



HAL
open science

Influence des paramètres mécaniques et géométriques sur le comportement statique de l'archet de violon en situation de jeu

Frédéric Ablitzer

► **To cite this version:**

Frédéric Ablitzer. Influence des paramètres mécaniques et géométriques sur le comportement statique de l'archet de violon en situation de jeu. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2011. Français. NNT: . tel-00695927v1

HAL Id: tel-00695927

<https://theses.hal.science/tel-00695927v1>

Submitted on 10 May 2012 (v1), last revised 23 Nov 2012 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INFLUENCE DES PARAMÈTRES
MÉCANIQUES ET GÉOMÉTRIQUES
SUR LE COMPORTEMENT STATIQUE
DE L'ARCHET DE VIOLON
EN SITUATION DE JEU

Frédéric Ablitzer

Thèse de Doctorat en Acoustique
Université du Maine, Le Mans, France, 2011

Université du Maine, Le Mans, France
École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture

Thèse de Doctorat en Acoustique

**INFLUENCE DES PARAMÈTRES
MÉCANIQUES ET GÉOMÉTRIQUES
SUR LE COMPORTEMENT STATIQUE
DE L'ARCHET DE VIOLON
EN SITUATION DE JEU**

Frédéric Ablitzer

Soutenue le 5 décembre 2011 devant le jury composé de :

R. Caussé	Directeur de Recherche, IRCAM, Paris	Rapporteur
B. Cochelin	Professeur, LMA, Marseille	Rapporteur
A. Askenfelt	Professeur, KTH, Stockholm	Examineur
A. Chaigne	Professeur, ENSTA ParisTech, Palaiseau	Examineur
G. Chevallier	Maître de Conférences, SUPMÉCA, Saint-Ouen	Examineur
N. Poidevin	Archetière, Dinan	Invitée
J.P. Dalmont	Professeur, LAUM, Le Mans	Directeur de thèse
N. Dauchez	Professeur, SUPMÉCA, Saint-Ouen	Directeur de thèse

REMERCIEMENTS

Je souhaite tout d'abord remercier très sincèrement mes directeurs de thèse, Jean-Pierre Dalmont et Nicolas Dauchez. Je leur suis profondément reconnaissant de m'avoir accordé leur confiance dès le début et de m'avoir accompagné durant ces trois années pour mener à bien ce travail. J'ai eu un réel plaisir à explorer ce sujet passionnant avec eux.

Je remercie René Caussé et Bruno Cochelin, qui ont accepté de rapporter le manuscrit de thèse, Antoine Chaigne qui m'a fait l'honneur de présider le jury, ainsi qu'Anders Askenfelt, Gaël Chevallier et Nelly Poidevin, pour le grand intérêt qu'ils ont porté à ce travail en tant que membres du jury.

Je remercie Yves Aurégan, directeur du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, pour son accueil et la mise à disposition des moyens matériels. Merci également à Anne-Marie Brulé, Cora-Line Liegard et Géraldine Collet pour leur aide et leur disponibilité concernant les aspects administratifs.

La réalisation d'expériences n'aurait pas été possible sans l'aide d'Emmanuel Brasseur, James Blondeau, Stéphane Lebon, Hervé Mezière, Patrick Collas et Éric Egon. Je les remercie vivement pour leur contribution dans la mise en place des montages expérimentaux, leurs conseils techniques et leur disponibilité.

L'implication des archetiers a été déterminante pour l'orientation de cette thèse et sa réussite. Je souhaite remercier tout particulièrement Nelly Poidevin et Jean Grunberger, qui ont partagé leur savoir-faire tout au long de cette thèse. Je m'estime très chanceux d'avoir appréhendé la mécanique de l'archet à la lumière de leur grande expérience. Merci également à Paul Borie et Jean-Yves Tanguy pour s'être impliqués dans cette démarche.

La proximité géographique de l'ITEMM a joué un rôle important dans cette interaction. Je remercie chaleureusement Vincent Doutaut de m'avoir invité chaque année à présenter mes travaux aux Journées Facture Instrumentale et Sciences. Un grand merci à Marthe Curtit pour son implication dans ce travail et son soutien amical depuis son arrivée.

L'étude subjective présentée dans cette thèse n'aurait vu le jour sans le concours des musiciens. Merci à Estelle Imbert, Olivier Mingam et Anne-Lise Journeaux, qui ont

contribué à l'étude en participant à des tests préliminaires. Je remercie particulièrement Estelle Imbert et Michel Reuter, qui se sont rendus disponibles pour un exercice musical inhabituel.

Merci à Gaël Chevallier et Jean-Luc Dion, pour les discussions fructueuses à Supméca. Merci à Jean-François Petiot, de l'IRCCyN, pour ses conseils sur la réalisation de tests subjectifs. Merci également à Christian Gardies, qui a contribué au bon déroulement de la soutenance en apportant son aide technique pour la visioconférence.

J'adresse de vifs remerciements à tous les membres du LAUM qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à l'aboutissement de cette thèse. Merci en particulier à Jean-Michel Genevaux, Olivier Dazel, François Gautier, Joël Gilbert, Najat Tahani, Laurent Simon, Sohbi Sahraoui, Bruno Gazengel, André Almeida, Michel Bruneau.

Enseigner en tant que moniteur durant ces trois années a été une expérience très formatrice. Je remercie tous les enseignants-chercheurs qui ont contribué à m'apprendre cet aspect de leur métier, en m'accordant leur confiance et en partageant leur expérience. L'encadrement d'étudiants ENSIM en projet et de stagiaires au LAUM a également fait partie de cet apprentissage. Je remercie les étudiants, Simon Bailhache, Marie Escouffaire, Solenne Nogry, Aurélien Pages, Jules Françoise, Thibaut Pinault, Antonin Pineau, Nicolas Derouineau, pour leur enthousiasme. Merci à Mathieu Secail d'avoir contribué au bon déroulement des projets ENSIM.

Merci à Joël Gilbert et François Gautier de m'avoir accueilli dans leur bureau dès mon arrivée. En plus de m'offrir un excellent environnement de travail, ils m'ont beaucoup appris sur la recherche au quotidien et la vie de laboratoire.

Un grand merci à tous les anciens et actuels thésards du LAUM, avec qui j'ai partagé d'innombrables moments au cours de ces trois années. Cette aventure scientifique et humaine n'aurait pas été si riche sans le soutien et l'amitié de Jacques Cuenca, Tony Valier-Brasier, Benoit Merit, Marcos Pinho, Mathias Remy, Antonin Novak, Adrien Pelat, Ygaël Renou, Sylvain Mezil, Miguel Moleron, Jean-Baptiste Doc, Navid Nemati, Benjamin Elie, Matthieu Guedra, Baptiste Bergeot, Damien Lecoq, Thomas Lavergne, Alan Geslain. Merci à Mumu pour sa bonne humeur quotidienne au moment du café.

Au cours de ces trois années, j'ai eu le plaisir de faire partie de l'ensemble amateur de musique ancienne *Rondo Crannasiano*. Je remercie Jean-Pierre Dalmont, Véronique Dubos, Amandine Gatien, Olivier Dazel, Joël Gilbert, Jacques Cuenca, Margaux Regniez pour les nombreux moments musicaux partagés.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mes parents, Martine et Jean-Charles, à ma soeur Caroline et mon frère Franz, ainsi qu'à mon parrain Pierrot, pour leur soutien constant et leurs encouragements, au cours ces trois années et depuis toujours. J'ai également une pensée pour toute ma famille et mes amis de Belfort.

Le mot de la fin est pour Céline. Sa présence au quotidien, sa patience, ses encouragements m'ont aidé à traverser les moments difficiles de cette thèse. Merci pour tous les moments de bonheur vécus ensemble depuis notre rencontre.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Présentation générale de l'archet de violon	5
1.1 Histoire de l'archet	5
1.1.1 Des origines à la Renaissance	6
1.1.2 La période Baroque	7
1.1.3 La période Classique	8
1.1.4 L'archet moderne	8
1.1.5 La technique d'archet	10
1.2 Fabrication d'un archet	12
1.2.1 Principales étapes	12
1.2.2 Cambrage	14
1.2.3 Bois utilisés et leur choix	15
1.2.4 Et les nouveaux matériaux ?	18
1.2.5 Vers une approche scientifique de la facture	18
1.3 Études scientifiques sur l'archet	20
1.3.1 Physique de la corde frottée	21
1.3.2 La question du son	23
1.3.3 Influence des propriétés dynamiques de l'archet	24
1.3.4 Vers une caractérisation objective de la « qualité »	25
1.4 Analyse du discours des facteurs et regard des scientifiques	26
1.4.1 Tension du crin et précontrainte	26
1.4.2 Le cambre : un paramètre de réglage essentiel	28
1.4.3 Raideur et souplesse	29
1.5 Conclusion	31
2 Modèle statique 2D	33
2.1 Introduction	34
2.2 Model of the assembled bow	35
2.2.1 General description	35
2.2.2 Finite element model of the bow	37
2.2.3 Model of the hair	38
2.2.4 Validation of the model	40

2.3	Results	42
2.3.1	Definition of a standard bow	42
2.3.2	Variation in hair tension under transverse loading	45
2.3.3	Distribution of transverse compliance along the bow	46
2.3.4	Influence of initial hair tension on transverse compliance	47
2.3.5	Influence of camber on transverse compliance	48
2.4	Conclusion	51
2.5	Compléments sur le comportement statique plan	53
2.5.1	Action de la mèche sur la baguette	53
2.5.2	Effet de la raideur de la mèche	55
2.5.3	Effet de la précontrainte	55
2.5.4	Étude des efforts intérieurs	56
3	Modèle statique 3D et validation expérimentale	59
3.1	Introduction	60
3.2	Model	61
3.2.1	Co-rotational formulation	61
3.2.2	Model of bow	63
3.2.3	Steps of the simulation	65
3.3	Experimental procedures	65
3.3.1	Determination of bow parameters	66
3.3.2	Measurement of compliance	70
3.4	Discussion	72
3.4.1	Description of the bows	72
3.4.2	Comparison between measured and simulated compliance	74
3.5	Conclusion	78
3.6	Compléments sur la mesure de la tension	80
4	Stabilité d'un archet de violon en situation de jeu	83
4.1	Définitions	84
4.2	Expérience préliminaire	84
4.3	Modèle phénoménologique	86
4.3.1	Description	87
4.3.2	Mise en équations	87
4.3.3	Détermination des points critiques	88
4.3.4	Interprétation dynamique	90
4.3.5	Introduction d'un défaut initial	91
4.3.6	Analyse du comportement post-critique	92
4.3.7	Discussion	95
4.4	Calcul numérique sur le modèle d'archet	95
4.4.1	Adaptation du modèle éléments finis	96
4.4.2	Ovalisation de la section	97
4.4.3	Mise en évidence des cas d'instabilité	99
4.4.4	Influence des réglages de la tension et du cambre	101
4.4.5	Discussion sur les conséquences pour le jeu et la facture	103
4.5	Conclusion du chapitre	105

5 Essais en jeu	107
5.1 Cadre de l'étude	107
5.1.1 Choix de l'espace produit	107
5.1.2 Sélection et réglage des archets	108
5.1.3 Caractérisation	108
5.2 Description et résultats des tests	110
5.2.1 Verbalisation	110
5.2.2 Tests par paires	112
5.2.3 Réglages optimaux	116
5.3 Conclusion	117
Conclusion générale	119
Références	128
A Raideur, cambre et qualités de jeu	129
B Formulation corotationnelle d'un élément de poutre plane	131
C Résultats des tests par paires	143

INTRODUCTION

L'archet, cette baguette magique à l'aide de laquelle le grand artiste nous émeut le cœur et l'imagination, ce talisman qui nous transporte hors du monde réel et nous fait éprouver les plus ineffables jouissances de l'idéal.

Ces écrits du musicologue François Joseph Fétis en 1856 [38], par la place qu'ils accordent à l'archet dans l'expression musicale, sont saisissants. Souvent considéré comme un accessoire, l'archet est en effet longtemps resté dans l'ombre des instruments eux-mêmes. L'aura d'excellence qui entoure les violons des grands maîtres italiens comme Amati, Stradivari ou Guarneri, a plus rarement trouvé son pareil pour l'archet. Un tel constat, encore d'actualité, ne reflète pas l'expérience des musiciens professionnels, particulièrement exigeants quant au choix de leur archet.

L'archet de violon tel que nous le connaissons aujourd'hui est le fruit d'une longue évolution. Depuis la mise au point de sa forme moderne par François Xavier Tourte au début du XIX^e siècle, la géométrie n'a quasiment pas changé. Par ailleurs, son aboutissement coïncide avec l'adoption du Pernambouc (*Caesalpinia echinata*). Ce bois brésilien, choisi par Tourte pour ses propriétés mécaniques, est aujourd'hui encore privilégié pour la fabrication d'archets haut de gamme.

La raréfaction du Pernambouc, conséquence d'une exploitation non contrôlée, a récemment entraîné des mesures visant à préserver cette espèce. Inscrite en 2007 à l'annexe II de la CITES¹, son commerce est depuis soumis à une réglementation stricte. Cette disposition a soulevé la problématique de recherche d'un matériau de substitution, à laquelle œuvre une partie de la communauté des archetiers. Parallèlement, des travaux scientifiques allant dans ce sens ont vu le jour.

Ainsi, les « Journées Facture Instrumentale & Sciences », organisées depuis 2001 par le pôle d'innovation de l'ITEMM², donnent lieu chaque année à de nombreux échanges entre facteurs et scientifiques. C'est dans ce cadre qu'ont été initiés les travaux sur l'archet de violon au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine. La thématique abordée est née d'un questionnement de l'archetière Nelly Poidevin sur le lien pouvant exister entre la géométrie d'un archet et le bois utilisé. Dans le but d'apporter des éléments de réponse,

1. Convention on International Trade in Endangered Species.

2. Institut Européen des Métiers de la Musique, Le Mans.

des études sur la caractérisation objective d'archets ont été menées de 2004 à 2007, dans le cadre de projets d'étudiants à l'ENSIM³ [1, 45, 46, 84]. Une partie de ces travaux, encadrés par Nicolas Dauchez, a fait l'objet d'une communication au Congrès Français d'Acoustique en 2006 [31]. En outre, des travaux effectués au laboratoire dans le cadre du projet *Lutherie Tools* [47] ont contribué au développement d'outils de caractérisation destinés aux facteurs (luthiers et archetiers).

Le présent travail de thèse s'inscrit dans ce contexte. Il vise à mieux comprendre le fonctionnement de l'archet, en vue de proposer des outils d'aide à la facture.

À cette fin, une attention particulière est portée au discours des facteurs. Deux stages suivis en première année de thèse, l'un portant sur le réglage du cambre⁴, l'autre sur la fabrication d'un archet⁵, ont permis de mieux connaître leur travail. Par ailleurs, les modèles et méthodes de caractérisation développés au cours de cette thèse visent à intégrer les outils du projet PAFI⁶, soutenu par l'Agence Nationale de la Recherche et démarré à l'automne 2009.

D'un point de vue mécanique, la forme de la baguette évoque une structure de type poutre, précontrainte par la tension du crin. De telles structures sont couramment rencontrées en génie civil, pour lesquelles des modèles théoriques existent. On sait notamment qu'une poutre élancée, lorsqu'elle est soumise à un effort de compression, doit être dimensionnée contre le danger d'instabilité. Ces aspects sont présents dans le cas d'un archet et doivent être examinés. Dans ce but, des modèles sont développés. Ils permettent d'analyser le comportement mécanique de l'archet, d'abord dans le plan puis en prenant en compte le caractère tridimensionnel des sollicitations rencontrées en jeu, pour enfin étudier sa stabilité.

Ce mémoire s'articule en cinq parties.

Le chapitre 1 propose une présentation générale de l'archet de violon, à travers son évolution historique et sa fabrication. Une analyse du discours des facteurs et sa mise en regard des études scientifiques existantes permet ensuite de dégager des pistes d'exploration.

Dans le chapitre 2, un modèle visant à étudier le comportement statique de l'archet dans le plan est développé. L'objectif est de mettre en lumière l'influence des paramètres mécaniques et géométriques de la baguette et de la mèche sur la réponse de l'archet à des sollicitations typiquement rencontrées en jeu. L'accent est mis sur le réglage du cambre et de la tension. Cette partie est présentée sous forme d'un article à paraître dans le *Journal of the Acoustical Society of America* [4].

Dans le chapitre 3, le travail de modélisation et d'analyse du comportement statique est complété par la prise en compte de la flexion latérale de la baguette, dans le but

3. École Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans.

4. *Étude de l'archet et de son cambre*, formation animée du 15 au 19 juin 2009 par Jean Grunberger, archetier à Angers.

5. *Fabrication d'un archet baroque*, du 20 au 26 juillet 2009 dans l'atelier de Nelly Poidevin, archetière à Dinan.

6. Plateforme d'Aide à la Facture Instrumentale.

de rendre compte de sollicitations tridimensionnelles. Par ailleurs, une procédure de détermination des paramètres d'entrée du modèle ainsi qu'une validation expérimentale sont présentées. Ce chapitre est proposé sous forme d'un article soumis au journal *Acta Acustica united with Acustica* [6].

Dans le chapitre 4, la stabilité – au sens mécanique – de l'archet sous tension est examinée. Cette analyse s'appuie sur le modèle numérique développé au chapitre précédent et le met en regard d'un modèle phénoménologique. Elle vise à mieux appréhender les limites des paramètres de fabrication et de réglage vis-à-vis du risque d'instabilité évoqué par les facteurs.

Enfin, le chapitre 5 présente des essais en jeu, menés dans le but d'évaluer les conséquences des réglages étudiés sur les qualités de jeu de l'archet.

CHAPITRE 1

PRÉSENTATION GÉNÉRALE DE L'ARCHET DE VIOLON

Ce chapitre précise le contexte dans lequel s'inscrit le présent travail. Une première partie s'attache à décrire le processus par lequel l'archet a abouti à sa forme actuelle. Dans une deuxième partie, la fabrication d'un archet est présentée en mettant l'accent sur le travail de la baguette, les bois utilisés et les moyens d'aide à la facture disponibles à ce jour. Une revue des études scientifiques relatives à l'archet est ensuite proposée. Le chapitre se conclut sur une analyse du discours des facteurs Elle vise à mettre en évidence l'importance des paramètres de fabrication et de réglage vis-à-vis des qualités de jeu et de sonorité escomptées.

1.1 Histoire de l'archet

La description des premiers archets se heurte à l'extrême rareté d'exemplaires originaux. Le plus ancien dont on dispose est un archet viking du XI^e siècle, découvert en 1975 dans les fondations d'une maison en Irlande [61]. D'une façon générale, très peu d'archets provenant des époques antérieures au XVIII^e siècle ont été préservés. La connaissance actuelle des premières formes de l'archet provient donc essentiellement de sources iconographiques, heureusement nombreuses. Souvent considérées au premier abord comme peu fiables [91], les premières représentations visuelles de l'archet ont permis de dégager une classification des formes et d'avancer certaines hypothèses quant aux procédés de fabrication et aux bois utilisés [80, 21]. L'évolution de l'archet s'étant faite en parallèle de celle des instruments à cordes frottées, il serait impossible de rendre compte des premières formes sous lesquelles il apparaît en se limitant aux archets de violon, cet instrument n'étant apparu qu'au début du XVI^e siècle. Ainsi notre courte introduction à l'histoire de l'archet commence par ceux d'autres instruments tels que la vièle, la lira da braccio, le rebec et la viole (le premier ayant été joué plutôt au Moyen-Âge et les trois autres à la Renaissance). En dépit des spécificités de répertoire, de jeu et de tenue propres à chaque instrument, la fonction de l'archet et la plupart des besoins ayant suscité des améliorations techniques leur sont communes.

1.1.1 Des origines à la Renaissance

L'archet apparaît au IX^e siècle dans le monde musulman et l'empire byzantin. D'abord mentionné dans divers écrits, on le voit représenté à partir du X^e siècle dans des manuscrits provenant de l'empire byzantin et d'Espagne (fig. 1.1). Les premières traces de l'archet dans le reste de l'Europe remontent au XI^e siècle, à travers un manuscrit dans lequel sont représentés des joueurs de vièles à archet [17].



Figure 1.1 – L'une des premières représentations de l'archet. *Santo Beato de Liébana, Beati in Apocalipsin libri duodecim, Biblioteca Nacional de Madrid, Hh 58, folio 130r, X^e s.* (détail).

Bien qu'ils apparaissent sous différentes formes et longueurs (de 30 cm à plus d'un mètre), la plupart des premiers archets ont en commun une courbure convexe, rappelant fortement pour certains la forme d'un arc. Ils se distinguent par l'allure générale de la baguette (en forme d'arc, de crosse, de S, etc.) et la répartition de la courbure (le point le plus haut pouvant être vers le milieu ou l'une des extrémités). Malgré leur aspect rudimentaire, certaines formes suggèrent des techniques de fabrication élaborées, notamment le cintrage à chaud. Sur beaucoup de ces archets, la baguette ne se limite pas à la longueur utile au maintien de la mèche sous tension, mais se trouve prolongée par une poignée permettant la saisie de l'archet.



(a)



(b)



(c)

Figure 1.2 – Divers modes de fixation du crin à la pointe. (photos © Nelly Poidevin [81])

Divers modes de fixation de la mèche existent. À la pointe, on peut mentionner par exemple la mèche traversant une fourche et maintenue par une ligature (fig. 1.2(a)), ou passant à travers un trou percé dans la baguette et retenue par un nœud (fig. 1.2(b)). Les

différents moyens d'attache du côté de la main, généralement plus difficiles à identifier, sont tout aussi rudimentaires. Vers la fin du XVI^e siècle apparaissent des archets équipés d'un cabochon, petite pièce tournée dans laquelle est insérée la mèche et venant se fixer à l'extrémité de la baguette (fig. 1.2(c)).

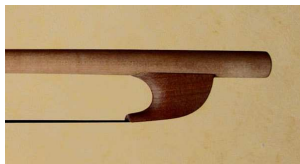


Figure 1.3 – Hausse coincée. (photo © Nelly Poidevin [81])

Par ailleurs, le besoin d'augmenter la distance entre la mèche et la baguette se fait ressentir. Au XIV^e siècle déjà, certaines baguettes présentent une protubérance au niveau du point d'attache du crin du côté de la main. Ce procédé préfigure l'apparition d'une hausse (fig. 1.3) intercalée entre la baguette et la mèche – on parle alors de hausse coincée –, à la fin du XV^e siècle. En plus d'éloigner le crin de la baguette, la hausse a pour fonction de maintenir la mèche sous tension.

1.1.2 La période Baroque

Au début du XVII^e siècle le violon, qui bénéficie des progrès de la lutherie, prend une place plus importante dans le développement du répertoire musical. Face à une demande nouvelle de virtuosité et d'expressivité, l'archet évolue (fig. 1.4). Dans le but d'accroître la longueur de mèche utilisable, on force la convexité à proximité de la pointe pour éloigner la baguette du crin. Ce procédé annonce l'introduction de la tête. La mèche est alors attachée à la pointe par l'intermédiaire d'une cale en bois logée dans une mortaise. Bien qu'un système de réglage de la tension par un mécanisme à crémaillère apparaisse au cours de cette période, il ne parvient pas à s'imposer face à l'usage de la hausse coincée.

Avec l'apparition en Italie du concerto de soliste à la fin du XVII^e siècle, de nouveaux besoins émergent : le violoniste doit désormais se faire entendre au dessus d'un orchestre. À cette époque, on distingue les archets de solistes de ceux destinés aux musiciens de l'orchestre, les premiers offrant une longueur de mèche plus importante. Conjointement à l'accroissement de hauteur de la tête, la convexité de la baguette à proximité de la pointe est renforcée. Afin de ne pas diminuer la stabilité de l'archet sur la corde, compromise par une plus grande distance entre le crin et la baguette, une courbure légèrement concave est appliquée au milieu de la baguette, qui prend alors la forme d'un S. Par ailleurs, l'équilibre de l'archet se trouve affecté par le développement de la tête, qui déplace le centre d'inertie vers l'avant. Ainsi, il n'est pas rare de voir des archets du XVIII^e siècle dont la baguette est cannelée sur ses deux tiers supérieurs, conception permettant de l'alléger vers la pointe sans compromettre sa rigidité. En outre, le mécanisme de réglage de la tension par vis-écrou, apparaissant à la même période, tend à compenser ce déséquilibre. Ce dispositif répond avant tout au besoin d'ajuster finement la tension dans la mèche, jusqu'alors incertaine en raison de la sensibilité de la longueur des crins aux variations d'humidité.

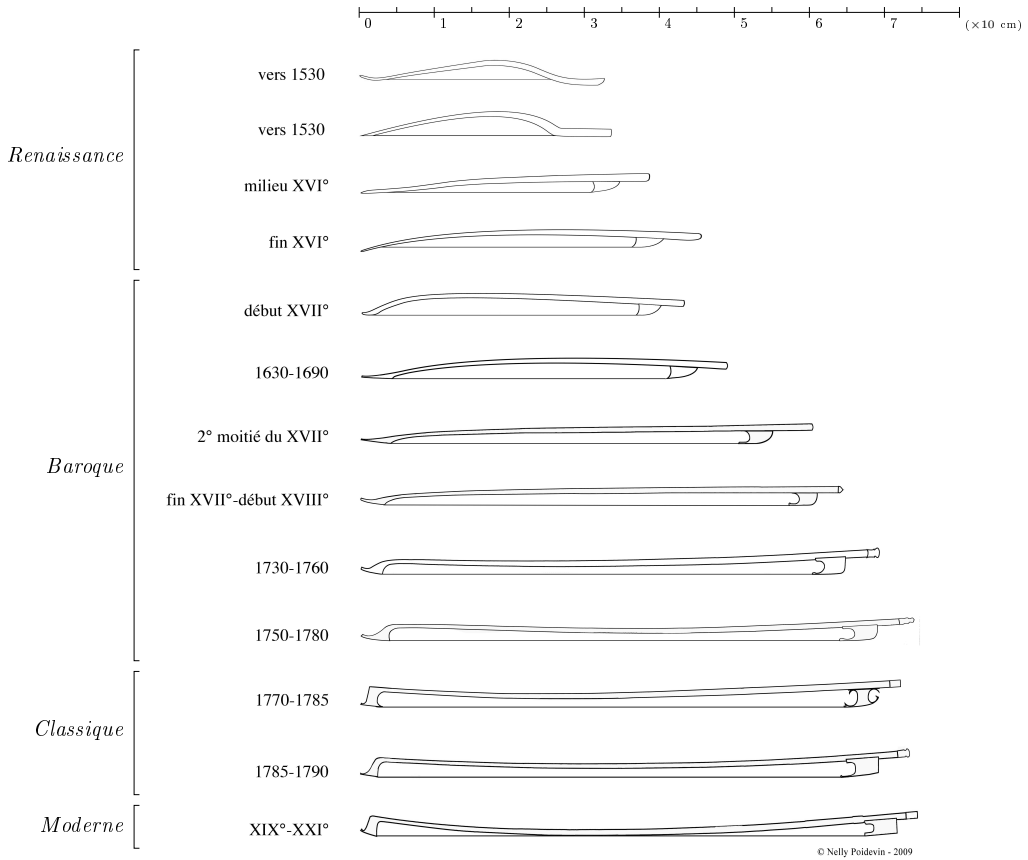


Figure 1.4 – Évolution de l'archet de violon. (dessins © Nelly Poidevin [81])

1.1.3 La période Classique

Vers la fin du XVIII^e siècle, le répertoire pour violon tend à privilégier les phrases musicales longues et soutenues. La baguette s'allonge, sa convexité diminue (notamment vers la pointe) et la hauteur de la tête augmente. Modèle emblématique de cette période, l'archet Cramer est caractérisé par une tête en forme de marteau et une hausse très découpée. Cette conception éloigne fortement le centre d'inertie vers la pointe, entraînant un déséquilibre que le musicien doit compenser en tenant l'archet à l'avant de la hausse, de façon similaire à la tenue de l'archet baroque. Différents modèles se succèdent sur une courte période de temps, tandis que les styles de jeu et méthodes d'enseignement s'uniformisent progressivement. Cette métamorphose du monde musical va ouvrir la voie à une standardisation de l'archet.

1.1.4 L'archet moderne

L'avènement de la musique romantique au début du XIX^e siècle suscite de nouveaux besoins, notamment une puissance sonore accrue. Évoluant encore pour y répondre, l'archet aboutit à sa forme moderne. C'est à François Xavier Tourte (1747-1835) que l'on

attribue sa mise au point. Cet archetier français, initialement destiné par son père Nicolas Pierre Tourte au métier d'horloger, combine différentes innovations apportées par ses prédécesseurs et fixe définitivement certains principes de conception.

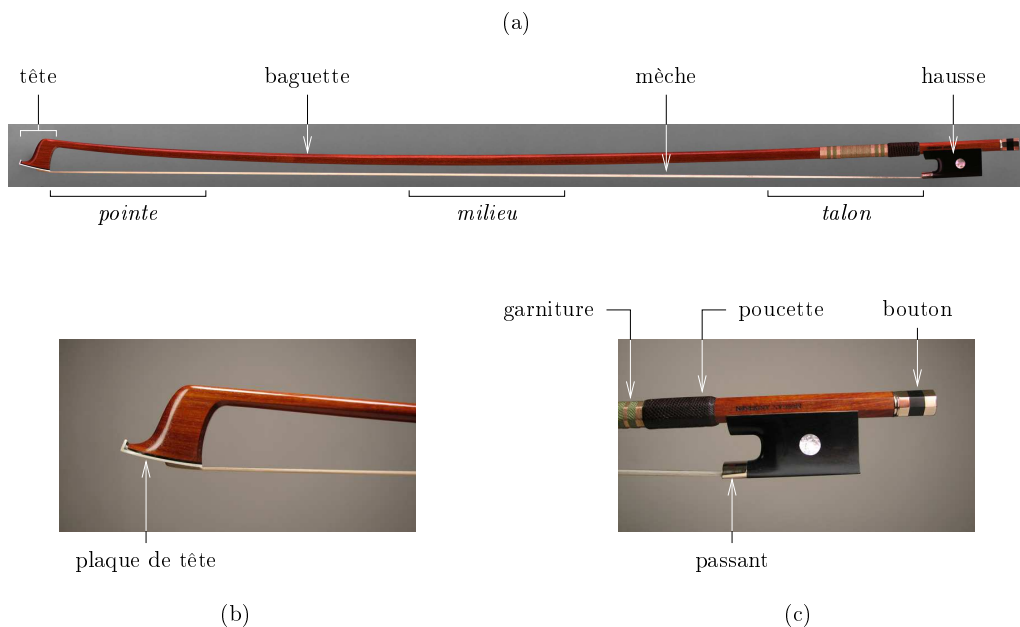


Figure 1.5 – Archet moderne : (a) vue d'ensemble, (b) détail de la tête, (c) détail de la hausse. Les termes en italiques font partie du vocabulaire relatif au jeu (« jouer au talon », ...). (archet Morgan Andersen, photo slit-scan © Andy Lim)

Le nouvel archet (fig. 1.5) se distingue des précédents par un cambre très prononcé, notamment dans la partie supérieure de la baguette, obtenu exclusivement en courbant celle-ci par la chaleur. L'usage du Pernambouc, reconnu par Tourte comme le meilleur bois pour la fabrication de la baguette, s'impose comme une norme pour les générations d'archetiers à venir. Les dimensions de l'archet se standardisent également. Tourte fixe la longueur de la baguette à 74 ou 75 cm, celle de la mèche à 65 cm. Il impose la distance entre la mèche et la baguette à ses extrémités en fixant la hauteur de la hausse et de la tête. La décroissance du diamètre le long de la section, dont le caractère mathématique sera mis au jour par les travaux du luthier Jean-Baptiste Vuillaume, rapportés par Fétis [38], est un aspect marquant des archets de Tourte. Malgré la plus faible densité du Pernambouc par rapport aux bois utilisés auparavant, la tête particulièrement massive pose le même problème d'équilibre que sur les archets antérieurs. Pour y remédier, Tourte leste la hausse et le bouton avec des parties métalliques, rapprochant ainsi le centre d'inertie de l'archet vers la main. Afin d'élargir la mèche en évitant que les crins ne se rassemblent en un faisceau, il les maintient à la sortie de la hausse sous forme d'un ruban plat d'environ 1 cm de largeur, au moyen d'une virole (le passant).

Ce modèle, en répondant parfaitement aux besoins de puissance, de précision et de variété d'expressions que le nouveau répertoire exige, a été adopté unanimement par les musiciens et s'est imposé comme un standard. Si l'archet a connu encore certaines

améliorations après Tourte (par exemple l'introduction de la coulisse, pièce en métal protégeant la partie supérieure de la hausse en contact glissant avec la baguette), sa forme générale et ses caractéristiques n'ont quasiment pas changé.

1.1.5 La technique d'archet

L'évolution de l'archet de violon, intimement liée à celle du répertoire musical, répond à des besoins propres à chaque époque : qualités de scansion pour l'accompagnement de danses à la Renaissance, articulation précise et aérée à l'époque Baroque, jeu *cantabile* à mesure qu'arrive la musique romantique. L'archet moderne, dont la permanence depuis 200 ans évoque un compromis abouti, offre une palette d'expression riche et variée, mise à profit par le répertoire des XIX^e et XX^e siècles. Cette section vise à donner au lecteur des indications sur la technique d'archet moderne. Bien que celle-ci présente des spécificités suivant le genre musical (classique, jazz, folk...), on s'en tient ici à une description synthétique inspirée des méthodes d'enseignement classique [39, 44].

La tenue d'archet représentée sur la figure 1.6 est la position de base. Des ajustements autour de cette position neutre sont fréquents pendant le jeu, suivant les besoins propres à chaque type de coup d'archet ou au son recherché. Le pouce est en contact avec le bord supérieur de la hausse et la baguette. Son rôle est de contrebalancer la force exercée par les autres doigts. L'extrémité de l'auriculaire est placée sur la baguette. L'index est en contact avec la baguette au niveau de sa dernière articulation. Selon Galamian [44], cette position de l'index favorise la sensation du contact entre la mèche et les cordes. L'index et l'auriculaire jouent un rôle important vis-à-vis du contrôle de la force. Le majeur et l'annulaire interviennent de façon plus passive.

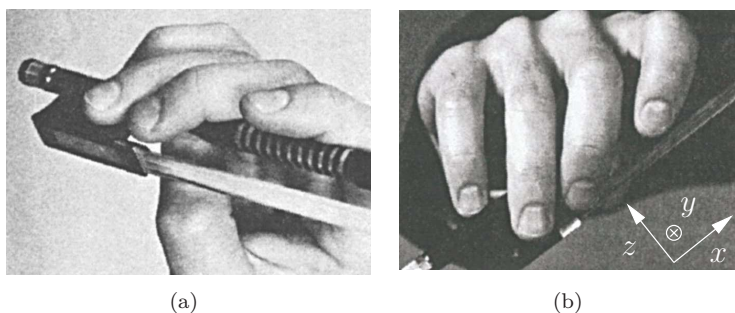


Figure 1.6 – Tenue de base de l'archet (d'après [44]).

Trois paramètres essentiels affectent la production du son : vitesse, « pression »¹ et point de contact de l'archet avec la corde. La « pression » provient d'une combinaison du poids du bras, d'une action musculaire et du poids de l'archet. Cependant, la répartition de la masse le long de l'archet est telle qu'une même force exercée par la main du musicien engendre une force sur la corde différente suivant l'endroit de la mèche où a lieu le contact. Lors d'un passage *forte* joué à la pointe, par exemple, le poids de l'archet contribue faiblement à la force transmise à la corde. Le musicien doit alors exercer une

1. Le terme « pression d'archet », couramment rencontré dans la littérature musicale et employé par les musiciens, désigne la force verticale exercée par l'archet sur la corde.

pression de l'index pour augmenter celle-ci. Au contraire, pour jouer *piano* au talon, le musicien est amené à compenser le poids de l'archet par une pression de l'auriculaire. Pour transmettre à la corde une force constante sur toute la longueur de l'archet, il est donc nécessaire d'ajuster constamment l'effort appliqué par la main. En raison de la distance entre la force verticale appliquée à la corde et celle produite par le musicien, ce dernier doit exercer un moment autour de l'axe y (voir fig. 1.6). Celui-ci est engendré par l'action combinée de l'index et/ou de l'auriculaire d'une part, et du pouce d'autre part, ce dernier jouant le rôle de pivot. Par ailleurs, il est important de mentionner que l'archet peut être joué soit en gardant la mèche à plat sur les cordes, soit légèrement incliné vers la touche², c'est-à-dire en appliquant une rotation autour de l'axe x dans le sens trigonométrique, généralement inférieure à 45° [94]. Le musicien diminue ainsi la quantité de crins en contact avec la corde, ce qui offre un contrôle supplémentaire, généralement utilisé dans le but de favoriser des attaques douces et des changements de sens au talon.

Le répertoire musical « moderne » fait appel à un ensemble de coups d'archet destinés à obtenir différents rendus sonores. Nous en donnons ici une liste non exhaustive, n'incluant pas les diverses variantes (par exemple la distinction entre le *détaché* simple, accentué, porté, lancé), mais constituant une base suffisamment représentative de la variété d'effets pouvant être rencontrée typiquement dans une partition d'orchestre ou un concerto. Certains coups d'archet se jouent « à la corde », c'est-à-dire en maintenant le contact entre la mèche et la corde d'une note à l'autre :

- son filé : une même note tenue pendant un temps relativement long ;
 - *legato* : liaison de plusieurs notes en un seul coup d'archet ;
 - *détaché* : un coup d'archet à chaque note, sans séparation entre les notes ;
 - *martelé* : un coup d'archet à chaque note, avec une interruption nette entre deux notes consécutives ;
 - *staccato* : succession de notes courtes, jouées en un coup d'archet et bien séparées.
- D'autres nécessitent le décollement de l'archet par rapport à la corde :
- *spiccato* : sous l'action du musicien essentiellement, l'archet tombe sur la corde et la quitte à chaque note ;
 - *sautillé* : se distingue du *spiccato* par le fait que le rebond est provoqué par l'élasticité de l'archet (l'action du musicien se limite à transmettre le mouvement horizontal) ;
 - *ricochet* : succession de plusieurs notes dans un même coup d'archet, séparées par le rebond naturel de l'archet.

Il apparaît clairement que certains coups d'archet, comme le *sautillé* ou le *ricochet*, font intervenir les propriétés dynamiques de l'archet au premier plan. Cependant, celles-ci peuvent avoir des effets indésirables dans d'autres modes de jeu, en particulier si l'archet est mal réglé. L'exemple le plus connu est celui du tremblement survenant pendant un son filé, pouvant être amplifié – voire provoqué – par les oscillations naturelles de l'archet [39].

Bien que toutes les techniques de jeu ne donnent pas nécessairement un rôle actif à l'archet, il est important de souligner qu'il constitue le lien entre le geste du musicien et la mise en vibration de la corde (à l'exception des notes jouées *pizzicato*, c'est-à-dire en pinçant la corde). Il faut donc que l'archet puisse être manié avec aisance par le

2. Ce sens est valable pour le violon et l'alto, tandis que les violoncellistes et contrebassistes inclinent généralement l'archet vers le chevalet.

musicien et lui permette d'exprimer ses intentions musicales le plus efficacement possible. Concevoir un tel objet exige un savoir-faire spécifique et distinct de celui du luthier, dont le travail vise à optimiser les qualités sonores du violon. Il convient alors d'examiner de plus près le travail du facteur, c'est-à-dire l'archetier.

1.2 Fabrication d'un archet

La fabrication artisanale d'un archet est un travail long et minutieux. La variété des matériaux utilisés (bois essentiellement, mais aussi métal, ivoire, nacre...) requiert un savoir-faire technique diversifié. Plutôt que d'entrer dans les détails de la fabrication, on s'en tient dans cette section à en dégager les grandes lignes (une description exhaustive et détaillée des étapes de fabrication par des archetiers eux-mêmes peut être trouvée dans [68, 49, 35]). Une attention particulière est portée au cambre, dont le rôle présumé dans les qualités de jeu sera précisé par la suite.

1.2.1 Principales étapes

La première étape est le choix d'un modèle. Celui-ci peut se définir comme un ensemble de caractéristiques géométriques (formes générales de la baguette, de la tête et de la hausse et leurs principales dimensions), mais aussi matérielles (matériau composant la hausse, le bouton), déterminant l'apparence de l'archet. Il peut s'agir d'un modèle conçu par l'archetier ou par un de ses prédécesseurs. Dans les ouvrages consacrés aux archets de maîtres ou les catalogues de ventes aux enchères, les archets sont généralement représentés uniquement par deux photos de profil, l'une montrant les détails de la tête, l'autre ceux de la hausse (fig. 1.5(b) et 1.5(c)). Cette représentation suffit généralement à spécifier un modèle. Il convient de préciser que la notion de modèle d'archet se distingue d'une copie, cette dernière supposant généralement un examen approfondi de l'archet d'origine. Enfin, le choix du modèle est intimement lié à celui du bois qui composera la baguette, l'un se faisant généralement en fonction de l'autre.

La fabrication à proprement parler commence à un stade différent suivant la forme sous laquelle se présente la matière première. Certains archetiers s'approvisionnent en bûches, d'autres en planches, d'autres encore directement en baguettes brutes. Ce dernier cas n'offre aucune liberté sur la découpe du bois (hormis à travers le choix des baguettes auprès du fournisseur). Lorsque le point de départ est une planche, une règle reconnue comme primordiale par les archetiers consiste à découper la baguette brute en suivant le sens des fibres, tout en évitant les nœuds et autres défauts naturels. Deux cas de figure peuvent se présenter : soit le fil du bois est droit dans la longueur de la planche, auquel cas une découpe rectiligne permet d'aboutir au bon résultat, soit il présente une courbure naturelle qu'il faut alors suivre avec la scie. Une découpe rectiligne dans le cas d'un fil courbe (et vice-versa) est à proscrire [87]. Ce principe étant respecté, le degré de liberté restant concerne l'orientation des cernes du bois. Lorsque l'archetier dispose d'une bûche, la façon de découper les planches détermine l'orientation des cernes dans le plan transversal des baguettes brutes (fig. 1.7). Les archetiers privilégient généralement l'orientation horizontale (fig. 1.7(b)) pour des raisons mécaniques (diminution du risque de rupture de la tête) mais aussi esthétiques [68]. Andreas Grütter [53] recommande de prendre aussi en compte l'inclinaison de l'archet lors du jeu (fig. 1.7(c)), affirmant que le

bois est plus raide dans la direction des cernes, c'est-à-dire suivant la direction tangentielle T . Ce propos est toutefois contredit par une expérience simple effectuée par Joseph Regh [83]. Il constate qu'une baguette en bois de section constante et circulaire, chargée à son extrémité, présente une flèche invariante par rotation autour de l'axe longitudinal.

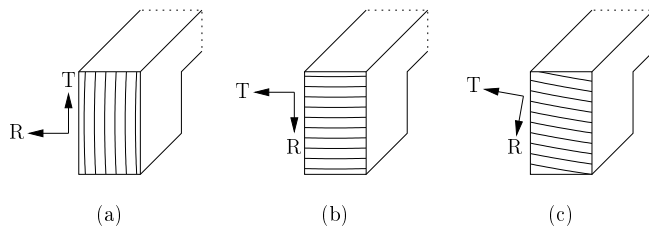


Figure 1.7 – Différentes orientations possibles des cernes du bois : (a) verticale, (b) horizontale, (c) légèrement inclinée. L'axe de la baguette brute coïncide avec la direction longitudinale L .

Le travail de la baguette se fait essentiellement à l'aide d'un rabot. L'archetier commence par aplanir les faces latérales, puis les faces supérieure et inférieure de la baguette brute. Ses quatre arêtes sont ensuite éliminées afin d'obtenir une section octogonale. Les contours de la tête sont tracés puis découpés à l'aide d'une scie. L'arrière de la tête est affiné afin de pouvoir par la suite cambrer la baguette jusqu'à son extrémité. L'opération de cambrage, qui commence à ce stade encore précoce de la fabrication, est détaillée dans la section suivante. L'affinage progressif de la baguette jusqu'aux cotes définitives, toujours au moyen du rabot, se fait en contrôlant régulièrement le cambre.

Par ailleurs la tête prend progressivement sa forme définitive. La plaque de tête, généralement en ivoire, parfois en argent ou en or, est assemblée avec la face inférieure par l'intermédiaire d'une fine strate en ébène (fig. 1.8(a)). Sur cette même face est creusée une mortaise afin d'accueillir plus tard une extrémité de la mèche. Au fur et à mesure des étapes du travail de la tête, l'archetier a recours à différents types de gabarits pour en contrôler la forme et les dimensions (fig. 1.8(b)). Bien que celles-ci soient fixées en partie, le façonnage de la tête laisse à l'archetier la liberté d'apporter sa touche personnelle (fig. 1.8(c)), y compris lorsqu'il se base sur un modèle de maître. Malgré la ressemblance entre une tête d'archet et une autre pour l'œil non averti, il suffit souvent à un expert d'en observer les détails pour se prononcer sur l'archetier ayant fabriqué la baguette. Le travail de la baguette s'achève par le vernissage et souvent l'apposition d'une signature.



Figure 1.8 – Différents stades du travail de la tête. (photos © Charles Espey [35])

Il n'est pas rare que le travail de la hausse se limite à la finition d'une ébauche issue d'une production en série. Certains archetiers continuent cependant à la fabriquer intégralement, à partir d'un bloc d'ébène (fig. 1.9(a)). Le travail de la face inférieure de la hausse vise à loger une extrémité de la mèche et faire sortir celle-ci sous forme d'un ruban (fig. 1.9(b)). La face supérieure a pour fonction le guidage en translation le long de la baguette et l'intégration du mécanisme vis-écrou (fig. 1.9(c)).

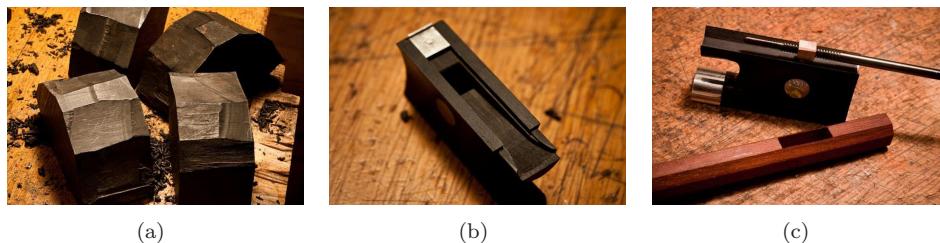


Figure 1.9 – Différents stades de fabrication de la hausse. (photos © Charles Espey [35])

Une fois ces étapes réalisées, la mèche peut être assemblée avec l'archet. Celle-ci se compose traditionnellement de crins de chevaux mâles, généralement de Mongolie. Bien qu'il soit aujourd'hui possible d'utiliser des fibres à base de matière synthétique, aucune alternative ne s'est imposée face au crin naturel. Les écailles microscopiques qu'il présente en surface ainsi que sa composition chimique s'avèrent idéales pour retenir la colophane [85]. Les crins sélectionnés, dont le nombre varie généralement entre 150 et 200, sont maintenus ensemble à une extrémité par une ligature. Cette extrémité prend place dans la mortaise de la hausse, où elle est retenue par une cale en bois. La mèche est ensuite humidifiée et peignée sur toute sa longueur afin d'obtenir un arrangement le plus ordonné possible et une longueur semblable pour tous les crins. L'extrémité libre peut alors être nouée et fixée à la tête, de la même façon qu'à la hausse.

Une fois la mèche en place, l'archetier peut apporter les derniers ajustements au cambre et contrôler le résultat en mettant l'archet sous tension. Enfin, il met en place la garniture (généralement en fil d'argent), qui protège la baguette du contact permanent avec l'index lors du jeu mais permet aussi d'ajuster finement la masse et le centre d'inertie de l'archet, puis la poucette en cuir. Il ne reste alors qu'à enduire la mèche de colophane pour que l'archet puisse être joué.

1.2.2 Cambrage

L'opération appelée cambrage consiste à donner à la baguette la courbure désirée. Elle intervient à différentes étapes de la fabrication d'un archet, au fur et à mesure que la baguette est affinée, ainsi qu'au moment du réglage final. La baguette est chauffée localement, sur une portion de quelques centimètres, le plus souvent au moyen d'une lampe à alcool ou d'un décapeur thermique (fig. 1.10(a)). Sous l'effet de la chaleur, la matrice de lignine et d'hémicellulose qui joue le rôle de liant entre les fibres se ramollit, ce qui, à partir d'une certaine température, se traduit par une perte de rigidité à l'échelle macroscopique. L'archetier dispose alors de quelques secondes pour appliquer la courbure désirée à l'endroit qui a été chauffé. Le procédé général consiste à maintenir la baguette

en flexion pendant que celle-ci commence à refroidir. Pour cela l'archetier peut courber la baguette contre le rebord de l'établi ou utiliser un support bombé (fig. 1.10(b)). Le résultat est contrôlé visuellement immédiatement après, en vérifiant notamment que la modification de la courbure n'a pas entraîné un voilage de la baguette (fig. 1.10(c)). Une correction est possible tant que le bois est suffisamment chaud. Une fois la baguette refroidie, la nouvelle forme subsiste et le bois retrouve son élasticité originale. Cette opération est généralement répétée en plusieurs endroits le long de la baguette. Il est à noter cependant que certains archetiers cambrent la baguette en une seule fois à l'aide d'un four (voir le dialogue retranscrit dans [87]).

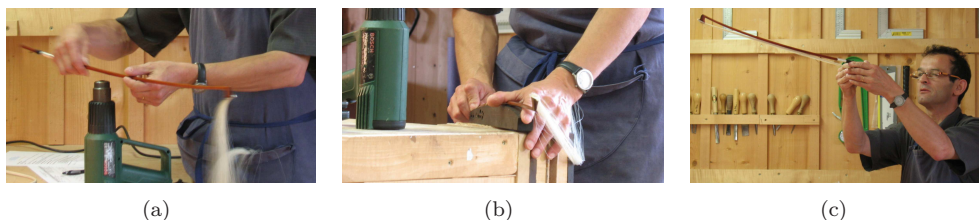


Figure 1.10 – Les 3 étapes de l'opération de cambrage, (a) chauffage, (b) maintien de la courbure, (c) contrôle du résultat, montrées par Jean Grunberger [52].

1.2.3 Bois utilisés et leur choix

Matériau naturel utilisé de tout temps en construction, le bois est encore aujourd'hui le matériau constitutif principal de bon nombre d'instruments de musique. En plus de ses qualités esthétiques et de son aptitude au façonnage artisanal, ses propriétés mécaniques et acoustiques en font un matériau privilégié, pouvant intervenir au premier plan dans la production (par ex. xylophone) ou le rayonnement (par ex. table d'harmonie d'un cordophone) du son [104, 22]. Le cas de l'archet est particulier, puisque le rôle de la baguette n'entre à première vue dans aucune de ces deux catégories. Pour autant, le choix du bois n'en est pas moins important aux yeux des archetiers.

Les principales propriétés mécaniques d'un bois sont :

- sa densité ρ ,
- son élasticité, traduite dans le cas d'une structure élancée par le module d'Young longitudinal E (noté E' lorsqu'il est mesuré par une méthode dynamique),
- son amortissement, caractérisé par la quantité $\tan \delta = E''/E'$, où E'' est le module de perte et δ le déphasage entre contrainte et déformation lors d'une sollicitation harmonique.

Afin d'être à même de constituer une baguette d'archet, le bois doit satisfaire plusieurs critères. Son module d'Young et sa densité doivent s'accorder pour conférer à la baguette une raideur de flexion suffisante tout en gardant sa masse dans certaines limites. Sa limite de rupture en cisaillement doit être suffisamment élevée pour permettre à la baguette de supporter les fortes contraintes rencontrées en situation de jeu (la jonction entre la tête et l'extrémité de la baguette est une zone particulièrement exposée au risque de casse) [102]. Enfin, l'aptitude du bois à être cambré et à conserver la courbure doit également être considérée [71].

Le Pernambouc (*Caesalpinia echinata*), en répondant à toutes ces exigences compte tenu de la forme de l'archet moderne, est le bois privilégié pour sa fabrication depuis le XIX^e siècle. Bien qu'un usage antérieur du Pernambouc soit probable, comme le suggèrent plusieurs écrits du XVII^e siècle faisant état d'archets en « bois de brésil » [21], sa généralisation est attribuée à François Xavier Tourte. Ainsi Fétis [38] nous informe-t-il que cet archetier, expérimentant de nombreuses essences de bois, « ne tarda pas à reconnaître que celui de Fernambouc seul pouvait lui donner les résultats qu'il cherchait, et que seul il réunissait la roideur à la légèreté » (*sic*). Une étude des bois utilisés à différentes époques pour la fabrication d'archets [21] met en évidence le compromis entre densité et élasticité auquel il est fait allusion ici. La figure 1.11(a), reproduite d'après ces travaux, montre que les essences de bois couramment utilisées aux époques Baroque et Classique (typiquement l'Amourette, *Brosimum guianense*, et le Féréol, *Swarzia panacoco*, respectivement) avaient un module d'Young supérieur à celui du Pernambouc. Cependant, leur densité était visiblement trop élevée au regard de l'accroissement de longueur de l'archet à la fin du XVIII^e siècle. Par ailleurs, le Pernambouc est l'une des essences de bois ayant le plus faible amortissement (fig. 1.11(b)). Matsunaga et coll. [72] ont montré que le coefficient d'amortissement du Pernambouc augmente lorsque sa teneur en extractibles diminue. Cependant, le lien entre cette propriété du bois et la « qualité » de l'archet reste incertain. En particulier, l'idée qu'un faible amortissement soit préférable semble contredite par les travaux de Schimleck et coll. [93]. En mesurant le taux d'extractibles sur des échantillons provenant de 30 baguettes brutes en Pernambouc, dont l'aptitude à réaliser un archet de « qualité » a été évaluée par un panel d'archetiers, ils constatent un amortissement en moyenne plus élevé pour les bois des baguettes jugées meilleures, et vice-versa.

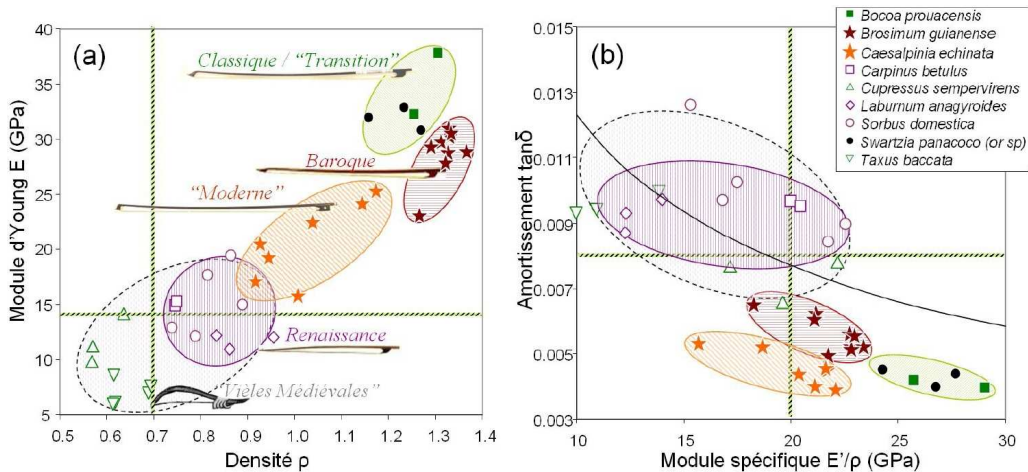


Figure 1.11 – Propriétés mécaniques d'espèces de bois utilisées pour la fabrication d'archets à différentes époques (d'après [21]). Un point représente la moyenne d'un stock. Les ellipses rassemblent les bois associés à chaque époque. Les droites hachurées désignent la moyenne des propriétés sur 450 espèces de bois. La courbe pleine (b) représente la relation « standard » entre le coefficient d'amortissement $\tan \delta$ et le module spécifique E'/ρ .

En raison de la rareté du Pernambouc depuis son inscription en 2007 à l'annexe II de la CITES³ [27], un mouvement visant à préserver ce bois et en faire une exploitation durable, l'IPCI⁴, est né sous l'impulsion d'archetiers du monde entier. En plus des missions directement liées à la protection du Pernambouc, la recherche de bois alternatifs aptes à la fabrication d'archets est une thématique dans laquelle s'impliquent les archetiers. Cette problématique est également abordée par les spécialistes du bois. Sur la base d'un modèle mécanique suffisamment simple pour permettre un calcul analytique et partant du principe que la baguette de l'archet doit conserver sa masse et sa raideur de flexion suite à un changement de matériau, Wegst et coll. [103] montrent que la quantité \sqrt{E}/ρ est pertinente pour la recherche d'un bois de substitution. Plus celle-ci est élevée, plus la raideur de flexion du matériau est importante pour une même masse, moyennant une éventuelle adaptation du diamètre : on parle alors d'indice de performance en flexion. Cette quantité fait ressortir plusieurs bois de substitution possibles, dont le coefficient d'amortissement reste toutefois supérieur à celui du Pernambouc.

En raison de sa facilité de mise en œuvre et de sa rapidité, une méthode dynamique est couramment employée pour mesurer le module spécifique E'/ρ et le coefficient d'amortissement $\tan \delta$ de différents bois [72, 103, 19]. Cette méthode repose sur la mesure de la fréquence propre associée au premier mode de flexion d'une poutre d'Euler-Bernoulli de section constante en conditions libre-libre. L'échantillon à caractériser se présente sous la forme d'une fine lamelle de dimensions fixées (mais pouvant varier suivant les auteurs), orientée dans le sens des fibres. Suspendue à l'emplacement des deux nœuds de vibration du premier mode, la lamelle est mise en vibrations forcées par une méthode sans contact (excitation électrostatique d'une fine pastille d'acier collée [19] ou d'une couche d'argent déposée [103] sur la lamelle). Un balayage en fréquence autour de la première résonance permet d'extraire la fréquence propre ω , dont on déduit le module spécifique, ainsi que le facteur de qualité Q , dont l'inverse est le coefficient d'amortissement $\tan \delta$. Ce dernier est également donné par la décroissance temporelle en amplitude des vibrations lorsque la source excitatrice est éteinte.

Une étude menée par Haines et coll. [60] compare plusieurs procédés de détermination du module d'Young : flexion 4 points (méthode statique), résonance en flexion ou en traction/compression et transmission ultrasonore (méthodes dynamiques). Cette étude montre que la méthode utilisant des ultrasons fournit des valeurs nettement plus élevées par rapport à l'essai statique (17% en moyenne sur 25 échantillons d'épicéa, 23% sur 80 échantillons de sapin) que la méthode de résonance en flexion décrite plus haut (respectivement 0% et 2% en moyenne). Les écarts constatés sont essentiellement expliqués par le comportement viscoélastique du bois. Des écarts similaires entre des valeurs du module d'Young déterminées par flexion statique et par transmission ultrasonore sont trouvés par Longui et coll. [67] dans le cas du Pernambouc et de deux autres bois parfois utilisés en facture d'archets.

En dépit des incertitudes inhérentes à toute mesure physique, toutes ces méthodes permettent de quantifier les propriétés mécaniques du bois. Comment l'archetier, ne disposant généralement pas de moyens de mesure sophistiqués, les évalue-t-il ?

L'élasticité du bois peut être estimée à la main, en testant la résistance d'une baguette brute à la flexion. Cette approche n'a de sens que si la géométrie ne varie pas

3. Convention on International Trade in Endangered Species.

4. International Pernambuco Conservation Initiative, voir par ex. <http://www.ipci-usa.org/>.

sensiblement d'une baguette à l'autre, la raideur ressentie étant à la fois due au matériau (module d'Young) et à la géométrie (dimensions de la section). De plus, il semble qu'une comparaison entre plusieurs baguettes soit plus facile qu'une évaluation dans l'absolu. Ainsi, Joseph Regh [83] décrit une méthode de classement systématique, consistant à mettre une grande quantité de baguettes brutes aux mêmes dimensions, puis à évaluer successivement leur raideur de flexion. Par ailleurs, l'amortissement du bois peut être apprécié en tapotant d'une main la pointe de l'archet tenu de l'autre à la hausse et en jugeant la rapidité avec laquelle les vibrations ressenties s'atténuent. L'amortissement semble intervenir dans une méthode « acoustique » d'évaluation de baguettes brutes proposée par Joseph Regh [83]. Cette méthode repose sur l'écoute du son produit par le rebond d'une baguette contre un sol dur. En se fiant à une impression générale liée à la hauteur, la durée et la « pureté » de ce son, l'archetier parvient à retrouver par un classement à l'aveugle un ordre déterminé par des mesures objectives.

Ainsi, la sensation de l'archetier apparaît comme le premier « instrument de mesure » lui permettant de se faire une idée des caractéristiques du bois. Des méthodes objectives de caractérisation seront présentées dans la section 1.2.5.

1.2.4 Et les nouveaux matériaux ?

La raréfaction du Pernambouc a contribué au succès grandissant des archets en matériaux synthétiques, généralement à base de fibres de carbone. Du point de vue de la fabrication, le principal avantage par rapport au bois réside dans la possibilité d'ajuster indépendamment la masse et la raideur de la baguette, en réalisant une section creuse. Ainsi, le fabricant Arcus [9] produit des archets environ 20% plus légers que ceux en bois. La fabrication de ces archets s'apparente à de l'ingénierie, sans toutefois rompre avec les techniques traditionnelles et le savoir-faire des archetiers [89]. Du point de vue du jeu, ces archets offrent de nouvelles possibilités. Leur légèreté et leur grande raideur les rendent extrêmement réactifs. Néanmoins, les réserves émises par les musiciens concernent essentiellement le son produit. Avec l'utilisation de matériaux synthétiques, de nouvelles innovations ont vu le jour, comme le modèle *Spiccato* conçu par Benoît Rolland [87, 86]. Cet archet comporte un mécanisme permettant au musicien d'ajuster lui-même le cambre, par l'intermédiaire d'un câble de précontrainte situé à l'intérieur de la baguette. À mi-chemin entre l'archet en bois et celui en carbone, le modèle *Cor Leonis* est une solution hybride destinée à mettre en valeur les morceaux moins nobles de Pernambouc. Mise au point par l'archetier Jean-Luc Tauziède [101], la baguette de cet archet est constituée de trois lamelles en Pernambouc entre lesquelles sont intercalées deux lamelles en carbone. Cette conception lui confère une rigidité suffisante malgré les propriétés mécaniques inférieures du bois utilisé.

1.2.5 Vers une approche scientifique de la facture

L'évolution historique des instruments de musique jusqu'à leur forme « optimale » est le fruit d'une démarche essentiellement empirique de la part des facteurs. La volonté de mieux comprendre le fonctionnement des instruments, d'assurer la répétabilité d'un procédé de fabrication ou de choisir le matériau sur une base de critères objectifs sont autant de raisons pouvant amener les facteurs à adopter une démarche scientifique en complément de leur savoir-faire.

La standardisation de l'archet a fixé des plages de valeurs admissibles étroites pour certaines grandeurs physiques, comme la masse ou le centre d'inertie. En raison de la sensibilité des musiciens à de telles caractéristiques, rejetant tout archet qui s'éloignerait de la norme, la nécessité de mesurer systématiquement ces grandeurs s'est probablement imposée d'elle-même aux archetiers. Pour d'autres caractéristiques pouvant varier dans des proportions plus grandes d'un archet à l'autre, comme la raideur de la baguette, il est probable que la sensation et l'expérience de l'archetier aient longtemps guidé seules la fabrication. Cependant, certains archetiers complètent aujourd'hui cette approche empirique par une mesure physique. Des dispositifs de mesure semblables à celui montré sur la figure 1.12(a) sont couramment utilisés pour caractériser de façon objective la raideur d'une baguette brute ou finie [83, 53, 52]. L'avantage d'une telle approche est de pouvoir situer la baguette sur une échelle de raideur absolue, de façon certaine et rapide. Par ailleurs, elle permet de disposer d'un langage commun entre archetiers pour qualifier la raideur. Le dispositif réalisant cette mesure est relativement simple, réalisable par l'archetier lui-même et peu onéreux.

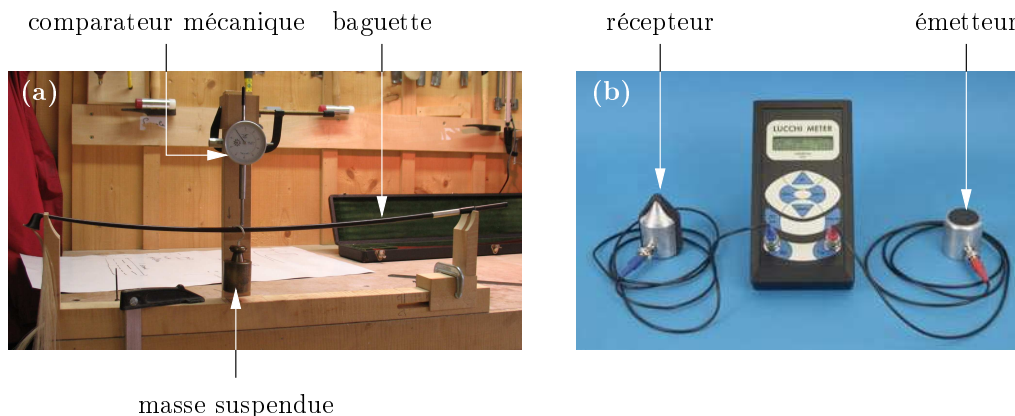


Figure 1.12 – Deux dispositifs de mesure utilisés par certains archetiers, destinés à caractériser objectivement la raideur d'une baguette (a) ou les propriétés mécaniques du bois (b).

Les avancées technologiques des dernières décennies et leur démocratisation ont ouvert la voie à l'utilisation en atelier de nouveaux instruments de mesure, plus sophistiqués. Le plus connu est le Lucchimètre (figure 1.12(b)), appareil mesurant la vitesse de propagation d'ondes ultrasonores dans un matériau, commercialisé par l'archetier italien Giovanni Lucchi [68]. Cet appareil a pour vocation d'aider les luthiers et archetiers à choisir le bois le plus approprié à la fabrication d'instruments ou d'archets. Il n'est pas rare que des fournisseurs de bois de lutherie mentionnent le « nombre de Lucchi » (nom couramment donné à la grandeur mesurée, c'est-à-dire la célérité v des ultrasons) associé à chaque morceau de matière brute. Chose tout à fait remarquable, certains fournisseurs établissent une grille tarifaire basée uniquement sur ce dernier⁵. Cependant, les propos des archetiers au sujet du Lucchimètre révèlent différents niveaux d'interprétation. Andreas Grütter [53]

5. Chez le fournisseur brésilien Follmann & Sons [41], le prix de base d'une baguette brute en Pernambouc est directement déterminé par la plage de nombre de Lucchi dans laquelle elle se situe, sur une échelle non linéaire et allant de 10€ ($v = 5000$ m/s) à 249€ ($v = 6000$ m/s).

affirme que le bois est d'autant plus élastique que les ultrasons le traversent rapidement, avant de préciser que le résultat d'une mesure doit être interprété avec prudence. Joseph Regh [83], parlant du nombre de Lucchi, tient les propos suivants : « It is only a number, it is not a physical unit as far as I know. It is a dimensionless number. » La confusion constatée quant à l'information donnée par un Lucchimètre peut venir du fait que cet appareil, à la différence d'une balance ou du dispositif représenté sur la fig. 1.12(a) qui mesurent des grandeurs palpables par l'archetier (la masse et la raideur d'une baguette) et donc bien identifiées, fournit une grandeur composée, $\sqrt{E/\rho}$, difficile à interpréter dans l'absolu. Toutefois, elle présente l'avantage de ne dépendre que des propriétés du matériau, au contraire de la masse et de la raideur qui dépendent aussi de la géométrie, ce qui justifie son rôle d'aide au choix du bois. Wegst et coll. [103] précisent cependant que la célérité du son $v = \sqrt{E/\rho}$ dans un matériau est un indice de performance en traction/compression, c'est-à-dire qu'à masse égale deux baguettes de même $\sqrt{E/\rho}$ ont la même raideur en traction/compression. Cette quantité est donc mal adaptée à la recherche d'un bois de substitution pour la baguette de l'archet qui, elle, travaille en flexion (l'indice de performance correspondant est $\sqrt{E/\rho}$). L'information fournie par le Lucchimètre doit alors être complétée par une mesure de densité pour pallier cet inconvénient. Une liste détaillée de méthodes permettant de la mesurer aisément en atelier est donnée dans [83].

L'exemple du Lucchimètre illustre bien la nécessité d'apporter aux archetiers désireux de caractériser objectivement le bois une réponse suffisamment complète pour permettre une interprétation juste des résultats. La plateforme expérimentale *Lutherie Tools* [47], développée spécifiquement pour une utilisation possible en atelier, donne lieu depuis 2007 à une collaboration étroite entre laboratoires de recherche et facteurs d'instruments à cordes et d'archets. L'environnement logiciel et le matériel mis à disposition des facteurs est principalement destiné à caractériser le comportement vibratoire des instruments, à travers la mesure de fonctions de transfert. Dans le cas de l'archet, cette mesure est réalisée sur la baguette simplement supportée vers ses extrémités et chargée au centre successivement par deux masses. Connaissant la géométrie de la baguette, la raideur de flexion ainsi mesurée permet de remonter au module d'Young du bois. Plus récemment, l'Agence Nationale de la Recherche a soutenu le projet PAFI⁶ [75], visant à développer des outils de mesure et de simulation à destination des luthiers, archetiers et facteurs d'instruments à vent. Ce projet s'appuie sur les résultats de recherches antérieures ou en cours, auxquelles contribue le présent travail.

1.3 Études scientifiques sur l'archet

À ce jour, on dénombre peu d'études scientifiques spécifiquement consacrées aux propriétés physiques des archets de violon, en comparaison avec l'abondante littérature sur l'instrument lui-même (dont le lecteur pourra trouver un aperçu dans les ouvrages généraux [40, 25, 90]). Nous les parcourons ici en les regroupant par thématiques.

6. Plateforme d'Aide à la Fabrication Instrumentale.

1.3.1 Physique de la corde frottée

C'est au physicien et physiologiste allemand Hermann von Helmholtz (1821-1894) que l'on attribue la mise au jour des mouvements pouvant être décrits par une corde frottée – dont le mouvement généralement recherché lors du jeu (fig. 1.13(a)), qui portera son nom –, à travers une expérience inspirée des travaux de J. Lissajous (1822-1880). Les observations de Helmholtz sont un premier pas vers la compréhension du phénomène régissant la mise en vibration de la corde frottée. À cette époque, le mouvement d'une corde pincée et sa description théorique sont déjà bien connus. Il faudra attendre le début du xx^e siècle pour qu'un modèle permettant de retrouver qualitativement les résultats expérimentaux soit proposé par le physicien indien C.V. Raman (1888-1970). Les nombreux travaux menés depuis ont permis d'aboutir à une connaissance approfondie du comportement d'une corde frottée. Avec le développement récent des moyens de calcul numérique, la plupart des phénomènes physiques entrant en jeu dans la vibration d'une corde frottée sur un instrument réel peuvent être pris en compte par les modèles actuels. Les énoncer sortirait du cadre de notre étude (le lecteur pourra en trouver une revue synthétique dans [105]), on s'attache donc dans la suite à dégager les caractéristiques essentielles de l'interaction crin-corde, dans le but de mettre en exergue le rôle joué par l'archet.

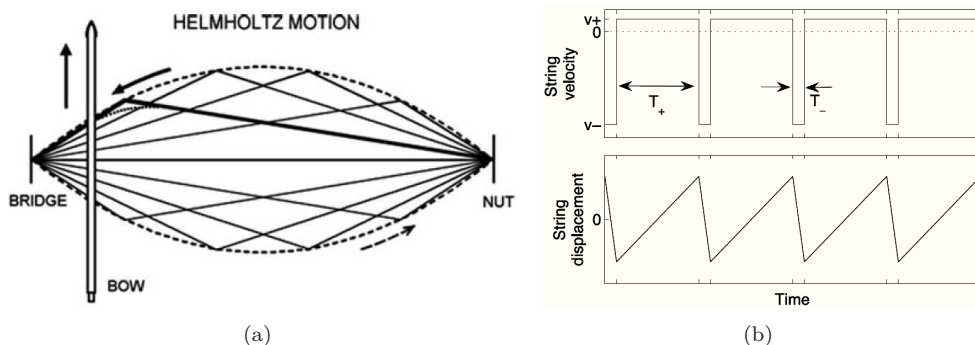


Figure 1.13 – (a) Mouvement de Helmholtz (d'après [90]). (b) Vitesse et déplacement de la corde au point de frottement (d'après [34]).

D'un point de vue phénoménologique, le mouvement de la corde frottée est caractérisé par une succession de phases d'adhérence et de glissement entre la mèche et la corde (fig. 1.13(b)). Ce phénomène, communément désigné par le terme anglais *stick-slip*, est également à l'origine de la production du son sur d'autres instruments (glass harmonica, cristal Baschet) mais aussi de bruits souvent considérés comme gênants, comme le grincement d'une porte, le crissement d'une craie ou d'un frein. Dans le cas du violon, le mouvement observé résulte de l'interaction entre un système excitateur (ici l'archet), décrit par une caractéristique non-linéaire (la loi de frottement), et un résonateur (la corde) pouvant être linéaire. Ce même principe gouverne la production du son des instruments à oscillations auto-entretenues en général (voir par exemple [74] pour une analogie entre les modèles de corde frottée et d'instrument à anche). Pour retrouver ce mouvement par la modélisation, deux ingrédients essentiels doivent être introduits : la description du comportement dynamique de la corde d'une part, et celle du contact frottant entre l'archet

et la corde d'autre part. La dynamique de la corde peut être représentée au moyen de diverses méthodes (résolution numérique de l'équation d'onde, approche modale, méthode du guide d'onde numérique...). Chacune ayant ses avantages et inconvénients, la méthode à implémenter dans un cadre donné est généralement choisie en fonction des contraintes imposées (résolution temps-réel, réalisme physique...). L'une de ces méthodes, connue sous le nom d'algorithme MSW (d'après McIntyre, Schumacher et Woodhouse [73]), nous sert ici de support pour mentionner les grandeurs physiques intervenant au premier plan dans la production sonore, en nous limitant à la description la plus succincte possible.

Considérons une corde tendue entre le chevalet et le sillet, soumise à une force f au point de frottement considéré. À tout instant, la vitesse v de la corde en ce point peut s'écrire :

$$v = \frac{1}{2Z_c}f + v_h . \quad (1.1)$$

Le premier terme de cette expression, faisant intervenir l'impédance caractéristique de la corde $Z_c = \sqrt{Tm}$ (T désigne ici sa tension et m sa masse linéique), traduit sa réponse instantanée à la force f (indépendamment de la cause de celle-ci), qui engendre une onde se propageant de part et d'autre du point de frottement. Le deuxième terme représente la contribution d'ondes arrivant en ce même point. Celles-ci proviennent d'ondes ayant été générées auparavant sous l'action de la force puis réfléchies à chaque extrémité de la corde (la notation indicée v_h rappelle le caractère « historique » de cette contribution). Dans l'algorithme MSW, elles sont calculées par convolution des ondes incidentes avec une fonction de réflexion associée à chaque extrémité, qui rend compte du temps de trajet aller-retour et des transformations subies au cours de la propagation (dissipation, dispersion...).

Par ailleurs, l'interaction avec l'archet est représentée par une loi de frottement, pouvant s'écrire sous la forme générale :

$$f = \mu(\Delta v)F_b , \quad (1.2)$$

où le coefficient de friction $\mu(\Delta v)$ dépend de la vitesse relative au point de frottement, $\Delta v = v - v_b$, et F_b représente la force normale exercée par l'archet sur la corde, c'est-à-dire la « pression d'archet ».

L'action de l'archet est donc représentée par sa vitesse v_b , sa force d'appui F_b et de façon implicite sa position par rapport au chevalet, à travers les fonctions de réflexion. Ces paramètres sont surtout liés au contrôle exercé par le musicien, c'est-à-dire au geste musical. Par ailleurs, sans rentrer dans les détails, il convient de mentionner la forte dépendance des caractéristiques du régime permanent et du transitoire d'attaque à la combinaison de paramètres adoptée. En particulier, l'existence du mouvement de Helmholtz résulte d'une adéquation entre force d'appui et distance au chevalet, à vitesse d'archet fixée (diagramme de Schelleng [92]). La rapidité avec laquelle il s'établit est liée à la force d'appui et l'accélération de l'archet, à distance de jeu fixée (diagramme de Guettler [54]). Il en découle que la production sonore en situation de jeu réelle exige un contrôle maîtrisé des trois paramètres.

On constate néanmoins que les caractéristiques de l'archet (autres que les propriétés tribologiques de la mèche enduite de colophane, qui affectent la caractéristique de frottement [100]) n'interviennent pas directement dans le mécanisme de production du son

en première approximation. Ainsi, la plupart des modèles supposent un archet parfaitement rigide exerçant une action ponctuelle sur la corde. Les travaux de Demoucron [34] montrent qu'en dépit de cette hypothèse très simplificatrice, il est possible d'aboutir à une synthèse sonore particulièrement réaliste en adoptant un contrôle des paramètres (vitesse, force et distance au chevalet) suffisamment proche de celui qu'exerce le violoniste. Ce résultat confirme le rôle prépondérant du musicien dans le son résultant.

Cependant, la volonté d'aboutir à une modélisation plus fine de l'interaction crin-corde a poussé certains auteurs à prendre compte de façon plus réaliste l'archet. Dans son modèle de corde frottée, Schumacher [97] constate que la prise en compte d'un archet non rigide se traduit mathématiquement de la même façon que celle des ondes de torsion, et que ces deux effets s'ajoutent. Pitteroff [78], explorant l'effet de la largeur finie de la mèche, est amené à introduire dans son modèle la compliance longitudinale des crins. Il montre que l'élasticité et l'amortissement des crins jouent un rôle significatif dans les glissements partiels qui se produisent sur la largeur de mèche pendant les phases d'adhérence. L'effet de la compliance des crins dans le cas d'une mèche de largeur finie est plus grand que celui constaté dans le cas d'une interaction ponctuelle. La nécessité d'alimenter de tels modèles avec des données d'entrée réalistes est une raison, parmi d'autres, ayant motivé un intérêt porté aux propriétés des archets.

1.3.2 La question du son

Les musiciens et les facteurs s'accordent à dire que l'archet influence profondément le son produit. Les différences audibles peuvent être la conséquence du matériau, ou de la façon dont l'archet est fabriqué. Très souvent, on attribue cette influence sur le son au caractère vibrant de l'archet, perceptible par le musicien lors du jeu. Cependant, l'interprétation de ce phénomène ne fait pas l'unanimité. Certains affirment que les vibrations de l'archet puisent de l'énergie au mouvement de la corde (effet *a priori* négatif sur le son), d'autres au contraire qu'elles intensifient les vibrations de la corde, enrichissant ainsi le timbre (effet positif). Dans les études scientifiques, cette question a été abordée sous différents angles.

Une première approche est exclusivement basée sur l'analyse perceptive. Askenfelt et Guettler [16] évaluent la possibilité de distinguer des archets uniquement à travers le son produit. Des tests d'écoute par paires portant sur cinq archets de « qualité » très variable sont réalisés auprès de musiciens professionnels. Les résultats obtenus montrent que certains musiciens parviennent à discerner des archets à l'écoute. Une étude récente tente de mettre en évidence à travers une épreuve de catégorisation l'effet de l'archet sur le son produit, partant du principe que ce dernier est le résultat d'une interaction complexe entre le musicien, le violon et l'archet [43].

Une autre approche vise à identifier dans le mouvement vibratoire de la corde ou le son émis des caractéristiques différentes suivant l'archet utilisé. Askenfelt [13] compare les signaux de vitesse d'une corde frottée de façon identique par quatre archets de « qualité » très variable à l'aide d'une machine. De très faibles différences sont observées, essentiellement pendant les phases de glissement du mouvement de Hemholtz. En revanche, les vibrations captées par un accéléromètre à la pointe diffèrent fortement d'un archet à l'autre, à paramètres de contrôle fixés.

La dernière approche, plus théorique, vise à expliquer la possible influence des vi-

brations de l'archet sur le mouvement de la corde frottée. Askenfelt et Guettler [16] avancent deux hypothèses à ce sujet. Les vibrations de l'archet peuvent d'une part moduler la vitesse des crins au point de contact avec la corde, d'autre part moduler la force normale qu'ils exercent sur celle-ci. Ainsi, un même contrôle des paramètres vitesse et force par le musicien aboutirait à un contrôle « effectif » différent sur la corde, suivant les caractéristiques vibratoires de l'archet. Ce point est développé dans la section suivante.

1.3.3 Influence des propriétés dynamiques de l'archet

La considération des propriétés dynamiques de l'archet supposées pertinentes vis-à-vis du jeu, suivant les auteurs, fait apparaître deux niveaux de description. Un premier concerne les propriétés vibratoires pouvant affecter la sonorité. Schumacher [96] mesure la mobilité de l'archet en son milieu, relative à un mouvement des crins parallèle à celui de la corde. Malgré son caractère longitudinal, cette mobilité fait apparaître des composantes attribuées à un mouvement transversal des crins (notamment aux basses fréquences). Le couplage entre les deux directions est dû à l'angle formé par la mèche sous l'action d'une force normale. Des mesures similaires sont effectuées par Askenfelt [14], qui analyse les mobilités longitudinale et transversale mesurées sur plusieurs archets. Les deux auteurs concluent de leurs observations qu'un archet de qualité ne se distingue pas significativement d'un archet médiocre voire « fantaisiste » (l'une des mesures dans [14] porte sur un archet fabriqué pour l'occasion à partir d'une canne à pêche). À l'aide de simulations et de la comparaison entre les mobilités typiques d'une corde et d'un archet, Guettler et Askenfelt [56] discutent les conditions auxquelles une influence de l'archet sur le timbre est possible. Bien que de telles conditions existent en théorie, les expériences ne permettent pas de conclure clairement quant à une modification du contenu spectral par les résonances d'un archet. Parallèlement, certains auteurs ont contribué à une meilleure connaissance du comportement dynamique à travers des analyses modales de l'archet [18, 24, 77, 82]. Cependant, la détermination des modes propres ne permet pas, à ce jour, de tirer des conclusions claires sur les conséquences en jeu.

Un autre niveau de description, dont les effets sont peut-être plus sensibles, concerne les propriétés dynamiques plutôt liées au geste musical. De par sa flexibilité et son inertie, l'archet adopte un certain comportement dynamique en réponse au geste musical, ayant probablement des répercussions à la fois sur la sensation du musicien et le résultat sonore. D'une part, la rétroaction qui s'exerce sur le musicien l'informe probablement sur l'adéquation entre son geste et le résultat escompté. Par exemple, un archet qui se met soudainement à trembler sur une note tenue peut amener le musicien à adopter une prise plus ferme. D'autre part, le comportement dynamique peut aider à l'exécution d'un coup d'archet. Dans les techniques impliquant le rebond de l'archet notamment, comme le *sautillé* ou le *spiccato*, il est couramment admis que les caractéristiques dynamique de l'archet interviennent au premier plan [57, 15]. Ce constat trouve écho dans plusieurs modèles de corde frottée, où les paramètres de contrôle (notamment vitesse et force) ne sont pas appliqués directement à la corde mais à une structure mécanique représentant l'archet. Adrien [7] propose un modèle générique d'excitation de corde, pouvant représenter l'action d'un doigt, d'un marteau ou d'un archet. La structure mécanique excitatrice est à même de traduire un mode longitudinal et un mode transversal de l'archet. Un apport de cette modélisation est le couplage entre les deux polarisations de la corde – pour peu

qu'elles soient considérées – engendré par le comportement dynamique de l'archet ainsi représenté. Dans ses travaux sur la modélisation des coups d'archet, s'appuyant sur des mesures *in situ* des paramètres de jeu, Demoucron [34] adopte une méthode originale pour générer un *tremolo*⁷. La force normale exercée par le musicien, dont les variations temporelles sont déterminées empiriquement, est transmise à la corde par l'intermédiaire d'un oscillateur amorti à un degré de liberté représentant le mode de rebond de l'archet [15]. Les résultats montrent que celui-ci contribue, en plus du contrôle exercé par le musicien, à la bonne exécution du coup d'archet. En particulier, si l'amortissement associé à ce mode est trop faible, l'archet se met à rebondir sur la corde, transformant le *tremolo* en *sautillé*. Par ailleurs, en mesurant la force normale appliquée à la corde lors de l'exécution d'un *martelé*, Demoucron observe des oscillations attribuées au comportement dynamique de l'archet. Leur amplitude est nettement plus élevée lorsque l'archet est joué par un musicien non professionnel, ce qui suggère un lien entre propriétés dynamiques et jouabilité.

1.3.4 Vers une caractérisation objective de la « qualité »

La norme ISO 9000 définit la Qualité comme l'« aptitude d'un ensemble de caractéristiques intrinsèques à satisfaire des exigences », c'est-à-dire des « besoins ou attentes formulés, habituellement implicites, ou imposés » [65]. À la lumière de cette définition, la notion de « qualité » d'un archet (associée à la question « qu'est-ce qu'un *bon* archet ? ») nécessite d'être précisée. Les termes employés par les musiciens pour décrire la « qualité » peuvent être classés suivant deux catégories. L'une se rapporte aux qualités de jeu, c'est-à-dire l'aptitude de l'archet à faciliter l'exécution du geste musical (on peut parler de « jouabilité », en référence au mot anglais *playability* couramment rencontré dans la littérature). L'autre concerne les qualités sonores, c'est-à-dire l'influence de l'archet sur le son produit. D'autre part, les qualités esthétiques d'un archet peuvent être aussi importantes que ses caractéristiques fonctionnelles aux yeux des musiciens. Ainsi, selon Benoît Rolland [87], les standards esthétiques imposent une contrainte supplémentaire dans la fabrication. Une discussion approfondie concernant l'incidence de l'esthétique sur le rapport à l'archet peut être trouvée dans [53].

Une problématique fréquemment rencontrée vise à établir un lien entre les propriétés physiques d'un archet et sa « qualité ». Une première approche consiste à mettre en regard les propriétés physiques et la « qualité » perçue sur un panel d'archets de caractéristiques générales différentes. Pickering [76] mesure les propriétés de dix archets allemands de « qualité » variable. Il constate que la décroissance du diamètre suit de très près une fonction logarithmique sur les meilleurs archets, et observe un lien entre les caractéristiques d'inertie (ratio entre moment d'inertie et masse) et les qualités de jeu. Il conclut que les mesures ne peuvent se substituer au jugement des musiciens dans l'appréciation de la « qualité », mais devraient permettre d'identifier un archet médiocre si certaines de ses propriétés physiques sont en dehors de limites d'acceptabilité. Askenfelt [12] mesure les fréquences propres et coefficients d'amortissement de sept baguettes d'archets dont les qualités sonores ont été notées sur une échelle par des musiciens. Aucune relation entre les fréquences propres et l'appréciation des musicien n'est constatée. En revanche, les baguettes d'archets ayant les meilleures qualités sonores présentent un amortissement plus

7. Ce terme désigne la répétition d'une même note le plus rapidement possible sur une durée imposée.

faible en moyenne. Une exception à cette tendance générale et le faible nombre d'archets étudiés amènent cependant à la conclusion qu'une relation directe entre l'amortissement et les qualités sonores ne peut être clairement établie.

Une deuxième approche consiste à cibler l'étude en tentant de ne faire varier qu'un nombre restreint de paramètres d'un archet à l'autre. Caussé et coll. [24] mettent en regard les résultats d'une étude perceptive menée auprès de violonistes et des mesures réalisées sur huit archets. Sept d'entre eux sont en fibres de carbone et basés sur un modèle commun, avec des caractéristiques variant légèrement d'un archet à l'autre. Le facteur matériau est ainsi exclu de l'étude. L'analyse multidimensionnelle effectuée à partir des résultats du test, à la lumière d'une épreuve de verbalisation, permet de dégager certaines tendances concernant la perception des archets par les musiciens. Cependant aucun lien clair entre les caractéristiques physiques et la « qualité » perçue n'est établi. Dauchez et coll. [31] mesurent les propriétés physiques de huit archets et les confrontent au jugement d'un musicien, exprimé sous forme de notes sur plusieurs critères. Cinq des huit archets sont fabriqués suivant un même modèle et diffèrent par le bois utilisé. Les résultats obtenus suggèrent certains liens entre propriétés physiques (inertie, raideur, tension du crin) et qualités de l'archet dans différents modes de jeu (changements de corde, attaques, *sautillé*, *spiccato*). D'autre part, il apparaît assez nettement que la qualité globale d'un archet est liée à la tension du crin et à la force critique de flambement de la baguette, toutes deux devant préférablement être élevées.

1.4 Analyse du discours des facteurs et regard des scientifiques

Si la présentation du procédé de fabrication d'un archet avait pour objet de répondre à la question « Comment ? », la question « Pourquoi ? » reste à explorer. En effet, le savoir-faire de l'archetier n'est pas uniquement de réaliser l'archet en tant qu'objet, mais d'en faire l'outil d'expression du musicien le plus approprié possible. En plus de l'habileté dans le travail du bois et des matériaux utilisés, une connaissance empirique du fonctionnement mécanique de l'archet est indispensable afin de maîtriser les conséquences de certains choix de conception sur son comportement en jeu. Le but de cette section, à travers une analyse du discours des facteurs, est de dégager certaines tendances générales concernant les caractéristiques que doit présenter un archet.

1.4.1 Tension du crin et précontrainte

L'archet étant joué sous tension, une question qui se pose naturellement est de définir la tension adéquate que doit avoir la mèche. Il convient de préciser que nous entendons le plus souvent par « tension de mèche » (ou « tension du crin ») la force de traction exercée par la baguette et la hausse à chaque extrémité. En effet, à plus petite échelle, cette force est en réalité la somme des tensions dans tous les crins qui la composent. Cet aspect semble pris en compte par les archetiers. Dans un article traitant de la juste quantité de crins, Thomas Gerbeth [50] en donne une illustration très parlante : si un archet tendu ne comportait qu'un seul crin, la tension dans ce dernier serait très élevée (probablement trop par rapport à sa limite de rupture); s'il comportait au contraire

mille crins de même longueur, ceux-ci se partageraient équitablement la tension totale, de sorte que la tension individuelle de chaque crin serait extrêmement faible. Pour cet archetier, le fait de remécher un archet avec un nombre systématiquement élevé de crins nuit aux qualités de jeu et de sonorité.

Si la sensation d'une mèche très tendue ou peu tendue par le musicien expérimenté ne fait aucun doute, il faut cependant interpréter avec prudence les propos désignant l'état de tension d'un archet. Par exemple, la notion d'archet « trop tendu » peut avoir deux significations : soit la tension du crin est effectivement trop forte au regard des attentes du musicien en termes de jeu, soit la baguette est trop éloignée de la mèche sous l'effet de la tension (sans lien *a priori* avec sa valeur au sens mécanique). Cet exemple laisse entrevoir la nécessité de prendre en considération non seulement la tension dans la mèche, mais aussi la distance entre celle-ci et la baguette. Ces deux aspects se retrouvent dans les propos de Charles Espey [35] :

« Each player is most comfortable playing with the hair at a certain height and at a certain tension. But there is also the range of hair tension they will want to be able to access or work with. »

Aux dires de cet archetier, il apparaît donc aussi nécessaire de fixer une plage de tension accessible au musicien.

Bien que la notion de tension soit clairement utilisée dans son sens mécanique par les facteurs, il n'est fait référence à aucune valeur quantitative dans la littérature correspondante (par ex. [68, 35, 53]), probablement du fait qu'une mesure directe n'est pas possible. La littérature scientifique comble en partie ce manque. Askenfelt [12] estime la tension dans un état donné en tirant la hausse vers l'arrière à l'aide d'un dynamomètre jusqu'à la position correspondante. Il trouve ainsi une tension « normale » de 60 N, au sens où celle-ci doit assurer une distance suffisante entre la mèche et la baguette lorsque l'archet est sollicité en jeu. Il précise toutefois que cette valeur « normale » est susceptible de varier suivant le cambre et la raideur de la baguette [14]. Des tensions jugées « faible » et « élevée » valent respectivement 45 N et 75 N. Pitteroff [78] mesure des tensions typiques de 60 N et 120 N sur des archets de violon et de violoncelle, respectivement, sans toutefois mentionner la méthode mise en œuvre. Dans le cas du violon, une épreuve d'ajustement de la tension à l'aveugle par un musicien renseigne sur une tolérance de ± 5 N autour de la valeur indiquée. Dauchez et coll. [31] mesurent sur huit archets des tensions de jeu plus faibles, allant de 30 à 47 N, par un procédé similaire à celui d'Askenfelt. À noter qu'il a été envisagé de mesurer la tension par des méthodes « destructives », par exemple en intercalant entre la hausse et la mèche une lamelle équipée de jauges de déformation [46]. À notre connaissance, aucune méthode indirecte basée sur un modèle n'a été proposée.

Enfin, la fonction première de la baguette étant de maintenir la mèche sous tension, il faut bien garder à l'esprit que la même force s'exerce réciproquement sur l'une et l'autre. La baguette de l'archet en situation de jeu est donc *précontrainte*. Cet aspect n'est pourtant pas toujours considéré dans les modèles d'archet. Dans leur étude visant à optimiser la géométrie d'une baguette suite à un changement de matériau, Carlsson et Tinnsten [23] font intervenir dans le problème d'optimisation des propriétés relatives à la baguette seule et non précontrainte. Malgré une approche originale visant à se rapprocher au plus près de la géométrie de référence, les conclusions restent donc partielles.

1.4.2 Le cambre : un paramètre de réglage essentiel

Désigné par certains archetiers comme le *cœur de l'archet* [35], le *secret des qualités de jeu* [48], le cambre est reconnu de façon unanime comme un paramètre de réglage essentiel. Deux aspects sont à considérer :

- la *répartition du cambre*, c'est-à-dire l'évolution de la courbure le long de la baguette, lorsque l'archet n'est pas sous tension (par exemple, la courbure est-elle régulière, ou plus prononcée en certains endroits?) ;
- la *quantité de cambre*, c'est-à-dire la courbure moyenne, qui peut être quantifiée par la distance minimale entre la mèche non tendue et la baguette.

Ces notions sont explicitées au travers d'un modèle mathématique de cambre dans le chapitre 2.

Une conséquence mécanique directe du réglage de la quantité de cambre concerne la tension dans la mèche. À même distance entre la mèche et la baguette, un archet plus cambré aura atteint une tension plus élevée, remarque l'archetier Thomas Gerbeth [48].

Selon Benoît Rolland [88], le cambre intervient également dans l'équilibre de l'archet en situation de jeu, en affectant la position verticale du centre d'inertie. De façon assez naturelle, l'archet sous tension est d'autant plus stable que le centre d'inertie est proche du crin. En outre, Benoît Rolland définit le « point de stabilité » de l'archet sous tension [87]. Il s'agit de l'endroit de la baguette qui entre en contact avec le crin lorsqu'on la fait fléchir par une pression de l'index, la main droite étant en tenue de jeu et la pointe de l'archet reposant sur la main gauche. À cette définition, il associe le critère suivant : un archet est correctement cambré lorsque le point de stabilité se trouve à mi-chemin entre l'index et la pointe. Un autre critère relatif à la répartition du cambre s'énonce ainsi : la courbure initiale doit être telle que la baguette, sous une tension « maximale », soit parfaitement droite [87, 53]. Il apparaît donc que la *bonne* répartition du cambre puisse être dictée par des critères bien déterminés. Qu'en est-il de la quantité de cambre ?

Selon Jean Grunberger [52], un défaut ou un excès de cambre se manifestent par des comportements pathologiques bien identifiables sur l'archet en situation de jeu. Avec un archet excessivement cambré, la force verticale appliquée par le musicien s'échappe fréquemment par une flexion latérale incontrôlable de la baguette. Un archet trop peu cambré, au contraire, rend les oscillations naturelles de la baguette difficiles à maîtriser pendant le jeu. Pour pallier cet inconvénient, le musicien est obligé de tendre l'archet au delà des limites usuelles en termes de distance crin-baguette. Andreas Grütter [53] avance une idée similaire :

« Too much [camber] will make the bow nervous, make it scratch, and cause it to thrust out to the side. Too little makes the bow lame, and causes an irregular bounce, although it can also make the tone nice and round. »

Pour beaucoup d'archetiers, le cambre est un paramètre de réglage à part entière, au même titre que le réglage de l'âme, par exemple, sur le violon. Ainsi, il n'est pas rare qu'un archetier préconise une modification du cambre en réponse à un besoin exprimé par le musicien [52]. Selon Charles Espey [35], au contraire, le cambre fait partie intégrante de la conception d'un archet et ne devrait pas être modifié dans le but d'ajuster les qualités de jeu, au risque d'aller à l'encontre des intentions originales du facteur. Toutefois, avec le temps, la baguette peut se voiler ou perdre une partie de son cambre. Si des corrections deviennent nécessaires, elles devraient être réalisées par le facteur lui-même, quand cela

est possible, ou par un expert s'il s'agit d'un archet ancien, afin de rétablir le cambre au plus proche de son réglage initial. Cette idée s'accorde avec une problématique importante liée à la conservation d'archets anciens. À la différence des objets d'arts en général, les instruments de musique ont pour vocation première de produire des sons, autrement dit d'être fonctionnels. Ainsi, le maintien de ces instruments en état de jeu au fil du temps a motivé certaines interventions altérant à divers degrés leur état original : remplacement de pièces d'usure (les cordes d'un violon par exemple), réparations, et parfois modifications destinées à adapter l'instrument à de nouvelles tendances musicales. Rares sont ceux qui nous sont parvenus dans leur configuration d'origine, exempts de modifications. Pour les instruments dont la forme finale résulte essentiellement d'un processus d'assemblage, comme le violon, l'œil d'un expert parvient souvent à identifier avec certitude des éléments n'ayant pas appartenu à l'instrument d'origine. Dans le cas de l'archet, constitué de peu d'éléments et dont la pièce maîtresse peut être aussi facilement modifiée⁸, il est souvent difficile de se prononcer sur l'intégrité du cambre vis-à-vis des intentions originales du facteur. De plus, il est probable qu'une restauration ne puisse être entreprise, en raison du risque inhérent au procédé de modification du cambre d'une baguette. Ainsi, il est légitime de se demander si les archets anciens de diverses collections de musées nous apparaissent aujourd'hui tels que les facteurs les ont conçus.

Au regard de l'importance du cambre affirmée par les archetiers, un nombre étonnamment faible d'études scientifiques ont été spécifiquement consacrées à son influence d'un point de vue physique. Graebner et Pickering [51] affirment trouver un lien simple entre le cambre et la décroissance du diamètre le long de la baguette. Leur modèle mathématique permettrait de prédire le cambre approprié à une décroissance du diamètre donnée, et vice-versa. Récemment, Guettler [55] explique de façon qualitative le rôle du cambre dans la réactivité de l'archet, affirmant que la courbure concave permet d'atteindre plus rapidement une certaine force d'appui sur la corde pour un même mouvement de la part du musicien.

1.4.3 Raideur et souplesse

Le titre volontairement antinomique de cette section traduit un compromis recherché par les musiciens et le facteur. D'un point de vue mécanique, raideur et souplesse sont des notions caractérisant toutes deux le fait qu'un corps se déforme plus ou moins sous une sollicitation extérieure. La notion de raideur est préférentiellement utilisée pour caractériser l'aptitude à résister à la déformation, tandis que celle de souplesse évoque au contraire la qualité à se déformer sous l'action d'une force.

Bien qu'on s'intéresse ici à l'archet, il est à noter que ces deux notions sont présentes dans le jeu même du violon. Le pédagogue Galamian [44] aborde la technique de la main droite en présentant le « système des ressorts », qu'il considère comme un principe fondamental :

« (...) Toute la technique du bras doit être fondée sur un système de ressorts. Ils fonctionnent quasiment comme des ressorts mécaniques. (...) Ils sont en partie artificiels (comme l'élasticité de la mèche de l'archet et la

8. Charles Espey [35], à ce sujet, condamne les réparateurs s'improvisant archetiers, peu respectueux de l'artisan ayant fabriqué l'archet qu'ils « améliorent » par une modification du cambre. Ses propos sont des plus parlants : « In a few minutes the original maker's concept for this bow is changed forever. »

souplesse de sa baguette) et en partie naturels (comme les articulations de l'épaule, du coude, du poignet, des doigts et du pouce). (...) Nous devons les rendre plus ou moins fermes. Avec l'archet, on y parvient en tendant ou en détendant la mèche ; avec les ressorts naturels, il faut une action des muscles. »

L'élasticité de la baguette intervient donc au même titre que la réalisation du geste musical dans la production sonore. Galamian souligne le fait qu'une baguette et une mèche totalement rigides rendrait l'exécution de la plupart des coups d'archet impossible. Ce point de vue trouve écho dans certaines études scientifiques, lorsqu'il est question de caractériser la raideur de l'archet sous tension. Pitteroff [78] émet l'hypothèse que le contrôle de la force pendant le jeu est facilité quand l'archet répond à une sollicitation du musicien par une déflexion suffisante pour être perçue mais modérée afin de ne pas altérer le geste. Dans le même ordre d'idées, Askenfelt [14] suggère qu'un archet trop raide engendrera de grandes variations de la force en réponse à d'infimes changements de la part du musicien, tandis qu'un archet trop souple ne répondra pas suffisamment aux sollicitations.

Du point de vue des archetiers, la raideur de la baguette détermine le caractère général de l'archet et affecte son comportement mécanique. Benoît Rolland [87] distingue deux grandes catégories :

- les archets *fermes* : plus faciles à jouer, ils produisent un son brillant et plus nasal ;
- les archets *flexibles* : ils donnent un son chaud et offrent une palette d'expression plus grande, mais requièrent plus d'habileté de la part du musicien.

Pour Thomas Gerbeth [48], la question de la raideur de la baguette se ramène essentiellement à celle de la plage de tension du crin que l'archet peut offrir au musicien. Avec une baguette très raide, le crin peut atteindre une tension élevée, ce qui confère à l'archet des qualités de rebond et favorise les gestes « techniques ». Au contraire, une baguette très flexible est associée à une tension plus faible, qui rend l'archet plus difficile à contrôler mais permet d'obtenir aisément un son plein, riche en harmoniques, rond. L'archetier précise que ces considérations sont à combiner avec celles portant sur le cambre, et propose une représentation schématique des qualités de jeu, reproduite à l'annexe A. Le lien étroit entre cambre et raideur est également évoqué par Andreas Grütter [53] : « As soon as the bow is tightened, its strength become a function of the stick's elasticity, the thickness of the wood and the camber. »

Les termes *raideur* et *souplesse* (ou autres mots se rapportant à ces notions) font également partie du vocabulaire des musiciens lorsqu'ils jugent les qualités de jeu d'un archet. Jean Grunberger [52] rapporte cependant que leur discours est parfois contraire à la mesure objective pouvant être réalisée sur la baguette et doit être interprété avec discernement. Par exemple, un archet dont la baguette est raide mais manque de cambre peut être décrit comme « mou » par un musicien, tandis qu'une baguette souple au cambre bien réglé peut donner la sensation d'un archet « ferme ». Il apparaît alors nécessaire de caractériser, en plus de la raideur de la baguette, celle de l'archet sous tension. En mesurant la raideur pouvant être « ressentie » par le musicien⁹, Askenfelt [14] constate une relation faiblement non-linéaire entre force et déflexion lorsque l'archet est sollicité à la pointe. De plus, il observe que la tension du crin a tendance à assouplir la baguette. Pitteroff [78] mesure la raideur verticale de l'archet sous tension en plusieurs points le

9. La grandeur mesurée est la déflexion nécessaire à l'emplacement de l'index pour obtenir une force donnée, suivant l'endroit de la mèche auquel elle est appliquée.

long de la mèche et propose un modèle analytique pour expliquer l'allure de la courbe obtenue. Dans ce modèle, la déflexion causée par une force appliquée en un endroit donné de la mèche est la somme de deux contributions : l'enfoncement du crin (dépendant de la tension et de la longueur de la mèche) et la flexion de la baguette (dépendant de ses propriétés mécaniques et géométriques). Ce modèle s'accorde avec l'expérience dans les deux tiers inférieurs de l'archet, mais s'avère insuffisant à proximité de la pointe. De plus, il n'explique pas la non-linéarité de la réponse statique constatée expérimentalement. Bien que ces observations laissent entrevoir un comportement statique non trivial, celui-ci n'a pas été analysé plus en profondeur.

1.5 Conclusion

L'évolution historique de l'archet a été examinée. Elle suggère que l'archet moderne, dont la géométrie et le bois constitutif privilégié sont restés inchangés depuis deux cents ans, est un compromis abouti. Néanmoins, l'analyse du discours des archetiers révèle que le choix du bois et la fabrication d'une baguette laissent une latitude de réglage, dont dépendent les qualités de jeu et sonores *a posteriori*. En dépit des outils d'aide à la facture existants à ce jour, le réglage d'un archet dans cette optique requiert toujours autant d'expérience de la part de l'archetier, comme en témoignent ces propos de Charles Espey [35] :

« (...) A bow during its construction cannot be played and a maker must have the techniques and sensitivity to evaluate the stick as he is working it down. (...) By trial and error the maker learns to sense the things the player needs from a completely different frame of reference. »

Cet aspect, bien qu'il soit mentionné dans plusieurs études scientifiques, n'a pas encore fait l'objet d'une analyse spécifique. La précontrainte, conférant à l'archet un comportement non-linéaire sensible à la géométrie initiale, suggère le recours à une modélisation appropriée pour mieux comprendre le travail de l'archetier. Cette thèse essaye d'œuvrer dans ce sens, en vue de proposer, à terme, de nouveaux outils d'aide à la facture.

CHAPITRE 2

MODÈLE STATIQUE 2D

Ce chapitre, rédigé en langue anglaise, est un article à paraître dans le *Journal of the Acoustical Society of America* [4]. Il présente un travail de modélisation visant à rendre compte du comportement statique non-linéaire de l'archet dans le plan. Le modèle numérique développé ici est basé sur des éléments finis de poutre 2D en formulation corotationnelle, afin de prendre en compte les non-linéarités géométriques. Les détails de cette formulation sont présentés dans l'annexe B. Si la prise en compte d'une géométrie de baguette quelconque justifie sa discrétisation en éléments finis, la description de la mèche, en revanche, peut se faire analytiquement dans le cadre des hypothèses retenues (notamment, l'approximation par un crin équivalent ayant une raideur longitudinale uniquement). Ainsi, l'interaction entre la baguette et la mèche est exprimée de façon explicite dans la résolution du problème. À cette fin, il est nécessaire d'appliquer à la baguette une force suiveuse et dont l'amplitude varie avec les déplacements. Les développements correspondants sont détaillés dans les sections B.6 et B.7, respectivement. Les simulations effectuées portent sur un archet « standard », dont les propriétés mécaniques et géométriques sont définies à partir de la littérature. Les caractéristiques générales du comportement de l'archet sont examinées, puis l'attention est portée sur les réglages du cambre et de la tension. On montre notamment que la quantité de cambre a une forte incidence sur la souplesse de l'archet sous tension. Des compléments à l'article, rassemblés en fin de chapitre, visent à mieux identifier l'origine des non-linéarités observées.

STATIC MODEL OF A VIOLIN BOW: INFLUENCE OF CAMBER AND HAIR TENSION ON MECHANICAL BEHAVIOR

F. ABLITZER, J.P. DALMONT, N. DAUCHEZ

Abstract: Experienced bow makers empirically know the influence of wood, tapering and camber on the playing and tonal qualities of a bow. However, the way each parameter affects the bow mechanical behavior is not clearly established. An in-plane finite element model is developed to highlight the link between the adjustable design parameters and the mechanical behavior of a bow. This model takes into account geometric nonlinearity as well as compliance of the hair. Its validity is discussed from measurements on a bow. Results from simulations are compared to experimental results from previous studies. The consequences of adjusting hair tension and camber are then investigated.

2.1 Introduction

In spite of an extensive scientific literature about the violin [28, 63], only few studies are exclusively devoted to the bow. However, experienced players attach almost as much importance to the choice of a bow as to the choice of a violin. They generally assess the quality of a bow in terms of playing and tonal qualities. Playing qualities refer to the control of bow in playing, tonal qualities to the influence on the tone. The question of a link between physical properties and quality of bows was addressed by several authors [96, 76, 13, 14, 24, 31, 82, 55]. Static properties such as total mass, mass distribution, and bending stiffness, have generally been assumed to affect the playing qualities, while dynamic properties such as hair and stick modes would relate to the tonal qualities [13, 14, 56]. In most studies, some static and dynamic properties were measured on different bows with various degrees of quality. Despite the seeming simplicity of the bow compared to the violin, these studies showed that it is not yet possible to predict the quality of a bow by measuring a set of physical properties. However, some authors pointed out the plausible existence of an acceptable range for certain characteristics, out of which the bow would be considered as not suitable for playing [76, 14].

When manufacturing a bow stick, the bow maker works with three main parameters: wood, tapering and camber [88]. Regarding wood, high quality modern bows are made of pernambuco (*Caesalpinia Echinata*), a Brazilian wood with high specific Young's modulus and low damping. However, this species has become rare and expensive. Tapering denotes the gradually decreasing thickness along the stick. In general, the maker adjusts the taper of the bow in order to reach the desired total mass, for a given wood density. Camber is the concave curvature of the stick without hair tension. It is adjusted by heating a short portion of the stick over a flame and bending it until it cools down. Once a bow is finished, the only possible adjustment by the player is the hair tension.

This paper aims at highlighting the link between the adjustable design parameters and the mechanical behavior of a bow. Emphasis is put on camber and hair tension, since both can be adjusted on a finished bow. For this purpose, an in-plane finite element model

is developed and validated from measurements on bow. It is then used to investigate the effects of hair tension and camber on the mechanical behavior of a standard bow.

2.2 Model of the assembled bow

In previous work, various ways of modeling a bow have been proposed. Wegst and Ashby [102] made simple calculation from beam theory, considering a stick with a circular cross-section of constant radius, to determine a typical range of Young's modulus required for violin bows. Pitteroff [78] proposed an analytical model aimed at describing the static behavior of the assembled bow, i.e. stick and hair, in the perpendicular plane. Despite rather rough approximations, the model agreed well with experimentally observed behavior for moderate bow forces. In his model, the stick was represented by its stiffness at the end, which can be written analytically in the case of a simplified geometry. To take into account a more realistic geometry, other authors employed numerical models. Carlsson and Tinnsten [23] used a finite element model coupled to an optimization algorithm to calculate the change in diameter along the stick needed to recover some of the static and dynamic properties after changing density and Young's modulus. The properties of the tightened bow were not investigated in this study.

Caussé *et al.* [24] made simulations based on the finite element model of an assembled bow to highlight mode shapes of stick and hair and to evaluate the influence of hair tension on corresponding eigenfrequencies. In their study, the stress field due to hair tension was taken into account to determine the eigenmodes. This was done in a similar way as Mamou-Mani *et al.* [70] studied the effect of downbearing on piano soundboard eigenfrequencies, but the geometrically nonlinear nature of the problem was not discussed in the case of the bow.

However, the change in geometry during the loading of the bow, e.g. when tightening the hair, is strong enough to cause geometric nonlinearity, even under hypothesis of small deformation and linear behavior of the material, as pointed out by Dauchez *et al.* [31]. In the present paper, a finite-element model of the bow including the hair and taking into account geometric nonlinearity is now developed. As a starting point, only the in-plane static behavior of the bow is considered.

2.2.1 General description

The bow as we know it today is the result of a progressive evolution through centuries [5, 80]. Renaissance bows had a short thick stick with convex curvature. As the musical style changed, the stick got longer and thinner, while its curvature was progressively changed from convex to concave in order to withstand the hair tension without increasing the mass too much. At the beginning of the 19th century, the french bow maker François-Xavier Tourte brought the last significant improvements to the design of bows. Today he is considered the father of the modern bow.

A modern violin bow is represented in Figure 2.1. The stick is traditionnally made of wood. Its main function is to support a 65 cm hair ribbon under tension. The hair is attached to the head of the stick at one end, and to the frog at the other. The hair enters the head through a thin plate, traditionally made of ivory, which covers the underside of the head. The position of the frog is adjusted by turning the button, which operates on

a screw mechanism located inside the stick. This allows the player to tighten the hair to suitable tension for playing. The right tension is essentially determined by the transverse compliance of the hair. If too loose, the hair tends to touch the stick in playing. If too tight, more effort is needed to make the string vibrate, according to players and bow makers [53, 87]. On early bows, the frog was simply wedged between stick and hair. The resulting hair tension was determined by the height of the frog and the length of the loose hair, both fixed by the bow maker.

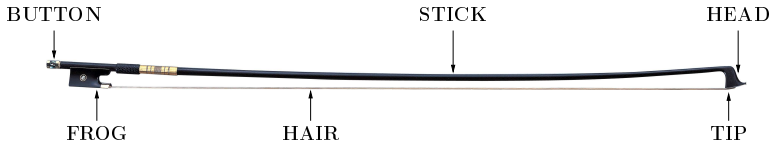


Figure 2.1: Modern violin bow.

The model presented in this paper allows one to simulate, first, the tightening of the bow from its initial state without hair tension [Fig. 2.2(a)] to its playing state at hair tension T_0 [Fig. 2.2(b)]; then, the loading by a normal force \mathbf{F} . At this step, the hair tension T may differ from the initial hair tension T_0 [Fig. 2.2(c)]. Throughout the simulation, the stick is clamped at the frog end ($x = 0$ mm) and free at the other end.

The model just described is a simplified representation of actual playing conditions. In reality, the bow is held in a finger grip which allows the pivoting around an axis located somewhere near the cut up in the frog, at the position of the thumb. The normal force at the contact point between the hair and the string is controlled by applying a moment with the index finger on top of the stick, with the thumb acting as a support. Since the combined action of index and thumb fingers takes place near the frog, on a thick part of the stick, it is assumed that this modeling makes little difference with the actual static behavior of the bow in playing.

The model takes into account the geometric nonlinearity of the bow as well as the compliance of the hair. It is based on a finite element formulation coupled with an iterative procedure.

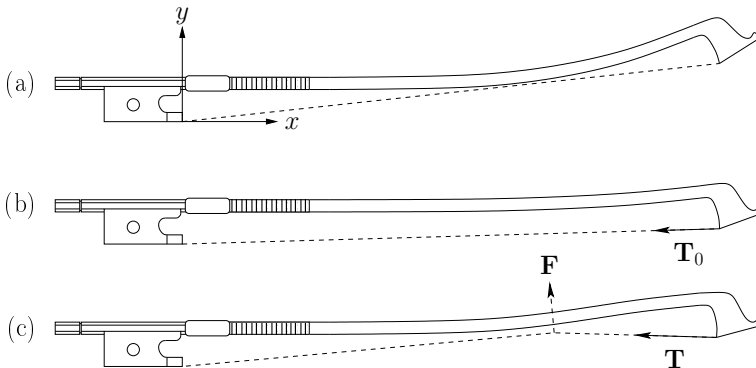


Figure 2.2: Bow without tension (a), tightened (b) and loaded (c).

2.2.2 Finite element model of the bow

In order to take into account the geometric nonlinearity, the model is based on the corotational formulation for beams given by Crisfield [29]. The corotational formulation allows the global displacements and rotations of a structure to be arbitrarily large, although the local strain are assumed to remain small (Fig. 2.3). A local reference frame is attached to each element and continuously rotates and translates with it. With respect to this local frame a small-strain, small-displacement relationship is applied. Since a bow stick is slender, this relationship can be derived from the Euler-Bernoulli beam theory.

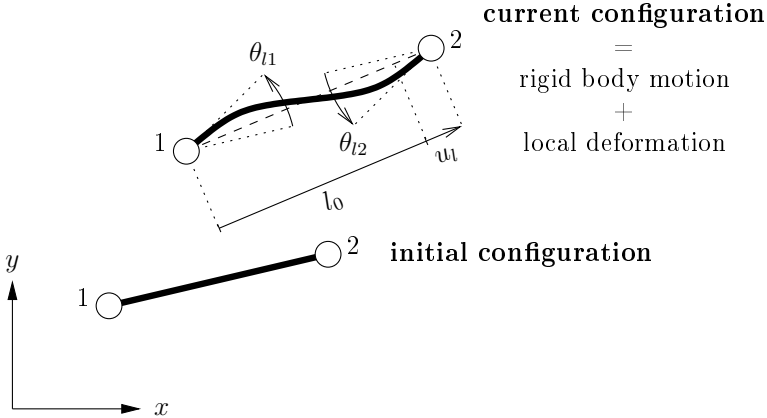


Figure 2.3: Initial and current configurations of a beam element.

For each beam element, the axial force N is related to the local axial displacement u_l by the relation

$$N = EA \frac{u_l}{l_0}, \quad (2.1)$$

where E is the element Young's modulus, A the element area and l_0 the element initial length. The internal bending moments \bar{M}_1 and \bar{M}_2 are related to the local nodal rotations θ_{l1} and θ_{l2} by the relation

$$\begin{Bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l_0} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{l1} \\ \theta_{l2} \end{Bmatrix}, \quad (2.2)$$

where I is the element second moment of inertia.

The original formulation developed by Crisfield leads to the following relationship between variation of global internal forces $\delta \mathbf{q}_i$ and variation of global displacement $\delta \mathbf{p}$,

$$\delta \mathbf{q}_i = (\mathbf{K}_{t1} + \mathbf{K}_{t\sigma}) \delta \mathbf{p}, \quad (2.3)$$

where \mathbf{K}_{t1} is the standard tangent stiffness matrix, $\mathbf{K}_{t\sigma}$ the geometric stiffness matrix. \mathbf{K}_{t1} and $\mathbf{K}_{t\sigma}$ are displacement-dependent matrices.

In order to allow a sufficiently fine representation of tapering, the bow stick is discretized into 20 beam elements. The head is represented by a single element with diameter 10 mm, so as to make it sufficiently stiff. After assembling, the problem to solve takes the form:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}) \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad (2.4)$$

where \mathbf{u} is the displacement vector, $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ the assembled stiffness matrix and $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ the external force vector. The only external force in $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ is the force \mathbf{T} exerted by the hair on the stick at the tip [see Fig. 2.2(c)], which varies in orientation and amplitude in function of the displacement of the tip. The variation in orientation is due to the rotation of the hair coordinate system. The variation in amplitude is due to the increase in hair tension $\Delta T = T - T_0$ as the tip moves away from its position at T_0 . Since $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ and $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ are displacement-dependent, an iterative procedure is necessary to solve Eq. (2.4). Moreover, an additional stiffness term for the last element, i.e. the head, has to be introduced to take into account the variation in force orientation and amplitude between two successive configurations. The additional stiffness term is expressed in a similar way as when follower forces are involved [10].

For the general case where the solution of the tightened and loaded bow is sought, the numerical procedure achieves good convergence when decomposing the computation into two global load steps:

1. tightening of the bow, i.e. $T_x = T_0$ and $T_y = 0$,
2. loading of the hair, i.e. $T_x = T_0 + \Delta T_x$ and $T_y \neq 0$,

where T_x and T_y denote the components of \mathbf{T} . For both steps, the Newton-Raphson algorithm with several load increments is applied to reach the equilibrium.

Regarding the first step, a backward displacement of the frog relative to the stick (typically 3-3.5 mm) is normally needed to tighten a bow. This displacement counterbalances the stretching of the hair (1 mm) and the decreasing distance between the frog and the tip (2-2.5 mm) due to straightening of the stick and rotation of the head, as reported by Pitteroff [78]. In the model, neither the stretching of the hair at this step, nor the displacement of the frog is considered. Therefore, the distance between the frog and the tip decreases when tightening the modeled bow, whereas it slightly increases on an actual bow, because of the elongation of the hair. Although the increase in bow length is not fully negligible, it does not affect the overall behavior examined in the second step. Once the bow is tightened, the distance between frog and tip defines the hair length L_0 corresponding to tension T_0 . In order to compute the value of T_x and T_y to apply in the second load step, a model of the hair is now defined.

2.2.3 Model of the hair

The ribbon of hair is assumed to behave like an equivalent single hair, represented in Figure 2.4. When an external force \mathbf{F} is applied at relative abscissa γ ($0 < \gamma < 1$), the hair on either side is assumed to extend proportionally to the increase in tension $\Delta T = T - T_0$, where T is supposed to be the same on either side, i.e. $T = \|\mathbf{T}\| = \|\mathbf{T}'\| = \sqrt{T_x^2 + T_y^2}$. This implies that the force \mathbf{F} has a small tangential component F_x of unknown value (except for $\gamma = 0.5$ where it is null).

It has to be noted that the distribution of forces in the x and y directions, respectively, is slightly different under normal playing conditions. In this situation, the tangential component of \mathbf{F} corresponds to the friction force, i.e. $F_x = \mu F_y$, where the coefficient of friction μ varies within each cycle of Helmholtz motion [98, 106]. As the force \mathbf{F} is fully determined, the tension may differ on either side of bowing point. Cremer [28] reported a value of 0.24 for the average coefficient of friction. With a typical bow force of 1 N,

the corresponding average friction force is fairly small compared to hair tension. Thus, the difference between $\|\mathbf{T}\|$ and $\|\mathbf{T}'\|$ is likely to remain small, which gives support to the hypothesis made here.

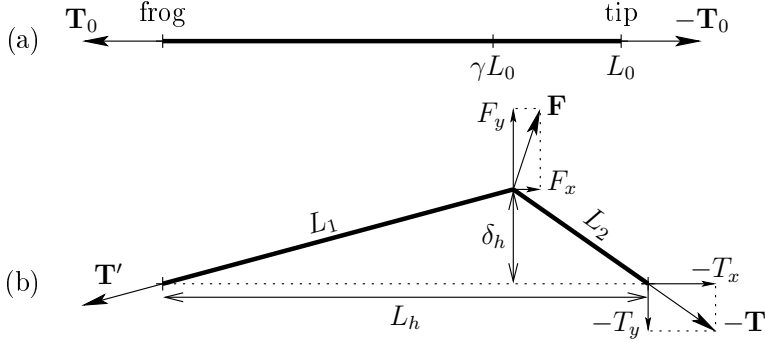


Figure 2.4: Model of the hair. Tightly stretched hair (a), deflection under loading (b).

The lengths of both sides are:

$$\begin{aligned} L_1 &= \gamma L_0 (1 + c_h \Delta T) \\ L_2 &= (1 - \gamma) L_0 (1 + c_h \Delta T) , \end{aligned} \quad (2.5)$$

where c_h is the compliance per unit length of the equivalent single hair. Considering a ribbon of n_h hairs having identical and homogeneous Young's modulus E_h and diameter d_h , an estimation of c_h can be obtained from:

$$c_h = \frac{4}{n_h E_h \pi d_h^2} . \quad (2.6)$$

Typical values for a violin bow are $n_h = 160-190$, $E_h = 4-7$ GPa and $d_h = 0.2 \pm 0.05$ mm, as reported by Askenfelt [14]. He also measured the stiffness constant of a complete ribbon and found it to reach $30 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-1}$ under a nominal tension of 60 N. With a length $L_h = 650$ mm, the corresponding compliance per unit length is $c_h = 5.1 \times 10^{-5} \text{ N}^{-1}$.

The hair deflection at the loading point is

$$\delta_h = L_2 \frac{T_y}{T} . \quad (2.7)$$

The distance between frog and tip is

$$L_h = \sqrt{L_1^2 - \delta_h^2} + \sqrt{L_2^2 - \delta_h^2} . \quad (2.8)$$

At this point, it can be shown that the normal component of \mathbf{T} at the tip is simply given by

$$T_y = \gamma F_y . \quad (2.9)$$

The tangential component cannot be expressed by a similar equation. Therefore, it is found iteratively, starting from the initial guess $T_x = T_0$. At each computation step of the Newton-Raphson algorithm, the value of L_h is computed from Eq. (2.8) and compared to the distance between frog and tip in the current configuration. As long as the two values differ, the value of T_x is corrected for the next iteration.

2.2.4 Validation of the model

In this section, the ability of the finite element model to reproduce the deformed shape of an actual bow is examined. A wooden student violin bow was tightened from zero to high playing tension, by steps of two turns of the button. At each level, the shape of the stick was determined from a picture, by means of image processing [Fig. 2.5(a-c)]. The resolution in the measurement was about 0.3 mm. To keep the imaging conditions as identical as possible for all pictures, the position of both the bow and the camera were held constant. The diameter along the stick was measured with a digital caliper. The relative incertitude on the diameter was less than 3%. The Young's modulus was then determined from two measurements of the dynamic response of the stick simply supported at its ends and loaded by a mass at its center (200 g and 400 g), by means of the measuring platform *Lutherie tools* [47]. A value of 36 GPa was found.

Then, simulations were performed starting from the initial geometry. For each level of hair tension, the value of T_0 giving the best least-squares fit between measured shape and model output was determined. The maximum difference between the experimental and numerical results on the y-coordinate of the neutral axis was less than 0.2 mm. It should be noted that this procedure can be considered as an indirect measurement of hair tension, provided that the Young's modulus is known. With the bow used in this experiment, values of $T_0 = 20.1$ N, 39.2 N, 54.9 N and 67.5 N (resp. at 2, 4, 6 and 8 turns of the button) were obtained. The levels of hair tension corresponding to 4 and 8 turns of the button were considered as the lower and upper limits for playing, respectively. The optimal playing tension was found at 6 turns ($T_0 = 54.9$ N). Although a typical value of 60 N is commonly referred to as "normal" playing tension by authors [12, 78, 33], the optimal value for each bow probably depends on the stiffness of the stick and camber as well. Figure 2.5(d) shows the nonlinear increase in minimum hair-stick distance with hair tension.

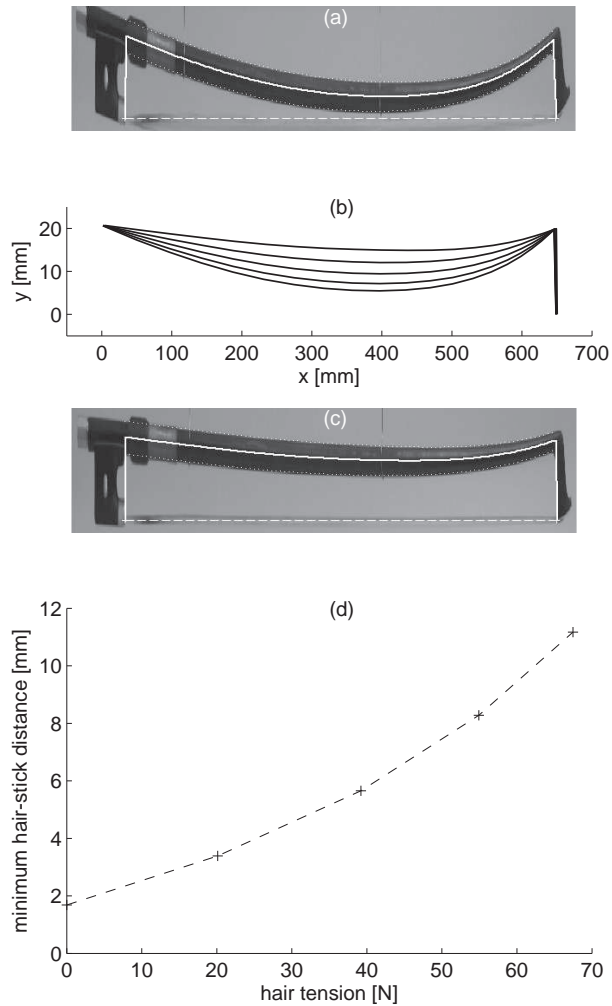


Figure 2.5: Bow used for validating the model. (a) Initial measured shape. (b) Successive shapes of the bow from zero tension to high playing tension, by steps of two turns of the button. The y-coordinate indicates the distance from the level of the bow hair to the neutral axis of the stick. (c) Final measured shape. (d) Estimated hair tension T_0 at each level vs. minimum hair-stick distance.

2.3 Results

In this section, we first describe the geometry of a “standard bow” on which simulations are performed. Then, general results from simulations are presented and discussed with respect to experimental observations by other authors. Finally, the influence of initial hair tension and camber on transverse bow compliance is examined.

2.3.1 Definition of a standard bow

The geometry of the modeled stick, which is basically defined by camber and tapering, can be taken from measurements on a representative modern violin bow. In this study, however, we define the geometry of a “standard bow” from criteria found in the literature. Similarly, the Young’s modulus E is fixed at 25 GPa, which is a typical value for pernambuco [72, 23, 93]. Measurements of a set of bows in professional use today would be needed to check whether this “standard bow” is representative of most bows available on the market.

2.3.1.1 Tapering

The tapered profile is derived from a formula given by Vuillaume. This violin maker of the 19th century measured a great number of Tourte bows and found the diameter to decrease logarithmically along the stick [38]. The corresponding curve is considered as a reference in some studies [76, 62]. The original formula applies to abscissa between 110 mm and 700 mm from the stick origin and corresponds to a decrease in diameter from 8.6 mm to 5.3 mm, the first 110 mm of the stick having constant diameter of 8.6 mm. Since the origin of the modeled bow is the front end of the frog, the formula is adapted so that it applies to abscissa between 0 mm and 650 mm, neglecting the small portion of constant diameter [Fig. 2.6(a)]. Thus, the diameter d at abscissa x is given by:

$$d(x) = d_0 \left(1 + \varepsilon \ln \left(\frac{x_\infty - x}{x_\infty} \right) \right), \quad (2.10)$$

where $d_0 = 8.77$ mm, $x_\infty = 825$ mm and $\varepsilon = 0.255$. Interestingly, the second moment of inertia $I(x)$ following from Eq. (2.10) decreases almost linearly with abscissa for this set of parameters. It can be approximated by

$$I(x) \approx I_0 \left(\frac{x - x_0}{x_0} \right), \quad (2.11)$$

where $I_0 = 293$ mm⁴ and $x_0 = 752$ mm, with 3% maximum relative difference with that deduced from Eq. (2.10). Since this observation has no obvious physical interpretation, one may wonder whether this particular tapered profile is an optimum empirically found by Tourte.

2.3.1.2 Camber

The concept of camber actually includes two aspects: distribution of camber, which can be seen as shape of the stick; amount of camber, which represents how strong the stick is bent. The distribution of camber is here defined so that the stick becomes straight

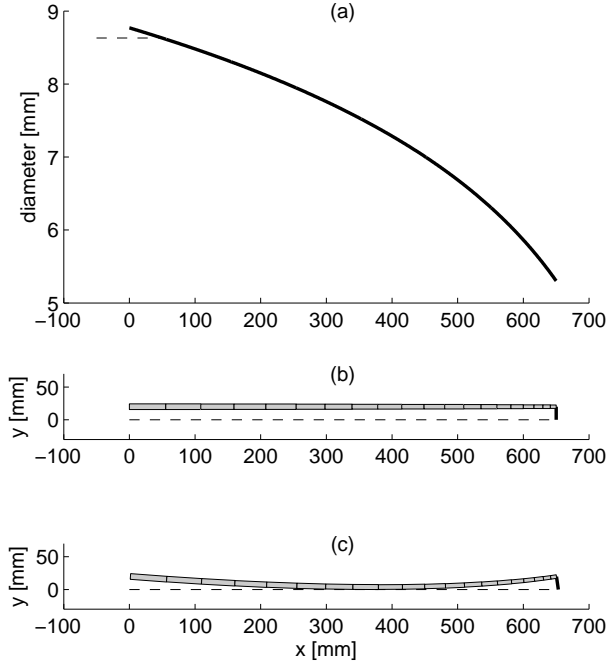


Figure 2.6: Geometry of the standard bow. (a) Tapering, - - after Vuillaume [38], — from Eq. (2.10). (b) Straight stick. (c) Cambered stick showing the case of a “full camber”.

under a certain tension, which is a criteria commonly recognized by bow makers: “The match between wood strength and camber can be tested by tightening the bow until the stick is straight (...) If the stick is really straight, camber and wood strength are properly matched” (Grütter [53]); “One reference: the axis of the stick should be perfectly parallel to the line of hair at maximum tension of the bow” (Rolland [87]). The maximum tension, i.e. the tension at which the stick is straight, is denoted by T_0^{\max} . In this configuration, the distance between hair and neutral axis of the stick is constant [Fig. 2.6(b)], assuming that the frog and the head have the same height h . Thus, the bending moment resulting from hair tension has a constant value $\mathcal{M}_0^{\max} = h T_0^{\max}$ along the stick. Therefore, neglecting axial compression of the stick as well as deformation of the head, the initial curvature of the stick can be determined by calculating the deformed shape of the initially straight stick subject to moment \mathcal{M}_0^{\max} at its free end [Fig. 2.6(c)].

Following this reasoning and considering the approximation of Eq. (2.11), a simple analytical expression giving the initial shape of the stick $y(x)$ can be provided by integrating $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{h T_0^{\max}}{E I(x)}$ (with $y(0) = h$ and $y'(0) = 0$), which yields

$$y(x) - h = \frac{h T_0^{\max} x_0^2}{E I_0} (\bar{x} + (1 - \bar{x}) \ln(1 - \bar{x})), \quad (2.12)$$

where $\bar{x} = \frac{x}{x_0}$. The multiplying factor in Eq. (2.12), in terms of E , I_0 , and T_0^{\max} , is considered to be the amount of camber. The expression within the parentheses, dependent

on \bar{x} , gives the generic shape of the stick without hair tension (distribution of camber).

For a given bow, the maximum tension T_0^{\max} is the input parameter that determines the amount of camber of the modeled stick. Although it corresponds to a physical quantity, a more convenient way of quantifying the amount of camber is the minimal distance between loosened hair and stick, denoted by κ . The smaller this distance, the more camber the stick has. It is generally agreed among bow makers that this distance should be between 0 mm and 2 mm and in any case not negative. The case where $\kappa = 0$ mm is called “full camber”. In this study, four different amounts of camber are investigated. The value of T_0^{\max} needed to obtain each chosen value of κ is determined by means of the finite element model. The corresponding values of κ and T_0^{\max} are listed in Table 2.1.

κ (mm)	T_0^{\max} (N)	T_0^{play} (N)
4.0	41.6	27.2
2.0	48.4	36.2
0.0	55.1	45.2
-2.0	61.8	54.1

Table 2.1: Standard bow. Relationship between amount of camber, characterized by minimum hair-stick distance κ , and maximal tension T_0^{\max} (tension for straight stick). Corresponding values of playing tension T_0^{play} (tension for 10 mm hair-stick distance) are given.

2.3.1.3 Comment on the relationship between tapering and camber

In playing conditions, the bow is never tightened up to complete straightening of the stick. Therefore, the bending moment resulting from hair tension is a function of abscissa x , $\mathcal{M}_0(x) = T_0 a(x)$, where a denotes the distance between hair and neutral axis of the stick. It is maximum at the tip and at the frog (both head and frog have standard height on modern bows) and minimum at the lowest point of the stick, generally near the middle. Moreover, the stiffness of the stick is determined by the quantity $E I$, where Young’s modulus E is supposed to be homogeneous along the stick, contrary to second moment of inertia I which depends on tapering. For a circular section, $I = \frac{\pi d^4}{64}$. Thus, the stick is far more compliant at the tip than at the frog. The local bending radius ρ that counteracts the initial curvature of the stick is given by:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathcal{M}_0}{E I}. \quad (2.13)$$

From Eq. (2.13) it is clearly apparent that the stick will bend more near the tip, where the bending moment is maximum and the stiffness minimum. For this reason, camber is particularly strong in the last portion of the stick. More generally, the role of distribution of camber is to compensate for the decrease in diameter along the stick. In addition, the more cambered the stick, the less it will straighten under the same tension. Since tapering is mostly adjusted so that the stick reaches a given mass, the bow maker has to adjust camber accordingly, in order to get the right shape on the tightened bow. A

physical model can be useful to determine the proper camber for a given tapering, as pointed out by a recent study [51].

2.3.2 Variation in hair tension under transverse loading

In previous studies on violin bows, the influence of hair tension on different properties of the bow, e.g. bending stiffness along the stick [14], stick mode frequencies [24], bouncing frequency [12], has been examined. In most studies, the hair tension has been assumed not to vary significantly from the initial value fixed by the player before playing. However, it has been experimentally shown by Demoucron *et al.* [33] that the hair tension does vary when the bow is loaded by a normal force. The tension variation was found to be almost linear with respect to relative abscissa γ and normal force F_y , leading to a simple empirical relation,

$$T = T_0 + \alpha_T \gamma F_y , \quad (2.14)$$

where α_T is an experimentally determined coefficient.

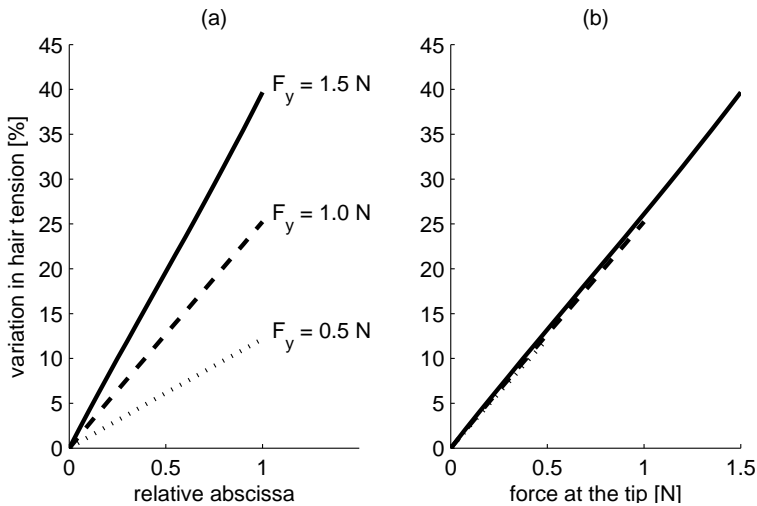


Figure 2.7: Variation in simulated hair tension for three values of normal force F_y (0.5 N, 1.0 N and 1.5 N) applied at different places along the bow hair, shown as function of (a) relative abscissa γ , and (b) force at the tip γF_y . The simulations are performed on the standard bow with full camber. The initial hair tension T_0 is fixed at 45.0 N, which corresponds to 10 mm hair-stick distance.

Figure 2.7 shows the simulated hair tension variation when the bow is loaded by a normal force F_y of increasing value at relative abscissa γ . The tension increases almost linearly with relative abscissa and normal force, which is in agreement with the observations of Demoucron. For a normal force of 1.5 N at the middle and 1.0 N at the tip, which are moderate values in violin playing, the hair tension increases by 20% and 25%, respectively. For a normal force of 1.5 N at the tip, it increases by 40%. As a comparison, Demoucron measured a variation of 25% for the same load case. This discrepancy could be due to the higher stiffness of the bow he used for the experiment (stiffness at the tip

$K_s = 91 \text{ N.m}^{-1}$) compared to the modeled bow ($K_s = 72 \text{ N.m}^{-1}$), since the increase in hair tension is essentially due to the displacement of the tip under loading.

2.3.3 Distribution of transverse compliance along the bow

When applying a normal force to the tightened bow hair, the observed deflection at the loading point is the result of two effects: deflection of the hair and bending of the stick. The force transmitted by the hair to the tip makes the stick bend. This results in a second displacement term, in addition to the hair deflection.

Pitteroff [78] considered the two effects separately to give an analytical relationship between force and deflection. The contribution of the hair was the deflection δ_h of a string with fixed length L_h and tension T_0 under normal force F_y at relative abscissa γ . The contribution of the stick was deduced from the deflection δ_s of a cantilever beam under normal force γF_y at its free end. The stick was assumed to be straight and have constant bending stiffness. However, the formula remains valid when considering a more realistic geometry, simply by introducing the equivalent stiffness constant at the tip K_s [33]. The total deflection at the loading point was expressed as the sum of the two contributions:

$$\delta = \delta_h + \delta_s = \frac{\gamma(1-\gamma)L_h}{T_0} F_y + \frac{\gamma^2}{K_s} F_y . \quad (2.15)$$

When compared to experimental results, this relationship matched well with the behavior of an actual bow in its lowest two thirds. However, a significant difference between experimental and theoretical deflection was observed at the tip.

The model developed in the present article removes the hypothesis that the effects of hair and stick are uncoupled. Yet, it is possible to estimate how hair and stick contribute to the total deflection. The hair deflection is given by Eq. (2.7). The total deflection is deduced from coordinates of the loading point before and after the force is applied. The contribution of the stick is then given by the difference between total deflection and hair deflection.

Figure 2.8 shows the simulated total deflection at the loading point of the standard bow loaded by a 1 N normal force plotted against relative abscissa of the force. Hair and stick contributions are also plotted individually. The total deflection is null at the frog and maximum at the tip. The stick deflection continuously increases along the bow, reaching a maximum at the tip. On the contrary, the shape of the hair contribution is similar to a parabola, though it is slightly asymmetrical: the maximum value is reached just before the midpoint of the bow. This asymmetry is due to the rise in hair tension with relative abscissa.

As a comparison, it is possible to estimate the parameters T_0 and K_s used by Pitteroff by fitting the total deflection with a second order polynomial of the same form as Eq. (2.15) and identifying the coefficients. The third parameter, L_h , is known from the finite element model. From this method, the estimated value of hair tension is found to be 24% higher than its actual value, $T_0 = 45.0 \text{ N}$. The same operation was done for three other values of F_y . The estimated values for T_0 and K_s , as well as the maximum relative difference in deflection between numerical results and the second order polynomial, are given in Table 2.2. Regarding the hair tension, the deviation from actual value increases with force F_y . Similarly, the estimated value of K_s varies significantly with F_y . This shows that Eq. (2.15) does not reflect exactly the behavior of the bow.

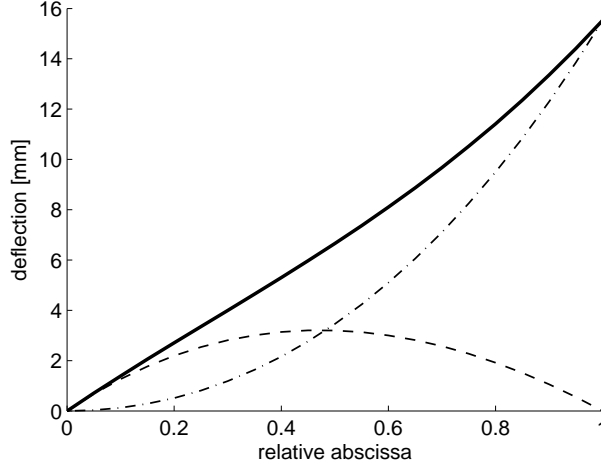


Figure 2.8: Evolution of deflection at the loading point vs. relative abscissa for applied normal force $F_y = 1$ N. — total deflection, - - hair deflection, --- stick deflection. Standard bow with full camber, initial hair tension $T_0 = 45$ N.

F_y (N)	T_0 (N)	K_s (N.m ⁻¹)	max error (%)
0.1	46.1	72	2
0.5	49.9	70	8
1.0	56.1	66	17
1.5	65.5	61	27

Table 2.2: Standard bow with full camber. Estimated values of T_0 and K_s [see Eq.(2.15)] from simulation with the finite element model, for different values of normal force F_y . The last column gives the maximum relative error between numerical simulations of the deflection and fitted curve.

Moreover, Pitteroff observed that the transverse compliance of the bow varies with the normal force. In the lower half, the measured compliance was lower with a higher force (5 N compared to 1 N). On the contrary, the compliance near the tip increased with the force. The nonlinearity of transverse compliance close to the tip was also reported by Askenfelt [14]. Figure 2.9 shows the simulated deflection of the bow as a function of normal force at three different loading points. The normal force F_y is limited to the range between 0 N and 1.5 N. Although the bow force generally remains low when playing near the tip, it may well reach values around 1.5 N in this part of the bow [11]. A comparison with a linear case, indicated by dotted lines in Figure 2.9 can be made. As seen, the simulated transverse compliance is nonlinear. Close to the frog as well as in the middle, the compliance tends to diminish as the force increases. This is due to the increase in hair tension with force. Near the tip, the compliance increases with the force.

2.3.4 Influence of initial hair tension on transverse compliance

Before playing, the player adjusts the initial hair tension by turning the button. As the tension increases, the stick straightens progressively, which increases the minimum

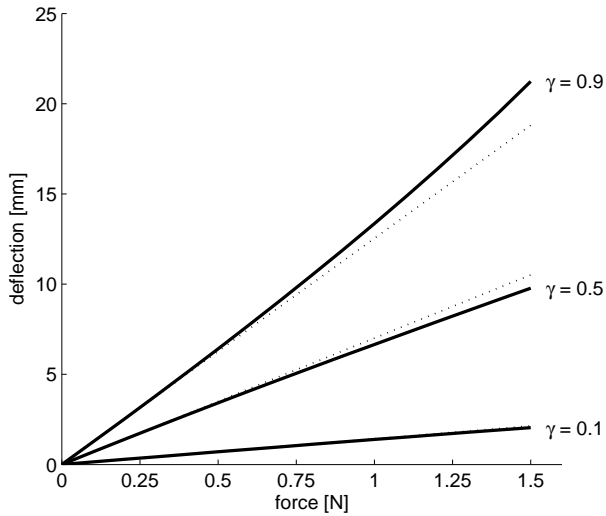


Figure 2.9: Evolution of transverse bow deflection at the loading point vs. normal force for three values of relative abscissa. The deviation from a linear evolution (dotted lines) indicates a nonlinear transverse compliance.

distance between hair and stick. The evolution of minimum hair-stick distance with tension for four settings of camber (4 mm, 2 mm, 0 mm and -2 mm) is plotted in Figure 2.10. The increase in hair-stick distance with tension is far from linear. This is due to the fact that the straightening of the stick, which increases the hair-stick distance, is the consequence of a bending moment which itself depends on the hair-stick distance.

To evaluate the influence of initial hair tension on the transverse compliance of the bow, simulations were performed for four values of T_0 on the standard bow with full camber. The values of T_0 (40.5 N, 45.2 N, 49.0 N, and 52.1 N) correspond to four plausible values of hair-stick distance, from 8 mm to 14 mm, denoted by numbers (0) to (3) in Figure 2.10. Because of nonlinearity, the transverse compliance depends on normal force. It is defined by the slope of the force-deflection curve (see Fig. 2.9).

Figure 2.11 shows the transverse compliance along the bow with full camber corresponding to the four chosen values of initial hair tension. For each setting, the two curves indicate the compliance for small forces (just above 0 N) and high forces (around 1.5 N). The compliance for small forces slightly decreases with initial hair tension. Increasing T_0 from 40.5 N to 52.1 N (29%) lowers the compliance for small forces at the middle of the bow by 18% and by 13% at the tip. Moreover, the nonlinearity is stronger for a low hair tension.

2.3.5 Influence of camber on transverse compliance

When varying camber in the model, it is necessary to change the initial hair tension accordingly so that the minimum hair-stick distance remains in a range which is suitable for playing. For each setting of camber in Figure 2.10, the tension at which a 10 mm hair-stick distance is reached is denoted by T_0^{play} and called “playing tension”. Figure 2.10 shows the four settings of camber, denoted by letters (G) to (J). Table 2.1 gives the

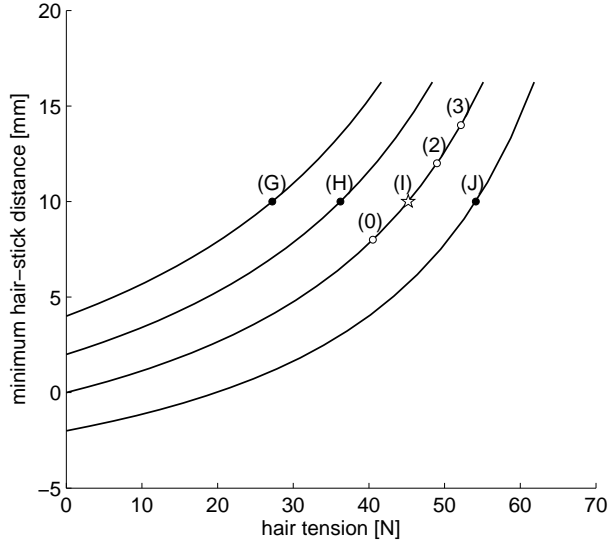


Figure 2.10: Evolution of minimum hair-stick distance vs. hair tension for four settings of camber (4 mm, 2 mm, 0 mm = full camber and -2 mm). Points denoted by letters (G) to (J) represent playing tension T_0^{play} for each camber giving a bow-hair distance of 10 mm. Points denoted by numbers (0) to (3) indicate four settings of hair tension for the case of full camber with (I) as a common reference. Note that rightmost curve represents negative camber, meaning that the middle of the stick is below the level of the bow hair before tightening.

corresponding values of κ , T_0^{play} and tension for straight stick T_0^{max} . None of the different settings of camber and hair tension led to contact between hair and stick within the chosen ranges of relative abscissa and normal force.

The first noticeable effect of camber is a change in playing tension. Increasing camber from $\kappa = 4$ mm up to $\kappa = 0$ mm, for example, increases the hair tension by 66% for the same hair-stick distance. It is noteworthy that not only the minimum hair-stick distance is preserved, but also the hair-stick distance throughout the bow. Thus, the bow maker can increase the playing tension of a bow without any consequence on its shape once tightened.

A second effect of camber is a change in transverse compliance (see Fig. 2.12). As camber increases, the compliance at small forces decreases in the middle (-22% from $\kappa = 4$ mm to 0 mm), which is due to a higher playing tension. At the tip, the compliance at small forces increases with camber (+10% from $\kappa = 4$ mm to 0 mm), contrary to what was observed by increasing the hair tension at given camber (Fig. 2.11). This effect is due to prebending of the stick.

Furthermore, if the bow is not cambered very much (G), the nonlinearity is fairly strong around the middle: the higher the force, the lower the compliance. Close to the tip, the reverse trend is observable though moderate. As camber increases, the nonlinearity tends to decrease around the middle of the bow, whereas it increases near the tip. At full camber (I), the compliance in the lower two-thirds is almost the same for small and high forces, whereas the compliance near the tip significantly increases

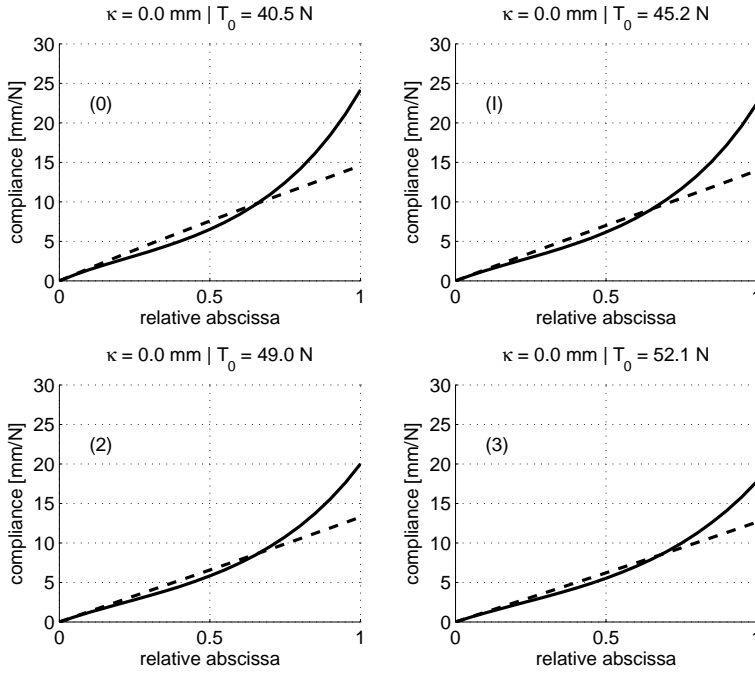


Figure 2.11: Transverse compliance along the standard bow with full camber for four settings of initial hair tension T_0 , for two normal forces: around 0 N (---) and 1.5 N (—). The four cases correspond to points (0) - (3) in Figure 2.10.

with force. Moreover, the range in length for which the compliance increases with force becomes larger as camber increases. If the bow has an unrealistically large amount of camber (negative κ , point J), the compliance for high forces strongly increases in the last third.

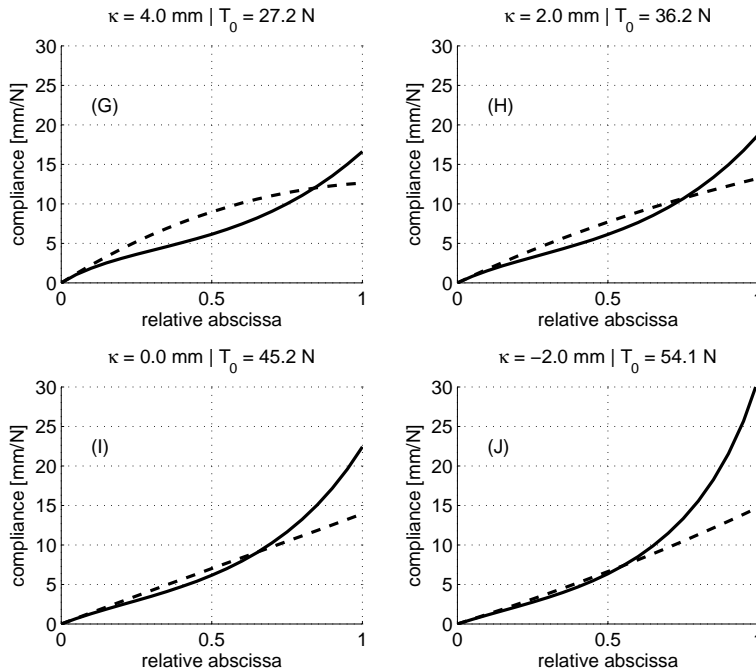


Figure 2.12: Transverse compliance along the bow for different settings of camber (characterized by minimal hair-stick distance without hair tension $\kappa = 4 \text{ mm}$, 2 mm , 0 mm and -2 mm) and playing tension T_0^{play} , for two normal forces: around 0 N (---) and 1.5 N (—).

2.4 Conclusion

A finite element model of the assembled bow accounting for the geometrical non-linearity of both stick and hair has been presented. The model allows to reproduce the in-plane nonlinear static behavior that is experimentally observed when the bow is loaded (Fig. 2.2). The influence of the adjusting parameters (camber, hair tension) on the mechanical behavior of the bow has been enlightened. Changing the hair tension does not affect the overall profile of the transverse compliance of the bow. However, increasing the hair tension tends to reduce the nonlinearity. On the contrary, different amounts of camber lead to very different profiles of the compliance along the bow. The nonlinearity of the compliance near the tip is especially apparent with increasing camber.

It remains to be seen if results from this study have direct applications in predicting a player's perception of bow performance. Compliance is generally assumed to be of particular importance for bow force control: if too low, the bow might be too sensitive to small variations of hand movement; if too high, the bow would not be responsive enough [14]. Measurements and playing tests of bows with different settings of camber and hair tension will be performed to go deeper into this question. If significant trends emerge, the model presented in this paper would be useful to assist bow makers. Furthermore, since the bow is often tilted towards the fingerboard in playing [94, 95], a model based on spatial beam elements is currently developed in order to take into account the

out-of-plane bending of the stick.

Acknowledgments

The study presented in this paper was partially supported by the French National Research Agency (ANR) within the PAFI project. The authors wish to thank two anonymous reviewers for helpful comments on a previous version of this manuscript, and Matthew Boucher for his careful reading of the manuscript.

2.5 Compléments sur le comportement statique plan

L'objectif de cette partie est d'illustrer l'influence d'un paramètre isolé sur le comportement de l'archet. Les calculs numériques effectués dans cette section portent sur la géométrie d'archet « standard ». La quantité de cambre est telle que la distance crin-baguette sans tension vaut $\kappa = 0$ mm. Le module d'Young de la baguette est fixé à $E = 25$ GPa.

2.5.1 Action de la mèche sur la baguette

Afin de bien comprendre la façon dont la mèche intervient dans la réponse statique de l'archet sous tension, on s'intéresse à la déformation de la baguette seule lorsque celle-ci est chargée à la pointe. L'effort appliquée est une force notée \mathbf{T} , dont les deux composantes T_x et T_y sont exprimés dans la base liée à l'archet. Ainsi la composante T_x est toujours orientée dans la direction du crin (composante axiale) et la composante T_y perpendiculairement à cette dernière (composante transversale). On fait varier la composante T_x entre 0 et T_0^{\max} , valeur pour laquelle la baguette est droite, et la composante T_y entre 0 et 1.5 N.

La figure 2.13(a) représente la variation de distance ΔL entre la hausse et la pointe par rapport à la configuration non chargée, en fonction des efforts appliqués. On observe qu'une augmentation de la composante axiale T_x seule a pour conséquence une diminution de la distance hausse-pointe. Au contraire, lorsque la composante verticale T_y seule augmente, cette distance augmente. La ligne moyenne de la baguette dans quatre configurations particulières est représentée sur les figures 2.13(b) et 2.13(c). Ces deux figures montrent de façon qualitative la déflexion engendrée par un chargement vertical sans précontrainte axiale, c'est-à-dire $T_x = 0$ [(1)→(2)], ou avec précontrainte [(3)→(4)]. On remarque que la déflexion est plus importante lorsque la baguette est précontrainte.

On suppose à présent que la baguette est soumise à une force de composante axiale uniquement, $T_x = T_0$, et qu'une mèche est intercalée entre la hausse et la pointe afin de maintenir cet état d'équilibre. La variation de distance hausse-pointe correspondant est notée ΔL_0 . À partir de cet état préchargé, une composante transversale $T_y > 0$ est ajoutée à la force.

Concernant la raideur longitudinale de la mèche, deux cas limites sont à envisager :

- La mèche est parfaitement souple (raideur nulle). Ce cas n'est évidemment pas réaliste d'un point de vue physique, puisque la mèche n'oppose aucune résistance et ne peut donc en aucun cas maintenir l'équilibre de la baguette déformée. Néanmoins, il présente un intérêt pour isoler l'effet de la précontrainte sur la relation entre force et déflexion dans la suite de l'étude. Comme aucune force de rappel n'est engendrée par une variation de longueur de la mèche, l'effort transversal T_y peut augmenter sans que l'effort axial T_x ne soit affecté. Ce cas est matérialisé sur la figure 2.13(a) par l'intersection entre la surface d'équation $\Delta L = f(T_x, T_y)$ et le plan d'équation $T_x = T_0$
- La mèche est parfaitement rigide (raideur infinie). Dans ce cas, la distance hausse-pointe est contrainte à rester constante. Comme l'effort transversal T_y tend à éloigner les points d'attache de la mèche, l'effort axial T_x doit augmenter conjointement pour annuler cet effet. Le lien entre les deux composantes est matérialisé sur la fi-

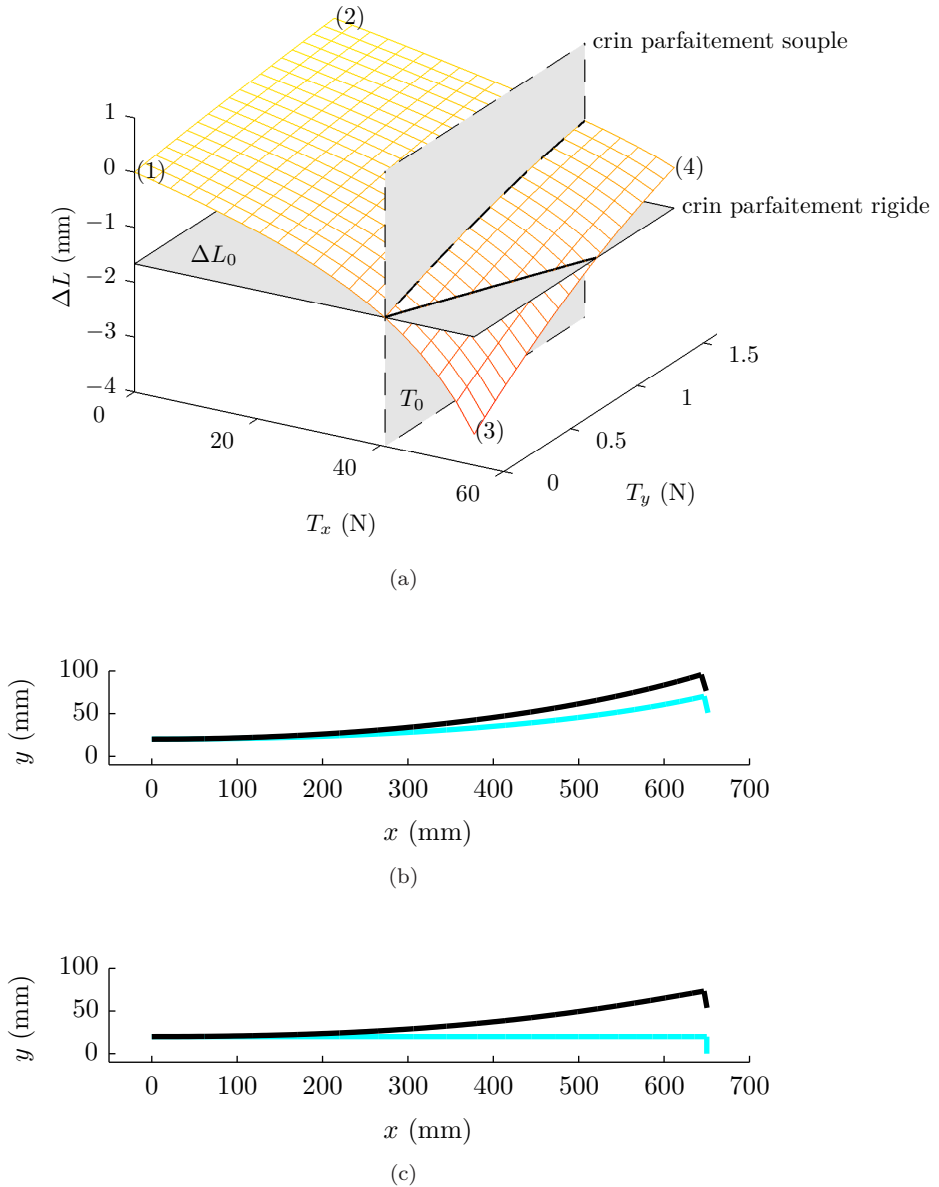


Figure 2.13 – (a) Variation de la distance hausse-pointe ΔL en fonction des efforts T_x et T_y appliqués à la pointe. (b) Ligne moyenne dans les configurations (1) et (2). (c) Ligne moyenne dans les configurations (3) et (4).

gure 2.13(a) par l'intersection entre la surface et le plan d'équation $\Delta L = \Delta L_0$

Dans le cas plus général et réaliste d'une mèche de raideur longitudinale finie k_h , l'évolution de la composante axiale T_x est déterminée par l'intersection entre la surface et le plan d'équation $\Delta L - \Delta L_0 = (k_h)^{-1} T_x$. Dans la suite, la raideur de la mèche est traduite par un module d'Young équivalent E_h , en supposant l'aire de sa section constante ($A_h = 3.90 \text{ mm}^2$, soit une raideur $k_h = 30 \text{ N/mm}$ pour $E_h = 5 \text{ GPa}$ et $L_h = 650 \text{ mm}$).

2.5.2 Effet de la raideur de la mèche

La figure 2.14 montre l'effet de la raideur de la mèche sur la variation de tension et la déflexion causées par l'application d'une force verticale F_y à la pointe de l'archet sous tension (pour une distance crin-baguette de 10 mm).

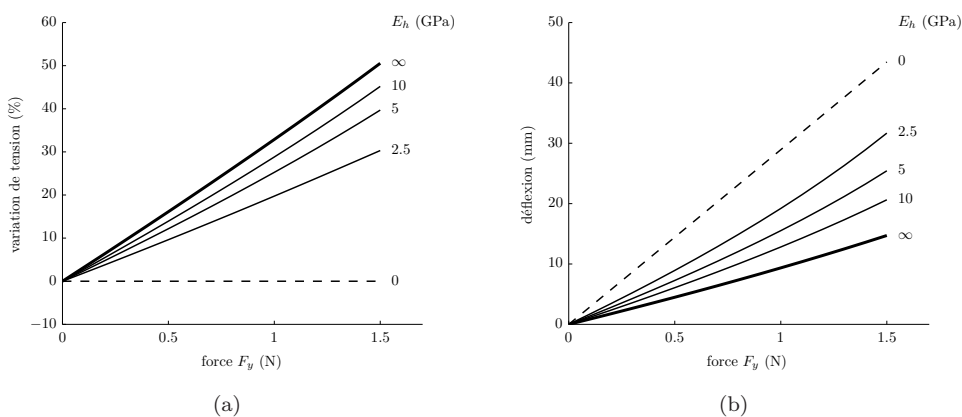


Figure 2.14 – Effet de la raideur du crin, exprimée en module d'Young équivalent E_h , sur la variation de tension (a) et la déflexion (b) sous une force verticale F_y à la pointe.

Par rapport au cas limite – non réaliste – d'une raideur nulle, où la tension reste constante, la prise en compte d'une raideur de mèche aboutit à une variation de tension allant jusqu'à 40% dans la plage de force considérée, en prenant une valeur typique $E_h = 5 \text{ GPa}$. Autour de cette valeur, on constate que la variation est plus sensible à une diminution de la raideur qu'à une augmentation. Par ailleurs, la raideur longitudinale de mèche diminue sensiblement la déflexion verticale à la pointe et rend la courbe force-déflexion non-linéaire.

2.5.3 Effet de la précontrainte

On s'intéresse maintenant à l'influence de la précontrainte sur le comportement de la baguette. Pour cela, la souplesse de l'archet à la pointe est évaluée pour différentes valeurs de la tension du crin T_0 , allant de 0 N à T_0^{\max} , valeur pour laquelle la baguette est droite. Afin d'isoler l'effet de la précontrainte, deux cas sont étudiés : celui d'une mèche parfaitement souple ($E_h = 0 \text{ GPa}$) et celui d'une mèche de raideur finie ($E_h = 5 \text{ GPa}$). La figure 2.15 montre la souplesse à la pointe en fonction de la tension du crin T_0 dans les deux cas. Trois niveaux de force sont considérés afin de représenter la non-linéarité.

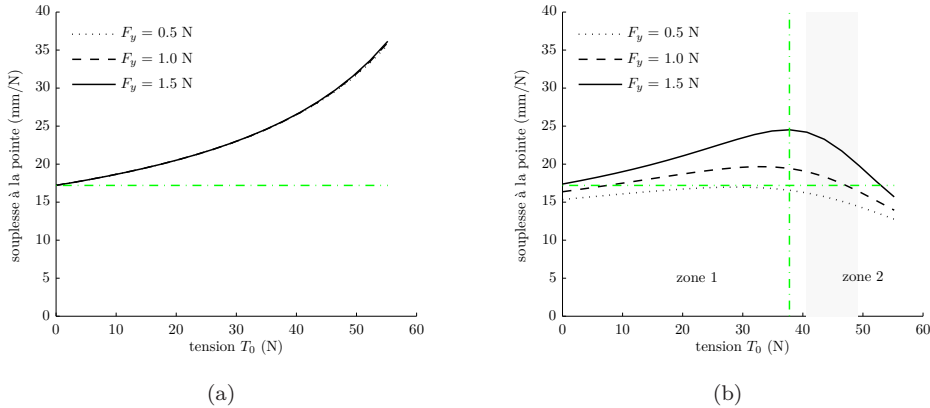


Figure 2.15 – Effet de la précontrainte sur la souplesse à la pointe, dans le cas d’une mèche de raideur nulle (a) ou de raideur finie, $E_h = 5$ GPa (b). Trait mixte horizontal : compliances de la baguette sans mèche. Trait mixte vertical : délimitation arbitraire entre les deux zones. Région coloriée : plage de tension correspondant à une distance crin-baguette de 8 à 12 mm.

Dans le cas où la mèche est de raideur nulle (figure 2.15(a)), on observe une augmentation de la souplesse à la pointe avec la tension du crin, d’autant plus rapide que la tension est élevée. D’autre part, la superposition des courbes correspondant aux différentes forces traduit un comportement linéaire.

Dans le cas où la mèche présente une raideur finie (figure 2.15(b)), l’allure des courbes fait apparaître deux zones. Dans la première, allant jusqu’à environ 68% de la tension maximale, la souplesse à la pointe augmente avec la tension du crin. Dans la deuxième zone, la souplesse diminue avec la tension. Par ailleurs, la non-linéarité de la relation force-déflexion, dans le sens d’une augmentation de souplesse, est peu prononcée aux très faibles et très forte tensions. Elle est maximale vers la transition entre les deux zones. Enfin, il faut noter que le musicien n’utilise qu’une plage de tension relativement restreinte. En supposant que celle-ci correspond à une distance crin-baguette sous tension de l’ordre de 8 à 12 mm (voir fig. 2.15), on constate que le réglage du musicien se trouve dans la deuxième zone : en augmentant la tension, la souplesse de la baguette diminue, ainsi que la non-linéarité.

2.5.4 Étude des efforts intérieurs

Pour interpréter les résultats précédents, il est utile de considérer les contributions séparées des différents efforts mis en jeu (T_0 , F_y , ΔT) sur le moment de flexion le long de la baguette :

- la force T_0 , correspondant à la précontrainte, produit un moment \mathcal{M}_{T_0} proportionnel à la distance crin-baguette¹, donc dépendant des déplacements ;

1. Le terme “distance crin-baguette” est employé ici pour désigner la distance entre le crin et la fibre neutre de la baguette.

- la force verticale F_y crée un moment de flexion \mathcal{M}_{F_y} qui ne dépend que de la distance au point d'application de la force ;
- la variation de tension du crin causée par la raideur du crin, engendre un moment $\mathcal{M}_{\Delta T}$ proportionnel à la distance crin-baguette et à la variation de distance entre la hausse et la pointe, qui dépend dans une plus forte mesure encore des déplacements.

Indépendamment des caractéristiques de l'archet, le moment total peut s'écrire sous la forme générique :

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \mathcal{M}_{T_0} + \mathcal{M}_{F_y} + \mathcal{M}_{\Delta T} \\ &= a(x, \mathbf{u})T_0 + (L_0 + \Delta L(\mathbf{u}) - x)F_y + a(x, \mathbf{u})k_h \Delta L(\mathbf{u}) .\end{aligned}\quad (2.16)$$

Dans cette expression, la dépendance de certaines grandeurs en \mathbf{u}_0 , les déplacements initiaux jusqu'à l'état précontraint, est implicite. D'autre part, il est possible de négliger la dépendance de \mathcal{M}_{F_y} en les déplacements \mathbf{u} . Afin de fixer les idées, une variation de longueur de l'ordre d'un millimètre sous une force de 1.5 N produit un moment supplémentaire de 1.5 N.mm dans \mathcal{M}_{F_y} , et un moment $\mathcal{M}_{\Delta T}$ de l'ordre de 150 N.mm (en considérant $k_h = 30$ N/mm et $a \approx 5$ mm). On aboutit à l'expression :

$$\mathcal{M} \approx a(x, \mathbf{u})T_0 + (L_0 - x)F_y + a(x, \mathbf{u})k_h \Delta L(\mathbf{u}) \quad (2.17)$$

La répartition du moment de flexion total \mathcal{M} le long de la baguette, ainsi que les différentes contributions, sont représentées sur la figure 2.16.

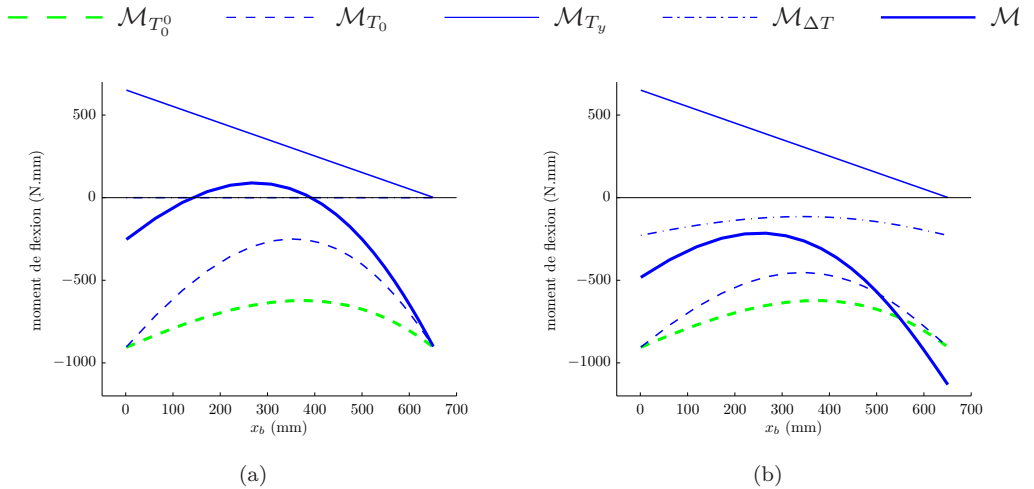


Figure 2.16 – Représentation des différentes contributions au moment de flexion \mathcal{M} le long de la baguette, dans le cas d'une mèche de raideur nulle, $E_h = 0$ GPa (a), ou de raideur finie, $E_h = 5$ GPa (b), sous une force $F_y = 1$ N à la pointe.

Dans l'état précontraint mais en l'absence de force F_y , seul le moment \mathcal{M}_{T_0} agit sur la baguette (noté $\mathcal{M}_{T_0^0}$ sur la figure). L'allure de sa répartition correspond à la distance crin-baguette dans l'état d'équilibre. La déformation causée par ce moment s'oppose au cambre de la baguette. Lorsque la force F_y est ensuite appliquée, le moment qu'elle produit déforme la baguette dans le sens l'aident à retrouver son cambre, ce qui entraîne un

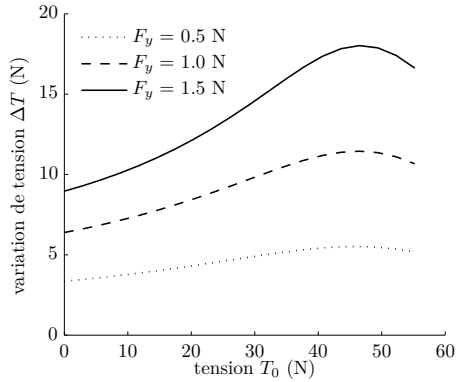


Figure 2.17 – Effet de la précontrainte sur la variation de tension du crin, lorsqu’une force F_y est appliquée à la pointe.

déplacement positif (i.e. dans le sens de la force) à la pointe. Comme de façon simultanée la distance crin-baguette diminue, le moment \mathcal{M}_{T_0} diminue proportionnellement à cette distance. Ainsi une partie de la déformation qui s’opposait au cambre disparaît, ce qui ajoute un déplacement positif à la pointe. C’est ce déplacement additionnel qui explique la souplesse plus élevée de la baguette précontrainte, effet constaté sur la figure 2.15(a).

De plus, à la variation de distance entre la hausse et la pointe résultant de ces deux déplacements positifs, la mèche s’oppose par un supplément de tension ΔT , tracé sur la figure 2.17. Le supplément de tension, qui reflète la variation de distance (à la constante près k_h), augmente d’une part avec la force appliquée F_y , de façon quasi proportionnelle, d’autre part avec la précontrainte T_0 . Pour se faire une idée des conséquences sur la souplesse, il est nécessaire de considérer la distance crin-baguette. Lorsque la force F_y augmente, celle-ci tend à diminuer. Ainsi la contribution du moment $\mathcal{M}_{\Delta T}$, proportionnel à cette distance, pèse de moins en moins lourd dans le moment total, ce qui explique la non-linéarité mise en évidence sur la figure 2.15(b).

Les deux contributions \mathcal{M}_{T_0} et $\mathcal{M}_{\Delta T}$ ont donc un effet opposé, dont l’importance relative dépend de la précontrainte T_0 et des déplacements de l’archet chargé. Ce constat permet d’expliquer les deux zones observées sur la figure 2.15(b). Dans la première zone, l’effet de précontrainte domine : la baguette a tendance à s’assouplir avec la tension T_0 . Bien qu’un accroissement de tension ΔT ait lieu, le moment qu’il engendre est d’une amplitude moindre en raison de la faible distance crin-baguette dans cette plage de tension. À partir d’un certain niveau de précontrainte cependant, la distance crin-baguette étant plus grande, la contribution de $\mathcal{M}_{\Delta T}$ devient plus importante et l’emporte sur l’effet de précontrainte : la baguette se raidit avec la tension T_0 .

En résumé, suivant la tension du crin et la force appliquée, la baguette peut apparaître comme plus souple ou plus raide qu’elle ne l’est en tant que telle. Ce phénomène est dû à la présence du crin, qui est à la fois source de précontrainte (tendance à assouplir la baguette) et s’oppose aux mouvements de la baguette (tendance à rigidifier la baguette).

CHAPITRE 3

MODÈLE STATIQUE 3D ET VALIDATION EXPÉRIMENTALE

Ce chapitre, rédigé en langue anglaise, est un article soumis au journal *Acta Acustica united with Acustica* [6]. Son objectif est double. D'une part, le modèle qu'il présente doit rendre compte de l'influence de la précontrainte sur la flexion latérale de la baguette, mise en évidence lors d'une étude préliminaire [2]. D'autre part, une méthode non destructive de détermination des propriétés mécaniques et géométriques de l'archet est proposée. Toujours afin de prendre en compte la non-linéarité géométrique, le modèle repose sur une formulation corotationnelle, appliquée ici à des éléments de poutre 3D. La mèche, traitée auparavant de façon analytique, fait maintenant partie intégrante de la structure discrétisée. Cette approche facilite le passage à une représentation plus réaliste par plusieurs crins équivalents, plutôt qu'un seul, répartis sur la largeur de la mèche. La partie expérimentale de ce chapitre porte sur deux archets sélectionnés et réglés par l'archetier Jean Grunberger de façon à mettre en avant l'effet du cambre. Des résultats numériques de simulations, une fois les paramètres d'entrée du modèle déterminés expérimentalement, sont comparés à des mesures de souplesse sur l'archet sous tension, dans les deux directions transversales. Le très bon accord constaté valide le caractère prédictif du modèle. Enfin, on montre l'influence du cambre et de la tension sur l'écart entre les souplesses verticale et latérale. En complément à l'article, une discussion sur la mesure de la tension est proposée en fin de chapitre.

A PREDICTIVE MODEL FOR THE ADJUSTMENT OF VIOLIN BOWS

F. ABLITZER, N. DAUCHEZ, J.P. DALMONT

Abstract: A finite element model aimed at predicting the in-plane and out-of-plane static mechanical behavior of a tightened bow is developed. It takes into account the prestress due to hair tension and the nonlinear behavior due to large displacements. An non-destructive procedure to determine the input parameters of the model from measurements on a bow is described. Numerical and experimental results are then compared in the case of two bows, showing good agreement between the simulated and measured mechanical behavior. Finally, hair tension and camber are shown to influence the proportion between lateral and vertical compliances of the tightened bow. The model might be used by bow makers for the adjustments of bows during the making process.

3.1 Introduction

As an interface between the player's arm and the string, the bow is an all-important element in violin playing. In spite of its apparent simplicity, it is a very elaborate mechanical device, which requires high expertise from bow makers to meet the demand of professional players.

The primary function of a bow (Fig. 3.1) is to maintain a hair ribbon under tension. This gives little latitude in the choice of the wood, since the stick must remain slender in spite of the high tension it has to withstand [103]. Moreover, the modern bow has a very standard geometry, which could lead to believe that the quality of a bow only hangs on the wood. However, by doing subtle adjustments on the geometry of the stick, bow makers have the ability to draw the best from different wood blanks with various mechanical properties, or even to adapt the playing qualities of a bow to the needs of a specific player. Actually, bow makers work with three main parameters when making a stick:

- wood (density, elasticity, damping);
- taper, which denotes the gradually decreasing thickness along the stick;
- camber, that is the shape of the stick without hair tension.

For the choice of the wood, some bow makers combine their know-how with a scientific approach, by using specific equipments (such as a *Lucchimeter* [83, 68], or *Lutherie Tools* [47]) to measure some of the wood properties. Regarding taper and camber, however, a specific device aimed at assisting bow makers does not exist at present. The mastery of these conception parameters thus requires a high expertise from the bow maker. The aim of our study is to develop a tool based on a physical model, capable of predicting the mechanical behavior of a bow with regard to its material and geometric characteristics. This study comes within the scope of a research project aimed at supplying instrument makers with dedicated measurement and simulations tools which are affordable and easy-to-use [75].

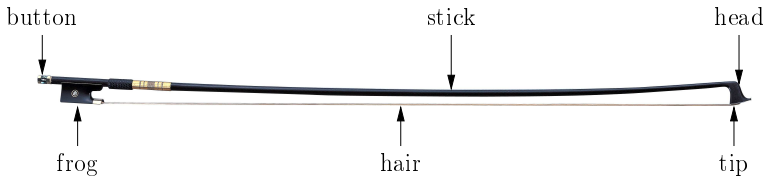


Figure 3.1: Modern violin bow.

In most previous studies, the static behavior of the bow has been treated as an in-plane problem [14, 78, 23, 55, 6]. However, the out-of-plane behavior should be considered as well. Indeed, the bow is often slightly tilted towards the fingerboard in playing [94], which makes the stick bend in both vertical and lateral directions. Moreover, even when the bow is played with the hair flat on the string, the stick may bend laterally in response to small transverse hand movements. Thus, the player probably feels both vertical and lateral compliances when he controls the bow force. Lastly, discussions with bow makers suggest that the proportion between vertical and lateral bending of the stick under tension not only depends on taper, but also on the amount of camber. The out-of-plane behavior hence appears to be also considered when making or adjusting a bow. Therefore, a three-dimensional finite element model is developed and presented in section 3.2. In section 3.3, the experimental procedure to determine the input parameters of the model from measurements on a bow is described and validated. Finally, some tendencies on the behavior of the bow when hair tension and camber vary are given in section 3.4.

3.2 Model

To take into account geometric nonlinearity, a large displacement formulation based on the co-rotational approach is adopted. The main steps of the formulation (after Crisfield [30]) are presented below.

3.2.1 Co-rotational formulation

The main idea of the co-rotational formulation is to separate the total displacements of the structure into rigid-body motion and local deformation, as illustrated by Figure 3.2. The rigid-body motion can be arbitrarily large, while the local deformation is assumed to remain small. To each element is associated a local frame, materialized by base-vectors \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 and \mathbf{e}_3 in Figure 3.2, which translates and rotates with the element.

In the local frame, the displacements caused by deformation are described by a set of local degrees of freedom (DOF) : axial elongation (u_l), torsional angles (θ_{l1} at node 1; θ_{l4} at node 2), bending slopes (θ_{l2} , θ_{l3} at node 1; θ_{l5} , θ_{l6} at node 2). These local displacements, gathered in vector \mathbf{p}_l , are conjugate to local internal efforts \mathbf{q}_{il} (axial force, torsional moments, and bending moments, respectively). Since the local deformation is small, a linear relationship between local displacements and internal efforts can be written as:

$$\mathbf{K}_l \mathbf{p}_l = \mathbf{q}_{il} , \quad (3.1)$$

where \mathbf{K}_l is the local stiffness matrix (7×7), which remains the same during the analysis, assuming material linearity.

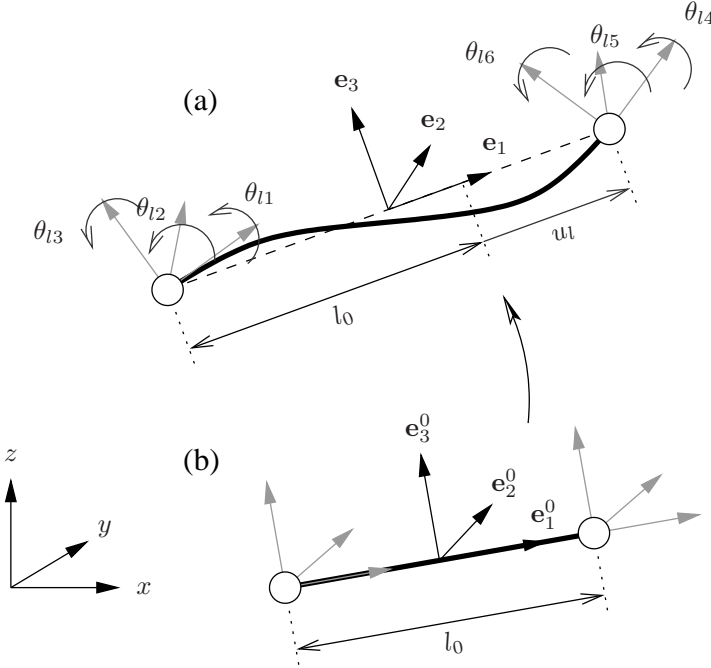


Figure 3.2: Illustration of the co-rotational approach: (a) current configuration, (b) initial configuration.

In any deformed configuration of the structure, the local displacements \mathbf{p}_l can be computed from the global displacements \mathbf{p} , which relate to the global frame and consist of 6 DOF per node (3 translations and 3 rotations). Moreover, it is possible to express a relationship between infinitesimal changes of local and global displacements, resp. $\delta\mathbf{p}_l$ and $\delta\mathbf{p}$, as:

$$\delta\mathbf{p}_l = \mathbf{F} \delta\mathbf{p} , \quad (3.2)$$

where \mathbf{F} is the transformation matrix (7×12). Contrary to the local stiffness matrix, \mathbf{F} depends on displacements and has to be computed at each iteration. Knowing the transformation matrix, it is possible to relate the global internal efforts \mathbf{q}_i to the local internal efforts \mathbf{q}_{il} given by Eq. (3.1). For this, we express the fact that the internal virtual work has to be the same in the global and local frame, which yields:

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{F}^T \mathbf{q}_{il} . \quad (3.3)$$

The last step in the formulation is to express the tangent stiffness matrix \mathbf{K}_t . The static equilibrium of the structure is expressed by:

$$\mathbf{g} = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_e = \mathbf{0} , \quad (3.4)$$

where \mathbf{g} is the vector of out-of-balance efforts and \mathbf{q}_e the vector of external efforts, which are assumed here to be independent of the displacements. For a given loading \mathbf{q}_e , the

displacements \mathbf{p} that satisfy the static equilibrium are found iteratively. Assuming that the structure at iteration (i) is not in equilibrium and expanding \mathbf{g} in a first-order Taylor series about the current displacements $\mathbf{p}^{(i)}$, Eq. (3.4) becomes:

$$\mathbf{g}^{(i)} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}^{(i)}} \delta \mathbf{p}^{(i+1)} = \mathbf{0} , \quad (3.5)$$

where $\delta \mathbf{p}^{(i+1)}$ is the vector of incremental displacements between the current and next iteration, i.e. $\mathbf{p}^{(i+1)} = \mathbf{p}^{(i)} + \delta \mathbf{p}^{(i+1)}$. The tangent stiffness matrix is then:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{F}^T \mathbf{K}_l \mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{q}_{il} . \quad (3.6)$$

The first term in \mathbf{K}_t corresponds to the elasticity of the material, and the second to geometric stiffness, due to the stress field in the structure.

3.2.2 Model of bow

3.2.2.1 Assumptions on material

Wood is a complex material, both anisotropic and inhomogeneous. It is generally described as an orthotropic material, needing 9 independent elastic constants. However, bow makers usually follow the direction of grain when cutting a wood blank and avoid areas of wood that present growth defects [87, 53]. Consequently, following assumptions can be made:

- The wood is homogeneous.
- The local reference frame of each beam element coincides with the natural directions of the wood. In particular, the vector \mathbf{e}_1 is assumed to correspond to the longitudinal direction. Thus, only the longitudinal Young's modulus E_L of the wood is needed to account for the flexural and traction/compression behavior, and the shear moduli G_{RL} and G_{TL} for the torsional behavior. A value of $E_L/G_{(RT)L} = 15$, typical for hardwood, is chosen [20].

As it is a natural material, the horse hair as well is inhomogeneous. Its mechanical properties may vary among the hairs contained in the ribbon, and along the length of an individual hair [79]. As seen by the tightened stick, however, the hair ribbon may be characterized by its longitudinal stiffness, typically of the order 30 N/mm [14]. The longitudinal stiffness of the hair ribbon is necessary to account for variations in hair tension as the tightened bow is loaded.

3.2.2.2 Assumptions on structure

Due to the slenderness of the bow stick, Euler-Bernoulli kinematic assumptions are chosen. The influence of shear forces is thus neglected. Only the part of the bow between the front end of the frog and the tip is modeled, as shown by Figure 3.3. The origin of the global coordinate system is defined as the front end of the frog on the loosened bow. The x axis is oriented over the length of the bow. The z axis is oriented normally to the under surface of the frog. A moving reference frame $\{x_b, y_b, z_b\}$ is associated to the bow. The x_b axis coincides with the direction determined by the endpoints of the hair.

In the following, the “vertical” and “lateral” directions correspond to the z_b and y_b axes, respectively.

The stick is discretized into $N = 20$ elements, plus one for the head. The length of each element is chosen such that the decrease in diameter from one node to the next is as identical as possible along the bow. Since the diameter decreases more rapidly when approaching the tip, more elements with smaller size are necessary in this region to meet the criterion (see Fig. 3.3). As the head is stubby and oriented perpendicular to the grain, the Euler-Bernoulli beam modeling as well as the longitudinal Young’s modulus are inappropriate to account for its actual behavior under loading. However, assuming that the deformation of the head is negligible compared to that of the stick, it is represented by a single element with arbitrary but large enough cross-section dimensions (such as a $15 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ ellipse, for instance). In this paper, the initial curvature of the stick is assumed to be plane. This assumption is satisfied on most bows of respectable quality.

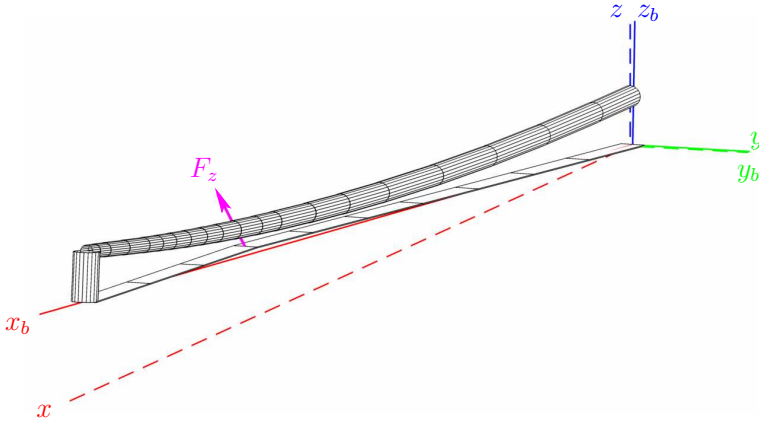


Figure 3.3: Illustration of the finite element model. The tightened bow is loaded by a force F_z inclined relative to the vertical axis of the bow z_b . The global reference frame $\{x, y, z\}$ is materialized by dashed lines, the reference frame of the bow $\{x_b, y_b, z_b\}$ by solid lines.

A hair ribbon is usually made up of 150 to 200 hairs. In first approximation, it may be represented by an equivalent single hair. The underlying assumptions are that every hair in the ribbon participate to the force exerted on the stick, and that the resultant force is centered in the width of the ribbon. Actually, as the initial lengths of the hairs may slightly differ, the first assumption is true only when a certain resultant hair tension is reached. For reason of consistency in the co-rotational finite-element formulation, a beam modeling is retained. It takes into account longitudinal stiffness (i.e. possible stretching) and geometric stiffness due to tension. In order to obtain a longitudinal stiffness of 30 N/mm for a 65 cm ribbon with a typical Young’s modulus $E_L^h = 5 \text{ GPa}$, the dimensions of the rectangular cross-section are fixed to $10 \text{ mm} \times 0.39 \text{ mm}$. As the beam modeling introduces spurious bending stiffness, especially in the lateral direction, the second moments of inertia I_y and I_z are assigned a sufficiently low value (both 1% of I_y with the actual dimensions). This ensures that only geometric stiffness intervenes in the transverse behavior of the hair. The beam representing the hair is connected to the

stick at the tip by a spherical joint, thus disabling the transmission of moments between one body to the other. It is discretized into $N_h = 10$ elements having the same length.

Alternatively, the ribbon may be modeled by several equivalent hairs, regularly distributed along the width of the end. In this case, each equivalent hair is connected to an intermediary rigid beam at the tip. To facilitate the generation of the mesh, an odd total number of equivalent hairs n_h is chosen, keeping one in the middle and adding others on both sides.

3.2.3 Steps of the simulation

A typical use case of the model is to predict the compliance of the tightened bow. To achieve this, the simulation is decomposed into two load steps. Throughout the simulation, the stick is clamped at the frog. In the first step, the end node of the hair corresponding to the attachment to the frog is allowed to translate along the x axis. It is loaded by a force with magnitude T_0 oriented in the direction of the hair (x_b axis), resulting in backward displacement of the node and straightening of the stick. In the second step, the position of the same node is kept fixed by blocking the translation. The bow, which is in a prestressed state, may be loaded by a force F_z at any node of the hair, with an angle ψ relative to the vertical axis of the bow z_b (see Fig. 3.3). This force corresponds to the bow pressure that would be exerted by the player on the string, with the bow eventually tilted. To determine the compliance, an incremental loading is chosen, typically from 0 to 1.6 N by steps of 0.1 N. This allows for numerical differentiation of the force-deflection relationship.

The finite-element model of bow is implemented in Matlab. Each load step is solved iteratively by using a Newton-Raphson procedure. The chosen convergence criterion is $\|\mathbf{g}\| < \varepsilon$ [see Eq. (3.4)], the value of ε being chosen very small compared to that of typical external efforts exerted on the structure. In the general case where the hair ribbon is represented by n_h equivalent hairs, the total numbers of nodes is $N + 1 + n_h \times (N_h + 2)$. As the single equivalent hair approximation ($n_h = 1$) is chosen for most simulations, the mesh typically consists of 33 nodes, each having 6 DOF. When running the simulation on a personal computer, the time to obtain the compliance at all nodes of the hair is approximately 10 minutes, for one value of angle ψ . The in-plane finite element model previously developed by the authors [6], thought taking into account geometric nonlinearity as well, is less computationally expensive. The mesh consists of 22 nodes with 3 DOF representing the stick, whereas the behavior of the hair is treated by analytical equations. As a comparison, the simulation with the same input parameters takes about 20 seconds. Thus, the in-plane model will be preferably used when the out-of-plane behavior of the bow has not to be considered, all the more when a large number of simulations is needed (e.g. inverse method, Monte Carlo method).

3.3 Experimental procedures

In this section, we describe the non-destructive procedure to determine the bow parameters. Then, a method to measure the compliance along the bow is presented. The experimental procedures are illustrated here on two students bows (B1 and B2, see section 3.4, Tab. 3.3).

3.3.1 Determination of bow parameters

The input parameters of the model are:

- the geometry: camber, vertical and horizontal diameters,
- the properties of the material: Young's modulus of the stick E_L , Young's modulus of the hair E_L^h ,
- the loading: hair tension T_0 , bow force F_z at relative abscissa γ with tilt angle ψ .

Bow parameters include the geometry and the material properties, and in a certain sense the hair tension that characterizes a playing state. These parameters are determined successively, in the order illustrated by Figure 3.4.

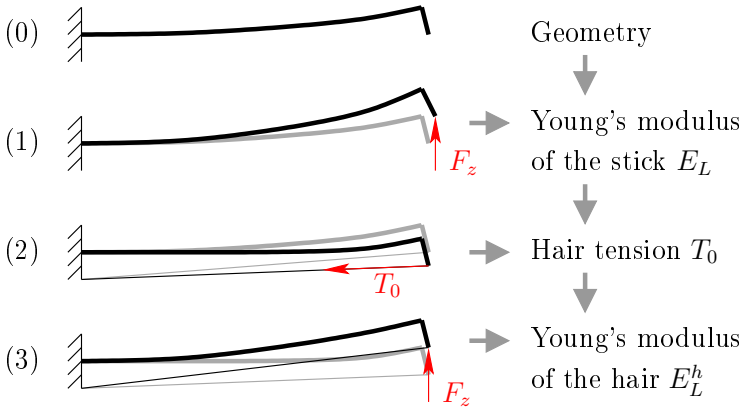


Figure 3.4: Illustration of the successive steps for the determination of bow parameters.

3.3.1.1 Geometry

Although the cross-section of the stick could be visually described as round, it is assumed to be oval. The vertical and horizontal diameters are measured at equally spaced abscissas along the stick, by steps of 25 mm. Due to the presence of the wrapping, the portion between 0 and 100 mm can not be measured. A piecewise cubic interpolation allows for discretization at any abscissas. The diameter of each element is then taken as the mean value of the diameter at its nodes. As seen on Figure 3.5, the vertical and horizontal diameters only slightly differ, mainly in the first half on the bow.

The camber is determined from a picture of the bow without hair tension, by means of image processing. The bow reposes on two supports, at the frog and at the tip. A backward diffuse lighting is used such as to obtain a well contrasted image. The picture is taken with a Canon OS 300D digital camera equipped with Sigma 18-50 mm F3.5-5.6 DC lens. The focal length is set to 50 mm, at which the lens produces negligible distortion. The resolution, determined by placing a ruler in the same plane as the bow, is comprised between 0.24 and 0.26 mm/px, depending on the distance between the camera and the bow. The camera is mounted on a tripod, in order to hold the distance constant between successive pictures of a same set of measurements. The end points of the hair at the front end of the frog and at the tip are pointed out manually on the picture. Then, the upper and lower outlines of the stick are detected to obtain its neutral axis. It is approximated

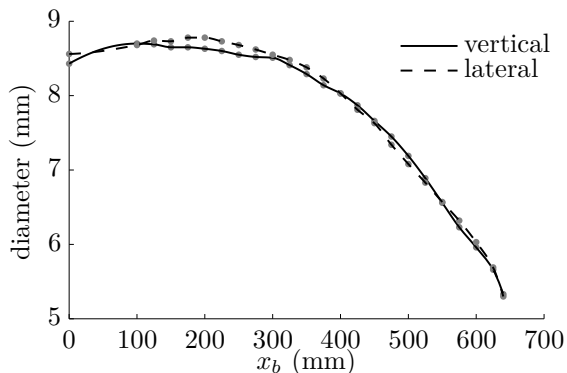


Figure 3.5: Vertical and horizontal diameters along the stick of bow B1.

by a polynomial (see Fig. 3.6), with an order such that the residual error is below 0.1 mm, i.e. approximately one half of a pixel.

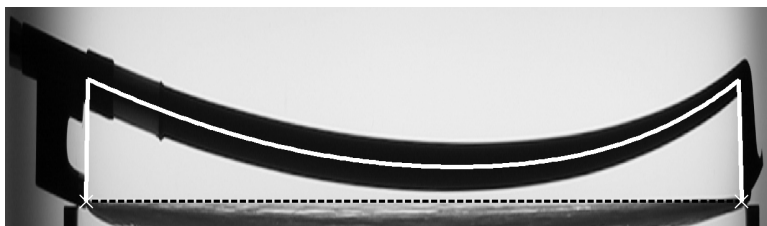


Figure 3.6: Determination of camber from a picture of the backlit bow B1 (modified aspect ratio in order to emphasize the curvature along the bow). A 5th order polynomial is used here to characterize camber.

3.3.1.2 Material properties and hair tension

The Young's modulus of the stick E_L , the hair tension T_0 and the equivalent Young's modulus of the hair E_L^h for a given cross-section area (3.9 mm^2) are determined successively by an inverse method in 3 steps. For each parameter, a specific loading is imposed on the bow and the deflected shape of the stick is measured on a picture. Then, a simulation with the same loading is performed. Measured and simulated deflected shape are compared and the unknown input parameter (either E_L , T_0 or E_L^h) is found such as to minimize the difference between the two. An illustration of the optimization routine, which is common to the three steps, is illustrated by Figure 3.7 in the case of the determination of hair tension.

1. To determine the Young's modulus of the stick E_L , the bow without hair tension is clamped at the frog and loaded at the tip by a vertical force F_z [Fig. 3.4-(1)].
2. The hair tension T_0 is determined by tightening the bow [Fig. 3.4-(2)].

3. To determine the Young's modulus of the hair E_L^h , the tightened bow is clamped at the frog loaded at the tip by a vertical force F_z [Fig. 3.4(3)]. With such a loading, the stiffness of the hair counteracts the tendency of the force to slightly increase the distance between the frog and the tip. The hair tension thus increases in proportion to the stiffness of the ribbon, which affects the deflected shape of the stick.

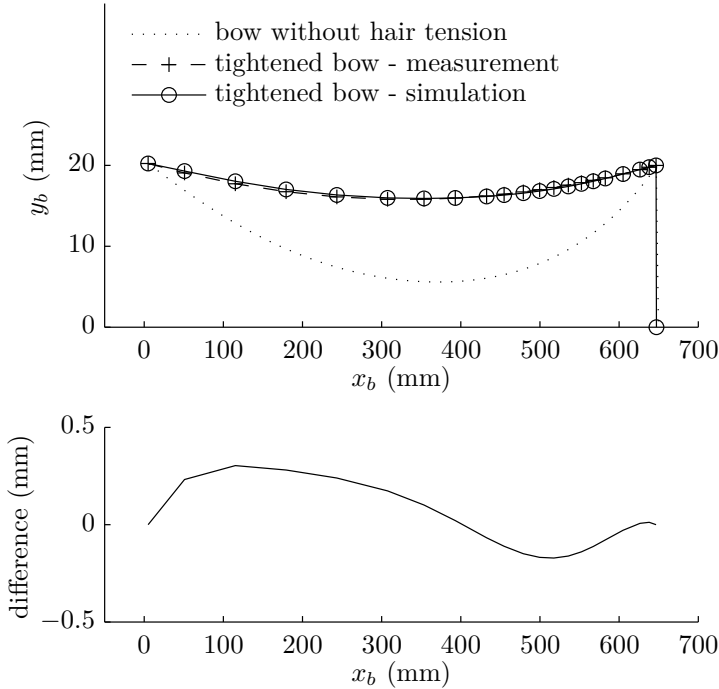


Figure 3.7: Determination of hair tension T_0 by an inverse method. The upper plot shows the measured and simulated deflected shape of the stick, compared in the reference frame of the bow, after convergence of the optimization routine. The lower plot shows the residual difference between measurement and simulation.

In our experiment, the clamped boundary condition is realized by two metal fingers grasping the bow (see Fig. 3.8), assuming that the frog is perfectly rigid and bound to the stick. One finger is in contact with the upper surface of the stick at abscissa $x = 0$ mm and the other with the under surface of the frog, near its rear end. This solution is preferable to those based on preloading (e.g. using a bar clamp), since an excessive pressure between the frog and the stick might damage the edges of the stick around the mortise. Moreover, since the measured and simulated deflected shape of the stick are compared in reference frame of the bow (see Fig. 3.7), a slight rigid-body rotation of the bow has no consequence on the results of the procedure. Consequently, compliant pads could be placed between the metal fingers and the bow such as to avoid marking it. The

force F_z was simply measured by a weighing scale (accuracy 0.01 g), which was brought in contact with the tip through an intermediary triangular-shaped part. As the base equipment necessary to apply the procedure (personal computer, digital camera with tripod, weighing scale) is generally already owned by bow makers, the method is easily transferable in workshops, as a tool to assist bow making.

3.3.1.3 Uncertainties

In order to validate the procedure to determine the bow parameters, uncertainties are calculated using the Monte-Carlo method [66]. For all input variables involved in the procedure, a type B uncertainty is considered. The input variables x_i and their uncertainties Δx_i are listed in Table 3.1. They have been set according to following considerations:

- Uncertainties on vertical and lateral diameter are assigned to each element. The discretization of the stick is such that the difference in diameter between two consecutive nodes is around 0.2 mm. As the diameter of each element is defined as half between those at its nodes, the resulting discretization error (about 0.1 mm) is higher than the accuracy of the digital caliper (0.02 mm). Thus, it is chosen to represent the uncertainties on diameters. It should be noted that these uncertainties may also represent small variations in Young's modulus along the stick (i.e. inhomogeneity of the wood), as they affect bending stiffness $E_L I$. For instance, a typical error of 1 % on the diameter of an element is equivalent to a 4 % local variation in Young's modulus.
- The uncertainties on the abscissas and heights of both frog and tip arise from the difficulty to determine accurately the end points of the hair on the picture, because of the width of the ribbon. As the residual error in the characterization of camber by a polynom (< 0.1 mm) is smaller than the uncertainty on frog and tip heights (1 mm), no local uncertainty is assigned to camber.
- The uncertainty on the force exerted at the tip in steps 1 and 3 is chosen such as to include error due to stress relaxation, which occurs while the deflection of the bow is held constant.

Input parameter	Value	Uncertainty
Vertical diameter \mathbf{d}_z	see Fig. 3.5	~ 0.1 mm
Horizontal diameter \mathbf{d}_y	see Fig. 3.5	~ 0.1 mm
Abscissa of the frog x_{frog}	0 mm	1 mm
Abscissa of the tip x_{tip}	645 mm	1 mm
Heigth of the frog y_{frog}	20 mm	1 mm
Heigth of the tip y_{tip}	20 mm	1 mm
Force at the tip in step 1 F_z	1.54 N	0.02 N
Force at the tip in step 3 F_z	1.54 N	0.02 N

Table 3.1: Input variables needed to determine the bow parameters.

The Monte-Carlo method is applied as follows:

1. A set of random values of input parameters within the interval $[x_i - \Delta x_i \quad x_i + \Delta x_i]$ are generated, considering a uniform distribution.

2. Output parameters y_j (E_L , T_0 and E_L^h) are determined successively by inverse method, from the same set of input parameters.
3. Steps 1 and 2 are repeated a large number M of times ($M = 2000$).
4. For each output parameter y_j , the mean value \bar{y}_j and standard deviation σ_j over the M obtained values are calculated.
5. The estimate Y of the output parameter is expressed as $Y_j = \bar{y}_j \pm k \sigma_j$, where k is a coverage factor. Assuming a normal distribution for the output parameters, it is taken here as $k = 1.96$, which corresponds to a 95% confidence interval.

The parameters determined by the procedure are presented in Table 3.2 with their uncertainties. The value of the Young's modulus of the stick E_L is consistent with those typically reported in the literature [93]. As the corresponding uncertainty is rather low (2%), confrontation with other measurement methods would be helpful to discuss the validity of the experimental procedure. The uncertainty on the hair tension T_0 (6%) is considered satisfactory for using the model as an indirect measurement method. The uncertainty calculated for the Young's modulus of the hair E_L^h may seem deceptive (22%). However, it can be explained by the fact that the compliance of the tightened bow is far more sensitive to the elasticity of the stick than that of the hair.

Bow parameter	Value	Uncertainty
Young's modulus of the stick E_L	26.8 GPa	0.5 GPa
Hair tension T_0	53.4 N	3.0 N
Young's modulus of the hair E_L^h	6.5 GPa	1.4 GPa

Table 3.2: Bow parameters determined by inverse method.

3.3.2 Measurement of compliance

The experimental setup used to measure the compliance of the bow is shown on Figure 3.8. A force transducer (HBM U1A, 10 N range) is mounted on the mobile part of a height gage and equipped with a touching part. A potentiometric displacement transducer (Meiri PZ12, 100 mm range), fixed at the steady part of the height gage, is used to measure the vertical translation of the mobile part.

The bow is clamped at the frog and free at its end. The measurement device is placed successively at different abscissas along the bow. At each abscissa, the mobile part is manually translated upward and downward, making the bow deflect. Throughout the measurement, the force applied to the hair is monitored with an oscilloscope such as to avoid excessive loading. The signals delivered by the force and displacement transducers are acquired simultaneously at sampling rate of 200 Hz. For the validation of the model, the in-plane as well as the out-of-plane behavior have to be investigated. Thus, a measurement is also carried out with the bow clamped such that the compliance is measured in the lateral direction. In the following, the term “lateral compliance” refers to this configuration, whereas “vertical compliance” corresponds to the configuration visible on Figure 3.8.

Figure 3.9 shows typical force-deflection curves obtained with the measurement device. The data points extracted from the acquisition correspond to the loading of the bow only,

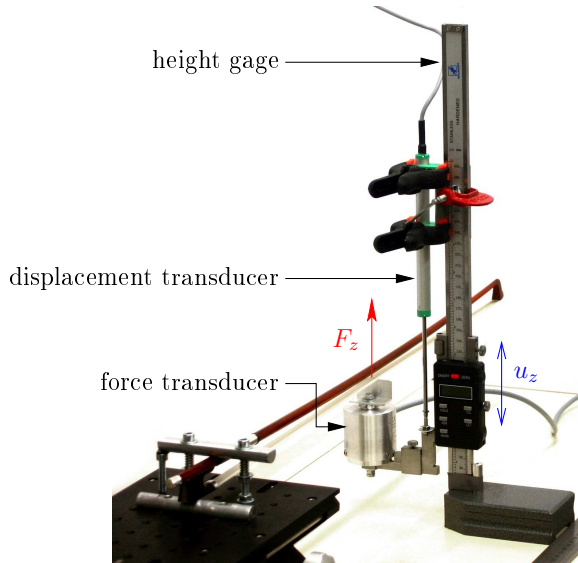


Figure 3.8: Measurement of vertical compliance on the bow.

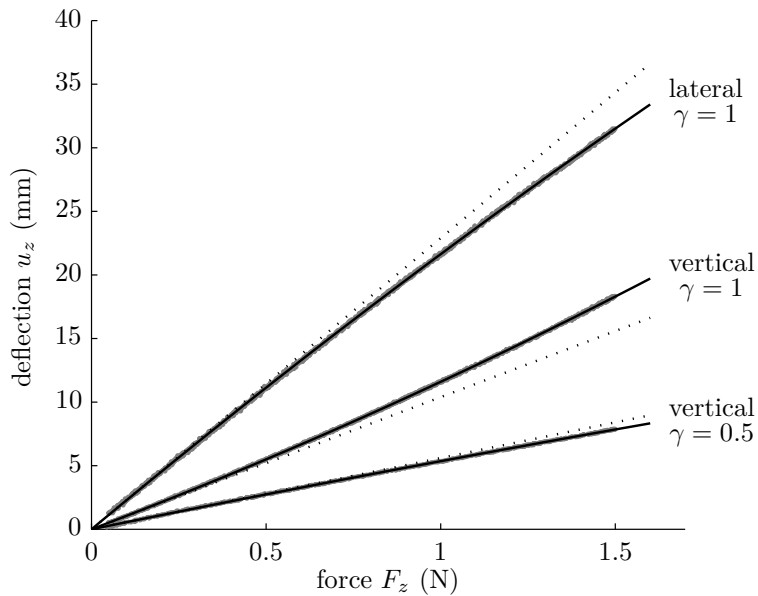


Figure 3.9: Measured force-deflection curves for three cases of loading on bow B2. Relative abscissa is denoted by γ ($\gamma = 0$ at the frog, $\gamma = 1$ at the tip). Thick lines: experimental data. Thin lines: second order polynomial. Dotted lines: linear relationship (tangent at $F_z = 0$ N).

as a slight hysteresis could be observed between loading and unloading. Regarding the in-plane behavior, the evolution of deflection with force is slightly nonlinear. Near the tip, the slope of the force-deflection curve increases with force, whereas it decreases with force in the middle. Moreover, the slope of the lateral force-deflection curve at the tip is higher than in the vertical case. In the following, we define compliance c as the slope of force-deflection curve, i.e. $c = \frac{\partial u_z}{\partial F_z}$. For this purpose, the data points are fitted with second order polynomials, which are then differentiated to calculate the compliance.

3.4 Discussion

In this section, the model and the experimental procedures previously described are used to compare the mechanical behavior of two bows.

3.4.1 Description of the bows

3.4.1.1 Bow characteristics

The experiments are carried out on two student bows of respectable quality, made of Pernambuco. The two bows were selected by a bow-maker, for the similar characteristics of their sticks in terms of overall design, mass and stiffness. They were re-haired and the wire wrapping was made such as to reach mass and center of inertia as close as possible on both bows. Then, one bow was given more camber (bow B2) than the other (bow B1), as visible in Figure 3.10, with an effort to keep the distribution of camber along the stick the same as possible. Some characteristics of the bows that are straightforward to measure are listed in Table 3.3. It should be noted that the difference in minimum hair-stick distance between the two bows is 2.4 mm, which indicates a moderate adjustment of camber.

Characteristic	Bow B1	Bow B2
Length of the bow ^(1,2)	730 ± 1 mm	730 ± 1 mm
Length of the hair ⁽¹⁾	647 ± 1 mm	646 ± 1 mm
Mass	60.79 ± 0.02 g	60.78 ± 0.02 g
Center of inertia ^(1,2)	253 ± 1 mm	256 ± 1 mm
Minimum hair-stick distance ^(1,3)	1.4 ± 0.1 mm	-1.0 ± 0.1 mm
Stiffness ⁽³⁾	170	170

Table 3.3: Characteristics of the two bows used in the measurements and simulations.

⁽¹⁾without hair tension ⁽²⁾measured from the origin of the stick ⁽³⁾a negative value indicates that the stick passes through the hair ⁽⁴⁾the value gives the deflection of the stick in microns simply supported near its ends and loaded in the middle by a 1 lb weight, as measured by the bow maker (generally from 150, very stiff, to 250, very flexible)

3.4.1.2 Studied settings

Three settings of hair-stick distance at which the bow could be played are chosen. The hair-stick distance is set by inserting a small cylinder with adequate diameter between

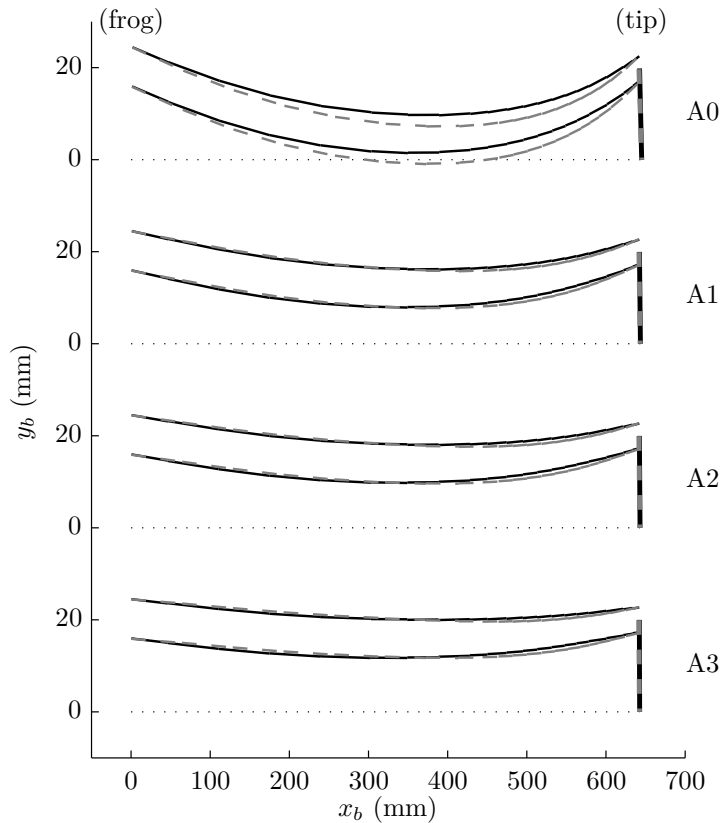


Figure 3.10: Comparison between the shapes of bows B1 (—) and B2 (- -) measured without hair tension and for three levels of hair tension (A1, A2, A3), corresponding to three imposed hair-stick distances (7.8 mm, 9.7 mm, 11.7 mm, respectively, ± 0.1 mm each). Upper and lower outlines of the stick is represented.

the hair and the stick, in the middle of the bow ($x = 325$ mm), and gently tightening the bow until the cylinder falls. The minimum hair-stick distance can then be measured with a good accuracy from a picture of the tightened bow. Figure 3.10 shows the deformed shapes of both bows for the three settings of hair-stick distance, denoted by A1, A2, A3. Whereas the shapes without hair tension significantly differ because of camber adjustment, the shapes of both tightened bows at each setting are almost the same. As the aspect ratio of the figure emphasizes the small differences, they would be hardly perceptible with the naked eye.

The procedure to determine bow parameters described in section 3.3 is then applied to both bows, to allow simulation with the finite-element model. Having determined the Young's modulus of both sticks, the hair tension corresponding to the three settings is then determined for each bow. The results are shown in Figure 3.11. As expected,

the hair tension increases with the hair-stick distance. Considering that settings A1 and A3 roughly delimit the playing range of each bow, the corresponding range in hair tension varies from 48 to 63 N on bow B1, from 65 to 76 N on bow B2. It clearly appears that a higher camber allows to reach a higher hair tension for the same setting of hair-stick distance, all other geometrical and material properties of the bow being considered identical. Furthermore, these results seem to suggest that the offered range in hair tension is wider when the bow is less cambered (15 N for bow B1 v.s. 11 N for B2).

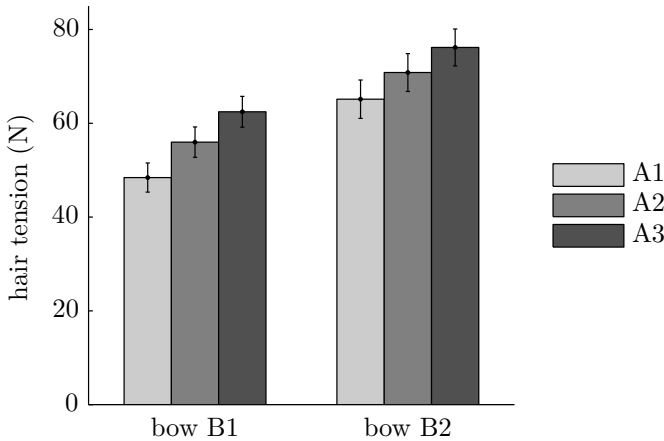


Figure 3.11: Hair tension corresponding to the three settings of hair-stick distance A1, A2, A3 (see Fig 3.10). The uncertainties are calculated using the Monte-Carlo method, as described in section 3.3.

3.4.2 Comparison between measured and simulated compliance

3.4.2.1 Distribution of compliance along the bow

For each setting of hair-stick distance, the vertical and lateral compliances are measured on the tightened bows, as described in section 3.3. The force-deflection relationships are measured at regularly spaced abscissas, by steps of 50 mm starting from the tip. For each obtained force-deflection curve, the compliance at a typical bow force of 1 N is then calculated and plotted against corresponding relative abscissa. Figure 3.12 shows the measured vertical and lateral compliance along bows B1 and B2, for setting A1 (7.8 ± 0.1 mm hair-stick distance). Results of simulations with the bow parameters previously determined are plotted too.

A good agreement between experimental and numerical results is observed. The model manages to reproduce the higher compliance in the lateral direction. This effect is a direct consequence of prestress: when out-of-plane bending of the stick occurs, the hair tension creates an additional bending moment along the stick. This moment acts together with that caused by the force, which makes the deflection higher. This phenomenon is at the

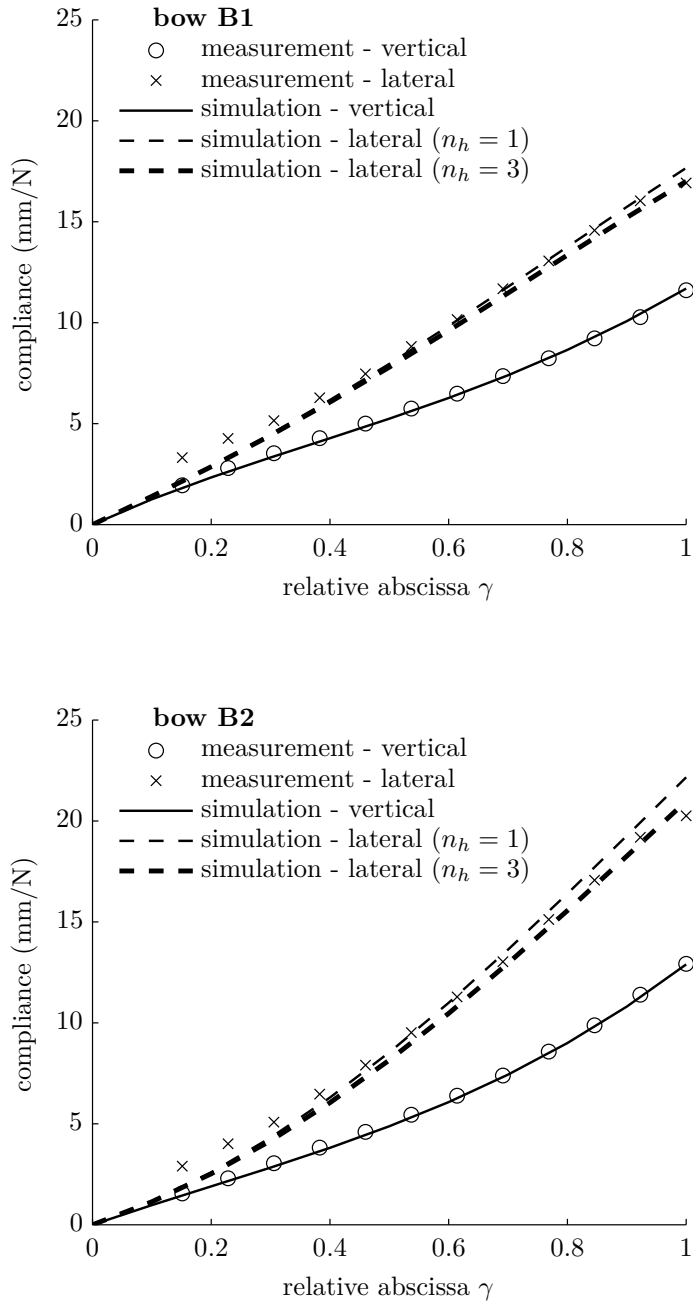


Figure 3.12: Comparison between experimental and numerical results on vertical and lateral compliances along the tightened bow, at a bow force of 1 N, for the setting of hair-stick distance A1 (see Fig 3.10). The number of equivalent hairs used to model the ribbon is denoted by n_h .

bottom of the higher lateral compliance observed on bow B2, for which the hair tension at A1 is higher than on bow B1. For information, the simulated vertical and lateral compliances at the tip of the stick without the hair are 13.0 mm/N and 13.2 mm/N, respectively, on bow B1. On bow B2, they are 13.4 mm/N (+3%) and 13.7 mm/N (+4%).

It should be pointed out that when applying a force laterally on one side of the ribbon, the number of hairs undergoing deflection actually increases with the force. Hence, the compression of the ribbon slightly increases the measured compliance. As the deformation of the ribbon is not taken into account in the model, the agreement declines near the frog. However, the numerical results are probably representative of the lateral compliance felt by the musician when playing with the hair flat on the string.

3.4.2.2 Effect of hair tension and camber

In order to better apprehend how hair tension and camber affect the mechanical behavior of the stick, we now focus on the vertical and lateral compliances measured at the tip ($\gamma = 1$). Figure 3.13 shows their evolution with hair tension on both bows.

A good agreement between experimental and numerical results is observed on vertical compliance. Regarding lateral compliance, discrepancies of about 10% are found with the single equivalent hair approximation. Yet, a better agreement is observed when using several equivalent hairs to model the ribbon. In this case, the axial stress in the equivalent hairs increases on the side where the force is applied and decreases on the other side. This phenomenon can be observed experimentally simply by “plucking” each side of the ribbon as the tightened bow is loaded and listening to the resulting tone. A higher or lower pitch compared to the unloaded bow indicates a rise or fall in hair tension, respectively. A consequence is that the resultant force exerted on the stick by the ribbon is slightly shifted laterally compared to the case of a single equivalent hair. Therefore, the bending moment created by the hair tension, which enhances the compliance of the stick, is lower, and hence the lateral compliance as well. It should be noted that three equivalent hairs are sufficient to reproduce this phenomenon. It has been verified that similar results are obtained with $n_h > 3$.

In every case, the lateral compliance at the tip is higher than the vertical compliance and increases with hair tension. This is due to the fact that hair tension assists the out-of-plane bending of the stick, as mentioned earlier. On the contrary, the vertical compliance at the tip decreases with hair tension. This can be explained by the fact that the distance between the hair and the neutral axis of the stick increases. Now, the rise in hair tension as the tightened bow is loaded creates a bending moment proportional to this distance. Since this bending moment counteracts the effect of that caused by the external loading, the deflection is reduced when the distance is higher.

For the same hair tension, the lateral compliance at the tip is almost the same on both bows. The difference between bows B1 and B2 is of the order 5%, which is comparable to the difference on the sticks without the hair (4%). Thus, it seems that the higher lateral compliance of the tightened bow compared to that of the stick depends on hair tension, but not on camber. The vertical compliance, however, is significantly higher on bow B2 for the same hair tension (between 15 and 20% depending on hair tension, to be compared a difference of 3% on the sticks without the hair). Indeed, the same hair

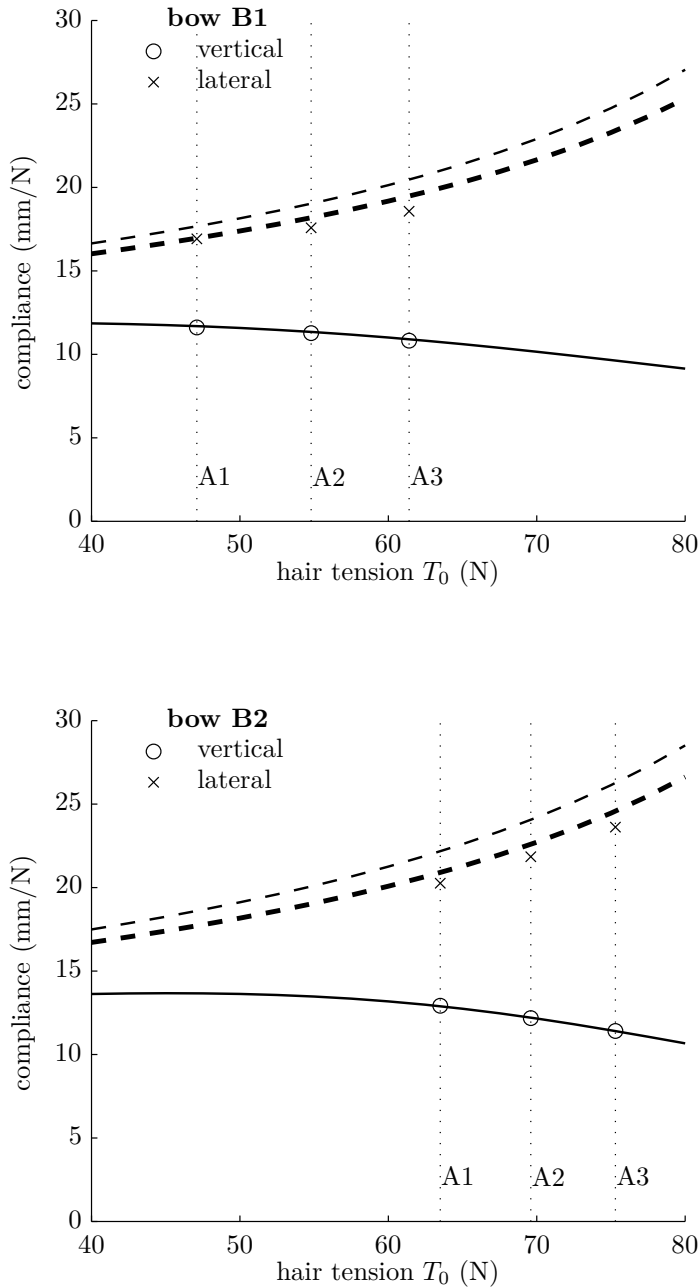


Figure 3.13: Evolution of vertical and lateral compliances at the tip ($\gamma = 1$) with the hair tension on both bows, at a bow force of 1 N. The experimental values correspond to settings of hair-stick distance A1, A2, A3. Solid lines: simulated vertical compliance. Thin dashed lines: lateral compliance with a single equivalent hair representing the ribbon. Thick dashed lines: lateral compliance with $n_h = 3$ equivalent hairs.

tension is reached at a lower hair-stick distance when the bow is more cambered. Thus, the bending moment due to the rise in hair tension is smaller, offering less resistance to loading.

Considering the two bows tightened at the same hair-stick distance, however, the compliance at the tip of bow B2 is higher in both directions. Moreover, the ratio between lateral and vertical compliances as well is higher, as indicated in Table 3.4. Interpreting these results in terms of playing qualities is far from straightforward, though tempting. However, they might explain the fact that a too much cambered bow is likely to “whip” to one side to the other during playing [99].

	A1	A2	A3
Bow B1	1.46	1.56	1.72
Bow B2	1.57	1.79	2.07

Table 3.4: Ratio between lateral and vertical compliances at the tip ($\gamma = 1$) for the three settings of hair-stick distance A1, A2, A3, calculated on experimental values (see Fig. 3.13).

3.5 Conclusion

A numerical model of violin bow and a procedure for determining its input parameters from measurements have been developed. The essential input parameters are the geometry of the bow, the Young’s modulus of the stick, the tension and stiffness of the hair. Their successive determination is possible with rather affordable and easy-to-use equipment. The model is able to predict the mechanical behavior of a tightened bow. It has been shown that the hair tension enhances the bending of the stick under a lateral force. Moreover, increasing the hair tension lowers the deflection of the stick under a vertical force. As a consequence, the gap between vertical and lateral compliances of the bow increases with hair tension. It has also been shown that adding camber allows the player to reach a higher playing hair tension for the same hair-stick distance. Together, both vertical and lateral compliances of the stick are higher. The results are in line with the experience of bow makers, who affirm that camber influences the flexibility of the stick under hair tension.

Thus, the model presented in this paper may be useful to bow makers who are interested in the objective characterization of bows. The need to optimize each bow in spite of variability in wood properties also gives support to a simulation tool based on this model. As the possibility to put the bow under hair tension comes rather late in the making process, simulations could be useful to anticipate the consequences of conception choices on the behavior of the tightened bow, assisting the maker to achieve the right balance between wood properties, taper and camber.

A natural continuation of this work is to establish a link between the mechanical behavior and the playing qualities of a bow. An ongoing subjective study focuses on the influence of camber and hair tension on the perception of the bow by the player.

Acknowledgments

The study presented in this paper is supported by the French National Research Agency (ANR) within the PAFI project. The authors wish to thank Jean Grunberger, bow maker, for fruitful discussions and for the selection and adjustment of the two bows.

3.6 Compléments sur la mesure de la tension

Parmi les paramètres d'entrée du modèle, la tension du crin T_0 a été déterminée par une méthode inverse, les propriétés mécaniques et géométriques de la baguette ayant été déterminées auparavant. Dans le cas d'une approche purement expérimentale, la mesure la plus « directe »¹ de la tension consisterait à intercaler un capteur d'effort en série avec la mèche. Une telle méthode peut être considérée comme destructive, du fait qu'elle nécessite, sinon la coupe de la mèche, du moins son démontage. Dans une étude préliminaire présentée au Congrès Français d'Acoustique [3], une méthode alternative de mesure de la tension a été envisagée. L'objet de cette section est de confronter cette méthode à la méthode inverse, toutes deux étant non destructives.

En isolant l'ensemble formé de la hausse et du bouton par rapport au reste de l'archet, baguette et crin, les efforts qu'il subit sont (fig. 3.14(a)) :

- l'action de la mèche, c'est-à-dire la tension \mathbf{T}_0 ,
- la réaction de la baguette \mathbf{R} à son extrémité,
- des efforts de liaison au niveau des surfaces en contact (dessus de hausse, faces inférieures de l'octogone).

Dans le cas où la liaison glissière entre l'ensemble hausse+bouton et la baguette est supposée parfaite, il est raisonnable d'affirmer, de par l'angle suffisamment petit entre le crin et l'horizontale, que les forces \mathbf{R} et \mathbf{T}_0 sont égales en amplitude. Mesurer R revient donc *a priori* à mesurer la tension T_0 . Cette méthode de détermination de la tension a été expérimentée en intercalant un capteur de force présentant la forme d'un anneau entre la baguette et le bouton, comme représenté sur la figure 3.14(b). Des montées et descentes en tension de l'archet équipé de ce dispositif ont mis en évidence un hystérésis important, attribué à la présence de forces de frottement entre les surfaces en contact, infirmant l'hypothèse d'une liaison parfaite.

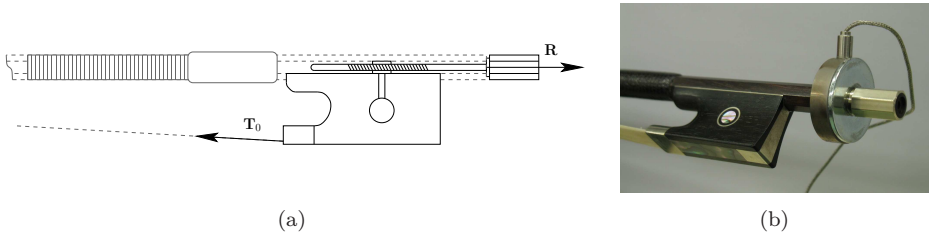


Figure 3.14 – (a) Principe de la mesure indirecte de la tension du crin T_0 . (b) Capteur de force intercalé entre le bouton et la baguette.

La figure 3.15(a) donne un aperçu d'une mesure réalisée sur un archet avec ce dispositif. En partant de l'état non tendu, l'archet est mis sous tension par pas de deux tours de bouton. À chaque niveau de tension, le bouton est tourné alternativement de part et d'autre de la position de réglage, de façon à ce que les forces de frottement agissent tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre. Cette action est effectuée en veillant dans la mesure du possible à pas tourner le bouton plus que nécessaire, afin de ne pas détendre ou tendre le crin. Les variations d'amplitude du signal de force correspondantes sont relativement

1. En toute rigueur, la mesure d'une force est toujours indirecte : cette grandeur ne se quantifie que par l'effet qu'elle produit.

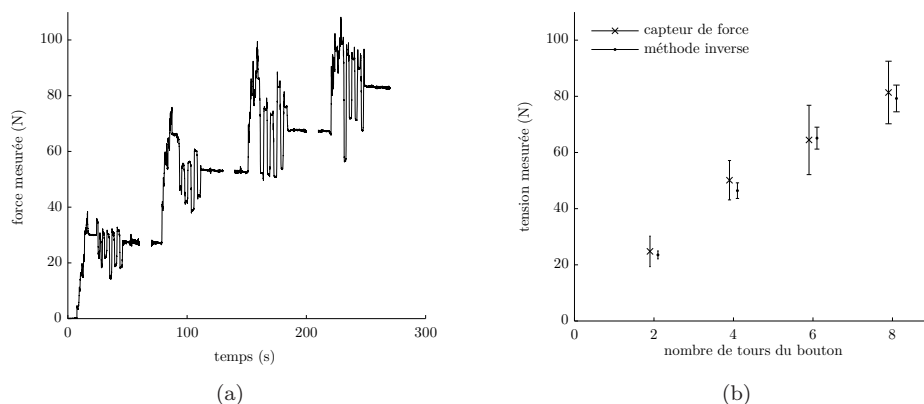


Figure 3.15 – (a) Signal temporel du capteur de force, pour de petites rotations du bouton autour de réglages fixés : 2, 4, 6, 8 tours. Les quatre acquisitions, effectuées successivement, sont regroupées sur la figure. (b) Comparaison entre la plage de tension déduite du capteur de force et la tension déterminée par méthode inverse.

importantes et traduisent des forces de frottement non négligeables entre la hausse et la baguette. Bien que la force de tension, dans chaque réglage, se situe probablement vers le milieu de la plage de variation de la force totale mesurée, il n'est pas possible de l'affirmer avec certitude. Sans information supplémentaire sur l'interaction entre la hausse et la baguette, la plage toute entière peut être considérée comme une incertitude de mesure. Les résultats de la méthode inverse appliquée à ce même archet, à partir de photos prises entre chaque montée en tension, sont représentés sur la figure 3.15(b) et confrontés à la mesure utilisant le capteur de force. Une incertitude de 6% est assignée aux valeurs déterminées par méthode inverse, d'après l'analyse menée dans la section 3.3.1.3.

D'un point de vue métrologique, la méthode expérimentale présentée s'avère insuffisante pour valider précisément la méthode inverse proposée dans ce chapitre, au regard de l'incertitude qui lui est attribuée (en moyenne 17%). Tout au plus pouvons-nous constater une cohérence entre les résultats trouvés par les deux méthodes, en notant un écart relativement faible entre les valeurs moyennes. D'autre part, si l'utilisation d'un capteur visait initialement à s'affranchir d'une détermination de la tension par le biais d'un modèle [3], cette méthode expérimentale, appliquée telle quelle, est mal adaptée à des mesures effectuées dans le cadre d'essais en jeu, de par son caractère intrusif (la présence du capteur affectant le jeu du musicien). Pour pallier cet inconvénient, il est nécessaire d'établir en amont d'essais en jeu une correspondance entre la tension ainsi mesurée et une autre grandeur (par ex. le déplacement de la hausse, de façon semblable à [12]). On perd alors l'intérêt d'une mesure relativement directe. Enfin, le coût d'un tel capteur, abordable pour un laboratoire, est certainement prohibitif pour un archetier.

CHAPITRE 4

STABILITÉ D'UN ARCHET DE VIOLON EN SITUATION DE JEU

L'analyse statique menée dans les chapitres précédents, à travers l'utilisation du modèle numérique, a montré que la raideur de l'archet sous tension évolue de façon significative avec la précontrainte. Le réglage du cambre, sur une même baguette, permet de fixer la plage de tension accessible par le musicien. À première vue, il pourrait donc sembler possible d'atteindre une tension élevée, indépendamment de la raideur de la baguette, par une augmentation suffisante du cambre. Naturellement, ce n'est possible que dans une certaine mesure et il convient de se poser la question des limites de ce réglage.

Dans l'un des premiers articles publiés au sujet des propriétés physiques des archets de violon, Schumacher [96] emploie la notion de force critique de flambement pour tenter d'expliquer les proportions géométriques entre les archets de violon, d'alto, de violoncelle et de contrebasse. Cette étude suggère que le fait de résister à la tension du crin – cette tension étant imposée par d'autres critères – est une condition nécessaire que doit satisfaire un archet, quel que soit l'instrument auquel il est associé. En revanche, les différences dans cette aptitude parmi les archets d'un même instrument ne sont pas abordées dans l'article de Schumacher.

Plus récemment, Dauchez et coll. [31] discutent les conséquences du réglage du cambre sur la proximité de la tension du crin à la force critique de flambement de la baguette, sur la base d'un modèle simplifié d'archet. Ils mènent ensuite une étude perceptive. Celle-ci montre un lien fort entre la « qualité » globale de jeu de huit archets, évaluée par un musicien, et le produit de la tension du crin par la force critique de flambement, cette dernière étant calculée par un modèle éléments finis linéaire.

Ce chapitre propose une analyse de stabilité de l'archet sous tension. Après avoir examiné expérimentalement le comportement de l'archet sous des sollicitations élevées, un modèle phénoménologique est proposé. Suffisamment simple pour permettre une résolution analytique, il présente certaines analogies avec un archet. Les conditions d'apparition de deux types d'instabilité sont discutées. Enfin, des calculs numériques sont effectués sur l'archet sous tension, dans le but de dégager des critères pouvant caractériser la stabilité en situation de jeu.

4.1 Définitions

De façon générale, un problème de calcul des structures consiste à déterminer l'état d'équilibre statique d'une structure sous un chargement donné. La stabilité de cet équilibre peut être définie à partir de la réponse de la structure lorsqu'une petite force perturbatrice est appliquée. Si la structure, après annulation de la force perturbatrice, revient dans le même état d'équilibre, celui-ci est dit stable. Si la structure évolue vers un autre état d'équilibre, différent du premier, ce dernier est dit instable [42]. On distingue deux types d'instabilités : bifurcation et point limite.

Dans le cas d'une instabilité par bifurcation (fig. 4.1(a)), il existe en plus de la branche d'équilibre fondamentale (linéaire ou non-linéaire) une ou plusieurs branches secondaires. L'intersection entre la branche fondamentale et une branche secondaire est appelée point de bifurcation. Lorsque la charge augmente au delà de ce point, la branche fondamentale devient instable. En revanche, le caractère stable ou instable d'une branche secondaire dépend de la structure et du cas de charge. Un exemple classique de structure présentant une instabilité par bifurcation est la poutre d'Euler en compression (fig. 4.1(c)).

Dans le cas d'une instabilité par point limite (figure 4.1(b)), la branche d'équilibre fondamentale, non-linéaire, présente un point de tangente nulle, appelé point limite. Arrivé à ce point, tout accroissement de charge fait passer brusquement la structure vers un état d'équilibre stable éloigné du précédent. Un cas typique d'instabilité par point limite est le claquage – « snap-through » en anglais – d'un arc (fig. 4.1(d))

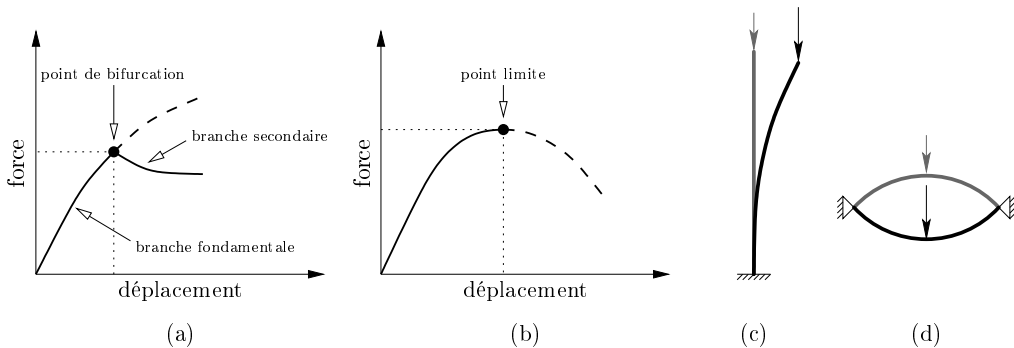


Figure 4.1 – Instabilité (a) par bifurcation et (b) par point limite. Exemples de structures présentant ces instabilités : (c) poutre d'Euler en compression, (d) arc sous chargement concentré.

4.2 Expérience préliminaire

Pour tester la stabilité d'un archet sous tension, l'archetier le maintient au niveau de la tête avec une main et applique des efforts avec l'autre, au niveau de la hausse, de façon à faire fléchir la baguette dans son plan. La facilité avec laquelle la baguette, maintenue en flexion de la sorte, peut dévier sur le côté, le renseigne alors sur la stabilité de l'archet.

Dans les expériences réalisées lors de la validation du modèle, la plage de force appliquée à l'archet allait de 0 à 1.5 N, la valeur haute pouvant être considérée comme une

limite usuelle lorsque l'archet est joué à la pointe. Afin de constater ce qui se produit à des valeurs de force supérieures à cette plage, une expérience visant à reproduire le geste de l'archetier est réalisée sur un archet bas de gamme. L'archet a été volontairement cambré excessivement, de façon à le mettre dans des conditions favorables à l'instabilité, telles qu'elles sont données par les archetiers.

Le dispositif utilisé pour mesurer simultanément la force appliquée et le déplacement est le même qu'au chapitre 3 (fig. 3.8). L'archet est maintenu au niveau de la hausse par deux doigts métalliques. Il est important de noter que cette configuration, employée auparavant pour réaliser un encastrement lors de la mesure de la souplesse verticale, autorise en fait les déplacements et la rotation dans le plan horizontal, au niveau du contact entre les doigts et l'archet. En effet, à l'arrière de la hausse, le contact s'effectue entre le doigt (surface cylindrique) et la face inférieure de la hausse (surface plane). La liaison ainsi réalisée est de type linéaire rectiligne. De même, à l'avant de la hausse, le contact entre le doigt et le dessus de la baguette, c'est-à-dire une face de l'octogone, réalise une liaison du même type. L'association de ces deux liaisons équivaut à une liaison appui-plan, en faisant l'hypothèse raisonnable que la hausse est indéformable et parfaitement liée à la baguette. Ainsi, en l'absence d'effort axial et lorsque le mouvement de l'archet reste plan, ce qui est *a priori* le cas lorsqu'il est chargé par une force verticale, l'archet peut être considéré comme encasté, mais les mouvements de la hausse dans le plan horizontal restent possibles. À l'autre extrémité, un déplacement vertical est imposé à proximité de la pointe, de façon progressive. On procède à un chargement suivi d'un déchargement, sur un déplacement total d'environ 8 cm.

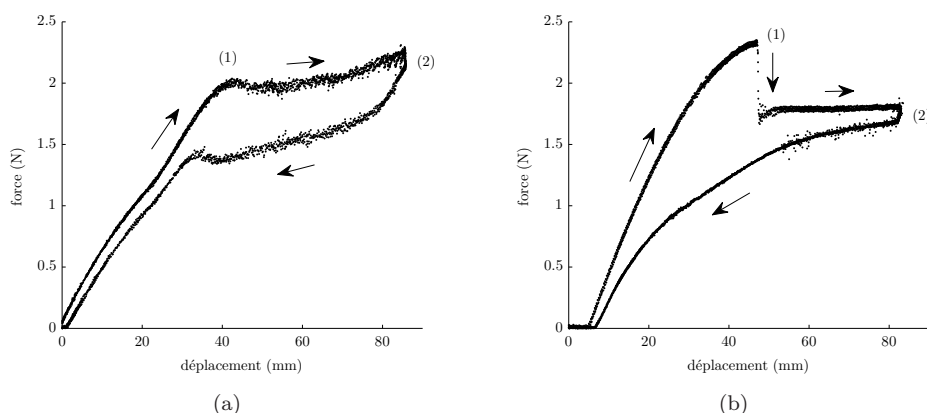


Figure 4.2 – Courbes force-déflexion obtenues par un chargement vertical à proximité de la pointe. (a) Tension intermédiaire, (b) tension élevée.

Une première mesure a été réalisée à un niveau de tension « intermédiaire ». La courbe force-déflexion obtenue est tracée sur la figure 4.2(a). Au début du chargement, la courbe présente l'allure habituellement rencontrée vers la pointe (voir par ex. la fig. 3.9), à savoir une augmentation de la souplesse avec la charge (à noter toutefois que l'ordre des axes diffère ici des courbes généralement tracées). La légère inflexion de la courbe après un déplacement d'environ 2 cm correspond à l'entrée en contact de la baguette avec le crin, ce qui se traduit par une raideur additionnelle. Aux alentours de 4 cm, pour une force

atteignant environ 2 N, la tangente à la courbe devient horizontale, ce qui signifie que la raideur devient nulle. Au delà de ce point (1), qui constitue un maximum local de la courbe, la force diminue légèrement puis remonte avec une pente très faible. Le point (2) correspond à la transition entre chargement et déchargement. La première partie du déchargement (de 8 cm à 3 cm) ne coïncide pas avec le chargement, mais présente une allure assez proche. Cet hystérésis peut être expliqué par des forces de frottement exercées par la mèche, scindée en deux, sur les côtés de la baguette. Ces forces agissent en sens contraire lors du chargement et du déchargement. À la fin du déchargement (de 3 cm à 0 cm), la courbe de déchargement devient parallèle à la courbe de chargement, avec un écart plus faible. Cet hystérésis, moins marqué que le précédent, est interprété comme la conséquence d'un phénomène de relaxation, engendré par le comportement viscoélastique du bois.

Les résultats d'une deuxième mesure, réalisée à un niveau de tension élevé, sont représentés sur la figure 4.2(b). L'allure de la courbe force-déflexion, dans la première partie du chargement (0 cm à 4 cm), montre à nouveau un comportement de type assouplissant. Arrivée au point (1), pour une force dépassant 2 N, la tangente à la courbe devient horizontale (raideur nulle). Au même instant, la force saute brusquement de cette valeur maximale à une valeur inférieure. La fin du chargement étant un palier à force constante, la raideur reste nulle. Le saut observé coïncide avec une flexion latérale brusque de la baguette. Bien que la position du point de chargement reste la même, cette flexion est rendue possible par les degrés de liberté dans le plan horizontal au niveau de la hausse. Lors de la descente, initiée au point (2), la courbe de déchargement présente une allure régulière, mais différente de celle de la courbe de chargement et ce en tout point, contrairement au cas illustré par la figure 4.2(a). Dans le cas présent, l'hystérésis constaté provient du fait que la baguette conserve une flexion latérale lors du déchargement, qui diminue progressivement à mesure que l'on se rapproche de l'état au repos. Le déchargement est donc marqué par une raideur plus faible.

Lorsque cette expérience est réalisée « à la main », c'est-à-dire en reproduisant le geste effectué par l'archetier, le changement de comportement de l'archet au point (1) de chaque courbe est nettement ressenti. Dans le premier cas de tension (figure 4.2(a)), la baguette passe à travers le crin de façon progressive dans un premier temps, en s'opposant à la force appliquée, puis s'enfonce sans offrir de résistance, jusqu'à un état où la raideur est à nouveau perçue. Dans le cas où l'archet est fortement tendu (figure 4.2(b)), il devient impossible de maintenir le mouvement plan de la baguette au delà d'une certaine force appliquée : la baguette fléchit brusquement d'un côté ou de l'autre. Par ailleurs, à l'approche du point critique, un tremblement prononcé de la baguette est ressenti.

4.3 Modèle phénoménologique

Dans cette section, on présente un modèle à deux degrés de liberté nous permettant d'illustrer plus en détails les instabilités par point limite et par bifurcation. Ce modèle, inspiré par ceux classiquement utilisés pour représenter isolément des cas d'instabilités typiques (« snap-through », bifurcation, « snap-back »... voir par ex. [29] p. 315), a été choisi de par son analogie avec un archet. Cette approche, similaire à celle adoptée par Mamou-Mani sur la table d'harmonie de piano [69], vise à mieux interpréter le comportement observé à la section précédente et les résultats numériques présentés plus loin.

4.3.1 Description

Le système étudié, représenté sur la figure 4.3, est composé d'une barre élastique de longueur au repos l_0 et de raideur axiale k^1 , reliée d'un côté à un point fixe O, défini comme l'origine du repère, de l'autre côté à un point A pouvant se déplacer dans le plan (A', y, z) . Dans la configuration initiale, l'extrémité mobile de la barre a pour coordonnées $(\bar{l}, 0, z_0)$. Son déplacement vertical est noté w , son déplacement latéral v . La longueur de la barre dans la configuration courante est notée l . À l'extrémité mobile est attaché un ressort vertical de raideur k_z , exerçant une force de rappel en réponse au déplacement vertical, ainsi qu'un ressort horizontal k_y s'opposant au déplacement latéral.

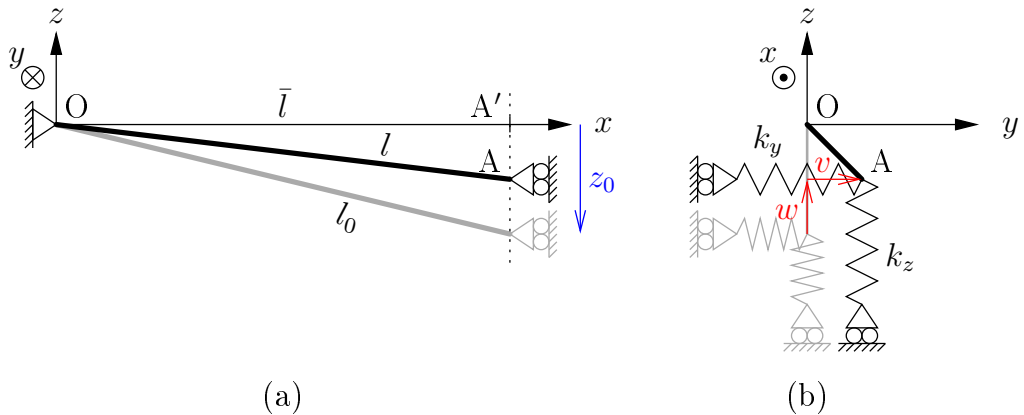


Figure 4.3 – Système simplifié à deux degrés de liberté. (a) Vue dans le plan (O, x, z) . Les ressorts à l'extrémité de la barre ne sont pas représentés sur cette vue dans le souci d'en faciliter la lecture. (b) Vue dans le plan (A', y, z) .

L'extrémité fixe (resp. mobile) de la barre représente le point d'attache du crin à la hausse (resp. à la pointe). La raideur k , qui détermine la variation de l'effort normal dans la barre en fonction de sa variation de longueur, est similaire à la raideur longitudinale du crin, $\frac{E_h A_h}{L_h}$. Les raideurs k_z et k_y peuvent s'apparenter aux raideurs verticale et latérale à la pointe de la baguette en l'absence de la mèche. Enfin le paramètre z_0 , caractérisant la géométrie initiale du système, est vu comme l'analogue du cambre.

4.3.2 Mise en équations

Dans le cas général où des efforts F_z et F_y sont appliqués à l'extrémité mobile de la barre, l'énergie potentielle dans le système s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2}k(l_0 - l)^2 + \frac{1}{2}k_z w^2 + \frac{1}{2}k_y v^2 - F_z w - F_y v, \quad (4.1)$$

où la variation de longueur $l_0 - l$ de la barre peut être approximée par :

$$l_0 - l \approx \frac{l_0^2 - l^2}{2l_0} = \frac{(z_0 - w)^2 + v^2 - z_0^2}{2l_0}. \quad (4.2)$$

1. Cette notation, utilisée par souci de simplicité dans les expressions, représente la raideur en traction/compression $\frac{EA}{l_0}$, où A désigne l'aire de la section et E le module d'Young de la barre.

En faisant abstraction du déplacement latéral, l'état du système lorsque $w = z_0$, c'est-à-dire lorsque la barre est à l'horizontale, peut être considéré comme une position « limite » au sens de l'effort axial dans la barre. En effet, lorsque le déplacement w augmente à partir de la position au repos, l'effort axial augmente dans un premier temps (pour $w < z_0$) puis diminue ($w > z_0$).

Les déplacements w et v satisfaisant l'équilibre sont ceux qui rendent l'énergie potentielle stationnaire, c'est-à-dire $\frac{\partial E_p}{\partial w} = 0$ et $\frac{\partial E_p}{\partial v} = 0$. La première condition d'équilibre amène à une expression explicite de la force verticale F_z en fonction des déplacements :

$$F_z = k_z w + \frac{k}{2l_0^2}(w^2 - 2z_0 w + v^2)(w - z_0), \quad (4.3)$$

et la deuxième condition donne l'expression de la force latérale F_y en fonction des déplacements :

$$F_y = k_y v + \frac{k}{2l_0^2}(v^2 + w^2 - 2z_0 w)v. \quad (4.4)$$

La relation (4.3) est illustrée par la figure 4.4, dans le cas où il n'y a pas de déplacement latéral ($v = 0$) et pour différentes valeurs de la raideur k_z .

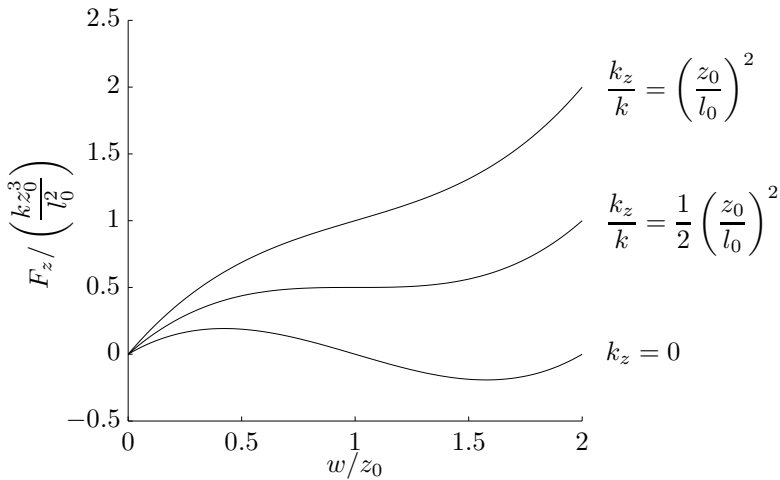


Figure 4.4 – Relation entre force et déflexion verticales.

4.3.3 Détermination des points critiques

De façon qualitative, on constate sur la figure 4.4 que suivant la valeur de k_z , il existe ou non un point limite sur la branche d'équilibre, donnant lieu à un phénomène de claquage. Lorsque c'est le cas, le déplacement vertical w_{lim} auquel il se produit peut être déterminé en cherchant la valeur de w pour laquelle la raideur verticale tangente s'annule.

La raideur verticale tangente s'écrit dans le cas général :

$$K_z = \frac{\partial F_z}{\partial w} = k_z + \frac{k}{2l_0^2}(3w^2 + v^2 - 6z_0 w + 2z_0^2). \quad (4.5)$$

L'équation $K_z = 0$ est du second degré. En l'absence de déplacement latéral ($v = 0$), elle admet des solutions réelles dans le cas où

$$\frac{k_z}{k} < \frac{1}{2} \left(\frac{z_0}{l_0} \right)^2 . \quad (4.6)$$

Lorsque cette condition est remplie, la première solution rencontrée a pour expression :

$$w_{\text{lim}} = z_0 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - 2 \frac{k_z}{k} \left(\frac{l_0}{z_0} \right)^2 \right)} \right) . \quad (4.7)$$

En l'absence d'effort latéral ($F_y = 0$), l'équation d'équilibre (4.4) devient :

$$k_y v + \frac{k}{2l_0^2} (v^2 + w^2 - 2z_0 w) v = 0 . \quad (4.8)$$

Cette équation cubique admet comme solution triviale le déplacement latéral nul, $v = 0$. Ainsi, les relations force-déplacement représentées sur la figure 4.4 vérifient bien l'équilibre du système. Cependant, l'équation (4.8) peut admettre d'autres solutions réelles non nulles, ce qui signifie que le système peut se retrouver dans un état d'équilibre hors plan bien qu'aucune force latérale ne soit appliquée.

On s'intéresse maintenant à la raideur latérale tangente, qui vaut dans le cas général :

$$K_y = \frac{\partial F_y}{\partial v} = k_y + \frac{k}{2l_0^2} (3v^2 + w^2 - 2z_0 w) . \quad (4.9)$$

De la même façon que précédemment, on cherche une condition à laquelle la raideur peut s'annuler. Lorsque $v = 0$, l'équation du second degré $K_y = 0$ admet des solutions réelles dans le cas où :

$$\frac{k_y}{k} < \frac{1}{2} \left(\frac{z_0}{l_0} \right)^2 . \quad (4.10)$$

Lorsque cette condition est vérifiée, le système bifurque au delà d'un certain déplacement vertical w_{bif} vers l'une des branches d'équilibre pour laquelle $|v| > 0$. Le point de bifurcation, solution de l'équation considérée, a pour expression :

$$w_{\text{bif}} = z_0 \left(1 - \sqrt{\left(1 - 2 \frac{k_y}{k} \left(\frac{l_0}{z_0} \right)^2 \right)} \right) . \quad (4.11)$$

En résumé, le système peut présenter deux types d'instabilité suivant les valeurs des paramètres :

- si $\frac{k_z}{k} < \frac{1}{2} \left(\frac{z_0}{l_0} \right)^2$, alors il existe une instabilité par point limite,
- si $\frac{k_y}{k} < \frac{1}{2} \left(\frac{z_0}{l_0} \right)^2$, alors il existe une instabilité par bifurcation.

Lorsque les deux types d'instabilité existent, la condition à laquelle une bifurcation se produit avant le claquage est trouvée en exprimant l'inégalité $w_{\text{bif}} < w_{\text{lim}}$, qui se simplifie comme suit :

$$3 \frac{k_y}{k} - \frac{k_z}{k} > \left(\frac{z_0}{l_0} \right)^2 . \quad (4.12)$$

Ces trois conditions sont illustrées par la figure 4.5. En raison de leur simplicité, elles peuvent s'avérer pratiques pour dimensionner le système de façon à provoquer ou éviter l'une ou l'autre des instabilités. Cependant, il faut garder à l'esprit que les points critiques et leurs conditions d'existence ont été calculées à partir de la solution triviale $v = 0$ de l'équation d'équilibre (4.8). La validité de cette approche sera discutée ultérieurement.

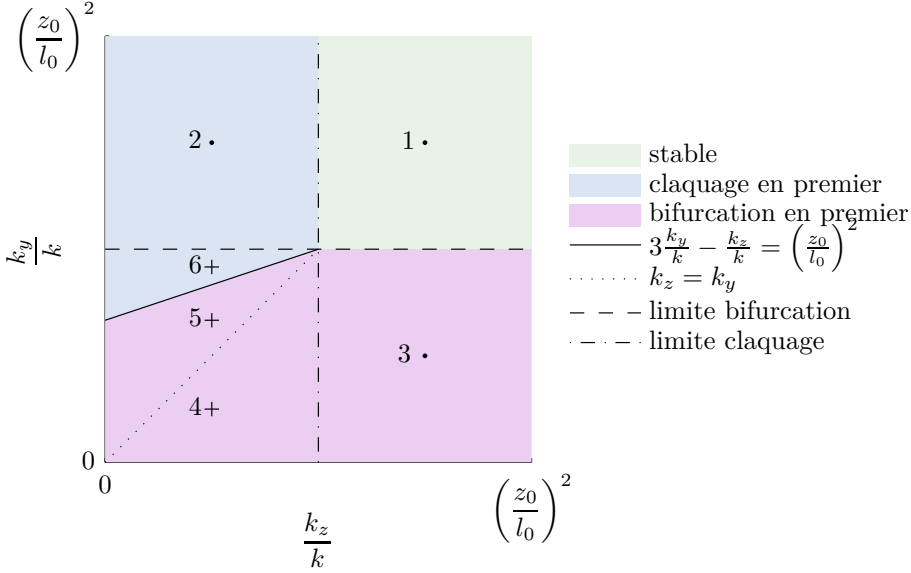


Figure 4.5 – Représentation schématique des conditions d'existence des deux types d'instabilité et de leur ordre d'apparition, dans l'espace des paramètres $\frac{k_z}{k}$ et $\frac{k_y}{k}$.

4.3.4 Interprétation dynamique

En supposant que l'extrémité mobile comporte une masse M , le système s'apparente à un oscillateur à deux degrés de liberté. En faisant l'hypothèse de petites oscillations autour d'une position d'équilibre quelconque, ses pulsations propres ω sont calculées par résolution du problème aux valeurs propres

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

où

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w \\ v \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \nabla^2 E_p = \begin{bmatrix} K_z & K_{zy} \\ K_{yz} & K_y \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

avec

$$\begin{aligned} K_z &= \frac{\partial^2 E_p}{\partial w^2} = k_z + \frac{k}{2l_0^2}(3w^2 + v^2 - 6z_0w + 2z_0^2) \\ K_y &= \frac{\partial^2 E_p}{\partial v^2} = k_y + \frac{k}{2l_0^2}(3v^2 + w^2 - 2z_0w) \\ K_{zy} &= K_{yz} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial w \partial v} = \frac{k}{2l_0^2}v(w - z_0). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dans le cas particulier où $v = 0$, les termes diagonaux K_{zy} et K_{yz} sont nuls. Les pulsations propres s'écrivent alors $\omega_z = \sqrt{\frac{K_z}{M}}$ et $\omega_y = \sqrt{\frac{K_y}{M}}$. Dans la suite, on choisit d'adimensionner les pulsations propres par celle correspondant à des oscillations verticales dans la position au repos ($w = v = 0$), $\omega_{z0} = \sqrt{\frac{K_{z0}}{M}}$, avec $K_{z0} = k_z + k \left(\frac{z_0}{l_0}\right)^2$. Les pulsations (ou fréquences) propres adimensionnées, le long de la branche fondamentale, s'écrivent donc $\tilde{\omega}_z = \sqrt{\frac{K_z}{K_0}}$ et $\tilde{\omega}_y = \sqrt{\frac{K_y}{K_0}}$.

De façon équivalente au point de vue statique, l'instabilité se traduit par l'annulation d'une fréquence propre du système. Dans la discussion qui suit, les deux approches sont confrontées.

4.3.5 Introduction d'un défaut initial

Dans le cas où la bifurcation existe, c'est-à-dire lorsque la relation (4.10) est satisfaite, les équations d'équilibre du système admettent 3 solutions distinctes. En d'autres termes, le déplacement du point mobile peut suivre 3 chemins différents. Par ailleurs, parmi toutes les positions d'équilibre possibles, les positions stables sont celles pour lesquelles \mathbf{K} est définie positive. La figure 4.6(a) montre les trois chemins d'équilibre possibles, pour un jeu de paramètres donnant lieu à une bifurcation (point 3 sur la figure 4.5), ainsi que les régions en termes de déplacements w et v pour lesquelles l'équilibre est stable.

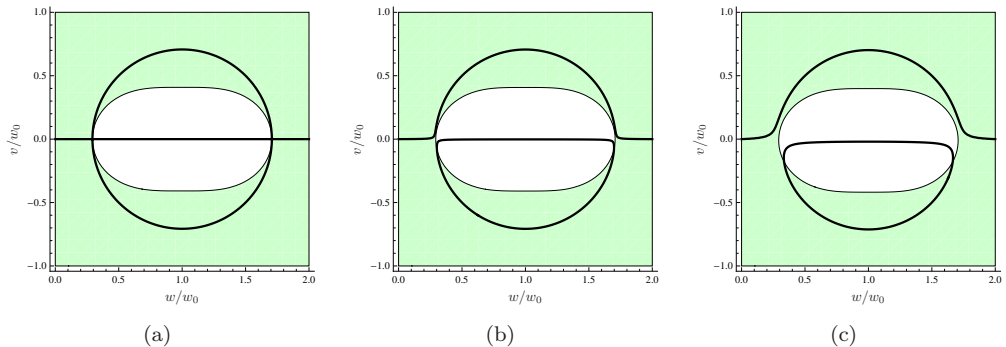


Figure 4.6 – Chemins d'équilibre du système non perturbé (a) et du système perturbé par un défaut initial $v_0 = 0.001l_0$ (b) et $v_0 = 0.01l_0$ (c).

En partant de l'état au repos et sous l'action d'une force verticale F_z , l'extrémité mobile se déplace d'abord verticalement, jusqu'au point critique ($w = w_{\text{bif}}$), suite à quoi trois branches peuvent être empruntées, correspondant à un mouvement dans le plan, ou un mouvement hors plan d'un côté ou de l'autre. Seules les branches latérales sont stables, ce sont donc celles qui seraient empruntées par le système physique réel. En revanche, la bifurcation vers l'une ou l'autre des branches stables est indéterminée. Afin de lever cette indétermination, on décide d'introduire dans les équations un défaut initial. Pour cela, on suppose que la barre n'est initialement pas dans le plan (O, x, z) , mais que son extrémité est légèrement décalée suivant l'axe y et a pour coordonnées initiales $\{\bar{l}, y_0, z_0\}$. Cette hypothèse prend effet dans l'expression de la variation de longueur de la barre (4.2), qui devient :

$$l_0 - l \approx \frac{l_0^2 - l^2}{2l_0} = \frac{(z_0 - w)^2 + (v_0 + v)^2 - (z_0 + v_0)^2}{2l_0}. \quad (4.16)$$

Cette modification rompt la symétrie du problème par rapport au déplacement latéral v . Ses conséquences sont illustrées par la figure 4.6. Le défaut initial force le système à emprunter un chemin pour lequel le déplacement v est du même signe que v_0 . Ce chemin a la même allure générale que l'ancienne branche de bifurcation correspondante. La transition entre le mouvement quasi plan et la déviation latérale est d'autant plus prononcée que le défaut initial est petit. Ainsi, pour une valeur suffisamment petite de v_0 (par exemple $10^{-4}l_0$, valeur retenue dans la suite), le système perturbé se comporte de la même façon que le système idéal, mais dévie sur un côté bien déterminé. En toute rigueur, il n'est plus possible de parler de bifurcation, car le chemin d'équilibre principal ne présente plus cette instabilité. Ce terme est cependant employé par la suite par souci de commodité. Par ailleurs, les deux autres branches d'équilibre disparaissent pour ne former plus qu'un unique chemin fermé (appelé chemin complémentaire). Bien qu'une partie de ce chemin soit stable, il est physiquement inaccessible à partir de l'état au repos, car disjoint du chemin principal.

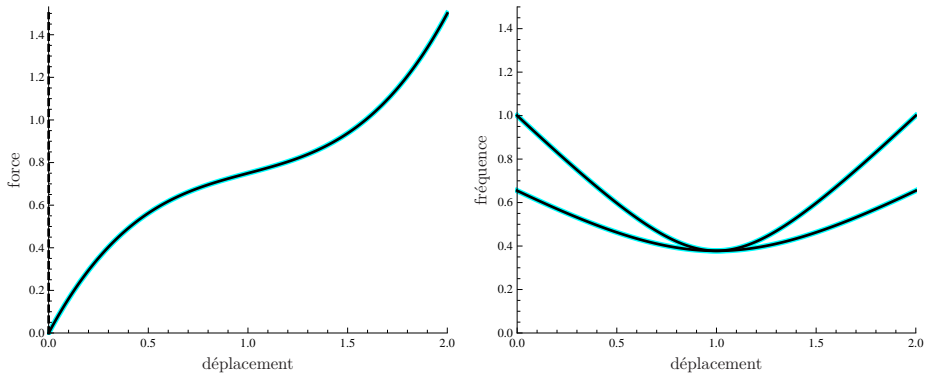
4.3.6 Analyse du comportement post-critique

L'expression des valeurs limites du déplacement pour lequel le système devient instable par point limite ou par bifurcation, lorsque cela se produit, est un premier indicateur intéressant pour caractériser la stabilité du système. En revanche, l'existence d'un point limite ou d'un point de bifurcation ne laisse en rien présager du comportement du système au delà du flambement. La prédiction du comportement post-critique revêt une importance particulière dans le calcul des structures [64], par exemple en génie civil, où la seule connaissance de la charge critique s'avère insuffisante pour conclure sur la stabilité et les modalités de rupture. L'objectif de cette section est d'analyser plus en détails le comportement post-critique du système étudié, en fonction des différents cas d'instabilité pouvant se présenter.

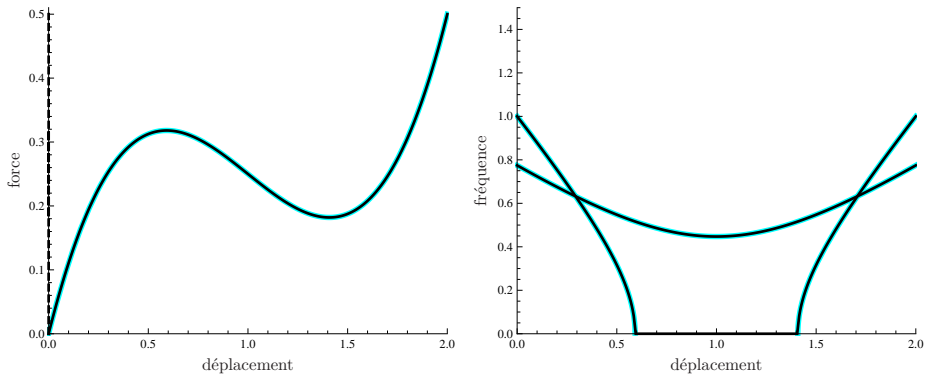
Pour cela, les chemins d'équilibre du système initialement perturbé et soumis à une force verticale F_z sont tracés pour différentes combinaisons des paramètres. De façon complémentaire, l'évolution des fréquences propres adimensionnées $\tilde{\omega}_z$ et $\tilde{\omega}_y$ du système avec le déplacement vertical est également représentée. Sur chacun des graphiques, le chemin d'équilibre et les fréquences associés à la solution triviale $v = 0$ du système non perturbé, à partir de laquelle les points critiques ont été déterminés, est tracé en trait clair.

On s'intéresse dans un premier temps aux jeux de paramètres représentés par les points 1 à 3 sur la figure 4.5. Les trois cas, énumérés ci-après, sont illustrés par la figure 4.7.

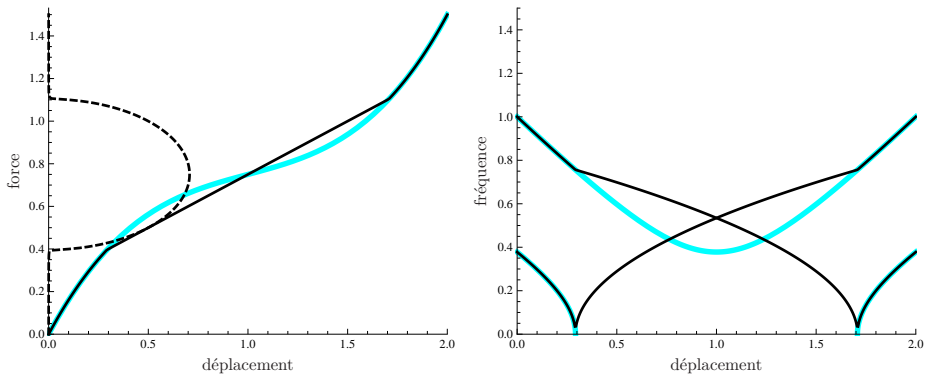
1. Le système ne présente aucune instabilité. Le déplacement se fait dans le plan uniquement.
2. Le système présente une instabilité par point limite seulement. Lorsque le point critique est atteint ($w = w_{\text{lim}}$), le système reste dans un état instable, caractérisé par une fréquence propre nulle, jusqu'au déplacement $w = 2z_0 - w_{\text{lim}}$ (cette valeur provenant de la symétrie par rapport à z_0 dans l'expression des raideurs K_z et K_y).



(a) Cas n°1

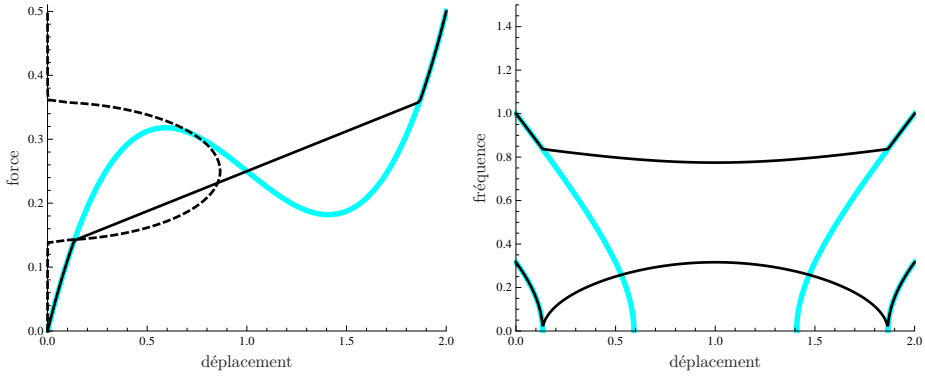


(b) Cas n°2

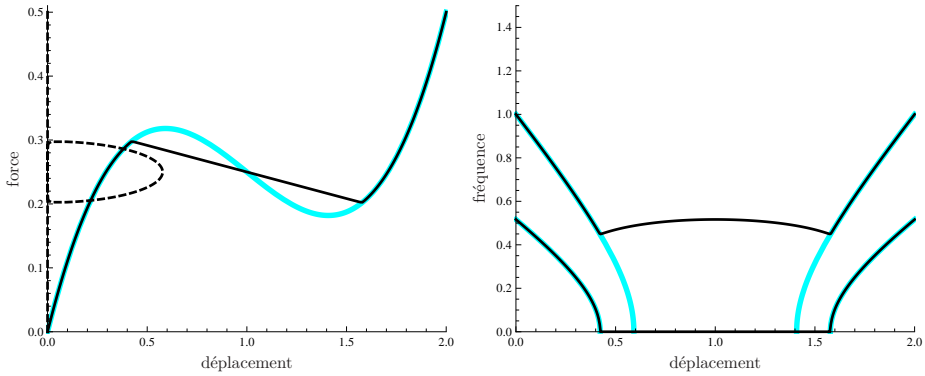


(c) Cas n°3

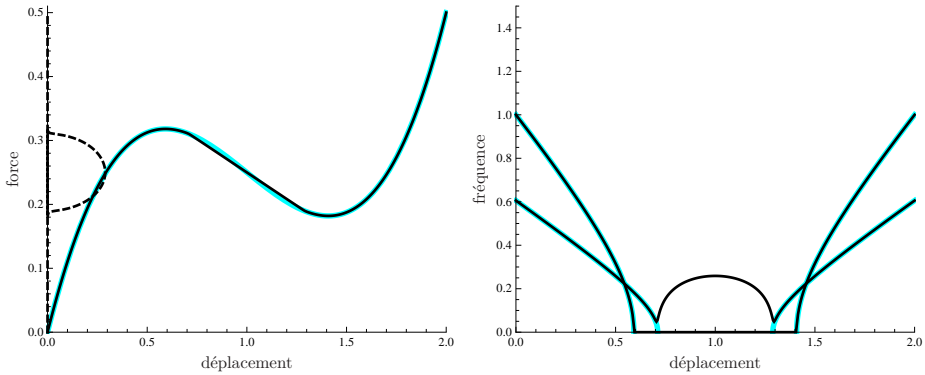
Figure 4.7 – À gauche : relations entre les déplacements w (—) et v (- -), en abscisse, et la force verticale F_z appliquée, en ordonnée. À droite : fréquences propres adimensionnées $\tilde{\omega}_z$ et $\tilde{\omega}_y$ en fonction du déplacement vertical w ($\tilde{\omega}_z = 1$ pour $w = 0$). La force et les déplacements sont adimensionnés de la même façon que sur la figure 4.4. Les traits clairs montrent la courbe force-déflexion et les fréquences correspondant à la branche fondamentale.



(a) Cas n°4



(b) Cas n°5



(c) Cas n°6

Figure 4.8 – À gauche : relations entre les déplacements w (—) et v (- -), en abscisse, et la force verticale F_z appliquée, en ordonnée. À droite : fréquences propres adimensionnées $\tilde{\omega}_z$ et $\tilde{\omega}_y$ en fonction du déplacement vertical w ($\tilde{\omega}_z = 1$ pour $w = 0$). La force et les déplacements sont adimensionnés de la même façon que sur la figure 4.4. Les traits clairs montrent la courbe force-déflexion et les fréquences correspondant à la branche fondamentale.

3. Le système présente une instabilité par bifurcation seulement. Au delà du point critique ($w = w_{\text{bif}}$), le mouvement dévie latéralement en suivant un chemin d'équilibre stable, jusqu'à revenir dans le plan pour $w = 2z_0 - w_{\text{bif}}$.

Dans un second temps, le comportement du système est étudié pour les jeux de paramètres correspondant aux points 4 à 6 sur la figure 4.5, pour lesquels les deux types d'instabilité peuvent exister *a priori*. Ces trois cas sont illustrés par la figure 4.8.

4. La première instabilité rencontrée est une bifurcation. Lors de la déviation latérale du mouvement, la fréquence propre $\tilde{\omega}_z$ prend des valeurs différentes de celle calculée pour la solution triviale $v = 0$. Comme elle ne s'annule pas au cours du déplacement, le chemin d'équilibre suivi après bifurcation reste stable, et le système se comporte à peu près comme dans le cas n° 3.
5. La première instabilité est une bifurcation. Le chemin emprunté après celle-ci est instable, en effet la fréquence propre $\tilde{\omega}_y$ s'annule au cours du déplacement hors-plan.
6. La première instabilité est un point limite. Au cours du chemin post-critique, instable en totalité, le phénomène de claquage est accompagné d'une déviation latérale.

4.3.7 Discussion

Le système qui vient d'être étudié modélise de façon très simplifiée la flexion d'une poutre tridimensionnelle. Les résultats montrent que la réponse du système à une sollicitation verticale peut conduire à une instabilité, dès lors que les déplacements engendrés font varier un effort de compression, condition également satisfaite par l'archet. Suivant la raideur du système et sa géométrie, cette instabilité peut se présenter sous forme d'un point limite (phénomène de claquage) ou d'une bifurcation stable ou instable.

Les limites du modèle simplifié vis-à-vis de l'analogie avec l'archet sont essentiellement de nature géométrique. Par exemple, la variation de longueur de la barre par rapport à l'état au repos ne dépend que des déplacements w et v pour une géométrie initiale fixée. Dans le cas de l'archet, le champ de déplacement cinématiquement admissible est plus complexe : le déplacement du point d'attache du crin à la pointe, en plus des composantes transversales u_z et u_y , comporte également une composante axiale u_x . Ainsi, la variation de longueur entre la hausse et la pointe en réponse à un chargement donné (illustrée dans le chapitre 2 par la fig. 2.13(a)) est due simultanément à la flexion et compression de la baguette, ainsi qu'à la rotation de la tête. De plus, l'archet sous tension est dans un état précontraint, ce qui n'est pas le cas du système simplifié. Pour ces raisons, une étude numérique de la stabilité de l'archet est à présent menée.

4.4 Calcul numérique sur le modèle d'archet

L'objectif de cette section est de retrouver, par la simulation, des situations dans lesquelles l'archet présente une instabilité mécanique, dont l'existence a été montrée expérimentalement (section 4.2). Nous précisons dans un premier temps les conditions de calcul particulières à mettre en œuvre, puis nous montrons certains résultats numériques et les comparons à ceux obtenus avec le modèle phénoménologique.

4.4.1 Adaptation du modèle éléments finis

Les calculs numériques réalisés dans les chapitres 3 et 4 représentent un cas favorable de non-linéarité géométrique. En effet, les non-linéarités observées sur les courbes force-déflexion restent modérées dans le cas de chargements statiques typiques des sollicitations couramment rencontrées en jeu. Toutefois, pour tenter de reproduire les comportements observés expérimentalement à la section 4.2, le modèle éléments finis doit être préalablement adapté de façon à pouvoir traiter les cas d'instabilité rencontrés. Par ailleurs, l'interprétation dynamique de la stabilité nécessite le calcul des modes de vibration de l'archet. Les modifications apportées au modèle pour mener à bien les calculs numériques qui suivent sont détaillées ci-après.

4.4.1.1 Résolution du problème statique

Jusqu'à maintenant, les problèmes statiques non-linéaires ont été résolus par la méthode de Newton-Raphson. En raison de sa convergence rapide, cette méthode est utilisée de façon classique dans les problèmes où la déformée d'une structure sous un chargement imposé est recherchée. En revanche, ses performances s'amointrissent à proximité d'un point critique, où la matrice tangente \mathbf{K}_t devient singulière. Elle ne permet en aucun cas de trouver des positions d'équilibre instables, ce qui la rend en général mal adaptée au calcul du comportement post-critique des structures sujettes au flambement [36].

Dans de nombreux cas, ce problème peut être contourné en adoptant un contrôle en déplacement. Une méthode consiste à imposer la valeur d'un degré de liberté de la structure et laisser l'algorithme itératif ajuster l'effort correspondant et les valeurs des autres degrés de liberté. Cette méthode converge sans difficulté lorsque le déplacement évolue de façon monotone avec le chargement. C'est le cas par exemple du phénomène de claquage représenté sur la figure 4.1. Il s'agit de la méthode retenue ici. En pratique, la valeur du degré de liberté à contrôler est imposée par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange [58]. La structure générale de l'algorithme de résolution est la même que pour la méthode de Newton-Raphson.

Dans le cas où le déplacement du nœud chargé n'évolue pas de façon monotone (par exemple en présence d'un phénomène de « snap-back »), il faut employer des méthodes plus robustes, comme le contrôle en longueur d'arc [29] ou la Méthode Asymptotique Numérique [26], pour calculer le chemin d'équilibre post-critique de la structure chargée.

4.4.1.2 Passage des points de bifurcation

Dans le modèle analytique présenté dans la section 4.3, la résolution des équations d'équilibre permettait de déterminer les différents chemins pouvant être empruntés par le système en présence d'un point de bifurcation. Dans le cas d'une modélisation par éléments finis, il est par définition impossible d'exprimer formellement le chemin d'équilibre qui sera suivi sous un chargement imposé. Ainsi, lorsque la structure présente un point de bifurcation, il faut s'assurer que l'une des branches bifurquées puisse être empruntée au besoin.

L'approche la plus courante consiste à introduire une imperfection dans le calcul. Cette imperfection peut être de nature géométrique, elle consiste alors à déformer légèrement la structure selon le mode de flambement voulu. Un autre type d'imperfection

concerne le chargement et consiste à appliquer une force extérieure additionnelle afin de dissymétriser le calcul. L'avantage de cette deuxième méthode est de ne pas nécessiter de calcul des modes de flambement de la structure. En revanche, il est nécessaire de connaître *a priori* l'allure de la déformée afin que la structure parte sur la branche bifurquée souhaitée. Le mode de flambement par bifurcation auquel on s'intéresse est celui observé expérimentalement à la section 4.2, qui consiste en une flexion latérale de la baguette au delà d'un certain niveau de charge appliquée. Ainsi, la méthode retenue consiste à appliquer une force latérale perturbatrice à la pointe, simultanément avec la mise sous tension de l'archet. Par souci de concision on parle dans la suite de structure perturbée ou idéale, suivant que cette force perturbatrice est appliquée ou non.

4.4.1.3 Calcul des modes de vibration dans l'état précontraint

La structure étant dans un état d'équilibre, calculé par résolution du problème statique, ses modes propres sont calculés en résolvant le problème aux valeurs propres :

$$(\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_g)\mathbf{p} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{p} . \quad (4.17)$$

où \mathbf{K}_m est la matrice de raideur matérielle, \mathbf{K}_g la matrice de raideur géométrique et \mathbf{M} la matrice de masse, toutes trois calculées dans l'état déformé. La résolution fournit les pulsations propres ω et les déformées modales associées, exprimées sous forme des déplacements \mathbf{p} par rapport à l'état d'équilibre.

4.4.1.4 Détermination de la force critique

Partant de la définition de l'instabilité comme l'annulation d'une fréquence propre, la recherche de la force critique apparaît comme un cas particulier de calcul des modes propres présenté dans le paragraphe précédent. Lorsque le problème (4.17) admet une valeur propre ω^2 nulle (en faisant ici exception des modes de corps rigide), il s'écrit simplement sous la forme $(\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_g)\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Afin de déterminer la charge critique, on suppose que la raideur géométrique est proportionnelle au paramètre de chargement λ (approximation linéaire [37]). Elle s'écrit alors $\mathbf{K}_g = \lambda \mathbf{K}_g^*$, où \mathbf{K}_g^* représente la matrice de raideur géométrique correspondant à un chargement unitaire. Le problème à résoudre devient :

$$\mathbf{K}_m \mathbf{p} = -\lambda \mathbf{K}_g^* \mathbf{p} . \quad (4.18)$$

La plus petite valeur propre λ trouvée dans un état de chargement correspond à la charge critique du premier mode de flambement. Le vecteur propre associé renseigne sur sa déformée.

4.4.2 Ovalisation de la section

Les critères permettant de dimensionner le système simplifié en fonction du comportement recherché en termes de stabilité ont été exprimés dans l'espace des paramètres $\frac{k_z}{k}$ et $\frac{k_y}{k}$, relatifs à la raideur « matérielle », par rapport à la quantité $\left(\frac{z_0}{l_0}\right)^2$ caractérisant la géométrie initiale. Afin de mener une réflexion semblable autour de la stabilité de l'archet, il faut se donner la possibilité de faire varier séparément les deux raideurs

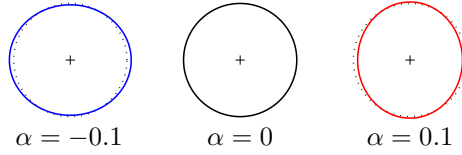


Figure 4.9 – Forme de la section pour trois valeurs du paramètre d'ovalisation α .

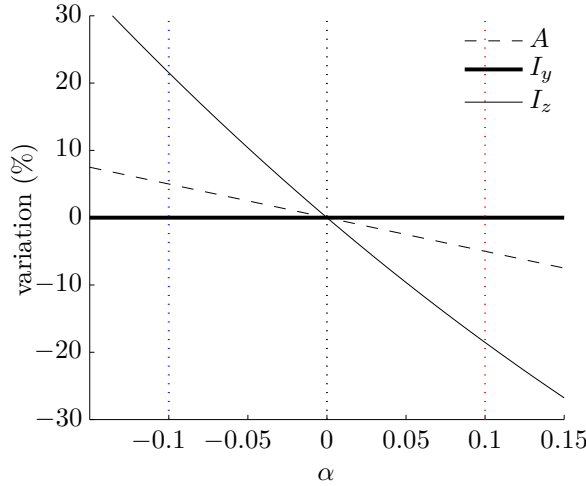


Figure 4.10 – Variation des propriétés de la section (aire A , moments quadratiques I_y et I_z) par rapport à la section circulaire de référence, en fonction du paramètre d'ovalisation α . Les lignes en pointillés désignent les trois cas montrés sur la figure 4.9.

transversales de la baguette. Pour cela, on choisit d'ovaliser la section de façon uniforme le long de celle-ci. En considérant une section circulaire de référence, dont le diamètre est noté d , on définit un paramètre d'ovalisation α , exprimant la différence relative entre le diamètre vertical d_z et le diamètre horizontal d_y :

$$\alpha = \frac{d_z - d_y}{d} . \quad (4.19)$$

Pour une même valeur du paramètre α , plusieurs combinaisons de d_z et d_y sont possibles (une infinité). Il est donc nécessaire d'introduire une condition supplémentaire fixant la taille de l'un ou l'autre des diamètres. Deux possibilités, relatives aux propriétés de la section, se présentent naturellement : conservation de l'aire, ou conservation de l'un des deux moments quadratiques. La condition choisie ici est celle qui conserve le moment quadratique I_y de la section, relatif à la flexion verticale de la baguette. L'intérêt de ce choix est qu'il ne modifie pas la relation entre la tension du crin et la distance crin-baguette (à la variation près du diamètre vertical, négligeable), ce qui permet d'évaluer l'effet de l'ovalisation indépendamment du réglage de la tension du jeu. On impose donc $I_y(d) = I_y(d_z, d_y)$, ce qui se traduit par l'équation :

$$d_z^3 d_y = d^4 . \quad (4.20)$$

Le paramètre α étant imposé, le système constitué des deux équations (4.19) et (4.20) est résolu numériquement afin de déterminer les coefficients $\frac{d_z}{d}$ et $\frac{d_y}{d}$ à appliquer au diamètre de référence pour obtenir la section ovale. La figure 4.9 compare la forme de la section ovalisée à celle de la section circulaire de référence, pour deux valeurs du paramètre α . La variation des propriétés de la section avec son ovalisation est montrée sur la figure 4.10. On remarque que l'ovalisation donne la possibilité de faire varier la raideur de flexion latérale sans trop affecter l'aire de la section, donc la masse de la baguette. En choisissant $\alpha = 0.1$ (voir figure 4.9), une augmentation relative de la raideur latérale d'environ 20% peut être atteinte, moyennant une augmentation de masse d'environ 5% (l'ordre de grandeur étant le même pour $\alpha = -0.1$), ce qui reste raisonnable compte tenu des variations de masse usuelles parmi différents archets. En effet un archet de violon pèse généralement entre 55 et 65 g, ce qui représente une variabilité de 8%.

4.4.3 Mise en évidence des cas d'instabilité

Les calculs réalisés dans cette section portent sur une géométrie standard d'archet. Le diamètre de référence le long de la section est défini d'après la formule donnée par Fétis [38] et ovalisé en jouant sur le paramètre α . La répartition du cambre ramène la baguette droite à tension maximale. La quantité de cambre est paramétrée par la distance crin-baguette minimale sans tension κ . Les propriétés géométriques de la mèche sont fixées (aire de la section $A_h = 3.9 \text{ mm}^2$, longueur $L_h = 650 \text{ mm}$). L'élasticité du bois et celle de la mèche sont contrôlées par les modules d'Young E et E_h , respectivement. La densité des deux matériaux, intervenant dans les matrices de masse des éléments, est fixée à $\rho = 1100 \text{ kg/m}^3$ et $\rho_h = 1200 \text{ kg/m}^3$.

L'archet est d'abord précontraint par une tension du crin T_0 , définie implicitement par une distance crin-baguette de jeu a_0 . Puis, un déplacement vertical u_z à la pointe de 180 mm est appliqué par incréments de 1 mm. À chaque incrément, la force F_z associée au déplacement est connue une fois l'équilibre atteint. En plus des grandeurs statiques, les modes de vibrations de l'archet sont calculés à chaque incrément. En outre, la force critique de flambement T_c associée à la tension T_0 est calculée à l'issue de la mise en précontrainte.

Ainsi, en tout cinq paramètres, relatifs aux propriétés matérielles (E , E_h), géométriques (α , κ) et au niveau de précontrainte (a_0), sont donc retenus pour l'exploration des cas d'instabilités. Pour chaque jeu de paramètres, une première simulation est effectuée sur la structure idéale, dans le but de suivre la branche d'équilibre fondamentale. Puis, une deuxième simulation est effectuée sur la structure perturbée afin de donner la possibilité de suivre une branche de bifurcation, dans le cas où celle-ci existe. À partir des résultats des simulations, l'évolution des déplacements à la pointe et des fréquences propres au cours du chargement sont tracées en adoptant la même représentation que celle des figures 4.7 et 4.8. Le modèle analytique comportait deux degrés de liberté et par conséquent deux modes propres. En tant que milieu continu, l'archet présente une infinité de modes propres, dont le modèle numérique permet de calculer une partie, suivant la discrétisation retenue. Nous nous intéressons donc aux deux premiers modes de l'archet et suivons leur évolution au cours du chargement.

La figure 4.11 montre des résultats de simulations obtenus pour différentes valeurs du paramètre d'ovalisation α . Les autres paramètres ont été fixés – de façon empirique – de

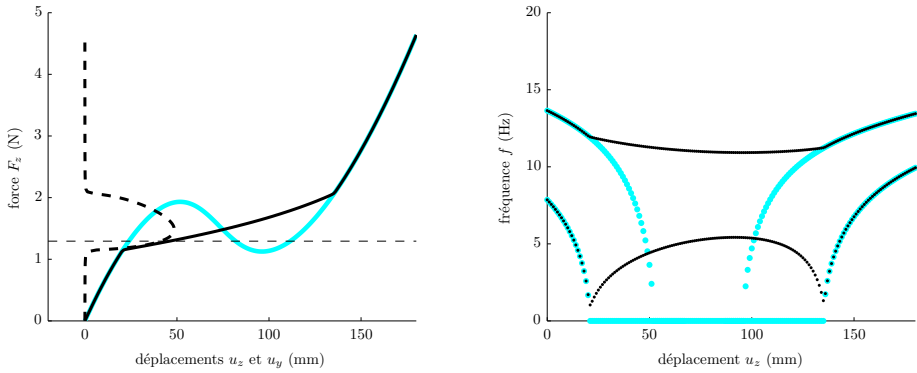
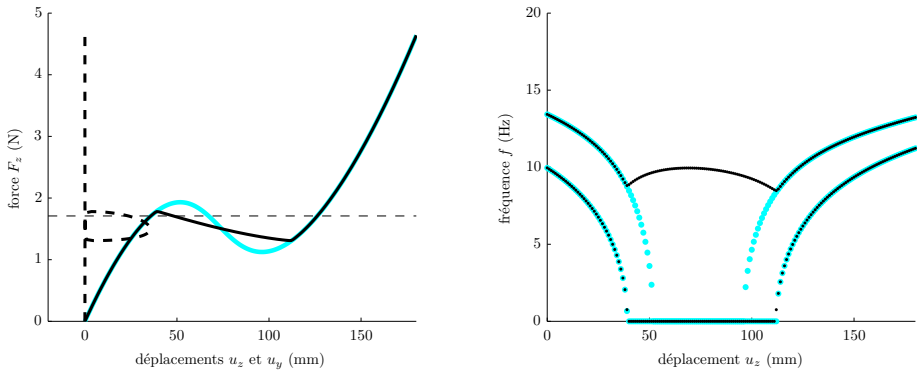
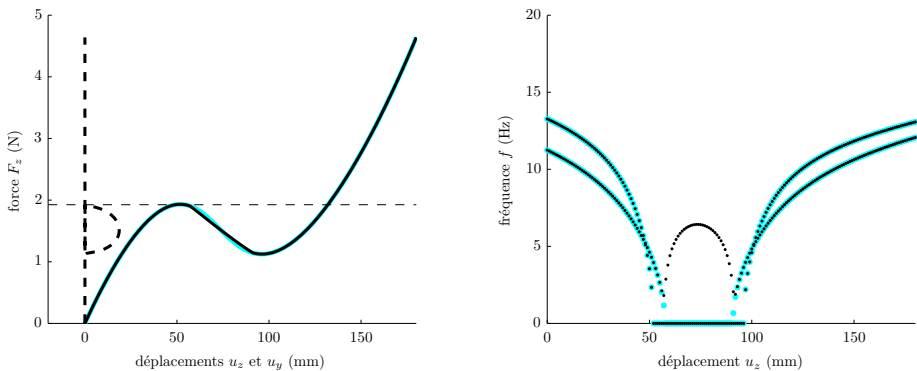
(a) $\alpha = 0$ (b) $\alpha = -0.1$ (c) $\alpha = -0.175$

Figure 4.11 – À gauche : relations entre les déplacements u_z (—) et u_y (---), en abscisse, et la force verticale F_z appliquée, en ordonnée. La ligne horizontale discontinue montre la force à laquelle la baguette passe en dessous du niveau de la mèche. À droite : évolution des deux premières fréquences propres de l'archet en fonction du déplacement vertical u_z . Les traits clairs montrent le chemin d'équilibre et les fréquences calculées sans perturbation.

telle sorte que la branche fondamentale présente un point limite. Bien que les courbes soient représentées séparément pour chaque valeur de α , il faut noter que le chemin d’équilibre de la structure idéale (trait clair) est le même dans les trois cas. Par ailleurs, les fréquences propres n’étant pas adimensionnées, on constate une légère diminution de la fréquence du mode vertical, due à l’accroissement de masse accompagnant l’ovalisation. Toutefois, la plage de déplacement vertical pour laquelle cette fréquence propre s’annule sur la structure idéale est la même dans les trois cas. D’un point de vue statique, l’ovalisation de la section affecte donc uniquement le comportement latéral de l’archet.

Les trois cas représentés, qui sont à mettre en regard de ceux montrés sur la figure 4.8, font apparaître une instabilité par bifurcation. Dans le cas de la section circulaire ($\alpha = 0$), il s’agit d’une bifurcation stable, en effet les fréquences propres restent positives le long de la branche secondaire. Lorsque la section est légèrement ovalisée ($\alpha = -0.1$), la bifurcation est instable. Le dernier cas représenté ($\alpha = -0.175$) donne lieu en premier à une instabilité par point limite, suivie d’une bifurcation. Le comportement post-critique est instable. Outre le caractère stable ou instable de la bifurcation, on constate que celle-ci se produit à un déplacement d’autant plus grand que la section est ovalisée. L’ovalisation a donc pour effet de retarder l’instabilité vis-à-vis de la force appliquée. On constate ainsi que la bifurcation se produit avant que la baguette n’ait touché le crin pour $\alpha = 0$, mais après pour $\alpha = -0.1$.

4.4.4 Influence des réglages de la tension et du cambre

Dans cette section, on évalue l’influence des paramètres de réglage du facteur et du musicien, tension et cambre, sur la stabilité de l’archet. Les cas étudiés sont indiqués dans le tableau 4.1, les autres paramètres étant fixés par ailleurs ($E = 25$ GPa, $E_h = 5$ GPa, $\alpha = 0$).

	tension			quantité de cambre		
	faible	moyenne	élevée	faible	moyenne	élevée
κ (mm)	0	0	0	2	0	-2
a_0 (mm)	10	12	14	12	12	12

Table 4.1 – Valeurs des paramètres utilisées dans la simulation.

La figure 4.12 montre les courbes force-déplacements obtenues en simulant la réponse statique de l’archet à une force verticale à la pointe, depuis l’état précontraint. À cambre fixé (figure 4.12(a)), une augmentation de la tension de jeu a pour effet de diminuer la force à laquelle a lieu la bifurcation. Pour le niveau de tension le plus bas, la bifurcation n’arrive qu’après que la baguette soit entrée en contact avec la mèche. Pour le niveau le plus haut, la bifurcation a lieu avant contact. À distance crin-baguette de jeu fixée (figure 4.12(b)), une augmentation du cambre diminue de façon plus sensible encore la force à laquelle a lieu la bifurcation. Conjointement, la force nécessaire pour que la baguette atteigne le niveau du crin devient plus faible.

Sur la figure 4.13 est représentée l’évolution de la tension du crin au cours du chargement, à partir de l’état non précontraint. On observe que la bifurcation se produit lorsque la tension, qui augmente sous l’effet du chargement, atteint une même valeur limite, indépendamment des réglages du cambre et de la tension de jeu. Cette valeur limite

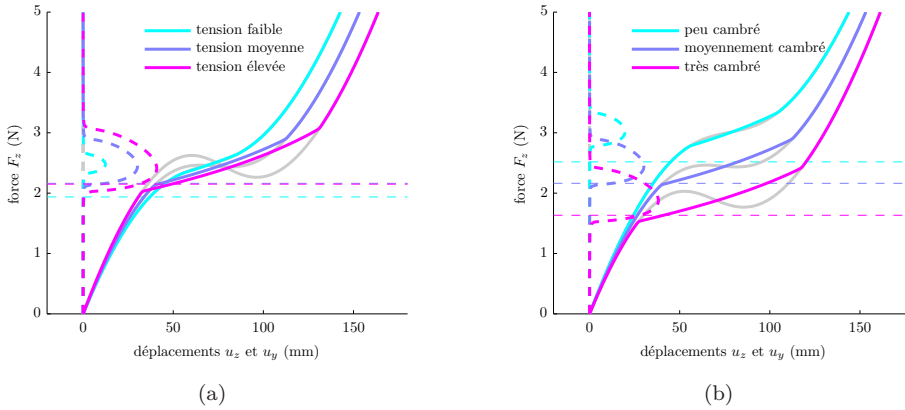


Figure 4.12 – Courbes force-déplacements pour différentes valeurs de la tension du crin (a) et du cambre (b). Pour chaque réglage, la ligne horizontale discontinues indique la force à laquelle la baguette passe en dessous du niveau de la mèche.

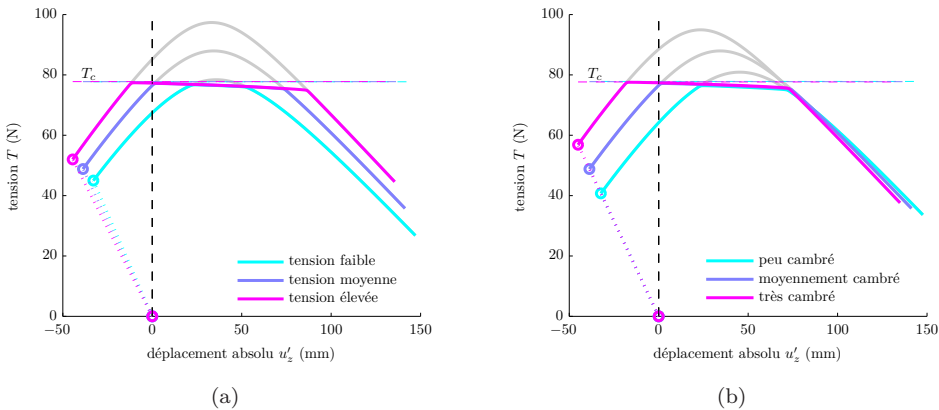


Figure 4.13 – Évolution de la tension du crin T au cours du chargement, représentée en fonction du déplacement vertical absolu u'_z (c'est-à-dire depuis l'état non précontraint), pour différentes valeurs de la tension de jeu (a) et du cambre (b).

correspond bien à la tension critique T_c calculée dans l'état précontraint en raisonnant sur le comportement linéarisé de la structure. D'autre part, la valeur du déplacement absolu (c'est-à-dire à partir de l'état non précontraint) pour laquelle la tension atteindrait sa valeur maximale sur le système non perturbé dépend du cambre, mais pas de la tension de jeu. Cette observation justifie une analogie – bien que non directe – entre le paramètre z_0 du modèle phénoménologique et le cambre de l'archet (décrit par le paramètre κ).

Afin de constater l'effet de ces deux réglages sur l'état précontraint avant sollicitation, les fréquences des deux premiers modes propres de l'archet sont tracées sur la figure 4.14 en fonction de l'évolution des deux paramètres.

Lorsque l'archet, pour une quantité de cambre fixée, est mis sous tension, on observe

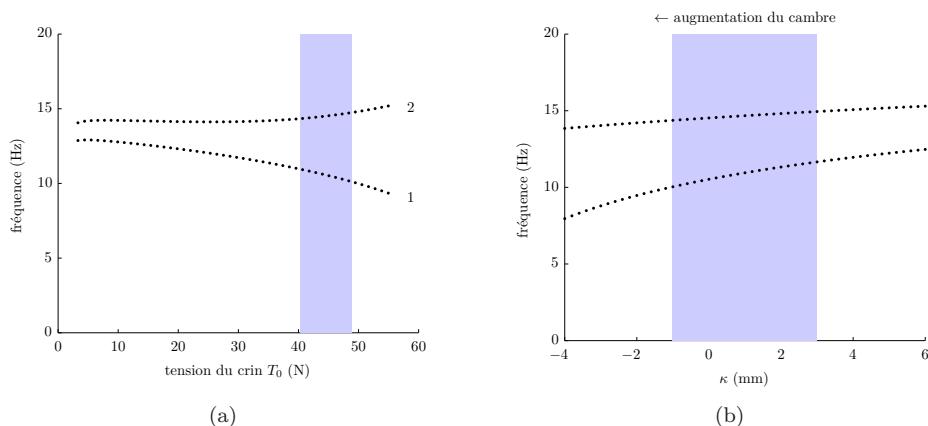


Figure 4.14 – (a) Effet de la précontrainte T_0 sur les deux premières fréquences propres de l'archet. (b) Effet du cambre, caractérisé par la distance crin-baguettes minimale au repos κ , sur les deux premières fréquences propres de l'archet, pour une distance crin-baguettes de jeu fixée (10 mm). Les régions colorées indiquent des plages de réglage typiques.

une diminution de la fréquence propre du mode de flexion latérale et une augmentation de la fréquence du mode de flexion verticale. Cette observation est en accord avec l'analyse statique menée dans les chapitres précédents : vis-à-vis de la baguette, la mèche est conjointement source de précontrainte (tendance à assouplir la structure, donc à en diminuer les fréquences propres) et de raideur, en s'opposant à l'éloignement de la pointe par rapport à la hausse (tendance à augmenter les fréquences propres des modes de flexion dans le plan). Lorsque le cambre augmente, en revanche, les deux fréquences propres diminuent. Ainsi le cambre augmente la tension tout en favorisant l'effet de précontrainte par rapport à l'effet de raideur. Suivant la combinaison des deux paramètres, on constate donc que l'archet sous tension de jeu est plus ou moins proche de l'instabilité, caractérisé par l'annulation d'une fréquence propre.

4.4.5 Discussion sur les conséquences pour le jeu et la facture

La possible occurrence d'une instabilité lorsque l'archet précontraint est sollicité pose naturellement la question des conséquences pour le musicien. On peut en effet imaginer que certains coups d'archets imposent à l'archet des sollicitations qui le rapprochent de sa limite de stabilité, voire conduisent à l'instabilité. Dans ce cas, la fonction de l'archet permettant un contrôle fin de la force d'appui sur la corde, par sa capacité à se déformer modérément sous l'action du musicien, n'est plus assurée.

L'instabilité par point limite est sans doute peu pertinente vis-à-vis du jeu, du fait que la présence de la mèche limite la flexion verticale de la baguette, en ajoutant une raideur supplémentaire à partir du moment où le contact s'établit. L'instabilité par bifurcation, en revanche, semble pouvoir être ramené à la notion de stabilité latérale de l'archet. L'archetier Andreas Grütter [53], à propos du réglage du cambre, y fait explicitement référence :

« A full camber is especially good for the bounce, while less camber relaxes the sound and increases the bow's lateral stability. If the bow has too much strength in the vertical direction, it gives way laterally, with a loss of energy. »

Les propos de l'archetier Ken Altman [8] vont dans le même sens :

« If you have to over-tighten a very flexible bow in order to keep the stick from hitting the strings, the stick can get "squirrelly" and tend to flex side to side when pressure is applied. »

Les simulations numériques ont été effectuées en adoptant un pilotage en déplacement, afin de permettre le calcul des états d'équilibre instables. L'action du musicien, au contraire, peut être assimilée à un contrôle en force, auquel l'archet répond par une certaine déflexion. Ainsi, un archet qui présenterait une bifurcation instable (comme celle visible sur la figure 4.11(b)) serait sans doute le cas le plus défavorable vis-à-vis de la jouabilité, car elle se manifesterait par une transition dynamique brusque de l'état d'équilibre quasi-statique plan vers un état hors plan, donnant la sensation au musicien que l'archet échappe subitement à son contrôle. Cependant, de la même façon qu'une imperfection de chargement a été introduite dans le modèle pour permettre le suivi d'une branche de bifurcation, l'effort appliqué par le musicien pour contrôler la force d'appui n'est pas parfaitement plan. Dans le cas d'un archet réel présentant une bifurcation stable, la transition du mouvement initialement plan vers la flexion latérale de la baguette se ferait vraisemblablement de façon plus progressive.

Le calcul de la force critique de flambement de la baguette, tel qu'il a été effectué dans [31], nous semble un indicateur pertinent pour caractériser le potentiel d'une baguette en termes de résistance à la charge. Nous avons ici appelé cette grandeur « tension critique » T_c , car l'instabilité provient effectivement du fait que la tension augmente et atteint cette valeur lorsque l'archet précontraint est sollicité. Son calcul est relativement aisé et rapide, puisqu'il suffit de simuler la mise sous tension de l'archet puis de résoudre le problème aux valeurs propres (4.18). Bien que ce calcul repose sur une approximation (flambement linéaire [37]), les résultats des simulations du comportement pré- et post-critique – plus coûteuses en temps de calcul – valident cette approche, en montrant que la valeur de T_c ainsi prédite ne peut être dépassée et coïncide relativement bien avec la valeur seuil effectivement atteinte (fig. 4.13).

S'il semble naturel d'affirmer qu'un archet aura d'autant plus de chances d'être instable que sa tension de jeu T_0 est proche de la valeur critique T_c [31], les résultats de la section 4.4.4 montrent que le réglage du cambre est également à prendre en compte pour juger de la stabilité de l'archet en situation de jeu, c'est-à-dire tendu et sollicité par une force verticale F_z . On constate par exemple que le réglage du cambre détermine, dans une plus forte mesure que celui de la tension, la valeur de la force F_z pour laquelle se produit l'instabilité (nous pourrions qualifier cette dernière de « force de jeu critique » F_c). Le modèle numérique non-linéaire est alors utile pour compléter l'information donnée dans le cadre de l'approximation linéaire.

Enfin, certains résultats peuvent aller à l'encontre de l'intuition : une ovalisation de la section visant à augmenter la raideur de flexion latérale de la baguette retarde effectivement l'arrivée au point critique vis-à-vis de la charge imposée, avec le risque cependant de passer d'une bifurcation stable à une bifurcation instable (figures 4.11(a) et 4.11(b)). Pour prédire le degré d'instabilité de l'archet pour une combinaison de paramètres quel-

conque, le calcul du chemin post-critique par une méthode de résolution appropriée reste la solution la plus informative.

4.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons tenté d'interpréter la notion de « stabilité » employée par les archetiers, en examinant la stabilité d'un archet au sens mécanique. Cette analyse a à été menée à travers deux approches complémentaires : étude analytique d'un système mécanique analogue et calculs numériques à partir du modèle éléments finis développé au chapitre 3.

Différents cas d'instabilité ont ainsi été mis en évidence. En particulier, la baguette peut fléchir latéralement sous l'effet d'une force verticale. Cette instabilité se déclenche si la tension du crin, en augmentant au cours du chargement, atteint la force critique de flambement de la baguette. Ce phénomène se produit pour une force de jeu d'autant plus faible que l'archet est cambré.

En résumé, un archet doit être en mesure de supporter non seulement la charge statique imposée par la tension initiale, mais aussi l'accroissement de tension enduré lors du jeu, qui le rapproche de ses limites. Cette exigence requiert un degré d'anticipation particulièrement élevé de la part du facteur, qui ne peut réellement apprécier le comportement de l'archet sous tension qu'en fin de fabrication. Dans ce contexte, un modèle prédictif peut s'avérer utile à l'archetier désireux de valider relativement tôt certains choix de conception vis-à-vis des propriétés du bois utilisé.

CHAPITRE 5

ESSAIS EN JEU

L'objectif de ce chapitre est d'évaluer la pertinence des éléments de réglage, cambre et tension, du point de vue du musicien. Il présente une étude subjective menée auprès de deux violonistes professionnels et portant sur trois archets spécifiquement sélectionnés et réglés par un archetier. Les résultats quantitatifs des essais en jeu sont ensuite mis en regard de propriétés physiques déterminées sur les trois archets.

5.1 Cadre de l'étude

5.1.1 Choix de l'espace produit

L'objectif étant de montrer l'influence des réglages de la quantité de cambre et de la tension du crin, l'approche apparaissant comme la plus pertinente consiste à donner à jouer un même archet dans différents états de cambre et de tension. Cette méthode est celle naturellement adoptée par l'archetier lorsqu'il ajuste l'archet d'un musicien en sa présence, dans le but de lui conférer les qualités de jeu et de sonorité escomptées. Cependant, elle pose des difficultés dans le cadre d'une séance d'analyse perceptive. En effet, si le réglage de la tension est immédiat, celui du cambre nécessite un temps relativement long (de l'ordre de quelques minutes pour une modification en un endroit de la baguette). Dans le souci d'optimiser le temps de présence des musiciens et de favoriser un jugement basé sur la mémoire à court terme, il a été convenu d'utiliser trois archets dont le cambre est réglé à l'avance. Par rapport à l'utilisation d'un seul archet, qui permet seulement une évaluation dans l'absolu – probablement difficile – de chaque configuration, cette approche offre une plus grande latitude dans le choix du type d'épreuve : épreuve discriminative, épreuve de classement, notation par rapport à une configuration de référence. Cependant, quelle que soit l'épreuve choisie, la pertinence de l'approche adoptée repose sur l'hypothèse que les trois archets sont identiques en toutes caractéristiques autres que le cambre et la tension. Bien sûr, cette condition ne peut pas être entièrement satisfaite dans la pratique. Les paramètres susceptibles de changer d'un archet à l'autre dépendent des variables de fabrication et de réglage suivantes :

- le matériau utilisé (propriétés mécaniques, couleur),
- la géométrie de la baguette (section, cambre),

- les caractéristiques de la mèche (nombre de crins, propriétés mécaniques),
- le soin apporté à l’assemblage (ajustement de la hausse par rapport à la baguette, méchage).

Afin de rester au plus près de l’hypothèse nécessaire à l’étude, un soin particulier a été porté à la sélection des trois archets.

5.1.2 Sélection et réglage des archets

Trois archets en Pernambouc, réalisés d’après un modèle Tourte ont été sélectionnés et réglés par l’archetier Jean Grunberger pour cette étude. Dans le but de présenter aux musiciens des archets de « qualité » intrinsèque honorable, la sélection a été effectuée dans la catégorie haut de gamme du catalogue d’un négociant. Par ailleurs, le critère essentiel de choix portait sur la proximité des trois archets en termes de caractéristiques mécaniques : raideur, masse et centre d’inertie de la baguette. Ces grandeurs ont été mesurées lors de la sélection. Les écarts résiduels entre les propriétés des trois archets sélectionnés ont été compensés, dans la mesure du possible, par un pré-réglage de l’archetier (notamment en agissant sur la garniture pour ajuster le couple masse/centre d’inertie).

Le réglage à proprement parler des trois archets – désignés par B1, B2 et B3 dans la suite – a été effectué en atelier, en présence d’un musicien ne prenant pas partie au reste de l’étude. Cette façon de procéder avait deux objectifs :

- évaluer dans un premier temps la proximité des archets, initialement réglés à l’identique, en termes de ressenti pour le musicien,
- déterminer un espace de réglage pertinent.

La première étape a pris essentiellement la forme d’une épreuve discriminative, visant à détecter les différences pouvant être ressenties entre les trois archets. Bien que cette évaluation ne constitue pas une réelle validation, il en est ressorti que les trois archets se trouvaient très proches. Une évaluation hédonique, complémentaire à celle effectuée en tant qu’expert, a révélé une préférence pour l’archet B3. Ainsi, dans la deuxième étape, il a été décidé de conserver le réglage de l’archet B3 comme référence. Les archets B1 et B2 ont été réglés dans le sens d’un accroissement et d’une diminution de la quantité de cambre, respectivement. Le réglage de chaque archet a été réalisé en plusieurs opérations de cambrage, à différents endroits de la baguette. Entre deux modifications successives, l’archet était joué par le musicien et comparé à la configuration de référence. Cette procédure pas à pas a permis d’atteindre progressivement un réglage final suffisamment éloigné de la référence pour affecter sensiblement l’impression du musicien, tout en restant dans des limites acceptables de « jouabilité ». Ce réglage, dont la figure 5.1 donne un aperçu, est précisé dans la section suivante.

5.1.3 Caractérisation

En plus de l’évaluation subjective de la proximité entre les trois archets avant réglage, une caractérisation objective des propriétés a été menée au laboratoire, en appliquant la procédure expérimentale décrite dans le chapitre 4 (section 3.3.1). Le tableau 5.1 rassemble les valeurs des paramètres ainsi déterminés.

À ce stade, il convient de noter que la quantité de cambre de l’archet B1, particulièrement élevée (κ proche de -3 mm) est en dehors des plages usuelles. Un tel réglage,



Figure 5.1 – Archets sélectionnés et réglés pour l'étude subjective, du plus cambré (en haut) au moins cambré (en bas).

Paramètre	Archet B1	Archet B2	Archet B3	Incertitude
Distance crin-baguettes minimale κ (mm)	2.0	-2.9	-0.1	0.1 mm
Module d'Young de la baguette E (GPa)	20.7	19.7	21.1	2%
Module d'Young équivalent du crin E_h (GPa)	6.2	7.7	6.9	22%
Masse (g)	61.27	61.17	61.05	0.02 g
Position du centre d'inertie (mm)	247	245	245	1 mm

Table 5.1 – Propriétés mécaniques et géométriques des archets. La position du centre d'inertie est mesurée à partir de l'origine de la baguette, sur l'archet sans tension.

pouvant être qualifié de caricatural, ne se justifie ici que par le fait que l'archet de référence B3, représentant un niveau de cambré intermédiaire par rapport aux deux autres, est déjà cambré « au maximum » (κ proche de 0 mm, *full camber*). Cependant, l'archet B1 ainsi réglé a été considéré par le musicien comme « jouable » lors des essais menés au cours de la phase de réglage.

La figure 5.2 montre le cambré des trois archets, obtenu par traitement d'image. La déformée sous tension correspondant à une distance crin-baguettes de 10 mm, obtenue par simulation, est également représentée. La superposition quasi parfaite des trois déformées traduit le fait que la répartition du cambré ne change pas significativement d'un archet à l'autre. En cambrant et décambrant les archets B1 et B2, respectivement, à différents endroits de la baguette, l'archetier a donc bien abouti à différents réglages de la quantité de cambré.

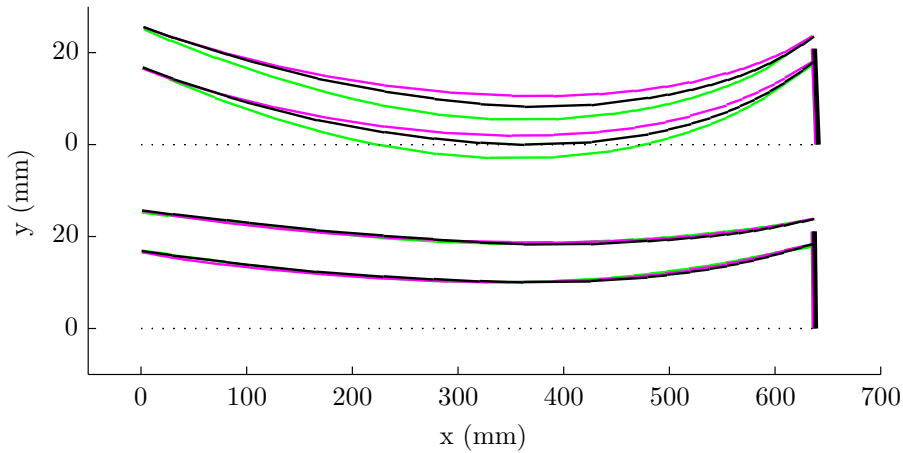


Figure 5.2 – Géométrie des archets B1 (—), B2 (—) et B3 (—). En haut : géométrie sans tension. En bas : géométrie sous tension, pour une distance crin-baguettes de 10 mm.

5.2 Description et résultats des tests

Les essais ont été réalisés auprès de deux violonistes professionnels de formation classique. La première séance d'essais s'est déroulée au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, avec Estelle Imbert, professeur au Conservatoire du Mans (nommée expert 1 dans la suite). La deuxième séance a eu lieu à l'Institut Supérieur de Mécanique de Paris, avec Michel Reuter¹, musicien travaillant essentiellement en ensemble (nommé expert 2). Chaque séance, d'une durée approximative de 3 heures, s'est déroulée en trois phases :

1. verbalisation : définition des critères subjectifs par les musiciens,
2. tests par paires : évaluation sur une échelle de la distance entre les archets, sur les critères définis à l'étape 1,
3. réglage de la tension optimale de chaque archet par le musicien : évaluer sa stratégie de réglage et vérifier sa cohérence avec les résultats des tests (étape 2).

Ces trois phases sont détaillées ci-après.

5.2.1 Verbalisation

Le but de cette phase est de générer une liste de « descripteurs », termes se rapportant à la perception de l'archet et constituant la base de critères sur laquelle s'appuie l'évaluation. Pour pouvoir être considéré comme descripteur, un terme doit satisfaire trois exigences essentielles :

- être **pertinent**, c'est-à-dire en lien clair avec le produit,
- être **précis**, c'est-à-dire non décomposable en sous-descripteurs,
- être **discriminant**, c'est-à-dire permettant de discerner les produits.

1. À noter que M. Reuter avait participé à l'étude menée en 2006 par Dauchez et coll. [31].

Des exemples de termes ne pouvant être retenus sont la *couleur* (non pertinent), la *jouabilité* (non précis) et le *poinds* (probablement non discriminant, les trois archets ayant sensiblement la même masse). À chaque descripteur est associé une définition et généralement une procédure d'évaluation.

La méthode choisie ici pour générer cette liste est de type « profil libre », c'est-à-dire qu'elle laisse à chaque expert la liberté de choisir ses propres descripteurs. Elle s'oppose au « profil classique », qui consiste à imposer une même liste de descripteurs à tous les experts. L'avantage du profil libre est de s'affranchir des étapes visant à aboutir à un vocabulaire commun à tous les experts, ainsi que des étapes d'entraînement. Cette approche est notamment mise à profit dans la méthode appelée « profil flash » [32] dans le but d'établir en un temps très court un positionnement sensoriel d'un ensemble de produits.

Ainsi, pendant cette phase de la séance, le musicien disposait des trois archets et pouvait les jouer en passant librement de l'un à l'autre, sur le mode de jeu de son choix (par exemple cordes à vide, gammes, séquences improvisées ou extraites du répertoire). La seule consigne imposée au musicien était d'exprimer ses impressions. Notre rôle d'animateur consistait à prendre en note des éléments du discours de l'expert et à orienter la discussion vers l'élaboration d'une liste de termes pouvant potentiellement être retenus comme descripteurs. Enfin, dans le souci d'imposer un minimum de contraintes au musicien, la procédure d'évaluation associée à chaque critère n'a pas été définie explicitement à l'issue de la phase de verbalisation. Ainsi, le musicien avait dans la suite des tests la liberté d'adapter celle-ci au besoin.

Descripteur	Définition	Échelle
Expert 1		
<i>Stabilité</i>	Absence de tremblement sur des notes tenues	instable / stable
<i>Attaques (consonnes)</i>	Timbre des transitoires d'attaque	pas beaucoup / beaucoup
<i>Jeu au talon</i>	Confort lors du jeu au talon	difficile / facile
<i>Changement de corde</i>	Capacité à favoriser des changements de corde souples et sans à-coups	difficile / facile
Expert 2		
<i>Stabilité</i>	Absence de tremblement sur des notes tenues	instable / stable
<i>Spectre hors attaque</i>	Timbre sur les notes tenues	moins riche / plus riche
<i>Consonne</i>	Timbre des transitoires d'attaque	moins dure / plus dure
<i>Réactivité au geste</i>	Temps nécessaire à la production du son	lent / rapide
<i>Ressort</i>	Capacité à détacher les notes	peu / beaucoup

Table 5.2 – Descripteurs retenus pour les tests effectués par les musiciens.

Un récapitulatif synthétique des descripteurs retenus à l'issue de la phase de verbalisation est donné dans le tableau 5.2. Quatre descripteurs ont été retenus par l'expert 1. Un critère se rapporte à la sonorité (*attaques*) et les trois autres à la jouabilité. Parmi les cinq descripteurs retenus par l'expert 2, deux concernent la sonorité (*spectre hors attaque, consonne*) et les autres la jouabilité. On constate deux critères communs aux deux musiciens, relatifs à la *stabilité* et aux *attaques*. Par ailleurs, aucun critère n'est directement lié à une technique d'archet particulière (*sautillé, staccato...*).

5.2.2 Tests par paires

L'objectif de cette étape est de générer l'ensemble des données perceptives. Chaque musicien va tester un certain nombre de configurations d'archets (couples $B\Box-A\Box$), présentées dans un ordre défini à l'avance, et les noter sur la base des descripteurs retenus. L'échelle de notation, comportant cinq niveaux, est centrée sur la configuration de référence.

5.2.2.1 Protocole

La figure 5.3 donne une vue synthétique des configurations testées. Pour les essais réalisés avec l'expert 1, la répétition de chaque configuration a été envisagée². Avec l'expert 2, une durée plus longue a été accordée à la phase de verbalisation. Par conséquent, seules trois répétitions ont été faites. La distance crin-baguette est fixée à l'aide de pièces cylindriques de diamètre fixé, correspondant aux trois niveaux de tension (A1, A2, A3). La pièce est intercalée entre la mèche et la baguette, puis l'archet mis sous tension jusqu'à sa chute. Ce procédé assure une répétabilité satisfaisante des réglages (fig. 5.3). L'archet de référence B3, dont le niveau de tension est fixé, est mis à disposition du musicien pendant toute la série d'essais.

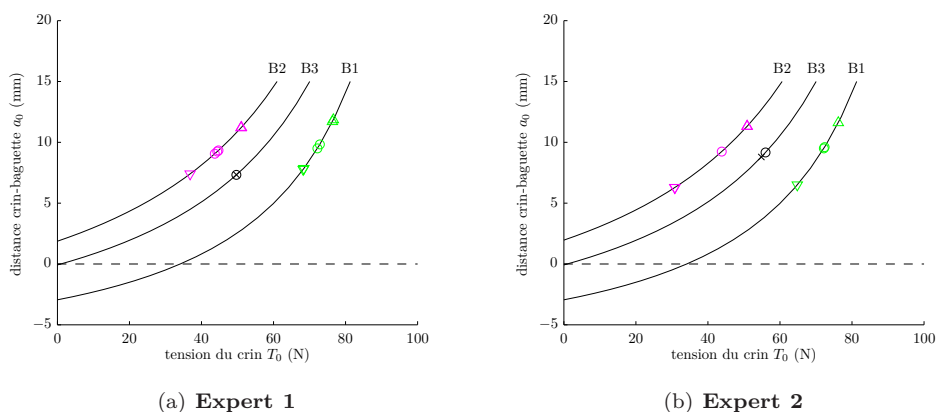


Figure 5.3 – Caractéristiques des configurations testées. La configuration de référence, sur l'archet B3, a été mesurée au début (O) et à la fin (x) des tests par paires.

2. Par erreur cependant, les configurations B2-A2 et B2-A1 ont été présentées trois fois et une seule fois, respectivement.

Essai #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Expert 1												
Archet	B1	B2	B1	B2	B2	B1	B1	B2	B1	B2	B2	B1
Distance	A2	A2(*)	A1	A3	A2	A3	A1	A2	A3	A1	A3	A2
Symbole	○	○	▽	△	○	△	▽	○	△	▽	△	○
Expert 2												
Archet	B1	B2	B2	B1	B2	B1	B2	B1	B2	-	-	-
Distance	A2'	A1'	A3'	A1'	A2'	A3'	A1'	A2'	A3'	-	-	-
Symbole	○	▽	△	▽	○	△	▽	○	△	-	-	-

Table 5.3 – Ordre de présentation des configurations cambre-tension (B□-A□). La notation □' est utilisée pour différencier les niveaux de tension, l'espace produit n'étant pas le même pour les deux experts. (*) Cette configuration a été donnée par erreur au lieu de la configuration A1.

Au début de chaque essai, la configuration correspondante était préparée puis photographiée, avant d'être remise au musicien. Celui-ci disposait alors d'un temps libre (de l'ordre de quelques minutes) pour jouer l'archet et donner une note pour chaque descripteur, dans l'ordre de son choix. Il avait également la liberté d'alterner entre l'archet à tester et l'archet de référence. La figure 5.4 donne un aperçu des fiches remplies lors de chaque séance. Dans le cas de l'expert 1, il était également demandé d'indiquer la préférence entre les deux configurations testées.

PRÉFÉRENCE □ référence
 autre
 ESSAI N° 1

critère stabilité

instable stable

critère attaques (cannon)

pas beaucoup beaucoup

critère jeu au talon

difficile facile

critère chgt corde

difficile facile

(a) Expert 1

Essai n° 1

Critère: stabilité

instable stable

Critère: spéche hors attaque

moins riche plus riche

Critère: consonne

moins dure plus dure

Critère: sensibilité au geste

lent rapide

Critère: ressort

peu beaucoup

Commentaires

(b) Expert 2

Figure 5.4 – Fiches d'évaluations remplies lors des tests par paires.

5.2.2.2 Résultats

Dans cette section, on tente d'établir un lien entre les données perceptives issues des tests par paires et une donnée objective, la tension du crin. Cette grandeur est choisie en raison de sa grande variabilité sur l'espace produit retenu, et parce qu'elle est très corrélée au cambre (voir figure 5.3).

L'annexe C rassemble les corrélations les plus significatives. Certaines corrélations indiquent un lien entre deux sensations du musiciens, d'autres un lien entre une sensation du musicien et la tension du crin. La figure 5.5 présente cinq résultats de corrélations.

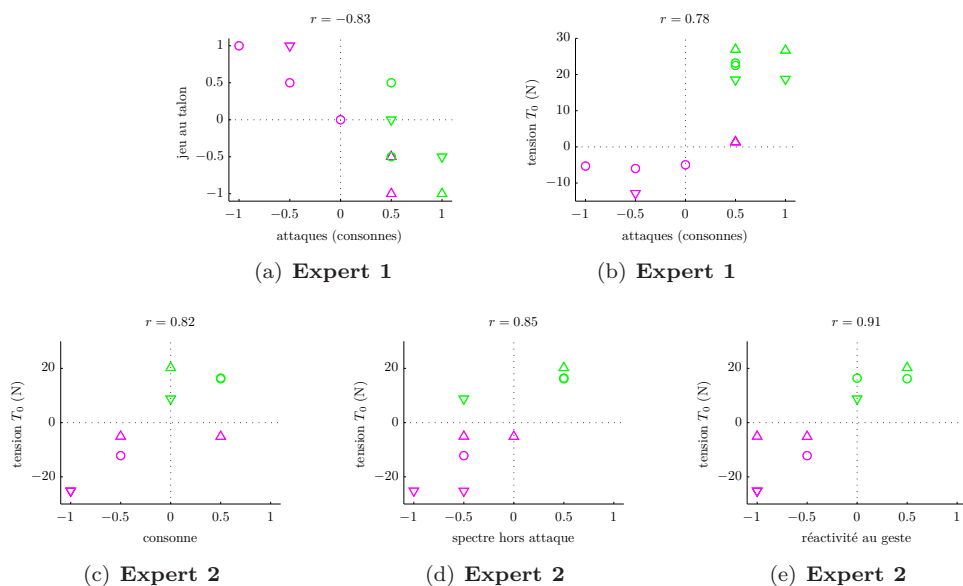


Figure 5.5 – Corrélations les plus significatives (5 parmi les 12 présentées en annexe C).

Nous pouvons les interpréter comme suit.

- **attaques (consonnes)** et **jeu au talon** (expert 1, $r = -0.83$, fig. 5.5(a))
Avec un archet dont les attaques sont très marquées (beaucoup de consonnes), il semble plus difficile de masquer les changements de sens au talon.
- **attaques (consonnes)** et **tension** (expert 1, $r = 0.78$, fig. 5.5(b))
Un archet très tendu favorise les consonnes au moment des attaques.
- **consonne** et **tension** (expert 2, $r = 0.82$, fig. 5.5(c))
Ce résultat s'accorde avec le précédent, obtenu par l'expert 1.
- **spectre hors attaque** et **tension** (expert 2, $r = 0.85$, fig. 5.5(d))
Une tension de mèche élevée permet d'obtenir un timbre riche.
- **réactivité au geste** et **tension** (expert 2, $r = 0.91$, fig. 5.5(e))
Un archet très tendu est plus réactif.

Ces résultats peuvent être mis en regard du diagramme représenté en annexe A. La raideur des trois baguettes est relativement élevée par rapport à la plage de variation représentative de la diversité des archets en général. Par conséquent, l'espace produit de cette étude se situe approximativement au niveau des points (3) et (6) sur le diagramme A.1. Un archet situé en (3), correspondant à une baguette raide et peu cambrée

(archet B2 dans cette étude), procure des attaques « douces ». Un archet situé en (6), dont la baguette est raide et très cambrée (archet B1), est qualifié de « réactif ». Certaines tendances issues des tests subjectifs sont donc cohérentes avec le discours des archetiers.

Certaines corrélations sont plus difficiles à interpréter. Par exemple, celle entre les qualités de *ressort* (capacité à détacher les notes, plutôt liée à la jouabilité) et le spectre hors attaque (sonorité), obtenue avec l'expert 2 ($r = 0.88$).

Par ailleurs, aucune corrélation significative entre la stabilité et une autre sensation ou la tension du crin n'a été trouvée. Le parti pris de centrer l'étude sur les réglages du cambre et de la tension a eu pour effet d'explorer un espace de paramètres assez réduit, en restant volontairement dans des limites acceptables de jouabilité. Les simulations effectuées sur les archets ont montré que seules les configurations B1-A2 et B1-A3 (archet très cambré, moyennement et très tendu, respectivement) présentent une potentielle instabilité mécanique, montrée sur la figure 5.6. De telles instabilités ne sont pas susceptibles de se produire lors du jeu. Sur la configuration B1-A2 (fig. 5.6(a)), la baguette entre en contact avec le crin avant le point critique. Sur la configuration B1-A3 (fig. 5.6(b)), le contact a lieu pour une force sensiblement égale à la force de jeu critique, mais cette dernière ($F_c = 2.6$ N) est très élevée par rapport à la plage usuelle (F_z variant généralement entre 0 et 1.5 N).

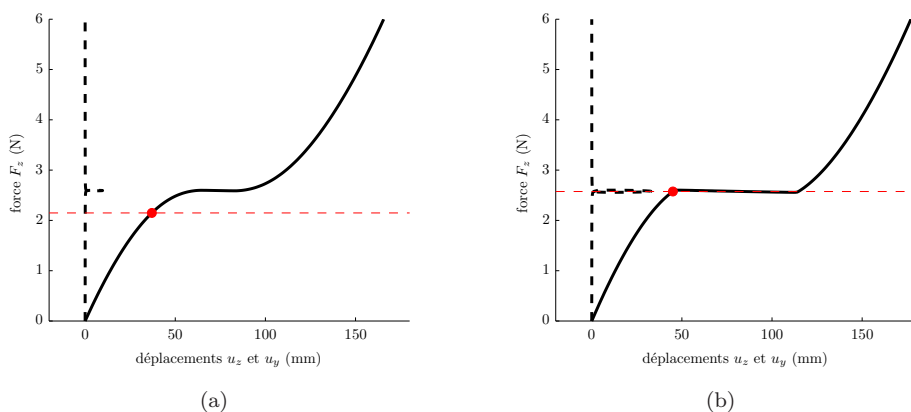


Figure 5.6 – Relation entre les déplacements u_z (—) et u_y (- -) et la force verticale F_z appliquée à la pointe : (a) configuration B1-A2 (archet très cambré, moyennement tendu) ; (b) configuration B1-A2 (archet très cambré, très tendu). La ligne horizontale discontinue montre la force à laquelle la baguette passe en dessous du niveau de la mèche.

La définition de l'instabilité donnée par les musiciens ayant participé à l'étude subjective, sans remettre en cause l'interprétation au sens strictement mécanique, en suggère une autre. En effet, les musiciens font référence à un tremblement de l'archet, ressenti – et même audible – lors des notes longues et dont la maîtrise peut être plus ou moins difficile (d'où le caractère plutôt « stable » ou « instable » de l'archet). Cette définition invite assez naturellement à examiner des grandeurs dynamiques comme les mobilités transversales au niveau de la mèche, évaluées le long de celle-ci. Ces grandeurs dynamiques sont à considérer pour une tension donnée.

5.2.3 Réglages optimaux

Cette étape a pour but de mieux appréhender le réglage intuitif du musicien face à des différences sensibles du cambre. Une question sous-jacente est celle de la définition de la *tension de jeu* : on sait en effet que cette notion peut se rapporter, suivant le contexte, à la grandeur physique (T_0) ou à sa conséquence visible, c'est-à-dire la distance crin-baguette.

À la fin des séances d'essais, il a été demandé à chaque expert de régler les trois archets à leurs tensions « optimales ». À cette fin, les archets sous une tension arbitraire ont été présentés aux musiciens avec la consigne d'ajuster celle-ci. Cette précaution avait pour but de ne pas influencer leur jugement en dévoilant le cambre. Les musiciens se sont donc fiés *a priori* à leurs impressions en jeu pour régler les archets.

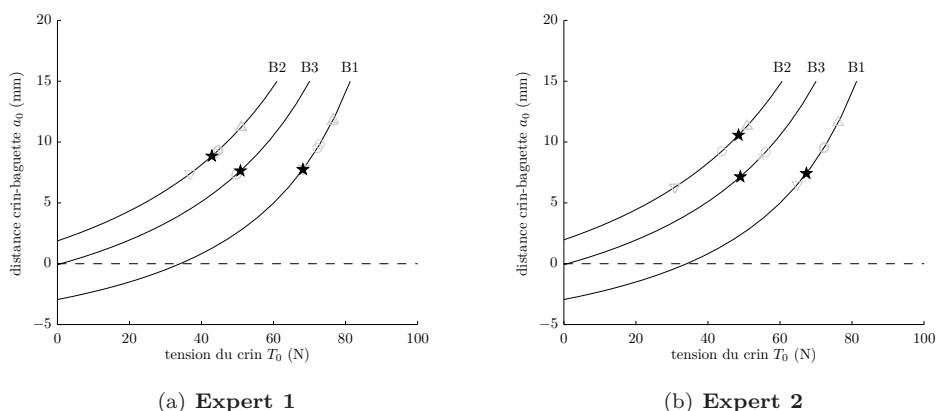


Figure 5.7 – Réglage des tensions optimales de chaque archet par les musiciens.

	Expert 1		Expert 2	
Archet	T_0 (N)	a_0 (mm)	T_0 (N)	a_0 (mm)
B2	42.9	8.8	48.5	10.4
B3	50.8	7.6	49.0	7.1
B1	68.2	7.7	67.3	7.4

Table 5.4 – Valeurs de la tension et de la distance crin-baguette pour les réglages effectués par les musiciens.

Les réglages effectués par chaque expert sont représentés sur la figure 5.7 dans le plan tension/distance crin-baguette. Les valeurs numériques de la tension et de la distance crin-baguette, calculées à partir des photos, sont précisées dans le tableau 5.4. Les archets les plus cambrés, B3 et B1, ont été réglés par chaque expert à des distances crin-baguette très proches, malgré l'écart significatif de tension ainsi obtenu entre les deux configurations. De plus, la distance moyenne est quasiment la même d'un expert à l'autre (variations de moins de 5%). L'archet B2, moins cambré, a été réglé à une distance crin-baguette plus grande par les deux experts. Cependant, on constate que l'expert 1 n'a que légèrement augmenté la distance par rapport aux deux autres (+1 mm environ),

tandis que l'expert 2 l'a augmentée davantage (+3 mm environ), de sorte que la tension du crin calculée est quasiment égale à celle de l'archet B3.

Il semble que les deux musiciens règlent l'archet par rapport à une distance crin-baguelette cible, plutôt qu'une tension cible. Toutefois, il apparaît qu'une tension de jeu jugée trop faible à la distance préférée incite à tendre l'archet à une plus grande distance. En revanche, la forte tension obtenue sur l'archet très cambré n'a pas été « corrigée » par les musiciens.

5.3 Conclusion

L'étude subjective menée dans ce chapitre a montré que le réglage du cambre d'un archet affecte sensiblement ses qualités de jeu et de sonorité ressenties par un musicien. Ces différences ont pu être attribuées en partie à la tension du crin, paramètre objectif variant également sensiblement d'un réglage du cambre à l'autre. En particulier, une tension élevée rend l'archet très réactif et favorise les consonnes lors de l'attaque. Ces résultats, qui s'accordent avec l'expérience des archetiers, restent toutefois partiels au regard de l'espace des paramètres de fabrication et de réglage qui leur est accessible.

Pour apporter de nouveaux éléments de réponse dans la recherche des paramètres physiques influents vis-à-vis des qualités de l'archet, l'analyse perceptive doit être approfondie, tant du point de vue de la méthodologie que du choix de l'espace produit. À la lumière des cas d'instabilité mis en évidence dans le chapitre 4, il serait intéressant d'élargir l'espace produit, notamment en faisant varier en plus la raideur de la baguelette, de façon à obtenir des configurations de cambre et tension propices à une instabilité mécanique. Au vu de la stratégie de réglage des musiciens, les essais en jeu futurs pourraient être réalisés à distance crin-baguelette fixée, afin de conserver une taille d'espace produit raisonnable malgré l'introduction d'une variable supplémentaire. Une analyse en composantes principales des données subjectives et objectives pourra être effectuée pour mieux appréhender les relations entre les grandeurs considérées.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce travail avait pour objectif de mieux comprendre le fonctionnement d'un archet de violon d'un point de vue mécanique. À cette fin, des modèles numériques ont été développés en considérant l'archet comme une poutre précontrainte.

Conséquence directe du maintien de la mèche sous tension, la précontrainte tend à assouplir la baguette en situation de jeu. Cet effet est particulièrement marqué lorsque l'archet subit une force dans la direction latérale. Dans la direction verticale en revanche, la raideur longitudinale de la mèche offre une résistance à la flexion de la baguette, d'autant plus grande que la tension est élevée. Son effet diminue à mesure que la baguette fléchit sous l'action de la force. Il apparaît donc qu'une baguette, même de section axisymétrique, présente en jeu une souplesse qui varie avec la tension, l'angle de sollicitation et la force appliquée. Les modèles proposés s'accordent de façon tout à fait satisfaisante avec la mesure des souplesses verticale et latérale de l'archet sous tension. Connaissant les propriétés de la baguette et de la mèche, il est alors possible de prédire le comportement de l'archet sous tension et les conséquences de différents réglages.

Bien que la tension de jeu puisse être ajustée par l'intermédiaire du bouton, c'est avant tout la quantité de cambre qui détermine la plage de réglage offerte au musicien. En particulier, un accroissement du cambre permet d'atteindre une tension plus élevée pour la même distance crin-baguette. Ce résultat, bien connu des archetiers, a pu être exprimé quantitativement. Une étude subjective menée auprès de deux musiciens a montré l'importance de ce réglage sur les qualités de jeu et de sonorité. Elle montre en particulier qu'une tension élevée favorise des attaques nettes et rend l'archet très « réactif ».

L'effort subi par la baguette ne se limite pas à la précontrainte résultant de la mise sous tension de l'archet. Au cours du jeu, l'archet réagit aux sollicitations du musicien par une augmentation de tension dans la mèche, et donc de la force exercée sur la baguette. Sous certaines conditions, elle peut conduire à une instabilité mécanique. Ainsi, un bon archet doit avant tout être capable de supporter toutes les sollicitations rencontrées en jeu. Un premier indicateur, facilement accessible par le calcul, est la tension critique. Toutefois, cet indicateur ne prend pas en compte les réglages effectués par l'archetier. Nous proposons ainsi un indicateur complémentaire, qui est la force de jeu maximale pouvant être appliquée avant que l'archet ne devienne instable.

D'un point de vue purement pratique, les deux modèles numériques développés au cours de ce travail sont complémentaires. Le premier modèle, basé sur des éléments finis de poutre 2D et ne nécessitant pas le maillage du crin, offre un temps de calcul très court. Son utilisation est avantageuse dans les méthodes inverses, où un même cas de charge doit être simulé de façon répétée pour différentes valeurs des paramètres d'entrée. Le modèle 3D, moyennant un temps de calcul plus long, permet de traiter des cas de charge sollicitant la flexion latérale de la baguette et d'analyser la stabilité de l'archet.

En lien avec le travail sur les modèles numériques, une procédure non destructive de détermination des propriétés mécaniques et géométriques de l'archet a été développée. Basée sur une méthode inverse, elle donne accès à des grandeurs difficiles à mesurer directement, notamment le module d'Young du bois et la tension du crin. En plus du modèle et des outils de traitement d'image développés à cette fin, le matériel nécessaire à sa mise en oeuvre est relativement abordable et facile à utiliser.

Plusieurs perspectives sont envisagées à l'issue de ce travail.

Si les modèles numériques développés dans cette thèse ne prétendent pas se substituer au savoir-faire du facteur, ils peuvent aider à une plus grande maîtrise de la fabrication et du réglage d'un archet, notamment face à la grande variabilité des propriétés du matériau. Nous pouvons énumérer plusieurs axes d'utilisation.

- *Caractérisation en atelier.* La méthode de détermination des propriétés d'un archet paraît assez facilement transférable en atelier. En complément des caractéristiques habituellement relevées par les archetiers (cambre, diamètres, raideur...), elle offre des possibilités de caractérisation objective supplémentaires (élasticité du bois, plage de tension de jeu, tension critique...). L'accès à ces grandeurs, indépendamment de leur interprétation, peut aider à évaluer la répétabilité d'un procédé de fabrication vis-à-vis d'un résultat final escompté, ainsi qu'à réaliser des copies d'archets.
- *Validation de choix de conception.* Lors de la fabrication d'un archet, réaliser le juste accord entre la géométrie et les propriétés mécaniques du bois laisse une grande part à l'expérience du facteur. À partir de simulations, il devrait être possible de prédire, en amont de la fabrication, dans quelle mesure certains choix de conception s'avèrent judicieux au regard du bois choisi. Par ailleurs, sur un archet fini dont les paramètres géométriques et mécaniques ont été déterminés, le caractère prédictif du modèle peut être exploité pour anticiper les conséquences d'un réglage donné.
- *Recherche de bois de substitution.* Concernant en particulier la recherche d'un bois de substitution, à laquelle s'intéressent certains archetiers, les simulations peuvent aider à déterminer les modifications à apporter à la géométrie pour obtenir un comportement mécanique en situation de jeu semblable à celui d'un archet en Pernambouc. À cette fin, il est envisageable d'utiliser les modèles dans une routine d'optimisation. Un prérequis indispensable concerne la définition de critères relatifs au comportement mécanique, sur lesquels doit porter l'optimisation. Le modèle

peut également servir de support didactique pour illustrer l'influence des paramètres géométriques et du matériau.

Vis-à-vis de ces problématiques, la dynamique d'échange avec les facteurs, initiée plusieurs années auparavant, offre un terrain privilégié de questionnements et d'apports réciproques. Ainsi, en plus de leur diffusion auprès de la communauté scientifique, certains résultats ont déjà été présentés aux « Journées Fracture Instrumentale & Sciences » organisées par l'ITEMM au cours des trois années. Deux journées consacrées aux archetiers ont eu lieu^{3,4}. Ce travail en interaction avec facteurs et musiciens sera poursuivi de façon à déterminer des critères pertinents susceptibles de renseigner sur les qualités de jeu et de sonorité propres à l'archet. Enfin, certains outils seront intégrés dans le cadre du projet PAFI.

Les outils développés dans ce travail peuvent trouver une application à la problématique de la conservation d'archets. Effectivement, ces outils permettraient d'approfondir l'analyse des collections des musées, à deux niveaux.

- À partir de la géométrie seule, il est possible de déduire des simulations la forme qu'aurait l'archet sous tension, même « maximale ». On peut ainsi évaluer, par exemple, si le critère de répartition du cambre mentionné à plusieurs reprises dans ce mémoire avait cours auparavant. Par ailleurs, les facteurs mettent généralement l'archet sous forte tension pour repérer les endroits de la baguette présentant un défaut ou un excès de cambre. Simuler cette action sur des archets anciens peut permettre d'identifier si la baguette a subi des retouches ponctuelles depuis sa fabrication.
- En déformant légèrement l'archet – sans aller jusqu'à le mettre sous tension –, on peut espérer mesurer en plus l'élasticité du bois. Cette information peut aider à choisir le bois approprié pour la réalisation d'un fac-similé. La copie peut ainsi se rapprocher au plus près de l'original, non seulement en termes de géométrie, mais aussi de comportement mécanique (tension de mèche, souplesse...). Pour permettre cette mesure, il s'agira dans un premier temps d'adapter la méthode expérimentale – bien que déjà non-destructive – pour la rendre compatible avec l'état de conservation de la baguette.

D'un point de vue scientifique, l'étude de l'archet offre des pistes d'exploration encore nombreuses.

Dans un premier temps, il nous paraît indispensable d'approfondir l'étude subjective, en élargissant l'espace produit présenté aux musiciens. En particulier, la raideur de la baguette est un paramètre à faire varier, en plus du cambre, pour rendre compte de la diversité des archets rencontrée en général. L'introduction de cas « pathologiques » d'archets dans l'espace produit peut aider à identifier les critères d'acceptabilité en termes de stabilité par les musiciens. Par ailleurs, il serait pertinent de mener l'étude subjective

3. *L'archet dans tous ses états*, le 17 décembre 2010 à SUPMÉCA, Saint-Ouen.

4. *Modélisez votre archet*, le 23 mai 2011 à l'ITEMM, Le Mans.

conjointement avec l'enregistrement des sons et du geste, l'analyse du geste permettant de comprendre comment le musicien adapte celui-ci en fonction du comportement mécanique de l'archet. Cette étude pourrait s'appuyer sur des moyens de mesure existants [95].

Ce travail de thèse s'est concentré sur les propriétés statiques de l'archet sous tension. Une suite logique du présent travail est de considérer les propriétés dynamiques, dans le but d'établir un lien avec les qualités de jeu d'une part, et les caractéristiques sonores d'autre part.

Le comportement dynamique de l'archet, en partie conséquence des réglages statiques, influe sur la jouabilité. Cet aspect pourra être étudié en considérant un modèle dynamique d'archet en interaction avec une corde. En mesurant l'action du musicien sur l'archet dans divers modes de jeu, il est envisageable d'alimenter ce modèle avec des données d'entrées réalistes. Ainsi, il devrait être possible d'évaluer comment l'archet, en fonction de ses caractéristiques dynamiques (masse, raideur, amortissement), « filtre » le geste du musicien et le répercute sur la corde. Cette approche pourrait aider par exemple à mieux comprendre l'origine des tremblements qui peuvent se manifester sur des notes tenues, ou encore les conditions auxquelles l'archet favorise des attaques douces ou marquées. L'effet éventuel des non-linéarités mises en évidence dans le présent travail (par exemple, le comportement raidissant de la mèche avec la force de jeu) pourra être évalué.

L'influence des propriétés dynamiques de l'archet sur le contenu spectral des notes tenues doit également être examinée. D'abord, une étude subjective et objective du son produit par différents archets pourra être menée afin d'identifier les conditions dans lesquelles les effets sont les plus significatifs. Une étude théorique pourra ensuite être envisagée, en prenant en compte les vibrations de l'archet dans la modélisation de la corde frottée. À cette fin, un modèle éléments finis d'archet peut être recalé en dynamique afin d'accéder indirectement aux mobilités longitudinale et transversale – dont une mesure non intrusive reste délicate – en tout point de la mèche, pour une tension et une force de jeu données. Une fois cette approche validée, il devrait être possible de discuter l'influence éventuelle de l'amortissement sur l'interaction avec la corde frottée.

RÉFÉRENCES

- [1] F. ABELLAN, C. BEAUREPAIRE, T. LE BOURDON, R. POTTIER, M.L. TEXIER et C. THEPENIER. Évaluation de la qualité d'archets de violon. Projet ENSIM, 2004.
- [2] F. ABLITZER, J.-P. DALMONT et N. DAUCHEZ. Modélisation statique de l'archet de violon : influence de la tension du crin sur la raideur latérale. *Actes du 19^e Congrès Français de Mécanique*. Marseille, France, 2009.
- [3] F. ABLITZER, J.-P. DALMONT et N. DAUCHEZ. Influence du réglage d'un archet de violon sur ses propriétés mécaniques. *10^e Congrès Français d'Acoustique*, 2010.
- [4] F. ABLITZER, J.P. DALMONT et N. DAUCHEZ. Static model of a violin bow : influence of camber and hair tension on mechanical behavior. *Journal of the Acoustical Society of America*, 131(1) 773–782, 2012.
- [5] F. ABLITZER, N. DAUCHEZ, J.-P. DALMONT et N. POIDEVIN. Mécanique de l'archet de violon : lien entre évolution et répertoire musical. *5th Conference on Interdisciplinary Musicology*. Paris, France, 26-29 October, 2009.
- [6] F. ABLITZER, N. DAUCHEZ et J.P. DALMONT. A predictive model for the adjustment of violin bows. *Acta Acustica united with Acustica*. Soumis le 26 août 2011.
- [7] J.M. ADRIEN. *Étude et simulation de systèmes vibratoires complexes – Application à la synthèse sonore par modélisation physique*. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1989.
- [8] K. ALTMAN, ARCHETIER. <http://http://www.altmanbows.com/>.
- [9] ARCUS. <http://www.arcus-bow.de/>.
- [10] J. ARGYRIS et H.-P. MLEJNEK. *Dynamics of structures*. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [11] A. ASKENFELT. Measurement of bow motion and bow force in violin playing. *Journal of the Acoustical Society of America*, 80(4) 1007–1015, 1986.
- [12] A. ASKENFELT. Observations on the dynamic properties of violin bows. *STL-QPSR*, 33(4) 43–49, 1992.
- [13] A. ASKENFELT. A look at violin bows. *STL-QPSR*, 34(2–3) 41–48, 1993.
- [14] A. ASKENFELT. Observations on the violin bow and the interaction with the string. *STL-QPSR*, 36(2–3) 23–42, 1995.

- [15] A. ASKENFELT et K. GUETTLER. The bouncing bow : Some important parameters. *TMH-QPSR*, 38(2-3) 53–57, 1997.
- [16] A. ASKENFELT et K. GUETTLER. Bows and timbre – Myth or reality? *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, pages 273–276, Perugia, Italy, 2001.
- [17] W. BACHMANN. *Die Anfänge des Streichinstrumentenspiels*. Breitkopf & Härtel, Leipzig, 1964.
- [18] G. BISSINGER. Merging microphone and accelerometer hammer-impact modal analysis measurements : working example – the violin bow. *Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference*, pages 850–854, 1993.
- [19] I. BRÉMAUD. Propriétés vibratoires des bois de facture instrumentale et biodiversité. *Musique & Technique*, 4 29–42, 2009.
- [20] I. BRÉMAUD, J. GRIL et B. THIBAUT. Anisotropy of wood vibrational properties : dependence on grain angle and review of literature data. *Wood Science and Technology*, pages 1–20, 2010.
- [21] I. BRÉMAUD et N. POIDEVIN. Approches culturelles et mécaniques dans le choix des bois en facture : cas des archets anciens. *Actes du 5e Congrès Interdisciplinaire de Musicologie*, Paris, France, 2009.
- [22] V. BUCUR. *Acoustics of Wood*, chapitre Wood Species for Musical Instruments, pages 173–216. Springer, Berlin Heidelberg, 2006.
- [23] P. CARLSSON et M. TINNSTEN. Geometrical compensation for varying material properties in bows by the use of numerical optimization. *Acta Acustica united with Acustica*, 93(1) 145–151, 2007.
- [24] R. CAUSSÉ, J.P. MAIGRET, C. DICHEL et J. BENSOAM. Study of violin bow quality. *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, Perugia, Italy, 2001.
- [25] A. CHAIGNE et J. KERGOMARD. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, Paris, 2008.
- [26] B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. *Méthode asymptotique numérique*. Hermes Science, 2007.
- [27] CITES (CONVENTION ON INTERNATIONAL TRADE IN ENDANGERED SPECIES OF WILD FAUNA AND FLORA). *14th meeting of the Conference of the Parties*, The Hague, Netherlands, 3-15 Juin 2007.
- [28] L. CREMER. *The physics of the violin*. MIT Press, Cambridge, 1984.
- [29] M. A. CRISFIELD. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, volume 1: Essentials. Wiley, Chichester, 1991.
- [30] M. A. CRISFIELD. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, volume 2: Advanced topics. Wiley, Chichester, 1997.
- [31] N. DAUCHEZ, J.M. GÉNEVAUX et I. BRÉMAUD. Qualité des archets de violons et instabilité de type flambement. *Actes du 8e Congrès Français d'Acoustique*, Tours, France, 2006.

- [32] J. DELARUE et J.M. SIEFFERMANN. Sensory mapping using flash profile. comparison with a conventional descriptive method for the evaluation of the flavour of fruit dairy products. *Food Quality and Preference*, 15(4), 2004.
- [33] A. DEMOUCRON, A. ASKENFELT et R. CAUSSÉ. Measuring bow force in bowed string performance : Theory and implementation of a bow force sensor. *Acta Acustica united with Acustica*, 95(4) 718–732, 2009.
- [34] M. DEMOUCRON. *On the control of virtual violins : Physical modelling and control of bowed string instruments*. Thèse de doctorat, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2008.
- [35] C. ESPEY. The bow in process – the workshop of charles espey. <http://charlesespeybows.blogspot.com/>.
- [36] M. FAFARD. *Modélisation des structures minces par éléments finis*, chapitre 4 – Algorithmes et stratégies de résolution pour l’analyse non linéaire. Institut pour la Promotion des Sciences de l’Ingénieur, 1999.
- [37] M. FAFARD. *Modélisation des structures minces par éléments finis*, chapitre 8 – Flambement linéaire et non linéaire. Institut pour la Promotion des Sciences de l’Ingénieur, 1999.
- [38] F.J. FÉTIS. *Antoine Stradivari luthier célèbre connu sous le nom de Stradivarius*. Vuillaume, Paris, 1856.
- [39] C. FLESCHE. *The art of violin playing, vol. 1*. C. Fischer, New York, 2000.
- [40] N. H. FLETCHER et T. D. ROSSING. *The physics of musical instruments*. Springer, New York, 1998.
- [41] FOLLMAN & SONS. <http://www.follmann-tonewoods.com/>.
- [42] F. FREY. *Analyse des structures et milieux continus – Mécanique des structures*, chapitre 22 – Instabilité énergétique. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2000.
- [43] P. GAILLARD, N. SPANGHERO-GAILLARD et M.P. BERTON. L’impact des archets de violons sur la qualité sonore résultante en situation de jeu musical. *5e Congrès Interdisciplinaire de Musicologie*, Paris, France, 2009.
- [44] I. GALAMIAN. *Enseignement et technique du violon*. Éditions Van de Velde, 1993.
- [45] T. GALLOT, R. GIOT, S. HULEUX et J. MAUPRIVEZ. Caractérisation objective des archets de violon. Projet ENSIM, 2005.
- [46] T. GALLOT et A. PELAT. Étude de l’instabilité mécanique des archets de violon. Projet ENSIM, 2006.
- [47] F. GAUTIER, V. DOUTAUT et J.-M. FOUILLEUL. *Lutherie tools : projet collaboratif entre ateliers de lutherie et laboratoires*. *Musique & Technique*, 4 21–28, 2009.
- [48] T. M. GERBETH. Die Biegung des Streichbogens – Das Geheimnis der Spieleigenschaften? *Pernambuco*, 3. <http://www.gerbeth.at/>.
- [49] T. M. GERBETH. Die Herstellung eines modernen Streichbogen. *Pernambuco*, 1–4. <http://www.gerbeth.at/>.
- [50] T. M. GERBETH. Weniger ist oft mehr! Die Kunst der Mengenbestimmung bei Haarbezügen. *Pernambuco*, 5. <http://www.gerbeth.at/>.

- [51] J. E. GRAEBNER et N. C. PICKERING. Optimizing the taper-camber relationship in bows for string instruments (a). *Journal of the Acoustical Society of America*, 127(3) 1791, 2010.
- [52] J. GRUNBERGER, ARCHETIER. Étude de l'archet et de son cambre. Stage, 2009.
- [53] A. GRÜTTER. A bow on the couch. <http://www.andreasgrutter.nl/>.
- [54] K. GUETTLER. On the creation of the helmholtz motion in bowed strings. *Acta Acustica united with Acustica*, 88(6) 970–985, 2002.
- [55] K. GUETTLER. *The science of string instruments*, chapitre Bows, strings, and bowing, pages 279–299. Springer, 2010.
- [56] K. GUETTLER et A. ASKENFELT. Some aspects of bow resonances – conditions for spectral influence on the bowed string. *STL-QPSR*, 36(2–3) 107–118, 1995.
- [57] K. GUETTLER et A. ASKENFELT. On the kinematics of spiccato bowing. *TMH-QPSR*, 38(2–3) 047–052, 1997.
- [58] M. GÉRADIN et A. CARDONA. *Flexible multibody dynamics : a finite element approach*. Wiley, 2001.
- [59] M. GÉRADIN et D. RIXEN. *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*. Masson, 1996.
- [60] D. W. HAINES, J.M. LEBAN et C. HERBÉ. Determination of young's modulus for spruce, fir and isotropic materials by the resonance flexure method with comparisons to static flexure and other dynamic methods. *Wood Science and Technology*, 30 253–263, 1996.
- [61] C. HOMO-LECHNER. *Sons et instruments de musique au Moyen Age : Archéologie musicale dans l'Europe du VIIe au XIVe siècle*. Éditions Errance, Paris, 1996.
- [62] R. HOPFNER. Zur Entwicklung des Streichbogens anhand von Objekten der Sammlung alter Musikinstrumente, Wien. 16. *Musikinstrumentenbau-Symposium*. Michaelstein, Germany, 3-4 November, Stiftung Kloster Michaelstein, 1995.
- [63] C. HUTCHINS et V. BENADE, éditeurs. *Research papers in violin acoustics : 1975-1993*. Acoustical Society of America, Woodbury, 1997.
- [64] J. W. HUTCHINSON et W. T. KOITER. Postbuckling theory. *Applied Mechanics Reviews*, 23 1353–1366, 1970.
- [65] ISO 9000 :2000. Systèmes de management de la qualité – Principes essentiels et vocabulaire, 2000.
- [66] JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY. *Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method (JCGM 101 :2008)*. Bureau International des Poids et Mesures.
- [67] E. L. LONGUI, T. YOJO, D. R. LOMBARDI et E. S. ALVES. The potential of ipê (*Handroanthus* spp.) and maçaranduba (*Manilkara* spp.) woods in the manufacture of bows for string instruments. *IAWA Journal*, 31(2) 149–160, 2010.
- [68] G. LUCCHI. L'arco. CD-ROM, 1996.
- [69] A. MAMOU-MANI. *Précontraintes et vibration des tables d'harmonie – Vers une modélisation du savoir-faire des fabricants d'instruments de musique*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2007.

- [70] A. MAMOU-MANI, J. FRELAT et C. BESNAINOU. Numerical simulation of a piano soundboard under downbearing. *Journal of the Acoustical Society of America*, 123(4) 2401–2406, 2008.
- [71] M. MATSUNAGA et K. MINATO. Physical and mechanical properties required for violin bow materials ii : Comparison of the processing properties and durability between pernambuco and substitutable wood species. *Journal of Wood Science*, 44 142–146, 1998.
- [72] M. MATSUNAGA, M. SUGIYAMA, K. MINATO et M. NORIMOTO. Physical and mechanical properties required for violin bow materials. *Holzforschung*, 50(6) 511–517, 1996.
- [73] M.E. MCINTYRE, R.T. SCHUMACHER et J. WOODHOUSE. On the oscillations of musical instruments. *Journal of the Acoustical Society of America*, 74(5) 1325–1345, 1983.
- [74] S. OLLIVIER, J.P. DALMONT et J. KERGOMARD. Idealized models of reed woodwinds. part i : Analogy with the bowed string. *Acta Acustica united with Acustica*, 90(6) 1192–1203, 2004.
- [75] PAFI (PLATERFORME D'AIDE À LA FACTURE INSTRUMENTALE). <http://pafi.univ-lemans.fr/>.
- [76] N. PICKERING. Physical characteristics of violin bows. *Journal of the Violin Society of America*, 8(2) 41–58, 1987.
- [77] N. C. PICKERING. Transverse vibration modes in violin bows. *Journal of the Violin Society of America*, 19(1) 29–45, 2002.
- [78] R. PITTEROFF. *Contact mechanics of the bowed string*. Thèse de doctorat, University of Cambridge, UK, 1995.
- [79] R. PITTEROFF et J. WOODHOUSE. Mechanics of the contact area between a violin bow and a string. part I : Reflection and transmission behaviour. *Acta Acustica united with Acustica*, 84(3) 543–562, 1998.
- [80] N. POIDEVIN. Premiers archets à travers l'iconographie. *Musique & Technique*, 4 109–124, 2009.
- [81] N. POIDEVIN, ARCHETIÈRE. <http://www.archets-poidevin.com/>.
- [82] E. RAVINA, P. SILVESTRI et A. AIRENTI. Experimental modal analysis of bows. *Acoustics'08*, Paris, France, 2008.
- [83] J. REGH. Grading methods for pernambuco. *Journal of the Violin Society of America*, 19(1) 3–28, 2004.
- [84] J. RIVIÈRE et X. SUZANNE. Intégration d'un outil de caractérisation des archets. Projet ENSIM, 2007.
- [85] F. ROCABOY. The structure of bow-hair fibres. *Catgut Acoustical Society Journal*, 1(6) 34–36, 1990.
- [86] B. ROLLAND. Bow for a string instrument – US Patent # 5 323 675, Juin 1994.
- [87] B. ROLLAND. The playing parts of the bow : focusing on the stick. *Journal of the Violin Society of America*, 19(1) 201–217, 2002.
- [88] B. ROLLAND. Sticking point. *The Strad*, 114(1358) 614–619, 2003.

- [89] B. ROLLAND. Innovation and shifting paradigms : Innovation in bow making. *Journal of the Violin Society of America*, 21(2) 82–91, 2007.
- [90] T. D. ROSSING, éditeur. *The science of string instruments*. Springer, 2010.
- [91] Henry SAINT-GEORGE. *The bow, its history, manufacture and use*. “The Strad” Office, London, 1896.
- [92] J.C. SCHELLENG. The bowed string and the player. *Journal of the Acoustical Society of America*, 53(1) 26–41, 1973.
- [93] L. SCHIMLECK, C. ESPEY, C. MORA, R. EVANS, A. TAYLOR et G. MUNIZ. Characterization of the wood quality of pernambuco (*Caesalpinia echinata* lam) by measurements of density, extractives content, microfibril angle, stiffness, color, and nir spectroscopy. *Holzforschung*, 63 457–463, 2009.
- [94] E. SCHOONDERWALDT. *Mechanics and acoustics of violin bowing : Freedom, constraints and control in performance*. Thèse de doctorat, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2009.
- [95] E. SCHOONDERWALDT et M. DEMOUCRON. Extraction of bowing parameters from violin performance combining motion capture and sensors. *Journal of the Acoustical Society of America*, 126(5) 2695–2708, 2009.
- [96] R. SCHUMACHER. Some aspects of the bow. *Catgut Acoustical Society Newsletter*, 24 5–8, 1975.
- [97] R. T. SCHUMACHER. Self-sustained oscillations of the bowed string. *Acustica*, 43(2) 109–120, 1979.
- [98] Robert T. SCHUMACHER. Measurements of some parameters of bowing. *Journal of the Acoustical Society of America*, 96(4) 1985–1998, 1994.
- [99] H. SCOTT. Finding the best bow for the job. *Strings*, 156 59–63, 2008.
- [100] J.H. SMITH et J. WOODHOUSE. The tribology of rosin. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(8) 1633–1681, 2000.
- [101] J.L. TAUZIÈDE. Cor Léonis. <http://www.archets.fr/>.
- [102] U. WEGST et M. ASHBY. Alternative woods for violin bows. *Newsletter of the British Violin Making Association*, (5) 7–13, 1996.
- [103] U. WEGST, S. OBERHOFF, M. WELLER et M. ASHBY. Materials for violin bows. *International Journal of Materials Research*, 98 1230–1237, 2007.
- [104] U. G. K. WEGST. Wood for sound. *American Journal of Botany*, 93(10) 1439–1448, 2006.
- [105] J. WOODHOUSE et P.M. GALLUZZO. The bowed string as we know it today. *Acta Acustica united with Acustica*, 90 579–589, 2004.
- [106] J. WOODHOUSE, R. T. SCHUMACHER et S. GAROFF. Reconstruction of bowing point friction force in a bowed string. *Journal of the Acoustical Society of America*, 108(1) 357–368, 2000.

ANNEXE A

RAIDEUR, CAMBRE ET QUALITÉS DE JEU

Cette annexe présente un diagramme issu d'un article de l'archetier Thomas Gerbeth [49]. Il renseigne sur les qualités de jeu et de sonorité d'un archet en fonction de la raideur de la baguette et de sa quantité de cambre. Ce diagramme et le texte qui l'accompagne ont été traduits de l'allemand.

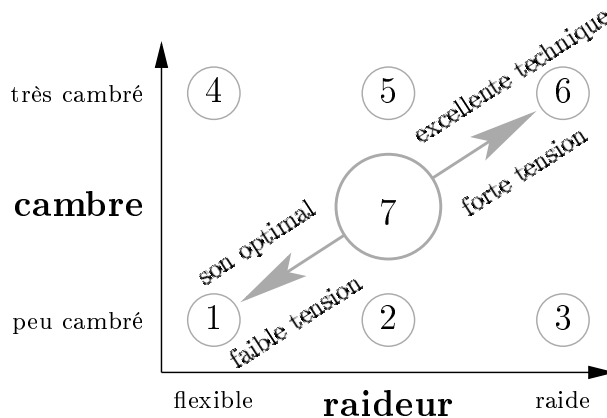


Figure A.1 – Lien entre raideur et cambre de la baguette, et qualités de jeu et de sonorité de l'archet, d'après Thomas Gerbeth [49].

1. baguette flexible, peu cambrée

- excellentes qualités sonores (son moelleux, intense, riche en harmoniques)
- peu réactif, mauvais comportement en rebond
- cependant, « tenue de route » confortable

2. baguette moyennement raide, peu cambrée

- correspond plus ou moins à l'école française
- bon son

3. baguette raide, peu cambrée

- attaques douces, avec de bonnes qualités sonores et un meilleur comportement en rebond

- faible inertie de l'archet

4. **baguette flexible, très cambrée**

- bonnes qualités sonores
- problèmes de contrôle en jeu

5. **baguette moyennement raide, très cambrée**

- correspond plus ou moins à l'école allemande
- excellent comportement en rebond
- « consonnes » très nettes à l'attaque
- souvent associée à des problèmes de « chant »

6. **baguette raide, très cambrée**

- extrême nervosité et réactivité
- problèmes de « chant » manifestes
- son très « étroit » et « aigu »

7. **baguette moyennement raide, moyennement cambrée**

Zone de réglage optimale de l'archetier, permettant de trouver un bon compromis entre qualités de jeu (comportement en rebond, réactivité...) et qualités sonores.

ANNEXE B

FORMULATION COROTATIONNELLE D'UN ÉLÉMENT DE POUTRE PLANE

Cette section présente les étapes de la formulation corotationnelle d'un élément de poutre 2D. Elle s'inspire en partie des développements donnés par Crisfield [29]. Des développements particuliers nécessaires à la modélisation de l'archet (application d'une force suiveuse dont l'amplitude varie avec les déplacements), absents dans la formulation originale, sont présentés dans les sections B.6 et B.7.

B.1 Matrice de raideur locale

On considère un tronçon de poutre droite correspondant à un élément de la structure discrétisée. On se place dans le cadre des hypothèses d'Euler-Bernoulli. Ainsi, toute section droite de la poutre est indéformable et reste orthogonale à la ligne neutre. On note $u_l(x)$ et $v_l(x)$ les déplacements axial et transversal d'un point de la ligne neutre, repéré par son abscisse x . Soit un point de la section de coordonnées (x, y) . Avec les hypothèses cinématiques retenues, le déplacement de ce point a pour composantes (fig. B.1(a)) :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u_l(x) - y \frac{\partial v_l}{\partial x} \\ v(x, y) &= v_l(x) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Le lien entre déformations et déplacements est exprimé par le tenseur de Green. L'hypothèse des petites déformations permet de n'en retenir que la partie linéaire :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) . \quad (\text{B.2})$$

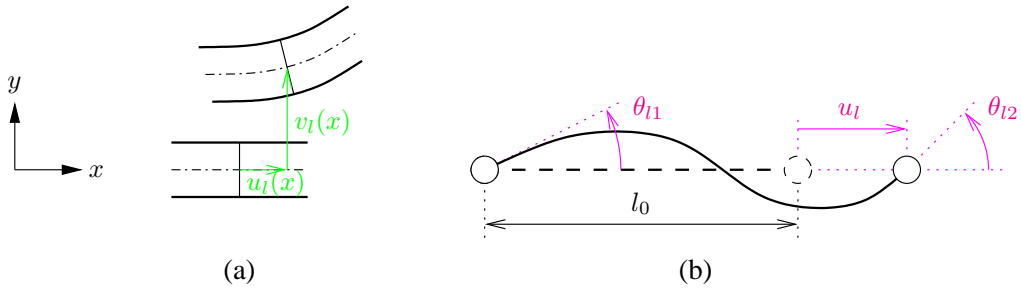


Figure B.1 – Champ de déplacement local. (a) Déplacement d'un point de la ligne neutre. (b) Degrés de liberté aux nœuds.

Les déformations ont alors pour expression :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_l}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_l}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0\end{aligned}\quad (\text{B.3})$$

L'énergie de déformation associée au champ de déformation (B.3) est :

$$\mathcal{V}_{\text{int}} = \int_{V_0} \frac{1}{2} E \varepsilon_x^2 dV = \frac{1}{2} EA \int_0^{l_0} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} EI_z \int_0^{l_0} \left(\frac{\partial^2 v_l}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (\text{B.4})$$

où A désigne l'aire de la section et $I_z = \int_A y^2 dA$ son moment quadratique.

On approxime le champ de déplacement par :

$$\begin{aligned}u_l(x) &= \mathbf{N}_1(x) \mathbf{p}_l \\ v_l(x) &= \mathbf{N}_2(x) \mathbf{p}_l,\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

où $\mathbf{N}_1(x) = [\phi_1(x) \ 0 \ 0]$ et $\mathbf{N}_2(x) = [0 \ \phi_2(x) \ \phi_3(x)]$ sont les matrices des fonctions de forme et $\mathbf{p}_l = [u_l \ \theta_{l1} \ \theta_{l2}]^T$ le vecteur des degrés de liberté aux nœuds (fig. B.1(b)). Avec une interpolation linéaire du déplacement axial et quadratique du déplacement transversal, les fonctions de forme ont pour expression :

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \frac{x}{l_0} \\ \phi_2(x) &= \frac{x^3}{l_0^2} - \frac{2x^2}{l_0} + x \\ \phi_3(x) &= \frac{x^3}{l_0^2} - \frac{x^2}{l_0}.\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

En injectant (B.5) dans l'expression de l'énergie de déformation (B.4), celle-ci se met finalement sous la forme :

$$\mathcal{V}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathbf{p}_l^T \mathbf{K}_l \mathbf{p}_l, \quad (\text{B.7})$$

avec

$$\mathbf{K}_l = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_z}{l_0} & \frac{2EI_z}{l_0} \\ 0 & \frac{2EI_z}{l_0} & \frac{4EI_z}{l_0} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Aux degrés de liberté u_l , θ_{l1} et θ_{l2} sont associés respectivement l'effort normal N et les moments aux nœuds \bar{M}_1 et \bar{M}_2 , rassemblés dans le vecteur des efforts intérieurs \mathbf{q}_l . L'équation traduisant l'équilibre du tronçon de poutre est alors :

$$\mathbf{q}_l = \mathbf{K}_l \mathbf{p}_l . \quad (\text{B.9})$$

B.2 Degrés de liberté locaux / globaux

B.2.1 Repère corotationnel

En plus de la déformation du tronçon de poutre décrite dans la section précédente, on suppose maintenant qu'il subit un mouvement de corps rigide, composé d'une translation et d'une rotation par rapport au repère fixe \mathcal{R}_0 . Afin de suivre ce mouvement, on associe à l'élément un repère « corotationnel » \mathcal{R}_C formé des vecteurs \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 (fig. B.2). Le vecteur \mathbf{e}_1 est orienté du nœud 1 au nœud 2 de l'élément. Le vecteur \mathbf{e}_2 est orthogonal à \mathbf{e}_1 . Dans une configuration déformée quelconque, le repère corotationnel est parfaitement défini par la donnée de l'angle β entre la direction de l'élément et l'horizontale. Cet angle est noté β_0 dans la configuration initiale.

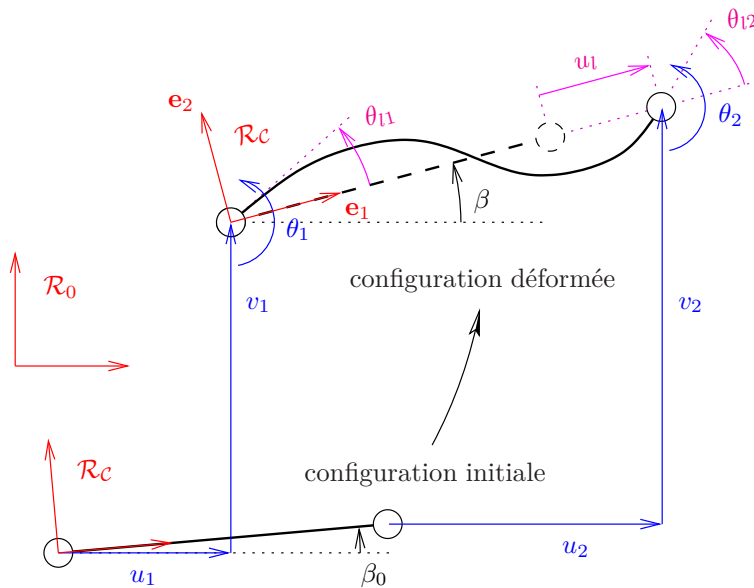


Figure B.2 – Configurations initiale et déformée.

B.2.2 Déplacements globaux et locaux

L'élément de poutre considéré, dans la configuration initiale, est repéré par les coordonnées de ses nœuds $\mathbf{x}_1 = [X_1 \ Y_1]^T$ et $\mathbf{x}_2 = [X_2 \ Y_2]^T$. Dans une configuration déformée quelconque, ses déplacements par rapport au repère fixe \mathcal{R}_0 sont traduits par 6 degrés de liberté : deux translations et une rotation à chaque nœud. On rassemble ces degrés de liberté « globaux » dans le vecteur $\mathbf{p} = [u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2]^T$. À partir de ces déplacements, supposés connus, il est nécessaire de remonter aux degrés de liberté « locaux » $\mathbf{p}_l = [u_l \ \theta_{l1} \ \theta_{l2}]^T$.

B.2.2.1 Déformation de traction/compression

Le déplacement axial local s'écrit simplement

$$u_l = l - l_0, \quad (\text{B.10})$$

où la longueur de l'élément dans la configuration déformée

$$l = \sqrt{((X_2 + u_2) - (X_1 + u_1))^2 + ((Y_2 + v_2) - (Y_1 + v_1))^2} \quad (\text{B.11})$$

et la longueur initiale

$$l_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \quad (\text{B.12})$$

sont calculés à partir des déplacements.

B.2.2.2 Déformation de flexion

Les rotations aux nœuds locales s'écrivent (fig. B.2)

$$\begin{aligned} \theta_{1l} &= \beta_0 + \theta_1 - \beta \\ \theta_{2l} &= \beta_0 + \theta_2 - \beta, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

où l'angle définissant l'orientation du repère corotationnel

$$\beta = \arctan \left(\frac{(Y_2 + v_2) - (Y_1 + v_1)}{(X_2 + u_2) - (X_1 + u_1)} \right) \quad (\text{B.14})$$

et sa valeur initiale

$$\beta_0 = \arctan \left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right) \quad (\text{B.15})$$

sont calculés à partir des déplacements.

B.3 Matrice de transformation

L'objet de cette section est de relier de petites variations des déplacements locaux $\delta \mathbf{p}_l = [\delta u_l \ \delta \theta_{1l} \ \delta \theta_{2l}]^T$ aux petites variations des déplacements globaux $\delta \mathbf{p} = [\delta u_1 \ \delta v_1 \ \delta \theta_1 \ \delta u_2 \ \delta v_2 \ \delta \theta_2]^T$ correspondantes, par une expression de la forme $\delta \mathbf{p}_l = \mathbf{F} \delta \mathbf{p}$, où \mathbf{F} est appelée « matrice de transformation ». Cette relation peut être obtenue par différentiation des équations (B.10) et (B.13), ou de façon équivalente à partir de considérations géométriques. Cette deuxième approche est présentée ici.

On considère un petit mouvement de l'élément depuis une configuration quelconque, représenté sur la figure B.3. Ce mouvement se traduit par de petites variations des déplacements $\delta \mathbf{d}_1 = [\delta u_1 \ \delta v_1]^T$ et $\delta \mathbf{d}_2 = [\delta u_2 \ \delta v_2]^T$ aux nœuds. On note $\delta \mathbf{d}_{21} = \delta \mathbf{d}_2 - \delta \mathbf{d}_1$.

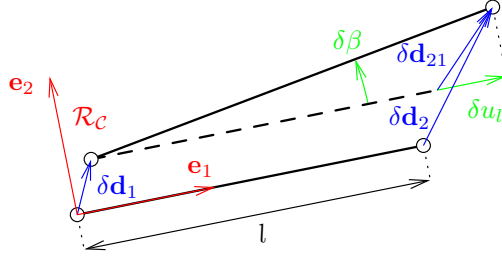


Figure B.3 – Petit mouvement de l'élément depuis une configuration quelconque.

La variation du déplacement axial s'écrit simplement :

$$\begin{aligned}
 \delta u_l &= \delta \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{e}_1 \\
 &= [\delta u_2 - \delta u_1 \quad \delta v_2 - \delta v_1] \begin{Bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{Bmatrix} \\
 &= \cos \beta \delta u_2 - \cos \beta \delta u_1 + \sin \beta \delta v_2 - \sin \beta \delta v_1 \\
 &= \mathbf{r}^T \delta \mathbf{p}
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

avec $\mathbf{r} = [-\cos \beta \quad -\sin \beta \quad 0 \quad \cos \beta \quad \sin \beta \quad 0]^T$. De même, une petite variation de l'angle associé au repère corotationnel peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \delta \beta &= \frac{1}{l} \delta \mathbf{d}_{21} \cdot \mathbf{e}_2 \\
 &= \frac{1}{l} [\delta u_2 - \delta u_1 \quad \delta v_2 - \delta v_1] \begin{Bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{Bmatrix} \\
 &= \frac{1}{l} (-\sin \beta \delta u_2 + \sin \beta \delta u_1 + \cos \beta \delta v_2 - \cos \beta \delta v_1) \\
 &= \frac{1}{l} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{p}
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

avec $\mathbf{z} = [\sin \beta \quad -\cos \beta \quad 0 \quad -\sin \beta \quad \cos \beta \quad 0]^T$. De cette expression et des équations (B.13), on déduit la variation des rotations aux nœuds :

$$\delta \theta_{1l} = \delta \beta_0 + \delta \theta_1 - \delta \beta = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \delta \mathbf{p} - \frac{1}{l} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{p} \tag{B.18}$$

$$\delta \theta_{2l} = \delta \beta_0 + \delta \theta_2 - \delta \beta = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \delta \mathbf{p} - \frac{1}{l} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{p} \tag{B.19}$$

Le tout peut être mis sous forme matricielle :

$$\delta \mathbf{p}_l = \begin{Bmatrix} \delta u_l \\ \delta \theta_{1l} \\ \delta \theta_{2l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \mathbf{r}^T & & & \\ [0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0] & -\frac{1}{l} \mathbf{z}^T & \\ [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1] & -\frac{1}{l} \mathbf{z}^T & \end{bmatrix} \delta \mathbf{p} = \mathbf{F} \delta \mathbf{p}, \tag{B.20}$$

avec \mathbf{F} la matrice de transformation. Celle-ci dépend des déplacements, par l'intermédiaire des variables β et l :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\cos \beta & -\sin \beta & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\frac{\sin \beta}{l} & \frac{\cos \beta}{l} & 1 & \frac{\sin \beta}{l} & -\frac{\cos \beta}{l} & 0 \\ -\frac{\sin \beta}{l} & \frac{\cos \beta}{l} & 0 & \frac{\sin \beta}{l} & -\frac{\cos \beta}{l} & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.21})$$

B.4 Lien entre efforts intérieurs locaux et globaux

Une fois la matrice de transformation connue, il est possible d'exprimer un lien entre les efforts intérieurs locaux \mathbf{q}_{li} associés aux déplacements \mathbf{p}_l et les efforts intérieurs globaux \mathbf{q}_i associés aux déplacement \mathbf{p} . Pour cela, on exprime le fait que le travail virtuel est le même dans le repère global \mathcal{R}_0 et le repère corotationnel \mathcal{R}_C :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{p}^{*\text{T}} \mathbf{q}_i &= \delta \mathbf{p}_l^{*\text{T}} \mathbf{q}_{li} \\ &= (\mathbf{F} \delta \mathbf{p}^*)^{\text{T}} \mathbf{q}_{li} \\ &= \delta \mathbf{p}^{*\text{T}} \mathbf{F}^{\text{T}} \mathbf{q}_{li}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Cette expression étant valable pour tout déplacement virtuel $\delta \mathbf{p}^{*\text{T}}$, on obtient finalement la relation :

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{F}^{\text{T}} \mathbf{q}_{li}. \quad (\text{B.23})$$

B.5 Matrice de raideur tangente

À ce stade, connaissant les déplacements globaux \mathbf{p} de la structure dans la configuration déformée, nous savons calculer les déplacements locaux (sections B.2.2.1 et B.2.2.2), dont on déduit les efforts intérieurs locaux \mathbf{q}_{li} (eq. (B.9)). La matrice de transformation \mathbf{F} , également calculée dans la configuration déformée (eq. (B.21)), permet alors de remonter aux efforts intérieurs globaux \mathbf{q}_i associés aux déplacements \mathbf{p} . Connaissant les efforts extérieurs appliqués \mathbf{q}_e , il est donc possible de dire si l'équilibre de la structure est vérifié. Il reste à déterminer maintenant comment sont obtenus les déplacements globaux, supposés connus jusqu'à maintenant.

On considère la structure soumise à des efforts extérieurs \mathbf{q}_e dans une configuration quelconque (initiale ou déformée). L'équation d'équilibre à satisfaire est :

$$\mathbf{g} = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_e = \mathbf{0}, \quad (\text{B.24})$$

où \mathbf{g} est le vecteur des résidus. On suppose pour l'instant que les efforts extérieurs \mathbf{q}_e ne dépendent pas des déplacements (ce point sera abordé dans les sections B.6 et B.7). Cette équation peut être linéarisée par un développement en série de Taylor au premier ordre autour d'un déplacement \mathbf{p} quelconque :

$$\mathbf{g} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}} \delta \mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (\text{B.25})$$

Ainsi, dans le cadre d'une résolution itérative (généralement par l'algorithme de Newton-Raphson), en supposant que l'équilibre n'est pas satisfait à l'itération i par les

déplacements $\mathbf{p}^{(i)}$ (c'est-à-dire $\mathbf{g}^{(i)} \neq \mathbf{0}$), on calcule une correction $\delta\mathbf{p}^{(i+1)}$ en résolvant l'équation :

$$\mathbf{g}^{(i)} + \mathbf{K}_t^{(i)} \delta\mathbf{p}^{(i+1)} = \mathbf{0} . \quad (\text{B.26})$$

où $\mathbf{K}_t^{(i)}$ est la matrice de raideur tangente calculée à partir des déplacements $\mathbf{p}^{(i)}$. Elle a pour expression générale :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{p}} && (\mathbf{q}_e \text{ ne dépend pas des déplacements}) \\ &= \frac{\partial (\mathbf{F}^T \mathbf{q}_{li})}{\partial \mathbf{p}} && (\text{d'après (B.23)}) \\ &= \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{q}_{li}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{q}_{li} && (\text{B.27}) \\ &= \mathbf{F}^T \mathbf{K}_l \frac{\partial \mathbf{p}_l}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{q}_{li} && (\text{d'après (B.9)}) \\ &= \underbrace{\mathbf{F}^T \mathbf{K}_l \mathbf{F}}_{\mathbf{K}_{t1}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{q}_{li}}_{\mathbf{K}_{t\sigma}} && (\text{d'après (B.20)}) \end{aligned}$$

Le premier terme, \mathbf{K}_{t1} , est la matrice de raideur matérielle (linéaire). Elle dépend des déplacements par le biais de la matrice de transformation. Son expression rappelle la transformation de coordonnées que l'on fait habituellement en éléments finis linéaires avant l'assemblage des éléments (voir par exemple [59]). Ici, elle convertit la raideur locale associée aux 3 degrés de liberté locaux \mathbf{p}_l en une raideur associée aux 6 degrés de liberté globaux \mathbf{p} . Le deuxième terme, $\mathbf{K}_{t\sigma}$, traduit la raideur géométrique. Elle dépend du champ de contraintes, à travers \mathbf{q}_{li} , et nécessite de dériver la matrice de transformation \mathbf{F} .

Sachant que $\delta\mathbf{F}^T = \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \mathbf{p}} \delta\mathbf{p}$, on va calculer successivement les variations des colonnes de \mathbf{F}^T :

$$\mathbf{F}^T = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{r} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{l} \mathbf{z} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{l} \mathbf{z} \end{array} \right] . \quad (\text{B.28})$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{F}_1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{F}_2} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{F}_3}$

La variation de la première colonne de \mathbf{F}^T s'écrit :

$$\delta\mathbf{F}_1 = \delta\mathbf{r} = \delta \begin{pmatrix} -\cos \beta \\ -\sin \beta \\ 0 \\ \cos \beta \\ \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \beta \\ -\cos \beta \\ 0 \\ -\sin \beta \\ \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix} \delta\beta = \mathbf{z} \delta\beta = \frac{1}{l} \mathbf{z} \mathbf{z}^T \delta\mathbf{p} \quad (\text{d'après (B.17)}) . \quad (\text{B.29})$$

La variation de la deuxième colonne de \mathbf{F}^T s'écrit :

$$\delta \mathbf{F}_2 = \delta \left(-\frac{1}{l} \mathbf{z} \right) = -\frac{1}{l} \delta \mathbf{z} - \delta \left(\frac{1}{l} \right) \mathbf{z} . \quad (\text{B.30})$$

Le premier membre de l'équation nécessite d'exprimer la variation de \mathbf{z} :

$$\delta \mathbf{z} = \delta \begin{Bmatrix} \sin \beta \\ -\cos \beta \\ 0 \\ -\sin \beta \\ \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ 0 \\ -\cos \beta \\ -\sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \delta \beta = -\mathbf{r} \delta \beta = -\frac{1}{l} \mathbf{r} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{p} \quad (\text{d'après (B.17)}) . \quad (\text{B.31})$$

Le deuxième membre se calcule comme suit :

$$\delta \left(\frac{1}{l} \right) = -\frac{\delta l}{l^2} = -\frac{\delta(l_0 + u_l)}{l^2} = -\frac{\delta u_l}{l^2} = -\frac{1}{l^2} \mathbf{r}^T \delta \mathbf{p} \quad (\text{d'après (B.16)}) . \quad (\text{B.32})$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F}_2 &= \frac{1}{l^2} \mathbf{r} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{p} + \frac{1}{l^2} \mathbf{z} \mathbf{r}^T \delta \mathbf{p} \\ &= \frac{1}{l^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T) \delta \mathbf{p} \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

De plus, on remarque dans l'expression (B.28) que $\delta \mathbf{F}_3 = \delta \mathbf{F}_2$. On déduit des calculs précédents :

$$\frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \mathbf{p}} = \left[\frac{1}{l} \mathbf{z} \mathbf{z}^T \mid \frac{1}{l^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T) \mid \frac{1}{l^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T) \right] . \quad (\text{B.34})$$

La matrice de raideur géométrique s'écrit alors :

$$\mathbf{K}_{t\sigma} = \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{q}_{li} = \frac{N}{l} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{l^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T) \quad (\text{B.35})$$

B.6 Prise en compte d'une force suiveuse

L'objectif de cette section est de prendre en compte dans la formulation le caractère suiveur des efforts appliqués à la pointe de la baguette, représentée par le nœud $N + 2$ sur la structure discrétisée. Ces efforts représentent l'action du crin sur la baguette. Ils comportent une composante axiale T_x et une composante transversale T_y . La première est toujours orientée suivant la direction hausse-pointe (c.-à-d. suivant le vecteur \mathbf{e}_{1h}), la deuxième lui est orthogonale (c.-à-d. suivant le vecteur \mathbf{e}_{2h}). On suppose dans un premier temps que leurs amplitudes ne dépendent pas des déplacements. On note β_h l'angle entre l'horizontale et la direction hausse-pointe et l_h la distance hausse-pointe.

Les efforts extérieurs appliqués au nœud $N + 2$, dans le repère fixe, s'écrivent :

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{P} \mathbf{T} \quad (\text{B.36})$$

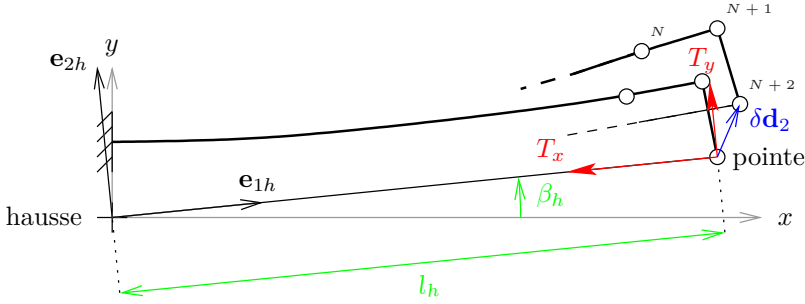


Figure B.4 – Petit mouvement de l'archet depuis une configuration quelconque.

où $\mathbf{T} = [T_x \ T_y]^T$ et \mathbf{P} est la matrice de passage du repère fixe au repère du crin, défini par les vecteurs \mathbf{e}_{1h} et \mathbf{e}_{2h} . Elle a pour expression :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \beta_h & -\sin \beta_h \\ \sin \beta_h & \cos \beta_h \end{bmatrix}. \quad (\text{B.37})$$

On s'intéresse ici à l'élément reliant les nœuds $N + 1$ et $N + 2$. Dans la section B.5, la matrice tangente \mathbf{K}_t a été calculée en considérant des efforts extérieurs ne dépendant pas des déplacements (eq. (B.27)). Dans le cas présent, la variation des efforts extérieurs est à prendre en compte dans le calcul :

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{q}_e}{\partial \mathbf{p}} \quad (\text{B.38})$$

À noter qu'ici $\mathbf{q}_e = [0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{q}_2^T \ 0]^T$, en l'absence d'efforts autres que T_x et T_y . Le développement de $\frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{p}}$ dans l'équation (B.38) est le même que dans l'équation (B.27).

Pour expliciter $\frac{\partial \mathbf{q}_e}{\partial \mathbf{p}}$, on considère une petite variation des efforts appliqués au nœud $N + 2$:

$$\delta \mathbf{q}_2 = \mathbf{P} \delta \mathbf{T} + \delta \mathbf{P} \mathbf{T}. \quad (\text{B.39})$$

Dans le cas où les amplitudes des composantes T_x et T_y ne dépendent pas des déplacements, le premier terme est nul ($\delta \mathbf{T} = \mathbf{0}$). La variation de la matrice de passage, nécessaire au calcul du deuxième terme, s'écrit :

$$\delta \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\sin \beta_h & -\cos \beta_h \\ \cos \beta_h & -\sin \beta_h \end{bmatrix} \delta \beta_h. \quad (\text{B.40})$$

La variation de l'angle β_h apparaissant dans cette expression se calcule en procédant de

la même façon qu'à la section B.3 :

$$\begin{aligned}
 \delta\beta_h &= \frac{1}{l_h} \delta\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{e}_{h2} \\
 &= \frac{1}{l_h} [\delta u_2 \quad \delta v_2] \begin{Bmatrix} -\sin \beta_h \\ \cos \beta_h \end{Bmatrix} \\
 &= \frac{1}{l_h} (-\sin \beta_h \delta u_2 + \cos \beta_h \delta v_2) \\
 &= \frac{1}{l_h} \mathbf{z}_h^T \delta \mathbf{p}
 \end{aligned} \tag{B.41}$$

avec $\mathbf{z}_h = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -\sin \beta_h \quad \cos \beta_h \quad 0]^T$. On obtient finalement :

$$\delta \mathbf{q}_2 = \underbrace{\frac{1}{l_h} \begin{bmatrix} -\sin \beta_h & -\cos \beta_h \\ \cos \beta_h & -\sin \beta_h \end{bmatrix} \mathbf{T} \mathbf{z}_h^T}_{\frac{\partial \mathbf{q}_2}{\partial \mathbf{p}}} \delta \mathbf{p} . \tag{B.42}$$

Ainsi, la matrice tangente \mathbf{K}_t comporte ici un troisième terme,

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_{t1} + \mathbf{K}_{t\sigma} + \mathbf{K}_3 , \tag{B.43}$$

ayant pour expression

$$\mathbf{K}_3 = \frac{\partial \mathbf{q}_e}{\partial \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{l_h} \begin{bmatrix} -\sin \beta_h & -\cos \beta_h \\ \cos \beta_h & -\sin \beta_h \end{bmatrix} \mathbf{T} \mathbf{z}_h^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{B.44}$$

B.7 Prise en compte de la compliance du crin

Cette section décrit la façon dont la compliance du crin peut être prise en compte dans la formulation, afin d'assurer la convergence de l'algorithme de résolution.

En raison de la compliance du crin, les variations de distance hausse-pointe s'accompagnent de variations de tension, c'est-à-dire des efforts appliqués à la baguette. Plus précisément, la composante axiale T_x varie au cours des déplacements, tandis que la composante transversale T_y reste constante pour un cas de charge donné (voir chapitre 3, equation (2.9)).

De ce fait, le premier terme de l'équation (B.39), $\mathbf{P} \delta \mathbf{T}$, n'est pas nul. Le lien entre la variation de la distance hausse-pointe δl_h et celle de la composante horizontale de la force de tension δT_x n'est pas explicite (voir la section du chapitre 2). Cependant, une approximation raisonnable consiste à écrire :

$$\delta T_x \approx k_h \delta l_h \tag{B.45}$$

où $k = (c_h L_0)^{-1}$ est la raideur équivalente de la mèche lorsque l'archet est sous tension T_0 . Par ailleurs, la variation de la distance hausse-pointe a pour expression :

$$\begin{aligned}
 \delta l_h &= \delta \mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{e}_{h1} \\
 &= [\delta u_2 \quad \delta v_2] \begin{Bmatrix} \cos \beta_h \\ \sin \beta_h \end{Bmatrix} \\
 &= \cos \beta_h \delta u_2 + \sin \beta_h \delta v_2 \\
 &= \mathbf{r}_h^T \delta \mathbf{p}
 \end{aligned} \tag{B.46}$$

avec $\mathbf{r}_h = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \cos \beta_h \quad \sin \beta_h \quad 0]^T$. On en déduit :

$$\mathbf{P} \delta \mathbf{T} = \mathbf{P} \begin{Bmatrix} \delta T_x \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{P} \begin{Bmatrix} k_h \\ 0 \end{Bmatrix} \mathbf{r}_h^T \delta \mathbf{p} . \tag{B.47}$$

Ainsi, en tenant compte de la compliance du crin en plus du caractère suiveur des efforts, le terme \mathbf{K}_3 dans la matrice de raideur tangente \mathbf{K}_t s'écrit :

$$\mathbf{K}_3 = \frac{\partial \mathbf{q}_e}{\partial \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{l_h} \begin{bmatrix} -\sin \beta_h & -\cos \beta_h \\ \cos \beta_h & -\sin \beta_h \end{bmatrix} \mathbf{T} \mathbf{z}_h^T + \mathbf{P} \begin{Bmatrix} k_h \\ 0 \end{Bmatrix} \mathbf{r}_h^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{B.48}$$

ANNEXE C

RÉSULTATS DES TESTS PAR PAIRES

Dans cette annexe sont présentés les résultats des tests par paires effectués par les musiciens (chapitre 5, section 5.2.2). Les tableaux C.1 et C.3 rassemblent les notes données par chaque expert. Les coefficients de corrélation r et les p-valeurs correspondantes sont donnés par les tableaux C.2 et C.4. La p-valeur est la probabilité d'obtenir par le hasard un coefficient r au moins aussi grand que celui déterminé, s'il n'y a en réalité pas de corrélation entre les deux variables (hypothèse nulle, $r = 0$). On considère généralement comme significatives les corrélations pour lesquelles la p-valeur est en dessous de 5%. Les corrélations répondant à ce critère sont présentées sur les figures C.1 et C.2

C.1 Expert 1

Essai #	<i>Stabilité</i>	<i>Attaques (consonnes)</i>	<i>Jeu au talon</i>	<i>Changement de corde</i>
1	-0.5	0.5	0.5	-0.25
2	1	-1	1	1
3	0	0.5	0	0
4	0.5	0.5	-1	1
5	1	-0.5	0.5	1
6	1	0.5	-0.5	-0.25
7	0.5	1	-0.5	-0.5
8	-0.5	0	0	0
9	0.5	1	-1	0.5
10	0.5	-0.5	1	0.5
11	-0.5	0.5	-0.5	0
12	0	0.5	-0.5	-0.5

Table C.1 – Notes données par l'expert 1, présentées ici sur une échelle équivalente (de -1 à +1).

(a)	Tension	Stabilité	Attaques (consonnes)	Jeu au talon	Changement de corde
Tension	1.00	0.19	0.78	-0.56	-0.64
Stabilité		1.00	0.26	-0.33	0.08
Attaques (consonnes)			1.00	-0.83	-0.61
Jeu au talon				1.00	0.27
Changement de corde					1.00

(b)	Tension	Stabilité	Attaques (consonnes)	Jeu au talon	Changement de corde
Tension	1.00	0.56	< 0.01	0.06	0.03
Stabilité		1.00	0.42	0.30	0.81
Attaques (consonnes)			1.00	< 0.01	0.04
Jeu au talon				1.00	0.39
Changement de corde					1.00

Table C.2 – Résultats des corrélations pour l'expert 1. (a) Coefficients de corrélation r , (b) p-valeurs correspondantes.

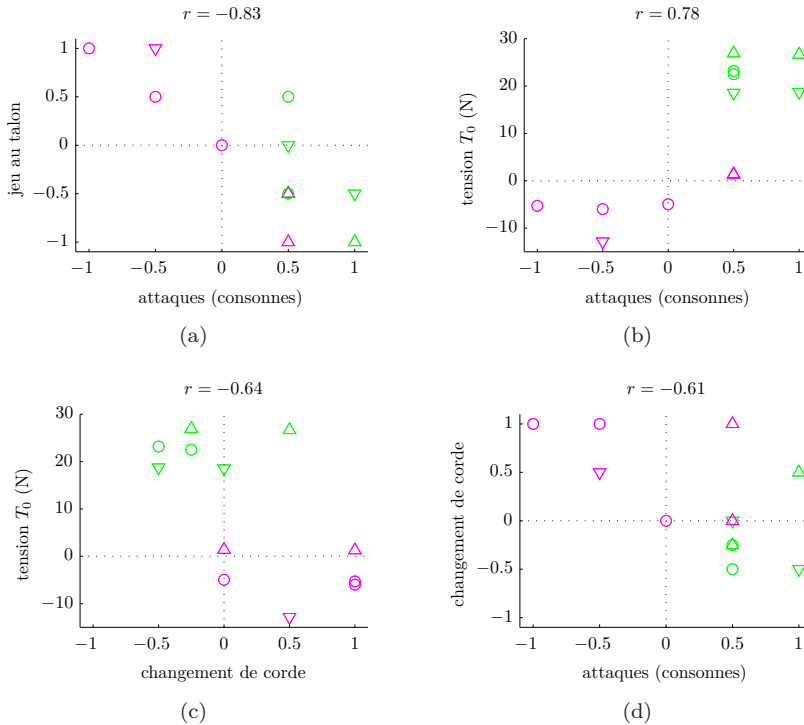


Figure C.1 – Corrélations les plus significatives pour l'expert 1.

C.2 Expert 2

Essai #	<i>Spectre</i>			<i>Réactivité</i>	
	<i>Stabilité</i>	<i>hors attaque</i>	<i>Consonne</i>	<i>au geste</i>	<i>Ressort</i>
1	-0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
2	-0.5	-0.5	-1	-1	0
3	-0.5	0	0.5	-0.5	0.5
4	0	-0.5	0	0	-0.5
5	0	-0.5	-0.5	-0.5	0
6	-0.5	0.5	0	0.5	0.5
7	-0.5	-1	-1	-1	-1
8	-0.5	0.5	0.5	0	0.5
9	-0.5	-0.5	-0.5	-1	0

Table C.3 – Notes données par l’expert 2, présentées ici sur une échelle équivalente (de -1 à +1).

(a)	<i>Spectre</i>			<i>Réactivité</i>		
	Tension	<i>Stabilité</i>	<i>hors attaque</i>	<i>Consonne</i>	<i>au geste</i>	<i>Ressort</i>
Tension	1.00	-0.01	0.85	0.82	0.91	0.61
<i>Stabilité</i>		1.00	-0.34	-0.08	0.08	-0.33
<i>Spectre hors attaque</i>			1.00	0.82	0.82	0.88
<i>Consonne</i>				1.00	0.75	0.71
<i>Réactivité au geste</i>					1.00	0.55
<i>Ressort</i>						1.00

(b)	<i>Spectre</i>			<i>Réactivité</i>		
	Tension	<i>Stabilité</i>	<i>hors attaque</i>	<i>Consonne</i>	<i>au geste</i>	<i>Ressort</i>
Tension	1.00	0.97	< 0.01	0.01	< 0.01	0.08
<i>Stabilité</i>		1.00	0.37	0.84	0.84	0.39
<i>Spectre hors attaque</i>			1.00	0.01	0.01	< 0.01
<i>Consonne</i>				1.00	0.02	0.03
<i>Réactivité au geste</i>					1.00	0.13
<i>Ressort</i>						1.00

Table C.4 – Résultats des corrélations pour l’expert 2. (a) Coefficients de corrélation r , (b) p-valeurs correspondantes.

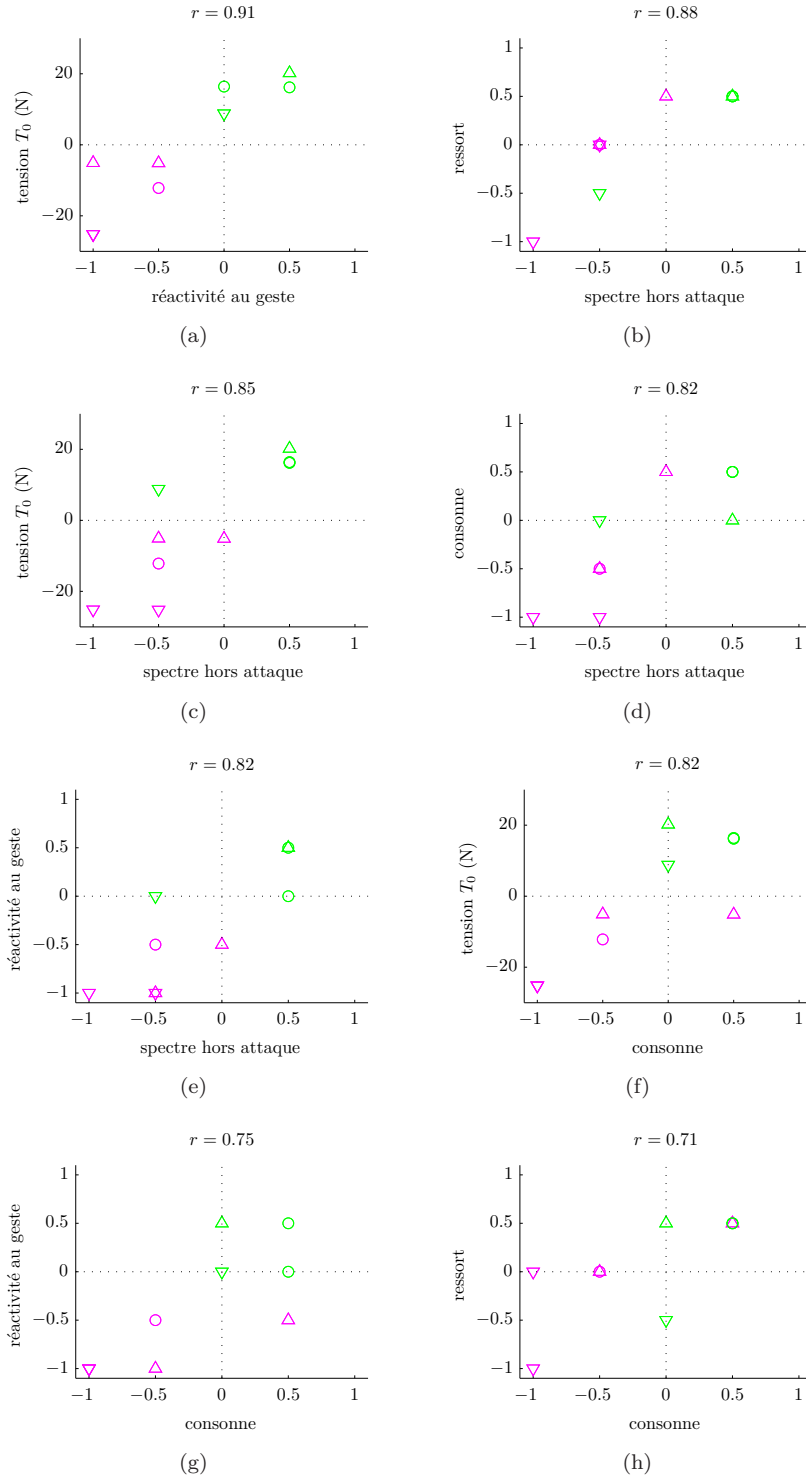


Figure C.2 – Corrélations les plus significatives pour l'expert 2.

Influence des paramètres mécaniques et géométriques sur le comportement statique de l'archet de violon en situation de jeu

Frédéric Ablitzer

Thèse de Doctorat en Acoustique, Université du Maine, Le Mans, France

L'archet, élément indispensable à la production sonore des instruments à cordes frottées, a jusqu'à présent fait l'objet de peu d'études scientifiques. Le travail présenté a pour objectif de mieux comprendre son comportement mécanique en situation de jeu. À cette fin, des modèles numériques sont développés. La baguette, précontrainte par la tension du crin, est modélisée par des éléments finis de poutre en formulation corotationnelle, afin de prendre en compte la non-linéarité géométrique inhérente au problème. Un premier modèle (2D) rend compte du comportement de l'archet dans le plan. Il donne lieu à une étude numérique sur une géométrie standard, visant à mettre en évidence l'influence des paramètres de fabrication et de réglage sur le comportement de l'archet sous tension. Un second modèle (3D) intègre le caractère tridimensionnel des sollicitations rencontrées en situation de jeu, prenant en compte la flexion latérale de la baguette. Une procédure non destructive de détermination des propriétés mécaniques du bois et de la mèche, basée sur une méthode inverse utilisant le modèle 2D, est proposée. À titre de validation expérimentale, des résultats numériques obtenus avec le modèle 3D sont confrontés aux résultats de mesures sur deux archets, pour différents réglages du cambre et de la tension. L'effet de la précontrainte sur la raideur de flexion latérale de la baguette est mis en exergue. Le bon accord observé confère au modèle un caractère prédictif, offrant des perspectives d'utilisation en tant qu'outil d'aide à la facture. Par ailleurs, la stabilité de l'archet est un problème que les facteurs doivent prendre en considération. Un modèle phénoménologique basé sur un système mécanique simple est présenté. Il vise à donner certaines tendances sur les conditions d'apparition d'une instabilité par bifurcation ou par point limite, en faisant une analogie avec les propriétés de l'archet. Le calcul numérique du comportement pré- et post-critique de l'archet permet d'identifier des cas d'instabilité similaires, dont on discute les conséquences possibles sur le jeu et la facture. Dans une dernière partie, des essais en jeu axés sur les réglages du cambre et de la tension sont effectués par des musiciens. Les résultats de ces tests subjectifs tendent à montrer l'influence des paramètres de réglage examinés dans l'appréciation des qualités de jeu.