



HAL
open science

Géolocalisation de sources radio-électriques : stratégies, algorithmes et performances

Jonathan Bosse

► **To cite this version:**

Jonathan Bosse. Géolocalisation de sources radio-électriques : stratégies, algorithmes et performances. Autre. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2012. Français. NNT : 2012DENS0006 . tel-00700670

HAL Id: tel-00700670

<https://theses.hal.science/tel-00700670>

Submitted on 23 May 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par :

Jonathan Bosse

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine :

Électronique (Spécialité : Traitement du signal)

Sujet de la thèse :

**Géolocalisation de sources radioélectriques : stratégies,
algorithmes et performances**



THALES



SATIE

Thèse soutenue le mardi 24 Janvier 2012 à Cachan, devant le jury suivant :

Rapporteur :	Yide Wang	IREENA/polytech'Nantes
Rapporteur :	Karim Abed-Meraim	ENST Paris
Examinatrice :	Sylvie Marcos	CNRS
Examineur :	Claude Jauffret	IM2NP/Université du Sud Toulon-Var
Examineur :	François Le Chevalier	THALES/Delft University of Technology
Directeur de thèse :	Pascal Larzabal	Université Paris-Sud
co-Directrice de thèse :	Anne Ferréol	THALES Communications

Remerciements

Je tiens évidemment à remercier en premier lieu mes encadrants de thèse : Pascal Larzabal et Anne Ferréol, qui m’ont permis de travailler dans de bonnes conditions et sans qui cette thèse n’aurait pas été aussi enrichissante. J’ai eu l’occasion d’apprendre beaucoup au contact d’Anne et ce fut pour moi une riche expérience que de travailler avec une personne aussi disponible, compétente et débordante de créativité. Je tiens également à remercier Pascal pour son soutien, sa compréhension, son apport scientifique et son inébranlable optimisme qui furent un précieux remède aux périodes de doute qui ont parsemé ces trois années de thèse.

Je remercie Messieurs Gilles Bourde, chef du service SPM et Emmanuel De Gramont, chef du laboratoire SBP pour m’avoir accueilli au sein de THALES Communications.

Je remercie Messieurs Yide Wang et Karim Abed-Meraim d’avoir accepté d’être les rapporteurs de ma thèse ainsi que pour l’attention portée à mes travaux. Je remercie également Messieurs François Le Chevalier et Claude Jauffret ainsi que Madame Sylvie Marcos d’avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie également tout le personnel du SATIE en général et de l’équipe TIM en particulier, menée de main de maître par Pierre-Yves Joubert. Je pense tout d’abord aux doctorants : Maxime Boizard, Mélanie Mahot, Tarek Menni, Tienh-Anh Nguyen, Vincent Thomas, Mojtaba Amiri Sazi, Trinh Long Cung, Ghania Belkacem. Enfin merci également aux permanents : Eric Vourch, Jean-Pierre Barbot, Phillipe Forster, Guillaume Ginholac, Franck Dahout et Françoise Schmitt, pour leur accueil et la bonne ambiance qu’ils infusent au sein du laboratoire.

Je tiens également à remercier toutes les personnes que j’ai pu côtoyer à THALES pour leur accueil chaleureux, notamment au sein des équipes WFD et SBP. Je tiens à remercier particulièrement mes compagnons “d’infortune” avec qui ce fût un plaisir de partager ces trois années : Florian Dupuy, Mathilde Brandon, Sébastien Marcille, Noël Tchidjo-Moyo et Luca Rose.

Merci à tous ceux que j’ai pu côtoyer au cours de mes (nombreux) déplacements : Alexandre Renaux, Frédéric Pascal, Rémi Boyer et tous les autres... Merci particulièrement à Eric Chaumette de m’avoir fait part de son expérience.

Enfin, je remercie ma famille pour son soutien au cours de ces trois années en particulier.

Résumé

Cette thèse porte sur la géolocalisation de sources radio-électriques dans le cadre du traitement d'antenne, c'est-à-dire l'estimation de la position, dans le plan ou l'espace, de sources incidentes à divers réseaux multicapteurs (stations de base). Il s'agit de concevoir des algorithmes estimant au mieux la position d'un ensemble de sources et de caractériser les limites théoriques, en termes d'erreur quadratique moyenne, des approches envisagées pour résoudre le problème de géolocalisation. Nous nous plaçons dans un contexte passif, sans *a priori* sur les signaux émis.

De manière classique, la position des sources est souvent estimée à l'aide de paramètres intermédiaires (angles d'arrivée, temps d'arrivée, fréquences d'arrivée ...) estimés localement sur chacune des stations de base dans un premier temps. Ces paramètres intermédiaires sont ensuite transmis à une unité centrale de traitement qui réalise l'étape de localisation dans un second temps. On parle parfois d'approche en deux étapes. Cette solution décentralisée est par nature sous-optimale.

Une approche optimale du problème de localisation consiste à estimer directement la position des sources à l'aide de l'ensemble des signaux reçus par les stations et transmis directement à l'unité centrale de traitement. Il convient alors de réaliser la localisation à l'aide d'une approche centralisée ne comportant qu'une seule étape : le problème à résoudre dépend directement de la position des sources et non plus de paramètres intermédiaires. Cette approche du problème de localisation offre de nouvelles perspectives quant à la conception de nouveaux algorithmes et pose la question de son intérêt théorique en termes d'amélioration des performances de localisation.

Dans cette thèse, nous examinons l'intérêt constitué par l'exploitation simultanée des signaux de toutes les stations de base afin de réaliser la localisation. Nous nous attachons dans un premier temps à caractériser en termes d'erreur quadratique moyenne et de borne de Cramer-Rao les approches centralisées et décentralisées pour la localisation dans un contexte de signaux bande étroite sur l'ensemble du réseau de stations. Ensuite, pour le cas plus général de signaux large bande sur l'ensemble du réseau de stations, nous proposons une approche basée sur un traitement spatio-temporel. Nous montrons son intérêt comparativement à l'état de l'art et aux performances optimales théoriques qui font elles-mêmes l'objet d'une partie des travaux exposés dans cette thèse. Un algorithme de géolocalisation en contexte de multitrajets est également proposé dans cette thèse.

Mots clés : Traitement d'antenne, borne de Cramer-Rao, Géolocalisation, estimation paramétrique.

Abstract

This thesis deal with the geographical positioning of multiple radio transmitters thanks to array processing techniques. The estimation of the position is achieved thanks to multiple sensor base stations. We aim to design estimators of the sources position and to characterize the fundamental limits of localization strategies in terms of root-mean-square-error in a passive signal context (no prior information on the transmitted signals).

Traditionally, the geographical positioning is achieved by means of a two steps procedure. In the first step, intermediate location parameters (angles of arrival, times of arrival ...) are locally estimated, in a decentralized processing on each station. Then, the position is estimated at a central processing unit thanks to all the transmitted parameters in the second step. This strategy is obviously suboptimal.

An optimal solution of the geographical localization problem rather consists in estimating the position of the sources in a centralized manner at the central processing unit, assuming that all base stations are able to transfer all their signals to the central processing unit. Then the localization can be achieved in a one step procedure. The problem now depends on the position of the sources directly and not on intermediate parameters. This approach appears to be very interesting but the characterization of their fundamental limits is still an open question.

In this thesis we examine the advantages of the centralized one step procedure compared to the traditional decentralized two steps procedure. First, we study the case of narrowband signals on the station network that offers a relevant theoretical framework to compare the performance of centralized and decentralized localization scheme. Then, we propose an alternative to the existing techniques in the more general wideband signal context based on a spatio-temporal approach. The comparison of existing techniques and the new ones to optimal performance is also part of the work reported in this thesis. A multistage geographical positioning technique is also provided for the multipaths propagation context.

Keywords : Array Processing, Cramer-Rao bound, Geographical positioning, parametric estimation.

“Mais faut-il vivre ainsi d’une esperance vaine ?

Mais faut-il perdre ainsi bien trois ans de ma peine ?”

Joachim Du Bellay, *Les regrets*.

“Ces jours qui te semblent vides

Et perdus pour l’univers

Ont des racines avides

Qui travaillent les déserts.”

Paul Valéry, *Charmes*.

Table des matières

Notations	13
1 Introduction	17
1.1 Préambule	17
1.2 Cadre général	17
1.3 Objectifs de la thèse	19
1.4 Contributions	20
1.5 Organisation du document	21
1.6 Valorisation	22
2 État de l’art	25
2.1 État de l’art en géolocalisation	25
2.1.1 Les paramètres intermédiaires de localisation	26
2.1.2 Techniques de localisation	28
2.1.3 Principales sources d’erreurs des algorithmes de localisation	29
2.1.4 Avancées récentes en géolocalisation	30
2.2 L’hypothèse bande étroite en traitement d’antenne	32
2.3 Formalisation du problème	34
2.4 Traitement d’antenne : estimation paramétrique et performances	36
2.4.1 Algorithmes à haute résolution	39
2.4.1.1 Le maximum de vraisemblance	39
2.4.1.2 MUSIC (Multiple Signal Characterization)	41
2.4.1.3 Le maximum de vraisemblance approché (AMLM)	42
2.4.2 Performances	43
2.4.2.1 Borne de Cramer-Rao	43
2.4.3 Cas de signaux large bande	45
2.4.3.1 Approche par banc de filtres	45
2.4.3.2 Approches spatio-temporelles	47
2.5 Géolocalisation de sources en contexte passif par un réseau de stations multicapteurs	48
2.5.1 Triangulation conventionnelle	48
2.5.2 Limitations des approches décentralisées conventionnelles	48
2.5.3 Vers des traitements centralisés en une seule étape	49
2.5.4 Traitements centralisés	49
2.5.4.1 Le DPD	50
2.5.4.2 Limites du DPD	53

2.5.5	Calcul des performances en Géolocalisation passive par un réseau de stations multicateurs	55
2.6	Conclusion	55
3	Cas de signaux bande étroite sur le réseau de stations	57
3.1	Modèle des signaux	57
3.2	Une approche de type MUSIC	58
3.3	Bornes de Cramer-Rao	59
3.3.1	Borne de Cramer-Rao dans le cas de signaux bande étroite	59
3.3.2	Approche décentralisée (triangulation)	61
3.3.3	Cas d'une source	64
3.4	Résultats numériques	65
3.5	Approche centralisée contre approche décentralisée.	66
3.5.1	Modèles de signaux	66
3.5.1.1	Modèle centralisé en une étape (Stratégie S1)	67
3.5.1.2	Modèle centralisé en deux étapes (Stratégie S2)	67
3.5.1.3	Modèle décentralisé en deux étapes (Stratégie conventionnelle S3)	68
3.5.2	Le principe EXIP	69
3.5.3	Comparaison des performances	70
3.5.3.1	Optimalité des stratégies	70
3.5.3.2	Résultats numériques	71
3.6	Conclusion	72
4	Cas de signaux large bande sur le réseau de stations	75
4.1	Extension du GMA au cas large-bande	75
4.2	Une approche spatio-temporelle	77
4.2.1	Algorithme LOST	80
4.2.1.1	Comparaisons avec le DPD	82
4.2.1.2	Détermination du nombre de décalages temporels K	87
4.2.1.3	Estimation des fréquences des sources	88
4.2.2	Amélioration de LOST	90
4.2.2.1	Le maximum de vraisemblance approché	90
4.2.2.2	La projection oblique	93
4.2.2.3	Le subspace fitting (SF-LOST)	94
4.2.2.4	Résultats numériques	95
4.3	Signaux déterministes : maximum de vraisemblance et borne de Cramer-Rao	97
4.3.1	Modèle des signaux	97
4.3.2	Maximum de vraisemblance déterministe	98
4.3.2.1	Cas d'une source	99
4.3.3	Borne de Cramer-Rao	100
4.3.4	Algorithmes centralisés et borne de Cramer-Rao	101
4.3.4.1	Influence du nombre de sources	101
4.3.4.2	Influence du produit TB	103
4.4	Un algorithme hybride AOA/TDOA à bas coût dans le cas de multitrajets	104
4.4.1	Algorithme	105

4.4.2 Résultats numériques	107
4.5 Conclusion	109
5 Conclusion et perspectives	111
A Résultats divers	113
A.1 Lemme d'inversion matricielle	113
A.2 Calcul de la BCR pour une source dans le cas de signaux bande étroite (BCR_{BE})	113
A.3 Matrices asymptotiques des approches par banc de filtre et spatio-temporelle	118
A.3.1 Approche par banc de filtres	119
A.3.2 Approche spatio-temporelle	120
A.4 Expression de la BCR du problème de localisation lorsque les signaux sont bande étroite	121
Table des figures	123
Bibliographie	125

Notations

Symboles mathématiques

$(.)^T$: opérateur de transposition.

$(.)^H$: opérateur de transposition-conjugaison.

\mathbf{u} : vecteur dont l'élément i est noté u_i .

\mathbf{A} : matrice dont l'élément (i, j) est noté A_{ij} ou $[\mathbf{A}]_{ij}$.

\mathbf{I}_N : matrice identité de taille $N \times N$.

$E[\cdot]$: espérance mathématique.

δ_{ij} : symbole de Kronecker $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

$tr(\mathbf{A})$: trace de la matrice \mathbf{A} .

$\|\cdot\|$: norme euclidienne.

$\|\mathbf{A}\|_F = tr(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)$: norme de Frobenius.

$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}}^2 = \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$

$|\cdot|$: valeur absolue.

$$diag(\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_N) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{v}_2 & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{v}_N \end{bmatrix}$$

$Re\{z\}$: partie réelle du complexe z .

$Im\{z\}$: partie imaginaire du complexe z .

$\mathbf{A}^\#$: désigne la pseudo-inverse de Moore-Penrose.

$\hat{\boldsymbol{\theta}}$: estimée du paramètre $\boldsymbol{\theta}$.

$\lambda_{min}\{\mathbf{A}\}$: désigne la valeur propre minimale de la matrice \mathbf{A} .

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{11}\mathbf{B} & \dots & A_{1M}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1}\mathbf{B} & \dots & A_{NM}\mathbf{B} \end{bmatrix} : \text{produit de Kronecker pour } \mathbf{A} \text{ matrice de taille } N \times M \text{ et } \mathbf{B} \text{ quelconque.}$$

$\mathcal{N}(a, \sigma^2)$: Loi Gaussienne de moyenne a et de variance σ^2 .

$\mathcal{U}(a, b)$: Loi uniforme sur $[a, b]$.

Acronymes

- RSS : Received Signal Strength (puissance du signal reçue).
- AOA : Angle-of-arrival (angle d'arrivée).
- TOA : Time-of-arrival (temps d'arrivée).
- TDOA : Time-difference-of-arrival (temps différentiel d'arrivée).
- FOA : Frequency-of-arrival (Fréquence d'arrivée).
- FDOA : Frequency-difference-of-arrival (Fréquence différentielle d'arrivée).
- UCT : Unité centrale de traitement.
- RSB : Rapport Signal à Bruit.
- MIF : Matrice d'information de Fisher.
- BCR : Borne de Cramer-Rao.
- MVD : Maximum de Vraisemblance Déterministe.
- MUSIC : Multiple Signal Characterization.
- AMLN : Approximate Maximum Likelihood Method.
- DPD : Direct Position Determination.
- LOST processing : Localization by Space-Time processing.
- EXIP : EXtended Invariance Principle.
- BE : Bande étroite.
- GMA : Global MUSIC Approach.
- produit TB : produit du temps de parcours de l'onde à travers le réseau par la largeur de bande de la source (ou la largeur de bande du système de réception si cette dernière est inférieure à la bande de la source).
- PO : projection oblique.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Préambule

Cette thèse a été proposée par THALES Communications et s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre cette société et le laboratoire des Systèmes et Applications des Technologies de l'Information et de l'Énergie (SATIE), placé sous la tutelle de l'École normale supérieure de Cachan.

Afin de rendre la lecture du document plus aisée, les travaux présents ici ne rendent pas compte des travaux de localisation de sources effectués en contrôle non destructif, on pourra pour cela consulter [BJFL09a, BJFL09b, BJFL10].

1.2 Cadre général

L'un des objectifs en traitement du signal consiste à estimer un ensemble de paramètres cachés dans un jeu d'observations. L'estimation paramétrique offre pour cela un cadre formel adapté que nous appliquerons ici largement au problème concerné par cette thèse, à savoir la localisation de sources radioélectriques dans le plan ou l'espace. Plus particulièrement nous nous positionnons dans le cadre du traitement d'antenne.

Le type d'applications visé par ces travaux concerne tous les systèmes de localisation par réseaux multicateurs qui fonctionnent sur écoute passive, c'est à dire sans *a priori* sur les signaux. On peut par exemple citer comme cadre d'application la localisation dans des contextes difficiles (urbains, montagneux ...) où le signal GPS est ainsi susceptible d'être bloqué.

Nous disposons d'un ensemble de réseaux de capteurs dont chaque élément enregistre les signaux incidents. La modélisation du signal reçu permet alors de construire une règle d'estimation des paramètres d'intérêt parmi lesquels on peut citer l'angle d'arrivée, le temps d'arrivée, la fréquence d'arrivée ... Les paramètres estimés par une seule station de base, constituée d'un réseau multicateur (station), ne suffisent généralement pas à la localisation dans le plan ou l'espace d'une source. C'est pour cela que le problème de géolocalisation est bien souvent traité à l'aide d'un ensemble de stations de base éloignées permettant d'augmenter la diversité des paramètres et de rendre possible la géolocalisation. Ces paramètres sont des intermédiaires à l'estimation de la position qui s'effectue de manière classique au sein d'une unité centrale de traitement (UCT) qui collectionne l'ensemble des paramètres estimés fournis par les stations de base selon le schéma de la figure 1.2.1. Pour ces raisons on qualifie parfois cette stratégie d'approche à deux

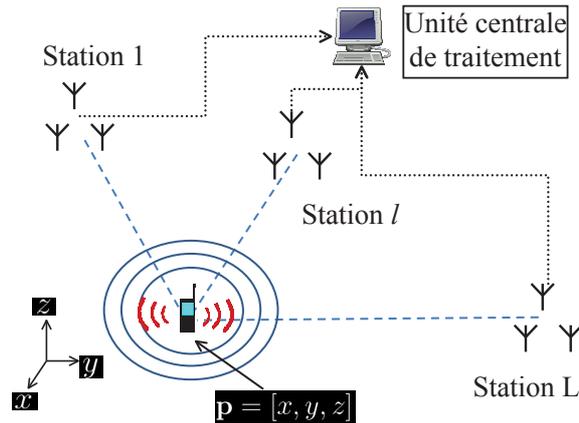


FIGURE 1.2.1 – Localisation d’une source radioélectrique à l’aide de L stations communiquant avec une unité centrale de traitement.

étapes [FL⁺08, AW09]. La géolocalisation est souvent traitée par un processus décentralisé, résultat de deux étapes successives, comme illustré dans la figure 1.2.2 :

1. Des paramètres intermédiaires sont estimés localement sur chaque station de base puis transmis à l’unité centrale de traitement.
2. A l’aide des paramètres intermédiaires transmis, la position des sources est estimée par l’unité centrale de traitement.

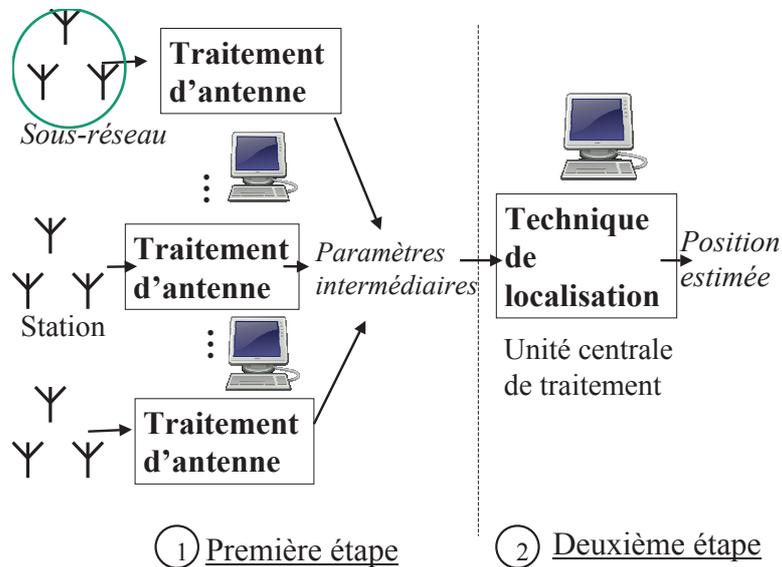


FIGURE 1.2.2 – Schéma de fonctionnement d’une approche décentralisée en deux étapes du problème de localisation.

Cette approche souffre de plusieurs limitations [WK83, AW09]. On peut notamment remarquer que puisqu’elle n’exploite pas toute l’information disponible, elle est nécessairement sous-optimale du point de vue de ses performances d’estimation. Elle n’exploite par exemple pas le fait que les signaux reçus par chacune des stations de base proviennent des mêmes

sources. Puisque les paramètres sont souvent estimés de manière locale sur chaque station, on se prive alors de l'exploitation du réseau de toutes les stations qui comporte un nombre plus important de capteurs. Ceci a pour effet de diminuer les performances d'estimation et les capacités d'identifiabilité du système [AW07] : c'est à dire le nombre maximal de sources distinguables. Enfin, remarquons que puisque les paramètres sont estimés localement par des processus décentralisés, il convient d'effectuer à l'UCT une étape d'association des paramètres. Cette dernière a pour but d'identifier parmi le flot de paramètres transmis les paramètres correspondant à chaque source.

Pour autant cette approche traditionnelle en deux étapes demeure encore largement étudiée et appliquée, très probablement pour ses facilités de mise en œuvre. En effet, la littérature est abondante pour les processus mis en jeu aussi bien dans la première étape que dans la seconde. Néanmoins, la demande sans cesse croissante des besoins en localisation nous pousse à envisager des solutions toujours plus performantes et nous incite à considérer le problème de localisation sous un autre angle.

1.3 Objectifs de la thèse

La sous-optimalité des approches conventionnelles en deux étapes est constatée depuis plusieurs décennies [WK83]. Déjà [Sch68, WK83] proposent des solutions optimales en considérant une seule étape dans le processus de localisation, c'est à dire qu'on suppose que le réseau de stations peut transmettre de manière synchronisée l'ensemble de ses signaux à l'UCT. La position est alors estimée directement à partir de signaux reçus et transférés à l'UCT, comme l'illustre la figure 1.3.1, et non pas à l'aide d'un ensemble de paramètres intermédiaires. De telles techniques étant complexes d'un point de vue opérationnel puisqu'elles nécessitent le transfert complet de tous les signaux reçus par les stations à l'unité centrale de traitement, des processus décentralisés, certes sous-optimaux mais plus aisés à mettre en œuvre ont d'abord vu le jour [WK85b, Wei81]. Ce n'est que récemment que les travaux d'Amar et Weiss [Wei04, AW05] ont remis au goût du jour la quête d'algorithmes de localisation en une étape en proposant une technique appelée Direct Position Determination (DPD). Le gain d'une telle technique par rapport à une approche traditionnelle en deux étapes a été mis en évidence dans [AW05]. Toutefois, dans le cas de signaux non blancs dans la bande, l'algorithme DPD s'avère souvent sous-optimal en termes de performances d'estimation, voire même inopérant. Nous avons pour objectif de proposer des algorithmes alternatifs susceptibles de fonctionner dans des contextes plus généraux en ayant toujours pour but d'améliorer les performances par rapport aux méthodes décentralisées classiques obéissant à un schéma de localisation en deux étapes.

En ce qui concerne l'étude des performances des approches en une seule étape, bien que certains travaux portent sur le cas de signaux gaussiens [WK83, KS04, AW05, EG07, AW09], à notre connaissance, le cas plus général où les signaux sont vus comme des inconnues déterministes du problème n'a jamais été traité. Cette thèse a pour but de contribuer également à combler ce manque. De même la comparaison des performances statistiques entre les approches centralisées et décentralisées en géolocalisation demeure un enjeu pour lequel peu de réponses sont disponibles dans la littérature [AW08b, AW09].

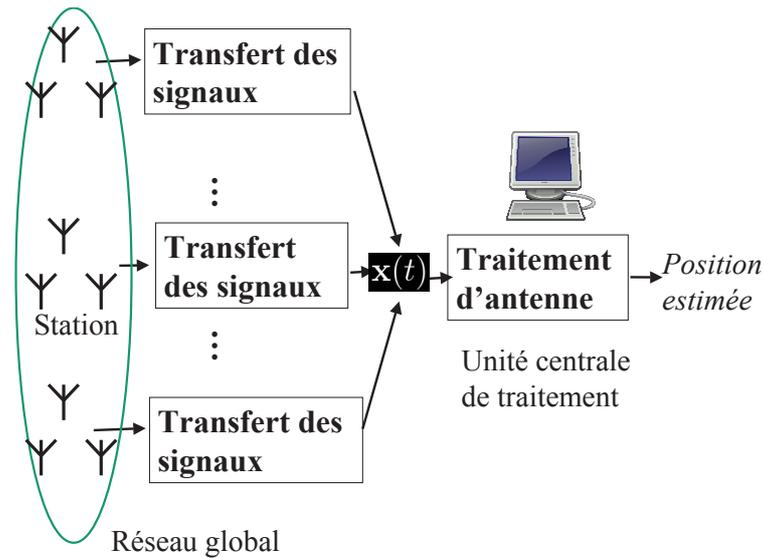


FIGURE 1.3.1 – Schéma de fonctionnement d'une approche centralisée en une étape du problème de localisation.

1.4 Contributions

Le travail réalisé au cours de la thèse s'organise autour de deux axes d'études qui sont le cas de signaux bande étroite sur l'ensemble du réseau de stations et le cas plus général de signaux large bande sur l'ensemble du réseau.

Bien que l'hypothèse de signaux bande étroite sur l'ensemble du réseau de stations apparaisse d'un intérêt pratique plus limité que le cas général, il est néanmoins d'un intérêt théorique certain puisqu'il permet déjà de mettre en évidence certains comportements généraux et de comprendre les mécanismes en jeu. Nous avons dans ce contexte fourni un travail à la fois algorithmique et de calcul de performances. Nous avons caractérisé la borne de Cramer-Rao (BCR) déterministe du problème de géolocalisation dans le contexte de signaux bande étroite qui caractérise les performances ultimes d'une approche centralisée. Nous avons également calculé la BCR d'une approche décentralisée correspondant à une triangulation et montré dans le cas d'une source que ces bornes étaient égales. En revanche pour le cas de plusieurs sources il apparaît que la borne correspondant à l'approche centralisée est inférieure à celle d'une approche décentralisée. Cela suggère l'intérêt d'une approche centralisée en une étape dans un contexte multisource. Nous avons proposé un algorithme en une seule étape qui permet d'atteindre la borne correspondante et qui se trouve être un cas particulier de l'algorithme DPD lorsque tous les signaux sont bande étroite sur l'ensemble du réseau [BFL10, BFGL12]. Nous montrons également qu'une approche décentralisée en deux étapes découle naturellement d'une approche centralisée en ce qu'elle exploite un modèle qui se déduit du modèle original par une reparamétrisation [BFL11c]. Le principe EXIP [SS89] nous permet alors d'établir une condition d'équivalence asymptotique entre un algorithme en une étape et un algorithme en deux étapes. Nous constatons alors qu'une approche conventionnelle décentralisée en deux étapes ne satisfait pas le principe de l'EXIP. Toutefois, l'EXIP ne constituant qu'une condition suffisante d'équivalence asymptotique, on constate que pour le cas d'une seule source, une stratégie

en une seule étape est équivalente à une stratégie en deux étapes. Ce résultat n'est guère surprenant puisque nous avons démontré que la BCR centralisée et la BCR décentralisée sont égales pour une source. Dans un contexte de sources multiples, nous mettons en avant le fait que les approches centralisées sont toujours meilleures qu'une approche décentralisée en deux étapes.

Dans le cas de signaux large bande sur l'ensemble du réseau, nous montrons l'intérêt d'une approche spatio-temporelle. Celle-ci nous permet de proposer une approche cohérente du problème large bande, contrairement au DPD. Nous proposons ainsi un algorithme appelé LOST [BFL11e, BFL11a]. Nous montrons son intérêt par rapport au DPD : il s'adapte au spectre des sources et remplace un test de détection nécessaire dans les canaux du banc de filtres par une estimation du nombre de valeurs propres principales associées à la matrice de covariance spatio-temporelle. On constate que dans certains cas où les spectres des sources ne sont pas blancs, l'algorithme LOST s'adapte naturellement au spectre des sources et continue d'offrir des performances intéressantes quand le DPD se dégrade voire même échoue. Nous proposons une amélioration de l'algorithme LOST qui exploite plus finement la structure du sous-espace signal. Nous avons également calculé la BCR déterministe [BFL11b] du problème de localisation large bande ainsi que l'algorithme du maximum de vraisemblance pour le cas de signaux déterministes jusqu'ici non traités par la communauté. Ces outils nous permettent de mettre en avant le gain rendu possible par une approche centralisée en une seule étape et d'étudier l'optimalité des méthodes disponibles. Enfin, nous proposons un algorithme adapté au cas de multitrajets qui permet une association des paramètres de localisation par le biais de l'exploitation du modèle paramétrique du signal [FBL09, FBL10].

1.5 Organisation du document

Le deuxième chapitre propose un état de l'art du problème. Après quelques rappels sur les méthodes à haute résolution [BLF09], nous abordons l'état de l'art spécifique à la localisation et positionnons le problème, à savoir la localisation de sources radioélectriques en contexte passif, sans *a priori* sur le signal.

Le troisième chapitre traite le cas de signaux bande étroite sur le réseau de stations. Dans ce contexte, nous exploitons le principe d'invariance étendu (EXIP) [SS89] afin de caractériser les liens entre les approches centralisées et décentralisées et comparons leurs performances. Nous établissons les bornes de Cramer-Rao des deux approches et nous mettons en lumière le gain théorique d'une approche en une étape en contexte multisource.

Le quatrième chapitre traite le cas général de signaux large bande. Nous proposons d'abord une extension de l'algorithme proposé dans le cas bande étroite, puis nous montrons l'intérêt d'utiliser une observation spatio-temporelle pour le problème considéré. Nous proposons alors un algorithme spatio-temporel que nous nommons LOST et montrons sa pertinence par rapport à l'état de l'art. La borne de Cramer-Rao déterministe du problème large bande est calculée et nous exhibons également l'algorithme du maximum de vraisemblance déterministe permettant de quantifier les performances optimales et d'offrir des éléments de comparaison avec l'état de l'art. Nous proposons enfin un algorithme opérationnel dans un contexte de multitrajets.

Le cinquième chapitre conclut le travail proposé ici et offre quelques pistes de réflexion pour de futurs travaux.

1.6 Valorisation

Les travaux effectués au cours de cette thèse ont donné lieu aux dépôts de brevets et à la publication des articles suivants :

Revues internationales

- [BJFL10] J. Bosse, P-Y. Joubert, A. Ferréol, and P. Larzabal. “High resolution system for buried defaults location : multifrequency eddy current imager and associated subspace algorithm”. *NDT&E International*, vol.43, p.250-257, 2010.
- [BFGL12] J. Bosse, A. Ferréol, C. Germond and P. Larzabal, “Passive geolocation of radio transmitters : algorithm and performance in narrowband context,” *Signal Processing*, vol.92, p.841-862, Avril 2012.
- [BFL12a] J. Bosse, A. Ferréol, and P. Larzabal, “A coherent spatio-temporal array processing for passive localization of radio transmitters” *soumis à IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012.
- [BFL12b] J.Bosse, A.Ferréol and P. Larzabal, “One step localization strategies versus two steps localization strategies”, *en préparation pour IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012.
- [BFL12c] J.Bosse, A.Ferréol and P. Larzabal, “One-step processing for passive localization of radio-transmitters : a maximum likelihood approach”, *en préparation pour IEEE Signal processing letters*, 2012.

Revues nationales

- [BFL09a] J. Bosse, P. Larzabal et A. Ferréol, “Apport des méthodes haute résolution à l’imagerie de champ et la localisation de sources”, *Instrumentation, Mesure, Métrologie*, vol.9, p.9-44, décembre 2009.
- [BJFL09a] J. Bosse, P-Y. Joubert, A. Ferréol, et P. Larzabal. “Localisation de sources en imagerie par courants de Foucault : application à l’estimation de défauts enfouis dans des structures métalliques”. *Instrumentation, Mesure, Métrologie*, vol.9, p.213-232, décembre 2009.
- [FBL09] A. Ferréol, J. Bosse, et P. Larzabal. “Géolocalisation d’émetteurs par des techniques multicapteurs.” , *Instrumentation, Mesures, Métrologie*, vol. 9, p.45-64, décembre 2009.

Articles de congrès

- [BJFL09b] J. Bosse, P-Y. Joubert, A. Ferréol, et P. Larzabal. “Système haute résolution de localisation de défauts enfouis par courants de Foucault : imageur multi-fréquence et algorithmes à sous-espaces”. *22ème colloque du groupement d’Etudes du Traitement du signal et des Images (GRETSI)*, Dijon, 2009.
- [BFL10a] J. Bosse, A. Ferréol and P. Larzabal, “A multiple narrowband emitters Geolocation algorithm based on AOA estimations”, *18th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Aalborg, p.676-680, 2010.
- [FBL10] A. Ferréol, J. Bosse and P. Larzabal, “A low-cost AOA-TDOA approach for blind geolocation in multi-paths context”, *18th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, Aalborg, p.686-690, 2010.

- [BFL11a] J. Bosse, A. Ferréol and P. Larzabal, “A Space-time array processing for blind geolocalization of radio-transmitters”, *IEEE international conference on acoustics speech and signal processing (ICASSP)*, Prague 2011.
- [BFL11b] J. Bosse, A. Ferréol and P. Larzabal, “Performance analysis of passive localization strategies : direct one step approach versus two steps approach”, *IEEE workshop on statistical signal processing (SSP)*, Nice, p.705-708, 2011.
- [BFL11c] J. Bosse, A. Ferréol and P. Larzabal, “New trends in passive localization by multiarray network”, *19th European Signal Processing Conference (EU-SIPCO)*, Barcelone, 2011.
- [BFL11d] J. Bosse, A. Ferréol et P. Larzabal, “Localisation passive de sources : une approche spatio-temporelle”, *23ème colloque du groupement d’études en traitement du signal et des images (GRETSI)*, Bordeaux, 2011.
- [BFL11e] J. Bosse, A. Ferréol and P. Larzabal, “A glance on terrestrial localization”, *4st IEEE Conference on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP)*, San Juan, 2011.

Brevets

- [BFL10c] Jonathan Bosse, Anne Ferréol et Pascal Larzabal, “Procédé de géo-localisation multi-émetteurs par traitement spatio-temporel”, n° dépôt France FR2010.03580, septembre 2010 (étendu à l’international en novembre 2011).

Brevet 2010 Jonathan Bosse, Anne Ferréol et Pascal Larzabal, brevet classifié par la DGA.

Séminaires

- J.Bosse, “Radiolocalisation d’émetteurs à l’aide de stations multicateurs séparées : stratégies, algorithmes et performances”, Journée GDR ISIS sur le thème “Avancées en traitement du signal et en fusion pour la localisation”, Juin 2010.
- J.Bosse, “Geographical positioning of radio transmitters : strategies, algorithms and performances”, Séminaire invité, Delft University of Technology, 13 Février 2012.

Chapitre 2

État de l’art

Les problématiques de localisation ont toujours retenu une attention particulière dans la communauté du traitement du signal. Les retombées sont en effet importantes et concernent un vaste champ d’applications aussi bien civiles que militaires (sécurité, radar, communications, services de localisation, radio-goniométrie, sonar ...).

Dans un premier temps nous exposerons un état de l’art général des techniques de localisation. Nous effectuerons ensuite quelques rappels sur une hypothèse fondamentale en traitement d’antenne : l’hypothèse bande étroite. Le problème plus spécifique concerné par la thèse sera ensuite exposé. Puisque les techniques de localisation s’appuient en partie sur des méthodes issues du traitement d’antenne et que la thèse elle-même s’appuie largement sur les travaux issus de ce domaine, nous présenterons ensuite quelques méthodes haute résolution ainsi que quelques résultats généraux de l’analyse de performances. Ces rappels ont pour objectif de familiariser le lecteur avec les méthodes et concepts utilisés au cours de ce document. Enfin, nous ferons un état de l’art plus détaillé du problème de la localisation qui fait l’objet de cette thèse et présenterons les réponses déjà disponibles dans la littérature.

2.1 État de l’art en géolocalisation

Nous nous concentrons ici sur la problématique de géolocalisation : c’est à dire l’estimation de la position dans le plan ou l’espace d’un ensemble de sources radio-émettrices à l’aide de réseaux multicapteurs (ou stations de base) comme illustré par la figure 1.2.1. On distingue alors les systèmes actifs (ou coopératifs) des systèmes passifs (ou non coopératifs). Les systèmes actifs font référence à des applications de localisation où une cible désire être localisée et se montre donc “coopérante”. Les systèmes passifs concernent quant à eux plutôt les contextes où la source à localiser ne coopère pas.

De manière générale, les techniques de localisation sont basées sur un mode de fonctionnement décentralisé dit à 2 étapes [AW09] illustré par la figure 1.2.2 :

1. Une estimée $\hat{\mathbf{m}}$ des paramètres intermédiaires \mathbf{m} (fonctions de la position \mathbf{p}) est obtenue de manière décentralisée, par la minimisation d’une certaine règle d’estimation $J(\cdot)$ qui dépend du signal bruité observé \mathbf{x} :

$$\hat{\mathbf{m}} = \underset{\mathbf{m}}{\operatorname{arg\,min}} J(\mathbf{x}, \mathbf{m}(\mathbf{p})). \quad (2.1.1)$$

2. La position $\hat{\mathbf{p}}$ est ensuite estimée par une technique de localisation, qui peut par

exemple être une approche par moindres carrés (MC) pondérés [Tor84] :

$$\hat{\mathbf{p}} = \underset{\mathbf{p}}{\operatorname{arg\,min}} (\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}(\mathbf{p}))^H \mathbf{W} (\hat{\mathbf{m}} - \mathbf{m}(\mathbf{p})), \quad (2.1.2)$$

où \mathbf{W} représente la matrice de poids et $(\cdot)^H$ désigne la transposée conjuguée.

Nous allons maintenant nous intéresser aux différents types de paramètres intermédiaires couramment rencontrés, reflète d'un contexte opérationnel ou d'une technologie. Nous nous intéresserons ensuite aux algorithmes de localisation proprement dits, c'est-à-dire aux méthodes employées dans la seconde étape d'un processus classique de localisation. Nous envisagerons ensuite les principales sources d'erreurs et conclurons par quelques développements et tendances récentes des problématiques de géolocalisation.

2.1.1 Les paramètres intermédiaires de localisation

Parmi les paramètres intermédiaires de localisation, on peut citer :

La puissance du signal reçu (RSS pour Received Signal Strength)

La localisation par estimation de la puissance du signal reçue est très répandue [FST68], notamment dans les réseaux sans fils. Elle se base sur une relation entre la puissance reçue et la position de la source, qui peut être par exemple [FL⁺08] :

$$P_l = P_0 - 10\alpha \log_{10}(\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_l\|^2), \quad (2.1.3)$$

où P_l est la puissance mesurée à la station l et P_0 et α des constantes du problème. \mathbf{p} et \mathbf{p}_l désignent respectivement la position de la source et de la station l . Les techniques de localisation par RSS sont généralement robustes et peu chères mais elles sont souvent d'une précision limitée [FL⁺08]. Les stations sont ici généralement mono-capteurs.

L'angle d'arrivée (AOA pour Angle-Of-Arrival)

Le problème d'estimation de la direction d'arrivée à un réseau de capteurs a été largement traité dans la littérature [VT02, TF⁺09]. Les systèmes de localisation basés sur l'estimation des AOAs sont relativement complexes et coûteux. Les systèmes dédiés sont en effet par nature multicapteurs et requièrent une calibration régulière de ceux-ci. Le principe de localisation par AOA est aussi couramment appelé triangulation. La direction d'arrivée dans le plan est reliée géométriquement à la position par l'équation suivante :

$$\theta_l = \tan^{-1} \left(\frac{y - y_l}{x - x_l} \right), \quad (2.1.4)$$

où $\mathbf{p} = [x, y]^T$ et $\mathbf{p}_l = [x_l, y_l]^T$ sont respectivement les positions de la source et de la station l . La position est ensuite estimée par intersection des directions d'arrivée sur plusieurs stations comme l'illustre la figure 2.1.1a. Il suffit de deux stations pour localiser une source dans le plan. Toutefois, on utilise souvent au moins 3 stations lorsque cela est possible afin de se prémunir éventuellement contre des problèmes d'association des paramètres qui sont évoqués au paragraphe suivant.

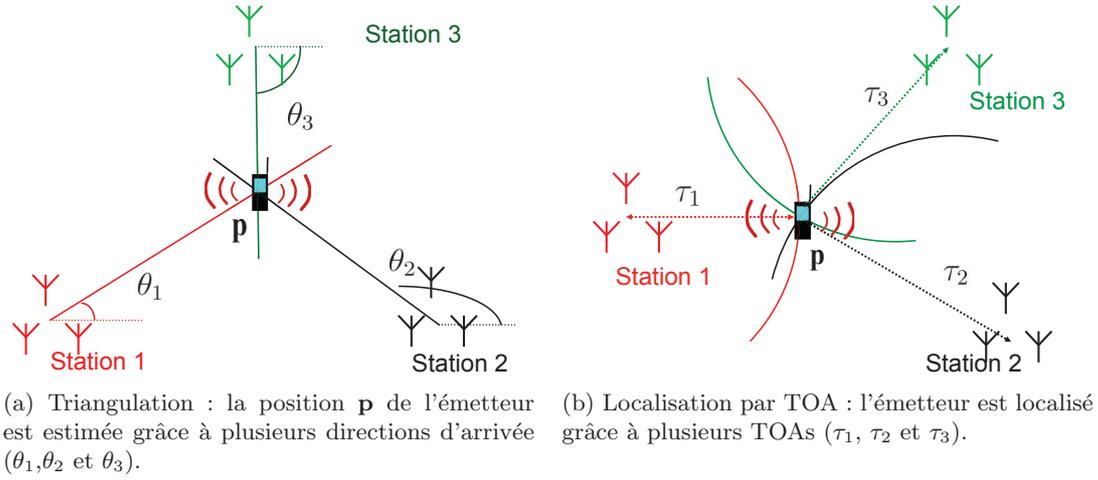


FIGURE 2.1.1 – Quelques systèmes de localisation.

Le temps d'arrivée (TOA pour Time-of-arrival) ou le temps différentiel d'arrivée (TDOA pour Time-difference-of-arrival)

La mesure du temps d'arrivée nous permet d'obtenir une information sur la distance à laquelle est situé l'émetteur. Ceci requiert une synchronisation précise entre l'émetteur et les stations de base. Une séquence de référence doit aussi être incluse dans le signal. Cette technique est donc plutôt utilisée dans un contexte actif. La position de l'émetteur est estimée par l'intersection des cercles de rayon $d_l = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_l\|$ satisfaisant l'équation

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_l\| = c\tau_l, \quad (2.1.5)$$

où c est la célérité des ondes et τ_l le TOA mesuré sur la l -ième station, comme l'illustre la figure 2.1.1b. La mesure du TDOA ne requiert quant à elle qu'une synchronisation entre les stations. La position de l'émetteur est alors située à l'intersection d'hyperboles entre les stations chacune satisfaisant l'équation

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_l\| - \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_{l'}\| = c\delta\tau_{ll'}, \quad (2.1.6)$$

entre les stations l et l' par exemple, où $\delta\tau_{ll'} = \tau_l - \tau_{l'}$ est le TDOA entre les stations l et l' . Là encore les stations sont généralement monocapteurs. Le TOA et le TDOA sont souvent estimés par des corrélations temporelles entre les observations reçues sur les stations. Remarquons que plus la bande des signaux est large plus les estimateurs correspondants sont performants [DLG⁺09]. C'est pourquoi cette technique est très employée lors des récents développements des systèmes ultra large bande.

Puisque l'intersection des hyperboles et des cercles entre eux est susceptible de produire deux solutions géométriques, on utilise souvent les paramètres d'au moins 3 stations.

La fréquence d'arrivée (FOA pour Frequency-of-arrival) ou la fréquence différentielle d'arrivée (FDOA pour Frequency-difference-of-arrival)

Lorsqu'une source ou une station se déplace elle induit un décalage fréquentiel en vertu de l'effet Doppler. La mesure de ce décalage fréquentiel permet alors de remonter à la position et à la vitesse de la source. La mesure du FDOA ne nécessite plus la connaissance de la fréquence centrale des signaux émis [Wax82, Ste93].

Le choix des paramètres de localisation dépend essentiellement du contexte et des ressources matérielles disponibles.

2.1.2 Techniques de localisation

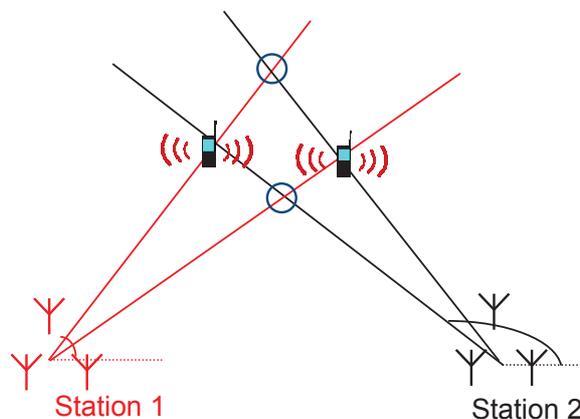


FIGURE 2.1.2 – Lorsque les paramètres de localisation sont transmis il faut pouvoir trier les paramètres selon leur provenance et dire quelle source ils caractérisent : en présence de deux sources, chaque station estime deux directions d’arrivées, ce qui conduit à 4 positions possibles des sources.

Une fois les paramètres intermédiaires estimés, la position des émetteurs doit en être déduite. Notons que dans un contexte multisource, une étape préliminaire d’association des paramètres [PDBSWJ92] est souvent nécessaire. Cette dernière vise à relier les paramètres estimés avec la source correspondante. Considérons par exemple le cas de deux stations et de deux sources que l’on souhaite localiser par triangulation : l’ensemble des paramètres estimés conduit à quatre positions possibles des sources, comme l’illustre la figure 2.1.2. Pour lever cette ambiguïté, on peut avoir recours à une troisième station : seules les véritables positions des sources sont alors situées à l’intersection des trois directions d’arrivées. Toutefois, si cette solution fonctionne pour des techniques géométriques de localisation, d’autres techniques, comme les moindres carrés par exemple, exigent une association préalable des données avec la source correspondante.

La classification des techniques de localisation suivante peut être adoptée [FL⁺08] :

Les techniques géométriques

La plupart des techniques supposent que le contexte est celui de signaux en trajets directs, si bien que les paramètres intermédiaires sont géométriquement liés avec les positions des sources. Les techniques géométriques désignent les travaux qui visent à résoudre directement les équations non-linéaires correspondantes [CH94] . Si une solution explicite ne peut être trouvée, des méthodes itératives peuvent être utilisées à la place [Foy76].

Les techniques statistiques

En pratique, les signaux sont bruités et les paramètres estimés possèdent donc une certaine variance d’autant plus grande que le scénario est critique. Pour l’exemple d’une localisation par estimation de la direction d’arrivée avec 3 stations, illustré par la figure 2.1.3, les

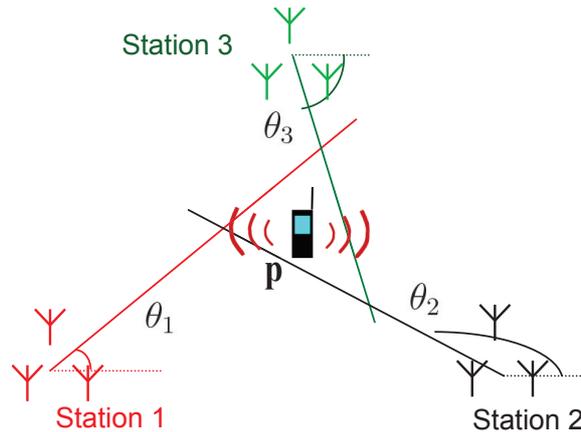


FIGURE 2.1.3 – Localisation par triangulation : en présence de bruit les directions d'arrivée ne s'intersectent pas au même endroit, il faut alors trouver une estimation de la position qui rend le mieux compte de la contrainte d'intersection unique des directions d'arrivée.

directions d'arrivée ne s'intersectent pas au même point, il est alors nécessaire d'estimer au mieux la position qui paraît la plus plausible au vu des directions estimées. Les approches statistiques tirent parti de la distribution statistique des paramètres mesurés. Si une information *a priori* est disponible, alors le cadre Bayésien peut être adopté [DMO07], sinon une approche par maximum de vraisemblance est préférée [CYCHC06, Tor84]. De telles techniques sont également appelées méthodes statistiques paramétriques. Les méthodes statistiques non paramétriques désignent plutôt couramment un algorithme de moindres carrés pondérés, principalement utilisé en absence de trajets directs [GCWI08].

Fingerprinting

L'accroissement constant des capacités de stockage des données a permis le développement des méthodes dites de Fingerprinting. Le principe tient en deux étapes : tout d'abord des signaux de référence (Fingerprints), connus, sont envoyés, et leurs réponses sont ensuite enregistrées. Ensuite, les mesures acquises sont comparées à ces enregistrements de référence et la position en est déduite. La localisation est couramment obtenue par l'intermédiaire d'algorithmes des *k*-moyens [PPZY08] ou par des réseaux de neurones [NDA06]. La performance des méthodes de Fingerprinting est directement liée au choix approprié d'un modèle statistique et d'une base de données [FL⁺08].

2.1.3 Principales sources d'erreurs des algorithmes de localisation

A l'exception des techniques de Fingerprinting, les méthodes précédentes supposent que tous les trajets sont directs, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas réfléchis par des obstacles quelconques. Or, dans de nombreux contextes applicatifs difficiles, comme la localisation en milieu urbain ou à l'intérieur d'un bâtiment, cette condition n'est pas vérifiée, si bien que les trajets réfléchis et les multitrajets constituent une source d'erreur majeure. Les méthodes de Fingerprinting sont moins affectées par ces phénomènes et furent même initialement développées pour fonctionner dans de tels contextes.

Multitrajets

Il arrive parfois que les stations de base reçoivent non seulement le signal émis en trajet direct mais également un ensemble de signaux réfléchis, issus de la même source. On parle alors de multitrajets. Ils constituent une cause importante de dégradation des systèmes de localisation [KBR97]. L'estimation de l'AOA par des techniques performantes demeure encore possible dans ce contexte [Sch86, Cad88], bien que les performances s'en trouvent évidemment dégradées. Les techniques basées sur la mesure du RSS apparaissent comme moins affectées par les multitrajets [FL⁺08].

Trajets réfléchis

Dans certains contextes, il arrive que les signaux soient tous ou en partie réfléchis, ce qui est susceptible de remettre en cause le fonctionnement des algorithmes de localisation. On peut alors viser à identifier les paramètres issus de trajets réfléchis et achever le processus de localisation avec les paramètres restants [CTSC06]. Une façon courante de distinguer les paramètres issus de trajets réfléchis est d'exploiter par exemple le fait que leur variance soit plus importante [WH96]. Une pondération adéquate des données peut également être trouvée [VCJY04] pour localiser un émetteur en présence de trajets réfléchis. Les travaux [AJCJ02, MYJ07] proposent une approche paramétrique en introduisant pour cela un modèle avec une seule réflexion.

2.1.4 Avancées récentes en géolocalisation

Parmi les activités actuelles en localisation, on peut identifier [FL⁺08] :

Algorithmes Coopératifs (Centralisés/Distribués)

Dans des algorithmes centralisés, tous les paramètres intermédiaires (AOA, TDOA ...) sont transmis à l'unité centrale de traitement qui effectue l'algorithme de localisation. Des solutions par maximum de vraisemblance sont souvent utilisées. Dans le but de réduire leur complexité et leur sensibilité aux erreurs de modèles, une méthode basée sur des projections sur des ensembles convexes a récemment été proposée (POCS pour projections onto convex sets) [BH06].

En revanche, dans des processus distribués, la charge de calcul tend à être réduite : la position est estimée et transmise de proche en proche [LR03]. Pour cela des propagations de croyances peuvent être utilisées [ZD07, PPF11].

Hybridation/Fusion de données

Des systèmes flexibles et à bas coût peuvent tirer parti de l'hybridation qui consiste à fusionner les informations et les avantages disponibles dans plusieurs types de paramètres. Pour cela les méthodes Bayésiennes offrent des solutions adaptées [FL⁺08]. Dans des scénarios multitrajets, l'hybridation, comme illustrée à la figure 2.1.4, constitue une solution intéressante [FL⁺08]. Exploiter les avantages de différents types de technologies est parfois très utile en vue de la conception de systèmes robustes et performants. Par exemple, un système de navigation inertiel est parfois couplé à un GPS pour des contextes urbains complexes où le signal GPS est susceptible d'être bloqué.

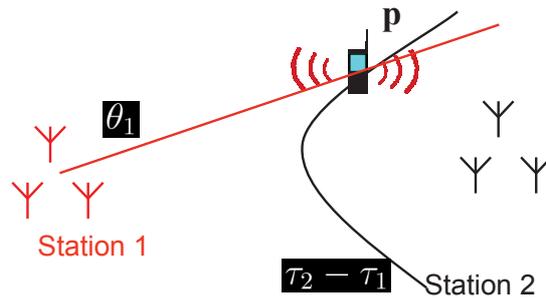


FIGURE 2.1.4 – Schéma de localisation hybride AOA-TDOA : la position de l'émetteur se situe à l'intersection d'une direction d'arrivée θ_1 et d'une hyperbole liée au TDOA $\tau_{12} = \tau_2 - \tau_1$.

Systèmes augmentés/Radar MIMO/Capteurs vectoriels

Afin d'accroître les performances de localisation, une manière d'opérer consiste à exploiter des capteurs ou des systèmes plus perfectionnés permettant de disposer d'une information plus riche. Par exemple, en sismique, des capteurs vectoriels permettent d'avoir accès à des paramètres supplémentaires afin de réaliser une localisation plus fine [IMM⁺11]. Pour les systèmes de navigation par satellite, les systèmes augmentés font référence à une amélioration des techniques standard par le déploiement d'un réseau de satellites plus adéquat [FL⁺08]. Les radars MIMO (Multiple Input Multiple Output) possèdent également des propriétés intéressantes en vue de la localisation de part leurs capacités de discrimination de l'information accrues [FL⁺08, LS09].

Calcul de performances

La complexité croissante des systèmes de localisation pose la question de leur optimalité et de leurs limites théoriques. L'analyse des performances théoriques apparaît donc comme un outil intéressant notamment en vue de l'optimisation du design de systèmes de localisation. L'étude théorique des performances des estimateurs employés a fait l'objet de nombreux travaux [VT02] et les bornes minimales sur l'erreur quadratique moyenne des systèmes de localisation font elles-mêmes l'objet d'études récentes [DLG⁺09].

Approches en une étape

Bien que le schéma classique en deux étapes des systèmes de localisation soit assez simple d'un point de vue opérationnel, il est sous-optimal en termes de performances d'estimation [WK83, AW09] et d'identifiabilité [AW07], c'est à dire en termes de nombre de sources discernables. Ainsi, une approche optimale tirant parti d'une paramétrisation du problème qui dépend directement de la position des sources et non de paramètres intermédiaires, consiste à estimer la position directement à partir de plusieurs échantillons

de l'ensemble des signaux reçus par toutes les stations \mathbf{x} :

$$\hat{\mathbf{p}} = \underset{\mathbf{p}}{\operatorname{arg\,min}} J_1(\mathbf{x}, \mathbf{m}(\mathbf{p})). \quad (2.1.7)$$

Une telle approche ne requiert pas d'étape d'association des paramètres. Bien qu'envisagée depuis de nombreuses années [Sch68, WK83], cette approche fut d'abord jugée trop complexe d'un point de vue opérationnel et ce n'est que récemment qu'elle a de nouveau fait l'objet de nombreux travaux [Wei04, AW05, AW09, CFPFR09, Wei11]. Une telle approche nécessite en effet que tous les signaux soient transmis à l'unité centrale de traitement. L'évaluation de leurs performances théoriques demeure un enjeu important au vu du dispositif expérimental nécessaire.

Un état de l'art plus détaillé de ces approches qui s'inscrivent au cœur de la présente thèse est exposé au paragraphe 2.5.

2.2 L'hypothèse bande étroite en traitement d'antenne

Nous effectuons ici un rappel de l'hypothèse bande étroite et expliquons son influence sur le modèle des signaux reçus.

Considérons un signal radioélectrique dont l'expression est la suivante [OVSN93] :

$$s(t) = \alpha(t)e^{j\phi(t)}e^{j2\pi(f_0+f_c)t}, \quad (2.2.1)$$

où f_0 est la fréquence porteuse du signal, f_c est la fréquence centrale du signal transmis et $\alpha(t)$ et $\phi(t)$ respectivement l'amplitude et la phase du signal transmis. Soit un réseau possédant N éléments, l'expression du signal reçu par le n -ième élément est

$$s(t - \tau_n) = \alpha(t - \tau_n)e^{j\phi(t - \tau_n)}e^{j2\pi(f_0+f_c)t}e^{-j2\pi(f_0+f_c)\tau_n}, \quad (2.2.2)$$

où τ_n est le temps mis par l'onde pour se rendre du centre du réseau au n -ième élément.

Si la largeur de bande B du signal $s(t)$ est petite devant l'inverse de τ_n , autrement dit si l'amplitude et la phase vérifient respectivement $\alpha(t - \tau_n) \approx \alpha(t)$ et $\phi(t - \tau_n) \approx \phi(t)$, alors [OVSN93] :

$$s(t - \tau_n) \approx s(t)e^{-j2\pi(f_0+f_c)\tau_n}. \quad (2.2.3)$$

Si la relation (2.2.3) est vérifiée pour tous les éléments du réseau, on parle alors de signal bande étroite sur le réseau. On a alors :

$$\Delta\tau \times B \ll 1, \quad (2.2.4)$$

où $\Delta\tau = \max_{n,n'} |\tau_n - \tau_{n'}|$ est le temps de parcours de l'onde à travers le réseau.

On appelle ici produit temps-bande (TB), la quantité $\Delta\tau \times B$. Ainsi, lorsque le produit TB est faible on se trouve dans un contexte de signaux bande étroite.

Lorsque l'hypothèse bande étroite (2.2.3) n'est plus vérifiée, c'est-à-dire lorsque le produit TB (2.2.4) est grand devant 1, on parle de signaux large bande sur le réseau. On remarque que dans ce cas l'effet du retard ne peut plus être assimilé à un simple déphasage comme dans (2.2.3). Comme nous le verrons par la suite, le modèle de réception du signal n'est plus linéaire par rapport aux signaux et il faut alors envisager d'autres traitements.

- De manière classique en traitement d'antenne pour la goniométrie, le réseau est

constitué d'une seule antenne (ou station), indicée par l , constituée d'un réseau multicapteur à N_l capteurs. On définit alors le produit TB :

$$\max_n |\delta_{n,l}(\theta_l(\mathbf{p}))| B, \quad (2.2.5)$$

où $\delta_{n,l}(\theta_l(\mathbf{p}))$ est le temps de parcours de l'onde entre le capteur n et le centre de phase de la station, fonction de l'angle d'arrivée sur la station θ_l lui-même fonction de la position de la source \mathbf{p} . Lorsque le produit TB est faible alors les signaux sont bande étroite sur l'antenne, on a alors selon (2.2.3), l'expression du signal reçu par le n -ième capteur suivante :

$$s(t - \delta_{n,l}(\theta_l(\mathbf{p}))) \approx s(t) e^{-j2\pi f_0 \delta_{n,l}(\theta_l(\mathbf{p}))}, \quad (2.2.6)$$

en négligeant le résidu de porteuse f_c devant f_0 . Le signal reçu par l'antenne est noté

$$\mathbf{x}_l(t) = \begin{bmatrix} x_{1,l}(t) & \dots & x_{N_l,l}(t) \end{bmatrix}^T, \quad (2.2.7)$$

où $x_{n,l}(t)$ est le signal reçu par le capteur n de l'antenne. Dans le cas d'une station possédant un gain unitaire :

$$x_{n,l}(t) = s_q(t - \delta_{n,l}(\theta_l(\mathbf{p}))) + n_{n,l}(t), \quad (2.2.8)$$

où $n_{n,l}(t)$ est le bruit du capteur n . En remplaçant (2.2.6) dans (2.2.8) puis dans (2.2.7), on obtient alors dans le cas de signaux bande étroite :

$$\mathbf{x}_l(t) = \mathbf{a}_l(\theta_l(\mathbf{p}))s(t) + \mathbf{n}_l(t), \quad (2.2.9)$$

où

$$\mathbf{a}_l(\theta_l(\mathbf{p})) = \begin{bmatrix} e^{-j2\pi f_0 \delta_{1,l}(\theta_l(\mathbf{p}))} & \dots & e^{-j2\pi f_0 \delta_{N_l,l}(\theta_l(\mathbf{p}))} \end{bmatrix}^T, \quad (2.2.10)$$

est la réponse du réseau à une source incidente en \mathbf{p} pour une antenne à gain unitaire et sans couplage électromagnétique entre les capteurs et

$$\mathbf{n}_l(t) = \begin{bmatrix} n_{1,l}(t) & \dots & n_{N_l,l}(t) \end{bmatrix}^T, \quad (2.2.11)$$

est le vecteur bruit de l'antenne. Le front d'onde incident à l'antenne est supposé plan. Nous avons $\delta_{n,l}(\theta_l(\mathbf{p})) = \mathbf{k}^T(\theta_l(\mathbf{p}))\mathbf{d}_{n,l}$ où $\mathbf{k}(\theta_l(\mathbf{p}))$ est le vecteur directeur de l'onde et $\mathbf{d}_{n,l}$ les coordonnées du n -ième capteur de la l -ième station. En 2D, on écrit $\mathbf{k}(\theta_l(\mathbf{p})) = -\frac{2\pi}{\lambda} \begin{bmatrix} \cos(\theta_l(\mathbf{p})) & \sin(\theta_l(\mathbf{p})) \end{bmatrix}^T$ où $\lambda = \frac{c}{f_0}$ est la longueur d'onde et c la célérité de l'onde, comme illustré par la figure 2.2.1. Puisque dans le cas d'une hypothèse de champ lointain nous considérons que l'onde reçue par l'antenne est plane, le seul paramètre estimable localement est l'angle d'arrivée θ_l , qui ne permet pas à lui seul de retrouver la position. Ceci qui justifie alors l'emploi d'un système multistation pour l'estimation des coordonnées de la source.

L'hypothèse bande étroite sur une antenne est vérifiée pour de nombreuses applications en radiogoniométrie. Nous considérerons dans cette thèse qu'elle est toujours vérifiée pour chaque station.

- Dans le problème traité par cette thèse nous considérons un réseau constitué de L antennes (ou stations) illustré par la figure 2.2.2. Nous définissons alors, pour une

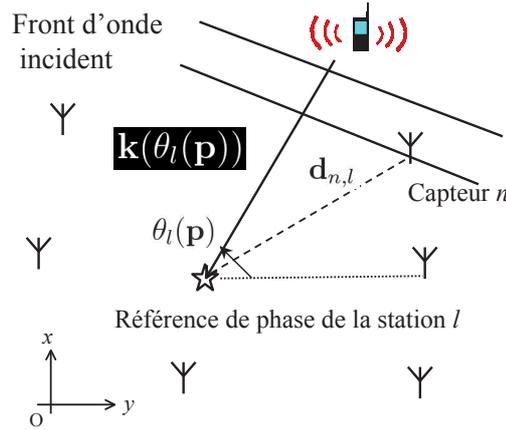


FIGURE 2.2.1 – La durée $\delta_{n,l}(\mathbf{p}) = \mathbf{k}^T(\mathbf{p})\mathbf{d}_{n,l}$ du trajet de l'onde entre le capteur n de la station l et la référence de phase de la station dépend de l'incidence de l'onde $\theta_l(\mathbf{p})$ elle-même fonction de la position de la source \mathbf{p} .

source, le produit TB par la quantité suivante :

$$\Delta\tau \times B, \quad (2.2.12)$$

où $\Delta\tau = \max_{l,l'} |\tau_l(\mathbf{p}) - \tau_{l'}(\mathbf{p})|$, $\tau_l(\mathbf{p})$ étant le temps de parcours de l'onde entre la station l et la première station, prise pour référence de manière arbitraire. Le temps de parcours du centre de la station à chacun des capteurs qui la composent est ici négligé devant le temps de parcours entre les stations dans l'expression de $\Delta\tau$. De manière générale, nous considérerons dans cette thèse que les signaux reçus sont toujours bande étroite pour les stations. Ainsi, le signal reçu par le n -ième capteur de la station l s'écrit, selon (2.2.6) :

$$s(t - \delta_{n,l}(\theta_l(\mathbf{p})) - \tau_l(\mathbf{p})) \approx e^{-j2\pi f_0 \delta_{n,l}(\theta_l(\mathbf{p}))} s(t - \tau_l(\mathbf{p})). \quad (2.2.13)$$

Dans le cas où le produit TB (2.2.12) est faible, le signal est bande étroite sur le réseau de stations nous avons alors :

$$s(t - \tau_l(\mathbf{p})) \approx e^{-j2\pi(f_0 + f_c)\tau_l(\mathbf{p})} s(t). \quad (2.2.14)$$

Sauf si les sources sont à égale distance des stations, car dans ce cas $\Delta\tau = 0$, l'hypothèse de signaux bande étroite sur le réseau de stations n'est généralement pas vérifiée, quand bien même les signaux sont bande étroite sur chaque station. Nous voyons alors que la condition de signaux bande étroite est plus difficile à satisfaire dans le cas d'un réseau de plusieurs stations en raison de la distance plus importante entre les éléments du réseau.

2.3 Formalisation du problème

Le contexte opérationnel est le suivant : nous avons à notre disposition un réseau de L stations multicapteurs dont on suppose qu'elles sont toutes capables de transmettre

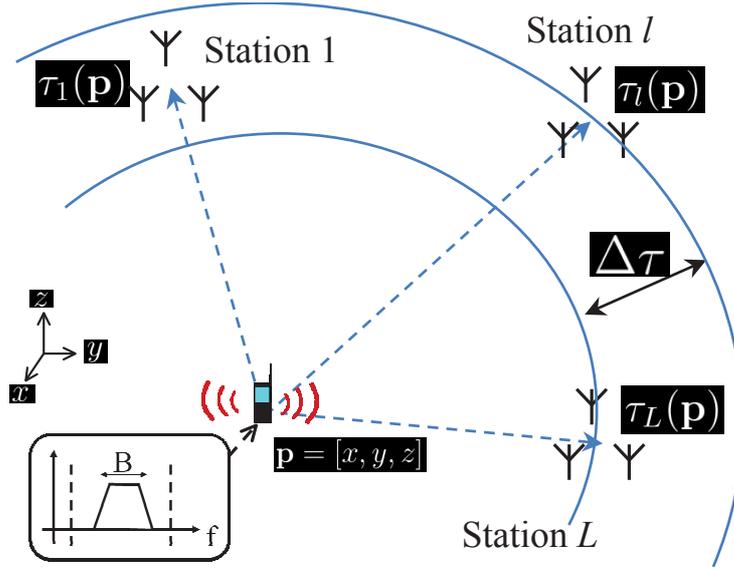


FIGURE 2.2.2 – Problème de localisation d’une source émettant un signal de bande B dont le temps de propagation à travers le réseau de L stations multicapteurs est $\Delta\tau$.

l’intégralité des signaux reçus à l’unité centrale de traitement (UCT). Ces stations de positions $\mathbf{p}(l)$ ($1 \leq l \leq L$) connues reçoivent des signaux inconnus émis par Q sources dont on ignore les positions $\{\mathbf{p}_q, 1 \leq q \leq Q\}$. On note alors $\mathbf{x}_l(t)$ l’observation temporelle de la station l . L’observation $\mathbf{x}(t)$ globale composée de toutes les observations des L stations est ensuite formée à l’UCT. A l’aide d’un modèle statistique reliant l’expression de l’observation globale $\mathbf{x}(t)$ à la position des sources, nous souhaitons estimer les positions des sources en exploitant T échantillons de l’observation $\mathbf{x}(t)$. Comme nous l’avons vu au paragraphe 2.2 les dimensions du réseau formé de l’ensemble des stations sont telles que le problème à traiter est généralement un problème large bande.

Les L stations comportent chacune N_l ($1 \leq l \leq L$) capteurs. Soit Q sources dont les signaux inconnus sont notés $s_q(t)$ ($1 \leq q \leq Q$) comme l’illustre la figure 2.2.2. Soit $\mathbf{x}_l(t)$ le vecteur d’observation de la l -ième station défini à l’équation (2.2.7). En supposant les signaux bande-étroite sur chacune des stations, $\mathbf{x}_l(t)$ s’écrit, en absence de réflexions (multitrajets) :

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q} \mathbf{a}_l(\theta_l(\mathbf{p}_q)) s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) + \mathbf{n}_l(t), \quad (2.3.1)$$

où :

- \mathbf{p}_q représente le vecteur des coordonnées de taille $D \times 1$ ($D = 2$ dans le plan ou $D = 3$ dans l’espace) de la q -ième source.
- $\rho_{l,q}$ est un gain complexe (de module $\psi_{l,q}$ et de phase $\phi_{l,q}$) déterministe inconnu qui rend compte de l’effet du canal de propagation et de l’impossibilité pratique de calibrer différentes stations de base avec une référence de phase commune. Ces gains étant des gains relatifs, l’origine peut donc être arbitrairement prise sur la première station. C’est pourquoi on considèrera toujours par la suite que $\rho_{1,q} = 1$.
- Le vecteur directeur $\mathbf{a}_l(\theta_l(\mathbf{p}))$, de norme $\sqrt{N_l}$ modélise la réponse des capteurs de la station l . Son expression est donnée à l’équation (2.2.10). Nous noterons par la

suite $\mathbf{a}_l(\mathbf{p}) = \mathbf{a}_l(\theta_l(\mathbf{p}))$.

- Le temps $\tau_l(\mathbf{p}_q)$ est le temps de retard du q -ième signal sur la l -ième station par rapport à la première station :

$$\tau_l(\mathbf{p}_q) \triangleq \frac{\|\mathbf{p}_q - \mathbf{p}(l)\|}{c} - \frac{\|\mathbf{p}_q - \mathbf{p}(1)\|}{c}, \quad (2.3.2)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne et c la célérité de l'onde.

- $\mathbf{n}_l(t)$ est un bruit additif, supposé blanc spatialement et temporellement et dont la matrice de covariance s'écrit

$$E[\mathbf{n}_l(t)\mathbf{n}_l^H(t')] = \delta_{tt'}\sigma^2\mathbf{I}_{N_l} \quad (2.3.3)$$

où \mathbf{I}_{N_l} désigne la matrice identité de taille $N_l \times N_l$ et $\delta_{tt'}$ le produit de Kronecker. Nous supposons également pour $l \neq l'$:

$$E[\mathbf{n}_l(t)\mathbf{n}_{l'}^H(t')] = \mathbf{0}. \quad (2.3.4)$$

Le problème traité dans cette thèse est celui qui consiste à estimer l'ensemble des positions $\{\mathbf{p}_q, 1 \leq q \leq Q\}$ à l'aide de T échantillons $\{\mathbf{x}(t_n), 1 \leq n \leq T\}$ de l'observation multistation

$$\mathbf{x}(t_n) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T(t_n) & \dots & \mathbf{x}_L^T(t_n) \end{bmatrix}^T. \quad (2.3.5)$$

Cette dernière est formée à partir des observations $\mathbf{x}_l(t_n)$ pour $1 \leq l \leq L$ recueillies sur les L stations de base qui composent le réseau, avec $t_n = nT_e$, T_e étant la période d'échantillonnage.

Un indicateur retenu au cours de cette thèse pour quantifier la qualité d'un estimateur $\hat{\mathbf{p}}$ est la racine de l'erreur quadratique moyenne (REQM) en distance :

$$REQM = \sqrt{E[\|\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}\|^2]}. \quad (2.3.6)$$

Bien que la plupart des travaux présents dans cette thèse soient aisément transposables, voire directement prévus pour fonctionner dans l'espace, nous nous focaliserons dans cette thèse sur le problème de localisation dans le plan.

Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.1, le problème de localisation est souvent traité à l'aide d'une approche décentralisée en deux étapes. Puisque la première étape fait souvent intervenir des algorithmes de traitements d'antenne, nous proposons un rapide état de l'art de ces techniques et du calcul de performances dans le paragraphe suivant qui servira de base aux développements présentés dans cette thèse.

2.4 Traitement d'antenne : estimation paramétrique et performances

Le traitement du signal offre des solutions particulièrement adaptées à l'étude des problèmes couramment rencontrés en traitement d'antenne, à savoir par exemple : l'estimation d'une direction d'arrivée, d'un temps de retard ... Il s'agit alors d'estimer plusieurs paramètres d'intérêt, à partir d'un ensemble de données observées et à l'aide d'un modèle de ces observations. L'estimation paramétrique offre pour cela un cadre formel

particulièrement adapté. À l'aide d'une paramétrisation des données, nous cherchons à construire diverses règles d'estimation permettant d'estimer au mieux la valeur de ces paramètres. L'étude de performances vise alors à caractériser statistiquement l'écart entre la valeur réelle du paramètre et la valeur fournie par la règle d'estimation, comme l'illustre la figure 2.4.1. Dans cette thèse, nous nous appuyons largement sur ce cadre formel pour concevoir des algorithmes de localisation et en étudier les performances.

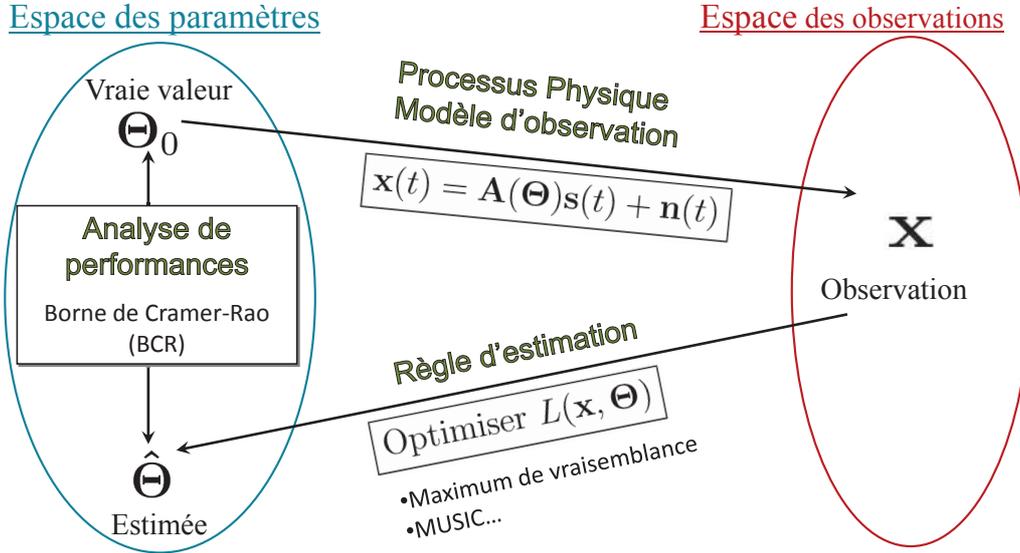


FIGURE 2.4.1 – Cadre de l'estimation paramétrique.

Nous présentons ici dans un cadre général quelques concepts très largement utilisés en traitement d'antenne. Nous nous focaliserons dans un premier temps sur un modèle linéaire selon les signaux. Le dispositif expérimental est le suivant : nous disposons d'une antenne (ou station) qui constitue un réseau multicapteur à l'aide duquel nous cherchons à estimer plusieurs paramètres d'intérêt tels qu'une direction d'arrivée, un temps d'arrivée ...

Nous considérons de manière générale le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \\ &= \sum_{q=1}^Q \mathbf{a}(\theta_q)s_q(t) + \mathbf{n}(t) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

- $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \dots x_N(t)]^T$ est le vecteur d'observation où chaque $x_n(t)$ est le signal reçu par le capteur n .
- $\Theta = [\theta_1^T \dots \theta_Q^T]^T$ est le vecteur paramètre d'intérêt à estimer, où θ_q est le vecteur paramètre d'intérêt de la q -ième source.
- $\mathbf{A}(\Theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) \dots \mathbf{a}(\theta_Q)]$ est la matrice de transfert du milieu caractéristique du mode de propagation de l'onde, $\mathbf{a}(\theta_q)$ la réponse du réseau de capteurs ou vecteur directeur à un paramètre d'intérêt θ_q . On supposera que $\mathbf{A}(\Theta)$ est de rang plein et identifiable ($\mathbf{A}(\Theta) = \mathbf{A}(\Theta') \Rightarrow \Theta = \Theta'$).
- $\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \dots s_Q(t)]^T$ est le vecteur signal des sources, où $s_q(t)$ désigne le signal de la q -ième source.

- $\mathbf{n}(t) = \begin{bmatrix} n_1(t) & \dots & n_N(t) \end{bmatrix}^T$ est le vecteur aléatoire modélisant le bruit de chaque capteur. On supposera que son moment d'ordre 2 vérifie

$$E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t')] = \delta_{tt'}\sigma^2\mathbf{I}_N. \quad (2.4.2)$$

Un tel modèle se rencontre par exemple dans le cadre de signaux bande étroite pour la station. En effet, comme nous l'avons vu en (2.2.9), la réponse du réseau pour chaque source est linéaire par rapport aux signaux. Puisque l'on considère un mélange linéaire de sources, et que dans le cas d'une propagation en champ lointain où le front d'onde incident aux stations est plan, on obtient alors le modèle de l'équation (2.4.1).

Historiquement les premières méthodes à voir le jour ont été des méthodes dites non-paramétriques, en ce sens qu'elles n'exploitent pas de manière exhaustive le modèle de propagation.

Méthodes non paramétriques Parmi les méthodes non paramétriques, on peut citer la formation de voie puis le filtre de Capon [Cap69]. Notons $x(t, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{w}^H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}(t)$ le signal filtré par le filtre $\mathbf{w}(\boldsymbol{\theta})$, tel que $\mathbf{w}^H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) = 1$, avec $(\cdot)^H = (\cdot)^*$ désignant la transposée conjuguée.

La puissance P en sortie du filtre s'écrit :

$$P(\boldsymbol{\theta}) = E[|x(t, \boldsymbol{\theta})|^2], \quad (2.4.3)$$

$$= \mathbf{w}^H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{R}\mathbf{w}(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.4.4)$$

où $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)]$ désigne la matrice de covariance du vecteur d'observation $\mathbf{x}(t)$. La localisation des sources est alors donnée par les valeurs de $\boldsymbol{\theta}$ maximisant la puissance $P(\boldsymbol{\theta})$ pour une expression du filtre $\mathbf{w}(\boldsymbol{\theta})$ donnée.

Pour la formation de voies nous avons

$$\mathbf{w}_{FV}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{a}^H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}, \quad (2.4.5)$$

et donc

$$P_{FV}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{a}^H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{R}\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{(\mathbf{a}^H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}))^2}. \quad (2.4.6)$$

Le filtre de Capon [Cap69] constitue une méthode adaptative dont le principe consiste à chercher le filtre spatial \mathbf{w} qui minimise P sous la contrainte $\mathbf{w}^H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}) = 1$. Nous avons alors

$$\mathbf{w}_{Capon}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}{\mathbf{a}^H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}. \quad (2.4.7)$$

Ce filtre correspond au filtre adapté spatial qui maximise la rapport signal à bruit plus brouilleurs. L'expression de la fonction de coût à maximiser devient alors

$$P_{Capon}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\boldsymbol{\theta})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})}. \quad (2.4.8)$$

Ce traitement est caractérisé par un pouvoir de résolution dépendant cette fois du rapport signal à bruit (RSB). Si le RSB est suffisant il devient alors possible de séparer deux sources situées dans le lobe principal de la formation de voies.

La matrice de covariance \mathbf{R} est généralement estimée sur T échantillons par

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \mathbf{x}(t_n) \mathbf{x}^H(t_n), \quad (2.4.9)$$

avec $t_n = nT_e$, T_e étant la période d'échantillonnage.

Afin de palier le principal défaut des méthodes non paramétriques, à savoir leur pouvoir de résolution ou aptitude à séparer deux sources proches, de nouvelles méthodes dites à haute résolution (HR) ont vu le jour [Mar98].

2.4.1 Algorithmes à haute résolution

On désigne par le terme haute résolution des algorithmes dont le pouvoir de résolution est théoriquement infini pour un nombre d'échantillons T infini [Mar98]. Nous allons maintenant présenter quelques unes des méthodes dites à haute résolution (HR), très employées et qui sont à la base des contributions de cette thèse.

2.4.1.1 Le maximum de vraisemblance

Principe Notons \mathbf{x} un vecteur aléatoire dont la densité de probabilité $f_{\Theta}(\mathbf{x})$ dépend du paramètre déterministe Θ . Supposons maintenant que nous observons la valeur \mathbf{x}_{obs} de \mathbf{x} et que nous connaissons $f_{\Theta}(\mathbf{x})$ c'est-à-dire le modèle qui génère \mathbf{x} , alors l'estimée $\hat{\Theta}$ au sens du maximum de vraisemblance (MV) de Θ est donnée par :

$$\hat{\Theta}_{MV} = \arg \max_{\Theta} f_{\Theta}(\mathbf{x}_{\text{obs}}). \quad (2.4.10)$$

Nous appelons vraisemblance $l(\Theta, \mathbf{x}_{\text{obs}})$ la fonction de $(\Theta, \mathbf{x}_{\text{obs}})$ telle que $l(\Theta, \mathbf{x}_{\text{obs}}) = f_{\Theta}(\mathbf{x}_{\text{obs}})$. On note également $\mathfrak{L}(\Theta, \mathbf{x}_{\text{obs}}) = \ln(l(\Theta, \mathbf{x}_{\text{obs}}))$ la log-vraisemblance. Le principe du maximum de vraisemblance consiste, à partir de l'observation \mathbf{x}_{obs} , à choisir pour valeur du paramètre Θ celle qui maximise la vraisemblance, c'est-à-dire qui maximise la probabilité que \mathbf{x} appartienne à un voisinage de \mathbf{x}_{obs} . Ce principe est illustré par la figure 2.4.2 où l'on remarque que si \mathbf{x}_{obs} est observé, alors la valeur Θ_2 est plus vraisemblable que la valeur Θ_1 .

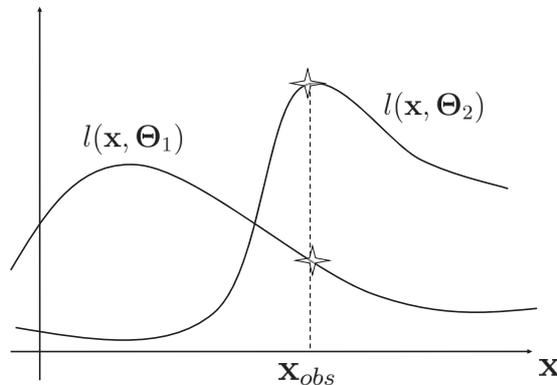


FIGURE 2.4.2 – Le principe du maximum de vraisemblance consiste à choisir la valeur du paramètre Θ_2 qui est plus vraisemblable que Θ_1 pour l'observation \mathbf{x}_{obs} puisque sa vraisemblance est supérieure : $l(\Theta_2, \mathbf{x}_{\text{obs}}) \geq l(\Theta_1, \mathbf{x}_{\text{obs}})$.

Nous allons maintenant décrire une version du maximum de vraisemblance lorsque le modèle est selon (2.4.1) et que les signaux sont déterministes inconnus et le bruit Gaussien. On parle alors de maximum de vraisemblance déterministe (MVD) par opposition au maximum de vraisemblance stochastique (MVS) qui suppose et exploite la statistique Gaussienne des sources [OVSN93].

Application au modèle linéaire selon les signaux avec un bruit gaussien De manière générale, le signal n'a aucune raison de suivre une loi gaussienne. Cela justifie de s'intéresser à un modèle déterministe du signal qui aboutit à l'élaboration du maximum de vraisemblance déterministe ou conditionnel. On ne fait dorénavant plus d'hypothèse sur la nature des signaux : les amplitudes du signal sont maintenant vues comme des inconnues déterministes du problème.

Nous supposons que $\mathbf{n}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{s}(t)$ suit une loi gaussienne centrée de matrice de covariance $\sigma^2\mathbf{I}_N$. Considérons alors T échantillons temporels, les $(\mathbf{n}(1), \dots, \mathbf{n}(T))$ étant considérés indépendants et identiquement distribués. Soit $\mathbf{s} = [\mathbf{s}(1)^T, \dots, \mathbf{s}(T)^T]^T$, la vraisemblance de l'observation $\mathbf{x} = [\mathbf{x}^T(1), \dots, \mathbf{x}^T(T)]^T$ s'écrit :

$$l(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{s}, \sigma, \mathbf{x}) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{(\pi\sigma^2)^N} e^{-\frac{1}{\sigma^2}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{s}(t))^H(\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{s}(t))} \quad (2.4.11)$$

On en déduit l'opposée de la log-vraisemblance :

$$-\mathcal{L}(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{s}, \sigma, \mathbf{x}) = NT \ln(\pi\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{s}(t))^H(\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{s}(t)). \quad (2.4.12)$$

On obtient donc en maximisant la log-vraisemblance par rapport à $\mathbf{s}(t)$ l'estimée du maximum de vraisemblance :

$$\hat{\mathbf{s}}_{MVD}(t) = \mathbf{A}^\#(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{x}(t), \quad (2.4.13)$$

où $\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$ est la pseudo inverse de Moore-Penrose. On obtient de même l'estimée au sens du maximum de vraisemblance de σ^2 :

$$\hat{\sigma}_{MVD}^2 = \frac{1}{N} \text{tr}(\boldsymbol{\Pi}^\perp(\boldsymbol{\Theta})\hat{\mathbf{R}}), \quad (2.4.14)$$

avec

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \mathbf{x}(t_n)\mathbf{x}^H(t_n), \quad (2.4.15)$$

$$\boldsymbol{\Pi}^\perp(\boldsymbol{\Theta}) = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{A}^\#(\boldsymbol{\Theta}). \quad (2.4.16)$$

En injectant (2.4.13) et (2.4.14) dans (2.4.12) on obtient finalement [Böh84] l'estimateur du MVD :

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{MVD} = \arg \min_{\boldsymbol{\Theta}} \text{tr}(\boldsymbol{\Pi}^\perp(\boldsymbol{\Theta})\hat{\mathbf{R}}). \quad (2.4.17)$$

L'optimisation de ce critère requiert bien souvent une optimisation multidimensionnelle en $\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1^T & \dots & \boldsymbol{\theta}_Q^T \end{bmatrix}^T$, ce qui s'avère souvent être un frein à sa mise en œuvre.

Afin de proposer une alternative aux algorithmes du maximum de vraisemblance dont la mise en œuvre est extrêmement coûteuse en temps de calcul, d'autres méthodes sous-

optimales basées sur une décomposition du signal en sous-espaces ont vu le jour afin de s'affranchir de l'optimisation multidimensionnelle en Θ .

2.4.1.2 MUSIC (Multiple Signal Characterization)

L'algorithme MUSIC (Multiple Signal Characterization) [Sch86, BK79] est une méthode à sous-espace, c'est à dire qu'elle exploite la structure de la matrice de covariance. Remarquons que

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] \\ &= \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{S}\mathbf{A}^H(\Theta) + \sigma^2\mathbf{I}_N,\end{aligned}\quad (2.4.18)$$

où $\mathbf{S} = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]$. Sachant que \mathbf{R} est Hermitienne, on peut écrire sa décomposition en éléments propres :

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^H, \quad (2.4.19)$$

$$= \mathbf{E}_s\mathbf{\Lambda}_s\mathbf{E}_s^H + \mathbf{E}_n\mathbf{\Lambda}_n\mathbf{E}_n, \quad (2.4.20)$$

où $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_s & \mathbf{E}_n \end{bmatrix}$ sont les vecteurs propres et $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\mathbf{\Lambda}_s \ \mathbf{\Lambda}_n)$ les valeurs propres correspondantes avec $\mathbf{\Lambda}_n = \sigma^2\mathbf{I}_{N-Q}$ et $\mathbf{\Lambda}_s = \text{diag}(\lambda_1 + \sigma^2, \dots, \lambda_Q + \sigma^2)$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_Q)$ sont les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}(\Theta)\mathbf{S}\mathbf{A}^H(\Theta)$. Puisque \mathbf{R} est hermitienne, les sous-espaces $\mathbf{E}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_Q \end{bmatrix}$ et $\mathbf{E}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{Q+1} & \dots & \mathbf{e}_N \end{bmatrix}$ sont orthogonaux entre eux. Ainsi les vecteurs directeurs $\mathbf{a}(\theta_q)$, engendrant le sous-espace signal \mathbf{E}_s , sont orthogonaux à tous les vecteurs qui composent le sous-espace bruit \mathbf{E}_n .

L'algorithme MUSIC (Multiple Signal Characterization) [Sch86, BK79] repose sur cette orthogonalité du sous-espace bruit avec le sous-espace signal et propose d'en faire un critère pour estimer le paramètre θ_q . Puisque l'on a

$$\mathbf{a}^H(\theta_q)\mathbf{E}_n\mathbf{E}_n^H\mathbf{a}(\theta_q) = 0, \quad \forall q \in [1, Q], \quad (2.4.21)$$

les paramètres $(\theta_1, \dots, \theta_Q)$ correspondent aux Q zéros de la fonction de coût suivante :

$$J_{MUSIC}(\theta) = \frac{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{\Pi}_n\mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta)}, \quad (2.4.22)$$

où le projecteur bruit $\mathbf{\Pi}_n$ est estimé par

$$\hat{\mathbf{\Pi}}_n = \hat{\mathbf{E}}_n\hat{\mathbf{E}}_n^H, \quad (2.4.23)$$

où $\hat{\mathbf{E}}_n$ est formé des $N - Q$ vecteurs propres associés aux plus petites valeurs propres de

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \mathbf{x}(t_n)\mathbf{x}^H(t_n). \quad (2.4.24)$$

Les paramètres $(\theta_1, \dots, \theta_Q)$ sont estimés par les Q minima proches de zéro du pseudo-spectre $J_{MUSIC}(\theta)$. C'est pourquoi on qualifie ce type d'algorithme de méthode spectrale. Sur la figure 2.4.3 on peut voir un exemple de pseudo-spectre résultant de l'estimation par MUSIC de la direction d'arrivée de plusieurs sources sur un réseau de capteurs. Cet algorithme est fondamental de par sa simplicité de mise en œuvre et ses bonnes perfor-

mances. Il est très utilisé notamment pour l'estimation de la direction d'arrivée de sources incidentes à un réseau de capteurs.

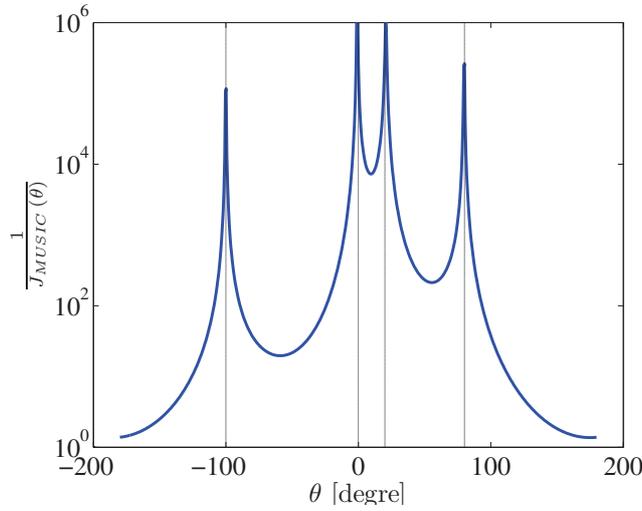


FIGURE 2.4.3 – Inverse du pseudo-spectre de MUSIC issu de l'estimation de la direction d'arrivée de 4 sources d'incidences respectives $\theta_1 = -100^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$, $\theta_3 = 20^\circ$ et $\theta_4 = 80^\circ$ sur un réseau circulaire à $N=5$ capteurs de diamètre 0.45λ , $T = 1000$, $RSB=15\text{dB}$.

Remarque. Dans le cas de signaux déterministes, la matrice de covariance

$$\mathbf{R} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)dt, \quad (2.4.25)$$

conserve la structure (2.4.18) et on peut donc toujours appliquer l'algorithme MUSIC, à l'aide de la matrice de covariance estimée par (2.4.24).

Notons qu'il existe d'autres algorithmes à sous-espace très employés [PRK86, VO91].

2.4.1.3 Le maximum de vraisemblance approché (AMLM)

Nous présentons ici une méthode du maximum de vraisemblance approché [CTO87] (AMLM pour approximate maximum likelihood method) qui offre un outil intéressant également pour établir le lien entre MUSIC et le MVD.

Pour un nombre de sources quelconques, en remarquant que :

$$\mathbf{\Pi}^\perp(\boldsymbol{\Theta}')\mathbf{R} = \mathbf{\Pi}^\perp(\boldsymbol{\Theta}')(\mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{S}\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\Theta}) + \sigma^2\mathbf{I}), \quad (2.4.26)$$

où $\boldsymbol{\Theta}'$ est la variable candidate et $\boldsymbol{\Theta}$ la vraie valeur du paramètre, minimiser le critère du MVD revient à minimiser la quantité $tr[\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\Theta}')\mathbf{\Pi}^\perp(\boldsymbol{\Theta}')\mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{S}]$. En remarquant que [CTO89] :

$$\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\Theta}')\mathbf{\Pi}^\perp(\boldsymbol{\Theta}')\mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta}) = \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\Theta}')\mathbf{\Pi}^\perp(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta}') + o(\|\boldsymbol{\Theta}' - \boldsymbol{\Theta}\|^3), \quad (2.4.27)$$

minimiser le critère du MVD revient donc en première approximation à minimiser le terme $tr[\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\Theta}')\mathbf{\Pi}^\perp(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta}')\mathbf{S}]$. On obtient alors le maximum de vraisemblance approché lorsque le projecteur bruit $\mathbf{\Pi}^\perp(\boldsymbol{\Theta})$ inconnu est estimé par $\hat{\mathbf{\Pi}}_n$:

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{AMLM} = \arg \min_{\boldsymbol{\Theta}'} tr[\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\Theta}')\hat{\mathbf{\Pi}}_n\mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta}')\mathbf{S}], \quad (2.4.28)$$

où la matrice de covariance des sources \mathbf{S} , inconnue *a priori* est obtenue à l'aide d'une estimée préalable $\hat{\Theta}$ par

$$\hat{\mathbf{S}} = \left(\mathbf{A}^H(\hat{\Theta}) \hat{\mathbf{R}}_s^\# \mathbf{A}(\hat{\Theta}) \right)^{-1}, \quad (2.4.29)$$

où $\hat{\mathbf{R}}_s$ est une estimée de $\mathbf{R}_s = \mathbf{A}(\Theta) \mathbf{S} \mathbf{A}^H(\Theta)$.

Si la matrice \mathbf{S} est diagonale, c'est à dire si les sources sont décorrélées, alors le critère (2.4.28) devient :

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\mathbf{A}^H(\Theta') \mathbf{\Pi}^\perp(\Theta) \mathbf{A}(\Theta') \mathbf{S} \right] &= \text{tr} \left[\mathbf{\Pi}^\perp(\Theta) \mathbf{A}(\Theta') \mathbf{S} \mathbf{A}^H(\Theta') \right], \\ &= \text{tr} \left[\mathbf{\Pi}^\perp(\Theta) \sum_{q=1}^Q \mathbf{a}(\theta'_q) \mathbf{a}^H(\theta'_q) S_{qq} \right], \\ &= \sum_{q=1}^Q S_{qq} \mathbf{a}^H(\theta'_q) \mathbf{\Pi}^\perp(\Theta) \mathbf{a}(\theta'_q). \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

Le projecteur bruit $\mathbf{\Pi}(\Theta)$ est inconnu. Si on l'estime de manière classique à partir d'une simple décomposition singulière de \mathbf{R} , on retombe alors sur le critère MUSIC. Ainsi MUSIC peut être vu comme une approximation du MVD lorsque les sources sont décorrélées, ce qui laisse présager de bonnes performances de sa part dans un tel contexte. Dès que les sources sont corrélées, les performances de MUSIC se dégradent [SN90].

2.4.2 Performances

Savoir caractériser les performances d'un algorithme et dire, pour un modèle statistique donné, s'il est possible de faire mieux est un enjeu crucial. Le calcul de performances peut également trouver une application dans le dimensionnement des réseaux d'antennes. L'analyse des performances des méthodes HR a largement mobilisé la communauté scientifique qui a déjà mis à jour de nombreux résultats théoriques. Parmi les indicateurs de performances les plus utilisés on trouve : le pouvoir de résolution, le biais, la variance et le seuil de décrochement [RB74].

Le pouvoir de résolution par exemple traduit l'aptitude d'un algorithme à séparer deux sources très proches. Pour mieux comprendre, plaçons nous dans le cas pratique de l'estimation d'une direction d'arrivée et comparons les spectres obtenus par l'algorithme MUSIC et la formation de voie. On remarque sur la figure 2.4.4 que la méthode MUSIC possède naturellement un pouvoir de résolution supérieur puisque lui seul distingue les deux sources voisines. De plus, on constate que le pouvoir de résolution de MUSIC augmente avec la durée d'observation T .

Nous nous focalisons ici sur la caractérisation des performances par l'erreur quadratique moyenne pour laquelle bon nombre de résultats théoriques sont disponibles.

2.4.2.1 Borne de Cramer-Rao

Un outil très employé est la borne de Cramer-Rao (BCR) [Sch90], qui fournit une borne pour un modèle statistique donné, sur l'erreur quadratique d'un estimateur sans biais. Parmi les bornes minimales, c'est sans doute la plus populaire de par sa simplicité de calcul. La borne de Cramer-Rao est liée à la matrice d'information de Fisher (MIF) :

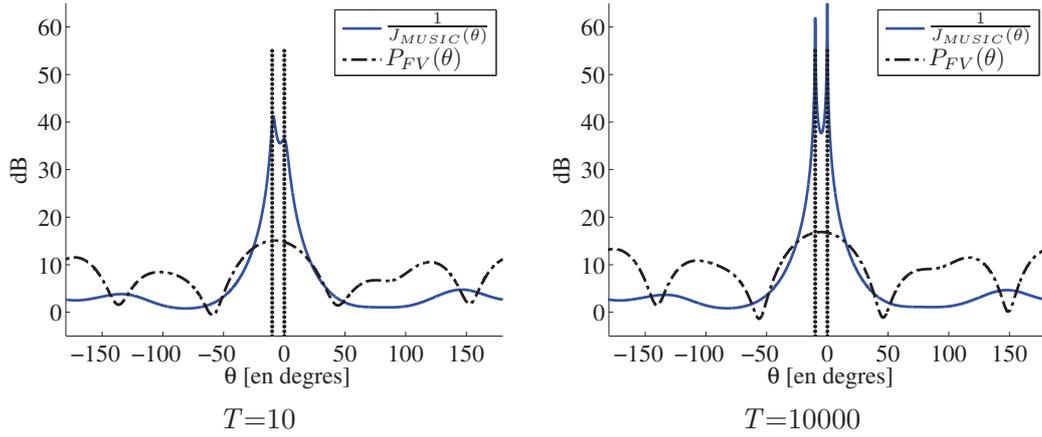


FIGURE 2.4.4 – Spectres résultants de l'estimation de la direction d'arrivée de deux sources émettant des signaux aléatoires sous des incidences $\theta_1 = -10^\circ$ et $\theta_2 = 0^\circ$ et collectés par un réseau circulaire à 5 capteurs de diamètre 0.45λ avec la formation de voie et MUSIC : tracé des pseudo-spectres $P_{FV}(\theta)$ et $J_{MUSIC}(\theta)$ pour un RSB de 20 dB et un nombre d'échantillons $T = 10$ et $T = 10000$.

Définition 1. On définit la matrice d'information de Fisher $\mathbf{J}(\Theta)$ par :

$$\mathbf{J}(\Theta) = E \left[\frac{\partial \ln l(\Theta, \mathbf{x})}{\partial \Theta} \frac{\partial \ln l(\Theta, \mathbf{x})}{\partial \Theta}^T \right]. \quad (2.4.31)$$

Comme $E \left[\frac{\partial \ln f_{\Theta}(\mathbf{x})}{\partial \Theta} \right] = \mathbf{0}$, on a aussi [Sch90] :

$$\mathbf{J}(\Theta) = -E \left[\frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta} \ln l(\Theta, \mathbf{x}) \right) \right]. \quad (2.4.32)$$

Si nous notons $\mathbf{s}(\Theta, \mathbf{x})$ le gradient de la log-vraisemblance $\mathbf{s}(\Theta, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \Theta} \mathcal{L}(\Theta, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \Theta} \ln l(\Theta, \mathbf{x})$ alors la matrice d'information de Fisher est sa matrice de covariance $\mathbf{J}(\Theta) = E[\mathbf{s}(\Theta, \mathbf{x})\mathbf{s}^T(\Theta, \mathbf{x})]$. Notons que l'estimée du maximum de vraisemblance est fournie par $\mathbf{s}(\hat{\Theta}, \mathbf{x}_{\text{obs}}) = \mathbf{0}$.

Théorème 1. [Borne de Cramer Rao] Soit \mathbf{x} un vecteur aléatoire de densité de probabilité $f_{\Theta}(\mathbf{x})$. Tout estimateur $\hat{\Theta}$ (fonction de \mathbf{x}) de Θ non biaisé ($E[\hat{\Theta}] = \Theta$) a une matrice de covariance bornée par l'inverse de la matrice d'information de Fisher appelée borne de Cramer-Rao (BCR)¹ :

$$E[(\Theta - \hat{\Theta})(\Theta - \hat{\Theta})^T] \geq \mathbf{J}^{-1}(\Theta) \quad (2.4.33)$$

où $\mathbf{J}^{-1}(\Theta) = \text{BCR}(\Theta)$.

Ce résultat théorique majeur nous fournit, pour un modèle donné (conditionnant l'expression de $f_{\Theta}(\mathbf{x})$) une borne inférieure de la variance de tout estimateur non biaisé. Remarquons que rien ne dit que cette borne est atteignable. Il se peut donc que cette borne ne soit pas la plus pertinente dans certaines situations puisqu' inaccessible.

Définition 2. Un estimateur qui atteint la borne de Cramer-Rao est dit efficace.

Dans le cas de signaux déterministes inconnus satisfaisant le modèle de l'équation (2.4.1) nous avons le résultat suivant :

1. pour \mathbf{A} et \mathbf{B} dans $M_n(\mathbb{C})$, $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ signifie que $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ est semi-définie positive

Théorème 2. [Borne de Cramer-Rao déterministe] Soit le modèle statistique suivant de l'observation $\mathbf{x}(t)$:

$$\mathbf{x}(t_n) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{s}(t_n) + \mathbf{n}(t_n), \quad 1 \leq n \leq T$$

où le vecteur des paramètres inconnus est $\boldsymbol{\Theta}$, où les signaux $\{\mathbf{s}(t_n), 1 \leq n \leq T\}$ sont des inconnues déterministes du problème et où le bruit est Gaussien centré ($E[\mathbf{n}(t)] = \mathbf{0}$) circulaire ($E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^T(t)] = \mathbf{0}$), blanc temporellement et spatialement ($E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t')] = \delta_{tt'}\sigma^2\mathbf{I}_N$). L'élément ij de l'inverse de la borne de Cramer-Rao déterministe en le paramètre $\boldsymbol{\Theta}$ s'écrit [SN89, CTO89] :

$$[\mathbf{BCR}^{-1}(\boldsymbol{\Theta})]_{ij} = \frac{\sigma^2}{2T} \text{Re} \left\{ \text{Tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\Theta})}{\partial \boldsymbol{\Theta}_i} \boldsymbol{\Pi}^\perp(\boldsymbol{\Theta}) \frac{\partial \mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta})}{\partial \boldsymbol{\Theta}_j} \hat{\mathbf{S}} \right) \right\}, \quad (2.4.34)$$

avec $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \mathbf{s}(t_n)\mathbf{s}^H(t_n)$ et où le projecteur $\boldsymbol{\Pi}^\perp(\boldsymbol{\Theta})$ est défini par l'équation (2.4.16).

Lien avec les méthodes à haute résolution Il a été démontré que :

- L'estimée du maximum de vraisemblance déterministe est asymptotiquement Gaussienne mais non efficace lorsque T tend vers l'infini [SN90].
- L'estimée du maximum de vraisemblance déterministe est asymptotiquement Gaussienne et efficace lorsque le RSB tend vers l'infini [RFCL06].
- MUSIC n'est pas asymptotiquement efficace dans le cas général ($\hat{\mathbf{S}}$ quelconque) [SN90].
- MUSIC est asymptotiquement équivalent au maximum de vraisemblance déterministe si et seulement si la matrice de covariance des sources est diagonale, c'est à dire lorsque les sources sont décorrélatées entre elles [SN90].

2.4.3 Cas de signaux large bande

Lorsque les signaux sont dits large bande, on ne peut plus écrire le modèle selon (2.4.1). Afin de se ramener au cas de signaux bande étroite, plusieurs solutions ont été envisagées dans la littérature.

2.4.3.1 Approche par banc de filtres

Le vecteur $\mathbf{x}(t)$ est filtré par un banc de filtres judicieusement choisi, on note alors

$$\mathbf{x}(k, t) = \sum_{q=1}^Q \begin{bmatrix} s_q(k, t - \delta_1(\boldsymbol{\theta}_q)) \\ \vdots \\ s_q(k, t - \delta_N(\boldsymbol{\theta}_q)) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(k, t), \quad (2.4.35)$$

la sortie du k -ième filtre du banc de filtre de bande $\Delta B = \frac{F_e}{K}$ de fréquence centrale f_k avec $1 \leq k \leq K$ comme illustré par la figure 2.4.5. Si le banc de filtres est suffisamment sélectif (ΔB faible) on peut supposer que le produit TB des signaux $s_q(k, t)$, de fréquence centrale f_k en sortie du banc de filtres, est tel que les signaux sont bande étroite sur l'antenne. C'est à dire que selon l'équation (2.2.3) :

$$s_q(k, t - \delta_n(\boldsymbol{\theta}_q)) \approx e^{-j2\pi(f_0 + f_k)\delta_n(\boldsymbol{\theta}_q)} s_q(k, t). \quad (2.4.36)$$

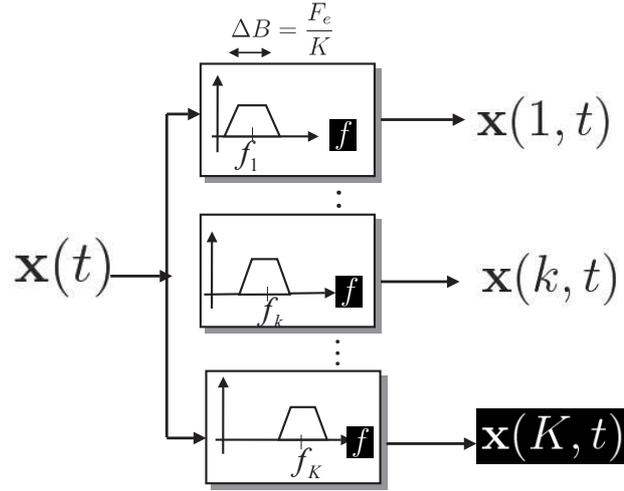


FIGURE 2.4.5 – Schéma d'un banc de K filtres où chaque élément est un filtre passe-bande centré en f_k pour ($1 \leq k \leq K$) et dont la sortie est notée $\mathbf{x}(k, t)$ pour une entrée $\mathbf{x}(t)$.

On a alors

$$\mathbf{x}(k, t) = \mathbf{A}(f_0 + f_k, \Theta) \mathbf{s}(k, t) + \mathbf{n}(k, t), \quad (2.4.37)$$

avec

$$\mathbf{A}(f_0 + f_k, \Theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(f_0 + f_k, \theta_1) & \dots & \mathbf{a}(f_0 + f_k, \theta_Q) \end{bmatrix}, \quad (2.4.38)$$

$$\mathbf{a}(f_0 + f_k, \theta_q) = \begin{bmatrix} e^{-j2\pi(f_0+f_k)\delta_1(\theta_q)} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi(f_0+f_k)\delta_N(\theta_q)} \end{bmatrix}, \quad (2.4.39)$$

$$\mathbf{s}(k, t) = \begin{bmatrix} s_1(k, t) & \dots & s_Q(k, t) \end{bmatrix}^T. \quad (2.4.40)$$

Ainsi nous obtenons K observations bande-étroite (2.4.37) où l'on cherche à estimer les paramètres θ_q par des techniques haute résolution. Diverses solutions peuvent alors être envisagées :

Algorithme incohérent On peut simplement minimiser la somme des critères MUSIC obtenus en sortie de chaque banc de filtres pour estimer les paramètres d'intérêt. On obtient alors une approche de type MUSIC incohérente (MI). La fonction de coût à minimiser est :

$$J_{MI}(\theta) = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}^H(f_0 + f_k, \theta) \hat{\mathbf{\Pi}}_n(k) \mathbf{a}(f_0 + f_k, \theta), \quad (2.4.41)$$

où $\hat{\mathbf{\Pi}}_n(k)$ est le projecteur bruit estimé de la matrice de covariance

$$\hat{\mathbf{R}}(k) = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \mathbf{x}(k, t_n) \mathbf{x}^H(k, t_n). \quad (2.4.42)$$

Cette approche d'un problème large-bande est connue pour être sous-optimale [WK85a]. Lorsque le rapport signal à bruit dans un canal est faible, les performances d'une telle

approche se dégradent rapidement. Elle est dite incohérente car elle propose une simple somme des critères dans chacun des canaux fréquentiels sans tenir compte d'une éventuelle corrélation entre ces canaux.

Focalisation Afin de traiter de manière plus fine l'information reçue, des techniques de focalisation ont vu le jour [WK85a, DW92]. Elles sont dites cohérentes puisqu'elles proposent de traiter le problème par l'intermédiaire d'une unique matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}(f_0)$ focalisant l'ensemble des canaux fréquentiels. Pour cela, on construit [WK85a]

$$\hat{\mathbf{R}}(f_0) = \sum_{k=1}^K \mathbf{T}(f_0 + f_k) \hat{\mathbf{R}}(k) \mathbf{T}^H(f_0 + f_k), \quad (2.4.43)$$

où les matrices $\mathbf{T}(f_k)$ peuvent être choisies de manière optimale par [DW92]

$$\mathbf{T}(f_0 + f_k) = \min_{\mathbf{T}} \|\mathbf{A}(f_0, \Theta) - \mathbf{T}\mathbf{A}(f_0 + f_k, \Theta)\|_F, \quad (2.4.44)$$

sous la contrainte

$$\mathbf{T}^H(f_0 + f_k) \mathbf{T}(f_0 + f_k) = \mathbf{I}, \quad (2.4.45)$$

où $\|\mathbf{M}\|_F^2 = \text{tr}(\mathbf{M}^H \mathbf{M})$ est la norme de Frobenius. Le choix de telles matrices de focalisation est optimal au sens où il conserve le rapport signal à bruit après la focalisation [DW92].

La solution du problème d'optimisation de l'équation (2.4.44) est donnée par

$$\mathbf{T}(f_0 + f_k) = \mathbf{V}_k \mathbf{U}_k^H, \quad (2.4.46)$$

où \mathbf{U}_k et \mathbf{V}_k sont respectivement les matrices gauche et droite de l'espace propre de la matrice $\mathbf{A}(f_0 + f_k, \Theta) \mathbf{A}^H(f_0, \Theta)$.

Les approches par focalisation nécessitent de disposer d'estimées préalables des paramètres, susceptibles d'introduire des biais dans l'estimation de la matrice de focalisation [SK89]. Des méthodes visant à contourner cette estimation préalable ont été proposées dans [Lee94, DCP01, YKM06].

2.4.3.2 Approches spatio-temporelles

Une alternative aux banc de filtres a été proposée pour le problème large bande [Bie83, BG88, Gre94, FCT00]. Elles consistent à exploiter l'observation spatio-temporelle suivante :

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t + T_e) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t + (K - 1)T_e) \end{bmatrix}. \quad (2.4.47)$$

Ceci conduit naturellement à une approche cohérente puisque tous les signaux sont alors présents dans une unique matrice de covariance spatio-temporelle du vecteur $\mathbf{y}(t)$. Cette approche nécessite en revanche de travailler avec des matrices pouvant être de grande taille et peut nécessiter d'avoir recours à une puissance de calcul importante.

2.5 Géolocalisation de sources en contexte passif par un réseau de stations multicapteurs

2.5.1 Triangulation conventionnelle

Lorsque nous parlerons de méthode conventionnelle par la suite, nous évoquerons le cas de la triangulation, dont la mise en œuvre sera la suivante :

1. Les angles d'arrivée sont estimés sur chacune des stations à l'aide d'un algorithme (MUSIC par exemple).
2. Les angles d'arrivée estimés $\hat{\theta}_{l,q}$ de chaque source sont transmis à l'UCT et rangés dans les vecteurs $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{1,q} & \dots & \hat{\theta}_{L,q} \end{bmatrix}^T$. Nous négligeons les problèmes d'association de paramètres et nous supposons que nous pouvons parfaitement associer les angles correspondant à chaque source. La position est alors estimée par une étape de moindres carrés pondérés

$$\hat{\mathbf{p}}_q = \arg \min_{\mathbf{p}} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q - f(\mathbf{p}) \right)^T \mathbf{W} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_q - f(\mathbf{p}) \right), \quad (2.5.1)$$

où \mathbf{W} est la matrice de poids et $f(\cdot)$ la fonction qui relie \mathbf{p} à $\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_L \end{bmatrix}^T$, où θ_l est l'angle d'arrivée sur la l -ième station. Lorsque ce n'est pas précisé \mathbf{W} est ici une matrice bloc-diagonale où chaque élément est l'inverse de la borne de Cramer-Rao de l'angle d'arrivée sur la station correspondante dont l'expression est fournie à l'équation (2.4.34). Ceci a pour objectif d'affecter un poids moins important à une donnée qui posséderait une importante variance d'estimation. C'est également la pondération optimale si le vecteur $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q$ est Gaussien et que ces composantes sont décorréelées.

2.5.2 Limitations des approches décentralisées conventionnelles

Les approches conventionnelles souffrent de plusieurs limitations [WK83, AW09] :

- Exploiter une approche à plusieurs étapes, par le biais de paramètres intermédiaires est sous-optimal en termes de précision d'estimation [SS89]. De telles approches n'exploitent par exemple pas le fait que chaque station reçoit un signal qui est commun à toutes les stations lors de l'estimation des paramètres intermédiaires.
- En utilisant le réseau de manière parcellaire, les approches décentralisées conventionnelles se privent de l'exploitation du réseau global constitué de l'ensemble des stations. Ainsi la réduction du nombre théorique de capteurs disponibles a pour effet de diminuer les performances d'estimation ainsi que les capacités d'identifiabilité (nombre de sources distinguables) du système [AW07].
- Le fait de traiter le problème localement sur chaque station conduit à des problèmes d'association des paramètres [PDBSWJ92]. C'est-à-dire qu'une fois les paramètres estimés puis transférés à une UCT, il convient d'associer au flot de paramètres incidents la source correspondante afin de réaliser la localisation.
- Il arrive parfois que le signal d'une source soit très atténué, voire absent sur une station. Dans ce cas, lorsque le RSB d'une source sur une station est faible, le paramètre intermédiaire estimé possède alors une variance importante, susceptible à elle seule de dégrader fortement les performances de la deuxième étape.

2.5.3 Vers des traitements centralisés en une seule étape

Les traitements conventionnels procédant en deux étapes ont été identifiés comme sous-optimaux depuis de nombreuses années [WK83]. Les premiers traitements centralisés en une seule étape [Sch68, WK83] étant jugés trop coûteux à mettre en œuvre, des traitements décentralisés [Wei81, WK85b, SNS95] sont alors apparus comme une alternative intéressante.

On comprend aisément que l'on pourrait améliorer les algorithmes de localisation en augmentant la quantité de données transmise à l'UCT. Une première étude a ainsi proposé de transmettre à l'UCT la matrice de covariance des sources. Le traitement [WK85b] propose ainsi d'estimer la position des sources par les Q minimas suivants :

$$J_{DP}(\mathbf{p}) = \sum_{l=1}^L \mathbf{a}_l^H(\mathbf{p}) \hat{\mathbf{\Pi}}_{n,l} \mathbf{a}_l(\mathbf{p}), \quad (2.5.2)$$

où $\hat{\mathbf{\Pi}}_{n,l}$ est le projecteur bruit de la station l extrait de la matrice covariance

$$\hat{\mathbf{R}}_l = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \mathbf{x}_l(t_n) \mathbf{x}_l^H(t_n), \quad (2.5.3)$$

estimée sur la station l . Il s'agit en fait d'une somme des critères MUSIC que l'on établit classiquement sur chaque station. La paramétrisation directe du critère en la position de la source permet d'introduire la contrainte que toutes les directions d'arrivées des L stations doivent s'intersecter au même endroit. La supériorité de cette méthode est constatée par rapport à certains traitements décentralisés conventionnels dans [WK85b].

Si le RSB sur une station l est très faible, alors le terme $\mathbf{a}_l^H(\mathbf{p}) \hat{\mathbf{\Pi}}_{n,l} \mathbf{a}_l(\mathbf{p})$ peut ne pas être négligeable et alors (2.5.2) est susceptible de ne pas tendre vers zéro, rendant cette technique inopérante.

2.5.4 Traitements centralisés

Les travaux pionniers [Sch68, WK83] proposent d'examiner pour la première fois une stratégie en une seule étape, selon le schéma décrit par la figure 1.3.1 en proposant respectivement une approche par moindres carrés pondérés et une approche par maximum de vraisemblance. Pour cela, on présuppose que l'unité centrale de traitement dispose de l'ensemble des signaux reçus par les stations. D'une part, dans ces travaux [Sch68, WK83], les stations de base ne sont composées que d'un seul capteur et d'autre part elles font l'hypothèse de signaux et de bruit Gaussiens dont les matrices de covariance sont connues.

Ce n'est que récemment que de nouveaux traitements dits en "une seule étape" ont connu un regain d'intérêt. Les travaux [Wei04, AW05] présentent une approche appelée DPD pour Direct Position Determination. Depuis, des traitements similaires ont été proposés [ON10] pour le cas des systèmes de navigation par satellite [CFPFR07, CFPFR09] ou encore pour la localisation de cible par antennes mobiles via l'estimation du décalage fréquentiel Doppler [AW08a, Ois09, Wei11]. La supériorité en termes d'identification de sources d'une approche à une étape est montrée dans [AW07].

L'étude [ON10] suppose un modèle où il n'y a pas de gain complexe $\rho_{l,q}$ entre les stations et ne tient donc pas compte du fait que les stations ne peuvent pas être calibrées entre elles avec une référence de phase commune.

Les travaux [CFPFR07, CFPFR09] supposent un contexte actif qui n'est pas l'objet de cette thèse.

Les limitations technologiques d'une approche centralisée tiennent principalement en ce qu'elles nécessitent de transmettre l'ensemble des signaux à une unité de traitement centralisée. Quant à la difficulté scientifique, elle tient à ce que dans la plupart des cas les signaux sont dits large bande au sens du réseau de stations, comme expliqué au paragraphe 2.2. Dans ce cadre la littérature offre moins de solutions que pour le cas de signaux bande étroite.

Dans le paragraphe qui vient nous présentons l'approche en une seule étape DPD [AW05], seule solution centralisée existante en une seule étape à notre connaissance pour résoudre le problème de localisation traité dans cette thèse et exposé au chapitre 2.3.

2.5.4.1 Le DPD

Rappelons tout d'abord l'équation du problème de localisation des équations (2.3.1) et (2.3.5) :

$$\mathbf{x}(t) = \left[\mathbf{x}_I^T(t) \quad \dots \quad \mathbf{x}_L^T(t) \right]^T,$$

avec

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q} \mathbf{a}_l(\theta_l(\mathbf{p}_q)) s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) + \mathbf{n}_l(t).$$

Comme nous l'avons vu précédemment au paragraphe 2.2, le problème posé dans sa généralité est large bande. Une façon courante de traiter ce genre de problème est de traiter les signaux à la sortie d'un banc de filtres, afin de pouvoir se ramener à un problème bande étroite en sortie de chaque canal. Soit $\{z_k(t), 1 \leq k \leq J\}$ un banc de filtres, nous définissons

$$\bar{\mathbf{x}}(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} z_k(u) \mathbf{x}(t - u) du, \quad (2.5.4)$$

où $z_k(t)$ est un filtre passe-bande centré en $f_k = \frac{k}{JT_e}$ et de largeur $\frac{1}{JT_e}$. La bande du signal $\bar{\mathbf{x}}(k, t)$ est maintenant plus petite et pourvu que la largeur de bande de chaque filtre du banc de filtre soit suffisamment étroite, nous pourrions nous ramener à une hypothèse bande étroite. Le DPD [AW05] utilise comme banc de filtres une transformée de Fourier. Nous avons alors :

$$\bar{\mathbf{x}}(k, t) = \int_0^{JT_e} \mathbf{x}(t + u) e^{-j2\pi f_k u} du. \quad (2.5.5)$$

Définissons également

$$\bar{s}_q(k, t) = \int_0^{JT_e} s_q(t + u) e^{-j2\pi f_k u} du, \quad (2.5.6)$$

et supposons que la bande du signal $\bar{s}_q(k, t)$ soit telle que le produit TB de ce signal est petit devant 1, c'est-à-dire que $JT_e \gg \tau_l(\mathbf{p}_q)$. Le signal $\bar{s}_q(k, t)$ est alors dit bande étroite sur l'ensemble du réseau de stations, et nous avons :

$$\bar{s}_q(k, t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) \approx \bar{s}_q(k, t) e^{-j2\pi f_k \tau_l(\mathbf{p}_q)}. \quad (2.5.7)$$

On pourra alors écrire :

$$\bar{\mathbf{x}}(k, t) = \sum_{q=1}^Q c_q \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_k) \bar{s}_q(k, t) + \bar{\mathbf{n}}(k, t), \quad 1 \leq k \leq J, \quad (2.5.8)$$

avec

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_k) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\sum_{l=1}^L N_l |\rho_{l,q}|^2}} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1(\mathbf{p}_q) e^{-j2\pi f_k \tau_1(\mathbf{p}_q)} \\ \rho_{2,q} \mathbf{a}_2(\mathbf{p}_q) e^{-j2\pi f_k \tau_2(\mathbf{p}_q)} \\ \vdots \\ \rho_{L,q} \mathbf{a}_L(\mathbf{p}_q) e^{-j2\pi f_k \tau_L(\mathbf{p}_q)} \end{bmatrix}, \quad (2.5.9)$$

$$c_q = \frac{\sqrt{\sum_{l=1}^L N_l |\rho_{l,q}|^2}}{\sqrt{N}}, \quad (2.5.10)$$

$$\boldsymbol{\rho}_q = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{2,q} & \dots & \rho_{L,q} \end{bmatrix}^T, \quad (2.5.11)$$

et

$$\bar{\mathbf{n}}(k, t) = \int_0^{JT_e} \mathbf{n}(t+u) e^{-j2\pi f_k u} du. \quad (2.5.12)$$

Le terme $\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\sum_{l=1}^L N_l |\rho_{l,q}|^2}}$ impose au vecteur directeur $\mathbf{u}(\cdot)$ une norme constante toujours égale à N , nombre total de capteurs. Nous pouvons alors définir aisément un rapport signal à bruit (RSB) comme cela est fait de manière classique dans les problèmes d'estimation de la direction d'arrivée. Le RSB est un RSB moyen par capteur. On notera ψ_q et ϕ_q respectivement le module et l'argument de $\boldsymbol{\rho}_q$. Remarquons que c_q ainsi que $s_q(k, t)$ sont inconnus dans (2.5.8), si bien qu'ils ne sont pas tous deux identifiables. C'est pourquoi dans la suite on inclura c_q dans la quantité $s_q(k, t)$ et nous écrirons simplement :

$$\bar{\mathbf{x}}(k, t) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_k) \bar{s}_q(k, t) + \bar{\mathbf{n}}(k, t), \quad 1 \leq k \leq J. \quad (2.5.13)$$

En pratique, on peut estimer les signaux $\bar{s}_q(k, t)$ par le filtrage suivant :

$$\bar{s}_q(k, t) = \frac{\mathbf{z}_k^H \mathbf{s}_{J,q}(t)}{\mathbf{z}_k^H \mathbf{z}_k}, \quad (2.5.14)$$

avec

$$\mathbf{s}_{J,q}(t) = \begin{bmatrix} s_q(t) \\ s_q(t - T_e) \\ \vdots \\ s_q(t - (J-1)T_e) \end{bmatrix}, \quad (2.5.15)$$

où les vecteurs \mathbf{z}_k contiennent les coefficients du banc de filtres considéré. On peut prendre par exemple une transformée de Fourier discrète :

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} 1 & e^{j2\pi \frac{k}{J}} & \dots & e^{j2\pi \frac{k}{J}(J-1)} \end{bmatrix}^T. \quad (2.5.16)$$

On peut écrire l'équation (2.5.8) selon :

$$\bar{\mathbf{x}}(k, t) = \mathbf{A}_k(\boldsymbol{\eta})\bar{\mathbf{s}}_q(k, t) + \bar{\mathbf{n}}(k, t), \quad 1 \leq k \leq J, \quad (2.5.17)$$

avec

$$\mathbf{A}_k(\boldsymbol{\eta}) = \left[\mathbf{u}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, f_k) \quad \dots \quad \mathbf{u}(\mathbf{p}_Q, \boldsymbol{\rho}_Q, f_k) \right], \quad (2.5.18)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \left[\mathbf{p}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{p}_Q^T \quad \psi_1^T \quad \dots \quad \psi_Q^T \quad \phi_1^T \quad \dots \quad \phi_Q^T \right]^T, \quad (2.5.19)$$

$$\bar{\mathbf{s}}(k, t) = \left[\bar{s}_1(k, t) \quad \dots \quad \bar{s}_Q(k, t) \right]^T, \quad (2.5.20)$$

où ψ_q et ϕ_q sont respectivement le module et la phase de $\boldsymbol{\rho}_q$.

Le modèle (2.5.17) se prête à l'application d'une méthode haute résolution. Le critère retenu pour le DPD consiste à tester l'orthogonalité du vecteur directeur candidat $\mathbf{u}_k(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho})$ au sous-espace bruit $\boldsymbol{\Pi}_n(k)$ engendrés par les J matrices de covariance suivantes

$$\hat{\mathbf{R}}(k) = \frac{1}{T - J + 1} \sum_{n=1}^{T-J+1} \mathbf{x}(k, t_n)\mathbf{x}^H(k, t_n), \quad 1 \leq k \leq J, \quad (2.5.21)$$

où $t_n = nT_e$. Le critère de type MUSIC à minimiser est donc le suivant [AW05] :

$$D(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{k=1}^J \mathbf{u}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_k)\boldsymbol{\Pi}_n(k)\mathbf{u}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_k). \quad (2.5.22)$$

Remarquons que

$$D(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\rho}^H \left(\sum_{k=1}^J \mathbf{U}_k^H(\mathbf{p})\boldsymbol{\Pi}_n(k)\mathbf{U}_k(\mathbf{p}) \right) \boldsymbol{\rho}, \quad (2.5.23)$$

avec

$$\mathbf{U}_k(\mathbf{p}) = \text{diag} \left(\mathbf{a}_1(\mathbf{p})e^{-j2\pi f_k \tau_1(\mathbf{p})} \quad \dots \quad \mathbf{a}_L(\mathbf{p})e^{-j2\pi f_k \tau_L(\mathbf{p})} \right), \quad (2.5.24)$$

où $\text{diag}(v_1 \quad \dots \quad v_N)$ désigne la matrice bloc-diagonale dont les éléments sont $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$.

Nous disposons du résultat suivant [Gan59] :

Théorème 3. [minimum d'un rapport de formes quadratiques] Soient $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$ et $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^H \mathbf{B} \mathbf{x}$ deux formes quadratiques où \mathbf{B} est définie positive, et soit $\lambda_{\min} \{ \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \}$ la valeur propre minimale de $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$ dont le vecteur associé est noté \mathbf{x}_{\min} , alors le minimum du rapport des deux formes quadratiques $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ et $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ est égal à $\lambda_{\min} \{ \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \}$:

$$\lambda_{\min} \{ \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \} = \min_{\mathbf{x}} \frac{A(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{B(\mathbf{x}, \mathbf{x})}, \quad (2.5.25)$$

et cette valeur minimale est atteinte pour $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\min}$.

Selon le théorème 3, la minimisation de (2.5.22) selon $\boldsymbol{\rho}$ revient à chercher la valeur propre minimale de la matrice $\sum_{k=1}^J \mathbf{U}_k^H(\mathbf{p})\boldsymbol{\Pi}_n(k)\mathbf{U}_k(\mathbf{p})$, le critère à minimiser pour le DPD s'écrit donc :

$$J_{DPD}(\mathbf{p}) = \lambda_{\min} \left\{ \sum_{k=1}^J \mathbf{U}_k^H(\mathbf{p})\boldsymbol{\Pi}_n(k)\mathbf{U}_k(\mathbf{p}) \right\}, \quad (2.5.26)$$

où $\lambda_{\min} \{\mathbf{A}\}$ désigne la valeur propre minimale de \mathbf{A} .

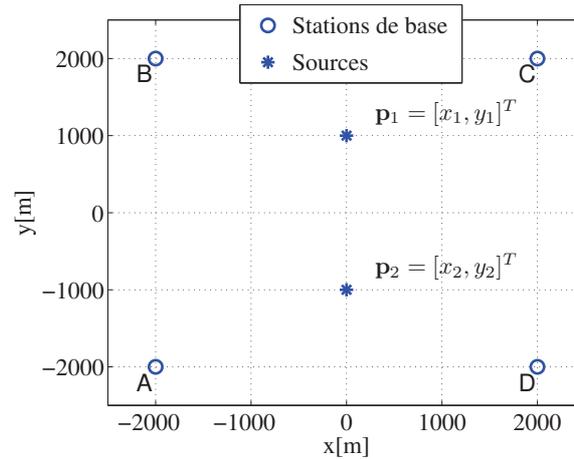


FIGURE 2.5.1 – 4 stations de base A, B, C et D (réseaux circulaires à 3 capteurs de rayon 0.5λ où λ est la longueur d’onde associée à la porteuse de fréquence f_0) formant un carré de dimensions $4 \times 4 \text{ km}^2$. Les sources sont en $\mathbf{p}_1 = [x_1 \ y_1]^T$ et $\mathbf{p}_2 = [x_2 \ y_2]^T$.

Dans la figure 2.5.2, nous comparons le DPD avec une triangulation conventionnelle dans le cadre d’un scénario décrit à la figure 2.5.1. Les critères sont minimisés par une méthode de Newton initialisée par une recherche sur une grille de points. La REQM est estimée de manière empirique par :

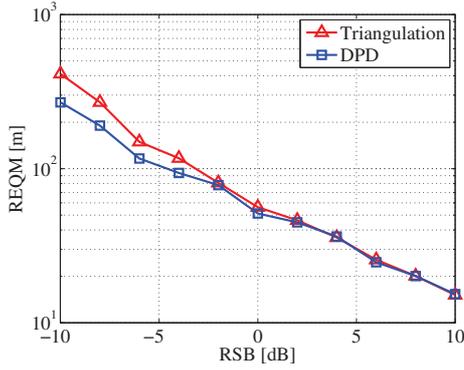
$$REQM = \sqrt{\frac{1}{MC} \sum_{k=1}^{MC} \|\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}_k\|^2}, \quad (2.5.27)$$

où MC est le nombre de tirages aléatoires et $\hat{\mathbf{p}}_k$ la k -ième estimation de la réalisation correspondante de l’estimateur.

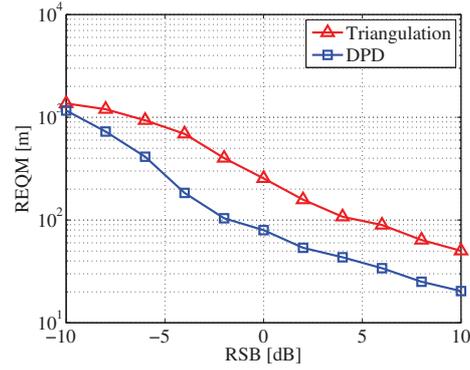
Nous observons qu’en présence d’une seule source le DPD est asymptotiquement (en RSB) équivalent à une approche conventionnelle. En revanche, en présence de plusieurs sources le DPD est plus performant même quand le RSB tend vers l’infini.

2.5.4.2 Limites du DPD

Comme nous l’avons souligné, le problème traité est de nature large bande. Le traitement DPD est dit incohérent puisqu’il est constitué d’une simple somme de critères obtenus à la sortie de plusieurs canaux FFT. Ce type d’approche est sous-optimal pour un problème large-bande, tout d’abord en termes de performances [WK85a]. Ensuite, il présuppose pour fonctionner de manière optimale que la puissance du signal soit la même dans chaque canal FFT, ou d’avoir un *a priori* sur le support spectral des signaux afin de n’exploiter que les canaux où le signal est présent. Prenons l’exemple de deux sources dont les spectres sont illustrés à la figure 2.5.3 : le spectre de la première source est une raie (porteuse pure), la seconde est blanche dans la bande de réception. Lorsque l’une ou l’autre des sources est présente, avec un simple seuillage des valeurs propres des matrices de covariance sur chaque canal, on peut éliminer les canaux qui ne contiennent pas de signal d’intérêt. En revanche, lorsque les deux sources sont présentes, la mise en œuvre s’avère compliquée, et estimer quelle source est présente dans quel canal est un problème non trivial qui ne semble pas avoir fait l’objet de travaux dans la littérature

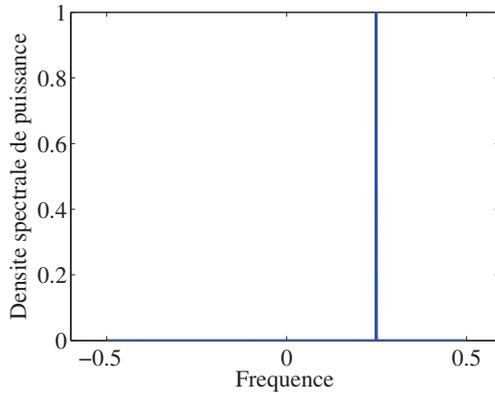


(a) REQM pour la source 1 en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$ selon le scénario de la figure 2.5.1.

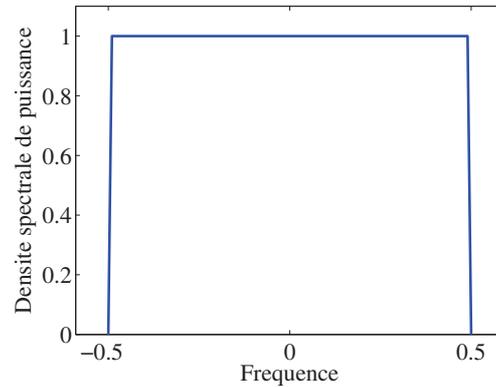


(b) REQM pour la source 1 en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$ présence d'une seconde source en $\mathbf{p}_2 = [0 \ -1000]^T$ selon le scénario de la figure 2.5.1.

FIGURE 2.5.2 – Comparaisons des performances du DPD ($J = 4$) et d'une triangulation conventionnelle dans le cas d'une source (a) ou de deux (b), $T=100$, nombre de réalisations=100.



(a) Source 1



(b) Source 2

FIGURE 2.5.3 – Densité spectrale de puissance pour deux sources. La première est une porteuse pure, la seconde est blanche dans toute la bande de réception.

actuelle. Supposons $J = 4$ canaux fréquentiels et une source dont le spectre n'occupe que le premier canal fréquentiel, comme l'illustre la figure 2.5.3a tandis que la seconde source possède un spectre blanc et occupe donc la totalité des quatre canaux, comme l'illustre la figure 2.5.3b. Deux choix paraissent naturels quant au choix du nombre de canaux dans l'implémentation du DPD : le premier canal seulement ou les quatre canaux.

- Si nous implémentons le DPD avec le premier canal alors l'estimation de la position de la source 2 sera vraisemblablement sous-optimale puisqu'elle n'exploitera pas toute la bande dans laquelle celle-ci est présente.
- Si nous implémentons le DPD avec les quatre canaux, alors il deviendra impossible d'estimer la position de la source 1 correctement puisque $\mathbf{u}_k^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\Pi}_n(k) \mathbf{u}_k(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}) \neq 0$ *a priori* dans les canaux où le signal est absent. Nous aurons donc, même en régime asymptotique, $J_{DPD}(\mathbf{p}_1) \neq 0$ et le DPD sera donc inopérant.

2.5.5 Calcul des performances en Géolocalisation passive par un réseau de stations multicateurs

La borne de Cramer-Rao stochastique a été calculée en supposant les densités spectrales des sources connues [WK83] et un réseau où chaque station ne comporte qu'un capteur. De manière plus générale dans [KS04, EG07] on trouve l'expression de la borne de Cramer-Rao stochastique (hypothèse de signaux Gaussiens) pour le problème de localisation qui nous occupe ici et dont le modèle est décrit aux équations (2.3.1) et (2.3.5). L'article [AW05] fournit également la BCR du modèle (2.5.13) exploité par le DPD sous l'hypothèse d'indépendance des canaux fréquentiels et dans le cas de signaux Gaussiens. Il n'existe à notre connaissance aucun calcul traitant le problème de géolocalisation de sources par un réseau de stations multicateurs dans un contexte passif dans le cas de signaux déterministes inconnus.

La comparaison statistique entre une approche centralisée et décentralisée du problème de géolocalisation ici traité a fait l'objet des travaux [AW08b, AW09] qui prouvent qu'une approche en une étape est asymptotiquement équivalente à une approche en deux étapes pourvu que la deuxième étape comporte un algorithme des moindres carrés pondéré judicieusement. Ces derniers redémontrent en fait un résultat établi dans les travaux de Stoica et al. [SS89, SS90] portant sur le principe d'invariance étendu (EXIP, pour Extended Invariance Principle). Toutefois, ce principe n'est généralement pas respecté lors de la résolution du problème de localisation qui nous intéresse, comme nous le verrons au chapitre 3.

2.6 Conclusion

L'objet de la présente thèse est double. Sur le plan algorithmique, nous avons pour objectif de présenter une approche centralisée, alternative au DPD, qui fonctionne quel que soit le support fréquentiel des sources. Sur le plan de l'analyse de performances, nous avons également pour objectif de caractériser les performances optimales du problème de localisation posé par le biais de la borne de Cramer-Rao. Nous souhaitons enfin comparer les performances des approches centralisées et décentralisées à l'aide d'outils comme l'EXIP.

Chapitre 3

Cas de signaux bande étroite sur le réseau de stations

Lorsque les signaux sont bande étroite pour l'ensemble des stations, alors le problème posé se simplifie et bon nombre de solutions s'offrent alors. Ce cas particulier est également riche d'enseignements quant à la comparaison des performances entre les méthodes en une étape et deux étapes. Il constitue ainsi un intermédiaire pertinent à l'analyse du cas plus général des signaux large bande pour l'ensemble des stations qui fera l'objet du chapitre suivant.

3.1 Modèle des signaux

Lorsque les signaux sont dits bande étroite pour le réseau de stations, c'est à dire quand le produit TB est négligeable devant 1, nous avons vu au paragraphe 2.2 que nous pouvions alors écrire

$$s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) \approx s_q(t) e^{-j2\pi(f_0 + f_q)\tau_l(\mathbf{p}_q)}, \quad (3.1.1)$$

où f_q est la fréquence centrale du signal $s_q(t)$. C'est par exemple le cas lorsque les sources sont quasi équidistantes des stations, puisque le temps de propagation de l'onde à travers le réseau de stations $\Delta\tau_q$ devient presque nul : $\Delta\tau_q \approx 0$. Partant de l'équation (2.3.1), l'observation de la l -ième station s'écrit alors :

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q} \mathbf{a}_l(\theta_l(\mathbf{p}_q)) s_q(t) e^{-j2\pi(f_0 + f_q)\tau_l(\mathbf{p}_q)} + \mathbf{n}_l(t). \quad (3.1.2)$$

Remarquons qu'il y a une indétermination entre la phase de $\rho_{l,q}$ et le terme $e^{-j2\pi(f_0 + f_q)\tau_l(\mathbf{p}_q)}$, par conséquent nous incluons le terme $e^{-j2\pi(f_0 + f_q)\tau_l(\mathbf{p}_q)}$, qui ne peut pas être estimé, dans la phase de $\rho_{l,q}$. L'observation multistation $\mathbf{x}(t)$ de l'équation (2.3.5) s'écrit alors :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{q=1}^Q c_q \mathbf{u}(\theta_q(\mathbf{p}_q), \rho_q) s_q(t) + \mathbf{n}(t), \quad (3.1.3)$$

où c_q est défini à l'équation (2.5.10) et

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_q, \boldsymbol{\rho}_q) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\sum_{l=1}^L N_l |\rho_{l,q}|^2}} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1(\theta_{1,q}) \\ \rho_{2,q} \mathbf{a}_2(\theta_{2,q}) \\ \vdots \\ \rho_{L,q} \mathbf{a}_L(\theta_{L,q}) \end{bmatrix}, \quad (3.1.4)$$

où $\boldsymbol{\theta}_q = [\theta_{1,q} \ \dots \ \theta_{L,q}]$, $\theta_{l,q}$ étant l'angle d'arrivée de la q -ième source sur la l -ième station.

Dans la suite nous écrirons

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q) \triangleq \mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_q(\mathbf{p}_q), \boldsymbol{\rho}_q). \quad (3.1.5)$$

Le terme c_q sera inclus dans $s_q(t)$ dans la suite. Dès lors, nous pouvons écrire le modèle suivant :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (3.1.6)$$

où

$$\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{p}_1^T \ \dots \ \mathbf{p}_Q^T \ \boldsymbol{\psi}_1^T \ \dots \ \boldsymbol{\psi}_Q^T \ \boldsymbol{\phi}_1^T \ \dots \ \boldsymbol{\phi}_Q^T]^T, \quad (3.1.7)$$

où $\boldsymbol{\psi}_q$ et $\boldsymbol{\phi}_q$ sont respectivement la phase et l'amplitude de $\boldsymbol{\rho}_q$ défini à l'équation (2.5.11),

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}) = [\mathbf{u}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1) \ \dots \ \mathbf{u}(\mathbf{p}_Q, \boldsymbol{\rho}_Q)], \quad (3.1.8)$$

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \ \dots \ s_Q(t)]^T. \quad (3.1.9)$$

La matrice $\mathbf{A}(\cdot)$ est supposée de rang plein et telle que

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}') \Rightarrow \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}', \quad (3.1.10)$$

afin d'assurer l'identifiabilité du problème.

3.2 Une approche de type MUSIC

Nous proposons ici une approche du type MUSIC que nous appelons GMA pour Global MUSIC Approach [BFGL12] qui permet d'exploiter le fait que les signaux reçus par les stations proviennent tous des mêmes sources. Nous avons en effet une structure du modèle adaptée à l'emploi des techniques à sous-espace puisque sous l'hypothèse d'un bruit blanc spatialement :

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{S}\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\eta}) + \sigma^2\mathbf{I}, \quad (3.2.1)$$

où

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)], \quad (3.2.2)$$

et

$$\mathbf{S} = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]. \quad (3.2.3)$$

Le paramètre $\boldsymbol{\eta}$ est alors estimé par les Q zéros de la fonction de coût suivante :

$$C(\mathbf{p}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}) = \frac{\mathbf{u}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}) \hat{\boldsymbol{\Pi}}_n \mathbf{u}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi})}{\mathbf{u}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}) \mathbf{u}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi})}, \quad (3.2.4)$$

où $\hat{\boldsymbol{\Pi}}_n$ est le projecteur bruit formé des $N-Q$ vecteurs propres associés aux valeurs propres les plus faibles de \mathbf{R} .

Remarquons que nous pouvons écrire

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}) = \mathbf{U}(\mathbf{p}) \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}), \quad (3.2.5)$$

où

$$\mathbf{U}(\mathbf{p}) = \text{diag}(\mathbf{a}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{a}_L(\mathbf{p})), \quad (3.2.6)$$

et

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\sum_l N_l \psi_l^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \psi_2 e^{j\phi_2} \\ \vdots \\ \psi_L e^{j\phi_L} \end{bmatrix}. \quad (3.2.7)$$

En vertu du théorème 3, nous pouvons alors nous contenter de minimiser le critère suivant, débarrassé de ses paramètres de nuisance :

$$J_{GMA}(\mathbf{p}) = \lambda_{\min} \left\{ [\mathbf{U}^H(\mathbf{p}) \mathbf{U}(\mathbf{p})]^{-1} \mathbf{U}^H(\mathbf{p}) \hat{\boldsymbol{\Pi}}_n \mathbf{U}(\mathbf{p}) \right\}. \quad (3.2.8)$$

Remarquons que sous cette forme, l'algorithme proposé est équivalent au DPD avec un seul canal ($J = 1$) qui engloberait toute la bande de réception, en supposant que tous les signaux sont bande étroite sur le réseau de stations.

3.3 Bornes de Cramer-Rao

Les bornes de Cramer-Rao (BCR) sont des indicateurs que nous allons exploiter afin de comparer une approche centralisée par rapport à une approche décentralisée. Nous calculons ici les BCR dans le cas où les signaux sont disponibles (approche centralisée) ou non (approche décentralisée) à l'UCT.

La comparaison entre les deux bornes issues de deux modèles différents trouve son sens en ce qu'elle permet de juger de l'intérêt théorique d'une exploitation plus ou moins optimale des données du problème.

3.3.1 Borne de Cramer-Rao dans le cas de signaux bande étroite

Nous supposons que tous les signaux de toutes les stations sont disponibles à l'UCT, il devient alors possible d'exploiter le modèle (3.1.6). Le calcul de la BCR correspondante dans le cas de signaux bande étroite nous permet de caractériser les performances théoriques d'une approche centralisée.

Notons $\boldsymbol{\xi}$ le vecteur qui contient tous les paramètres d'intérêt, où nous retirons σ^2 puisqu'il n'influe en rien sur le calcul de la borne sur les autres paramètres [SN90] :

$$\boldsymbol{\xi} = \left[\boldsymbol{\eta}^T \quad \text{Re} \{ \mathbf{s}^T(t_1) \} \quad \dots \quad \text{Re} \{ \mathbf{s}^T(t_T) \} \quad \text{Im} \{ \mathbf{s}^T(t_1) \} \quad \dots \quad \text{Im} \{ \mathbf{s}^T(t_T) \} \right], \quad (3.3.1)$$

où $\boldsymbol{\eta}$ est défini à l'équation (3.1.7).

Puisque le modèle s'écrit

$$\mathbf{x}(t_n) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{s}(t_n) + \mathbf{n}(t_n), \quad 1 \leq n \leq T, \quad (3.3.2)$$

où $t_n = nT_e$ et où $\mathbf{n}(t)$ est Gaussien centré, circulaire, blanc spatialement et temporellement, nous avons alors la borne de Cramer-Rao bande étroite (BE) qui traduit les performances optimales d'une approche centralisée, en considérant les signaux comme des inconnues déterministes du problème :

$$[BCR_{BE}^{-1}(\boldsymbol{\eta})]_{ij} = \frac{2T}{\sigma^2} \text{Re} \left\{ \text{Tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_i} \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}}^\perp(\boldsymbol{\eta}) \frac{\partial \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_j} \hat{\mathbf{S}} \right) \right\}, \quad (3.3.3)$$

où $\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}}^\perp(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{I} - \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}) (\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\eta})\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}))^{-1} \mathbf{A}^H(\boldsymbol{\eta})$ et $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \mathbf{s}(t_n)\mathbf{s}^H(t_n)$.

L'intérêt de concentrer la borne selon les paramètres d'intérêt est double : d'une part, cela permet de pouvoir mieux interpréter la borne et d'autre part cela réduit le coût de calcul comparativement à l'inversion directe de la MIF (3.3.5). En effet, pour un modèle déterministe, la borne dépendant des signaux inconnus à chaque instant, la matrice de Fisher devient rapidement de très grande taille et son inversion est alors très coûteuse en temps de calcul.

Démonstration. Supposons que $\mathbf{n}(t_n)$ soit Gaussien centré, circulaire, blanc spatialement et temporellement et de covariance $\sigma^2\mathbf{I}$. Alors, sous l'hypothèse que les signaux sont des inconnues déterministes du problème, $\mathbf{x}(t_n)$ est Gaussien de moyenne

$$\mathbf{m}_n = \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{s}(t_n), \quad (3.3.4)$$

et de variance $\sigma^2\mathbf{I}$.

La matrice d'information de Fisher s'écrit alors [VT02] :

$$[\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})]_{ij} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^T \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{m}_n^H}{\partial \xi_i} \frac{\partial \mathbf{m}_n}{\partial \xi_j} \right\}. \quad (3.3.5)$$

Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{2}{\sigma^2} \text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^T \mathbf{G}_n^H \mathbf{G}_n \right\}, \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \text{Re} \{ \mathbf{G}^H \mathbf{G} \}, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

où $\text{Re} \{ \cdot \}$ désigne la partie réelle, et

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_n &= \frac{\partial \mathbf{m}_n}{\partial \boldsymbol{\xi}^T}, \\ &= \left[\mathbf{D}_n \quad \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{A} \quad \mathbf{e}_n \otimes j\mathbf{A} \right], \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$\mathbf{D}_n = \frac{\partial \mathbf{m}_n}{\partial \boldsymbol{\eta}^T}, \quad (3.3.8)$$

$$\mathbf{G} = \left[\mathbf{G}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{G}_T^T \right]^T, \quad (3.3.9)$$

\mathbf{e}_t représente ici la t -ième ligne de la matrice identité \mathbf{I}_T de taille $T \times T$.

Remarquons que l'on peut alors écrire \mathbf{G} sous la forme :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{V} & j\mathbf{V} \end{bmatrix}, \quad (3.3.10)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_T \otimes \mathbf{A} \end{bmatrix}, \\ &= \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^T & \dots & \mathbf{D}_T^T \end{bmatrix}^T. \quad (3.3.12)$$

Partant de la structure (3.3.6) nous pouvons alors exploiter [SL01] et exprimer la BCR du modèle (3.1.6), que nous appellerons BCR_{BE} , en fonction de $\boldsymbol{\eta}$ seulement :

$$BCR_{BE}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{2}{\sigma^2} Re \left\{ \mathbf{D}^H \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{V}}^\perp \mathbf{D} \right\}, \quad (3.3.13)$$

où

$$\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{V}}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{V} (\mathbf{V}^H \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}. \quad (3.3.14)$$

Mais comme

$$\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{V}}^\perp = \mathbf{I}_T \otimes \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}}^\perp, \quad (3.3.15)$$

où $\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$, nous obtenons finalement :

$$BCR_{BE}^{-1}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{2}{\sigma^2} Re \left\{ \sum_{n=1}^T \mathbf{D}_n^H \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}}^\perp \mathbf{D}_n \right\}, \quad (3.3.16)$$

que nous pouvons réécrire selon l'équation (3.3.3). □

3.3.2 Approche décentralisée (triangulation)

Une triangulation n'exploite pas le vecteur étendu précédent, elle n'exploite pas le fait que les signaux reçus par les stations proviennent des mêmes sources. Le modèle correspondant est vu comme des sous-ensembles du vecteur $\mathbf{x}(t)$ traités indépendamment les uns des autres :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(t_n) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{a}_1(\theta_1(\mathbf{p}_q)) s_{1,q}(t_n) + \mathbf{n}_1(t_n) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_L(t_n) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{a}_L(\theta_L(\mathbf{p}_q)) s_{L,q}(t_n) + \mathbf{n}_L(t_n) \end{cases}, \quad 1 \leq n \leq T \quad (3.3.17)$$

Les vecteurs bruit $\mathbf{n}_l(t)$ ($1 \leq l \leq L$) sont supposés Gaussiens circulaires et centrés. Les vecteurs paramètres inconnus sont

$$\mathbf{p}_{tot} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T & \dots & \mathbf{p}_Q^T \end{bmatrix}^T, \quad (3.3.18)$$

et

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T & \dots & \mathbf{s}_L^T \end{bmatrix}^T, \quad (3.3.19)$$

où

$$\mathbf{s}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_l^T(t_1) & \dots & \mathbf{s}_l^T(t_T) \end{bmatrix}^T, \quad (3.3.20)$$

avec

$$\mathbf{s}_l(t_n) = \begin{bmatrix} s_{l,1}(t_n) & \dots & s_{l,Q}(t_n) \end{bmatrix}^T. \quad (3.3.21)$$

Le vecteur paramètre inconnu global du problème est donc :

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{tot}^T & Re\{\mathbf{s}^T\} & Im\{\mathbf{s}^T\} \end{bmatrix}^T. \quad (3.3.22)$$

La correspondance du modèle (3.3.17) avec (3.1.6) est assurée en prenant

$$s_{l,q}(t) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\sum_{l=1}^L \psi_{l,q}^2 N_l}} \psi_{l,q} e^{j\phi_{l,q}} s_q(t), \quad (3.3.23)$$

où on rappelle que $\rho_{l,q} = \psi_{l,q} e^{j\phi_{l,q}}$.

La BCR du modèle (3.3.17) que nous appellerons borne de Cramer-Rao décentralisée (*BCRD*) s'écrit

$$BCRD^{-1}(\mathbf{p}_{tot}) = \sum_{l=1}^L \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_l^T}{\partial \mathbf{p}_{tot}} BCR^{-1}(\boldsymbol{\theta}_l) \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_l}{\partial \mathbf{p}_{tot}^T}, \quad (3.3.24)$$

la matrice $BCR^{-1}(\boldsymbol{\theta}_l)$ est ici la borne de Cramer-Rao déterministe en AOA [SN90] sur la l -ième station :

$$BCR^{-1}(\boldsymbol{\theta}_l) = \frac{2T}{\sigma^2} Re \left\{ \mathbf{D}^H \boldsymbol{\Pi}_l^\perp \mathbf{D} \odot \hat{\mathbf{S}}_l^T \right\}, \quad (3.3.25)$$

avec

$$\hat{\mathbf{S}}_l = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \mathbf{s}_l^H(t_n) \mathbf{s}_l(t_n), \quad (3.3.26)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}_l(\theta_{l,1})}{\partial \theta_{l,1}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{a}_l(\theta_{l,Q})}{\partial \theta_{l,Q}} \end{bmatrix}, \quad (3.3.27)$$

et $\boldsymbol{\Pi}_l^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{A}_l (\mathbf{A}_l^H \mathbf{A}_l)^{-1} \mathbf{A}_l^H$ avec $\mathbf{A}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_l(\theta_{l,1}) & \dots & \mathbf{a}_l(\theta_{l,Q}) \end{bmatrix}$.

Démonstration. Notons $\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})$ la matrice de Fisher correspondante. Considérons le changement de variable suivant :

$$g : \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{tot} \\ Re\{\mathbf{s}\} \\ Im\{\mathbf{s}\} \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_{tot} \\ Re\{\mathbf{s}\} \\ Im\{\mathbf{s}\} \end{pmatrix}, \quad (3.3.28)$$

où

$$\boldsymbol{\theta}_{tot} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1^T & \dots & \boldsymbol{\theta}_L^T \end{bmatrix}^T, \quad (3.3.29)$$

et

$$\boldsymbol{\theta}_l = \begin{bmatrix} \theta_{l,1} & \dots & \theta_{l,Q} \end{bmatrix}^T, \quad (3.3.30)$$

avec $\theta_{l,q} = \theta_l(\mathbf{p}_q)$.

Le modèle s'écrit maintenant :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(t_n) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{a}_1(\theta_{1,q}) s_{1,q}(t) + \mathbf{n}_1(t_n) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_L(t_n) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{a}_L(\theta_{L,q}) s_{L,q}(t_n) + \mathbf{n}_L(t_n) \end{cases} . \quad (3.3.31)$$

Nous avons alors [Kay93] :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta}) &= \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^T}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{\eta}^T} \\ &= BCRD^{-1}(\boldsymbol{\eta}). \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

Notons

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\theta\theta} & \mathbf{J}_{\theta s} \\ \mathbf{J}_{s\theta} & \mathbf{J}_{ss} \end{bmatrix}. \quad (3.3.33)$$

Puisque

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^T}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_{tot}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}_{tot}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{2LQT} \end{bmatrix}, \quad (3.3.34)$$

et en utilisant le lemme d'inversion matricielle (voir [VT02] ou annexe A.1) , nous avons la borne de Cramer-Rao d'une approche décentralisée :

$$BCRD^{-1}(\mathbf{p}_{tot}) = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{tot}^T}{\partial \mathbf{p}_{tot}} \mathbf{J}_{\theta\theta} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{tot}}{\partial \mathbf{p}_{tot}^T} - \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{tot}^T}{\partial \mathbf{p}_{tot}} \mathbf{J}_{s\theta} \mathbf{J}_{ss}^{-1} \mathbf{J}_{\theta s} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{tot}}{\partial \mathbf{p}_{tot}^T}, \quad (3.3.35)$$

$$= \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{tot}^T}{\partial \mathbf{p}_{tot}} (\mathbf{J}_{\theta\theta} - \mathbf{J}_{s\theta} \mathbf{J}_{ss}^{-1} \mathbf{J}_{\theta s}) \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{tot}}{\partial \mathbf{p}_{tot}^T}. \quad (3.3.36)$$

Toujours en exploitant le lemme d'inversion matricielle $\mathbf{J}_{\theta\theta} - \mathbf{J}_{s\theta} \mathbf{J}_{ss}^{-1} \mathbf{J}_{\theta s} = BCR^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{tot})$ où $BCR^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{tot})$ est la borne déterministe du modèle (3.3.31). On peut montrer que :

$$BCR^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{tot}) = \begin{bmatrix} BCR^{-1}(\boldsymbol{\theta}_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & BCR^{-1}(\boldsymbol{\theta}_L) \end{bmatrix}. \quad (3.3.37)$$

On a alors :

$$BCRD^{-1}(\mathbf{p}_{tot}) = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{tot}^T}{\partial \mathbf{p}_{tot}} BCR^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{tot}) \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{tot}}{\partial \mathbf{p}_{tot}^T}. \quad (3.3.38)$$

□

Remarquons que cette borne s'appuie sur un modèle qui ne nécessite pas d'hypothèse bande étroite des signaux sur le réseau de stations. En effet, les signaux $s_{l,q}(t)$ reçus par les stations sont quelconques. On peut très bien avoir :

$$s_{l,q}(t) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\sum_{l=1}^L \psi_{l,q}^2 N_l}} \psi_{l,q} e^{j\phi_{l,q}} s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)). \quad (3.3.39)$$

La borne (3.3.24) nous permet de prédire quelle est la performance optimale que l'on peut espérer pour une triangulation.

3.3.3 Cas d'une source

Dans le cas d'une source nous démontrons que

$$BCRD^{-1}(\mathbf{p}) = BCR_{BE}^{-1}(\mathbf{p}). \quad (3.3.40)$$

Démonstration. Nous montrons dans l'annexe A.2 que la borne de l'approche en une seule étape s'écrit, dans le cas d'une seule source :

$$[BCR_{BE}^{-1}]_{ij} = \frac{2T\hat{S}}{\sigma^2} \sum_{l=1}^L Re \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_l^H}{\partial p_i} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}_l) \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial p_j} \right\}, \quad (3.3.41)$$

où les vecteurs \mathbf{u}_l , $l \in \{1, \dots, L\}$ sont définis à l'équation (A.2.1) et où

$$\mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^H}{\mathbf{u}^H\mathbf{u}}. \quad (3.3.42)$$

Puisque

$$\mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}_i) = \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{a}_i), \quad (3.3.43)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial p_i} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\sum_{l=1}^L N_l \psi_l^2}} \psi_l e^{j\phi_l} \frac{\partial \mathbf{a}_l}{\partial p_i}, \quad (3.3.44)$$

et

$$\hat{S}_l = \frac{N}{\sum_{l=1}^L N_l \psi_l^2} \hat{S}. \quad (3.3.45)$$

L'élément ij de l'inverse de BCR_{BE} s'écrit finalement :

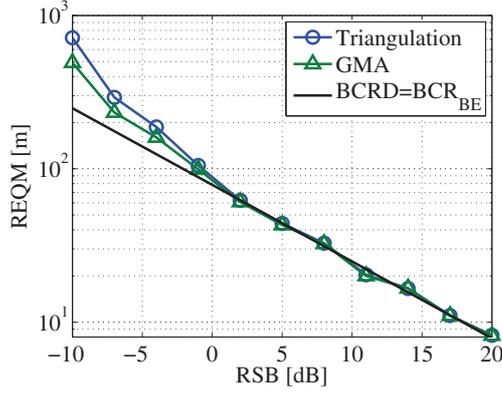
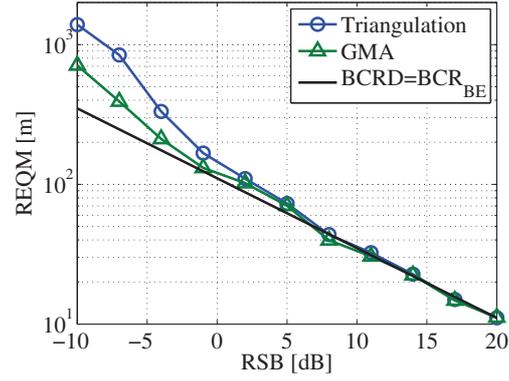
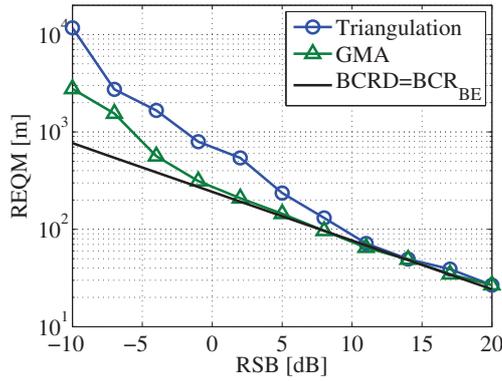
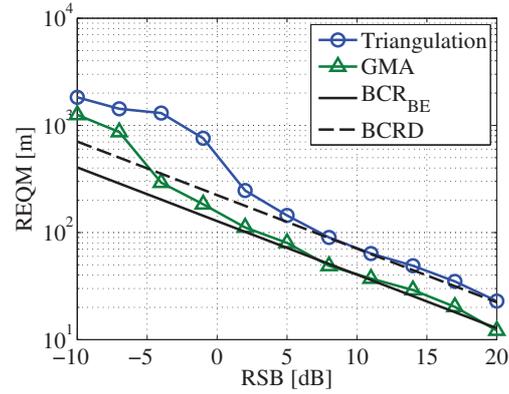
$$\begin{aligned} [BCR_{BE}^{-1}(\mathbf{p})]_{ij} &= \frac{2T}{\sigma^2} \sum_{l=1}^L Re \left\{ \frac{\partial \mathbf{a}_l^H(\mathbf{p})}{\partial p_i} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{a}_l) \frac{\partial \mathbf{a}_l(\mathbf{p})}{\partial p_j} \hat{S}_l \right\} \\ &= \sum_{l=1}^L \frac{\partial \theta_l}{\partial p_i} \left(\frac{2T}{\sigma^2} Re \left\{ \frac{\partial \mathbf{a}_l^H(\mathbf{p})}{\partial \theta_l} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{a}_l) \frac{\partial \mathbf{a}_l(\mathbf{p})}{\partial \theta_l} \hat{S}_l \right\} \right) \frac{\partial \theta_l}{\partial p_j}. \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

Ce qui d'après (3.3.25) s'écrit :

$$[BCR_{BE}^{-1}(\mathbf{p})]_{ij} = \sum_{l=1}^L \frac{\partial \theta_l}{\partial p_i} BCR^{-1}(\boldsymbol{\theta}_l) \frac{\partial \theta_l}{\partial p_j} \quad (3.3.47)$$

et nous permet de conclure à l'égalité entre les équations (3.3.24) et (3.3.47). \square

Le résultat (3.3.40) signifie que, dans le cas d'une source, l'exploitation du fait que les signaux proviennent de la même source ne conduit pas à une amélioration des performances théoriques d'une approche centralisée comparée à une approche décentralisée.

(a) REQM de la source blanche présente en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$, $\boldsymbol{\rho}_1 = [1 \ 1]^T$.(b) REQM de la source blanche présente en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$, $\boldsymbol{\rho}_1 = [1 \ 2]^T$.(c) REQM de la source blanche présente en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$, $\boldsymbol{\rho}_1 = [1 \ 5]^T$.(d) REQM de la source blanche présente en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$ en présence d'une seconde source en $\mathbf{p}_2 = [0 \ -1000]^T$, $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = [1 \ 1]^T$.FIGURE 3.4.1 – Localisation de signaux bande étroite à l'aide de deux stations de base A et B selon le scénario de la figure 2.5.1, $T=100$, nombre de réalisations=100.

3.4 Résultats numériques

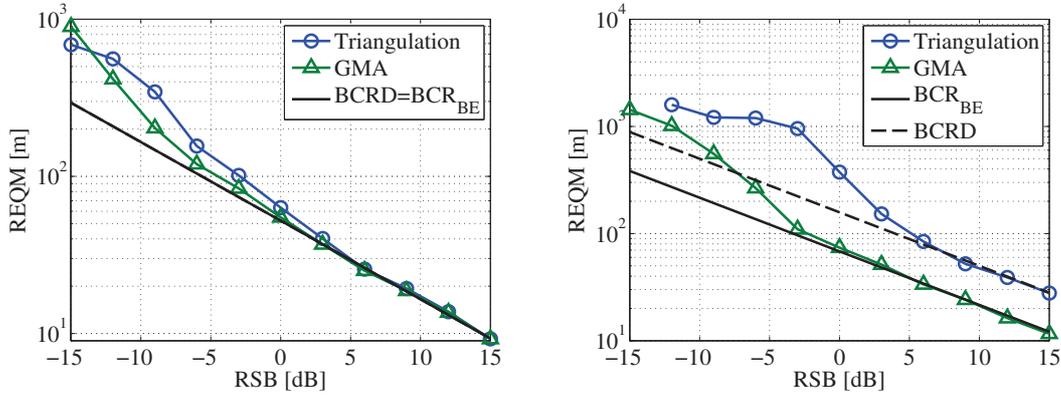
Les critères sont minimisés par une méthode de Newton initialisée par une recherche sur une grille de points. La REQM est estimée de manière empirique par :

$$REQM = \sqrt{\frac{1}{MC} \sum_{k=1}^{MC} \|\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}_k\|^2}, \quad (3.4.1)$$

où MC est le nombre de tirages aléatoires et $\hat{\mathbf{p}}_k$ la k -ième estimation de la réalisation correspondante de l'estimateur.

Nous considérons dans un premier temps le cas de deux stations dans la figure 3.4.1. Nous avons vu précédemment que les bornes correspondantes sont égales. On observe alors dans ce cas à la figure 3.4.1a que les deux algorithmes considérés sont asymptotiquement équivalents et atteignent la borne de Cramer-Rao. Lorsque l'on augmente $\rho_{2,1}$ dans $\boldsymbol{\rho} = [\rho_{1,1} \ \rho_{2,1}]^T$ alors on constate aux figures 3.4.1b et 3.4.1c que l'approche en une étape est plus robuste qu'une approche classique en deux étapes. En effet, on conçoit que si la puissance du signal reçu par une station est très faible, alors l'estimation de l'angle d'arrivée correspondant sera peu précise, ce qui conduira à une estimation de la position assez mauvaise puisqu'effectuée à partir d'une donnée peu fiable. En revanche,

on constate qu'une approche à une étapes exploitant l'amplitude différentielle entre les stations ρ souffre moins de ce phénomène. Lorsqu'il y a deux sources alors on constate sur la figure 3.4.1d que non seulement la borne de l'approche à une étape se situe en dessous de l'approche classique mais que chaque algorithme atteint sa borne. Ceci montre la pertinence de ces approches et la supériorité de l'algorithme en une étape GMA.



(a) REQM de la source blanche présente en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$. (b) REQM de la source blanche présente en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$ en présence d'une seconde source $\mathbf{p}_2 = [0 \ -1000]^T$.

FIGURE 3.4.2 – Localisation de signaux bande étroite à l'aide de quatre stations selon le scénario de la figure 2.5.1, $T=100$, nombre de réalisations=200, $\rho_1 = \rho_2 = [1 \ 1 \ 1]^T$.

Pour quatre stations, on constate toujours que lorsqu'une seule source est présente, comme dans la figure 3.4.2a, les approches sont asymptotiquement équivalentes. En revanche, en présence de deux sources, comme sur la figure 3.4.2b, l'approche à une étape est résolument meilleure.

3.5 Approche centralisée contre approche décentralisée.

Nous allons maintenant comparer les approches centralisées en une seule étape et les approches en deux étapes. Nous allons montrer dans un premier temps que l'on peut voir l'approche en deux étapes comme une reparamétrisation du problème d'origine, ce qui à l'aide du principe d'invariance étendu (EXIP) [SS89] va nous permettre d'en déduire un lien entre les différentes approches du problème.

3.5.1 Modèles de signaux

Rappelons que le modèle des signaux dans le cas de signaux bande étroite sur le réseau de stations est le suivant :

$$\mathbf{x}_l(t_n) = \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q} \mathbf{a}_l(\theta_l(\mathbf{p}_q)) s_q(t_n) + \mathbf{n}_l(t_n), \quad 1 \leq n \leq T. \quad (3.5.1)$$

Nous allons maintenant envisager trois stratégies qui découlent les unes des autres par des reparamétrisations successives du modèle original (3.5.1).

3.5.1.1 Modèle centralisé en une étape (Stratégie S1)

Nous pouvons écrire

$$\mathbf{x}(t_n) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q) s_q(t_n) + \mathbf{n}(t_n).$$

Les paramètres inconnus sont les suivants :

$$\boldsymbol{\eta} = \left[\mathbf{p}^T \quad \boldsymbol{\psi}^T \quad \boldsymbol{\phi}^T \quad Re\{\mathbf{s}^T\} \quad Im\{\mathbf{s}^T\} \right]^T, \quad (3.5.2)$$

$$\text{où } \mathbf{p} = \left[\mathbf{p}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{p}_Q^T \right]^T, \boldsymbol{\psi} = \left[\boldsymbol{\psi}_1^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\psi}_Q^T \right]^T, \boldsymbol{\phi} = \left[\boldsymbol{\phi}_1^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_Q^T \right]^T, \\ \mathbf{s} = \left[\mathbf{s}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{s}_Q^T \right]^T, \mathbf{s}_q = \left[s_q(t_1) \quad \dots \quad s_q(t_T) \right]^T.$$

Le problème consiste alors à construire puis optimiser une règle d'estimation $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}(\mathbf{p}), \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{s})$, où $\mathbf{x} = \left[\mathbf{x}^T(t_1) \quad \dots \quad \mathbf{x}^T(t_T) \right]^T$ représente les données et $\boldsymbol{\theta}$ l'ensemble des directions d'arrivée. On peut résoudre ce problème d'estimation à l'aide de bon nombre de méthodes haute résolution comme MUSIC ou le MVD. Une approche de type MVD (ou MUSIC si les sources sont décorrélatées) est optimale en ce sens qu'elle va atteindre la borne de Cramer-Rao correspondante lorsque le rapport signal à bruit va tendre vers l'infini [RFCL06].

3.5.1.2 Modèle centralisé en deux étapes (Stratégie S2)

Nous estimons maintenant d'abord tous les angles d'arrivée sur chacune des stations simultanément à l'aide de tous les signaux transmis à l'UCT, puis nous en déduisons la position par une étape de moindres carrés. Puisque les angles d'arrivées de chacune des stations sont estimés simultanément nous avons bien à faire à une approche centralisée. Elle est dite en deux étapes puisque la position est déduite de paramètres intermédiaires qui sont ici des angles d'arrivée. Cette stratégie intermédiaire trouve un intérêt particulier lorsque l'estimation des angles nous intéresse prioritairement, en vue d'effectuer un filtrage par exemple, ou alors en présence de multitrajets, lorsque l'on ne peut estimer directement la position des sources.

Pour cela nous définissons

$$\mathbf{x}(t_n) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_q, \boldsymbol{\rho}_q) s_q(t_n) + \mathbf{n}(t_n), \quad (3.5.3)$$

où le vecteur $\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_q, \boldsymbol{\rho}_q)$ est défini à l'équation (3.1.4).

Le vecteur des paramètres inconnus devient alors

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \left[\boldsymbol{\theta}_1^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\theta}_Q^T \quad \boldsymbol{\psi}^T \quad \boldsymbol{\phi}^T \quad Re\{\mathbf{s}^T\} \quad Im\{\mathbf{s}^T\} \right]^T, \quad (3.5.4)$$

où $\boldsymbol{\theta}_q = \left[\theta_{1,q} \quad \dots \quad \theta_{L,q} \right]^T$. La dépendance de $\theta_{l,q}$ en \mathbf{p}_q est ici perdue, cela revient à relâcher la contrainte d'intersection unique pour les directions d'arrivée sur chacune des stations de chacune de sources. Dans un premier temps, l'UCT fournit $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(2)}$ une estimée de $\boldsymbol{\theta} = \left[\boldsymbol{\theta}_1^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\theta}_Q^T \right]^T$ selon le modèle (3.5.3). Le problème consiste alors à construire

puis optimiser une règle d'estimation $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{s})$. Remarquons qu'alors cela nécessite de disposer de tous les signaux reçus par les stations à l'UCT si l'on veut résoudre ce problème par une approche de type haute résolution. La position est ensuite estimée classiquement par un critère des moindres carrés :

$$\hat{\mathbf{p}}^{(2)} = \underset{\mathbf{p}}{\operatorname{argmin}} \left\| \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(2)} - f(\mathbf{p}) \right\|_{\mathbf{W}_2}^2, \quad (3.5.5)$$

où $f(\cdot)$ est la fonction reliant \mathbf{p} à $\boldsymbol{\theta}$ et où on a défini pour tout vecteur \mathbf{x} : $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{W}}^2 = \mathbf{x}^H \mathbf{W} \mathbf{x}$.

Remarquons que par l'intermédiaire de cette deuxième étape on réintroduit le fait que toutes les directions d'arrivée doivent s'intersecter au même endroit. La position estimée est donc celle qui, selon la pondération introduite, rend le mieux compte de cette contrainte que devraient respecter les directions d'arrivée estimées.

3.5.1.3 Modèle décentralisé en deux étapes (Stratégie conventionnelle S3)

Si on juge le transfert de l'intégralité des signaux à l'UCT trop coûteux on peut désirer estimer localement sur chaque station les angles d'arrivée correspondants, puis les transmettre à l'UCT. La position est ensuite déduite par une étape de moindres carrés. Considérons alors le modèle suivant :

$$\mathbf{x}_l(t_n) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{a}(\theta_{l,q}) s_{l,q}(t_n) + \mathbf{n}_l(t_n), \quad 1 \leq l \leq L, \quad (3.5.6)$$

où nous avons effectué le changement de variable suivant par rapport à la stratégie 2 :

$$s_{l,q}(t_n) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\sum_l N_l |\psi_{l,q}|^2}} \psi_{l,q} e^{j\phi_{l,q}} s_q(t_n). \quad (3.5.7)$$

Cela revient à ne plus exploiter le fait que les signaux reçus par chacune des stations proviennent des mêmes signaux émis $s_q(t)$ par chacun des émetteurs. Les paramètres inconnus deviennent alors :

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \left[\boldsymbol{\theta}^T \quad \operatorname{Re} \{ \mathbf{s}_1^T \} \quad \dots \quad \operatorname{Re} \{ \mathbf{s}_L^T \} \quad \operatorname{Im} \{ \mathbf{s}_1^T \} \quad \dots \quad \operatorname{Im} \{ \mathbf{s}_L^T \} \right]^T, \quad (3.5.8)$$

où $\mathbf{s}_l = \left[\mathbf{s}_{l,1}^T \quad \dots \quad \mathbf{s}_{l,Q}^T \right]^T$, avec $\mathbf{s}_{l,q} = \left[s_{l,q}(t_1) \quad \dots \quad s_{l,q}(t_T) \right]^T$.

Nous notons $\hat{\boldsymbol{\theta}}_q^{(3)}$ une estimée de $\boldsymbol{\theta}_q$ dans (3.5.6). Le modèle correspondant à cette stratégie conduit naturellement à un traitement décentralisé en chaque station : l'estimée des angles d'arrivée sur la l -ième station par une méthode haute résolution ne requiert que l'emploi des observations $\mathbf{x}_l(t_n)$ ($1 \leq n \leq T$). En effet, il nous faut construire puis optimiser une règle d'estimation $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_L)$. On remarque aisément que dans le cas du maximum de vraisemblance déterministe, la minimisation du critère global $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_L)$ correspond à la on minimisation locale des critères du maximum de vraisemblance $L_l(\mathbf{x}_l, \boldsymbol{\theta}_l, \mathbf{s}_l)$ sur chacune des stations, avec $\boldsymbol{\theta}_l = \left[\theta_{l,1} \quad \dots \quad \theta_{l,Q} \right]^T$. Ce modèle conduit donc naturellement à une stratégie décentralisée.

La position des sources est ensuite estimée de manière classique [Tor84] par :

$$\hat{\mathbf{p}}_q^{(3)} = \underset{\mathbf{p}}{\operatorname{argmin}} \left\| \hat{\boldsymbol{\theta}}_q^{(3)} - f(\mathbf{p}) \right\|_{\mathbf{W}_{3,q}}^2. \quad (3.5.9)$$

Ceci correspond à une triangulation classique en deux étapes.

3.5.2 Le principe EXIP

Il est parfois utile pour résoudre un problème de le reparamétriser de manière judicieuse afin de le simplifier. Une fois les paramètres du modèle reparamétrisé estimés, il faut ensuite revenir aux paramètres d'intérêt originaux. Dans ce cadre d'étude, Stoica et al. [SS89, SS90] établissent le résultat suivant :

Théorème 4. [EXIP] *Considérons*

$$\boldsymbol{\xi} = g(\boldsymbol{\eta}), \quad (3.5.10)$$

avec g injective et définie sur le domaine d'intérêt. Soit $L(\mathbf{x}, g(\boldsymbol{\eta}))$ une fonction de coût à minimiser qui dépend des données \mathbf{x} et d'un paramètre d'intérêt $\boldsymbol{\eta}$. Notons $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ et $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ les arguments qui minimisent respectivement $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ et $L(\mathbf{x}, g(\boldsymbol{\eta}))$:

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \underset{\boldsymbol{\eta}}{\operatorname{argmin}} L(\mathbf{x}, g(\boldsymbol{\eta})), \quad (3.5.11)$$

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \underset{\boldsymbol{\xi}}{\operatorname{argmin}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}). \quad (3.5.12)$$

Si $g(\hat{\boldsymbol{\eta}})$ tend vers $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ (en RSB ou en nombre d'échantillons), alors

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}' = \underset{\boldsymbol{\eta}}{\operatorname{argmin}} \left(\hat{\boldsymbol{\xi}} - g(\boldsymbol{\eta}) \right)^T \mathbf{W} \left(\hat{\boldsymbol{\xi}} - g(\boldsymbol{\eta}) \right), \quad (3.5.13)$$

où

$$\mathbf{W} = E \left[\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi} \partial \boldsymbol{\xi}^T} \right], \quad (3.5.14)$$

converge en probabilité vers $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ (en RSB ou en nombre d'échantillons).

Nous nous intéresserons au cas où le RSB tend vers l'infini.

Remarque. Si la fonction de coût correspond à la vraisemblance, alors le poids à adopter \mathbf{W} est la matrice de Fisher.

Remarque. Si le changement de variable n'affecte qu'une partie des données :

$$g : \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.5.15)$$

alors on peut directement proposer l'estimateur suivant, issu de l'EXIP :

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}'_1 = \underset{\boldsymbol{\eta}_1}{\operatorname{argmin}} \left\| \hat{\boldsymbol{\xi}}_1 - g(\boldsymbol{\eta}_1) \right\|_{\mathbf{W}_1}^2, \quad (3.5.16)$$

avec $\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_{11} - \mathbf{W}_{12} \mathbf{W}_{22}^{-1} \mathbf{W}_{12}^T$ où

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{12}^T & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.5.17)$$

\mathbf{W} étant la matrice optimale (3.5.14) définie par le théorème EXIP.

Ainsi d'après le lemme d'inversion matriciel (voir A.1), si la matrice de poids est la matrice de Fisher, alors, le poids correspondant à $\mathbf{W}_{11} - \mathbf{W}_{12} \mathbf{W}_{22}^{-1} \mathbf{W}_{12}^T$ est l'inverse de la borne de Cramer-Rao $CRB^{-1}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_1)$ concentrée selon le paramètre d'intérêt. Le résultat est très intuitif : lorsque la reparamétrisation ne concerne qu'une partie des données, alors la seconde étape selon EXIP est un algorithme des moindres carrés qui ne dépend que des paramètres ayant fait l'objet d'une reparamétrisation, et le poids est donc une matrice qui ne dépend plus que de ces paramètres là.

Démonstration. Nous avons en effet

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}' = \underset{\boldsymbol{\eta}}{\operatorname{argmin}} C(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{W}, \hat{\boldsymbol{\xi}}), \quad (3.5.18)$$

avec

$$C(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{W}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) = \left\| \hat{\boldsymbol{\xi}} - g(\boldsymbol{\eta}) \right\|_{\mathbf{W}}^2. \quad (3.5.19)$$

En effectuant la partition de \mathbf{W} selon (3.5.17), on obtient :

$$\begin{aligned} C(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{W}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) &= \left\| \hat{\boldsymbol{\xi}}_1 - g(\boldsymbol{\eta}_1) \right\|_{\mathbf{W}_{11}}^2 + 2(\hat{\boldsymbol{\eta}}_2 - \boldsymbol{\eta}_2)^T \mathbf{W}_{12}^T (\hat{\boldsymbol{\eta}}_1 - g(\boldsymbol{\eta}_1)) \\ &\quad + \left\| \hat{\boldsymbol{\eta}}_2 - \boldsymbol{\eta}_2 \right\|_{\mathbf{W}_{22}}^2. \end{aligned} \quad (3.5.20)$$

Puisque, par définition

$$\left. \frac{\partial C(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{W}, \hat{\boldsymbol{\xi}})}{\partial \boldsymbol{\eta}_2} \right|_{\hat{\boldsymbol{\eta}}'_2} = \mathbf{0}, \quad (3.5.21)$$

nous avons

$$2\mathbf{W}_{12}^T (\hat{\boldsymbol{\eta}}_1 - g(\boldsymbol{\eta}_1)) + 2\mathbf{W}_{22} (\hat{\boldsymbol{\eta}}_2 - \hat{\boldsymbol{\eta}}'_2) = \mathbf{0}. \quad (3.5.22)$$

Par conséquent,

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}'_2 = \hat{\boldsymbol{\eta}}_2 + \mathbf{W}_{22}^{-1} \mathbf{W}_{12}^T (\hat{\boldsymbol{\eta}}_1 - g(\boldsymbol{\eta}_1)). \quad (3.5.23)$$

Comme $\hat{\boldsymbol{\eta}}'_1$ est le minimum de la fonction $C(\left[\boldsymbol{\eta}_1^T, \hat{\boldsymbol{\eta}}_2'^T \right]^T, \mathbf{W}, \hat{\boldsymbol{\xi}})$ qui ne dépend plus que de $\boldsymbol{\eta}_1$, en injectant (3.5.23) dans (3.5.20) on obtient le résultat (3.5.16). \square

3.5.3 Comparaison des performances

3.5.3.1 Optimalité des stratégies

À la lumière du principe EXIP, on remarque qu'il existe deux fonctions injectives $g_2(\cdot)$ et $g_3(\cdot)$ telle que $\boldsymbol{\eta}_2 = g_2(\boldsymbol{\eta})$ et $\boldsymbol{\eta}_3 = g_3(\boldsymbol{\eta})$. Pour satisfaire les conditions $\hat{\boldsymbol{\eta}}_2 \rightarrow g_2(\hat{\boldsymbol{\eta}})$ et $\hat{\boldsymbol{\eta}}_3 \rightarrow g_3(\hat{\boldsymbol{\eta}})$ il suffira de s'assurer que $g_2(\cdot)$ et $g_3(\cdot)$ sont continues, ce qui est le cas, et que les estimateurs $\hat{\boldsymbol{\eta}}$, $\hat{\boldsymbol{\eta}}_2$ et $\hat{\boldsymbol{\eta}}_3$ sont consistants. Pour cela on pourra par exemple retenir le maximum de vraisemblance déterministe. Ainsi, puisque les trois stratégies proposées précédemment découlent les unes des autres par une reparamétrisation du problème qui conduit chaque fois à une relaxation de contrainte, EXIP nous fournit donc une condition suffisante pour obtenir un estimateur asymptotiquement équivalent à celui de la stratégie 1. Notons également qu'EXIP suggère l'emploi d'un algorithme des moindres carrés quelle que soit la distribution statistique de $\hat{\boldsymbol{\eta}}$, alors que bien souvent l'emploi d'un algorithme des moindres carrés est justifié en supposant que l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ est Gaussien [Tor84].

- L'estimateur du maximum de vraisemblance déterministe est asymptotiquement efficace en RSB [RFCL06], ainsi appliqué à la stratégie S1, on peut aisément construire

un estimateur optimal. Il n’y a pas de problème d’association de paramètres dans cette stratégie. Cette solution comporte comme inconvénient opérationnel de nécessiter la transmission de tous les signaux à l’UCT.

- Pour la stratégie 2, nous voyons selon le résultat de l’équation (3.5.16) qu’avec un choix judicieux de la matrice de pondération, nous pouvons obtenir des performances asymptotiquement équivalentes à celles de la stratégie 1 par l’emploi par exemple d’un maximum de vraisemblance. Il faudra prendre soin de bien choisir la matrice de pondération si nous voulons que la deuxième étape soit optimale en ne dépendant que du paramètre concerné par la reparamétrisation.
- En ce qui concerne la stratégie conventionnelle S3, nous voyons que puisque la reparamétrisation porte sur l’ensemble des paramètres, l’intégralité des paramètres doit être transmise à l’UCT pour pouvoir satisfaire à la condition suffisante énoncée par EXIP et bénéficier d’un estimateur asymptotiquement équivalent à celui de la stratégie S1. C’est-à-dire qu’il faudrait transmettre les signaux estimés sur chacune des stations à l’UCT. En effet, en vertu d’EXIP, la deuxième étape devrait être :

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}' = \underset{\boldsymbol{\eta}}{\operatorname{argmin}} \|\hat{\boldsymbol{\eta}}_3 - f(\boldsymbol{\eta})\|_{\mathbf{W}(\boldsymbol{\eta}_3)}^2, \quad (3.5.24)$$

Or, un tel procédé demanderait non seulement de transmettre tous les paramètres à l’UCT, c’est à dire également les signaux, mais conduirait aussi à l’optimisation d’un critère des moindres carrés (3.5.24) de très grande dimension. Autant dire qu’il ne présenterait aucun intérêt par rapport à la stratégie S1 ni d’un point de vue technologique, ni d’un point de vue de la charge de calcul.

Ainsi, même si une “approche en une étape” peut être équivalente à une “approche en deux étapes” [AW08b], puisque la fonction de coût employée pour la seconde étape ne respecte pas les conclusions du théorème EXIP (redémontré par [AW08b]), on ne peut l’invoquer pour le problème de localisation ici considéré. Nous n’avons aucune raison de penser ici qu’une approche décentralisée conventionnelle en deux étapes puisse être asymptotiquement équivalente à une approche centralisée.

3.5.3.2 Résultats numériques

Nous considérons le scénario de la figure 2.5.1 et nous observons le comportement des 3 stratégies présentées précédemment pour la source en $\mathbf{p}_1 = [0, 1000]^T$ en présence ou en l’absence d’une deuxième source en $\mathbf{p}_2 = [0, -1000]^T$. Les critères sont minimisés par une méthode de Newton initialisée par une recherche sur une grille de points. La REQM est estimée de manière empirique par :

$$REQM = \sqrt{\frac{1}{MC} \sum_{k=1}^{MC} \|\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}_k\|^2}, \quad (3.5.25)$$

où MC est le nombre de tirages aléatoires et $\hat{\mathbf{p}}_k$ la k -ième estimation de la réalisation correspondante de l’estimateur.

Les stratégies sont mises en œuvre par des algorithmes de type MUSIC, équivalents asymptotiquement en RSB au maximum de vraisemblance correspondant. Nous noterons S2 la deuxième stratégie où un poids égal à l’identité est appliqué et OS2 la deuxième stratégie où le poids optimal selon EXIP est employé. Par conséquent le poids introduit

dans la stratégie OS2 sera donc $CRB^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ dont l'expression se déduit de (3.3.3) avec $\boldsymbol{\eta} = \left[\boldsymbol{\theta}_1^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\theta}_Q^T \quad \boldsymbol{\psi}^T \quad \boldsymbol{\phi}^T \right]^T$ et $\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}) = \left[\mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\rho}_1) \quad \dots \quad \mathbf{u}(\boldsymbol{\theta}_Q, \boldsymbol{\rho}_Q) \right]$. En pratique, le calcul de cette borne demande de connaître les paramètres $\boldsymbol{\rho}_q$ ceux-ci peuvent être aisément estimés par une approche de type MUSIC sur le vecteur d'observation multistation $\mathbf{x}(t)$.

Dans la figure 3.5.1a, nous considérons une source seulement. Nous observons que tous les estimateurs sont asymptotiquement équivalents. Ce résultat n'est pas surprenant puisque nous savons depuis le résultat (3.3.40) de ce chapitre que les BCR des approches centralisées et décentralisées sont égales dans le cas de signaux bande étroite. Rappelons enfin qu'EXIP fournit une condition suffisante, il propose une manière de procéder mais rien ne nous dit qu'il n'en existe pas d'autres. On constate néanmoins que les approches centralisées sont plus performantes qu'une approche traditionnelle.

Dans la figure 3.5.1b nous examinons le cas de deux sources. On constate alors que l'approche en une étape atteint bien la borne de Cramer-Rao, ce qui a déjà été observé à la figure 3.4.2b par exemple. Nous voyons également qu'une erreur dans le choix de la matrice de pondération conduit à une solution sous-optimale : ainsi OS2 respectant l'EXIP atteint la BCR tandis que S2 demeure sous-optimale. Encore une fois, une approche centralisée respectant EXIP ou en une seule étape est toujours meilleure qu'une approche conventionnelle en présence de deux sources.

3.6 Conclusion

Nous avons ici traité le cas de signaux bande étroite au sens du réseau de stations. Nous avons mené nos investigations sur deux fronts à savoir sur le plan algorithmique et le plan des performances.

Nous avons proposé un algorithme de type MUSIC pour la géolocalisation, qui se trouve être équivalent au DPD dans le cas d'un seul canal lorsque les signaux sont bande étroite sur l'ensemble du réseau. L'algorithme proposé s'avère plus performant qu'une approche classique. De plus, il semble converger asymptotiquement vers la BCR correspondante ce qui en fait une solution pertinente.

Nous avons calculé les BCR des approches centralisées et décentralisées dans le cas de signaux bande étroite, et montré que pour une source, elles étaient égales. En revanche, lorsqu'il y a plusieurs sources, on s'aperçoit que les BCR sont distinctes et mettent en avant le gain apporté par une approche centralisée.

Nous avons montré que les stratégies conventionnelles dites à deux étapes peuvent être vues comme découlant d'une reparamétrisation du problème original qui requiert quant à lui une approche à une étape pour être résolu. Le principe EXIP suggère que la mise en œuvre d'une approche classique en deux étapes est sous-optimale et que pour y remédier il faudrait pouvoir effectuer la transmission de tous les signaux à l'UCT. Toutefois, EXIP n'est qu'une condition suffisante d'optimalité et on constate que pour une source, une approche classique à deux étapes se montre asymptotiquement équivalente à la solution optimale en une étape. Ceci s'explique par le fait que les BCR des deux approches étant égales, la transmission de tous les signaux à l'UCT en vue de leur exploitation ne permet pas d'apporter une information pertinente susceptible d'améliorer les performances. En revanche, à partir de deux sources, nous constatons la supériorité d'une approche centralisée.

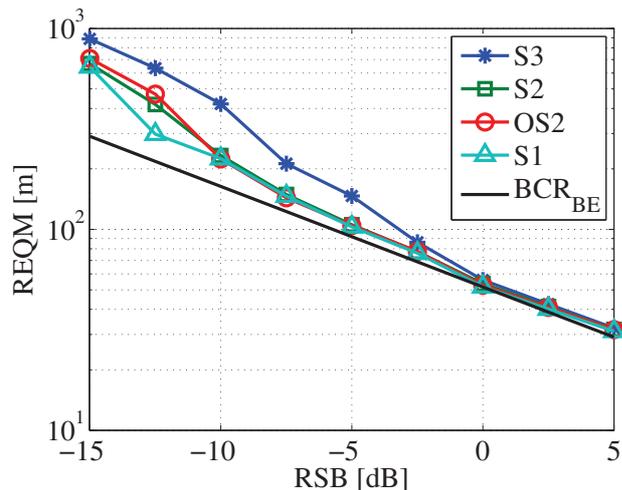
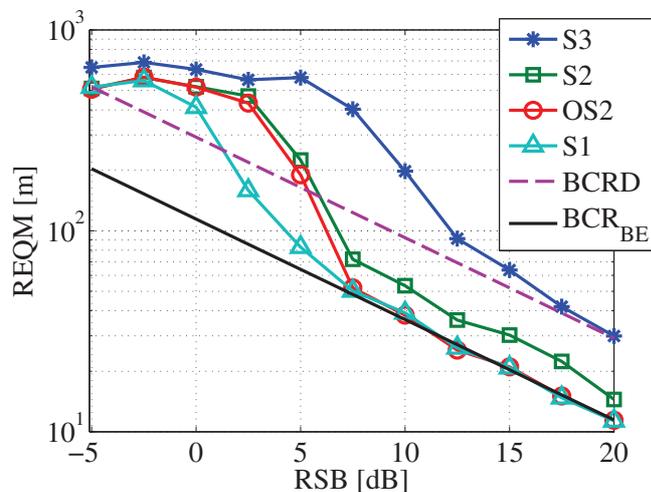
(a) Cas d'une seule source en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 500]^T$.(b) Cas de la source en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 500]^T$ en présence d'une source en $\mathbf{p}_2 = -[0 \ 500]^T$.

FIGURE 3.5.1 – Comparaisons des performances des différentes stratégies S1, S2 ($\mathbf{W}_2 = \mathbf{I}$), OS2 ($\mathbf{W}_2 = CRB^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{tot})$) et S3 (Triangulation : $\mathbf{W}_3 = CRB^{-1}(\boldsymbol{\theta}_q)$) pour deux sources situées en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 500]^T$ et $\mathbf{p}_2 = -[0 \ 500]^T$ selon le scénario de la figure 2.5.1, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(1, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, $T=100$, produit $TB = 1\%$, Nombre de réalisations = 100.

Si le cas des signaux bande étroite sur l'ensemble du réseau de stations n'est pas le plus général, il constitue néanmoins un cas particulier intéressant pour la comparaison des approches envisagées pour le problème de localisation.

Chapitre 4

Cas de signaux large bande sur le réseau de stations

Le problème de géolocalisation posé au paragraphe 2.3 est en toute généralité un problème large bande, c'est à dire que l'approximation (3.1.1) n'est généralement pas vérifiée. En effet, la distance entre les stations de base est telle que le produit TB défini à l'équation (2.2.12) n'est pas négligeable devant 1. Nous étudions dans ce chapitre une alternative au traitement centralisé DPD par le biais d'une approche spatio-temporelle cohérente qui permet de s'adapter notamment à l'occupation spectrale des signaux incidents. Nous exhibons la BCR du problème posé afin d'examiner la pertinence des approches proposées.

4.1 Extension du GMA au cas large-bande

De manière générale, l'observation $\mathbf{x}(t) = \left[\mathbf{x}_1^T(t) \quad \dots \quad \mathbf{x}_L^T(t) \right]^T$ multistation s'écrit, en partant de l'équation (2.3.1) :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{l=1}^L \mathbf{w}_{q,l} s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) + \mathbf{n}(t), \quad (4.1.1)$$

où $\mathbf{w}_{q,l}$ est la l -ième colonne de \mathbf{W}_q , avec

$$\mathbf{W}_q = \text{diag} \left(\rho_{1,q} \mathbf{a}_1(\mathbf{p}_q) \quad \dots \quad \rho_{L,q} \mathbf{a}_L(\mathbf{p}_q) \right). \quad (4.1.2)$$

Nous pouvons également écrire

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{l=1}^L c_q \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \rho_{l,q} \mathbf{e}_l) s_{l,q}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (4.1.3)$$

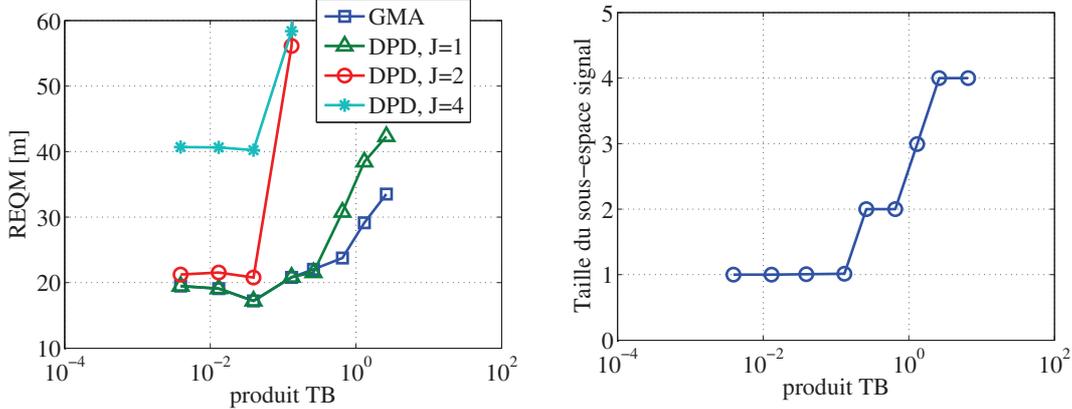
où

$$s_{l,q}(t) = s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)), \quad (4.1.4)$$

c_q est défini à l'équation (2.5.10), \mathbf{e}_l est la l -ième colonne de la matrice identité de taille $L \times L$, et où le vecteur directeur $\mathbf{u}(\cdot)$ a été défini à l'équation (3.1.4).

Les signaux $s_{l,q}(t)$ pour $1 \leq l \leq L$ sont de manière générale non cohérents entre eux au vu des retards $\tau_l(\mathbf{p}_q)$, pouvant être très importants comparativement à l'inverse de la

bande du signal, c'est-à-dire que le produit TB défini à l'équation (2.2.12) n'est plus petit devant 1. On remarque que le modèle de l'équation (4.1.3) possède une structure similaire à celui de l'équation (3.1.3). Toutefois le sous-espace signal est maintenant susceptible de prendre une dimension comprise entre Q et LQ selon si les signaux sont bande étroite ou non sur l'ensemble des stations. Ainsi les positions sont toujours solutions du critère (3.2.8) [BFGL12], le projecteur bruit étant estimé conformément à la taille du sous-espace signal, estimée par un test empirique sur les valeurs propres [BK83].



(a) REQM pour une source en $\mathbf{p}_1 = [300 \ 500]^T$ pour le GMA et pour le DPD avec K canaux. La taille du sous-espace signal est fixée à 1 pour le DPD tandis que pour le GMA elle est estimée à chaque fois, les valeurs retenues étant présentées à la figure 4.1.1b.

(b) Estimation de la taille du sous-espace signal (seuillage empirique sur les valeurs propres) en fonction du produit TB pour une source en $\mathbf{p}_1 = [300 \ 500]^T$.

FIGURE 4.1.1 – Une source en $\mathbf{p}_1 = [300 \ 500]^T$ avec quatre stations de base selon le scénario en figure 2.5.1, SNR=5 dB, $T = 300$, nombre de réalisations=200, $\boldsymbol{\rho}_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$.

À la figure 4.1.1 nous considérons une source et quatre stations et comparons l'effet de l'estimation du sous-espace signal produit sur les performances des algorithmes DPD et GMA lorsque le produit TB croît. Les critères sont minimisés par une méthode de Newton initialisée par une recherche sur une grille de points. La REQM est estimée de manière empirique par :

$$REQM = \sqrt{\frac{1}{MC} \sum_{k=1}^{MC} \|\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}_k\|^2}, \quad (4.1.5)$$

où MC est le nombre de tirages aléatoires et $\hat{\mathbf{p}}_k$ la k -ième estimation de la réalisation correspondante de l'estimateur. Lorsque ce dernier est faible, le DPD avec un canal ($J = 1$) égal à la bande de réception de la station, se comporte de façon similaire au GMA. Lorsque le produit TB augmente, alors le nombre de valeurs propres dominantes augmente aussi [Zat98], entraînant l'augmentation de la taille du sous-espace signal comme le montre la figure 4.1.1b. Comme le montre la figure 4.1.1a, il apparaît alors nécessaire de tenir compte de l'augmentation de la taille du sous-espace signal : c'est pour cela que nous proposons d'estimer la taille du sous-espace signal de la matrice de covariance des signaux

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)], \quad (4.1.6)$$

bien que le nombre de sources soit connu, pour implémenter le GMA, précisément parce que ces deux quantités diffèrent dans le cas de signaux large bande. Lorsque le produit TB augmente, le DPD [AW05] doit être implémenté avec un nombre de canaux plus important,

afin de décomposer le signal en de multiples composantes bande étroite.

L'inconvénient de l'algorithme GMA est qu'il demeure sous-optimal dans un contexte où tous les signaux sont large-bande pour l'ensemble des stations. En effet, les signaux $s_{l,q}(t)$ même lorsqu'ils deviennent non cohérents du fait d'un important retard $\tau_l(\mathbf{p}_q)$ proviennent toujours des mêmes signaux sources $s_q(t)$. Or ceci n'est pas exploité par le GMA dans un contexte de signaux large bande. De plus, la taille du sous-espace signal, dans un tel contexte large bande, est susceptible de prendre des valeurs importantes (LQ au maximum) de nature à remettre en question l'identifiabilité de la position des sources par un vecteur d'observation $\mathbf{x}(t)$ de taille N .

Le GMA demeure toutefois une alternative intéressante au DPD dans le cas de mélanges de sources bande étroites et large bandes au sens du réseau de stations.

4.2 Une approche spatio-temporelle

Comme nous l'avons vu précédemment, lorsque les signaux sont dits large bande sur le réseau de stations, alors la taille du sous-espace signal croît. Il apparaît donc intéressant de disposer d'un vecteur d'observation étendu sans pour autant ajouter des capteurs supplémentaires. Pour traiter un problème d'estimation de directions d'arrivée sur des signaux large-bande, de précédentes études [Bie83, BG88, Gre94, FCT00] ont proposé l'emploi d'une observation spatio-temporelle qui permet d'accroître la taille du vecteur d'observation. Nous montrerons ici leur adaptabilité au support spectral des sources, ce qui leur confère un avantage par rapport aux méthodes incohérentes par banc de filtre.

Nous montrerons dans ce paragraphe que l'emploi d'un vecteur spatio-temporel permet de disposer d'un modèle linéaire selon les signaux propice à l'emploi des méthodes HR pour estimer la position. Tout se passe comme si le nombre de capteurs était alors virtuellement augmenté, permettant alors l'identification des paramètres du problème.

L'observation spatio-temporelle est la suivante :

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t + T_e) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t + (K - 1)T_e) \end{bmatrix}. \quad (4.2.1)$$

Nous allons maintenant montrer en quoi cette observation permet de disposer d'un modèle linéaire par rapport aux signaux.

Remarque. Soit $s(t)$ un signal quelconque, considérons le vecteur suivant :

$$\mathbf{s}_K(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ s(t + T_e) \\ \vdots \\ s(t + (K - 1)T_e) \end{bmatrix}. \quad (4.2.2)$$

La décomposition du vecteur $\mathbf{s}_K(t)$ de taille $K \times 1$ sur une base orthogonale s'écrit comme :

$$\mathbf{s}_K(t) = \sum_{k=1}^{K'} \mathbf{z}_k s(k, t), \quad K' \leq K, \quad (4.2.3)$$

où l'ensemble des vecteurs $\{\mathbf{z}_k, 1 \leq k \leq K\}$ forme une base orthogonale, avec

$$s(k, t) = \frac{\mathbf{z}_k^H \mathbf{s}_K(t)}{\mathbf{z}_k^H \mathbf{z}_k}. \quad (4.2.4)$$

Le signal $s(k, t)$ apparaît comme une version filtrée du signal $s(t)$, où les coefficients du filtre sont les éléments de \mathbf{z}_k^H , si bien que la bande de $s(k, t)$ est inférieure ou égale à la bande B_{fb} du filtre. Dans la suite, nous choisirons les vecteurs \mathbf{z}_k de façon à ce qu'ils forment un banc de filtres orthogonaux. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux filtres de la forme

$$\mathbf{z}_k = \left[\alpha_1 \quad \alpha_2 e^{j2\pi f_k} \quad \dots \quad \alpha_K e^{j2\pi f_k (K-1)T_e} \right]^T, \quad (4.2.5)$$

avec $f_k = \frac{k-1}{K} F_e$, où les $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq K}$ sont les coefficients réels d'un filtre passe-bas de bande environ égale à $\frac{F_e}{K}$. La transformée de Fourier discrète appartient par exemple à cette classe de filtres. Par le choix d'une base appropriée, l'équation (4.2.3) peut être vue comme une somme de K' signaux de bande réduite par rapport à la bande de $s(t)$ et à supports spectraux disjoints.

Selon les équations (4.2.1) et (4.1.1) :

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{l=1}^L \mathbf{s}_{K,q}(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) \otimes \mathbf{w}_{q,l} + \mathbf{n}_K(t), \quad (4.2.6)$$

où \otimes désigne le produit de Kronecker,

$$\mathbf{n}_K(t) = \left[\mathbf{n}^T(t) \quad \mathbf{n}^T(t + T_e) \quad \dots \quad \mathbf{n}^T(t + (K-1)T_e) \right]^T, \quad (4.2.7)$$

et où

$$\mathbf{s}_{K,q}(t) = \begin{bmatrix} s_q(t) \\ \vdots \\ s_q(t + (K-1)T_e) \end{bmatrix}.$$

En vertu de la remarque précédant l'équation (4.2.3), nous pouvons écrire :

$$\mathbf{s}_{K,q}(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) = \sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{z}_{k,q} s_q(k, t - \tau_l(\mathbf{p}_q)), \quad (4.2.8)$$

où $K_q \leq K$ et les $\mathbf{z}_{k,q}$ pour $1 \leq k \leq K_q$ appartiennent à une base orthogonale, formant un banc de filtres orthogonaux dont la bande de chacun de ses éléments est notée B_{fb} . Le signal $s_q(k, t)$ est à bande limitée et de fréquence centrale inconnue $f_{k,q}$, correspondant à la fréquence centrale du filtre. La bande de $s_q(k, t)$ est inférieure ou égale à $B_{fb} = \frac{F_e}{K}$. Nous supposons maintenant que chaque signal $s_q(k, t)$ est bande étroite sur l'ensemble du réseau, c'est-à-dire que le produit TB du signal $s_q(k, t)$ est petit devant 1. Nous avons alors,

$$s_q(k, t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) \approx s_q(k, t) e^{-j2\pi f_{k,q} \tau_l(\mathbf{p}_q)}. \quad (4.2.9)$$

En insérant (4.2.9) et (4.2.8) dans (4.2.6) nous obtenons :

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{z}_{k,q} \otimes \sum_{l=1}^L \mathbf{w}_{l,q} e^{-j2\pi f_{k,q} \tau_l(\mathbf{p}_q)} s_q(k, t) + \mathbf{n}_K(t). \quad (4.2.10)$$

Finalement, remarquons que

$$\sum_{l=1}^L \mathbf{w}_{l,q} e^{-j2\pi f_{k,q} \tau_l(\mathbf{p}_q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1(\mathbf{p}_q) e^{-j2\pi f_{k,q} \tau_1(\mathbf{p}_q)} \\ \rho_{2,q} \mathbf{a}_2(\mathbf{p}_q) e^{-j2\pi f_{k,q} \tau_2(\mathbf{p}_q)} \\ \vdots \\ \rho_{L,q} \mathbf{a}_L(\mathbf{p}_q) e^{-j2\pi f_{k,q} \tau_L(\mathbf{p}_q)} \end{bmatrix} \quad (4.2.11)$$

$$= c_q \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{k,q}), \quad (4.2.12)$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{k,q})$ et c_q sont respectivement définis aux équations (2.5.9) et (2.5.10).

L'observation spatio-temporelle devient alors :

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^{K_q} c_q \mathbf{z}_{k,q} \otimes \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{k,q}) s_q(k, t) + \mathbf{n}_K(t). \quad (4.2.13)$$

Pour les mêmes raisons que celles invoquées à l'équation (2.5.13), nous incluons par la suite c_q dans $s_q(k, t)$. L'observation globale peut alors s'écrire :

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{k,q}) s_q(k, t) + \mathbf{n}_K(t), \quad (4.2.14)$$

avec

$$\mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{k,q}) = \mathbf{z}_{k,q} \otimes \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{k,q}), \quad (4.2.15)$$

représentant le vecteur directeur spatio-temporel. Les positions \mathbf{p}_q , les gains $\boldsymbol{\rho}_q$, les fréquences $f_{k,q}$ et les signaux $s_q(k, t)$ sont inconnus.

Dans la suite nous choisirons les $\mathbf{z}_{k,q}$ parmi la base de Fourier :

$$\mathbf{z}_{k,q} = \mathbf{z}(f_{k,q}) \quad (4.2.16)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \dots & (e^{j2\pi f_{k,q} T_e})^{K-1} \end{bmatrix}^T. \quad (4.2.17)$$

Le modèle se prête maintenant volontiers à l'utilisation de méthodes HR [VT02] pour estimer l'ensemble des paramètres. L'estimation des fréquences peut notamment nous renseigner sur le support spectral de sources. Puisque les fréquences sont inconnues, de telles méthodes ne présupposent donc pas *a priori* sur le support spectral des sources et permettent une adaptabilité au spectre des sources.

Le modèle (4.2.14) peut être écrit

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_K(t), \quad (4.2.18)$$

où

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1^T & \dots & \boldsymbol{\eta}_Q^T \end{bmatrix}^T, \quad (4.2.19)$$

$$\boldsymbol{\eta}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_q^T & \boldsymbol{\psi}_q^T & \boldsymbol{\phi}_q^T & \mathbf{f}_q^T \end{bmatrix}^T, \quad (4.2.20)$$

$$\mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} f_{q,1} & \dots & f_{q,K_q} \end{bmatrix}^T, \quad (4.2.21)$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\boldsymbol{\eta}_1) & \dots & \mathbf{B}_Q(\boldsymbol{\eta}_Q) \end{bmatrix}, \quad (4.2.22)$$

$$\mathbf{B}_q(\boldsymbol{\eta}_q) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{1,q}) & \dots & \mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{K_q,q}) \end{bmatrix}, \quad (4.2.23)$$

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T(t) & \dots & \mathbf{s}_Q^T(t) \end{bmatrix}^T, \quad (4.2.24)$$

$$\mathbf{s}_q(t) = \begin{bmatrix} s_q(1, t) & \dots & s_q(K_q, t) \end{bmatrix}^T. \quad (4.2.25)$$

Afin de traiter le problème d'estimation (4.2.26), nous nous orienterons vers des méthodes à sous-espaces. En effet, le nombre de paramètres devenant très vite important et comportant bon nombre de paramètres de nuisance, nous privilégierons des méthodes à sous-espace au maximum de vraisemblance. Une telle approche spatio-temporelle conduit naturellement à ce que tous les signaux $s_q(k, t)$ soient inclus dans une unique matrice de covariance spatio-temporelle.

Remarque. La taille du sous-espace signal est maintenant égale à $D_s = \sum_{q=1}^Q K_q$ selon la répartition spectrale des signaux sources. Au maximum, si toutes les sources occupent toute la bande spectrale de réception le sous-espace signal est de taille KQ . Le vecteur d'observation spatio-temporel est lui de dimension NK . On comprend donc bien l'intérêt d'une telle méthode sur la technique GMA présentée au chapitre précédent notamment en termes d'identifiabilité. Il va alors exister une valeur de K telle que nous avons toujours $NK > KQ \geq D_s$ ce qui assure l'identifiabilité du problème. Remarquons néanmoins que puisque la durée d'observation est fixée, une augmentation du nombre K entraîne une diminution du nombre d'échantillons indépendants du vecteur $\mathbf{y}(t)$ disponibles.

Nous supposons ici que la taille du sous-espace signal D_s est connue. Elle peut être estimée à partir des valeurs propres [BK83] de la matrice de covariance de $\mathbf{y}(t)$. Nous cherchons à estimer $\{\mathbf{p}_q, 1 \leq q \leq Q\}$ dans (4.2.14). Les fréquences $f_{k,q}$ sont inconnues, reflet de l'absence d'*a priori* sur le spectre des sources.

La matrice $\mathbf{B}(\boldsymbol{\eta})$ est supposée de rang plein.

Remarque. Le rôle du nombre de décalages temporels K est analogue à celui joué par le nombre d'éléments du banc de filtre J dans le DPD, comme en témoignent les équations (2.5.14) et (4.2.4). Ainsi dans la suite, afin de comparer les deux méthodes spatio-temporelle et par banc de filtres, les coefficients des filtres du banc de filtres seront pris égaux à la base de Fourier $\{\mathbf{z}(f_{k,q}) \mid 1 \leq k \leq K_q\}$.

4.2.1 Algorithme LOST

Nous proposons ici un algorithme de géolocalisation basé sur l'algorithme MUSIC et montrons que la dimension d'optimisation peut être réduite à celle du paramètre de position \mathbf{p} .

Nous exploiterons dans cette thèse les méthodes basées sur les statistiques d'ordre 2. La structure de la matrice de covariance temporelle est la suivante :

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{B}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{S}\mathbf{B}^H(\boldsymbol{\eta}) + \sigma^2\mathbf{I}_{NK}, \quad (4.2.26)$$

avec

$$\mathbf{R}_y = E [\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t)], \quad (4.2.27)$$

$$\mathbf{S} = E [\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]. \quad (4.2.28)$$

En se basant sur l'idée de MUSIC [Sch86] nous proposons d'estimer les paramètres $(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{k,q})$ comme étant les zéros du critère

$$J(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f) = \frac{\mathbf{b}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f)\hat{\boldsymbol{\Pi}}_n\mathbf{b}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f)}{\mathbf{b}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f)\mathbf{b}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f)}, \quad (4.2.29)$$

où $\hat{\boldsymbol{\Pi}}_n = \mathbf{I} - \hat{\mathbf{U}}_s\hat{\mathbf{U}}_s^H$ est le projecteur bruit estimé de la matrice de covariance

$$\hat{\mathbf{R}}_y = \frac{1}{T-K+1} \sum_{n=1}^{T-K+1} \mathbf{y}(t_n)\mathbf{y}^H(t_n). \quad (4.2.30)$$

La matrice $\hat{\mathbf{U}}_s$ de taille $NK \times D_s$ correspond au sous-espace signal, composée des D_s vecteurs propres associés aux D_s plus grandes valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}_y$.

Comme dans (2.5.22) la dimension de l'espace d'optimisation du critère (4.2.29) peut être réduite. En effet, notons que

$$\mathbf{b}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f) = \mathbf{V}(\mathbf{p})\boldsymbol{\alpha}, \quad (4.2.31)$$

où

$$\mathbf{V}(\mathbf{p}) = \mathbf{I}_K \otimes \mathbf{U}(\mathbf{p}), \quad (4.2.32)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{p}) = \text{diag}(\mathbf{a}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{a}_L(\mathbf{p})), \quad (4.2.33)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{z}(f) \otimes \left(\text{diag} \left(e^{-j2\pi f\tau_1(\mathbf{p})}, \dots, e^{-j2\pi f\tau_L(\mathbf{p})} \right) \boldsymbol{\rho} \right). \quad (4.2.34)$$

Nous réécrivons alors le critère (4.2.29) comme

$$J_{LOST}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\boldsymbol{\alpha}^H \mathbf{V}^H(\mathbf{p})\hat{\boldsymbol{\Pi}}_n\mathbf{V}(\mathbf{p})\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}^H \mathbf{V}^H(\mathbf{p})\mathbf{V}(\mathbf{p})\boldsymbol{\alpha}}. \quad (4.2.35)$$

Selon le résultat énoncé dans le théorème 3 [Gan59], la minimisation de (4.2.35) par rapport à $\boldsymbol{\alpha}$ se réduit à

$$J_{LOST}(\mathbf{p}) = \lambda_{\min} \left\{ (\mathbf{V}^H(\mathbf{p})\mathbf{V}(\mathbf{p}))^{-1} \mathbf{V}(\mathbf{p})^H \hat{\boldsymbol{\Pi}}_n \mathbf{V}(\mathbf{p}) \right\}, \quad (4.2.36)$$

où $\lambda_{\min} \{.\}$ désigne la valeur propre minimale. Nous appelons LOST (LOcalization by Space-Time processing) [BFL11d] l'algorithme qui découle de la minimisation du critère (4.2.36). Le terme $\boldsymbol{\alpha}$ dans (4.2.35) dépend de \mathbf{p} en toute rigueur, néanmoins nous choisissons de ne pas exploiter cette relation et de minimiser le critère dans un espace de plus grande dimension, ceci afin de pouvoir appliquer le théorème 3 et de bénéficier d'un critère qui ne dépend plus que de \mathbf{p} , plus simple à optimiser d'un point de vue pratique. Notons également que la multiplicité de λ_{\min} est K_q en chaque position \mathbf{p}_q , puisque le sous-espace signal de la source est engendré par l'ensemble des vecteurs $\{\mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{k,q}), 1 \leq k \leq K_q\}$.

Cet algorithme ne requiert pas *a priori* sur le spectre des sources puisque les fréquences $f_{k,q}$ sont supposées inconnues, il ne requiert qu'une estimation préalable du sous-espace signal.

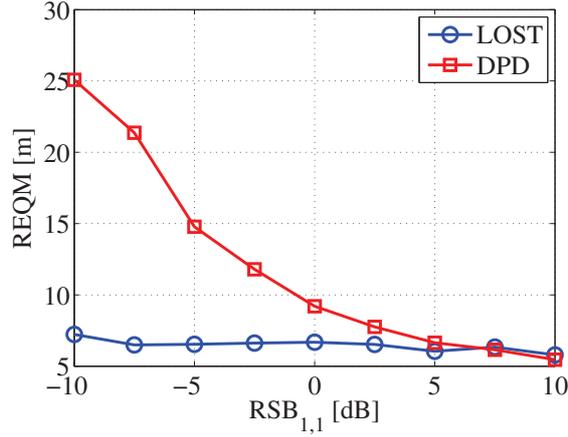


FIGURE 4.2.1 – REQM de la source $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$ (spectre blanc idéal représenté à la figure 4.2.2b), $RSB_{2,1} = RSB_{3,1} = RSB_{4,1} = 10$ dB, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, $T=200$, nombre de réalisations = 100.

Remarque. L'algorithme LOST s'adapte au support spectral de la source. En effet, on constate que le critère LOST (4.2.29) s'annule, pour la source q , pour tous les vecteurs directeurs $\mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{k,q})$, $1 \leq k \leq K_q$. Ainsi, pour que le critère LOST s'annule il suffit qu'il y ait au moins une composante fréquentielle $s_q(k, t)$ qui possède une puissance suffisante. Nous avons en revanche vu au paragraphe 2.5.4.1 que pour que le DPD fonctionne de manière optimale, il faut que dans tous les canaux exploités la puissance du signal $\bar{s}_q(k, t)$ soit suffisante.

4.2.1.1 Comparaisons avec le DPD

Nous comparons dans ce paragraphe les performances du DPD, de l'algorithme LOST et d'une triangulation conventionnelle en fonction du rapport signal à bruit et du produit TB.

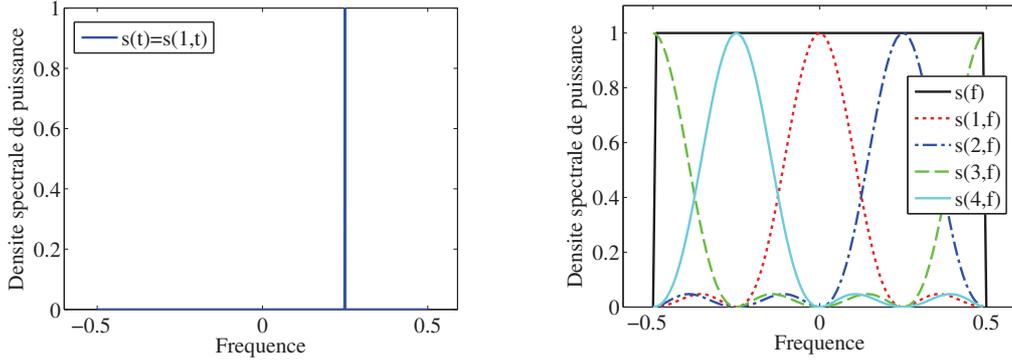
En fonction du RSB Nous considérons ici le scénario de la figure 2.5.1. La fréquence d'échantillonnage est $F_e = 20$ kHz et nous considérons $T = 200$ échantillons temporels. Nous prenons $K = 4$ décalages temporels. Les fréquences $f_{k,q}$ sont $f_{k,q} = \frac{k-1}{K}F_e$ ($1 \leq k \leq K_q$). Les $\psi_{q,l}$ résultent d'un processus Gaussien (moyenne=1, écart-type=0.1) et les $\phi_{l,q}$ résultent d'une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. Le bruit $\mathbf{n}_K(t)$ est circulaire, blanc et Gaussien. Le rapport signal à bruit est défini par

$$RSB_q = 10 \log_{10} \left(\frac{E[|s_q(t)|^2]}{\sigma^2} \right). \quad (4.2.37)$$

Nous considérons le scénario de la figure 2.5.1.

L'algorithme LOST est comparé à deux autres techniques : le DPD et un algorithme conventionnel. La méthode DPD est ici appliquée avec un banc de $J = K = 4$ filtres de bande $\frac{F_e}{K}$, centrée en $\frac{k-1}{K}F_e$ pour $1 \leq k \leq K$, correspondant à une transformée de Fourier discrète.

Dans la figure 4.2.1, nous comparons l'algorithme LOST au DPD en supposant que la source en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$ est blanche (de bande F_e) et nous faisons varier le RSB dans un



(a) Densité spectrale d'une source n'occupant qu'un canal fréquentiel $s(t) = s(1, t)$.

(b) Densité spectrale de puissance d'une source blanche dans la bande de réception $s(t) = \sum_{k=1}^K s(k, t)$.

FIGURE 4.2.2 – Puissance spectrale de deux sources en (a) et (b) occupant respectivement un et quatre des quatre canaux fréquentiels qui composent la bande de réception.

canal. Pour cela, nous définissons le RSB dans un canal fréquentiel par :

$$RSB_{k,q} = 10 \log_{10} \left(\frac{E[|s_q(k, t)|^2]}{\sigma^2} \right). \quad (4.2.38)$$

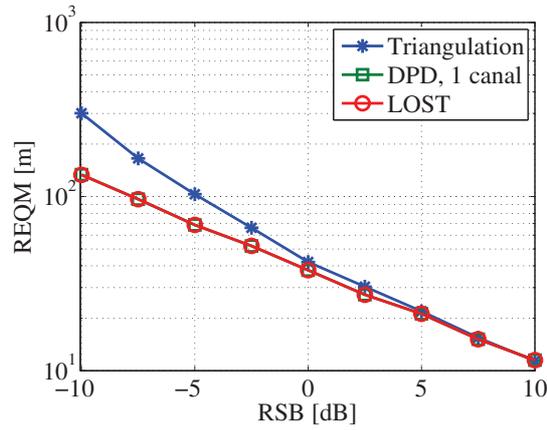
Nous gardons le RSB constant dans trois des quatre canaux et observons l'influence des variations dans le quatrième canal à la figure 4.2.1. Nous voyons alors que l'approche cohérente LOST s'avère plus performante que la méthode incohérente DPD lorsque le RSB se dégrade dans un canal. On pourrait alors envisager d'améliorer le DPD par un test de détection sur chaque canal qui consisterait à rejeter un canal lorsque la puissance du signal détectée dans ce canal est jugée insuffisante. Pour cela, un test empirique sur les valeurs propres de la matrice de covariance des signaux dans chaque canal pourra être utilisé [BK83]. Dans le cas d'une seule source, l'algorithme DPD peut alors être optimisé par un tel test de détection afin de n'exploiter que les canaux où le signal est présent. Néanmoins, dans le cas où il y a plusieurs sources qui ne sont pas présentes aux mêmes fréquences, le problème devient non trivial comme nous allons le voir.

Nous examinons maintenant le cas de deux sources possédant des spectres différents. La première source en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$ est une porteuse pure dont la bande est donc limitée à un canal ($K_1 = 1$) comme illustré par la figure 4.2.2a, tandis que la source 2 en $\mathbf{p}_2 = [0 \ -1000]^T$ est à spectre blanc dans la bande de réception, comme illustré à la figure 4.2.2b. Puisque nous avons choisi la base de Fourier, la densité spectrale de puissance dans le canal K (DSP_k) dans le cas de la source blanche est

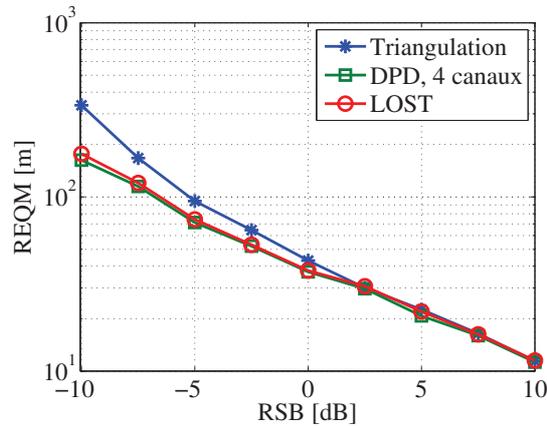
$$DSP_k = E[|s_q(k, f)|^2] = \left| \frac{\sin(\pi K f)}{K \sin(\pi f)} \right|^2, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (4.2.39)$$

Le support fréquentiel de la source influe sur la taille du sous-espace signal dans la matrice (4.2.28). C'est-à-dire, qu'avec $K = 4$, la source 1 occupera un espace de dimension 1 (une valeur propre dominante associée) tandis que la source 2 occupera un sous-espace signal de dimension 4 (4 valeurs propres dominantes).

Les critères sont minimisés par une méthode de Newton initialisée par une recherche



(a) REQM de la source 1 en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$ en absence d'autre source, $K_1 = 1$, $K = 4$.



(b) REQM de la source 2 en $\mathbf{p}_2 = [0 \ -1000]^T$ en absence d'autre source, $K_2 = K = 4$.

FIGURE 4.2.3 – Cas monosource envisagé pour deux sources dont les densités spectrales respectives sont représentées à la figure 4.2.2a pour la source 1 en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$ et à la figure 4.2.2b pour la source 2 en $\mathbf{p}_2 = [0 \ -1000]^T$, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, $T=200$, nombre de réalisations = 100.

sur une grille de points. La REQM est estimée de manière empirique par :

$$REQM = \sqrt{\frac{1}{MC} \sum_{k=1}^{MC} \|\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}_k\|^2}, \quad (4.2.40)$$

où MC est le nombre de tirages aléatoires et $\hat{\mathbf{p}}_k$ la k -ième estimation de la réalisation correspondante de l'estimateur.

Dans la figure 4.2.3 nous étudions le cas où il y a soit une source en \mathbf{p}_1 soit une source en \mathbf{p}_2 . Pour la source en \mathbf{p}_1 (voir la figure 4.2.3a) le DPD est implémenté avec le seul canal où la source est présente. Pour la source en \mathbf{p}_2 (voir la figure 4.2.3b) le DPD est implémenté avec les quatre canaux. Toutes les techniques apparaissent asymptotiquement équivalentes. Ce comportement des approches à une étape a été également observé dans [AW05]. Les algorithmes LOST et DPD sont plus performants qu'une approche classique à faible RSB.

Dans le cas où plusieurs sources sont présentes, le choix du nombre de canaux apparaît plus compliqué. Nous considérerons deux cas, vu les supports fréquentiels des deux sources : nous implémenterons le DPD avec le seul canal où toutes les sources sont présentes, ou bien avec les quatre canaux.

Dans la figure 4.2.4 nous comparons les approches dans le cas de sources multiples. Comme nous le voyons, une approche à une étape s'avère généralement plus performante qu'une approche conventionnelle à deux étapes, même à fort RSB.

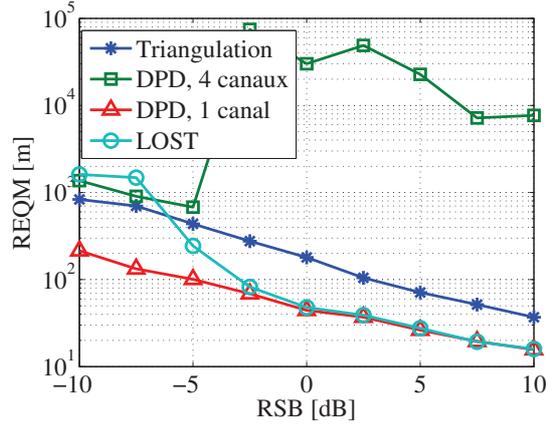
- Si le DPD est implémenté avec le seul canal où la source 1 est présente, alors LOST et le DPD apparaissent asymptotiquement équivalents pour la première source, comme nous pouvons le voir à la figure 4.2.4a, lorsque le RSB tend vers l'infini. Néanmoins, les performances pour la seconde source sont plus faibles puisque le DPD n'exploite pas la totalité de la bande où est présente la deuxième source comme le montre la figure 4.2.4b.
- Si le DPD est implémenté avec les quatre canaux, LOST et DPD apparaissent asymptotiquement équivalents pour la seconde source dans la figure 4.2.4a. Mais nous voyons à la figure 4.2.4b que le DPD échoue puisqu'il utilise trois canaux où la source 1 est absente.

Ainsi l'algorithme LOST est plus robuste d'un point de vue opérationnel en ce qu'il ne nécessite qu'une estimation de la taille du sous-espace signal quand le DPD requiert pour fonctionner de manière optimale de connaître le support fréquentiel de chaque source, bien qu'à notre connaissance ce problème n'ait pas été soulevé par les auteurs et ne semble pas faire l'objet de travaux dans la littérature.

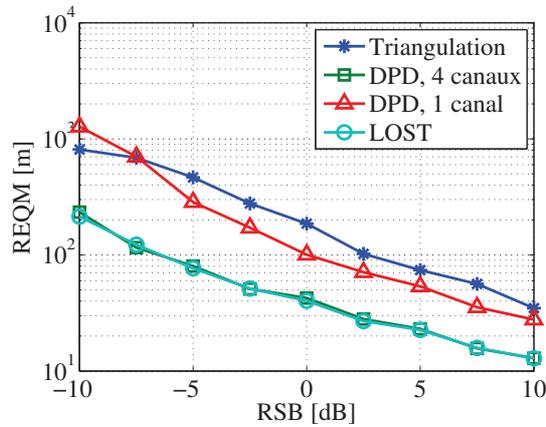
En fonction du TB Les algorithmes DPD et LOST sont basés sur une hypothèse bande étroite des signaux filtrés. Afin d'étudier leur robustesse à cette hypothèse, nous considérons le modèle (2.3.1) et nous faisons varier le produit TB de la source en augmentant progressivement la largeur de bande des signaux $s_q(t)$ pour un nombre K donné. Lorsque le produit TB est élevé, l'hypothèse (4.2.9) n'est plus vérifiée.

À la figure 4.2.5a, le DPD est comparé à LOST lorsque le produit TB croît. Au delà d'une certaine valeur un décrochement survient, reflet du fait que les signaux filtrés ne sont plus bande étroite sur l'ensemble du réseau. Comme nous le voyons, l'approche proposée LOST apparaît plus robuste à l'augmentation du produit TB.

Nous comparons, à la figure 4.2.5b, pour une seule et deux sources l'erreur des algo-

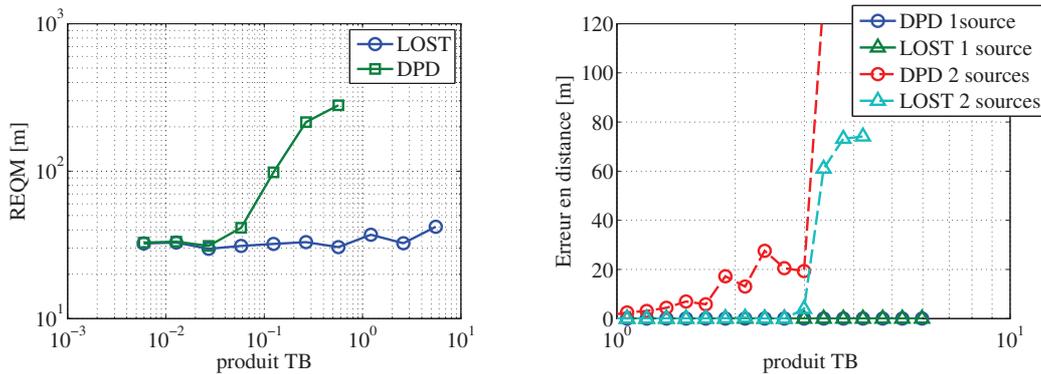


(a) REQM de la source 1 dans $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$ en présence d'une seconde source en $\mathbf{p}_2 = [0 \ -1000]^T$.



(b) REQM de la source 2 en $\mathbf{p}_2 = [0 \ -1000]^T$ en présence de la source 1 en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$.

FIGURE 4.2.4 – Cas de deux sources présentes simultanément dont les densités spectrales respectives sont représentées à la figure 4.2.2a pour la source 1 en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$ et à la figure 4.2.2b pour la source 2 en $\mathbf{p}_2 = [0 \ -1000]^T$, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, $K_1 = 1$, $K_2 = K = 4$, $T=200$, nombre de réalisations = 100.



(a) REQM d'une source blanche en $\mathbf{p}_1 = [300 \ 500]^T$.

(b) REQM d'une source blanche en $\mathbf{p}_1 = [300 \ 500]^T$ en présence ou en absence d'une seconde source en $\mathbf{p}_2 = [-300 \ 500]$.

FIGURE 4.2.5 – Comparaison des performances des algorithmes LOST et DPD en fonction du produit TB en fonction d'un nombre fini ou infini d'échantillons en (a) et (b) respectivement, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, $K=4$, $\text{SNR}=10$ dB, $T=200$, nombre de réalisations=100.

rithmes DPD et LOST quand le produit TB augmente pour un nombre infini d'échantillons. Les expressions des matrices pour un nombre infini d'échantillons sont données aux équations (A.3.11) et (A.3.23) en annexe. Comme le montre la figure 4.2.5b les deux techniques sont asymptotiquement équivalentes et possèdent une erreur nulle lorsqu'il n'y a qu'une source. Pour deux sources, nous constatons à la figure 4.2.5b qu'au delà d'une certaine valeur du produit TB, une erreur survient. Ce décrochement apparaît pour de plus grandes valeurs du produit TB montrant la plus grande robustesse de l'algorithme LOST par rapport au DPD.

4.2.1.2 Détermination du nombre de décalages temporels K

Le choix du nombre de décalages temporels K constitue une problématique opérationnelle importante. Puisque la position des stations de base est connue, le temps de parcours entre les deux stations les plus éloignées est connu. C'est également la valeur maximale $\Delta\tau_{max}$ du temps de parcours d'une onde à travers le réseau. En effet,

$$\Delta\tau_{max} = \max_{\mathbf{p}} \max_{l,l'} |\tau_l(\mathbf{p}) - \tau_{l'}(\mathbf{p})|. \quad (4.2.41)$$

En exploitant l'inégalité triangulaire :

$$|\tau_l(\mathbf{p}) - \tau_{l'}(\mathbf{p})| = \frac{|||\mathbf{p} - \mathbf{p}(l)|| - ||\mathbf{p} - \mathbf{p}(l')|||}{c} \leq \frac{||\mathbf{p}(l) - \mathbf{p}(l')||}{c}, \quad (4.2.42)$$

nous avons alors $\Delta\tau_{max} = \max_{l,l'} \frac{||\mathbf{p}(l) - \mathbf{p}(l')||}{c}$. Donc, si nous avons un *a priori* sur la bande maximale des émetteurs B_{max} , nous en déduisons la valeur maximale du produit TB : $\Delta\tau_{max}B_{max}$. La bande B_{max} est généralement inconnue : on pourra alors la prendre égale à la bande de réception du système. Choisir K décalages temporels permet de travailler avec des signaux $s_q(k, t)$ de bande B_{max} divisée par K , si bien que nous pouvons toujours choisir une valeur de K telle que $\frac{\Delta\tau_{max}B_{max}}{K}$ soit inférieur à quelques pourcentages. Nous proposons alors comme valeur plausible de K

$$K = \frac{\Delta\tau_{max}B_{max}}{\epsilon}, \quad (4.2.43)$$

avec ϵ de l'ordre de 1 pour cent. À titre de comparaison, la précision obtenue lors de la calibration de systèmes de goniométrie chez THALES est généralement de l'ordre de 7 degrés ce qui correspond à une valeur du produit TB de 0.6 pour cent.

Pour le réseau considéré à la figure 2.5.1, si la bande des signaux est de l'ordre de 25 kHz , comme pour les signaux PMR (Private Mobile Radiocommunications), le produit maximal $\Delta\tau_{max}B_{max}$ vaut approximativement 0.4, il nous suffit donc de prendre $K = 10$ pour avoir un produit TB inférieur à 5 pour cent. En revanche pour des signaux de type GSM de bande 300 kHz , le produit maximal $\Delta\tau_{max}B_{max}$ vaut approximativement 5, il nous faut alors choisir $K = 100$ pour avoir un produit TB inférieur à 5 pour cent. Au vu du nombre d'échantillons disponibles, qui est de l'ordre de la centaine (environ 350 pour $F_e = 600 \text{ kHz}$ et une durée d'intégration de 0.57 ms), la matrice de covariance spatio-temporelle estimée risque de ne plus être de rang plein et les performances de la méthode risquent d'être mauvaises. Ainsi un réseau dont les stations sont espacées de l'ordre de la centaine de mètres, permettant de réduire le nombre K par un facteur 10, apparaît plus

adapté à des sources GSM.

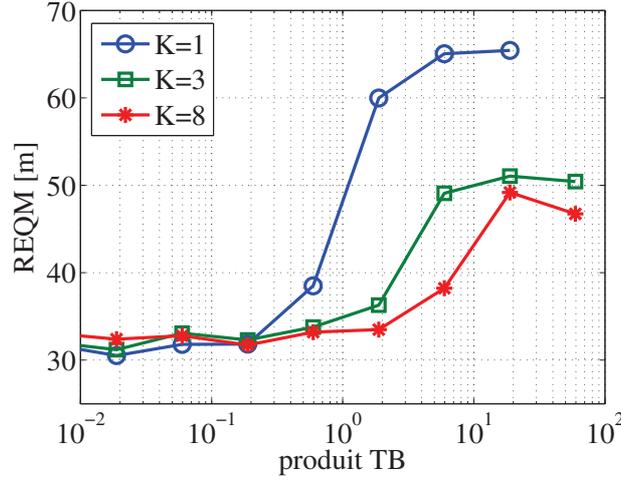


FIGURE 4.2.6 – REQM pour une source blanche en $\mathbf{p}_1 = [300 \ 500]^T$ pour l'algorithme LOST, RSB=10 dB, T=200, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, nombre de réalisations = 500.

La figure 4.2.6 illustre le rôle joué par le nombre de décalages temporels K dans l'approche proposée quand le produit TB augmente. Dans ce cas, l'hypothèse de signaux bande étroite en sortie du banc de filtres n'est plus vérifiée et la dimension du sous-espace signal augmente, les signaux devenant décorrélés d'une station à l'autre. Afin de combattre cet effet, il nous suffit de choisir un nombre de décalages temporels K plus important. En effet, pour de plus grandes valeurs de K le décrochement se produit à de plus grandes valeurs du produit TB. On remarque aussi que si le nombre de décalages temporels K est trop important par rapport au nombre nécessaire, les performances sont moins bonnes pour de faibles valeurs du produit TB, puisque le fait d'augmenter la taille du vecteur $\mathbf{y}(t)$ implique une diminution du nombre d'échantillons indépendants, pour une durée d'observation et une fréquence d'échantillonnage fixes.

4.2.1.3 Estimation des fréquences des sources

Comme les fréquences introduites dans le modèle (4.2.18) sont un paramètre inconnu du problème, celles-ci peuvent être éventuellement estimées : il devient alors possible d'en tirer une information sur le spectre des émetteurs. Nous présentons dans ce paragraphe un algorithme qui permet d'estimer les fréquences des sources.

Les fréquences peuvent être aussi estimées dans (4.2.29) : en effet nous pouvons écrire

$$\frac{\mathbf{b}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f) \hat{\mathbf{\Gamma}}_n \mathbf{b}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f)}{\mathbf{b}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f) \mathbf{b}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f)} = \frac{\boldsymbol{\beta}^H \mathbf{W}^H(f) \hat{\mathbf{\Gamma}}_n \mathbf{W}(f) \boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}^H \mathbf{W}^H(f) \mathbf{W}(f) \boldsymbol{\beta}} \quad (4.2.44)$$

avec

$$\mathbf{W}(f) = \text{diag}(\mathbf{z}(f)) \otimes \mathbf{I}_N, \quad (4.2.45)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_K \otimes \mathbf{u}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f), \quad (4.2.46)$$

où $\mathbf{1}_K$ est un vecteur colonne de dimension K qui ne comprend que des 1.

Selon le résultat énoncé dans le théorème 3 [Gan59], en exploitant un raisonnement similaire à celui utilisé pour la minimisation du critère (4.2.35), nous proposons alors de

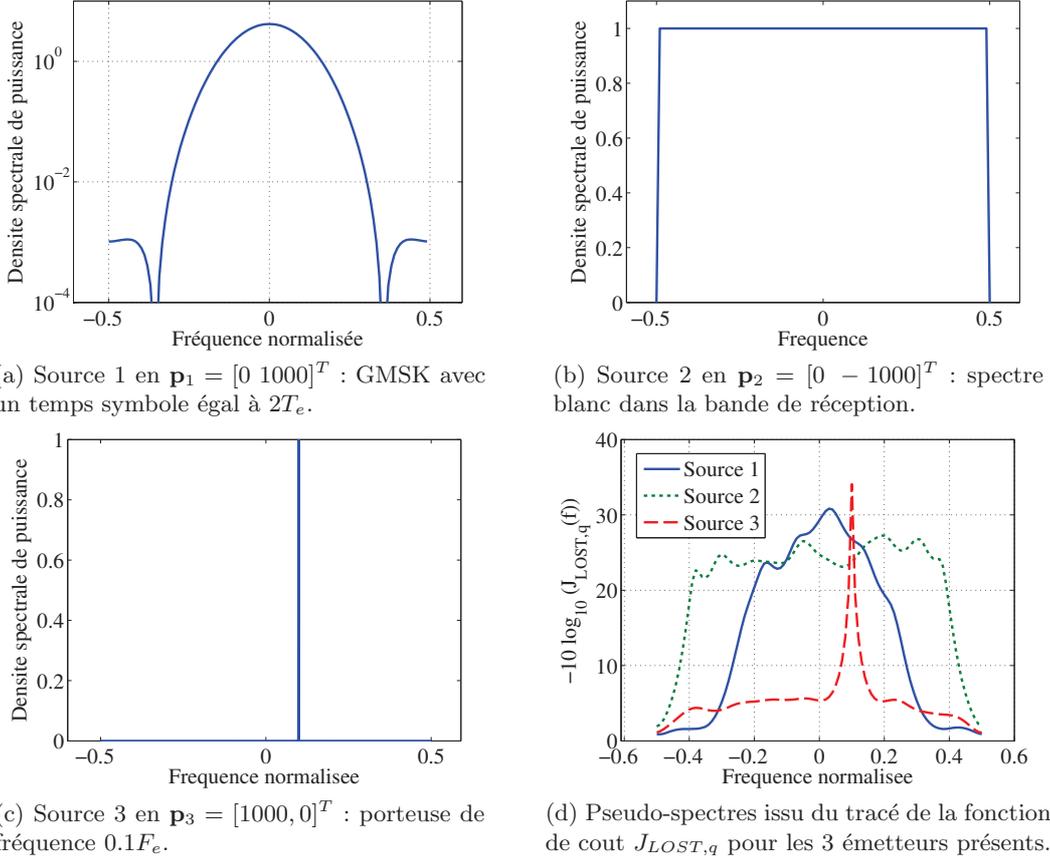


FIGURE 4.2.7 – Estimation des fréquences des sources pour un scénario comportant 3 sources en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$, $\mathbf{p}_2 = [0 \ -1000]^T$ et $\mathbf{p}_3 = [1000 \ 0]^T$, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(1, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, $F_e = 100 \text{ MHz}$, $T = 200$, $K = 10$, produit $TB=0.15$, $RSB = 10 \text{ dB}$.

minimiser la fonction de coût suivante :

$$J(f) = \lambda_{\min} \left\{ (\mathbf{W}^H(f) \mathbf{W}(f))^{-1} \mathbf{W}(f) \hat{\mathbf{\Gamma}}_n \mathbf{W}(f) \right\}. \quad (4.2.47)$$

Malheureusement les minima de la fonction $J(f)$ nous renseignent sur l'ensemble des fréquences présentes. Il apparaît plus pertinent d'estimer les fréquences de chacune des sources.

Puisque

$$\frac{\mathbf{b}^H(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}, f) \hat{\mathbf{\Gamma}}_n \mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}, f)}{\mathbf{b}^H(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}, f) \mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}, f)} = \frac{\boldsymbol{\rho}^H \mathbf{Z}^H(f, \mathbf{p}_q) \hat{\mathbf{\Gamma}}_n \mathbf{Z}(f, \mathbf{p}_q) \boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}^H \mathbf{Z}^H(f, \mathbf{p}_q) \mathbf{Z}(f, \mathbf{p}_q) \boldsymbol{\rho}}, \quad (4.2.48)$$

avec

$$\mathbf{Z}(f, \mathbf{p}_q) = \text{diag}(\mathbf{z}(f)) \otimes \mathbf{U}(\mathbf{p}_q). \quad (4.2.49)$$

Les fréquences de la source q sont données par les minima du critère

$$J_{LOST,q}(f) = \lambda_{\min} \left\{ (\mathbf{Z}^H(f, \hat{\mathbf{p}}_q) \mathbf{Z}(f, \hat{\mathbf{p}}_q))^{-1} \mathbf{Z}(f, \hat{\mathbf{p}}_q) \hat{\mathbf{\Gamma}}_n \mathbf{Z}(f, \hat{\mathbf{p}}_q) \right\}, \quad (4.2.50)$$

la position $\hat{\mathbf{p}}_q$ de la source peut par exemple être obtenue par l'algorithme LOST (4.2.36).

Sur la figure 4.2.7 nous présentons un exemple d'estimation des fréquences des sources. Nous considérons 3 sources dont les spectres sont illustrés aux figures 4.2.7a, 4.2.7b et 4.2.7c. La figure 4.2.7d nous montre les différents pseudo-spectres issus du tracé des

différentes fonctions $J_{LOST,q}(f)$. On remarque alors qu'il est possible d'obtenir une information sur le contenu spectral des sources à partir de l'observation spatio-temporelle.

4.2.2 Amélioration de LOST

L'algorithme LOST demeure sous-optimal : étant basé sur une approche de type MUSIC, il n'exploite pas le fait que chaque source occupe un sous-espace de dimension supérieure à 1, c'est à dire que pour chaque source l'ensemble des vecteurs directeurs $\{\mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{k,q}), 1 \leq k \leq K_q\}$ engendre un sous-espace signal qui lui est propre.

Remarquons dans l'équation (4.2.34) que le vecteur

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}} = \text{diag} \left(e^{-j2\pi f \tau_1(\mathbf{p})}, \dots, e^{-j2\pi f \tau_L(\mathbf{p})} \right) \boldsymbol{\rho}, \quad (4.2.51)$$

apparaît comme une inconnue du critère LOST (4.2.35) et que ses lignes sont constituées du produit entre ρ_l et $e^{-j2\pi f \tau_l(\mathbf{p})}$. Ces deux termes ne sont donc pas identifiables simultanément dans $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$. Une approche de type MUSIC ne permet donc pas d'exploiter le terme $e^{-j2\pi f \tau_l(\mathbf{p})}$ qui dépend pourtant également de la position et dont l'exploitation est susceptible d'améliorer les performances. Ceci est dû au fait que dans la technique LOST, basée sur une approche de type MUSIC, présupposant que chaque source occupe un sous-espace signal de dimension 1, nous n'exploitons pas le fait que chaque source occupe un sous-espace de dimension K_q .

Ainsi, nous présentons dans ce paragraphe une façon d'améliorer LOST par l'emploi de méthodes à sous-espace telles que le maximum de vraisemblance approché, une projection oblique ou une technique de "subspace fitting" (SF-LOST). Lorsque la dimension du sous-espace signal engendré par une source est supérieure à 1 selon un principe illustré à la figure 4.2.8, il apparaît judicieux d'exploiter le fait que chaque source génère un sous-espace engendré par les vecteurs $\{\mathbf{b}^H(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{k,q}), 1 \leq k \leq K_q\}$.

4.2.2.1 Le maximum de vraisemblance approché

Le maximum de vraisemblance conduit à une solution certes optimale mais coûteuse en temps de calcul. Nous envisageons ici un algorithme du maximum de vraisemblance approché (AMLM), présenté au paragraphe 2.4.1.3, qui pour le cas de sources décorréelées, offre une solution nécessitant un coût de calcul moindre.

Selon le maximum de vraisemblance approché [CTO87], nous pouvons estimer les paramètres inconnus du modèle $\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$ présenté à l'équation (4.2.18) par

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_{AMLM} = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} \text{tr} \left[\hat{\boldsymbol{\Pi}}_n \mathbf{B}(\boldsymbol{\eta}) \hat{\mathbf{S}} \mathbf{B}^H(\boldsymbol{\eta}) \right], \quad (4.2.52)$$

où $\hat{\boldsymbol{\Pi}}_n$ est le projecteur bruit estimé de la matrice de covariance (4.2.28) et $\hat{\mathbf{S}}$ une estimée de la matrice de covariance des sources $\mathbf{S} = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]$ où $\mathbf{s}(t)$ est défini à l'équation (4.2.24).

Si les sources sont décorréelées :

$$\mathbf{S} = \text{diag} \left(\mathbf{S}_1 \quad \dots \quad \mathbf{S}_Q \right), \quad (4.2.53)$$

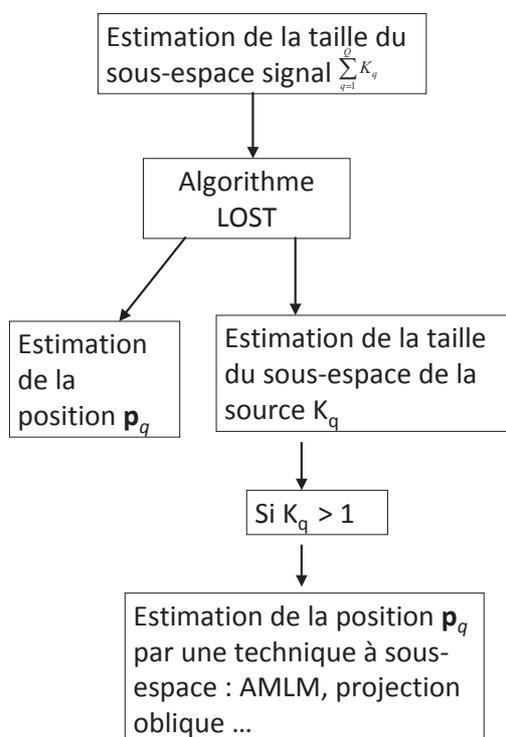


FIGURE 4.2.8 – Principe de fonctionnement qui permet d’améliorer l’algorithme LOST en fonction de la dimension du sous-espace signal.

et donc

$$tr \left[\hat{\mathbf{\Pi}}_n \mathbf{B}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S} \mathbf{B}^H(\boldsymbol{\eta}) \right] = tr \left[\hat{\mathbf{\Pi}}_n \sum_{q=1}^Q \mathbf{B}_q(\boldsymbol{\eta}_q) \mathbf{S}_q \mathbf{B}_q^H(\boldsymbol{\eta}_q) \right]. \quad (4.2.54)$$

Nous pouvons alors estimer les paramètres des sources séparément :

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{q,AMLM} &= arg \min_{\boldsymbol{\eta}_q} tr \left[\hat{\mathbf{\Pi}}_n \mathbf{B}_q(\boldsymbol{\eta}_q) \hat{\mathbf{S}}_q \mathbf{B}_q^H(\boldsymbol{\eta}_q) \right] \\ &= arg \min_{\boldsymbol{\eta}_q} tr \left[\mathbf{B}_q^H(\boldsymbol{\eta}_q) \hat{\mathbf{\Pi}}_n \mathbf{B}_q(\boldsymbol{\eta}_q) \hat{\mathbf{S}}_q \right] \\ &= arg \min_{\boldsymbol{\eta}_q} \sum_{k,k'=1}^{K_q} \left[\hat{\mathbf{S}}_q \right]_{kk'} \mathbf{b}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_k) \hat{\mathbf{\Pi}}_n \mathbf{b}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_{k'}), \end{aligned} \quad (4.2.55)$$

où $[\mathbf{A}]_{ij}$ est l'élément ij de la matrice \mathbf{A} .

En remarquant que

$$\mathbf{b}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f) = \mathbf{T}(\mathbf{p}, f) \boldsymbol{\rho}, \quad (4.2.56)$$

avec

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}, f) = \mathbf{z}(f) \otimes \mathbf{U}(\mathbf{p}), \quad (4.2.57)$$

nous avons

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_{q,AMLM} = arg \min_{\boldsymbol{\eta}_q} \boldsymbol{\rho}^H \left(\sum_{k,k'=1}^{K_q} \left[\hat{\mathbf{S}}_q \right]_{kk'} \mathbf{T}^H(\mathbf{p}, f_k) \hat{\mathbf{\Pi}}_n \mathbf{T}(\mathbf{p}, f_{k'}) \right) \boldsymbol{\rho}. \quad (4.2.58)$$

Nous pouvons alors, selon le théorème 3, réduire la dimension d'optimisation et minimiser les Q fonctions de coût suivantes :

$$J_{q,AMLM}(\mathbf{p}, \mathbf{f}_q) = \lambda_{min} \left\{ \sum_{k,k'=1}^{K_q} \left[\hat{\mathbf{S}}_q \right]_{kk'} \mathbf{T}^H(\mathbf{p}, f_k) \hat{\mathbf{\Pi}}_n \mathbf{T}(\mathbf{p}, f_{k'}) \right\}. \quad (4.2.59)$$

Lorsque les signaux sources sont décorrélés, \mathbf{S}_q est diagonale et on a :

$$\mathbf{S}_q = \left(\mathbf{B}_q^H(\boldsymbol{\eta}_q) \mathbf{R}_s^\# \mathbf{B}_q(\boldsymbol{\eta}_q) \right)^{-1}, \quad (4.2.60)$$

que l'on peut donc utiliser pour estimer la matrice de covariance de la q -ième source à partir d'une estimée préalable de $\boldsymbol{\eta}_q$ et $\mathbf{R}_s^\#$.

La matrice $\mathbf{R}_s^\#$ peut être estimée une fois la dimension du sous-espace signal connue par :

$$\hat{\mathbf{R}}_s^\# = \hat{\mathbf{E}}_s \hat{\mathbf{\Lambda}}^{-1} \hat{\mathbf{E}}_s^H, \quad (4.2.61)$$

où $\hat{\mathbf{E}}_s$ est le sous-espace propre associé aux sources, extrait de la matrice de covariance spatio-temporelle (4.2.28). La matrice $\hat{\mathbf{\Lambda}} = \hat{\mathbf{\Lambda}}_s - \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}$ qui contient les valeurs propres du signal, $\hat{\mathbf{\Lambda}}_s$ est la matrice des valeurs propres associées à $\hat{\mathbf{E}}_s$ et $\hat{\sigma}^2$ est obtenu par $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{NK-D_s} tr(\hat{\mathbf{\Lambda}}_n)$, où $\hat{\mathbf{\Lambda}}_n$ est la matrice des valeurs propres associées au sous-espace bruit. Pour estimer $\boldsymbol{\eta}_q$ nous utiliserons le résultat fourni par la minimisation préalable du critère LOST (4.2.36). Les fréquences peuvent être estimées grâce au critère (4.2.50) dont les minimas fournissent une estimée des fréquences \hat{f}_q . L'estimée du vecteur $\boldsymbol{\rho}_q$ est alors

le vecteur propre associé à $\lambda_{\min} \left\{ \left(\mathbf{Z}^H(\hat{f}_q) \mathbf{Z}(\hat{f}_q) \right)^{-1} \mathbf{Z}(\hat{f}_q) \hat{\mathbf{\Pi}}_n \mathbf{Z}(\hat{f}_q) \right\}$ où $\mathbf{Z}(f)$ est défini à l'équation (4.2.49).

Remarquons que si la matrice de covariance de la source est de dimension 1 dans l'équation (4.2.59), alors nous retrouvons le critère de l'algorithme LOST. Ce dernier est donc une solution optimale lorsque $K = 1$ et que les sources sont décorréliées.

4.2.2.2 La projection oblique

Nous établissons ici les liens entre l'algorithme AMLM et un algorithme de projection oblique que nous déduisons d'une méthode à sous-espace présentée récemment [MS02]. Nous montrons ici que le maximum de vraisemblance approché se déduit d'un algorithme de projection oblique où la matrice de covariance des sources est remplacée par son estimée.

Puisque la dimension du sous-espace signal engendré par une source est supérieure à 1, il apparaît intéressant d'exploiter un critère de projection oblique sur le sous-espace signal engendré par la source. En généralisant ce qui a été proposé dans [MS02] au cas où le sous-espace signal engendré par une source est de dimension supérieure à 1, nous exploitons le projecteur suivant pour chaque source :

$$\mathbf{F}_q(\boldsymbol{\eta}'_q) = \mathbf{B}'_q \left((\mathbf{B}'_q)^H \mathbf{R}_B^\# \mathbf{B}'_q \right)^{-1} (\mathbf{B}'_q)^H \mathbf{R}_B^\#, \quad (4.2.62)$$

où

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{B}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S} \mathbf{B}^H(\boldsymbol{\eta}), \quad (4.2.63)$$

et où tous les termes de (4.2.63) sont définis aux équations (4.2.22) et (4.2.28). La variable candidate est notée $\boldsymbol{\eta}'_q$, la vraie valeur est notée $\boldsymbol{\eta}_q$. Pour plus de clarté nous notons $\mathbf{B}_q \triangleq \mathbf{B}_q(\boldsymbol{\eta}_q)$, $\mathbf{B}'_q \triangleq \mathbf{B}'_q(\boldsymbol{\eta}'_q)$ et $\mathbf{F}'_q = \mathbf{F}_q(\boldsymbol{\eta}'_q)$. La matrice \mathbf{F}'_q est bien une matrice de projection puisque $(\mathbf{F}'_q)^2 = \mathbf{F}'_q$, mais comme elle ne vérifie pas la propriété de symétrie hermitienne, elle ne définit pas une projection orthogonale, on la qualifie de projection oblique [BS94].

Soit

$$\mathbf{G}_q = \mathbf{\Pi}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{F}'_q, \quad (4.2.64)$$

où $\mathbf{\Pi}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\eta}) (\mathbf{B}^H(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{B}(\boldsymbol{\eta}))^{-1} \mathbf{B}^H(\boldsymbol{\eta})$, nous avons alors

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_q(\boldsymbol{\eta}_q) &\triangleq \mathbf{F}'_q \mathbf{R}_B (\mathbf{F}'_q)^H + \mathbf{G}'_q \mathbf{R}_B (\mathbf{G}'_q)^H \\ &= \mathbf{R}_B + \boldsymbol{\Delta}_q(\boldsymbol{\eta}'_q) + \boldsymbol{\Delta}_q^H(\boldsymbol{\eta}'_q), \end{aligned} \quad (4.2.65)$$

où

$$\boldsymbol{\Delta}_q(\boldsymbol{\eta}'_q) = \mathbf{B}'_q \left((\mathbf{B}'_q)^H \mathbf{R}_B^\# \mathbf{B}'_q \right)^{-1} \mathbf{B}'_q^H \mathbf{\Pi}(\boldsymbol{\eta}). \quad (4.2.66)$$

De plus $\boldsymbol{\Delta}_q(\boldsymbol{\eta}_q) = \mathbf{0}$.

Démonstration. Nous avons :

$$\mathbf{F}'_q \mathbf{R}_B (\mathbf{F}'_q)^H = \mathbf{B}'_q \left((\mathbf{B}'_q)^H \mathbf{R}_B^\# \mathbf{B}'_q \right)^{-1} (\mathbf{B}'_q)^H, \quad (4.2.67)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{G}'_q \mathbf{R}_B (\mathbf{G}'_q)^H &= (\mathbf{\Pi}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{F}'_q) \mathbf{R}_B (\mathbf{\Pi}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{F}'_q)^H \\ &= \mathbf{R}_B - \mathbf{F}'_q \mathbf{R}_B \mathbf{\Pi}^H(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{\Pi}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{R}_B (\mathbf{F}'_q)^H + \mathbf{F}'_q \mathbf{R}_B (\mathbf{F}'_q)^H \end{aligned} \quad (4.2.68)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_q \mathbf{R}_B (\mathbf{F}'_q)^H - \mathbf{P}_B \mathbf{R}_B (\mathbf{F}'_q)^H &= \mathbf{B}'_q \left(\mathbf{B}'_q{}^H \mathbf{R}_B^\# \mathbf{B}'_q \right)^{-1} \mathbf{B}'_q{}^H \\ &\quad - \mathbf{\Pi}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{B}'_q \left(\mathbf{B}'_q{}^H \mathbf{R}_B^\# \mathbf{B}'_q \right)^{-1} \mathbf{B}'_q{}^H \\ &= \mathbf{\Pi}^\perp(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{B}'_q \left(\mathbf{B}'_q{}^H \mathbf{R}_B^\# \mathbf{B}'_q \right)^{-1} \mathbf{B}'_q{}^H \quad (4.2.69) \\ &\triangleq \boldsymbol{\Delta}_q(\boldsymbol{\eta}'_q), \end{aligned}$$

où $\mathbf{\Pi}^\perp(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{I}_{NK} - \mathbf{\Pi}(\boldsymbol{\eta})$. Ainsi en remplaçant (4.2.69) dans (4.2.68), on obtient finalement (4.2.65). En $\boldsymbol{\eta}'_q = \boldsymbol{\eta}_q$ nous avons $\mathbf{\Pi}^\perp(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{B}_q = \mathbf{0}$ et donc $\boldsymbol{\Delta}_q(\boldsymbol{\eta}_q) = \mathbf{0}$. \square

Par conséquent, on peut proposer comme critère issu de la projection oblique, de minimiser pour chaque source la trace de $\boldsymbol{\Delta}_q(\boldsymbol{\eta}'_q)$ où le projecteur bruit $\mathbf{\Pi}^\perp(\boldsymbol{\eta})$ est remplacé par son estimée $\hat{\mathbf{\Pi}}_n$. On obtient alors la fonction de cout suivante :

$$J_{PO,q}(\boldsymbol{\eta}'_q) = \text{tr} \left[\left(\mathbf{B}'_q{}^H(\boldsymbol{\eta}'_q) \mathbf{R}_B^\# \mathbf{B}'_q(\boldsymbol{\eta}'_q) \right)^{-1} \mathbf{B}'_q{}^H(\boldsymbol{\eta}'_q) \hat{\mathbf{\Pi}}_n \mathbf{B}'_q(\boldsymbol{\eta}'_q) \right]. \quad (4.2.70)$$

On remarque que si les sources sont décorréllées alors la matrice de covariance des sources est diagonale et

$$\left(\mathbf{B}'_q{}^H(\boldsymbol{\eta}_q) \mathbf{R}_B^\# \mathbf{B}'_q(\boldsymbol{\eta}_q) \right)^{-1} = \mathbf{S}_q^{-1}. \quad (4.2.71)$$

On retrouve alors le critère du maximum de vraisemblance approché (4.2.59). Ce dernier estime la pseudo-inverse $\mathbf{R}_B^\#$ et nécessite donc une estimation préalable des paramètres du modèle, il permet en revanche de concentrer le critère selon les paramètres $\{\mathbf{p}, \mathbf{f}\}$ seulement, ce qui apparaît non-trivial dans (4.2.70).

La mise en œuvre de cet algorithme de projection oblique requiert la connaissance de la dimension du vecteur $\boldsymbol{\eta}_q$, c'est à dire la dimension du vecteur \mathbf{f}_q qui est précisément K_q . Celle-ci peut être fournie par le résultat de l'algorithme LOST. En effet, pour chaque minimum proche de zéro atteint en $\hat{\mathbf{p}}_q$, la multiplicité de $\lambda_{\min,q}$, valeur propre minimale proche de zéro de la matrice $(\mathbf{V}^H(\hat{\mathbf{p}}_q) \mathbf{V}(\hat{\mathbf{p}}_q))^{-1} \mathbf{V}(\hat{\mathbf{p}}_q)^H \hat{\mathbf{\Pi}}_n \mathbf{V}(\hat{\mathbf{p}}_q)$, est de K_q puisque les K_q vecteurs $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_q, f_{k,q})$ dans (4.2.36) engendrent l'espace nul de la matrice

$$(\mathbf{V}^H(\hat{\mathbf{p}}_q) \mathbf{V}(\hat{\mathbf{p}}_q))^{-1} \mathbf{V}(\hat{\mathbf{p}}_q)^H \hat{\mathbf{\Pi}}_n \mathbf{V}(\hat{\mathbf{p}}_q). \quad (4.2.72)$$

4.2.2.3 Le subspace fitting (SF-LOST)

Les deux techniques précédentes ont pour inconvénient de nécessiter soit une optimisation selon les paramètres de nuisance $\boldsymbol{\rho}$ pour le cas de la projection oblique, soit une estimation de la matrice de covariance de la source dans le cas du maximum de vraisemblance approché. L'algorithme présenté dans ce paragraphe a pour objectif de palier ces inconvénients. Pour cela nous nous appuyerons sur une technique à sous-espace dite de "subspace fitting" [VO91].

En chaque minimum local du critère (4.2.36) pour la valeur $\hat{\mathbf{p}}_q$, la matrice

$(\mathbf{V}^H(\hat{\mathbf{p}}_q)\mathbf{V}(\hat{\mathbf{p}}_q))^{-1}\mathbf{V}(\hat{\mathbf{p}}_q)^H\hat{\mathbf{\Pi}}_n\mathbf{V}(\hat{\mathbf{p}}_q)$ possède K_q valeurs propres proches de zéro. Soit

$$\hat{\mathbf{E}}_q = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_{1,q} & \dots & \hat{\mathbf{e}}_{K_q,q} \end{bmatrix}, \quad (4.2.73)$$

la matrice des vecteurs propres associés à ces K_q valeurs propres.

Nous souhaitons, selon la philosophie du “subspace-fitting” (SF) [VO91] minimiser la distance suivante pour estimer le paramètre $\boldsymbol{\eta}_q$:

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_q = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}_q, \mathbf{M}} \left\| \hat{\mathbf{E}}_q \mathbf{M} - \mathbf{B}(\boldsymbol{\eta}_q) \right\|_F, \quad (4.2.74)$$

où $\|\cdot\|_F$ est la norme de Frobenius et \mathbf{M} une matrice de rang plein. Remplaçons l’expression d’une solution en \mathbf{M} du critère (4.2.74) par la pseudo-inverse $\mathbf{M} = \left(\hat{\mathbf{E}}_q^H \hat{\mathbf{E}}_q \right)^{-1} \hat{\mathbf{E}}_q^H \mathbf{B}(\boldsymbol{\eta}_q)$, nous obtenons alors, pour une variable candidate $\boldsymbol{\eta}'_q = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T & \boldsymbol{\rho}^T & f_1 & \dots & f_{K_q} \end{bmatrix}^T$ et en notant $\hat{\mathbf{\Pi}}_q = \mathbf{I} - \hat{\mathbf{E}}_q \left(\hat{\mathbf{E}}_q^H \hat{\mathbf{E}}_q \right)^{-1} \hat{\mathbf{E}}_q^H$:

$$\begin{aligned} \left\| \hat{\mathbf{E}}_q \mathbf{M} - \mathbf{B}(\boldsymbol{\eta}'_q) \right\|_F &= \left\| \left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{E}}_q \left(\hat{\mathbf{E}}_q^H \hat{\mathbf{E}}_q \right)^{-1} \hat{\mathbf{E}}_q^H \right) \mathbf{B}(\boldsymbol{\eta}'_q) \right\|_F \\ &= \text{tr} \left(\mathbf{B}^H(\boldsymbol{\eta}'_q) \hat{\mathbf{\Pi}}_q \mathbf{B}(\boldsymbol{\eta}'_q) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{b}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_k) \hat{\mathbf{\Pi}}_q \mathbf{b}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_k) \\ &= \boldsymbol{\rho}^H \left(\sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{T}^H(\mathbf{p}, f_k) \hat{\mathbf{\Pi}}_q \mathbf{T}(\mathbf{p}, f_k) \right) \boldsymbol{\rho}, \end{aligned} \quad (4.2.75)$$

où la matrice $\mathbf{T}(\mathbf{p}, f)$ a été définie à l’équation (4.2.57). Partant de l’équation (4.2.74) et à l’aide du théorème 3 [Gan59], nous proposons de minimiser pour chaque source le critère suivant qui permet d’obtenir l’algorithme SF-LOST :

$$J_{SF-LOST,q}(\mathbf{p}, \mathbf{f}) = \lambda_{\min} \left\{ \sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{T}^H(\mathbf{p}, f_k) \hat{\mathbf{\Pi}}_q \mathbf{T}(\mathbf{p}, f_k) \right\}, \quad (4.2.76)$$

$$\text{où } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 & \dots & f_{K_q} \end{bmatrix}^T.$$

4.2.2.4 Résultats numériques

Notons que les deux algorithmes basés sur la projection oblique et AMLM ont besoin d’un *a priori* qui peut être fourni par l’algorithme LOST. L’intérêt d’un tel mode opérationnel est que si il se trouve qu’une source n’occupe qu’un seul canal fréquentiel, c’est à dire si $K_q = 1$, alors il ne sert à rien d’exploiter les versions améliorées de LOST. Une approche de type MUSIC est tout à fait pertinente puisque le sous-espace engendré par la source est de dimension un. Le sous-espace engendré par la source étant de dimension 1 le terme $e^{-j2\pi f_{1,q}\tau_l(\mathbf{p}_q)}$ ne peut être alors estimé puisqu’il se trouve toujours multiplié par $e^{j\phi_{l,q}}$ qui est inconnu. On voit alors l’intérêt d’avoir tout d’abord recours à l’algorithme LOST en premier lieu, puis éventuellement de chercher à affiner la précision de l’estimée par la suite, comme l’illustre le schéma de la figure 4.2.8.

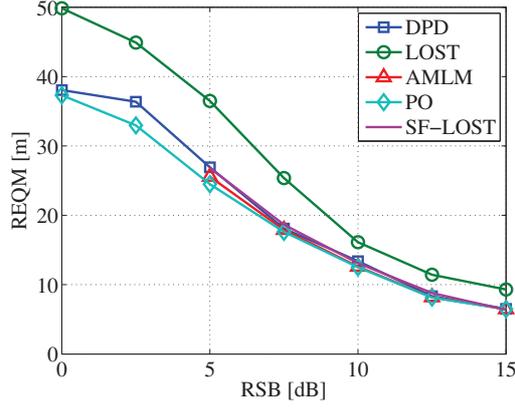


FIGURE 4.2.9 – Comparaison des algorithmes LOST, AMLM, DPD et de projection oblique pour une source seule présente en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$, $K = 15$, $T=100$, produit $TB=0.45$, $\boldsymbol{\rho}_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, nombre de réalisations=100.

Nous traçons sur la figure 4.2.9 les performances des algorithmes LOST, AMLM, DPD, SF-LOST et de projection oblique dans le cas d’une seule source dans un scénario décrit à la figure 2.5.1. Les critères sont minimisés par une méthode de Newton initialisée par une recherche sur une grille de points. La REQM est estimée de manière empirique par :

$$REQM = \sqrt{\frac{1}{MC} \sum_{k=1}^{MC} \|\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}_k\|^2}, \quad (4.2.77)$$

où MC est le nombre de tirages aléatoires et $\hat{\mathbf{p}}_k$ la k -ième estimation de la réalisation correspondante de l’estimateur. Nous observons que les algorithmes AMLM, DPD, la projection oblique et SF-LOST sont plus performants que l’algorithme LOST. Ceci s’explique par le fait que les quatre méthodes précédemment citées exploitent le terme $e^{-j2\pi f_{k,q} \tau_l(\mathbf{p}_q)}$.

Pour de faibles valeurs du RSB, l’estimation des fréquences par le critère proposé (4.2.50) manque de résolution : le nombre de zéros du critère diffère du nombre de fréquences K_q ce qui ne nous permet plus d’estimer correctement la matrice de covariance de la source, et l’AMLM échoue alors.

L’AMLM offre de meilleures performances que LOST même à fort RSB. La projection oblique (PO) offre des performances voisines mais requiert un coût de calcul plus important. Notons que la projection oblique aussi bien que l’AMLM reposent sur l’hypothèse que la matrice des sources est bloc-diagonale. Il a néanmoins été mis en évidence que malgré le fait que la projection oblique repose sur une hypothèse de matrice diagonale dans le contexte de l’article [MS02] elle est plus robuste à la corrélation entre les sources que MUSIC. L’algorithme SF-LOST offre quant à lui des performances intermédiaires entre l’AMLM et LOST, pour une charge de calcul intermédiaire.

Le DPD s’avère également plus performant, toutefois il apparaît moins robuste au produit TB et souffre de diverses limitations mises en évidence au paragraphe 2.5.2.

Un scénario où le produit TB est relativement important, comme illustré par la figure 4.2.9, permet aux techniques issues de l’amélioration de LOST, de montrer leur supériorité par rapport à ce dernier. En effet, dans un scénario large bande, les termes de retard $\tau_l(\mathbf{p})$ deviennent alors estimables avec une plus grande précision et leur exploitation permet d’améliorer les performances. Or, comme nous l’avons vu précédemment, ce terme n’est

pas exploité par l'algorithme LOST.

4.3 Signaux déterministes : maximum de vraisemblance et borne de Cramer-Rao

Les premiers travaux proposant un maximum de vraisemblance pour le problème de géolocalisation traité en une étape [WK83] étudient le cas de signaux Gaussiens et supposent les densités spectrales du bruit et des sources connues. La borne de Cramer-Rao stochastique a été calculée en supposant les densités spectrales des sources connues [WK83] et de manière plus générale dans [KS04, EG07]. L'article [AW05] fournit également la BCR sous l'hypothèse d'indépendance des canaux fréquentiels. À notre connaissance il n'existe pas de travaux portant sur le cas de signaux déterministes pour le problème de géolocalisation, que ce soit pour le maximum de vraisemblance ou pour la BCR.

4.3.1 Modèle des signaux

Rappelons le modèle des signaux de l'équation (2.3.1) :

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q} \mathbf{a}_l(\theta_l(\mathbf{p}_q)) s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) + \mathbf{n}_l(t).$$

Notons $\{s_q(f_k), 1 \leq k \leq T\}$ les coefficients issus de la transformée de Fourier discrète du signal $s_q(t)$ sur T échantillons :

$$s_q(t_n) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T s_q(f_k) e^{j2\pi f_k t_n}, \quad 1 \leq n \leq T, \quad (4.3.1)$$

avec

$$f_k = \frac{k}{T} F_e. \quad (4.3.2)$$

Si la durée d'observation $T \times T_e$ est grande devant le temps de parcours à travers le réseau $\Delta\tau$, c'est à dire si

$$\left| \frac{F_e}{T} \Delta\tau \right| \ll 1, \quad (4.3.3)$$

nous pouvons alors écrire

$$s_q(t_n - \tau_l(\mathbf{p}_q)) \approx \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T s_q(f_k) e^{j2\pi f_k t_n} e^{-j2\pi f_k \tau_l(\mathbf{p}_q)}. \quad (4.3.4)$$

Nous avons donc

$$\mathbf{x}_l(t_n) = \frac{1}{T} \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q} \mathbf{a}_l(\mathbf{p}_q) \sum_{k=1}^T e^{-j2\pi f_k \tau_l(\mathbf{p}_q)} s_q(f_k) e^{j2\pi f_k t_n} + \mathbf{n}_l(t_n), \quad (4.3.5)$$

et le vecteur multistation $\mathbf{x}(t_n) = \left[\mathbf{x}_1^T(t_n) \quad \dots \quad \mathbf{x}_L^T(t_n) \right]^T$ s'écrit alors

$$\mathbf{x}(t_n) = \frac{1}{T} \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^T \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_k) s_q(f_k) e^{j2\pi f_k t_n} + \mathbf{n}(t_n), \quad 1 \leq n \leq T. \quad (4.3.6)$$

Le vecteur des paramètres inconnus s'écrit :

$$\boldsymbol{\xi} = \left[\mathbf{p}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{p}_Q^T \quad \boldsymbol{\psi}_1^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\psi}_Q^T \quad \boldsymbol{\phi}_1^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_Q^T \quad \text{Re} \left\{ \mathbf{s}_f^T \right\} \quad \text{Im} \left\{ \mathbf{s}_f^T \right\} \right]^T, \quad (4.3.7)$$

où on rappelle que les vecteurs $\boldsymbol{\psi}_q$ et $\boldsymbol{\phi}_q$ contiennent respectivement le module et la phase de $\boldsymbol{\rho}_q$ et où

$$\mathbf{s}_f = \left[\mathbf{s}^T(f_1) \quad \dots \quad \mathbf{s}^T(f_T) \right]^T, \quad (4.3.8)$$

$$\mathbf{s}(f_k) = \left[s_1(f_k) \quad \dots \quad s_Q(f_k) \right]^T. \quad (4.3.9)$$

4.3.2 Maximum de vraisemblance déterministe

Nous donnons dans ce paragraphe l'expression du maximum de vraisemblance déterministe, et examinons plus particulièrement les simplifications qui s'opèrent dans le cas d'une seule source.

Puisque les vecteurs $\{\mathbf{x}(t_n), 1 \leq n \leq T\}$ sont des vecteurs Gaussiens indépendants, l'opposée de la log-vraisemblance selon le paramètre $\boldsymbol{\xi}$ s'écrit :

$$-\mathcal{L}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^T \left\| \mathbf{x}(t_n) - \frac{1}{T} \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^T \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_k) s_q(f_k) e^{j2\pi f_k t_n} \right\|^2. \quad (4.3.10)$$

Nous avons, en notant $\mathbf{x}(f_k)$ le coefficient de Fourier de $\mathbf{x}(t)$ à la fréquence f_k :

$$-\mathcal{L}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{T^2 \sigma^2} \sum_{n=1}^T \left\| \sum_{k=1}^T \left(\mathbf{x}(f_k) - \sum_{q=1}^Q \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_k) s_q(f_k) \right) e^{j2\pi f_k t_n} \right\|^2 \quad (4.3.11)$$

$$= \frac{1}{T^2 \sigma^2} \sum_{n=1}^T \sum_{k,k'=1}^T \mathbf{m}_k^H \mathbf{m}_{k'} e^{j2\pi(f_k - f_{k'})t_n}, \quad (4.3.12)$$

avec $\mathbf{m}_k = \mathbf{x}(f_k) - \sum_{q=1}^Q \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_k) s_q(f_k)$.

Or, puisque

$$\sum_{n=1}^T e^{j2\pi(f_k - f_{k'})t_n} = T \delta_{kk'}, \quad (4.3.13)$$

avec $t_n = nT_e$ et où $\delta_{kk'}$ est le symbole de Kronecker, nous avons

$$-\mathcal{L}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{T \sigma^2} \sum_{k=1}^T \left\| \mathbf{x}(f_k) - \sum_{q=1}^Q \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_k) s_q(f_k) \right\|^2. \quad (4.3.14)$$

La log-vraisemblance peut alors être concentrée en

$$\boldsymbol{\eta} = \left[\mathbf{p}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{p}_Q^T \quad \boldsymbol{\psi}_1^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\psi}_Q^T \quad \boldsymbol{\phi}_1^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_Q^T \right]^T, \quad (4.3.15)$$

selon un principe décrit dans [Böh84], nous obtenons la fonction de coût à minimiser suivante :

$$J_{MVD}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{T\sigma^2} \sum_{k=1}^T \mathbf{x}^H(f_k) \boldsymbol{\Pi}_k^\perp(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{x}(f_k). \quad (4.3.16)$$

avec

$$\boldsymbol{\Pi}_k^\perp(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{I}_N - \mathbf{U}_k(\boldsymbol{\eta}) (\mathbf{U}_k^H(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{U}_k(\boldsymbol{\eta}))^{-1} \mathbf{U}_k^H(\boldsymbol{\eta}), \quad (4.3.17)$$

$$\mathbf{U}_k(\boldsymbol{\eta}) = \left[\mathbf{u}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, f_k) \quad \dots \quad \mathbf{u}(\mathbf{p}_Q, \boldsymbol{\rho}_Q, f_k) \right]. \quad (4.3.18)$$

4.3.2.1 Cas d'une source

Le critère (4.3.16) requiert une optimisation dans un espace de dimension potentiellement importante. Nous devons alors également optimiser le critère selon les paramètres de nuisance. Néanmoins, dans le cas d'une source, la dimension d'optimisation peut être réduite. Nous avons

$$\boldsymbol{\Pi}_k^\perp = \mathbf{I}_N - \frac{\mathbf{u}^H(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, f_k) \mathbf{u}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, f_k)}{N}. \quad (4.3.19)$$

Le critère à minimiser devient alors

$$T\sigma^2 J_{MVD}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{k=1}^T \|\mathbf{x}(f_k)\|^2 - \frac{\|\mathbf{u}^H(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, f_k) \mathbf{x}(f_k)\|^2}{N}. \quad (4.3.20)$$

En omettant les termes constants, il nous faut maximiser

$$J_{MVD}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{k=1}^T \mathbf{u}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_k) \mathbf{x}^H(f_k) \mathbf{x}(f_k) \mathbf{u}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_k), \quad (4.3.21)$$

ce qui peut toujours se ramener, grâce au résultat de l'équation (2.5.25) [Gan59], à la maximisation du critère

$$J_{MVD}(\mathbf{p}) = \lambda_{max} \left\{ \sum_{k=1}^T \mathbf{V}_k^H(\mathbf{p}) \mathbf{x}^H(f_k) \mathbf{x}(f_k) \mathbf{V}_k(\mathbf{p}) \right\}, \quad (4.3.22)$$

où $\lambda_{max}\{\cdot\}$ désigne la valeur propre maximale, et avec

$$\mathbf{V}_k(\mathbf{p}) = \text{diag} \left(\mathbf{a}_1(\mathbf{p}) e^{-j2\pi f_k \tau_1(\mathbf{p})} \quad \dots \quad \mathbf{a}_L(\mathbf{p}) e^{-j2\pi f_k \tau_L(\mathbf{p})} \right). \quad (4.3.23)$$

L'équation (4.3.22) montre que la dimension d'optimisation se réduit à celle de \mathbf{p} quel que soit le nombre de stations, ce qui est intéressant d'un point de vue pratique.

4.3.3 Borne de Cramer-Rao

Sous l'hypothèse de signaux déterministes et d'un bruit Gaussien centré et circulaire, l'élément ij de la BCR du problème d'estimation (4.3.6), notée BCR s'écrit

$$[BCR^{-1}(\boldsymbol{\eta})]_{ij} = \frac{2}{\sigma^2 T^2} \text{Re} \left\{ \text{tr} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{V}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_i} \right)^H \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{V}}^{\perp}(\boldsymbol{\eta}) \frac{\partial \mathbf{V}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_j} \mathbf{s}_f \mathbf{s}_f^H \right] \right\}, \quad (4.3.24)$$

où $\boldsymbol{\eta} = \left[\mathbf{p}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{p}_Q^T \quad \boldsymbol{\psi}_1^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\psi}_Q^T \quad \boldsymbol{\phi}_1^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_Q^T \right]^T$, et

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(\boldsymbol{\eta}) \\ \vdots \\ \mathbf{V}_T(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix}, \quad (4.3.25)$$

avec $\mathbf{V}_n(\boldsymbol{\eta}) = \left[\mathbf{U}_1(\boldsymbol{\eta}) e^{j2\pi f_1 t_n} \quad \dots \quad \mathbf{U}_T(\boldsymbol{\eta}) e^{j2\pi f_T t_n} \right]$, $\mathbf{U}_k(\boldsymbol{\eta})$ étant défini à l'équation (4.3.18) et

$$\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{V}}^{\perp}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{I} - \mathbf{V}(\boldsymbol{\eta}) (\mathbf{V}^H(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{V}(\boldsymbol{\eta}))^{-1} \mathbf{V}^H(\boldsymbol{\eta}). \quad (4.3.26)$$

Démonstration. Le bruit $\mathbf{n}(t_n)$ est supposé blanc Gaussien, centré et circulaire, de covariance $\sigma^2 \mathbf{I}$. Les signaux sont déterministes, $\mathbf{x}(t_n)$ est alors Gaussien, de moyenne

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\boldsymbol{\xi}, t_n) &\triangleq \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \mathbf{U}_k(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{s}(f_k) e^{j2\pi f_k t_n}, \\ &= \frac{1}{T} \mathbf{V}_n(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{s}_f, \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

et de covariance $\sigma^2 \mathbf{I}$.

La MIF s'écrit [VT02] alors :

$$[\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})]_{ij} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^T \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{m}(\boldsymbol{\xi}, t_n)}{\partial \xi_i} \frac{\partial \mathbf{m}^H(\boldsymbol{\xi}, t_n)}{\partial \xi_j} \right\}. \quad (4.3.28)$$

On peut également écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{2}{\sigma^2 T^2} \text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^T \mathbf{G}_n^H \mathbf{G}_n \right\} \\ &= \frac{2}{\sigma^2 T^2} \text{Re} \{ \mathbf{G}^H \mathbf{G} \}, \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_n &= T \frac{\partial \mathbf{m}(\boldsymbol{\xi}, t_n)}{\partial \boldsymbol{\xi}^T}, \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{V}_n(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}^T} \mathbf{s}_f \quad \mathbf{V}_n(\boldsymbol{\eta}) \quad j \mathbf{V}_n(\boldsymbol{\eta}) \right], \\ &\triangleq \left[\mathbf{D}_n \quad \mathbf{V}_n(\boldsymbol{\eta}) \quad j \mathbf{V}_n(\boldsymbol{\eta}) \right], \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

et où on a défini :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \left[\mathbf{G}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{G}_T^T \right]^T \\ &= \left[\mathbf{D} \quad \mathbf{V}(\boldsymbol{\eta}) \quad j\mathbf{V}(\boldsymbol{\eta}) \right], \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

avec

$$\mathbf{D} = \left[\mathbf{D}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{D}_T^T \right]^T. \quad (4.3.32)$$

Étant donnée la structure de la matrice de Fisher (4.3.29), on obtient finalement la borne concentrée en fonction du paramètre $\boldsymbol{\eta}$ seulement [SL01] :

$$BCR^{-1}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{2}{\sigma^2 T^2} Re \left\{ \mathbf{D}^H(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{V}}^\perp(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}) \right\}, \quad (4.3.33)$$

que l'on peut également écrire sous la forme (4.3.24) en se rappelant que $\mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\partial \mathbf{V}_n(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}^T} \mathbf{s}_f$. \square

Le fait que la borne de Cramer-Rao soit concentrée en $\boldsymbol{\eta}$ permet d'éviter d'inverser numériquement la matrice de Fisher (4.3.28) de taille $QD + 2(L-1)Q + 2QT$. La formule (4.3.24) ne requiert que l'inversion d'une matrice de taille $QD + 2(L-1)Q$ et de la matrice $\mathbf{V}^H(\boldsymbol{\eta})\mathbf{V}(\boldsymbol{\eta})$ de dimension QT . Toutefois si cette borne reste difficile à interpréter sous cette forme elle constitue une référence numérique utile permettant de caractériser les performances ultimes pour le problème de localisation posé.

Remarque. On montre à l'annexe A.4 que lorsque les signaux sont bande étroite dans la borne (4.3.24) alors celle ci est égale à la borne de Cramer-Rao bande étroite (3.3.3). Ceci illustre bien le caractère général de la BCR (4.3.24).

4.3.4 Algorithmes centralisés et borne de Cramer-Rao

Par le biais de quelques simulations, nous allons maintenant mettre en évidence le comportement des algorithmes centralisés et de la triangulation vis à vis du maximum de vraisemblance déterministe et de la borne de Cramer-Rao.

4.3.4.1 Influence du nombre de sources

Dans ce paragraphe, le produit TB de l'équation (2.2.12) est ici égal à 0.04. Les critères sont minimisés par une méthode de Newton initialisée par une recherche sur une grille de points. La REQM est estimée de manière empirique par :

$$REQM = \sqrt{\frac{1}{MC} \sum_{k=1}^{MC} \|\mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}_k\|^2}, \quad (4.3.34)$$

où MC est le nombre de tirages aléatoires et $\hat{\mathbf{p}}_k$ la k -ième estimation de la réalisation correspondante de l'estimateur.

Sur la figure 4.3.1a nous considérons le cas d'une seule source blanche. Comme nous voyons, toutes les stratégies offrent des performances asymptotiquement comparables à la BCR (4.3.24). Pour un faible RSB, une approche en une étape se montre plus performante qu'une approche traditionnelle à deux étapes. Les bornes décentralisées et la BCR sont extrêmement proches pour le produit TB considéré.

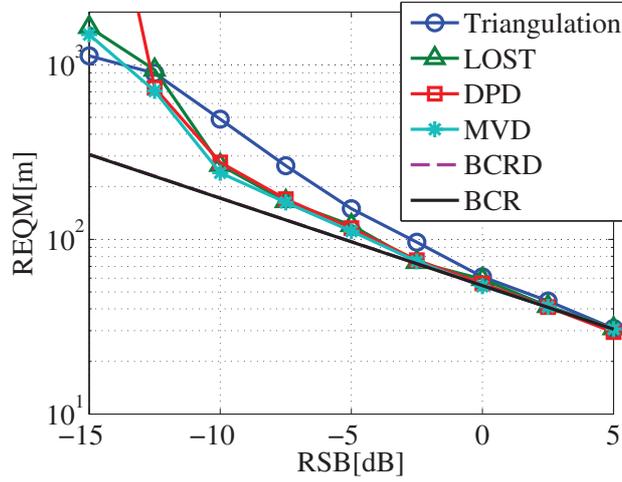
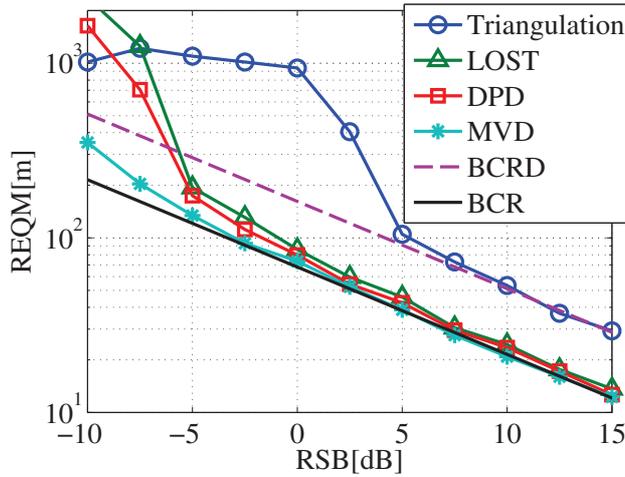
(a) REQM pour une seule source en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$.(b) REQM d'une source en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$ en présence d'une seconde source en $\mathbf{p}_2 = -[0 \ 1000]^T$, $T=200$.

FIGURE 4.3.1 – Comparaison des performances de LOST ($K = 4$), du DPD ($J = 4$), du MVD et de la triangulation face à leurs bornes respectives en fonction du RSB dans un contexte de signaux large bande, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, $T=200$, nombre de réalisations=100, produit TB =0.04 .

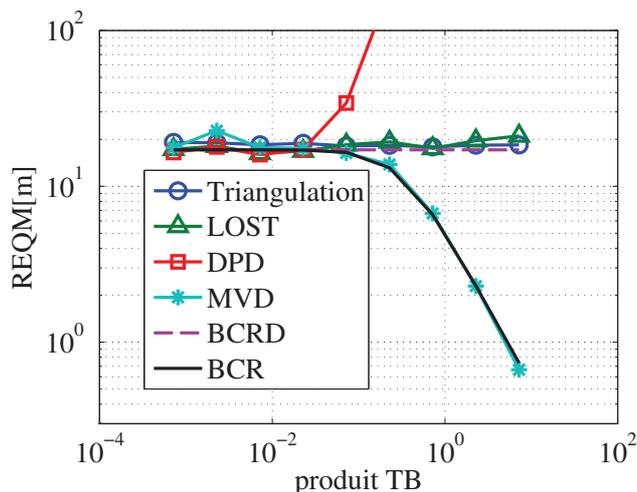
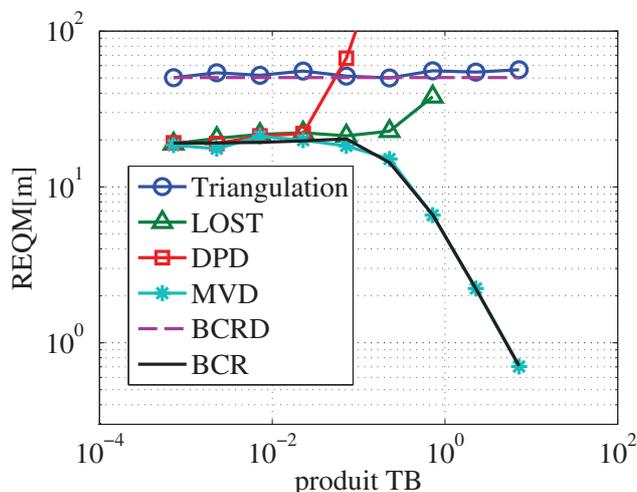
(a) REQM pour une seule source en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$.(b) REQM d'une source en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$ en présence d'une seconde source en $\mathbf{p}_2 = -[0 \ 1000]^T$.

FIGURE 4.3.2 – Comparaisons des performances de LOST ($K = 4$), du DPD ($J = 4$), du MVD et de la triangulation face à leurs bornes respectives en fonction du produit TB, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, $T=200$, nombre de réalisations=100, RSB= 10 dB.

Sur la Figure 4.3.1b nous considérons deux sources. Dans ce contexte, les bornes BCRD et BCR sont clairement distinctes et mettent en avant l'intérêt d'une approche centralisée en une étape, même à fort RSB. Comme on pouvait s'y attendre [RFCL06], le maximum de vraisemblance offre des performances comparables à la BCR . Les algorithmes centralisés en une étape LOST et DPD apparaissent comme des solutions pertinentes au vu de leur comportement face à la BCR qui traduit la performance ultime accessible du scénario. On constate alors le gain conséquent apporté par une stratégie en une seule étape. Une stratégie décentralisée en deux étapes comme la triangulation est moins performante qu'une approche centralisée même à fort RSB.

4.3.4.2 Influence du produit TB

Nous examinons dans cette section l'influence du produit TB défini à l'équation 2.2.12. Cette grandeur joue un rôle important car elle permet de caractériser le contexte : savoir si les signaux peuvent être supposés large bande ou bande étroite. Nous faisons ainsi varier

la bande des signaux afin d'obtenir une variation du produit TB.

Pour le cas d'une seule source, examiné à la figure 4.3.2a, nous constatons qu'effectivement toutes les approches considérées sont équivalentes pour de faibles valeurs du produit TB. Lorsque le produit TB augmente, alors la borne du problème de localisation BCR diminue et seul le maximum de vraisemblance en tire parti. Les performances des algorithmes LOST et DPD finissent par décrocher, signe que l'hypothèse de signaux bande étroite en sortie du banc de filtres n'est plus plausible. Pour retarder ce décrochement le nombre de décalages temporels et la taille du banc de filtre doivent être augmentés comme le montre la figure 4.2.6. En effet, plus la bande des signaux devient importante, plus l'information du temps de retard devient importante en vue de l'amélioration des performances de géolocalisation.

La figure 4.3.2b considère le cas de deux sources. On y remarque d'une part le gain apporté par une stratégie centralisée en une étape (LOST ou DPD) comparativement à une triangulation et d'autre part que seul le MVD semble tirer une nouvelle fois complètement parti d'un scénario où le produit TB est grand. Une approche par triangulation affiche alors clairement ses limites à la figure 4.3.2b.

Nous retrouvons bien l'égalité des bornes $BCRD$ et BCR à faible produit TB dans un scénario monosource. En présence de deux sources, on constate bien la supériorité d'une approche centralisée quel que soit le produit TB, comme nous l'observons à la figure 4.3.2b.

Le maximum de vraisemblance apparaît évidemment comme une solution optimale dont les performances sont particulièrement intéressantes à fort produit TB et dans un contexte multisource. Il faut toutefois garder à l'esprit que la dimension d'optimisation du critère est importante : il nécessite une optimisation dans un espace de dimension $DQ + 2(L - 1)Q$.

4.4 Un algorithme hybride AOA/TDOA à bas coût dans le cas de multitrajets

Les multitrajets constituent une source importante d'erreurs. Nous proposons ici un algorithme opérationnel à bas coût [FBL10] fonctionnant dans le cas de multitrajets.

Alors que l'identification des multitrajets est souvent effectuée par le traitement de l'information statistique portée par les paramètres intermédiaires, nécessitant donc de disposer de plusieurs estimées des paramètres, nous proposons ici une estimation et une discrimination directe des multitrajets qui ne requiert qu'une seule estimée des paramètres.

Nous considérons Q sources dont le signal est noté $s_q(t)$, L stations et R réflecteurs. Nous supposons que chaque signal n'est réfléchi qu'une seule fois sur chaque réflecteur comme illustré par la figure 4.4.1. L'observation de la station l s'écrit :

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q} \mathbf{a}_l(\theta_{l,q}) s_q(t - \tau_{l,q}) + \sum_{m=1}^R \rho_{l,m}^r \mathbf{a}_l(\theta_{m,q}^r) r_m(t - \tau_{l,m}^r) + \mathbf{n}_l(t), \quad (4.4.1)$$

avec

$$r_m(t) = \sum_{q=1}^Q \alpha_{m,q} s_q(t - \nu_{m,q}), \quad 1 \leq m \leq R \quad (4.4.2)$$

où

$$\nu_{m,q} = \frac{\|\mathbf{p}_r(m) - \mathbf{p}_q\|}{c}, \quad (4.4.3)$$

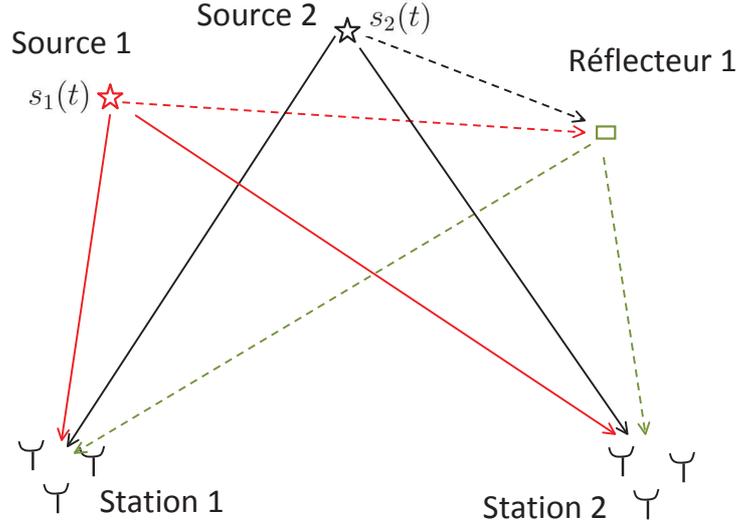


FIGURE 4.4.1 – Contexte multisource en présence de réflecteurs, ces derniers renvoyant une version retardée et atténuée des signaux d’origine.

$$\tau_{l,q} = \frac{\|\mathbf{p}_q - \mathbf{p}(l)\|}{c}, \quad (4.4.4)$$

$$\tau_{l,m}^r = \frac{\|\mathbf{p}(l) - \mathbf{p}_r(m)\|}{c}, \quad (4.4.5)$$

où $\mathbf{p}_r(m)$ désigne la position du m -ième réflecteur.

Nous pouvons écrire le modèle (4.4.1) sous la forme suivante

$$\mathbf{x}_l(t) = \mathbf{A}_l(\boldsymbol{\theta}_l)\mathbf{s}_l(t) + \mathbf{n}_l(t), \quad (4.4.6)$$

$$\text{où } \boldsymbol{\theta}_l = \left[\boldsymbol{\theta}_l^T \quad \dots \quad (\boldsymbol{\theta}_l^r)^T \right]^T \text{ et } \boldsymbol{\theta}_l^r = \left[\theta_{l,1}^r \quad \dots \quad \theta_{l,R}^r \right]^T,$$

$$\mathbf{A}_l(\boldsymbol{\theta}_l) = \left[\mathbf{a}_l(\theta_{l,1}) \quad \dots \quad \mathbf{a}_l(\theta_{l,Q}) \quad \mathbf{a}_l(\theta_{l,1}^r) \quad \dots \quad \mathbf{a}_l(\theta_{l,R}^r) \right], \quad (4.4.7)$$

$$\mathbf{s}_l(t) = \left[\rho_{l,1}s_1(t - \tau_{l,1}) \quad \dots \quad \rho_{l,Q}s_Q(t - \tau_{l,Q}) \quad \rho_{l,1}^r r_1(t - \tau_{l,1}^r) \quad \dots \quad \rho_{l,R}^r r_R(t - \tau_{l,R}^r) \right]. \quad (4.4.8)$$

4.4.1 Algorithme

Nous proposons alors les étapes suivantes afin d’estimer la position des émetteurs

1. Estimation de la direction d’arrivée : un algorithme de type MUSIC est appliqué sur chaque station afin de disposer d’une estimée des directions d’arrivées $\boldsymbol{\theta}_l$.
2. Estimation des signaux reçus par la station l : sur chaque station les signaux reçus sont estimés à l’aide des directions d’arrivée préalablement estimées $\hat{\boldsymbol{\theta}}_l$ et des signaux $\mathbf{x}_l(t)$ reçus par la station l :

$$\hat{\mathbf{s}}_l(t) = \mathbf{A}_l^\#(\hat{\boldsymbol{\theta}}_l)\mathbf{x}_l(t). \quad (4.4.9)$$

Chaque composante k du vecteur $\hat{\mathbf{s}}_l(t)$ est alors liée à un angle correspondant à la k -ième ligne du vecteur $\hat{\boldsymbol{\theta}}_l$.

3. Discrimination des multitrajets : la fonction suivante est exploitée

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{E [x(t)y^*(t - \tau)]^2}{E [|x(t)|^2] E [|y(t)|^2]}. \quad (4.4.10)$$

Et nous en tirons les trois propriétés suivantes :

- P1 : $\rho_{s_q s_{q'}}(\tau) = 0$, pour $q \neq q'$, puisque les sources sont supposées statistiquement indépendantes.
- P2 : $\rho_{s_q r_m}(\tau)$ possède un extrêma en $\tau = \tau_{l,q} - (\tau_{l,m}^r + \nu_{m,l})$.
- P3 : $\rho_{r_m r_{m'}}(\tau)$ possède au maximum Q extrêma en $\tau = (\tau_{l,m}^r + \nu_{m,l}) - (\tau_{l,m'}^r + \nu_{m',l})$ pour $1 \leq q \leq Q$.

Les signaux issus des trajets directs des sources sont alors distingués à l'aide des propriétés précédentes en calculant la fonction $\rho_{xy}(\tau)$ de l'équation (4.4.10) où $x(t)$ et $y(t)$ sont pris parmi les composantes du vecteur $\hat{\mathbf{s}}_l(t)$.

En présence de plusieurs sources, les signaux issus des trajets directs sont identifiés comme étant les seuls dont la fonction de corrélation (4.4.10) est nulle entre eux selon la proposition P1.

En présence d'une seule source, le trajet direct est identifié parmi les composantes du vecteur $\hat{\mathbf{s}}_l(t)$ comme étant celui issu du plus court trajet. Pour cela, il faut sélectionner la composante dont le maximum de la fonction de corrélation, présentée à l'équation (4.4.10) avec toutes les composantes, est présent pour la plus petite valeur de τ en vertu de la propriété P2.

4. Estimation des TDOA : le critère suivant est considéré

$$\gamma_{ll',q}(\tau) = \frac{\mathbf{c}_q^H(\tau) \mathbf{R}_{l'}^{-1}(\tau) \mathbf{c}_q(\tau)}{\rho_{\hat{\mathbf{s}}_{l,q} \hat{\mathbf{s}}_{l',q}}(0)} \quad (4.4.11)$$

avec

$$\mathbf{R}_{l'}(\tau) = E [\mathbf{x}_{l'}(t + \tau) \mathbf{x}_{l'}^H(t + \tau)], \quad (4.4.12)$$

$$\mathbf{c}_q(\tau) = E [\mathbf{x}_{l'}(t + \tau) \hat{\mathbf{s}}_{l,q}^*(t)]. \quad (4.4.13)$$

Le critère $\gamma_{ll',q}(\tau)$ possède plusieurs extrêma locaux $\tau_{ll',q}(m)$ avec $1 \leq m \leq M_q$ où $M_q \leq R + 1$, mais puisque le trajet direct est celui qui a parcouru la plus courte distance par définition même, nous en déduisons pour chaque émetteur l'expression du TDOA entre les stations l et l' :

$$\hat{\tau}_{ll',q} = \min_m \tau_{ll',q}(m). \quad (4.4.14)$$

Le retard $\hat{\tau}_{ll',q}$ constitue une estimation du TDOA $\tau_{ll',q}$ entre les deux stations l et l' : $\tau_{ll',q} = \tau_{l,q} - \tau_{l',q}$.

5. Localisation hyperbolique : pour deux stations nous avons ainsi pour chaque source un couple $(\hat{\tau}_{ll',q}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,q})$. La position est alors donnée par le couple d'équations suivant :

$$\begin{cases} x_q = x_1 + \Delta \cos(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,q}) \\ y_q = y_1 + \Delta \sin(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,q}) \end{cases}, \quad (4.4.15)$$

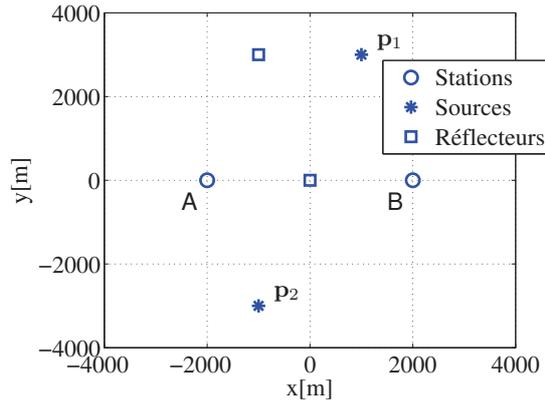


FIGURE 4.4.2 – Scénario multitrajets : deux stations multicapteurs en A et B en $[0 \ -2000]^T$ et $[0 \ 2000]^T$ avec pour nombre de capteurs N_A et N_B respectivement , 2 sources en $\mathbf{p}_1 = [1000 \ 2000]^T$ et $\mathbf{p}_2 = [-1000 \ 2000]^T$ avec deux réflecteurs en $[-1000 \ 3000]^T$ et $[0 \ 0]^T$.

où

$$\Delta = \frac{(\hat{\tau}_{W,q}c)^2 - \|\mathbf{p}(2) - \mathbf{p}(1)\|^2}{2((\hat{\tau}_{W,q}c) - \|\mathbf{p}(2) - \mathbf{p}(1)\|\cos(\hat{\theta}_{1,q}))}, \quad (4.4.16)$$

et $\hat{\theta}_{1,q}$ est l'angle d'arrivée dans le repère $(A, \mathbf{u}_{AB}, \mathbf{u}_{AB}^\perp)$. Le vecteur unitaire \mathbf{u}_{AB} est parallèle à la direction (AB) et \mathbf{u}_{AB}^\perp un vecteur unitaire perpendiculaire qui permet de définir un repère direct. Dans le cas de plusieurs stations une approche par moindres carrés peut être adoptée.

4.4.2 Résultats numériques

Nous considérons dans ce paragraphe le scénario de la figure 4.4.2. Les deux sources émettent des signaux GMSK de bande 300 kHz . La fréquence d'échantillonnage est $F_e = 600 \text{ kHz}$. Nous choisissons ici respectivement cinq et quatre capteurs pour les deux stations considérées à la figure 4.4.2 ($N_A = 5$, $N_B = 4$). Les coefficients $\alpha_{m,q}$ dans l'équation (4.4.2) sont pris égaux à 0.7, tandis que les gains complexes $\rho_{l,q}$ et $\rho_{l,m}^*$ dans l'équation (4.4.1) sont pris égaux à 1.

La figure 4.4.3 montre un tracé du critère (4.4.11) qui nous permet d'estimer le TDOA de la première source. On remarque la présence de deux pics dus aux signaux réfléchis. Le pic le plus élevé correspond au TDOA de la première source. On observe que puisqu'il s'agit du trajet direct, l'abscisse du maximum correspondant est bien inférieure à celles correspondant aux pics des réflecteurs.

Sur la figure 4.4.4, nous traçons l'erreur en distance pour le scénario de la figure 4.4.2. Nous constatons alors qu'il devient possible de localiser les deux sources, et ce alors que la deuxième station ne comporte que quatre capteurs, chose impossible avec une triangulation. En effet, la présence de deux réflecteurs impose que chaque station comprenne au moins cinq capteurs pour l'emploi de méthodes HR classiques. L'algorithme hybride AOA/TDOA proposé offre donc une solution à bas cout intéressante en présence de multitrajets.

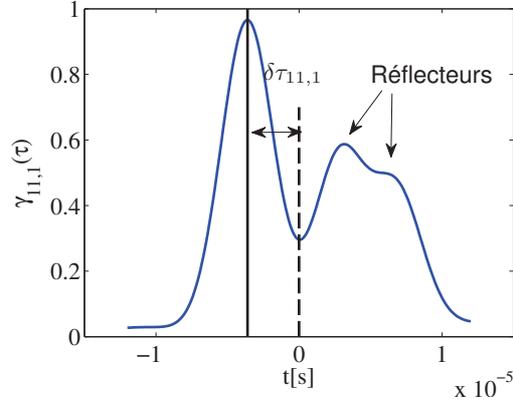


FIGURE 4.4.3 – Tracé de la fonction $\gamma_{11,1}(\tau)$ définie à l'équation (4.4.11) pour le scénario considéré à la figure 4.4.2, $F_e = 600 \text{ kHz}$, $T = 557$, $\alpha_{m,q} = 0.7$, $\rho_{l,q} = \rho_{l,m}^r = 1$, RSB=20 dB.

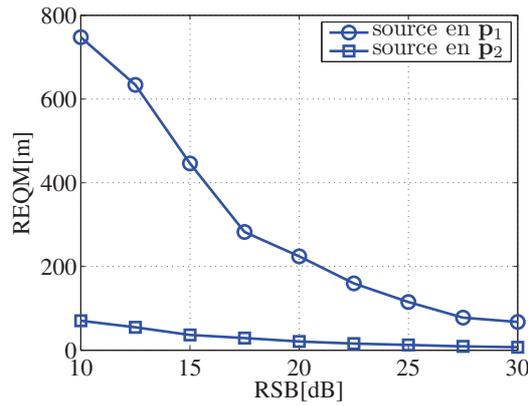


FIGURE 4.4.4 – REQM des sources présentes en $\mathbf{p}_1 = [1000 \ 2000]^T$ et $\mathbf{p}_2 = [-1000 \ 2000]^T$ émettant des signaux GMSK de bande 300 kHz avec deux réflecteurs en $[-1000 \ 3000]^T$ et $[0 \ 0]^T$, avec deux stations de 5 et 3 capteurs ($N_A = 5$, $N_B = 4$) selon le scénario de la figure 4.4.2, $\alpha_{m,q} = 0.7$, $\rho_{l,q} = \rho_{l,m}^r = 1$, $T = 280$, nombre de réalisations = 100.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le cas général de signaux large bande et mis en évidence plusieurs résultats.

Sur le plan des performances nous avons exhibé la borne de Cramer-Rao pour le cas de signaux large bande. Nous avons vu que, pour une source, lorsque le produit TB n'était pas négligeable alors une approche centralisée offrait un gain théorique par rapport à une approche décentralisée. À faible produit TB, toujours pour une source, les bornes centralisées et décentralisées sont égales. Pour plusieurs sources, il apparaît que la borne de l'approche centralisée est toujours inférieure, montrant l'intérêt particulier d'une approche centralisée dans ce contexte.

Sur le plan algorithmique, nous avons proposé une alternative au traitement DPD par le biais d'une approche spatio-temporelle s'adaptant à l'occupation spectrale des signaux. Nous avons ainsi proposé un algorithme cohérent appelé LOST qui offre l'avantage de fonctionner quel que soit le support spectral des signaux sources, contrairement au DPD. Nous avons également proposé d'autres techniques permettant d'améliorer les performances de l'algorithme LOST lorsque le signal d'une source occupe plusieurs canaux fréquentiels dans la bande de réflexion. L'algorithme LOST s'avère plus robuste à l'accroissement du produit TB que le DPD. Le comportement des algorithmes LOST et DPD par rapport au maximum de vraisemblance et à la borne de Cramer-Rao montre que, pourvu que le nombre de décalages temporels ou la taille du banc de filtres K soit correctement choisi, ces solutions demeurent proches de l'optimal. En revanche lorsque le produit TB s'accroît de manière significative, ces méthodes montrent clairement leurs limites comparativement au maximum de vraisemblance en termes de précision. Nous avons également proposé un algorithme hybride AOA/TDOA à bas coût qui permet de traiter le cas de multitrajets et offre une manière de distinguer les trajets directs des trajets réfléchis.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons abordé le problème de localisation dans le plan ou l'espace de sources radioélectriques par des stations multicauteurs. Traditionnellement, le problème est résolu par une approche décentralisée en deux étapes, où des paramètres intermédiaires de localisation sont estimés localement sur les stations multicauteurs puis transmis à une unité centrale de traitement qui réalise la localisation proprement dite. Nous avons mis en avant la sous-optimalité de cette approche ainsi que l'intérêt d'une approche en une seule étape, qui présuppose que l'ensemble des signaux reçus par les stations soit directement transmis à l'unité centrale de traitement. Cette approche permet de disposer de toute l'information disponible au niveau de l'unité centrale de traitement et exploite notamment le fait que les signaux reçus proviennent des mêmes sources. Une telle approche centralisée étant plus contraignante d'un point de vue opérationnel de part la nécessité de transmettre l'ensemble des signaux à l'unité centrale de traitement, nous avons étudié les gains théoriques attendus par une telle approche. Ceci revient à se poser la question de l'impact sur les performances de localisation de la paramétrisation plus fine du problème qui est exploitée par une approche centralisée contrairement à une approche décentralisée. Plus précisément, nous nous sommes attachés à caractériser les performances d'une telle approche du problème de localisation, notamment dans le cas de signaux déterministes, jusqu'ici non traité par la littérature. Nous avons également étudié des algorithmes susceptibles de tirer parti des gains rendus possibles par cette nouvelle approche avec des coûts de calculs "raisonnables". Ceci nous a conduit à proposer une alternative au DPD, qui est à notre connaissance actuellement le seul traitement centralisé en une étape applicable aux cas de signaux quelconques dans un contexte passif.

Sur le plan des performances théoriques, nous avons calculé la borne de Cramer-Rao du problème de localisation centralisé dans le cas de signaux bande étroite et large bande. Nous avons également fourni une borne qui caractérise les performances d'une approche décentralisée (triangulation) qui n'exploiterait pas le fait que les signaux reçus par les stations sont issus de la même source. La comparaison entre deux bornes s'appuyant sur des modèles différents permet d'évaluer l'impact sur les performances de localisation des informations exploitées par une approche centralisée ou décentralisée. Nous avons ainsi identifié des scénarii où une approche centralisée est susceptible d'offrir de meilleures performances qu'une approche décentralisée : nous mettons en avant le fait qu'un scénario de sources multiples est particulièrement favorable à une approche centralisée.

Sur le plan algorithmique, nous avons tout d'abord montré, à l'aide du principe EXIP, dans le cas de signaux bande étroite, les limites en termes de performances d'une approche

décentralisée par triangulation. Nous avons également, pour le cas de signaux large bande proposé une nouvelle classe d’algorithmes exploitant une approche spatio-temporelle du problème de localisation. Nous avons proposé une nouvelle classe d’algorithmes qui permettent de traiter ce problème en une seule étape. Les performances du DPD, basé sur une approche par banc de filtres, dépendent de la répartition spectrale des sources. La nécessité d’un *a priori* sur le spectre de sources est remplacée dans une approche spatio-temporelle par une estimation de la taille du sous-espace signal de la matrice de covariance spatio-temporelle. De plus, avec cette nouvelle approche, nous pouvons estimer le support spectral des sources. Nous avons ainsi proposé un algorithme (LOST) qui offre une solution fonctionnelle dans bon nombre de cas pratiques et nous proposons de la raffiner par l’emploi d’autres techniques à sous-espace. La comparaison des algorithmes DPD et LOST avec le maximum de vraisemblance déterministe et la borne de Cramer-Rao montrent la pertinence de ces algorithmes par rapport à l’optimal. Enfin, nous avons également fourni un algorithme à bas coût opérationnel dans le cas de multitrajets.

Parmi les perspectives possibles à l’issue de ce travail de thèse, nous pouvons citer :

- L’exploitation de résultats récents sur la théorie des grandes matrices aléatoires, qui permet l’amélioration des performances des algorithmes à sous-espaces [ML08, VLM09]. Une approche spatio-temporelle implique naturellement d’exploiter des vecteurs d’observation dont la taille est importante au vu du nombre d’échantillons disponibles. Ainsi, en suivant cette voie, on peut par exemple espérer pouvoir améliorer les performances de l’algorithme LOST.
- L’adaptation d’autres techniques large-bande [WK85a] afin d’améliorer le DPD ou même de proposer de nouvelles techniques en s’inspirant des travaux [DCP01, YKM06].
- L’extension du travail proposé au cas de multitrajets qui demeure une problématique pratique importante.
- Le calcul des performances statistiques des estimateurs proposés au cours de cette thèse.
- La validation des résultats exposés dans cette thèse sur des données réelles.

Annexe A

Résultats divers

A.1 Lemme d'inversion matricielle

Lemme. [Lemme d'inversion matricielle] Soient $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$, $\mathbf{B} \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$, $\mathbf{C} \in M_m(\mathbb{C})$ et $\mathbf{D} \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ avec \mathbf{A} et \mathbf{C} inversibles et

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{D} & \mathbf{C} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{pmatrix},$$

alors on a $\mathbf{F}_{11} = (\mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$.

A.2 Calcul de la BCR pour une source dans le cas de signaux bande étroite (BCR_{BE})

Notons tout d'abord, en oubliant ici la dépendance du vecteur directeur en \mathbf{p} , pour une lecture plus aisée :

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\sum_l N_l \psi_l^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \psi_2 e^{j\phi_2} \mathbf{a}_2(\mathbf{p}) \\ \vdots \\ \psi_L e^{j\phi_L} \mathbf{a}_L(\mathbf{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2.1})$$

La matrice de Fisher s'écrit

$$[\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})]_{ij} = \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial \eta_i} \boldsymbol{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta_j} \right\}, \quad (\text{A.2.2})$$

ou en faisant apparaître les différents blocs :

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{pp} & \mathbf{J}_{p\psi} & \mathbf{J}_{p\phi} \\ \mathbf{J}_{p\psi}^T & \mathbf{J}_{\psi\psi} & \mathbf{J}_{\psi\phi} \\ \mathbf{J}_{p\phi}^T & \mathbf{J}_{\psi\phi}^T & \mathbf{J}_{\phi\phi} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2.3})$$

Nous allons dans un premier temps montrer que certains blocs de la matrice de Fisher

sont nuls. Nous avons

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_i} = j \text{diag}(\mathbf{u}) \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta_1}{\partial p_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \delta_L}{\partial p_i} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2.4})$$

avec

$$\left[\frac{\partial \delta_l}{\partial p_i} \right]_n = 2\pi f_0 \frac{\partial \tau_{n,l}(\mathbf{p})}{\partial p_i}, \quad 1 \leq n \leq N_l \quad (\text{A.2.5})$$

et donc

$$\text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial p_i} \mathbf{u} \right\} = 0. \quad (\text{A.2.6})$$

Nous avons également

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \psi_l} = \frac{-\psi_l N_l}{\sum_l N_l \psi_l^2} \mathbf{u} + \frac{1}{\psi_l} \mathbf{E}_l \mathbf{u}, \quad (\text{A.2.7})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi_l} = j \mathbf{E}_l \mathbf{u}, \quad (\text{A.2.8})$$

où \mathbf{E}_l est une matrice diagonale qui ne contient que des zéros sur la diagonale sauf son l -ième terme égal à 1.

Remarquons alors que

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \mathbf{E}_l \mathbf{u} &= \mathbf{E}_l \mathbf{u} - \mathbf{u} \mathbf{u}^H \frac{1}{N} \mathbf{E}_l \mathbf{u}, \\ &= \left(\mathbf{E}_l - \frac{1}{N} \mathbf{I} \|\mathbf{u}_l\|^2 \right) \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.9})$$

et que par conséquent :

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{p\psi}]_{il} &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial p_i} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \psi_l} \right\}, \\ &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial p_i} \left(\mathbf{E}_l - \frac{1}{N} \mathbf{I} \|\mathbf{u}_l\|^2 \right) \mathbf{u} \right\}, \\ &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_l^H}{\partial p_i} \mathbf{u}_l - \frac{1}{N} \|\mathbf{u}_l\|^2 \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial p_i} \mathbf{u} \right\}, \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.2.10})$$

et

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{\psi\phi}]_{l'l'} &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial \psi_l} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi_{l'}} \right\}, \\ &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \text{Re} \left\{ \frac{j}{\psi_l} \mathbf{u}^H \mathbf{E}_l \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \mathbf{E}_{l'} \mathbf{u} \right\}, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2.11})$$

La matrice de Fisher s'écrit donc de la manière suivante

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{pp} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{p\phi} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{J}_{\psi\psi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{p\phi}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{J}_{\phi\phi} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2.12})$$

et nous avons donc, par le lemme d'inversion matriciel

$$BCR_{BE}^{-1}(\mathbf{p}) = \mathbf{J}_{pp} - \mathbf{J}_{p\phi} \mathbf{J}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{J}_{p\phi}^T. \quad (\text{A.2.13})$$

Commençons par calculer l'inverse de $\mathbf{J}_{\phi\phi}$. Nous avons

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_{l'} \mathbf{u})^H \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \mathbf{E}_l \mathbf{u} &= \mathbf{u}^H \mathbf{E}_{l'} \left(\mathbf{E}_l - \frac{1}{N} \mathbf{I} \|\mathbf{u}_l\|^2 \right) \mathbf{u} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{N} \|\mathbf{u}_l\|^2 \|\mathbf{u}_{l'}\|^2 & l \neq l' \\ \|\mathbf{u}_l\|^2 - \frac{1}{N} \|\mathbf{u}_l\|^2 \|\mathbf{u}_l\|^2 & l = l' \end{cases}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.14})$$

donc pour $1 \leq l, l' \leq L-1$,

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{\phi\phi}]_{ll'} &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} Re \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial \phi_l} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi_{l'}} \right\} \\ &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} Re \left\{ \mathbf{u}^H \mathbf{E}_{l+1} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \mathbf{E}_{l'+1} \mathbf{u} \right\} \\ &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} (\mathbf{D} - \mathbf{v} \mathbf{v}^T), \end{aligned} \quad (\text{A.2.15})$$

où

$$\mathbf{D} = \text{diag} (\|\mathbf{u}_2\|^2, \dots, \|\mathbf{u}_L\|^2), \quad (\text{A.2.16})$$

et

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}_2\|^2 & \dots & \|\mathbf{u}_L\|^2 \end{bmatrix}^T. \quad (\text{A.2.17})$$

La matrice $\mathbf{J}_{\phi\phi}$ est donc la somme d'une matrice (diagonale) et d'un terme de rang 1. Grâce à la formule d'inversion de Sherman-Morrison [SM50], puisque

$$\mathbf{v}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{v} = \frac{\sum_{l=2}^L N_l \psi_l^2}{N_1 + \sum_{l=2}^L N_l \psi_l^2} \neq 1, \quad (\text{A.2.18})$$

l'inverse de $\mathbf{J}_{\phi\phi}$ existe et s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\phi\phi}^{-1} &= \frac{\sigma^2}{2T \hat{S}} (\mathbf{D}^{-1} + \alpha \mathbf{D}^{-1} \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{D}^{-1}), \\ &= \frac{\sigma^2}{2T \hat{S}} \left(\mathbf{D}^{-1} + \frac{\alpha}{N} \mathbf{1}_{(L-1) \times (L-1)} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.2.19})$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{1 - \mathbf{v}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{v}} \\ &= \frac{N}{N - \sum_{l=2}^L \|\mathbf{u}_l\|^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.20})$$

et $\mathbf{1}_{(L-1) \times (L-1)}$ est une matrice de taille $(L-1) \times (L-1)$ dont tous les termes sont égaux à 1.

On a alors

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{p\phi}^T \mathbf{J}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{J}_{p\phi}]_{ij} &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \left([\mathbf{J}_{p\phi}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{J}_{p\phi}]_{ij} + \frac{\alpha}{N} [\mathbf{J}_{p\phi}]_i^T \mathbf{1}_{(L-1) \times (L-1)} [\mathbf{J}_{p\phi}]_j \right) \\ &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \left([\mathbf{J}_{p\phi}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{J}_{p\phi}]_{ij} + \frac{\alpha}{N} \sum_{l,l'=1}^{L-1} [\mathbf{J}_{p\phi}]_{il} [\mathbf{J}_{p\phi}]_{jl'} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.2.21})$$

Nous avons également

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{p\phi}]_{il} &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial p_i} \boldsymbol{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi_l} \right\}, \\ &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \operatorname{Re} \left\{ j \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial p_i} \boldsymbol{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \mathbf{E}_{l+1} \mathbf{u} \right\}, \\ &= -\frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial p_i} \boldsymbol{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \mathbf{E}_{l+1} \mathbf{u} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.22})$$

Soit

$$v_{il} = \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial p_i} \boldsymbol{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \mathbf{E}_{l+1} \mathbf{u}, \quad (\text{A.2.23})$$

puisque pour z_1 et z_2 complexes $\operatorname{Re}\{z_1 z_2\} = \operatorname{Re}\{z_1\} \operatorname{Re}\{z_2\} + \operatorname{Im}\{z_1\} \operatorname{Im}\{z_2\}$ et que d'après (A.2.6) $\operatorname{Re}\{v_{il}\} = 0$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{p\phi}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{J}_{p\phi}]_{ij} &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \sum_{l=1}^{L-1} \frac{1}{\|\mathbf{u}_l\|^2} \operatorname{Im}\{v_{il}\} \operatorname{Im}\{v_{jl}\} \\ &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \sum_{l=2}^L \frac{1}{\|\mathbf{u}_l\|^2} (\operatorname{Re}\{v_{il} v_{jl}\} - \operatorname{Re}\{v_{il}\} \operatorname{Re}\{v_{jl}\}) \\ &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \sum_{l=2}^L \frac{1}{\|\mathbf{u}_l\|^2} \operatorname{Re}\{v_{il} v_{jl}\} \\ &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \sum_{l=2}^L \frac{1}{\|\mathbf{u}_l\|^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial p_i} \boldsymbol{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \mathbf{E}_l \mathbf{u} \mathbf{u}^H \mathbf{E}_l \boldsymbol{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_j} \right\} \\ &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial p_i} \boldsymbol{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \mathbf{U} \boldsymbol{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_j} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.24})$$

avec

$$\mathbf{U} = \operatorname{diag} \left(\mathbf{0}_{N_1 \times N_1}, \frac{\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^H}{\|\mathbf{u}_2\|^2}, \dots, \frac{\mathbf{u}_L \mathbf{u}_L^H}{\|\mathbf{u}_L\|^2} \right), \quad (\text{A.2.25})$$

où $\mathbf{0}_{N_1 \times N_1}$ est une matrice de taille $N_1 \times N_1$ composée exclusivement de zéros.

De même

$$\begin{aligned}
\sum_{l,l'} [\mathbf{J}_{p\phi}]_{il} [\mathbf{J}_{p\phi}]_{j'l'} &= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \sum_{l,l'=1}^{L-1} \text{Im} \{v_{il}\} \text{Im} \{v_{j'l'}\} \\
&= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \sum_{l,l'=1}^{L-1} \text{Re} \{v_{il}v_{j'l'}\} \\
&= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \sum_{l,l'=1}^{L-1} \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial p_i} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \mathbf{E}_{l+1} \mathbf{u} \mathbf{u}^H \mathbf{E}_{l'+1} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_j} \right\} \\
&= \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial p_i} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \left(\sum_{l,l'=1}^{L-1} \mathbf{E}_{l+1} \mathbf{u} \mathbf{u}^H \mathbf{E}_{l'+1} \right) \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_j} \right\} \\
&= N \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial p_i} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \mathbf{W} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_j} \right\}, \tag{A.2.26}
\end{aligned}$$

où on a noté

$$\mathbf{W} = \frac{1}{N} \mathbf{w} \mathbf{w}^H, \tag{A.2.27}$$

avec $\mathbf{w} = \left[\mathbf{0}_{N_1}^T \quad \mathbf{u}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{u}_L^T \right]^T$.

Nous avons donc, en insérant (A.2.24) et (A.2.26) dans (A.2.21) :

$$\left[\mathbf{J}_{p\phi}^T \mathbf{J}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{J}_{p\phi} \right]_{ij} = \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial p_i} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) [\mathbf{U} + \alpha \mathbf{W}] \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_j} \right\}, \tag{A.2.28}$$

et

$$\left[\mathbf{J}_{pp} \right]_{ij} - \left[\mathbf{J}_{p\phi}^T \mathbf{J}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{J}_{p\phi} \right]_{ij} = \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^H}{\partial p_i} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) [\mathbf{I} - \mathbf{U} - \alpha \mathbf{W}] \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_j} \right\}. \tag{A.2.29}$$

Nous avons également

$$\mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) [\mathbf{I} - (\mathbf{U} + \alpha \mathbf{W})] \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) = \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) - \mathbf{\Pi}(\mathbf{u}) [\mathbf{U} + \alpha \mathbf{W}] \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}), \tag{A.2.30}$$

et on montre par un calcul direct que

$$\mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \mathbf{U} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) = \mathbf{U} - 2\mathbf{V} + \sum_{l=2}^L \|\mathbf{u}_l\|^2 \frac{\mathbf{u} \mathbf{u}^H}{N^2}, \tag{A.2.31}$$

et

$$\alpha \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) \mathbf{W} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) = \alpha \mathbf{W} - 2 \frac{\alpha}{N} \left(\sum_{l=2}^L \|\mathbf{u}_l\|^2 \right) \mathbf{W} + \frac{\alpha}{N} \left(\sum_{l=2}^L \|\mathbf{u}_l\|^2 \right)^2 \frac{\mathbf{u} \mathbf{u}^H}{N^2}. \tag{A.2.32}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) [\mathbf{U} + \alpha \mathbf{W}] \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) &= \mathbf{U} + \left(\alpha - 2 - 2 \frac{\alpha}{N} \left(\sum_{l=2}^L \|\mathbf{u}_l\|^2 \right) \right) \mathbf{W} \\
&\quad + \left(\sum_{l=2}^L \|\mathbf{u}_l\|^2 + \frac{\alpha}{N} \left(\sum_{l=2}^L \|\mathbf{u}_l\|^2 \right)^2 \right) \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^H}{N^2} \\
&= \mathbf{U} - \frac{N}{N - \sum_{l=2}^L \|\mathbf{u}_l\|^2} \mathbf{W} \\
&\quad + \left(\frac{\sum_{l=2}^L \|\mathbf{u}_l\|^2}{N - \sum_{l=2}^L \|\mathbf{u}_l\|^2} \right) \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^H}{N}.
\end{aligned} \tag{A.2.33}$$

En remarquant que

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^H}{N} - \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{0}_{N-N_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^H & \mathbf{0}_{N-N_1}^H \end{bmatrix}, \tag{A.2.34}$$

et que $N - \sum_{l=2}^L \|\mathbf{u}_l\|^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2$, on obtient en partant de (A.2.33) :

$$\mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) [\mathbf{U} + \alpha \mathbf{W}] \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) = \text{diag} \left(\frac{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^H}{\|\mathbf{u}_1\|^2}, \dots, \frac{\mathbf{u}_L \mathbf{u}_L^H}{\|\mathbf{u}_L\|^2} \right) - \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^H}{N}. \tag{A.2.35}$$

Finalement, en remplaçant (A.2.35) dans (A.2.30), on obtient :

$$\mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) [\mathbf{I} - (\mathbf{U} + \alpha \mathbf{W})] \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}) = \mathbf{I} - \text{diag} \left(\frac{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^H}{\|\mathbf{u}_1\|^2}, \dots, \frac{\mathbf{u}_L \mathbf{u}_L^H}{\|\mathbf{u}_L\|^2} \right). \tag{A.2.36}$$

En remplaçant (A.2.36) dans (A.2.29) on obtient finalement :

$$[BCR_{BE}^{-1}(\mathbf{p})]_{ij} = \frac{2T}{\sigma^2} \hat{S} \sum_{l=1}^L \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_l^H}{\partial p_i} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{u}_l) \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial p_j} \right\}. \tag{A.2.37}$$

A.3 Matrices asymptotiques des approches par banc de filtre et spatio-temporelle

Nous supposons ici que les sources sont décorréées et possèdent un spectre blanc idéal, tel que :

$$s_q(t) = \int_{f_q^-}^{f_q^+} e^{j2\pi ft} s_q(f) df, \tag{A.3.1}$$

avec

$$E [s_q(f) s_{q'}^*(f')] = \frac{\gamma_q}{B_q} \delta_{qq'} \delta(f - f'), \tag{A.3.2}$$

où $\delta(\cdot)$ est la fonction de Dirac. $B_q = f_q^+ - f_q^-$ est la bande de l'émetteur et $\gamma_q = \int_{f_q^-}^{f_q^+} E [s_q(f) s_q^*(f)] df$ l'énergie totale.

A.3.1 Approche par banc de filtres

Nous développons ici le cas d'une source, l'extension au cas de sources multiples décorréliées s'en déduit facilement.

$$\mathbf{x}(k, t) = \mathbf{A}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho})\mathbf{s}_L(k, t) + \mathbf{n}(t), \quad (\text{A.3.3})$$

où

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\sum_l N_l |\rho_l|^2}} \text{diag}(\rho_1 \mathbf{a}_1(\mathbf{p}), \dots, \rho_L \mathbf{a}_L(\mathbf{p})), \quad (\text{A.3.4})$$

$$\mathbf{s}_L(k, t) = \left[s(k, t - \tau_1(\mathbf{p})) \quad \dots \quad s(k, t - \tau_L(\mathbf{p})) \right]^T, \quad (\text{A.3.5})$$

$$s(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t - u) e_k(u) du. \quad (\text{A.3.6})$$

avec $e_k(t) = \frac{1}{K} \text{sinc}(\pi \frac{1}{K} t) e^{j2\pi f_k t}$ et $f_k = \frac{k}{K}$. La dépendance de τ_l envers \mathbf{p} et l'indice q sont ici omises pour des simplicités d'écriture.

Nous avons :

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_s(f_k)]_{ll'} &= E [s_l(k, t) s_{l'}^*(k, t)] \\ &= E \left[\int_u \int_{f^-}^{f^+} e^{j2\pi f(u-\tau)} s(f) e_k(u-t) du df \right. \\ &\quad \left. \int_v \int_{f^-}^{f^+} e^{-j2\pi f'(v-\tau')} s^*(f') e_k^*(v-t) dv df' \right] \\ &= E \left[\int_u \int_{f^-}^{f^+} e^{j2\pi f(u-\tau)} e_k(u-t) du \int_v \right. \\ &\quad \left. \int_{f^-}^{f^+} e^{-j2\pi f'(v-\tau')} e_k^*(v-t) dv s(f) s^*(f') df df' \right] \\ &= \int_u \int_{f^-}^{f^+} e^{j2\pi f(u-\tau)} e_k(u-t) du \\ &\quad \int_v \int_{f^-}^{f^+} e^{-j2\pi f'(v-\tau')} e_k^*(v-t) dv E [s(f) s^*(f') df df']. \end{aligned} \quad (\text{A.3.7})$$

En utilisant (A.3.2) nous avons :

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_s(f_k)]_{ll'} &= \frac{\gamma}{(f^+ - f^-)} \int_{f_l}^{f_{l'}} e^{-j2\pi f(\tau_l - \tau_{l'})} \int_u e^{j2\pi f u} e_k(u-t) du \\ &\quad \int_v e^{-j2\pi f v} e_k^*(v-t) dv df \end{aligned} \quad (\text{A.3.8})$$

et puisque

$$\int_u e^{j2\pi f u} e_k(u-t) du = e^{j2\pi f t} \Pi_{\frac{1}{K}}(f + f_k), \quad (\text{A.3.9})$$

où

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < T/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (\text{A.3.10})$$

Nous avons ensuite

$$\begin{aligned}
[\mathbf{R}_s(f_k)]_{ll'} &= \frac{\gamma}{(f^+ - f^-)} \int_{f^-}^{f^+} e^{-j2\pi f(\tau_l - \tau_{l'})} \Pi_{\frac{1}{K}}^2(f + f_k) df \\
&= \frac{\gamma}{(f^+ - f^-)} \int_{f_k^{min}}^{f_k^{max}} e^{-j2\pi f(\tau_l - \tau_{l'})} df \\
&= \frac{\gamma \Delta_k e^{j2\pi \bar{f}_k(\tau_{l'} - \tau_l)}}{(f^+ - f^-)} \text{sinc}(\pi \Delta_k \tau_{ll'}) u(\Delta_k), \tag{A.3.11}
\end{aligned}$$

où

$$\tau_{ll'} = \tau_l - \tau_{l'}, \tag{A.3.12}$$

$$f_k^{max} = \min(f^+, f_k + \frac{1}{2K}), \tag{A.3.13}$$

$$f_k^{min} = \max(f^-, f_k - \frac{1}{2K}), \tag{A.3.14}$$

$$\Delta_k = f_k^{max} - f_k^{min}, \tag{A.3.15}$$

$$\bar{f}_k = \frac{1}{2}(f_k^{max} + f_k^{min}), \tag{A.3.16}$$

et

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}. \tag{A.3.17}$$

A.3.2 Approche spatio-temporelle

Pour une source, nous avons :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}) \mathbf{s}_K(t) + \mathbf{n}_K(t), \tag{A.3.18}$$

où

$$\mathbf{C}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}) = (\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{A}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho})), \tag{A.3.19}$$

$$\mathbf{s}_K(t) = \left[\mathbf{s}_L^T(t) \quad \dots \quad \mathbf{s}_L^T(t - (K-1)T_e) \right]^T, \tag{A.3.20}$$

$$s_L(t) = \left[s(t - \tau_1(\mathbf{p})) \quad \dots \quad s(t - \tau_L(\mathbf{p})) \right]^T. \tag{A.3.21}$$

Nous avons pour $i = k + L(l-1)$ et $i = k' + L(l'-1)$:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{R}_{ss}]_{ij} &= E \left[s(t - \tau_l - kT_e) s^*(t - \tau_{l'} - k'T_e) \right] \\
&= E \left[\int_{f^-}^{f^+} e^{j2\pi f(t - kT_e - \tau_l)} ds(f) \int_{f^-}^{f^+} e^{-j2\pi f'(t - k'T_e - \tau_{l'})} ds^*(f') \right] \\
&= E \left[\int_{f^-}^{f^+} e^{j2\pi f(t - kT_e - \tau_l)} \int_{f^-}^{f^+} e^{-j2\pi f'(t - k'T_e - \tau_{l'})} ds(f) ds^*(f') \right] \\
&= \int_{f^-}^{f^+} \int_{f^-}^{f^+} e^{j2\pi f(t - kT_e - \tau_l)} e^{-j2\pi f'(t - k'T_e - \tau_{l'})} E \left[ds(f) ds^*(f') \right], \tag{A.3.22}
\end{aligned}$$

utilisant (A.3.2), nous en déduisons

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_{ss}]_{ij} &= \gamma \int_{f^-}^{f^+} e^{j2\pi f((k-k')T_e - (\tau_l - \tau_{l'}))} df \\ &= \gamma e^{j2\pi \bar{f}(\delta_{kk'} + \tau_{ll'})} \text{sinc}(\pi B(\delta_{kk'} + \tau_{ll'})), \end{aligned} \quad (\text{A.3.23})$$

où $\delta_{k,k'} = (k' - k)T_e$, $\tau_{ll'} = \tau_{l'} - \tau_l$, $\bar{f} = \frac{f^+ + f^-}{2}$.

A.4 Expression de la BCR du problème de localisation lorsque les signaux sont bande étroite

Si les signaux sont bande étroite pour l'ensemble du réseau de stations alors nous avons pour q et l quelconques $\tau_l(\mathbf{p}_k) f_k \approx 0$ dans l'équation (4.3.5). Nous avons alors

$$\mathbf{U}_k(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}), \quad (\text{A.4.1})$$

où $\mathbf{U}_k(\boldsymbol{\eta})$ est défini à l'équation (4.3.18) et $\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta})$ à l'équation (3.1.8).

Il en découle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\boldsymbol{\eta}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(\boldsymbol{\eta}) \\ \vdots \\ \mathbf{V}_T(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{F} \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}), \end{aligned} \quad (\text{A.4.2})$$

où

$$\mathbf{F}_{ik} = e^{j2\pi f_k t_i}, \quad (\text{A.4.3})$$

avec $f_k = \frac{k}{T} F_e$ et $t_i = iT_e$.

On peut encore écrire, puisque pour \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , et \mathbf{D} matrices quelconques : $(\mathbf{AB}) \otimes (\mathbf{CD}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{B} \otimes \mathbf{D})$. Donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\boldsymbol{\eta}) &= (\mathbf{I}_T \mathbf{F}) \otimes (\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{I}_Q) \\ &= (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta})) (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_Q). \end{aligned} \quad (\text{A.4.4})$$

On obtient alors par un calcul direct que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{V}}^\perp(\boldsymbol{\eta}) &= \mathbf{I} - \mathbf{V}(\boldsymbol{\eta})(\mathbf{V}^H(\boldsymbol{\eta})\mathbf{V}(\boldsymbol{\eta}))^{-1}\mathbf{V}^H(\boldsymbol{\eta}) \\ &= \mathbf{I}_T \otimes \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}}^\perp(\boldsymbol{\eta}), \end{aligned} \quad (\text{A.4.5})$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}^T} \mathbf{s}_f &= (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta})) (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_Q) \mathbf{s}_f \\ &= T (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta})) \mathbf{s}, \end{aligned} \quad (\text{A.4.6})$$

où $\mathbf{s} = \left[\mathbf{s}^T(t_1) \quad \dots \quad \mathbf{s}^T(t_T) \right]^T$.

On en déduit en remplaçant (A.4.5) et (A.4.6) dans (A.4.7) :

$$\begin{aligned}
 [BCR^{-1}(\boldsymbol{\eta})]_{ij} &= \frac{2}{\sigma^2 T^2} \text{Re} \left\{ \text{tr} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{V}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_i} \right)^H \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{V}}^\perp(\boldsymbol{\eta}) \frac{\partial \mathbf{V}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_j} \mathbf{s}_f \mathbf{s}_f^H \right] \right\} \\
 &= \frac{2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^T \text{Re} \left\{ \text{tr} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_i} \right)^H \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{A}}^\perp(\boldsymbol{\eta}) \frac{\partial \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_j} \mathbf{s}(t_n) \mathbf{s}^H(t_n) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{A.4.7}$$

et on s'aperçoit que (4.3.24) est égal à (3.3.3), lorsque les signaux sont bande-étroite.

Table des figures

1.2.1 Localisation d'une source radioélectrique à l'aide de L stations communiquant avec une unité centrale de traitement.	18
1.2.2 Schéma de fonctionnement d'une approche décentralisée en deux étapes du problème de localisation.	18
1.3.1 Schéma de fonctionnement d'une approche centralisée en une étape du problème de localisation.	20
2.1.1 Quelques systèmes de localisation.	27
2.1.2 Lorsque les paramètres de localisation sont transmis il faut pouvoir trier les paramètres selon leur provenance et dire quelle source ils caractérisent : en présence de deux sources, chaque station estime deux directions d'arrivées, ce qui conduit à 4 positions possibles des sources.	28
2.1.3 Localisation par triangulation : en présence de bruit les directions d'arrivée ne s'intersectent pas au même endroit, il faut alors trouver une estimation de la position qui rend le mieux compte de la contrainte d'intersection unique des directions d'arrivée.	29
2.1.4 Schéma de localisation hybride AOA-TDOA : la position de l'émetteur se situe à l'intersection d'une direction d'arrivée θ_1 et d'une hyperbole liée au TDOA $\tau_{12} = \tau_2 - \tau_1$	31
2.2.1 La durée $\delta_{n,l}(\mathbf{p}) = \mathbf{k}^T(\mathbf{p})\mathbf{d}_{n,l}$ du trajet de l'onde entre le capteur n de la station l et la référence de phase de la station dépend de l'incidence de l'onde $\theta_l(\mathbf{p})$ elle-même fonction de la position de la source \mathbf{p}	34
2.2.2 Problème de localisation d'une source émettant un signal de bande B dont le temps de propagation à travers le réseau de L stations multicapteurs est $\Delta\tau$	35
2.4.1 Cadre de l'estimation paramétrique.	37
2.4.2 Le principe du maximum de vraisemblance consiste à choisir la valeur du paramètre Θ_2 qui est plus vraisemblable que Θ_1 pour l'observation \mathbf{x}_{obs} puisque sa vraisemblance est supérieure : $l(\Theta_2, \mathbf{x}_{obs}) \geq l(\Theta_1, \mathbf{x}_{obs})$	39
2.4.3 Inverse du pseudo-spectre de MUSIC issu de l'estimation de la direction d'arrivée de 4 sources d'incidences respectives $\theta_1=-100^\circ$, $\theta_2=0^\circ$, $\theta_3=20^\circ$ et $\theta_4=80^\circ$ sur un réseau circulaire à $N=5$ capteurs de diamètre 0.45λ , $T=1000$, RSB=15dB.	42

2.4.4 Spectres résultants de l'estimation de la direction d'arrivée de deux sources émettant des signaux aléatoires sous des incidences $\theta_1 = -10^\circ$ et $\theta_2 = 0^\circ$ et collectés par un réseau circulaire à 5 capteurs de diamètre 0.45λ avec la formation de voie et MUSIC : tracé des pseudo-spectres $P_{FV}(\theta)$ et $J_{MUSIC}(\theta)$ pour un RSB de 20 dB et un nombre d'échantillons $T = 10$ et $T = 10000$.	44
2.4.5 Schéma d'un banc de K filtres où chaque élément est un filtre passe-bande centré en f_k pour $(1 \leq k \leq K)$ et dont la sortie est notée $\mathbf{x}(k, t)$ pour une entrée $\mathbf{x}(t)$.	46
2.5.1 4 stations de base A, B, C et D (réseaux circulaires à 3 capteurs de rayon 0.5λ où λ est la longueur d'onde associée à la porteuse de fréquence f_0) formant un carré de dimensions $4 \times 4 \text{ km}^2$. Les sources sont en $\mathbf{p}_1 = [x_1 \ y_1]^T$ et $\mathbf{p}_2 = [x_2 \ y_2]^T$.	53
2.5.2 Comparaisons des performances du DPD ($J = 4$) et d'une triangulation conventionnelle dans le cas d'une source (a) ou de deux (b), $T=100$, nombre de réalisations=100.	54
2.5.3 Densité spectrale de puissance pour deux sources. La première est une porteuse pure, la seconde est blanche dans toute la bande de réception.	54
3.4.1 Localisation de signaux bande étroite à l'aide de deux stations de base A et B selon le scénario de la figure 2.5.1, $T=100$, nombre de réalisations=100.	65
3.4.2 Localisation de signaux bande étroite à l'aide de quatre stations selon le scénario de la figure 2.5.1, $T=100$, nombre de réalisations=200, $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$.	66
3.5.1 Comparaisons des performances des différentes stratégies S1, S2 ($\mathbf{W}_2 = \mathbf{I}$), OS2 ($\mathbf{W}_2 = CRB^{-1}(\boldsymbol{\theta}_{tot})$) et S3 (Triangulation : $\mathbf{W}_3 = CRB^{-1}(\boldsymbol{\theta}_q)$) pour deux sources situées en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 500]^T$ et $\mathbf{p}_2 = -[0 \ 500]^T$ selon le scénario de la figure 2.5.1, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(1, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, $T=100$, produit TB =1 %, Nombre de réalisations = 100.	73
4.1.1 Une source en $\mathbf{p}_1 = [300 \ 500]^T$ avec quatre stations de base selon le scénario en figure 2.5.1, SNR=5 dB, $T = 300$, nombre de réalisations=200, $\boldsymbol{\rho}_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$.	76
4.2.1 REQM de la source $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$ (spectre blanc idéal représenté à la figure 4.2.2b), $RSB_{2,1} = RSB_{3,1} = RSB_{4,1} = 10$ dB, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, $T=200$, nombre de réalisations = 100.	82
4.2.2 Puissance spectrale de deux sources en (a) et (b) occupant respectivement un et quatre des quatre canaux fréquentiels qui composent la bande de réception.	83
4.2.3 Cas monosource envisagé pour deux sources dont les densités spectrales respectives sont représentées à la figure 4.2.2a pour la source 1 en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$ et à la figure 4.2.2b pour la source 2 en $\mathbf{p}_2 = [0 \ -1000]^T$, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, $T=200$, nombre de réalisations = 100.	84
4.2.4 Cas de deux sources présentes simultanément dont les densités spectrales respectives sont représentées à la figure 4.2.2a pour la source 1 en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$ et à la figure 4.2.2b pour la source 2 en $\mathbf{p}_2 = [0 \ -1000]^T$, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, $K_1 = 1$, $K_2 = K = 4$, $T=200$, nombre de réalisations = 100.	86

4.2.5 Comparaison des performances des algorithmes LOST et DPD en fonction du produit TB en fonction d'un nombre fini ou infini d'échantillons en (a) et (b) respectivement, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, $K=4$, $\text{SNR}=10$ dB, $T=200$, nombre de réalisations=100.	86
4.2.6 REQM pour une source blanche en $\mathbf{p}_1 = [300 \ 500]^T$ pour l'algorithme LOST, $\text{RSB}=10$ dB, $T=200$, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, nombre de réalisations = 500.	88
4.2.7 Estimation des fréquences des sources pour un scénario comportant 3 sources en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$, $\mathbf{p}_2 = [0 \ -1000]^T$ et $\mathbf{p}_3 = [1000 \ 0]^T$, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(1, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, $F_e = 100 \text{ MHz}$, $T = 200$, $K = 10$, produit TB=0.15, $\text{RSB} = 10$ dB.	89
4.2.8 Principe de fonctionnement qui permet d'améliorer l'algorithme LOST en fonction de la dimension du sous-espace signal.	91
4.2.9 Comparaison des algorithmes LOST, AMLM, DPD et de projection oblique pour une source seule présente en $\mathbf{p}_1 = [0 \ 1000]^T$, $K = 15$, $T=100$, produit TB=0.45, $\boldsymbol{\rho}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, nombre de réalisations=100.	96
4.3.1 Comparaison des performances de LOST ($K = 4$), du DPD ($J = 4$), du MVD et de la triangulation face à leurs bornes respectives en fonction du RSB dans un contexte de signaux large bande, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, $T=200$, nombre de réalisations=100, produit TB =0.04	102
4.3.2 Comparaisons des performances de LOST ($K = 4$), du DPD ($J = 4$), du MVD et de la triangulation face à leurs bornes respectives en fonction du produit TB, $\psi_{l,q} \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$, $\phi_{l,q} \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$, $T=200$, nombre de réalisations=100, $\text{RSB}= 10$ dB.	103
4.4.1 Contexte multisource en présence de réflecteurs, ces derniers renvoyant une version retardée et atténuée des signaux d'origine.	105
4.4.2 Scénario multitrajets : deux stations multicateurs en A et B en $[0 \ -2000]^T$ et $[0 \ 2000]^T$ avec pour nombre de capteurs N_A et N_B respectivement , 2 sources en $\mathbf{p}_1 = [1000 \ 2000]^T$ et $\mathbf{p}_2 = [-1000 \ 2000]^T$ avec deux réflecteurs en $[-1000 \ 3000]^T$ et $[0 \ 0]^T$	107
4.4.3 Tracé de la fonction $\gamma_{11,1}(\tau)$ définie à l'équation (4.4.11) pour le scénario considéré à la figure 4.4.2, $F_e = 600 \text{ kHz}$, $T = 557$, $\alpha_{m,q} = 0.7$, $\rho_{l,q} = \rho_{l,m}^r = 1$, $\text{RSB}=20$ dB.	108
4.4.4 REQM des sources présentes en $\mathbf{p}_1 = [1000 \ 2000]^T$ et $\mathbf{p}_2 = [-1000 \ 2000]^T$ émettant des signaux GMSK de bande 300 kHz avec deux réflecteurs en $[-1000 \ 3000]^T$ et $[0 \ 0]^T$, avec deux stations de 5 et 3 capteurs ($N_A = 5$, $N_B = 4$) selon le scénario de la figure 4.4.2, $\alpha_{m,q} = 0.7$, $\rho_{l,q} = \rho_{l,m}^r = 1$, $T = 280$, nombre de réalisations =100.	108

Bibliographie

- [AJCJ02] S. Al-Jazzar and J. Caffery Jr. MI and bayesian toa location estimators for nlos environments. *Vehicular Technology Conference, 2002. Proceedings. VTC 2002-Fall. 2002 IEEE 56th*, 2 :1178–1181, 2002.
- [AW05] A. Amar and A.J. Weiss. Direct position determination of multiple radio signals. *EURASIP J.Appl. Signal Process.*, 1 :37–49, 2005.
- [AW07] A. Amar and A.J. Weiss. Fundamental limitations on the number of resolvable emitter using a geolocation system. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(5) :2193–2202, 2007.
- [AW08a] A. Amar and A.J. Weiss. Localization of narrowband radio emitters based on doppler frequency shifts. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(11) :5500–5508, 2008.
- [AW08b] A. Amar and A.J. Weiss. New asymptotic results on two fundamentals approaches to mobile terminal location. *In proceedings of International Symposium on Communication, Control and Signal Processing (ISCCSP), IEEE*, pages 1320–1323, 2008.
- [AW09] A. Amar and A.J. Weiss. *Direct Position Determination : A Single-Step Emitter Localization Approach*. Classical and Modern Direction-of-Arrival Estimation, Editors Tuncer, T.E. and Friedlander, B. Academic Press, 2009.
- [BFGL12] J. Bosse, A. Ferréol, C. Germond, and P. Larzabal. Passive geolocation of radio-transmitters : algorithm and performance in narrowband context. *Signal Processing*, 92 :841–852, 2012.
- [BFL10] J. Bosse, A. Ferréol, and P. Larzabal. A multiple narrowband emitters geolocation algorithm based on AOA estimation. *European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Aalborg*, pages 676–680, 2010.
- [BFL11a] J. Bosse, A. Ferréol, and P. Larzabal. A coherent spatio-temporal array processing for passive localization of radio transmitters. *submitted to IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011.
- [BFL11b] J. Bosse, A. Ferréol, and P. Larzabal. New trends in passive localization by multiarray network. *European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Barcelone*, pages 2004–2008, 2011.
- [BFL11c] J. Bosse, A. Ferréol, and P. Larzabal. Performance analysis of passive localization strategies : Direct one step approach versus two steps approach. *IEEE Statistical Signal Processing (SSP), Nice*, pages 701–704, 2011.
- [BFL11d] J. Bosse, A. Ferréol, and P. Larzabal. A space-time array processing for blind geolocation of radio-transmitters. *IEEE International Conference*

- on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Prague*, pages 2596–2599, 2011.
- [BFL11e] J. Bosse, A. Ferréol, and P. Larzabal. A space-time array processing for passive geolocalization of radio-transmitters. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Prague*, pages 2596–2599, 2011.
- [BG88] K.M. Buckley and L.J. Griffiths. Broadband signal subspace spatial spectrum (bass-ale) estimation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 36(7) :953–964, 1988.
- [BH06] D. Blatt and A.O. Hero. Energy-based sensor network source localization via projection onto convex sets. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(9) :3614–3619, 2006.
- [Bie83] G. Bienvenu. Eigensystem properties of the sample space correlation matrix. *ICASSP, Boston*, pages 332–335, 1983.
- [BJFL09a] J. Bosse, P-Y. Joubert, A. Ferréol, and P. Larzabal. Localisation de sources en imagerie par courants de Foucault : application à l’estimation de défauts enfouis dans des structures métalliques. *Instrumentation, Mesure, Métrologie*, 9 :213–232, 2009.
- [BJFL09b] J. Bosse, P-Y. Joubert, A. Ferréol, and P. Larzabal. Système haute résolution de localisation de défauts enfouis par courants de Foucault : imageur multi-fréquence et algorithmes à sous-espaces. *22^{ème} colloque du groupement d’Etudes du Traitement du signal et des Images (GRETSI), Dijon*, 2009.
- [BJFL10] J. Bosse, P-Y. Joubert, A. Ferréol, and P. Larzabal. High resolution system for buried defaults location : multifrequency eddy current imager and associated subspace algorithm. *NDT&E International*, 43 :250–257, 2010.
- [BK79] G. Bienvenu and L. Kopp. Principe de la goniométrie adaptative. *Septième colloque GRETSI, NICE*, 1979.
- [BK83] G. Bienvenu and L. Kopp. Optimality of high resolution array processing using the eigensystem approach. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 31(5) :1235–1248, 1983.
- [BLF09] J. Bosse, P. Larzabal, and A. Ferréol. Apport des méthodes haute résolution à l’imagerie de champs et à la localisation de sources. *Instrumentation, Mesure, Métrologie*, 9 :45–64, 2009.
- [Böh84] JF. Böhme. Estimation of source parameters by maximum likelihood and non linear regression. *In proceedings of IEEE International conference in Acoustics, Speech and Signal Processing.*, pages 731–734, 1984.
- [BS94] R.T. Behrens and L.L. Scharf. Signal processing applications of oblique projection operators. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(6) :1413–1424, 1994.
- [Cad88] J.A. Cadzow. A high resolution direction of arrival algorithm for narrow-band coherent and incoherent sources. *Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 34 :965–979, 1988.

- [Cap69] J. Capon. High resolution frequency-wave number spectrum analysis. *Proceedings IEEE*, 57 :1408–1418, 1969.
- [CFPFR07] P. Closas, C. Fernandez-Prades, and J.A. Fernandez-Rubio. Maximum likelihood estimation of position in GNSS. *IEEE Signal Processing letters*, 14(5) :359–362, 2007.
- [CFPFR09] P. Closas, C. Fernandez-Prades, and J.A. Fernandez-Rubio. Cramér–Rao bound analysis of positioning approaches in GNSS receivers. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57(10) :3775–3786, 2009.
- [CH94] Y.T. Chan and K.C. Ho. A simple and efficient estimator for hyperbolic location. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(8) :1905–1915, 1994.
- [CTO87] H. Clergeot, S. Tressens, and A. Ouamri. A new maximum likelihood method for estimation of correlated sources. comparison with existing methods. *Proceedings of the European Signal Processing Conference (EU-SIPCO)*, 87 :71–75, 1987.
- [CTO89] H. Clergeot, S. Tressens, and A. Ouamri. Performance of high resolution frequencies estimation methods compared to the cramer rao bounds. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37 :1703–1720, 1989.
- [CTSC06] Y.T. Chan, W.Y. Tsui, H.C. So, and P. Ching. Time-of-arrival based localization under nlos conditions. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 55(1) :17–24, 2006.
- [CYCHC06] Y.T. Chan, H. Yau Chin Hang, and P. Ching. Exact and approximate maximum likelihood localization algorithms. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 55(1) :10–16, 2006.
- [DCP01] E. Di Claudio and R. Parisi. WAVES : Weighted average of signal subspaces for robust wideband direction finding. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(10) :2179–2190, 2001.
- [DLG⁺09] D. Dardari, M. Luise, S. Gezici, G. Bacci, et al. Progress report I on advanced localization and positioning techniques : Fundamental techniques and theoretical limits. *Newcom ++ public deliverable DB.2*, available at www.newcom-project.eu, 2009.
- [DMO07] B. Denis, M. Maman, and L. Ouvry. Overhead and sensitivity to uwb ranging models within a distributed bayesian positioning solution. *Ultra-Wideband, 2007. ICUWB 2007. IEEE International Conference on*, pages 105–110, 2007.
- [DW92] M.A. Doron and A.J. Weiss. On focusing matrices for wide-band array processing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(6) :1295–1302, 1992.
- [EG07] J.G Erling and M.R Gramann. Performance bounds for multisource parameter estimation using a multiarray network. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(10) :4791–4799, 2007.
- [FBL09] A. Ferréol, J. Bosse, and P. Larzabal. Géolocalisation d’émetteurs par des techniques multicapteurs. *Instrumentation, Mesures, Métrologie*, 9 :45–64, 2009.

- [FBL10] A. Ferréol, J. Bosse, and P. Larzabal. A low-cost AOA-TDOA approach for blind geolocation in multi-paths context. *18th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Aalborg*, pages 676–680, 2010.
- [FCT00] A. Ferréol and M. Chenu-Tournier. Space-frequency direction finding in wideband and multi-path contexts. *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Istanbul*, pages 3113–3116, 2000.
- [FL⁺08] E. Falletti, M. Luise, et al. Review of satellite, terrestrial outdoor, and terrestrial indoor positioning techniques. *Newcom ++ public deliverable : DB.1, available at www.newcom-project.eu*, 2008.
- [Foy76] W.H. Foy. Position-location solutions by Taylor-series estimation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 12(2) :187–194, 1976.
- [FST68] W.G. Figel, N.H. Shepherd, and W.F. Trammell. Vehicle location by a signal attenuation method. *Vehicular Technology Conference, 1968. 19th IEEE*, 19 :105–109, 1968.
- [Gan59] FR Gantmacher. *Matrix Theory*, volume I-II. New-York : Chelsea, 1959.
- [GCWI08] I. Güvenç, C.C. Chong, F. Watanabe, and H. Inamura. Nlos identification and weighted least-squares localization for uwb systems using multipath channel statistics. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2008, 2008.
- [Gre94] Y. Grenier. Wideband source location through frequency-dependent modeling. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(5) :1087–1096, 1994.
- [IMM⁺11] A. Inza, J. Mars, J.P. Métaxian, G. O’Brien, and O. Macedo. Three-component seismic array location of lp and explosions. *European Geosciences Union General Assembly (EGU2011), Vienne*, 2011.
- [Kay93] S.M. Kay. *Fundamentals of statistical signal processing : estimation theory*, volume 1. Prentice Hall signal processing series, 1993.
- [KBR97] K.J. Krizman, T.E. Biedka, and T.S. Rappaport. Wireless position location : fundamentals, implementation strategies, and sources of error. *Vehicular Technology Conference, 1997 IEEE 47th*, 2 :919–923, 1997.
- [KS04] R.J. Koziç and B.M. Sadler. Source localization with distributed sensors arrays and partial spatial coherence. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 52(3) :601–616, 2004.
- [Lee94] T.S. Lee. Efficient wideband source localization using beamforming invariance technique. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(6) :1376–1387, 1994.
- [LR03] K. Langendoen and N. Reijers. Distributed localization in wireless sensor networks : a quantitative comparison. *Computer Networks*, 43(4) :499–518, 2003.
- [LS09] J. Li and P. Stoica. *MIMO Radar Signal processing*. John Wiley & Sons, 2009.
- [Mar98] S. Marcos. *Les méthodes à haute résolution*. Hermès, 1998.
- [ML08] X. Mestre and M.A. Lagunas. Modified subspace algorithms for doa estimation with large arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(2) :598–614, 2008.

- [MS02] M.L. McCloud and L.L. Scharf. A new subspace identification algorithm for high-resolution DOA estimation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 50(10) :1382–1390, 2002.
- [MYJ07] H. Miao, K. Yu, and M.J. Juntti. Positioning for nlos propagation : Algorithm derivations and cramer-rao bounds. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 56(5) :2568–2580, 2007.
- [NDA06] C. Nerguizian, C. Despins, and S. Affès. Geolocation in mines with an impulse response fingerprinting technique and neural networks. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 5(3) :603–611, 2006.
- [Ois09] M. Oispuu. Direct State Determination of Multiple Sources with Intermittent emission. *17 th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 1948–1952, 2009.
- [ON10] M. Oispuu and U. Nickel. 3D passive source localization by a multi-array network : Noncoherent vs. coherent processing. *Smart Antennas (WSA), International ITG Workshop on*, pages 300–305, 2010.
- [OVSN93] B. Ottersten, M. Viberg, P. Stoica, and A. Nehorai. *Exact and large sample maximum likelihood techniques for parameter estimation and detection in array processing*. In "Radar Array Processing", S.Haykin, J.Litva and T.J.Shepherd, editors. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [PDBSWJ92] K.R. Pattipati, S. Deb, Y. Bar-Shalom, and RB Washburn Jr. A new relaxation algorithm and passive sensor data association. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(2) :198–213, 1992.
- [PPF11] C. Pedersen, T. Pedersen, and B.H. Fleury. A variational message passing algorithm for sensor self-localization in wireless networks. *IEEE, International symposium on information theory (ISIT)*, 2011.
- [PPZY08] J.J. Pan, S.J. Pan, V.W. Zheng, and Q. Yang. Digital wall : A power-efficient solution for location-based data sharing. *Sixth Annual IEEE International Conference on Pervasive Computing and Communications*, pages 645–650, 2008.
- [PRK86] A. Paulraj, R. Roy, and T. Kailath. A subspace rotation approach to signal parameter estimation. In *Proceedings of IEEE*, 74(7) :1044–1046, 1986.
- [RB74] DC Rife and RR Boorstyn. Single tone parameter estimation from discrete time observations. *IEEE Transactions on information theory*, 20 :591–598, 1974.
- [RFCL06] A. Renaux, P. Forster, E. Chaumette, and P. Larzabal. On the high SNR Conditional Maximum likelihood Estimator Full Statistical Characterization. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 54(12) :4840–4883, 2006.
- [Sch68] F. Scheppe. Sensor-array data processing for multiple-signal sources. *IEEE Transactions on Information Theory*, 14(2) :294–305, 1968.
- [Sch86] R-O. Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 34(3) :281–290, 1986.
- [Sch90] L.L Scharf. *Statistical Signal Processing*. Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

- [SK89] D. Swingler and J. Krolik. Source location bias in the coherently focused high-resolution broadband beamformer. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(1) :143–145, 1989.
- [SL01] P. Stoica and E.G. Larsson. Comments on Linearization method for finding Cramer-Rao bounds in signal processing [and reply]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(12) :3168–3169, 2001.
- [SM50] J. Sherman and W.J. Morrison. Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix. *The Annals of Mathematical Statistics*, 21(1) :124–127, 1950.
- [SN89] P. Stoica and A. Nehorai. MUSIC, Maximum Likelihood and Cramer-Rao bound. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37 :720–741, 1989.
- [SN90] P. Stoica and A. Nehorai. MUSIC, Maximum Likelihood and Cramer-Rao bound : further results and comparisons. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 38 :2140–2150, 1990.
- [SNS95] P. Stoica, A. Nehorai, and T. Söderström. Decentralized array processing using the mode algorithm. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 14(1) :17–38, 1995.
- [SS89] P. Stoica and T. Söderström. On reparametrization of loss functions used in estimation, and the invariance principle. *Signal processing*, 17 :383–387, 1989.
- [SS90] P. Stoica and K.C. Sharman. Maximum likelihood methods for direction-of-arrival estimation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 38(7) :1132–1143, 1990.
- [Ste93] S. Stein. Differential delay/doppler ml estimation with unknown signals. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 41(8) :2717–2719, 1993.
- [TF⁺09] TE. Tuncer, B. Friedlander, et al. *Classical and Modern Direction-of-Arrival Estimation*. Academic Press, Elsevier, 2009.
- [Tor84] D.J. Torrieri. Statistical theory of passive location systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 20(2) :183–198, 1984.
- [VCJY04] S. Venkatraman, J. Caffery Jr, and H.R. You. A novel toa location algorithm using los range estimation for nlos environments. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 53(5) :1515–1524, 2004.
- [VLM09] P. Vallet, P. Loubaton, and X. Mestre. Improved subspace doa estimation methods with large arrays : The deterministic signals case. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 2137–2140, 2009.
- [VO91] M. Viberg and B. Ottersten. Sensor array processing based on subspace fitting. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 39 :1110–1121, 1991.
- [VT02] Harry L. Van Trees. *Optimum Array Processing*. John Wiley & Sons, 2002.
- [Wax82] M. Wax. The joint estimation of differential delay, doppler, and phase (corresp.). *IEEE Transactions on Information Theory*, 28(5) :817–820, 1982.

- [Wei81] E. Weinstein. Decentralization of the gaussian maximum likelihood estimator and its applications to passive array processing. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 29(5) :945–949, 1981.
- [Wei04] A.J. Weiss. Direct position determination of narrowband radiofrequency transmitters. *IEEE signal processing letters*, 11(5) :513–516, 2004.
- [Wei11] A.J. Weiss. Direct geolocation of wideband emitters based on delay and doppler. *IEEE Transactions on Signal Processing*, (99) :2513–2521, 2011.
- [WH96] M.P. Wylie and J. Holtzman. The non-line of sight problem in mobile location estimation. *Universal Personal Communications, 1996. Record., 1996 5th IEEE International Conference on*, 2 :827–831, 1996.
- [WK83] H. Wax and T. Kailath. Optimum localization of multiple sources by passive arrays. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 31(5) :1210–1217, 1983.
- [WK85a] H. Wang and M. Kaveh. Coherent signal-subspace processing for the detection and estimation of angle of arrival of multiple wide-band sources. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 33(4) :823–831, 1985.
- [WK85b] M. Wax and T. Kailath. Decentralized processing in sensor arrays. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 33(4) :1123–1129, 1985.
- [YKM06] Y.S Yoon, L.M. Kaplan, and J.H. McClellan. TOPS : New doa estimator for wideband signals. *IEEE Transactions on Signal Processsing*, 54(6) :1977–1989, 2006.
- [Zat98] M. Zatman. How narrow is narrowband? *Radar, Sonar and Navigation, IEE Proceedings-*, 145(2) :85–91, 1998.
- [ZD07] Y. Zhang and H. Dai. Dynamic self-calibration in collaborative wireless networks using belief propagation with gaussian particle filtering. *Information Sciences and Systems, 2007. CISS'07. 41st Annual Conference on*, pages 771–776, 2007.