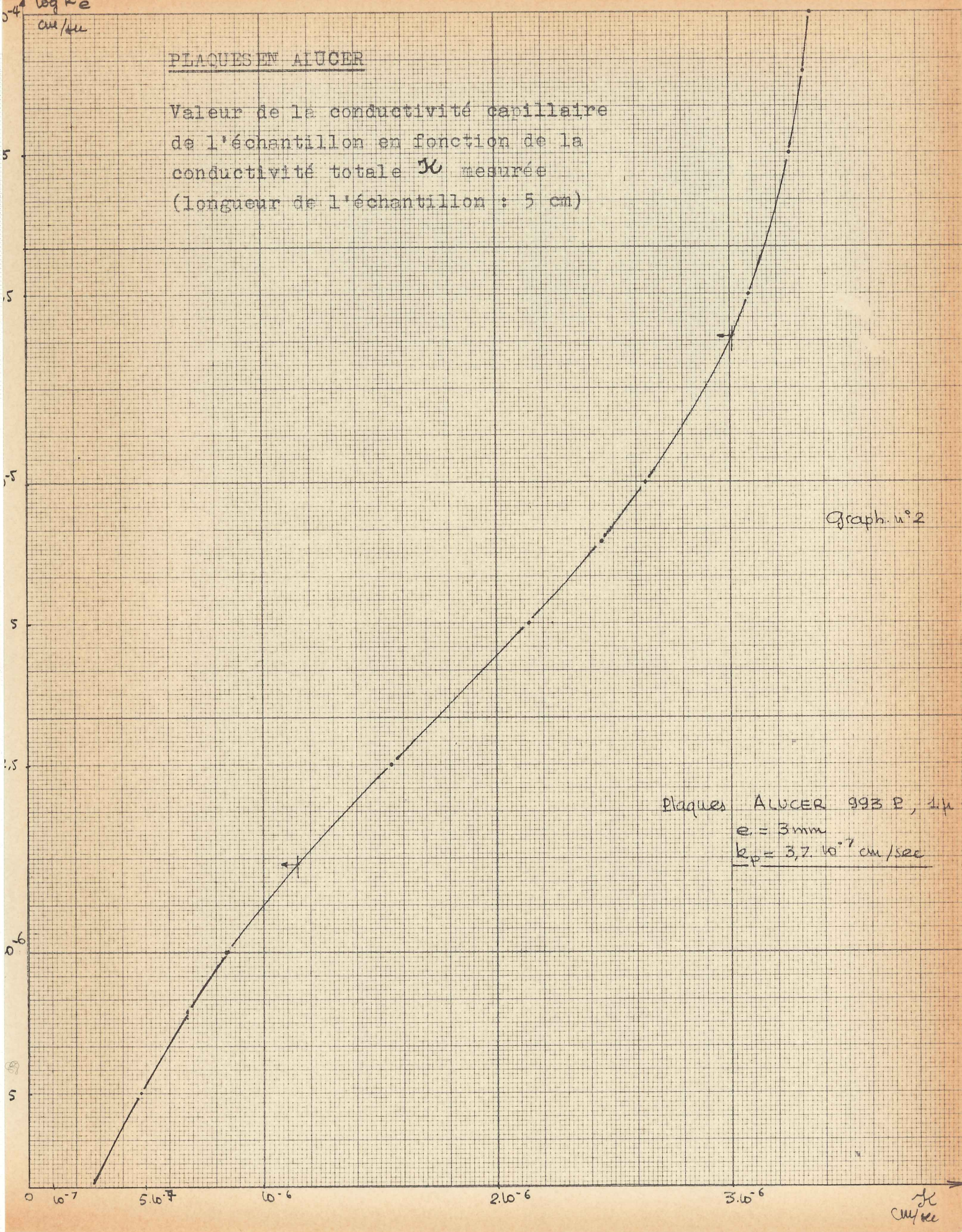
$\log k'_e$   
cm/sec

PLAQUES EN ALUCER

Valeur de la conductivité capillaire  
de l'échantillon en fonction de la  
conductivité totale  $\kappa$  mesurée  
(longueur de l'échantillon : 5 cm)

Graph. n° 2

Plaques ALUCER 993 P, 4 $\mu$   
e = 3 mm  
 $k_p = 3,7 \cdot 10^{-7}$  cm/sec

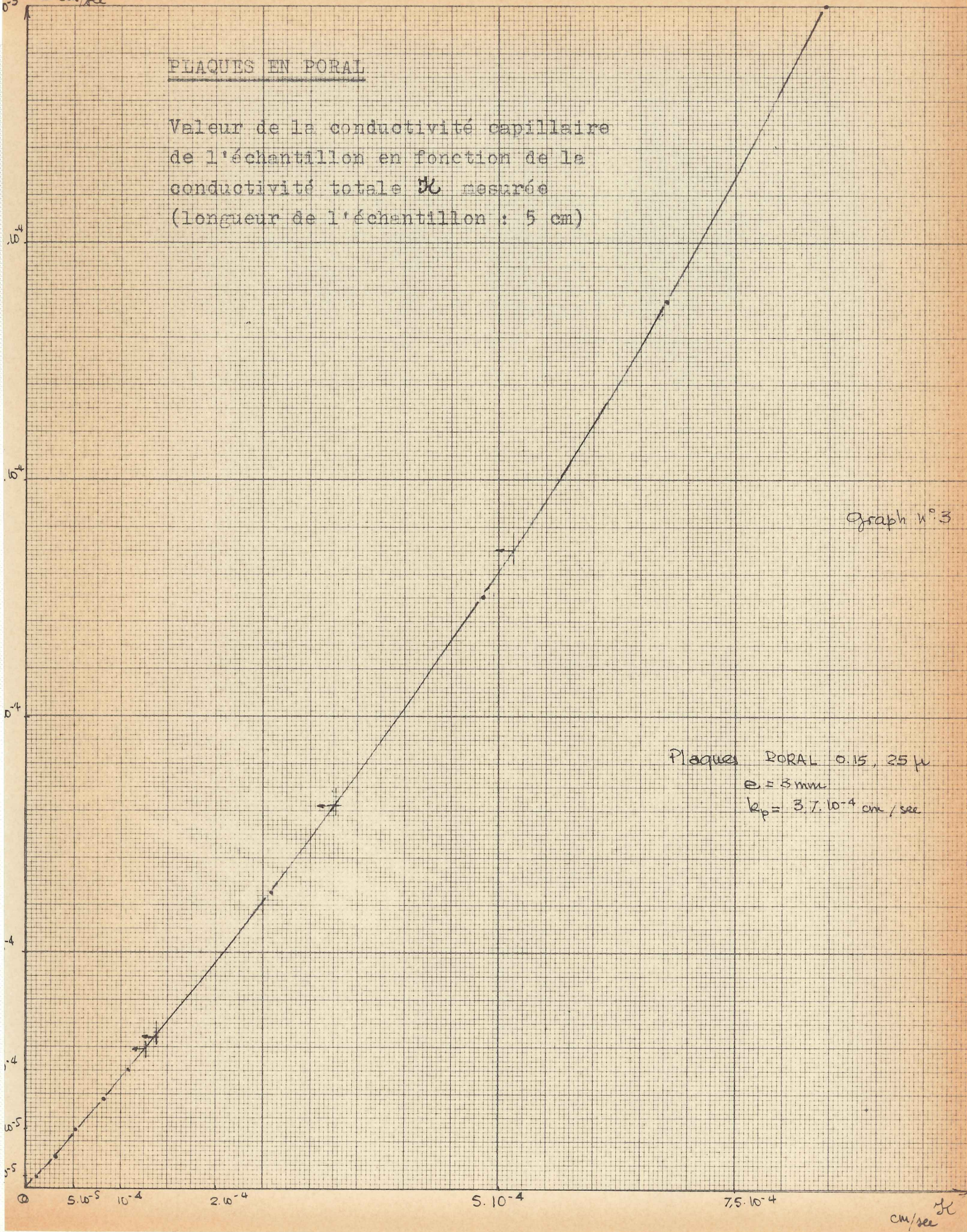




$10^{-3} k_c$  cm/sec

PLAQUES EN PORAL

Valeur de la conductivité capillaire  
de l'échantillon en fonction de la  
conductivité totale  $k_c$  mesurée  
(longueur de l'échantillon : 5 cm)



$k_c$   
cm/sec



en moyenne, un écoulement de 3 jours, sans interruptions, pour atteindre l'écoulement permanent (égalité des débits entrant et sortant de l'échantillon; valeur constante de ces débits dans le temps). Pour cette raison, nous avons été limité par le nombre de mesures.

Aux basses valeurs de la succion, les vacuo-régulateurs n'étant pas suffisamment stables, le système de vide a été remplacé par un système de vide hydraulique, constitué par deux bouteilles contenant de l'eau à des niveaux différents, et inférieurs à la côte de l'échantillon, et reliées entre elles par l'intermédiaire de l'échantillon.

On trouvera page suivante le résultat des mesures effectuées. Il est à noter que  $\Delta H$  est la valeur du vide différentiel total appliqué entre l'amont et l'aval du système échantillon plaque et que  $\Delta H_e$  est la valeur du vide différentiel entre l'amont et l'aval de l'échantillon, une fois la correction due aux plaques effectuée. La valeur du gradient de pression capillaire dans l'échantillon vaut donc  $\frac{\Delta H_e}{l}$  et non  $\Delta H/l$ . Connaissant le débit  $q$ , on obtient donc la conductivité  $\mathcal{K}$  totale du système et, par l'intermédiaire des abaques p. V. 29 et p. V. 30, la conductivité  $k'_e$  de l'échantillon. La valeur de la succion  $\psi$  est la valeur du vide moyen entre l'amont et l'aval de l'échantillon. La teneur en eau volumétrique  $\theta$  est déterminée à la fin de chaque essai, par pesée, connaissant la teneur en eau à saturation, la teneur en eau initiale et le poids initial de l'échantillon.

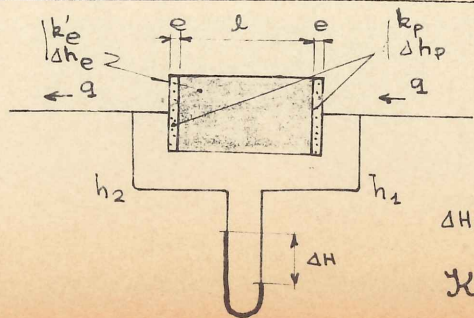
Pour ce sable, on a  $n = 42,93 \%$ , la teneur en eau à saturation est donc :

$$\theta_s = n S = 42,93 \%$$



RESULTATS EXPERIMENTAUX - TABLEAU I

$\Psi$ cm	$\Delta H$ cm d'eau	$q$ cm <sup>3</sup> /sec	$q/\Delta H$ cm <sup>2</sup> /sec	$\mathcal{K}$ cm/sec	$k'_e$ cm/sec	$\Delta h_e$ cm	$k'_L$ %	$P$ gr	$S$ %	$\theta$ %	Remarques
+16,5	16,5	$2,12 \cdot 10^{-2}$	$1,28 \cdot 10^{-3}$	$6,15 \cdot 10^{-4}$	* $6,6 \cdot 10^{-4}$	13,7	100		99,82	42,93	$\Psi < 0$ car correspond à une charge conductivité saturée
-9,8	10,5	$1,13 \cdot 10^{-2}$	$1,075 \cdot 10^{-3}$	$5,15 \cdot 10^{-4}$	$5,4 \cdot 10^{-4}$	8,35	81,9	403,31	96,7	41,5	Plaque PORAL $k_p = 3,7 \cdot 10^{-4}$ cm/sec  P initial des échan. bilons avec plaques en PORAL: P = 403,45 gr (Sini = 97%) (θini = 41,9 cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )
-22,3	5,3	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$7,35 \cdot 10^{-4}$	$3,28 \cdot 10^{-4}$	$3,24 \cdot 10^{-4}$	4,8	49,1	403,08	95,9	41	
-23,3	6,8	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$3,09 \cdot 10^{-4}$	$1,38 \cdot 10^{-4}$	$1,28 \cdot 10^{-4}$	6,53	19,4	402,82	94,6	40	
-26,6	8	$2,3 \cdot 10^{-3}$	$2,88 \cdot 10^{-4}$	$1,28 \cdot 10^{-4}$	$1,19 \cdot 10^{-4}$	7,67	18,0	400,10	87,8	37,6	
-44,5	46,2	$3,11 \cdot 10^{-4}$	$6,75 \cdot 10^{-6}$	$3,01 \cdot 10^{-6}$	$2,06 \cdot 10^{-5}$	6	3,1	371,89	37,2	16,05	Plaque ALUCER $k_p = 3,7 \cdot 10^{-7}$ cm/sec  P initial des échantil. lous avec plaques ALUCER P = 388,69 gr (Sini = 97,5%) (θini = 41,7 cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> )
-74,7	53	$1,37 \cdot 10^{-4}$	$2,58 \cdot 10^{-6}$	$1,152 \cdot 10^{-6}$	$1,54 \cdot 10^{-6}$	35,3	0,23	367,82	18,4	7,9	
-130,5	170,5	$1,26 \cdot 10^{-6}$	$7,4 \cdot 10^{-9}$	$3,3 \cdot 10^{-9}$	$3,1 \cdot 10^{-9}$	170,5	0,004	365,11	8,1	3,5	



$l = 5$  cm (\* sauf pour l'évai en charge =  $l = 5,4$  cm)  
 $2e = 0,6$  cm  
 $S = 12,56$  cm<sup>2</sup>

$\Delta H = \Delta h_e + \Delta h_p$  ( $\Delta h_p =$  perte de charge totale due aux plaques)

$\mathcal{K} = \frac{q}{\Delta H} \times \frac{l+2e}{S} = \frac{l+2e}{\frac{l}{k'_e} + \frac{2e}{k_p}}$  ;  $\Psi = \frac{h_1 + h_2}{2}$  |  $h_1 =$  vide amont  
 $h_2 =$  vide aval



Le volume de l'échantillon est de 61,52 cm<sup>3</sup>.

La teneur en eau initiale et le poids initial de l'échantillon étaient respectivement, dans les deux types d'essais (plaques en Alucer, plaques en Poral) :

	$\theta_i$ %	Poids initial gr.	$S_i$ %
Plaques en Alucer	41,9	388,69	97,5
Plaques en Poral	41,6	403,45	97

Pour obtenir ces degrés de saturation, le sable était versé dans l'eau et remué. Dans ces deux essais, la densité sèche du sable était :

$$\gamma_d = 1,488 \text{ g/cm}^3$$

La conductivité saturée du sable a été déterminée avec le même appareil, équipé de plaques PORAL, et avec un écoulement en charge. Pour cet essai, correspondant à des écoulements en charges, on a pris  $\psi > 0$  (car  $\psi < 0$  correspond à une dépression).

On observe que la variation de  $k'$  est très rapide au fur et à mesure que la succion augmente ; partant de  $\underline{\kappa' = 6,6 \cdot 10^{-4}}$  (saturé), on arrive à  $\underline{3,3 \cdot 10^{-9}}$  sous une succion de 130 cm.

5.1. Loi  $k'(\psi)$ .

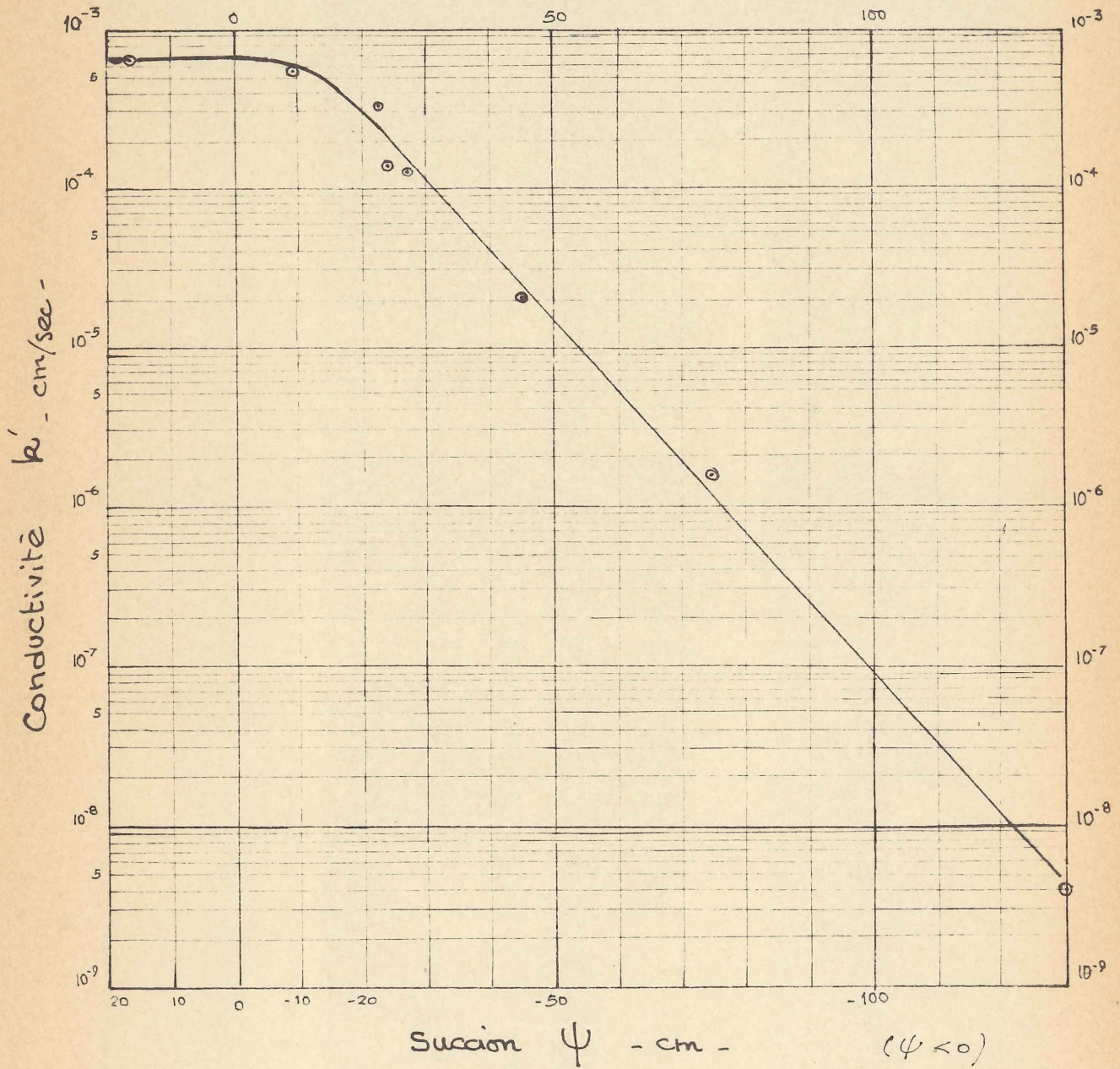
On trouvera sur le graphique n° 4 (p. V.34) la loi  $k'(\psi)$  sous forme semi-log. La loi  $\log k' = f(\psi)$  est une loi linéaire sur le plus grand domaine de succion



Graph. n°4.

LOI  $k'(\psi)$

$$k' = \frac{3,16 \cdot 10^{-3} \cdot e^{0,106 \psi} \text{ cm}}{\text{cm/sec}} \quad (\psi < 0)$$





(-20 cm >  $\Psi$  > -150 cm). Pour  $\Psi > -10$  cm,  $k'$  est pratiquement constant, ce qui est normal puisque l'air n'est pas encore rentré dans l'échantillon.

On peut voir que pour une teneur en eau volumétrique de 3,5 % ( $\text{cm}^3 \text{ d'eau} / \text{cm}^3$ ), ( $\Psi = -1,30$  m), il y a encore continuité de la phase liquide, puisque l'eau s'écoule.

Le résultat le plus important à tirer de ce graphique est que la loi  $k'(\Psi)$  est une loi exponentielle régulière, du type :

$$k' = a e^{b\Psi} \quad (\Psi < 0)$$

La détermination des coefficients a et b d'après le graphique n° 4 nous donne la loi :

$$k'_{\text{cm/sec}} = 3,16 \cdot 10^{-3} \exp(0,106 \Psi_{\text{cm}}) \quad (5.8)$$

Il est à noter que cette loi est différente de la loi générale donnée par Gardner sous la forme :

$$k' = \frac{a}{\Psi^n + b}$$

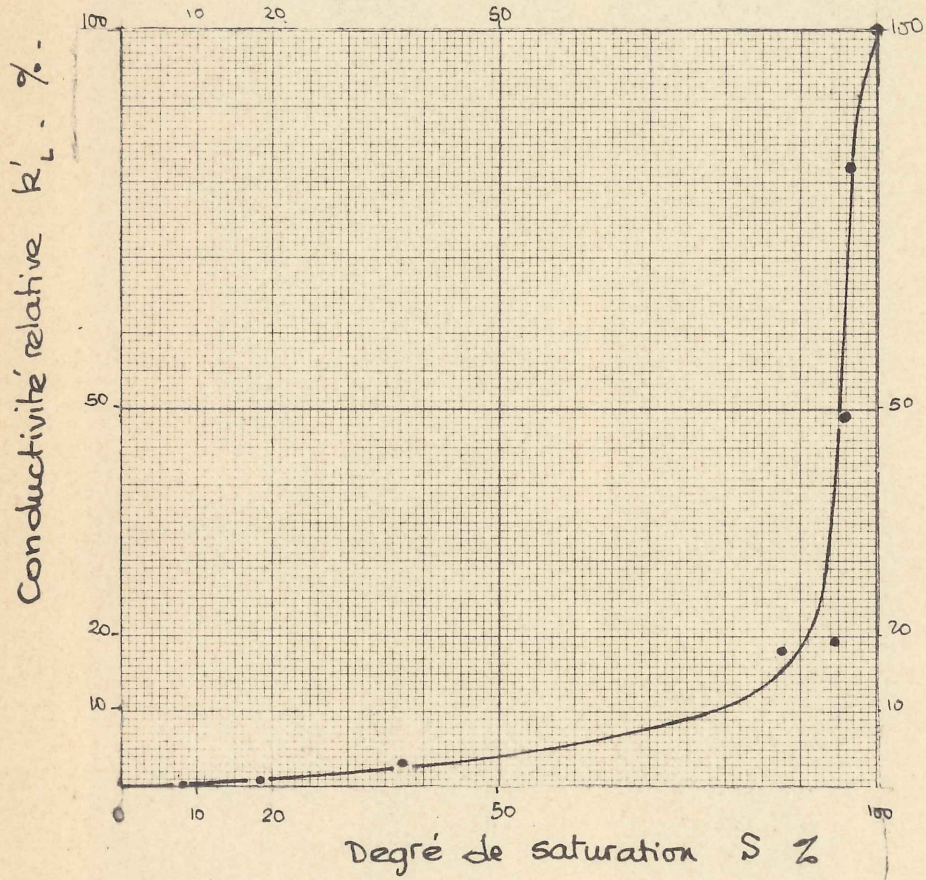
### 5.2. Loi $k'(S)$ .

Le tableau n°1 (p. V.32) permet également d'étudier les variations de  $k'(S)$  ou  $k'(\theta)$ . Nous avons reporté sur le graphique n° 5 la loi  $k'_L(S)$  en échelle normale, où  $k'_L$  est la conductivité relative :  $\frac{k'}{k}$

Le fait remarquable est la très rapide variation de  $k'$  avec le degré de saturation. Si on considère la variation relative on peut voir que  $k'$  varie de 100 % ( $7 \cdot 10^{-4}$  cm/sec) à 20 % ( $1,22 \cdot 10^{-4}$ ) pour une variation de S de 100 à 95 %. A partir de ce point, la décroissance de  $k'$  est beaucoup plus lente, mais  $k'$  ne s'annule

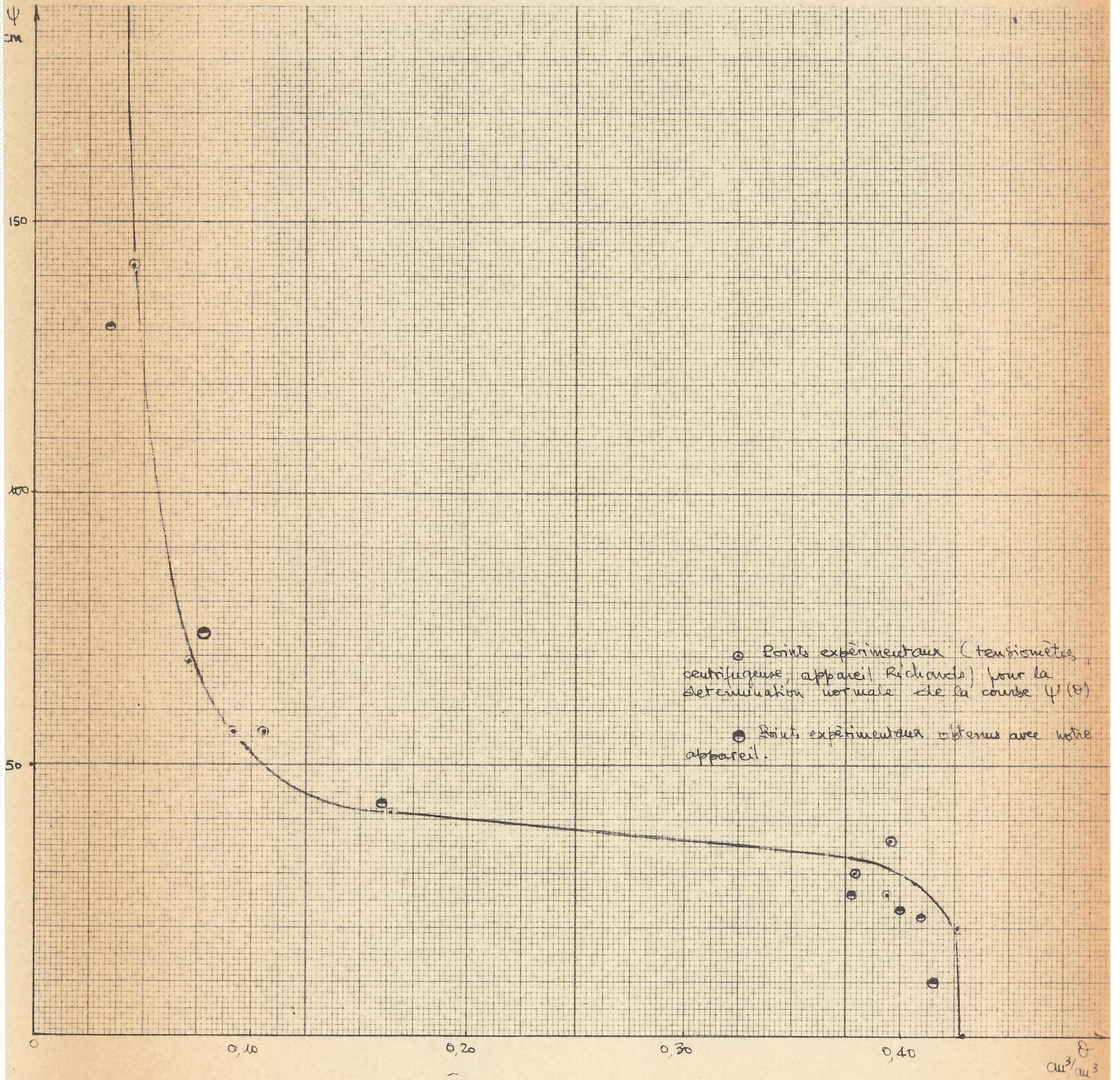


VARIATION DE LA PERMEABILITE EN FONCTION DU DEGRE DE SATURATION.





COURBE  $\psi(\theta)$   
Sable 100 - 200  $\mu$



COURBE CLASSIQUE ET VERIFICATION EXPERIMENTALE



qu'aux environs de  $S = 0$  : pour  $S = 8,1 \%$  ( $\theta = 0,035 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ ) on a  $k' = 3,9 \cdot 10^{-9} \text{ cm/sec}$ .

En combinant les deux lois  $k'(\psi)$  et  $k'(\theta)$  ou  $k'(S)$  on devrait retrouver la loi  $\psi(\theta)$ . Nous avons à cet effet reporté sur le graphique n° 6 donnant  $\psi(\theta)$  les points expérimentaux<sup>obtenus</sup> avec notre appareil qui fonctionne donc également comme un tensiomètre. Mais pour une utilisation correcte, il faut attendre suffisamment longtemps, afin que le régime permanent soit établi.

### 5.3. Loi D ( $\theta$ ).

Nous avons enfin vu dans la partie bibliographique précédente qu'une variable importante est la diffusivité, définie par :

$$D = k' \frac{d\psi}{d\theta}$$

On peut donc déterminer  $D(\theta)$  à partir des courbes  $k'(\theta)$  et  $\psi(\theta)$ .

On trouvera sur le tableau 2 (p. V.39) les valeurs de  $k'$ ,  $\psi$ ,  $\frac{d\psi}{d\theta}$  et  $D$  pour différentes valeurs de  $\theta$ . Il est à noter que la courbe  $\frac{d\psi}{d\theta}$  passe par un minimum pour  $\theta$  compris entre 0,16 et 0,38  $\text{cm}^3/\text{cm}^3$  (branche rectiligne). Ce minimum est égal à 0,32 ensuite  $\frac{d\psi}{d\theta}$  possède une asymptote verticale pour  $\theta = 42,3 \%$  et tend vers l'infini pour  $\theta < 3,5 \%$  ( $\frac{d\psi}{d\theta} = 290$ ).

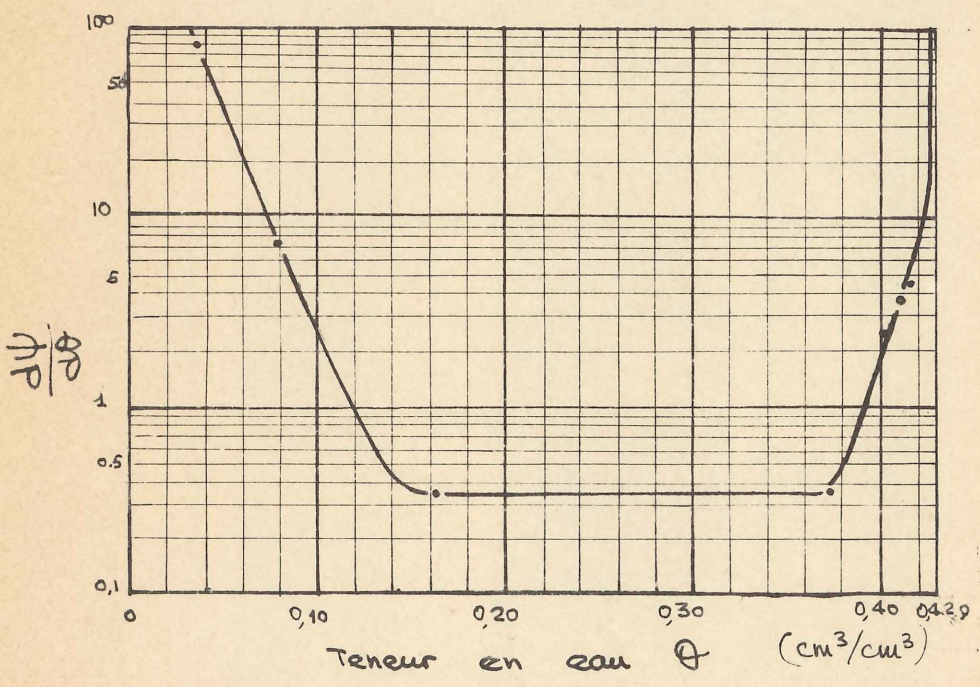
On trouvera sur le graphique n° 7 (p. V.40) les courbes  $D(\theta)$  et  $k'(\theta)$  en coordonnées semi logarithmiques. Rappelons que  $D$  est en  $\text{cm}^2/\text{sec}$  alors que  $k'$  est en  $\text{cm}/\text{sec}$ . Les valeurs de  $D$  sont supérieures à celles de  $k'$ , surtout aux fortes valeurs de la succion. Il n'est cependant pas possible de



VALEUR DE LA DIFFUSIVITE  
EN FONCTION DE LA TENEUR EN EAU - TABLEAU II

$\theta$ %	$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$	$k'$ cm/sec	$D$ cm <sup>2</sup> /sec
41,5	4,3	$5,4 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$
41	3,7	$3,24 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$
40	2,44	$1,28 \cdot 10^{-4}$	$3,12 \cdot 10^{-4}$
37,6	0,377	$1,19 \cdot 10^{-4}$	$4,5 \cdot 10^{-5}$
16,05	0,377	$2,06 \cdot 10^{-5}$	$7,75 \cdot 10^{-6}$
7,9	7,15	$1,54 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$
3,5	80	$3,1 \cdot 10^{-9}$	$2,4 \cdot 10^{-7}$

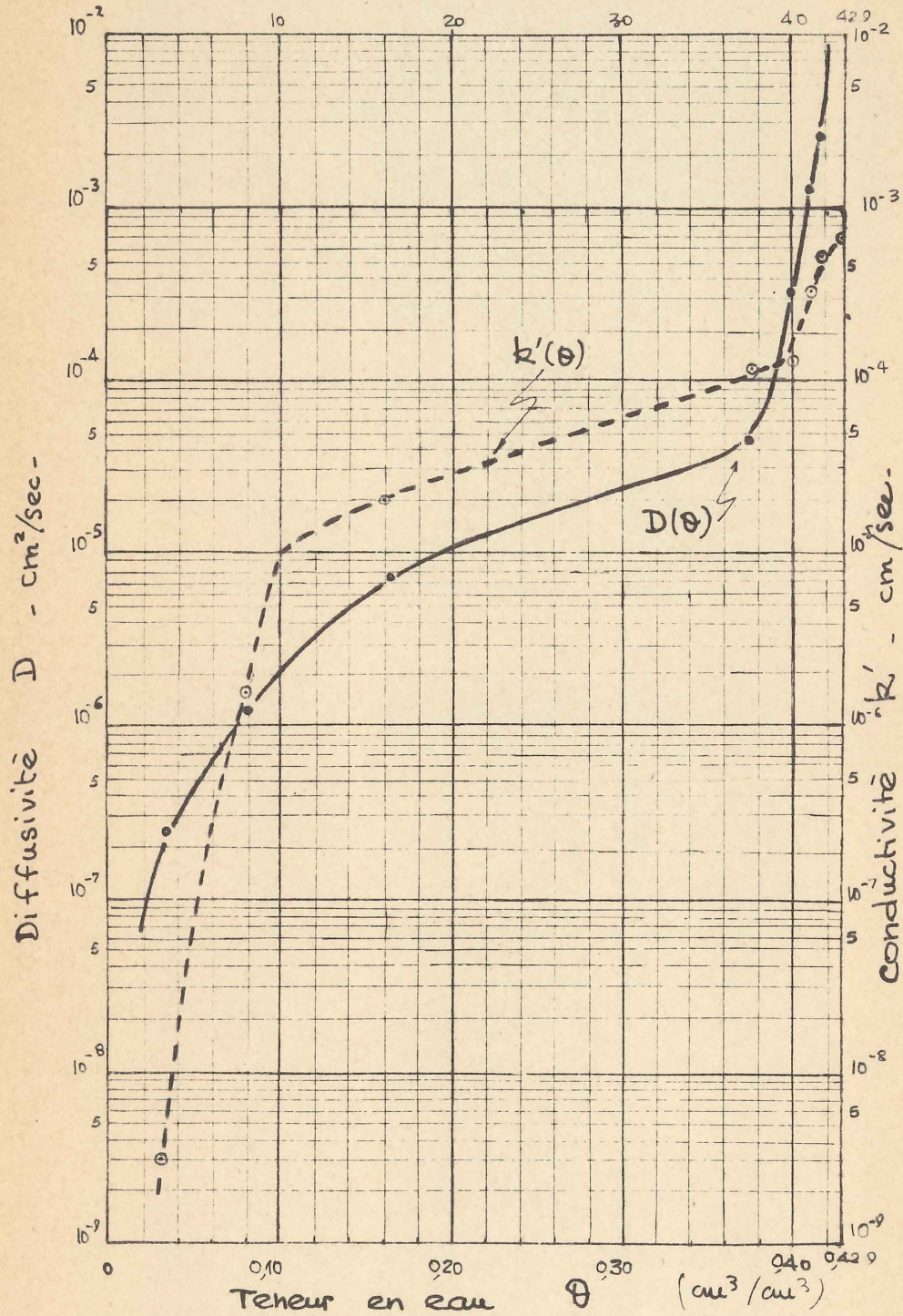
LOI  $\frac{d\psi}{d\theta} = f(\theta)$





LOIS  $k'(\theta)$  et  $D(\theta)$

(Unités différentes)



- Points expérimentaux ( $k'(\theta)$ )
- Valeurs de  $D$  obtenus à partir de  $k'(\theta)$  et  $\frac{d\theta}{d\theta}(\theta)$



définir  $D(\theta)$  par une équation simple, notamment une équation de la forme  $D = D_0 e^{\beta(\theta - \theta_0)}$  comme le suggère Gardner, sinon sur un faible domaine de  $\theta$  ( $0,40 < \theta < 0,15$  (cm<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>), ce qui correspond au palier sur la courbe  $\psi(\theta)$

Ainsi donc notre appareil nous a permis de déterminer pour ce sable les caractéristiques dynamiques fondamentales des écoulements en milieux poreux non saturés, à savoir :

- la loi  $k'(\psi)$  ou  $k'(\theta)$
- la loi  $D(\theta)$

Malheureusement, seule la loi  $k'(\psi)$  est analytiquement exprimable sous une forme simple :

$$k' = a e^{b\psi}$$

la loi  $D(\theta)$  ne pouvant être utilisée qu'en calcul numérique.

#### 6) APPLICATION A L'EVAPORATION.

Nous avons vu au chapitre IV que connaissant la loi  $k'(\psi)$  ou  $k'(\theta)$  et  $D(\theta)$ , il était possible de résoudre :

- soit des problèmes d'écoulement permanent ;
- soit des problèmes d'écoulement transitoire ;

Ce dernier type de problèmes ne pouvant se résoudre que par le calcul numérique, la loi  $D(\theta)$  n'étant pas analytique, nous n'avons considéré qu'un exemple d'application pratique, facilement intégrable : celui de l'évaporation, étant limité par le temps.

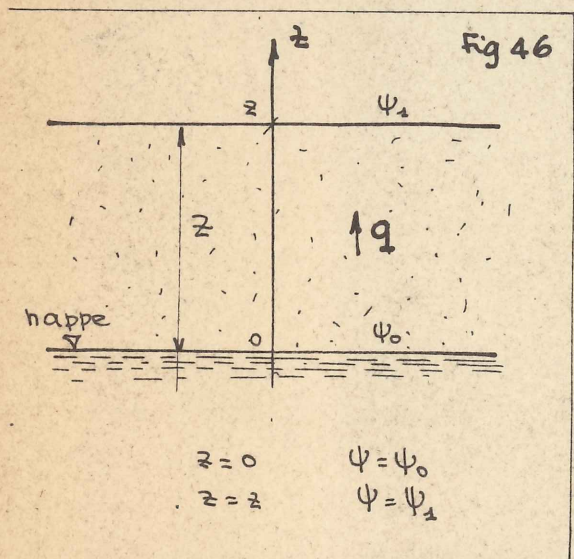
Nous savons qu'en régime permanent, les écoulements en milieux non saturés sont régis par la loi de Darcy généralisée



(chap. III)

$$q = -k' \text{grad}(\Psi + z) \tag{2.3}$$

Considérons donc un écoulement unidirectionnel vertical, dans le sable étudié (évaporation au dessus d'une nappe). Le flux sera donné par :



$$q = -k' \left( \frac{d\Psi}{dz} + 1 \right) \tag{5.9}$$

et, de plus,  $k'(\Psi) = a e^{b\Psi}$  (5.10)

(5.9) peut s'écrire :

$$dz = - \frac{k' d\Psi}{q + k'}$$

soit : 
$$z = - \int_{\Psi_0}^{\Psi_1} \frac{d\Psi}{1 + \frac{q}{k'}} \tag{5.11}$$

(fig 46 pour signification de  $\Psi_0$  et  $\Psi_1$ )

Connaissant la relation  $k'(\Psi)$ , (5.9) peut s'intégrer, ce qui donne  $z(\Psi, q)$  donc, par inversion  $q(\Psi, z)$ . On a en effet :

$$k' = a e^{b\Psi}, \text{ donc : } z = - \int_{\Psi_0}^{\Psi_1} \frac{d\Psi}{1 + \frac{q}{a} e^{-b\Psi}}$$

Soit  $u = e^{-b\Psi}$ ,  $du = -b e^{-b\Psi} d\Psi = -b u d\Psi$

d'où 
$$z = - \int_{u_0}^{u_1} \frac{-du}{bu(1 + \frac{q}{a}u)} = \frac{a}{b} \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{u(a+qu)}$$

En écrivant : 
$$\frac{a}{b} \frac{du}{u(a+qu)} = \frac{1}{b} \frac{du}{u} - \frac{1}{b} \frac{qu}{(a+qu)}$$



on obtient

$$z = \frac{1}{b} \log u - \frac{1}{b} \log (a + qu)$$

Si l'on pose  $\psi_0 = 0$  (suction à la surface d'une nappe),  $u_0 = 1$   
 $\psi_1 = \psi$  (suction à la surface du sol),  $u_1 = e^{-b\psi}$

On obtient donc :

$$z = -\psi - \frac{1}{b} \ln (a + q e^{-b\psi}) + cte$$

La constante sera déterminée en écrivant qu'au niveau de la nappe ( $z = 0$ ) on a  $\psi = 0$

Soit  $cte = \frac{1}{b} \ln (a + q)$

La loi  $z(\psi, q)$  dans notre matériau sera donc :

$$z = -\psi + \frac{1}{b} \left\{ \ln(a+q) - \ln(a+q e^{-b\psi}) \right\} \tag{5.12}$$

Pour avoir  $q(\psi, z)$  il suffit d'inverser (5.12).

On a :

$$b(z + \psi) = \ln \frac{a+q}{a+q e^{-b\psi}}$$

Soit :  $\frac{a+q e^{-b\psi}}{a+q} = e^{-b(z+\psi)}$

ou  $q(e^{b\psi} - e^{-b(z+\psi)}) = a(e^{-b(z+\psi)} - 1)$



Soit finalement :

$$q = a \frac{e^{-bz} - e^{b\psi}}{1 - e^{-bz}} \quad (\psi < 0) \quad (5.13)$$

où  $a$  et  $b$  sont les caractéristiques de la loi  $k'(\psi)$

- $\psi$  est la succion imposée à la surface du sol. ( $\psi < 0$ )
- $q$  est le flux d'évaporation.

Les formules (5.12) et (5.13) peuvent chacune s'employer :

- soit pour déterminer la courbe  $\psi(z)$  si l'on connaît  $q$  (5.12)
- soit pour déterminer la courbe  $q(\psi)$  si l'on connaît la profondeur de la nappe.

Ces questions étant l'objet de la thèse de Monsieur Benblidia, nous n'approfondirons pas plus cette étude, mais nous pouvons noter cependant que lorsque l'on augmente la succion à la surface du sol, le flux d'évaporation tend très vite vers une valeur limite donnée par :

$$q = a \frac{e^{-bz}}{1 - e^{-bz}}$$

soit

$$q_{\text{lim}} = \frac{a}{e^{bz} - 1} \quad \text{quand } \psi \rightarrow -\infty \quad (5.14)$$

Nous avons tracé la courbe  $q_{\text{lim}} = f(z)$ ,  $z$  étant la profondeur de la nappe en cm, en utilisant les caractéristiques de la courbe  $k'(\psi)$  :

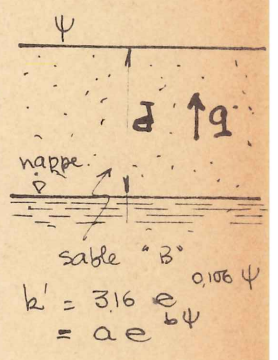
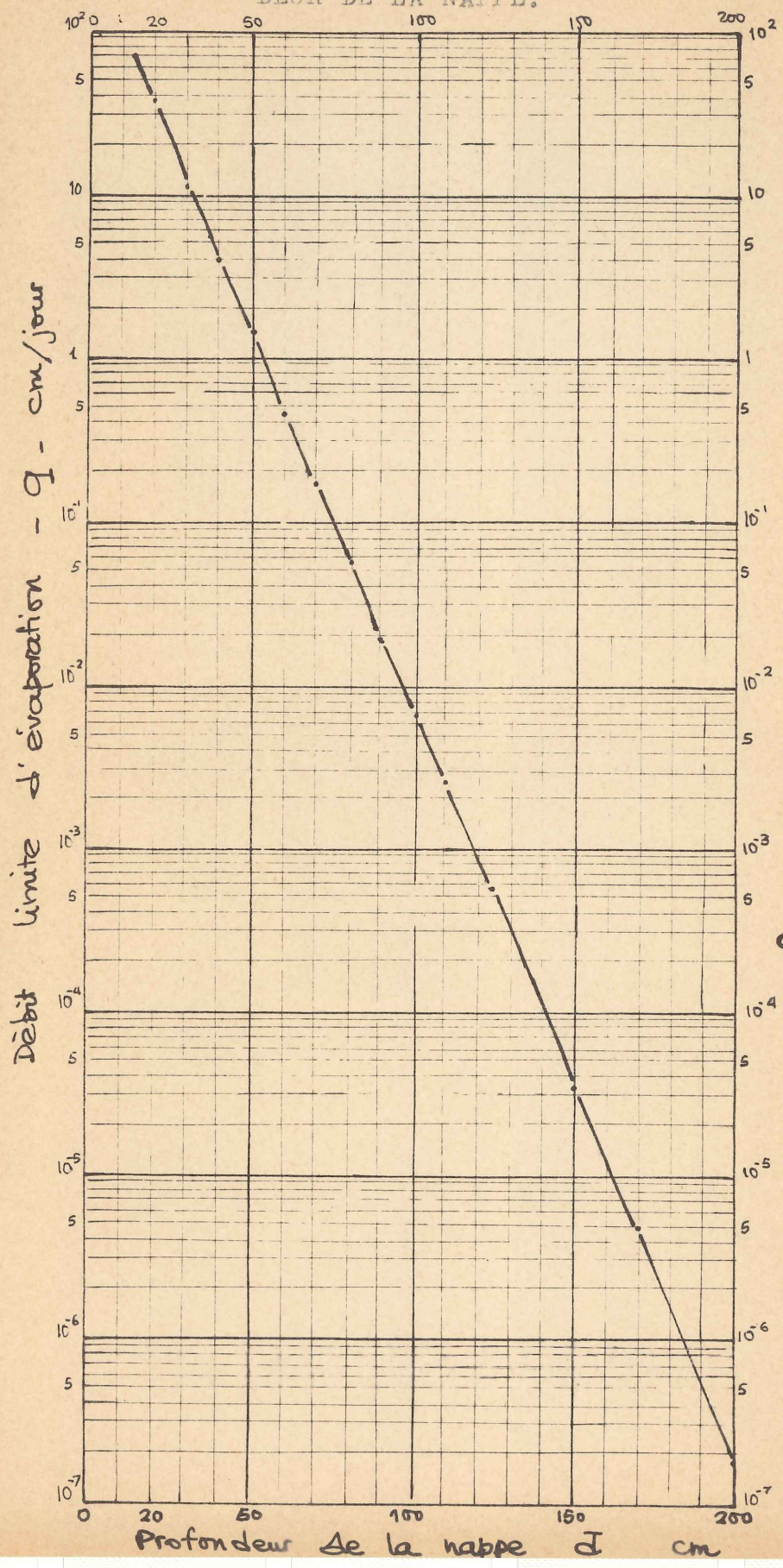
$$a = 3,16 \cdot 10^{-3} \text{ cm/sec}$$

$$b = 0,106 \text{ cm}^{-1}$$



Graph n° 8

VARIATION DU DEBIT LIMITE D'EVAPORATION AU-DESSUS D'UNE NAPPE EN FONCTION DE LA PROFONDEUR DE LA NAPPE.



$k' = 3.16 e^{0.106 \psi}$   
 $= a e^{b \psi}$

$q_{lim} = \frac{a}{e^{b^2 z} - 1}$

Débit limite d'évaporation - q - cm/jour

Profondeur de la nappe I cm



Cette courbe donne donc la valeur limite supérieure du flux d'évaporation au dessus d'une nappe en fonction de la profondeur de la nappe.

Les flux sont reportés en cm/jour sur le graphique n° 8 (p. V.45) et l'on voit que le flux d'évaporation est divisé par 2,9 toutes les fois que la profondeur de la nappe diminue de 10 cm. C'est pourquoi ce flux devient très vite négligeable quand la profondeur de la nappe augmente. On trouve ainsi :

pour	$z = 50 \text{ cm}$	$q_{\text{lim}} = 1,365 \text{ cm/j}$
	$z = 100 \text{ cm}$	$q_{\text{lim}} = 6,8 \cdot 10^{-3} \text{ cm/j}$
	$z = 500 \text{ cm}$	$q_{\text{lim}} = 2 \cdot 10^{-19} \text{ cm/j}$

On peut donc dire que les variations de nappe profonde, dans un sable semblable, ne sont certainement pas dues à l'évaporation.



B I B L I O G R A P H I E

COREY A.T. 1957 - Measurements of water-Air Permeabilities  
in unsaturated Soils.

Soil Sci. Soc. Proc, vol 21, p. 7 - 10.

GARDNER W.R. 1958 - Some steady state solution of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table Soil Sci. n° 85, p. 228 -

SOIERO 1961 - Coefficient de permeabilité des matériaux non saturés, Application à l'étude du mouvement de l'eau dans les sols.

5° Congrès de Méca. Sols et Travaux de Fondations - PARIS  
p. 359-365.



## C O N C L U S I O N

Nous voici donc arrivé au terme de cette étude.

Au cours des quatre premiers chapitres, nous avons vu comment, partant des caractéristiques physiques des matériaux répondant à des hypothèses de base simplificatrices, mais cependant réelles, il est possible de s'acheminer peu à peu vers la solution de problèmes aussi importants que ceux de l'évaporation et de l'infiltration dans les sols.

Le chapitre précédent a montré comment déterminer ces caractéristiques physiques et comment les utiliser dans la résolution des problèmes. Nous espérons que les essais que Monsieur BENBLIDIA effectue conjointement sur le même matériau viendront confirmer les résultats théoriques ainsi obtenus.

Il reste naturellement de grands pas à faire pour arriver à connaître le comportement exact des sols en place. Il faut d'abord élargir le champ des hypothèses de bases afin de considérer  $k'(\psi)$  et  $D(\theta)$  non plus comme des fonctions biunivoques, mais des fonctions hystérésis ; ensuite il faut être capable de tenir compte des hétérogénéités du sol.

Les difficultés principales d'adaptation de cette théorie à la réalité sont surtout d'ordre mathématique, et il est certain qu'avec le développement des calculatrices, il sera bientôt possible de répondre à cette question si importante: Com-



ment se fait, à la surface du globe, la répartition de l'eau dans le sol ? Quelle est la quantité qui s'évapore, celle qui ruisselle, celle qui s'infiltré ? Quels sont donc les besoins réels des plantes, donc les impératifs d'irrigation ou de drainage.

En attendant, il serait intéressant de pouvoir poursuivre cette étude en montant, par exemple, des essais d'infiltration, avec contrôle du débit infiltré en fonction du temps et comparaison avec la théorie.