HAL
open science

Attraction d'ondes pour des systèmes à résonance d'ondes contra-propagatives

Muriel Grenier

▶ **To cite this version:**

Muriel Grenier. Attraction d'ondes pour des systèmes à résonance d'ondes contra-propagatives. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Bourgogne, 2011. Français. NNT : 2011DIJOS049 . tel-00696097

HAL Id: tel-00696097

https://theses.hal.science/tel-00696097v1

Submitted on 10 May 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
U.F.R. Sciences et Techniques
Institut de Mathématiques de Bourgogne
UMR 5584 du CNRS

THÈSE

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université de Bourgogne
Discipline : mathématiques

par Muriel GRENIER

le 26 octobre 2011

Attraction d'ondes pour des systèmes à résonance d'ondes contra-propagatives

Directeurs de thèse
Vladimir Matveev et Hans-Rudolf Jauslin

Membres du jury :

DEGASPERIS Antonio	**Université de Rome**	**Rapporteur**
WABNITZ Stefan	**Université de Brescia**	**Rapporteur**
KHUSNUTDINOVA Karima	**Université de Loughborough**	**Examinatrice**
KLEIN Christian	**Université de Bourgogne**	**Examinateur**
MATVEEV Vladimir	**Université de Bourgogne**	**Directeur**
JAUSLIN Hans-Rudolf	**Université de Bourgogne**	**Directeur**

Remerciements

Je tiens à adresser mes plus sincères remerciements à mes directeurs de thèse : messieurs les professeurs Vladimir Matveev et Hans-Rüdolf Jauslin avec qui j'ai eu la chance de travailler.

Monsieur Matveev, sans qui je n'aurais certainement jamais continué mes études jusqu'au doctorat ; pour avoir encadré mon travail dès les années de Master pour les deux mémoires, pour m'avoir fait comprendre en profondeur l'Analyse et pour m'avoir toujours vivement encouragée.

Monsieur Jauslin, pour ces innombrables heures de travail, toujours extrêmement constructives, sa grande pédagogie, qui m'ont à chaque fois permis d'avancer dans mes résultats. J'ai beaucoup appris lors de ces trois années et trouvé particulièrement passionnant le fait de traiter d'un sujet directement en lien avec la Physique.

J'adresse mes remerciements aux membres du jury : Professeur Antonio Degasperis et Professeur Stefan Wabnitz, rapporteurs de cette thèse, pour avoir consacré de leur temps à lire en détail mon travail et écrit des rapports détaillés. Professeur Karima Khusnutdinova, pour avoir accepté d'être examinatrice. Je tiens à remercier en particulier Christian Klein, avec qui nous avons travaillé, messieurs Jauslin, Matveev et moi-même, au cours de ces trois années. Un grand merci pour cette étroite collaboration tout au long de la thèse.

Je remercie tous les enseignants chercheurs qui m'ont aidée, en acceptant de discuter de mes travaux lors de conférences, mais aussi au sein du laboratoire. Je pense en particulier à Giuseppe Dito , M. Arnal , Jörg Frauendiener avec qui nous avons travaillé à Trieste et Beatrice Pelloni qui a accepté de me recevoir au laboratoire de mathématiques de Reading.

Plus généralement, je remercie tous les membres de l'IMB, à commencer par les directeurs Mme Lucy Moser Jauslin puis M. Luis Paris, les enseignants-chercheurs, ainsi que tout le personnel, pour leur gentillesse et leur efficacité : les secrétaires de l'IMB, du Département de Mathématiques, le pôle informatique...

Je remercie également tous les thésards, post-docs, membres de l'association des Doctorants en Mathématiques de Dijon, pour leur amitié et leur participation au séminaire étudiant : Jérôme, Gautier, Gabriel, Kristelle... Merci à Caroline, Maciej et Carlo pour les nombreuses heures de travail

ensemble sur une démonstration. Merci à mes collègues du bureau 310, à côté de qui il a été agréable de travailler durant ces trois années : Etienne, Rafael, Renaud.

Je tiens à adresser un grand merci à M. Jourani, Abdessamad Barbara, Rosane Ushirobira, Lisa Morhaïm, ainsi qu'à tous les enseignants de l'IUT GEA, qui m'ont permis d'accomplir ces heures d'enseignement que je tenais tant à dispenser.

Merci aussi à tous les physiciens avec qui j'ai eu l'occasion de discuter de mes travaux, en particulier Kamel Hammani et Philippe Morin pour m'avoir permis de voir les expériences sur l'attracteur de polarisation.

Je remercie enfin ma famille, en particulier mes parents, ma soeur, David, pour m'avoir toujours entourée.

Résumé

L'attraction d'ondes dans des systèmes contra-propagatifs est un phénomène général, établi initialement en Physique dans le contexte de l'attraction de polarisation entre deux ondes contra-propagatives se propageant dans des fibres optiques. Ce phénomène a été observé expérimentalement, et ses propriétés étudiées via des simulations numériques. Les modèles qui s'y rattachent sont des systèmes hyperboliques d'équations aux dérivées partielles, avec des conditions aux bords dépendant du temps sur un intervalle fini. Le mécanisme sous-jacent peut être expliqué par l'existence de tores singuliers dans les équations stationnaires correspondantes. Le but de cette thèse est d'analyser en détail l'exemple le plus simple dans cette famille de modèles. Nous montrons que la plupart des phénomènes de processus d'attraction d'ondes sont en fait existants dans un modèle linéaire avec intéraction résonnante. Nous établissons l'existence et la régularité des solutions et analysons la relaxation vers la solution stationnaire qui caractérise les propriétes de l'attraction d'ondes.

Wave attraction in counter-propagating waves systems is a general phenomenon that was first established in Physics in the context of the attraction of the polarization between two counter-propagating waves in optical fibers. This phenomenon has been observed experimentally, and its properties were studied through numerical simulations. The models are Hamiltonian hyperbolic systems of partial differential equations, with time-dependent boundary conditions on a finite interval. The underlying mechanism can be traced back to the existence of singular tori in the corresponding stationary equations. In this work we analyze in detail the simplest example in this family of models. We show that most of the phenomena of the wave attraction process are already present in a linear model with resonant interaction. We establish the existence and regularity of the solutions and analyze the relaxation towards a stationary solution that features the wave attraction properties.

Table des matières

Introduction **9**

1 Attraction de polarisation, attraction d'ondes **17**

2 Le modèle **21**
2.1 Le système d'étude 21
2.2 Choix des conditions initiales et aux bords 24

3 Etat stationnaire, attraction d'ondes dans l'état stationnaire **27**
3.1 Solutions stationnaires 27
3.2 Attraction d'ondes dans l'état stationnaire 29

4 Solutions dépendant du temps, loi de conservation et attraction d'ondes à l'asymptotique **33**

5 Solutions dépendant du temps, relaxation vers l'état stationnaire **37**
5.1 Résolution via transformée de Fourier 37
5.2 Existence des solutions 47
5.3 Régularité des solutions 50
5.4 Valeur initiale des solutions 74
5.5 Unicité des solutions 80
5.6 Convergence des solutions vers l'état stationnaire 81

6 Résolution du problème via la transformée de Laplace **91**
6.1 Introduction 91
6.2 Résultats 91
6.2.1 Transformée de Laplace 92
6.2.2 Régularité et valeurs initiales 93
6.2.3 Unicité 99
6.2.4 Convergence vers l'état stationnaire 99
6.3 Comparaison des deux méthodes de résolution-conditions initiales non nulles 100

Conclusion et perspectives **103**

Bibliographie **107**

Introduction

L'attraction de polarisation est un phénomène observé expérimentalement pour la première fois en 1998 [1, 2, 3] et analysé théoriquement et à l'aide de simulations numériques [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Cet effet est basé sur l'intéraction, au sein d'une fibre optique, de deux ondes contra-propagatives, appelées pompe et signal. L'onde signal acquiert la polarisation imposée par la pompe à la sortie de la fibre. Contrairement aux polariseurs usuels qui sont en général des filtres et perdent la moitié de l'intensité, l'attraction de polarisation procure un nouveau type de polariseur qui est sans perte, i.e. quasiment 100% efficace. Ce phénomène se décrit par un système d'équations aux dérivées partielles de type hamiltonien. Pour les longueurs de fibres considérées, la dissipation tout comme les effets dispersifs peuvent être négligés.

Le système est décrit par un modèle du type suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} &= \mathbf{P}_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) = -i\frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}^*} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} &= \mathbf{P}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) = -i\frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}^*} \end{aligned} \tag{1}$$

où $z \in [0, L]$ est la coordonnée spatiale, t le temps, c la vitesse de la lumière dans la fibre, $\mathbf{u}(z,t)$ et $\mathbf{v}(z,t)$ des vecteurs complexes à deux composantes, $h(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ la fonction de Hamilton et $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ des polynômes. Le symbole * dénote le conjugué complexe, et nous utiliserons la notation $\partial/\partial\mathbf{u}^* = (\partial/\partial u_1^*, \partial/\partial u_2^*)$. La fonction $\mathbf{u}$ correspond à l'onde se propageant de $z = 0$ vers $z = L$, et $\mathbf{v}$ à celle se propageant dans le sens opposé. Le fait que l'onde $\mathbf{u}$ soit injectée à $z = 0$ et l'onde $\mathbf{v}$ à $z = L$ est codifié par les conditions aux bords suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(z=0,t) &= \mathbf{b}_0(t) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{pour } t \leq 0, \\ \mathbf{u}_0 & \text{pour } t \geq t_p \end{cases} \\ \mathbf{v}(z=L,t) &= \mathbf{b}_L(t) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{pour } t \leq 0, \\ \mathbf{v}_L & \text{pour } t \geq t_p \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

où $\mathbf{b}_0(t)$, $\mathbf{b}_L(t)$ sont des fonctions monotones croissantes, de classe $\mathcal{C}^n$. Plus précisément, les ondes injectées croissent de façon lisse à partir de $t = 0$ pour atteindre les amplitudes constantes respectives $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{v}_L$ après un temps $t = t_p$. De plus, le fait qu'il n'y ait pas de champ dans la fibre tant que les ondes ne sont pas injectées se traduit par des conditions initiales :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(z, t = 0) &= 0 \\ \mathbf{v}(z, t = 0) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

pour tout $z \in [0, L]$.

L'analyse théorique et des simulations numériques ont conduit à plusieurs observations [8, 9, 10] :
1- Le système relaxe vers un état stationnaire bien défini.
2- Les équations stationnaires peuvent être écrites sous forme hamiltonienne, la coordonnée spatiale z jouant le rôle du 'temps'. Ce système est intégrable au sens de Liouville. De plus, d'après le théorème d'Arnold-Liouville [13] l'espace de phase est feuilleté par des tores invariants. Cependant il peut y avoir des tores singuliers (e.g. un tore pincé).
3- La relaxation sélectionne un type particulier de solutions des équations stationnaires, approchant le tore singulier quand $L \to \infty$.
4- Dans l'état stationnaire, la valeur du champ signal $\mathbf{u}$, lorsqu'il atteint la fin de la fibre à $z = L$ est déterminée par la valeur du champ pompe injecté $\mathbf{v}_L$. Cet effet est appelé *attraction de polarisation* pour le système de [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12], où les champs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ont chacun deux composantes complexes représentant l'état de polarisation de l'onde.

Dans les modèles généraux [8], dans lesquels $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ peuvent avoir n'importe quel nombre de composantes suivant la situation physique considérée, nous appellerons ce phénomène *attraction d'ondes.*

Nous pouvons remarquer que la relaxation est de type hyperbolique, i.e., il n'y a pas de dissipation. Cependant le système est ouvert : le mécanisme de relaxation est basé sur le fait que les ondes peuvent entrer et sortir du milieu par les bords. Les solutions stationnaires $\mathbf{u}^s(z), \mathbf{v}^s(z)$, définies par $\partial \mathbf{u}^s/\partial t = 0, \partial \mathbf{v}^s/\partial t = 0$, satisfont un système d'équations de la forme :

$$i\frac{d\mathbf{u}^s}{dz} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}^{s*}} \tag{4}$$

$$-i\frac{d\mathbf{v}^s}{dz} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}^{s*}}. \tag{5}$$

Le système peut être interprété comme un système hamiltonien d'équations aux dérivées partielles, en considérant la variable de position z jouant le rôle du 'temps'. La relation avec la représentation en coordonnées canoniques réelles $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ est donnée par $\mathbf{u}^s =: (\mathbf{q}_u + i\mathbf{p}_u)/\sqrt{2}, \mathbf{v}^s =: (\mathbf{q}_v - i\mathbf{p}_v)/\sqrt{2}$. Remarquons que les parties imaginaires des deux expressions précédentes

sont définies avec des signes opposés. Le signe moins dans $\mathbf{v}^s = (\mathbf{q}_v - i\mathbf{p}_v)/\sqrt{2}$ provient de la nature contra-propagative de l'onde. Sous forme complexe, les équations de Hamilton générales

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\partial h}{\partial q} \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= \frac{\partial h}{\partial p} \end{aligned}$$

correspondant à la fonction hamiltonienne $h(\mathbf{a}, \mathbf{a}^*, \mathbf{b}, \mathbf{b}^*)$, avec $\mathbf{a} =: (\mathbf{q}_a + i\mathbf{p}_a)/\sqrt{2}, \mathbf{b} =: (\mathbf{q}_b + i\mathbf{p}_b)/\sqrt{2}$ et la forme symplectique canonique $w = \sum_j dp_j \wedge dq_j$ sont :

$$i\frac{d\mathbf{a}}{dz} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{a}^*} \tag{6}$$

$$i\frac{d\mathbf{b}}{dz} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{b}^*}. \tag{7}$$

Le caractère hamiltonien des équations (4) (5) correspondant à la configuration contra-propagative peut être vu en identifiant $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{u}^s$ et $\mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{v}^{s*}$. Ceci est équivalent à considérer un système hamiltonien mais avec une forme symplectique $\tilde{w} = dp_u \wedge dq_u - dp_v \wedge dq_v$.

Le fait que $\mathbf{u}$ a une condition au bord à $z = 0$ et $\mathbf{v}$ à $z = L$ se traduit au niveau des équations stationnaires par une situation inhabituelle pour des équations différentielles hamiltoniennes. En effet, pour les variables $\mathbf{u}$ les conditions 'initiales' (à $z = 0$) sont données, alors que pour les variables $\mathbf{v}$, ce sont les conditions 'finales' (à $z = L$). Une des conséquences est que, en général, il y aura plus qu'une solution stationnaire compatible avec les conditions aux bords (2). Cela conduit à poser la question de savoir quelle solution stationnaire est sélectionnée par le processus de relaxation.

Remarquons enfin que la relation précise d'attraction d'ondes entre $\mathbf{v}_L$ et $\mathbf{u}(z = L, t)$ dépend du modèle spécifique, i.e., du choix de la fonction de Hamilton h.

Certaines de ces questions ont été explorées d'un point de vue théorique et à travers des simulations numériques dans les références [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

Le but de cette thèse est d'analyser le plus simple exemple de cette classe de modèles dont nous venons de discuter, dans le but d'établir des propriétés mathématiques précises pour les systèmes considérés. Il a été supposé en premier lieu que le caractère non-linéaire de l'intéraction était essentiel pour obtenir l'attraction d'ondes. Comme nous allons le voir, il existe des modèles linéaires faisant apparaître le phénomène d'attraction d'ondes, et vérifiant les autres propriétés mentionnées auparavant.

Ce manuscrit est structuré comme suit.

Dans le premier chapitre, nous définissons le phénomène d'attraction d'ondes que nous allons étudier tout au long de ce travail.

Dans le chapitre 2, nous présentons le modèle sur lequel nous travaillerons. A savoir, afin de décrire l'attraction d'ondes, un système du type (1) de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(z,t) + \frac{\partial u}{\partial z}(z,t) &= -i\gamma v(z,t) \\ \frac{1}{c}\frac{\partial v}{\partial t}(z,t) - \frac{\partial v}{\partial z}(z,t) &= -i\gamma u(z,t) \end{aligned}$$

où γ est une constante de couplage entre u et v. Ce modèle correspond à une réflexion de Bragg sur un réseau périodique gravé sur une fibre optique [27], [31]. Les fonctions u et v vérifient des conditions initiales $u(z, t = 0)$ et $v(z, t = 0)$, et des conditions aux bords atypiques car données sur un bord de la fibre pour u, $u(z = 0, t)$, et sur l'autre pour v, i.e. $v(z = L, t)$. Ces conditions sont choisies sous la forme exposée en (2). Nous discuterons ensuite de certaines propriétés basiques s'y rattachant.

Dans le chapitre 3, nous déterminons la solution stationnaire, c'est à dire la solution du système ci-avant sans dépendance temporelle pour des conditions aux bords constantes u_0, v_L. Cette solution est donnée par :

$$\begin{aligned} u^s(z) &= u_0 \frac{\cosh \gamma(L-z)}{\cosh \gamma L} - i v_L \frac{\sinh \gamma z}{\cosh \gamma L} \\ v^s(z) &= -i u_0 \frac{\sinh \gamma(L-z)}{\cosh \gamma L} + v_L \frac{\cosh \gamma z}{\cosh \gamma L} \end{aligned}$$

Nous établirons ensuite ses propriétés d'attraction d'ondes. En effet, si nous considérons une grande longueur de fibre optique, nous démontrerons que l'attraction d'ondes a lieu dans l'état stationnaire :

$$\begin{aligned} \lim_{L\to+\infty} u^s(z=L) &= -\text{signe}(\gamma)\ i v_L \\ \lim_{L\to+\infty} v^s(z=0) &= -\text{signe}(\gamma)\ i u_0 \end{aligned}$$

Remarquons que si $u_0 = 0$, dans l'état stationnaire, il y a toujours une partie stationnaire correspondant à la partie contra-propagative. Ceci est dû au fait que, à l'état stationnaire, l'attraction est en fait une réflexion de Bragg, c'est l'effet miroir.

Dans le chapitre 4, nous montrons dans un premier temps que le système avec dépendance temporelle satisfait une loi de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(|u(z,t)|^2 + |v(z,t)|^2\Big) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(|u|^2 - |v|^2\right)$$

ce qui autorise à interpréter le mécanisme de relaxation en termes d'équilibre entre les ondes entrantes et sortantes. En effet, cette loi de conservation implique :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^L \big(|u|^2+|v|^2\big)dz &= -|u(z=L,t)|^2+|v(z=L,t)|^2 \\ &\quad +|u(z=0,t)|^2-|v(z=0,t)|^2\end{aligned}$$

qui permet de mettre en évidence que la variation de la norme L_2 est déterminée par les ondes entrantes et sortantes sur les bords. Cette relation nous donne aussi une interprétation de l'attraction d'ondes dans l'état stationnaire explicité au chapitre précedent : pour L très grand, l'échange a lieu localement, en particulier sur chaque bord. Dans un second temps, nous montrons que les solutions avec dépendance temporelle possèdent la propriété d'attraction d'ondes asymptotiquement quand $t \to \infty$, sous certaines conditions de régularité sur les conditions aux bords mais quelques soient les conditions initiales choisies. Ce résultat s'écrit sous forme :

$$\begin{aligned}\lim_{L\to\infty}\lim_{t\to\infty} u(z=L,t) &= -\text{signe}(\gamma)\ iv_L, \\ \lim_{L\to\infty}\lim_{t\to\infty} v(z=0,t) &= -\text{signe}(\gamma)\ iu_0.\end{aligned}$$

Remarquons que le signal en sortie $u(L,t)$, avec $L \to \infty$ et $t \to \infty$, ne dépend pas du signal en entrée $u(0, t > t_p)$. Ainsi un signal nul en entrée a un signal non nul en sortie qui dépend uniquement de la pompe. Ceci s'interprète comme la réflexion de l'onde contra-propagative sur le réseau de Bragg.

Dans le chapitre 5, nous déterminons une solution du problème étudié sous forme de représentation de Fourier :

$$\begin{aligned}\tilde{u}(z,w) &= \tilde{F}(L-z,w)\ \tilde{b}_0(w)\ +\tilde{G}(z,w)\ \tilde{b}_L(w) \\ \\ \tilde{v}(z,w) &= \tilde{G}(L-z,w)\ \tilde{b}_0(w)\ +\tilde{F}(z,w)\ \tilde{b}_L(w)\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}\tilde{F}(z,w) &= \frac{\cosh Kz+\frac{iw}{K}\sinh Kz}{\cosh KL+\frac{iw}{K}\sinh KL} \\ \tilde{G}(z,w) &= \frac{i\gamma}{K}\frac{-\sinh Kz}{\cosh KL+\frac{iw}{K}\sinh KL}\end{aligned}$$

où $K = \sqrt{\gamma^2-w^2}$ et $\tilde{}$ désignant la transformée de Fourier, et montrons ensuite que l'inversion de la transformée de Fourier fournit une solution satisfaisant les conditions initiales nulles (3), et que cette solution est unique.

Nous prouvons enfin que la solution obtenue relaxe vers la solution stationnaire pour $t \to \infty$.

Dans le chapitre 6, nous faisons le même travail que dans le chapitre précédent mais en considérant cette fois-ci une résolution en terme de transformée de Laplace, qui autorise à se donner des conditions initiales plus générales. La solution dépendant des conditions initiales et aux bords obtenue est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{u}(z,k) \\ \hat{v}(z,k) \end{pmatrix} = \hat{B}(z,k) + \hat{I}(z,k)$$

avec :

$$\hat{B}(z,k) = \begin{pmatrix} \hat{F}(L-z,k) & \hat{G}(z,k) \\ \hat{G}(L-z,k) & \hat{F}(z,k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_0(k) \\ \hat{b}_L(k) \end{pmatrix}$$

et

$$\hat{I}(z,k) = e^{\hat{M}z} \begin{pmatrix} 0 \\ -\hat{g}_2(L)/D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{g}_1(z) \\ \hat{g}_2(z) \end{pmatrix}$$

avec

$$\hat{M} := \begin{pmatrix} -k & -i\gamma \\ i\gamma & k \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \hat{g}_1(z) \\ \hat{g}_2(z) \end{pmatrix} := \int_0^z e^{\hat{M}(z-z')} \begin{pmatrix} u(z',t=0) \\ -v(z',t=0) \end{pmatrix} dz'$$

où $\hat{}$ désigne la transformée de Laplace.

Nous conclurons ce travail en résumant les résultats établis dans cette thèse et présenterons des perspectives d'extension du problème au cas non-linéaire.

Les figures suivantes donnent une illustration des résultats exposés précédemment.

Pour chacune d'elles, la coordonnée spatiale z le long de la fibre est représentée en abscisse et le temps indiqué au dessus de la figure. Les informations relatives à l'onde signal et l'onde pompe sont respectivement de couleur bleue et rouge. Les conditions aux bords (2) sont choisies telles que $u_0 \neq v_L$.

Prenons le cas d'une fibre de longueur 3 unités.

La figure suivante représente les amplitudes de u et v. Nous constatons que pour un temps proche de 0, les amplitudes sont quasi nulles, ce qui correspond aux conditions initiales (3).

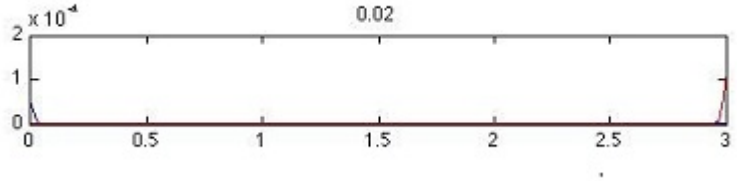

FIGURE 1 – *Amplitudes* $|u(z,t)|$ *et* $|v(z,t)|$ *pour* $L = 3$, $u_0 = 1$ *et* $v_L = 2$ *à un temps court* $t = 0.02$.

La figure suivante donne respectivement, l'évolution de l'amplitude des ondes u et v à un temps $t = 2.06$, la phase de u et de v, la partie réelle de u et de v, la partie imaginaire de u et de v.

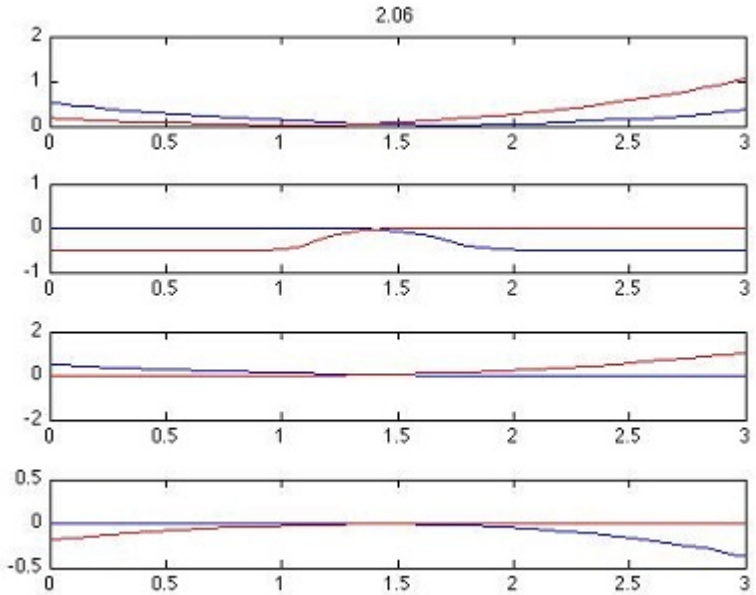

FIGURE 2 – *Amplitude, phase, partie réelle, partie imaginaire de* $u(z,t)$ *et* $v(z,t)$ *pour* $L = 3$, $u_0 = 1$ *et* $v_L = 2$ *à un temps intermédiaire* $t = 2.06$.

La figure 3 représente l'état stationnaire, atteint (à la résolution du graphique) à un temps $t \approx 16$. Cette figure montre que l'attraction d'ondes est manifeste pour une longueur de fibre $L = 3$.

Nous illustrons à l'aide de la figure 4 le fait que si la longueur de la fibre est trop courte (ici $L = 1$), l'état stationnaire est atteint mais il n'y a cependant pas attraction d'ondes.

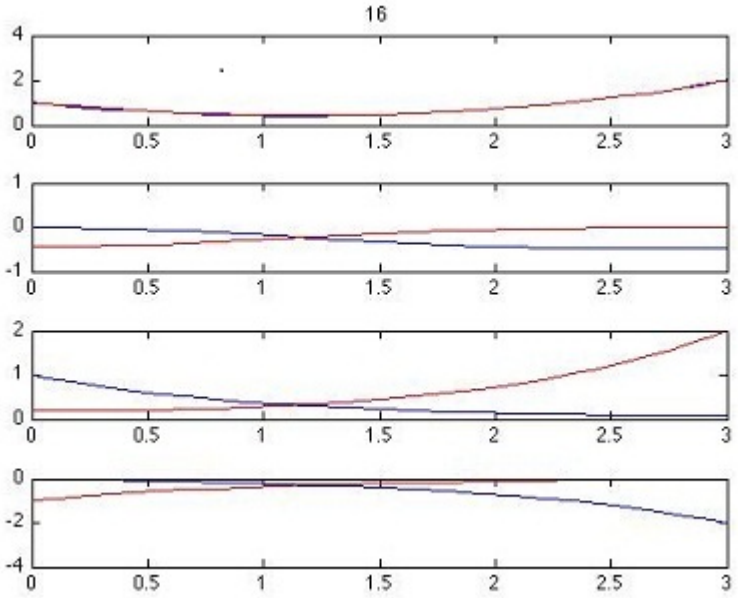

FIGURE 3 – *Amplitude, phase, partie réelle, partie imaginaire de* $u(z,t)$ *et* $v(z,t)$ *pour* $L = 3$, $u_0 = 1$ *et* $v_L = 2$ *à un temps* $t = 16$ *où l'état stationnaire est essentiellement atteint, et on observe l'attraction d'ondes.*

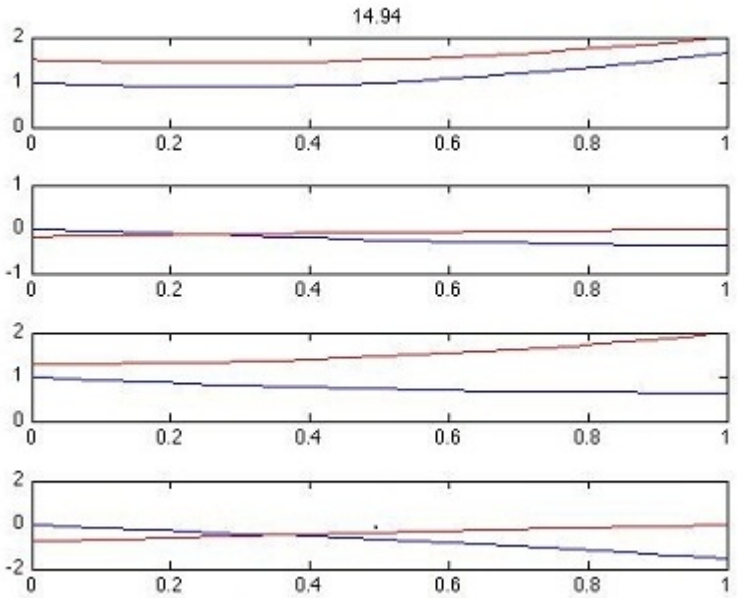

FIGURE 4 – *Amplitude, phase, partie réelle, partie imaginaire de* $u(z,t)$ *et* $v(z,t)$ *pour* $L = 1$, $u_0 = 1$ *et* $v_L = 2$ *à un temps* $t = 14.94$ *où l'état stationnaire est essentiellement atteint. La longueur est trop courte et il n'y a pas attraction d'ondes.*

Chapitre 1

Attraction de polarisation, attraction d'ondes

L'attraction de polarisation dans une fibre optique est un phénomène basé sur l'intéraction de deux ondes contra-propagatives, appelées onde pompe et onde signal.

Soient u et v deux ondes contra-propagatives, nous appellerons dans toute la suite u l'onde signal et v l'onde pompe.

L'onde signal u est injectée en entrée de fibre et l'onde pompe v en sortie de fibre. Nous faisons un certain choix de polarisation pour chacune des deux ondes.

Nous considérons une fibre optique de longueur L ($L < +\infty$).

Prenons l'exemple pour lequel u est polarisée linéairement et v circulairement. La figure ci-après schématise l'évolution de chacune des polarisations. Nous remarquons que la polarisation linéaire évolue vers une polarisation circulaire et réciproquement.

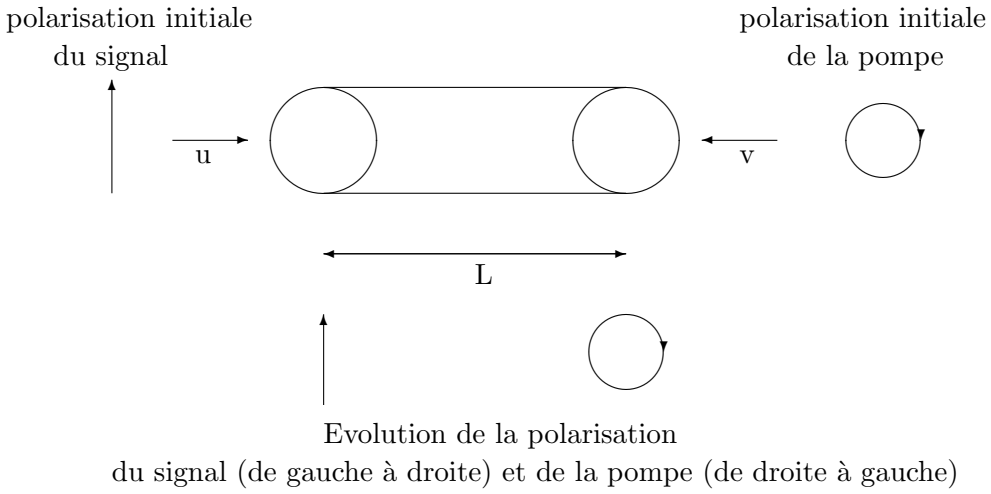

FIGURE 1.1 – *Attraction de polarisation pour une onde signal polarisée linéairement et une onde pompe polarisée circulairement.*

Ce schéma est une illustration du phénomène d'attraction de polarisation que nous définissons de la façon suivante.

Définition 1.0.1. *(Attraction de polarisation)*
On appelle attraction de polarisation l'évolution de la polarisation du signal vers celui de la pompe et réciproquement, i.e. :
- à la sortie de la fibre, le signal a la polarisation initiale de la pompe.
- à l'entrée de la fibre, la pompe a la polarisation initiale du signal.

Exemple 1.0.1.
Nous pouvons donner comme exemple un modèle de configuration contra-propagative [9], à une dimension, d'intéraction à quatre ondes. Nous noterons u_1 et u_2 (v_1 et v_2) les champs indiquant les amplitudes des composantes des polarisations, ici circulaires, gauches et droites de l'onde propagative (contra-propagative).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial z} &= i\left[\left(|u_1|^2 + 2\,|u_2|^2 + 2\,|v_1|^2 + 2\,|v_2|^2\right) u_1 + 2 v_1 v_2^* u_2\right] \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial z} &= i\left[\left(|u_2|^2 + 2\,|u_1|^2 + 2\,|v_1|^2 + 2\,|v_2|^2\right) u_2 + 2 v_1^* v_2 u_1\right] \\
\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial z} &= i\left[\left(|v_1|^2 + 2\,|v_2|^2 + 2\,|u_1|^2 + 2\,|u_2|^2\right) v_1 + 2 u_1 u_2^* v_2\right] \\
\frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial v_2}{\partial z} &= i\left[\left(|v_2|^2 + 2\,|v_1|^2 + 2\,|u_1|^2 + 2\,|u_2|^2\right) v_2 + 2 u_1^* u_2 v_1\right]
\end{aligned}$$

Remarque 1.0.1. *(Attraction d'ondes)*
Pour des modèles plus généraux ce phénomène est appelé attraction d'ondes.

Exemples 1.0.1.

1. *Modèle d'intéraction [8] à trois ondes avec u_1 et u_2 (v) les ondes propagatives (contra-propagative) :*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial z} &= -u_2 v \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial z} &= u_1 v^* \\
\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial z} &= u_1 u_2^*
\end{aligned}$$

2. *Le modèle de fibre avec réseau de Bragg [27, 31] :*

$$\begin{aligned}
i\Big(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\Big) &= \gamma v + \alpha |v|^2 u + \beta |u|^2 u = \frac{\partial h}{\partial u^*} \\
i\Big(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial z}\Big) &= \gamma u + \alpha |u|^2 v + \beta |v|^2 v = \frac{\partial h}{\partial v^*},
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Le modèle

Nous exposons dans ce chapitre la modélisation mathématique du phénomène d'attraction d'ondes sur laquelle nous allons travailler.

2.1 Le système d'étude

Nous considérons u et v deux ondes contra-propagatives dans une fibre optique de longueur L. u et v sont fonctions de deux variables : le temps que nous noterons t et la distance notée z.

Afin de décrire l'attraction d'ondes, nous considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(z,t) + \frac{\partial u}{\partial z}(z,t) &= -i\gamma v(z,t) \\ \frac{1}{c}\frac{\partial v}{\partial t}(z,t) - \frac{\partial v}{\partial z}(z,t) &= -i\gamma u(z,t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $z \in [0, L]$ et $t \in [0, +\infty[$, c est la vitesse de la lumière dans la fibre optique et γ est une constante de couplage entre u et v..

Ce modèle correspond à une réflexion de Bragg sur une fibre optique, produite par la gravure d'un réseau périodique [27], [31].

Outre ce système, nous nous donnons des conditions initiales et aux bords pour u et v. Nous en discuterons précisément dans la sous-partie suivante.

Remarques 2.1.1.

1. *Le système (2.1) est un système intégrable, de type hyperbolique de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre.*
2. *Nous pouvons illustrer le caractère contra-propagatif des deux ondes u et v au vu du système (2.1) en considérant le cas particulier de (2.1)*

avec $\gamma = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(z,t) + \frac{\partial u}{\partial z}(z,t) &= 0 \\ \frac{1}{c}\frac{\partial v}{\partial t}(z,t) - \frac{\partial v}{\partial z}(z,t) &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

le signe + de la première équation implique que u est une onde qui se propage vers la droite alors que le signe − de la seconde équation implique que le sens de propagation de l'onde v est vers la gauche.
Le système admet en effet la solution générale :

$$u(z,t) = f(z-ct) \qquad v(z,t) = g(z+ct) \tag{2.3}$$

avec f et g des fonctions dérivables par rapport à z et à t.

3. *Nous pouvons ré-écrire le système (2.1) en utilisant une notation plus compacte :*

$$\left(\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_3 i\frac{\partial}{\partial z} - \gamma\sigma_1\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

où σ_j sont les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notons que le système d'étude peut s'écrire comme un système de deux équations aux dérivées partielles du premier et second ordre, comme l'indique la

Proposition 2.1.1.
Le système (2.1) est équivalent à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(z,t) + \frac{\partial u}{\partial z}(z,t) &= -i\gamma v(z,t) \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(z,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z,t) &= -\gamma^2 u(z,t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

La seconde équation est l'équation de Klein-Gordon linéaire.

Démonstration.
(2.1) implique

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) u(z,t) &= -i\gamma v(z,t) \\ \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right)(-i\gamma v(z,t)) &= -\gamma^2 u(z,t). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)u(z,t) &= -i\gamma v(z,t)\\
\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)u(z,t) &= -\gamma^2 u(z,t)
\end{aligned}$$

i.e. :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(z,t)+\frac{\partial u}{\partial z}(z,t) &= -i\gamma v(z,t)\\
\frac{1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(z,t)-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -\gamma^2 u(z,t)
\end{aligned}$$

Réciproquement, (2.4) implique :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(z,t)+\frac{\partial u}{\partial z}(z,t) &= -i\gamma v(z,t)\\
\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)u(z,t) &= -\gamma^2 u(z,t)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(z,t)+\frac{\partial u}{\partial z}(z,t) &= -i\gamma v(z,t)\\
\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\right)(-iv(z,t)) &= -\gamma u(z,t)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(z,t)+\frac{\partial u}{\partial z}(z,t) &= -i\gamma v(z,t)\\
\frac{1}{c}\frac{\partial v}{\partial t}(z,t)-\frac{\partial v}{\partial z}(z,t) &= -i\gamma u(z,t)
\end{aligned}$$

□

Le fait que nous injectons des ondes contra-propagatives conduit à nous donner des conditions aux bords mixtes de type Robin pour l'équation de Klein-Gordon :

$$u(z=0,t) \quad \text{et} \quad \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(z=L,t)+\frac{\partial u}{\partial z}(z=L,t).$$

De plus, la différentiabilité des solutions impose une relation de compatibilité entre conditions aux bords et conditions initiales.

Prenons comme illustration le cas $\gamma = 0$. Notons $u(z, t = 0) = u_{initial}$ et $v(z, t = 0) = v_{initial}$, $u(z = 0, t) = b_0(t)$ et $u(z = L, t) = b_L(t)$.
D'après (2.3), nous devons avoir :

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial^i b_0}{\partial t^i}(t = 0) = \frac{\partial^i u_{initial}}{\partial z^i}(z = 0) \quad \text{et} \quad \frac{1}{c}\frac{\partial^i b_L}{\partial t^i}(t = 0) = \frac{\partial^i v_{initial}}{\partial z^i}(z = L),$$

avec $1 \leq i \leq 3$.

Considérons le système d'étude sous forme hamiltonienne. Dans ce cas, si $h = \gamma(u^{s*}v^s + u^s v^{s*})$, le modèle est décrit par les équations :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} &= -i\gamma v = -i\frac{\partial h}{\partial u^*} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial z} &= -i\gamma u = -i\frac{\partial h}{\partial v^*} \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2 Choix des conditions initiales et aux bords

Afin de décrire complètement notre modèle, comme évoqué dans la sous partie précédente, nous nous donnons les conditions initiales :

$$u(z, t = 0) = 0 \qquad v(z, t = 0) = 0$$

et les conditions aux bords :

$$u(z = 0, t) = b_0(t) \qquad v(z = L, t) = b_L(t).$$

Nous choisissons les conditions aux bords du type suivant :

$$b_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ u_0 & \text{si } t \geq t_{p0}. \end{cases} \qquad b_L(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ v_L & \text{si } t \geq t_{pL}. \end{cases} \tag{2.6}$$

où $b_0(t)$, $b_L(t)$ sont des fonctions monotones croissantes, de classe $\mathcal{C}^n$, $n \geq 3$.

Autrement dit les ondes injectées croissent de façon lisse à partir de $t = 0$ et atteignent les amplitudes constantes respectives u_0 et v_L après un temps respectivement t_{p0} et t_{pL}.

Nous appellerons cet espace de fonctions $\mathcal{B}^n$.

La remarque qui suit nous donne une manière d'écrire ces conditions aux bords.

Remarque 2.2.1.
Les conditions aux bords s'écrivent :

$$b_0(t) = u_0 \left[S_0(t) + H(t - t_{p0})\right] \tag{2.7}$$

$$b_L(t) = u_L \left[S_L(t) + H(t - t_{pL})\right] \tag{2.8}$$

avec H la fonction de Heaviside, S_0 une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0, t_{p0}]$, S_L une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0, t_{pL}]$, $n \geq 3$.

Afin de ne pas alourdir les notations, nous prendrons dans les démonstrations des chapitres suivants $b_0(t) = b_L(t) = S(t) + H(t - t_p)$ i.e. $t_{p0} = t_{pL} = t_p$, $S_0 = S_L = S$ et $u_0 = u_L = 1$.

Chapitre 3

Etat stationnaire, attraction d'ondes dans l'état stationnaire

Nous prendrons dès à présent et dans toute la suite $c = 1$, ceci revenant seulement à faire un choix d'unité temporelle.

L'objectif de ce chapitre est d'écrire les solutions stationnaires du système d'étude (2.1) donné dans le chapitre précédent. Ces solutions stationnaires jouent un rôle très important nous le verrons par la suite. En effet, un des buts de notre travail est de démontrer que les solutions de notre problème, que nous établirons dans le chapitre suivant, relaxent vers ces solutions stationnaires. Nous verrons que l'attraction d'ondes est une caractéristique de l'état stationnaire.

3.1 Solutions stationnaires

Définition 3.1.1. *(Solutions stationnaires ou état stationnaire)*
On appelle solutions stationnaires du système (2.1) les solutions $u^s(z)$, $v^s(z)$ du système :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^s}{\partial z}(z) &= -i\gamma v^s(z) \\ \frac{\partial v^s}{\partial z}(z) &= i\gamma u^s(z) \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $z \in [0, L]$, vérifiant les conditions aux bords $u^s(z = 0) = u_0$, $v^s(z = L) = v_L$.

Remarque 3.1.1.
Le système (3.1) peut s'écrire à l'aide de la matrice de Pauli σ_2 sous forme :

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} u^s \\ v^s \end{pmatrix} = \gamma\sigma_2 \begin{pmatrix} u^s \\ v^s \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Dans notre cas, l'état stationnaire est donné par la

Proposition 3.1.1.
Pour chaque choix de conditions aux bords $u^s(z=0) = u_0$ et $v^s(z=L) = v_L$, il existe un unique état stationnaire donné par :

$$\begin{aligned} u^s(z) &= u_0 \cosh\gamma z - \sinh\gamma z \quad [u_0 \tanh\gamma L + i\frac{v_L}{\cosh\gamma L}] \\ v^s(z) &= iu_0 \sinh\gamma z - i\cosh\gamma z \quad [u_0 \tanh\gamma L + i\frac{v_L}{\cosh\gamma L}] \end{aligned} \tag{3.3}$$

Démonstration.
Le système (3.1) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} u^s(z) \\ v^s(z) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i\gamma \\ i\gamma & 0 \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} u^s(z) \\ v^s(z) \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} u^s(z) \\ v^s(z) \end{pmatrix} = e^{Rz}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

où $v_0 = v^s(z=0)$.
L'exponentielle peut s'écrire :

$$e^{Rz} = \begin{pmatrix} \cosh\gamma z & -i\sinh\gamma z \\ i\sinh\gamma z & \cosh\gamma z \end{pmatrix},$$

et donc :

$$u^s(z) = u_0 \ \cosh\gamma z - iv_0 \ \sinh\gamma z \tag{3.4}$$

$$v^s(z) = iu_0 \ \sinh\gamma z + v_0 \ \cosh\gamma z. \tag{3.5}$$

Or, d'après la donnée du système d'étude, nous ne connaissons pas v_0. Cependant, nous disposons des données v_L et u_0.
Evaluer l'égalité (3.5) ci-dessus en $z = L$ permet d'exprimer v_0 en fonction de v_L et u_0 :

$$v_0 = \frac{v_L}{\cosh\gamma L} - iu_0 \tanh\gamma L$$

D'où le résultat. □

Remarque 3.1.2.
Nous écrirons l'état stationnaire sous la forme équivalente :

$$\begin{aligned} u^s(z) &= u_0 \frac{\cosh \gamma(L-z)}{\cosh \gamma L} - i v_L \frac{\sinh \gamma z}{\cosh \gamma L} \\ v^s(z) &= -i u_0 \frac{\sinh \gamma(L-z)}{\cosh \gamma L} + v_L \frac{\cosh \gamma z}{\cosh \gamma L}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Remarquons que si $u_0 = 0$, dans l'état stationnaire, il y a toujours une partie stationnaire correspondant à la partie contra-propagative. De même pour l'onde contra-propagative si $v_L = 0$. Ceci est dû au fait que, à l'état stationnaire, l'attraction est une réflexion de Bragg.

En terme de système hamiltonien, l'état stationnaire $u^s(z), v^s(z)$ satisfait les équations :

$$\begin{aligned} i\frac{du^s}{dz} &= \gamma v^s = \frac{\partial h}{\partial u^{s*}} \\ -i\frac{dv^s}{dz} &= \gamma u^s = \frac{\partial h}{\partial v^{s*}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Remarquons que ce système possède deux quantités conserveés (par rapport à z) :

$$h = \gamma(u^{s*}v^s + u^s v^{s*}) \tag{3.8}$$

$$J_{1:-1} = |u^s|^2 - |v^s|^2 \tag{3.9}$$

Le système est donc intégrable au sens de Liouville [13]. C'est un modèle avec résonance $1 : -1$. Nous pouvons remarquer de plus que ce système à deux degrés de liberté possède une autre quantité conservée donnée par :

$$C = (u^s)^2 + (v^s)^2 \tag{3.10}$$

3.2 Attraction d'ondes dans l'état stationnaire

Si nous considérons une fibre optique assez longue, le calcul de limites de la proposition suivante permet de mettre en évidence qu'il y a attraction d'ondes dans l'état stationnaire.

Proposition 3.2.1. *(Attraction d'ondes dans l'état stationnaire.)*

$$\lim_{L\to+\infty} u^s(z=L) = -\text{signe}(\gamma)\ i v_L \tag{3.11}$$

$$\lim_{L\to+\infty} v^s(z=0) = -\text{signe}(\gamma)\ i u_0 \tag{3.12}$$

Démonstration.
Le résultat est immédiat par l'équation (3.6). □

Remarque 3.2.1.
La convergence est exponentielle en L, i.e.,

$$u^s(z=L) = -\text{signe}(\gamma)\ iv_L + \mathcal{O}(e^{-|\gamma|L}) \tag{3.13}$$
$$v^s(z=0) = -\text{signe}(\gamma)\ iu_0 + \mathcal{O}(e^{-|\gamma|L}) \tag{3.14}$$

Définition 3.2.1. *(Attraction d'ondes sur le bord)*
- *On dit qu'il y a attraction d'ondes sur le bord droit s'il existe une phase ϕ_d telle que*
$$\lim_{L\to+\infty} u^s(L) = e^{i\phi_d} v_L$$
- *On dit qu'il y a attraction d'ondes sur le bord gauche s'il existe une phase ϕ_g telle que*
$$\lim_{L\to+\infty} v^s(0) = e^{i\phi_g} u_0$$

Remarque 3.2.2.
Les phases ϕ_d et ϕ_g peuvent être différentes. Dans l'exemple que nous considérons,

$$e^{i\phi_d} = -\text{signe}(\gamma)i \quad et \quad e^{i\phi_g} = \text{signe}(\gamma)i$$

.

Remarque 3.2.3.
La proposition 3.2.1 montre qu'il y a attraction d'ondes sur le bord droit et sur le bord gauche.

Les deux quantités conservées (3.8)(3.9) dans l'état stationnaire satisfont

$$\begin{aligned} \lim_{L\to\infty} h &= 0 \\ \lim_{L\to\infty} J_{1:-1} &= 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Par conséquent, il y attraction du module des champs partout dans la fibre :

$$\lim_{L\to\infty} \sup_{z\in[0,L]} |u^s(z)| - |v^s(z)| = 0 \tag{3.16}$$

La phase relative $\theta := \theta_u - \theta_v$, où $u = |u|e^{i\theta_u}$, $v = |v|e^{i\theta_v}$ satisfait la propriété suivante : si, en un point de la fibre, $\lim_{L\to\infty} u$ et $\lim_{L\to\infty} v$ ne sont pas nulles, alors

$$\lim_{L\to\infty} \cos(\theta_u - \theta_v) = 0 \tag{3.17}$$

i.e., $\theta_u - \theta_v$ vaut ou bien $\pi/2$ ou bien $-\pi/2$.
Plus précisément, autour de $z = 0$, la différence de phase $\theta_u - \theta_v$ est égale à $\text{sign}(\gamma)\pi/2$ alors qu'au voisinage de $z = L$, elle vaut $-\text{sign}(\gamma)\ \pi/2$. Ainsi, si nous considérons une grande longueur L de fibre, la phase associée change du facteur π d'un bord à l'autre.

Remarque 3.2.4.
Le point $(u, v) = (0, 0)$ est un point d'équilibre hyperbolique de la "z-dynamique". Les relations

$$\begin{aligned} h(u, u^*, v, v^*) &= 0 \\ J_{1:-1}(u, u^*, v, v^*) &= 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

définissent une variété réelle de dimension deux qui est topologiquement un cylindre pincé, i.e. un cône. Il est identique aux variétés stables et instables de l'équilibre hyperbolique. C'est l'analogue non compact d'un tore invariant singulier pincé [14]. Ainsi, le modèle que nous étudions présente la propriété générale observée numériquement dans les références [8, 9, 10]. A savoir, le système relaxe vers une variété singulière. L'ingrédient clé conduisant à cette propriété est la résonance de type $1 : -1$. L.Bates et R.Cushman [14] ont construit pour cet exemple le concept de "scattering monodromy", propriété topologique analogue à la monodromie hamiltonienne [15, 16, 17, 18, 19, 20] dans le cas de systèmes intégrables non compacts.

Chapitre 4

Solutions dépendant du temps, loi de conservation et attraction d'ondes à l'asymptotique

Dans cette partie nous commencerons par montrer que les solutions du système d'étude (2.1) satisfont une loi de conservation locale, ce qui permet d'expliquer le mécanisme de relaxation comme un bilan entre les ondes entrantes et sortantes sur les bords. Nous montrerons ensuite que, sous des conditions de régularité, les solutions dépendant du temps satisfont la propriété d'attraction d'ondes dans la limite $t \to +\infty$, et ceci indépendamment des conditions initiales.

Proposition 4.0.2.
Si $u(z,t), v(z,t)$ est une solution continûment différentiable de (2.1). Alors elle satisfait la loi de conservation locale :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(|u(z,t)|^2 + |v(z,t)|^2\Big) = -\frac{\partial}{\partial z} J_{1,-1} \tag{4.1}$$

avec $J_{1,-1} = |u|^2 - |v|^2$. En conséquence :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_0^L \big(|u|^2 + |v|^2\big)dz &= J_{1,-1}(z=0,t) - J_{1,-1}(z=L,t) \\ &= -|u(z=L,t)|^2 + |v(z=L,t)|^2 \\ &\quad +|u(z=0,t)|^2 - |v(z=0,t)|^2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Démonstration.

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(|u(z,t)|^2 + |v(z,t)|^2\Big) = \frac{\partial u}{\partial t}u^* + u\frac{\partial u^*}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}v^* + v\frac{\partial v^*}{\partial t}$$

Nous utilisons (2.1) pour exprimer $\frac{\partial u}{\partial t}$ en fonction de v et $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u^*}{\partial t}$ en fonction de v^* et $\frac{\partial u^*}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ en fonction de u et $\frac{\partial v}{\partial z}$, $\frac{\partial v^*}{\partial t}$ en fonction de u^* et $\frac{\partial v^*}{\partial z}$. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(|u(z,t)|^2 + |v(z,t)|^2\right) &= \left(-iv - \frac{\partial u}{\partial z}\right) u^* + u\left(iv^* - \frac{\partial u^*}{\partial z}\right) \\
&\quad + \left(-iu + \frac{\partial v}{\partial z}\right) v^* + v\left(iu^* + \frac{\partial v^*}{\partial z}\right) \\
&= -\left(\frac{\partial u}{\partial z}u^* + \frac{\partial u^*}{\partial z}u\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}v^* + \frac{\partial v^*}{\partial z}v\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne (4.1).
En conséquence, et compte-tenu que l'intervalle d'intégration est compact, il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L \left(|u(z,t)|^2 + |v(z,t)|^2\right) dz &= \int_0^L \left(-\frac{\partial u}{\partial z}u^* - \frac{\partial u^*}{\partial z}u + \frac{\partial v}{\partial z}v^* + \frac{\partial v^*}{\partial z}v\right) dz \\
&= -\int_0^L \frac{\partial u}{\partial z}u^*\, dz - \int_0^L \frac{\partial u^*}{\partial z}u\, dz \\
&\quad + \int_0^L \frac{\partial v}{\partial z}v^*\, dz + \int_0^L \frac{\partial v^*}{\partial z}v\, dz
\end{aligned}$$

Ces intégrales sont toutes bien définies car leurs intégrandes sont supposées continûment différentiables. Une intégration par parties dans la première et la troisième intégrale donne (4.2). □

Remarque 4.0.5.
L'équation (4.2) montre que la variation de la norme L_2 des ondes est déterminée par les ondes entrantes et sortantes sur les bords, ce qui explique le mécanisme de relaxation sans dissipation. Dans l'état stationnaire cette relation nous donne aussi une interprétation de l'attraction d'ondes ; dans l'état stationnaire, (4.2) implique toujours $J^s_{1:-1}(z=0) = J^s_{1:-1}(z=L)$. La propriété d'attraction d'ondes signifie que pour $L \to \infty$, l'échange a lieu localement, comme on peut le voir dans l'équation (3.16), et en particulier sur chaque bord :

$$\begin{aligned}
-|u^s(z=L)|^2 + |v^s(z=L)|^2 &\to 0 \\
|u^s(z=0)|^2 - |v^s(z=0)|^2 &\to 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

La propriété (4.2) peut être utilisée pour montrer la propriété suivante au voisinage de l'infini :

Proposition 4.0.3.
Soit $u(z,t), v(z,t)$ solution continûment différentiable de (2.1) avec les conditions aux bords (2.6). Supposons que les dérivées aux bords $\dfrac{\partial u}{\partial t}(z=L,t)$ et

$\frac{\partial v}{\partial t}(z=0,t)$ *sont bornées. Alors,* $u(z,t), v(z,t)$ *satisfont la propriété d'attraction d'ondes suivante :*

$$\begin{aligned} \lim_{L\to\infty}\lim_{t\to\infty} u(z=L,t) &= -\text{signe}(\gamma)\ iv_L, \\ \lim_{L\to\infty}\lim_{t\to\infty} v(z=0,t) &= -\text{signe}(\gamma)\ iu_0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Démonstration.
Nous pouvons écrire $u(z,t), v(z,t)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} u(z,t) &= u^s(z) + r_+(z,t), \\ v(z,t) &= v^s(z) + r_-(z,t). \end{aligned} \tag{4.5}$$

$r_+(z,t)$, $r_-(z,t)$ est aussi solution du système (2.1) avec conditions aux bords :

$$r_+(z=0,t)=0 \qquad r_-(z=L,t)=0 \quad \text{pour } t \geq t_p.$$

D'après la proposition 4.0.2 , nous avons, pour $t \geq t_p$:

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \left(|r_+|^2 + |r_-|^2\right)dz = -|r_+(z=L,t)|^2 - |r_-(z=0,t)|^2 \leq 0. \tag{4.6}$$

La proposition 4.0.3 est une conséquence de la proposition 3.2.1 et de la propriété suivante. □

Proposition 4.0.4.

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} r_+(z=L,t) &= 0, \\ \lim_{t\to\infty} r_-(z=0,t) &= 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Démonstration.
L'équation (4.6) a la structure :

$$\frac{d}{dt}N(t) = -g(t) \tag{4.8}$$

Montrons que nécessairement, $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$.
La relation (4.8) est équivalente à

$$N(t) = N(t_i) - \int_{t_i}^{t} g(\tau)d\tau. \tag{4.9}$$

Comme $N(t)$ est positif, cela implique :

$$\int_{t_i}^{t} g(\tau)d\tau \leq N(t_i) \quad \forall t \tag{4.10}$$

Donc :

$$\int_{t_i}^{\infty} g(\tau)d\tau \leq N(t_i) < \infty. \tag{4.11}$$

Si $\limsup_{t\to\infty} g(t) \neq 0$, il existe une suite $t_j \to \infty$ et une constante $b > 0$ telles que $g(t_j) > b$ pour tout t_j.
Pour chaque t_j, nous pouvons choisir un intervalle $[t_j - \delta, t_j + \delta]$ avec

$$\delta := \frac{b}{2m},$$

où m est la borne de la dérivée $|\partial g/\partial t| < m$.
Pour tout t dans un des intervalles $[t_j - \delta, t_j + \delta]$ nous avons :

$$g(t) > b/2,$$

Comme :

$$g(t) = g(t_j) + \int_{t_j}^{t} \frac{dg(\tau)}{d\tau} d\tau, \tag{4.12}$$

alors :

$$|g(t) - g(t_j)| \leq \int_{t_j}^{t} \Big|\frac{dg(\tau)}{d\tau}\Big| d\tau \leq m|t - t_j| < m\delta = b/2. \tag{4.13}$$

D'ou : pour tout t dans un des intervalles $[t_j - \delta, t_j + \delta]$ nous avons :

$$g(t) > b/2,$$

Nous pouvons prendre la suite t_j telle que $|t_{j+1} - t_j| > 2\delta$.
Alors :

$$\int_{t_i}^{\infty} g(\tau)d\tau \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b}{2} 2\delta = \infty, \tag{4.14}$$

ce qui contredit (4.11) et termine la démonstration. □

Chapitre 5

Solutions dépendant du temps, relaxation vers l'état stationnaire

Dans ce chapitre, nous nous posons la question de savoir si le système (2.1) approche l'état stationnaire pour des temps longs. Nous construirons dans un premier temps une solution pour des conditions aux bords dépendantes du temps (2.6) via l'utilisation de la méthode de la transformée de Fourier. Nous montrerons ensuite la régularité de la solution et son unicité pour des conditions initiales nulles. Enfin nous étudierons son asymptotique et répondrons ainsi affirmativement à la question posée.

5.1 Résolution via transformée de Fourier

La situation physique à laquelle nous nous intéressons considère des conditions aux bords $u_0(t), v_L(t)$ nulles pour les temps $t < 0$ (c'est à dire avant que les champs d'ondes ne soient injectés dans la fibre à $t = 0$) puis tendant vers une constante à partir d'un temps $t = t_p$.

Nous construisons la solution de notre système avec conditions aux bords en utilisant une transformée de Fourier temporelle, que nous rappelons, est définie par :

$$\tilde{u}(z, w) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(z, t) e^{-iwt} dt$$

et la transformée de Fourier inverse par :

$$u(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(z, w) e^{iwt} dw.$$

D'après le système d'étude, $u(z, t)$ et $v(z, t)$ sont définies pour $t \in [0, +\infty[$. Afin d'utiliser la transformée de Fourier temporelle, nous étendons le domaine à $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 5.1.1.
La transformée de Fourier du système (2.1) a la forme :

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}\tilde{u}(z,\omega)\\ \tilde{v}(z,\omega)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i\omega & -i\gamma\\ i\gamma & i\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{u}(z,\omega)\\ \tilde{v}(z,\omega)\end{pmatrix} \tag{5.1}$$

$$\tilde{u}(0,\omega) = \tilde{b}_0(\omega), \quad \tilde{u}(L,\omega) = \tilde{b}_L(\omega) \tag{5.2}$$

où $\tilde{b}_0(\omega)$ et $\tilde{b}_L(\omega)$ sont les transformées de Fourier des conditions aux bords $u(z=0,t) = b_0(t)$ et $v(z=L,t) = b_L(t)$.

Démonstration.
Le système d'étude (2.1) est équivalent au système écrit en terme de transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}\widetilde{\frac{\partial u}{\partial t}}(z,w) + \widetilde{\frac{\partial u}{\partial z}}(z,w) &= -i\gamma\ \tilde{v}(z,w)\\ \widetilde{\frac{\partial v}{\partial t}}(z,w) - \widetilde{\frac{\partial v}{\partial z}}(z,w) &= -i\gamma\ \tilde{u}(z,w)\end{aligned} \tag{5.3}$$

En utilisant une intégration par parties nous montrons que

$$\widetilde{\frac{\partial u}{\partial t}}(z,t) = iw\ \tilde{u}(z,w),$$

et de même pour v.

Ainsi (5.3) équivaut à :

$$\begin{aligned}iw\ \tilde{u}(z,w) + \widetilde{\frac{\partial u}{\partial z}}(z,w) &= -i\gamma\ \tilde{v}(z,w)\\ iw\ \tilde{v}(z,w) - \widetilde{\frac{\partial v}{\partial z}}(z,w) &= -i\gamma\ \tilde{u}(z,w)\end{aligned} \tag{5.4}$$

D'autre part nous avons

$$\widetilde{\frac{\partial u}{\partial z}} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \quad \text{et} \quad \widetilde{\frac{\partial v}{\partial z}} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z},$$

ce qui donne (5.3). □

Ce système établi, nous en cherchons les solutions.

Proposition 5.1.2.
Le système (5.1), (5.2) *admet pour solution :*

$$\begin{aligned} \tilde{u}(z,w) &= \tilde{F}(L-z,w)\ \tilde{b}_0(w)\ + \tilde{G}(z,w)\ \tilde{b}_L(w) \\ \tilde{v}(z,w) &= \tilde{G}(L-z,w)\ \tilde{b}_0(w)\ + \tilde{F}(z,w)\ \tilde{b}_L(w) \end{aligned} \tag{5.5}$$

où :

$$\tilde{F}(z,w) = \frac{\cosh Kz + \frac{iw}{K}\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL} \tag{5.6}$$

$$\tilde{G}(z,w) = \frac{i\gamma}{K}\frac{-\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL} \tag{5.7}$$

avec $K = \sqrt{\gamma^2 - w^2}$.

Démonstration.
Soit $M = \begin{pmatrix} -iw & -i\gamma \\ i\gamma & iw \end{pmatrix}$. Les solutions de (5.1) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{u}(z,w) \\ \tilde{v}(z,w) \end{pmatrix} &= e^{Mz}\begin{pmatrix} \tilde{u}(0,w) \\ \tilde{v}(0,w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh K\gamma z - \frac{iw}{K}\sinh K\gamma z & -\frac{i}{K}\sinh K\gamma z \\ \frac{i}{K}\sinh K\gamma z & \cosh K\gamma z + \frac{iw}{K}\sinh K\gamma z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{u}(0,w) \\ \tilde{v}(0,w) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme il a été fait dans la démonstration de la proposition 3.1.1, en évaluant en $z = L$, nous obtenons :

$$\tilde{v}(0,w) = \frac{1}{\cosh K\gamma L + \frac{iw}{K}\sinh K\gamma L}\left(\tilde{v}(L,w) - \frac{i}{K}\tilde{u}(0,w)\ \sinh K\gamma L\right).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{u}(z,w) \\ \tilde{v}(z,w) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh K\gamma z - \frac{iw}{K}\sinh K\gamma z & -\frac{i}{K}\sinh K\gamma z \\ \frac{i}{K}\sinh K\gamma z & \cosh K\gamma z + \frac{iw}{K}\sinh K\gamma z \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \tilde{b}_0(w) \\ \frac{\tilde{b}_L(w) - \frac{i}{K}\tilde{b}_0(w)\ \sinh K\gamma L}{\cosh K\gamma L + \frac{iw}{K}\sinh K\gamma L} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Un calcul direct donne (5.5). □

Nous pouvons dès à présent démontrer quelques résultats sur les transformées de Fourier des conditions aux bords, ainsi que sur les fonctions $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$, qui nous serviront dans les sous-parties suivantes, notamment à démontrer l'existence et la régularité des solutions que nous venons d'écrire.

Dans cette partie nous prendrons $\gamma = 1$ pour alléger la notation. Tous les résultats sont valables pour γ quelconque.

En toute première remarque, nous avons le

Lemme 5.1.1.
Les fonctions $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$ sont dérivables par rapport à w.

Démonstration.

$$\tilde{F}(L-z,w) = \frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh(KL) + \frac{iw}{K}\sinh(KL)}$$

(i) Si $w \notin \{-1,1\}$: $\tilde{F}$ est dérivable par sommes, quotients, compositions de fonctions dérivables par rapport à w.

(ii) Si $w = 1$ ou -1 :
Démontrons la dérivabilité de la fonction de w définie par $\frac{\sinh(K)}{K}$ en 1 et -1. Ceci revient à démontrer la dérivabilité en 0 de la fonction h définie par $h(x) = \frac{\sinh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. Pour ce faire, nous allons montrer que les dérivées à gauche et à droite en 0 existent, sont finies et égales. Rappelons que $h(x) = \begin{cases} \frac{\sinh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{\sin(\sqrt{|x|})}{\sqrt{|x|}} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$. h est prolongeable par continuité en 0 et nous posons $h(0) = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{\sinh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - 1\right) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x})^3}{6} + ...}{\sqrt{x}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\left(\frac{\sin(\sqrt{|x|})}{\sqrt{|x|}} - 1\right) \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{|x|} - \frac{\left(\sqrt{|x|}\right)^3}{6} + ...}{\sqrt{|x|}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Donc : h est dérivable en 0, i.e., la fonction définie par $\frac{\sinh(K)}{K}$ est dérivable en 1 et -1.

D'où : $\tilde{F}$ est dérivable en -1 et en 1 en tant que sommes, composées et quotients de fonctions dérivables en -1 et en 1.
De même :

$$\tilde{G}(z,w) = -\frac{i}{K}\frac{\sinh(Kz)}{\cosh(KL) + \frac{iw}{K}\sinh(KL)}$$

(i) Si $w \notin \{-1,1\}$: $\tilde{G}$ est dérivable par somme, quotients, compositions de fonctions dérivables par rapport à w.

(ii) Si $w = 1$ ou -1 : d'après le (ii) ci-avant, $\tilde{G}$ est dérivable par somme, quotients, compositions de fonctions dérivables en -1 et en 1.

Ces dérivées s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{F}(L-z,w)}{\partial w} &= \frac{-\frac{w(L-z)}{K}\sinh(K(L-z)) + \frac{i}{K^3}\sinh(K(L-z)) - i\frac{w^2(L-z)}{K^2}\cosh(K(L-z))}{\cosh(KL) + \frac{iw}{K}\sinh(KL)} \\
&- \frac{\left(\cosh(K(L-z)) + \frac{iw}{K}\sinh(K(L-z))\right)}{\left(\cosh(KL) + \frac{iw}{K}\sinh(KL)\right)^2} \\
&\times \left(-\frac{wL}{K}\sinh(KL) + \frac{i}{K^3}\sinh(KL) - i\frac{w^2L}{K^2}\cosh(KL)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{G}(z,w)}{\partial w} &= \frac{iwz\cosh(Kz)}{K^2\left(\cosh(KL) + \frac{iw}{K}\sinh(KL)\right)} - \frac{iw\sinh(Kz)}{K^3\left(\cosh(KL) + \frac{iw}{K}\sinh(KL)\right)} \\
&- \frac{iwL\sinh(Kz)\sinh(KL)}{K^2\left(\cosh(KL) + \frac{iw}{K}\sinh(KL)\right)^2} - \frac{\sinh(Kz)\sinh(KL)}{K^4\left(\cosh(KL) + \frac{iw}{K}\sinh(KL)\right)^2} \\
&+ \frac{w^2L\sinh(Kz)\cosh(KL)}{K^3\left(\cosh(KL) + \frac{iw}{K}\sinh(KL)\right)^2}
\end{aligned}$$

□

Lemme 5.1.2.
Les fonctions $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$, en tant que fonctions de w, sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

Démonstration.
D'après le lemme précédent, $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$ sont des fonctions continues dérivables sur $\mathbb{R}$ et les dérivées sont continues en tant que composées, sommes et quotients de fonctions continues sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. □

Les deux lemmes suivants vont nous permettre de démontrer le résultat de la proposition 5.1.3.

Notons $w = w_r + iw_i$, $(w_r, w_i) \in \mathbb{R}^2$.

Lemme 5.1.3.
Si $w_i < 0$, alors

$$K \underset{|w| \mapsto \infty}{\sim} |w_i| + iw_r$$

Démonstration.
Soient $w = w_r + iw_i$ et $K = K_r + iK_i$, nous avons :

$$1 - w^2 = (1 - w_r^2 + w_i^2) - i(2w_r w_i) \quad \text{et} \quad K^2 = (K_r^2 - K_i^2) + i(2K_i K_r)$$

Comme $K^2 = 1 - w^2$, il vient :

$$\begin{aligned} K_r^2 - K_i^2 &= 1 - w_r^2 + w_i^2 && (5.8) \\ K_i K_r &= -w_r w_i && (5.9) \end{aligned}$$

Si $w_r \neq 0$ et $w_i \neq 0$, alors (5.9) implique :

$$K_i = -\frac{w_r w_i}{K_r} \tag{5.10}$$

et (5.8) implique que K_r^2 est solution de l'équation :

$$X^2 + (w_r^2 - w_i^2 - 1)X - w_r^2 w_i^2 = 0$$

K_r^2 étant positif, nécessairement :

$$\begin{aligned} K_r^2 &= \frac{1}{2}(1 - w_r^2 + w_i^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(w_r^2 - w_i^2 - 1)^2 + 4w_r^2 w_i^2} \\ &= \frac{1}{2}\left|1 - w_r^2 + w_i^2\right| \left[\text{signe}(1 - w_r^2 + w_i^2)\sqrt{1 + \frac{4w_r^2 w_i^2}{(1 - w_r^2 + w_i^2)^2}}\right] \end{aligned}$$

Prenons $K_r > 0$, d'après (5.10), comme nous travaillons avec $w_i < 0$, alors $\text{signe}(K_i) = -\text{signe}(w_r w_i) = \text{signe}(w_r)$.
Distinguons deux cas pour $|w| \to \infty$:

– Si $|w_r| \to \infty$, $w_i = \text{constante}$,

$$\begin{aligned} K_r^2 &\underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} \frac{1}{2}w_r^2\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4w_i^2}{w_r^2}}\right] \\ &\underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} \frac{1}{2}w_r^2\left[2\frac{w_i^2}{w_r^2}\right] \text{ (par développement limité)} \\ &\underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} w_i^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$K_r \underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} |w_i|$$

et d'après (5.10) :

$$\begin{aligned} K_i &\underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} -\frac{w_i w_r}{|w_i|} \\ K_i &\underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} w_r \end{aligned}$$

– Si $|w_i| \to \infty$, $w_r =$ constante, une démonstration analogue au cas précédent donne :

$$K_r \underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} |w_i|$$

$$K_i \underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} w_r$$

Dans les deux cas, nous avons :

$$K \underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} |w_i| + iw_r.$$

□

Lemme 5.1.4.
Soit $D = \cosh(KL) + \dfrac{iw}{K}\sinh(KL)$, *si* $|w| \mapsto \infty$ *avec* $w_i < 0$,
Alors :

$$|D| > 1$$

Démonstration.

$$D = \frac{1}{2}e^{KL}\left(1 + \frac{iw}{K}\right) + \frac{1}{2}e^{-KL}\left(1 - \frac{iw}{K}\right)$$

or :

$$\frac{iw}{K} \underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} 1$$

car :

$$\frac{iw}{K} \underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} i\frac{w_r + iw_i}{|w_i| + iw_r} \underset{w_i < 0}{=} i\frac{w_r - i\,|w_i|}{|w_i| + iw_r} = 1$$

D'où :

$$D \underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} e^{(|w_i|+iw_r)L}$$

En particulier,

$$|D| \underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} e^{|w_i|L} > 1.$$

□

Nous pouvons dès lors obtenir le résultat suivant.

Proposition 5.1.3.
Les fonctions $\tilde{F}$ *et* $\tilde{G}$ *sont bornées quand* $|w| \to \infty$, *avec* $w_i < 0$.

Démonstration.

$$\left|\frac{\sinh Kz}{K}\right| \underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left|\frac{e^{(|w_i|+iw_r)z} - e^{-(|w_i|+iw_r)z}}{|w_i| + iw_r}\right|$$

$$\underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} \frac{1}{2}e^{|w_i|z}\left|\frac{1 - e^{-2|w_i|z}}{|w_i| + iw_r}\right|$$

Soit $m_1 = \dfrac{1}{2}\left|1 - e^{-2|w_i|z}\right|$. Nous avons $m_1 < 1$.
D'où, en utilisant le lemme 5.1.4 :

$$\left|\frac{\frac{\sinh Kz}{K}}{D}\right| \underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} e^{-|w_i|(L-z)}\frac{m_1}{||w_i| + iw_r|}.$$

Le membre de droite étant borné, alors $\tilde{G}(z,w) = i\frac{\gamma}{K}\frac{\sinh Kz}{D}$ est borné pour $|w| \mapsto \infty$, avec $w_i < 0$.
De façon analogue, nous avons

$$\left|\frac{\frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{D}\right| \underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} e^{-|w_i|z}m_1.$$

Donc $\frac{\frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{D}$ est borné pour $|w| \mapsto \infty$, avec $w_i < 0$.
De plus,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\cosh K(L-z)}{D}\right| &\underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} \frac{1}{2}e^{|w_i|(L-z)}\left|\frac{1+e^{-2|w_i|(L-z)}}{e^{|w_i|L}}\right| \\ &\underset{|w|\mapsto\infty}{\sim} e^{-|w_i|z}m_2\end{aligned}$$

où $m_2 = \dfrac{1}{2}\left|1 + e^{-2|w_i|(L-z)}\right|$. Nous avons $m_2 < 1$.
Ainsi, $\frac{\cosh K(L-z)}{D}$ est borné pour $|w| \mapsto \infty$, avec $w_i < 0$.
D'où : $\tilde{F}(L-z,w) = \frac{\cosh K(L-z)}{D} + \frac{\frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{D}$ est bornée pour $|w| \mapsto \infty$, avec $w_i < 0$.

□

Proposition 5.1.4.
Les fonctions $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$ sont bornées pour $|w| \in]1, +\infty[$.

Démonstration.
Si $w \in]1, +\infty[\cup] - \infty, -1[$, alors $K = \sqrt{1-w^2} = i\sqrt{w^2-1}$.
Nous noterons $K' = \sqrt{w^2-1}$. Nous avons alors :

$$D = \cos K'L + \frac{iw}{K'}\sin K'L$$

$$\tilde{F}(L-z,w) = \frac{\cos K'(L-z) + \frac{iw}{K'}\sin K'(L-z)}{\cos K'L + \frac{iw}{K'}\sin K'L}$$

$$\tilde{G}(z,w) = \frac{-i\sin(K'z)/K'}{\cos K'L + \frac{iw}{K'}\sin K'L}$$

Donc :

$$|D| = \sqrt{\cos^2 K'L + \frac{w^2}{w^2-1}\sin^2 K'L} > \sqrt{\cos^2 K'L + \sin^2 K'L}$$

i.e. $|D|$ est minoré par 1.
Etudions les numérateurs de $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$.

$$\left|\frac{-i\sin K'z}{K'}\right| = \frac{|\sin K'z|}{K'} \leq 1 \quad \text{si } |w| \geq 2$$

Le numérateur de $\tilde{G}$ est borné si $|w| \geq 2$ ainsi $\tilde{G}$ est bornée si $|w| \geq 2$. De plus, le numérateur de $\tilde{G}$ est une fonction de w continue sur $]1,2]$, prolongeable par continuité en 1 donc continue sur le compact $[1,2]$ et donc bornée. Ainsi le numérateur de $\tilde{G}$ est borné sur $]1,+\infty[$ et par conséquence $\tilde{G}$ aussi. De même sur $]-\infty,-1[$.

$$\begin{aligned}
\left|\cos K'(L-z) + \frac{iw}{K'}\sin K'(L-z)\right| &= \sqrt{\cos^2 K'(L-z) + \frac{w^2}{w^2-1}\sin^2 K'(L-z)} \\
&= \sqrt{1 + \frac{1}{w^2-1}\sin^2 K'(L-z)} \\
&\leq \sqrt{1+\sin^2 K'(L-z)} \quad \text{si } |w| \geq 2 \\
&\leq \sqrt{2} \quad \text{si } |w| \geq 2
\end{aligned}$$

Le numérateur de $\tilde{F}$ est borné si $|w| \geq 2$ ainsi $\tilde{F}$ est bornée si $|w| \geq 2$. De plus, le numérateur de $\tilde{F}$ est une fonction de w continue sur $]1,2]$, prolongeable par continuité en 1 donc continue sur le compact $[1,2]$ et donc bornée. Ainsi le numérateur de $\tilde{F}$ est borné sur $]1,+\infty[$ et par conséquence $\tilde{F}$ aussi. De même sur $]-\infty,-1[$. □

Remarque 5.1.1.
Soit la condition au bord de $\mathcal{B}^n$ écrite sous forme :

$$c(t) = b_0(t) = b_L(t) = S(t) + H(t-t_p)$$

où S fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,t_p]$, $n \geq 3$.
Alors : la transformée de Fourier de la condition au bord est :

$$\tilde{c}(w) = \tilde{b}_0(w) = \tilde{b}_L(w) = \tilde{S}(w) + e^{-iwt_p}\left(-ivp\left(\frac{1}{w}\right) + \pi\delta(w)\right),$$

puisque la transformée de Fourier de la fonction de Heaviside est : $\tilde{H}(w) = -ivp\left(\frac{1}{w}\right) + \pi\delta(w)$.

Cette remarque nous sert, dans les propositions qui suivent, à donner le comportement à l'infini des transformées de Fourier des conditions aux bords.

Proposition 5.1.5.
Si $w_i \leq 0$,

$$\tilde{c}(w) \underset{|w|\mapsto\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{|w|^n}\right)$$

Démonstration.
Soit $w \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(w) &= \int_0^{t_p} S(t)e^{-iwt}dt \\
&= \frac{i}{w}e^{-iwt_p} + \frac{1}{iw}\int_0^{t_p} \frac{dS(t)}{dt}e^{-iwt}dt \quad \text{(intégration par parties)} \\
&= \frac{i}{w}e^{-iwt_p} + \tilde{a}(w)
\end{aligned}$$

avec

$$\tilde{a}(w) = \frac{1}{iw}\int_0^{t_p} \frac{dS(t)}{dt}e^{-iwt}dt.$$

Donc, d'après la remarque 5.1.1 :

$$\begin{aligned}
\tilde{c}(w) &= \frac{i}{w}e^{-iwt_p} + \tilde{a}(w) - ivp\left(\frac{1}{w}\right)e^{-iwt_p} + \pi\delta(w)e^{-iwt_p} \\
&= \frac{i}{w}e^{-iwt_p} + \tilde{a}(w) - i\frac{1}{w}e^{-iwt_p} + 0 \quad (\text{car } w \neq 0) \\
&= \tilde{a}(w)
\end{aligned}$$

et, en intégrant par parties n fois ($n \geq 3$), nous avons :

$$\tilde{a}(w) = \frac{1}{(iw)^n}\int_0^{t_p} \frac{d^nS(t)}{dt^n}e^{-iwt}dt.$$

L'intégrale est absolument convergente car S est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0, t_p]$.
Donc : il existe une constante C telle que

$$|\tilde{a}(w)| \leq \frac{1}{|w|^n} \times C$$

□

Remarques 5.1.1.

1. *La fonction $w \mapsto \tilde{S}(w)$ est continue sur $[-1, 1]$.*
2. *Si $w \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, les fonctions $\tilde{b}_0$ et $\tilde{b}_L$ sont continues.*
3. *Si $w \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, les fonctions $\tilde{b}_0$ et $\tilde{b}_L$ sont dérivables et $\left|\frac{d\tilde{b}_0}{dw}\right| = \left|\frac{d\tilde{b}_L}{dw}\right| \leq \frac{nC_1}{|w|^{n+1}} + \frac{C_2}{|w|^n}$ (C_1 et C_2 constantes) .*

5.2 Existence des solutions

Dans cette sous-partie nous démontrons que les fonctions définies par l'inverse des transformées de Fourier :

$$\begin{aligned} u(z,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(z,w)e^{iwt}dw \\ v(z,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}(z,w)e^{iwt}dw \end{aligned} \tag{5.11}$$

sont bien définies.

Nous montrerons dans les parties suivantes qu'elles sont dérivables par rapport aux deux variables z et t et nulles pour des temps $t < 0$. Ainsi nous aurons le résultat suivant : (5.11) sont les uniques solutions de (2.1) avec conditions initiales nulles à $t = 0$ et conditions aux bords (2.6).

Remarque 5.2.1.
D'après la proposition 5.1.2, $u(z,t)$ et $v(z,t)$ s'écrivent :

$$u(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\tilde{F}(L-z,w)\ \tilde{b}_0(w)\ + \tilde{G}(z,w)\ \tilde{b}_L(w)\right) e^{iwt}dw \tag{5.12}$$

$$v(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\tilde{G}(L-z,w)\ \tilde{b}_0(w)\ + \tilde{F}(z,w)\ \tilde{b}_L(w)\right) e^{iwt}dw \tag{5.13}$$

où $b_0(t)$ et $b_L(t)$ sont les conditions aux bords définies par (2.6).

Théorème 5.2.1.
Les intégrales ci-dessus existent, ainsi les fonctions $u(z,t)$ et $v(z,t)$ données par (5.11) sont bien définies.

Démonstration.
Prenons $\gamma = 1$. Nous faisons la démonstration pour u, celle pour v est analogue.
Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned} 2\pi u(z,t) &= \int_{|w|>1} \left(\tilde{b}_0(w)\tilde{F}(L-z,w) + \tilde{b}_L(w)\tilde{G}(L,w)\right) e^{iwt}dw \\ &\quad + \int_{-1}^{1} \left(\tilde{b}_0(w)\tilde{F}(L-z,w) + \tilde{b}_L(w)\tilde{G}(L,w)\right) e^{iwt}dw \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Les deux lemmes suivants montrent la convergence de I_1 et I_2 et en conséquence l'existence de u. □

Lemme 5.2.1.
L'intégrale

$$I_1 = \int_{|w|>1} \left(\tilde{b}_0(w)\tilde{F}(L-z,w) + \tilde{b}_L(w)\tilde{G}(L,w) \right) e^{iwt} dw$$

converge.

Démonstration.

(i) L'intégrande est une fonction de w continue sur tout compact de $]1,+\infty[$, donc l'intégrale est bien définie sur tout compact de $]1,+\infty[$.
L'intégrande est prolongeable par continuité en 1, donc l'intégrale est bien définie en 1.

(ii) Pour $|w| \to +\infty$:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_{|w|>1} \left|\tilde{b}_0(w)\right| \left|\tilde{F}(L-z,w)\right| dw + \int_{|w|>1} \left|\tilde{b}_L(w)\right| \left|\tilde{G}(L-z,w)\right| dw \\ &\leq \int_{|w|>1} \frac{C_3}{|w|^n} dw + \int_{|w|>1} \frac{C_4}{|w|^n} dw \quad (C_3 \text{ et } C_4 \text{ constantes}) \end{aligned}$$

d'après les propositions 5.1.4 et 5.1.5.
Comme $n > 1$, $|I_1|$ est la somme de deux intégrales convergentes au voisinage de l'infini donc I_1 est convergente au voisinage de l'infini.

D'où la convergence de I_1. □

Lemme 5.2.2.
L'intégrale

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \left(\tilde{b}_0(w)\tilde{F}(L-z,w) + \tilde{b}_L(w)\tilde{G}(L,w) \right) e^{iwt} dw$$

converge.

Démonstration.
En écrivant les conditions aux bords $\tilde{b}_0(w)$ et $\tilde{b}_L(w)$ comme dans la remarque

5.1.1, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-1}^{1} \tilde{S}(w)\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw && (5.14)\\
&- ivp\int_{-1}^{1} \frac{1}{w}\tilde{F}(L-z,w)e^{iw(t-t_p)}dw && (5.15)\\
&+ \pi\frac{\cosh(L-z)}{\cosh(L)} && (5.16)\\
&+ \int_{-1}^{1} \tilde{S}(w)\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw && (5.17)\\
&- ivp\int_{-1}^{1} \frac{1}{w}\tilde{G}(z,w)e^{iw(t-t_p)}dw && (5.18)\\
&- i\pi\frac{\sinh(z)}{\cosh(L)} && (5.19)
\end{aligned}
$$

Pour tous $(z,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}^+$,

- L'intégrande de (5.14) est la fonction de w définie par

$$\tilde{S}(w)\frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}$$

  qui est continue sur $]-1,1[$ et prolongeable par continuité en -1 et en 1.
  Donc l'intégrale (5.14) est bien définie.
- L'intégrande de (5.15)

$$\frac{1}{w}\frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}\ e^{iw(t-t_p)}$$

  est continue sur $]-1,1[\backslash\{0\}$ et prolongeable par continuité en -1 et en 1. L'intégrale (5.15) est donc bien définie sauf en 0. Avec la valeur principale en 0, la fonction (5.15) existe.
- Les fonctions (5.16) et (5.19) sont bien définies car leur dénominateur ne s'annule pas quelque soit L.
- L'intégrande de (5.17)

$$\frac{i\tilde{S}(w)}{K}\frac{-\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}$$

  est continue sur $]-1,1[$ et prolongeable par continuité en -1 et en 1. Donc l'intégrale (5.17) est bien définie.
- L'intégrande de (5.18)

$$\frac{1}{w}\frac{i}{K}\frac{-\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}\ e^{iw(t-t_p)}$$

est continue sur $]-1,1[\backslash\{0\}$ et prolongeable par continuité en -1 et en 1. L'intégrale (5.18) est donc bien définie sauf en 0. Avec la valeur principale en 0, la fonction (5.18) existe.

□

5.3 Régularité des solutions

Rappelons les théorèmes suivants que nous utiliserons dans cette partie :

Théorème 5.3.1. *(dérivation d'intégrale définie à paramètre)*
Soient J un intervalle et F définie par

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt \quad \text{où} \quad f : (x,t) \in J \times [a,b] \mapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$$

1. *Si f est continue sur $J \times [a,b]$.*
   Alors : F est continue sur J.
2. *De plus, si f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $J \times [a,b]$.*
   Alors : F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

Démonstration.
cf [45] p 158. □

Théorème 5.3.2. *(dérivation d'intégrale généralisée à paramètre)*
Soient J un intervalle et F définie par

$$F(x) = \int_a^{+\infty} f(x,t)dt \quad \text{où} \quad f : (x,t) \in J \times [a,+\infty[\mapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$$

1. *Si*
   (i) f est continue sur $J \times [a,+\infty[$
   (ii) il existe φ telle que : $\forall x \in J, \forall t \in [a,+\infty[, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$ avec $\int_a^{+\infty} \varphi(t)dt$ convergente.
   Alors : F est définie et continue sur J.
2. *De plus, si*
   (iii) f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $J \times [a,+\infty[$.
   (iv) il existe ψ telle que : $\forall x \in J, \forall t \in [a,+\infty[, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t)$ avec $\int_a^{+\infty} \psi(t)dt$ convergente.
   Alors : F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

Démonstration.
cf [45] p 157-158. □

Notons que ces théorèmes peuvent être étendus à des intégrales à deux paramètres.

Théorème 5.3.3.
Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et (f_n) une suite de fonctions définies et dérivables sur I.
Si :

(i) la suite (f_n') converge uniformément sur I.

(ii) $(f_n(x_0))$ converge.

Alors :

(i) $\forall x \in I$, $(f_n(x))$ converge

(ii) la fonction $x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ est dérivable et sa dérivée vaut $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Démonstration.
cf [45] p 223. □

Le théorème suivant démontre la régularité des solutions.

Théorème 5.3.4.
Les fonctions $u(z,t)$ et $v(z,t)$ définies par (5.11) sont dérivables par rapport à z et à t.

Démonstration.
Prenons $\gamma = 1$. Nous ne faisons la démonstration que pour u, celle pour v étant analogue.
Nous utilisons les théorèmes 5.3.1 et 5.3.2 dans le cas de deux paramètres et l'écriture de u sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} 2\pi u(z,t) &= \int_{|w|>1} \left[\tilde{b}_0(w)\tilde{F}(L-z,w) + \tilde{b}_L(w)\tilde{G}(L,w)\right] e^{iwt} dw \\ &+ \int_{-1}^{1} \left[\tilde{b}_0(w)\tilde{F}(L-z,w) + \tilde{b}_L(w)\tilde{G}(L,w)\right] e^{iwt} dw \end{aligned}$$

Plus précisément, en écrivant les conditions aux bords $\tilde{b}_0(w)$ et $\tilde{b}_L(w)$ comme

dans la remarque 5.1.1, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
2\pi u(z,t) &= \int_{|w|>1} \tilde{b}_0(w)\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw && (5.20)\\
&+ \int_{|w|>1} \tilde{b}_L(w)\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw && (5.21)\\
&+ \int_{-1}^{1} \tilde{S}(w)\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw && (5.22)\\
&- ivp\int_{-1}^{1} \frac{1}{w}\tilde{F}(L-z,w)e^{iw(t-t_p)}dw && (5.23)\\
&+ \pi\frac{\cosh(L-z)}{\cosh(L)} && (5.24)\\
&+ \int_{-1}^{1} \tilde{S}(w)\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw && (5.25)\\
&- ivp\int_{-1}^{1} \frac{1}{w}\tilde{G}(z,w)e^{iw(t-t_p)}dw && (5.26)\\
&- i\pi\frac{\sinh(z)}{\cosh(L)} && (5.27)
\end{aligned}
$$

Les lemmes suivants donnent en détail chaque étape de la démonstration. □

Lemme 5.3.1.
L'intégrale (5.20) *est dérivable par rapport à z et à t.*

Démonstration.
Soit $f_1(z,t,w)$ l'intégrande de l'intégrale (5.20). Nous faisons la démonstration pour le cas $w \in]1,+\infty[$, celle pour $w \in]-\infty,-1[$ est analogue.
Nous utilisons le théorème 5.3.2.

1. (i) f_1 est continue sur $[0,L]\times\mathbb{R}^+\times]1,+\infty[$ en tant que produit de trois fonctions continues sur ce domaine et f_1 est prolongeable par continuité en 1.

   (ii) D'après les propositions 5.1.4 et 5.1.5,
   $\forall z \in [0,L], \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall w \in]1,+\infty[$,
   $$|f_1(z,t,w)| = \left|\tilde{b}_0(w)\right|\left|\tilde{F}(L-z,w)\right| \leq \frac{C_3}{w^n}$$
   Il existe donc $\varphi_1(w) = \frac{C_3}{w^n}$ tel que $|f_1(z,t,w)| \leq \varphi_1(w)$.
   Et : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_1(w)dw$ est une intégrale de Riemann convergente : φ_1 est continue en 1 et $n > 1$ assure la convergence au voisinage de l'infini.

   Donc : (5.20) est continue sur $[0,L]\times\mathbb{R}^+$.

2. (iii) – f_1 admet une dérivée partielle par rapport à z :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial z}(z,t,w) &= \frac{-e^{iwt}}{(iw)^n}\int_0^{t_p}\frac{d^nS}{dt^n}(t)e^{-iwt}dt \\ &\times \frac{K\sinh K(L-z)+iw\cosh K(L-z)}{\cosh KL+\frac{iw}{K}\sinh KL}\end{aligned}$$

qui est continue en tant que produit de trois fonctions continues sur $[0,L]\times\mathbb{R}^+\times]1,+\infty[$, prolongeable par continuité en 1.

– f_1 admet une dérivée partielle par rapport à t :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}(z,t,w)=\frac{\cosh K(L-z)+\frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL+\frac{iw}{K}\sinh KL}\frac{e^{iwt}}{(iw)^{n-1}}\int_0^{t_p}\frac{d^nS(t)}{dt^n}e^{-iwt}dt$$

qui est continue en tant que produit de fonctions continues sur $[0,L]\times\mathbb{R}^+\times]1,+\infty[$, prolongeable par continuité en 1.

(iv) – $\forall z\in[0,L],\forall t\in\mathbb{R}^+,\forall w\in]1,+\infty[$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f_1}{\partial z}(z,t,w)\right| &\leq \frac{C}{w^n}\left|\frac{K\sinh K(L-z)+iw\cosh K(L-z)}{\cosh KL+\frac{iw}{K}\sinh KL}\right| \\ &\leq \frac{C}{w^n}\sqrt{2w^2-1}\end{aligned}$$

Il existe donc $\psi_1(w)=\frac{C}{w^n}\sqrt{2w^2-1}$ tel que $\left|\frac{\partial f_1}{\partial z}(z,t,w)\right|\leq\psi_1(w)$.

Et : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\psi_1(w)dw$ est une intégrale de Riemann convergente :

bien définie en 1 et $\psi_1(w)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{C\sqrt{2}}{w^{n-1}}$ avec $n>2$.

– D'après les propositions 5.1.4 et 5.1.5,
$\forall z\in[0,L],\forall t\in\mathbb{R}^+,\forall w\in]1,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial t}(z,t,w)\right|=\left|iw\tilde{b}_0(w)\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}\right|=w\left|\tilde{b}_0(w)\right|\left|\tilde{F}(L-z,w)\right|\leq\frac{C_3}{w^{n-1}}$$

Il existe donc $\phi_1(w)=\frac{C_3}{w^{n-1}}$ tel que $\left|\frac{\partial f_1}{\partial t}(z,t,w)\right|\leq\phi_1(w)$.

Et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\phi_1(w)dw$ est une intégrale de Riemann convergente :
bien définie en 1 et $n>2$.

Donc :

(5.20) est dérivable par rapport à z sur $[0,L]\times\mathbb{R}^+$ et cette dérivée est :

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{-e^{iwt}}{(iw)^n}\int_0^{t_p}\frac{d^nS}{dt^n}(t)e^{-iwt}dt\times\frac{K\sinh K(L-z)+iw\cosh K(L-z)}{\cosh KL+\frac{iw}{K}\sinh KL}\right)dw$$

(5.20) est dérivable par rapport à t sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+$ et cette dérivée est :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL} \frac{e^{iwt}}{(iw)^{n-1}} \left(\int_0^{t_p} \frac{d^n S(t)}{dt^n} e^{-iwt} dt \right) dw$$

□

Lemme 5.3.2.
L'intégrale (5.21) *est dérivable par rapport à z et à t.*

Démonstration.
Soit $f_2(z, t, w)$ l'intégrande de l'intégrale (5.21). Nous faisons la démonstration pour le cas $w \in]1, +\infty[$, celle pour $w \in]-\infty, -1[$ est analogue.
Nous utilisons le théorème 5.3.2.

1. (i) f_2 est continue sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+ \times]1, +\infty[$ en tant que produit de trois fonctions continues sur ce domaine, prolongeable par continuité en 1.

   (ii) D'après les propositions 5.1.4 et 5.1.5,
   $\forall z \in [0, L], \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall w \in]1, +\infty[$,

   $$|f_2(z, t, w)| = \left|\tilde{b}_L(w)\right| \left|\tilde{G}(z, w)\right| \leq \frac{C_4}{w^n}$$

   Il existe donc $\varphi_2(w) = \frac{C_4}{w^n}$ tel que $|f_2(z, t, w)| \leq \varphi_2(w)$.
   Et : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_2(w) dw$ est une intégrale de Riemann convergente : φ_2 est continue en 1 et $n > 1$.

   Donc : (5.21) est continue sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+$.

2. (iii) – f_2 admet une dérivée partielle par rapport à z :

   $$\frac{\partial f_2}{\partial z}(z, t, w) = \frac{-i\cosh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL} \frac{e^{iwt}}{(iw)^n} \int_0^{t_p} \frac{d^n S}{dt^n}(t) e^{-iwt} dt$$

   qui est continue en tant que produit de trois fonctions continues sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+ \times]1, +\infty[$, prolongeable par continuité en 1.

   – f_2 admet une dérivée partielle par rapport à t :

   $$\frac{\partial f_2}{\partial t}(z, t, w) = \frac{i}{K} \frac{-\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL} \frac{e^{iwt}}{(iw)^{n-1}} \int_0^{t_p} \frac{d^n S(t)}{dt^n} e^{-iwt} dt$$

   qui est continue en tant que produit de fonctions continues sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+ \times]1, +\infty[$, prolongeable par continuité en 1.

(iv) – $\forall z \in [0, L], \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall w \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f_2}{\partial z}(z,t,w)\right| &\leq \frac{C}{w^n}\left|\frac{-i\cosh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}\right| \\ &\leq \frac{C}{w^n} \end{aligned}$$

Il existe donc $\psi_2(w) = \frac{C}{w^n}$ tel que $\left|\frac{\partial f_2}{\partial z}(z,t,w)\right| \leq \psi_2(w)$.
Et : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \psi_2(w)dw$ est une intégrale de Riemann convergente car $n > 1$.

– D'après les propositions 5.1.4 et 5.1.5,
$\forall z \in [0, L], \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall w \in]1, +\infty[$,

$$\left|\frac{\partial f_2}{\partial t}(z,t,w)\right| = \left|iw\tilde{b}_L(w)\tilde{G}(z,w)e^{iwt}\right| = w\left|\tilde{b}_L(w)\right|\left|\tilde{G}(z,w)\right| \leq \frac{C_4}{w^{n-1}}$$

Il existe donc $\phi_2(w) = \frac{C_4}{w^{n-1}}$ tel que $\left|\frac{\partial f_2}{\partial z}(z,t,w)\right| \leq \phi_2(w)$.
Et : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \phi_2(w)dw$ est une intégrale de Riemann convergente : l'intégrande est continue en 1 et $n > 2$.

Donc :

(5.21) est dérivable par rapport à z sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+$ et cette dérivée est :

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{e^{iwt}}{(iw)^n}\int_0^{t_p}\frac{d^nS}{dt^n}(t)e^{-iwt}dt \times \frac{-i\cosh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}\right)dw$$

(5.21) est dérivable par rapport à t sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+$ et cette dérivée est :

$$\int_1^{+\infty}\frac{i}{K}\frac{-\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}\frac{e^{iwt}}{(iw)^{n-1}}\left(\int_0^{t_p}\frac{d^nS(t)}{dt^n}e^{-iwt}dt\right)dw$$

□

Lemme 5.3.3.
L'intégrale (5.22) *est dérivable par rapport à z et à t.*

Démonstration.
Soit f_3 l'intégrande de (5.22).
Nous utilisons le théorème 5.3.1.

1. f_3 est continue sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+ \times]-1, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 et en 1.
   Donc : (5.22) est continue sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+$.

2. – f_3 est dérivable par rapport à z et :

$$\frac{\partial f_3}{\partial z}(z,t,w) = -\tilde{S}(w)e^{iwt}\frac{K\sinh K(L-z) + iw\cosh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}$$

qui est continue sur $[0,L]\times\mathbb{R}^+\times]-1,1[$ et prolongeable par continuité en -1 et en 1.

– f_3 est dérivable par rapport à t et :

$$\frac{\partial f_3}{\partial t}(z,t,w) = iwf_3(z,t,w)$$

qui est continue sur $[0,L]\times\mathbb{R}^+\times]-1,1[$ et prolongeable par continuité en -1 et en 1.

Donc :

(5.22) est dérivable par rapport à z sur $[0,L]\times\mathbb{R}^+$ et cette dérivée est :

$$\int_{-1}^{1} -\tilde{S}(w)\frac{K\sinh K(L-z) + iw\cosh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iwt}dw$$

(5.22) est dérivable par rapport à t sur $[0,L]\times\mathbb{R}^+$ et cette dérivée est :

$$\int_{-1}^{1} iw\tilde{S}(w)\tilde{F}(z-L,w)e^{iwt}dw$$

□

Lemme 5.3.4.
L'intégrale (5.23) *est dérivable par rapport à z et à t.*

Démonstration.
Démontrons tout d'abord la dérivabilité de u par rapport à z.
Par définition de la valeur principale, l'intégrale (5.23) est égale à :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\frac{1}{w}\frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}dw$$

que nous écrirons encore :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

où $f_n(z)$ est la suite de fonction définie par :

$$f_n(z) = \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\frac{1}{w}\frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}dw$$

Le principe de la démonstration est le suivant :

– <u>Partie A</u> : A l'aide du théorème 5.3.3, démontrer que :

$$\frac{\partial}{\partial z}\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial z} f_n(z)$$

– <u>Partie B</u> : A l'aide du théorème 5.3.1, démontrer que :

$$\frac{\partial}{\partial z} f_n(z) = \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{w}\frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}\right)dw$$

<u>Partie A</u> :

Lemme 5.3.5.
(f_n) est une suite de fonctions définies sur $[0, L]$.

Démonstration.
$\forall z \in [0, L]$, l'intégrande, en tant que fonction de w ;

$$w \mapsto \frac{1}{w}\frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}$$

est continue sur $]-1, -\frac{1}{n}]$ et $[\frac{1}{n}, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 et 1.
Donc : f_n est bien définie sur $[0, L]$. □

Lemme 5.3.6.
(f_n) est une suite de fonctions dérivables par rapport à z sur $[0, L]$.

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème 5.3.1.

(i) De ce qui précède, l'intégrande, en tant que fonction de (z, w), est continue sur $[0, L]\times]-1, -\frac{1}{n}]$ et $[0, L]\times[\frac{1}{n}, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 et 1.

(ii) L'intégrande est dérivable par rapport à z et sa dérivée :

$$(z, w) \mapsto -\frac{1}{w}\frac{K\sinh K(L-z) + iw\cosh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}$$

est continue sur $[0, L]\times]-1, -\frac{1}{n}]$ et $[0, L]\times[\frac{1}{n}, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 et 1.

Le théorème 5.3.1 permet de conclure. □

Lemme 5.3.7.
La suite (f_n') converge uniformément sur $[0, L]$.

Démonstration.

1. Montrons que la suite (f'_n) converge.
   Du lemme précédent, nous avons :

$$\begin{aligned} f'_n(z) &= \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right) - \frac{1}{w}\frac{K\sinh K(L-z) + iw\cosh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL} e^{iw(t-t_p)}dw \\ &= \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\left(\frac{1}{w}A(w) + iB(w)\right)e^{iw(t-t_p)}dw \end{aligned}$$

   où $A(w)$ et $B(w)$ sont obtenus en multipliant par la quantité conjuguée et valent :

$$A(w) = -\frac{K\sinh K(L-z)\cosh KL + \frac{w^2}{K}\cosh K(L-z)\sinh KL}{\cosh^2 KL + \frac{w^2}{K^2}\sinh^2 KL}$$

$$B(w) = \frac{-\cosh K(L-z)\cosh KL + \sinh K(L-z)\sinh KL}{\cosh^2 KL + \frac{w^2}{K^2}\sinh^2 KL}$$

   Sous réserve de convergence, nous avons :

$$f'_n(z) = \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\frac{1}{w}A(w)e^{iw(t-t_p)}dw + i\left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)B(w)e^{iw(t-t_p)}dw$$

   Effectuons le changement de variable $w \mapsto -w$ dans la première intégrale, en notant que la fonction A est une fonction paire :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{w}A(w)e^{iw(t-t_p)}dw &= \int_{1}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{w}A(-w)e^{-iw(t-t_p)}dw \\ &= \int_{1}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{w}A(w)e^{-iw(t-t_p)}dw \quad \text{(parité de } A\text{)} \\ &= -\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{w}A(w)e^{-iw(t-t_p)}dw \end{aligned}$$

   D'où :

$$\begin{aligned} \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\frac{1}{w}A(w)e^{iw(t-t_p)}dw &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{w}A(w)(-e^{-iw(t-t_p)} + e^{iw(t-t_p)})dw \\ &= 2i\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin w(t-t_p)}{w}A(w)dw \end{aligned}$$

   D'où :

$$f'_n(z) = 2i\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin w(t-t_p)}{w}A(w)dw + i\left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)B(w)e^{iw(t-t_p)}dw$$

sous réserve de convergence or toutes les intégrales sont bien définies car leurs intégrandes sont des fonctions de w continues sur respectivement sur $[\frac{1}{n}, 1[$, $]-1, -\frac{1}{n}]$ et $[\frac{1}{n}, 1[$ prolongeables par continuité en -1 et 1.
De plus, ces intégrandes sont aussi des fonctions respectivement prolongeable par continuité et continue en 0.
Ainsi il existe :

$$\begin{aligned}\lim_{n\mapsto+\infty} f_n'(z) &= 2i\int_0^1 \frac{\sin w(t-t_p)}{w}A(w)dw + i\left(\int_{-1}^0 + \int_0^1\right) B(w)e^{iw(t-t_p)}dw \\ &= f'(z)\end{aligned}$$

2. Montrons que la suite (f_n') converge uniformément en z vers f'.
Il existe k_1 tel que, pour tout $z \in [0, L]$;

$$\begin{aligned}\left|f_n'(z) - f'(z)\right| &= \left|2i\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin w(t-t_p)}{w}A(w)dw + i\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} B(w)e^{iw(t-t_p)}dw\right| \\ &\leq \frac{k_1}{n}\end{aligned}$$

où k_1 ne dépend pas de z. Donc $Sup\left\{\left|f_n'(z) - f'(z)\right|, z \in [0, L]\right\}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La convergence est bien uniforme.
Explicitons k_1 :
$\forall z \in [0, L]$,

$$\begin{aligned}\left|f_n'(z) - f'(z)\right| &\leq 2\int_0^{\frac{1}{n}} \left|\frac{\sin w(t-t_p)}{w}A(w)\right| dw + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left|B(w)e^{iw(t-t_p)}\right| dw \\ &\leq \frac{2}{n}\sup_{w\in[0,\frac{1}{n}]}\left|\frac{\sin w(t-t_p)}{w}A(w)\right| + \frac{2}{n}\sup_{w\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}\left|B(w)e^{iw(t-t_p)}\right|\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{w\to 0}\dfrac{\sin w(t-t_p)}{w} = t - t_p$,

$$\forall\epsilon, \exists n\ ;\ 0 < w < \frac{1}{n} \Longrightarrow \left|\frac{\sin w(t-t_p)}{w}\right| \leq t - t_p + \epsilon$$

Pour tout $w \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $\dfrac{w^2}{K^2}\sinh^2 KL \geq 0$ et, pour tout $w \in \mathbb{R}$, $\cosh^2 KL \geq 1$.
Donc le dénominateur de $A(w)$ est minoré par 1.
En ce qui concerne le module de son numérateur : la fonction $w \mapsto K\sinh K(L-z)\cosh KL + \frac{w^2}{K}\cosh K(L-z)\sinh KL$ est continue sur le compact $[0, \frac{1}{n}]$ donc est bornée et atteint ses bornes i.e.

$$\exists M_1; \forall w \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \left|K\sinh K(L-z)\cosh KL + \frac{w^2}{K}\cosh K(L-z)\sinh KL\right| \leq M_1$$

Nous obtenons donc la majoration suivante :

$$\left|\frac{\sin w(t-t_p)}{w}A(w)\right| \leq (t-t_p+\epsilon)M_1$$

D'où :

$$\sup_{w\in[0,\frac{1}{n}]}\left|\frac{\sin w(t-t_p)}{w}A(w)\right| \leq (t-t_p+\epsilon)M_1$$

De plus, le dénominateur de $B(w)$ (le même que celui de $A(w)$) est minoré par 1 et le module de son numérateur est majoré. En effet la fonction $w \mapsto -\cosh K(L-z)\cosh KL + \sinh K(L-z)\sinh KL$ est continue sur le compact $[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$ donc est bornée et atteint ses bornes, donc :

$$\exists M_2; \forall w \in \left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right], |-\cosh K(L-z)\cosh KL + \sinh K(L-z)\sinh KL| \leq M_2$$

Donc :

$$\sup_{w\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}|B(w)| \leq M_2$$

Il suffit donc de prendre $k_1 = 2\left[(t-t_p+\epsilon)M_1 + M_2\right]$.

□

Lemme 5.3.8.
La suite (f_n) converge ponctuellement.

Démonstration.
(f_n) converge en z_0 si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z_0) < +\infty$.
Or :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(z) &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\frac{1}{w}\frac{\cosh K(L-z)+\frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}dw \\ &= vp\int_{-1}^{1}\frac{1}{w}\frac{\cosh K(L-z)+\frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}dw\end{aligned}$$

qui est convergente (cf la section précédente 5.2), pour tout z, en particulier pour z_0. □

Lemme 5.3.9.

$$\frac{\partial}{\partial z}\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial z}f_n(z)$$

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème 5.3.3 ; les hypothèses étant démontrées dans les quatre lemmes précédents. □

Partie B :

Lemme 5.3.10.

$$\frac{\partial}{\partial z} f_n(z) = \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{w} \frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K} \sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K} \sinh KL} e^{iw(t-t_p)} \right) dw$$

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème 5.3.1 ; les hypothèses étant vérifiées :

(i) L'intégrande, en tant que fonction de (z, w), est continue sur $[0, L] \times]-1, -\frac{1}{n}]$ et $[0, L] \times [\frac{1}{n}, 1[$, prolongeable par continuité en -1 et 1.

(ii) L'intégrande est dérivable par rapport à z et sa dérivée est continue sur $[0, L] \times]-1, -\frac{1}{n}]$ et $[0, L] \times [\frac{1}{n}, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 et 1.

□

Conclusion :
Les résultats des parties A et B donnent :

$$\frac{\partial}{\partial z} \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{w} \frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K} \sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K} \sinh KL} e^{iw(t-t_p)} \right) dw$$

i.e. :

$$\frac{\partial}{\partial z} \lim_{n\to\infty} f_n(z) = vp \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{w} \frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K} \sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K} \sinh KL} e^{iw(t-t_p)} \right) dw$$

ce qui termine la démonstration de la dérivabilité par rapport à z.

Démontrons maintenant la dérivabilité de v par rapport à t.
Par définition de la valeur principale, l'intégrale (5.23) est égale à :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \right) \frac{1}{w} \frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K} \sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K} \sinh KL} e^{iw(t-t_p)} dw$$

que nous écrirons encore :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

où $f_n(t)$ est la suite de fonction définie par :

$$f_n(t) = \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \right) \frac{1}{w} \frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K} \sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K} \sinh KL} e^{iw(t-t_p)} dw$$

Le principe de la démonstration est le même que dans le paragraphe précédent :

– <u>Partie A</u> : A l'aide du théorème 5.3.3, démontrer que :

$$\frac{\partial}{\partial t}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial t} f_n(t)$$

– <u>Partie B</u> : A l'aide du théorème 5.3.1, démontrer que :

$$\frac{\partial}{\partial t} f_n(t) = \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{w}\frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}\right)dw$$

<u>Partie A</u> :
Par une démonstration analogue à celle du lemme 5.3.5, nous pouvons montrer que f_n est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.

Lemme 5.3.11.
(f_n) est une suite de fonctions dérivables par rapport à t sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème 5.3.1.

(i) De ce qui précède, l'intégrande, en tant que fonction de (t, w), est continue sur $\mathbb{R}^+\times]-1, -\frac{1}{n}]$ et $\mathbb{R}^+\times[\frac{1}{n}, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 et 1.

(ii) L'intégrande est dérivable par rapport à t et sa dérivée :

$$(t, w) \mapsto i\frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}$$

est continue sur $\mathbb{R}^+\times]-1, -\frac{1}{n}]$ et $\mathbb{R}^+\times[\frac{1}{n}, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 et 1.

Le théorème 5.3.1 permet de conclure. □

Lemme 5.3.12.
La suite (f_n') converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration.

1. Montrons que la suite (f_n') converge.
   Du lemme précédent, nous avons :

$$f_n'(t) = \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right) i\frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}dw$$

   Les deux intégrales sont bien définies car leur intégrande est une fonction de w continue respectivement sur $]-1, -\frac{1}{n}]$ et $[\frac{1}{n}, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 et 1. De plus elle est continue en 0.
   Ainsi il existe :

$$\begin{aligned}\lim_{n\mapsto+\infty} f_n'(t) &= i\int_{-1}^{1}\frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}dw \\ &= f'(t)\end{aligned}$$

2. Montrons que la suite (f'_n) converge uniformément en t vers f'.
Il existe k_2 tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$;

$$\begin{aligned}
\left|f'_n(t) - f'(t)\right| &= \left| -i \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL} e^{iw(t-t_p)} dw \right| \\
&\leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left| \frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL} e^{iw(t-t_p)} \right| dw \\
&\leq \frac{2}{n} \sup_{w\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} \left| \frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL} \right| \\
&\leq \frac{k_2}{n}
\end{aligned}$$

où k_2 ne dépend pas de t. Donc $Sup\left\{\left|f'_n(t) - f'(t)\right|, t \in \mathbb{R}^+\right\}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La convergence est bien uniforme.
Explicitons k_2 :
soit $q(w) = \frac{\cosh K(L-z)+\frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL+\frac{iw}{K}\sinh KL}$. Nous pouvons aussi écrire :

$$q(w) = \frac{(\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z))(\cosh KL - \frac{iw}{K}\sinh KL)}{\cosh^2 KL + \frac{w^2}{K^2}\sinh^2 KL}$$

Nous avons démontré dans le paragraphe ci-avant sur la dérivabilité par rapport à z que le dénominateur de q est minoré par 1. De plus, sur le compact $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, le numérateur de q est une fonction continue, donc est bornée et atteint ses bornes. Donc :

$$\exists M_3; \forall w \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \left|(\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z))(\cosh KL - \frac{iw}{K}\sinh KL)\right| \leq M_3$$

D'où :

$$\sup_{w\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} |q(w)| \leq M_3$$

Il suffit donc de prendre $k_2 = 2M_3$.

□

Lemme 5.3.13.
La suite (f_n) converge ponctuellement.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(t) &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \right) \frac{1}{w} \frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL} e^{iw(t-t_p)} dw \\
&= vp \int_{-1}^{1} \frac{1}{w} \frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL} e^{iw(t-t_p)} dw
\end{aligned}$$

qui est convergente (cf section 5.2), pour tout t, en particulier pour t_0. □

Lemme 5.3.14.

$$\frac{\partial}{\partial t}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial t} f_n(t)$$

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème 5.3.3 ; les hypothèses étant démontrées dans les trois lemmes précédents. □

<u>Partie B</u> :

Lemme 5.3.15.

$$\frac{\partial}{\partial t} f_n(t) = \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{w}\frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}\right)dw$$

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème 5.3.1 ; les hypothèses étant vérifiées :

(i) L'intégrande, en tant que fonction de (t, w), est continue sur $\mathbb{R}^+\times]-1, -\frac{1}{n}]$ et $\mathbb{R}^+ \times [\frac{1}{n}, 1[$, prolongeable par continuité en -1 et 1.

(ii) L'intégrande est dérivable par rapport à t et sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}^+\times]-1, -\frac{1}{n}]$ et $\mathbb{R}^+ \times [\frac{1}{n}, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 et 1.

□

<u>Conclusion</u> :
Les résultats des parties A et B donnent :

$$\frac{\partial}{\partial t}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{w}\frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}\right)dw$$

ie :

$$\frac{\partial}{\partial t}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = vp\int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{w}\frac{\cosh K(L-z) + \frac{iw}{K}\sinh K(L-z)}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}\right)dw$$

ce qui termine la démonstration de la dérivabilité par rapport à t. □

Lemme 5.3.16.
La fonction (5.24) *est dérivable par rapport à z et à t.*

Démonstration.
La fonction étant constante par rapport à t, sa dérivée est nulle.
La fonction est dérivable par rapport à z de façon évidente et sa dérivée vaut :

$$-\pi \frac{\sinh(L-z)}{\cosh L}$$

□

Lemme 5.3.17.
L'intégrale (5.25) *est dérivable par rapport à z et à t.*

Démonstration.
Soit f_6 l'intégrande de (5.25).
Nous utilisons le théorème 5.3.1

1. f_6 est continue sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+ \times]-1, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 et en 1. Donc : (5.25) est continue sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+$.
2. – f_6 est dérivable par rapport à z et :

$$\frac{\partial f_6}{\partial z}(z, t, w) = \tilde{S}(w) e^{iwt} i \frac{-\cosh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K} \sinh KL}$$

   qui est continue sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+ \times]-1, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 et en 1.
   – f_6 est dérivable par rapport à t et :

$$\frac{\partial f_6}{\partial t}(z, t, w) = iw f_6(z, t, w)$$

   qui est continue sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+ \times]-1, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 et en 1.

   Donc :

   (5.25) est dérivable par rapport à z sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+$ et cette dérivée est :

$$\int_{-1}^{1} \tilde{S}(w) i \frac{-\cosh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K} \sinh KL} e^{iwt} dw$$

   (5.25) est dérivable par rapport à t sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+$ et cette dérivée est :

$$\int_{-1}^{1} iw \tilde{S}(w) \tilde{G}(z, w) e^{iwt} dw$$

□

Lemme 5.3.18.
L'intégrale (5.26) *est dérivable par rapport à z et à t.*

Démonstration.
Démontrons la dérivabilité par rapport à z.
Par définition de la valeur principale, l'intégrale (5.26) est égale à :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\frac{1}{w}\frac{i}{K}\frac{-\sinh Kz}{\cosh KL+\frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}dw$$

que nous écrirons encore :

$$\lim_{n\to\infty} g_n(z)$$

où $g_n(z)$ est la suite de fonction définie par :

$$g_n(z)=\left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\frac{1}{w}\frac{i}{K}\frac{-\sinh Kz}{\cosh KL+\frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}dw$$

Le principe de la démonstration est le même que dans le lemme 5.3.4 :

- <u>Partie A</u> : A l'aide du théorème 5.3.3, démontrer que :

$$\frac{\partial}{\partial z}\lim_{n\to\infty} g_n(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial z}g_n(z)$$

- <u>Partie B</u> : A l'aide du théorème 5.3.1, démontrer que :

$$\frac{\partial}{\partial z}g_n(z)=\left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{w}\frac{i}{K}\frac{\sinh Kz}{\cosh KL+\frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}\right)dw$$

<u>Partie A</u> :

Lemme 5.3.19.
(g_n) est une suite de fonctions définies sur $[0,L]$.

Démonstration.
$\forall z\in[0,L]$, l'intégrande, en tant que fonction de w ;

$$w\mapsto\frac{1}{w}\frac{i}{K}\frac{-\sinh Kz}{\cosh KL+\frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}$$

est continue sur $]-1,-\frac{1}{n}]$ et $[\frac{1}{n},1[$ et prolongeable par continuité en -1 et 1.
Donc : g_n est bien définie sur $[0,L]$. □

Lemme 5.3.20.
(g_n) est une suite de fonctions dérivables par rapport à z sur $[0,L]$.

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème 5.3.1.

(i) De ce qui précède, l'intégrande, en tant que fonction de (z,w), est continue sur $[0,L]\times]-1,-\frac{1}{n}]$ et $[0,L]\times[\frac{1}{n},1[$ et prolongeable par continuité en -1 et 1.

(ii) L'intégrande est dérivable par rapport à z et sa dérivée :

$$(z,w) \mapsto -\frac{i}{w}\frac{\cosh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}$$

est continue sur $[0,L]\times]-1,-\frac{1}{n}]$ et $[0,L]\times[\frac{1}{n},1[$ et prolongeable par continuité en -1 et 1.

Le théorème 5.3.1 permet de conclure. □

Lemme 5.3.21.
La suite (g'_n) converge uniformément sur $[0,L]$.

Démonstration.

1. Montrons que la suite (g'_n) converge.
   Du lemme précédent, nous avons :

$$\begin{aligned} g'_n(z) &= \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\frac{i}{w}\frac{-\cosh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}dw \\ &= \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\left(-\frac{1}{w}P(w) - E(w)\right)e^{iw(t-t_p)}dw \end{aligned}$$

   où $P(w)$ et $E(w)$ sont obtenus en multipliant par la quantité conjuguée et valent :

$$P(w) = \frac{i\cosh Kz\cosh KL}{\cosh^2 KL + \frac{w^2}{K^2}\sinh^2 KL}$$

$$E(w) = \frac{\frac{\sinh KL\cosh Kz}{K}}{\cosh^2 KL + \frac{w^2}{K^2}\sinh^2 KL}$$

   Sous réserve de convergence, nous avons :

$$g'_n(z) = \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right) - \frac{1}{w}P(w)e^{iw(t-t_p)}dw - \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)E(w)e^{iw(t-t_p)}dw$$

   Effectuons le changement de variable $w \mapsto -w$ dans la première intégrale, en notant que la fonction D est une fonction paire :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-\frac{1}{n}}\frac{1}{w}P(w)e^{iw(t-t_p)}dw &= \int_{1}^{\frac{1}{n}}\frac{1}{w}P(-w)e^{-iw(t-t_p)}dw \\ &= \int_{1}^{\frac{1}{n}}\frac{1}{w}P(w)e^{-iw(t-t_p)}dw \quad \text{(parité de } P\text{)} \\ &= -\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{1}{w}P(w)e^{-iw(t-t_p)}dw \end{aligned}$$

D'où :

$$\left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)-\frac{1}{w}P(w)e^{iw(t-t_p)}dw = \int_{\frac{1}{n}}^{1}-\frac{1}{w}P(w)(-e^{-iw(t-t_p)}+e^{iw(t-t_p)})dw$$
$$= 2i\int_{\frac{1}{n}}^{1}-\frac{\sin w(t-t_p)}{w}P(w)dw$$

D'où :

$$g_n'(z)=2i\int_{\frac{1}{n}}^{1}-\frac{\sin w(t-t_p)}{w}P(w)dw-\left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)E(w)e^{iw(t-t_p)}dw$$

sous réserve de convergence or toutes les intégrales sont bien définies car leurs intégrandes sont des fonctions de w continues sur respectivement $[\frac{1}{n},1[$, $]-1,-\frac{1}{n}]$ et $[\frac{1}{n},1[$, prolongeables par continuité en -1 et 1.
De plus, ces intégrandes sont aussi des fonctions respectivement prolongeable par continuité et continue en 0.
Ainsi il existe :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}g_n'(z) = 2i\int_{0}^{1}-\frac{\sin w(t-t_p)}{w}P(w)dw-\left(\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}\right)E(w)e^{iw(t-t_p)}dw$$
$$= g'(z)$$

2. Montrons que la suite (g_n') converge uniformément en z vers g'.
Il existe k_3 tel que, pour tout $z\in[0,L]$;

$$\left|g_n'(z)-g'(z)\right| = \left|2i\int_{0}^{\frac{1}{n}}-\frac{\sin w(t-t_p)}{w}P(w)dw-\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}E(w)e^{iw(t-t_p)}dw\right|$$
$$\leq \frac{k_3}{n}$$

où k_3 ne dépend pas de z. Donc $Sup\left\{\left|g_n'(z)-g'(z)\right|, z\in[0,L]\right\}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La convergence est bien uniforme.
Explicitons k_3 : la démarche est analogue à celle explicitant k_1 dans le lemme 5.3.7.
$\forall z\in[0,L]$,

$$\left|g_n'(z)-g'(z)\right| \leq \frac{2}{n}\sup_{w\in[0,\frac{1}{n}]}\left|\frac{-\sin w(t-t_p)}{w}P(w)\right|+\frac{2}{n}\sup_{w\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}\left|E(w)e^{iw(t-t_p)}\right|$$

Nous avons vu que :

$$\forall\epsilon,\exists n\ ;\ 0<w<\frac{1}{n}\Longrightarrow\left|\frac{-\sin w(t-t_p)}{w}\right|\leq t-t_p+\epsilon$$

De plus le dénominateur de $P(w)$ et $E(w)$ est minoré par 1.
Le numérateur de $P(w)$; $i\cosh Kz\cosh KL$, est une fonction de w continue sur le compact $[0, \frac{1}{n}]$ donc est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists M_4; \forall w \in \left[0, \frac{1}{n}\right], |i\cosh Kz\cosh KL| \leq M_4$$

D'où :

$$\sup_{w\in[0,\frac{1}{n}]} \left| \frac{-\sin w(t-t_p)}{w} P(w) \right| \leq (t - t_p + \epsilon)M_4$$

Le numérateur de $E(w)$; $\frac{\sinh KL\cosh Kz}{K}$, est une fonction continue sur le compact $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ donc est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists M_5; \forall w \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \left| \frac{\sinh KL\cosh Kz}{K} \right| \leq M_5$$

D'où :

$$\sup_{w\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} \left| E(w)e^{iw(t-t_p)} \right| \leq M_5$$

Il suffit donc de prendre $k_3 = 2\,[(t - t_p + \epsilon)M_4 + M_5]$.

□

Lemme 5.3.22.
La suite (g_n) converge ponctuellement.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} g_n(z) &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \right) - \frac{1}{w}\frac{i}{K}\frac{\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL} e^{iw(t-t_p)} dw \\
&= vp \int_{-1}^{1} -\frac{1}{w}\frac{i}{K}\frac{\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL} e^{iw(t-t_p)} dw
\end{aligned}$$

qui est convergente (cf section 5.2), pour tout z, en particulier pour z_0. □

Lemme 5.3.23.

$$\frac{\partial}{\partial z} \lim_{n\to\infty} g_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial z} g_n(z)$$

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème 5.3.3 ; les hypothèses étant démontrées dans les quatre lemmes précédents. □

<u>Partie B</u> :

Lemme 5.3.24.

$$\frac{\partial}{\partial z} g_n(z) = \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{w} \frac{i}{K} \frac{\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K} \sinh KL} e^{iw(t-t_p)} \right) dw$$

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème 5.3.1 ; les hypothèses étant vérifiées :

(i) L'intégrande, en tant que fonction de (z, w), est continue sur $[0, L] \times]-1, -\frac{1}{n}]$ et $[0, L] \times [\frac{1}{n}, 1[$, prolongeable par continuité en -1 et 1.

(ii) L'intégrande est dérivable par rapport à z et sa dérivée est continue sur $[0, L] \times]-1, -\frac{1}{n}]$ et $[0, L] \times [\frac{1}{n}, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 et 1.

□

<u>Conclusion</u> :
Les résultats des parties A et B donnent :

$$\frac{\partial}{\partial z} \lim_{n\to\infty} g_n(z) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{w} \frac{i}{K} \frac{\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K} \sinh KL} e^{iw(t-t_p)} \right) dw$$

ie :

$$\frac{\partial}{\partial z} \lim_{n\to\infty} g_n(z) = vp \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{w} \frac{i}{K} \frac{\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K} \sinh KL} e^{iw(t-t_p)} \right) dw$$

ce qui termine la démonstration par rapport à z.

Démontrons la dérivabilité par rapport à t.
Par définition de la valeur principale, l'intégrale (5.26) est égale à :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \right) \frac{1}{w} \frac{i}{K} \frac{-\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K} \sinh KL} e^{iw(t-t_p)} dw$$

que nous écrirons encore :

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t)$$

où $g_n(t)$ est la suite de fonction définie par :

$$g_n(t) = \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \right) \frac{1}{w} \frac{i}{K} \frac{-\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K} \sinh KL} e^{iw(t-t_p)} dw$$

Le principe de la démonstration est toujours le même :

– Partie A : A l'aide du théorème 5.3.3, démontrer que :

$$\frac{\partial}{\partial t}\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial t} g_n(t)$$

– Partie B : A l'aide du théorème 5.3.1, démontrer que :

$$\frac{\partial}{\partial t} g_n(t) = \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{w}\frac{i}{K}\frac{\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}\right)dw$$

Partie A :
Par une démonstration analogue à celle du lemme 5.3.19, nous pouvons montrer que (g_n) est une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$.

Lemme 5.3.25.
(g_n) est une suite de fonctions dérivables par rapport à t sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème 5.3.1.

(i) De ce qui précède, l'intégrande, en tant que fonction de (t, w), est continue sur $\mathbb{R}^+\times]-1, -\frac{1}{n}]$ et $\mathbb{R}^+\times[\frac{1}{n}, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 et 1.

(ii) L'intégrande est dérivable par rapport à t et sa dérivée :

$$(t, w) \mapsto \frac{1}{K}\frac{\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}$$

est continue sur $\mathbb{R}^+\times]-1, -\frac{1}{n}]$ et $\mathbb{R}^+\times[\frac{1}{n}, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 et 1.

Le théorème 5.3.1 permet de conclure. □

Lemme 5.3.26.
La suite (g_n') converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration.

1. Montrons que la suite (g_n') converge.
   Du lemme précédent, nous avons :

$$g_n'(t) = \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\frac{1}{K}\frac{\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}dw$$

   Les deux intégrales sont bien définies car leur intégrande est une fonction de w continue respectivement sur $]-1, -\frac{1}{n}]$ et $[\frac{1}{n}, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 et 1.
   Ainsi il existe :

$$\begin{aligned}\lim_{n\mapsto+\infty} g_n'(t) &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{K}\frac{\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}dw \\ &= g'(t)\end{aligned}$$

2. Montrons que la suite (g'_n) converge uniformément en t vers g'.
Il existe k_4 tel que, pour tout $z \in [0, L]$;

$$\begin{aligned}
\left|g'_n(t) - g'(t)\right| &= \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{K} \frac{\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL} e^{iw(t-t_p)} dw\right| \\
&= \frac{2}{n} \sup_{w\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} \left|\frac{1}{K} \frac{\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}\right| \\
&\leq \frac{k_4}{n}
\end{aligned}$$

où k_4 ne dépend pas de t. Donc $Sup\left\{\left|g'_n(t) - g'(t)\right|, t \in \mathbb{R}^+\right\}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La convergence est bien uniforme.
Explicitons k_4 :
Soit $r(w) = \frac{1}{K}\frac{\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}$, qui s'écrit encore :

$$r(w) = \frac{\frac{\sinh Kz}{K}(\cosh KL - \frac{iw}{K}\sinh KL)}{\cosh^2 KL + \frac{w^2}{K^2}\sinh^2 KL}$$

Le dénominateur est minoré par 1 comme nous l'avons montré dans la démonstration du lemme 5.3.7. Le numérateur est une fonction continue sur $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, donc est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists M_6; \forall w \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \left|\frac{1}{K}\sinh Kz(\cosh KL - \frac{iw}{K}\sinh KL)\right| \leq M_6$$

D'où :

$$\sup_{w\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} |r(w)| \leq M_6$$

Il suffit donc de prendre $k_4 = 2M_6$.

□

Lemme 5.3.27.
La suite (g_n) converge ponctuellement.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} g_n(t) &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right) - \frac{1}{w}\frac{i}{K}\frac{\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL} e^{iw(t-t_p)} dw \\
&= vp\int_{-1}^{1} -\frac{1}{w}\frac{i}{K}\frac{\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL} e^{iw(t-t_p)} dw
\end{aligned}$$

qui est convergente (cf section 5.2), pour tout t, en particulier pour t_0. □

Lemme 5.3.28.

$$\frac{\partial}{\partial t}\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}\, g_n(t)$$

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème 5.3.3 ; les hypothèses étant démontrées dans les trois lemmes précédents. □

<u>Partie B</u> :

Lemme 5.3.29.

$$\frac{\partial}{\partial t}g_n(t) = \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{w}\frac{i}{K}\frac{\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}\right)dw$$

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème 5.3.1 ; les hypothèses étant vérifiées :

(i) L'intégrande, en tant que fonction de (t, w), est continue sur $\mathbb{R}^+\times]-1, -\frac{1}{n}]$ et $\mathbb{R}^+ \times [\frac{1}{n}, 1[$, prolongeable par continuité en -1 et 1.

(ii) L'intégrande est dérivable par rapport à t et sa dérivée est continue sur $]-1, -\frac{1}{n}]$ et $[\frac{1}{n}, 1[$ et prolongeable par continuité en -1 et 1.

□

<u>Conclusion</u> :
Les résultats des parties A et B donnent :

$$\frac{\partial}{\partial t}\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{w}\frac{i}{K}\frac{\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}\right)dw$$

ie :

$$\frac{\partial}{\partial t}\lim_{n\to\infty} g_n(t) = vp\int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{w}\frac{i}{K}\frac{\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{iw}{K}\sinh KL}e^{iw(t-t_p)}\right)dw$$

ce qui termine la démonstration de la dérivabilité par rapport à t. □

Lemme 5.3.30.
La fonction (5.27) *est dérivable par rapport à z et à t.*

Démonstration.
La fonction étant constante par rapport à t, sa dérivée est nulle.
La fonction est dérivable par rapport à z de façon évidente et sa dérivée vaut :

$$-i\pi\frac{\cosh(z)}{\cosh(L)}$$

□

5.4 Valeur initiale des solutions

Le but de cette sous-partie et de montrer que les solutions sont nulles pour des temps négatifs. Cela traduit le fait qu'il n'y a rien dans la fibre optique avant injection des ondes. Pour ce faire, nous commençons par démontrer dans le lemme suivant que le dénominateur des fonctions $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$ n'a pas de zéro dans le demi-plan complexe inférieur.

Lemme 5.4.1.
Soit $\gamma = 1$. La fonction $\sqrt{w^2-1}\cos L\sqrt{w^2-1} + iw\sin L\sqrt{w^2-1}$ n'a pas de zéro dans le demi-plan complexe inférieur $Im(w) < 0$.

Démonstration.
Nous traiterons ici le cas $L = 1$, le cas général se démontrant de la même manière.
Montrons que , si $Im(w) < 0$, l'équation :

$$\cos\sqrt{w^2-1} = -i\frac{w}{\sqrt{w^2-1}}\sin\sqrt{w^2-1} \tag{5.28}$$

n'a pas de solution.
L'équation (5.28) implique :

$$\cos^2\sqrt{w^2-1} = -\frac{w^2}{w^2-1}\sin^2\sqrt{w^2-1} \tag{5.29}$$

En exprimant tout à l'aide de la fonction sinus, (5.29) devient

$$\sin^2\sqrt{w^2-1} = -(w^2-1)$$

d'où : (5.28) implique

$$i\sin\sqrt{w^2-1} = \sqrt{w^2-1} \quad \text{ou} \quad i\sin\sqrt{w^2-1} = -\sqrt{w^2-1}$$

Par ailleurs, en exprimant tout à l'aide de la fonction cosinus, l'équation (5.28) implique :

$$\cos^2\sqrt{w^2-1} = w^2$$

d'où : (5.28) implique

$$\cos\sqrt{w^2-1} = w \quad \text{ou} \quad \cos\sqrt{w^2-1} = -w$$

Au bilan : l'équation (5.28) implique

$$\begin{cases} i\sin\sqrt{w^2-1} = \pm\sqrt{w^2-1} \\ \cos\sqrt{w^2-1} = \pm w \end{cases}$$

Or :

– l'équation $i \sin \sqrt{w^2-1} = \sqrt{w^2-1}$ n'est pas compatible avec les équations (5.28) et $\cos \sqrt{w^2-1} = w$.
En effet, nous aurions alors :

$$w = -\sqrt{w^2-1}\frac{w}{\sqrt{w^2-1}}$$

d'où :

$$w = -w \quad \text{i.e.} \quad w = 0$$

ce qui est exclu par hypothèse.

– de même, l'équation $i \sin \sqrt{w^2-1} = -\sqrt{w^2-1}$ n'est pas compatible avec les équations (5.28) et $\cos \sqrt{w^2-1} = -w$.

Ainsi, nous en concluons que l'équation (5.28) est équivalente au système

$$\begin{cases} \begin{cases} i \sin \sqrt{w^2-1} = +\sqrt{w^2-1} \\ \cos \sqrt{w^2-1} = -w \end{cases} \\ ou \\ \begin{cases} i \sin \sqrt{w^2-1} = -\sqrt{w^2-1} \\ \cos \sqrt{w^2-1} = +w \end{cases} \end{cases} \tag{5.30}$$

Nous raisonnons par l'absurde. Supposons que w tel que $Im(w) < 0$ est solution de (5.28).
De ce qui précède, cela est équivalent à supposer que w tel que $Im(w) < 0$ est solution de (5.30). Nous allons montrer que :

1. Si w est tel que $Im(w) < 0$, alors $\begin{cases} i \sin \sqrt{w^2-1} = +\sqrt{w^2-1} \\ \cos \sqrt{w^2-1} = -w \end{cases}$ n'a pas de solution.
2. Si w est tel que $Im(w) < 0$, alors $\begin{cases} i \sin \sqrt{w^2-1} = -\sqrt{w^2-1} \\ \cos \sqrt{w^2-1} = +w \end{cases}$ n'a pas de solution.

Ainsi, nous aurons montré que w tel que $Im(w) < 0$ n'est pas solution de (5.30). Comme nous avons montré que (5.30) et (5.28) sont équivalents, alors nous aurons montré que w tel que $Im(w) < 0$ n'est pas solution de (5.28).

<u>Montrons 1. :</u> Il suffit de montrer que si w est tel que $Im(w) < 0$ alors le système

$$\begin{cases} Re(i \sin \sqrt{w^2-1}) - Re(\sqrt{w^2-1}) = 0 \\ Re(\cos \sqrt{w^2-1}) - Re(w) = 0 \end{cases} \tag{5.31}$$

n'a pas de solution.
Soit $w = x + iy$ tel que $x \in \mathbb{R}$, $y < 0$. On fixe $\theta \in]-\pi, \pi]$.

$\sqrt{w^2-1} = \sqrt{\rho e^{i\theta}} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\rho}\cos(\frac{\theta}{2}) + i\sqrt{\rho}\sin(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{\rho\cos(\theta) + i\rho\sin(\theta)}$
$\sqrt{w^2-1} = \sqrt{x^2-y^2-1+i2xy}$
avec :
$\rho = \sqrt{(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2}$

Lemme 5.4.2.
Soient $\alpha = \sqrt{2}\sqrt{\rho + x^2 - y^2 - 1}$ *et* $\tilde{\alpha} = \sqrt{2}\sqrt{\rho - (x^2-y^2-1)}$
où $x \in \mathbb{R}$, $y < 0$.
Alors :

(i) $\alpha \geq 0$.
De plus, $\alpha = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\tilde{\alpha} > 0$.

Démonstration.

(i) Montrons que $\alpha \geq 0$. Comme $\alpha = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)} + x^2 - y^2 - 1}$, il suffit de montrer que

$$\sqrt{((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)} \geq -x^2+y^2+1 \tag{5.32}$$

Remarquons que $(x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2) \geq 0$, d'où :

$$\sqrt{((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)} \geq 0 \tag{5.33}$$

- si $-x^2+y^2+1 = 0$, $\sqrt{((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)} \geq 0$.
  Le résultat est direct.

- si $-x^2+y^2+1 > 0$, par l'absurde supposons que

  $$\sqrt{((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)} < -x^2+y^2+1.$$

  Les deux membres de l'inégalité étant positifs, nécessairement :

  $$((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2) < ((1-x)(1+x)+y^2)^2$$

  qui implique après développement $4x^2 < 0$, qui est absurde.
  D'où (5.32).

- si $-x^2+y^2+1 < 0$, par l'absurde supposons que

  $$\sqrt{((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)} < -x^2+y^2+1$$

  L'hypothèse implique $\sqrt{((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)} < 0$, ce qui est absurde étant donné (5.33).
  D'où (5.32).

Au bilan, nous avons montré que $\alpha \geq 0$.

De plus, $\alpha = 0$ implique $4x^2 = 0$ d'où $x = 0$.
Réciproquement, $x = 0$ implique $\alpha = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{(y^2+1)^2} - y^2 - 1} = 0$.
Au bilan, nous avons montré que : $\alpha = 0$ si et seulement si $x = 0$.

(ii) Montrons que $\tilde{\alpha} > 0$.
- montrons que $\tilde{\alpha} \geq 0$; la démonstration est analogue à celle de $\alpha \geq 0$.
- nous excluons le cas $\tilde{\alpha} = 0$; pour cela supposons $\tilde{\alpha} = 0$.

$$\tilde{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)} - (x^2 - y^2 - 1)} = 0$$

ce qui implique après calculs $4y^2x^2 = 0$. Comme $y < 0$, nécessairement $x^2 = 0$ d'où $x = 0$.
Donc : $\tilde{\alpha} = 0$ implique $x = 0$.
D'où : $x \neq 0$ implique $\tilde{\alpha} \neq 0$.
Et : $x = 0$ implique $\tilde{\alpha} = 2\sqrt{y^2+1} \neq 0$.
Donc : dans tous les cas $\tilde{\alpha} \neq 0$.

Au bilan, nous avons montré que $\tilde{\alpha} > 0$.

□

- Supposons $xy \neq 0$:

$$\begin{aligned} Re\left(\cos\sqrt{w^2-1}\right) &= Re\left(\cos(\sqrt{\rho}\cos(\frac{\theta}{2}) + i\sqrt{\rho}\sin(\frac{\theta}{2}))\right) \\ &= \cos(\sqrt{\rho}\cos(\frac{\theta}{2}))\cosh(\sqrt{\rho}\sin(\frac{\theta}{2})) \end{aligned}$$

Comme $\theta \in]-\pi, \pi]$, alors $\cos(\frac{\theta}{2}) \geq 0$. Ainsi, $\cos(\frac{\theta}{2}) = +\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\cos\theta + 1}$.
D'où :

$$\sqrt{\rho}\cos(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{\rho}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\cos\theta+1} = \frac{\alpha}{2}$$

avec $\alpha = \sqrt{2}\sqrt{\rho + x^2 - y^2 - 1}$.
Donc :

$$\cos(\sqrt{\rho}\cos(\frac{\theta}{2})) = \cos(\frac{\alpha}{2})$$

Et :

$$\begin{cases} \cos(\frac{\theta}{2}) = 0 \\ \theta \in]-\pi, \pi] \end{cases} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow xy = \frac{1}{2}\rho\sin\pi = 0$$

Comme $xy \neq 0$, alors $\cos(\frac{\theta}{2}) \neq 0$, et $\sin(\frac{\theta}{2}) = \dfrac{\sin(\theta)}{2\cos(\frac{\theta}{2})}$.
D'où :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\rho}\sin(\frac{\theta}{2}) &= \sqrt{\rho}\frac{\frac{2xy}{\rho}}{2\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\cos\theta+1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}xy\frac{\sqrt{\rho-(x^2-y^2-1)}}{\sqrt{\rho^2-(x^2-y^2-1)^2}} \text{ (car } \tilde{\alpha} \neq 0) \\
&= \text{signe}(xy)\frac{\tilde{\alpha}}{2}
\end{aligned}$$

avec $\tilde{\alpha} = \sqrt{2}\sqrt{\rho-(x^2-y^2-1)}$.
Donc :

$$\cosh(\sqrt{\rho}\sin(\frac{\theta}{2})) = \cosh(\text{signe}(xy)\frac{\tilde{\alpha}}{2}) = \cosh(\frac{\tilde{\alpha}}{2})$$

Et :

$$\begin{aligned}
Re\left(i\sin\sqrt{w^2-1}\right) &= Re\left(i\sin(\sqrt{\rho}\cos(\frac{\theta}{2})+i\sqrt{\rho}\sin(\frac{\theta}{2}))\right) \\
&= -\cos(\frac{\alpha}{2})\sinh(\text{signe(xy)}\frac{\tilde{\alpha}}{2}) \\
-Re\left(\sqrt{w^2-1}\right) &= -Re\left(\sqrt{\rho}\cos(\frac{\theta}{2})+i\sqrt{\rho}\sin(\frac{\theta}{2})\right) \\
&= -\sqrt{\rho}\cos(\frac{\theta}{2}) \\
&= -\frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

Au bilan, si $xy \neq 0$, alors :

$$\begin{cases} Re(\cos\sqrt{w^2-1}) + Re(w) = \cos(\frac{\alpha}{2})\cosh(\frac{\tilde{\alpha}}{2}) + x \\ Re\left(i\sin\sqrt{w^2-1}\right) - Re\left(\sqrt{w^2-1}\right) = -\cos(\frac{\alpha}{2})\sinh(\text{signe}(xy)\frac{\tilde{\alpha}}{2}) - \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

i.e. le système (5.31) équivaut à : $\begin{cases} \cos(\frac{\alpha}{2})\cosh(\frac{\tilde{\alpha}}{2}) + x = 0 \\ -\cos(\frac{\alpha}{2})\sinh(\text{signe}(xy)\frac{\tilde{\alpha}}{2}) - \frac{\alpha}{2} = 0 \end{cases}$

– Supposons $xy = 0$: comme $Im(w) = y < 0$, nécessairement $x = 0$.
Alors :

$$\begin{aligned}
Re(\cos\sqrt{w^2-1}) + Re(w) &= Re(\cos\sqrt{-y^2-1}) + Re(iy) \\
&= \cosh(\sqrt{y^2+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Re\left(i\sin\sqrt{w^2-1}\right) - Re\left(\sqrt{w^2-1}\right) &= Re\left(i\sin(\sqrt{-y^2-1})\right) - Re\left(\sqrt{-y^2-1}\right) \\
&= -\sinh(\sqrt{y^2+1})
\end{aligned}$$

Au bilan, si $xy = 0$, alors :

$$\begin{cases} Re(\cos\sqrt{w^2-1}) + Re(w) = \cosh(\sqrt{y^2+1}) \\ Re\left(i\sin\sqrt{w^2-1}\right) - Re\left(\sqrt{w^2-1}\right) = -\sinh(\sqrt{y^2+1}) \end{cases}$$

i.e. le système (5.31) équivaut à : $\begin{cases} \cosh(\sqrt{y^2+1}) = 0 \\ -\sinh(\sqrt{y^2+1}) = 0 \end{cases}$

Pour $Im(w) = y < 0$, il reste donc à étudier suivant x :

$$\begin{cases} \cos(\frac{\alpha}{2})\cosh(\frac{\tilde{\alpha}}{2}) + x = 0 \\ -\cos(\frac{\alpha}{2})\sinh(signe(xy)\frac{\tilde{\alpha}}{2}) - \frac{\alpha}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \cosh(\sqrt{y^2+1}) = 0 \\ -\sinh(\sqrt{y^2+1}) = 0 \end{cases}$$

Supposons donc toujours $y < 0$.
<u>Premier cas</u> : $x = 0$ donc $xy = 0$ et alors

$$(5.31) \Leftrightarrow \begin{cases} \cosh(\sqrt{y^2+1}) = 0 \\ -\sinh(\sqrt{y^2+1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cosh(\sqrt{y^2+1}) = 0 \\ \sinh(\sqrt{y^2+1}) = 0 \end{cases}$$

ce qui est absurde car cosh et sinh n'ont pas de zéro commun.

<u>Deuxième cas</u> : $x > 0$ donc $xy < 0$ et alors

$$(5.31) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\frac{\alpha}{2})\cosh(-\frac{\tilde{\alpha}}{2}) + x = 0 \\ -\cos(\frac{\alpha}{2})\sinh(-\frac{\tilde{\alpha}}{2}) - \frac{\alpha}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\frac{\alpha}{2})\cosh(\frac{\tilde{\alpha}}{2}) = -x \\ \cos(\frac{\alpha}{2})\sinh(\frac{\tilde{\alpha}}{2}) = \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$ et $\tilde{\alpha} > 0$.
$-x < 0$, nous avons toujours $\cosh(\frac{\tilde{\alpha}}{2}) > 0$, donc la première équation implique : $\cos(\frac{\alpha}{2}) < 0$.
Comme $\frac{\alpha}{2} > 0$, la seconde équation implique alors : $\sinh(\frac{\tilde{\alpha}}{2}) < 0$.
Ce qui est absurde car $\frac{\tilde{\alpha}}{2} > 0$.

<u>Troisième cas</u> : $x < 0$ donc $xy > 0$ et alors

$$(5.31) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\frac{\alpha}{2})\cosh(\frac{\tilde{\alpha}}{2}) + x = 0 \\ -\cos(\frac{\alpha}{2})\sinh(\frac{\tilde{\alpha}}{2}) - \frac{\alpha}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\frac{\alpha}{2})\cosh(\frac{\tilde{\alpha}}{2}) = -x \\ \cos(\frac{\alpha}{2})\sinh(\frac{\tilde{\alpha}}{2}) = -\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$ et $\tilde{\alpha} > 0$.
$-x > 0$, nous avons toujours $\cosh(\frac{\tilde{\alpha}}{2}) > 0$, donc la première équation implique : $\cos(\frac{\alpha}{2}) > 0$.
Comme $-\frac{\alpha}{2} < 0$, la seconde équation implique alors : $\sinh(\frac{\tilde{\alpha}}{2}) < 0$.
Ce qui est absurde car $\frac{\tilde{\alpha}}{2} > 0$.

<u>Montrons 2. :</u>
La démonstration est analogue à celle de 1. qui précède. $\square$

Le lemme suivant est dû à L.Schwartz [37].

Lemme 5.4.3.
Une distribution tempérée $G(t)$ ayant pour transformée de Fourier $\tilde{G}(\omega)$ vérifie :

$$G(t) = 0 \qquad \forall t < T, \qquad T \in \mathbb{R} \tag{5.34}$$

si et seulement si $\tilde{G}$ est limite d'une fonction $\tilde{g}$

$$\tilde{G}(\omega_r) = \lim_{\omega_i \to 0} \tilde{g}(\omega_r + i\omega_i), \qquad \omega_i < 0 \tag{5.35}$$

qui est analytique dans le demi-plan inférieur $\omega_i < 0$ et telle que :

$$|e^{-T|\omega_i|}\tilde{g}(\omega)| < c|\omega|^m, \tag{5.36}$$

où c et m constantes.

Démonstration.
cf [38]. □

Ces deux lemmes vont nous permettre de prouver le résultat concernant la valeur initiale des solutions donné dans le théorème ci-après.

Théorème 5.4.1.
Les fonctions $u(z,t)$ et $v(z,t)$ définies par (5.11) s'annulent pour $t < 0$.

Démonstration.
D'après (2.6), $b_0(t) = 0$ et $b_L(t) = 0$ pour $t < 0$.
Donc, d'après le lemme 5.4.3 : $\tilde{b}_0(\omega)$ et $\tilde{b}_L(\omega)$ sont analytiques dans le demi-plan complexe inférieur $\{\omega = \omega_r + i\omega_i, \omega_i < 0\}$ et satisfont :

$$|\tilde{b}_0(\omega_r + i\omega_i)| < c|\omega|^m \quad \text{et} \quad |\tilde{b}_L(\omega_r + i\omega_i)| < c|\omega|^m$$

Le lemme 5.4.1, les relations (5.5) et la proposition 5.1.3 impliquent que $\tilde{u}(z,\omega)$ et $\tilde{v}(z,\omega)$ n'ont pas de pôle dans le demi-plan complexe inférieur.
De plus, (5.5) implique que :

$$|\tilde{u}(z, \omega_r + i\omega_i)| = \mathcal{O}(|\omega|^m) \quad \text{et} \quad |\tilde{v}(z, \omega_r + i\omega_i)| = \mathcal{O}(|\omega|^m) \quad \text{pour} \quad \omega_i \to -\infty$$

Ainsi nous pouvons appliquer le lemme 5.4.3 avec $T = 0$, ce qui termine la démonstration. □

5.5 Unicité des solutions

A cette étape de notre travail, nous avons prouvé que les solutions de notre système d'étude choisi pour modéliser le phénomène d'attraction d'ondes existent et sont régulières. Nous avons donc explicité des solutions classiques de (2.1). Nous montrons ici qu'elles sont de plus uniques. L'unicité peut être montrée de façon standard (cf [25] p 442-445).

Proposition 5.5.1.
Soient $u(z,t)$ et $v(z,t)$ avec $u, \partial u/\partial t, \partial u/\partial x, v, \partial v/\partial t, \partial v/\partial x \in L_2([0,L] \times \mathbb{R}^+)$ des solutions du système (2.1) pour le problème avec conditions initiales et aux bords (2.6).
Alors : $u(z,t)$, $v(z,t)$ est l'unique solution de ce problème.

Démonstration.
Soient $u_1(z,t)$, $v_1(z,t)$ et $u_2(z,t)$, $v_2(z,t)$ deux solutions du problème avec conditions initiales et aux bords.
Alors : U et V définies par

$$U(z,t) = u_1(z,t) - u_2(z,t) \quad \text{et} \quad V(z,t) = v_1(z,t) - v_2(z,t)$$

sont solutions de (5.11) avec conditions initiales $U(z,0) = V(z,0) = 0$ et conditions aux bords $U(0,t) = 0$ et $V(L,t) = 0$.

Comme U vérifie l'équation de Klein-Gordon de la proposition 2.1.1, nous obtenons la relation suivante par intégration le long du domaine $0 < t < T$ et $0 < z < L$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_0^L 2\frac{\partial U}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \gamma^2 U\right) dt\, dz \\ &= \int_0^T \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \gamma^2 U^2\right) - 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right] dt\, dz. \end{aligned}$$

En considérant les conditions initiales et au bord en $z = 0$, nous obtenons :

$$\int_0^L \left(\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \gamma^2 U^2\right)\Bigg|_{t=T} dz - 2\int_0^T \frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial z}\Bigg|_{z=L} dt = 0.$$

En $z = L$ nous avons :

$$\gamma V(L,t) = i\left(\frac{\partial U}{\partial t}(L,t) + \frac{\partial U}{\partial z}(L,t)\right) = 0$$

Ce qui implique :

$$\int_0^L \left(\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \gamma^2 U^2\right)\Bigg|_{t=T} dz + 2\int_0^T \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2\Bigg|_{z=L} dt = 0$$

i.e. U doit être identiquement nul. L'argument pour V est analogue, ce qui complète la démonstration. □

5.6 Convergence des solutions vers l'état stationnaire

Nous arrivons ici à un résultat central. Nous prouvons dans cette partie que les solutions du système (2.1) établies dans les paragraphes précédents

sont convergentes pour des temps longs vers l'état stationnaire explicité dans le chapitre 3.

Théorème 5.6.1.
Les solutions (5.11) convergent vers l'état stationnaire quand $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} u(z,t) &= u^s(z) = u_0 \, \frac{\cosh\gamma(L-z)}{\cosh\gamma L} - iv_L \, \frac{\sinh\gamma z}{\cosh\gamma L} \\ \lim_{t\to\infty} v(z,t) &= v^s(z) = -iu_0 \, \frac{\sinh\gamma(L-z)}{\cosh\gamma L} + v_L \, \frac{\cosh\gamma z}{\cosh\gamma L} \end{aligned} \tag{5.37}$$

Démonstration.
Prenons $\gamma = 1$. Nous ne ferons que la démonstration pour u, celle pour v est analogue.
Nous écrivons u et v sous la forme (5.12), (5.13). Les propositions suivantes démontrent la limite de chacune des intégrales et donnent par somme des limites obtenues le résultat. □

I. Dans un premier temps nous allons faire l'étude asymptotique de la fonction définie par $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{b_L}(w)\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw$ quand $t \to +\infty$:
Plus précisément, nous allons prouver la

Proposition 5.6.1.

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{b_L}(w)\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw = \tilde{G}(z,0) = \frac{\sinh z}{\cosh L}$$

Démonstration.
Elle résulte des propositions des paragraphes qui suivent sachant que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{b_L}(w)\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w) + \tilde{S}(w)\right] \tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|w|>1} \left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w) + \tilde{S}(w)\right] \tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w) + \tilde{S}(w)\right] \tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw \end{aligned}$$

□

Nous procédons en deux étapes.

1. Etudions l'asymptotique de $\frac{1}{2\pi}\int_{|w|>1} \left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w) + \tilde{S}(w)\right] \tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw$ quand $t \to +\infty$:

Proposition 5.6.2.

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{|w|>1}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw=0$$

Démonstration.
Soit I_3 l'intégrale ci-dessus. La fonction $w\mapsto\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{G}(z,w)$ est une fonction continue sur $[-2,-1[$ et $]1,2]$, prolongeable par continuité en -1 et en 1.
D'après le lemme de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{-1}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw=0$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{1}^{2}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw=0$$

D'après le lemme 5.1.2 et la proposition 5.1.5, les fonctions $\tilde{G}$ et $\tilde{b}_L$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\{|w|>2\}$, nous obtenons par intégration par parties :

$$I_1=\left[\frac{e^{iwt}}{it}\tilde{b}_L(w)\tilde{G}(z,w)\right]_{|w|>2}-\frac{1}{it}\int_{|w|>2}\left(\frac{\partial\tilde{b}_L(w)}{\partial w}\tilde{G}(z,w)+\tilde{b}_L(w)\frac{\partial\tilde{G}(z,w)}{\partial w}\right)e^{iwt}dw$$

D'après les propositions 5.1.4 et 5.1.5,

$$\left|\left[\frac{e^{iwt}}{it}\tilde{b}_L(w)\tilde{G}(z,w)\right]_{|w|>2}\right|=\frac{\left|\tilde{b}_L(2)\right|\left|\tilde{G}(z,2)\right|}{t}=\frac{l_1}{t}\qquad(l_1\text{ constante})$$

et :

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{it}\int_{|w|>2}\left(\frac{\partial\tilde{b}_L(w)}{\partial w}\tilde{G}(z,w)+\tilde{b}_L(w)\frac{\partial\tilde{G}(z,w)}{\partial w}\right)e^{iwt}dw\right|\\ \leq\ &\frac{1}{t}\int_{|w|>2}\left|\frac{\partial\tilde{b}_L(w)}{\partial w}\right|\left|\tilde{G}(z,w)\right|dw+\frac{1}{t}\int_{|w|>2}\left|\tilde{b}_L(w)\right|\left|\frac{\partial\tilde{G}(z,w)}{\partial w}\right|dw\end{aligned}$$

D'après les propositions 5.1.5 et 5.1.4,

$$\frac{1}{t}\int_{|w|>2}\left|\frac{\partial\tilde{b}_L(w)}{\partial w}\right|\left|\tilde{G}(z,w)\right|dw\leq\frac{1}{t}\underbrace{\int_{|w|>2}\frac{nC_5}{|w|^{n+1}}+\frac{C_6}{|w|^n}dw}_{\text{convergente}}\ (C_5,\ C_6\text{ constantes})$$

D'après la proposition 5.1.5 et le lemme 5.1.1,

$$\frac{1}{t}\int_{|w|>2}\left|\tilde{b}_L(w)\right|\left|\frac{\partial\tilde{G}(z,w)}{\partial w}\right|dw\leq\frac{1}{t}\underbrace{\int_{|w|>2}\frac{C}{|w|^n}\left(\frac{|w|}{K'^3}+\frac{|w|\,z}{K'^2}+\frac{|w|\,L}{K'^2}+\frac{1}{K'^4}+\frac{w^2L}{K'^3}\right)dw}_{\text{convergente}}$$

Donc :

$$|I_3| \leq \frac{const}{t}$$

Donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|w|>2}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw \underset{\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$$

D'où le résultat. □

2. Etudions l'asymptotique de $\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw$ quand $t \to +\infty$:

Proposition 5.6.3.

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw = \tilde{G}(z,0)$$

Démonstration.
Elle résulte des deux sous-parties suivantes, sachant que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\tilde{S}(w)\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw\end{aligned}$$

□

(a) Asymptotique de $\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\tilde{S}(w)\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw$ quand $t \to +\infty$:

Proposition 5.6.4.

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\tilde{S}(w)\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw = 0$$

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue, la fonction $w \mapsto \tilde{S}(w)\tilde{G}(z,w)$ étant une fonction continue sur $]-1,1[$, prolongeable par continuité en -1 et en 1. □

(b) Asymptotique de $\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw$ quand $t \to +\infty$:

Proposition 5.6.5.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw = \tilde{G}(z,0)$$

Démonstration.
Le résultat résulte des deux lemmes suivants, sachant que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)\tilde{G}(z,w)e^{iwt}dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)\tilde{G}(z,w)\chi_{[-1,1]}(w)e^{iwt}dw$$

□

Posons $\tilde{\Gamma}(z,w) = \tilde{G}(z,w)\chi_{[-1,1]}(w)$.
Lemme 5.6.1.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)\tilde{\Gamma}(z,w)e^{iwt}dw = \int_{-\infty}^{t-t_p}\Gamma(z,t')dt'$$

où : $\Gamma(z,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\tilde{G}(z,w)e^{iwt'}dw$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)\tilde{\Gamma}(z,w)e^{iwt}dw &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{H}(w)\tilde{\Gamma}(z,w)e^{iw(\tau)}dw \\
&\qquad \text{(changement de variable } \tau = t - t_p) \\
&= H(\tau) * \Gamma(z,\tau) \\
&\qquad \text{(théorème de convolution)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau - t')\Gamma(z,t')dt' \\
&\qquad \text{(définition de la convolution)} \\
&= \int_{-\infty}^{\tau}\Gamma(z,t')dt' \\
&\qquad \text{(définition de la fonction de Heaviside)} \\
&= \int_{-\infty}^{t-t_p}\Gamma(z,t')dt'
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z,t') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Gamma}(z,w)e^{iwt'}dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}(z,w)\chi_{[-1,1]}(w)e^{iwt'}dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\tilde{G}(z,w)e^{iwt'}dw
\end{aligned}$$

□

Lemme 5.6.2.

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)\tilde{\Gamma}(z,w)e^{iwt}dw = \tilde{\Gamma}(z,0) = \tilde{G}(z,0)$$

Démonstration.
D'après le lemme précedent,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)\tilde{\Gamma}(z,w)e^{iwt}dw &= \lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t-t_p}\Gamma(z,t')dt' \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(z,t')dt' \\
&= \tilde{\Gamma}(z,0) \\
&= \tilde{G}(z,0)\chi_{[-1,1]}(0) \text{ (par définition de } \tilde{\Gamma}) \\
&= \tilde{G}(z,0)
\end{aligned}$$

□

II. Dans cette seconde partie, nous étudions l'asymptotique de la fonction définie par $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{b_0}(w)\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw$ quand $t\to\ +\infty$.
Nous avons le résultat suivant.

Proposition 5.6.6.

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{b_0}(w)\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw = \tilde{F}(L-z,0) = \frac{\cosh(L-z)}{\cosh L}$$

Démonstration.
Elle résulte des propositions des sections qui suivent sachant que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{b_0}(w)\tilde{f}(L-z,w)e^{iwt}dw &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|w|>1}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw \\
&\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw
\end{aligned}$$

□

Nous procédons là encore en deux étapes.

1. Etudions l'asymptotique de $\frac{1}{2\pi}\int_{|w|>1}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw$ quand $t\to\ +\infty$:

Proposition 5.6.7.

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{|w|>1}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw=0$$

Démonstration.
Soit I_4 l'intégrale ci-dessus. La fonction $w\mapsto\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{F}(L-z,w)$ est une fonction continue sur $[-2,-1[$ et $]1,2]$, prolongeable par continuité en -1 et en 1.
D'après le lemme de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{-1}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw=0$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{1}^{2}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw=0$$

D'après le lemme 5.1.2 et la proposition 5.1.5, les fonctions $\tilde{F}$ et $\tilde{b}_0$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\{|w|>2\}$, nous obtenons par intégration par parties :

$$\begin{aligned}I_2 &= \left[\frac{e^{iwt}}{it}\tilde{b}_0(w)\tilde{F}(L-z,w)\right]_{|w|>2}\\ &\quad -\frac{1}{it}\int_{|w|>2}\left(\frac{\partial\tilde{b}_0(w)}{\partial w}\tilde{F}(L-z,w)+\tilde{b}_0(w)\frac{\partial\tilde{F}(L-z,w)}{\partial w}\right)e^{iwt}dw\end{aligned}$$

D'après les propositions 5.1.4 et 5.1.5,

$$\left|\left[\frac{e^{iwt}}{it}\tilde{b}_0(w)\tilde{F}(L-z,w)\right]_{|w|>2}\right|=\frac{\left|\tilde{b}_0(2)\right|\left|\tilde{F}(L-z,2)\right|}{t}=\frac{l_2}{t}\qquad(l_2\text{ constante})$$

et :

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{it}\int_{|w|>2}\left(\frac{\partial\tilde{b}_0(w)}{\partial w}\tilde{F}(L-z,w)+\tilde{b}_0(w)\frac{\partial\tilde{F}(L-z,w)}{\partial w}\right)e^{iwt}dw\right|\\ \leq\ &\frac{1}{t}\int_{|w|>2}\left|\frac{\partial\tilde{b}_0(w)}{\partial w}\right|\left|\tilde{F}(L-z,w)\right|dw+\frac{1}{t}\int_{|w|>2}\left|\tilde{b}_0(w)\right|\left|\frac{\partial\tilde{F}(L-z,w)}{\partial w}\right|dw\end{aligned}$$

D'après les propositions 5.1.5 et 5.1.4,

$$\frac{1}{t}\int_{|w|>2}\left|\frac{\partial\tilde{b}_0(w)}{\partial w}\right|\left|\tilde{F}(L-z,w)\right|dw\leq\frac{1}{t}\underbrace{\int_{|w|>2}\frac{nC_7}{|w|^{n+1}}+\frac{C_8}{|w|^n}dw}_{\text{convergente}}\ (C_7,\ C_8\text{ constantes})$$

D'après la proposition 5.1.5 et le lemme 5.1.1,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\int_{|w|>2}\left|\tilde{b}_0(w)\right|\left|\frac{\partial\tilde{F}(L-z,w)}{\partial w}\right|dw \\
\leq\ &\frac{1}{t}\underbrace{\int_{|w|>2}\frac{C}{|w|^n}\left(\frac{|w|\,z}{K'}+\frac{2}{K'^3}+\frac{w^2z}{K'^2}+\frac{|w|\,L}{K'}+\frac{2w^2L}{K'^2}+\frac{|w|}{K'^4}+\frac{|w|^3\,L}{K'^3}\right)dw}_{\text{convergente}}
\end{aligned}$$

Donc :

$$|I_4|\leq\frac{const}{t}$$

Donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|w|>2}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw\underset{\infty}{=}\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$$

D'où le résultat. □

2. Etudions l'asymptotique de $\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw$ quand $t\to\ +\infty$:

Proposition 5.6.8.

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw=\tilde{F}(L-z,0)$$

Démonstration.
Elle résulte des deux sous-parties suivantes, sachant que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)+\tilde{S}(w)\right]\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw\ &=\ \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw \\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\tilde{S}(w)\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw
\end{aligned}$$

□

1. Etudions l'asymptotique de $\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\tilde{S}(w)\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw$ quand $t\to\ +\infty$:

   Proposition 5.6.9.

   $$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\tilde{S}(w)\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw=0$$

   Démonstration.
   Il suffit d'appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue, la fonction $w\mapsto\tilde{S}(w)\tilde{F}(L-z,w)$ étant une fonction continue sur $]-1,1[$, prolongeable par continuité en -1 et en 1. □

2. Etudions l'asymptotique de $\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw$ quand $t \to +\infty$:

Proposition 5.6.10.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw = \tilde{F}(L-z,0)$$

Démonstration.
Le résultat résulte des deux lemmes suivants, sachant que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt}dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)\tilde{F}(L-z,w)\chi_{[-1,1]}(w)e^{iwt}dw$$

□

Posons $\tilde{\Lambda}(L-z,w) = \tilde{F}(L-z,w)\chi_{[-1,1]}(w)$.

Lemme 5.6.3.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)\tilde{\Gamma}(z,w)e^{iwt}dw = \int_{-\infty}^{t-t_p}\Lambda(z,t')dt'$$

où : $\Lambda(z,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\tilde{F}(L-z,w)e^{iwt'}dw$

Démonstration.
Il suffit de reprendre la démonstration du lemme 5.6.1. □

Lemme 5.6.4.

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)\tilde{\Lambda}(z,w)e^{iwt}dw = \tilde{\Lambda}(z,0) = \tilde{F}(L-z,0)$$

Démonstration.
D'après le lemme précedent,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt_p}\tilde{H}(w)\tilde{\Lambda}(z,w)e^{iwt}dw &= \lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t-t_p}\Lambda(z,t')dt' \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\Lambda(z,t')dt' \\
&= \tilde{\Lambda}(z,0) \\
&= \tilde{F}(L-z,0)\chi_{[-1,1]}(0) \text{ (par définition de } \tilde{\Lambda}) \\
&= \tilde{F}(L-z,0)
\end{aligned}$$

□

Chapitre 6

Résolution du problème via la transformée de Laplace

6.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons démontré l'existence de solutions du système d'étude modélisant le phénomène d'attraction d'ondes. Nous avons étudié leur régularité, leur valeur initiale, prouvé leur unicité et enfin établi leur convergence vers l'état stationnnaire.

Dans la partie suivante, nous allons exposer le même travail : recherche de solutions, existence, régularité, unicité et convergence vers l'état stationnaire, mais cette fois-ci au moyen d'une transformée de Laplace temporelle.

Notons que les deux méthodes, par transformée de Fourier ou de Laplace, sont semblables cependant l'utilisation de la transformée de Laplace présente deux différences. La première au niveau des calculs qui ne font pas intervenir de distributions. La seconde au niveau du choix des conditions initiales. Si nous voulions imposer des conditions initiales quelconques, l'utilisation de la résolution du système au moyen de la transformée de Fourier temporelle ne le permet pas alors que l'utilisation de la transformée de Laplace le permet. En effet, le domaine d'intégration étant $\mathbb{R}^+$, et non $\mathbb{R}$ comme pour la transformée de Fourier, il est possible d'imposer des conditions à $t = 0$, c'est à dire, pour u et v, des conditions initiales.

6.2 Résultats

Nous nous attachons dans ce chapitre à donner une autre méthode d'obtention de solutions écrites sous forme explicite, ceci en utilisant la transformée de Laplace. Après avoir démontré leur existence, nous prouverons tout comme pour les solutions obtenues par la transformée de Fourier dans les chapitres précédents qu'elles sont régulières, uniques, et convergent vers l'état stationnaire explicité dans le chapitre 3.

6.2.1 Transformée de Laplace

Nous nous intéressons toujours à des conditions aux bords $u_0(t)$ et $v_L(t)$ identiquement nulles pour $t < 0$, i.e., avant que les ondes ne soient injectées dans la fibre optique à $t = 0$, et tendant vers une constante à $t = t_p$.

Nous allons construire la solution du problème avec conditions aux bords en utilisant la transformée de Laplace en t dont nous rappelons la définition :

$$\hat{u}(z,k) := \int_0^\infty u(z,t)e^{-kt}dt. \tag{6.1}$$

La transformée de Laplace du système d'étude (2.1) est de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}\hat{u}\\ \hat{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k & -i\gamma\\ i\gamma & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{u}\\ \hat{v}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}u(z,t=0)\\ -v(z,t=0)\end{pmatrix} \tag{6.2}$$

$$\hat{u}(0,k) = \hat{b}_0(k), \quad \hat{v}(L,k) = \hat{b}_L(k), \tag{6.3}$$

où $\hat{b}_0(k)$ et $\hat{b}_L(k)$ sont les transformées de Laplace des conditions aux bords $u(z=0,t) = b_0(t)$ and $v(z=L,t) = b_L(t)$, de classe $\mathcal{C}^{n-2}$ sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $(0, t_{pj})$, avec $n \geq 3$, de la forme (2.6).

Remarque 6.2.1.
Plus exactement nous allons considérer que la transformée de Laplace $\hat{b}_j(k)$ admet un pôle simple en $k = 0$ et vérifie :

$$|\hat{b}_j(k)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|k|^3}\right), \qquad \text{pour } |k| \to \infty, \quad \Re(k) \geq -a_-. \tag{6.4}$$

pour un certain $-a_- < 0$, i.e., les propriétés du lemme 6.2.1 à venir.

Proposition 6.2.1.
Supposons les conditions intiales nulles $u(z,t=0) = 0$, $v(z,t=0) = 0$. Alors : le système (6.2) a pour solution

$$\begin{aligned}\hat{u}(z,k) &= \hat{F}(L-z,k)\ \hat{b}_0(k)\ + \hat{G}(z,k)\ \hat{b}_L(k)\\ \hat{v}(z,k) &= \hat{G}(L-z,k)\ \hat{b}_0(k)\ + \hat{F}(z,k)\ \hat{b}_L(k),\end{aligned} \tag{6.5}$$

où

$$\hat{F}(z,k) = \frac{\cosh Kz + \frac{k}{K}\sinh Kz}{\cosh KL + \frac{k}{K}\sinh KL} \tag{6.6}$$

$$\hat{G}(z,k) = \frac{-i\gamma \sinh Kz\ /K}{\cosh KL + \frac{k}{K}\sinh KL} \tag{6.7}$$

avec $K^2 = \gamma^2 + k^2$.

Démonstration.
Le résultat s'obtient par calcul direct. □

6.2.2 Régularité et valeurs initiales

Dans cette partie nous montrons que les fonctions définies par la transformée inverse de Laplace de (6.5), pouvant être écrites

$$\begin{aligned} u(z,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(z, k_r + ik_i)\ e^{(k_r+ik_i)t}\ dk_i \\ v(z,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(z, k_r + ik_i)\ e^{(k_r+ik_i)t}\ dk_i, \end{aligned} \tag{6.8}$$

pour tout $k_r > 0$ fixé, sont différentiables, s'annulent pour $t < 0$, et sont ainsi l'unique solution de (2.1) avec conditions initiales nulles à $t = 0$ et conditions aux bords (2.6). Afin de prouver la régularité, nous commençons par montrer dans le lemme 6.2.2 que le dénominateur des fonctions $\hat{F}$ et $\hat{G}$ (6.6),(6.7) n'a pas de zéro dans le demi-plan complexe droit, et, grâce au lemme 6.2.3, que ces fonctions sont analytiques et bornées dans ce demi-plan. Ceci conduit à la preuve de l'existence et de la régularité en proposition 6.2.1.

Commençons par établir les propriétés des transformées de Laplace des conditions aux bords.

Lemme 6.2.1.
Les transformées de Laplace des conditions aux bords $b_j \in \mathcal{B}^n$ (2.6) satisfont les propriétés suivantes :

(i) $\hat{b}_j(k)$ sont analytiques dans $\mathbb{C}$ sauf au pôle $k = 0$ avec résidus égaux à :

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{k=0}\ \hat{b}_0(k) &= \lim_{k\to 0} k\hat{b}_0(k) = u_0 \\ \mathrm{Res}_{k=0}\ \hat{b}_L(k) &= \lim_{k\to 0} k\hat{b}_L(k) = v_L \end{aligned} \tag{6.9}$$

i.e., $\hat{b}_j(k) \sim u_j/k$, pour $k \to 0$.

(ii) La fonction $k\hat{b}_j(k)$ est analytique sur tout $\mathbb{C}$ et bornée dans le demi-plan $k \in \mathbb{C}$ avec $\Re(k) \geq -a_-$, pour tout $a_- \in \mathbb{R}^+$.
De plus, $|\hat{b}_j(k)| = \mathcal{O}(\frac{1}{|k|^n})$ pour $|k| \to \infty$ avec $\Re(k) \geq -a_-$.

Démonstration.

(i) Après une intégration par parties dans laquelle les termes aux limites sont nuls, nous obtenons :

$$\hat{b}_j(k) := \int_0^{\infty} b_j(t)e^{-kt}dt = \frac{1}{k}\int_0^{\infty} \frac{db_j(t)}{dt}e^{-kt}dt = \frac{1}{k}\int_0^{t_p} \frac{db_j(t)}{dt}e^{-kt}dt$$

Ce qui implique que $k\hat{b}_j(k)$ est bornée car :

$$|k\hat{b}_j(k)| \leq \int_0^\infty \Big|\frac{db_j(t)}{dt}\Big| dt < const.$$

De plus,

$$\lim_{k\to 0} k\hat{b}_j(k) = \int_0^{t_p} \frac{db_j(t)}{dt} dt = b_j(t_p) = \begin{cases} u_0 & \text{pour } j = 0 \\ v_L & \text{pour } j = L. \end{cases}$$

ce qui complète la preuve de (i).

(ii) Après $n-1$ intégrations par parties, nous obtenons :

$$\hat{b}_j(k) := \int_0^\infty b_j(t) e^{-kt} dt = \frac{1}{k^{n-1}} \int_0^{t_p} \frac{d^{n-1} b_j(t)}{dt^{n-1}} e^{-kt} dt,$$

comme les termes limites s'annulent :

$$\frac{-1}{k^{n-1}} \frac{d^{n-2} b_j}{dk^{n-2}} e^{-kt} \Big|_0^{t_p} = 0.$$

En intégrant par parties une fois de plus nous obtenons :

$$\hat{b}_j(k) = \frac{1}{k^n} \int_0^{t_p} \frac{d^n b_j(t)}{dt^n} e^{-kt} dt - \frac{1}{k^n} \frac{d^{n-1} b_j}{dk^{n-1}} e^{-kt} \Big|_0^{t_p}$$

Cette intégrale peut être bornée par :

$$\frac{1}{|k|^n} \int_0^{t_p} \Big|\frac{d^n b_j(t)}{dt^n}\Big| \Big|e^{-kt}\Big| dt \leq \frac{1}{|k|^n} \int_0^{t_p} \Big|\frac{d^n b_j(t)}{dt^n}\Big| dt = \frac{1}{|k|^n} const.$$

et ainsi :

$$|\hat{b}_j(k)| \leq \frac{1}{|k|^n} const'.$$

□

Remarque 6.2.2.
Comme exemple de conditions aux bords dans $\mathcal{B}^3$, nous pouvons prendre la fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (avec $t_p = \pi/2$) définie par :

$$b(t) = \sin^2(t)\chi_{[0,\pi/2]}(t) + H(t - \pi/2) \tag{6.10}$$

où $\chi_{[0,\pi/2]}(t)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, \pi/2]$ et H est la fonction de Heaviside.
Sa transformée de Laplace est :

$$\hat{b}(k) = \frac{2 + 2e^{-k\pi/2}}{k(k^2+4)}.$$

Lemme 6.2.2.
Il existe une constante $-a_0 < 0$ telle que la fonction

$$D(k) := \cosh LK + (k/K)\sinh LK, \qquad \text{avec } K^2 = k^2 + \gamma^2 \tag{6.11}$$

n'a pas de zéro dans le demi-plan complexe droit fermé $\Re(k) \geq -a_0$.

Démonstration.

(a) Remarquons dans un premier temps que si $k_r = \Re(k) = 0$, alors $|D(k)| \geq 1$. Si $K = 0$, alors $k = \pm i|\gamma|$, i.e., $\Re(k) = 0$ et ainsi $D(k)$ n'a pas de zéro si $K = 0$.
Ainsi $D(k) = 0$ si et seulement si

$$\bar{D}(k) := K\cosh LK + k\sinh LK = 0 \qquad \text{et } K \neq 0. \tag{6.12}$$

(b) La relation $K^2 = k^2 + \gamma^2$ peut être écrite $K^2 + (ik)^2 = \gamma^2$, et ainsi K et k peuvent être paramétrisés par une variable complexe $\theta \in \mathbb{C}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{-ik}{|\gamma|} &= \cos(i\theta) = \cosh\theta \\ \frac{K}{|\gamma|} &= \sin(i\theta) = i\sinh\theta. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Avec cette paramétrisation, (6.12) peut être écrite :

$$\bar{D}(k) = \sinh\theta\cosh LK + \cosh\theta\sinh LK = 0,$$

qui est équivalent à :

$$\sin\big[i(\theta + LK)\big] = 0$$

dont les solutions sont :

$$i(\theta + LK) = p\pi, \qquad p \in \mathbb{Z}. \tag{6.14}$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire dans cette relation, nous obtenons :

$$\theta_r = -LK_r \tag{6.15}$$

$$\theta_i = -LK_i - p\pi, \tag{6.16}$$

où nous notons $k = k_r + ik_i, K = K_r + iK_i, \theta = \theta_r + i\theta_i$.
Les parties réelles et imaginaires de k et K peuvent être exprimées à l'aide de la paramétrisation (6.13) sous forme :

$$k_r = -|\gamma|\sinh\theta_r\sin\theta_i, \qquad k_i = |\gamma|\cosh\theta_r\cos\theta_i, \tag{6.17}$$

$$K_r = -|\gamma|\cosh\theta_r\sin\theta_i, \qquad K_i = |\gamma|\sinh\theta_r\cos\theta_i. \tag{6.18}$$

De (6.17) il s'en suit que si $k_r \neq 0$, alors $\theta_r \neq 0$ et nous pouvons écrire :

$$K_r = k_r \frac{1}{\tanh \theta_r} \tag{6.19}$$

$$K_i = k_i \tanh \theta_r. \tag{6.20}$$

L'équation (6.15) peut être exprimée sous forme : $\theta_r = -Lk_r/\tanh \theta_r$, i.e.,

$$k_r = -\frac{1}{L}\theta_r \tanh \theta_r, \tag{6.21}$$

ce qui implique $k_r < 0$, i.e., $D(k)$ n'a pas de zéro dans le demi-plan $\Re(k) \geq 0$.

(c) Dans le but de prouver qu'il existe une constante $-a_0 < 0$ telle $D(k) = 0$ implique $k_r < -a_0$, nous séparons les valeurs de k_i en deux parties, en choisissant une constante $c_1 > |\gamma|$, et en considérant les deux cas suivants :

(i) Pour $|k_i| \leq c_1$, étant donné que $D(k)$ est continue et que $|D(k)| \geq 1$ pour $k_r = 0$, s'il existe un zéro de (k_r, k_i) avec $|k_i| \leq c_1$ alors il existe une constante $-a_1 < 0$ telle que :

$$k_r < -a_1 < 0. \tag{6.22}$$

(ii) Pour $|k_i| > c_1 > |\gamma|$, nous déduisons de (6.17) que $\cosh \theta_r \geq |k_i|/|\gamma|$, ce qui implique :

$$|\theta_r| \geq \operatorname{arcosh} \frac{|k_i|}{|\gamma|}. \tag{6.23}$$

En combinant (6.19) et (6.23) nous pouvons écrire :

$$|k_r| = \frac{1}{L}|\theta_r| \tanh |\theta_r| \geq f(|k_i|),$$

où

$$f(|k_i|) := (1/L)\operatorname{arcosh}(|k_i|/|\gamma|) \tanh\big[\operatorname{arcosh}(|k_i|/|\gamma|)\big]$$

qui est une fonction monotone croissante (pour $|k_i| > |\gamma|$).
Ainsi nous avons :

$$|k_r| \geq f(|k_i|) > f(c_1) > 0. \tag{6.24}$$

En combinant les cas (i) et (ii) nous avons

$$|k_r| > a_0 > 0 \qquad \text{avec } a_0 := \min(a_1, f(c_1)), \tag{6.25}$$

ce qui complète la preuve.

□

Lemme 6.2.3.

(i) Il existe une constante $-a_0 < 0$ telles que les fonctions $\hat{F}(z,k)$ et $\hat{G}(z,k)$ (6.6)(6.7) sont analytiques et bornées dans le demi-plan complexe droit $\Re(k) > -a_0$.

(ii) Les dérivées $\partial\hat{F}(z,k)/\partial z$ et $\partial\hat{G}(z,k)/\partial z$ sont analytiques dans le demi-plan complexe $\Re(k) > -a_0$. $\partial\hat{G}/\partial z$ est bornée, et $\partial\hat{F}/\partial z$ est d'ordre $\mathcal{O}(|k|)$ pour $|k| \to \infty$.

Démonstration.

(i) Les fonctions $\hat{F}(z,k)$ et $\hat{G}(z,k)$ sont des fonctions paires de $K = \sqrt{\gamma^2 + k^2}$, donc n'ont pas de point de branchement pour cette racine. Les numérateurs et dénominateurs de $\hat{F}$ et $\hat{G}$ sont des fonctions entières. Nous avons vu dans le lemme 6.2.2 que le dénominateur $D(k) = \cosh KL + \frac{k}{K}\sinh KL$ n'a pas de zéro dans le demi-plan considéré, ainsi $\hat{F}$ et $\hat{G}$ sont analytiques dans ce demi-plan.
De plus, elles sont bornées étant donné que leur limite quand $|k| \to \infty$, avec $\Re(k) \geq -a_0$ est bornée. En effet, nous avons les comportements asymptotiques suivants pour $|k| \to \infty$:

$$\begin{aligned} |K| &\sim |k| \\ |D(k)| &\sim e^{|k_r|L} \\ |\cosh Kz| &\sim e^{|k_r|z} m_3(k), \\ |\sinh Kz| &\sim e^{|k_r|z} m_4(k), \end{aligned}$$

où $m_3(k)$ et $m_4(k)$ sont des fonctions bornées, et ainsi :

$$\begin{aligned} |\hat{F}(z,k)| &\sim e^{-|k_r|(L-z)} m_5(k), \\ |\hat{G}(z,k)| &\sim e^{-|k_r|(L-z)} m_6(k), \end{aligned} \tag{6.26}$$

où $m_5(k)$ et $m_6(k)$ sont des fonctions bornées. Ceci implique que $\hat{F}(z,k)$ et $\hat{G}(z,k)$ sont bornées si $\Re(k) \geq -a_0$.

(ii) Les dérivées sont :

$$\frac{\partial\hat{F}}{\partial z} = \frac{K\sinh Kz + k\cosh Kz}{D(k)} \tag{6.27}$$

$$\frac{\partial\hat{G}}{\partial z} = \frac{-i\gamma\cosh Kz}{D(k)}. \tag{6.28}$$

D'après ce qui précède, elles sont analytiques dans le demi-plan considéré, $\partial\hat{G}/\partial z$ est bornée, et $\partial\hat{F}/\partial z$ est d'ordre $\mathcal{O}(|k|)$ pour $|k| \to \infty$.

□

Grâce au lemme 6.2.3 nous pouvons prouver l'existence et la régularité des solutions :

Théorème 6.2.1.
Les fonctions $u(z,t)$ et $v(z,t)$ définies par (6.8),(6.5) *sont différentiables par rapport à z et à t et s'annulent pour $t < 0$. Elles sont ainsi solutions des équations* (2.1) *avec conditions aux bords* (2.6).

Démonstration.
Au vu de (6.5) et des lemmes 6.2.1 et 6.2.3, les coefficients de Laplace $\hat{u}(z,k)$ et $\hat{v}(z,k)$ sont analytiques et bornés pour $\Re(k) > 0$ et tendent vers zéro comme $\mathcal{O}(\frac{1}{|k|^n})$ avec $n \geq 3$, pour $k_i \to \infty$. Donc l'intégrale dans (6.8) converge absolument et uniformément en t. Ainsi $u(z,t)$ et $v(z,t)$ sont bien définies par (6.8). Elles sont différentiables en t car $k\hat{u}(z,k)$ et $k\hat{v}(z,k)$ satisfont toujours les propriétés ci-dessus pour $n \geq 2$. La différentiabilité par rapport à z découle du fait que les fonctions $\partial\hat{u}(z,k)/\partial z$ et $\partial\hat{v}(z,k)/\partial z$ satisfont aussi ces propriétés avec $n \geq 2$, au vu du lemme 6.2.3.

Les fonctions $u(z,t)$ et $v(z,t)$ sont nulles pour $t \leq 0$, d'après le théorème de Titchmarsch [22, 23] étant donné que $\hat{u}(z,k)$ et $\hat{v}(z,k)$ sont analytiques pour $\Re(k) > 0$ et tendent vers zéro comme $\mathcal{O}(\frac{1}{|k|})$ quand $|k| \to \infty$ (cf e.g. [24], theorème 1.4, p. 36). □

Remarque 6.2.3.
L'exponentielle décroissante apparaissant dans (6.27) peut être utilisée en vue d'obtenir une idée plus précise concernant le voisinage initial de $u(z,t)$ et $v(z,t)$.
En effet, au vu des équations (6.5), $u(z,t)$ et $v(z,t)$ peuvent être décomposées sous forme d'une somme de deux termes dépendant des conditions sur les bords respectivement gauche et droit :

$$\begin{aligned} u(z,t) &= u_{b_0}(z,t) + u_{b_L}(z,t) \\ v(z,t) &= v_{b_0}(z,t) + v_{b_L}(z,t) \end{aligned} \tag{6.29}$$

avec

$$\begin{aligned} u_{b_0} &= \mathcal{L}^{-1}\Big[\hat{F}(L-z,k)\hat{b}_0(k)\Big], & v_{b_0} &= \mathcal{L}^{-1}\Big[\hat{G}(L-z,k)\hat{b}_0(k)\Big], \\ u_{b_L} &= \mathcal{L}^{-1}\Big[\hat{G}(z,k)\hat{b}_0(k)\Big], & v_{b_L} &= \mathcal{L}^{-1}\Big[\hat{F}(z,k)\hat{b}_L(k)\Big], \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}^{-1}$ désigne la transformée de Laplace inverse (6.8).
Les équations (6.27) *impliquent que, pour $|k| \to \infty$, $\Re(k) > 0$,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big[u_{b_0}(z,t-z)\big] = e^{kz}\mathcal{L}\big[u_{b_0}(z,t)\big] = \ & \mathcal{O}\big(\tfrac{1}{|k|}\big), \qquad \mathcal{L}\big(v_{b_0}(z,t-z)\big] = \mathcal{O}\big(\frac{1}{|k|}\big),\\
\mathcal{L}\big[u_{b_L}\big(z,t-(L-z)\big)\big] = \ & \mathcal{O}\big(\tfrac{1}{|k|}\big), \qquad \mathcal{L}\big[v_{b_L}\big(z,t-(L-z)\big)\big] = \mathcal{O}\big(\frac{1}{|k|}\big).
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème de Titchmarsch, nous avons :

$$\begin{aligned}
u_{b_0}(z,t) = \ & 0, \qquad v_{b_0}(z,t) = 0, \qquad \text{pour tout } t < z,\\
u_{b_L}(z,t) = \ & 0, \qquad v_{b_L}(z,t) = 0, \qquad \text{pour tout } t < L - z. \qquad (6.30)
\end{aligned}$$

6.2.3 Unicité

L'unicité des solutions se démontre de la même façon que dans la section 5.5 car la preuve ne dépend pas de l'écriture explicite des solutions mais repose simplement sur le système d'étude (2.1).

6.2.4 Convergence vers l'état stationnaire

Nous démontrons enfin que les solutions obtenues par transformée de Laplace convergent vers l'état stationnaire pour des temps longs.

Proposition 6.2.2.
Les solutions (6.5)(6.8) *tendent vers la solution stationnaire quand $t \to \infty$:*

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} u(z,t) \ &= \ u^s(z) = \ u_0\,\frac{\cosh\gamma(L-z)}{\cosh\gamma L} - iv_L\,\frac{\sinh\gamma z}{\cosh\gamma L}\\
\lim_{t\to\infty} v(z,t) \ &= \ v^s(z) = -iu_0\,\frac{\sinh\gamma(L-z)}{\cosh\gamma L} + \ v_L\,\frac{\cosh\gamma z}{\cosh\gamma L}.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Démonstration.
Nous avons besoin du lemme suivant (e.g. [24], Proposition 1.22, p.49) :

Lemme 6.2.4.
Si une fonction $\hat{g}(k)$ est analytique dans le demi-plan ouvert $\Re(k) > -a_-$ sauf en un pôle simple en $k = 0$, et

$$\lim_{k_i\to\pm\infty} \hat{g}(k_r + k_i) = 0 \qquad \textit{uniformément pour } k_r \in [-a_-, a_+]$$

pour $a_+ > 0$, et que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k_r + k_i)\ dk_i$$

converge uniformément pour $k_r \in [-a_-, a_+]$, alors :

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \mathrm{Res}_{k=0}(\hat{g}) = \lim_{k\to 0} k\hat{g}(k).$$

Les fonctions $\hat{u}$ et $\hat{v}$ satisfont les conditions de ce lemme étant donné qu'elles sont satisfaites par les conditions aux bords $\hat{b}_0(k)$, $\hat{b}_L(k)$ d'après le lemme 6.2.1. Comme cela est décrit dans le lemme 6.2.3, les fonctions $\hat{F}(z,k)$ et $\hat{G}(z,k)$ (6.6)(6.7) sont bornées dans le domaine considéré, en prenant $-a_- = -a_0$. Etant donné que $\lim\limits_{k\to 0} K = \gamma$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to 0} \hat{F}(z,k) &= \frac{\cosh \gamma z}{\cosh \gamma L} \\
\lim_{k\to 0} \hat{G}(z,k) &= \frac{-i \sinh \gamma z}{\cosh \gamma L},
\end{aligned}$$

Ceci, ajouté au fait que $\lim\limits_{k\to 0} k\hat{b}_0(k) = u_0$ et $\lim\limits_{k\to 0} k\hat{b}_L(k) = v_L$, donne (6.31).

□

6.3 Comparaison des deux méthodes de résolution-conditions initiales non nulles

Dans les parties précédentes, nous avons, par deux méthodes différentes, établi l'existence de solutions du système modélisant le phénomène d'attraction de polarisation dans le cas de deux ondes contra-propagatives au sein d'une fibre optique. Dans les deux cas, résolution par transformée temporelle de Fourier puis de Laplace, nous avons trouvé une solution explicite relaxant vers l'état stationnaire et mis en évidence de ce fait l'attraction d'ondes pour le modèle linéaire étudié.

Les solutions obtenues avec la résolution utilisant la transformée de Fourier sont exprimées en fonction des conditions sur u et v aux bords alors que celles établies avec la résolution en terme de transformée de Laplace font intervenir dans leur expression ces mêmes conditions aux bords auxquelles peuvent s'ajouter la dépendance des conditions initiales. L'unicité de ces solutions étant établies, une conséquence directe est que ces deux solutions sont les mêmes si nous prenons des conditions initiales nulles dans les solutions obtenues par transformée de Laplace.

Revenons sur le cas de conditions initiales non-nulles. Si nous considérons des conditions initiales non nulles $u(z,t=0) = u_0(z)$ et $v(z,t=0) = v_0(z)$ et des conditions aux bords (2.6), la solution de (6.2) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \hat{u}(z,k) \\ \hat{v}(z,k) \end{pmatrix} = \hat{B}(z,k) + \hat{I}(z,k)$$

avec $\hat{B}(z,k)$ donné par (6.5), (6.6), (6.7) :

$$\hat{B}(z,k) = \begin{pmatrix} \hat{F}(L-z,k) & \hat{G}(z,k) \\ \hat{G}(L-z,k) & \hat{F}(z,k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_0(k) \\ \hat{b}_L(k) \end{pmatrix}$$

et

$$\hat{I}(z,k) = e^{\hat{M}z} \begin{pmatrix} 0 \\ -\hat{g}_2(L)/D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{g}_1(z) \\ \hat{g}_2(z) \end{pmatrix} \tag{6.32}$$

avec

$$\hat{M} := \begin{pmatrix} -k & -i\gamma \\ i\gamma & k \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \hat{g}_1(z) \\ \hat{g}_2(z) \end{pmatrix} := \int_0^z e^{\hat{M}(z-z')} \begin{pmatrix} u(z',t=0) \\ -v(z',t=0) \end{pmatrix} dz'. \tag{6.33}$$

et

$$D := \cosh KL + \frac{k}{K} \sinh KL. \tag{6.34}$$

L'exponentielle peut s'écrire explicitement :

$$e^{\hat{M}z} = \cosh(Kz) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sinh(Kz)}{K} \hat{M}.$$

Le premier terme $\hat{B}(z,k)$ dépend uniquement des conditions aux bords tandis que $\hat{I}(z,k)$ dépend uniquement des conditions initiales.

Le comportement pour $t \to \infty$ peut être déterminé en utilisant [24]

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{k\to 0} k\hat{g}(k) \tag{6.35}$$

Pour cela nous devons vérifier que $\hat{I}(z,k)$ vérifie les conditions de régularité requises pour la validité de (6.35), suivant des estimations analogues à celles présentées dans la section 6.2.4 pour $\hat{B}(z,k)$.
Le résultat essentiel est que

$$\lim_{t\to 0} I(z,t) = \lim_{k\to 0} k\hat{I}(z,k) = 0$$

puisque $\hat{I}(z,k)$ n'a pas de pôle à $k = 0$.
Ceci implique que le système tend vers la solution stationnaire (3.6), indépendamment du choix des conditions initiales.

Conclusion et perspectives

L'objectif de ce travail de thèse était d'étudier mathématiquement le phénomène physique d'attraction d'ondes. Ce phénomène, découvert par les physiciens en 1998, avait jusqu'alors été étudié en grande partie expérimentalement et numériquement. Notre travail a consisté à démontrer les résultats et conjectures élaborés précédemment dans un modèle particulier : relaxation du système vers un état stationnaire, propriétés de l'attraction d'ondes. Pour ce faire, nous avons procédé à l'étude détaillée d'un modèle simple parmi les modèles mettant en évidence l'attraction d'ondes. Plus précisément, nous avons considéré un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, auxquelles s'ajoutent des conditions initiales et aux bords. La particularité de ce problème avec conditions initiales et aux bords, réside dans le fait que les conditions aux bords sont atypiques dans le sens où elles sont données sur des bords différents pour les deux variables.

Nous avons obtenu les résultats suivants. Nous avons tout d'abord, à l'aide d'une transformée de Fourier ou de Laplace, construit des solutions dont nous avons établi l'existence et dont nous en avons donné une écriture explicite. Nous avons prouvé la régularité de ces solutions et leur unicité. Nous avons de plus démontré que ces solutions ont des valeurs initiales en accord avec la situation physique, à savoir, qu'elles sont nulles avant injection des ondes dans la fibre optique. Nous avons enfin et surtout mis en évidence le phénomène d'attraction d'ondes et prouvé que les solutions relaxent vers un état stationnaire pour des temps longs. Tout au long de cette étude nous avons mis en avant le rôle du choix des conditions aux bords dans le processus de relaxation.

Plus généralement, ce travail montre que le phénomène d'attraction d'ondes, initialement attribué à un caractère non-linéaire de l'intéraction, est en fait bien présent aussi dans le cadre linéaire. L'ingrédient essentiel est la présence d'une résonance et de variétés singulières dans l'espace de phase du système stationnaire.

Revenons sur la méthode d'obtention des solutions. Une méthode alternative est la technique de résolution d'équations aux dérivées partielles développée par Fokas [51], [49], [53]. Cette méthode permet de résoudre des problèmes avec conditions initiales et aux bords d'équations aux dérivées

partielles linéaires de deux variables indépendantes. Elle est d'ailleurs aussi applicable au cas non-linéaire intégrable. Le principe de cette méthode est d'utiliser le fait que de telles équations possèdent une formulation sous forme de paire de Lax, c'est à dire que nous pouvons écrire ces équations comme condition de compatibilité de deux équations linéaires, appelées paire de Lax. La méthode consiste à ramener le problème avec conditions initiales et aux bords étudié à un problème de Riemann-Hilbert (scalaire dans le cas linéaire, matriciel dans le cas non-linéaire), ce dernier étant obtenu par l'analyse spectrale de la paire de Lax. La résolution du problème de Riemann-Hilbert donnera une représentation formelle de la solution recherchée. Un cas proche de celui étudié dans cette thèse, utilisant cette méthode, a été étudié par Pelloni et Pinotsis [50]. Il s'agit de l'équation de Klein-Gordon sur la demi-droite. Nous travaillons ici sur un intervalle. Une démarche analogue peut être suivie dans notre cas, en particulier, nous aurons les mêmes paires de Lax mais un problème de Riemann-Hilbert plus compliqué. L'obtention de solutions formelles est cependant aisée, la difficulté résidant surtout dans l'analyse de ces dernières.

Le présent travail suggère plusieurs extensions. Nous pouvons reconsidérer notre modèle d'étude auquel nous ajoutons des termes non-linéaires. Nous pouvons alors faire le lien avec le *modèle de Thirring massif* [26] et le *modèle de fibre avec réseau de Bragg* [27, 31] :

$$\begin{aligned} i\Big(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big) &= \gamma v+\alpha|v|^2u+\beta|u|^2u=\frac{\partial h}{\partial u^*} \\ i\Big(\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial z}\Big) &= \gamma u+\alpha|u|^2v+\beta|v|^2v=\frac{\partial h}{\partial v^*}, \end{aligned} \tag{6.36}$$

correspondant au Hamiltonien :

$$h=\gamma(u^*v+uv^*)+\alpha|u|^2|v|^2+\frac{\beta}{2}(|u|^4+|v|^4). \tag{6.37}$$

Le premier terme quartique décrit la "modulation croisée", et le second l'"auto-modulation". Le cas $\beta=0$ est le *modèle de Thirring massif*, connu pour être une EDP intégrable [32, 33, 34, 35, 36] dans le cas sans bord, i.e., pour $z\in\mathbb{R}$, alors que le *modèle de fibre avec réseau de Bragg* , avec $\beta\neq 0$, ne l'est pas. Une question naturelle est d'établir les différences possibles au niveau de la dynamique de relaxation dans un intervalle fini $[0,L]$ relativement à ces propriétés d'intégrabilité.

Plus généralement, nous pouvons considérer l'extension suivante des modèles

considérés, correspondant à des résonnances polynômiales $n_1 : -n_2$ [18, 19] :

$$\begin{aligned} i\Big(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\Big) &= \frac{\partial h}{\partial u^*} \\ i\Big(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial z}\Big) &= \frac{\partial h}{\partial v^*}, \end{aligned} \tag{6.38}$$

où les Hamiltoniens $h(u, u^*, v, v^*)$ sont donnés par un polynôme réel des quatre termes suivants :

$$\begin{aligned} J_{n_1,-n_2} :=& n_1|u|^2 - n_2|v|^2, \qquad \text{with } n_1, n_2 \in \mathbb{N} \\ \rho_{n_1,-n_2} :=& n_1|u|^2 + n_2|v|^2 \\ \pi_2 :=& \Re\big[u^{n_2} v^{*n_1}\big] \\ \pi_3 :=& \Im\big[u^{n_2} v^{*n_1}\big]. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Ces Hamiltoniens satisfont [18, 19]

$$\{h, J_{n_1,-n_2}\} = 0,$$

où le crochet de Poisson pour le système d'ondes contra-propagatives est défini par :

$$\{f, g\} := i\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u^*} - \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u^*}\Big) - i\Big(\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v^*} - \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial v^*}\Big). \tag{6.40}$$

Ainsi, l'équation différentielle stationnaire est intégrable. De plus, la structure Hamiltonienne (6.38) implique généralement que :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{n_1,-n_2} = -\frac{\partial}{\partial z}J_{n_1,-n_2} + \{h, J_{n_1,-n_2}\}. \tag{6.41}$$

Ainsi les modèles considérés, avec des équations stationnaires intégrables, satisfont la relation de conservation locale :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{n_1,-n_2} = -\frac{\partial}{\partial z}J_{n_1,-n_2}, \tag{6.42}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_0^L \big(n_1|u|^2 + n_2|v|^2\big)dz &= J_{n_1,-n_2}(z=0,t) - J_{n_1,-n_2}(z=L,t) \\ &= -n_1|u(z=L,t)|^2 + n_2|v(z=L,t)|^2 \\ &\quad + n_1|u(z=0,t)|^2 - n_2|v(z=0,t)|^2 \end{aligned} \tag{6.43}$$

Ces relations sont des généralisations de (4.1), (4.2) pour le modèle linéaire. La relation (6.43) caractérise le mécanisme de relaxation en terme d'échange entre les ondes entrantes et sortantes. La relation générale (6.41) donne une indication quant au rôle joué par le caractère intégrable des équations stationnaires avec l'invariant $J_{n_1,-n_2}$.

Ces modèles non linéaires peuvent avoir plusieurs solutions stationnaires. Des simulations numériques montrent que la dynamique de relaxation sélectionne les états stationnaires proches des tores singuliers.

Bibliographie

[1] S. Pitois, G. Millot and S. Wabnitz ; Polarization domain wall solitons with counterpropagating laser beams ; Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 1409.

[2] S. Pitois, A. Sauter, G. Millot ; Simultaneous achievement of polarization attraction and Raman amplification in isotropic opitcal fibers ; Optics Letters 29 (2004) 599-601.

[3] S. Pitois, J. Fatome and G. Millot ; Polarization attraction using counterpropagating waves in optical fiber at telecommunication wavelengths ; Opt. Express 16, 6643 (2008) 1.

[4] V.E. Zakharov, A.V. Mikhailov ; Polarization domains in nonlinear optics ; JETP Lett. 45 (1987) 349-352.

[5] M. Mikhailov, S. Wabnitz ; Polarization dynamics of counterpropagating beams in optical fibers ; Opt. Lett. 15 (1990) 1055-1057.

[6] S. Pitois, G. Millot and S. Wabnitz ; Nonlinear polarization dynamics of counter-propagating waves in an isotropic optical fiber : theory and experiments ; JOSA B 18 (2001) 432-443.

[7] S. Pitois, A. Picozzi, G. Millot, H. R. Jauslin M. Haelterman ; Polarization and modal at-tractors in conservative counterpropagating four-wave interaction ; Europhys. Lett. 70, 88 (2005) 1.

[8] D. Sugny, A. Picozzi, S. Lagrange, H.R. Jauslin ; Role of Singular Tori in the Dynamics of Spatiotemporal Nonlinear Wave Systems ; Phys. Rev. Lett. 103 (2009) 034102.

[9] S. Lagrange, D. Sugny, A. Picozzi, H. R. Jauslin ; Singular tori as attractors of four-wave-interaction systems ; *Phys. Rev.* **E 81** (2010) 016202.

[10] E. Assémat, S. Lagrange, A. Picozzi, H.R. Jauslin, D. Sugny ; Complete nonlinear polarization control in an optical fiber system ; Optics Lett. 35 (2010) 2025-2027.

[11] V. V. Kozlov and S. Wabnitz ; Instability of Optical Solitons in the Boundary Value Problem for a Medium of Finite Extension ; Lett. Math. Phys. (2011) to appear.

[12] V. V. Kozlov, J. Nuño, S. Wabnitz ; Theory of lossless polarization attraction in telecommunication fibers ; JOSA B28 (2011) 100-108.

[13] V. I. Arnold ; Mathematical Methods of Classical Mechanics ; Springer-Verlag (1989).

[14] L. Bates, R. Cushman ; Scattering monodromy and the A_1 singularity ; Central European Journal of Mathematics, 5 (2007) 429-451.

[15] J. J. Duistermaat ; On global action-angle variables ; Commun. Pure Appl. Math. 33 (1980) 687.

[16] N. N. Nekhoroshev, D. A. Sadovskii, B. I. Zhilinskii ; Fractional Hamiltonian monodromy ; Ann. Inst. H. Poincaré 7 (2006) 1099–1211.

[17] K. Efstathiou, R. H. Cushman, D. A. Sadovskii ; Fractional monodromy of the 1 :-2 resonance ; Adv. in Math. 209 (2007) 241–273.

[18] R. H. Cushman, L. Bates ; Global Aspects of Classical Integrable Systems ; Birkhauser, Basel 1997.

[19] K. Efstathiou ; Metamorphoses of Hamiltonian Systems with Symmetry ; Lecture Notes in Mathematics series- LNM 1864, Springer-Verlag, Heidelberg, 2004.

[20] D. Sugny, P. Mardesic, M. Pelletier, A. Jebrane, H. R. Jauslin ; Fractional Hamiltonian monodromy from a Gauss-Manin monodromy ; J. Math. Phys., 49 (2008) 04270135.

[21] E. Assémat, C. Michel, A. Picozzi, H. R. Jauslin, D. Sugny ; Manifestation of Hamiltonian monodromy in nonlinear wave systems ; Phys. Rev. Lett. 106 (2011) 014101.

[22] E.C. Titchmarsch ; Introduction to the theory of Fourier integrals ; Oxford University Press, 1937.

[23] J. Hilgevoord ; Dispersion relations and causal description ; North Holland Publ., Amsterdam, 1960.

[24] G. Demengel ; Transformations de Laplace ; Ellipses edition, Paris, 2002.

[25] R. Courant, D. Hilbert ; Methods of Mathematical Physics, Vol. II ; J. Wiley, 1989.

[26] W. Thirring ; A soluble relativistic field theory ; Ann. Phys.(N.Y.) 3 (1958) 91.

[27] A. B. Aceves, S. Wabnitz ; Self-induced transparency solitons in nonlinear refractive periodic media ; Phys. Lett. A 141 (1989) 37-42.

[28] I. V. Barashenkov ; Stability criterion for dark solitons ; Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 1193.

[29] A. De Rossi, C. Conti, S. Trillo ; Stability, multistability, and wobbling of optical gap solitons ; Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 85.

[30] C. Conti, S. Trillo ; Bifurcation of gap solitons through catastrophe theory ; Phys. Rev. E. 64 (2001) 036617.

[31] D. N. Christodoulides, R. I. Joseph ; Slow Bragg solitons in nonlinear periodic structures ; Phys. Rev. Lett. 62 (1989) 1746.

[32] M. Wadati ; General solution and Lax pair for 1-D classical massless Thirring model ; J. Phys. Soc. Japan 52 (1983) 1084-1085.

[33] A.V. Mikhailov ; Integrability of the two-dimensional Thirring model ; Soviet Physics JETP Letters 23 (1976) 320-323.

[34] E.A. Kuznetsov, A.V. Mikhailov ; On the complete integrability of the two-dimensional classical Thirring model ; Theor. Math. Phys. 30 (1977) 193.

[35] V.E. Zakharov, A.V. Mikhailov ; On the integrability of classical spinor models in two-dimensional space-time ; Commun. Math. Phys. 74 (1980) 21-40.

[36] A. Degasperis ; Integrable models in nonlinear optics and soliton solutions ; J. Phys. A 43 (2010) 434001.

[37] L. Schwartz ; Causalité et Analyticité ; Faculté des sciences de Paris, Séminaire Schwartz-Lévy au Centre Brésilien de Recherches Physiques (1956-57).

[38] L. Schwartz ; Transformation de Laplace des distributions ; Séminaire Math. Univ. Lund, tome dédié à Marcel Riesz (1952) p 196-206.

[39] A.N. Tikhonov, A.A. Samarskii ; Equations of Mathematical Physics ; International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Pergamon Press, 1963.

[40] H. Cartan ; Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes ; Enseignement des sciences, Hermann Paris, 1963.

[41] L. Schwartz ; Méthodes mathématiques pour les sciences physiques ; Enseignement des sciences, Hermann Paris, 1965.

[42] F.W. Olver ; Asymptotics and special functions ; Computer Sciences and Applied Mathematics, Academic Press, 1974.

[43] I. Avramidi ; Lectures Notes on Asymptotic Expansion ; 2000.

[44] M. Audin ; Hamiltonian Systems and Their Integrability ; SMF/AMS Texts and Monographs, Vol 15, 2001.

[45] X. Gourdon ; Analyse, Les maths en tête ; Ellipses, 2008.

[46] A. Sommerfeld ; Partial Differential Equations in Physics ; Academic Press Inc., publishers, 1949.

[47] F. John ; Partial Differencial Equations ; Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1971.

[48] S.D. Griffiths, R.H.J. Grimshaw, K.R. Khusnutdinova ; Modulational instability of two pairs of counter-propagating waves and energy exchange in a two-component system ; Physica D, 214 (2006) 1-24.

[49] A.S. Fokas ; A unified Approach to Boundary Value Problems ; CBMS-NSF Regional conference series in applied mathematics, SIAM, 2008.

[50] B. Pelloni, D.A. Pinotsis ; The Klein-Gordon equation on the half line : a Riemann-Hilbert approach ; Journal of Nonlinear Mathematical Physics, vol 15, supplement 3 (2008) 334-344.

[51] A.S. Fokas ; A unified transform method for solving linear and certain nonlinear PDEs ; Proc. R. Soc. Lond. A (1997) 453, 1411-1443.

[52] B. Pelloni ; Linear and nonlinear generalized Fourier transforms ; Phil. Trans. R. Soc. A (2006) 364, 3231-3249.

[53] A.S. Fokas ; Lax pairs and a new spectral method for linear and integrable nonlinear PDEs ; Sel. math., New ser.4 (1998) 453, 31-68.

[54] A.S. Fokas ; Two-dimensional partial differential equations in a convex polygon ; Proc. R. Soc. Lond. A (2001) 457, 371-393.

L'attraction d'ondes dans des systèmes contra-propagatifs est un phénomène général, établi initialement en Physique dans le contexte de l'attraction de polarisation entre deux ondes contra-propagatives se propageant dans des fibres optiques. Ce phénomène a été observé expérimentalement, et ses propriétés étudiées via des simulations numériques. Les modèles qui s'y rattachent sont des systèmes hyperboliques d'équations aux dérivées partielles, avec des conditions aux bords dépendant du temps sur un intervalle fini. Le mécanisme sous-jacent peut être expliqué par l'existence de tores singuliers dans les équations stationnaires correspondantes. Le but de cette thèse est d'analyser en détail le plus simple exemple dans cette famille de modèles. Nous montrons que la plupart des phénomènes de processus d'attraction d'ondes sont en fait existants dans un modèle linéaire à résonance, avec intéraction. Nous établissons l'existence et la régularité des solutions et analysons la relaxation à travers la solution stationnaire qui caractérise les propriétes de l'attraction d'ondes.

Mots-clés : EDP hyperbolique avec conditions initiales et aux bords, comportement asymptotique, ondes contra-propagatives, résonance, attraction d'ondes.

Wave attraction in counter-propagating waves systems is a general phenomenon that was first established in Physics in the context of the attraction of the polarization between two counter-propagating waves in optical fibers. This phenomenon has been observed experimentally, and its properties were studied through numerical simulations. The models are Hamiltonian hyperbolic systems of partial differential equations, with time-dependent boundary conditions on a finite interval. The underlying mechanism can be traced back to the existence of singular tori in the corresponding stationary equations. In this work we analyze in detail the simplest example in this family of models. We show that most of the phenomena of the wave attraction process are already present in a linear model with resonant interaction. We establish the existence and regularity of the solutions and analyze the relaxation towards a stationary solution that features the wave attraction properties.

Keywords : hyperbolic PDE, initial boundary value problem, long time behaviour, counter-propagating waves, resonance, wave attraction.