



HAL
open science

Eléments pour une phénoménologie en hydrologie urbaine

Serge Thibault

► **To cite this version:**

Serge Thibault. Eléments pour une phénoménologie en hydrologie urbaine. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. INSA de Lyon, 1979. Français. NNT: . tel-00701251

HAL Id: tel-00701251

<https://theses.hal.science/tel-00701251>

Submitted on 25 May 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée devant

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

pour obtenir

LE DIPLOME DE DOCTEUR-INGENIEUR

par

S. THIBAUT

Ingénieur I.N.S.A.

qui lui permet de présenter le diplôme de Docteur-Ingénieur

ELEMENTS POUR UNE PHENOMENOLOGIE EN HYDROLOGIE URBAINE

Soutenu le 6 Juillet 1979 devant la Commission d'Examen

JURY : MM. J.C. CUBAUD Président

C. BOCQUILLON

H. BOTTA

B. CHOCAT

J. TUTENUIT

Examineurs

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

Directeur : R. HAMELIN

Chefs de Départements :

1er cycle	: C. GUILLAUD, Professeur
Biochimie	: P. LAVIOLETTE, Professeur
Génie Civil et Urbanisme	: N. MONGEREAU, Maître de Conférences
Génie Electrique	: H. KLEIMANN, Maître de Conférences
Génie Energétique	: M. RICHARD, Professeur
Génie Mécanique Construction	: J. BAHUAUD, Professeur
Génie Mécanique Développement	: M. LALANNE, Professeur
Génie Physique Matériaux	: R. GOBIN, Professeur
Informatique	: R. ARNAL, Professeur

DIRECTEURS DE RECHERCHE

Professeurs

R. ARNAL	: Informatique Appliquée
J. BAHUAUD	: Mécanique des Solides
J. BOUSQUET	: Thermo-Chimie Minérale
E. BRARD	: Physiologie et Pharmacodynamie
M. CHEVRETON	: Etude des Matériaux
B. CLAUDEL	: Cinétique et Génie Chimiques
L. CRONENBERGER	: Chimie Biologique
J.C. CUBAUD	: Génie Civil et Urbanisme (Bétons et Structures)
L. EYRAUD	: Génie Electrique et Ferroélectricité
J. FAVREL	: Informatique Appliquée
Y. FETIVEAU	: Génie Electrique et Ferroélectricité
R. GELIN	: Chimie Organique
P. GOBIN	: Groupe d'étude de métallurgie et de physique des matériaux
M. GODET	: Mécanique des Contacts
J. GOLE	: Matériaux Macromoléculaires
R. GOUTTE	: Optique Corpusculaire et Ultrasons
C. GUILLAUD	: Optique Corpusculaire et Ultrasons
J. LAFON	: Spectroscopie Moléculaire
M. LALANNE	: Mécanique des Structures
P. LAVIOLETTE	: Biologie
G. MONNIER	: Physicochimie Industrielle
H. PACHECO	: Chimie Biologique
G. PERACHON	: Thermo-Chimie Minérale
E. PERNOUX	: Groupe d'Etude de Métallurgie Physique et de Physique des Matériaux
M. PEYRON	: Chimie Physique

P. PINARD	: Physique de la Matière - Physique Industrielle
R. REYNAUD	: Energétique et Automatique
M. RICHARD	: Energétique et Automatique
R. RIVIERE	: Groupe d'étude de métallurgie physique et de Physique des Matériaux
J. ROBIN	: Physico-Chimie Industrielle
M. ROLIN	: Physico-Chimie Industrielle
F. STOEBER	: Microbiologie
M. THEOLIER	: Métallurgie et Traitements Thermiques
A. ROUX	: Sciences de la Nature (Université Claude-Bernard Lyon 1).
Ch. EYRAUD	: Chimie Appliquée, Génie Chimique et Electrochimie (Université Claude-Bernard 1)

Maîtres de Conférences et Chargés d'Enseignement

D. BERTHE	: Mécanique des Contacts
M. BOIVIN	: Mécanique des Solides
G. FANTOZZI	: Génie Physique des Matériaux
J. FRENE	: Mécanique des Contacts
J. GIELLY	: Génie Civil et Urbanisme (Géotechnique)
M. GERY	: Génie Civil et Urbanisme (Equipped de l'Habitat)
C. GUITTARD	: Electronique Appliquée
J.F. JULLIEN	: Génie Civil et Urbanisme (Bétons et Structures)
H. KLEIMANN	: Génie Electrique et Ferroélectricité
P. LAREAL	: Génie Civil et Urbanisme (Géotechnique)
A. LAUGIER	: Physique de la Matière
M. LEMAIRE	: Génie Civil et Urbanisme (Bétons et Structure)
C. LESUEUR	: Génie Mécanique Construction
Y. MARTINEZ	: Informatique Appliquée
C. MARTY	: Etude des Procédés de Fabrication
P. MAY	: Automatisation des Fabrications Mécanique et Commande Numérique
N. MONGEREAU	: Génie Civil et Urbanisme (Géotechnique)
P. PREVOT	: Informatique Appliquée
J. PEREZ	: Groupe d'Etude Métallurgie Physique et Physique des Matériaux
R. RIEUTORD	: Hydraulique et Dynamique des Gaz
Ph. TROMPETTE	: Mécanique des Structures
J. VERON	: Chimie Appliquée
G. MENGUY	: Physique (Université Claude Bernard Lyon 1)

Maîtres de Recherche C.N.R.S.

M. MURAT	: Chimie Appliquée
----------	--------------------

Maîtres-Assistants

H. BOTTA	: Génie Civil et Urbanisme (Méthodes)
A. JUTARD	: Mécanique des Solides

R E S U M E

Jusqu'à ce jour, l'hydrologie urbaine liée à l'assainissement pluvial utilise un très grand nombre de modèles pour représenter les deux phénomènes évolutifs, ruissellement et écoulement.

Ces modèles sont pseudo-empiriques, restreints à leur champ d'application et sans de véritables assises théoriques.

Il nous semble donc fondamental de revenir sur la définition de ces modèles afin de dégager leurs valeurs cognitives et pragmatiques, leurs intersections syntaxiques, ainsi que les liaisons qu'ils peuvent avoir avec la théorie de l'hydrodynamique.

Après avoir approfondi la définition des modèles empiriques existants, nous mettons à jour les liaisons qu'ils ont avec la théorie de l'hydrodynamique. Ces liaisons leur donnent une assise théorique et permettent d'élaborer un modèle de ruissellement et/ou d'écoulement qui généralise l'ensemble des modèles existants.

Ce travail est indispensable à la bonne utilisation des modèles ainsi qu'à tout nouveau développement.

4

Ce travail a été réalisé au sein du service Méthodes du département Génie Civil et Urbanisme de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, dirigé par Monsieur H. BOTTA qui est à l'origine de cette étude à laquelle il s'est toujours intéressé. Je le remercie plus particulièrement pour l'aide qu'il m'a apportée tout au long de ces années de recherche.

J'exprime ma plus vive reconnaissance à Monsieur le Professeur J.C. CUBAUD pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

Je remercie Messieurs M. DESBORDES et B. CHOCAT pour les conseils qu'ils m'ont prodigués, ainsi que Messieurs J. TUTENUIT et C. BOCQUILLON qui ont accepté de participer à ce jury.

Je remercie tous mes camarades du service Méthodes ainsi que Madame GAUDFROY pour le soin qu'elle a apporté à la frappe de ce document.

A D. RUSAOUEN

Sans qui la réalisation de ce
travail n'eût pas été possible

AVANT - PROPOS

7

- Le paradigme de la science
- Contradiction
- Vers un nouveau paradigme.

*"Nulle science n'a voulu connaître
la catégorie la plus objective de
la connaissance : celle du connais-
sant".*

E. MORIN La Méthode I
L'Esprit de la Vallée.

LE PARADIGME DE LA SCIENCE

* * * * *

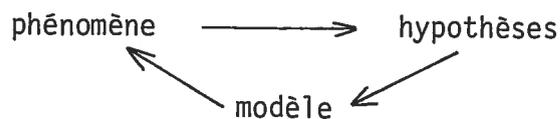
Le paradigme de la science pouvait être défini comme un jeu d'interactions entre les phénomènes "observables" et un ensemble d'hypothèses existantes chez l'observateur ou émergentes de l'observation elle-même.

Le phénomène est identifié par ces hypothèses. Si la liaison (phénomène/hypothèses) ne peut pas s'établir, il y a découpage, fermeture de l'objet support du phénomène, afin de le rendre à nouveau susceptible d'une hypothèse. Cette cybernétique peut conduire au rejet de l'objet étudié.

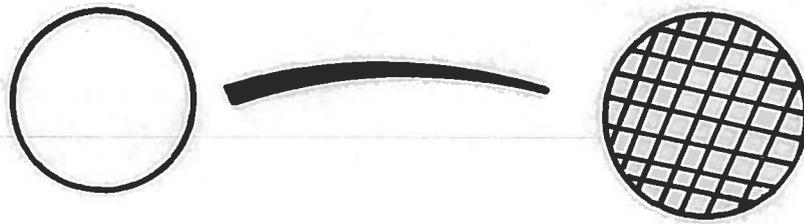


Aujourd'hui, pour que l'hypothèse soit reconnue par la méthode scientifique, elle doit être traduite en un langage mathématique possédant diverses théories valorisées par leur champ d'action.

Les modèles construits doivent dans un premier temps, rendre compte de l'objet observé et, dans un deuxième temps, être capables de prévoir ou de prédire le comportement d'un objet voisin de celui étudié. S'ils ne le sont pas, il y aura retour, soit à l'objet, soit à l'hypothèse.



Le paradigme est à la base de la démarche réductionniste de la science. L'objet observé est découpé et appréhendé comme une succession d'objets élémentaires qui, eux seuls, peuvent être expliqués par un ensemble d'hypothèses satisfaisant l'entendement scientifique.



Au cours de son avancement, la physique a restreint son étude à l'explication de la structure atomique tandis que l'hydrodynamique se centrait sur l'équilibre des forces auxquelles est soumis un élément de liquide.

La réussite de cette démarche est indéniable, les modèles construits étant effectivement cognitifs. Les applications directes sont nombreuses et ont assuré à l'occident une prédominance scientifique.

Le mouvement historique créé par ce paradigme culmine certainement avec les travaux des grands physiciens du début de notre siècle (FERMI, De BROGLIE, EINSTEIN, OPPENHEIMER).

"La mission la plus haute du physicien est donc la recherche de ces lois élémentaires les plus générales desquelles on part pour atteindre par simple déduction l'image du monde".

EINSTEIN

Toutes nos sciences théoriques sont basées sur ce précepte et le respect d'une méthode toute cartésienne.

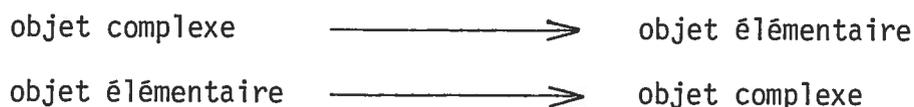
CONTRADICTIONS

* * * * *

L'hydrodynamique et la mécanique classique élaborent donc, leurs théories sur l'observation de l'objet corpusculaire. Les particules sont définies par des propriétés intrinsèques et sont en relation simple les unes avec les autres.

La matière est étudiée, soit par l'astrophysique, soit par la microphysique. Nos grands télescopes inspectent le ciel pour situer et décrire les planètes, les étoiles, les galaxies. Nos microscopes électroniques fouillent l'atome pour découvrir sa nature; notre regard est donc posé sur l'infiniment grand et sur l'infiniment petit.

Le fonctionnement de ces sciences peut être imagé par les deux schémas suivants :



Une étoile est certes un objet complexe, mais la loi de NEWTON la considère dans sa globalité comme un objet élémentaire.

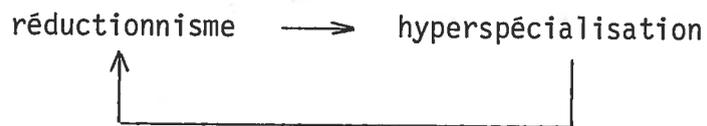
La notion d'élémentaire a donc un double sens :

- elle recouvre la globalité pure où l'objet n'est qualifié que par une seule mesure : démarche holistique qui correspond à une dégradation de la complexité,

- elle recouvre la démarche qui part de l'objet complexe pour arriver à l'élément le plus simple : démarche réductionniste.

Le deuxième schéma, présenté ci-dessus, est virtuel. C'est l'espérance d'expliquer la globalité en partant du comportement des objets microscopiques.

Le réductionnisme introduit des partitions successives et de plus en plus fines de l'objet étudié et aboutit donc, à l'hyperspécialisation de la recherche, qui à son tour, engendre le réductionnisme.



Le cloisonnement, devenu nécessaire, interdit toute remontée vers la connaissance de l'objet complexe, car celui-ci ne peut pas être défini comme la somme arithmétique de ses parties.

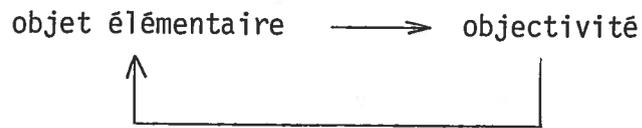
L'unique addition des atomes n'explique pas le mouvement d'une rivière, la naissance d'une pensée, etc ...

*"Un citron à côté d'une orange cesse d'être un citron,
et l'orange une orange".*

G. BRAQUE.

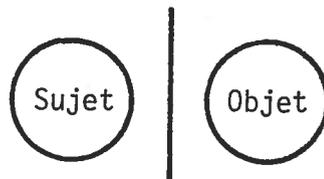
Le tout comme entité, ne peut pas être perçu à travers l'hyperspécialisation.

Les réductionnistes ont une vue floue de l'objet global. Ils s'attachent à l'objet microscopique, seule source pour eux, d'objectivité.



Ce qualificatif d'objectivité est fondamentalement lié au paradigme réductionniste qui le nourrit, le justifie.

Cette disjonction du sujet observateur et de l'objet persiste encore dans les sciences humaines qui ont tenté d'utiliser les schémas réductionnistes; un observateur pensait pouvoir étudier une population sans que sa présence en "trouble" les réponses.



La réductionnisme est un mouvement qui tente donc de définir l'objet élémentaire et de l'expliquer pour s'assurer l'objectivité.

Ce but ne peut même plus être atteint par la microphysique qui découvre des objets de plus en plus complexes et a réintroduit la subjectivité dans ses modèles (incertitude de HEISENBERG). L'ordre objectif disparaît pour laisser apparaître le désordre et la complexité comme les deux moteurs principaux de la création.

"Comment le hasard a-t-il été possible ?"

LUPASCO

La tragédie de l'énergie.

* * * * *

La science se donne pour but la création de modèles qui ne sont qu'une mise en ordre logique d'un certain nombre d'hypothèses. Tout modèle sera jugé satisfaisant s'il prédit le comportement d'un objet B appartenant au même domaine de stabilité que l'objet A étudié au préalable.

Le paradigme scientifique est donc intimement lié à la prévision; la science conférant, à celui qui utilise son langage, un pouvoir de contrôle sur l'évènement reproductible. Cette orientation pragmatique ne peut s'effectuer qu'au prix d'une dégradation qualitative du fait : fermeture de l'objet observé, non reconnaissance totale de toutes ses composantes, elle conduit même à la dégradation des théories.

Entendue comme source de prévision et comme élimination des domaines d'ombres de l'observation, la modélisation est le premier pas vers la technicité. Celle-ci est basée sur les valeurs opérationnelles, manipulatoires des théories.

"La théorie cesse d'être logos et devient techné"

E. MORIN.

La science se voulait objective, c'est-à-dire neutre, la modélisation techniscite la rend pragmatique; la cité lui délivre même le champ de l'observation et lui définit la démarche à suivre pour obtenir le résultat désiré.



La dégradation doctrinaire des théories est souvent le fruit de cette boucle incessante.

"Au lieu d'adapter sa réflexion et son langage au fait, certains en viennent à déformer ces faits, ou à les ignorer de manière à sauvegarder le cadre dogmatique à l'intérieur duquel les raisonnements se développent".

Claude Paul BRUTER.

- 8 -

VERS UN NOUVEAU PARADIGME

* * * * *

"Nous sommes confondus par le nombre et la prodigieuse variété des éléments, des relations, des interactions ou des combinaisons sur lesquels repose le fonctionnement des grands systèmes dont nous sommes les cellules, pour ne pas dire les rouages".

J. de ROSNAY.

Le paradigme de la science classique définit deux approches parallèles :

- approche réductionniste qui recherche les éléments premiers d'un tout.
- approche holistique qui considère le tout complexe comme un tout élémentaire valorisé par une qualité non consécutive directement de ses éléments.

Le réductionnisme qui se voulait objectif, neutre, est aujourd'hui remis en cause par l'incapacité de remonter au tout complexe en utilisant la déduction simple, l'élément premier étant lui-même hypothétique. L'hydrodynamique par exemple, est incapable de mesurer la variation des flux de liquide sur un grand ensemble de surfaces hétérogènes.

Cette mécanique classique donne des modèles complexes (Opérateurs différentiels non linéaires), qui peuvent très difficilement mesurer les relations entre ces flux.

Une image unitaire du monde, mirage de l'approche réductionniste, n'est plus définissable.

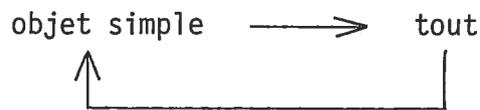
La démarche holistique simplifie trop le tout pour être source de compréhension d'un ensemble d'éléments en interaction. Comme nous le verrons par la suite, l'hydrologie poursuit cette démarche et élabore des modèles, image d'un tout (bassins versants, surfaces de ruissellement, etc ...), sans reconnaître la complexité de la transformation. De ce fait, les modèles sont a priori difficilement utilisables pour des bassins versants de structure et de taille différentes de celles du référentiel.

* * * * *

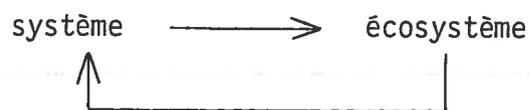
Les contradictions du paradigme défini précédemment conduisent à inclure la notion d'objet dans un Logos susceptible de présenter de nouvelles richesses. L'objet simple ne doit plus être reconnu comme tel; il existe grâce à ses relations permanentes avec l'environnement. Ce Logos est représenté par le système qui est un ensemble d'éléments en interaction.

(objet ————— relation)

Le réductionnisme est englobé; il n'est pas rejeté mais relativisé par le logos système. L'observation de l'objet élémentaire est source d'un savoir qui doit être dépassé par l'existence même des interactions. Cette nouvelle approche balaye le champ défini par l'intervalle situé entre l'objet simple et le tout. C'est un mouvement incessant qui va de l'un à l'autre.



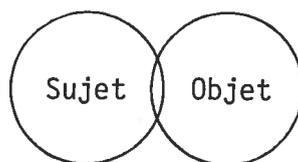
Le système considéré comme totalité n'est pas disjoint du reste de l'univers. Il existe parce qu'il est en relation avec son écosystème.



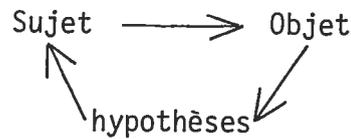
Tout phénomène ne doit pas être perçu comme une totalité indépendante mais comme un élément particulier, un rouage, d'un système plus général, qui conditionne l'existence de ce phénomène.

La notion de relation et d'écosystème réintroduit donc, en particulier, le sujet observateur dans la réflexion. Un objet quelconque est plus que la mesure quantitative de ses particularités. Il est aussi valorisé par l'intersection qu'il peut avoir avec l'observateur.

L'objet étudié ne doit donc plus être disjoint de la cité

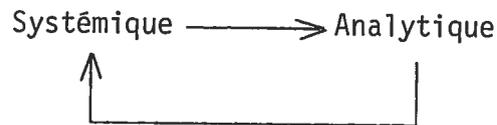


En particulier, l'observateur est reconnu comme potentiellement modélisateur, c'est-à-dire source d'un outil de prévision basé sur la fermeture de l'objet système. La présence même du sujet observateur devrait contrer la dégradation de l'observation et la dégradation doctrinaire des théories.



Ce nouveau paradigme peut donc être défini comme une boucle non statique qui va du sujet à l'objet et aux hypothèses. Ce schéma circulaire, très éloigné de la simple relation phénomène-hypothèse, devient source de savoir, lieu d'une nouvelle recherche et espoir de richesses.

Le sujet est le moteur du mouvement qui circule entre le particulier et la totalité. L'objet observé, faisant parti d'un système lui-même en relation avec son écosystème, doit sans cesse être valorisé par son appartenance à ce système. Ce mouvement peut être mis en parallèle avec le schéma suivant :



La notion de systémique introduit le tout comme entité susceptible de présenter des lois qui soient différentes et plus que la simple intersection ou addition des lois régissant le fonctionnement des parties. La complexité et le désordre qui est inhérent à cette complexité, deviennent des essences fondamentales ne pouvant être reconnues, appréciées que par la transdisciplinarité.

121315

**PRESENTATION
GENERALE**

L'étude que nous avons entreprise, porte sur une catégorie bien spécifique de modèles couramment utilisés en hydrologie urbaine voire rurale.

Ces modèles s'attachent à représenter ou à prévoir les ruissellements sur les sols et les écoulements en canalisations. Ce sont les deux phénomènes physiques fondamentaux de l'hydrologie urbaine.

Nous ne nous sommes pas intéressés à la représentation des pluies, causes des phénomènes ci-dessus et à la modélisation des diverses pertes intervenant lors du ruissellement. (Ces pertes pouvant être, dans certains cas, incluses dans le modèle de ruissellement). Notre étude a donc pour objet les modèles susceptibles de représenter la déformation d'un hyétogramme en hydrogramme (ruissellement vers un exutoire), ou d'un hydrogramme en hydrogramme (écoulement en canalisation).

Les modèles, utilisés jusqu'à ce jour, sont très nombreux. La diversité provient de leur origine théorique ainsi que de leur champ d'application. Certains utilisent les résultats fournis par l'hydraulique, d'autres sont construits en considérant le transformateur (bassins versants de ruissellement, canalisations) comme un système macroscopique réalisant un transfert de flux (technique d'analyse de système).

Cette deuxième approche a fourni un très grand nombre de modèles puisqu'ils n'ont pas de véritables assises théoriques. Ils se recoupent dans leur utilisation ainsi que dans leur formalisation, les hypothèses les sous tendant, étant généralement floues.

Dans une première partie que nous avons intitulée De L'OBJET, nous nous sommes intéressés aux modèles existants, en essayant de clarifier

le niveau de la modélisation (Taille du transformateur), les typologies pragmatiques et la valeur cognitive des modèles. Cette tentative de lecture des modèles existants nécessite donc l'élaboration d'un code d'étude particulier.

Cette première partie est divisée en trois sous-parties.

De L'OBJET 1 : Introduction, élaboration du code de l'étude.

De L'OBJET 2 : Typologie des modèles de ruissellement et d'écoulement

De L'OBJET 3 : Conclusion de l'étude; validation des modèles existants.

Ce constat des modèles existants étant fait, dans une seconde partie, intitulée De L'ETUDE, nous avons d'abord tenté de remédier au défaut de formalisation des modèles construits à partir d'une vision macroscopique des phénomènes. La plupart de ces modèles sont tous issus d'un modèle plus général, solution simple d'un système différentiel. Cette écriture précise ainsi leurs caractéristiques phénoménales, (linéarité, hérédité, etc ...).

Ensuite, nous avons étudié le mode d'obtention des solutions du modèle issu de l'hydraulique qui se présente sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires. L'étude de la stabilité de ce système indique ses différentes applications possibles, suivant le mode de résolution choisi.

Ce modèle, élaboré à partir des principes de la mécanique classique, possède une assise théorique que nous ne remettons pas en cause.

Enfin, nous avons tenté de relier les modèles macroscopiques (empiriques) au modèle théorique, mettant ainsi à jour les hypothèses fondamentales

qui soustendent leur véracité et surtout, nous renseignent sur l'application possible de ces modèles.

Cette seconde partie est divisée en trois sous-parties :

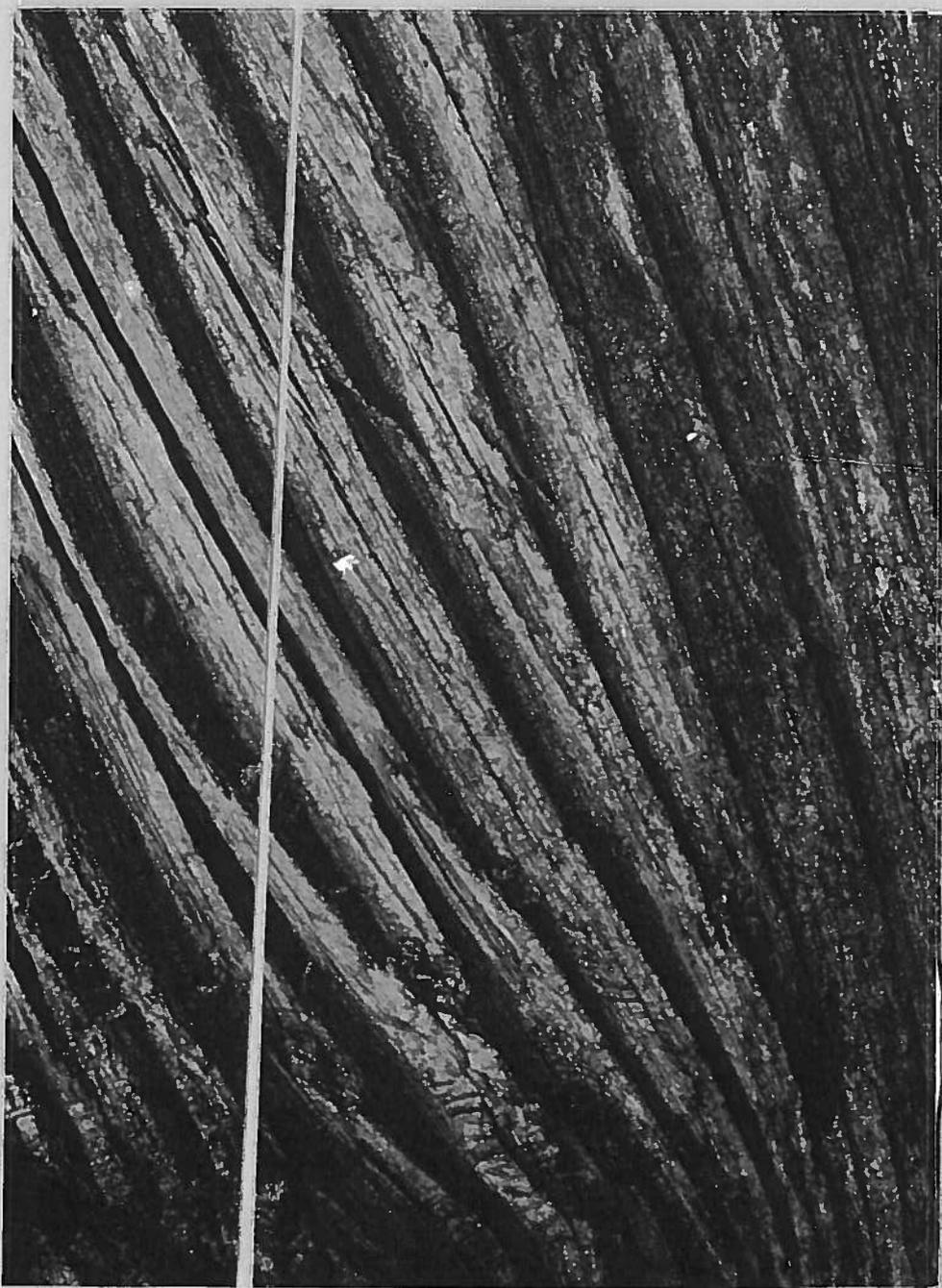
De L'ETUDE 1 : nouvelle formalisation des modèles macroscopiques

De L'ETUDE 2 : étude du modèle théorique

De L'ETUDE 3 : liaison entre les modèles macroscopiques empiriques et le modèle théorique.

-16-

DE L'OBJET



	DE L'OBJET I	17
. Mégalopolis : concevoir l'assainissement		21
. Autour des problèmes posés par l'assainissement		24
. Démarche phénoménologique		27
- typologie des modèles		28
- la complexité		31
	DE L'OBJET II	41
. Typologies des modèles		43
- Modèles globaux élémentaires		48
- Modèles globaux élémentaires modifiés		58
- Modèles globaux analytiques		70
- Modèles "métaglobaux"		84
	DE L'OBJET III	103
. Validation dynamique		104
. Validation individuelle		108
- Validation pragmatique		108
- Validation cognitive		110
. Vers de l'étude		112



• Mégalopolis : concevoir l'assainissement	21
• Autour des problèmes posés par l'assainissement	24
• Démarche phénoménologique	27
- typologie des modèles	28
- la complexité	31

"Peu à peu j'étais séduit par l'aspect négatif, je dirais presque inversé de cette industrie. C'était un empire certes, qui s'étalait dans les rues des villes et qui possédait aussi ses terres campagnardes. Mais il plongeait également dans l'intimité la plus secrète des êtres puisque chaque acte, chaque geste lui livrait sa trace, la preuve irréfutable qu'il avait été accompli. Il s'agissait, en somme, d'une prise de possession totale de toute une population, et cela par derrière, sur un monde retourné, inversé, nocturne".

Michel TOURNIER.

Les Météores.

MEGALOPOLIS : CONCEVOIR L'ASSAINISSEMENT

* * * * *

PARIS; environ deux millions d'habitants

CHICAGO; plus de cent kilomètres d'est en ouest

LYON et sa banlieue; un million quatre cent mille habitants.

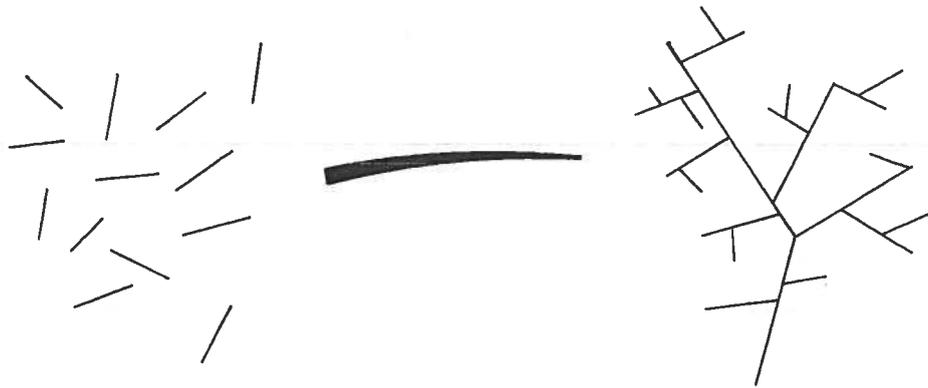
Au cours des siècles et suivant l'humeur des hommes, la ville a grandi inexorablement; monstrueuse cellule vivante repoussant toujours plus loin les champs, les arbres, dévorant les trop faibles cellules voisines.

Sa surface est un conglomérat de rues, de parkings, d'entrepôts, d'usines et d'habitations.

Elle a creusé le sol pour y déposer ses artères, ses veines, son ventre. Elle a légué à la terre son coeur, la source de son énergie et l'exutoire de ses impuretés; monde inversé écoulant loin de nos yeux et de nos narines l'eau sale, les déchets, toute cette moisissure de nos gestes et de nos corps.

Le Capitaine La FLEUR, soldat de Louis XV, avait déjà marqué sa surface par des véhicules de collecte d'ordures ménagères; tout un petit peuple grouillant, ramassant, transportant les immondices. Au 19ème siècle, Victor HUGO nous ouvre la porte des entrailles. Notre époque industrialisée délègue aux égouttiers le suprême honneur du dernier voyage de nos eaux parfumées.

Hors de notre vue s'étendent des milliers de kilomètres de canalisations. Ce ne sont que des tuyaux de métal, de béton, raccordés les uns aux autres; éléments simples d'une construction tentaculaire, arborescente, complexe.

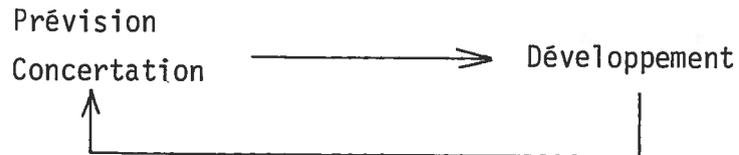


Ce fragile squelette est indispensable à la cité. Sous ce formidable réseau, les rues se noient sous les orages d'été, les microbes de nos eaux souillées se propagent sournoisement dans la cellule monstrueuse.

Nous devons ménager ce réseau souterrain déjà âgé, car la ville grandit. Elle pose de nouveaux rubans toujours plus larges. Elle recouvre la terre de surfaces grises; la communication directe entre le ciel et la terre est coupée. L'eau du ciel, recueillie par les nouveaux parkings et les nouvelles toitures est évacuée par le squelette ramifié; qui se doit de grandir.

De nouvelles antennes lui sont adjointes. Mais comme la cité a des ressources limitées, cette chirurgie doit se faire aux moindres frais. Elle est indispensable, obligatoire même; la croissance ne pouvant s'arrêter!! Nous devons alors maîtriser, contrôler, soigner et renforcer cet inextricable réseau.

Tout développement anarchique est à rejeter ! concertation et prévision deviennent les deux conditions indispensables à toute organisation, donc au bon développement de la ville.



Ces deux actions supposent la maîtrise et la conception d'un système d'assainissement et de toutes ses composantes sous-jacentes. Cela peut être réalisé si nous nous donnons les moyens d'élaborer un outil de conception qui puisse répondre correctement aux besoins de la cité. La construction d'un tel outil nécessite d'abord la reconnaissance des problèmes liés au développement et à la gestion de l'assainissement et, surtout, la compréhension des phénomènes qui engendrent la construction d'un réseau.

AUTOUR DES PROBLEMES POSES PAR L'ASSAINISSEMENT

* * * * *

Toutes ces eaux qui nous tombent du ciel ne s'infiltrent plus. Elles ruissellent sur nos sols bitumineux, s'engouffrent dans nos bouches d'égoûts. Les canalisations, les collecteurs les charrient jusqu'aux rivières en se régénérant au passage dans des bassins d'épuration, s'ils existent.

Construire un ensemble de pavillons, une nouvelle ceinture routière, de nouvelles usines, c'est augmenter le volume d'eau à évacuer en toute urgence par temps d'orage. La diffusivité naturelle de la pluie est transformée en intensité.

Diffusivité \longrightarrow Intensité

Cette transformation est difficile à contrôler. Elle ne doit pas être un arrêt à la croissance de la ville ! La cité s'est dotée de lois, de règles pour planifier son développement. Les informations, les idées sont échangées. Un projet, une décision d'aménagement, quelle que soit son importance, nécessite la concertation entre élus, urbanistes, ingénieurs en voirie, réseaux divers, etc ...

Le coût croissant des investissements, la planification posent de nouveaux problèmes [35].

- Comment fonctionne actuellement le réseau d'assainissement ?
- Que peut-il accepter comme nouveaux apports ?

- Comment dimensionner les nouvelles extensions ?
- Quel sera l'impact des nouveaux plans d'urbanisme sur l'évolution du réseau, etc ...

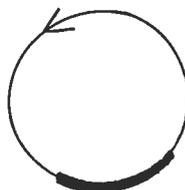
Répondre à ces questions nous obligerait à aborder un grand nombre de thèmes d'études.

- Relation de l'urbanisation avec la structure et les dimensions d'un réseau d'assainissement,
- Relation de l'urbanisation avec l'imperméabilisation des sols,
- Quantité d'eau évacuée par une cellule familiale, etc ...

Nous ne traiterons pas de ces études, notre étude étant centrée sur le phénomène physique fondamental, l'évacuation des eaux pluviales et usées qui nécessite la construction d'un réseau d'assainissement dense en milieu urbain. Ce phénomène particulier est lui-même décomposable en trois sous-phénomènes principaux et complémentaires :

- averse,
- ruissellement en surface,
- écoulement en canalisation.

Ils appartiennent à ce que nous nommons le cycle hydrologique; cycle de l'eau en général.



Les averses sont des phénomènes fort complexes qui, jusqu'à ce jour, ont été très peu étudiés. Pour l'hydrologie qui traite du problème de l'évacuation des eaux en milieu urbain ou rural, le problème de l'averse est

double : comment représenter correctement une averse et quels sont les types d'averses qui intéressent plus particulièrement les gens s'occupant d'assainissement (notion de risques) ? L'intensité des averses conditionne les valeurs du ruissellement en surface et l'écoulement en canalisation.

La modélisation du ruissellement détermine les quantités d'eau arrivant au réseau; eau de pluie diffuse transformée par son ruissellement sur les toits, dans les gouttières, sur le bitume, dans les caniveaux et même par la verdure.

Un modèle d'écoulement en canalisation nous donne le débit de ces eaux transitant dans le réseau, eaux concentrées pour un voyage plus ou moins rapide vers un exutoire presque invisible.

C'est l'étude de ces modèles de ruissellement et d'écoulement, fondamentaux à tout outil de conception en assainissement, que nous avons choisi comme thème principal de notre travail.

En hydrologie urbaine, étant donné l'ampleur des problèmes à traiter, surfaces très importantes, développé de canalisations très long), le ruissellement et l'écoulement sont deux phénomènes difficilement représentables. Leur modélisation s'appuie sur une phénoménologie, explication scientifique des phénomènes, particulière à l'hydrologie.

DEMARCHE PHENOMENOLOGIQUE

* * * * *

La phénoménologie qui peut aboutir à la construction d'une théorie scientifique, ou qui s'inspire de théories préexistantes, s'élabore sur un ensemble de phénomènes.

Que signifie expliquer ou décrire un corpus d'observations ?

Serait-ce un ensemble de mots, de symboles qui satisfait notre entendement individuel ou collectif ?

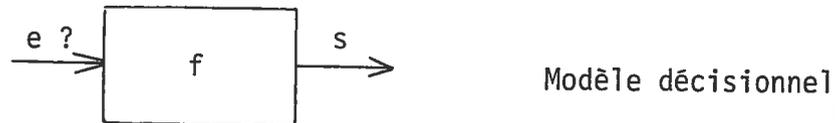
Il ne m'appartient pas dans ces pages de discourir des problèmes ontologiques, métaphysiques posés par le signifié du mot connaissance, de ses implications épistémologiques et philosophiques. Je voudrais simplement poser quelques définitions (peut-être subjectives) qui permettront d'asseoir correctement la suite de l'exposé. J'emprunterai ces quelques lignes à Théodore VOGEL :

"Une théorie est la construction d'un code de lois enchaînées logiquement, donc mathématisables, qui satisfait le scientifique de nos jours; cette exigence est récente, peut-être provisoire".

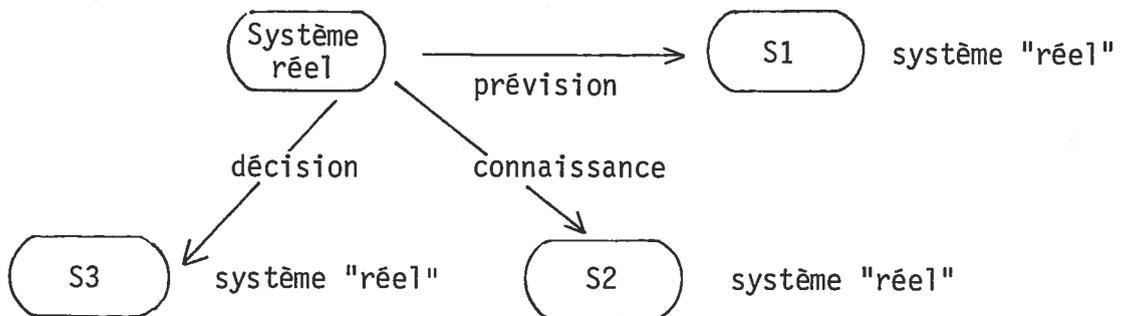
Ce code de lois devrait aboutir à l'élaboration d'un modèle, qui serait une représentation abstraite du phénomène observé, mais comme l'observation est multiple, il ne peut y avoir de modèle unique.

- TYPLOGIE DES MODELES -

Comme toute étude est profondément liée à la cité, la modélisation reflète certaines typologies pragmatiques. Elles peuvent être cognitives, décisionnelles, prévisionnelles.



Suivant les typologies retenues (en fait, elles peuvent être regroupées en un seul modèle), on extrait de l'univers un système réel particulier, support du ou des phénomènes étudiés. Ce système peut être entendu comme une entité globale ou comme un agrégat de sous-systèmes (notion de système quasi décomposable).



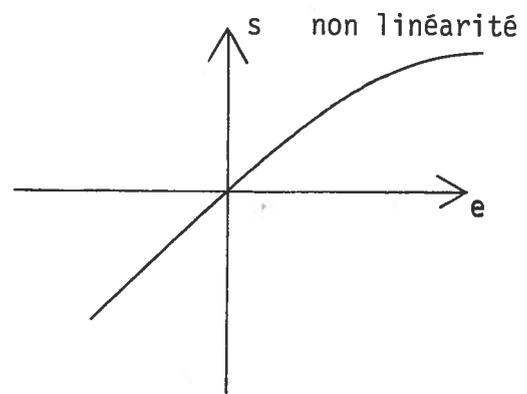
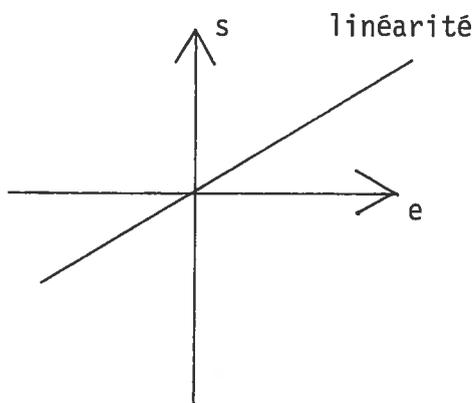
L'aspect structural et phénoménal du système "réel" S_i retenu, définit le type et le nombre de variables.

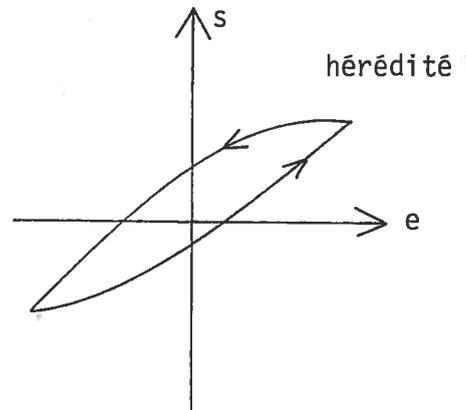
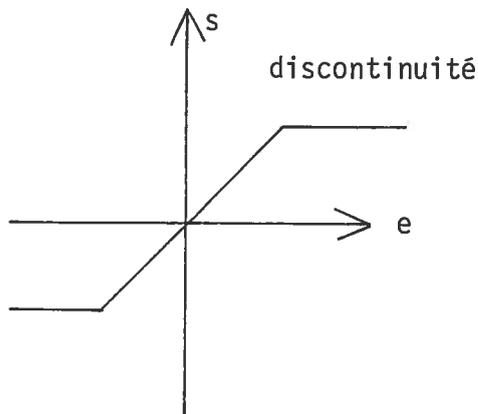
Elles mesurent l'entrée et la sortie si le système est quasi isolé et ouvert, l'entrée ou la sortie si le système est semi ouvert, l'état du système s'il s'agit d'un système à état.

Ces variables sont reliées entre elles par des lois. En langage logico-mathématique, la loi est identifiée par un opérateur qui permet le passage d'une mesure de la donnée à une mesure de la visée, mesure déterministe ou stockastique. Elle est qualifiable par son mode d'élaboration; approche empirique ou approche rationnelle (Empeiros : qui se rattache à, qui découle de l'expérimentation).

Une approche rationnelle conjugue les variables à partir d'un principe reconnu (conservation de l'énergie, conservation de la masse, loi de la dynamique, ...).

Cette approche est imagée par la projection de schémas abstraits, existants chez le sujet observateur, sur l'objet étudié. Le phénomène est alors référencié à une classe de phénomènes, les relations entre variables pouvant avoir les formes de base suivantes :





La conjugaison des différentes lois retenues, définit le modèle. C'est un système abstrait isomorphe ou homomorphe du système "réel" observé. Suivant sa typologie syntaxique, le modèle est élémentaire c'est-à-dire du type :

- linéaire $\frac{ds}{de} = a$
- exponentiel $\frac{ds}{de} = a(s^* - s)$; etc

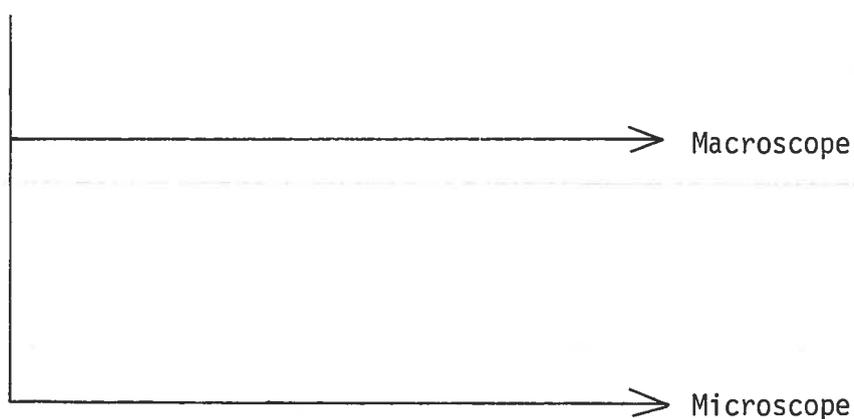
ou analytique :

- modèles différentiels,
- modèles intégraux, etc ...

La signification intrinsèque du modèle dépend donc de l'orientation pragmatique retenue, sa syntaxe étant liée au type d'approche utilisée.

En hydrologie urbaine, les phénomènes de ruissellement et d'écoulement sont par essence complexes. Cette complexité est due à l'hétérogénéité et à la taille des systèmes supports de ces phénomènes (bassins versants, toitures, caniveaux, rues, parcs, canalisations, chutes, etc ..).

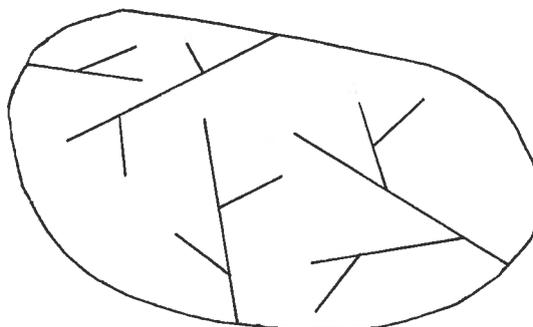
Elle est aussi due à la complexité du mouvement des fluides. Il ne peut donc y avoir de phénoménologie unique. Tous les niveaux d'observation possibles, situés entre l'axe de la globalité (vision macroscopique) et l'axe du réductionnisme (vision microscopique) ont leurs modèles propres.



- LA COMPLEXITE -

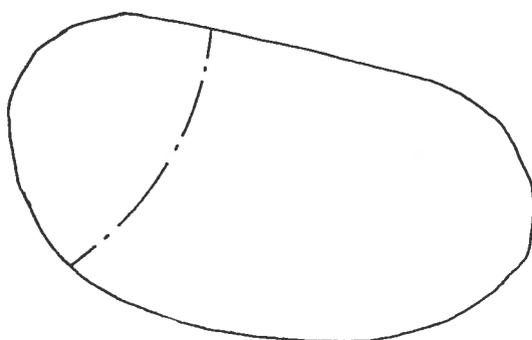
- Système métaglobal

Le système le plus global, représentatif de l'hydrologie urbaine que nous puissions prendre est une image de la ville et de son réseau. (Métaglobalité).

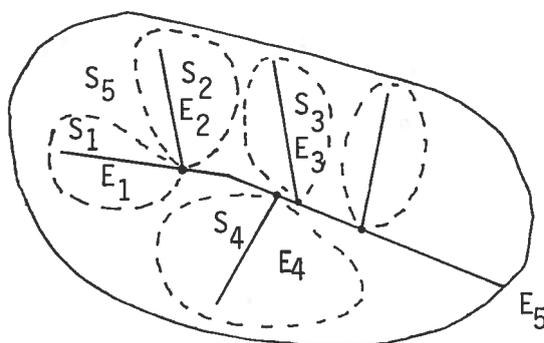


La frontière sera définie par les points de rejets (Stations d'épurations, rivières, mer, etc ...) et les limites de ruissellement externes de la ville.

Ce méta-système peut être soumis à un ou plusieurs événements pluviométriques. Ils peuvent ne pas recouvrir en totalité la ville. En général, pour les événements de type orageux, seule une partie du méta-système est concernée.



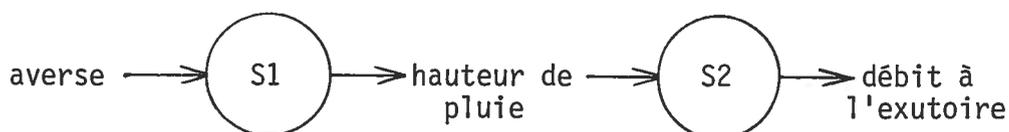
Ce méta-système peut être décomposé en systèmes ne possédant qu'un seul exutoire



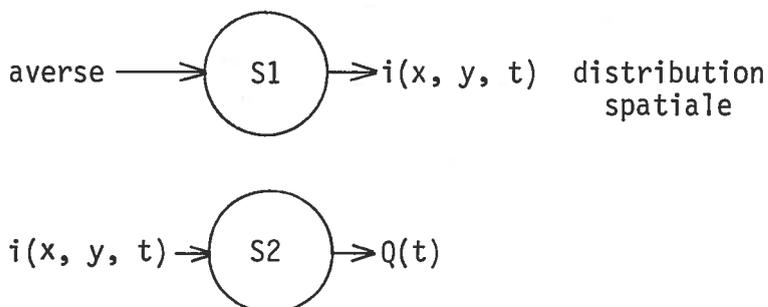
Sans affiner le niveau de décomposition choisi, nous nommerons par la suite système global S , l'image d'un bassin versant ou d'un ensemble de bassins versants ne possédant qu'un seul exutoire.

- Système global S

S est la somme de deux sous-systèmes phénoménaux S_1 et S_2 . S_1 réalise la transformation averse, hauteur de pluie. S_2 réalise la transformation hauteur de pluie débit à l'exutoire. S_2 représente le fonctionnement du bassin versant considéré dans sa globalité.



En général, S_1 et S_2 sont couplés en série. S_1 n'est pas le siège d'une transformation physique réelle; il représente le mode d'appréhension du phénomène complexe qu'est une averse.



- Système S considéré comme décomposable

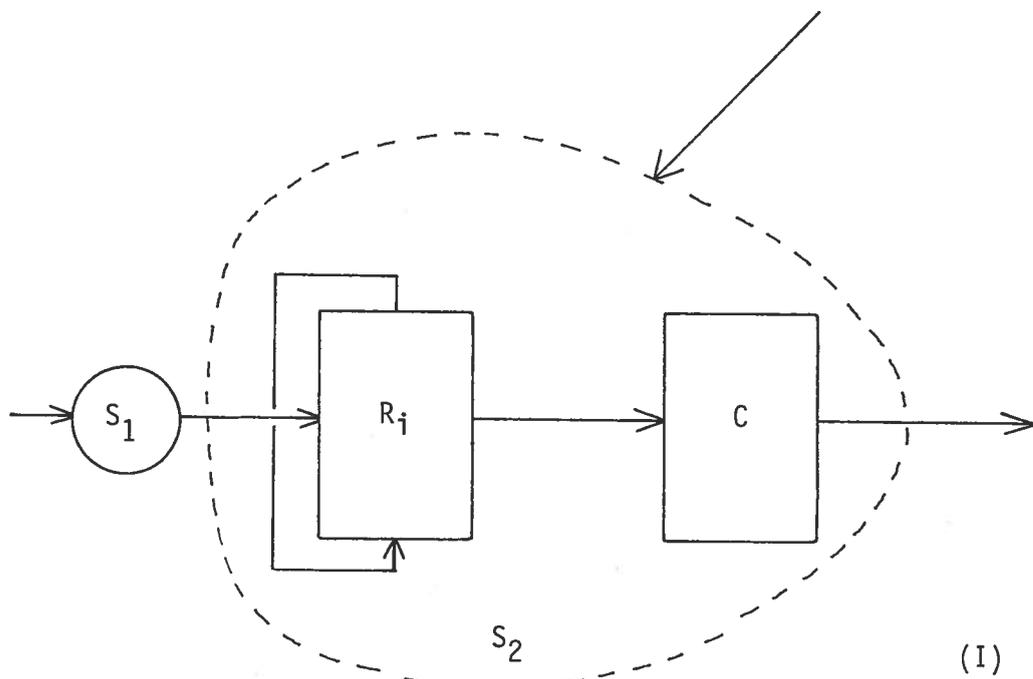
"Un système est dit quasi décomposable s'il peut être décomposé en sous-systèmes quasi-isolés S_i reliés entre eux et avec l'environnement".

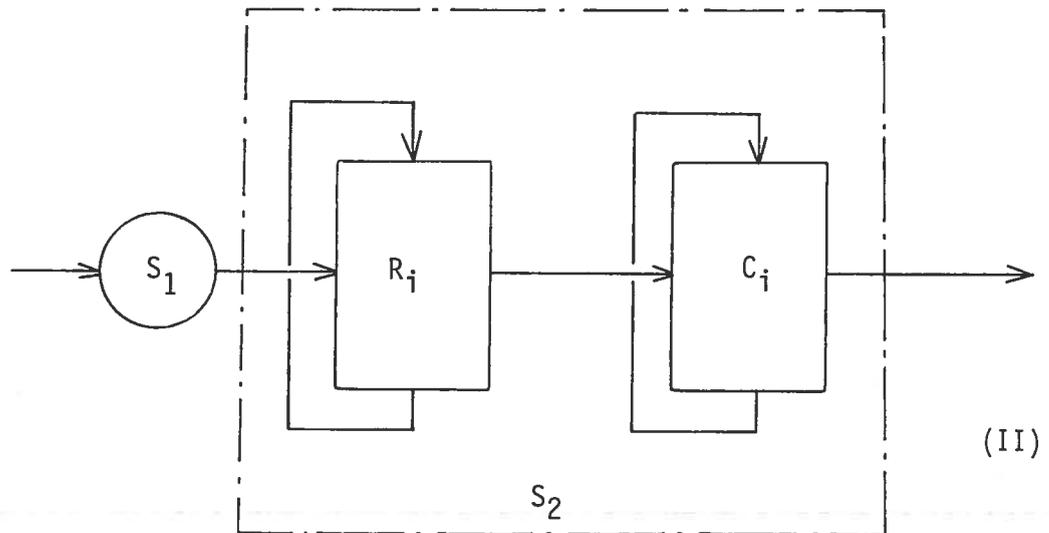
B. WALLISER.

- COMPLEXITE STRUCTURALE DU SYSTEME -

Le système S_2 est décomposé en reconnaissant les divers éléments qui participent à la transformation d'une averse quelconque. S_2 est la somme de sous systèmes S_i indépendants qui peuvent être l'image d'un caniveau, d'une gouttière ou d'un parc, une antenne de réseaux. Il peut même représenter un sous bassin versant élémentaire.

Soit R_i un sous-système, lieu d'une transformation par ruissellement, et C_i le lieu d'une transformation par écoulement. Suivant le mode de décomposition choisi et le possible des modèles envisagés, S sera imagé par l'un des schémas suivants :





R_i sur R_i : autocouplage; l'eau ruisselle de R vers R.

C_i sur C_i : autocouplage; calcul de l'écoulement en canalisation par découpage du réseau en éléments simples.

R_i vers C_i : Couplage en série; passage du ruissellement à l'écoulement.

Le premier schéma illustre une décomposition qui ne se ferait que sur les éléments de ruissellement. Le modèle d'écoulement considère tout le réseau quelle que soit sa taille.

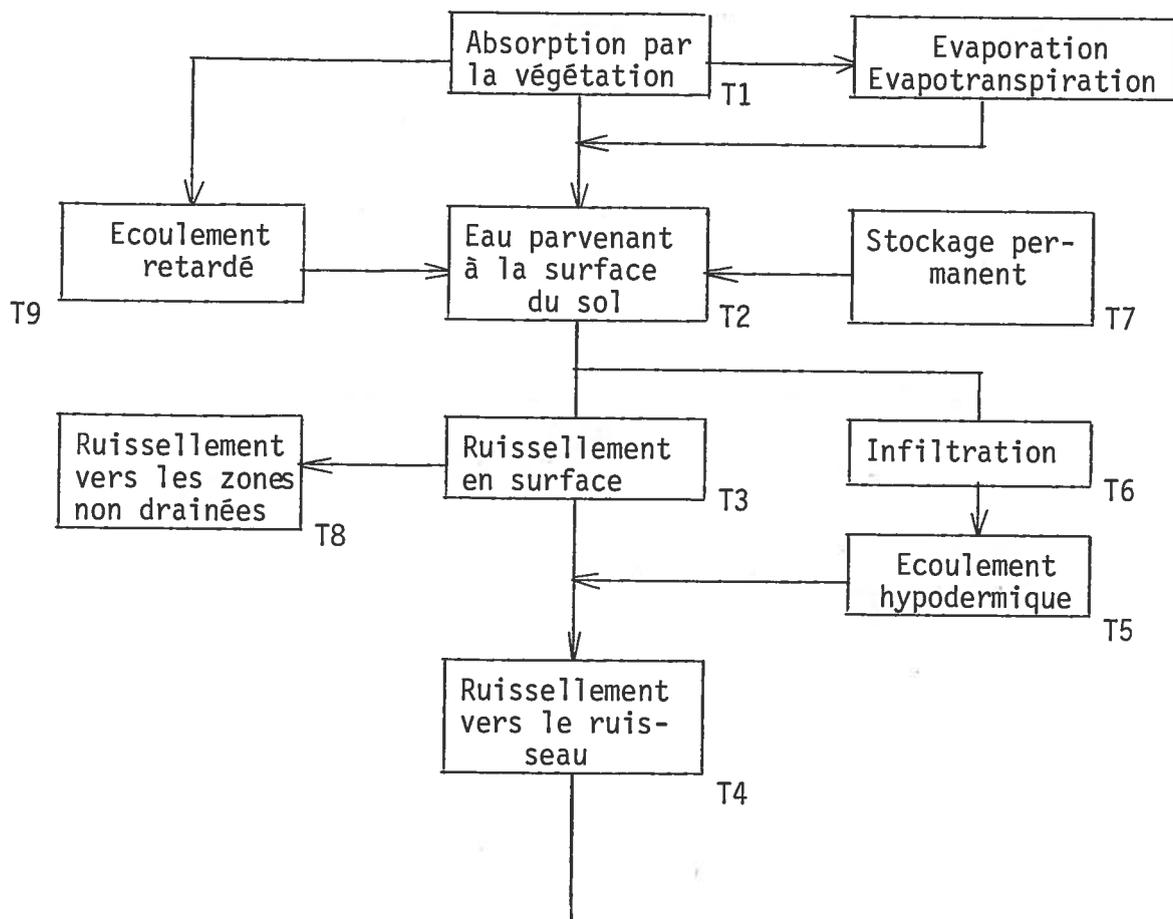
La décomposition d'un système relève d'une démarche analytique et organisationnelle. Chaque schéma induit un type de modèle particulier. Leur définition est liée à l'organisation du système en sous-systèmes S_j .

- COMPLEXITE PHENOMENALE -

Chaque sous système R_i peut être envisagé comme le lieu d'un ensemble de transformations particulières : infiltration, rétention en surface, interception par la végétation, évaporation, etc ...

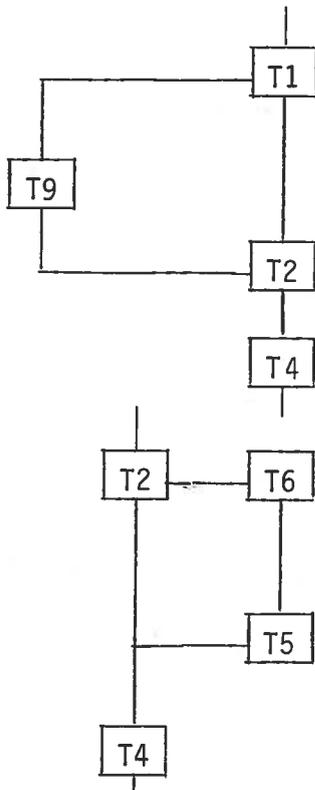
R_i est alors décomposable en sous-systèmes.

Pour illustrer cette complexité supposée décomposable, j'emprunterai à B. CHOCAT le schéma suivant [8] :



Cette approche pseudo-analytique révèle la complexité du phénomène tout en essayant de décrire chaque sous-phénomène. Cette décomposition retient un schéma organisationnel qui ne peut être qu'une approximation plus ou moins grossière de la réalité; les relations réelles n'étant pas additives. Suivant les buts fixés par l'observateur et les moyens dont il dispose, le système général S sera imagé par un hypo-système ou par un infra-système de S .

Un hypo-système ne conserve que quelques sous-systèmes avec toutes leurs relations.



Le modèle T4 sera un modèle global. Il n'élucidera pas explicitement l'infiltration, les écoulements hypodermiques.

Le modèle T2 tient compte à la fois de l'absorption par la végétation, de l'évaporation, du stockage permanent.

R_i sera imagé par autant de modèles qu'il y a de "contractions" possibles.

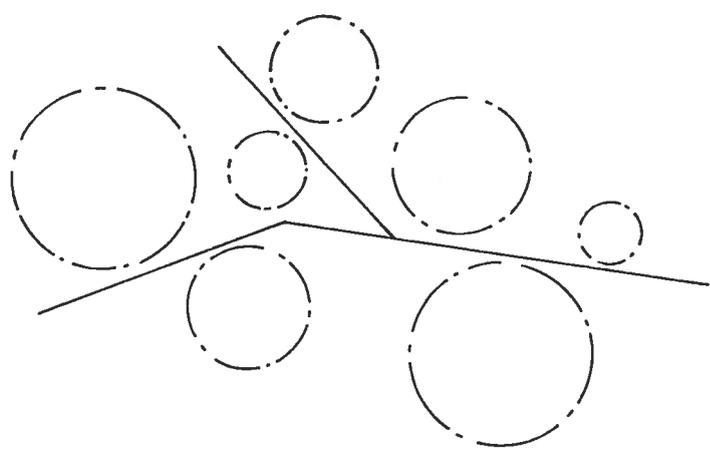
Un infra-système est obtenu en conservant tous les sous-systèmes avec seulement quelques relations.

Dans le schéma (II), en supprimant l'autocouplage sur C_j on obtient le schéma (I). Un nouveau modèle d'écoulement est ainsi défini.

Ces quelques schémas, obtenus par décomposition du système général S , illustrent les différentes approches possibles pour étudier un phénomène. Même s'ils ne sont pas donnés explicitement, ils sont sous-jacents à toute phénoménologie. Il en est ainsi en hydrologie urbaine; les différentes méthodes construites à ce jour se rapportent à l'un de ces schémas.

Dans certains cas particuliers [44], la transformation d'une pluie est calculée en considérant consécutivement, le ruissellement sur les toits, sur les parcs, sur les rues, les écoulements en gouttières, en caniveaux, en canalisations, etc ... Le système abstrait résultant est alors fort complexe et difficilement transposable. Les qualités pragmatiques de transparence, de souplesse, de communicabilité sont pratiquement inexistantes.

Aujourd'hui, une échelle d'observation plus ou moins précise semble se dégager. Elle est située entre l'axe du microscopique et l'axe du macroscopique. Le système général S est supposé quasi décomposable en sous-systèmes S_j (petits bassins versants) appréhendés dans leur globalité, reliés entre eux par un réseau de collecteurs.



Par la suite, nous nous intéresserons plus particulièrement à l'ensemble des modèles de ruissellement et d'écoulement construit autour de cette vision.

* * * * *

Ces différentes "définitions" relatives à la phénoménologie ayant été posées, nous allons tenter de reconnaître les différentes qualités des modèles utilisés couramment en hydrologie pour mesurer la transformation d'une pluie par ruissellement et écoulement. Cela nécessite l'élaboration d'un code qui doit être aussi simple que possible et rendre compte du signifié des modèles.

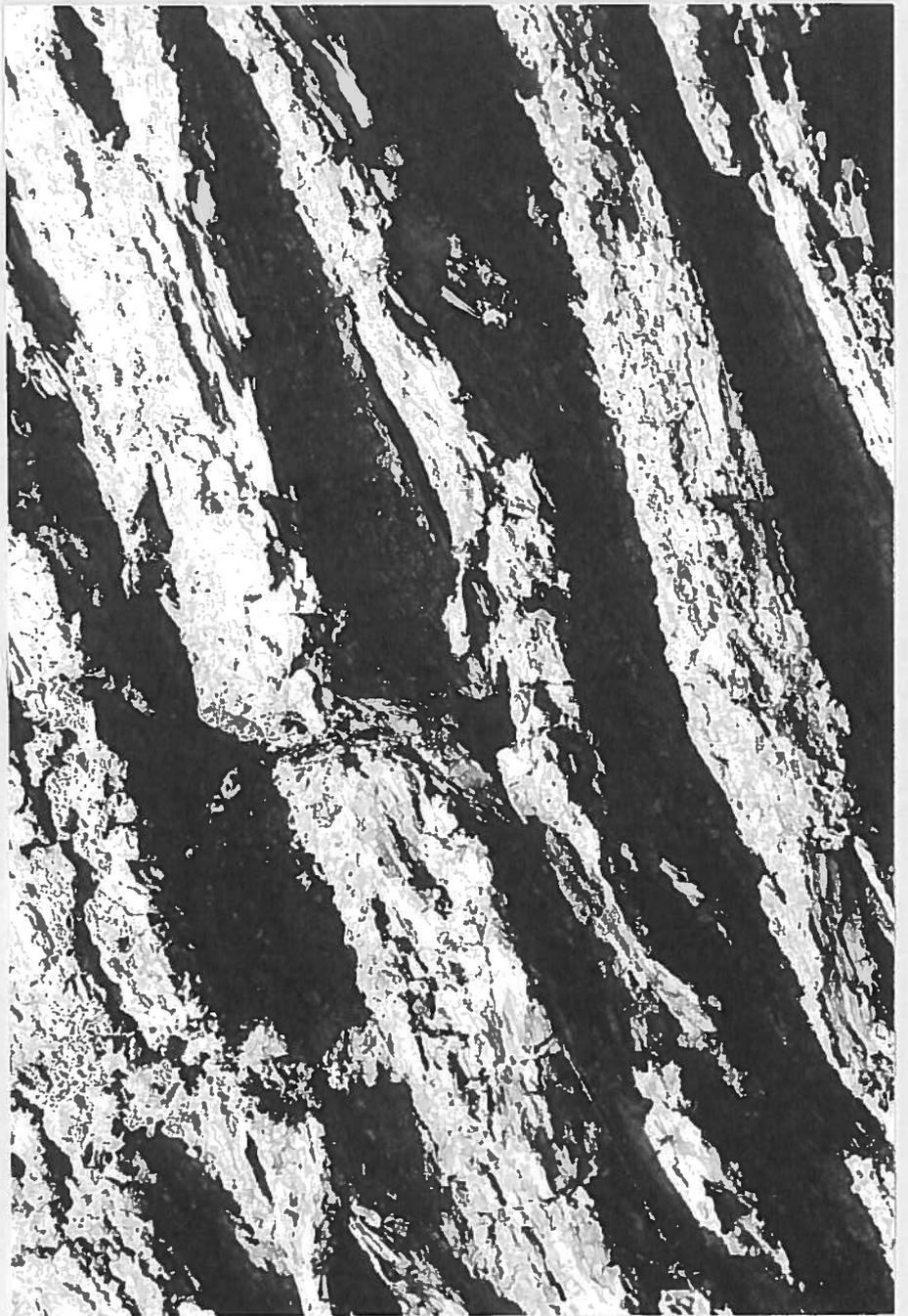
- Définition du système étudié. Le système abstrait figuré par le modèle est l'image d'un certain système réel obtenu par fermeture d'une partie de la nature.
- Définition des variables prises en compte; relevé des constantes mesurant certaines qualités du système.
- Référence à une classe de phénomènes (Loi principe).
- Relations empiriques.
- Typologie syntaxique.

Cette étude qui ne redémontre pas la formulation des modèles, définit l'orientation pragmatique choisie par la modélisation (cognitive, décisionnelle, prévisionnelle).

Ce regard particulier constitue de l'objet II.

40-

41-42 photo



de l'objet 2

- Typologie des modèles
 - Modèles globaux élémentaires
 - Modèles globaux élémentaires modifiés
 - Modèles globaux analytiques
 - Modèles métaglobaux

"Différences entre :

La technique et l'art

Origine :	évidente	obscur
Procédé :	obscur	obscur
But :	non équivoque	équivoque

élément commun = l'intuition"

Wassily KANDINSKY

Cours du BAUHAUS.

TYPOLOGIE DES MODELES

* * * * *
* * * * *

La molécule d'eau, dans son trajet vers l'exutoire, est soumise à un ensemble de phénomènes principaux, eux-mêmes décomposables en micro-phénomènes.

Complexité phénoménale :

La valeur de l'infiltration par exemple, dépend de la nature du matériau composant le sol.

L'évaporation est fonction de la température du sol, du taux d'humidité de l'air, etc ...

Complexité structurale :

Le ruissellement dépend de la succession des rues, des caniveaux, des toits, etc ...

La valeur des débits est conditionnée par la structure du réseau.

Les micro-phénomènes se succèdent et s'imbriquent. Ils pourraient peut-être s'inclure dans un système totalisant dont la structure et les relations seraient alors d'une complexité telle qu'il deviendrait vite surhumain et incontrôlable.

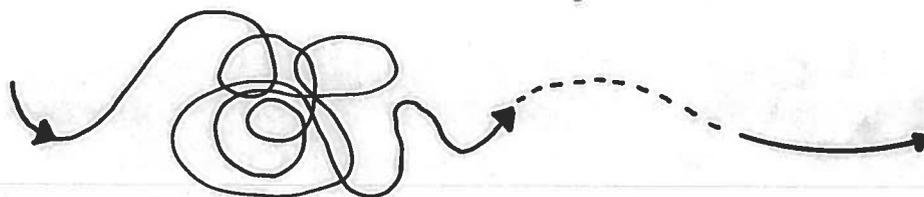
Au début du siècle, le chercheur chargé de modéliser un tel phénomène, n'avait pas à sa disposition les calculateurs et leurs mémoires capables d'emmagasiner tous les paramètres et les mesures nécessaires à cette étude.

L'hydraulique avait élaboré des modèles pour représenter un écoulement varié. Mais il fallait résoudre un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Or, les mathématiques ne peuvent toujours solutionner ce système particulier.

La cité n'en demande pas moins des modèles.

Un modèle complexe est viable s'il est utilisé ponctuellement par une même personne. Dans un premier temps, le transfert du savoir d'une personne à un groupe s'accompagne toujours de perte; perte de savoir théorique, perte de technicité.

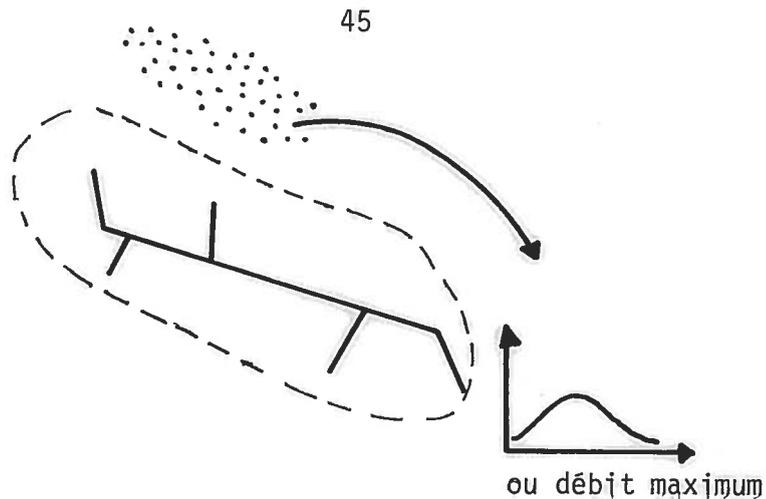
La modélisation demandée par la cité doit s'adresser à un grand nombre de personnes. L'outil doit donc être simple :



S'il fallait considérer le phénomène dans sa complexité, nous ne serions pas certains de pouvoir le représenter.

Dans leur fonctionnement, les micro-phénomènes ne suivent pas une loi additive; il y a non-linéarité et interaction.

La cité ne demande pas l'explication du phénomène; elle désire mesurer le résultat de l'ensemble des micro-phénomènes. Ce résultat seul conditionne le dimensionnement du réseau.



Comment répondre à ce problème alors que le phénomène est si complexe ?

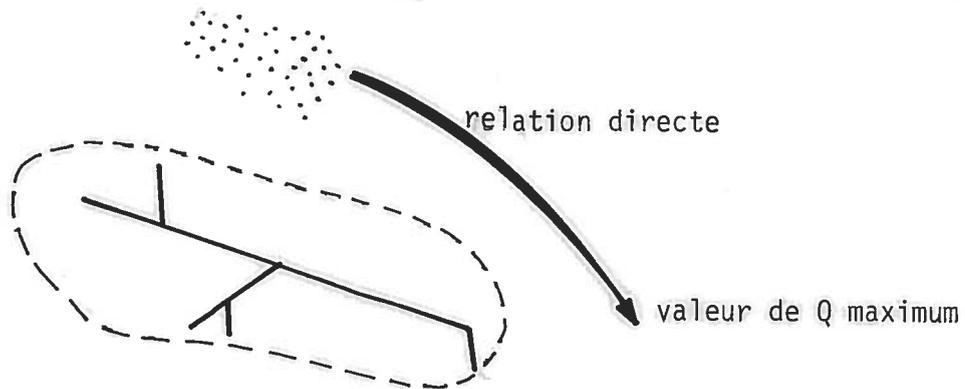
Deux approches sont théoriquement possibles :

- (1) - Approche réductionniste : représenter les micro-phénomènes et définir une succession plus ou moins complexe de modèles.
- (2) - Approche globale : représenter tous les micro-phénomènes sans les élucider en un seul modèle.

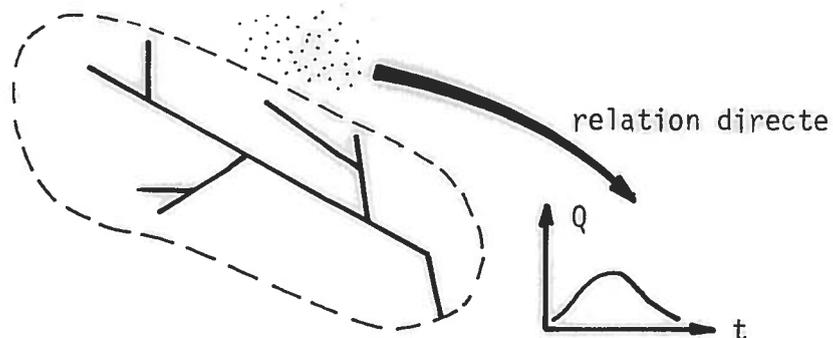
A la question posée par la cité, une approche réductionniste ne pouvait pas répondre. La description était peut-être possible mais elle n'était pas exploitable. Il était donc naturel de rechercher une relation directe entre la pluie et le débit de sortie, la complexité phénoménale et structurale étant réduite à cette relation.

Historiquement, un premier groupe de modèles a été construit pour donner la valeur du débit maximum à l'exutoire unique d'un bassin versant. Ces modèles ne font pas intervenir explicitement le temps comme variable. Leur approche est un mélange d'empirisme et de rationalité.

Je les nommerai, modèles globaux élémentaires.

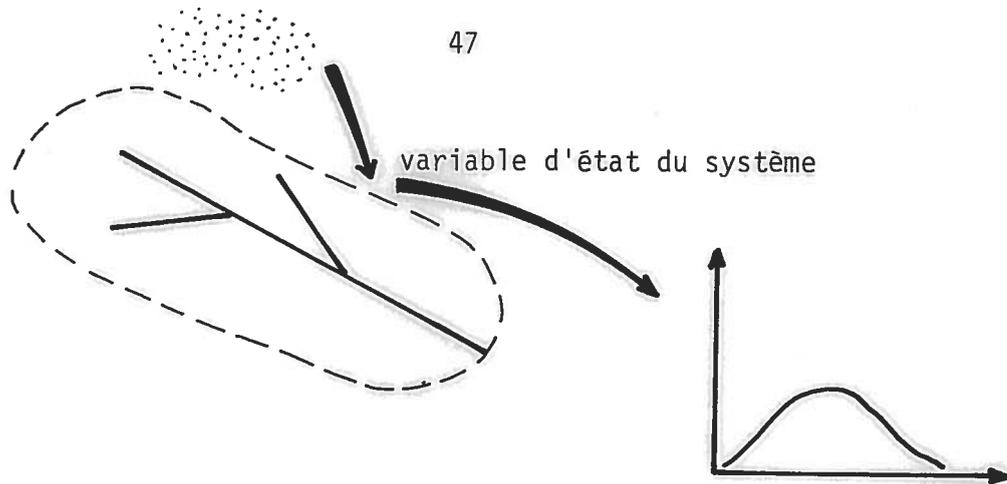


L'apparition des grands calculateurs a donné naissance à une deuxième génération de modèles issus des modèles globaux élémentaires. Ils font intervenir soit implicitement, soit explicitement le temps comme variable. Je les nommerai modèles globaux élémentaires modifiés.



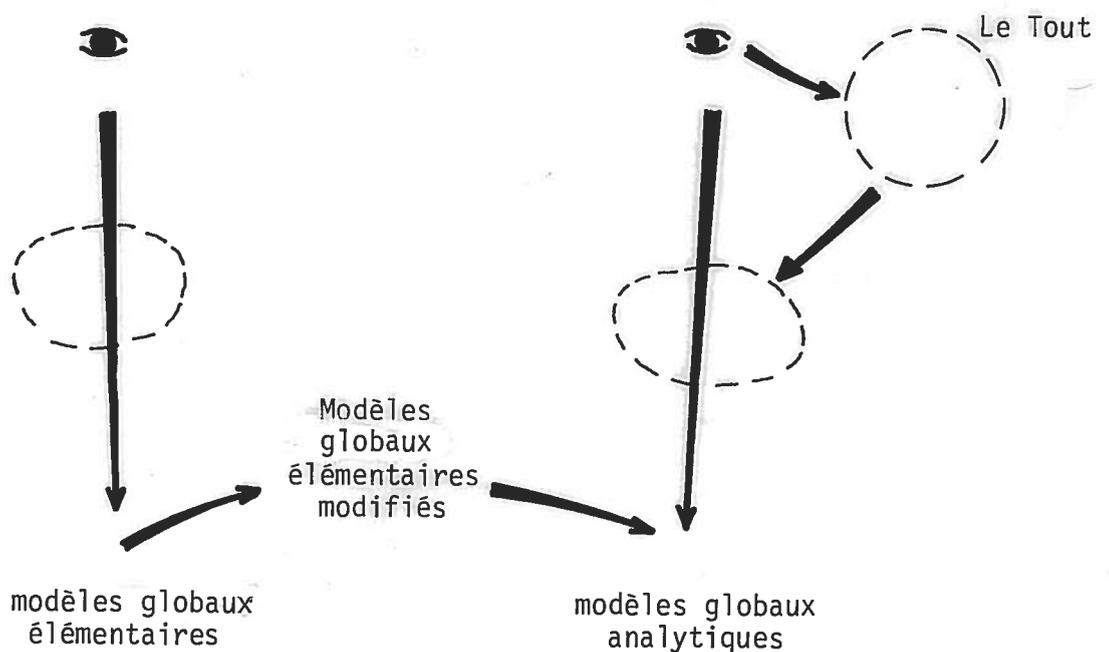
Plus récemment, est apparu un troisième groupe de modèles. Ils s'appuient sur la notion d'approche systémique. Cette approche considère la dynamique du phénomène et utilise le paradigme hydraulique (notion de flux). Elle introduit une variable d'état caractéristique du transformateur.

Ce sont les modèles globaux analytiques.



L'apparition de ces modèles n'est pas discontinue. Il est souvent bien difficile de faire une séparation nette entre tel et tel type. La dynamique de création est discursive. Un modèle emprunte souvent des résultats fournis par une modélisation précédente tout en utilisant des idées plus récentes.

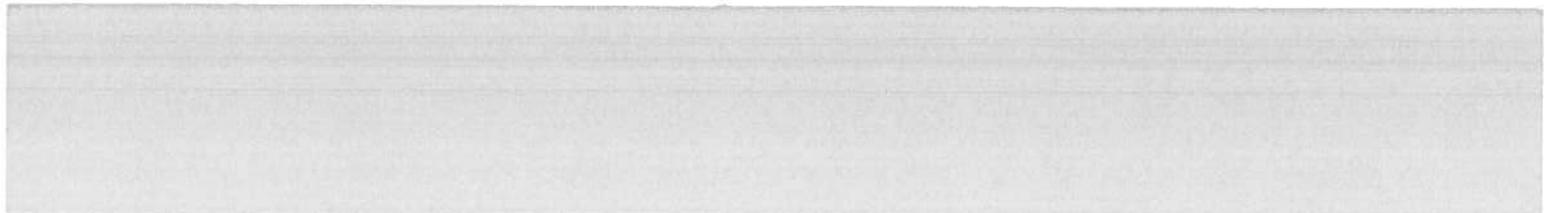
La dynamique peut être représenté par le schéma suivant :



MODELES GLOBAUX ELEMENTAIRES

* * * * *

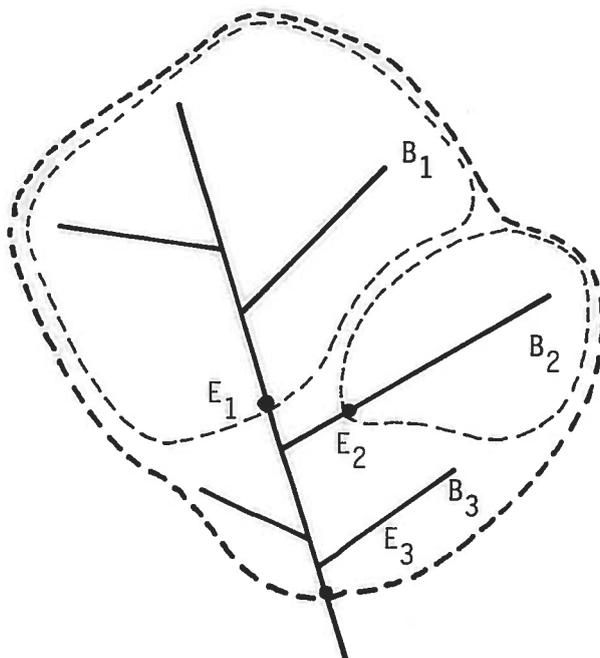
L'objet observé est un bassin versant ne possédant qu'un seul exutoire, diverses surfaces de ruissellement et une série de canalisations; Il s'agit donc d'un sous ensemble de la ville.



Ces modèles tentent de relier directement la pluie à la valeur du débit maximum à l'exutoire.

L'approche ne tient pas compte de l'aspect structural du bassin versant, leur aspect fonctionnel n'étant pas élucidé.

Ce type de modèles donnent le débit maximum en E_1 en considérant B_1 , E_2 en considérant B_2 , E_3 en considérant B_3 , etc ...



"Méthode rationnelle" (Méthode américaine)

Le phénomène est représenté par le schéma suivant :



S'il est possible de définir une grandeur I caractéristique d'une averse quelconque, pour relier Q_{Max} à I , la première formulation qui vient à l'esprit est :

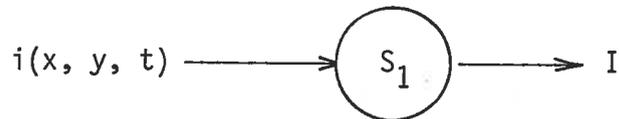
$$Q_{\text{Max}} = \alpha I \quad \text{avec } \alpha \text{ constant.}$$

Cette démarche minimale est à la base de la méthode rationnelle.

Pour modéliser le phénomène par une telle relation, il faut pouvoir définir la grandeur I qui ne peut mesurer qu'une intensité particulière.

La première transformation introduite par le schéma n'est donc pas "réelle", le phénomène averse n'y étant pas considéré dans sa complexité.

Une pluie est un phénomène évolutif spatialement distribué.



Le phénomène averse est "filtré" pour pouvoir utiliser la relation

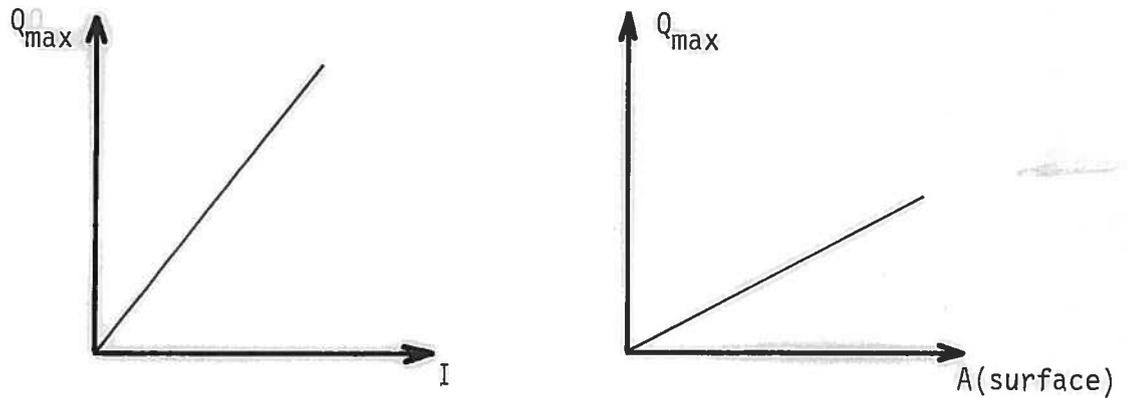
$$Q_{\text{Max}} = \alpha I.$$

Les deux variables prises en compte sont :

- une mesure de l'averse (intensité maximale ou moyenne par exemple),
- le débit maximum à l'exutoire du bassin versant.

Pour un même bassin versant, les autres grandeurs sont considérées indépendantes de l'évènement pluviométrique.

Le fonctionnement du système S_2 correspond à la formulation choisie (Lois proportionnelles).



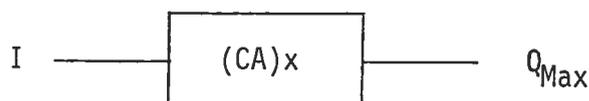
$$Q_{Max} = CI.A$$

C est un coefficient de ruissellement qui peut être corrigé pour tenir compte de la distribution spatiale de l'averse, la surface A pouvant être décomposée en zones homogènes de coefficient C_i .

$$C = \frac{\sum_i C_i A_i}{\sum A_i} \times \gamma \quad (\gamma : \text{coefficient de forme du bassin})$$

Ces deux lois rationnelles sont à l'origine de la dénomination du modèle. En fait Q_{Max} n'est pas proportionnel à la surface, la mesure de l'intensité I étant généralement fonction de A.

La relation $Q = (CA).I$ est l'écriture la plus élémentaire du passage d'une quantité extensive en quantité intensive. Si I est constant la relation donne l'image d'un phénomène permanent. Le modèle est représenté par un système ouvert.



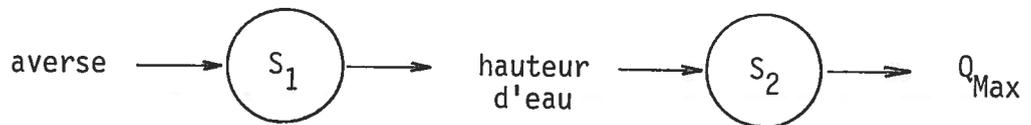
Ce modèle n'est pas explicatif puisque le phénomène est représenté a priori par une relation élémentaire.

Il peut être jugé prévisionnel car il permet de dimensionner l'élément de collecteur, exutoire du bassin versant considéré. Son aspect décisionnel est uniquement représenté par le coefficient de ruissellement C.

"Méthode de CAQUOT"

C'est une méthode très particulière. Elle fut élaborée au début du siècle par M. CAQUOT pour mesurer le débit maximum de bassins versants parisiens. Actuellement, son application est étendue à toute la France [42].

Le modèle obtenu est le résultat d'une approche particulière; le phénomène est représenté par le schéma suivant :



La modélisation effectuée par M. CAQUOT porte sur la définition du système S_2 . Elle utilise au départ les résultats de mesures effectuées dans la région parisienne, qui donnent une intensité maximale moyenne pour une pluie de durée T et de fréquence F . Dans la circulaire de 1949, CAQUOT utilise une loi définie par M. GRISOLLET :

$$I_M = \frac{43}{T + 10} \quad (\text{pluie décennale})$$

Cette loi empirique est un exemple de modélisation du système S_1 , toutes les lois devant être de la forme $I_M = f(T, F)$ pour que la modélisation de CAQUOT soit utilisable.

Un ensemble de lois empiriques et théoriques définissent le fonctionnement du système S_2 . Elles font apparaître un grand nombre de variables qui disparaissent dans l'écriture finale du modèle. Plusieurs hypothèses ou mesures empiriques sont à la base de ces différentes lois.

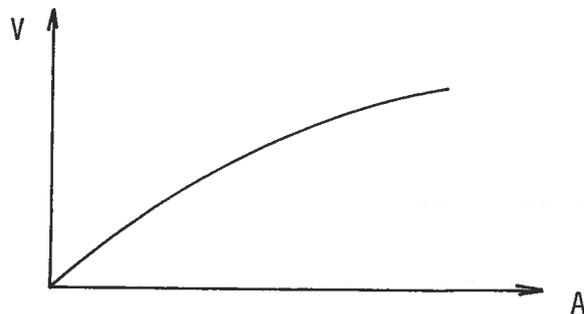
- Relation non linéaire entre le volume d'eau précipité ruisselant, et la surface : (Loi empirique).

$$V = \alpha (A) \cdot H \cdot A \times (1 - \gamma)$$

H : hauteur d'eau

$\alpha (A)$: abattement spatial

$(1-\gamma)$: coefficient de ruissellement global (mesure des pertes).

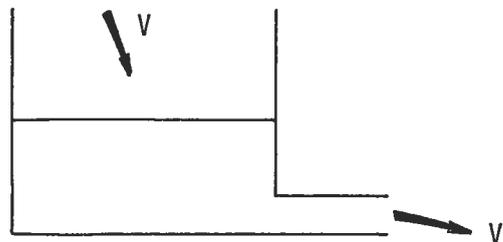


- CAQUOT suppose que le débit maximum apparaît lorsque le réseau est à son rendement maximum (95 % de la hauteur totale d'une section).

On est en régime établi. Le bassin versant peut être imagé par un réservoir qui se remplit et se vide d'une même quantité.

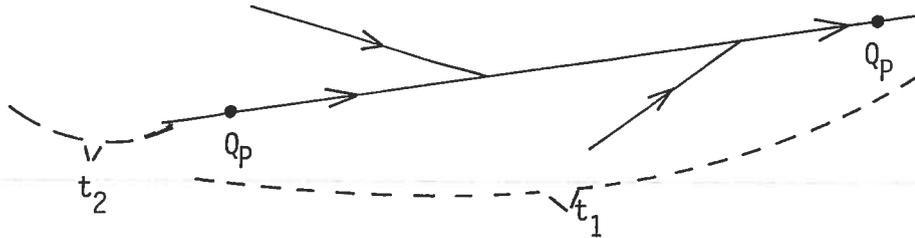
$$(1) \quad V = B'Q$$

V en m^3
 Q en m^3/s
 B' \equiv temps.



Q est donc le débit de pointe Q_p .

- CAQUOT fait l'hypothèse que ce débit Q_p se propage sur les éléments liés directement à ce réseau et tout le long de ce réseau.



Soit t_1 le temps moyen de parcours en canalisation et t_2 le temps moyen de parcours sur les éléments liés directement au réseau. En utilisant une loi théorique de l'hydraulique (Manning Strickler) et des considérations empiriques sur le développé du réseau par rapport à la surface, CAQUOT propose la relation non linéaire suivante :

$$t_1 + t_2 = \mu I^c A^d Q_p^e \quad I \text{ pente moyenne du terrain.}$$

Ce temps de concentration est relié à la valeur du débit, et est donc dépendant implicitement de l'évènement pluviométrique (par l'intermédiaire de ce débit de pointe).

- Soit T le temps d'apparition du débit de pointe.

D'après l'égalité (1), CAQUOT écrit :

$$V = \delta Q_p (t_1 + t_2) + \beta Q_p T$$

Il suppose ainsi que le volume écoulé avant T est une fraction β du débit de pointe.

Cette relation est utilisable en égalisant T et $(t_1 + t_2)$ (Majoration de Q_p).

Si l'intensité maximum est située au début de l'averse, Q_p est donné par la relation :

$$Q_p = A^a I^b C^c$$

A : surface

I : pente moyenne

a, b, c, C : coefficients
fonction de $t_1 + t_2$,

$\alpha(A), \gamma \dots$

Le calcul du temps de concentration rend le modèle non linéaire. Celui-ci peut être représenté par un système semi-ouvert.



Cette figure illustre la particularité du modèle de CAQUOT. Il ne possède pas de variables d'entrée. La relation obtenue ne permet pas de mesurer les débits de pointe dues à différentes averses. CAQUOT n'a pas du tout le même but que la méthode rationnelle. C'est un modèle "technique" destiné à mesurer le et l'unique débit maximum qu'il faut prendre en compte pour dimensionner le collecteur situé à l'exutoire.

CAQUOT n'ayant pas la même fonction et le même objet d'étude que le modèle américain, il est très difficile de faire une étude comparative de leurs valeurs phénoménologiques; la non linéarité de CAQUOT semblant malgré tout plus proche de la réalité.

Ils possèdent les mêmes typologies pragmatiques, l'aspect décisionnel

de CAQUOT étant plus marqué puisqu'il tient compte explicitement de l'effet de réservoir du bassin versant.

La complexité structurale du bassin versant n'est pas prise en compte pour les deux méthodes; ils ne peuvent s'appliquer qu'à des bassins relativement homogènes.

Certains aspects de la complexité phénoménales apparaissent dans les coefficients.

- C : coefficient de ruissellement; méthode américaine,
 γ : pourcentage d'eau infiltrée, évaporée, retardée ou stockée; méthode de CAQUOT, etc ...

Ces deux modèles ne possèdent pas de valeurs cognitives car ils sont élaborés à partir de deux principes rationnels minimaux (linéarité $Q = \alpha \cdot i$, non linéarité $Q = \gamma A^b$). Leur emploi ne découle pas d'une étude approfondie du phénomène. L'emploi de ces deux principes donnent des modèles transparents.

Leur bonne utilisation est fonction de la démarche suivie par l'ingénieur pour apprécier la valeur des paramètres. Leur emploi se ramène à l'utilisation d'un ensemble de règles plus ou moins précises. Le mot méthode, employé par les hydrologues, est très révélateur du caractère de ces modèles. La bonne détermination de débit de pointe est beaucoup plus le résultat de toute une démarche que de l'application directe d'une formule.

L'appréhension qualitative, sensitive, pourrais-je dire, est primordiale.

CAQUOT est surtout une méthode "guide" qui s'apparente à la notion de modèle "techniciste".

Ces deux méthodes ne sont pas des modèles logico-mathématiques susceptibles de déduction (voir la diversité des unités employées). Il est donc bien difficile (voire inutile) d'estimer leur valeur théorique.

La Méthode de CAQUOT est employée depuis plus de 40 ans. Elle a reçu des validations successives et semble donner de bons résultats dans le champ d'applications défini par ses hypothèses (Bassin versant d'une superficie inférieure à 200 hectares selon DESBORDES).

Ces deux modèles sont l'image de la démarche première que pouvaient suivre les hydrologues pour répondre aux besoins de la cité (débit maximum).

MODELES GLOBAUX ELEMENTAIRES MODIFIES

* * * * *

L'objet des méthodes précédentes est restreint au calcul des débits maximums, les bassins versants devant être structurellement homogènes. La pluie qui donne le débit maximum est fonction du bassin considéré et de sa région. Le modèle de CAQUOT étant semi-ouvert, il est presque impossible de l'utiliser comme outil de simulation. Par nature, il ne peut pas être source de développement.

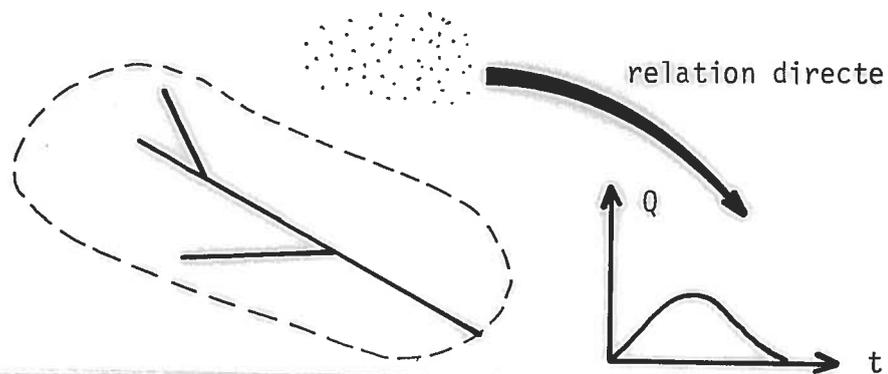
On s'oriente donc vers l'emploi de modèles ouverts.

La croissance de la ville peut se caractériser par l'hétérogénéité et surtout par un accroissement sensible de la surface des bassins versants ainsi que de leur imperméabilisation.

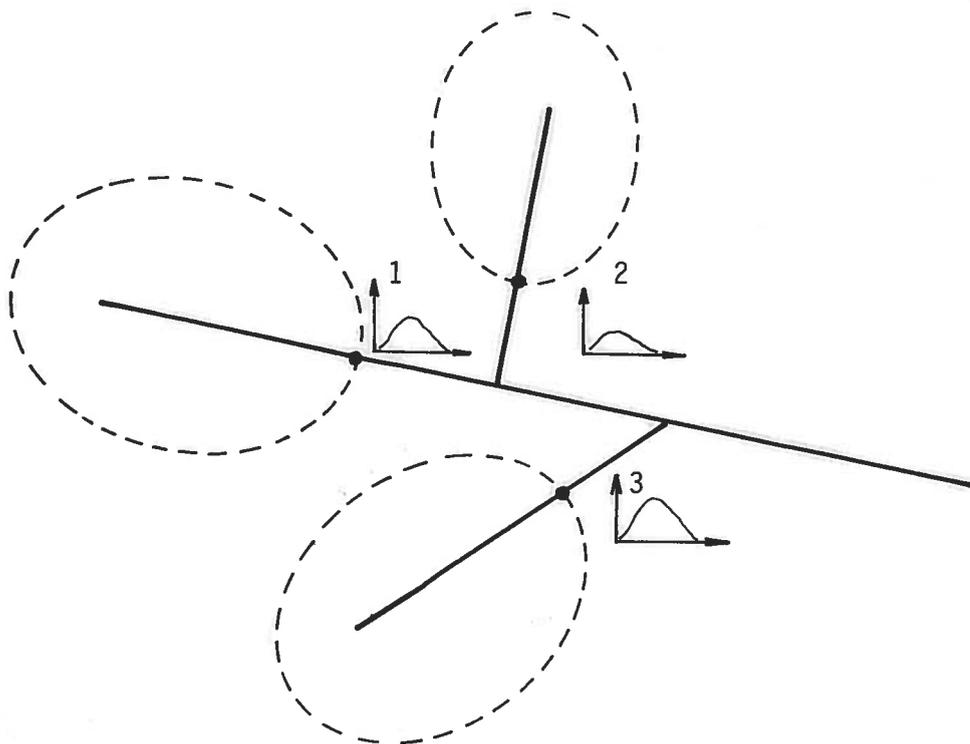
Cet accroissement introduit un temps de retard appréciable dans l'apparition du débit maximum. Il n'est peut-être pas dû à l'apport de toute la surface.

S'il était possible de construire un hydrogramme, nous pourrions effectivement apprécier la valeur de ce débit maximum et surtout le délai nécessaire à son apparition. Le modèle ainsi élaboré permettrait d'apprécier le rôle de transformation du bassin versant.

Les modèles globaux élémentaires modifiés tentent de définir cette courbe.



C'est donc une "porte ouverte" sur la connaissance de l'hydrogramme et l'espoir de traiter des surfaces importantes sans perte de qualité, ce que ne garantit pas le modèle de CAQUOT ou la méthode rationnelle américaine dans son élaboration première.



"Méthode rationnelle modifiée"

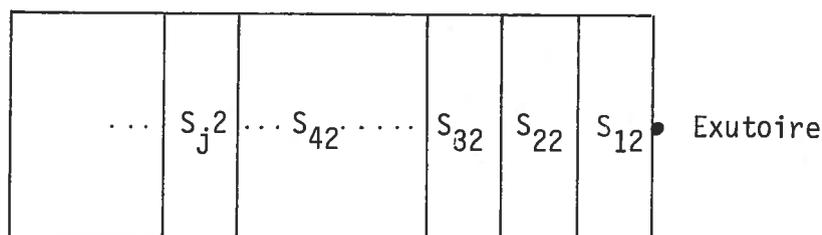
Elle est une extension de la méthode rationnelle.

Le système S_2 , image d'un bassin versant, est supposé quasi-décomposable en sous bassins S_{j2} , homogènes par rapport au ruissellement. Chaque sous-bassin est donc caractérisé par un coefficient C_j et une aire A_j .

La construction d'un hydrogramme nécessite l'emploi du temps comme variable explicite. Cette introduction s'effectue en donnant à chaque sous-système S_{j2} un temps de concentration T_j . C'est le temps maximum que met une goutte d'eau pour arriver à l'exutoire du bassin considéré. Ce temps T_j est généralement pris indépendamment de l'évènement pluviométrique.

Si les sous-systèmes S_j sont supposés indépendants les uns des autres, le temps de concentration T_j sera aussi le temps de concentration des eaux ruissellant de S_{j+1} vers S_j .

En utilisant la méthode rationnelle, cette double hypothèse (T indépendant de la pluie, quasi décomposabilité), permet de construire un hydrogramme à l'exutoire du bassin schématisé par le système suivant :



On considère les sommes successives de sous-systèmes :

$$\begin{aligned}
 & S_{12} \\
 & S_{12} + S_{22} \\
 & S_{12} + S_{22} + S_{32} \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

On associe à chaque somme, un temps de concentration égal à la somme des T_j de chaque sous-système concerné. Au bout du temps T_1 , on a à l'exutoire :

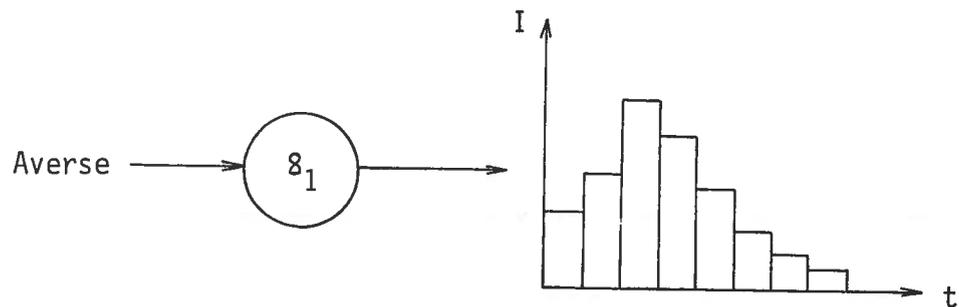
$$Q_1 = C_1 A_1 I_1$$

Au bout de T_2 : $Q_2 = (C_1 A_1 + C_2 A_2) I_{12}$

⋮

Au bout de T_j : $Q_j = \left(\sum_{K=1}^j C_K A_K \right) I_{1\dots j}$

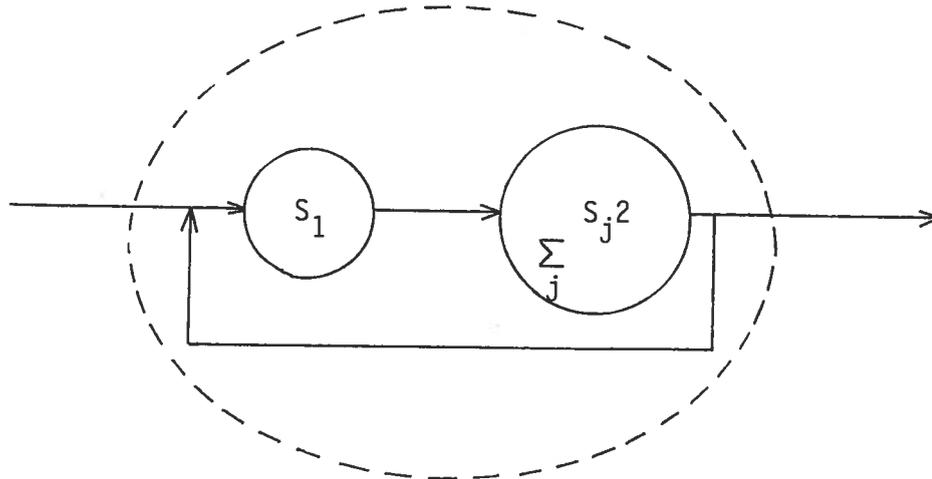
Cette extension de la méthode rationnelle conduit à représenter le phénomène averse par une courbe à palier appelée hyétogramme. La modélisation du système S_1 est donc nouvelle :



La pluie n'est pas distribuée spatialement par le système S_1 . La variation spatiale est mesurée indirectement par les coefficients de ruissellement.

I_{12} , par exemple, est définie par l'intensité de pluie qui est tombée sur A_2 pendant le temps T_1 et par l'intensité qui est tombée sur A_1 à partir de T_1 jusqu'à $T_1 + T_2$.

Le modèle obtenu représente le fonctionnement du système suivant :



L'extension de la méthode rationnelle permet d'utiliser une entrée qui n'est plus permanente. Elle tient compte de l'hétérogénéité des bassins versants en les supposant indépendants.

Le modèle obtenu obéit aux mêmes lois principes ou rationnelles, et possède donc les mêmes typologies pragmatiques que ceux de la méthode rationnelle. Il permet de dimensionner successivement les différentes sections du collecteur drainant le bassin versant. L'hydrogramme construit à l'exutoire ne doit pas être considéré comme tel. C'est un outil qui mesure l'influence de la surface drainant les eaux par rapport à l'influence du temps de concentration et surtout des différentes intensités retenues.

"Enfin le calcul par tranches successives renseignera sur le point important de savoir si c'est bien la totalité du bassin d'apport qu'il faut considérer dans le cas d'espèce".

P. KOCH

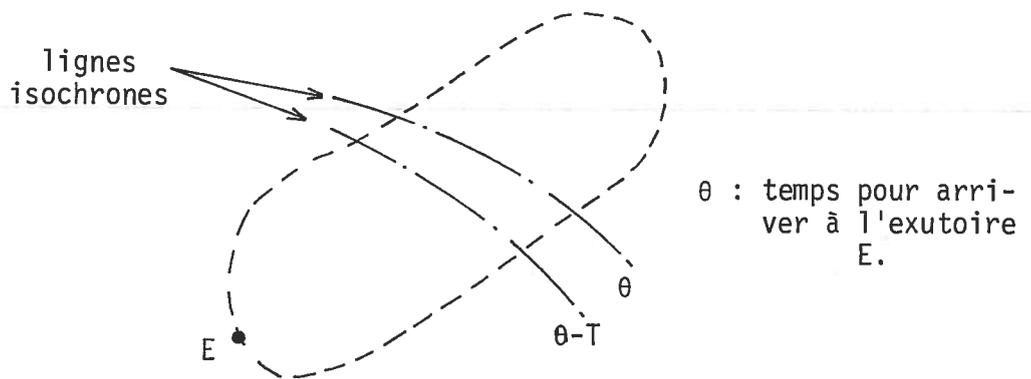
Les réseaux d'égoûts

"Méthode des courbes isochrones"

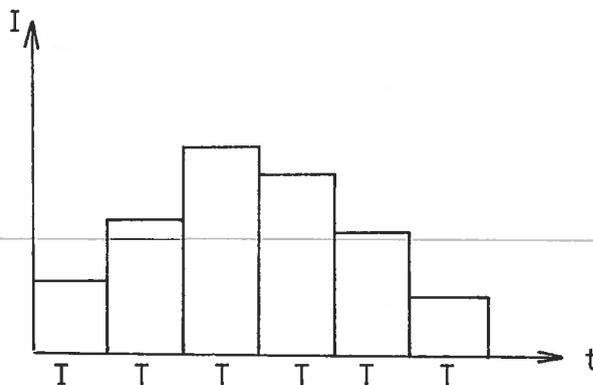
Elle s'inspire directement de la méthode précédente.

La méthode rationnelle modifiée privilégie la reconnaissance de l'hétérogénéité tout en voulant construire un hydrogramme, la définition des différentes intensités étant liée aux différentes valeurs des temps de concentration T_j .

En conservant la notion de découpage en série, la méthode des courbes isochrones est définie en égalisant les temps de concentration T_j à une seule valeur T .



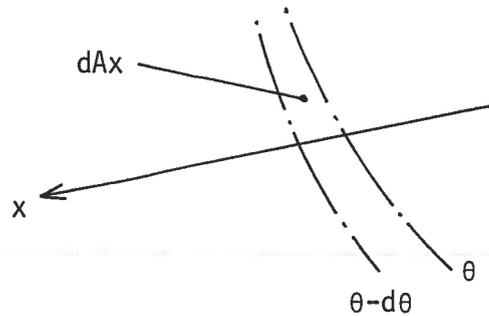
Le hyétogramme défini par le système S_1 , est une courbe en palier de durée T .



La facilité de calcul introduit par l'utilisation d'un temps de concentration unique T , se fait au dépens du découpage en sous systèmes S_j indépendants. On part de la pluie pour définir le découpage, à l'inverse de la méthode précédente.

La mesure de l'hétérogénéité est donc moins bonne.

REMENIERAS a développé cette méthode pour lui donner une écriture plus "mathématisée". Le temps de concentration devient une mesure différentielle.



La perte au ruissellement est mesurée par une fonction évolutive $C(t, x)$ indépendante de l'évènement pluviométrique (surface aire temps).

Si nous considérons un élément d'averse d'intensité i pendant la durée $[\tau, \tau + d\tau]$, le volume d'eau correspondant à cette période, transité par l'élément dA_x est :

$$V = C(\tau, x) \cdot i(\tau) \cdot dA_x \cdot d\tau$$

Cette quantité apparaît à l'exutoire à partir de $t = \tau + \theta - d\theta$ et pendant une durée $dt = d\tau + d\theta$.

$$Q_t dt = V$$

En supposant qu'il soit possible de construire une fonction $A_x = f(\theta)$ tel que $\theta \approx t - \tau$ ($d\theta$ très petit), on obtient :

$$Q_t = C(\tau, t-\tau) \cdot i(\tau) \cdot d\tau \cdot f'(t-\tau) \cdot \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right)$$

Pour une pluie de durée τ_0 , RIEMENIERAS donne l'hydrogramme par la relation :

$$Q(t) = \int_0^{\tau_0} C(\tau, t-\tau) f'(t-\tau) i(\tau) d\tau.$$

$$\text{avec } 0 < t - \tau < t_c$$

$$0 < \tau < \tau_0$$

Le modèle obtenu est linéaire tout comme le modèle de la méthode rationnelle. L'opérateur obtenu O tel que $Q(t) = (O.) i(t)$, est proche d'un convoluteur. Il est donc de type héréditaire (la réponse au temps t se "souvient" de ce qu'il s'est passé avant t).

Ce type de modèle possède les mêmes typologies pragmatiques que celui de la méthode rationnelle modifiée. Il n'est pas plus explicatif. Son élaboration nécessite une reconnaissance de l'hétérogénéité de plus en plus incertaine (surface aire temps).

"La décomposition du bassin versant en aires élémentaires isochrones est toujours assez grossièrement approchée en raison de la difficulté de déterminer avec quelques précisions la durée de ruissellement entre ces diverses zones et l'exutoire".

G. REMENIERAS

Hydrologie de l'ingénieur

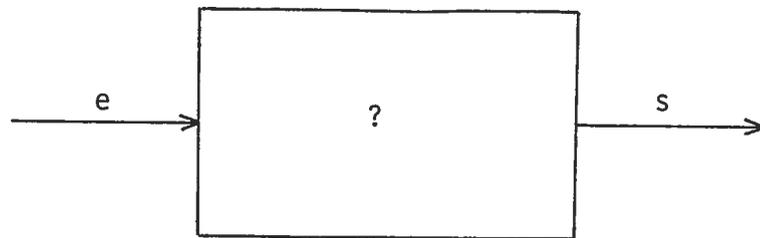
Même si l'écriture mathématique précédente n'est qu'une approximation de la méthode rationnelle modifiée (suppression du terme $1 - \frac{d\tau}{dt}$, pris égal à $t - \tau$), le modèle obtenu a l'avantage de rattacher le phénomène à une classe connue de phénomènes (héréditaires linéaires), l'opérateur étant défini à partir des caractéristiques du bassin versant. Notons simplement que le réseau de canalisations n'intervient pas dans la définition du modèle.

La méthode rationnelle a peut-être reçu son écriture définitive.

"Méthode de l'hydrogramme unitaire"

Dans son esprit, cette méthode est très différente de celles exposées précédemment.

On ne se donne pas a priori une ou plusieurs lois principes de fonctionnement du transformateur; on approxime directement son fonctionnement en recherchant l'opérateur qui relie au mieux un ensemble d'entrées à un ensemble de sorties.



Le transformateur observé ne possède qu'un seul exutoire.

L'hypothèse fondamentale posée par l'auteur de cette méthode (SHERMAN) est la linéarité du phénomène :

$$\left\{ \begin{array}{l} e \longrightarrow s \\ 2e \longrightarrow 2s \end{array} \right.$$

Comme tout phénomène linéaire peut être représenté par un opérateur de convolution, la méthode de SHERMAN est ramenée à la définition de la réponse fournie par un évènement pluviométrique constant.

$$s = O * e$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Soit } \sigma_0 H(t) \text{ une entrée constante d'intensité } \sigma_0 \\ s_1 = O * \sigma_0 H \end{array} \right\} O \equiv (s_1)'$$

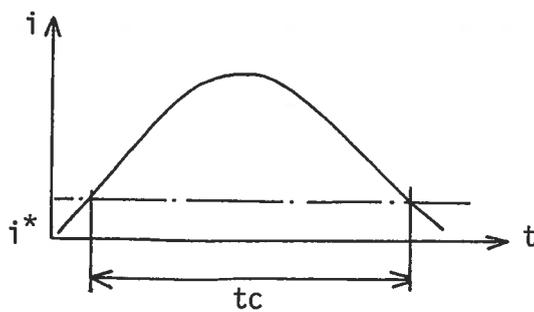
$H(t)$ distribution d'Heaviside.

Si le fonctionnement du bassin peut être représenté par un opérateur linéaire, on obtient directement la réponse du bassin versant pour n'importe quelle entrée e_j .

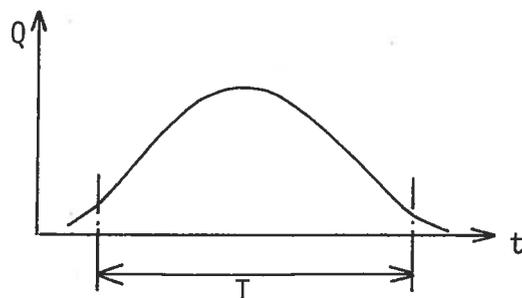
$$s_j = O * e_j$$

Comme les pluies ne sont pas des phénomènes constants données par une courbe du type $\sigma_0 H(t)$, SHERMAN propose une méthode d'approximation de l'opérateur O , en utilisant ce qu'il nomme, les averses unitaires. Cet opérateur n'est donc pas l'opérateur linéaire théorique. L'écart introduit est fonction du mode d'appréhension des averses unitaires.

SHERMAN préconise l'emploi d'averses de durée élémentaire Tr_0 très inférieure au temps de concentration du bassin. Ce temps de concentration est particulier puisqu'il est défini comme la différence entre le temps T de base de l'hydrogramme et le temps de l'averse nette correspondante t_c .

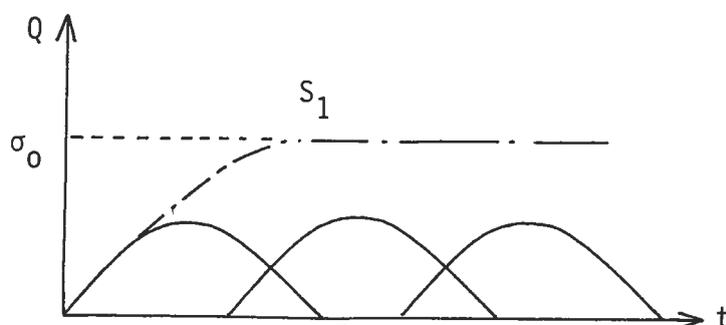


i^* pertes dues à l'interception, l'évaporation, l'infiltration et le stockage.



T : temps de base de l'hydrogramme.

S_1 est obtenu en superposant et en décalant dans le temps les sorties dues à plusieurs averses unitaires ramenées à la valeur σ_0 .

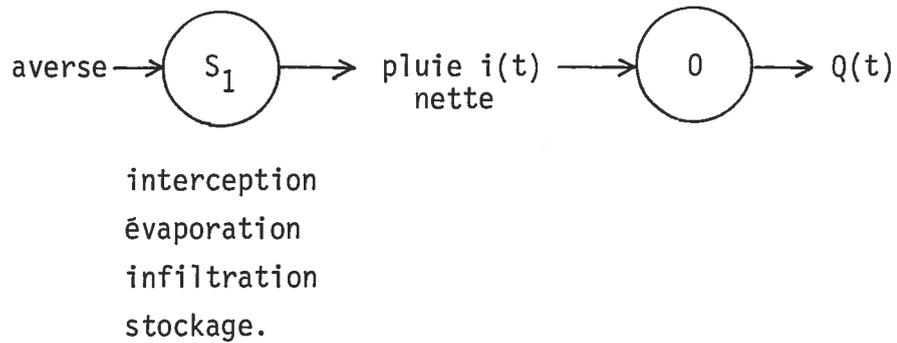


Le bassin versant étudié peut être identifié si les observations des couples (entrée, sortie) permettent de définir de façon univoque l'opérateur O .

Le modèle élaboré est prévisionnel puisqu'il permet de définir l'hydrogramme quel que soit l'évènement pluviométrique.

Il n'est pas décisionnel puisqu'il ne permet pas de mesurer l'influence d'un changement structural du bassin versant. Seule une étude comparative d'opérateurs modélisant différents bassins versants pourrait ajouter une valeur décisionnelle à la méthode de l'hydrogramme unitaire. Cela reviendrait à définir un méta opérateur qui serait fonction des éléments structuraux des bassins versants. Notons que cette méthode est employée depuis plus de vingt années aux Etats Unis. Elle est basée sur l'étude des hydrogrammes dus uniquement au ruissellement en surface. Son extension aux bassins versants comportant un réseau ne permet donc pas de tenir compte de leur complexité structurale.

En respectant un certain aspect de la complexité phénoménale, le modèle élaboré peut être jugé cognitif pour le niveau global de l'étude. Il est linéaire, héréditaire comme le modèle des courbes isochrones.



Dans sa formalisation, le modèle de SHERMAN est très proche de celui construit par REMENIERAS qui était parti de la méthode rationnelle américaine. Ils définissent tous les deux un opérateur de type convoluteur, la différence fondamentale résidant dans la valeur décisionnelle du modèle de REMENIERAS qui ne se retrouve pas dans le modèle de SHERMAN.

MODELES GLOBAUX ANALYTIQUES

* * * * *

Après un rapide bilan des modèles globaux élémentaires, on s'aperçoit que l'hydrologie urbaine ne possède pas avec ces types de modèles les outils nécessaires à son développement. Le modèle de CAQUOT est semi-ouvert et ne peut pas être adopté. Les modèles issus de la méthode rationnelle ne tiennent pas compte de l'effet de stockage du réseau. Le modèle de l'hydrogramme unitaire n'est utilisable que pour le bassin observé. Il n'est pas décisionnel.

La cité s'agrandit; il faut prévoir la répercussion de ce développement sur le réseau existant.

L'assainissement devient affaire de techniciens, de quantificateurs. Aujourd'hui nous devons être capables de mesurer les hydrogrammes dus à plusieurs bassins élémentaires possédant des canalisations, composer ces débits et ainsi déterminer en n'importe quel point et à n'importe quel instant la valeur du débit. Cette valeur peut être prévisionnelle ou actuelle.

L'augmentation de superficie ne doit pas introduire une perte qualitative due à la modélisation.

Même si le phénomène est complexe (grand nombre d'éléments en interaction) l'outil demandé par la cité doit être facilement exploitable, demandant peu de données, souple.

Un nouveau pas dans la modélisation ne pouvait être franchi qu'en utilisant une nouvelle approche. Celle-ci est récente et fait appel directement à la notion de système même si son application à l'hydrologie urbaine peut sembler naïve. La ville est considérée comme un méta-système composé d'éléments (systèmes bassins versants, collecteurs, grands collecteurs) en interactions.

Les modèles globaux analytiques et, nous le verrons plus loin, les modèles métaglobaux (outils de simulation) font appel à cette démarche.

ELEMENTS D'UNE APPROCHE SYSTEMIQUE
* * * * *

Le phénomène évacuation des eaux pluviales est représenté par un système dynamique.

"Un système est un ensemble d'éléments en interaction dynamique, organisés en fonction d'un but".

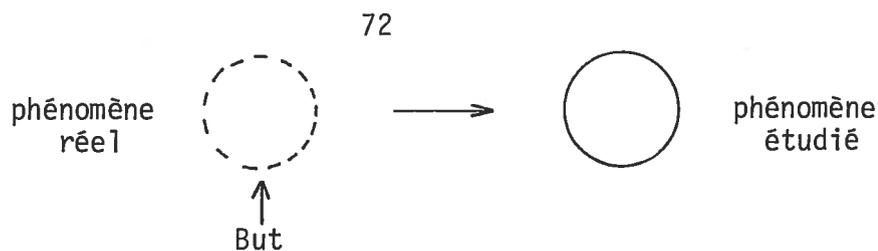
J. de ROSNAY
Le microscope

La notion de but est implicite.

Il est introduit par la représentation du système, le système réel possédant potentiellement plusieurs buts.

But ———> Système.

Cette définition du but conditionne l'appréhension du phénomène réel.



Le méta-système considéré (la ville) est soumis à une entrée : la pluie, il est donc ouvert et en interaction avec son éco-méta-système.

Le réseau d'assainissement, les surfaces d'apports échangent avec l'éco-méta-système un ensemble d'"informations" : l'averse transformée en eaux concentrée aux exutoires. La prise en compte du concept d'information est récente et liée à la notion de système.

"Un système ouvert est, en quelque sorte, un réservoir qui se vide et se remplit".

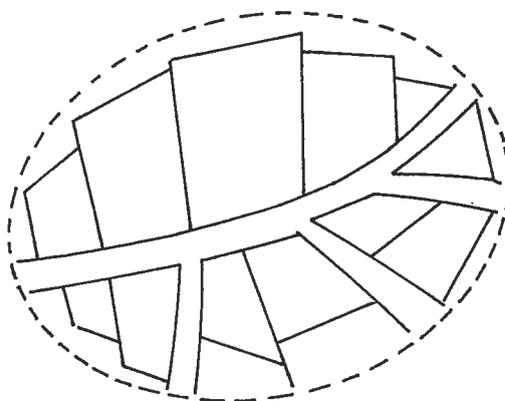
J. de ROSNAY
Le microscope

Deux aspects particuliers définissent le système.

- Aspect structural : Il s'agit de l'organisation dans l'espace des composants ou éléments du méta-système : bassins versants, collecteurs, ...

- Aspect fonctionnel : Il est défini par les phénomènes dépendants du temps puisque le système est ouvert et dynamique : écoulement des eaux pluviales.

L'aspect structural peut être défini par la frontière du méta-système (limite externe + exutoires), les réservoirs (bassins versants) composés d'éléments (toits, rues, antennes de réseaux, ...), un réseau de communications (collecteurs, grands collecteurs).



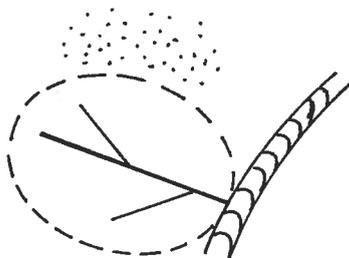
L'aspect fonctionnel est défini par les flux circulants dans le méta-système (eaux pluviales) et par les vannes (ce sont les exutoires uniques des bassins versants élémentaires ou réservoirs).

Quelles que soient la complexité structurale et fonctionnelle, le comportement du méta-système et de ses systèmes, dépend uniquement de deux types de variables : variables de flux et variables d'état (qui mesurent ce qui est contenu dans les réservoirs au temps t).

En hydraulique et par extension en hydrologie, les flux sont mesurés par les débits, les variables d'état par la quantité d'eau accumulée dans les réservoirs.

Le fonctionnement du méta-système sera défini quand les flux arrivant aux collecteurs seront connus et lorsque nous pourrons modéliser leurs circulations dans ce réseau de communications.

La détermination des flux dus aux réservoirs est l'objet des modèles globaux analytiques.



La somme d'un modèle de ruissellement et d'un modèle de propagation en collecteur donne un modèle que j'appelle "métaglobal".

Ces grands réservoirs (bassins versants) sont aussi des systèmes particuliers définis par une frontière, des réservoirs (surfaces d'apports) composés d'éléments (toits, rues, caniveaux, ...) et d'un réseau de communications (antenne de réseaux).

Comme les interactions entre ces éléments sont non linéaires et fortes, une approche systémique se révèle performante vis-à-vis du but fixé.

Les seules variables de flux que nous pouvons considérer par cette approche sont, l'averse et le débit.

entrée : averse mesurée par $i(t, x, y)$

Une variable d'état extensive mesure la quantité d'eau accumulée dans le système

volume stocké : $V_s(t)$

Le système sera modélisé par une relation du type :

$$Q_s = (O.)i$$

L'opérateur O doit modéliser tout un ensemble de transformateurs (bassins versants). Pour que cela soit possible, ils doivent appartenir à une classe structurellement stable. Une image d'un bassin B_2 doit se déduire d'une image d'un bassin B_1 par une "translation".

Si B_1 est modélisé par O_1 , B_2 sera modélisé par O_2 translaté de O_1 .

Vu la très grande diversité structurale des bassins versants, il n'est pas possible de définir des classes de transformateurs donc des translations simples entre opérateurs O .

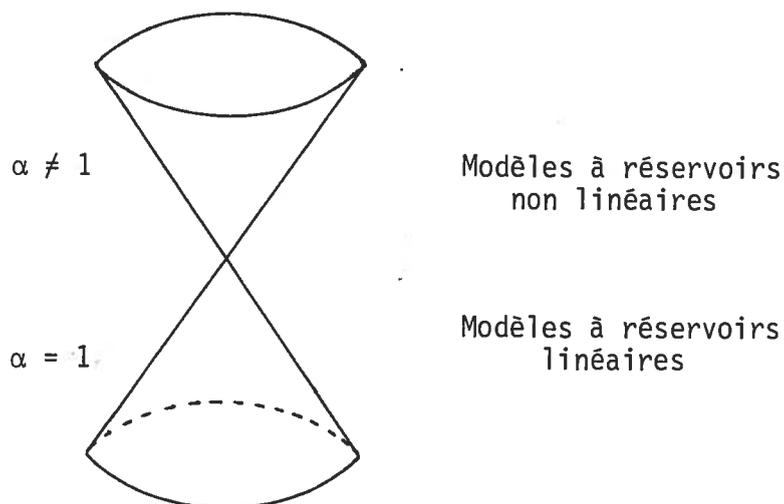
Le phénomène est trop complexe pour être mesurable uniquement par un opérateur et un ensemble de translations.

De ce fait, l'approche systémique en hydrologie urbaine va être décomposée en deux phases :

- Recherche de l'opérateur O caractéristique du type de transformations,
- Recherche d'un méta-opérateur M permettant d'adapter O au cas étudié.

De façon générale, le méta-opérateur définira la valeur des paramètres de O en fonction de certaines caractéristiques du transformateur.

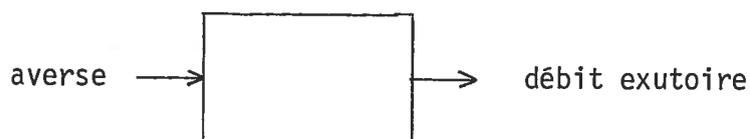
Les modèles "systémiques" sont des images de "réservoirs", représentés par les bassins versants élémentaires. On les nomme modèles à réservoirs. Ils sont de deux types : non linéaires, linéaires.



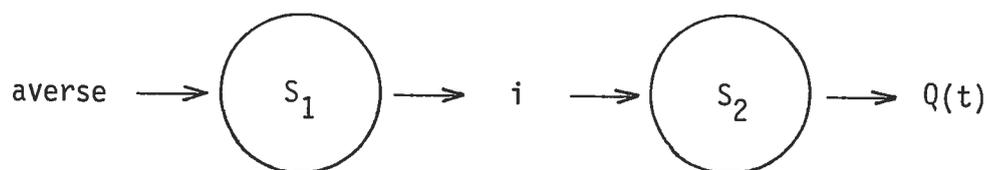
Le passage d'une catégorie à l'autre s'obtient en égalisant un coefficient à 1 dans une relation du type $Y = (x)^\alpha$.

"Modèles à réservoirs"

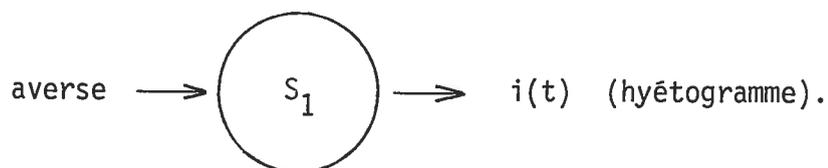
Le phénomène est décrit par le système suivant :



La modélisation utilise le schéma :

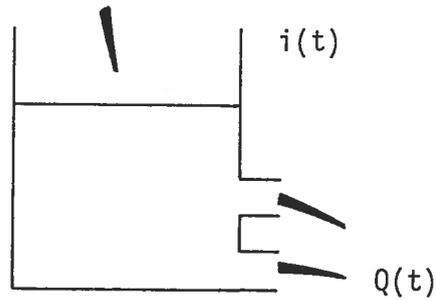


S_1 représente la modélisation du phénomène averse. Dans l'écriture du modèle, l'averse n'est pas distribuée spatialement. Elle peut l'être dans son utilisation. Le système étant supposé dynamique, la seule variable auxiliaire est le temps.



La détermination de la fonction $i(t)$ dépend du but assigné à l'utilisation du modèle. En général, on essaie de construire une pluie qui donne un débit décennal à l'exutoire du bassin versant si nous voulons dimensionner le collecteur situé à l'exutoire (notion de pluie de projet).

S_2 est symbolisé par un ou plusieurs réservoirs en série ou en parallèle.



Le fonctionnement du bassin versant est assimilé à celui d'un réservoir qui se remplit et se vide progressivement. Ce parallèle introduit la notion de retard du ou du stockage (voir la différence évidente avec les hypothèses de CAQUOT).

S_2 est modélisé par deux lois. Une loi principe traduit la conservation des volumes transités. Il s'agit de l'équation de continuité classique :

$$\frac{d V_S(t)}{dt} = i(t) - Q_S(t) \quad V_S(t) : \text{volume stocké au temps } t.$$

Une loi empirique ou rationnelle définit la loi de vidange du ou des réservoirs. Soit $H(t)$ la hauteur dans le réservoir :

$$Q_S(t) = f(H(t))$$

$$V_S(t) = H(t) \times A \quad (A : \text{surface du réservoir}).$$

Le phénomène est alors modélisé par le système suivant :

$$I \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d V_S(t)}{dt} = i(t) - Q_S(t) \\ V_S(t) = g(Q_S(t)) \end{array} \right.$$

"Modèles à réservoirs non linéaires"

La loi de stockage est prise non linéaire. Elle est du type :

$$Q_s(t) = K H^\alpha \quad \alpha \neq 1$$

Le système différentiel (I) n'est généralement pas soluble analytiquement.

Les fonctions sont discrétisées sur le temps. On obtient une relation entre fonctions qui représente un modèle translaté de (I) :

L'évolution continue est remplacée par une évolution discontinue



La résolution d'un tel système demande la connaissance d'un état initial mesuré par $V_s(0)$, (Volume stocké au temps 0).

L'opérateur \mathcal{O} est non linéaire et introduit la notion de retardement du au stockage.

L'ajustement de l'opérateur se fait par l'intermédiaire des paramètres K et α . Ils peuvent être fonction de la surface, de la longueur des antennes de réseaux, etc ...

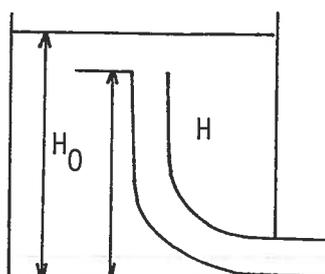
Ce type de modèle est purement non linéaire tout comme le phénomène réel.

Il ne peut être jugé explicatif. Il intègre seulement des caractéristiques essentielles du phénomène (non linéarité, retard). Il ne tient pas compte de la complexité structurale.

La complexité phénoménale est partiellement décrite par la construction

du hyétogramme qui peut tenir compte des pertes au ruissellement, à l'évaporation, etc ...; ce type de complexité pouvant être directement appréhendé par le réservoir.

modélisation
des pertes
initiales



$$q = K H^{1/2} \quad \text{si } H > H_0$$

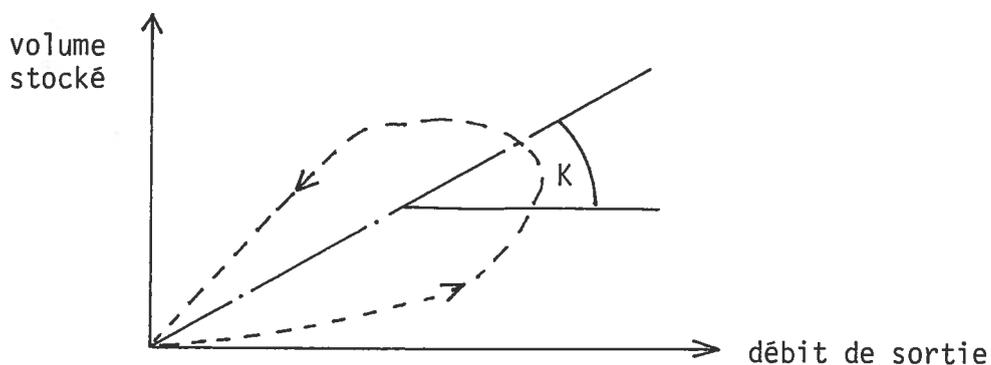
$$q = 0 \quad \text{si } H \leq H_0$$

Il s'agit d'un modèle essentiellement prévisionnel, qui peut être plus ou moins décisionnel suivant l'approximation du paramètre K et surtout la généralité de cette approximation.

"Modèle à réservoir linéaire de DESBORDES"

La loi de stockage employée est empirique. Elle est obtenue à partir de mesures de volumes stockés et de débits.

Les courbes établies sont plus ou moins aplaties suivant les bassins versants (travaux de DESBORDES et de HICHS [11], [14]).



Ces courbes peuvent être approximées par une relation linéaire. DESBORDES propose le système suivant :

$$\frac{d V_s(t)}{dt} = i(t) - Q_s(t)$$

$$V_s(t) = K Q_s(t)$$

Ce système se résout analytiquement. En prenant K constant, des conditions initiales nulles, le réservoir est modélisé par l'équation de convolution suivante :

$$Q_s(t) = \frac{1}{K} e^{-t/K} * i(t)$$

DESBORDES définit K comme la différence de deux grandeurs particulières : T_Q et T_i .

T_Q : temps correspondant au centre de gravité de l'hydrogramme ($t = 0$: début de l'averse).

T_i = temps correspondant au centre de gravité de la pluie nette.

La pluie nette est construite à partir d'une pluie de projet $i^*(t)$. Elle est obtenue en soustrayant à $i^*(t)$ les pertes dues au ruissellement.

$$i(t) = i^*(t) - \text{Pertes}$$

Comme la courbe $i(t)$ n'est connue que sous forme discrète, DESBORDES intègre numériquement l'équation de convolution.

$$Q(t + \Delta t) = C_1 Q(t) + C_2 i(t + \Delta t)$$

avec :

$$C_1 = e^{-\Delta t/K}$$

$$C_2 = 1 - e^{-\Delta t/K}$$

Ce modèle possède les mêmes typologies pragmatiques que les modèles à réservoirs non linéaires.

La complexité structurale et phénoménale est partiellement décrite par l'ajustement du paramètre K . Il peut tenir compte de la longueur de l'antenne principale (L), de la surface du bassin versant (A), de la pente moyenne du bassin (I), de l'imperméabilisation (IMP).

.....

C'est cet ajustement qui permet l'emploi de ce modèle, pour divers bassins versants.

$$K = 1.27 A^{0.46} (1 + IMP)^{-1.66} HE^{-0.27} TE^{0.37}$$

(SARMA, DELLEUR, RAO [43]).

TE : durée de l'averse en heure

HE : hauteur de pluie en mm.

A : surface en km^2

K : $5.3 A^{0.30} IMP^{-0,45} I^{0.38}$ (bassins américains).

DESBORDES [14]

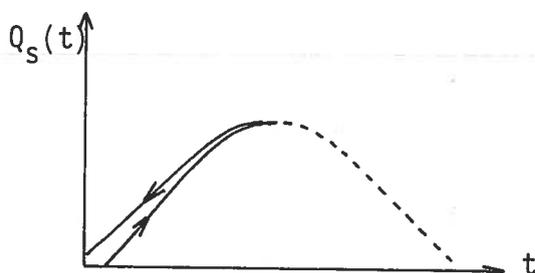
A : surface en hectares

I : pente moyenne

Comme le coefficient K dépend, en général, de la pluie (HE), ce modèle est pseudo-linéaire.

Le modèle à réservoir linéaire (pseudo-linéaire) faisant appel à la notion de convolution, il fait partie d'une classe particulière de phénomènes; les phénomènes héréditaires.

Le modèle de DESBORDES utilise la loi principe suivante :



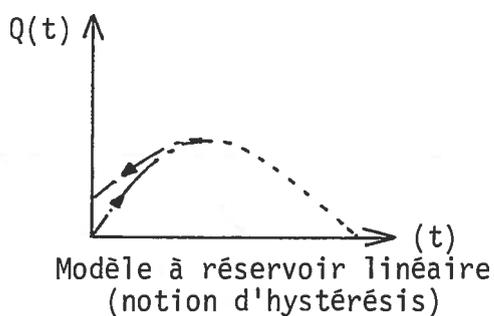
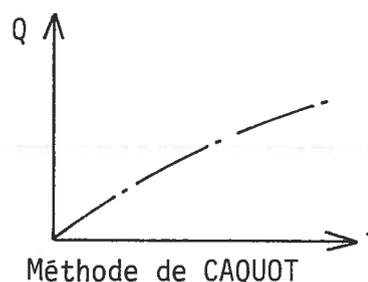
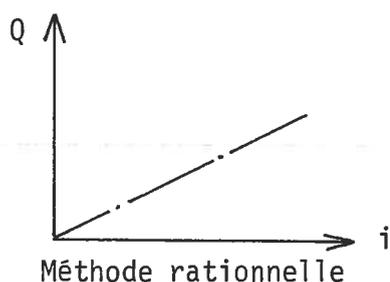
Il nous est impossible de juger de la valeur théorique de ces modèles. Seule la vérification empirique peut leur donner une certaine véracité. Ils ne sont pas explicatifs. Une certaine complexité est retenue (Notion de méta-opérateur) sans définir les relations existantes entre les éléments constituant le système. Ils mesurent certains caractères essentiels qui ne sont pas organisationnels, (surface, longueur de l'antenne principale, ...). C'est une limite évidente à ce type de modèle.

Ils ne sont construits qu'en fonction d'un but précis : connaissance de l'hydrogramme.

Ce type d'approche est récent. Nous ne sommes qu'à la naissance des modèles systémiques. Leurs vérifications expérimentales sont encore trop peu nombreuses. Malgré tout, le modèle à réservoir linéaire a été employé avec succès par M. DESBORDES sur des bassins français de tailles relatives réduites [14].

Leur intérêt est lié à la notion d'approche systémique. Une méthode d'étude est définie pour représenter et modéliser le phénomène évacuation des eaux pluviales en milieu urbain.

Cette méthode dépasse les méthodes élémentaires par son niveau de conception. Les grandes lois principes mises en jeu sont de plus en plus complètes vis-à-vis du phénomène étudié.



Tout en partant d'un autre type d'approche que SHERMAN et REMENIERAS, les modèles systémiques ont, en fait, sensiblement la même syntaxe mathématique; l'opérateur est encore un convoluteur.

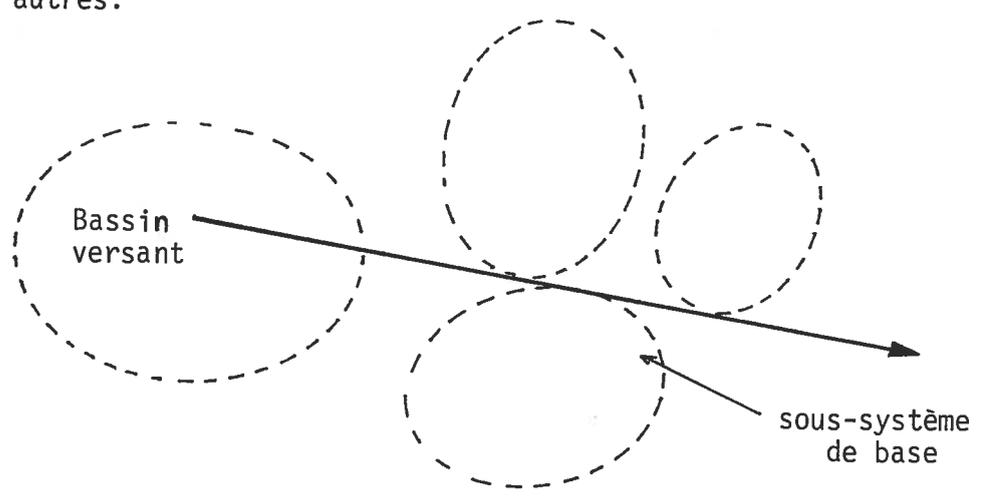
"Modèles métaglobaux"
=====

du bassin élémentaire à la ville.

Un modèle métaglobal est la somme d'un modèle de ruissellement (à réservoir, par exemple), et d'un modèle de propagation des hydrogrammes en canalisations (modèle d'écoulement ou de "flood routing" pour les américains).

En général, les bassins versants ne sont pas représentés par des modèles globaux élémentaires qui n'ont pas été construits dans ce but. Du fait de leur constitution, les modèles métaglobaux peuvent traiter des bassins versants de tailles beaucoup plus importantes que ne peut le faire un seul modèle global.

Le méta-système est découpé en systèmes de base, indépendants les uns des autres.

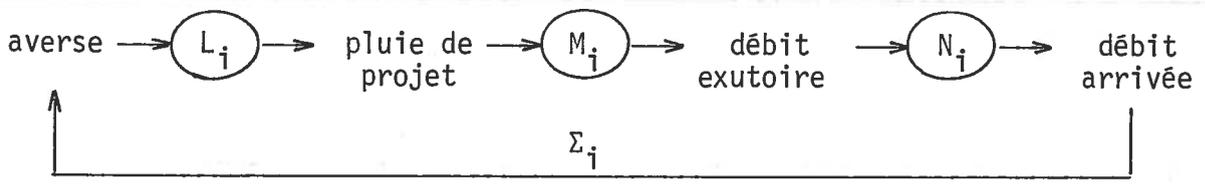


Chaque système est composé de deux sous-systèmes indépendants : le bassin versant, son exutoire et l'élément de collecteur jusqu'à l'exutoire suivant.

Un modèle M représente le fonctionnement du bassin versant.

Un modèle N représente les écoulements dans le collecteur.

Le méta-système est modélisé par le schéma :



Suivant l'étendue des bassins versants, différentes pluies de projet sont définies. Une pluie de projet étant le résultat du "filtre" L_i pour utiliser le modèle M_i et surtout un évènement artificiel permettant d'atteindre le but fixe (capacité extrême du réseau, etc ...).

Il existe actuellement deux grands groupes de modèles pour représenter les écoulements en canalisation. Le premier groupe est basé sur une approche globale du phénomène. Comme pour les modèles précédents, il tente de relier directement la sortie (débit à l'exutoire du collecteur) à l'entrée (débit à l'exutoire du bassin versant).

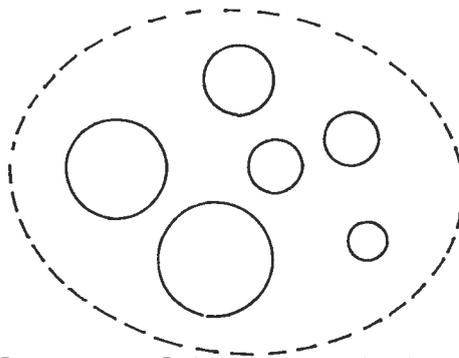
Le deuxième groupe s'appuie sur les résultats fournis par l'hydrodynamique.

Cette science n'est pas récente. Elle fut fondée par EULER, LAPLACE,

BERNOULLI, LAGRANGE, etc ... L'hydraulique, l'hydrodynamique sont des résultats particuliers d'une vision réductionniste et positiviste des phénomènes se présentant à nos sens.

L'hydrodynamique est dérivée de la statique des fluides et des équations représentant l'équilibre des forces d'une particule d'eau soumise à la pesanteur (équations d'EULER).

Comme le support du phénomène est simple, sans complexité apparente, les résultats fournis par cette science sont nombreux. Ils expliquent tout un ensemble de phénomènes particuliers et disjoints (écoulement en charge, à surface libre, coup de bélier, ressaut, chute, ...).



Ces différents modèles sont élaborés en adjoignant aux modèles de base (Equations d'EULER) certaines hypothèses simplificatrices, images des phénomènes particuliers étudiés.

Le phénomène "écoulement dans un collecteur" est décomposable en une succession additive de sous-phénomènes :

- écoulement "simple",
- chute,
- ressaut,
- écoulement par déversoir, etc ...

La complexité structurale et phénoménale du collecteur est ainsi représentée par une succession de modèles, chacun d'eux se rattachant à une particularité.

Le sous-phénomène le plus important est naturellement les écoulements "simples". Généralement, les modèles d'écoulement ont pour objet uniquement ce phénomène.

Le mouvement des eaux en canalisation est représenté par le système de BARRE de SAINT-VENANT ou par des modèles dérivés de ce système d'équations.

Modèles mécanistes : système de BARRE de SAINT-VENANT

Ce modèle est issu de la théorie des systèmes classiques, c'est-à-dire de l'analyse réductionniste appliquée à l'étude de la dynamique.

"L'objet essentiel de la dynamique consiste dans l'étude des mouvements variés produits par des forces continues"

Auguste COMTE
Philosophie première
17^{ème} leçon

L'hydrodynamique considère le système le plus simple qui soit : un élément liquide en mouvement.

Comme on s'attache aux variations infinitésimales de cet élément, le lieu de l'écoulement, ces caractéristiques et relations globales ne sont pas prises en compte. Les écoulements en canalisations ne sont pas identifiés par des lois qui leur soient propres.

Les équations d'EULER traduisent l'équilibre de forces auquel est soumis un élément d'eau. Sa dynamique est obtenue par différenciation en faisant intervenir la notion d'énergie : énergie potentielle, énergie cinétique, perte d'énergie due aux frottements, au mouvement, etc ...

Le système de BARRE de SAINT-VENANT est construit en utilisant certaines

hypothèses simplificatrices :

- filet liquide parallèle au fond,
- variation d'énergie verticale négligée,
- les pertes d'énergie sont représentées par une fonction globale,
- l'écoulement est unidimensionnel.

En ajoutant une équation de conservation de la matière, on obtient un système différentiel de la forme : $D(h, Q, V, S) = 0$.

Il est composé de deux équations différentielles non linéaires :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_i$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} g = g(I - J)$$

S : section mouillée

Q : débit

Q_i : débit latéral (apport ou perte)

h : hauteur d'eau

I : pente du support de l'écoulement

J : fonction représentative des pertes de charges.

On obtient un système de quatre équations à quatre inconnues en ajoutant les relations :

$$Q = V \cdot S$$

$$S = f(h)$$

Cette dernière fonction caractérise la forme de la section considérée. L'opérateur différentiel D est non linéaire. On ne sait pas le résoudre analytiquement.

Il est pratiquement impossible de juger de la valeur intrinsèque d'un tel système.

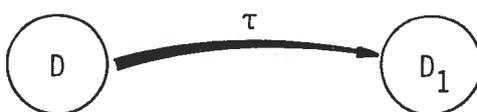
Par construction, il modélise les mouvements variés non permanents si les hypothèses choisies sont correctes. Ce type de modèle est cognitif puisqu'il fournit un ensemble "d'explications" au mouvement d'un élément liquide.

Il est rationnel puisque sa validation ne peut être jugée qu'en mesurant la cohérence interne des variables prises en compte, les postulats sur lesquels il s'appuie n'étant pas remis en cause.

Les hydrologues ont donc à leur disposition un outil qui semble théoriquement correct.

Malheureusement, le modèle, comme il est énoncé, n'est que cognitif.

Toute la difficulté vient de l'emploi pratique de ce système. Comme il n'est pas résolvable analytiquement, on remplace l'opérateur D par un opérateur D_1 qui n'est plus différentiel. Il définit des relations entre les fonctions premières h , Q , V et S car il est obtenu en utilisant la décomposition d'une fonction, définie par TAYLOR. On obtient ainsi des équations directes :



La déformation des hydrogrammes dans une canalisation est ainsi mesurée en ajoutant une condition initiale et deux conditions limites (Par exemple : relation entre Q et h à l'entrée et à la sortie). Ce système est ouvert.



C'est l'utilisation de l'informatique et des techniques de simulation qui donne au modèle "translaté" une valeur prévisionnelle et décisionnelle.

Tout problème peut être ainsi traité par l'opérateur D_1 , les limitations étant dues au temps calcul de l'ordinateur et à son coût d'utilisation.

La validation porte sur la "translation" τ choisie. Elle ne doit pas définir un écart trop grand entre D et D_1 .

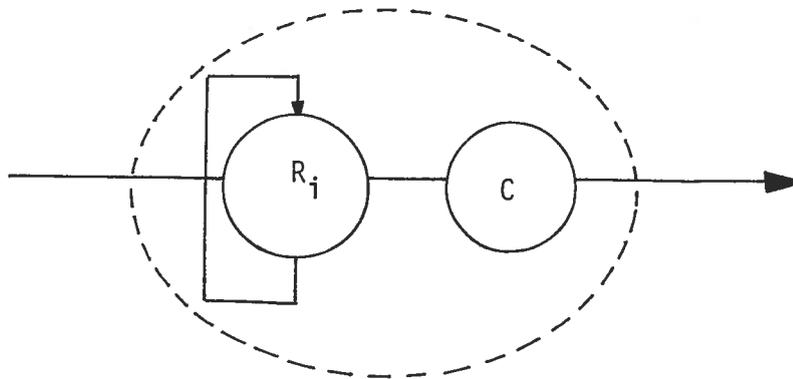
L'opérateur τ ne doit pas introduire d'effets parasites tels que la divergence, la non conservation des quantités écoulées, etc ...

Il est souvent très difficile de juger de la valeur des opérateurs D_1 préconisés par certains auteurs (CUNGE, PRICE, RICHARD et COLLEY [36], [19]), les conditions théoriques d'emploi et de convergence étant souvent peu explicitées. Seule la mesure par rapport à la réalité, ou à des résultats cohérents, permet de retenir telle ou telle "translation" τ .

D : modèle rationnel cognitif sans limitations théoriques.

$D_1 = \tau(D)$: modèle positiviste prévisionnel et décisionnel. Emploi limité par le temps et le coût ordinateur.

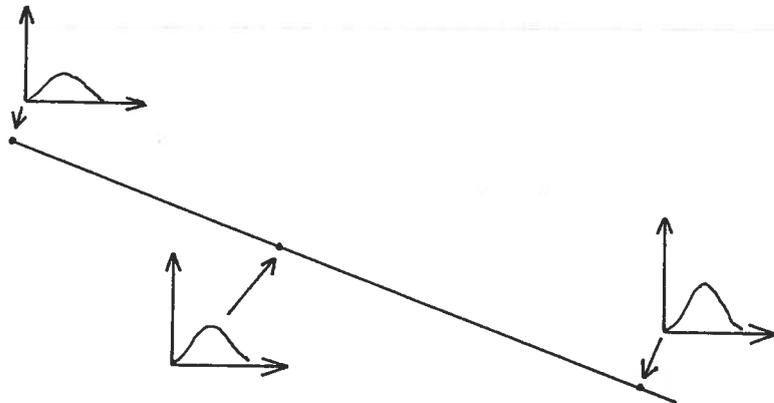
Le modèle métaglobal construit peut être représenté par le schéma suivant :



- R_i : modèle de ruissellement traitant un bassin versant,
 C : modèle de BARRE de SAINT-VENANT traitant tout le ou les collecteurs en aval des bassins de ruissellement.

"Modèles mécanistes : Modèle de BARRE de SAINT-VENANT simplifié"

Les collecteurs que nous tentons de modéliser pour construire des modèles métaglobaux sont des systèmes ouverts puisqu'ils possèdent des entrées et des sorties.



En toute généralité, leur fonctionnement est instable. Le système de BARRE de SAINT-VENANT permet de mesurer cette hétérogénéité (relation non univoque entre la hauteur et le débit, écoulement varié, etc ...).

Comme tous les systèmes ouverts, le collecteur, dans son fonctionnement, tente d'établir un état stable. Il joue un rôle de régulateur dans la propagation des débits d'eau pluviale. Cet état stable est à une certaine distance de l'équilibre vrai. Il peut, en effet, fournir un certain travail, un nouvel état instable étant possible après un état de stabilité. Un écoulement hétérogène est représenté par $I \neq J$ (système précédent).

Un écoulement stable, homogène est mesurable par $i = J$.

Dans la majorité des cas étudiés, elle n'est pas résoluble analytiquement.

$$Q_i = \frac{at}{a^2 S} + \frac{ax}{a^2 S (f^{-1})^{N-1}(s)}$$

En utilisant les relations $Q = VS$ et $S = f(h)$ ce système donne une seule équation différentielle :

$$V(x, t) = \alpha (x, t) (h(x, t))^{N-1}$$

$$Q_i = \frac{at}{a^2 S(x, t)} + \frac{ax}{a^2 Q(x, t)}$$

Si la perte d'énergie mesurée par J est identifiable par une fonction du type $V = \alpha H^{N-1}$, on obtient le système suivant :

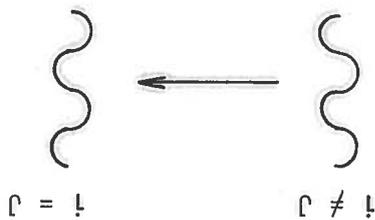
tème précédent.

Cette égalité définit des modèles simplifiés, élaborés à partir du sys-

font cette approximation (CUNJE, ROVEY, ... [22], [20]).

ne pouvaient être représentés par des écoulements stables ($I = J$; relation univoque entre le débit et la hauteur d'eau). Plusieurs auteurs WOOLISER et LIGGET ont montré que la plupart des cas en hydrologie urba-

instable stable



Le modèle élaboré est cognitif. Il introduit une hypothèse simplificatrice qui le rend plus facilement utilisable que le modèle précédent. Les valeurs décisionnelles et prévisionnelles sont plus simples à mettre en oeuvre.

Le développement des dérivées, sous forme de séries, définit un opérateur $D_1 = \tau (D)$ qui possède ces valeurs particulières.

Ce modèle a donc les mêmes typologies pragmatiques que le précédent.

Il est naturellement "inclus" dans le système de BARRE de St-VENANT. Il ne peut pas mesurer l'hétérogénéité d'un écoulement. Son emploi est déconseillé pour un collecteur possédant de nombreuses entrées et des éléments perturbateurs vis-à-vis de la stabilité tels que les chutes, les changements de pentes, etc ...

Ces modèles mécanistes sont peu maniables. Leurs utilisations se heurtent à de nombreuses contraintes théoriques et matérielles. Les conditions de convergence sont souvent floues, difficiles, voire impossibles à définir. Elles introduisent des temps de calcul très longs, incompatibles avec le problème posé. La modification de variables internes est délicate; ces modèles manquent de souplesse.

Ils ne sont pas transparents, et ne sont donc pas facilement compréhensibles par un grand nombre de personnes.

Ils possèdent une bonne assise théorique mais leurs qualités pragmatiques sont en totale contradiction avec ce que demande la cité.

Un modèle métaglobal, défini comme la somme d'un modèle de ruissellement sur bassin versant élémentaire et un modèle de propagation en collecteur doivent être souples, transparents, facilement maniables.

On s'est donc orienté vers une approche globale pour les modèles de propagation.

"Modèle global élémentaire : Time offset"
 =====

Le collecteur est découpé en éléments, définis par une arrivée amont et un exutoire aval.

Chacun de ces éléments est représenté par un système ouvert à une entrée $Q_e(t)$ et une sortie $Q_s(t)$.

La méthode de définition du modèle est voisine de la méthode de l'hydrogramme unitaire.

On recherche directement l'opérateur reliant $Q_s(t)$ à $Q_e(t)$



L'hypothèse fondamentale de cette méthode est la linéarité du phénomène étudié. L'opérateur peut être représenté par une convolution :

$$Q_s(t) = f(t + T) * Q_e(t)$$

La fonction f et le temps de translation (time offset) sont déterminés empiriquement (f et T étant naturellement indépendants de l'entrée et de la sortie).

Ce modèle possède les mêmes typologies pragmatiques que le modèle obtenu par la méthode de l'hydrogramme unitaire. Vis-à-vis de l'hypothèse fondamentale choisie, il peut être jugé cognitif s'il y a univocité de la fonction f . Il est prévisionnel mais n'est pas décisionnel.

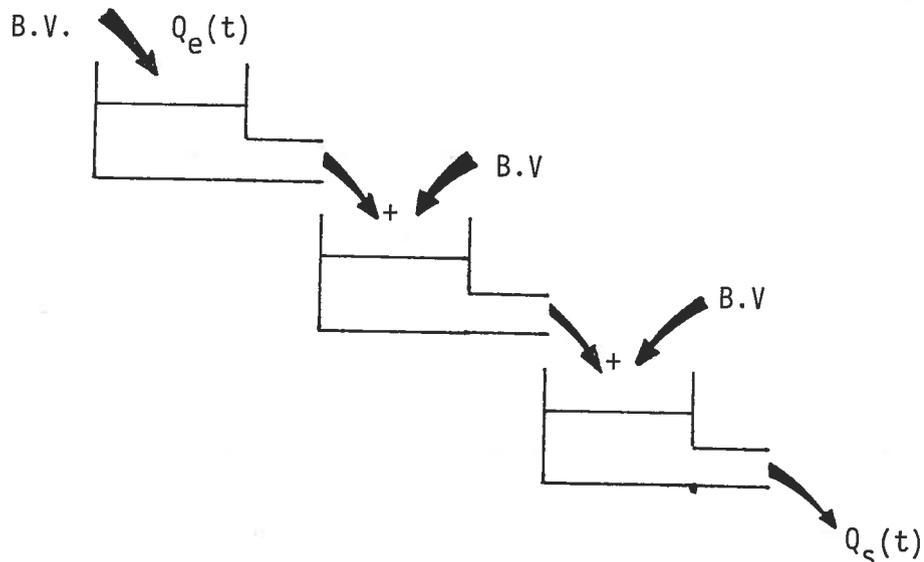
La fonction f et le temps T sont relatifs au collecteur étudié. Ces deux termes ne sont pas généralisables à d'autres collecteurs.

C'est la limite fondamentale de ce type de modèle. Nous sommes très loin de la complexité représentée par le système précédent. Ce modèle est relativement pauvre, mais il répond à la transparence, à la mania-bilité et à la souplesse demandée.

"Modèles globaux analytiques; Modèles à réservoirs"

Comme pour les bassins versants élémentaires, on utilise une approche systémique.

Le collecteur est schématisé par une série de réservoirs.



La représentation du fonctionnement d'un réservoir utilise une variable d'état $V_s(t)$ et deux variables de flux $Q_e(t)$, $Q_s(t)$.

Ces trois variables sont liées par une loi principe de continuité et une loi de stockage plus ou moins rationnelle.

Modèle à réservoir linéaire; MUSKINGUM, KALININ MILJUKOV

Le modèle de MUSKINGUM a été construit pour représenter les crues en rivières. Il est utilisé par différents auteurs pour modéliser les écou-

lements en canalisations. Le système considéré est causal; le débit dans la canalisation est uniquement du à l'entrée.

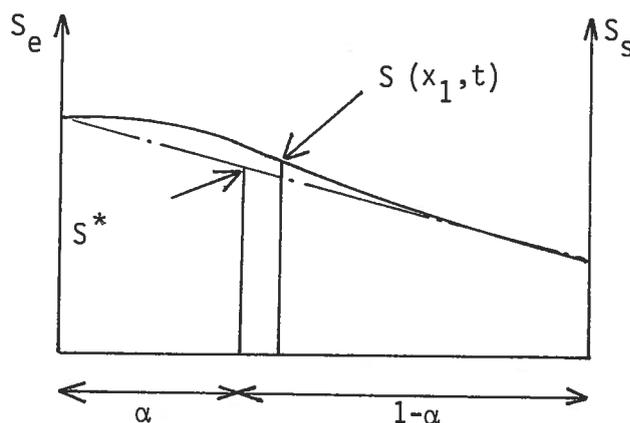
Le modèle de MUSKINGUM suppose que la fonction $S(x, t)$ représentant la section d'eau est continue.

Soit $[0L]$ l'intervalle du collecteur étudié

$\exists x_1 \in [0L]$ tel que :

$$V_s(t) = \int_0^L S(x,t) dx = L * S(x_1,t)$$

On suppose en plus que la valeur de $S(x_1,t)$ est comprise entre $S_e(t)$ et $S_s(t)$.



La valeur de $S(x_1,t)$ est approchée par une valeur $S^*(x,t)$ telle que :

$$S^*(x,t) = \alpha S_e(t) + (1-\alpha) S_s(t); \alpha \in [01]$$

Si la vitesse en e est égale à la vitesse à la sortie quel que soit le temps, le volume stocké est donné par la relation :

$$V_s(t) = \frac{L}{V_e(t)} (\alpha Q_e(t) + (1-\alpha) Q_s(t))$$

Soit $K = L/V_e(t)$

$V_e(t) =$ vitesse à l'entrée.

On obtient le modèle suivant :

$$\frac{d V_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t)$$

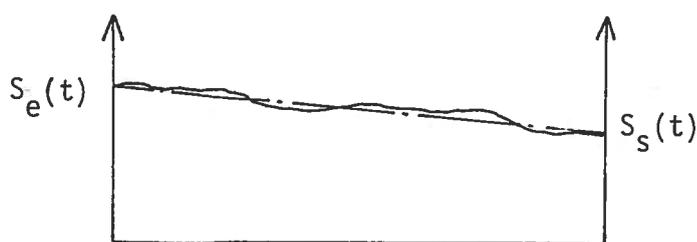
$$V_s(t) = K (\alpha Q_e(t) + (1-\alpha) Q_s(t))$$

Le modèle de MUSKINGUM prend K et α constants, la vitesse d'entrée étant égale à la vitesse de sortie quel que soit le temps.

C'est donc toujours le même point x_1 qui donne la valeur moyenne de la section d'eau, puisque α est une constante.

Le modèle est linéaire.

On reconnaît ici son intérêt pour représenter les écoulements en rivières présentant pas de grandes variations de débit; la ligne d'eau est sensiblement linéaire et peu pentue, la vitesse variant peu.



En supprimant la fonction $V_s(t)$, le système précédent se simplifie :

$$K\alpha \frac{d Q_e(t)}{dt} + K(1-\alpha) \frac{d Q_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t)$$

Cette équation est généralement discrétisée pour donner la relation suivante :

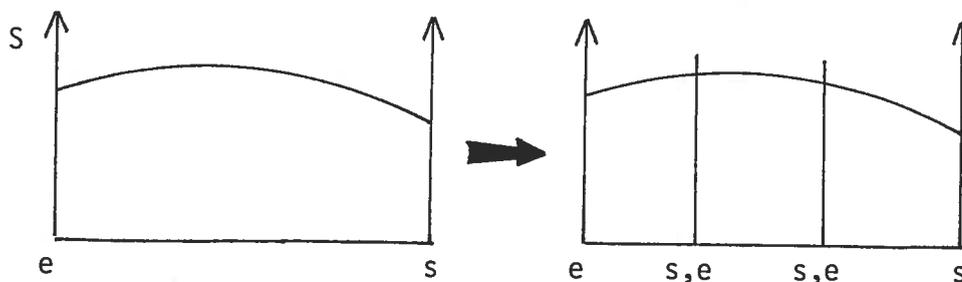
$$Q_s(t) = C_1 Q_e(t-\Delta t) + C_2 Q_e(t) + C_3 Q_s(t-\Delta t)$$

C_1, C_2, C_3 dépendant de la discrétisation choisie. Pour $\alpha = 0$, on retrouve le modèle de KALININ-MILJUKOV

Ce modèle n'est pas cognitif. Il contredit une hypothèse évidente du phénomène; les vitesses à l'entrée et à l'exutoire varient quand la valeur du débit change. L'écoulement ne doit pas présenter une trop grande hétérogénéité et doit donc être voisin d'un écoulement en rivière.

Ce modèle ne tient pas compte de la complexité phénoménale, (chute, ressaut, changement de type d'écoulement).

Il ne possède aucune valeur théorique puisqu'il contredit les faits observables eux-mêmes. S'il est utilisé pour modéliser les écoulements en canalisations, le découpage du collecteur en sous-systèmes doit tenir compte des hypothèses fondamentales du modèle :



Son intérêt n'est que pratique car il est simple et transparent. Ces deux qualités sont obtenues au prix d'une importante dégradation explicative du phénomène. Si K et α sont bien ajustés, le modèle peut être prévisionnel.

Une valeur décisionnelle pourrait lui être accordée si les paramètres

de ce modèle étaient au moins fonctions des caractéristiques géométriques d'un grand ensemble de collecteurs (section, pente, ...).

Il doit être employé avec beaucoup de circonspection; sa valeur opérationnelle restant à démontrer.

Modèle à réservoir non linéaire; Modèle de B. CHOCAT

B. CHOCAT utilise la même démarche que précédemment. Il tente de remédier aux hypothèses fausses du modèle de MUSKINGUM en prenant les vitesses à l'entrée et à la sortie égales mais variables dans le temps α étant considéré égal à 1.

En reprenant la loi principe de continuité, ce modèle s'écrit :

$$\frac{dV_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t)$$

$$V_s(t) = \frac{L}{V_e(t)} Q_e(t)$$

Le volume stocké est discrétisé sur le temps très simplement.

$$\frac{dV_s(t)}{dt} = \frac{V_s(t) - V_s(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$Q_s(t) = Q_e(t) \left[1 - \frac{L}{\Delta t \cdot V_e(t)} \right] + Q_e(t-\Delta t) \left[\frac{1}{\Delta t \cdot V_e(t-\Delta t)} \right]$$

L'intérêt théorique de ce modèle est sa non-linéarité. Il est aussi simple et transparent que le modèle précédent. Il ne peut modéliser qu'un seul type d'écoulement (écoulement à surface libre). B. CHOCAT a

d'ailleurs introduit dans son outil de simulation (modèle de DESBORDES + modèle d'écoulement), un modèle d'écoulement en charge [8].

La vitesse à l'entrée et à la sortie étant égales mais variables, il ne peut pas tenir compte de conditions différentes d'écoulement entre l'entrée et la sortie. La mesure de $V_e(t)$ introduit une condition sur les bords du problème (Elle n'apparaissait pas dans le modèle de MUSKINGUM).

B. CHOCAT choisit un écoulement de type homogène à l'entrée et à la sortie : $I = J$, la vitesse étant donnée par la relation :

$$V_e(t) = C(t) \sqrt{R_H(t) i}$$

En utilisant la relation $Q = VS$, la vitesse $V_e(t)$ est calculée de façon univoque.

Ce modèle possède à peu près les mêmes typologies et qualités pragmatiques que le précédent. Les contradictions phénoménales sont plus restreintes. Les conditions de son emploi sont plus ou moins connues : Vitesses égales et écoulement homogène à l'entrée et à la sortie du système considéré.

Il faut souligner que ce modèle a donné de bons résultats pour représenter le fonctionnement de plusieurs grands collecteurs sur la région Lyonnaise [41].

Ces deux grands types de modèles (MUSKINGUM, CHOCAT) sont définis par la représentation d'un collecteur en une série de réservoirs. Ces réservoirs sont rattachés à la notion de filtres qui sont des modèles stationnaires continus reliant les entrées et les sorties du système par l'équation :

$$\sum_{k=0}^m a_k \frac{d^k Q_e}{dt^k} = \sum_{r=0}^m b_r \frac{d^r Q_s}{dt^r} \quad (9)$$

KULANDAISWAWY a démontré que l'équation d'état d'un tel filtre pouvait se formuler ainsi :

$$V_s(t) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k Q_e}{dt^k} + \sum_{r=0}^m b_r \frac{d^r Q_s}{dt^r} \quad (14)$$

suivant l'écriture des coefficients a et b , on obtient le modèle linéaire de MUSKINGUM ou le modèle non linéaire de CHOCAT.

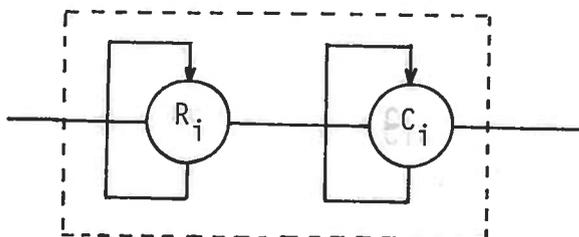
Une écriture simple répond au but de simulation assigné aux modèles métaglobaux.

S'il est possible d'attribuer une composante décisionnelle aux modèles d'écoulements, l'ordinateur et ces modèles ouvrent la voie à la connaissance du fonctionnement d'un réseau au niveau de la ville elle-même.

Même si leur écriture est simple, leur mise en oeuvre, pour mesurer l'influence d'un phénomène pluviométrique quelconque est toujours délicate, la mesure de la pluie étant très difficile puisqu'elle doit se plier aux exigences des modèles. La détermination des paramètres utilisés est relativement complexe puisqu'ils doivent être l'image d'une complexité phénoménale et structurale.

Les modèles globaux utilisés sont précaires puisqu'ils ont peu de validation empirique, et sont construits en utilisant une loi principe qui peut être jugée grossière vis-à-vis de la complexité phénoménale.

Le modèle métaglobal qui prend en compte ce type de modèle, répond au schéma suivant :



R_i : modèle de ruissellement,

C_i : modèle de propagation en collecteur.

de l'objet 3

• Validation dynamique	105
• Validation individuelle	108
- validation pragmatique	108
- validation cognitive	110
<hr/>	
• Vers de l'étude	112

"Il existe un rapport entre la validité et la non validité d'un raisonnement et la vérité ou la fausseté de ses prémisses et de sa conclusion, mais ce rapport n'est pas simple du tout".

I.M. COPI "Symbolic Logic"

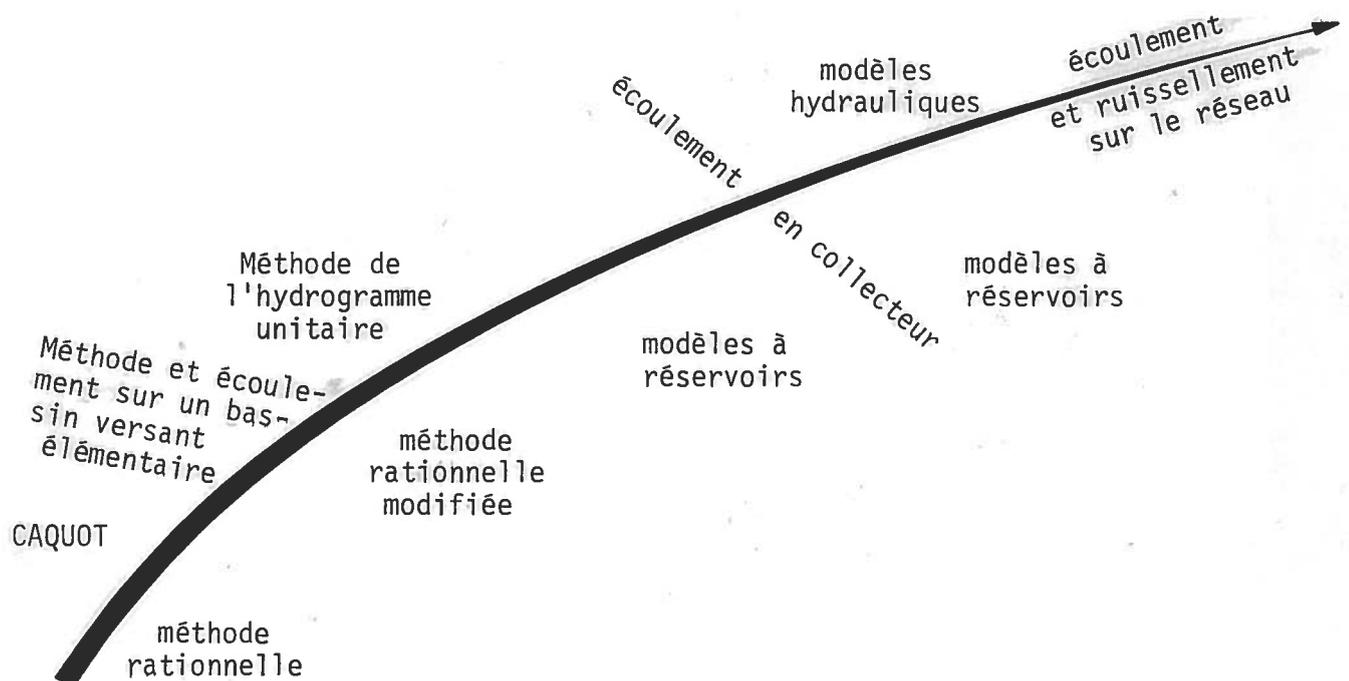
VALIDATION DYNAMIQUE

* * * * *

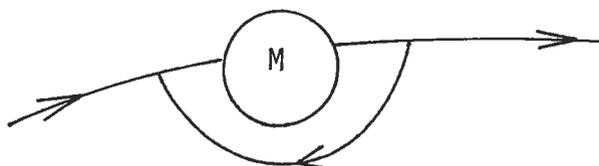
Que l'on nous excuse de la (trop) longue exposition des "classes" de modèles utilisés en hydrologie urbaine pour représenter les phénomènes de ruissellement et/ou d'écoulement !

Chaque classe est définie par un modèle type, qualifié par son niveau d'élaboration et son but.

Cette liste, sans être exhaustive, est nécessaire pour entrevoir la dynamique d'apparition de ces modèles. Ce mouvement est une validation continue. L'ensemble des classes peut être représenté dans le mouvement suivant :



Ce mouvement dépasse la validation individuelle du modèle. Il ne juge pas directement de sa valeur phénoménologique ou théorique.



Ce type de validation est principalement lié aux "changements d'échelles" de l'observation du phénomène qui ont pour effet de demander des mesures particulières, ne pouvant être fournies que par développement des modèles existants ou par création de nouveaux modèles.



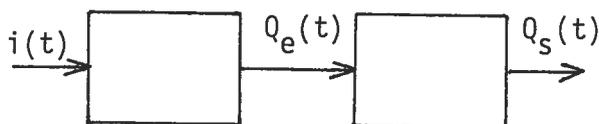
CAQUOT ne permet pas de mesurer l'influence de diverses averses. Il donne simplement Q_{\max} pour une pluie de fréquence donnée sur un bassin homogène.



Les modèles issus de la méthode rationnelle donnent $Q(t)$ pour des surfaces qui peuvent être hétérogènes. Mais ils ne tiennent pas compte de l'effet de stockage du réseau.



Les modèles à réservoir donnent $Q(t)$ pour des bassins qui contiennent des canalisations.



L'association d'un modèle précédent et d'un modèle d'écoulement en collecteur donne l'hydrogramme résultant de plusieurs bassins versants.

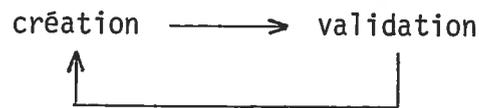
Cet enchaînement de modèles est né de la prise en compte des problèmes liés à la construction urbaine et surtout aux coûts d'investissements croissants, consentis par la cité pour aménager son réseau d'assainissement. L'accroissement des villes devenant de plus en plus important, il est indispensable de construire des outils qui sachent déterminer les points faibles du réseau et prévoir les répercussions de cet accroissement. La détermination de ces outils nécessite la connaissance du réseau car la représentation de ce monde souterrain est indispensable à la vie de la cité comme nous la connaissons actuellement.

VALIDATION INDIVIDUELLE

* * * * *

En parallèle à la validation dynamique historique, chaque modèle est soumis à une validation intrinsèque : validation au niveau individuel.

Elle est profondément liée au mouvement créateur du modèle. La dialectique de la modélisation est un va-et-vient incessant entre validation et création.



"En fait, le modèle permet de conserver sous forme organisée et communicable, les informations se rapportant à un phénomène quelconque".

Maurice LANDRY

J.L. MALOUIN

L'hydrologie urbaine étant en relations permanentes avec la cité, il faut lui reconnaître un rôle d'action. La modélisation doit donc être source d'informations communicables, mais comme elle se veut "scientifique", elle se suppose source de connaissances. La mesure de la valeur d'un modèle est donc double.

- Validation pragmatique

Cette validation mesure la valeur informationnelle d'un modèle. Elle ne

peut être que pragmatique et donc vérifier les qualités suivantes :

- communicabilité,
- compréhension,
- prévision.

Elle explique la typologie particulière des modèles. La démarche mécaniste réductionniste n'est pas fondamentale en hydrologie urbaine. En effet, elle conduit à représenter les phénomènes les plus simples en espérant, par déduction, remonter jusqu'aux phénomènes les plus complexes. Cette espérance est généralement vaine et les modèles construits sont d'un emploi relativement difficile (voir pour exemple, le modèle de BARRE de St-VENANT). Devant la "faillite" pragmatique de ce type d'approche, la démarche est donc globale, même si certaines hypothèses fondamentales du phénomène sont niées; les modèles à réservoir linéaire imposent l'égalité et l'invariance des vitesses à l'entrée et à la sortie du système.

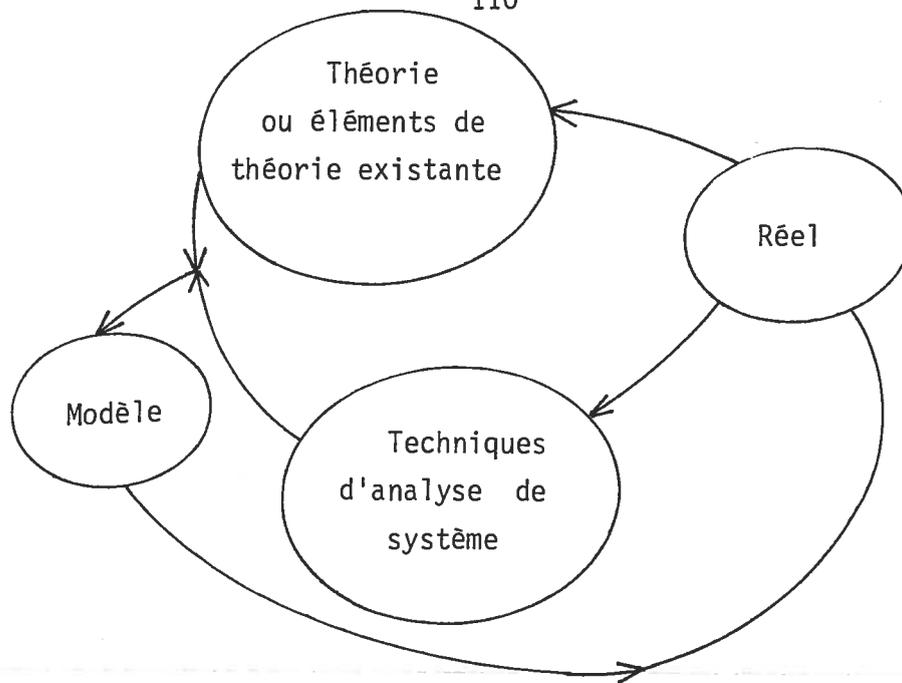
Cette contradiction entre la valeur informationnelle et la valeur purement phénoménale est aujourd'hui plus ou moins cachée par une nouvelle valeur créée par la cité : valeur de l'outil informatique.

Les modèles sont adaptés aux grands calculateurs par transcription dans un langage formel. La valeur initiale du modèle s'efface devant la complexité de l'outil informatique. Un modèle sera donc jugé bon s'il est simple et surtout facilement utilisable par les grandes machines.

- Validation cognitive

Cette validation doit reconnaître la valeur explicative du modèle qui doit donc donner une représentation plus ou moins conforme du réel observé, en traduisant ses propriétés fondamentales.

Pour définir la validité cognitive des modèles hydrologiques, il me semble indispensable d'utiliser le schéma suivant :



Le modèle de BARRE de ST VENANT et ses modèles dérivés s'appuient sur une théorie existante, l'hydrodynamique. Son insertion dans l'hydrologie urbaine se fait par élaboration de ce que nous appelons les modèles métaglobaux.

Son emploi comme modèle de ruissellement est presque impossible puisqu'il est défini par une approche réductionniste.

Les autres modèles de ruissellement et d'écoulement n'ont pas d'assise théorique car ils découlent directement et uniquement des techniques d'analyse de système.

Le mouvement de l'eau n'est pas considéré comme tel. Il est subordonné par le phénomène évacuation des eaux pluviales. L'écriture mathématisée des modèles hydrologiques vient de l'emploi de paradigmes communs aux théories, et aux techniques d'analyse de systèmes.

Les modèles à réservoirs utilisent un paradigme hydraulique qui découle de la représentation systémique du phénomène. A ce titre, cette approche est rationnelle puisqu'elle s'inspire d'un paradigme existant chez le modélisateur.

La méthode de l'hydrogramme unitaire et les méthodes dérivées de la mé-

thode américaine sont construits en utilisant un paradigme mécaniste simple, au niveau global de l'observation. L'hypothèse fondamentale de ces modèles est la linéarité de l'opérateur reliant la pluie au débit.

Le paradigme hydraulique est inclus dans le paradigme mécaniste; les modèles à réservoirs sont généralement linéaires même si par approximations empiriques ils deviennent pseudo-linéaires. (le coefficient K de l'opérateur de convolution $e^{-t/K}$ tient compte de la pluie).

Il est très difficile de juger le modèle de CAQUOT puisqu'il est uniquement pragmatique, "technique" avons-nous dit. Ce modèle est une image semi ouverte d'un phénomène fondamentalement ouvert, obtenu par un mélange subtil de lois empiriques et d'approximations plus ou moins rationnelles.

Sans pousser plus loin ces éléments de validation cognitive, nous résumerons les caractéristiques des modèles hydrologiques dans le tableau suivant :

Modèles	Eléments Théoriques	Techniques d'analyse	Paradigme
BARRE de SAINT VENANT	Théorie de l'hydrodynamique	Réductionnisme	Mécaniste
Modèles à réservoirs		Système	Hydraulique
Modèle de l'hydrogramme unitaire		Système ?	Mécaniste
Modèles associés à la Méthode Américaine		Système ?	Mécaniste
CAQUOT	Eléments théoriques de l'hydrodynamique	?	Mécaniste ?

VERS de L'ETUDE

* * * * *

"S'il existe un niveau fondamental de description microscopique et invariable dans le temps, le reste, l'irréversibilité, l'évolution se trouvent rejetés dans le monde d'illusions ou d'approximations supplémentaires introduit par l'homme".

I. PRIGOGINE

Fluctuation et évolution de la complexité

Comme nous venons de le voir, l'hydrologie urbaine est une science de l'action; les modèles ont une profonde orientation pragmatique. L'absence de prémices théoriques permet de juger correct tout modèle suffisamment approximé de façon empirique car il est restreint à son corpus d'observations et il est très délicat de l'employer pour représenter un autre champ phénoména1.

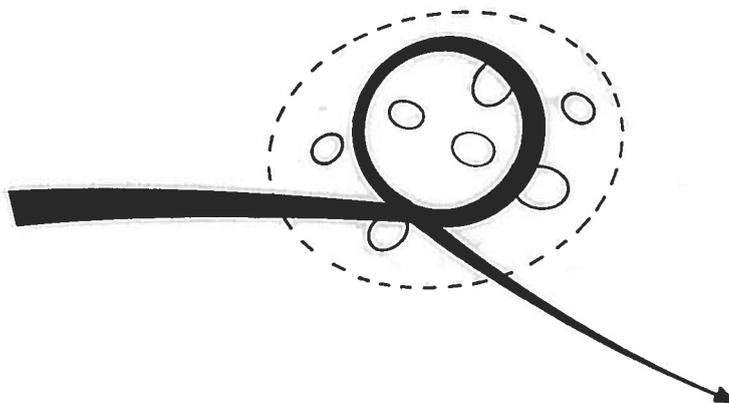
Toute observation nouvelle donne un modèle ou modifie un modèle existant pour l'adapter à son problème, la signification réelle des modifications successives étant souvent inconnue. Dans la plupart des cas, il s'agit d'une adaptation pragmatique.

Devons-nous rester dans le monde "d'illusions et d'approximations" défini par PRIGOGINE ? Devons-nous restreindre notre objet à l'unique création de modèles pragmatiques ?

Cette démarche est certes utile et fondamentale. La modélisation hydrologique ne peut pas être dissociée de la cité, sinon le phénomène disparaîtrait. Néanmoins l'unicité de cette démarche me semble dangereuse. Elle conduit à élaborer sans cesse de nouveaux modèles en ne reconnaissant pas leur intersection et surtout leur valeur théorique. Le foisonnement est dispersé, incontrôlable. Il peut même être basé sur le non respect des hypothèses fondamentales du phénomène, caché par la valeur pragmatique ou la complexité de l'outil informatique construit à partir du modèle. Cette contradiction fondamentale est une limitation évidente à cette démarche. Le foisonnement peut devenir non créatif.

Peut-il être qualifié de scientifique ? N'est-il pas uniquement techniciste ?

En parallèle à l'observation et à la création, un retour sur la valeur cognitive, théorique des modèles nous semble indispensable. Ce mouvement est susceptible de définir le signifié propre des modèles et leur valeur théorique si cette dernière est définissable. Il peut détruire toutes les confusions sur leur emploi et surtout donner les bases indispensables à tout nouvel avancement.



Aujourd'hui encore, nous ne savons pas s'il est possible de mesurer la complexité car nos instruments et nos modes de pensées sont trop rudimentaires. Cette mesure est peut-être une utopie.

Sans vouloir et pouvoir définir une théorie unitaire de l'hydrologie, ce retour sur les modèles est le seul garant d'une non dégradation de la modélisation, de l'observation, et du pouvoir créatif du chercheur, s'il doit y avoir création.

DE L'ETUDE

- 116 -

"Il n'y a pas de niveau de description fondamental mais des niveaux multiples. Le rôle de la recherche théorique consiste à différencier ces niveaux tout en permettant de comprendre le passage de l'un à l'autre. Le Monde de la science nous paraît bien plus complexe aujourd'hui qu'au temps de la science classique".

PRIGOGINE.

Le phénomène principal, observé par l'hydrologie urbaine est la transformation d'une pluie par diverses surfaces de ruissellement possédant ou ne possédant pas un réseau de canalisations. Les éléments qui participent à la transformation d'un évènement pluviométrique sont très variés, en relation les uns aux autres par le ruissellement et l'écoulement. La très grande complexité du phénomène explique peut-être la diversité des modèles sensés représenter la transformation et surtout la difficulté rencontrée par les chercheurs dans leur élaboration.

En regroupant les modèles d'écoulement et les modèles de ruissellement et en excluant le modèle techniscite de CAQUOT et ceux issus de la méthode rationnelle, une étude typologique nous a montré que tous ces modèles appartiennent à deux classes bien distinctes. La partition est due aux approches utilisées, au but et à l'époque de la modélisation.

Une première classe de modèles utilise les résultats d'une théorie mécaniste préexistante, l'hydraulique et, plus généralement, l'hydrodynamique. Cette théorie s'est élaborée à partir d'une approche microscopique, l'objet étudié étant l'état d'équilibre d'un groupe de molécules homogènes de fluide en mouvement. Diverses caractéristiques de l'écoulement sont reliées entre elles par un opérateur différentiel non linéaire.

$$D(V, S, h) = 0$$

h : hauteur d'eau
S : section mouillée
V : vitesse.

Une deuxième approche, macroscopique, basée non pas sur des segments

théoriques préexistants mais sur des techniques d'analyse, apparente le phénomène à un système ouvert mesurable par la variation des flux qui transitent dans ce système (Modèle de l'hydrogramme unitaire, modèle de MUSKINGUM, ...).

La transformation est généralement, imagée par un opérateur différentiel linéaire ou non linéaire, reliant le flux entrant au flux sortant.

$$\emptyset (Q_e(t), Q_s(t)) = 0$$

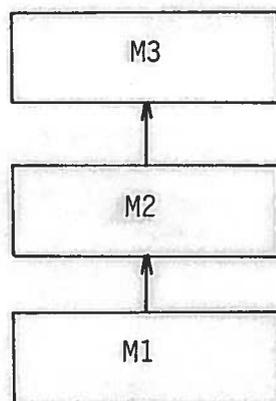
Le fonctionnement du ou des bassins versants considérés comme un tout n'est mesuré que par la variation des flux. A ce titre, ces modèles sont holistiques et ne tiennent donc pas compte des diverses interactions entre les éléments et des relations entre les diverses grandeurs qui pourraient être mesurables. Les hydrologues n'ont pas développé ces modèles et ne les utilisent que sous une forme discrétisée.

Un retour sur la valeur cognitive, théorique des modèles holistiques, nécessite un approfondissement de leur écriture qui est susceptible de mettre à jour leurs significations syntaxiques précises. Ils pourront peut-être s'apparenter à des classes de modèles connues. Nous aurons ainsi une première mesure de l'écart entre le phénomène réel et ses images abstraites.

Ces modèles holistiques ne sont pas véritablement des modèles empiriques puisqu'ils sont construits en ajustant une loi principe à des mesures réelles. Suivant le lieu de l'application des modèles et si l'écart entre les mesures réelles et les mesures abstraites n'est pas trop important, il doit être possible de relier ces modèles aux modèles théoriques existants, c'est-à-dire à ceux construits par l'hydraulique qui pourraient représenter le même phénomène.

En effet, les modèles holistiques ne tiennent pas compte des interactions entre les éléments composant un bassin versant. Ils donnent uniquement une relation entre l'entrée et la sortie (débits). Sur une canalisation ou sur une rivière, ces modèles sont censés mesurer de façon globale l'écoulement tout comme le fait de façon réductionniste l'hydraulique.

La modélisation des écoulements et ou ruissellements en hydrologie doit donc présenter une structure hiérarchisée; un modèle est empirique pour ceux des strates supérieures et théorique pour ceux des strates inférieures.

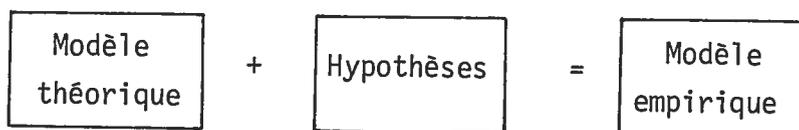


M2 est théorique pour M1

M2 est empirique pour M3

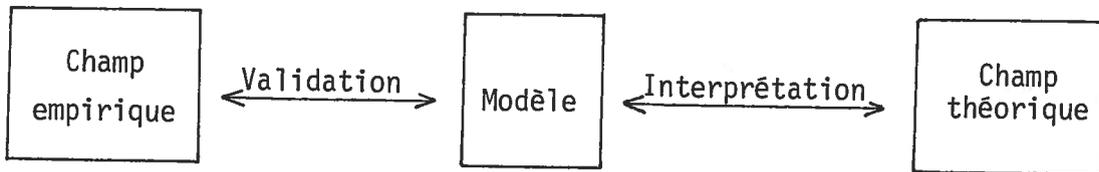
Les modèles holistiques doivent donc "s'emboîter" dans les modèles de l'hydraulique tels que les équations de NAVIER-STOKES ou le système de BARRE de ST-VENANT.

Si cet emboîtement existe, il sera donné par l'ensemble des hypothèses supplémentaires qu'il faut adjoindre aux modèles théoriques pour obtenir le ou les modèles empiriques de type holistique.



Cette liaison étant mise à jour, nous aurons ainsi résolu le problème de

l'interprétation des modèles holistiques, ceux-ci étant validés partiellement par le champ empirique.



S'il n'y a pas de liaison entre le modèle et le champ théorique, deux possibilités s'offrent à nous :

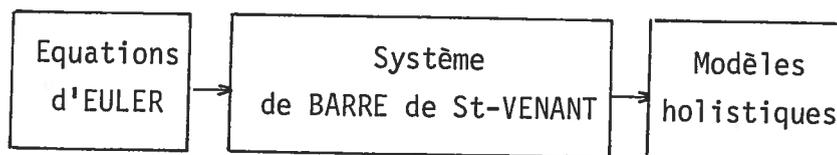
- le modèle empirique est trop éloigné de la réalité représentée par le modèle théorique,

- le champ théorique n'est pas assez complet ou son fondement est à revoir.

Nous supposerons que le champ théorique n'est pas à remettre en cause vis-à-vis des mesures qu'il fait. La non interprétation des modèles holistiques serait alors due à l'incapacité de remonter du microscopique au macroscopique à travers cette théorie ou à un écart trop important entre la réalité et les modèles globaux.

La tentative de définir l'interprétation des modèles holistiques demande une connaissance parfaite du champ théorique et, principalement, des équations de BARRE de ST VENANT qui serviront de référence.

La signification de ce système d'équations est précise si nous connaissons les hypothèses qu'il faut ajouter aux équations fondamentales de l'hydrodynamique pour l'obtenir, et si nous savons définir les lieux de stabilité de ses solutions.

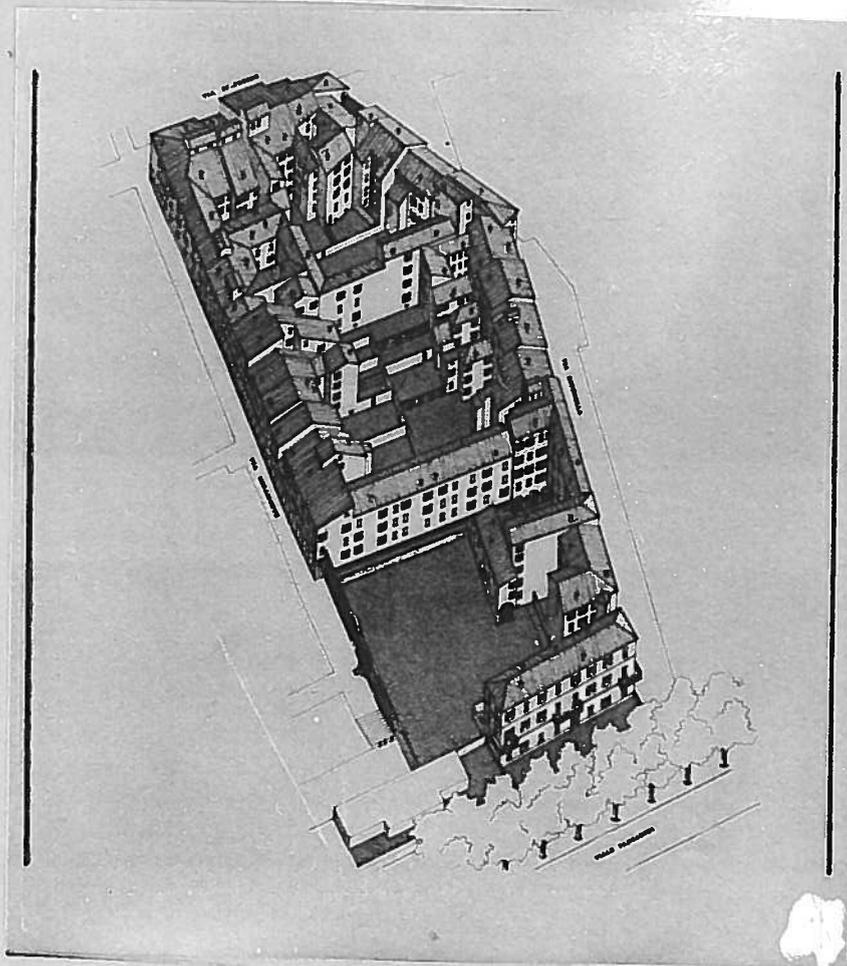


Cette étude sera donc articulée principalement en trois parties :

- de l'ETUDE I : Etude des modèles holistiques
- de l'ETUDE II : Etude du système de BARRE de ST-VENANT (modèle réductionniste)
- de l'ETUDE III : Interprétation des modèles holistiques.

de l'étude 1

Assonometria dell'insieme edilizio a restauri compiuti



I	-	CONSTRUCTION D'UN MODELE	125
		I.1 Approche	125
		I.2 Modèle non linéaire	126
		I.3 Modèle linéaire	128
II	-	ETUDE DES MODELES LINEAIRES	134
		II.1 Classification	135
		II.2 Détermination des paramètres	141
III	-	APPLICATION	148
		III.1 Choix d'un modèle	148
		III.2 Formulation pratique	149
		III.3 Application à l'ensemble des bassins versants	156
IV	-	CONCLUSION	162

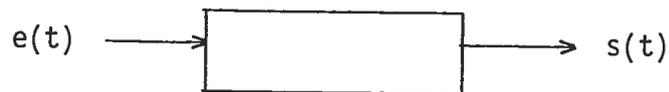
I - CONSTRUCTION DE MODELES HOLISTIQUES

I.1 Approche

Le bassin versant ou le collecteur est constitué d'un ensemble d'éléments en interaction. L'approche considère ce transformateur comme un tout défini par des propriétés, mesurables sans étudier le comportement des éléments constituant le transformateur. La démarche holistique s'oppose à la démarche réductionniste. Ces propriétés qui résultent du fonctionnement des éléments du transformateur, en deviennent indépendantes.

Pour décrire les modèles globaux, nous ne ferons pas de distinction entre ceux qui se rapportent aux bassins versants et ceux qui se rapportent plus particulièrement aux collecteurs. Ils sont tous issus d'un même système de 2 équations. Nous regrouperons donc sous l'appellation de modèles holistiques, les modèles de M. DESBORDES, de MUSKINGHUM, ... qui traitent soit du ruissellement, soit de l'écoulement.

Le phénomène appréhendé par une vision totalisante est représenté par le schéma classique :



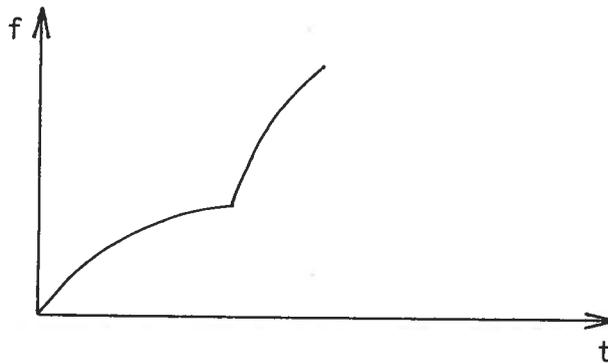
En s'appuyant sur un paradigme hydraulique, le fonctionnement d'un tel système dépend de deux variables de flux ($Q_e(t)$ ou $i(t)$ et $Q_s(t)$) et d'une variable d'état ($V_s(t)$ volume stocké). La modélisation étant de type mécaniste, on identifie $s(t)$ grâce à un opérateur O tel que :

$$s(t) = O.e(t)$$

L'entrée et la sortie devront donc être des fonctions ou des distributions

continues, définies sur R et à valeur dans R , le support étant généralement compact (intervalle d'étude). Cet opérateur aura pour espace substrat, lieu de l'image phénoménologique, un espace d'opérateurs fonctionnels continus.

La notion de continuité étant une condition sine qua non d'une modélisation hydraulique donc mécaniste, le phénomène étudié ne devra pas présenter des discontinuités qui permettent le passage d'un état de stabilité à un autre état de stabilité. Une représentation des écoulements en canalisation par ces modèles, ne peut mesurer qu'un seul type d'écoulement (écoulement à surface libre ou écoulement en charge). Le passage de l'un à l'autre s'effectue par une discontinuité des valeurs des fonctions.



I.2 Modèles non linéaires

Le phénomène étant non linéaire, les trois fonctions qui le mesurent sont reliées entre elles par deux équations :

$$(1) \quad \frac{d V_S(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_S(t)$$

$$(2) \quad V_S(t) = f(Q_e(t), Q_S(t))$$

L'équation (1) est élaborée à partir du principe de conservation des flux. La fonction (2) peut être soit choisie arbitrairement (voir réservoirs non linéaires) ses paramètres étant approximés sur des mesures réelles, soit déterminée empiriquement.

Dans les deux cas, l'obtention d'un opérateur analytique O reliant directement l'entrée à la sortie est délicate. Le système des deux équations est alors directement discrétisé sur le temps pour obtenir une relation non linéaire du type :

$$Q_S(t) = f(Q_S(t-1), Q_e(t), Q_e(t-1), \dots)$$

Comme nous venons de le souligner, la solution d'un tel système non linéaire pourrait être approximée empiriquement. Il suffirait d'étendre à notre phénomène héréditaire et à réponse différée dans le temps, la méthode définie par FRECHET GREEN RIVLIN pour représenter les phénomènes de viscoélasticité non linéaire [23]. La solution de notre système serait alors approximée par un développement polynomiabile d'intégrales linéaires du type de FRECHET-VOLTERRA :

$$Q_S(t) = \Sigma \iiint \dots \int_{\Delta} K_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i \dots) Q_e(\tau_1) \dots Q_e(\tau_i) \dots d\tau_1 \dots d\tau_i$$

Le modèle obtenu est du type polynômes opérationnels, les K_i constituant une famille de noyaux symétriques approximables par une série de simulations.

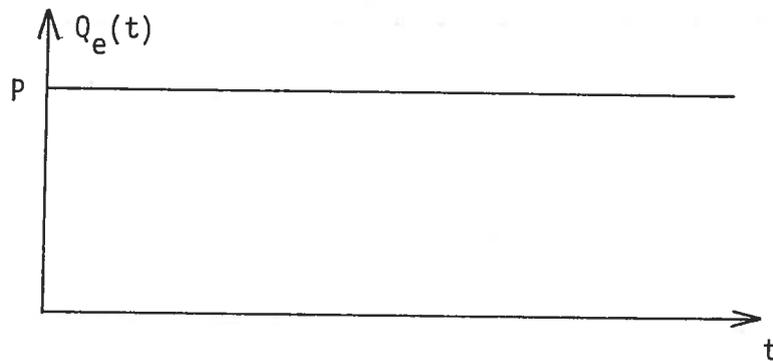
Il est intéressant de développer l'identification d'un tel modèle pour saisir son intérêt ou son non-intérêt hydrologique.

I.3 Identification d'un modèle polynomial non linéaire

A partir d'un ensemble de couples (e_i, s_i) , nous recherchons 0 tel que $\forall e, s = 0.e$. Pour que cette exposition soit claire, nous supposons que le modèle à polynômes est approximable en n'utilisant que deux noyaux K_1 et K_2 continus tels que :

$$Q_s(t) = \int_0^t K_1(t-\tau) Q_e'(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^t K_2(t-\tau_1, t-\tau_2) Q_e'(\tau_1) Q_e'(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

Soit une impulsion d'entrée du type distribution de HEAVISIDE définie sur \mathbb{R}^+ telle que $Q_e(t) = p \cdot H(t)$ $p \in \mathbb{R}^+$
 $t \in \mathbb{R}^+$



Nous obtenons alors :

$$Q_s(t) = p K_1(t) + p^2 K_2(t,t) \quad \forall t \in T \text{ compact, pris comme intervalle d'étude.}$$

Avec deux entrées définies par les courbes $p_1 H(t)$ et $p_2 H(t)$, $p_1 \neq p_2$ nous obtenons le système suivant :

$$Q_{s1}(t) = p_1 K_1(t) + p_1^2 K_2(t,t)$$

$$Q_{s2}(t) = p_2 K_1(t) + p_2^2 K_2(t,t) \quad \forall t \in T$$

On en tire :

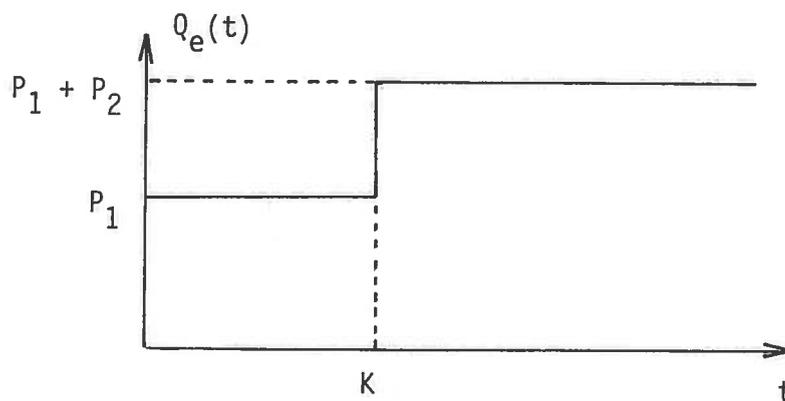
$$K_1(t) = \frac{Q_{s1}}{P_1} - \frac{P_1 Q_{s2} - P_2 Q_{s1}}{P_2 - P_1 P_2}$$

$$K_2(t,t) = \frac{Q_{s2} - \frac{P_2}{P_1} Q_{s1}(t)}{P_2 - P_1 P_2}$$

Le modèle polynomial non linéaire sera totalement identifié lorsque nous aurons approximé la surface $K_2(t, \rho) \quad \forall t \neq \rho \in T$. On suppose que le noyau K_2 est symétrique par rapport à ses arguments.

Soit une impulsion d'entrée définie par la courbe :

$$Q_e(t) = P_1 H(t) + P_2 H(t - K) \quad K \in T$$



La réponse est donnée par l'équation :

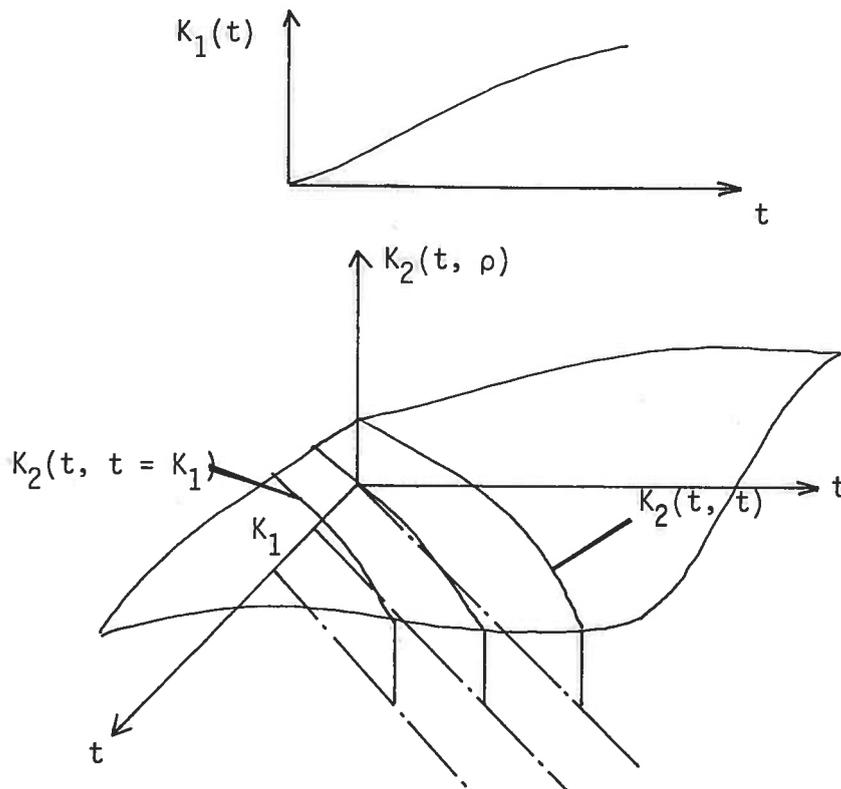
$$Q_s(t) = 2 P_1 P_2 K_2(t, t-K) + F(K_1(t), K_2(t,t)) \quad \forall t \in T$$

d'où :

$$K_2(t, t-K) = \frac{Q_s(t) - F(K_1(t), K_2(t, t))}{2 P_1 P_2} \quad \forall t \in T \text{ pour } K \text{ fixé}$$

Il suffit de répéter l'expérience Nfois si nous voulons identifier K_2 en Npoints K.

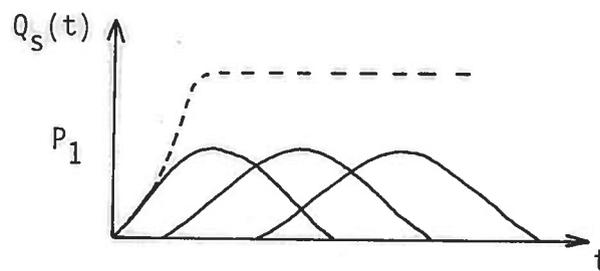
Avec N+2 expériences nous identifions les courbes suivantes :



Si la définition théorique d'un tel modèle non linéaire est relativement simple, son utilisation pratique semble beaucoup plus délicate voire incertaine. Les difficultés que l'on aura sont du même ordre que celles rencontrées par la pratique de la méthode de l'hydrogramme unitaire.

Nous devons mesurer ou construire des sorties $Q_{si}(t)$ dues à des pluies constantes.

Si nous nous basons sur la théorie de l'hydrogramme unitaire, les débits de sorties sont obtenus en superposant et en décalant dans le temps les sorties dues à plusieurs averses "unitaires" (voir la définition de SHERMAN [15]) ramenées à une valeur ρ_1 .



L'hypothèse fondamentale, sous-jacente à cette construction de la sortie, est la linéarité de la transformation. Il est donc théoriquement contre nature d'utiliser ce schéma pour obtenir les couples (e_i, s_i) . L'approximation du transformateur par un modèle à développement polynomial non linéaire nécessite avant une observation et une construction judicieuse des couples (entrée, sortie).

S'il était possible d'identifier un tel modèle, il ne serait que prévisionnel. En effet, il reproduirait l'hydrogramme de sortie correspondant à un événement pluviométrique quelconque, pour un bassin versant ou un élément de collecteur donné. Ce type de modèle n'est pas décisionnel puisqu'il ne permet pas de mesurer l'influence d'une particularité structurale du transformateur.

Toutes ces difficultés et ces restrictions pragmatiques, inhérentes à l'identification d'un modèle non linéaire pour un système complexe, ont conduit les hydrologues à approximer un phénomène non linéaire par des modèles linéaires.

1.4 Modèles linéaires

Les modèles holistiques linéaires sont construits en s'appuyant sur un

paradigme hydraulique, le système considéré (bassin versant ou collecteur avec un seul exutoire) étant mesuré par deux variables de flux et une variable d'état. L'approximation linéaire permet de représenter le transformateur par un filtre défini par une équation d'état du type :

$$V_s(t) = \sum_{k=0}^m a^k \frac{d^k Q_e}{dt} + \sum_{r=0}^n b^r \frac{d^r Q_s}{dt}$$

les coefficients a et b étant indépendants de $Q_e(t)$ et $Q_s(t)$. Pour rendre le modèle facilement utilisable et transparent, l'équation de stockage est simplifiée en ne prenant pas en compte les dérivées successives de $Q_e(t)$ et $Q_s(t)$.

En ajoutant une équation élaborée à partir du principe de conservation des flux, on pourrait utiliser directement le système suivant :

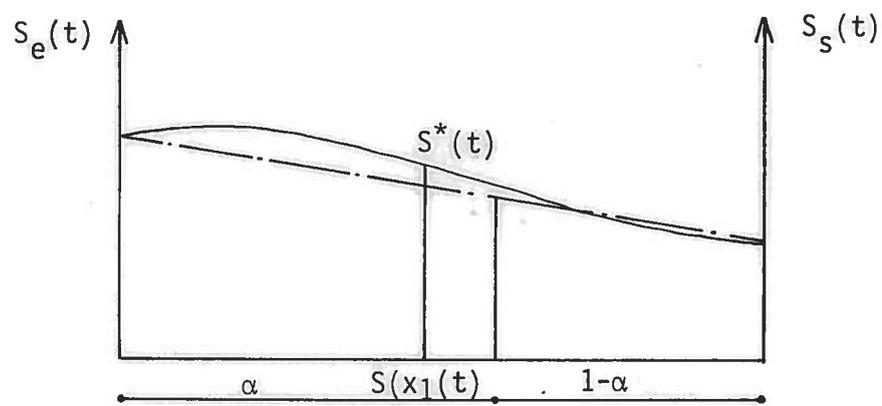
$$\begin{cases} V_s(t) = a Q_e(t) + b Q_s(t) \\ \frac{d V_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t) \end{cases}$$

les coefficients a et b' étant approximés sur des mesures réelles.

Les hydrologues ont tenté de signifier les deux paramètres pour rendre le modèle transposable à d'autres systèmes, définis par des caractéristiques structurales différentes. Ils ont remplacé a et b par deux paramètres K et α constants bien particuliers. En reprenant la démonstration du modèle de MUSKINGUM, K représente le rapport $\frac{L}{V}$.

L étant une longueur du transformateur (longueur du collecteur en général), V étant la vitesse à l'entrée ou à la sortie, constante. La signification de α est plus compliquée. Pour un élément de collecteur, le volume stocké au temps t est égal à $L \times S(x_1, t)$, $S(x_1, t)$ étant

la valeur moyenne de la section mouillée, approchée par $S^*(t) = \alpha S_e(t) + (1-\alpha) S_s(t)$.



La valeur de α mesure donc l'influence de l'entrée ou de la sortie sur la valeur du stockage.

Avec ces deux constantes, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned}
 & V_s(t) = K (Q_e(t) + (1-\alpha) Q_s(t)) \\
 \text{(I)} \quad & \frac{d V_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t)
 \end{aligned}$$

Il est évident qu'aucune considération est faite sur les types d'écoulement qui peuvent se présenter ainsi que sur les liens existants entre des variables telles que la vitesse, la hauteur d'eau, etc ...

Nous allons rechercher la ou les solutions d'un tel système d'équations.

II - ETUDE DES MODELES LINEAIRES

Le phénomène étudié est supposé introverti. Toutes causes, intervenant dans la définition de l'hydrogramme de sortie, a pour support temporel l'intervalle $[0, t]$, le temps zéro étant le début de l'averse ou de l'hydrogramme d'entrée. Tout ce qui précède ce temps et tout ce qui est après t est considéré sans influence sur le comportement du transformateur.

Les fonctions $Q_e(t)$, $Q_s(t)$, $V_s(t)$ sont continues, bornées à support compact sur $[0, T]$ le système (I) étant causal, il peut se mettre sous la forme :

$$Q_s(t) + K(1-\alpha) \frac{d Q_s(t)}{dt} = Q_e(t) + K\alpha \frac{d Q_e(t)}{dt}$$

En intégrant cette équation sans second membre, nous obtenons :

$$Q_s(t) = B e^{-\frac{t}{K(1-\alpha)}}$$

En utilisant la technique de la variation de la constante, on obtient :

$$Q_s(t) = \frac{1}{K(1-\alpha)} e^{-t/K(1-\alpha)} * Q_e(t) + \frac{\alpha}{\alpha-1} e^{-t/K(1-\alpha)} * Q_e'(t) + e^{-t/K(1-\alpha)} * Q_s(0)$$

La fonction $e^{-t/K(1-\alpha)}$ est à décroissance rapide, l'opérateur de convolution noté $*$ existe donc. $Q_s(t)$ est continue et bornée.

Comme $Q_e(t)$, $e^{-t/K(1-\alpha)}$ sont deux fonctions à support limité à gauche, $Q_s(t)$ est limitée à gauche.

$e^{-t/K(1-\alpha)}$ étant indéfiniment différentiable,

$$e^{-t/K(1-\alpha)} * Q_e(t) = \left\langle e^{-\frac{t-\tau}{K(1-\alpha)}}, \frac{d}{d\tau} Q_e(\tau) \right\rangle$$

$$\left\langle e^{-\frac{t-\tau}{K(1-\alpha)}}, \frac{d Q_e(\tau)}{d\tau} \right\rangle = - \left\langle \frac{d}{d\tau} e^{-\frac{t-\tau}{K(1-\alpha)}}, Q_e(\tau) \right\rangle$$

La dérivation étant prise au sens des distributions nous obtenons :

$$Q_s(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha} e^{-t/K(1-\alpha)} (\delta(0) * Q_e(t)) + \frac{\alpha}{\alpha-1} (\delta(t) * Q_e(t)) + \frac{e^{-t/K(1-\alpha)}}{K(1-\alpha)^2} * Q_e(t)$$

$$+ Q_s(0) e^{-t/K(1-\alpha)}$$

La solution du système I s'écrit donc :

$$(II) \quad Q_s(t) = Q_s(0) e^{-t/K(1-\alpha)} + Q_e(0) \frac{\alpha}{1-\alpha} e^{-t/K(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{\alpha-1} Q_e(t)$$

$$+ \frac{1}{K(1-\alpha)^2} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{K(1-\alpha)}} Q_e(\tau) d\tau.$$

$Q_s(0)$ et $Q_e(0)$ étant les valeurs du débit de sortie et d'entrée mesurées au temps $t = 0$.

II.1 Classification

Les deux premiers termes de la relation (II) mesurent le vieillissement du système. En effet, il représente la variation dans le temps des quantités existantes dans le système juste avant le débit, due à la pluie

étudiée ou à l'hydrogramme arrivant à l'amont du collecteur. $Q_s(0)$ et $Q_e(0)$ peuvent représenter le débit de base permanent.

Les deux derniers termes mesurent la réponse due uniquement au phénomène étudié. Ils représentent donc l'évolution d'un système non vieillissant ($Q_e(0) = Q_s(0) = 0$).

II.1.a $Q_s(0) \neq 0; Q_e(0) \neq 0 \quad \alpha \in]0, 1[$

Les deux fonctions $Q_e(t)$ et $Q_s(t)$ sont reliées entre elles par un opérateur O somme de deux opérateurs C_1 et C_2 .

$C_1 \equiv M \oplus$ Opérateur linéaire vieillissant

Nous supposons implicitement que $Q_s(0)$ peut être relié à $Q_e(0)$ par une relation quelconque.

$C_2 \equiv M' *$ Opérateur linéaire héréditaire non vieillissant.

Cet opérateur peut être mis sous la forme :

$(\frac{\alpha}{\alpha - t} \delta + \frac{h}{K(1-\alpha)^2}) *$

avec δ distribution de DIRAC (mémoire instantanée) et avec h distribution régulière, telle que :

$t \xrightarrow{h} e^{-t/K(1-\alpha)}$

Ces deux distributions sont naturellement positives.

$Q_s = M \oplus Q_e + M' * Q_e$

$$\text{II.1.b } \underline{Q_s(0) = 0 \quad \alpha \in]0,1[}$$

L'opérateur C_1 peut alors se mettre sous la forme : $a.M_1 * a$ étant une fonction et M_1 une distribution. (Mémoire non vieillissante structurée par un opérateur de convolution).

$$Q_s = (a.M_1 + M') * Q_e$$

Opérateur pseudo convolutif

$$\text{II.1.c } \underline{Q_s(0) = Q_e(0) = 0 \quad \alpha \in]0,1[}$$

Le système est modélisé par un opérateur linéaire héréditaire non vieillissant :

$$Q_s = M' * Q_e$$

M' est la somme de $a\delta$ et K avec $a = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ et $K = \frac{h}{K(1-\alpha)^2}$.

Cet opérateur appartient à la classe des modèles du type de BOLTZMANN VOLTERRA régulier de deuxième espace. En effet, les opérateurs linéaires héréditaires non vieillissants relient l'entrée à la sortie par la relation du type :

$$s(t) = \phi(t) * e'(t) \quad e'(t) \text{ dérivée de l'entrée}$$

Soit T_ϕ la distribution associée à ϕ

$$s(t) = \langle T_\phi, e' \rangle = - \langle \phi'_t, e(t) \rangle + \phi(0) e(t)$$

En identifiant nous obtenons :

$$\begin{cases} \phi(0) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \\ \phi'(t) = -\frac{1}{K(1-\alpha)^2} e^{-t/K(1-\alpha)} \end{cases}$$

La distribution associée à l'opérateur présente un saut à l'origine.

La propriété la plus importante de cet opérateur est sa réversibilité : $(M^*)^{-1}$ existe et est du même type que M^* .

$$Q_s = 0 * Q_e$$

$$Q_e = 0^{-1} * Q_s$$

En utilisant la transformation de LAPLACE on obtient :

$$Q_e(t) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} Q_s(t) + \frac{1 - \alpha}{K\alpha^2} e^{t/K} * Q_s(t)$$

$$\text{II.1.d } Q_e(0) = Q_s(0) = \alpha = 0$$

Q_e et Q_s sont reliées par l'opérateur $(\frac{1}{K} h)^*$

L'opérateur convolutif inverse est : $\delta(t) + K \delta'(t)$

$$\begin{cases} Q_s = \frac{1}{K} h * Q_e \\ Q_e = Q_s + K Q_s' \end{cases}$$

II.1.e $\alpha = 1$

$$Q_s = (\delta + K\delta') * Q_e$$

Il n'y a plus de mémoire régulière. L'opérateur de transformation est la somme d'un opérateur de translation instantané et d'un amortissement instantané.

L'opérateur convolutif inverse est :

$$\frac{1}{K} h *$$

$$\begin{aligned} Q_s &= Q_e + K Q_e' \\ Q_e &= \frac{1}{K} h * Q_s \end{aligned}$$

Tableau récapitulatif
=====

	$\alpha \in]0, 1[$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$
$Q_s(0) \neq 0$ $Q_e(0) \neq 0$	$0 = M \Theta + M'*$ Système linéaire héréditaire vieillissant	$0 = M \Theta + M'*$ Système linéaire héréditaire vieillissant	$0 = M'*$
$Q_e(0) \neq 0$ $Q_s(0) = 0$	$0 = (a M_1 + M')*$ Système linéaire héréditaire vieillissant pseudo-convolutif.	$0 = M'*$	$0 = M'*$
$Q_e(0) = Q_s(0) = 0$	$0 = M'*$ Système linéaire héréditaire non vieillissant	$0 = M'*$ Système linéaire héréditaire	$0 = M'*$ Système linéaire héréditaire convolutif.
	$M' \equiv a\delta + h$	$M' = h$	$M' = \delta + K\delta'$

Nous venons de voir qu'il était possible d'associer une solution analytique simple au système de MUSKINGUM qui représente l'écriture généralisée des modèles holistiques à paradigme hydraulique utilisés en hydrologie : ($Q_e(0) = Q_s(0) = 0$).

$$Q_s(t) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} Q_e(t) + \frac{1}{K(1-\alpha)^2} e^{-t/K(1-\alpha)} * Q_e(t)$$

Cette écriture classe le modèle; il appartient à la grande classe des

modèles mécanistes héréditaires linéaires. Il possède une propriété particulière, la réversibilité qui n'est certes pas une qualité du phénomène lui-même. En effet, ce phénomène est purement irréversible.

Ce modèle est un filtre simplifié puisqu'il est élaboré en ne considérant pas les dérivées successives des fonctions entrée et sortie. Cette simplification permet d'ajuster le modèle grâce aux paramètres K et α .

II.2 Détermination des paramètres K et α

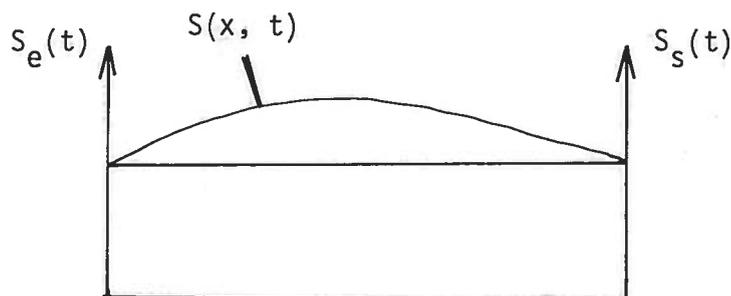
Les paramètres K et α ne représentent pas des qualités phénoménales propres mais des grandeurs introduites pour les besoins de la modélisation. La signification apparente de ces paramètres ne nous permet pas de les mesurer directement.

$K = \frac{L}{V}$: V vitesse constante à l'entrée ou à la sortie,

L longueur induite par la modélisation

α : mesure l'influence de l'entrée et de la sortie sur la valeur du stockage.

En réalité α doit varier avec le temps et même dans certains cas ne pas exister.



La valeur de ces deux paramètres doit être déduite de la modélisation elle-même, leur valeur devant être ajustée uniquement pour rendre le modèle opérationnel ou significatif.

Deux techniques théoriquement simples peuvent être utilisées pour déterminer ces paramètres, l'ajustement pratique étant certainement un peu plus hasardeux.

La première technique est basée sur l'emploi d'un débit d'entrée constant du type distribution d'HEAVISIDE. $Q_e(t) = \sigma_0 H(t)$ $\sigma_0 \in \mathbb{R}^+$.

Cette technique s'inspire de la méthode de l'hydrogramme unitaire et les constructions d'averses unitaires peuvent certainement être reprises si l'on veut appliquer le ou les modèles à un bassin versant.

En prenant donc $Q_e(t) = \sigma_0 H(t)$, pour $Q_s(t) < \sigma_0 H(t)$, le modèle linéaire héréditaire vieillissant ($\alpha \in]0, 1[$) donne :

$$(1) \quad \ln(\sigma_0 H(t) - Q_s(t)) = -\frac{1}{K(1-\alpha)} t + \ln\left(\frac{\sigma_0 H(t)}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha} Q_e(0) - Q_s(0)\right)$$

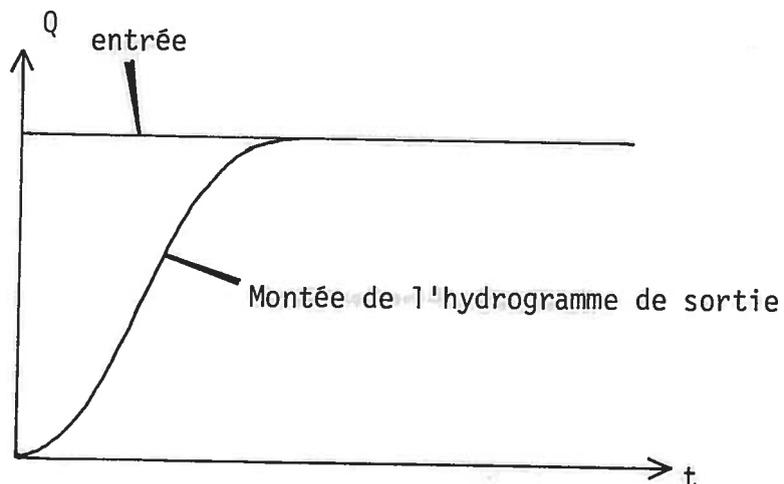
Cette courbe est de la forme $y = bt + a$

avec $K = -\frac{1}{b(1-\alpha)}$ et $\alpha = \frac{e^a + Q_s(0) - \sigma_0}{e^a + Q_s(0) - Q_e(0)}$

Ce calcul peut être généralisé aux autres modèles :

	K	α
$\alpha \in]0, 1[; Q_e(0) \neq 0$ $Q_s(0) \neq 0$	$\frac{-1}{b(1-\alpha)}$	$\frac{e^a + Q_s(0) - \sigma_0}{e^a + Q_s(0) - Q_e(0)}$
$\alpha \in]0, 1[; Q_e(0) = 0$ $Q_s(0) = 0$	$\frac{-1}{b(1-\alpha)}$	$1 - \frac{\sigma_0}{e^a}$
$\alpha = 0; Q_s(0) = 0$	$-1/b$	0

La courbe (1) est une image de la montée de l'hydrogramme de sortie pour une entrée constante. Théoriquement cette seule donnée suffit, le phénomène étant supposé linéaire. Pour un bassin versant donné, il suffit donc de rechercher ou de construire la courbe qui représente au mieux en moyenne la montée des hydrogrammes.



La deuxième technique utilise les courbes d'un couple (entrée sortie) et la courbe de stockage que l'on peut en déduire. Cette technique s'inspire de la méthode de M. DESBORDE qui mesure la valeur de K ($\alpha = 0$). Rapporté au phénomène, K est une valeur moyenne du temps de parcours des eaux. Il est donc égal à la différence $T_s - T_e$.

T_s et T_e étant respectivement les abscisses temporelles des centres de gravité des courbes $Q_s(t)$ et $Q_e(t)$.

Le paramètre α qui mesure l'influence de l'entrée et de la sortie sur le volume stocké ne peut être mesuré qu'en construisant la courbe représentative de ce volume.

Pour clarifier la mesure du coefficient α , nous supposerons que le phénomène est non vieillissant.

$$V_s(t) = \frac{1}{1 - \alpha} e^{-t/K(1-\alpha)^2} * Q_e(t)$$

Le centre de gravité du volume stocké est donné par l'égalité :

$$T_{V_s} = \frac{\int_0^{\infty} t V_s(t) dt}{\int_0^{\infty} V_s(t) dt}$$

Ce temps T_{V_s} peut s'exprimer à l'aide des transformées de LAPLACE de la fonction $V_s(t)$: $L(V_s(t)) = V(p)$ en remarquant que :

$$\int_0^{\infty} t V_s(t) dt = \left(\int_0^{\infty} e^{-pt} t V_s(t) dt \right)_{p=0} = \left(- \frac{d}{dp} V(p) \right)_{p=0}$$

$$\int_0^{\infty} V_s(t) dt = (V(p))_{p=0}$$

donc
$$T_{V_S} = - \left(\frac{d}{dp} \frac{V(p)}{V(p)} \right) \text{ pour } p = 0$$

$$V(p) = L \left(\frac{1}{1-\alpha} e^{-t/K(1-\alpha)^2} \right) \cdot L(Q_e(t))$$

$$V(p) = \frac{1}{1-\alpha} \times \frac{1}{p + \frac{1}{K(1-\alpha)}} L(Q_e(t))$$

$$\frac{d V(p)}{dp} = \frac{1}{1-\alpha} \left[\left(\frac{d}{dp} L(Q_e(t)) \right) \times \frac{1}{p + \frac{1}{K(1-\alpha)}} - L(Q_e(t)) \times \frac{1}{p + \frac{1}{K(1-\alpha)^2}} \right]$$

d'où T_{V_S} en faisant $p = 0$:

$$T_{V_S} = \frac{-K \frac{d}{dp} L(Q_e(t)) \Big|_{p=0} + K^2(1-\alpha) L(Q_e(t)) \Big|_{p=0}}{K L(Q_e(t)) \Big|_{p=0}}$$

En utilisant le centre de gravité T_E de l'hydrogramme d'entrée donné par la relation :

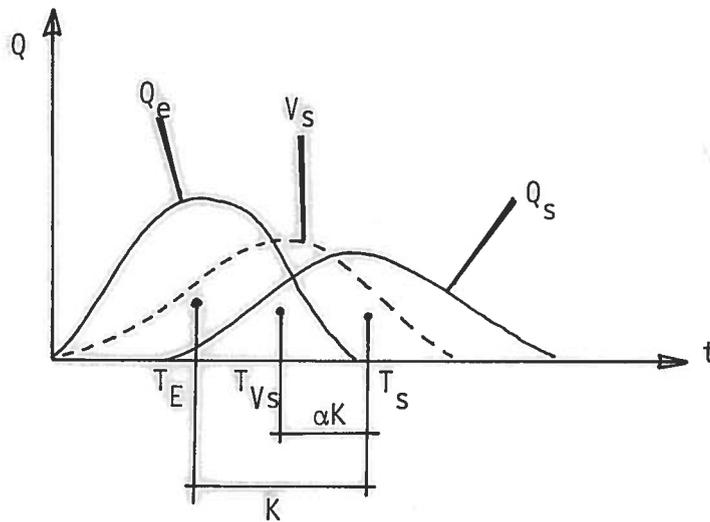
$$T_E = - \frac{\left(\frac{d}{dp} L(Q_e(t)) \right)}{L(Q_e(t)) \Big|_{p=0}}$$

$$T_{V_S} = T_E + K(1-\alpha)$$

Comme K est donné par $T_S - T_E$ on obtient la mesure de K et α par les deux relations :

$$K = T_S - T_E$$

$$\alpha = \frac{T_S - T_{V_S}}{T_S - T_E}$$



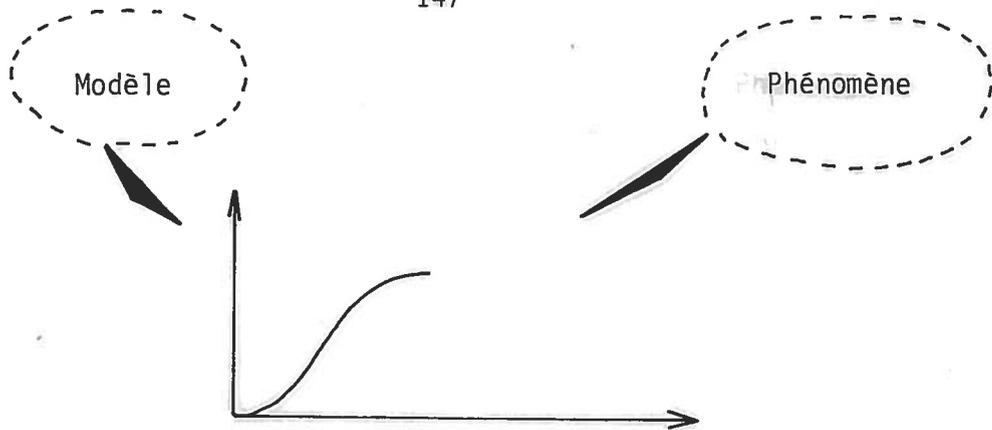
On retrouve naturellement la signification de :

$$\alpha = 0 \quad T_S = T_{V_S}, \quad S^*(t) \text{ est identique à } S_S(t)$$

$$\alpha = 1 \quad T_E = T_{V_S}, \quad S^*(t) \text{ est identique à } S_e(t)$$

A priori, il est bien difficile de préférer l'une ou l'autre technique proposée pour approximer la valeur des coefficients du modèle. La première demandant uniquement la construction d'une sortie correspondant à une entrée constante.

A travers le modèle, cette courbe identifie donc le fonctionnement du transformateur.



Pour cette simple raison, cette technique pourrait avoir la préférence des utilisateurs, mais comme nous le verrons sur un exemple, son exploitation expérimentale reste délicate (Voir Annexe I).

La deuxième méthode nécessite la mesure des trois courbes $Q_e(t)$, $V_s(t)$ et $Q_s(t)$. La détermination du hétérogramme net mis sous la forme $i(t)$ (ou d'un hydrogramme $Q_e(t)$) pose toujours de nombreux problèmes, liés à la reconnaissance des différentes pertes ou rétention du bassin versant.

La reconnaissance de α peut être faussée par la construction de la courbe de stockage qui est induite par le modèle lui-même, à moins que cette fonction soit mesurable expérimentalement. Quoiqu'il en soit, il ne faut surtout pas oublier que ces deux paramètres ne mesurent pas des caractéristiques "réelles" du transformateur mais deux caractéristiques abstraites induites par le modèle type polynomial.

III - APPLICATION

III.1 Choix d'un modèle hydrologique

L'hydrologie étudie principalement la réaction d'un réseau et d'un ensemble de bassin versant (Structure du système) à un événement pluviométrique (flux) susceptible de révéler son comportement dans un cas défavorable (notion de risque). Cela amène à considérer des événements de types orages d'été à très forte intensité et de durée relativement courte. (Le choix de l'évènement étant naturellement fort complexe car il dépend de la structure même du système).

Si l'on étudie la réaction d'un bassin versant, les quantités $Q_s(0)$ et $i(0)$ ou $Q_e(0)$ sont nulles ou pratiquement négligeables.

Dans un réseau, ces quantités représentant un débit de base, se superpose à la solution correspondant à l'entrée étudiée :

$$Q_s = Q_b + Q_s : (Q_b \text{ débit de base}).$$

Si ces considérations sont vérifiées, nous serons conduits à utiliser la classe des modèles linéaires héréditaires non vieillissant :

$$Q_s(t) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} Q_e(t) + \frac{1}{K(1-\alpha)^2} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{K(1-\alpha)}} Q_e(\tau) d\tau$$

ou

$$Q_s(t) = \frac{1}{K} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{K}} Q_e(\tau) d\tau$$

A priori, nous ne retenons pas le modèle dont l'opérateur est $\delta + K\delta'$. Il est beaucoup moins riche que les deux autres puisqu'il ne possède pas de mémoire régulière.

149

III.2 Formulation pratique

On suppose connues les valeurs de K et α .

La courbe d'entrée $Q_e(t)$ représentant un hydrogramme ou un hyétogramme n'est connue que point par point, ou sous la forme d'une fonction en escalier avec un pas de temps Δt constant. On peut utiliser deux méthodes pour calculer $Q_s(t)$.

- A partir du système différentiel

Il suffit de discrétiser le système. Seule les conditions de stabilité et de convergence permettent de s'assurer de la validité de la solution. La discrétisation des fonctions ne doit pas introduire d'effets parasites (non conservation des débits par exemple ou instabilité locale).

- A partir de l'opérateur de convolution

L'opérateur portant dans sa définition une visée globale du phénomène, les opérations sont simples à mener. Il n'y a pas de problème de convergence.

$Q_s(t)$ est obtenu par intégration numérique.

Les modèles utilisés en hydrologie urbaine sont de la classe non vieillissant. Pour plus de généralité nous donnons l'intégration du modèle vieillissant, les autres s'en déduisant aisément.

On suppose donc que le débit entrant $Q_e(t)$ est donné sous forme de fonction en escalier :

$$\left. \begin{aligned} Q_s(t) &= Q_s(i) \\ Q_e(t) &= Q_e(i) \end{aligned} \right\} t \in](i-1) \Delta t, i \Delta t]$$

$$\left. \begin{aligned} Q_S(t) &= Q_S(i+1) \\ Q_e(t) &= Q_e(i+1) \end{aligned} \right\} t \in]i \Delta t, (i+1) \Delta t]$$

$$Q_S(t) = Q_S(0) e^{-t/K(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{1-\alpha} e^{-t/K(1-\alpha)} Q_e(0) + \frac{\alpha}{\alpha-1} Q_e(t) + \frac{1}{K(1-\alpha)^2} \int_0^t Q_e(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{K(1-\alpha)}} d\tau$$

$$\text{Soit : } A = Q_S(0) + \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot Q_e(0)$$

Pour $t \in](i-1) \Delta t, i \Delta t]$ on obtient :

$$Q_S(i) = A e^{-i\Delta t/K(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{\alpha-1} Q_e(i) + \frac{1}{K(1-\alpha)^2} \int_0^{i\Delta t} Q_e(\tau) e^{-\frac{i\Delta t-\tau}{K(1-\alpha)}} d\tau$$

Pour $t \in]i \Delta t, (i+1) \Delta t]$ on obtient :

$$Q_S(i+1) = A e^{-(i+1)\Delta t/K(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{\alpha-1} Q_e(i+1) + \frac{1}{K(1-\alpha)^2} \int_0^{(i+1)\Delta t} Q_e(\tau) e^{-\frac{(i+1)\Delta t-\tau}{K(1-\alpha)}} d\tau$$

$$\text{Posons } B = A e^{-(i+1)\Delta t/K(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{\alpha-1} Q_e(i+1)$$

$$Q_S(i+1) = B + \frac{Q_e(i+1)}{1-\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{K(1-\alpha)}} \right) + e^{-\frac{\Delta t}{K(1-\alpha)}} \left(Q_S(i) - A e^{-\frac{i\Delta t}{K(1-\alpha)}} - \frac{\alpha}{\alpha-1} Q_e(i) \right)$$

On obtient la relation :

$$Q_S(i+1) = e^{-\frac{\Delta t}{K(1-\alpha)}} Q_S(i) + \frac{\alpha}{1-\alpha} e^{-\frac{\Delta t}{K(1-\alpha)}} Q_e(i) + Q_e(i+1) \left[1 - \frac{e^{-\frac{\Delta t}{K(1-\alpha)}}}{1-\alpha} \right]$$

pour $\alpha \in]0, 1[$, le terme vieillissant disparaît. On a donc la même intégration numérique pour le modèle avec conditions initiales nulles.

pour $\alpha = 0$ on obtient la relation suivante :

$$Q_s(i+1) = e^{-\Delta t/K} Q_s(i) + Q_e(i+1) (1 - e^{-\Delta t/K})$$

===== Comparaison des deux méthodes d'utilisation =====

Pour effectuer cette comparaison, nous allons discrétiser le système différentiel holistique avec les deux schémas suivants :

$$Q(t) = Q(i \Delta t)$$

$$Q(t) = \frac{Q(i \Delta t) + Q((i-1) \Delta t)}{2}$$

La dérivée étant obtenue avec le premier terme du développement de TAYLOR :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q(t) - Q(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

Suivant les valeurs de α et le schéma choisi, nous obtenons le tableau suivant, le modèle étant mis sous la forme :

$$Q_s(I+1) = A Q_e((i+1)\Delta t) + B \cdot Q_e(i-1) \Delta t) + C \cdot Q_s((i-1)\Delta t)$$

152

Type de schéma	Numéro du modèle	α	A	B	C
1er schéma	1	$]0 \ 1[$	$\frac{\Delta t - K\alpha}{\Delta t - K(1-\alpha)}$	$\frac{K\alpha}{\Delta t + K(1-\alpha)}$	$\frac{K(1-\alpha)}{\Delta t(K(1-\alpha))}$
	2	0	$\frac{\Delta t}{\Delta t + K}$	0	$\frac{K}{\Delta t + K}$
	3	1	$\frac{\Delta t - K}{\Delta t}$	$\frac{K}{\Delta t}$	0
2ème schéma	4	$]0 \ 1[$	$\frac{\Delta t - 2K\alpha}{\Delta t + 2K(1-\alpha)}$	$\frac{\Delta t + 2K\alpha}{\Delta t + 2K(1-\alpha)}$	$\frac{2K(1-\alpha) - \Delta t}{\Delta t + 2K(1-\alpha)}$
	5	0	$\frac{\Delta t}{\Delta t + 2K}$	$\frac{\Delta t}{\Delta t + 2K}$	$\frac{2K - \Delta t}{\Delta t + 2K}$
	6	1	$\frac{\Delta t - 2K}{\Delta t}$	$\frac{\Delta t + 2K}{\Delta t}$	- 1
Intégration Numérique	7	$]0 \ 1[$	$1 - \frac{1}{1-\alpha} e^{-\frac{\Delta t}{K(1-\alpha)}}$	$\frac{\alpha}{1-\alpha} e^{-\frac{\Delta t}{K(1-\alpha)}}$	$e^{-\frac{\Delta t}{K(1-\alpha)}}$
	8	0	$1 - e^{-\frac{\Delta t}{K}}$	0	$e^{-\frac{\Delta t}{K}}$

Utilisée par MUSKINGUM

Schéma utilisé par KALININ MILJUKOV

Relation utilisée par DESBORDES.

Cette comparaison ayant pour but la reconnaissance des erreurs possibles dues aux différentes techniques d'utilisation, nous choisissons une impulsion d'entrée susceptible de révéler la montée des hydrogrammes de sortie.

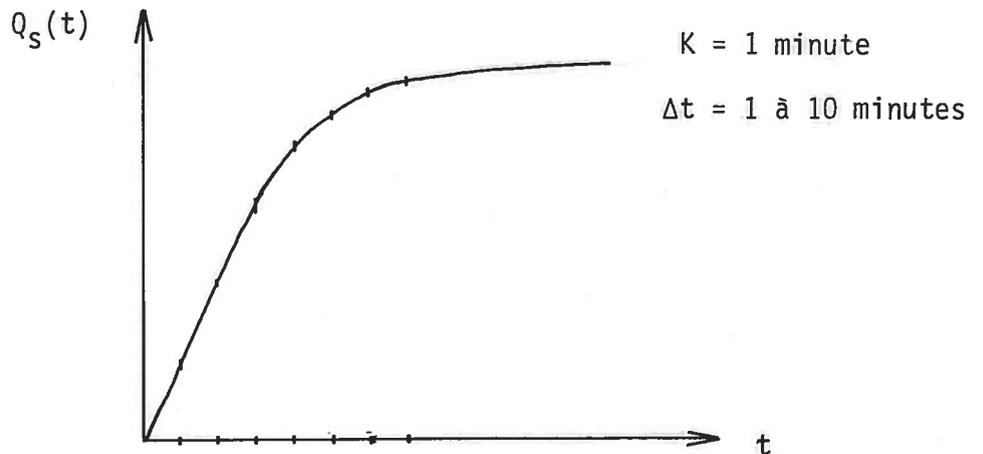
$$Q_e(i \Delta t) = \sigma_0 H(t)$$

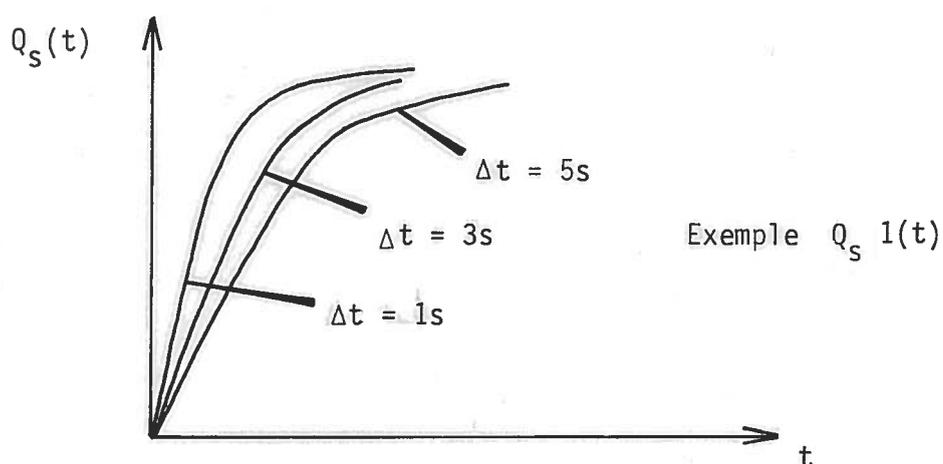
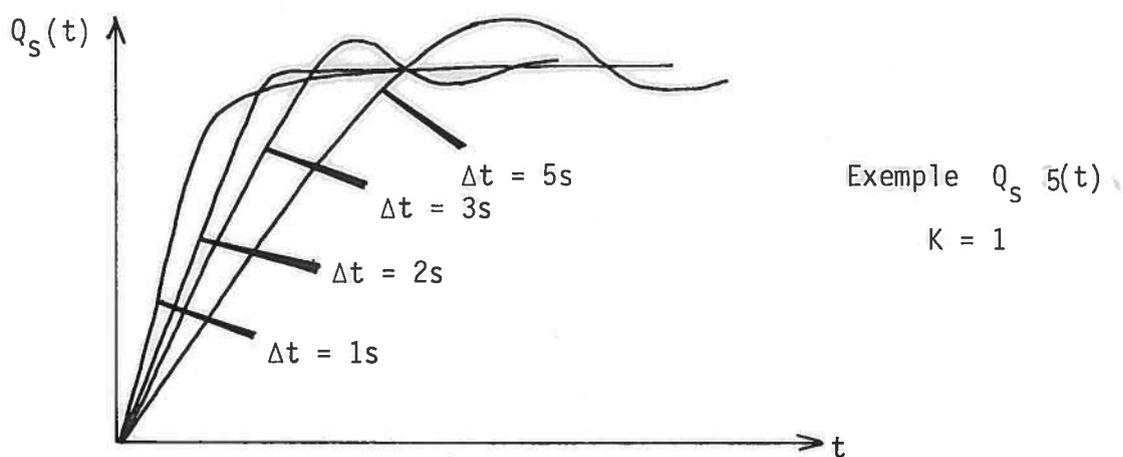
Nous calculons les réponses obtenues par les huit modèles définis dans le tableau ci-avant avec les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} K = 1, 2, \dots, 10 \text{ minutes} \\ \Delta t = K, K+1, \dots, 10 \text{ minutes} \end{cases}$$

Soit pour chaque modèle 55 couples $(K, \Delta t)$, la valeur de α étant fixée.

Réponse type modèle 7.8



Réponse type modèles 1.2.3Réponse type modèles 4.5.6

Ces courbes ne représentent pas l'approximation d'un phénomène réel mais découlent d'une exploitation directe des diverses formules présentées dans le tableau.

Les modèles obtenus par intégration numérique donnent des montées d'hydrogrammes indépendante du pas de temps Δt .

Les modèles obtenus par discrétisation directe du système donnent des sor-

ties qui peuvent être localement instables tout en convergeant vers $Q_e(t)$.

La discrétisation choisie par MUSKINGHUM, par exemple, peut donner des sorties oscillantes autour de la valeur σ_0 tout en convergeant vers cette valeur.

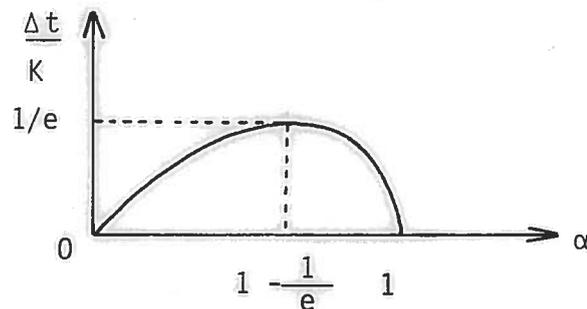
Cela n'est pas dû à un défaut de convergence mathématique du modèle discrétisé :

$$Q_s^{t+1} = \gamma \cdot Q_s^t + F(t) \quad \gamma \text{ étant toujours compris entre } -1 \text{ et } +1.$$

Les perturbations locales observées proviennent d'un mauvais choix du pas Δt vis-à-vis de K (qui peut être considéré comme un temps moyen de parcours) et de α . Sans vouloir étudier le domaine d'application phénoménale de ces modèles discrétisés, on peut remarquer que ces perturbations locales sont dues à triplet $(K, \alpha, \Delta t)$ qui rend négatif au moins l'un des trois coefficients A, B, C ; d'où les conditions de positivité des coefficients.

Modèle	A	B	C
1	$\Delta t/K \geq \alpha$		
2			
3	$\Delta t/K \geq 1$		
4	$\frac{\Delta t}{K} \geq 2\alpha$		$\frac{\Delta t}{K} \leq 2(1-\alpha)$
5			$\Delta t/K \leq 2$
6	$\Delta t/K \geq 2$		toujours négatif
7	$\frac{\Delta t}{K} \geq (1-\alpha) \ln \frac{1}{1-\alpha}$		
8			

Pour le modèle 7, obtenu par intégration numérique A est toujours positif, $\forall \alpha \in]0[1[$, si $\Delta t/k \geq \frac{1}{e}$.



Pour ce modèle, le non respect de cette condition entraîne des perturbations à l'origine de la montée de l'hydrogramme, le choix du pas Δt étant trop faible vis-à-vis de la valeur du K . Un $\Delta t/k$ correct ne corrige pas la perturbation due à un Δt trop faible mais ne la fait pas apparaître puisque la montée de l'hydrogramme a même allure $\forall \Delta t$.

Un mauvais choix du pas de temps Δt vis-à-vis de K et α révèle des défauts inhérents à la modélisation mathématique. L'intégration numérique est théoriquement plus satisfaisante, la discrétisation directe du système ayant l'"avantage" de fournir un degré de liberté (choix de la discrétisation) qui sert à caler les hydrogrammes calculés sur les hydrogrammes réels (technique de calcul et non technique de modélisation).

III.3 Application à un ensemble de bassins versants à réservoirs en série (et/ou) en parallèles

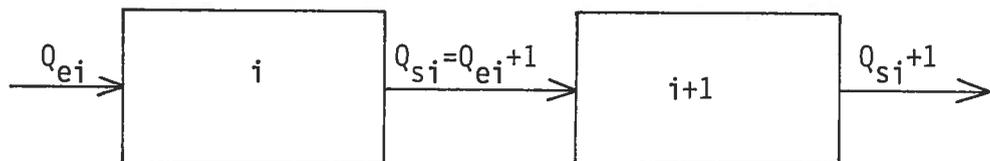
Un réseau d'assainissement est constitué par un ensemble de canalisations de caractéristiques différentes (pentes, longueur, ...). On peut dire que l'on est en présence de n sous-systèmes. On définit alors la structure d'un système général, imagée par un ensemble de réservoirs linéaires mis en parallèle et en série.

De même, un bassin versant ou un ensemble de bassins versants est constitué d'unités de caractéristiques différentes (type de sol, urbanisation,..)

La structure de l'ensemble considéré dépend naturellement de l'unité choisie c'est-à-dire des sous systèmes établis et déterminés au préalable (calcul des coefficients K et α).

La réponse d'un système général à une entrée donnée (hyétogramme, hydrogramme) peut être obtenu de deux façons :

- Calculer la réponse Q_{s_i} du sous-système i grâce à l'opérateur choisi connaissant K_i et α_i . Cette réponse devient l'entrée $Q_{e_{i+1}}$ pour le sous système aval ...



On effectue une démarche pas à pas pour déterminer la réponse $Q_s = Q_{s_n}$.

On détermine au préalable l'opérateur du système général par "combinaison" des opérateurs de chaque sous-système. On obtient le schéma classique.

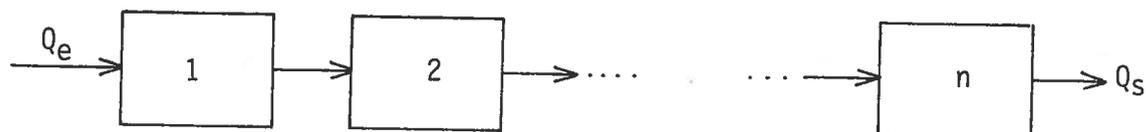
$$Q_s = O Q_e$$

Cette façon de procéder est relativement simple lorsque l'on a très peu de sous-systèmes, s'ils ont des caractéristiques différentes et si les réservoirs images sont, soit en série, soit en parallèle.

Elle devient compliquée lorsque la configuration n'est pas simple, la première démarche étant alors plus efficace.

Nous allons voir comment on peut déterminer un opérateur de transformation pour quelques cas simples.

III.2.1 Réservoirs en série



$$\begin{cases} \frac{dS_i}{dt} = Q_{si-1} - Q_{si} \\ S_i = K_i \left(\alpha_i Q_{si-1} + (1 - \alpha_i) Q_{si} \right) \end{cases}$$

Les inconnues sont les S_i et les Q_{si} . On a donc un système de $2n$ équations à $2n$ inconnues.

Soit O_i l'opérateur du sous-système i . La fonction de transfert (transformée de LAPLACE) de l'opérateur O est le produit des fonctions de transfert de chaque sous système.

$$L(O) = \prod_i L(O_i)$$

avec $\alpha_i \in]0, 1[$

$$L(O_i) = \frac{\alpha_i}{\alpha_i - 1} + \frac{1}{K_i(1-\alpha_i)^2} \frac{1}{s + \frac{1}{K_i(1-\alpha_i)}}$$

Exemple $n = 2$

$$\alpha_1 \neq \alpha_2$$

$$K_1 \neq K_2$$

En posant $a_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_j - 1}$ $b_j = \frac{1}{K_j(1-\alpha_j)^2}$

$$c_j = \frac{1}{K_j(1-\alpha_j)}$$

$$0 = a_1 a_2 \delta + a_1 b_2 e^{-c_2 t} + a_2 b_1 e^{-c_1 t} + \frac{b_2 b_1}{c_2 - c_1} \left(e^{-c_1 t} - e^{-c_2 t} \right)$$

$$n = 3 \quad \alpha_i = \alpha \quad \forall i$$

$$K_i = K \quad \forall i$$

$$0 = \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^3 \delta + \frac{3\alpha}{\alpha-1} \frac{1}{K^2(1-\alpha)^4} e^{-\frac{t}{K(1-\alpha)}} + \frac{3\alpha^2}{(\alpha-1)^2} e^{-\frac{t}{K(1-\alpha)}} + \frac{1}{K^3(\alpha-1)^6} (t e^{-t/K(1-\alpha)^2} \frac{1}{2!})$$

Exemple : $\alpha_i = 0 \quad \forall i$ les relations obtenues sont plus simples.

$$L(0) = \prod_i \left(\frac{1}{K_i} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{K_i}} \right)$$

$$n = 2$$

$$0 = \frac{1}{K_1 K_2} \left(\frac{1}{K_2 - K_1} (e^{-\frac{t}{K_1}} - e^{-\frac{t}{K_2}}) \right)$$

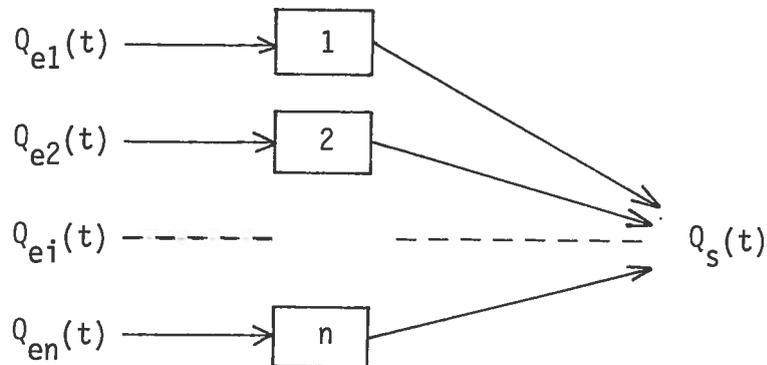
$K_i = K \quad \forall i$ pour n réservoirs en cascades

$$0 = \frac{1}{K} \frac{e^{-t/K}}{\Gamma(n)} \left(\frac{t}{K} \right)^{n-1}$$

III.2.2 n Réservoirs en parallèles

$$\begin{cases} S_i = K_i (L_i Q_{ei} + (1-L_i) Q_{si}) & \text{système de } 2n \text{ équations} \\ \frac{dS_i}{dt} = Q_{ei} - Q_{si} & \text{à } 2n \text{ inconnues} \end{cases}$$

$$\text{avec } Q_s = \sum_i Q_{si}$$



Lorsque les entrées sont toutes des fonctions différentes, il est impossible de construire un opérateur général. On calcule alors séparément chaque Q_{si} que l'on somme ensuite.

$$\text{Si } Q_{ei} = Q_e \quad \forall i \text{ on a :}$$

$$L(0) = \sum_i L(0_i)$$

Exemple : $L_i \in]0, 1[\quad \forall i \quad K_i \neq K_j \quad \forall i \neq j$

$$0 = \delta \cdot \left(\sum_i \frac{\alpha_i}{\alpha_i - 1} \right) + \sum_i \frac{1}{K_i (1 - \alpha_i)^2} e^{-\frac{t}{K_i (1 - \alpha_i)}}$$

$$\alpha_i = \alpha \quad \forall i \quad K_i = K \quad \forall i$$

$$0 = \frac{n\alpha}{\alpha - 1} \delta + \frac{n}{K(1 - \alpha)^2} e^{-t/K(1 - \alpha)}$$

Nous n'avons donné ici qu'un aperçu de quelques opérateurs obtenus pour des configurations simples, tout autre opérateur représentatif d'un système à structure donnée étant obtenu par diverses combinaisons.

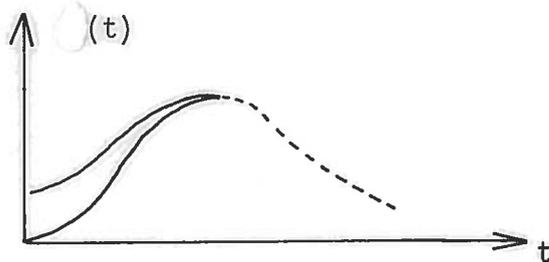
Il sera d'autant plus difficile à construire que le système est complexe et qu'il comporte un très grand nombre de sous-systèmes.

IV - CONCLUSION

Les modèles à réservoirs linéaires (il serait préférable de les nommer filtres), qu'ils soient utilisés pour le ruissellement et/ou l'écoulement, sont tous issus du système qui représente le modèle de MUSKINGHUM. Ce système possède une solution analytique simple de la forme :

$$Q_s(t) = O(K, \alpha) * Q_e(t)$$

L'opérateur O est linéaire, vieillissant (ou non vieillissant) à hérédité. Le phénomène est donc apparenté aux phénomènes viscoélastiques linéaires à hystérésis.



Cette approximation du phénomène réel par un tel modèle introduit la réversibilité qui n'est pas une qualité phénoménale. Cette propriété du modèle doit donc être utilisée avec précautions.

La syntaxe d'un tel modèle permet de nombreux développements tels que la conjugaison de plusieurs systèmes, expression analytique du débit maximum, etc ...

Ce modèle a surtout l'avantage de fournir une sortie analytique pour des entrées de forme simple, telles que les pluies de projet données sous forme triangulaire, très utilisées en hydrologie urbaine (voir annexe II).

La linéarité théorique du modèle est naturellement la principale limite phénoménale. Ces modèles restreignent donc leur objet à des bassins versants ou à des collecteurs qui donnent une réponse presque directe. En fait, la notion de "directe" est subjective car elle dépend de la durée de l'entrée ainsi que des unités de temps employées. Vis-à-vis des grandeurs mises en jeu (durée de l'entrée, pas de temps), ces modèles ne peuvent pas rendre compte d'une sortie présentant un décalage temporel important puisque un tel opérateur suppose l'invariance par translation.

Nous n'avons pas développé dans de l'étude 1 la validation pratique de ces modèles afin de ne pas alourdir le texte et mélanger divers chapitres. Nous avons tenté de donner une première réponse à ce problème de la validation en nous restreignant à une canalisation, le référentiel étant le modèle de BARRE DE ST-VENANT issu de l'hydraulique. Ces quelques essais font l'objet de l'annexe III.

Avec les essais effectués (durée de l'entrée = 1 minute), 100 m semblent être la limite de linéarité du phénomène, pour une canalisation circulaire de rayon 0.3m et de pente égale à 5‰.

Donné brutalement comme cela, ce résultat semble définir un domaine de validité du modèle qui serait illusoire vis-à-vis des dimensions traitées par l'hydrologie urbaine.

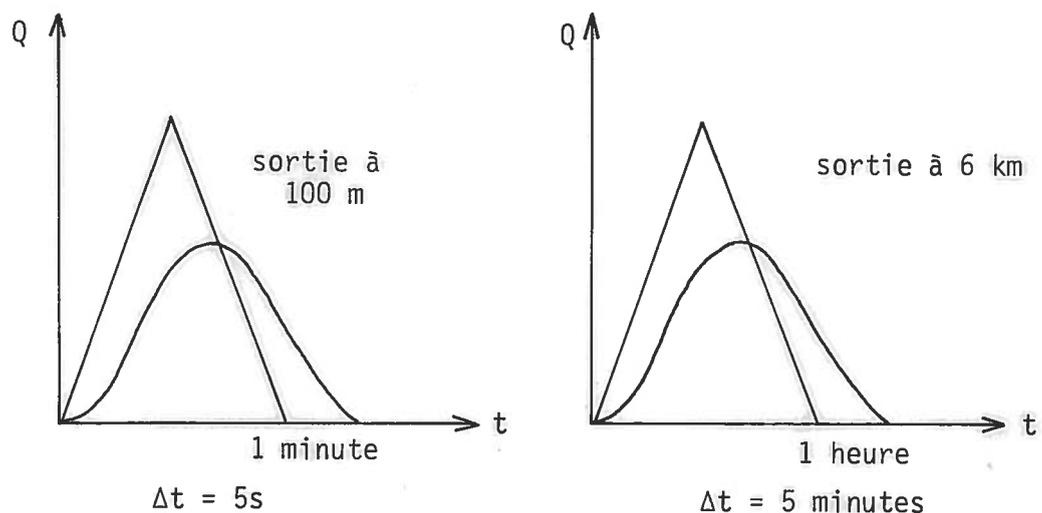
En reprenant le modèle intégré numériquement ($\alpha = 0$ pour simplifier)

$$Q_s(i+1) = e^{-\frac{\Delta t}{K}} Q_s(i) + (1 - e^{-\frac{\Delta t}{K}}) Q_e(i+1)$$

nous pouvons remarquer que pour $Q_s(i)$ et $Q_e(i+1)$ donnés, quel que soit Δt et K , $Q_s(i+1)$ ne change pas de valeur si le rapport $\frac{\Delta t}{K}$ reste constant.

Comme $K = \frac{L}{V}$, en multipliant L et Δt par une même valeur a ,
 $e^{-\frac{\Delta t}{K}}$ reste constante.

Pour un débit d'entrée donné tous les Δt , si L est le domaine de linéarité, pour les mêmes valeurs données tous les $a \times \Delta t$, $a \times L$ devient la nouvelle limite de linéarité; soit par exemple pour notre canalisation :



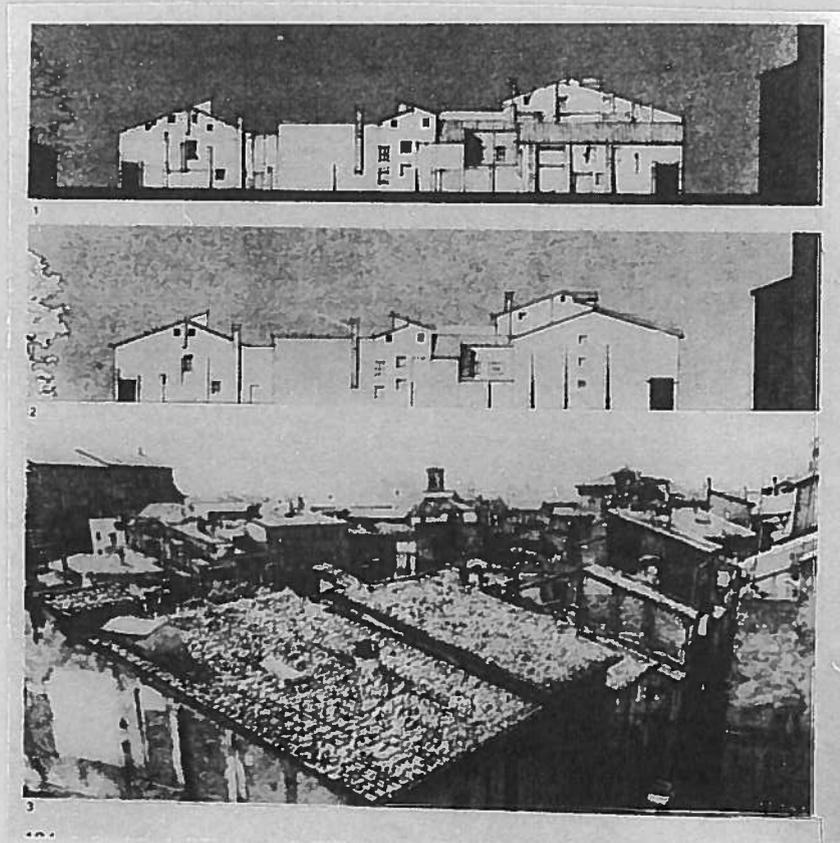
Le domaine de linéarité est donc dépendant de la durée de l'entrée. Comme en hydrologie, les phénomènes ont une durée relativement longue (1h, 2h,..) le domaine de validité de ces modèles est important si l'homothétie décrite ci-dessus est correcte. Nous reviendrons sur ce problème dans de l'étude III.

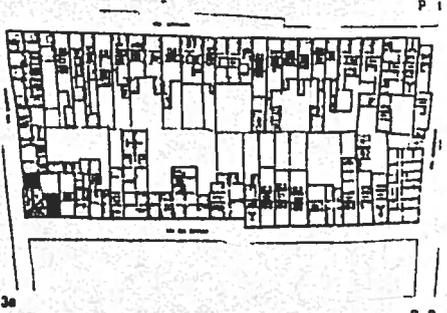
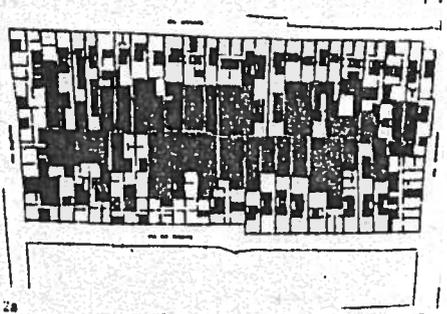
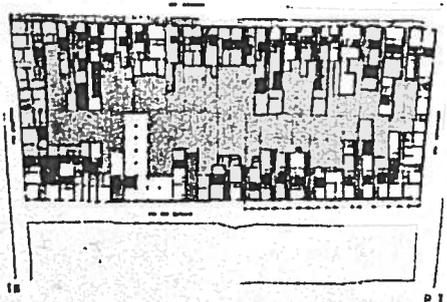
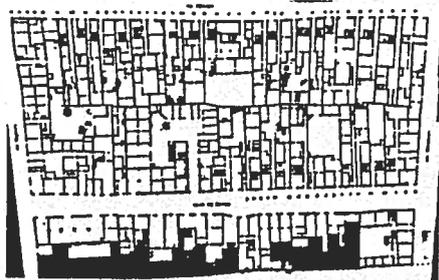
Tous les essais que nous avons menés dans les annexes I, II, III relatives à cette partie de l'étude doivent donc être considérés en ayant à l'esprit cette notion d'homothétie temporelle qui se reporte sur le domaine de validité des modèles.

Des études plus poussées de validité définiraient l'emploi de ces modèles linéaires, les valeurs des trois paramètres K , α , Δt devant être choisies judicieusement pour ne pas entraîner des oscillations de la sortie et pour ne pas donner des valeurs négatives de la sortie (le terme $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ ne doit pas être prépondérant au début de la montée de l'hydrogramme.

166

de l'étude 2





"Or aux âges théologique et métaphysique, il n'y a pas de lois, il y a des causes, personnifiées dans les Dieux ou réunies en un seul Dieu, conceptualisées en abstractions ou entités. La loi, la relation ou le fonctionnement, le pourquoi réduit au comment, voici la caractéristique de l'âge positif".

Michel SERRES.

La mécanique est la théorie du mouvement.

La trajectoire est représentée par une loi, c'est-à-dire par une équation si les constantes d'intégration sont fixées à l'état initial et à l'état terminal. La trajectoire définit les positions successives d'un point soumis à un système de forces en équilibre à tout instant.

Toute la mécanique analytique et, en particulier, l'hydrodynamique est basée sur ce paradigme.

"Aussi d'ALEMBERT après avoir découvert le principe fondamental qui lui a permis, vu les progrès de la statique, de traiter dans son ensemble la dynamique d'un système quelconque, en a-t-il immédiatement fait application à l'établissement des équations générales du mouvement des fluides, entièrement inconnues jusqu'alors" [1].

Mais l'intégration de la trajectoire donnée par un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires pose des obstacles insurmontables qui ne pourront être franchis que par les seuls progrès de l'analyse mathématique des opérateurs intégraux, "les équations fondamentales du mouvement étant irrévocablement établies"(1).

Pour rendre opérationnel les équations fondamentales de la dynamique des fluides, D. BERNOUILLI a adopté une hypothèse fondamentale qui remplace le mouvement de molécules à molécules par un mouvement de tranche à tranche. (passage du point au plan).

(1) Auguste COMTE : Philosophie première, 17ème leçon.

L'hydrodynamique appliquée fait donc abstraction des mouvements latéraux et conduit à modéliser les écoulements variés des liquides non visqueux par un système simplifié d'équations aux dérivées partielles non linéaires, dit de BARRE de ST-VENANT.

Ce système pourrait modéliser tous les écoulements rencontrés en hydrologie, son application étant généralement restreinte aux écoulements des eaux en canalisations.

	<u>Pages</u>
I - ETABLISSEMENT DU SYSTEME de BARRE de ST-VENANT	172
I.1 Equation dynamique	172
I.2 Equation de continuité	175
I.3 Système de BARRE de ST-VENANT	177
II - RESOLUTION : METHODES DES CARACTERISTIQUES	179
II.1 Résolution théorique	179
II.2 Résolution pratique	186
II.3 Vérification	196
II.4 Conclusion	214
III - RESOLUTION PAR DISCRETISATION	215
III.1 Définition de la stabilité	215
III.2 Condition de la stabilité	224
III.3 Vérification	230
III.4 Conclusion	239

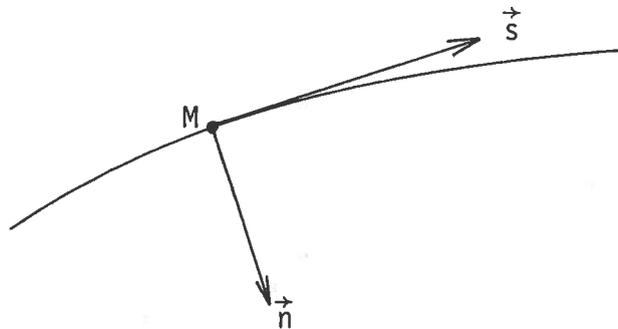
I - ETABLISSEMENT DU SYSTEME DE BARRE DE ST-VENANT

I.1 Equation dynamique

L'hydrodynamique recherche les équations du mouvement des fluides. L'élément considéré est un groupe de molécules supposées homogènes vis-à-vis des grandeurs mises en cause (vitesse, accélération, masse volumique, ...). La trajectoire d'un tel groupe est établie en équilibrant les forces auquel il est soumis, à t donné. Si le fluide est incompressible, cet équilibre de forces donne l'équation de NAVIER-STOCKES définies avec les variables d'EULER :

$$\vec{\gamma} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P^* + \vec{f} \quad \left\{ \begin{array}{l} P^* = P + \rho gh \\ \rho = \text{masse volumique} \\ \vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} \\ \vec{f} = \text{forces de frottement} \end{array} \right.$$

Soit un filet liquide, trajectoire du groupe homogène, \vec{s} et \vec{n} sa tangente et sa normale en M .



En projetant sur ces deux axes l'équation de NAVIER STOCKES, on obtient :

$$I \quad \begin{cases} \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \frac{\partial V_s}{\partial s} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial s} - f_s \\ \frac{\partial V_n}{\partial t} + \frac{V_s^2}{R_c} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial n} - f_n \end{cases} \quad R_c : \text{ rayon de cour-} \\ \text{bure}$$

La vitesse d'écoulement ou de ruissellement due à un évènement brutal, en toute généralité, n'est pas permanent :

$$\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$$

Si nous supposons, en outre, que la pente du sol ou de la canalisation est faible et que tous les filets liquides sont parallèles au fond, le système I se simplifie :

$$\left. \begin{array}{l} R_c \rightarrow \infty \\ f_n = 0 \end{array} \right\} \frac{\partial V_n}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P^*}{\partial n} = 0$$

La répartition des pressions est hydrostatique.

En assimilant s à x , le système I se résume donc à l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x} - f$$

L'écriture de cette équation se développe en exprimant P^* :

$$P^* = P_{at} + \rho_g(Z + h)$$

P_{at} : Pression atmosphérique
 h : hauteur d'eau au-dessus du filet liquide
 Z : altitude du filet liquide.

$$\Rightarrow \frac{\partial P^*}{\partial x} = \frac{\partial P_{at}}{\partial x} + \rho_g \frac{\partial Z}{\partial x} + \rho_g \frac{\partial h}{\partial x}$$

Si nous supposons que la pression atmosphérique ne varie pas avec x et en notant $i = - \frac{\partial Z}{\partial x}$ (pente du fond), on obtient :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = + g i - f$$

En notant $J = f/g$ (perte de charge par frottement due à la rugosité des parois et la viscosité du fluide).

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(i - J)}$$

Si nous considérons le filet liquide au fond de la canalisation ou en contact avec le sol, h représente la hauteur d'eau totale de la section en x à t .

Soit V_m la vitesse moyenne de la section considérée (Hypothèse de BERNOULLI), on a alors :

$$V = \alpha V_m$$

α : coefficient de répartition

Si α est une constante :

$$\alpha \frac{\partial V_m}{\partial t} + \alpha^2 V_m \frac{\partial V_m}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(i - J)$$

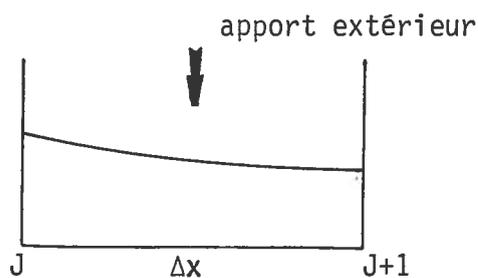
Avec toutes les hypothèses choisies, cette égalité représente l'équation dynamique du filet liquide en contact avec le fond de la canalisation ou le sol.

Elle est définie grâce à trois variables V_m , h , J .

Nous devons donc lui adjoindre trois autres équations pour déterminer les caractéristiques de l'écoulement.

I.2 Equation de continuité

Elle mesure la conservation de la masse donc des volumes ($\rho = \text{constante}$)



On recherche le volume stocké au temps $t + \Delta t$ dans l'espace compris entre J et $J+1$.

V stocké en $t + \Delta t$ = Volume entrant en j pendant Δt +
 Volume extérieur entrant pendant Δt +
 Volume existant en t - volume sortant
 pendant Δt .

$$V_S(t + \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} Q(j, \tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} Q_e(\tau) d\tau + \int_J^{J+1} S(x, t) dx \\ - \int_t^{t+\Delta t} Q(J+1, \tau) d\tau.$$

Q_e : apport extérieur

S : section mouillée.

$$V_S(t + \Delta t) = \int_J^{J+1} S(x, t + \Delta t) dx$$

On obtient donc :

$$\int_J^{J+1} [S(x, t + \Delta t) - S(x, t)] dx = \int_t^{t+\Delta t} (Q(j, \tau) - Q(J+1, \tau) + Q_e(\tau)) d\tau.$$

On suppose que les fonctions S et Q sont continues :

$$\int_J^{J+1} (S(x, t + \Delta t) - S(x, t)) dx = \Delta x * (S(J+\alpha, t + \Delta t) - S(J+\alpha, t))$$

$$J + \alpha \in [J, J+1]$$

$$\int_t^{t+\Delta t} (Q(J,\tau) - Q(J+1,\tau) + Q_e(\tau)) d\tau = \Delta t(Q(J,t+\gamma) - Q(J+1,t+\gamma) + Q_e(t+\gamma))$$

$$t + \gamma \in [t, t+\Delta t]$$

En réécrivant l'égalité :

$$\frac{S(J+\alpha, t+\Delta t) - S(J+\alpha, t)}{\Delta t} = \frac{Q(J, t+\gamma) - Q(J+1, t+\gamma)}{\Delta x} + \frac{Q_e(t+\gamma)}{\Delta x}$$

Si Δt et $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\boxed{\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = Q_i(t)}$$

I.3 Système de BARRE DE ST VENANT

Il est défini en ajoutant trois équations particulières à l'équation dynamique et celle de continuité puisque cette dernière introduit deux nouvelles variables S et Q .

$$\alpha \frac{\partial V_m}{\partial t} + \alpha^2 V_m \frac{\partial V_m}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = g(i - J)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = Q_i$$

$$Q = V.S.$$

$$S = f(h)$$

$$J = g(V, h, \dots)$$

Ce système modélise les variations de h et de V pour un fluide incompressible, la vitesse étant non permanente avec une répartition constante dans une section, les filets liquides parallèles au fond.

Beaucoup plus simple que les équations fondamentales de l'hydrodynamique, ce modèle peut servir de référence pour mesurer les hydrogrammes obtenus par ruissellement ou par écoulement. Le principe de d'ALEMBERT qui est à la base de ce système n'est pas ici à remettre en cause. Si ce modèle ne donne pas les hydrogrammes observés, cela ne peut venir que des hypothèses choisies en aval du principe. Malheureusement cet ensemble d'équations aux dérivées partielles non linéaires n'est pas intégrable analytiquement. Nous devons donc faire appel à la simulation et à l'informatique pour traiter ce système. Pour cela on utilise généralement deux techniques.

La première s'appuie sur la recherche des courbes caractéristiques du système et des relations vérifiées sur ces courbes.

La seconde utilise directement les développements de TAYLOR sur les fonctions dérivées $\frac{\partial h}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial x}$, ... du système.

II - RESOLUTION : METHODES DES CARACTERISTIQUES

II.1 Résolution théorique

Dans un premier temps, nous allons démontrer que le système de BARRE de ST VENANT possède une solution réelle qui s'appuie sur des surfaces caractéristiques. Cette solution n'étant pas facilement exploitable, dans un deuxième temps, nous allons rechercher l'hypothèse qui permet une utilisation simple du système.

Soit le système pour $\alpha = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(i-J) \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = q_i \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S = f(h); \quad Q = VS \end{array} \right.$$

Nous allons rechercher les surfaces caractéristiques, solutions d'une équation d'ordre deux à une seule variable, construite grâce au système donné.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = f'_h \frac{\partial h}{\partial x}; \quad \frac{\partial S}{\partial t} = f'_h \frac{\partial h}{\partial t}$$

L'équation (2) devient :

$$f' \frac{\partial h}{\partial t} + Vf' \frac{\partial h}{\partial x} + f \frac{\partial V}{\partial x} = q_i \quad (1')$$

En dérivant par rapport à x cette équation :

$$V f'' \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + f'' \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} + f' \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + f' \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + f' \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + f \frac{\partial^2 V}{\partial x} = \frac{\partial Q_i}{\partial x} \quad (3)$$

En dérivant par rapport à x et à t l'équation 1, on obtient

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{g} \left[g(i-J) \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} - V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} = \frac{1}{g} \left[g(i-J) \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - V \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} - \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial x} \right]$$

En remplaçant $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t}$ dans l'équation 3 et en regroupant les termes du second ordre, on obtient :

$$- \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left(V^2 - g \frac{f}{f'} \right) - 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} \left(\frac{f' V}{g} \right) + H_0 = 0$$

avec H_0 opérateur différentiel du 1er ordre.

Les surfaces caractéristiques sont données par l'équation :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \left(V^2 - g \frac{f}{f'} \right) + 2V \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

avec $S \equiv S(x,t)$ surface caractéristique.

On recherche une surface du type : $S(x,t) = x - \theta(t) = 0$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -\theta'$$

soit :

$$\theta'^2 + \left(V^2 - g \frac{f}{f'} \right) - 2V\theta' = 0$$

$$\text{d'où } \theta' = V \pm \sqrt{g f/f'}$$

d'où l'équation des surfaces caractéristiques en remarquant que $\theta' = dx/dt$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = V \pm (g f/f')^{1/2}} \quad \text{courbes} \in \mathbb{R}^2$$

Ces courbes étant réelles, le système est hyperbolique.

Toutes surfaces intégrales du système de BARRE de ST VENANT s'appuie donc sur des courbes définies par les pentes ci-dessus. En particulier, les équations (1) et (2) sont vérifiées sur ces courbes qui relient les deux variables x et t .

$$(1) \Rightarrow \frac{dV}{dt} + V \frac{dV}{dt} \frac{dt}{dx} + g \frac{dh}{dt} \frac{dt}{dx} = g(i-J)$$

$$(2) \Rightarrow f' \frac{dh}{dt} + V f'' \frac{df}{dt} \frac{dt}{dx} + f \frac{dV}{dt} \frac{dx}{dt} = Q_i \quad (2')$$

$$(2') \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{Q_i}{f'(V + \frac{dt}{dx})} - \frac{-f \frac{dV}{dt} \frac{dx}{dt}}{f' (V + \frac{dt}{dx})}$$

En remplaçant dh/dt dans l'équation dynamique, celle-ci s'écrit :

$$\frac{dV}{dt} + V \frac{dV}{dt} \frac{dt}{dx} + g \frac{dt}{dx} \left(\frac{Q_i}{f'(V + \frac{dt}{dx})} - \frac{f \frac{dV}{dt} \frac{dx}{dt}}{f' (V + \frac{dt}{dx})} \right) = g(i-J)$$

On obtient finalement le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = V \pm (g f/f')^{1/2} \\ \frac{dV}{dt} + V \frac{dV}{dt} \frac{dt}{dx} + g \frac{dt}{dx} \left[\frac{q_i}{f'(V + \frac{dt}{dx})} - \frac{f \frac{dV}{dt} \frac{dx}{dt}}{f'(V + \frac{dt}{dx})} \right] = g(i-J) \end{array} \right.$$

Ce sont donc les relations qui sont théoriquement vérifiées sur les courbes caractéristiques associées au système de BARRE de ST-VENANT pour une section quelconque.

Malheureusement la solution comme elle est décrite, n'est pas facilement exploitable. Il faut rechercher des relations simples vérifiées sur les courbes caractéristiques.

Pour cela nous allons utiliser la démarche de J.J. STOCKER [48] pour atteindre ces relations.

$$\text{Soit } c = \sqrt{g f/f'}$$

$$2c \frac{\partial c}{\partial x} = g \frac{\partial h}{\partial x} \times \left[1 - \frac{ff''}{f'^2} \right]$$

$$2c \frac{\partial c}{\partial t} = g \frac{\partial h}{\partial t} \times \left[1 - \frac{ff''}{f'^2} \right]$$

En notant a le terme $(1 - \frac{ff''}{f'^2})$ et en remplaçant $\frac{\partial h}{\partial t}$, $\frac{\partial h}{\partial x}$ par leur expression en fonction de c dans les équations (1') et (2) on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{a} \frac{\partial c}{\partial t} + 2V \frac{\partial c}{\partial x} + ac \frac{\partial V}{\partial x} = q_i \frac{ag}{cf'} \quad (4) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{2c}{a} \frac{\partial c}{\partial x} = g(i-J) \quad (5) \end{array} \right.$$

(4+5) =>

$$(6) \quad \overbrace{2\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(V + \frac{c}{a}\right) \frac{\partial}{\partial x}\right) c}^{01} + \overbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + (V+ac) \frac{\partial}{\partial x}\right) V}^{02} = g(i-J) + \frac{ag}{cf'} q_i$$

(5-4) =>

$$(7) \quad 2\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(V - \frac{c}{a}\right) \frac{\partial}{\partial x}\right) c + \left(\frac{\partial}{\partial t} + (V-ac) \frac{\partial}{\partial x}\right) V = g(i-J) - \frac{ag}{cf'} q_i$$

Si les deux variables v et c sont différenciées par le même opérateur, nous obtiendrions des relations simples vérifiées sur les courbes intégrales de cet opérateur.

01 est égal à 02 si $a = \pm 1$ soit les deux solutions suivantes :

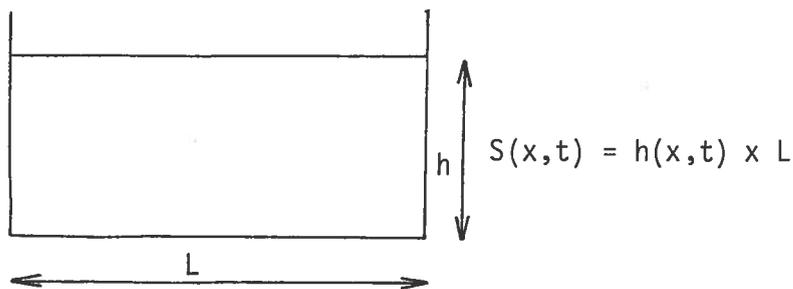
$$f'' = 0$$

$$\text{ou } 2f'^2 = ff''$$

La première égalité est réalisée si la section est rectangulaire. La deuxième égalité est satisfaite si :

$$h - \frac{f(h)}{f'(h)} = 2h \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(h)}{f(h)} = -\frac{1}{h}$$

d'où $f(h) = \frac{1}{h} + \text{constante}$; pour le problème étudié cette section ne nous intéresse pas. Nous retiendrons donc le cas de la section rectangulaire ($a = + 1$).



c étant égal à $\sqrt{g h}$ les équations (6) et (7) s'écrivent alors :

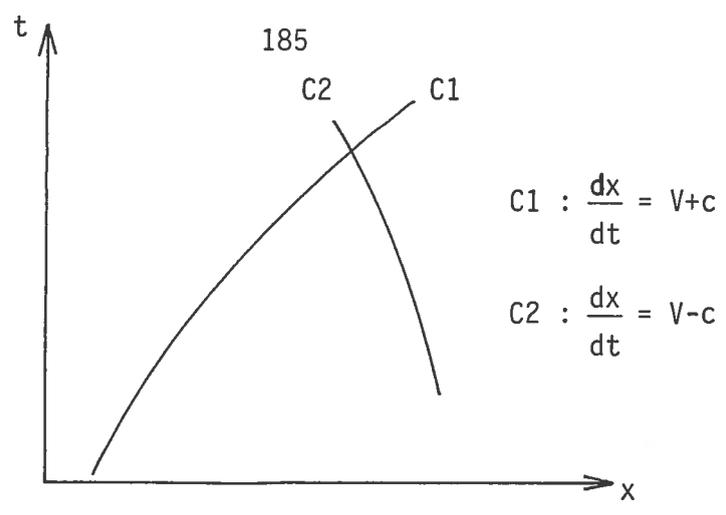
$$2((V+c) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}) c + ((V+c) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}) V = g(i-J) + \frac{g Q_i}{Lc}$$

$$-2((V-c) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}) c + ((V-c) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}) V = g(i-J) - \frac{g Q_i}{Lc}$$

Les fonctions V et c sont donc différentiables le long des deux courbes définies dans le plan (x, t) par les deux équations différentielles :

$$\frac{dx}{dt} = V \pm c$$

On retrouve naturellement les courbes caractéristiques générales associées au système de BARRE de ST-VENANT.



Si nous supposons que les pertes ou gains de charge sont constants le long des courbes intégrales, on obtient le système suivant :

$$\left((V+c) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(2c + v + g (J-i)t \frac{-g Q_i}{Lc} t \right) = 0$$

$$\left((V-c) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(-2c + v + g(J-i)t \frac{+g Q_i}{Lc} t \right) = 0$$

Nous avons donc deux équations d'état vérifiées le long des courbes caractéristiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = V + c \\ 2c + v + gt (J-i - \frac{Q_i}{Lc}) = K1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = V - c \\ -2c + v + gt(J-i + \frac{Q_i}{Lc}) = K2 \end{array} \right.$$

Grâce à ces relations l'étude du système de BARRE DE ST-VENANT est remplacée par un problème d'intégration classique en analyse numérique.

II.2 Résolution pratique

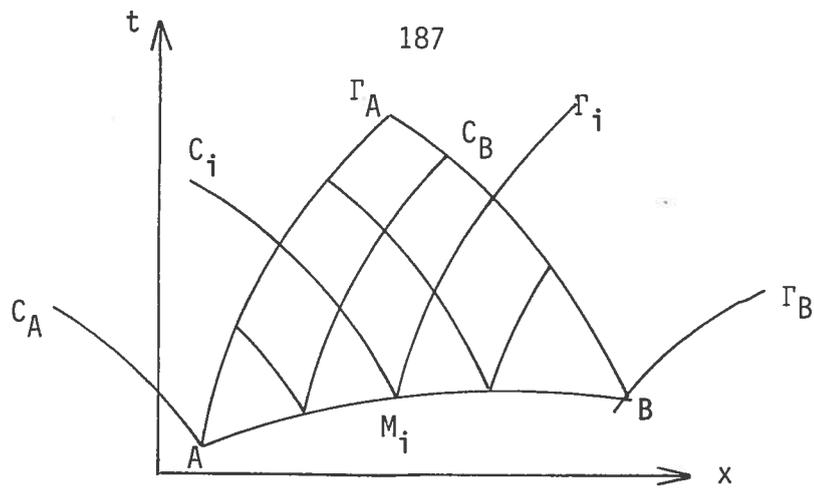
II.2.1 Représentation du problème

Les variables x et t étant liées sur les courbes caractéristiques, en dérivant par rapport à t les deux équations d'état, on obtient le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = V + c \\ \frac{dV}{dt} + \frac{g}{c} + \frac{dh}{dt} + g(J-i) - g \frac{Q_i}{Lc} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = V - c \\ \frac{dV}{dt} - \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} + g(J-i) + g \frac{Q_i}{Lc} = 0 \end{array} \right. \quad \text{avec } c = \sqrt{gh}$$

Pour la suite, nous supposons que la variable J est une fonction de V et de h .

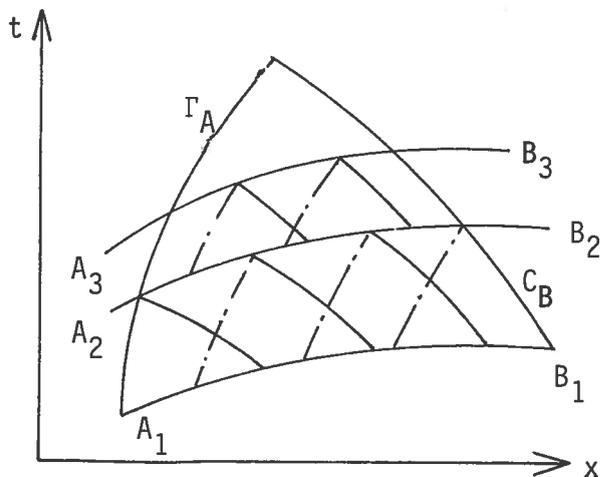
Le problème que nous avons à résoudre est du type de CAUCHY.



Dans le plan (x, t) , on se donne un arc AB non caractéristique tel qu'en chacun de ses points, les variables V et h sont connues. Nous obtenons un domaine de dépendance D , limité par Γ_A et C_B , courbes caractéristiques issues de A et B .

Pour chacun des points M_i de l'arc AB , nous pouvons tracer les caractéristiques Γ_i et C_i . Tout point ϵD est l'intersection de deux courbes caractéristiques Γ_j et C_k . Comme nous connaissons la valeur des variables en M_j et M_k , par intégration des deux équations d'état le long de Γ_j et C_k , on calcule ainsi V et h au point d'intersection de Γ_j et C_k .

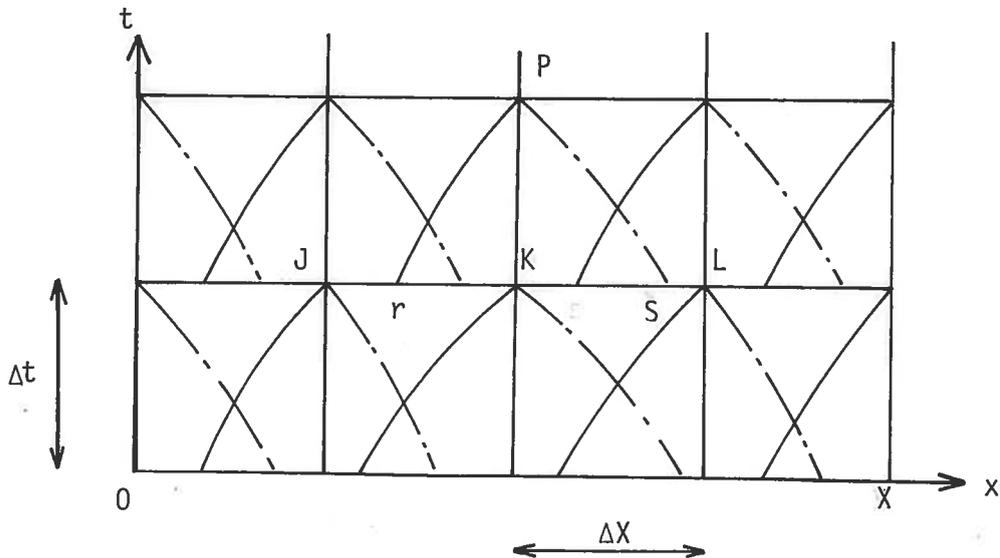
La technique de résolution peut être renversée en se donnant a priori les points P de calcul sur des arcs $A_i B_i$.



Cela suppose naturellement que la connaissance des variables en des points particuliers de $A_i B_i$, permet de déterminer simplement ces variables en n'importe quel point de l'arc $A_i B_i$.

Le choix préalable des points de calcul est plus adapté à la modélisation pratique des écoulements ou des ruissellements, les arcs $A_i B_i$ étant des droites parallèles à l'axe des x dans le plan (x, t) , les temps de calcul étant plus faibles.

Le domaine D peut être étendu au domaine $D1$ limité à gauche et à droite par les deux droites $x = 0$ et $x = X$ en se donnant une relation entre les variables sur ces droites, le pas en x et en t étant pris généralement constant.

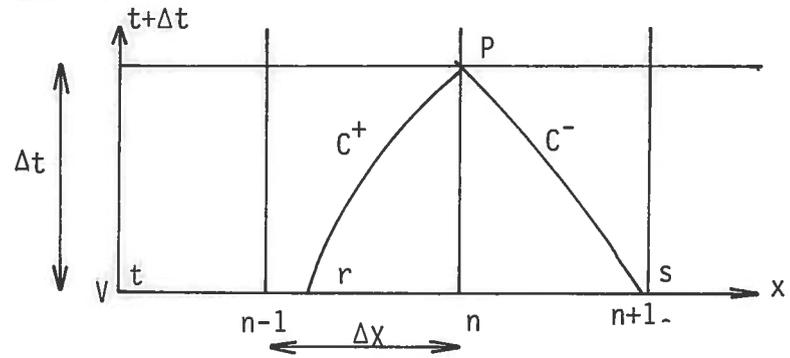


Si nous voulons exprimer V_p et h_p uniquement en fonction des points r et s compris entre $[J K]$ et $[K L]$, ΔX et Δt doivent être liés par la relation :

$$\boxed{\frac{\Delta X}{\Delta T} \geq |V \pm C|} \quad (\text{Condition de COURANT-FRIEDRIS-CHSLEWY}).$$

II.2.2 Intégration du modèle

Soit deux courbes caractéristiques passant par P, r et s leurs points d'intersection sur l'axe x au temps t.



Les deux équations d'état sont intégrables sur C^+ et C^- . En supposant le débit d'apport latéral $Q_i = 0$ pour simplifier l'exposition, on obtient :

$$\int_{t_r}^{t_p} dV + g \frac{dh}{c} + g(J-i) dt = 0 \quad \text{sur } C^+$$

$$\int_{t_s}^{t_p} dV - g \frac{dh}{c} + g(J-i) dt = 0 \quad \text{sur } C^-$$

Comme J est supposé constant sur les courbes caractéristiques, les deux intégrations donnent :

$$V_p - V_r + g(J_{pr} - i) \Delta t + g \int_{t_r}^{t_p} \frac{dh}{c} = 0$$

$$V_p - V_s + g(J_{ps} - i) \Delta t - g \int_{t_s}^{t_p} \frac{dh}{c} = 0$$

Nous supposons qu'il existe C_{rp} et C_{sp} tel :

$$\int_{t_r}^{t_p} \frac{dh}{c} = \frac{h_p - h_r}{C_{pr}} ; \int_{t_s}^{t_p} \frac{dh}{c} = \frac{h_p - h_s}{C_{ps}}$$

soit le système :

$$\begin{cases} V_p - V_r + \frac{g}{C_{pr}} (h_p - h_r) + g(J_{pr} - i) \Delta t = 0 \\ V_p - V_s - \frac{g}{C_{ps}} (h_p - h_s) + g(J_{ps} - i) \Delta t = 0 \end{cases}$$

En fait la section étant rectangulaire,

$$\frac{dh}{c} = \frac{dh}{\sqrt{gh}}$$

$$\int \frac{dh}{c} = \frac{1}{\sqrt{g}} \times 2 h^{1/2}$$

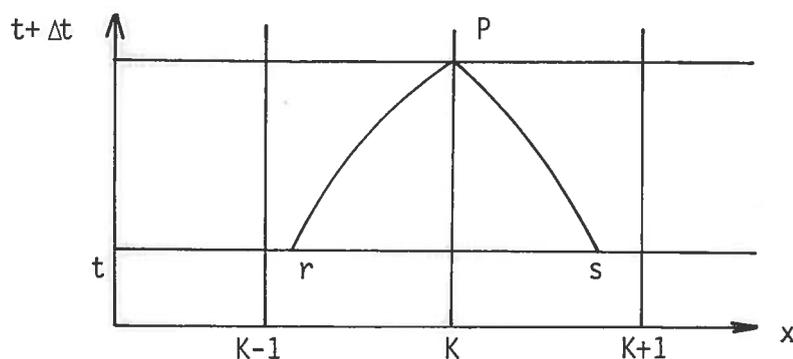
d'où le système :

$$\begin{cases} V_p - V_r + 2 \sqrt{g} (h_p^{1/2} - h_r^{1/2}) + g(J_{pr} - i) \Delta t = 0 \\ V_p - V_s - 2 \sqrt{g} (h_p^{1/2} - h_s^{1/2}) + g(J_{ps} - i) \Delta t = 0 \end{cases}$$

C'est un système de deux équations à 2 inconnues (h_p, V_p) si les variables auxiliaires (V_r, h_r, V_s, h_s) sont connues. Ces dernières sont déterminées en intégrant les équations donnant les pentes des courbes caractéristiques.

$$\frac{dx}{dt} = V(x, t) + C(x, t)$$

$$\frac{dx}{dt} = V(x, t) - C(x, t)$$



Pour relier r et s à p l'intégration se fait de t à $t + \Delta t$.

$$\int_t^{t+\Delta t} d(x(t)) = \int_t^{t+\Delta t} [V(x(t)) + c(x,t)] dt.$$

V et c étant continues, $\exists t' \in [t, t + \Delta t]$ tel que :

$$x(t+\Delta t) - x(t) = \Delta t [V(x(t')) + c(x(t'))]$$

Le premier membre étant égal à $x_p - x_r$ que nous noterons δ_r . De même en notant $\delta_s = x_K - x_s$:

$$\begin{aligned} \delta_r &= \Delta t \left(V(x(t')) + c(x(t')) \right) \\ \delta_s &= \Delta t \left(V(x(t'')) - c(x(t'')) \right) \end{aligned}$$

Comme nous ne connaissons pas les valeurs de V et c pour $t \in]t, t + \Delta t[$ les pentes sont approchées en choisissant une combinaison de

(V_r, C_r, V_p, C_p) , sur les points calculables.

(V_s, C_s, V_p, C_p)

Nous remplaçons donc les deux points théoriques r et s par r' et s' les caractéristiques étant alors assimilables à des droites.

La simplicité du système à résoudre dépend de la combinaison :

$$(V_r, C_r, V_p, C_p)$$

$$(V_s, C_s, V_p, C_p)$$

retenue pour exprimer les pentes.

La valeur des variables en r et s n'étant pas connues, elles sont approximées grâce aux valeurs de ces variables aux points $K-1, K, K+1 \dots$ qui elles ont été calculées à l'itération précédente.

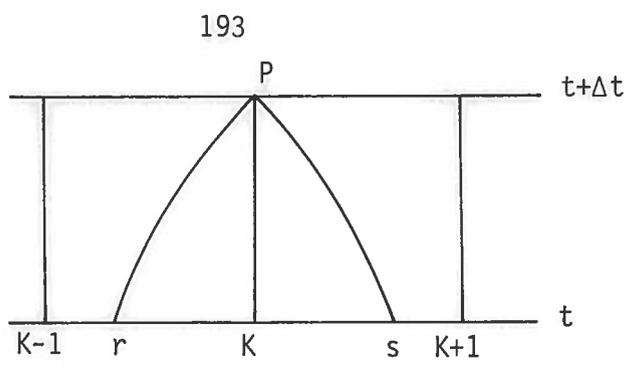
II.2.2.1 Exemple de système non linéaire

On pose :

$$\delta_r = \frac{\Delta t}{2} (V_p + C_p + V_r + C_r)$$

$$\delta_s = \frac{\Delta t}{2} (V_p - C_p + V_s - C_s)$$

193



Les variables V_r, C_r, V_s, C_s sont interpolées linéairement en fonction des points connus $K-1, K, K+1$.

Pour un point de calcul $P \in]0, X[$, on obtient le système non linéaire suivant (voir annexe 4).

$$\left. \begin{aligned} \delta_r &= f(V_p, C_p) = x_K - x_r \\ \delta_s &= K(V_p, C_p) = x_K - x_s \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{obtenues par les courbes} \\ \text{caractéristiques} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} F(V_p, C_p, \delta_r) &= 0 \\ G(V_p, C_p, \delta_s) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{obtenues par les équations} \\ \text{d'état.} \end{array}$$

Sa résolution donne $V_p, C_p, \delta_s, \delta_r$. Comme elle est effectuée à chaque point de calcul et à chaque pas de temps, on peut lui préférer un système plus simple, linéaire.

II.2.2.2 Système linéaire (Méthode d'EULER)

Soit $t' = t'' = t$; l'intégration des fonctions $\frac{dx}{dt}$ donne alors :

$$\begin{aligned} \delta_r &= \Delta t(V_r + C_r) \\ \delta_s &= \Delta t(V_s - C_r) \end{aligned}$$

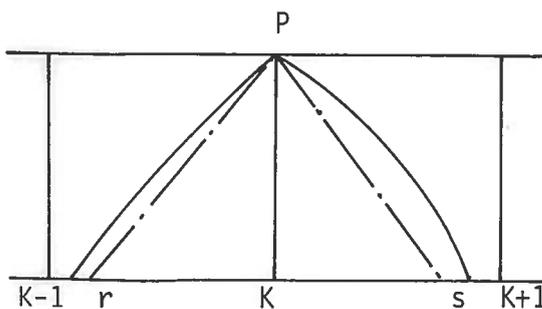
Les pentes des caractéristiques sont approchées par la valeur de la fonction à l'origine. Si les variables en r et s sont interpolées linéairement par rapport aux points $K-1, K, K+1$, on obtient un système linéaire de 8 équations à 8 inconnues pour calculer V_p et h_p en un point courant p appartenant à l'intérieur du domaine $D1$.

$$\begin{array}{l}
 c^+ \\
 c^-
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 V_r = V_K - \frac{\Delta V}{\Delta X} \delta_r \\
 h_r = h_K - \frac{\Delta h}{\Delta X} \delta_r \\
 \delta_r = \Delta t (V_r + C_r) \\
 V_p - V_r + 2 \sqrt{g(h_p^{1/2} - h_r^{1/2})} + g(J_{pr} - i) \Delta t = 0 \\
 \\
 V_s = V_K + \frac{\Delta V}{\Delta X} \delta_s \\
 h_s = h_K + \frac{\Delta h}{\Delta X} \delta_s \\
 \delta_s = \Delta t (V_r - C_s) \\
 V_p - V_s - 2 \sqrt{g(h_p^{1/2} - h_s^{1/2})} + g(J_{ps} - i) \Delta t = 0
 \end{array} \right.$$

Ce système correspondant au cas de l'écoulement fluvial ($V < c$) est relativement simple à résoudre. (Voir annexe 5 : résolution du système; application à un élément d'écoulement simple).

II.2.2.3 Résolution directe

Si la perturbation qui s'écoule dans la canalisation, ou qui ruisselle sur le sol n'a pas des variations brutales et si les pas de calcul Δx et Δt sont petits, les pentes en r et s des caractéristiques peuvent être approchées grâce au point K , les valeurs des variables en $K-1$, K , $K+1$ étant sensiblement égales.



Nous avons alors :

$$\begin{cases} \delta_r = \Delta t(V_K + C_K) \\ \delta_s = \Delta t(V_K - C_K) \end{cases}$$

Le système précédent se transforme et nous obtenons un nouveau système de 6 équations à 6 inconnues très simple à résoudre avec par exemple sur C^+ :

$$C^+ \begin{cases} V_r = V_K - \frac{\Delta V}{\Delta X} \times \Delta t(V_K + C_K) \\ h_r = h_K - \frac{\Delta h}{\Delta X} \times \Delta t(V_K + C_K) \\ V_p - V_r + 2 \sqrt{g}(h_p^{1/2} - h_r^{1/2}) + g(J_{pr} - i) \Delta t = 0 \end{cases}$$

Ce modèle particulier a été étudié par G. COZZO [45].

Pour représenter les écoulements en canalisation, il donne en particulier les relations que l'on obtient en considérant une condition amont, aval, des branchements de canalisations, etc ...

II.3 Vérification

Le fluide étant incompressible, ses filets liquides parallèles au fond, la pression hydrostatique, les équations fondamentales de l'hydrodynamique pour un fluide réel se simplifient alors pour donner le système de BARRE de ST VENANT.

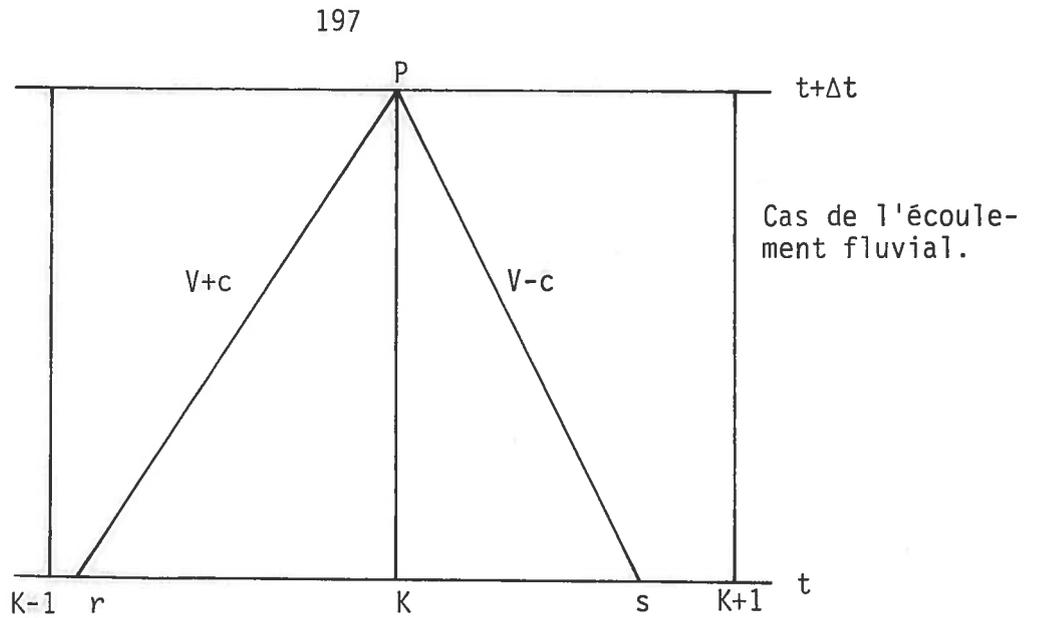
En supposant une distribution constante des vitesses dans la section d'écoulement, nous savons que ce système hyperbolique, possède deux courbes caractéristiques, supports de toute surface intégrale.

Le système est pratiquement utilisable si nous l'appliquons à une section rectangulaire, les pertes ou gains de charge étant pris constants le long des courbes caractéristiques.

Le calcul des variables d'écoulement en un point donné et à un temps donné, est effectué en utilisant deux équations d'états vérifiées sur les courbes caractéristiques. Ces dernières sont données par les équations de leurs pentes. Comme ces équations ne sont pas intégrables, les courbes sont approchées par des droites suivant le type d'écoulement, ces droites sont naturellement plus ou moins justes.



197



$$\frac{dx}{dt} = V \pm C$$

Nous distinguerons trois systèmes particuliers selon le calcul des deux pentes, les variables en r et s étant approximés linéairement par rapport à $K-1, K, K+1$.

$$(1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = (V + C)_{r,p} \\ \frac{dx}{dt} = (V - C)_{s,p} \end{cases} \quad \text{Système de résolution non linéaire}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = (V + C)_r \\ \frac{dx}{dt} = (V - C)_s \end{cases} \quad \text{Système de résolution linéaire}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = (V + C)_K \\ \frac{dx}{dt} = (V - C)_K \end{cases} \quad \text{Résolution directe}$$

Pratiquement, nous avons utilisé les systèmes de résolution (2) et (3) les pertes de charges J étant données par la relation :

$$\frac{\lambda V^2}{2g D_H}$$

λ calculé par la formule de COLEBROK [16].

Ces systèmes ont été mis en oeuvre pour modéliser les écoulements dans des sections rectangulaires et circulaires, le débit maximum n'atteignant pas la valeur des débits de mise en charge [8].

II.3.1 Section rectangulaire

En calculant les pentes en r et s , nous pouvons déjà vérifier que le phénomène modélisé est héréditaire et non linéaire. L'hérédité signifie que le débit de sortie Q_s au temps t est fonction de ce qui précédait ce temps t ; la montée et la descente des hydrogrammes ne se recouvrent pas (voir figure 1).

La non linéarité est vérifiée en utilisant le principe de superposition. La sortie due à Q_e n'est pas le double de la sortie due à $Q_e/2$. (voir figure 2).

Cette non linéarité du phénomène augmente avec la distance. L'erreur relative sur la valeur du débit maximum varie peu, l'erreur sur le temps d'apparition de ce débit augmentant (voir figure 3).

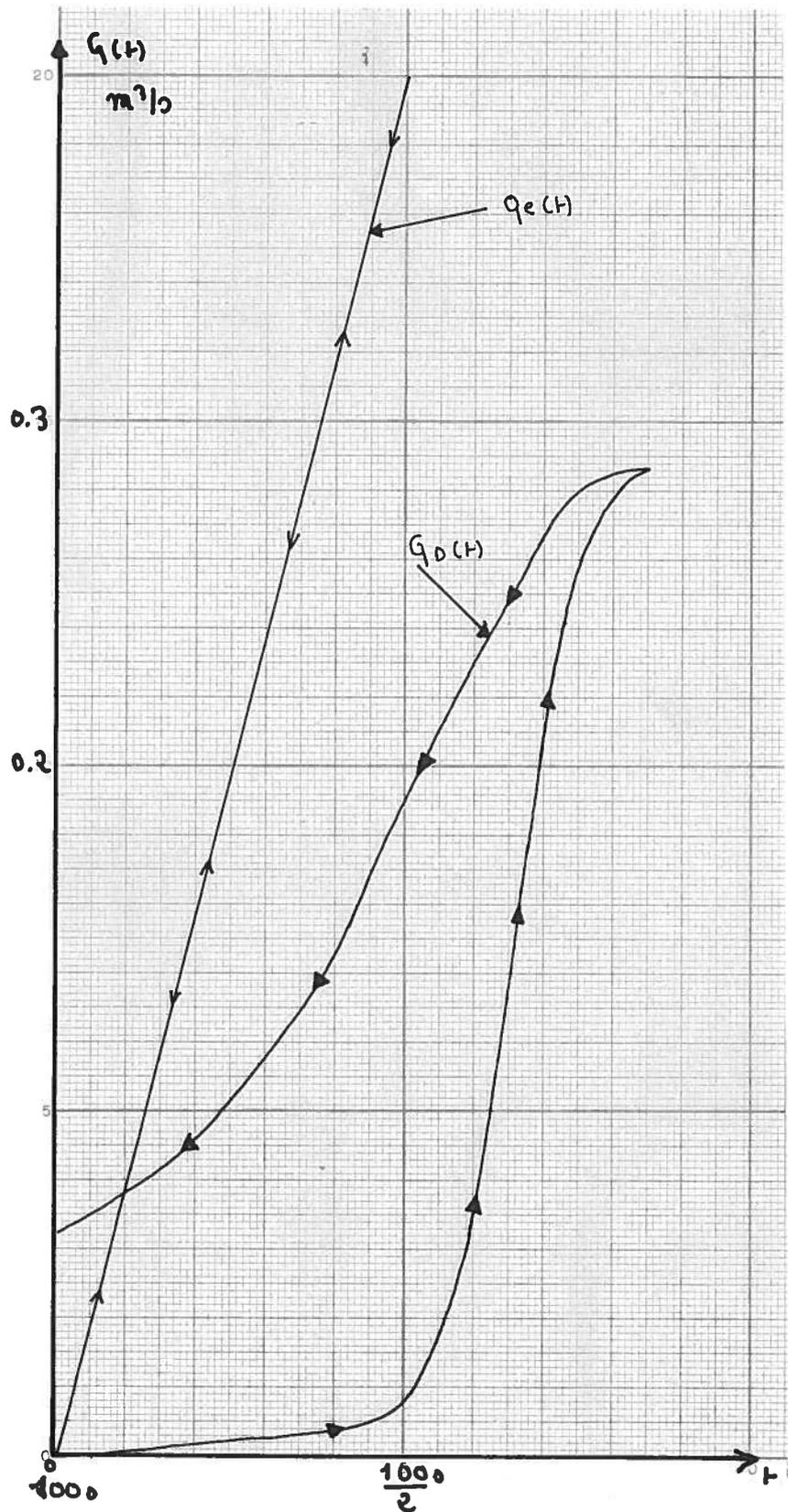


Figure 1 - Sortie calculée à 100 m pour une section rectangulaire (Largeur 0.6m) de pente 5‰ avec $\Delta T = 5s$ $\Delta X = 25 m$.

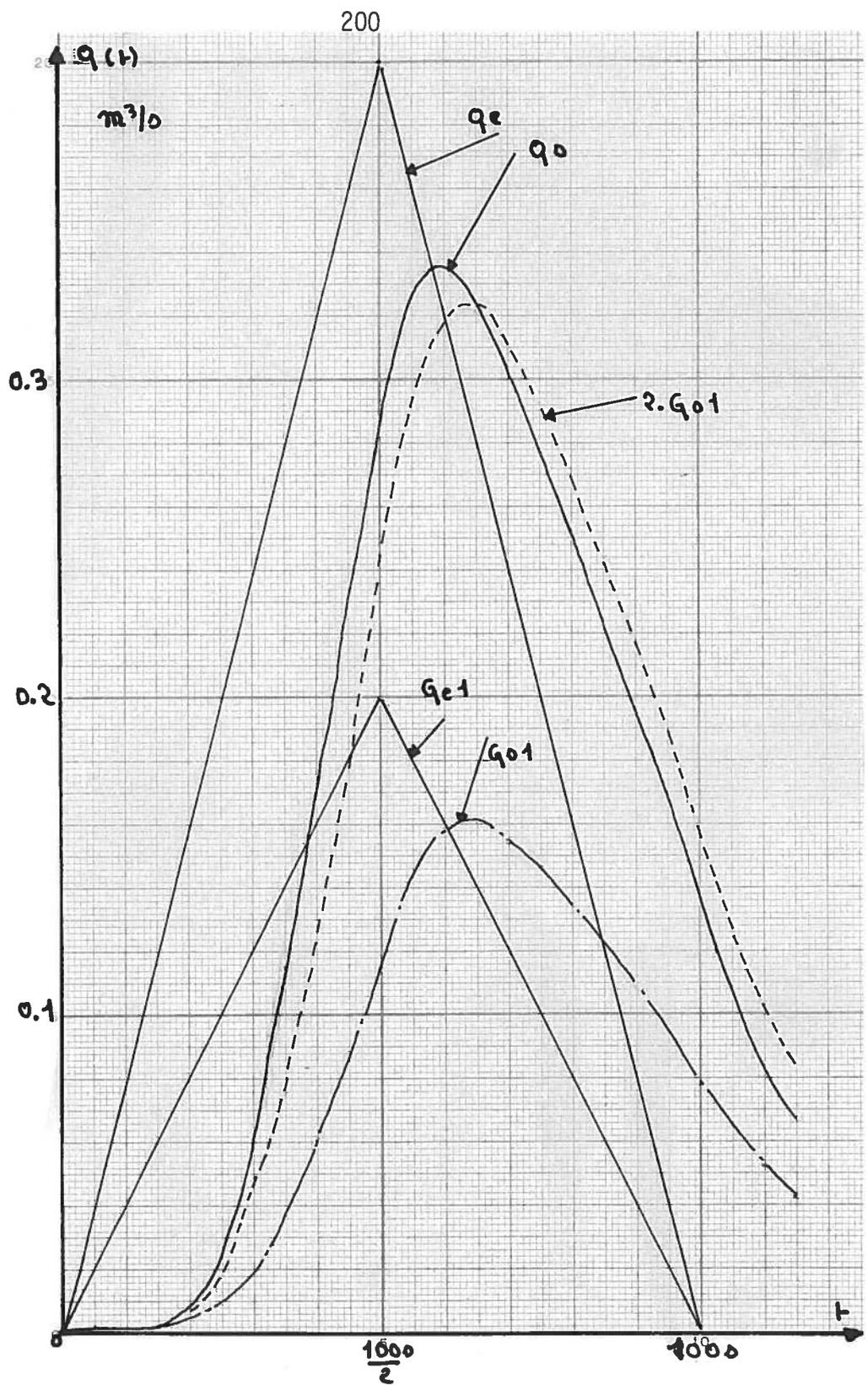


Figure 2 - Sortie calculée à 50m, pour une section rectangulaire (Largeur 0.6m) de pente 5‰ avec $\Delta T = 5s$ $\Delta X = 25 m$

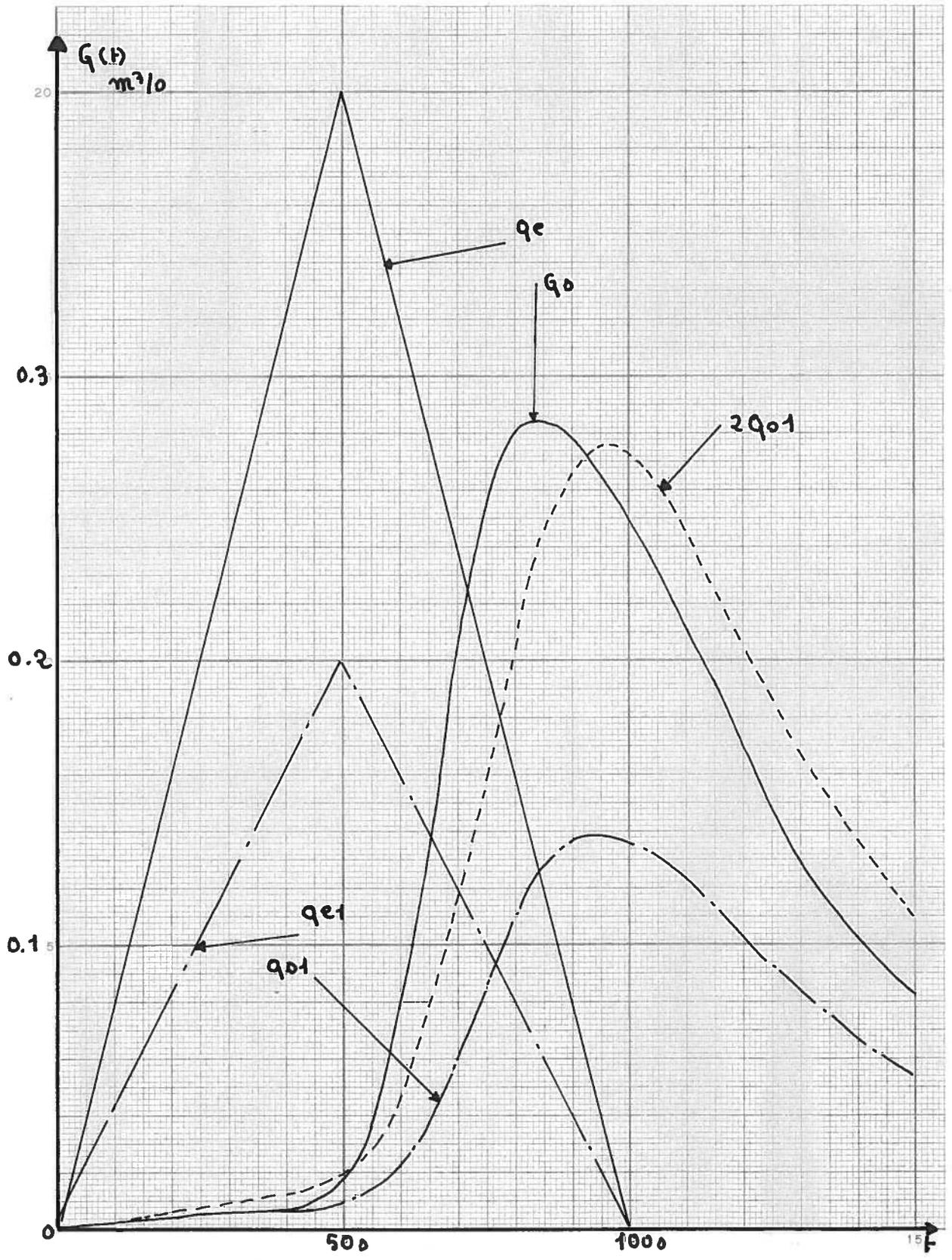
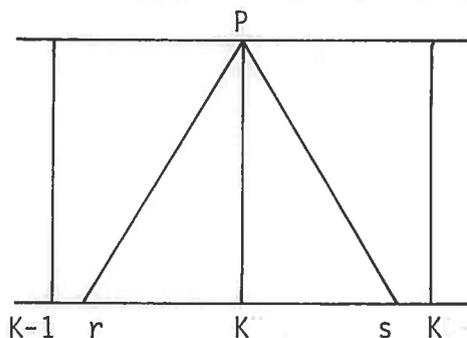


Figure 3 - Sortie calculée à 100 m pour la canalisation définie précédemment.

Les essais suivants ont été effectués pour une canalisation rectangulaire (base = 0.6 m) la pente étant de 5‰ avec $\Delta t = 5s$ et $\Delta x = 25 m$ et ont pour but de comparer les résultats obtenus par les systèmes (2) et (3).

Les sorties obtenues grâce au système linéaire (pentes de C^+ et C^- calculées en r et s) précèdent toujours celles que l'on obtient par la résolution directe du système (pentes de C^+ et C^- calculées en K).



Cette avance est due à l'influence plus ou moins importante de l'amont sur l'aval. Le calcul des pentes en r et s favorise "l'action" de $K-1$ situé en amont du point P (voir figure 4).

Pour une impulsion relativement brève, cette différence devient significative lorsque la distance augmente. Pour une entrée de type triangulaire, le décalage est de l'ordre de 15s pour la montée, la valeur du débit maximum étant minoré lorsque les pentes sont calculées en K (voir figure 5).

L'entrée étant de type HEAVISIDE $\sigma_0 H(t)$, les deux méthodes de résolution donnent des sorties qui convergent vers la valeur σ_0 (voir figure 6).

L'approximation des pentes des courbes caractéristiques par des droites et le calcul linéaire des variables en r et s , introduit une erreur sur la conservation des quantités d'eau transitées, la quantité de sortie étant légèrement plus importante que la quantité entrée.

Pour une entrée de type triangulaire (figure 5) on obtient les valeurs suivantes :

$$\int_0^{400s} Q_e(\tau) d\tau = 11.30 \text{ m}^3 \qquad \int_0^{400s} Q_e(\tau) d\tau = 11.60 \text{ m}^3$$

400 s étant le temps au bout duquel on retrouve la condition initiale. Ces intégrales sont calculées par la méthode de SOMPSON.

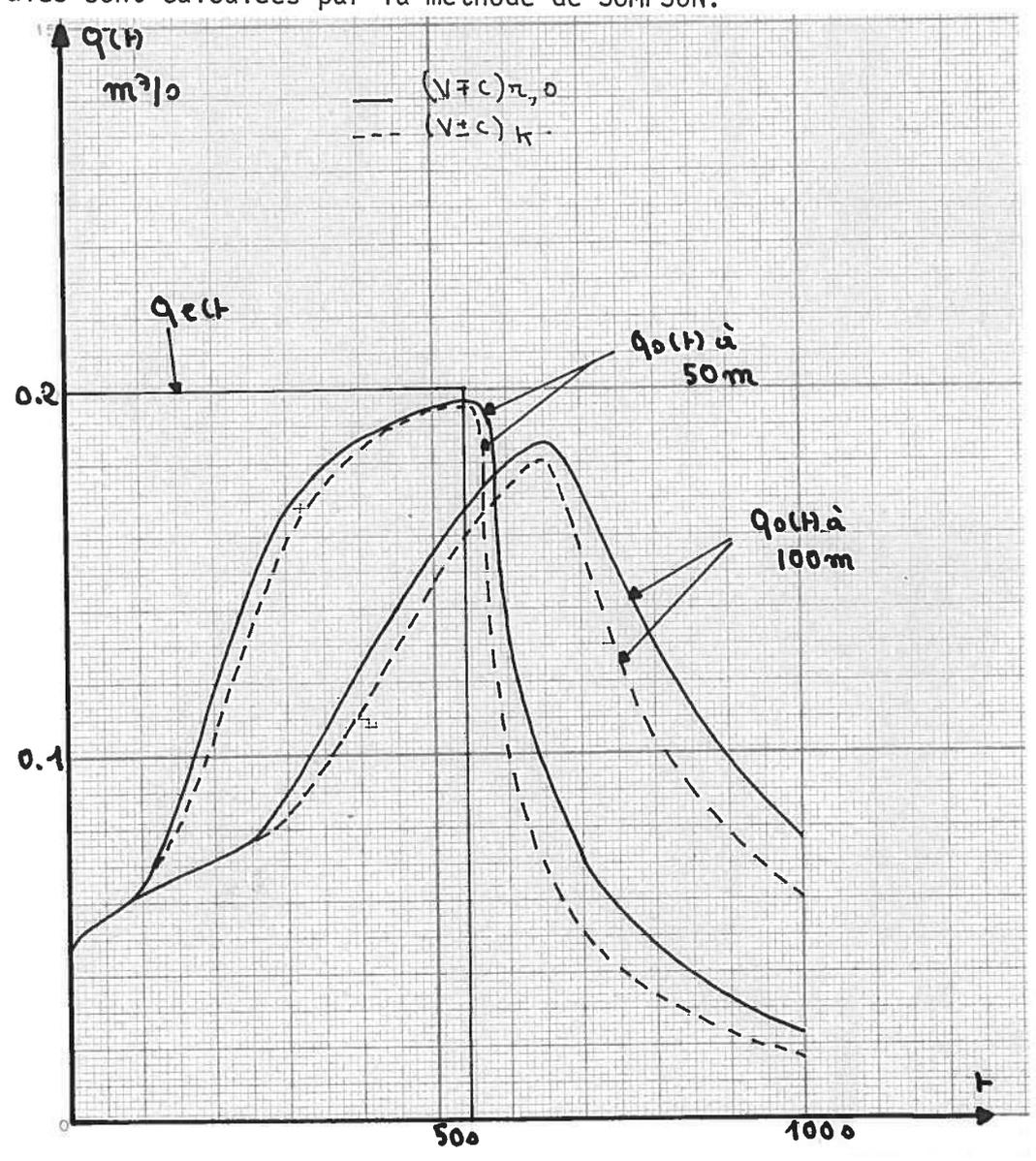


Figure 4

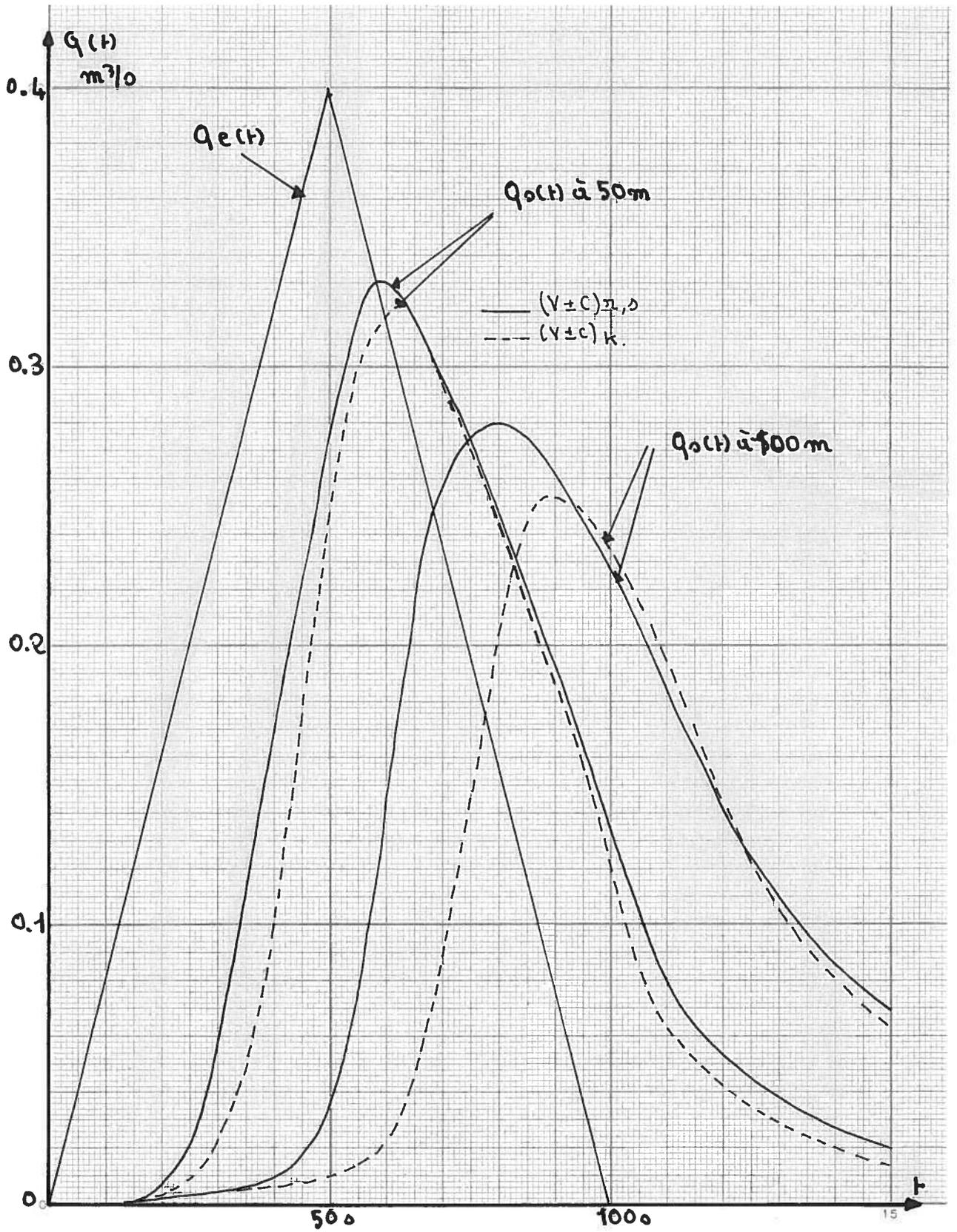


Figure 5

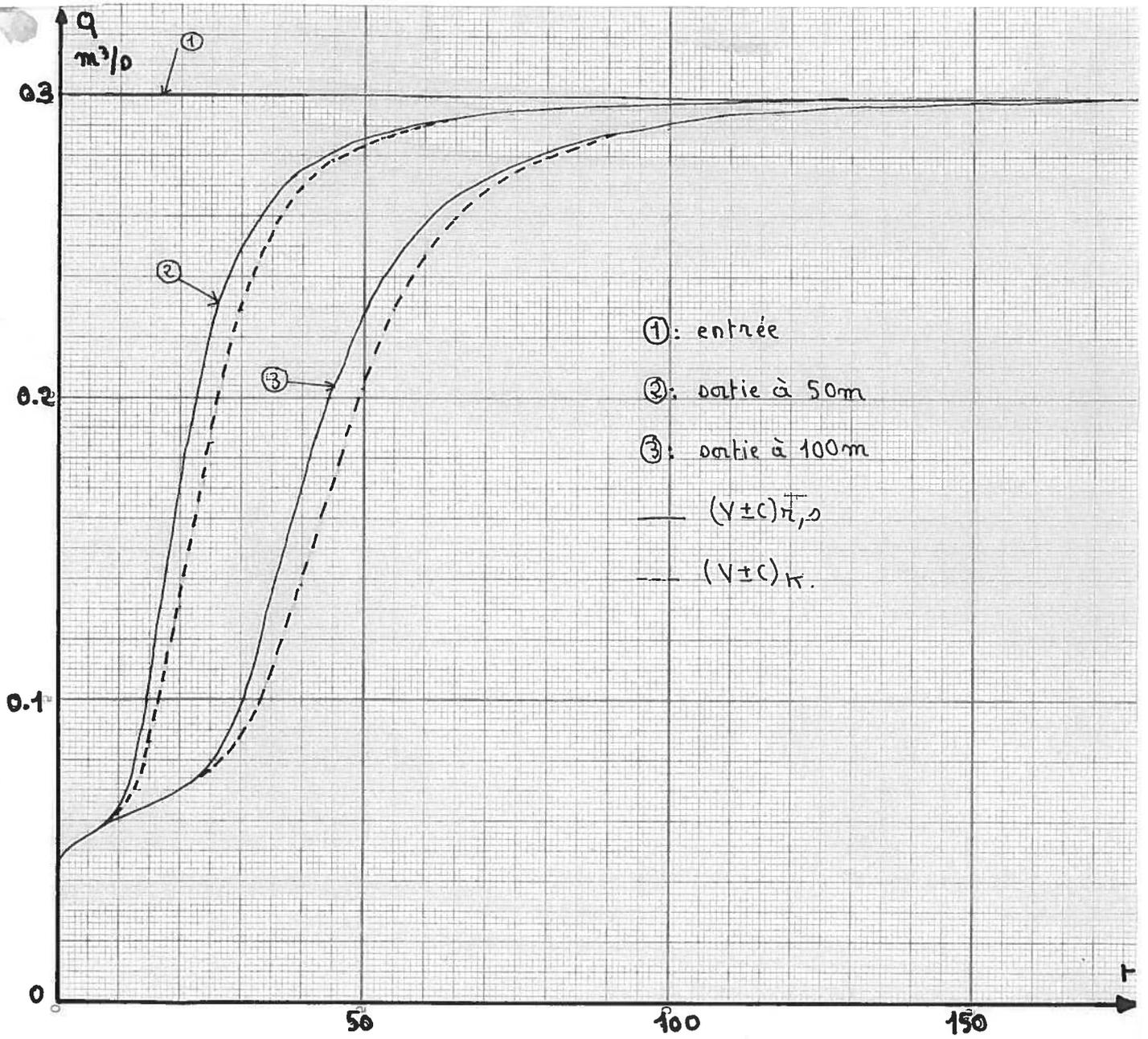
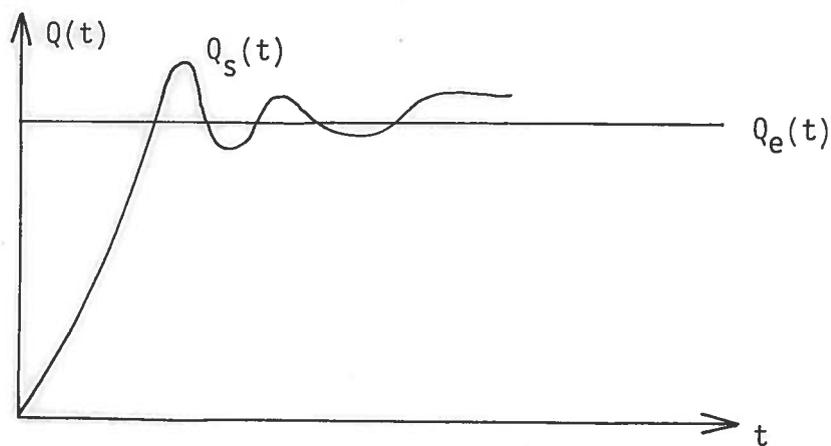


Figure 6

Le non respect de la condition de convergence $\frac{\Delta X}{\Delta t} \geq (V \pm C)$ donne des valeurs de débit qui divergent par rapport aux solutions réelles.



Le modèle de BARRE de ST-VENANT étant simple à mettre en oeuvre pour mesurer les écoulements ou les ruissellements sur des éléments à structure peu complexe, il est donc intéressant de voir si la méthode des caractéristiques, avec les modes de résolution que nous avons donnés, est applicable à des sections quelconques.

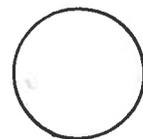
Nous avons retenu la section circulaire qui est typologiquement la plus éloignée de la section rectangulaire.



rectangle



ovoïde



cercle

II.3.2 Application à une section circulaire

En considérant une telle section, les équations obtenues par la méthode des caractéristiques sont très légèrement différentes. En effet, la variable

$C = \sqrt{gf/f'}$ ($f(h)$ = section mouillée) qui entre dans la définition des

pentés des courbes caractéristiques est conservée comme telle. On considère les deux équations d'état suivantes, vérifiées sur les courbes caractéristiques :

$$\begin{cases} V_p - V_r + \frac{g}{C_{pr}} (h_p - h_r) + g(J_{pr} - i) \Delta t = 0 \\ V_p - V_s + \frac{g}{C_{ps}} (h_p - h_s) + g(J_{ps} - i) \Delta t = 0 \end{cases}$$

Nous devons donc introduire la fonction qui relie h à $\frac{f(h)}{f'(h)}$ pour utiliser simplement la méthode des caractéristiques.

Les relations pratiques se déduisant aussi facilement du système que précédemment.

Pour vérifier les aptitudes de la méthode des caractéristiques à la modélisation des écoulements en canalisations circulaires, nous avons effectué les mêmes essais que pour les sections rectangulaires, la canalisation utilisée ayant un rayon de 0.3 m et une pente de 5‰.

En utilisant la résolution directe (V et c calculés en K) et le système linéaire (V et c calculés en r et s), nous retrouvons exactement les mêmes différences dues aux deux modes de contrôle particulier. Le système linéaire favorise l'amont par rapport à l'aval alors que la résolution directe favorise l'aval (voir figure 7).

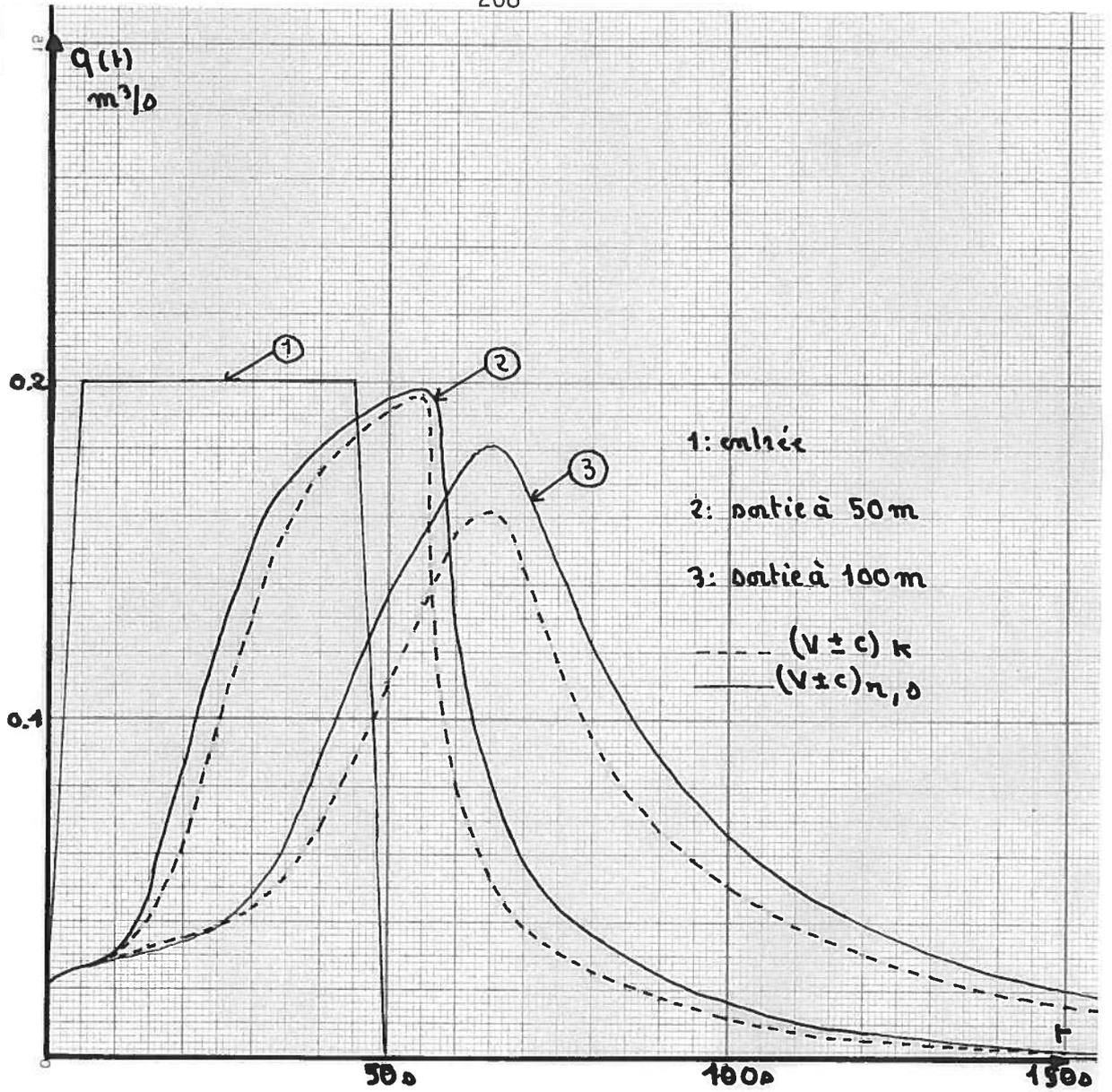


Figure 7 - A 100 m la différence du débit maximum est de l'ordre de $0.02 m^3/s$, le décalage de la montée et de la descente allant jusqu'à 5s.

Mais des erreurs spécifiques dues aux canalisations circulaires s'ajoutent à celles déjà relevées.

En particulier, on obtient un dépassement du débit maximum d'entrée en utilisant la résolution directe (voir figure 8). Ce dépassement à 50 m est observé lorsque la condition initiale (h et V à $t = 0$) est très faible. Cette erreur n'a pas pu être obtenue avec le système linéaire, celui-ci divergeant lorsque $h(0)$ et $V(0)$ sont très petits.

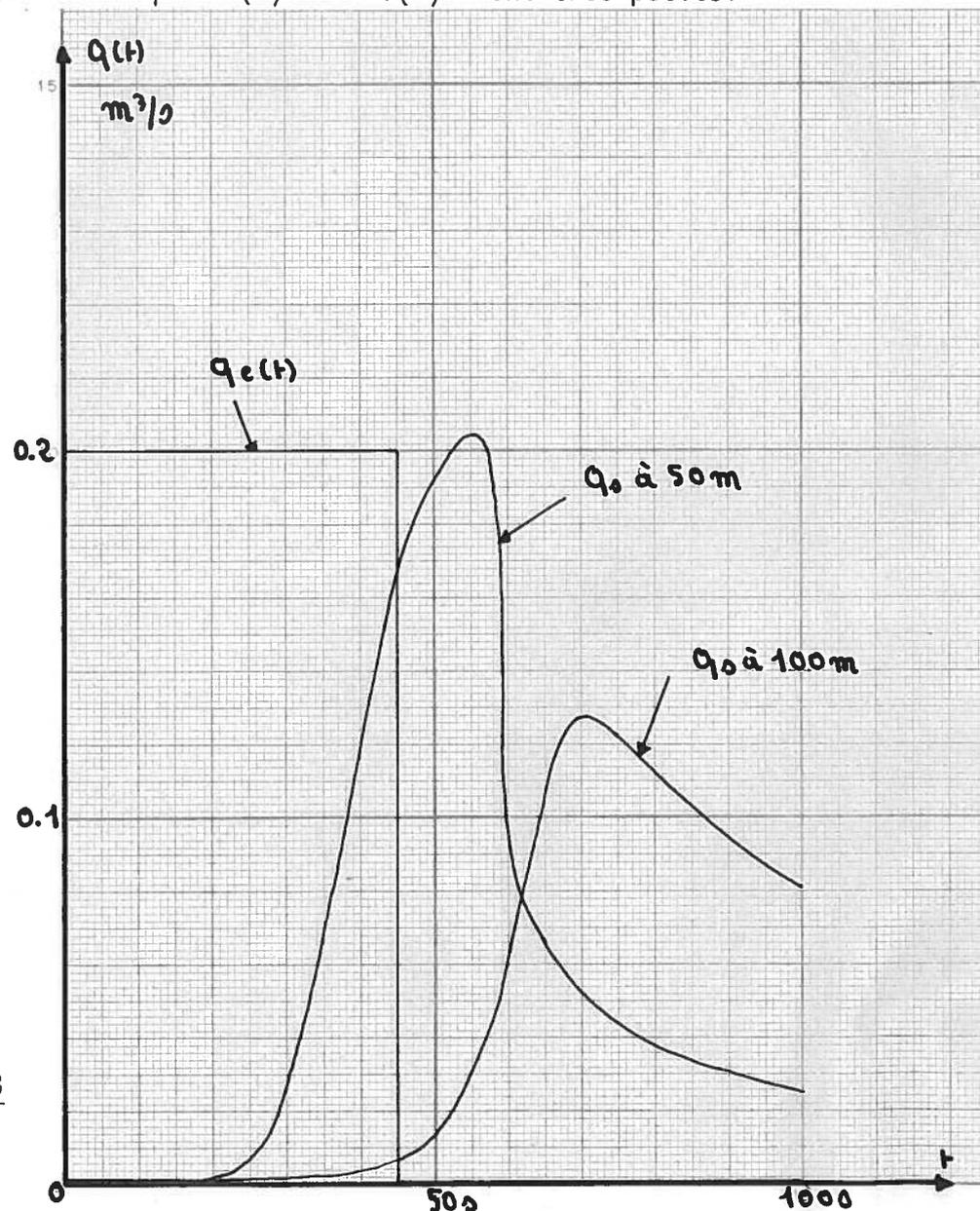
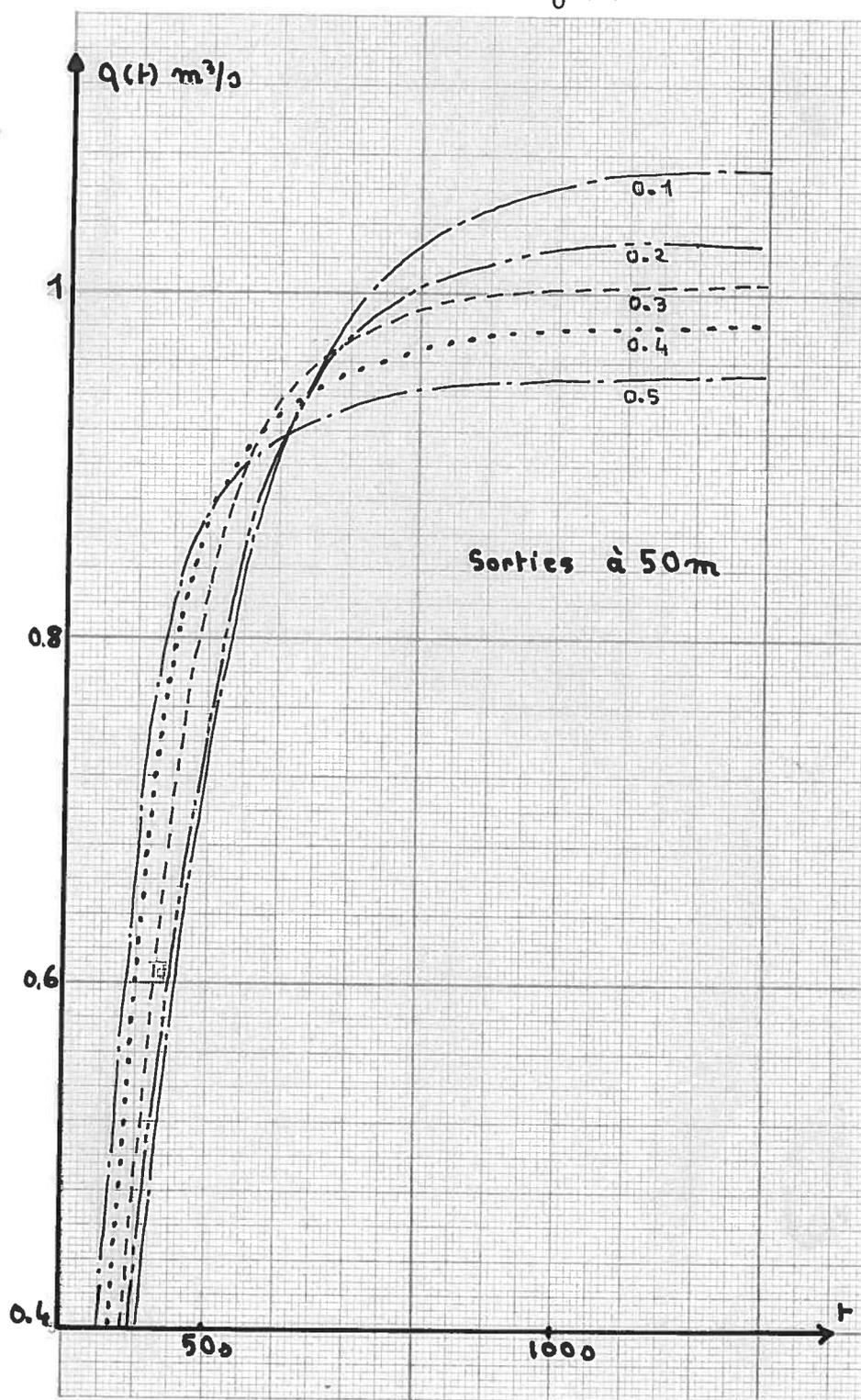


Figure 8

Ce défaut de convergence en valeur maximum est très nette lorsque l'entrée est de type HEAVISIDE $\sigma_0 H(t)$. Avec la section utilisée, des valeurs faibles de σ_0 ($0.1 \text{ m}^3/\text{s}$, $0.2 \text{ m}^3/\text{s}$ et $0.3 \text{ m}^3/\text{s}$) donnent des sorties qui dépassent ces valeurs alors que des valeurs plus fortes de σ_0 ($0.4 \text{ m}^3/\text{s}$ et $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$) donnent des sorties inférieures à ces valeurs, la convergence vers le σ_0 d'entrée étant très longue. (figure 9).



débits de sortie ramenés à 1 unité.

Figure 9

Ces divergences peuvent être naturellement réduite en calculant la propagation avec un pas de temps et un pas d'espace plus faible. En effet, les variations de section entre t et Δt sont plus petites, se rapprochant ainsi de la section rectangulaire pour l'intervalle considéré. (voir figure 10).

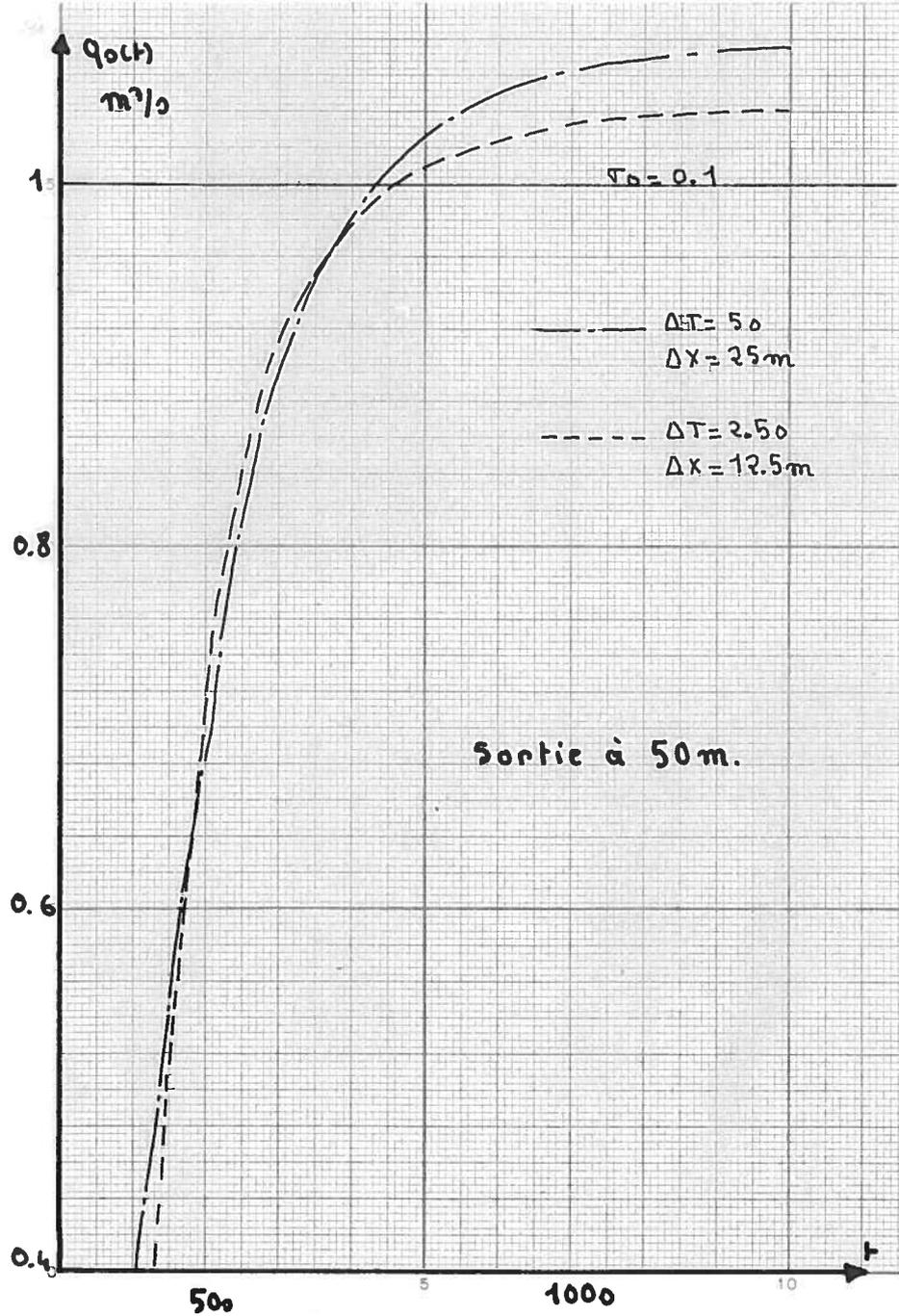


Figure 10

Ces divergences enregistrées à 50 mètres existent toujours à 100, 150, 300 m, ...

Notons enfin que cette méthode des caractéristiques avec les deux schémas particuliers de résolution, entraîne une non conservation des quantités d'eau transitées relativement importantes.

En prenant une entrée triangulaire à variation brutale de 16.80 m^3 , la sortie à 100 m mesurée par la résolution directe (V et c en K) donne environ 28.60 m^3 , la sortie à 100 m mesurée par le système linéaire (V et c en r et s) donnant une quantité de 20.90 m^3 (voir figure 11).

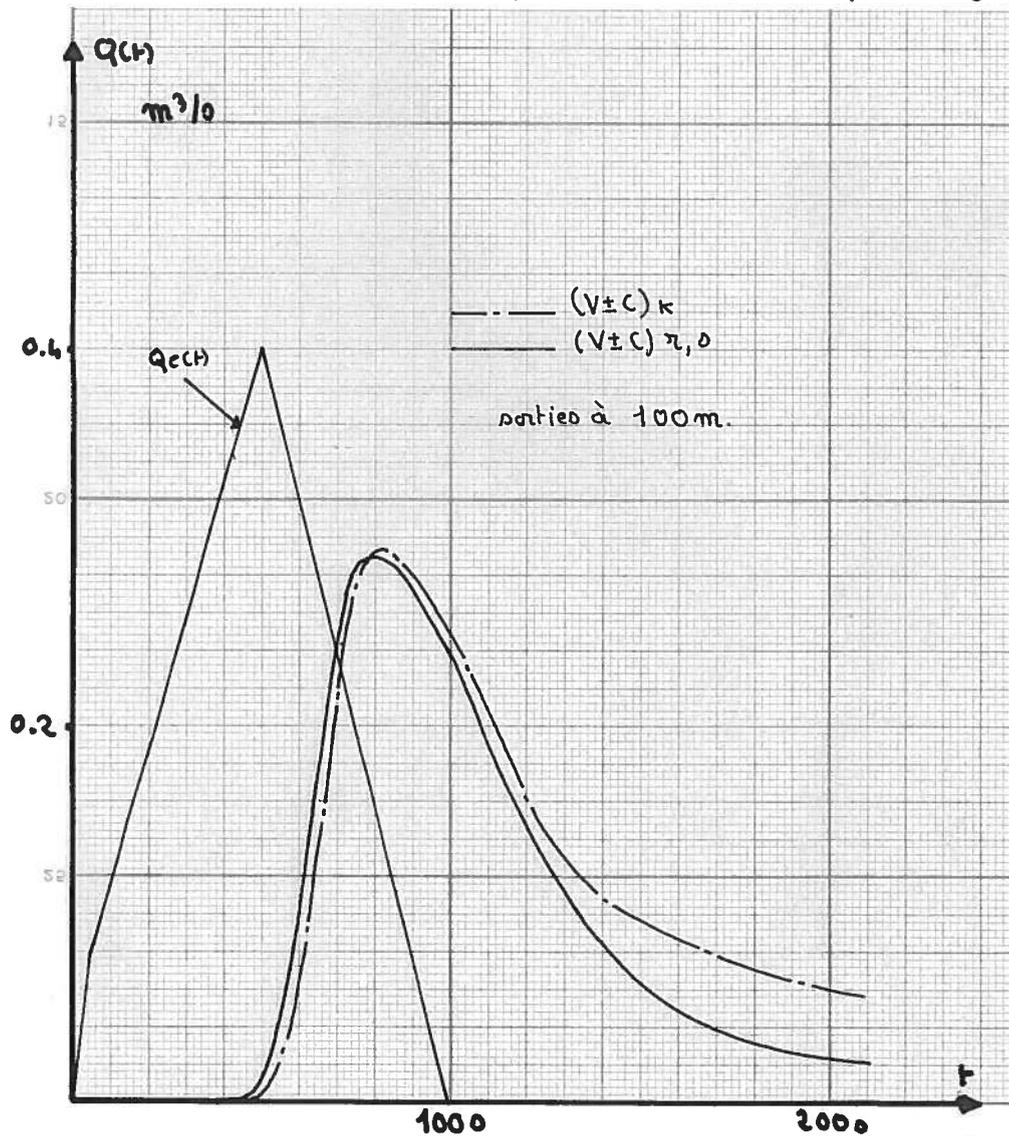


Figure 11

Ces erreurs appréciables sur les quantités d'eau transitées pourraient être atténuées en diminuant les pas Δt et ΔX pour se rapprocher localement de la section rectangulaire.

Ces erreurs sont dues, pour une bonne part, à la descente des hydrogrammes qui convergent très lentement vers zéro.

II.4 Conclusion

Nous avons mis en oeuvre un système couramment utilisé en hydrologie pour mesurer les écoulements, ce système étant obtenu par la méthode des caractéristiques pour une section rectangulaire, les pertes de charges étant considérées constantes le long des courbes caractéristiques.

Pour une section d'une telle forme, les résultats obtenus semblent corrects. Les débits transités sont conservés et les sorties dues à des entrées $\sigma_0 H(t)$ convergent correctement vers σ_0 . Chaque mode de résolution du système introduit un décalage dans la montée et la descente des hydrogrammes dû au type de "contrôle" introduit.

L'application d'un tel système à une section non rectangulaire, quel que soit le type de résolution, est contestable. En effet, il n'y a pas conservation des quantités d'eau transitées et les sorties provenant d'entrées du type $\sigma_0 H(t)$ ne convergent pas correctement vers σ_0 ; il peut même y avoir dépassement en valeur maximum du débit d'entrée.

Ces résultats négatifs pour les sections circulaires, s'expliquent par la courbure des caractéristiques qui est théoriquement beaucoup plus prononcée que dans le cas d'une section rectangulaire.

Ces erreurs doivent être moins importantes lorsque la section est ovoïde, une telle forme étant intermédiaire entre le cercle et le rectangle.

Par la suite, nous allons voir qu'une discrétisation directe du système de BARRE de ST-VENANT supprime ces erreurs, si les conditions de stabilité sont vérifiées.

III - RESOLUTION PAR DISCRETISATION

Nous reprenons le système de BARRE de ST-VENANT comme nous l'avons énoncé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(i-J) \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ S = f(h); Q = VS \end{array} \right.$$

C'est un ensemble de relations entre les fonctions dérivées de V , h , S et Q .

On peut les substituer par des relations entre les fonctions primitives V , h , S , Q en utilisant le calcul de TAYLOR. Il s'agit de la méthode des différences finies. Le système de BARRE de St-VENANT est alors remplacé par un schéma itératif de la forme :

$$\begin{bmatrix} V^{t+1} \\ H^{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^t \\ H^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$$

V et H étant les vecteurs vitesse et hauteur à autant de composantes qu'il y a de points de calcul.

III.1 Définition de la stabilité

Les fonctions dérivées sont remplacées par les fonctions primitives en utilisant les deux développements suivants :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + 0_1$$

$$f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + 0_2$$

En négligeant les termes 0_1 et 0_2 , la dérivée est alors approchée par la relation suivante :

$$f'(x) \sim \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à la dérivée première, on peut aussi écrire :

$$f'(x) \sim \frac{f(x) - f(x - h)}{h}$$

ou
$$f'(x) \sim \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Ce mode opérationnel est couramment utilisé en hydrologie et en hydraulique pour appliquer des systèmes non résolubles analytiquement.

Plusieurs auteurs donnent des solutions qui leur sont propres en exprimant de façon plus ou moins complexe les termes $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x-h)$, ...

En particulier CUNGE [36] propose les relations suivantes :

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{f_x^{t+1} - \frac{f_{x+1}^t + f_{x-1}^t}{2}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \frac{f_{x+1}^t - f_{x-1}^t}{2 \Delta x}$$



Le système de résolution est alors explicite, les variables V et h au temps $t+1$ étant calculées directement.

Si nous mettons en oeuvre ce système obtenu sur une canalisation circulaire, l'entrée $Q_e(t)$ étant du type HEAVISIDE ($\sigma_0 H(t)$), nous nous apercevons alors que, quelle que soit la distance de sortie, le débit $Q_s(t)$ dépasse l'entrée (voir figure 1).

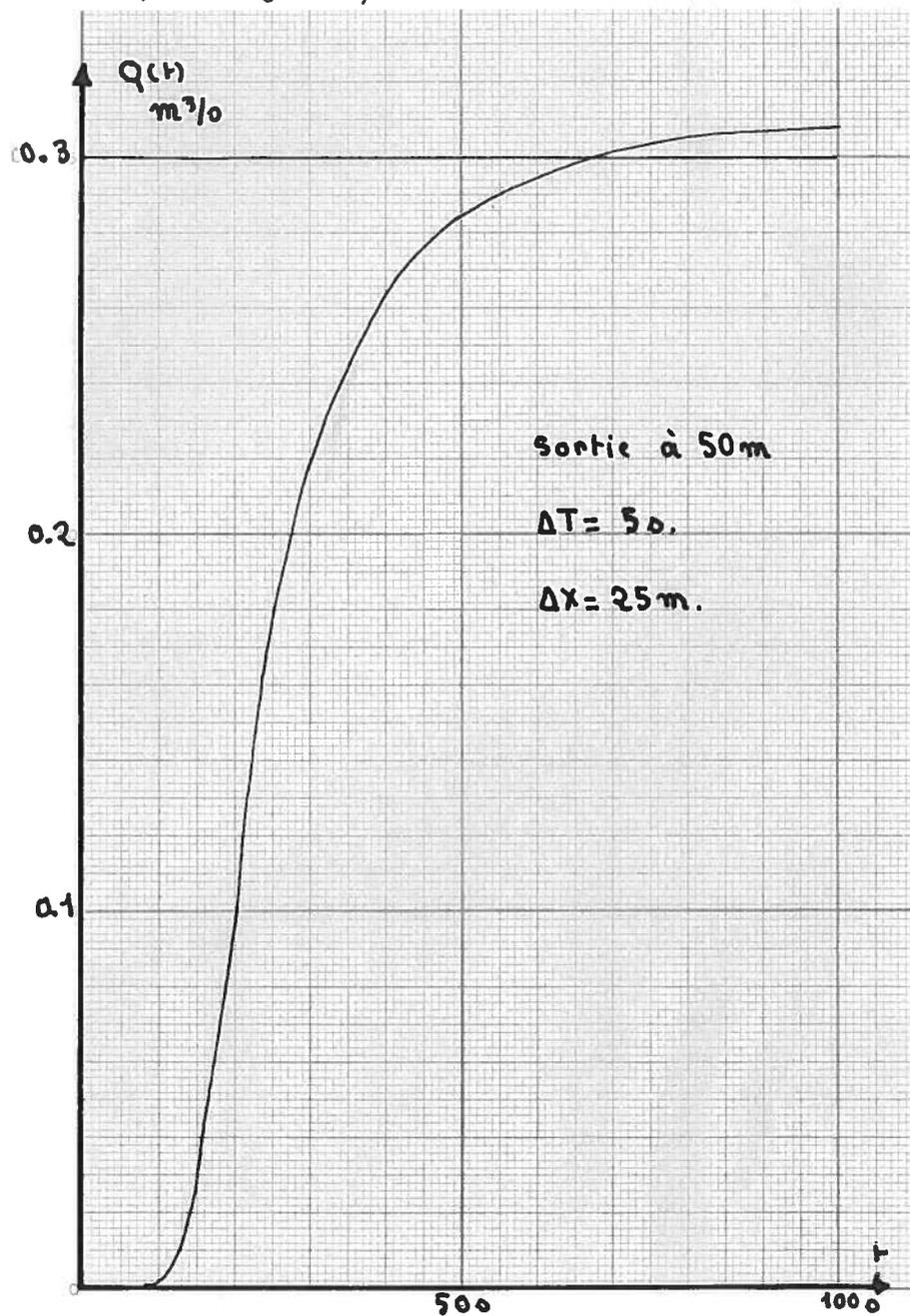


Figure 1

Pour une entrée quelconque, ce modèle ne conserve donc pas les volumes transités et majore la valeur du débit maximum. Le système construit n'est pas convergent; il amplifie les erreurs.

Quelle que soit la discrétisation choisie, il faut étudier la stabilité du système pour assurer la convergence. Si cette étude n'est pas faite, nous ne pouvons jamais être certain que les solutions obtenues convergent vers la solution réelle.

De façon générale, le problème étudié est apparenté à la diffusion classique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \rho}{\partial t} = A\rho & (1) \quad \text{système aux dérivées partielles} \\ L\rho = f(\rho) & \text{condition au contour} \\ \rho(M, 0) = f(M) & \text{condition initiale.} \end{array} \right.$$

Le système de BARRE de ST-VENANT est défini suivant les deux variables x et t . En utilisant le développement de TAYLOR pour les dérivées selon la variable x , l'équation (1) se transforme pour donner le système différentiel ;

$$\left\{ \frac{d\rho}{dt} \right\} = [E] [\rho] + F$$

où ρ est un vecteur contenant les variables h et V .

Comme l'opérateur E dépend de x, t, h et V , le système obtenu est pseudo-linéaire.

En utilisant une méthode de RUNGE KUTTA (EULER par exemple), le système différentiel se transforme pour donner une relation du type :

$$\begin{pmatrix} \rho^{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H \end{pmatrix}$$

où $\begin{pmatrix} T \end{pmatrix}$ dépend de Δt , Δx , h et V .

Pour de tels systèmes pseudo-linéaire, la stabilité est assurée par la condition locale de VON NEUMANN. L'intervalle de temps T de l'étude étant partagé en n intervalles Δt , la stabilité sera assurée localement si, en désignant par γ_0 la perturbation initiale, la perturbation obtenue au bout de la j itération γ_j doit être telle que :

$$\|\gamma_j\| \leq C \|\gamma_0\| \quad \text{lorsque } \Delta t \rightarrow 0$$

C étant une constante.

$\forall \lambda_j$ valeur propre de T , cette condition de stabilité locale se traduit par l'inégalité :

$$|\lambda_j| \leq 1 + K \Delta T$$

Pour l'intervalle d'étude $J \Delta t$, la matrice T avec une norme < 1 , est stable et n'amplifie pas les erreurs de calcul. La convergence est alors assurée.

Théoriquement, la démarche est donc simple. Une discrétisation des variables étant choisie, il suffit de mesurer la norme de la matrice T .

Pratiquement cette vérification de la stabilité est fort complexe. Si nous prenons l'exemple de discrétisation choisie par CUNGE, l'équation de continuité et l'équation dynamique ont les formes suivantes :

$$h_x^{t+1} = \frac{H_{x+1}^t + H_{x-1}^t}{2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[v_x^t (H_{x-1}^t - H_{x+1}^t) + \frac{f_x^t}{f_x^t} (v_{x-1}^t - v_{x+1}^t) \right] = 0$$

$$v_x^{t+1} = -\frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[(v_{x+1}^t)^2 - (v_{x-1}^t)^2 \right] - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[H_{x+1}^t - H_{x-1}^t \right] + \frac{1}{2} \left[v_{x+1}^t + v_{x-1}^t \right] + g \Delta t \left[i - J_{x-1,x+1}^t \right]$$

Le système n'étant pas linéaire, nous nous apercevons qu'il est possible de construire plusieurs matrices T reliant les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} H_x^{t+1} \\ v_x^{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x^t \\ v_x^t \end{pmatrix}$$

Toutes ces matrices doivent être stables pour assurer la convergence du système.

Ce calcul direct est très long et peut conduire à des absurdités.

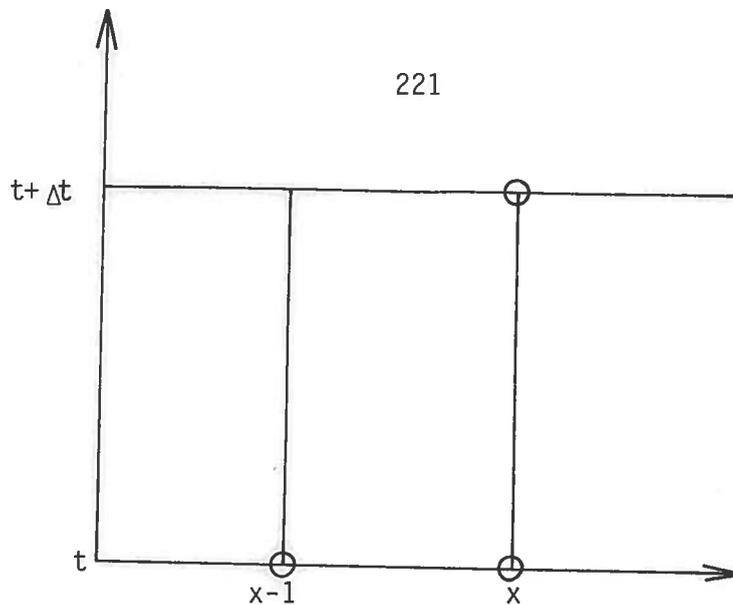
Pour illustrer ce propos, nous prenons une section rectangulaire.

$\left(\frac{f_x^t}{f_x^t} \right) = L$ avec la discrétisation suivante :

$$\frac{\partial g_x^t}{\partial t} = \frac{g_x^{t+1} - g_x^t}{\Delta t} ; \frac{\partial g_x^t}{\partial x} = \frac{g_x^t - g_{x-1}^t}{\Delta x}$$

Nous nous servons donc uniquement de trois points :

$$(x^{t+1}, x^t, x^{t-1})$$



Nous obtenons le système suivant, les fonctions primitives étant calculées en x au temps t :

$$\frac{h_x^{t+1} - h_x^t}{\Delta t} + \frac{v_x^t (h_x^t - h_{x-1}^t)}{\Delta x} + \frac{h_x^t (v_x^t - v_{x-1}^t)}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{v_x^{t+1} - v_x^t}{\Delta t} + \frac{v_x^t (v_x^t - v_{x-1}^t)}{\Delta x} + \frac{g(h_x^t - h_{x-1}^t)}{\Delta x} = g(i - J_x^t)$$

Les différentes matrices que nous pouvons élaborer dépendent des termes produits $v.h.$

Soit l'écriture suivante :

$$h_x^{t+1} = h_x^t \left[1 - 2 v_x^t \frac{\Delta t}{\Delta x} + v_{x-1}^t \frac{\Delta t}{\Delta x} \right] + h_{x-1}^t \left[v_x^t \frac{\Delta t}{\Delta x} \right]$$

$$v_x^{t+1} = g(i - J) \cdot \Delta t + v_x^t \left[1 - v_x^t \frac{\Delta t}{\Delta x} \right] + v_{x-1}^t \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \quad v_x^t \right]$$

Le système $\rho^{t+1} = [A] \rho^t + K$ est explicite avec une matrice A triangulaire inférieure. La diagonale est composée de trois termes différents qui sont les valeurs propres.

222

$$\lambda_1 = 1 - 2v \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\lambda_2 = 1 - 2v \frac{\Delta t}{\Delta x} + v \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\lambda_3 = 1 - v \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

La condition de stabilité sur λ_1 conduit à l'inégalité suivante :

$$1 + \frac{K \Delta t}{2} \geq v \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq \frac{K \Delta t}{2}$$

avec K aussi petit que l'on veut, soit la condition :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq v$$

La deuxième valeur propre qui s'écrit en fait :

$$1 - 2v_x^t \frac{\Delta t}{\Delta x} + v_{x-1}^t \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

entraîne les deux conditions suivantes si $K \rightarrow 0$.

$$v_x^t \geq \frac{v_{x-1}^t}{2}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{2}{v_{x-1}^t - 2v_x^t}$$

La troisième valeur propre entraîne la condition suivante :

$$v \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq 0 \quad (\text{toujours vérifiée})$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq \frac{v}{2}$$

Si la relation $2 v_x^t \geq v_{x-1}^t$ est toujours vérifiée, la condition de convergence la plus contraignante a la forme suivante :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{v}$$

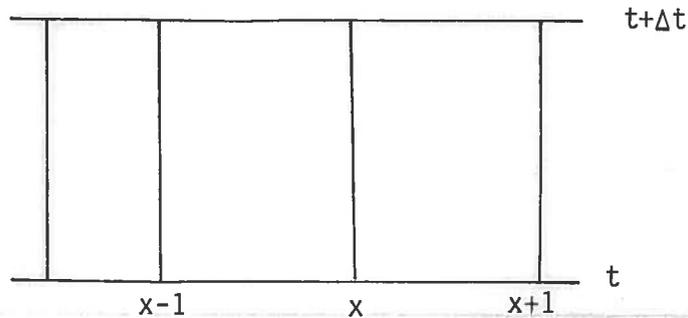
Comme nous ne pouvons pas présumer des valeurs des vitesses, la matrice élaborée peut être instable localement.

Des écritures différentes de la matrice T donnent des conditions de stabilité difficile à satisfaire; le schéma utilisé n'est peut-être pas convergent.

En choisissant d'autres discrétisations (schémas explicites ou implicites), nous avons retrouvé les mêmes difficultés. Nous devons donc utiliser un autre artifice pour s'assurer de la stabilité d'une discrétisation du système de BARRE de ST-VENANT.

III.2 Condition de stabilité

La plupart des discrétisations choisies conduisant à des matrices T complexes, les auteurs se rattachent à la méthode des caractéristiques pour définir la relation que l'on doit satisfaire pour assurer la stabilité du système.



La méthode des caractéristiques calcule $v_x^{t+\Delta t}$, $h_x^{t+\Delta t}$ en utilisant les points $x-1$, $x+1$ au temps t . Elle est donc voisine d'une discrétisation sur ces trois points qui donnent un schéma explicite. Cela veut dire que toute discrétisation directe revient à employer le système élaboré par la méthode des caractéristiques en approximant les opérateurs différentiels par le calcul de TAYLOR.

Avec une section rectangulaire, le système de BARRE de ST-VENANT est alors équivalent au système suivant si J est constant le long des courbes caractéristiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (V+c) \frac{\partial}{\partial x} \right) (2c + V + g(i-J)t) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + (V-c) \frac{\partial}{\partial x} \right) (-2c + V + g(i-J)t) = c \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (V+c) \frac{\partial}{\partial x} \right) (2c + V + g(i-J)t) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + (V-c) \frac{\partial}{\partial x} \right) (-2c + V + g(i-J)t) = c \end{array} \right. \quad (2)$$

avec $c = \sqrt{gh}$.

III.2.1 Schéma discret de type explicite

On utilise les discrétisations suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (f_{x+1}^t - f_x^t) \frac{1}{\Delta x} ; \frac{\partial f}{\partial t} = (f_{x+1}^{t+1} - f_{x+1}^t) \frac{1}{\Delta t}$$

Les variables $(V+c)$ et $(V-c)$ opérant sur $\frac{\partial}{\partial x}$ sont définies sur l'intervalle $[0,t]$ et sur n'importe quel ensemble de points.

(1) + (2) =>

$$v_{x+1}^{t+1} = v_{x+1}^t + v_x^t \frac{\Delta t}{\Delta x} v + c_x^t \cdot \frac{2\Delta t}{\Delta x} c - c_{x+1}^t \cdot \frac{2\Delta t}{\Delta x} c - v_{x+1}^t v \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2g (i-j)$$

(1) - (2) =>

$$c_{x+1}^{t+1} = c_{x+1}^t \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} v\right) + c_x^t \left(v \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + \frac{v_{x+1}^t}{2} \left(-\frac{\Delta t}{\Delta x} c\right) - \frac{v_x^t}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} v\right)$$

En plaçant dans la matrice les termes V et c non définis explicitement, le schéma a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} v_2^{t+1} \\ c_2^{t+1} \\ v_3^{t+1} \\ c_3^{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} v) & (-2 \frac{\Delta t}{\Delta x} c) & 0 & 0 \dots & 0 \dots \\ (-1/2 \frac{\Delta t}{\Delta x} c) & (1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} v) & 0 & 0 \dots & 0 \dots \\ (\frac{\Delta t}{\Delta x} v) & (2 \frac{\Delta t}{\Delta x} c) & (1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} v) & (-2 \frac{\Delta t}{\Delta x} c) & 0 \dots \\ (-1/2 \frac{\Delta t}{\Delta x} v) & (\frac{\Delta t}{\Delta x} v) & (-1/2 \frac{\Delta t}{\Delta x} c) & (1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} v) & 0 \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^t \\ c_2^t \\ v_3^t \\ c_3^t \end{pmatrix} + [\gamma]$$

$$\Delta = \pi \left[\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta X} V - \lambda \right)^2 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta X} c \right)^2 \right]$$

$$\text{d'où } \lambda = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta X} \left(V \pm c \right)$$

La stabilité locale est assurée si $\sup |\lambda| \leq 1$
soit la condition bien connue :

$$\boxed{\frac{\Delta X}{\Delta t} \geq V \pm c}$$

III.2.2 Schéma discret de type implicite

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{x+1}^{t+1} - f_{x+1}^t}{\Delta t} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{x+1}^{t+1} - f_x^{t+1}}{\Delta x}$$

Les variables $(V+c)$ et $(V-c)$ opérant sur $\frac{\partial}{\partial x}$ sont définies sur l'intervalle $[0, t+1]$, sur tous les points de l'étude pour $\tau \leq t$ et sur les points en amont de $x+1$ pour $\tau = t+1$.

De même que précédemment, en notant a, b, e, d les termes suivants :

$$a = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (V+c) \quad b = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (V-c)$$

$$e = \frac{\Delta t}{\Delta x} (V-c) \quad d = \frac{\Delta t}{\Delta x} (V+c)$$

on obtient le système implicite :

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccccc|ccc|ccc|c}
 2ab & 0 & 0 & 0 & 0 & V_2^{t+1} & a+b & 2(b-a) & 0 & 0 & 0 & V_2^t \\
 0 & 4ab & & & & c_2^{t+1} & 2(b-a) & (a+b) & 0 & 0 & 0 & c_2^t \\
 ea - db & 2(ea-db) & 2ab & 0 & 0 & V_3^{t+1} & 0 & 0 & (a+b) & 2(b-a) & 0 & V_3^t \\
 -(ea+db) & -2(ea+db) & 0 & 4ab & 0 & c_3^{t+1} & 0 & 0 & 2(b-a) & (a+b) & 0 & c_3^t
 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc|ccc|c}
 a+b & 2(b-a) & 0 & 0 & 0 & V_2^t \\
 2(b-a) & (a+b) & 0 & 0 & 0 & c_2^t \\
 0 & 0 & (a+b) & 2(b-a) & 0 & V_3^t \\
 0 & 0 & 2(b-a) & (a+b) & 0 & c_3^t
 \end{array} \right| + [\gamma] \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 A & & B
 \end{array}
 \end{array}$$

Le système est donc de la forme $\rho^{t+1} = [A^{-1} B] \rho^t + [A^{-1}] [\gamma]$

Les matrices A et B ayant respectivement pour valeurs propres :

$$\begin{cases} \lambda = ab \\ \lambda = \frac{ab}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{2b \pm \sqrt{b^2 + 3a^2}}{2}, \text{ le rayon spectral de la ma-}$$

trice $[A^{-1} B]$ est :

$$\rho = \frac{2}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (V+c)} + \frac{2}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (V-c)} \quad (\rho = \sup \lambda)$$

Cette discrétisation est stable si $\rho \leq 1$ soit en réalisant l'inégalité suivante :

$$\boxed{\frac{\Delta X}{\Delta T} \leq V \pm C}$$

III.2.3 Discrétisation "mi-explicite, mi-implicite"

La hauteur d'eau au temps $t+1$ est calculée explicitement; la vitesse au temps $t+1$ tient compte de la hauteur précédemment calculée.

En reprenant le système de base, la différence des équations (1) - (2) donne :

$$4 \frac{\partial c}{\partial t} + (V+c) \frac{\partial}{\partial x} (2c + V + g(i-J) t) - (V-c) \frac{\partial}{\partial x} (-2c + V + g(i-J) t) = 0$$

Nous discrétisons cette équation en utilisant les approximations suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f^{t+1} - f^t}{\Delta t} ; \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{x+1}^t - f_x^t}{\Delta x}$$

On obtient l'équation :

$$(3) \quad C_{x+1}^{t+1} = C_{x+1}^t \left(1 - V \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + V_{x+1}^t \left(-\frac{1}{2} c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + C_x^t V \frac{\Delta t}{\Delta x} + V_x^t \left(\frac{c}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$$

La somme de (1) + (2) donne :

$$2 \frac{\partial V}{\partial t} + (V+c) \frac{\partial}{\partial x} 2c + (V-c) \frac{\partial}{\partial x} (-2c) + (V+c) \frac{\partial V}{\partial x} + (V-c) \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

En remplaçant les dérivées sur V par :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V_x^{t+1} - V_x^t}{\Delta t} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_{x+1}^t - V_x^t}{\Delta x}$$

et celle sur C par :

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{C_{x+1}^{t+1} - C_x^{t+1}}{\Delta x}$$

C au temps t+1 étant calculé par (3), on obtient :

$$(4) \quad V_{x+1}^{t+1} = V_{x+1}^t \left(1 - V \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + V_x^t \left(V \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + C_{x+1}^{t+1} \left(-2c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + C_x^{t+1} \left(2c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$$

En remplaçant les termes C^{t+1} par leurs expressions, on obtient finalement un schéma explicite de la forme :

$$\begin{bmatrix} \rho^{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice [A] ont pour expression :

$$\lambda = \frac{2 + \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \pm \sqrt{\left(4 \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 + \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^4 - 8 V \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^{1/2}}}{2}$$

La condition de convergence pour ce type de résolution est difficile à exprimer simplement.

Nous venons donc d'énoncer les conditions de stabilité qu'il faut respecter pour appliquer le système de BARRE de ST-VENANT à une canalisation rectangulaire, la discrétisation des fonctions dérivées étant la plus simple

possible. Nous les obtenons en supposant que les pertes de charge sont constantes le long des courbes caractéristiques. Il n'est donc point besoin d'utiliser des discrétisations complexes pour s'assurer de la convergence de la solution (voir discrétisation de CUNJE).

Ces relations sont obtenues pour une section rectangulaire uniquement. Les conditions de stabilité d'un schéma de différences finies pour une section quelconque sont certainement plus délicates à obtenir.

Malgré cela, les relations de stabilité données ci-dessus doivent s'étendre à différentes formes de section, en tenant compte de la variation $S(h) / S'(h)$.

III.3 Vérification

Les essais que nous avons effectués ont pour but de vérifier les conditions d'application du système discrétisé de BARRE de ST-VENANT.

Pour une canalisation rectangulaire, la discrétisation explicite du système :

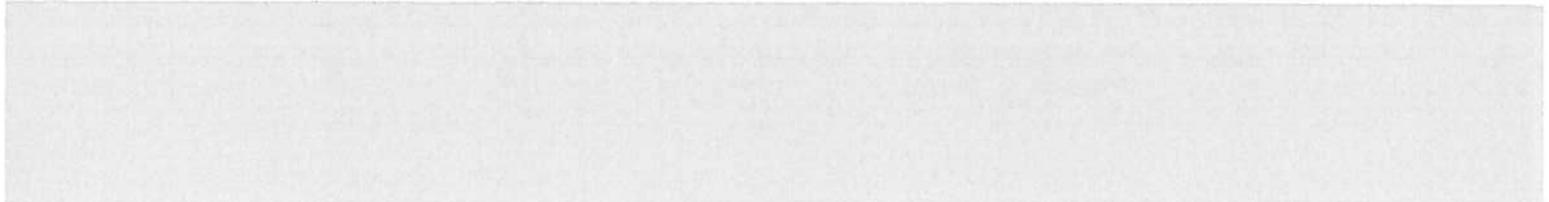
$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (V+c) \frac{\partial}{\partial x} \right) (2c + V + g(J-i) t) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + (V-c) \frac{\partial}{\partial x} \right) (-2c + V + g(J-i) t) = 0 \end{cases}$$

donne une réponse convergente vers l'entrée $\sigma_0 H(t)$, $V+c$ et $V-c$ étant calculés grâce aux points $x-1, x, x+1$.

Cette réponse est très proche de celle que l'on obtient en utilisant la méthode des caractéristiques (voir figure 1).

Les essais suivants que nous avons effectués portent exclusivement sur une canalisation circulaire de rayon 0.3m et de pente 5°/∞∞. Comme nous ne pouvons pas appliquer le système ci-dessus à une telle canalisation, nous avons directement discrétisé le système original de BARRE de ST-VENANT, le terme V multiplié par $\frac{\partial V}{\partial x}$ étant calculé en x au temps $t+1$. Les dérivées de ce système ont été remplacées par les premiers termes du développement de TAYLOR soit :

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} \sim \frac{f(\gamma + \tau) - f(\gamma)}{\Delta \tau}$$



232

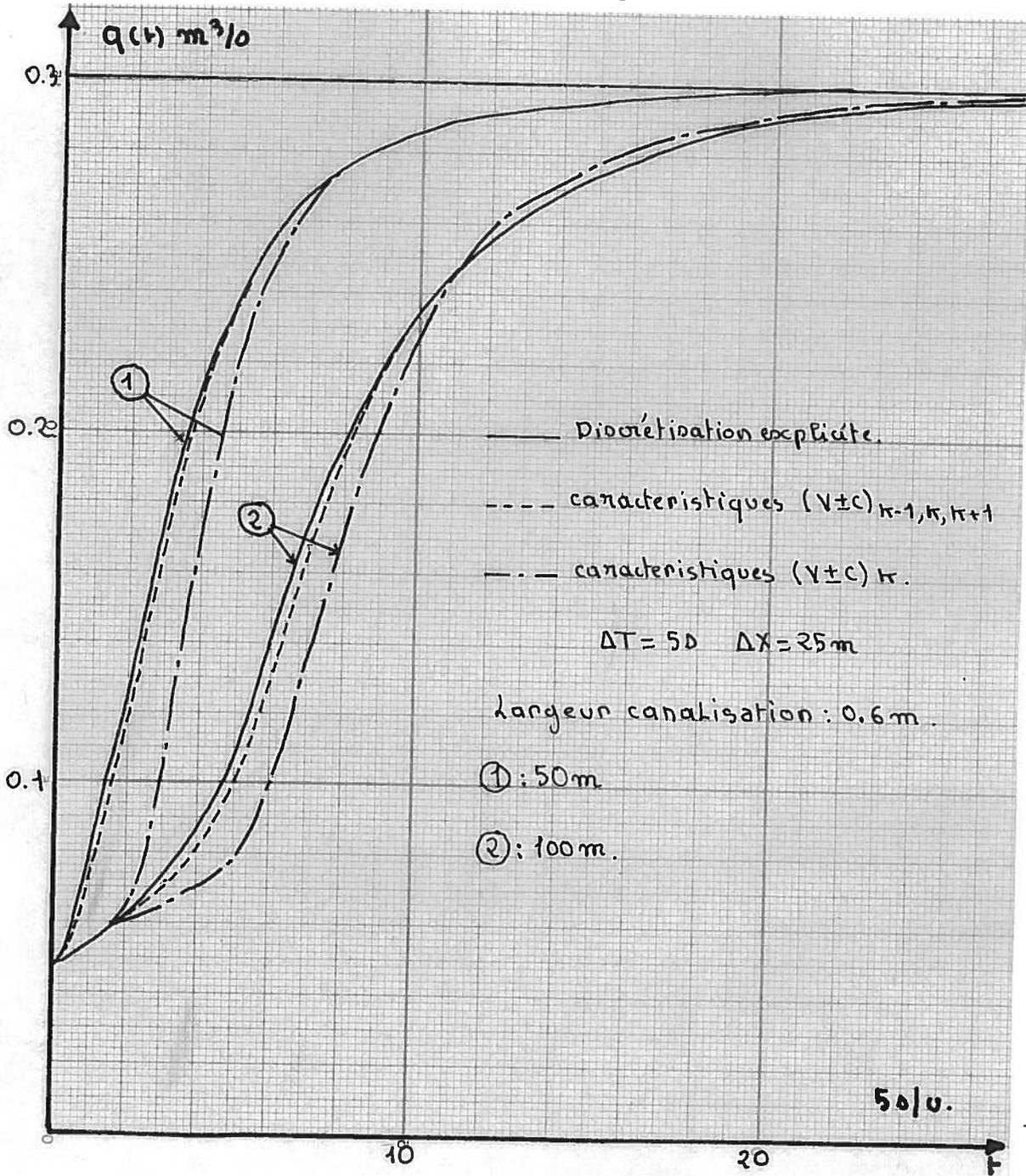


Figure 1

L'entrée étant de type Heaviside $0.3 H(t) \text{ m}^3/\text{s}$, la sortie est très stable lorsque Δt et Δx varient tout en respectant la condition de stabilité. Elle converge normalement vers σ_0 (voir figure 2).

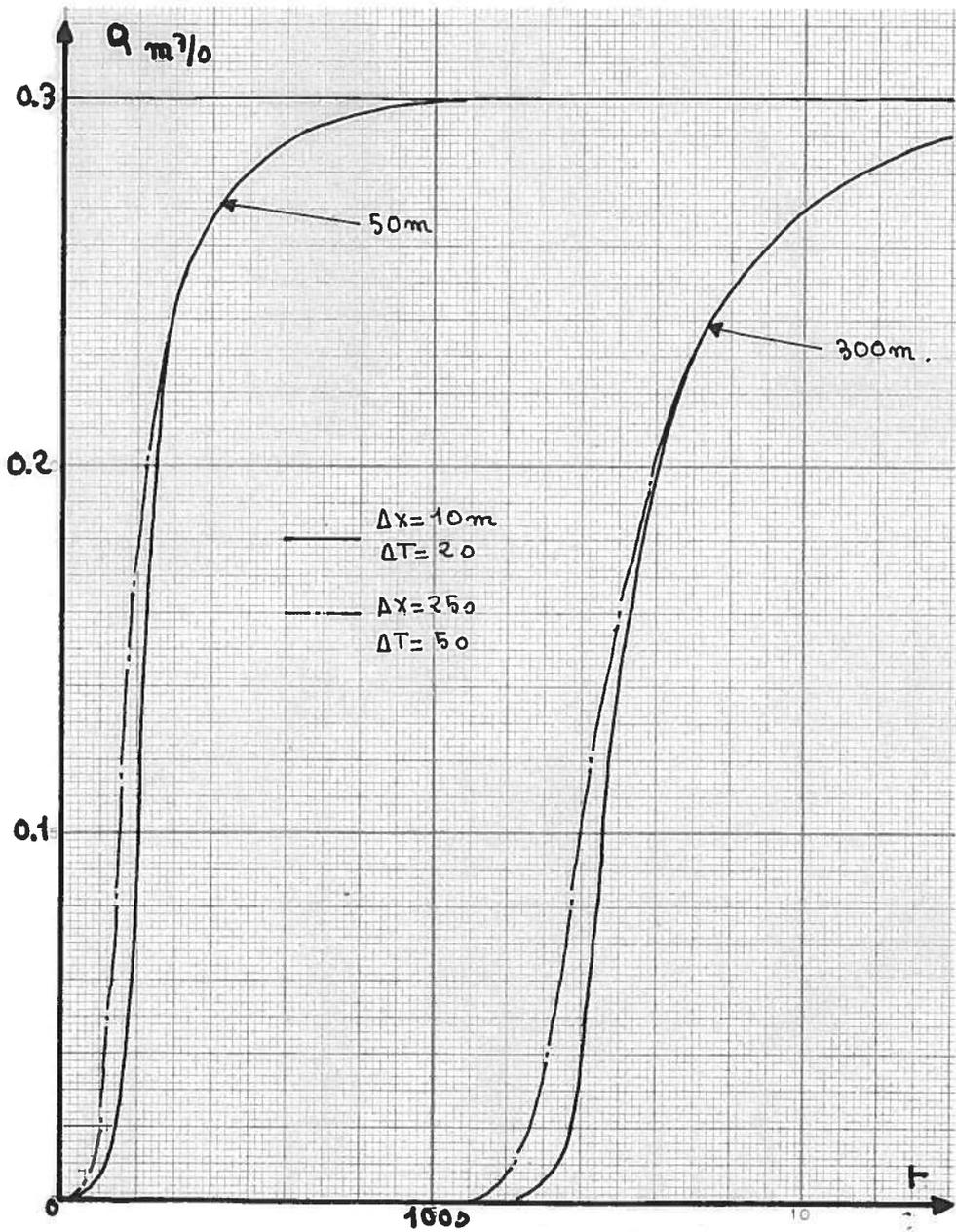


Figure 2

Ensuite, nous avons vérifié que les conditions de stabilité définies pour les sections rectangulaires pouvait s'appliquer aux sections circulaires sans grandes erreurs.

Nous avons donc mis en oeuvre trois schémas (explicite, implicite et mixte) en remplaçant les dérivées par les relations simples données précédemment. Les sorties que nous donnons sont celles mesurées à 100 m.

La vitesse dans la canalisation ne dépassant pas 1,85 m et la hauteur d'eau 0.335 m pour une entrée constante de 0.3 m³/s, le terme $V + \sqrt{gf/f'}$ vaut sensiblement 3.516m/s. Le pas d'espace choisi étant de 25 m, les différents schémas sont théoriquement stables pour des pas Δt tels que :

schéma explicite : $T \leq 7.1$ s

schéma implicite : $T \geq 7.1$ s

Les expériences effectuées confirment ces valeurs.

Le schéma explicite donne des sorties pratiquement confondues pour des $\Delta T < 8$ s. Au-delà de cette valeur le système est instable (Voir figure 3).

Le schéma implicite est stable pour $\Delta T \geq 8$ s, la convergence étant très lente. Lorsque ΔT croît, la montée de l'hydrogramme se déplace vers la gauche. Ce schéma aura donc tendance à retarder l'apparition du maximum tout en minorant sa valeur (voir figure 4).

Le schéma mixte converge encore pour $\Delta t = 8$ s alors que le schéma explicite diverge. Les sorties obtenues pour $\Delta t \leq 8$ s sont légèrement différentes les unes des autres en se déplaçant vers la gauche lors ΔT croît. (Voir figure 5).

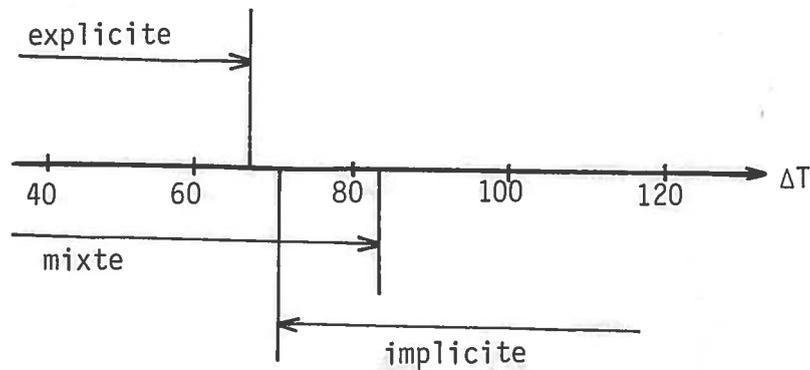


Figure 3

235

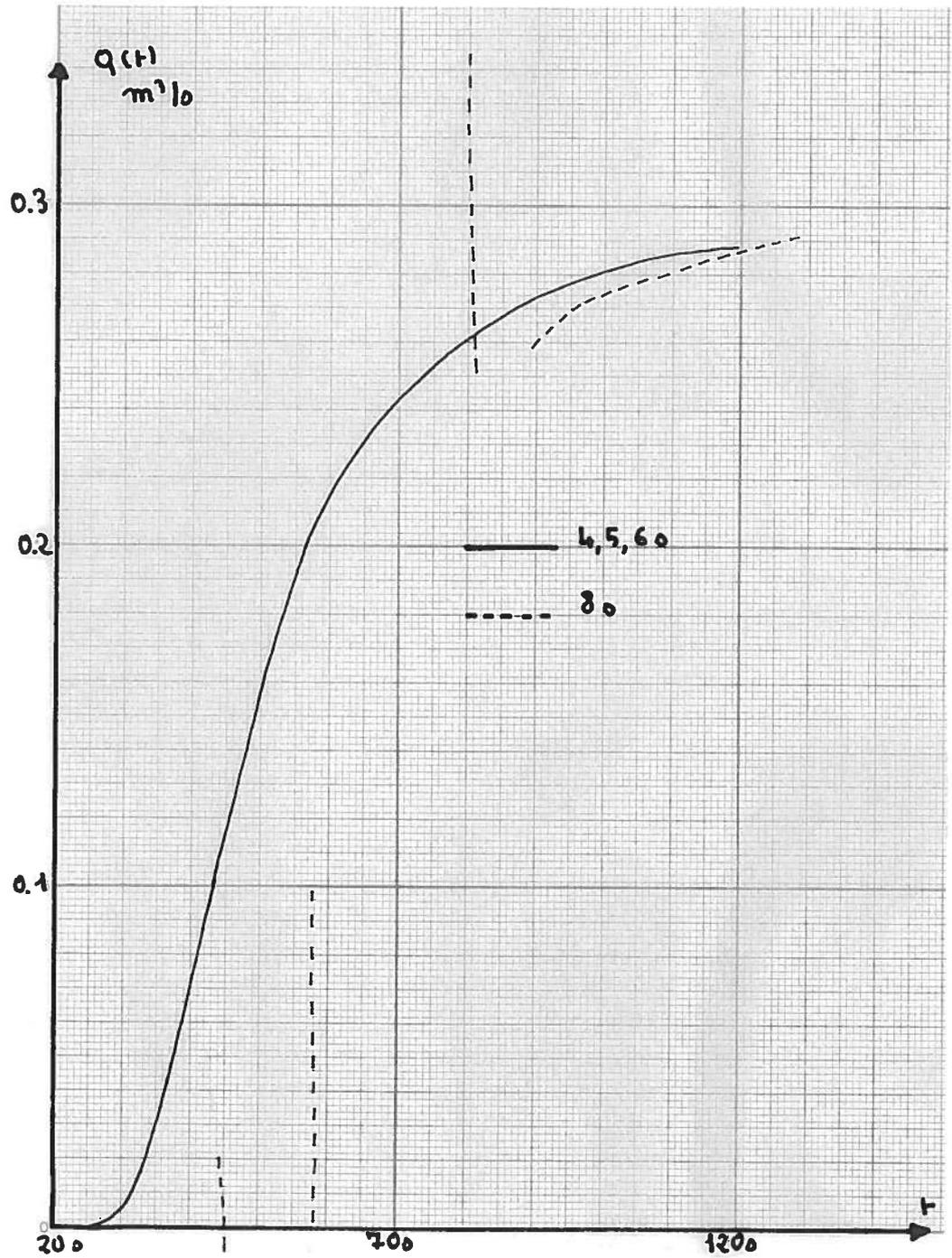


Figure 4 - Schéma explicite

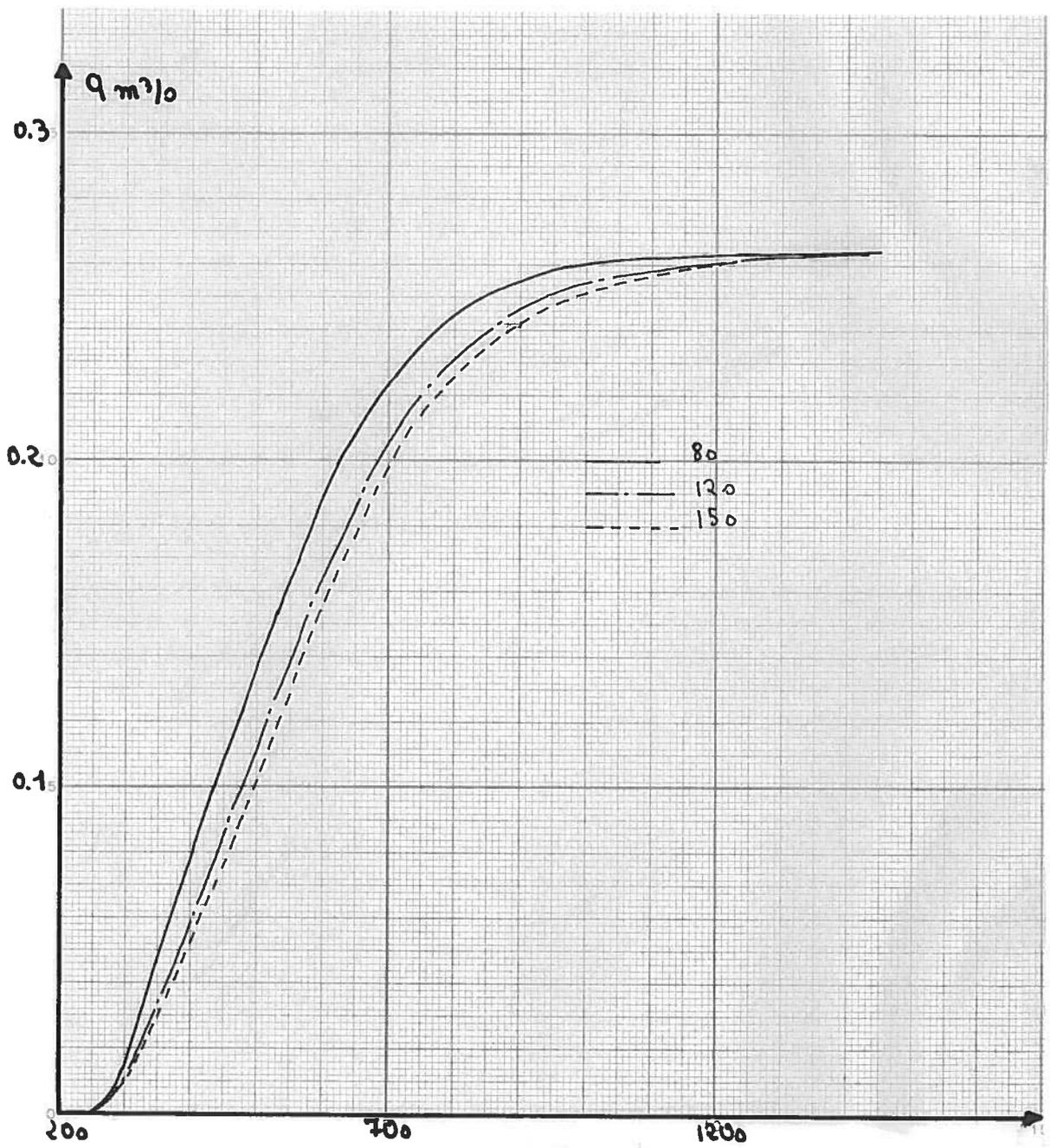


Figure 5 - Schéma implicite

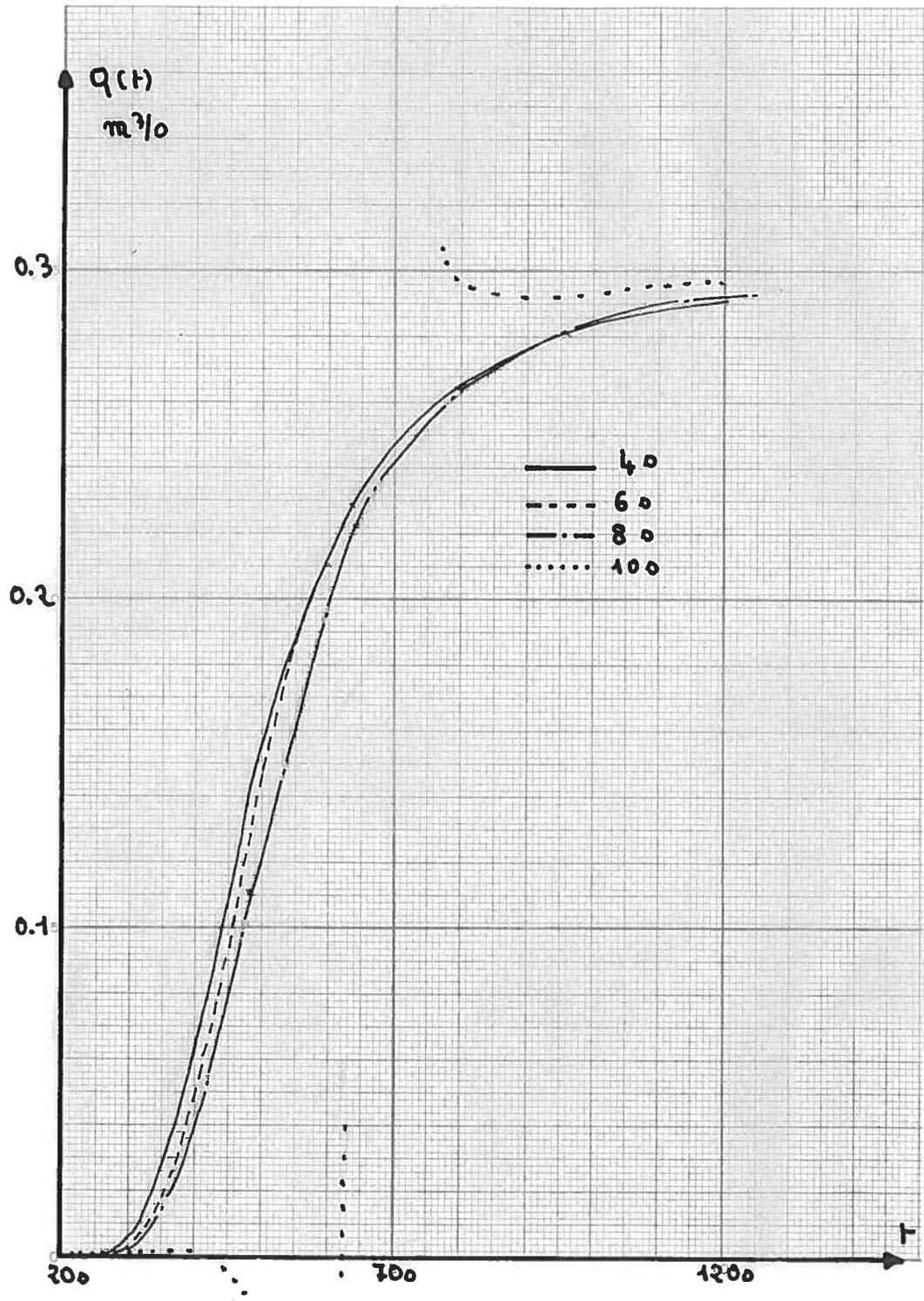


Figure 6 - Schéma mixte

Appliquée à une canalisation circulaire, la discrétisation du système de BARRE de ST-VENANT permet de très bien reproduire les quantités d'eau transitée. (Voir figure 7).

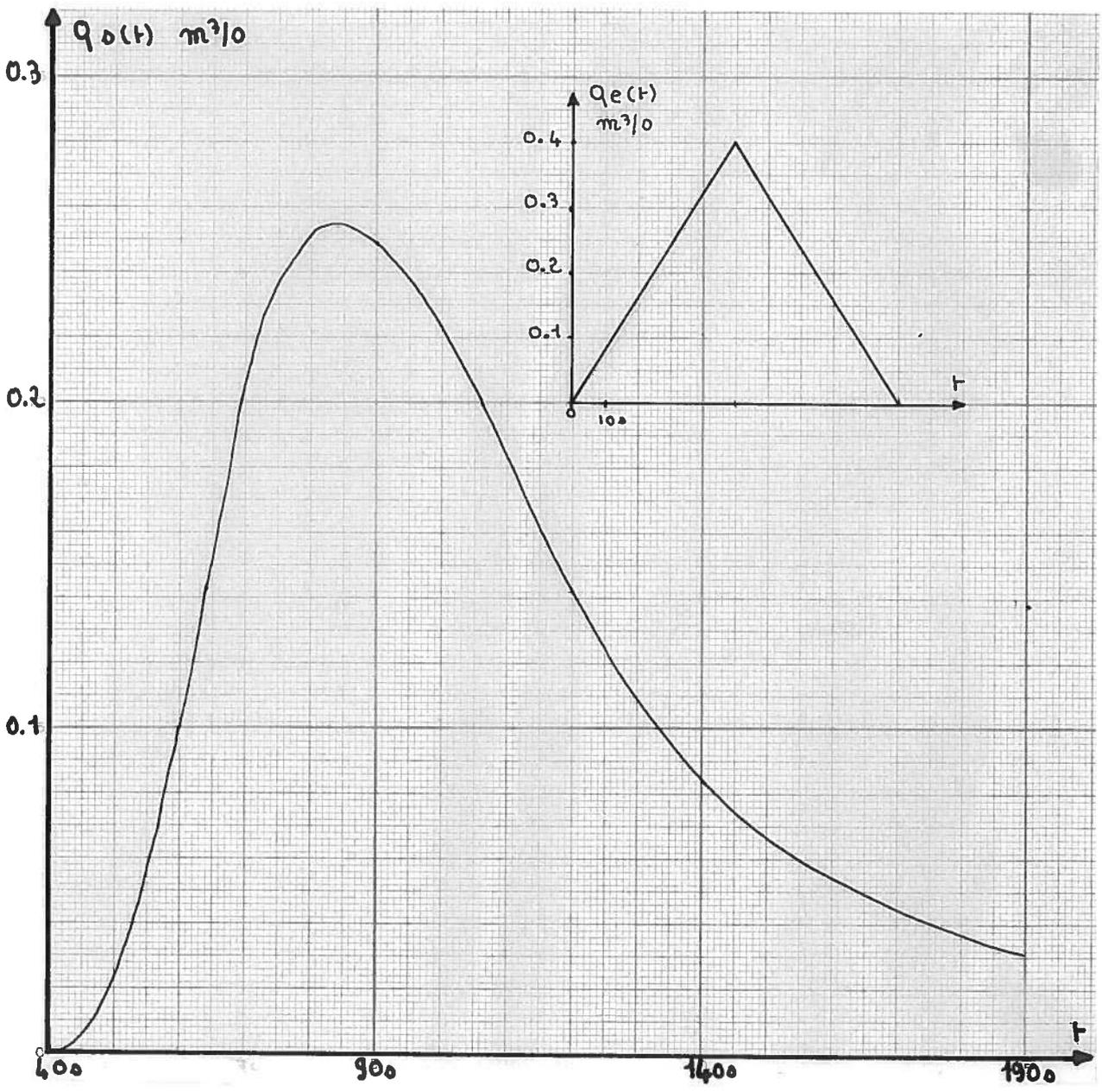


Figure 7 - Schéma mixte, sortie à 100 m, $\Delta x = 25m$, $\Delta T = 5 s$.

$$\int Q_e(t) dt = 20 m^3$$
$$\int Q_s(t) dt \approx 20.02 m^3 \text{ calculée par SIMPSON.}$$

III.4 Conclusion

La discrétisation directe du système de BARRE de ST-VENANT est la seule solution qui donne de bons résultats pour mesurer les écoulements en canalisations quel que soit le type de section.

Cette méthode n'introduit pas d'erreurs dues à la forme de la section, le terme $S(x, t)$ étant pris en compte explicitement. Nous avons vu précédemment que la méthode des caractéristiques, comme elle est appliquée couramment en hydrologie donne des solutions qui divergent de la solution réelle lorsque la section a une forme quelconque. Cette dernière technique est donc à déconseiller.

Les conditions de stabilité propres aux écoulements dans des sections rectangulaires peuvent être étendues sans grandes erreurs aux sections couramment rencontrées en hydrologie. En particulier, le schéma implicite même s'il présente une convergence très lente est simple à mettre en oeuvre; les variables h et V pouvant être données par des relations directes. Ce schéma permet d'ajuster le pas de temps au problème étudié sans être restreint à des valeurs faibles qui entraînent des calculs trop longs.

Pour être sûr qu'il n'y ait pas divergence et instabilité, la discrétisation doit être simple. Des relations complexes entre les fonctions primitives peuvent conduire à des matrices dont la stabilité n'est pas démontrable. C'est malheureusement souvent le cas en hydrologie. Il est inutile de "surcharger" les systèmes, le modèle de base lui-même étant déjà assez compliqué.

En dehors de la discrétisation, il existe d'autres facteurs d'erreurs. Dans tous les essais que nous avons menés, la perte de charge est donnée par la relation classique :

$$J = \frac{\lambda V^2}{2g D_H}$$

λ : Coefficient universel de
perte de charge

Ce coefficient est fonction de K qui mesure théoriquement la hauteur des aspérités et de γ , coefficient de viscosité. Ce dernier n'a pas beaucoup d'influence sur la valeur des débits de sortie, alors qu'une variation sensible de K modifie les valeurs de sortie. Sans préciser ici davantage l'influence de ce paramètre, nous pouvons néanmoins voir qu'il aura pour effet de retarder ou d'accélérer la montée des hydrogrammes donc de minorer ou de majorer la valeur du débit maximum correspondant à une entrée quelconque (voir figure 8).

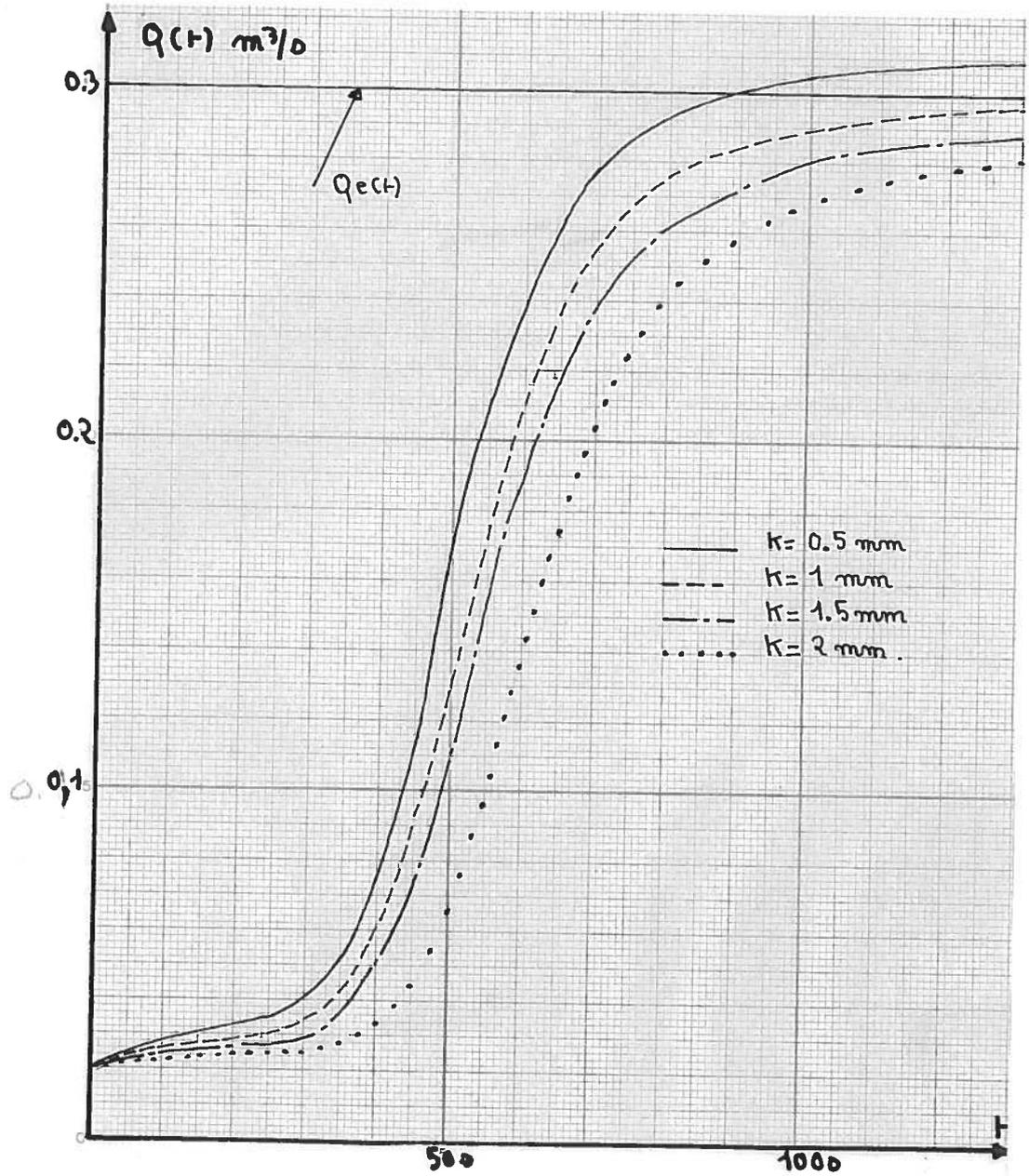
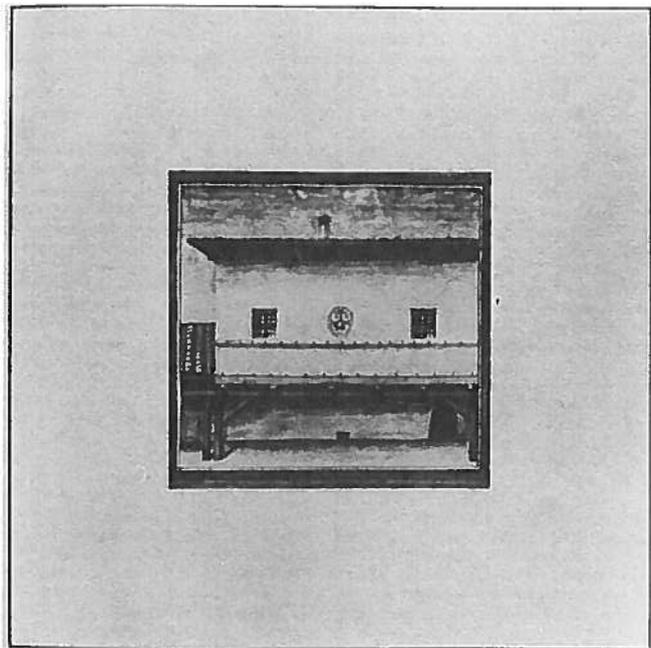


Figure 8 - Canalisation circulaire ($R = 0.3 \text{ m}$, $i = 5\text{‰}$)
Méthode des caractéristiques système linéaire
 $\Delta t = 5 \text{ s}$ $\Delta X = 25 \text{ m}$.

243

de l'étude 3



"Concevoir des systèmes complexes, donc les modéliser, loyalement et publiquement, pour apprendre à les maîtriser au service de l'homme, n'est-ce pas en ces termes que nous pouvons aujourd'hui définir l'enjeu des sciences pour l'ingénieur, des sciences de l'action ?"

J.L. Le MOIGNE

Le système de BARRE de ST-VENANT, issu d'une approche réductionniste, est pratiquement résolvable. Les calculs qui donnent les solutions de ses équations sont itératifs et nécessitent donc l'emploi d'un ordinateur.

En hydrologie, ce système dérivé des équations fondamentales de l'hydrodynamique, est réservé à la représentation des écoulements en collecteur, le choix du type de résolution étant fonction des données du problème. L'utilisation d'un tel modèle est relativement lourde et les calculs même automatisés, sont très longs.

Le phénomène écoulement et ruissellement sur un bassin versant quelconque ne peut pas être modélisé par ce système d'équations. La connaissance du mouvement d'un groupe de molécules homogènes le long d'un filet liquide ne nous permet pas de remonter aux écoulements ou aux ruissellements dus à une pluie sur des éléments très divers en relation les uns avec les autres. Le système bassin versant est trop complexe pour être représenté par le système de BARRE de ST-VENANT, ces équations restant les seules équations théoriques du mouvement des liquides.

Les ingénieurs ont donc construit d'autres types de modèles en s'appuyant sur des techniques d'analyses de systèmes, pour représenter le fonctionnement des bassins versants.

Ces modèles holistiques sont des modèles pseudo-empiriques qui donnent de bons résultats pour des systèmes proches de ceux observés.

Ces modèles sont, pour la plupart, issus du système suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d V_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t) \\ V_s(t) = K (\alpha Q_e(t) + (1-\alpha) Q_s(t)) \end{cases}$$

qui peut être discrétisé directement (8, 22, 13) ou intégré comme nous l'avons vu dans de l'étude 1.

Les modèles théoriques et les modèles empiriques ont des buts différents tout en s'appuyant sur le même phénomène de base.

Dans cette dernière partie, nous allons tenter de relier les modèles holistiques intégrés issus du système (1), aux modèles théoriques, mettant ainsi à jour les hypothèses qui permettent de passer des uns aux autres.

Cela suppose que le résultat des observations ou les préceptes théoriques qui sont à la base des modélisations ne sont pas trop divergentes du phénomène.

Enfin, nous rappellerons brièvement les hypothèses qui lient le système de BARRE de ST-VENANT aux modèles holistiques discrétisés utilisés couramment, pour pouvoir dresser un tableau regroupant tous ces modèles.

247
AFI

I - Construction des modèles holistiques intégraux	248
II - Interprétation des modèles holistiques intégraux	258
III - Utilisation des modèles holistiques en hydrologie ...	262
IV - Tableau organisationnel	267

---o0o---



I - CONSTRUCTION DES MODELES HOLISTIQUES INTEGRAUX

Le système de BARRE de ST-VENANT est constitué d'une équation de continuité et d'une équation dynamique :

$$\begin{cases} \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + V(x, t) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + g \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = g(i(x) - J(x, t)) \end{cases}$$

En considérant une section sur une longueur Δx , la définition exacte de l'équation de continuité permet d'écrire (voir de l'étude 2).

$$\frac{S(x + \gamma, t + \Delta t) - S(x + \gamma, t)}{\Delta t} = \frac{Q(x, t + \alpha) - Q(x + \Delta x, t + \alpha)}{\Delta x}$$

avec $\gamma \in [0, \Delta x]$ et $\alpha \in [0, \Delta t]$, x et $x + \Delta x$ étant les points amont et aval de l'élément considéré.

Si $\Delta t \rightarrow 0$, l'équation précédente est équivalente à :

$$(1) \quad \boxed{\frac{\partial S(x + \gamma, t)}{\partial t} = \frac{Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t)}{\Delta x}}$$

Cette relation est toujours une forme exacte de l'équation de continuité.

Par la suite, nous indiquerons par e et s les variables à l'entrée et à la sortie de l'élément Δx en utilisant les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} q(x, t) = Q_e(t) \\ q(x + \Delta x, t) = Q_s(t) \end{cases} \quad \begin{cases} S(x, t) = S_e(t) \\ S(x + \Delta x, t) = S_s(t) \end{cases}$$

Si $S_e(t)$ est différente de $S_s(t)$, nous construisons la fonction :

$$\alpha(x, t) = \frac{S(x, t) - S_s(t)}{S_e(t) - S_s(t)}$$

avec la première hypothèse suivante :

si $S_e(t)$ est égale à $S_s(t)$, nous supposons que $S(x, t) = S_e(t)$
 $\forall x \in \Delta x$.

Nous obtenons ainsi la relation :

$$S(x, t) = \alpha(x, t) S_e(t) + (1 - \alpha(x, t)) S_s(t)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} = \left(S_e(t) - S_s(t) \right) \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial t} (S_e(t) - S_s(t)) + \alpha(x, t) \left(\frac{dS_e(t)}{dt} - \frac{dS_s(t)}{dt} \right) \\ \quad + \frac{dS_s(t)}{dt} \end{array} \right.$$

En indiquant k le point $x + \gamma$ défini par l'équation (1), le système de BARRE de ST-VENANT en ce point s'écrit :

250
~~117~~

(2)

$$\frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial t} k (S_e(t) - S_s(t)) + \alpha(k,t) \frac{dS_e(t)}{dt} + (1 - \alpha(k,t)) \frac{dS_s(t)}{dt} + \frac{Q_s(t) - Q_e(t)}{\Delta X} = 0$$

$$(S_e(t) - S_s(t)) \frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x} k + V(k,t) \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} k + \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} k = g(i - J)$$

$\forall x \neq k$, on obtient le système suivant :

(3)

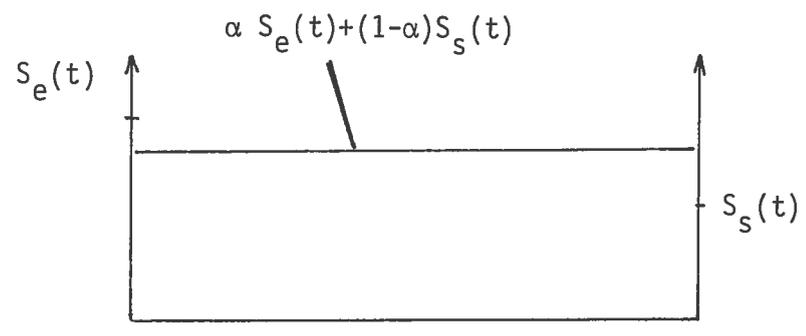
$$\frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial t} (S_e(t) - S_s(t)) + \alpha(x,t) \frac{dS_e(t)}{dt} + (1 - \alpha(x,t)) \frac{dS_s(t)}{dt} + \frac{dQ(x,t)}{\partial x} = 0$$

$$(S_e(t) - S_s(t)) \frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x} + V(x,t) \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = g(i - J)$$

Si nous ne faisons pas d'hypothèses sur la valeur des accélérations mises en jeu, les seules simplifications qui peuvent être apportées au système de BARRE de ST-VENANT sont liées à la signification de la fonction $\alpha(x,t)$ telle que :

$$S(x,t) = \alpha(x,t) S_e(t) + (1 - \alpha(x,t)) S_s(t)$$

Cette fonction $\alpha(x,t)$ ne peut pas être prise constante $\forall x$ et $\forall t$ car la ligne d'eau possède alors deux discontinuités, l'une à l'entrée, l'autre à la sortie.



Si $\alpha(x,t)$ est égale à α , valeur constante, uniquement pour l'ensemble K des points k satisfaisant l'équation :

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} k + \frac{Q_s(t) - Q_e(t)}{\Delta x} = 0$$

avec $\frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial t} k = 0 \quad \forall t$, on simplifie alors le système 2.

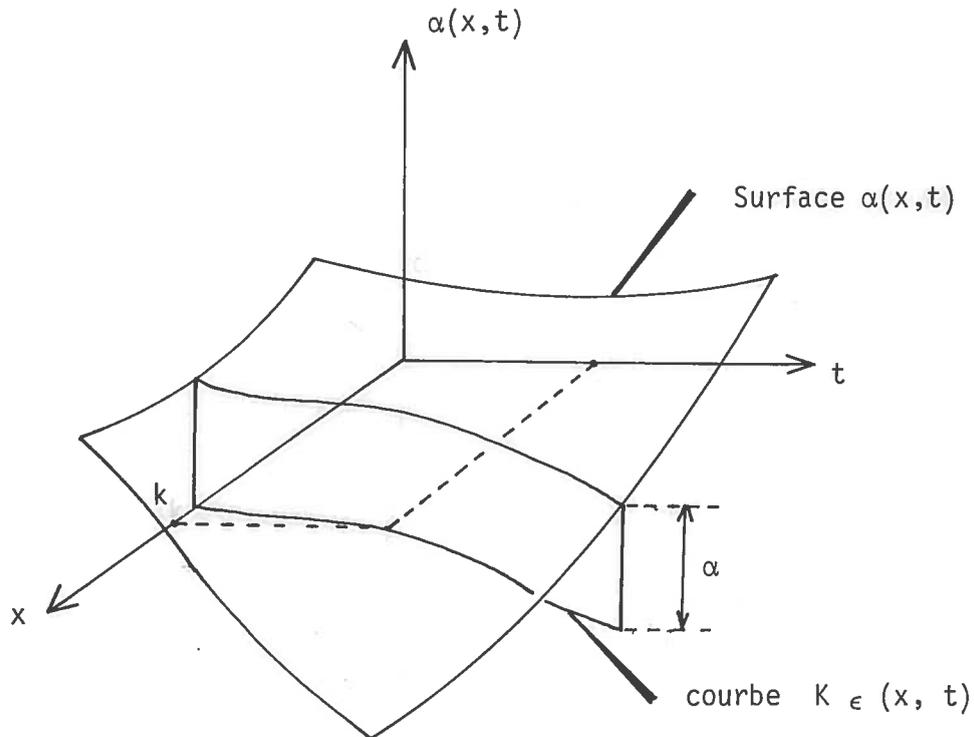
K est l'ensemble des points $k \in \Delta x$ tel qu'au temps t :

$$\int_0^{\Delta x} S(x,t) dx = \Delta x \cdot S(k,t)$$

La section $S(k,t)$ donne la valeur moyenne des sections à t pour le stockage. Nous supposons donc que la valeur de cette section moyenne est proche de :

$$\alpha S_e(t) + (1-\alpha) S_s(t)$$

La fonction $\alpha(x, t)$ peut alors être représentée par le schéma suivant :



Quand t varie, k décrit une courbe $x = K(t)$, abscisse des sections moyennes.

Cette seconde hypothèse apportée au système de BARRE de ST-VENANT peut donc s'énoncer :

$$\forall x \notin K(t) \quad \alpha(x, t) \text{ varie.}$$

$$\forall x \in K(t) \quad \begin{cases} \alpha(x, t) = \alpha \\ \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Pour ces conditions, le système (2) s'écrit :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\alpha d S_e(t)}{dt} + (1-\alpha) \frac{d S_s(t)}{dt} + \frac{Q_s(t) - Q_e(t)}{\Delta x} = 0 \\ (S_e(t) - S_s(t)) \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial t} k + V(k, t) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} k + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} k = g(i-J) \end{cases}$$

Les valeurs de $h(x,t)$ et $V(x,t)$ pour tous les autres points sont donnés par le système (3), la continuité étant assurée par la continuité de la surface $\alpha(x,t)$.

Comme $Q_e(t) = V_e(t) \cdot S_e(t)$ et $Q_s(t) = V_s(t) \cdot S_s(t)$, la première équation du système (4) s'écrit :

$$(5) \quad \frac{\alpha \, d S_e(t)}{dt} + (1-\alpha) \frac{d S_s(t)}{dt} + \frac{S_s(t) V_s(t) - S_e(t) V_e(t)}{\Delta X} = 0$$

Les inconnues du problème sont les fonctions S_e, S_s, V_e, V_s .

Si nous supposons que V_e et S_e sont fournies par une condition amont et que V_s est donnée par une condition aval, la seule inconnue de l'équation (5) est $S_s(t)$.

L'équation dynamique du système (4) devient surabondante, étant alors remplacée par l'hypothèse des sections moyennes et les conditions au bord du problème.

Nous obtiendrons donc autant de modèles qu'il y a de conditions aval sur la vitesse.

Les modèles holistiques qui nous intéressent résultent de conditions dynamiques sur les bords, bien particulières.

$$I.1 \quad \underline{V_e(t) = V_s(t) \quad \forall t}$$

En supposant que α est différent de 1, la solution de l'équation homogène associée à (5) est :

$$S_s(t) = \beta e^{-\frac{1}{\Delta X} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t V_e(\tau) \, d\tau}$$

La fonction $V_e(t)$ ou $V_s(t)$ est supposée continue

$$\frac{d}{dt} \int_0^t V_e(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{d}{dt} (V_e(\tau)) d\tau = V_e(t) - V_e(0)$$

si $V_e(0) = 0$ ($Q_e(0) = 0$). La solution complète de l'équation (8) est :

$$S_s(t) = \frac{1}{\Delta x (1-\alpha)} \int_0^t Q_e(\tau) e^{-\frac{1}{\Delta x} \times \frac{1}{1-\alpha} \int_{\tau}^t V_e(\tau') d\tau'} \times d\tau$$

$$+ \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_0^t \frac{d S_e(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{1}{\Delta x} \times \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t V_e(\tau') d\tau'} \times d\tau$$

En multipliant cette équation par $V_s(t)$ on obtient finalement :

$$Q_s(t) = \frac{V_e(t)}{\Delta X} \times \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t Q_e(\tau) \cdot e^{-\frac{1}{\Delta X} \times \frac{1}{1-\alpha} \int_{\tau}^t V_e(\tau') d\tau'} \cdot d\tau$$

$$- \frac{\alpha}{1-\alpha} V_e(t) \int_0^t \frac{d S_e(\tau)}{d\tau} \cdot e^{-\frac{1}{\Delta X} \times \frac{1}{1-\alpha} \int_{\tau}^t V_e(\tau') d\tau'} \cdot d\tau$$

Pour la valeur particulière $\alpha = 0$, l'équation précédente se simplifie pour donner :

$$Q_s(t) = \frac{V_e(t)}{\Delta X} \int_0^t Q_e(\tau) \cdot e^{-\frac{1}{\Delta X} \int_0^t V_e(\tau') d\tau'} \cdot d\tau$$

Cette équation est obtenue en supposant que $S(k,t) = S_s(t) \forall t, k$ étant le point particulier défini précédemment.

Pour la valeur $\alpha = 1$, c'est-à-dire $S(k, t) = S_e(t)$, l'équation (5) donne la relation :

$$\frac{d S_e(t)}{dt} + \frac{S_s(t) V_s(t) - S_e(t) V_e(t)}{\Delta X} = 0$$

soit :

$$Q_s(t) = Q_e(t) - \frac{\Delta X}{V(t)} \cdot \frac{d S_e(t)}{dt}$$

Cette équation est utilisée par B. CHOCAT pour modéliser les écoulements en canalisation dans l'outil de simulation S.E.R.A.I.L. (8).

Avec les hypothèses que nous avons choisies, les valeurs des variables aux points x n'appartenant pas à l'ensemble K sont théoriquement données par le système (3).

$$I.2 \quad \underline{V_e(t) = V_s(t) = V = \text{constante} \quad \forall t}$$

Avec cette hypothèse, le système (2) devient :

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha \frac{d S_e(t)}{dt} + (1-\alpha) \frac{d S_s(t)}{dt} + \frac{V}{\Delta X} (S_s(t) - S_e(t)) = 0 \\ (S_e(t) - S_s(t)) \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} k + V(k, t) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} k + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} k = g(I - J(K, t)) \end{cases}$$

Pour $\alpha \neq 1$ et avec les mêmes hypothèses que précédemment la première équation de ce système donne :

$$Q_s(t) = \frac{\alpha}{\alpha-1} Q_e(t) + \frac{1}{\frac{\Delta X}{V} (1-\alpha)^2} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\frac{\Delta X}{V} (1-\alpha)}} \cdot Q_e(\tau) \cdot d\tau$$

Il s'agit de l'équation intégrale obtenue à partir du modèle de MUSKINGHUM avec $K = \frac{\Delta X}{V}$.

En prenant $\alpha = 0$, cette équation se simplifie pour donner le modèle :

$$Q_s(t) = \frac{V}{\Delta X} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\frac{\Delta X}{V}}} \cdot Q_e(\tau) d\tau$$

C'est l'équation utilisée par M. DESBORDES pour représenter les écoulements sur des bassins versants de faibles tailles.

En prenant $\alpha = 1$, la première équation du système (6) se simplifie pour donner :

$$\frac{d S_e(t)}{dt} + \frac{V}{\Delta X} (S_s(t) - S_e(t)) = 0$$

soit :

$$Q_s(t) = Q_e(t) - \frac{\Delta X}{V} \frac{d Q_e(t)}{dt}$$

C'est l'équation du modèle utilisé par KALININ-MILJUKOV.

Avec l'hypothèse portant sur les vitesses d'entrée et de sortie, la première équation du système (6) permet de relier directement l'entrée et la sortie de l'élément Δx .

Le transformateur étant un convoluteur à mémoire régulière rapidement décroissante ($e^{-t/K}$), le débit de sortie est atténué par rapport au débit d'entrée $Q_e(t)$.

La valeur des variables aux points intermédiaires est théoriquement fournie par les systèmes (2) et (3), les conditions amont et aval étant données par les hypothèses choisies ($V_e(t) = V_s(t) = V$).

Nous avons vu dans De l'ETUDE 1 que ces trois modèles linéaires sont solutions du système différentiel suivant :

$$V_s(t) = K (\alpha Q_e(t) + (1-\alpha) Q_s(t))$$

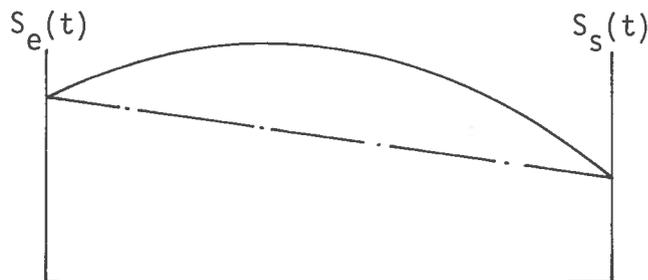
$$\frac{d V_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t)$$

II - INTERPRETATION DES MODELES HOLISTIQUES INTEGRAUX

Les modèles holistiques, couramment utilisés en hydrologie pour mesurer les écoulements et/ou les ruissellements, sont tous issus du système de BARRE de ST-VENANT en lui adjoignant trois hypothèses fondamentales.

- Hypothèse 1 : $S(x, t) = S_e(t)$ si $S_e(t) = S_s(t)$

La hauteur d'eau, dans l'élément de longueur Δx , ne peut pas présenter des variations importantes entre l'entrée et la sortie. L'écoulement doit être relativement "stable" pour que cette hypothèse soit vérifiée; la ligne d'eau ne peut pas se présenter ainsi :



- Hypothèse 2

Cette hypothèse est plus ou moins contraignante suivant les valeurs données à la fonction $\alpha(x, t)$, telle que :

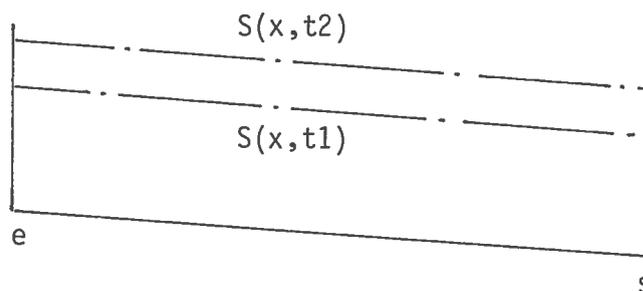
$$S(x,t) = \alpha(x,t) \cdot S_e(t) + (1 - \alpha(x,t))S_s(t)$$

Dans un premier cas, nous supposons que $\alpha(x,t)$ ne varie pas $\forall x$ et $\forall t$. Nous avons alors :

$$S(x,t) = \alpha \cdot S_e(t) + (1-\alpha) S_s(t) \quad \forall x, \forall t$$

Si $S_e(t)$ est différente de $S_s(t)$, la continuité de la fonction $S(x, t)$ n'est pas assurée en e et s .

La ligne d'eau est une droite parallèle à la pente de l'élément plus ou moins haute suivant les valeurs de $S_e(t)$ et $S_s(t)$.

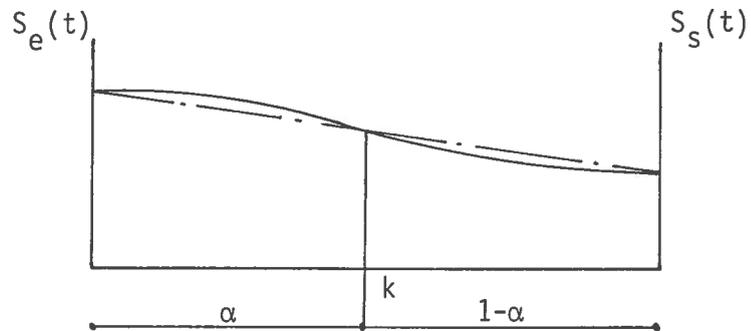


La continuité de la ligne d'eau ne peut être assurée que si $S_e(t) = S_s(t) \quad \forall t$. (Phénomène constant). Nous avons donc rejeté cette hypothèse qui n'assure pas la continuité de la ligne d'eau.

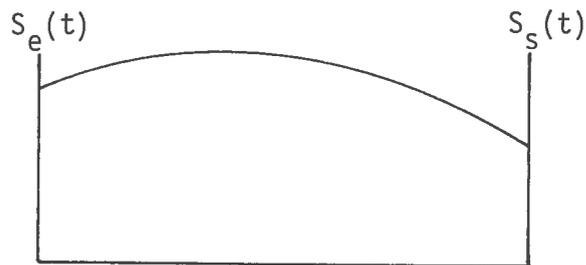
Dans un deuxième cas, la fonction $\alpha(x, t)$ est égale à une constante $\forall t$ pour tout point $k \in K$, K étant l'ensemble des points qui vérifient la relation :

$$\int_e^s S(x,t) dx = \Delta x \cdot S(K, t) \quad k \in [e, s]$$

$$S(k, t) = \alpha S_e(t) + (1-\alpha) S_s(t)$$



La ligne d'eau varie avec l'abscisse et le temps. Cette hypothèse sera d'autant mieux vérifiée qu'il n'y aura pas de variation importante de la section d'eau le long de l'élément considéré; la configuration suivante ne doit donc pas se présenter :



- Hypothèse 3

C'est une condition amont et aval sur les vitesses. Elle se traduit par une équation dynamique qui permet de résoudre le système de BARRE de ST-VENANT en ne tenant compte que de l'équation de continuité.

Dans un premier cas, en choisissant la relation $V_e(t) = V_s(t)$, nous obtenons un modèle qui peut se mettre sous la forme :

$$(Q_e(0) = Q_s(0)) \Rightarrow Q_s(t) = \frac{\alpha}{\alpha-1} Q_e(t) + \frac{V_e(t)}{\Delta X(1-\alpha)^2} \int_0^t Q_e(\tau) \cdot e^{-\frac{1}{\Delta X(1-\alpha)} \int_{\tau}^t V_e(\tau') d\tau'} \cdot d\tau$$

La relation vitesse débit n'étant pas linéaire, ce modèle n'est pas linéaire.

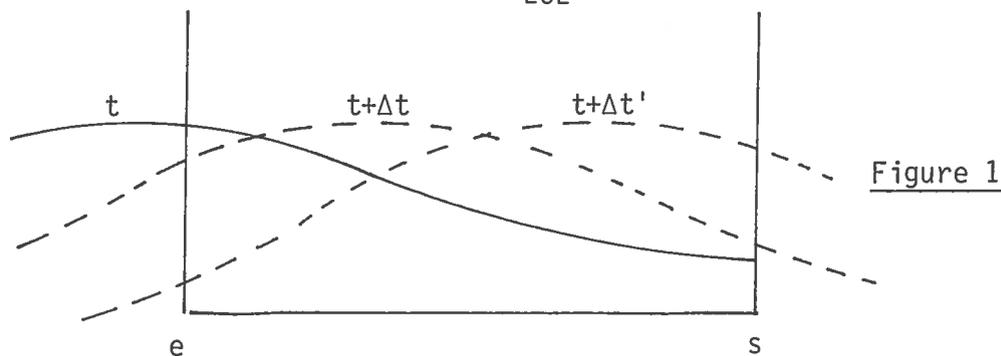
Cette hypothèse est certainement à peu près satisfaite si la hauteur d'eau en e est voisine de la hauteur d'eau en s .

Si $V_e(t) = V_s(t) = \text{constante}$, le modèle précédent se simplifie pour donner le modèle linéaire :

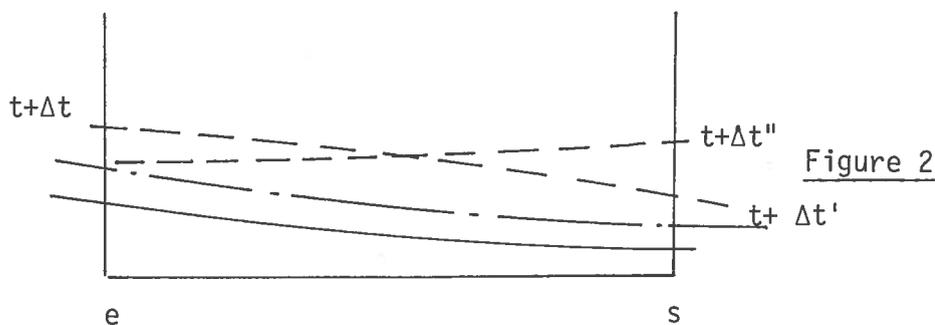
$$Q_s(t) = \frac{\alpha}{\alpha-1} Q_e(t) + \frac{V}{\Delta X(1-\alpha)^2} - e^{-\frac{t V}{\Delta X(1-\alpha)}} * Q_e(t)$$

Les hypothèses de transition entre le système de BARRE de ST-VENANT et ces modèles holistiques sont relativement floues et n'indiquent pas précisément les phénomènes que nous pouvons représenter par ces modèles. Malgré cela, une contrainte générale se dégage; le transformateur réalisant la transformation débit entrée (ou pluie) débit de sortie doit être tel qu'à tout instant, la ligne d'eau reliant l'entrée à la sortie soit relativement proche d'une droite avec $S_e(t)$ peu différent de $S_s(t)$ et $V_s(t)$ proche de $V_e(t)$.

Un transformateur qui donnerait des propagations d'ondes comme suit, n'est pas modélisable par les relations que nous avons élaborées.



L'évolution de la ligne d'eau au cours du temps doit donc se présenter ainsi dans le transformateur :



Ces remarques qui ne peuvent être que qualitatives, expliquent certainement les bons résultats obtenus par les hydrologues sur des petits bassins versants donnant une réponse relativement immédiate (vis-à-vis des unités de temps utilisées); un débit de sortie décalé dans le temps par rapport à l'entrée suppose un transformateur fonctionnant comme celui de la figure 1.

III - UTILISATION DES MODELES HOLISTIQUES EN HYDROLOGIE

Le modèle non linéaire que nous venons d'élaborer est facilement intégrable numériquement. Son application directe à une canalisation pour une entrée Type porte d'une durée de 100 s donne une mauvaise sortie à 50 m. Si l'entrée ne présente pas des discontinuités dans la vitesse, l'hydrogramme mesuré au bout de 50 m est bon et devient relativement mauvais à 100 m. Pour la durée de l'entrée (100 s) le domaine d'application du modèle est de 50 m. Il possède donc à peu près les mêmes qualités que les mo-

dèles linéaires, le décalage de la sortie étant malgré tout mieux représenté (voir Annexe 6).

Si nous en restons aux expériences que nous avons menées, il semblerait que tous les modèles holistiques ne sont guère applicables aux écoulements en canalisations (voir annexe 6).

En fait, cette impression est relative et doit être tempérée par une remarque fondamentale qui élargit de beaucoup le champ d'application des modèles holistiques, qu'ils soient linéaires ou non linéaires.

La forme discrétisée du modèle holistique non linéaire est :

$$Q_s(t+\Delta t) = C_1 \cdot Q_e(t+\Delta t) + C_2 \cdot Q_e(t) + C_3 \cdot Q_s(t)$$

avec

$$C_1 = 1 - \frac{e^{-\frac{V_e(t+\Delta t)}{\Delta X(1-\alpha)} \Delta t}}{1 - \alpha}$$

$$C_2 = \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{V_e(t+\Delta t)}{V_e(t)} e^{-\frac{V_e(t+\Delta t)}{\Delta X(1-\alpha)} \Delta t}$$

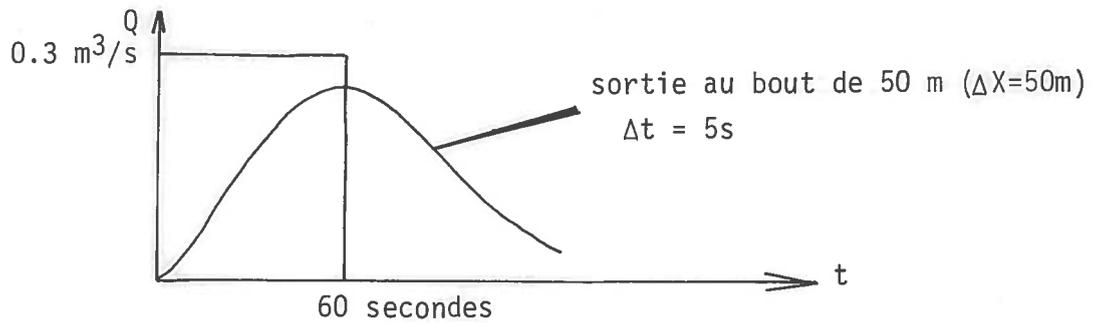
$$C_3 = \frac{V_e(t+\Delta t)}{V_e(t)} e^{-\frac{V_e(t+\Delta t)}{\Delta X(1-\alpha)} \Delta t}$$

Nous avons mené tous nos essais avec un ΔT de 5 secondes choisi en fonction de la courte durée de l'entrée (60 s à 100 s), le ΔX de 50 m étant

177 264

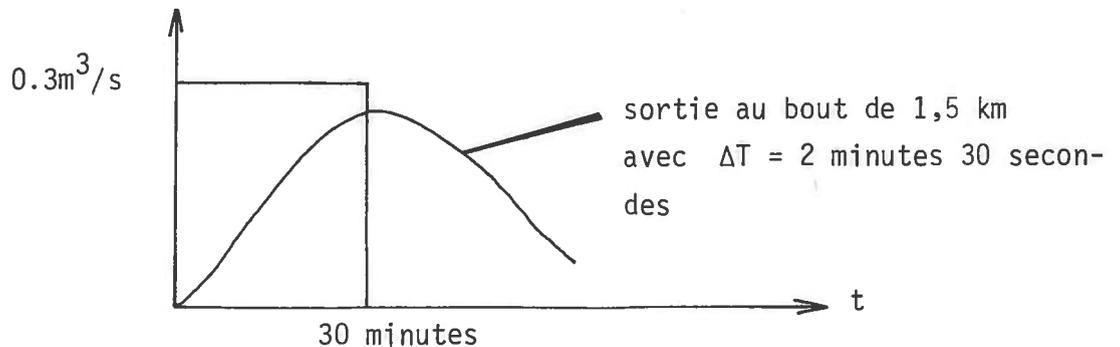
la limite qui donne une bonne sortie calculée par les modèles holistiques. En gardant les mêmes valeurs du débit d'entrée et en dilatant par une quantité à l'échelle des temps, les modèles holistiques donnent exactement la même réponse que précédemment si Δt et ΔX sont multipliés par la grandeur a .

Le rapport $\frac{\Delta t}{\Delta X}$ restant constant, le terme exponentiel donne les mêmes valeurs. Ce changement d'échelle temporel peut être représenté par les figures suivantes :



exemple avec $a = 30 \Rightarrow \Delta X' = 50 \text{ m} \times 30$

$\Delta T' = 5\text{s} \times 30$



Si ce changement d'échelle est correct, pour la canalisation retenue, le domaine de validité du modèle est fonction de la durée de l'entrée; toutes les réponses intermédiaires (100 m, 200 m, ... 1 km, 1 km 500) étant alors bonnes.

Nous devons maintenant vérifier la validité de cette opération et rechercher dans quel cas elle est possible. Pour cela il suffit de reprendre le système de BARRE de ST-VENANT qui reste pour nous le référentiel.

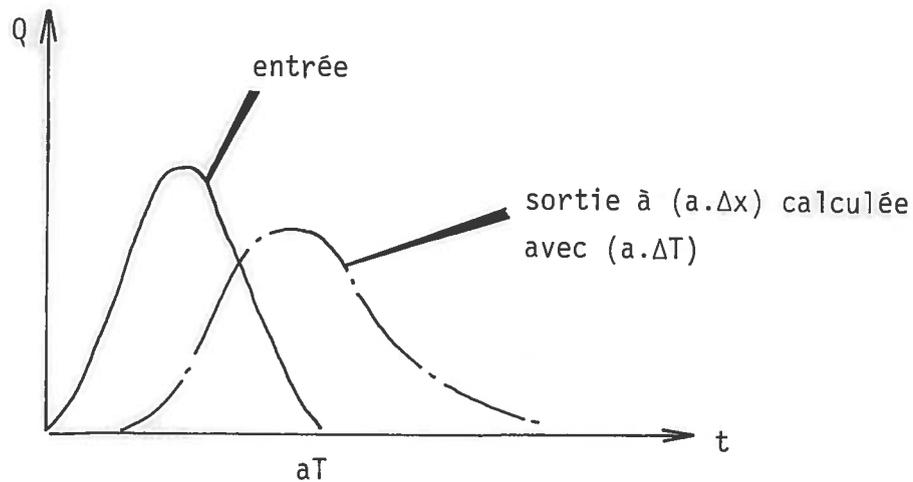
En utilisant un schéma mi-explicite, mi-implicite par exemple, le système peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_J^{t+\Delta t} = s_J^t - \frac{\Delta t}{\Delta X} (Q_J^t - Q_{J-1}^t) \\ (V_J^{t+\Delta t} - V_J^t) + \frac{\Delta T}{\Delta X} V_J^{t+\Delta t} (V_J^t - V_{J-1}^t) + \frac{\Delta T}{\Delta X} (h_J^{t+\Delta t} - h_{J-1}^{t+\Delta t}) = g(i-J) \cdot \Delta T \end{array} \right.$$

Le point J-1 représente l'entrée, le point J la sortie.

De même, si nous dilatoons l'échelle des temps par une quantité a , les deux pas ΔT et ΔX étant aussi multipliés par a ($\frac{\Delta T}{\Delta X}$ reste alors constant), le débit d'entrée gardant les mêmes valeurs au temps $t+\Delta t$, l'équation de continuité donne la même valeur $s_J^{t+\Delta t}$; la deuxième équation donne sensiblement la même valeur $v_J^{t+\Delta t}$ si le terme $i-J$ est proche de zéro.

L'hypothèse fondamentale qui permet le changement d'échelle temporel reste sur la valeur du terme $(i-J)$ qui doit être proche de zéro. Cette condition étant vérifiée, si pour une durée de l'entrée T , un modèle holistique donne un bon hydrogramme à Δx avec ΔT on a alors le schéma fondamental :



Cela signifie tout simplement que le domaine de validité d'un modèle holistique, construit par intégration du système de MUSKINGHUM, dépend de la durée de l'entrée si la pente de la ligne de charge est voisine de la pente de l'élément. Cette condition de validité est en concordance avec les hypothèses qui, alliées au système de BARRE de ST-VENANT donnent les modèles holistiques : à tout instant la ligne d'eau dans le système doit être proche d'une droite reliant l'entrée à la sortie.

Les modèles holistiques intégraux étant indépendants du pas de temps, la connaissance d'un couple $(T, \Delta X)$ défini comme ci-dessus permet d'associer à tout hydrogramme de base T' un domaine de validité $\Delta X'$, la longueur de ce domaine augmentant avec T' .

Au-delà, nous retrouverons toutes les erreurs que nous avons observées sur les exemples donnés.

En renversant le problème pour un bassin versant qui est un système fixé, il doit être possible de reconnaître la durée de base T d'une pluie qui permet d'utiliser correctement les modèles holistiques.

En pratique, la durée des événements pluviométriques ou le temps de base des hydrogrammes étant important, les modèles holistiques sont facilement applicables aux réseaux et bassins qui constituent la structure d'un système assainissement. Les pas d'espaces et de temps seront donc assez élevés, limitant ainsi le nombre des calculs. De plus, un réseau de canalisations possède diverses entrées (tous les 50 à 100 m) qui régulent ainsi le flot évacué, l'hétérogénéité s'effaçant progressivement devant l'homogénéité.

La relation $(i-J) \approx 0$ tend à être satisfaite tout comme les hypothèses de transition entre BARRE de ST-VENANT et les modèles holistiques.

Le modèle holistique intégral non linéaire que nous avons construit est un modèle de diffusion avec atténuation. Sa validité pour de grands parcours est justifiée si dans la réalité le phénomène se rapproche de l'onde de crue simple obtenue en supposant que $i = J$.

IV - TABLEAU ORGANISATIONNEL

Jusqu'à ce jour, en hydrologie urbaine, le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d V_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t) \\ V_s(t) = K \left[\alpha Q_e(t) + (1-\alpha) Q_s(t) \right] \end{cases}$$

est généralement employé en le discrétisant directement. On obtient alors une relation de la forme :

$$(2) \quad Q_s(t + \Delta t) = C_1 Q_e(t + \Delta t) + C_2 Q_e(t) + C_3 Q_s(t)$$

Pour le schéma classique dit de MUSKINGHUM, les coefficients ont la valeur suivante :

$$C_1 = \frac{-2K\alpha + \Delta t}{2K(1-\alpha) + \Delta t} \quad C_2 = \frac{2K\alpha + \Delta t}{2K(1-\alpha) + \Delta t} \quad C_3 = \frac{2K(1-\alpha) - \Delta t}{2K(1-\alpha) + \Delta t}$$

Plusieurs auteurs ont tenté d'expliquer le signifié de la relation (2). Il s'agit donc d'une explication portant sur le système discrétisé et non sur le système primitif (1).

Nous avons vu dans les pages précédentes que le système (1) a pour image un modèle intégral qui peut être non linéaire (K(t)). Il s'agit d'un modèle de diffusion avec atténuation, les hypothèses le reliant à BARRE de ST-VENANT étant d'ordre "géométrique" (considération sur la valeur de la section moyenne et sur la régularité de la ligne d'eau). Ces hypothèses ne font pas intervenir des considérations purement énergétiques liées à la valeur des accélérations mises en jeu.

Il en est tout autrement pour rendre significatif la relation (2).

Nous rappellerons brièvement les diverses hypothèses liant le système de BARRE de ST-VENANT à cette relation pour éclaircir l'obtention et, par là, signifier les divers types de modèles rencontrés en hydrologie urbaine.

Soit le système de BARRE de ST-VENANT :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(i-J) \end{cases}$$

Si nous supposons $\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x}$ sont très petits devant la pente de l'élément considéré (i) et que la pente (J) de la ligne d'énergie est voisine de (i), le système précédent se réduit alors aux relations :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ J \approx i \end{cases}$$

Cela signifie que l'énergie due à la crue est négligeable devant les forces de pesanteur, que l'aval ne remonte aucune influence vers l'amont et qu'il existe une courbe de jaugeage $Q = f(h)$.

Le système (3) peut se réduire à une seule équation :

$$(4) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + C_s \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

qui est l'équation de l'onde de crue simple avec C_s ; célérité de SEDDON.

Si C_s est indépendante de la valeur du débit, on retrouve alors la translation simple de l'onde.

Si C_s est fonction de Q , il y a déformation de l'onde. L'équation (4) peut être directement discrétisée et, avec un schéma approprié, on retrouve la relation (2) avec les coefficients dits de MUSKINGHUM. Il y a donc à travers la discrétisation identité entre le schéma classique de MUSKINGHUM et l'équation (4). En fait, comme le montre CUNGE et O CAYLA [13], la relation (2) est aussi l'image discrétisée du modèle suivant :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + C_s \frac{\partial Q}{\partial x} - \gamma^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0$$

avec C_s célérité de SEDDON, γ coefficient atténuateur de l'onde.

Le terme $\gamma^2 \frac{\partial^2 Q}{x^2}$ apparaît grâce à l'erreur d'approximation que l'on fait en discrétisant une fonction dérivée.

Le schéma classique MUSKINGHUM est donc aussi l'image d'un modèle de crue diffusante avec atténuation, la relation $Q = f(h)$ n'étant pas vérifiée. Le système de BARRE de ST-VENANT est alors réduit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} = g(i-J) \end{cases}$$

Il faut noter que, pour la valeur particulière de $\alpha = 0,5$, le schéma classique de MUSKINGHUM se réduit à l'équation :

$$Q_s(t + \Delta t) = Q_e(t)$$

soit à un modèle de translation simple du type $Q_s(t) = Q_e(t-K)$

Cette translation simple peut se retrouver directement à partir du système original (1) en supposant la relation suivante vérifiée [47].

$$\sum_2^n \frac{(-K\alpha)^n}{n!} \frac{d^n Q_e(t)}{dt^n} = 0$$

En effet, le système (1) se réduit alors à la relation :

$$Q_s(t + K(1-\alpha)) = Q_e(t - K\alpha) \quad \text{quelle que soit la valeur de } \alpha.$$

921
199

Si nous mettons de côté ces considérations particulières dues à la valeur de α ou aux dérivées successives de $Q_e(t)$, le système (1) se présente comme un modèle de diffusion avec atténuation à travers son intégration théorique, si la section moyenne pour la valeur du stockage s'écrit ;
 $S(k, t) = \alpha S_e(t) + (1-\alpha) S_s(t)$.

Le système (1) est aussi un modèle de diffusion avec atténuation à travers une discrétisation particulière si on néglige l'énergie due à la crue et les influences de l'aval sur l'amont.

Dans ces pages, nous n'apporterons pas plus de précisions à ces considérations hydrauliques, celles ayant déjà été développées par plusieurs auteurs ([13], [46]). Nous les avons introduites pour clarifier la place et le signifié de chacun des modèles d'écoulement et/ou de ruissellement couramment utilisés en hydrologie urbaine.

Toutes ces transitions sont résumées dans le tableau organisationnel suivant :

176

Hypothèses géométriques
 $\forall k \in K(t);$
 $S(k,t) = S_e(t) + (1-\alpha) S_s(t)$

$$\alpha \frac{d S_e(t)}{dt} + (1-\alpha) \frac{d S_s(t)}{dt} + \frac{Q_e(t) - Q_s(t)}{\Delta X} = 0$$

diffusion avec atténuation

Hypothèse dynamique
 $V_e(t) = V_s(t) = V(t)$

hypothèse dynamique
 $V_e(t) = V_s(t) = V$

Modèle intégral

$$Q_s(t) = \frac{\alpha}{\alpha-1} Q_e(t) + \frac{V(t)}{\Delta X(1-\alpha)} \int_0^t Q_e(\tau) e^{-\frac{1}{\Delta X(1-\alpha)} \int_{\tau}^t V(\tau') d\tau'} dt$$

Modèle intégral

$$Q_s(t) = \frac{\alpha}{\alpha-1} Q_e(t) + \frac{V}{\Delta X(1-\alpha)} Q_e(t) * e^{-\frac{V}{\Delta X(1-\alpha)} t}$$

Hypothèse :

$$\sum_{K=2}^n \frac{(-k\alpha)^n}{n!} \frac{d^n Q_e(t)}{dt^n} \neq 0$$

$$V_s(t) = \frac{\Delta X}{V(t)} (\alpha Q_e(t) + (1-\alpha) Q_s(t))$$

$$\frac{d V_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t)$$

$$V_s(t) = K(\alpha Q_e(t) + (1-\alpha) Q_s(t))$$

$$\frac{d V_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t)$$

modèle pseudo empirique

Hypothèse dynamique
 $V(t) = V$

intégration

intégration

intégration

intégration

47 223

BARRE de ST-VENANT
Modèle hydrodynamique

Hypothèse
énergétique
 $i = J$

Hypothèse
énergétique
 $\frac{\partial h}{\partial t} = (i - J) g$

$\frac{\partial Q}{\partial x} + C_s \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$
onde crue simple

$\frac{\partial Q}{\partial x} + C_s \frac{\partial Q}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}$
onde de crue diffusante
avec atténuation

Hypothèse dynamique
 $C_s = \text{constante}$

$Q_s(t) = \delta(t-T) * Q_e(t)$

Hypothèse
 $\alpha = 0.5$

Modèle discrétisé
 $Q_s(t + \Delta t) = C_1 Q_s(t) + C_2 Q_e(t) + C_3 Q_s(t + \Delta t)$

discrétisation

discrétisation

discrétisation



274

015

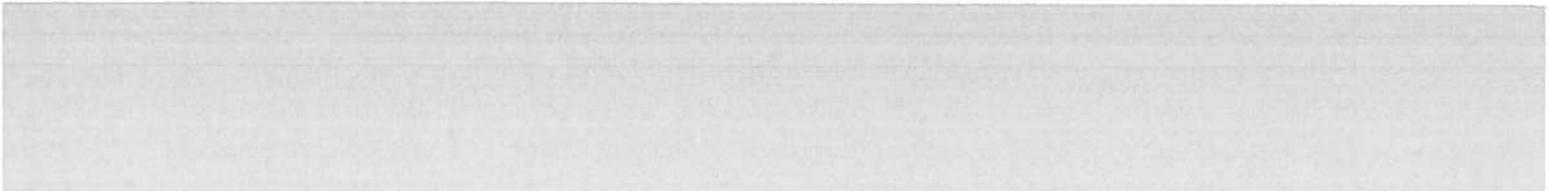
44 235

275

CONCLUSION

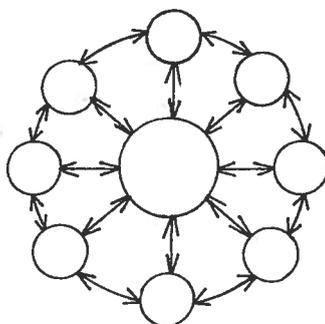
I - LA MODELISATION EN HYDROLOGIE URBAINE	277
II - LA CONCEPTION EN HYDROLOGIE URBAINE	282

---oOo---



I - LA MODELISATION EN HYDROLOGIE URBAINE

L'hydrologie qui cherche à représenter l'évacuation des eaux pluviales et usées et qui traite des problèmes liés à ce phénomène, utilise principalement des modèles de ruissellement sur le sol et d'écoulement en canalisations. Ces modèles sont le coeur d'un vaste ensemble d'images abstraites censés représenter des phénomènes complexes tels que les pertes, l'évaporation, l'évapotranspiration, l'infiltration, ...



La déformation d'une onde quelconque par ruissellement ou écoulement est descriptible selon trois niveaux fondamentaux plus ou moins complémentaires. Les deux premiers niveaux sont liés à la dynamique du phénomène modélisé.

- Niveau microscopique; Il traite de l'état d'équilibre d'un groupe homogène de molécules fluides.

- Niveau macroscopique; recherche de l'équilibre des flux transitant dans le système.

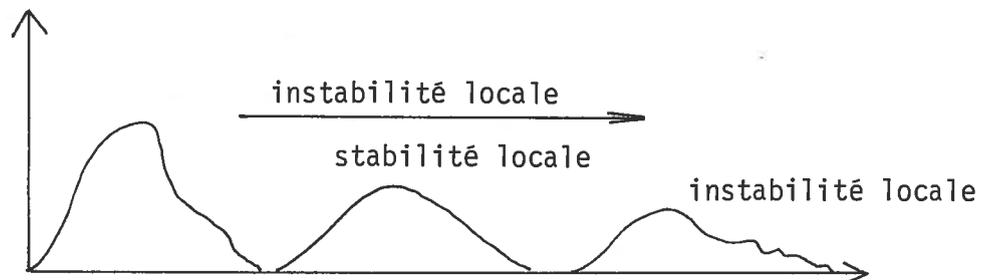
Le troisième niveau tient compte des structures dissipatives du phénomène. Il s'apparente donc à la thermodynamique. Ce niveau ne possède pas encore de modèles qui lui soient propres; Il est actuellement plus ou moins imbriqué dans le premier niveau.

En hydrologie, le fonctionnement du microscopique est donné par les équations fondamentales de l'hydrodynamique, simplifiées en une équation de continuité et d'une équation dynamique (Système de BARRE de ST-VENANT). En fait, la seconde équation tient compte indirectement des structures dissipatives :

$$\Phi(h, v) = \chi(i, j)$$

Les variations de hauteur d'eau et de vitesse sont équilibrées par les déperditions calorifiques (frottement visqueux, etc ...). A ce niveau microscopique, la complémentarité (dynamique - thermodynamique) est effective plus ou moins grossièrement.

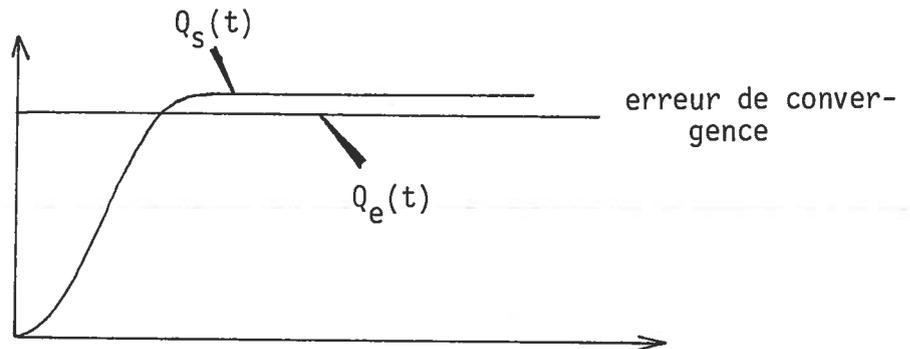
L'irréversibilité phénoménale est prise en compte. Un tel modèle est susceptible de représenter l'hétérogénéité d'un écoulement, le passage d'un état instable à un état plus stable qui, lui-même, peut redonner un état instable de niveau plus faible s'il n'y a pas eu d'apport extérieur d'entropie négative (apport latéraux, etc ...).



En principe donc, cette modélisation possède toutes les qualités requises pour donner une très bonne représentation des écoulements.

Si nous ne remettons pas en cause le principe fondamental de la mécanique, toutes les erreurs sur la prévision d'un phénomène vient donc d'un mauvais emploi du système de BARRE de ST-VENANT. Comme nous l'avons vu, sa résolu-

tion est simple mais toujours délicate. La méthode des caractéristiques dans leur forme classique doit être exclusivement réservée aux sections rectangulaires. Son application à d'autres types de section entraîne des erreurs de convergence et de conservation des débits transités.



Il faut s'assurer que toute discrétisation directe du système satisfait les conditions locales de stabilité. Ce n'est pas la peine de compliquer l'écriture des dérivées du système qui devient lui-même contrôlable et susceptible de fournir des réponses non convergentes, donc majorées ou minorées en valeur.

La démarche qui conduit au système de BARRE de ST-VENANT étant réductionniste, ce système en hydrologie n'est guère applicable qu'aux canalisations ou collecteurs. En effet, un élément de collecteur est un système pseudo-macroscopique. Sa structure est simple, non complexe et il n'est pas composé d'un ensemble d'éléments en interaction. Avec un tel système le passage du microscopique au macroscopique est réalisable. La non linéarité phénoménale, l'atténuation des ondes en transit sont très bien représentées. Il n'y a pas de restriction en ce qui concerne la forme de l'hydrogramme d'entrée. Naturellement comme pour tout modèle unique, le système de BARRE de ST-VENANT ne peut mesurer que les écoulements à surface libre.

Pour imager le fonctionnement de systèmes complexes, bassin versant, ensemble de bassins versants, les hydrologues ont élaboré des modèles macroscopiques qui relient directement l'entrée à la sortie. Ces modèles sont très nombreux et divers dans leurs applications car ils ne s'appuient pas à priori, sur les segments d'une théorie de l'hydrologie ou plus généralement d'une "mécanique macroscopique". Ces modèles évolutifs sont presque tous issus d'un système simple reliant l'entrée (hydrogramme ou hyétogramme) à la sortie (hydrogramme).

$$I \quad \begin{cases} \frac{d V_s}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t) \\ V_s(t) = f(Q_e(t) Q_s(t)) \end{cases}$$

Généralement, le système est appréhendé par un filtre qui donne, après intégration du système précédent, les opérateurs suivants :

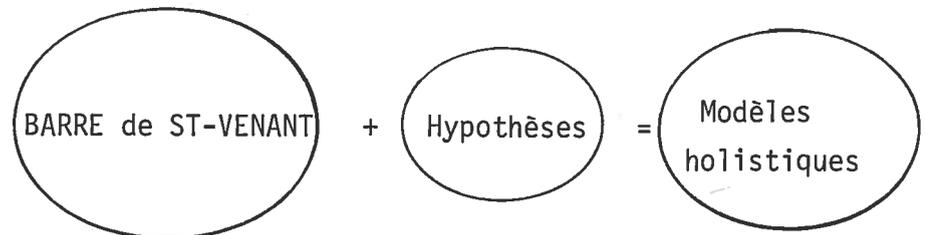
$$Q_s = O. Q_e \quad O. : \text{opérateur pseudo-convolutif.}$$

$$Q_s = O* Q_e \quad O* : \text{opérateur convolutif.}$$

Ces modèles qui représentent le transfert des flux dans un système sont presque tous réversibles, cette propriété n'étant pas consécutive du phénomène. En fait, ces modèles macroscopiques sont holistiques car ils traitent du tout sans tenir compte explicitement de la complexité structurale et phénoménale; un modèle ajusté sur un bassin versant ne peut pas être transposé à un autre bassin versant sans redéfinition de ces paramètres.

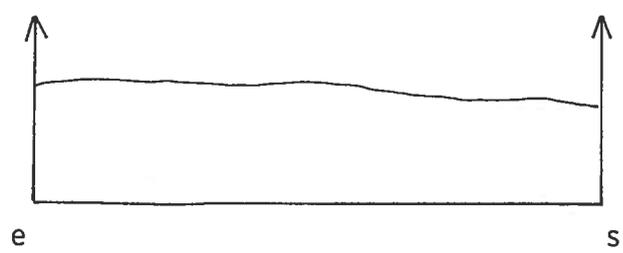
Ces modèles sont exclusivement dynamiques car ils ne font pas intervenir les qualités dissipatives du système.

Un retour sur la valeur cognitive de ces modèles nous a permis de les relier directement au modèle microscopique de BARRE de ST-VENANT.



L'ensemble des hypothèses jointes au modèle hydraulique réductionniste explicite, de façon assez floue malgré tout, les applications potentielles des modèles holistiques. A priori, ces hypothèses sont très restrictives et, généralement, en contradictions avec les qualités reconnues du phénomène (non linéarité, non égalité des vitesses entrée-sortie, relation non univoque entre la hauteur et le débit, etc...).

Pour être représenté par les modèles holistiques dérivant du système I, à tout instant la ligne d'eau dans le système doit être proche d'une droite reliant l'entrée à la sortie avec $h_e(t)$ proche de $h_s(t)$ et $V_e(t) \approx V_s(t)$. Le fonctionnement du système doit être proche de la figure suivante :



On retrouve ici les "qualités" du lieu d'application premier du système de MUSKINGHUM : écoulements en canal ou en rivière.

Si ces modèles holistiques sont appliqués à des bassins versants, ces derniers doivent fournir une réponse immédiate et dont être de faible taille. Les hypothèses mises à jour et qui engendrent les modèles holistiques supposent un phénomène relativement stable vis-à-vis des grandeurs mises en

jeu; les particularités microscopiques d'hétérogénéité doivent engendrer une globalité homogénéisée.

L'application des modèles globaux aux canalisations dépend des grandeurs mises en jeu. Cessent des systèmes trop simples qui révèlent facilement l'instabilité du mouvement.

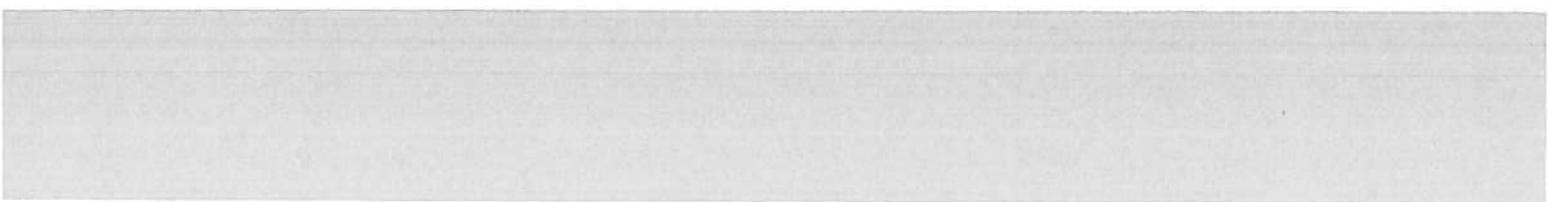
Actuellement, le passage des modèles microscopiques d'écoulement aux modèles holistiques s'accompagne d'une perte de qualité qui limite de façon évidente le champ d'application de ces derniers. Cette perte est due à l'étape théorique manquante qui relierait le réductionnisme et le systémique; l'opérateur du système de BARRE de ST-VENANT n'est pas encore inversible.

Ce regard sur l'état actuel de la modélisation des écoulements et des ruissellements en hydrologie peut sembler quelque peu pessimiste. Il révèle effectivement un manque théorique très important, manque qui limite nos possibilités de modélisation. L'application est plus satisfaisante, car l'hydrologie travaille à des échelles telles qu'une légère erreur sur le temps d'apparition d'un maximum ou sur la valeur de ce maximum n'a pratiquement pas ou peu d'importance. De plus, il existe encore beaucoup de zones d'ombres (détermination d'une pluie, calcul des diverses pertes, etc ...) qui minimise l'importance des modèles de ruissellement ou d'écoulement.

II - LA CONCEPTION EN HYDROLOGIE URBAINE

Les modèles d'écoulement et/ou de ruissellement sont à la base d'un ensemble d'outils spécifiques qui permettent de concevoir et de maîtriser l'assainissement urbain.

Ces outils de conception doivent aider les personnes chargées de l'assainissement à répondre en outre aux questions suivantes :



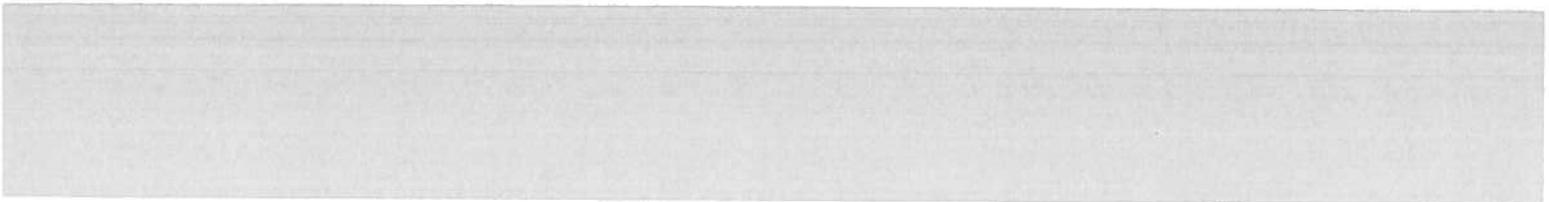
- . Comment fonctionne actuellement le réseau; Que peut-il encore accepter comme nouveaux apports ?
- . Comment dimensionner les nouvelles extensions et les transformations projetées ?
- . Comment prévoir l'évolution de ce réseau en fonction des nouveaux plans d'urbanisme ?

La méthode de CAQUOT ou la méthode rationnelle que nous avons nommées modèles technicistes sont, certainement, les premiers outils de conception qui soient apparus en hydrologie urbaine. Ces deux méthodes, tout en ayant leurs qualités propres, sont aujourd'hui inadaptées pour nous aider à répondre aux questions nouvelles posées par l'urbanisation des villes. Des outils de conception qui ont la prétention de traiter des problèmes au niveau de la cité ne peuvent pas faire appel à ces deux méthodes.

Actuellement, toute maîtrise de l'assainissement nécessite l'emploi de modèles d'écoulement et de ruissellement qui donnent des réponses plus proches de celles observées. A part les modèles issus de l'hydraulique, d'un emploi sûr mais inadapté à la taille des problèmes à traiter, les modèles holistiques, générés par les hydrologues, doivent être utilisés avec beaucoup de circonspection, les hypothèses théoriques en limitant le champ d'application.

Un système de conception de l'assainissement qui ne peut être qu'une conception assistée par ordinateur, nécessite une élaboration précautionneuse tout en reconnaissant le champ d'application potentiel des modèles à notre disposition.

Malgré ces réserves, l'introduction de la notion de conception à un niveau global a le grand mérite d'élargir notre approche modélisatrice. Elle nous aide à reconnaître et à situer les composantes primordiales de l'hydrologie urbaine. Les phénomènes liés à l'assainissement doivent être vus à travers les questions fondamentales que se posent les concepteurs [52].



Tout nouveau progrès de conception, qui reste étroitement lié à la reconnaissance de la physis, s'insère dans un mouvement global, circulaire et incessant qui passe de la modélisation des phénomènes de ruissellement, d'écoulement, de pertes, ... à la compréhension du tout, de ses relations, le tout rejaillissant sur, et transformant par sa seule présence, la modélisation phénoménale.

Les modèles holistiques, construits sur le système de MUSKINGHUM ou même à partir de la méthode rationnelle, sont déjà une première étape permettant sans aucun doute de traiter des problèmes jusqu'ici inenvisageables. Leurs lacunes nous incitent à rechercher des modèles dont les hypothèses de base ne seraient pas en contradiction avec les phénomènes, modèles qui réaliseraient un meilleur équilibre entre la valeur cognitive et décisionnelle de tout outil de conception, donc de prévision en assainissement.

284 Bis

ANNEXES

ANNEXE I

CALCUL de K et α

Grâce à un modèle non linéaire issu de l'hydrodynamique (Système de BARRE de ST-VENANT), nous avons simulé l'écoulement des eaux dans un collecteur circulaire de rayon = 0.3 m, de pente 5‰, d'une longueur de 500 m. Ce modèle étant un système d'équations aux dérivées partielles, son emploi nécessite une condition sur les bords du problème et une condition initiale.

Nous avons donc retenu le modèle linéaire vieillissant comme image du phénomène :

$$Q_s(t) = Q_s(0) e^{-t/K(1-\alpha)} + Q_e(0) \frac{\alpha}{1-\alpha} e^{-t/K(1+\alpha)} + \frac{\alpha}{\alpha-1} Q_e(t) + \frac{1}{K(1-\alpha)^2} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{K(1-\alpha)}} Q_e(\tau) d\tau.$$

Comme nous voulons approximer K et α par la première technique décrite ci-dessus, l'impulsion d'entrée est du type distribution d'HEAVISIDE $\sigma_0 H(t) = 0.4 \text{ m}^3/\text{s}$, la sortie $Q_s(t)$ étant mesurée au bout de 50 m toutes les 5 s. Le choix de cette longueur obéit au souci de se rapprocher de la linéarité.

Nous obtenons ainsi la montée de l'hydrogramme de sortie mis sous la forme $-\ln(\sigma_0 H(t) - Q_s(t))$ pour $Q_s(t) < \sigma_0$ (voir figure 1).

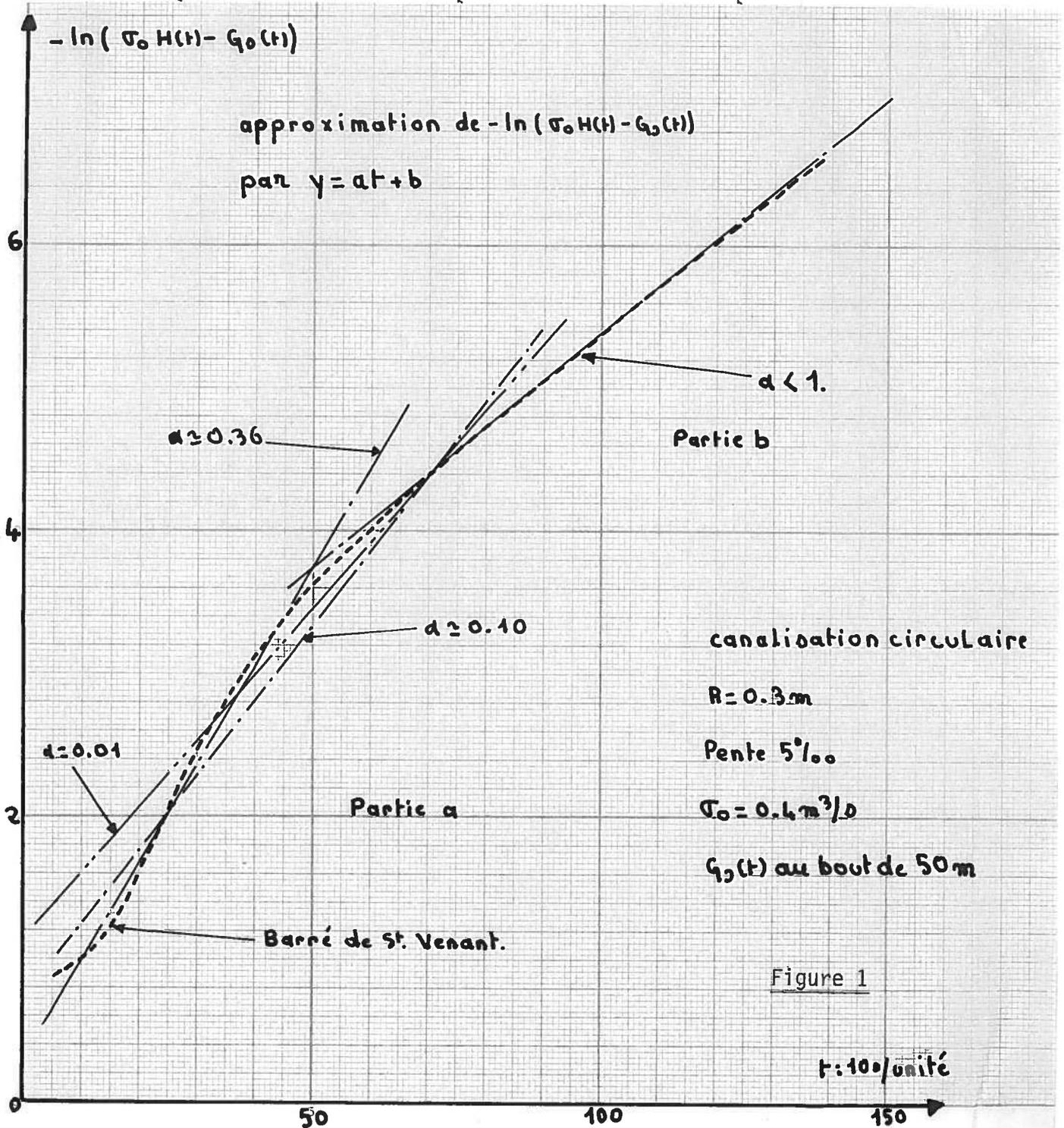
Cette courbe possède deux parties distinctes (a et b) chacune ayant une pente particulière. Le lieu de séparation de ces deux parties correspond au point d'inflexion haut de l'hydrogramme de sortie.

Pour le modèle holistique, cette courbe devrait être une droite d'équation $y = ax + b$.

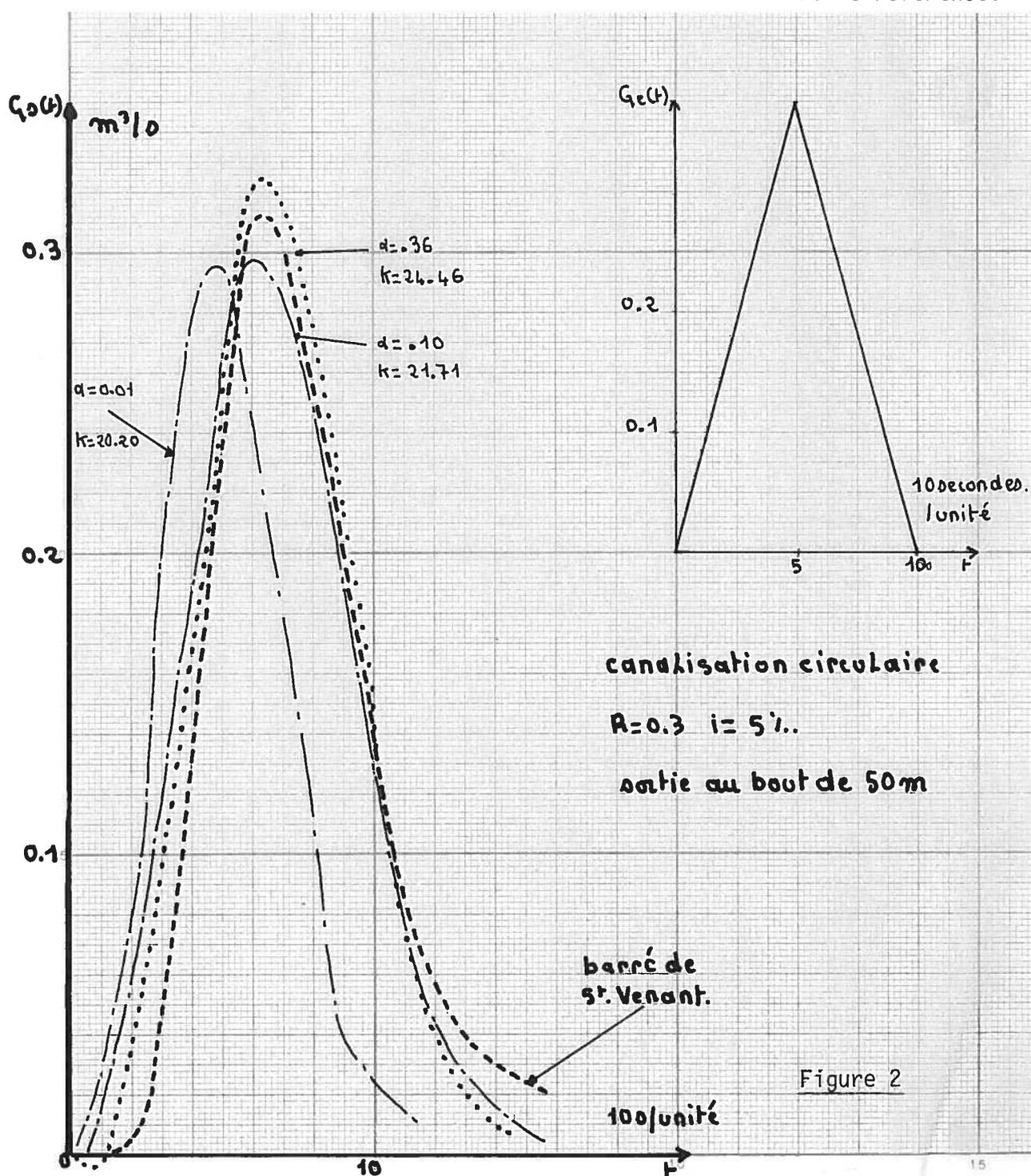
Une approximation de K et α par les moindres carrés sur la partie b donne des α inférieurs à 1. (voir figure 1).

Le même type d'approximation sur la partie b donne un faisceau de α qui s'échelonne de 1 à 0. Nous avons donc retenu cette première partie en lui associant trois couples de valeurs :

$\left\{ \begin{array}{l} K = 24.46 \text{ s} \\ \alpha \approx 0.367 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} K = 21.71 \text{ s} \\ \alpha = 0.102 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} K = 20.20 \\ \alpha \approx 0.01 \end{array} \right.$
--	--	---



En intégrant numériquement le modèle holistique retenu, et pour deux types d'entrée, nous avons comparé les sorties obtenues avec celles données par le système de BARRE de ST-VENANT considéré comme modèle de référence.



Avec une entrée triangulaire, une valeur très faible de α donnant une prépondérance à la sortie sur le stockage, $Q_s(t)$ présente un décalage temporel et un affaiblissement de l'ordre de 3 % du maximum.

Pour $\alpha = 0.367$, la valeur du maximum est dépassée de l'ordre de 3 %. Celui-ci étant mieux centré sur son temps d'apparition. Cette valeur de α donne une prépondérance au terme $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ (≈ -0.58) qui rend $Q_s(t)$ négatif au début de l'hydrogramme de sortie. (Voir figure 2).

Avec une impulsion d'entrée moins brusque, on retrouve à peu près les mêmes décalages. L'erreur relative sur le maximum est aussi très faible, le couple $K = 24.46$ $\alpha = 0.367$ donnant une réponse très proche de celle fournie par le modèle de référence malgré des valeurs négatives dues au terme $\frac{\alpha}{\alpha-1}$.

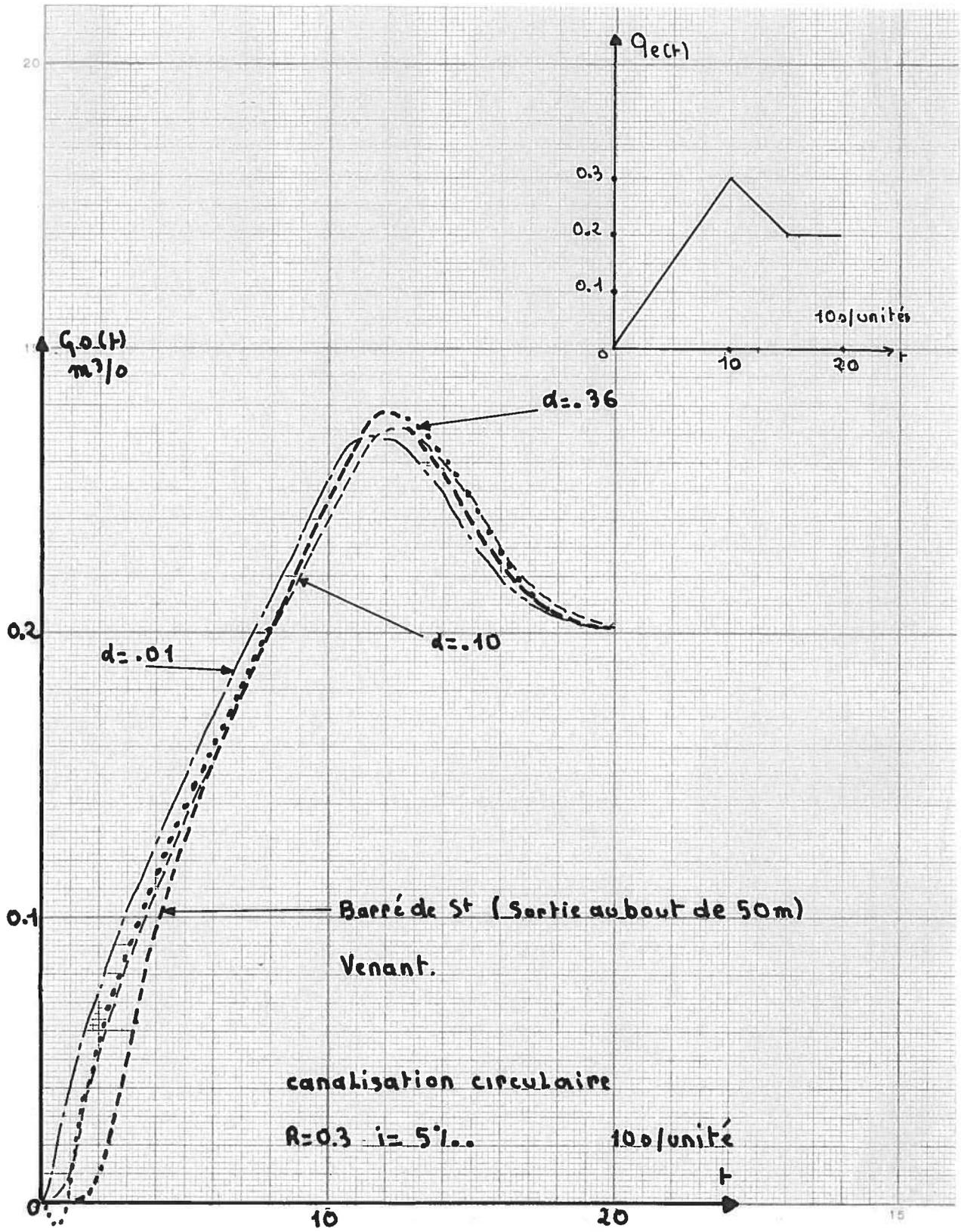


Figure 3

Les conditions phénoménales optimum dans lesquelles nous nous sommes placés, favorisent la reconnaissance du couple $(K \alpha)$, le faisceau de valeurs étant malgré tout relativement important (0.01 à 0.3). Dans la réalité, cette recherche doit être beaucoup plus complexe surtout si nous voulons modéliser le comportement d'un bassin versant, la limite du modèle étant naturellement sa linéarité. Même pour notre expérience, on observe un décalage à l'origine de l'hydrogramme de sortie. Le modèle ne peut pas rendre cette translation dans le temps. Cette étude doit être approfondie en définissant la limite d'une modélisation linéaire (Voir annexe III).

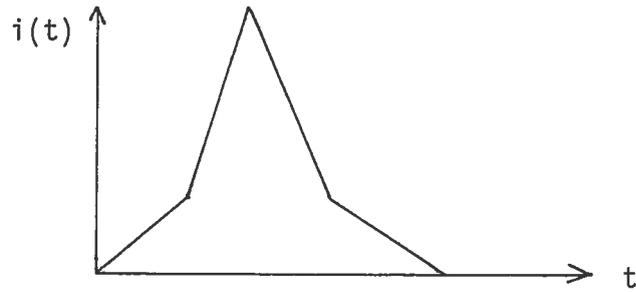
214

ANNEXE II

INTEGRATION ANALYTIQUE D'UN
MODELE HOLISTIQUE LINEAIRE

I - ENTREE TYPE TRIANGLE

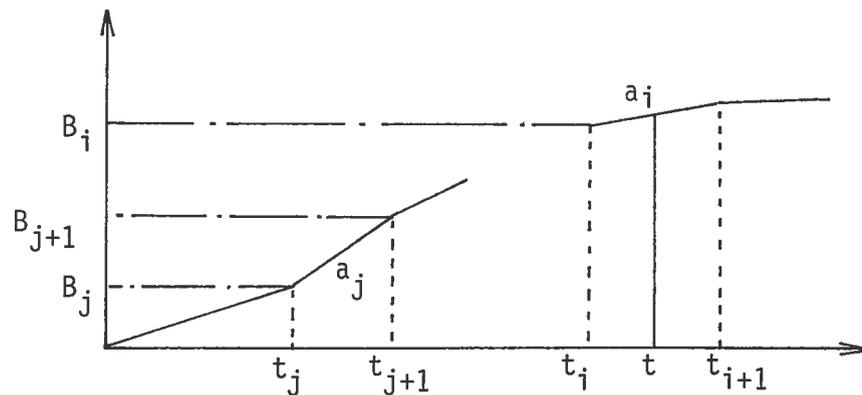
La plupart des pluies de projets (hyétogrammes nets) utilisées en hydrologie urbaine ont la forme suivante :



Cette fonction positive est sommable. La distribution δ étant localement sommable, la distribution $e^{-t/K(1-\alpha)}$ à décroissance rapide, le produit de convolution existe :

$$Q_s(t) = a\delta * f + b f * e^{-t/K(1-\alpha)}$$

Pour généraliser la solution d'un tel problème, nous allons chercher la sortie correspondant à une entrée définie comme suit :



Cette entrée est calculée au temps $t \in [t_i, t_{i+1}]$ le modèle utilisé étant non vieillissant ($Q_s(0) = Q_e(0) = 0$)

$$Q_s(t) = \frac{\alpha}{\alpha-1} Q_e(t) + \frac{1}{K(1-\alpha)^2} Q_e(t) * e^{-t/K(1-\alpha)}$$

Le produit de convolution se décompose pour donner l'équation suivante :

$$(1) \quad Q_s(t) = \frac{\alpha}{\alpha-1} (a_i(t-t_i) + b_i) + \frac{1}{K(1-\alpha)^2} \int_0^{t_i} Q_e(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{K(1-\alpha)}} d\tau \\ + \frac{1}{K(1-\alpha)^2} \int_{t_i}^t Q_e(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{K(1-\alpha)}} d\tau.$$

La première intégrale peut se mettre sous la forme :

$$\int_0^{t_i} Q_e(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{K(1-\alpha)}} d\tau = \int_0^{t_1} + \dots + \int_{t_j}^{t_{j+1}} + \dots + \int_{t_{i-1}}^{t_i} Q_e(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{K(1-\alpha)}} d\tau.$$

Elle mesure l'influence du débit déjà entré sur la sortie.

$$\text{Soit } I_{j,j+1} = \frac{1}{K(1-\alpha)^2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} Q_e(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{K(1-\alpha)}} d\tau.$$

Tout calcul effectué, on obtient :

$$I_{j,j+1} = \left(e^{-\frac{t-t_{j+1}}{K(1-\alpha)}} - e^{-\frac{t-t_j}{K(1-\alpha)}} \right) \left(\frac{b_j - a_j t_j - a_j K}{1-\alpha} \right) \\ + \frac{a_j}{1-\alpha} \left(t_{j+1} e^{-\frac{t-t_{j+1}}{K(1-\alpha)}} - t_j e^{-\frac{t-t_j}{K(1-\alpha)}} \right)$$

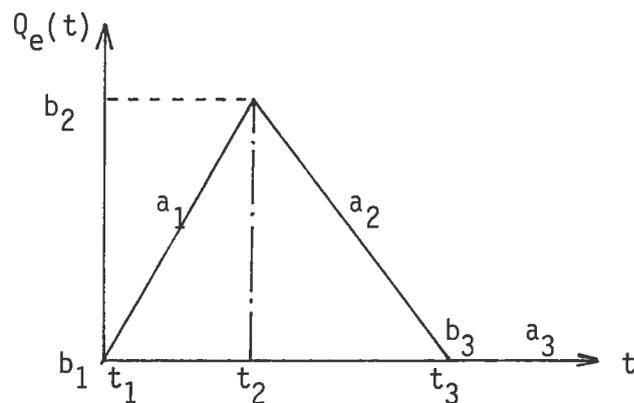
La deuxième intégrale de l'équation (1) est égale à :

$$I_{i,t} = (1 - e^{-\frac{t-t_i}{K(1-\alpha)}}) \left(\frac{b_i - a_i t_i}{1-\alpha} - a_i K \right) + \frac{a_i}{1-\alpha} (t - t_i) e^{-\frac{t-t_i}{K(1-\alpha)}}$$

$Q_s(t)$ peut donc se mettre sous la forme : $t \in (t_i, t_{i+1})$

$$Q_s(t) = \sum_{j=0}^{i-1} \left[e^{-\frac{t-t_{j+1}}{K(1-\alpha)}} - e^{-\frac{t-t_j}{K(1-\alpha)}} \right] \left(\frac{b_j - a_j t_j}{1-\alpha} - a_j K \right) + (t_{j+1} e^{-\frac{t-t_{j+1}}{K(1-\alpha)}} - t_j e^{-\frac{t-t_j}{K(1-\alpha)}}) \frac{a_j}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha-1} (a_i(t-t_i) + b_i) + (1 - e^{-\frac{t-t_i}{K(1-\alpha)}}) \left(\frac{b_i - a_i t_i}{1-\alpha} - a_i K \right) + \frac{a_i}{1-\alpha} (t - t_i) e^{-\frac{t-t_i}{K(1-\alpha)}}$$

1ère application



En utilisant la relation (2)

pour $t \in [t_1, t_2]$

$$Q_s(t) = \frac{\alpha}{\alpha-1} (a_1 t) + (1 - e^{-\frac{t}{K(1-\alpha)}}) - a_1 K$$

$$+ \frac{a_1}{1-\alpha} (t)$$

pour $t \in [t_2, t_3]$ $b_1 = 0$ $t_1 = 0$

$$Q_s(t) = (e^{-\frac{t-t_2}{K(1-\alpha)}} - e^{-\frac{t-t_2}{K(1-\alpha)}}) - a_1 K + (t_2 e^{-\frac{t-t_2}{K(1-\alpha)}}) \cdot \frac{a_1}{1-\alpha}$$

$$+ \frac{\alpha}{\alpha-1} (a_2(t-t_2) + b_2) + (1 - e^{-\frac{t-t_2}{K(1-\alpha)}}) \left(\frac{b_2 - a_2 t_2}{1-\alpha} - a_2 K \right)$$

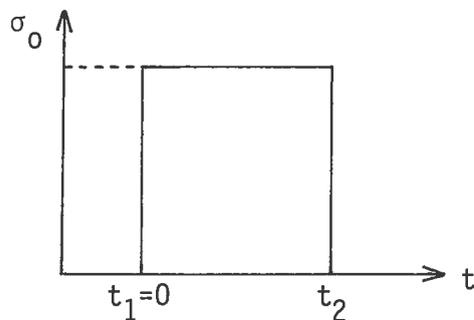
$$+ \frac{a_2}{1-\alpha} (t-t_2) e^{-\frac{t-t_2}{K(1-\alpha)}}$$

pour $t > t_3$

$$\begin{aligned}
 Q_s(t) = & \left(e^{-\frac{t-t_2}{K(1-\alpha)}} - e^{-t/K(1-\alpha)} \right) \cdot a_1 K + (t_2 e^{-\frac{t-t_2}{K(1-\alpha)}}) \cdot \frac{a_1}{1-\alpha} \\
 & + \left(e^{-\frac{t-t_3}{K(1-\alpha)}} - e^{-\frac{t-t_2}{K(1-\alpha)}} \right) \left(\frac{b_2 - a_2 t_2}{1-\alpha} - a_2 K \right) \\
 & + \left(t_3 e^{-\frac{t-t_3}{K(1-\alpha)}} - t_2 e^{-\frac{t-t_2}{K(1-\alpha)}} \right) \frac{a_2}{1-\alpha}
 \end{aligned}$$

La courbe d'entrée étant régulière, la courbe de sortie ne présente pas de discontinuité.

II - ENTREE TYPE FONCTION PORTE



$$f(t) = \sigma_0 \text{ pour } t \in [t_1, t_2]$$

$$f(t) = 0 \text{ pour } t \in]-\infty, t_1[$$

$$t \in]t_2, +\infty[$$

Comme cette fonction est sommable, le produit de convolution existe.

pour $t \in [t_1, t_2]$

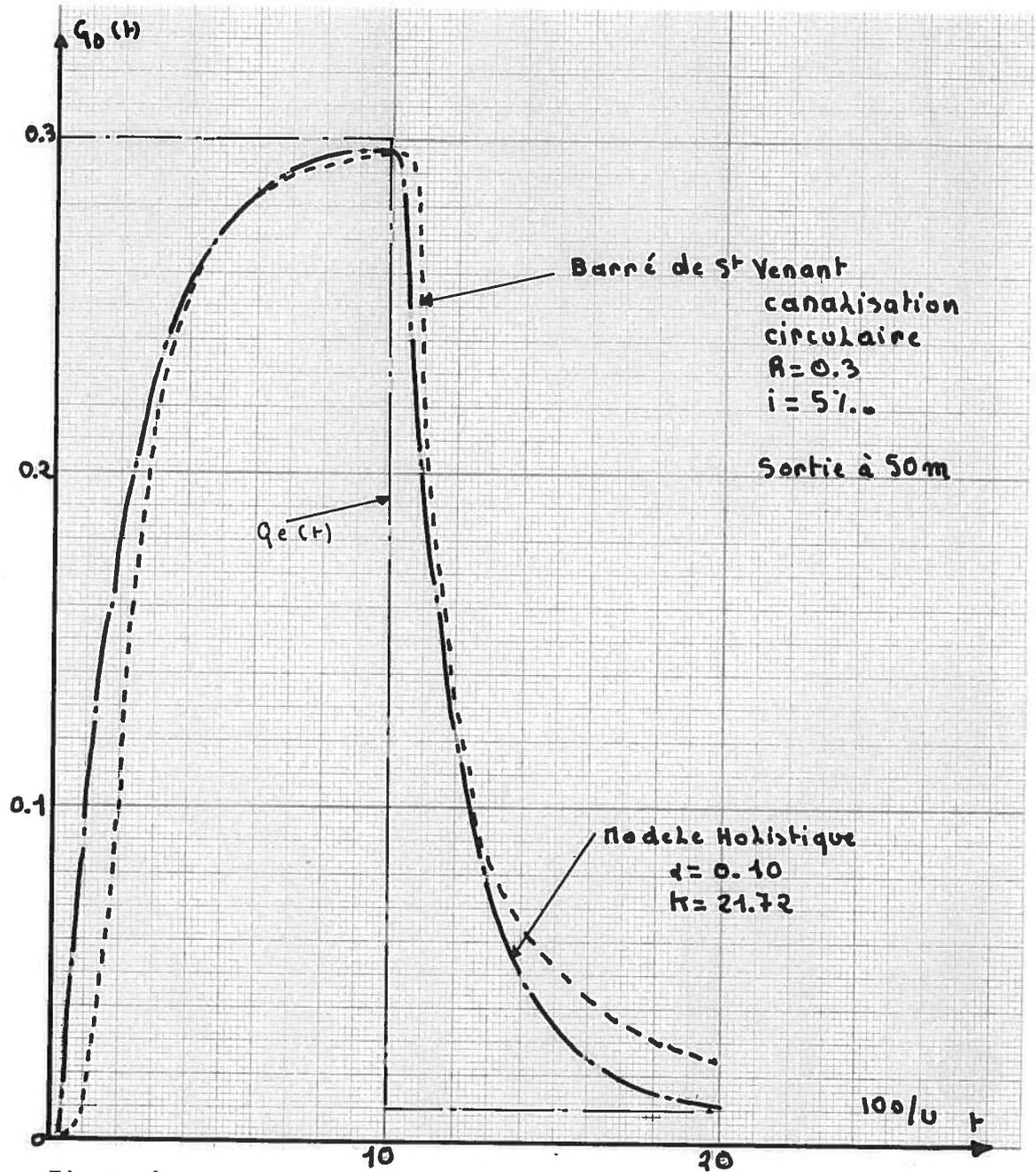
$$Q_s(t) = \frac{\alpha}{\alpha-1} \sigma_0 + \frac{\sigma_0}{1-\alpha} (1 - e^{-t/K(1-\alpha)})$$

pour $t \in]t_2 + \infty[$

$$Q_s(t) = \frac{\sigma_0}{1-\alpha} e^{-\frac{t-t_2}{K(1-\alpha)}} - e^{-t/K(1-\alpha)}$$

La discontinuité que l'on observe dans l'écriture du modèle (autour du point t_2) est due à la présence d'une mémoire instantanée (distribution de DIRAC). Si le modèle était uniquement défini par une mémoire régulière, il y aurait continuité dans l'écriture du modèle.

Naturellement cette discontinuité apparente disparaît dans le calcul du débit de sortie, le modèle régulant l'entrée.



L'intégration analytique d'un tel modèle donne une sortie dont l'allure est proche de celle obtenue par BARRE de ST-VENANT. Le modèle holistique ne donne pas le décalage à l'origine, la valeur du débit maximum étant bien rendue.

A N N E X E III

INDICATIONS SUR LES LIMITES D'UTILISATION

DES MODELES HOLISTIQUES LINEAIRES

Nous avons vu dans les annexes I et II, qu'une bonne approximation des paramètres K et α permet de plus ou moins bien reproduire la sortie mesurée à 50 m pour une canalisation circulaire de rayon : 0.3 m et de pente 5‰. La linéarité du modèle holistique non vieillissant semble s'accorder avec le cas particulier étudié.

Tout en conservant le même système transformateur, nous allons approfondir les essais portant sur ce modèle pour reconnaître sa limite d'utilisation, pour une telle canalisation.

Dans un deuxième temps, nous construirons empiriquement (par rapport au système de BARRE de ST-VENANT) un opérateur de convolution correspondant au fonctionnement du transformateur étudié.

Les différences observées entre les sorties calculées et les sorties "réelles" nous renseigneront sur l'utilisation potentielle de ces modèles qu'il s'agisse des écoulements ou des ruissellements en surface.

I - MODELE CONSTRUIT A PARTIR DU SYSTEME DE MUSKINGHUM

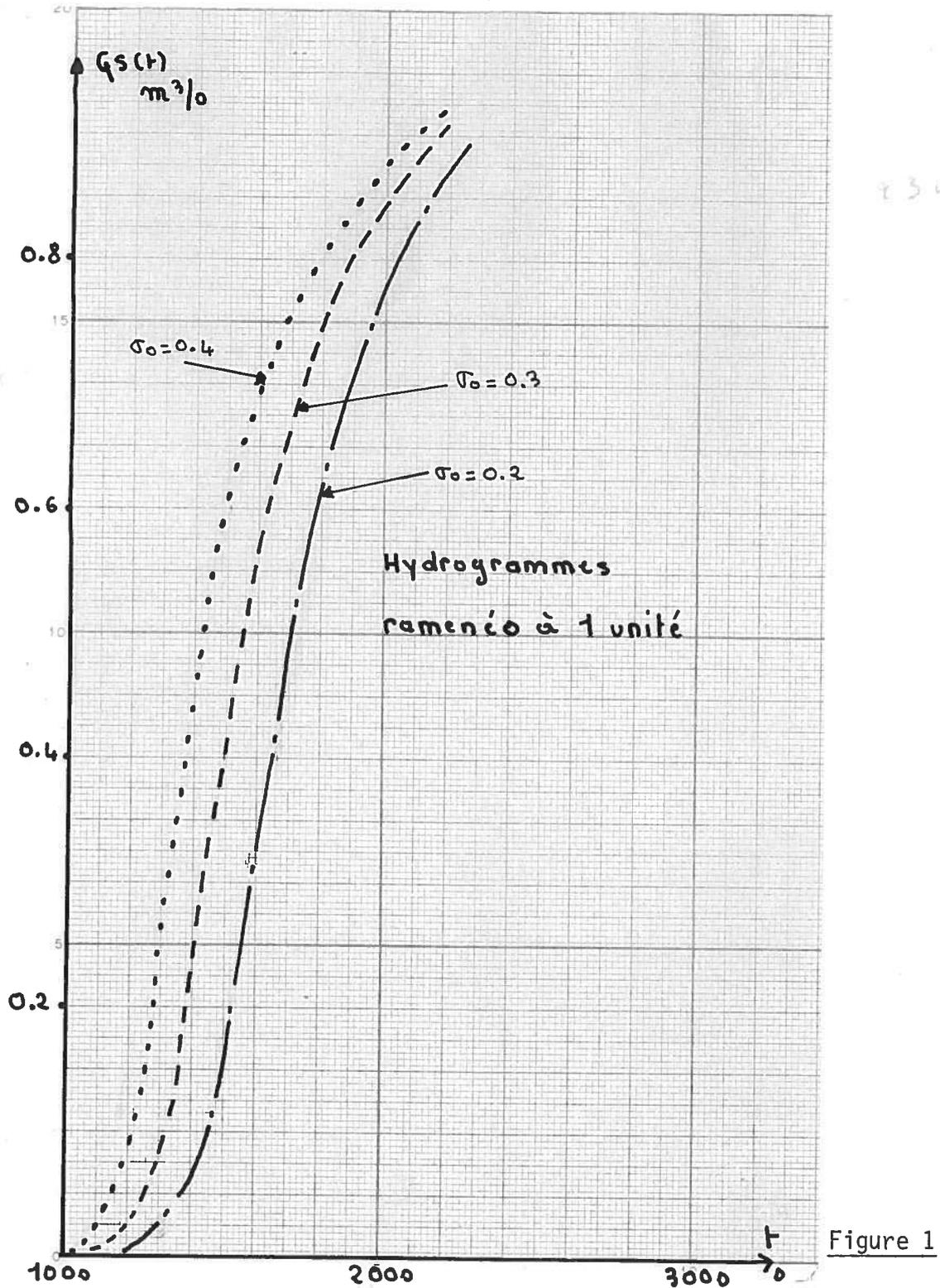
Le modèle retenu est celui que l'on obtient en intégrant numériquement la convolution avec $\alpha \in [0, 1[$ soit :

$$Q_s(i+1) = e^{-\frac{\Delta t}{K(1-\alpha)}} Q_s(i) + \frac{\alpha}{1-\alpha} e^{-\frac{\Delta t}{K(1-\alpha)}} Q_e(i) + \left(1 - \frac{e^{-\frac{\Delta t}{K(1-\alpha)}}}{1-\alpha}\right) Q_e(i+1)$$

Les deux paramètres K et α sont déterminés à partir de la sortie due à une entrée $\sigma_0 H(t)$. Le transformateur réel ayant un fonctionnement non linéaire, ces deux paramètres sont fonction de σ_0 .

En calculant par BARRE de ST-VENANT les hydrogrammes obtenus à 300 m pour différents $\sigma_0 H(t)$, nous observons (figure 1) que les montées ont des allures sensiblement identiques, leur origine temporelle variant avec σ_0 .

S'il est possible de reproduire par le modèle ci-dessous une sortie à 300 m, le couple (K, α) étant calculé à partir d'une seule entrée $\sigma_1 H(t)$, la montée de l'hydrogramme de sortie empruntera celle correspondant à $\sigma_1 H(t)$. L'allure de toute sortie n'est pas modifiée, seule son origine temporelle étant plus ou moins faussée.



Avec le modèle de base choisi, deux techniques sont utilisables pour calculer les hydrogrammes à 50 m, 100 m, ..., le transformateur étant une canalisation.

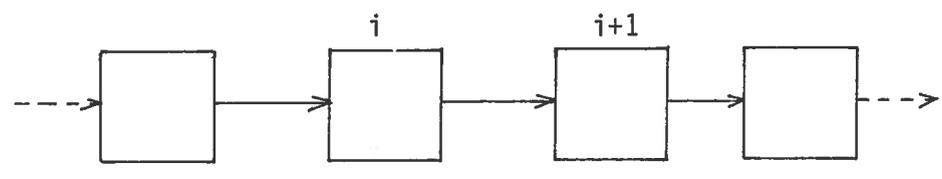
La première consiste à approximer les couples $(K\alpha)$ à partir des montées d'hydrogrammes à 50 m, 100 m, 150 m, ... etc.

La sortie est alors directement calculée en utilisant la relation ;

$$Q_{si} \neq O(K_i, \alpha_i) * Q_e$$

Cette technique suppose naturellement, que la linéarité existe toujours pour des longueurs de canalisation importantes.

Comme ce n'est certainement pas le cas, nous avons choisi une deuxième technique qui suppose le système quasi décomposable en une somme de sous-systèmes, chacun étant apparenté à un filtre.



La sortie du sous-système i est l'entrée du sous-système $i+1$.

Chaque sous système, correspondant à une longueur donnée de canalisation, devrait être identifié par un couple (K_i, α_i) . Si la canalisation est d'un seul tenant (sans chute intermédiaire), il est impossible de créer une impulsion d'entrée $\sigma_0 H(t)$ à i pour déterminer ces caractéristiques.

Si tous les sous systèmes ont les mêmes dimensions (longueur, pente, rayon pour une canalisation cylindrique) et sont séparés les uns des autres par des chutes, ils sont caractérisés par le même couple $(K.\alpha)$.

La sortie du sous-système $i+1$ peut être calculée soit en utilisant successivement $i+1$ ème fois le modèle de base, soit en déterminant théori-

quement l'opérateur de convolution résultant. Ce dernier devient vite compliqué à mettre en oeuvre si le nombre de sous-systèmes est important (voir de l'étude 1, paragraphe III.3).

Les calculs que nous avons donc effectués donnent les sorties à 50, 100, 150, 200, 250 m pour une canalisation circulaire ($R = 0.3$, $i = 5\text{‰}$), celle-ci étant d'un seul tenant. L'hydrogramme d'entrée a la forme d'une fonction porte ($Q_{e\text{Max}} = 0.3 \text{ m}^3/\text{s}$).

La longueur de chaque sous-système (50 m) correspond en apparence, au domaine de linéarité du modèle.

Les tronçons de canalisation sont tous identifiés par un même couple (K, α) déterminé grâce à la sortie calculée par le système de BARRE-de ST VENANT pour $Q_e(t) = 0.3 H(t)$. (voir annexe 1).

$$K = 21.71 \text{ s}$$

$$\alpha = 0.102$$

Les résultats obtenus sont comparés aux sorties calculées par ce même système. (Voir figures 2, 3, 4).

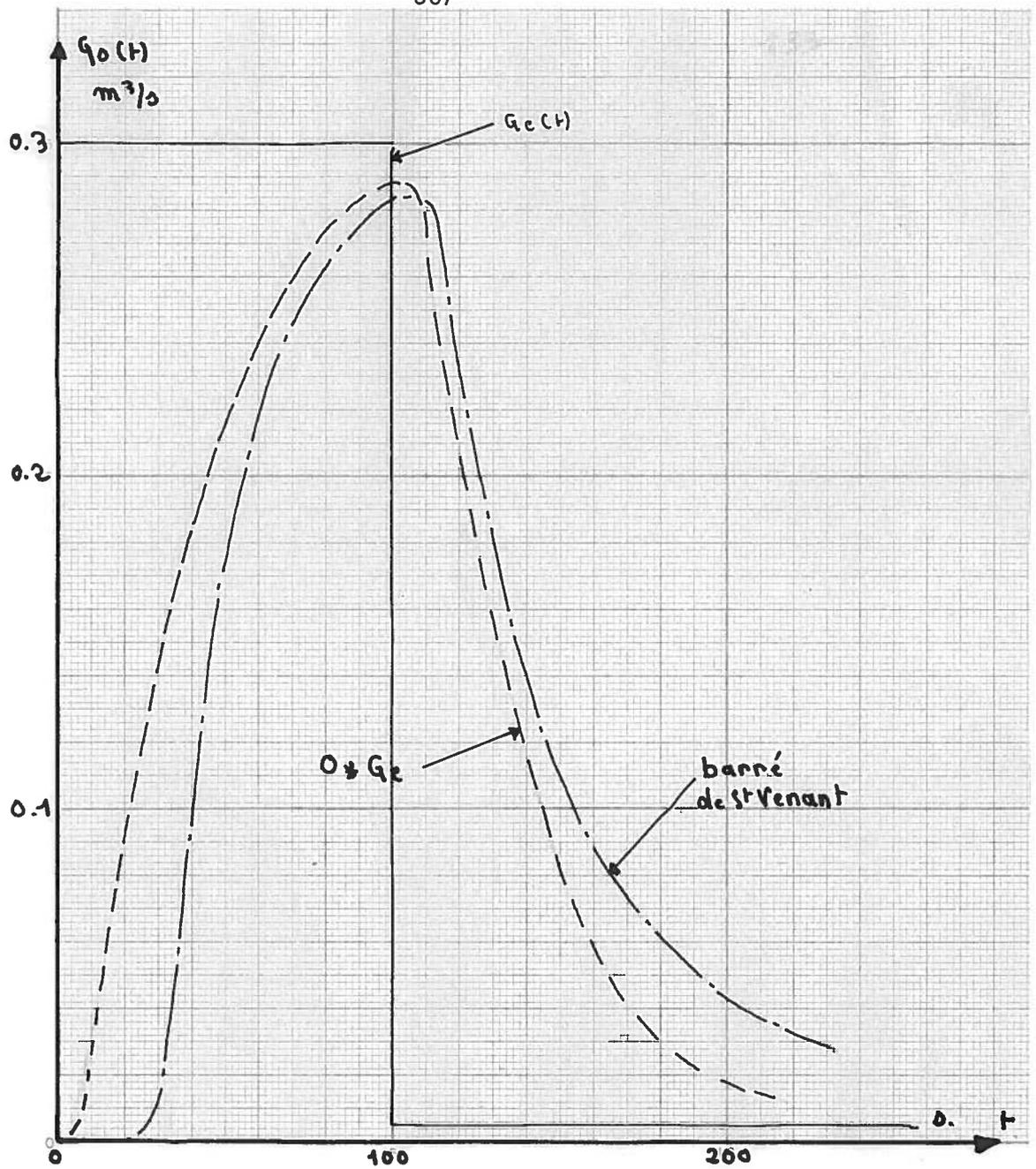


Figure 2

Sortie à 100 m

BARRE de ST-VENANT : $Q_{\text{Max}} = \sim 0.2860 \text{ m}^3/\text{s}$

$t_{Q_{\text{Max}}} = \sim 110 \text{ s}$

Convolution : $Q_{\text{Max}} = \sim 0.289 \text{ m}^3/\text{s}$

$t_{Q_{\text{Max}}} = \sim 100 \text{ s}$

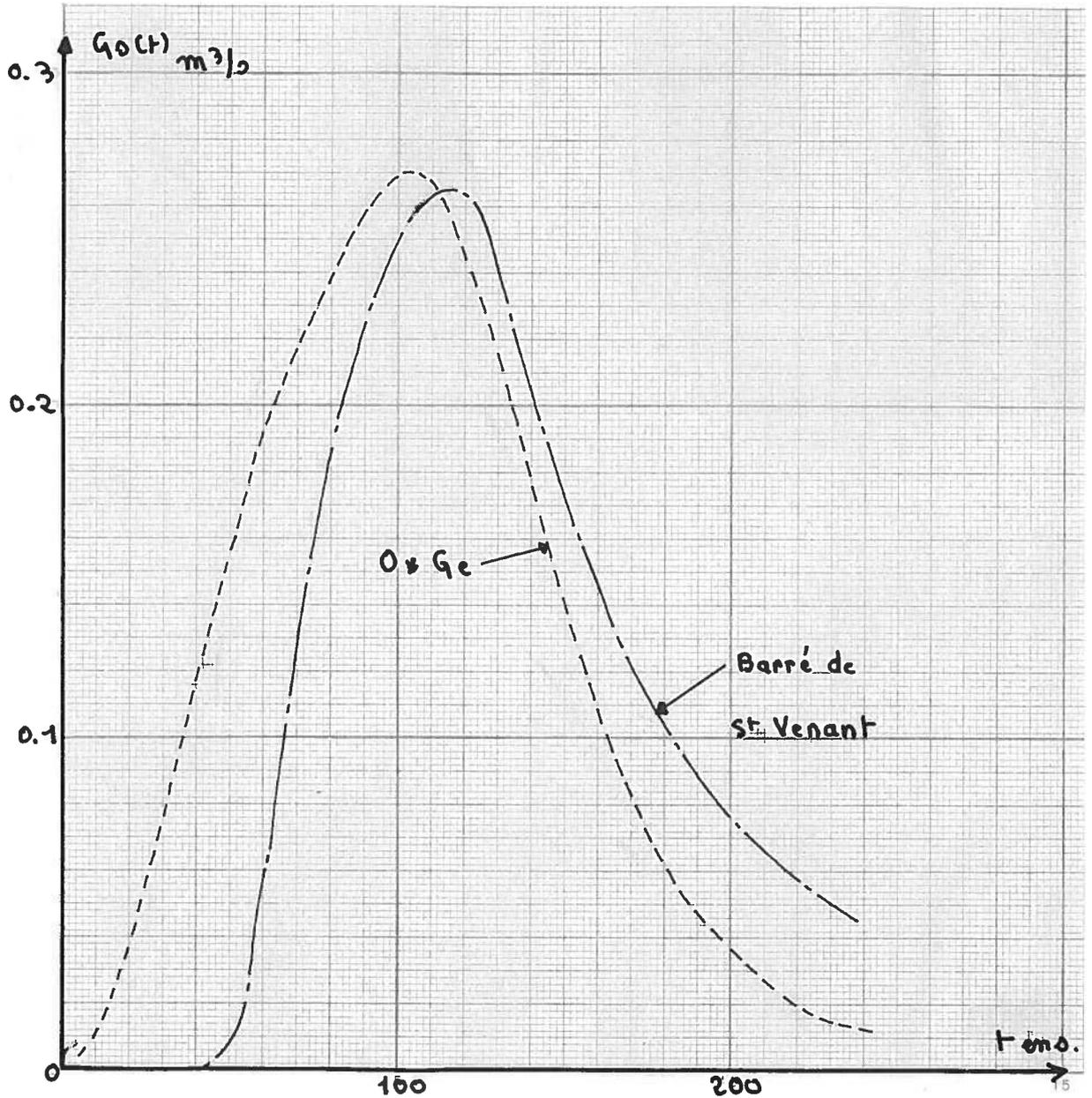


Figure 3

Sortie à 150 m

BARRE de ST-VENANT : $Q_{\text{Max}} : 0.2660 \text{ m}^3/\text{s}$

$T_{Q_{\text{Max}}} : \sim 120 \text{ s}$

Convolution : $Q_{\text{Max}} : 0.2695 \text{ m}^3/\text{s}$

$T_{Q_{\text{Max}}} : \sim 105 \text{ s}$

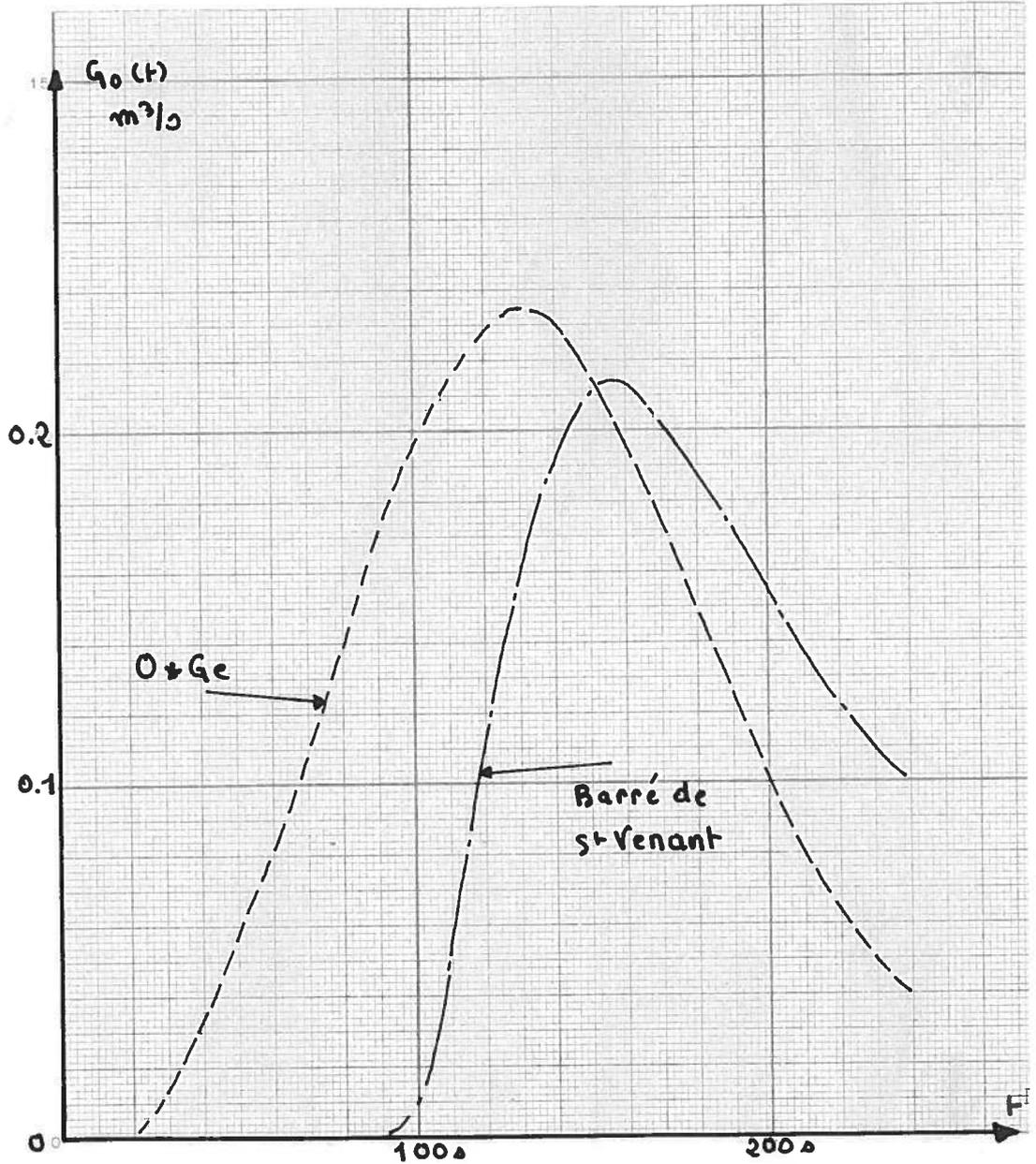


Figure 4

Sortie à 250 m

BARRE de ST-VENANT : $Q_{\text{Max}} = 0.234 \text{ m}^3/\text{s}$

$T_{Q_{\text{Max}}} = \sim 160 \text{ s}$

Convolution : $Q_{\text{Max}} = 0.214 \text{ m}^3/\text{s}$

$T_{Q_{\text{Max}}} = \sim 130 \text{ s}$

De 50 à 100 m, la réponse calculée par la convolution est très proche de celle obtenue par le système de référence. Au-delà de cet intervalle, les erreurs déjà observées ne font que s'accroître pour devenir relativement importantes vers 250 m (~ 20 % sur le temps d'apparition du débit maximum et ~10 % sur cette quantité d'eau), l'origine de la montée de l'hydrogramme n'étant pas du tout respectée.

Les paramètres K et α ayant été approximés au mieux, la propagation d'un débit très court (100 s) donne des résultats peu satisfaisant pour un tronçon de canalisation long. Les erreurs sur la valeur du débit maximum et son temps d'apparition auraient tendance à s'effacer (sans disparaître !) si l'hydrogramme d'entrée avait une base de temps plus importante et si l'hydrogramme calculé à chaque sortie i était sommé avec un nouvel hydrogramme d'entrée en i , (comme cela se passe en réalité dans les réseaux d'eaux pluviales).

La modélisation linéaire est, peut-être, améliorable en recherchant empiriquement la fonction du convoluteur propre à ce transformateur.

II - CONSTRUCTION D'UN MODELE HOLISTIQUE LINEAIRE DE PROPAGATION EN CANALISATION

Le système étant assimilé à un filtre, il est modélisable par un opérateur de convolution O tel que :

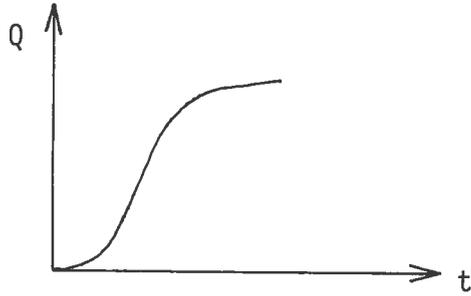
$$Q_s = O * Q_e$$

La sortie S due à une entrée $\sigma_0 H(t)$ permet d'identifier l'opérateur O .

$$O \equiv (S)'$$

En considérant le transformateur précédent, l'écoulement aval et amont étant critique, le système de BARRE de ST-VENANT donne à 50 m, pour

$Q_e(t) = 0.3 \text{ m}^3/\text{s}$, un hydrogramme qui a la forme suivante :



voir figure 1

Pour ce type d'entrée, ce modèle issu du système de MUSKINGHUM donne une sortie $Q_s(t)$ telle que :

$$Q_s(t) = \sigma_0 H(t) - \frac{\sigma_0 H(t) - t/K(1-\alpha)}{1-\alpha} e^{-t/K(1-\alpha)}$$

La courbe exponentielle n'ayant pas de point d'inflexion, cette sortie ne donne pas le décalage à l'origine et les changements de concavité observés.

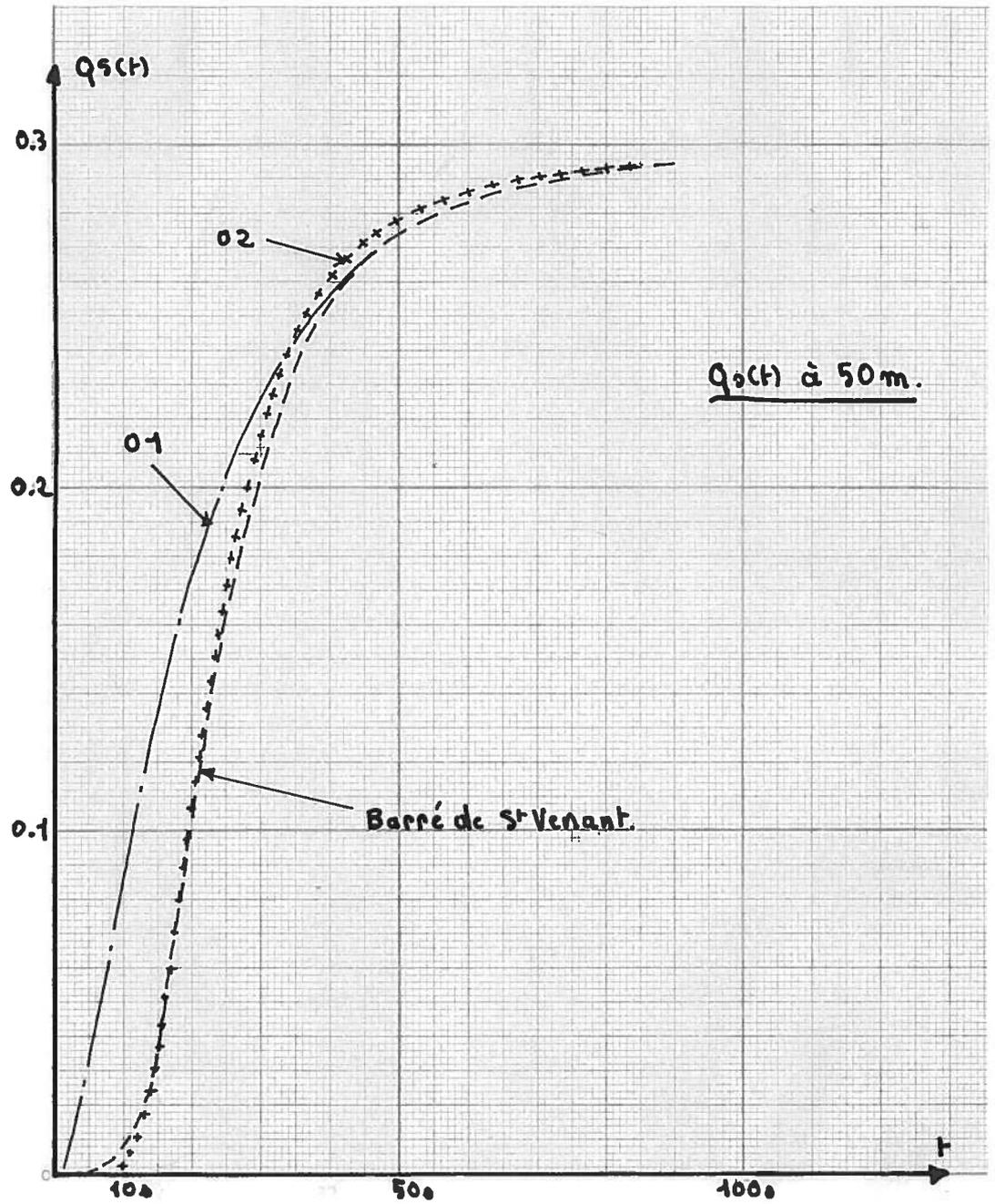


Figure 1

$$01 \equiv \sigma_0 H(t) - \frac{\sigma_0 H(t)}{1-\alpha} e^{-t/K(1-\alpha)}$$

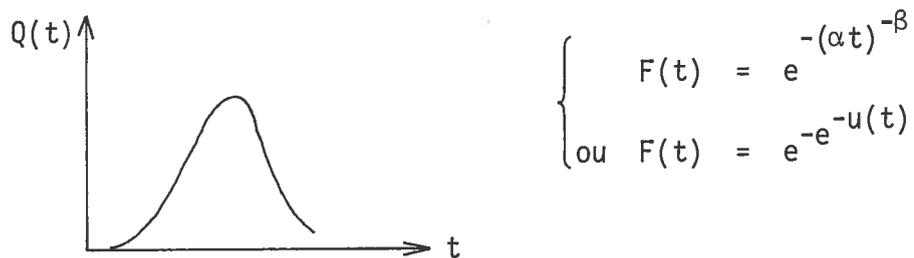
$$(K \approx 21.70$$

$$\alpha \approx 0.1)$$

Ces propriétés particulières de l'exponentielle expliquent les erreurs que nous avons déjà remarquées précédemment. Il est donc peut-être possi-

ble d'améliorer les modèles linéaires en choisissant une fonction qui soit plus proche de la montée observée (figure 1).

En remarquant que les sorties dues à des entrées de type "porte" ont des allures voisines de certains histogrammes et que les montées d'hydrogrammes dues à des entrées $\sigma_0 H(t)$ sont très proches des fonctions cumulées de ces histogrammes, nous avons tenté de représenter ces montées par des fonctions du type :



les coefficients α , β et la fonction $u(t)$ devant être approximés à partir des montées d'hydrogrammes théoriques.

II.1 Détermination des paramètres : choix d'un modèle

$$\text{Soit } F(t) = e^{-(\alpha t)^{-\beta}} = \frac{Q_s(t)}{\sigma_0}$$

$$\Rightarrow -\ln\left(-\ln\left(\frac{Q_s(t)}{\sigma_0}\right)\right) = \beta \ln \alpha / \beta \ln t$$

$$\text{Soit } F(t) = e^{-e^{-u(t)}}$$

$$\Rightarrow -\ln\left(-\ln\left(\frac{Q_s(t)}{\sigma_0}\right)\right) = u(t)$$

On trace donc la courbe $-\ln\left(-\ln\left(\frac{Q_s(t)}{\sigma_0}\right)\right)$ en fonction de $\ln t$, $Q_s(t)$

étant obtenu à 50 m par BARRE de ST-VENANT pour $\sigma_0 = 0.3 \text{ m}^3/\text{s}$. (Figure 2).

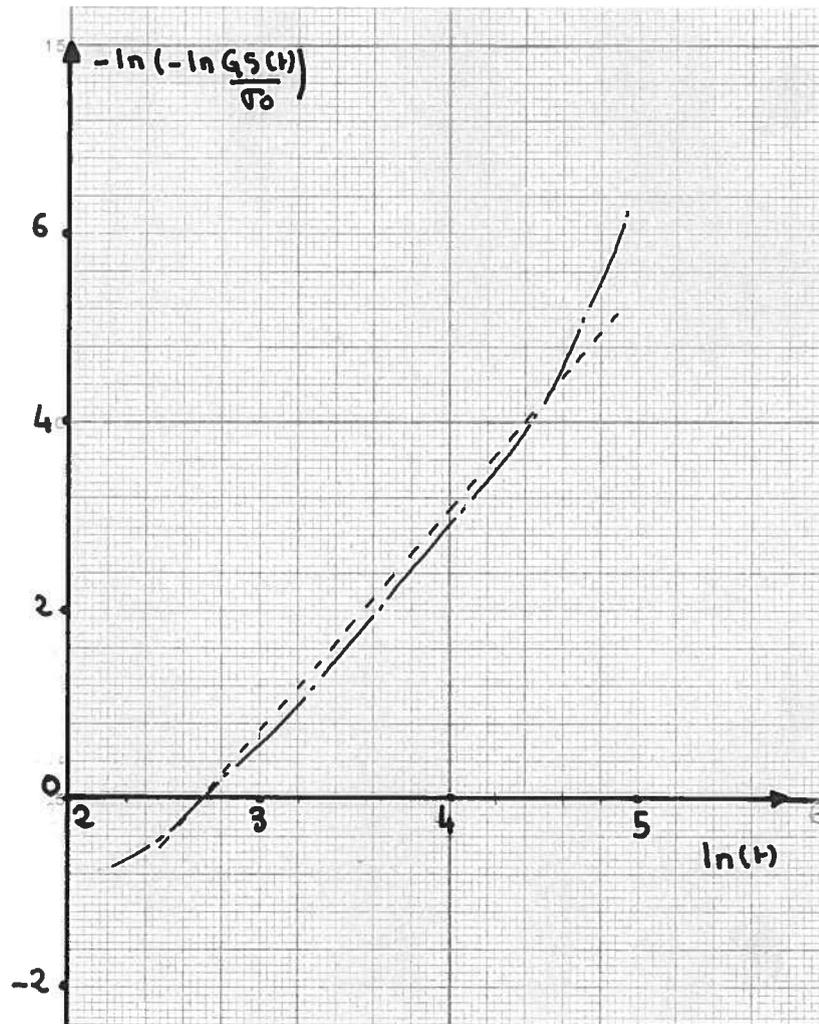


Figure 2

Cette courbe est approximable, soit par une droite, soit par une courbe du 2ème degré en $\ln t$.

Comme nous désirons obtenir un modèle simple à mettre en oeuvre, nous choisissons l'approximation de $\ln \left(-\ln \frac{Q_s(t)}{\sigma_0} \right)$ par une droite, soit le modèle :

$$F(t) = e^{-(\alpha t)^{-\beta}} \quad (\text{Loi de FRECHET})$$

$$\text{avec } -\ln\left(-\ln\frac{Q_s(t)}{\sigma_0}\right) = \beta \ln \alpha + \ln t$$

Le paramètre α est tel que :

$$Q_s\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\sigma_0}{e}$$

Il est donc très facilement calculable.

Le paramètre β représente la pente moyenne de la courbe $-\ln\left(-\ln\frac{Q_s(t)}{\sigma_0}\right)$

$F(t)$ étant la primitive de l'opérateur 0 , le modèle s'écrit :

$$Q_s(t) = \beta \alpha (\alpha t)^{-(\beta+1)} e^{-(\alpha t)^{-\beta}} * Q_e(t)$$

En utilisant la variable d'état $V_s(t)$ qui représente le stockage, le modèle s'écrit ainsi :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d V_s(t)}{dt} &= Q_e(t) - Q_s(t) \\ V_s(t) &= \frac{1 - e^{-(\alpha t)^{-\beta}}}{e^{-(\alpha t)^{-\beta}}} t \times \int_0^t Q_s(\tau) d\tau \\ \text{ou } V_s(t) &= (1 - e^{-(\alpha t)^{-\beta}}) t \times \int_0^t Q_e(\tau) d\tau \end{aligned} \right\}$$

Pour une entrée du type $\sigma_0 H(t)$ ($\sigma_0 = 0.3 \text{ m}^3/\text{s}$) avec $\alpha = 0.05$ et $\beta = 2.7$ (approximés par les moindres carrés sur $-\ln(-\ln \frac{Q_s(t)}{\sigma_0})$), ce modèle donne une montée d'hydrogramme voisine de celle observée (voir courbe 02 figure 1).

Le décalage à l'origine est pris en compte ainsi que les changements de concavité.

II.2 Vérification de la bonne reproduction des hydrogrammes à 50 m et à 100 m

Pour pouvoir déterminer les sorties dues à des entrées quelconques, le modèle doit être intégré numériquement :

$$Q_s(I, I+1) = Q_e(I, I+1) e^{-(\alpha \Delta t)^{-\beta}} + \sum_{j=2}^I Q_e(j-1, j) (e^{-(\alpha \Delta t(I-j+2))^{-\beta}} - e^{-(\alpha \Delta t(I-j+1))^{-\beta}})$$

$Q_s(I, I+1)$ débit sortant entre $I \Delta t$ et $(I+1) \Delta t$

$Q_e(j-1, j)$ " entrant entre $(j-1) \Delta t$ et $j \Delta t$.

Le transformateur réel n'étant pas linéaire, les paramètres α et β dépendent de la valeur de $\sigma_0 H(t)$ qui sert à les approximer. Comme les montées d'hydrogrammes correspondantes, à 50 et 100 m, sont très voisines, nous n'avons retenu qu'une seule valeur σ_0 ($0.3 \text{ m}^3/\text{s}$) pour calculer α et β , (le modèle étant linéaire).

317

Sortie à 50 m : $\alpha = 0.05 \text{ s}^{-1}$

$\beta = 2.70$

Sortie à 100 m : $\alpha = 0.025 \text{ s}^{-1}$

$\beta = 3.60$

Les essais que nous reproduisons ici, ont uniquement pour but de vérifier la reproduction des hydrogrammes dues à des entrées quelconques, la détermination, en première approximation, du domaine de validité pour ce modèle, utilisé sur le type de canalisation retenu ($R = 0.3$ $i = 5 \%$) (voir figures 3 et 4).

94h

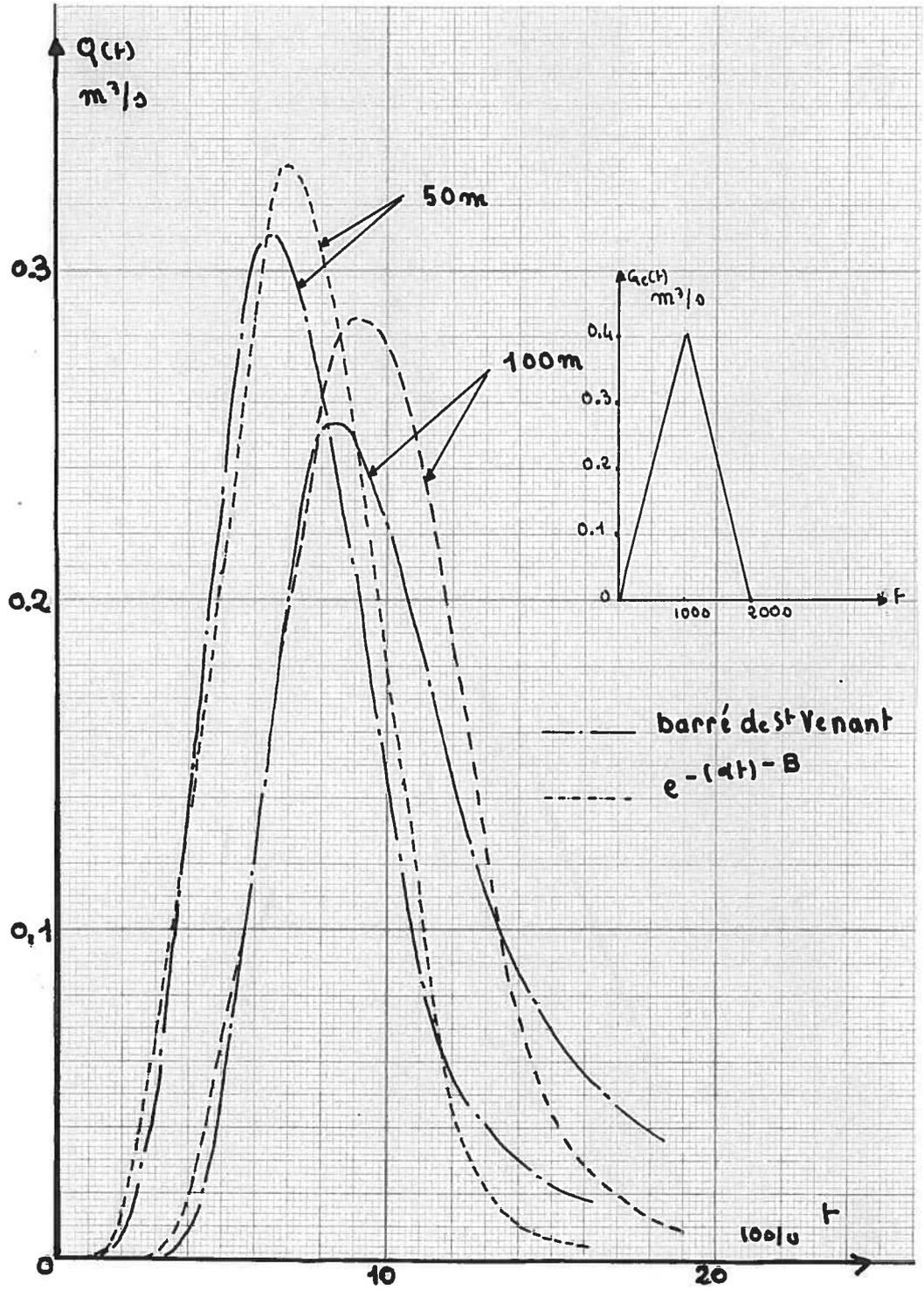


Figure 3

965

319

Pour la sortie à 50 m, l'hydrogramme est bien reproduit, l'origine de la montée étant respectée. La valeur du débit maximum est légèrement plus importante (de l'ordre de 7 %).

A 100 m, l'erreur sur la valeur du débit maximum est plus importante (12 %).

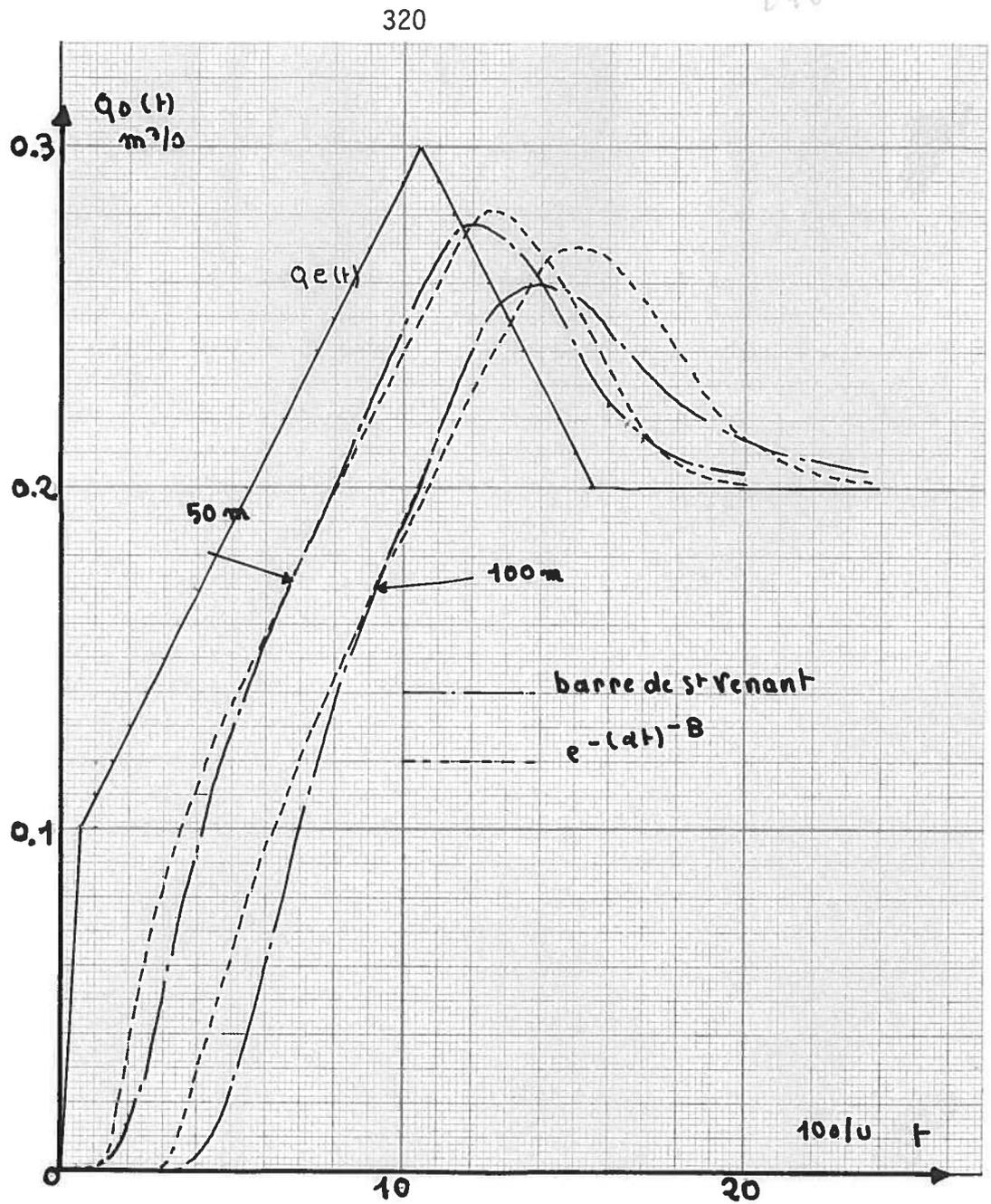


Figure 4

Pour un débit d'entrée moins brusque, les erreurs sur la valeur du débit maximum sont moins importantes :

1,5 % à 50 m

2,5 % à 100 m

Que ce soit à 50 ou 100 m, les 2 expériences donnent un décalage de 10 s sur le temps d'apparition du maximum.

Le modèle construit à l'aide de la fonction $e^{-(\alpha t)^{-\beta}}$ donne de bons résultats pour un parcours de l'ordre de 50 m. Il est intéressant de vérifier si l'emploi successif du modèle, sur la canalisation considérée, permet de reproduire correctement les hydrogrammes à 100, 150, 200, 250 m, etc ... les coefficients α et β étant mesurés 50 m pour $\sigma_0 = 0.3 \text{ m}^2/\text{s}$ ($\alpha = 0.05$; $\beta = 2.70$).



Nous répétons donc l'expérience que nous avons déjà effectuée avec le modèle issu de MUSKINGHUM.

Sur les courbes obtenues nous avons reporté celles calculées par BARRE de ST-VENANT et par le système de MUSKINGHUM intégré :

$$02 : (e^{-(\alpha t)^{-\beta}})' * Q_e(t)$$

$$01 : \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \delta(t) + \frac{1}{K(1-\alpha)} e^{-t/K(1-\alpha)} \right) * Q_e(t)$$

946

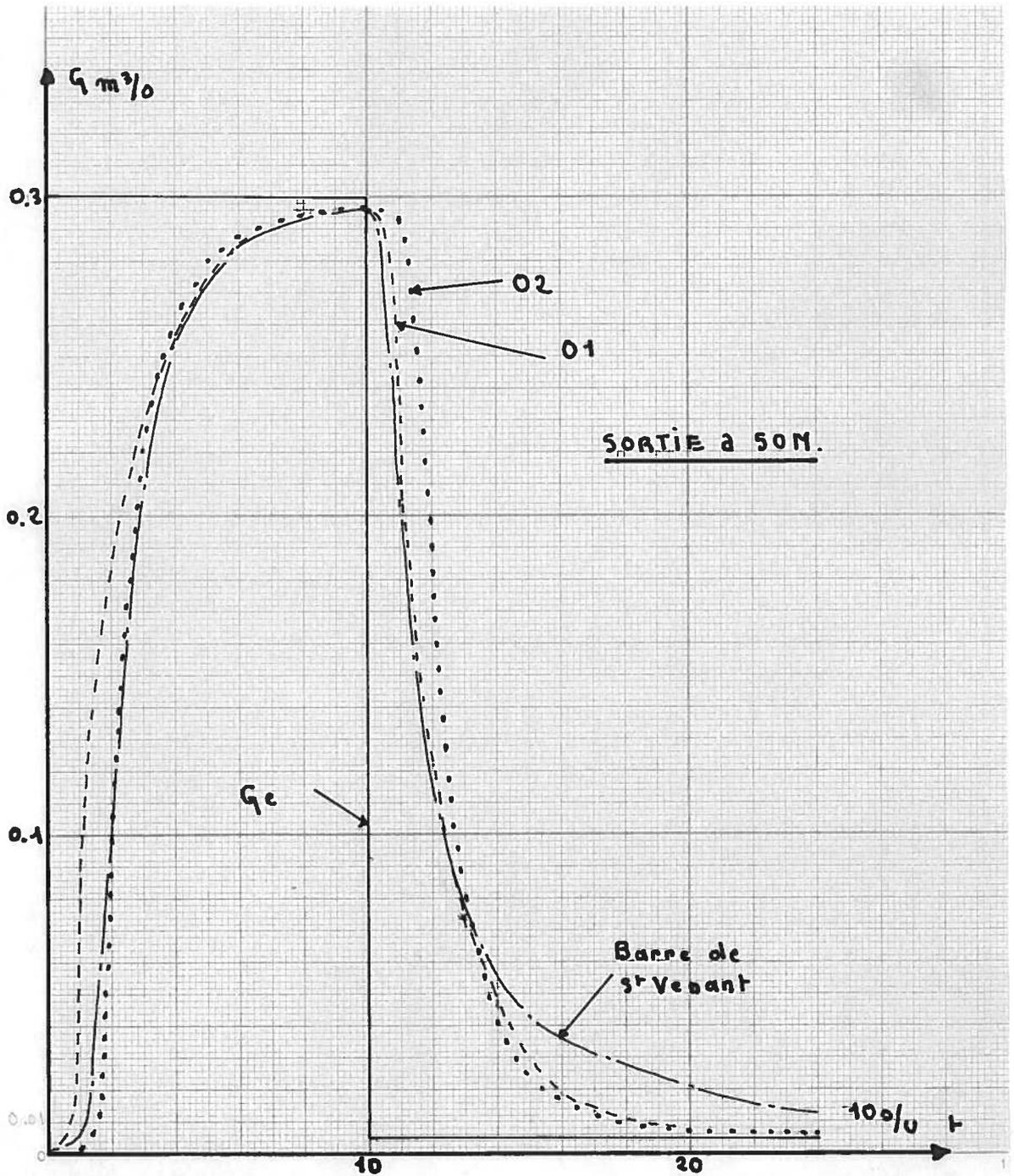


Figure 5

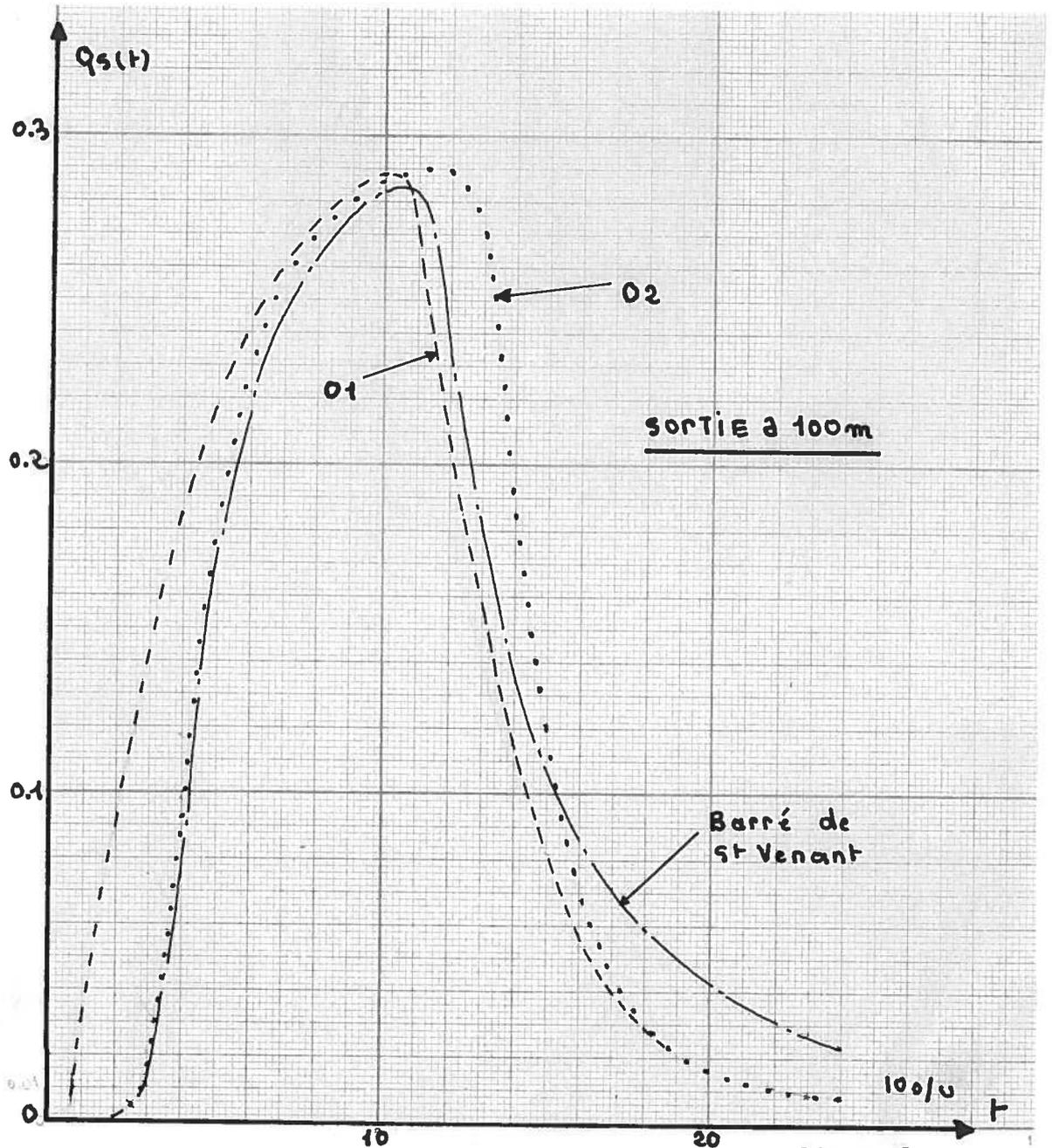


Figure 6

BARRE de ST-VENANT	:	{	$Q_{Max} = 0.266 \text{ m}^3/\text{s}$
		{	$T_{QMax} = 120 \text{ s}$
01		{	$Q_{Max} = 0.269 \text{ m}^3/\text{s}$
		{	$T_{QMax} = 105 \text{ s}$
02		{	$Q_{Max} = 0.285 \text{ m}^3/\text{s}$
		{	$T_{QMax} = 135 \text{ s}$

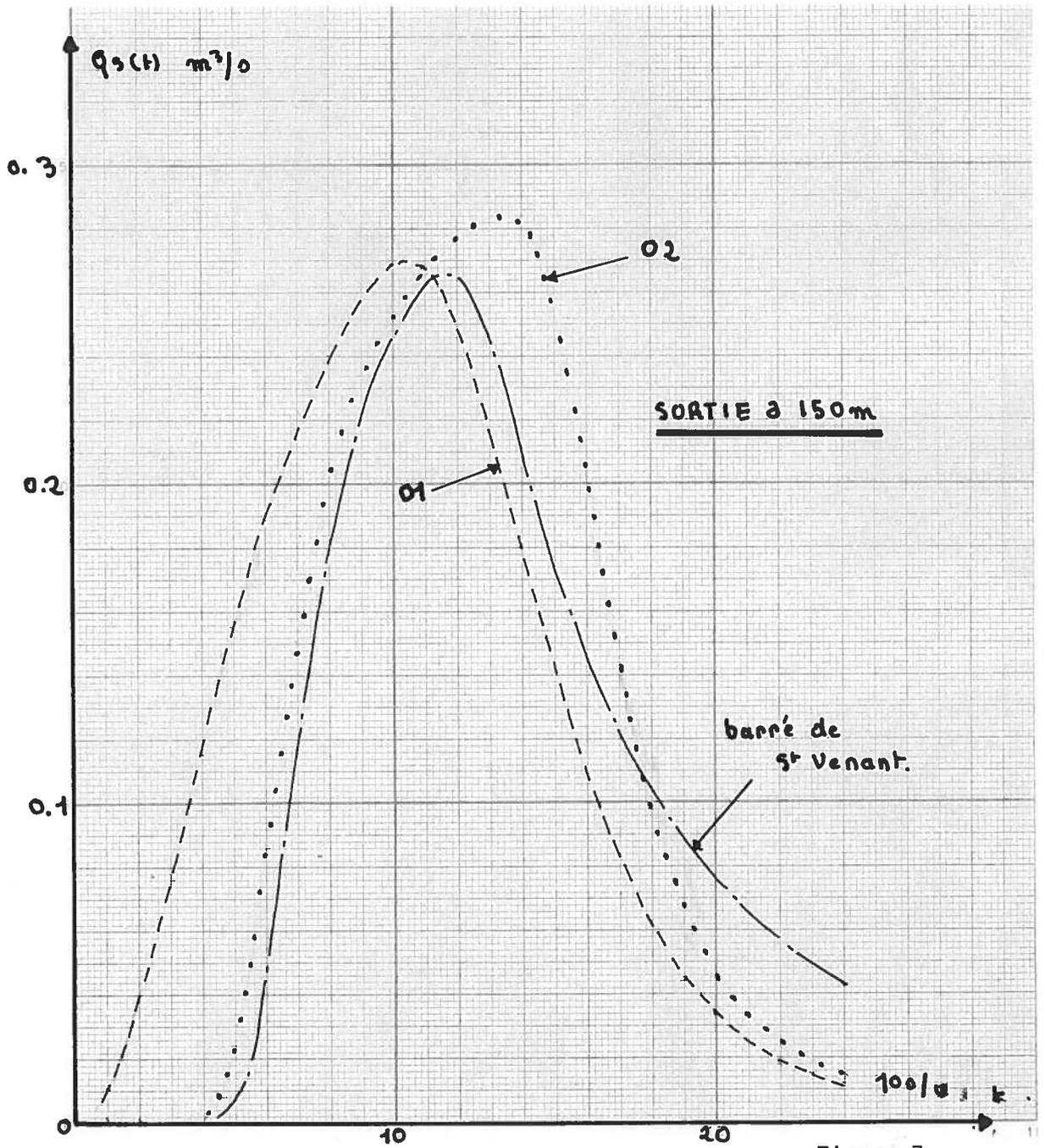


Figure 7

BARRE de ST-VENANT :	$\begin{cases} Q_{\text{Max}} = 0.266 \text{ m}^3/\text{s} \\ T_{Q \text{ Max}} = 120 \text{ s} \end{cases}$
01	$\begin{cases} Q_{\text{Max}} = 0.269 \text{ m}^3/\text{s} \\ T_{Q \text{ Max}} = 105 \text{ s} \end{cases}$
02	$\begin{cases} Q_{\text{Max}} = 0.285 \text{ m}^3/\text{s} \\ T_{Q \text{ Max}} = 135 \text{ s} \end{cases}$

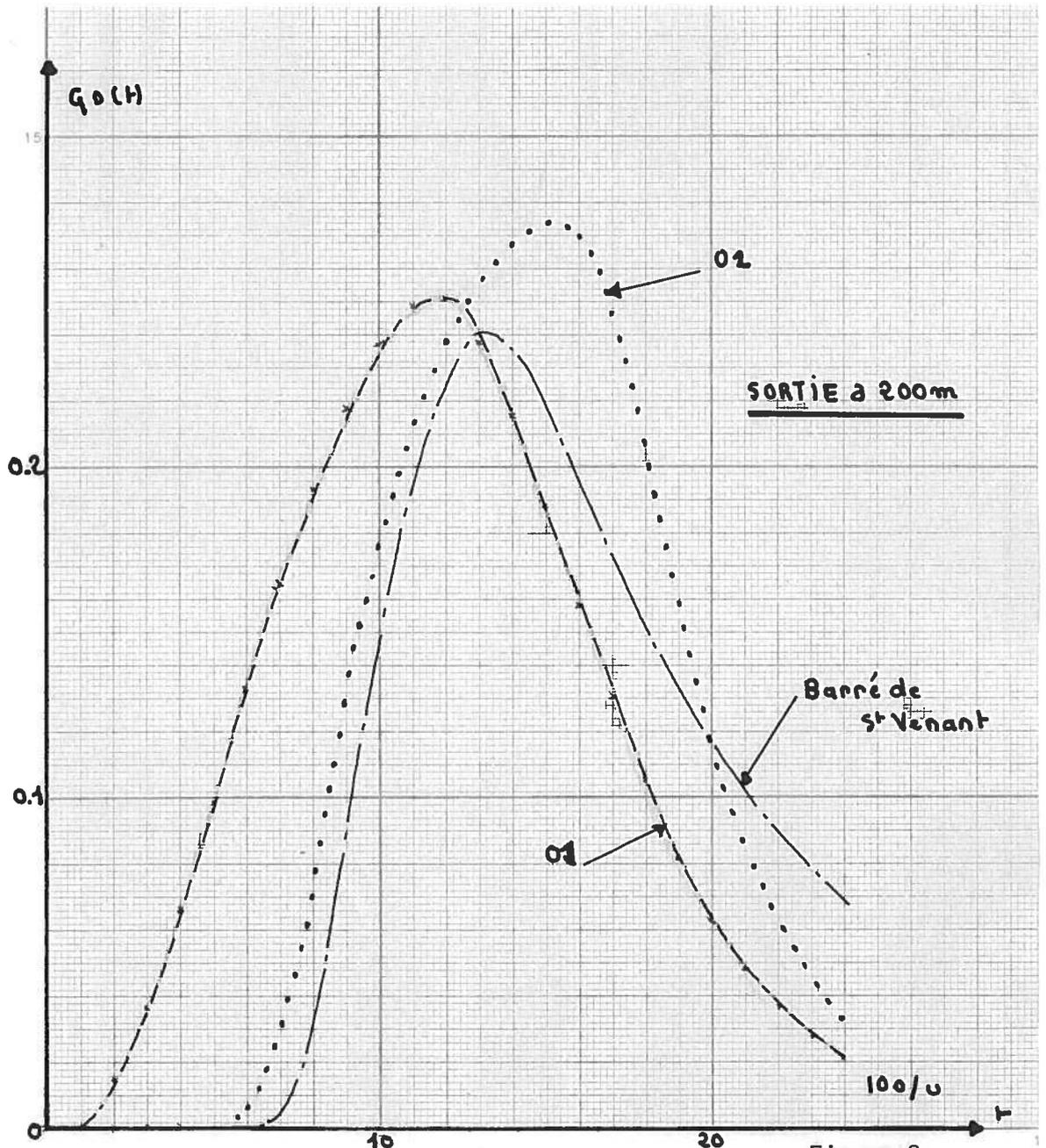


Figure 8

BARRE de ST-VENANT	:	{	$Q_{Max} = 0.240 \text{ m}^3/\text{s}$
		{	$T_{Q_{Max}} = 135 \text{ s}$
01		{	$Q_{Max} = 0.250 \text{ m}^3/\text{s}$
		{	$T_{Q_{Max}} = 120 \text{ s}$
02		{	$Q_{Max} = 0.276 \text{ m}^3/\text{s}$
		{	$T_{Q_{Max}} = 160 \text{ s}$

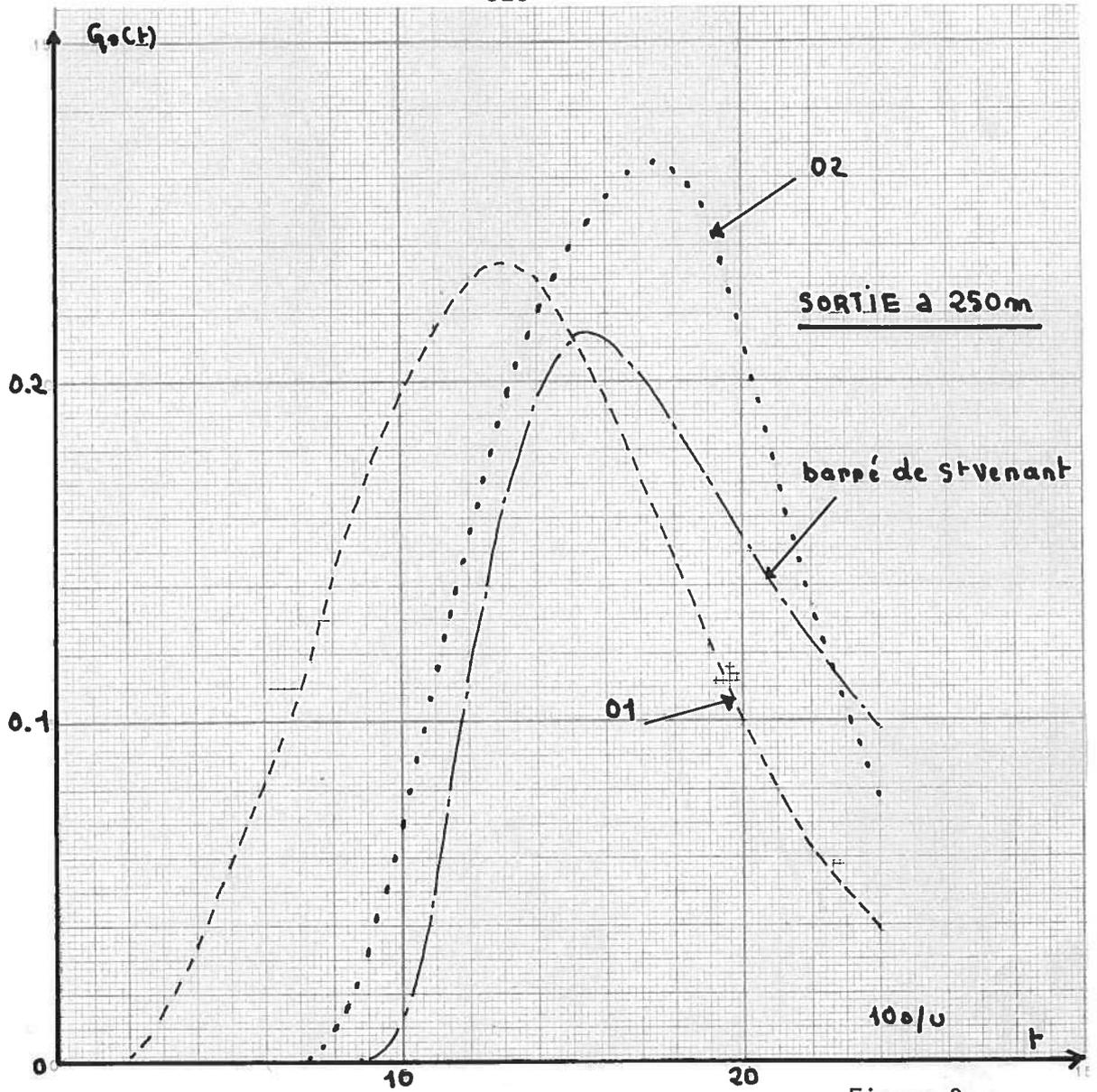


Figure 9

BARRE de ST-VENANT :	$\left\{ \begin{array}{l} Q_{\text{Max}} = 0.214 \text{ m}^3/\text{s} \\ T_{Q\text{Max}} = 160 \text{ s} \end{array} \right.$
01	$\left\{ \begin{array}{l} Q_{\text{Max}} = 0.234 \text{ m}^3/\text{s} \\ T_{Q\text{Max}} = 130 \text{ s} \end{array} \right.$
02	$\left\{ \begin{array}{l} Q_{\text{Max}} = 0.266 \text{ m}^3/\text{s} \\ T_{Q\text{Max}} = 175 \text{ s} \end{array} \right.$

II.3 Conclusion

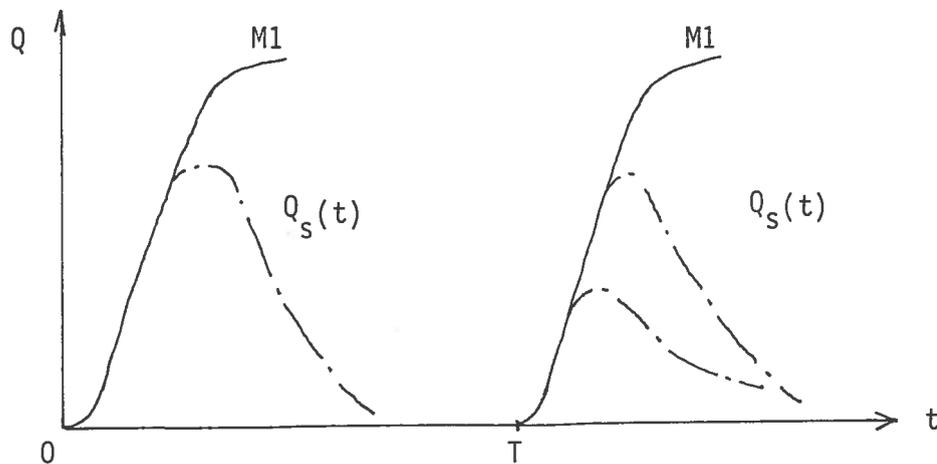
Une utilisation en série des deux modèles holistiques 01 et 02, ne permet pas de reproduire correctement les hydrogrammes de sortie au-delà de 100 m pour le transformateur étudié.

Le modèle 01 majore la valeur du débit maximum (10 % à 250 m), l'hydrogramme ne présentant pas de décalage à l'origine.

Le modèle 02 donne le décalage mais majore encore plus la valeur du débit maximum (de l'ordre de 25 % à 250 m).

Les deux modèles utilisés reproduisent très mal l'allure de l'hydrogramme au-delà de 100 m.

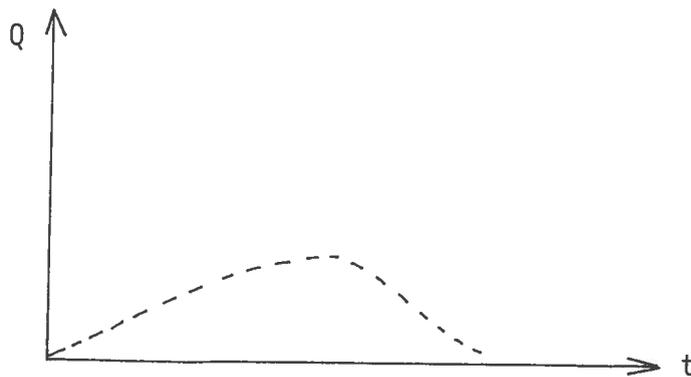
Toutes ces différences sont dues à une amplification successive des erreurs et surtout à la linéarité du modèle, les paramètres ne pouvant guère être mieux approximés. La linéarité suppose, en effet, l'invariance par translation.



On a donc : $O(t) * Q_e(t) = O(t-T) * Q_e(t) = Q_s(t)$

Si M_1 est la montée théorique à T , la sortie $Q_s(t)$ calculée est identique à celle obtenue par une même montée située à l'origine des temps. La valeur du débit maximum est majoré, le modèle étant incapable de représenter l'amortissement du à la distance.

Le modèle 02, qui donne le décalage à l'origine, ne peut donc pas amortir suffisamment la sortie. L'amortissement fourni par le modèle 01 est consécutif au non décalage à l'origine.



Les deux modèles 01 et 02, représentent les capacités extrêmes de la modélisation linéaire.

Un modèle linéaire ne peut donc pas être utilisé pour mesurer la déformation d'un hydrogramme dans une canalisation longue. Une étude plus poussée doit être menée pour déterminer la validité d'un tel modèle, la canalisation ayant des apports intermédiaires.

L'emploi du système de MUSKINGHUM ou de la loi de FRECHET doit être réservé à des bassins versants n'introduisant pas un décalage important à

255

l'origine. Cela est généralement le cas, la montée des eaux étant relativement immédiate, vis-à-vis des temps et des valeurs de débits mis en jeu.



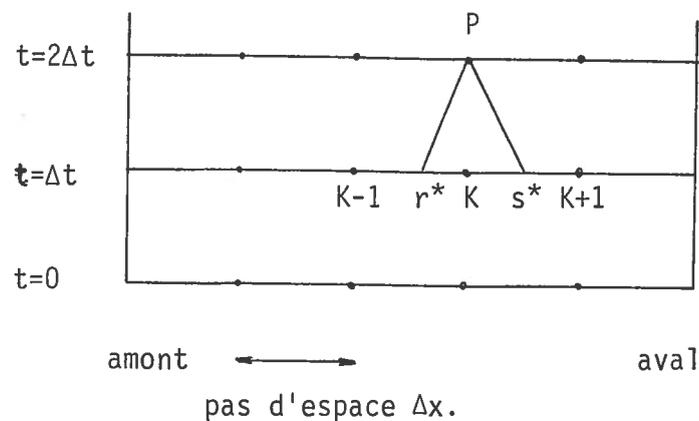
A N N E X E I V

METHODE DES CARACTERISTIQUES

SYSTEME NON LINEAIRE

Nous allons appliquer cette méthode à un élément d'écoulement ou de ruissellement simple possédant une entrée amont et un exutoire aval.

Le schéma de résolution de la méthode des caractéristiques peut être représenté comme suit :



Calcul de V et h en un point courant P

$$\begin{aligned}\delta_r &= x_p - x_r = \frac{\Delta t}{2} (V_p + C_p + V_r + C_r) \\ \delta_s &= x_p - x_s = \frac{\Delta t}{2} (V_p - C_p + V_s - C_s)\end{aligned}\tag{I}$$

V_r, C_r, V_s, C_s sont interpolés linéairement en fonction des valeurs des variables en $K-1, K, K+1$.

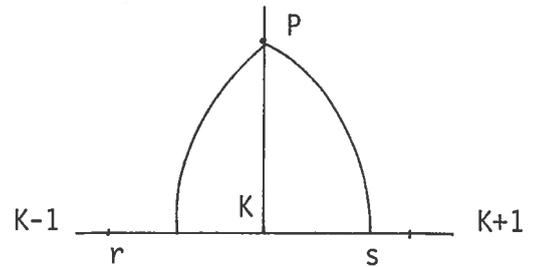
$$V_r = V_K - \frac{(V_K - V_{K-1})}{\Delta X} (x_p - x_r)$$

$$h_r = h_K - \frac{(h_K - h_{K-1})}{\Delta X} (x_p - x_r)$$

si l'écoulement est fluvial $\Rightarrow V - C < 0$.

$$V_s = V_K + \frac{(V_K - V_{K-1})}{\Delta X} (x_p - x_s)$$

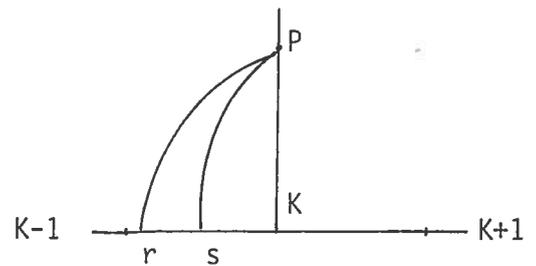
$$H_s = H_K + \frac{(H_K - H_{K+1})}{\Delta X} (x_p - x_s)$$



Si l'écoulement est torrentiel $\Rightarrow V - C > 0$

$$V_s = V_K - \frac{(V_K - V_{K-1})}{\Delta X} (x_p - x_s)$$

$$H_s = H_K - \frac{(H_K - H_{K+1})}{\Delta X} (x_p - x_s)$$



En remplaçant V_r , H_r , V_s , H_s , par leurs expressions dans le système (I) on obtient les deux équations :

$$\delta_r = f(V_p, C_p)$$

$$\delta_s = g(V_p, C_p)$$

De même, en remplaçant V_r , H_r , V_s , H_s par leurs expressions dans les deux équations d'états vérifiées sur les caractéristiques, on obtient :

$$\begin{array}{l} F(V_p, C_p, \delta_r) = 0 \\ Q(V_p, C_p, \delta_s) = 0 \end{array}$$

C'est un système non linéaire de 4 équations à 4 inconnues qu'il faut résoudre pour tous les points courants et à chaque pas de temps.

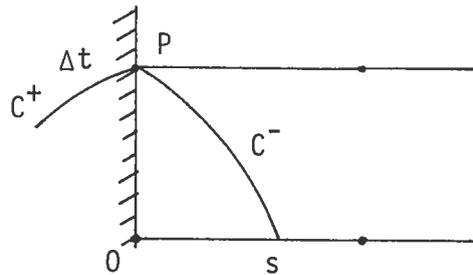
Calcul de V et h point amont

Si l'écoulement est fluvial ($V - C < 0$), la caractéristique C^- apporte une "information" de l'intérieur et la caractéristique C^+ une "information" de l'extérieur.

Nous avons toujours :

$$\delta_s = g(V_p, C_p)$$

$$Q(V_p, C_p, \delta_s) = 0$$



C^+ "apporte" la relation $Q = V_p S_p$ (S : section d'eau), soit :

$Q = V_p L H_p$, Q étant connu (débit d'entrée). Cette relation permet d'éliminer l'une des variables V_p ou C_p . On obtient donc le système suivant :

$$\begin{array}{l} \delta_s = g(V_p) \\ Q(V_p, \delta_s) = 0 \end{array}$$

Si l'écoulement est torrentiel la caractéristique C^- a une pente positive. On doit donc se fixer V_p ou h_p sachant que $Q = V_p L h_p$.

Si l'écoulement est critique nous obtenons le système suivante =

$$\begin{aligned} Q &= V_p L H_p \\ V_p &= (g H_p)^{1/2} \end{aligned}$$

Calcul de V et h point aval exutoire

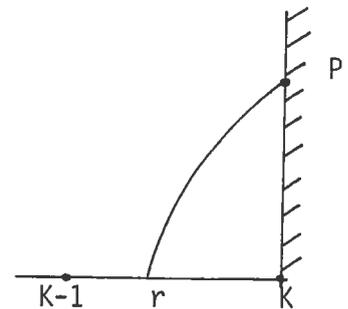
Cas de l'écoulement critique

La pente de C^- est égale à zéro.

Nous avons toujours :

$$\delta_r = f(V_p, C_p)$$

$$F(V_p, C_p, \delta_r) = 0$$



Comme $V_p = C_p$ nous obtenons le système simple :

$$\begin{aligned} \delta_r &= f(V_p) \\ F(V_p, \delta_r) &= 0 \end{aligned}$$

336

A N N E X E 5

METHODE DES CARACTERISTIQUES

METHODE D'EULER

Nous appliquons la méthode des caractéristiques à un élément d'écoulement ou de ruissellement possédant une entrée amont (hydrogramme ou hyétogramme) et un exutoire aval, sans apport et perte latérale.



Le débit propagé est calculé tous les Δx et au temps successifs Δt , $2 \Delta t$, $3 \Delta t$, $n \Delta t$.

Comme nous voulons appliquer cette méthode à des sections de formes quelconques, nous conservons le terme $C (\sqrt{g_f/f'})$ dans les équations d'états vérifiées sur les caractéristiques.

Soit un point courant p au temps $t + \Delta t$, les variables V et h étant connues au temps t pour tous les points de calcul de l'élément.

La pente des caractéristiques étant calculée en r , le modèle a la forme suivante :

$$\begin{cases} x_p - x_r = (V_r + C_r) \Delta t \\ V_p - V_r + \frac{g}{C_{pr}} (h_p - h_r) + g(J-i) \Delta t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_p - x_s = (V_s - C_s) \Delta t \\ V_p - V_s - \frac{g}{C_{ps}} (h_p - h_s) + g(J-i) \Delta t = 0 \end{cases}$$

C_{pr} et C_{ps} n'étant calculables qu'en P, r, et s nous avons choisi de calculer C en r et s.

I - CALCUL de V et h en un point courant

I.1 Calcul de V_p et h_p

Nous supposons connues les valeurs de x_r, V_r, x_s, V_s . V_p et h_p sont solutions du système formé par les deux équations d'état.

$$V_p - V_r + \frac{g}{C_r} (h_p - h_r) + \Delta t g(J-i) = 0$$

$$V_p - V_s - \frac{g}{C_s} (h_p - h_s) + \Delta t g(J-i) = 0$$

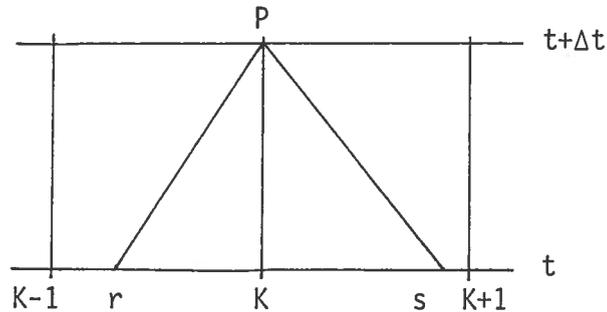
En posant : $U_r = g h_r + C_r V_r - C_r g(J-i) \Delta t$

et $U_s = g h_s - C_s V_s + C_s g(J-i) \Delta t$

V_p et h_p sont donnés par les relations :

$$h_p = \frac{U_r C_s + U_s C_r}{g(C_r + C_s)}$$
$$V_p = \frac{U_r - U_s}{C_r + C_s}$$

Pour une section prismatique, et si la perte de charge est effectivement constante le long des courbes caractéristiques, ces relations sont théoriquement justes vis-à-vis du système de BARRE de ST-VENANT. Les seules erreurs possibles viennent du calcul des pentes des caractéristiques.

I.2 Calcul de V_r et h_r 

x_r étant l'abscisse de r , V_r et h_r sont interpolés linéairement en utilisant les points $K-1$ et K ;

Avec l'équation de la caractéristique en r , on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} V_r = V_K - \frac{(V_K - V_{K-1})}{\Delta X} (x_K - x_r) \\ h_r = h_K - \frac{(h_K - h_{K-1})}{\Delta X} (x_K - x_r) \\ x_r = x_K - (V_r + C_r) \Delta t \end{cases}$$

soit $\delta_r = x_K - x_r$

δ_r est alors solution de l'équation :

$$(2) \quad \delta_r^2 \alpha_1 + \delta_r \left[g \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \Delta h - 2 \alpha_1 \alpha_2 \right] + \alpha_2^2 - g \Delta t^2 h_K = 0$$

$$\text{avec } \alpha_1 = 1 + \frac{\Delta V \Delta T}{X} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \Delta T V_K$$

Si $V_K^2 < g h_K$ (écoulement fluvial) cette équation possède une seule racine positive. δr_1 . Elle fournit les valeurs V_r et h_r .

Pour une section non rectangulaire, C représente $\sqrt{g f/f'}$, soit \sqrt{gy} la célérité des ondes de propagation. Il suffit alors de remplacer le terme h par le terme y .

I.3 Calcul de V_s h_s

Écoulement torrentiel

V_s étant supérieur à C_s , la pente de la caractéristique en s est positive. En interpolant linéairement V_s et C_s on obtient l'équation (2) précédente :

$$\delta_s^2 \alpha_1^2 + \delta_s \left[g \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \Delta h - 2 \alpha_1 \alpha_2 \right] + \alpha_2^2 - g \Delta t^2 h_K = 0$$

Elle possède 2 racines positives qui sont δ_r et δ_s .

Écoulement fluvial

Avec les mêmes principes, δ_s est solution d'une équation du deuxième degré.

$$\delta_s^2 \alpha_1^2 + \delta_s \left[g \Delta t^2 \frac{\Delta Y}{\Delta X} + 2 \alpha_1 \alpha_2 \right] + \alpha_2^2 - \Delta t^2 g h_K = 0$$

avec $\alpha_1 = 1 - \Delta t \frac{\Delta V}{\Delta X}$, $\alpha_2 = \Delta t V_K$ et $\Delta V = V_K - V_{K+1}$

$$\Delta h = H_K - H_{K+1}$$

Cette équation possède une seule racine positive δ_s .

Ecoulement critique en K

$$\delta^2 \alpha_1^2 + \delta \left(g \Delta t^2 \frac{\Delta Y}{\Delta X} - 2 \alpha_1 \alpha_2 \right) = 0$$

qui possède une racine nulle δ_s et une racine positive δ_r .

II - CALCUL DE LA CONDITION AMONT

On doit distinguer deux cas :

- écoulement amont critique ou torrentiel

h_p et V_p sont alors des données liées par les relations :

$$Q_p = V_p A_p$$

$$V_p = \sqrt{g h_p} \quad \text{dans le cas de l'écoulement critique.}$$

- écoulement fluvial amont

L'équation d'état sur C^- s'écrit en utilisant le terme U_s (voir calcul h_p et V_p)

$$V_p C_s - g h_p + U_s = 0$$

En lui ajoutant $Q_p = V_p A_p$, V_p et h_p sont calculés en résolvant l'équation

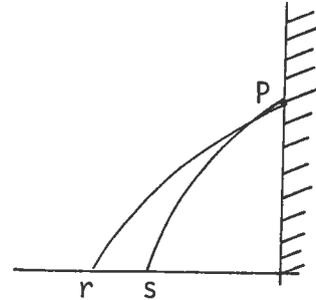
$$\frac{Q_p}{A_p} C_s - g h_p + U_s = 0.$$

III - CALCUL DE LA CONDITION AVAL

On doit distinguer trois cas :

- écoulement torrentiel

V_p et h_p sont déterminés en utilisant les équations d'état vérifiées sur les deux caractéristiques.

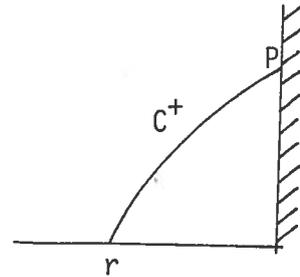


- écoulement critique (cas d'une chute)

On a donc $V_p = \sqrt{g h_p}$

V_p et h_p étant liés par l'équation d'état vérifiée sur la caractéristique en r soit :

$$V_p = \frac{U_r - g h_p}{C_r}$$



- écoulement fluvial

On utilise l'équation d'état précédente avec la relation $Q_p = V_p A_p$. Ce système conduit à résoudre l'équation :

$$\frac{Q_p}{A_p} \cdot C_r + g h_p - U_r = 0$$

Nous avons donné les relations permettant de mesurer la variation de débit pour l'élément considéré. Elles sont toutes basées sur l'approximation linéaire des caractéristiques, la pente étant calculée en r et s .

Des relations du même type peuvent être envisagées si nous voulons utiliser cette méthode pour des structures plus complexes (branchements de canalisation, débouché aval dans un bassin de rétention, etc ...).

A N N E X E 6

INTEGRATION NUMERIQUE DU
MODELE HOLISTIQUE NON LINEAIRE

- I - LIAISON AVEC LE SYSTEME DE MUSKINGHUM
- II - INTEGRATION NUMERIQUE
- III - EXEMPLE D'APPLICATION A UNE CANALISATION

I - LIAISON AVEC LE SYSTEME DE MUSKINGHUM

Avec les hypothèses choisies, le système de BARRE de ST-VENANT se simplifie pour donner le modèle suivant : $\gamma \neq 1$

$$Q_s(t) = \frac{V_e(t)}{\Delta X} \cdot \frac{1}{1-\gamma} \int_0^t Q_e(\tau) \cdot e^{-\frac{1}{\Delta X(1-\gamma)} \int_{\tau}^t V_e(\tau') d\tau'} \cdot d\tau$$

$$- \frac{\gamma}{1-\gamma} V_e(\tau) \int_0^t \frac{dS_e(\tau)}{d\tau} \cdot e^{-\frac{1}{\Delta X} \cdot \frac{1}{1-\gamma} \int_0^t V_e(\tau') d\tau'} \cdot d\tau$$

En intégrant par partie le deuxième terme de cette relation avec $S_e(0) = 0$, on obtient :

(I) $Q_s(t) = \frac{\gamma}{1-\gamma} Q_e(t) + \frac{V_e(t)}{\Delta X(1-\gamma)^2} \int_0^t Q_e(\tau) \cdot e^{-\frac{1}{\Delta X(1-\gamma)} \int_0^t V_e(\tau') d\tau'} \cdot d\tau$

Si les vitesses entrée et sortie sont égales et constantes \forall le temps, on retrouve par simplification le modèle intégral du système de MUSKINGHUM.

En fait, la relation (I) est le résultat de l'intégration directe du système de MUSKINGHUM en prenant :

$$K = \frac{X}{V_e(t)}$$

$$(III) \begin{cases} \frac{d V_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t) \\ V_s(t) = \frac{\Delta X}{V_e(t)} (\gamma Q_e(t) + (1-\gamma) Q_s(t)) \end{cases}$$

$V_s(t)$: volume stocké

γ : constante

ΔX : longueur de l'élément

En dérivant la seconde équation de (III), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$-\frac{\Delta X}{V_e(t)^2} \frac{d V_e(t)}{dt} (\gamma Q_e(t) + (1-\gamma) Q_s(t)) + \frac{\Delta X}{V_e(t)} \cdot \gamma \cdot \frac{d Q_e(t)}{dt} + \frac{\Delta X}{V_e(t)} (1-\gamma) \frac{d Q_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t)$$

$Q_s(t)$ étant la fonction inconnue, l'intégration de cette équation sans second membre donne :

$$Q_s(t) = \beta V_e(t) e^{-\int_0^t \frac{V_e(\tau)}{\Delta X(1-\gamma)} d\tau}$$

En faisant varier la constante β , on obtient finalement l'équation (I).

Nous pouvons donc affirmer qu'il y a équivalence entre le système de MUSKINGHUM généralisé et le système de BARRE de ST-VENANT auquel nous avons joint les trois hypothèses fondamentales définies dans de l'étude 3.

$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial V}{\partial t} + v \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(i-J) +$	<p>Hypothèse 1</p> <p>Hypothèse 2</p> $(\gamma(x,t) = \gamma \quad \forall x \in K) \quad \equiv$ <p>Hypothèse 3</p> $V_e(t) = V_s(t) \quad \forall t$	$\frac{d V_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t)$ $V_s(t) = \frac{\Delta X}{V_e(t)} (\gamma Q_e(t) + (1-\gamma) Q_e(t))$
--	--	--

II - INTEGRATION NUMERIQUE DU MODELE HOLISTIQUE NON LINEAIRE

L'entrée $Q_e(t)$ est donnée par une fonction en escalier tel que

$$Q_e = Q_e(t) \quad \text{pour} \quad t \in]t-\Delta t, t] \quad \text{avec}$$

$$V_e = V_e(t) \quad \text{pour} \quad t \in]t-\Delta t, t] \quad \Delta t \quad \text{étant le pas de temps constant.}$$

$$Q_s(t+\Delta t) = \frac{\gamma}{\gamma-1} Q_e(t+\Delta t) + \frac{V_e(t+\Delta t)}{\Delta X(1-\gamma)^2} \int_0^{t+\Delta t} Q_e(\tau) \cdot e^{-\frac{1}{\Delta X(1-\gamma)} \int_{\tau}^{t+\Delta t} V_e(\tau') d\tau'} d\tau.$$

En décomposant cette équation et en utilisant la relation qui donne $Q_s(t)$, on obtient le schéma suivant :

$$\begin{aligned}
 Q_s(t + \Delta t) = & Q_e(t + \Delta t) \cdot \left(1 - \frac{e^{-\frac{V_e(t + \Delta t)}{\Delta X(1-\gamma)} \Delta t}}{1 - \gamma} \right) \\
 & + Q_e(t) \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{V_e(t + \Delta t)}{V_e(t)} e^{-\frac{V_e(t + \Delta t)}{\Delta X(1-\gamma)} \Delta t} \\
 & + Q_s(t) \frac{V_e(t + \Delta t)}{V_e(t)} e^{-\frac{V_e(t + \Delta t)}{\Delta X(1-\gamma)} \Delta t}
 \end{aligned}$$

En faisant $V_e(t) = \text{constante}$, on retrouve le schéma que nous avons déjà donné pour l'intégrale numérique du système de MUSKINGUM.

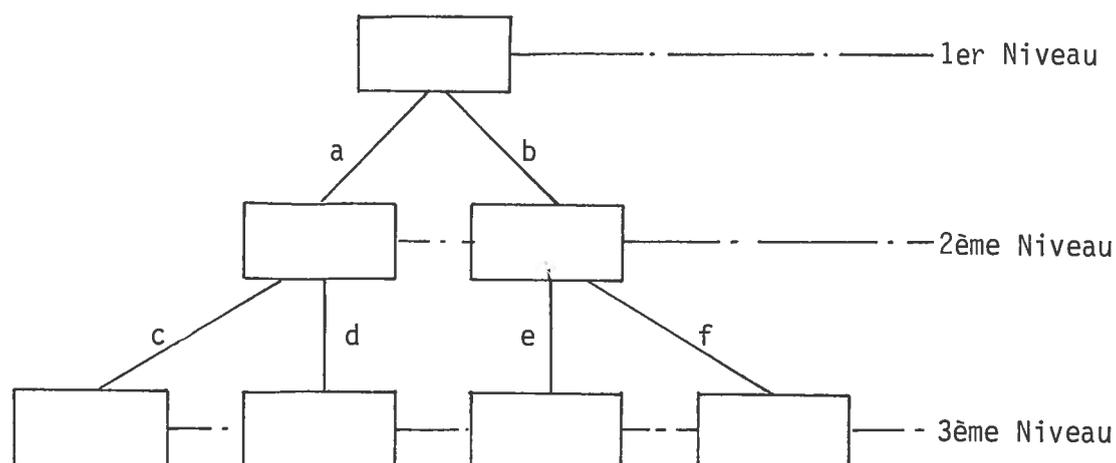
Avec $\gamma = 0$ et $V_e(t) = \text{constante}$ on obtient aussi par simplification la relation proposée par DESBORDES pour modéliser le fonctionnement des petits bassins versants.

Le modèle holistique non linéaire que nous avons construit à partir du système de BARRE de ST-VENANT généralise tous les modèles qui sont issus du système de MUSKINGUM. Ce modèle est l'image d'un réservoir non linéaire qui par simplification ($V_e(t) = V_s(t) = \text{constante}$) donne l'image d'un réservoir linéaire ou filtre, couramment utilisé.

Notons enfin que le modèle utilisé par B. CHOCAT dans son programme de simulation S.E.R.A.I.L. se déduit du système III en prenant $\gamma = 1$ [8].

III - EXEMPLE D'APPLICATION A UNE CANALISATION

La structure des hypothèses qui donnent les modèles holistiques a trois niveaux distincts. (Voir de l'étude 3 schéma I).

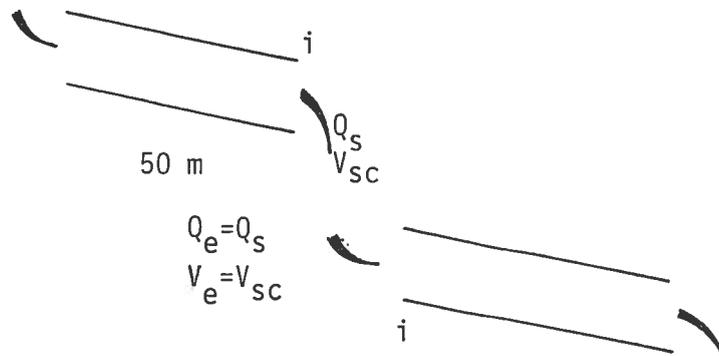


La première hypothèse (niveau 1) est commune à tous les modèles. Ensuite nous pouvons nous demander quelle est la branche du graphe des hypothèses qui présente le moins de contraintes vis-à-vis du phénomène, c'est-à-dire s'il est possible d'établir une hiérarchie de valeurs dans les hypothèses. A priori, l'ensemble (b, e) semble être le moins contraignant puisqu'il conduit au modèle le plus complet. En fait, comme nous allons le voir sur une canalisation, ce critère d'appréciation n'est pas forcément juste. Les modèles holistiques présentent un écart tel avec le modèle microscopique qu'ils peuvent être, en fait, uniquement valorisés par leurs pouvoirs à restituer telle ou telle qualité particulière comme la valeur du débit maximum, le temps de réponse, etc ...

Les hypothèses, qui sont en contradiction avec le phénomène réel, conduisent

à des modèles qui ont leurs propriétés propres, indépendantes des hypothèses et simplement valorisées par ce que l'utilisateur demande.

Le système que nous avons utilisé pour effectuer ces essais est une canalisation carrée dont le côté mesure 0.6 m, sa pente étant égale à 5‰. Tous les 50 m, cette canalisation présente une chute, la vitesse de sortie à ces points étant alors égale à la vitesse critique. Nous avons supposé en outre, que toutes les vitesses d'entrée étaient aussi critiques, le débit se transmettant directement et avec la même vitesse du point de chute i à l'entrée i correspondante.



Nous avons choisi ce type de système pour pouvoir appliquer successivement le modèle non linéaire, Δx étant égal à 50 m, soit à la longueur d'un élément séparé par deux chutes. Chaque vitesse d'entrée $V_e(t)$ utilisée par le modèle holistique est recalculée en fonction du débit de sortie fourni par ce modèle.

La valeur du coefficient α est prise égale à 0.148, obtenue par approximation de la courbe $-\ln(\sigma_0 - Q_s(t)) = f(t)$. C'est un choix arbitraire car cette valeur dépend du nombre de points choisis pour l'approximation (Voir figure 1).

L'entrée est du type fonction porte. Elle présente donc une "discontinuité" au niveau de la vitesse. Comme celle-ci intervient directement dans le calcul de la sortie $Q_s(t)$, au bout de 50 m, la discontinuité de la courbe est très marquée alors qu'elle n'apparaît pas lorsque l'on utilise un modèle linéaire (Voir figure 2).



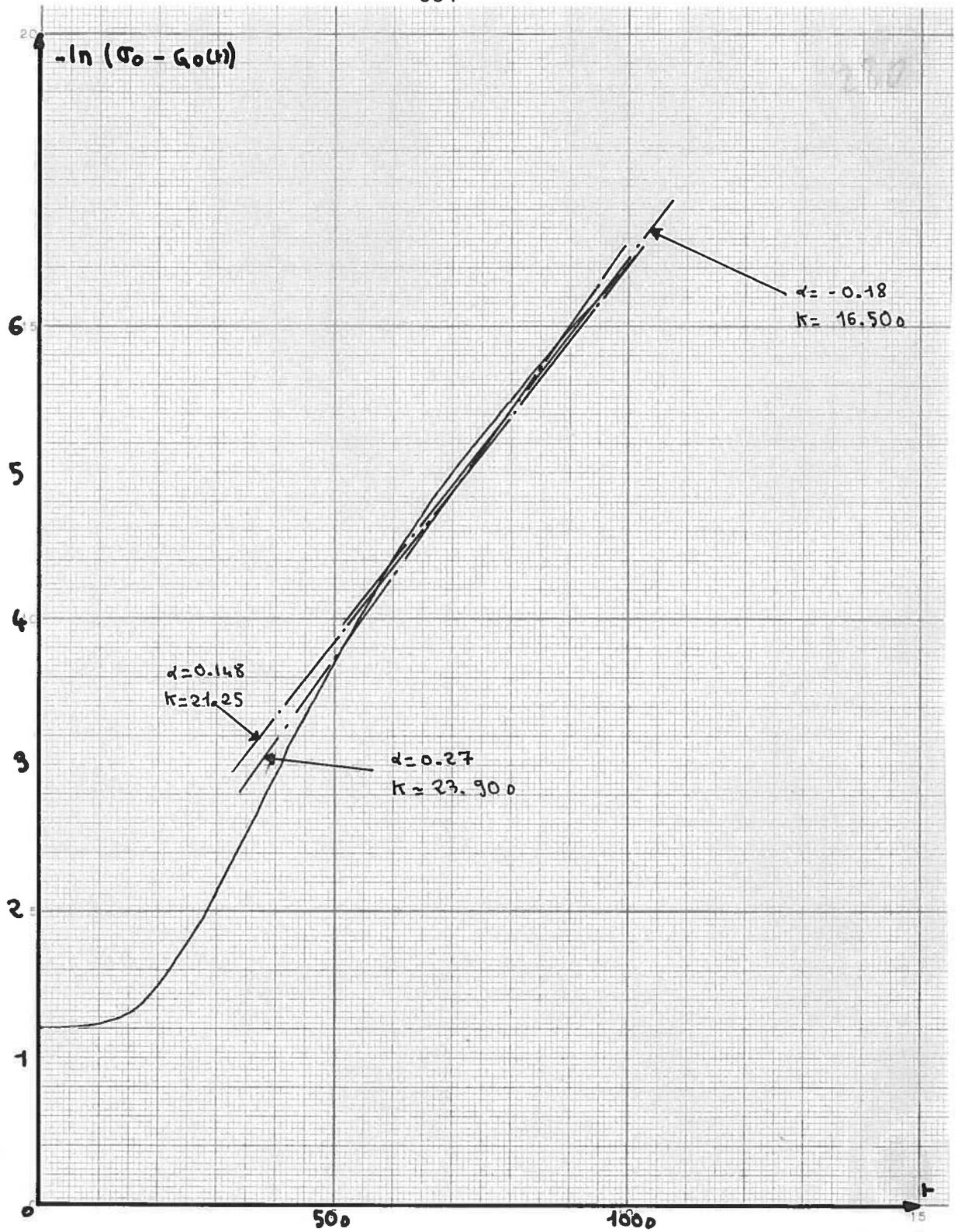


Figure 1 - Approximation de α
 Approximation de K (utilisation des modèles
 linéaires).

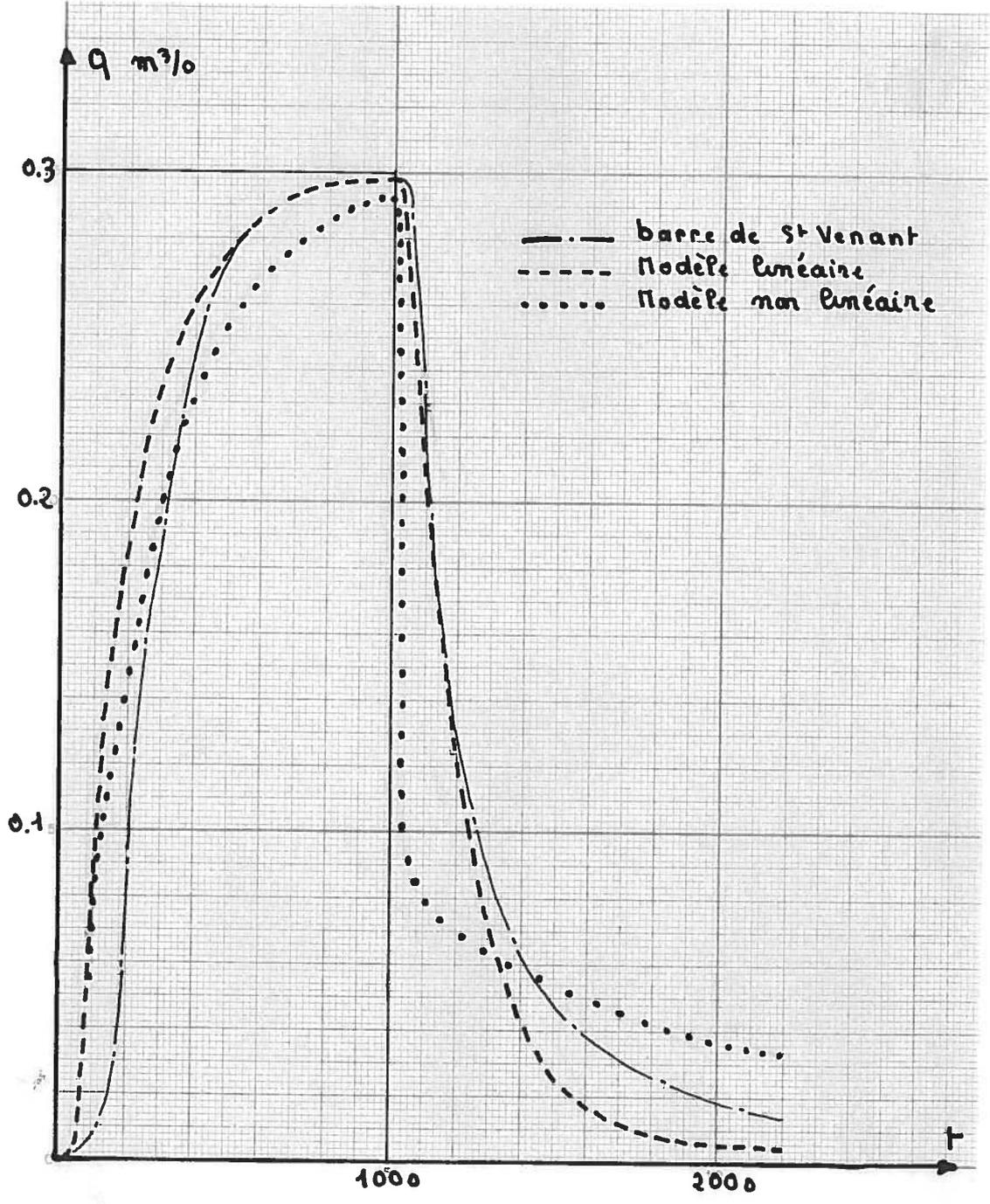


Figure 2

L'exploitation directe du modèle lorsque l'entrée est discontinue est à déconseiller car cette discontinuité apparaît dans le terme exponentielle.

Lorsque l'entrée est continue, la forme de la sortie est beaucoup plus correcte. Malheureusement, le modèle non linéaire atténue beaucoup trop la valeur du débit maximum, le temps de réponse étant mieux approximé que par le modèle linéaire (Voir figures 3 et 4).

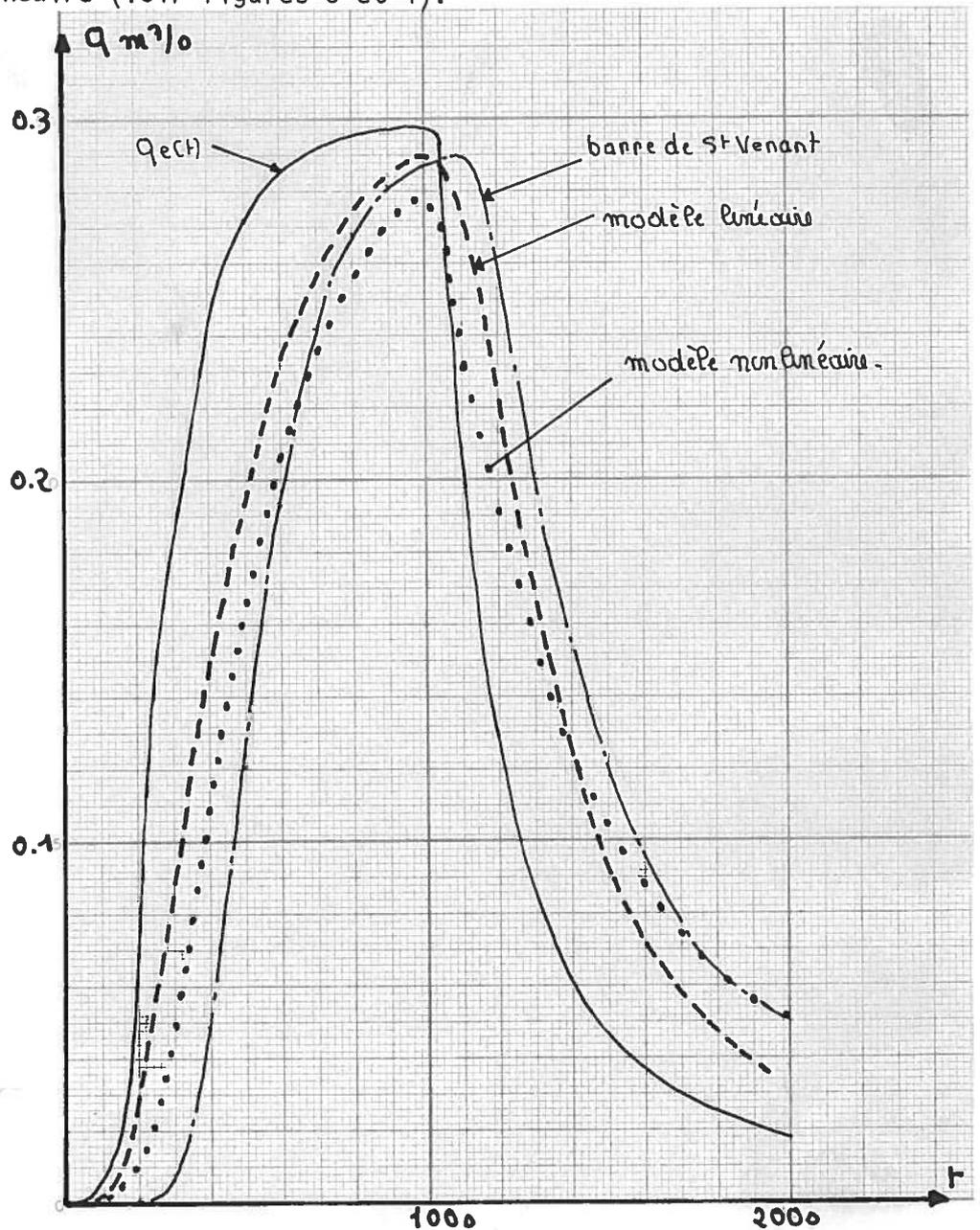


Figure 3 - Sortie au bout de 50 m

283

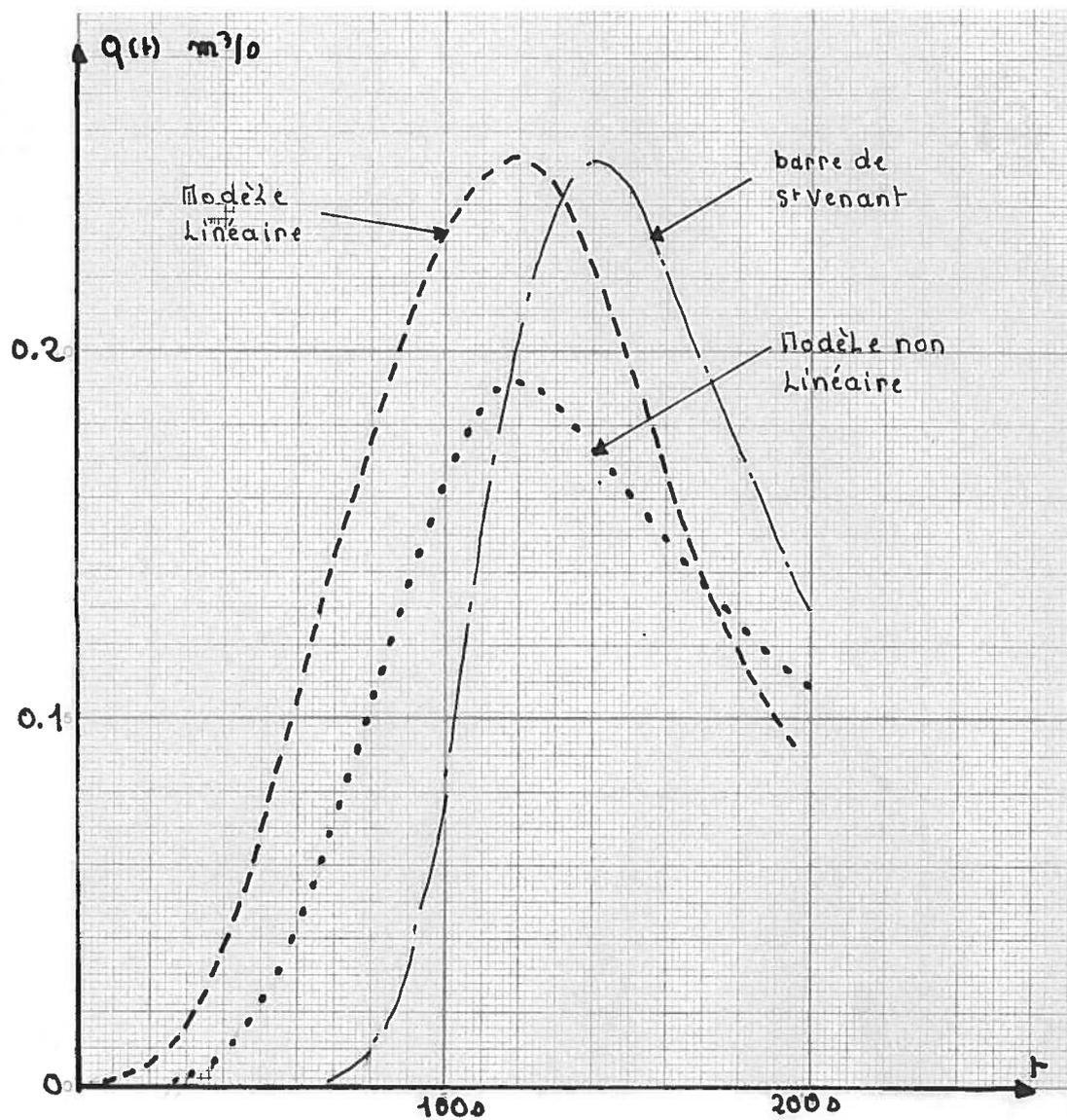


Figure 4 - Sortie au bout de 150 m.

L'atténuation trop importante du débit maximum vient du terme

$$- \frac{V_e(t)}{\Delta X(1-\gamma)} \Delta t.$$

e Il est minoré lorsque $V_e(t)$ est grand, alors qu'une vitesse moyenne (modèle linéaire) ne le pondère pas trop, localement.

ВІВГІОСВАНІЕ

357
1315

BIBLIOGRAPHIE

- | | | |
|------|--|--|
| [1] | La Méthode I | Edgar MORIN |
| [2] | Théorie générale des systèmes | Ludwig van Bertalanffy (Dunod) |
| [3] | IMPA sciences n° 1 | |
| [4] | Théorie et méthode | Edgar MORIN (Artpress n° 20) |
| [5] | Les Météores | Michel TOURNIER (Gallémard) |
| [6] | Modèles mathématiques de la morphogénèse | René THOM (10118) |
| [7] | Philosophie première (Cours de philosophie positiviste)
Leçons 1 à 45 | Auguste COMTE |
| [8] | Un modèle de simulation des écoulements dans les réseaux d'assainissement pluvial | Bernard CHOCAT
Thèse de Docteur Ingénieur G.C.U.
INSA de LYON. |
| [9] | Systèmes et modèles | Bernard WALLISER |
| [10] | Résolution d'un système d'équations régissant les écoulements d'un fluide | P.F.E. INSA de LYON, Département GCU
AUBAY-MINICHINO |
| [11] | A Method of Computing urban runoff | American society of Civil Engineers
W.I. HICKS, ESQ
Papper n° 2230, p. 1217-1263 |
| [12] | Modèle mathématique de simulation des écoulements dans un réseau d'assainissement | ROUSSET-Lorgere
La houille blanche, n° 415, 1974,
p. 363-368. |
| [13] | Etude générale du ruissellement urbain. Modèle de MUSKINGHUM | J.A. CUNGE
O.CAYLA |
| [14] | Réflexions sur les méthodes de calcul des réseaux urbains d'assainissement pluvial | Thèse de M. DESBORDES
Ingénieur ENSEEHT |

- [15] L'hydrologie de l'ingénieur G. REMENIERAS (Eyrolles)
- [16] Hydraulique M. POMMIER, INSA Lyon, Département G.C.U.
- [17] Modélisation et maîtrise des systèmes Actes du Congrès de l'A.F.C.E.T. 21-24 Nov. 1977, tome I.
- [18] Comparaison of Four numerical methods for flood routing Roland PRICE
Journal of hydraulics division July 1974, p. 879-897.
- [19] Finite element solution of ST-VENANT equations Richard COOLEY Syed A Faq Moïin
J. of H.D. June 1976, p. 759-775.
- [20] Urban Storm Runoff model Rovey - ASCE - Wooliser
J. of H.D. Nov. 1977, p. 1339-1351.
- [21] L'hydrologie et l'ingénieur Exposé de M. DUJARDIN
20-24 sept. 1976.
- [22] Au sujet d'une méthode de calcul de propagation de crues (MUSKINGHUM) J.A. CUNGE
Journal of Hydraulic Research, Vol. 7, 1969, n° 2, p. 205-230.
- [23] Viscoélasticité J.M. SERVAS. Christian HUET, Jean MANDE.
C.R. Acad. Sc. Paris, T. 277 (19 Nov. 1973), Série A 1003-1005.
- [24] Systèmes héréditaires M. Christian HUET
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 276. (28 Mai 1973) Série A, 1469-1471
- [25] Extension du modèle de CAQUOT aux bassins versants hétérogènes. DESBORDES
T.S.M. L'eau, Mai 1976, p. 223-228
71ème année, n° 5.
- [26] Sur une nouvelle méthode de calcul des débits d'orage et des hydrogrammes de ruissellement dans les bassins de drainage urbain. C. MITCI
T.S.M. L'eau, février 1974
69ème année, n° 2,
p. 59-74.

- [27] Conceptual Hydrologic Models for urbanizing Basins
Ramachandra - Rao - ASCE - DELLEUR
July 1972, J. of H.D.
p. 1205-1219
- [28] Laboratory experimento with surface runoff
Ivan MUZIK
J. of H.D., April 1974. p. 501-514
- [29] Le macroscope
(Vers une vision globale)
J. de ROSNAY
(Seuil)
- [30] Computational Hydraulics a short pathologie
M.B. ABBOT, 1976
J. of H.D., p. 271-284
- [31] R.I.O.
Réseau d'implantation optimal
Plan-Construction - Ministère de l'équipement, G.C.E., oct. 1974
- [32] Etude d'un modèle hydrologique urbain
B. REYNIER, J.L. MARRAS
P.F.E., INSA de LYON, G.C.U.
- [33] Une étude générale de l'assainissement pluvial urbain
DESBORDES
La houille blanche, n° 1, 1975
p. 37-43.
- [34] Mécanique des fluides et hydraulique
WINGHARD, I.N.S.A. de LYON.
- [35] Equipements urbains d'assainissement pluvial. Aides à la prévision à partir des documents d'urbanisme
Daniel SEGUIN
Thèse Docteur-Ingénieur G.C.U.
I.N.S.A. de LYON.
- [36] L'hydrologie de l'ingénieur
Exposé de CUNGE
Ecole Nationale supérieure d'hydraulique.
- [37] Essai de classification des modèles utilisés en hydrologie urbaine. Février 1979
B. CHOCAT, D. SEGUIN, G. PEYRETTI
T.S.M. L'eau, p. 93-97
- [38] Modello matematico del funzionamento di una rete
Guiseppe COZZO, p. 57-63
L'energia elettrica n° 2, 1976.
- [39] Real time routing of flood Hydrographs in storm sewer
Garth S. HARRIS M. ASCE
J. of H.D., June 1970, p. 1247-1259
- [40] Un essai de modélisation des phénomènes de ruissellement pluvial urbain
DESBORDES
T.S.M. L'eau, Mars 1975, p. 121-126

- [41] Présentation d'un modèle particulier : le modèle S.E.R.A.I.L. B. CHOCAT Assises Nationales de l'informatique communale, Strasbourg, Juin 1978.
- [42] Instruction technique relative aux réseaux d'assainissement des agglomérations. Circulaire interministérielle n° 77-284/INT. 1977
- [43] Conceptual hydrologic models for urbanizing basins RAO R.A., DELLEUR J.W. SARMA B.S.P. J. of H.D., Vol. 98, HY7, p. 1205-1220, (1972).
- [44] The hydrology of urban runoff THOLIN A.L.; KEISERCJ. Journal of the Sanitary Engineering Division Vol. 85, S.A.2., p. 47-106 1959.
- [45] TOZZO energia elettrica, n° 2, 1976.
- [46] Quelques aspects de la propagation des crues A. DAUBERT La houille blanche, n° 3, 1964.
- [47] Translatory characteristics of the MUSKINGHUM Method of flood Routing Mohammad AKRAM Gill. Journal of Hydrologie 40, (1979), 17-29.
- [48] Water Waves The mathematical theory with applications. Stocher J.J.
- [49] Introduction d'un système informatique dans un service technique chargé de l'assainissement d'une grande agglomération. H. BOTTA, B. CHOCAT, D. SEGUIN INNOVA 1979, Paris Mars 1969.
- [50] Traitement des réseaux maillés en régime variable. B. CHOCAT Conférence au groupe hydrologie urbaine, Paris, Février 1979.
- [51] Détermination automatique des caractéristiques de l'écoulement en fonction du débit, de la pente dans une canalisation de forme quelconque. B. CHOCAT, D. SEGUIN Congrès International GAMNI, Paris Novembre 1978.
- [52] Conception Assistée par ordinateur en Génie Civil. Thèse Docteur d'Etat es Sciences Henri BOTTA, I.N.S.A. de LYON

SOMMAIRE

363

250

S O M M A I R E

	<u>Pages</u>
AVANT-PROPOS	0
. Le paradigme de la science	1
. Contradiction	3
. Vers un nouveau paradigme	9
<u>PRESENTATION GENERALE</u>	13
<u>DE L'OBJET</u>	17
* DE L'OBJET I	19
. Mégalopolis : concevoir l'assainissement	21
. Autour des problèmes posés par l'assainissement	24
. Démarche phénoménologique	27
- typologie des modèles	28
- la complexité	31
* DE L'OBJET II	41
. Typologie des modèles	43
- Modèles globaux élémentaires	48
- Modèles globaux élémentaires modifiés	58
- Modèles globaux analytiques	70
- Modèles "métaglobaux"	84

368

256

* DE L'OBJET III	103
. Validation dynamique	104
. Validation individuelle	108
- Validation pragmatique	108
- Validation cognitive	110
. Vers de l'Etude	112
<u>DE L'ETUDE</u>	115
* DE L'ETUDE 1	123
I - Construction d'un modèle	125
I.1 Approche	125
I.2 Modèle non linéaire	126
I.3 Modèle linéaire	128
II - Etude des modèles linéaires	134
II.1 Classification	135
II.2 Détermination des paramètres	141
III - Application	148
III.1 Choix d'un modèle	148
III.2 Formulation pratique	149
III.3 Application à un ensemble de bassins versants..	156
* DE L'ETUDE 2	167
I - Etablissement du système de BARRE de ST-VENANT	172
I.1 Equation dynamique	172
I.2 Equation de continuité	175
I.3 Système	177

- II - Résolution méthode des caractéristiques 179
 - II.1 Résolution théorique 179
 - II.2 Résolution pratique 186
 - II.3 Vérification 196
 - II.4 Conclusion 214
- III - Résolution par discrétisation 215
 - III.1 Définition de la stabilité 215
 - III.2 Condition de la stabilité 224
 - III.3 Vérification 230
 - III.4 Conclusion 239
- * DE L'ETUDE 3 243
 - I - Construction des modèles holistiques intégraux.. 248
 - II - Interprétation des modèles holistiques intégraux 258
 - III - Utilisation des modèles en hydrologie 262
 - IV - Tableau organisationnel. 267
- * CONCLUSION 275
 - I - La modélisation en hydrologie urbaine 277
 - II - La conception en hydrologie urbaine 282
- * ANNEXES
 - ANNEXE I 285
 - ANNEXE 2 293
 - ANNEXE 3 301
 - ANNEXE 4 331
 - ANNEXE 5 337
 - ANNEXE 6 345
- * BIBLIOGRAPHIE 358