



HAL
open science

Homogénéisation et convergence à deux échelles lors d'échanges thermiques stationnaires et transitoires, application aux cœurs des réacteurs nucléaires à caloporteur gaz.

Zakaria Habibi

► **To cite this version:**

Zakaria Habibi. Homogénéisation et convergence à deux échelles lors d'échanges thermiques stationnaires et transitoires, application aux cœurs des réacteurs nucléaires à caloporteur gaz.. Analyse numérique [math.NA]. Ecole Polytechnique X, 2011. Français. NNT : . tel-00695638

HAL Id: tel-00695638

<https://theses.hal.science/tel-00695638>

Submitted on 9 May 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Discipline : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Présentée par
ZAKARIA HABIBI

Sujet

**Homogénéisation et convergence à deux échelles lors d'échanges
thermiques stationnaires et transitoires**

Application aux cœurs des réacteurs nucléaires à caloporteur gaz.

Le 16 décembre 2011

Jury

Grégoire Allaire	Professeur, Ecole Polytechnique	Directeur de thèse
Youcef Amirat	Professeur, Université Blaise Pascal	Rapporteur
Doina Cioranescu	Directeur de recherche, Université Pierre et Marie Curie	Examineur
Alain Damlamian	Professeur, Université de Marne la Vallée	Examineur
Patrizia Donato	Professeur, Université de Rouen	Rapporteur
Antoine Gloria	Directeur de recherche, Inria Lille	Examineur invité
François Golse	Professeur, Ecole Polytechnique	Examineur interne
Grigori Panasenko	Professeur, Université de Saint-Etienne	Examineur
Anne Stietel	Ingénieur de recherche, CEA-Saclay	Examineur

À ma grand-mère

Remerciements

Ce travail n'aurait pas vu le jour sans le soutien et la participation de plusieurs personnes à qui je souhaite exprimer ma reconnaissance.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Grégoire Allaire, qui m'a fait l'honneur d'un encadrement scientifique et pédagogique accompli. Cher Grégoire, ton admirable culture scientifique très variée et ta manière de prendre du recul sur les sujets que nous avons abordés ensemble m'ont été très utiles et fructueux, tout paraît simple et logique quand c'est toi qui l'expliques! J'ai aussi beaucoup apprécié ta disponibilité sans égale. Je me suis toujours posé la question : comment arrives-tu à consacrer autant de temps pour tes étudiants? Pour cela et plus, je ne peux être que fier d'avoir été parmi ces chanceux étudiants.

Mes remerciements vont aussi à Madame Anne Stietel pour son encadrement et sa grande serviabilité. Merci Anne pour tout ce que tu as fait pour moi. Merci pour ta présence durant les différents moments difficiles par lesquels je suis passé durant ma thèse. Merci pour ton soutien scientifique et moral.

Un grand merci à Monsieur Youcef Amirat et Madame Patrizia Donato d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse. Merci pour l'intérêt que vous avez porté à mon travail et pour vos remarques perspicaces.

Madame Doina Cioranescu, Messieurs Alain Damlamian, Antoine Gloria, François Golse et Grigory Panasenko, merci de m'avoir fait l'honneur de votre participation au jury de ma thèse. Je n'aurais jamais espéré avoir un jury de thèse d'un niveau aussi relevé que celui-ci.

Un grand merci à tous mes collègues du Service de Transfert et de Mécanique des Fluides (STMF, ancien SFME) du CEA, en particulier le personnel du LEEF et du LTME, autour de la "Fantastique" Lechopied Véronique, envers qui, je témoigne ma très grande amitié. Ainsi, Je vous remercie pour votre soutien et surtout pour l'ambiance magique de la pause café du matin et les moments inoubliables passés ensemble. Je remercie aussi Monsieur Daniel Caruge et Monsieur Jacques Segré pour leurs conseils et leur suivi avec enthousiasme de l'avancement de mon travail.

Un grand merci aux membres du Centre de MATHématiques Appliqués CMAP de l'Ecole Polytechnique. Un merci particulier à toute l'équipe administrative du CMAP et particulièrement à Madame Nassera Nacer qui m'a énormément facilité les différentes tâches administratives.

Merci au personnel de l'école doctorale pour la qualité de leur suivi et de leurs forma-

tions.

Un merci particulier à la fondation marocaine Academia qui a financé une grande partie de mes études en France et qui m'a donc ouvert la voie d'une formation de grande qualité.

Je remercie aussi toutes les personnes qui m'ont aidé de loin ou de près à trouver ma voie dans le monde de la recherche scientifique. Merci à Alain Bengaouer, Serge Pascal, Mustapha Azizi et j'en oublie sûrement.

Je n'oublie pas la 'Dream Team' de foot du CEA de Saclay. Je vous remercie tous pour les bons moments que nous avons passés ensemble.

Enfin, je rend un hommage particulier à ma famille, ma belle famille et tous les amis qui ont su me soutenir tout au long de mon parcours jusqu'au jour de ma soutenance. Je vous en suis très reconnaissant, particulièrement à mes parents à qui je dédie ce travail, vous qui avez payé mon éducation et celle de mon frère par le prix de grands sacrifices. Je n'oublierai jamais ce que vous avez fait pour moi.

إلى والدي ووالدي الغاليين، شكرا لكم على كل ما فعلتموه من اجلي. هذه الدكتوراه هدية لكم بالخصـوص، هـي منكم و إيلكم

Un merci spécial à la famille Gourri qui a pris inconditionnellement le relai après mes parents dès mon premier pas en France et jusqu'à aujourd'hui. Merci pour votre soutien et pour les moments chaleureux que nous passons ensemble, merci Khti, merci Noureddine. Ilies et Kenza, merci d'avoir manqué vos cours, contre votre gré bien sûr, pour venir spécialement assister à ma soutenance de thèse :p.

Il m'est bien évidemment impossible d'oublier ma très chère femme, Habiba. Merci de tout mon cœur pour ton amour et ton appui moral, toi qui a su être toujours à mes côtés malgré la distance physique qui nous séparait. Merci de m'avoir supporté durant les moments difficiles où je n'ai trouvé que toi pour me comprendre, me soutenir et m'encourager pour aller jusqu'au bout. Sans toi, ce travail aurait manqué de goût.

Résumé

Nos travaux concernent l'homogénéisation du transfert de chaleur dans un milieu poreux périodique qui modélise la géométrie d'un cœur de réacteur nucléaire à caloporteur gaz. Cette géométrie est constituée d'un milieu solide traversé par plusieurs longs et minces cylindres parallèles dont le diamètre est du même ordre que la période. La chaleur est transportée par conduction dans la partie solide du domaine et par conduction, convection et rayonnement dans la partie fluide (les cylindres). Le rayonnement est modélisé par une condition non-locale sur les parois des cylindres. C'est une analyse stationnaire qui correspond à un fonctionnement nominal du cœur, et aussi non-stationnaire qui correspond à un arrêt normal du cœur. Pour obtenir le problème homogénéisé nous utilisons d'abord une analyse formelle par développement asymptotique à deux échelles. La justification mathématique de nos résultats est basée sur la méthode de convergence à deux échelles. Une caractéristique de ce travail en dimension 3 est qu'il combine l'analyse asymptotique par homogénéisation avec une analyse asymptotique par réduction de la dimension de l'espace 3D en 2D pour remédier à la non-périodicité de la condition de rayonnement suivant la direction axiale des cylindres. Une deuxième caractéristique de ce travail est l'étude de ce transfert de chaleur lorsqu'il contient une source thermique oscillante au niveau microscopique et un échange thermique entre les parties fluide et solide du cœur, dans un tel contexte, notre analyse numérique montre une contribution non-négligeable du correcteur dit d'ordre 2 qui nous aide à reproduire les gradients qui apparaissent entre la zone de la source thermique et la partie fluide (les cylindres).

Mots clefs : Analyse asymptotique, homogénéisation, transfert thermique, transfert radiatif, convergence à deux échelles, périodique, correcteurs, domaines perforés, milieux poreux.

Abstract

We are interested in the homogenization of heat transfer in periodic porous media modelling the geometry of a gas cooled nuclear reactor. This geometry is made of a solid media perforated by several long thin parallel cylinders, the diameter of which is of the same order than the period. The heat is transported by conduction in the solid part of the domain and by conduction, convection and radiative transfer in the fluid part (the cylinders). A non-local boundary condition models the radiative heat transfer on the cylinder walls. It is a stationary analysis corresponding to a nominal performance of the reactor core, and also non-stationary corresponding to a normal shut-down of the core. To obtain the homogenized problem we first use a formal two-scale asymptotic expansion method. The mathematical justification of our results is based on the notion of two-scale convergence. One feature of this work in dimension 3 is that it combines homogenization with a 3D to 2D asymptotic analysis since the radiative transfer in the limit cell problem is purely two-dimensional. A second feature of this work is the study of this heat transfer when it contains an oscillating thermal source at the microscopic level and a thermal exchange with the perforations. In this context, our numerical analysis shows a non-negligible contribution of the second order corrector which helps us to model the gradients appearing between the source area and the perforations.

Keywords : Asymptotic analysis, homogenization, heat transfer, radiative transfer, two-scale convergence, periodic, correctors, perforated domains, porous media.

Table des matières

Nomenclatures & Notations	xix
Introduction	xxiii
1 Les cœurs des réacteurs à très haute température (VHTR)	1
1.1 Introduction	1
1.2 Description des VHTR	4
1.3 la géométrie d'un cœur de VHTR	8
1.4 La thermique d'un cœur de VHTR	14
1.5 Autour de ces modèles	23
2 Présentation de la méthode d'homogénéisation	27
2.1 Introduction	27
2.2 Pré-requis mathématiques	29
2.3 Développement asymptotique	30
2.4 Convergence à deux échelles	33
3 Modélisation	37
3.1 Position du modèle général en 3D	38
3.1.1 Géométrie et notations	38
3.1.2 Equations du modèle	40
3.1.3 Propriétés de l'opérateur de rayonnement	43
3.1.4 Difficultés relatives à ce modèle	52

3.2	Position d'un modèle simplifié en 2D	53
3.2.1	Géométrie et notations	53
3.2.2	Equations du modèle	54
3.3	La thèse de K. El Ganaoui [44]	56
3.3.1	Le modèle	56
3.3.2	Résultats par développement asymptotique	57
3.3.3	Résultats de convergence	58
4	Homogénéisation du modèle 3D de diffusion, convection et rayonnement	61
4.1	Introduction	62
4.2	Homogénéisation par développement asymptotique	62
4.3	Convergence	75
4.3.1	Estimations a priori	76
4.3.2	Convergence à deux échelles	78
4.3.3	Convergence forte	88
4.4	Résultats analytiques dans le cas non-linéaire	89
4.5	Résultats numériques	91
4.5.1	Changement de variables pour la simulation numérique	91
4.5.2	Algorithme et données numériques	93
4.5.3	Résultats numériques	96
5	Correcteur d'ordre 2 dans l'homogénéisation du modèle 2D simplifié	107
5.1	Introduction	108
5.2	Homogénéisation	111
5.2.1	Homogénéisation par développement asymptotique	111
5.2.2	Convergence	125
5.2.3	Résultats dans le cas non-linéaire	127
5.3	Résultats numériques	129
5.3.1	Changement de variables pour la simulation numérique	129

5.3.2	Algorithme et données numériques	130
5.3.3	Résultats numériques	131
5.3.4	Calcul d'erreurs	147
6	Etude dans un régime non-stationnaire	151
6.1	Introduction	151
6.2	Homogénéisation	155
6.2.1	Résultats d'homogénéisation par développement asymptotique	155
6.2.2	Convergence	158
6.2.3	Résultats dans le cas non-linéaire	160
6.3	Résultats numériques	162
6.3.1	Algorithme et données numériques	162
6.3.2	Résultats numériques	164
	Conclusions & Perspectives	169
	Bibliographie	171

Table des figures

1	Le domaine périodique Ω représentatif du cœur d'un VHTR	xxiv
1.1	Particule TRISO	6
1.2	Compact combustible	6
1.3	Vue en plan (à droite) et en éclaté (à gauche) du GT-MHR	9
1.4	Le cœur du GT-MHR	10
1.5	Élément prismatique du cœur du GT-MHR	10
1.6	Modélisation géométrique du cœur du GT-MHR	13
1.7	Cellule de périodicité	13
1.8	Définition de l'intensité de rayonnement	20
1.9	Facteur de forme entre deux éléments de surface	21
2.1	Vue 2D d'un domaine périodiquement hétérogène (droite) et de sa cellule de périodicité (gauche)	30
3.1	Le domaine périodique Ω correspondant à un VHTR	39
3.2	La cellule de référence Y correspondante à un VHTR	40
3.3	Les surfaces de rayonnement γ (à gauche) et Γ (à droite)	44
3.4	Le domaine Δ correspondant au changement de variables (3.26)	48
3.5	Le domaine périodique Ω (ou Ω_ε) correspondant à une coupe transversale d'un cœur de VHTR	54
3.6	La cellule de référence Y correspondante à une coupe transversale d'un cœur de VHTR	55

4.1	Calcul explicite du facteur de forme dans γ	65
4.2	Homogénéisation standard dans un domaine fixe Ω	91
4.3	Homogénéisation dans un domaine variable $\varepsilon^{-1}\Omega$ avec des cellules de périodicité de taille fixe	92
4.4	Maillage de la cellule élémentaire. Y^F en bleu et Y^S en noir.	95
4.5	Maillage du domaine homogénéisé (à gauche), coupe transversale (à droite) . .	95
4.6	Maillage du domaine original (à gauche), coupe transversale (à droite). Ω_ε^F en bleu et Ω_ε^S en noir ($\varepsilon = 1/4$).	96
4.7	solutions des problèmes de cellule (4.59) pour $\widehat{T}_0 = 800K$	97
4.8	solutions des problèmes de cellule (4.59) pour $\widehat{T}_0 = 20000K$	97
4.9	conductivité homogénéisée : K_{11}^* (en haut à gauche), K_{22}^* (en haut à droite), K_{33}^* (en bas).	98
4.10	Solutions dans $\widehat{\Omega}$	99
4.11	Module des gradients des solutions dans $\widehat{\Omega}$	100
4.12	Tracées des solutions sur le segment de profil $D1$	101
4.13	Le domaine réduit $\widehat{\Delta}$ (en rouge) dans le domaine entier $\widehat{\Omega}$ (en noir)	102
4.14	Solutions dans $\widehat{\Delta}$	102
4.15	Module des gradients des solutions dans $\widehat{\Delta}$	103
4.16	Evolution de l'erreur sur la température dans $\widehat{\Omega}$	104
4.17	Evolution de l'erreur sur le gradient de température dans $\widehat{\Omega}^S$	105
5.1	Distribution de la source thermique (rouge) dans le domaine Ω^S (gris et rouge) traversé par les canaux (en blanc).	109
5.2	Aperçu de la solution directe (à gauche) et homogénéisée (à droite) du problème (5.2)	110
5.3	solutions des problèmes de cellule (5.37) pour $\widehat{T}_0 = 800K$	132
5.4	conductivité homogénéisée : \widehat{K}_{11}^* (à gauche), \widehat{K}_{22}^* (à droite).	132
5.5	Température directe \widehat{T}_ε (à gauche) et homogénéisée \widehat{T}_0 (à droite)	133
5.6	Le correcteur \widehat{T}_1 (à gauche) et la solution corrigée $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1$ (à droite)	134

5.7 Erreurs entre \widehat{T}_ε et \widehat{T}_0 (à gauche) et entre correcteur \widehat{T}_ε et \widehat{T}_1 (à droite) 134

5.8 Comparaison entre la norme des différents gradient de température : $|\nabla\widehat{T}_\varepsilon|$ (à gauche), $|\nabla\widehat{T}_0|$ (au milieu) et $|\nabla(\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1)|$ (à droite) 135

5.9 Comparaison entre la norme des différents gradient de température : $|\nabla\widehat{T}_\varepsilon - \nabla\widehat{T}_0|$ (à gauche) et $|\nabla\widehat{T}_\varepsilon - \nabla(\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1)|$ (à droite) 135

5.10 Solution directe \widehat{T}_ε (à gauche) et la solution corrigée $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1$ (à droite) 136

5.11 Solutions des problèmes de cellule T_2^1 (à gauche) et T_2^2 (à droite) 136

5.12 Solutions des problèmes de cellule $\theta_{i,j}$, $i, j = 1, 2$ 137

5.13 Le deuxième correcteur T_2 (à gauche) et la nouvelle approximation $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1 + \widehat{T}_2$ (à droite) 138

5.14 Solution directe \widehat{T}_ε (à gauche), solution corrigée $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1$ (au milieu) et solution corrigée $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1 + \widehat{T}_2$ (à droite) 139

5.15 Comparaison entre la norme des différents gradient de température : $|\nabla(\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1)|$ (à gauche) et $|\nabla\widehat{T}_\varepsilon - \nabla(\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1)|$ (à droite) 139

5.16 Les droites de profil D_1 (première à gauche), D'_1 (deuxième à gauche), D''_1 (deuxième à droite) et P_1 (première à droite) pour $\varepsilon = 1/4$ 140

5.17 Tracés des différentes solutions sur la droite de profil D_1 140

5.18 Tracés des différentes solutions sur la droite de profil D'_1 141

5.19 Tracés des différentes solutions sur la droite de profil D''_1 141

5.20 Tracés des différentes solutions sur la droite de profil D''_1 pour $\varepsilon^2 \widehat{f}_\varepsilon = 7 \text{ MW}/\text{m}^3$ et $\varepsilon = 1/4$ 142

5.21 Tracés des différentes solutions sur la droite de profil D''_1 pour $\varepsilon^2 \widehat{f}_\varepsilon = 7 \text{ MW}/\text{m}^3$ et $\varepsilon = 1/10$ 143

5.22 Tracés des différentes solutions sur la droite de profil D''_1 pour $\varepsilon^2 \widehat{f}_\varepsilon = 7 \text{ MW}/\text{m}^3$ et $\varepsilon = 1/100$ 143

5.23 Tracés des différentes solutions sur la droite de profil P_1 pour $\varepsilon = 1/4$ et $\widehat{f}_\varepsilon = 0 \text{ MW}/\text{m}^3$ 144

5.24 Tracés des différentes solutions sur la droite de profil P_1 pour $\varepsilon = 1/4$ et $\widehat{f}_\varepsilon = 112 \text{ MW}/\text{m}^3$ 145

5.25 Tracés des différentes solutions sur la droite de profil P_1 pour $\varepsilon = 1/4$ et $\widehat{f}_\varepsilon = 16000 \text{ MW}/\text{m}^3$ 145

5.26 Tracés des différentes solutions sur la droite de profil P_1 pour $\varepsilon = 1/4$, $\widehat{f}_\varepsilon = 112 \text{ MW}/\text{m}^3$ et $\widehat{h}_\varepsilon = 8000 \text{ W}.\text{m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ 146

5.27 Tracés des différentes solutions sur la droite de profil P_1 pour $\varepsilon = 1/4$, $\widehat{f}_\varepsilon = 112 \text{ MW}/\text{m}^3$ et $\widehat{h}_\varepsilon = 80 \text{ MW}/\text{m}^3$ 146

5.28 Evolutions des erreurs sur les différentes approximations de la température . . 148

5.29 Evolutions des erreurs sur les différentes approximations de la température quand \widehat{F} dépend de la variable macroscopique 149

6.1 conductivité homogénéisée : \widehat{K}^*_{11} (à gauche), \widehat{K}^*_{22} (à droite). 165

6.2 Solution directe \widehat{T}_ε à différents instants en t 166

6.3 Solution homogénéisée \widehat{T}_0 à différents instants en t 166

6.4 Solution homogénéisée corrigée $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1$ à différents instants en t 167

6.5 Solution homogénéisée corrigée $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1 + \widehat{T}_2$ à différents instants en t 167

6.6 Evolutions des erreurs sur les différentes approximations de la température . . 168

Liste des tableaux

1.1	Les performances du GT-MHR	11
1.2	Les dimensions du cœur du GT-MHR	11
1.3	Quelques valeurs de conductivité thermique pour des composantes du cœur d'un RCG	15

Nomenclatures & Notations

Indices et unités

ε	Petit paramètre représentatif de l'échelle microscopique (destiné à tendre vers 0).
#	Indice de périodicité.
*	Indice de paramètres homogénéisés
'	Comme x' qui est la projection d'une variable x en 3D sur un espace 2D. Si $x = (x_1, x_2, x_3)$ alors $x' = (x_1, x_2)$
S	Solide.
F	Fluide.
i	indice sur le nombre des canaux dans le cœur (le nombre de trous).
j, k	Indices sur la dimension de l'espace,
W	Watts
K	Degrés Kelvin
$^{\circ}C$	Degrés Celsius
m	Mètres
s	Secondes

Géométrie

Ω	Ouvert bornée de \mathbb{R}^d
Ω_ε^S	Partie solide de Ω
Ω_ε^F	Partie fluide de Ω
Y	Cellule élémentaire de Ω
Y^S	Partie solide de Y
Y^F	Partie fluide de Y
Γ_ε	L'ensemble des bords des trous en 3D (en 2D aussi en absence d'ambiguïté)
Γ	Le bord du trou de la cellule élémentaire Y en 3D (en 2D aussi en absence d'ambiguïté)
γ_ε	Projection de Γ_ε en 2D
γ	Projection de Γ en 2D
x	Variable macroscopique
$y = \frac{x}{\varepsilon}$	Variable microscopique
$\chi(y)$	Fonction caractéristique de Y^S
$ D $	Volume, surface ou longueur d'un domaine D
n	La normale extérieur à une surface donnée
e_i	i^{me} vecteur de la base canonique

Paramètres physiques

T	Température, K
K	Tenseur de conductivité thermique, $W/m \cdot K$
h	Coefficient d'échange, $W/m^2 \cdot K$
V	Vitesse, m/s
G	Opérateur de rayonnement
J	Eclairement
R	Radiosité
σ	Constante de Stefan-Boltzman, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} W/m^2 \cdot K^4$
e	Emissivité
$F(x, s)$	Facteur de forme entre deux points x et s

Espaces fonctionnels

$L^2(\Omega)$	Ensemble des fonctions $u(x)$ de carré sommable dans Ω
$L^2((0, \tau) \times \Omega)$	Ensemble des fonctions $u(t, x)$ de carré sommable dans $(0, \tau) \times \Omega$
$L^2_{\#}(Y)/\mathbb{R}$	Ensemble des fonctions $u(y)$, dans $L^2(Y)$, Y -périodiques et définies à une constante près
$L^2(\Omega; H^1_{\#}(Y)/\mathbb{R})$	Ensemble des fonctions de carré sommable dans Ω à valeurs dans $H^1_{\#}(Y)/\mathbb{R}$
$\mathbb{L}(p, q, \Omega)$	Ensemble des fonctionnelles de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$

Introduction

Ce projet de recherche s'inscrit dans le cadre international du GIF¹ qui a pour objectif de développer la quatrième génération des réacteurs nucléaires et de les amener à maturité technique dans une perspective de déploiement industriel à l'horizon 2030. Ces systèmes ont pour but de répondre aux enjeux d'une production d'énergie durable, dans une vision à long terme, et notamment de minimiser les déchets radioactifs et d'utiliser au mieux les ressources naturelles en combustible, ainsi que de répondre à de nouveaux besoins en énergie : non seulement la production d'électricité, mais aussi d'hydrogène pour les transports et d'eau potable par dessalement de l'eau de mer...

La France, dans le cadre du GIF et aussi dans le cadre du développement de son parc nucléaire, est investie dans différents programmes de recherche visant à définir les systèmes nucléaires du futur via ses différentes institutions du nucléaire. Le Commissariat à l'Energie Atomique et aux Energies Alternatives (CEA) mène diverses projets de recherche à ce sujet et particulièrement sur les réacteurs nucléaires à caloporteur gaz qui constituent l'application principale des travaux présentés dans ce document. Il s'agit donc ici d'une étude numérique multi-échelle adaptée aux phénomènes de transfert thermique appliquée à l'industrie nucléaire, précisément aux réacteurs nucléaires à caloporteur gaz de type VHTR (Very High Temperature Reactors).

Notre étude porte sur le traitement, par homogénéisation, des modèles mathématiques de l'échange thermique qui a lieu dans le cœur d'un VHTR. L'objectif de la théorie de l'homogénéisation est de fournir un moyen systématique de trouver une loi de comportement global de l'évolution multi-échelle d'un phénomène physique. Notons qu'elle a des applications dans de très nombreux domaines physiques et nos travaux ont donc une portée plus générale que le seul contexte des réacteurs nucléaires.

Dans le cas de notre étude, le cœur d'un réacteur VHTR est composé par plusieurs blocs

1. GIF : Generation Forum International, est une coopérative internationale lancée en 2000 par le département américain de l'énergie (DOE : Department Of Energy). Ses treize actuels membres sont : les Etats-Unis, l'Afrique du Sud, l'Argentine, le Brésil, le Canada, la Chine, la Corée du Sud, la France, le Japon, la Russie, le Royaume Uni, la Suisse et la communauté des États signataires du traité Euratom (27 membres)

prismatiques de graphite où sont insérés les compacts de combustible et où chaque bloc est périodiquement traversé par plusieurs canaux infiniment petits où circule le liquide de refroidissement (l'hélium). C'est donc un milieu très hétérogène modélisé par un paramètre ε représentant le rapport entre l'échelle microscopique (diamètre d'un canal d'hélium par exemple) et l'échelle macroscopique (dimension du cœur). On réduit ici le cœur à deux sous-domaines, un état fluide Ω_ε^F composé par les canaux où circule le gaz caloporteur, et un état solide Ω_ε^S constitué par tout le reste (voir la Figure 1). Nous supposons que chacun des deux sous-domaines est homogène, même si ça n'est pas nécessairement le cas en pratique, pour une simplification de la présentation (il n'est pas difficile en théorie de généraliser notre approche à des sous-domaines hétérogènes). Les modèles mathématiques en question qui gouvernent le comportement thermique du cœur sont alors décrits par :

- conduction thermique dans la partie solide Ω_ε^S ,
- convection et conduction thermiques dans la partie fluide Ω_ε^F ,
- rayonnement thermique modélisé par un opérateur intégral, ce qui induit une condition aux limites non locale sur le bord entre la partie fluide et la partie solide du cœur qu'on note Γ_ε (c'est une conditions aux bords Γ_ε car le fluide utilisé ici comme gaz caloporteur est un fluide transparent : l'hélium).

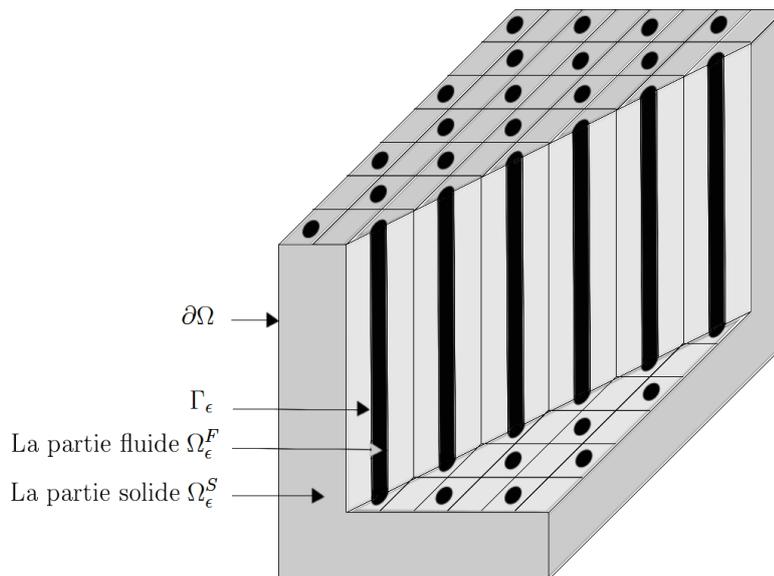


FIGURE 1 – Le domaine périodique Ω représentatif du cœur d'un VHTR

Puisque la géométrie du cœur est très hétérogène, ces modèles exhibent de fortes oscillations locales de leurs paramètres (conductivité thermique, vitesse, sources thermiques...etc.) correspondant au mélange des parties solide et fluide du cœur. Notons qu'un cœur de VHTR de diamètre $3m$ contient par exemple 10 000 canaux de gaz caloporteur de diamètre $1,5cm$. Donc, toute étude de transfert de chaleur dans une telle géométrie doit prendre en compte les différences locales entre ces zones. Par conséquent, vu que la taille des canaux est très

petite par rapport à la taille du cœur, l'analyse numérique de ces phénomènes thermiques nécessite un maillage très fin de cette structure. De plus, le nombre total de canaux dans un cœur de réacteur VHTR est très élevé ce qui induit une résolution numérique très coûteuse qui devient impossible pour une géométrie réelle d'un cœur de réacteur. D'où l'intérêt que nous portons à la méthode d'homogénéisation.

La principale difficulté d'homogénéisation dans notre contexte réside dans l'analyse du transfert par rayonnement qui est modélisé, comme nous l'avons signalé plus haut, par une condition de bord non linéaire et non locale. Le traitement de cette difficulté a déjà fait l'objet d'une étude antérieure, dans un cadre 2D simplifié, dans la thèse de K. El Ganaoui [44] où le domaine 2D était une section transversale du cœur du réacteur (perpendiculaire aux cylindres). La partie fluide dans ce cas est une collection périodique de disques isolés. Par ailleurs, la convection et la diffusion ont été négligées dans les canaux.

Ici, une première difficulté s'ajoute à celle du traitement par homogénéisation de la condition non-locale de rayonnement, c'est la difficulté liée à la géométrie 3D du cœur où nous perdons la propriété de périodicité suivant la direction de l'espace parallèle aux canaux. En effet ; Dans la géométrie 3D du cœur, les canaux d'hélium sont des cylindres parallèles où la condition de rayonnement sur leurs bords n'est pas périodique suivant leur hauteur, i.e. les surfaces élémentaires du bord d'un canal d'hélium proches des extrémités de ce canal rayonnent différemment des autres surfaces loins de cette extrémité. Notons que l'extension naturelle de l'étude 2D dans [44] à l'espace 3D implique des boules de fluide isolées périodiques suivant les trois directions de l'espace. Par conséquent, notre analyse asymptotique par homogénéisation périodique sera couplée à une perturbation singulière qui conduira à un phénomène de réduction de dimension d'espace 3D vers 2D. Le couplage entre ces deux types d'analyse ajouté au traitement particulier de la condition non-locale de rayonnement constitue, à notre connaissance, une originalité significative de notre travail.

Une autre difficulté liée à notre analyse en dimension 3 découle du fait que chaque canal d'hélium est ouvert à ses deux extrémités : on observe alors un phénomène d'échappement thermique, via ces deux extrémités, que nous devons prendre en compte dans notre analyse par homogénéisation. De plus, dans cette étude, nous ne négligeons plus la convection et la diffusion dans les canaux, ainsi, nous nous intéressons à la forme du modèle homogénéisé correspondant à ce couplage où la conduction thermique domine dans la partie solide et la convection domine dans la partie fluide du cœur.

Face à toutes ces difficultés nouvelles, le premier apport majeur de ce travail réside donc dans l'homogénéisation du modèle de transfert thermique, par conduction, convection et rayonnement dans cette nouvelle géométrie 3D représentative de la géométrie réelle d'un cœur de réacteur nucléaire à caloporteur gaz de type VHTR. Cette étude fait l'objet du Cha-

pitre IV de ce document.

Un deuxième aspect original de notre étude est la mise en évidence de l'utilité numérique du correcteur d'ordre 2 très rarement utilisé dans la méthode d'homogénéisation. Rappelons que, en homogénéisation périodique, si ε désigne le rapport entre les échelles macroscopique et microscopique, nous approchons l'inconnue T_ε d'un problème aux limites multi-échelle par une série de la forme :

$$T_\varepsilon(x) \simeq T_0(x) + \varepsilon T_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 T_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots, \quad (1)$$

L'utilisation des deux premiers termes de cette série asymptotique pour approcher T_ε est bien connue dans la littérature. D'un autre coté, on a très rarement utilisé le terme $\varepsilon^2 T_2(x, \frac{x}{\varepsilon})$ pour améliorer cette approche vu qu'il devient négligeable pour un ε très petit. Néanmoins, pour un ε fixé, souvent par des contraintes industrielles, nous allons voir que ce terme, que nous appelons deuxième correcteur (où l'appellation premier correcteur fais référence au terme εT_1), a une contribution non négligeable dans notre approche par homogénéisation lorsque le modèle thermique contient simultanément une source thermique oscillante et un échange thermique sur les parois des canaux. L'idée qui nous a inspiré pour utiliser ce correcteur vient du fait que, en approchant l'inconnue de notre modèle par la série (1), nous remarquons que le terme T_0 est solution d'un problème dont les paramètres sont tous des moyennes homogénéisées des paramètres du modèle initial. Le terme T_1 est solution d'un problème qui prend en compte les variations locales de la conduction thermique et du rayonnement, et ce n'est qu'au niveau du problème sur T_2 que nous avons une contribution de la source localement variable et de l'échange thermique. Nous présentons en détail cette analyse du deuxième correcteur dans le Chapitre 5.

Ce mémoire se présente finalement sous forme de 6 chapitres dont le contenu est résumé ci-dessous.

Chapitre I : Dans ce chapitre, nous donnons une brève présentation de l'application principale concernée par le travail réalisé dans ce projet de recherche : les cœurs des réacteurs nucléaires à caloporteur gaz de type VHTR (Very High Temperature Reactor). Nous commençons par positionner ce type de réacteur parmi les systèmes candidats au choix des réacteurs de VI-ème génération. Nous décrivons ensuite, de manière non-exhaustive, la géométrie de ces cœurs ainsi que les différents modes de transfert thermique qui peuvent avoir lieu dans une telle structure. Le but final de ce chapitre est de déduire de cette description les modèles thermiques que nous allons traiter par homogénéisation dans les chapitres IV, V et VI.

Chapitre II : Dans ce chapitre, nous rappelons le principe de la méthode d'homogénéisation périodique. Dans une première partie, en se servant d'un exemple classique de pro-

blème aux limites, nous décrivons en détail la méthode de développement asymptotique qui nous permet d'obtenir l'écriture explicite du problème homogénéisé ainsi que la forme du premier correcteur en fonction de solutions de problèmes dits de cellule. Dans une deuxième partie, nous introduisons une méthode mathématiquement plus rigoureuse qui nous permet de justifier les résultats qu'on obtient par développement asymptotique, soit la méthode de convergence à deux échelles. Ainsi, nous introduisons dans ce chapitre les différents éléments et notions mathématiques d'homogénéisation dont nous nous servirons dans la suite.

Notons que dans ce mémoire tous les résultats formels obtenus par la méthode de développement asymptotique sont décrits dans le cas d'un rayonnement linéaire. L'extension de ces résultats au cas non-linéaire est immédiate en échange de calculs plus fastidieux. Nous nous contentons alors de donner ces résultats (dans le cas non-linéaire) en compléments sans preuve. D'un autre côté, les résultats rigoureux de convergence obtenus par la méthode de convergence à deux échelles ne sont valables que dans le cas linéaire. Ceci en absence de propriétés de convexité ou de monotonie du rayonnement dans une configuration non-linéaire. Néanmoins, toutes les vérifications numériques présentées ici sont faites en présence d'un échange thermique par rayonnement non-linéaire.

Chapitre III : Ce chapitre est consacré à la modélisation, pour l'homogénéisation, du transfert thermique dans un cœur de VHTR. Nous rappelons ici les équations du modèle 3D de conduction convection rayonnement que nous décrivons dans ce chapitre. Soit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(K_\varepsilon^S \nabla T_\varepsilon^S) = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon^S \\ -\operatorname{div}(\varepsilon K_\varepsilon^F \nabla T_\varepsilon^F) + V_\varepsilon \cdot \nabla T_\varepsilon^F = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon^F \\ -K_\varepsilon^S \nabla T_\varepsilon^S \cdot n = -\varepsilon K_\varepsilon^F \nabla T_\varepsilon^F \cdot n + \frac{\sigma}{\varepsilon} G_\varepsilon(T_\varepsilon^F) & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ T_\varepsilon^S = T_\varepsilon^F & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ T_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (2)$$

où T_ε^S (resp. T_ε^F) est la température du milieu solide (resp. fluide) du cœur (inconnue du problème), K_ε^S (resp. K_ε^F) est la conductivité thermique dans la partie solide (resp. fluide) du cœur, V_ε est la vitesse du fluide dans les canaux, n est la normale intérieure aux parois des canaux et G_ε est l'opérateur intégral de rayonnement.

Nous introduisons aussi les équations du modèle simplifié, étudié dans [44], que nous allons réutiliser dans le Chapitre 5 pour montrer l'utilité du correcteur d'ordre 2 comme expliqué ci-dessus. En supposant alors que la température du fluide caloporteur (notée T_{gaz}) est connue, les équations de ce modèle s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon) = f_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon^S \\ -K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon \cdot n = \varepsilon h_\varepsilon(T_\varepsilon - T_{gaz}) + \frac{\sigma}{\varepsilon} G_\varepsilon(T_\varepsilon) & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ T_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (3)$$

où K_ε est la conductivité thermique, h_ε est un paramètre d'échange thermique, G_ε est l'opérateur de rayonnement et f_ε est une source thermique oscillante.

Chapitre IV : Dans ce chapitre nous homogénéisons le modèle (2). Grâce à la méthode de développement asymptotique, nous approchons l'inconnue T_ε du modèle (2) par les deux termes $T_\varepsilon = T_0 + \varepsilon T_1$ où nous définissons explicitement, dans un cas linéaire simplifié, le modèle homogénéisé sur la température T_0 ainsi que le premier correcteur T_1 en fonction des solutions de problèmes dits problèmes de cellule. Nous justifions ensuite le résultat obtenu par développement asymptotique grâce à la méthode de convergence à deux échelles. Finalement, nous fournissons, dans le cas d'un opérateur de rayonnement non-linéaire, les résultats analytiques obtenus formellement par développement asymptotique ainsi que quelques résultats numériques 3D afin de montrer la convergence et les avantages de notre méthode d'homogénéisation. La justification rigoureuse de ces résultats n'est donnée que dans le cas linéaire.

Chapitre V : Dans ce chapitre nous homogénéisons le modèle simplifié (3) dans le cas d'une source thermique oscillante. Le but de ce chapitre est de montrer l'utilité du correcteur T_2 (d'ordre 2) pour mieux approcher l'inconnue T_ε du problème (3) par homogénéisation mathématique en présence d'échange thermique sur les parois des canaux et de source thermique oscillante. Pour cela, nous commençons, grâce à la méthode de développement asymptotique, par donner la forme explicite du problème aux limites vérifié par T_2 (ainsi que ceux vérifiés par T_0 et T_1), nous fournissons ensuite quelques résultats numériques afin de montrer les avantages de notre méthode d'homogénéisation ainsi que la convergence de cette méthode en présence du nouveau correcteur.

Chapitre VI : Dans ce dernier chapitre, nous allons initier une analyse, dans un régime transitoire (non-stationnaire), qui correspond à l'étude que nous menons sur l'homogénéisation des problèmes de transfert thermique appliqués aux cœurs des réacteurs à gaz. Notamment, nous allons nous intéresser à l'homogénéisation du problème (3) dans un régime transitoire lent, i.e. dans un régime où les variations en temps sont 'macroscopiques'. Le modèle (3) dans ce régime s'écrit, dans un intervalle de temps $(0, \tau)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\rho C_p)_\varepsilon(t, x) \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial t}(t, x) - \operatorname{div}(K_\varepsilon(t, x) \nabla T_\varepsilon(t, x)) = f_\varepsilon(t, x) & \text{dans } (0, \tau) \times \Omega_\varepsilon^S \\ -K_\varepsilon(t, x) \nabla T_\varepsilon(t, x) \cdot n = \varepsilon h_\varepsilon(t, x) (T_\varepsilon(t, x) - T_{gaz}(t, x)) + \frac{1}{\varepsilon} G_\varepsilon(T_\varepsilon(t, x)) & \text{sur } (0, \tau) \times \Gamma_\varepsilon \\ T_\varepsilon(t, x) = 0 & \text{sur } (0, \tau) \times \partial\Omega \\ T_\varepsilon(0, x) = T_{ini}(x) & \text{dans } \Omega_\varepsilon^S \end{array} \right. \quad (4)$$

où $K_\varepsilon(t, x) = K(t, x, \frac{x}{\varepsilon})$ désigne toujours le tenseur de conductivité thermique, symétrique,

uniformément coercif et borné en $\|\cdot\|_\infty$. La masse volumique est notée ρ et C_p désigne la chaleur massique telles que $(\rho C_p)_\varepsilon(t, x) = (\rho C_p)(t, x, \frac{x}{\varepsilon})$ est borné en $\|\cdot\|_\infty$ et n désigne la normale extérieure à la surface Γ_ε . Les paramètres K_ε et $(\rho C_p)_\varepsilon$ caractérisent les matériaux de la structure étudiée, ils dépendent généralement du temps à cause de la détériorations de ces matériaux au cours de leur fonctionnement. La seule source thermique du modèle est présente dans la partie solide. Elle s'écrit :

$$f_\varepsilon(t, x) = f(t, x, \frac{x}{\varepsilon}),$$

où la fonction $f(t, x, y)$ est telle que $f_\varepsilon(t, x) \in L^2(0, \tau; L^2(\Omega_\varepsilon))$, $f_\varepsilon \geq 0$, h_ε est le paramètre d'échange oscillant donné par :

$$h_\varepsilon(t, x) = h(t, x, \frac{x}{\varepsilon}),$$

$T_{ini} \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ est la température initiale au temps $t = 0$ et G_ε est l'opérateur de rayonnement.

Nous allons montrer que notre analyse asymptotique par homogénéisation dans le cas stationnaire est immédiatement transportable au cas transitoire lent où nous n'observons les variations temporelles qu'au niveau du problème macroscopique homogène. Toutes les variations microscopiques dépendent du temps en tant qu'un simple paramètre. Nous donnons dans ce chapitre les résultats que nous obtenons par développement asymptotique ainsi que les résultats de convergence que nous obtenons par la méthode de convergence à deux échelles. Nous discutons brièvement les preuves de ces résultats puisqu'elles sont des simples extensions des preuves dans le cas stationnaire. Nous achevons ce chapitre par quelques résultats numériques confortant notre méthode et sa convergence.

Chapitre 1

Les cœurs des réacteurs à très haute température (VHTR)

Dans ce chapitre nous faisons une présentation générale de l'application principale de notre travail : les modèles de transfert thermique dans les réacteurs à caloporteur gaz (RCG) de type VHTR¹ (Very High Temperature Reactor). Dans un premier temps, nous allons situer ce type de réacteurs dans les perspectives de choix des réacteurs dits de "IV^{ème} génération". Nous allons ensuite décrire le cœur de ces réacteurs pour en déduire les modèles mathématiques qui régissent son comportement thermique, des modèles que nous allons moyenner par homogénéisation dans les chapitres suivants de ce document.

Sommaire

1.1 Introduction	1
1.2 Description des VHTR	4
1.3 la géométrie d'un cœur de VHTR	8
1.4 La thermique d'un cœur de VHTR	14
1.5 Autour de ces modèles	23

1.1 Introduction

Le besoin fortement croissant en énergie nécessitait et nécessite toujours un engagement dans le développement de sources d'énergies autres que les énergies fossiles. Ce fut, essentiellement, l'énergie nucléaire dont le rendement des centrales est un peu plus proche de celui des centrales thermiques au charbon et au pétrole. Par-ailleurs, l'histoire de l'énergie

1. Toutes les données relatives à la modélisation des VHTR sont issues des références [25], [43], [45], [57], [62], [66]

nucléaire a été constamment controversée depuis ses premiers débuts dans les années 40, notamment après les accidents de Three Mile Island, en 1979, et de Tchernobyl, en 1986, qui eurent un grand impact sur l'opinion public. De nos jours, ces contestations ont repris de l'ampleur après l'accident de Fukushima au Japon en mars 2011. Face à ce défi de la demande croissante en énergie, aux risques liés à l'exploitation des centrales nucléaires et à la gestion du stockage des déchets de ces centrales, il est nécessaire d'imaginer constamment, des nouvelles perspectives pour l'amélioration à la fois, sécuritaire, économique et énergétique de la production d'énergie par le nucléaire.

La dernière perspective au niveau international a été entreprise dans le cadre de la coopérative dite GIF(International Generation Forum) en 2000. Cette coopérative consiste à mener la recherche et les développements nécessaires pour établir la faisabilité et les capacités de performance des systèmes de prochaine génération de l'énergie nucléaire. L'objectif de cette coopérative est d'amener ces nouveaux systèmes à maturité technique autour de 2030 et à un développement industriel vers 2035-2040. Ces réacteurs de quatrième génération devront répondre aux enjeux d'une production d'énergie durable, dans une vision à long terme, et notamment de minimiser les déchets radioactifs et d'utiliser au mieux les ressources naturelles en combustible, ainsi qu'à des utilisations plus diversifiées que les générations précédentes, notamment la production d'hydrogène et le dessalement de l'eau de mer...

Les principales études dans le cadre du GIF sont donc menées sur la définition de nouveaux concepts de réacteurs qui répondent aux enjeux cités ci-dessus. Elles visent aussi à améliorer les concepts existants qui étaient ou qui sont actuellement en opération (des premiers réacteurs aux réacteurs dis de génération GEN-III et GEN-III+ qui sont actuellement en construction). Le grand handicap de ces réacteurs est que leurs technologies ne permet d'utiliser qu'une faible partie du combustible nucléaire et que le combustible utilisé contiendra toujours une grande partie qui n'aura subi aucune altération par son passage dans le réacteur. Ce combustible utilisé mène à la production d'une quantité non négligeable de déchets radioactifs. Comme tous les réacteurs thermiques, les réacteurs de la génération actuelle sont limités aussi par un rendement théorique faible principalement dû à des raisons de sécurité liés au seuil de pression de vapeur à ne pas dépasser. Ceci a pour résultat que la plus grande partie de l'énergie produite par le réacteur n'est pas utilisée et est dissipée sous forme thermique. Parmi les principaux réacteurs de génération GEN-III et GEN-III+ on trouve les réacteurs à eau bouillante légère (BWR), les réacteurs à eau pressurisée légère (PWR), et les réacteurs à eau pressurisée lourde (PHWR).

Partant des faiblesses de ces générations, Le GIF a donc fixé quatre critères pour atteindre les objectifs des systèmes nucléaires du futur : l'aptitude à un développement énergétique

durable, la compétitivité économique, une sûreté et une fiabilité renforcées, et, enfin, la résistance à la prolifération des matières nucléaires associée à la protection physique des installations [43]. De ces différents critères ressortent principalement six systèmes considérés comme les plus prometteurs et qui sont :

- VHTR (« Very High Temperature Reactor system ») – Réacteur à très haute température, plus de 1 000 °C, refroidi à l'hélium, dédié à la production d'hydrogène ou à la co-génération hydrogène/électricité ;
- GFR (« Gas-Cooled Fast Reactor system ») – Réacteur rapide à caloporteur hélium ;
- SFR (« Sodium-Cooled Fast Reactor system ») – Réacteur rapide à caloporteur sodium ;
- SCWR (« Super Critical Water-Cooled Reactor system ») – Réacteur à eau supercritique ;
- LFR (« Lead-cooled Fast Reactor system ») – Réacteur rapide à caloporteur plomb ou alliage Pb-Bi ;
- MSR (« Molten Salt Reactor ») – Réacteur à sels fondus.

Dans la suite de ce document, nous allons principalement nous intéresser aux Réacteurs à Caloporteur Gaz (RCG) et en particulier aux réacteurs à très hautes températures (VHTR). Notons que deux des types des réacteurs candidats au choix de la quatrième génération font partie de la famille des RCG ; soient : les réacteurs à très haute températures (VHTR) et les réacteurs rapides à caloporteur hélium (GFR). Alors que le GFR est un concept nouveau, le VHTR existe déjà dans une version III^{ème} génération, nommée HTR : réacteur à haute température. Deux prototypes de cette filière fonctionnent de nos jours au Japon (HTTR) et en Chine (HTR-10).

La conception et la maintenance d'un cœur de réacteur nucléaire passe par des calculs de dimensionnement et d'optimisation de son fonctionnement, en particulier, des calculs thermiques qui visent à optimiser le comportement thermique des compacts combustibles. Faire ces calculs en prenant en compte les variations "microscopiques" de la structure du cœur qui a une composition très hétérogène (un cœur de VHTR de diamètre 3m contient par exemple 10000 canaux de gaz caloporteur de diamètre 1,5cm et environ 20000 canaux de compacts combustibles de diamètre 1,2cm), s'avère très couteux en terme de temps CPU et de mémoire. En général, on préfère utiliser des modèles moyens macroscopique au lieu des modèles microscopiques pour effectuer ces calculs. Il sera donc question, dans ce document, d'homogénéiser² des modèles de transferts thermiques ayant lieu dans le cœur des VHTR. Pour cela, nous allons d'abord commencer par définir cette famille de réacteurs et mettre

2. L'homogénéisation est la théorie mathématique qui nous permet de résoudre des problèmes multi-échelles par moyennisation.

en place toute la modélisation correspondante : géométrique et thermique. Le but final est d'homogénéiser les problèmes mathématiques issus de cette modélisation.

1.2 Description des VHTR

En général, l'histoire de la famille des réacteurs à caloporteur gaz (RCG) a commencé aux Etats-Unis dans les laboratoires "Brookhaven National Laboratory" et "Oak Ridge National Laboratory" où on utilisait l'air comme fluide caloporteur dans les réacteurs expérimentaux modérés au graphite. Dès 1945, Farrington Daniels a proposé un prototype de réacteur à haute température refroidi à l'hélium, et modéré par du BeO ou du graphite. Ce prototype n'a pas été retenu car il exigeait trop de développements et une grande difficulté de prévention des fuites de l'hélium dans les réservoirs à grande pression. Face à cette non-maturité technique des réacteurs à gaz, en plus de la priorité accordée aux réacteurs de grande puissance refroidis par eau pour les sous-marins, les acteurs du marché du nucléaire ont convergé vers le développement de réacteurs à eau pressurisée (REP).

Malgré cela, les RCG ont connu une renaissance dans le milieu des années 50 où plusieurs projets ont vu le jour parmi lesquels la célèbre filière UNGG (Uranium Naturel Graphite Gaz) en France et Magnox et AGR au Royaume-Uni. Ces réacteurs refroidis au gaz et modérés au graphite utilisaient le CO₂ sous pression comme liquide de refroidissement et des pastilles d'UO₂ dans une gaine métallique (ou de l'uranium métallique) comme élément combustible. Lors du développement de cette filière il y avait très peu d'usines d'enrichissement d'uranium, particulièrement en France qui ne disposait pas d'eau lourde pour investir dans les REP. Des pays comme la France avaient donc toutes les raisons pour investir dans cette technologie de réacteurs qui permet l'utilisation de l'uranium dans l'état naturel (sans enrichissement) grâce au taux faible d'absorption des neutrons par le graphite. L'utilisation du CO₂ comme caloporteur était aussi rassurante car le CO₂ possède de bonnes caractéristiques de transfert thermique et de bonnes propriétés neutroniques tout en étant chimiquement compatible avec l'utilisation du graphite comme modérateur et avec les matériaux de gainage et le combustible. De plus, ce gaz était disponible, peu coûteux et bien connu dans le monde industriel.

De plus, et d'un point de vue sécuritaire, l'accident grave de référence de ce type de réacteurs est le dégonflage du caisson par un puits de chargement du combustible ou par suite d'une rupture d'une canalisation de gaz. Dans ce cas, un dispositif de refroidissement de secours permet de conserver l'intégrité des barrières en cas de perte totale des moyens de refroidissement normaux. Les seuls incidents notables à signaler sur cette filière (Saint Laurent 1 et Saint Laurent 2) n'ont eu que des conséquences très faibles pour le personnel d'explo-

tation et négligeables pour l'environnement. Ils sont classés au niveau 4 sur l'échelle INES pour le classement des incidents et accidents nucléaires [39].

Le principal problème de la filière est la corrosion des pièces de structure par radiolyse du CO₂. Il a fallu abaisser quelque peu la puissance des réacteurs MAGNOX et UNGG pour minimiser cet effet. Ce qui limitait la température de sortie du gaz à 400 °C. Parmi les autres points faibles de ces anciennes filières graphite-gaz, on trouve aussi l'usure par frottement, le bruit et les vibrations.

Le passé de la filière des RCG a un bilan plutôt positif avec une production électrique nette de l'ordre de 500 MWe et sans accident important. Malgré ce bilan, cette filière a été largement détrônée par les réacteurs à eau principalement pour des raisons économiques et pour les raisons citées ci-dessus. Pourtant, grâce à une série d'avancées technologiques importantes dans le domaine des matériaux et du combustible, les réacteurs à gaz reprennent une place importante dans la course vers le choix des réacteurs de 4^{ème} génération, spécialement les VHTR et les GFR. Les principales avancées qui donnent à ces systèmes des qualités nouvelles et un attrait considérable se résument dans les quatre composantes d'un cœur de réacteur nucléaire et sont donc [25] :

Le combustible

Le combustible d'une centrale nucléaire contient des atomes fissiles dont on va extraire de l'énergie par fission. Les principaux atomes fissiles sont l'uranium 233, l'uranium 235, le plutonium 239 et le plutonium 241. Seul l'uranium 235 se trouve à l'état naturel. C'est donc le plus souvent lui qui est utilisé comme combustible dans les centrales nucléaires.

L'innovation au niveau du combustible des réacteurs RCG (de type HTR, VHTR) repose sur le concept des particules de combustible avec revêtement de type Triso ou Biso. L'idée est de piéger les produits de fission dans une couche interne au revêtement. Ces particules sont composées d'un petit noyau sphérique de diamètre compris entre 200 et 800 μm qui contient des matières fertiles (Th232 ou U238) ou des matières fissiles (U233, U235 ou Pu239). Il est principalement composé d'oxydes d'actinides AnO₂ cristallisant. Le noyau des particules Triso est revêtu de trois couches destinées à éviter le relâchement des produits de fission (Le noyau des particules Biso est revêtu de deux couches seulement). Il s'agit d'une couche de carbure de silicium dense comprise entre deux couches de carbone pyrolytique denses pour les particules fissiles (Triso), ou d'une seule couche de carbone pyrolytique dense pour les particules fertiles (Biso). L'épaisseur de chacune des différentes couches est de l'ordre de 40 μm . Les particules sont finalement enrobées dans du carbone pour constituer l'élément combustible final sous forme cylindrique (compact) ou sphérique (boulets).

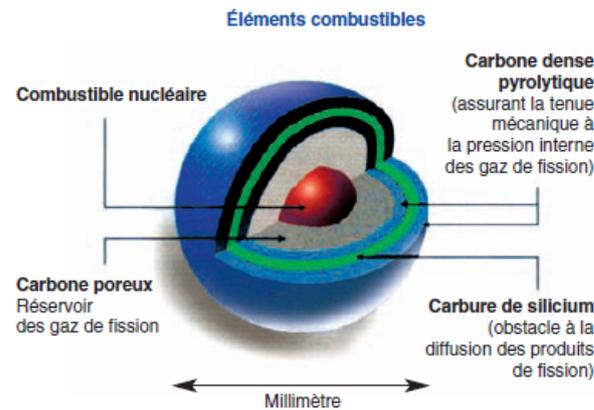


FIGURE 1.1 – Particule TRISO

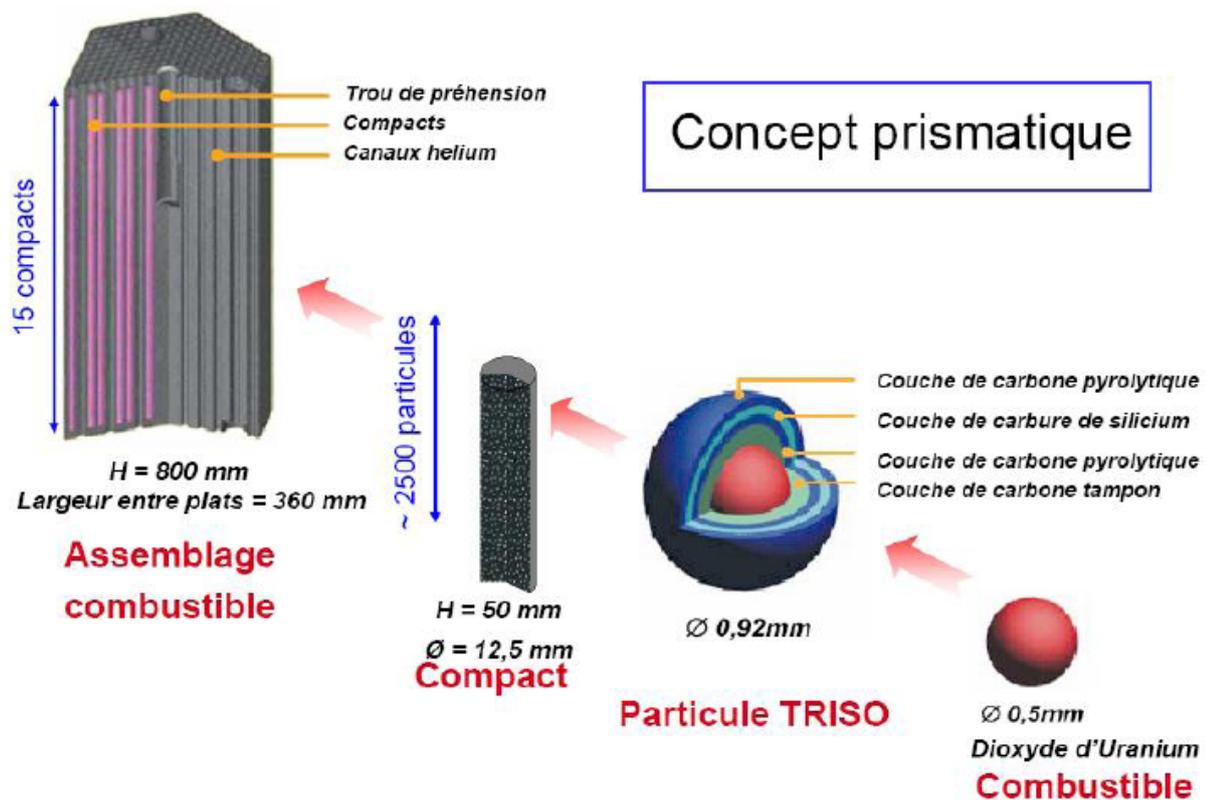


FIGURE 1.2 – Compact combustible

Les particules enrobées sont l'élément fondamental de sûreté des VHTR, ils agissent comme la première barrière de rétention des produits de fission. En outre, Les résultats des expériences d'irradiation du combustible à particules réalisées dans les réacteurs Siloé, Osiris, Pégase et Rapsodie en France, Dragon en Grande-Bretagne, AVR en Allemagne et Fort-Saint-Vrain aux USA ont confirmé une bonne résistance des micro-particules à une irradiation très élevée (75%) et des températures comprises entre 1000 °C et 1400 °C. Aussi, très peu de fis-

surations des couches de revêtement ont été observés durant ces expériences.

Le modérateur : Un ralentisseur de neutrons

Le modérateur est un ralentisseur de neutrons. Ces neutrons, du fait de leur grande énergie, se déplacent à grande vitesse (20 000 km/s). Ce sont des neutrons rapides. Le rôle du modérateur est donc de ralentir les neutrons qui sont souvent trop énergétiques pour provoquer efficacement une nouvelle fission. En effet, lorsque les neutrons ont une trop grande vitesse, ils passent trop vite à proximité des atomes d'uranium et les réactions de fission sont difficiles à obtenir. Pour que les réactions de fission se produisent plus facilement, et en plus grand nombre, il faut donc ralentir considérablement les neutrons, d'une vitesse de 20 000 km/s jusqu'à une vitesse de l'ordre de 2 km/s. Ces derniers sont alors appelés neutrons lents ou neutrons "thermiques". Cette définition n'est pas valable pour les réacteurs à neutrons rapides (RNR), où justement, on utilise des neutrons rapides au lieu des neutrons thermiques. Le cœur d'un RNR n'est donc pas modéré.

Le freinage des neutrons s'effectue lorsqu'ils traversent une matière composée d'atomes dont les noyaux ne les absorbent pas. En effet, comme des boules se déplaçant sur une table de billard où se trouvent d'autres boules, les neutrons perdent de la vitesse en rebondissant sur les noyaux. Ce ralentissement se produit rapidement lorsque les obstacles sont des noyaux légers, de masse voisine de celle des neutrons, tels que ceux d'hydrogène. C'est la matière constituée par ces atomes qui est appelée le modérateur. Pour un bon fonctionnement du réacteur, combustible et modérateur doivent être alternés : combustible, modérateur, combustible, modérateur...

Dans les réacteurs RCG (de type HTR, VHTR), le modérateur choisi est le graphite. Le graphite a été choisi en tant que modérateur, mais aussi comme matériel de confinement du combustible et comme composant principal de la structure de base pour plusieurs raisons :

- Il possède de très bonnes propriétés neutroniques (très faible section efficace de capture).
- C'est un matériau pur ce qui limite le risque de création de produit de corrosion qui peuvent contaminer le gaz caloporteur.
- Il possède des bonnes propriétés thermiques et mécaniques sous irradiation et haute température.
- Il a un faible coût.

Les points à améliorer dans l'utilisation du graphite sont principalement :

- sa durée de vie très limitée en réacteur due à l'irradiation qui réduit sa conductivité thermique et augmente sa capacité de fluage.

- sa nature oxydable qui dépend de certaines impuretés.

Le caloporteur : Un transporteur de chaleur

L'énergie libérée sous forme de chaleur lors de la fission des noyaux du combustible doit être récupérée pour servir à la production d'électricité. Ce rôle est assuré par le caloporteur. Comme son nom l'indique, il s'agit d'un fluide transporteur de chaleur. En circulant dans le cœur, ce fluide joue deux rôles : prendre la chaleur du combustible pour la transporter hors du cœur du réacteur, et maintenir la température de celui-ci à une valeur compatible avec la tenue des matériaux.

Pour les réacteurs à caloporteur gaz de IV^{ème} génération, le choix est fait sur l'hélium (*He*) comme gaz caloporteur. Le principal concurrent de l'*He* était le dioxyde de carbone CO_2 qui a été mis de côté pour ce type de réacteurs, qui visent les hautes températures, à cause des problèmes de corrosion du graphite à partir de 500 °C. L'hélium est optiquement transparent, n'interagit que très peu avec la neutronique du cœur et est chimiquement inerte, propriétés très favorables en termes de sûreté et de maintenance. De plus, c'est l'un des meilleurs gaz d'échange et de transport de la chaleur.

Les barres de contrôle : Piégeurs de neutrons

Dans un réacteur, le contrôle permanent de la réaction en chaîne est assuré grâce à des "barres de commande", également appelées "barres de contrôle", absorbantes de neutrons qui sont, par exemple, à base de bore. Ces barres sont mobiles dans le cœur du réacteur : elles peuvent être remontées ou extraites en fonction du nombre de neutrons à absorber. Elles permettent de piloter le réacteur. De plus, en cas d'incident, l'enfoncement complet, ou chute, de ces barres au sein du combustible stoppe presque instantanément la réaction en chaîne.

1.3 la géométrie d'un cœur de VHTR

Un réacteur nucléaire est un maillon d'une grande chaîne qui constitue une centrale nucléaire. Une centrale nucléaire est une centrale thermique qui produit de l'électricité grâce à une turbine actionnée par la génération de la vapeur d'eau. La manière de générer cette vapeur d'eau est la principale différence entre les différentes centrales thermiques. Elle est générée en brûlant un combustible fossile dans les centrales à charbon, au gaz, au pétrole...etc.

Dans une centrale nucléaire, elle est générée grâce à la chaleur dégagée par fusion³ ou fission⁴ nucléaire (les réacteurs à fusion nucléaire sont actuellement en stade de la recherche). Cette opération se passe au cœur du réacteur nucléaire. Dans la suite de ce document, nous nous intéressons principalement à ce qui se passe dans le cœur d'un VHTR.

Deux des grands projets de réacteurs à gaz de type VHTR proposés pour la IV^{ème} générations sont le GT-MHR (Gas-Turbine Modular Helium Reactor) proposé par General Atomics aux Etats-Unis, et le PBMR proposé par Escom en Afrique du sud. Celui qui nous intéresse particulièrement est le réacteur GT-MHR (voir la figure 1.3).

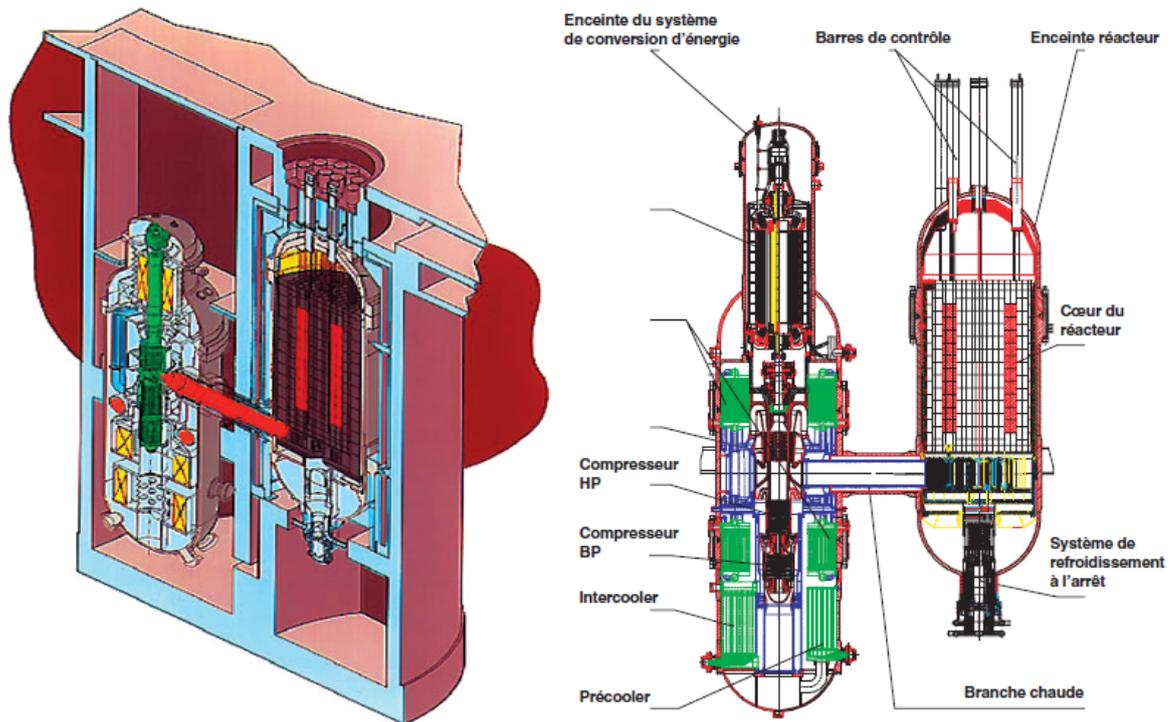


FIGURE 1.3 – Vue en plan (à droite) et en éclaté (à gauche) du GT-MHR

Le cœur du GT-MHR (Figure 1.4) est constitué d'un empilement sous forme de couronne de 102 cellules contenant chacune un empilement verticale de 10 éléments prismatiques (Figure 1.5). Chaque élément prismatique contient 202 tiges dont chacune est un empilement vertical de 15 compacts de combustible. Un compact de combustible est une matrice cylindrique de graphite où sont placées environ 2500 particules combustibles de type TRISO en

3. La fusion nucléaire est un processus où deux noyaux atomiques s'assemblent pour former un noyau plus lourd. La fusion de noyaux légers dégage d'énormes quantités d'énergie provenant de l'attraction entre les nucléons due à l'interaction forte.

4. La fission nucléaire est le phénomène par lequel le noyau d'un atome lourd (noyau qui contient beaucoup de nucléons) est divisé en plusieurs nucléides plus légers. Cette réaction nucléaire se traduit par l'émission de neutrons et un dégagement d'énergie très important.

dioxyde d'uranium (UO₂). Dans les éléments se trouve aussi 108 canaux où circule le caloporteur, de l'hélium à 70 *bar*, pour refroidir le cœur. Il y a aussi 14 canaux dédiés à un poison consommable Er₂O₃ aussi empilés sur 15 parties verticales. Chaque élément contient un trou central de préhension pour manipuler le cœur (voir la figure 1.4). Le cœur contient 36 barres de commande en carbure de Bore. Il contient aussi des réflecteurs sur tous ses cotés et dans le centre de la couronne d'éléments prismatiques. Ces réflecteurs servent à garder un maximum de neutrons dans la couronne du cœur.

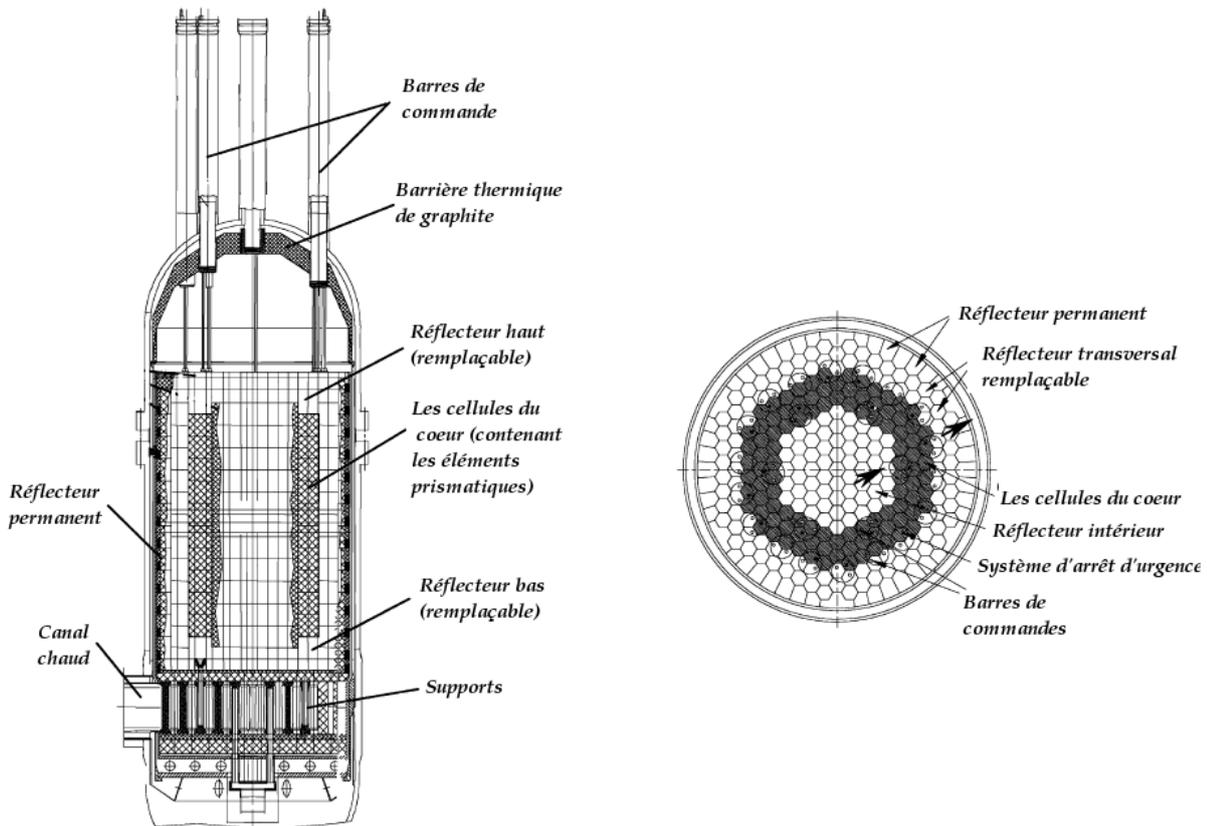


FIGURE 1.4 – Le cœur du GT-MHR

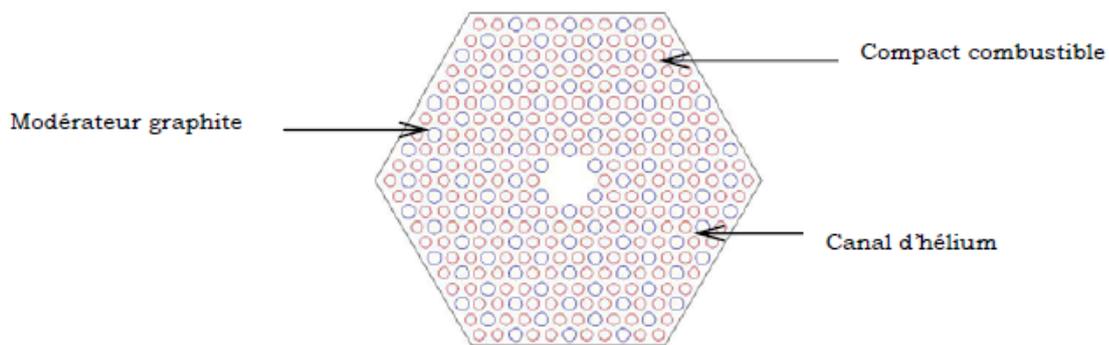


FIGURE 1.5 – Élément prismatique du cœur du GT-MHR

◇ **Quelques performances du GT-MHR.**

Nous présentons quelques principales performances du réacteur GT-MHR dans le tableau 1.1 suivant :

	Valeur	Unité
Puissance totale	600	<i>MW</i>
Puissance électrique	178	<i>MWe</i>
Puissance volumique du cœur	6,5	<i>MW/m³</i>
Durée de vie de l'installation	60	ans
Débit du caloporteur primaire	316	<i>Kg/s</i>
Pression du circuit primaire	7	<i>MPa</i>
Température du caloporteur à l'entrée du cœur	488	°C
Température du caloporteur à la sortie du cœur	850 (jusqu'à 1000)	°C

TABLE 1.1 – Les performances du GT-MHR

◇ **Les dimensions du cœur du GT-MHR.**

Le tableau 1.2, représente quelques dimensions caractéristiques du cœur du GT-MHR,

Dimension	Valeur
Hauteur du cœur	8,00 <i>m</i>
Diamètre interne du cœur	2,96 <i>m</i>
Diamètre externe du cœur	4,84 <i>m</i>
Diamètre des canaux d'hélium	1,58 <i>cm</i>
Diamètre des compacts combustibles	12,50 <i>mm</i>
Hauteur des compacts combustibles	49,30 <i>mm</i>
Diamètre de la particule TRISO enrobée	0,4 à 1,00 <i>mm</i>
Diamètre du noyau de la particule TRISO	200 à 800 μ <i>m</i>

TABLE 1.2 – Les dimensions du cœur du GT-MHR

◇ **Les échelles géométriques du cœur du GT-MHR**

Dans la suite de ce travail, nous nous intéressons à la modélisation du comportement thermique du cœur du GT-MHR. Comme on vient de voir dans le tableau 1.2, le cœur du

réacteur Gt-MHR est une géométrie qui contient au minimum 3 échelles caractéristiques. L'échelle de la particule TRISO qui est de l'ordre du millimètre, l'échelle du compact combustible (et du canal d'hélium) qui est de l'ordre du centimètre et l'échelle de l'élément (ou du cœur) qui est de l'ordre du mètre. On peut bien évidemment envisager d'autres échelles caractéristiques telle que les couches de la particules TRISO...etc. Par conséquent, toute étude de transfert de chaleur dans une telle géométrie doit prendre en compte les différences locales entre ces différentes échelles. L'analyse numérique de ces modèles nécessite alors un maillage très fin de la géométrie du cœur. De plus, nous remarquons que le nombre de particules dans un compact combustible est très élevé, que le nombre de compacts et de canaux d'hélium dans le cœur est aussi très élevé. Ceci induit une résolution numérique très coûteuse qui devient donc impossible pour une géométrie réelle. D'où l'intérêt que nous portons sur la méthode d'homogénéisation.

Avec cette méthode, nous voulons remplacer les modèles mathématiques hétérogènes posés sur la vraie géométrie du cœur par des modèles homogènes équivalents où :

- Les particules TRISO seront homogénéisées dans le compact combustible,
- Les compacts combustibles seront homogénéisés dans la matrice du graphite qui ne constitueront qu'un seul morceau que nous appellerons par la suite : la partie solide du cœur,
- Les canaux d'hélium (que nous appellerons la partie fluide du cœur) seront homogénéisés dans la partie solide pour former un seul bloc homogène.

Dans les deux premiers niveaux d'homogénéisation, le transfert thermique correspond à un problème de diffusion pure. L'homogénéisation de ce type de problème est largement étudiée dans la littérature, nous renvoyons par exemple vers [21] et [73] pour ce type d'analyse. Dans ce document, nous allons nous intéresser spécialement au troisième niveau d'homogénéisation, c'est-à-dire, nous considérons que le cœur du GT-MHR est un domaine solide perforé par plusieurs canaux où circule le gaz caloporteur (voir la figure 1.6). Ce niveau nous paraît plus intéressant du fait que la chaleur s'y transfère aussi par rayonnement modélisé par une condition limite non-locale. Cette condition nécessite, comme nous allons le voir plus tard, un traitement spécial par homogénéisation. Nous considérons que les canaux d'hélium sont tous de même diamètre et qu'ils sont arrangés de façon périodique comme le montre la figure 1.6. La surface latérale du cœur sera ainsi formée par une répétition périodique d'une cellule qui représente la période (voir la figure 1.7).

Notations :

Dans tout ce travail, on note $d = 2, 3$ la dimension de l'espace. Pour toutes longueurs positives $L_j > 0$, on définit l'ouvert rectangulaire $\Omega = \prod_{j=1}^d (0, L_j)$ (Le cœur). Le domaine Ω est composé de deux parties : la partie fluide que nous notons Ω^F et la partie solide que nous

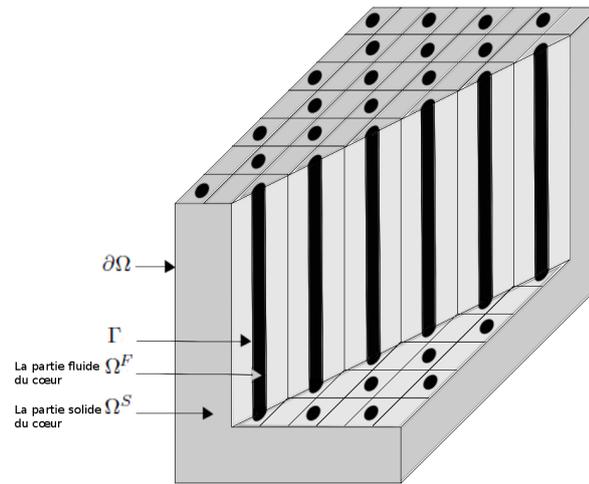


FIGURE 1.6 – Modélisation géométrique du cœur du GT-MHR

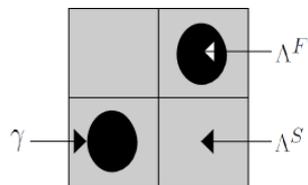


FIGURE 1.7 – Cellule de périodicité

notons Ω^S . On note aussi par Γ le bord entre Ω^F et Ω^S et par $\partial\Omega$ le bord extérieur de Ω .

1.4 La thermique d'un cœur de VHTR

Dans cette section nous allons dresser les principaux modes de transfert d'énergie thermique qui interagissent dans un cœur de réacteur de type RCG décrit par la géométrie ci-dessus.

- ◇ Dans la partie solide du cœur, la chaleur est transportée par **conduction thermique***.
- ◇ La chaleur est transportée de la partie solide du cœur à travers les canaux d'hélium par **rayonnement thermique******. La prise en compte de ce dernier mode de transfert est primordiale dans notre cas d'étude car, plus la température augmente, plus le transfert radiatif devient non-négligeable voire dominant (sachant que le cœur fonctionne à haute température avoisinant 800 °C et peut atteindre les 1500 °C en cas d'accident).
- ◇ Pour des raisons de sûreté du cœur, on est souvent amené, dans certaines modélisations, à s'intéresser particulièrement au comportement thermique des compacts et des particules de combustible. Dans ce cas, la température du gaz caloporteur, l'hélium, est supposée connue (calculée dans une étape antérieure) et, en plus du transfert radiatif, l'échange de chaleur entre les parties solide et fluide du cœur se fait via un **échange thermique*****.
- ◇ Une étude complète où la température de l'hélium est aussi inconnue est proposée dans le chapitre 5. Dans ce cas, le transfert thermique dans les canaux d'hélium est modélisé par **conduction thermique*** couplée avec la **convection thermique****.

Ci dessous, nous présentons ces modes de transfert thermique en détail et nous définissons les équations mathématiques qui les gouvernent. Pour une description plus complète, nous renvoyons vers [26], [48], [54], [55], [63], [76].

(*) La conduction thermique (Loi de fourier)

Comme tout autre mode de transfert thermique, la conduction modélise le transfert d'énergie dû à la différence de température entre deux milieux. En particulier, La conduction thermique est la transmission de la chaleur par contact direct, sans mouvement d'ensembles d'un point de vue macroscopique. C'est l'agitation thermique microscopique qui se transmet. Elle est souvent masquée par la convection dans les fluides, car la convection (voir plus bas) est beaucoup plus efficace et rapide.

Grâce à la loi de Fourier, nous pouvons modéliser et quantifier les échanges de chaleur par conduction au sein d'un solide en utilisant le vecteur densité de courant thermique \vec{J} , qui représente la chaleur transmise à travers une surface par unité de temps. C'est le flux surfacique de puissance thermique. La loi de Fourier donne une expression du vecteur courant de densité thermique en fonction de la variation de température T . \vec{J} est perpendiculaire

aux surfaces isothermes et est dirigé dans le sens décroissants des températures.

$$\vec{j} = -K \cdot \nabla T$$

Le vecteur \vec{j} est donc proportionnel au taux de variation de la température dans cette direction. On appelle ce taux de variation K la conductivité thermique qui est caractéristique du matériau et qui dépend de la température du matériau (voir le tableau 1.3 pour des exemples). Notons que la conductivité thermique K est souvent un scalaire pour des matériaux dits isotropes mais, pour un matériaux anisotropes (matériau composite par exemple), elle est sous forme d'un tenseur symétrique.

Matériau	Conductivité thermique en $Wm^{-1}K^{-1}$
Graphite polycristallin quasi isotrope entre 500 et 1200 °C	entre 25 et 50
L'hélium(He) entre 0°C et 1200°C	$2.774 \times 10^{-3} T^{0.701}$ (=0.44 pour T=1200°C)
AnO_2 (combustible monophasé) à 1000°C	2
Composites de UO_2/UC , UC_2 ou encore $(U_{1-y}Th_y)C_2$ à 1000°C	jusqu'à 20 environ

TABLE 1.3 – Quelques valeurs de conductivité thermique pour des composantes du cœur d'un RCG

Le premier principe de la thermodynamique nous permet, en faisant un bilan d'énergie thermique, d'obtenir l'équation mathématique qui modélise le transfert d'énergie par conduction thermique. Soit

$$\text{L'enthalpie du système} = \text{échange de chaleur avec l'extérieur} + \text{sources internes}$$

Grâce à la loi de Fourier, cette équation s'écrit :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(K \nabla T) + f$$

où ρ est la masse volumique du matériau, C_p sa capacité calorifique et f est la puissance correspondante aux sources internes. $\frac{\partial}{\partial t}$ est la dérivée par rapport au temps. Dans un régime stationnaire, cette équation devient

$$-\text{div}(K \nabla T) = f$$

(**) La convection thermique

Au contraire de la conduction thermique, la convection thermique modélise le transfert d'énergie dû à la différence de température entre deux milieux par un déplacement macro-

scopique de particules à une vitesse V . Ce mode de transfert thermique est propre aux matériaux fluides.

En prenant en compte le transfert de chaleur par convection en plus de la conduction thermique, et grâce au premier principe de la thermodynamique, l'équation de la chaleur devient

$$\rho C_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (V \cdot \nabla T) \right] = \text{div}(K \nabla T) + f$$

(*) L'échange thermique (Loi de Newton)**

C'est l'échange de chaleur entre un fluide de température T avec une surface de contact de température T_s . l'échange thermique apparaît comme une condition de flux thermique surfacique noté J sur une ou plusieurs surfaces du domaine. Cette condition est décrite par la loi dite de Newton

$$J = h(T_s - T)$$

h est le coefficient empirique dit coefficient d'échange thermique (ou coefficient de transfert convectif). L'unité SI de h est le $W.m^{-2}.K^{-1}$.

(**) Le rayonnement thermique (Loi de Stefan)**

Le rayonnement est un mode de transfert d'énergie/de chaleur au même titre que la conduction et la convection. Ces deux derniers modes de transfert étant possibles dans des milieux solides ou fluides, le rayonnement désigne le transfert d'énergie par des ondes sans conditionnement sur le milieu. Chaque milieu peut recevoir ou émettre des ondes électromagnétiques ou des photons, il augmente ou il diminue ainsi son niveau d'énergie moléculaire, donc le rayonnement se transmet d'un milieu à un autre par le déplacement des ondes électromagnétique ou des photons qui peuvent parcourir de longues distances sans la moindre interaction avec un milieu.

Le rayonnement dans un milieu peut soit subir une absorption, contribuant à chauffer le milieu, ou une diffusion, susceptible de changer sa direction et sa fréquence, et peut être émis par les particules du milieu. Le rayonnement subit ainsi une variation quantitative et qualitative au cours de sa propagation.

Cette multiplicité de paramètres rend difficile la résolution générale du transfert du rayonnement tant d'un point de vue théorique que numérique. De plus, le rayonnement a une influence sur la matière traversée (chauffage, donc modification de la structure) qui influe rétroactivement sur le rayonnement (émission). Il s'en suit que le problème est non linéaire et doit être résolu de manière itérative dans la plupart des cas.

En général, le rayonnement apparaît souvent comme une fonction de la température non linéaire, non locale, décrite par des équations différentielles (intégro-différentielles). Cette description dépend du milieu de ce transfert radiatif. i.e. en plus de la température, le transfert radiatif dépend de l'émissivité du milieu, la longueur d'onde et la direction du rayonnement. Selon les applications, on distingue principalement trois milieux de transfert :

- ◇ Un milieu absorbant :
 - ◆ Un corps noir : il absorbe tout rayonnement incident indépendamment de la longueur d'onde et de la direction de ce rayonnement, il est le meilleur émetteur de rayonnement avec une émissivité égale à 1.
 - ◆ Un corps gris : est dit gris si son émissivité est indépendante de la longueur d'onde. Il est dit diffusant si en plus elle est indépendante de la direction d'émission.
- ◇ Un milieu transparent : Il transmet intégralement l'onde incidente. Le vide est un exemple de milieu transparent. Dans ce cas le rayonnement est modélisé par une condition limite au bord de ce milieu.

Dans notre situation, l'hélium étant considéré comme un milieu transparent, nous modélisons donc le rayonnement par une condition limite aux bords des canaux du domaine Ω . Néanmoins, cette condition dépend de la longueur d'onde et de la température des parois des canaux qu'elles soient des parois grises ou des parois noires.

Dans notre bilan d'énergie, le rayonnement apparaît alors comme une condition de flux sur une ou plusieurs surfaces du domaine. Cette condition s'écrit de la façon suivante (voir rapport Cea [25]) :

$$-K \frac{\partial T}{\partial n} = G(T) \quad \text{sur une surface du domaine}$$

où K désigne un tenseur de paramètres physiques (conductivité), T la température, n la normale extérieur au système, et G représente la densité de flux échangée par la surface considérée. L'expression de cette densité varie selon le type du milieu de rayonnement : rayonnement avec un milieu infini, rayonnement face à face, ou rayonnement en cavité. On ce qui nous concerne, et dans le cadre de notre étude, on s'intéresse au cas du rayonnement en cavité. Dans ce cas, le flux de rayonnement s'écrit :

$$G = R - H$$

où R est le flux rayonné partant d'un point du domaine qu'on appelle radiosité, et H le flux qui atteint ce point et qu'on appelle éclairement.

L'expression du rayonnement s'écrit :

$$R(x) = e\sigma T^4(x) + (1 - e)H(x)$$

σ est la constante de Stefan-Boltzmann⁵. L'éclairement, qui atteint le point x à partir d'une surface Σ , s'écrit :

$$H(x) = \zeta(R)(x) = \int_{\Sigma} F(x, x') R(x') d\Sigma(x'), \quad (1.1)$$

où $F(x, x')$ est le facteur de forme entre les deux points x et x' de la surface Σ . Le terme de rayonnement G s'écrit finalement :

$$G(T)(x) = (Id - \zeta)R(x) = \sigma e (Id - \zeta)(Id - (1 - e)\zeta)^{-1} T^4(x) \quad (1.2)$$

Dans la formule de l'éclairement (1.1), on voit apparaître la quantité $F(x, s)$ dite le facteur de forme entre x et s . C'est en fait une quantité purement géométrique qui dépend uniquement de la forme et de la position relative des surfaces rayonnantes et rayonnées. Il caractérise l'échange d'énergie entre deux points x et s par correspondance à la fraction d'énergie issue du point x qui atteint le point s :

$$F(x, s) = \frac{\text{Energie provenant de } x \text{ qui arrive sur } s}{\text{Energie totale quittant } x}$$

Pour plus d'informations voir [51], [53], [69]. Compte tenu de sa définition, le facteur de forme possède différentes propriétés. Pour deux points x et s , nous citons les propriétés suivantes :

1. Le facteur de forme est positif et réciproque :

$$F(x, s) \geq 0, \quad F(x, s) = F(s, x), \quad (1.3)$$

2. Le facteur de forme est défini comme une fraction d'énergie ce qui implique que, dans le cas d'une surface fermée, la somme de tous les facteurs de forme, pour un élément de surface donné, est égale à l'unité. Elle est inférieure à 1 dans le cas général.
3. L'opérateur ζ est non négatif dans le sens : $\zeta(f) \geq 0 \quad \forall f \geq 0$. En effet, pour $f \geq 0$, nous avons

$$\zeta(f)(x) = \int_{\Sigma} f(s) F(x, s) ds \geq \min_{x \in \Sigma} (f(x)) \int_{\Sigma} F(x, s) ds \geq 0$$

4. L'opérateur ζ vérifie aussi

$$\|\zeta\|_{\mathbb{L}(p,p,\Sigma)} \leq 1 \quad \forall p \geq 1. \quad (1.4)$$

5. La constante de Stefan-Boltzmann caractérise le rapport entre l'énergie émise par un corps et sa température. Elle vaut $\sigma = 5.67E-8 W m^{-2} K^{-4}$. Pour un corps noir, c'est le rapport entre la puissance totale (E) émise par ce corps et sa température T selon la formule $E = \sigma T^4$

En effet, soit $f \in L^p(\Sigma)$ où $1 < p < \infty$. Sachant que $F(x, s) \geq 0$ et que $\int_{\Sigma} F(x, s) ds \leq 1$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|\zeta(f)(x)\|_{L^p(\Sigma)}^p &= \int_{\Sigma} \left| \int_{\Sigma} f(x) F(x, s) dx \right|^p ds \\ &= \int_{\Sigma} \left| \int_{\Sigma} f(x) F(x, s)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} dx \right|^p ds \\ &\leq \int_{\Sigma} \left(\left[\int_{\Sigma} F(x, s) dx \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_{\Sigma} |f(x)|^p F(x, s) dx \right]^{\frac{1}{p}} \right)^p ds \\ &\leq \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} |f(x)|^p F(x, s) dx ds \\ &\leq \int_{\Sigma} |f(x)|^p dx \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\|\zeta(f)(x)\|_{L^p(\Sigma)} \leq \|f(x)\|_{L^p(\Sigma)},$$

d'où le résultat.

5. Pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, nous avons $\zeta(c) = c$ dans toute surface fermée Σ , et donc :

$$(Id - \zeta)(c) = 0 \quad \text{dans toute surface fermée.}$$

6. G est un opérateur auto-adjoint dans $L^2(\Sigma)$ tel que :

$$\int_{\Sigma} G(f) g ds = \int_{\Sigma} G(g) f ds \quad \forall f, g \in L^2(\Sigma), \quad (1.5)$$

7. il est non négatif dans le sens où :

$$\int_{\Sigma} G(f) f ds \geq 0 \quad \forall f \in L^2(\Sigma), \quad (1.6)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} G(f) f ds &= \|f\|_{L^2(\Sigma)}^2 - \|\zeta(f)\|_{L^2(\Sigma)}^2, \\ &\geq 0 \quad \text{d'après (1.4),} \end{aligned}$$

La dernière propriété de l'opérateur de rayonnement est très utile dans l'analyse des modèles de transfert thermique en présence de rayonnement en milieu transparent, notamment dans l'établissement de l'existence et l'unicité d'une solution (voir [79] pour plus de détails).

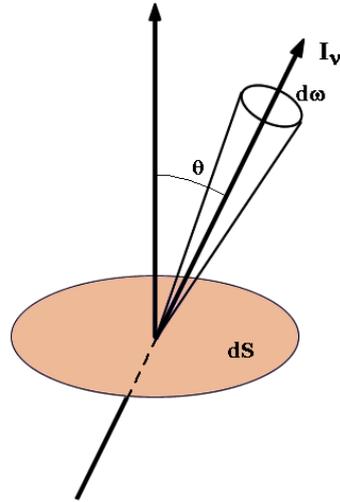


FIGURE 1.8 – Définition de l'intensité de rayonnement

Lemme 1.4.1. *Le facteur de forme entre deux points x et s est donné explicitement en dimension 3 par la formule :*

$$F^{3D}(s, x) = \frac{n_x \cdot (s - x) n_s \cdot (x - s)}{\pi |x - s|^4}, \quad (1.7)$$

où n_z est la normale unitaire au point z . En dimension 2, cette formule est donnée par :

$$F^{2D}(s, x) = \frac{n_x \cdot (s - x) n_s \cdot (x - s)}{2 |x - s|^3} \quad (1.8)$$

Preuve. On caractérise le rayonnement, en général, par son intensité, l'intensité de rayonnement étant l'énergie par unité d'aire, par unité de temps, par unité de fréquence, par unité d'angle solide, traversant une surface perpendiculaire au faisceau de rayonnement. Autrement dit, considérons en un point de l'espace un rayonnement contenu dans un angle solide $d\omega$, dans un intervalle de fréquence de ν à $\nu + d\nu$ et traversant une aire élémentaire $d\sigma$ perpendiculaire à sa direction de propagation. La quantité d'énergie dE des photons est proportionnelle à $d\sigma d\nu d\omega dt$, ce que l'on peut écrire :

$$dE = I d\nu d\sigma dt d\omega. \quad (1.9)$$

En éliminant la variable temporelle, cette expression devient :

$$dE = I d\nu d\sigma d\omega \quad \text{par unité de temps} \quad (1.10)$$

Si maintenant la normale à la surface traversée S fait un angle θ avec la direction du rayonnement, la surface de l'aire perpendiculaire au rayonnement sera dans ce cas $d\sigma = dS \cos\theta$ (voir la figure 1.8) et :

$$dE = I \cos\theta d\nu dS d\omega.$$

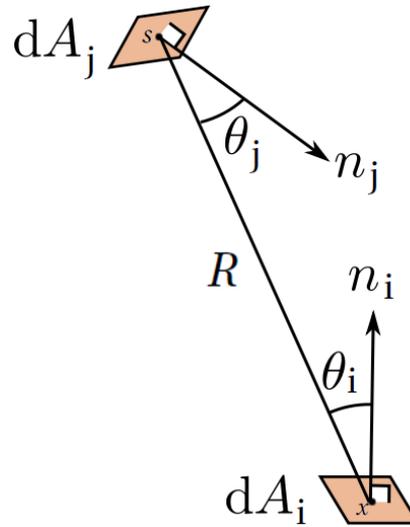


FIGURE 1.9 – Facteur de forme entre deux éléments de surface

Rappelons que le facteur de forme entre deux éléments de surface s'écrit :

$$F_{ij} = \frac{\text{Energie provenant de } A_i \text{ qui arrive sur } A_j}{\text{Energie totale quittant } A_i}$$

Grâce à (1.11), l'énergie dE_{ij} quittant dA_i qui arrive sur dA_j est :

$$dE_{ij} = I_i \cos\theta_i dA_i d\omega_{ij}.$$

Puisque $d\omega_{ij} = \frac{1}{R^2} \cos\theta_j dA_j$ (voir la Figure 1.9), alors nous avons :

$$dE_{ij} = I_i \frac{1}{R^2} \cos\theta_i \cos\theta_j dA_i dA_j \quad (1.11)$$

Sachant maintenant que pour un élément de surface quelconque de l'espace, l'angle solide sortant de cet élément s'écrit généralement : $d\omega_i = \sin\theta_i d\theta_i d\psi_i$, où θ_i varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et ψ varie entre 0 et 2π , alors l'énergie totale quittant dA_i est donnée par, en intégrant sur la demi sphère face à dA_i :

$$\begin{aligned} dE_i &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_i \cos\theta_i dA_i d\omega_{ij} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_i \cos\theta_i \sin\theta_i dA_i d\theta_i d\psi_i \\ &= \pi I_i dA_i \end{aligned} \quad (1.12)$$

D'où, en divisant (1.11) par (1.12), la formule du facteur de forme dF_{ij} entre deux surfaces élémentaires dA_i et dA_j :

$$dF_{ij} = \frac{dE_{ij}}{dE_i} = \frac{1}{\pi R^2} \cos\theta_i \cos\theta_j dA_j$$

Le facteur de forme entre deux points $x \in dA_i$ et $s \in dA_j$ s'écrit alors :

$$F(s, x) = \frac{n_x \cdot (s - x) n_s \cdot (x - s)}{\pi |x - s|^4},$$

où n_z est la normale unitaire au point z ($n_x \equiv n_i$ et $n_s \equiv n_j$), et $|x - s| = R$. D'où (1.7).

Soient maintenant dA_i et dA_j deux arcs élémentaires de l'espace 2D. Puisque dans le plan 2D nous avons $d\omega_{ij} = \frac{1}{R} \cos\theta_j dA_j$, l'énergie quittant dA_i qui arrive sur dA_j est alors :

$$= I_i \frac{1}{R} \cos\theta_i \cos\theta_j dA_i dA_j \quad (1.14)$$

Or, pour un élément de surface quelconque du plan 2D, un angle solide sortant de cet élément s'écrit généralement : $d\omega_i = d\theta_i$ où θ varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. L'énergie totale dE_i quittant alors dA_i s'obtient en intégrant sur le semi cercle face à dA_i telle que :

$$\begin{aligned} dE_i &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} I_i \cos\theta_i dA_i d\omega_{ij} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} I_i \cos\theta_i dA_i d\theta_i \\ &= 2I_i dA_i \end{aligned} \quad (1.15)$$

En divisant (1.14) par (1.15), nous avons :

$$dF_{ij} = \frac{dE_{ij}}{dE_i} = \frac{1}{2R} \cos\theta_i \cos\theta_j dA_j$$

d'où la formule (1.8) du facteur de forme 2D. □

Bilan thermique des VHTR

Bilan global

Dans un cœur de réacteur VHTR, le transfert thermique se fait par :

- ◇ conduction thermique dans la partie solide Ω^S de conductivité thermique K^S ,
- ◇ conduction et convection dans la partie fluide Ω^F de conductivité thermique K^F et où la vitesse du fluide est notée V .
- ◇ rayonnement modélisé par une condition de flux non locale à travers la paroi des canaux Γ (l'hélium étant un milieu transparent).

Dans un premier lieu, nous dressons le bilan thermique du cœur dans un régime stationnaire en temps. Les équations du modèle complet, que nous allons traiter dans le chapitre 4, s'écrivent alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\text{div}(K^S \nabla T) = f & \text{dans } \Omega^S \\ -\text{div}(K^F \nabla T) + V \cdot \nabla T = 0 & \text{dans } \Omega^F \\ -K^S \nabla T \cdot n = -K^F \nabla T \cdot n + G(T) & \text{sur } \Gamma \\ T \text{ est continue} & \text{sur } \Gamma \\ T = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (1.16)$$

où n est la normale extérieure à Γ (de Ω^S vers Ω^F), Γ étant la surface de contact entre Ω^S et Ω^F . Le bord extérieur du domaine $\Omega = \Omega^S \cup \Omega^F$ est noté $\partial\Omega$. f est une source thermique dans Ω^S . Des conditions sur les paramètres de ce modèle seront décrites dans les sections suivantes de ce document. Notons tout de même que la condition de Dirichlet sur le bord extérieur $\partial\Omega$ est choisie de manière arbitraire et que d'autres types de conditions limites peuvent être pris en compte.

Bilan réduit

D'un point de vue expérimental, le but final de l'étude thermique du cœur d'un RCG est d'analyser le comportement des compacts combustibles lors des différents stades de fonctionnement du cœur. Pour cela, on a souvent tendance à supposer la température du fluide T_f connue et réduire le modèle (1.16) à la partie solide du cœur Ω^S . Dans ce cas, on remplace la condition de convection dans le fluide par une condition d'échange de paramètre h sur la paroi des canaux Γ . Le modèle mathématique s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\text{div}(K\nabla T) = f & \text{dans } \Omega^S \\ -K\nabla T \cdot n = h(T - T_f) + G(T) & \text{sur } \Gamma \\ T = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (1.17)$$

Dans le Chapitre 6, nous allons étendre notre étude à un régime transitoire en temps, dans un premier lieu, pour le modèle réduit qui s'écrit dans ce cas

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\rho C_p) \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(K\nabla T) = f & \text{dans } (0, \tau) \times \Omega^S \\ -K\nabla T \cdot n = h(T - T_f) + G(T) & \text{sur } (0, \tau) \times \Gamma \\ T = 0 & \text{sur } (0, \tau) \times \partial\Omega \\ T(t=0) = T_{ini} & \text{dans } \Omega^S \end{array} \right. \quad (1.18)$$

1.5 Autour de ces modèles

Dans ce document, nos travaux concernent spécialement l'homogénéisation de problèmes de transfert thermique dans les cœurs des réacteurs nucléaires. Néanmoins, cette méthode a des applications dans de très nombreux domaines physiques et nos travaux ont donc une portée plus générale que le seul contexte des réacteurs nucléaires. Parmi les différentes applications de la méthode d'homogénéisation nous pouvons citer par exemple des problèmes de transport dans les milieux poreux [4], des problèmes de mécanique des matériaux composites [42], des problèmes d'écoulement multiphasique et problème de Stefan [36], des problèmes d'optimisation de formes [11], la simulation d'écoulements dans le système respiratoire (en particulier au niveau où peuvent se manifester des pathologies comme l'asthme

ou la mucoviscidose ou certains cancers du poumon), la diffraction d'ondes électromagnétiques pour des applications en furtivité radar [47]...etc.

En particulier, nous appliquons ici cette méthode à un problème de transfert thermique par conduction, convection et rayonnement. Ce type de problème a été longuement étudié, et par homogénéisation et par d'autres méthodes, du fait qu'il apparaît dans diverses domaines d'application : énergie, Bâtiment, aviation, ingénierie aérospatiale, micro-électronique, métallurgie Cristallogénèse...etc. Pour plus de détail sur les différents modes de transfert thermique nous renvoyons vers [19], [20], [26], [63], [76], [77],.

D'un point de vue mathématique, le transfert radiatif a toujours posé de grandes difficultés dans l'analyse des modèles issus du couplage conductif-radiatif, ou plus généralement conductif-convectif-radiatif. Ces difficultés proviennent nécessairement des définitions non-standards du transfert radiatif selon les applications, ce qui a donné lieu à plusieurs approches mathématiques initiées par un résultat de Tikhonov [81] dans le cas d'un corps noir. D'autres études sont venues ensuite enrichir cette discipline et nous en citons par exemple [13], [14], [58], [79], [80].

Notons aussi qu'à notre connaissance, l'étude du transfert radiatif par homogénéisation a été très peu abordée dans la littérature, nous en citons [18], [27], [70], [82]. Aucun de ces travaux ne traite le cas des surfaces grises diffusantes comme dans les cœurs des réacteurs nucléaires, d'où l'intérêt de notre étude. Cependant, on peut trouver dans [27], [82] un exemple d'application très proche de notre étude où le milieu de rayonnement n'est pas transparent. Cet exemple porte sur l'homogénéisation des équations de transport réactif d'un gaz raréfié en milieux poreux. Une étude motivée par l'infiltration chimique en phase vapeur (CVI) en présence d'un gradient thermique. C'est un type de problème rencontré en fabrication de composites carbone-carbone (ou céramique-céramique en général) pour des applications aérospatiales, et en technologie de freinage. Ces problèmes impliquent la pénétration de gaz réactifs dans un milieu de fibres chaudes. Durant leur transport dans les fibres, ces gaz vont entrer en réaction chimique ce qui donne un dépôt de céramique ou de carbone qui va agir comme une matrice composite de fibres renforcées. La description du transport de gaz dans un tel processus est assez complexe en raison de la présence des hautes températures et des basses pressions lors de ce transport, et aussi en raison de la taille des pores qui est très petite. D'où la nécessité d'une étude multi-échelle de ce phénomène, notamment par homogénéisation.

Comme nous l'avons signalé ci-dessus, le transfert radiatif dans notre application se fait sans absorption et nous le modélisons par une condition aux bords des canaux. Dans [27], ce n'est pas le cas, le transfert radiatif s'effectue dans un milieu absorbant et y est modélisé par une équation de transport de type Maxwell-Boltzmann. Une perspective d'extension

de notre étude peut donc s'inspirer de [27] pour essayer d'adapter notre travail à un modèle conductif-convectif-radiatif dans un milieu quelconque et pas nécessairement transparent. Essentiellement, essayer de fournir des preuves basées sur la méthode de convergence à deux échelles de l'étude asymptotique fournie dans [27].

Chapitre 2

Présentation de la méthode d'homogénéisation

Dans ce chapitre nous introduisons la méthode d'homogénéisation par développement asymptotique. Nous introduisons aussi la méthode de convergence à deux échelles qui nous permet de justifier rigoureusement les résultats obtenus par développement asymptotique. L'introduction de ces deux méthodes se fera sur la base d'un exemple linéaire d'équations aux dérivées partielles du second ordre avec un paramètre oscillant.

Sommaire

2.1 Introduction	27
2.2 Pré-requis mathématiques	29
2.3 Développement asymptotique	30
2.4 Convergence à deux échelles	33

2.1 Introduction

Partant d'un modèle mathématique décrivant l'évolution spatiale et temporelle d'un phénomène physique posé dans une structure hétérogène, la théorie mathématique de l'homogénéisation est mise en œuvre pour élaborer un modèle global du phénomène, donc une loi de comportement dans un milieu homogène équivalent. L'analyse des propriétés macroscopiques des matériaux composites à partir de quantités microscopiques fut initiée par les physiciens Rayleigh, Maxwell et Einstein. Mais ce n'est que dans les années soixante-dix qu'on a réussi à formuler le problème physique des structures composites de façon mathématique. Cette formulation mathématique a initié une nouvelle discipline dans le domaine de l'analyse asymptotique appelée "La Théorie de l'Homogénéisation" (pour une introduc-

tion à cette méthode, nous renvoyons vers [1] [16] [17] [21] [32] [38] [52] [56] [61] [73] [74] [78]).

En général, une analyse asymptotique est sollicitée quand l'évolution macroscopique d'un problème dépend de quelques petites perturbations. Son principe est de décrire le comportement de ce problème quand ces perturbations deviennent de plus en plus petites mais restent strictement non-nulles. Négliger ces perturbations peut entraîner des résultats complètement divergents de la réalité.

La méthode classique d'analyse asymptotique par homogénéisation est la méthode de développement asymptotique décrite par exemple dans [21]. C'est une méthode formelle qui ne fournit pas de résultat de convergence vers le modèle homogénéisé mais qui, néanmoins, permet d'avoir une forme explicite de ce modèle et de ses paramètres effectifs. Nous allons décrire en détail cette méthode dans la Section 2.3 de ce chapitre. Des méthodes mathématiquement plus fines ont aussi vu le jour dès le début de cette discipline et sont principalement la méthode de Γ -convergence introduite par De Giorgi [37] décrite aussi dans [35], la méthode de la G -convergence introduite par Spagnolo [75] et la méthode de la H -convergence introduite par Tartar [65]. Plus loin, dans la fin des années quatre vingt, Nguetseng [68] et ensuite Allaire [1] ont introduit la méthode de convergence à deux échelles qui est une méthode adaptée aux problèmes périodiques à deux échelles (aussi multi-échelles [5]). Vu l'intérêt que nous portons sur cette méthode pour notre étude, nous allons la décrire en détail dans la Section 2.4 de ce chapitre. Notons que l'autosuffisance de cette méthode est l'une de ses particularités, elle peut donc fonctionner sans avoir besoin de la connaissance au préalable des résultats obtenus par développement asymptotique.

En 2002, une nouvelle méthode, équivalente à la méthode de convergence à deux échelles, dite méthode d'éclatement périodique en homogénéisation a été introduite dans [30] par D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso. Elle a été reprise avec plus de détail par les mêmes auteurs dans [31]. Notons que quelques idées de cette méthode ont été anticipé dans [7], [15] et [59]. Cette méthode, l'éclatement périodique, simplifie considérablement les démonstrations des résultats de convergence des problèmes d'homogénéisation périodique, y compris dans le cas multi-échelle. Elle est basé essentiellement sur deux outils : un opérateur d'éclatement, et une décomposition de toute fonction en une partie sans micro-oscillations, et un reste qui prend en compte ces micro-oscillations. Son grand apport est qu'elle est obtenue sans faire d'hypothèses supplémentaires de régularité sur les correcteurs. Elle a été récemment étendue au cas des domaines périodiquement perforés par D. Cioranescu, A. Damlamian, P. Donato, G. Griso et R. Zaki (voir [40]), et aux domaines à deux composantes séparés par une surface périodique par P. Donato, L. N. Hang et R. Tardieu dans [41]. Notons que la méthode de convergence à deux échelles ne nécessite des hypothèses supplémentaires de

régularité sur les correcteurs que lorsqu'on souhaite l'utiliser pour établir une convergence "forte", sachant que cette méthode n'implique en général qu'une convergence "faible" dans l'espace des fonctions (L^2 en général).

D'autres méthodes d'analyse des problèmes multi-échelles existent, mais ne sont pas toutes rigoureuses. Une de ces méthodes est celle du Volume Élémentaire Représentatif (VER ou RVE en anglais) [28],[49], [50] qui repose sur l'idée de calculer des moyennes des perturbations dans un volume représentatif de l'hétérogénéité du système, utiliser ensuite ces moyennes pour décrire macroscopiquement le problème initialement décrit de manière microscopique. Notons tout de même que la méthode d'homogénéisation mathématique repose sur le même principe. Néanmoins, les moyennes qu'elle fournit sont obtenues d'une manière mathématiquement plus rigoureuse et justifiée. De plus, elle permet d'approcher les valeurs locales des perturbations grâce à des termes correcteurs comme nous allons le voir dans la suite. La méthode d'homogénéisation physique se limite à la définition d'une valeur moyenne de ces perturbations.

Malgré la diversité des situations d'application de la méthode d'homogénéisation, on se restreint dans notre étude au cas des structures périodiquement hétérogènes correspondantes à notre application industrielle.

2.2 Pré-requis mathématiques

Nous rappelons ici quelques résultats utiles à nos développements.

Définition 2.2.1. Soit une cellule Y de \mathbb{R}^d , $d = 1, 2$ ou 3 telle que $Y = \prod_{i=1}^d (0, l_i)$. Une fonction f de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^m est dite Y -périodique si :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \forall i \in 1, \dots, d \quad f(x + kl_i e_i) = f(x).$$

$(e_i)_{i=1..d}$ sont les vecteurs de la base cartésienne de \mathbb{R}^d .

Définition 2.2.2. Une fonction matricielle A de \mathbb{R}^d dans $\mathbb{R}^{d \times d}$ est dite bornée et coercive s'ils existent deux constantes positives $0 < \alpha \leq \beta$ telles que

$$\forall v \in \mathbb{R}^d, \forall y \in \mathbb{R}^d, \alpha |v|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d K_{i,j}(y) v_i v_j \leq \beta |v|^2$$

Lemme 2.2.1. Alternative de Fredholm [73] Soit f une fonction dans $L^2_{\#}(Y)$ Y -périodique et K une matrice Y -périodique, coercive et bornée (en norme L^∞) de $\mathbb{R}^{d \times d}$, alors le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y K(y) \nabla_y v(y) = f(y) & \text{dans } Y \\ y \longrightarrow v(y) & \text{est } Y\text{-périodique} \end{cases} \quad (2.1)$$

admet une solution unique à une constante près dans $H_{\#}^1(Y)/\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\int_Y f(y) dy = 0.$$

2.3 Développement asymptotique

Dans cette partie, nous allons décrire la méthode dite méthode du **développement asymptotique à deux échelles** en utilisant un exemple d'école d'équation aux dérivées partielles (2.2) linéaire du second degré. Le but est de montrer comment obtenir une écriture mathématique du modèle homogénéisé correspondant. Cette méthode, parmi d'autres, est une méthode intuitive pour prévoir l'écriture mathématique d'une solution homogénéisée pouvant approcher, éventuellement, la solution du problème initial (2.2). Une deuxième étape mathématiquement plus rigoureuse viendra ensuite valider cette écriture.

Soit Ω le domaine périodiquement hétérogène comme défini dans la Figure 2.1. On décompose Ω en N_{ε} cellules élémentaires toutes égales à une translation près à $Y_{\varepsilon} = \Pi_{i=1}^d(0, \varepsilon l_i)$. On note par ε la période du domaine (la taille de la cellule Y_{ε}). Pour simplifier l'étude, nous

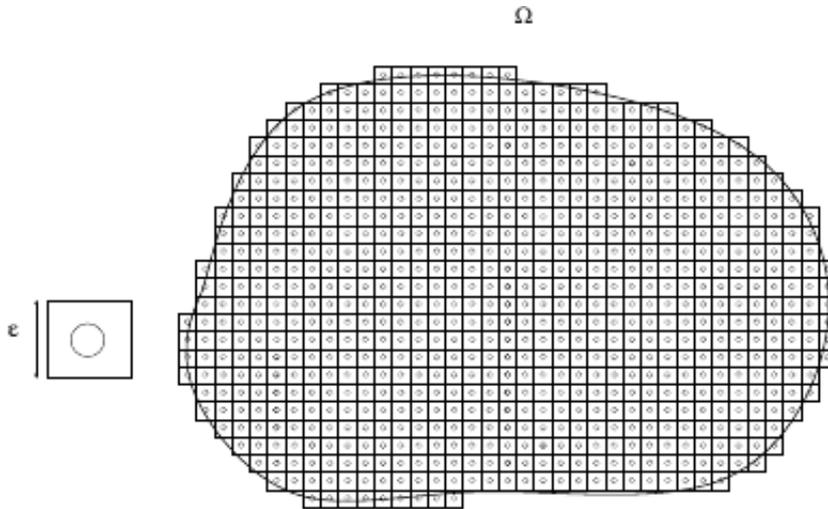


FIGURE 2.1 – Vue 2D d'un domaine périodiquement hétérogène (droite) et de sa cellule de périodicité (gauche)

nous ramenons par un changement de variable de Y_{ε} à une cellule élémentaire unitaire que nous notons $Y = \Pi_{i=1}^d(0, l_i)$. Si on désigne par t_{ε}^k une translation de $(k_1\varepsilon, \dots, k_d\varepsilon)$ $k_i \in \mathbb{Z}$ et si la cellule considérée Y_{ε}^k est située à la $k_i^{ème}$ position suivant la direction i d'espace considérée, on peut écrire :

$$Y_{\varepsilon}^k = t_{\varepsilon}^k + \varepsilon Y$$

Ainsi, pour chaque variable macroscopique x qui vit dans Ω , on définit la variable microscopique correspondante $y = \frac{x}{\varepsilon}$ qui vit dans Y à une translation entière près. En effet ;

$$x \in \Omega \Rightarrow \exists k \text{ tel que } x \in Y_\varepsilon^k \Rightarrow \exists y \in Y \text{ et } k \in \mathbb{Z}^d \text{ tel que } x = k\varepsilon + y\varepsilon \Rightarrow \frac{x}{\varepsilon} - k \in Y,$$

et puisque nous allons étudier le comportement de fonctions $v(x, y)$ qui sont toutes Y -périodiques (définition 2.2.1), nous avons $v(x, \frac{x}{\varepsilon} - k) = v(x, \frac{x}{\varepsilon})$. D'où, par abus de notation, nous disons que $y = \frac{x}{\varepsilon}$ vit dans Y .

Pour introduire la méthode du développement asymptotique nous considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(\frac{x}{\varepsilon})\nabla u_\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.2)$$

où Ω est l'ouvert borné de \mathbb{R}^d défini ci-dessus, $d = 1, 2, 3$ et A est une matrice symétrique, coercive, bornée en $\|\cdot\|_\infty$ et où $A(y)$ est Y -périodique. $f \in L^2(\Omega)$ et u_ε est l'inconnue du problème.

Remarque 2.3.1.

◇ On montre, sous les conditions sur K et f , que le problème (2.2) admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$ qui vérifie :

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.3)$$

◇ Si la cellule Y est composée de plusieurs parties où le tenseur K prend des valeurs différentes, on remarque que ce dernier sera très oscillant vu la petite taille de la cellule de périodicité et le nombre élevé des cellules dans le domaine Ω .

L'idée de la méthode du développement asymptotique est de supposer que l'inconnue du problème (2.2) s'écrit sous la forme du développement à deux échelles suivant :

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, \frac{x}{\varepsilon}), \quad (2.4)$$

où, pour chaque i , $u_i(x, y)$ est une fonction Y -périodique en y .

L'étape suivante est d'insérer ce développement dans les équations du problème (2.2). On obtient une série de termes en ε , égale au terme source f . Dans cet exemple d'étude, et plus généralement dans la méthode d'homogénéisation, le paramètre ε est assez petit et la contribution des termes en ε^i , $i \geq 2$ peut être négligée. On note par contre, qu'il est important de considérer le terme en ε car il intervient dans le calcul du gradient vu que le terme en

ε : $u_1(x, y)$ dépend des deux variables, macroscopique et microscopique x et y et que ses dérivées partielles par rapport à y seront en ε^{-1} : $\varepsilon \nabla \left[u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right] = \varepsilon \nabla_x u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \nabla_y u_1(x, \frac{x}{\varepsilon})$.

Remplaçons dans le problème (2.2) l'inconnue u_ε par l'expression (2.4). Nous obtenons la cascade d'équations en ε suivante :

$$\begin{aligned} & - \varepsilon^{-2} \operatorname{div}_y A(y) \nabla_y u_0(x, y) \\ & - \varepsilon^{-1} \left[\operatorname{div}_y A(y) (\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1)(x, y) + \operatorname{div}_x A(y) \nabla_y u_0(x, y) \right] \\ & - \varepsilon^0 \left[\operatorname{div}_x A(y) (\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1)(x, y) + \operatorname{div}_y A(y) (\nabla_x u_1 + \nabla_y u_2)(x, y) \right] + O(\varepsilon) \\ & = f(x) \end{aligned}$$

Par identification suivant les puissances de ε , nous avons

- Le premier problème à résoudre est :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y A(y) \nabla_y u_0(x, y) = 0 & \text{dans } Y \\ y \mapsto u_0(x, y) \text{ est } Y\text{-périodique} \end{cases}$$

On prouve (cf. Lemme 2.2.1) que la solution u_0 de ce problème ne dépend pas de la variable microscopique y , elle ne dépend que de la variable macroscopique x . Donc il existe une fonction que nous continuons de noter $u_0(x)$ telle que :

$$u_0(x, y) = u_0(x) \quad \forall x \in \Omega \text{ et } \forall y \in Y.$$

- Le deuxième problème à résoudre est :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y))) = 0 & \text{dans } Y \\ y \mapsto u_1(x, y) \text{ est } Y\text{-périodique} \end{cases} \quad (2.5)$$

Nous montrons que si $(\omega_i(y))_{i=1, \dots, d}$ sont solutions des problèmes dits problèmes de cellule suivants :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y [A(y) (e_i + \nabla_y \omega_i(y))] = 0 & \text{dans } Y \\ y \mapsto \omega_i(y) \text{ est } Y\text{-périodique} \end{cases} \quad (2.6)$$

alors u_1 , la solution du problème 2.5, s'écrit :

$$u_1(x, y) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x) \omega_i(y) \quad (2.7)$$

Notons que grâce au lemme 2.2.1 les problèmes de cellules (2.6) admettent chacun une solution unique à une constante près. Autrement dit, $u_1(x, y)$ est unique à l'addition d'une fonction inconnue $\tilde{u}_1(x)$ près.

- la troisième équation à résoudre est :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y u_2(x, y)) = \operatorname{div}_y(A(y)\nabla_x u_1(x, y)) \\ \qquad \qquad \qquad + \operatorname{div}_x [A(y)(\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y))] + f(x) \quad \text{dans } Y \\ y \longmapsto u_2(x, y) \quad \text{est } Y\text{-périodique} \end{array} \right.$$

D'après le Lemme 2.2.1, ce problème en u_2 admet une solution si et seulement si la condition de Fredholm suivante est vérifiée :

$$\int_Y [\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_x u_1) + \operatorname{div}_x (A(y)(\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y))) + f(x)] dy = 0$$

Elle correspond au problème homogénéisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_x(A^*\nabla_x u_0(x)) = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u_0(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où A^* est la matrice de conductivité homogénéisée. Ses coefficients sont donnés par :

$$A_{i,j}^* = \frac{1}{|Y|} \int_Y A(y)(e_i + \nabla_y \omega_i) \cdot (e_j + \nabla_y \omega_j) dy = \frac{1}{|Y|} \int_Y A(y)(e_i + \nabla_y \omega_i) \cdot e_j dy$$

Remarque 2.3.2. *On remarque que le tenseur A^* du problème homogénéisé hérite des propriétés de A_ε : bilinéaire, continu et coercif. D'où l'existence et l'unicité de la solution du problème homogénéisé.*

2.4 Convergence à deux échelles

Pour avoir plus de détail sur la méthode de convergence à deux échelles nous renvoyons vers Allaire [1].

Définition 2.4.1. *Une suite bornée u_ε de $L^2(\Omega)$ converge à deux échelles vers une fonction $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ s'il existe une sous suite, notée aussi u_ε , telle que, pour toute fonction $\psi(x, y) \in L^2(\Omega; C_\#(Y)/\mathbb{R})$ et Y -périodique, on a :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x) \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y u_0(x, y) \psi(x, y) dx dy. \quad (2.9)$$

Cette définition a un sens grâce au théorème suivant [1], [68]

Théorème 2.4.1. *De toute suite bornée u_ε de $L^2(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge vers une limite $u_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$.*

La convergence à double échelle nous permet aussi de justifier la convergence de la suite des gradients ∇u_ε dans le sens de la proposition suivante

Proposition 2.4.1. Soit u_ε une suite bornée de $H^1(\Omega)$. Alors u_ε converge à deux échelles, à une sous suite près, vers une fonction $u_0(x) \in H^1(\Omega)$ et il existe une fonction $u_1(x, y) \in L^2(\Omega; H^1_\#(Y)/\mathbb{R})$ telle que ∇u_ε converge à deux échelles vers $\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)$:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx &= \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y u_0(x) \psi(x, y) dx dy. \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx &= \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot \Psi(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

La convergence à deux échelles peut aussi s'étendre aux cas des surfaces périodiques ([8] et [67]). Si on note par Γ_ε une collection de surfaces périodiquement répétées dans le domaine Ω suivant la période ε (les bords des inclusions présentes dans Ω pour l'exemple de la Figure 2.1), et par Γ la surface de référence correspondante telle que $\forall x \in \Gamma_\varepsilon \Rightarrow y = \frac{x}{\varepsilon} \in \Gamma$ alors,

Proposition 2.4.2. Pour toute suite u_ε de $L^2(\Gamma_\varepsilon)$ qui vérifie

$$\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} |u_\varepsilon|^2 dx \leq C. \quad (2.10)$$

il existe une sous-suite, toujours notée u_ε , et une fonction $u_0(x, y) \in L^2(\Omega; L^2_\#(\Gamma))$ telles que u_ε converge à deux échelles vers u_0 dans le sens

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} u_\varepsilon(x) \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{\Gamma} u_0(x, y) \psi(x, y) dx dy \quad (2.11)$$

pour toute fonction test Y -périodique $\psi(x, y) \in L^2(\Omega; C_\#(\Gamma))$.

Remarque 2.4.1. Si u_ε est bornée en $L^2(\Omega)$ et si ∇u_ε est bornée en $L^2(\Omega)$ aussi, en utilisant le lemme 4.2.4 dans [9], nous déduisons que u_ε vérifie (2.10) et converge à deux échelles vers une limite v_0 qui n'est rien d'autre que la trace de u_0 sur Γ , u_0 étant la limite à deux échelles de u_ε . Nous continuons alors de noter v_0 par u_0 . Dorénavant, si u_ε est bornée dans $H^1(\Omega)$ nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx &= \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y u_0(x) \psi(x, y) dx dy \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} u_\varepsilon(x) \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) d\gamma(x) &= \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{\Gamma} u_0(x) \psi(x, y) dx d\gamma(y) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx &= \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot \Psi(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (2.12)$$

pour toute fonction $\psi(x, y) \in L^2(\Omega; C_\#(Y))$ et toute fonction $\Psi(x, y) \in (L^2(\Omega; C_\#(Y)))^d$.

Application à l'exemple (2.2)

Ici, nous allons montrer rigoureusement que la solution du problème (2.2) converge vers la solution du problème homogénéisé lorsque ε tend vers 0.

Théorème 2.4.2. Soit u_ε la solution du problème (2.2), et $u_0 \in H^1(\Omega)$ la solution du problème homogénéisé associé (2.8). Soit $u_1 \in L^2(\Omega; H_\#^1(Y)/\mathbb{R})$ définie par (2.7), alors u_ε et ∇u_ε convergent à deux échelles vers $u_0(x)$ et $\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)$ respectivement.

Preuve. D'après l'estimation a priori (2.3), nous savons que u_ε est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, donc d'après la proposition 2.4.1, il existe deux fonctions $u_0(x)$ de $H_0^1(\Omega)$ et $u_1(x, y)$ de $L^2(\Omega; H_\#^1(Y)/\mathbb{R})$ telles que, à une sous-suite près, u_ε et ∇u_ε convergent à deux échelles vers $u_0(x)$ et $\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)$ respectivement.

Ecrivons maintenant la formulation variationnelle du problème (2.2) :

$$\int_{\Omega} A_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla \phi_\varepsilon(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \phi_\varepsilon(x) dx \quad (2.13)$$

Si nous choisissons $\phi_\varepsilon(x) = \phi_0(x) + \varepsilon \phi_1(x, \frac{x}{\varepsilon})$ avec $(\phi_0, \phi_1) \in D(\Omega) \times D(\Omega; C_\#^\infty(\Omega))$, (2.13) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon(x) \cdot A_\varepsilon^T(x) \left(\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon \nabla_x \phi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right) dx \\ = \int_{\Omega} f(x) \phi_0(x) dx + \varepsilon \int_{\Omega} f(x) \phi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ainsi, quand ε tend vers 0, en passant à la limite dans (2.14) et en utilisant la proposition 2.4.1, nous obtenons :

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y A(y) (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1(x, y)) dx dy = \int_{\Omega} f(x) \phi_0(x) dx. \quad (2.15)$$

En utilisant le Lemme de Lax-Milgram, nous montrons que la formulation variationnelle (2.15) admet une solution unique (u_0, u_1) dans l'espace Hilbertien $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_\#^1(Y))$. Et par conséquent les suites u_ε et ∇u_ε convergent respectivement vers les limites uniques $u_0(x)$ et $\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)$ et pas seulement à une sous-suite près.

Montrons maintenant que $u_0(x)$ est bien la solution du problème homogénéisé (2.8) et que $u_1(x, y)$ est donnée par la formulation (2.7). En effet, si nous choisissons $\phi_0 = 0$ puis $\phi_1 = 0$ dans (2.15) nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y A(y) (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot (\nabla_y \phi_1(x, y)) dx dy &= 0, \\ \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y A(y) (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot (\nabla_x \phi_0(x)) dx dy &= \int_{\Omega} f(x) \phi_0(x) dx. \end{aligned}$$

Les deux problèmes correspondants à ces formulations variationnelles sont :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y [A(y) (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y))] = 0 & \text{dans } Y \\ y \longmapsto u_1(x, y) \text{ est } Y\text{-périodique} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x \left(\int_Y A(y) (\nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) dy \right) = |Y|f(x) & \text{dans } \Omega \\ u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous constatons qu'en introduisant l'expression de l'opérateur homogénéisé A^* et des problèmes de cellule, nous obtenons exactement les résultats du processus d'homogénéisation établis de manière heuristique plus haut. \square

Chapitre 3

Modélisation

Dans ce chapitre, nous introduisons le principal modèle de transfert de chaleur issu de notre application industrielle : les cœurs des réacteurs nucléaires à très haute température. L'étude réalisée ici est en dimension 3 où la géométrie du problème est un domaine solide perforé périodiquement de nombreux petits canaux fluides. Les canaux fluides sont des longs et minces cylindres parallèles, dont le diamètre est du même ordre que la période. La chaleur est transportée par conduction dans la partie solide du domaine et par conduction, convection et rayonnement dans la partie fluide (les canaux). Le rayonnement est particulièrement modélisé par une condition limite non-locale sur les parois latérales des canaux.

A la fin de ce chapitre, nous donnons aussi les équations d'un modèle simplifié issu du modèle principal et nous rappelons les résultats obtenus précédemment, sur ce modèle simplifié, dans le cadre de la thèse de K. El Ganaoui [44].

Sommaire

3.1	Position du modèle général en 3D	38
3.1.1	Géométrie et notations	38
3.1.2	Equations du modèle	40
3.1.3	Propriétés de l'opérateur de rayonnement	43
3.1.4	Difficultés relatives à ce modèle	52
3.2	Position d'un modèle simplifié en 2D	53
3.2.1	Géométrie et notations	53
3.2.2	Equations du modèle	54
3.3	La thèse de K. El Ganaoui [44]	56
3.3.1	Le modèle	56
3.3.2	Résultats par développement asymptotique	57
3.3.3	Résultats de convergence	58

3.1 Position du modèle général en 3D

3.1.1 Géométrie et notations

Soit $\Omega = \prod_{j=1}^3 (0, L_j)$ un ouvert cylindrique de base rectangulaire où les $L_j > 0$ sont ses longueurs positives. Le domaine Ω est décomposé en deux parties, solide Ω_ε^S , et fluide Ω_ε^F . On suppose que Ω est invariant par translation axialement suivant la direction x_3 , c-à-d que la frontière entre Ω_ε^S et Ω_ε^F ne dépend pas de x_3 . La base de Ω , $\prod_{j=1}^2 (0, L_j)$ est composée par une répétition périodique de $N(\varepsilon)$ petites cellules élémentaires $Y_{\varepsilon,i}$ toutes égales, grâce à une translation et une mise à l'échelle par un facteur ε , à la même cellule unitaire de périodicité, dite cellule de référence $Y = \prod_{j=1}^2 (0, l_j)$ avec $l_j > 0$. En effet, si on désigne par t_ε^i une translation de $(i_1\varepsilon, \dots, i_d\varepsilon)$ $i_j \in \mathbb{Z}$ et si la cellule considérée $Y_{\varepsilon,i}$ est située à la $i_j^{\text{ème}}$ position suivant la direction j d'espace considérée, on peut écrire :

$$Y_{\varepsilon,i} = t_\varepsilon^i + \varepsilon Y$$

Ainsi, pour chaque variable macroscopique x qui vit dans Ω , on définit la variable microscopique correspondante $y = \frac{x}{\varepsilon}$ qui vit dans Y à une translation entière près.

Par construction, le domaine Ω est périodique suivant les deux premières directions de l'espace et est invariant suivant la troisième (voir la Figure 3.1). Pour éviter certaines complications issues des problèmes de couches limites, inutiles dans le contexte physique dans lequel nous menons cette étude, nous considérons que pour tout paramètre ε , la base du domaine Ω est composée de cellules entières, c-à-d, $L_j/(\varepsilon l_j)$ est un entier pour tout $j = 1, 2$.

La cellule Y est composée de deux parties : les canaux Y^F occupés par le fluide (voir les figures 3.1 et 3.2) et la matrice solide Y^S . Nous notons par γ le bord entre Y^S et Y^F . Par conséquent, nous définissons le domaine fluide Ω_ε^F par le domaine cylindrique de base composée par la collection des $Y_{\varepsilon,i}^F$ et le domaine solide Ω_ε^S par le domaine cylindrique de base composée par la collection des $Y_{\varepsilon,i}^S$, où $Y_{\varepsilon,i}^{F,S}$ ne sont rien d'autre que $Y^{F,S}$ translatées et mises à l'échelle pour tout $i = 1 \dots N(\varepsilon)$ (de la même manière que la correspondance entre $Y_{\varepsilon,i}$ et Y).

Notons que les parois latérales des canaux sont l'extension en 3D de la surface γ_ε , soit $\Gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon \times (0, L_3)$. Si la cellule de référence contient un nombre r de canaux fluides, leur nombre (et donc aussi le nombre des surfaces $\Gamma_{\varepsilon,i}$ et $\gamma_{\varepsilon,i}$) dans tout le domaine Ω est alors égal à $M(\varepsilon) = rN(\varepsilon)$, ici $r = 2$ (voir la Figure 3.2). Notons aussi que $N(\varepsilon) = \mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$. En résumé nous avons

$$\Omega_\varepsilon^F = \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} Y_{\varepsilon,i}^F \times (0, L_3), \quad \Omega_\varepsilon^S = \Omega \setminus \Omega_\varepsilon^F = \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} Y_{\varepsilon,i}^S \times (0, L_3), \quad \gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{M(\varepsilon)} \gamma_{\varepsilon,i}.$$

Pour toute cellule $Y_{\varepsilon,i}$, nous définissons le centre de masse $x'_{0,i}$ de la frontière $\gamma_{\varepsilon,i}$ par

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,i}} (s' - x'_{0,i}) ds' = 0. \quad (3.1)$$

Pour tout point $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, nous notons par x' ses deux premières composantes dans \mathbb{R}^2 telles que $x = (x', x_3)$. Nous définissons ainsi l'opérateur de projection P de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 et son adjoint, l'opérateur d'extension E de \mathbb{R}^2 à \mathbb{R}^3 , par

$$P \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Eventuellement, nous notons par $\nabla_{x'}$ l'opérateur gradient 2D qu'on identifie à son extension $E\nabla_{x'}$, soit

$$\nabla_{x'} f(x') = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x') \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x') \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pareillement, pour un vecteur 3D $F(x', x_3)$ on utilise la notation $\text{div}_{x'} F$ pour $\text{div}_x(PF)$.

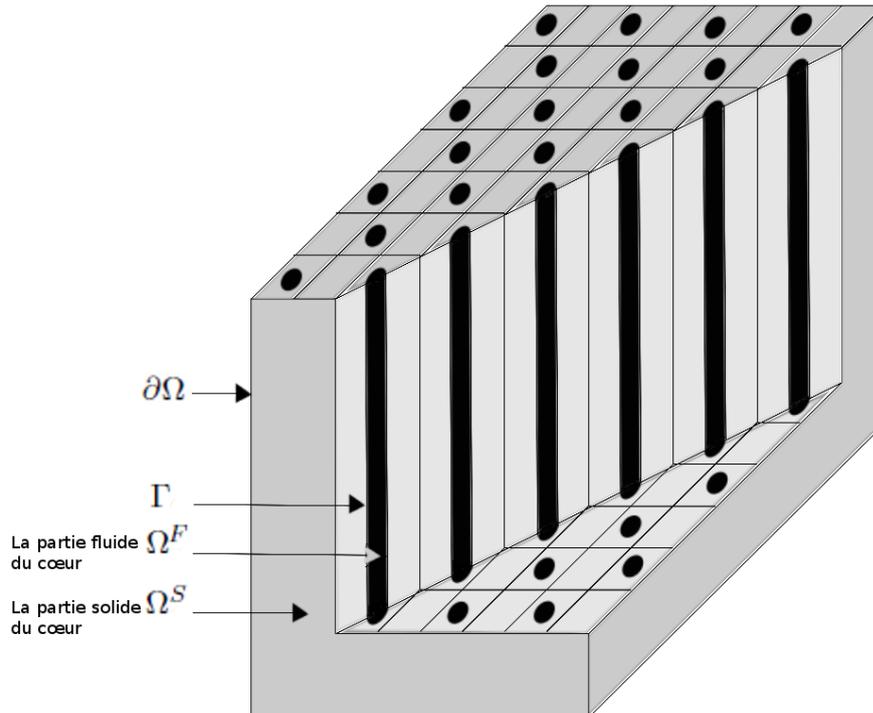


FIGURE 3.1 – Le domaine périodique Ω correspondant à un VHTR

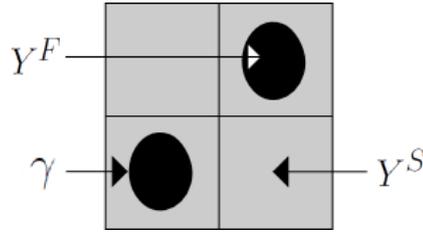


FIGURE 3.2 – La cellule de référence Y correspondante à un VHTR

3.1.2 Equations du modèle

Il existe une vaste littérature sur la modélisation du transfert thermique, spécialement par rayonnement. Nous renvoyons le lecteur intéressé vers les références [26], [63], [80] pour une introduction à ce mode de transfert thermique. Nous renvoyons aussi vers le chapitre 1 de ce document pour plus de détails sur les modes de transfert thermique traités ici. Notons maintenant par T_ε la température dans le domaine Ω que nous décomposons de la manière suivante :

$$T_\varepsilon = \begin{cases} T_\varepsilon^S & \text{dans } \Omega_\varepsilon^S, \\ T_\varepsilon^F & \text{dans } \Omega_\varepsilon^F, \end{cases}$$

où T_ε est continue sur l'interface Γ_ε .

La phase fluide n'étant présente que dans les canaux Ω_ε^F , le transfert thermique par convection n'a lieu donc que dans cette partie du domaine. Nous supposons que ce fluide est incompressible et nous introduisons ainsi sa vitesse V_ε définie par :

$$V_\varepsilon(x) = V(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon^F,$$

où le champ de vecteurs $V(y', x)$, défini dans $Y^F \times \Omega$, est Y -périodique et satisfait les deux conditions d'incompressibilité suivantes :

$$\operatorname{div}_x V = 0 \text{ et } \operatorname{div}_{y'} V = 0 \text{ dans } Y^F \times \Omega, \text{ et } V \cdot n = 0 \text{ sur } \gamma \times \Omega$$

où n est la normale extérieure (de Y^S vers Y^F) sur γ . Un exemple typique d'un tel champ de vitesse est $V = (V'(y', x_3), V_3(y', x'))$ avec $V' = (V_1, V_2)$, $\operatorname{div}_{y'} V' = 0$ et $V' \cdot n = 0$ sur $\gamma \times]0, L[$.

Le fluide présent dans Ω_ε^F étant un gaz, la diffusion thermique est beaucoup plus petite dans le fluide que dans le solide. Nous la modélisons alors avec un rapport ε entre la partie fluide et la partie solide de Ω , c-à-d que si elle est d'ordre 1 dans Ω_ε^S nous la choisissons d'ordre ε dans Ω_ε^F , nous définissons alors le tenseur de conductivité K_ε par :

$$K_\varepsilon(x) = \begin{cases} K_\varepsilon^S(x) = K^S(x, \frac{x'}{\varepsilon}) & \text{dans } \Omega_\varepsilon^S, \\ \varepsilon K_\varepsilon^F(x) = \varepsilon K^F(x, \frac{x'}{\varepsilon}) & \text{dans } \Omega_\varepsilon^F, \end{cases} \quad (3.3)$$

où $K^S(x, y'), K^F(x, y')$ sont des tenseurs périodiques, symétriques et définis positifs dans la cellule unitaire Y , ils vérifient :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \forall y' \in Y \forall x \in \Omega, \quad \alpha |v|^2 \leq \sum_{i,j=1}^3 K_{i,j}^{F,S}(x, y') v_i v_j \leq \beta |v|^2,$$

Comme nous l'avons dit dans le Chapitre 1, le fluide présent dans Ω_ε^F est un fluide transparent, le transfert thermique se fait alors aussi dans Ω_ε^F par rayonnement modélisé par une condition non-locale au bord Γ_ε entre Ω_ε^F et Ω_ε^S . Plus précisément, en plus de la condition de continuité de la température, nous avons aussi une condition d'échange sur le flux de température au bord Γ_ε :

$$T_\varepsilon^S = T_\varepsilon^F \quad \text{et} \quad -K_\varepsilon^S \nabla T_\varepsilon^S \cdot n = -\varepsilon K_\varepsilon^F \nabla T_\varepsilon^F \cdot n + \frac{\sigma}{\varepsilon} G_\varepsilon(T_\varepsilon^F) \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \quad (3.4)$$

où $\frac{\sigma}{\varepsilon} > 0$ est la constante de Stefan-Boltzmann, G_ε est l'opérateur de rayonnement défini par

$$G_\varepsilon(T_\varepsilon)(s) = T_\varepsilon(s) - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} T_\varepsilon(x) F(s, x) dx = (Id - \zeta_\varepsilon) T_\varepsilon(s) \quad \forall s \in \Gamma_{\varepsilon,i}, \quad (3.5)$$

avec

$$\zeta_\varepsilon(f)(s) = \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} F(s, x) f(x) dx. \quad (3.6)$$

La mesure de surface sur $\Gamma_{\varepsilon,i}$ est notée dx par simplification de notations.

Dans (3.6) F représente ce qu'on appelle le facteur de forme (voir [51], [53], [63]).

Le facteur de forme $F(s, x)$ est la quantité géométrique qui nous aide à quantifier le transfert radiatif entre deux points s et x du même canal $\Gamma_{\varepsilon,i}$. Sa formule explicite pour des surfaces qui enveloppent un domaine convexe en dimension 3 est donnée par :

$$F^{3D}(s, x) = \frac{n_x \cdot (s - x) n_s \cdot (x - s)}{\pi |x - s|^4}, \quad (3.7)$$

où n_z est la normale extérieure unitaire au point z . En dimension 2, cette formule est donnée par :

$$F^{2D}(s', x') = \frac{n'_x \cdot (s' - x') n'_s \cdot (x' - s')}{2 |x' - s'|^3} \quad (3.8)$$

et l'opérateur ζ_ε dans (3.6) est noté par ζ_ε^{2D} . Nous allons donner, dans la Section 3.1.3, d'autres propriétés de l'opérateur de rayonnement utiles pour la suite de ce document.

La seule source thermique du modèle est présente dans la partie solide, elle vérifie : $f \in L^2(\Omega), f \geq 0$. Pour des raisons de simplification, nous supposons que la condition aux bords extérieurs de Ω est une condition simple de Dirichlet. Remplacer cette condition de Dirichlet par d'autres conditions limites telle qu'une condition de Neumann nécessiterait une adaptation, qui n'est pas immédiate, des résultats du Chapitre 4 sur l'homogénéisation de ce modèle.

Les équations qui gouvernent notre modèle sont alors données par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(K_\varepsilon^S \nabla T_\varepsilon^S) = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon^S \\ -\operatorname{div}(\varepsilon K_\varepsilon^F \nabla T_\varepsilon^F) + V_\varepsilon \cdot \nabla T_\varepsilon^F = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon^F \\ -K_\varepsilon^S \nabla T_\varepsilon^S \cdot n = -\varepsilon K_\varepsilon^F \nabla T_\varepsilon^F \cdot n + \frac{\sigma}{\varepsilon} G_\varepsilon(T_\varepsilon^F) & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ T_\varepsilon^S = T_\varepsilon^F & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ T_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Notons que la présence du paramètre ε devant le terme de diffusion dans la partie fluide est complètement justifiée dans notre étude par le choix que nous avons fait de considérer une diffusion dominante dans la partie solide du domaine, ce qui est logique d'un point de vue physique. D'un autre côté, nous remarquons aussi un coefficient $1/\varepsilon$ devant le terme de rayonnement. Ce coefficient va nous permettre, comme nous allons le voir plus tard, d'avoir une contribution non nulle de l'opérateur de rayonnement au niveau microscopique. En général, dans la méthode d'homogénéisation, le choix de ces coefficients en puissance de ε fait partie de la mise à l'échelle des équations du modèle. C'est une étape importante avant de commencer le procédé d'homogénéisation, elle consiste à faire apparaître l'ordre de dépendance de chaque terme du modèle de la taille micro-macroscopique ε . Un moyen de connaître ce rapport est par exemple de comparer l'ordre de l'énergie qui correspond à chaque terme du modèle avec l'ordre d'une énergie de référence. Ici, nous prenons $\mathcal{O}(1)$ comme ordre de référence, et nous écrivons le terme de rayonnement tel que : $\varepsilon^\alpha G_\varepsilon(T_\varepsilon)$. Grâce à un développement de Taylor de T_ε autour de chaque centre $x_{0,i} = (x'_{0,i}, x_3)$ d'une surface Γ_ε :

$$T_\varepsilon(x) = T_\varepsilon(x_0) + (x' - x'_0) \cdot \nabla_{x'} T_\varepsilon(x_0) + \frac{1}{2} \nabla_{x'} \nabla_{x'} T_\varepsilon(x_0) (x' - x'_0) \cdot (x' - x'_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

et sachant que $(x' - x'_0)$ est d'ordre ε , en utilisant le résultat du Lemme 3.1.1, alors $\int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} G_\varepsilon(T_\varepsilon) T_\varepsilon$ est d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$. D'où

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \varepsilon^\alpha G_\varepsilon(T_\varepsilon) T_\varepsilon dx = \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \varepsilon^\alpha G_\varepsilon(T_\varepsilon) T_\varepsilon dx \text{ est d'ordre } \mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha+1}) \text{ car } M(\varepsilon) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right).$$

Pour que ce terme soit d'ordre 1, nous choisissons alors $\alpha = -1$.

Remarque 3.1.1. *L'opérateur de rayonnement introduit dans (3.4) est un opérateur linéaire. Clairement, c'est une hypothèse de simplification. En réalité, l'opérateur de rayonnement est un opérateur non-linéaire défini, sur chaque surface $\Gamma_{\varepsilon,i}$, $1 \leq i \leq M(\varepsilon)$, par :*

$$G_\varepsilon(T_\varepsilon) = e(Id - \zeta_\varepsilon)(Id - (1 - e)\zeta_\varepsilon)^{-1}(T_\varepsilon^A) \quad \text{avec } \zeta_\varepsilon(f)(s) = \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} F(s, x) f(x) dx. \quad (3.10)$$

De plus, pour des simplifications formelles, nous restreignons notre étude au cas des surfaces dites à parois noires, i.e., nous supposons que l'émissivité $e = 1$ (on peut trouver dans [14]

une étude de ce cas de problèmes quand l'émissivité dépend de la fréquence de rayonnement). Néanmoins, notre analyse du Chapitre 4, sur l'homogénéisation du modèle (3.9), peut s'étendre sans difficulté au cas plus général des parois grises $0 < e < 1$ (voire e.g. [44]). La méthode formelle du développement asymptotique à deux échelles peut aussi être étendue au cas d'un opérateur non-linéaire, au prix de calculs plus fastidieux [44]. Malheureusement, la justification rigoureuse du processus d'homogénéisation n'est valable, pour le moment, que pour le cas d'un rayonnement linéarisé. Pour cette raison, nous allons nous restreindre à l'exposition du processus d'homogénéisation pour le cas linéaire. Cependant nous fournissons aussi les résultats que nous obtenons dans le cas non-linéaire (sans preuve). De plus, tous les résultats numériques présentés dans ce document sont obtenus dans le cas non-linéaire qui est le cas le plus réaliste d'un point de vue physique.

Proposition 3.1.1. *Le problème aux limites (3.9) admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$.*

Preuve. En choisissant T_ε comme fonction test dans la formulation variationnelle du problème (3.9), nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon^S} K_\varepsilon^S \nabla T_\varepsilon^S \cdot \nabla T_\varepsilon^S dx + \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon^F} K_\varepsilon^F \nabla T_\varepsilon^F \cdot \nabla T_\varepsilon^F dx + \int_{\Omega_\varepsilon^F} V_\varepsilon \cdot \nabla T_\varepsilon^F T_\varepsilon^F dx + \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} G_\varepsilon(T_\varepsilon^F) T_\varepsilon^F dx \\ = \int_{\Omega_\varepsilon^S} f T_\varepsilon^S dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Or, comme nous allons le voir dans la Section 3.1.3 sur les propriétés de l'opérateur de rayonnement G_ε , cet opérateur est non négatif tel que :

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} G_\varepsilon(T_\varepsilon^F) T_\varepsilon^F dx \geq 0.$$

De plus, d'après les conditions d'incompressibilité sur V_ε , nous avons :

$$\int_{\Omega_\varepsilon^F} V_\varepsilon \cdot \nabla T_\varepsilon^F T_\varepsilon^F dx = 0.$$

Nous en déduisons, grâce à la coercivité de $K_\varepsilon^{S,F}$, que la forme bilinéaire continue de (3.11),

$$a_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega_\varepsilon^S} K_\varepsilon^S \nabla u \cdot \nabla v dx + \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon^F} K_\varepsilon^F \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

est coercive dans $H_0^1(\Omega)$. D'où l'existence et l'unicité d'une solution du problème (3.9) dans $H_0^1(\Omega)$ d'après le lemme de Lax-Milgram. \square

3.1.3 Propriétés de l'opérateur de rayonnement

Commençons par rappeler la formule de l'opérateur de rayonnement G_ε que nous traitons dans ce document. G_ε est donné par :

$$G_\varepsilon(f)(s) = (Id - \zeta_\varepsilon) f(s) \quad \forall s \in \Gamma_{\varepsilon,i},$$

avec

$$\zeta_\varepsilon(f)(s) = \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} F(s, x) f(x) dx.$$

Les formules explicites du facteur de forme F en dimension 3 et 2 sont données par les formules (3.7) et (3.8).

L'opérateur ζ_ε dans (3.6) est noté par ζ_ε^{2D} .

Nous insistons sur le fait que le facteur de forme 2D est défini sur une collection de surfaces fermées $\gamma_{\varepsilon,i}$, alors qu'il est défini, en 3D, sur une collection de surfaces cylindrique $\Gamma_{\varepsilon,i}$ ouvertes à leurs deux extrémités (voir la Figure 3.3). Ceci implique que dans une configuration 3D, il y aurait un effet d'échappement d'énergie radiative via les deux extrémités des cylindres que nous n'observons pas dans une configuration 2D. Notons aussi que dans

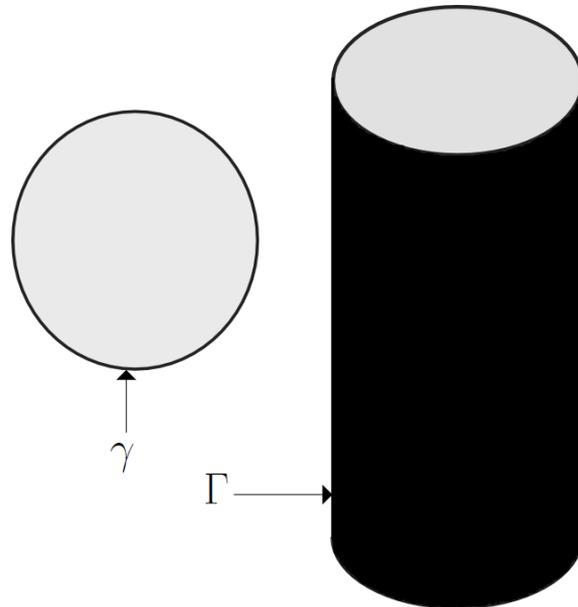


FIGURE 3.3 – Les surfaces de rayonnement γ (à gauche) et Γ (à droite)

le cadre de cette étude, l'opérateur de rayonnement G_ε n'est pas périodique suivant la direction x_3 du domaine Ω_ε . Autrement dit, un élément de surface du bord latéral d'un canal $\Gamma_{\varepsilon,i}$ proche de son extrémité, ne rayonne pas de la même manière qu'un élément de surface loin de cette extrémité. Formellement, cette non périodicité de l'opérateur de rayonnement suivant la direction x_3 , est principalement due à la non périodicité des facteurs de forme. Heureusement, les canaux cylindrique étant longs et minces, notre étude microscopique va se réduire, comme nous allons le voir plus tard, à une étude 2D profitant de l'invariance géométrique suivant la direction axiale. Cette réduction 3D-2D se traduit par le lien entre le facteur de forme 3D et celui 2D. Ce lien fait l'objet du Lemme 3.1.1 suivant :

Lemme 3.1.1. *Pour deux points x et s appartenant au même cylindre $\Gamma_{\varepsilon,i}$, le facteur de forme $F(s, x)$ vérifie :*

1. Pour un $s_3 \in (0, L)$,

$$\int_0^L F^{3D}(s, x) dx_3 = F^{2D}(s', x') + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon^2}{L^3}\right), \quad (3.14)$$

2. pour toute fonction g qui appartient à $C^3[0, L]$ et qui possède un support compact, nous avons :

$$\int_0^L g(x_3) F^{3D}(s, x) dx_3 = F^{2D}(s', x') \left(g(s_3) + \frac{|x' - s'|^2}{2} g''(s_3) + \mathcal{O}(\varepsilon^3 |\log \varepsilon|) \right), \quad (3.15)$$

où g'' représente la dérivée seconde de g . De plus, pour toute fonction f appartenant à $L^\infty(0, L)$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^L f(x_3) g(s_3) F^{3D}(s, x) dx_3 ds_3 &= F^{2D}(s', x') \left(\int_0^L f(x_3) g(x_3) dx_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} |x' - s'|^2 \int_0^L f(x_3) g''(x_3) dx_3 + \mathcal{O}(\varepsilon^3 |\log \varepsilon|) \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Remarque 3.1.2. La propriété asymptotique (3.14) peut être physiquement interprétée par le fait que dans un long et mince cylindre, le facteur de forme 3-D peut être approché par le facteur de forme 2-D via une intégration le long du cylindre.

Sachant que la surface $\Gamma_{\varepsilon, i}$ est ouverte à ces deux extrémités, on observe alors une perte d'énergie radiative via ces deux surfaces. Les propriétés asymptotiques (3.15) et (3.16) améliorent alors (3.14) par la prise en compte de cette perte d'énergie qui correspond à une diffusion suivant la direction x_3 (rappelons que la quantité $|x' - s'|^2$ est d'ordre ε^2).

Notons que l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^3 |\log \varepsilon|)$ dans (3.15) et (3.16) implique l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^p)$ où tout $0 < p < 3$ est admissible.

Preuve. La preuve de (3.14) s'appuie sur un changement de variables et un développement de Taylor. Nous supposons que s_3 ne dépend pas de ε et qu'il est différent des points extrêmes 0 et L . Cette dernière hypothèse est importante car le cas des points extrêmes est délicat à traiter à cause de la difficulté de définir les directions de rayonnement en ces points. Notons que cette difficulté n'apparaît pas dans le cas des fonctions à support compact.

En effet, puisque le cylindre $\Gamma_{\varepsilon, i}$ est vertical, nous avons $n_{s_3} = n_{x_3} = 0$ et

$$I = \int_0^L \frac{n_x \cdot (s - x) n_s \cdot (x - s)}{\pi |x - s|^4} dx_3 = \frac{n'_x \cdot (s' - x') n'_s \cdot (x' - s')}{\pi (x' - s')^4} \int_0^L \frac{1}{\left(1 + \frac{(x_3 - s_3)^2}{|x' - s'|^2}\right)^2} dx_3.$$

Par le changement de variable $z = \frac{x_3 - s_3}{|x' - s'|}$, en intégrant entre 0 et L nous obtenons :

$$I = \frac{2}{\pi} F^{2D}(s', x') \left(h_1\left(\frac{L - s_3}{|x' - s'|}\right) - h_1\left(\frac{-s_3}{|x' - s'|}\right) \right)$$

où $h_1(z)$ est la primitive de la fonction intégrante ci-dessus. Elle est donnée par :

$$h_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z^2 + 1} + \arctan(z) \right). \quad (3.17)$$

Par un développement de Taylor nous avons :

$$h_1(z) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(z^{-3}) & \text{quand } z \rightarrow +\infty, \\ -\frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(z^{-3}) & \text{quand } z \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.18)$$

Puisque $|x' - s'| = \mathcal{O}(\varepsilon)$, $(L - s_3) = \mathcal{O}(L)$, $s_3 = \mathcal{O}(L)$ et $F^{2D}(s', x') = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, nous obtenons (3.14).

La preuve de (3.15) est un peu plus délicate, mais la stratégie est la même que celle de (3.14). Notons d'abord que l'hypothèse que g possède un support compact nous permet d'éviter tous les problèmes provenant de la situation où $s_3 = 0$ ou $s_3 = L$. Par le changement de variable suivant :

$$z = \frac{x_3 - s_3}{\alpha}, \quad \text{où } \alpha = |x' - s'|, \quad (3.19)$$

nous obtenons :

$$I = \int_0^L g(x_3) F^{3D}(s, x) dx_3 = \frac{2}{\pi} F^{2D}(x', s') \int_{\Delta} \frac{g(s_3 + \alpha z)}{(1 + z^2)^2} dz = \frac{2}{\pi} F^{2D}(x', s') \hat{I},$$

où le domaine d'intégration Δ est donné par $\Delta = [\frac{-s_3}{\alpha}, \frac{L - s_3}{\alpha}]$. Remarquons que $\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon)$. A l'aide d'un développement de Taylor au voisinage de s_3 , nous avons :

$$g(s_3 + \alpha z) = g(s_3) + \alpha z g'(s_3) + \frac{1}{2} \alpha^2 z^2 g''(s_3) + \mathcal{O}(\alpha^3 z^3),$$

et \hat{I} devient :

$$\hat{I} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad (3.20)$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= g(s_3) \int_{\Delta} \frac{1}{(1 + z^2)^2} dz = \frac{g(s_3)}{2} \left(h_1\left(\frac{L - s_3}{|x' - s'|}\right) - h_1\left(\frac{-L - s_3}{|x' - s'|}\right) \right), \quad h_1(z) \text{ est donnée par (3.17)} \\ &= \frac{g(s_3)}{2} (\pi + \mathcal{O}(\alpha^3)). \end{aligned}$$

D'un autre coté, nous avons :

$$\begin{aligned} I_2 &= \alpha g'(s_3) \int_{\Delta} \frac{z}{(1 + z^2)^2} dz = \alpha g'(s_3) \left(h_2\left(\frac{L - s_3}{|x' - s'|}\right) - h_2\left(\frac{-L - s_3}{|x' - s'|}\right) \right), \\ I_3 &= \frac{\alpha^2}{2} g''(s_3) \int_D \frac{z^2}{(1 + z^2)^2} dz = \frac{\alpha^2}{2} g''(s_3) \left(h_3\left(\frac{L - s_3}{|x' - s'|}\right) - h_3\left(\frac{-L - s_3}{|x' - s'|}\right) \right), \end{aligned}$$

où $h_2(z)$ et $h_3(s)$ sont successivement les primitives des fonctions intégrées ci-dessus. Elles sont données par :

$$h_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{z^2 + 1} \right), \quad (3.21)$$

$$h_3(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{-z}{z^2 + 1} + \arctan(z) \right). \quad (3.22)$$

Par un développement de Taylor de (3.21) et (3.22) quand $z \rightarrow \pm\infty$, nous avons :

$$I_2 = \frac{\alpha g'(s_3)}{2} \mathcal{O}(\alpha^2) \equiv \mathcal{O}(\alpha^3).$$

$$I_3 = \frac{\alpha^2}{4} g''(s_3) (\pi + \mathcal{O}(\alpha)).$$

Le reste du développement de Taylor dans (3.20) est d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^p)$, $0 < p < 3$ parce-que :

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq C\alpha^3 \int_{\Delta} \frac{z^3}{(1+z^2)^2} dz \\ &\leq C\alpha^3 \left(h_4\left(\frac{L-s_3}{|x'-s'|}\right) - h_4\left(\frac{-L-s_3}{|x'-s'|}\right) \right), \end{aligned}$$

où $h_4(z)$ est donnée par :

$$h_4(z) = \frac{1}{2} \left(\log(z^2 + 1) + \frac{1}{1+z^2} \right). \quad (3.23)$$

En utilisant un développement de Taylor de (3.23) quand $z \rightarrow \pm\infty$, nous avons :

$$|I_4| \leq C\alpha^3 |\log \alpha| \leq C\alpha^q \quad \forall 0 < q < 3.$$

D'où le résultat (3.15) puisque $\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

La preuve de (3.16) est immédiate en utilisant (3.15) et en sachant que $f \in L^\infty(0, L)$. \square

Nous proposons aussi une autre preuve de (3.16) lorsque g est seulement dans $C^2[0, L]$ (et pas dans $C^3[0, L]$) en échange de plus d'hypothèses sur f qui doit aussi être dans $C^2[0, L]$ et que l'une des deux fonctions soit à support compact dans $]0, L[$. Dans ce cas nous démontrons le lemme suivant :

Lemme 3.1.2. *Pour deux points x et s appartenant au même cylindre $\Gamma_{\varepsilon, i}$, le facteur de forme $F(s, x)$ vérifie : pour toutes fonctions f, g dans $C^2[0, L]$, nous avons :*

$$\int_0^L \int_0^L f(x_3) g(s_3) F^{3D}(s, x) dx_3 ds_3 = F^{2D}(s', x') \int_0^L f(x_3) g(x_3) dx_3 \left(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^r) \right), \quad (3.24)$$

où $r = 3/4$. Si de plus, une des fonctions f ou g possède un support compact dans $(0, L)$, on obtient

$$\int_0^L \int_0^L f(x_3)g(s_3)F^{3D}(s, x)dx_3ds_3 = F^{2D}(s', x') \left(\int_0^L f(x_3)g(x_3)dx_3 - \frac{1}{2}|x' - s'|^2 \int_0^L f'(x_3)g'(x_3)dx_3 + \mathcal{O}(\varepsilon^q) \right), \quad (3.25)$$

où chaque $q \in (0, 3)$ est admissible. Ici, f', g' représentent les dérivées de f, g .

Démonstration. Les preuves de (3.24) et (3.25) sont un peu plus délicates à obtenir que celles de (3.15) et (3.16) mais la stratégie est toujours la même. Par le changement de variables suivant

$$\delta = \frac{x_3 + s_3}{2}, \quad \text{et} \quad \eta = \frac{x_3 - s_3}{2\alpha}, \quad \text{où} \quad \alpha = |x' - s'|, \quad (3.26)$$

nous écrivons l'intégrale I comme suit :

$$I = \int_0^L \int_0^L f(x_3)g(s_3)F^{3D}(s, x)dx_3ds_3 = \frac{4}{\pi} F^{2D}(s', x') \int \int_{\Delta} f(\delta + \alpha\eta)g(\delta - \alpha\eta) \frac{1}{(1 + 4\eta^2)^2} d\eta d\delta$$

où le domaine d'intégration Δ , sous forme d'un losange, est décrit dans la Figure 3.4. Notons que $\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

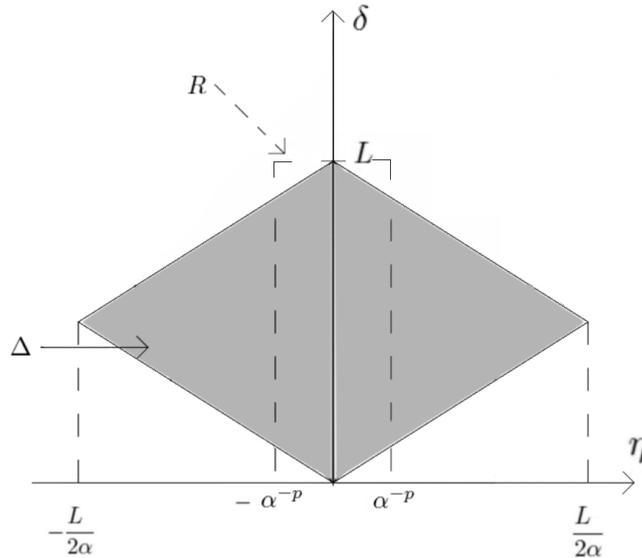


FIGURE 3.4 – Le domaine Δ correspondant au changement de variables (3.26)

Pour un p donné tel que $0 < p < 1$, nous définissons le domaine rectangulaire $R = [-\alpha^{-p}, \alpha^{-p}] \times [0, L]$ et nous montrons dans un premier temps que la partie de l'intégrale I en dehors de R est négligeable. En effet, grâce à (3.18), nous savons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que,

h_1 étant la fonction primitive définie par (3.17),

$$\begin{aligned} \left| \int \int_{\Delta \setminus R} f(\delta + \alpha\eta) g(\delta - \alpha\eta) \frac{1}{(1 + 4\eta^2)^2} d\eta d\delta \right| &\leq C \int_{\alpha^{-p}}^{\alpha^{-1}} \frac{1}{(1 + 4\eta^2)^2} d\eta \\ &= C (h_1(\alpha^{-1}) - h_1(\alpha^{-p})) = \mathcal{O}(\alpha^{3p}) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$I = \frac{4}{\pi} F^{2D}(s', x') (\widehat{I} + \mathcal{O}(\alpha^{3p})) \quad \text{où} \quad \widehat{I} = \int \int_{R \cap \Delta} f(\delta + \alpha\eta) g(\delta - \alpha\eta) \frac{1}{(1 + 4\eta^2)^2} d\eta d\delta. \quad (3.27)$$

En utilisant un développement de Taylor quand $\alpha\eta$ est dans un voisinage de 0, nous avons :

$$\begin{aligned} f(\delta + \alpha\eta) &= f(\delta) + \alpha\eta f'(\delta) + \frac{1}{2} \alpha^2 \eta^2 f''(\delta) + \frac{1}{6} \alpha^3 \eta^3 f'''(\delta) + \mathcal{O}(\alpha^4 \eta^4) \\ g(\delta - \alpha\eta) &= g(\delta) - \alpha\eta g'(\delta) + \frac{1}{2} \alpha^2 \eta^2 g''(\delta) - \frac{1}{6} \alpha^3 \eta^3 g'''(\delta) + \mathcal{O}(\alpha^4 \eta^4) \end{aligned}$$

et \widehat{I} devient :

$$\widehat{I} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \quad (3.28)$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \int_{R \cap \Delta} f(\delta) g(\delta) \frac{1}{(1 + 4\eta^2)^2} d\eta d\delta, \\ I_2 &= \int \int_{R \cap \Delta} [f'(\delta) g(\delta) - f(\delta) g'(\delta)] \frac{\alpha\eta}{(1 + 4\eta^2)^2} d\eta d\delta, \\ I_3 &= \frac{1}{2} \int \int_{R \cap \Delta} [f''(\delta) g(\delta) + f(\delta) g''(\delta) - 2f'(\delta) g'(\delta)] \frac{\alpha^2 \eta^2}{(1 + 4\eta^2)^2} d\eta d\delta, \\ I_4 &= \frac{1}{6} \int \int_{R \cap \Delta} [f'''(\delta) g(\delta) - f(\delta) g'''(\delta) - 3f''(\delta) g'(\delta) + 3f'(\delta) g''(\delta)] \frac{\alpha^3 \eta^3}{(1 + 4\eta^2)^2} d\eta d\delta. \end{aligned}$$

Le reste du développement de Taylor dans (3.28) est d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^{4-p})$ car

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq C \int \int_{R \cap \Delta} \frac{\alpha^4 \eta^4}{(1 + 4\eta^2)^2} d\eta d\delta \leq C \int_{-\alpha^{-p}}^{\alpha^{-p}} \frac{\alpha^4 \eta^4}{(1 + 4\eta^2)^2} d\eta \\ &\leq C \frac{\alpha^4}{64} \left[4\eta + \frac{2\eta}{2\eta^2 + 1} - 3 \arctan(2\eta) \right]_{-\alpha^{-p}}^{\alpha^{-p}} \quad (3.29) \\ &\leq C \alpha^{4-p}. \end{aligned}$$

Puisque les intégrandes dans I_2 et I_4 sont des fonctions impaires dans le domaine symétrique

$R \cap \Delta$, nous en déduisons que $I_2 = I_4 = 0$. Nous réécrivons alors l'intégrale I_1 comme suit :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\alpha^{1-p}} f(\delta)g(\delta) \left(\int_{-\frac{\delta}{\alpha}}^{\frac{\delta}{\alpha}} \frac{1}{(1+4\eta^2)^2} d\eta \right) d\delta \\ &+ \int_{\alpha^{1-p}}^{L-\alpha^{1-p}} f(\delta)g(\delta) d\delta \int_{-\alpha^{-p}}^{\alpha^{-p}} \frac{1}{(1+4\eta^2)^2} d\eta \\ &+ \int_{L-\alpha^{1-p}}^L f(\delta)g(\delta) \left(\int_{\frac{\delta-L}{\alpha}}^{\frac{L-\delta}{\alpha}} \frac{1}{(1+4\eta^2)^2} d\eta \right) d\delta \end{aligned}$$

Sachant que, pour tout $a > 0$, en vertu de (3.18),

$$\int_{-a}^a \frac{1}{(1+4\eta^2)^2} d\eta = \frac{1}{4} \left[\frac{2\eta}{4\eta^2+1} + \arctan(2\eta) \right]_{-a}^a = \frac{\pi}{4} + \mathcal{O}(a^{-2}) \leq \frac{\pi}{4},$$

nous avons :

$$I_1 = \frac{\pi}{4} \int_0^L f(\delta)g(\delta) d\delta + \mathcal{O}(\alpha^{1-p}).$$

D'un autre coté, nous avons :

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq C \int \int_{R \cap \Delta} \frac{\alpha^2 \eta^2}{(1+4\eta^2)^2} d\eta d\delta \leq C \int_{-\alpha^{-p}}^{\alpha^{-p}} \frac{\alpha^2 \eta^2}{(1+4\eta^2)^2} d\eta \\ &\leq C \frac{\alpha^2}{16} \left[-\frac{2\eta}{4\eta^2+1} + \arctan(2\eta) \right]_{-\alpha^{-p}}^{\alpha^{-p}} \quad (3.30) \\ &\leq C\alpha^2, \end{aligned}$$

qui est négligeable devant l'erreur $\mathcal{O}(\alpha^{1-p})$ sur l'évaluation de I_1 . Donc, en choisissant la valeur optimale $p = \frac{1}{4}$ (telle que $1-p = 3p$), nous avons

$$I = F^{2D}(s', x') \int_0^L f(\delta)g(\delta) d\delta (1 + \mathcal{O}(\alpha^{3/4}))$$

D'où le résultat (3.24) puisque $\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Si de plus, nous supposons que f (ou g) possède un support compact dans $(0, L)$, nous pouvons alors améliorer l'ordre de convergence de cette dernière approximation. Pour un ε suffisamment petit, ceci implique que le support de fg est inclus dans l'intervalle $[\alpha^{1-p}, L - \alpha^{1-p}]$ puisque $\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon)$. En particulier, nous pouvons maintenant simplifier l'intégrale I_1 telle que :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\alpha^{1-p}}^{L-\alpha^{1-p}} f(\delta)g(\delta) d\delta \int_{-\alpha^{-p}}^{\alpha^{-p}} \frac{1}{(1+4\eta^2)^2} d\eta \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^L f(\delta)g(\delta) d\delta + \mathcal{O}(\alpha^{3p}). \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous développons aussi I_3 et, grâce à une intégration par partie dans Δ (sans aucun terme de bord puisque f (ou g) a un support compact) et en l'évaluant en η , nous avons :

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \frac{1}{2} \int_{\alpha^{1-p}}^{L-\alpha^{1-p}} (f''(\delta)g(\delta) + f(\delta)g''(\delta) - 2f'(\delta)g'(\delta))d\delta \int_{-\alpha^{-p}}^{\alpha^{-p}} \frac{\alpha^2\eta^2}{(1+4\eta^2)^2}d\eta \\
 &= -2 \int_0^L f'(\delta)g'(\delta)d\delta \frac{\alpha^2}{16} \underbrace{\left[-\frac{2\eta}{4\eta^2+1} + \arctan(2\eta) \right]_{-\alpha^{-p}}^{\alpha^{-p}}}_{=\pi+\mathcal{O}(\alpha^{3p})} \\
 &= \frac{-\pi\alpha^2}{8} \int_0^L f'(\delta)g'(\delta)d\delta + \mathcal{O}(\alpha^{2+3p}). \tag{3.31}
 \end{aligned}$$

Finalement, l'intégrale I s'écrit dans ce cas :

$$I = F^{2D}(s', x') \left(\int_0^L f(\delta)g(\delta)d\delta - \frac{\alpha^2}{2} \int_0^L f'(\delta)g'(\delta)d\delta + \mathcal{O}(\alpha^{3p}) \right),$$

où cette fois tout $p \in (0, 1)$ est admissible. D'où le résultat (3.25). \square

Nous rappelons maintenant, dans le Lemme 3.1.3, quelques propriétés des facteurs de forme et de l'opérateur de rayonnement, que nous avons décrit dans le Chapitre 1, et qui vont nous être utiles dans les sections suivantes. On peut trouver ces propriétés aussi dans [79] par exemple.

Lemme 3.1.3. *Pour deux points x et s appartenant à la même surface $\Gamma_{\varepsilon,i}$,*

1.

$$F(s, x) \geq 0, \quad F(s, x) = F(x, s), \tag{3.32}$$

2.

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} F^{2D}(s', x') ds' = 1, \quad \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} F^{3D}(s', x') ds' < 1,$$

3. *Sachant que $\int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} (x' - x'_{0,i}) dx' = 0$, le facteur de forme 2-D vérifie aussi :*

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} (x' - x'_{0,i}) F^{2D}(s', x') dx' ds' = 0.$$

4. *L'opérateur ζ_ε est non négatif dans le sens : $\zeta_\varepsilon(f) \geq 0 \quad \forall f \geq 0$.*

5. *L'opérateur ζ_ε vérifie aussi*

$$\|\zeta_\varepsilon\|_{\mathbb{L}(p,p,\Gamma_{\varepsilon,i})} \leq 1, \quad \forall p \geq 1, \tag{3.33}$$

où $\mathbb{L}(p, q, \Gamma_{\varepsilon,i})$ est l'ensemble des fonctionnelles de $L^p(\Gamma_{\varepsilon,i})$ dans $L^q(\Gamma_{\varepsilon,i})$.

6. Pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, nous avons $\zeta_\varepsilon^{2D}(c) = c$, et donc $(Id - \zeta_\varepsilon^{2D})(c) = 0$. Plus précisément, nous avons :

$$\ker(Id - \zeta_\varepsilon^{2D}) = \mathbb{R}. \quad (3.34)$$

7. G_ε est un opérateur auto-adjoint dans $L^2(\Gamma_{\varepsilon,i})$,
 8. il est non négatif dans le sens où :

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} G_\varepsilon(f) f \, ds \geq 0 \quad \forall f \in L^2(\Gamma_{\varepsilon,i}), \quad (3.35)$$

3.1.4 Difficultés relatives à ce modèle

Nous avons vu dans le Chapitre 1 que la principale motivation derrière notre étude du modèle (3.9) par homogénéisation est une motivation "numérique". En effet, la résolution numérique de ce modèle dans le domaine décrit ci-dessus nécessite un maillage très fin pour prendre en compte les différences microscopiques entre les paramètres de ce modèle. Cette résolution s'avère donc très couteuse en terme de mémoire et de temps CPU. D'où l'intérêt que nous portons à la méthode d'homogénéisation. En échange, l'étude du modèle (3.9) par homogénéisation implique des difficultés analytiques supplémentaires, spécialement, ici, à cause de la complexité de la condition d'échange thermique par rayonnement. Cet échange se manifeste dans notre cas par une condition de bord non-linéaire et non-locale. La difficulté d'une étude asymptotique de problèmes aux limites avec une condition non-locale au bord est bien connue dans la littérature, nous citons par exemple [6], [34], [71], [72]. Notons que l'homogénéisation du terme de rayonnement non-linéaire par développement asymptotique implique un calcul analytique colossal (un peu moins dans un calcul linéarisé). De plus, dans ce cas non-linéaire, en absence de condition de convexité ou de monotonie, la preuve de la convergence de toutes nos méthodes d'homogénéisation reste une question ouverte.

Dans une géométrie 3D, une autre difficulté s'ajoute dans l'étude asymptotique du modèle (3.9). En effet, dans ce cas, le domaine Ω est perforé par des canaux cylindriques. Dans cette configuration, nous perdons la notion de périodicité suivant la direction x_3 du domaine. Mais, quand les canaux cylindriques deviennent infiniment longs par rapport à leur diamètre, par invariance géométrique suivant cette direction, l'analyse microscopique du modèle se réduit donc à une analyse en 2D sur une surface transversale du domaine. Cette réduction d'espace donne lieu à un nouveau phénomène perturbateur de notre analyse asymptotique. En d'autres termes, à notre analyse asymptotique par homogénéisation s'ajoute un problème de perturbations singulières comme, par exemple, dans les problèmes de mécanique des solides où il est question de déduire des modèles d'élasticité 2D de plaques ou de coques 3D lorsque leur épaisseur tend vers zéro (voir par exemple [29]).

Une autre difficulté liée à la géométrie 3D découle du fait que, comme nous l'avons signalé dans la Remarque 3.1.2, les canaux d'hélium sont ouverts à leurs deux extrémités. On observe alors une perte d'énergie radiative via ces deux surfaces. Nous devons alors tenir compte de cette perte diffuse dans notre analyse asymptotique, d'où le grand intérêt du Lemme 3.1.1.

Bien sûr, toutes ces difficultés liées à la géométrie 3D disparaissent dans une configuration 2D (représentative de la géométrie d'une section transversale du domaine Ω) où les canaux d'hélium sont cette fois sous forme de disques fermés. Une première approche par homogénéisation pourrait donc se faire, dans un premier temps pour focaliser toutes les difficultés sur la condition non-linéaire et non-locale de rayonnement, sur un modèle 2D simplifié de (3.9). C'est ce qui a été fait dans le cadre de la thèse de K. El Ganaoui [44]. Nous introduisons, dans la suite de ce chapitre, ce modèle 2D simplifié et nous rappelons brièvement les principaux résultats obtenus dans [44]. Notons que ce modèle 2D va nous servir aussi dans l'analyse que nous présentons dans le Chapitre 5.

3.2 Position d'un modèle simplifié en 2D

3.2.1 Géométrie et notations

Comme nous avons expliqué dans la Section 1.4 du Chapitre 1, pour des raisons de sûreté du cœur, nous sommes souvent amenés, dans certaines modélisations, à nous intéresser particulièrement au comportement thermique des compacts et des particules de combustible. Dans ce cas, la température du gaz caloporteur, l'hélium, est supposée connue (calculée dans une étape antérieure) et, en plus du transfert radiatif, l'échange de chaleur entre les parties solide et fluide du cœur se fait via un échange thermique. Ici, nous allons réduire les équations du modèle (3.9) de diffusion-convection-rayonnement de la section précédente au domaine solide Ω^S où la température dans la partie fluide est supposée connue T_{gaz} . Pour plus de simplifications nous nous restreignons à une configuration 2D (qui correspond à une section transversale du domaine 3D décrit précédemment) décrite ci dessous.

Soit $\Omega = \prod_{j=1}^2 (0, L_j)$ un ouvert rectangulaire borné de \mathbb{R}^2 où les $L_j > 0$ sont ses longueurs positives. Ω est composé par une répétition périodique de $N(\varepsilon)$ petites cellules élémentaires $Y_{\varepsilon,i}$ toutes égales, grâce à une translation et une mise à l'échelle par un facteur ε , à la même cellule unitaire de périodicité, dite cellule de référence $Y = \prod_{j=1}^2 (0, l_j)$ avec $l_j > 0$.

Par construction, le domaine Ω est périodique suivant toutes ses directions.

Comme pour le cas 3D, pour éviter certaines complications issues des problèmes de

couches limites, nous considérons que pour tout paramètre ε , le domaine Ω est composé de cellules entières, c-à-d, $L_j/(\varepsilon l_j)$ est un entier pour tout $j = 1, 2$.

La cellule Y est toujours composée de deux parties : les canaux Y^F occupés par le fluide (voir les figures 3.1 et 3.2) et la matrice solide Y^S . On note par Γ le bord entre Y^S et Y^F (Les notations Γ et γ coïncident dans ce chapitre). Par conséquent, on définit le domaine solide Ω_ε^S par la collection des $Y_{\varepsilon,i}^S$, où $Y_{\varepsilon,i}^S$ ne sont rien d'autre que Y^S translattées et mises à l'échelle pour tout $i = 1 \dots N(\varepsilon)$ (de la même manière que la correspondance entre $Y_{\varepsilon,i}$ et Y). Notons ici que, la température du fluide étant connue, toute notre étude est limitée au domaine solide Ω_ε^S .

Notons ici aussi que si la cellule de référence contient un nombre r de canaux fluides, leur nombre (et donc aussi le nombre des surfaces $\Gamma_{\varepsilon,i}$) dans tout le domaine Ω est égal à $M(\varepsilon) = rN(\varepsilon)$. En résumé nous avons

$$\Omega_\varepsilon^S = \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} Y_{\varepsilon,i}^S, \quad \Gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{M(\varepsilon)} \Gamma_{\varepsilon,i}.$$

Pour toute cellule $Y_{\varepsilon,i}$, on définit le centre de masse $x_{0,i}$ de la frontière $\Gamma_{\varepsilon,i}$ par

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} (s - x_{0,i}) ds = 0. \tag{3.36}$$

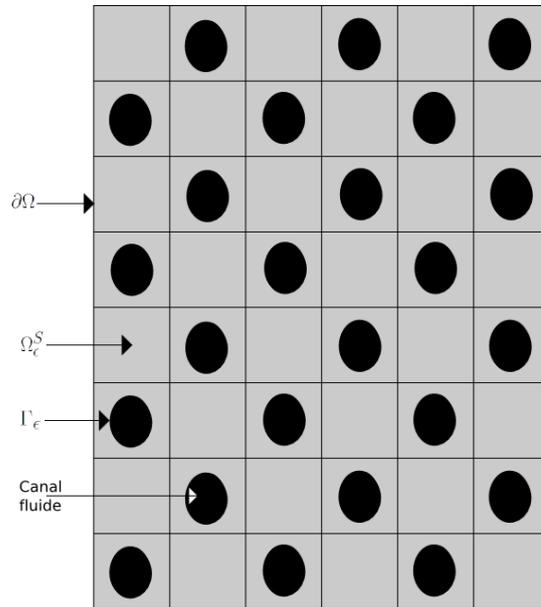


FIGURE 3.5 – Le domaine périodique Ω (ou Ω_ε) correspondant à une coupe transversale d'un cœur de VHTR

3.2.2 Equations du modèle

Les seuls modes de transfert thermiques que nous observons dans cette nouvelle configuration sont :

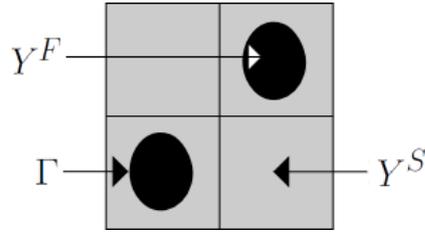


FIGURE 3.6 – La cellule de référence Y correspondante à une coupe transversale d'un cœur de VHTR

◇ La conduction thermique dans Ω_ε^S avec un tenseur de conductivité donné par :

$$K_\varepsilon(x) = K\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (3.37)$$

où $K(x, y)$ est un tenseur périodique, symétrique et coercif dans $\Omega \times Y^S$.

◇ Le rayonnement aux bords des parois. Le fluide présent dans les canaux étant transparent, il est modélisé par une condition non-locale sur les parois des canaux Γ_ε :

$$-K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon \cdot n = \frac{\sigma}{\varepsilon} G_\varepsilon(T_\varepsilon) \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \quad (3.38)$$

où $\frac{\sigma}{\varepsilon} > 0$ est la constante de Stefan-Boltzmann, n est la normale extérieur sur γ et G_ε est l'opérateur de rayonnement défini par :

$$G_\varepsilon(T_\varepsilon)(s) = T_\varepsilon(s) - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} T_\varepsilon(x) F(s, x) dx = (Id - \zeta_\varepsilon) T_\varepsilon(s) \quad \forall s \in \Gamma_{\varepsilon,i}, \quad (3.39)$$

avec

$$\zeta_\varepsilon(f)(s) = \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} F(s, x) f(x) dx. \quad (3.40)$$

La formule explicite du facteur de forme est ici donnée par :

$$F(s, x) = \frac{n_x \cdot (s - x) n_s \cdot (x - s)}{2|x - s|^3}$$

où n_z représente la normale unitaire au point z

Notons que, en se limitant à une configuration 2D, toutes les difficultés rencontrées dans la section précédente issues de la géométrie 3D et le comportement asymptotique des facteurs de forme 3D sont omises dans ce modèle. Ici, toutes les propriétés vérifiées par le facteur de forme 2D que nous avons citées dans la section précédente sur le modèle 3D sont toujours valables. En absence d'ambiguïté, nous continuons de noter $F(s, x)$ le facteur de forme 2D $F^{2D}(s, x)$.

◇ L'échange thermique sur les parois des canaux où le paramètre d'échange est un paramètre oscillant donné par :

$$h_\varepsilon(x) = h\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

La seule source thermique du modèle est présente dans la partie solide, elle vérifie toujours : $f \in L^2(\Omega)$, $f \geq 0$.

Nous gardons aussi les mêmes conditions de Dirichlet aux bords extérieurs de Ω comme pour le modèle 3D.

Eventuellement, les équations qui gouvernent le modèle simplifié sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\text{div}(K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon^S \\ -K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon \cdot n = \varepsilon h_\varepsilon(T_\varepsilon - T_{gaz}) + \frac{\sigma}{\varepsilon} G_\varepsilon(T_\varepsilon) & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ T_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (3.41)$$

Remarque 3.2.1. *Comme pour le modèle 3D, pour des raisons de simplification, nous supposons ici que l'opérateur de rayonnement introduit dans (3.39) est un opérateur linéaire. Il est non linéaire en réalité et est défini, sur chaque surface $\Gamma_{\varepsilon,i}$, $1 \leq i \leq M(\varepsilon)$, par :*

$$G_\varepsilon(T_\varepsilon) = e(Id - \zeta_\varepsilon)(Id - (1 - e)\zeta_\varepsilon)^{-1}(T_\varepsilon^4) \quad \text{où } \zeta_\varepsilon(f)(s) = \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} F(s, x)f(x)dx,$$

avec une émissivité e comprise entre 0 et 1.

3.3 La thèse de K. El Ganaoui [44]

3.3.1 Le modèle

Dans ce travail il était question d'homogénéiser le modèle simplifié (3.41) que nous avons introduit dans la Section 3.2 précédente. La contribution la plus originale et principale de cette thèse était l'homogénéisation de ce modèle dans un solide perforé (combustible et graphite) avec une condition de rayonnement en **cavité à paroi grise diffusante** aux bords des canaux d'hélium. Dans ce cas, la condition de rayonnement est délicate à homogénéiser car elle est à la fois non linéaire et non locale. Ce travail est l'un des premiers en tant qu'application de l'homogénéisation aux phénomènes de rayonnement en présence de parois noires ou grises diffusantes. C'est une validation du premier ordre (en complexité) qui ouvre sur l'homogénéisation de problèmes à complexité croissante (géométrie plus complexe, couplage avec d'autres phénomènes physique...etc.). Le présent travail s'inscrit donc dans la continuité du travail de thèse de K. El Ganaoui [44] que nous allons étendre pour mieux approcher la réalité physique de notre application industrielle. Nous allons aussi répondre à des questions restées ouvertes dans [44].

Le modèle traité dans [44] est exactement donné par :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon^S \\ -K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon \cdot n = \frac{\sigma}{\varepsilon} G_\varepsilon(T_\varepsilon^4) & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon \cdot n = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.42)$$

où K_ε désigne le tenseur de conductivité, T_ε la température, n la normale extérieur à la surface Γ_ε (ou $\partial\Omega$), g est la valeur du flux de la température au bord extérieur de Ω_ε^S et G_ε représente l'opérateur de rayonnement sur la surface des canaux.

Toute l'étude décrite dans [44], est une étude 2D où le domaine Ω_ε^S , périodiquement perforé, est présenté dans la Figure 3.5.

La complexité du traitement du modèle (3.42) par homogénéisation découle de la complexité du traitement de l'opérateur de rayonnement G_ε . Sa formule est donnée par :

$$G_\varepsilon(T_\varepsilon^4)(x) = (Id - \zeta_\varepsilon)R_\varepsilon(x) = e(Id - \zeta_\varepsilon)(Id - (1 - e)\zeta_\varepsilon)^{-1}T_\varepsilon^4(x)$$

$$\text{où } \zeta_\varepsilon(f)(s) = \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} F(s, x)f(x)dx \quad \text{pour chaque canal } i \text{ de bord } \Gamma_{\varepsilon,i}$$

Les deux principales études présentées dans [44] sont les suivantes :

1– Le cas d'un transfert radiatif en cavité à paroi noire. Il correspond à l'étude du modèle (3.42) avec une emissivité e égale à 1. Dans ce cas, l'expression de l'opérateur du rayonnement est simplifiée et donnée par

$$G_\varepsilon(T_\varepsilon^4)(x) = (Id - \zeta_\varepsilon)R_\varepsilon(x) = (Id - \zeta_\varepsilon)T_\varepsilon^4(x)$$

2– Le cas général d'une emissivité e comprise entre 0 et 1 : cas de rayonnement en cavité à paroi grise diffusante.

Dans les résultats que nous rappelons de [44], nous ne retenons que les résultats sur le modèle général de conduction dans le solide avec une condition de rayonnement en cavité à paroi grise diffusante aux bords des canaux.

3.3.2 Résultats par développement asymptotique

La méthode de développement asymptotique appliquée au modèle (3.42), donne le résultat suivant

Théorème 3.3.1. *Sous l'hypothèse de développement asymptotique, sur l'inconnue T_ε du problème (3.42), décrite par :*

$$T_\varepsilon(x) = T_0(x) + \varepsilon T_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.43)$$

on montre que T_0 est la solution du problème homogénéisé (3.44) donné par :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K^*(x)\nabla T_0(x)) = |Y^S|f(x) & \text{dans } \Omega \\ K^*(x)\nabla T_0(x) \cdot n = g(x) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \quad (3.44)$$

où K^* est la conductivité homogénéisée donnée par la valeur de ses composantes :

$$K_{j,k}^*(x) = \left[\int_Y K(x,y)(e_j + \nabla_y \omega_j(y)) \cdot (e_k + \nabla_y \omega_k(y)) dy + 4\sigma T_0^3(x) \int_{\Gamma} G(\omega_k(y) + y_k)(\omega_j(y) + y_j) \right] \text{ pour } j, k = 1, 2$$

$|Y^S|$ représente la mesure de la partie solide Y^S de la cellule de référence Y . Les (ω_j) sont les solutions des problèmes de cellule (3.45) donnés par :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y K(x,y)(e_j + \nabla_y \omega_j(x,y)) = 0 & \text{dans } Y^S \\ K(x,y)(e_j + \nabla_y \omega_j(x,y)) \cdot n = 4\sigma T_0^3(x)G(\omega_j(x,y) + y_j) & \text{sur } \Gamma \\ y \mapsto \omega_j(x,y) & \text{est } Y\text{-périodique} \end{cases} \quad (3.45)$$

Les solutions (ω_j) sont des fonctions en y qui dépendent aussi de la variable macroscopique x en tant que paramètre via la dépendance du tenseur K en cette variable. On montre aussi, grâce aux solutions de ces problèmes de cellule, que le deuxième terme T_1 du développement (3.43) s'écrit $T_1(x,y) = \sum_{j=1}^2 \omega_j(x,y) \frac{\partial T_0}{\partial x_j}(x)$.

3.3.3 Résultats de convergence

Dans [44], tous les résultats d'homogénéisation des différents modèles cités ci-dessus, en particulier le modèle (3.42), ont été établis dans le cas d'un transfert radiatif non-linéaire. Néanmoins, toutes les preuves de ces résultats, basées sur la méthode de convergence à deux-échelles, n'ont été établies que dans le cas linéaire, le cas non-linéaire étant difficile à traiter en absence de propriétés de convexité ou de monotonie de l'opérateur de rayonnement.

Nous rappelons ici le résultat principal de [44] sur la convergence de la méthode d'homogénéisation du modèle (3.42) dans le cas linéaire. Dans ce cas, le modèle (3.42) s'écrit :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K_{\varepsilon}\nabla T_{\varepsilon}) = f & \text{dans } \Omega_{\varepsilon}^S \\ -K_{\varepsilon}\nabla T_{\varepsilon} \cdot n = \frac{\tilde{\sigma}}{\varepsilon} G_{\varepsilon}(T_{\varepsilon}) & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon} \\ T_{\varepsilon} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}, \quad (3.46)$$

où $\tilde{\sigma}$ s'écrit $\tilde{\sigma} = \sigma T_f^3$ avec T_f une température fixe connue. Notons qu'on a remplacé la condition au bord extérieur de Neumann dans (3.42) par une condition de Dirichlet. C'est

une condition simplificatrice car elle permet, entre autres, d'avoir l'unicité d'une solution du problème (3.46).

Il a été démontré le théorème suivant :

Théorème 3.3.2. *La suite T_ε (après extension en Ω) solution de (3.42) converge faiblement vers une fonction T_0 dans $H_0^1(\Omega)$ et la suite ∇T_ε converge à deux échelles vers $\nabla_x T_0(x) + \nabla_y T_1(x, y)$, où $T_0 \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution du problème homogénéisé*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K^*(x)\nabla T_0(x)) = |Y^S|f(x) & \text{dans } \Omega \\ T_0(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.47)$$

où K^* est la conductivité homogénéisée donnée par

$$K_{j,k}^*(x) = \left[\int_Y K(x, y)(e_j + \nabla_y \omega_j(y)) \cdot (e_k + \nabla_y \omega_k(y)) dy + \tilde{\sigma} \int_\Gamma G(\omega_k(y) + y_k)(\omega_j(y) + y_j) \right] \text{ pour } j, k = 1, 2$$

et $T_1 \in L^2(\Omega, H_\#^1(Y)/\mathbb{R})$ est l'unique fonction donnée par $T_1(x, y) = \sum_{j=1}^2 \omega_j(x, y) \frac{\partial T_0}{\partial x_j}(x)$ où les $(\omega)_j$ sont les solutions des problèmes de cellules

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y K(x, y)(e_j + \nabla_y \omega_j(x, y)) = 0 & \text{dans } Y^S \\ K(x, y)(e_j + \nabla_y \omega_j(x, y)) \cdot n = \tilde{\sigma} T_0(x) G(\omega_j(x, y) + y_j) & \text{sur } \Gamma \\ y \mapsto \omega_j(x, y) & \text{est } Y\text{-périodique} \end{cases} \quad (3.48)$$

Chapitre 4

Homogénéisation du modèle 3D de diffusion, convection et rayonnement

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'homogénéisation du transfert de chaleur décrit par les équations du modèle (3.9) introduit dans la Section 3.1 du Chapitre 3. Pour obtenir le problème homogénéisé nous utilisons d'abord la méthode formelle de développement asymptotique à deux échelles. Dans une deuxième étape, nous justifions rigoureusement ce processus d'homogénéisation en utilisant la notion de convergence à deux échelles. Finalement, nous fournissons quelques résultats numériques 3D afin de montrer la convergence et les avantages de notre méthode d'homogénéisation.

Sommaire

4.1 Introduction	62
4.2 Homogénéisation par développement asymptotique	62
4.3 Convergence	75
4.3.1 Estimations a priori	76
4.3.2 Convergence à deux échelles	78
4.3.3 Convergence forte	88
4.4 Résultats analytiques dans le cas non-linéaire	89
4.5 Résultats numériques	91
4.5.1 Changement de variables pour la simulation numérique	91
4.5.2 Algorithme et données numériques	93
4.5.3 Résultats numériques	96

4.1 Introduction

Comme nous l'avons expliqué dans la Section 3.1.4, deux nouveautés seront présentées dans ce chapitre. La première repose sur l'extension en dimension 3 de l'étude réalisée par K. El Ganaoui sur l'homogénéisation du problème de transfert de chaleur par conduction et rayonnement dans une configuration 2D (voir [9], [44]) que nous avons rappelée dans la Section 3.3 du Chapitre 3. Dans l'analyse 2D, les canaux sont des disques fermés totalement isolés et le problème de conduction-rayonnement étudié dans cette géométrie est un problème périodique dans les deux directions de l'espace 2D. Ainsi, la première particularité de la présente étude réside dans la non-périodicité du rayonnement suivant la direction x_3 du domaine. Nous remédions à cette difficulté par une approche asymptotique liée à une réduction de la dimension d'espace où nous tenons compte aussi du phénomène de perte de l'énergie radiative via les extrémités ouvertes des canaux en 3D.

Le deuxième apport de ce travail réside dans le couplage du modèle de conduction-rayonnement étudié dans [44] avec les équations du transfert de chaleur dans le fluide caloporteur présent dans les canaux cylindriques. Ce couplage représente un intérêt particulier dans notre étude par homogénéisation du fait qu'il comprend une conductivité dominante dans la partie solide du domaine Ω_ε , et une convection dominante dans la partie fluide (le gaz caloporteur). Rappelons que notre objectif est d'obtenir, sous ces différentes contraintes, un comportement moyen de la température dans un domaine uniforme équivalent et de le comparer à la température obtenue par un calcul direct.

Nous rappelons ici les équations du modèle 3D que nous allons homogénéiser dans ce chapitre, soit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(K_\varepsilon^S \nabla T_\varepsilon^S) = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon^S \\ -\operatorname{div}(\varepsilon K_\varepsilon^F \nabla T_\varepsilon^F) + V_\varepsilon \cdot \nabla T_\varepsilon^F = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon^F \\ -K_\varepsilon^S \nabla T_\varepsilon^S \cdot n = -\varepsilon K_\varepsilon^F \nabla T_\varepsilon^F \cdot n + \frac{\sigma}{\varepsilon} G_\varepsilon(T_\varepsilon^F) & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ T_\varepsilon^S = T_\varepsilon^F & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ T_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

4.2 Homogénéisation par développement asymptotique

Le problème homogénéisé peut être obtenu grâce à la méthode heuristique du développement asymptotique à deux échelles introduite dans le Chapitre 1. Cette méthode est basée sur l'hypothèse de périodicité de la géométrie du milieu poreux. Cependant, puisque l'opérateur de rayonnement est seulement 2D-périodique dans le plan perpendiculaire aux

cylindres, nous introduisons une variable microscopique y' , qui est une variable 2D dans le plan de périodicité. Si $x = (x', x_3)$ représente la variable d'espace, les variables rapides et lentes sont alors liées par $y' = x'/\varepsilon$.

L'idée principale de la méthode du développement asymptotique à deux échelles est de supposer que la solution T_ε du problème (4.1) est donnée par la série :

$$T_\varepsilon = T_0(x) + \varepsilon T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 T_2(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (4.2)$$

où, pour $i = 1, 2$, $y' \rightarrow T_i(x, y')$ est Y -périodique et

$$T_i(x, y') = \begin{cases} T_i^S(x, y') & \text{dans } \Omega \times Y^S, \\ T_i^F(x, y') & \text{dans } \Omega \times Y^F, \end{cases}$$

avec la condition de continuité $T_i^S(x, y') = T_i^F(x, y')$ sur l'interface $\gamma = \partial Y^S \cap \partial Y^F$. Comme dans les exemples classiques d'homogénéisation, nous supposons ici que le premier terme du développement asymptotique T_0 dépend uniquement de la variable macroscopique x . Cette propriété peut être établie par les mêmes développements ci-dessous en supposant que $T_0 \equiv T_0(x, y')$. Nous supposons aussi que pour tout i , T_i est régulier en x_3 . Cette condition nous permet d'utiliser le résultat (3.16) du Lemme 3.1.1 pour réduire notre étude microscopique à une étude 2D.

En insérant (4.2) dans les équations du problème (4.1), nous en déduisons le résultat principal de cette section :

Proposition 4.2.1. *Sous l'hypothèse (4.2), le terme T_0 d'ordre 0 dans le développement de la solution T_ε du problème (4.1) est la solution du problème homogénéisé suivant :*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K^*(x)\nabla T_0(x)) + V^*(x) \cdot \nabla T_0(x) = \theta f(x) & \text{dans } \Omega \\ T_0(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.3)$$

où $\theta = |Y^S|/|Y|$, est un facteur de porosité, K^* est le tenseur de conductivité homogénéisé donné par la valeur de ses composantes, pour $j, k = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} K_{j,k}^*(x) &= \frac{1}{|Y|} \left[\int_{Y^S} K^S(x, y') (e_j + \nabla_{y'} \omega_j^S(y')) \cdot (e_k + \nabla_{y'} \omega_k^S(y')) dy' \right. \\ &\quad + \sigma \int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D})(\omega_k^S(y') + y_k)(\omega_j^S(y') + y_j) dy' \\ &\quad \left. + \frac{\sigma}{2} \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(z', y') |z' - y'|^2 dy' dz' \delta_{j3} \delta_{k3} \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

V^* est une vitesse verticale homogénéisée donnée par :

$$V^*(x) = \frac{e_3}{|Y|} \int_{Y^F} V(x, y') \cdot e_3 dy'$$

où ζ^{2D} est l'opérateur de facteur de forme dans la cellule unité défini par :

$$\zeta^{2D}(\omega)(s') = \int_{\gamma} F^{2D}(s', y') \omega(y') dy'$$

et, pour $j = 1, 2, 3$, $\omega_j(x, y')$ (égale à ω_j^S dans Y^S et à ω_j^F dans Y^F) est la solution du problème de cellule 2D suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_{y'} P \left[K^S(x, y') (e_j + \nabla_{y'} \omega_j^S(y')) \right] = 0 & \text{dans } Y^S \\ -\operatorname{div}_{y'} P \left[K^F(x, y') (e_j + \nabla_{y'} \omega_j^F(y')) \right] + V(x, y') \cdot (e_j + \nabla_{y'} \omega_j^F(y')) = 0 & \text{dans } Y^F \\ -P \left[K^S(x, y') (e_j + \nabla_{y'} \omega_j^S(y')) \right] \cdot n = \sigma (Id - \zeta^{2D})(\omega_j^S(y') + y_j) & \text{sur } \gamma \\ \omega_j^F(y') = \omega_j^S(y') & \text{sur } \gamma \\ y' \mapsto \omega(y') \text{ est } Y\text{-périodique,} & \end{array} \right. \quad (4.5)$$

où P est l'opérateur de projection de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 défini par (3.2). De plus, T_1 est donné par

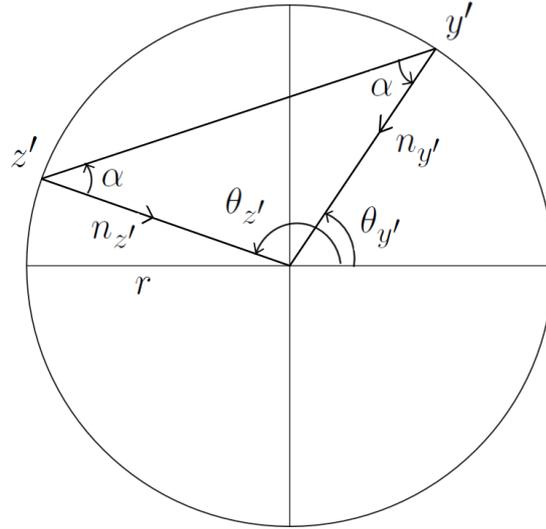
$$T_1(x, y') = \sum_{j=1}^3 \omega_j(x, y') \frac{\partial T_0}{\partial x_j}(x). \quad (4.6)$$

Remarque 4.2.1. Comme dans les exemples classiques de la méthode d'homogénéisation, les problèmes de cellule (4.5) sont des équations aux dérivées partielles par rapport à la variable y' où x joue le rôle d'un paramètre. Nous montrons, dans le Lemme 4.2.2, que ce sont des problèmes bien posés.

Notons que chaque problème de cellule dans Y peut être découpé en deux sous-problèmes successives dans Y^S et Y^F respectivement. Premièrement, nous résolvons un problème dans Y^S en utilisant la condition non-locale au bord γ , indépendamment de ce qui se passe dans Y^F . Deuxièmement, nous résolvons un problème de cellule dans Y^F avec la condition de continuité sur le bord γ comme une condition au bord de type Dirichlet. En particulier, le tenseur de conductivité homogénéisé K^* dépend seulement de Y^S .

Remarque 4.2.2. Le tenseur de conductivité homogénéisé K^* contient une extra-contribution (4.4) dans sa composante $K_{3,3}$. Cette extra-contribution dépend plutôt du facteur de forme et non pas des problèmes de cellule. Elle découle du phénomène de perte de l'énergie radiative par échappement via les deux extrémités du cylindre $\Gamma_{\varepsilon,i}$ (qui n'est pas fermé comme nous l'avons expliqué dans la remarque 3.1.2). Cette perte d'énergie radiative donne lieu à cette diffusion thermique axiale additionnelle. Pour des cylindres de section circulaire, autrement dit, γ est un cercle, nous calculons explicitement cette extra-contribution. En effet, dans ce cas le facteur de forme est donné par l'expression (voir la Figure 4.1) :

$$F^{2D}(y', z') = \frac{\cos^2 \alpha}{2|y' - z'|} = \frac{\cos \alpha}{4r}$$


 FIGURE 4.1 – Calcul explicite du facteur de forme dans γ

où r est le rayon de γ . Nous avons alors :

$$\int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(y', z') |y' - z'|^2 dy' dz' = r^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3\left(\frac{|\theta_{y'} - \theta_{z'}|}{2}\right) d\theta_{y'} d\theta_{z'} = \frac{16}{3} \pi r^3.$$

D'un autre côté, puisque $Pe_3 = 0$, la solution ω_3^S est une constante (par rapport à y') pour toute géométrie de cellule. Ceci implique que $K_{3,j}^*(x) = K_{j,3}^*(x) = 0$ pour $j = 1, 2$ et

$$K_{3,3}^*(x) = \frac{1}{|Y^S|} \int_{Y^S} K(x, y') dy' + \frac{\sigma}{2} \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(s', y') |s' - y'|^2 dy' ds'.$$

Remarque 4.2.3. Comme d'habitude dans la méthode d'homogénéisation, la Proposition 4.2.1 donne une caractérisation complète des deux premiers termes $T_0(x) + \varepsilon T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon})$ de la série (4.2). Avec une telle approximation, non seulement nous avons une bonne estimation de la température $T_\varepsilon(x)$ mais aussi de son gradient (ou le flux de température) puisqu'elle implique $\nabla T_\varepsilon(x) \approx \nabla T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon})$ (dans cette dernière formule le correcteur $\nabla_{y'} T_1$ est d'ordre 1 et ne peut donc pas être négligé). Dans la preuve de la Proposition 4.2.1, nous avons aussi besoin de prendre en compte le terme de second ordre T_2 , mais nous ne nous intéressons pas à sa valeur précise puisqu'il est négligeable pour un ε petit.

Preuve de la Proposition 4.2.1. Toutes les difficultés sont concentrées dans l'analyse du terme de rayonnement dans lequel des simplifications doivent nécessairement avoir lieu car, quand ε tend vers zéro, ce terme devient dominant dans les équations du modèle (4.1). Par conséquent, au lieu d'utiliser la méthode formelle de développement asymptotique à deux échelles dans la formulation forte du problème (4.1), ce qui est compliqué en raison de la condition limite non-locale (le terme de rayonnement), nous suivons l'exemple de [44] (basé sur une idée originale de JL Lions [60]) et nous utilisons la méthode du développement asymptotique dans la formulation variationnelle de (4.1), profitant ainsi de sa symétrie. Cette astuce

nous permet de tronquer la formulation de cette méthode à un ordre inférieur et simplifier considérablement les calculs.

La formulation variationnelle du problème (4.1) est donnée par : trouver $T_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ telle que :

$$a_\varepsilon(T_\varepsilon, \phi_\varepsilon) = L_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \quad \text{pour toute fonction } \phi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon), \quad (4.7)$$

où

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(T_\varepsilon, \phi_\varepsilon) = & \int_{\Omega_\varepsilon^S} K_\varepsilon^S(x) \nabla T_\varepsilon(x) \cdot \nabla \phi_\varepsilon(x) dx + \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon^F} K_\varepsilon^F(x) \nabla T_\varepsilon(x) \cdot \nabla \phi_\varepsilon(x) dx \\ & + \int_{\Omega_\varepsilon^F} V_\varepsilon(x) \cdot \nabla T_\varepsilon(x) \phi_\varepsilon(x) dx + \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} G(T_\varepsilon(x)) \phi_\varepsilon(x) dx, \end{aligned}$$

et

$$L_\varepsilon(\phi_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon^S} f(x) \phi_\varepsilon(x) dx.$$

Nous choisissons ϕ_ε de la même forme que T_ε dans (4.2) (mais sans le reste) :

$$\phi_\varepsilon(x) = \phi_0(x) + \varepsilon \phi_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 \phi_2(x, \frac{x'}{\varepsilon}), \quad (4.8)$$

avec des fonctions régulières $\phi_0(x)$ et $\phi_i(x, y')$, $i = 1, 2$, qui sont Y -périodiques en y' et sont telles que :

$$\phi_i(x, y') = \begin{cases} \phi_i^S(x, y') & \text{dans } \Omega \times Y^S, \\ \phi_i^F(x, y') & \text{dans } \Omega \times Y^F. \end{cases}$$

En insérant les ansatz (4.2) et (4.8) dans la formulation variationnelle (4.7) nous obtenons :

$$a^0(T_0, T_1, \phi_0, \phi_1) + \varepsilon a^1(T_0, T_1, T_2, \phi_0, \phi_1, \phi_2) = L^0(\phi_0, \phi_1) + \varepsilon L^1(\phi_0, \phi_1, \phi_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (4.9)$$

La stratégie non-conventionnelle de la preuve est la suivante : non seulement nous identifions les termes d'ordre zéro $a^0 = L^0$ mais nous utilisons aussi l'identité d'ordre un $a^1 = L^1$. L'identité d'ordre zéro, $a^0(T_0, T_1, \phi_0, \phi_1) = L^0(\phi_0, \phi_1)$, nous permet de définir le problème homogénéisé en T_0 dans Ω et le problème de cellule en T_1^S dans $\Omega \times Y^S$. L'identité d'ordre un, $a^1(T_0, T_1, T_2, \phi_0, \phi_1, \phi_2) = L^1(\phi_0, \phi_1, \phi_2)$ nous permet de définir le problème de cellule en T_1^F dans $\Omega \times Y^F$. Notons qu'il est important, pour l'identification de l'identité de premier ordre, que les fonctions test $(\phi_i)_{i=0,1,2}$ aient des supports compacts en x_3 . En effet, compte tenu des Lemmes 3.1.1 et 3.1.2, la transformation asymptotique du facteur de forme 3-D à celui 2D, n'a un reste suffisamment petit que pour des fonctions à support compact.

Pour une meilleur lisibilité, nous divisons la preuve en trois étapes. La première étape est consacrée au développement des termes de convection et de diffusion. Dans la seconde nous développons le terme de rayonnement, tandis que dans la troisième, nous combinons ces différents termes pour identifier les équations du même ordre en puissances de ε et en déduire le problème homogénéisé et les problèmes de cellule.

Nous donnons maintenant le détail de cette preuve. Nous commençons par réécrire la formulation variationnelle (4.7) telle que :

$$a_\varepsilon(T_\varepsilon, \phi_\varepsilon) = a_\varepsilon^C(T_\varepsilon, \phi_\varepsilon) + a_\varepsilon^{ray}(T_\varepsilon, \phi_\varepsilon) = L_\varepsilon(\phi_\varepsilon)$$

où

$$\begin{aligned} a_\varepsilon^C(T_\varepsilon, \phi_\varepsilon) &= \int_{\Omega_\varepsilon^S} K_\varepsilon^S(x) \nabla T_\varepsilon(x) \cdot \nabla \phi_\varepsilon(x) dx + \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon^F} K_\varepsilon^F(x) \nabla T_\varepsilon(x) \cdot \nabla \phi_\varepsilon(x) dx \\ &\quad + \int_{\Omega_\varepsilon^F} V_\varepsilon(x) \cdot \nabla T_\varepsilon(x) \phi_\varepsilon(x) dx \\ a_\varepsilon^{ray}(T_\varepsilon, \phi_\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} G(\sigma T_\varepsilon(x)) \phi_\varepsilon(x) dx. \end{aligned}$$

1^{ère} étape : Développement de $a_\varepsilon^C - L_\varepsilon$

Cette étape est une étape standard d'homogénéisation par développement asymptotique. En insérant les ansatz (4.2) et (4.8) dans $a_\varepsilon^C - L_\varepsilon$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_\varepsilon^C - L_\varepsilon &= \\ &\int_{\Omega_\varepsilon^S} K_\varepsilon^S [(\nabla_x T_0 + \nabla_{y'} T_1) \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1)] + \int_{\Omega_\varepsilon^F} V_\varepsilon \cdot (\nabla_x T_0 + \nabla_{y'} T_1) \phi_0 \\ &+ \varepsilon \left[\int_{\Omega_\varepsilon^S} K_\varepsilon^S [(\nabla_x T_1 + \nabla_{y'} T_2) \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) + (\nabla_x \phi_1 + \nabla_{y'} \phi_2) \cdot (\nabla_x T_0 + \nabla_{y'} T_1)] + \right. \\ &\left. \int_{\Omega_\varepsilon^F} K_\varepsilon^F (\nabla_x T_0 + \nabla_{y'} T_1) \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) + \int_{\Omega_\varepsilon^F} V_\varepsilon \cdot [(\nabla_x T_1 + \nabla_{y'} T_2) \phi_0 + (\nabla_x T_0 + \nabla_{y'} T_1) \phi_1] \right] \\ &- \int_{\Omega_\varepsilon^S} f(\phi_0 + \varepsilon \phi_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

où toutes les fonctions sont évaluées au point $(x, x'/\varepsilon)$. En utilisant le Lemme 4.2.3, nous

avons :

$$\begin{aligned}
 |Y|(a_\varepsilon^C - L_\varepsilon) = & \\
 & \int_{\Omega} \int_{Y^S} K^S(x, y') (\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_{y'} \phi_1(x, y')) dy' dx \\
 & + \int_{\Omega} \int_{Y^F} V(x, y') \cdot \nabla_x T_0(x) \phi_0(x) dy' dx - \int_{\Omega} \int_{Y^S} f(x) \phi_0(x) dy' dx \\
 & + \varepsilon \left[\int_{\Omega} \int_{Y^S} K^S(x, y') [(\nabla_x T_1(x, y') + \nabla_{y'} T_2(x, y')) \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_{y'} \phi_1(x, y')) \right. \\
 & \quad \left. + (\nabla_x \phi_1(x, y') + \nabla_{y'} \phi_2(x, y')) \cdot (\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) \right] dy' dx \tag{4.10} \\
 & + \int_{\Omega} \int_{Y^F} K^F(x, y') (\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_{y'} \phi_1(x, y')) dy' dx \\
 & + \int_{\Omega} \int_{Y^F} V(x, y') \cdot [\nabla_x T_1(x, y') \phi_0(x) + \nabla_x T_0(x) \phi_1(x, y') + \nabla_{y'} T_1(x, y') \phi_1(x, y')] dy' dx \\
 & \left. - \int_{\Omega} \int_{Y^S} f(x) \phi_1(x, y') dy' dx \right] \\
 & + \mathcal{O}(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

2^{ème} étape : Développement de a_ε^{ray}

Un développement similaire de l'opérateur de rayonnement dans une configuration 2D a été effectué dans [44]. Néanmoins, la présente configuration 3D est différente car, les canaux d'hélium étant des cylindres minces et longs, une transformation asymptotique 3D \rightarrow 2D de cet opérateur (qui ne se produisait pas dans [44]) s'ajoute à la présente étude.

L'objet de cette deuxième étape consiste à écrire un développement de Taylor de l'opérateur de rayonnement jusqu'à l'ordre 2,

$$a_\varepsilon^{ray} = a_0^{ray} + \varepsilon a_1^{ray} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{4.11}$$

Heureusement, comme nous allons le voir plus tard, le terme a_1^{ray} ne joue aucun rôle dans la définition du correcteur T_1 dans Y^F . Par conséquent, nous n'avons pas besoin d'évaluer a_1^{ray} ce qui réduit considérablement le calcul colossal nécessaire à cette évaluation.

Le terme de rayonnement est donné par :

$$a_\varepsilon^{ray} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \left[\int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} T_\varepsilon(x) \phi_\varepsilon(x) dx - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} F(x, s) T_\varepsilon(x) \phi_\varepsilon(s) dx ds \right]. \tag{4.12}$$

Dans l'ansatz (4.2) et (4.8), nous appliquons un développement de Taylor autour du centre de masse $x'_{0,i}$ de chaque surface $\gamma_{\varepsilon,i}$. Pour simplifier les notations, nous supprimons l'indice

i et nous notons par x'_0 chaque $x'_{0,i}$. Nous notons aussi $(x' - x'_0)$ par $\varepsilon h'$ et $(s' - x'_0)$ par $\varepsilon l'$. Nous avons alors :

$$T_\varepsilon(x) = T_0(x'_0, x_3) + \varepsilon \left(P\nabla_{x'} T_0(x'_0, x_3) \cdot h' + T_1(x'_0, \frac{x'}{\varepsilon}, x_3) \right) + \varepsilon^2 \widehat{T}_{2,\varepsilon}(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (4.13)$$

$$\phi_\varepsilon(s) = \phi_0(x'_0, s_3) + \varepsilon \left(P\nabla_{x'} \phi_0(x'_0, s_3) \cdot l' + \phi_1(x'_0, \frac{s'}{\varepsilon}, s_3) \right) + \varepsilon^2 \widehat{\phi}_{2,\varepsilon}(s) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (4.14)$$

où

$$\widehat{T}_{2,\varepsilon}(x) = \frac{1}{2} P\nabla_{x'} P\nabla_{x'} T_0(x'_0, x_3) h' \cdot h' + P\nabla_{x'} T_1(x'_0, \frac{x'}{\varepsilon}, x_3) \cdot h' + T_2(x'_0, \frac{x'}{\varepsilon}, x_3)$$

$$\widehat{\phi}_{2,\varepsilon}(s) = \frac{1}{2} P\nabla_{x'} P\nabla_{x'} \phi_0(x'_0, s_3) l' \cdot l' + P\nabla_{x'} \phi_1(x'_0, \frac{s'}{\varepsilon}, s_3) \cdot l' + \phi_2(x'_0, \frac{s'}{\varepsilon}, s_3)$$

La forme exacte de $\widehat{T}_{2,\varepsilon}$ et $\widehat{\phi}_{2,\varepsilon}$ n'est pas importante puisque tous les termes d'ordre supérieur à $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ vont disparaître par simplification comme nous allons le voir plus tard. En utilisant (4.13) et (4.14), nous obtenons :

$$T_\varepsilon(x) \phi_\varepsilon(s) = (T\phi)_0(x_3, s_3) + \varepsilon (T\phi)_1(x, s) + \varepsilon^2 (T\phi)_2(x, s) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

où

$$(T\phi)_0(x_3, s_3) = \phi_0(x'_0, s_3) T_0(x'_0, x_3)$$

$$(T\phi)_1(x, s) = \phi_0(x'_0, s_3) P\nabla_{x'} T_0(x'_0, x_3) \cdot h' + T_0(x'_0, x_3) P\nabla_{x'} \phi_0(x'_0, s_3) \cdot l' \\ + \phi_0(x'_0, s_3) T_1(x'_0, \frac{x'}{\varepsilon}, x_3) + \phi_1(x'_0, \frac{s'}{\varepsilon}, s_3) T_0(x'_0, x_3)$$

$$(T\phi)_2(x, s) = \phi_1(x'_0, \frac{s'}{\varepsilon}, s_3) T_1(x'_0, \frac{x'}{\varepsilon}, x_3) + \widehat{T}_{2,\varepsilon} \phi_0(x'_0, s_3) + \widehat{\phi}_{2,\varepsilon} T_0(x'_0, x_3) \\ + P\nabla_{x'} \phi_0(x'_0, s_3) \cdot l' P\nabla_{x'} T_0(x'_0, s_3) \cdot h' + \phi_1(x'_0, \frac{s'}{\varepsilon}, s_3) P\nabla_{x'} T_0(x'_0, s_3) \cdot h' \\ + T_1(x'_0, \frac{x'}{\varepsilon}, x_3) P\nabla_{x'} \phi_0(x'_0, s_3) \cdot l'$$

Puisque les fonctions test ϕ_i possèdent des supports compacts dans Ω , nous pouvons utiliser alors la formule (3.16) du Lemme 3.1.1 concernant la transformation asymptotique du facteur de forme 3D au facteur de forme 2D. Nous en déduisons que :

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} (T\phi)_0(x_3, s_3) F(s, x) ds dx = \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} F^{2D}(s', x') \int_0^{L_3} (T\phi)_0(x_3, x_3) dx_3 \\ - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} F^{2D}(s', x') |x' - s'|^2 \int_0^{L_3} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_3}(x'_0, x_3) \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x'_0, x_3) dx_3 + |\gamma_{\varepsilon,i}|^2 \mathcal{O}(\varepsilon^{p-1}),$$

où chaque $0 < p < 3$ est admissible. D'où, puisque $|\gamma_{\varepsilon,i}| = \varepsilon|\gamma|$ et $\int_{\gamma_{\varepsilon,i}} F^{2D}(s', x') dx' = 1$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} (T\phi)_0(x_3, x_3) ds - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} (T\phi)_0(x_3, s_3) F(s, x) ds dx \right) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\gamma_{\varepsilon,i}} \int_{\gamma_{\varepsilon,i}} F^{2D}(s', x') |x' - s'|^2 \int_0^{L_3} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_3}(x'_0, x_3) \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x'_0, x_3) dx_3 + |\gamma|^2 \mathcal{O}(\varepsilon^p). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Avec un calcul similaire, en prenant en compte les différentes simplifications par symétrie du facteur de forme, et le fait que

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,i}} (Id - \zeta^{2D}) f(x) dx = 0,$$

pour toute fonction f qui ne dépend que de la variable x (ou que de la variable s), nous avons :

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \varepsilon (T\phi)_1(x, x) ds - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \varepsilon (T\phi)_1(x, s) F(s, x) ds dx \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (4.16)$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \varepsilon^2 (T\phi)_2(x, x) ds - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \varepsilon^2 (T\phi)_2(x, s) F(s, x) ds dx \right) \\ &= \varepsilon \left(\int_0^{L_3} \int_{\gamma_{\varepsilon,i}} \phi_1(x'_0, \frac{s'}{\varepsilon}, x_3) \left[T_1(x'_0, \frac{s'}{\varepsilon}, x_3) - \int_{\gamma_{\varepsilon,i}} T_1(x'_0, \frac{x'}{\varepsilon}, x_3) F^{2D}(s', x') dx' \right] ds' dx_3 \right. \\ &+ \int_0^{L_3} \int_{\gamma_{\varepsilon,i}} (\nabla_{x'} \phi_0(x'_0, x_3) \cdot l') \nabla_{x'} T_0(x'_0, x_3) \cdot \left[l' - \int_{\gamma_{\varepsilon,i}} h' F^{2D}(s', x') dx' \right] ds' dx_3 \\ &+ \int_0^{L_3} \int_{\gamma_{\varepsilon,i}} \nabla_{x'} \phi_0(x'_0, x_3) \cdot l' \left[T_1(x'_0, \frac{s'}{\varepsilon}, x_3) - \int_{\gamma_{\varepsilon,i}} T_1(x'_0, \frac{x'}{\varepsilon}, x_3) F^{2D}(s', x') dx' \right] ds' dx_3 \\ &\left. + \int_0^{L_3} \int_{\gamma_{\varepsilon,i}} \phi_1(x'_0, \frac{s'}{\varepsilon}, x_3) \nabla_{x'} T_0(x'_0, x_3) \cdot \left[l' - \int_{\gamma_{\varepsilon,i}} h' F^{2D}(s', x') dx' \right] ds' dx_3 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dans (4.16) et (4.17), nous ne donnons pas les formules explicites des termes d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^q)$ avec $q > 2$ car, après une mise à l'échelle macroscopique et une sommation sur toutes les cellules, ces termes deviendront d'ordre ε^{q-1} , et vu que nous ne nous intéressons qu'aux termes d'ordre 1 dans cette preuve (car nous ne voulons pas détailler la forme exacte de a_1^{ray}), ces termes vont alors disparaître. En particulier, nous ne donnons pas les formules des termes diffusifs venant de la transformation 3D, 2D du facteur de forme.

En utilisant le Lemme 4.2.3, après un changement de variables $y' = x'/\varepsilon$ et $z' = s'/\varepsilon$ dans (4.15,4.16,4.17) et une sommation sur toutes les cellules, nous obtenons :

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} \left[\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} T_{\varepsilon}(x) \phi_{\varepsilon}(x) dx - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} T_{\varepsilon}(x) \phi_{\varepsilon}(s) F(s, x) ds dx \right] = a_0^{ray} + \mathcal{O}(\varepsilon^{p-2}) \quad (4.18)$$

avec

$$\begin{aligned}
 a_0^{ray} &= \frac{\sigma}{|Y|} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_3}(x) \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x) dx \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(z', y') |z' - y'|^2 dy' dz' \right. \\
 &+ \int_{\Omega} P \nabla_{x'} \phi_0(x) \cdot \int_{\gamma} [h' \otimes h' - \int_{\gamma} h' \otimes l' F^{2D}(z', y') dz'] dy' P \nabla_{x'} T_0(x) dx \\
 &+ \int_{\Omega} P \nabla_{x'} T_0(x) \cdot \int_{\gamma} \phi_1(x, y') (y' - \int_{\gamma} z' F^{2D}(z', y') dz') dy' dx \\
 &+ \int_{\Omega} P \nabla_{x'} \phi_0(x) \cdot \int_{\gamma} T_1(x, y') (y' - \int_{\gamma} z' F^{2D}(z', y') dz') dy' dx \\
 &\left. + \int_{\Omega} \int_{\gamma} \phi_1(x, y') \left(T_1(x, y') - \int_{\gamma} T_1(x, z') F^{2D}(y', z') dz' \right) dy' dx \right) \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

Remarque 4.2.4. Pour poursuivre dans la même logique de cette preuve, nous continuons de noter $a_{\varepsilon}^{ray} = a_0^{ray} + \varepsilon a_1^{ray} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ où a_0^{ray} est donné par la formule (4.19). a_1^{ray} , que nous n'avons pas voulu détailler dans ce chapitre, peut éventuellement être défini avec les mêmes calculs ci-dessus en poussant d'un ordre plus loin en ε les développements de T_{ε} et ϕ_{ε} . De tels calculs sont donnés dans le Chapitre 5 dans une configuration parfaitement 2D (où nous n'avons donc pas les termes venant de la transformation 3D \rightarrow 2D des facteurs de forme).

3^{ème} étape : Identification des équations suivant les puissances de ε :

- A l'ordre ε^0 , nous obtenons de (4.9) :

$$a^0(T_0, T_1, \phi_0, \phi_1) = L^0(\phi_0, \phi_1),$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \int_{Y^S} K(x, y') (\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_{y'} \phi_1(x, y')) dy' dx \\
 &+ \int_{\Omega} \int_{Y^F} V(x, y') \cdot \nabla_x T_0(x) \phi_0(x) dy' dx \\
 &+ \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_3}(x) \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x) dx \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(z', y') |z' - y'|^2 dy' dz' \\
 &+ \sigma \int_{\Omega} P \nabla_{x'} T_0(x) \cdot \int_{\gamma} \phi_1(x, y') (y' - \int_{\gamma} z' F^{2D}(z', y') dz') dy' dx \\
 &+ \sigma \int_{\Omega} P \nabla_{x'} \phi_0(x) \cdot \int_{\gamma} T_1(x, y') (y' - \int_{\gamma} z' F^{2D}(z', y') dz') dy' dx \\
 &+ \sigma \int_{\Omega} P \nabla_{x'} \phi_0(x) \cdot \int_{\gamma} [h' \otimes h' - \int_{\gamma} h' \otimes l' F^{2D}(z', y') dz'] P \nabla_{x'} T_0(x) dy' dx \\
 &+ \sigma \int_{\Omega} \int_{\gamma} \phi_1(x, y') \left(T_1(x, y') - \int_{\gamma} T_1(x, z') F^{2D}(y', z') dz' \right) dy' dx \\
 &= |Y^S| \int_{\Omega} f(x) \phi_0(x) dx \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

Nous reconnaissons dans (4.20) la formulation variationnelle du problème dit problème limite à deux échelles. C'est une combinaison entre le problème homogénéisé et les problèmes de cellule.

Nous retrouvons les problèmes de cellule dans Y^S en prenant $\phi_0 = 0$ dans la formulation variationnelle limite (4.20), soit :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{Y^S} K(x, y') (\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) \cdot \nabla_{y'} \phi_1(x, y') \\ & + \sigma \int_{\Omega} P \nabla_{x'} T_0(x) \cdot \int_{\gamma} \phi_1(x, y') (y' - \int_{\gamma} z' F^{2D}(z', y') dz') dy' dx \\ & + \sigma \int_{\Omega} \int_{\gamma} \int_{\gamma} (\delta(y' - z') - F^{2D}(y', z')) T_1(x, z') \phi_1(x, y') dz' dy' dx = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

La solution T_1 de cette formulation variationnelle est donnée par la formule (4.6) dans Y^S où $(\omega_j(y) \equiv \omega_j^S(x, y))_{1 \leq j \leq 3}$ sont les solutions des problèmes de cellule dans Y^S suivants :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{y'} P \left[K(x, y') (e_j + \nabla_{y'} \omega_j^S(y')) \right] = 0 & \text{dans } Y^S \\ -P \left[K(x, y') (e_j + \nabla_{y'} \omega_j^S(y')) \right] \cdot n = \sigma (Id - \zeta^{2D}) (\omega_j^S(y') + y_j) & \text{sur } \gamma \\ y' \mapsto \omega_j^S(y') & \text{est } Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (4.22)$$

Pour retrouver le problème homogénéisé, nous remplaçons ϕ_1 par 0 dans (4.20). nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{Y^S} \sum_{k,j=1}^3 K(x, y') (\nabla_{y'} \omega_k(y') + e_k) \cdot (\nabla_{y'} \omega_j(y') + e_j) \frac{\partial T_0}{\partial x_k}(x) \frac{\partial \phi_0}{\partial x_j}(x) dy' dx \\ & + \int_{\Omega} \int_{Y^F} \sum_{k=1}^3 V_k(x, y') \frac{\partial T_0}{\partial x_k}(x) \phi_0(x) dy' dx \\ & + \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_3}(x) \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x) dx \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(z', y') |z' - y'|^2 dy' dz' \\ & + \sigma \int_{\Omega} \int_{\gamma} \sum_{k,j=1}^3 (Id - \zeta^{2D}) (\omega_k(y') + y_k) (\omega_j(y') + y_j) \frac{\partial T_0}{\partial x_k}(x) \frac{\partial \phi_0}{\partial x_j}(x) dy' dx \\ & = |Y^S| \int_{\Omega} f(x) \phi_0(x) dx \end{aligned} \quad (4.23)$$

qui n'est rien d'autre que la formulation variationnelle du problème (4.3) où K^* et V^* sont donnés par les formules de la Proposition 4.2.1.

- A l'ordre ε^1 , nous allons voir comment obtenir, à partir de (4.9), les problèmes de cellule dans Y^F .

Jusqu'à présent, nous avons défini la conductivité homogénéisée, la vitesse homogénéisée et le problème homogénéisé sur l'inconnue T_0 dans le domaine Ω . Cependant, comme

nous avons vu dans la Remarque 4.2.3, Nous voulons approcher la solution T_ε , non seulement par T_0 , mais par T_0 plus un correcteur que nous choisissons de la formule du développement asymptotique de T_ε . Soit :

$$T_\varepsilon(x) \approx T_0(x) + \varepsilon T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon})$$

Nous avons vu dans l'étape précédente sur l'identification à l'ordre zéro que $T_1(x, y')$ est défini grâce aux solutions des problèmes de cellule. Ces problèmes de cellule sont complètement définis dans Y^S , mais pas encore dans Y^F , c'est pourquoi nous poussons nos développements jusqu'à voir ce qui se passe à l'ordre ε^1 . En identifiant les termes d'ordre ε^1 dans (4.9), nous avons :

$$a^1(T_0, T_1, T_2, \phi_0, \phi_1, \phi_2) = L^1(\phi_0, \phi_1, \phi_2)$$

ce qui équivalent à :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{Y^S} K(x, y') [(\nabla_x T_1(x, y') + \nabla_{y'} T_2(x, y')) \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_{y'} \phi_1(x, y')) \\ & + (\nabla_x \phi_1(x, y') + \nabla_{y'} \phi_2(x, y')) \cdot (\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y'))] dy' dx \\ & + \int_{\Omega} \int_{Y^F} K(x, y') (\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_{y'} \phi_1(x, y')) dy' dx \\ & + \int_{\Omega} \int_{Y^F} V(x, y') \cdot [\nabla_x T_1(x, y') \phi_0(x) + \nabla_x T_0(x) \phi_1(x, y') + \nabla_{y'} T_1(x, y') \phi_1(x, y')] dy' dx \\ & + a_1^{ray} \\ & = \int_{\Omega} \int_{Y^S} f(x) \phi_1(x, y') dy' dx \end{aligned}$$

Cette formulation variationnelle correspond, quand $\phi_0 = 0$ et $\phi_2 = 0$, à deux problèmes découplés, un problème sur T_2 dans Y^S et un problème sur T_1 dans Y^F . Le problème sur T_2 est donné par :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{y'} P [K(x, y') (\nabla_x T_1 + \nabla_{y'} T_2)] - \operatorname{div}_x K(y', x_3) (\nabla_x T_0 + \nabla_{y'} T_1) = f(x) & \text{dans } Y^S \\ -P [K(x, y') (\nabla_x T_1 + \nabla_{y'} T_2)] \cdot n = G_{ray}^1(T_0, T_1, T_2) & \text{sur } \gamma \end{cases}$$

Ici, nous n'allons ni montrer l'expression de G_{ray}^1 , ni résoudre le problème sur T_2 dans Y^S , parce-que celui qui nous intéresse est celui posé dans Y^F , soit

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{y'} P [K(x, y') (\nabla T_0 + \nabla_{y'} T_1)] + V(x, y') \cdot (\nabla_x T_0 + \nabla_{y'} T_1) = 0 & \text{dans } Y^F \\ T_1 \text{ est continue en } \gamma \end{cases} \quad (4.24)$$

La solution T_1 de (4.24) s'écrit alors aussi sous la forme de la formule (4.6) dans Y^F où

$(\omega_j(y) \equiv \omega_j^F(y))_{1 \leq j \leq 3}$ sont les solutions des problèmes de cellule dans Y^F donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_{y'} P \left[K(x, y') (e_j + \nabla_{y'} \omega_j^F(y')) \right] + V(x, y') \cdot (e_j + \nabla_{y'} \omega_j^F(y')) & = 0 \quad \text{dans } Y^F \\ \omega_j^F & = \omega_j^S \quad \text{sur } \gamma \\ y' \mapsto \omega_j^F(y') & \text{est } Y\text{-périodique} \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Finalement, en combinant (4.22) et (4.25), nous obtenons les problèmes de cellules (4.5) dans toute la cellule élémentaire Y . \square

Remarque 4.2.5. Notons que dans l'identification des termes d'ordre ε^1 , en choisissant $\phi_0 = 0$ et $\phi_2 = 0$, le seul terme diffusif d'ordre non négligeable venant de la transformation 3D-2D des facteurs de forme est le suivant :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3}(x, y') \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x) F^{2D}(y', z') |y' - z'|^2 dz' dy' dx.$$

Ce terme est caché dans l'expression de G_{ray}^1 et n'a donc aucun effet sur les problèmes de cellules dans Y^F .

Lemme 4.2.1. Le problème homogénéisé (4.3) admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$.

Preuve. L'opérateur de rayonnement $G = (Id - \zeta^{2D})$ étant non-négatif dans γ (d'après le Lemme 3.1.3), il suffit alors de remarquer que le tenseur bilinéaire K^* hérite des propriétés de K_ε (coercif, continu) pour en déduire que le problème homogénéisé (4.3) admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$ d'après le lemme de Lax-Milgram. \square

Lemme 4.2.2. Chaque problème de cellule (4.5) admet une solution unique à une constante près dans $H_{\#}^1(Y)$.

Preuve. Nous rappelons d'abord que chaque problème de cellule dans Y est composé de deux problèmes de cellule indépendants, le problème (4.22) dans Y^S avec la condition de Neumann sur le bord γ et le problème (4.25) dans Y^F avec la condition de continuité de type Dirichlet.

Pour toute fonction $\phi \in H_{\#}^1(Y^S)$, la formulation variationnelle de (4.22) est donnée par :

$$\begin{aligned} \int_{Y^S} K(y) \nabla_y \omega_i(y) \nabla_y \phi(y) + \int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D}) \omega_i(y) \phi(y) \\ = \int_{Y^S} K(y) \nabla_y y_i \nabla_y \phi(y) + \int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D}) y_i \phi(y). \end{aligned} \quad (4.26)$$

En utilisant (3.35), nous déduisons que la forme bilinéaire de (4.26) est coercive dans $H_{\#}^1(Y^S)/\mathbb{R}$:

$$a(\phi, \phi) = \int_{Y^S} K^S \nabla_{y'} \phi \cdot \nabla_{y'} \phi + \int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D}) \phi \phi \geq C \|\nabla_y \phi\|_{L_{\#}^2(Y^S)} \equiv C \|\phi\|_{H_{\#}^1(Y^S)/\mathbb{R}}. \quad (4.27)$$

De plus, puisque (3.34) implique que (4.26) est toujours vraie pour une fonction test constante, à l'aide de l'alternative de Fredholm (voir [74]), nous déduisons l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.22) dans $H_{\#}^1(Y^S)/\mathbb{R}$ (i.e., à une constante près).

L'existence d'une solution du problème (4.25) est standard en utilisant le théorème de Lax-Milgram. L'unicité de ω_j^F est aussi définie à une constante près à cause de l'unicité à une constante près de ω_j^S . \square

Ici nous donnons l'énoncé du lemme utilisé dans la preuve de la Proposition 4.2.1.

Lemme 4.2.3. *Pour toute fonction f régulière, et pour chaque entier $p \geq 0$, nous avons :*

$$\begin{aligned} i. \quad & \int_{Y_{\varepsilon,i}} f\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right)(x'_k - x'_{0,k})^p dx' = \varepsilon^{1+p} \int_Y f(y')(y'_k - y'_{0,k})^p dy' \\ ii. \quad & \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \int_0^{L_3} f(x'_{0,i}, x_3) dx_3 = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} f(x) dx + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ iii. \quad & \int_{\Omega_{\varepsilon}^{S,F}} f\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y^{S,F}} f(x, y') dy' dx + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Preuve. La preuve de la première formule est immédiate en utilisant un simple changement de variables. Pour (ii), nous procédons par un développement de Taylor de $f(x')$, qui est supposée dans $C^2(\Omega)$, autour de $x'_{0,i}$ le centre de masse de chaque cellule $Y_{\varepsilon,i}$:

$$f(x', x_3) = f(x'_{0,i}, x_3) + (x' - x'_{0,i}) \nabla_{x'} f(x'_{0,i}, x_3) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

qui devient par intégration dans $Y_{\varepsilon,i}$:

$$\int_{Y_{\varepsilon,i}} f(x', x_3) dx' = \varepsilon^2 |Y| f(x'_{0,i}, x_3) + |Y| \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

parce-que $|Y_{\varepsilon,i}| = \varepsilon^2 |Y|$ et $\int_{Y_{\varepsilon,i}} (x' - x'_{0,i}) dx' = 0$.

Finalement, après sommation et intégration entre 0 et L_3 en x_3 , nous avons le résultat :

$$\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \int_0^{L_3} f(x_{0,i}, x_3) dx_3 = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} f(x) dx + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{because} \quad \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \mathcal{O}(\varepsilon^2) \equiv \mathcal{O}(\varepsilon^0).$$

La preuve de (vi) est une conséquence des deux premières. \square

4.3 Convergence

Le résultat obtenu dans la section précédente est formel. Il est basé sur l'hypothèse que l'inconnue T_{ε} admet le développement asymptotique (4.2). Par conséquent, pour compléter notre étude, nous avons besoin d'une justification rigoureuse de ce résultat. Ici, nous donnons un résultat de convergence basé sur la méthode de convergence à deux échelles appelée dans la Section 2.4 du Chapitre 2. Nous renvoyons vers [1] et [68] pour plus de détails sur cette méthode.

4.3.1 Estimations a priori

Comme nous avons vu dans la Section 2.4 du Chapitre 2, nous avons besoin de quelques estimations a priori sur l'inconnue T_ε du problème (4.1) pour pouvoir utiliser la méthode de convergence à deux échelles. Nous commençons alors cette section par établir les estimations a priori sur T_ε dont nous avons besoin pour la suite.

Théorème 4.3.1. *Soit T_ε la solution du problème (4.1). Il existe une constante C , qui ne dépend pas de ε telle que :*

$$\|T_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla T_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^S)} + \sqrt{\varepsilon}\|\nabla T_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^F)} + \sqrt{\varepsilon}\|T_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)} \leq C. \quad (4.28)$$

Preuve. Si nous prenons $\phi_\varepsilon = T_\varepsilon$ dans la formulation variationnelle (4.7) du problème (4.1) nous avons alors :

$$\int_{\Omega_\varepsilon^S} K_\varepsilon |\nabla T_\varepsilon|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon^F} K_\varepsilon |\nabla T_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon^F} V_\varepsilon \cdot \nabla T_\varepsilon T_\varepsilon dx + \frac{1}{\varepsilon} \sigma \int_{\Gamma_\varepsilon} G_\varepsilon(T_\varepsilon) T_\varepsilon ds = \int_{\Omega_\varepsilon^S} f T_\varepsilon dx \quad (4.29)$$

Puisque $\operatorname{div} V_\varepsilon = 0$ dans Ω_ε^F , $V_\varepsilon \cdot n = 0$ sur Γ_ε et $T_\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega$, nous avons

$$\int_{\Omega_\varepsilon^F} V_\varepsilon \cdot \nabla T_\varepsilon T_\varepsilon dx = 0.$$

De plus, puisque G_ε est un opérateur positif (voir la Section 3.1.3)

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} G_\varepsilon(T_\varepsilon) T_\varepsilon ds \geq 0.$$

Par conséquent, en utilisant la coercivité de K_ε , nous obtenons

$$\alpha \|\nabla T_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^S)}^2 + \alpha \varepsilon \|\nabla T_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^F)}^2 \leq C \|T_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^S)}. \quad (4.30)$$

Le résultat du Lemme 4.3.1 nous permet d'écrire :

$$\|\nabla T_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^S)} \leq C. \quad (4.31)$$

D'un autre coté, en utilisant le Lemme 4.3.3 et la formule (4.30) nous avons :

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left[\|T_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^S)}^2 + \varepsilon^2 \|\nabla T_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\leq C \left[1 + \varepsilon \|\nabla T_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^F)}^2 \right] \\ &\leq C \left[1 + \|T_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \right] \end{aligned}$$

(puisque $\varepsilon < 1$) de laquelle nous déduisons :

$$\|T_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C. \quad (4.32)$$

Grâce à (4.32), et en utilisant (4.30) une deuxième fois, nous avons :

$$\sqrt{\varepsilon} \|\nabla T_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^F)} \leq C. \quad (4.33)$$

Nous déduisons alors, grâce à (4.32), (4.31) et le Lemme 4.3.2, que :

$$\sqrt{\varepsilon} \|T_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)} \leq C. \quad (4.34)$$

En combinant (4.31), (4.32), (4.33) et (4.34) nous obtenons finalement le résultat de l'estimation a priori (4.28). \square

Lemme 4.3.1. (Lemme A.4 dans [12]) *Il existe une constante C , qui ne dépend pas de ε , telle que :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^S)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^S)} \quad \forall u \in H^1(\Omega_\varepsilon^S).$$

Lemme 4.3.2. (Lemme 2.7 dans [64] et Lemme 4.2.4 dans [9]) *Il existe une constante $C > 0$, qui ne dépend pas de ε , telle que :*

$$\sqrt{\varepsilon} \|u\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)} \leq C(\Omega) \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^S)} \quad \forall u \in H^1(\Omega_\varepsilon^S). \quad (4.35)$$

Lemme 4.3.3. *Il existe une constante C , qui ne dépend pas de ε , telle que :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^F)} \leq C(\Omega) \left[\|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^S)} + \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right] \quad \forall u \in H^1(\Omega_\varepsilon). \quad (4.36)$$

Preuve du Lemme 4.3.3. Notons d'abord que, en l'absence de l'opérateur de rayonnement, nous pouvons considérer que le domaine Ω_ε est périodique dans ses 3 directions. Nous notons dans ce cas par $Y = Y^F \cap Y^S$ la cellule unitaire en 3D. Nous montrons que par un simple changement d'échelle et une sommation sur toutes les cellules, il suffirait alors qu'il existe une constante C , qui ne dépend pas de ε , telle que

$$\|u\|_{L^2(Y^F)}^2 \leq C(\Omega) \left[\|u\|_{L^2(Y^S)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(Y)}^2 \right] \quad \forall u \in H^1(Y). \quad (4.37)$$

En effet, si (4.37) est vraie, par le changement de variable $x = \varepsilon y$, nous nous ramenons à une cellule $Y_{\varepsilon,i}$ de Ω_ε telle que :

$$\|u\|_{L^2(Y_{\varepsilon,i}^F)}^2 \leq C(\Omega) \left[\|u\|_{L^2(Y_{\varepsilon,i}^S)}^2 + \varepsilon^2 \|\nabla u\|_{L^2(Y_{\varepsilon,i})}^2 \right]$$

En sommant sur toutes les cellules de Ω_ε , sachant que $0 < \varepsilon < 1$, nous obtenons (4.36).

Nous démontrons (4.37) par contradiction. En effet, supposons qu'elle n'est pas vraie, autrement dit, supposons qu'il existe une suite $\phi_n \in H^1(Y)$, pour $n \geq 1$, telle que :

$$\|\phi_n\|_{L^2(Y^F)} = 1 \text{ and } \|\phi_n\|_{L^2(Y^S)}^2 + \|\nabla\phi_n\|_{L^2(Y)}^2 < \frac{1}{n}. \quad (4.38)$$

A une sous-suite près, ϕ_n converge faiblement dans $H^1(Y)$ vers une limite ϕ . Cette convergence est donc forte dans $L^2(Y)$ grâce au théorème de Rellich. Par contre, (4.38) nous dit que $\nabla\phi_n$ converge fortement vers 0 dans $L^2(Y)$. Par conséquent, $\nabla\phi = 0$ et ϕ sont constantes dans Y . (4.38) nous dit encore que cette constante vaut 0 dans Y^S ce qui est contradictoire avec le fait que $\|\phi\|_{L^2(Y^F)} = \lim_n \|\phi_n\|_{L^2(Y^F)} = 1$. \square

4.3.2 Convergence à deux échelles

Dans cette section, nous donnons un résultat rigoureux d'homogénéisation basé sur la méthode de convergence à deux échelles. Nous rappelons que cette méthode est particulièrement utile pour l'homogénéisation des EDP à coefficients périodiquement oscillants. Ici, en absence de périodicité de l'opérateur de rayonnement suivant la troisième direction de l'espace, nous modifions légèrement les définitions de cette méthode décrites dans [1] et rappelées dans le Chapitre 2 de ce document (ces modifications n'affectent en aucun cas les preuves de ces définitions).

Définition 4.3.1. Une suite u_ε bornée dans $L^2(\Omega)$ est dite convergente à deux échelles vers une fonction $u_0(x, y') \in L^2(\Omega \times Y)$ s'il existe une sous-suite, toujours notée par u_ε , telle que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \psi(x, \frac{x'}{\varepsilon}) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y u_0(x, y') \psi(x, y') dx dy', \quad (4.39)$$

pour toute fonction test Y -périodique $\psi(x, y') \in L^2(\Omega; C_{\#}(Y))$.

Cette notion de convergence à deux échelles a un sens grâce au théorème de compacité suivant ([1], [68]) :

Théorème 4.3.2. De toute suite u_ε bornée dans $L^2(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite, et il existe une limite $u_0(x, y') \in L^2(\Omega \times Y)$ telles que cette sous suite converge à deux échelles vers u_0 .

Rappelons ici quelques résultats utiles pour la suite.

Théorème 4.3.3. Si $u_\varepsilon(x)$ est une suite bornée dans $H^1(\Omega)$ qui converge faiblement vers $u_0(x) \in H^1(\Omega)$, alors $u_\varepsilon(x)$ converge à deux échelles vers $u_0(x)$ et il existe $u_1(x, y') \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(Y))$ telle que ∇u_ε converge à deux échelles, à une constante près, vers $\nabla_x u_0(x) + \nabla_{y'} u_1(x, y')$.

La définition de la convergence à deux échelle peut aussi s'étendre à la surface périodique Γ_ε ([8] et [67]) telle que,

Théorème 4.3.4. *Pour toute suite u_ε dans $L^2(\Gamma_\varepsilon)$ telle que :*

$$\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} |u_\varepsilon|^2 dx \leq C. \quad (4.40)$$

Il existe une sous-suite, aussi notée par u_ε , et une fonction $u_0(x, y') \in L^2(\Omega; L^2_\#(\gamma))$ telles que u_ε converge à deux échelles vers u_0 dans le sens où :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} u_\varepsilon(x) \psi(x, \frac{x'}{\varepsilon}) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{\gamma} u_0(x, y') \psi(x, y') dx dy' \quad (4.41)$$

pour toute fonction test Y -périodique $\psi(x, y') \in L^2(\Omega; C_\#(\gamma))$.

Remarque 4.3.1. *Si u_ε est bornée dans $L^2(\Omega)$ et $\nabla u_\varepsilon \chi_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, en utilisant le Lemme 4.3.2, on en déduit que u_ε est aussi bornée dans $L^2(\Gamma_\varepsilon)$ et converge à deux échelles vers une limite v_0 qui n'est rien d'autre que la trace de la limite u_0 de u_ε . On continue alors de noter v_0 par u_0 .*

Le principal résultat de cette section est le suivant :

Théorème 4.3.5. *Soit T_ε la suite de solutions du problème (4.1). Soit $T_0(x)$ la solution du problème homogénéisé (4.3) et $T_1(x, y')$ le correcteur d'ordre 1 défini par (4.6). Nous avons alors :*

- $T_\varepsilon(x)$ converge à deux échelles vers $T_0(x)$,
- $\nabla T_\varepsilon(x) \chi(\frac{x'}{\varepsilon})$ converge à deux échelles vers $(\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) \chi(y')$

où

$$\chi(y') = \begin{cases} 1 & \text{si } y' \in Y^S \\ 0 & \text{si } y' \in Y^F \end{cases}$$

Preuve. L'estimation a priori (4.28) implique que, à une sous-suite près, T_ε converge à deux échelles vers une fonction $T_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $\chi_\varepsilon^S \nabla T_\varepsilon$ converge à deux échelles vers $\chi^S(y') (\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y'))$ où $T_1 \in L^2(\Omega; H_\#^1(Y))$. De plus, T_ε converge à deux échelles vers T_0 sur la surface périodique Γ_ε , dans le sens de la Proposition 4.3.4.

Même si nous utilisons les mêmes notations, il nous reste à montrer que T_0 est la solution du problème homogénéisé (4.3) et que T_1 est le correcteur d'ordre 1 défini par (4.6). Grâce ensuite à l'unicité de la solution du problème homogénéisé (4.3), nous déduisons que les suite entières T_ε et $\chi_\varepsilon^S \nabla T_\varepsilon$ convergent respectivement vers T_0 et $(\nabla_x T_0 + \nabla_{y'} T_1) \chi$, et non seulement à une sous-suite près.

Dans une première étape, nous allons retrouver l'expression du premier correcteur T_1 en fonction de $\nabla_x T_0$ en choisissant une fonction test $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon \phi_1(x, \frac{x'}{\varepsilon})$, où $\phi_1(x, y')$ est une fonction régulière quelconque, à support compact en x et Y -périodique en y' , dans la formulation variationnelle (4.7) qui devient (en utilisant le caractère auto-adjoint de G_ε) :

$$\int_{\Omega_\varepsilon^S} K_\varepsilon^S \nabla T_\varepsilon \cdot \nabla_{y'} \phi_1 + \sigma \int_{\Gamma_\varepsilon} T_\varepsilon G_\varepsilon(\phi_1) = o(1) \quad (4.42)$$

où, grâce à l'estimation a priori (4.28), $o(1)$ est un reste très petit qui tend vers 0 quand ε tend vers 0. Grâce à une approximation d'ordre inférieur dans la formule (3.15) du Lemme 3.1.1, l'opérateur de rayonnement peut être approché par :

$$G_\varepsilon(\phi_1) = (Id - \zeta_\varepsilon)(\phi_1) = (Id - \zeta_\varepsilon^{2D})(\phi_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Pour passer à la limite à deux échelles, nous utilisons un résultat, donné dans le Lemme 4.3.4, qui nous permet d'avoir une fonction régulière $\theta(x, y')$, périodique en y' telle que :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{y'} \theta(x, y') = 0 & \text{dans } Y^S, \\ \theta(x, y') \cdot n = (Id - \zeta^{2D})\phi_1(x, y') & \text{sur } \gamma, \\ y' \rightarrow \theta(x, y') & \text{est } Y\text{-périodique.} \end{cases}$$

De plus, $\theta(x, y')$ a un support compact en $x \in \Omega$ comme $\phi_1(x, y')$. En revanche, puisque ζ_ε^{2D} est un opérateur intégral, nous avons une différence entre les deux termes suivants :

$$\zeta_\varepsilon^{2D} \left(\phi_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right) \neq \left(\zeta^{2D}(\phi_1(x, y')) \right) \left(y' = \frac{x'}{\varepsilon} \right).$$

Par conséquent, nous avons besoin de faire un développement de Taylor de la fonction ϕ_1 , soit :

$$\phi_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) = \phi_1(x_{0,i}, \frac{x'}{\varepsilon}) + (x' - x'_{0,i}) \cdot \nabla_{x'} \phi_1(x_{0,i}, \frac{x'}{\varepsilon}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

où $x_{0,i} = (x'_{0,i}, x_3)$ et $x'_{0,i}$ est le centre de masse de la paroi $\gamma_{\varepsilon,i}$, défini par (3.1). Nous avons alors l'inégalité suivante :

$$\zeta_\varepsilon^{2D} \left(\phi_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right) = \left(\zeta^{2D}(\phi_1(x_{0,i}, y')) \right) \left(y' = \frac{x'}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \left(\zeta^{2D}(y' \cdot \nabla_{x'} \phi_1(x_{0,i}, y')) \right) \left(y' = \frac{x'}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Ainsi, nous pouvons réécrire le terme de rayonnement dans (4.42) tel que :

$$\begin{aligned} \sigma \int_{\Gamma_\varepsilon} T_\varepsilon G_\varepsilon(\phi_1) &= \sigma \int_{\Gamma_\varepsilon} T_\varepsilon \theta(x_{0,i}, \frac{x'}{\varepsilon}) \cdot n \\ &+ \sigma \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} T_\varepsilon \left((Id - \zeta^{2D})(y' \cdot \nabla_{x'} \phi_1(x_{0,i}, y')) \right) \left(y' = \frac{x'}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Grâce à la Proposition 4.3.4 (en remplaçant $y' \cdot \nabla_{x'} \phi_1(x_{0,i}, y')$ par sa forme continue $y' \cdot \nabla_{x'} \phi_1(x, y')$ avec un reste $\mathcal{O}(\varepsilon)$), nous pouvons passer à la limite à deux échelles dans le second terme de

la partie droite de (4.43). Pour le premier terme, nous utilisons un développement de Taylor similaire pour θ .

$$\begin{aligned} \sigma \int_{\Gamma_\varepsilon} T_\varepsilon \theta(x_{0,i}, \frac{x'}{\varepsilon}) \cdot n &= \sigma \int_{\Gamma_\varepsilon} T_\varepsilon \theta(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \cdot n - \varepsilon \sigma \int_{\Gamma_\varepsilon} T_\varepsilon (y' \cdot \nabla_{x'} \theta(x, y')) (y' = \frac{x'}{\varepsilon}) \cdot n + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \sigma \int_{\Omega_\varepsilon^S} \operatorname{div} \left(T_\varepsilon \theta(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right) - \varepsilon \sigma \int_{\Gamma_\varepsilon} T_\varepsilon (y' \cdot \nabla_{x'} \theta(x, y')) (y' = \frac{x'}{\varepsilon}) \cdot n + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Pour la deuxième intégrale dans (4.44), nous pouvons passer aussi à la limite à deux échelles par une autre application de la Proposition 4.3.4. Concernant la première intégrale, nous avons :

$$\operatorname{div} \left(T_\varepsilon(x) \theta(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right) = \nabla T_\varepsilon(x) \cdot \theta(x, \frac{x'}{\varepsilon}) + T_\varepsilon(x) (\operatorname{div}_x \theta)(x, \frac{x'}{\varepsilon}),$$

qui admet une limite à deux échelles grâce à la Proposition 4.3.3. En regroupant toutes ces limites, après quelques intégrations par parties, et en rappelant que $\ker(Id - \zeta_\varepsilon^{2D}) = \mathbb{R}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma \int_{\Gamma_\varepsilon} T_\varepsilon G_\varepsilon(\phi_1) &= \frac{\sigma}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y^S} \left(\theta(x, y') \cdot (\nabla T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) + T_0(x) \operatorname{div}_x \theta(x, y') \right) dy' dx \\ &+ \frac{\sigma}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{\gamma} T_0(x) \left((Id - \zeta^{2D})(y' \cdot \nabla_{x'} \phi_1(x, y')) - y' \cdot \nabla_{x'} \theta(x, y') \right) dy' dx \\ &= \frac{\sigma}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{\gamma} \theta(x, y') \cdot n \left(T_1(x, y') + y' \cdot \nabla_{x'} T_0(x) \right) dy' dx \\ &= \frac{\sigma}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D})(\phi_1(x, y')) \left(T_1(x, y') + y' \cdot \nabla_{x'} T_0(x) \right) dy' dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, la limite à deux échelles de (4.42) est :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \int_{Y^S} K^S(x, y') (\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) \cdot \nabla_{y'} \phi_1(x, y') dy' dx \\ &+ \sigma \int_{\Omega} \int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D}) \phi_1(x, y') \left(T_1(x, y') + y' \cdot \nabla_{x'} T_0(x) \right) dy' dx = 0 \end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que la formulation variationnelle (4.21) sur T_1 . Nous venons alors de prouver que :

$$T_1(x, y') = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_0}{\partial x_k}(x) \omega_k(y') \quad \text{dans } \Omega \times Y^S.$$

Notons que notre preuve de convergence ne nous permet pas de justifier la formule (4.6) de $T_1(x, y')$ dans la partie fluide $\Omega \times Y^F$.

Dans une seconde étape, nous allons retrouver l'expression du problème homogénéisé sur T_0 . Pour cela, nous commençons par choisir, dans la formulation variationnelle (4.7), une

fonction test $\phi_\varepsilon(x)$ donnée par :

$$\phi_\varepsilon(x) = \phi_0(x) + \varepsilon \phi_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \quad \text{avec} \quad \phi_1(x, y') = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) \omega_k(y')$$

où $\phi_0 \in C_c^\infty(\Omega)$ et ω_j sont les solutions des problèmes de cellule (4.5). La formulation variationnelle (4.7) devient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\varepsilon^S} K_\varepsilon^S \nabla T_\varepsilon \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) + \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon^F} K_\varepsilon^F \nabla T_\varepsilon \cdot (\nabla \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) \\ & + \int_{\Omega_\varepsilon^F} V_\varepsilon \cdot \nabla T_\varepsilon (\phi_0 + \varepsilon \phi_1) + \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} G(T_\varepsilon) (\phi_0 + \varepsilon \phi_1) = \int_{\Omega_\varepsilon^S} f \phi_0 + o(1) \end{aligned} \quad (4.45)$$

où $o(1)$ est un reste petit qui tend vers 0 avec ε . Le passage à la limite à deux échelles dans tous les termes est standard (voir [1] si nécessaire) sauf pour celui du rayonnement où des simplifications doivent avoir lieu. Nous focalisons cette preuve donc sur l'étude de ce terme donné par :

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} G(T_\varepsilon) (\phi_0 + \varepsilon \phi_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} T_\varepsilon G(\phi_0 + \varepsilon \phi_1) \quad (4.46)$$

Nous écrivons un développement de Taylor de ϕ_ε sur la variable macroscopique x seulement, autour du centre de masse $x'_{0,i}$ de chaque paroi $\gamma_{\varepsilon,i}$ (pour alléger les écritures, nous omettons l'indice i dans la suite)

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon(x) &= \phi_0(x'_0, x_3) + P \nabla_{x'} \phi_0(x'_0, x_3) \cdot (x' - x'_0) + \varepsilon \phi_1(x'_0, \frac{x'}{\varepsilon}, x_3) + \varepsilon P \nabla_{x'} \phi_1(x'_0, \frac{x'}{\varepsilon}, x_3) \cdot (x' - x'_0) \\ & \quad + \frac{1}{2} P \nabla_{x'} P \nabla_{x'} \phi_0(x'_0, x_3) (x' - x'_0) \cdot (x' - x'_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Remarquons que nous développons ici ϕ_ε jusqu'à l'ordre 2 en ε car, en divisant par ε comme dans (4.46) et en sommant sur toutes les parois $\gamma_{\varepsilon,i}$, les termes d'ordre ε^2 auront une limite non nulle selon la Proposition 4.3.4.

Rappelons que la solution du troisième problème de cellule vérifie : $\omega_3^S(y') = 0$ dans Y^S et donc sur la paroi γ (voir la Remarque 4.2.2). Par conséquent, dans l'intégrale au bord (4.46) nous pouvons écrire ϕ_1 seulement en fonction des solutions des deux premiers problèmes de cellule telle que :

$$\phi_1(x, y') = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) \omega_k(y')$$

sans aucune contribution suivant la direction x_3 . Donc, le terme de rayonnement s'écrit :

$$\frac{1}{\varepsilon} G_\varepsilon(\phi_\varepsilon)(x) = \frac{1}{\varepsilon} (Id - \zeta_\varepsilon)(\phi_\varepsilon)(x) = \varepsilon (\psi_{1,\varepsilon}(x) + \psi_{2,\varepsilon}(x) + \psi_{3,\varepsilon}(x) + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

où

$$\begin{aligned}\psi_{0,\varepsilon}(x) &= \frac{1}{\varepsilon^2}(Id - \zeta_\varepsilon)\phi_0(x'_0, x_3) \\ \psi_{1,\varepsilon}(x) &= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^2 (Id - \zeta_\varepsilon) \left[\left(\omega_k \left(\frac{x'}{\varepsilon} \right) + \frac{x_k - x_{0,k}}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x'_0, x_3) \right] \\ \psi_{2,\varepsilon}(x) &= (Id - \zeta_\varepsilon) \left[\frac{1}{2} \nabla_{x'} \nabla_{x'} \phi_0(x'_0, x_3) \cdot \frac{(x' - x'_0)}{\varepsilon} \otimes \frac{(x' - x'_0)}{\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^2 \nabla_{x'} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x'_0, x_3) \cdot \left(\frac{(x' - x'_0)}{\varepsilon} \omega_k \left(\frac{x'}{\varepsilon} \right) \right) \right].\end{aligned}$$

Remarque 4.3.2. Dans ces dernières égalités, nous avons supposé, pour des raisons de simplification, que les coefficients de diffusivité périodiques $K^{S,F}$ et la vitesse V ne dépendent pas de la variable macroscopique x . Autrement, il y aurait plus de termes correspondants aux dérivées en x' des solutions des problèmes de cellule. Notre preuve est toujours valable dans ce cas, mais nous préférons simplifier les écritures.

Le terme $\psi_{0,\varepsilon}$ est ici nouveau comparé à l'étude réalisée dans [9] en 2D (il était nul dans [9]). De plus, la principale difficulté par rapport à [9] est que nous avons besoin, ici, d'approcher les facteurs de forme 3D dans ζ_ε par des facteurs de forme 2D qui apparaissent dans la limite homogénéisée. Pour cette raison, nous nous ramenons au Lemme 3.1.1. Premièrement, grâce à (3.15), pour tout $0 < p < 3$ nous avons

$$\psi_{0,\varepsilon}(x) = -\frac{1}{2\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_3^2}(x'_0, x_3) \int_{\gamma_{\varepsilon,i}} F^{2D}(s', x') |x' - s'|^2 ds' + \mathcal{O}(\varepsilon^{p-2}).$$

deuxièmement, par une approximation d'ordre inférieur dans (3.15), et sachant que ω_k ne dépend pas de x_3 ,

$$\psi_{1,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x'_0, x_3) (Id - \zeta_\varepsilon^{2D}) \left(\omega_k \left(\frac{x'}{\varepsilon} \right) + \frac{x_k - x_{0,k}}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

et

$$\begin{aligned}\psi_{2,\varepsilon}(x) &= \frac{1}{2} \nabla_{x'} \nabla_{x'} \phi_0(x'_0, x_3) \cdot (Id - \zeta_\varepsilon^{2D}) \left(\frac{(x' - x'_0)}{\varepsilon} \otimes \frac{(x' - x'_0)}{\varepsilon} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 \nabla_{x'} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x'_0, x_3) \cdot (Id - \zeta_\varepsilon^{2D}) \left(\frac{(x' - x'_0)}{\varepsilon} \omega_k \left(\frac{x'}{\varepsilon} \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Dans le but de retrouver des fonctions continues, nous utilisons le développement de Taylor

suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x'_0, x_3) &= \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) - \nabla_{x'} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) \cdot (x' - x'_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_3^2}(x'_0, x_3) &= \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_3^2}(x) + \mathcal{O}(\varepsilon).\end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\psi_{0,\varepsilon}(x) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_3^2}(x) \int_{\gamma_{\varepsilon,i}} F^{2D}(s', x') \frac{|x' - s'|^2}{\varepsilon^2} ds' + \mathcal{O}(\varepsilon^{p-2}), \\ \psi_{1,\varepsilon}(x) &= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) - \nabla_{x'} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) \cdot (x' - x'_0) \right) (Id - \zeta_\varepsilon^{2D}) \left(\omega_k \left(\frac{x'}{\varepsilon} \right) + \frac{x_k - x_{0,k}}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \psi_{2,\varepsilon}(x) &= \frac{1}{2} \nabla_{x'} \nabla_{x'} \phi_0(x) \cdot (Id - \zeta_\varepsilon^{2D}) \left(\frac{(x' - x'_0)}{\varepsilon} \otimes \frac{(x' - x'_0)}{\varepsilon} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 \nabla_{x'} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) \cdot (Id - \zeta_\varepsilon^{2D}) \left(\frac{(x' - x'_0)}{\varepsilon} \omega_k \left(\frac{x'}{\varepsilon} \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon).\end{aligned}$$

Nous identifions les termes qui ont des limites à deux échelles évidentes et, finalement, nous utilisons une comparaison du type de la H -convergence [65] pour évaluer la limite des autres termes.

Concernant le terme $\psi_{0,\varepsilon}(x)$, il s'écrit :

$$\psi_{0,\varepsilon}(x) = \psi_0 \left(x, \frac{x'}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{p-2}) \quad \text{avec } \psi_0(x, y') = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_3^2}(x) \int_{\gamma} F^{2D}(z', y') |y' - z'|^2 dz'. \quad (4.47)$$

Nous en déduisons que $\psi_0(x, \frac{x'}{\varepsilon})$ converge à deux échelles (dans le sens de la Proposition 4.3.4) vers $\psi_0(x, y')$ et nous avons :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \psi_{0,\varepsilon} T_\varepsilon = \frac{1}{2|Y|} \int_{\Omega} \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x) \frac{\partial \phi_0}{\partial x_3}(x) \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(y', z') |y' - z'|^2 dy' dz' dx. \quad (4.48)$$

Nous remarquons la même chose concernant le terme $\psi_{2,\varepsilon}$, il s'écrit :

$$\psi_{2,\varepsilon}(x) = \psi_2 \left(x, \frac{x'}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

avec

$$\psi_2(x, y') = \frac{1}{2} \nabla_{x'} \nabla_{x'} \phi_0(x) \cdot (Id - \zeta^{2D}) (y' \otimes y') + \sum_{k=1}^2 \nabla_{x'} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) \cdot (Id - \zeta^{2D}) (y' \omega_k(y')).$$

Nous en déduisons la limite à deux échelles suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \psi_{2,\varepsilon} T_\varepsilon = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} T_0(x) \int_{\gamma} \psi_2(x, y') dy' dx = 0. \quad (4.49)$$

Maintenant, nous utilisons la même astuce que dans [9] pour calculer la limite du terme correspondant à $\psi_{1,\varepsilon}$. En effet, nous utilisons une technique H -convergence [65] qui consiste à comparer ce terme avec la formulation variationnelle des problèmes de cellule (4.22). A l'aide du changement d'échelle ($y \rightarrow \frac{x}{\varepsilon}$) et une intégration en x_3 de 0 à L dans (4.22) nous avons :

$$\sigma \int_{\Gamma_\varepsilon} (Id - \zeta_\varepsilon^{2D}) \left(\omega_k \left(\frac{x'}{\varepsilon} \right) + \frac{x_k - x_{0,k}}{\varepsilon} \right) \left(T_\varepsilon \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k} \right) = - \int_{\Omega_\varepsilon^S} K_\varepsilon^S \left(\nabla_{y'} \omega_k \left(\frac{x'}{\varepsilon} \right) + e_k \right) \cdot \nabla_{x'} \left(T_\varepsilon \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k} \right),$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} \varepsilon \sigma \int_{\Gamma_\varepsilon} \psi_{1,\varepsilon}(x) T_\varepsilon(x) &= - \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_\varepsilon^S} K_\varepsilon^S \left(\nabla_{y'} \omega_k \left(\frac{x'}{\varepsilon} \right) + e_k \right) \cdot \nabla_{x'} \left(T_\varepsilon \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k} \right) \\ &- \sigma \varepsilon \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_\varepsilon} (Id - \zeta_\varepsilon^{2D}) \left(\omega_k \left(\frac{x'}{\varepsilon} \right) + \frac{x_k - x_{0,k}}{\varepsilon} \right) \left(\nabla_{x'} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} (x) \cdot \frac{x' - x'_0}{\varepsilon} \right) T_\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Par passage à la limite à deux échelles (sachant que le second terme dans (4.50) admet une limite à deux échelles directe), nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \psi_{1,\varepsilon} T_\varepsilon &= \\ - \frac{1}{|Y|} \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \int_{Y^S} K(y', x) (e_k + \nabla_{y'} \omega_k(y')) \cdot \left(\nabla_{x'} (T_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k})(x) + \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) \nabla_{y'} T_1(x, y') \right) dy' dx &(4.51) \\ - \frac{\sigma}{|Y|} \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D}) (\omega_k + y_k) y' \cdot P \nabla_{x'} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k} T_0 dy' dx. & \end{aligned}$$

Finalement, en regroupant toutes ces limites, (4.48), (4.49), (4.51), nous avons alors :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} G_\varepsilon(T_\varepsilon) (\phi_0 + \varepsilon \phi_1) &= \\ = \frac{-\sigma}{2|Y|} \int_{\Omega} T_0(x) \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_3^2}(x) \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(y', z') |y' - z'|^2 dy' dz' dx & \\ - \frac{1}{|Y|} \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \int_{Y^S} K^S(e_k + \nabla_{y'} \omega_k(y')) \cdot \left(\nabla_{x'} (T_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k})(x) + \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) \nabla_{y'} T_1(x, y') \right) dy' dx & \\ - \frac{\sigma}{|Y|} \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D}) (\omega_k + y_k) y' \cdot \nabla_{x'} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k} T_0 dy' dx & \quad (4.52) \\ = \frac{-\sigma}{2|Y|} \int_{\Omega} T_0(x) \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_3^2}(x) \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(y', z') |y' - z'|^2 dy' dz' dx & \\ - \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y^S} K^S(\nabla_{x'} T_0 + \nabla_{y'} T_1) \cdot (\nabla_{x'} \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) dy' dx - \int_{\Omega} K^* T_0 \nabla_{x'} \nabla_{x'} \phi_0 dx. & \\ = \int_{\Omega} K^*(x) \nabla_x T_0(x) \cdot \nabla_x \phi_0(x) dx - \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y^S} K^S(\nabla_x T_0 + \nabla_{y'} T_1) \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) dy' dx & \end{aligned}$$

Les deux dernières égalités dans (4.52) sont vraies grâce à la formule suivante :

$$K_{j,k}^*(x) = \frac{1}{|Y|} \left[\int_{Y^S} K^S(x, y') (e_j + \nabla_{y'} \omega_j^S(x, y')) \cdot e_k dy' + \sigma \int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D}) (\omega_j^S(x, y') + y_j) y_k dy' \right]$$

qui est une écriture équivalente de la conductivité homogénéisée obtenue à l'aide d'une combinaison de (4.4) et la formulation variationnelle des problèmes de cellule. En plus de cette convergence, les autres termes de la formulation variationnelle (4.45) convergent aussi à deux échelles et nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon^S} K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) dx &= \frac{1}{|Y|} \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} \int_{Y^S} K(y', x) [\nabla_x T_0(x) \\ &+ \nabla_{y'} T_1(x, y')] \cdot [e_k + \nabla_{y'} \omega_k(y', x)] \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) dy' dx \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon^F} K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon^F} V_\varepsilon \cdot \nabla T_\varepsilon (\phi_0 + \varepsilon \phi_1) dx &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon^F} T_\varepsilon V_\varepsilon \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) dx \\ &= - \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y^F} T_0 V(y', x) \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) dy' dx \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y^F} V(y', x) \cdot \nabla_x T_0 \phi_0 dy' dx \end{aligned}$$

grâce aux hypothèses sur la vitesse V et une intégration par partie. Par conséquent, la limite de la formulation variationnelle (4.45) devient :

$$\begin{aligned} &- \int_{\Omega} \sum_{k,j=1}^3 \left[\int_{Y^S} K(y', x) (e_k + \nabla_{y'} \omega_k(y')) \cdot e_j dy' \right] e_j \cdot \nabla_x \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) T_0(x) dx \\ &- \int_{\Omega} \sum_{k,j=1}^3 \left[\sigma \int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D}) (\omega_k(y') + y_k) y_j dy' \right] e_j \cdot \nabla_{x'} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) T_0(x) dx \\ &+ \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \int_{Y^F} V_k(y', x) \phi_0(x) \frac{\partial T_0}{\partial x_k}(x) dy' dx - \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x) \frac{\partial \phi_0}{\partial x_3}(x) \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(y', z') |y' - z'|^2 dy' dz' dx \\ &= |Y^S| \int_{\Omega} f(x) \phi_0(x) dx \end{aligned}$$

En utilisant la formulation variationnelle des problèmes de cellule (4.22) avec ω_j comme fonction test, nous obtenons :

$$\int_{Y^S} K(y', x) (e_k + \nabla_{y'} \omega_k(y')) \cdot \nabla_{y'} \omega_j(y') dy' + \sigma \int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D}) (\omega_k(y') + y_k) \omega_j(y') dy' = 0.$$

Sachant que $\int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D})(\omega_k(y') + y_k)y_3 dy' = 0$, la limite de (4.45) devient

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \sum_{k,j=1}^3 \left[\int_{Y^S} K(y', x)(e_j + \nabla_{y'} \omega_j(y')) \cdot (e_k + \nabla_{y'} \omega_k(y')) dy' \right. \\
 & \quad \left. + \sigma \int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D})(\omega_k(y') + y_k)(\omega_j(y') + y_j) dy' \right] \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_j \partial x_k}(x) T_0(x) dx \\
 & + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \int_{Y^F} V_k(y', x) \phi_0(x) \frac{\partial T_0}{\partial x_k}(x) dy' dx \\
 & - \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x) \frac{\partial \phi_0}{\partial x_3}(x) \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(y', z') |y' - z'|^2 dy' dz' dx \\
 & = |Y^S| \int_{\Omega} f(x) \phi_0(x) dx
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

A l'aide d'une intégration par partie, et en divisant par $|Y|$, (4.54) devient :

$$\int_{\Omega} K^*(x) \nabla T_0(x) \cdot \nabla \phi_0(x) dx + \int_{\Omega} V^*(x) \cdot \nabla T_0(x) \phi_0(x) dx = \theta \int_{\Omega} f(x) \phi_0(x) dx \tag{4.55}$$

qui n'est rien d'autre que la formulation variationnelle du problème homogénéisé (4.3) où K^* et V^* sont les mêmes que dans (4.2.1). Puisque ce problème admet une solution unique dans $H^1(\Omega)$, toute la suite T_{ε} , et non seulement à une sous-suite près, converge vers T_0 qui est exactement la solution du problème homogénéisé. D'où le résultat. \square

Remarque 4.3.3. Dans la preuve du théorème 4.3.5, nous avons utilisé essentiellement le fait que les conditions aux limites sur $\partial\Omega$ sont de type Dirichlet. Entre autre, il était nécessaire que la fonction test possède un support compact en x_3 pour appliquer le résultat du Lemme 3.1.1 sur la réduction 2D du facteur de forme 3D. Nous ne savons pas si cette preuve est transposable à des conditions aux limites de type Neumann.

Nous donnons ici un résultat technique utilisé dans cette dernière preuve.

Lemme 4.3.4. Soit $\phi_1(x, y')$ une fonction régulière, à support compact en $x \in \Omega$ et Y -périodique en y' . Il existe, au moins, une fonction vectorielle régulière $\theta(x, y')$ (à valeurs dans \mathbb{R}^2) telle que :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{y'} \theta(x, y') = 0 & \text{dans } Y^S \\ \theta(x, y') \cdot n = (Id - \zeta^{2D}) \phi_1(x, y') & \text{sur } \gamma \\ y' \rightarrow \theta(x, y') \text{ est } Y\text{-périodique.} & \end{cases} \tag{4.56}$$

Preuve. Il suffit de trouver une solution sous la forme $\theta(x, y') = \nabla_{y'} \eta(x, y')$. Pour résoudre le problème elliptique 2D sur η , correspondant à (4.56), nous avons juste besoin de vérifier la condition de compatibilité des données (Alternative de Fredholm). En effet, cette condition est vérifiée grâce à la propriété du facteur de forme 2D : $\int_{\gamma} F^{2D}(y', s') ds' = 1$, d'où :

$$\int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D}) \phi_1(x, y') dy' = \int_{\gamma} \phi_1(x, y') dy' - \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(y', s') \phi_1(x, y') dy' ds' = 0.$$

Remarquons qu'il n'y a pas unicité de la solution $\eta(x, y')$ et donc de $\theta(x, y')$. \square

4.3.3 Convergence forte

Notre résultat principal de convergence, le Théorème 4.3.5, nous donne seulement une convergence faible (ou convergence à deux échelles) de la suite des solutions T_ε et de ∇T_ε . Le but du résultat suivant est d'améliorer cette convergence faible pour atteindre une convergence forte. Pour cela, nous avons besoin de plus d'hypothèses de régularité. Plus exactement, nous avons besoin que le premier correcteur $T_1(x, x'/\varepsilon)$ soit dans l'espace $H^1(\Omega)$ (pas nécessairement uniformément borné). Ce qui est vrai si $T_1(x, y')$ est une fonction régulière en (x, y') . En regardant la formule (4.6) de T_1 , nous remarquons qu'il suffirait que, soit la solution homogénéisée $T_0(x)$, ou que les solutions des problèmes de cellule $\omega_k(y')$, soient des fonctions régulières. Pour établir notre résultat de convergence forte, nous utilisons la convergence de l'énergie (comme décrite dans [1] dans le contexte de la convergence à deux échelles) inspirée de la notion de Γ -convergence [35].

Nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 4.3.6. *Pour T_1 assez régulière, la suite $\left(\nabla T_\varepsilon(x) - \nabla T_0(x) - \nabla_{y'} T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon})\right) \chi_\varepsilon$ converge fortement vers 0 dans $L^2(\Omega)^d$ et la suite $(T_\varepsilon(x) - T_0(x))$ converge fortement vers 0 dans $L^2(\Omega)$. χ_ε est la fonction caractéristique du domaine solide Ω_ε^S*

Démonstration. Nous développons ici l'énergie de la différence $T_\varepsilon(x) - T_0(x) - \varepsilon T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon})$ et nous obtenons, en utilisant (4.29),

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_\varepsilon^S} K_\varepsilon^S \left| \nabla T_\varepsilon(x) - \nabla T_0(x) - \nabla_{y'} T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon^F} K_\varepsilon^F \left| \nabla T_\varepsilon(x) - \nabla T_0(x) - \nabla_{y'} T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right|^2 dx \\
 & + \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} G_\varepsilon \left(T_\varepsilon(x) - T_0(x) - \varepsilon T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right) \left(T_\varepsilon(x) - T_0(x) - \varepsilon T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right) dx = \int_{\Omega_\varepsilon^S} f_\varepsilon(x) T_\varepsilon(x) dx \\
 & + \int_{\Omega_\varepsilon^S} K_\varepsilon^S \left| \nabla T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon^F} K_\varepsilon^F \left| \nabla T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right|^2 dx \tag{4.57} \\
 & + \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} G_\varepsilon \left(T_0(x) + \varepsilon T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right) \left(T_0(x) + \varepsilon T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right) dx - 2 \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} G_\varepsilon \left(T_0(x) + \varepsilon T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right) T_\varepsilon(x) dx \\
 & - 2 \int_{\Omega_\varepsilon^S} K_\varepsilon^S \nabla T_\varepsilon(x) \cdot \left(\nabla T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right) dx - 2\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon^F} K_\varepsilon^F \nabla T_\varepsilon(x) \cdot \left(\nabla T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right) dx
 \end{aligned}$$

En utilisant la condition de coercivité de $K_\varepsilon^{S,F}$, sachant que l'opérateur de rayonnement G_ε est non-négatif, et en passant à la limite à deux échelles dans la partie droite de (4.57) nous obtenons une borne supérieure pour

$$\alpha \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| (\nabla T_\varepsilon - \nabla T_0 - \nabla_{y'} T_1) \chi_\varepsilon^S \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \left\| (\nabla T_\varepsilon - \nabla T_0 - \nabla_{y'} T_1) \chi_\varepsilon^F \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

D'où, une combinaison des deux Lemmes 4.3.1 et 4.3.3 donne une borne supérieure aussi

pour

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|T_\varepsilon - T_0 - \varepsilon T_1\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Il nous reste maintenant à montrer que cette borne supérieure est nulle, i.e., que la limite à deux échelle de la partie droite de (4.57) est nulle. En effet, en utilisant les formules (4.18) et (4.52) nous avons :

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} G_\varepsilon \left(T_0(x) + \varepsilon T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right) \left(T_0(x) + \varepsilon T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right) dx \\ &= \frac{\sigma}{|Y|} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x) \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x) dx \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(z', y') |z' - y'|^2 dy' dz' \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Omega} \int_{\gamma} (\nabla_{x'} T_0(x) \cdot y + T_1(x, y')) (Id - \zeta^{2D})(T_1(x, y') + \nabla_{x'} T_0(x) \cdot y) dy' dx \right) \\ &= \int_{\Omega} K^*(x) |\nabla_x T_0(x)|^2 dx - \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y^S} K^S(x, y') |\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')|^2 dy' dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} G_\varepsilon \left(T_0(x) + \varepsilon T_1(x, \frac{x'}{\varepsilon}) \right) T_\varepsilon(x) dx = \int_{\Omega} K^*(x) |\nabla_x T_0(x)|^2 dx \\ & \quad - \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y^S} K^S(x, y') |\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')|^2 dy' dx \end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0 dans la partie droite de (4.57), nous obtenons la limite à deux échelles suivante :

$$- \int_{\Omega} K^*(x) \nabla_x T_0(x) \cdot \nabla_x T_0(x) dx - \int_{\Omega} V^* \cdot \nabla_x T_0(x) T_0(x) + \theta \int_{\Omega} f(x) T_0(x) dx,$$

qui est égale à 0 en vertu de la formulation variationnelle du problème homogénéisé (4.3).

D'où le résultat. \square

4.4 Résultats analytiques dans le cas non-linéaire

Comme nous l'avons décrit dans la Remarque 3.1.1, l'étude, physiquement correcte, de notre problème repose sur la non-linéarité de l'opérateur de rayonnement défini par la formule (3.10) au lieu de (3.5). L'étude du cas linéaire était clairement une hypothèse de simplification dans le but de pouvoir justifier la convergence de notre processus d'homogénéisation. Néanmoins, la méthode formelle de développement asymptotique est parfaitement valable dans le cas non linéaire aussi (voir [9] et [44] si nécessaire). Dans cette sous-section,

nous donnons, sans justification (la stratégie de la preuve est néanmoins la même que dans le cas linéaire mais avec des calculs plus lourds), le résultat d'homogénéisation dans le cas non linéaire.

Quand l'opérateur de rayonnement est défini par la formule (3.10) au lieu de (3.5), la proposition équivalente à 4.2.1 dans le cas non linéaire est la suivante :

Proposition 4.4.1. *Sous l'hypothèse (4.2) le terme T_0 est la solution du problème homogénéisé :*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K^*(T_0^3(x))\nabla T_0(x)) + V^*(x) \cdot \nabla T_0(x) = \theta f(x) & \text{dans } \Omega \\ T_0(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.58)$$

où $\theta = |Y^S|/|Y|$ est un facteur de porosité, K^* est le tenseur de conductivité homogénéisé donné par la valeur de ses composantes, pour $j, k = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} K_{j,k}^*(T_0^3(x)) = & \frac{1}{|Y|} \left[\int_{Y^S} K(y', x_3) (e_j + \nabla_y \omega_j(y')) \cdot (e_k + \nabla_y \omega_k(y')) dy' \right. \\ & + 4\sigma T_0^3(x) \int_{\gamma} G(\omega_k(y') + y_k) (\omega_j(y') + y_j) \\ & \left. + 2\sigma T_0^3(x) \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(s', y') |s' - y'|^2 dy' ds' \delta_{j3} \delta_{k3} \right]. \end{aligned}$$

V^* est la vitesse homogénéisée donnée par :

$$V^* = \frac{e_3}{|Y|} \int_{Y^F} V(y', x_3) \cdot e_3 dy'$$

où $(\omega_j(T_0^3(x), y'))_{1 \leq j \leq 3}$ sont les solutions des problèmes de cellule définis par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_y K^S(y', x_3) (e_j + \nabla_y \omega_j^S(y')) = 0 & \text{dans } Y^S \\ -\operatorname{div}_y K^F(y', x_3) (e_j + \nabla_y \omega_j^F(y')) + V(y', x_3) \cdot (e_j + \nabla_y \omega_j^F(y')) = 0 & \text{dans } Y^F \\ -K^S(y', x_3) (e_j + \nabla_y \omega_j^S(y')) \cdot n = 4\sigma T_0^3(x) G(\omega_j^S(y') + y_j) & \text{sur } \gamma \\ \omega_j^F(y') = \omega_j^S(y') & \text{sur } \gamma \\ y' \mapsto \omega(y') \text{ est } Y\text{-périodique,} & \end{array} \right. \quad (4.59)$$

et T_1 est donné par :

$$T_1(x, y') = \sum_{j=1}^3 \omega_j(T_0^3(x), y') \frac{\partial T_0}{\partial x_j}(x). \quad (4.60)$$

Le problème homogénéisé (4.58) est un problème de convection-diffusion non linéaire où la non linéarité apparaît seulement dans le tenseur de conductivité K^* qui dépend de la puissance trois de la température. Notons aussi que les problèmes de cellule sont linéarisés et dépendent de la valeur macroscopique de la température en chaque point macroscopique x .

4.5 Résultats numériques

Dans cette section, nous fournissons quelques résultats numériques pour étudier le comportement asymptotique du modèle de transfert thermique (4.1) dans le cas non linéaire, i.e., quand l'opérateur de rayonnement est défini comme dans la Remarque 3.1.1. Notre objectif est de montrer l'efficacité de notre méthode d'homogénéisation pour la valider en comparant la solution reconstruite par homogénéisation avec la solution du modèle direct (4.1) (c'est une solution calculée par simulation numérique directe de (4.1)). Nous faisons cette comparaison pour un ε de plus en plus petit dans le but de faire apparaître l'ordre de convergence entre les deux solutions. Nos résultats numériques sont, bien sûr, dans une configuration 3D. Le logiciel utilisé pour effectuer nos test numériques est le logiciel d'éléments finis, CAST3M [24] développé au Commissariat à l'Energie Atomique et aux Energies Alternatives (CEA).

4.5.1 Changement de variables pour la simulation numérique

D'habitude, dans la théorie de l'homogénéisation, on résout un problème dans un domaine de taille fixe avec des cellules de taille ε qui tend vers 0 (voir la Figure 4.2). En pratique, dans notre cas d'application sur les réacteurs nucléaires, les tailles des canaux et des assemblages sont fixés par des contraintes industrielles. Nous procédons donc différemment : nous fixons la taille des cellules de périodicité (indépendante de ε) et nous augmentons le nombre total des cellules, donc la taille du domaine de calcul. Autrement dit, nous faisons un raisonnement inverse à la théorie « standard » de l'homogénéisation. Nous fixons la taille des cellules à 1, la taille du domaine est alors $\frac{1}{\varepsilon}$ qui tend vers l' ∞ . En d'autres termes, au lieu d'utiliser la variable macroscopique x , nous utilisons la variable microscopique $y = x/\varepsilon$. Dans cette nouvelle configuration, toutes les cellules périodiques sont de taille 1 et le domaine de calcul est $\varepsilon^{-1}\Omega$ qui est de plus en plus grand quand ε tend vers 0 (voir la Figure 4.3).

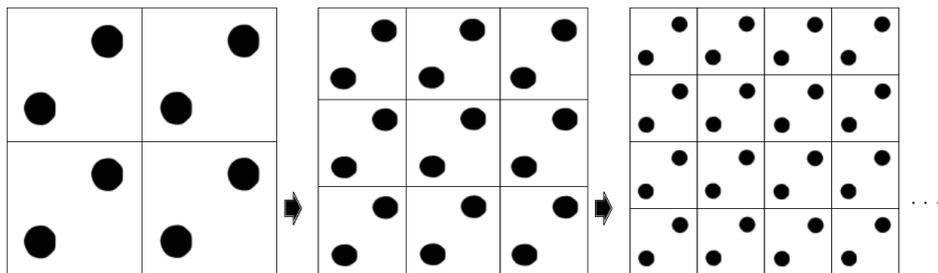


FIGURE 4.2 – Homogénéisation standard dans un domaine fixe Ω

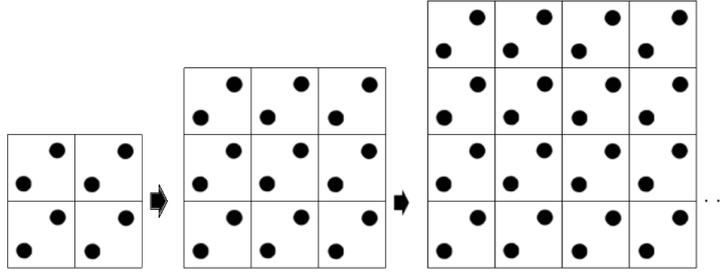


FIGURE 4.3 – Homogénéisation dans un domaine variable $\varepsilon^{-1}\Omega$ avec des cellules de périodicité de taille fixe

Si nous notons par $\Omega = \prod_{j=1}^3(0, L_j)$ le domaine de taille fixe, le domaine considéré dans cette nouvelle approche est alors donné par : $\widehat{\Omega} = \varepsilon^{-1}\Omega = \prod_{j=1}^3(0, L_j/\varepsilon)$, où les N_j sont des entiers tels que $L_j/\varepsilon = N_j\ell_j$, pour $j = 1, 2$ (voir la Figure 3.1).

Pour toute fonction $u(x)$ définie sur Ω , nous introduisons la fonction $\widehat{u}(y)$, définie dans $\widehat{\Omega}$ par :

$$\widehat{u}(y) = u(\varepsilon y) = u(x). \tag{4.61}$$

Elle vérifie :

$$\begin{aligned} \nabla_y \widehat{u}(y) &= \varepsilon(\nabla_x u)(\varepsilon y) = \varepsilon \nabla_x u(x), \\ \operatorname{div}_y(\widehat{K} \nabla_y \widehat{u})(y) &= \varepsilon^2(\operatorname{div}_x(K \nabla_x u))(\varepsilon y) = \varepsilon^2 \operatorname{div}_x(K \nabla_x u)(x) \end{aligned} \tag{4.62}$$

Nous définissons le tenseur de conductivité \widehat{K} par :

$$\widehat{K}(y) = \begin{cases} K^S(\varepsilon y, y') & \text{dans } \widehat{\Omega}^S, \\ K^F(\varepsilon y, y') & \text{dans } \widehat{\Omega}^F. \end{cases}$$

Nous définissons aussi $\widehat{\Omega}^S$, $\widehat{\Omega}^F$, $\widehat{\Gamma}$ et $\partial\widehat{\Omega}$ par le même changement de variable liant Ω à $\widehat{\Omega}$.

Dans cette nouvelle approche, le problème (4.1) devient :

$$\left\{ \begin{aligned} -\operatorname{div}(\widehat{K}^S \nabla \widehat{T}_\varepsilon) &= \varepsilon^2 \widehat{f} && \text{dans } \widehat{\Omega}^S \\ -\varepsilon \operatorname{div}(\widehat{K}^F \nabla \widehat{T}_\varepsilon) + \varepsilon \widehat{V} \cdot \nabla \widehat{T}_\varepsilon &= 0 && \text{dans } \widehat{\Omega}^F \\ -\widehat{K}^S \nabla \widehat{T}_\varepsilon \cdot n_S &= -\varepsilon \widehat{K}^F \nabla \widehat{T}_\varepsilon \cdot n_F + \sigma G(\widehat{T}_\varepsilon^4) && \text{sur } \widehat{\Gamma} \\ \widehat{T}_\varepsilon &= 0 && \text{sur } \partial\widehat{\Omega} \end{aligned} \right. \tag{4.63}$$

Le problème (4.58) devient :

$$\left\{ \begin{aligned} -\operatorname{div}(\widehat{K}^*(\widehat{T}_0^3) \nabla \widehat{T}_0) + \varepsilon \widehat{V}^* \cdot \nabla \widehat{T}_0 &= \varepsilon^2 \theta \widehat{f} && \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \widehat{T}_0 &= 0 && \text{sur } \partial\widehat{\Omega}. \end{aligned} \right. \tag{4.64}$$

De plus, nous définissons aussi $\widehat{T}_1(y)$ par :

$$\widehat{T}_1(y) = \varepsilon T_1(\varepsilon y, y') = \varepsilon T_1\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \widehat{T}_0}{\partial y_i}(y) \omega_i(y') \quad (4.65)$$

Finalement, l'approximation par homogénéisation $T_\varepsilon(x) \simeq T_0(x) + \varepsilon T_1(x, x/\varepsilon)$ devient :

$$\widehat{T}_\varepsilon(y) \simeq \widehat{T}_0(y) + \widehat{T}_1(y). \quad (4.66)$$

Remarquons que le paramètre ε devant le terme T_1 disparaît dans cette nouvelle approche. Par contre, un facteur $\varepsilon^{\frac{d}{2}}$ apparaît, avec le changement de variable $y = x/\varepsilon$ dans la norme L^2 . Pour cela nous calculons des erreurs relatives entre les solutions exacte et reconstruite dans la suite. Notons que l'erreur relative est indépendante de ce changement de variable. Nous avons :

$$\frac{\left\| T_\varepsilon(x) - \left(T_0(x) + \varepsilon T_1\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right) \right) \right\|_{L^2(\Omega)}}{\|T_\varepsilon(x)\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\left\| \widehat{T}_\varepsilon(y) - (\widehat{T}_0(y) + \widehat{T}_1(y)) \right\|_{L^2(\widehat{\Omega})}}{\|\widehat{T}_\varepsilon(y)\|_{L^2(\widehat{\Omega})}} \quad (4.67)$$

et

$$\frac{\left\| \nabla T_\varepsilon(x) - \nabla \left(T_0(x) + \varepsilon T_1\left(x, \frac{x'}{\varepsilon}\right) \right) \right\|_{L^2(\Omega)}}{\|\nabla T_\varepsilon(x)\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\left\| \nabla \widehat{T}_\varepsilon(y) - \nabla (\widehat{T}_0(y) + \widehat{T}_1(y)) \right\|_{L^2(\widehat{\Omega})}}{\|\nabla \widehat{T}_\varepsilon(y)\|_{L^2(\widehat{\Omega})}}. \quad (4.68)$$

4.5.2 Algorithme et données numériques

Nous commençons par donner l'algorithme de notre processus d'homogénéisation :

1. Résoudre les trois problèmes de cellule (4.59) pour une plage de température \widehat{T}_0 .
2. Calculer la conductivité homogénéisée (comme une fonction de la température) et la vitesse homogénéisée.
3. Résoudre le problème homogénéisé (4.58) par une méthode de point fixe.
4. Calculer le correcteur $\widehat{T}_1(y) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \widehat{T}_0}{\partial y_i}(y) \omega_i(y')$.
5. Reconstruire la solution approchée : $\widehat{T}_0(y) + \widehat{T}_1(y)$.

Nous donnons ici les valeurs des données numériques qui correspondent à notre cas test pour $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{4}$. La géométrie correspond à un prototype d'assemblage d'un cœur de réacteur nucléaire de type VHTR (voir le Chapitre 1 pour plus de détail). Le domaine est donné par $\widehat{\Omega} = \varepsilon^{-1}\Omega = \prod_{j=1}^3 (0, L_j/\varepsilon)$, avec $L_3 = 0.4m$ et, pour $j = 1, 2$, $L_j/\varepsilon = N_j \ell_j$ où $N_1 = 3$, $N_2 = 4$ et $\ell_1 = 0.04m$, $\ell_2 = 0.07m$. Chaque cellule périodique contient 2 trous (les canaux) (voir la Figure 3.1), le rayon de chacun est égal à $0.0035m$.

L'émissivité dans les parois des canaux est $e = 1$. La source thermique est $\widehat{f} = 16KW/m^3$ dans $\widehat{\Omega}^S$.

Nous fixons des conditions aux bords périodiques dans la direction x_1 et des conditions de type Dirichlet dans les autres directions. Elle sont données par : $\hat{T}_\varepsilon(y) = \varepsilon(3200y_2 + 400y_3) + 800$ sur les bords correspondants à $y_2 = 0m$, $y_2 = L_2/\varepsilon = 0.28m$, $y_3 = 0m$ et $y_3 = L_3/\varepsilon = 0.2m$. Ces conditions dépendent en ε en tant que fonction de y de telle manière que, quand elles sont en fonction de $x = \varepsilon y$, elles ne dépendent pas de ε .

Le tenseur de conductivité est supposé isotrope avec une conductivité de valeur $30 Wm^{-1}K^{-1}$ dans la partie solide $\hat{\Omega}^S$ et $0.3 Wm^{-1}K^{-1}$ dans la partie fluide $\hat{\Omega}^F$. Puisque nous avons supposé que la conductivité dans le fluide est plus petite, d'un facteur ε , que la conductivité dans le solide, elle est alors écrite dans la partie fluide : $\varepsilon_0 \hat{K}^F$. C'est pourquoi, pour notre calcul de référence, nous écrivons $\hat{K}^F = 0.3/\varepsilon_0 Wm^{-1}K^{-1} = 1.2 Wm^{-1}K^{-1}$. \hat{K} est alors donné par :

$$\hat{K} = \begin{cases} 30 Wm^{-1}K^{-1} & \text{dans } \hat{\Omega}^S, \\ 1.2 = 0.3/\varepsilon Wm^{-1}K^{-1} & \text{dans } \hat{\Omega}^F. \end{cases}$$

Par la même remise à l'échelle de \hat{V} (voir le modèle (5.41)), la vitesse dans les canaux est donnée par :

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 80/\varepsilon = 320 \end{pmatrix} ms^{-1},$$

et la valeur physique de la source thermique est donnée par $\varepsilon^2 \hat{f} = 1KW/m^3$ dans $\hat{\Omega}^S$.

Remarquons que quand ε tend vers 0, nous ne modifions pas les valeurs de \hat{K}^F et de \hat{V} , et leurs valeurs n'aura donc plus aucune interprétation physique. Heureusement, ce processus n'est utilisé que pour valider la convergence de notre méthode d'homogénéisation et, en aucun cas, pour atteindre des propriétés physiques.

Pour prouver la convergence de notre méthode et son ordre pour un ε de plus en plus petit, nous augmentons la taille du domaine $\hat{\Omega}$ en augmentant le nombre de cellules (de taille fixe) comme expliqué dans la Section 4.5.1. Ici, nous commençons par faire nos calculs dans le domaine décrit ci-dessus, puis, à chaque itération, nous ajoutons un bloc de cellules dans la direction x_2 et nous augmentons la hauteur du domaine $\hat{\Omega}$ en ajoutant une couche d'épaisseur $0,034m$ dans la direction x_3 . Ici, ε correspond au ratio du nombre de cellules dans la direction x_2 , à savoir,

$$\varepsilon = \frac{1}{N_2}, \quad N_2 = 4, 5 \dots 10.$$

Notons qu'il n'est pas nécessaire d'augmenter le nombre de cellules dans la direction x_1 grâce à la condition aux limites périodique dans cette direction. Cette condition aux limites périodique nous permet de considérer le domaine $\hat{\Omega}$ comme infini dans cette direction. Par contre, sachant que les conditions aux limites dans la direction x_3 ne sont pas périodiques,

nous devons tenir compte de l'augmentation de la taille du domaine dans cette direction par rapport à la remise à l'échelle décrite dans la Section 4.5.1.

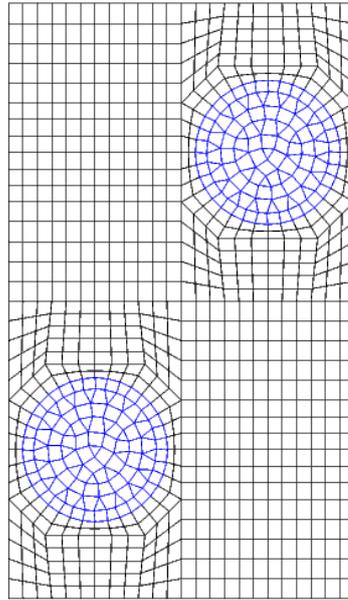


FIGURE 4.4 – Maillage de la cellule élémentaire. Y^F en bleu et Y^S en noir.

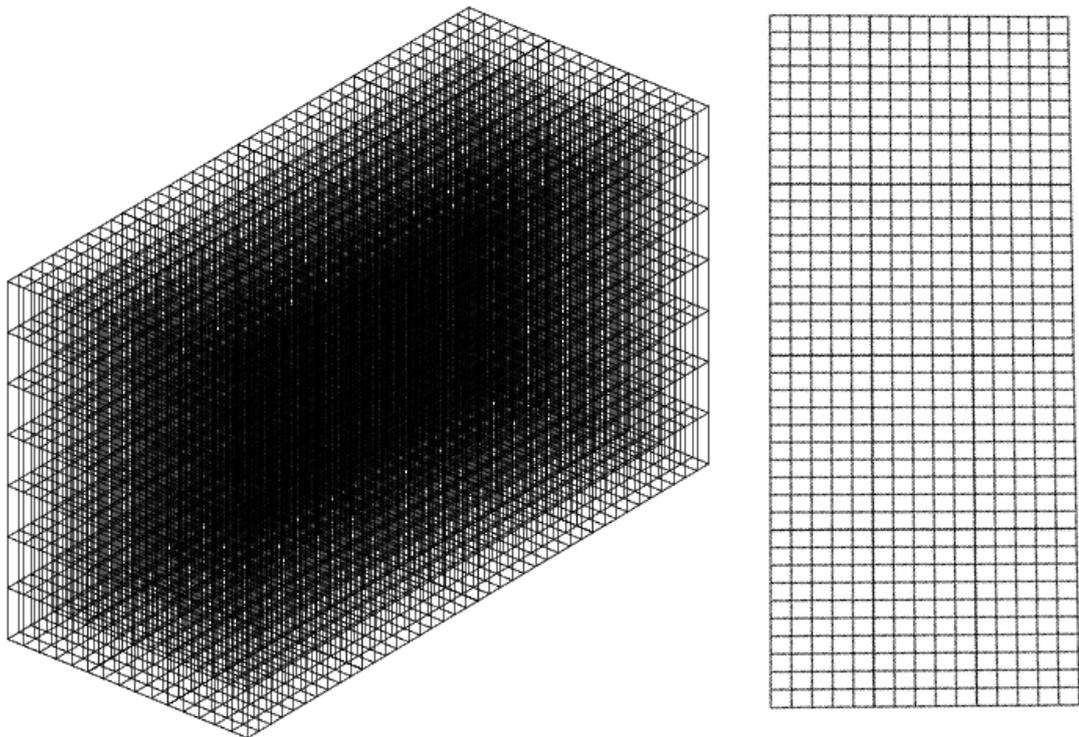


FIGURE 4.5 – Maillage du domaine homogénéisé (à gauche), coupe transversale (à droite)

Tous les calculs sont faits en utilisant une méthode d'éléments finis \mathbb{Q}_1 (4 nœuds en 2D, 8 en 3D). Une méthode intégrale est utilisée pour le calcul du terme de rayonnement qui

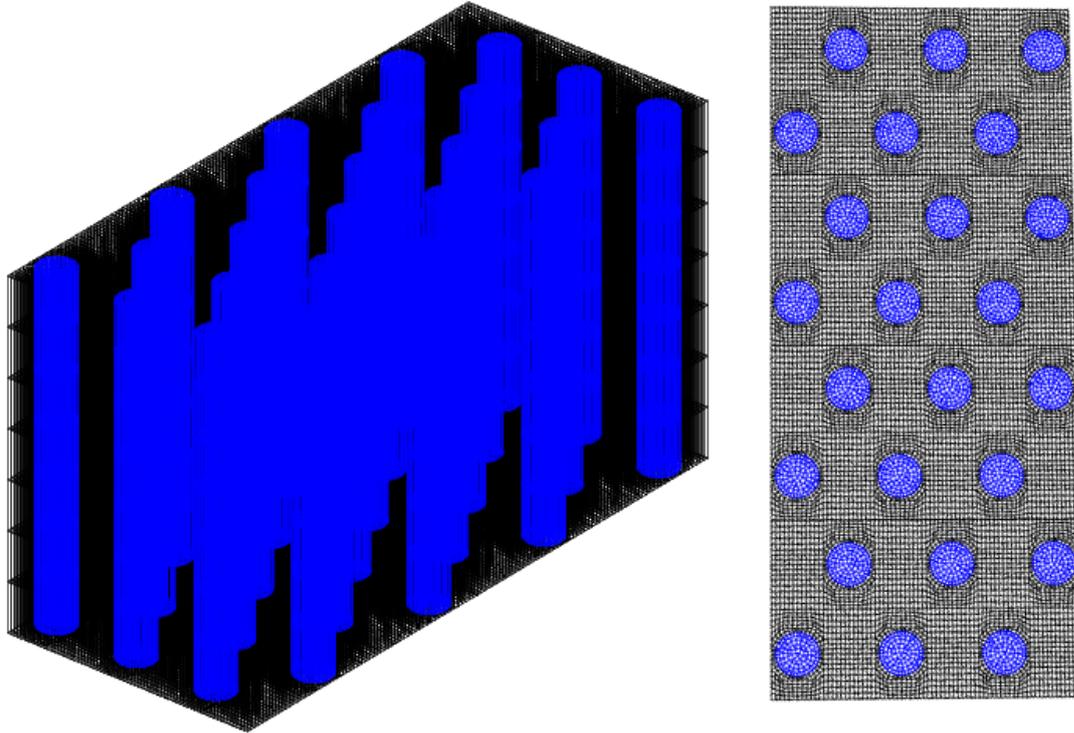


FIGURE 4.6 – Maillage du domaine original (à gauche), coupe transversale (à droite).
 Ω_ε^F en bleu et Ω_ε^S en noir ($\varepsilon = 1/4$).

implique une matrice dense couplant tous les nœuds de la surface entourant chaque canal fluide. Le nombre de nœuds pour la résolution du problème de cellule est 1027 (desquels 72 sont sur le bord γ) (voir la Figure 4.4) ; le nombre de nœuds pour le problème homogénéisé 3D (qui ne contient pas de terme radiatif) est de 6336 (voir la Figure 4.5) ; il est de 96480 pour le problème original (3.9) avec $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ (desquels 6912 sont sur le bord Γ_ε) (voir la Figure 4.6).

4.5.3 Résultats numériques

Dans les Figures 4.7, 4.8, nous traçons les solutions des problèmes de cellule (4.59) pour, respectivement, deux valeurs typiques de la température $\hat{T}_0 = 800K$ et $\hat{T}_0 = 20000K$. Rappelons que, dans le cas non linéaire, les problèmes de cellule dépendent de la température macroscopique.

Les solutions des problèmes de cellule nous permettent de calculer la conductivité homogénéisée qui est numériquement égale, pour des températures $\hat{T}_0 \leq 1E+05$, à un tenseur diagonal. Pour différentes valeur de \hat{T}_0 dans une plage de température $\hat{T}_0 \in [50, 20000]K$, les

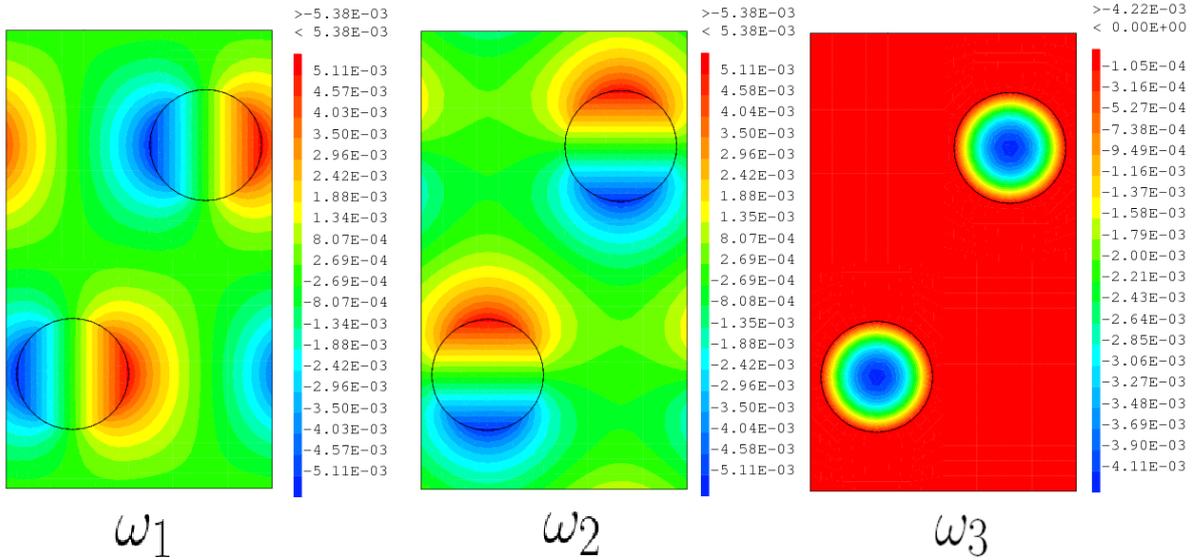


FIGURE 4.7 – solutions des problèmes de cellule (4.59) pour $\hat{T}_0 = 800K$

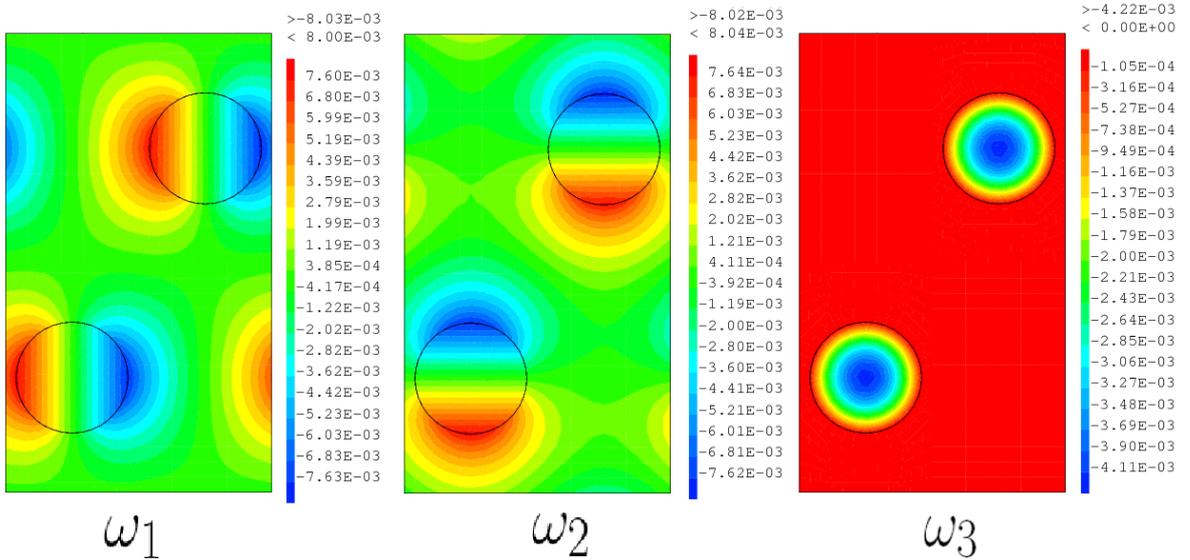


FIGURE 4.8 – solutions des problèmes de cellule (4.59) pour $\hat{T}_0 = 20000K$

valeurs diagonales de \hat{K}^* sont tracées dans la Figure 4.9 et deux valeurs typiques sont :

$$\hat{K}^*(T_0 = 50K) = \begin{pmatrix} 25.907 & 0. & 0. \\ 0. & 25.914 & 0. \\ 0. & 0. & 30.05 \end{pmatrix}, \quad \hat{K}^*(T_0 = 20000K) = \begin{pmatrix} 49.801 & 0. & 0. \\ 0. & 49.781 & 0. \\ 0. & 0. & 3680.7 \end{pmatrix}.$$

La vitesse homogénéisée est une simple moyenne volumique, égale à :

$$\hat{V}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15.134 \end{pmatrix} ms^{-1}.$$

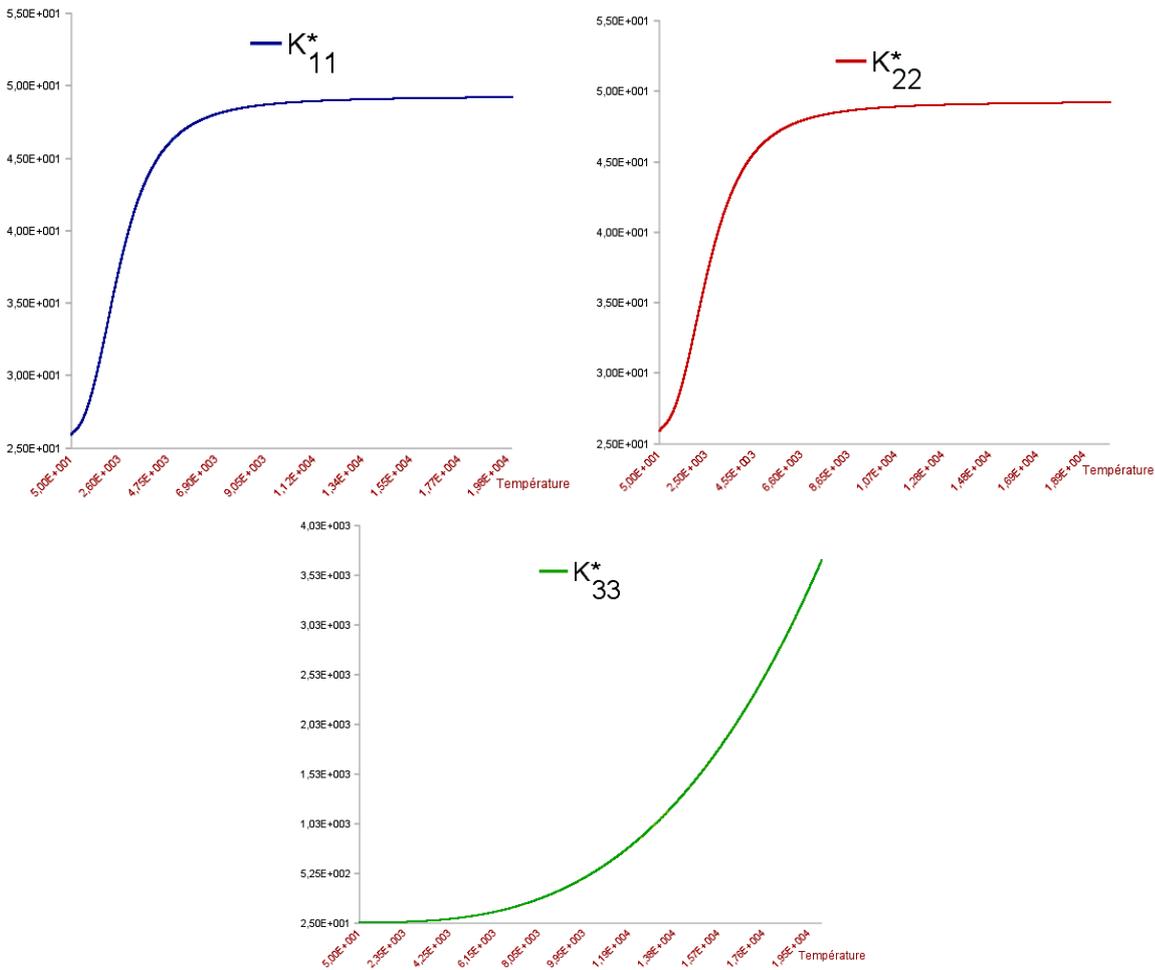


FIGURE 4.9 – conductivité homogénéisée : K_{11}^* (en haut à gauche), K_{22}^* (en haut à droite), K_{33}^* (en bas).

A l'aide d'un algorithme de point fixe (la conductivité homogénéisée \widehat{K}^* est évaluée grâce à la température \widehat{T}_0 de l'itération précédente), nous résolvons le problème homogénéisé. Nous résolvons aussi le problème direct (4.1) pour comparer sa solution à celle homogénéisée.

Dans la Figure 4.10 nous traçons les solutions directe et homogénéisée pour une valeur de $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{4}$. Dans la Figure 4.11, nous traçons les variations de la norme du gradient des solutions directe et homogénéisée dans le domaine $\widehat{\Delta}_\varepsilon$. Il est clair que la température reconstruite à l'aide du correcteur \widehat{T}_1 est une meilleure approximation de \widehat{T}_ε que la seule température homogénéisée \widehat{T}_0 . Pour une meilleure visibilité, nous traçons dans les Figures 4.12, les différentes solutions \widehat{T}_ε , \widehat{T}_0 et $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1$ sur le segment de profil $D1 = [p1, p2]$ où $p1 = (0 \ 0 \ 0)$ et $p2 = (\frac{L_1}{\varepsilon_0} \ \frac{L_2}{\varepsilon_0} \ \frac{L_3}{\varepsilon_0})$ pour $\varepsilon_0 = 1/4$.

Notons que les fluctuations de la température reconstruite $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1$ que nous observons sur les bords de $\widehat{\Omega}$ pour $y_2 = 0$ sont dues au fait que la valeur du premier correcteur \widehat{T}_1 qui n'est pas nécessairement égale à 0 sur ces bords (ce qui devrait être le cas pour vérifier la

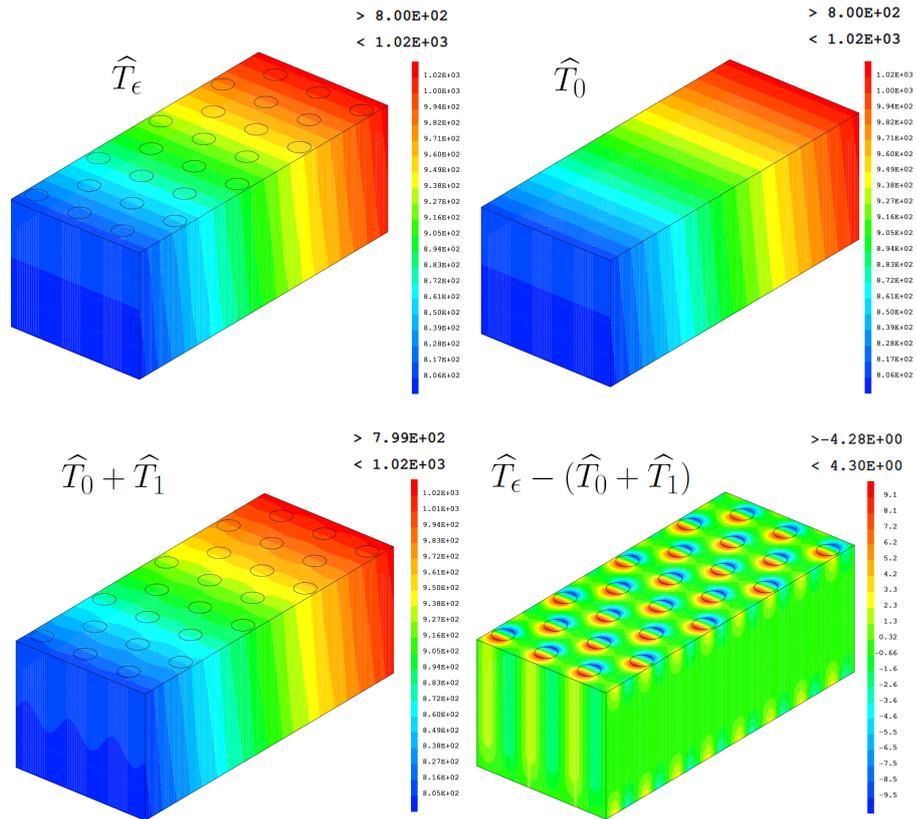


FIGURE 4.10 – Solutions dans $\hat{\Omega}$

condition de Dirichlet sur T_ϵ). Cet effet de bord est bien connu dans la théorie de l'homogénéisation et est corrigé par l'addition d'autres termes correcteurs appelés des couches limites (voir [3], [17], [21]).

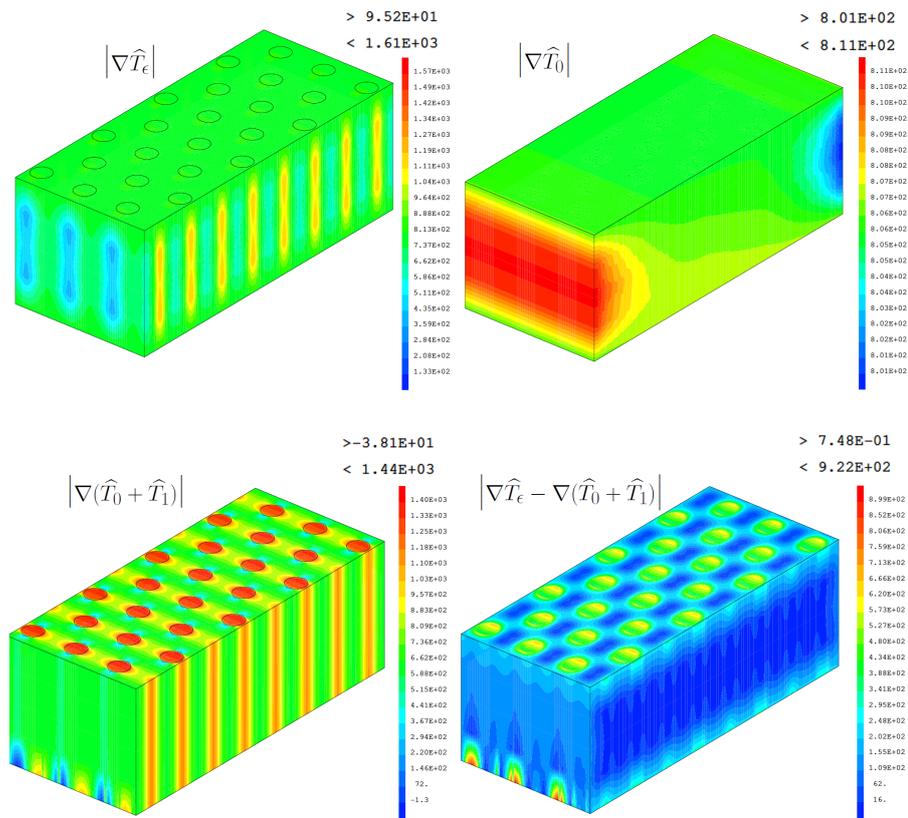


FIGURE 4.11 – Module des gradients des solutions dans $\hat{\Omega}$

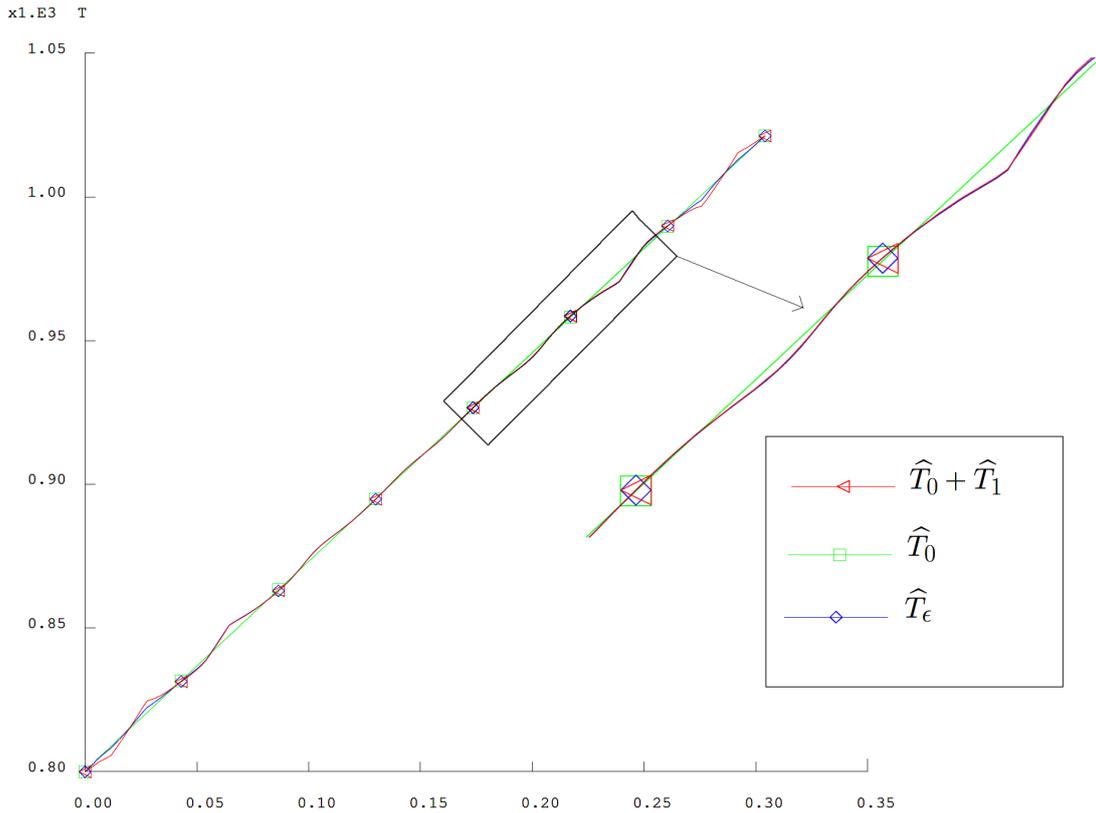


FIGURE 4.12 – Tracés des solutions sur le segment de profil $D1$

Ici, nous observons aussi un effet de couches limites dû à notre approximation 2D des facteurs de forme (au bord $y_3 = 0$ et $y_3 = 0.2m$. Pour éviter de calculer les valeurs de ces couches limites, chose qui n'est pas toujours évidente, nous allons restreindre les résultats affichés ci-dessus à un domaine strictement inclus dans $\hat{\Omega}$. Dans la Figure 4.14 nous traçons la solution directe et homogénéisée dans un domaine $\hat{\Delta}$ inclus de façon compact dans $\hat{\Omega}$ pour $\epsilon = \epsilon_0$. Nous faisons la même chose pour les gradients de ces solutions dans la Figure 4.15. $\hat{\Delta}$ correspond à $\hat{\Omega}$ duquel on enlève un bloque de l'ordre d'une cellule de chaque côté de la direction x_2 , et une couche d'épaisseur ($0.01m$) de chaque côté de la direction x_3 (voir la Figure 4.13).

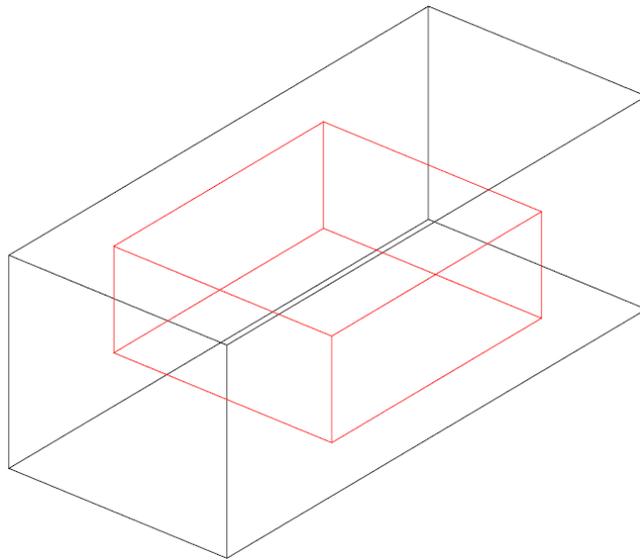


FIGURE 4.13 – Le domaine réduit $\hat{\Delta}$ (en rouge) dans le domaine entier $\hat{\Omega}$ (en noir)

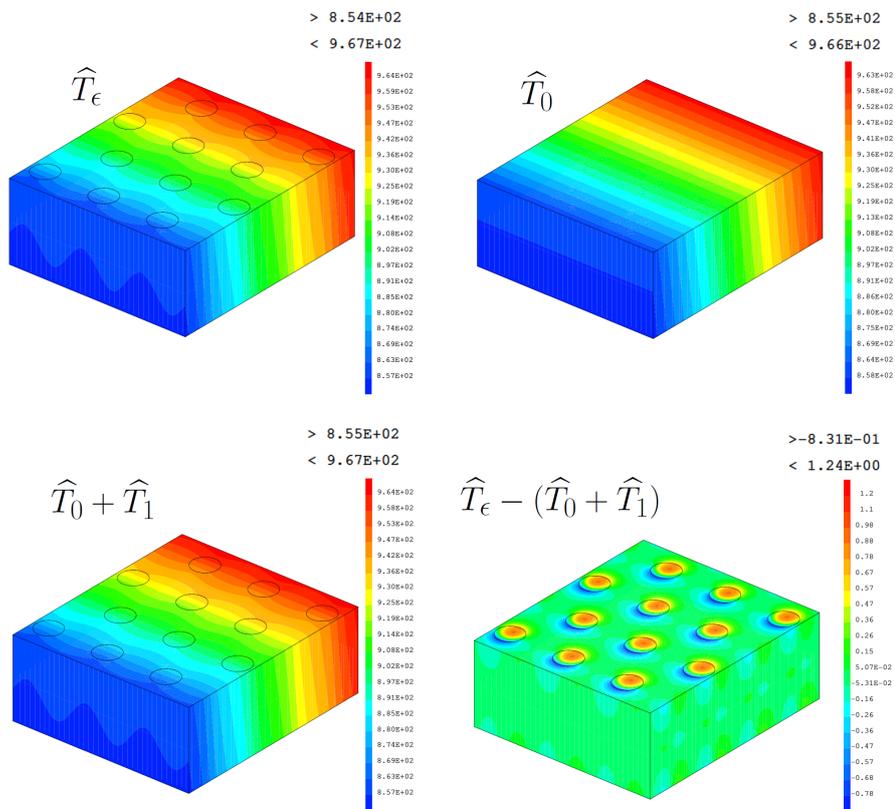
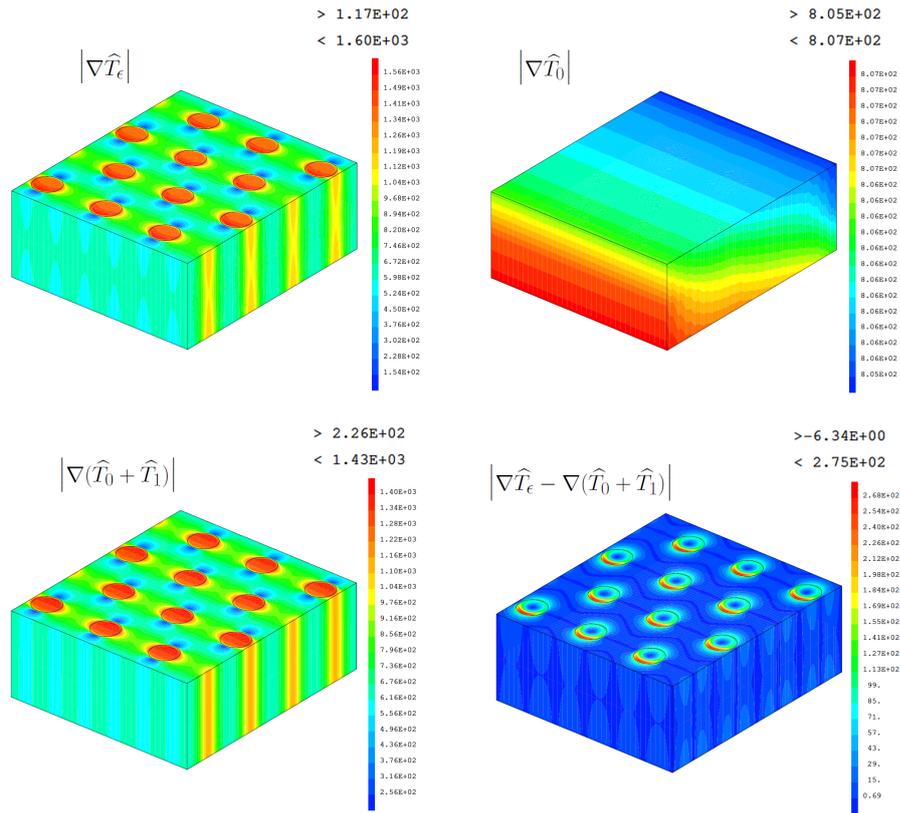


FIGURE 4.14 – Solutions dans $\hat{\Delta}$


 FIGURE 4.15 – Module des gradients des solutions dans $\hat{\Omega}$

Maintenant, pour justifier la convergence de notre méthode, pour un ε de plus en plus petit, nous traçons, dans les Figures 4.16 et 4.17, les erreurs relatives $ERR(T)$ sur la température, et $ERR(\nabla T)$ sur le gradient de température. Nous comparons les courbes de ces erreurs avec celles de ε et $\sqrt{\varepsilon}$. Avec cette comparaison, nous voulons montrer, comme ce qui a été décrit théoriquement dans [3] et [21] pour une conduction linéaire, que l'erreur relative sur la température décroît au minimum comme ε dans $\hat{\Omega}_\varepsilon$ (ou moins que ε à cause du passage 3D-2D des facteurs de forme). Nous voulons montrer aussi que l'erreur relative sur le gradient de température se comporte comme $\sqrt{\varepsilon}$ (ou moins que $\sqrt{\varepsilon}$ pour les mêmes raisons que la température) telle que, pour une constante positive C ,

$$\begin{cases} ERR(T)_{\hat{\Omega}} = \frac{\|\hat{T}_\varepsilon(y) - (\hat{T}_0(y) + \hat{T}_1(y))\|_{L^2(\hat{\Omega})}}{\|\hat{T}_\varepsilon(y)\|_{L^2(\hat{\Omega})}} \leq C\varepsilon, \\ ERR(\nabla T)_{\hat{\Omega}} = \frac{\|\nabla \hat{T}_\varepsilon(y) - (\nabla \hat{T}_0(x) + \nabla \hat{T}_1(y))\|_{L^2(\hat{\Omega})}}{\|\nabla \hat{T}_\varepsilon(y)\|_{L^2(\hat{\Omega})}} \leq C\sqrt{\varepsilon}. \end{cases}$$

Nos erreurs $ERR(T)$ et $ERR(\nabla T)$ sont en accord avec ce qui a été prédit dans le cas d'une diffusion linéaire pure. Ce résultat nous permet aussi de conclure que le passage 3D-2D dans notre étude induit une erreur d'approximation au plus d'ordre ε .

Notons que dans la Section 4.3 nous n'avons justifié la convergence du gradient $\nabla \hat{T}_\varepsilon$ que dans la partie solide $\hat{\Omega}^S$ ce que nous vérifions numériquement dans la Figure 4.17. A cause

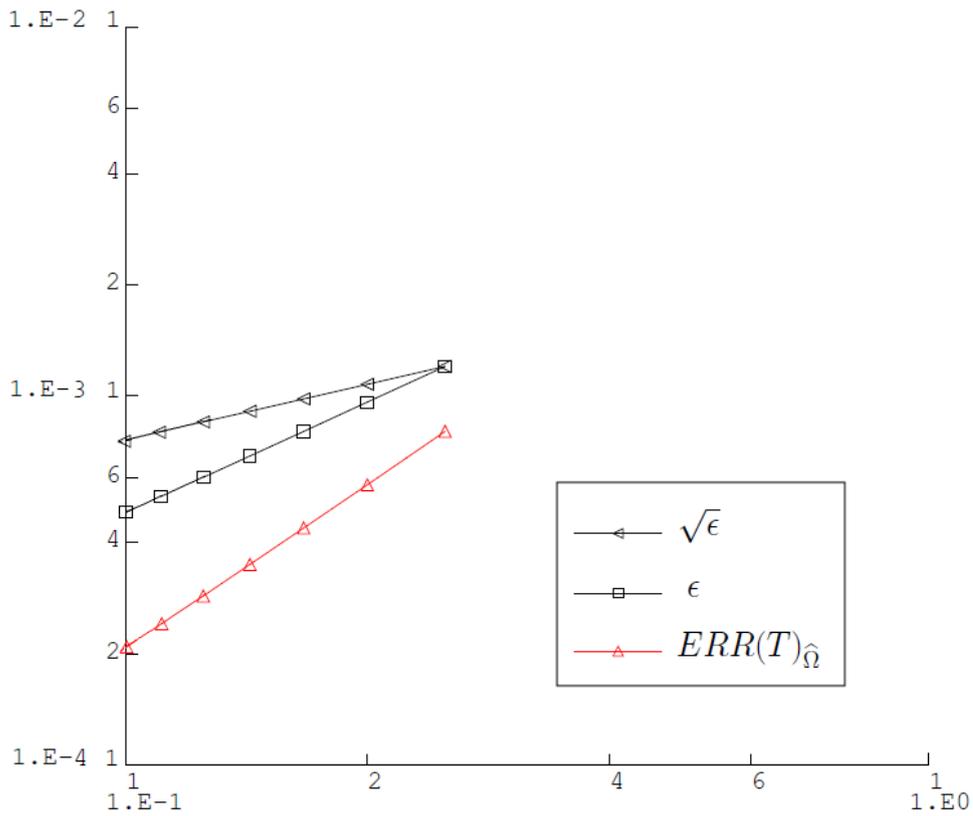


FIGURE 4.16 – Evolution de l’erreur sur la température dans $\hat{\Omega}$

du coefficient ϵ dans le problème (5.41) devant le terme de diffusion dans la partie fluide $\hat{\Omega}^F$, nous croyons que le gradient de température $\sqrt{\epsilon}\nabla T_\epsilon^F$ converge dans la partie fluide de $\hat{\Omega}$ comme le gradient ∇T_ϵ^S dans sa partie solide (càd suivant $\sqrt{\epsilon}$). En calculant une erreur relative au lieu d’une erreur absolue, le coefficient $\sqrt{\epsilon}$ disparaît et nous montrons dans la Figure 4.17 que $ERR(\nabla T)$ converge aussi en $\sqrt{\epsilon}$ dans la partie fluide $\hat{\Omega}^F$.

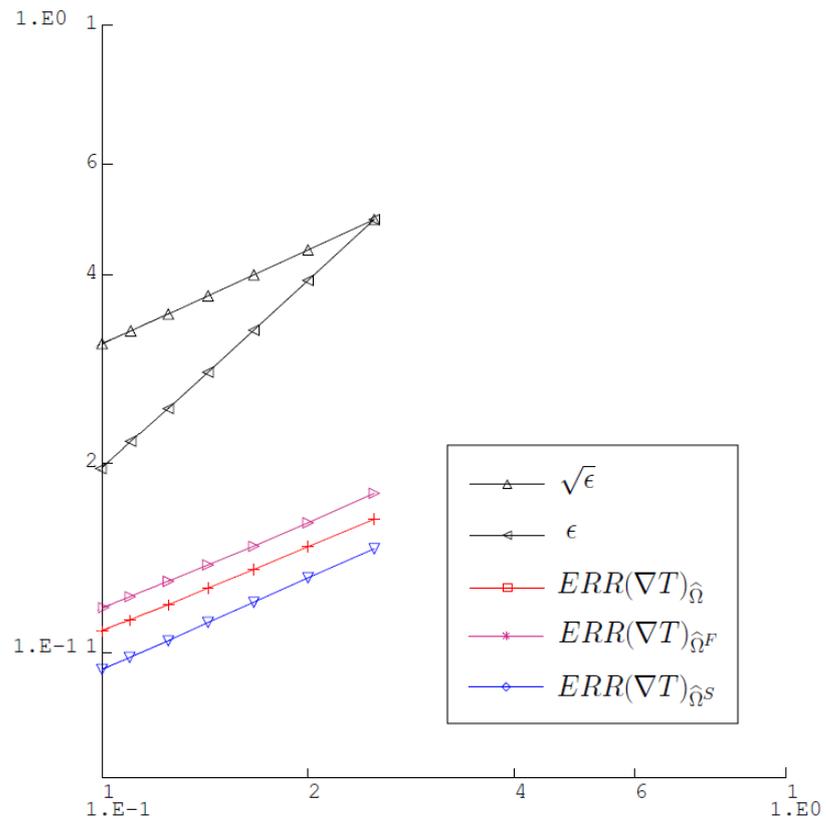


FIGURE 4.17 – Evolution de l'erreur sur le gradient de température dans $\hat{\Omega}^S$

Chapitre 5

Correcteur d'ordre 2 dans l'homogénéisation du modèle 2D simplifié

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'influence du correcteur de second ordre dans l'homogénéisation du modèle 2D simplifié de transfert thermique (3.41). Plus précisément, lorsque le terme source thermique varie localement à l'échelle de la cellule, les simulations directes montrent une variation importante de la température entre le support local du terme source et le bord des perforations. Ces variations microscopiques ne sont pas prises en compte par le correcteur usuel d'ordre 1 en homogénéisation. Seul le correcteur d'ordre 2 peut en tenir compte. Après l'avoir déterminé analytiquement, nous montrons numériquement que ce correcteur d'ordre 2 permet effectivement de bien reproduire les gradients de température qui apparaissent entre la zone de la source thermique et les perforations.

Sommaire

5.1 Introduction	108
5.2 Homogénéisation	111
5.2.1 Homogénéisation par développement asymptotique	111
5.2.2 Convergence	125
5.2.3 Résultats dans le cas non-linéaire	127
5.3 Résultats numériques	129
5.3.1 Changement de variables pour la simulation numérique	129
5.3.2 Algorithme et données numériques	130
5.3.3 Résultats numériques	131
5.3.4 Calcul d'erreurs	147

5.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'améliorer, grâce au correcteur d'ordre 2, les résultats de la méthode d'homogénéisation appliquée à nos modèles de transfert thermique quand ces derniers contiennent une source thermique périodiquement oscillante (du type $f_\varepsilon(x) = f(x, \frac{x}{\varepsilon})$) et une condition d'échange aux bords des canaux. Pour alléger les différents calculs nous omettons toutes les autres difficultés rencontrées dans le Chapitre 4. Soient, nous réduisons notre étude 3-D à une étude 2-D comme dans [44] où le modèle est périodique dans toutes ces directions et où les bords des canaux sont des surfaces fermées. Dans ce cas, nous n'observons aucun effet de perte d'énergie radiative. Nous supposons aussi que la température à l'intérieur des canaux est connue et que la relation entre les échanges thermiques dans la partie solide et dans la partie fluide (les canaux) du domaine se fait via une condition d'échange sur les parois des canaux comme nous avons expliqué dans le Chapitre 1. Cette étude devrait rester valable en général pour tout problème du même genre.

L'approche que nous menons dans ce chapitre pour établir la contribution du correcteur d'ordre 2 est une approche qualitative et numérique. Nous allons ici donner le résultat formel, grâce à la méthode de développement asymptotique, des équations homogénéisées ainsi que celles vérifiées par les correcteurs d'ordre 1 et d'ordre 2. Nous validons ensuite ce résultat par une analyse numérique de ces différents termes. Notons que nous n'allons pas prouver aucun résultat de convergence ou d'analyse d'erreur sur l'approximation contenant le correcteur d'ordre 2 et nous renvoyons vers [3] pour une telle analyse. Rappelons tout de même que cette analyse n'est pas immédiate puisqu'elle doit prendre en compte les termes dits de couche limite qui sont dominants sur le correcteur d'ordre 2.

L'utilisation du correcteur d'ordre 2, T_2 , est très rare dans la méthode d'homogénéisation. Rappelons que, en homogénéisation par développement asymptotique, nous approchons notre inconnue T_ε par une série de la forme :

$$T_\varepsilon(x) \simeq T_0(x) + \varepsilon T_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 T_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots, \quad (5.1)$$

et nous savons, bien sûr, que pour un ε très petit (qui tend vers 0), les termes en facteur ε^p , $p > 0$, sont tous négligeables. Alors que la justification de l'utilité du correcteur εT_1 , d'ordre 1, est bien connue dans la littérature (terme utile pour une approximation correcte du gradient de T_ε), celle du terme T_2 a été toujours mise de côté car, souvent, ce correcteur ne joue aucun rôle dans l'amélioration de l'approximation par homogénéisation et les études qui s'y intéressent sont donc très rares. Parmi ces études nous citons [22] où nous pouvons trouver une étude numérique des différents correcteurs issus du développement asymptotique (5.1). Néanmoins, ce que nous allons montrer dans cette étude est que, certes ce correcteur n'améliore pas considérablement l'ordre de convergence de notre méthode d'homogénéi-

sation mais, lorsqu'on se place à un ε fixé (souvent fixé par des contraintes industrielles, ici correspondantes à la taille d'un canal d'hélium), les résultats de notre étude montrent que T_2 a une contribution non négligeable car elle nous permet de modéliser les gradients qui apparaissent entre la zone de la source thermique et les canaux (voir la Figure 5.2). Ceci est dû au fait que c'est le seul terme qui est fonction des valeurs locales de la source et de l'échange thermiques. Nous allons voir, plus tard dans ce chapitre, que ces valeurs apparaissent sous forme moyennée dans le problème homogénéisé sur T_0 (ce qui est logique puisque tous les paramètres de ce modèle sont des moyennes homogénéisées), et que le problème sur T_1 ne dépend que de la condition de rayonnement sur le bord des canaux, d'où l'utilité du correcteur T_2 .

Nous rappelons ici que les équations du modèle 2D simplifié sont données par :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon) = f_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon^S \\ -K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon \cdot n = \varepsilon h_\varepsilon (T_\varepsilon - T_{gaz}) + \frac{\sigma}{\varepsilon} G_\varepsilon(T_\varepsilon^F) & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ T_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.2)$$

où $K_\varepsilon(x) = K(x, \frac{x}{\varepsilon})$ avec $K(x, y)$ un tenseur périodique en y , symétrique et coercif dans la cellule de référence Y , $h_\varepsilon(x) = h(x, \frac{x}{\varepsilon})$ est le paramètre d'échange oscillant, G_ε est l'opérateur de rayonnement dans le cas linéaire. La seule source thermique du modèle est présente dans

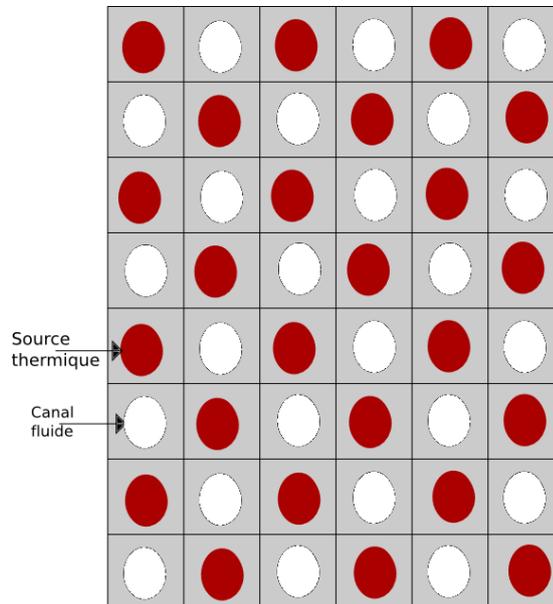


FIGURE 5.1 – Distribution de la source thermique (rouge) dans le domaine Ω^S (gris et rouge) traversé par les canaux (en blanc).

la partie solide. Nous insistons sur le fait que, ici, c'est une source thermique oscillante qui s'écrit (voir la Figure 5.1) :

$$f_\varepsilon(x) = f(x, \frac{x}{\varepsilon}),$$

où la fonction $f(x, y)$ vérifie $f(x, y) \in L^2(\Omega, L^2(Y))$ et $f \geq 0$.

Comme pour le Chapitre 4, pour des raisons de simplification, nous supposons ici que l'opérateur de rayonnement introduit dans (3.4) est un opérateur linéaire. Il est non linéaire en réalité et est défini, sur chaque surface $\Gamma_{\varepsilon,i}$, $1 \leq i \leq M(\varepsilon)$, par :

$$G_\varepsilon(T_\varepsilon) = e(Id - \zeta_\varepsilon)(Id - (1 - e)\zeta_\varepsilon)^{-1}(T_\varepsilon^4) \quad \text{with } \zeta_\varepsilon(f)(s) = \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} F(s, x)f(x)dx.$$

Nous continuons aussi de nous restreindre au cas d'une émissivité $e = 1$. Notre étude est toujours valable pour les autres cas en échange de calculs plus fastidieux. Nous donnons dans la Section 5.2.3 le résultat que nous obtenons dans le cas général d'un rayonnement non linéaire avec une émissivité e comprise entre 0 et 1.

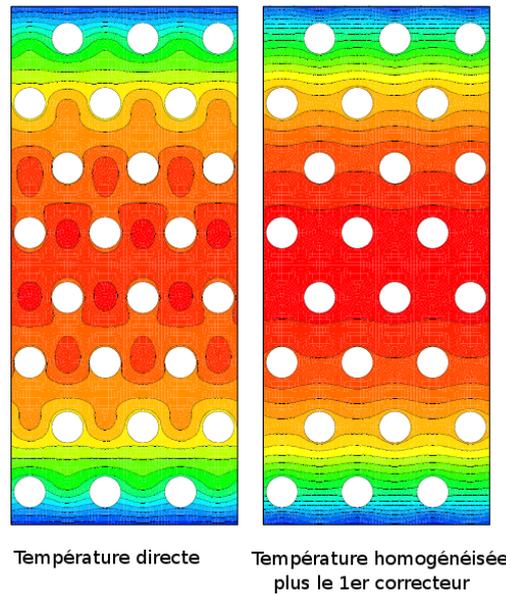


FIGURE 5.2 – Aperçu de la solution directe (à gauche) et homogénéisée (à droite) du problème (5.2)

En réalité, dans la présente étude, le rayonnement ne joue aucun rôle dans l'apparition des gradients thermiques qui motivent la présente étude. Les seuls moteurs de ces gradients sont la source thermique oscillante et l'échange thermique sur les parois des canaux d'hélium. Néanmoins, dans un modèle thermique à haute température comme le notre, le transfert thermique par rayonnement est primordial. Omettre ce type de transfert dans notre étude n'a donc aucun sens physique dans le contexte industriel qui nous intéresse. Pour cette raison, nous considérons que l'échange thermique se fait aussi par rayonnement à travers les parois des canaux d'hélium. Comme dans le Chapitre 4 précédent, pour alléger les écritures mathématiques, nous supposons que la condition de rayonnement est une condition simplifiée, i.e. une condition linéaire à parois noires (émissivité $e = 1$). La présente étude reste transférable et adaptable aux autres types de conditions plus générales. De plus, l'étude

asymptotique du rayonnement s'avère difficile comme nous l'avons vue dans le Chapitre 4 précédent et, comme nous allons le voir plus tard, nous serons amenés dans ce chapitre à développer l'opérateur de rayonnement à un ordre plus élevé que précédemment, ou de ce qui a été fait dans [9] et [44] (i.e. nous allons donner une valeur exacte du terme a_1^{ray} vu dans la preuve de la Proposition 4.2.1 du Chapitre 4). La principale difficulté technique de cette étude vient donc de la condition non locale de l'opérateur de rayonnement où plusieurs simplifications doivent avoir lieu.

5.2 Homogénéisation

5.2.1 Homogénéisation par développement asymptotique

Comme expliqué ci-dessus, nous voulons ici approcher l'inconnue T_ε du problème (5.2) par la série (5.1), i.e. nous cherchons à donner la forme exacte des équations vérifiées par T_0 , T_1 et aussi T_2 . Le résultat principale de cette section est le suivant :

Proposition 5.2.1. *En supposant que la solution T_ε du problème (5.2) est donnée par la série :*

$$T_\varepsilon = T_0(x) + \varepsilon T_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 T_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (5.3)$$

où, pour $i = 1, 2$, $y' \rightarrow T_i(x, y')$ est Y -périodique, nous montrons que le terme T_0 d'ordre 0 est la solution du problème homogénéisé suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K^*(x)\nabla T_0(x)) + h^*(x)(T_0(x) - T_{gaz}(x)) = f^*(x) & \text{dans } \Omega \\ T_0(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.4)$$

où K^* est le tenseur de conductivité homogénéisé donné par la valeur de ses composantes :

$$K_{j,k}^* = \frac{1}{|Y|} \left[\int_{Y^S} K(x, y)(e_j + \nabla_y \omega_j(y)) \cdot (e_k + \nabla_y \omega_k(y)) dy + \sigma \int_{\Gamma} G(\omega_k(y) + y_k)(\omega_j(y) + y_j) dy \right],$$

f^* est la source homogénéisée donnée par :

$$f^*(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^S} f(x, y) dy,$$

h^* est le terme d'échange homogénéisé donné par :

$$h^*(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{\Gamma} h(x, y) dy,$$

et $(\omega_k(x, y))_{1 \leq k \leq 2}$ sont les solutions des problèmes de cellule dans Y^S suivants :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y K(x, y)(e_j + \nabla_y \omega_j) = 0 & \text{dans } Y^S \\ K(x, y)(e_j + \nabla_y \omega_j) \cdot n = \sigma G(\omega_j(y) + y_j) & \text{sur } \Gamma \\ y \mapsto \omega(y) & \text{est } Y\text{-périodique} \end{cases} \quad (5.5)$$

De plus, le premier correcteur $T_1(x, y)$ est donné par :

$$T_1(x, y) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial T_0}{\partial x_j}(x) \omega_j(x, y) + \tilde{T}_1(x), \quad (5.6)$$

et le deuxième correcteur $T_2(x, y)$ est solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_y (K(x, y) [\nabla_y T_2(x, y) + \nabla_x T_1(x, y)]) = f(x, y) \\ \quad + \operatorname{div}_x (K(x, y) [\nabla_x T_0(x) + \nabla_y T_1(x, y)]) \quad \text{dans } Y^S \\ -K(x, y) [\nabla_y T_2(x, y) + \nabla_x T_1(x, y)] \cdot n = h(x, y) (T_0(x) - T_{gaz}(x)) \\ \quad + \sigma G (T_2 + \nabla_x T_1 \cdot y + \frac{1}{2} \nabla \nabla T_0 y \cdot y) \\ \quad - \sigma G (\nabla_x T_1 + \nabla \nabla T_0 y) \cdot y \quad \text{sur } \Gamma \\ T_2(x, y) \text{ est } Y\text{-périodique.} \end{array} \right. \quad (5.7)$$

Remarque 5.2.1. Remarquons que les fonctions \tilde{T}_1 et \tilde{T}_2 respectivement dans (5.6) et (5.9) sont des fonctions non-oscillantes qui sont indéterminées. Comme nous pouvons le voir dans [21], si nous arrêtons notre approximation (4.2) à l'ordre 1, la fonction \tilde{T}_1 (et a fortiori \tilde{T}_2) ne joue aucun rôle, de ce fait, nous pouvons choisir $\tilde{T}_1 \equiv 0$ ($\tilde{T}_2 \equiv 0$). Néanmoins, si nous considérons une approximation d'ordre plus élevé, ce qui est le cas ici, \tilde{T}_1 doit satisfaire une condition de compatibilité. plus précisément, la condition de compatibilité sur $T_3(x, y)$ dans la cellule élémentaire donne : (voir [3] et [21])

$$-\operatorname{div} K^* \nabla \tilde{T}_1 = \sum_{i,j,k} c_{ijk} \frac{\partial^3 T_0}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \quad (5.8)$$

avec

$$c_{ijk} = \int_{Y^*} \left[\sum_l K_{kl}(y) \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial y_l}(y) - K_{ij}(y) \omega_k(y) \right] dy.$$

Le choix de la fonction \tilde{T}_1 n'est pas unique vu qu'on ne dispose pas de conditions aux limites sur l'équation (5.8). On peut voir dans [3] et [17] qu'on peut définir ces conditions aux limites grâce a des termes dits de couche limite que nous introduisons plus tard dans la Section 5.2.2.

Notons que, même en prenant en compte la fonction \tilde{T}_1 , l'approximation formelle (4.2) poussée jusqu'à l'ordre 2 est en général incomplète. Pour la compléter on doit corriger l'erreur commise par l'addition du premier correcteur T_1 au bords extérieurs de Ω (car chaque correcteur ne vérifie pas nécessairement une condition de Dirichlet au niveau de ces bords extérieurs). Cette correction se fait grâce à l'addition d'un terme dit de couche limite T_1^{bl} . Il est clair que cette erreur (en l'absence de T_1^{bl}) est observée dans tout le domaine Ω_ε et pas seulement sur ses bords. Néanmoins, on peut voir dans [3] que pour un choix particulier des conditions

limites de l'équation (5.8), on peut considérablement améliorer l'erreur entre T_ε et son approximation $T_0 + \varepsilon T_1$ à l'intérieur du domaine Ω sans prendre en compte le terme de couche limite T_1^{bl} .

En ce qui concerne l'application principale de notre travail, si le tenseur de conductivité $K(x, y)$ est symétrique dans la cellule élémentaire Y , il en résulte que les paramètres $c_{i,j,k} = 0$. Nous pouvons choisir alors $\tilde{T}_1 = 0$. En particulier, c'est le choix que nous adoptons dans le cas test numérique que nous présentons dans la Section 5.3 car, même si $K(x, y)$ n'est pas vraiment symétrique en référence à la non-symétrie de la cellule de périodicité Y (voir la Figure 3.2), nous montrons numériquement que les valeurs des paramètres $c_{i,j,k}$ sont presque nuls.

Remarque 5.2.2. Notons que, comme dans le problème (5.7), la variable x apparaît dans les problèmes de cellule (5.5) en tant que paramètre. La résolution de ces problèmes devrait alors se faire pour chaque valeur de ce paramètre, i.e. elle devrait se faire dans chaque cellule du domaine Ω_ε et pas seulement dans la cellule de référence Y sauf si, ce qui est le cas pour notre application industrielle, le tenseur de conductivité hétérogène K_ε s'écrit $K_\varepsilon(x) = K(\frac{x}{\varepsilon})$ au lieu de $K_\varepsilon(x) = K(x, \frac{x}{\varepsilon})$, dans ce cas les problèmes (5.5) sont indépendants de la variable x .

Remarque 5.2.3. Dans la formule du problème de cellule (5.7) sur T_2 , nous remarquons que T_2 dépend des valeurs locales, en y , de la source thermique $f(x, y)$ et de l'échange thermique de coefficient $h(x, y)$, au contraire du problème homogénéisé qui dépend de leurs moyennes dans la cellule de référence Y^S . Sachant que le problème de cellule sur T_1 ne dépend que de la diffusivité du milieu et du rayonnement sur la surface Γ , nous déduisons l'intérêt du correcteur de second ordre T_2 , qui est donc le premier terme de la série (5.3) dépendant des variations microscopiques des termes de la source et de l'échange thermiques. Notons que c'est la différence locale entre ces deux derniers termes qui provoque les gradients thermiques, observés dans la Figure 5.2, que nous n'arrivons pas à approcher correctement avec seulement l'approximation $T_\varepsilon \simeq T_0 + \varepsilon T_1$.

Proposition 5.2.2. Si, dans la Proposition 5.2.1, nous supposons que les fonctions f et h s'écrivent :

$$f(x, y) = F(x)f_\#(y), \quad \text{et} \quad h(x, y) = H(x)h(y),$$

et que le tenseur de conductivité K_ε s'écrit : $K_\varepsilon(x) = K(\frac{x}{\varepsilon})$ au lieu de $K_\varepsilon(x) = K(x, \frac{x}{\varepsilon})$, alors nous avons :

$$f^*(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^S} f(x, y) dy = F(x) \frac{1}{|Y|} \int_{Y^S} f_\#(y) dy = F(x)F^*,$$

et

$$h^*(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{\Gamma} h(x, y) dy = H(x) \frac{1}{|Y|} \int_{\Gamma} h(y) dy = H(x)H^*,$$

et $T_2(x, y)$ s'écrit dans ce cas :

$$T_2(x, y) = \left(T_2^1(y) + T_2^2(y) \right) F(x) + T_2^3(y) H(x) (T_0(x) - T_{gaz}(x)) + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_i \partial x_j}(x) \theta_{i,j}(y) + \tilde{T}_2(x)$$

où T_2^1, T_2^2, T_2^3 et les $\theta_{i,j}$ sont les solutions des problèmes de cellule :

$$T_2^1(y) : \begin{cases} -\operatorname{div}_y(K(y)\nabla_y T_2^1(y)) = f_{\#}(y) - \frac{|Y|}{|Y^S|} F^* & \text{dans } Y^S \\ -K(y)\nabla_y T_2^1(y) \cdot n = \sigma G(T_2^1(y)) & \text{sur } \Gamma \\ T_2^1(y) \text{ est } Y\text{-périodique} \end{cases} \quad (5.9)$$

$$T_2^2(y) : \begin{cases} -\operatorname{div}_y(K(y)\nabla_y T_2^2(y)) = \frac{|Y|}{|Y^S|} F^* & \text{dans } Y^S \\ -K(y)\nabla_y T_2^2(y) \cdot n = \frac{|Y|}{|\Gamma|} F^* + \sigma G(T_2^2(y)) & \text{sur } \Gamma \\ T_2^2(y) \text{ est } Y\text{-périodique} \end{cases} \quad (5.10)$$

$$T_2^3(y) : \begin{cases} -\operatorname{div}_y(K(y)\nabla_y T_2^3(y)) = 0 & \text{dans } Y^S \\ -K(y)\nabla_y T_2^3(y) \cdot n = (h(y) - \frac{|Y|}{|\Gamma|} H^*) + \sigma G(T_2^3(y)) & \text{sur } \Gamma \\ T_2^3(y) \text{ est } Y\text{-périodique} \end{cases} \quad (5.11)$$

et

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(K(y) [\nabla_y \theta_{i,j}(y) + e_j \omega_i(y)]) = K_{i,j}(y) \delta_{ij} + K(y) \nabla_y \omega_i(y) \cdot e_j & \text{dans } Y^S \\ -K(y) [\nabla_y \theta_{i,j}(y) + e_j \omega_i(y)] \cdot n = \frac{|Y|}{|\Gamma|} K_{i,j}^* \delta_{ij} + \sigma G\left(\theta_{i,j} + \omega_i y_j + \frac{1}{2} y_i y_j\right) \\ \quad - \sigma G(\omega_i + y_i) y_j & \text{sur } \Gamma \\ \theta_{i,j}(y) \text{ est } Y\text{-périodique.} \end{cases}$$

Preuve de la Proposition 5.2.1. Tous les problèmes sont concentrés dans la condition non-locale de rayonnement dans laquelle des simplifications doivent nécessairement avoir lieu. Par conséquent, suivant la même astuce que dans la preuve de la Proposition 4.2.1 du Chapitre 4, nous utilisons la méthode de développement asymptotique dans la formulation variationnelle du problème (5.2), profitant ainsi de sa symétrie, au lieu de l'utiliser dans sa formulation forte.

La formulation variationnelle du problème (5.2) est donnée par : trouver $T_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ telle que :

$$a_\varepsilon(T_\varepsilon, \phi_\varepsilon) = L_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \text{ pour toute fonction } \phi_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon), \quad (5.12)$$

où

$$a_\varepsilon(T_\varepsilon, \phi_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon \cdot \nabla \phi_\varepsilon dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} G(\sigma T_\varepsilon) \phi_\varepsilon dx + \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} h_\varepsilon(T_\varepsilon - T_{gaz}) \phi_\varepsilon dx$$

et

$$L_\varepsilon(\phi_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \phi_\varepsilon dx.$$

Nous choisissons ϕ_ε de la même forme que T_ε dans (4.2) (mais sans le reste) :

$$\phi_\varepsilon(x) = \phi_0(x) + \varepsilon \phi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 \phi_2(x, \frac{x}{\varepsilon}), \quad (5.13)$$

avec les fonctions régulières $\phi_0(x)$ et $\phi_i(x, y)$, $i = 1, 2$, qui sont Y -périodiques en y .

En insérant les ansatz (5.3) et (5.13) dans la formulation variationnelle (5.12) nous obtenons :

$$a^0(T_0, T_1, \phi_0, \phi_1) + \varepsilon a^1(T_0, T_1, T_2, \phi_0, \phi_1, \phi_2) = L^0(\phi_0, \phi_1) + \varepsilon L^1(\phi_0, \phi_1, \phi_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (5.14)$$

La stratégie de cette preuve est la même que celle de la Proposition 4.2.1, i.e. nous identifions les termes d'ordre zéro $a^0 = L^0$ et aussi les termes d'ordre un $a^1 = L^1$. L'identité d'ordre zéro, $a^0(T_0, T_1, \phi_0, \phi_1) = L^0(\phi_0, \phi_1)$, nous permet de définir le problème homogénéisé en T_0 dans Ω et le problème de cellule en T_1 dans $\Omega \times Y^S$. L'identité d'ordre un, $a^1(T_0, T_1, T_2, \phi_0, \phi_1, \phi_2) = L^1(\phi_0, \phi_1, \phi_2)$ nous permet de définir le problème de cellule en T_2 dans $\Omega \times Y^S$.

Pour une meilleur lisibilité, nous divisons cette preuve en trois parties où dans la première, nous développons les termes de conduction, d'échange et de flux qui sont relativement simples. Dans la deuxième partie, nous développons le terme de rayonnement, tandis que dans la troisième, nous combinons ces différents termes pour identifier les équations du même ordre en puissances de ε et en déduire le problème homogénéisé et les problèmes de cellule sur T_1 et sur T_2 .

Nous commençons alors le détail de la preuve par réécrire la formulation variationnelle (5.12) telle que :

$$a_\varepsilon(T_\varepsilon, \phi_\varepsilon) = a_\varepsilon^C(T_\varepsilon, \phi_\varepsilon) + a_\varepsilon^{ray}(T_\varepsilon, \phi_\varepsilon) = L_\varepsilon(\phi_\varepsilon)$$

où

$$\begin{aligned} a_\varepsilon^C &= \int_{\Omega_\varepsilon} K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon \cdot \nabla \phi_\varepsilon dx + \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} h_\varepsilon (T_\varepsilon - T_{gaz}) \phi_\varepsilon dx \\ a_\varepsilon^{ray} &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} G(\sigma T_\varepsilon) \phi_\varepsilon dx \end{aligned}$$

1^{ère} étape : Développement de $a_\varepsilon^C - L_\varepsilon$

Comme dans le chapitre précédent, insérer les ansatz (4.2) et (4.8) dans $a_\varepsilon^C - L_\varepsilon$ nous donne :

$$\begin{aligned}
 a_\varepsilon^C - L_\varepsilon &= \int_{\Omega_\varepsilon} K_\varepsilon [(\nabla_x T_0 + \nabla_y T_1) \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_y \phi_1)] dx + \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} h_\varepsilon (T_0 - T_{gaz}) \phi_0 dx \\
 &+ \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} K_\varepsilon [(\nabla_x T_1 + \nabla_y T_2) \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_y \phi_1) + (\nabla_x T_0 + \nabla_y T_1) \cdot (\nabla_x \phi_1 + \nabla_y \phi_2)] \\
 &+ \varepsilon^2 \int_{\Gamma_\varepsilon} h_\varepsilon (T_0 - T_{gaz}(x)) \phi_1 dx + \varepsilon^2 \int_{\Gamma_\varepsilon} h_\varepsilon T_1 \phi_0 dx \\
 &- \int_{\Omega_\varepsilon} f(\phi_0 + \varepsilon \phi_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

où toutes les fonctions sont évaluées au point $(x, x/\varepsilon)$. En vertu du Lemme 5.2.2, nous avons :

$$\begin{aligned}
 |Y|(a_\varepsilon^C - L_\varepsilon) &= \\
 &\int_{\Omega} \int_{Y^S} K(x, y) (\nabla_x T_0(x) + \nabla_y T_1(x, y) \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1(x, y))) dy dx \\
 &+ \int_{\Omega} \int_{\Gamma} h(x, y) (T_0(x) - T_{gaz}(x)) \phi_0(x) dy dx - \int_{\Omega} \int_{Y^S} f(x, y) \phi_0(x) dy dx \\
 &+ \varepsilon \left[\int_{\Omega} \int_{Y^S} K(x, y) [(\nabla_x T_1(x, y) + \nabla_y T_2(x, y)) \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1(x, y)) \right. \\
 &\quad \left. + (\nabla_x T_0(x) + \nabla_y T_1(x, y)) \cdot (\nabla_x \phi_1(x, y) + \nabla_y \phi_2(x, y))] dy dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\Omega} \int_{\Gamma} h(x, y) (T_0(x) - T_{gaz}(x)) \phi_1(x, y) dy dx + \int_{\Omega} \int_{\Gamma} h(x, y) T_1(x, y) \phi_0(x) dy dx \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\Omega} \int_{Y^S} f(x, y) \phi_1(x, y) dy dx \right] \\
 &+ \mathcal{O}(\varepsilon^2).
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

2^{ème} étape : Développement de a_ε^{ray}

L'opérateur de rayonnement étant non-local, nous allons écrire, dans cette deuxième étape, un développement de Taylor de cet opérateur jusqu'à l'ordre 2,

$$a_\varepsilon^{ray} = a_0^{ray} + \varepsilon a_1^{ray} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{5.17}$$

Notons que dans le Chapitre 4, la forme du développement du terme de rayonnement est la même qu'ici, cependant, dans le présent chapitre, nous voulons évaluer exactement le terme a_1^{ray} qui, comme nous allons le voir plus tard, joue un rôle important dans la définition des problèmes de cellule sur T_2 au contraire de ce qu'on a dans le Chapitre 4 où il ne joue aucun rôle dans la définition du correcteur T_1 dans Y^F .

Le terme de rayonnement est donné par :

$$a_\varepsilon^{ray} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \left[\int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} T_\varepsilon(x) \phi_\varepsilon(x) dx - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} F(x, s) T_\varepsilon(x) \phi_\varepsilon(s) dx ds \right] \tag{5.18}$$

Dans l'ansatz (5.3) et (5.13), nous appliquons donc un développement de Taylor autour du centre de masse $x_{0,i}$ de chaque surface $\Gamma_{\varepsilon,i}$. Pour simplifier les notations, nous supprimons l'indice i et nous notons par x_0 chaque $x_{0,i}$. Nous notons aussi

$$r \equiv \frac{x - x_0}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad l \equiv \frac{s - x_0}{\varepsilon}. \quad (5.19)$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(x) &= T_0(x_0) + \varepsilon \left(\nabla T_0(x_0) \cdot r + T_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) \right) \\ &+ \varepsilon^2 \left(T_2(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) + \nabla_x T_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) \cdot r + \frac{1}{2} \nabla \nabla T_0(x_0) r \cdot r \right) + \varepsilon^3 \widehat{T}_{3,\varepsilon}(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (5.20)$$

et

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon(x) &= \phi_0(x_0) + \varepsilon \left(\nabla \phi_0(x_0) \cdot r + \phi_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) \right) \\ &+ \varepsilon^2 \left(\phi_2(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) + \nabla_x \phi_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) \cdot r + \frac{1}{2} \nabla \nabla \phi_0(x_0) r \cdot r \right) + \varepsilon^3 \widehat{T}_{3,\varepsilon}(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (5.21)$$

où :

$$\widehat{T}_{3,\varepsilon}(x) = \frac{1}{6} \nabla \nabla \nabla T_0(x_0) \cdot r(r \cdot r) + \frac{1}{2} \nabla_x \nabla_x T_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) r \cdot r + \nabla_x T_2(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) \cdot r$$

et

$$\widehat{\phi}_{3,\varepsilon}(x) = \frac{1}{6} \nabla \nabla \nabla \phi_0(x_0) \cdot r(r \cdot r) + \frac{1}{2} \nabla_x \nabla_x \phi_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) r \cdot r + \nabla_x \phi_2(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) \cdot r$$

La forme exacte de $\widehat{T}_{3,\varepsilon}$ et $\widehat{\phi}_{3,\varepsilon}$ (qui est d'un ordre supérieur à $\widehat{T}_{2,\varepsilon}$ et $\widehat{\phi}_{2,\varepsilon}$ du chapitre précédent) n'est pas importante puisque tous les termes d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ vont disparaître par simplification comme nous allons le voir plus tard. En utilisant (5.20) et (5.21), nous avons :

$$T_\varepsilon(x) \phi_\varepsilon(s) = (T\phi)_0(x, s) + \varepsilon (T\phi)_1(x, s) + \varepsilon^2 (T\phi)_2(x, s) + \varepsilon^3 (T\phi)_3(x, s) + \mathcal{O}(\varepsilon^4),$$

où

$$(T\phi)_0(x, s) = \phi_0(x_0) T_0(x_0)$$

$$(T\phi)_1(x, s) = \phi_0(x_0) \nabla T_0(x_0) \cdot r + T_0(x_0) \nabla \phi_0(x_0) \cdot l + \phi_0(x_0) T_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) + \phi_1(x_0, \frac{s}{\varepsilon}) T_0(x_0)$$

$$\begin{aligned} (T\phi)_2(x, s) &= \phi_1(x_0, \frac{s}{\varepsilon}) T_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) + \nabla \phi_0(x_0) \cdot l \nabla T_0(x_0) \cdot r + \phi_1(x_0, \frac{s}{\varepsilon}) \nabla T_0(x_0) \cdot r \\ &+ T_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) \nabla \phi_0(x_0) \cdot l + T_0(x_0) \left(\phi_2(x_0, \frac{s}{\varepsilon}) + \nabla_x \phi_1(x_0, \frac{s}{\varepsilon}) \cdot l + \frac{1}{2} \nabla \nabla \phi_0(x_0) l \cdot l \right) \\ &+ \phi_0(x_0) \left(T_2(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) + \nabla_x T_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) \cdot r + \frac{1}{2} \nabla \nabla T_0(x_0) r \cdot r \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (T\phi)_3(x, s) &= \left(\nabla T_0(x_0) \cdot r + T_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) \right) \left(\phi_2(x_0, \frac{s}{\varepsilon}) + \nabla_x \phi_1(x_0, \frac{s}{\varepsilon}) \cdot l + \frac{1}{2} \nabla \nabla \phi_0(x_0) l \cdot l \right) \\ &+ \left(\nabla \phi_0(x_0) \cdot l + \phi_1(x_0, \frac{s}{\varepsilon}) \right) \left(T_2(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) + \nabla_x T_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) \cdot r + \frac{1}{2} \nabla \nabla T_0(x_0) r \cdot r \right) \\ &+ \widehat{T}_{3,\varepsilon}(x) \phi_0(x_0) + \widehat{\phi}_{3,\varepsilon}(s) T_0(x_0) \end{aligned}$$

Notons qu'une fonction f qui ne dépend que de la variable s (ou que de la variable x) vérifie :

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} (Id - \zeta)f(x)dx = \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} f(x)dx - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} f(s)F(x,s)dsdx = 0,$$

d'où, en appliquant l'opérateur de rayonnement aux développements ci-dessus sur la surface $\Gamma_{\varepsilon,i}$, tous les termes qui ne dépendent que de la variable s (ou que de x , ou aucune des deux) disparaissent. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} (T\phi)_0(x,x)dx - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} (T\phi)_0(x,s)F(x,s)dxds &= 0, \\ \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} (T\phi)_1(x,x)dx - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} (T\phi)_1(x,s)F(x,s)dxds &= 0, \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} (T\phi)_2(x,x)dx - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} (T\phi)_2(x,s)F(x,s)dxds = \\ \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \phi_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) \left[T_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} T_1(x_0, \frac{s}{\varepsilon})F(x,s)ds \right] dx \\ + \nabla\phi_0(x_0) \cdot \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} r \otimes \left[r - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} lF(x,s)ds \right] dx \cdot \nabla T_0(x_0) \\ + \nabla T_0(x_0) \cdot \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} r \left(\phi_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \phi_1(x_0, \frac{s}{\varepsilon})ds \right) dx \\ + \nabla\phi_0(x_0) \cdot \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} r \left(T_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} T_1(x_0, \frac{s}{\varepsilon})ds \right) dx \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} (T\phi)_3(x,x)dx - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} (T\phi)_3(x,s)F(x,s)dxds = \\ \nabla T_0(x_0) \cdot \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} r \left(\phi_2(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) + \nabla_x \phi_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) \cdot r + \frac{1}{2} \nabla \nabla \phi_0(x_0) r \cdot r \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \left(\phi_2(x_0, \frac{s}{\varepsilon}) + \nabla_x \phi_1(x_0, \frac{s}{\varepsilon}) \cdot l + \frac{1}{2} \nabla \nabla \phi_0(x_0) l \cdot l \right) F(x,s)ds \right) dx \\ + \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} T_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) \left[\phi_2(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) + \nabla_x \phi_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) \cdot r + \frac{1}{2} \nabla \nabla \phi_0(x_0) r \cdot r \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \left(\phi_2(x_0, \frac{s}{\varepsilon}) + \nabla_x \phi_1(x_0, \frac{s}{\varepsilon}) \cdot l + \frac{1}{2} \nabla \nabla \phi_0(x_0) l \cdot l \right) F(x,s)ds \right] dx \\ + \nabla\phi_0(x_0) \cdot \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} r \left(T_2(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) + \nabla_x T_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) \cdot r + \frac{1}{2} \nabla \nabla T_0(x_0) r \cdot r \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \left(T_2(x_0, \frac{s}{\varepsilon}) + \nabla_x T_1(x_0, \frac{s}{\varepsilon}) \cdot l + \frac{1}{2} \nabla \nabla T_0(x_0) l \cdot l \right) F(x,s)ds \right) dx \\ + \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \phi_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) \left[T_2(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) + \nabla_x T_1(x_0, \frac{x}{\varepsilon}) \cdot r + \frac{1}{2} \nabla \nabla T_0(x_0) r \cdot r \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \left(T_2(x_0, \frac{s}{\varepsilon}) + \nabla_x T_1(x_0, \frac{s}{\varepsilon}) \cdot l + \frac{1}{2} \nabla \nabla T_0(x_0) l \cdot l \right) F(x,s)ds \right] dx \end{aligned} \quad (5.24)$$

Après un changement de variables $y = x/\varepsilon$ et $z = s/\varepsilon$ dans (5.22,5.23,5.24) et une sommation sur toutes les cellules, en utilisant le Lemme 5.2.2, nous avons :

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} \left[\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} T_{\varepsilon}(x) \phi_{\varepsilon}(x) dx - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} T_{\varepsilon}(x) \phi_{\varepsilon}(s) F(s, x) ds dx \right] = a_0^{ray} + \varepsilon a_1^{ray} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (5.25)$$

avec

$$\begin{aligned} a_0^{ray} &= \frac{\sigma}{|Y|} \left(\int_{\Omega} \nabla \phi_0(x) \cdot \int_{\Gamma} y \left(y - \int_{\Gamma} z F(z, y) dz \right) dy \cdot \nabla T_0(x) dx \right. \\ &+ \int_{\Omega} \nabla T_0(x) \cdot \int_{\Gamma} \phi_1(x, y) \left(y - \int_{\Gamma} z F(z, y) dz \right) dy dx \\ &+ \int_{\Omega} \nabla \phi_0(x) \cdot \int_{\Gamma} T_1(x, y) \left(y - \int_{\Gamma} z F(z, y) dz \right) dy dx \\ &\left. + \int_{\Omega} \int_{\Gamma} \phi_1(x, y) \left(T_1(x, y) - \int_{\Gamma} T_1(x, z) F(z, y) dz \right) dy dx \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

et

$$\begin{aligned} a_1^{ray} &= \frac{\sigma}{|Y|} \left(\int_{\Omega} \int_{\Gamma} (\nabla T_0(x) \cdot r + T_1(x, y)) \left[\phi_2(x, y) + \nabla_x \phi_1(x, y) \cdot r + \frac{1}{2} \nabla \nabla \phi_0(x) r \cdot r \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{\Gamma} \left(\phi_2(x, z) + \nabla_x \phi_1(x, z) \cdot l + \frac{1}{2} \nabla \nabla \phi_0(x) l \cdot l \right) F(y, z) dz \right] dy dx \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} \int_{\Gamma} (\nabla \phi_0(x) \cdot r + \phi_1(x, y)) \left[T_2(x, y) + \nabla_x T_1(x, y) \cdot r + \frac{1}{2} \nabla \nabla T_0(x) r \cdot r \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{\Gamma} \left(T_2(x, z) + \nabla_x T_1(x, z) \cdot l + \frac{1}{2} \nabla \nabla T_0(x) l \cdot l \right) F(y, z) dz \right] dy dx \right) \end{aligned}$$

où cette fois r est égale à $(y - y_0)$ et l est égale à $(z - y_0)$ avec y_0 le centre de masse de la surface Γ défini de la même manière que $x_{0,i}$, le centre de masse de $\Gamma_{\varepsilon,i}$, dans (3.36).

3^{ème} étape : Identification des équations suivant les puissances de ε :

• A l'ordre ε^0 , nous obtenons de (5.14) :

$$a^0(T_0, T_1, \phi_0, \phi_1) = L^0(\phi_0, \phi_1),$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \int_{Y^S} K(x, y) (\nabla_x T_0(x) + \nabla_y T_1(x, y)) \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1(x, y)) dy dx \\
& + \int_{\Omega} \int_{\Gamma} h(x, y) (T_0(x) - T_{gaz}(x)) \phi_0(x) dy dx \\
& + \int_{\Omega} \nabla \phi_0(x) \cdot y \int_{\Gamma} \left(y - \int_{\Gamma} z F(z, y) dz \right) dy \cdot \nabla T_0(x) dx \\
& + \int_{\Omega} \nabla T_0(x) \cdot \int_{\Gamma} \phi_1(x, y) \left(y - \int_{\Gamma} z F(z, y) dz \right) dy dx \\
& + \int_{\Omega} \nabla \phi_0(x) \cdot \int_{\Gamma} T_1(x, y) \left(y - \int_{\Gamma} z F(z, y) dz \right) dy dx \\
& + \int_{\Omega} \int_{\Gamma} \phi_1(x, y) \left(T_1(x, y) - \int_{\Gamma} T_1(x, z) F(z, y) dz \right) dy dx = \int_{\Omega} \int_{Y^S} f(x, y) \phi_0(x) dy dx
\end{aligned} \tag{5.27}$$

(5.27) est la formulation variationnelle du problème limite à deux échelles. Comme dans le chapitre précédent, nous retrouvons les problèmes de cellule dans Y^S en prenant $\phi_0 = 0$ dans la formulation variationnelle limite (5.27) qui devient :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \int_{Y^S} K(x, y) (\nabla_x T_0(x) + \nabla_y T_1(x, y)) \cdot \nabla_y \phi_1(x, y) \\
& + \sigma \int_{\Omega} \nabla_x T_0(x) \cdot \int_{\Gamma} \phi_1(x, y) \left(y - \int_{\Gamma} z F(z, y) dz \right) dy dx \\
& + \sigma \int_{\Omega} \int_{\Gamma} \phi_1(x, y) \left(T_1(x, y) - \int_{\Gamma} T_1(x, z) F(z, y) dz \right) dy dx = 0
\end{aligned}$$

La solution T_1 de cette formulation variationnelle est donnée par (5.6) dans Y^S où $(\omega_j(x, y))_{1 \leq j \leq 2}$ sont les solutions des problèmes de cellule (5.5) dans Y^S .

D'un autre coté, nous remplaçons ϕ_1 par 0 dans (5.27) pour retrouver le problème homogénéisé. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \int_{Y^S} K(x, y) (\nabla_x T_0(x) + \nabla_y T_1(x, y)) \cdot \nabla_x \phi_0(x) dy dx \\
& + \int_{\Omega} \int_{\Gamma} h(x, y) (T_0(x) - T_{gaz}(x)) \phi_0(x) dy dx \\
& + \int_{\Omega} \nabla \phi_0(x) \cdot y \int_{\Gamma} \left(y - \int_{\Gamma} z F(z, y) dz \right) dy \cdot \nabla T_0(x) dx \\
& + \int_{\Omega} \nabla \phi_0(x) \cdot \int_{\Gamma} T_1(x, y) \left(y - \int_{\Gamma} z F(z, y) dz \right) dy dx = \int_{\Omega} \int_{Y^S} f(x, y) \phi_0(x) dy dx
\end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que la formulation variationnelle du problème (4.3) où K^* , h^* et f^* sont donnés par les formules de la proposition 5.2.1.

• A l'ordre ε^1 , nous obtenons de (5.14) :

$$a^1(T_0, T_1, T_2, \phi_0, \phi_1, \phi_2) = L^1(\phi_0, \phi_1, \phi_2)$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{Y^S} K(x, y) [(\nabla_x T_1(x, y) + \nabla_y T_2(x, y)) \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_y \phi_1(x, y)) \\ & + (\nabla_x T_0(x) + \nabla_y T_1(x, y)) \cdot (\nabla_x \phi_1(x, y) + \nabla_y \phi_2(x, y))] dy dx \\ & + \int_{\Omega} \int_{\Gamma} h(x, y) (T_0(x) - T_{gaz}(x)) \phi_1(x, y) dy dx + \int_{\Omega} \int_{\Gamma} h(x, y) T_1(x, y) \phi_0(x) dy dx \\ & + \int_{\Omega} \int_{\Gamma} (\nabla T_0(x) \cdot r + T_1(x, y)) \left[\phi_2(x, y) + \nabla_x \phi_1(x, y) \cdot r + \frac{1}{2} \nabla \nabla \phi_0(x) r \cdot r \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Gamma} \left(\phi_2(x, z) + \nabla_x \phi_1(x, z) \cdot l + \frac{1}{2} \nabla \nabla \phi_0(x) l \cdot l \right) F(y, z) dz \right] dy dx \quad (5.28) \\ & + \int_{\Omega} \int_{\Gamma} (\nabla \phi_0(x) \cdot r + \phi_1(x, y)) \left[T_2(x, y) + \nabla_x T_1(x, y) \cdot r + \frac{1}{2} \nabla \nabla T_0(x) r \cdot r \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Gamma} \left(T_2(x, z) + \nabla_x T_1(x, z) \cdot l + \frac{1}{2} \nabla \nabla T_0(x) l \cdot l \right) F(y, z) dz \right] dy dx \\ & = \int_{\Omega} \int_{Y^S} f(x, y) \phi_1(x, y) dy dx \end{aligned}$$

Pour retrouver le problème sur T_2 dans Y^S , nous choisissons $\phi_0 = 0$ et $\phi_2 = 0$ dans (5.28).

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{Y^S} K(x, y) [(\nabla_x T_1(x, y) + \nabla_y T_2(x, y)) \cdot \nabla_y \phi_1(x, y) \\ & + (\nabla_x T_0(x) + \nabla_y T_1(x, y)) \cdot \nabla_x \phi_1(x, y)] dy dx \\ & + \int_{\Omega} \int_{\Gamma} h(x, y) (T_0(x) - T_{gaz}(x)) \phi_1(x, y) dy dx \\ & + \int_{\Omega} \int_{\Gamma} (\nabla T_0(x) \cdot r + T_1(x, y)) (Id - \zeta) (\nabla_x \phi_1(x, y) \cdot r) \\ & + \int_{\Omega} \int_{\Gamma} \phi_1(x, y) (Id - \zeta) \left(T_2(x, y) + \nabla_x T_1(x, y) \cdot r + \frac{1}{2} \nabla \nabla T_0(x) r \cdot r \right) \\ & = \int_{\Omega} \int_{Y^S} f(x, y) \phi_1(x, y) dy dx \end{aligned} \quad (5.29)$$

En remarquant que, ϕ_1 étant dans $H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_x \phi_1(x, y) \cdot r \nabla T_0(x) \cdot r dx &= - \int_{\Omega} \phi_1(x, y) \nabla \nabla T_0(x) r \cdot r dx, \\ \int_{\Omega} \nabla_x \phi_1(x, y) \cdot r T_1(x, y) dx &= - \int_{\Omega} \phi_1(x, y) \nabla_x T_1(x, y) \cdot r dx, \end{aligned}$$

nous déduisons que (5.29) s'écrit

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \int_{Y^S} K(x, y) [(\nabla_x T_1(x, y) + \nabla_y T_2(x, y)) \cdot \nabla_y \phi_1(x, y) \\
& + (\nabla_x T_0(x) + \nabla_y T_1(x, y)) \cdot \nabla_x \phi_1(x, y)] dy dx \\
& + \int_{\Omega} \int_{\Gamma} h(x, y) (T_0(x) - T_{gaz}(x)) \phi_1(x, y) dy dx \\
& - \int_{\Omega} \int_{\Gamma} \phi_1(x, y) r \cdot (Id - \zeta) (\nabla \nabla T_0(x) r + \nabla_x T_1(x, y)) \\
& + \int_{\Omega} \int_{\Gamma} \phi_1(x, y) (Id - \zeta) \left(T_2(x, y) + \nabla_x T_1(x, y) \cdot r + \frac{1}{2} \nabla \nabla T_0(x) r \cdot r \right) \\
& = \int_{\Omega} \int_{Y^S} f(x, y) \phi_1(x, y) dy dx
\end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que la formulation variationnelle du problème (5.7) sur T_2 dans Y^S .
D'où le résultat de la Proposition 5.2.1. \square

Preuve de la Proposition 5.2.2. Pour écrire la solution T_2 du problème (5.7) en fonction de solutions de problèmes de cellule nous commençons par découpler (5.7) en quatre problèmes équivalents tels que :

$$T_2(x, y) = T_2^1(x, y) + T_2^2(x, y) + T_2^3(x, y) + T_2^4(x, y) \quad (5.30)$$

où $T_2^1(x, y)$ est la solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll}
-\operatorname{div}_y(K(x, y) \nabla_y T_2^1(x, y)) = f(x, y) - \frac{|Y|}{|Y^S|} f^*(x) & \text{dans } Y^S \\
-K(x, y) \nabla_y T_2^1(x, y) \cdot n = \sigma G(T_2^1(x, y)) & \text{sur } \Gamma \\
T_2^1(x, y) \text{ est } Y\text{-périodique,} &
\end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll}
-\operatorname{div}_y(K(x, y) \nabla_y T_2^2(x, y)) = \frac{|Y|}{|Y^S|} f^*(x) & \text{dans } Y^S \\
-K(x, y) \nabla_y T_2^2(x, y) \cdot n = \frac{|Y|}{|\Gamma|} f^*(x) + \sigma G(T_2^2(x, y)) & \text{sur } \Gamma \\
T_2^2(x, y) \text{ est } Y\text{-périodique,} &
\end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll}
-\operatorname{div}_y(K(x, y) \nabla_y T_2^3(x, y)) = 0 & \text{dans } Y^S \\
-K(x, y) \nabla_y T_2^3(x, y) \cdot n = (h(x, y) - \frac{|Y|}{|\Gamma|} h^*(x)) (T_0(x) - T_{gaz}) + \sigma G(T_2^3(x, y)) & \text{sur } \Gamma \\
T_2^3(x, y) \text{ est } Y\text{-périodique,} &
\end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_y (K(x, y) (\nabla_y T_2^4(x, y) + \nabla_x T_1(x, y))) = \operatorname{div}_x (K(x, y) (\nabla_x T_0(x) + \nabla_y T_1(x, y))) \quad \text{dans } Y^S \\ -K(x, y) (\nabla_y T_2^4(x, y) + \nabla_x T_1(x, y)) \cdot n = \frac{|Y|}{|\Gamma|} h^*(x) (T_0(x) - T_{gaz}(x)) - \frac{|Y|}{|\Gamma|} f^*(x) \\ \quad + G(T_2^4 + \nabla_x T_1 \cdot y + \frac{1}{2} \nabla \nabla T_0 y \cdot y) \\ \quad - G(\nabla_x T_1 + \nabla \nabla T_0 y) \cdot y \quad \text{sur } \Gamma \\ T_2^4(x, y) \quad \text{est } Y\text{-périodique.} \end{array} \right.$$

En écrivant $f(x, y) = F(x) f_{\#}(y)$, nous avons aussi

$$f^*(x) = F(x) F^* \quad \text{où} \quad F^* = \frac{1}{|Y^S|} \int_{Y^S} f_{\#}(y) dy,$$

et en supposant que le tenseur de conductivité K est indépendant de x , $T_2^1(x, y)$ s'écrit alors $T_2^1(x, y) = T_2^1(y) F(x)$ où $T_2^1(y)$ est la solution du problème de cellule suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_y (K(y) \nabla_y T_2^1(y)) = f_{\#}(y) - \frac{|Y|}{|Y^S|} F^* \quad \text{dans } Y^S \\ -K(y) \nabla_y T_2^1(y) \cdot n = \sigma G(T_2^1(y)) \quad \text{sur } \Gamma \\ T_2^1(y) \quad \text{est } Y\text{-périodique.} \end{array} \right. \quad (5.31)$$

De la même manière que pour $T_2^1(x, y)$, $T_2^2(x, y)$ s'écrit aussi $T_2^2(x, y) = T_2^2(y) F(x)$ où $T_2^2(y)$ est la solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_y (K(y) \nabla_y T_2^2(y)) = \frac{|Y|}{|Y^S|} F^* \quad \text{dans } Y^S \\ -K(y) \nabla_y T_2^2(y) \cdot n = \frac{|Y|}{|\Gamma|} F^* + \sigma G(T_2^2) \quad \text{sur } \Gamma \\ T_2^2(y) \quad \text{est } Y\text{-périodique.} \end{array} \right. \quad (5.32)$$

Pour séparer les variables x et y dans le reste des termes de (5.30), nous supposons aussi que $h(x, y) = H(x) h(y)$, et donc $h^*(x) = H(x) H^*$ où $H^* = \int_{Y^S} h(y) dy$. $T_2^3(x, y)$ s'écrit alors $T_2^3(x, y) = T_2^3(y) H(x) (T_0(x) - T_{gaz}(x))$ où $T_2^3(y)$ est la solution du problème de cellule suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_y (K(y) \nabla_y T_2^3(y)) = 0 \quad \text{dans } Y^S \\ -K(y) \nabla_y T_2^3(y) \cdot n = (h(y) - \frac{|Y|}{|\Gamma|} H^*) + \sigma G(T_2^3(y)) \quad \text{sur } \Gamma \\ T_2^3(y) \quad \text{est } Y\text{-périodique.} \end{array} \right.$$

Quant à $T_2^4(x, y)$, sachant que

$$h^*(x) (T_0(x) - T_{gaz}(x)) - f^*(x) = \operatorname{div} (K^* \nabla T_0(x))$$

elle peut s'écrire alors sous la forme :

$$T_2^4(x, y) = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_i \partial x_j} (x) \theta_{i,j}(y),$$

où les $\theta_{i,j}(y)$ sont les solutions des problèmes de cellule suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_y (K(y) [\nabla_y \theta_{i,j}(y) + e_j \omega_i(y)]) = K_{i,j}(y) \delta_{ij} + K(y) \nabla_y \omega_i(y) \cdot e_j & \text{dans } Y^S \\ -K(y) [\nabla_y \theta_{i,j}(y) + e_j \omega_i(y)] \cdot n = \frac{|Y|}{|\Gamma|} K_{i,j}^* \delta_{ij} + \sigma G \left(\theta_{i,j} + \omega_i y_j + \frac{1}{2} y_i y_j \right) & \\ -\sigma G \left(\omega_i + y_i \right) y_j & \text{sur } \Gamma \\ \theta_{i,j}(y) \text{ est } Y\text{-périodique.} & \end{array} \right.$$

D'où le résultat de la Proposition 5.2.2. □

Remarque 5.2.4. Notons que pour les mêmes raisons que dans le problème global (3.9), (5.2) admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$. De plus, le problème homogénéisé (5.4) du problème simplifié 5.2 admet aussi une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, le tenseur de conductivité homogénéisé K^* dans (5.4) hérite des propriétés du tenseur de conductivité K_ε (car G_ε est non-négatif), ceci implique que la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\Omega} K^* \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} h^* u v dx,$$

de la formulation variationnelle du problème homogénéisé (5.4) est coercive, d'où l'existence et l'unicité de la solution du problème homogénéisé grâce au lemme de Lax-Milgram.

Les problèmes de cellule (5.5) dans Y^S coïncident exactement avec les problèmes de cellule (4.22) du Chapitre 4, ils sont bien posés et admettent chacun une solution unique, à une constante près en x , dans $H_{\#}^1(Y^S)$.

Lemme 5.2.1. Chaque problème de cellule (5.7) admet une solution unique à une constante près dans $H_{\#}^1(Y^S)$. De plus tous les sous-problèmes (5.9), (5.10), (5.11), (5.12) sont bien posés.

Preuve. à l'aide de l'alternative de Fredholm (voir [74]), la condition de compatibilité nécessaire et suffisante pour que le problème(5.7) admette une solution unique dans $H_{\#}^1(Y^S)/\mathbb{R}$ est la suivante :

$$\begin{aligned} & - \int_{Y^S} \operatorname{div}_x (K(x, y) [\nabla_x T_0(x) + \nabla_y T_1(x, y)]) dy \\ & + \int_{\Gamma} h(x, y) (T_0(x) - T_g(x)) dy + \sigma \int_{\Gamma} G \left(T_2 + \nabla_x T_1 \cdot y + \frac{1}{2} \nabla \nabla T_0 y \cdot y \right) dy \\ & - \sigma \int_{\Gamma} \left(G (\nabla_x T_1 + \nabla \nabla T_0 y) \cdot y \right) dy = \int_{Y^S} f(x, y) dy \end{aligned} \quad (5.33)$$

Puisque

$$\int_{\Gamma} \left(G(T_2) + G(\nabla_x T_1 \cdot (y - y_0)) \right) dy = 0,$$

(5.33) s'écrit :

$$-\operatorname{div}_x (K^*(x) \nabla T_0(x)) + h^* (T_0(x) - T_{gaz}(x)) = f^*(x)$$

qui n'est rien d'autre que la formulation variationnelle du problème homogénéisé (5.4). Or, le problème homogénéisé (5.4) admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$, d'où l'existence d'une solution unique au problème (5.7) sur T_2 dans $H_{\#}^1(Y^S)$.

Il est facile ensuite, grâce toujours à la condition de compatibilité de Fredholm, de vérifier l'existence et l'unicité des solutions respectives aux problèmes (5.9), (5.10) et (5.11) dans $H_{\#}^1(Y^S)$. Celle du problème (5.12) est obtenue alors par déduction. \square

Ici nous donnons l'énoncé du lemme, analogue au Lemme 4.2.3 du Chapitre 4 dans une configuration 3D, utilisé dans la preuve de la Proposition 5.2.1.

Lemme 5.2.2. *Pour toute fonction f régulière, et pour chaque entier $p \geq 0$, nous avons :*

$$\begin{aligned} i. \quad & \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (x_k - x_{0,k})^p dx = \varepsilon^{1+p} \int_{\Gamma} f(y) (y_k - y_{0,k})^p dy \\ ii. \quad & \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} f(x_{0,i}) = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} f(x) dx + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ iii. \quad & \int_{\Omega_{\varepsilon}} f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y^S} f(x, y) dy dx + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

5.2.2 Convergence

La méthode de convergence à deux échelles appliquée au modèle (5.2) permet de justifier rigoureusement l'approximation de l'inconnue T_{ε} du problème (5.2) par les deux premiers termes, T_0 et εT_1 , du développement (5.3) suivant le théorème suivant :

Théorème 5.2.1 (cf. Chapitre 4). *Soit T_{ε} la suite de solutions des problèmes (5.2). Soit $T_0(x)$ la solution du problème homogénéisé (5.4) et $T_1(x, y)$ le premier correcteur défini par (5.6) alors*

- T_{ε} converge à deux échelles vers $T_0(x)$,
- ∇T_{ε} converge à deux échelles vers $(\nabla T_0(x) + \nabla_y T^1(x, y))$

La preuve du Théorème 5.2.1 est plus facile que celle du Théorème 4.3.5 du Chapitre 4 en absence de réduction d'espace liée à la géométrie 3D et aussi en absence d'approximation dans la partie fluide du domaine Ω_{ε} . Elle peut être retrouvée dans le chapitre 5 de la thèse de K. El Ganaoui [44]. Cependant, la méthode de convergence à deux échelles ne nous permet pas de justifier l'utilité du terme correcteur de second ordre T_2 . Or, la nouveauté présentée dans

ce chapitre est l'utilisation de ce correcteur d'ordre 2 qui nous aide à améliorer l'approximation par homogénéisation du problème (5.2) lors de la présence d'une source thermique oscillante et d'un échange thermique sur les parois $\Gamma_{\varepsilon,i}$. Nous allons donc essayer de justifier "numériquement", dans la Section 5.3 qui suit, l'utilité de ce terme correcteur, i.e. nous espérons pouvoir montrer un ordre de convergence sur la nouvelle approximation qui prend en compte le deuxième correcteur T_2 et pouvoir au moins le comparer avec les résultats analytiques qu'on peut trouver dans [3] dans le cas d'un problème de conduction pure. Notons que cette comparaison ne peut être fiable que si nous corrigeons d'abord l'erreur induite par le premier correcteur au niveau des bords extérieurs de Ω , en effet, l'addition de chaque terme correcteur ($T_1, T_2, T_3 \dots$ etc.), qui est généralement non-nul sur $\partial\Omega$, perturbe la condition limite vérifiée par T_ε sur $\partial\Omega$. Pour compenser cette erreur, nous ajoutons des termes de couche limite $T_i^{bl,\varepsilon}$ $i = 1, 2, \dots$ dans le développement asymptotique (5.3) qui devient :

$$T_\varepsilon(x) \simeq T_0(x) + \varepsilon \left[T_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + T_1^{bl,\varepsilon}(x) \right] + \varepsilon^2 \left[T_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + T_2^{bl,\varepsilon}(x) \right] + \dots, \quad (5.34)$$

où chaque fonction $T_i^{bl,\varepsilon}$ est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -div[K_\varepsilon(x)\nabla T_i^{bl,\varepsilon}(x)] = 0 & \text{dans } \Omega \\ -K_\varepsilon(x)\nabla_y T_i^{bl,\varepsilon} \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ T_i^{bl,\varepsilon}(x) = -T_i(x, \frac{x}{\varepsilon}) & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (5.35)$$

Nous remarquons bien sûr que dans la nouvelle approximation (5.34), le terme de couche limite $T_1^{bl,\varepsilon}$ est plus important que le deuxième correcteur T_2 . Il est donc essentiel de connaître ce terme de couche limite pour une approximation correcte qui utilise le deuxième correcteur T_2 . En général, on prévoit l'ordre des termes de couche limite suivant :

$$\|T_i^{bl}\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad \|T_i^{bl}\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(1), \quad \|T_i^{bl}\|_{H^1(\omega)} = \mathcal{O}(1) \quad \text{pour tout } \omega \subset\subset \Omega.$$

Pour éviter le calcul des termes de couche limite, qui sont généralement difficiles à calculer, nous pouvons choisir des conditions limites périodiques sur les bords extérieurs de Ω . Dans ce cas, tous les termes de couche limite s'annulent et nous espérons montrer, en s'inspirant de l'ordre des termes du développement asymptotique (5.3), que l'erreur $\|T_\varepsilon - T_0 - \varepsilon T_1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ est d'ordre 2 en ε et que l'erreur $\|T_\varepsilon - T_0 - \varepsilon T_1 - \varepsilon^2 T_2\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ est d'ordre 3.

Remarque 5.2.5. Avec l'approximation (5.34), la fonction \tilde{T}_1 doit absolument vérifier la condition de compatibilité (5.8) pour pouvoir calculer correctement les erreurs qui contiennent les termes T_2 et T_1^{bl} . Notons que le choix de cette fonction non oscillante n'est pas unique tant qu'on ne dispose pas de condition limite sur l'équation (5.34). Pour un choix particulier de ces conditions limites, nous pouvons améliorer l'ordre de notre approximation en utilisant le

premier correcteur sans avoir recours à ajouter le terme de couche limite correspondant (voir [3]).

5.2.3 Résultats dans le cas non-linéaire

Comme nous l'avons décrit plus haut dans ce document, toutes nos simulations numériques sont faites dans le cas d'un opérateur de rayonnement non-linéaire, qui est le cas physiquement correct. La Proposition 5.2.1 étant établie dans le cas linéaire, nous complétons notre étude en donnant le résultat équivalent dans le cas non-linéaire. La preuve (formelle par développement asymptotique) devient dans ce cas plus volumineuse à cause de calculs plus importants dus au terme de rayonnement.

Quand l'opérateur de rayonnement est défini par la formule (3.10) au lieu de (3.5), la proposition équivalente à la Proposition 5.2.1 dans le cas non linéaire est la suivante :

Proposition 5.2.3. *En supposant que la solution T_ε du problème (5.2) est donnée par la série (5.3), nous montrons que le terme T_0 d'ordre 0 est la solution du problème homogénéisé suivant :*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K^*((T_0^3(x))\nabla T_0(x)) + h^*(x)(T_0(x) - T_{gaz}(x)) = f^*(x) & \text{dans } \Omega \\ T_0(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.36)$$

où K^* est le tenseur de conductivité homogénéisé donné par la valeur de ses composantes :

$$K_{j,k}^* = \frac{1}{|Y|} \left[\int_{Y^S} K(y)(e_j + \nabla_y \omega_j(y)) \cdot (e_k + \nabla_y \omega_k(y)) dy + 4\sigma T_0^3(x) \int_{\Gamma} (Id - \zeta)(\omega_k(y) + y_k)(\omega_j(y) + y_j) dy \right],$$

f^* est la source homogénéisée donnée par :

$$f^*(x) = \frac{1}{|Y^S|} \int_{Y^S} f(x, y) dy,$$

h^* est le terme d'échange homogénéisé donné par :

$$h^*(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{\Gamma} h(x, y) dy,$$

et $(\omega_k(x, y))_{1 \leq k \leq 2}$ sont les solutions des problèmes de cellule dans Y^S suivants :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y K(x, y)(e_j + \nabla_y \omega_j) = 0 & \text{dans } Y^S \\ K(x, y)(e_j + \nabla_y \omega_j) \cdot n = 4\sigma T_0^3(x)(Id - \zeta)(\omega_j(y) + y_j) & \text{sur } \Gamma \\ y \mapsto \omega(y) & \text{est } Y\text{-périodique} \end{cases}$$

De plus, le premier correcteur $T_1(x, y)$ est donné par :

$$T_1(x, y) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial T_0}{\partial x_j}(x) \omega_j(x, y) + \tilde{T}_1(x),$$

$$T_2^3(y) : \begin{cases} -\operatorname{div}_y(K(y)\nabla_y T_2^3(y)) = 0 & \text{dans } Y^S \\ -K(y)\nabla_y T_2^3(y) \cdot n = (h(y) - \frac{|Y|}{|\Gamma|}H^*) + 4\sigma T_0^3(x)G(T_2^3(y)) & \text{sur } \Gamma \\ T_2^3(y) \text{ est } Y\text{-périodique} \end{cases} \quad (5.39)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_y(K(y)[\nabla_y\theta_{i,j}(y) + e_j\omega_i(y)]) = K_{i,j}(y)\delta_{ij} + K(y)\nabla_y\omega_i(y) \cdot e_j & \text{dans } Y^S \\ -K(y)[\nabla_y\theta_{i,j}(y) + e_j\omega_i(y)] \cdot n = \frac{|Y|}{|\Gamma|}K_{i,j}^*\delta_{ij} + 4\sigma T_0^3(x)G\left(\theta_{i,j} + \omega_i y_j + \frac{1}{2}y_i y_j\right) & \\ -4\sigma T_0^3(x)G\left(\omega_i + y_i\right)y_j & \text{sur } \Gamma \\ \theta_{i,j}(y) \text{ est } Y\text{-périodique.} \end{array} \right. \quad (5.40)$$

5.3 Résultats numériques

5.3.1 Changement de variables pour la simulation numérique

Avec la même approche que nous avons expliqué dans la Section 4.5.1 du Chapitre 4, nous effectuons toutes nos simulations numériques sur un domaine $\widehat{\Omega} = \varepsilon^{-1}\Omega = \prod_{j=1}^2(0, L_j/\varepsilon)$ constitué de cellules de taille fixe et en nombre qui tend vers l'infini au lieu de cellules de nombre fixe avec une taille qui tend vers 0 pour Ω_ε (voir la Figure 4.3 du chapitre précédent). Ce changement de configuration est toujours obtenu grâce au changement de variable $y = \frac{x}{\varepsilon}$. Dans cette nouvelle approche, le problème (5.2) devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\widehat{K}\nabla\widehat{T}_\varepsilon) = \varepsilon^2\widehat{f}_\varepsilon & \text{dans } \widehat{\Omega}^S \\ -\widehat{K}\nabla\widehat{T}_\varepsilon \cdot n_S = \varepsilon^2\widehat{h}(\widehat{T}_\varepsilon - \widehat{T}_{gaz}) + \sigma G_\varepsilon(\widehat{T}_\varepsilon^4) & \text{sur } \widehat{\Gamma} \\ \widehat{T}_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\widehat{\Omega} \end{array} \right. \quad (5.41)$$

Le problème homogénéisé (4.58) devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\widehat{K}^*(\widehat{T}_0^3)\nabla\widehat{T}_0) + \varepsilon^2\widehat{h}^*(\widehat{T}_0 - \widehat{T}_{gaz}) = \varepsilon^2\widehat{f}^* & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \widehat{T}_0 = 0 & \text{sur } \partial\widehat{\Omega}. \end{array} \right. \quad (5.42)$$

De plus, nous définissons le premier correcteur $\widehat{T}_1(y)$ par :

$$\widehat{T}_1(y) = \varepsilon T_1(\varepsilon y, y) = \varepsilon T_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial\widehat{T}_0}{\partial y_i}(y)\omega_i(y) \quad (5.43)$$

et le deuxième correcteur $\widehat{T}_2(y)$ par :

$$\begin{aligned} \widehat{T}_2(y) &= \varepsilon^2 T_2(\varepsilon y, y) = \varepsilon^2 T_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &= \varepsilon^2 \left(T_2^1(y) + T_2^2(y) \right) \widehat{F}(y) + \varepsilon^2 T_2^3(y) \widehat{H}(y) \left(\widehat{T}_0(y) - \widehat{T}_{gaz}(y) \right) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \widehat{T}_0}{\partial y_i \partial y_j}(y) \theta_{i,j}(y) \end{aligned} \quad (5.44)$$

Finalement, l'approximation par homogénéisation

$$T_\varepsilon(x) \simeq T_0(x) + \varepsilon T_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon^2 T_2(x, x/\varepsilon)$$

devient :

$$\widehat{T}_\varepsilon(y) \simeq \widehat{T}_0(y) + \widehat{T}_1(y) + \widehat{T}_2(y). \quad (5.45)$$

Pour vérifier la convergence de notre méthode, nous calculons des erreurs relatives, indépendantes de ce changement de variable, entre la solution directe et les différentes corrections. Soient :

$$\frac{\|T_\varepsilon(x) - (T_0(x) + \varepsilon T_1(x, \frac{x}{\varepsilon}))\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}{\|T_\varepsilon(x)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}} = \frac{\|\widehat{T}_\varepsilon(y) - (\widehat{T}_0(y) + \widehat{T}_1(y))\|_{L^2(\widehat{\Omega})}}{\|\widehat{T}_\varepsilon(y)\|_{L^2(\widehat{\Omega})}} \quad (5.46)$$

et

$$\frac{\|T_\varepsilon(x) - (T_0(x) + \varepsilon T_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 T_2(x, \frac{x}{\varepsilon}))\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}}{\|T_\varepsilon(x)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}} = \frac{\|\widehat{T}_\varepsilon(y) - (\widehat{T}_0(y) + \widehat{T}_1(y) + \widehat{T}_2(y))\|_{L^2(\widehat{\Omega})}}{\|\widehat{T}_\varepsilon(y)\|_{L^2(\widehat{\Omega})}} \quad (5.47)$$

5.3.2 Algorithme et données numériques

Ici, la seule modification que nous apportons à l'algorithme du Chapitre 4, est le calcul du correcteur d'ordre 2 \widehat{T}_2 via le calcul des solutions des problèmes de cellules (5.9), (5.10), (5.11), (5.12). Soit l'algorithme suivant :

1. Résoudre les deux problèmes de cellule (5.37) pour une plage de température \widehat{T}_0 .
2. Calculer la conductivité homogénéisée (comme une fonction de la température) plus le coefficient d'échange et la source homogénéisées.
3. Résoudre le problème homogénéisé (5.36) par une méthode de point fixe.
4. Calculer le correcteur $\widehat{T}_1(y) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \widehat{T}_0}{\partial y_i}(y) \omega_i(y)$.
5. Résoudre les sept problèmes de cellule (5.37), (5.38), (5.39), (5.40) pour la température homogénéisée \widehat{T}_0 .
6. Calculer le correcteur

$$\widehat{T}_2(y) = \varepsilon^2 (T_2^1(y) + T_2^2(y)) \widehat{F}(y) + \varepsilon^2 T_2^3(y) \widehat{H}(y) (\widehat{T}_0(y) - \widehat{T}_g(y)) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \widehat{T}_0}{\partial y_i \partial y_j}(y) \theta_{i,j}(y).$$

7. Reconstruire la solution approchée : $\widehat{T}_0(y) + \widehat{T}_1(y) + \widehat{T}_2(y)$.

Nous donnons ici les valeurs des données numériques qui correspondent à notre cas test pour $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{4}$. La géométrie correspond parfaitement à une surface transversal du prototype d'assemblage 3D décrit dans la Section 4.5 du Chapitre 4.

La modification importante dans cette section, qui n'est pas présente ni dans le Chapitre 4 de ce document, ni dans la thèse de K. El Ganaoui [44], est la présence d'une source thermique oscillante. Nous considérons ici que c'est une source qui vaut $f = 7MW/m^3$ dans des disques inclus strictement dans $\widehat{\Omega}$ (de même taille que les disques fluides : les canaux) tels que nous avons un disque entre chaque deux canaux fluides (voir la Figure 5.1). La source prend la valeur zéro ailleurs.

Notons que, suivant la mise à l'échelle du modèle (5.2) dans la Section 5.3.1, la valeur physique pour un calcul de référence avec $\varepsilon = \varepsilon_0 = 1/4$ est $\varepsilon^2 \widehat{f} = 7MW/m^3$. Pour cette raison nous choisissons $\widehat{f} = 112MW/m^3$.

L'emissivité dans les parois des canaux est $e = 1$. Le tenseur de conductivité est supposé isotrope avec une conductivité de valeur $30 Wm^{-1}K^{-1}$. L'échange thermique sur les bords des canaux s'effectue avec un coefficient $\varepsilon^2 \widehat{h} = 500 W.m^{-2}.K^{-1}$.

Nous gardons toujours un nombre fixe de cellule dans la direction x_1 avec des conditions aux bords périodiques dans cette direction. Nous augmentons ainsi la taille du domaine $\widehat{\Omega}$ en augmentant le nombre de cellules suivant la direction x_2 et nous fixons des conditions de type Dirichlet dans cette direction données par : $\widehat{T}_\varepsilon(y) = 800K$ sur $y_2 = 0m$ et $\widehat{T}_\varepsilon(y) = 1200K$ sur $y_2 = L_2/\varepsilon = 0.28m$.

Ici, ε correspond au ratio du nombre de cellules dans la direction x_2 , à savoir,

$$\varepsilon = \frac{1}{N_2}, \quad N_2 = 4, 5 \dots 10.$$

5.3.3 Résultats numériques

Nous commençons cette section par comparer, dans la configuration de référence $\varepsilon = \varepsilon_0 = 1/4$, la solution du problème direct (5.2) dans le cas non linéaire, avec la solution du problème homogénéisé (5.36) correspondant, plus les correcteurs \widehat{T}_1 et \widehat{T}_2 . Les paramètres du problème homogénéisé sont :

$$\begin{aligned} \widehat{f}^*(x) &= \widehat{F}^* = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^s} f_\#(y) dy = 17,8174 \text{ MW}/m^3, \\ \widehat{h}^*(x) &= \widehat{H}^* = \frac{|\Gamma|}{|Y|} \widehat{h} = 0,319383 \text{ MW}.m^{-2}.K^{-1}. \end{aligned}$$

Pour calculer la conductivité homogénéisée, nous calculons les solutions (ω_j) des problèmes de cellule (5.37) que nous traçons dans la Figure 5.3 pour une température $\widehat{T}_0 = 800K$ (ces

solutions sont les mêmes que les solutions des deux premiers problèmes de cellule (4.59) du Chapitre 4 restreintes à la partie solide de Y). Rappelons encore que, dans le cas non-linéaire, les problèmes de cellule dépendent de la température macroscopique. Grâce à ces solutions

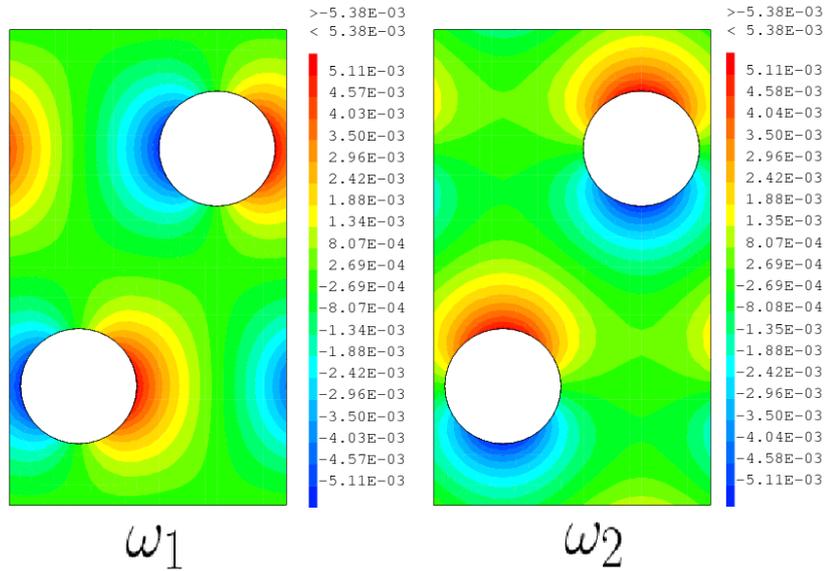


FIGURE 5.3 – solutions des problèmes de cellule (5.37) pour $\widehat{T}_0 = 800K$

des problèmes de cellule, nous calculons la conductivité homogénéisée en fonction de \widehat{T}_0 dans une plage de température $\widehat{T}_0 \in [50, 20000]K$, les valeurs diagonales de \widehat{K}^* sont tracées dans la Figure 5.4 et deux valeurs typiques sont (comme dans le chapitre précédent) :

$$\widehat{K}^*(\widehat{T}_0 = 50K) = \begin{pmatrix} 25.907 & 0. \\ 0. & 25.914 \end{pmatrix}, \quad \widehat{K}^*(\widehat{T}_0 = 20000K) = \begin{pmatrix} 49.801 & 0. \\ 0. & 49.781 \end{pmatrix}.$$

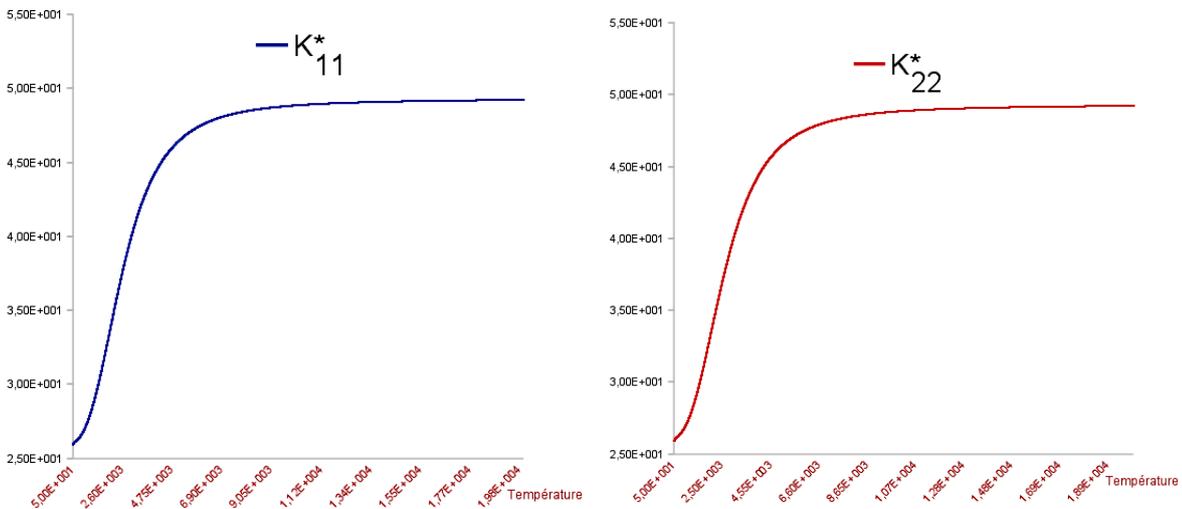


FIGURE 5.4 – conductivité homogénéisée : \widehat{K}^*_{11} (à gauche), \widehat{K}^*_{22} (à droite).

Nous traçons ainsi, dans la Figure 5.5, la solution \widehat{T}_0 du problème homogénéisé (5.36) et la solution \widehat{T}_ϵ du problème direct (5.2) dans le cas d'une condition de rayonnement non-linéaire. Nous remarquons que \widehat{T}_0 constitue une moyenne macroscopique de \widehat{T}_ϵ qui ne tient pas compte des variations microscopiques locales. Notons tout de même que \widehat{T}_0 est calculée en fonction de moyennes homogénéisées de ces variations microscopiques.

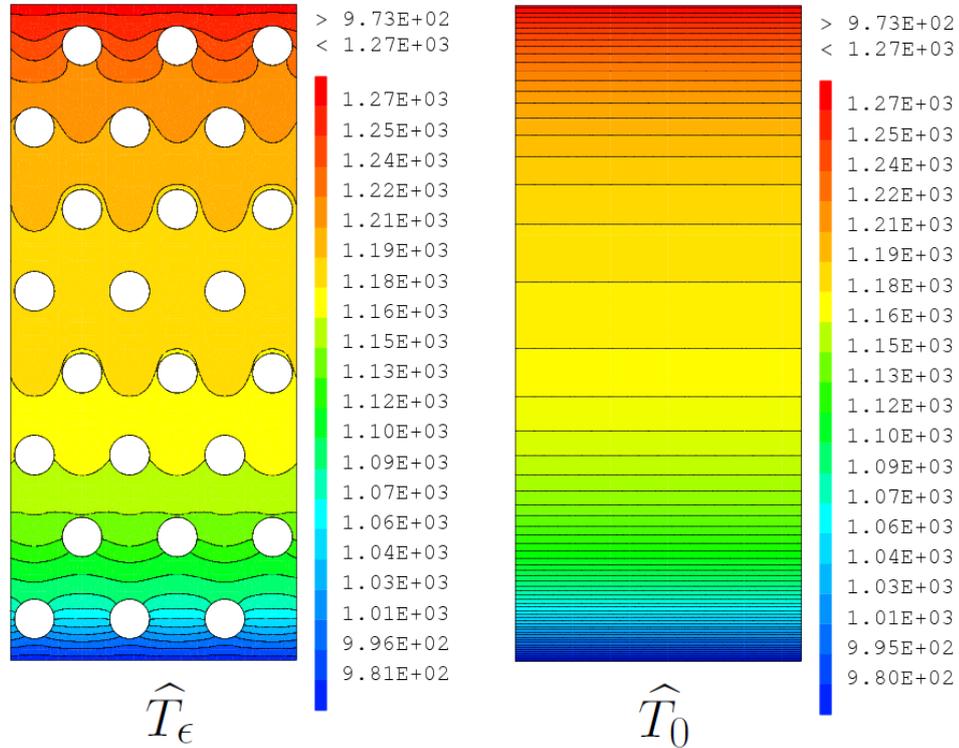


FIGURE 5.5 – Température directe \widehat{T}_ϵ (à gauche) et homogénéisée \widehat{T}_0 (à droite)

En plus de la solution du problème homogénéisé, et grâce aux solutions des problèmes de cellule (4.59), nous calculons le premier correcteur \widehat{T}_1 par la formule (5.6). Nous traçons ce correcteur dans la Figure 5.6 ainsi que la solution homogénéisée \widehat{T}_0 corrigée par ce correcteur, soit $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1$. Nous comparons ces deux approches avec la solution \widehat{T}_ϵ du modèle direct dans la Figure 5.7.

Il est clair que cette correction apporte plus de précision au niveau local microscopique et surtout au niveau de l'approximation du gradient de température \widehat{T}_ϵ que nous traçons dans les Figures 5.8 et 5.9.

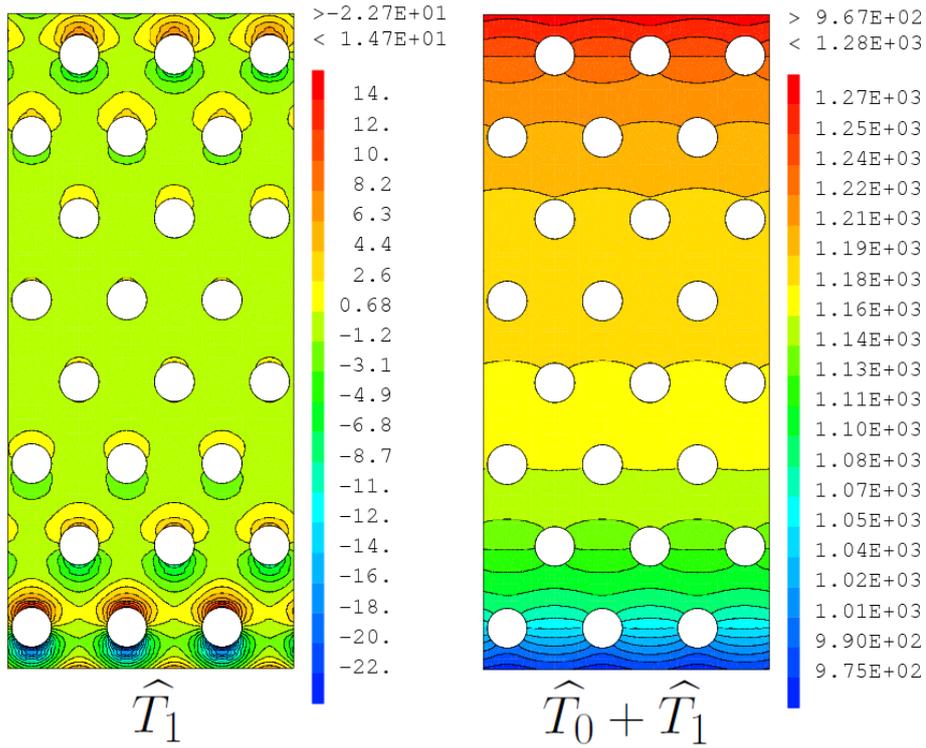


FIGURE 5.6 – Le correcteur \widehat{T}_1 (à gauche) et la solution corrigée $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1$ (à droite)

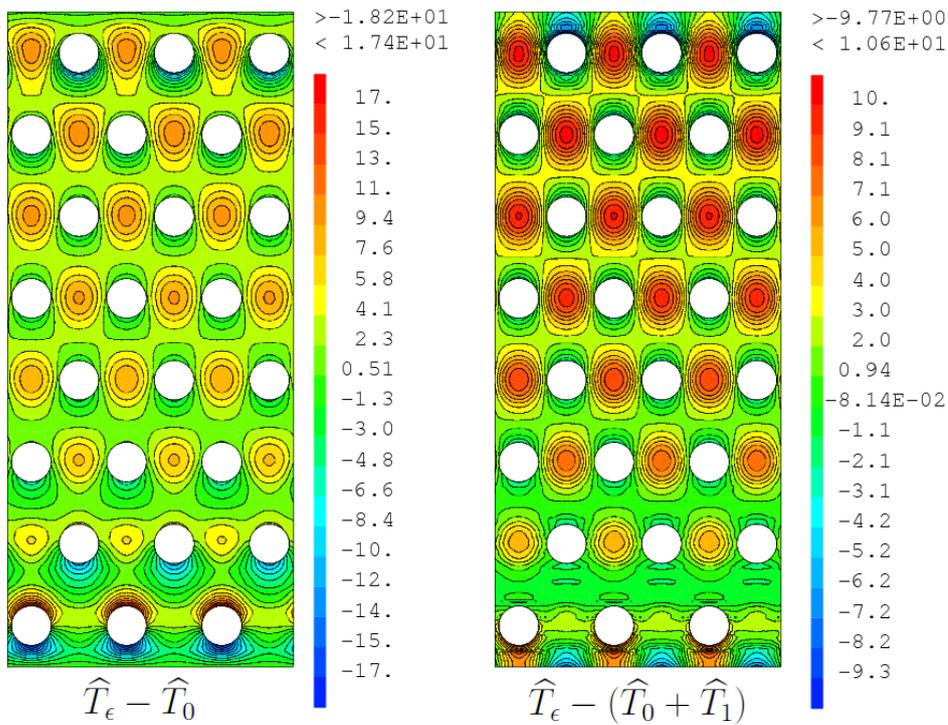


FIGURE 5.7 – Erreurs entre \widehat{T}_ϵ et \widehat{T}_0 (à gauche) et entre correcteur \widehat{T}_ϵ et \widehat{T}_1 (à droite)

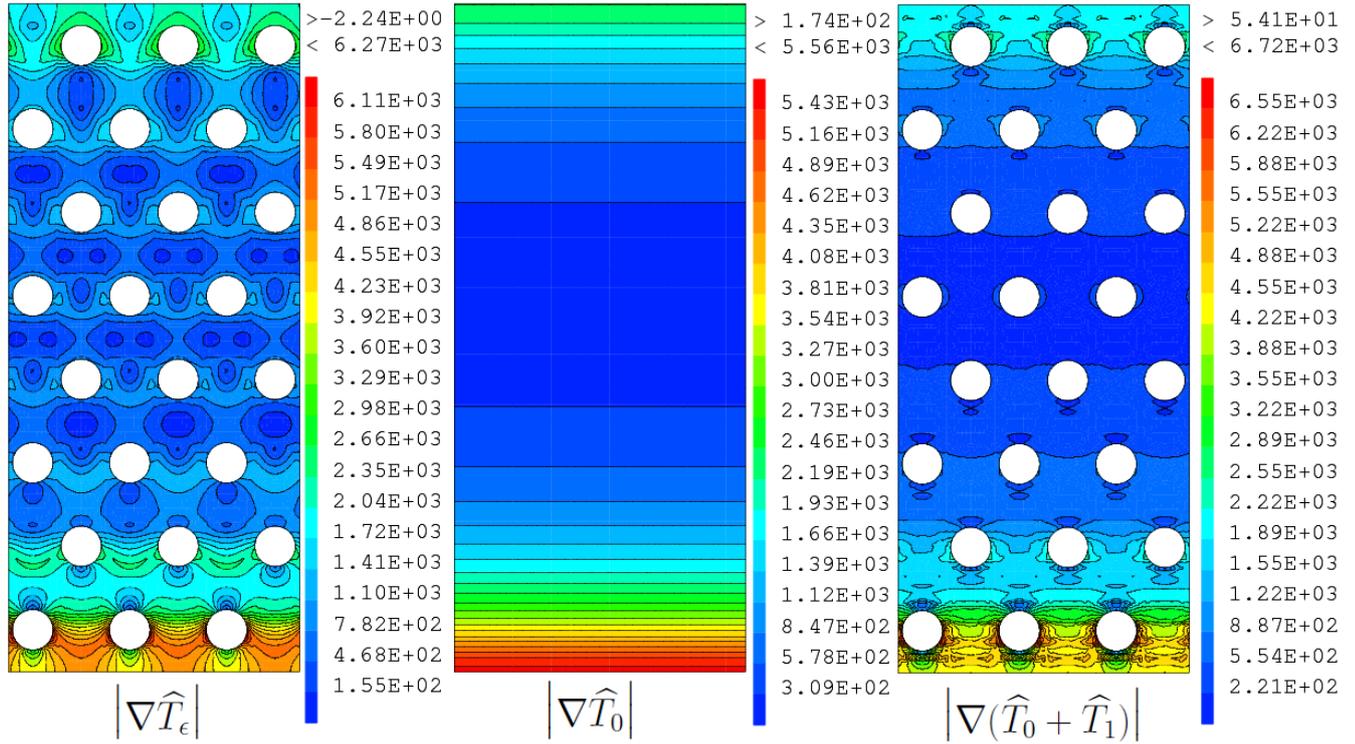


FIGURE 5.8 – Comparaison entre la norme des différents gradient de température : $|\nabla \widehat{T}_\epsilon|$ (à gauche), $|\nabla \widehat{T}_0|$ (au milieu) et $|\nabla(\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1)|$ (à droite)

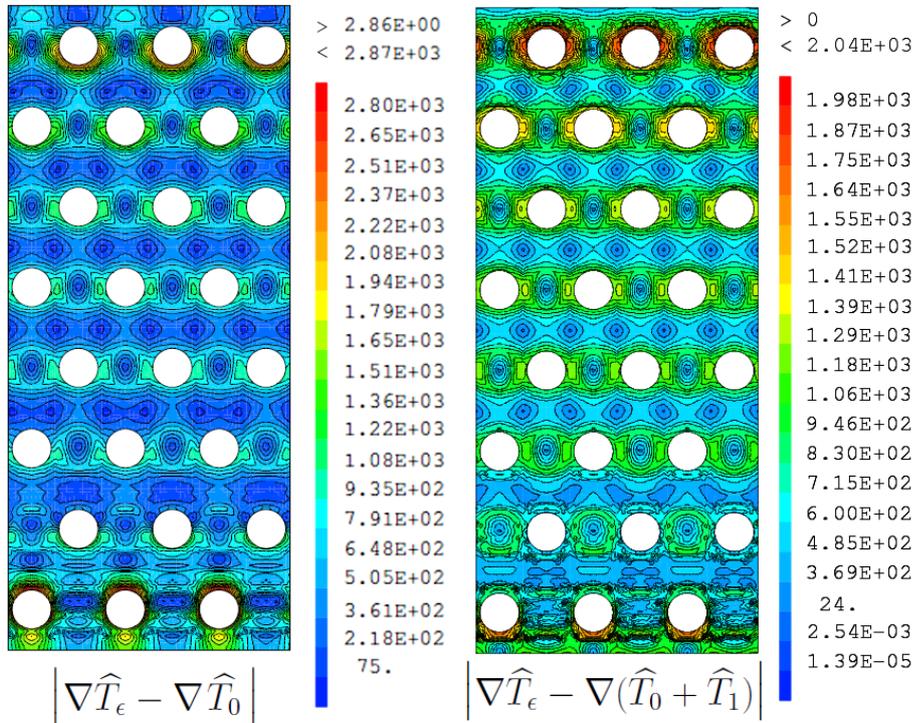


FIGURE 5.9 – Comparaison entre la norme des différents gradient de température : $|\nabla \widehat{T}_\epsilon - \nabla \widehat{T}_0|$ (à gauche) et $|\nabla \widehat{T}_\epsilon - \nabla(\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1)|$ (à droite)

Cependant, comme nous l'avons signalé dans l'introduction de ce chapitre, cette correction n'est pas suffisante pour atteindre une bonne approximation des gradients qui apparaissent entre la zone de la source thermique et les canaux (voir la Figure 5.10). Suivant la stratégie de ce chapitre, nous calculons alors le deuxième correcteur \widehat{T}_2 en vue d'une deuxième correction de \widehat{T}_0 . Pour cela nous calculons les solutions des problèmes de cellule (5.37, 5.38, 5.39, 5.40). Nous traçons T_2^1 , T_2^2 dans la Figure 5.11, et les $\theta_{i,j}$ dans la Figure 5.12, T_2^3 étant une fonction nulle.

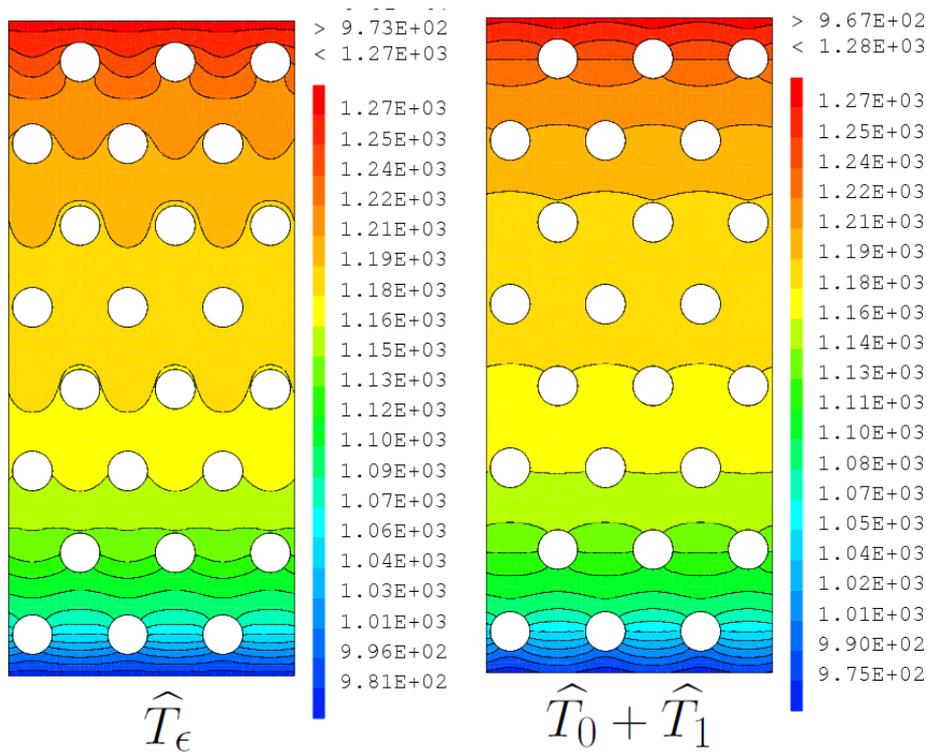


FIGURE 5.10 – Solution directe \widehat{T}_ϵ (à gauche) et la solution corrigée $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1$ (à droite)

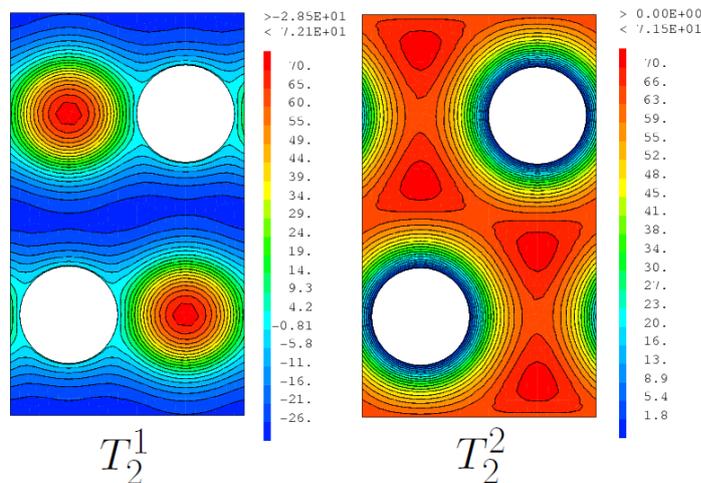


FIGURE 5.11 – Solutions des problèmes de cellule T_2^1 (à gauche) et T_2^2 (à droite)

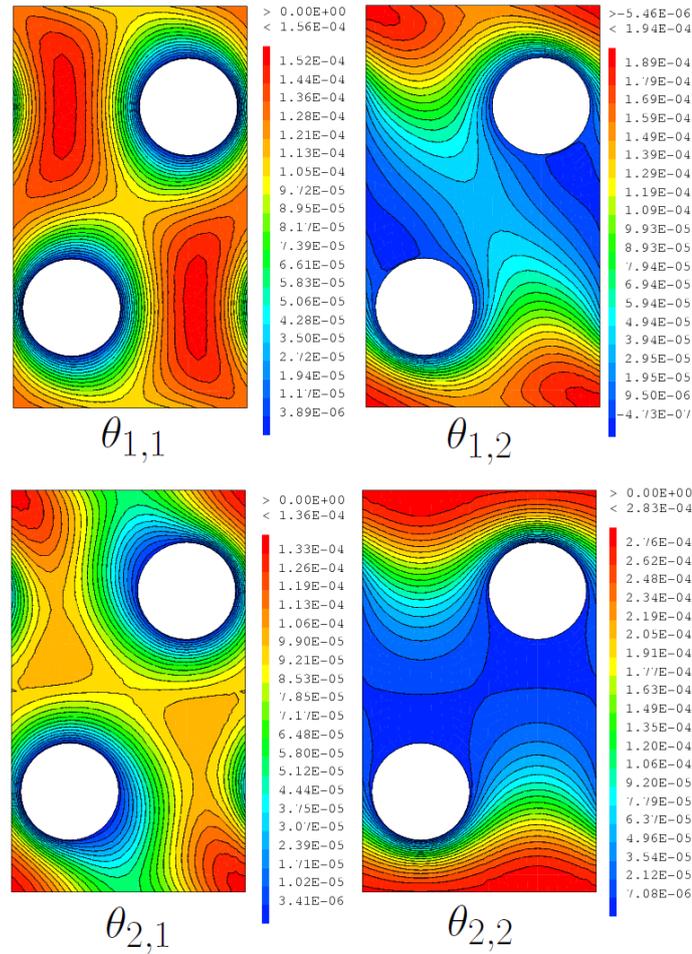


FIGURE 5.12 – Solutions des problèmes de cellule $\theta_{i,j}$, $i, j = 1, 2$

Remarque 5.3.1. En référence à la Remarque 5.2.1, et sachant que les paramètres c_{ijk} donnés par

$$c_{ijk} = \int_{Y^*} \left[\sum_l K_{kl}(y) \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial y_l}(y) - K_{ij}(y) \omega_k(y) \right] dy.$$

sont tous presque nuls, soient

$$\begin{aligned} c_{111} &= -2.42128E-10 \\ c_{112} &= 3.37167E-10 \\ c_{121} &= -3.11185E-21 \\ c_{122} &= -1.49058E-21 \\ c_{211} &= 2.32272E-21 \\ c_{212} &= -4.46678E-23 \\ c_{221} &= -2.42128E-10 \\ c_{222} &= 3.37167E-10 \end{aligned}$$

nous pouvons alors choisir $\tilde{T}_1 = 0$ qui est dans ce cas compatible avec la condition (5.8) qui

s'écrit :

$$-\operatorname{div} K^* \nabla \hat{T}_1 = \sum_{i,j,k} c_{ijk} \frac{\partial^3 T_0}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \simeq 0$$

Nous traçons dans la Figure 5.13 le deuxième correcteur \hat{T}_2 donné par la formule (5.9) ainsi que la solution homogénéisée \hat{T}_0 corrigée par $\hat{T}_1 + \hat{T}_2$. Visiblement, le résultat que nous obtenons est nettement meilleur que ce qu'on obtient avec seulement le correcteur \hat{T}_1 (voir aussi la Figure 5.14). Nous traçons dans la Figure 5.15 la norme du gradient de cette nouvelle correction en la comparant au gradient de la solution \hat{T}_ε du problème directe.

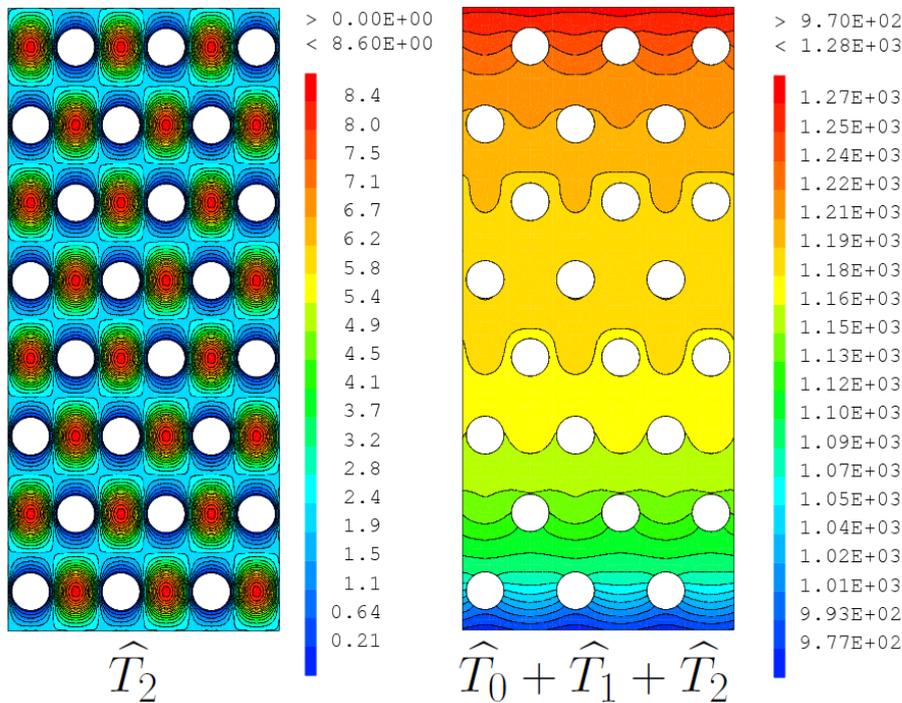


FIGURE 5.13 – Le deuxième correcteur T_2 (à gauche) et la nouvelle approximation $\hat{T}_0 + \hat{T}_1 + \hat{T}_2$ (à droite)

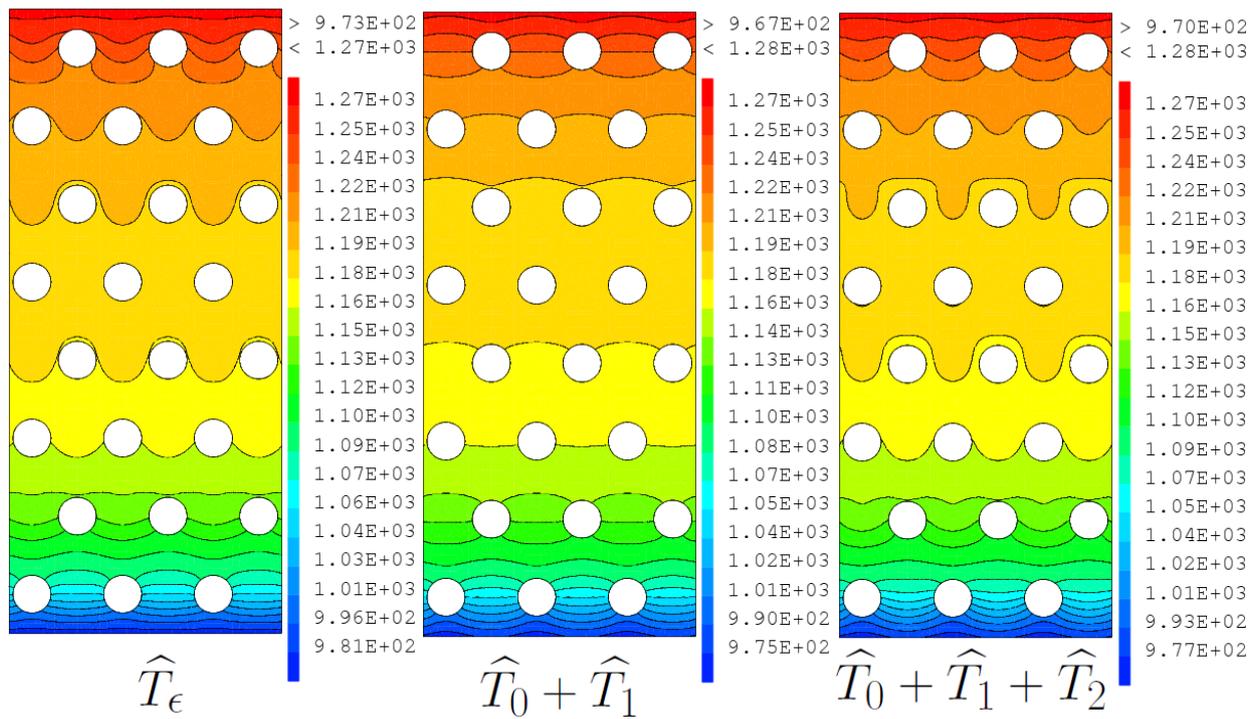


FIGURE 5.14 – Solution directe \widehat{T}_ϵ (à gauche), solution corrigée $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1$ (au milieu) et solution corrigée $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1 + \widehat{T}_2$ (à droite)

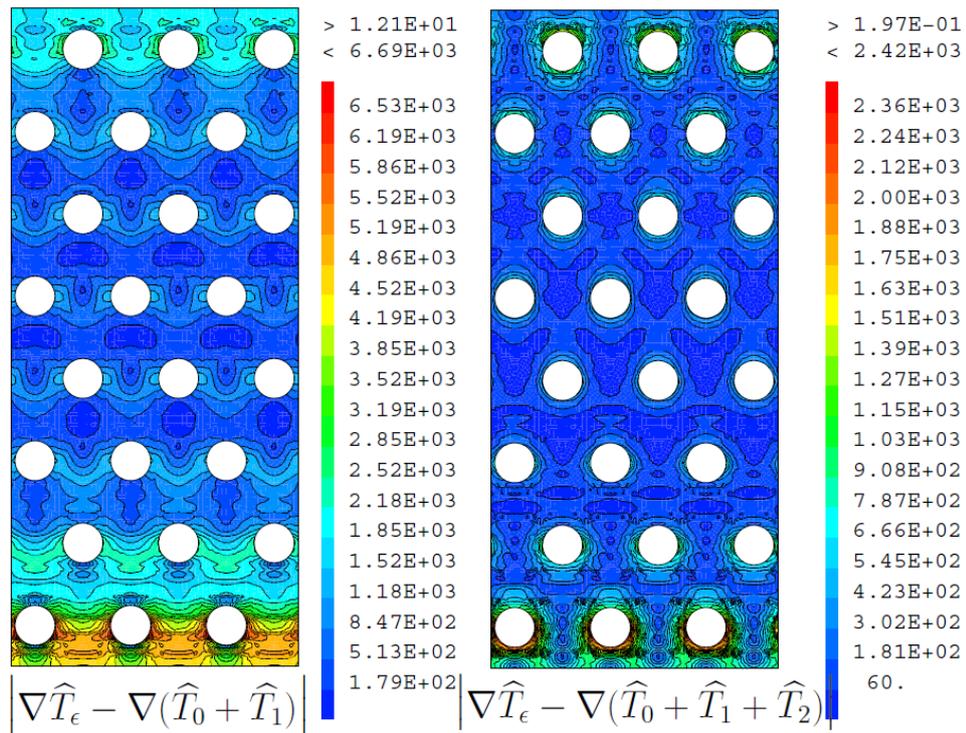


FIGURE 5.15 – Comparaison entre la norme des différents gradient de température : $|\nabla(\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1)|$ (à gauche) et $|\nabla\widehat{T}_\epsilon - \nabla(\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1)|$ (à droite)

Dans la Figure 5.17, nous traçons les différentes solutions $\widehat{T}_\epsilon, \widehat{T}_0, \widehat{T}_0 + \widehat{T}_1$ et $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1 + \widehat{T}_2$ sur une droite de profil $D_1 = (a_1 \ a_2)$ (voir la Figure 5.16) où $a_1 = (L_1/2 \ 0)$ et $a_2 = (L_1/2 \ L_2/\epsilon)$ pour $\epsilon = 1/4$. Pour une meilleur visibilité, nous traçons dans les Figures 5.18 et 5.19 deux zoom sur la Figure 5.17 correspondants au deux segments respectifs $D'_1 = (a'_1 \ a'_2)$ où $a'_1 = a_1$ et $a'_2 = (L_1/2 \ 3L_2/5\epsilon)$, $D''_1 = (a''_1 \ a''_2)$ où $a''_1 = (L_1/2 \ 7L_2/16\epsilon)$ et $a''_2 = (L_1/2 \ 9L_2/16\epsilon)$.

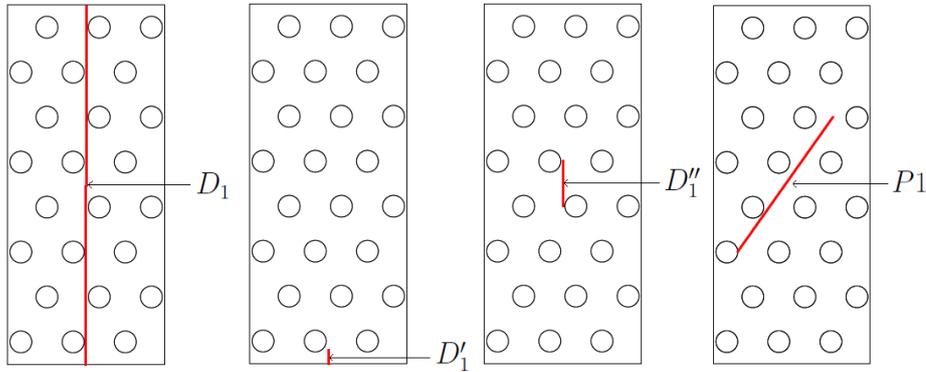


FIGURE 5.16 – Les droites de profil D_1 (première à gauche), D'_1 (deuxième à gauche), D''_1 (deuxième à droite) et P_1 (première à droite) pour $\epsilon = 1/4$

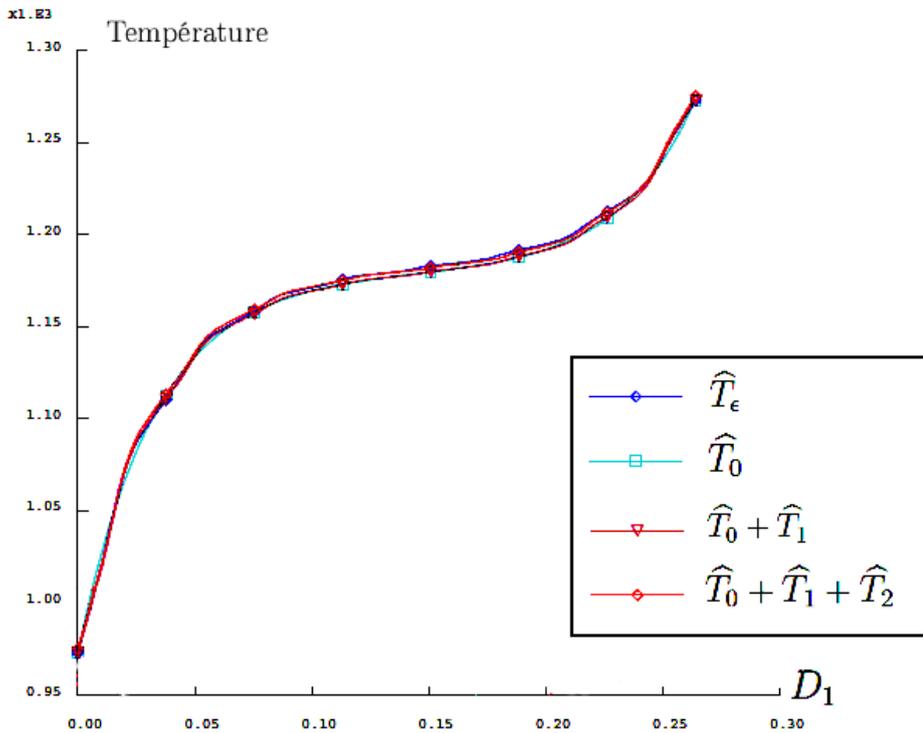


FIGURE 5.17 – Tracés des différentes solutions sur la droite de profil D_1

Nous remarquons dans la Figure 5.18 que l'addition du correcteur \widehat{T}_2 ajoute une erreur supplémentaire à coté des bords extérieur de $\widehat{\Omega}$ vu qu'il ne vérifie pas non plus une condition de Dirichlet à ces bords. Rappelons que le correcteur \widehat{T}_1 induit aussi une erreur au niveau de

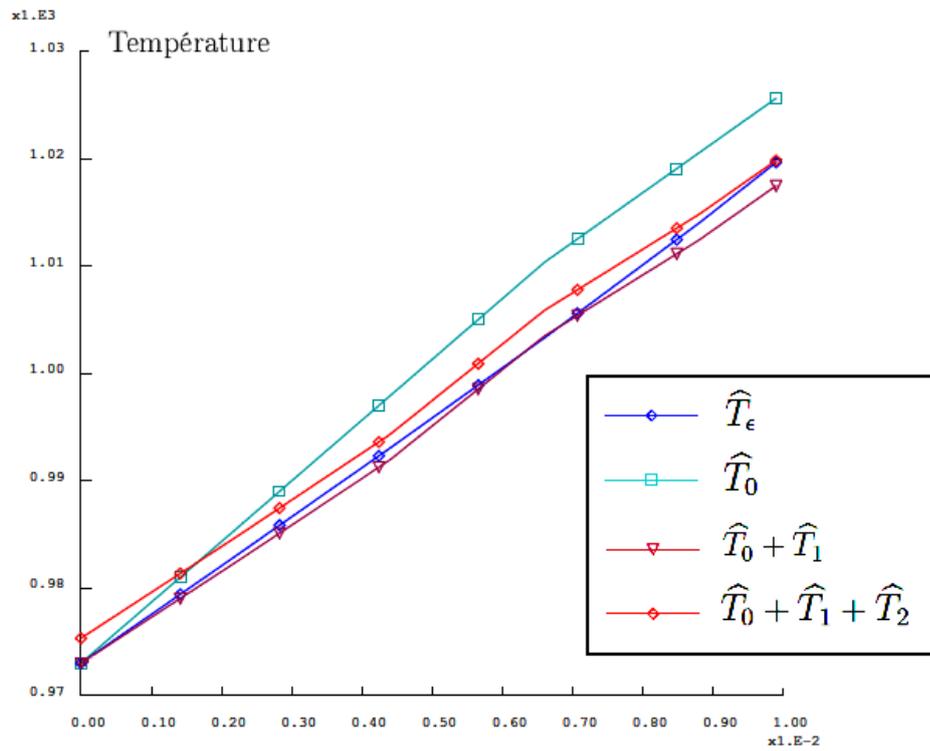


FIGURE 5.18 – Tracés des différentes solutions sur la droite de profil D'_1

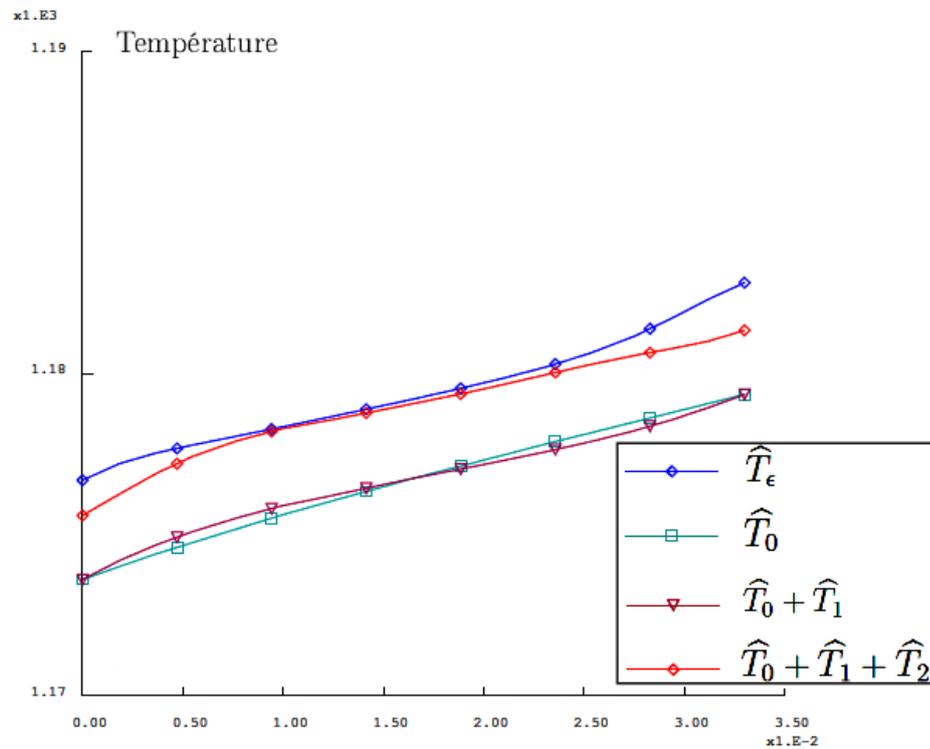


FIGURE 5.19 – Tracés des différentes solutions sur la droite de profil D''_1

ces bords qu'on ne voit pas à l'échelle de la Figure 5.18 (voir la Figure 5.7 par exemple). Par contre, le résultat à l'intérieur du domaine $\hat{\Omega}$ est visiblement meilleur avec le correcteur \hat{T}_2 que seulement avec le correcteur T_1 ou sans correcteurs.

Nous traçons aussi dans les Figures 5.20, 5.21 et 5.22 ces différentes solutions sur la droite de profil D_1'' pour différentes valeurs de ϵ et pour la même valeur physique de la source thermique $\epsilon^2 \hat{f}_\epsilon = 7 \text{ MW}/\text{m}^3$. Dans les Figures 5.20, 5.21 et 5.22, nous remarquons que la contribution du correcteur \hat{T}_2 est toujours aussi importante pour différentes valeurs de ϵ . Ici, nous avons choisi de garder la même valeur physique de la source thermique $\epsilon^2 \hat{f}_\epsilon = 7 \text{ MW}/\text{m}^3$ et de l'échange thermique $\epsilon^2 \hat{h}_\epsilon = 500 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ (suivant le changement de variable adopté dans cette section). Nous expliquons alors la contribution toujours importante de T_2 par le fait que, plus ϵ est petit, plus la valeur de $\hat{f}_\epsilon = 1/\epsilon^2 7 \text{ MW}/\text{m}^3$ est grande et plus la valeur des solutions de cellule T_2^1 et T_2^2 est grande aussi, ce qui compense la petitesse de ϵ dans l'écriture du second correcteur \hat{T}_2

$$\hat{T}_2(y) = \epsilon^2(T_2^1(y) + T_2^2(y))\hat{F}(y) + \epsilon^2 T_2^3(y)\hat{H}(y)(\hat{T}_0(y) - \hat{T}_g(y)) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \hat{T}_0}{\partial y_i \partial y_j}(y)\theta_{i,j}(y).$$

Notons pour la même occasion que les termes qui ont la plus grande contribution dans le second correcteur \hat{T}_2 sont les termes $\epsilon^2(T_2^1(y) + T_2^2(y))\hat{F}(y)$ car se sont les seuls termes qui sont solutions de problèmes en fonction de la valeur locale de la source thermique. La solution $T_2^3(y)$ étant nulle ici.

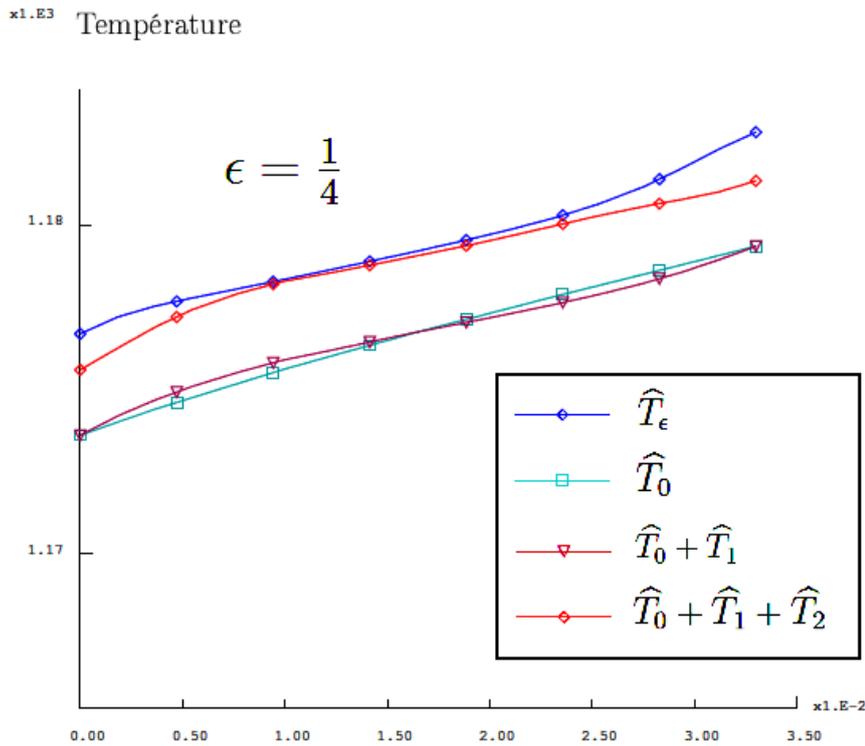


FIGURE 5.20 – Tracés des différentes solutions sur la droite de profil D_1'' pour $\epsilon^2 \hat{f}_\epsilon = 7 \text{ MW}/\text{m}^3$ et $\epsilon = 1/4$

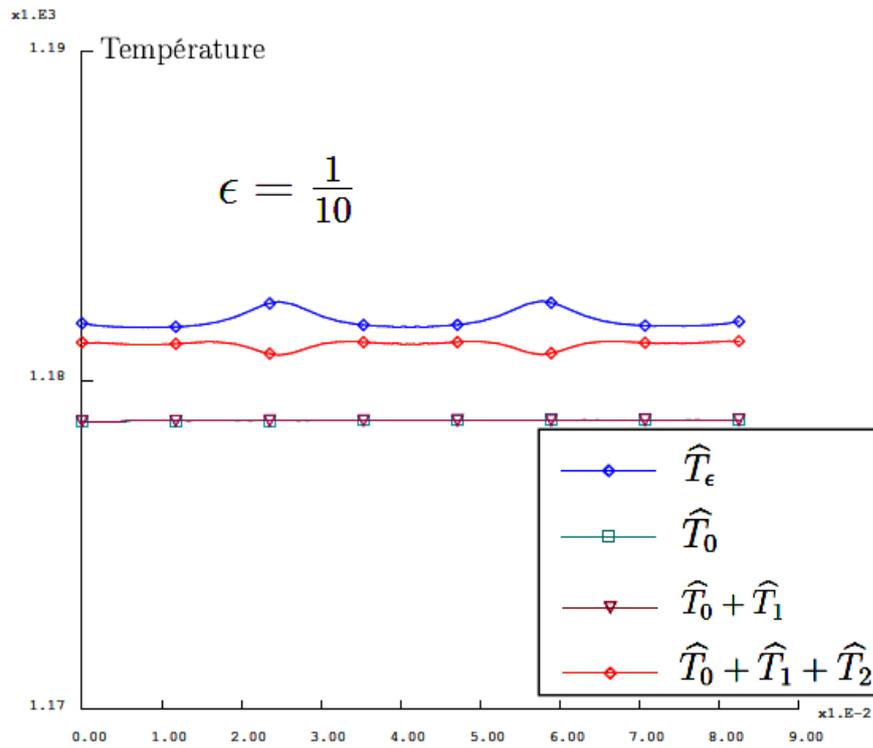


FIGURE 5.21 – Tracés des différentes solutions sur la droite de profil D_1'' pour $\varepsilon^2 \hat{f}_\varepsilon = 7 \text{ MW}/\text{m}^3$ et $\varepsilon = 1/10$

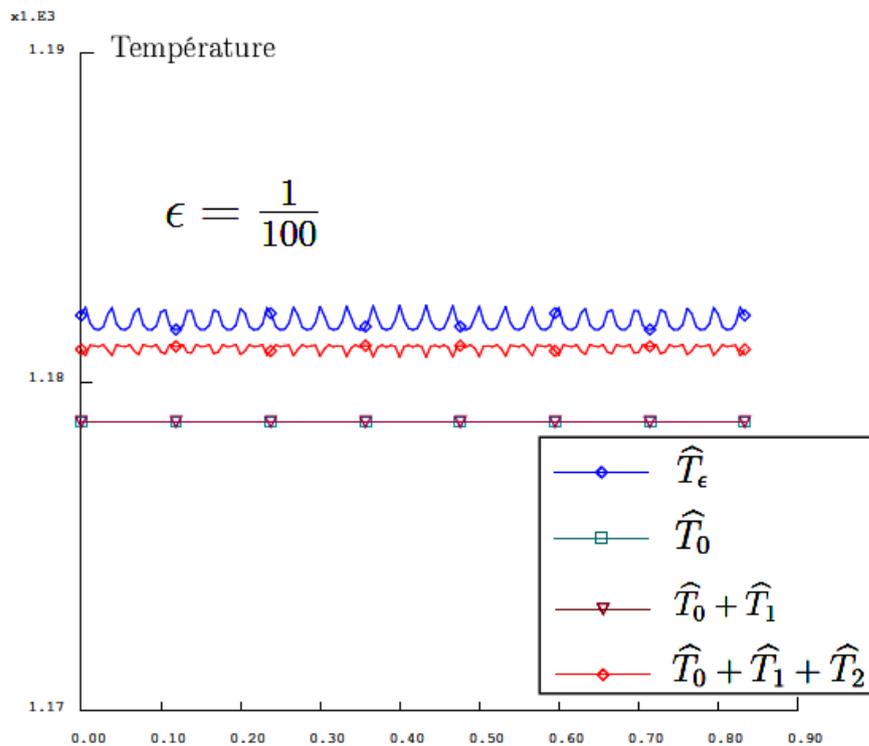


FIGURE 5.22 – Tracés des différentes solutions sur la droite de profil D_1'' pour $\varepsilon^2 \hat{f}_\varepsilon = 7 \text{ MW}/\text{m}^3$ et $\varepsilon = 1/100$

Remarque 5.3.2. Les tracés des Figures 5.20, 5.21 et 5.22 ne correspondent pas au processus d'homogénéisation où, nous faisons tendre ε vers 0 pour établir des résultats de convergence de la méthode. Dans un tel processus, il est important de garder les mêmes valeurs des paramètres du modèle, en particulier les valeurs de la source thermique \widehat{f}_ε et de l'échange thermique \widehat{h}_ε mêmes s'ils ne correspondent plus aux valeurs physiques de ces paramètres. Dans un tel processus, il est clair que plus la valeur de ε est petite, plus la contribution du correcteur T_2 devient moins importante.

Dans les Figures 5.23, 5.24 et 5.25, nous traçons ces solutions dans une droite de profil qui traverse quelques zones où la source thermique est non-nulle, soit la droite de profil $P_1 = (b_1 \ b_2)$ où $b_1 = (1.75263E - 02 \ 2.0625E - 02/\varepsilon)$ et $b_2 = (8.72628E - 02 \ 4.5375E - 02/\varepsilon)$ (voir la Figure 5.16), nous traçons ces solutions pour la valeur de référence $\varepsilon = 1/4$ et pour différentes valeurs de la source thermique $\widehat{f}_\varepsilon = 0 \text{ MW}/m^3$, $112 \text{ MW}/m^3$, $16000 \text{ MW}/m^3$, nous remarquons que plus la valeur de la source thermique est élevée, plus l'amélioration apportée par le deuxième correcteur devient importante.

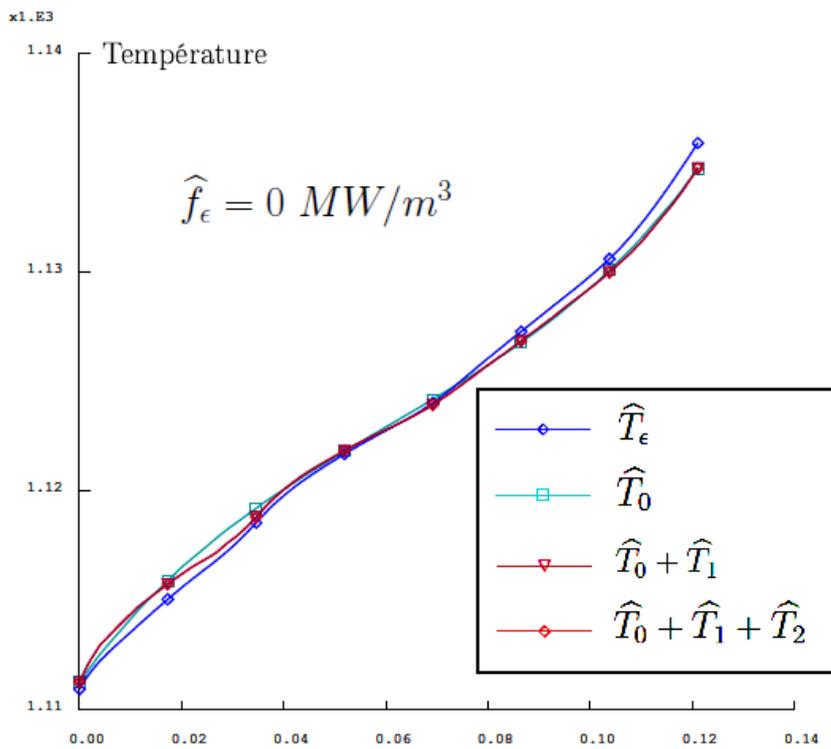


FIGURE 5.23 – Tracés des différentes solutions sur la droite de profil P_1 pour $\varepsilon = 1/4$ et $\widehat{f}_\varepsilon = 0 \text{ MW}/m^3$

Les tracés des Figures 5.23, 5.24 et 5.25 confirment que, pour une valeur fixée du coefficient d'échange $\varepsilon^2 \widehat{h}_\varepsilon = 500$, l'utilité du correcteur d'ordre 2 \widehat{T}_2 est relative à la valeur de la source thermique. Notons que pour une valeur très faible du coefficient d'échange $\varepsilon^2 \widehat{h}_\varepsilon$, les gradients observés entre le support de la source thermique et les perforations deviennent

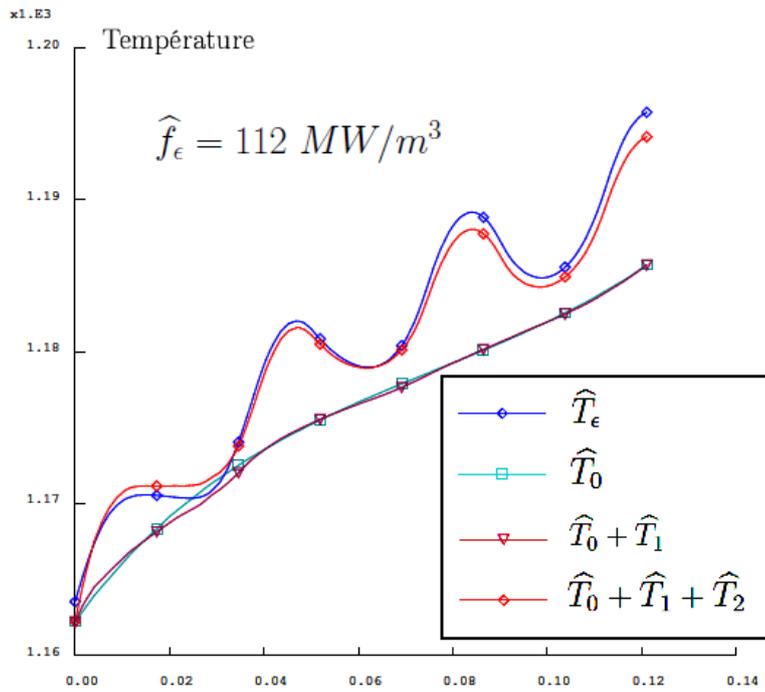


FIGURE 5.24 – Tracés des différentes solutions sur la droite de profil P_1 pour $\varepsilon = 1/4$ et $\widehat{f}_\varepsilon = 112 \text{ MW/m}^3$

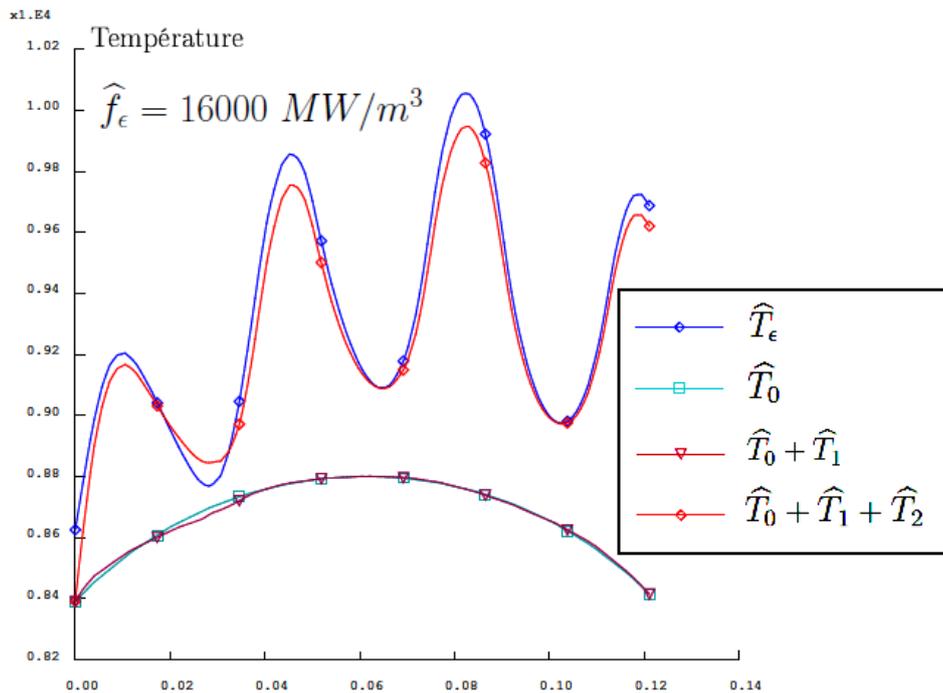


FIGURE 5.25 – Tracés des différentes solutions sur la droite de profil P_1 pour $\varepsilon = 1/4$ et $\widehat{f}_\varepsilon = 16000 \text{ MW/m}^3$

faibles aussi et la contribution du correcteur d'ordre 2 devient quantitativement moins importante (voir les Figures 5.26 et 5.27).

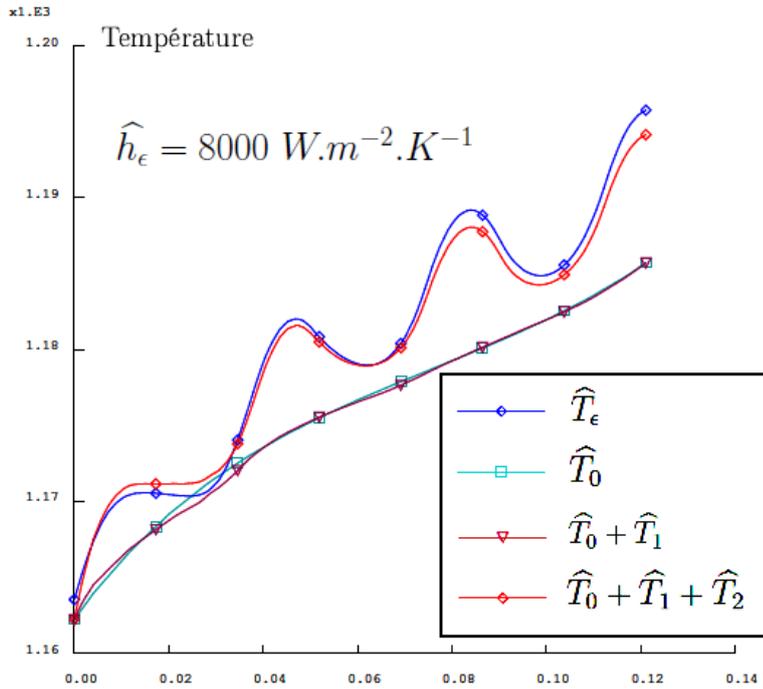


FIGURE 5.26 – Tracés des différentes solutions sur la droite de profil P_1 pour $\varepsilon = 1/4$, $\hat{f}_\varepsilon = 112 \text{ MW}/\text{m}^3$ et $\hat{h}_\varepsilon = 8000 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$

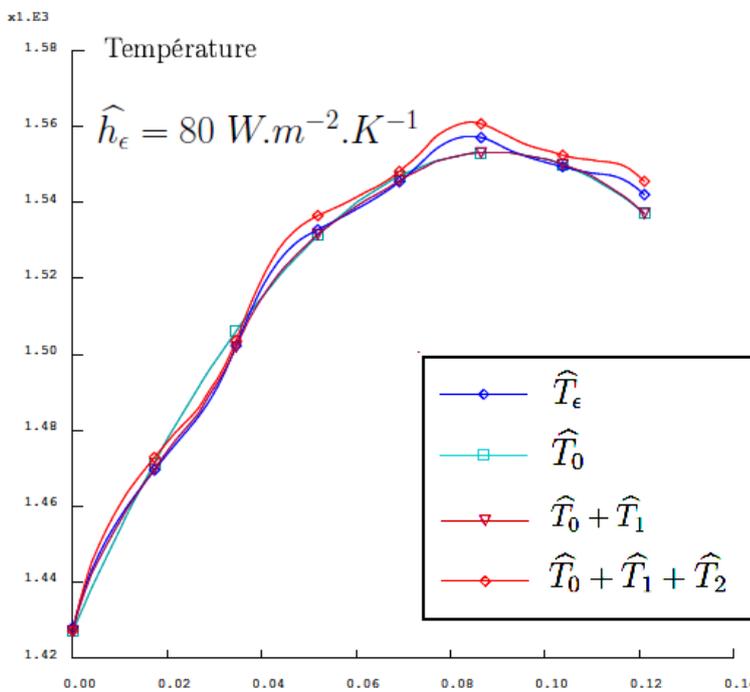


FIGURE 5.27 – Tracés des différentes solutions sur la droite de profil P_1 pour $\varepsilon = 1/4$, $\hat{f}_\varepsilon = 112 \text{ MW}/\text{m}^3$ et $\hat{h}_\varepsilon = 80 \text{ MW}/\text{m}^3$

5.3.4 Calcul d'erreurs

Maintenant, pour justifier la convergence de notre méthode, pour un ε de plus en plus petit ($\varepsilon = 1/4, 1/8, 1/12, \dots, 1/36$), nous traçons, dans la Figure 5.28 suivant une échelle logarithmique, les différentes erreurs relatives sur la température avec les différentes corrections. Pour éviter tous les problèmes liés aux couches limites, nous choisissons dans cette étape d'imposer des conditions limites périodiques suivant les deux directions de l'espace. Nous souhaitons ainsi retrouver les ordres de convergence suivants (en s'inspirant de l'ordre de chaque correction dans le développement asymptotique (5.3)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} ERR(T)_0 = \frac{\|\widehat{T}_\varepsilon(y) - (\widehat{T}_0(y))\|_{L^2(\widehat{\Omega})}}{\|\widehat{T}_\varepsilon(y)\|_{L^2(\widehat{\Omega})}} \leq C\varepsilon, \\ ERR(T)_1 = \frac{\|\widehat{T}_\varepsilon(y) - (\widehat{T}_0(y) + \widehat{T}_1(y))\|_{L^2(\widehat{\Omega})}}{\|\widehat{T}_\varepsilon(y)\|_{L^2(\widehat{\Omega})}} \leq C\varepsilon^2, \\ ERR(T)_2 = \frac{\|\widehat{T}_\varepsilon(y) - (\widehat{T}_0(y) + \widehat{T}_1(y) + \widehat{T}_2(y))\|_{L^2(\widehat{\Omega})}}{\|\widehat{T}_\varepsilon(y)\|_{L^2(\widehat{\Omega})}} \leq C\varepsilon^3, \end{array} \right. \quad (5.48)$$

Dans notre cas, en gardant les mêmes paramètres physiques de notre modèle comme nous les avons décrits plus haut, en particulier une source et un échange thermique indépendants de la variable macroscopique x , il est clair que la solution du problème homogénéisé est une constante $T_0 = T_{gaz}$. Il en résulte que le premier correcteur est nul. De plus, même si le deuxième correcteur est non-nul, il est parfaitement d'ordre ε^2 , en effet, il suffit de voir que $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \widehat{T}_0}{\partial y_i \partial y_j}(y) \theta_{i,j}(y) = 0$ et que la contribution du terme $(T_2^1 + T_2^2) \widehat{F}$ est indépendante de ε et donc que le seul terme non-nul de \widehat{T}_2 , soit $\varepsilon^2 (T_2^1(y) + T_2^2(y)) \widehat{F}$, est d'ordre ε^2 . Les résultats de la Figure 5.28 confirment ce constat où nous atteignons l'ordre de convergence ε^2 dès la première approximation de \widehat{T}_ε par \widehat{T}_0 sans correcteurs.

Le résultat de la Figure 5.28 étant immédiat, nous traçons dans la Figure 5.29 les mêmes courbes d'erreurs dans le cas où la source thermique dépend de la variable macroscopique dans le but de voir une contribution non-nulle de tous les correcteurs. Dans ce cas, nous choisissons une source thermique telle que

$$\widehat{F}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } L_2/4\varepsilon \leq y_2 \leq 3L_2/4\varepsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et nous gardons les mêmes variations microscopiques de la source thermique. Nous retrouvons dans la Figure 5.29 les ordres de convergence attendus pour la première approximation

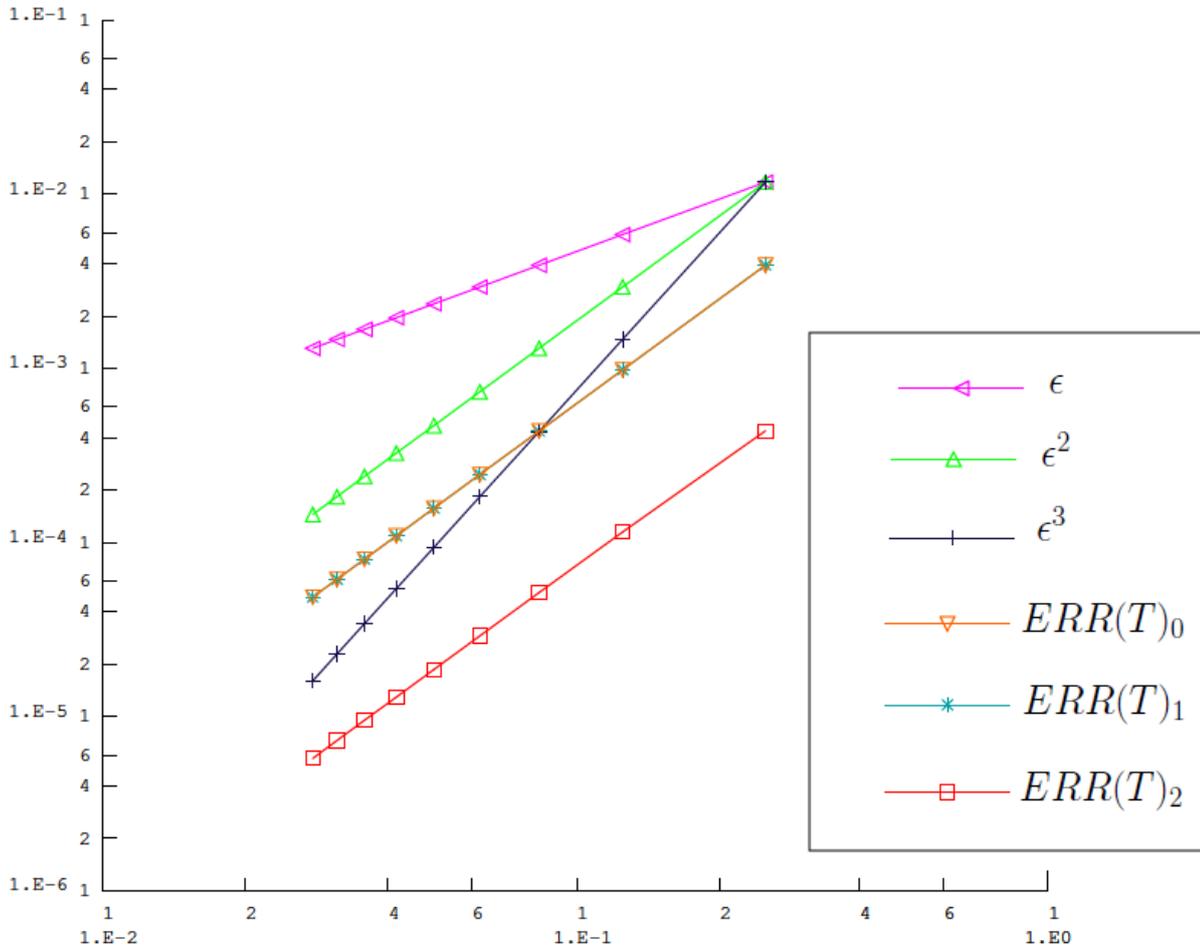


FIGURE 5.28 – Evolutions des erreurs sur les différentes approximations de la température

de \widehat{T}_ϵ par \widehat{T}_0 ainsi que celle par $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1$. soient :

$$ERR(T)_0 \leq C\epsilon,$$

$$ERR(T)_1 \leq C\epsilon^2.$$

Au contraire de à quoi on s'attendait, l'erreur sur l'approximation avec $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1 + \widehat{T}_2$ converge aussi suivant l'ordre ϵ^2 au lieu de ϵ^3 . Nous croyons que ceci est du à des erreurs d'interpolation dans le calcul du gradient et du laplacien de \widehat{T}_0 qui sont d'ordre ϵ^2 . En effet, pour atteindre les erreurs théoriques données dans (5.48), il faudrait que toutes les dérivées partielles de \widehat{T}_0 , d'ordre 1 et 2, vérifient la condition de périodicité dans le domaine $\widehat{\Omega}$, ce que nous n'avons pas pu vérifier numériquement à cause, éventuellement, des erreurs d'interpolation aux nœuds du champ de gradient et du laplacien, initialement calculés aux centres des éléments du maillage, cette interpolation qui ne se fait pas automatiquement de façon périodique.

Finalement, pour conclure sur ce cas test, nous rappelons que, même si l'addition du

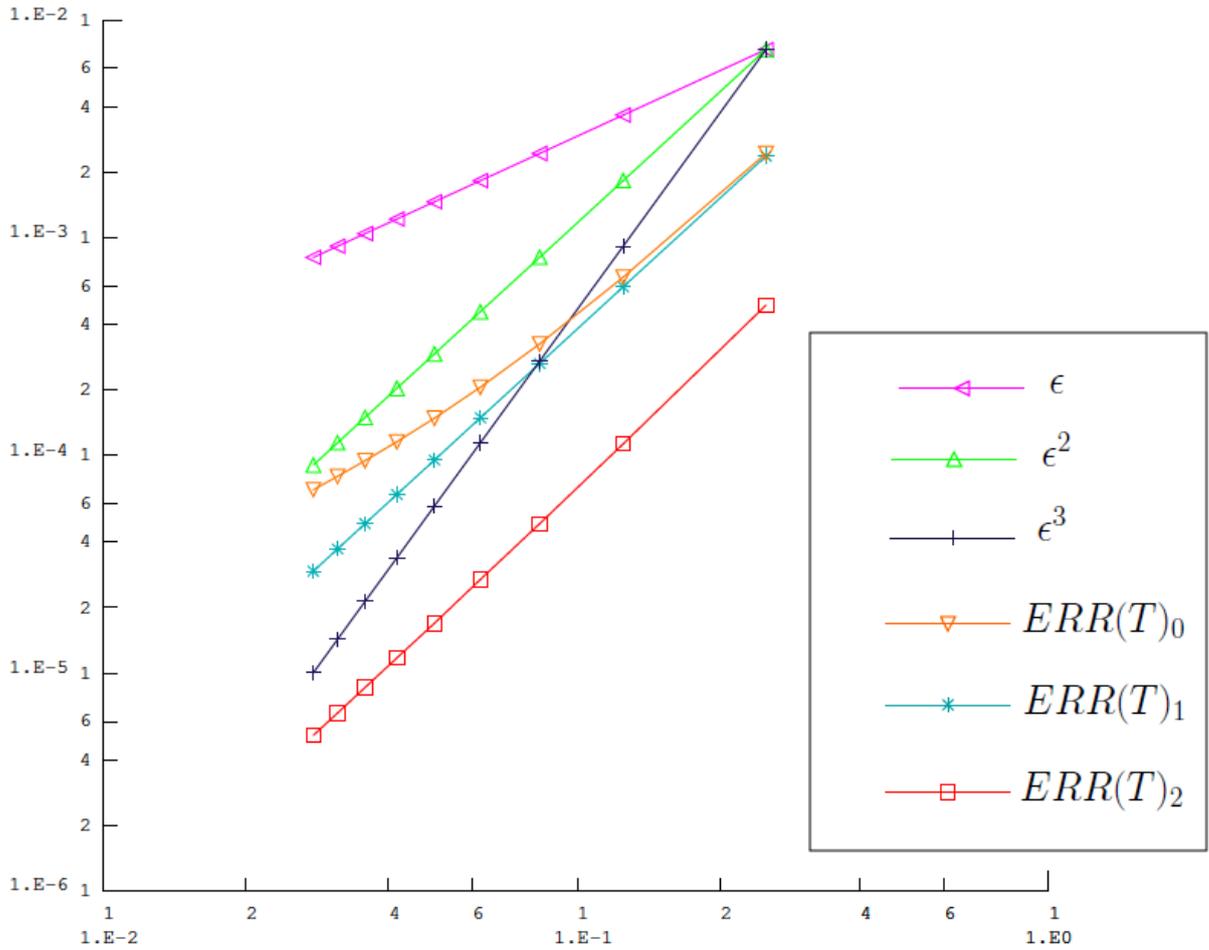


FIGURE 5.29 – Evolutions des erreurs sur les différentes approximations de la température quand \hat{F} dépend de la variable macroscopique

second correcteur T_2 n'améliore pas l'ordre de convergence de notre cas test, nous avons bien mis en évidence que pour tout ϵ donné, ce correcteur est très utile, voire essentiel, pour une approximation correcte par homogénéisation du problème de transfert thermique (5.2).

Chapitre 6

Etude dans un régime non-stationnaire

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'homogénéisation du transfert de chaleur, décrit par le modèle simplifié (3.41) introduit dans la Section 3.2 du Chapitre 3, dans un régime transitoire lent. Nous montrons dans un tel régime transitoire, par homogénéisation, que les variations en temps du modèle n'apparaissent qu'au niveau macroscopique et que la correction microscopique par le premier correcteur T_1 (voire avec T_2 aussi) est stationnaire en temps.

Sommaire

6.1 Introduction	151
6.2 Homogénéisation	155
6.2.1 Résultats d'homogénéisation par développement asymptotique	155
6.2.2 Convergence	158
6.2.3 Résultats dans le cas non-linéaire	160
6.3 Résultats numériques	162
6.3.1 Algorithme et données numériques	162
6.3.2 Résultats numériques	164

6.1 Introduction

Une des perspectives de l'étude faite dans ce document, ou dans [44], est de valider notre méthode d'homogénéisation, appliquée aux différents modèles de transfert thermique, décrits précédemment, dans un régime transitoire (non stationnaire). Par rapport à notre application industrielle, deux sortes de fonctionnement transitoire sont envisageables :

- ◇ Le transitoire lent qui correspond à un arrêt normal¹ du cœur du réacteur,

1. Tout réacteur nucléaire subit, durant sa durée de vie, plusieurs arrêts dits nominaux pour des raisons de maintenance et aussi pour le rechargement du combustible.

◇ Le transitoire rapide qui correspond à un arrêt accidentel du à un dysfonctionnement dans le cœur ou dans la centrale en général.

Notons que l'étude stationnaire que nous avons décrite dans les chapitres précédents de ce document correspond à un fonctionnement nominal du cœur.

Dans ce chapitre, nous proposons une étude non-stationnaire du modèle (3.2) dans un régime lent. C'est une étude de premier degré en complexité pour passer du régime stationnaire au régime transitoire car, dans ce cas, le comportement thermique du cœur est homogène en temps. Autrement dit, notre étude asymptotique du modèle thermique restera une étude asymptotique sur la variable de l'espace où la variable du temps sera introduite comme paramètre. Le modèle que nous traitons par homogénéisation dans ce cas est le modèle simplifié (3.2) en mode transitoire qui devient, dans un intervalle de temps $(0, \tau)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\rho C_p)_\varepsilon(t, x) \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial t}(t, x) - \operatorname{div}(K_\varepsilon(t, x) \nabla T_\varepsilon(t, x)) & = f_\varepsilon(t, x) & \text{dans } (0, \tau) \times \Omega_\varepsilon^S \\ -K_\varepsilon(t, x) \nabla T_\varepsilon(t, x) \cdot n & = \varepsilon h_\varepsilon(t, x) (T_\varepsilon(t, x) - T_{gaz}(t, x)) + \frac{1}{\varepsilon} G_\varepsilon(T_\varepsilon(t, x)) & \text{sur } (0, \tau) \times \Gamma_\varepsilon \\ T_\varepsilon(t, x) & = 0 & \text{sur } (0, \tau) \times \partial\Omega \\ T_\varepsilon(0, x) & = T_{ini}(x) & \text{dans } \Omega_\varepsilon^S \end{array} \right. \quad (6.1)$$

K_ε désigne toujours le tenseur de conductivité thermique tel que $K_\varepsilon(t, x) = K(t, x, \frac{x}{\varepsilon})$, il est symétrique, uniformément coercif et borné en $\|\cdot\|_\infty$ de telle sorte qu'il existe deux constantes (qui peuvent dépendre de τ) $0 < \alpha \leq \beta$ telles que :

$$\forall t \in (0, \tau), \forall v \in \mathbb{R}^2, \forall y \in Y \text{ et } \forall x \in \Omega, \quad \alpha |v|^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 K_{i,j}(t, x, y) v_i v_j \leq \beta |v|^2,$$

ρ est la masse volumique et C_p la chaleur massique telles que $(\rho C_p)_\varepsilon(t, x) = (\rho C_p)(t, x, \frac{x}{\varepsilon})$ est borné en $\|\cdot\|_\infty$:

il existe $0 < \alpha' \leq \beta'$ telles que : $\forall t \in (0, \tau), \forall y \in Y \text{ et } \forall x \in \Omega, \quad \alpha' \leq (\rho C_p)(t, x, y) \leq \beta'$.

La normale extérieure à la surface Γ_ε est notée n . Les paramètres K_ε et $(\rho C_p)_\varepsilon$ caractérisent les matériaux de la structure étudiée, ils peuvent dépendre du temps à cause de la détérioration de ces matériaux au cours de leur fonctionnement, surtout à long terme.

La seule source thermique du modèle est présente dans la partie solide. Elle s'écrit :

$$f_\varepsilon(t, x) = f(t, x, \frac{x}{\varepsilon}),$$

où la fonction $f(t, x, y)$ est telle que $f(t, x, y) \in L^2((0, \tau) \times \Omega \times Y^S)$, $f_\varepsilon \geq 0$,

h_ε est le paramètre d'échange oscillant borné en $L^2(\Gamma_\varepsilon)$ qui vérifie :

$$h_\varepsilon(t, x) = h(t, x, \frac{x}{\varepsilon}),$$

$T_{ini} \in L^2(\Omega)$ est la température initiale au temps $t = 0$ et G_ε est l'opérateur de rayonnement dans le cas linéaire donné par :

$$G_\varepsilon(T_\varepsilon)(s) = T_\varepsilon(s) - \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} T_\varepsilon(x)F(s, x)dx = (Id - \zeta_\varepsilon)T_\varepsilon(s) \quad \forall s \in \Gamma_{\varepsilon,i},$$

avec

$$\zeta_\varepsilon(f)(s) = \int_{\Gamma_{\varepsilon,i}} F(s, x)f(x)dx,$$

où F représente le facteur de forme.

Remarque 6.1.1. *Le régime transitoire rapide est beaucoup plus délicat à étudier car, dans ce cas, les paramètres du modèle dépendent de variations multi-échelles en temps en plus de celles en espace. En effet, que se soit un arrêt normal ou accidentel du cœur, le principal phénomène thermique qu'on observe lors de cette procédure est l'évacuation de la chaleur résiduelle. Cette chaleur est évacuée de façon continue dans le cas d'un arrêt normal (par générateur de vapeur, circuit de refroidissement du réacteur à l'arrêt...etc.), d'où le comportement non perturbé en temps du cœur. Dans le cas d'un arrêt accidentel, ce sont les mêmes systèmes et circuits qui interviennent que lors d'un arrêt normal. Cependant, s'il se créait une défaillance pouvant nuire à l'évacuation de la chaleur, on observe une augmentation très intense et très rapide de la température, d'où le mot transitoire rapide. Cette augmentation peut entraîner une fusion complète du cœur. La difficulté dans la modélisation de ce phénomène réside alors dans l'estimation de la chaleur résiduelle qui sera produite avec un effet de retardement important dû aux variations des valeurs de conductivité dans les différentes régions du cœur. Et qui dit effet de retardement dit effet de couches limites en temps dans une étude par homogénéisation. Ces effets de couches limites ne sont pas toujours faciles à définir et les négliger entraînerait des résultats complètement faux. De plus, Pour bien modéliser les variations de conductivité dans le cœur, il faudrait descendre à une échelle plus basse en espace jusqu'au niveau de la particule Triso (noyau, couches de carbone). Tous ces paramètres rendent donc difficile l'étude de nos modèles en régime transitoire rapide. Par contrainte de temps, nous gardons donc cette étude comme perspective pour des travaux futurs.*

Proposition 6.1.1.

Le problème (6.1) admet une solution unique $T_\varepsilon \in L^2(0, \tau; H_0^1(\Omega_\varepsilon)) \cap C(0, \tau; L^2(\Omega_\varepsilon))$. De plus, il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend pas de ε , telle que :

$$\|T_\varepsilon\|_{L^2(0,\tau;H^1(\Omega_\varepsilon))}^2 + \sqrt{\varepsilon}\|T_\varepsilon\|_{L^2(0,\tau;L^2(\Gamma_\varepsilon))} \leq C \left(\|f_\varepsilon\|_{L^2(0,\tau;\Omega_\varepsilon)}^2 + \|h_\varepsilon T_{gaz}\|_{L^2(0,\tau;\Gamma_\varepsilon)}^2 + \|T_{ini}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right) \quad (6.4)$$

Preuve. La preuve de l'existence et de l'unicité de la solution du problème parabolique (6.1) est bien connue dans la littérature (voir si nécessaire [2], [23]).

Pour démontrer l'estimation a priori (6.4), nous choisissons une fonction test $\phi_\varepsilon(t, x) = T_\varepsilon(t, x)$ dans la formulation variationnelle du problème (6.1). Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} (\rho C_p)_\varepsilon \frac{\partial T_\varepsilon^2}{\partial t} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon \cdot \nabla T_\varepsilon dx + \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} G(T_\varepsilon) T_\varepsilon dx + \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} h_\varepsilon T_\varepsilon^2 dx \\ = \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon T_\varepsilon dx + \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} h_\varepsilon T_{gaz} T_\varepsilon dx \end{aligned} \quad (6.5)$$

où toutes les fonctions sont définies en $(t, x) \in (0, \tau) \times \Omega_\varepsilon$. (6.5) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_\varepsilon} (\rho C_p)_\varepsilon T_\varepsilon^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon} K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon \cdot \nabla T_\varepsilon dx + \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} G(T_\varepsilon) T_\varepsilon dx + \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} h_\varepsilon T_\varepsilon^2 dx \\ = \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon T_\varepsilon dx + \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} h_\varepsilon T_{gaz} T_\varepsilon dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial (\rho C_p)_\varepsilon}{\partial t} T_\varepsilon^2 dx \end{aligned}$$

Puisque G_ε est un opérateur positif, $h_\varepsilon \geq 0$, K_ε est coercif et borné en L^∞ , nous déduisons que :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_\varepsilon} (\rho C_p)_\varepsilon T_\varepsilon^2 dx + \alpha \|T_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon T_\varepsilon dx + \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} h_\varepsilon T_{gaz} T_\varepsilon dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial (\rho C_p)_\varepsilon}{\partial t} T_\varepsilon^2 dx$$

Par une intégration en temps entre 0 et t , nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} (\rho C_p)_\varepsilon(t, x) T_\varepsilon^2(t, x) dx + \alpha \|T_\varepsilon\|_{L^2(0, t; H^1(\Omega_\varepsilon))}^2 &\leq \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(s, x) T_\varepsilon(s, x) dx ds \\ &+ \varepsilon \int_0^t \int_{\Gamma_\varepsilon} h_\varepsilon(s, x) T_{gaz}(s, x) T_\varepsilon(s, x) dx ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial (\rho C_p)_\varepsilon}{\partial t}(s, x) T_\varepsilon^2(s, x) dx ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} (\rho C_p)_\varepsilon(t=0, x) T_{ini}^2(x) dx \end{aligned} \quad (6.6)$$

Puisque $(\rho C_p)_\varepsilon$ (et aussi $\frac{\partial}{\partial t}(\rho C_p)_\varepsilon$) est borné en L^∞ , (6.6) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} T_\varepsilon^2(t, x) dx + \|T_\varepsilon\|_{L^2(0, t; H^1(\Omega_\varepsilon))}^2 &\leq C \left(\int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(s, x) T_\varepsilon(s, x) dx ds \right. \\ &+ \int_0^t \int_{\Gamma_\varepsilon} h_\varepsilon(s, x) T_{gaz}(s, x) T_\varepsilon(s, x) dx ds \\ &\left. + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} T_\varepsilon^2(s, x) dx ds + \|T_{ini}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right) \end{aligned}$$

Grâce au lemme de Gronwall (voir [2]) nous déduisons que :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} T_\varepsilon^2 dx + \|T_\varepsilon\|_{L^2(0, \tau; H^1(\Omega_\varepsilon))}^2 \leq C e^\tau \left(\|f_\varepsilon\|_{L^2(0, \tau; \Omega_\varepsilon)}^2 + \|h_\varepsilon T_{gaz}\|_{L^2(0, \tau; \Gamma_\varepsilon)}^2 + \|T_{ini}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right). \quad (6.7)$$

De plus, nous savons qu'il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend pas de ε telle que

$$\varepsilon^{1/2} \|T_\varepsilon\|_{L^2(0, \tau; L^2(\Gamma_\varepsilon))} \leq C \|T_\varepsilon\|_{L^2(0, \tau; H^1(\Omega_\varepsilon))} \quad (\text{voir le Lemme 4.3.2}) \quad (6.8)$$

Grâce à (6.7) et (6.8), nous déduisons le résultat de la Proposition 6.1.1 grâce au Lemme 6.1.1. \square

Nous donnons ici l'énoncé du Lemme 6.1.1 utilisé dans la preuve précédente.

Lemme 6.1.1. *Pour tout ε il existe un opérateur de prolongement linéaire φ_ε de $H^1(\Omega_\varepsilon)$ dans $H^1(\Omega)$ tel que :*

$$\forall u \in H^1(\Omega_\varepsilon) \quad \varphi(u)|_{\Omega_\varepsilon} = u$$

et il existe une constante C , qui ne dépend pas de ε telle que

$$\|\varphi(u)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \quad \forall u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$$

6.2 Homogénéisation

6.2.1 Résultats d'homogénéisation par développement asymptotique

Pour homogénéiser le problème (6.1) nous utilisons, de manière classique, la méthode de développement asymptotique rappelée dans le Chapitre 2 de ce document. La variable du temps apparait dans la série du développement asymptotique comme un simple paramètre. Si nous supposons que la solution T_ε du problème (6.1) est donnée par la série asymptotique suivante :

$$T_\varepsilon(t, x) = T_0(t, x) + \varepsilon T_1(t, x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 T_2(t, x, \frac{x}{\varepsilon}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (6.9)$$

où $T_0(t, x)$ est définie sur $(0, \tau) \times \Omega$ et $(T_i(t, x, y))_{i=1,2}$ sont des fonctions définies sur $(0, \tau) \times \Omega \times Y$ qui sont Y -périodiques, alors le résultat principal de cette section est le suivant :

Proposition 6.2.1. *Sous l'hypothèse (6.9), T_0 est l'unique solution du problème homogénéisé :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho C_p)^*(t, x) \frac{\partial T_0}{\partial t}(t, x) - \operatorname{div}(K^*(t, x) \nabla T_0(t, x)) \\ \quad + h^*(t, x)(T_0(t, x) - T_{g_{az}}(t, x)) = f^*(t, x) \quad \text{dans } (0, \tau) \times \Omega \\ T_0(t, x) = 0 \quad \text{sur } (0, \tau) \times \partial\Omega \\ T_0(0, x) = T_{ini}(x) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \end{array} \right. \quad (6.10)$$

où f^* est la source homogénéisée donnée par : $f^*(t, x) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^s} f(t, x, y) dy$,

h^* est le terme d'échange homogénéisé donné par : $h^*(t, x) = \frac{1}{|Y|} \int_{\Gamma} h(t, x, y) dy$,

$(\rho C_p)^*$ est le tenseur homogénéisé donné par :

$$(\rho C_p)^*(t, x) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^S} (\rho C_p)(t, x, y) dy,$$

K^* est le tenseur de conductivité homogénéisé donné par les valeurs de ses composantes :

$$K_{j,k}^*(t, x) = \frac{1}{|Y|} \left(\int_{Y^S} K(t, x, y) (e_j + \nabla_y \omega_j(t, x, y)) \cdot (e_k + \nabla_y \omega_k(t, x, y)) dy \right. \\ \left. + \sigma \int_{\Gamma} G(\omega_k(t, x, y) + y_k)(\omega_j(t, x, y) + y_j) \right),$$

et $(\omega_k(t, x, y))_{1 \leq k \leq 2}$ sont les solutions des problèmes de cellule :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_y K(t, x, y) (e_j + \nabla_y \omega_j(t, x, y)) = 0 & \text{dans } Y^S \\ K(t, x, y) (e_j + \nabla_y \omega_j(t, x, y)) \cdot n = \sigma G(\omega_j(t, x, y) + y_j) & \text{sur } \Gamma \\ y \mapsto \omega(t, x, y) & \text{est } Y\text{-périodique} \end{array} \right. \quad (6.11)$$

où t et x jouent ici le rôle de deux paramètres.

De plus, $T_1(t, x, y)$ est la fonction donnée par :

$$T_1(t, x, y) = \sum_{j=1}^2 \omega_j(t, x, y) \frac{\partial T_0}{\partial x_j}(t, x) + \tilde{T}_1(t, x, y) \quad (6.12)$$

Remarque 6.2.1. La preuve de la Proposition 6.2.1 ci-dessus est complètement similaire à celle de la Proposition 5.2.1 du Chapitre 5. Le temps n'apparaissant que sous la forme d'un paramètre dans cette analyse, la seule différence entre la preuve de cette proposition et celle de la Proposition 5.2.1 est le développement du terme transitoire $(\rho C_p)_\varepsilon(t, x) \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial t}(t, x)$ qui n'apparaît que dans la forme macroscopique du problème limite à deux échelles, i.e. il n'apparaît que dans les équations du problème homogénéisé. Les problèmes de cellule sont dans ce cas stationnaires en temps, mais dépendent implicitement du paramètre du temps via leurs coefficients K et ρC_p .

Remarque 6.2.2. Nous pouvons, sans aucune difficulté, utiliser le résultat du chapitre précédent pour approcher la solution T_ε du problème (6.1) par $T_\varepsilon \simeq T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2$ au lieu de $T_\varepsilon \simeq T_0 + \varepsilon T_1$. Dans ce cas, le deuxième correcteur T_2 est solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_y (K(t, x, y) [\nabla_y T_2(t, x, y) + \nabla_x T_1(t, x, y)]) = f(t, x, y) \\ -(\rho C_p)(t, x, y) \frac{\partial T_0}{\partial t}(t, x) + \operatorname{div}_x (K(t, x, y) [\nabla_x T_0(t, x) + \nabla_y T_1(t, x, y)]) & \text{dans } Y^S \\ -K(t, x, y) [\nabla_y T_2(t, x, y) + \nabla_x T_1(t, x, y)] \cdot n = h(t, x, y) (T_0(t, x) - T_{\text{gaz}}(t, x)) \\ + \sigma G \left(T_2 + \nabla_x T_1 \cdot y + \frac{1}{2} \nabla \nabla T_0 y \cdot y \right) - \sigma G (\nabla_x T_1 + \nabla \nabla T_0 y) \cdot y & \text{sur } \Gamma \\ T_2(t, x, y) & \text{est } Y\text{-périodique.} \end{array} \right.$$

Nous pouvons écrire ce correcteur en fonction de solutions de problèmes de cellule comme dans le chapitre précédent que nous explicitons dans la Proposition 6.2.2.

Proposition 6.2.2. *Si nous supposons que K_ε et $(\rho C_p)_\varepsilon$ ne dépendent que de la variable microscopique $\frac{x}{\varepsilon}$ tels que $K_\varepsilon(t, x) = K(t, \frac{x}{\varepsilon})$ et $(\rho C_p)_\varepsilon(t, x) = (\rho C_p)(t, \frac{x}{\varepsilon})$, et que f_ε et h_ε s'écrivent*

$$f_\varepsilon(t, x) = f(t, x, \frac{x}{\varepsilon}) = F(t, x) f_\#(t, \frac{x}{\varepsilon}), \quad h_\varepsilon(t, x) = h(t, x, \frac{x}{\varepsilon}) = H(t, x) h_\#(t, \frac{x}{\varepsilon}),$$

alors le deuxième correcteur $T_2(t, x, y)$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} T_2(t, x, y) &= \left(T_2^1(t, y) + T_2^2(t, y) \right) F(t, x) + T_2^3(t, y) H(t, x) \left(T_0(t, x) - T_{gaz}(t, x) \right) \\ &+ \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) \theta_{i,j}(t, y) + T_2^4(t, y) \frac{\partial T_0}{\partial t}(t, x) \end{aligned}$$

où $T_2^1, T_2^2, T_2^3, T_2^4$, et les $\theta_{i,j}$ sont les solutions des problèmes de cellule :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_y(K(t, y) \nabla_y T_2^1(t, y)) = f_\#(t, y) - \frac{|Y|}{|Y^S|} F^*(t) & \text{dans } Y^S \\ -K(t, y) \nabla_y T_2^1(t, y) \cdot n = \sigma G(T_2^1(t, y)) & \text{sur } \Gamma \\ T_2^1(t, y) \text{ est } Y\text{-périodique} & \end{array} \right.$$

$$\text{où } F^*(t) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^S} f_\#(t, y) dy.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_y(K(t, y) \nabla_y T_2^2(t, y)) = \frac{|Y|}{|Y^S|} F^*(t) & \text{dans } Y^S \\ -K(t, y) \nabla_y T_2^2(t, y) \cdot n = \frac{|Y|}{|\Gamma|} F^*(t) + \sigma G(T_2^2(t, y)) & \text{sur } \Gamma \\ T_2^2(t, y) \text{ est } Y\text{-périodique} & \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_y(K(t, y) \nabla_y T_2^3(t, y)) = 0 & \text{dans } Y^S \\ -K(t, y) \nabla_y T_2^3(t, y) \cdot n = (h_\#(t, y) - \frac{|Y|}{|\Gamma|} H^*(t)) + \sigma G(T_2^3(t, y)) & \text{sur } \Gamma \\ T_2^3(t, y) \text{ est } Y\text{-périodique} & \end{array} \right.$$

$$\text{où } H^*(t) = \frac{1}{|Y|} \int_{\Gamma} h_\#(t, y) dy.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_y(K(t, y) (\nabla_y \theta_{i,j}(t, y) + \omega_i(t, y) e_j)) = K_{i,j}(t, y) \delta_{ij} + K(t, y) \nabla_y \omega_i(t, y) \cdot e_j & \text{dans } Y^S \\ -K(t, y) (\nabla_y \theta_{i,j}(t, y) + \omega_i(t, y) e_j) \cdot n = \frac{|Y|}{|\Gamma|} K_{i,j}^*(t, y) \delta_{ij} - \sigma G(\omega_i + y_i) y_j \\ \quad + \sigma G\left(\theta_{i,j}(t, y) + y_j \omega_i(t, y) + \frac{1}{2} y_i y_j\right) & \text{sur } \Gamma \\ \theta_{i,j}(t, y) \text{ est } Y\text{-périodique} & \end{array} \right.$$

Notons que T_2 s'écrit en fonction de la solution T_2^4 d'un problème de cellule additionnel par rapport à ce que nous avons vu dans la Proposition 5.2.1. Ce problème est aussi stationnaire et dépend du temps en tant que paramètre, soit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_y(K(t, y)\nabla_y T_2^4(t, y)) & = (\rho C_p)(t, y) \quad \text{dans } Y^S \\ -K(t, y)\nabla_y T_2^4(t, y) \cdot n & = \frac{|Y|}{|\Gamma|}(\rho C_p)^*(t) + \sigma G(T_2^4) \quad \text{sur } \Gamma \\ T_2^4(t, y) & \text{est } Y\text{-périodique} \end{array} \right.$$

6.2.2 Convergence

Comme dans tout ce document, nous utilisons la méthode de convergence à deux échelles pour justifier les résultats formels obtenus par développement asymptotique. Dans le contexte de ce chapitre, les variations micro-macroscopiques n'étant observées que sur la variable d'espace x , nous continuons d'utiliser la même Définition 2.4.1 de la convergence à deux échelles. Cependant, la solution du problème d'équations (6.1) étant dépendante d'un paramètre, ici le temps t , nous utilisons alors la Définition 6.2.1, alternative de 2.4.1, qu'on peut trouver par exemple dans [33]. Notons que cette extension n'affecte en aucun cas les preuves fournies dans [1].

Définition 6.2.1. Une suite bornée $u_\varepsilon(t, x)$ de $L^2((0, \tau) \times \Omega)$ est dite convergente à deux échelles vers une fonction $u_0(t, x, y) \in L^2((0, \tau) \times \Omega \times Y)$ si elle vérifie

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\tau \int_\Omega u_\varepsilon \psi(t, x, \frac{x}{\varepsilon}) dx dt = \frac{1}{|Y|} \int_0^\tau \int_\Omega \int_Y u_0(t, x, y) \psi(t, x, y) dx dy dt \quad (6.13)$$

pour tout $\psi(t, x, y) \in L^2((0, \tau) \times \Omega; C_\#(Y)/\mathbb{R})$ et Y -périodique.

Remarque 6.2.3. Les résultats des Propositions 2.4.1 et 2.4.2 s'adaptent immédiatement à la nouvelle Définition 6.2.1 sans aucune difficulté.

Le résultat principal de cette section est alors le suivant :

Théorème 6.2.1. Soit T_ε la suite de solutions du problème (6.1). Soit T_0 la solution du problème homogénéisé (6.10) et T_1 le correcteur d'ordre 1 défini par (6.12). Nous avons :

$T_\varepsilon(t, x)$ converge à deux échelles vers $T_0(t, x)$,

• $\nabla T_\varepsilon(t, x)$ converge à deux échelles vers $\nabla_x T_0(t, x) + \nabla_y T_1(t, x, y)$

Preuve. Sous l'hypothèse de l'estimation a priori (6.4), nous savons qu'il existe deux fonctions $T_0(t, x) \in L^2(0, \tau; H_0^1(\Omega))$ et $T_1(t, x, y) \in L^2((0, \tau) \times \Omega; H_\#^1(Y^S))$ telles que $T_\varepsilon(t, x)$ et $\nabla T_\varepsilon(t, x)$ convergent respectivement à deux échelles vers $T_0(t, x)$ et $\nabla_x T_0(t, x) + \nabla_y T_1(t, x, y)$. Grâce à l'estimation a priori sur le deuxième terme de gauche dans (6.4), cette convergence est aussi

vraie sur la surface Γ_ε . La formulation variationnelle du problème (6.1), pour une fonction test $\phi_\varepsilon \in H^1(0, \tau; H_0^1(\Omega_\varepsilon)) \cap C(0, \tau; L^2(\Omega_\varepsilon))$ est donnée par

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_{\Omega_\varepsilon} (\rho C_p)_\varepsilon \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial t} \phi_\varepsilon dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega_\varepsilon} K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon \cdot \nabla \phi_\varepsilon dx dt + \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_0^\tau \int_{\Gamma_\varepsilon} G(T_\varepsilon) \phi_\varepsilon dx dt \\ + \varepsilon \int_0^\tau \int_{\Gamma_\varepsilon} h_\varepsilon (T_\varepsilon - T_{gaz}) \phi_\varepsilon dx dt = \int_0^\tau \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \phi_\varepsilon dx dt \end{aligned} \quad (6.14) \quad \square$$

Nous avons alors, comme dans le chapitre précédent en choisissant une fonction test $\phi_\varepsilon(t, x) = \phi_0(t, x) + \varepsilon \phi_1(t, x, \frac{x}{\varepsilon})$, les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\tau \int_{\Omega_\varepsilon^S} K_\varepsilon \nabla T_\varepsilon \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_y \phi_1) dx dt &= \frac{1}{|Y|} \int_0^\tau \int_\Omega \int_{Y^S} K \nabla T_0 \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_y \phi_1) dy dx dt \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^\tau \int_{\Gamma_\varepsilon^S} h_\varepsilon (T_\varepsilon - T_{gaz}) \phi_0 dx dt &= \frac{1}{|Y|} \int_0^\tau \int_\Omega \int_\Gamma h (T_0 - T_{gaz}) \phi_0 dy dx dt \end{aligned}$$

En s'inspirant de la preuve du Théorème 4.3.5 du Chapitre 4, nous avons aussi la limite du terme de rayonnement suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_0^\tau \int_{\Gamma_\varepsilon} G_\varepsilon(T_\varepsilon) (\phi_0 + \varepsilon \phi_1) dx dt \\ = -\frac{1}{|Y|} \int_0^\tau \int_\Omega \int_{Y^S} K (\nabla_x \phi_0 + \nabla_y \phi_1) \cdot (\nabla_x T_0 + \nabla_y T_1) dy dx dt \\ + \frac{1}{|Y|} \int_0^\tau \int_\Omega \int_{Y^S} K (\nabla_x \phi_0 + \nabla_y \phi_1) \cdot \nabla_x T_0 dy dx dt \\ + \frac{\sigma}{|Y|} \int_0^\tau \int_\Omega \int_\Gamma G(\phi_1 + \nabla_x \phi_0 \cdot y) y \cdot \nabla_x T_0 dy dx dt \\ = \int_0^\tau \int_\Omega K^* \nabla_x T_0 \cdot \nabla_x \phi_0 dx dt - \frac{1}{|Y|} \int_0^\tau \int_\Omega \int_{Y^S} K (\nabla_x T_0 + \nabla_y T_1) \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_y \phi_1) dy dx dt \end{aligned}$$

Le nouveau terme dans ce chapitre est le premier terme de la formulation variationnelle 6.14.

Il s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_{\Omega_\varepsilon^S} (\rho C_p)_\varepsilon \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial t} \phi_0 dx dt &= - \int_0^\tau \int_{\Omega_\varepsilon^S} (\rho C_p)_\varepsilon \frac{\partial \phi_0}{\partial t} T_\varepsilon dx dt - \int_0^\tau \int_{\Omega_\varepsilon^S} \frac{\partial (\rho C_p)_\varepsilon}{\partial t} \phi_0 T_\varepsilon dx dt \\ &+ \left[\int_{\Omega_\varepsilon^S} (\rho C_p)_\varepsilon T_\varepsilon \phi_0 dx \right]_0^\tau \end{aligned}$$

Sa limite est alors donnée par (car les fonctions $\frac{\partial}{\partial t} \phi_0$ et $\frac{\partial}{\partial t} (\rho C_p)_\varepsilon$ sont des fonctions péri-

diques admissibles pour la convergence à deux échelles) :

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\tau \int_{\Omega_\varepsilon^S} (\rho C_p)_\varepsilon \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial t} \phi_0 dx dt &= -\frac{1}{|Y|} \int_0^\tau \int_\Omega \int_{Y^S} (\rho C_p) \frac{\partial \phi_0}{\partial t} T_0 dy dx dt \\
 &- \frac{1}{|Y|} \int_0^\tau \int_\Omega \int_{Y^S} \frac{\partial (\rho C_p)}{\partial t} \phi_0 T_0 dy dx dt \\
 &+ \left[\int_\Omega \int_{Y^S} (\rho C_p) T_0 \phi_0 dy dx \right]_0^\tau \\
 &= \frac{1}{|Y|} \int_0^\tau \int_\Omega \int_{Y^S} (\rho C_p) \frac{\partial T_0}{\partial t} \phi_0 dy dx dt
 \end{aligned}$$

Nous en déduisons que la limite de la formulation variationnelle du problème (6.1) n'est rien d'autre que la formulation variationnelle du problème limite (6.10,6.11) sur (T_0, T_1) . D'où le résultat grâce à l'unicité de la solution T_0 dans $L^2(0, \tau; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, \tau; L^2(\Omega))$ et de T_1 dans $L^2((0, \tau) \times \Omega; H_\#^1(Y^S)/\mathbb{R})$.

6.2.3 Résultats dans le cas non-linéaire

Nous donnons ici, sans démonstration, les résultats d'homogénéisation que nous obtenons dans le cas d'un opérateur de rayonnement non linéaire. En effet, dans ce cas, la Proposition 6.2.1 devient :

Proposition 6.2.3. *Sous l'ansatz (6.9), nous avons :*

T_0 est l'unique solution du problème homogénéisé :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (\rho C_p)^*(t) \frac{\partial T_0}{\partial t}(t, x) - \operatorname{div}(K^*(t, x, T_0^3(t, x)) \nabla T_0(t, x)) \\
 \quad \quad \quad + h^*(t)(T_0(t, x) - T_{gaz}(t, x)) = f^*(t, x) \quad \text{dans } (0, \tau) \times \Omega \\
 T_0(t, x) = 0 \quad \quad \quad \text{sur } (0, \tau) \times \partial\Omega \\
 T_0(0, x) = T_{ini}(x) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon
 \end{array} \right. \quad (6.15)$$

où f^* est la source homogénéisée donnée par :

$$f^*(t, x) = \int_{Y^*} f(t, x, y) dy = F(t, x) \int_{Y^*} f_\#(t, y) dy = F(t, x) F^*(t),$$

h^* est le terme d'échange homogénéisé donné par :

$$h^*(t, x) = \int_\Gamma h(t, x, y) dy = H(t, x) \int_\Gamma h_\#(t, y) dy = H(t, x) H^*(t),$$

$(\rho C_p)^*$ est le tenseur homogénéisé donné par :

$$(\rho C_p)^*(t, x) = \int_{Y^S} (\rho C_p)(t, x, y) dy,$$

K^* est le tenseur de conductivité homogénéisé donné par les valeurs de ses composantes :

$$\begin{aligned} K_{j,k}^*(t,x) &= \int_{Y^S} K(t,x,y)(e_j + \nabla_y \omega_j(t,x,y)) \cdot (e_k + \nabla_y \omega_k(t,x,y)) dy \\ &+ 4\sigma T_0^3(t,x) \int_{\Gamma} G(\omega_k(t,x,y) + y_k)(\omega_j(t,x,y) + y_j), \end{aligned}$$

et $(\omega_k(t,x,y))_{1 \leq k \leq d}$ sont les solutions des problèmes de cellule :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_y K(t,x,y)(e_j + \nabla_y \omega_j(t,x,y)) &= 0 \quad \text{dans } Y^* \\ K(t,x,y)(e_j + \nabla_y \omega_j(t,x,y)) \cdot n &= 4\sigma T_0^4 G(\omega_j(t,x,y) + y_j) \quad \text{sur } \Gamma \\ y &\mapsto \omega(t,y) \text{ est } Y\text{-périodique} \end{array} \right. \quad (6.16)$$

De plus, $T_1(t,x,y)$ est la fonction donnée par :

$$T_1(t,x,y) = \sum_{j=1}^d \omega_j(t,x,y) \frac{\partial T_0}{\partial x_j}(t,x) \quad (6.17)$$

La Proposition 6.2.2 devient dans le cas non-linéaire :

Proposition 6.2.4. Si nous supposons que K_ε et $(\rho C_p)_\varepsilon$ ne dépendent que de la variable microscopique $\frac{x}{\varepsilon}$ tels que $K_\varepsilon(t,x) = K(t, \frac{x}{\varepsilon})$ et $(\rho C_p)_\varepsilon(t,x) = (\rho C_p)(t, \frac{x}{\varepsilon})$, et que f_ε et h_ε s'écrivent

$$f_\varepsilon(t,x) = f(t,x, \frac{x}{\varepsilon}) = F(t,x) f_\#(t, \frac{x}{\varepsilon}), \quad h_\varepsilon(t,x) = h(t,x, \frac{x}{\varepsilon}) = H(t,x) h_\#(t, \frac{x}{\varepsilon}),$$

alors le deuxième correcteur $T_2(t,x,y)$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} T_2(t,x,y) &= \left(T_2^1(t,y) + T_2^2(t,y) \right) F(t,x) + T_2^3(t,y) H(t,x) \left(T_0(t,x) - T_{\text{gaz}}(t,x) \right) \\ &+ \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) \theta_{i,j}(t,y) + T_2^4(t,y) \frac{\partial T_0}{\partial t}(t,x) \end{aligned}$$

où $T_2^1, T_2^2, T_2^3, T_2^4$, et les $\theta_{i,j}$ sont les solutions des problèmes de cellule :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_y (K(t,y) \nabla_y T_2^1(t,y)) &= f_\#(t,y) - \frac{|Y|}{|Y^S|} F^*(t) \quad \text{dans } Y^S \\ -K(t,y) \nabla_y T_2^1(t,y) \cdot n &= 4\sigma T_0^3 G(T_2^1(t,y)) \quad \text{sur } \Gamma \\ T_2^1(t,y) &\text{est } Y\text{-périodique} \end{array} \right. \quad (6.18)$$

où $F^*(t) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^S} f_\#(t,y) dy$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_y (K(t,y) \nabla_y T_2^2(t,y)) &= \frac{|Y|}{|Y^S|} F^*(t) \quad \text{dans } Y^S \\ -K(t,y) \nabla_y T_2^2(t,y) \cdot n &= \frac{|Y|}{|\Gamma|} F^*(t) + 4\sigma T_0^3 G(T_2^2(t,y)) \quad \text{sur } \Gamma \\ T_2^2(t,y) &\text{est } Y\text{-périodique} \end{array} \right. \quad (6.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_y(K(t, y)\nabla_y T_2^3(t, y)) = 0 \quad \text{dans } Y^S \\ -K(t, y)\nabla_y T_2^3(t, y) \cdot n = (h_\#(t, y) - \frac{|Y|}{|\Gamma|} H^*(t)) + 4\sigma T_0^3 G(T_2^3(t, y)) \quad \text{sur } \Gamma \\ T_2^3(t, y) \text{ est } Y\text{-périodique} \end{array} \right. \quad (6.20)$$

$$\text{où } H^*(t) = \frac{1}{|Y|} \int_{\Gamma} h_\#(t, y) dy.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_y(K(t, y)\nabla_y T_2^4(t, y)) = (\rho C_p)(t, y) \quad \text{dans } Y^S \\ -K(t, y)\nabla_y T_2^4(t, y) \cdot n = \frac{|Y|}{|\Gamma|} (\rho C_p)^*(t) + 4\sigma T_0^3 G(T_2^4) \quad \text{sur } \Gamma \\ T_2^4(t, y) \text{ est } Y\text{-périodique} \end{array} \right. \quad (6.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_y(K(t, y)(\nabla_y \theta_{i,j}(t, y) + \omega_i(t, y)e_j)) = K_{i,j}(t, y)\delta_{ij} + K(t, y)\nabla_y \omega_i(t, y) \cdot e_j \quad \text{dans } Y^S \\ -K(t, y)(\nabla_y \theta_{i,j}(t, y) + \omega_i(t, y)e_j) \cdot n = \frac{|Y|}{|\Gamma|} K_{i,j}^*(t, y)\delta_{ij} - 4\sigma T_0^3 G(\omega_i + y_i)y_j \\ \quad + 4\sigma T_0^3 G\left(\theta_{i,j}(t, y) + y_j\omega_i(t, y) + \frac{1}{2}y_i y_j\right) \quad \text{sur } \Gamma \\ \theta_{i,j}(t, y) \text{ est } Y\text{-périodique} \end{array} \right. \quad (6.22)$$

6.3 Résultats numériques

6.3.1 Algorithme et données numériques

Dans cette section, nous continuons d'utiliser la même approche que nous avons expliquée dans la Section 4.5.1 du Chapitre 4, et que nous avons réutilisée dans la Section 5.3.1 du Chapitre 5 où nous effectuons toutes nos simulations numériques dans un domaine $\widehat{\Omega} = \varepsilon^{-1}\Omega = \prod_{j=1}^2 (0, L_j/\varepsilon)$ constitué de cellules de taille fixe et en nombre qui tend vers l'infini au lieu de cellules de nombre fixe avec une taille qui tend vers 0 pour Ω_ε (voir la Figure 4.3 du Chapitre 4). Ce changement de configuration est toujours obtenu grâce au changement de variable $y = \frac{x}{\varepsilon}$. Dans cette nouvelle approche, le problème (6.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^2(\widehat{\rho C_p}) \frac{\partial \widehat{T}_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}(\widehat{K}\nabla \widehat{T}_\varepsilon) = \varepsilon^2 \widehat{f}_\varepsilon \quad \text{dans } (0, \tau) \times \widehat{\Omega}^S \\ -\widehat{K}\nabla \widehat{T}_\varepsilon \cdot n_S = \varepsilon^2 \widehat{h}(\widehat{T}_\varepsilon - \widehat{T}_{gaz}) + \sigma G(\widehat{T}_\varepsilon^4) \quad \text{sur } (0, \tau) \times \widehat{\Gamma} \\ \widehat{T}_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } (0, \tau) \times \partial \widehat{\Omega} \\ \widehat{T}_\varepsilon(0, y) = \widehat{T}_{ini}(y) \quad \text{dans } \widehat{\Omega}^S \end{array} \right. \quad (6.23)$$

Le problème homogénéisé (6.15) devient :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 (\widehat{\rho} \widehat{C}_p)^* \frac{\partial \widehat{T}_0}{\partial t} - \operatorname{div}(\widehat{K}^* (\widehat{T}_0^3) \nabla \widehat{T}_0) + \varepsilon^2 \widehat{h}^* (\widehat{T}_0 - \widehat{T}_{gaz}) = \varepsilon^2 \widehat{f} & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \widehat{T}_0 = 0 & \text{sur } \partial \widehat{\Omega}. \end{cases} \quad (6.24)$$

Nous définissons aussi $\widehat{T}_1(y)$ par :

$$\widehat{T}_1(t, y) = \varepsilon T_1(t, \varepsilon y, y) = \varepsilon T_1(t, x, \frac{x}{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \widehat{T}_0}{\partial y_i}(t, y) \omega_i(t, y) \quad (6.25)$$

et éventuellement $\widehat{T}_2(y)$ par :

$$\begin{aligned} \widehat{T}_2(t, y) &= \varepsilon^2 T_2(t, \varepsilon y, y) = \varepsilon^2 T_2(t, x, \frac{x}{\varepsilon}) = \varepsilon^2 (T_2^1(t, y) + T_2^2(t, y)) \widehat{F}(t, y) \\ &+ \varepsilon^2 T_2^3(t, y) \widehat{H}(t, y) (\widehat{T}_0(t, y) - \widehat{T}_{gaz}(t, y)) + \varepsilon^2 T_2^4(t, y) \frac{\partial \widehat{T}_0}{\partial t}(t, y) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \widehat{T}}{\partial y_i \partial y_j}(t, y) \theta_{i,j}(y) \end{aligned} \quad (6.26)$$

L'approximation par homogénéisation $T_\varepsilon(t, x) \simeq T_0(t, x) + \varepsilon T_1(t, x, x/\varepsilon) + \varepsilon^2 T_2(t, x, x/\varepsilon)$ devient alors :

$$\widehat{T}_\varepsilon(t, y) \simeq \widehat{T}_0(t, y) + \widehat{T}_1(t, y) + \widehat{T}_2(t, y). \quad (6.27)$$

De plus, nous définissons l'erreur relative entre les solutions exacte et reconstruite par :

$$\frac{\|T_\varepsilon - (T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2)\|_{L^2(0,\tau;\Omega^S)}}{\|T_\varepsilon\|_{L^2(0,\tau;\Omega^S)}} = \frac{\|\widehat{T}_\varepsilon - (\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1 + \widehat{T}_2)\|_{L^2(0,\tau;\widehat{\Omega}^S)}}{\|\widehat{T}_\varepsilon\|_{L^2(0,\tau;\widehat{\Omega}^S)}}$$

et l'erreur relative entre les gradients des solutions exacte et reconstruite par :

$$\frac{\|\nabla T_\varepsilon - \nabla(T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2)\|_{L^2(0,\tau;\Omega^S)}}{\|T_\varepsilon\|_{L^2(0,\tau;\Omega^S)}} = \frac{\|\nabla \widehat{T}_\varepsilon - \nabla(\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1 + \widehat{T}_2)\|_{L^2(0,\tau;\widehat{\Omega}^S)}}{\|\nabla \widehat{T}_\varepsilon\|_{L^2(0,\tau;\widehat{\Omega}^S)}}$$

Maintenant, pour tout $\varepsilon = \varepsilon_0$ nous utilisons l'algorithme suivant pour résoudre le problème homogénéisé sur \widehat{T}_0 et pour calculer les correcteurs \widehat{T}_1 et \widehat{T}_2 :

Par une θ -méthode, de $t = 0$ jusqu'à τ :

1. Résoudre les deux problèmes de cellule (6.11) sur $(\omega_i)_{i=1,2}(t, y)$ pour une plage de température \widehat{T}_0 .
2. Calculer la conductivité homogénéisée (comme une fonction de la température) plus le coefficient d'échange et la source homogénéisées.
3. Résoudre le problème homogénéisé (6.15) par une méthode de point fixe.
4. Calculer le correcteur $\widehat{T}_1(t, y) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \widehat{T}_0}{\partial y_i}(t, y) \omega_i(t, y)$.
5. Reconstruire la solution approchée : $\widehat{T}_0(t, y) + \widehat{T}_1(t, y)$.

6. Résoudre les huit problèmes de cellule (6.18, 6.19, 6.20, 6.21, 6.22) pour la température homogénéisée \widehat{T}_0 .
7. Calculer le correcteur

$$\begin{aligned} \widehat{T}_2(t, y) = & \varepsilon^2(T_2^1(t, y) + T_2^2(t, y))\widehat{F}(t, y) + \varepsilon^2 T_2^3(t, y)\widehat{H}(t, y)(\widehat{T}_0(t, y) - \widehat{T}_g(t, y)) \\ & + \varepsilon^2 T_2^4(t, y)\frac{\partial \widehat{T}_0}{\partial t}(t, y) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \widehat{T}_0}{\partial y_i \partial y_j}(t, y)\theta_{i,j}(t, y). \end{aligned}$$

8. Reconstruire la solution approchée : $\widehat{T}_0(t, y) + \widehat{T}_1(t, y) + \widehat{T}_2(t, y)$.

Dans le cas test que nous présentons ici, nous gardons les mêmes données numériques du cas test du Chapitre 5 où nous faisons varier la source thermique \widehat{f}_ε de telle sorte que :

$$\widehat{f}_\varepsilon(t, y) = 112 - \frac{1.1109}{7.2} t \text{ MW/m}^3$$

pour $t \in [0, \tau]$ où nous choisissons $\tau = 2$ heures avec un pas de temps égal à 7.2s. Deux valeurs particulières de \widehat{f}_ε sont alors :

$$\widehat{f}_\varepsilon(0, y) = 112 \text{ MW/m}^3 \quad \text{et} \quad \widehat{f}_\varepsilon(\tau, y) = 100 \text{ KW/m}^3$$

Nous choisissons aussi une masse volumique et une capacité thermique telles que :

$$(\widehat{\rho C_p})(t, y) = 7000 \text{ JKg}^{-1}\text{K}^{-1}$$

Remarque 6.3.1. Dans le cas d'un rayonnement non-linéaire, nous calculons les solutions $(\omega_i)_{i=1,2}(t, y)$ des problèmes de cellules (6.16) dans une plage de température contenant $\widehat{T}_0(t, y)$. Dans ce cas, nous pouvons sortir cette étape de la boucle θ -méthode en temps.

6.3.2 Résultats numériques

Suivant la Remarque 6.3.1, nous commençons cette section par calculer les solutions ω_j , $j = 1, 2$, des problèmes de cellule (6.16) dans la plage de température $[50, 20000]K$. Ces solutions sont donc exactement les mêmes que celles présentées dans le Chapitre 5. Il en résulte que les valeurs de la conductivité homogénéisée sont aussi les mêmes que celles du Chapitre 5, elles sont données dans la Figure 6.1. Les autres paramètres homogénéisés sont donnés par :

$$\begin{aligned} \widehat{f}^*(t) = \widehat{F}^*(t) &= \frac{1}{|Y|} \int_{Y^s} f_\#(t, y) dy = 21,18816 - \frac{0,210160062}{7.2} t \text{ MW/m}^3 \\ \widehat{h}^* &= \widehat{H}^* = \frac{|\Gamma|}{|Y|} \widehat{h} = 0,319383 \text{ MW.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \\ (\widehat{\rho C_p})^* &= \frac{|\Gamma|}{|Y|} (\widehat{\rho C_p})(y) dy = 1.4804 \text{ JKg}^{-1}\text{K}^{-1} \end{aligned} \tag{6.28}$$

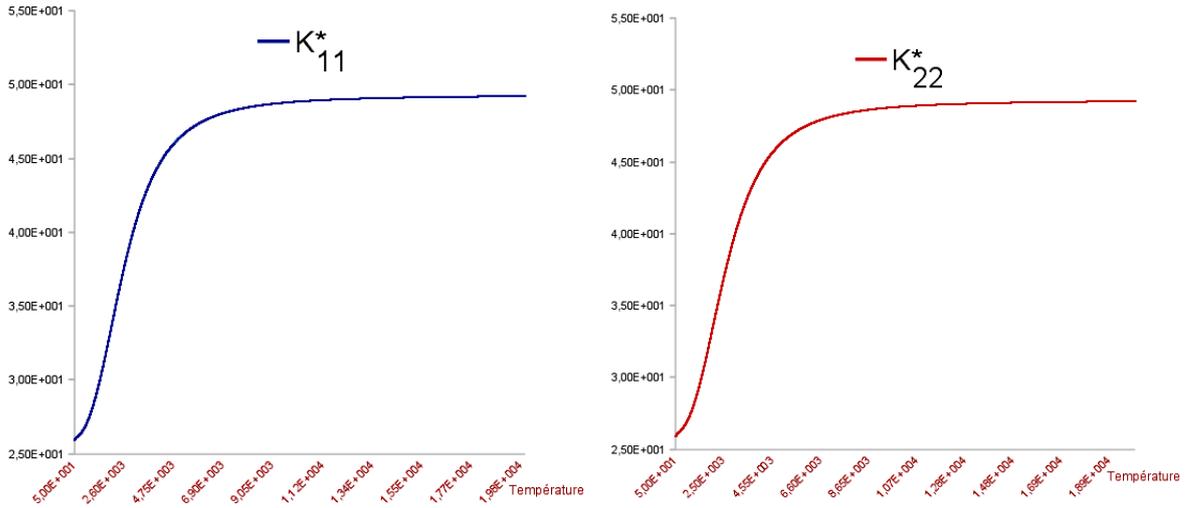


FIGURE 6.1 – conductivité homogénéisée : \widehat{K}^*_{11} (à gauche), \widehat{K}^*_{22} (à droite).

A ce point, nous pouvons calculer, pour tout $t \in (0, \tau)$, la solution \widehat{T}_0 du problème homogénéisé non-linéaire (6.24) par une méthode de Newton où, à chaque itération (de la boucle de Newton), nous choisissons la valeur de conductivité homogénéisée calculée pour la valeur la plus proche de la Température $\widehat{T}_0(t, y)$. Grâce à \widehat{T}_0 nous reconstruisons le premier correcteur \widehat{T}_1 et aussi le deuxième correcteur \widehat{T}_2 après le calcul des solutions $T_2^1(t, y)$, $T_2^2(t, y)$, $T_2^3(t, y)$, $T_2^4(t, y)$ et $\theta_{i,j}(t, y)$ des problèmes de cellule (6.18, 6.19, 6.20, 6.21, 6.22) correspondants à la température homogénéisée $\widehat{T}_0(t, y)$ pour tout $t \in (0, \tau)$.

Nous traçons respectivement dans les Figures 6.2, 6.3, 6.4 et 6.5, pour la valeur de $\varepsilon = 1/8$ (pour une meilleure visibilité que $\varepsilon = 1/4$), les solutions \widehat{T}_ε , \widehat{T}_0 , $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1$ et $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1 + \widehat{T}_2$.

Remarque 6.3.2. En choisissant de tracer les solutions \widehat{T}_ε , \widehat{T}_0 , $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1$ et $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1 + \widehat{T}_2$ pour la valeur $\varepsilon = 1/8$, il est important de noter dans ce cas que les valeurs réelles de la source thermique, du coefficient d'échange thermique, de la masse volumique et de la capacité thermique sont ici données par :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \widehat{f}_\varepsilon &= 1.75 - \frac{1.1109}{460.8} t \text{ MW/m}^3 \\ \varepsilon^2 \widehat{h}_\varepsilon &= 125 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \\ \varepsilon^2 \widehat{(\rho C_p)}_\varepsilon &= 109.375 \text{ JKg}^{-1}\text{K}^{-1} \end{aligned} \tag{6.29}$$

Nous remarquons bien sûr que, comme dans le chapitre précédent, plus on avance dans le temps, plus la valeur de la source thermique décroît et moins la contribution du correcteur \widehat{T}_2 devient visible.

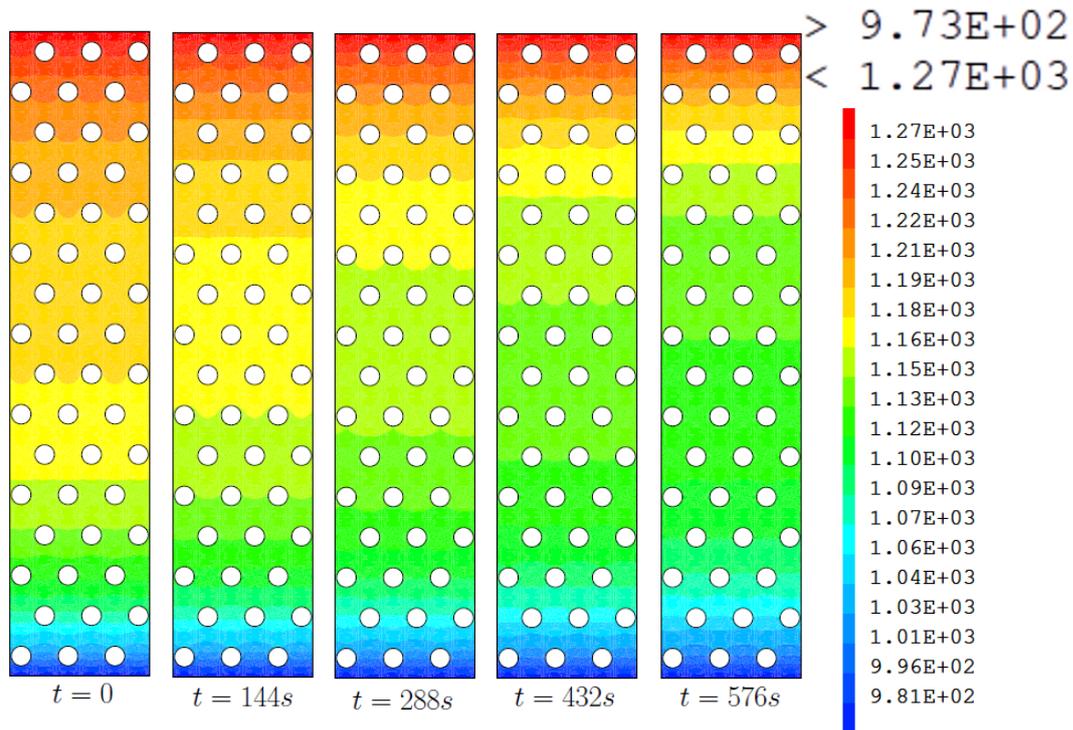


FIGURE 6.2 – Solution directe \widehat{T}_ϵ à différents instants en t

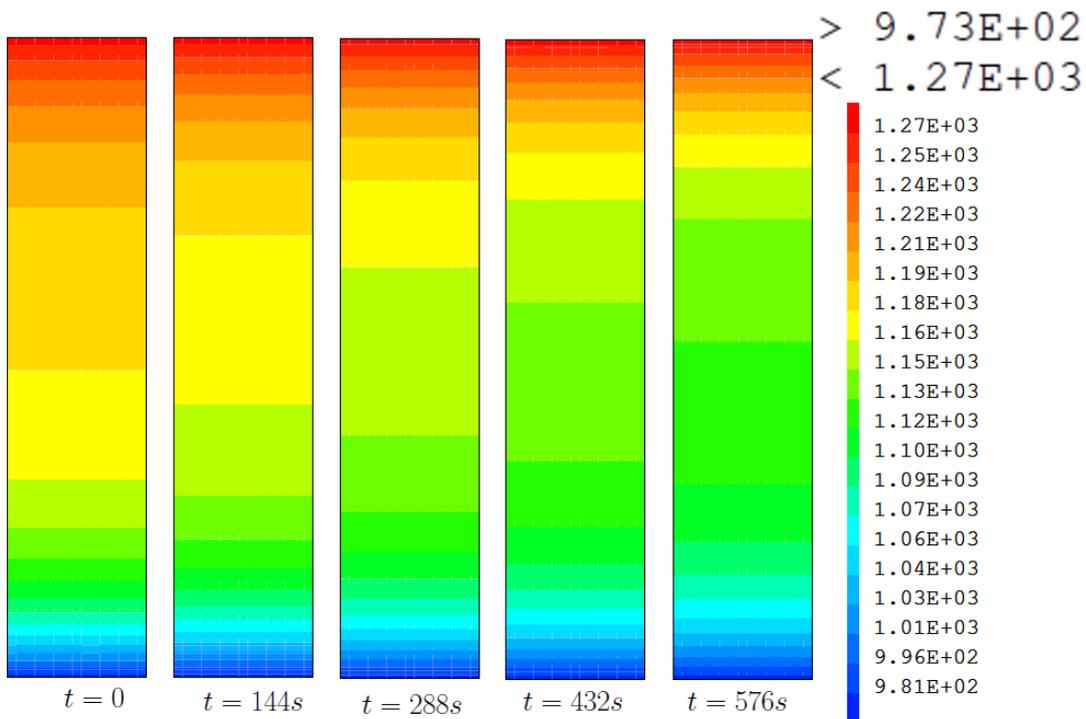


FIGURE 6.3 – Solution homogénéisée \widehat{T}_0 à différents instants en t

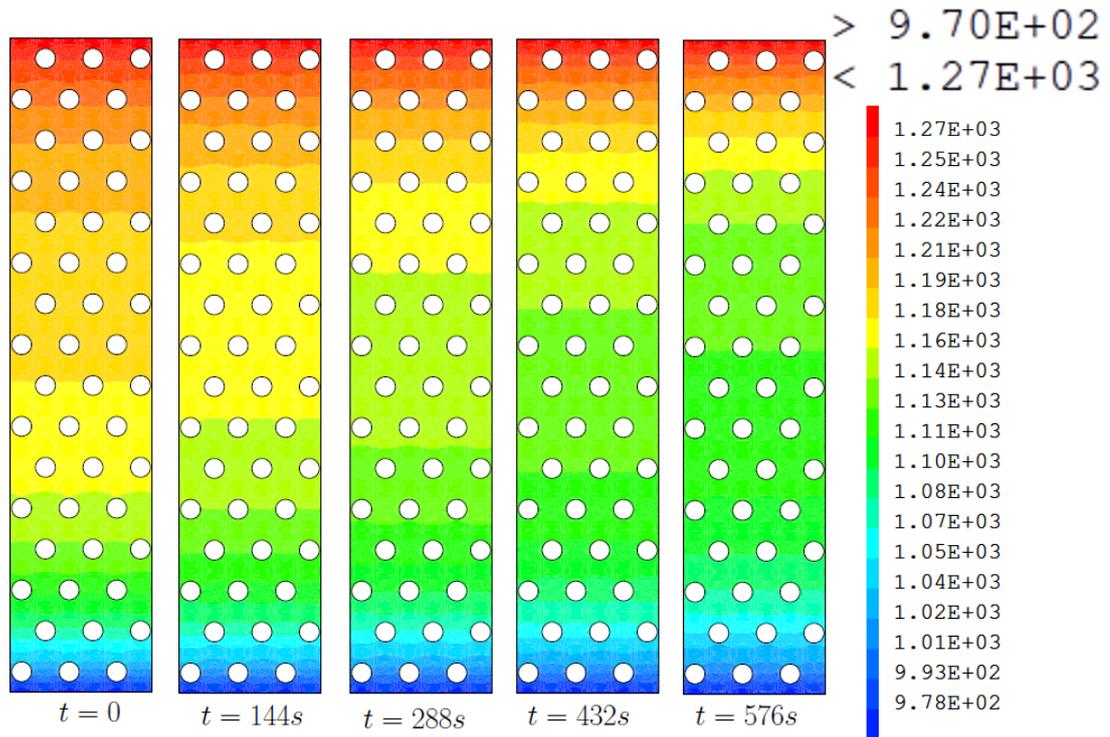


FIGURE 6.4 – Solution homogénéisée corrigée $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1$ à différents instants en t

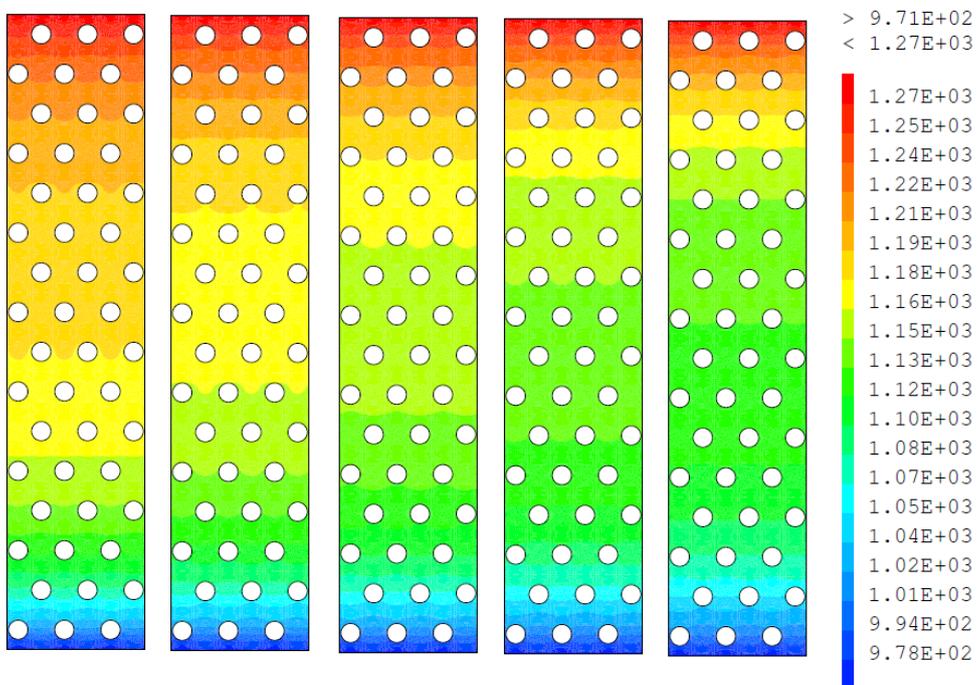


FIGURE 6.5 – Solution homogénéisée corrigée $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1 + \widehat{T}_2$ à différents instants en t

Maintenant, pour justifier la convergence de notre méthode, pour un ε de plus en plus petit, nous traçons, dans la Figure 6.6, l'erreur relative sur la température et nous la comparons avec les différentes puissances de ε . Avec cette comparaison, nous voulons montrer, comme dans le cas stationnaire, que l'erreur relative sur la température décroît au minimum comme ε^2 dans $\widehat{\Omega}_\varepsilon$ telle que, pour une constante positive C ,

$$ERR(T)_1 = \frac{\|\widehat{T}_\varepsilon - (\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1)\|_{L^2(0,\tau;\widehat{\Omega}^S)}}{\|\widehat{T}_\varepsilon\|_{L^2(0,\tau;\widehat{\Omega}^S)}} \leq C\varepsilon^2$$

Bien sûr, nous faisons ce calcul, comme dans le chapitre précédent, dans le cas de conditions limites périodiques pour éviter les problèmes liés aux effets des couches limites. Nous faisons aussi ces calculs dans le cas d'une source thermique qui dépend de la variable macroscopique comme nous l'avons expliqué dans la Section 5.3.3 du Chapitre 5.

Nous montrons, dans la même Figure 6.6 et comme dans le chapitre précédent, que l'erreur relative sur la température en prenant en compte le deuxième correcteur est plus petite que celle sans le deuxième correcteur mais converge aussi en ε^2 telle que, pour une constante positive C' ,

$$ERR(T)_2 = \frac{\|\widehat{T}_\varepsilon - (\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1 + \widehat{T}_2)\|_{L^2(0,\tau;\widehat{\Omega}^S)}}{\|\widehat{T}_\varepsilon\|_{L^2(0,\tau;\widehat{\Omega}^S)}} \leq C'\varepsilon^2$$

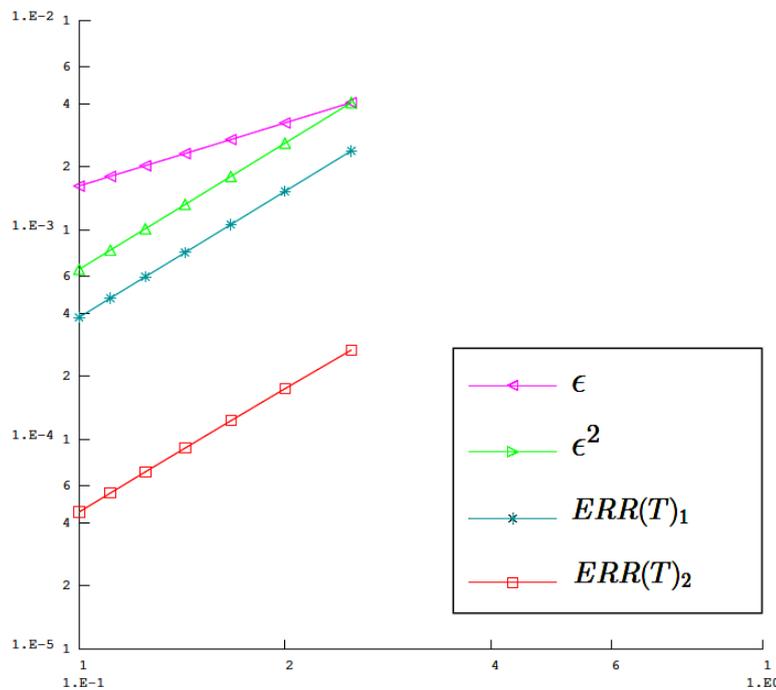


FIGURE 6.6 – Evolutions des erreurs sur les différentes approximations de la température

Conclusions & Perspectives

Nous concluons ce travail en rappelant les principaux résultats accomplis dans l'étude des modèles de transfert thermique, par homogénéisation mathématique, dans un cœur de réacteur nucléaire de type VHTR. En plus de l'étude réalisée dans [44], ce travail représente une validation tantôt théorique tantôt numérique de nos méthodes d'homogénéisations dans différentes situations de fonctionnement du cœur d'un VHTR. Notons que toutes les justifications mathématiques fournies ici ou dans [44] sont dans le cas d'un rayonnement linéaire, le cas non linéaire reste alors un problème ouvert pour des travaux futurs. Néanmoins, les justifications numériques que nous avons fournies sont toutes dans le cas non-linéaire. Nous dressons maintenant ci-dessous les résultats acquis jusqu'à aujourd'hui :

- ◇ Dans le cas stationnaire, qui représente un fonctionnement nominal du cœur :
 - ▷ Une étude formelle et numérique complète du modèle simplifié 2D a été présentée dans [44] dans le cas d'un rayonnement non-linéaire à parois grises diffusantes ($0 < e < 1$). On y trouve aussi la justification mathématique par convergence à deux échelles dans le cas linéaire.
 - ▷ Pour mieux se rapprocher de la réalité physique des transferts thermiques dans les VHTR, nous avons complété cette étude, dans le Chapitre 5 de ce document, dans le cas où le modèle simplifié 2D contient une source thermique oscillante au niveau microscopique. Nous avons utilisé pour cela le correcteur $\varepsilon^2 T_2$ dit d'ordre 2 pour mieux approcher la solution T_ε du modèle direct par la solution homogénéisée reconstruite. La justification mathématique de l'approximation de T_ε par $T_0 + \varepsilon T_1$ est exactement la même que dans [44]. La justification du terme $\varepsilon^2 T_2$ que nous avons fournie ici est une justification numérique des résultats formels que nous obtenons grâce à la méthode du développement asymptotique. Elle n'est valable que pour la géométrie particulière que nous étudions et pour laquelle les couches limites et l'indétermination macroscopique \tilde{T}_1 du correcteur T_1 sont négligeables.

-
- ▷ Nous avons aussi étendu notre analyse à l'espace 3D où nous avons homogénéisé le modèle complet qui contient les équations du transfert thermique dans les canaux fluides en plus de celles dans le reste du cœur. Les résultats que nous avons fournis sont dans le cas d'un rayonnement linéaire à parois noires ($e = 1$). Nous pouvons immédiatement étendre les résultats formels, comme dans [44], au cas plus général d'un rayonnement non-linéaire à parois grises diffusantes ($0 < e < 1$) en échange de calculs plus fastidieux. Dans cette étude, l'analyse asymptotique par homogénéisation se combine avec une analyse asymptotique par réduction de la dimension d'espace dans le but de remédier au problème de non-périodicité du rayonnement suivant la direction axiale des canaux. Dans cette analyse nous avons principalement utilisé le fait que les conditions aux bords extérieurs perpendiculaires aux canaux sont de type Dirichlet. Une perspective possible à cette étude est donc de voir ce qui se passe dans le cas d'autres types de conditions aux limites.

 - ◇ Dans le cas non-stationnaire, qui représente un fonctionnement transitoire du cœur :
 - ▷ Nous proposons une étude correspondante à un fonctionnement transitoire lent du cœur où le temps n'agit qu'en tant que paramètre dans la méthode d'homogénéisation. Les résultats fournis dans ce cas sont justifiés rigoureusement pour le modèle simplifié en 2D dans le cas d'un rayonnement linéaire à parois noires. Les résultats formels peuvent aussi s'étendre facilement au cas plus général d'un rayonnement non-linéaire à parois grises diffusantes. Toute notre analyse du cas non-stationnaire s'étend sans difficulté au modèle complet 3D.

 - ▷ Une perspective de travail futur est de valider cette analyse non-stationnaire dans le cas d'un transitoire rapide comme nous l'avons brièvement expliqué au Chapitre 6.

 - ◇ Une perspective finale à tous ces travaux est la simulation numérique de ces différents modèles à grande échelle, c-à-d, à échelle réelle du cœur d'un VHTR.

Bibliographie

- [1] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(6) :1482–1518, 1992. 28, 33, 75, 78, 82, 88, 158
- [2] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Ecole Polytechnique, 2006. 153, 154
- [3] G. Allaire and M. Amar. Boundary layer tails in periodic homogenization. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 4 :209–243, 1999. 99, 103, 108, 112, 126, 127
- [4] G. Allaire, M. Avellaneda, J.L. Auriault, A. Bourgeat, H. Ene, K. Golden, U. Hornung, A. Mikelic, and Showalter R. Homogenization and porous media. *Interdisciplinary Applied Mathematics Series*, 6 :45–68, 225–250, 1997. 23
- [5] G. Allaire and M. Briane. Multiscale convergence and reiterated homogenisation. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 126(2) :297–342, 1996. 28
- [6] G. Allaire and C. Conca. Bloch wave homogenization for a spectral problem in fluid-solid structures. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 135 :197–257, 1996. 52
- [7] G. Allaire and C. Conca. Bloch wave homogenization and spectral asymptotic analysis. *Math. Pures et Appl.*, 77 :153–208, 1998. 28
- [8] G. Allaire, A. Damlamian, and U. Hornung. Two-scale convergence on periodic surfaces and applications. *In Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling of Flow through Porous Media (May 1995)*, A. Bourgeat et al. eds. World Scientific Pub., pages 15–25, Singapore 1996. 34, 79
- [9] G. Allaire and K. El Ganaoui. Homogenization of a conductive and radiative heat transfer problem. *Multiscale Model. Simul.*, 7(3) :1148–1170, 2008. 34, 62, 77, 83, 85, 89, 111
- [10] G. Allaire and Z. Habibi. Homogenization of a conductive, convective and radiative heat transfer problem in a heterogeneous domain. *SIAM J. Math. Anal.* 177
- [11] G. Allaire, F. Jouve, and H. Maillot. Topology optimization for minimum stress design with the homogenization method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 28 :87–98, 2004. 23

- [12] G. Allaire and F. Murat. Homogenization of the Neumann problem with nonisolated holes. *Asymptotic Anal.*, 7(2) :81–95, 1993. With an appendix written jointly with A. K. Nandakumar. 77
- [13] A. A. Amosov. Nonstationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties dependig on the radiation frequency. *J. Math. Sci., New York* 165, No. 1, 1-41 (2010). 24
- [14] A. A. Amosov. Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on radiation frequency. *J. Math. Sci.*, 164(3) :309–344, 2010. 24, 42
- [15] T. Arbogast, J. Douglas, and U. Hornung. Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory. *SIAM J. Math. Anal.*, 21 :823–836, 1990. 28
- [16] I. Babuska. Solution of interface problems by homogenization, i, ii, iii. *SIAM J. Math. Anal.*, 7, 8 :603–634, 635–645, 1996, 1997. 28
- [17] N. Bakhvalov and G. Panasenko. *Averaging Process in Periodic Media*. Kluwer, Dordrecht, 1989. 28, 99, 112
- [18] N. S. Bakhvalov. Averaging of the heat transfer process in periodic media in the presence of radiation. *Differentsial' nye Uravneniya*, 17(10) :1765–1773, 1916, 1981. 24
- [19] A. Bejan. *Heat transfer*. Wiley, 1992. 24
- [20] A. Bejan. *Convection heat transfer*. Wiley, 2 edition, 1994. 24
- [21] A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*, volume 5 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. 12, 28, 99, 103, 112
- [22] J. F. Bourgat and Dervieux A. *Méthodes d'homogénéisation des opérateurs à coefficients périodiques*. IRIA LABORIA, Rapport de Recherche 278, 1978. 108
- [23] Brezis. *Analyse Fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983. 153
- [24] Cast3M. <http://www-cast3m.cea.fr/cast3m/index.jsp>. 91
- [25] CEA. <http://www.cea.fr/>. 1, 5, 17
- [26] S. Chandrasekhar. *Radiative transfer*. Dover Publications Inc., New York, 1960. 14, 24, 40

- [27] P. Charrier and B. Dubroca. Asymptotic transport models for heat and mass transfer in reactive porous media. *Multiscale Model. Simul*, 2(1) :124–157, 2003. 24, 25
- [28] R. Christensen. *Mechanics of composite materials*. JohnWiley, New-York, 1979. 29
- [29] P. G. Ciarlet. *Plates and junctions in elastic multi-structures*, volume 14 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*. Masson, Paris, 1990. An asymptotic analysis. 52
- [30] D. Cioranescu, A. Damlamian, and G. Griso. Periodic unfolding and homogenization. *I 335, C. R. Acad. Sci. Paris*, pages 99–104, 2002. 28
- [31] D. Cioranescu, A. Damlamian, and G. Griso. The periodic unfolding method in homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 40(4) :1585–1620, 2008. 28
- [32] D. Cioranescu and P. Donato. *An introduction to homogenization*, volume 17 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999. 28
- [33] G. W. Clark and L. A. Packer. Two-scale homogenization of non-linear degenerate evolution equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 238 :316–328, 1999. 158
- [34] C. Conca, J. Planchard, and M. Vanninathan. Limiting behaviour of a spectral problem in fluid-solid structures. *Asymptotic Analysis*, 6 :365–389, 1993. 52
- [35] G. Dal Maso. *An introduction to Γ -convergence*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 8. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993. 28, 88
- [36] A. Damlamian and N. Kenmochi. Asymptotic behavior of the solution to a multiphase stefan problem. *Jap. Journal Applied Math.*, 3(1) :15–36, 1986. 23
- [37] E. De Giorgi. Sulla convergenza di alcune successioni d’integrali del tipo dell’area. *Rend. Mat. (6)*, 8 :277–294, 1975. Collection of articles dedicated to Mauro Picone on the occasion of his ninetieth birthday. 28
- [38] E. De Giorgi and T. Franzoni. Su un tipo di convergenza variazionale. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8)*, 58(6) :842–850, 1975. 28
- [39] Autorité de Sureté Nucléaire ASN. *Les échelles de classement des incidents et accidents nucléaires et des événements en radioprotection dans le cadre de radiothérapies*. ASN. http://rapoort-annuel2010.asn.fr/fichiers/Echelle_INES_2010.pdf. 5
- [40] P. Donato, D. Cioranescu, and R. Zaki. Periodic unfolding and robin problems in perforated domains. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 2006. 28

- [41] P. Donato, L. N. Hang, and R. Tardieu. The periodic unfolding method for a class of imperfect transmission problems. *Journal of Mathematical Sciences (New York), Springer (Vol. 176 No 6, August 14, or Vol. 177, No. 1, august 21)*, Both issues are dedicated to V V Zhikov., 2011. 28
- [42] G. Duvaut. Homogénéisation et matériaux composites. in trends and applications of pure mathematics to mechanics (palaiseau, 1983). *Lecture Notes in Phys.*, 195 :35–62, 1984. 23
- [43] CEA e-den. *Les réacteurs nucléaires à caloporteur gaz*. CEA Saclay et Le Moniteur Editions. Monographie Den,2006. [http ://nucleaire.cea.fr/fr/publications/pdf/M0-fr.pdf](http://nucleaire.cea.fr/fr/publications/pdf/M0-fr.pdf). 1, 3
- [44] K. El Ganaoui. *Homogénéisation de modèles de transferts thermiques et radiatifs : application au coeur des réacteurs à caloporteur gaz*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2006. x, xxv, xxvii, 37, 43, 53, 56, 57, 58, 62, 65, 68, 89, 108, 111, 125, 131, 151, 169, 170
- [45] M. Grimod. *Neutronic Modeling of Pebble Bed Reactors in APOLLO2*. PhD thesis, MI-PEGE, 2010. 1
- [46] Z. Habibi. Homogenization of a conductive-radiative heat transfer problem, the contribution of a second order corrector. *ESAIM : Proc.* 177
- [47] H. Haddar. *Modèles asymptotiques en ferromagnétisme : couches minces et homogénéisation*. PhD thesis, ENSTA / UMA - Laboratoire de Mathématiques Appliquées, ENPC 2000ENPC0020, 2000. 24
- [48] J. P. Harnett, W. M. Rohsenow, E. N. Ganic, and Y. I. Cho. *Handbook of Heat Transfer*. McGraw Hill, 3 edition, 1998. 14
- [49] Z. Hashin. The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.*, 29 :143–150, 1963. 29
- [50] Z. Hashin. Analysis of composite materials, a survey. *J. Appl. Mech.*, 50 :481–505, 1983. 29
- [51] P.S. Heckbert. *Simulating global illumination using Adaptive Meshing*. PhD thesis, UC Berkeley, 1991. 18, 41
- [52] Ulrich Hornung, editor. *Homogenization and porous media*, volume 6 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. 28
- [53] J. R. Howell. *A catalogue of radiation heat transfer factors*. The university of Texas at Austin, Austin, Texas, 3 edition, 2010. [http ://www.engr.uky.edu/rtl/Catalog/](http://www.engr.uky.edu/rtl/Catalog/). 18, 41

- [54] F. P. Incropera and D. P. Dewitt. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Wiley, New-York, 1981. 14
- [55] F. P. Incropera and D. P. Dewitt. *Introduction To Heat Transfer*. Wiley, 4 edition, 2001. 14
- [56] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleinik. *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*. Springer Verlag, 1994. 28
- [57] N. Kodochigov, Yu. Sukharev, E. Marova, N. Ponomarev-Stepnoy, E. Glushkov, and P. Fomichenko. Neutronic features of the gt-mhr reactor. *Nuclear Engineering and Design*, 222 :161–171, 2003. 1
- [58] M. Laitinen and T. Tiihonen. Conductive-radiative heat transfer in grey materials. *Quart. Appl. Math.*, 59(4) :737–768, 2001. 24
- [59] M. Lenczner. Homogénéisation d’un circuit électrique. *C.R. Acad. Sci.*, 324 :537–542, 1997. 28
- [60] J. L. Lions. *Some methods in the mathematical analysis of systems and their control*. Kexue Chubanshe (Science Press), Beijing, 1981. 65
- [61] J.-L. Lions, A. Bensoussan, Ciarlet, G. Philippe, and R. Glowinski. *OEuvres choisies de Jacques-Louis Lions, Volume II, Contrôle, Homogénéisation*. EDP Sciences ; SMAI, 2003. 28
- [62] G. Melese and R. Katz. *Thermal and Flow Design of Helium-Cooled Reactors*. American Nuclear Society, La Grange Park, Ill., USA, 1984. 1
- [63] F. M. Modest. *Radiative heat transfer*. Academic Press, 2 edition, 2003. 14, 24, 40, 41
- [64] S. Monsurró. Homogenization of a two component composite with interfacial thermal barrier. *Adv. in Math. Sci. and Appl.*, 13(1) :43–63, 2003. 77
- [65] F. Murat and L. Tartar. H -convergence. In *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, volume 31 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 21–43. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997. 28, 84, 85
- [66] H. Nabielek, W. Kuhnlein, W. Schenk, W. Heit, A. Christ, and H Ragoss. Development of advanced htr fuel elements. *Nuclear Engineering and Design*, 121 :199–210, 1990. 1
- [67] M. Neuss-Radu. Some extensions of two-scale convergence. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322(9) :899–904, 1996. 34, 79
- [68] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 20(3) :608–623, 1989. 28, 33, 75, 78

- [69] R. Orti. *Radiosité dynamique 2D et complexe de visibilité*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier, 1997. 18
- [70] P. L. P. Godillon and T. Goudon. 24
- [71] J. Planchard. Eigenfrequencies of a tube-bundle placed in a confined fluid. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 30 :75–93, 1982. 52
- [72] J. Planchard. Global behaviour of large elastic tube-bundles immersed in a fluid. *Comput. Mech.*, 2 :105–118, 1987. 52
- [73] J. Sanchez-Hubert and E. Sanchez-Palencia. *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*. Masson, Paris, 1992. 12, 28, 29
- [74] E. Sanchez-Palencia. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Springer Lecture Notes in Physics, 1980. 28, 75, 124
- [75] S. Spagnolo. Convergence in energy for elliptic operators. In *Numerical solution of partial differential equations, III (Proc. Third Sympos. (SYNSPADE), Univ. Maryland, College Park, Md., 1975)*, pages 469–498. Academic Press, New York, 1976. 28
- [76] E. M. Sparrow and R. D. Cess. *Radiation heat transfer*. Hemisphere, 1978. 14, 24
- [77] J. Taine. *Radiative Heat Transfer*. McGraw-Hill, New-York, 1993. 24
- [78] L. Tartar. *The general theory of homogenization. A personalized introduction. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*. Springer Verlag, Berlin ; UMI, Bologna, 7 edition, 2009. 28
- [79] T. Tiihonen. Stefan-boltzman radiation on non-convex surfaces. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 20 :47–57, 1997. 19, 24, 51
- [80] T. Tiihonen. Stefan-boltzmann radiation of nonlocal heat radiation problems. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 8(6) :1071–1089, 1998. 24, 40
- [81] A. N. Tikhonov. Cooling of bodies under radiation following to the stefan-boltzmann law. [*in Russian*], *Izv. AN SSSR Ser. Georg. Geophys.*, (3) :461–479, 1937. 24
- [82] G. L. Vignoles, P. Charrier, C. Preux, and B. Dubroca. Rarefied pure gas transport in non-isothermal porous media : effective transport properties from homogenization of the kinetic equation. *Transp. Porous Media*, 73(2) :211–232, 2008. 24

Publications & Communications

Publications

- ◇ G. Allaire and Z. Habibi, Homogenization of a Conductive, Convective and Radiative Heat Transfer Problem in a Heterogeneous Domain, SIAM J. Math. Anal. (Submitted). Cf. [10] (Annexe1)
- ◇ Z. Habibi, Homogenization of a Conductive-Radiative Heat Transfer Problem, the Contribution of a Second Order Corrector, Esaim : Proc. (Submitted). Cf. [46] (Annexe2)
- ◇ G. Allaire and Z. Habibi, The Second Order Corrector in the Homogenization of a Conductive-Radiative Heat Transfer, (In preparation).

Communications à des conférences

- ◇ Homogenization of a heat transfer problem which contains an oscillating thermal source. ICIAM2011 Vancouver Canada 17-22 July 2011. Cf. [46]
- ◇ Periodic Homogenization, a second order correction in the study of a heat transfer problem. SMAI2011 Guidel 23-27 mai 2011. Cf. [46].
- ◇ Homogenization of 3-D diffusive, convective heat transfer with a 2-D periodic radiation operator. HMS2011 Laboratoire Jacques-Louis-Lions (JLL) Paris 28 mars 2011. Cf. [10]
- ◇ 2nd order corrector in periodic homogenization of a heat transfer problem. GAMNI2011 Institut Henri Poincaré (IHP) Paris 24-25 Janvier 2011. [46].
- ◇ Two scale homogenization of a 3-D conductive, convective and radiative heat transfer. ESF2010 Cambridge UK 12-17 septembre 2010. [10]
- ◇ Two scale homogenization. 10ème Journées scientifiques de la DANS CEA-Saclay 18-19 juin 2010.
- ◇ Homogénéisation périodique d'un modèle de conduction-rayonnement. Application aux cœurs des réacteurs à caloporteur gaz. GAMNI2010 Institut Henri Poincaré (IHP) Paris 25-26 Janvier 2010.

Annexe1

Homogenization of a Conductive, Convective and Radiative Heat Transfer Problem in a Heterogeneous Domain*

Grégoire Allaire[†] and Zakaria Habibi[‡]

October 20, 2011

Abstract

We are interested in the homogenization of heat transfer in periodic porous media where the fluid part is made of long thin parallel cylinders, the diameter of which is of the same order than the period. The heat is transported by conduction in the solid part of the domain and by conduction, convection and radiative transfer in the fluid part (the cylinders). A non-local boundary condition models the radiative heat transfer on the cylinder walls. To obtain the homogenized problem we first use a formal two-scale asymptotic expansion method. The resulting effective model is a convection-diffusion equation posed in a homogeneous domain with homogenized coefficients evaluated by solving so-called cell problems where radiative transfer is taken into account. In a second step we rigorously justify the homogenization process by using the notion of two-scale convergence. One feature of this work is that it combines homogenization with a 3D to 2D asymptotic analysis since the radiative transfer in the limit cell problem is purely two-dimensional. Eventually, we provide some 3D numerical results in order to show the convergence and the computational advantages of our homogenization method.

Key words : Periodic homogenization, two-scale convergence, heat transfer.

1 Introduction

We study heat transfer in a very heterogeneous periodic porous medium. Since the ratio of the heterogeneities period with the characteristic length-scale of the domain, denoted by ϵ , is very small in practice, a direct numerical simulation of this phenomenon is either out of reach or very time consuming on any computer (especially in 3D). Therefore, the original heterogeneous problem should be replaced by an homogeneous averaged (or effective, or homogenized) one. The goal of homogenization theory [8], [10], [15], [23], [25], [31], [32] is to provide a systematic way of finding such effective problems, of reconstructing an accurate solution by introducing so-called correctors and of rigorously justifying such an approximation by establishing convergence theorems and error estimates. The purpose of this paper is to carry on this program for a model of conductive, convective and radiative heat transfer in a 3D solid domain, periodically perforated by thin parallel cylinders in which a gas is flowing (see Figure 1 for a sketch of the geometry). Convection and radiative transfer are taking place only in the gas which is assumed to be transparent for radiation and with a very small bulk diffusivity. Therefore, the radiative transfer is modelled by a non-local boundary condition on the cylinder walls.

Although there are many possible physical motivations for this study, we focus on its application to the nuclear reactor industry and especially to the so-called gas-cooled reactors [19] which are a promising concept for the 4th generation reactors. The periodic porous medium in our study is the

*This work has been supported by the French Atomic Energy and Alternative Energy Commission, DEN/DM2S at CEA Saclay.

[†]CMAP, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, & DM2S, CEA Saclay, 91191 Gif sur Yvette, gregoire.allaire@polytechnique.fr

[‡]DM2S/SFME/LTMF, CEA Saclay, 91191 Gif sur Yvette, & CMAP, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, zakaria.habibi@polytechnique.edu

core of such a gas-cooled reactor. It is typically made of many prismatic blocks of graphite in which are inserted the nuclear fuel compact. Each block is periodically perforated by many small channels where the coolant (Helium) flows (the number of these gas cylinders is of the order of 10^4 at least). Although the solid matrix of the porous medium is itself heterogeneous (a mixture of graphite and of nuclear materials), we simplify the exposition by assuming it is already homogenized and thus homogeneous. The analysis would not be much more complicated otherwise but certainly less clear for the reader. In other words, we assume that the only source of heterogeneities is coming from the geometry of the porous medium which is a fine mixture of solid and fluid parts. Since the total number of cylinders is very large and their diameter is very small compared to the size of the core, the numerical simulation of this problem requires a very fine mesh and thus a very expensive computational cost for a real geometry of a reactor core (all the more since the radiative transfer is modelled by an integral operator yielding dense discretization matrices). Therefore, our goal is to find a simpler homogenized model in an equivalent continuous domain and, specifically, to give a clear definition of the resulting effective parameters as well as a detailed reconstruction of an approximate solution (involving local correctors that take into account the geometry variation).

A similar study, in a simplified 2D setting, has previously appeared in [3]. In this reference, the 2D domain was a cross section of the reactor core (perpendicular to the cylinders) so that the fluid part was a periodic collection of isolated disks. Furthermore, convection and diffusion were neglected in the gas. Therefore, the main novelties of the present paper is, first, to take into account convection and diffusion in the fluid, second and most importantly, to consider a porous medium perforated by cylinders instead of disks. This last generalization is not at all a simple extension of the previous results of [3]. It turns out that [3] can easily be extended to a periodic distribution of spherical holes in 3D. On the contrary, in the case of cylinders, since periodicity takes place only in the transverse directions and the holes are not isolated, but rather connected, in the axial direction, a new phenomenon takes place which corresponds to a dimension reduction for the radiative operator from 3D to 2D. In other words, our asymptotic analysis is not only a problem of homogenization but also of singular perturbation. The issue of dimension reduction is well-known in solid mechanics, where it is a basic ingredient to deduce plate or shell models from 3D elasticity when the thickness of the structure is going to zero (see e.g. [14]). Here, the reason for this dimension reduction is that, in the homogenization process, the cylinders become infinitely long compared to their diameter (which goes to zero): thus, at a microscopic scale the 3D radiative operator is asymptotically invariant along the axis of these cylinders and, in the limit, degenerates to a 2D radiative operator. Furthermore, some radiations are escaping from the cylinders by their extremities: asymptotically it yields an additional vertical homogenized diffusivity which was, of course, not seen in the 2D setting of [3]. Overall our homogenized model is new, quite surprising and not intuitive, even in light of [3].

There are a number of other previous contributions on the homogenization of radiative transfer which all correspond to different geometries or scalings of various parameters [6], [7], [9], [13]. Let us also mention that there is a huge literature on the homogenization in perforated domains or porous media (see [23] and references therein, [16], [18] for the case of non-linear Neumann boundary conditions).

The paper is organized as follows. In Section 2, we give a precise definition of the geometry and of the heat transfer model, see (8). In particular we discuss our scaling assumptions in terms of the small parameter ϵ . Furthermore, various properties of the radiative operator are recalled. It is an integral operator, the kernel of which is called the view factor (it amounts to quantify how a point on the cylinder wall is illuminated by the other points on this surface). A key ingredient for the sequel is proved in Lemma 2.1: an asymptotic expansion of the 3D view factor, integrated along the cylinder axis, is established in terms of the 2D view factor. Section 3 is devoted to the formal method of two-scale asymptotic expansions applied to our problem. Its main result is Proposition 3.1 which gives the precise form of the homogenized problem. Furthermore, it also furnishes the so-called cell problems which define the corrector term for the homogenized solution. It is at the basis of a reconstruction process for an accurate and detailed approximate solution. We emphasize that the

application of the formal method of two-scale asymptotic expansions is not standard for two reasons. First, to minimize the number of required terms in the resulting cascade of equations, we rely on a variant of the method, suggested by J.-L. Lions [26], which amounts to introduce an ansatz in the variational formulation rather than in the strong form of the equations. Second, we must combine this ansatz with the dimension reduction argument for the radiative operator as given by the technical Lemma 2.1. Section 4 provides a rigorous mathematical justification of the homogenization process by using the method of two-scale convergence [1], [30]. Our main result is Theorem 4.2 which confirms the statement of Proposition 3.1. A formal generalization to the non-linear case is briefly sketched in Section 5. Indeed, our mathematical rigorous justification holds true only for a linear model so we choose to expose this setting. However, the true physical model of radiative transfer is non-linear since the emitted radiations are following Stefan-Boltzmann law of proportionality to the 4th power of temperature. Taking into account this non-linearity is not difficult for the formal method of two-scale asymptotic expansions. Thus we give the homogenized and cell problems in this case too, all the more since all our numerical computations are performed in this non-linear setting. In Section 6, we present some numerical results for data corresponding to gas-cooled reactors. In particular we show that the error between the exact and reconstructed solutions, as a function of the small parameter ϵ , is as expected of order 1 or 1/2, depending on the choice of norm.

2 Setting of the problem

The goal of this section is to define the geometry of the periodic porous medium and to introduce the model of conductive, convective and radiative heat transfer.

2.1 Geometry

For simplicity we consider a rectangular open set $\Omega = \prod_{j=1}^3(0, L_j)$ where $L_j > 0$ are positive lengths. It is however essential that the domain Ω be a cylinder with axis in the third direction, namely that its geometry is invariant by translation along x_3 . The rectangular basis $\prod_{j=1}^2(0, L_j)$ is periodically divided in $N(\epsilon)$ small cells $(\Lambda_{\epsilon,i})_{i=1\dots N(\epsilon)}$, each of them being equal, up to a translation and rescaling by a factor ϵ , to the same unit periodicity cell $\Lambda = \prod_{j=1}^2(0, l_j)$ with $l_j > 0$. By construction, the domain Ω is periodic in the two first directions and is invariant by translation in the third one. To avoid unnecessary complications with boundary layers (and because this is the case in the physical problem which motivates this study) we assume that the sequence of small positive parameters ϵ , going to zero, is such that the basis of Ω is made up of entire cells only, namely $L_j/(\epsilon l_j)$ is an integer for any $j = 1, 2$. The cell Λ is decomposed in two parts: the holes Λ^F occupied by a fluid (see Figures 1 and 2) and the solid matrix Λ^S . We denote by γ the boundary between Λ^S and Λ^F . Then, we define the fluid domain Ω_ϵ^F as the cylindrical domain with basis composed by the collection of $\Lambda_{\epsilon,i}^F$ and the solid domain Ω_ϵ^S as the cylindrical domain with basis composed by the collection of $\Lambda_{\epsilon,i}^S$, where $\Lambda_{\epsilon,i}^{F,S}$ are the translated and rescaled version of $\Lambda^{F,S}$ for $i = 1\dots N(\epsilon)$ (similar to the correspondence between $\Lambda_{\epsilon,i}$ and Λ). In summary we have

$$\Omega_\epsilon^F = \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon)} \Lambda_{\epsilon,i}^F \times (0, L_3), \quad \Omega_\epsilon^S = \Omega \setminus \Omega_\epsilon^F = \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon)} \Lambda_{\epsilon,i}^S \times (0, L_3), \quad \gamma_\epsilon = \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon)} \gamma_{\epsilon,i}, \quad \Gamma_\epsilon = \gamma_\epsilon \times (0, L_3).$$

For each plane cell $\Lambda_{\epsilon,i}$, the center of mass $x'_{0,i}$ of the boundary $\gamma_{\epsilon,i}$ is defined by

$$\int_{\gamma_{\epsilon,i}} (s' - x'_{0,i}) ds' = 0. \quad (1)$$

For any point $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, we denote by x' its two first components in \mathbb{R}^2 such that $x = (x', x_3)$. We introduce the linear projection operator P from \mathbb{R}^3 to \mathbb{R}^2 and its adjoint, the

extension operator E from \mathbb{R}^2 to \mathbb{R}^3 , defined by

$$P \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad E \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Eventually, we denote by $\nabla_{x'}$ the 2D gradient operator which we shall often identify to its extension $E\nabla_{x'}$. Similarly, for a 3D vector field $F(x', x_3)$ we shall use the notation $\text{div}_{x'} F$ for $\text{div}_x(PF)$.

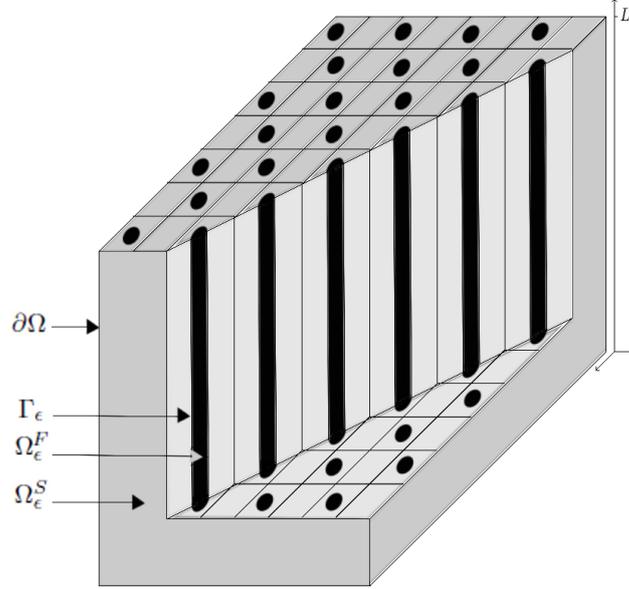


Figure 1: Periodic domain for a gas cooled reactor core

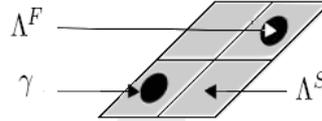


Figure 2: 2D reference cell for a gas cooled reactor core

2.2 Governing equations

There is a vast literature on heat transfer and we refer the interested reader to [12], [27], [33] for an introduction to the modelling of radiative transfer. We denote by T_ϵ the temperature in the domain Ω which can be decomposed as

$$T_\epsilon = \begin{cases} T_\epsilon^S & \text{in } \Omega_\epsilon^S, \\ T_\epsilon^F & \text{in } \Omega_\epsilon^F, \end{cases}$$

where T_ϵ is continuous through the interface Γ_ϵ .

Convection takes place only in the thin vertical cylinders Ω_ϵ^F occupied by the fluid. We thus introduce a given fluid velocity

$$V_\epsilon(x) = V\left(x, \frac{x'}{\epsilon}\right) \quad \text{in } \Omega_\epsilon^F,$$

where the continuous vector field $V(x, y')$, defined in $\Lambda^F \times \Omega$, is periodic with respect to y' and satisfies the two incompressibility constraints

$$\text{div}_x V = 0 \quad \text{and} \quad \text{div}_{y'} V = 0 \quad \text{in } \Lambda^F, \quad \text{and} \quad V \cdot n = 0 \quad \text{on } \gamma$$

where n is the unit outward normal (from Λ^S to Λ^F) on γ . A typical example of such a velocity field is $V = (V'(x_3, y'), V_3(x', y'))$ with $V' = (V_1, V_2)$, $\operatorname{div}_{y'} V' = 0$ and $V' \cdot n = 0$ on γ .

The thermal diffusion is assumed to be much smaller in the fluid than in the solid. More precisely we assume that it is of order 1 in Ω_ϵ^S and of order ϵ in Ω_ϵ^F . The conductivity tensor is thus defined by

$$K_\epsilon(x) = \begin{cases} K_\epsilon^S(x) = K^S(x, \frac{x'}{\epsilon}) & \text{in } \Omega_\epsilon^S, \\ \epsilon K_\epsilon^F(x) = \epsilon K^F(x, \frac{x'}{\epsilon}) & \text{in } \Omega_\epsilon^F, \end{cases} \quad (3)$$

where $K^S(x, y')$, $K^F(x, y')$ are periodic symmetric positive definite tensors defined in the unit cell Y , satisfying

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \forall y' \in \Lambda, \forall x \in \Omega, \quad \alpha |v|^2 \leq \sum_{i,j=1}^3 K_{i,j}^{F,S}(x, y') v_i v_j \leq \beta |v|^2,$$

for some constants $0 < \alpha \leq \beta$. The choice of the ϵ scaling in (3) is made in order to have a dominant convection in the fluid part at the macroscopic scale. However, at the microscopic scale the convection and the diffusion are balanced as will be clear later.

The fluid is assumed to be almost transparent, so that heat can also be transported by radiative transfer in Ω_ϵ^F . This radiative effect is modelled by a non local boundary condition on the interface Γ_ϵ between Ω_ϵ^F and Ω_ϵ^S . More precisely, in addition to the continuity of temperature we write a balance of heat fluxes on the interface

$$T_\epsilon^S = T_\epsilon^F \quad \text{and} \quad -K_\epsilon^S \nabla T_\epsilon^S \cdot n = -\epsilon K_\epsilon^F \nabla T_\epsilon^F \cdot n + \frac{\sigma}{\epsilon} G_\epsilon(T_\epsilon^F) \quad \text{on } \Gamma_\epsilon, \quad (4)$$

where $\sigma > 0$ is a given positive constant and G_ϵ is the radiative operator defined by

$$G_\epsilon(T_\epsilon)(s) = T_\epsilon(s) - \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} T_\epsilon(x) F(s, x) dx = (Id - \zeta_\epsilon) T_\epsilon(s) \quad \forall s \in \Gamma_{\epsilon,i}, \quad (5)$$

with

$$\zeta_\epsilon(f)(s) = \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} F(s, x) f(x) dx. \quad (6)$$

The scaling ϵ^{-1} in front of the radiative operator G_ϵ in (4) is chosen because it yields a perfect balance, in the limit as ϵ goes to zero, between the bulk heat conduction and the surface radiative transfer (this scaling was first proposed in [3] and is due to the fact that the operator $(Id - \zeta_\epsilon)$ has a non-trivial kernel, see Lemma 2.1). In (6) F is the so-called view factor (see [27], [24], [22]). The view factor $F(s, x)$ is a geometrical quantity between two different points s and x of the same cylinder $\Gamma_{\epsilon,i}$. Its explicit formula for surfaces enclosing convex domains is in 3D

$$F(s, x) := F^{3D}(s, x) = \frac{n_x \cdot (s - x) n_s \cdot (x - s)}{\pi |x - s|^4},$$

where n_z denotes the unit normal at the point z . In 2D the view factor is

$$F(s, x) := F^{2D}(s', x') = \frac{n'_x \cdot (s' - x') n'_s \cdot (x' - s')}{2 |x' - s'|^3}$$

and the operator in (6) is denoted by ζ_ϵ^{2D} . Some useful properties of the view factor are given below in Lemma 2.1.

For simplicity we assume that the only heat source is a bulk density of thermal sources in the solid part, $f \in L^2(\Omega)$, $f \geq 0$ and the external boundary condition is a simple Dirichlet condition. Eventually, the governing equations of our model are

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(K_\epsilon^S \nabla T_\epsilon^S) = f & \text{in } \Omega_\epsilon^S \\ -\operatorname{div}(\epsilon K_\epsilon^F \nabla T_\epsilon^F) + V_\epsilon \cdot \nabla T_\epsilon^F = 0 & \text{in } \Omega_\epsilon^F \\ -K_\epsilon^S \nabla T_\epsilon^S \cdot n = -\epsilon K_\epsilon^F \nabla T_\epsilon^F \cdot n + \frac{\sigma}{\epsilon} G_\epsilon(T_\epsilon^F) & \text{on } \Gamma_\epsilon \\ T_\epsilon^S = T_\epsilon^F & \text{on } \Gamma_\epsilon \\ T_\epsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (8)$$

Proposition 2.1. *The boundary value problem (8) admits a unique solution T_ϵ in $H_0^1(\Omega)$.*

PROOF This is a classical result (see [3] if necessary) by application of the Lax-Milgram lemma. The main point is that the operator G_ϵ is self-adjoint and non-negative, as stated in Lemma 2.1 below. ■

Remark 2.1. *The solution of (8) satisfies the maximum principle, namely $f \geq 0$ in Ω implies that $T_\epsilon \geq 0$ in Ω (see [33]). However, we shall not use this property in the sequel.*

Remark 2.2. *The radiation operator introduced in (5) is a linear operator: this is clearly a simplifying assumption. Actually, the true physical radiation operator is non-linear and defined, on each $\Gamma_{\epsilon,i}$, $1 \leq i \leq N(\epsilon)$, by*

$$G_\epsilon(T_\epsilon) = e(\text{Id} - \zeta_\epsilon)(\text{Id} - (1 - e)\zeta_\epsilon)^{-1}(T_\epsilon^4). \quad (9)$$

where ζ_ϵ is the operator defined by (6). To simplify the exposition, we focus on the case of so-called black walls, i.e., we assume that the emissivity is $e = 1$ (we can find in [7] a study of this kind of problems when the emissivity depends on the radiation frequency). However, our analysis can be extended straightforwardly to the other cases $0 < e < 1$ (see e.g. [20]). The formal two-scale asymptotic expansion method can also be extended to the above non-linear operator, at the price of more tedious computations [20]. However, the rigorous justification of the homogenization process is, for the moment, available only for the linearized form of the radiation operator. Therefore we content ourselves in exposing the homogenization process for the linear case. Nevertheless, in Section 5 we indicate how our results can be generalized to the above non-linear setting. Furthermore, our numerical results in Section 6 are obtained in the non-linear case which is more realistic from a physical point of view.

2.3 Properties of the view factor

We recall and establish some useful properties of the view factor that we will use later.

Lemma 2.1. *For points x and s belonging to the same cylinder $\Gamma_{\epsilon,i}$, the view factor $F(s, x)$ satisfies*

1.

$$F(s, x) \geq 0, \quad F(s, x) = F(x, s), \quad (10)$$

2.

$$\int_{\gamma_{\epsilon,i}} F^{2D}(s', x') ds' = 1,$$

3. as an operator from L^2 into itself,

$$\|\zeta_\epsilon\| \leq 1, \quad (11)$$

4.

$$\int_{\gamma_{\epsilon,i}} \int_{\gamma_{\epsilon,i}} (x' - x'_{0,i}) F^{2D}(s', x') dx' ds' = 0,$$

5.

$$\ker(\text{Id} - \zeta_\epsilon^{2D}) = \mathbb{R}, \quad (12)$$

6. the radiative operator G_ϵ is self-adjoint on $L^2(\Gamma_{\epsilon,i})$ and non-negative in the sense that

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,i}} G_\epsilon(f) f ds \geq 0 \quad \forall f \in L^2(\Gamma_{\epsilon,i}), \quad (13)$$

7. for any given $s_3 \in (0, L)$,

$$\int_0^L F^{3D}(s, x) dx_3 = F^{2D}(s', x') + \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon^2}{L^3}\right), \quad (14)$$

8. for any function $g \in C^3(0, L)$ with compact support in $(0, L)$,

$$\int_0^L g(x_3) F^{3D}(s, x) dx_3 = F^{2D}(s', x') \left(g(s_3) + \frac{|x' - s'|^2}{2} g''(s_3) + \mathcal{O}(\epsilon^p) \right), \quad (15)$$

where any $0 < p < 3$ is admissible and g'' denotes the second derivative of g . Furthermore, for any function $f \in L^\infty(0, L)$, we have

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^L f(x_3) g(s_3) F^{3D}(s, x) dx_3 ds_3 &= F^{2D}(s', x') \left(\int_0^L f(x_3) g(x_3) dx_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} |x' - s'|^2 \int_0^L f(x_3) g''(x_3) dx_3 + \mathcal{O}(\epsilon^p) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Remark 2.3. The surface $\Gamma_{\epsilon, i}$ of each cylinder is not closed (it is only the lateral boundary and the two end cross-sections are missing). Therefore, the second property of Lemma 2.1 does not hold in 3D, namely

$$\int_{\Gamma_{\epsilon, i}} F^{3D}(s', x') ds' \neq 1.$$

Remark 2.4. The asymptotic properties (14) can be physically interpreted by saying that in a thin and long cylinder the 3D view factor are well approximated by the 2D view factor, upon vertical integration.

Since the surface $\Gamma_{\epsilon, i}$ is open at its extremities, there is some leakage of the radiated energy. The asymptotic property (15) and (16) take into account the quantification of this leakage which corresponds to a diffusive corrector term in the x_3 direction (remember that $|x' - s'|^2$ is of the order of ϵ^2).

PROOF The six first properties are classical and may be found in [20]. The proof of (14) follows from a change of variables and a Taylor expansion. At this point, the assumption that s_3 does not depend on ϵ and is different from the two end points 0 and L is crucial. Indeed, because the cylinder $\Gamma_{\epsilon, i}$ is vertical, we have $n_{s_3} = n_{x_3} = 0$ and

$$I = \int_0^L \frac{n_x \cdot (s - x) n_s \cdot (x - s)}{\pi |x - s|^4} dx_3 = \frac{n'_x \cdot (s' - x') n'_s \cdot (x' - s')}{\pi (x' - s')^4} \int_0^L \frac{1}{\left(1 + \frac{(x_3 - s_3)^2}{|x' - s'|^2}\right)^2} dx_3.$$

By the change of variables

$$z = \frac{x_3 - s_3}{\alpha}, \quad \text{where } \alpha = |x' - s'|, \quad (17)$$

and integration, we obtain

$$I = \frac{2}{\pi} F^{2D}(s', x') \left(h_1\left(\frac{L - s_3}{|x' - s'|}\right) - h_1\left(\frac{-s_3}{|x' - s'|}\right) \right)$$

where $h_1(z)$ is the primitive of the previous integrand given by

$$h_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z^2 + 1} + \arctan(z) \right). \quad (18)$$

By Taylor expansion we get

$$h_1(z) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(z^{-3}) & \text{when } z \rightarrow +\infty, \\ -\frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(z^{-3}) & \text{when } z \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (19)$$

Since $|x' - s'| = \mathcal{O}(\epsilon)$, $s_3 = \mathcal{O}(L)$ and $F^{2D}(s', x') = \mathcal{O}(\epsilon^{-1})$, we deduce (14).

The proof of (15) is a little more difficult although the strategy is the same. Let us notice that the assumption of compact support for g allows us to avoid difficulties coming from the case when $s_3 = 0$ or $s_3 = L$. By the same change of variables (17) we obtain

$$I = \int_0^L g(x_3) F^{3D}(s, x) dx_3 = \frac{2}{\pi} F^{2D}(x', s') \int_{\Delta} \frac{g(s_3 + \alpha z)}{(1 + z^2)^2} dz = \frac{2}{\pi} F^{2D}(x', s') \widehat{I},$$

where the domain of integration Δ is given by $\Delta = [\frac{-s_3}{\alpha}, \frac{L - s_3}{\alpha}]$. Remark that $\alpha = \mathcal{O}(\epsilon)$. By using a Taylor expansion in a neighbourhood of s_3 , we have

$$g(s_3 + \alpha z) = g(s_3) + \alpha z g'(s_3) + \frac{1}{2} \alpha^2 z^2 g''(s_3) + \mathcal{O}(\alpha^3 z^3),$$

and \widehat{I} becomes

$$\widehat{I} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad (20)$$

where, $h_1(z)$ being given by (18),

$$I_1 = g(s_3) \int_{\Delta} \frac{1}{(1 + z^2)^2} dz = \frac{g(s_3)}{2} \left(h_1\left(\frac{L - s_3}{\alpha}\right) - h_1\left(\frac{-s_3}{\alpha}\right) \right) = \frac{g(s_3)}{2} (\pi + \mathcal{O}(\alpha^3)).$$

On the other hand we get

$$I_2 = \alpha g'(s_3) \int_{\Delta} \frac{z}{(1 + z^2)^2} dz = \alpha g'(s_3) \left(h_2\left(\frac{L - s_3}{\alpha}\right) - h_2\left(\frac{-s_3}{\alpha}\right) \right) = \frac{\alpha g'(s_3)}{2} \mathcal{O}(\alpha^2),$$

$$I_3 = \frac{\alpha^2}{2} g''(s_3) \int_{\Delta} \frac{z^2}{(1 + z^2)^2} dz = \frac{\alpha^2}{2} g''(s_3) \left(h_3\left(\frac{L - s_3}{\alpha}\right) - h_3\left(\frac{-s_3}{\alpha}\right) \right) = \frac{\alpha^2}{4} g''(s_3) (\pi + \mathcal{O}(\alpha)),$$

where we performed a Taylor expansion of $h_2(z)$ and $h_3(z)$ which are the primitives of the previous integrands in I_2 and I_3 , respectively, given by

$$h_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{z^2 + 1} \right), \quad h_3(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{-z}{z^2 + 1} + \arctan(z) \right).$$

The last integral in (20) is of order $\mathcal{O}(\epsilon^p)$ for any $0 < p < 3$ because

$$|I_4| \leq C \alpha^3 \int_{\Delta} \frac{z^3}{(1 + z^2)^2} dz \leq C \alpha^3 \left(h_4\left(\frac{L - s_3}{\alpha}\right) - h_4\left(\frac{-s_3}{\alpha}\right) \right),$$

where $h_4(z)$ is the primitive of the previous integrand given by

$$h_4(z) = \frac{1}{2} \left(\log(z^2 + 1) + \frac{1}{1 + z^2} \right). \quad (21)$$

By a Taylor expansion of (21) when $z \rightarrow \pm\infty$ we get

$$|I_4| \leq C \alpha^3 |\log \alpha| \leq C \alpha^p \quad \forall 0 < p < 3.$$

Hence the result (15) since $\alpha = \mathcal{O}(\epsilon)$. Eventually, (16) is immediate using (15). ■

Remark 2.5. *If the function f is smooth, by integration by parts (16) becomes*

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^L f(x_3)g(s_3)F^{3D}(s, x)dx_3ds_3 &= F^{2D}(s', x') \left(\int_0^L f(x_3)g(x_3)dx_3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}|x' - s'|^2 \int_0^L f'(x_3)g'(x_3)dx_3 + \mathcal{O}(\epsilon^p) \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Actually, (22) can be proved directly with different smoothness assumptions: it holds true for f and g of class C^2 , one of them being with compact support.

3 Two-scale asymptotic expansion

The homogenized problem can be obtained heuristically by the method of two-scale asymptotic expansion [10], [15], [31]. This method is based on the periodic assumption on the geometry of the porous medium. However here, because the radiative operator is only 2D periodic, we shall introduce a microscopic variable y' which is merely a 2D variable (in the plane perpendicular to the cylinders). Of course, denoting the space variable $x = (x', x_3)$, the fast and slow variables are related by $y' = x'/\epsilon$. The radiative operator is creating an additional difficulty: since the fluid part is made of thin and long cylinders, the 3D view factors will asymptotically be replaced by the 2D view factors (see Lemma 2.1). Therefore, our problem is not only an homogenization problem but it is also a singularly perturbed one. It can be compared to the dimension reduction issue in solid mechanics, i.e., how a plate or shell model can be deduced from a 3D elasticity one (see e.g. [14]).

The starting point of the method of two-scale asymptotic expansion is to assume that the solution T_ϵ of problem (8) is given by the series

$$T_\epsilon = T_0(x) + \epsilon T_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) + \epsilon^2 T_2(x, \frac{x'}{\epsilon}) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (23)$$

where, for $i = 1, 2$, $y' \rightarrow T_i(x, y')$ is Λ -periodic and

$$T_i(x, y') = \begin{cases} T_i^S(x, y') & \text{in } \Omega \times \Lambda^S, \\ T_i^F(x, y') & \text{in } \Omega \times \Lambda^F, \end{cases} \quad (24)$$

with the continuity condition at the interface, $T_i^S(x, y') = T_i^F(x, y')$ on $\gamma = \partial\Lambda^S \cap \partial\Lambda^F$. As in the classical examples of homogenization, we assume that the first term of the asymptotic expansion T_0 depends only on the macroscopic variable x . As usual this property can be established by the same development as below if we had assumed rather that $T_0 \equiv T_0(x, y')$.

Introducing (23) in the equations (8) of the model, we deduce the main result of this section.

Proposition 3.1. *Under assumption (23), the zero-order term T_0 of the expansion for the solution T_ϵ of (8) is the solution of the homogenized problem*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K^*(x)\nabla T_0(x)) + V^*(x) \cdot \nabla T_0(x) = \theta f(x) & \text{in } \Omega \\ T_0(x) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (25)$$

with the porosity factor $\theta = |\Lambda^S|/|\Lambda|$, the homogenized conductivity tensor K^ given by its entries, for $j, k = 1, 2, 3$,*

$$\begin{aligned} K_{j,k}^*(x) &= \frac{1}{|\Lambda|} \left[\int_{\Lambda^S} K^S(x, y')(e_j + \nabla_{y'}\omega_j^S(x, y')) \cdot (e_k + \nabla_{y'}\omega_k^S(x, y'))dy' \right. \\ &\quad \left. + \sigma \int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D})(\omega_k^S(x, y') + y_k)(\omega_j^S(x, y') + y_j)dy' \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma}{2} \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(s', y')|s' - y'|^2 dy' ds' \delta_{j3}\delta_{k3} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

and a vertical homogenized velocity given by

$$V^*(x) = \frac{e_3}{|\Lambda|} \int_{\Lambda^F} V(x, y') \cdot e_3 dy',$$

where ζ^{2D} is the unit cell view factor operator defined by

$$\zeta^{2D}(\omega)(s') = \int_{\gamma} F^{2D}(s', y') \omega(y') dy'$$

and, for $j = 1, 2, 3$, $\omega_j(x, y')$ (equal to ω_j^S in Λ^S and to ω_j^F in Λ^F) is the solution of the 2D cell problem

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_{y'} P \left[K^S(x, y') (e_j + \nabla_{y'} \omega_j^S(x, y')) \right] = 0 & \text{in } \Lambda^S \\ -\operatorname{div}_{y'} P \left[K^F(x, y') (e_j + \nabla_{y'} \omega_j^F(x, y')) \right] + V(x, y') \cdot (e_j + \nabla_{y'} \omega_j^F(x, y')) = 0 & \text{in } \Lambda^F \\ -P \left[K^S(x, y') (e_j + \nabla_{y'} \omega_j^S(x, y')) \right] \cdot n = \sigma (Id - \zeta^{2D}) (\omega_j^S(x, y') + y_j) & \text{on } \gamma \\ \omega_j^F(x, y') = \omega_j^S(x, y') & \text{on } \gamma \\ y' \mapsto \omega_j(x, y') \text{ is } \Lambda\text{-periodic,} & \end{array} \right. \quad (27)$$

where P is the 3D to 2D projection operator defined by (2). Furthermore, T_1 is given by

$$T_1(x, y') = \sum_{j=1}^3 \omega_j(x, y') \frac{\partial T_0}{\partial x_j}(x). \quad (28)$$

Remark 3.1. As usual in homogenization, the cell problem (27) is a partial differential equation with respect to y' where x plays the role of a parameter. It is proved to be well-posed in Lemma 3.1 below.

We emphasize that the cell problem in Λ can be decoupled as two successive sub-problems in Λ^S and Λ^F respectively. First, we solve a cell problem in Λ^S using the non local boundary condition on γ , independently of what happens in Λ^F . Second, we solve a cell problem in Λ^F with the continuity boundary condition on γ yielding a Dirichlet boundary condition. In particular, the homogenized tensor K^* depends only on Λ^S .

Remark 3.2. The homogenized tensor K^* has an extra contribution (26) for its 3,3 entry depending merely on the view factor and not on the cell solutions. It arises from the leakage of the radiative energy at both ends of each cylinder $\Gamma_{\epsilon, i}$ (which are not closed as explained in Remark 2.4). This loss of radiative energy at the cylinders extremities yields this additional axial (or vertical) thermal diffusion. For circular cross-section cylinders (namely γ is a circle), we can explicitly compute

$$\int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(s', y') |s' - y'|^2 dy' ds' = \frac{16}{3} \pi r^3 \quad \text{where } r \text{ is the radius of } \gamma.$$

On the other hand, since $Pe_3 = 0$ and $(Id - \zeta^{2D})y_3 = 0$, the solution ω_3^S is a constant (with respect to y') for any cell geometry. This implies that $K_{3,j}^*(x) = K_{j,3}^*(x) = 0$ for $j = 1, 2$ and

$$K_{3,3}^*(x) = \frac{1}{|\Lambda|} \left(\int_{\Lambda^S} K^S(x, y') dy' + \frac{\sigma}{2} \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(s', y') |s' - y'|^2 dy' ds' \right).$$

Remark 3.3. As usual in homogenization, Proposition 3.1 gives a complete characterization of the two first terms $T_0(x) + \epsilon T_1(x, \frac{x'}{\epsilon})$ of the ansatz (23). With such an approximation, not only do we have a correct estimate of the temperature $T_{\epsilon}(x)$ but also of its gradient (or of the heat flux) since it implies $\nabla T_{\epsilon}(x) \approx \nabla T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, \frac{x'}{\epsilon})$ (in this last formula the corrector $\nabla_{y'} T_1$ is of order 1 and can not be ignored).

The proof of Proposition 3.1 shall require the consideration of the second order corrector T_2 but we are not interested in its precise evaluation since it is much smaller and negligible in the numerical examples.

PROOF of Proposition 3.1

All the difficulties are concentrated on the radiation term in which simplifications must necessarily take place because it is formally dominating as ϵ goes to zero. Consequently, instead of using the formal method of two scale asymptotic expansions in the strong form of problem (8), which is complicated because of the non-local boundary condition (the radiation term), we follow the lead of [3] (based on an original idea of J.-L. Lions [26]) and use a two scale asymptotic expansion in the variational formulation of (8), taking advantage of its symmetry. This trick allows us to truncate the ansatz at a lower order term and considerably simplifies the computations.

The variational formulation of problem (8) is: find $T_\epsilon \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$ such that

$$a_\epsilon(T_\epsilon, \phi_\epsilon) = L_\epsilon(\phi_\epsilon) \text{ for any } \phi_\epsilon \in H_0^1(\Omega_\epsilon), \quad (29)$$

where

$$\begin{aligned} a_\epsilon(T_\epsilon, \phi_\epsilon) = & \int_{\Omega_\epsilon^S} K_\epsilon^S(x) \nabla T_\epsilon(x) \cdot \nabla \phi_\epsilon(x) dx + \epsilon \int_{\Omega_\epsilon^F} K_\epsilon^F(x) \nabla T_\epsilon(x) \cdot \nabla \phi_\epsilon(x) dx \\ & + \int_{\Omega_\epsilon^F} V_\epsilon(x) \cdot \nabla T_\epsilon(x) \phi_\epsilon(x) dx + \frac{\sigma}{\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} G_\epsilon(T_\epsilon)(x) \phi_\epsilon(x) dx \end{aligned}$$

and

$$L_\epsilon(\phi_\epsilon) = \int_{\Omega_\epsilon^S} f(x) \phi_\epsilon(x) dx.$$

We choose ϕ_ϵ of the same form as T_ϵ in (23) (but without remainder term)

$$\phi_\epsilon(x) = \phi_0(x) + \epsilon \phi_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) + \epsilon^2 \phi_2(x, \frac{x'}{\epsilon}) \quad (30)$$

with smooth functions $\phi_0(x)$ and $\phi_i(x, y')$, $i = 1, 2$, being Λ -periodic in y' and such that

$$\phi_i(x, y') = \begin{cases} \phi_i^S(x, y') & \text{in } \Omega \times \Lambda^S, \\ \phi_i^F(x, y') & \text{in } \Omega \times \Lambda^F. \end{cases}$$

We also assume that $\phi_0(x)$ and $\phi_i(x, y')$ have compact support in $x \in \Omega$.

Inserting the ansatz (23) and (30) in the variational formulation (29) yields

$$a^0(T_0, T_1, \phi_0, \phi_1) + \epsilon a^1(T_0, T_1, T_2, \phi_0, \phi_1, \phi_2) = L^0(\phi_0, \phi_1) + \epsilon L^1(\phi_0, \phi_1, \phi_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (31)$$

The non-conventional strategy of the proof is the following: not only we identify the zero-order term $a^0 = L^0$ but we also use the first-order identity $a^1 = L^1$. The zero-order identity, $a^0(T_0, T_1, \phi_0, \phi_1) = L^0(\phi_0, \phi_1)$, allows us to find the homogenized problem for T_0 in Ω and the cell problem for T_1^S in $\Omega \times \Lambda^S$. The first-order identity $a^1(T_0, T_1, T_2, \phi_0, \phi_1, \phi_2) = L^1(\phi_0, \phi_1, \phi_2)$ yields the cell problem for T_1^F in $\Omega \times \Lambda^F$. We emphasize that it is crucial, for the identification of the first-order term, that the test functions $(\phi_i)_{i=0,1,2}$ have compact supports. Indeed, in view of Lemma 2.1, the 3D to 2D asymptotic of the view factor has a sufficiently small remainder term only for compactly supported test functions.

For the sake of clarity we divide the proof in three steps. The first step is devoted to the ansatz for the convection and diffusion terms. The second one focuses on the radiation term, while the third one combines these various terms to deduce the cell and homogenized problems by identifying equations of the same order in powers of ϵ .

We now give the details of the proof. We rewrite the variational formulation(29) as

$$a_\epsilon(T_\epsilon, \phi_\epsilon) = a_\epsilon^C(T_\epsilon, \phi_\epsilon) + a_\epsilon^{Rad}(T_\epsilon, \phi_\epsilon) = L_\epsilon(\phi_\epsilon)$$

where

$$\begin{aligned}
a_\epsilon^C(T_\epsilon, \phi_\epsilon) &= \int_{\Omega_\epsilon^S} K_\epsilon^S(x) \nabla T_\epsilon(x) \cdot \nabla \phi_\epsilon(x) dx + \epsilon \int_{\Omega_\epsilon^F} K_\epsilon^F(x) \nabla T_\epsilon(x) \cdot \nabla \phi_\epsilon(x) dx \\
&\quad + \int_{\Omega_\epsilon^F} V_\epsilon(x) \cdot \nabla T_\epsilon(x) \phi_\epsilon(x) dx \\
a_\epsilon^{Rad}(T_\epsilon, \phi_\epsilon) &= \frac{\sigma}{\epsilon} \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} G_\epsilon(T_\epsilon)(x) \phi_\epsilon(x) dx.
\end{aligned} \tag{32}$$

Step 1 : Expansion of $a_\epsilon^C - L_\epsilon$

This is a standard calculation. Plugging the ansatz (23) and (30) we obtain

$$\begin{aligned}
a_\epsilon^C - L_\epsilon &= \\
&\int_{\Omega_\epsilon^S} K_\epsilon^S [(\nabla_x T_0 + \nabla_{y'} T_1) \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1)] + \int_{\Omega_\epsilon^F} V_\epsilon \cdot (\nabla_x T_0 + \nabla_{y'} T_1) \phi_0 \\
&+ \epsilon \left[\int_{\Omega_\epsilon^S} K_\epsilon^S [(\nabla_x T_1 + \nabla_{y'} T_2) \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) + (\nabla_x \phi_1 + \nabla_{y'} \phi_2) \cdot (\nabla_x T_0 + \nabla_{y'} T_1)] + \right. \\
&\left. \int_{\Omega_\epsilon^F} K_\epsilon^F (\nabla_x T_0 + \nabla_{y'} T_1) \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) + \int_{\Omega_\epsilon^F} V_\epsilon \cdot [(\nabla_x T_1 + \nabla_{y'} T_2) \phi_0 + (\nabla_x T_0 + \nabla_{y'} T_1) \phi_1] \right] \\
&- \int_{\Omega_\epsilon^S} f(\phi_0 + \epsilon \phi_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{33}$$

where all functions are evaluated at $(x, x'/\epsilon)$. Using Lemma 3.2 below, we deduce

$$\begin{aligned}
|\Lambda|(a_\epsilon^C - L_\epsilon) &= \\
&\int_{\Omega} \int_{\Lambda^S} K^S(x, y') (\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_{y'} \phi_1(x, y')) dy' dx \\
&+ \int_{\Omega} \int_{\Lambda^F} V(x, y') \cdot \nabla_x T_0(x) \phi_0(x) dy' dx - \int_{\Omega} \int_{\Lambda^S} f(x) \phi_0(x) dy' dx \\
&+ \epsilon \left[\int_{\Omega} \int_{\Lambda^S} K^S(x, y') [(\nabla_x T_1(x, y') + \nabla_{y'} T_2(x, y')) \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_{y'} \phi_1(x, y')) \right. \\
&\quad \left. + (\nabla_x \phi_1(x, y') + \nabla_{y'} \phi_2(x, y')) \cdot (\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) \right] dy' dx \\
&+ \int_{\Omega} \int_{\Lambda^F} K^F(x, y') (\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_{y'} \phi_1(x, y')) dy' dx \\
&+ \int_{\Omega} \int_{\Lambda^F} V(x, y') \cdot [\nabla_x T_1(x, y') \phi_0(x) + \nabla_x T_0(x) \phi_1(x, y') + \nabla_{y'} T_1(x, y') \phi_1(x, y')] dy' dx \\
&\quad \left. - \int_{\Omega} \int_{\Lambda^S} f(x) \phi_1(x, y') dy' dx \right] \\
&+ \mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{34}$$

Step 2 : Expansion of a_ϵ^{Rad}

A similar expansion in the 2D setting was carried out in [3]. However, the present 3D configuration is different since, the fluid holes being thin long cylinder, there is also a 3D to 2D transition (which

did not occur in [3]) taking place. The purpose of this second step is to write a Taylor expansion of the radiation operator, up to second order,

$$a_\epsilon^{Rad} = a_0^{rad} + \epsilon a_1^{rad} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (35)$$

Fortunately, as we shall see later, the term a_1^{rad} does play any role in the definition of the corrector T_1 in Λ^F . Therefore, we don't need to evaluate a_1^{rad} which, of course, significantly reduces the amount of tedious calculations. The radiation term is given by

$$a_\epsilon^{Rad} = \frac{\sigma}{\epsilon} \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \left[\int_{\Gamma_{\epsilon,i}} T_\epsilon(x) \phi_\epsilon(x) dx - \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} F(x, s) T_\epsilon(x) \phi_\epsilon(s) dx ds \right]. \quad (36)$$

In the ansatz (23) and (30) we make a Taylor expansion around each center of mass $x'_{0,i}$ of each boundary $\gamma_{\epsilon,i}$. To simplify the notations, we drop the label i and denote by x'_0 each $x'_{0,i}$. We also denote $(x' - x'_0)$ by $\epsilon h'$ and $(s' - x'_0)$ by $\epsilon l'$. Thus we get

$$T_\epsilon(x) = T_0(x'_0, x_3) + \epsilon \left(\nabla_{x'} T_0(x'_0, x_3) \cdot h' + T_1(x'_0, \frac{x'}{\epsilon}, x_3) \right) + \epsilon^2 \widehat{T}_{2,\epsilon}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (37)$$

$$\phi_\epsilon(s) = \phi_0(x'_0, s_3) + \epsilon \left(\nabla_{x'} \phi_0(x'_0, s_3) \cdot l' + \phi_1(x'_0, \frac{s'}{\epsilon}, s_3) \right) + \epsilon^2 \widehat{\phi}_{2,\epsilon}(s) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (38)$$

where

$$\widehat{T}_{2,\epsilon}(x) = \frac{1}{2} \nabla_{x'} \nabla_{x'} T_0(x'_0, x_3) h' \cdot h' + \nabla_{x'} T_1(x'_0, \frac{x'}{\epsilon}, x_3) \cdot h' + T_2(x'_0, \frac{x'}{\epsilon}, x_3)$$

$$\widehat{\phi}_{2,\epsilon}(s) = \frac{1}{2} \nabla_{x'} \nabla_{x'} \phi_0(x'_0, s_3) l' \cdot l' + \nabla_{x'} \phi_1(x'_0, \frac{s'}{\epsilon}, s_3) \cdot l' + \phi_2(x'_0, \frac{s'}{\epsilon}, s_3)$$

The precise form of the terms $\widehat{T}_{2,\epsilon}$ and $\widehat{\phi}_{2,\epsilon}$ is not important since the $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ -order terms will disappear by simplification as we shall see later. Using (37) and (38), we obtain

$$T_\epsilon(x) \phi_\epsilon(s) = (T\phi)_0(x_3, s_3) + \epsilon (T\phi)_1(x, s) + \epsilon^2 (T\phi)_2(x, s) + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

where

$$(T\phi)_0(x_3, s_3) = \phi_0(x'_0, s_3) T_0(x'_0, x_3)$$

$$\begin{aligned} (T\phi)_1(x, s) &= \phi_0(x'_0, s_3) \nabla_{x'} T_0(x'_0, x_3) \cdot h' + T_0(x'_0, x_3) \nabla_{x'} \phi_0(x'_0, s_3) \cdot l' \\ &+ \phi_0(x'_0, s_3) T_1(x'_0, \frac{x'}{\epsilon}, x_3) + \phi_1(x'_0, \frac{s'}{\epsilon}, s_3) T_0(x'_0, x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (T\phi)_2(x, s) &= \phi_1(x'_0, \frac{s'}{\epsilon}, s_3) T_1(x'_0, \frac{x'}{\epsilon}, x_3) + \widehat{T}_{2,\epsilon} \phi_0(x'_0, s_3) + \widehat{\phi}_{2,\epsilon} T_0(x'_0, x_3) \\ &+ \nabla_{x'} \phi_0(x'_0, s_3) \cdot l' \nabla_{x'} T_0(x'_0, s_3) \cdot h' + \phi_1(x'_0, \frac{s'}{\epsilon}, s_3) \nabla_{x'} T_0(x'_0, s_3) \cdot h' \\ &+ T_1(x'_0, \frac{x'}{\epsilon}, x_3) \nabla_{x'} \phi_0(x'_0, s_3) \cdot l' \end{aligned}$$

Since the test functions ϕ_i have compact support in Ω , we can use formula (16) of Lemma 2.1 (or formula (22) of Remark 2.5) for the 3D to 2D asymptotic behavior of the view factor. Thus we deduce

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} (T\phi)_0(x_3, s_3) F(s, x) ds dx &= \int_{\gamma_{\epsilon,i}} \int_{\gamma_{\epsilon,i}} F^{2D}(s', x') \int_0^{L_3} (T\phi)_0(x_3, x_3) dx_3 \\ &- \frac{1}{2} \int_{\gamma_{\epsilon,i}} \int_{\gamma_{\epsilon,i}} F^{2D}(s', x') |x' - s'|^2 \int_0^{L_3} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_3}(x'_0, x_3) \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x'_0, x_3) dx_3 + |\gamma_{\epsilon,i}|^2 \mathcal{O}(\epsilon^{p-1}), \end{aligned}$$

with $0 < p < 3$. Then, since $|\gamma_{\epsilon,i}| = \epsilon|\gamma|$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{\Gamma_{\epsilon,i}} (T\phi)_0(x_3, x_3) ds - \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} (T\phi)_0(x_3, s_3) F(s, x) ds dx \right) \\ &= \frac{1}{2\epsilon} \int_{\gamma_{\epsilon,i}} \int_{\gamma_{\epsilon,i}} F^{2D}(s', x') |x' - s'|^2 \int_0^{L_3} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_3}(x'_0, x_3) \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x'_0, x_3) dx_3 + |\gamma|^2 \mathcal{O}(\epsilon^p). \end{aligned} \quad (39)$$

A similar computation, taking into account the various symmetry properties of the view factor, yields

$$\frac{1}{\epsilon} \left(\int_{\Gamma_{\epsilon,i}} \epsilon (T\phi)_1(x, x) ds - \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} \epsilon (T\phi)_1(x, s) F(s, x) ds dx \right) = \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (40)$$

and

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{\Gamma_{\epsilon,i}} \epsilon^2 (T\phi)_2(x, x) ds - \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} \epsilon^2 (T\phi)_2(x, s) F(s, x) ds dx \right) \\ &= \epsilon \left(\int_0^{L_3} \int_{\gamma_{\epsilon,i}} \phi_1(x'_0, \frac{s'}{\epsilon}, x_3) \left[T_1(x'_0, \frac{s'}{\epsilon}, x_3) - \int_{\gamma_{\epsilon,i}} T_1(x'_0, \frac{x'}{\epsilon}, x_3) F^{2D}(s', x') dx' \right] ds' dx_3 \right. \\ &+ \int_0^{L_3} \int_{\gamma_{\epsilon,i}} (\nabla_{x'} \phi_0(x'_0, x_3) \cdot l') \nabla_{x'} T_0(x'_0, x_3) \cdot \left[l' - \int_{\gamma_{\epsilon,i}} h' F^{2D}(s', x') dx' \right] ds' dx_3 \\ &+ \int_0^{L_3} \int_{\gamma_{\epsilon,i}} \nabla_{x'} \phi_0(x'_0, x_3) \cdot l' \left[T_1(x'_0, \frac{s'}{\epsilon}, x_3) - \int_{\gamma_{\epsilon,i}} T_1(x'_0, \frac{x'}{\epsilon}, x_3) F^{2D}(s', x') dx' \right] ds' dx_3 \\ &\left. + \int_0^{L_3} \int_{\gamma_{\epsilon,i}} \phi_1(x'_0, \frac{s'}{\epsilon}, x_3) \nabla_{x'} T_0(x'_0, x_3) \cdot \left[l' - \int_{\gamma_{\epsilon,i}} h' F^{2D}(s', x') dx' \right] ds' dx_3 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (41)$$

In (40) and (41), we do not give the explicit form of the remainder terms (including the diffusive term coming from the 3D to 2D limit in the view factor) which are negligible after rescaling and summation over all cells as soon as they are of order $\mathcal{O}(\epsilon^q)$ with $q > 2$.

Thus Lemma 3.2, the changes of variables $y' = x'/\epsilon$ and $z' = s'/\epsilon$ in (39), (40), (41) and summing over all cells, yields

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \left[\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} T_\epsilon(x) \phi_\epsilon(x) dx - \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} T_\epsilon(x) \phi_\epsilon(s) F(s, x) ds dx \right] = a_0^{rad} + \mathcal{O}(\epsilon^{p-2}) \quad (42)$$

with

$$\begin{aligned} a_0^{rad} &= \frac{\sigma}{|\Lambda|} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\partial \phi_0}{\partial x_3}(x) \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x) dx \int_\gamma \int_\gamma F^{2D}(z', y') |z' - y'|^2 dy' dz' \right. \\ &+ \int_\Omega \nabla_{x'} \phi_0(x) \cdot \int_\gamma \left(h' \otimes h' - \int_\gamma h' \otimes l' F^{2D}(z', y') dz' \right) dy' \nabla_{x'} T_0(x) dx \\ &+ \int_\Omega \nabla_{x'} T_0(x) \cdot \int_\gamma \phi_1(x, y') \left(y' - \int_\gamma z' F^{2D}(z', y') dz' \right) dy' dx \\ &+ \int_\Omega \nabla_{x'} \phi_0(x) \cdot \int_\gamma T_1(x, y') \left(y' - \int_\gamma z' F^{2D}(z', y') dz' \right) dy' dx \\ &\left. + \int_\Omega \int_\gamma \int_\gamma (\delta(y' - z') - F^{2D}(y', z')) T_1(x, z') \phi_1(x, y') dz' dy' dx \right) \end{aligned} \quad (43)$$

where δ is the Dirac mass and $|\Lambda|$ is the surface measure of Λ . Remark that the last term in (43) can also be written

$$\int_{\gamma} \int_{\gamma} (\delta(y' - z') - F^{2D}(y', z')) T_1(x, z') \phi_1(x, y') dz' dy' = \int_{\gamma} \phi_1(x, y') \left((Id - \zeta^{2D}) T_1 \right) (x, y') dy'.$$

Remark 3.4. *As already said, in the spirit of our proof we should also compute the next order term a_1^{rad} in the asymptotic expansion $a_{\epsilon}^{Rad} = a_0^{rad} + \epsilon a_1^{rad} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. The computation of a_1^{rad} is tedious and require to carry the expansions of T_{ϵ} and ϕ_{ϵ} to one more order in ϵ , a formidable task that is not pursued here (similar computations can be found in [4] for a 2D-configuration). Fortunately, the radiation term contributes merely to the boundary condition for the cell problem in the solid part Λ^S and does not play any role for the cell problem in the fluid part Λ^F . Since the first-order terms a^1, L^1 are used to deduce the fluid cell problem, it is perfectly legitimate not to compute a_1^{rad} .*

Step 3 : Identification of the limit variational formulations

The zero-th order ϵ^0 -term of (31) is

$$a^0(T_0, T_1, \phi_0, \phi_1) = L^0(\phi_0, \phi_1)$$

which is equivalent to

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Lambda^S} K^S(x, y') (\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_{y'} \phi_1(x, y')) dy' dx \\ & + \int_{\Omega} \int_{\Lambda^F} V(x, y') \cdot \nabla_x T_0(x) \phi_0(x) dy' dx \\ & + \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_3}(x) \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x) dx \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(z', y') |z' - y'|^2 dy' dz' \\ & + \sigma \int_{\Omega} \nabla_{x'} T_0(x) \cdot \int_{\gamma} \phi_1(x, y') \left(y' - \int_{\gamma} z' F^{2D}(z', y') dz' \right) dy' dx \\ & + \sigma \int_{\Omega} \nabla_{x'} \phi_0(x) \cdot \int_{\gamma} T_1(x, y') \left(y' - \int_{\gamma} z' F^{2D}(z', y') dz' \right) dy' dx \\ & + \sigma \int_{\Omega} \nabla_{x'} \phi_0(x) \cdot \int_{\gamma} \left(h' \otimes h' - \int_{\gamma} h' \otimes l' F^{2D}(z', y') dz' \right) \nabla_{x'} T_0(x) dy' dx \\ & + \sigma \int_{\Omega} \int_{\gamma} \int_{\gamma} (\delta(y' - z') - F^{2D}(y', z')) T_1(x, z') \phi_1(x, y') dz' dy' dx \\ & = |\Lambda^S| \int_{\Omega} f(x) \phi_0(x) dx \end{aligned} \tag{44}$$

We recognize in (44) the variational formulation of the so-called two-scale limit problem which is a combination of the homogenized and cell problems (in Λ^S only).

We recover the cell problem in Λ^S by taking $\phi_0 = 0$ in the limit of the variational formulation (44)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Lambda^S} K^S(x, y') (\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) \cdot \nabla_{y'} \phi_1(x, y') dy' dx \\ & + \sigma \int_{\Omega} \nabla_{x'} T_0(x) \cdot \int_{\gamma} \phi_1(x, y') \left(y' - \int_{\gamma} z' F^{2D}(z', y') dz' \right) dy' dx \\ & + \sigma \int_{\Omega} \int_{\gamma} \int_{\gamma} (\delta(y' - z') - F^{2D}(y', z')) T_1(x, z') \phi_1(x, y') dz' dy' dx = 0 \end{aligned} \tag{45}$$

The solution T_1 of the above variational formulation is given by (28) in Λ^S where $\omega_j \equiv \omega_j^S(x, y')$, for $1 \leq j \leq 3$, are the solutions of the cell problems in the 2D solid media Λ^S

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{y'} P [K^S(x, y')(e_j + \nabla_{y'} \omega_j^S(y'))] & = 0 & \text{in } \Lambda^S \\ -P [K(x, y')(e_j + \nabla_{y'} \omega_j^S(y'))] \cdot n & = \sigma (Id - \zeta^{2D})(\omega_j^S(y') + y_j) & \text{on } \gamma \\ y' & \mapsto \omega_j^S(y') & \text{is } \Lambda\text{-periodic.} \end{cases} \quad (46)$$

Remark 3.5. *As already said, the macroscopic variable x plays the role of a parameter in (46). Therefore, for the sake of notational simplicity we shall often forget the dependence on x for the solutions ω_j of the cell problems.*

To recover the homogenized problem we now substitute ϕ_1 by 0 in (44). We obtain

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Lambda^S} \sum_{k,j=1}^3 K^S(x, y') (\nabla_{y'} \omega_k(y') + e_k) \cdot (\nabla_{y'} \omega_j(y') + e_j) \frac{\partial T_0}{\partial x_k}(x) \frac{\partial \phi_0}{\partial x_j}(x) dy' dx \\ & + \int_{\Omega} \int_{\Lambda^F} \sum_{k=1}^3 V_K(x, y') \frac{\partial T_0}{\partial x_k}(x) \phi_0(x) dy' dx \\ & + \frac{\sigma}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_3}(x) \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x) dx \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(z', y') |z' - y'|^2 dy' dz' \\ & + \sigma \int_{\Omega} \int_{\gamma} \sum_{k,j=1}^3 (Id - \zeta^{2D})(\omega_k(y') + y_k)(\omega_j(y') + y_j) \frac{\partial T_0}{\partial x_k}(x) \frac{\partial \phi_0}{\partial x_j}(x) dy' dx \\ & = |\Lambda^S| \int_{\Omega} f(x) \phi_0(x) dx \end{aligned} \quad (47)$$

which is the variational formulation of the homogenized problem (25) where K^* and V^* are given by the formulas of Proposition 3.1.

We now turn to the first order ϵ^1 -term of (31) which yields the cell problem in Λ^F . Indeed, up to this point, the zero-th order term of (31) has given the cell problem in Λ^S , as well as the homogenized problem for T_0 in the domain Ω . Nonetheless, as we already said in Remark 3.3, we want to compute everywhere the corrector T_1 of the solution T_{ϵ} , not merely in the solid part. Therefore, we look at the next, ϵ^1 -order term of (31)

$$a^1(T_0, T_1, T_2, \phi_0, \phi_1, \phi_2) = L^1(\phi_0, \phi_1, \phi_2)$$

where we shall keep only the terms coming from the fluid part (those coming from the solid part will contribute to the determination of T_2 which we do not pursue here). It is equivalent to

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Lambda^S} K^S(x, y') \left[(\nabla_x T_1(x, y') + \nabla_{y'} T_2(x, y')) \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_{y'} \phi_1(x, y')) \right. \\ & + \left. (\nabla_x \phi_1(x, y') + \nabla_{y'} \phi_2(x, y')) \cdot (\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) \right] dy' dx \\ & + \int_{\Omega} \int_{\Lambda^F} K^F(x, y') (\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) \cdot (\nabla_x \phi_0(x) + \nabla_{y'} \phi_1(x, y')) dy' dx \\ & + \int_{\Omega} \int_{\Lambda^F} V(x, y') \cdot (\nabla_x T_1(x, y') \phi_0(x) + \nabla_x T_0(x) \phi_1(x, y') + \nabla_{y'} T_1(x, y') \phi_1(x, y')) dy' dx \\ & + a_1^{rad} \\ & = \int_{\Omega} \int_{\Lambda^S} f(x) \phi_1(x, y') dy' dx \end{aligned} \quad (48)$$

Note that, by virtue of Lemma 3.2, the approximation of an integral on $\Omega_\epsilon^{S,F}$ by a double integral on $\Omega \times \Lambda^{S,F}$ is of order ϵ^2 and thus does not interact with the first order ϵ^1 -term of (31).

In (48) we take $\phi_0 \equiv 0$ and $\phi_2 \equiv 0$ everywhere, and $\phi_1 = 0$ in Λ^S only. It thus becomes the variational formulation of

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{y'} P [K^F(x, y')(\nabla T_0 + \nabla_{y'} T_1)] + V(x, y') \cdot (\nabla_x T_0 + \nabla_{y'} T_1) = 0 & \text{in } \Lambda^F, \\ T_1 \text{ is continuous through } \gamma. \end{cases} \quad (49)$$

Therefore, the solution T_1 of (49) is given by (28) in Λ^F where $\omega_j \equiv \omega_j^F(x, y')$, for $1 \leq j \leq 3$, are the solutions of the cell problems in Λ^F

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{y'} P [K^F(x, y')(e_j + \nabla_{y'} \omega_j^F(y'))] + V(x, y') \cdot (e_j + \nabla_{y'} \omega_j^F(y')) = 0 & \text{in } \Lambda^F \\ \omega_j^F = \omega_j^S & \text{on } \gamma \\ y' \mapsto \omega_j^F(y') \text{ is } \Lambda\text{-periodic.} \end{cases} \quad (50)$$

Combining (46) and (50), we get (27). ■

Lemma 3.1. *Each of the cell problems (27) admits a unique solution, up to a constant, in $H_{\#}^1(\Lambda)$.*

PROOF First, we recall that each cell problem in Λ is decoupled into two independent cell problems, (46) in Λ^S with a radiative boundary condition and (50) in Λ^F with a Dirichlet boundary condition.

For $\phi \in H_{\#}^1(\Lambda^S)$, the variational formulation of (46) is given by

$$\int_{\Lambda^S} K^S(x, y') (\nabla_{y'} \omega_i^S(y') + e_i) \cdot \nabla_{y'} \phi(y') + \int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D}) (\omega_i^S(y') + y'_i) \phi(y') = 0. \quad (51)$$

Using (11), we deduce that the bilinear form of (51) is coercive on $H_{\#}^1(\Lambda^S)/\mathbb{R}$

$$a(\phi, \phi) = \int_{\Lambda^S} K^S \nabla_{y'} \phi \cdot \nabla_{y'} \phi + \int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D}) \phi \phi \geq C \|\nabla_{y'} \phi\|_{L_{\#}^2(\Lambda^S)} \equiv C \|\phi\|_{H_{\#}^1(\Lambda^S)/\mathbb{R}}. \quad (52)$$

Furthermore, since (12) implies that (51) holds true when the test function ϕ is a constant, the Fredholm alternative (see [31]) yields existence and uniqueness in $H_{\#}^1(\Lambda^S)/\mathbb{R}$ (i.e., up to a constant) of the cell problem (46) solution.

The existence of a unique solution in $H_{\#}^1(\Lambda^F)$ of the fluid cell problems (50), with a non-homogeneous Dirichlet boundary condition, is completely standard for this simple convection-diffusion equation (note that, for our geometry in Figure 2, the periodic boundary condition does not appear in the fluid cell Λ^F). Of course, since ω_j^S is defined up to a constant, so is ω_j^F , but with the same constant. ■

We recall a classical lemma used in the proof of Proposition 3.1.

Lemma 3.2. *For a smooth function f and any integer $p \geq 0$ we have*

$$\begin{aligned} i. \quad & \int_{\gamma_{\epsilon, i}} f\left(\frac{x'}{\epsilon}\right) (x'_k - x'_{0,k})^p dx' = \epsilon^{1+p} \int_{\gamma} f(y') (y'_k - y'_{0,k})^p dy' \\ ii. \quad & \epsilon^2 \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \int_0^{L_3} f(x'_{0,i}, x_3) dx_3 = \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Omega} f(x) dx + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ iii. \quad & \int_{\Omega_{\epsilon}^{S,F}} f\left(x, \frac{x'}{\epsilon}\right) dx = \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Omega} \int_{\Lambda^{S,F}} f(x, y') dy' dx + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

PROOF The first formula is immediate by a simple change of variables. For the second one, we perform a Taylor expansion of $f(x')$ (which is assumed to be C^2) around $x'_{0,i}$ the center of mass of each cell $\Lambda_{\epsilon,i}$

$$f(x', x_3) = f(x'_{0,i}, x_3) + (x' - x'_{0,i}) \nabla_{x'} f(x'_{0,i}, x_3) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (53)$$

which becomes by integration in $\Lambda_{\epsilon,i}$

$$\int_{\Lambda_{\epsilon,i}} f(x', x_3) dx' = \epsilon^2 |\Lambda| f(x'_{0,i}, x_3) + \mathcal{O}(\epsilon^4)$$

because $|\Lambda_{\epsilon,i}| = \epsilon^2 |\Lambda|$ and $\int_{\Lambda_{\epsilon,i}} (x' - x'_{0,i}) dx' = 0$. After summation, and integration between 0 and L_3 in x_3 , we obtain the desired result. The third formula is obtained by using again (53) to get

$$\int_{\Omega_{\epsilon}^{S,F}} f(x, \frac{x'}{\epsilon}) dx = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \int_{\Lambda_{\epsilon,i}^{S,F}} \int_0^{L_3} f(x'_{0,i}, x_3, \frac{x'}{\epsilon}) dx' dx_3 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

and the final result is a consequence of the first and second formulas. \blacksquare

4 Convergence

The results of the previous section are only formal. They are based on the assumption that the temperature T_{ϵ} admits the asymptotic expansion (23). Therefore, to complete our study, we need a rigorous mathematical justification of Proposition 3.1. Here, we prove a convergence result using the two-scale convergence method [1], [30].

4.1 A priori estimates

To use the two-scale convergence method, we first need to establish some a priori estimates on the unknown T_{ϵ} .

Proposition 4.1. *Let T_{ϵ} be the solution of problem (8). There exists a constant C , not depending on ϵ , such that*

$$\|T_{\epsilon}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla T_{\epsilon}\|_{L^2(\Omega_{\epsilon}^S)} + \sqrt{\epsilon} \|\nabla T_{\epsilon}\|_{L^2(\Omega_{\epsilon}^F)} + \sqrt{\epsilon} \|T_{\epsilon}\|_{L^2(\Gamma_{\epsilon})} \leq C \quad (54)$$

PROOF Taking $\phi_{\epsilon} = T_{\epsilon}$ in the variational formulation (29) of (8) we obtain

$$\int_{\Omega_{\epsilon}^S} K_{\epsilon}^S |\nabla T_{\epsilon}|^2 dx + \epsilon \int_{\Omega_{\epsilon}^F} K_{\epsilon}^F |\nabla T_{\epsilon}|^2 dx + \int_{\Omega_{\epsilon}^F} V_{\epsilon} \cdot \nabla T_{\epsilon} T_{\epsilon} dx + \frac{\sigma}{\epsilon} \int_{\Gamma_{\epsilon}} G_{\epsilon}(T_{\epsilon}) T_{\epsilon} ds = \int_{\Omega_{\epsilon}^S} f T_{\epsilon} dx. \quad (55)$$

Since $\operatorname{div} V_{\epsilon} = 0$ in Ω_{ϵ}^F , $V_{\epsilon} \cdot n = 0$ on Γ_{ϵ} and $T_{\epsilon} = 0$ on $\partial\Omega$, we have

$$\int_{\Omega_{\epsilon}^F} V_{\epsilon} \cdot \nabla T_{\epsilon} T_{\epsilon} dx = 0.$$

Furthermore, since G_{ϵ} is a positive operator (see Lemma 2.1)

$$\int_{\Gamma_{\epsilon}} G_{\epsilon}(T_{\epsilon}) T_{\epsilon} ds \geq 0.$$

Consequently, by the coercivity of K_{ϵ} , we obtain

$$\|\nabla T_{\epsilon}\|_{L^2(\Omega_{\epsilon}^S)}^2 + \epsilon \|\nabla T_{\epsilon}\|_{L^2(\Omega_{\epsilon}^F)}^2 \leq C \|T_{\epsilon}\|_{L^2(\Omega_{\epsilon}^S)}. \quad (56)$$

Using Lemma 4.1 we deduce

$$\|\nabla T_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon^S)} \leq C. \quad (57)$$

On the other hand, using Lemma 4.3 and formula (56) yields

$$\begin{aligned} \|T_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left[\|T_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon^S)}^2 + \epsilon^2 \|\nabla T_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\leq C \left[1 + \epsilon \|\nabla T_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon^F)}^2 \right] \\ &\leq C \left[1 + \|T_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \right] \end{aligned}$$

(since $\epsilon < 1$) from which we deduce

$$\|T_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C. \quad (58)$$

By (58), and using (56) again, we get

$$\sqrt{\epsilon} \|\nabla T_\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon^F)} \leq C \quad (59)$$

Using (58) and (57) and Lemma 4.2 we deduce

$$\sqrt{\epsilon} \|T_\epsilon\|_{L^2(\Gamma_\epsilon)} \leq C. \quad (60)$$

Combining (57), (58), (59) and (60) we obtain the desired a priori estimate (54). \blacksquare

Lemma 4.1. (see Lemma A.4 in [5]) *There exists a constant $C > 0$, not depending on ϵ , such that for any function $u \in H^1(\Omega_\epsilon^S)$ satisfying $u = 0$ on $\partial\Omega \cap \partial\Omega_\epsilon^S$*

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\epsilon^S)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\epsilon^S)}.$$

Lemma 4.2. (see Lemma 4.2.4 in [3]) *There exists a constant $C > 0$, not depending on ϵ , such that*

$$\sqrt{\epsilon} \|u\|_{L^2(\Gamma_\epsilon)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega_\epsilon^S)} \quad \forall u \in H^1(\Omega_\epsilon^S). \quad (61)$$

Lemma 4.3. *There exists a constant $C > 0$, not depending on ϵ , such that*

$$\|u\|_{L^2(\Omega_\epsilon^F)} \leq C \left[\|u\|_{L^2(\Omega_\epsilon^S)} + \epsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \right] \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (62)$$

PROOF The proof of Lemma 4.3 is similar to those of the previous lemmas so we content ourselves in briefly sketching it. We denote by $Y = \Lambda \times (0, 1)$ a 3D unit cell and similarly $Y^{F,S} = \Lambda^{F,S} \times (0, 1)$. By an obvious rescaling and summation argument, it is enough to prove that there exists a constant C , not depending on ϵ , such that

$$\|u\|_{L^2(Y^F)}^2 \leq C \left[\|u\|_{L^2(Y^S)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(Y)}^2 \right] \quad \forall u \in H^1(Y). \quad (63)$$

We prove (63) by contradiction. Indeed, we suppose that it does not hold true, namely there exists a sequence $\phi_n \in H^1(Y)$, for $n \geq 1$, such that

$$\|\phi_n\|_{L^2(Y^F)} = 1 \quad \text{and} \quad \|\phi_n\|_{L^2(Y^S)}^2 + \|\nabla \phi_n\|_{L^2(Y)}^2 < \frac{1}{n}. \quad (64)$$

Up to a subsequence, ϕ_n converges weakly in $H^1(Y)$ to a limit ϕ , and by Rellich theorem this convergence is strong in $L^2(Y)$. However, (64) tells us that $\nabla \phi_n$ converges strongly to 0 in $L^2(Y)$. Therefore, $\nabla \phi = 0$ and ϕ is constant in Y . Once again, (64) implies that this constant is zero in Y^S but this is a contradiction with the fact that $\|\phi\|_{L^2(Y^F)} = \lim_n \|\phi_n\|_{L^2(Y^F)} = 1$. \blacksquare

4.2 Two scale convergence

In this section we first recall the notion of two-scale convergence [1], [30]. Here, since there is no periodicity in the third space direction, we slightly modify the definition of two-scale convergence (these changes do not affect the proofs in any essential way). Second, we prove a rigorous homogenization result, using the two-scale convergence method, to confirm the result obtained in the previous section.

Definition 4.1. *A bounded sequence u_ϵ in $L^2(\Omega)$ is said to two-scale converge to a function $u_0(x, y') \in L^2(\Omega \times \Lambda)$ if there exists a subsequence still denoted by u_ϵ such that*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\epsilon(x) \psi(x, \frac{x'}{\epsilon}) dx = \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Omega} \int_{\Lambda} u_0(x, y') \psi(x, y') dx dy' \quad (65)$$

for any Λ -periodic test function $\psi(x, y') \in L^2(\Omega; C_{\#}(\Lambda))$.

This notion of "two-scale convergence" makes sense because of the next compactness theorem [1], [30].

Theorem 4.1. *From each bounded sequence u_ϵ in $L^2(\Omega)$, we can extract a subsequence and there exists a limit $u_0(x, y') \in L^2(\Omega \times \Lambda)$ such that this subsequence two-scale converges to u_0 .*

The extension of Theorem 4.1 to bounded sequences in $H^1(\Omega)$ is given next.

Proposition 4.2. *From each bounded sequence u_ϵ in $H^1(\Omega)$, we can extract a subsequence and there exist two limits $u_0 \in H^1(\Omega)$ and $u_1(x, y') \in L^2(\Omega; H^1_{\#}(\Lambda))$ such that, for this subsequence, u_ϵ converges weakly to u_0 in $H^1(\Omega)$ and ∇u_ϵ two-scale converges to $\nabla_x u_0(x) + \nabla_{y'} u_1(x, y')$.*

Two-scale convergence can be extended to sequences defined on periodic surfaces [2], [29].

Proposition 4.3. *For any sequence u_ϵ in $L^2(\Gamma_\epsilon)$ such that*

$$\epsilon \int_{\Gamma_\epsilon} |u_\epsilon|^2 dx \leq C, \quad (66)$$

there exist a subsequence, still denoted u_ϵ , and a limit function $u_0(x, y') \in L^2(\Omega; L^2_{\#}(\gamma))$ such that u_ϵ two-scale converges to u_0 in the sense

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_{\Gamma_\epsilon} u_\epsilon(x) \psi(x, \frac{x'}{\epsilon}) dx = \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Omega} \int_{\gamma} u_0(x, y') \psi(x, y') dx dy' \quad (67)$$

for any Λ -periodic test function $\psi(x, y') \in L^2(\Omega; C_{\#}(\gamma))$.

Remark 4.1. *If u_ϵ is a bounded sequence in $H^1(\Omega_\epsilon)$, then the uniform bound (66) holds true. It is then easy to check that the two different two-scale limits u_0 given by Propositions 4.2 and 4.3 coincide [2].*

Our main results in this section is the following.

Theorem 4.2. *Let T_ϵ be the sequence of solutions of (8). Let $T_0(x)$ be the solution of the homogenized problem (25) and $T_1(x, y')$ be the first corrector defined by (28). Then T_ϵ two-scale converges to T_0 and $\chi_\epsilon^S \nabla T_\epsilon$ two-scale converges to $\chi^S(y')(\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y'))$ where $\chi_\epsilon^S(x) = \chi^S(x'/\epsilon)$ is the characteristic function of Ω_ϵ^S and $\chi^S(y')$ that of Λ^S .*

PROOF The a priori estimate (54) implies that, up to a subsequence, T_ϵ two-scale converges to a function $T_0 \in H_0^1(\Omega)$ and $\chi_\epsilon^S \nabla T_\epsilon$ two-scale converges to $\chi^S(y')(\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y'))$ where $T_1 \in L^2(\Omega; H_{\#}^1(\Lambda))$. Furthermore, T_ϵ two-scale converges to T_0 on the periodic surface Γ_ϵ , in the sense of Proposition 4.3.

Although we use the same notations, we still have to show that T_0 is a solution of the homogenized problem (25) and that T_1 is the first corrector defined by (28). Convergence of the entire sequence (and not merely of an extracted subsequence) will follow from the uniqueness of the solution of (25).

In a first step, we compute the corrector T_1 in terms of $\nabla_x T_0$ by choosing the test function $\phi_\epsilon(x) = \epsilon \phi_1(x, \frac{x'}{\epsilon})$, where $\phi_1(x, y')$ is any smooth function, compactly supported in x and Λ -periodic in y' , in the variational formulation (29) which becomes (using the self-adjoint character of G_ϵ)

$$\int_{\Omega_\epsilon^S} K_\epsilon^S \nabla T_\epsilon \cdot \nabla_{y'} \phi_1 + \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} T_\epsilon G_\epsilon(\phi_1) = o(1) \quad (68)$$

where, thanks to the a priori estimate (54), $o(1)$ is a small remainder term going to 0 with ϵ . By virtue of a lower order truncation of formula (15) in Lemma 2.1, the radiative operator can be approximated as

$$G_\epsilon(\phi_1) = (Id - \zeta_\epsilon)(\phi_1) = (Id - \zeta_\epsilon^{2D})(\phi_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Then, to pass to the two-scale limit in the radiative term, we rely on Lemma 4.4 below which gives us a smooth periodic vector-valued function $\theta(x, y')$ such that

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{y'} \theta(x, y') = 0 & \text{in } \Lambda^S, \\ \theta(x, y') \cdot n = (Id - \zeta^{2D})\phi_1(x, y') & \text{on } \gamma, \\ y' \rightarrow \theta(x, y') & \text{is } \Lambda\text{-periodic.} \end{cases}$$

Furthermore, $\theta(x, y')$ has the same compact support than $\phi_1(x, y')$ with respect to $x \in \Omega$. However, since ζ_ϵ^{2D} is an integral operator, we usually have a difference between the two terms below

$$\zeta_\epsilon^{2D} \left(\phi_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right) \neq \left(\zeta^{2D}(\phi_1(x, y')) \right) (y' = \frac{x'}{\epsilon}).$$

Therefore, we need to use a Taylor expansion of ϕ_1

$$\phi_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) = \phi_1(x_{0,i}, \frac{x'}{\epsilon}) + (x' - x'_{0,i}) \cdot \nabla_{x'} \phi_1(x_{0,i}, \frac{x'}{\epsilon}) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

where $x_{0,i} = (x'_{0,i}, x_3)$ and $x'_{0,i}$ is the center of mass of each boundary $\gamma_{\epsilon,i}$, defined by (1). Then, the following equality holds true

$$\zeta_\epsilon^{2D} \left(\phi_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right) = \left(\zeta^{2D}(\phi_1(x_{0,i}, y')) \right) (y' = \frac{x'}{\epsilon}) + \epsilon \left(\zeta^{2D}(y' \cdot \nabla_{x'} \phi_1(x_{0,i}, y')) \right) (y' = \frac{x'}{\epsilon}) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Then, we can rewrite the radiative term in (68) as

$$\sigma \int_{\Gamma_\epsilon} T_\epsilon G_\epsilon(\phi_1) = \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} T_\epsilon \theta(x_{0,i}, \frac{x'}{\epsilon}) \cdot n + \sigma \epsilon \int_{\Gamma_\epsilon} T_\epsilon \left((Id - \zeta^{2D})(y' \cdot \nabla_{x'} \phi_1(x_{0,i}, y')) \right) (y' = \frac{x'}{\epsilon}) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (69)$$

We can pass to the two-scale limit in the second term in the right hand side of (69) by applying Proposition 4.3 (replacing $y' \cdot \nabla_{x'} \phi_1(x_{0,i}, y')$ by the suitable two-scale test function $y' \cdot \nabla_{x'} \phi_1(x, y')$ up to another $\mathcal{O}(\epsilon)$ error). For the first term, we use a similar Taylor expansion for θ

$$\begin{aligned} \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} T_\epsilon \theta(x_{0,i}, \frac{x'}{\epsilon}) \cdot n &= \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} T_\epsilon \theta(x, \frac{x'}{\epsilon}) \cdot n - \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} T_\epsilon \left(y' \cdot \nabla_{x'} \theta(x, y') \right) (y' = \frac{x'}{\epsilon}) \cdot n + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= \sigma \int_{\Omega_\epsilon^S} \operatorname{div} \left(T_\epsilon \theta(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right) - \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} T_\epsilon \left(y' \cdot \nabla_{x'} \theta(x, y') \right) (y' = \frac{x'}{\epsilon}) \cdot n + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \quad (70)$$

For the second integral in (70) we can pass to the two-scale limit by another application of Proposition 4.3. Concerning the first integral, we develop

$$\operatorname{div} \left(T_\epsilon(x) \theta(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right) = \nabla T_\epsilon(x) \cdot \theta(x, \frac{x'}{\epsilon}) + T_\epsilon(x) (\operatorname{div}_x \theta)(x, \frac{x'}{\epsilon}),$$

and we can pass to the two-scale limit, thanks to Proposition 4.2. All in all, after some integration by parts, and recalling that $\ker(Id - \zeta^{2D}) = \mathbb{R}$, we get

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} T_\epsilon G_\epsilon(\phi_1) &= \frac{\sigma}{|\Lambda|} \int_\Omega \int_{\Lambda^S} \left(\theta(x, y') \cdot (\nabla T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) + T_0(x) \operatorname{div}_x \theta(x, y') \right) dy' dx \\ &+ \frac{\sigma}{|\Lambda|} \int_\Omega \int_\gamma T_0(x) \left((Id - \zeta^{2D})(y' \cdot \nabla_{x'} \phi_1(x, y')) - y' \cdot \nabla_{x'} \theta(x, y') \right) dy' dx \\ &= \frac{\sigma}{|\Lambda|} \int_\Omega \int_\gamma \theta(x, y') \cdot n \left(T_1(x, y') + y' \cdot \nabla_{x'} T_0(x) \right) dy' dx \\ &= \frac{\sigma}{|\Lambda|} \int_\Omega \int_\gamma (Id - \zeta^{2D})(\phi_1(x, y')) \left(T_1(x, y') + y' \cdot \nabla_{x'} T_0(x) \right) dy' dx. \end{aligned}$$

Therefore, the two-scale limit of (68) is

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \int_{\Lambda^S} K^S(x, y') (\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')) \cdot \nabla_{y'} \phi_1(x, y') dy' dx \\ &+ \sigma \int_\Omega \int_\gamma (Id - \zeta^{2D}) \phi_1(x, y') \left(T_1(x, y') + y' \cdot \nabla_{x'} T_0(x) \right) dy' dx = 0 \end{aligned}$$

which is precisely the variational formulation (45) for T_1 . Therefore, we have proved that

$$T_1(x, y') = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_0}{\partial x_k}(x) \omega_k(y') \quad \text{in } \Omega \times \Lambda^S.$$

Remark that our convergence proof does not justify formula (28) for $T_1(x, y')$ in the fluid part $\Omega \times \Lambda^F$.

Remark 4.2. *The first step of our proof (which gives formula (28) for $T_1(x, y')$) was missing in the proof of Theorem 4.6 in [3]. Our above argument works also in the simpler 2D setting of [3] and is thus filling this gap.*

In a second step, we recover the homogenized problem for T_0 by choosing another test function $\phi_\epsilon(x)$ in the variational formulation (29) given by

$$\phi_\epsilon(x) = \phi_0(x) + \epsilon \phi_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) \quad \text{with} \quad \phi_1(x, y') = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) \omega_k(y')$$

where $\phi_0 \in C_c^\infty(\Omega)$ and ω_j are solutions of the cell problems (27). The variational formulation (29) becomes

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\epsilon^S} K_\epsilon^S \nabla T_\epsilon \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) + \epsilon \int_{\Omega_\epsilon^F} K_\epsilon^F \nabla T_\epsilon \cdot (\nabla \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) \\ &+ \int_{\Omega_\epsilon^F} V_\epsilon \cdot \nabla T_\epsilon (\phi_0 + \epsilon \phi_1) + \frac{\sigma}{\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} G_\epsilon(T_\epsilon) (\phi_0 + \epsilon \phi_1) = \int_{\Omega_\epsilon^S} f \phi_0 + o(1) \end{aligned} \quad (71)$$

where $o(1)$ is a small remainder term going to 0 with ϵ . Passing to the two-scale limit in all terms, except the radiative one, is standard (see [1] if necessary). Therefore, we focus only on the radiative term

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} G_\epsilon(T_\epsilon)(\phi_0 + \epsilon\phi_1) = \frac{\sigma}{\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} T_\epsilon G_\epsilon(\phi_0 + \epsilon\phi_1) \quad (72)$$

for which we generalize an argument of [3]. We write a Taylor expansion of ϕ_ϵ , with respect to the macroscopic variable only, around the center of mass $x_{0,i} = (x'_{0,i}, x_3)$ of each boundary $\gamma_{\epsilon,i}$ (for conciseness we drop the index i in the sequel)

$$\begin{aligned} \phi_\epsilon(x) &= \phi_0(x_0) + \nabla_{x'}\phi_0(x_0) \cdot (x' - x'_0) + \epsilon\phi_1(x_0, \frac{x'}{\epsilon}) + \epsilon\nabla_{x'}\phi_1(x_0, \frac{x'}{\epsilon}) \cdot (x' - x'_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\nabla_{x'}\nabla_{x'}\phi_0(x_0)(x' - x'_0) \cdot (x' - x'_0) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned}$$

We go up to second order in this Taylor expansion since, upon dividing by ϵ as in (72) and summing over all boundaries $\gamma_{\epsilon,i}$, they will have a non-zero limit according to Proposition 4.3. Recall that the solution of the cell problem ω_3^S in the x_3 direction is a constant in Λ^S (see Remark 3.2): we can choose this constant to be zero so that $\omega_3^S(y') = 0$ in Λ^S and thus on the boundary γ too. Therefore, in the boundary integral (72) we can write that the test function ϕ_1 is just

$$\phi_1(x, y') = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial\phi_0}{\partial x_k}(x)\omega_k(y') \quad \text{on } \gamma,$$

without any contribution in the x_3 direction. Thus, the radiation term is given by

$$\frac{1}{\epsilon}G_\epsilon(\phi_0 + \epsilon\phi_1)(x) = \frac{1}{\epsilon}(Id - \zeta_\epsilon)(\phi_0 + \epsilon\phi_1)(x) = \epsilon\left(\psi_{0,\epsilon}(x) + \psi_{1,\epsilon}(x) + \psi_{2,\epsilon}(x) + \mathcal{O}(\epsilon)\right)$$

where

$$\begin{aligned} \psi_{0,\epsilon}(x) &= \frac{1}{\epsilon^2}(Id - \zeta_\epsilon)\phi_0(x_0) \\ \psi_{1,\epsilon}(x) &= \frac{1}{\epsilon} \sum_{k=1}^2 (Id - \zeta_\epsilon) \left[\left(\omega_k\left(\frac{x'}{\epsilon}\right) + \frac{x_k - x_{0,k}}{\epsilon} \right) \frac{\partial\phi_0}{\partial x_k}(x_0) \right] \\ \psi_{2,\epsilon}(x) &= (Id - \zeta_\epsilon) \left[\frac{1}{2}\nabla_{x'}\nabla_{x'}\phi_0(x_0) \cdot \frac{(x' - x'_0)}{\epsilon} \otimes \frac{(x' - x'_0)}{\epsilon} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^2 \nabla_{x'} \frac{\partial\phi_0}{\partial x_k}(x_0) \cdot \left(\frac{(x' - x'_0)}{\epsilon} \omega_k\left(\frac{x'}{\epsilon}\right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (73)$$

Remark 4.3. *At this point, for simplicity we assume that the periodic diffusion coefficients $K^{S,F}$ and the velocity V do not depend on x . Otherwise, this would add further terms in (73) corresponding to the x derivatives of the cell solutions ω_k . Our arguments would still work but we prefer to simplify the exposition.*

The term $\psi_{0,\epsilon}$ is new compared to the 2D setting in [3] (where it was vanishing). Furthermore, the main additional difficulty with respect to [3] is that we need to approximate the 3D view factor in ζ_ϵ by the 2D view factor which is appearing in the homogenized limit. For this goal we rely on Lemma 2.1. First, by virtue of (15), for any $0 < p < 3$ we have

$$\psi_{0,\epsilon}(x) = -\frac{1}{2\epsilon^2} \frac{\partial^2\phi_0}{\partial x_3^2}(x_0) \int_{\gamma_{\epsilon,i}} F^{2D}(s', x') |x' - s'|^2 ds' + \mathcal{O}(\epsilon^{p-2}).$$

Second, by a lower order truncation of (15), and since ω_k does not depend on x_3 ,

$$\psi_{1,\epsilon}(x) = \frac{1}{\epsilon} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x_0) (Id - \zeta_\epsilon^{2D}) \left(\omega_k \left(\frac{x'}{\epsilon} \right) + \frac{x_k - x_{0,k}}{\epsilon} \right) + \mathcal{O}(\epsilon)$$

and

$$\begin{aligned} \psi_{2,\epsilon}(x) &= \frac{1}{2} \nabla_{x'} \nabla_{x'} \phi_0(x_0) \cdot (Id - \zeta_\epsilon^{2D}) \left(\frac{(x' - x'_0)}{\epsilon} \otimes \frac{(x' - x'_0)}{\epsilon} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 \nabla_{x'} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x_0) \cdot (Id - \zeta_\epsilon^{2D}) \left(\frac{(x' - x'_0)}{\epsilon} \omega_k \left(\frac{x'}{\epsilon} \right) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

In order to recover continuous functions, we use the following Taylor expansions

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x_0) = \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) - \nabla_{x'} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) \cdot (x' - x'_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_3^2}(x_0) = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_3^2}(x) + \mathcal{O}(\epsilon).$$

We get

$$\psi_{0,\epsilon}(x) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_3^2}(x) \int_{\gamma_{\epsilon,i}} F^{2D}(s', x') \frac{|x' - s'|^2}{\epsilon^2} ds' + \mathcal{O}(\epsilon^{p-2}),$$

$$\psi_{1,\epsilon}(x) = \frac{1}{\epsilon} \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) - \nabla_{x'} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) \cdot (x' - x'_0) \right) (Id - \zeta_\epsilon^{2D}) \left(\omega_k \left(\frac{x'}{\epsilon} \right) + \frac{x_k - x_{0,k}}{\epsilon} \right) + \mathcal{O}(\epsilon),$$

$$\begin{aligned} \psi_{2,\epsilon}(x) &= \frac{1}{2} \nabla_{x'} \nabla_{x'} \phi_0(x) \cdot (Id - \zeta_\epsilon^{2D}) \left(\frac{(x' - x'_0)}{\epsilon} \otimes \frac{(x' - x'_0)}{\epsilon} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 \nabla_{x'} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) \cdot (Id - \zeta_\epsilon^{2D}) \left(\frac{(x' - x'_0)}{\epsilon} \omega_k \left(\frac{x'}{\epsilon} \right) \right) + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned}$$

The leading term of $\psi_{0,\epsilon}(x)$ is precisely an oscillating test function for two-scale convergence

$$\psi_{0,\epsilon}(x) = \psi_0 \left(x, \frac{x'}{\epsilon} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^{p-2}) \quad \text{with} \quad \psi_0(x, y') = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_3^2}(x) \int_{\gamma} F^{2D}(z', y') |y' - z'|^2 dz'. \quad (74)$$

The same is true for $\psi_{2,\epsilon}(x)$ which is also an oscillating test function for two-scale convergence

$$\psi_{2,\epsilon}(x) = \psi_2 \left(x, \frac{x'}{\epsilon} \right) + \mathcal{O}(\epsilon)$$

with

$$\psi_2(x, y') = \frac{1}{2} \nabla_{x'} \nabla_{x'} \phi_0(x) \cdot (Id - \zeta^{2D}) (y' \otimes y') + \sum_{k=1}^2 \nabla_{x'} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) \cdot (Id - \zeta^{2D}) (y' \omega_k(y')).$$

Rewriting the radiative term (72) as

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} T_\epsilon G_\epsilon (\phi_0 + \epsilon \phi_1) = \sigma \epsilon \int_{\Gamma_\epsilon} T_\epsilon \left(\psi_{0,\epsilon}(x) + \psi_{1,\epsilon}(x) + \psi_{2,\epsilon}(x) + \mathcal{O}(\epsilon) \right), \quad (75)$$

we can pass to the two-scale limit in the first and third term in the right hand side of (75) by application of Proposition 4.3. We obtain

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sigma \epsilon \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} \psi_{0,\epsilon} T_\epsilon = \frac{-\sigma}{2|\Lambda|} \int_{\Omega} T_0(x) \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_3^2}(x) \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(y', z') |y' - z'|^2 dy' dz' dx. \quad (76)$$

and

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sigma \epsilon \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} \psi_{2,\epsilon} T_\epsilon = \frac{\sigma}{|\Lambda|} \int_{\Omega} T_0(x) \int_{\gamma} \psi_2(x, y') dy' dx = 0 \quad (77)$$

because, by the second property of Lemma 2.1, we have $\int_{\gamma} \psi_2(x, y') dy' = 0$.

It remains to pass to the limit in the second term of (75) involving $\psi_{1,\epsilon}$. Following [3] we use the classical trick of H -convergence [28] which amounts to make a comparison with the variational formulation of the cell problems (46) with the test function $T_\epsilon \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}$ (recall that ϕ_0 has compact support). From (46), after rescaling and integration with respect to x_3 , we obtain for $k = 1, 2$

$$\sigma \int_{\Gamma_\epsilon} (Id - \zeta_\epsilon^{2D}) \left(\omega_k \left(\frac{x'}{\epsilon} \right) + \frac{x_k - x_{0,k}}{\epsilon} \right) \left(T_\epsilon \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k} \right) = - \int_{\Omega_\epsilon^S} K_\epsilon^S \left(\nabla_{y'} \omega_k \left(\frac{x'}{\epsilon} \right) + e_k \right) \cdot \nabla_{x'} \left(T_\epsilon \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k} \right),$$

which implies

$$\begin{aligned} \epsilon \sigma \int_{\Gamma_\epsilon} \psi_{1,\epsilon}(x) T_\epsilon(x) &= - \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_\epsilon^S} K_\epsilon^S \left(\nabla_{y'} \omega_k \left(\frac{x'}{\epsilon} \right) + e_k \right) \cdot \nabla_{x'} \left(T_\epsilon \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k} \right) \\ &- \sigma \epsilon \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_\epsilon} (Id - \zeta_\epsilon^{2D}) \left(\omega_k \left(\frac{x'}{\epsilon} \right) + \frac{x_k - x_{0,k}}{\epsilon} \right) \left(\nabla_{x'} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) \cdot \frac{x' - x'_0}{\epsilon} \right) T_\epsilon. \end{aligned} \quad (78)$$

It is now possible to pass to the two-scale limit in the right hand side of (78) and, summing up those limits, we deduce

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} G_\epsilon(T_\epsilon)(\phi_0 + \epsilon \phi_1) \\ &= \frac{-\sigma}{2|\Lambda|} \int_{\Omega} T_0(x) \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_3^2}(x) \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(y', z') |y' - z'|^2 dy' dz' dx \\ &- \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \int_{\Lambda^S} K^S(e_k + \nabla_{y'} \omega_k(y')) \cdot \left(\nabla_{x'} (T_0 \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k})(x) + \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k}(x) \nabla_{y'} T_1(x, y') \right) dy' dx \\ &- \frac{\sigma}{|\Lambda|} \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D})(\omega_k + y_k) y' \cdot \nabla_{x'} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_k} T_0 dy' dx \\ &= \frac{-\sigma}{2|\Lambda|} \int_{\Omega} T_0(x) \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_3^2}(x) \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(y', z') |y' - z'|^2 dy' dz' dx \\ &- \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Omega} \int_{\Lambda^S} K^S(\nabla_{x'} T_0 + \nabla_{y'} T_1) \cdot (\nabla_{x'} \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) dy' dx - \int_{\Omega} K^* T_0 \nabla_{x'} \nabla_{x'} \phi_0 dx. \\ &= \int_{\Omega} K^*(x) \nabla_x T_0(x) \cdot \nabla_x \phi_0(x) dx - \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Omega} \int_{\Lambda^S} K^S(\nabla_x T_0 + \nabla_{y'} T_1) \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) dy' dx \end{aligned} \quad (79)$$

The two last equalities in (79) hold true thanks to the following equivalent formula for the homogenized conductivity

$$K_{j,k}^*(x) = \frac{1}{|\Lambda|} \left[\int_{\Lambda^S} K^S(x, y') (e_j + \nabla_{y'} \omega_j^S(x, y')) \cdot e_k dy' + \sigma \int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D})(\omega_j^S(x, y') + y_j) y_k dy' \right]$$

which is obtained by a combination of (26) and of the variational formulation of the cell problems. The two-scale limits of the other terms in the variational formulation (71) are easily obtained

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon^S} K_\epsilon^S \nabla T_\epsilon \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) dx &= \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Omega} \int_{\Lambda^S} K^S (\nabla_x T_0 + \nabla_{y'} T_1) \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) dy' dx, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon^F} K_\epsilon^F \nabla T_\epsilon \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) dx &= 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon^F} V_\epsilon \cdot \nabla T_\epsilon (\phi_0 + \epsilon \phi_1) dx &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon^F} T_\epsilon V_\epsilon \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) dx \\ &= - \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Omega} \int_{\Lambda^F} T_0 V(y', x) \cdot (\nabla_x \phi_0 + \nabla_{y'} \phi_1) dy' dx \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Omega} \int_{\Lambda^F} V(y', x) \cdot \nabla_x T_0 \phi_0 dy' dx, \end{aligned}$$

by integration by parts and our assumptions on the velocity V . Summing up all those terms we deduce that the limit of the variational formulation (71) is, up to some integration by parts, the variational formulation (47) of the homogenized problem. \blacksquare

Remark 4.4. *In the course of the proof of Theorem 4.2 we use in an essential way the fact that the boundary condition on $\partial\Omega$ is of Dirichlet type. For example, it was crucial that the test function had a compact support (at least in x_3) to apply Lemma 2.1 on the 3D to 2D reduction of the view factor. We do not know if the convergence proof can be extended to the case of Neumann boundary conditions.*

We now state and prove a technical result which was required in the previous proof.

Lemma 4.4. *Let $\phi_1(x, y')$ be a smooth function, compactly supported in $x \in \Omega$ and Λ -periodic in y' . There exists at least one smooth vector-valued function $\theta(x, y')$ (with values in \mathbb{R}^2) such that*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_{y'} \theta(x, y') = 0 & \text{in } \Lambda^S, \\ \theta(x, y') \cdot n = (Id - \zeta^{2D}) \phi_1(x, y') & \text{on } \gamma, \\ y' \rightarrow \theta(x, y') & \text{is } \Lambda\text{-periodic.} \end{cases} \quad (80)$$

PROOF It is enough to look for a solution under the form $\theta(x, y') = \nabla_{y'} \eta(x, y')$. To solve the 2D elliptic equation for η (in $H_{\#}^1(\Lambda^S)/\mathbb{R}$), corresponding to (80), we just have to check the compatibility condition of the data (or Fredholm alternative). By virtue of the second property of Lemma 2.1 we can check that, indeed,

$$\int_{\gamma} (Id - \zeta^{2D}) \phi_1(x, y') dy' = \int_{\gamma} \phi_1(x, y') dy' - \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(y', s') \phi_1(x, y') dy' ds' = 0.$$

There is no uniqueness of the solution $\theta(x, y')$ to which we can add any solenoidal field with zero normal trace. \blacksquare

4.3 Strong convergence

Our main result, Theorem 4.2, gives only a weak convergence (or two-scale convergence) of the sequences T_ϵ and ∇T_ϵ . The goal of our next result is to improve this weak convergence into a strong one. As usual in homogenization theory it requires some additional smoothness assumptions. More precisely, we need $T_1(x, x'/\epsilon)$ to belong to the space $H^1(\Omega)$ (but not to be uniformly bounded). This is true, of course, if $T_1(x, y')$ is a smooth function of (x, y') . In view of formula (28) for T_1 , it is enough that either the homogenized solution $T_0(x)$ or the cell solutions $\omega_k(y')$ be smooth. To establish our strong convergence result we rely on the usual energy convergence trick (as described in [1] in the context of two-scale convergence) which is inspired from the notion of Γ -convergence [17].

Theorem 4.3. *Assuming that $T_1(x, y')$ is smooth enough and denoting by χ_ϵ^S the characteristic function of the solid part Ω_ϵ^S , the sequence $\left(\nabla T_\epsilon(x) - \nabla T_0(x) - \nabla_{y'} T_1(x, \frac{x'}{\epsilon})\right) \chi_\epsilon^S$ converges strongly to zero in $L^2(\Omega)^d$ and the sequence $(T_\epsilon(x) - T_0(x))$ converges strongly to zero in $L^2(\Omega)$.*

PROOF We develop the "energy" of the difference $T_\epsilon(x) - T_0(x) - \epsilon T_1(x, \frac{x'}{\epsilon})$ and we get, using the energy equality (55)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\epsilon^S} K_\epsilon^S \left| \nabla T_\epsilon(x) - \nabla T_0(x) - \nabla_{y'} T_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right|^2 dx + \epsilon \int_{\Omega_\epsilon^F} K_\epsilon^F \left| \nabla T_\epsilon(x) - \nabla T_0(x) - \nabla_{y'} T_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right|^2 dx \\
& + \frac{\sigma}{\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} G_\epsilon \left(T_\epsilon(x) - T_0(x) - \epsilon T_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right) \left(T_\epsilon(x) - T_0(x) - \epsilon T_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right) dx = \int_{\Omega_\epsilon^S} f_\epsilon(x) T_\epsilon(x) dx \\
& + \int_{\Omega_\epsilon^S} K_\epsilon^S \left| \nabla T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right|^2 dx + \epsilon \int_{\Omega_\epsilon^F} K_\epsilon^F \left| \nabla T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right|^2 dx \tag{81} \\
& + \frac{\sigma}{\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} G_\epsilon \left(T_0(x) + \epsilon T_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right) \left(T_0(x) + \epsilon T_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right) dx - 2 \frac{\sigma}{\epsilon} \int_{\Gamma_\epsilon} G_\epsilon \left(T_0(x) + \epsilon T_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right) T_\epsilon(x) dx \\
& - 2 \int_{\Omega_\epsilon^S} K_\epsilon^S \nabla T_\epsilon(x) \cdot \left(\nabla T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right) dx - 2 \epsilon \int_{\Omega_\epsilon^F} K_\epsilon^F \nabla T_\epsilon(x) \cdot \left(\nabla T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right) dx
\end{aligned}$$

Using the coercivity condition of $K_\epsilon^{S,F}$ on the left hand side, as well as the positivity of the operator G_ϵ , and passing to the two scale limit in the right hand side of (81) we obtain an upper bound for

$$\alpha \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| (\nabla T_\epsilon - \nabla T_0 - \nabla_{y'} T_1) \chi_\epsilon^S \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \left\| (\nabla T_\epsilon - \nabla T_0 - \nabla_{y'} T_1) \chi_\epsilon^F \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Then, a combination of Lemmas 4.1 and 4.3 yields a bound for

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|T_\epsilon - T_0 - \epsilon T_1\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

We now have to prove that these upper bounds are all zero, i.e., that the two-scale limit of the right hand side of (81) vanishes.

Indeed, by virtue of (42) and (79) we have

$$\begin{aligned}
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} G_\epsilon \left(T_0(x) + \epsilon T_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right) \left(T_0(x) + \epsilon T_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right) dx \\
& = \frac{\sigma}{|\Lambda|} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x) \frac{\partial T_0}{\partial x_3}(x) dx \int_\gamma \int_\gamma F^{2D}(z', y') |z' - y'|^2 dy' dz' \right. \\
& \quad \left. + \int_\Omega \int_\gamma (\nabla_{x'} T_0(x) \cdot y + T_1(x, y')) (Id - \zeta^{2D})(T_1(x, y') + \nabla_{x'} T_0(x) \cdot y) dy' dx \right) \\
& = \int_\Omega K^*(x) |\nabla_x T_0(x)|^2 dx - \frac{1}{|\Lambda|} \int_\Omega \int_{\Lambda^S} K^S(x, y') |\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')|^2 dy' dx
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} G_\epsilon \left(T_0(x) + \epsilon T_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) \right) T_\epsilon(x) dx = \int_\Omega K^*(x) |\nabla_x T_0(x)|^2 dx \\
& \quad - \frac{1}{|\Lambda|} \int_\Omega \int_{\Lambda^S} K^S(x, y') |\nabla_x T_0(x) + \nabla_{y'} T_1(x, y')|^2 dy' dx
\end{aligned}$$

Passing to the two scales limit in the right hand side of (81) yields

$$- \int_{\Omega} K^*(x) \nabla_x T_0(x) \cdot \nabla_x T_0(x) dx + \theta \int_{\Omega} f(x) T_0(x) dx$$

which is equal to zero thanks to the variational formulation of the homogenized problem (25). Hence the result. \blacksquare

5 Non-linear case

As already discussed in Remark 2.2, the true physical problem involves a non-linear radiation operator, defined by formula (9) instead of (5). The study of the linear case was a simplifying assumption in order to rigorously prove the convergence of the homogenization process. However, the formal method of two-scale asymptotic expansion is perfectly valid in the non-linear case too (see [3] and [20] if necessary). In this section we give, without proofs, the homogenization result in the non-linear case.

When the radiation operator, defined by formula is given by (9) instead of (5), the non-linear equivalent of Proposition 3.1 is the following.

Proposition 5.1. *Under assumption (23) the leading term T_0 is the solution of the homogenized problem*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K^*(x, T_0^3) \nabla T_0(x)) + V^*(x) \cdot \nabla T_0(x) = \theta f(x) & \text{in } \Omega \\ T_0(x) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (82)$$

with the porosity factor $\theta = |\Lambda^S| / |\Lambda|$, the homogenized conductivity given by its entries, for $j, k = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} K_{j,k}^*(x, T_0^3) = \frac{1}{|\Lambda|} & \left[\int_{\Lambda^S} K^S(x, y') (e_j + \nabla_y \omega_j(y')) \cdot (e_k + \nabla_y \omega_k(y')) dy' \right. \\ & + 4\sigma T_0^3(x) \int_{\gamma} G(\omega_k(y') + y_k)(\omega_j(y') + y_j) \\ & \left. + 2\sigma T_0^3(x) \int_{\gamma} \int_{\gamma} F^{2D}(s', y') |s' - y'|^2 dy' ds' \delta_{j3} \delta_{k3} \right] \end{aligned}$$

and an homogenized velocity given by

$$V_k^* = \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Lambda^F} V(x, y') \cdot e_k dy'$$

where $(\omega_j(x, T_0^3(x), y'))_{1 \leq j \leq 3}$ are the solutions of the cell problems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y K^S(x, y') (e_j + \nabla_y \omega_j^S(y')) = 0 & \text{in } \Lambda^S \\ -\operatorname{div}_y K^F(x, y') (e_j + \nabla_y \omega_j^F(y')) + V(x, y') \cdot (e_j + \nabla_y \omega_j^F(y')) = 0 & \text{in } \Lambda^F \\ -K^S(y', x_3) (e_j + \nabla_y \omega_j^S(y')) \cdot n = 4\sigma T_0^3(x) G(\omega_j^S(y') + y_j) & \text{on } \gamma \\ \omega_j^F(y') = \omega_j^S(y') & \text{on } \gamma \\ y' \mapsto \omega_j(y') \text{ is } \Lambda\text{-periodic,} \end{cases} \quad (83)$$

and T_1 is given by

$$T_1(x, y') = \sum_{j=1}^3 \omega_j(x, T_0^3(x), y') \frac{\partial T_0}{\partial x_j}(x). \quad (84)$$

The homogenized problem (82) is a non-linear convection-diffusion model where the non-linearity appears only in the conductivity tensor K^* which depends on the third power of the temperature. As usual in homogenization, the cell problems are linearized, depending on the value of the macroscopic temperature at each macroscopic point x .

6 Numerical results

In this section we describe some numerical experiments to study the asymptotic behaviour of the heat transfer model (8) in the non-linear case, i.e., when the radiation operator is defined as in Remark 2.2. Our goal is to show the efficiency of our proposed homogenization procedure, to validate it by comparing the reconstructed solution of the homogenized model with the numerical solution of the exact model (8) for smaller and smaller values of ϵ and to exhibit a numerical rate of convergence in terms of ϵ . While the computations in [3] were restricted to the 2D setting, here we perform 3D numerical simulations of (8). All computations have been done with the finite element code CAST3M [11] developed at the French Atomic and Alternative Energy Commission (CEA).

6.1 Changing variables for the numerical simulation

Usually, in homogenization theory, we solve a problem in a fixed domain Ω with cells of size ϵ , which tends to 0 (see Figure 3). However, in practice for our nuclear reactor problem, the sizes of the gas cylinders and cell assemblies are fixed by manufacturing constraints. Therefore, following [3], we proceed differently: we fix the size of the periodical cell (independent of ϵ) and we increase the total number of cells, i.e., the size of the global domain which is of order ϵ^{-1} . In other words, instead of using the macroscopic space variable $x \in \Omega$, we use the microscopic space variable $y = x/\epsilon$. In this new frame of reference, all periodicity cells are of unit size and the computational domain is $\epsilon^{-1}\Omega$ which is increasing as ϵ goes to 0 (see Figure 4).

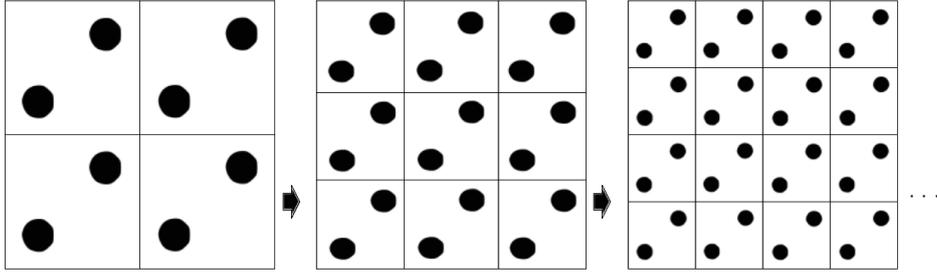


Figure 3: Standard homogenization in a fixed domain Ω

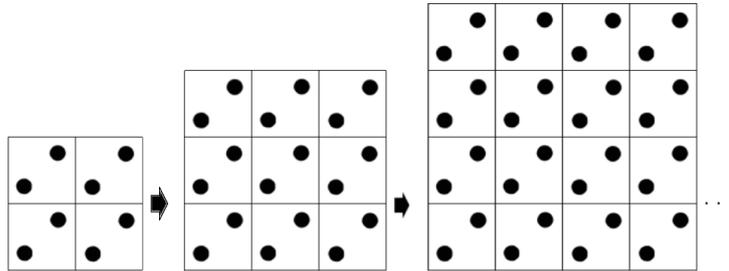


Figure 4: Rescaled process of homogenization with constant periodicity cell and increasing domain $\widehat{\Omega} = \epsilon^{-1}\Omega$

If the fixed domain is denoted by $\Omega = \prod_{j=1}^3(0, L_j)$, our rescaled computational domain is $\widehat{\Omega} = \epsilon^{-1}\Omega = \prod_{j=1}^3(0, L_j/\epsilon)$, where there exist integers N_j such that $L_j/\epsilon = N_j\ell_j$, for $j = 1, 2$ (so that only entire cells belong to $\widehat{\Omega}$). For any function $u(x)$ defined on Ω , we introduce the rescaled function $\widehat{u}(y)$, defined on $\widehat{\Omega}$ by

$$\widehat{u}(y) = u(\epsilon y) = u(x), \quad (85)$$

which satisfies $\nabla_y \widehat{u}(y) = \epsilon(\nabla_x u)(\epsilon y) = \epsilon \nabla_x u(x)$. All quantities defined in $\widehat{\Omega}$ are denoted with a hat $\widehat{\cdot}$ and, for simplicity, we drop the dependence on ϵ . For example, we define the conductivity tensor \widehat{K} as

$$\widehat{K}(y) = \begin{cases} \widehat{K}^S(y) = K^S(\epsilon y, y') & \text{in } \widehat{\Omega}^S, \\ \widehat{K}^F(y) = \epsilon K^F(\epsilon y, y') & \text{in } \widehat{\Omega}^F, \end{cases} \quad (86)$$

and the fluid velocity

$$\widehat{V}(y) = \epsilon V(\epsilon y, y') \quad \text{in } \widehat{\Omega}^F. \quad (87)$$

We also define $\widehat{\Omega}^S$, $\widehat{\Omega}^F$, $\widehat{\Gamma}$ and $\partial\widehat{\Omega}$ by the same change of variables relating Ω and $\widehat{\Omega}$. In this new frame of reference, problem (8) becomes

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\widehat{K}^S \nabla \widehat{T}_\epsilon) = \epsilon^2 \widehat{f} & \text{in } \widehat{\Omega}^S \\ -\operatorname{div}(\widehat{K}^F \nabla \widehat{T}_\epsilon) + \widehat{V} \cdot \nabla \widehat{T}_\epsilon = 0 & \text{in } \widehat{\Omega}^F \\ -\widehat{K}^S \nabla \widehat{T}_\epsilon \cdot n = -\widehat{K}^F \nabla \widehat{T}_\epsilon \cdot n + \sigma G(\widehat{T}_\epsilon^4) & \text{on } \widehat{\Gamma} \\ \widehat{T}_\epsilon = 0 & \text{on } \partial\widehat{\Omega} \\ \widehat{T}_\epsilon \text{ is continuous through } \widehat{\Gamma}. \end{cases} \quad (88)$$

The homogenized problem (82) becomes

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\widehat{K}^*(\widehat{T}_0^3) \nabla \widehat{T}_0) + \epsilon \widehat{V}^* \cdot \nabla \widehat{T}_0 = \epsilon^2 \theta \widehat{f} & \text{in } \widehat{\Omega}, \\ \widehat{T}_0 = 0 & \text{on } \partial\widehat{\Omega}. \end{cases} \quad (89)$$

Furthermore, we also define

$$\widehat{T}_1(y) = \epsilon T_1(\epsilon y, y') = \epsilon T_1(x, \frac{x'}{\epsilon}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \widehat{T}_0}{\partial y_i}(y) \omega_i(y') \quad (90)$$

where \widehat{T}_1 is purposely scaled as ϵ so that the ϵ -factor disappears in the last equality of (90). Finally, the homogenization approximation $T_\epsilon(x) \simeq T_0(x) + \epsilon T_1(x, x/\epsilon)$ becomes

$$\widehat{T}_\epsilon(y) \simeq \widehat{T}_0(y) + \widehat{T}_1(y). \quad (91)$$

Since a factor $\epsilon^{\frac{d}{2}}$ appears when changing variables $y = x/\epsilon$ in the L^2 -norms, we compute relative errors between the exact and reconstructed solutions in the sequel. The relative errors are invariant by our change of variables

$$\frac{\|T_\epsilon(x) - (T_0(x) + \epsilon T_1(x, \frac{x}{\epsilon}))\|_{L^2(\Omega)}}{\|T_\epsilon(x)\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\|\widehat{T}_\epsilon(y) - (\widehat{T}_0(y) + \widehat{T}_1(y))\|_{L^2(\widehat{\Omega})}}{\|\widehat{T}_\epsilon(y)\|_{L^2(\widehat{\Omega})}} \quad (92)$$

and

$$\frac{\|\nabla T_\epsilon(x) - \nabla(T_0(x) + \epsilon T_1(x, \frac{x}{\epsilon}))\|_{L^2(\Omega)}}{\|\nabla T_\epsilon(x)\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\|\nabla \widehat{T}_\epsilon(y) - \nabla(\widehat{T}_0(y) + \widehat{T}_1(y))\|_{L^2(\widehat{\Omega})}}{\|\nabla \widehat{T}_\epsilon(y)\|_{L^2(\widehat{\Omega})}}. \quad (93)$$

6.2 Algorithm and computational parameters

We first give our methodology for the numerical simulations of the homogenization process.

1. Solve the 3 cell problems (83) for a range of values of \widehat{T}_0 (see Figure 5).

2. Compute the homogenized conductivity (as a function of temperature) and the homogenized velocity.
3. Solve the homogenized problem (82) by a fixed point algorithm (see Figure 7).
4. Compute the corrector $\widehat{T}_1(y) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \widehat{T}_0}{\partial y_i}(y) \omega_i(y')$.
5. Reconstruct an approximate solution: $\widehat{T}_0(y) + \widehat{T}_1(y)$ (see Figure 7).

We now give our computational parameters for a reference computation corresponding to $\epsilon = \epsilon_0 = \frac{1}{4}$. The geometry corresponds to a cross-section of a typical fuel assembly for a gas-cooled nuclear reactor (see [20] for further reference). The domain is $\widehat{\Omega} = \epsilon^{-1}\Omega = \prod_{j=1}^3 (0, L_j/\epsilon)$, with $L_3 = 0.025m$ and, for $j = 1, 2$, $L_j/\epsilon = N_j \ell_j$ where $N_1 = 3$, $N_2 = 4$ and $\ell_1 = 0.04m$, $\ell_2 = 0.07m$. Each periodicity cell contains 2 hollow cylinders (holes) (see Figure 1), the radius of which is equal to $0.0035m$. The emissivity of the holes boundaries is equal to $e = 1$. The thermal source f is set to zero (we refer to [21] for other computations, including ones with $f \neq 0$). We enforce periodic boundary conditions in the x_1 direction and non-homogeneous Dirichlet boundary conditions in the other directions which are given by $\widehat{T}_\epsilon(y) = \epsilon(3200y_1 + 400y_2) + 800$ on the boundaries corresponding to $y_2 = 0$, $y_2 = L_2/\epsilon$, $y_3 = 0$ and $y_3 = L_3/\epsilon$. This boundary condition depends on ϵ , as a function of y , in such way that, as a function of $x = \epsilon y$, it is independent of ϵ .

The physical values of the isotropic conductivity are $30Wm^{-1}K^{-1}$ in the solid part and $0.3Wm^{-1}K^{-1}$ in the fluid part. Since it is much smaller in the fluid than in the solid, we decided to scale it by ϵ , see (3) and (86). In other words, the conductivity tensor defined in (86) takes the values

$$\widehat{K} = \begin{cases} 30 Wm^{-1}K^{-1} & \text{in } \widehat{\Omega}^S, \\ \frac{\epsilon}{\epsilon_0} 0.3 Wm^{-1}K^{-1} & \text{in } \widehat{\Omega}^F. \end{cases}$$

On a similar token, the physical value of the fluid velocity (assumed to be constant and parallel to the cylinders axis) is $80ms^{-1}$. By the scaling of (87), the numerical value of the velocity is

$$\widehat{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\epsilon}{\epsilon_0} 80 \end{pmatrix} ms^{-1}.$$

Remark that it is only for the reference computation $\epsilon_0 = 1/4$ that \widehat{K} and \widehat{V} are equal to their physical values. While the rescaled coefficients $\widehat{K}^F(y)$ and $\widehat{V}(y)$ are varying with ϵ , the original coefficients $K^F(x)$ and $V(x)$ are independent of ϵ . The fact that the numerical values of \widehat{K}^F and \widehat{V} are not the physical ones for $\epsilon \neq \epsilon_0 = 1/4$ is not a problem, since our convergence study (as ϵ goes to 0) is purely a numerical verification of our mathematical result.

As explained in Section 6.1 we shall check numerically the convergence of the homogenization process when ϵ goes to zero, or more precisely when the number of cells goes to infinity. We thus compare the solution \widehat{T}_ϵ of (8) (obtained by a costly numerical computation) with the homogenized reconstructed solution $\widehat{T}_0(y) + \widehat{T}_1(y)$ (which is much cheaper to compute). Furthermore, we shall obtain speed of convergences for the relative errors (92) and (93) plotted in Figures 11 and 12. To avoid an excessive computational burden, we have chosen periodic boundary condition in the x_1 direction which implies that it is not necessary to add cells in the x_1 direction. Therefore, $N_1 = 3$ is fixed and we simply add cells in the x_2 direction, increasing N_2 from 4 to 10 with a unit step. In other words, we define

$$\epsilon = \frac{1}{N_2}.$$

Note that the vertical size of $\widehat{\Omega}$ is L_3/ϵ , which is thus increasing as ϵ goes to zero.

All computations are performed with rectangular \mathbb{Q}_1 finite elements (4 nodes in 2D, 8 nodes in 3D). A boundary integral method is used for the radiative term (which involves a dense matrix coupling all nodes on the surface enclosing a fluid part). The typical number of nodes for the 2D cell problem is 1 027 (from which 72 are on the radiative boundary γ); it is 6 336 for the 3D homogenized problem (which has no radiative term); it is 96 480 for the original problem (8) with $\epsilon = \epsilon_0 = \frac{1}{4}$ (from which 6 912 are on the radiative boundary Γ_ϵ).

6.3 Simulation results

In Figure 5 we plot the solutions of the cell problems (83) for an homogenized temperature $T_0 = 800K$. Recall that, in the non linear case, the solutions of the cell problems depend on the macroscopic temperature. We recognize that ω_3^S is a constant in Figure 5 (right).

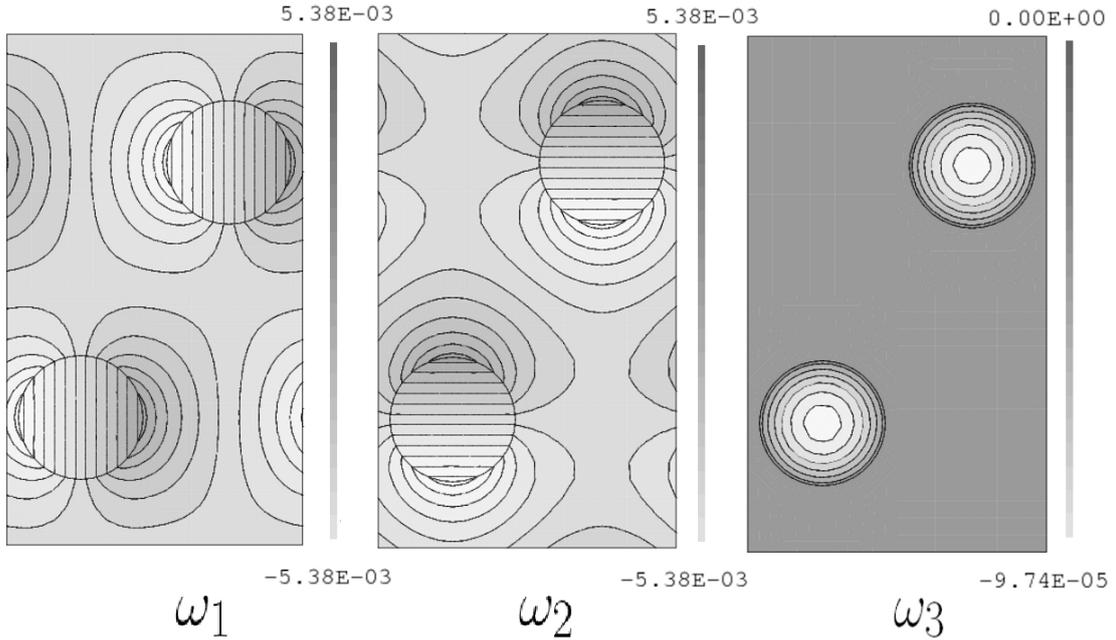


Figure 5: Solutions of the cell problems for $T_0 = 800K$

The cell solutions allow us to evaluate the homogenized conductivity which turns out to numerically be a diagonal tensor (at least for temperatures $T_0 \leq 1E+05K$ with a precision on 14 digits). However, for larger (extreme) temperatures, \hat{K}^* is not any longer a diagonal tensor [3]. The diagonal entries of \hat{K}^* are plotted on Figure 6 and two typical values are

$$\hat{K}^*(T_0 = 50K) = \begin{pmatrix} 25.907 & 0. & 0. \\ 0. & 25.914 & 0. \\ 0. & 0. & 30.05 \end{pmatrix}, \quad \hat{K}^*(T_0 = 20000K) = \begin{pmatrix} 49.801 & 0. & 0. \\ 0. & 49.781 & 0. \\ 0. & 0. & 3680.7 \end{pmatrix}.$$

The homogenized velocity is a simple volume average, equal to

$$\hat{V}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15.134 \end{pmatrix} ms^{-1}.$$

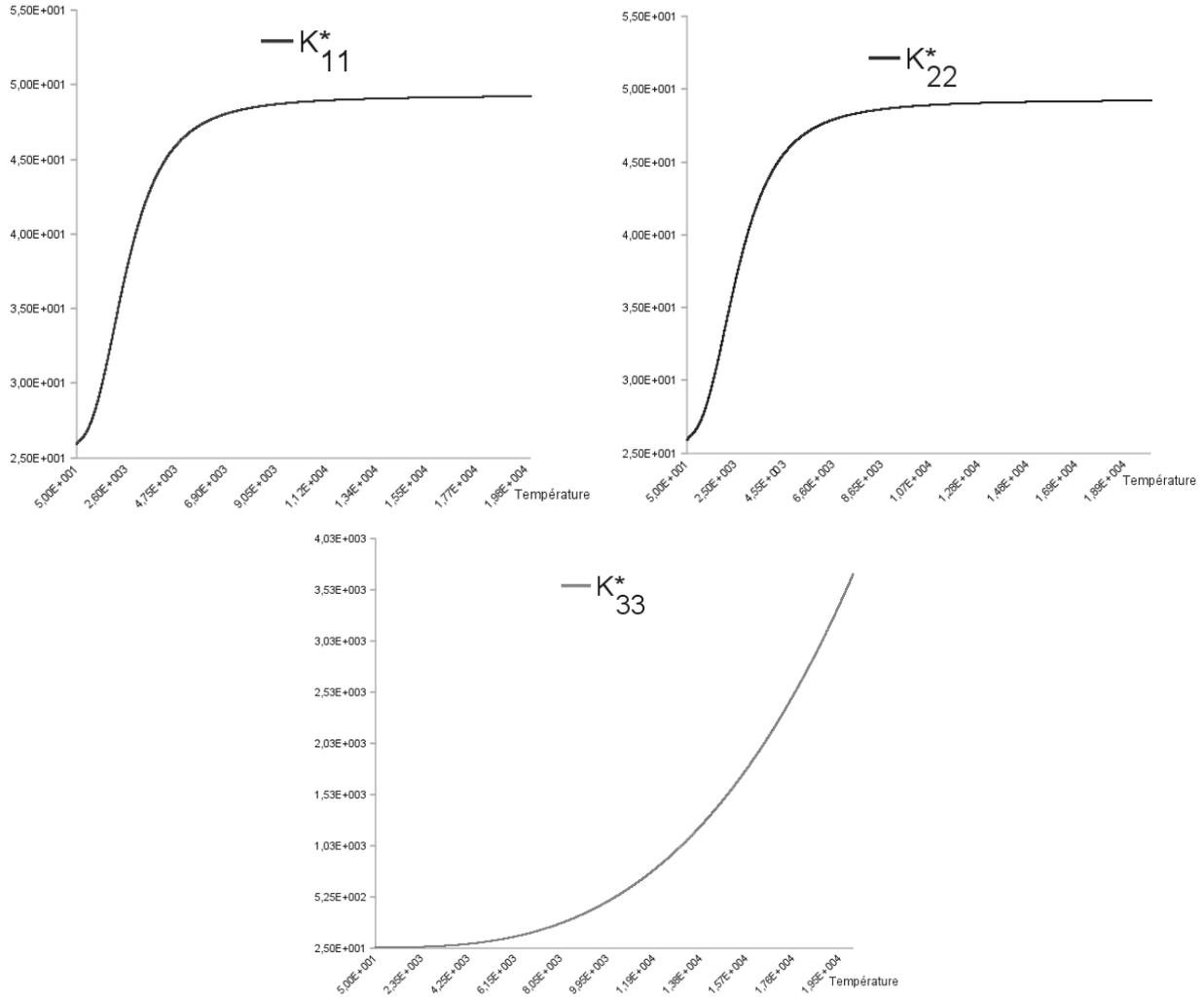


Figure 6: Homogenized conductivities as a function of the macroscopic temperature: K_{11}^* (top left), K_{22}^* (top right), K_{33}^* (bottom).

By a fixed point algorithm (the homogenized conductivity \widehat{K}^* is evaluated with the previous iterate for the temperature), we solve the homogenized problem (it requires of the order of 5 iterates). By a Newton method we solve also the direct model (8) (it requires of the order of 15 iterates). In Figure 7 we plot the direct, homogenized and reconstructed solutions computed for a value of $\epsilon = \epsilon_0 = 1/4$, as well as the error between the direct and reconstructed temperature. The error is clearly small and mostly concentrated on the domain boundaries. The moduli of the temperature gradients are displayed on Figure 8. Clearly the reconstructed solution $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1$ is a much better approximation of the true solution \widehat{T}_ϵ than the mere homogenized solution \widehat{T}_0 . The error on the temperature gradient is larger and again concentrated on the domain boundaries (this is consistent with the presence of boundary layers not taken into account in our asymptotic analysis).

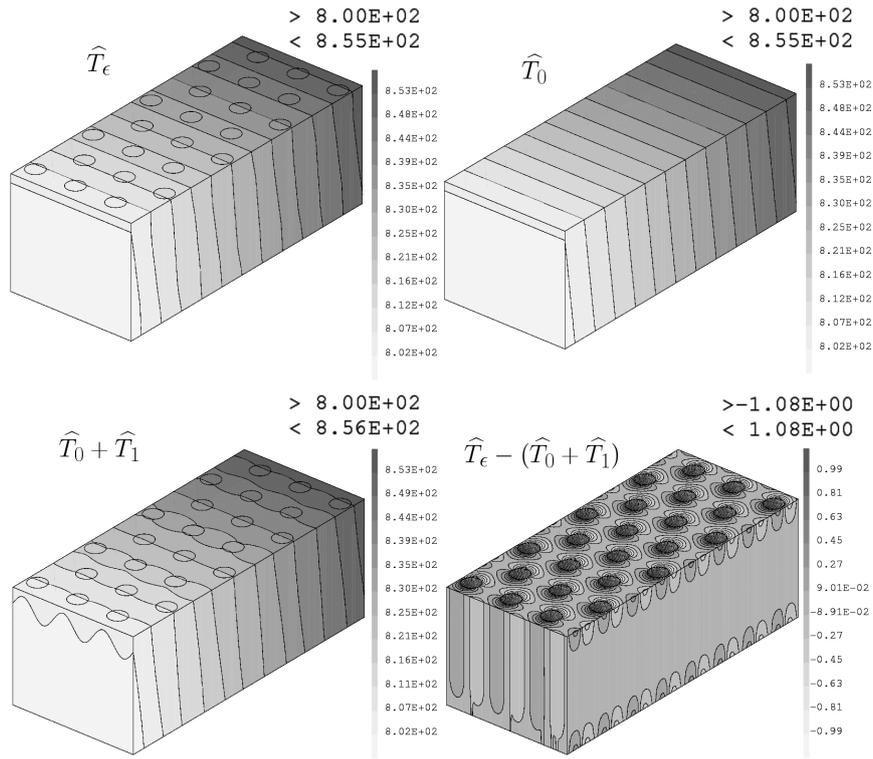


Figure 7: Solutions in $\hat{\Omega}$

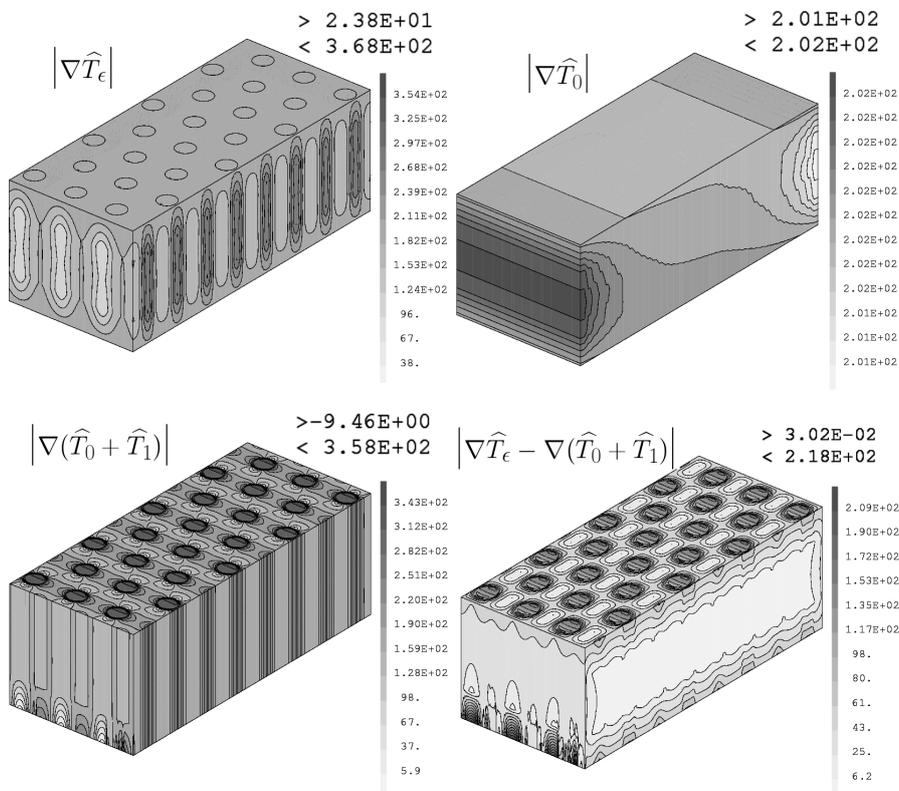


Figure 8: Modules of the solution gradients in $\hat{\Omega}$

Notice on Figure 7 that the reconstructed temperature is slightly fluctuating on the boundary $y_2 = 0$ while the true solution is linear. This is due to the fact that the corrector \widehat{T}_1 does not satisfy a Dirichlet boundary condition. This well-known effect in homogenization can be corrected by introducing further terms, called boundary layers [8], [10]. We shall not dwell on this issue, all the more since other boundary layers are involved in our approximation. Indeed, the dimension reduction which applies to the radiative operator (which is truly 3D in the direct model (8) and only 2D in the cell problems) certainly generates boundary layers close to the top and bottom boundaries $y_3 = 0$ and $y_3 = L_3/\epsilon$. Nevertheless, if we plot the solutions in a smaller domain $\widehat{\Delta}$ (which is obtained from $\widehat{\Omega}$ by removing one row of cells close to each boundary face normal to the x_2 direction and a layer of thickness $0.025m$ at the top and bottom faces) we obtain a better agreement between $\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1$ and \widehat{T}_ϵ (see Figure 9) and between $\nabla(\widehat{T}_0 + \widehat{T}_1)$ and $\nabla\widehat{T}_\epsilon$ (see Figure 10).

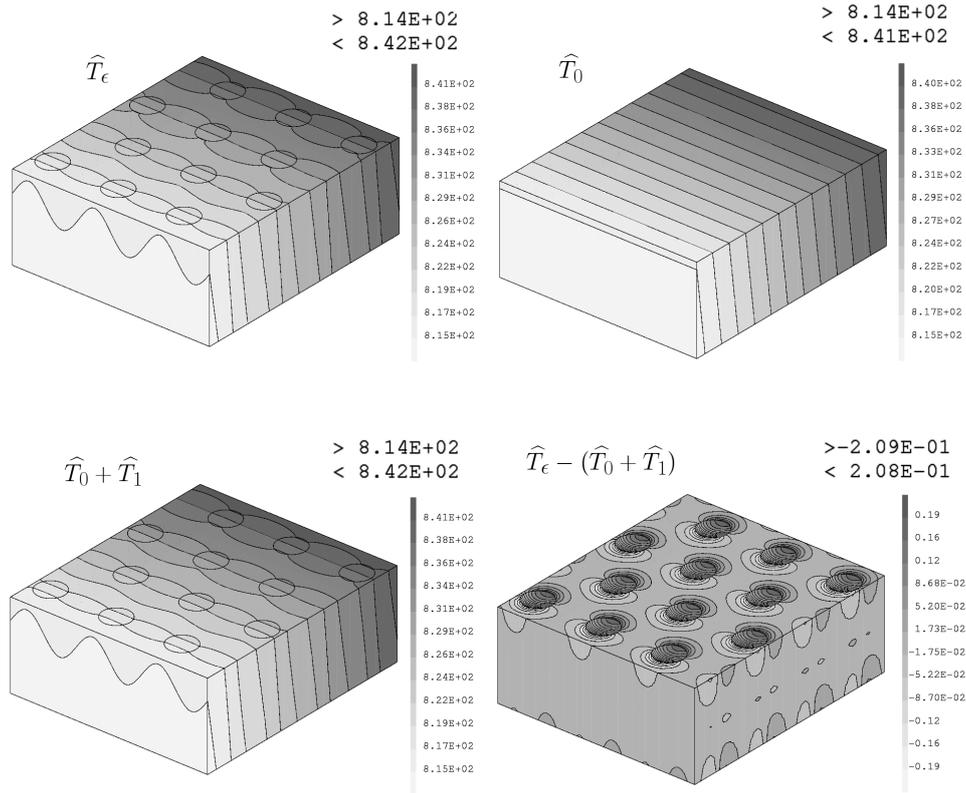
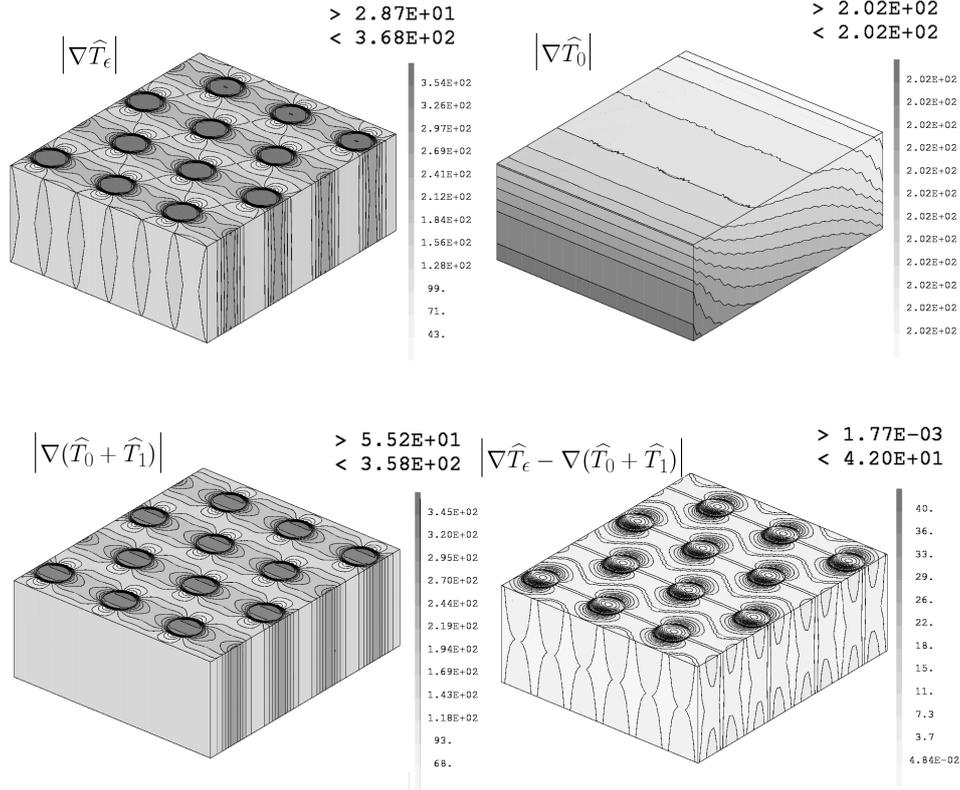


Figure 9: Solutions in the reduced domain $\widehat{\Delta}$

Now, to check the convergence of our homogenization process and to obtain a numerical speed of convergence, we display in Figures 11 and 12, as a function of ϵ on a log-log plot, the relative errors (92) and (93) related to temperature $ERR(T)$ and temperature gradient $ERR(\nabla T)$. We compare these errors with the slopes of ϵ and $\sqrt{\epsilon}$. This has to be compared with the classical error estimate for a pure diffusion problem (without radiative transfer) as given in [10]

$$\left\{ \begin{array}{l} ERR(T)_{\widehat{\Omega}} = \frac{\|\widehat{T}_\epsilon(y) - (\widehat{T}_0(y) + \widehat{T}_1(y))\|_{L^2(\widehat{\Omega})}}{\|\widehat{T}_\epsilon(y)\|_{L^2(\widehat{\Omega})}} \leq C\epsilon, \\ ERR(\nabla T)_{\widehat{\Omega}} = \frac{\|\nabla\widehat{T}_\epsilon(y) - (\nabla\widehat{T}_0(x) + \nabla\widehat{T}_1(y))\|_{L^2(\widehat{\Omega})}}{\|\nabla\widehat{T}_\epsilon(y)\|_{L^2(\widehat{\Omega})}} \leq C\sqrt{\epsilon}. \end{array} \right.$$

Our errors $ERR(T)$ and $ERR(\nabla T)$ are in accordance with those theoretically predicted for a pure

Figure 10: Modules of the solution gradients in the reduced domain $\hat{\Delta}$

diffusion problem, namely they behave like ϵ and $\sqrt{\epsilon}$, respectively. In particular, it implies that the additional boundary layers caused by the dimension reduction effect (due to the radiative term) have an impact on the error comparable or smaller than that the homogenization boundary layers.

Even for moderate-size computations, like the ones in this section, the gain in memory and CPU time for our homogenization method is enormous compared to a direct simulation. This is a well-known fact in the homogenization of diffusion problem but the gain is all the more extreme because of the radiative transfer involved in our model. Indeed, the direct model (8) involves a 3D radiative transfer operator which implies that full matrices connecting all nodes on the surface of one cylinder have to be stored and inverted (of course they are coupled through the diffusive rigidity matrix in the solid part). Typically, one Newton iteration in our reference computation takes about 80 *min* on a computer which has a memory of 37.2GB and 12 processors with $CPU = 2.67GHz$. On the other hand, the cell problems (27) are merely 2D, so very cheap to solve (typically, one solution for a given temperature T_0 takes $18.E - 04$ *min* with the same computer), and the homogenized problem (82) features no radiative term (one Newton iteration in our reference computation takes $12.E - 02$ *min* with the same computer). Therefore, our algorithm of Subsection 6.2 is very competitive and is able to treat very large cases, like a full nuclear core computation.

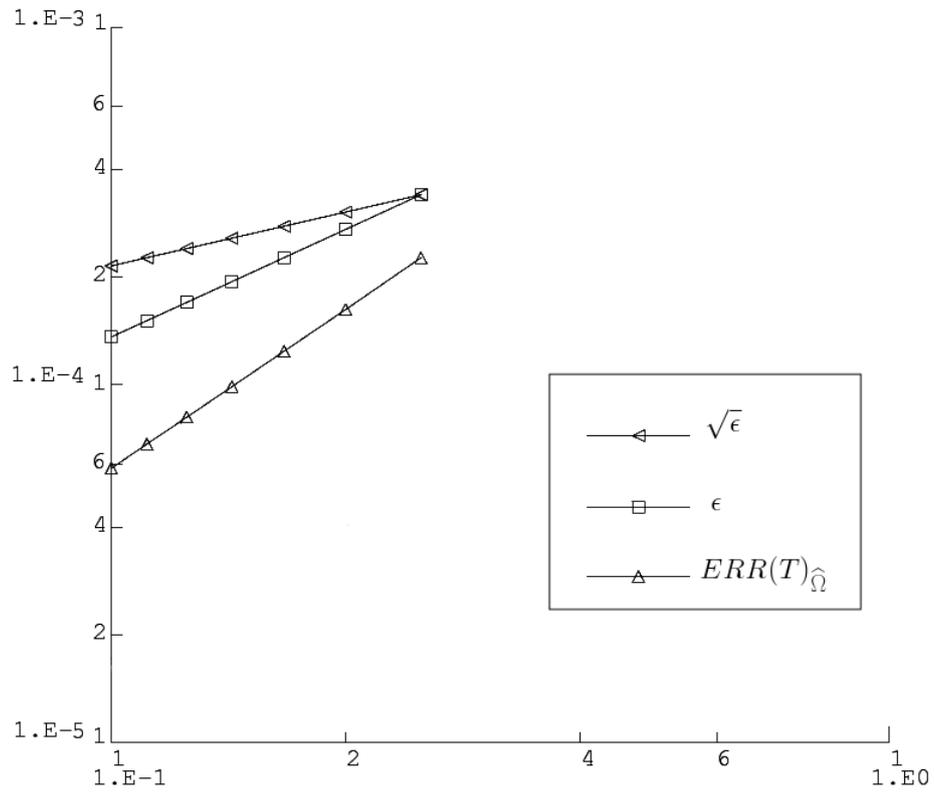


Figure 11: Relative error (92) for the temperature

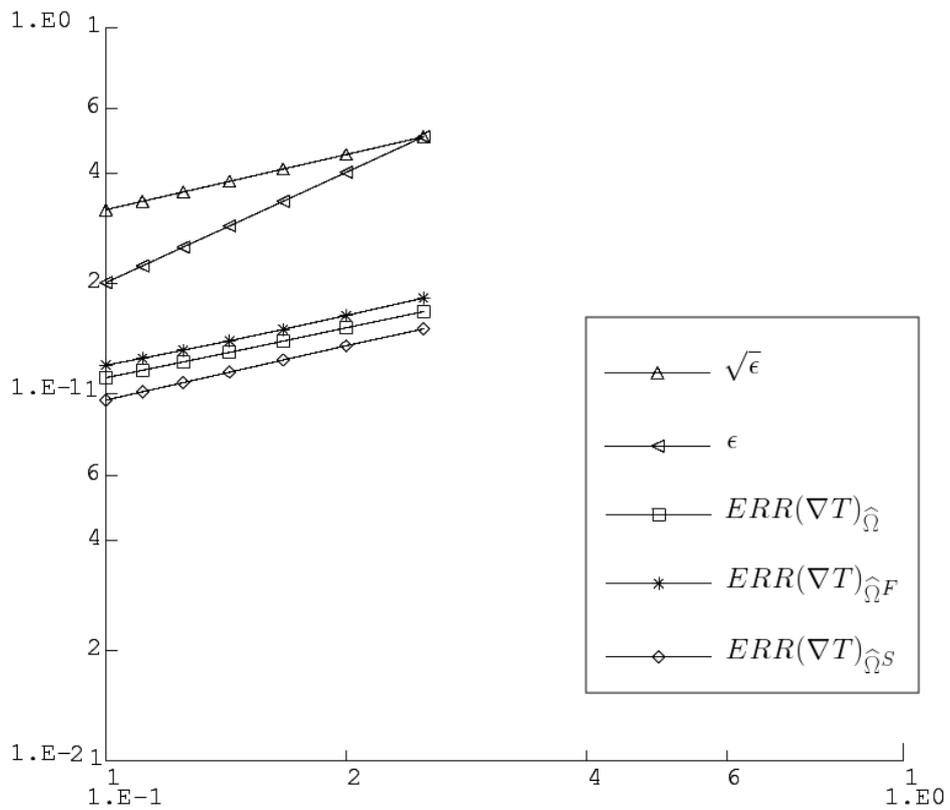


Figure 12: Relative error (93) for the temperature gradient

Acknowledgement. The authors thank A. Stietel (CEA Saclay) for her useful collaboration.

References

- [1] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(6):1482–1518, 1992.
- [2] G. Allaire, A. Damlamian, and U. Hornung. Two-scale convergence on periodic surfaces and applications. In *Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling of Flow through Porous Media (May 1995)*, A. Bourgeat et al. eds. World Scientific Pub., pages 15–25, Singapore 1996.
- [3] G. Allaire and K. El Ganaoui. Homogenization of a conductive and radiative heat transfer problem. *Multiscale Model. Simul.*, 7(3):1148–1170, 2008.
- [4] G. Allaire and Z. Habibi. The role of the second order corrector in periodic homogenization of a conductive heat transfer. *In preparation*.
- [5] G. Allaire and F. Murat. Homogenization of the Neumann problem with nonisolated holes. *Asymptotic Anal.*, 7(2):81–95, 1993. With an appendix written jointly with A. K. Nandakumar.
- [6] A. A. Amosov. Nonstationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties dependig on the radiation frequency. *J. Math. Sci., New York* 165, No. 1, 1–41 (2010).
- [7] A. A. Amosov. Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on radiation frequency. *J. Math. Sci.*, 164(3):309–344, 2010.
- [8] N. Bakhvalov and G. Panasenko. *Homogenisation: averaging processes in periodic media*, volume 36 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989. Mathematical problems in the mechanics of composite materials, Translated from the Russian by D. Leites.
- [9] N. S. Bakhvalov. Averaging of the heat transfer process in periodic media in the presence of radiation. *Differentsial'nye Uravneniya*, 17(10):1765–1773, 1916, 1981.
- [10] A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*, volume 5 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978.
- [11] Cast3M. <http://www-cast3m.cea.fr/cast3m/index.jsp>.
- [12] S. Chandrasekhar. *Radiative transfer*. Dover Publications Inc., New York, 1960.
- [13] P. Charrier and B. Dubroca. Asymptotic transport models for heat and mass transfer in reactive porous media. *Multiscale Model. Simul.*, 2(1):124–157 (electronic), 2003.
- [14] P. G. Ciarlet. *Plates and junctions in elastic multi-structures*, volume 14 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*. Masson, Paris, 1990. An asymptotic analysis.
- [15] D. Cioranescu and P. Donato. *An introduction to homogenization*, volume 17 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999.

- [16] Doina Cioranescu, Patrizia Donato, and Rachad Zaki. Asymptotic behavior of elliptic problems in perforated domains with nonlinear boundary conditions. *Asymptot. Anal.*, 53(4):209–235, 2007.
- [17] G. Dal Maso. *An introduction to Γ -convergence*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 8. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.
- [18] P. Donato and L. Sgambati. Homogenization for some nonlinear problems in perforated domains. *Revista de Matemáticas Aplicadas*, 15(1):17–38, 1994.
- [19] CEA e-den. *Les réacteurs nucléaires à caloporteur gaz*. CEA Saclay et Le Moniteur Editions. Monographie Den,2006. <http://nucleaire.cea.fr/fr/publications/pdf/M0-fr.pdf>.
- [20] K. El Ganaoui. *Homogénéisation de modèles de transferts thermiques et radiatifs : application au coeur des réacteurs à caloporteur gaz*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2006.
- [21] Z. Habibi. *Homogénéisation et convergence à deux échelles lors d'échanges thermiques stationnaires et transitoires dans un coeur de réacteur à caloporteur gaz*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, (in preparation).
- [22] P.S. Heckbert. *Simulating global illumination using Adaptive Meshing*. PhD thesis, UC Berkeley, 1991.
- [23] Ulrich Hornung, editor. *Homogenization and porous media*, volume 6 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [24] J. R. Howell. *A catalogue of radiation heat transfer factors*. The university of Texas at Austin, Austin, Texas, 3 edition, 2010. <http://www.engr.uky.edu/rtl/Catalog/>.
- [25] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleinik. *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*. Springer Verlag, 1994.
- [26] J. L. Lions. *Some methods in the mathematical analysis of systems and their control*. Kexue Chubanshe (Science Press), Beijing, 1981.
- [27] F. M. Modest. *Radiative heat transfer*. Academic Press, 2 edition, 2003.
- [28] F. Murat and L. Tartar. H -convergence. In *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, volume 31 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 21–43. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [29] M. Neuss-Radu. Some extensions of two-scale convergence. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322(9):899–904, 1996.
- [30] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 20(3):608–623, 1989.
- [31] E. Sanchez-Palencia. *Nonhomogeneous media and vibration theory*, volume 127 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [32] L. Tartar. *The general theory of homogenization. A personalized introduction*. *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*. Springer Verlag, Berlin; UMI, Bologna, 7 edition, 2009.
- [33] T. Tiihonen. Stefan-boltzmann radiation of nonlocal heat radiation problems. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 8(6):1071–1089, 1998.

Annexe2

ESAIM: PROCEEDINGS, Vol. ?, 2012, 1-10

Editors: Will be set by the publisher

HOMOGENIZATION OF A CONDUCTIVE-RADIATIVE HEAT TRANSFER PROBLEM

THE CONTRIBUTION OF A SECOND ORDER CORRECTOR^{*,**}

ZAKARIA HABIBI¹

Abstract. This paper focuses on the contribution of the second order corrector in periodic homogenization applied to a conductive-radiative heat transfer problem. Especially, for a heat conduction problem in a periodically perforated domain with a non-local boundary condition modelling the radiative heat transfer, if this model contains an oscillating thermal source and a thermal exchange with the perforations, the second order corrector helps us to model the gradients which appear between the source area and the perforations.

Résumé. Ce papier est consacré à montrer l'influence du correcteur de second ordre en homogénéisation périodique. Dans l'homogénéisation d'un problème de conduction rayonnement dans un domaine périodiquement perforé par plusieurs trous, on peut voir une contribution non négligeable de ce correcteur lors de la présence d'une source thermique oscillante et d'un échange thermique dans les perforations. Ce correcteur nous permet de modéliser les gradients qui apparaissent entre la zone de la source thermique et les perforations.

INTRODUCTION

We are interested in the homogenization of a conductive-radiative heat transfer in a domain periodically perforated by several infinitely small holes. Despite the presence of various applications for this model, this study is dedicated to the nuclear reactor industry (see [6]). It is adapted to the so-called gas-cooled reactors which are a promising concept for the 4th generation reactors. The core of this reactors type is composed by many prismatic blocks of graphite in which are inserted the fuel compacts (here the thermal sources). Each block is periodically traversed by several infinitely small holes where the coolant (Helium) circulates. We suppose here that the holes are disconnected, namely each hole is compactly embedded in its periodicity cell (see [3] for the case of non-isolated cylinders). For our study, the geometry will be scaled down into two states: a fluid state composed by the coolant gas and a solid state composed by the fuel and the graphite. Therefore, any study of heat transfer in such a geometry has to take into account the local difference between these areas. We notice that the total number of holes is very high and their size is very small compared to the size of the core. Consequently, the numerical analysis of such models requires a very fine mesh of this structure. This induces a

* The author thanks G. Allaire (gregoire.allaire@polytechnique.fr) and A. Stietel (anne.stietel@cea.fr) for their useful collaboration.

** This work has been supported by the French Atomic Energy and Alternative Energy Commission, DEN/DM2S at CEA Saclay.

¹ CEA & CMAP, zakaria.habibi@polytechnique.edu

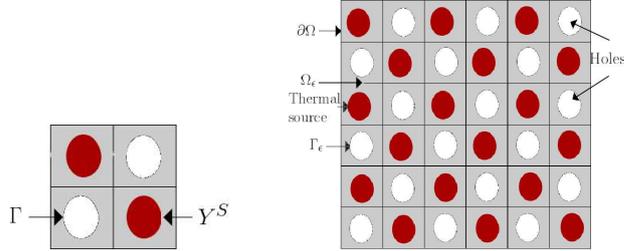


FIGURE 1. The periodic domain Ω_ϵ (right) and its reference cell Y (left)

very expensive numerical resolution that becomes impossible for a real geometry of a reactor core. Therefore, our objective is to define a homogeneous model equivalent to those modes of heat transfer that is less expensive, in term of CPU time and memory, and converging to the direct model. Specifically, we will give a clear definition of the homogenized model and its effective parameters. The homogenization of this conductive-radiative heat transfer was already carried out by G. Allaire and K. El Ganaoui in [2]. Thus, the peculiarity of the actual study comes from the problems encountered when we have simultaneously a periodic oscillating thermal source and a condition of exchange along the holes. In this case, gradients of temperature are emerging between the area of the source and the holes. These gradients do not appear in the homogeneous solution corrected only by the corrector of order 1 (see Figure 3). Hence our need to analyse the contribution of the second order corrector since it is the only term that depends on the local values of the thermal source and the heat exchange. We will see later in this paper, that these values are averaged in the homogenized problem (which makes sense since all the parameters of this model are homogenized parameters), and the problem on the first corrector depends only on the radiative condition on the holes walls (see [8, 9] for further detail).

1. SETTING OF THE PROBLEM

1.1. Geometry

Let Ω be a bounded set of \mathbb{R}^d such that $\Omega = \prod_{j=1}^d (0, L_j)$ (here $d = 2$). We define a domain Ω_ϵ as the domain Ω without a collection of holes $(\tau_{\epsilon,i})_{i=1 \dots N(\epsilon)}$. The domain Ω is subdivided into $N(\epsilon)$ periodic cells $(Y_{\epsilon,i})_{i=1 \dots N(\epsilon)}$, each of them is equal, up to a translation, to the same unit cell $Y = \prod_{j=1}^d (0, l_j)$. We denote by Γ the walls of the holes in Y and by Y^S the solid part of Y . We suppose also that for each i , $\tau_{\epsilon,i} \subset\subset Y_{\epsilon,i}$. In summary we have $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus (\bigcup_{i=1}^{N(\epsilon)} \tau_{\epsilon,i}) = \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon)} Y_{\epsilon,i}^S$, $\Gamma_\epsilon = \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon)} \partial\tau_{\epsilon,i} = \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon)} \Gamma_{\epsilon,i}$ where $Y_{\epsilon,i}^S = Y_{\epsilon,i} \setminus \tau_{\epsilon,i}$ and $\Gamma_{\epsilon,i} = \partial\tau_{\epsilon,i}$.

1.2. Governing equations

Eventually, the governing equations of our model are

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K_\epsilon \nabla T_\epsilon) = f_\epsilon & \text{in } \Omega_\epsilon, \\ -K_\epsilon \nabla T_\epsilon \cdot n = \epsilon h_\epsilon (T_\epsilon - T_{gas}) + \frac{\sigma}{\epsilon} G_\epsilon(T_\epsilon) & \text{on } \Gamma_\epsilon, \\ T_\epsilon = g & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

where $K_\epsilon(x) = K(x, \frac{x}{\epsilon})$ and K is the conductivity tensor of the unit cell Y . We assume K to be symmetric, uniformly coercive and bounded in norm L^∞ . $h_\epsilon(x) = h(x, \frac{x}{\epsilon})$ is the exchange coefficient in the hole walls, n is the unit outward normal on Γ_ϵ , $f_\epsilon(x) = f(x, \frac{x}{\epsilon})$ is the oscillating thermal source where $f(x, y) \in L^2(\Omega, L^2(Y))$

and $f \geq 0$, $T_{gas}(x)$ is the temperature in the holes (supposed known). σ is the Stefan-Boltzmann constant and G_ϵ is the radiative operator given by

$$G_\epsilon(T_\epsilon) = e(Id - \zeta_\epsilon)(Id - (1 - e)\zeta_\epsilon)^{-1}(T_\epsilon^4) \quad \text{with} \quad \zeta_\epsilon(f)(s) = \int_{\Gamma_{\epsilon,i}} F(s, x)f(x)dx.$$

where F is the view factor (see [10]) and e is the emissivity of the holes walls.

2. HOMOGENIZATION BY ASYMPTOTIC EXPANSION

The homogenized problem can be obtained heuristically by the method of two-scale asymptotic expansion [4]. The starting point of this method is to assume that the solution T_ϵ of problem (1) is given by the series

$$T_\epsilon = T_0(x) + \epsilon T_1(x, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon^2 T_2(x, \frac{x}{\epsilon}) + \dots \quad (2)$$

Our main result is the following:

Proposition 2.1. (proof in [8, 9]) Under ansatz (2), we show that T_0 is the solution of the homogenized problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K^*(x)\nabla T_0(x)) + h^*(x)(T_0(x) - T_{gas}(x)) = f^*(x) & \text{in } \Omega \\ T_0(x) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where the homogenized conductivity tensor K^* is given by its entries, for $j, k = 1, 2$,

$$K_{j,k}^* = \frac{1}{|Y|} \left[\int_{Y^S} K(x, y)(e_j + \nabla_y \omega_j(y)) \cdot (e_k + \nabla_y \omega_k(y)) dy + 4\sigma T_0^3 \int_{\Gamma} G(\omega_k(y) + y_k)(\omega_j(y) + y_j) dy \right],$$

with $G \equiv G_\epsilon$ in Γ . The homogenized source f^* is given by $f^*(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^S} f(x, y) dy$. The homogenized exchange coefficient h^* is given by $h^*(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^S} h(x, y) dy$, and $(\omega_k(x, y))_{1 \leq k \leq 2}$ are the solutions of the cell problems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y K(x, y)(e_j + \nabla_y \omega_j) = 0 & \text{in } Y^S \\ K(x, y)(e_j + \nabla_y \omega_j) \cdot n = 4\sigma T_0^3 G(\omega_j(y) + y_j) & \text{on } \Gamma \\ y \mapsto \omega(y) & \text{is } Y\text{-periodic} \end{cases}$$

Furthermore, the first corrector $T_1(x, y)$ is given by $T_1(x, y) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial T_0}{\partial x_j}(x) \omega_j(x, y) + \tilde{T}_1(x)$, (3)

and the second one $T_2(x, y)$ is the solution of the cell problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (K [\nabla_y T_2 + \nabla_x T_1]) = \operatorname{div}_x (K [\nabla_x T_0 + \nabla_y T_1]) + f & \text{in } Y^S \\ -K [\nabla_y T_2 + \nabla_x T_1] \cdot n = h(T_0 - T_{gas}) + 4\sigma T_0^3 [G(T_2 + \nabla_x T_1 \cdot y + \nabla \nabla T_0 y \cdot y) - G(\nabla_x \nabla_x T_0 y + \nabla_x T_1) \cdot y] & \text{on } \Gamma \\ T_2 \text{ is } Y\text{-periodic.} \end{cases}$$

where all the functions are evaluated at $(x, y) \in \Omega \times Y^S$ except T_0 and T_{gas} which are evaluated at $x \in \Omega$.

Proposition 2.2. *If we suppose, in Proposition 2.1, that the functions f and h verify $f(x, y) = F(x)f_{\#}(y)$ and $h(x, y) = H(x)h_{\#}(y)$, and that the conductivity tensor K_{ϵ} is given by $K_{\epsilon}(x) = K(\frac{x}{\epsilon})$ instead of $K_{\epsilon}(x) = K(x, \frac{x}{\epsilon})$, we have:*

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{1}{|Y|} \int_{Y^S} f(x, y) dy = \frac{F(x)}{|Y|} \int_{Y^S} f_{\#}(y) dy = F(x)F^*, \\ h^*(x) &= \frac{1}{|Y|} \int_{Y^S} h(x, y) dy = \frac{H(x)}{|Y|} \int_{Y^S} h_{\#}(y) dy = H(x)H^*, \end{aligned}$$

and $T_2(x, y)$ is given by:

$$T_2(x, y) = \left(T_2^1(y) + T_2^2(y) \right) F(x) + T_2^3(y) H(x) (T_0(x) - T_{gas}(x)) + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 T_0}{\partial x_i \partial x_j}(x) \theta_{i,j}(y) + \tilde{T}_2(x) \quad (4)$$

where T_2^1, T_2^2, T_2^3 and $(\theta_{i,j})_{i,j=1,2}$ are the solutions of the cell problems:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_y(K \nabla_y T_2^1) = f_{\#} - \frac{|Y|}{|Y^S|} F^* \quad \text{in } Y^S \\ -K \nabla_y T_2^1 \cdot n = 4\sigma T_0^3 G(T_2^1) \quad \text{on } \Gamma \\ T_2^1 \text{ is } Y\text{-periodic} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_y(K \nabla_y T_2^2) = \frac{|Y|}{|Y^S|} F^* \quad \text{in } Y^S \\ -K \nabla_y T_2^2 \cdot n = \frac{|Y|}{|\Gamma|} F^* + 4\sigma T_0^3 G(T_2^2) \quad \text{on } \Gamma \\ T_2^2 \text{ is } Y\text{-periodic} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_y(K \nabla_y T_2^3) = 0 \quad \text{in } Y^S \\ -K \nabla_y T_2^3(y) \cdot n = (h_{\#} - \frac{|Y|}{|\Gamma|} H^*) + 4\sigma T_0^3 G(T_2^3) \quad \text{on } \Gamma \\ T_2^3 \text{ is } Y\text{-periodic} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_y(K \nabla_y \theta_{i,j}) = \operatorname{div}_y(K e_j \omega_i + K_{i,j} + K^t e_j \cdot \nabla_y \omega_i) \quad \text{in } Y^S \\ -K \nabla_y \theta_{i,j} \cdot n = K e_j \omega_i + \frac{|Y|}{|\Gamma|} K_{i,j}^* + 4\sigma T_0^3 y_j G(\omega_i + y_i) + 4\sigma T_0^3 G\left(\theta_{i,j} + y_j \omega_i + \frac{1}{2} y_i y_j\right) \quad \text{on } \Gamma \\ \theta_{i,j} \text{ is } Y\text{-periodic} \end{array} \right.$$

Remark 2.3. (1) The non-oscillating functions \tilde{T}_1 and \tilde{T}_2 respectively in (3) and (4) are undetermined.

We can see, in [4], that if we stop the expansion 2 at order 1, the function \tilde{T}_1 (and a fortiori \tilde{T}_2) plays no role in our approximation and we can set it to zero. However, if we are interested in correctors T_i , with $i > 1$, this function should satisfy an additional compatibility condition (see [4]).

- (2) In the cell problems on T_1 and T_2 , the macroscopic variable x plays only the role of a parameter.
- (3) In the cell problem on T_2 , we remark that T_2 depends on the local values of the thermal source $f(x, y)$ and the thermal exchange coefficient $h(x, y)$ unlike the homogenized problem which depends on their averages in Y^S . Since the cell problem on T_1 depends only on the diffusivity tensor K and the radiative operator G , we take a particular interest in the second corrector as it is the first term of (2), which contains the local variations between the thermal source and the heat exchange.

3. NUMERICAL RESULTS

In this section we describe some numerical experiments to study the asymptotic behaviour of the non-linear heat transfer model (1). Our goal is to show the efficiency of our proposed homogenization procedure, to validate

it by comparing the reconstructed solution of the homogenized model with the numerical solution of the exact model (1) for smaller and smaller values of ϵ and to exhibit a numerical rate of convergence in terms of ϵ . All computations have been done with the finite element code CAST3M [5] developed at the French Atomic and Alternative Energy Commission (CEA). We now give our computational parameters for a reference 2D computation corresponding to $\epsilon = \frac{1}{4}$. The geometry corresponds to a cross-section of a typical fuel assembly for a gas-cooled nuclear reactor (see [7] for further references). The domain is $\prod_{j=1}^2(0, L_j)$, with, $L_1 = 0.48m$ and $L_2 = 1.12m$. Each periodicity cell is equal to $\prod_{j=1}^2(0, \epsilon L_j)$, each one contains 2 hollow cylinders (holes) (see Figure 1), the radius of which is equal to $\epsilon 0.014m$. The emissivity of the holes boundaries is equal to $e = 1$. The oscillating thermal source f is equal to $f = 6MW$ in disks strictly included in Ω_ϵ (with the same size as the fluids disks: channels) such that we have a disc between each two fluid holes (see Figure 1). The source is set to zero elsewhere. We enforce periodic boundary conditions in the x_1 direction and Dirichlet boundary conditions in the other directions which are given by $T_\epsilon(x) = 800K$ on the boundaries corresponding to $x_2 = 0$ and $T_\epsilon(x) = 1200K$ on the boundaries corresponding to $x_3 = L_3$. \tilde{T}_1 and \tilde{T}_2 are set to zero. The physical value of the isotropic conductivity is $30Wm^{-1}K^{-1}$. To avoid an excessive computational burden, we have chosen periodic boundary condition in the x_1 direction which implies that it is not necessary to decrease the cell size in the x_1 direction. Therefore, $\ell_1 = 1/3L_1$ is fixed and we simply add cells in the x_2 direction, decreasing ϵ from $1/4$ to $1/10$ with a unit step. In Figure 2 we plot the direct, homogenized and reconstructed solutions

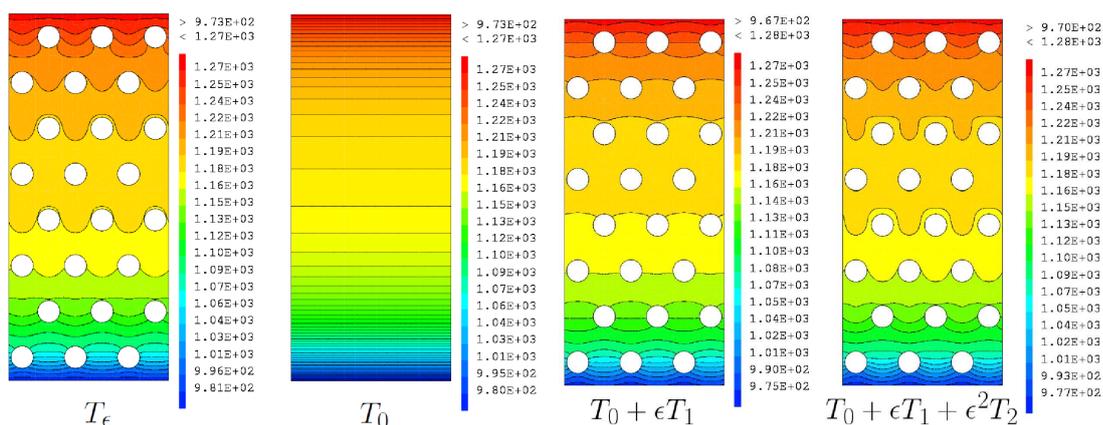


FIGURE 2. Solutions in Ω_ϵ for $\epsilon = 1/4$

computed for a value of $\epsilon = \epsilon_0 = 1/4$. We plot also in Figure 2 these solution in the segment defined by $p1 = [a1, a2]$ where $a1 = (1.75E - 02 \ 8.25E - 02)$ and $a2 = (8.72E - 02 \ 17.6E - 02)$.

In [3,9], we provide a rigorous mathematical justification of the homogenization process by using the method of two-scale convergence [1, 11]. This method helps us to justify the two first terms of (2). To show the convergence of our method when it includes the second order corrector $\epsilon^2 T_2$, we draw, in Figure (4), the relative error related to temperature in the domain Ω_ϵ with periodic boundary conditions in both directions x_1 and x_2 to avoid complications with boundary layers. We compare this error with the period ϵ . The slopes shows that the relative error $ERR(T)$ behaves like ϵ^2 which is in accordance with that theoretically predicted for a pure diffusion problem in [4]. We notice also that, in absence of the boundary layers, the relative error related to the correction by only the first order corrector T_1 behaves also like ϵ^2 but remains, for each ϵ , larger than $ERR(T)$. This means that adding the second order corrector T_2 does not improve significantly the convergence order of our method. However, for a fixed ϵ (often by industrial constraints like the hole size in the present application), this corrector is very useful, even essential, to have a good approximation by homogenization of the heat transfer problem (1).

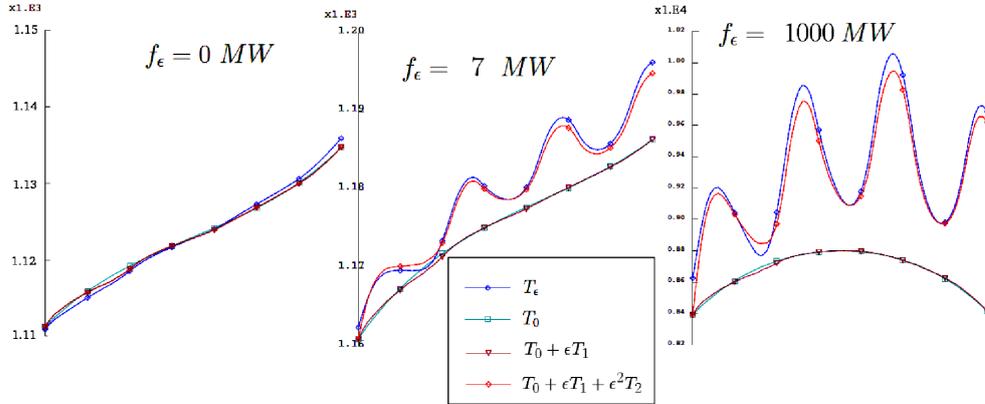


FIGURE 3. Solutions in the segment $p1$ for $\epsilon = 1/4$ and $f_\epsilon = 0$ MW (left), $f_\epsilon = 7$ MW (center), $f_\epsilon = 1000$ MW (right)

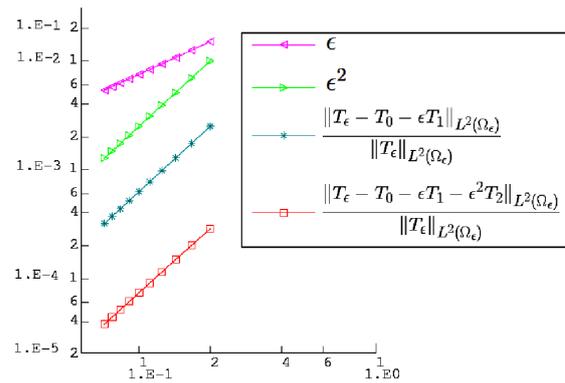


FIGURE 4. Relatives errors on the temperature

REFERENCES

- [1] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(6):1482–1518, 1992.
- [2] G. Allaire and K. El Ganaoui. Homogenization of a conductive and radiative heat transfer problem. *Multiscale Model. Simul.*, 7(3):1148–1170, 2008.
- [3] G. Allaire and Z. Habibi. Homogenization of a conductive, convective and radiative heat transfer problem. *To appear*.
- [4] A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*, volume 5 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978.
- [5] Cast3M. <http://www-cast3m.cea.fr/cast3m/index.jsp>.
- [6] CEA e-den. *Les réacteurs nucléaires à caloporteur gaz*. CEA Saclay et Le Moniteur Editions. Monographie Den, 2006. <http://nucleaire.cea.fr/fr/publications/pdf/M0-fr.pdf>.
- [7] K. El Ganaoui. *Homogénéisation de modèles de transferts thermiques et radiatifs : application au coeur des réacteurs à caloporteur gaz*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2006.
- [8] Z. Habibi. Homogenization of a conductive-radiative heat transfer problem, the contribution of a second order corrector. *ESAIM proc.* (submitted).
- [9] Z. Habibi. *Homogénéisation et convergence à deux échelles lors d'échanges thermiques stationnaires et transitoires dans un coeur de réacteur à caloporteur gaz*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2011.
- [10] F. M. Modest. *Radiative heat transfer*. Academic Press, 2 edition, 2003.
- [11] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 20(3):608–623, 1989.

Résumé

Nos travaux concernent l'homogénéisation du transfert de chaleur dans un milieu poreux périodique qui modélise la géométrie d'un cœur de réacteur nucléaire à caloporteur gaz. Cette géométrie est constituée d'un milieu solide traversé par plusieurs longs et minces cylindres parallèles dont le diamètre est du même ordre que la période. La chaleur est transportée par conduction dans la partie solide du domaine et par conduction, convection et rayonnement dans la partie fluide (les cylindres). Le rayonnement est modélisé par une condition non-locale sur les parois des cylindres. C'est une analyse stationnaire qui correspond à un fonctionnement nominal du cœur, et aussi non-stationnaire qui correspond à un arrêt normal du cœur. Pour obtenir le problème homogénéisé nous utilisons d'abord une analyse formelle par développement asymptotique à deux échelles. La justification mathématique de nos résultats est basée sur la méthode de convergence à deux échelles. Une caractéristique de ce travail en dimension 3 est qu'il combine l'analyse asymptotique par homogénéisation avec une analyse asymptotique par réduction de la dimension de l'espace 3D en 2D pour remédier à la non-périodicité de la condition de rayonnement suivant la direction axiale des cylindres. Une deuxième caractéristique de ce travail est l'étude de ce transfert de chaleur lorsqu'il contient une source thermique oscillante au niveau microscopique et un échange thermique entre les parties fluide et solide du cœur, dans un tel contexte, notre analyse numérique montre une contribution non-négligeable du correcteur dit d'ordre 2 qui nous aide à reproduire les gradients qui apparaissent entre la zone de la source thermique et la partie fluide (les cylindres).

Mots clefs : Analyse asymptotique, homogénéisation, transfert thermique, transfert radiatif, convergence à deux échelles, périodique, correcteurs, domaines perforés, milieux poreux.

Abstract

We are interested in the homogenization of heat transfer in periodic porous media modelling the geometry of a gas cooled nuclear reactor. This geometry is made of a solid media perforated by several long thin parallel cylinders, the diameter of which is of the same order than the period. The heat is transported by conduction in the solid part of the domain and by conduction, convection and radiative transfer in the fluid part (the cylinders). A non-local boundary condition models the radiative heat transfer on the cylinder walls. It is a stationary analysis corresponding to a nominal performance of the reactor core, and also non-stationary corresponding to a normal shut-down of the core. To obtain the homogenized problem we first use a formal two-scale asymptotic expansion method. The mathematical justification of our results is based on the notion of two-scale convergence. One feature of this work in dimension 3 is that it combines homogenization with a 3D to 2D asymptotic analysis since the radiative transfer in the limit cell problem is purely two-dimensional. A second feature of this work is the study of this heat transfer when it contains an oscillating thermal source at the microscopic level and a thermal exchange with the perforations. In this context, our numerical analysis shows a non-negligible contribution of the second order corrector which helps us to model the gradients appearing between the source area and the perforations.

Keywords : Asymptotic analysis, homogenization, heat transfer, radiative transfer, two-scale convergence, periodic, correctors, perforated domains, porous media.

