



**HAL**  
open science

# Sur les différentiateurs en temps réel : algorithmes et applications

Lilia Sidhom

► **To cite this version:**

Lilia Sidhom. Sur les différentiateurs en temps réel : algorithmes et applications. Autre. INSA de Lyon, 2011. Français. NNT : 2011ISAL0091 . tel-00701576

**HAL Id: tel-00701576**

**<https://theses.hal.science/tel-00701576>**

Submitted on 25 May 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon

soutenue publiquement le 29 Septembre 2011

par

*M<sup>elle</sup>* LILIA SIDHOM

Ingénieur INSAT, Tunisie

préparée au

Laboratoire AMPÈRE UMR CNRS 5005  
Département Méthodes pour l'Ingénierie des Systèmes  
Groupe Automatique, Commande, Mécatronique

## **SUR LES DIFFÉRENTIATEURS EN TEMPS RÉEL : ALGORITHMES ET APPLICATIONS**

Spécialité : Énergie et Systèmes

École Doctorale Électronique, Électrotechnique, Automatique

---

Jury :

<b>P. Bolon</b>	Président	Professeur des Universités à Polytech Annecy-Chambéry
<b>J.P. Barbot</b>	Rapporteur	Professeur des Universités à l'ENSEA de Cergy-Pontoise
<b>A. Richard</b>	Rapporteur	Professeur des Universités à Henri Poincaré Nancy 1
<b>F. Plestan</b>	Examineur	Professeur des Universités à l'Ecole Centrale de Nantes
<b>J-C. Maré</b>	Examineur	Professeur des Universités à l'INSA de Toulouse
<b>D. Thomasset</b>	Directeur	Professeur émérite des Universités à l'INSA de Lyon
<b>X. Brun</b>	Co-directeur	Professeur des Universités à l'INSA de Lyon
<b>E. Bideaux</b>	Co-directeur	Professeur des Universités à l'INSA de Lyon



# Liste des écoles doctorales-INSA de Lyon

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://sakura.cpe.fr/ED206">http://sakura.cpe.fr/ED206</a>  M. Jean Marc LANCELIN  Insa : R. GOURDON	<b>M. Jean Marc LANCELIN</b> Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43.13.95 lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	<b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a> M. Gerard Scorletti Secrétariat : M. LABOUNE AM 64.43 Fax : 64.54	<b>M. Gerard SCORLETTI</b> Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18.60.97 Fax : 04.78.43.37.17 Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	<b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b> <a href="http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2">http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2</a>  M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : H. CHARLES	<b>M. Jean-Pierre FLANDROIS</b> CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.26.23.59.50 Fax : 04.26.23.59.49 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDISS	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCESANTE</b>  Sec : Safia Boudjema M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	<b>M. Didier REVEL</b> Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.68.49.09 Fax : 04.72.35.49.16 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
INFOMATHS	<b>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</b> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a>  M. Alain MILLE	<b>M. Alain MILLE</b> Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.44.82.94 Fax : 04.72.43.13.10 infomaths@bat710.univ-lyon1.fr - alain.mille@liris.cnrs.fr
MATERIAUX	<b>MATERIAUX DE LYON</b> M. Jean Marc PELLETIER  Secrétariat : C. BERNAVON	<b>M. Jean Marc PELLETIER</b> INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43.83.18 Fax : 04.72.43.85.28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
MEGA	<b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b>  M. Jean Louis GUYADER  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 Fax : 87.12	<b>M. Jean Louis GUYADER</b> INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.18.71.70 Fax : 04.72.43.72.37 mega@lva.insa-lyon.fr
ScSo	<b>Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie</b>  M. OBADIA Lionel Insa : J.Y. TOUSSAINT	<b>M. OBADIA Lionel</b> Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.88 Fax : 04.37.28.04.48 Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr



# Résumé

Le problème de la dérivation en ligne est un problème bien connu dans différents domaines tels que le traitement du signal et l'automatique. La qualité de la dérivation numérique en ligne d'un signal bruité joue un rôle primordial dans diverses applications touchant différents domaines (1D et 2D). Dans le travail présenté, nous nous sommes intéressés aux dérivateurs type "signal". Nos travaux s'inscrivent dans ce contexte et abordent des aspects théoriques et applicatifs. Du point de vue théorique, une étude de deux familles de dérivateurs a été effectuée. En premier lieu, nous avons étudié les dérivateurs de nature algébrique [travaux du projet INRIA-Non-A] et en deuxième lieu les différentiateurs modes glissants d'ordre supérieur [travaux de Levant]. Cette étude nous a permis de décrire les points forts et les points faibles de chacune de ces approches. Suite à cette étude, une nouvelle version des dérivateurs modes glissants a été proposée.

Avec un bon réglage des paramètres, les différentiateurs basés sur les modes glissants et ceux de nature algébrique présentent des résultats satisfaisants pour un signal utile mono-fréquentiel. En revanche, pour un même réglage paramétrique, la différentiation d'un signal multi-fréquentiel conduit à une détérioration des performances en terme de précision. Pour les algorithmes modes glissants, une augmentation des valeurs des gains permet d'améliorer la précision mais en contre partie ceci conduit à une amplification du bruit dans les signaux estimés. Ce compromis entre ces deux critères (précision, robustesse par rapport au bruit) est difficile à réaliser puisque d'un côté il faut augmenter les valeurs des gains pour pouvoir dériver un signal balayant une bande de fréquences et d'un autre côté il faut imposer des faibles valeurs des gains afin de réduire l'amplification du bruit. Notre objectif est de pouvoir développer des algorithmes de dérivation permettant d'avoir un bon compromis en termes d'erreur, de déphasage, de robustesse par rapport au bruit et surtout de garantir une bonne précision pour une certaine plage de fréquence, sans trop se soucier du paramétrage de l'algorithme. Pour satisfaire au mieux ces critères, nous proposons au cours de ces travaux une nouvelle version des différentiateurs modes glissants d'ordre supérieur : un différentiateur d'ordre un et d'un différentiateur d'ordre deux ayant des gains dynamiques. Une démonstration de convergence temps fini est effectuée pour le différentiateur d'ordre 1.

Du point de vue applicatif, une première application dans le domaine 1D est présentée et qui consiste à utiliser le dérivateur proposé pour l'identification paramétrique en ligne d'un robot SCARA à deux axes. La méthode d'identification est validée expérimentalement par comparaison des résultats obtenus avec ceux donnés par d'autres méthodes (méthode en ligne et hors ligne). La deuxième application touche au domaine 2D. Dans ce cas, nous proposons l'application du différentiateur pour la détection des contours dans une image. Pour la validation des résultats, différents essais sont réalisés pour différents types de bruits : gaussien, impulsionnel et multiplicatif. Une étude comparative avec des méthodes classiques est effectuée. A la fin de cette partie, un tableau de synthèse qualitative des différentes méthodes décrites est aussi présentée. Pour pouvoir tester l'efficacité du différentiateur dans des boucles de commande nous nous sommes intéressés aux systèmes électrohydrauliques. Le système physique étudié est un servo-vérin électrohydraulique à hautes performances ayant différents modes de fonctionnement. Nous avons consacré tout un chapitre pour la modélisation de ce système. Après une succession d'hypothèses effectuées sur le modèle de simulation, des modèles de commande sont fournis.

La dernière partie de ces travaux est dédiée à la synthèse de stratégie de commande via la technique du Backstepping pour le positionnement de l'axe électrohydraulique afin de tester l'efficacité de l'algorithme proposé dans des boucles de commande. Finalement la version classique des algorithmes modes glissants est utilisée comme base comparative.

**Mots clés :** différentiateurs par modes glissants d'ordre supérieur, dérivateurs algébriques, commande non linéaire, Backstepping, système électrohydraulique, modélisation, expérimentation.

## Abstract

The problem of the on-line numerical differentiation is a well known problem in various fields such as signal processing and automation. The quality of the on-line differentiation with a noisy signal plays an important role in various applications involving different areas (1D and 2D). In the present work, we were interested particularly to differentiation method which requires a minimal knowledge on the noise and/or the input signal. Our work is registred in this context and address both aspects theoretical and applications. From the theoretical point of view, a study of two families of differentiation algorithm was performed. Firstly, we studied the algorithm based on the algebraic development [the work of the project INRIA-ALIEN] and secondly the differentiators of higher order sliding modes [work Levant] for detailed study. This study allowed us to describe the advantages and disadvantages of each approach. Following this study, a new version of sliding modes differentiator was proposed, this last one being the main theoretical contribution of this thesis.

With properly setting of parameters, differentiators based on sliding modes and those of based on an algebraic development present satisfactory results for a mono-frequency signal. However, for the same setting parameters, differentiation of a multi-frequency based-signal led to a deterioration performance in terms of accuracy. Precisly, for sliding mode algorithm, higher values of the gains can improve accuracy but against some this leads to an amplification of noise in the estimated signals. The compromise between these two criteria (accuracy, robustness to noise ratio) is difficult to achieve it. One hand, these values must increase the gains values in order to derive a signal sweeping certain frequency ranges and on the other hand it must be imposed low values of gains to reduce noise amplification. Our goal is to develop a differentiation algorithms in order to have a good compromise between error, phase shift and robustness to noise ratio and especially to guarantee a good accuracy for a certain frequency range, with regardless of the gains setting of the algorithm. To satisfy at best these criteria, we propose in this work a new version of the differentiators of higher order sliding modes with a dynamic adaptation gains : one-order differentiator and second-order differentiator. A finite-time convergence proof is performed for the one-order differentiator.

To test the efficiency of the proposed version, differents applications were carried out. The first application in 1D is shown, which consists in use the proposed differentiator for online parametric identification of a two-axis SCARA robot. The identification method is validated experimentally by comparing the results obtained with those given by other methods (method online and offline). The second application relates to the 2D domain. In this case, we propose the implementation of the differentiator for the edge detection in an image. To validate the results, various tests are carried out for different types of noise : Gaussian, impulsive and multiplicative. In order to have some comparison basis, we use the filter Canny and Prewitt masks and the gradient. At the end of this section, a qualitative synthesis table for the described methods is presented. To test the effectiveness of the differentiator in control loops we are interested in electrohydraulic systems. For this, a model of the hydraulic and mechanical system is made. For the mechanic part , we give particularly an importance to the modeling of friction, phenomenon that causes problems in the control loops. Afterwards, we devote two sections to model the dynamic and static part of the servovalve. After a consideration of some assumptions on the simulation model, the control models are provided. To separate the dynamic servo valve / actuator, a local study is performed.

The last part of this work is dedicated to the synthesis of control strategy through the backstepping technique for the positioning of the electro-hydraulic axis in order to test the effectiveness of the proposed algorithm in the control loop. As a basis for comparison, the classic version of sliding mode algorithm is also used. Finally, we present a summary table for compare the closed loop system "differentiator-control" for differents desired trajectory associated with both adaptive and non adaptive algorithm.

**Keywords :** Higher-order sliding mode differentiator, algebraical differentiator, Non linear control, Backstepping, electrohydraulic system, modeling, experimentation.





# Remerciements

*Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire AMPERE UMR CNRS 5005 de l'INSA de Lyon. Je commence à adresser mes plus sincères remerciements à Monsieur Daniel TOMASSET professeur émérite à l'INSA de Lyon qui m'a encouragé tout au long de ce travail. Sa disponibilité, ses qualités pédagogiques et humaines, ses compétences et sa bonne humeur permanente m'ont apporté un encadrement déterminant dans toutes les phases de ce travail.*

*Je tiens également à adresser mes plus vifs remerciements à mes co-encadreurs Xavier BRUN et Eric BIDEAUX professeurs à l'INSA de Lyon pour avoir su me guider avec attention et qui m'ont soutenu tout au long de ce travail. Leurs qualités scientifiques et humaines, leurs encouragements et leurs remarques ont largement contribué à l'aboutissement de cette thèse.*

*Je tiens tout particulièrement à remercier mon directeur de Master Monsieur Mohamed SMAOUI, maître de conférences à l'INSA de Lyon, avec qui j'ai débuté dans le domaine de recherche. Son encouragement, ses qualités scientifiques et son soutien amical ont été une aide précieuse tout le long de mes travaux de recherche.*

*J'exprime ma profonde gratitude à Madame Sylvie SESMAT ingénieur de recherche dans le laboratoire AMPERE pour ses qualités humaines, ses connaissances et l'aide qu'elle m'a apporté au cours de la collaboration effectuée avec la société MOOG.*

*Que Monsieur le professeur Jean-Pierre BARBOT, professeur à l'école Nationale Supérieure d'Electronique et de ses Applications (ENSEA) de Cergy-Pontoise et directeur du laboratoire ECS - EA 3649, trouve ici mes très sincères remerciements pour l'honneur qu'il me fait de participer à mon jury de thèse et d'être l'un de mes rapporteurs.*

*J'exprime mes sincères remerciements à Monsieur le professeur Alain RICHARD, professeur à l'université Henri Poincaré Nancy 1 et directeur du Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), UMR CNRS 7039, pour l'intérêt qu'il a bien voulu me porter en acceptant à la fois de participer à mon jury de thèse et d'être rapporteur de ce travail.*

*Que Monsieur le professeur Phillipe Bolon, professeur à Polytech Annecy-Chambéry, soit remercié pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de participer à mon jury de thèse et de l'avoir présidé.*

*J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur le professeur Franck PLESTAN, professeur à l'école centrale de Nantes, d'avoir accepté d'examiner mes travaux de thèse.*

*J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur le professeur Jean-Charles MARES, professeur à l'INSA de Toulouse, d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse.*

*Mes reconnaissance s'adresse également :*

---

*à Monsieur Minh Tu PHAM, maître de conférences à l'INSA de Lyon, pour ses encouragements, sa bonne humeur, sa disponibilité.*

*à Monsieur Michaël DI LORETO, maître de conférences à l'INSA de Lyon et mon co-encadreur de Master pour ses qualités scientifiques et ses conseils.*

*aux anciens et actuels membres du laboratoire AMPERE UMR CNRS 5005, en particulier à Wilfrid MARQUIS-FAVRE, Damien EBERARD, Gérard SCORLETTI.*

*à mes ami(e)s imen, wassim, karima, ahlem, mehdi, aymen, Alaa, sarra, mohamed, chokri par leurs soutiens.*

*Enfin, derniers de cette liste mais bien plus haut dans mon coeur, je tiens à remercier ma chère mère Hager ZANGAR et mon cher père Fehri SIDHOM pour leur soutien dès le début de mes études, pour leur amour, pour leurs efforts et pour leurs encouragements, mes deux soeurs Imen, Sarra et mon beau frère Karim BOULILA pour leurs encouragements, sans oublier ma nièce Molka "MOUKA-MOUKA" pour son beau sourire qui remonte le moral.*





# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>viii</b>
<b>Notations</b>	<b>xvi</b>
<b>Abréviation et Indices</b>	<b>xvii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>xxiv</b>
<b>1 Etude et contribution aux techniques de différentiations robustes</b>	<b>2</b>
1.1 Introduction . . . . .	2
1.2 Algorithmes basés sur les techniques algébriques . . . . .	4
1.2.1 Rappels mathématiques . . . . .	4
1.2.2 Méthodes d'estimation des dérivées par approche algébrique . . . . .	5
1.2.2.1 Dérivateur algébrique : première version . . . . .	6
1.2.2.2 Dérivateur algébrique : deuxième version . . . . .	8
1.2.2.3 Dérivateur algébrique : troisième version . . . . .	10
1.2.3 Validation . . . . .	14
1.2.3.1 Critères de validation . . . . .	14
1.2.3.2 Résultats de simulations . . . . .	16
1.3 Introduction élémentaire sur les régimes glissants . . . . .	25
1.3.1 Régime glissant d'ordre un . . . . .	25
1.3.1.1 Généralités . . . . .	25
1.3.1.2 Condition d'existence du régime glissant . . . . .	27
1.3.1.3 Surface de glissement . . . . .	28
1.3.1.4 Conditions de convergence . . . . .	28
1.3.1.5 Approche de Filippov . . . . .	29
1.3.1.6 Phénomène de réticence . . . . .	30
1.3.2 Régimes glissants d'ordre supérieur . . . . .	31
1.3.2.1 Définitions et notations . . . . .	31
1.3.2.2 Mode glissant d'ordre deux . . . . .	32
1.4 Différentiateurs via les modes glissants d'ordre supérieur . . . . .	33
1.4.1 Différentiateur d'ordre un : algorithme du Super Twisting . . . . .	33
1.4.1.1 Présentation du principe de Super Twisting . . . . .	33
1.4.1.2 Preuve de convergence en temps fini de l'algorithme . . . . .	35
1.4.1.2.a Résultats élémentaires de convergence pour une commande par mode glissant d'ordre deux . . . . .	35
1.4.1.2.b Application de ces résultats de convergence au Super Twisting . . . . .	41
1.4.2 Différentiateur d'ordre deux . . . . .	45
1.4.3 Quelques résultats de simulation . . . . .	47
1.4.3.1 Essai sans bruit . . . . .	47
1.4.3.2 Essai avec bruit . . . . .	49

1.4.4	Problème de mise en oeuvre . . . . .	50
1.5	Différentiateurs adaptatifs basés sur les modes glissants d'ordre supérieur . . . . .	56
1.5.1	Différentiateur Super Twisting Adaptatif (STA) . . . . .	56
1.5.2	Différentiateur modes glissants Adaptatifs d'Ordre Deux (DAO2) . . . . .	59
1.5.3	Intérêt des différentiateurs adaptatifs . . . . .	62
1.5.3.1	Essai sans bruit . . . . .	62
1.5.3.2	Essai avec bruit . . . . .	65
1.6	Conclusion . . . . .	68
<b>2</b>	<b>Applications et mise en oeuvre des différentiateurs proposés</b>	<b>72</b>
2.1	Introduction . . . . .	72
2.2	Application 1D : identification paramétrique . . . . .	74
2.2.1	Présentation : méthode et système d'application . . . . .	75
2.2.2	Résultats expérimentaux . . . . .	79
2.3	Application 2D : détection de contours . . . . .	83
2.3.1	Généralités . . . . .	83
2.3.2	Approche différentielle . . . . .	86
2.3.3	Approche analytique . . . . .	89
2.3.4	Approche via les modes glissants adaptatifs . . . . .	92
2.3.5	Etude comparative . . . . .	93
2.3.5.1	Procédure de comparaison . . . . .	94
2.3.5.2	Seuillage . . . . .	95
2.3.5.3	Résultats de simulation . . . . .	96
2.4	Conclusion . . . . .	106
<b>3</b>	<b>Modélisation d'actionneur hydraulique pour la synthèse de commandes non linéaires intégrant des différentiateurs</b>	<b>110</b>
3.1	Introduction . . . . .	110
3.2	Description du dispositif expérimental . . . . .	112
3.2.1	Centrale hydraulique . . . . .	113
3.2.2	Instrumentation/mesure . . . . .	113
3.2.3	Carte d'acquisition/boîtier électronique . . . . .	114
3.2.4	Actionneur électrohydraulique . . . . .	115
3.2.5	Embase . . . . .	115
3.2.6	Servodistributeur . . . . .	116
3.3	Modélisation du système . . . . .	117
3.3.1	Objectifs de la modélisation . . . . .	118
3.3.2	Modèle de l'actionneur hydraulique . . . . .	119
3.3.2.1	Modèle de la partie hydraulique de l'actionneur . . . . .	119
3.3.2.2	Modèle de la partie mécanique de l'actionneur . . . . .	121
3.3.2.3	Modélisation du frottement . . . . .	121
3.3.2.3.a	Introduction aux phénomènes de frottement . . . . .	121
3.3.2.3.b	Description de quelques modèles dans la littérature . . . . .	122
3.3.2.3.c	Identification des frottements : Protocole expérimental . . . . .	124
3.3.3	Modélisation du servodistributeur . . . . .	128
3.3.3.1	Principe de fonctionnement du servodistributeur . . . . .	128
3.3.3.2	Modélisation de la partie dynamique . . . . .	128
3.3.3.3	Modélisation de la partie statique . . . . .	132
3.3.4	Modèle Embase . . . . .	135
3.3.4.1	Effet du volume de l'embase . . . . .	136
3.3.4.2	Effet des pertes de charge de l'embase . . . . .	137

3.3.5	Modèle de commande . . . . .	138
3.4	Etude préliminaire : analyse linéaire . . . . .	141
3.4.1	Modèle linéaire . . . . .	141
3.4.2	Analyse du mode hydraulique . . . . .	143
3.4.3	Séparation des dynamiques servodistributeur/vérin . . . . .	147
3.4.4	Performances limites de l'actionneur électrohydraulique . . . . .	149
3.5	Conclusion . . . . .	151
<b>4</b>	<b>Synthèse et expérimentation</b>	<b>154</b>
4.1	Introduction . . . . .	154
4.2	Analyse du modèle de commande . . . . .	155
4.2.1	Changement de coordonnées . . . . .	156
4.2.2	Stabilité de la dynamique résiduelle . . . . .	157
4.3	Commande en position par la technique du Backstepping . . . . .	159
4.3.1	Synthèse de la commande . . . . .	159
4.3.2	Protocole expérimental . . . . .	162
4.3.3	Résultats expérimentaux . . . . .	163
4.4	Conclusion . . . . .	170
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>172</b>
	<b>Bibliographie personnelle</b>	<b>178</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>179</b>
	<b>Annexe A : Rappels mathématiques</b>	<b>190</b>
	<b>Annexe B : Polynômes orthogonaux de Jacobi</b>	<b>192</b>
	<b>Annexe C : Perspectives des travaux 2D</b>	<b>194</b>
	<b>Annexe D : Modélisation dynamique du servodistributeur</b>	<b>198</b>



# Notations

Symboles	Désignation	Unité (SI)
$p$	pression	[Pascal]
$C_m$	couple électromagnétique du moteur du servodistributeur	[N.m]
$\theta_a$	inclinaison de l'armature du servodistributeur	[m]
$x_p$	déplacement de la palette du servodistributeur	[m]
$C_{tube}$	couple de rappel exercé par le tube flexible	[N.m]
$Q$	débit volumique	[m <sup>3</sup> /s]
$T$	température	[K]
$D$	débit massique	[kg/s]
$\rho$	masse volumique	[m <sup>3</sup> /s]
$V$	volume	[m <sup>3</sup> ]
$\beta$	module de compressibilité	[Pascal]
$S$	section effective de la tige	[m <sup>2</sup> ]
$\Delta p$	pression différentielle	[Pascal]
$y$	position	[m]
$v$	vitesse	[m/s]
$a$	accélération	[m/s <sup>2</sup> ]
$M$	masse	[kg]
$F$	force	[N]
$g$	constante gravitationnelle	[m/s <sup>2</sup> ]
$C_d$	coefficient du débit	
$x_t$	position du tiroir du servodistributeur	[m]
$u$	commande	[V]
$F_{frott}$	force de frottement	[N]
$F_{ss}$	force de frottement sec statique	[N]
$F_C$	force de frottement de Coulomb	[N]
$F_{cg}$	force de frottement limite entre la phase de glissement sec et la phase de collage	[N]
$F_{sdyn}$	force de frottement sec dynamique	[N]
$b$	coefficient du frottement visqueux	[N/m.s <sup>-1</sup> ]
$v_s$	vitesse caractéristique du frottement de Stribeck	[m.s <sup>-1</sup> ]
$F_{fs}$	frottement sec	[N]
$\omega_h$	pulsation hydraulique	[rad/s]
$\xi_h$	coefficient d'amortissement	
$P_{au}$	pression d'alimentation utile	[Pascal]
$f$	fréquence	[Hz]

# Abréviation et Indices

## Abréviation

PVAA	Première Version de l'Algorithme Algébrique
DVAA	Deuxième Version de l'Algorithme Algébrique
TVAA	Troisième Version de l'Algorithme Algébrique
ST	Super Twisting
DO2	Dérivateur d'Ordre 2
STA	Super Twisting Adaptatif
DAO2	Dérivateur Adaptatif d'Ordre 2
MPEG	Moving Picture Experts Group

## Indices

1	grandeur relative à la chambre 1 du vérin
2	grandeur relative à la chambre 2 du vérin
$P$	source
$T$	retour
$sv$	grandeur relative au servodistributeur

# Table des figures

1.1	Signal d'entrée. . . . .	14
1.2	Signal d'entrée bruité. . . . .	15
1.3	Résultats du PVAA : dérivée première. . . . .	16
1.4	Résultats du PVAA : dérivée seconde. . . . .	17
1.5	Résultats du PVAA pour un signal bruité. . . . .	18
1.6	Résultats du DVAA : signal d'entrée. . . . .	20
1.7	Résultats du DVAA : dérivée première. . . . .	20
1.8	Résultats du DVAA : dérivée seconde. . . . .	20
1.9	Résultats du DVAA pour un signal bruité . . . . .	21
1.10	Résultats du TVAA : dérivée première. . . . .	23
1.11	Résultats du TVAA : dérivée seconde. . . . .	23
1.12	Résultats du TVAA : pour différentes valeurs de fréquence. . . . .	24
1.13	Deux espaces d'état séparés par la surface de glissement $s = 0$ . . . . .	27
1.14	Illustration de la phase de convergence et du régime glissant. . . . .	28
1.15	Illustration de l'approche de Filippov. . . . .	30
1.16	Illustration du régime de convergence et du régime glissant. . . . .	30
1.17	Schéma de principe du différentiateur d'ordre un : Super Twisting. . . . .	34
1.18	Trajectoire de l'algorithme dans le plan de phase $(x, \dot{x})$ . . . . .	36
1.19	Courbes de majoration des trajectoires de l'algorithme. . . . .	42
1.20	Evolution des erreurs avec le ST : signal d'entrée sans bruit. . . . .	48
1.21	Evolution des erreurs avec le $DO2$ : signal d'entrée sans bruit. . . . .	48
1.22	Courbes de Lissajous relative à la première estimée. . . . .	48
1.23	Courbes de Lissajous relative à la deuxième estimée. . . . .	49
1.24	Sorties des algorithmes modes glissants pour un signal d'entrée bruité. . . . .	50
1.25	Diagramme de Bode de Super Twisting en respectant la condition sur $C$ . . . . .	52
1.26	Diagramme de Bode du ST pour différentes amplitudes du signal d'entrée. . . . .	52
1.27	Evolution de $C$ en fonction de la fréquence. . . . .	53
1.28	Diagramme de Bode de la première sortie : différentiateur d'ordre deux. . . . .	54
1.29	Diagramme de Bode de la deuxième sortie : différentiateur d'ordre deux. . . . .	54
1.30	Evolution de l'erreur pour différents signaux d'entrée : Super Twisting. . . . .	54
1.31	Evolution de l'erreur de la première estimée : différentiateur d'ordre 2. . . . .	55
1.32	Evolution de l'erreur de la deuxième estimée : différentiateur d'ordre 2. . . . .	55
1.33	Evolution des erreurs avec le STA : signal sans bruit. . . . .	62
1.34	Evolution des paramètres dynamiques du STA. . . . .	63
1.35	Evolution des erreurs avec le DAO2 : signal sans bruit. . . . .	63
1.36	Evolution des paramètres dynamiques du DAO2. . . . .	63
1.37	Courbes de Lissajous relatives à la première estimée. . . . .	64
1.38	Courbes de Lissajous relatives à la deuxième estimée. . . . .	64
1.39	Phase transitoire : ST et STA. . . . .	65
1.40	Phase transitoire : DO2 et DAO2. . . . .	65
1.41	Sorties des algorithmes adaptatifs pour un signal bruité. . . . .	66

1.42	Evolution de l'erreur et du déphasage : première estimée. . . . .	68
1.43	Evolution de l'erreur et du déphasage : deuxième estimée. . . . .	68
2.1	Robot SCARA à 2 degrés de liberté. . . . .	75
2.2	Schéma global utilisé pour l'identification. . . . .	77
2.3	Couples estimés non filtrés. . . . .	79
2.4	Couples filtrés. . . . .	80
2.5	Estimation des accélérations. . . . .	80
2.6	Estimation des vitesses. . . . .	81
2.7	Evolution des différents paramètres. . . . .	82
2.8	Validation directe. . . . .	83
2.9	Repère local du gradient ( $g, t$ ). . . . .	85
2.10	Masque de Prewitt. . . . .	87
2.11	Masque du laplacien. . . . .	88
2.12	image initial : image 1. . . . .	96
2.13	Gradient horizontal $G_x$ et vertical $G_y$ de l'image 1 : avec l'algorithme STA. . . . .	96
2.14	Détecteur de contour avec l'algorithme STA. . . . .	97
2.15	Détection du contour via les opérateurs gradient, Prewitt. . . . .	97
2.16	Détection du contour via le filtre de Canny. . . . .	97
2.17	Estimation du laplacien : avec DAO2. . . . .	98
2.18	Image de synthèse . . . . .	98
2.19	Image de synthèse avec du bruit blanc gaussien ( $\sigma_{bG} = 0.01$ ). . . . .	100
2.20	Contours de l'image dégradée par un bruit blanc gaussien. . . . .	100
2.21	Image de synthèse avec du bruit "Poivre et Sel" ( $d_b = 0.01$ ) . . . . .	101
2.22	Contours de l'image dégradée par un bruit "Poivre et Sel". . . . .	101
2.23	Image de synthèse avec du bruit multiplicatif ( $\sigma_{n_s} = 0.01$ ). . . . .	102
2.24	Contours de l'image dégradée par un bruit multiplicatif. . . . .	103
2.25	Détection de contour de l'image 1 avec du bruit "Poivre et Sel" : STA. . . . .	104
2.26	Détection de contour de l'image 1 avec du bruit "Poivre et Sel" : Masques gradient, Prewitt et filtre de Canny. . . . .	105
3.1	Schéma du système. . . . .	112
3.2	Centrale hydraulique. . . . .	113
3.3	Schéma 3D de l'embase. . . . .	115
3.4	Architecture du servodistributeur MOOG D765. . . . .	116
3.5	Schéma de principe du servodistributeur MOOG D765. . . . .	117
3.6	Schéma synoptique du système. . . . .	118
3.7	Variation de la masse volumique d'un fluide hydraulique en fonction de la pression à température constante. . . . .	120
3.8	Les différentes phases de l'évolution du frottement en fonction de la vitesse. . . . .	121
3.9	Modèle de Coulomb modifié : Modèle de Karnopp . . . . .	123
3.10	Modèle de Tustin. . . . .	123
3.11	Evolution du frottement en fonction de la vitesse. . . . .	125
3.12	Evolution du frottement mesuré et estimé en fonction de la vitesse. . . . .	127
3.13	Dynamique du servodistributeur. . . . .	128
3.14	Réponse en fréquence donnée par le constructeur du servodistributeur. . . . .	129
3.15	Variation du débit du premier étage hydraulique, de type buse-palette en fonction de $x_p$ et de $\Delta P_p$ . . . . .	131
3.16	Réponse fréquentielle mesurée et estimée . . . . .	132
3.17	Schéma synoptique précisant le passage du fluide pour les 3 modes. . . . .	135
3.18	Schéma synoptique du vérin contrôlé par un seul servodistributeur : mode(1). . . . .	136
3.19	Schéma simplifié chambre-embase-servodistributeur. . . . .	137

3.20	Modèle des frottements secs. . . . .	138
3.21	Evolution de la pulsation hydraulique en fonction de la position. . . . .	145
3.22	Evolution de la fréquence hydraulique en ajoutant le volume de l'embase. . . . .	145
3.23	Evolution de la pulsation hydraulique avec $\beta_1 = 0.9\beta$ . . . . .	146
3.24	Evolution de la pulsation hydraulique avec $\beta_1 = 0.5\beta$ . . . . .	147
3.25	Evolution de $f_v$ en fonction de $y$ et $f_{sv}$ en fonction de $u$ : $\beta = 17000$ bars . . . . .	148
3.26	Evolution de $f_v$ en fonction de $y$ et $f_{sv}$ en fonction de $u$ : avec $\beta_1 = 0.5\beta$ . . . . .	148
3.27	Rapport de fréquence $\frac{f_{sv}}{f_v}$ : $\beta = 17000$ bars . . . . .	149
3.28	Rapport de fréquence $\frac{f_{sv}}{f_v}$ : avec $\beta_1 = 0.5\beta$ . . . . .	149
3.29	Réponse en fréquence limite de l'actionneur. . . . .	151
4.1	Evolution des termes A et B. . . . .	159
4.2	Schéma de principe : association commande-différentiateur. . . . .	162
4.3	Evolution de la position et de l'erreur en position : DO2 . . . . .	164
4.4	Vitesse et accélération estimées : DO2 . . . . .	165
4.5	Commande (V) : DO2. . . . .	165
4.6	Evolution de la position et de l'erreur en position : DAO2 . . . . .	165
4.7	Vitesse et accélération estimées : DAO2 . . . . .	166
4.8	Commande (V) : DAO2. . . . .	166
4.9	Evolution de la position et de l'erreur en position : DO2 . . . . .	167
4.10	Vitesse et accélération estimées : DO2 . . . . .	167
4.11	Erreurs vitesse et accélération : DO2 . . . . .	167
4.12	Commande (V) : DO2. . . . .	168
4.13	Evolution de la position et de l'erreur en position : DAO2 . . . . .	168
4.14	Vitesse et accélération estimées : DAO2 . . . . .	169
4.15	Erreurs vitesse et accélération : DAO2 . . . . .	169
4.16	Commande (V) : DAO2. . . . .	169
4.17	Codeur Temporel MPEG . . . . .	197
4.18	Codage spatial . . . . .	197
4.19	Schéma de la partie mobile S. . . . .	199
4.20	Schéma représentatif de la dynamique du servodistributeur. . . . .	200
4.21	Allure de la consigne et du signal d'entrée du servodistributeur. . . . .	202
4.22	Mécanisme d'identification. . . . .	202

# Liste des tableaux

1.1	Erreurs et déphasage pour PVAA. . . . .	17
1.2	Critères de comparaison pour la robustesse par rapport au bruit : PVAA. . . . .	18
1.3	Erreurs d'estimation et déphasage : DVAA. . . . .	19
1.4	Erreurs d'estimation et déphasage pour l'estimée de la première dérivée : TVAA. . . . .	22
1.5	Temps de calcul : Algorithmes algébriques. . . . .	24
1.6	Erreurs d'estimation pour les algorithmes modes glissants. . . . .	48
1.7	Déphasage engendré par les algorithmes modes glissants. . . . .	49
1.8	Critères de comparaison pour la robustesse par rapport au bruit. . . . .	49
1.9	Temps de calcul : Algorithmes modes glissants. . . . .	50
1.10	Erreurs d'estimation pour les algorithmes modes glissants adaptatifs. . . . .	64
1.11	Déphasage engendré par les algorithmes modes glissants adaptatifs. . . . .	64
1.12	Critères de comparaison pour la robustesse par rapport au bruit. . . . .	66
1.13	Temps de calcul : Algorithmes modes glissants adaptatifs. . . . .	67
1.14	Comparaison des différents schémas de différentiation. . . . .	69
2.1	Résultats d'identification. . . . .	81
2.2	Tableau comparatif des erreurs : bruit gaussien. . . . .	99
2.3	Tableau comparatif des erreurs : bruit de type "Poivre et Sel". . . . .	102
2.4	Tableau comparatif des erreurs : bruit multiplicatif. . . . .	102
2.5	Temps de calcul en secondes pour différentes tailles d'image. . . . .	104
2.6	Tableau qualitatif. . . . .	106
3.1	Caractéristiques du capteur de position. . . . .	114
3.2	Caractéristiques de l'accéléromètre. . . . .	114
3.3	Caractéristiques des capteurs de pression $p_P$ et $p_T$ . . . . .	114
3.4	Caractéristiques des capteurs de pression $p_1$ et $p_2$ . . . . .	114
3.5	Principales caractéristiques de la carte d'acquisition. . . . .	115
3.6	Identification des composantes du frottement : fonctionnement à chaud. . . . .	126
3.7	Volumes des conduites de l'embase. . . . .	136
4.1	Polynômes de Jacobi . . . . .	192





# Introduction générale

## Contexte

Le problème de la dérivation en ligne est un problème bien connu dans différents domaines tels que le traitement du signal et l'automatique. L'estimation des dérivées successives d'un signal mesuré constitue un sujet qui a largement aiguë la curiosité de différentes communautés de chercheurs et plus particulièrement celle des automaticiens ces dernières décennies.

En effet, la différentiation numérique constitue la solution clé pour certains problèmes relatifs à la commande des procédés et elle trouve son application dans différents domaines industriels tels que l'automobile, l'aéronautique, la robotique médicale... Aujourd'hui, l'automaticien développe des commandes dites "sans capteur". En fait, les méthodes de dérivation permettent de délivrer au bloc commande une estimation d'une dérivée ou des dérivées successives d'un signal mesuré, on parle alors de commande par retour de sortie. La nécessité de reconstruire les dérivées de signaux, non accessibles par la mesure, peut être due soit à l'absence d'instrumentation appropriée soit à des contraintes sévères imposées par l'environnement du procédé. A titre d'exemple nous pouvons citer le cas de la fusée Ariane pour laquelle les vibrations de très hautes fréquences lors du démarrage rendent difficile l'obtention d'un bon signal de sortie d'un capteur physique. De plus, ces vibrations peuvent parfois provoquer la défaillance des capteurs.

Bien que dans la plupart des applications, l'emploi de capteurs physiques constitue une solution parfois séduisante, l'utilisation de la dérivation numérique s'avère une bonne alternative puisqu'elle permet de réduire le coût des installations, en réduisant le nombre de capteurs et d'augmenter leur fiabilité dans le cas de défaut du capteur. L'utilisation de l'estimation des dérivées ne se limite pas uniquement à des applications de commande mais elle peut aussi être utilisée pour des problèmes de diagnostic où le fonctionnement du capteur logiciel est déclenché en cas de défaillance du capteur physique. Cette notion de redondance de capteur est nécessaire pour certains types d'application dont tout arrêt non programmé est inacceptable. Dans certaines méthodes d'identification en ligne, il est parfois nécessaire d'injecter les dérivées successives d'un signal mesuré dans la boucle d'optimisation. Outre, les applications dans le domaine monodimensionnel, la dérivation numérique présente aussi un grand intérêt dans le domaine multidimensionnel. Comme par exemple, le calcul du gradient ou du Laplacien pour la détection de contour dans une image, la compression/la décompression de séquence d'images...

## Problématiques et motivations

Un bon algorithme de dérivation doit garantir un bon compromis entre :

- l'erreur (la différence entre le signal estimé et le signal théorique),
- le déphasage,
- la robustesse par rapport au bruit.

Sur un procédé physique, un signal mesuré est constitué d'une information utile, généralement

représentée par un signal basse fréquence comparé aux bruits et d'une autre information regroupant les différentes perturbations et bruits. Ces bruits peuvent être de différentes origines : bruits électriques, thermiques, numériques...

La présence de bruit dans le signal à dériver constitue l'une des principales sources de difficultés dans la synthèse d'algorithmes de différentiation. Prenons le cas d'une méthode assez classique qui se base tout simplement sur une différence finie permettant d'approcher exactement la dérivée d'un signal en l'absence de bruit. En présence du bruit, signal supposé à haute fréquence, la qualité de la dérivée est alors largement dégradée. Il est possible de placer en amont de ce dérivateur un filtre afin d'éliminer les composantes hautes fréquences du bruit. Cette solution peut ainsi fournir des résultats satisfaisants en terme de réduction du bruit du signal estimé mais en contre partie la présence d'un déphasage est inévitable, effet fort pénalisant dans les systèmes bouclés.

Pour faire face à ce problème, une multitude d'algorithmes de dérivation numérique linéaire a été développée dans la littérature. Pour faire la séparation de l'information utile par rapport au bruit (ou perturbation), il existe des méthodes dites "méthodes par modèle" où le signal d'entrée est considéré comme étant un signal canonique dont les caractéristiques sont à priori spécifiées. Ces spécifications dépendent de l'approche utilisée. Par exemple, la connaissance d'une information sur les caractéristiques spectrales du signal canonique d'entrée et le transfert reliant l'entrée à la sortie, permet de reconstruire le signal de sortie. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer le filtre de Kalman [126], méthode qui se base sur des caractéristiques stochastiques du bruit. Le réglage d'un tel algorithme est effectué de manière à minimiser la variance de l'erreur d'estimation. Dans le cas d'un système à états déterministes, un filtrage  $H_2$  peut être utilisé [37]. Le réglage du gain de cet algorithme revient à formuler un problème d'optimisation dont la fonction coût est donnée sous forme d'une norme  $H_2$ . Ainsi, pour ce type d'approche, la synthèse d'un dérivateur est également accompagnée d'une étape d'optimisation afin d'obtenir la meilleure précision des estimées. Bien évidemment, peu importe le type de processus déterministe ou aléatoire, cette étape nécessite certaines hypothèses et certains critères d'optimalité. Cependant, l'étape d'optimisation peut être coûteuse en terme de temps de calcul et parfois les hypothèses associées sont fortes, ce qui peut être une limitation en pratique à ce type de méthode.

Dans la littérature, il existe d'autres méthodes de dérivation, dites "méthodes signal". Ce type d'approche ne se base pas sur une modélisation particulière du signal utile ou du bruit. Dans ce mémoire, nous nous intéresserons plus particulièrement à cette classe de méthode, c'est-à-dire des méthodes qui ne nécessitent qu'une connaissance minimale sur le bruit et/ou le signal d'entrée (hypothèses "souples"). Parmi ces algorithmes, il en existe qui se basent sur la technique des modes glissants d'ordre supérieur [94], technique connue en commande par sa robustesse et qui représente la principale qualité de celle-ci. L'utilisation de cette technique en dérivation se base sur des simples hypothèses. En effet, il suffit de considérer un signal d'entrée borné et un bruit dont la valeur absolue est bornée par une valeur relativement faible. Sous ces conditions, une convergence des dynamiques du système en temps fini est assurée. Une approche alternative basée sur un développement algébrique [travaux du projet INRIA-Non-A] peut aussi être utilisée. Relativement sans aucune hypothèse sur le bruit, ces dérivateurs de nature algébrique permettent l'estimation de la dérivée d'un signal mesuré en se basant sur l'idée d'approximer le signal à dériver par un développement en séries de Taylor tronqué à un certain ordre. A la base de cette idée, Fliess et ses collaborateurs ont développé différentes versions de dérivateurs [127], [106], [32].

Depuis quelques années, un axe de recherche portant sur les différentiateurs/observateurs ro-

bustes a débuté au sein du laboratoire AMPERE. L'idée principale est de pouvoir étudier, synthétiser et développer des capteurs logiciels. Dans [132], l'algorithme de Super Twisting [93] a été intégré dans une boucle de commande d'un système à faible dynamique, un système électropneumatique, pour reconstruire l'accélération à partir de la vitesse mesurée, [131]. Dans [141], la synthèse d'un observateur adaptatif pour estimer les tensions aux bornes d'un condensateur a été réalisée. Ce dernier a également été interconnecté avec une commande prédictive d'un convertisseur multicellulaire et a été validé expérimentalement. Dans nos travaux de Master, nous avons étudié les différentiateurs robustes d'ordre arbitraire dans le but de reconstruire à partir d'une seule mesure, les estimées successives de la dérivée du signal d'entrée. Ces travaux ont été poursuivis dans [44], où l'objectif principal de cette thèse était de mettre en place des algorithmes de dérivation sur un circuit numérique (système embarqué) à faible coût. Pour ce faire, une étude préliminaire a été nécessaire afin d'étudier les contraintes technologiques associées à ce type d'implémentation (résolution de calcul, précision des organes de conversion,...) sur les performances des algorithmes de dérivation. Pour ces algorithmes, une étude de synthèse de quelques algorithmes de dérivation a été effectuée (observateur grand gain, modes glissant, filtre  $H_2$  et  $H_\infty$ ). Cette étude a permis de proposer une approche alternative d'observation linéaire basée sur une optimisation d'une norme  $H_\infty$ . Cette approche présente la possibilité de considérer une norme  $H_\infty$  pondérée dans la synthèse de l'observateur, ce qui permet d'imposer un gabarit particulier sur la densité spectrale de puissance du signal d'erreur, [37].

Pour continuer sur le même axe de recherche, nous avons trouvé intéressant d'étudier les différentiateurs basés sur les modes glissants et ceux de nature algébrique. Avec un bon réglage des paramètres, ces dérivateurs présentent des résultats satisfaisants pour un signal utile monofréquentiel. En revanche, pour un même réglage paramétrique, le changement du spectre fréquentiel du signal à dériver conduit à une détérioration des performances en terme de précision. Pour les algorithmes modes glissants, une augmentation des valeurs des gains permet d'améliorer la précision mais en contre partie ceci conduit à une amplification du bruit dans les signaux estimés. Le compromis entre ces deux critères (précision, robustesse par rapport au bruit) est difficile à réaliser puisque d'un côté il faut augmenter les valeurs des gains pour pouvoir dériver un signal balayant certaines plages de fréquence et d'un autre côté il faut imposer des faibles valeurs des gains afin de réduire l'amplification du bruit. Pour découpler ces deux critères, tout en assurant un bon compromis en termes d'erreur, de déphasage, de robustesse par rapport au bruit, nous proposons au cours de ces travaux une nouvelle version des différentiateurs modes glissants d'ordre supérieur. Pour tester l'efficacité de cette nouvelle version, différentes applications dans les domaines monodimensionnels (1D) et bidimensionnels (2D) sont effectuées. Nous donnons plus d'importance à l'une des applications 1D qui consiste en la commande en position d'un servo-vérin électrohydraulique à hautes performances par reconstruction des dérivées successives de la position mesurée.

A ce propos, nous ouvrons une parenthèse sur les technologies à fluide sous pression, notamment celle de l'électrohydraulique, qui reste fondamentale dans de multiples domaines d'application tels que les dispositifs de freinages, les machines de test en fatigue des composants automobile, l'aéronautique, les transports... En effet, l'importance de la puissance spécifique, la possibilité d'exercer d'énormes forces et/ou couples, la capacité de fournir des puissances instantanées très élevées auxquelles s'associe une très grande fiabilité sont des points qui restent forts comparés à d'autres technologies. Le problème du contrôle de ces systèmes continus pour des plages d'utilisation étendues représente un grand défi. En outre, le développement récent de servo-systèmes électrohydraulique de grande performance impose l'utilisation de commandes qui tiennent en compte de la nature nonlinéaire de ces systèmes. En effet, le comportement dynamique des systèmes hydrauliques est fortement nonlinéaire du fait de la relation débit-pression, des phénomènes difficilement modélisables, la variation de volume de contrôle des fluides... Ils

sont également décrits par des modèles incertains en raison d'incertitudes paramétriques et des non-linéarités incertaines difficiles à modéliser comme le frottement.

Cette thèse est la première effectuée au laboratoire AMPERE dans le cadre de la commande et l'observation des actionneurs électrohydrauliques après de nombreux travaux effectués dans le cadre des systèmes électropneumatiques. Ces travaux ont permis de développer la reconnaissance au niveau international du laboratoire dans le domaine de systèmes à fluide sous pression. Le laboratoire Ampère faisant parti du réseau européen Fluid Power Centres in Europe (FPCE, <http://www.fpce.net/>).

En 2006, le premier banc d'essai électrohydraulique a été mis en place au sein du laboratoire. Les travaux de recherche visés par le laboratoire ont pour but de résoudre les problèmes posés aujourd'hui par les industriels dans le domaine du transport, essentiellement de l'automobile. Le banc d'essai électrohydraulique a été conçu de manière très particulière pour ces raisons. En effet, l'originalité de ce système concerne sa bande passante élevée qui permet de jouer des signaux pistes à haute fréquence de type parcours urbain et de fortes accélérations, contrairement aux axes électrohydrauliques classiques qui sont plutôt dans le domaine des basses fréquences. La dynamique élevée de ce banc d'essai, permet de considérer certains problèmes particuliers de l'industrie tels que les tests de fatigue et/ou des pièces sensibles à la sécurité des véhicules. Pour avoir un degré de liberté plus large en terme de commande, le système présente un multi-modes de fonctionnement.

L'un des objectifs de mes travaux de thèse a porté au début sur la réalisation d'un modèle de simulation du système électrohydraulique. Cette phase a été effectuée en collaboration avec la société MOOG (à Rungis, Paris). Ces travaux ont été poursuivis dans le cadre d'une thèse qui a débuté fin 2009 au sein du laboratoire. Dans le cadre de ce mémoire, notre objectif consiste d'une part à valider les algorithmes de dérivation proposés dans une boucle de commande, et d'autre part de synthétiser et d'appliquer une stratégie de commande au servo-vérin hydraulique. Dans ce manuscrit, nous nous limiterons donc à présenter les modèles de commande réalisés en précisant les plages de fonctionnement relatives à la validité des hypothèses utilisées.

## Cadre de la thèse

Le premier chapitre est consacré dans un premier temps à l'étude des dérivateurs de nature algébrique [travaux du projet INRIA-Non-A]. Nous commencerons par présenter les fondements théoriques associées à ce type d'approche, pour ensuite décrire trois versions de dérivateurs basés sur le développement algébrique. Nous fournirons des résultats de simulation relatifs à chacune des versions. Afin d'établir à la fin de cette étude un tableau de synthèse de tous les algorithmes de différentiation étudiés et proposés, nous définirons certains critères de comparaisons quantitatifs et qualitatifs. Dans un deuxième temps, une étude détaillée des différentiateurs modes glissants est effectuée. Nous consacrerons également une partie permettant de décrire le problème de mise en oeuvre pratique relatif à ces algorithmes. A la fin de ce chapitre, nous proposerons une nouvelle version de ces différentiateurs où nous détaillerons l'intérêt de cette approche par rapport aux algorithmes modes glissant de base. Tout au long du chapitre, les algorithmes de dérivations seront illustrés à travers des simulations et une synthèse des résultats via des tableaux récapitulatifs sera effectuée.

Dans le deuxième chapitre, nous développerons deux applications dans lesquelles l'algorithme proposé est utilisé. Une première application dans le domaine 1D consiste à utiliser le dérivateur proposé pour l'identification paramétrique en ligne d'un robot SCARA à deux axes. La

méthode d'identification est validée expérimentalement par comparaison des résultats obtenus avec ceux donnés par d'autres méthodes (méthodes en ligne et hors ligne).

La deuxième application touche au domaine 2D. Dans ce cas, nous proposerons l'application du différentiateur pour la détection des contours dans une image. Pour la validation des résultats, différents essais sont réalisés pour différents types de bruits : 6, impulsif et multiplicatif. Afin d'avoir une base de comparaison, nous utiliserons le filtre de Canny et les masques de Prewitt et du gradient. A la fin de cette partie, nous présenterons un tableau permettant de donner une synthèse qualitative des différentes méthodes décrites.

Afin de tester l'efficacité de notre méthode de différentiation dans des boucles de commande nous l'appliquerons dans le contexte de la commande de notre système électrohydraulique. Dans un premier temps, nous détaillerons la modélisation de la partie hydraulique puis celle de la partie mécanique. Pour la partie mécanique, nous nous intéresserons en particulier à la modélisation du frottement, phénomène source de nombreux problèmes dans les boucles de commande. Ensuite, nous nous concentrerons sur la modélisation des parties dynamique et statique du servodistributeur, composant important permettant le contrôle du transfert de puissance. Pour assurer les différents modes de fonctionnement du système, celui-ci est équipé d'un bloc intermédiaire nommé embase. Pour tenir compte des effets engendrés par cette embase, une étude est effectuée afin d'évaluer l'influence des volumes supplémentaires et des pertes de charges. Plusieurs hypothèses nous permettront de réduire le modèle de simulation et d'aboutir à des modèles de commande. Par la suite, nous effectuerons une étude locale afin de séparer les dynamiques servodistributeur/vérin dans le but de prédéfinir les plages de fonctionnement permettant la validité des hypothèses prises en compte dans la phase de modélisation.

Le quatrième chapitre est dédié à la synthèse d'une stratégie de commande par la technique du Backstepping pour le contrôle de la position du vérin, en considérant le modèle de commande du système fourni dans le chapitre 3. Pour cette loi de commande, seul le capteur de position est utilisé. Pour reconstruire la vitesse et/ou l'accélération, l'un des différentiateurs proposés est utilisé. L'objectif de cette partie est de valider le schéma de différentiation proposé et d'analyser les résultats expérimentaux obtenus en les comparant à ceux donnés par le différentiateur modes glissants de base.

Nous terminerons ce rapport par une conclusion générale où nous présenterons une synthèse des différents résultats obtenus. Une description de certaines perspectives conclura ce document.



# Chapitre 1

## Etude et contribution aux techniques de différentiations robustes

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1.2</b>	<b>Algorithmes basés sur les techniques algébriques</b>	<b>4</b>
1.2.1	Rappels mathématiques	4
1.2.2	Méthodes d'estimation des dérivées par approche algébrique	5
1.2.3	Validation	14
<b>1.3</b>	<b>Introduction élémentaire sur les régimes glissants</b>	<b>25</b>
1.3.1	Régime glissant d'ordre un	25
1.3.2	Régimes glissants d'ordre supérieur	31
<b>1.4</b>	<b>Différentiateurs via les modes glissants d'ordre supérieur</b>	<b>33</b>
1.4.1	Différentiateur d'ordre un : algorithme du Super Twisting	33
1.4.2	Différentiateur d'ordre deux	45
1.4.3	Quelques résultats de simulation	47
1.4.4	Problème de mise en oeuvre	50
<b>1.5</b>	<b>Différentiateurs adaptatifs basés sur les modes glissants d'ordre supérieur</b>	<b>56</b>
1.5.1	Différentiateur Super Twisting Adaptatif (STA)	56
1.5.2	Différentiateur modes glissants Adaptatifs d'Ordre Deux (DAO2)	59
1.5.3	Intérêt des différentiateurs adaptatifs	62
<b>1.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>68</b>

---

### 1.1 Introduction

La dérivation numérique ou l'estimation des dérivées d'un signal temporel bruité est un problème bien connu et ancien dans plusieurs disciplines telles que l'analyse numérique, le traitement du signal et l'automatique. Depuis longtemps, ce problème a attiré l'attention des chercheurs en raison de son importance dans différents domaines d'application. Il existe de nombreuses approches pour traiter ce problème. Ces approches peuvent être divisées en deux grandes classes : une approche modèle et une approche signal.

La première approche bien connue repose sur l'utilisation d'observateur. En effet, dans le cas où le signal satisfait certaines équations différentielles ou représente une sortie de certaines dynamiques connues d'un système, la dérivée de ce signal d'entrée est alors estimée en se basant sur cette représentation mathématique du système.

Pour les systèmes linéaires à états déterministes, le problème d'observation a été introduit dans les années soixante par Luenberger [99]. Si le signal mesuré est bruité, une approche stochastique via un filtre de Kalman est la plus adéquate (ce filtre peut aussi être classé dans une approche signal). Pour les systèmes non linéaires, l'observation reste un domaine actif de recherche. En effet, les solutions sont multiples et elles sont choisies en fonction de la classe du système à observer. Citons à titre d'exemple les travaux de [33], [29], [71]. L'utilisation d'un observateur permet d'introduire un filtrage avec une bonne estimation mais en contrepartie les équations d'état de l'observateur font appel au modèle du procédé. Par conséquent, une dégradation importante des performances peut avoir lieu au cas où le modèle ne représente pas fidèlement le comportement du procédé. Si des efforts sont faits pour rendre le modèle plus proche du processus réel, celui-ci peut devenir trop complexe pour une "exploitation" mathématique. Cet aspect, peut être considéré comme l'une des difficultés des problèmes d'observation en temps réel. Afin de pallier cet inconvénient, la recherche s'est orienté vers la synthèse d'observateurs robustes prenant en compte les incertitudes paramétriques, tel que les observateurs par modes glissants [10], [129], [28] et les observateurs à grands gains [17], [60], [112]. Pour ce dernier type d'observateur, une bonne différentiation est obtenue que si l'un des paramètres de réglage tend vers une grande valeur. Ceci rend très difficile le calcul de la dérivée d'un signal bruité, puisqu'il en résulte une grande amplification du bruit en sortie.

La seconde approche présente dans la littérature évite l'utilisation du modèle du système pour estimer les dérivées successives d'un signal donné. On préfère alors utiliser le terme de différentiateur.

L'approche linéaire pour la construction d'un différentiateur consiste à l'approximation de fonction de transfert d'un différentiateur idéal (réalisable) sur une bande de fréquence du signal considéré [82], [113]. Dans ce cas, la plage de fréquence du bruit est supposée connue, celui-ci donc peut être filtré par un filtre passe-bas. Certaines propriétés statistiques du signal et du bruit peuvent aussi être considérées [27]. Dans ce dernier cas, les modèles stochastiques du signal et du bruit sont présumés connus à priori.

Il existe aussi d'autres méthodes classiques qui consistent à approcher la dérivée par des interpolations polynomiales sur une fenêtre glissante. D'autres méthodes reposent sur l'approximation de la dérivée d'un signal par des différences finies. Dans [119], une étude comparative entre différents opérateurs de différences finies a été effectuée. La simplicité de ces méthodes pour des applications temps réel est un avantage mais elles introduisent inévitablement un déphasage.

Lorsqu'aucune information sur la dynamique du signal n'est connue, les différentiateurs algébriques peuvent représenter une solution intéressante [127]. En ayant une information minimale sur le bruit, une approche alternative basée sur la technique des régimes glissants [145] peut aussi être utilisée. Utilisant la technique des modes glissants d'ordre supérieur [94], [56], des différentiateurs d'ordre un [93] puis d'ordre supérieur [89] ont été définis.

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés tout particulièrement à l'étude de certaines techniques de différentiation robuste. Nous avons étudié dans un premier temps les différentiateurs algébriques et notre démarche consiste tout d'abord en un rappel des fondements théoriques utilisés, pour ensuite décrire ce type d'approche et présenter quelques exemples de simulations. La présentation de ces algorithmes a pour but d'effectuer une étude comparative avec les différentiateurs basés sur les modes glissants. Une étude détaillée de ces derniers sera présentée dans la deuxième partie de ce chapitre. En pratique, ces différentiateurs présentent une difficulté liée aux réglages de leurs gains. Un changement spectral du signal d'entrée nécessite en fait un choix judicieux des gains. En présence du bruit, ce type d'algorithme présente un compromis délicat entre la précision et la robustesse par rapport au bruit, ce qui limite parfois l'application de tels algorithmes dans certains domaines. Pour ce faire, nous proposons une nouvelle ver-

sion des algorithmes modes glissants. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous présentons l'intérêt de ce nouveau schéma de différentiation par rapport aux approches antérieures. Enfin en s'appuyant sur l'évaluation de plusieurs critères, un tableau récapitulatif est proposé afin de comparer les différentes méthodes de différentiation décrites tout au long de ce chapitre mais aussi une réalisation pratique dans les chapitres suivants.

## 1.2 Algorithmes basés sur les techniques algébriques

La dérivation numérique via une approche algébrique a été revisitée dans des travaux récents [52], [127], [95] et a été utilisée avec succès dans divers domaines tels que la compression, la détection des ruptures, le dé-bruitage des signaux mono-dimensionnels [49], [50] et la commande. Ces techniques ont été étendues pour des signaux multi-dimensionnels tels que les séquences d'images [48].

L'idée de base de ces dérivateurs repose sur l'hypothèse que le signal à dériver est  $C^\infty$ . Son développement en série de Taylor est alors tronqué à un certain ordre. Par application d'une transformée de Laplace, le modèle obtenu est réécrit dans le domaine opérationnel. Des dérivations opérationnelles adéquates suivies de manipulations algébriques permettent alors par passage vers le domaine temporel d'obtenir les coefficients du développement de Taylor et donc des différentes valeurs des dérivées recherchées.

Ce paragraphe débute par une brève présentation de quelques résultats mathématiques sur le calcul opérationnel qui seront utilisés par la suite dans le développement de ce type d'algorithme. Dans la dernière partie, des résultats de simulations seront exposés.

### 1.2.1 Rappels mathématiques

Dans le domaine temporel, les estimations des dérivées successives ainsi que le calcul d'intégrales requièrent quelques manipulations mathématiques, [153]. Suite à une transformation de Laplace unilatérale, ces manipulations deviennent algébriques dans le domaine opérationnel ce qui facilite les calculs. Ce paragraphe sera donc consacré aux rappels des résultats mathématiques utiles pour expliquer la formulation des dérivateurs algébriques. Toutes les démonstrations relatives aux résultats ainsi donnés sont reportées en annexe A.

Considérons un signal  $f(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment différentiable dont la transformée de Laplace unilatérale est donnée par :

$$L[f] = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.1)$$

Alors la transformée de Laplace de la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la fonction  $f$  est donnée par :

$$L\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \frac{df(0)}{dt} - \dots - s \frac{d^{n-2} f(0)}{dt^{n-2}} - \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}} \quad (1.2)$$

Une multiplication de  $F(s)$  par le terme  $s^{-\alpha}$  ( $\alpha$  est un entier) se traduit dans le domaine temporel par une suite d'intégrales itérées comme suit :

$$L^{-1}[s^{-\alpha} F(s)] = \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt^\alpha, \quad \alpha \geq 1 \quad (1.3)$$

Cette dernière s'exprime au moyen de l'intégrale de convolution comme suit, (voir détails annexe A) :

$$\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt^\alpha = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \alpha \geq 1 \quad (1.4)$$

si  $F(s)$  est remplacé par une constante  $c \in \mathbb{C}$  dans l'équation (1.3) alors le résultat suivant est obtenu :

$$L^{-1}[s^{-\alpha}c] = cL^{-1}[s^{-\alpha}] = c \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}, \quad \alpha \geq 1 \quad (1.5)$$

Rappelons aussi que la dérivée par rapport à l'opérateur  $s$  correspond à une multiplication par  $(-t)$  dans le domaine temporel. Pour un ordre  $n$ , ceci est illustré par la relation ci-dessous :

$$L^{-1}\left[\frac{d^n F(s)}{ds^n}\right] = (-1)^n t^n f(t), \quad n \geq 0 \quad (1.6)$$

A partir de (1.3), (1.4) et (1.6), l'équation suivante est obtenue :

$$L^{-1}\left[s^{-\alpha} \frac{d^n F(s)}{ds^n}\right] = \frac{(-1)^n}{(\alpha-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^n f(\tau) d\tau, \quad \alpha \geq 1, \quad n \geq 0 \quad (1.7)$$

## 1.2.2 Méthodes d'estimation des dérivées par approche algébrique

Dans cette partie, nous présentons une synthèse des travaux développés dans [32], [105], [106], [148]. Soit  $y(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction supposée  $C^\infty$  dont on souhaite estimer les valeurs numériques des dérivées. Cette fonction peut être représentée par son développement en série de Taylor :

$$y(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} y^{(i)}(t_0) \frac{(t-t_0)^i}{i!} \quad (1.8)$$

Où  $t > t_0 > 0$  et  $y^{(i)}(t_0)$ <sup>1</sup> évaluée à l'instant  $t_0$ . En tronquant le développement de la série de Taylor à l'ordre  $N$ , en notant l'approximant  $\tilde{y}(t)$  de  $y(t)$  autour de  $t = t_0$ , l'expression (1.8) devient :

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=0}^N y^{(i)}(t_0) \frac{(t-t_0)^i}{i!} \quad (1.9)$$

En choisissant  $N = 1$ , l'égalité suivante est obtenue  $\tilde{y}(t) = y(t_0) + \dot{y}(t_0)(t-t_0)$ . A partir de cette dernière égalité et par dérivations successives de  $\tilde{y}(t)$  calculé en  $t_0$ , nous pouvons déduire le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{y}(t)}{dt^2} = 0 \\ \frac{d\tilde{y}(t_0)}{dt} = \frac{dy(t_0)}{dt} \\ \tilde{y}(t_0) = y(t_0). \end{cases} \quad (1.10)$$

Une généralisation des calculs décrits précédemment conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^{N+1} \tilde{y}(t)}{dt^{N+1}} = 0 \\ \frac{d^j \tilde{y}(t_0)}{dt^j} = \frac{d^j y(t_0)}{dt^j}, \quad j = 0, 1, \dots, N \end{cases} \quad (1.11)$$

1.  $y^{(i)}$  représente la dérivée  $i$ ème de la fonction  $y(t)$  par rapport au temps

La seule valeur connue au niveau de ce système (1.11) est la valeur de  $y$  en  $t_0$ . Donc mise à part la connaissance de  $\tilde{y}(t_0)$ , toutes les valeurs de ce système sont inconnues puisque les  $N$  dérivées de  $y(t)$  sont à estimer.

D'après (1.2), la transformée de Laplace de la première équation du système (1.11) s'écrit :

$$L \left[ \frac{d^{N+1}\tilde{y}(t)}{dt^{N+1}} \right] = s^{N+1}\tilde{Y}(s) - s^N y(t_0) - s^{N-1} \frac{dy(t_0)}{dt} - \dots - s \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} - \frac{d^N y(t_0)}{dt^N} = 0 \quad (1.12)$$

Ceci permet d'écrire :

$$s^{N+1}\tilde{Y}(s) = s^N y(t_0) + s^{N-1} \frac{dy(t_0)}{dt} + \dots + s \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} + \frac{d^N y(t_0)}{dt^N} \quad (1.13)$$

Selon les manipulations algébriques à effectuer, différents dérivateurs peuvent être développés. Dans la suite, nous présentons trois versions pour ce type d'approche. Dans un premier temps, nous commençons par la synthèse d'une première version proposée dans [127].

### 1.2.2.1 Dérivateur algébrique : première version

A partir de l'équation (1.13), on a l'égalité suivante :

$$\frac{d^{N+1}}{ds^{N+1}}(s^{N+1}\tilde{Y}(s)) = 0 \quad (1.14)$$

Remarquons que cette équation est totalement indépendante des conditions initiales qui sont données par les dérivées du signal  $y(t)$  à l'instant  $t = t_0$ .

Par multiplication de l'équation (1.14) par l'opérateur de Laplace de puissance négative, cette équation permet de former le système triangulaire suivant :

$$\boxed{s^{-j} \frac{d^{N+1}}{ds^{N+1}}(s^{N+1}\tilde{Y}(s)) = 0, \quad j = N, N-1, \dots, 1.} \quad (1.15)$$

En revenant au domaine temporel, le système (1.15) permet alors d'approximer les dérivées successives de  $y(t)$ .

Pour alléger les calculs et afin de mieux illustrer le développement décrit précédemment, considérons le cas où  $N = 3$  pour lequel l'équation (1.14) s'écrit :

$$\frac{d^4}{ds^4}(s^4\tilde{Y}(s)) = 0 \quad (1.16)$$

A partir de  $\frac{d}{ds}(s^4\tilde{Y}(s)) = 4s^3\tilde{Y}(s) + s^4\frac{d\tilde{Y}(s)}{ds}$ , et suite aux trois dérivées successives de cette dernière, l'équation (1.16) devient :

$$24\tilde{Y}(s) + 96s \frac{d\tilde{Y}(s)}{ds} + 72s^2 \frac{d^2\tilde{Y}(s)}{ds^2} + 16s^3 \frac{d^3\tilde{Y}(s)}{ds^3} + s^4 \frac{d^4\tilde{Y}(s)}{ds^4} = 0 \quad (1.17)$$

Pour estimer la dérivée première du signal d'entrée, il suffit alors de calculer l'expression  $s^{-3} \frac{d^4}{ds^4}(s^4\tilde{Y}(s)) = 0$ . A partir de cette dernière, on obtient :

$$24s^{-3}\tilde{Y}(s) + 96s^{-2} \frac{d\tilde{Y}(s)}{ds} + 72s^{-1} \frac{d^2\tilde{Y}(s)}{ds^2} + 16 \frac{d^3\tilde{Y}(s)}{ds^3} + s \frac{d^4\tilde{Y}(s)}{ds^4} = 0 \quad (1.18)$$

Sans nuire à la généralité mais afin d'alléger l'écriture considérons  $t_0 = 0$ . En revenant au domaine temporel tout en remplaçant  $\tilde{y}$  par  $y$  et en utilisant les équations (1.3), (1.6), on obtient :

$$24 \int^{(3)} y(t) dt^3 - 96 \int^{(2)} ty(t) dt^2 + 72 \int t^2 y(t) dt - 16t^3 y(t) + \frac{d}{dt}(t^4 y(t)) = 0 \quad (1.19)$$

Où  $\int^{(n)} f(t)dt^n$  représente l'intégrale itérée  $\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t)dt^n$ . A partir de (1.19), nous pouvons alors extraire l'expression de la première dérivée de  $y(t)$  en fonction des intégrales itérées du signal d'entrée :

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{estimée} = \frac{1}{t^4} \left[ -24 \int^{(3)} y(t)dt^3 + 96 \int^{(2)} ty(t)dt^2 - 72 \int t^2 y(t)dt + 12t^3 y(t) \right] \quad (1.20)$$

Ensuite par calcul de  $s^{-2} \frac{d^4}{ds^4} (s^4 \tilde{Y}(s)) = 0$ , l'expression de l'estimation relative à la dérivée seconde de  $y(t)$  est donnée par :

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)_{estimée} = \frac{1}{t^4} \left[ -24 \int^{(2)} y(t)dt^2 + 96 \int ty(t)dt - 36t^2 y(t) + 8t^3 \left(\frac{dy}{dt}\right)_{estimée} \right] \quad (1.21)$$

L'équation (1.21) montre que pour le calcul de  $\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)_{estimée}$ , nous avons besoin d'utiliser l'estimation première du signal d'entrée  $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{estimée}$ . Par conséquent, les différentes équations décrites ci-dessus peuvent bien se mettre sous une forme triangulaire.

Pour ce faire, posons tout d'abord :

$$\begin{cases} z_1 = -24 \int^{(3)} y(t)dt^3 + 96 \int^{(2)} ty(t)dt^2 - 72 \int t^2 y(t)dt \\ z_2 = -24 \int^{(2)} y(t)dt^2 + 96 \int ty(t)dt \\ z_3 = -24 \int y(t)dt \end{cases} \quad (1.22)$$

Nous pouvons alors mettre toutes les équations obtenues sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - 72t^2 y(t) \\ \dot{z}_2 = z_3 + 96ty(t) \\ \dot{z}_3 = -24y(t) \end{cases} \quad (1.23)$$

et

$$\begin{pmatrix} t^4 & 0 \\ -8t^3 & t^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{dy}{dt}\right)_{estimée} \\ \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)_{estimée} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12t^3 y(t) \\ -36t^2 y(t) \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

Les équations du système (1.23) décrivent un système dynamique linéaire variant dans le temps, où (1.24) représente les équations implicites des sorties.

Le principal intérêt de ce type de dérivateurs algébriques et qu'il nécessite pour l'obtention des dérivées successives que des calculs d'intégrales itérées du signal  $y(t)$  et aucune hypothèse particulière sur le bruit affectant ce signal.

Les différentes intégrales itérées présentes dans (1.22) peuvent être calculées au moyen de l'intégrale de convolution, voir équation (1.4). Ainsi, les signaux estimés  $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{estimée}$  et  $\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)_{estimée}$  peuvent être mis sous la forme générale suivante :

$$y_{estimée}^{(i)}(t) = \frac{1}{t^4} \int_0^t P_i(\tau) y(\tau) d\tau + Q_i(t), \quad i \in \{1, 2\} \quad (1.25)$$

Avec :

$$\begin{cases} P_1 = -12(t - \tau)^2 + 96(t - \tau)\tau - 72\tau^2 \\ P_2 = -24(t - \tau) + 96\tau \end{cases} \quad (1.26)$$

et

$$\begin{cases} Q_1 = 12t^3 y(t) \\ Q_2 = -36t^2 y(t) + 8t^3 \left(\frac{dy}{dt}\right)_{estimée} \end{cases} \quad (1.27)$$

Pour la mise en oeuvre de l'algorithme, les valeurs numériques des intégrales peuvent être approchées par la méthode des trapèzes, où l'approximation de l'intégrale entre deux échantillons  $t_i$  et  $t_{i+T_e}$  est donnée par :

$$\int_{t_i}^{t_i+T_e} y(\tau) d\tau \simeq T_e \frac{y(t_i) + y(t_i + T_e)}{2} \quad (1.28)$$

Il suffit ensuite de faire la somme des intégrales élémentaires pour retrouver l'estimation de l'intégrale sur tout l'horizon de calcul.

Suite aux développements effectués, nous pouvons signaler que cette version de l'algorithme est simple à implémenter. Cependant, certains problèmes de mise en oeuvre se présentent tels que l'indétermination du dérivateur à l'instant  $t = 0$  ce qui nécessite de supprimer un certain nombre de points à l'instant initial. De plus, du fait de la troncature de la série de Taylor, les estimations des valeurs des dérivées deviennent plus fausses lorsqu'on s'éloigne de l'origine temporelle. Pour résoudre ce problème, une réinitialisation régulière de l'algorithme est obligatoire.

Pour pallier à certains inconvénients de cette démarche, une autre version proposée dans [106], [148] fait l'objet du paragraphe suivant.

### 1.2.2.2 Dérivateur algébrique : deuxième version

En revenant à l'équation (1.13) et en imposant  $t_0 = 0$ , nous retrouvons :

$$s^{N+1} \tilde{Y}(s) = s^N y(0) + s^{N-1} \frac{dy(0)}{dt} \dots + \frac{d^N y(0)}{dt^N} \quad (1.29)$$

Au lieu d'utiliser l'opérateur différentiel  $\left(\frac{d}{ds}\right)$  au degré  $N + 1$  comme dans la première version (voir équation (1.14)), pour cette version, ce même opérateur est utilisé mais au degré  $m$ , défini tel que :

$$\frac{d^m}{ds^m}, \quad m = 0, \dots, N \quad (1.30)$$

Donc en multipliant (1.29) par cet opérateur puis par  $s^{-\nu}$ , où  $\nu \geq N + 2$ , nous avons :

$$\boxed{s^{-\nu} \frac{d^m}{ds^m} s^{N+1} \tilde{Y}(s) = s^{-\nu} \frac{d^m}{ds^m} \left\{ s^N y(0) + s^{N-1} \frac{dy(0)}{dt} + \dots + \frac{d^N y(0)}{dt^N} \right\}} \quad (1.31)$$

En revenant au domaine temporel et par application des règles décrites dans le rappel mathématique, le résultat sera alors décrit par un système de forme triangulaire à éléments diagonaux non nuls. Ceci amène alors à trouver une expression générale des estimateurs des dérivées  $N^{ième}$  du signal d'entrée. Dans une fenêtre d'estimation de taille  $T$ , cette expression peut être représentée par le système triangulaire suivant :

$$\boxed{P_\nu(T) \begin{pmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(0) \\ y^{(N)}(0) \end{pmatrix} = \int_0^T Q_\nu(\tau_1) y(\tau_1) d\tau_1} \quad (1.32)$$

Pour  $i = 0, \dots, N$  et  $j = 0, \dots, N - i$ , les éléments de la matrice triangulaire  $P_\nu(T)$  sont alors donnés par :

$$\boxed{P_\nu(T)_{ij} = \frac{(N-j)!}{(N-i-j)!} \frac{T^{\nu-N+i+j-1}}{(\nu-N+i+j-1)!}} \quad (1.33)$$

et

$$Q_\nu(T)_i = \sum_{l=0}^i q_{i,l} (T - \tau_1)^{\nu-N-2+l} \tau_1^{i-l} \quad (1.34)$$

avec

$$q_{i,l} = \binom{i}{l} \frac{(N+1)!}{(N+1-l)!} \frac{(-1)^{i-l}}{(\nu-N-2+l)!} \quad (1.35)$$

Sachant que :

$$\binom{i}{l} = C_i^l = \frac{i!}{l!(i-l)!}$$

Nous remarquons que tous les termes non nuls de  $P_\nu(T)_{ij}$  ne dépendent que de la taille de la fenêtre d'estimation ce qui permet d'éviter le problème à  $t = 0$  rencontré dans la première version. D'autre part, le problème de réinitialisation des fenêtres est évité en utilisant des fenêtres glissantes de taille fixe (ou variable)  $T$ . Le choix de cette fenêtre sera déterminé par la dynamique du signal considéré et aussi par les performances à imposer.

Selon la formulation du système (1.32), la première valeur des estimées de  $y$  est calculée pendant l'intervalle de temps  $[0, T]$ . Par la suite, seules les bornes de l'intégrale changeront. En effet, en faisant glisser la fenêtre d'estimation d'une période d'échantillonnage, la deuxième valeur des estimées est alors calculée.

Soit l'intervalle de temps d'estimation  $I_{t_+}^T = [t, t + T]$ . Pour le calcul des estimées à un instant  $t_i \in I_{t_+}^T$ , on est amené à utiliser la valeur de  $y(t_i + \tau_1)$ . Or à l'instant  $t_i$ , la valeur de  $y(t_i + \tau_1)$  n'est pas connue ce qui impose un caractère non-causal aux estimées. Pour éviter ce problème et afin de se baser uniquement sur les observations du signal à l'instant courant et aux instants précédents, il suffit de réaliser les calculs en considérant l'intervalle  $I_{t_-}^T = [t - T, t]$ , au lieu de  $I_{t_+}^T$  et ce qui revient à remplacer le terme  $y(t_i + \tau_1)$  par  $-y(t_i - \tau_1)$  dans (1.32).

Pour valider cette méthode, un exemple est développé ci-dessous avec  $N = 2$  et  $\nu = 4$ . Suite aux calculs effectués, le système triangulaire suivant est obtenu :

$$\begin{pmatrix} T & \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{6} \\ T^2 & \frac{T^3}{6} & 0 \\ \frac{T^3}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \end{pmatrix} = \int_0^T \begin{pmatrix} 1 \\ 3(T - \tau_1) - \tau_1 \\ 3(T - \tau_1)^2 - 6(T - \tau_1)\tau_1 + \tau_1^2 \end{pmatrix} y(\tau_1) d\tau_1 \quad (1.36)$$

Après normalisation de l'intégrale entre  $[0, 1]$ , les différentes estimations peuvent alors être décrites par :

$$\begin{cases} y(0) = 3 \int_0^1 [3(1 - \tau)^2 - 6(1 - \tau)\tau + \tau^2] y_T(\tau) d\tau \\ \dot{y}(0) = \frac{6}{T} \int_0^1 [3(1 - \frac{4}{3}\tau)] y_T(\tau) d\tau - \frac{6}{T} y(0) \\ \ddot{y}(0) = \frac{6}{T^2} \int_0^1 y_T(\tau) d\tau - \frac{3}{T} \dot{y}(0) - \frac{6}{T^2} y(0) \end{cases} \quad (1.37)$$

où  $\tau \in [0, 1]$  et  $y_T$  est le signal  $y$  considéré dans la fenêtre d'estimation de taille  $T$ . Pour faire cette normalisation, il suffit d'effectuer un changement de variable tel que  $\tau_1 = T\tau$ .

Les améliorations apportées par cette deuxième version peuvent se résumer en deux points : pas de problème relatif aux conditions initiales et pas d'indétermination de l'algorithme pour  $t = 0$ . Toutefois l'estimation des dérivées se fait comme dans la version précédente donc d'une façon récursive. Pour résoudre le problème de dépendance entre les différentes estimées, une troisième version des estimateurs algébriques a été proposée, [105].

### 1.2.2.3 Dérivateur algébrique : troisième version

Pour synthétiser des estimateurs individuels de la dérivée  $n^{\text{ième}}$  du signal d'entrée  $y$ , l'idée de base consiste à estimer uniquement le coefficient  $y^{(n)}(0)$  du développement de Taylor de  $y(t)$ . Commençons tout d'abord par écrire (1.9) pour  $t_0 = 0$  :

$$y(t) = \sum_{i=0}^N y^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!} \quad (1.38)$$

Pour isoler la dérivée désirée, il suffit alors d'effectuer des manipulations algébriques sur l'équation précédente afin d'éliminer tous les autres termes où  $i \neq n$ .

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (1.38) et en utilisant le rappel mathématique (équation (1.5)), nous obtenons :

$$Y(s) = \sum_{i=0}^N \frac{y^{(i)}(0)}{s^{i+1}}. \quad (1.39)$$

En examinant (1.39), nous constatons que chaque dérivée est divisée par des exposants de  $s$  différents des autres. Ce qui indique que des multiplications par des exposants de  $s$  suivies par des dérivations successives par rapport à  $s$  permet d'écrire la dérivée désirée en fonction uniquement de  $y(t)$ . Pour obtenir ce résultat, différents opérateurs différentiels linéaires existent. Dans [105], l'opérateur suivant a été utilisé :

$$\Pi_k^{N,n} = \frac{d^{n+k}}{ds^{n+k}} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{d^{N-n}}{ds^{N-n}}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (1.40)$$

Nous justifions ci-dessous le choix de ce type d'opérateur, dénommé "annihilateur". Pour ce faire, multiplions tout d'abord les deux membres de (1.39) par  $s^{N+1}$  :

$$s^{N+1}(Y(s)) = \sum_{i=0}^N y^{(i)}(0) s^{N-i}. \quad (1.41)$$

A partir de (1.41) et pour  $i > n$ , on a  $N-n > N-i$ . Ceci permet alors d'obtenir  $\frac{d^{N-n}}{ds^{N-n}} s^{N-i} = 0$  et  $\frac{d^{N-n}}{ds^{N-n}} s^{N-n} = (N-n)!$ . De ce qui précède, nous pouvons alors conclure que le terme  $\frac{d^{N-n}}{ds^{N-n}}$  présent dans (1.40) permet d'annihiler tous les coefficients de  $y^{(i)}(0)$  ayant  $i > n$ . Ensuite en multipliant le reste des coefficients par  $s^{-1}$ , l'apparition du terme  $(N-n)!s^{-1}y^{(n)}(0)$  est assurée. Par la suite la multiplication par  $\frac{d^{n+k}}{ds^{n+k}}$  permet au final d'annihiler les termes ayant  $i < n$ .

En appliquant cet opérateur différentiel à l'équation (1.41), l'expression suivante est donnée :

$$\Pi_k^{N,n} (s^{N+1}Y(s)) = \frac{(-1)^{n+k}(N-n)!(n+k)!}{s^{n+k+1}} y^{(n)}(0) \quad (1.42)$$

Pour assurer le caractère strictement propre à la famille d'estimateurs, une multiplication par  $s^{-\nu}$  aux deux membres de l'équation (1.42) est imposée. Avec :

$$\nu = N + 1 + \mu, \quad \text{où} \quad \mu \geq 0$$

Ceci est surtout lié au premier membre de (1.42) puisqu'en dérivant, des termes en  $s^i Y(s)$  vont apparaître.

Le passage au domaine temporel en exprimant l'estimateur dans une fenêtre de taille  $T$  permet, en utilisant (1.5), d'obtenir l'équation suivante :

$$L^{-1} \left[ \frac{1}{s^\nu} \Pi_k^{N,n} (s^{N+1}Y(s)) \right] = \frac{(-1)^{n+k}(N-n)!(n+k)!T^{\nu+n+k}}{(\nu+n+k)!} y^{(n)}(0) \quad (1.43)$$

Finalement, d'après (1.3) et (1.4) l'estimateur suivant est obtenu. Il permet de fournir la dérivée  $n^{\text{ième}} y_N^{(n)}(0, k, \nu)$  qui est estimée en 0 et est paramétrée par  $k$  et  $\nu$  et dont le calcul a été effectué pour un développement de Taylor tronqué à l'ordre  $N$  :

$$y_N^{(n)}(0, k, \nu) = \frac{(-1)^{n+k}(\nu+n+k)!}{(n+k)!(N-n)!T^{\nu+n+k}} \int_0^T \Pi(\tau_1) y(\tau_1) d\tau_1 \quad (1.44)$$

où

$$\Pi(\tau) = \sum_{i=0}^{N-n} \binom{N-n}{i} \frac{(N+1)!}{(n+i+1)!} \sum_{j=0}^{N+k} \binom{n+k}{j} \frac{(n+1)!}{(j+1-k)!} \frac{(T-\tau_1)^{\nu+k-j-2} (-\tau_1)^{i+j}}{(\nu+k-j-2)!} \quad (1.45)$$

Pour illustrer le développement précédent, nous exprimons la dérivée première d'un signal d'entrée  $y$  en choisissant les valeurs des paramètres comme suit ( $n = 1, N = 3, \mu = 5, k = 1$ ). Ceci amène à l'équation ci-dessous :

$$\dot{y}_{N=3}(0) = \frac{11!}{5!(4T)} \int_0^1 \left[ -\frac{40}{336}(1-\tau)^8\tau + \frac{50}{42}(1-\tau)^7\tau^2 - \frac{14}{6}(1-\tau)^6\tau^3 + (1-\tau)^5\tau^4 \right] y_T(\tau) d\tau \quad (1.46)$$

Pour estimer la dérivée seconde, nous gardons les mêmes paramètres déjà fixés pour le calcul précédent (1.46) sauf que dans ce cas  $n = 2$ , ce qui conduit à :

$$\ddot{y}_{N=3}(0) = -\frac{12!}{5!(6T^2)} \int_0^1 \left[ -\frac{30}{336}(1-\tau)^8\tau + (1-\tau)^7\tau^2 - \frac{13}{6}(1-\tau)^6\tau^3 + (1-\tau)^5\tau^4 \right] y_T(\tau) d\tau \quad (1.47)$$

Remarque : Tous les calculs présentés ci-dessus sont obtenus suite à une normalisation de l'intégrale de  $[0, T]$  à  $[0, 1]$  où  $\tau \in [0, 1]$ .

Dans l'exemple déjà présenté, l'estimateur est synthétisé à partir d'un développement de Taylor non minimal ( $N > n$ ). Par conséquent, ce type d'estimateur sera appelé "estimateur non minimal". Pour un développement de Taylor d'ordre ( $N = n$ ), l'estimateur sera alors nommé par "estimateur minimal" vu qu'il est synthétisé à partir d'un développement de Taylor minimal. Dans ce cas, (1.40) devient :

$$\Pi_k^n = \frac{d^{n+k}}{ds^{n+k}} \frac{1}{s}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (1.48)$$

Ceci permet d'écrire cet estimateur de la manière suivante :

$$\frac{1}{s^\nu} \left( \frac{d^{n+k}}{ds^{n+k}} s^n Y(s) \right) = \frac{(-1)^{n+k} (n+k)!}{s^{\nu+n+k+1}} y_{N=n}^{(n)}(0) \quad (1.49)$$

En remplaçant  $\nu$  par son expression, (1.49) devient :

$$\frac{1}{s^{n+1+\mu}} \left( \frac{d^{n+k}}{ds^{n+k}} s^n Y(s) \right) = \frac{(-1)^{n+k} (n+k)!}{s^{\mu+k+2n+2}} y_{N=n}^{(n)}(0) \quad (1.50)$$

La remarque que nous avons effectuée précédemment concernant le problème de la non-causalité des estimées, peut aussi être évoquée dans cette version. La même solution est donc utilisée en remplaçant  $I_{t+}^T$  par  $I_{t-}^T$ .

Dans [105] et [106], les auteurs décrivent un problème relatif aux estimateurs minimaux. Ce problème repose sur la présence d'un décalage  $r$  (déphasage) dans le signal estimé. Toutefois, ce problème est évité pour les estimateurs non minimaux. Donc bien que ces estimateurs minimaux aient été synthétisés pour un développement de Taylor autour de  $t_0$ , ils correspondent en réalité à une estimation de la dérivée en un point  $t_0 + r$  différent du point  $t_0$ . Il est évident

que ce type de problème est inacceptable dans les applications temps réel. Pour résoudre ce problème, une quantification de ce retard est alors inévitable pour pouvoir recalculer la dérivée estimée à la dérivée théorique. Pour quantifier le décalage inhérent aux estimateurs minimaux, une projection orthogonale de l'estimé de la dérivée dans une base formée par les polynômes de Jacobi jusqu'à un certain ordre est effectuée.

Étudions maintenant ce problème, nous savons qu'une fonction analytique peut être exprimée par une somme pondérée des éléments d'une suite de polynômes et que ces derniers peuvent bien être orthogonaux. Traditionnellement, une estimation des dérivées successives d'un signal analytique donné peut se faire par une projection orthogonale du signal dans une base de polynômes orthogonaux suivit de la différentiation des polynômes obtenus. Sauf qu'avec la famille d'estimateurs donnée par (1.44), une projection orthogonale dans une base polynômiale de Jacobi est fournie d'une façon explicite.

Pour illustrer ce qui précède, nous considérons l'exemple où  $N = n = 1$  donc  $\nu = \mu + 2$ , l'équation (1.50) devient alors :

$$\frac{(-1)^{1+k}}{(1+k)!} \left[ \frac{1}{s^{2+\mu}} \left( \frac{d^{1+k}}{ds^{1+k}} sY(s) \right) \right] = \frac{\dot{y}(0, k, \mu)}{s^{\mu+k+4}} \quad (1.51)$$

A partir de cette dernière, on a :

$$\frac{(-1)^{1+k}}{(1+k)!} \left[ \frac{Y(s)^{(1+k)}}{s^{\mu+1}} + (1+k) \frac{Y(s)^{(k)}}{s^{\mu+2}} \right] = \frac{\dot{y}(0, k, \mu)}{s^{\mu+k+4}} \quad (1.52)$$

Par passage au domaine temporel (voir équations (1.3), (1.4) et (1.7)), (1.52) devient :

$$\dot{y}(0, k, \mu) = \frac{(-1)^{1+k} (\mu + k + 3)!}{T^{\mu+k+3} (1+k)!} \int_0^T \left[ \frac{(-1)^{1+k}}{\mu!} (T - \tau_1)^\mu \tau_1^{1+k} + \frac{(-1)^k (1+k)}{(\mu+1)!} (T - \tau_1)^{\mu+1} \tau_1^k \right] y(\tau_1) d\tau_1 \quad (1.53)$$

On a alors,

$$\dot{y}(0, k, \mu) = \frac{1}{T^{\mu+k+3}} \frac{(\mu + k + 3)!}{(1+k)! (\mu + 1)!} \int_0^T [(T - \tau_1)^\mu \tau_1^k ((k + \mu + 2)\tau_1 - (1+k)T)] y(\tau_1) d\tau_1 \quad (1.54)$$

En normalisant l'intégrale dans l'intervalle  $[0, 1]$  en faisant le changement de variable  $\tau_1 = T\tau$ , nous avons :

$$\dot{y}(0, k, \mu) = \frac{1}{T} \frac{(\mu + k + 3)!}{(1+k)! (\mu + 1)!} \int_0^1 [(1 - \tau)^\mu \tau^k ((k + \mu + 2)\tau - (1+k))] y_T(\tau) d\tau \quad (1.55)$$

Où  $\tau \in [0, 1]$ .

Nous pouvons remarquer que :

$$(1 - \tau)^\mu \tau^k ((k + \mu + 2)\tau - (1+k)) = -\frac{d}{d\tau} \{(1 - \tau)^{\mu+1} \tau^{1+k}\} \quad (1.56)$$

Ce qui nous amène à exprimer (1.55) par :

$$\dot{y}(0, k, \mu) = \frac{1}{T} \frac{(\mu + k + 3)!}{(1+k)! (\mu + 1)!} \int_0^1 -\frac{d}{d\tau} \{(1 - \tau)^{\mu+1} \tau^{1+k}\} y_T(\tau) d\tau \quad (1.57)$$

Par intégration par parties de (1.57), nous avons :

$$\dot{y}(0, k, \mu) = \frac{1}{T} \frac{(\mu + k + 3)!}{(1+k)! (\mu + 1)!} \left( \left[ -\frac{d}{d\tau} \{(1 - \tau)^{\mu+1} \tau^{1+k}\} y_T(\tau) \right]_0^1 + \int_0^1 \{(1 - \tau)^{\mu+1} \tau^{1+k}\} y_T(\tau) d\tau \right) \quad (1.58)$$

En conséquence, nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \dot{y}(0, k, \mu) &= \frac{1}{\|P_0^{\mu,k}(t)\|^2} \int_0^1 P_0^{\mu,k}(\tau) \varpi_{\mu,k}(\tau) \dot{y}_T(\tau) d\tau \\ &= \frac{\langle P_0^{\mu,k}(\tau), \dot{y}_T(\tau) \rangle_{\mu,k}}{\|P_0^{\mu,k}(t)\|^2} \end{aligned} \quad (1.59)$$

Définissons  $P_i^{\mu,k}(t)$ , ( $i \geq 0$ ) par les polynômes orthogonaux de Jacobi associés à une fonction poids notée par  $\varpi_{\mu,k}(t) = (1-t)^{\mu+1}t^{1+k}$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

Donc le terme  $\dot{y}(0, k, \mu)$  est alors égal au produit scalaire de  $P_0^{\mu,k}(\tau)$  et  $\dot{y}_T(\tau)$  normalisé par  $\|P_0^{\mu,k}(t)\|^2$  sur un intervalle d'orthogonalité  $[0, 1]$ , avec  $P_0^{\mu,k}(t) = 1$  et  $\|P_0^{\mu,k}(t)\|^2 = \frac{(\mu+1)!(1+k)!}{(\mu+k+3)!}$ . Donc, l'estimation de la première dérivée du signal  $y$  apparaît comme étant une projection orthogonale de la dérivée du signal  $\dot{y}$  à priori inconnu sur  $P_0^{\mu,k}(t)$ .

En exprimant  $\dot{y}_T(\tau)$ , avec  $\tau \in [0, 1]$  dans la base de polynômes orthogonaux, nous pouvons alors écrire :

$$\dot{y}_T(\tau) = \sum_{j=0}^{np} a_j P_j^{\mu,k}(\tau), \quad np > 0 \quad (1.60)$$

A partir de (1.59) et (1.60), nous pouvons nous rendre compte que  $\dot{y}(0, k, \mu)$  coïncide avec le terme  $a_0$  et qui s'avère correspondre en réalité à une estimation de  $\dot{y}_T(\tau_0)$  pour une valeur de  $\tau_0$  donnée.

En approximant  $\dot{y}_T(\tau)$  à un modèle d'ordre un pour  $\tau = \tau_0$  ce qui ramène (1.60) à :

$$\dot{y}_T(\tau_0) \approx a_0 P_0^{\mu,k}(\tau_0) + a_1 P_1^{\mu,k}(\tau_0) = a_0 \quad (1.61)$$

Nous savons déjà que  $P_0^{\mu,k}(\tau_0) = 1$  et en imposant  $P_1^{\mu,k}(\tau_0) = 0$ , l'égalité ci-dessus est vérifiée. A partir de  $P_1^{\mu,k}(\tau_0) = 0$  et en utilisant le tableau de l'annexe B, une identification de la valeur de  $\tau_0$  est effectuée en donnant l'expression suivante :

$$\tau_0 = \frac{k+2}{\mu+k+4} \quad (1.62)$$

A partir du développement précédent, une quantification du retard relatif aux estimateurs minimaux a été exprimée et est paramétrée par  $k$  et  $\mu$ .

Considérons maintenant le cas où  $N = 2$  et  $n = 1$ , une expression équivalente à (1.52) est obtenue :

$$\frac{(-1)^{1+k}}{(1+k)!} \left[ \frac{y^{(2+k)}}{s^{\mu+1}} + (2+k) \frac{y^{(k+1)}}{s^{\mu+2}} + (k+3) \left( \frac{y^{(1+k)}}{s^{\mu+2}} + (1+k) \frac{y^{(k)}}{s^{\mu+3}} \right) \right] = \frac{\dot{y}(0, k, \mu, 2)}{s^{\mu+k+5}} \quad (1.63)$$

En procédant de la même façon que l'exemple précédant et par passage au domaine temporel, la relation suivante est déduite :

$$\dot{y}(0, k, \mu, 2) = \frac{\langle P_0^{\mu,k}(\tau), \dot{y}_T(\tau) \rangle_{\mu,k}}{\|P_0^{\mu,k}(t)\|^2} + P_1^{\mu,k}(0) \frac{\langle P_1^{\mu,k}(\tau), \dot{y}_T(\tau) \rangle_{\mu,k}}{\|P_1^{\mu,k}(t)\|^2} \quad (1.64)$$

où  $P_1^{\mu,k}(0) = -\tau_0$ . Cette dernière relation montre bien que le décalage induit par un estimateur minimal est compensé par un estimateur non minimal, ce qui est vérifié en exprimant cet estimateur sur une base polynômiale orthogonale de Jacobi.

Pour la validation de cette version d'estimateur algébrique, nous considérerons le cas d'un estimateur minimal (équation (1.65)) et non minimal (équation (1.46)) de la dérivée première d'un signal d'entrée  $y(t)$  et le cas d'un dérivateur non minimal (équation (1.47)) pour l'estimation de la dérivée seconde de  $y(t)$ . Pour l'estimation de la dérivée première nous choisissons  $N = n = 1$  et  $k = \mu = 0$ , ce qui conduit au résultat suivant :

$$\dot{y}_{N=1}(0) = \frac{6}{T} \int_0^1 [\tau - (1 - \tau)] y_T(\tau) d\tau, \quad \tau \in [0, 1] \quad (1.65)$$

### 1.2.3 Validation

Rappelons que la synthèse effectuée sur les estimateurs algébriques a pour but de comparer ces derniers avec les différentiateurs modes glissants et les algorithmes que nous avons développé. Pour ce faire, nous présentons maintenant des critères de comparaisons qui seront utilisés au cours de la validation de tous les algorithmes de différentiation décrits dans ce chapitre.

#### 1.2.3.1 Critères de validation

Dans un premier temps, nous considérons le signal non bruité  $f(t) = \cos(0.6\pi t)$  comme un signal d'entrée des dérivateurs, voir figure 1.1.

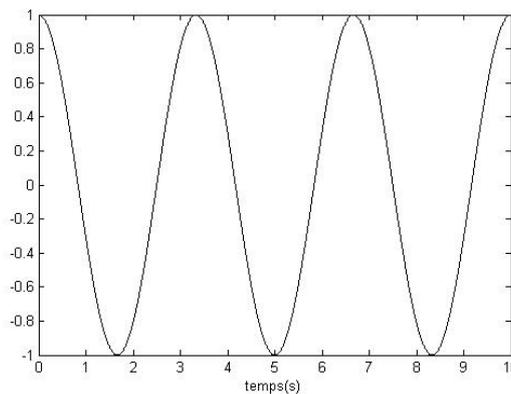


FIGURE 1.1 – Signal d'entrée.

Dans chaque étude comparative, nous prenons en compte les précisions des algorithmes par rapport à l'amplitude et le déphasage induit suite à la dérivation. Pour estimer la précision des dérivateurs par rapport à l'amplitude, deux types d'erreurs sont calculés. L'erreur  $e$  considérée est la différence entre la sortie de l'algorithme et la dérivée analytique. Nous considérons alors la valeur absolue de l'erreur maximale  $|e_{max}|$  et  $|e_{amax}|$  l'erreur absolue donnée par la formule suivante :

$$|e_{amax}|(\%) = 100 * \max \left( \frac{|e|}{|D_{th}|} \right) \quad (1.66)$$

$e$  et  $D_{th}$  représentent respectivement l'erreur et la dérivée théorique. Afin d'avoir un ordre de grandeur raisonnable de l'erreur absolue, celle-ci est calculée pour une bande de valeurs au-delà de  $\pm 10\%$  de la dérivée théorique  $D_{th}$ , ce qui permet d'éviter de considérer des valeurs nulles de la dérivée théorique.

Pour estimer le déphasage obtenu, des courbes de Lissajous peuvent être tracées où la dérivée théorique est représentée en fonction de la sortie de l'algorithme considéré. Dans le cas où la dérivée estimée présente un déphasage nul, la courbe de Lissajous est décrite par une droite. La

présence d'un écart entre les points d'intersection avec les axes des abscisses représente le déphasage, cette courbe sera présentée par une ellipse. Parfois pour certains algorithmes, la courbe de Lissajous sera décrite par un ensemble d'ellipses. Dans ce cas particulier, uniquement la valeur maximale du déphasage est alors prise en compte. Il est à préciser que la méthode utilisée permet de déduire le déphasage par rapport à zéro et non pas crête à crête.

La mise en oeuvre des schémas de différentiation présente toujours quelques problèmes dont le plus important est la présence du bruit au niveau du signal d'entrée, qui est généralement inconnu étant donné que les sources de celui-ci peuvent être variables. A cet effet, une deuxième partie de cette validation visera à évaluer la robustesse par rapport au bruit. Dans notre cas, la robustesse se traduit par le taux d'atténuation du bruit au niveau du signal de sortie. Pour ce faire, considérons alors le même signal d'entrée  $f(t)$  mais en ajoutant un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et d'écart-type égal à 0.03, voir figure 1.2.

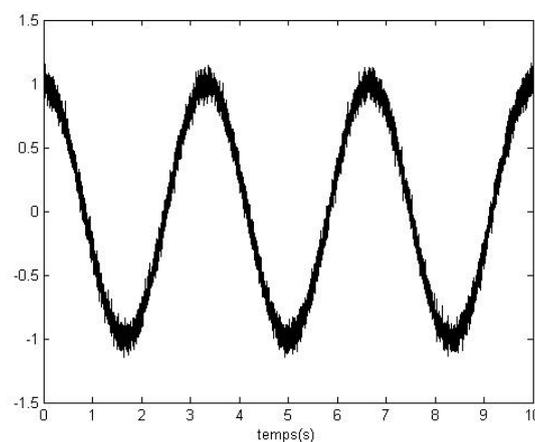


FIGURE 1.2 – Signal d'entrée bruité.

Pour évaluer quantitativement la robustesse par rapport au bruit, nous utilisons deux indices : le Rapport Signal Bruit (RSB) et le Rapport au Bruit (RB). Ce dernier est calculé par :

$$RB = RSB_{entrée} / RSB_{sortie} \quad (1.67)$$

Cet indice nous renseigne sur le taux de dégradation du signal de sortie par rapport au signal d'entrée. Le RSB est une quantité mesurée en décibel qui désigne le rapport entre l'information utile et le signal bruit. Il est calculé par l'équation ci-dessous :

$$RSB = 10 \log_{10} \left( \frac{\sum_i |f_i|^2}{\sum_i |\varpi_i|^2} \right) \quad (1.68)$$

$\sum_i |\varpi_i|^2$  représente la variance du bruit et  $f_i$  sont les échantillons du signal d'entrée  $f(t)$ .

Un RSB positif signifie donc que le taux d'atténuation du bruit est élevé. Pour les valeurs faibles ou négatives du RSB, le signal est fortement bruité. Par conséquent, une valeur très grande de RSB en sortie correspond à une valeur de RB faible. Si la valeur de RB est proche de 1 (ou même inférieur à 1), ceci implique alors que l'algorithme présente un très bon taux d'atténuation du bruit pour les dérivées estimées.

Le signal bruité considéré présente un RSB égal à  $26.9dB$  ( $RSB_{entrée} = 26.9dB$ ). Quelle que soit la méthode de différentiation testée, aucun pré-traitement par filtrage n'est effectué. Tous les résultats présentés sont réalisés sur une même machine (même processeur). Cette remarque

est importante surtout lors de l'estimation du temps de calcul nécessaire à chaque algorithme de différentiation. L'estimation du temps de calcul est obtenue par la commande "tic-toc" de MATLAB.

Lors de la validation de chaque schéma de différentiation, des tableaux récapitulatifs seront tracés afin de résumer les résultats obtenus pour les différents critères de comparaison cités ci-dessus. A la fin de ce chapitre, un tableau de comparaison qualitative résumera tous les résultats déjà présentés pour chaque type d'estimateur.

**Remarque :** Tout le long de ce manuscrit, nous utilisons l'expression "signal multi-fréquentiel" (respectivement signal mono-fréquentiel) pour désigner un signal non bruité balayant différentes fréquences (resp. signal à une seule fréquence). En présence de bruit, nous utilisons l'expression "signal multi-fréquentiel bruité" (resp. signal mono-fréquentiel bruité) afin de faire la séparation entre le signal utile et le signal réel.

### 1.2.3.2 Résultats de simulations

Nous présentons dans ce paragraphe quelques résultats de simulations afin d'illustrer chacune des versions de dérivateur algébrique décrite précédemment.

- Première Version de l'Algorithme Algébrique (PVAA) :

Reprenons l'exemple élaboré pour  $N = 3$ , (voir équations (1.25), (1.26) et (1.27)). Le pas d'intégration est fixé à  $T_e = 10^{-3}$  secondes. Les figures 1.3 et 1.4 sont réalisées sur un horizon de 10 secondes et 800 points sont supprimés à  $t = 0$  et à chaque réinitialisation de l'algorithme.

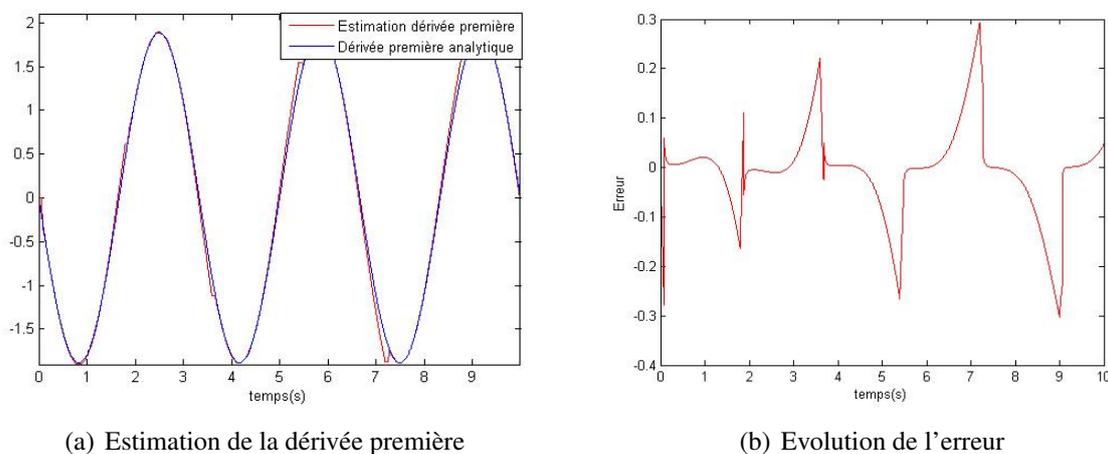


FIGURE 1.3 – Résultats du PVAA : dérivée première.

A l'instant  $t = 0$ , l'estimation de la dérivée première est maintenue à sa valeur égale à la première différence finie. La dérivée seconde estimée ainsi que les erreurs entre les signaux estimés et les dérivées analytiques, sont maintenues à zéro pendant ces 800 échantillons. A chaque fois qu'on réinitialise l'algorithme, les dérivées et les erreurs correspondantes sont maintenues à leurs valeurs précédentes avant réinitialisation. Ces dernières sont effectuées tous les 1800 points (toutes les 1.8 secondes).

Le tableau 1.1 résume les valeurs des erreurs  $|e_{max}|$ ,  $|e_{amax}|$  et les déphasages relatifs aux estimées des dérivées première et seconde.

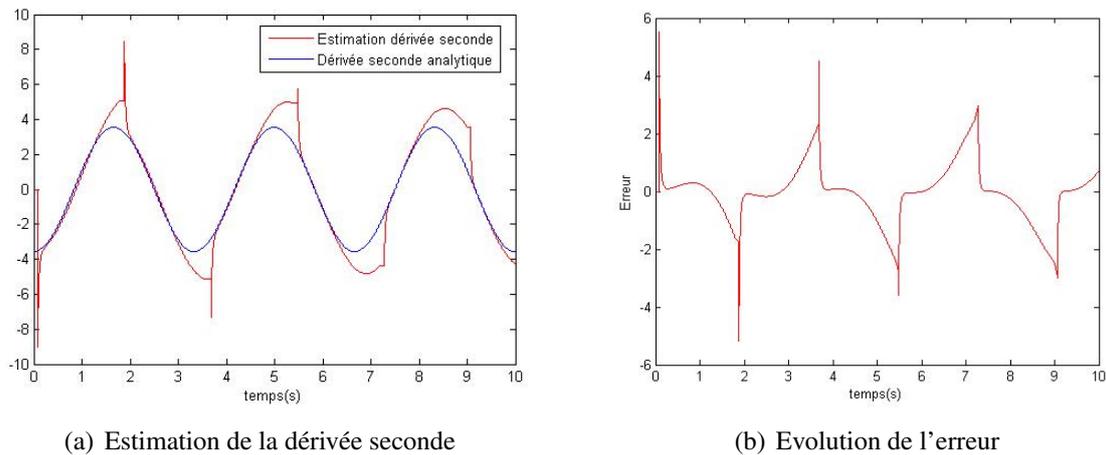


FIGURE 1.4 – Résultats du PVAA : dérivée seconde.

Tableau 1.1 – Erreurs et déphasage pour PVAA.

	Dérivée première	Dérivée seconde
$ e_{max} $	0.29	5.5
$ e_{amax} (\%)$	61.4	81.6
Déphasage ( $^{\circ}$ )	0.8	22

Bien que le résultat concernant la dérivée première soit relativement bon, la valeur maximale de l'erreur ne dépassant pas en valeur absolue 0.3, le résultat obtenu pour la dérivée seconde est nettement moins bon. Cet exemple montre bien la difficulté de fixer un temps de réinitialisation adéquat utilisé pour estimer les deux dérivées. Il faut néanmoins remarquer qu'il serait préférable de fixer des temps de réinitialisation spécifiques pour chacune des dérivées afin d'obtenir de meilleurs résultats pour la dérivée seconde. Or ceci n'est pas possible étant donné que les deux estimées sont calculées récursivement.

Concernant les déphasages (déphasage maximal), nous observons un déphasage autour de zéro pour l'estimée de la dérivée seconde presque 27.5 fois plus grand que celui déterminé pour la dérivée première. Ceci s'explique à nouveau par le problème de réinitialisation relatif à cette estimée.

Considérons maintenant le signal d'entrée bruité donné par la figure 1.2. Pour cet essai, la figure 1.5 illustre le résultat obtenu.

En modifiant le signal d'entrée, les paramètres de réglage doivent être aussi modifiés afin d'obtenir de bons résultats. Pour ce cas, le nombre de points éliminer à  $t = 0$  et à chaque réinitialisation a été fixé à 800 points et la réinitialisation est effectuée toutes les 3 secondes. La figure 1.5, montre que le bruit est d'avantage amplifié à chaque réinitialisation de l'algorithme. Cette amplification est d'autant plus grande que l'ordre de la dérivée estimée est élevé. Il est possible de réduire les valeurs de ces pics, en réduisant le nombre des réinitialisations, mais ceci engendre une détérioration de la précision (augmentation de l'erreur).

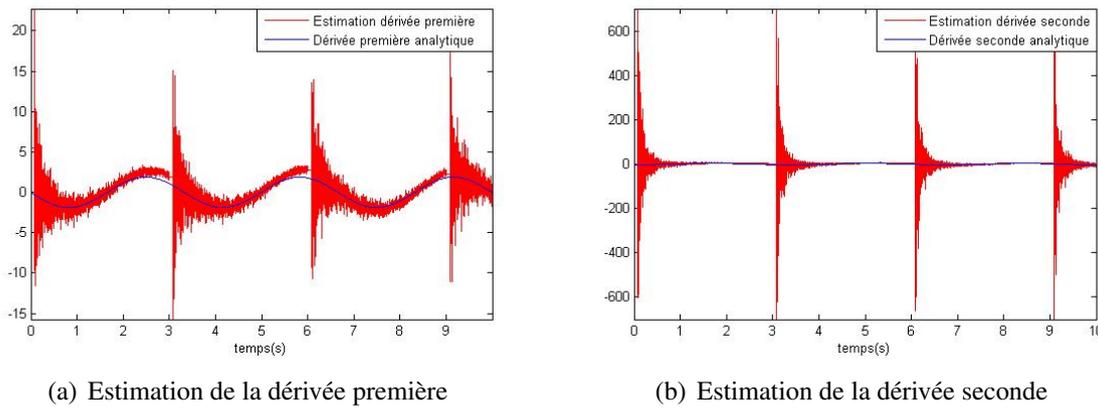


FIGURE 1.5 – Résultats du PVAA pour un signal bruité.

Les valeurs de RSB et RB pour le PVAA sont données dans le tableau 1.2. On obtient des valeurs très importantes du RB (de même pour le RSB), pour l'estimation de la dérivée seconde. Pour l'estimée de la dérivée première, nous retrouvons en sortie une valeur de RSB supérieure de 269 fois à celle du signal d'entrée. Ceci illustre bien les limitations d'un tel algorithme dans le contexte d'un système physique.

Tableau 1.2 – Critères de comparaison pour la robustesse par rapport au bruit : PVAA.

Critères	Dérivée première	Dérivée seconde
RSB(dB)	0.1	0.015
RB	257.8	1778.6

La mise en oeuvre de cet algorithme dépend de plusieurs paramètres de réglages. Mais plus le nombre des dérivées à estimer est grand, plus le réglage des paramètres de l'algorithme est difficile.

Pour un développement de Taylor d'ordre plus grand que 3, les résultats seraient alors meilleurs pour un même réglage des paramètres. Toutefois, cette version présente un intérêt restreint pour une mise en oeuvre pratique étant donnée la sensibilité des estimées par rapport au bruit et également en raison de la difficulté de réglage des paramètres pour l'estimation des dérivées d'ordre supérieur à un.

• Deuxième Version de l'Algorithme Algébrique (DVAA) :

Considérons maintenant l'exemple donné par l'équation (1.37) pour la validation de la Deuxième Version de l'Algorithme Algébrique (DVAA). En reprenant cet exemple, on peut exprimer les estimées des différentes dérivées de façon générale par :

$$y^{(i)}(0) = K_i \int_0^1 P_i^*(\tau) y_T(\tau) d\tau - i \sum_{j=0}^{i-1} K_j^* y^j(0), \quad i \in \{0, 1, 2\} \quad (1.69)$$

Où les gains  $K_j^*$ ,  $K_i$  et  $P_i^*$  prennent des valeurs différentes pour des estimées différentes, pour cet exemple  $i = 1$  et  $i = 2$ .

Pour l'implémentation de l'algorithme, la méthode des trapèzes a été utilisée pour calculer une valeur approximée de l'intégrale. Intéressons nous tout d'abord à l'implémentation de (1.69)

pour  $i = 0$  (pour les autres valeurs de  $i$ , l'implémentation s'effectuera de la même manière sauf que certains termes supplémentaires sont soustraits).

Soit une fonction définie par  $Y = \int_0^1 y(t)dt$ . En utilisant une méthode d'intégration, la valeur de  $Y$  peut être approchée par  $Y \approx \sum_{m=0}^M W_m y(t_m)$ , où  $W_m$  représente le vecteur de pondération correspondant à la méthode d'intégration utilisée et  $y(t_m)$  sont les valeurs de  $y$  prises aux instants  $t_m$ . Ceci impose que le calcul de l'intégrale peut être effectué par une multiplication élément par élément des deux vecteurs  $W_m$  et  $y(t_m)$ . Dans le cas de la méthode des trapèzes,  $W_m = \tau[1/2, 1, 1 \dots, 1, 1, 1/2]^T$  où  $\tau$  dans ce cas est le pas de discrétisation.

Nous devrions aussi discrétiser le polynôme  $P_i^*$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  avec la même période d'échantillonnage que le signal d'entrée  $y(t)$ . Ainsi, il suffit de multiplier élément par élément le vecteur  $P_i^*$  discrétisé,  $W_m$  et le vecteur des échantillons du signal  $y_T$  sélectionné dans la fenêtre d'estimation. Enfin, il suffit de faire la somme du vecteur résultant pour obtenir l'estimée désirée à l'instant de calcul.

D'après l'équation (1.69) et pour un instant de calcul  $t_i$ , la valeur obtenue correspond plutôt à la valeur de l'estimée à  $t = t_i + \tau$ ; ceci pose un problème pour les applications temps réel. Pour l'éviter, le signal  $y_{t_i+T}(\tau)$  est remplacé par  $-y_T(t_i - \tau)$ , comme nous l'avons signalé précédemment. Dans notre cas, pour  $t_i = 0$ , la valeur de  $y(t_i - \tau)$  peut être calculée, mais dans le cas général, cette valeur peut être initialisée.

Pour les instants suivants, le calcul de l'estimée se fait de la même manière que décrit précédemment en faisant glisser la fenêtre d'estimation à chaque fois d'un pas d'échantillonnage.

Pour finir, nous pouvons conclure que l'implémentation de cette version d'estimateur revient finalement à effectuer  $n$  multiplications suivi de  $n$  sommations ce qui est parfaitement réalisable en temps réel. Le temps de calcul sera donc fortement influencé par la taille de la fenêtre d'estimation.

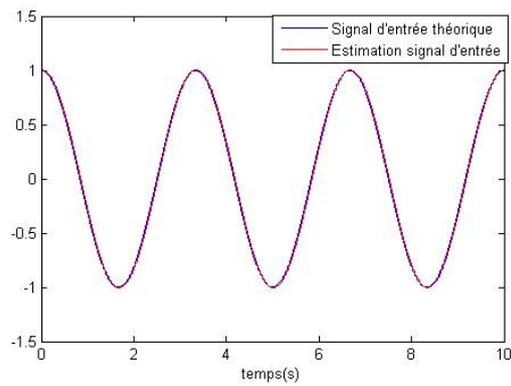
Pour le signal de référence  $y(t) = \cos(0.6\pi t)$  (figure 1.1), les résultats de cet algorithme sont présentés sur les courbes suivantes. La période d'échantillonnage est fixé à  $T_e = 10^{-3}$  secondes et la taille de la fenêtre d'estimation est égale à 1 seconde, ainsi 1000 échantillons sont utilisés pour le calcul des estimées à chaque instant.

Les valeurs quantitatives des erreurs et du déphasage obtenus pour chacune des estimées sont résumées dans le tableau 1.3. Nous constatons dans ce tableau que l'estimée du signal d'entrée (voir figures 1.6, 1.7, 1.8) présente les valeurs les plus faibles en erreur et en déphasage par rapport aux estimées des dérivées.

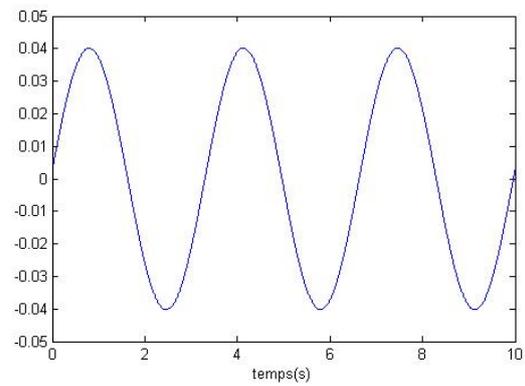
Tableau 1.3 – Erreurs d'estimation et déphasage : DVAA.

	Signal d'entrée	Dérivée première	Dérivée seconde
$ e_{max} $	0.040	0.53	2.09
Déphasage (°)	3.23	16.3	34.3

Cependant pour l'estimation de la dérivée première et seconde, les résultats sont moins bons. Pour la deuxième estimée, les valeurs du déphasage et de l'erreur sont inacceptables pour des applications temps réel (voir tableau 1.3). Ceci peut être expliqué par la relation récursive entre les différents estimés. D'autres facteurs peuvent intervenir sur la qualité des estimés : le premier est relatif au choix de l'ordre de troncature du développement de Taylor, le second correspond à la taille de la fenêtre d'estimation présente qui joue un rôle important sur les sorties de l'estima-



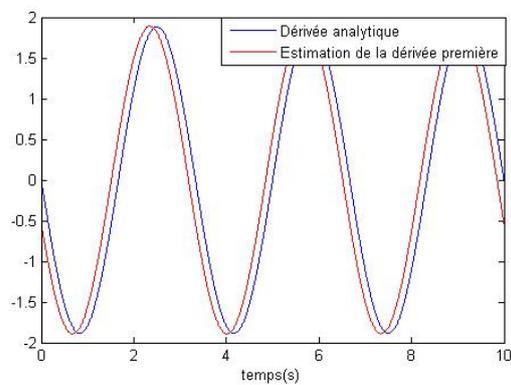
(a) Estimation du signal d'entrée



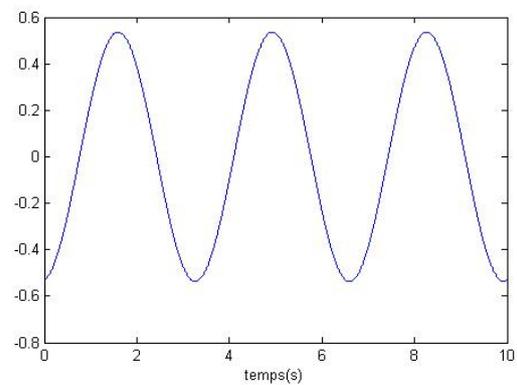
(b) Evolution de l'erreur

FIGURE 1.6 – Résultats du DVAA : signal d'entrée.

teur auxquelles viennent s'ajouter les erreurs numériques dues à l'approximation de l'intégrale.

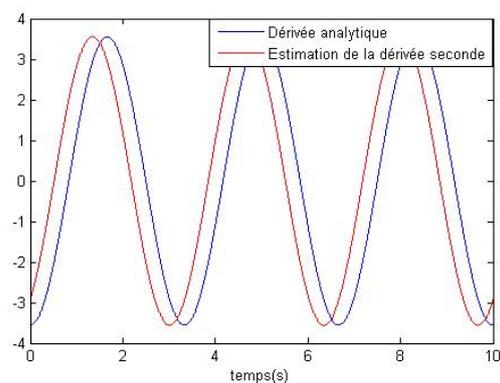


(a) Estimation de la dérivée première

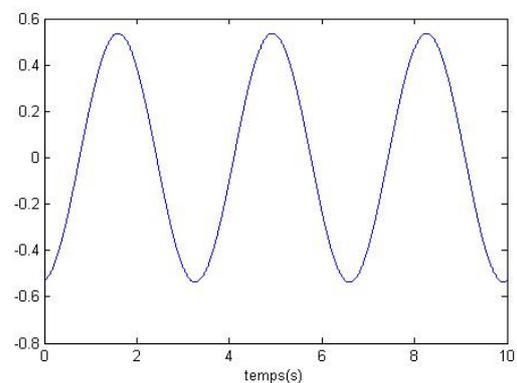


(b) Evolution de l'erreur

FIGURE 1.7 – Résultats du DVAA : dérivée première.



(a) Estimation de la dérivée seconde



(b) Evolution de l'erreur

FIGURE 1.8 – Résultats du DVAA : dérivée seconde.

Pour ces simulations, nous n'avons pas calculé l'erreur absolue  $|e_{max}|$  puisque celle-ci n'est pas significative en raison de la présence d'un déphasage important au niveau des signaux estimés.

Il est évident que les estimations des dérivées première et seconde peuvent être effectuées en utilisant directement le signal d'entrée et non pas son estimé. Dans ce cas l'erreur ainsi que le déphasage sont réduits mais restent du même ordre de grandeur que celui obtenu pour les calculs présentés ici. Par rapport à l'implémentation de cet algorithme, nous avons une avance de phase entre la dérivée estimée et la dérivée analytique.

En changeant le signal d'entrée avec celui défini sur la figure 1.2, nous obtenons les résultats décrits dans la figure 1.9. Cette dernière ne montre aucune modification par rapport aux courbes données dans le cas d'un signal d'entrée non bruité. En fait, la variance du bruit imposé au signal d'entrée utilisé n'a aucune influence sur les signaux de sortie. Cependant, l'augmentation de la puissance du bruit présente une influence sur les signaux estimés. Nous remarquons que les intégrales itérées sont utilisées pour la synthèse des deux versions PVAA et DVAA, sauf que pour le PVAA, en présence de bruit, les signaux estimés sont assez bruités. Donc le dé-bruitage parfait des estimées pour le DVAA est dû à la présence de ces intégrales itérées qui sont calculée non pas sur la totalité de l'intervalle de calcul mais plutôt sur une fenêtre d'estimation, celle-ci permet alors de jouer le rôle d'un filtre passe bas.

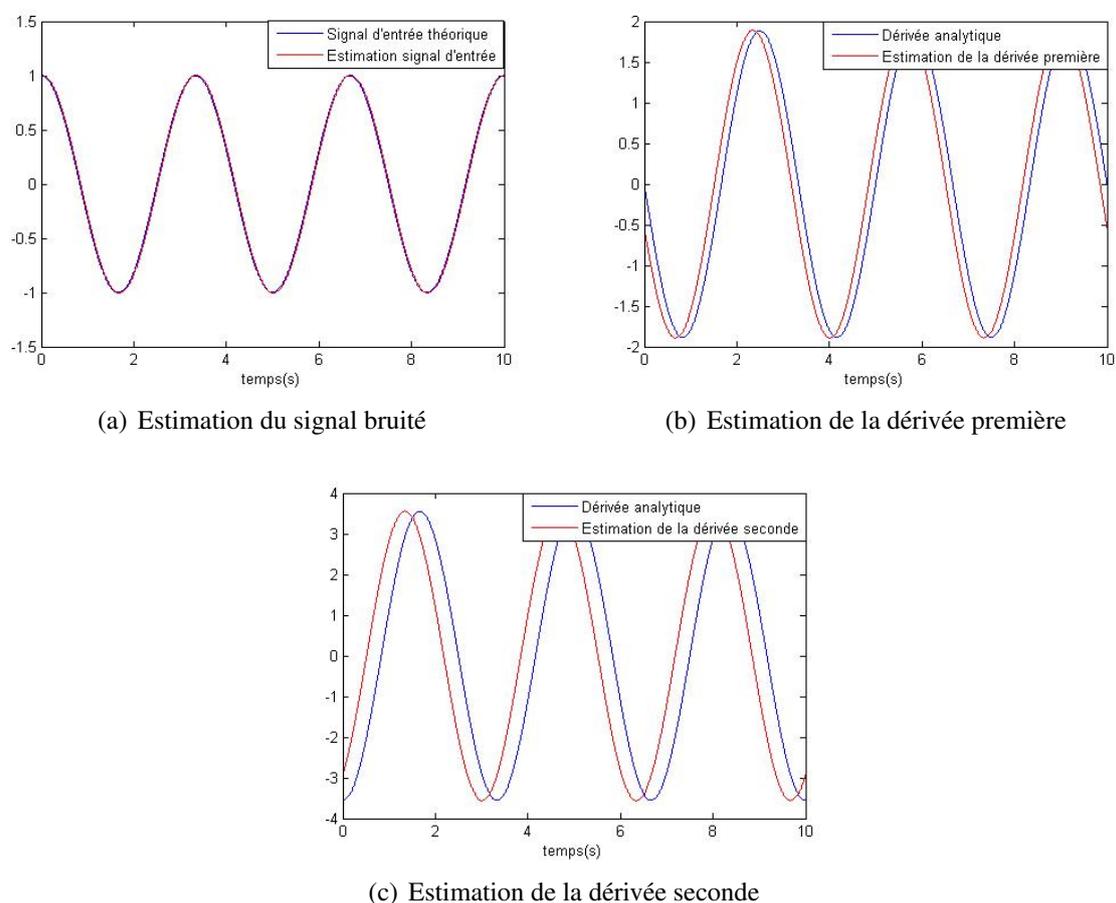


FIGURE 1.9 – Résultats du DVAA pour un signal bruité

Evidemment, ce filtrage dépend donc de la taille de cette fenêtre. En effet, plus la taille de la fenêtre est grande, meilleur sera le filtrage. Mais en augmentant la taille de la fenêtre, l'erreur de troncature devient plus élevée puisque l'on s'éloigne d'avantage de zéro. Il existe donc un compromis entre le filtrage du bruit et l'erreur de troncature, selon la taille de la fenêtre choisie. Pour pouvoir observer l'effet du bruit, il faut imposer une variance du bruit plus élevée. Les valeurs de l'erreur maximale ainsi que le déphasage restent relativement du même ordre de grandeur que dans le cas d'un signal d'entrée non bruité.

• Troisième Version de l'Algorithme Algébrique (TVAA) :

Pour conclure cette partie, la validation de la Troisième Version de l'Algorithme Algébrique est présentée. Pour l'obtention de la dérivée première du signal d'entrée, nous considérons le cas d'un estimateur minimal ( $N = n = 1, k = \mu = 0$ ) (voir équation (1.65)) et le cas d'un estimateur non minimal ( $N = 3, n = 1, k = 1, \mu = 5$ ) (voir équation (1.46)). Pour la dérivée seconde seul un estimateur non minimal est utilisé et est paramétré par ( $N = 3, n = 2, k = 1, \mu = 5$ ) (voir équation (1.47)).

Remarquons que peu importe le choix des paramètres de ces différents estimateurs, ils peuvent tous être mis sous la forme générale suivante :

$$y^{(i)}(0) = \bar{K}_i \int_0^1 \bar{P}_i^*(\tau) y_T(\tau) d\tau, \quad i \in \{1, 2\} \quad (1.70)$$

Cette dernière équation montre que la forme générique du TVAA est relativement proche de celle donnée par la version deux (DVAA). Mais en raison de la forme triangulaire de cette deuxième version, il est nécessaire de soustraire de nouveaux termes relatifs aux estimées précédentes. Par conséquent, l'implémentation de TVAA s'effectue de la même façon que le DVAA en ce qui concerne le terme intégral.

Pour cet essai de simulation, la taille de la fenêtre d'estimation est fixée à 1.5 secondes pour  $T_e = 10^{-3}$  secondes.

Pour une simulation sans bruit, les courbes relatives à chacun des estimateurs sont données par les figures 1.10 et 1.11.

Nous remarquons que l'estimateur minimal est décalé par rapport à la dérivée théorique tandis que l'estimateur non minimal n'introduit pas de décalage visible par rapport à la dérivée théorique. A partir de 1.10(a), on observe que ce décalage est égal à 0.5 secondes, cette valeur coïncide bien à la valeur théorique donnée par l'expression (1.62).

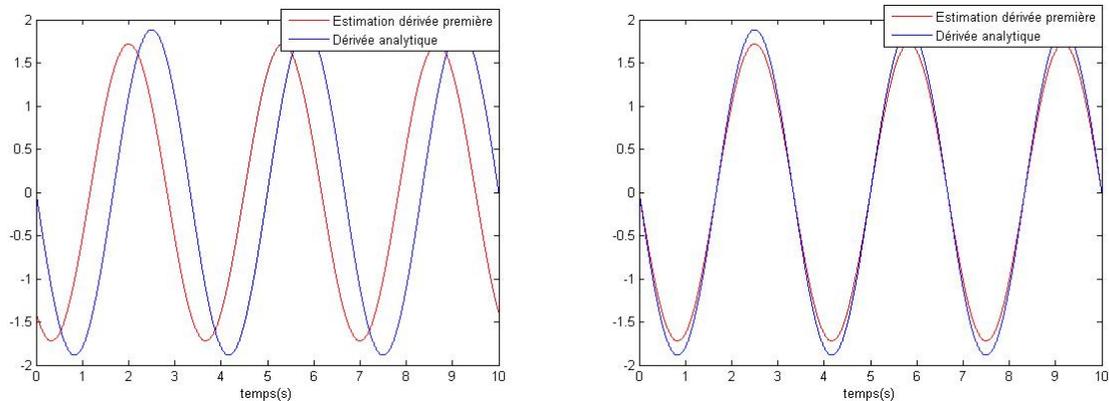
Etant donné la possibilité de quantifier correctement ce retard, il est possible alors de le compenser en décalant la courbe. Ceci permet d'obtenir la courbe 1.10(b) où le retard est éliminé.

Les valeurs d'erreurs et de déphasage données pour chaque estimateur sont résumées dans le tableau 1.4. A partir de ces valeurs, il est clair qu'en compensant le retard engendré par l'estimateur minimal le déphasage devient alors très faible et est de l'ordre de  $0.01^\circ$ . Cette valeur est à peu près 100 fois plus petite que celle donnée par un estimateur non minimal. Mais en terme de précision par rapport à l'amplitude, l'estimateur non minimal présente une valeur d'erreur maximale plus faible qu'un estimateur minimal (avec ou sans retard). Ce résultat s'explique du fait qu'en utilisant un estimateur non minimal, le modèle du signal est plus précis, le développement de Taylor ayant été tronqué pour une valeur de  $N$  plus grande.

Tableau 1.4 – Erreurs d'estimation et déphasage pour l'estimée de la première dérivée : TVAA.

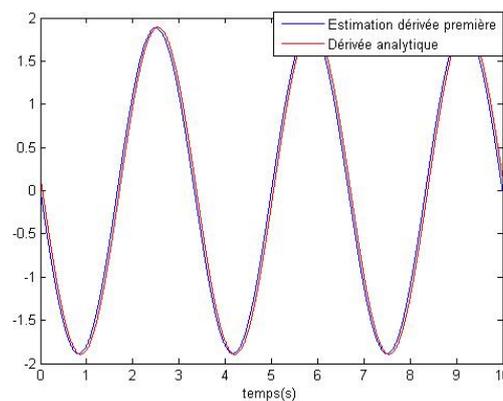
Algorithme	Dérivée première			Dérivée seconde
	Estimateur minimal	Estimateur minimal sans retard	Estimateur non minimal	Estimateur non minimal
$ e_{max} $	1.64	0.165	0.058	0.217
Déphasage ()	54.3	0.01	1.51	4.48

En prenant en compte le bruit dans le signal d'entrée, les résultats trouvés en terme d'erreur et de déphasage restent relativement les mêmes. L'évolution des estimées sont données par les mêmes courbes que le cas non bruité, ce qui explique le bon filtrage qu'apporte cette version. Pour le compromis existant entre le filtrage et la précision, les remarques citées pour DVAA sont identiques pour TVAA. Ainsi pour cette version, la taille de la fenêtre d'estimation joue également un rôle primordial.



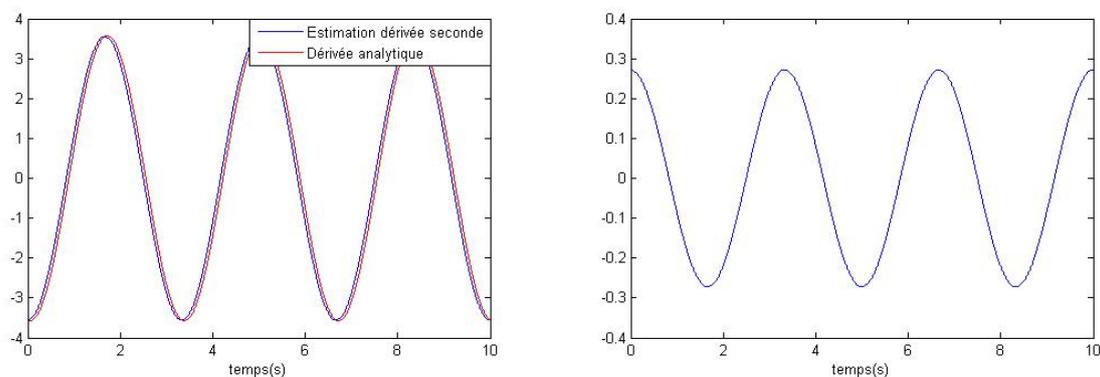
(a) Estimateur minimal

(b) Estimateur minimal sans retard



(c) Estimateur non minimal

FIGURE 1.10 – Résultats du TVAA : dérivée première.



(a) Estimateur non minimal

(b) Evolution de l'erreur

FIGURE 1.11 – Résultats du TVAA : dérivée seconde.

Les résultats présentés ci-dessus sont limités à un signal utile mono-fréquentiel. Donc pour avoir une idée sur l'efficacité de l'algorithme pour d'autres valeurs de fréquences du signal

d'entrée, nous avons effectué alors différents essais à différentes fréquences du signal d'entrée (sans bruit). Pour ces simulations, nous nous limitons à l'estimateur non minimal défini par l'équation (1.46). La valeur absolue de l'erreur maximale ainsi que le déphasage maximal sont présentées sur la figure 1.12.

Pour ces essais, la taille de la fenêtre d'estimation reste identique et égale à 1.5 secondes, ce qui explique les grandes valeurs obtenues en erreur et en déphasage.

Normalement en réduisant la taille de la fenêtre d'estimation, la réduction de ces valeurs peut être significative. Toutefois, pour les fréquences élevées ( $f > 6$  Hz), les valeurs de ces critères restent relativement grandes.

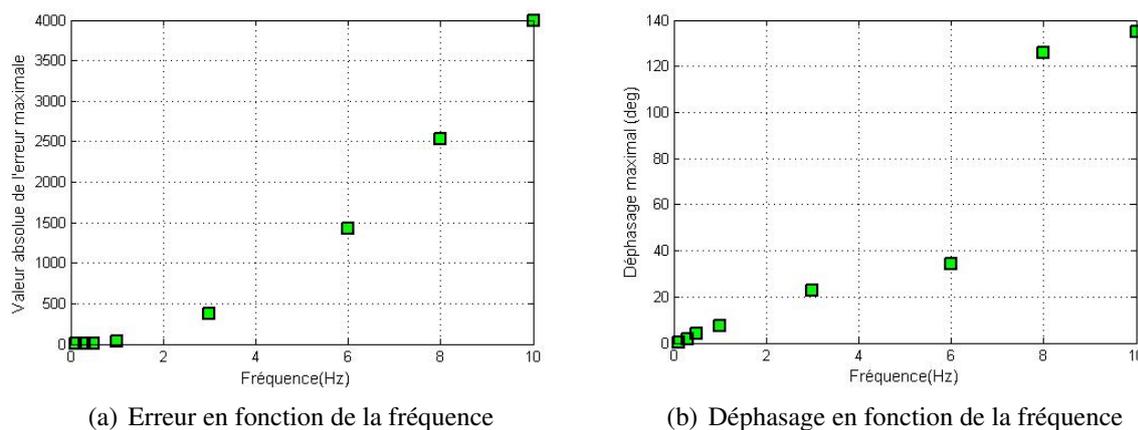


FIGURE 1.12 – Résultats du TVAA : pour différentes valeurs de fréquence.

Pour certaines applications temps réel, le temps de calcul présente un critère important. Ainsi, nous avons résumé le temps de calcul relatif à chacune des versions dans le tableau 1.5.

Tableau 1.5 – Temps de calcul : Algorithmes algébriques.

Algorithme	PVAA	DVAA	TVAA sans retard : minimal	TVAA : 1 <sup>ère</sup> estimée non minimal	TVAA : 2 <sup>ème</sup> estimée non minimal
Temps de calcul (s)	1.27	7.14	5.24	4.09	4.06

### Remarques sur le temps de calcul :

- La finalité de notre étude sur les différentiateurs en temps réel est de les appliquer sur le banc d'essai électrohydraulique (dernière application présentée au niveau de ce rapport), ce qui justifie notre choix de la période d'échantillonnage  $T_e = 1$  ms, gardée pour toutes les simulations effectuées relatives à tous les algorithmes étudiés et proposés. Même si au niveau de ce manuscrit, les algorithmes algébriques n'ont pas été testés sur ce banc d'essai mais qui reste un travail à terminer dans la suite de ces travaux.

- Le choix des paramètres (précisément la taille de la fenêtre d'estimation) des algorithmes algébriques (DVAA et TVAA) est différent de celui présenté dans [105]. Cette différence est justifiée par la façon dont nous avons implémenté ces algorithmes et aussi de la fréquence

d'échantillonnage utilisée. Il est à préciser que ces algorithmes ont été implémentés sous Matlab sans optimisation de code de calcul, étant donné que notre objectif était comparatif et non optimal, mais ce point reste à améliorer. Suite à ces raisons, les valeurs du temps de calcul données dans le tableau 1.5 sont élevées.

- Finalement, nous pouvons conclure que le temps de calcul dépend de la fréquence d'échantillonnage, de la taille de la fenêtre d'estimation, du codage de l'algorithme et aussi de l'ordre de troncature  $N$ .

Pour conclure cette étude, nous pouvons souligner que les algorithmes algébriques présentent certains avantages puisqu'il n'y a pas de problème de convergence pour de tels algorithmes vu qu'il s'agit d'une forme algébrique. En plus, il n'existe aucune hypothèse sur le bruit. Cependant, une certaine complexité de mise en oeuvre relative à ce type de dérivateur, étant donné le grand nombre de paramètres de réglage qui entre en jeu. Ainsi, la première version a trois paramètres de réglages à savoir le choix de l'ordre de troncature  $N$ , le nombre de points à éliminer et les instants de réinitialisation. La deuxième version présente également le même nombre de paramètres de réglage : l'ordre de troncature  $N$ ,  $\nu$  et la taille de la fenêtre d'estimation  $T$ . Il est clair que la troisième version apporte de nombreux avantages par rapport aux deux versions précédentes et conduit aussi à une bonne estimation de la dérivée désirée, mais elle nécessite le choix de 5 paramètres : l'ordre de troncature  $N$ ,  $n$ ,  $k$ ,  $\mu$  et la taille de la fenêtre d'estimation  $T$ . Nous soulignons aussi que ces estimateurs algébriques ne sont pas robustes pour des signaux utiles multi-fréquentiels pour un même réglage de paramètre.

## 1.3 Introduction élémentaire sur les régimes glissants

Cette partie est consacrée aux rappels théoriques des modes glissants classiques ainsi qu'aux principes fondamentaux des régimes glissants d'ordre supérieur. Nous montrerons ensuite l'intérêt de ce type d'approche pour la construction des différentiateurs robustes, bien que cette technique ait été développée initialement pour la synthèse de lois de commande [46].

### 1.3.1 Régime glissant d'ordre un

Les premiers travaux théoriques sur les régimes glissants sont apparus au début des années 60. Ce type d'approche intervient de manière prépondérante dans la définition et les propriétés d'une classe de système, nommée systèmes à structure variable [14], [147], [46].

Cette partie sera l'objet dans un premier temps d'une présentation générale des concepts de base des modes glissants d'ordre un. Son principe, ses propriétés de robustesse ainsi que le phénomène de réticence et les solutions pour l'éliminer y sont présentés. Les systèmes permettant la génération d'un tel régime sont régis par des équations différentielles à second membre discontinu. L'étude de leurs solutions implique donc des approches alternatives à la théorie classique des équations différentielles ordinaires, approches telles que celle présentée dans les travaux de Filippov, [43]. Par conséquent, une définition d'une telle approche sera décrite dans ce qui suit.

#### 1.3.1.1 Généralités

Afin de ne pas alourdir les notations et pour plus de clarté et de simplicité, les développements théoriques se feront sur une classe des systèmes non linéaire mono-entrée mono-sortie et affine en la commande. Ainsi, considérons le système dynamique non autonome modélisé par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u + \xi(x, t) \quad (1.71)$$

où  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  représente l'état du système,  $u \in \mathbb{R}$  est le signal d'entrée du système qui est une fonction discontinue bornée, dépendante de l'état et du temps. Les champs de vecteurs  $f(x, t)$  et  $g(x, t)$  sont considérés comme suffisamment différentiables. Nous considérons que le point d'origine est le point d'équilibre<sup>2</sup> du système (1.71). Le champ de vecteur  $\xi(x, t) \in \mathbb{R}^n$  contient tous les termes incertains ou mal connus du système, ainsi que les perturbations qui peuvent agir sur ce dernier.

Soit  $s(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction suffisamment différentiable et considérée comme une sortie effective du système (1.71). La variable  $s(x, t)$  définit la fonction de glissement à imposer. Alors que l'ensemble :

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x, t) = 0\} \quad (1.72)$$

représente une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $(n - 1)$  nommée surface de glissement.

Une condition nécessaire pour l'établissement d'un régime glissant d'ordre un est que le système (1.71) soit de degré relatif un par rapport à la fonction de glissement  $s$ .

Nous supposons que  $\xi(x, t)$  n'affecte pas le degré relatif du système. Pour respecter cette hypothèse, une condition suffisante, [144], [19] dite « matching condition » (appelée aussi « condition de recouvrement ») doit être satisfaite en considérant la condition suffisante suivante :

Soit  $\text{span}(g(x, t))$  un sous-espace formé par les éléments de base du vecteur  $g$  pour chaque point  $(x, t)$ , [144]. Le régime glissant est invariant par rapport au vecteur  $\xi(x, t)$  si :

$$\xi(x, t) \in \text{span}(g(x, t)) \quad (1.73)$$

La condition (1.73) veut dire qu'il existe un vecteur  $\gamma(x, t)$  tel que  $\xi(x, t) = g(x, t)\gamma(x, t)$ , où  $\gamma(x, t)$  peut être un vecteur inconnu dont on connaît une estimation de la borne maximale.

La génération d'un régime glissant se résume en deux étapes. La première étape consiste à la détermination de la surface de glissement  $s = 0$ . Cette dernière permet de fixer la dynamique du système. La deuxième étape permet la recherche d'un signal d'entrée discontinu  $v(x, t)$  qui conduise les trajectoires du système vers  $s = 0$ , à partir de n'importe quelle condition initiale  $x(0)$ .

Afin d'assurer l'apparition du régime glissant et rendre attractive la surface considérée, le signal d'entrée doit être discontinu en fonction de  $s$  :

$$u(x, t) = u_M \text{sign}(s(x, t)) \quad (1.74)$$

où

$$\text{sign}(\cdot) = \begin{cases} 1, & \text{si } (\cdot) \geq 0 \\ -1, & \text{si } (\cdot) < 0 \end{cases} \quad (1.75)$$

avec  $u_M \in \mathbb{R}^+$  est un gain positif, son choix joue un rôle primordial pour supprimer l'influence des perturbations de type "matching"<sup>3</sup>.

Dans ce cas, l'espace d'état est séparé en deux régions correspondant à deux représentations d'états possibles du système. On retrouve d'un côté  $\dot{x}^+ = f(x, t) + g(x, t)u^+ + \xi(x, t)$  et de l'autre  $\dot{x}^- = f(x, t) + g(x, t)u^- + \xi(x, t)$ , (voir figure 1.13).

**Définition 1.1.** [145] On dit qu'il existe un régime glissant idéal sur  $S_1$  s'il existe un temps fini  $T$  tel que les solutions de (1.71) satisfont  $s(x, t) = 0$ , pour tout  $t \geq T$ .

2. Dans le cas contraire, un changement de variable permet de ramener le point d'équilibre à l'origine de l'espace d'état.

3. Ce sont les perturbations qui vérifient la condition de "matching" énoncée précédemment.

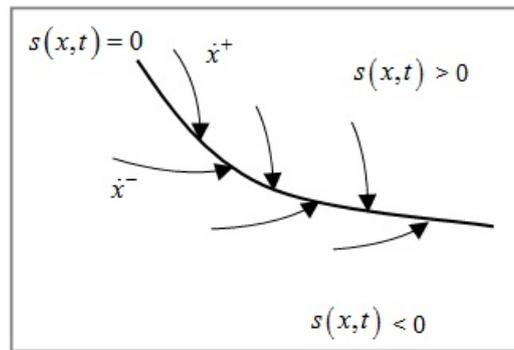


FIGURE 1.13 – Deux espaces d'état séparés par la surface de glissement  $s = 0$ .

Vu qu'en pratique, une commutation à fréquence infinie est irréalisable, le régime glissant s'effectuera dans un voisinage de  $s(x, t) = 0$ . Ceci permet de définir un régime de glissement réel.

L'étude d'un régime glissant, revient à l'étude de certains problèmes particuliers tels que :

- la définition des conditions d'existence du régime glissant,
- le choix de la surface de glissement,
- le choix des conditions de convergence,
- l'unicité de solution pour ce type de système.

Dans les paragraphes suivants, nous abordons chacun des points cités ci-dessus. Pour toute la suite, on pose  $s = s(x, t)$ .

### 1.3.1.2 Condition d'existence du régime glissant

Pour pouvoir amener puis maintenir l'évolution du système (1.71) sur la surface de glissement, le signal d'entrée discontinu doit rendre cette surface attractive pour tout point de l'espace d'état. En effet, si à un instant donné le système se trouve dans la partie de l'espace d'état telle que  $s > 0$  alors en ce même point, nous devons assurer que  $\dot{s} < 0$ . De la même façon, pour tous les points appartenant à la partie définie par  $s < 0$ , la dérivée temporelle  $\dot{s}$  doit être positive. Pour résumer, il faut s'assurer qu'en tout point de l'espace d'état, la surface  $s$  et sa dérivée temporelle  $\dot{s}$  soient opposées en signe [73], ce qui peut être exprimé par l'expression ci-dessous :

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0 \text{ et } \lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0 \quad (1.76)$$

En prenant en compte les conditions énoncées précédemment, et quel que soit l'état initial du système  $x(0)$ , nous pouvons dire que dès l'instant où la surface de glissement  $s = 0$  est atteinte, alors toute évolution ultérieure du système se produit exclusivement sur cette surface avec une dynamique imposée par celle-ci. Cette dynamique est largement indépendante de celle du processus initial et surtout de ses variations éventuelles. C'est en ce sens que ce type d'approche est dite robuste et insensible aux variations paramétriques, aux perturbations externes et aux erreurs de modélisation [147], [145], qui respectent la condition de "matching". Toutefois, avant d'atteindre le mode glissant, il existe une phase de convergence durant laquelle la ou les variables d'état se déplacent vers la surface de glissement (voir figure 1.14). Durant cette phase, le système reste sensible aux variations paramétriques. Pour limiter la durée de cette phase, il suffit d'augmenter l'amplitude du signal d'entrée  $u_M$ .

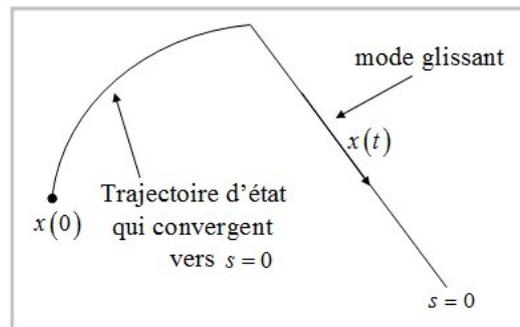


FIGURE 1.14 – Illustration de la phase de convergence et du régime glissant.

### 1.3.1.3 Surface de glissement

La liberté de choix de la surface de glissement constitue l'un des avantages majeurs des modes glissants. Cette dernière peut être une expression linéaire ou non linéaire à paramètres constants ou variables dont les composantes sont représentées par des relations algébriques entre les variables d'état du système [128]. La définition d'une telle surface est effectuée en fonction des objectifs et des performances désirées. Nous précisons aussi que le choix de cette fonction  $s$  est toujours fait tel que  $s = 0$  pour le point d'équilibre (l'origine de l'espace d'état) du système concerné.

### 1.3.1.4 Conditions de convergence

Pour garantir l'existence d'un régime glissant, des conditions suffisantes de convergence doivent être définies. Ces conditions peuvent être déduites à partir de la méthode directe de Lyapunov. En effet, il suffit de trouver une fonction de Lyapunov  $V(t, x)$  satisfaisant la définition ci-dessous, [73]. Cette fonction de Lyapunov doit être définie à partir de la surface de glissement déjà choisie :

**Définition 1.2.** Une fonction  $V(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  de classe  $C^1$  définie telle que,

$$\begin{cases} V(t, x) > 0 \text{ pour } x \neq x_0, \text{ sachant que } x_0 = 0 \text{ pour } (1.71) \\ V(t_0, 0) = 0 \quad \forall t_0 \text{ pour } x = x_0 = 0 \end{cases} \quad (1.77)$$

est une fonction de Lyapunov non stationnaire sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$  pour le système (1.71), si elle est candidate à Lyapunov non stationnaire et elle vérifie :

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \forall t \geq t_0, \quad \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x)\dot{x} < 0.$$

alors la convergence de la trajectoire du système (1.71) vers le point d'équilibre  $x_0$  est asymptotiquement globale et uniforme.

Pour le mode glissant d'ordre un, la fonction  $V$  est généralement définie par  $V = \frac{1}{2}s^2$ . Dans ce cas, la condition suffisante est alors donnée par  $\dot{V} = s\dot{s} < 0$ , [73]. De cette façon, une convergence asymptotique de l'état vers la surface  $s = 0$  est garantie, sachant que l'origine du système est toujours considéré comme le point d'équilibre de celui-ci. Cette condition n'est pas suffisante pour assurer la convergence en temps fini d'un état initial quelconque vers la surface de glissement. Donc une condition plus forte doit être respectée. Pour un mode glissant d'ordre un, il existe la condition de convergence appelée "condition de  $\eta$ -attractivité" définie par :  $s\dot{s} < -\eta|s|$ , avec  $\eta > 0$ , [145]. En effet, par intégration de cette équation, nous pouvons directement extraire une borne maximale du temps de convergence qui dépend de la valeur de  $s$  en zéro et de la valeur de  $\eta$ .

### 1.3.1.5 Approche de Filippov

La génération d'un régime glissant est associée à une certaine classe de système, constituée par des équations différentielles discontinues au second membre. Or de telles équations ne satisfont pas les résultats conventionnels d'existence et d'unicité de la théorie des équations différentielles ordinaires. Différentes façons de prolongement par continuité ont été proposées. Toutefois, une des méthodes les plus anciennes est celle développée par Filippov, [43]. Un rappel sur cette dernière est évoqué dans le paragraphe suivant.

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = h(x) = \begin{cases} h^+(x), & \text{si } \phi(x) > 0 \\ h^-(x), & \text{si } \phi(x) < 0 \end{cases} \quad (1.78)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $h$  est une fonction supposée discontinue sur la surface  $\phi(x) = 0$ . Notons  $\sigma_-$  et  $\sigma_+$  les deux demi-espaces séparés par cette surface de discontinuité :  $\mathbb{R}^n = \sigma_- \cup M \cup \sigma_+$ , où  $M$  est l'ensemble de mesure nulle.

Quand la surface de glissement  $\phi(x) = 0$  est atteinte, le vecteur  $h$  n'est plus défini. Dans ce cas, la condition de Lipschitz n'est pas satisfaite à cause de la discontinuité du champ  $h$  au voisinage de  $\phi$ . Pour ce problème, il existe principalement deux travaux de référence : [43] et [145]. L'approche de Filippov est généralement utilisée dans le cas où l'état discontinu n'apparaît pas d'une façon explicite dans  $h$ . Pour les modèles de commande, ceci revient à avoir un système non affine en la commande. Pour les équations où la discontinuité apparaît explicitement, Utkin propose une approche qui consiste à admettre qu'en régime glissant, le système est piloté par une commande dite "commande équivalente" [145].

Le problème posé ici (équation (1.78)) consiste à montrer l'existence d'une solution et qu'elle doit être unique quand  $\phi = 0$ . Pour trouver une solution à ce problème, l'idée de Filippov est de considérer un voisinage de zéro en créant une enveloppe convexe de largeur très faible.

Avant de présenter cette méthode, définitions :

- $\dot{x} = h_0(x)$ , pour  $\phi(x) = 0$  : équation du mode de glissement,
- $x^*$  : point de la surface de commutation,
- $h^-_*$  et  $h^+_*$  sont les limites respectives de  $h^-$  et  $h^+$  définies telles que :

$$h^-_* = \lim_{x \in \sigma_- \rightarrow x^* \in \phi} h^-(x), \quad h^+_* = \lim_{x \in \sigma_+ \rightarrow x^* \in \phi} h^+(x) \quad (1.79)$$

Selon la méthode de Filippov  $h_0$  doit appartenir à l'enveloppe convexe de tous les vecteurs  $h$  du  $\epsilon$ -voisinage de la surface  $\phi = 0$ . Pour cet exemple (une seule surface de discontinuité), cette enveloppe convexe est représentée par un segment de droite reliant les deux extrémités de  $h^-_*$  et  $h^+_*$ , voir figure 1.15.

Etant donné que le vecteur  $h_0$  prend la direction du plan tangent à la surface de commutation, l'extrémité de ce vecteur est alors le point d'intersection du plan avec le segment de droite reliant  $h^-_*$  et  $h^+_*$ . Ainsi, l'équation du régime glissant est donné par :

$$h_0 = \alpha h^+(x) + (1 - \alpha) h^-(x) \quad (1.80)$$

La détermination de  $\alpha$  est donnée alors par  $\text{grad}(\phi) \cdot h_0 = 0$ , ce qui permet d'obtenir l'expression suivante :

$$\alpha = \frac{\text{grad}(\phi) h^-}{\text{grad}(\phi) (h^- - h^+)} \quad (1.81)$$

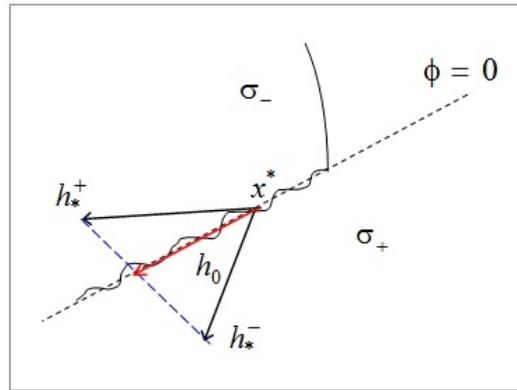


FIGURE 1.15 – Illustration de l'approche de Filippov.

Nous pouvons alors décrire l'équation (1.78) par l'inclusion différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt}(t) \in H(x(t)) \quad (1.82)$$

où :

$$H(x) = \begin{cases} h^-(x), & \text{si } x \in \sigma_- \\ \alpha h^-(x) + (1 - \alpha)h^+(x), & \alpha \in [0, 1], \text{ si } x \in \phi \\ h^+(x), & \text{si } x \in \sigma_+ \end{cases} \quad (1.83)$$

Comme nous l'avons précisé ci-dessus, l'existence de solution dépend de certaines conditions sur  $H(x)$ . Notamment,  $H$  doit être non vide, bornée, fermée, convexe et semi-continue supérieurement (1.79) et Lipschitzien en  $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$ .

### 1.3.1.6 Phénomène de réticence

Un mode glissant est une trajectoire d'un système dynamique caractérisée par une fréquence de commutation théoriquement infinie. En pratique, la commutation se fait à très haute fréquence qui peut être destructive, peut causer des résonances du système, ou encore solliciter des dynamiques hautes fréquences non modélisées. Ce phénomène est appelé "chattering" (ou réticence) (voir figure 1.16), [14], [154], [58], [56].

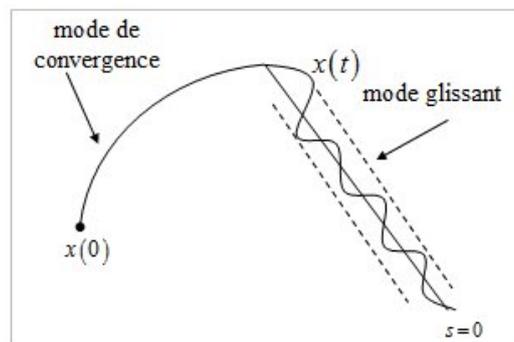


FIGURE 1.16 – Illustration du régime de convergence et du régime glissant.

Pour éliminer ce phénomène, plusieurs solutions ont été proposées. Parmi lesquelles celles qui permettent de remplacer la fonction " $\text{sat}(\cdot)$ " présente au niveau du signal d'entrée par une

fonction assurant une commutation progressive. Ce type de technique consiste à définir un domaine au voisinage de la surface de glissement et à l'intérieur duquel le signal d'entrée discontinu est linéarisé. Une technique très utilisée consiste à remplacer la fonction "sign(.)" par la fonction de saturation, [128]. En effet, cette dernière revient à filtrer les composantes hautes fréquences dans la région linéaire. D'autres fonctions peuvent aussi être utilisées telles que les fonctions sigmoïdes. Il est vrai que ces techniques réduisent considérablement le phénomène de réticence, mais en contrepartie elles présentent certaines limites. Lorsque l'on est proche dans la "bande morte" de la surface de glissement, les conditions de convergence et donc la robustesse de la méthode ne sont plus vérifiées.

Afin de remédier à ces difficultés, une méthode consiste à utiliser l'approche des modes glissants d'ordre supérieur. Cette dernière permet de déplacer la commutation au niveau des dérivées d'ordre supérieur du signal d'entrée [46].

### 1.3.2 Régimes glissants d'ordre supérieur

Le principe de cette technique est une généralisation du mode glissant d'ordre un et surtout est de préserver les mêmes propriétés de robustesse, tout en permettant une convergence plus précise, une réduction du phénomène de réticence ("chattering") et en s'affranchissant de la condition sur le degré relatif (par rapport le régime glissant d'ordre un). Nous présentons brièvement la théorie sur laquelle se base cette technique. Plus de détails sont donnés dans [46], [94], [54].

#### 1.3.2.1 Définitions et notations

Soit le système non linéaire incertain dont la dynamique est donnée par :

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u \quad (1.84)$$

où  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état du système. Le signal d'entrée  $u \in \mathbb{R}$  est une fonction discontinue, bornée et dépendante de l'état et du temps  $t$ . Les champs de vecteurs  $f$  et  $g$  sont considérés comme suffisamment différentiables mais incertains.

Dans le cadre des régimes glissants d'ordre supérieur, le problème posé reste toujours de contraindre les trajectoires du système à évoluer sur la surface de glissement  $s(x, t) = s = 0$ . Cette dernière doit être suffisamment différentiable, telles que ses  $(r - 1)$  premières dérivées par rapport au temps soient des fonctions uniquement de l'état  $x$ , ce qui veut dire qu'elles ne contiennent aucune discontinuité. Par conséquent, la discontinuité agit directement sur la dérivée d'ordre  $r$ . Dans le cas où le système est de degré relatif égale à  $p$  par rapport à la variable de glissement, tel que  $p < r$ , la discontinuité générant le mode glissant d'ordre  $r$  est appliquée sur  $u^{(r-p)}$ . Dans ces deux cas, la réduction du phénomène de réticence se traduit alors par le fait que le signal d'entrée est toujours continu.

**Définition 1.3.** [94] Soit le système différentiel non linéaire (1.84) et soit  $s(x, t)$  la variété de glissement associée. L'ensemble de glissement d'ordre  $r$  par rapport à  $s(x, t)$  est défini par :

$$S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0\}, \text{ où } r \in \mathbb{N}^* \quad (1.85)$$

**Définition 1.4.** [94] Supposons que l'ensemble de glissement  $S_r$  d'ordre  $r$  soit non vide et qu'il définisse localement un ensemble intégrable au sens de Filippov, alors la dynamique satisfaisant (1.85) est appelée mode glissant d'ordre  $r$  par rapport à la fonction de glissement  $s$ .

La convergence d'un algorithme d'ordre  $r$  s'obtient par une convergence en temps fini sur la surface en forçant les trajectoires du système à être confinées au bout d'un temps fini dans l'ensemble de glissement  $S_r$ .

**Définition 1.5.** [94] On dit que la génération d'un mode glissant d'ordre  $r$  est idéal par rapport à  $S_r$ , si la solution générée au sens de Filippov sur  $S_r$  est donnée par :

$$s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0 \quad (1.86)$$

**Définition 1.6.** [94], [56] Soit  $\gamma(\epsilon)$  une fonction réelle telle que  $\gamma(\epsilon)$  tend vers 0 si  $\epsilon$  tend vers 0. Un algorithme à régime glissant réel sur  $s = 0$  est dit d'ordre  $r$  par rapport à  $\gamma(\epsilon)$ , si pour tout ensemble compact des conditions initiales et pour tout intervalle  $[T_1, T_2]$ , il existe une constante  $C > 0$ , telle que l'état en régime permanent satisfait :

$$s(t, x(t, \epsilon)) \leq C|\gamma(\epsilon)|^r, \quad \forall t \in [T_1, T_2] \quad (1.87)$$

Comme le régime glissant classique, un régime glissant qualifié idéal (voir définition 1.5) est impossible à atteindre en pratique. De ce fait, le régime glissant ne prend place que dans un voisinage de la surface de commutation. Ce comportement peut alors être qualifié de régime glissant réel (voir définition 1.6).

Il en résulte qu'un algorithme de mode glissant d'ordre  $r$  permettra, si la méthode d'intégration est à pas variable majoré par  $\tau$ , d'obtenir la précision de convergence suivante, [54] :

$$|s| = \Theta(\tau^r), \quad |\dot{s}| = \Theta(\tau^{(r-1)}), \dots, |s^{(r-1)}| = \Theta(\tau) \quad (1.88)$$

L'équation précédente indique que la précision de convergence d'un régime glissant d'ordre un est de l'ordre de  $\tau$ , alors qu'elle est de l'ordre de  $\tau^r$  pour un régime glissant d'ordre  $r$ . Donc il ne suffit pas de maintenir uniquement la fonction de glissement à zéro pour obtenir une bonne précision de convergence mais également ses dérivées successives.

Afin de mieux illustrer les propriétés du régime glissant d'ordre supérieur, considérons le problème à l'ordre deux.

### 1.3.2.2 Mode glissant d'ordre deux

Dans toute la suite, nous considérons le système (1.84) donné dans le paragraphe 1.3.2.1. L'objectif est d'établir un régime glissant d'ordre deux par rapport à  $s$ , en imposant aux trajectoires d'état du système à évoluer au bout d'un temps fini sur l'ensemble  $S_2$  et à ne plus le quitter ensuite :

$$S_2 = \{x : s = \dot{s} = 0\} \quad (1.89)$$

On définit donc un bouclage agissant sur la dérivée seconde de la fonction de glissement, qui peut s'écrire sous la forme suivante sous condition que le système est de degré relatif un par rapport à la fonction  $s$  :

$$\ddot{s} = L_u L_u(s) + \frac{\partial \dot{s}}{\partial u} \dot{u} \quad (1.90)$$

où  $L_u$  est un opérateur défini par, [94] :  $L_u s(t, x) = \frac{\partial s}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial s}{\partial x}(t, x)\dot{x}$ . Dans ce cas,  $\dot{u}$  représente alors la nouvelle entrée du système.

Supposons qu'il existe des constantes positives  $C_0, K_m, K_M$  et  $s_0$  telle que si  $|s(x, t)| < s_0$ , nous pouvons obtenir alors le système suivant [94] :

$$\begin{cases} 0 \leq K_m \leq \left| \frac{\partial \dot{s}}{\partial u} \right| \leq K_M \\ |L_u L_u(s)| < C_0 \end{cases} \quad (1.91)$$

La première inégalité du système précédant est nécessaire puisque le terme  $\frac{\partial \dot{s}}{\partial u}$  ne doit pas s'annuler afin d'assurer l'existence de l'entrée équivalente en régime glissant.

Soit l'ensemble  $E_l = \{t, x : |s(x, t)| < s_0\}$  appelé région de linéarité, [94].

Les hypothèses énoncées ci-dessus impliquent que la dérivée seconde de la fonction de commutation  $s$  est uniformément bornée dans un certain domaine ( $E_l$ ) pour l'entrée considérée, [8]. En respectant les conditions déjà définies, nous pouvons écrire dans un cadre général :

$$\ddot{s} = \varphi(t, x) + \psi(t, x)W \quad (1.92)$$

Où  $\varphi(t, x)$  et  $\psi(t, x)$  sont des fonctions bornées. Ce qui nous ramène à écrire que toute solution relative à l'équation (1.92) satisfait l'inclusion différentielle suivante, [94] :

$$\ddot{s} \in [-C_0, C_0] + [K_m, K_M]W \quad (1.93)$$

Pour un mode glissant d'ordre deux, l'entrée du système  $W$  dépend du degré relatif du système et par conséquent pour un degré relatif égal à deux (respectivement à un) par rapport à la fonction de glissement  $s$ , le signal  $W$  est égal à  $u$  (respectivement  $\dot{u}$ ). Pour un degré relatif égal à un, il faut donc ajouter un intégrateur à la commande réelle  $u$ .

Dans ce qui précède, ces rappels sur les principes des régimes glissants ont été exposés dans le cadre général. Toutefois, cette technique a aussi été utilisée pour la construction des algorithmes de différentiation, point que nous abordons dans la suite.

## 1.4 Différentiateurs via les modes glissants d'ordre supérieur

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude de certains différentiateurs basés sur la technique des modes glissants d'ordre supérieurs [94], [93], [89]. Nous considérons les cas des différentiateurs d'ordre un et d'ordre deux. Le principe de chaque algorithme sera introduit avant de présenter un exemple illustratif ainsi que les caractéristiques fréquentielles de chacun de ces algorithmes. Une description des problèmes de mise en oeuvre sera le but du dernier paragraphe de cette partie.

### 1.4.1 Différentiateur d'ordre un : algorithme du Super Twisting

Basé sur le régime glissant d'ordre deux, l'algorithme de Super Twisting (ST) a été développé pour des systèmes de degré relatif égal à 1 par rapport à la surface de glissement. Cet algorithme a été appliqué au début pour des objectifs de commande, [93]. Toutefois, son utilisation en tant que dérivateur est envisageable sous certaines hypothèses.

#### 1.4.1.1 Présentation du principe de Super Twisting

Soit le signal  $f(t)$  une fonction bornée définie de  $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$  mesurable au sens de Lebesgue. Considérons  $f(t)$  comme étant la somme de deux termes :

$$f(t) = f_0(t) + \eta(t) \quad (1.94)$$

où  $f_0(t)$  est le signal utile dont la dérivée seconde est bornée par une constante de Lipschitz  $C > 0$  supposée connue.  $\eta(t)$  est un bruit dont on connaît uniquement une borne supérieure  $\epsilon$  telle que  $|\eta(t)| < \epsilon$ , avec  $\epsilon \ll 1$ .

L'utilisation du Super Twisting pour des applications de différentiation nécessite d'une part un choix adéquat de la surface de glissement et d'autre part la prise en considération de certaines hypothèses sur le signal d'entrée et le bruit, comme indiqué ci-dessus.

Soit l'équation auxiliaire suivante :

$$\dot{z}_0 = v_0 \quad (1.95)$$

Considérons l'erreur entre l'état  $z_0$  et le signal d'entrée du différentiateur  $f(t)$  comme étant la surface de glissement  $s = z_0 - f(t)$ .

L'implémentation de ce schéma de dérivation est simple puisqu'il ne dépend que des deux équations données (1.95),(1.96) et ne requiert l'information que pour la surface de glissement  $s$  et non pas de sa dérivée.

Grâce à la discontinuité de  $v_0$ , un mode glissant d'ordre deux est généré, où théoriquement nous obtenons  $s = \dot{s} = 0$ .

$$\begin{cases} v_0 = z_1 - \lambda_0 |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) \\ \dot{z}_1 = -\lambda_1 \text{sign}(s) \end{cases} \quad (1.96)$$

$z_0$  et  $z_1$  représentent les différents états de l'algorithme et  $v_0$  est sa sortie.  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$  sont des gains positifs assurant la convergence en temps fini de l'algorithme sous des conditions suffisantes données dans [93] :

$$\begin{cases} \lambda_1 > C \\ \lambda_0^2 \geq 4C \frac{\lambda_1 + C}{\lambda_1 - C} \end{cases} \quad (1.97)$$

Un schéma de principe de cet algorithme est donné dans la figure 1.17

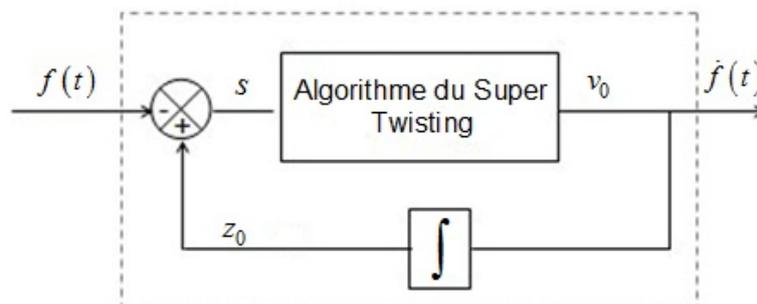


FIGURE 1.17 – Schéma de principe du différentiateur d'ordre un : Super Twisting.

Dans ce dérivateur proposé par Levant, le terme  $z_1$  faisant intervenir l'intégrale joue le rôle d'estimateur de la dérivée du signal d'entrée. Le deuxième terme de la première équation du système (1.96) doit être nul de point de vue théorique suite à l'établissement du régime glissant. Mais en pratique, différentes causes d'imprécision peuvent surgir par une simple erreur de mesure, ce qui rend impossible l'annulation du terme  $\lambda_0 |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s)$ . La présence du "sign(.)" dans ce terme le rend oscillant avec une fréquence élevée, ceci se traduit par la présence du chattering. Sa présence dans le signal estimé, détériore sa précision. En ayant un signal d'entrée bruité, l'amplification du bruit devient grande. Le gain  $\lambda_0$  est alors un peu délicat à ajuster. En effet, une valeur élevée de ce gain permet d'accélérer la phase transitoire. Toutefois, la valeur de l'expression  $\lambda_0 |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s)$  doit être le plus faible possible (surtout quand  $s$  se rapproche de zéro) pour éviter la perturbation de l'estimation. L'idéal est de choisir cette valeur de gain faible tout en garantissant une phase transitoire acceptable. Pour avoir le bon compromis, généralement un réglage manuel des gains doit être effectué.

Théoriquement, après un temps de convergence fini, les égalités suivantes sont assurées :

$$\begin{cases} s = z_0 - f(t) = 0 \\ \dot{s} = v_0 - \dot{f}(t) = z_1 - \lambda_0 |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) - \dot{f} = 0 \end{cases} \quad (1.98)$$

A partir du système précédent, nous pouvons en déduire qu'après établissement du régime glissant :  $z_0$  représente l'estimé du signal d'entrée  $f(t)$ ,  $z_1$  devient égale à  $v_0$  et constitue alors l'estimé du signal dérivé  $\dot{f}$ , donc on a  $z_1 = v_0 = \dot{f}$ .

**Théorème 1.1.** [89] *Considérons le signal d'entrée  $f(t)$  donné par (1.94). Alors il existe une constante  $b$  positive dépendante de  $\frac{\lambda_1 - C}{\lambda_0^2}$  et  $\frac{\lambda_1 + C}{\lambda_0^2}$  tel que après un temps fini, l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$|v_0(t) - f_0(t)| \leq \lambda_0 b \epsilon^{\frac{1}{2}} \quad (1.99)$$

Si  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$  sont choisies sous la forme  $\lambda_1 = \mu_0 C$  et  $\lambda_0 = \mu_1 C^{\frac{1}{2}}$ , alors l'inégalité (1.99) devient :

$$|v_0(t) - f_0(t)| \leq \tilde{b} C^{\frac{1}{2}} \epsilon^{\frac{1}{2}} \quad (1.100)$$

où  $\tilde{b}(\mu_0, \mu_1) > 0$ .

La précision de ce différentiateur est au moins de l'ordre de  $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ . Sachant que le temps relatif à la phase transitoire est borné, si les erreurs initiales  $|z_0(t_0) - f(t_0)|$  et  $|v_0(t_0) - \dot{f}(t_0)|$  sont bornées. Ceci est réalisable pour n'importe quelle évaluation de  $f(t_0)$  et  $\dot{f}(t_0)$ . En fait, l'initialisation des états de l'algorithme peut être choisie en considérant à  $t_0 = 0$  que  $z_0(0) = f(0)$  et  $z_1(0) = 0$ .

### 1.4.1.2 Preuve de convergence en temps fini de l'algorithme

Dans [93], l'auteur présente des conditions suffisantes de convergence en temps fini du Super Twisting (ST)(1.97). Nous détaillons dans cette partie la démonstration de convergence de cet algorithme afin d'obtenir les conditions sur les gains de celui-ci assurant sa convergence. Toutefois, il est intéressant de présenter tout d'abord les résultats de convergence dans le cadre d'une loi de commande glissante d'ordre deux pour étendre par la suite ces résultats au cas d'un différentiateur.

#### 1.4.1.2.a Résultats élémentaires de convergence pour une commande par mode glissant d'ordre deux

Soit le système différentiel suivant :

$$\dot{x}(t) = c(t) + d(t)u \quad (1.101)$$

En supposant que :

$$\begin{cases} |\dot{c}(t)| \leq C \\ 0 < K_m \leq \dot{d}(t) \leq K_M \end{cases} \quad (1.102)$$

avec  $C$ ,  $K_m$  et  $K_M$  sont des constantes positives et le signal d'entrée  $u$  est défini par :

$$u = -r_1 \text{sign}(x) - r_2 \text{sign}(\dot{x}), \text{ avec } r_1 > r_2 > 0 \quad (1.103)$$

**Théorème 1.2.** *En considérant le signal d'entrée donné par (1.103) et sous les conditions décrites par les inégalités (1.102), la trajectoires du système différentiel (1.101) converge au point d'équilibre  $x = \dot{x} = 0$  en un temps fini sous les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} K_m(r_1 + r_2) > C \\ K_m(r_1 + r_2) - C > K_M(r_1 - r_2) + C \end{cases} \quad (1.104)$$

*Démonstration.* Pour prouver les résultats donnés dans le théorème ci-dessus, nous procédons par quadrant du plan de phase  $(x, \dot{x})$ . Commençons tout d'abord par dériver l'équation (1.101) qui nous permet d'obtenir l'identité suivante, satisfaite presque partout :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \dot{c} + \dot{d}u, \\ &= \dot{c} - \dot{d}(r_1 \text{sign}(x) + r_2 \text{sign}(\dot{x})),\end{aligned}\quad (1.105)$$

Suite à la définition de la fonction  $\text{sign}(\cdot)$  donnée dans (1.75)), nous supposons que la dérivée de cette fonction est nulle pour  $x = \dot{x} = 0$ , ce qui explique la disparition du terme  $\dot{u}$  dans l'expression (1.105).

En utilisant les inégalités imposées pour  $\dot{c}$  et  $\dot{d}$  (1.102), il en résulte le système suivant :

$$\begin{cases} -[C + K_M(r_1 + r_2)] \leq \ddot{x} \text{sign}(x) \leq -[K_m(r_1 + r_2) - C], & \text{si } x\dot{x} > 0 \\ -[C + K_M(r_1 - r_2)] \leq \ddot{x} \text{sign}(x) \leq -[K_m(r_1 - r_2) - C], & \text{si } x\dot{x} \leq 0 \end{cases}\quad (1.106)$$

Notons :

$$\begin{cases} \alpha_m = K_m(r_1 + r_2) - C > 0 \\ \alpha_M = K_M(r_1 - r_2) + C > 0 \end{cases}\quad (1.107)$$

Demi-plan droit :  $(x \geq 0)$

A  $t_0 = 0$ , considérons le point initial  $(0, \dot{x}_0)^T$ , tel que  $\dot{x}_0 = \dot{x}(0) > 0$ , voir figure 1.18.

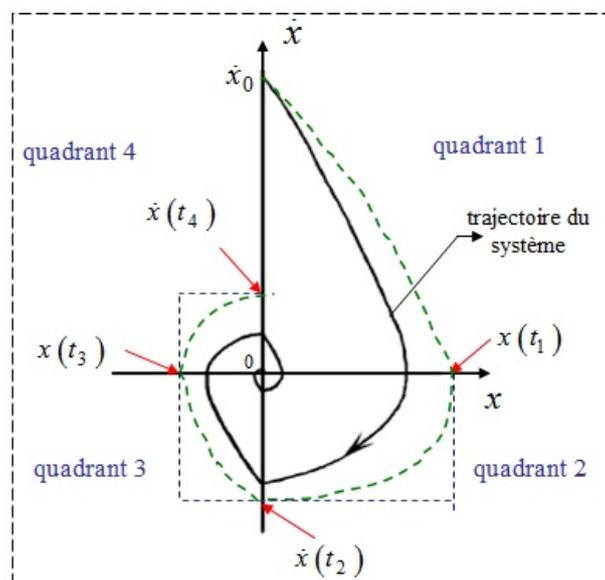


FIGURE 1.18 – Trajectoire de l'algorithme dans le plan de phase  $(x, \dot{x})$ .

Dans ce demi-plan, nous avons :

$$\begin{cases} \ddot{x} \leq -\alpha_m, & \dot{x} > 0 \\ \ddot{x} \geq -\alpha_M, & \dot{x} < 0 \end{cases}\quad (1.108)$$

Nous allons considérer maintenant les deux quadrants : 1 et 2 du demi-plan droit.

*Quadrant 1* :  $(x > 0, \dot{x} > 0)$

Dans ce quadrant, nous avons  $\ddot{x} \leq -\alpha_m$ , où  $\alpha_m$  est une constante positive suite à l'hypothèse donnée par (1.104). Cette hypothèse impose la négativité de  $\ddot{x}$  ce qui permet d'assurer la décroissance de  $\dot{x}$  et donc l'intersection de la trajectoire du système à un instant donné avec l'axe  $\dot{x} = 0$ .

Considérons maintenant la trajectoire majorante donnée par  $\ddot{x} = -\alpha_m$ . Par intégration de cette dernière, l'équation suivante est obtenue :

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 - \alpha_m t \quad (1.109)$$

Par intégration de l'équation (1.109), nous avons :

$$x(t) = \dot{x}_0 t - \frac{\alpha_m}{2} t^2 = t(\dot{x}_0 - \frac{\alpha_m}{2} t) \quad (1.110)$$

Soit  $t_1$  l'instant pour lequel la trajectoire majorante coupe l'axe  $\dot{x} = 0$  au point d'abscisse  $x(t_1)$  (voir figure 1.18). A partir de (1.109), l'expression de l'instant  $t_1$  est donnée dans ce cas par :

$$\dot{x}(t_1) = 0 \implies t_1 = \frac{\dot{x}_0}{\alpha_m} \quad (1.111)$$

En remplaçant dans (1.110) l'expression de  $t_1$ , nous pouvons écrire la relation entre  $x(t_1)$  et  $\dot{x}_0$ , donnée par :

$$x(t_1) = \frac{\dot{x}_0^2}{2\alpha_m} \quad (1.112)$$

Donc  $\forall t \in [t_0, t_1]$ , la trajectoire majorante est donnée par :

$$\dot{x}^2(t) = 2\alpha_m(x(t_1) - x(t)) \quad (1.113)$$

*Quadrant 2* :  $(x > 0, \dot{x} < 0)$

Dans ce quadrant, nous avons  $\dot{x} < 0$ , ce qui implique que  $\forall t \geq t_1$  la trajectoire du système est majorée verticalement par  $x(t_1)$ .

Pour majorer horizontalement la trajectoire du système, nous choisissons alors la borne inférieure du système (1.106) pour  $x\dot{x} \leq 0$  (le choix du "pire cas") donnée par :

$$\ddot{x} \geq -\alpha_M \quad (1.114)$$

$\forall t \geq t_1$ , l'intégration de l'équation  $\ddot{x} = -\alpha_M$  relative à la trajectoire minorante permet d'avoir l'égalité suivante :

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t_1) - \alpha_M(t - t_1) \quad (1.115)$$

Soit après une nouvelle intégration :

$$x(t_1) - \frac{\alpha_M}{2} (t - \frac{\dot{x}_0}{\alpha_m})^2 = x(t) \quad (1.116)$$

Posons  $t_2$  l'instant pour lequel la trajectoire minorante coupe l'axe  $x = 0$  au point d'ordonnée  $\dot{x}(t_2)$ . Cet ordonné représente alors le point extrême de l'intersection de la trajectoire du système avec l'axe  $x = 0$ .

En remplaçant dans (1.116), l'expression de  $t_1$ , l'instant  $t_2$  est alors donné par :

$$x(t_2) = 0 \implies t_2 = \dot{x}_0 \left( \frac{1}{\alpha_m} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_m \alpha_M}} \right) = t_1 + \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\alpha_m \alpha_M}} \quad (1.117)$$

En remplaçant  $t_2$  dans (1.115), l'ordonné maximal d'intersection de la trajectoire du système avec l'axe  $x = 0$  est alors donné par :

$$\dot{x}(t_2) = -\sqrt{\frac{\alpha_M}{\alpha_m}} \dot{x}_0 \quad (1.118)$$

Comme nous avons  $\dot{x}_0 > 0$  donc  $\dot{x}(t) \leq 0, \forall t \in [t_0, t_2]$ , l'inégalité suivante est obtenue :

$$\left| \frac{\dot{x}(t_2)}{\dot{x}_0} \right| = \sqrt{\left( \frac{\alpha_M}{\alpha_m} \right)} \quad (1.119)$$

Suite à l'hypothèse donnée par (1.104) :

$$\alpha_M < \alpha_m \implies \frac{\alpha_M}{\alpha_m} < 1 \quad (1.120)$$

Remarquons que cette condition assure alors la convergence de la trajectoire dans le demi-plan droit. En posant  $q = \sqrt{\frac{\alpha_M}{\alpha_m}}$ , l'équation (1.119) peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\left| \frac{\dot{x}(t_2)}{\dot{x}_0} \right| = q < 1, \quad (1.121)$$

Pour  $x \geq 0$  et  $\forall t_{i2} \leq t_2$ , nous avons :

$$\left| \frac{\dot{x}(t_{i2})}{\dot{x}_0} \right| \leq q < 1 \quad (1.122)$$

$t_{i2}$  représente l'instant pour lequel la trajectoire réel du système peut couper l'axe  $x = 0$ , pour  $x \geq 0$ .

Demi-plan gauche : ( $x < 0$ )

Considérons maintenant le demi-plan gauche ( $x \leq 0$ ) du plan de phase  $(x, \dot{x})$  où les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \ddot{x} \geq \alpha_m, & \dot{x} > 0 \\ \ddot{x} \leq \alpha_M, & \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (1.123)$$

De la même façon que précédemment, nous allons montrer la convergence de l'algorithme pour les quadrants 3 et 4.

Quadrant 3 : ( $x < 0, \dot{x} < 0$ )

Dans ce demi-plan de phase nous avons  $\ddot{x} > 0$ , ce qui implique que  $\dot{x}$  est croissante et que la trajectoire du système est minorée horizontalement par le point d'ordonné  $\dot{x}(t_2)$ .

Pour la deuxième majoration (verticale), nous utilisons l'équation relative à la trajectoire majorante de la première équation du système (1.123) :  $\ddot{x} = \alpha_m$ . Par intégration de cette équation et  $\forall t \geq t_2$ , on a :

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t_2) + \alpha_m(t - t_2) \quad (1.124)$$

Soit  $t_3$  l'instant pour lequel cette trajectoire limite coupe l'axe  $\dot{x} = 0$ . A partir de (1.124), l'expression de  $t_3$  est déduite :

$$\dot{x}(t_3) = 0 \implies t_3 = t_2 + q \frac{\dot{x}_0}{\alpha_m} \quad (1.125)$$

Pour obtenir l'abscisse  $x(t_3)$ , point extrême d'intersection de la trajectoire du système avec l'axe  $\dot{x} = 0$ , il suffit alors d'intégrer (1.124) :

$$x(t_3) = x(t_2) + \frac{\alpha_m}{2} (t_3 - t_2)^2 \quad (1.126)$$

Or  $x(t_2) = 0$  car la trajectoire coupe l'axe  $x = 0$  en  $t = t_2$ , par conséquent l'égalité suivante est donnée en valeur absolue :

$$x(t_3) = q^2 \frac{\dot{x}_0^2}{2\alpha_m} \quad (1.127)$$

*Quadrant 4* : ( $x < 0, \dot{x} > 0$ )

Etant donné que dans ce demi-plan,  $\ddot{x} > 0$  donc la trajectoire du système est majorée alors verticalement par le point d'abscisse  $x(t_3)$ .

Dans ce quadrant, nous considérons la trajectoire majorante donnée par :

$$\ddot{x} = \alpha_M \quad (1.128)$$

Par intégration de (1.128) et  $\forall t \geq t_3$  on a :

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t_3) + \alpha_M (t - t_3) \quad (1.129)$$

Soit après une nouvelle intégration :

$$x(t) = x(t_3) + \frac{\alpha_M}{2} (t - t_3)^2 \quad (1.130)$$

Notons  $t_4$  le majorant des instants pour lequel la trajectoire du système coupe l'axe  $x = 0$ . Ceci nous permet d'écrire :

$$x(t_4) = x(t_3) + \frac{\alpha_M}{2} (t_4 - t_3)^2 = 0 \quad (1.131)$$

A partir de (1.131), l'instant  $t_4$  est donné par la relation suivante :

$$t_4 = t_3 + q \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\alpha_m \alpha_M}} \quad (1.132)$$

En remplaçant dans (1.129) l'expression de  $t_4$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_4) &= \alpha_M (t_4 - t_3) \\ &= q \dot{x}_0 \sqrt{\frac{\alpha_M}{\alpha_m}} \end{aligned} \quad (1.133)$$

L'équation (1.133) peut être réécrite comme suit :

$$\dot{x}(t_4) = q^2 \dot{x}_0, \quad q^2 < 1 \quad (1.134)$$

Pour le demi-plan gauche, nous pouvons alors conclure que  $\forall t_{i4} \leq t_4$  nous avons :

$$\left| \frac{\dot{x}(t_{i4})}{\dot{x}_0} \right| \leq q^2 < 1 \quad (1.135)$$

$t_{i4}$  représente l'instant pour lequel la trajectoire réel du système peut couper l'axe  $x = 0$  afin d'entamer à nouveau le quadrant 1.

Finalement, pour un tour complet du plan de phase, nous obtenons les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\dot{x}(t)}{\dot{x}_0} \right| \leq q < 1, \quad \forall t \leq t_2 \\ \left| \frac{\dot{x}(t)}{\dot{x}_0} \right| \leq q^2 < q < 1 \quad \forall t \leq t_4 \end{array} \right. \quad (1.136)$$

A partir de ces inégalités, nous pouvons déduire alors la condition suffisante de convergence de l'algorithme donnée par :

$$\left| \frac{\dot{x}_{i+1}}{\dot{x}_i} \right| \leq q < 1, \quad i \in \mathbb{N} \quad (1.137)$$

où  $\dot{x}_{i+1}$  et  $\dot{x}_i$  sont les ordonnés relatifs aux intersections successives de la trajectoire du système avec l'axe  $x = 0$ . Cette condition traduit que les intersections successives de la trajectoire du système avec l'axe  $x = 0$  sont de plus en plus proche de zéro.

Nous pouvons aussi écrire d'une façon générale la condition suffisante pour la convergence de l'algorithme de la façon suivante :

$$\left| \frac{\dot{x}_i}{\dot{x}_0} \right| \leq q^i < 1, \quad \text{pour } i \in \mathbb{N}^* \quad \text{et } q < 1 \quad (1.138)$$

où  $\dot{x}_i$  sont les ordonnés des points d'intersection de la trajectoire avec l'axe  $x = 0$ .

A partir de cette dernière inéquation, nous pouvons conclure que  $\dot{x}_i$  peut être majoré par une suite géométrique de raison  $q$  inférieure à 1, et qui est indépendante du quadrant considéré dans le plan de phase. Ceci nous ramène à écrire d'une manière générale :

$$\sum_i |\dot{x}_i| \leq \sum_i q^i \dot{x}_0 = \frac{\dot{x}_0}{1-q}, \quad i \in \mathbb{N} \quad (1.139)$$

Suite à la symétrie de l'algorithme par rapport au plan de phase, peu importe le demi-plan (droite ou gauche) avec lequel la preuve de convergence débute, le résultat trouvé sera le même.

Temps de convergence :

L'instant  $t_4$  est le temps pour lequel la trajectoire limite du système parcourt un tour complet du plan de phase, il est exprimé en fonction des instants ( $t_3, t_2, t_1$ ) relatifs aux intersections précédentes de la trajectoire limite avec les axes  $x = 0$  et  $\dot{x} = 0$ . Cet instant est donné par :

$$t_4 = \dot{x}_0 \left[ \frac{1}{\alpha_m} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_m \alpha_M}} \right] (1+q) \quad (1.140)$$

Etant donné que  $\alpha_M < \alpha_m$ , nous pouvons alors majorer l'instant  $t_4$  comme suit :

$$t_4 \leq \frac{2\dot{x}_0}{\sqrt{\alpha_m \alpha_M}} (1+q) \quad (1.141)$$

A partir de (1.141), nous pouvons dire que le temps  $t_i$  mis pour traverser tout le plan de phase est majoré par :

$$t_i \leq \frac{2|\dot{x}_i|}{\sqrt{\alpha_m \alpha_M}} (1+q) \quad (1.142)$$

Ainsi, le temps global de convergence est fini et majoré par :

$$T = \sum_i t_i \leq \sum_i \frac{2|\dot{x}_i|}{\sqrt{\alpha_m \alpha_M}} (1+q) \leq \frac{2\dot{x}_0}{\sqrt{\alpha_m \alpha_M}} \frac{1+q}{1-q} \quad (1.143)$$

□

### 1.4.1.2.b Application de ces résultats de convergence au Super Twisting

La preuve de convergence en temps fini du Super Twisting a été étudié dans différents travaux [93], [38], [20]. Pour obtenir la convergence en temps fini, Levant impose des conditions sur les gains de l'algorithme données par (1.97). Dans [20], on trouve des conditions analytiques imposant des majorations plus fines sur le choix des gains du dérivateur comparées à celles données dans [93].

En se basant sur les résultats donnés dans le paragraphe précédent, nous présentons dans ce qui suit une preuve de convergence temps fini du Super Twisting où les conditions imposées sur les gains sont différentes que celles données dans [93].

**Théorème 1.3.** *La trajectoire de l'algorithme Super Twisting défini par (1.95) et (1.96) converge en temps fini vers le point d'équilibre  $s = \dot{s} = 0$  sous des conditions suffisantes sur les gains données par :*

$$\begin{cases} \lambda_1 > C \\ \lambda_0^2 \geq 2 \frac{(\lambda_1 + C)^2}{(\lambda_1 - C)} \end{cases} \quad (1.144)$$

avec  $s = z_0 - f(t)$  est la surface de glissement et  $f(t)$  est le signal d'entrée de l'algorithme donné par (1.94).

*Démonstration.* Pour considérer les résultats donnés précédemment, partant tout d'abord par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}_0(t) = v_0 \\ \dot{s} = a(t, s) + b(t, s)v_0(t) \end{cases} \quad (1.145)$$

avec

$$\begin{cases} |\dot{a} + V_M \dot{b}| \leq |\dot{a}| + V_M |\dot{b}| \leq C \\ 0 \leq K_m \leq b \leq K_M \end{cases} \quad (1.146)$$

avec  $C$ ,  $K_m$ ,  $K_M$  et  $V_m$  sont des constantes positives.

L'expression de  $v_0$  est donnée par :

$$v_0 = -\lambda |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) + z_1, \quad \lambda > 0 \quad (1.147)$$

où  $s(t)$  et  $f(t)$  déjà définis dans le théorème ci-dessus.  $z_1$  est défini comme suit :

$$\dot{z}_1 = \begin{cases} -v_0, & |v_0| > V_M : \text{partie transitoire} \\ -\alpha \text{sign}(s) & |v_0| \leq V_M, \quad \alpha > 0 \end{cases} \quad (1.148)$$

Considérons donc le cas  $|v_0| \leq V_M$ , on a alors :

$$\ddot{s} = \dot{a} + \dot{b}v_0 - b \left( \frac{\lambda}{2} \frac{\dot{s}}{|s|^{\frac{1}{2}}} + \alpha \text{sign}(s) \right) \quad (1.149)$$

L'identité  $\frac{d}{dt}|s| = \dot{s}\text{sign}(s)$  a été utilisée pour l'obtention de l'expression (1.149).

Comme nous avons :  $-C \leq \dot{a} + b\dot{v}_0 \leq C$  et  $0 \leq K_m \leq b \leq K_M$ , nous pouvons alors écrire l'inclusion différentielle associée à l'équation (1.149) :

$$\ddot{s} \in [-C, C] - [K_m, K_M] \left( \frac{\lambda}{2} \frac{\dot{s}}{|s|^{\frac{1}{2}}} + \alpha \text{sign}(s) \right) \quad (1.150)$$

Etant donné la symétrie de l'algorithme (symétrie entre quadrants 1,3 et 2,4) et suite aux résultats donnés dans le paragraphe 1.4.1.2.a, nous nous limitons à présenter la convergence de la trajectoire du système 1.145 dans le quadrant 1 et 2.

### Demi-plan droit

*Quadrant 1* : ( $s > 0, \dot{s} > 0$ )

Considérons à  $t_0 = 0$  le point initial suivant  $(0, s_0)^T$ , avec  $s_0 > 0$ , voir figure 1.19. Dans ce premier quadrant du plan de phase, nous pouvons écrire, en utilisant (1.150), l'inégalité suivante :

$$\ddot{s} \leq - \left[ K_m \left( \frac{\lambda}{2} + \alpha \right) - C \right] \quad (1.151)$$

En imposant la condition  $K_m\alpha - C > 0$  utilisée déjà dans le paragraphe précédent, (1.151) devient alors :

$$\ddot{s} \leq -(K_m\alpha - C) \quad (1.152)$$

Ainsi dans ce quadrant, la trajectoire est confinée par la trajectoire donnée par l'équation  $\ddot{s} = -(K_m\alpha - C)$ . En suivant la même démarche que celle effectuée dans le paragraphe précédent, nous montrons que  $s(t)$  intersecte l'axe  $\dot{s} = 0$  à  $s_M$  dont l'expression est donnée par :

$$s_M = \frac{\dot{s}_0^2}{2(K_m\alpha - C)} \quad (1.153)$$

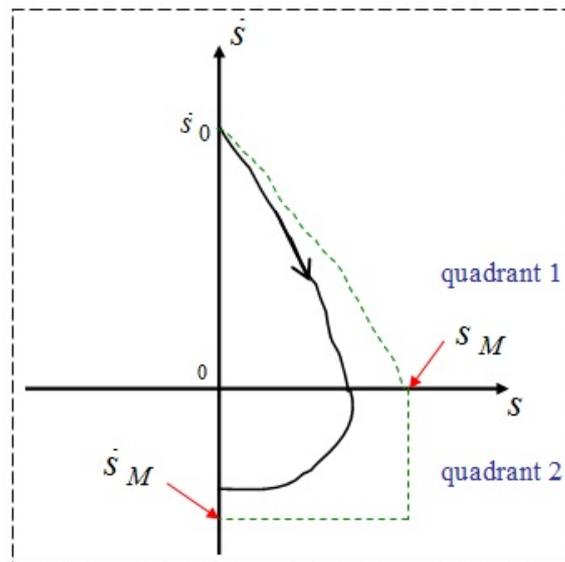


FIGURE 1.19 – Courbes de majoration des trajectoires de l'algorithme.

Remarquons que par rapport au paragraphe 1.4.1.2.a, il revient à remplacer  $\alpha_m$  défini dans (1.112) par  $(K_m\alpha - C)$ . De même pour  $t_{M0}$ , instant pour le quel nous avons  $\dot{s}(t_{M0}) = 0$  dont

l'expression est donnée par :

$$t_{M0} = \frac{\dot{s}_0}{(K_m \alpha - C)} \quad (1.154)$$

*Quadrant 2* : ( $s > 0, \dot{s} \leq 0$ )

Pour le confinement de  $s$  dans ce quadrant, le résultat n'est pas immédiat. La majoration se fait en deux étapes. La première étape consiste à majorer la courbe par une droite verticale, et la deuxième étape en une majoration par une droite horizontale, voir Figure 1.19. Pour la première étape de majoration, nous considérons la borne inférieure de  $\ddot{s}$  donnée par :

$$-C - K_m \left( \frac{\lambda}{2} \frac{\dot{s}}{|s|^{\frac{1}{2}}} + \alpha \right) \leq \ddot{s} \quad (1.155)$$

Pour  $\dot{s} \leq 0$ , nous avons :

$$-\frac{2}{\lambda} \left( \frac{C}{K_m} + \alpha \right) s^{\frac{1}{2}} \leq \dot{s} \leq 0 \quad (1.156)$$

et donc :

$$-\frac{2}{\lambda} \left( \frac{C}{K_m} + \alpha \right) \leq \frac{\dot{s}}{s^{\frac{1}{2}}} \leq 0 \quad (1.157)$$

En intégrant l'inégalité (1.157), on obtient :

$$-\frac{2}{\lambda} \left( \frac{C}{K_m} + \alpha \right) (t - t_{M0}) \leq 2(\sqrt{s} - \sqrt{s_M}) \leq 0 \quad (1.158)$$

A partir de cette dernière équation, nous pouvons déduire que  $s$  est majoré verticalement tel que :

$$s \leq s_M. \quad (1.159)$$

Reprenons maintenant l'inégalité (1.156). La trajectoire minorante dans ce cas est donnée par :

$$\dot{s} = -\frac{2}{\lambda} \left( \frac{C}{K_m} + \alpha \right) s_M^{\frac{1}{2}} \quad (1.160)$$

Soit  $t_{M1}$  l'instant pour lequel cette trajectoire limite coupe l'axe  $s = 0$  au point d'ordonnée  $\dot{s}_M$ . L'expression de cet ordonnée est donnée par :

$$\dot{s}_M = -\frac{2}{\lambda} \left( \frac{C}{K_m} + \alpha \right) s_M^{\frac{1}{2}} \quad (1.161)$$

Le rapport des deux intersections successives avec l'axe  $s = 0$  est donné comme suit :

$$\left| \frac{\dot{s}_M}{\dot{s}_0} \right| = \left| \frac{2}{\lambda} \left( \frac{C}{K_m} + \alpha \right) \frac{s_M^{\frac{1}{2}}}{\dot{s}_0} \right| \quad (1.162)$$

En remplaçant  $s_M$  par son expression définie dans (1.153), nous obtenons :

$$\left| \frac{\dot{s}_M}{\dot{s}_0} \right| = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \frac{C + k_m \alpha}{k_m \sqrt{k_m \alpha - C}} \quad (1.163)$$

Pour assurer la convergence de la trajectoire du système (1.145) vers le point d'équilibre, la condition suivante doit être satisfaite :

$$\left| \frac{\dot{s}_M}{\dot{s}_0} \right| = q < 1, \quad \text{avec } q = \frac{\sqrt{2}}{k_m \lambda} \frac{C + k_m \alpha}{\sqrt{k_m \alpha - C}} \quad (1.164)$$

Suite aux résultats donnés au paragraphe 1.4.1.2.a, cette expression peut être généralisée pour retrouver l'inégalité (1.138).

L'équation (1.164) conduit alors à des conditions suffisantes sur les gains de l'algorithme (1.145), données par :

$$\begin{cases} k_m \alpha - C > 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{k_m \lambda} \frac{C + k_m \alpha}{\sqrt{k_m \alpha - C}} < 1 \end{cases} \quad (1.165)$$

Ainsi, on a :

$$\begin{cases} k_m \alpha > C \\ (K_m \lambda)^2 > 2 \frac{(C + K_m \alpha)^2}{(K_m \alpha - C)} \end{cases} \quad (1.166)$$

En tenant compte des notations utilisées pour l'algorithme du Super Twisting (1.144) et en considérant que  $|\ddot{f}_0(t)| < C$ , nous pouvons exprimer les conditions de convergence de ce dérivateur par identification du développement effectué ci-dessus. En effet, en imposant  $\lambda_1 = k_m \alpha$  et  $\lambda_0 = K_m \lambda$ , nous retrouvons alors les conditions données dans le théorème 1.3, à savoir :

$$\begin{cases} \lambda_1 > C \\ \lambda_0^2 > 2 \frac{(C + \lambda_1)^2}{(\lambda_1 - C)} \end{cases} \quad (1.167)$$

Nous précisons que dans le cas du Super Twisting, la variable  $b$  donnée dans (1.145) est supposée constante.

Temps de convergence :

Pour déterminer l'expression de  $t_{M1}$  temps mis pour traverser un demi-plan, nous effectuons une double intégration de l'équation (1.160), il en résulte alors :

$$\dot{s}(t) = -(C + K_m \alpha)(t - t_M) - K_m \frac{\lambda}{2} s^{\frac{1}{2}}(t) + s_M - K_m \frac{\lambda}{2} s_M^{\frac{1}{2}} \quad (1.168)$$

En remplaçant  $t$  par  $t_{M1}$ , nous avons :

$$\dot{s}_M = -(C + K_m \alpha)(t_{M1} - t_M) + s_M - K_m \frac{\lambda}{2} s_M^{\frac{1}{2}} \quad (1.169)$$

Ainsi, l'expression de  $t_{M1}$  est donnée par :

$$t_{M1} = t_{M0} + \frac{\dot{s}_M - s_M + K_m \frac{\lambda}{2} s_M^{\frac{1}{2}}}{(C + K_m \alpha)} \quad (1.170)$$

Le temps  $t_{M1}$  peut être majoré comme suit :

$$t_{M1} < \dot{s}_0 \left( \frac{1}{(K_m \alpha - C)} + \frac{\sqrt{K_m \alpha + C}}{(K_m \alpha - C)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.171)$$

Ainsi, un temps  $t_i$  mis pour traverser un demi-plan est majoré par :

$$t_i < \dot{s}_i \left( \frac{1}{(K_m \alpha - C)} + \frac{\sqrt{K_m \alpha + C}}{(K_m \alpha - C)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.172)$$

Comme dans (1.143), nous pouvons alors écrire :

$$T = \sum_i t_i < \frac{\dot{s}_0}{1-q} \left( \frac{1}{(K_m \alpha - C)} + \frac{\sqrt{K_m \alpha + C}}{(K_m \alpha - C)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.173)$$

En exprimant le temps T avec les gains du Super Twisting, nous avons :

$$T = \sum_i t_i < \frac{\dot{s}_0}{1-q} \left( \frac{1}{(\lambda_1 - C)} + \frac{\sqrt{\lambda_1 + C}}{(\lambda_1 - C)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.174)$$

$$\text{avec } q = \frac{\sqrt{2}}{\lambda_0} \frac{\lambda_1 + C}{\sqrt{\lambda_1 - C}}.$$

En se basant sur le développement décrit dans le paragraphe précédent, nous avons pu majorer le temps global de convergence de l'algorithme du Super Twisting.

*Remarque :* A la fin de cette démonstration, nous pouvons conclure que les conditions (1.167) trouvées sont suffisantes pour la convergence en temps fini de l'algorithme mais plus restreintes. Par exemple, si on choisit  $C = 1$  et  $\lambda_1 = 2$ , nous retrouvons avec les conditions trouvées lors de cette démonstration  $\lambda_0^2 > 18$  mais avec les conditions données par Levant on a  $\lambda_0^2 \geq 12$ .  $\square$

## 1.4.2 Différentiateur d'ordre deux

Par généralisation de l'algorithme de Super Twisting, un schéma récursif de différentiateurs d'ordre  $n$  a été proposé dans [90].

Un différentiateur d'ordre  $n$  est un algorithme qui permet d'estimer jusqu'à la dérivée  $n^{\text{ième}}$  du signal d'entrée et donc d'avoir  $n$  sorties. Avec les mêmes conditions pour le signal d'entrée que celles définies pour le Super Twisting (ST) et avec la connaissance de la constante de Lipschitz de la dérivée  $(n+1)^{\text{ième}}$  du signal utile  $f_0(t)$ , le problème se résume alors en une estimation robuste en temps réel de  $\dot{f}_0(t), \ddot{f}_0(t), \dots, f_0^{(n)}(t)$ , qui est exacte en absence de bruit.

Un nombre arbitraire de  $n$  schémas de différentiateurs peuvent être construits comme le montre le système ci-dessous.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_0 = v_0, \\ v_0 = -\lambda_0 |z_0 - f|^{\frac{n}{n+1}} \text{sign}(z_0 - f) + z_1 \\ \dot{z}_1 = v_1, \\ v_1 = -\lambda_1 |z_1 - v_0|^{\frac{n-1}{n}} \text{sign}(z_1 - v_0) + z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{z}_{n-1} = v_{n-1} \\ v_{n-1} = -\lambda_{n-1} |z_{n-1} - v_{n-2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{n-1} - v_{n-2}) + z_n \\ \dot{z}_n = -\lambda_n \text{sign}(z_n - v_{n-1}) = -\lambda_n \text{sign}(z_{n-1} - v_{n-2}) \end{array} \right. \quad (1.175)$$

A l'instant initial ( $t = 0$ ), nous avons  $z_0(0) = f(0)$  et  $z_i(0) = v_{i-1}(0) = 0$ , où  $i = 1, \dots, n$ .

Les gains  $\lambda_i$ , ( $i = 0, \dots, n$ ) peuvent être exprimés en fonction de la constante  $C$ , [89], comme suit :

$$\lambda_i = \lambda_{i0} C^{\frac{1}{n-i+1}}, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (1.176)$$

$\lambda_{i0}$ , ( $i = 0, \dots, n$ ) sont des gains positifs.

Plus les valeurs des gains  $\lambda_{i0}$ , donc de  $\lambda_i$  sont élevées, plus la convergence de l'algorithme est rapide. En contre partie, en présence de faible erreur (mesure/bruit) le chattering sera important donc la précision sera moins bonne. Si on considère un signal d'entrée bruité, les grandes valeurs des gains entraînent alors l'amplification du bruit dans le signal de sortie, remarque déjà faite pour le ST. Donc le choix des gains  $\lambda_{i0}$  (ou  $\lambda_i$ ) doit satisfaire un certain compromis.

Nous remarquons qu'à partir de l'expression (1.176), différentes valeurs de  $\lambda_{i0}$  (donc de  $\lambda_i$ ) peuvent être proposées. Dans les travaux de Levant [89], un jeu de coefficients a été choisi permettant d'assurer un bon compromis entre l'erreur et le déphasage par rapport à la dérivée théorique ainsi que le temps de convergence. Nous présentons ci-dessous le jeu de coefficients proposé par Levant pour un différentiateur d'ordre au plus égal à 5 ( $n = 5$ ) :

$$\lambda_{n0} = 1.1, \lambda_{(n-1)0} = 1.5, \lambda_{(n-2)0} = 3, \lambda_{(n-3)0} = 5, \lambda_{(n-4)0} = 8, \lambda_{(n-5)0} = 12 \quad (1.177)$$

Par exemple, pour  $n = 1$  (le cas du ST), les gains  $\lambda_{i0}$  peuvent alors être choisis comme suit :

$$\begin{cases} \lambda_{10} = 1.1 \\ \lambda_{00} = 1.5 \end{cases} \quad (1.178)$$

Dans [20], la preuve de convergence proposée permet d'obtenir une valeur de  $\lambda_{10}$  très proche de celle donnée par Levant. En fait, pour  $\lambda_{10} = 1.1$ , l'utilisation de la condition obtenue permet d'avoir une valeur minimale égale à  $\lambda_{00} = 1.61$ , valeur proche à celle donnée dans (équation (1.178)).

A partir du différentiateur d'ordre  $n$  (1.175), nous pouvons retrouver l'algorithme du ST en choisissant  $n = 1$ . Pour construire le schéma d'ordre deux,  $n$  est égal à deux et l'ordre du régime glissant est alors égal à trois.

Dans toute la suite, nous nous intéressons à l'étude du Différentiateur d'Ordre deux (DO2), dont les équations dynamiques sont données par :

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = v_0, \\ v_0 = -\lambda_0 |z_0 - f|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(z_0 - f) + z_1 \\ \dot{z}_1 = v_1, \\ v_1 = -\lambda_1 |z_1 - v_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1 - v_0) + z_2 \\ \dot{z}_2 = -\lambda_2 \text{sign}(z_1 - v_0) \end{cases} \quad (1.179)$$

Notons que  $s_0 = z_0 - f(t)$ ,  $s_1 = z_1 - v_0$  sont les surfaces de glissement du différentiateur qui définissent les erreurs d'estimation des dérivées. Ce différentiateur présente donc deux sorties  $v_0$  et  $v_1$ . Théoriquement et après un temps de convergence, nous avons :  $v_0 = \dot{f}(t)$  et  $v_1 = \ddot{f}(t)$ .

**Théorème 1.4.** [90] Avec un choix judicieux des paramètres du différentiateur, les égalités suivantes sont remplies en l'absence de bruit et après un temps fini de convergence :

$$z_0 = f_0(t); z_i = v_{i-1} = f_0^{(i)}(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.180)$$

**Théorème 1.5.** [90] Soit le signal bruité satisfaisant l'inégalité  $|f(t) - f_0(t)| \leq \epsilon$ . Donc les inéquations suivantes sont établies en temps fini, pour une constante strictement positive  $\mu_i$  dépendant exclusivement des paramètres du différentiateur :

$$\left\{ |z_i - f_0^{(i)}(t)| \leq \mu_i C^{\frac{i}{n+1}} \epsilon^{\left(\frac{n-i+1}{n+1}\right)}, \quad i = 0, \dots, n \right. \quad (1.181)$$

Ce théorème indique que  $C \frac{i}{n+1} \epsilon^{\left(\frac{n-i+1}{n+1}\right)}$  est la meilleure précision qu'un différentiateur d'ordre  $i \leq n$  peut avoir.

A titre d'exemple, pour une valeur de  $C = 1$ ,  $\mu_i = 1$  et un majorant de l'erreur  $\epsilon$  fixé à 0.01, la précision du différentiateur d'ordre 1 ( $n = 1$ ) est alors égale à  $(0.01)^{\frac{1}{2}} = 0.1$ . Pour un différentiateur d'ordre deux ( $n = 2$ ), la précision relative à la dérivée première est égale à  $(0.01)^{\frac{2}{3}} = 0.0464$ , et est égale à  $(0.01)^{\frac{1}{3}} = 0.2154$  pour l'estimation de la dérivée seconde.

A partir de ces calculs, deux remarques peuvent être déduites :

- la précision se dégrade avec l'ordre de la dérivée, ceci est expliqué par la grande valeur de  $C$  comparé à celle de  $\epsilon$ ,
- pour une même estimée, la précision est meilleure pour un différentiateur d'ordre  $n$  que celle donnée par un ordre  $n - 1$ . Ceci est illustré aussi dans les essais de simulations effectués dans [89].

Nous pouvons alors conclure que pour estimer une dérivée première d'un signal d'entrée donné, il est intéressant d'utiliser un différentiateur d'ordre 2 étant donné que la précision est meilleure, en contre partie nous devons régler trois gains au lieu de deux.

### 1.4.3 Quelques résultats de simulation

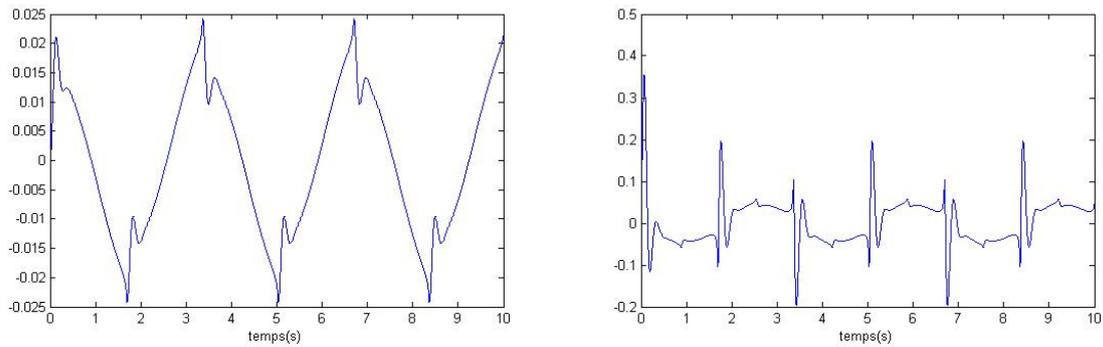
Dans cette partie, nous allons étudier en simulation les deux différentiateurs par modes glissants d'ordre supérieur (ST et DO2). Les critères choisis pour la validation de ces schémas de différentiation sont les mêmes que ceux définis dans le paragraphe 1.2.3.1. Le signal donné par la figure 1.1 est considéré comme le signal d'entrée des différentiateurs. Les résultats de simulations sont réalisés pour une période d'échantillonnage  $T_e$  égale à  $10^{-3}$  secondes.

#### 1.4.3.1 Essai sans bruit

Le but de ce paragraphe est de quantifier les erreurs par rapport à l'amplitude ainsi que le déphasage des signaux estimés par rapport aux dérivées théoriques. Il est nécessaire de préciser le choix des valeurs des paramètres à imposer pour chacun des différentiateurs. Un des choix des paramètres peut être fixé comme suit : ST ( $\lambda_0 = 50$ ,  $\lambda_1 = 30$ ) et DO2 ( $\lambda_0 = 100$ ,  $\lambda_1 = 80$ ,  $\lambda_2 = 10$ ).

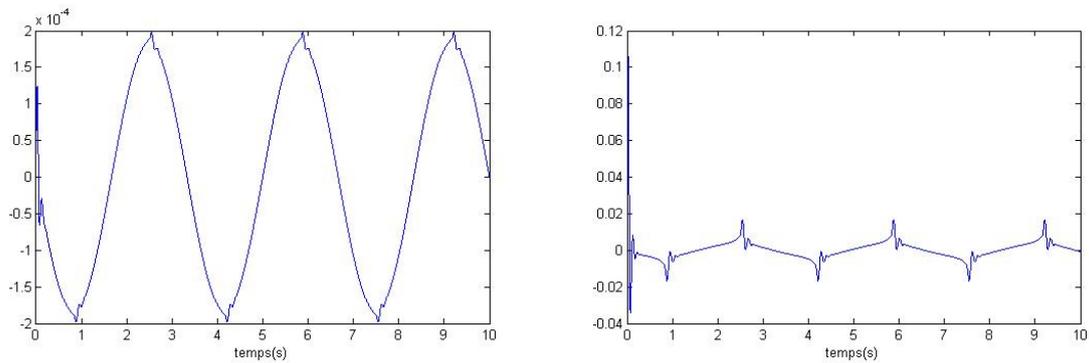
L'évolution des erreurs de chaque algorithme est donnée par les courbes ci-dessous. L'algorithme ST est un différentiateur d'ordre un mais il est possible d'estimer la dérivée seconde en mettant en cascade deux blocs ST. La figure 1.20(b) illustre le résultat obtenu dans ce cas. En observant les figures 1.20 et 1.21, nous remarquons que l'erreur la plus faible est donnée par la première sortie du DO2 (estimée de la dérivée première), ce qui est justifié par l'équation (1.181). Toutefois, quelques soient les sorties, les deux algorithmes donnent une erreur relativement faible.

Le tableau 1.6 récapitule les valeurs des erreurs maximales  $e_{max}$  et les erreurs absolues maximales  $e_{amax}$  relatives à chacune des sorties, erreurs déjà définies dans le paragraphe 1.2.3.1. Nous pouvons conclure que les sorties des algorithmes modes glissants (ST et DO2) coïncident très bien avec les dérivées analytiques. Toutefois, lorsque le ST est mis en cascade, l'erreur  $|e_{max}|$  est 10 fois plus grande que celle donnée pour la deuxième sortie du DO2. Ceci permet de conclure que l'estimation de la dérivée seconde par la méthode DO2 est plus précise qu'un ST en cascade. Pour ce dernier, la valeur de  $|e_{amax}|$  est de 33%. Cette valeur de l'erreur est importante, mais ceci est en grande partie dû au fait que la valeur de la dérivée théorique est faible, l'erreur relative est elle tout à fait acceptable (0.196).



(a) Erreur de l'estimée de la dérivée 1<sup>ère</sup> du signal (b) Erreur de l'estimée de la dérivée seconde du signal

FIGURE 1.20 – Evolution des erreurs avec le ST : signal d'entrée sans bruit.



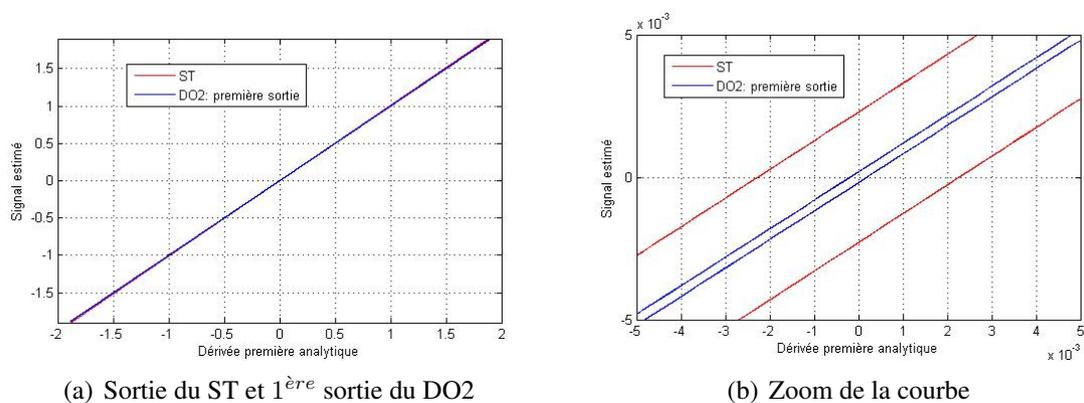
(a) Erreur de l'estimée de la dérivée 1<sup>ère</sup> du signal (b) Erreur de l'estimée de la dérivée seconde du signal

FIGURE 1.21 – Evolution des erreurs avec le DO2 : signal d'entrée sans bruit.

Tableau 1.6 – Erreurs d'estimation pour les algorithmes modes glissants.

Algorithme	ST	ST cascade	DO2 : 1 <sup>ère</sup> sortie	DO2 : 2 <sup>ème</sup> sortie
$ e_{max} $	0.024	0.196	0.00019	0.016
$ e_{amax} $ (%)	1.95	33	0.098	7.2

Pour estimer le déphasage engendré par l'estimation de la dérivée pour chaque algorithme, des courbes de Lissajous sont tracées (voir figures 1.22 et 1.23).



(a) Sortie du ST et 1<sup>ère</sup> sortie du DO2

(b) Zoom de la courbe

FIGURE 1.22 – Courbes de Lissajous relative à la première estimée.

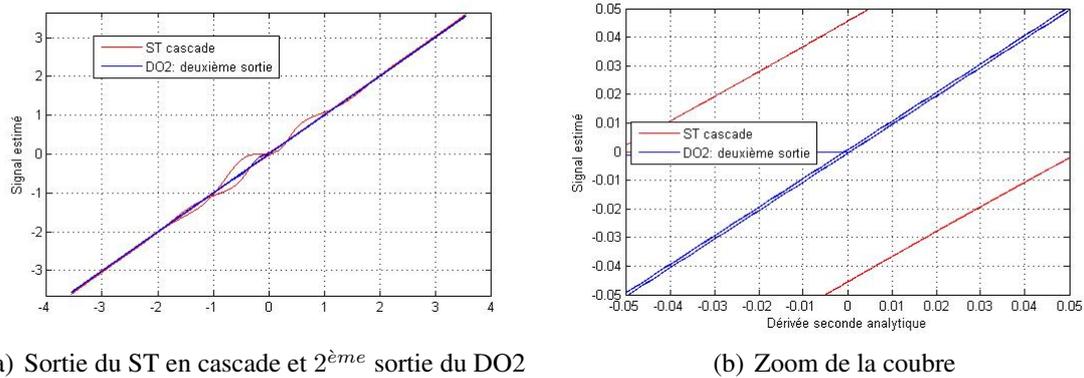


FIGURE 1.23 – Courbes de Lissajous relative à la deuxième estimée.

A partir de ces courbes, les valeurs du déphasage sont calculées et résumées dans le tableau 1.7. Le plus grand déphasage est donné par le ST mis en cascade.

Tableau 1.7 – Déphasage engendré par les algorithmes modes glissants.

Algorithme	ST	ST cascade	DO2: 1 <sup>ère</sup> sortie	DO2: 2 <sup>ème</sup> sortie
Déphasage (°)	0.047	0.07	0.045	0.047

Toutefois, les déphasages donnés par les autres sorties sont relativement faibles. Nous pouvons alors conclure que les algorithmes via les modes glissants n'introduisent quasiment pas de déphasage pour le signal d'entrée considéré.

### 1.4.3.2 Essai avec bruit

Pour vérifier la robustesse de ce type de différentiateur par rapport au bruit, un deuxième essai est effectué. Au cours de cet essai, nous utilisons le signal bruité de la figure 1.2 défini dans le paragraphe 1.2.3.1. Pour ne pas trop amplifier le bruit au niveau du signal de sortie, il est nécessaire de réduire les valeurs des paramètres par rapport à ceux déjà fixés pour le premier essai. Dans ce cas, nous imposons  $\lambda_0 = 12$ ,  $\lambda_1 = 11$  pour ST et  $\lambda_0 = 8$ ,  $\lambda_1 = 7$ ,  $\lambda_2 = 4$  pour DO2.

A partir de la figure 1.24, nous pouvons calculer des critères qui permettent de nous donner une idée quantitative de l'amplification du bruit suite à la différentiation. Ces critères sont résumés dans le tableau 1.8.

Tableau 1.8 – Critères de comparaison pour la robustesse par rapport au bruit.

Algorithme	ST	DO2: 1 <sup>ère</sup> sortie	DO2: 2 <sup>ème</sup> sortie
RSB(dB)	6.64	1.64	0.28
RB	4.05	16.4	94.23

Pour l'estimation de la dérivée première, nous pouvons conclure que ST présente une réduction de l'amplification du bruit 6 fois plus grande que le DO2, voir le tableau 1.8. La deuxième sortie du DO2 présente la valeur de RSB la plus faible. Pour l'estimation de la deuxième dérivée via le DO2, le signal calculé est alors très dégradé (figure 1.24(c)).

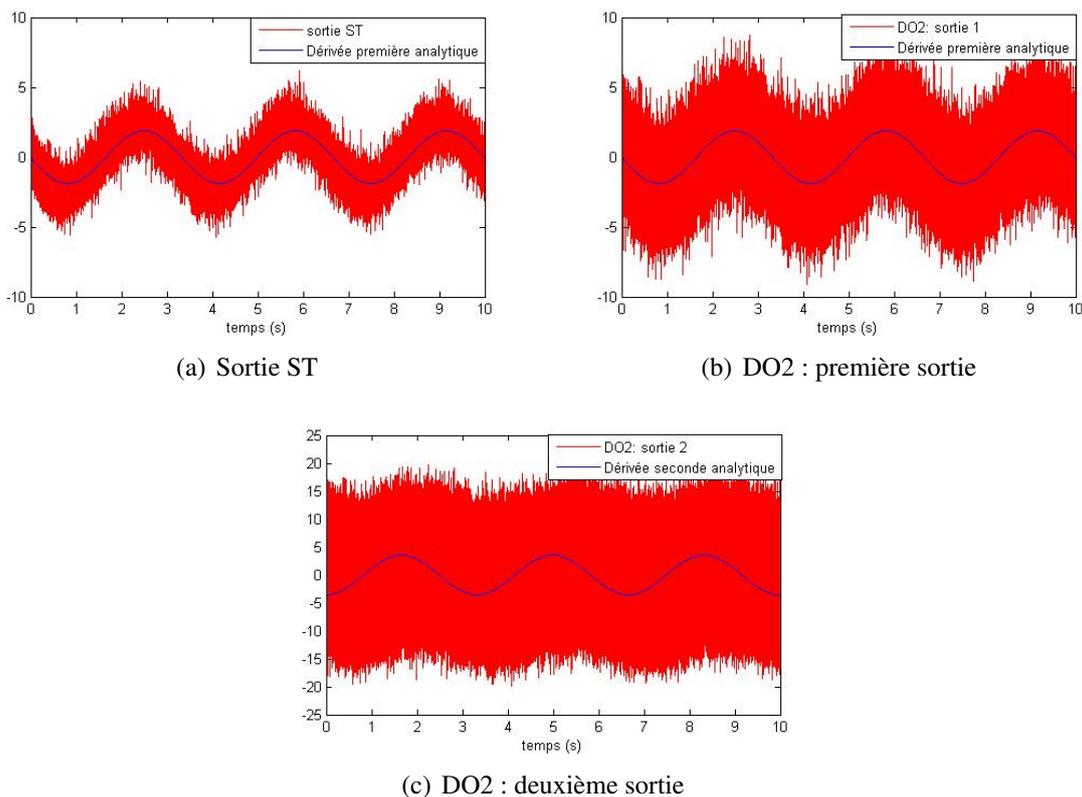


FIGURE 1.24 – Sorties des algorithmes modes glissants pour un signal d'entrée bruité.

Comme pour les dérivateurs algébriques, nous présentons dans le tableau 1.9 le temps de calcul nécessaire pour chacun de ces algorithmes modes glissants. Ces valeurs ont été déterminées pour  $T_e = 10^{-3}$  secondes et pour un temps de simulation de 10 secondes.

Tableau 1.9 – Temps de calcul : Algorithmes modes glissants.

Algorithme	ST	DO2
Temps de calcul (s)	0.086	0.108

A partir du tableau 1.9, nous constatons que le temps de calcul donné par les algorithmes modes glissants est très faible comparé aux dérivateurs algébriques. Pour l'estimation de la dérivée première, nous remarquons que le rapport maximal du temps de calcul donné par les algorithmes algébriques (DVAA : tableau 1.5) est de 83 fois plus grand que le ST. En comparant le temps mis pour l'estimation de la dérivée seconde donnée par le TVAA et celui enregistré pour le DO2, nous constatons que la valeur de ce rapport est de 37.

A la fin de cette partie, nous pouvons conclure que les algorithmes modes glissants sont moins robustes par rapport au bruit comparé à ceux basés sur l'approche algébrique. Ceci est dû à l'hypothèse "forte" imposée sur le bruit pour de tels algorithmes. En pratique, il faut mieux alors utiliser les différentiateurs modes glissants en utilisant un filtre passe bas en amont.

#### 1.4.4 Problème de mise en oeuvre

Les différentiateurs par modes glissants intègrent des gains de réglage qui eux mêmes dépendent de la constante de Lipschitz  $C$  de la dérivée du signal utile. Pour un différentiateur d'ordre  $n$ ,

nous avons besoin de fixer  $(n + 1)$  valeurs de gains. Un choix inadéquat de ces valeurs conduit à une détérioration de la précision des différentiateurs (voir équations 1.100 et 1.181). Pour le ST, Levant propose un choix des gains en fonction de  $C$ , donnée par la relation (1.178).

Pour le différentiateur d'ordre deux, il suffit que les gains soient strictement supérieurs à  $C$ . Peu importe l'ordre du différentiateur, ce choix des gains est conditionné alors par la connaissance de la valeur de la constante  $C$ . Or dans le cas où le signal est bruité, cette dernière est a priori inconnue. Dans ce cas, le choix de ces paramètres devient très difficile. En présence du bruit, les gains ne doivent pas être très élevés pour ne pas trop amplifier le bruit au niveau du signal de sortie. Cette limitation rend difficile de garantir une bonne précision de l'algorithme. En fait, en pratique la composante discontinue dans les équations du ST ou du DO2 n'est pas nulle mais elle est oscillante à haute fréquence (présence de la fonction sign), ce qui amplifie le phénomène du chattering et donc du bruit. Donc en présence du bruit, il sera très difficile d'ajuster les gains pour obtenir le bon compromis précision, robustesse par rapport au bruit.

Pour illustrer ce qui précède nous présentons maintenant une analyse des caractéristiques fréquentielles des algorithmes ayant pour but de montrer la dépendance des gains de convergence avec la constante  $C$ . Il est vrai qu'une analyse fréquentielle est appropriée aux systèmes linéaires, mais la détermination des diagrammes de Bode de ces algorithmes non linéaires peut se faire par approximation linéaire autour d'une fréquence donnée. Nous appliquons un signal sinusoïdal à l'entrée du dérivateur, pour ensuite calculer pour cette fréquence le rapport d'amplitude entre le signal de sortie et celui d'entrée ainsi que le déphasage entre la sortie et la dérivée analytique.

Soit  $W(C, 2)$  est l'ensemble de tous les signaux d'entrée dont les dérivées secondes ont une constante de Lipschitz  $C > 0$ . Soit le signal d'entrée  $f_1(t)$  appartenant à cette classe de signaux et défini dans  $[0, \infty[$  bornée, mesurable au sens de Lebesgue.

La classe de signaux  $W(C, 2)$  satisfait :

$$\sup_{(t \geq 0)} \left| \frac{d^2}{dt^2} f_1(t) \right| \leq C \quad (1.182)$$

Définissons  $f_1(t)$  par :

$$f_1(t) = A \sin(2\pi f t) \quad (1.183)$$

où  $A$  est l'amplitude du signal et  $f$  sa fréquence.

Ceci nous permet d'écrire :

$$\frac{d^2}{dt^2} f_1(t) = -A(2\pi f)^2 \sin(2\pi f t) \quad (1.184)$$

Par conséquent,  $f_1(t)$  est un élément de  $W(C, 2)$  si pour une valeur de  $C$  donnée,  $A$  est inférieur de  $A_{max}$  qui peut être déduite par :

$$C = A_{max}(2\pi f)^2 \quad (1.185)$$

Dans le but d'obtenir les caractéristiques fréquentielle du Super Twisting, le signal sinusoïdal  $f_1(t) = A_{max} \sin(2\pi f t)$  est injecté à l'entrée de l'algorithme. En utilisant les expressions (1.178), nous fixons alors les gains du Super Twisting à  $\lambda_1 = 22$  et  $\lambda_0 = 6.7$ , pour une constante de Lipschitz  $C = 20$ , en considérant que l'amplitude  $A_{max}$  varie avec la fréquence afin de satisfaire la condition (1.185). C'est à dire que les gains  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$  satisfont la condition (1.185) pour toutes les fréquences. Par simulation et avec une période d'échantillonnage égale à  $T_e = 10^{-4}$  seconde, le diagramme de Bode obtenu pour le ST est alors donné par la figure 1.25.

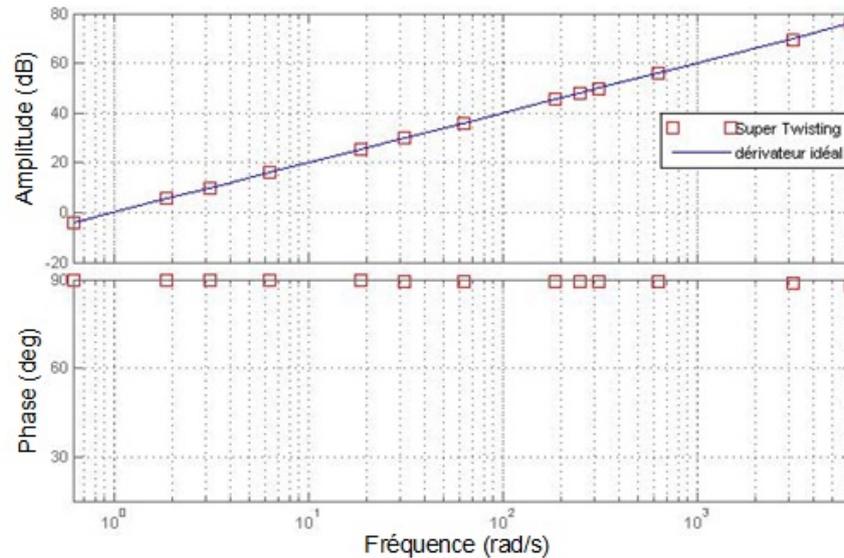


FIGURE 1.25 – Diagramme de Bode de Super Twisting en respectant la condition sur  $C$ .

A partir de cette figure, nous pouvons constater qu'en fixant les valeurs des gains en fonction de la constante  $C$ , le diagramme de Bode obtenu est similaire à celui d'un dérivateur idéal.

Pour illustrer l'influence du choix des gains sur le comportement du dérivateur Super Twisting, nous calculons la valeur de la constante de Lipschitz  $C$  pour une amplitude  $A_{max} = 1$  et une fréquence  $f = 2$  Hz. Selon l'équation (1.185), nous obtenons alors une valeur de  $C$  égale à 157.92. Pour ce calcul, les caractéristiques fréquentielles sont alors tracées pour des paramètres du différentiateur fixés à  $\lambda_1 = 173.705$  et  $\lambda_0 = 18.85$ . Nous présentons les trois diagrammes de Bode (figure 1.26) correspondant à différentes amplitudes du signal d'entrée :  $A_{max} = 0.2$ ,  $A_{max} = 1$  et  $A_{max} = 3$ .

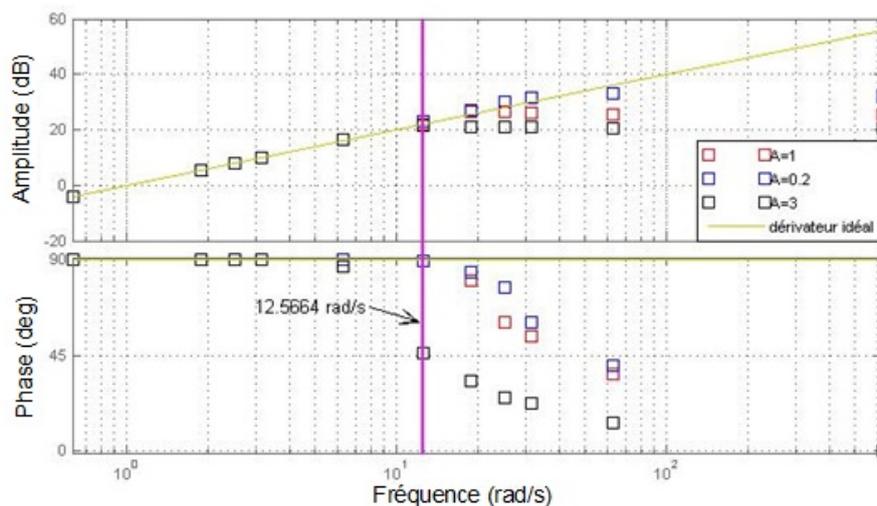


FIGURE 1.26 – Diagramme de Bode du ST pour différentes amplitudes du signal d'entrée.

A partir de la figure 1.26, nous pouvons en déduire que pour une amplitude  $A_{max} = 1$ , l'algorithme dérive correctement pour des fréquences inférieures à 2 Hz, fréquences pour lesquelles la condition sur  $C$  est satisfaite. On peut faire la même conclusion lorsque l'amplitude est égale à  $A_{max} = 0.2$ , même si nous remarquons une légère augmentation de l'amplitude pour des fréquences supérieures à 2 Hz. Par contre, pour une amplitude  $A_{max} = 3$ , le dérivateur présente

déjà une détérioration du déphasage à des fréquences inférieures à 2 Hz ainsi qu'une légère diminution de l'amplitude pour une fréquence égale à 2 Hz. Ceci explique bien que pour une telle amplitude, la condition sur  $C$  n'est pas satisfaite. Au-delà de 2 Hz, la réponse du dérivateur se comporte comme un gain constant qui se réduit graduellement quand l'amplitude  $A$  du signal d'entrée augmente.

La figure 1.27 décrit l'évolution de la constante de Lipschitz  $C$  en fonction de la fréquence pour les différentes amplitudes du signal d'entrée.

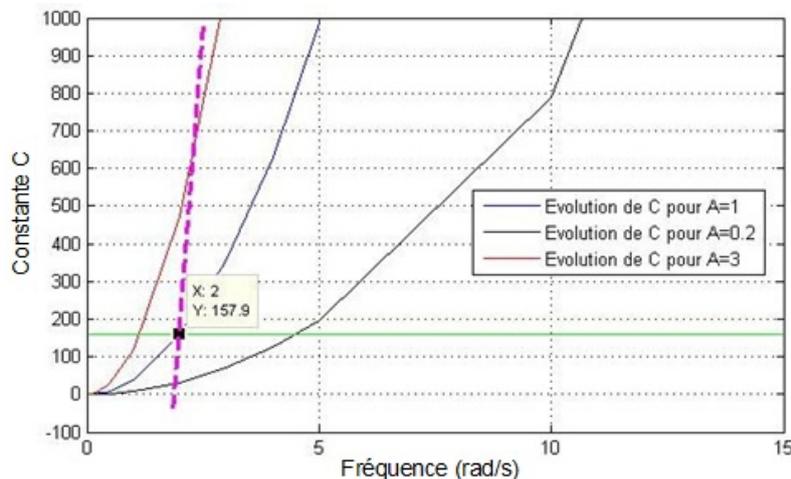


FIGURE 1.27 – Evolution de  $C$  en fonction de la fréquence.

La droite (verte) représente la valeur de la constante de Lipschitz  $C$  avec laquelle les valeurs des paramètres ont été choisies. Les fréquences entre 0 et le point d'intersection de chacune des courbes avec la droite (verte) représente la plage de fréquence pour laquelle la condition sur  $C$  est satisfaite et on obtient donc un bon comportement du dérivateur.

Pour conclure, nous pouvons dire qu'en satisfaisant la condition sur  $C$ , autrement dit l'inégalité (1.182) est vérifiée, le comportement du Super Twisting est relativement identique à celui d'un dérivateur idéal. Dans le cas contraire, nous obtenons une détérioration de la réponse fréquentielle qui est plus importante en phase qu'en amplitude. Pour pallier ce problème, il faut modifier les valeurs des gains de l'algorithme en fonction du signal d'entrée. Un choix possible des gains est de prendre des valeurs élevées. Or des grandes valeurs des gains ne sont pas souhaitables en présence du bruit puisque ce dernier sera amplifié au niveau du signal de sortie. Par exemple si nous fixons un signal d'entrée dont l'amplitude est  $A_{max} = 100$  et de fréquence  $f = 10$  Hz, dans ce cas la valeur de la constante  $C$  devient égale à  $3.94 * 10^5$ , (voir équation (1.185)). Ceci conclut alors à d'énormes valeurs de gains. A titre d'exemple, en considérant le choix des gains proposé par Levant (1.178) et avec cette valeur de  $C$ , les valeurs des gains sont données par :  $\lambda_0 = 942.47$  et  $\lambda_1 = 4.32 * 10^5$ .

Pour le différentiateur d'ordre deux, nous présentons les diagrammes de Bode (figures 1.28 et 1.29) donnés pour différentes valeurs des gains ( $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ ). Pour tracer ces réponses fréquentielles, nous considérons un signal d'entrée  $f_1(t) = \sin(2\pi ft)$  dont l'amplitude du signal est toujours fixée à 1 mais sa fréquence varie.

Nous remarquons que la détérioration de la phase et de l'amplitude est plus importante pour l'estimation de la dérivée seconde que pour l'estimation de la dérivée première.

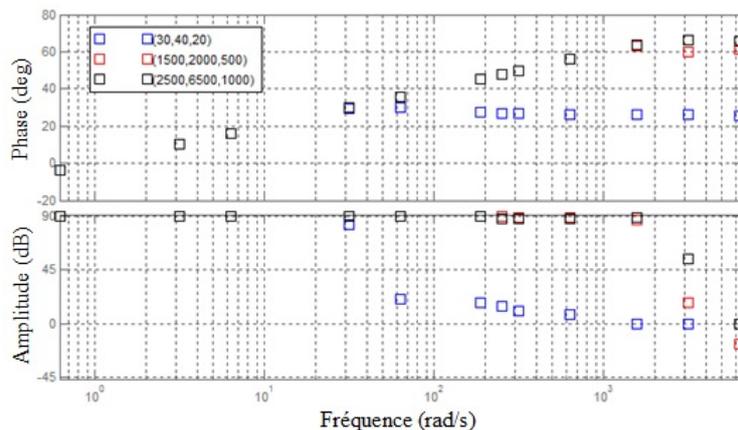


FIGURE 1.28 – Diagramme de Bode de la première sortie : différentiateur d'ordre deux.

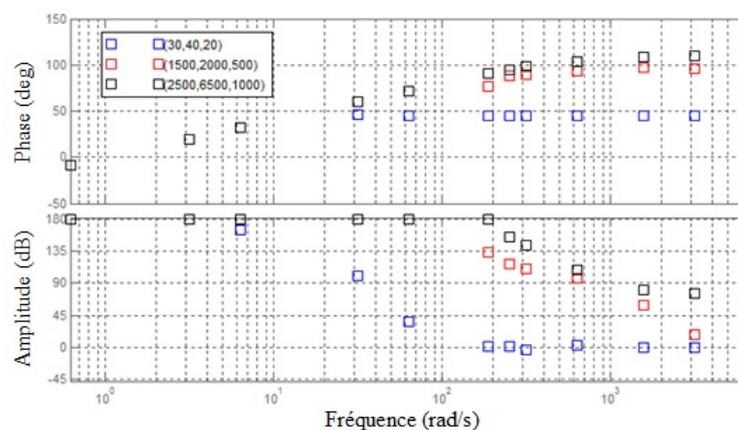


FIGURE 1.29 – Diagramme de Bode de la deuxième sortie : différentiateur d'ordre deux.

Une deuxième série de calculs a été effectuée pour mieux illustrer l'influence sur la précision du choix des gains des dérivateurs.

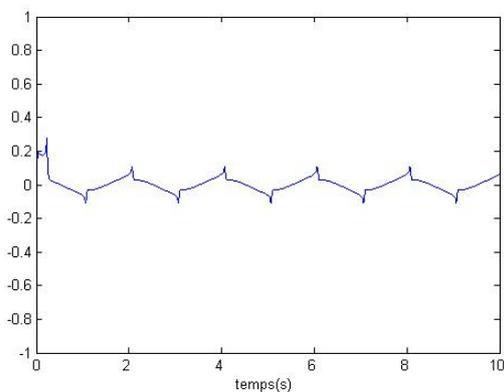
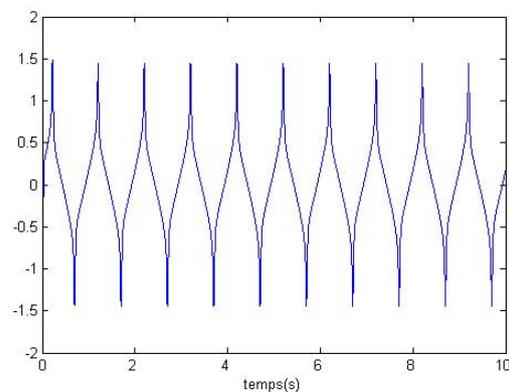
(a) Evolution de l'erreur :  $y(t) = 2\sin(\pi t)$ (b) Evolution de l'erreur :  $y(t) = 2\sin(2\pi 2t)$ 

FIGURE 1.30 – Evolution de l'erreur pour différents signaux d'entrée : Super Twisting.

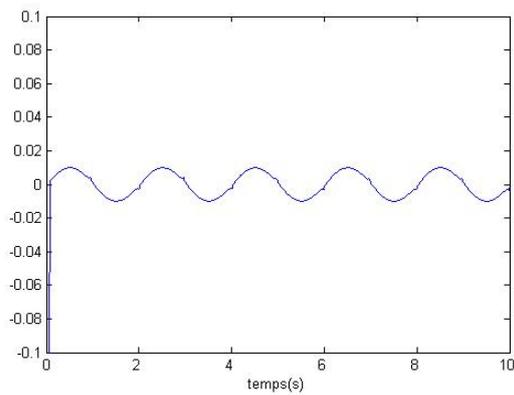
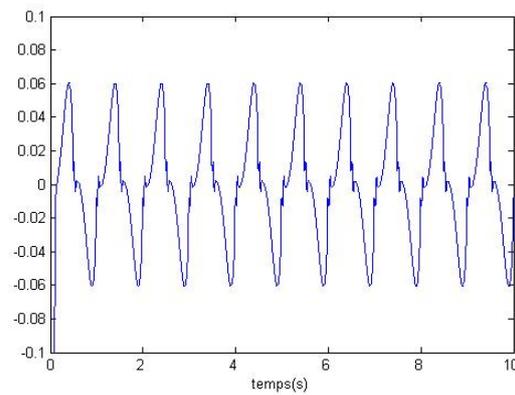
(a) Evolution de l'erreur :  $y(t) = 2\sin(\pi t)$ (b) Evolution de l'erreur :  $y(t) = 2\sin(2\pi 2t)$ 

FIGURE 1.31 – Evolution de l'erreur de la première estimée : différentiateur d'ordre 2.

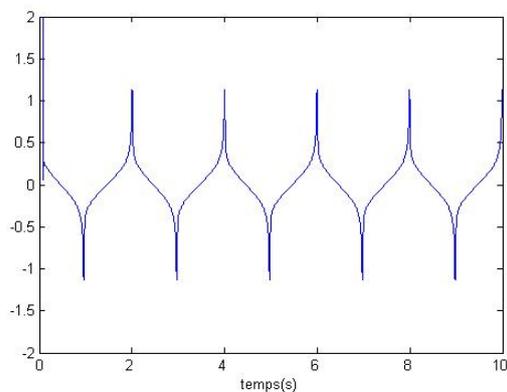
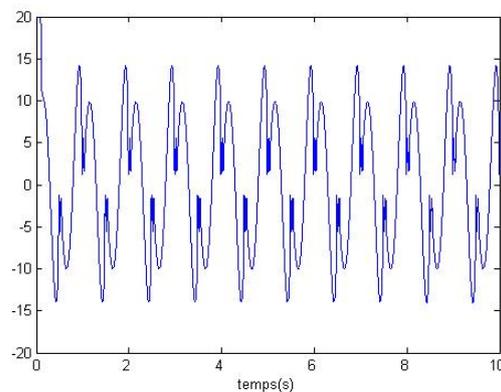
(a) Evolution de l'erreur :  $y(t) = 2\sin(\pi t)$ (b) Evolution de l'erreur :  $y(t) = 2\sin(2\pi 2t)$ 

FIGURE 1.32 – Evolution de l'erreur de la deuxième estimée : différentiateur d'ordre 2.

Nous imposons en entrée un signal sinusoïdal de même amplitude  $A = 2$  et à deux fréquences différentes (0.5 et 2 Hz). Pour chaque signal d'entrée, nous présentons l'erreur définie comme étant la différence entre le signal estimé par le dérivateur et la dérivée analytique du signal. Les figures 1.30, 1.31 et 1.32 montrent bien qu'un simple changement du spectre fréquentiel du signal d'entrée peut engendrer une augmentation rapide de l'erreur. On observe par exemple un rapport de 10 pour l'erreur donnée sur l'estimation de la dérivée seconde du DO2 (voir figure 1.32).

**Remarque importante :** Pour assurer une bonne précision avec un signal multi-fréquentiel (balayant certaines valeurs de fréquence) en entrée des différentiateurs modes glissants, il est clair que des valeurs de gains très élevées peuvent résoudre le problème. Cependant, des grandes valeurs des gains multipliées par des termes discontinues (présence du "sign(.)") va jouer un rôle perturbateur sur l'estimation de la dérivée. Ceci peut se traduire par une phase transitoire en présence de grandes oscillations. En présence du bruit, une amplification du bruit sera alors importante, ce qui peut limiter l'utilisation de tels algorithmes dans certaines applications.

La finalité de cette partie nous permet de conclure que le choix des gains des algorithmes modes glissants joue un rôle important pour les signaux estimés. Un jeu de faibles valeurs des gains permet de réduire le bruit aux niveaux des sorties de tels algorithmes, mais qui reste important, tout dépend du niveau du bruit du signal d'entrée. Pour un signal mono-fréquentiel non bruité et avec un bon choix des gains, les estimées des dérivées peuvent être identiques aux dérivées

analytiques. En revanche, ces résultats ne seront pas nécessairement satisfaisants dans le cas d'un signal multi-fréquentiel, tout dépend des valeurs élevées des gains à imposer, ce qui est contraignant pour un signal multi-fréquentiel bruité.

Afin de pallier ces problèmes sur les choix des gains et dans le but d'améliorer la précision et la robustesse par rapport au bruit, nous proposons une modification de ces algorithmes modes glissants. Notre objectif consiste d'un côté d'avoir un bon compromis entre le déphasage et l'erreur (par rapport au signal théorique) pour un signal pouvant balayer un certain nombre de fréquence (signal multi-fréquentiel) et d'un autre côté, d'assurer une réduction du bruit, par rapport aux algorithmes modes glissants classiques, pour un signal d'entrée bruité. Cette action de filtrage permet de relâcher l'hypothèse donnée par Levant sur le bruit pour les différentiateurs modes glissants.

## 1.5 Différentiateurs adaptatifs basés sur les modes glissants d'ordre supérieur

Pour faciliter le réglage des gains des différentiateurs modes glissant tout en assurant un bon compromis entre précision et robustesse, nous proposons une méthode permettant le réglage automatique en temps réel des paramètres du différentiateur. Cette méthode se base sur l'ajout d'une dynamique sur les gains de l'algorithme en fonction de la surface de glissement. Ainsi, la solution permet d'intégrer un caractère adaptatif aux gains des algorithmes de différentiation.

Dans ce qui suit, les preuves de convergence des algorithmes proposés sont présentées. Nous illustrons le fonctionnement de ces nouvelles versions d'algorithmes modes glissants par quelques résultats de simulation.

### 1.5.1 Différentiateur Super Twisting Adaptatif (STA)

Nous commençons tout d'abord à citer quelques travaux sur les algorithmes adaptatifs mode glissant d'ordre 1. Dans [80], les auteurs propose une version adaptative du ST où une convergence au sens de Lyapunov est effectuée.

Dans [36], une proposition d'un algorithme du ST à gains variables est donnée pour les systèmes linéaires invariants dans le temps en considérant des incertitudes/perturbations bornées par des fonctions connues a priori. La convergence en temps fini de cet algorithme est réalisée par une fonction de Lyapunov quadratique.

Nous présentons ci-dessous la nouvelle version du ST. En utilisant les mêmes notations que le ST classique (1.96), l'algorithme proposé est donné par le système suivant, où  $f(t)$  (1.94) est le signal d'entrée de l'algorithme :

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = v_0 \\ v_0 = -\hat{\lambda}_0 |z_0 - f|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_0 - f) - K_0(z_0 - f) + z_1 \\ \dot{z}_1 = v_1 \\ v_1 = -\hat{\lambda}_1 \text{sign}(z_0 - f) \end{cases} \quad (1.186)$$

Soient les nouvelles surfaces de glissement données ci-dessous :

$$\begin{cases} \sigma_0 = z_0 - f \\ \sigma_1 = z_1 - \dot{f} \end{cases} \quad (1.187)$$

En utilisant le changement de variable défini par (1.187), le système (1.186) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_0 = -\hat{\lambda}_0 |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_0) - K_0 \sigma_0 + \sigma_1 \\ \dot{\sigma}_1 = -\hat{\lambda}_1 \text{sign}(\sigma_0) \end{cases} \quad (1.188)$$

**Théorème 1.6.** Soit  $K_0 > 0$ , pour les surfaces de glissement définies par (équation 1.187), toutes les trajectoires de l'algorithme STA (équation 1.188) converge en un temps fini au point d'équilibre  $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$ , avec des gains dynamiques  $\hat{\lambda}_i$ ,  $i \in \{0, 1\}$  définis par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\lambda}}_0 = \left( |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_0) \right) \sigma_0, \hat{\lambda}_0(0) \geq 0 \text{ et } \dot{\hat{\lambda}}_0 > 0, \forall t > 0 \\ \dot{\hat{\lambda}}_1 = |\sigma_0|, \hat{\lambda}_1(0) \geq 0 \text{ et } \dot{\hat{\lambda}}_1 > 0, \forall t > 0 \end{cases} \quad (1.189)$$

donc nous avons,  $\forall t > 0$   $\hat{\lambda}_0$  et  $\hat{\lambda}_1$  sont des gains positifs.

*Démonstration.* Soit la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(\sigma) = \xi^T P \xi \quad (1.190)$$

avec  $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1)^T$ . A  $t = 0$ , notons  $\sigma(t = 0) = \sigma_{init} = (\sigma_0(0), \sigma_1(0))^T$ .

Le vecteur  $\xi$  est choisi tel que :

$$\xi = \begin{pmatrix} |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_0) \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \quad (1.191)$$

Soit  $P \in \mathbb{R}^{(2 \times 2)}$  une matrice symétrique donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 2\hat{\lambda}_1 + \frac{\Phi_0^2}{2} & -\frac{\Phi_0}{2} \\ -\frac{\Phi_0}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.192)$$

où  $\Phi_0 = \hat{\lambda}_0 + K_0 |\sigma_0|^{\frac{1}{2}}$  est une quantité positive car  $\hat{\lambda}_0 > 0$ .

La matrice  $P$  est une matrice définie positive, ceci peut être vérifié en déterminant les valeurs propres de celle-ci. En calculant alors l'équation caractéristique de  $P$  donnée par :<sup>4</sup>, on a :

$$\bar{\lambda}^2 - \left( 1 + 2\hat{\lambda}_1 + \frac{\Phi_0^2}{2} \right) \bar{\lambda} + 2\hat{\lambda}_1 + \frac{\Phi_0^2}{4} = 0 \quad (1.193)$$

Sachant que  $\hat{\lambda}_1 > 0$ , alors à partir de (1.193), nous pouvons en déduire que les valeurs propres de  $P$  sont des réels positifs.

Remarquons que la fonction de Lyapunov ainsi définie est une fonction continue partout et différentiable partout sauf au point  $\sigma_0 = 0$  donc la version habituelle de fonction de Lyapunov localement Lipschitzienne [6] n'est pas approprié ici, puisque  $V(\sigma)$  n'est pas localement Lipschitz. Donc,  $V(\sigma)$  est continûment différentiable, sauf sur l'ensemble  $S = \{(\sigma_0, \sigma_1) \in \mathbb{R}^{(2 \times 2)} | \sigma_0 = 0\}$ . En conséquence, le théorème de Lyapunov sera appliqué juste pour les points où  $V(\sigma)$  est dérivable, on parle dans ce cas de fonction de Lyapunov "non lisses", [30].

Les solutions du système différentiel discontinu (1.188) peuvent être interprétées par une inclusion différentielle  $\dot{\sigma} \in F(\sigma)$  obtenu quand  $\text{sign}(\sigma_0)$  prend sa valeur dans  $[-1, 1]$ , [43]. Puisque  $0 \in F(0)$ , il s'en suit  $\sigma = 0$  est le point d'équilibre du système (1.188).

4.  $\bar{\lambda}_{1,2}$  sont les valeurs propres de l'équation caractéristique

Au final,  $V$  est une fonction continue mais non différentiable au point  $\sigma_0 = 0$ , définie positive et radialement bornée :

$$\bar{\lambda}_{min}\{P\}\|\xi\|_2^2 \leq V \leq \bar{\lambda}_{max}\{P\}\|\xi\|_2^2 \quad (1.194)$$

où la norme euclidienne de  $\xi$  est donnée par :

$$\|\xi\|_2^2 = |\sigma_0| + \sigma_1^2 \quad (1.195)$$

$\bar{\lambda}_{min}\{P\}$ ,  $\bar{\lambda}_{max}\{P\}$  sont respectivement les valeurs propres minimales et maximales de la matrice  $P$ .

La dérivée du vecteur  $\xi$  peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= |\sigma_0|^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{\Phi_0}{2} & \frac{1}{2} \\ -\hat{\lambda}_1 & 0 \end{pmatrix} \xi \\ &= |\sigma_0|^{-\frac{1}{2}} A(\sigma) \xi \end{aligned} \quad (1.196)$$

La dérivée temporelle de  $V$  le long des trajectoires du système est alors donnée par :

$$\dot{V} = |\sigma_0|^{-\frac{1}{2}} \xi^T (A^T(\sigma)P + PA(\sigma)) \xi \quad (1.197)$$

$$= -|\sigma_0|^{-\frac{1}{2}} \xi^T Q(\sigma) \xi \quad (1.198)$$

avec  $Q$  donné ci-dessous :

$$Q = \frac{\Phi_0}{2} \begin{pmatrix} 2\hat{\lambda}_1 + \Phi_0^2 & -\Phi_0 \\ -\Phi_0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.199)$$

Pour conclure sur la non négativité de  $\dot{V}$ , il faut que la matrice  $Q$  soit définie positive, ceci est vérifié par le calcul de l'équation caractéristique (1.200). A partir de cette dernière, nous déduisons que les valeurs propres de  $Q$  sont positives :

$$\bar{\lambda}^2 - \left(1 + 2\hat{\lambda}_1 + \frac{\Phi_0^2}{2}\right) \bar{\lambda} + 2\hat{\lambda}_1 = 0 \quad (1.200)$$

A partir de (1.194), nous pouvons écrire :

$$\|\xi\|_2 \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}}{\bar{\lambda}_{min}^{\frac{1}{2}}\{P\}} \quad (1.201)$$

Suite aux équations (1.195) et (1.201), nous avons :

$$|\sigma_0|^{\frac{1}{2}} \leq [|\sigma_0| + \sigma_1^2]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}}{\bar{\lambda}_{min}^{\frac{1}{2}}\{P\}} \quad (1.202)$$

Par conséquent, on obtient :

$$\dot{V} \leq -\frac{\bar{\lambda}_{min}^{\frac{1}{2}}\{P\}}{V^{\frac{1}{2}}} \bar{\lambda}_{min}\{Q\} \|\xi\|_2^2 \quad (1.203)$$

En utilisant l'inégalité droite de l'expression (1.194), l'équation (1.203) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{\bar{\lambda}_{min}^{\frac{1}{2}}\{P\} \bar{\lambda}_{min}\{Q\}}{\bar{\lambda}_{max}\{P\}} V^{\frac{1}{2}} \\ &\leq -\delta V^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.204)$$

$$\text{où } \delta = \frac{\bar{\lambda}_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}\bar{\lambda}_{\min}\{Q\}}{\lambda_{\max}\{P\}} > 0.$$

Prenons maintenant le cas général d'une équation différentielle ayant la forme suivante :

$$\dot{\chi}(t) = -\delta\chi^{\frac{1}{2}}(t), \quad \chi(0) = \chi_0 \geq 0 \quad (1.205)$$

La solution de ce type d'équation est donnée par :

$$\int_0^t \frac{\dot{\chi}}{\chi^{\frac{1}{2}}} dt = - \int_0^t \delta dt \Rightarrow \chi(t) = \left( \chi_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\delta}{2}t \right)^2 \quad (1.206)$$

A partir de (1.206),  $\chi(t)$  égale à zéro à l'instant  $t^*$  donné par :

$$t^* = \frac{2\chi_0^{\frac{1}{2}}}{\delta} \quad (1.207)$$

Par utilisation de l'équation (1.207), il en découle que  $V(\sigma(t))$  et donc  $\sigma(t)$  convergent à zéro en un temps fini  $T$  donné par :

$$T = \frac{2V^{\frac{1}{2}}(\sigma_{init})}{\delta} \quad (1.208)$$

□

## 1.5.2 Différentiateur modes glissants Adaptatifs d'Ordre Deux (DAO2)

Nous proposons le différentiateur d'ordre deux décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = v_0 \\ v_0 = -\hat{\lambda}_0 |s_0|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(s_0) - K_0 s_0 + z_1 \\ \dot{z}_1 = v_1 \\ v_1 = -\hat{\lambda}_1 |s_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_1) - \hat{\lambda}_2 \int_0^t \text{sign}(s_1) dt - K_1 s_1 \end{cases} \quad (1.209)$$

$K_0$  et  $K_1$  sont des gains positifs et  $s_0, s_1$  sont les surfaces de glissements données par :

$$\begin{cases} s_0 = z_0 - f \\ s_1 = z_1 - v_0 \end{cases} \quad (1.210)$$

Les dynamiques des gains  $\hat{\lambda}_i, i \in \{0, 1, 2\}$  sont définies par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\lambda}}_0 = [|s_0|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(s_0)] s_0 \\ \dot{\hat{\lambda}}_1 = [|s_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_1)] s_1 \\ \dot{\hat{\lambda}}_2 = s_1 \int_0^t \text{sign}(s_1) dt \end{cases} \quad (1.211)$$

Nous présentons dans la suite certaines remarques mettant l'accent sur les difficultés rencontrées pour la preuve de convergence en temps fini d'un tel algorithme.

Levant a démontré la convergence en temps fini d'un différentiateur modes glissants d'ordre  $n$  en se basant fortement sur la propriété d'homogénéité de ses équations différentielles. Cette propriété constitue la solution clé pour la preuve de convergence en temps fini de tels algorithmes [88]. Nous remarquons que l'algorithme proposé est représenté par des équations différentielles non homogènes, donc il n'y a pas possibilité d'utiliser la propriété de contractivité de

l'inclusion différentielle associé à l'algorithme pour prouver sa convergence en temps fini.

Si nous envisageons une démonstration de convergence par quadrant du plan de phase comme pour le ST, ceci nous ramène à utiliser 16 quadrants puisque l'algorithme se base sur le mode glissant d'ordre 3. Il est donc assez difficile de procéder de cette façon. Toutefois, nous pouvons définir une fonction de Lyapunov quadratique comme pour le STA. Cependant, pour un différentiateur d'ordre supérieur à 1, il n'est pas évident de choisir des matrices  $P$  et  $Q$  (voir preuve STA) qui doivent satisfaire certaines conditions (notamment "définie positive"). Bien que les algorithmes basés sur les modes glissants d'ordre supérieur présentent la propriété du temps fini et pour les raisons citées, nous nous limitons dans la suite à démontrer théoriquement la convergence sans pouvoir pour l'instant prouver le temps fini de l'algorithme proposé. Une des perspectives exige à la fin de ce travail sera évidemment la recherche de la preuve de convergence en temps fini du DAO2.

**Théorème 1.7.** *Pour  $K_0, K_1 > 0$  et avec les gains dynamiques  $\hat{\lambda}_i, i \in \{0, 1, 2\}$  définis par (1.211), la trajectoire du système (1.209) converge asymptotiquement localement vers le point d'équilibre  $s_0 = s_1 = 0$  sous l'hypothèse qu'il existe des constantes positives inconnues à priori  $\lambda_0^*$  et  $\lambda_1^*$  définies par :*

**hypothèse 1.1.**

$$\begin{cases} \dot{f} = -\lambda_0^* |s_0|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(s_0) + z_1 \\ \ddot{f} = -\lambda_1^* |s_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_1) - \lambda_2^* \int_0^t \text{sign}(s_1) dt \end{cases} \quad (1.212)$$

*Démonstration.* En posant  $\sigma_0 = z_0 - f$ , en utilisant ce changement de variable, la première équation du système (1.209) peut s'écrire :

$$\dot{\sigma}_0 = -\hat{\lambda}_0 |\sigma_0|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\sigma_0) - K_0 \sigma_0 + \sigma_1 \quad (1.213)$$

Sachant que  $\hat{\lambda}_0 > 0$ , donc à partir de cette équation, nous avons :

$$\sigma_1 - \dot{\sigma}_0 = \text{sign}(\sigma_0) \left[ \hat{\lambda}_0 |\sigma_0|^{\frac{2}{3}} + K_0 |\sigma_0| \right] \Rightarrow \text{sign}(\sigma_1 - \dot{\sigma}_0) = \text{sign}(\sigma_0) \quad (1.214)$$

En retranchant  $\dot{f}$  des deux côtés de la première équation du système (1.209), nous pouvons alors écrire cette première équation comme suit :

$$v_0 - \dot{f} = -\hat{\lambda}_0 |\sigma_0|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\sigma_0) - K_0 \sigma_0 + z_1 - \dot{f} \quad (1.215)$$

En remplaçant  $\dot{f}$  par son expression (équation (1.212)), (1.215) devient :

$$\dot{\sigma}_0 = -\tilde{\lambda}_0 |\sigma_0|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\sigma_0) - K_0 \sigma_0 \quad (1.216)$$

où  $\tilde{\lambda}_0 = \hat{\lambda}_0 - \lambda_0^*$ .

En posant  $\sigma_1 = z_1 - \dot{f}$ , nous obtenons l'égalité suivante  $s_1 = \sigma_1 - \dot{\sigma}_0$ . Donc en retranchant des deux côtés de la deuxième équation du système (1.209)  $\ddot{f}$  et en tenant compte de ce changement de variable, on a :

$$\dot{\sigma}_1 = -\tilde{\lambda}_1 |\sigma_1 - \dot{\sigma}_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_1 - \dot{\sigma}_0) - \tilde{\lambda}_2 \int_0^t \text{sign}(\sigma_1 - \dot{\sigma}_0) dt - K_1 (\sigma_1 - \dot{\sigma}_0) \quad (1.217)$$

Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\sigma_0, \sigma_1, \tilde{\lambda}_i) = \frac{1}{2} \sigma_0^2 + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \dot{\sigma}_0)^2 + \sum_{i=0}^2 \tilde{\lambda}_i^T \Gamma^{-1} \tilde{\lambda}_i, \quad i \in \{0, 1, 2\} \quad (1.218)$$

avec  $\Gamma \in \mathbb{R}^{(3 \times 3)}$  une matrice d'identité. Le point d'équilibre est défini par  $X_e^{\sigma, \tilde{\lambda}} = (\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 0, \tilde{\lambda}_i = 0)$ .

La dérivée de cette fonction de Lyapunov est donnée par :

$$\dot{V} = \sigma_0 \dot{\sigma}_0 + (\sigma_1 - \dot{\sigma}_0)(\dot{\sigma}_1 - \ddot{\sigma}_0) + \tilde{\lambda}_0 \dot{\lambda}_0 + \tilde{\lambda}_1 \dot{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 \dot{\lambda}_2 \quad (1.219)$$

Nous avons :

$$\sigma_0 \dot{\sigma}_0 + \tilde{\lambda}_0 \dot{\lambda}_0 = -K_0 \sigma_0^2 \quad (1.220)$$

et

$$(\sigma_1 - \dot{\sigma}_0) \dot{\sigma}_1 + \tilde{\lambda}_1 \dot{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 \dot{\lambda}_2 = -K_1 (\sigma_1 - \dot{\sigma}_0)^2 \quad (1.221)$$

En remplaçant  $\ddot{\sigma}_0$  dans l'expression  $-(\sigma_1 - \dot{\sigma}_0) \ddot{\sigma}_0$ , celle-ci devient :

$$-(\sigma_1 - \dot{\sigma}_0) \ddot{\sigma}_0 = -(\sigma_1 - \dot{\sigma}_0) \left[ -\dot{\lambda}_0 |\sigma_0|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\sigma_0) - K_0 \dot{\sigma}_0 - \frac{2}{3} \tilde{\lambda}_0 |\sigma_0|^{-\frac{1}{3}} \dot{\sigma}_0 \right] \quad (1.222)$$

En intégrant la dynamique du gain  $\dot{\lambda}_0$  (voir système (1.211)), il en résulte alors :

$$-(\sigma_1 - \dot{\sigma}_0) \ddot{\sigma}_0 = -|\sigma_1 - \dot{\sigma}_0| \left[ -|\sigma_0|^{\frac{7}{3}} + K_0^2 |\sigma_0| + \frac{2}{3} \tilde{\lambda}_0^2 |\sigma_0|^{\frac{1}{3}} + \frac{5}{3} \tilde{\lambda}_0 K_0 |\sigma_0|^{\frac{2}{3}} \right] \quad (1.223)$$

Au final, l'équation (1.219) est réécrite comme suit :

$$\dot{V} = -K_0 \sigma_0^2 - K_1 (\sigma_1 - \dot{\sigma}_0)^2 - \frac{2}{3} |\sigma_1 - \dot{\sigma}_0| \tilde{\lambda}_0^2 |\sigma_0|^{\frac{1}{3}} - |\sigma_1 - \dot{\sigma}_0| \left[ -|\sigma_0|^{\frac{7}{3}} + \frac{5}{3} \tilde{\lambda}_0 K_0 |\sigma_0|^{\frac{2}{3}} + K_0^2 |\sigma_0| \right] \quad (1.224)$$

Donc pour montrer la négativité de  $\dot{V}$ , il suffit de prouver que :

$$\Upsilon = \left[ -|\sigma_0|^{\frac{7}{3}} + \frac{5}{3} \tilde{\lambda}_0 K_0 |\sigma_0|^{\frac{2}{3}} + K_0^2 |\sigma_0| \right] \geq 0 \quad (1.225)$$

Pour ce faire, nous supposons que  $|\tilde{\lambda}_0| \leq \tilde{\lambda}_{0M}$ , où  $\tilde{\lambda}_{0M}$  est une constante positive vérifiant l'inégalité suivante :

$$\tilde{\lambda}_{0M} < \frac{3}{5} K_0 |\sigma_0|^{\frac{1}{3}} \quad (1.226)$$

Pour obtenir la condition (1.225), il faut choisir  $K_0$  tel que :

$$K_0 \left[ \tilde{\lambda}_0 + \frac{3}{5} K_0 |\sigma_0|^{\frac{1}{3}} \right] \geq \frac{3}{5} |\sigma_0|^{\frac{5}{3}} \quad (1.227)$$

Nous pouvons dire qu'il existe toujours une valeur de  $K_0$  (à savoir une grande valeur) qui permet de vérifier les deux inégalités (1.226) et (1.227).

Sous ces conditions, nous pouvons conclure que  $\dot{V}$  est négative  $\forall (\sigma_0, \sigma_1, \tilde{\lambda}_i) \in \mathbb{R}^3$  mais s'annule pour  $(\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 0, \tilde{\lambda}_i)^T \neq X_e^{\sigma, \tilde{\lambda}}$ . Par conséquent  $\dot{V}$  est globalement semi-définie négative sur  $\mathbb{R}^3$  et est localement définie négative sur  $\mathbb{R}^3 | (\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 0, \tilde{\lambda}_i)^T$ . Donc avec ce choix de fonction de Lyapunov nous avons pu démontrer une convergence globale sur  $\mathbb{R}^3$  et une convergence asymptotique locale sur  $\mathbb{R}^3 | (\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 0, \tilde{\lambda}_i)^T$  de ce point d'équilibre. Certes que l'utilisation du principe d'invariance de LaSalle est envisageable, mais dans notre cas on ne peut pas conclure sur la convergence asymptotique globale.  $\square$

La démonstration ainsi donnée assure la convergence de l'erreur d'estimation  $s_0$  et  $s_1$  mais la convergence des gains dynamiques vers les gains  $\lambda_0^*$  et  $\lambda_1^*$  n'est pas assurée. D'ailleurs, ces gains dynamiques évoluent en fonction du temps selon les règles d'adaptation imposées où cette évolution est bornée.

Evidemment qu'un algorithme adaptatif est sensible aux valeurs initiales, donc les valeurs de ces bornes sont liées aux valeurs initiales choisies pour ces gains. Dans notre cas, nous n'avons pas examiné ce point théoriquement pour voir l'influence de ces dernières sur la convergence de l'algorithme. Cependant, nous nous sommes limités à effectuer quelques simulations pour différentes valeurs initiales où aucun problème lié à la convergence de l'algorithme est observé.

### 1.5.3 Intérêt des différentiateurs adaptatifs

Pour montrer l'intérêt des algorithmes de différentiations adaptatifs, nous présentons dans ce qui suit, quelques résultats de simulation. Tous ces essais sont effectués avec une période d'échantillonnage  $T_e$  égale à  $10^{-3}$  secondes.

#### 1.5.3.1 Essai sans bruit

Pour ce premier cas, le signal d'entrée utilisé  $f(t)$  est identique à celui choisi dans les précédentes simulations. Pour un signal sans présence de bruit, avec les algorithmes adaptatifs, il est maintenant possible de retenir des gains de convergence élevés afin de se rapprocher davantage de la surface de glissement. Nous imposons  $K_0 = 600$  pour le STA et  $K_0 = 500$ ,  $K_1 = 450$  pour le DAO2.

L'évolution des différentes erreurs de chacun des algorithmes est illustrée sur les figures 1.33 et 1.35. Les figures 1.34 et 1.36 donnent l'évolution des paramètres adaptatifs pour chacun des différentiateurs est aussi présentée dans les figures 1.34 et 1.36, dans le cas où toutes les valeurs des paramètres  $\hat{\lambda}_i$  sont initialisées à 1. Nous pouvons remarquer que le paramètre  $\hat{\lambda}_1$  croît légèrement en fonction de la surface de glissement  $s_1$ . Toutefois, l'évolution du paramètre  $\hat{\lambda}_0$  est plus importante en fonction de la surface de glissement  $s_0$ .

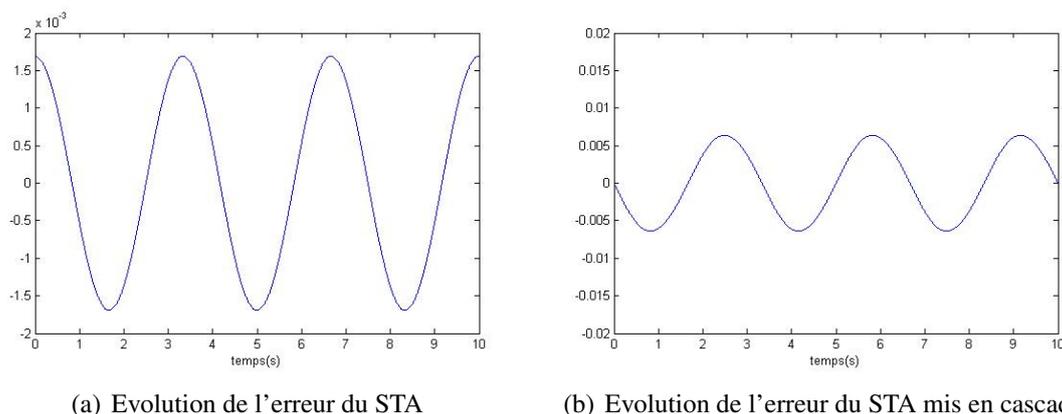


FIGURE 1.33 – Evolution des erreurs avec le STA : signal sans bruit.

L'évolution des paramètres  $\hat{\lambda}_0$  et  $\hat{\lambda}_1$  du DAO2 est illustrée sur les figures 1.36(b) et 1.36(a). On peut remarquer qu'ils augmentent progressivement jusqu'à 25 secondes. Au delà de cette valeur, l'évolution des paramètres devient très faible parce que l'évolution des surfaces devient de plus en plus faible.

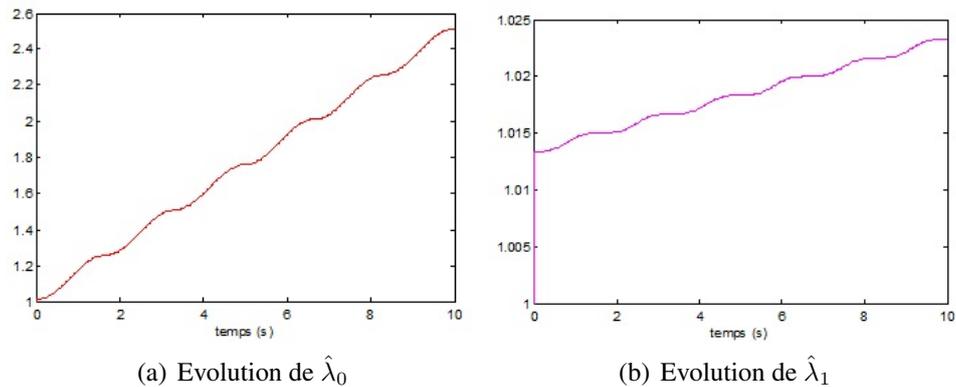


FIGURE 1.34 – Evolution des paramètres dynamiques du STA.

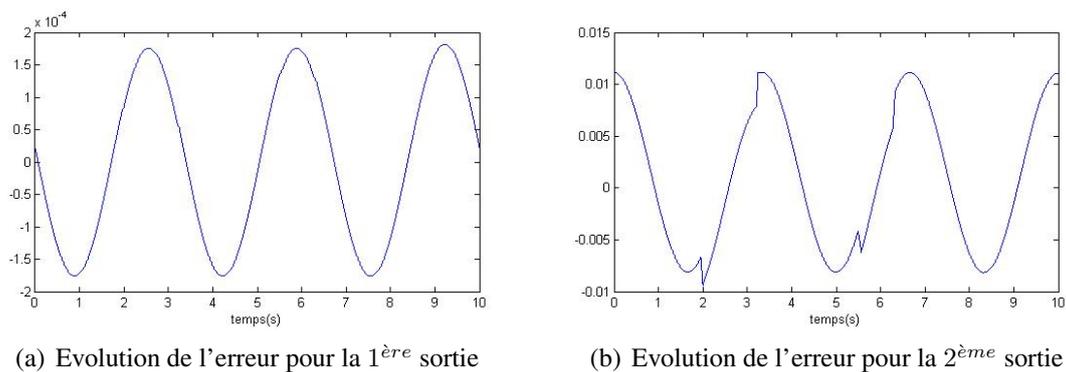


FIGURE 1.35 – Evolution des erreurs avec le DAO2 : signal sans bruit.

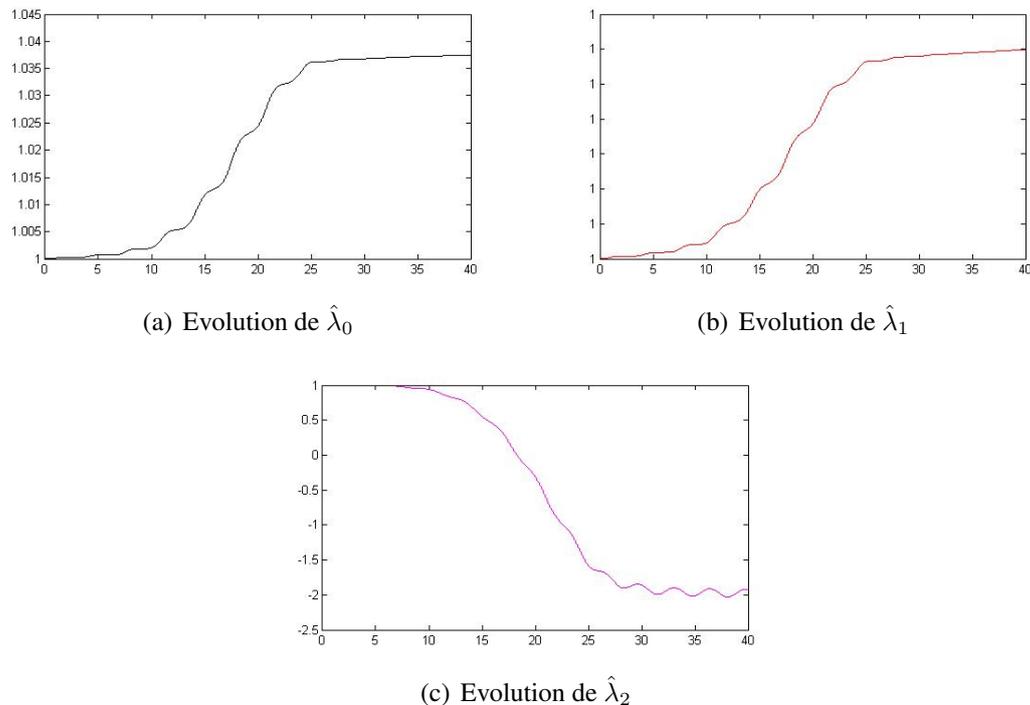


FIGURE 1.36 – Evolution des paramètres dynamiques du DAO2.

Par contre, l'évolution de  $\hat{\lambda}_2$  diminue progressivement jusqu'à 25 secondes. A partir de 25 secondes, l'évolution des paramètres devient faible autour d'une valeur donnée, (figure 1.36(c)). L'évolution de chacun de ces paramètres est fortement liée à l'évolution des différentes fonc-

tions de glissement associées, (voir équation 1.209).

Le tableau 1.10 résume les résultats obtenus aux cours des simulations. Pour l'estimée de la dérivée première, nous constatons que le DAO2 présente une erreur 10 fois moindre que celle donnée par le STA. Ce rapport d'erreur se réduit presque à 2 pour la dérivée seconde.

Tableau 1.10 – Erreurs d'estimation pour les algorithmes modes glissants adaptatifs.

Algorithme	STA	STA cascade	DAO2: 1 <sup>ère</sup> sortie	DAO2: 2 <sup>ème</sup> sortie
$ e_{max} $	0.0017	0.006	0.00018	0.011
$ e_{amax} (\%)$	0.84	1.78	0.09	3.12

Pour déterminer le déphasage, les courbes de Lissajous (figures 1.37 et 1.38) permettent de dresser le tableau 1.11. Ainsi, la première sortie du DAO2 présente le déphasage le plus faible, les déphasages des autres sorties sont également assez proches.

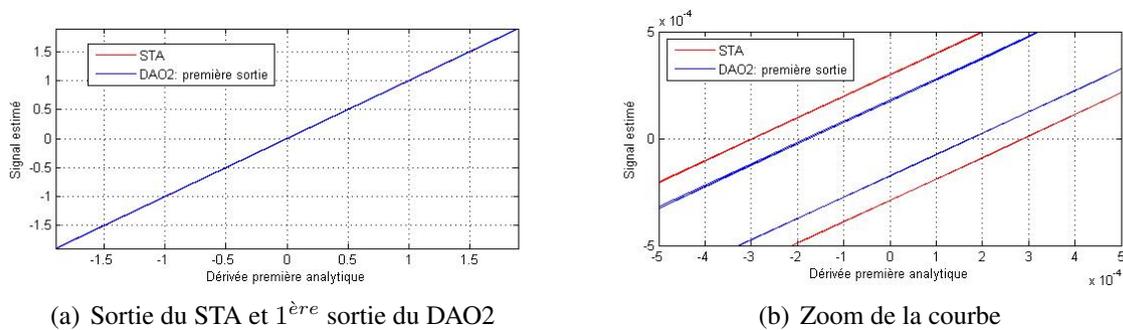


FIGURE 1.37 – Courbes de Lissajous relatives à la première estimée.

A partir de ces résultats, nous pouvons donc en déduire que pour un signal non bruité de type  $f(t)$ , les sorties des algorithmes adaptatifs permettent d'approcher fidèlement les dérivées analytiques.

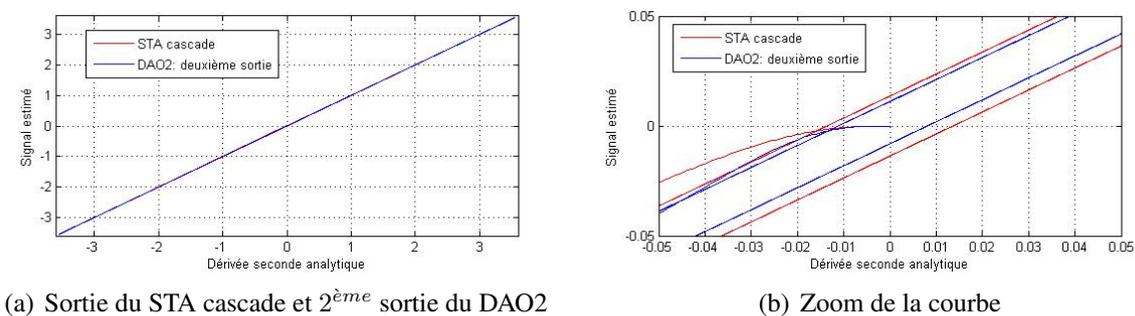


FIGURE 1.38 – Courbes de Lissajous relatives à la deuxième estimée.

Tableau 1.11 – Déphasage engendré par les algorithmes modes glissants adaptatifs.

Algorithme	STA	STA cascade	DAO2: 1 <sup>ère</sup> sortie	DAO2: 2 <sup>ème</sup> sortie
Déphasage (°)	0.046	0.048	0.045	0.05

Les figures 1.39 et 1.40 décrivent l'évolution de la phase transitoire des différents algorithmes adaptatifs (STA/DAO2) et non adaptatifs (ST/DO2) en réponse à un signal sinusoïdal. Pour ces simulations, les gains de chaque différentiateur du même ordre sont réglés relativement avec un même ordre de grandeur.

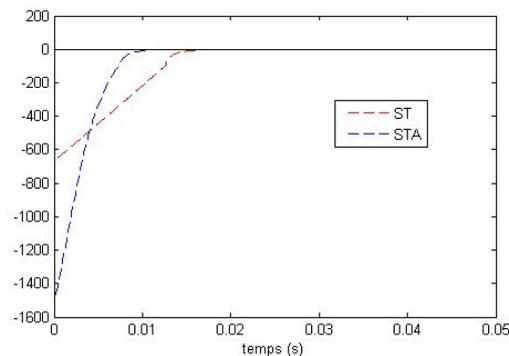


FIGURE 1.39 – Phase transitoire : ST et STA.

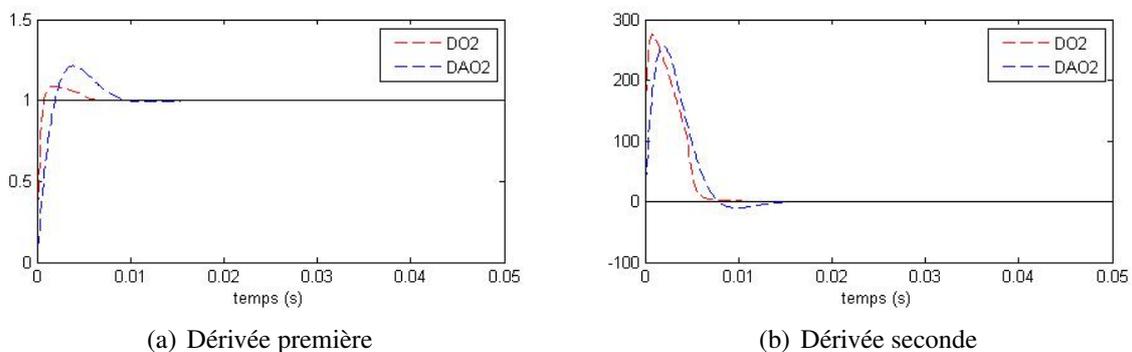


FIGURE 1.40 – Phase transitoire : DO2 et DAO2.

Pour le différentiateur d'ordre 1, nous choisissons  $s_0 = 5$  comme condition initiale. A partir de la figure 1.39, la sortie du STA converge vers la dérivée théorique en 0.011 secondes, ce temps de convergence est de 0.016 secondes pour le ST. Toutefois, nous remarquons qu'avec cette condition initiale ( $s_0 = 5$ ), le STA présente une valeur du signal estimé à  $t = 0$  beaucoup plus importante que le ST. Pour éviter ce problème, il faut réduire la valeur du gain de convergence mais en contre partie le temps de convergence augmente.

Pour les résultats de simulations des différentiateurs d'ordre deux, nous avons imposé comme condition initiale  $s_0 = s_1 = 0$ . A partir des courbes obtenues (figure 1.40), nous observons que le temps de convergence de DAO2 est légèrement supérieur par rapport à DO2.

Ainsi, nous enregistrons une différence de 0.009 secondes pour la dérivée première et une valeur de 0.004 pour la dérivée seconde. Les valeurs des pics pour les deux versions de différentiateur sont à peu près similaires.

### 1.5.3.2 Essai avec bruit

Nous ajoutons maintenant un bruit blanc Gaussien au signal d'entrée (figure 1.2). Pour cet essai, les valeurs des paramètres  $K_i$  doivent être petites afin de ne pas trop amplifier le bruit au niveau des signaux de sortie. C'est pourquoi les gains de convergence sont maintenant fixés à  $K_0 = 10$  pour le STA et  $K_0 = 5, K_1 = 8$  pour le DAO2.

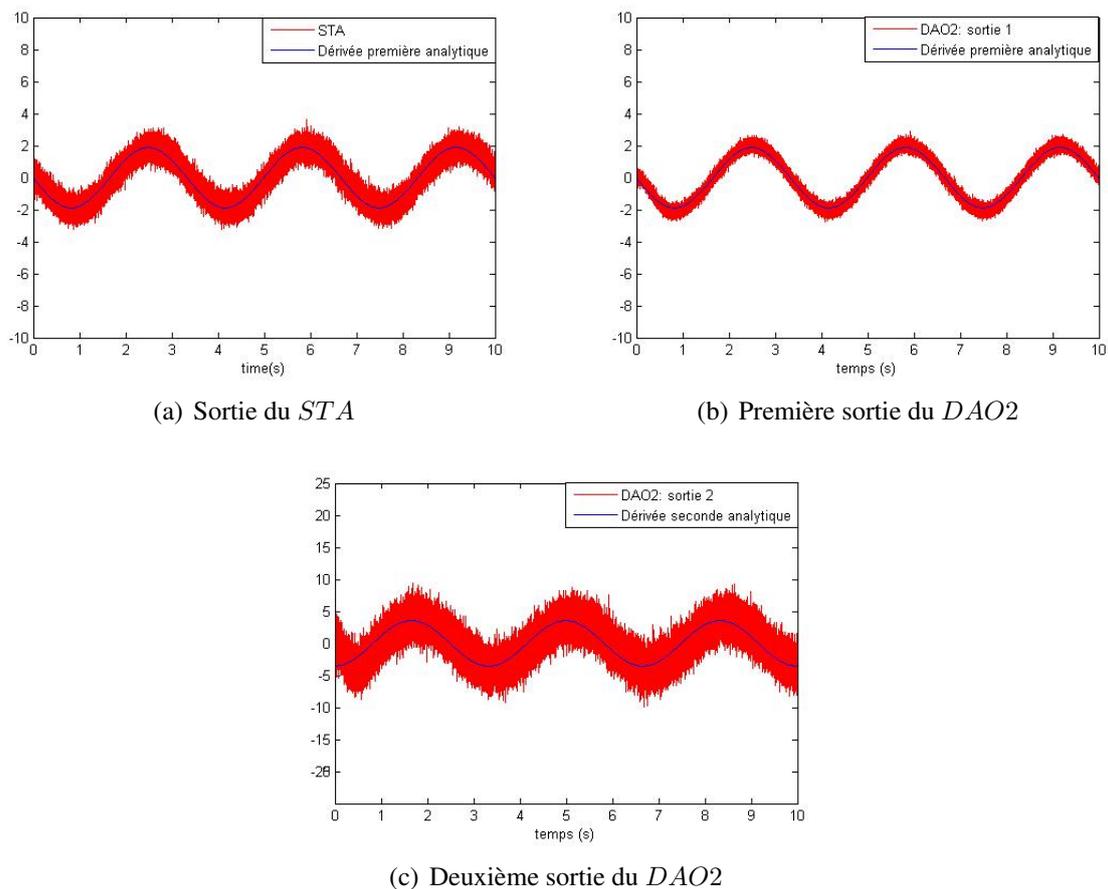


FIGURE 1.41 – Sorties des algorithmes adaptatifs pour un signal bruité.

Les sorties des algorithmes adaptatifs pour le signal bruité sont illustrées sur la figure 1.41. Pour faciliter la comparaison, nous avons utilisé une échelle identique à celle des résultats fournis par les algorithmes non adaptatifs (figure 1.24). Les critères RSB et RB sont résumés dans le tableau 1.12.

Tableau 1.12 – Critères de comparaison pour la robustesse par rapport au bruit.

Algorithme	STA	DAO2: 1 <sup>ère</sup> sortie	DAO2: 2 <sup>ème</sup> sortie
RSB(dB)	9.8	17.2	6.2
RB	2.7	1.56	4.35

La figure 1.41(b) nous permet de déduire qu'au niveau de la première estimée du DAO2, l'amplification du bruit est nettement réduite en comparaison de celle du STA (figure 1.41(a)). Le tableau 1.12 souligne ce résultat puisque la plus grande valeur de RSB est obtenue pour la première sortie du DAO2, ceci explique que la valeur de RB soit également la plus faible dans ce cas.

Pour un ordre de grandeur des gains similaire pour chacune des deux versions (adaptative et non adaptative), nous constatons que les valeurs de RSB (respectivement de RB) sont moins bons pour les algorithmes de différentiations non adaptatifs qu'avec la version adaptative, (tableau 1.8). En effet, l'amplification du bruit avec le DAO2 pour l'estimation de la dérivée première est à peu près de 10 fois plus faible que pour le DO2 pour la même estimée et elle est 22 fois plus réduite pour l'estimation de la dérivée seconde.

En effet, l'atténuation du bruit est assurée par la présence du terme linéaire  $K_i s_i$  au niveau des équations de chaque sortie  $i$  de l'algorithme adaptatif. Ce terme linéaire peut être vu comme la commande équivalente des lois de commandes modes glissants qui permet la réduction de l'effet de chattering. L'ajout de ce terme continu assure le lissage du bruit en sortie grâce aux valeurs faibles des gains de convergence. Par contre, si les valeurs choisies pour ces gains deviennent trop faible alors le temps de convergence de l'algorithme devient lent. Par conséquent, le choix des gains de convergence reste délicat et repose sur un compromis entre l'atténuation du bruit et le temps de convergence du dérivateur adaptatif. Il est à noter aussi, qu'en présence du bruit, il est nécessaire d'imposer des valeurs initiales faibles des gains dynamiques pour réduire le plus possible l'effet de la composante discontinue. De plus la présence d'intégrale dans les expressions des gains dynamiques assure aussi le lissage des dérivées estimées.

Pour conclure, nous avons montré ici le principal avantage apporté par cette nouvelle version des algorithmes modes glissants c'est-à-dire la réduction de l'amplification du bruit au niveau du signal de sortie qui se fait par un réglage d'un nombre de gains inférieur à celui utilisé pour les différentiateurs classiques. Cet aspect est très intéressant en pratique où la présence du bruit est inévitable.

Afin de vérifier l'efficacité des algorithmes adaptatifs, nous allons maintenant faire varier la fréquence du signal d'entrée  $\sin(\omega t)$ <sup>5</sup> pour ensuite calculer les valeurs maximales de la valeur absolue de l'erreur et du déphasage, pour une valeur fixée des gains de convergence à savoir pour STA  $K_0 = 1300$  et pour DAO2 ( $K_0 = 1200$ ,  $K_1 = 1000$ ) (figures 1.42, 1.43).

Par un seul réglage des gains et pour différentes fréquences du signal d'entrée, nous remarquons que les valeurs de l'erreur et de déphasage obtenues par les différentiateurs modes glissants adaptatifs sont relativement faibles par rapport à celles données par la troisième version de l'algorithme algébrique (figure 1.12), où celle-ci nécessite plusieurs paramètres de réglage. Toutefois, nous constatons que le STA présente la valeur la plus faible en erreur qui ne dépasse pas 0.05.

Nous précisons que les valeurs de ces critères (erreur, déphasage) se réduisent remarquablement en augmentant les gains de convergence des algorithmes. A titre d'exemple, en ayant des valeurs des gains 3 fois plus grand, nous réduisons de 4 fois l'erreur et le déphasage obtenues pour la 2<sup>ème</sup> sortie du DAO2.

La comparaison des temps de calcul pour chacun des algorithmes est donnée sur le tableau 1.13. La période d'échantillonnage utilisée dans cet essai est également fixée à  $10^{-3}$  secondes et pour un temps de simulation de 10 secondes.

Tableau 1.13 – Temps de calcul : Algorithmes modes glissants adaptatifs.

Algorithme	STA	DAO2
Temps de calcul (s)	0.106	0.169

Les valeurs données par ce tableau montre que les algorithmes adaptatifs présentent un temps de calcul beaucoup plus faibles que les algorithmes de nature algébriques (tableau 1.5). Toutefois, le temps de calcul enregistrés pour les algorithmes par modes glissants classiques (tableau 1.9)

5.  $\omega$  est la pulsation du signal en rad/s.

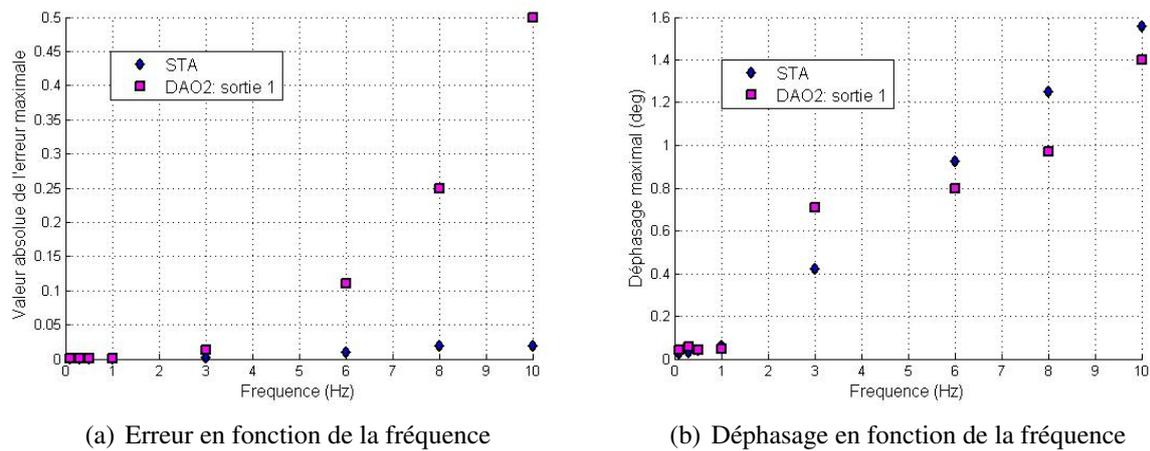


FIGURE 1.42 – Evolution de l'erreur et du déphasage : première estimée.

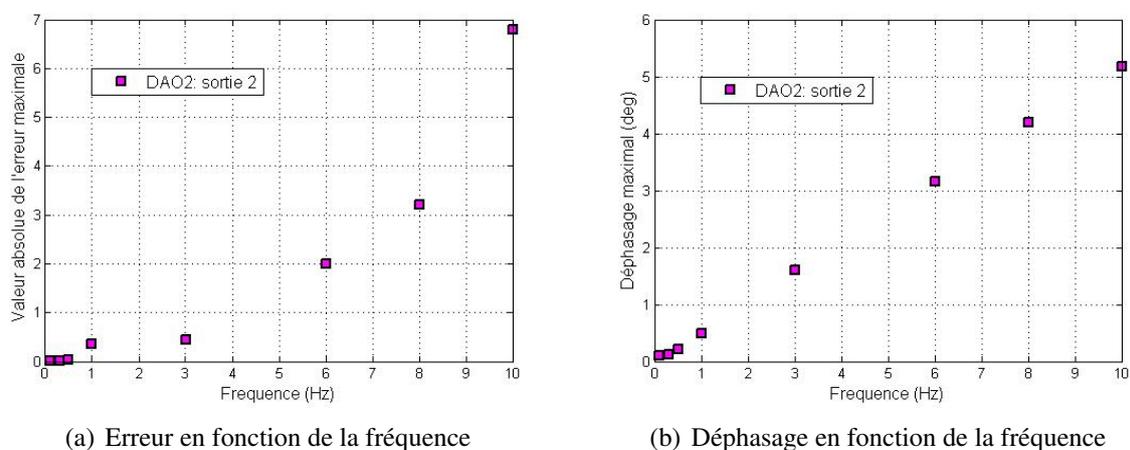


FIGURE 1.43 – Evolution de l'erreur et du déphasage : deuxième estimée.

est plus faible que celui donné pour les algorithmes proposés. Nous enregistrons une différence de temps de calcul de 0.02 secondes entre le ST et le STA, cette valeur est égale à 0.06 secondes entre le DO2 et le DAO2. Cette différence représente le temps de calcul nécessaire pour les équations dynamiques des gains adaptatifs.

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié en détail sept algorithmes de différentiation robustes. Deux approches ont été présentées, les dérivateurs de nature algébriques puis les différentiateurs basés sur les modes glissants d'ordre supérieur. Pour l'étude des trois versions d'estimateurs algébriques, nous avons tout d'abord rappeler les outils mathématiques associés à ces dérivateurs afin d'expliquer leur formalisation.

La deuxième partie de ce chapitre a été consacrée aux différentiateurs modes glissants. Nous avons trouvé nécessaire d'exposer les notions essentielles des régimes glissants que ce soit d'ordre un ou d'ordre supérieur afin de mieux comprendre la construction de ces algorithmes. Dans la troisième partie, la convergence de l'algorithme du Super Twisting a été démontrée avant de mettre en évidence les problèmes relatifs à ce type de différentiateur et en particulier le problème de l'amplification du bruit.

Dans la quatrième partie de ce chapitre, nous avons alors détaillé l'algorithme proposé. Tout d'abord, le choix des paramètres de réglage des différentiateurs modes glissants est fortement lié au spectre fréquentiel du signal d'entrée. Ainsi une modification du signal d'entrée nécessite de fixer à nouveau les gains, afin d'obtenir des résultats corrects et d'assurer la convergence de l'algorithme. En présence du bruit, ce choix devient plus délicat où un compromis entre précision et robustesse par rapport au bruit s'impose. Ceci constitue donc une limite majeure pour ce type d'algorithmes. Donc pour faciliter le réglage de ce type d'algorithme en garantissant de bonnes performances et un bon filtrage, nous avons proposé une nouvelle version d'algorithmes modes glissants.

Suite aux différents résultats de simulation fournis au cours de ce chapitre pour les différents algorithmes de différentiation, une synthèse comparatif a été dressée afin de souligner les avantages ainsi que les inconvénients de chacune de ces méthodes (tableau 1.14).

Tableau 1.14 – Comparaison des différents schémas de différentiation.

Algorithme	Précision : amplitude	Déphasage	Robustesse par rapport au bruit	Paramètres de réglage
<i>ST</i>	++	++	–	2 paramètres
<i>DO2</i>	++	++	–	3 paramètres
<i>STA</i>	+++	+++	+	1 paramètre
<i>DAO2</i>	+++	+++	+	2 paramètres
<i>PVAA</i>	–	–	--	3 paramètres
<i>DVAA</i>	–	–	+++	3 paramètres
<i>TVAA : EM</i>	–	–	+++	5 paramètres
<i>TVAA : EMSR</i>	–	+	+++	5 paramètres
<i>TVAA : ENM</i>	+	–	+++	5 paramètres

EM : Estimateur Minimal, EMSR : Estimateur Minimal Sans Retard, ENM : Estimateur Non Minimal.

Afin de tester l'efficacité de l'algorithme proposé, différentes applications peuvent être considérées. La diversité de ces applications, nous a permis de consacrer tout le chapitre suivant de ce mémoire.





# Chapitre 2

## Applications et mise en oeuvre des différentiateurs proposés

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>72</b>
<b>2.2</b>	<b>Application 1D : identification paramétrique</b>	<b>74</b>
2.2.1	Présentation : méthode et système d'application	75
2.2.2	Résultats expérimentaux	79
<b>2.3</b>	<b>Application 2D : détection de contours</b>	<b>83</b>
2.3.1	Généralités	83
2.3.2	Approche différentielle	86
2.3.3	Approche analytique	89
2.3.4	Approche via les modes glissants adaptatifs	92
2.3.5	Etude comparative	93
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>106</b>

---

### 2.1 Introduction

Chaque capteur physique possède un certain nombre de caractéristiques telles que sa bande passante, sa sensibilité, sa précision. Il est aussi souhaitable que le signal de mesure ne reflète que la grandeur à mesurer. Mais en réalité, il existe un certain nombre de capteurs qui sont plus au moins sensibles à d'autres effets comme par exemple la température. Ceci implique qu'un capteur physique est fortement lié aux conditions extérieures et à l'environnement d'utilisation. Au fur et à mesure du vieillissement et de l'utilisation des capteurs physiques, il est nécessaire d'effectuer une procédure d'étalonnage afin d'obtenir des données correctes. Malgré les bons résultats fournis par un capteur physique, il présente tout de même des inconvénients à savoir son prix et la maintenance que nécessite celui-ci. De plus, il peut être endommagé ce qui peut provoquer pour certaines applications un arrêt total du système. Pour des procédés ayant une large plage de fonctionnement, il est nécessaire de choisir un capteur à étendue de mesure adéquate. Si cette dernière est assez élevée, il est clair que la sortie du capteur sera médiocre pour les faibles voir les moyennes zones de fonctionnement du système. Dans ce cas, il est nécessaire de disposer de plusieurs capteurs permettant d'avoir une information fiable sur toute l'étendue de mesure.

A partir de ce qui précède, l'intégration d'un "capteur logiciel" peut s'avérer avantageuse comparé à un capteur physique. Parmi ces avantages, on peut espérer la minimisation du coût global

du système, minimisation du coût global de risque de panne et une possibilité de remplacer plus qu'un capteur au niveau d'un même procédé. Toutefois, ce type de capteur doit reproduire le plus possible la sortie délivrée par un ou plusieurs capteurs physiques. Notamment, ces "capteurs logiciels" doivent fonctionner correctement sur une certaine plage de fonctionnement et doivent être robustes par rapport au bruit. Si un modèle dynamique du procédé existe et si les conditions d'observabilité sont vérifiées, les "capteurs logiciels" peuvent être représentés par un observateur. Cependant, ce dernier est généralement peu précis car l'estimation s'appuie sur les équations du système qui ne sont connues qu'avec une précision limitée. Par contre, si le "capteur logiciel" peut être défini par un différentiateur, celui-ci n'est plus sensible aux incertitudes de la modélisation. Notons aussi que dans les deux cas, le "capteur logiciel" peut être utilisé pour prédire l'évolution de certaines variables afin d'apporter les actions correctives nécessaires en cas d'évolution anormale de celles-ci ou être utilisé juste pour détecter la défaillance du système.

Nous nous intéressons dans notre travail plus particulièrement au "capteur logiciel" représenté par un différentiateur. L'objectif de ce chapitre est de décrire quelques applications relatives à ce type de capteur, tout en exploitant le développement théorique de l'algorithme proposé dans le chapitre précédent. Ces applications se divisent en deux grandes catégories : celles qui correspondent au domaine monodimensionnel (1D) et d'autres au domaine bidimensionnel (2D).

Pour le domaine 1D, l'algorithme a été mis en oeuvre pour différents objectifs. La première application touche au domaine robotique où le problème considéré est l'identification en ligne des paramètres d'un système non-linéaire [Sidhom10]. Plus précisément, le but consiste en l'identification des paramètres d'un robot à deux axes. Notre démarche consistera tout d'abord à exposer la méthode utilisée pour laquelle le différentiateur joue un rôle primordial dans l'identification paramétrique. Une étude comparative avec les méthodes classiques sera aussi présentée.

La deuxième application consiste à remplacer les capteurs de vitesse et d'accélération s'ils existent bien-sûr dans des boucles de commandes par un seul "capteur logiciel" qui est dans notre cas le schéma de différentiation proposé. Cette partie sera décrite et détaillée dans les chapitres 3 et 4 où nous exposons les résultats expérimentaux de commande non-linéaire en position obtenus sur un vérin électrohydraulique.

Les modes glissants d'ordre un ou supérieur ont été largement appliqués dans le domaine monodimensionnel. Il nous a semblé intéressant d'étendre l'application de ce type de technique dans un domaine plus large, le domaine 2D. A notre avis, le travail proposé représente l'une des premières applications de cette technique dans le domaine de l'imagerie numérique [Sidhom11]. Par conséquent, nous y consacrerons une grande partie de ce chapitre.

De nos jours, les images numériques jouent un rôle important dans notre vie quotidienne, nous pouvons citer l'exemple de la télévision, le satellite, l'imagerie médicale... ce qui explique bien l'existence d'une multitude d'applications en imagerie, mais dans ce chapitre, nous nous limitons à certaines d'entre elles et plus précisément à la détection des contours dans une image. Cette application est très intéressante puisqu'elle représente une étape préliminaire à de nombreuses applications d'analyse d'images telles que la reconnaissance d'objets, de formes, la segmentation... Pour ce faire, nous décrivons dans un premier temps la façon dont le différentiateur proposé est utilisé comme détecteur de contours. Le but principal est de tester la faisabilité ainsi que l'efficacité du différentiateur adaptatif robuste pour ce type d'application. Des résultats de simulations seront présentés pour des images en niveau de gris afin de valider les performances obtenues par l'algorithme utilisé par rapport aux méthodes classiques. Ceci nous impose de consacrer tout d'abord un sous-paragraphe pour rappeler les méthodes classiques choisies comme base de comparaison avec le détecteur de contours proposé.

Les bons résultats obtenus pour la détection de contours nous conduisent alors à étendre l'application de cet algorithme pour les séquences d'images. L'une des idées la plus intéressante consiste à estimer le flux optique entre deux images d'une séquence donnée afin de prédire le mouvement des pixels dans une séquence d'images. Suite à cette prédiction, une reconstruction d'image à l'instant suivant peut être envisageable. De plus, l'estimation du mouvement des pixels peut aussi servir dans le processus de compression vidéo. L'intérêt que porte ce type d'application, nous amène à consacrer une annexe (annexe C) pour décrire les perspectives de ces travaux 2D. Au niveau de cette annexe, nous décrivons tout d'abord la méthode proposée avec laquelle une estimation du flux optique peut être réalisée à l'aide de l'algorithme proposé. Par la suite, nous expliquons la façon dont nous pouvons exploiter ce résultat pour la reconstruction d'images et la compression de séquence d'images.

## 2.2 Application 1D : identification paramétrique

Le problème de l'identification des paramètres physiques reste toujours d'actualité en Automatique surtout si le système considéré est un système non linéaire. Il existe de nos jours de nombreuses méthodes d'identification en temps continu pour des processus pouvant être modélisés par un modèle linéaire [107]. Bien que ce sujet de recherche soit populaire, la procédure d'identification en ligne pour les systèmes non linéaires est rarement mise en pratique. Normalement, la plupart des méthodes d'identification utilisent le modèle direct du système. Ce modèle est souvent non linéaire par rapport aux paramètres. En conséquence, la formulation du problème d'identification peut conduire alors à une optimisation non linéaire. Selon le critère choisi, ce type de problème d'optimisation consiste souvent à minimiser une erreur de sortie entre le modèle et le système par rapport au vecteur des paramètres inconnus, [117]. Cependant, cette méthode présente certains inconvénients majeurs. En effet, si le critère utilisé ou n'importe quelles contraintes sont non-convexes, ceci entraîne alors l'obtention de plusieurs minimums locaux.

Dans la littérature, il existe de nombreuses méthodes d'identification basées sur les observateurs non linéaires. Le principe de ces méthodes consiste à étendre le vecteur des états estimés aux paramètres inconnus. Quelques exemples peuvent être cités : les méthodes basées sur le filtre de Kalman étendu [62], observateur à grand gain [13], observateur à modes glissants [152], [55]. En général, toutes ces méthodes utilisent aussi le modèle direct du système, qui est souvent non linéaire par rapport aux paramètres.

En revanche, pour la plupart des systèmes mécaniques, le modèle direct est plat [51] donc une utilisation du modèle inverse nous amène à avoir un modèle linéaire par rapport à un groupement des paramètres physiques. Donc plutôt que d'utiliser le modèle d'état direct comme modèle d'identification, nous pouvons alors exploiter les propriétés du modèle inverse. Dans ce cas, le problème de l'identification se ramène à une minimisation d'une erreur de prédiction par rapport au vecteur des paramètres inconnus. Cette minimisation est effectuée selon un critère choisi, qui est généralement quadratique. Ainsi, le vecteur des paramètres inconnus peut être obtenu par une méthode des moindres carrés. L'avantage majeur de cette stratégie est l'absence d'itérations, ce qui rend l'identification en ligne plus facile. En contrepartie, cette méthode exige une bonne estimation préalable de l'état et de ses dérivées. Donc, la méthode de dérivation ainsi que de filtrage joue un rôle clé dans le processus d'identification.

L'objet de ce paragraphe est de mettre en oeuvre une technique d'identification en ligne des paramètres physiques en s'appuyant à la fois sur une méthode des moindres carrés et une dé-

rivation numérique robuste à base des modes glissants d'ordre supérieur adaptatif [Sidhom10]. Dans [7] la même idée a été exploitée, mais pour une identification paramétrique hors-ligne d'un système non linéaire. Dans ce travail le dérivateur du Super Twisting (ST) combiné avec une méthode des moindres carrés a été utilisé.

### 2.2.1 Présentation : méthode et système d'application

L'application proposée consiste à mettre en oeuvre cette technique dynamique d'identification en ligne pour un robot manipulateur en utilisant son modèle inverse. Nous débutons ce paragraphe par la présentation du modèle dynamique du système utilisé. Ensuite, nous expliquons les principes généraux de la méthode considérée. La dernière partie de ce paragraphe sera consacrée aux résultats expérimentaux.

Le système utilisé pour la validation de la méthode proposée est un robot SCARA à deux axes, sans effet de gravité, développé par le laboratoire IRCCyN à Nantes, voir figure 2.1.

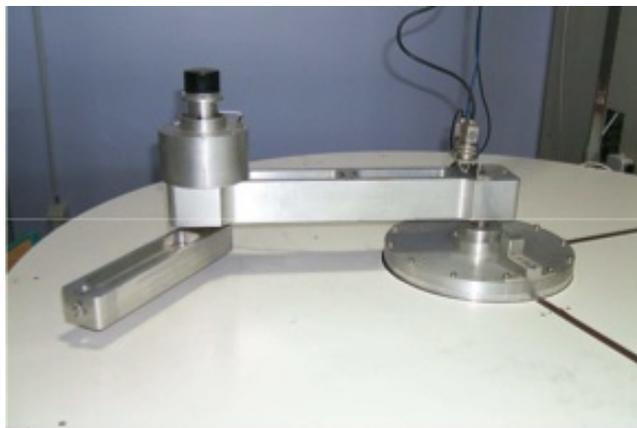


FIGURE 2.1 – Robot SCARA à 2 degrés de liberté.

La plate-forme expérimentale est composée d'un robot manipulateur à articulations rigides muni d'actionneurs et de capteurs, d'une interface de puissance composée de deux amplificateurs permettant de piloter les actionneurs du robot, d'un ordinateur équipé d'une carte dSPACE sur laquelle est implantée la commande. Cette plate-forme possède en outre des circuits périphériques tels que des convertisseurs analogique/numérique et numérique/analogique ainsi que des interfaces pour les codeurs.

Les actionneurs du robot sont des moteurs synchrones. Les capteurs sont des codeurs absolus montés directement sur les axes des moteurs. Ces capteurs permettent de recueillir uniquement les positions articulaires du robot, les vitesses articulaires quant à elles ne sont pas mesurées directement.

Soit le Lagrangien défini par :

$$L(\dot{q}, q) = k(\dot{q}, q) - U(q) \quad (2.1)$$

$k(\dot{q}, q)$ ,  $U(q)$ ,  $q = [q_1, q_2]^T$ ,  $\dot{q}$  sont respectivement l'énergie cinétique, l'énergie potentielle, le vecteur des positions articulaires et le vecteur des vitesses articulaires du robot.

Avec  $k(\dot{q}, q) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$  et  $U(q) = \sum_{i=1}^2 -\frac{1}{2}m_i g P_i(q) + U_{iref}$ .

Où  $M(q)$  est une matrice de  $\mathbb{R}^{(2*2)}$  symétrique définie positive appelé matrice d'inertie,  $m_i$  est la masse de corps  $i$ ,  $g$  est le vecteur de gravité,  $P_i$  est le vecteur qui localise le barycentre du corps  $i$  et  $U_{iref}$  est une constante servant de référentiel à l'énergie potentielle relatif au corps  $i$ .

De la formulation Lagrangienne, les équations du mouvement sont exprimées alors en terme d'énergie comme suit :

$$\Gamma = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}. \quad (2.2)$$

où  $\Gamma = [\Gamma_1 \ \Gamma_2]^T$  est le vecteur des couples appliqués. Conformément à [78], [104], le modèle dynamique du robot peut s'écrire sous une forme linéaire par rapport au vecteur des paramètres, ce qui conduit au modèle inverse suivant :

$$\Gamma = D(\ddot{q}, \dot{q}, q) \theta. \quad (2.3)$$

où  $D$  est la matrice de régression donnée par :

$$D(\ddot{q}, \dot{q}, q) = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 & 0 \\ \dot{q}_1 & 0 \\ \text{sign}(\dot{q}_1) & 0 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\ (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)C_2 - \dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)S_2 & \ddot{q}_1 C_2 + \dot{q}_1^2 S_2 \\ -(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)S_2 - \dot{q}_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)C_2 & \dot{q}_1^2 C_2 - \ddot{q}_1 S_2 \\ 0 & \dot{q}_2 \\ 0 & \text{sign}(\dot{q}_2) \end{pmatrix}^T \quad (2.4)$$

avec :  $C_2 = \cos(q_2)$  et  $S_2 = \sin(q_2)$ .

Le vecteur des paramètres inconnus de dimension  $n_p = 8$  est donné par :

$$\theta = \left[ ZZR_1 \ F_{v1} \ F_{s1} \ ZZ_2 \ L_1MX_2 \ L_1MY_2 \ F_{v2} \ F_{s2} \right]^T \quad (2.5)$$

avec :  $ZZR_1 = ZZ_1 + M_2L_1^2$ ,

$L_1$  est la longueur du corps 1,

$M_2$  est la masse du corps 2,

$ZZ_1$  et  $ZZ_2$  sont respectivement les moments d'inertie des corps 1 et 2,

$L_1MX_2$  et  $L_1MY_2$  sont les premiers moments du corps 2 multiplié par la longueur du corps 1,

$F_{v1}$ ,  $F_{s1}$ ,  $F_{v2}$ ,  $F_{s2}$  sont les paramètres de frottement visqueux et secs des deux axes.

Dans tout ce qui précède, nous avons présenté uniquement le modèle dynamique relatif à la partie mécanique du système, toute la partie électrique relative aux actionneurs est négligée car sa dynamique est très rapide par rapport à la dynamique mécanique.

Puisque que le système est intégrateur, la procédure d'identification a été réalisée en boucle fermée, voir figure 2.2. La procédure proposée repose sur trois étapes. La première est la sélection d'un signal d'entrée permettant d'identifier correctement les paramètres désirés. Afin d'estimer l'état et ses dérivées à partir des mesures disponibles, le Différentiateur Adaptatif d'Ordre deux (DAO2), décrit dans le chapitre précédent est utilisé. Finalement à partir de la connaissance de l'entrée, l'état et de ses dérivées, le vecteur des paramètres inconnus est déterminé à l'aide de la méthode des moindres carrés récursifs.

Toutes les grandeurs mécaniques affichées au niveau de la figure 2.2 sont des grandeurs vectorielles. La relation entre le couple  $\Gamma$  et le signal d'entrée  $E$  (il s'agit d'un signal en courant) est exprimé par un gain constant  $K_{\Gamma c}$ . Cette constante est la multiplication du gain relatif au rapport du réducteur, le gain de l'amplificateur et la constante du couple de l'actionneur.  $K_p$  et  $K_v$  sont définis respectivement par  $[K_{p1} \ K_{p2}]^T$  et  $[K_{v1} \ K_{v2}]^T$ .  $q^{ref}$  représente les trajectoires de références relatives aux positions articulaires  $q$ .

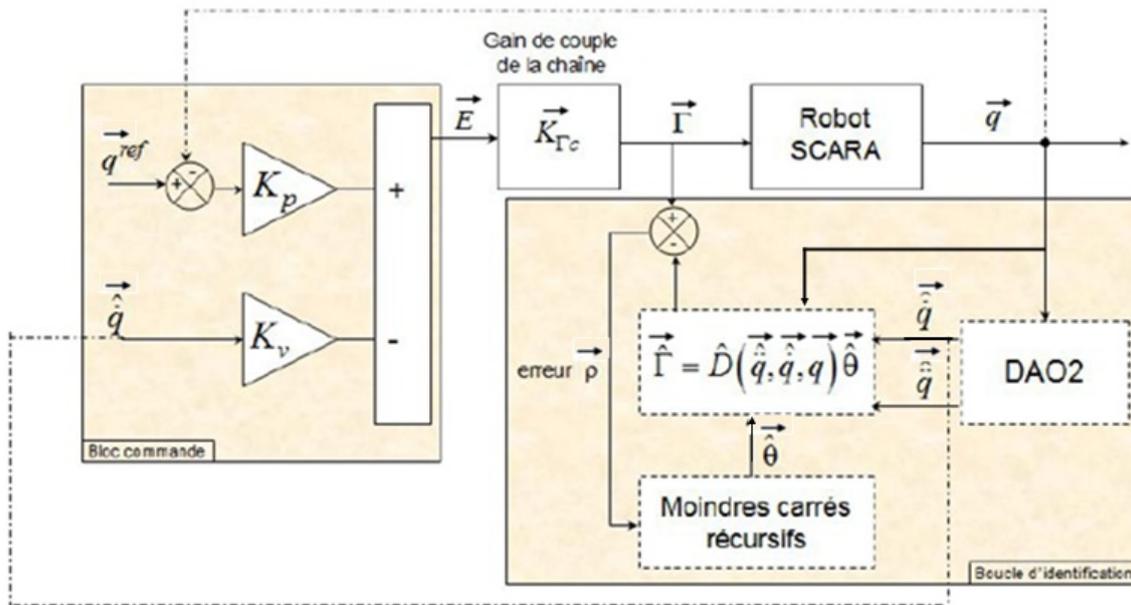


FIGURE 2.2 – Schéma global utilisé pour l'identification.

Le vecteur  $\theta$  peut être estimé à partir de la solution des moindres carrés d'un système obtenu par échantillonnage de l'équation (2.3) pour différents instants  $t_i$ , ( $i = 1, \dots, ne$ ) :

$$U = W\theta + \rho. \quad (2.6)$$

où  $W$  est la matrice d'observation de dimension  $(2ne \times np)^1$ , qui n'est autre que la matrice de régression  $D$  échantillonnée.  $U$  est un vecteur de dimension  $(2ne \times 1)$  qui représente le vecteur couple échantillonné.  $\rho$  est le vecteur d'erreur de dimension  $(2ne \times 1)$  qui comprend les erreurs du modèle ainsi que les bruits de mesure.

La solution au sens des moindres carrés de (2.6) minimise un critère quadratique, qui dépend du vecteur  $\rho$ , par rapport au vecteur des paramètres. L'unicité de cette solution dépend du rang de la matrice d'observation  $W$ . Dans certains cas, une perte du rang de cette matrice peut se produire. En effet, cette perte peut être structurelle, autrement dit liée directement à la structure du système. Elle apparaît alors quelque soit le mouvement d'excitation dans  $W$  et traduit le caractère non identifiable des paramètres du fait d'un paramétrage est surabondant. Ce problème peut être résolu en calculant un jeu de paramètres identifiables, [63]. La perte du rang de la matrice d'observation peut aussi être induite par un mauvais choix de la trajectoire imposée pour l'identification. Toutefois, ce problème peut être résolu en imposant un mouvement persistant et riche en information en entrée, lors de l'identification. Par conséquent, nous considérons dans toute la suite que la matrice d'observation a la même dimension tout au long du processus d'identification qui est effectivement justifiée par le choix du mouvement.

1.  $2ne$  est le nombre des équations et  $np$  représente le nombre des paramètres à identifier

Comme nous utilisons une estimation en ligne des vitesses et des accélérations obtenues par le différentiateur adaptatif (DAO2), il est alors plus intéressant d'utiliser la méthode des moindres carrés récurrents [96] avec un facteur d'oubli. Ce type de pondération permet aussi d'accélérer la convergence lors de la phase transitoire.

Le principe de la formulation récursive de la méthode consiste alors à calculer à l'étape  $N$  le vecteur des paramètres inconnus  $\theta$  en fonction des données disponibles et de l'estimation de  $\theta$  à l'étape  $N - 1$ .

En se basant sur la solution donnée par la méthode des moindres carrés ordinaire, nous pouvons alors écrire, sous condition que  $W_N^T W_N$  soit inversible, qu'à l'étape  $N$  on a :

$$\hat{\theta}_N = (W_N^T W_N)^{-1} W_N^T U_N \quad (2.7)$$

avec

$$W_N = [w_N \ W_{N-1}]^T \quad \text{et} \quad U_N = [u_N \ U_{N-1}]^T \quad (2.8)$$

En utilisant (2.8), l'équation (2.7) devient :

$$\hat{\theta}_N = (W_{N-1}^T W_{N-1} + w_N^T w_N)^{-1} (W_{N-1}^T U_{N-1} + w_N^T u_N) \quad (2.9)$$

Soit le lemme d'inversion matricielle suivant, [121] :

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B \frac{C}{1 + CDA^{-1}B} DA^{-1} \quad (2.10)$$

Suite à ce lemme et en choisissant  $A = (W_{N-1}^T W_{N-1})^{-1}$ ,  $B = w_N^T$ ,  $C = I$  ( $I$  est la matrice d'identité) et  $D = w_N$ , l'équation ci-dessous est alors obtenue :

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} - (W_{N-1}^T W_{N-1})^{-1} w_N^T a^{-1} w_N \hat{\theta}_{N-1} + (W_{N-1}^T W_{N-1})^{-1} w_N^T [1 - a^{-1} w_N (W_{N-1}^T W_{N-1})^{-1} w_N^T] u_N \quad (2.11)$$

où

$$a^{-1} = \frac{1}{1 + w_N (W_{N-1}^T W_{N-1})^{-1} w_N^T} \quad (2.12)$$

Nous avons :

$$(1 - a^{-1} w_N (W_{N-1}^T W_{N-1})^{-1} w_N^T) u_N = a^{-1} \quad (2.13)$$

A l'étape  $N$  et à partir 2.13, l'équation suivante est déduite :

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_{N-1} + K_N (u_N - w_N \hat{\theta}_{N-1}) \quad (2.14)$$

avec :

$$K_N = P_{N-1} w_N^T \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + w_N P_{N-1} w_N^T \right)^{-1} \quad (2.15)$$

$$P_N = \frac{1}{\alpha_1} (P_{N-1} - K_N w_N P_{N-1}) \quad (2.16)$$

La méthode choisie est à facteur d'oubli fixe où les valeurs de ces gains sont fixées à  $\alpha_1 = 0.95$  et  $\alpha_2 = 1$ .

A partir de cet algorithme, le vecteur des paramètres inconnus  $\hat{\theta}_N$  est alors déterminé à partir de l'estimation  $\hat{\theta}_{N-1}$ . Ainsi, les calculs sont plus rapides que la méthode classique puisque nous n'utilisons pas la matrice de régression en entier. Cependant, la méthode nécessite l'initialisation du vecteur des paramètres inconnus  $\hat{\theta}_0$  et la matrice de covariance  $P_0$ .

### 2.2.2 Résultats expérimentaux

Dans la suite, nous nous penchons sur les essais expérimentaux. Nous avons choisi un mouvement permettant de solliciter suffisamment le système, [149]. Pour une articulation, le mouvement choisi est défini par une trajectoire polynomiale d'ordre cinq : les conditions initiales et finales sur la trajectoire imposée sont choisies afin d'avoir des vitesses et des accélérations nulles et une position donnée. Pour la commande du robot, une commande linéaire classique de type (Proportionnel-Dérivée)  $PD$  a été mise en place. Les mesures sont effectuées pour une fréquence d'échantillonnage égale à 200 Hz.

Lors de la mise en oeuvre pratique de la méthode proposée, les estimations des couples sont assez bruitées. Par conséquent l'estimation obtenue peut alors présenter un biais si les matrices  $W$  et  $U$  ne sont pas indépendantes, ce qui n'est pas vrai en pratique puisque l'identification se fait généralement en boucle fermée. Puisque les coefficients du régresseur, sont des fonctions non linéaires de l'état et de ses dérivées, il sera pratiquement impossible de calculer l'effet théorique de ces perturbations sur le biais et la variance de l'estimateur.

Au début, nous avons effectué une identification sans filtre, directement à partir des fichiers de mesure, nous obtenons alors des résultats qui donnent les ordres de grandeur des paramètres mais ne les identifient pas correctement. Ceci est probablement dû au fait que les signaux des couples d'entrées sont assez bruités, voir figure 2.3.

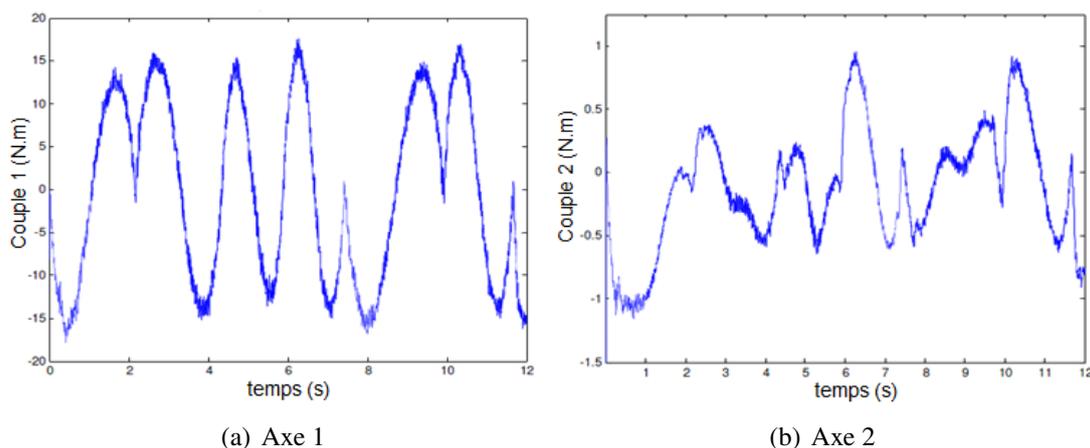


FIGURE 2.3 – Couples estimés non filtrés.

Pour éviter ce problème, un filtrage en ligne des données (entrées et sorties) est effectué avant d'entamer le processus d'identification, voir figure 2.4. Pour calculer un système filtré équivalent et qui ne perturbe que très peu la dynamique du système, un filtre passe bas est utilisé. La fréquence de coupure de ce filtre  $f_F$  est réglée afin d'avoir  $f_F \geq 10f_{dyn}$ , où  $f_{dyn}$  représente la fréquence naturelle estimée du système.

Nous supposons que nous n'avons pas de connaissance à priori sur le système ce qui nous ramène à initialiser le vecteur des paramètres inconnus à zéro. La matrice de covariance initiale  $P_0$  est arbitrairement choisie comme étant une matrice diagonale. Il est préférable que les valeurs des coefficients de cette matrice soient élevées afin d'assurer une convergence rapide des paramètres dynamiques. En pratique, nous fixons  $P_0 = 100I_1$ , où  $I_1$  est une matrice d'identité. Ensuite en utilisant les sorties du différentiateur adaptatif et en les injectant avec les positions et les couples filtrés dans l'algorithme des moindres carrés récursifs, les paramètres sont alors identifiés.

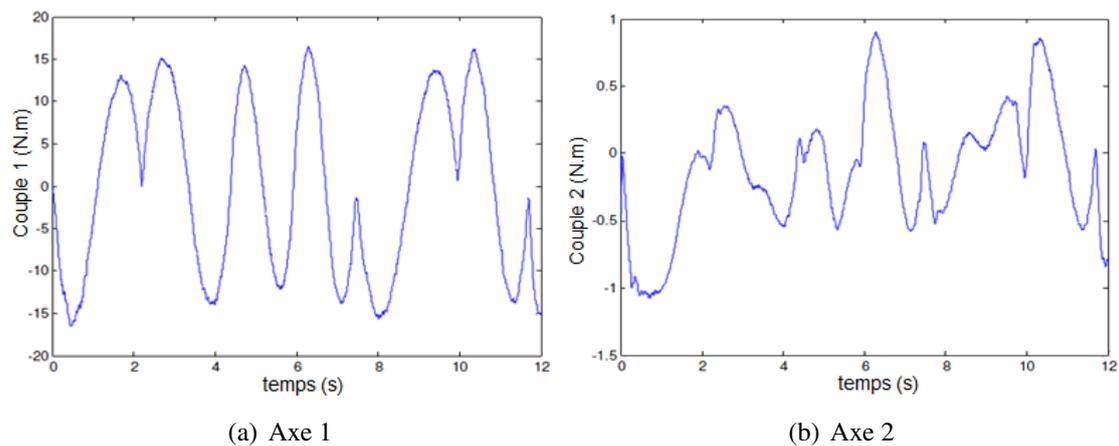


FIGURE 2.4 – Couples filtrés.

La validation expérimentale consiste à comparer les résultats de l'identification obtenus par le différentiateur robuste adaptatif et les résultats donnés par une identification en ligne obtenus en combinant une Différentiation Classique DC (méthode de différence finie centrée) et un filtre passe-bas (Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie) FRIF. L'ordre de ce filtre est fixé à 11 et la fréquence de coupure est réglée à 5 Hz. Le choix de l'ordre du filtre s'est imposé suite à quelques essais en simulations. Tous les filtres sont mis en oeuvre dans leur version discrète avec la même période d'échantillonnage que la boucle de commande.

L'estimation de l'accélération avec les deux filtres dans le domaine temporel est donnée par la figure 2.5. Il est délicat de comparer les valeurs des dérivées secondes obtenues à partir des ces deux algorithmes. Cependant pour une même bande de fréquence, l'estimation de l'accélération obtenue avec l'algorithme proposé présente moins de bruit que celle donnée par l'algorithme de DC et le filtre FRIF.

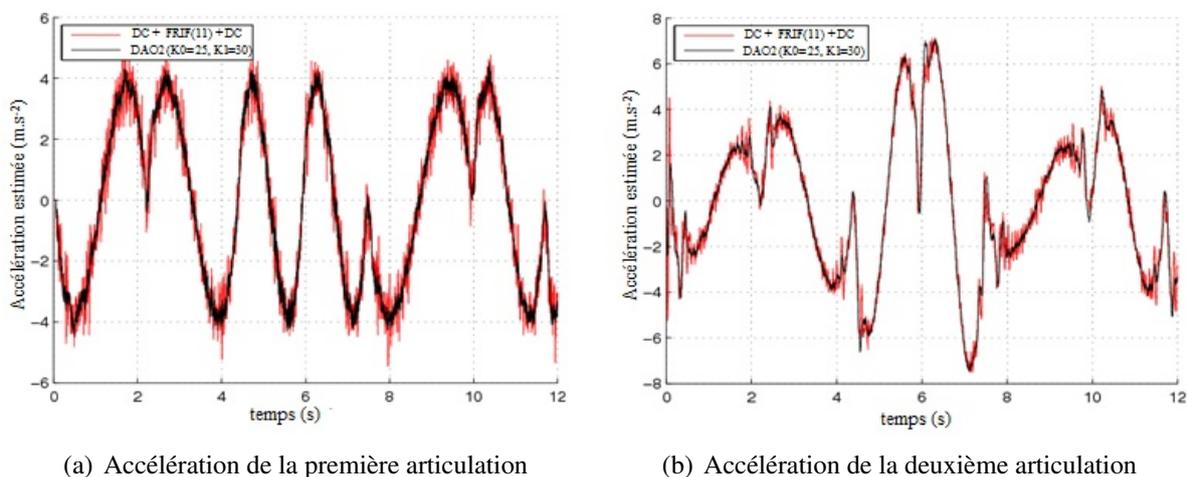


FIGURE 2.5 – Estimation des accélérations.

Suite aux résultats obtenus, un critère a été choisi pour pouvoir comparer chacune des méthodes. Tous les résultats sont proposés sous forme de tableau, quelques courbes sont également présentées.

Etant donné que l'identification est effectuée en boucle fermée, la matrice  $W$  n'est pas alors déterministe. De ce fait, nous définissons le critère suivant afin d'avoir une idée quantitative des

résultats (le même critère a été déjà utilisé dans [62]) :

$$c_i = 100 \frac{(W^T W)^{-1}}{\hat{\theta}_i} \quad (2.17)$$

La figure 2.6 représente les vitesses estimées par les deux méthodes indiquées. Nous remarquons que les deux signaux sont filtrés avec une présence d'un léger déphasage entre les différentes estimées.

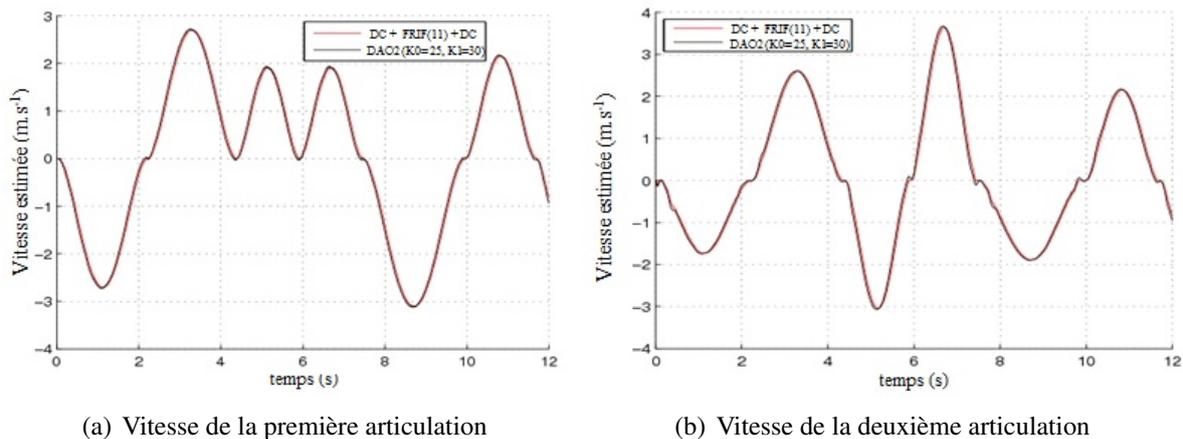


FIGURE 2.6 – Estimation des vitesses.

Le tableau 2.1 montre les paramètres identifiés avec la méthode proposée ainsi que les valeurs des paramètres à priori. Ces valeurs ont été calculées à partir des essais spécifiques qui consistent à déplacer un segment à la fois.

En outre, des résultats d'identification avec l'algorithme de DC combiné avec le filtre FRIF sont aussi donnés ainsi que les résultats obtenus avec la technique hors-ligne décrite dans [62]. Cette dernière utilise un filtre de Kalman étendu combiné avec la méthode des moindres carrés.

D'après les résultats de la table 2.1, nous remarquons que la méthode d'identification hors-ligne donne relativement des bons résultats mise à part les paramètres  $F_{v1}$ ,  $F_{s1}$ ,  $F_{v2}$  et  $L_1MY_2$  qui correspondent à des valeurs de  $c_i$  élevées.

Tableau 2.1 – Résultats d'identification.

Paramètres	valeurs à priori	Méthode en-ligne : DAO2	$c_i$	Méthode en-ligne : DC + FRIF	$c_i$	Méthode hors-ligne [62]	$c_i$
$ZZR_1$	3.42	3.35	0.20	3.21	0.55	3.47	0.8
$F_{v1}$	0.07	0.22	8.95	0.10	53.34	0.3	25
$F_{s1}$	0.58	0.48	6.62	0.70	12.33	0.4	9
$ZZ_2$	0.064	0.059	0.52	0.072	0.61	0.063	0.45
$L_1MX_2$	0.131	0.129	0.52	0.152	0.64	0.125	1.2
$L_1MY_2$	0	0.004	9.67	0.0083	7.25	0.03	49
$F_{v2}$	0.015	0.038	4.58	0.016	15.68	0.014	6
$F_{s2}$	0.156	0.082	3.32	0.100	3.96	0.13	1.7

Nous constatons aussi que la méthode proposée enregistre les valeurs  $c_i$  les plus faibles, sa valeur la plus élevée égale à 9.67 est associée au coefficient de frottement visqueux de l'axe 2. Ceci permet de déduire que l'utilisation du *DAO2* nous permet d'obtenir des meilleurs résultats par rapport aux méthodes classiques.

Toutefois, toutes les méthodes présentent des résultats relativement moins bons pour le paramètre  $L_1MY_2$  et les paramètres des frottements. Pour ces derniers, il est préférable de les considérer comme des paramètres variants en fonction du temps, ce qui pourra améliorer les résultats. Pour avoir des bons résultats, il serait plus judicieux d'utiliser dans ce cas la méthode de moindres carrés récursifs avec un facteur d'oubli adaptatif.

A partir du tableau 2.1, nous pouvons conclure que la méthode de différentiation joue un rôle non négligeable dans la méthode d'identification utilisée ce qui est illustré par les valeurs de  $\% \sigma_{\hat{\theta}}$  pour chacune des méthodes.

La figure 2.7 montre l'évolution et la convergence des paramètres dynamiques tout au long de la trajectoire de suivi. A partir de cette figure, nous constatons que les paramètres mal identifiés présentent une phase transitoire plus importante que les autres paramètres. En revanche, ces derniers convergent rapidement vers des valeurs constantes.

Une validation directe est effectuée pour tester le modèle. Cette validation consiste à comparer les couples réels et les couples estimés obtenus avec les paramètres identifiés (voir figure 2.8). Ces deux couples estimés approchent des couples mesurés. Cela permet de conclure à une bonne identification des paramètres dynamiques.

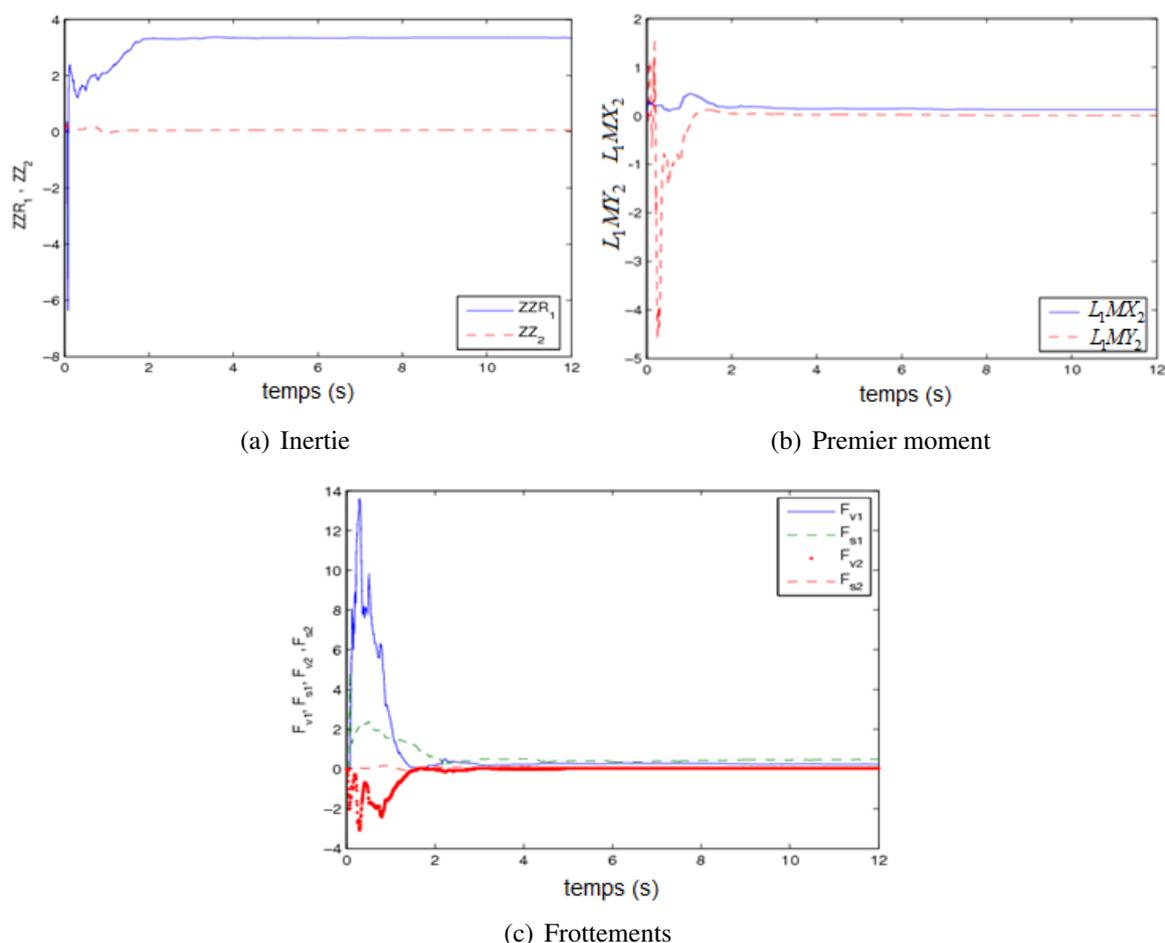


FIGURE 2.7 – Evolution des différents paramètres.

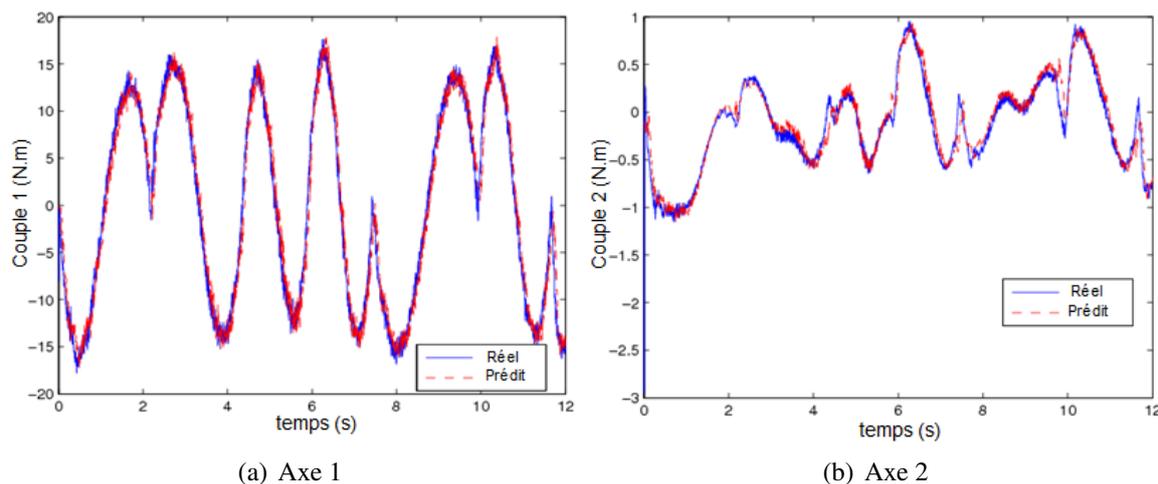


FIGURE 2.8 – Validation directe.

A partir de ce travail, différentes perspectives sont à envisager. La première est d'effectuer une validation croisée avec un nouveau jeu de données. La deuxième est l'utilisation de cette méthode d'identification en ligne pour une certaine classe de système à temps variant. Une autre consiste à exploiter cette méthode d'identification dans une loi de commande adaptative ou prédictive.

## 2.3 Application 2D : détection de contours

### 2.3.1 Généralités

Une image numérique monochrome peut être vue comme une suite ordonnée de points possédant chacun comme attribut son niveau de gris. Les différentes zones de niveaux de gris correspondent aux différents objets d'une image ou d'une scène. Pour extraire ou repérer ces objets, deux grandes approches peuvent être envisagées : l'approche directe et l'approche indirecte. Cette dernière consiste à rechercher des zones de niveaux de gris homogènes en se basant sur une segmentation en région où le contour dans ce cas est défini comme la ligne qui sépare deux régions adjacentes. Dans l'approche directe, un contour est défini par la recherche des discontinuités dans une image. Ces discontinuités sont caractérisées par une brusque variation d'intensité lumineuse. Par conséquent, un contour s'appuie alors sur ces transitions plus ou moins prononcées qui peuvent être décrites par un modèle de type marche, escalier ou toit de la fonction d'intensité.

La détection de contours constitue un problème classique rencontré dans le traitement d'image, mais les difficultés associées à ce type de problème proviennent généralement du bruit important présent dans les images. Cette problématique a débuté de façon extrêmement empirique par l'étude au moyen d'opérateurs locaux qui estimaient soit un gradient soit un laplacien en faisant une convolution de l'image avec des masques caractéristiques. Dans les années 80, des approches plus élaborées ont été mises en place par Marr [102], puis par Canny [23] pour obtenir des contours plus significatifs.

Dans la volumineuse littérature [39], [114], [70], [45], [155], il existe de très nombreuses approches pour détecter un contour, chacune d'entre elles résultent d'un compromis complexité-temps de calcul. Ces méthodes peuvent être classées suivant la manière d'estimer les dérivées de la fonction d'intensité : méthodes différentielles, analytiques... Toutefois, il est difficile de définir un détecteur utilisable pour tous types d'images. Ceci s'explique par le fait que chaque

image se différencie par sa nature (luminosité, environnement extérieur ou texture), ce qui incite d'attribuer à chacune des images un détecteur spécifique permettant de satisfaire au mieux les besoins des applications et les traitements effectués par la suite. Par ailleurs, il est impossible d'estimer l'efficacité d'un algorithme d'extraction de contours dans le cas général, ce qui explique l'existence de multitude d'algorithmes.

La perception des contours dans une image intègre réellement les notions d'éclairage, de forme de l'objet ainsi que des propriétés de surface de celle-ci (texture). Cependant, dans le traitement des images numériques, toutes ces informations sont condensées en une seule variable bidimensionnelle  $I(i, j)$  qui représente la matrice d'intensité lumineuse. C'est avec cette unique information que nous pouvons tenter d'extraire les contours d'un objet dans une image.

De plus, pour détecter les points d'un contour il faut utiliser un critère de décision. Les critères les plus connus dans le cas bidimensionnel reposent sur l'étude des dérivées partielles de la fonction d'intensité : dérivée première et dérivée seconde. En effet, les méthodes dérivatives s'appuient sur le fait que les contours d'image se traduisent dans la plupart des cas par des transitions rapides de l'image, et que les variations lentes seront éliminées par dérivation. Ces dérivées permettent alors de localiser les frontières d'un objet soit par la recherche des extréma locaux de la première dérivée en se basant sur un calcul du gradient, soit par la recherche des passages par zéro de la dérivée seconde via un calcul du laplacien. Les relations existantes entre les dérivées (gradient et laplacien) d'une image et le contour d'un objet sont détaillées ci-dessous.

A chaque pixel d'une image numérique est associé une fonction de luminance bidimensionnelle  $I(i, j) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  où  $(i, j)$  représente les coordonnées du pixel considéré dans le repère image  $(x, y)$ . La dérivée première partielle de  $I$  dans chacune des directions principales forme le vecteur gradient  $\vec{G}$  défini par :

$$\vec{G} = \vec{\nabla}I = \left( \frac{\partial I(x, y)}{\partial x} \quad \frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \right)^T \quad (2.18)$$

Dans la suite de ce chapitre, les notations suivantes seront utilisées :

$$\begin{cases} I_x = \frac{\partial I(x, y)}{\partial x}, \\ I_y = \frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \end{cases} \quad (2.19)$$

Ce vecteur  $\vec{G}$  est caractérisé, pour chaque pixel, par son module et son argument. L'amplitude est directement liée à la quantité de variation locale des niveaux de gris et est donné par :

$$|\vec{G}| = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} \quad (2.20)$$

l'argument est défini par :

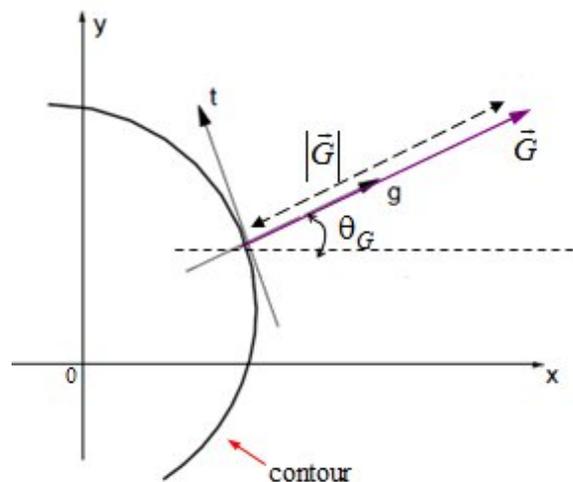
$$\arg(\vec{G}) = \arctan\left(\frac{I_y}{I_x}\right) \quad (2.21)$$

Afin de simplifier le temps de calcul, l'expression (2.20) est souvent remplacée en pratique par un calcul simplifié justifié mathématiquement par l'usage d'une norme différente telle que la norme  $L^1$  :

$$|\vec{G}| = |I_x| + |I_y| \quad (2.22)$$

ou la norme  $L^\infty$  :

$$|\vec{G}| = \max(|I_x|, |I_y|) \quad (2.23)$$

FIGURE 2.9 – Repère local du gradient  $(g, t)$ .

Soit le repère local au gradient défini par  $(g, t)$  où  $\vec{g}$  et  $\vec{t}$  sont respectivement la normale et la tangente à la surface de l'image  $I(x, y)$ , voir figure 2.9.

Le module du vecteur gradient représente la pente de la surface image au point considéré. Donc une valeur locale du module permet alors de retrouver la variation du niveau de gris autour de ce point. Cependant, la direction du vecteur gradient donne la direction de cette pente dans le sens croissant.

Si un contour est défini comme le lieu des maximums du gradient dans la direction du vecteur unitaire  $\vec{g} = \frac{\vec{G}}{|\vec{G}|}$ , alors il suffit de vérifier la condition suivante :

$$\frac{\partial I}{\partial g} = 0 \quad (2.24)$$

Puisque la dérivée directionnelle dans la direction du vecteur  $\vec{g}$  peut être exprimée par le produit scalaire suivant :

$$\frac{\partial I}{\partial g} = \vec{g} \cdot \vec{G} \quad (2.25)$$

alors la dérivée n'est maximale que lorsque  $\vec{G}$  et  $\vec{g}$  sont colinéaires. Donc lorsque le vecteur gradient est perpendiculaire au contour alors ce vecteur est bien dans la direction de plus forte pente de la surface image et par conséquent une forte variation locale du niveau de gris est détectée.

En se plaçant dans les axes locaux à la surface  $I(x, y)$ , nous pouvons également exprimer :

$$\begin{cases} g = x \cos(\theta_G) + y \sin(\theta_G), \\ t = -x \sin(\theta_G) + y \cos(\theta_G) \end{cases} \quad (2.26)$$

où  $\theta_G = \arg(\vec{G})$  donné par (2.21).

Suite aux calculs des dérivées partielles premières de (2.26), le système suivant est obtenu :

$$\begin{cases} I_g = I_x \cos(\theta_G) + I_y \sin(\theta_G), \\ I_t = I_x \sin(\theta_G) - I_y \cos(\theta_G) \end{cases} \quad (2.27)$$

Avec  $\cos(\theta_G) = \frac{I_x}{|\vec{G}|}$  et  $\sin(\theta_G) = \frac{I_y}{|\vec{G}|}$ . En remplaçant  $\cos(\theta_G)$  et  $\sin(\theta_G)$  par leurs expressions, (2.27) devient alors :

$$\begin{cases} I_g = |\vec{G}|, \\ I_t = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

En utilisant la dérivée partielle première, nous vérifions que le contour est alors défini par le lieu des maxima de la norme du gradient dans la direction du gradient, remarque déjà notée auparavant.

En dérivant à nouveau l'équation (2.27) pour l'obtention des dérivées secondes partielles relatives aux équations du système (2.26) :

$$\begin{cases} I_{gg} = I_{xx}\cos^2(\theta_G) + 2I_{xy}\cos(\theta_G)\sin(\theta_G) + I_{yy}\sin^2(\theta_G), \\ I_{tt} = I_{xx}\sin^2(\theta_G) - 2I_{xy}\cos(\theta_G)\sin(\theta_G) + I_{yy}\cos^2(\theta_G) \end{cases} \quad (2.29)$$

avec  $I_{gg} = \frac{\partial^2 I}{\partial^2 G}$ ,  $I_{tt} = \frac{\partial^2 I}{\partial^2 t}$ ,  $I_{xx} = \frac{\partial^2 I}{\partial^2 x}$ ,  $I_{yy} = \frac{\partial^2 I}{\partial^2 y}$  et  $I_{xy} = \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}$ .

Comme cela est indiqué précédemment, l'utilisation de la dérivée seconde permet de faire correspondre les contours au passage par zéro de cette dérivée, ce qui revient à écrire l'équation ci-dessous :

$$I_{gg} = 0 \quad (2.30)$$

Donc en remplaçant les termes  $\cos^2(\theta_G)$  et  $\sin^2(\theta_G)$  par leurs expressions, l'équation du contour devient :

$$I_{xx}I_x^2 + 2I_{xy}I_xI_y + I_{yy}I_y^2 = 0 \quad (2.31)$$

Contrairement au gradient, la dérivée seconde n'est pas une grandeur vectorielle, sa manipulation est donc lourde. De plus, pour extraire le contour il faut calculer cinq dérivées partielles (voir 2.31). Pour simplifier alors le calcul, il est souvent fait appel à une grandeur scalaire telle que le laplacien. Invariant par rotation, le laplacien est donné par la somme des dérivées partielles secondes :

$$\Delta I = I_{xx} + I_{yy} \quad (2.32)$$

Dans le repère local  $(g, t)$ , en faisant la somme des deux composantes cette égalité suivante est obtenue :  $I_{gg} + I_{tt} = I_{xx}(\cos^2(\theta_G) + \sin^2(\theta_G)) + I_{yy}(\cos^2(\theta_G) + \sin^2(\theta_G))$ . A partir de cette dernière, il est facile de déduire que le laplacien peut alors être donné par :  $\Delta I = I_{gg} + I_{tt}$ . La composante  $I_{tt}$  représente la dérivée seconde calculée dans la direction orthogonale au gradient qui correspond à la courbure du contour au niveau du point considéré. Donc si cette courbure est faible alors la composante  $I_{tt}$  peut être négligée, ce qui permet d'obtenir  $\Delta I = I_{gg}$ . En utilisant cette hypothèse, le lieu des maxima du gradient dans la direction du gradient peut être assimilé par le lieu des passages par zéro du laplacien  $\Delta I = I_{gg} = 0$ . Cette propriété est utilisée dans les approches de détection de contours dites par passage de zéro du laplacien.

Nous présentons dans les sous-parties qui suivent un certain nombre de techniques utilisées pour la détection de contour afin de parvenir à effectuer une étude comparative entre ces algorithmes classiques et celui défini par les modes glissants adaptatifs d'ordre supérieur. Nous pouvons classer ces techniques en trois catégories : approche différentielle, approche analytique, approche via les modes glissants adaptatifs. Pour la dernière approche, une simple extension des résultats du chapitre 1, pour un signal bidimensionnel sera expliquée.

### 2.3.2 Approche différentielle

Un très grand nombre d'opérateurs de détection de contours est disponible dans la littérature, chacun étant conçu pour être sensible à certains types de contours. Nous décrivons dans cette

approche uniquement les techniques locales différentielles où l'estimation des dérivées partielles du premier et du deuxième ordre sera considérée. En fait, ces méthodes se fondent sur l'estimation du gradient et du laplacien en chaque point de l'image. Or l'image étant par nature discrète, il est alors nécessaire d'utiliser des approximations discrètes de ces opérateurs différentiels. Selon l'approximation à effectuer, un masque de petite dimension sera alors défini, avec lequel l'image considérée sera convoluée. Dans le cas de la dérivée première, nous nous limitons uniquement à la description du masque de gradient et celui de Prewitt.

Pour chaque opérateur deux masques sont définis de façon à pouvoir estimer le gradient de l'image dans les deux directions orthogonales.

Dans le domaine discret, nous pouvons approximer les dérivées partielles premières de l'image en chaque point par la façon la plus simple :

$$\begin{aligned} I_x(i, j) &\approx I(i + 1, j) - I(i, j) = (I * G_x)(x, y), \\ I_y(i, j) &\approx I(i, j) - I(i, j - 1) = (I * G_y)(x, y), \end{aligned} \quad (2.33)$$

où  $*$  représente le symbole de convolution. Cette approximation revient à convoluer l'image par deux masques  $G_x$  et  $G_y$  qui représentent respectivement une estimation du gradient suivant l'axe horizontal et vertical et qui sont définis par :

$$G_x = [-1 \ 1], \quad G_y = [1 \ -1]^T \quad (2.34)$$

Cette approximation de base définit deux masques à deux éléments. Elle est connue sous le nom de masque de gradient. De fait, il s'agit d'un filtre passe-haut permettant d'estimer la dérivée par tout simplement une différence finie discrète, ce qui rend ce type d'opérateur très sensible au bruit.

Pour s'affranchir du bruit, d'autres opérateurs existent comme l'opérateur de Prewitt. Pour ce dernier, le calcul du gradient est mené par l'intermédiaire d'une paire de masques de convolution ( $3 \times 3$ ) (voir figure 2.10), le premier estimant un gradient vertical et le second un gradient horizontal. Comme le premier opérateur, le deuxième masque se déduit du premier par une rotation de  $-\frac{\pi}{2}$ .

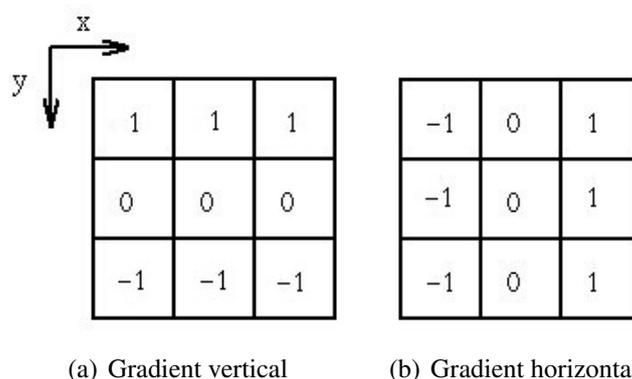


FIGURE 2.10 – Masque de Prewitt.

Par rapport au précédent, ce masque a l'avantage de produire deux effets. Outre le calcul du gradient dans une direction, cet opérateur effectue un lissage dans la direction orthogonale. Ce lissage rend ce masque un peu moins sensible au bruit que celui du gradient. Donc convoluer une image avec l'un des masques de Prewitt (par exemple par celui donné par la figure 2.10(b)) équivaut à la succession de deux filtres : un filtre intégrateur de masque  $[1 \ 1 \ 1]^T$  dans une direction et un filtre dérivateur de masque  $[-1 \ 0 \ 1]$  dans l'autre direction. En effet, l'action de

filtrage est opérée en moyennant selon une direction sur trois pixels sur les lignes au dessus et au dessous du pixel central tandis que l'action de dérivation s'effectue par un calcul du gradient entre les deux lignes.

Mise à part les opérateurs locaux déjà cités, il existe aussi des méthodes globales de détection de contour qui consistent en l'utilisation de masque ayant un noyau de plus grande taille. Ces opérateurs globaux ont pour intérêt de réduire le bruit mais en contre partie diminue la précision, [83].

Une fois l'approximation locale du gradient de l'image effectuée via les opérateurs décrits précédemment, la norme du gradient est alors calculée pour chaque pixel. La détermination des extréma locaux du module fournit alors l'ensemble des points contour de l'image.

Comme nous avons signalé auparavant, la discontinuité en luminance qui marque la présence d'un contour peut être détectée en effectuant des mesures des dérivées partielles de second ordre de la fonction  $I$ . A la base de ces mesures, les détecteurs de passage par zéro du laplacien ont été proposés en 1976, [102]. Ce type de méthode utilise le fait que le passage par zéro du laplacien permet facilement de mettre en évidence les extrémums de la dérivée. En effet, comme nous l'avons déjà indiqué en l'absence de forte courbure, le passage par zéro du laplacien correspond au maximum du module du gradient dans la direction du gradient.

Différentes approximations discrètes du laplacien par différences finies peuvent être utilisées. Nous pouvons approximer le laplacien par une différence finie centrée associée au 2D :

$$\Delta I \approx I(i+1, j) + I(i-1, j) + I(i, j+1) + I(i, j-1) - 4I(i, j) \quad (2.35)$$

A partir de l'équation précédente, un noyau de convolution peut être donné alors par la figure 2.11.

0	-1	0	0	1	0
-1	4	-1	1	-4	1
0	-1	0	0	1	0

(a) Pour la direction horizontale (b) Pour la direction verticale

FIGURE 2.11 – Masque du laplacien.

L'inconvénient majeur dans l'estimation de la dérivée seconde est qu'elle est très sensible aux bruits, en pratique il convient de filtrer très fortement l'image avant d'en calculer le laplacien. Dans ce cas, l'image de contours  $I_C$  sera donnée par l'expression ci-dessous :

$$\begin{aligned} I_C &= \text{passage par zéro} [\Psi * (I_{xx} + I_{yy})] \\ &= \text{passage par zéro} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [\Psi * I] \right] \\ &= \text{passage par zéro} \left[ I * \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

où  $\Psi$  est un filtre passe-bas.

A partir de (2.36), l'image contours est le résultat d'un filtrage de l'image par la dérivée seconde d'un filtre passe-bas suivi ensuite par une détection du passage par zéro de la fonction obtenue. Dans la plupart des cas, les filtres passe-bas utilisés sont des filtres gaussiens, [102]. Le filtre obtenu par convolution avec le laplacien est connu sous le nom de LOG. Pour ce type de filtre, un paramètre de réglage existe et représente la variance de la gaussienne avec lequel le degré de lissage est alors ajusté.

Le calcul des dérivées pour ces méthodes différentielles est déterminé par une simple convolution de l'image par des masques de petite taille. Ceci rend ces approches très dépendantes de la taille des images à traiter. Malgré la simplicité de ces méthodes, les opérateurs utilisés restent très sensibles au bruit. En revanche, ces méthodes donnent des résultats satisfaisants dans le cas d'images faiblement bruitées ou non bruitées, ce qui explique leurs utilisations jusqu'au nos jours pour certains types d'images.

Nous avons présenté dans ce qui précède les masques les plus connus pour les approches différentielles à caractère local. Cependant, comme nous l'avons déjà souligné, il existe d'autres masques citons par exemple le masque de Sobel et de Kirsch, voir [31]. Evidemment, la taille du noyau à choisir pour les méthodes de masque présente une grande importance. En effet, plus la taille du masque est grande, moins le gradient est sensible au bruit mais plus le temps de calcul est élevé et moins bonne est la localisation des contours (contour épais). En conséquence, toutes ces indications sont contradictoires et incite à effectuer des compromis. Ce problème a conduit alors les chercheurs à développer différents opérateurs optimaux en associant un filtrage passe-bas au détecteur de contours afin d'éliminer les effets du bruit.

Nous rappelons brièvement dans le paragraphe suivant, les principales étapes de ces recherches tout en focalisant sur une de ces méthodes qui sera utilisée dans l'étude comparative entre différents détecteurs de contour.

### 2.3.3 Approche analytique

Les détecteurs par approche analytique ont émergé dans les années 85 à partir des travaux de [140], [125], [23]. L'approche analytique repose sur la recherche des détecteurs de contours adaptés et paramétrés, ce qui implique la connaissance de la forme du contour avant sa détection. Donc les différents détecteurs optimaux sont développés pour un certain modèle de contour.

Le premier filtre optimal a été proposé par Modestino et Fries [109] où le contour à détecter est supposé connu à priori et est représenté par un modèle stochastique. A la base d'une connaissance de certaines données probabilistes et en minimisant l'erreur quadratique moyenne du filtre, un filtre de type Wiener est alors obtenu. En pratique l'implémentation récursive de ce filtre fourni de bons résultats. En contre partie, le temps de calcul est assez élevé comparé aux autres méthodes.

Dans [124], les auteurs proposent un filtre qui maximise l'énergie du signal au voisinage des contours. Cette optimisation est effectuée en fixant un intervalle de résolution et en choisissant la bande passante du filtre nécessaire pour limiter le bruit.

Pour déterminer les caractéristiques d'un détecteur, trois propriétés fondamentales peuvent être définies [24], [23] dont la première est la bonne détection des points contours. Autrement dit, le filtre doit assurer une faible probabilité de marquer les faux points contour et il doit donner alors une réponse au voisinage d'un contour. Or ce voisinage doit être le plus faible possible. Par conséquent, la deuxième propriété à définir pour un détecteur est d'avoir une bonne localisation du contour. Les points contours doivent ainsi être le plus proche possible du centre du

vrai contour. Finalement, le détecteur doit permettre l'obtention d'une seule réponse afin d'éviter les effets de rebond.

En 1986, Canny [23] est le premier à exprimer analytiquement ces trois critères. En effet, une bonne détection se traduit en premier par une maximisation du rapport signal sur bruit du filtre. Pour localiser les points contour avec précision, il faut ensuite minimiser la distance entre les points détectés et le vrai contour. Canny formalise ceci mathématiquement par une maximisation de l'inverse de l'écart-type de cette distance. Ce dernier est représenté par une variable aléatoire où la réponse du filtre doit être maximale. Pour satisfaire la condition d'unicité de la réponse, il faut alors limiter le nombre de maxima de la réponse au bruit du filtre en considérant la distance moyenne entre deux maxima de la sortie.

Pour le cas d'images non texturés, le modèle de bruit usuel correspond au bruit blanc additif, gaussien et centré. La plupart des méthodes optimales prennent en compte ce type de modèle en imposant de plus l'hypothèse que le bruit est indépendant du signal utile.

L'application des trois critères présentés à un contour idéal (contour de type échelon) bruité a permis à Canny le développement d'un filtre optimal à réponse impulsionnelle finie. Ceci est effectué par optimisation du produit des deux premiers critères sous la contrainte du critère d'unicité de la réponse en prenant en compte une distance minimale entre les pics de la réponse.

En optimisant ces critères dans le contexte du modèle considéré et en introduisant des conditions aux limites au niveau d'un intervalle donné, la solution optimale de l'équation différentielle obtenue débouche sur une équation formée de quatre termes incluant des fonctions exponentielles et trigonométriques. Cette dernière équation dépend de trois paramètres de réglage. Etant donnée la complexité de la mise en oeuvre de ce filtre, Canny montre que le filtre de lissage  $f_{Lc}$  proposé peut être approximé par une gaussienne :

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \approx f_{Lc}(x, y) \quad (2.37)$$

En outre, le filtre différentiel est approximé par la dérivée première d'une gaussienne. L'algorithme proposé en pratique par Canny consiste en réalité à dériver la convolution d'une image par la gaussienne, (2.37).

Soient  $Grad_x$  et  $Grad_y$  respectivement les composantes horizontale et verticale du gradient de l'image  $I(x, y)$ . Nous pouvons alors écrire les expressions de ces composantes comme suit :

$$\begin{cases} Grad_x = \frac{\partial}{\partial x} [G(x, y) \otimes I(x, y)] \\ Grad_y = \frac{\partial}{\partial y} [G(x, y) \otimes I(x, y)] \end{cases} \quad (2.38)$$

où  $\otimes$  symbole désignant la convolution bidimensionnelle.

En pratique une convolution 2D est coûteuse en terme de calcul. En effet, en prenant en compte un filtre dont le noyau est de taille  $(N \times M)$ , il faut alors effectuer  $N \times M$  multiplications pour chaque pixel. Pour réduire le temps calcul, la convolution 2D peut alors être remplacée par deux convolutions 1D, car avec une convolution 1D et pour une même taille de noyau, le nombre de multiplication se réduit alors à  $N + M$  pour chaque pixel. Il est évident que ceci est réalisable que si le noyau est séparable, c'est à dire qu'il peut être décomposé en deux matrices de tailles  $(N \times 1)$  et  $(1 \times M)$ .

Etant donné que le filtre gaussien est séparable  $G(x, y) = G(x).G(y)$ , il est possible alors de réaliser séparément les convolutions suivant les directions verticale et horizontale. Par consé-

quent, l'équation (2.38) devient :

$$\begin{cases} Grad_x = \frac{\partial}{\partial x} [(G(x).G(y)) \otimes I(x, y)] \\ Grad_y = \frac{\partial}{\partial y} [(G(x).G(y)) \otimes I(x, y)] \end{cases} \quad (2.39)$$

Ce qui revient alors à :

$$\begin{cases} Grad_x = \frac{\partial}{\partial x} [G(x) * (G(y) * I(x, y))] \\ Grad_y = \frac{\partial}{\partial y} [G(y) * (G(x) * I(x, y))] \end{cases} \quad (2.40)$$

Suite aux règles de dérivation de l'opération de convolution, les gradients sont exprimés alors par :

$$\begin{cases} Grad_x = G_x(x) * (G(y) * I(x, y)), \\ Grad_y = G_y(y) * (G(x) * I(x, y)) \end{cases} \quad (2.41)$$

avec  $G_x(x)$  et  $G_y(y)$  sont les dérivées premières monodimensionnelle de la gaussienne respectivement par rapport à  $x$  et  $y$ .

Donc ce détecteur de contour revient à filtrer l'image par un filtre passe bas de type gaussien  $G$  avant d'en calculer le gradient. En outre, ce filtre dépend d'un seul paramètre de réglage  $\sigma$ . Pour une valeur importante de celle-ci, le bruit sera fortement diminué. Ceci permet alors d'améliorer le critère de détection mais en contre partie le critère de localisation sera détérioré et inversement pour une valeur faible de  $\sigma$ . Donc le choix de cette valeur dépend fortement de l'image à traiter.

Le filtre proposé par Canny est un filtre populaire largement utilisé que ce soit pour des filtrages 1D ou 2D. Mais, en pratique l'implantation de ce filtre est non récursive ce qui entraîne un temps de calcul coûteux car le nombre d'opérations à effectuer croît avec la taille de l'image à traiter.

S'appuyant sur la même méthode que Canny, Deriche [47] a proposé une extension de l'opérateur sous la forme d'un filtre à réponse impulsionnelle infinie. En effet, le filtre de Deriche répond aux mêmes critères que Canny et par conséquent il se traduit mathématiquement par la même équation différentielle, seules les conditions aux limites changent.

L'avantage relatif au filtre de Deriche est que sa réalisation peut être effectuée sous forme récursive. En effet, Deriche utilise une implantation récursive d'ordre 2. Simple à mettre en oeuvre, l'implantation de ce filtre permet de diminuer le temps de calcul. Dans ce cas, le nombre d'opérations à effectuer est indépendant de la taille du filtre, contrairement au filtre de Canny.

L'expression du filtre optimal de dérivation de Deriche  $f_{dD}$  dans le cas monodimensionnel est donnée par :

$$f_{dD}(x) = -C_1 x e^{-\alpha|x|} \quad (2.42)$$

avec  $C_1 = \frac{(1-e^{-\alpha})^2}{e^{-\alpha}}$ . Cette constante est choisie afin de normaliser la réponse du filtre c'est à dire que la réponse de celui-ci à une constante est nulle.

Toujours dans le cas monodimensionnel, le filtre de lissage de Deriche  $f_{LD}$  s'obtient par intégration du filtre de dérivation, décrit par :

$$f_{LD}(x) = -C_2 (\alpha|x| + 1) e^{-\alpha|x|} \quad (2.43)$$

où  $C_2 = \frac{(1-e^{-\alpha})^2}{(1+2\alpha e^{-\alpha}-e^{-2\alpha})}$ .

Ainsi, les filtres de Deriche dépendent de  $C_1$  et  $C_2$  qui sont des constantes de normalisation et d'un paramètre  $\alpha$  qui représente le paramètre de forme et aussi de lissage.

A partir de (2.42), nous pouvons remarquer que le paramètre  $\alpha$  influe sur la sortie du filtre d'une façon inverse que l'écart-type de la Gaussienne du filtre de Canny. En conséquence, une grande valeur de  $\alpha$  amène alors à une amélioration du critère de localisation et en contre partie une détérioration du critère de détection. Une valeur faible provoquera l'effet inverse.

En ne retenant que les deux critères détection et localisation, Shen et Castan [34], [110] ont proposé un filtre à réponse impulsionnelle infinie appartenant à la famille des filtres exponentiels afin de détecter les contours en forme échelon unité. Les critères de détection et de localisation proposés correspondent aux critères de Canny.

Ainsi, le filtre différentiel  $f_{dSC}$  monodimensionnel trouvé est donné par :

$$f_{dSC}(x) = \begin{cases} d_1 e^{-\alpha|x|} & \text{si } x \geq 0 \\ -d_1 e^{-\alpha|x|} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.44)$$

avec  $d_1 = 1 - e^{-\alpha}$ . Nous remarquons que le filtre obtenu n'est pas dérivable en zéro vu la présence d'une discontinuité en ce point.

Le filtre de lissage de Shen-Castan est donné par :

$$f_{LSC}(x) = d_2 e^{-\alpha|x|} \quad (2.45)$$

où  $d_2 = \frac{1-e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}}$ .

Les deux paramètres  $d_1$  et  $d_2$  sont obtenus par normalisation des filtres. Ici le paramètre  $\alpha$  joue le même rôle que celui donné par le filtre de Deriche. Comme ce dernier, le filtre de Shen et Castan peut être implémenté sous forme récursive, les auteurs proposent une réalisation d'ordre un.

Pour résumer, la plupart des détecteurs analytiques se basent sur l'utilisation d'un filtre passe-bas symétrique afin d'éliminer les pixels isolés qui pourraient induire de fortes réponses en sortie et d'un filtre passe-haut antisymétrique pour la dérivation.

A la fin des années 80, une approche différente des méthodes exposées ci-dessus a été proposée dans [76] et nommée contours actifs ("snakes"). Il s'agit de choisir un contour initial proche du contour à détecter puis de le déformer en minimisant un critère quadratique. Donc le contour actif va évoluer afin de rechercher la position qui correspond au minimum du critère et donc amener le contour actif le plus proche possible du vrai contour.

Dans le sous-paragraphe suivant, nous décrivons la manière dont on peut utiliser l'algorithme modes glissants adaptatifs comme étant un détecteur de contour.

### 2.3.4 Approche via les modes glissants adaptatifs

Toute la théorie relative aux différentiateurs adaptatifs a été développée et détaillée dans le chapitre précédent. Nous avons aussi présenté des résultats de simulation qui se limitent uniquement aux signaux 1D. Dans ce paragraphe, nous utilisons ces algorithmes STA et DAO2 pour des signaux 2D à des fins de détection de contours [Sidhom11].

Rappelons que seules les images en niveaux de gris (monochromes) sont prises en compte. Comme nous l'avons indiqué au 2.3.2, les approches différentielles classiques comme le masque de Prewitt, consistent à convoluer l'image par des fenêtres de petites dimensions. Donc le gradient d'un pixel dans une direction est calculé en utilisant une matrice d'intensité lumineuse.

Contrairement à ces méthodes, avec l'algorithme que nous proposons, le calcul du gradient et/ou du laplacien se fait pixel par pixel. Les algorithmes utilisés (STA ou DAO2) sont implémentés de la même façon. En effet, ce différentiateur adaptatif est initialisé par la valeur de l'intensité lumineuse du premier pixel de la matrice  $I$ . Ainsi, l'algorithme commence par une erreur d'estimation nulle. Par la suite, une prédiction de l'intensité lumineuse du pixel suivant est effectuée en appliquant l'algorithme proposé afin d'approximer le gradient et/ou le laplacien de la fonction d'entrée  $I$ . Ensuite, la nouvelle valeur de l'erreur à considérer est déterminée par la différence entre la valeur prédite et la valeur réelle récupérée par la matrice d'entrée. Ces étapes sont répétées pour chaque ligne et chaque colonne de la matrice. Donc l'algorithme discret peut être décrit par deux boucles "Pour" où l'intensité lumineuse du pixel suivant est toujours prédite. Le calcul du gradient et du laplacien se fait simultanément au niveau d'une même boucle.

Pour mieux expliquer le fonctionnement de l'algorithme, nous nous limitons à présenter le principe du différentiateur STA en considérant uniquement l'estimation du gradient selon l'axe des  $x$  (selon les lignes) :

$$j = 1$$

1/ Initialisation de l'algorithme :

- Initialisation des valeurs des gains adaptatifs  $\lambda_1(1, 1)$  et  $\lambda_2(1, 1)$ ,
- Initialisation de l'algorithme par la valeur d'intensité du premier pixel :  $X_1(1, 1) = I(1, 1)$ ,
- Initialisation de l'erreur d'estimation par une valeur nulle :  $e(1, 1) = X_1(1, 1) - I(1, 1) = 0$ ,

Pour  $i = 2$  : *nombre de ligne faire*

2/ Prédiction de l'intensité lumineuse du pixel suivant  $X_1(1 + i, 1)$  en utilisant l'algorithme

3/ Calcul de la valeur du gradient du pixel concerné :

$$G_{pixel} = (X_1(1 + i, 1) - X_1(i, 1))/T_e$$

où  $T_e$  est la période d'échantillonnage.

4/ Mettre à jour la nouvelle valeur d'erreur d'estimation

5/ Revenir à l'étape 2 ( $i=i+1$ )

6/ Fin boucle sur  $i$ .

Il est vrai que dans le cas d'une image, la prédiction semble inutile car toutes les informations peuvent être récupérées directement à partir de la matrice d'entrée. Cependant, l'intérêt de cette application est d'avoir une idée sur l'efficacité de ce type d'algorithme pour une image avec l'objectif d'étendre ces travaux pour une séquence d'images. En effet, l'algorithme proposé est beaucoup plus intéressant pour prédire le mouvement de chaque pixel tout au long de cette séquence et donc d'envisager de la compression de séquence d'images par exemple.

### 2.3.5 Etude comparative

Afin d'étudier les performances de l'algorithme proposé, nous allons tester son efficacité en le comparant avec quelques détecteurs de contour décrits précédemment. A cet fin, quatre détecteurs ont été sélectionnés pour la comparaison : masque du gradient, masque de Prewitt, filtre de Canny et le masque du laplacien. Pour ce dernier, la comparaison sera effectuée avec la deuxième sortie de l'algorithme DAO2 et nous nous limitons dans cette étude à comparer l'unique sortie du STA avec les autres détecteurs.

### 2.3.5.1 Procédure de comparaison

La procédure de comparaison est divisée en deux étapes. La première étape consiste à comparer chacun des traitements en utilisant une image sans aucun ajout de bruit. Ce type d'essai permet d'avoir une idée subjective sur les différents résultats obtenus. Dans cette étape le critère de comparaison utilisé est à caractère visuel. Ce caractère permet de vérifier les propriétés précises de l'algorithme telles que la détectabilité, préservation des contours et des détails...

Il est évident que l'élaboration de critères de performance pour évaluer l'efficacité de chacun des détecteurs est une tâche très difficile. En effet, le détecteur proposé est un algorithme non linéaire régit par des équations différentielles discontinues, ce qui interdit l'utilisation des critères classiques employés en imagerie, ceux-ci intégrant généralement les réponses impulsionnelles des filtres. C'est pour cette raison que la deuxième étape utilise une image de synthèse dont le contour est exactement connu. Ce contour pourra alors nous servir de référence lors de l'étude comparative. En opérant ainsi des critères mathématiques définis par la suite pourront être utilisés pour toutes les méthodes.

Comme nous l'avons déjà indiqué, le bruit constitue un vrai problème en imagerie et en particulier pour la détection des contours. Afin d'examiner la robustesse des détecteurs en présence du bruit, l'image de synthèse utilisée sera alors corrompue par différents types de bruit. En prenant en compte ces résultats, des recommandations d'utilisation d'algorithmes selon le type de bruit à traiter peuvent être proposées.

Finalement, des tableaux comparatifs donneront les valeurs quantitatives des critères élaborés. Nous prenons aussi en considération des critères qualitatifs tels que la complexité de mise en oeuvre, le nombre de paramètres à régler, le temps de calcul est à la fois donné comme critère quantitatif et qualitatif.

Les méthodes décrites auparavant permettent la détermination du gradient, plus précisément le module du gradient afin de mettre en évidence les contours. Donc pour tous les détecteurs s'appuyant sur la dérivée première bidimensionnelle, une première étape consiste à calculer des dérivées partielles dans les deux directions de l'image. Ensuite, pour chaque pixel de l'image, le module et l'orientation du gradient sont respectivement déterminés par les équations (2.20) et (2.21). Donc une forte valeur du module du gradient indique la présence du contour. Bien évidemment, pour le laplacien, il s'agit de calculer les dérivées partielles secondes dans chacune des directions afin de sommer ces deux valeurs, l'idée étant de détecter un passage par zéro du laplacien. En pratique, il est difficile de détecter un passage par zéro surtout en présence de bruit donc la détection d'un contour revient à vérifier la présence d'un changement de signe de la norme du gradient. Selon la méthode choisie, le calcul de ces dérivées partielles se fait soit par convolution du masque approprié avec l'image, soit pixel par pixel en employant l'algorithme que nous proposons. Parmi les méthodes utilisées, il y a celles qui réalisent un lissage Gaussien comme le filtre de Canny ou un filtre de type moyenneur comme pour le masque de Prewitt. Notons que pour l'algorithme par modes glissants adaptatifs, le lissage et la dérivation ne sont pas séparables. Ces deux actions sont effectuées au même temps.

A la fin de cette première étape, l'image obtenue s'exprime en niveaux de gris indiquant alors l'importance de la variation d'intensité. Toutefois, l'image résultante ne représente pas le contour. Par conséquent, une deuxième étape est nécessaire afin de décider si un pixel donné représente bien un point de contour. Avant d'aboutir à l'information recherchée, une normalisation puis un seuillage de l'image résultante sont effectués.

### 2.3.5.2 Seuillage

Dans la littérature, différentes méthodes globales ou locales de seuillages existent. La méthode la plus efficace consiste en un seuillage local par extraction des maxima du gradient dans la direction du gradient. Donc avant d'effectuer cette phase de seuillage, une étape de suppression des valeurs non-maximum du gradient est réalisée. Dans ce cas, seuls les maxima locaux les plus significatifs, sélectionnés par seuillage, conduisent aux contours. Cette phase intermédiaire permet de réduire les composantes hautes fréquences de l'image en éliminant certains contours. Le principe de cette étape est de comparer le module du gradient en tout point de l'image avec celui de ses deux voisins placés dans la direction du gradient à une distance unitaire de part et d'autre du point concerné. Pour résumer, la suppression des contours de gradient non-maximum élimine les pixels de contour présent dans la direction du gradient et qui ont un pixel voisin de plus grande intensité.

Toutefois, il est possible de passer directement à l'étape de seuillage sans passer par cette étape intermédiaire mais il en résulte généralement une légère perte de précision au niveau du contour. Les méthodes globales de seuillage peuvent être classées en deux catégories. La première consiste à fixer une valeur de seuil entre 0 et 1 d'une façon un peu arbitraire. Dans ce cas, si la valeur du module du gradient en un pixel dépasse le seuil fixé alors la valeur résultante du pixel est égale à 1. Dans le cas contraire, cette valeur sera fixée à 0. Cette méthode est simple à appliquer sauf qu'elle est très dépendante du choix du seuil.

Pour pallier ce problème, un seuillage global par histogramme peut alors être effectué. L'idée est de tracer tout d'abord l'histogramme du module de gradient. Cet histogramme consiste à représenter le nombre de pixel pour chaque intensité lumineuse relative à l'image gradient. Ensuite, une détermination de l'histogramme cumulé du module du gradient permet alors le choix d'un pourcentage de pixels. Ce pourcentage permet alors de choisir la valeur du seuil à utiliser. Même si cette méthode est une aide au choix du seuil, elle n'est pas forcément pertinente puisqu'elle impose une seule valeur de seuil à appliquer à toute l'image.

Il existe une autre méthode de seuillage appelée seuillage par hystérésis. Contrairement aux autres méthodes, celle-ci consiste à imposer deux seuils ce qui permet de différencier ce traitement pour chaque point de l'image. L'implantation de cette technique nécessite alors un seuil bas et un seuil haut. Ce dernier sert à sélectionner les contours les plus significatifs de l'image relative au module du gradient. En dessous du seuil bas il s'agit d'absence d'un contour. Entre les deux seuils, on ne conserve comme points du contour que ceux qui sont connexes à au moins un point de contour préalablement obtenu grâce au seuil haut. Ce type de seuillage consiste alors à conserver les contours les plus forts tout en assurant leurs continuités. Ceci permet alors d'éviter la présence de contours non fermés. Cependant, la difficulté de cette méthode réside dans le choix des deux valeurs de seuils, même si dans la plupart des cas ces dernières sont déterminées à partir de l'histogramme cumulé de l'image de la norme du gradient.

Finalement, suite à l'étape de seuillage l'image contour est alors déduite. Dans certains cas, il existe d'autres post-traitements comme par exemple l'amincissement des contours mais nous n'allons pas détailler ce type de traitement puisque il ne sera pas utilisé dans l'étude comparative effectuée. Même si notre objectif final consiste à obtenir à la fin du traitement le contour d'une image, dans cette étude nous donnons plus d'importance à l'image du module du gradient puisqu'elle représente un résultat direct des différents algorithmes décrit précédemment. Ensuite, nous utiliserons un seuillage simple où la valeur du seuil est choisie par la méthode de l'histogramme cumulé. Il est nécessaire aussi de préciser qu'aucun pré-traitement de lissage ne sera effectué lors des essais.

### 2.3.5.3 Résultats de simulation

Toutes les simulations ont été réalisées à l'aide de la boîte à outils de traitement d'image de MATLAB "Toolbox Image Processing version 7.9". Dans un premier temps, l'image standard en niveaux de gris "Lena" de taille  $(256 * 256)$  (voir figure 2.12) est sélectionnée pour une première validation. Tout d'abord, l'image est traitée sans aucun ajout de bruit. En utilisant l'algorithme STA, les gradients vertical et horizontal de l'image d'entrée sont estimés (voir 2.13(a), 2.13(b)) en imposant un gain de convergence  $K_0 = 500$  et un pas d'échantillonnage égal à  $10^{-3}$  secondes.



FIGURE 2.12 – image initial : image 1.



(a)  $G_x$  de l'image 1

(b)  $G_y$  de l'image 1

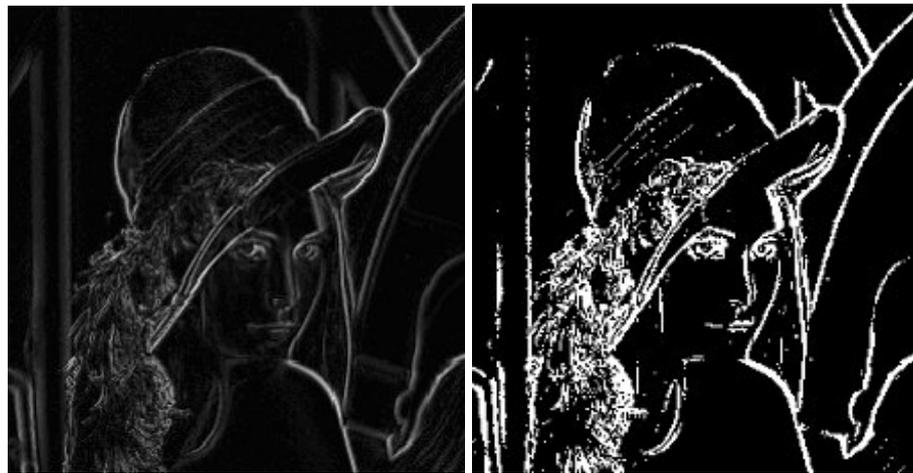
FIGURE 2.13 – Gradient horizontal  $G_x$  et vertical  $G_y$  de l'image 1 : avec l'algorithme STA.

La figure 2.14(a) présente l'image du gradient suite à la normalisation. Après seuillage de cette dernière, le contour est alors détecté, voir figure 2.14(b).

Par application des autres méthodes, les différents contours sont donnés dans les figures 2.15, 2.16. Les résultats fournis par les différents détecteurs semblent quasiment identiques et il est difficile de comparer les contours détectés juste par observation.

Pour l'estimation du laplacien, nous avons utilisé la deuxième sortie de l'algorithme DAO2. Les résultats obtenus sont affichés dans la figure 2.17.

Il nous semble inutile de mettre le résultat fourni par le masque du laplacien étant donné qu'il présente relativement la même image que celle donnée par le STA.



(a) Module normalisé de l'image 1

(b) Contour de l'image 1

FIGURE 2.14 – Détecteur de contour avec l'algorithme STA.



(a) Opérateur gradient

(b) Masque Prewitt

FIGURE 2.15 – Détection du contour via les opérateurs gradient, Prewitt.



FIGURE 2.16 – Détection du contour via le filtre de Canny.

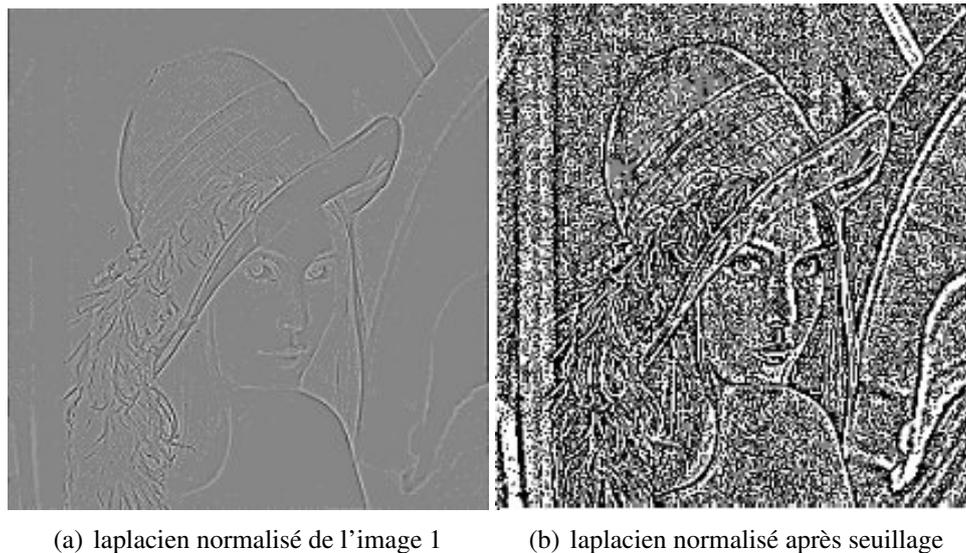


FIGURE 2.17 – Estimation du laplacien : avec DAO2.

Pour pouvoir proposer une analyse plus pertinente des résultats obtenus, nous utilisons alors l'image de synthèse donnée par la figure 2.18(a).

Dans ce deuxième essai, nous générons trois types de bruit différents à l'aide de l'environnement MATLAB afin de les appliquer successivement sur l'image considérée.

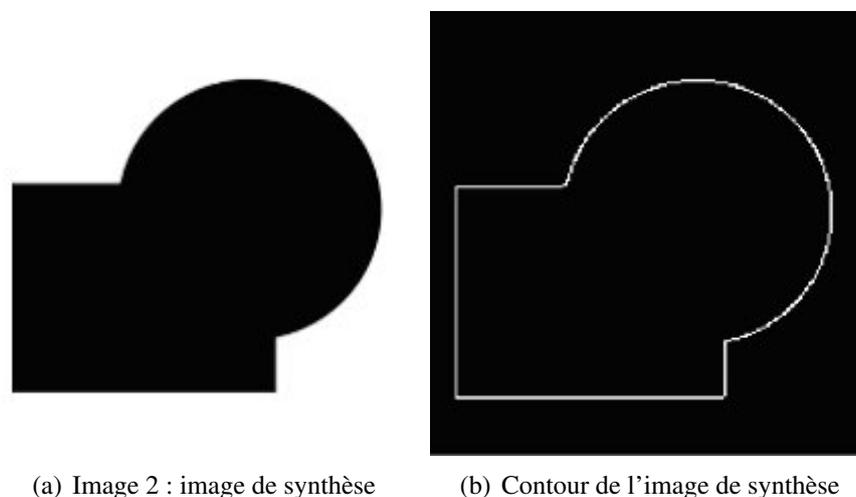


FIGURE 2.18 – Image de synthèse

Selon le type de bruit, il est possible de décrire ce dernier par un modèle additif, où l'image enregistrée,  $I_b(i, j)$  est la somme de la vraie image contenant l'information utile  $I(m, n)$  et le bruit  $b(m, n)$  :

$$I_b(i, j) = I(i, j) + b(i, j).$$

Les trois types de bruit ont été pris en compte dans cette étude sont les suivants :

- Un bruit gaussien qui est présent dans la plupart des images. Il est généralement admis que le bruit généré par les dispositifs d'acquisition se rapproche du bruit Gaussien. Ce dernier se manifeste par une valeur aléatoire positive ou négative qui s'ajoute à l'intensité lumineuse de chaque point de l'image. Dans nos essais, nous utilisons un bruit gaussien dont la moyenne est

nulle et d'écart-type  $\sigma_{bG}$ .

- Le bruit "Poivre et Sel" est une forme de bruit impulsif. Pour ce type de bruit, l'image est entachée d'une façon aléatoire. Ce bruit impulsif ne prend que deux valeurs qui sont égales ou proches des niveaux de gris minimum et maximum représentable de l'image. Donc chaque pixel, indépendamment l'un de l'autre, peut soit devenir très sombre ("poivre") pour une valeur négative de l'impulsion, soit devenir très clair ("sel") pour une valeur positive de celle-ci. Ce genre de bruit est caractérisé par une densité  $d_b$ .

- Le bruit "speckle" est un bruit multiplicatif qui s'ajoute à l'image initiale  $I$  en utilisant l'équation  $I_b(i, j) = I(i, j) + n_s \cdot I(i, j)$ , où  $n_s$  est un bruit réparti d'une manière uniforme, [59]. Pour les tests réalisés, nous avons considéré un bruit de type "speckle" de moyenne nulle et d'écart-type  $\sigma_{n_s}$ .

Plusieurs articles existent sur la comparaison des performances des détecteurs de contours, voir par exemple [3], [68], [74]. Pour évaluer la qualité des contours obtenus, deux types de critères ont été choisis : des critères qualitatifs et des critères quantitatifs.

Pour ces derniers, nous proposons trois indicateurs dont le premier représente l'Erreur Moyenne de la Norme (EMN) relative au gradient, le second l'Erreur Moyenne de Contour (EMC) et le troisième le temps de calcul. L'EMN indique la différence moyenne des pixels entre la norme du gradient supposée exacte donnée par l'image de synthèse et celle estimée par les algorithmes.

L'EMC représente l'erreur entre le contour connu de l'image de synthèse (voir 2.18(b)) et celui obtenu par le détecteur de contour considéré. Plus la valeur de ces deux critères est grande plus la différence entre l'image (respectivement le contour) de synthèse et l'image traitée (respectivement le vrai contour) est importante.

Suite aux essais en simulation et pour chaque type de bruit, les valeurs EMN et EMC sont résumées dans les tableaux 2.2, 2.3 et 2.4. Les résultats des différents détecteurs de contours sont donnés dans les figures 2.20, 2.22 et 2.24.

A partir de ces figures, nous observons que le détecteur STA présente des bons résultats avec les différents types de bruit utilisés. De plus, avec un bruit de type impulsif, l'algorithme proposé ne présente pas d'amplification de bruit dans l'image de sortie, ce qui n'est pas le cas pour les autres méthodes.

#### Résultats de simulation : bruit gaussien :

Tableau 2.2 – Tableau comparatif des erreurs : bruit gaussien.

Méthode	EMN	EMC
Masque de gradient	0.0579	0.0049
Masque de Prewitt	0.0709	0.0128
Filtre de Canny	0.0505	0.0038
STA( $K_0 = 450$ )	0.0574	0.0043

A partir du tableau 2.2, le filtre de Canny présente la plus faible valeur de EMN et de EMC, ce qui est normal étant donné que le filtre de Canny représente la solution optimale pour un tel

modèle de bruit, [23].

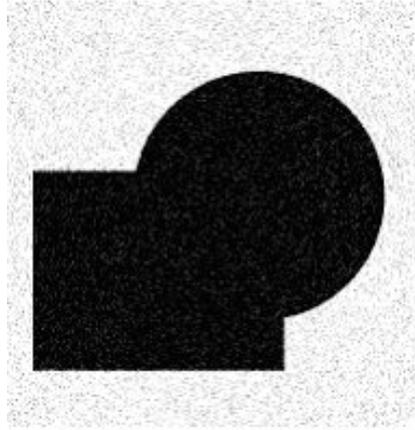


FIGURE 2.19 – Image de synthèse avec du bruit blanc gaussien ( $\sigma_{bG} = 0.01$ ).

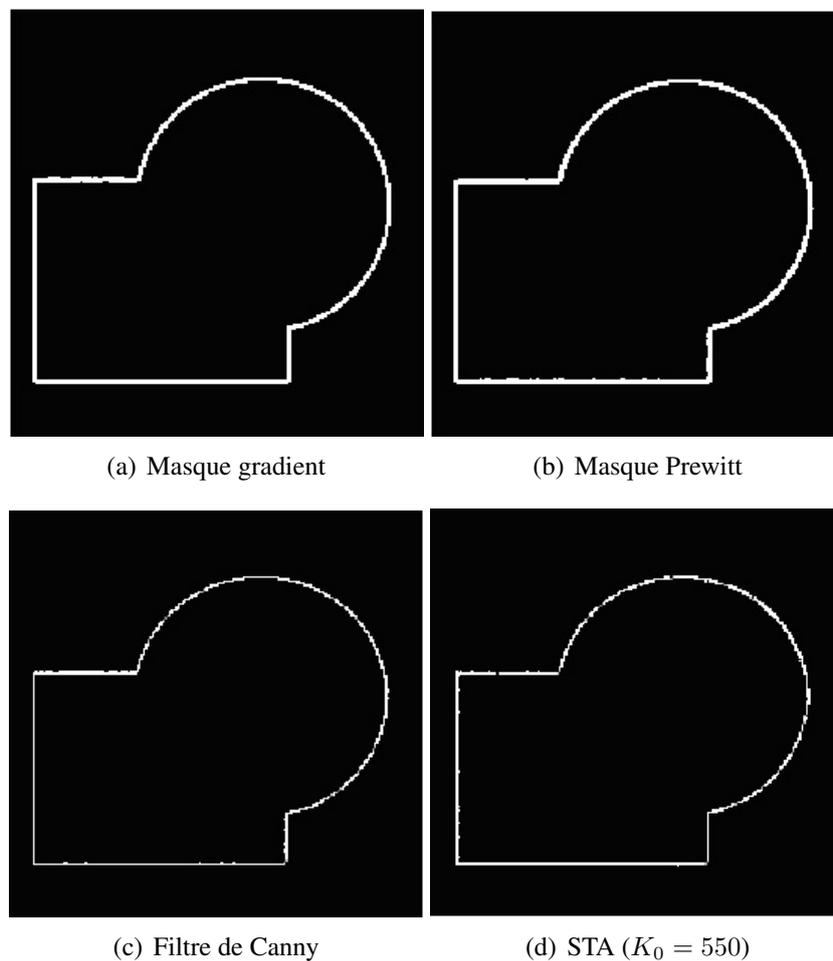


FIGURE 2.20 – Contours de l'image dégradée par un bruit blanc gaussien.

Résultats de simulation : bruit "Poivre et Sel" :

En considérant un bruit impulsif, les deux détecteurs de contours "Prewitt" et "Canny" présentent un bon lissage observé dans les images 2.22(b) et 2.22(c). Cependant, ceci n'assure pas une bonne précision de détection. En ayant la même méthode de seuillage, nous remarquons que le détecteur STA présente le contour le moins épais comparé aux résultats donnés par les

autres méthodes (voir tableau 2.3).

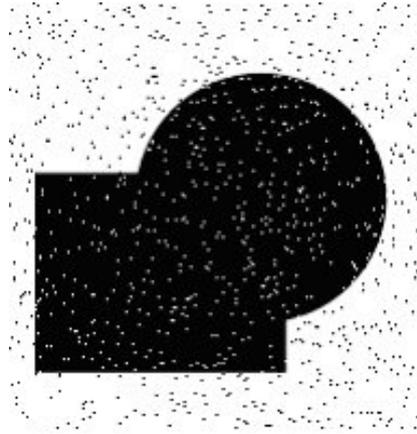


FIGURE 2.21 – Image de synthèse avec du bruit "Poivre et Sel" ( $d_b = 0.01$ )

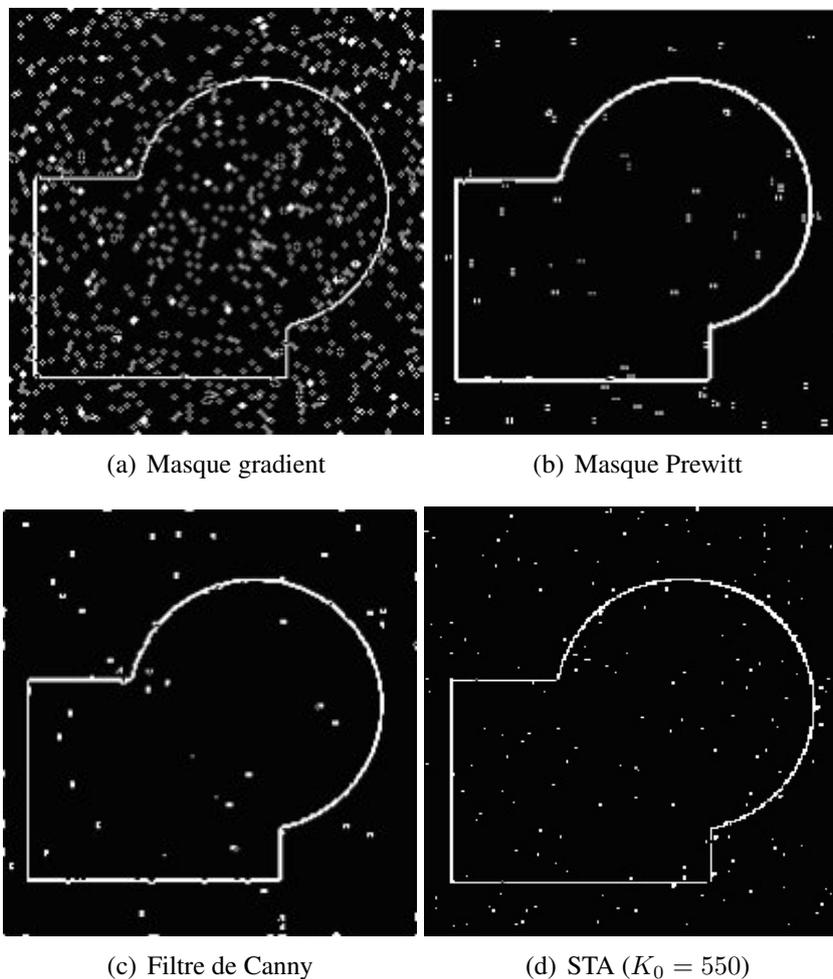


FIGURE 2.22 – Contours de l'image dégradée par un bruit "Poivre et Sel".

Par rapport aux autres algorithmes, le masque de Prewitt fourni le résultat le plus mauvais pour l'image d'entrée dégradée par le bruit "Poivre et Sel". En fait, l'action de filtrage relative à ce masque consiste à effectuer une moyenne des pixels voisins et puisque les valeurs d'intensité de ces derniers sont souvent très différentes des vraies valeurs suite à la dégradation provoquée par ce bruit impulsif, la moyenne calculée est forcément faussée. Ainsi, la performance de

ce détecteur diminue fortement pour le bruit impulsif. En imagerie, ce type de bruit est très difficile à éliminer avec les filtres linéaires. Généralement, il est nécessaire d'utiliser des filtres non linéaires pour éliminer effectivement ces variations brusques au niveau de l'image comme par exemple le filtre médian.

Tableau 2.3 – Tableau comparatif des erreurs : bruit de type "Poivre et Sel".

Méthode	EMN	EMC
Masque de gradient	0.031	0.0135
Masque de Prewitt	0.0339	0.0144
Filtre de Canny	0.0124	0.0107
STA( $K_0 = 550$ )	0.0023	0.0025

Résultats de simulation : bruit multiplicatif :

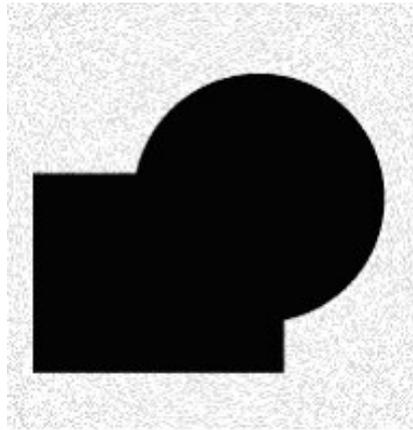


FIGURE 2.23 – Image de synthèse avec du bruit multiplicatif ( $\sigma_{n_s} = 0.01$ ).

Tableau 2.4 – Tableau comparatif des erreurs : bruit multiplicatif.

Méthode	EMN	EMC
Masque de gradient	0.0288	0.0019
Masque de Prewitt	0.0465	0.0157
Filtre de Canny	0.0112	0.000471
STA( $K_1 = 450$ )	0.0264	0.00013

Le masque de gradient donne des résultats meilleurs pour l'image de synthèse dégradée par le bruit multiplicatif que celles dégradées par les autres types de bruit (voir tableau 2.4). Cet opérateur est juste un filtre passe-haut, ce qui peut expliquer son inefficacité pour certains types de bruit et en particulier le bruit impulsif. Toutefois, le filtre de Prewitt et le filtre de Canny estiment la matrice du module de gradient tout en intégrant une action de lissage ce qui justifie

la diminution du bruit au niveau des contours détectés, (voir Figures 2.24).

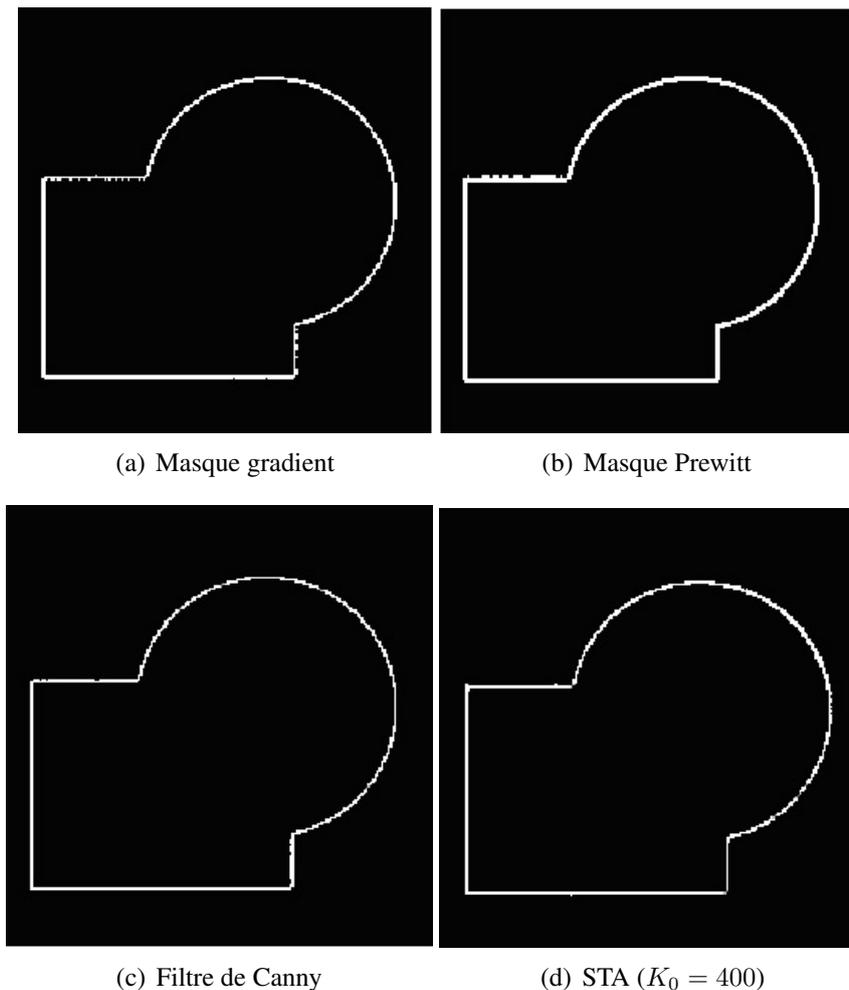


FIGURE 2.24 – Contours de l'image dégradée par un bruit multiplicatif.

Remarques générales :

La performance de l'algorithme de Canny dépend fortement du paramètre ajustable représenté par l'écart-type du filtre gaussien, qui contrôle également la taille de ce filtre. Plus la valeur de ce paramètre est grande, plus la taille du filtre devient large. Souvent la taille de l'image, ceci peut impliquer une image résultante floue et bien évidemment une mauvaise localisation du contour. Une faible valeur de cet écart-type permet de considérer un voisinage faible autour du point contour ce qui détériore le critère de détection. Il est alors nécessaire d'adapter ce paramètre en l'ajustant d'un côté par rapport au type d'image d'entrée et d'un autre côté à la taille de celle-ci. Dans notre cas, le choix que nous avons jugé le plus judicieux de l'écart-type de la gaussienne est 0.8. Pour les tests effectués avec l'image de "Lena", la largeur du filtre gaussien est adaptée par des valeurs différentes.

L'action de lissage suivie d'un filtre passe-haut pour l'opérateur de Prewitt et le filtre de Canny peut évidemment entraîner un léger déphasage qui peut à son tour fausser l'estimation du gradient. Pour l'algorithme adaptatif basé sur les modes glissants d'ordre supérieur rappelons que l'action d'atténuation du bruit et celle de différentiation sont combinées et se font d'une manière simultanée. Notons que tous les contours obtenus peuvent être améliorés en changeant la méthode de seuillage utilisée comme la méthode de seuillage par hystérésis puisqu'elle permet d'assurer la continuité des contours les plus forts de l'image. A partir des valeurs EMN

(tableaux 2.2, 2.3, 2.4), le détecteur de contour STA présente de bonnes performances pour l'image dégradée par un bruit impulsif que celles bruitées par un bruit gaussien ou multiplicatif.

#### Temps de calcul :

Le tableau 2.5 résume le temps de calcul en secondes qui s'écoule pour la détection des contours pour les méthodes présentées tout en considérant différentes tailles de l'image d'entrée. Comme indiqué précédemment, pour le masque de Prewitt et le filtre de Canny, l'opération de convolution 2D peut être remplacée par deux convolutions 1D. Ceci est dû à l'avantage que ces deux filtres soient séparables. Cet avantage permet alors d'accélérer le calcul. De plus, nous pouvons remarquer suite à ces résultats que l'opération de convolution est moins gourmande en terme de temps de calcul que les boucles imbriquées utilisées pour l'algorithme modes glissants adaptatifs (STA ou DAO2). Le fait de parcourir l'image pixel par pixel provoque un fort accroissement du temps de calcul dès que la taille de l'image augmente.

Tableau 2.5 – Temps de calcul en secondes pour différentes tailles d'image.

Méthode	image(50 * 50)	image(125 * 255)	image(256 * 256)
Masque de gradient	0.00057	0.0017	0.0098
Masque de Prewitt	0.0011	0.0023	0.0040
Filtre de Canny	0.0043	0.0064	0.015
STA	0.05	0.27	1.3
Opérateur de laplacien	0.009	0.013	0.016
DAO2	0.0624	0.39	1.68

#### Autres résultats de simulation :

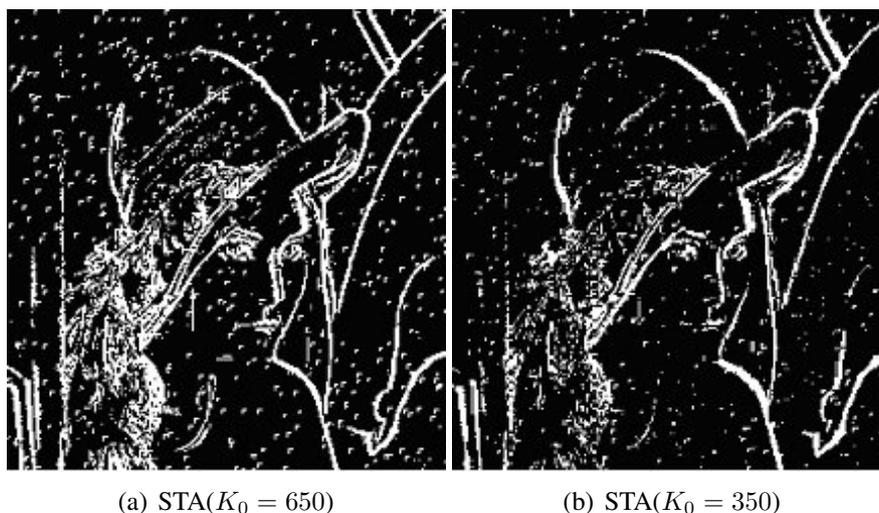


FIGURE 2.25 – Détection de contour de l'image 1 avec du bruit "Poivre et Sel" : STA.

Dans la figure 2.26, l'image d'entrée "Lena" est bruitée par le bruit "Poivre et Sel" et les images obtenues par chacune des méthodes (masques de gradient, de Prewitt et filtre de Canny) sont

données. Les figures 2.25(a) et 2.25(b) mettent l'accent sur l'importance du choix de la valeur du gain de convergence.

En effet, cette valeur de gain permet d'agir sur le taux de réduction de l'amplification du bruit au niveau de l'image traitée. Donc en augmentant cette valeur de gain  $K_0$ , le taux de réduction de l'amplification du bruit diminue, remarque déjà faite pour les exemples effectués dans le chapitre précédent pour les signaux 1D. Par conséquent, cette valeur doit être soigneusement choisie selon le type d'image à traiter. A partir des figures 2.25(a) et 2.25(b), nous pouvons constater l'importance du réglage du gain de convergence où un compromis est recherché entre le taux de réduction de l'amplification du bruit et la détection de contour.

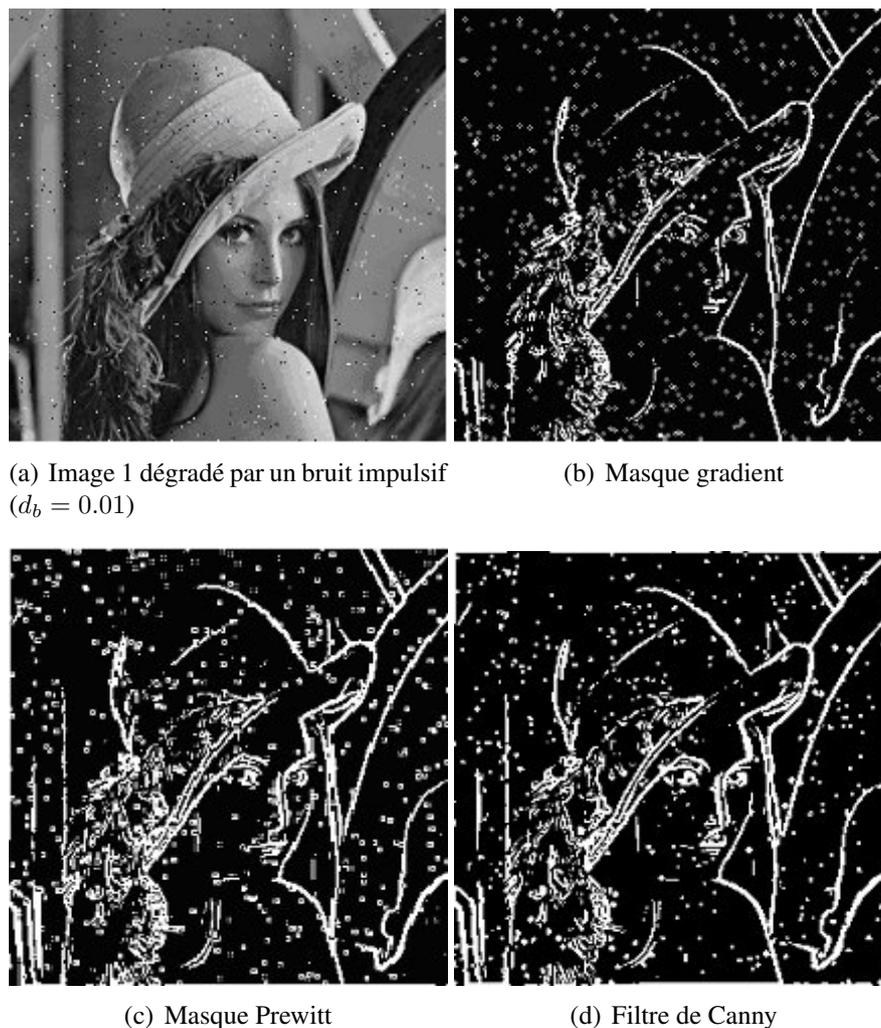


FIGURE 2.26 – Détection de contour de l'image 1 avec du bruit "Poivre et Sel" : Masques gradient, Prewitt et filtre de Canny.

A la fin de cette partie, nous présentons un tableau qualitatif pour les différents détecteurs de contours utilisés au cours de cette étude.

Globalement, nous pouvons conclure que les résultats quantitatifs et qualitatifs obtenus avec l'algorithme proposé montrent son efficacité par rapport aux méthodes conventionnelles, mais étant donné que le calcul se fait pixel par pixel, la détection de contour est plus coûteuse en terme de temps de calcul. Ce problème peut être résolu en considérant une matrice d'intensité lumineuse comme entrée de l'algorithme au lieu de considérer un seul pixel à la fois. Ceci incite alors à modifier cet algorithme pour des applications multi-entrées multi-sorties. Au cours de notre travail, cette solution n'a pas été mise en place mais nous nous souhaitons la signaler

comme proposition permettant la résolution de cet inconvénient.

Tableau 2.6 – Tableau qualitatif.

Méthode	Localisation	Insensibilité face au bruit	complexité d'implémentation	temps de calcul	nombre de paramètres de réglage
Masque de gradient	+	-	++	++	non
Masque de Prewitt	+	+	++	++	non
Filtre de Canny	++	++	+	+	1
STA/DAO2	++	++	+	-	1/2

Les résultats prometteurs de cette étude sont porteurs pour des applications vidéo où l'intérêt dans ce cas est l'estimation du mouvement des pixels dans une séquence d'images. En effet, l'algorithme peut être utilisé, sous certaines hypothèses pour prédire le mouvement des pixels. Cette prédiction peut être utilisée dans différentes applications telles que la compression de séquence d'images ainsi que la reconstruction d'image à l'instant suivant. Les travaux concernant cette étude sont avancés mais ils ne sont pas encore finalisés, aussi nous nous contentons d'expliquer la méthode proposée ainsi que son utilité dans les applications précitées dans l'annexe C.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes focalisé sur différentes applications de l'algorithme proposé dans le premier chapitre. Ainsi, comme première application, une identification des paramètres d'un robot SCARA à deux axes est proposée. La méthode d'identification proposée utilise deux propriétés du modèle retenu. En effet, étant donné que le modèle direct est plat ce qui implique que le modèle inverse l'est aussi. Donc par utilisation du modèle inverse, il est alors logique d'utiliser le différentiateur proposé pour estimer les vitesses articulaires et les accélérations associées à chaque axe. La seconde propriété est que le modèle inverse est linéaire par rapport aux paramètres ou groupe de paramètres à identifier, ce qui nous a permis d'utiliser la classique méthode des moindres carrés. Il est alors clair que l'algorithme de dérivation proposé a une influence directe sur les résultats obtenus. A la fin de cette partie, une étude comparative avec d'autres méthodes est présentée. Afin d'avoir un ordre quantitatif des résultats obtenus par ces différentes méthodes, un critère a été défini afin de dresser un tableau récapitulant les différentes valeurs.

La deuxième partie de ce chapitre présente une application du différentiateur proposé dans le domaine bidimensionnel. Nous avons choisi d'utiliser la technique des modes glissants adaptatifs pour la détection des contours d'image. Avant d'aborder directement les résultats, il nous a semblé indispensable de disposer d'une base de comparaison avec les méthodes classiques qui existent dans la littérature. Donc après une brève introduction sur les contours d'images, la relation existante entre un contour, le gradient et le laplacien, une description de quelques méthodes de détection de contours est présentée.

Le travail effectué sur des images fixes, nous a permis d'envisager des applications relatives aux séquences d'images. Ainsi, nous décrivons, dans l'annexe C, des perspectives possibles pour les séquences d'images. Seule la méthode proposée a été détaillée. Elle consiste à prédire le flux optique. A l'aide de cette prédiction, de nombreuses applications peuvent être envisagées.

Dans notre cas, nous avons juste cité le problème de reconstruction d'image et la compression/décompression de séquence d'images.

La suite de nos travaux a pour objectif d'intégrer les nouveaux algorithmes de différentiation robuste sur des systèmes complexes commandés. Les stratégies de commandes synthétisées utiliseront ces dérivateurs et le ou les signaux calculés seront ainsi injectés dans la boucle de commande dans le but de répondre au mieux aux spécifications fixées en boucle fermée.

Le champ d'application concerné est l'une des spécialités du laboratoire AMPERE, il s'agit de la commande des systèmes Fluid Power. Ainsi, le chapitre 3 présente les modèles d'un système électrohydraulique hautes performances. Ces modèles serviront dans le chapitre 4 à la synthèse de loi de commande pour pouvoir intégrer les différentiateurs décrits au chapitre 1 dans une boucle de commande.





# Chapitre 3

## Modélisation d'actionneur hydraulique pour la synthèse de commandes non linéaires intégrant des différentiateurs

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>110</b>
<b>3.2</b>	<b>Description du dispositif expérimental</b>	<b>112</b>
3.2.1	Centrale hydraulique	113
3.2.2	Instrumentation/mesure	113
3.2.3	Carte d'acquisition/boîtier électronique	114
3.2.4	Actionneur électrohydraulique	115
3.2.5	Embase	115
3.2.6	Servodistributeur	116
<b>3.3</b>	<b>Modélisation du système</b>	<b>117</b>
3.3.1	Objectifs de la modélisation	118
3.3.2	Modèle de l'actionneur hydraulique	119
3.3.3	Modélisation du servodistributeur	128
3.3.4	Modèle Embase	135
3.3.5	Modèle de commande	138
<b>3.4</b>	<b>Etude préliminaire : analyse linéaire</b>	<b>141</b>
3.4.1	Modèle linéaire	141
3.4.2	Analyse du mode hydraulique	143
3.4.3	Séparation des dynamiques servodistributeur/vérin	147
3.4.4	Performances limites de l'actionneur électrohydraulique	149
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>151</b>

---

### 3.1 Introduction

Les commandes par retour d'état ont besoin d'informations sur l'état du système et donc nécessitent parfois l'utilisation des dérivées successives de la variable de sortie, c'est le cas de la plupart des systèmes mécaniques par exemple. Bien que l'emploi de capteurs représente une solution parfois séduisante, cette approche présente un certains nombres d'inconvénients tels que l'augmentation du coût du système, l'augmentation de sa complexité et également des problèmes supplémentaires de diagnostics. Ceci nous amène alors à remplacer un certain nombre

de capteurs physiques par des capteurs "logiciel". Pour illustrer ce qui précède, nous considérons un système nonlinéaire mono-entrée mono-sortie sous une forme normale dite "forme normale d'Isidori sans dynamique résiduelle" :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = f(x_1, x_2, x_3) + g(x_1, x_2, x_3)u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $x = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3$  représente l'état du système,  $u \in \mathbb{R}$  est l'entrée de commande qui peut être continue ou discontinue. Les fonctions  $f(x_1, x_2, x_3)$  et  $g(x_1, x_2, x_3)$  sont des champs de vecteurs suffisamment différentiables. En se situant dans un cadre d'un suivi de trajectoire de sortie, une loi de commande peut alors être construite sur la base de la technique des modes glissants d'ordre un, en considérant une fonction de glissement de degré relatif égal à un par rapport à la commande  $u$ . Dans ce cas, il faut que la première dérivée de cette fonction fasse apparaître explicitement la commande. Il suffit donc dans cet exemple que la fonction de glissement contienne la sortie  $x_1$  et ses dérivées successives  $x_2$  et  $x_3$ . Un choix simple de la surface de glissement consiste alors à prendre :

$$s = (x_1 - x_{1d}) + c_1(x_2 - x_{2d}) + c_2(x_3 - x_{3d}) \quad (3.2)$$

où  $x_{id}$  sont les trajectoires désirées,  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Par conséquent, pour le système (3.1) une loi de commande type  $u = -K \text{sign}(s)$  impose de mesurer ou à estimer les dérivées successives de  $x_1$ .

Pour un procédé réel,  $x_1$  peut représenter une mesure de la position et l'implémentation nécessite d'avoir outre le capteur de position :

- soit un (ou deux) capteurs supplémentaires : vitesse (et accélération),
- soit un estimateur des dérivées successives de la position.

Pour un modèle de système plus générique, ce problème est plus complexe dans le cas d'une commande discontinue basée sur la technique des modes glissants d'ordre supérieur puisque le nombre des dérivées successives de la surface  $s$  augmente avec l'ordre du régime glissant choisi.

Dans le même contexte, il existe aussi des lois de commande continues comme celles basées sur la technique du Backstepping, qui peuvent être également appliquées au modèle de système ayant la forme décrite ci-dessus. Pour ce type de commande, il est nécessaire que toutes les variables d'état soient mesurés ( $x_1, x_2, x_3$ ). L'utilisation d'un différentiateur représente ici aussi une alternative intéressante sous condition que l'estimation de ces dérivées soit de bonne qualité.

Dans le chapitre 1, différents estimateurs des dérivées successives de signaux ont été présentés, certains sont basés sur une approche algébrique alors que d'autres peuvent s'appuyer sur la technique des modes glissants. Dans le chapitre 2, nous avons développé deux applications de nature différente qui ont déjà illustré des utilisations de l'algorithme proposé : l'identification paramétrique et la détection de contour dans une image. Dans les chapitres suivants, le différentiateur sera cette fois-ci intégré dans une boucle de commande. La finalité de cette étude est de tester l'efficacité de la combinaison "différentiateur-commande" appliquée à la commande d'un banc d'essai électrohydraulique.

Dans ce chapitre, nous nous concentrerons tout d'abord sur la description des différents sous-systèmes constituant ce banc d'essai électrohydraulique. Avant la synthèse des lois de commandes du servo-vérin hydraulique, une phase de modélisation sera abordée. Elle illustrera les

efforts réalisés en début de thèse afin d'obtenir un modèle de simulation visant à reproduire fidèlement le comportement réel du système et en particulier celui du servodistributeur. Pour ne pas alourdir ce mémoire, nous nous limiterons à décrire les principaux phénomènes à modéliser et leurs effets sur les performances d'une loi de commande en nous appuyant sur la littérature associée à la modélisation du comportement statique et dynamique des servodistributeurs. Nous décrivons les protocoles expérimentaux utilisés pour identifier un modèle de représentation des phénomènes de frottement. Nous détaillerons alors l'approximation réalisée, régie par une fonction différentiable qui facilite son intégration dans le modèle de commande. Suite à notre démarche de modélisation, nous introduisons un modèle de commande tout en précisant les hypothèses utilisées ainsi que leur plage de validité. Nous nous concentrerons alors sur l'étude d'un modèle linéaire du système ce qui permettra de donner une idée de l'influence de certains sous-systèmes sur la dynamique du système global. Pour conclure ce chapitre, nous présenterons une étude permettant de définir le domaine d'atteignabilité du système utilisé. La finalité de cette étude permettra de préciser la définition d'un cahier des charges en termes de trajectoires pour l'application des lois de commande. Les conclusions de cette étude seront exploitées dans le chapitre suivant, dans une partie relative à la synthèse de stratégie de commande.

## 3.2 Description du dispositif expérimental

Le dispositif expérimental considéré est un banc d'essai électrohydraulique composé d'une centrale hydraulique, de deux servodistributeurs, d'un vérin double effet entraînant une charge, d'un système de prototypage rapide des lois de commande et d'un ensemble de capteurs, voir figure 3.1.

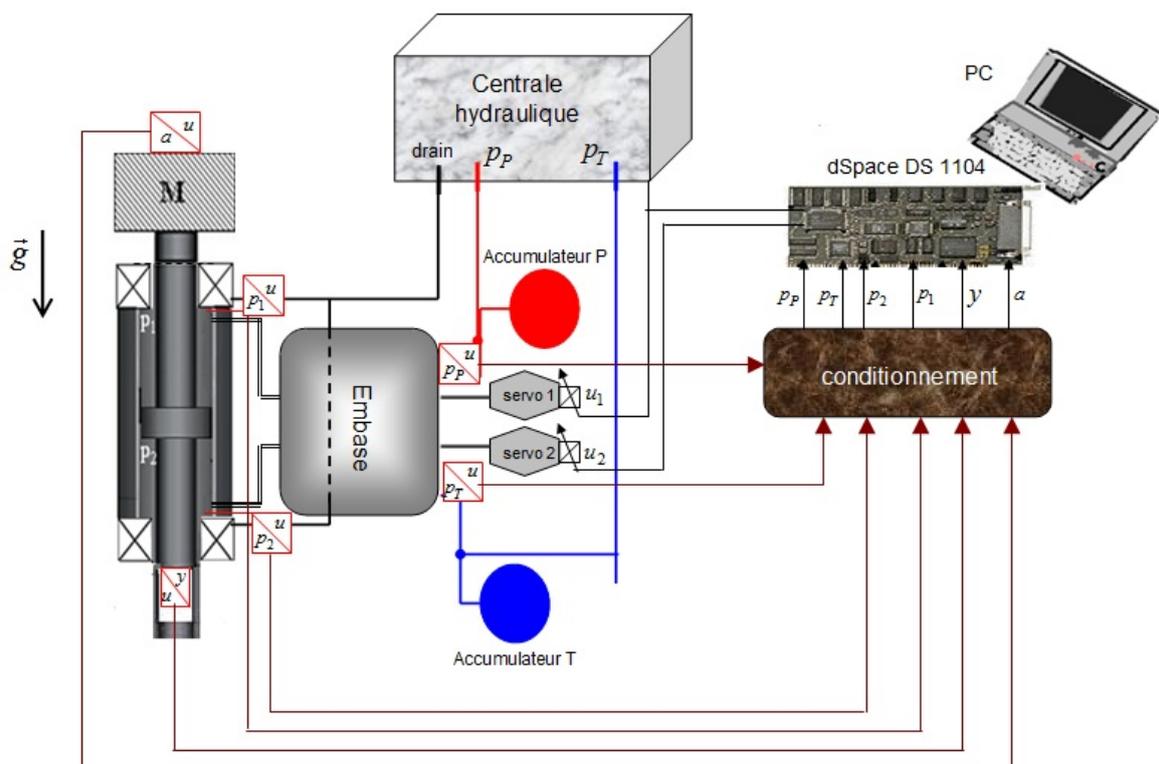


FIGURE 3.1 – Schéma du système.

La centrale hydraulique fournit l'énergie hydraulique nécessaire à l'actionnement du vérin. Deux servodistributeurs MOOG D765 fonctionnant en multi-modes, permettent de moduler la

puissance hydraulique fournie au vérin par variation des sections de passage du fluide. Les sections sont pilotées par des signaux de commande délivrés par le système d'acquisition/commande. Celui-ci permet d'élaborer ces signaux selon la stratégie implantée en fonction des consignes reçues et des informations délivrées par les capteurs. Dans le paragraphe suivant, une brève description de chaque sous-système du banc est donnée.

### 3.2.1 Centrale hydraulique

La centrale hydraulique (voir figure 3.2) permet la génération de la puissance hydraulique sous une pression de service de 210 bars et un débit nominal de 46 l/min. Une pompe à cylindrée variable transforme l'énergie mécanique fournie par un moteur électrique de 18.5 kW en énergie hydraulique.

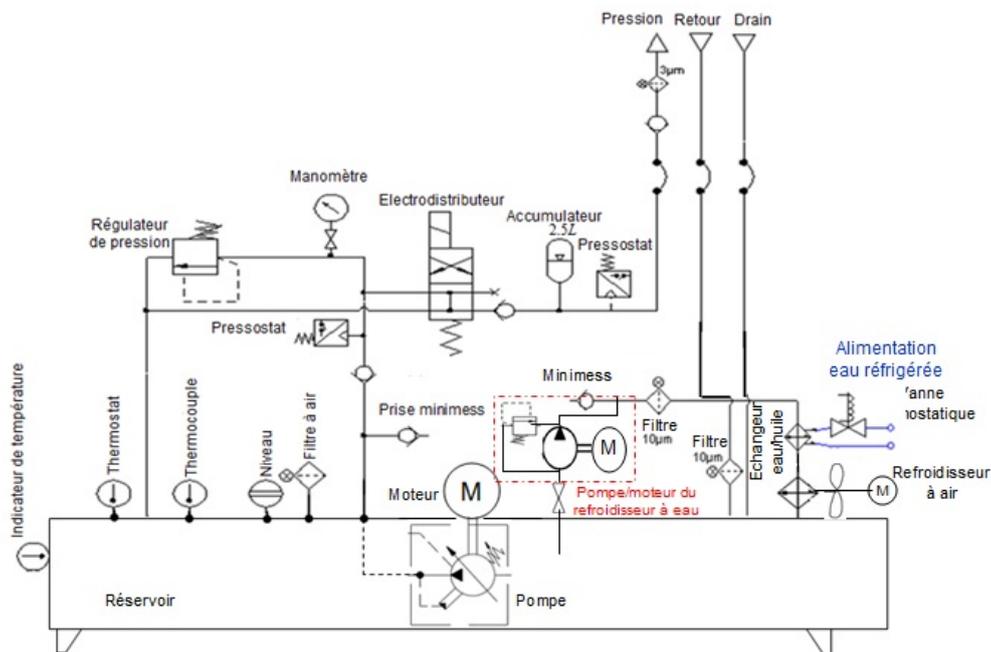


FIGURE 3.2 – Centrale hydraulique.

La centrale hydraulique est aussi équipée d'une deuxième pompe à engrenages à cylindrée fixe pour la circulation de l'huile dans une boucle de refroidissement composée d'un échangeur eau/huile (l'eau du réseau a un débit de 20 l/min et une température proche des  $10^{\circ}\text{C}$ ), et d'un échangeur air/huile qui se déclenche si la température de l'huile devient supérieure à  $55^{\circ}\text{C}$ . Ces caractéristiques permettent d'atteindre les performances théoriques de l'actionneur, soit un effort statique maximal égal à 19858 N à 210 bars et un effort dynamique maximal égal à 13238 N à 70 bars de perte de charge au niveau des servodistributeurs. Le fonctionnement de la centrale hydraulique est protégé par différents détecteurs (niveau bas d'huile, thermostat, colmatages de filtres, surpression, surintensité sur le moteur).

### 3.2.2 Instrumentation/mesure

Le dispositif expérimental est équipé d'un ensemble de neuf capteurs pour la mesure de différentes grandeurs physiques nécessaires à la supervision du fonctionnement et la commande du système. Le déplacement du piston du vérin est mesuré par un capteur de type LVDT monté sur la tige et protégé par un tube vissé à l'arrière du vérin (tableau 3.1).

Le banc d'essai dispose d'un accéléromètre à large plage de mesure, installé sur la tige du vérin dont les caractéristiques sont données dans le tableau 3.2.

Tableau 3.1 – Caractéristiques du capteur de position.

Marque	Sensorex
Etendue de mesure (EM)	300 mm
Sortie signal	$\pm 10$ V
Sensibilité	4.4 mV/V/mm
Précision (non linéarité)	< 0.1% de l'EM

Tableau 3.2 – Caractéristiques de l'accéléromètre.

Marque	FGP Sensors/Instrumentation
Etendue de mesure (EM)	$\pm 100$ g
Sortie signal	$\pm 10$ V
Sensibilité à l'étendue de mesure	$\pm 5$ V
Précision (non linéarité)	< $\pm 2\%$ de l'EM

Quatre capteurs de pression relative équipent le système. Deux d'entre eux sont utilisés pour la mesure de la pression d'alimentation  $p_P$  et de retour  $p_T$ , (tableau 3.3). Les deux autres capteurs sont dédiés pour la mesure des pressions ( $p_1$  et  $p_2$ ) dans les chambres du vérin (tableau 3.4).

Tableau 3.3 – Caractéristiques des capteurs de pression  $p_P$  et  $p_T$ .

Marque	FGP Sensors/Instrumentation
Etendue de mesure (EM)	(0 – 250) bars
Précision (non linéarité)	0.15% de l'EM pour $p_P$ , 0.25% de l'EM pour $p_T$

Tableau 3.4 – Caractéristiques des capteurs de pression  $p_1$  et  $p_2$ .

Marque	KULITE Semiconductor
Etendue de mesure (EM)	(0 – 206) bars
Sensibilité	0.482 (mv/bar) pour $p_1$ et 0.497 (mv/bar) pour $p_2$
Précision (non linéarité/hystérésis)	< $\pm 0.1\%$ de l'EM
Répétabilité	$\pm 0.1\%$

Le système dispose aussi d'un capteur de température. Les tiroirs des servodistributeurs sont équipés de capteurs LVDT qui permettent de mesurer une image de la position du tiroir.

### 3.2.3 Carte d'acquisition/boîtier électronique

Le banc est associé à un système de prototypage rapide des lois de commande composé d'un ordinateur muni d'une carte d'acquisition dSpace et d'un dispositif électronique pour le conditionnement des signaux et l'alimentation des capteurs. La carte d'acquisition utilisée est une DS 1104. Elle est connectée à l'ordinateur via un bus ISA afin de permettre le téléchargement des codes exécutables pour le DSP. Dans notre cas, nous utilisons le logiciel Control Desk qui offre une interface simple à implémenter en vue du suivi et de la supervision du système. Le bus ISA permet également un dialogue de haut niveau en temps réel entre le DSP et l'outil de supervision. Ce système d'acquisition permet de compiler et de télécharger un modèle développé dans le logiciel Matlab(Simulink) grâce à l'interface : Real Time Interface (RTI) et Real

Time Workshop (RTW). Le RTI est un logiciel pour l'implémentation de différents types de modèles développés sous Matlab/Simulink sur la carte DS1104. Le RTW est le logiciel chargé de la génération de code C pour l'implémentation du modèle sur le matériel dSPACE.

Les principales caractéristiques de la carte sont résumées dans le tableau 3.5.

Tableau 3.5 – Principales caractéristiques de la carte d'acquisition.

			Résolution	Temps de conversion
Entrées analogiques	8 voies	4 voies	16 bits	$2\mu s$
		4 voies	12 bits	$0.8\mu s$
Sorties analogiques	8 voies	-	16 bits	$10\mu s$
Processeur maître	MPC8240	250 MHz	32 bits	-

### 3.2.4 Actionneur électrohydraulique

L'actionneur utilisé est un vérin symétrique à double tige, orienté verticalement dont le guidage du piston est assuré par deux paliers hydrodynamiques. Les fuites d'huile dans ces deux paliers de guidage sont canalisées vers l'extérieur par des drains avant de retourner à la centrale hydraulique.

### 3.2.5 Embase

L'embase réalisée spécifiquement pour ce banc d'essai permet d'implanter deux servodistributeurs, voir figure 3.3.

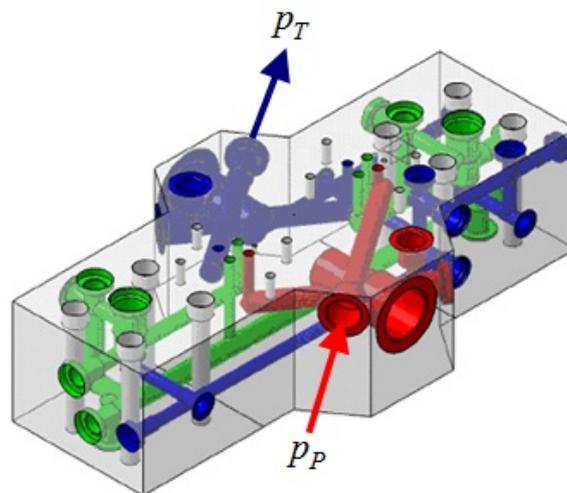


FIGURE 3.3 – Schéma 3D de l'embase.

Cette embase permet d'utiliser le vérin selon trois modes de fonctionnement :

- mode (1) : utilisation d'un seul servodistributeur pour le contrôle des deux chambres du vérin,
- mode (2) : utilisation des deux servodistributeurs en parallèles pour le contrôle simultané des deux chambres du vérin,
- mode (3) : chaque chambre du vérin est commandée par son propre servodistributeur.

Pour permettre cette modularité, l'embase est équipée de deux électrovannes à cartouche et de deux limiteurs de débit. Des orifices permettent d'installer les capteurs de pression d'alimentation et de retour, et deux accumulateurs sphériques de capacité 1L, tarés respectivement à 20

bars et 110 bars. Ces accumulateurs sont équipés d'une prise "minimes" et d'un manomètre pour la vérification de la pression de gonflage. Le rôle de l'accumulateur  $P$  est de filtrer les pulsations de pression sur l'alimentation, quant à l'accumulateur  $T$ , il permet de réduire les coups de bélier dans les canalisations de retour au réservoir.

### 3.2.6 Servodistributeur

Le servodistributeur électrohydraulique est un organe asservi qui permet de contrôler proportionnellement une variable de puissance (débit ou pression) à la sortie, en fonction d'un signal de commande électrique en entrée. Le rôle d'un tel composant est le dosage de la puissance délivrée au récepteur hydraulique à l'aide d'une voie d'alimentation  $P$  et une voie de retour  $T$ . Il assure le rôle de distribution de puissance à l'aide d'un tiroir coulissant dans une chemise (ou fourreau).

Le servodistributeur utilisé (MOOG D765) est un pré-actionneur à deux étages. Il est considéré comme "servodistributeur en débit", puisqu'il contrôle en sortie le débit. Un organe électrique (moteur couple) et deux étages hydrauliques (un étage pilote et un étage de puissance) permettent d'assurer la progressivité du paramètre contrôlé. L'architecture du servodistributeur utilisé est donnée par la figure 3.4.

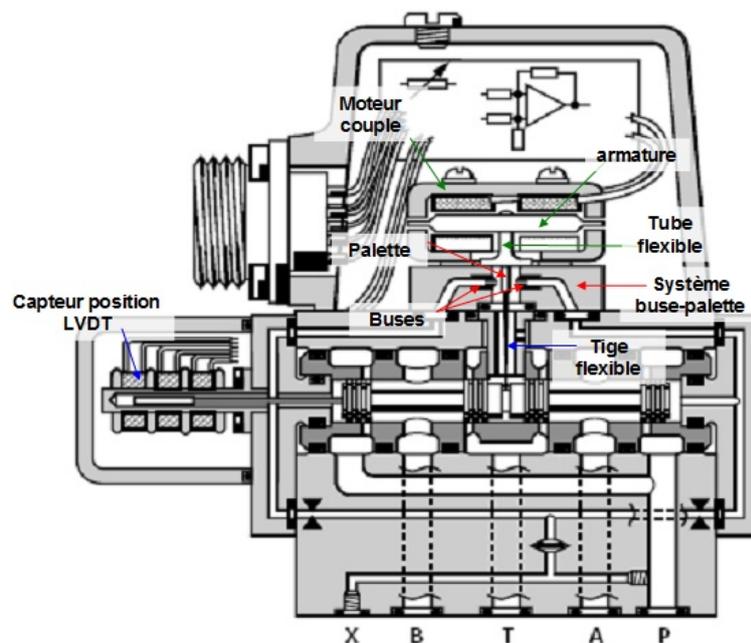


FIGURE 3.4 – Architecture du servodistributeur MOOG D765.

#### *Structure du servodistributeur :*

Le premier étage du modulateur de puissance est constitué d'un moteur couple (moteur à aimant permanent) et d'un étage d'amplification de type buse-palette. Le deuxième étage (ou étage de puissance) est composé d'un tiroir se déplaçant dans un fourreau. Les deux étages sont illustrés dans le schéma de principe donné par la figure 3.5. Le moteur couple est constitué d'une armature placée dans l'entrefer du circuit magnétique constitué de deux aimants permanents. Un tube flexible lié à la palette assure le rappel élastique de l'armature ainsi que l'étanchéité du moteur. L'armature supporte également deux bobines placées de part et d'autre du tube flexible. La palette se situe entre deux buses. Une tige flexible est fixée à l'extrémité de la palette et est logée à l'autre extrémité dans une gorge usinée dans la portée centrale du tiroir,

elle permet de réaliser une rétroaction mécanique par flexion en agissant directement sur la partie mobile (armature+palette). Il existe une seconde boucle, celle-ci électronique, réalisant l'asservissement de la position du tiroir mesurée par un capteur LVDT qui est intégré dans le servodistributeur. Cette boucle permet de corriger et de garantir les performances de l'organe de réglage à basse fréquence.

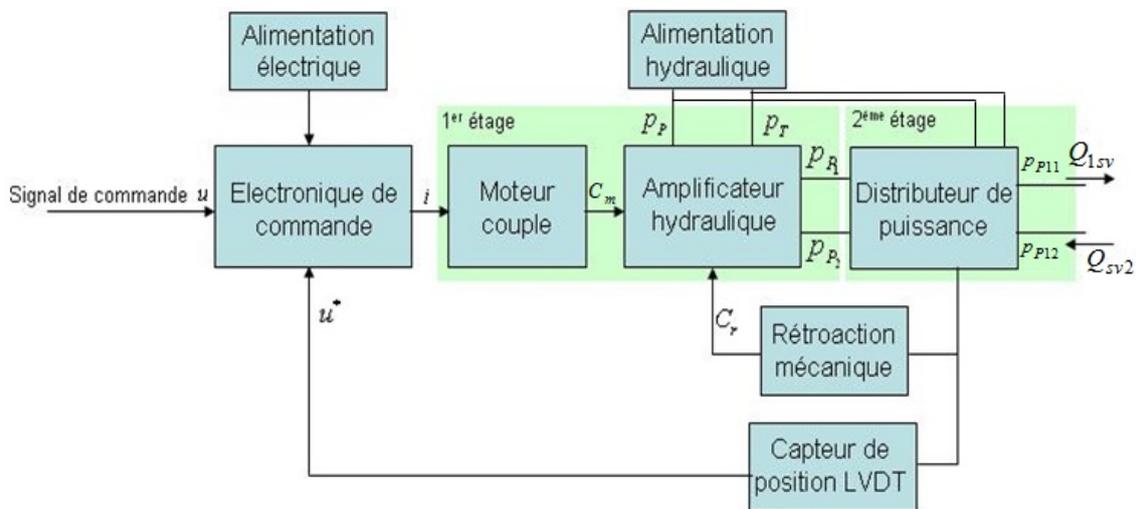


FIGURE 3.5 – Schéma de principe du servodistributeur MOOG D765.

Au niveau de l'amplificateur hydraulique, la palette est le seul élément mobile. En approchant la palette de l'une des deux buses, on réduit alors l'une des surfaces d'échappement alors que l'autre est augmentée. Ceci permet de créer une différence de pression, selon la déviation de la palette qui pilote le déplacement du tiroir.

Le deuxième étage hydraulique est destiné à la distribution des débits à la charge (vérin). C'est un distributeur à cinq voies dont 4 sont utilisables : P est l'alimentation, T est le retour et A, B sont les deux voies d'utilisations. Le débit est modulé en fonction des sections de passage de ce pont de Wheatstone.

### 3.3 Modélisation du système

Afin d'élaborer et de valider numériquement les lois de commande, il est judicieux de le décrire par un modèle de simulation qui reproduit les phénomènes physiques prépondérants. La structure du modèle est à définir par rapport à l'utilisation recherchée et au cahier de charge imposé.

Dans cette partie, nous allons donc présenter la littérature associée à la modélisation de chaque composant important du système (figure 3.6) pour notre problématique de commande. Notre objectif est de proposer au final un modèle de simulation simplifié, suite à des hypothèses justifiées par notre contexte et qui permettra d'aboutir à des modèles de commande.

Au début de cette thèse, un travail important a été fourni au niveau de la modélisation dans le but d'obtenir un modèle de simulation le plus fidèle possible dans une grande plage de fonctionnement (fréquence et amplitude). Malheureusement, ces différentes étapes de modélisation auraient nécessité un grand nombre d'essais spécifiques et par conséquent des équipements importants et particuliers dont nous ne disposons pas. Par conséquent, nous nous sommes limités au développement d'un modèle de connaissance simplifié mais suffisamment représentatif.

### 3.3.1 Objectifs de la modélisation

L'utilisation du modèle de commande retenu à la fin de la phase de modélisation, nous servira par la suite pour la synthèse des commandes pour un suivi de trajectoire en déplacement et pour des plages de fréquence différentes. Afin d'exploiter au mieux la dynamique du système, il est nécessaire de développer un modèle de commande utilisable pour ces plages. Pour ce faire, il est judicieux de définir les points importants à considérer dans la modélisation. En fait, dans la plupart des systèmes hydrauliques classiques, la dynamique du vérin est négligeable devant celle du servodistributeur. Dans ce cas la dynamique du vérin est représentée par un intégrateur pur. Dans notre cas, selon l'ouverture, la dynamique du servodistributeur est entre 180 Hz et 1 kHz. Même si la dynamique du vérin hydraulique utilisé à faible charge conduit à avoir des dynamiques très élevées en particulier pour les positions extrêmes où le mode hydraulique du vérin atteint 700 Hz, il peut être nécessaire de tenir compte simultanément de la dynamique du vérin et de celle du servodistributeur.

La figure 3.6 présente un schéma simplifié de l'ensemble {actionneur-embase-servodistributeurs}, où  $p_1$  et  $p_2$  représentent les pressions respectives dans les chambres 1 et 2 du vérin,  $Q_1$  et  $Q_2$  sont les débits volumiques entrant dans chacune des chambres de l'actionneur,  $Q_{1sv}$  et  $Q_{2sv}$  sont les débits fournis par les servodistributeurs,  $M$  est la masse de la charge et  $y$  représente la position de la tige du vérin.

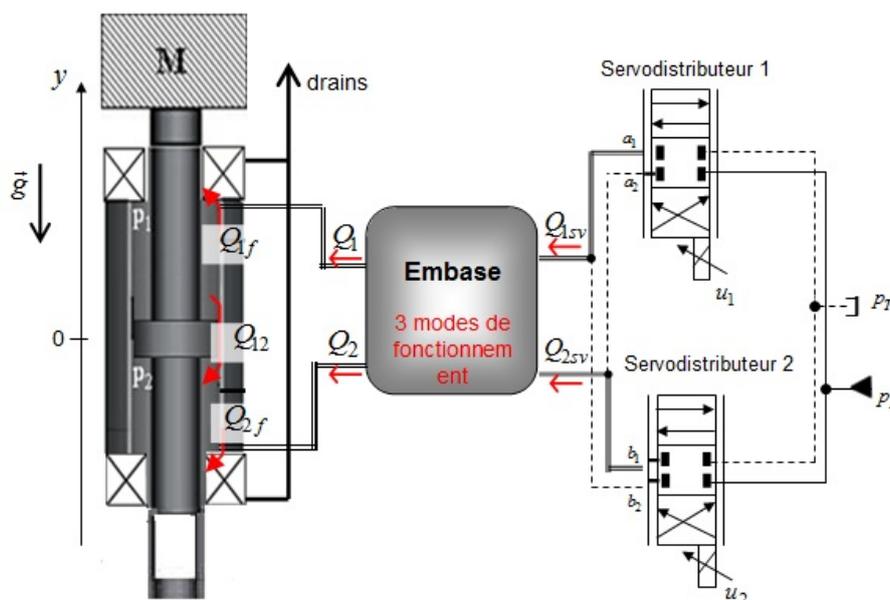


FIGURE 3.6 – Schéma synoptique du système.

Remarquons tout d'abord que l'embase (bloc foré) entre l'actionneur et les servodistributeurs présente différents mode de fonctionnement. Cette embase induit des pertes de charge entre les servodistributeurs et les chambres du vérin. Ceci conduit en régime transitoire à une différence entre les débits des servodistributeurs ( $Q_{1sv}$ ,  $Q_{2sv}$ ) et ceux de l'actionneur ( $Q_1$ ,  $Q_2$ ). Il faut aussi noter l'effet du volume et l'effet inertiel engendré par cette embase. Le deuxième point important à considérer dans la modélisation est par conséquent l'impact que peut avoir cette embase sur le comportement. Il nous faudra donc définir la dominance de l'un de ces effets par rapport aux autres selon la plage de fonctionnement considérée.

Les systèmes électrohydrauliques ont un caractère fortement non-linéaire. Ces non-linéarités proviennent essentiellement des caractéristiques débit-pression du servodistributeur. Ceci nous

conduira donc à donner une grande importance à la modélisation de l'étage statique de ce composant. La deuxième source importante de non-linéarités est issue des frottements. Ces frottements constituent des phénomènes bien particuliers dans l'ingénierie du contrôle puisqu'ils entraînent des erreurs d'état d'équilibre et des cycles limites. Dans le cas d'un asservissement de position, les performances statiques ou dynamiques peuvent être considérablement influencées par les frottements. En régime statique, ceci peut se traduire par la présence d'une erreur statique de positionnement, ils peuvent donc être une source d'erreurs de suivi de trajectoire. En régime dynamique, les frottements peuvent induire un retard au démarrage du système. Néanmoins, ils contribuent de façon naturelle à l'amortissement des systèmes.

### 3.3.2 Modèle de l'actionneur hydraulique

#### 3.3.2.1 Modèle de la partie hydraulique de l'actionneur

Chaque chambre du vérin est considérée comme un volume de contrôle variable rempli d'huile à pression  $p(t)$ , température  $T(t)$  et masse volumique  $\rho(t)$ . Dans un intervalle de temps  $dt$ , la loi de conservation de la masse appliquée au volume  $V(t)$  implique que la masse du fluide entrant  $q_{m_e}$  (débit massique entrant) dans le volume de contrôle est égale à la masse du fluide sortant  $q_{m_s}$  (débit massique sortant) augmentée par la variation de la masse d'huile contenue dans le volume  $V$ . En supposant que la température de l'huile ainsi que la pression à l'intérieur du volume de contrôle sont homogènes, l'équation générale de la conservation de la masse s'écrit :

$$q_{m_e} - q_{m_s} = \frac{dM}{dt} \quad (3.3)$$

En raison des faibles variations de la masse volumique (faible compressibilité), on remplace souvent en hydraulique le débit-masse donnée par l'équation (3.3) par le débit-volume. La relation entre le débit massique et le débit volumique est donnée par :

$$q_m = \rho Q \quad (3.4)$$

Sachant que la masse contenue dans le volume de contrôle  $V$  est donnée par :

$$M = \rho V \quad (3.5)$$

En différenciant l'équation (3.5), on obtient :

$$\frac{dM}{dt} = V \frac{d\rho}{dt} + \frac{dV}{dt} \rho \quad (3.6)$$

Par définition, le module de compressibilité  $\beta$  est l'inverse de la compressibilité de l'huile à une température donnée, elle représente la diminution relative du volume due à un accroissement de pression :

$$\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \quad (3.7)$$

Les fluides utilisés en hydraulique présente une très faible variation de masse volumique en fonction de la pression, voir figure 3.7. Cette variation est suffisamment faible pour que l'on puisse pratiquement remplacer  $\rho$  par une valeur moyenne  $\rho_0$  dans le domaine d'utilisation.

En linéarisant la caractéristique  $(\rho, p)$  autour d'un point de fonctionnement, on peut déduire une relation de proportionnalité entre  $\rho$  et  $p$  donnée par :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{\beta} \quad (3.8)$$

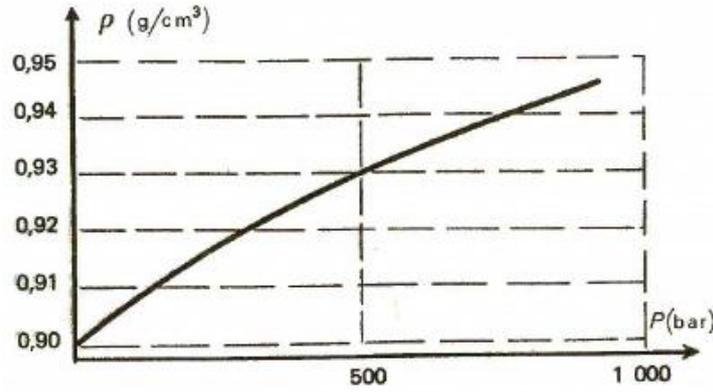


FIGURE 3.7 – Variation de la masse volumique d'un fluide hydraulique en fonction de la pression à température constante.

Cette relation introduit le module de compressibilité  $\beta$  qui varie principalement en fonction de la température et pour de faibles pressions en fonction de la quantité d'air dissout dans l'huile. Il s'agit du module de compressibilité isotherme, déduite à partir de (3.7) et (3.8) :

$$\beta = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_T = -V \frac{\partial p}{\partial V} \Big|_T \quad (3.9)$$

En considérant des faibles variations de  $\rho$  ( $\rho \approx \rho_0$ ) et en combinant les équations (3.6) et (3.7), on aboutit à

$$Q_e - Q_s = \frac{V}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{dV}{dt} \quad (3.10)$$

Le terme  $\frac{V}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$  représente le débit de compressibilité lié à la variation de pression dans la chambre et le terme  $\frac{dV}{dt}$  représente le débit utile, lié au mouvement du piston.

En appliquant cette relation pour chacune des chambres du vérin, on obtient le modèle de la partie hydraulique du vérin :

$$\begin{cases} Q_1 - Q_{12} - Q_{1f} = \frac{V_1(y)}{\beta} \frac{dp_1}{dt} + S \frac{dy}{dt}, \\ Q_2 + Q_{12} - Q_{2f} = \frac{V_2(y)}{\beta} \frac{dp_2}{dt} - S \frac{dy}{dt}, \end{cases} \quad (3.11)$$

avec  $Q_{1f}$  et  $Q_{2f}$  les débits de fuite externes des chambres 1 et 2, débits orientés de l'actionneur vers le drain et  $Q_{12}$  le débit de fuite inter-chambre orienté de la chambre 1 vers la chambre 2.

Les volumes des chambres du vérin sont définis en fonction de la position du piston :

$$\begin{cases} V_1(y) = V_0 + Sy, \\ V_2(y) = V_0 - Sy, \end{cases} \quad (3.12)$$

$V_0 = V_m + S \frac{l}{2}$  est le volume de contrôle initiale (pour  $y = 0$ ) avec  $V_m$  est le volume mort supposé identique pour chacune des chambres,  $l$  la course totale du vérin et  $S$  la section effective du piston.

Selon les données du constructeur du vérin, le débit de fuite  $Q_{12} \approx 10^{-4}$  l/min,  $Q_{1f}$  et  $Q_{2f}$  sont également très faibles à cause des paliers hydrodynamiques. En négligeant ces débits devant les débits fournis par les servodistributeurs, les équations (3.11) se réduisent au système

d'équations suivant :

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{V_1(y)}{\beta} \frac{dp_1}{dt} + S \frac{dy}{dt}, \\ Q_2 = \frac{V_2(y)}{\beta} \frac{dp_2}{dt} - S \frac{dy}{dt}, \end{cases} \quad (3.13)$$

### 3.3.2.2 Modèle de la partie mécanique de l'actionneur

La partie mécanique du modèle est obtenue en appliquant la deuxième loi de Newton au solide en mouvement, ce qui conduit à l'équation dynamique suivante :

$$M \frac{d^2y}{dt^2} = S(p_1 - p_2) - Mg - F_{frott}(y, \frac{dy}{dt}, p_1, p_2, T) - F_{ext} \quad (3.14)$$

où  $F_{frott}$  représente l'effort dû aux frottements,  $g$  constante gravitationnelle [ $m/s^2$ ] et  $F_{ext}$  l'effort extérieur appliqué au système.

Nous présentons dans la suite, les différentes étapes nécessaires pour l'identification des frottements. En effet, la modélisation et l'identification des frottements sont des problèmes difficiles, surtout dans le cas où la vitesse relative entre les deux objets en contact est très faible. Les frottements constituent en effet un phénomène complexe qui dépend souvent d'un grand nombre de paramètres tels que la rugosité des surfaces en contact, la viscosité du fluide, les pressions au niveau des chambres, la déformation des joints, l'usure, la température,... On compte donc de nombreux modèles de frottement dans la littérature, chacun de ces modèles étant adapté à un système physique différent et faisant intervenir différents paramètres.

### 3.3.2.3 Modélisation du frottement

#### 3.3.2.3.a Introduction aux phénomènes de frottement

Les différentes phases d'un cycle de frottement en fonction de la vitesse relative de deux surfaces en contact peuvent être décrites par la figure 3.8.

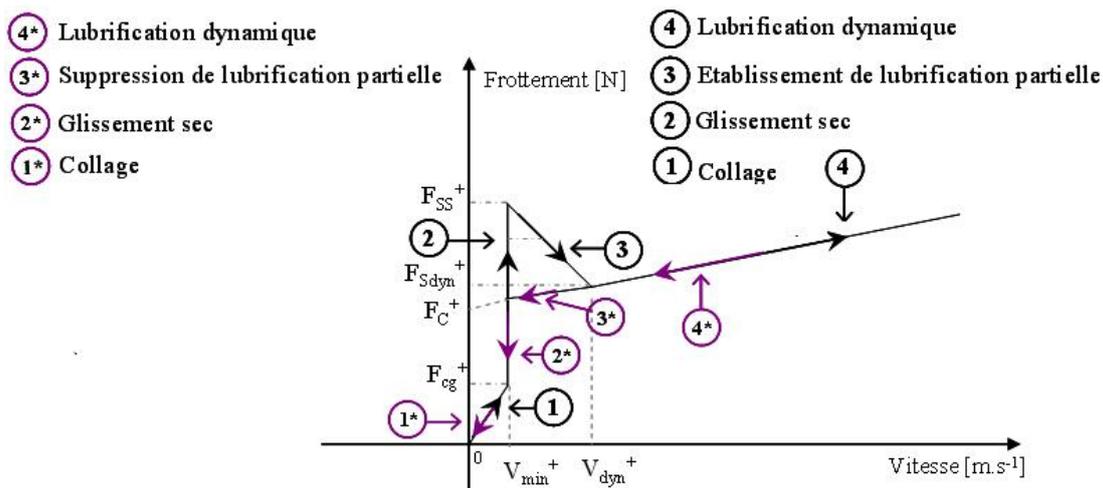


FIGURE 3.8 – Les différentes phases de l'évolution du frottement en fonction de la vitesse.

Un cycle peut être défini par huit phases, mais l'existence de chacune d'elles peut être variable en fonction du système considéré. Dans le banc d'essai utilisé, le nombre de phases peut se réduire à quatre que nous détaillerons par la suite. La figure 3.8 correspond au cas où des joints assurent l'étanchéité entre le piston et le corps du vérin. Cette figure ne décrit que l'évolution du

frottement en fonction des vitesses positives, pour les vitesses négatives, on retrouve les mêmes phases mais, dans la plupart des cas, une dissymétrie des frottements peut être observée. En considérant un sens croissant de la vitesse, le cycle du frottement décrit les phases suivantes. La phase de collage (1) est définie, pour les vitesses entre  $[0, V_{min}^+]$ . Dans ce cas, les joints restent solidaires aux parois. Au delà de la vitesse  $V_{min}^+$ , s'établit une phase de glissement sec (2) lors de laquelle l'effort de frottement équilibre la somme des forces appliquées sur le système. L'effort de frottement sec statique noté  $F_{ss}^+$  représente le point de transition entre le glissement sec et le régime de lubrification partielle. La transition entre ces deux situations est franchie quand la force exercée sur le joint devient supérieure à  $F_{ss}^+$ . L'établissement d'une lubrification se traduit généralement par une augmentation de la vitesse relative des solides ce qui provoque l'augmentation de l'épaisseur du film fluide, et en même temps, une décroissance du coefficient de frottement. Cet effet est dit "l'effet de Stribeck" (3). Pour une vitesse supérieure à  $V_{dyn}^+$ , une lubrification hydrodynamique est établie, (4). A ce stade les efforts de viscosité deviennent importants et l'effort de frottement devient proportionnel à la vitesse relative.

Pour le sens décroissant de la vitesse et jusqu'à  $V_{dyn}^+$  s'établit (4\*), une suppression de la lubrification dynamique qui résulte de la diminution de la vitesse relative des solides. Entre  $[V_{min}^+, V_{dyn}^+]$ , une suppression de la lubrification partielle (3\*) se produit, suivie par un glissement sec (2\*). Lorsque la somme des efforts exercés sur les joints devient inférieure à l'effort limite noté  $F_{cg}^+$ , la phase de collage (1\*) est alors établie.

### 3.3.2.3.b Description de quelques modèles dans la littérature

La modélisation des frottements constitue un enjeu particulier surtout pour les actionneurs à fluide sous pression qui utilisent des paliers de guidage et des dispositifs d'étanchéité. Selon les technologies utilisées, les actions de frottement peuvent représenter une part importante de l'effort moteur disponible. Certes, l'établissement d'un modèle fidèle nécessite d'affiner la description analytique des phénomènes de frottement. Dans la littérature, de nombreux modèles de frottement ont été proposés, nous introduisons les principaux dans la suite.

#### Modèle de frottement de Coulomb :

Le modèle de Coulomb, le modèle le plus ancien décrit dans la tribologie, fut établi en 1785. Coulomb a montré que la force à vaincre pour mettre en mouvement tangentiel deux solides en contact est un effort de sens opposé au mouvement et proportionnel à l'effort normal appliqué sur la surface de contact. C'est le modèle le plus simple pour décrire les phénomènes de glissement et d'adhérence. Toutefois, un tel modèle traduit mal les phénomènes de transition entre les phases de glissement et d'adhérence. Par conséquent, un problème analytique se présente dans le cas de l'intégration de cette représentation dans un modèle de commande explicite. Pour mieux décrire la transition entre les phases de glissement et d'adhérence, certains travaux se sont focalisés sur l'étude du frottement dans la zone de vitesse quasi nulle.

#### Modèle de frottement de Karnopp [75] :

Comme le modèle de Coulomb, le modèle de Karnopp comporte deux phases : collage et glissement. Le modèle proposé repose sur l'idée de définir un voisinage de la vitesse proche de zéro (pseudo-vitesse) pour laquelle la valeur de  $F_{ss}$  est saturée, voir figure 3.9. Dans la phase de collage, l'effort de frottement s'oppose au mouvement en équilibrant l'ensemble des forces extérieures appliquées sur le système. Lorsque l'ensemble de ces forces devient supérieur en valeur absolue à la force de frottement sec statique  $F_{ss}$ , on passe à la phase de glissement et Karnopp introduit le frottement de glissement  $F_C$  de valeur constante mais inférieure à  $F_{ss}$ . Dès

que la vitesse en valeur absolue devient inférieure à  $V_{min}$ , on revient à la phase de collage.

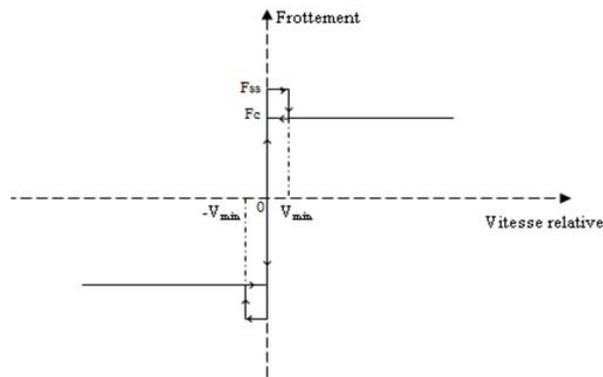


FIGURE 3.9 – Modèle de Coulomb modifié : Modèle de Karnopp

Modèle de frottement de Tustin [143] :

En 1947, Tustin propose un modèle mathématique complet où il fait apparaître le frottement de Coulomb ainsi que l'effet Stribeck et le frottement visqueux.

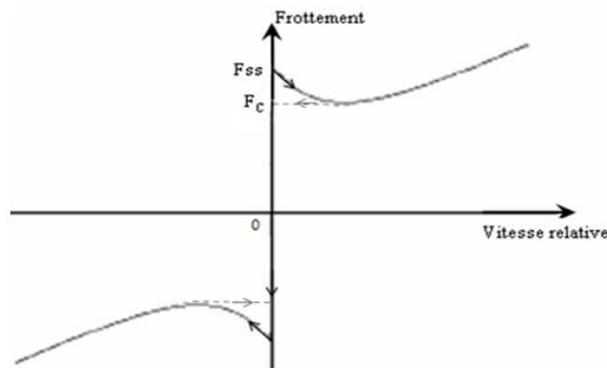


FIGURE 3.10 – Modèle de Tustin.

Le modèle de Tustin décrit par l'équation (3.15), se base sur une approximation de la transition statique/dynamique sous la forme d'une exponentielle se basant sur la vitesse caractéristique de Stribeck  $v_s$  et un facteur de forme  $\delta$  fixé le plus souvent à 1. Dans le cas général, ce facteur de forme est défini dans l'intervalle  $[0.5, 1]$  [16].

$$F_{frott}(v) = \left[ F_C + b|v| + (F_{ss} - F_C)e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^\delta} \right] \text{sign}(v) \quad (3.15)$$

Le modèle donné par Tustin met en évidence qu'après la phase de collage et pour une plage de vitesse proche de l'état quasi-statique, les surfaces commencent à se soulever ce qui provoque la diminution de l'effort de frottement (voir figure 3.10). En effet, le frottement décroît quand la vitesse augmente et tend vers un minimum qui est caractérisé par le frottement de Coulomb pour passer ensuite à une phase de lubrification dynamique où le frottement visqueux devient prépondérant. Cette décroissance est approchée par une courbe de forme exponentielle dépendante d'un taux de lubrification caractérisé par le coefficient  $\frac{1}{|v_s|}$ .

Chaque modèle que nous avons présenté complète le précédent en lui ajoutant de nouvelles composantes. Ces modèles restent des modèles quasi-statiques, alors qu'en réalité des phénomènes dynamiques existent, comme par exemple le phénomène de la déformation plastique pour des micro-déplacements connu sous le nom de "décollement des surfaces". Ceci peut induire dans certains cas, l'observation de phénomènes dit de "stick-slip" qui apparaissent suite à l'alternance de phases de décollement et de glissement.

Il existe une deuxième catégorie de modèles dits dynamiques qui reposent sur des micro-modèles décrivant les phénomènes engendrés au niveau du contact à savoir le régime collage-glissement en tenant compte des propriétés physico-chimiques des matériaux. A titre d'exemple, nous pouvons citer l'étude complète faite par Armstrong [4] où différents modèles de frottement ont été détaillés.

### 3.3.2.3.c Identification des frottements : Protocole expérimental

L'identification des paramètres d'un modèle de frottement peut se faire en ligne ou hors ligne. Ainsi, dans [135], une estimation en ligne des paramètres du frottement a été réalisée à l'aide d'un observateur non-linéaire, le but étant de compenser le frottement au niveau du contrôleur. Mais dans la plupart des cas une identification hors ligne est utilisée afin d'éviter d'augmenter la complexité de la loi de commande. Il est par contre nécessaire de refaire périodiquement la procédure d'identification des paramètres du modèle. En effet, les valeurs de ces paramètres évoluent au cours du temps puisqu'elles dépendent de certains facteurs tels que la dégradation des joints, la qualité du fluide, les conditions de fonctionnement... Toute procédure d'identification se fait autour de la vitesse faibles [35] afin d'observer les différents phénomènes.

Dans notre cas, la mesure des pressions dans les chambres du vérin ainsi que la mesure de l'accélération du piston permettent de déduire les efforts de frottement en utilisant la deuxième loi de Newton :

$$F_{frott} = S\Delta P - M(g + a) - F_{ext} \quad (3.16)$$

pour ces essais, l'effort  $F_{ext}$  est supposé nul.

Cependant, l'obstacle majeur à une bonne estimation des paramètres de frottement est le bruit de mesure. Afin d'évaluer la pertinence des valeurs obtenues, un calcul d'incertitude sur l'effort de frottement est nécessaire. Au cours de la procédure d'identification, trois capteurs sont nécessaires pour estimer les frottements. Selon les données du fournisseur, les deux capteurs de pression présentent une erreur globale inférieure à  $\pm 0.1\%$  de l'étendue de mesure (206 bars), soit une erreur de l'ordre de  $\pm 39$  N. L'accéléromètre présente une erreur de linéarité strictement inférieure à  $\pm 0.2\%$  de l'étendue de mesure ( $\pm 100$  g), soit une incertitude de  $\pm 11.6$  N sur l'estimation de la force de frottement car la masse  $M_{vide} = 5.8$  kg. Globalement, une erreur de  $\pm 50.6$  N doit être prise en compte au niveau de l'effort de frottement estimé.

La procédure expérimentale d'identification des composantes du frottement est réalisée en tenant en compte du sens de déplacement du vérin, de la vitesse relative, de la position du piston et des pressions dans les chambres de vérin. La série de mesures effectuée permet tout d'abord de mettre en évidence les différentes phases du cycle (voir figure 3.8). Pour imposer une variation de pression dans les chambres du vérin de façon à parcourir certains points du domaine de fonctionnement, nous avons fait varier la pression d'alimentation et réalisé des mesures pour 210 bars, 140 bars et 70 bars. Afin de réaliser un grand nombre de cycle de fonctionnement du système autour d'une même position du vérin et pour des conditions de travail relativement voisines, une consigne de position sinusoïdale à basse fréquence est appliquée. La figure 3.11 illustre les résultats obtenus en position centrale du vérin.

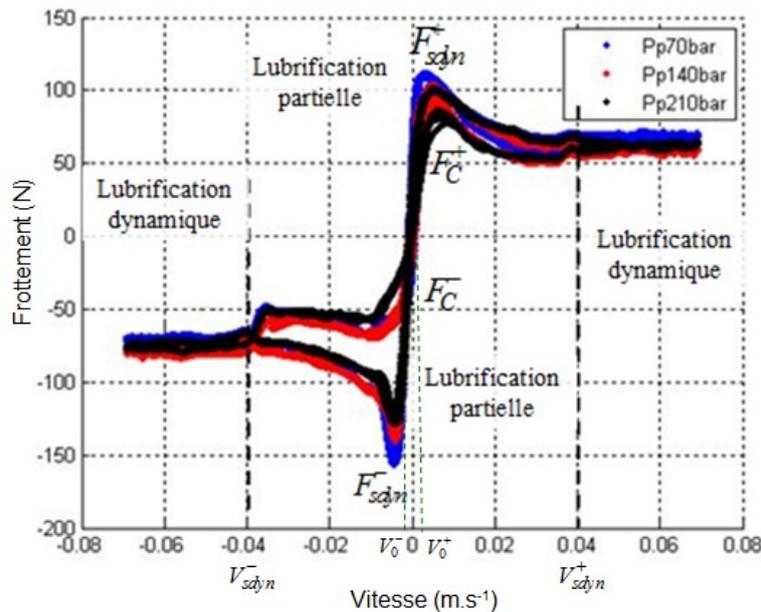


FIGURE 3.11 – Evolution du frottement en fonction de la vitesse.

A partir de cette figure, nous pouvons observer les différentes phases du cycle de frottement. Pour  $v \in [0, v_0^+]$  (respectivement pour  $v \in [v_0^-, 0]$ ), on constate la présence d'une pente raide mais non infinie autour des valeurs nulles de la vitesse qui est vraisemblablement due au type de palier fluide utilisé. En effet, le palier hydrodynamique permet de créer un film d'huile même pour des très faibles valeurs de la vitesse, ce qui explique l'absence d'une zone de frottement sec statique.

Dans l'intervalle  $[v_0^+, v_{dyn}^+]$ , une phase de lubrification partielle est mise en évidence (voir figure 3.11). Ce phénomène se traduit par une légère décroissance du coefficient de frottement de forme exponentielle en fonction de la vitesse. Lorsque la vitesse devient suffisamment élevée, le coefficient de frottement cesse de baisser, se stabilise puis augmente. Au-delà, pour des vitesses supérieures à  $V_{dyn}^+$  (respectivement inférieures à  $V_{dyn}^-$ ), le frottement est modéré et croît légèrement avec la vitesse, ce qui correspond alors à l'établissement de la phase de lubrification dynamique.

Nous constatons également que les frottements sont dissymétriques par rapport au sens du mouvement. En outre, une hystérésis d'amplitude importante est observée pour les vitesses négatives, (même si elle existe aussi pour les vitesses positives). Cet effet est plus important à faible température.

Contrairement au frottement de Coulomb  $F_C$ , nous avons pu observer que la valeur du frottement sec dynamique  $F_{s\text{dyn}}$  varie en fonction de la pression d'alimentation. Elle diminue légèrement lorsque la pression d'alimentation augmente. Bien que le frottement de Coulomb soit presque insensible à la variation de la pression d'alimentation, nous avons toutefois constaté une légère variation de sa valeur en fonction de la température.

Pour des cycles de fonctionnement identiques et dans les mêmes conditions de travail, nous remarquons une bonne répétabilité des frottements. En effet, en répétant plusieurs fois le même essai, la valeur absolue de  $F_{max}$  que peut avoir le frottement sec est de 200 N. Il est à préciser que l'effort maximal (pour une pression d'alimentation de 210 bars), fourni par le vérin

est de l'ordre de 20 kN. Autrement dit le frottement sec représente seulement 1% de l'effort maximal du vérin, il s'agit ici d'une des caractéristiques importante de ce système à "hautes performances".

#### Frottement en phase de lubrification :

Des mesures identiques ont été effectuées, pour différentes positions du piston (autour d'une position à proximité de la butée du vérin), d'autres plages de vitesse (à faible et grande vitesse), pour différentes valeurs de température (avec des temps d'utilisation plus au moins long du système) et ceci pour différentes pressions d'alimentation. Cette campagne d'essais est résumée dans le tableau récapitulatif 3.6. On constate que les phénomènes observés ainsi que les valeurs des composantes sont relativement voisines pour les différentes positions étudiées et pour les différentes vitesses des mouvements réalisés sur le vérin.

Tableau 3.6 – Identification des composantes du frottement : fonctionnement à chaud.

Paramètre	Unité	Minimum	Maximum	Moyenne
$ F_{s\text{dyn}}^+ $	N	100	140	120
$ F_{s\text{dyn}}^- $	N	120	200	160
$ F_{C_1}^+ $	N	50	80	65
$ F_{C_2}^+ $	N	40	70	55
$ F_{C_1}^- $	N	40	60	50
$ F_{C_2}^- $	N	50	80	65

Pour les valeurs des coefficients de frottement en phase de lubrification dynamique  $d^+$  et  $d^-$  (équations (3.23) et (3.19)), nous enregistrons une valeur moyenne respective de l'ordre de 200 N/m.s<sup>-1</sup> et de 315 N/m.s<sup>-1</sup>.

#### Frottement visqueux :

Sachant que la plage de vitesse durant les essais réalisés était comprise entre  $[v_{min}^e, v_{max}^e]$  (dans notre cas  $v_{min}^e = 0.07 \text{ m.s}^{-1}$  et  $v_{max}^e = -0.07 \text{ m.s}^{-1}$ ), le coefficient de frottement visqueux peut être entaché d'une erreur importante à ces faibles vitesses. Pour identifier plus précisément le frottement visqueux, il suffit de réaliser un asservissement de position pour une consigne en dents de scie. Ceci conduit à une évolution de vitesse de forme en créneaux (mouvement à vitesse constante et à accélération nulle). Il faut néanmoins réaliser ces essais à des vitesses relativement grandes pour ne pas subir les autres phénomènes de frottement. Néanmoins, l'augmentation de la vitesse reste limitée par la capacité d'accélération du vérin et sa course. Pour éviter ce type de problème, nous avons finalement choisi d'ajuster le coefficient du frottement visqueux par simulation.

En déterminant les pentes relatives à l'effet de Stribeck et celle relative au frottement estimé dans la phase de lubrification partielle, on peut déduire la pente  $b$  du frottement visqueux. Pour les vitesses positives, cette pente, notée par  $b^+$ , correspond à la plage des vitesses supérieures à  $v_{max}^e$  (pour les vitesses négatives  $b^-$  pente respective aux vitesses inférieures à  $v_{min}^e$ ). A partir de la courbe 3.11 nous déterminons un coefficient de frottement visqueux pour les vitesses positives de l'ordre de  $b^+ = 693 \text{ N/m.s}^{-1}$  et de  $b^- = 580 \text{ N/m.s}^{-1}$  pour les vitesses négatives.

Modèle de simulation :

Pour conclure, suite à l'observation des différents effets apparus dans la phase d'identification des frottements, le modèle de Tustin s'avère le mieux adapté. Pour reproduire l'hystérésis, le modèle proposé exploite deux valeurs différentes du taux de lubrification pour un même signe de vitesse en fonction de l'accélération.

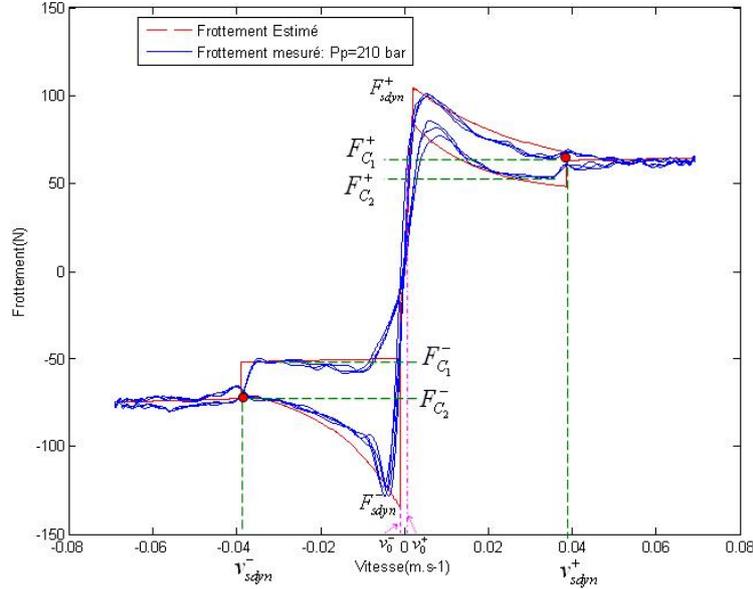


FIGURE 3.12 – Evolution du frottement mesuré et estimé en fonction de la vitesse.

Finalement, nous retiendrons pour la simulation, le modèle suivant :

Pour  $v \in [v_0^-, 0[$  :

$$F_{frott}(v) = K^- v \quad (3.17)$$

Pour  $v \in [v_{sdyn}^-, v_0^-[$  :

$$F_{frott}(v) = \begin{cases} F_{C1}^- + (F_{sdyn}^- - F_{C1}^-)e^{C1^-(v-v_0^-)}, & a > 0 \\ F_{C2}^- + (F_{sdyn}^- - F_{C2}^-)e^{C2^-(v-v_0^-)}, & a < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Pour  $v \in [v_{min}^e, v_{sdyn}^-[$  :

$$F_{frott}(v) = \left\{ F_{C2}^- + d^-(v - v_{sdyn}^-) \right. \quad (3.19)$$

Pour  $v \leq v_{min}^e$  :

$$F_{frott}(v) = b^-(v - v_{min}^e) \quad (3.20)$$

Pour  $v \in [0, v_0^+[$  :

$$F_{frott}(v) = K^+ v \quad (3.21)$$

Pour  $v \in [v_0^+, v_{sdyn}^+[$  :

$$F_{frott}(v) = \begin{cases} F_{C1}^+ + (F_{sdyn}^+ - F_{C1}^+)e^{-C1^+(v-v_0^+)}, & a > 0 \\ F_{C2}^+ + (F_{sdyn}^+ - F_{C2}^+)e^{-C2^+(v-v_0^+)}, & a < 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Pour  $v \in [v_{sdyn}^+, v_{max}^e[$  :

$$F_{frott}(v) = \left\{ F_{C1}^+ + d^+(v - v_{sdyn}^+) \right. \quad (3.23)$$

Pour  $v \geq v_{max}^e$  :

$$F_{frott}(v) = b^+(v - v_{max}^e) \quad (3.24)$$

Toutes les constantes de ce modèle sont positives. La comparaison du modèle proposé avec les valeurs relevées expérimentalement est donnée par la figure 3.12.

### 3.3.3 Modélisation du servodistributeur

Le servodistributeur est l'organe essentiel pour la synthèse des lois de commande. Dans la littérature, les deux étages du servodistributeur ont souvent été étudiés. Nous avons retenu un modèle de représentation détaillant chaque étage. Nous précisons à chaque fois les hypothèses prises en compte avant le passage vers le modèle de commande.

La modélisation du servodistributeur est généralement décomposée en deux parties principales, la première concerne la dynamique globale du servodistributeur et la deuxième se focalise pour les lois de débit hydraulique de l'étage de puissance. Le schéma bloc donné par la figure 3.13 illustre cette hiérarchisation.

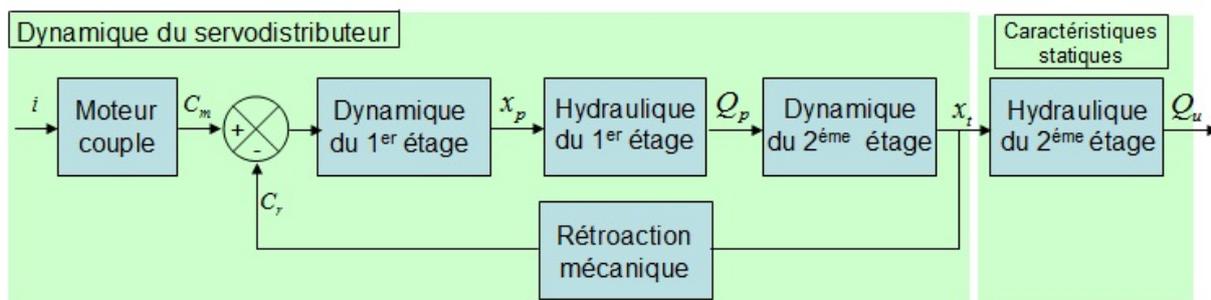


FIGURE 3.13 – Dynamique du servodistributeur.

#### 3.3.3.1 Principe de fonctionnement du servodistributeur

Selon le sens du passage du courant dans les enroulements du moteur couple, de la magnétisation des armatures du moteur résulte la création d'un couple électromagnétique  $C_m$  permettant l'inclinaison  $\theta_a$  de l'armature. Cette dernière entraîne également un déplacement  $x_p$  de la palette entre les deux buses, et le tube flexible exerce un couple de rappel  $C_{tube}$  sur cette partie mobile. Le déséquilibre des sections de passage au niveau des buses engendre un déséquilibre des pressions de pilotage du tiroir ( $p_{P_1}, p_{P_2}$ ). Le tiroir se déplace alors entraînant l'extrémité de la tige de rétroaction qui crée à son tour un couple de rappel  $C_r$  s'exerçant sur l'ensemble mobile et opposé au couple moteur.

#### 3.3.3.2 Modélisation de la partie dynamique

Le constructeur donne les caractéristiques dynamiques pour le servodistributeur utilisé (figure 3.14). Ce diagramme de Bode représente l'évolution du gain en déplacement du tiroir du distributeur et son déphasage en fonction de la fréquence lorsque le signal de commande (image de la position désirée du tiroir) varie de façon sinusoïdale à une amplitude constante. Ainsi on observe que pour une amplitude du signal d'entrée égale à 40% de la valeur maximale, la bande passante théorique est égale à 300Hz à  $-3$ dB. Ces mesures sont réalisées sur des bancs d'essais spécifiques, en utilisant un piston particulier à faible frottement et inertie réduite, sans

fuite, et dont la fréquence propre hydromécanique est très élevée.

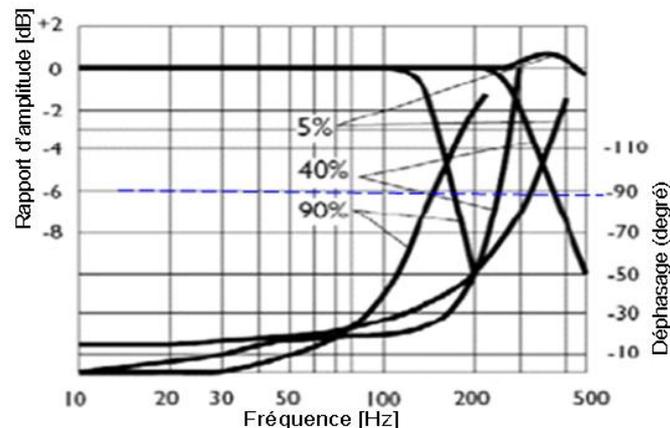


FIGURE 3.14 – Réponse en fréquence donnée par le constructeur du servodistributeur.

Ces caractéristiques mettent de toute façon en évidence le caractère fortement non linéaire de ce composant. Plusieurs approches existent pour la modélisation du comportement dynamique d'un tel composant, on peut les classer en trois grandes familles.

#### Modélisation physique :

Dans les modèles de connaissance, les paramètres ont un sens physique et le modèle est déduit de lois physiques. Ce type de modèle contient une description détaillée du processus. Cependant un modèle de connaissance peut atteindre un degré de complexité assez grand. Pour un servodistributeur à 2 étages, quelques travaux se sont basés sur ce type d'approches [87], [103], [Xu-Sid10].

#### Modélisation signal :

Une autre approche issue de la théorie de l'automatique, vise à décrire le système d'une manière globale, en se basant uniquement sur l'analyse des signaux obtenus expérimentalement. Cette approche est utilisable dans le cas où il y a un manque de données, des difficultés pour accéder aux variables d'état d'un système... Dans ce cas, le modèle est une représentation mathématique par des données entrées/sorties uniquement, appelée modèle de représentation de type "boîte noire". C'est la méthode la plus souvent utilisée dans le cas du servodistributeur.

Un modèle d'ordre 2 a été retenu dans [116] pour un servodistributeur Bosch. Dans ce travail, les paramètres du modèle sont déduits des courbes du constructeur en considérant une réponse fréquentielle moyenne des réponses relevées pour des amplitudes du signal de commande égales à 100% et à 5% de la valeur maximale  $U_n$ . Ainsi, la réponse en fréquence du système est supposée identique pendant tout le cycle de fonctionnement quelque soit l'amplitude des signaux de commande, ce qui n'est pas le cas en réalité.

Dans [111], un modèle du 3<sup>ème</sup> ordre a été proposé. La dynamique de la partie mobile {armature-palette} est considérée comme un système d'ordre deux auquel on ajoute l'effet intégrateur du tiroir de distribution. Un modèle linéaire du 4<sup>ème</sup> ordre a aussi été proposé en considérant cette fois-ci deux modèles d'ordre deux en cascade, le premier pour l'ensemble mobile et le second

pour le tiroir de distribution.

Dans ces travaux, une différence est faite entre la dynamique du tiroir et celle de la partie mobile {armature+ palette}. Dans les servodistributeur courants, la dynamique du tiroir est nettement plus élevée que celle de l'ensemble mobile. A titre d'exemple, pour un servodistributeur MOOG 76101 de bande passante à  $-3\text{dB}$  égale à 150 Hz, la dynamique du 1<sup>er</sup> étage se situe autour de 400 Hz alors que la dynamique du tiroir dépasse les 2400 Hz, [103]. Ainsi, le savoir faire du constructeur, réside dans la raideur de rétroaction de l'ensemble mobile qui a un effet important sur la dynamique du 1<sup>er</sup> étage. D'un point de vue dynamique, ceci nous permet donc de donner une certaine priorité à chaque partie constituant le servodistributeur. En premier lieu, nous pouvons nous concentrer sur la dynamique de la partie mobile pour ensuite prendre en compte l'effet intégrateur du tiroir avant de nous intéresser à la dynamique complète du tiroir.

#### Modélisation hybride :

Une dernière approche en modélisation consiste en une modélisation dite "hybride" qui vise à combiner modèles de connaissance et modèles de représentation, ce sont des modèles de type "boite grise". Ce type d'approche s'appuie d'une part sur la représentation de phénomènes physiques et d'autre part sur une caractérisation globale des effets majeurs afin de limiter la complexité du modèle proposé. Citons à titre d'exemple les travaux réalisés dans [5] où le modèle dynamique d'un servodistributeur "Rexroth 4WS.2EM10" prend en compte l'influence de l'amplitude du signal d'entrée ainsi que celle de la pression d'alimentation et l'effet de l'hystérésis du moteur couple.

Dans ce type d'approche, on retient généralement les hypothèses suivantes pour la modélisation dynamique d'un servodistributeur. Ainsi, on néglige :

- les volumes de pilotages du tiroir,
- les forces hydrodynamiques sur le tiroir (forces de jet),
- les efforts visqueux au niveau du tiroir,
- l'effort exercé par la tige flexible sur le tiroir.

#### Autres effets importants :

Pour être représentative dans un large spectre de fonctionnement, une modélisation du 1<sup>er</sup> étage du servodistributeur doit aussi prendre en compte d'autres phénomènes :

- les effets de saturation de l'étage pilote aux grandes amplitudes du signal d'entrée,
- l'hystérésis du moteur couple aux faibles amplitudes,
- la relation non linéaire débit-pression de l'étage pilote (hydraulique du 1<sup>er</sup> étage).

La plupart du temps, la partie hydraulique du 1<sup>er</sup> étage est considérée comme un gain pur reliant le débit de pilotage  $Q_p$  à la position de la palette  $x_p$ . En réalité, ce comportement est perturbé par la différence de pression de pilotage résultant sur le tiroir et on doit considérer que le débit de pilotage est une fonction de la position de la palette ( $x_p$ ) et de cette différence de pression de pilotage ( $\Delta p_P$ ), voir figure 3.15.

Un grand nombre de modèle est proposé dans la littérature pour la représentation de l'hystérésis magnétique. Certains sont purement mathématiques, d'autres sont basés sur des considérations physiques. Généralement, le modèle le plus simple consiste à s'appuyer sur des équations différentielles. On trouve aussi dans [87], un modèle plus simple dans lequel on considère que la largeur du cycle d'hystérésis est proportionnelle à l'amplitude de la commande. Dans [5],

l'équation différentielle intègre un paramètre de forme qui permet d'ajuster la courbure et la pente initiale du cycle d'hystérésis. Cependant, l'inconvénient de ces deux types de modèle est qu'ils nécessitent un grand nombre de paramètres à identifier, puisqu'ils sont fonction des conditions de travail (température).

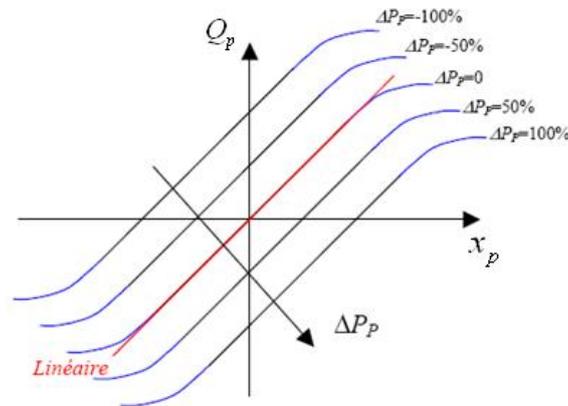


FIGURE 3.15 – Variation du débit du premier étage hydraulique, de type buse-palette en fonction de  $x_p$  et de  $\Delta P_p$ .

#### Modélisation retenue :

Nous avons mis en place une méthode permettant de développer un modèle Quasi-Linéaire à Paramètres Variables (QLPV) traduisant le comportement dynamique du servodistributeur, tout en tenant compte des conditions de fonctionnement (signal d'entrée et pression d'alimentation). Pour ce modèle QLPV, les paramètres utilisés sont une combinaison des géométries du servodistributeur. L'approche finalement retenue correspond donc à deux modèles d'ordre deux. C'est une approche du type "boîte grise" au cours de laquelle nous avons cherché à identifier les paramètres du modèle, qui ne sont autres qu'un regroupement des paramètres géométriques du servodistributeur, en fonction de la commande et de la pression d'alimentation. Cependant, la validation des résultats obtenus n'a pu être effectuée puisqu'elle nécessitait un banc d'essai spécifique. Cette approche est détaillée dans l'annexe D.

Nous nous sommes donc appuyés sur des essais dynamiques réalisés chez le constructeur du servodistributeur ("MOOG France" à Rungis). Sur le banc d'essai, la charge du servodistributeur était représentée par une vanne. Lors des essais la vanne peut être fermée afin de réaliser des essais sans charge (sans débit). Le servodistributeur est placé sur un banc de test modèle ("valise") et les réponses sont analysées par un transféromètre (Solartron). En fixant l'amplitude et la fréquence du signal de commande  $u$ , nous avons enregistré manuellement le gain en  $dB$  et le déphasage entre le signal d'entrée et la tension image de la position du tiroir  $x_t$ , donnés par le transféromètre.

Les conditions de mesure sont énumérées ci-dessous :

- $p_p = 210$  bars,
- $T = 55^\circ C$  : température moyenne de l'huile relevée au niveau du retour,
- amplitude du signal d'entrée en ( $\%U_n$ ) : 5, 10, 25, 40, 75 et 100,
- fréquence du signal d'entrée : entre 0.1 Hz et 1 kHz.

Suite à ces tests, nous avons alors développé un modèle dynamique de type "boîte noire" valable uniquement pour ces conditions de fonctionnement. Nous avons évité de choisir les réponses relatives aux petites ( $5\%U_n$ ) et aux grandes amplitudes ( $100\%U_n$ ), afin d'écartier les non-linéarités importantes telles que les saturations de l'étage pilote et l'hystérésis. La courbe pour  $40\%$  de

$U_n$  correspond donc au cas le plus favorable pour l'identification d'un modèle linéaire du servodistributeur.

Un modèle d'ordre 2 a été retenu après analyse des données expérimentales et l'identification des paramètres du modèle s'est basée sur la méthode des moindres carrés pour le critère quadratique suivant :

$$\min_{\theta} = [(G_{d_{be}} - G_{d_{bm}})^2 + P_O(Ph_e - Ph_m)^2] \quad (3.25)$$

$\theta$  est le paramètre du modèle à estimer,  $G_{d_{bm}}$  et  $G_{d_{be}}$  sont les gains mesurés et estimés en (dB) de la réponse fréquentielle du servodistributeur,  $Ph_m$  et  $Ph_e$  sont les phases mesurées et estimées en degré de cette réponse.  $P_O$  est une pondération de valeur 0.01 en  $(dB/^\circ)^2$ . Cette valeur permet d'avoir le meilleur compromis entre la réponse en gain et celle en phase.

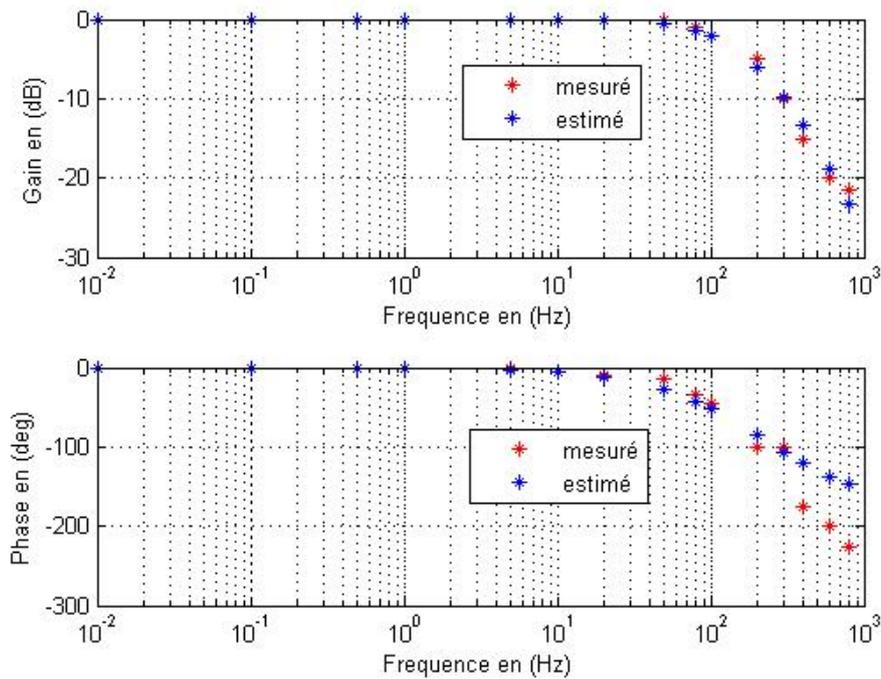


FIGURE 3.16 – Réponse fréquentielle mesurée et estimée

L'identification (voir figure 3.16) conduit à un gain statique égale à 1, une pulsation de 1403.4 rad/s et un coefficient d'amortissement égale à 1.13. Le modèle d'ordre 2 donne une bonne approximation des valeurs de gains quelque soit la fréquence. En revanche, pour une fréquence supérieure à 300 Hz, l'erreur sur l'estimation de la phase devient importante.

### 3.3.3.3 Modélisation de la partie statique

La fidélité de la représentation des caractéristiques statiques est sans doute le point le plus critique du point de vue de la modélisation des modulateurs de puissance. Celle-ci nécessite la représentation fidèle de plusieurs caractéristiques telles que la caractéristique de gain en débit, la caractéristique de gain en pression et la caractéristique de débit de fuite<sup>1</sup>. En effet selon la configuration du tiroir (tiroir en découverture ou en recouvrement ou encore en position centrale<sup>2</sup>), la forme de ces caractéristiques change. Ainsi, une configuration de découverture engendre des débits importants, ce qui conduit à une augmentation de la pente du gain en débit

1. voir annexe E pour les 3 caractéristiques

2. la position dite "centre critique" correspond à la zone de transition entre recouvrement et découverture

au voisinage de la position centrale. Au contraire, une configuration en recouvrement entraîne la présence d'une zone morte dans la caractéristique de gain en débit. Si ces effets ne sont pas bien reproduits en simulation, le comportement statique est erroné et les erreurs en simulation sont rapidement significatives.

#### Revue de la littérature :

Dans [87], [103], [XuSid10] des modèles non linéaires précis mais complexes, ont été proposés. Ces modèles font intervenir les éléments géométriques du composant tels que le jeu fonctionnel du tiroir, la largeur de la fente mais aussi le rayon d'arrondi des arrêtes du tiroir et du fourreau. Les modèles d'écoulement dépendent également de la configuration des orifices du distributeur fonction du déplacement du tiroir (pour une ouverture positive, on parle alors de "découvrement", pour une ouverture négative on est en "recouvrement"). Les débits sont calculés à partir des différentes lois issues de la mécanique des fluides. Toutefois, une étape d'ajustement paramétrique reste nécessaire afin de reproduire le plus fidèlement possible les caractéristiques.

L'écoulement en configuration de recouvrement est considéré comme laminaire (Poiseuille) dans [103], ce régime prenant naissance dans le jeu qui existe entre le tiroir et le fourreau. Un autre modèle, défini dans [87], suppose qu'en position de recouvrement on a un régime turbulent dans la zone d'entrée avant d'observer un régime laminaire au niveau du recouvrement.

Dans [118], l'auteur a proposé un modèle intermédiaire entre les deux classes déjà citées [87] et [103], permettant de reproduire fidèlement le gain en pression et la caractéristique de débit de fuite tout en restant utilisable pour la synthèse de commande. En effet, l'auteur considère le modèle classique d'une restriction en recouvrement, puis celui d'une restriction en découvrement comme dans [87]. Afin d'assurer la continuité de l'expression de débit entre les deux cas de configuration, l'auteur ajoute alors à l'expression associée dans le cas de découvrement un terme qui décroît rapidement avec la longueur de recouvrement. Toutefois ce modèle devient rapidement complexe dans le cas d'un modulateur dissymétrique.

Dans la littérature, on trouve d'autres approches qui se basent sur des modèles empiriques ou semi-empiriques. Nous pouvons citer les travaux réalisés au sein de notre laboratoire dans le cadre des distributeurs pneumatiques [122], [12]. En effet, cette approche consiste à obtenir le modèle des débits sous la forme de courbes construites à partir des données expérimentales. A partir de ces données, une caractéristique 3D peut être tracée. Cette caractéristique correspond à la mesure du débit en régime stationnaire en fonction de la tension d'entrée et des pressions. Cette caractérisation globale peut être approximée afin d'avoir pour les débits des relations polynomiales affines en la commande.

Une deuxième approche semi-empirique est présentée dans [116]. Elle exploite d'une part la structure des équations théoriques du débit et d'autre part, des mesures expérimentales du gain en débit, du gain en pression et du débit de fuite pour construire une pseudo-section et une conductance hydraulique de chaque restriction. Le modèle ainsi construit se base sur l'hypothèse que les mesures de la courbe de gain en pression et du débit de fuite correspondent à un écoulement laminaire. En revanche, ce type de modèle est trop complexe pour qu'il soit exploitable pour la synthèse de contrôleur.

Bien que généralement les modèles d'écoulement utilisés ([87] et [103]) dépendent de la configuration (découvrement et recouvrement), dans [5] et [XuSid10] a été élaboré un modèle paramétrique de l'écoulement dans le distributeur basé sur une forme générale du débit dans un orifice. Ce modèle assure donc la continuité entre le recouvrement et le découvrement des ori-

fices et reste valable quelque soit le type d'écoulement. Toutefois, cette approche utilise encore différentes grandeurs géométriques et reste difficile à exploiter pour l'élaboration de lois de commande.

Approche retenue :

Initialement, nous avons choisi de réaliser l'identification d'un modèle statique du servodistributeur dans lequel les caractéristiques en débit aurait été approchées par une fonction polynomiale dépendant de la pression et affine en la commande. Cette approche analogue à celle développée au laboratoire pour les distributeurs pneumatiques ne peut aboutir qu'avec un travail important de mesure s'appuyant sur des bancs d'essais spécifiques. Un certain nombre de ces essais a déjà été effectué chez MOOG et les résultats ont été publiés dans un rapport interne au laboratoire [Sidhom09b]. Toutefois, des essais supplémentaires doivent être réalisés afin de pouvoir tracer la caractéristique bidimensionnelle globale.

Pour cela, nous avons choisi de décrire le modèle statique du servodistributeur par les équations physiques [XuSid10]. Soit l'ouverture  $X_i$  de l'orifice  $i$  du tiroir donnée par :

$$X_i = X_{i0} + \varepsilon_i X_t \quad (3.26)$$

avec  $X_t$  la position du tiroir,  $X_{i0}$  l'ouverture de l'orifice  $i$  lorsque le tiroir est au centre critique et  $\varepsilon_i$  paramètre prenant la valeur 1 si l'ouverture de l'orifice  $i$  augmente avec l'augmentation de  $X_t$ , sinon sa valeur est égale à  $-1$ .

Lors du déplacement du tiroir, l'ouverture de passage du fluide, de forme annulaire, de largeur  $X_{si}$  et de longueur  $l_f$  est exprimée par l'équation suivante :

$$X_{si} = \sqrt{X_i^2 + (X_0 + c)^2} - X_0 \quad (3.27)$$

où  $X_0$  diamètre d'arrondi des arêtes des restrictions et  $c$  le jeu radial entre le tiroir et la chemise.

Notons que selon la direction du déplacement du tiroir, le passage du fluide est décrit par deux modes : un mode de découvrement (ouverture positive :  $X_i > 0$ ) ou un mode de recouvrement (ouverture négative :  $X_i \leq 0$ ). Selon le mode, la surface de passage du fluide prend des expressions différentes. Ainsi, en cas de découvrement ("dec"), cette surface est donnée par :

$$S_{dec} = n_f l_f X_{si} \quad (3.28)$$

$n_f$  est le nombre de fentes et  $l_f$  est la largeur d'une fente.

En cas de recouvrement,  $X_{si}$  devient égale à la valeur du jeu radial  $c$  et dans ce cas la surface est exprimée comme suit :

$$S_{rec} = n_f l_f c \quad (3.29)$$

Pour exprimer l'équation de débit, nous considérons aussi les deux configurations possibles. Donc lorsque l'orifice est en configuration de découvrement, l'équation qui modélise l'écoulement dans cet orifice, peut être exprimée par, [108] :

$$Q_{dec} = C_d S_{dec} \sqrt{\frac{2}{\rho} |\Delta p| \text{sign}(\Delta p)}, \quad X_i > 0 \quad (3.30)$$

Le coefficient de débit  $C_d$ , dépend du régime de l'écoulement (laminaire ou turbulent), il est essentiellement lié à la valeur du nombre de Reynolds  $Re$ . Ce coefficient est décrit par la relation

ci-dessous [108] :

$$C_d = \begin{cases} \delta\sqrt{Re}, & \text{si } Re < Re_t \\ C_{d\infty}, & \text{si } Re \geq Re_t \end{cases} \quad (3.31)$$

avec  $\delta$  constante du débit laminaire et  $Re_t$  le nombre de Reynolds de transition défini par  $(\frac{C_{d\infty}}{\delta})^2$ .

En recouvrement, le débit peut être considéré inversement proportionnel à la longueur de recouvrement  $L_t$  et ceci reste valable pour les grands recouvrements. Pour considérer aussi le cas de faible recouvrement et afin d'assurer la continuité de coefficient de débit entre les deux modes de fonctionnement (découvrement et recouvrement), l'expression du débit dans ce cas peut être donnée par [XuSid10] :

$$Q_{rec} = \frac{n_f l_f c^3}{12\mu(X_{i0} - X_i + K_I \tanh(\frac{-X_i}{L_t}))} |\Delta p|, \quad X_i \leq 0 \quad (3.32)$$

$K_I$  est une constante permettant d'assurer la continuité du débit. La détermination de ce paramètre peut être formulée par les conditions suivantes :

$$\lim_{X_i \rightarrow 0} Q_{dec} = \lim_{X_i \rightarrow 0} Q_{rec} \quad \text{et} \quad \lim_{X_i \rightarrow 0} Q'_{dec} = \lim_{X_i \rightarrow 0} Q'_{rec} \quad (3.33)$$

### 3.3.4 Modèle Embase

L'embase est constituée d'un ensemble de conduites mettant en communication les ports d'utilisation des servodistributeurs avec les ports du vérin en fonction du mode de fonctionnement sélectionné :

- mode(1) : le vérin est piloté par un seul servodistributeur,
- mode(2) : le vérin est piloté par les 2 servodistributeurs en parallèle,
- mode(3) : chacune des chambres est contrôlée par un seul servodistributeur.

La figure 3.17 illustre la circulation du fluide pour ces trois modes de fonctionnement.

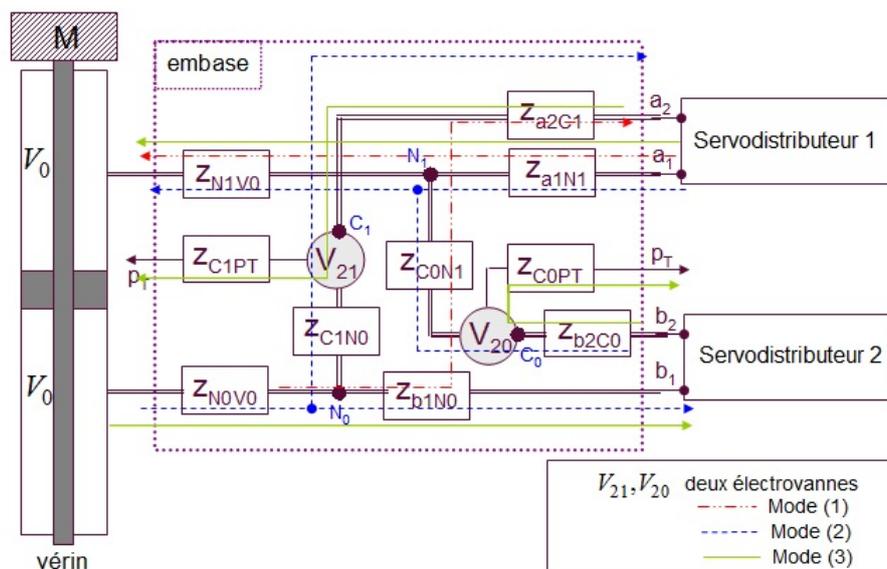


FIGURE 3.17 – Schéma synoptique précisant le passage du fluide pour les 3 modes.

Chaque tronçon du circuit est schématisé par une impédance notée  $Z_i$ . Cette figure fait apparaître cinq tronçons du côté du servodistributeur 1 (il en est de même pour le servodistributeur

2) :

- tronçon  $a_1 - N_1$  : du port  $a_1$  du servodistributeur 1 vers la bifurcation  $N_1$ ,
- tronçon  $N_1 - V_0$  : de la bifurcation  $N_1$  vers le port de la chambre du vérin,
- tronçon  $a_2 - C_1$  : du port  $a_2$  du servodistributeur 1 vers le port  $C_1$  de la vanne  $V_{21}$ ,
- tronçon  $C_1 - N_0$  : du port  $C_1$  de la vanne  $V_{21}$  vers la bifurcation  $N_0$ ,
- tronçon  $C_1 - p_T$  : du port  $C_1$  de la vanne  $V_{21}$  vers le réservoir.

En raison de la géométrie de ces circuits, le volume de fluide à considérer dans l'embase et les pertes de charge induites ne sont pas négligeables et agissent sur le comportement dynamique du système. Toutefois, du fait des diamètres de ces circuits et de leur faible longueur, nous pouvons tout à fait négliger les effets inertiels du fluide dans l'embase. Il est en de même pour les pertes de charge dans les vannes et les réducteurs de débit qui ont été dimensionnés pour ne pas influencer le système.

### 3.3.4.1 Effet du volume de l'embase

La figure 3.18 illustre le cas où les deux chambres du vérin sont contrôlées par un seul servodistributeur, (mode (1)).

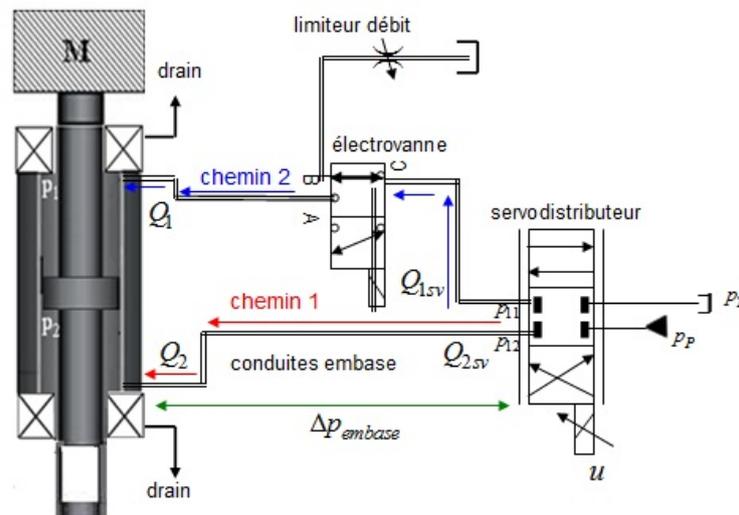


FIGURE 3.18 – Schéma synoptique du vérin contrôlé par un seul servodistributeur : mode(1).

Dans ce mode, le parcours du fluide entre le servodistributeur et les chambres du vérin n'est pas symétrique (chemin 1 et chemin 2). Dans les autres modes (mode (2), mode(3)), les circuits sont symétriques ainsi le volume additionnel est identique pour chaque chambre. Le tableau ci-dessous donne les valeurs calculées des volumes équivalents pour chaque parcours en fonction du mode de fonctionnement.

Tableau 3.7 – Volumes des conduites de l'embase.

Mode de fonctionnement	mode(1)	mode(2)	mode (3)	$V_0$
Volume (m <sup>3</sup> )	$V_{e1} = 7.1973 \cdot 10^{-6}$	$V_{e1} = 3.7822 \cdot 10^{-5}$	$V_{e1} = 3.0625 \cdot 10^{-5}$	$1.7014 \cdot 10^{-4}$
Volume (m <sup>3</sup> )	$V_{e2} = 3.0625 \cdot 10^{-5}$	$V_{e2} = 3.7822 \cdot 10^{-5}$	$V_{e2} = 3.0625 \cdot 10^{-5}$	$1.7014 \cdot 10^{-4}$

$V_{e1}$ , respectivement  $V_{e2}$  est le volume du circuit vers la chambre 1, respectivement vers la chambre2, pour les différents modes de fonctionnement. Pour le mode (1), ces circuits sont

représentés sur la figure 3.18 (chemin 1 et 2).

Sachant que le volume initial de contrôle  $V_0$  du vérin (en position centrale) est égal à  $1.7014 \cdot 10^{-4} \text{m}^3$ , nous pouvons donc conclure que les volumes à considérer pour l'embase ne sont pas négligeables. Ces volumes peuvent être ajoutés aux volumes morts de chacune des chambres du vérin. Notons que dans le mode (1), les volumes morts ne seront plus identiques.

### 3.3.4.2 Effet des pertes de charge de l'embase

La perte de charge  $\Delta p_{embase}$  induite par l'embase dépend de la géométrie du circuit et des débits d'utilisation ( $Q_{1sv}$  et  $Q_{2sv}$ ) et donc de la commande des servodistributeurs. Cette perte de charge ne sera donc significative que pour des commandes importantes.

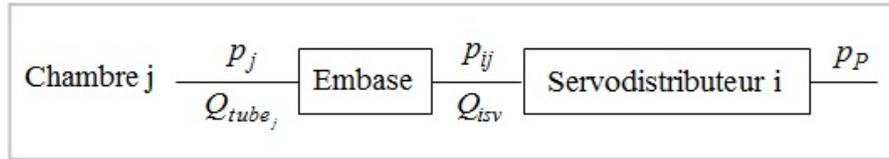


FIGURE 3.19 – Schéma simplifié chambre-embase-servodistributeur.

En faisant l'hypothèse que les pressions restent comprises entre  $p_P$  et  $p_T$  et en considérant le cas où  $u_i \geq 0$ , le débit fourni par le servodistributeur  $i$   $Q_{i_{sv}}$  est de la forme :

$$Q_{i_{sv}} = \alpha u \sqrt{p_P - p_{ij}} \quad (3.34)$$

Si on suppose que le débit est également turbulent dans les conduites, on a donc :  $Q_{tube_j} = C \sqrt{p_{ij} - p_j}$ .

En régime permanent, l'équation de continuité des débits s'écrit alors :

$$Q_{i_{sv}} = Q_{tube_j} \implies \alpha u \sqrt{p_P - p_{ij}} = C \sqrt{p_{ij} - p_j} \quad (3.35)$$

A partir de 3.35, nous pouvons exprimer  $p_{ij}$  par :

$$p_{ij} = \frac{C^2 p_j + \alpha^2 u_i^2 p_P}{C^2 + \alpha^2 u_i^2} \quad (3.36)$$

En remplaçant  $p_{ij}$  par (3.36) dans l'expression de  $Q_{i_{sv}}$ , on obtient :

$$Q_{i_{sv}} = \alpha u_i C_j(u_i) \sqrt{(p_P - p_j)} \quad (3.37)$$

Où

$$C_j(u_i) = \frac{C}{\sqrt{C^2 + \alpha^2 u_i^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{C^2} u_i^2}} \quad (3.38)$$

Le débit nominale  $Q_n$  des servodistributeurs étant de 19 l/min pour une perte de charge nominale  $\Delta p_n$  par orifice égale à 70 bars et une tension d'entrée  $u_n = 10 \text{ V}$ , nous pouvons en déduire la valeur de  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{Q_n}{u_n \sqrt{\Delta p_n}} = 1.2 \cdot 10^{-8} [\text{m}^3/\text{sVPa}] \quad (3.39)$$

Cette relation permettra par la suite de modifier les caractéristiques statiques du servodistributeur pour tenir en compte des pertes de charge de l'embase et du mode de fonctionnement.

### 3.3.5 Modèle de commande

A partir du modèle de simulation développé précédemment, nous sommes amenés à introduire certaines hypothèses afin d'obtenir un modèle de commande qui sera utilisé par la suite.

Le modèle de frottements présenté est assez complexe pour l'élaboration des stratégies de commande. Nous négligeons alors l'effet d'hystérésis et nous supposons que le frottement est symétrique par rapport au sens du déplacement. La présence d'une pente et non d'une discontinuité autour des valeurs nulles de la vitesse, nous a permis d'approximer le frottement sec par une fonction tangente hyperbolique. Ainsi, le modèle de commande retenu pour le frottement sec est donné par :

$$F_{fs}(v) = [F_{sdyne} + (F_{sdyne} - F_C)e^{(-C|v|)}] \tanh(v(t)) \quad (3.40)$$

Une représentation de ce modèle est donnée dans la figure 3.20.

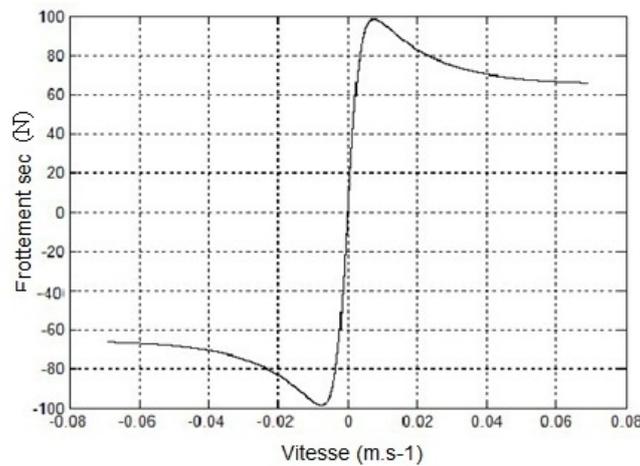


FIGURE 3.20 – Modèle des frottements secs.

En ajoutant l'effet du frottement visqueux, l'expression complète du frottement est donnée par :

$$F_{frott}(v) = bv + F_{fs}(v) \quad (3.41)$$

Le coefficient de frottement visqueux  $b$  est une valeur moyenne des deux coefficients déjà donnés pour les vitesses positives et négatives (paragraphe 3.3.2.3.c, page 121).

Le modèle statique du servodistributeur utilisé pour la commande est déduit des équations physiques données dans le modèle retenu en tenant compte des hypothèses sur le régime d'écoulement. Ainsi, nous considérerons un régime laminaire quand la section de passage modulée par la commande est petite. Dans ce cas, le débit fourni est équivalent aux débits de fuite. Comme ces débits de fuite sont négligés dans le modèle de la partie hydraulique de l'actionneur (3.13), nous n'avons retenu que le débit en régime turbulent. Un modèle basé sur ces hypothèses constitue la forme la plus simple des caractéristiques en débit dans le distributeur [108], à partir de (3.30), ce modèle s'exprime alors de la façon suivante :

$$Q_{1sv}(x_t, p_{11}, p_P, p_T) = \begin{cases} C_{d1} S_t(x_t) \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{|p_P - p_{11}|} \text{sign}(p_P - p_{11}), & x_t \geq 0 \\ C_{d1} S_t(x_t) \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{|p_{11} - p_T|} \text{sign}(p_{11} - p_T), & x_t < 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

$$Q_{2sv}(x_t, p_{12}, p_P, p_T) = \begin{cases} C_{d2} S_t(x_t) \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{|p_{12} - p_T|} \text{sign}(p_{12} - p_T), & x_t \geq 0 \\ C_{d2} S_t(x_t) \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{|p_P - p_{12}|} \text{sign}(p_P - p_{12}), & x_t < 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

Les coefficients de débit  $C_{d1}$  et  $C_{d2}$  ont été étudiés par Von Mises [108] qui a donné une représentation de ces coefficients à partir de données expérimentales. Les courbes obtenues montrent que ces coefficients dépendent des dimensions de l'orifice et du nombre de Reynolds autrement dit du régime d'écoulement (laminaire, transition ou turbulent). Pour un régime laminaire, ce coefficient est proportionnel à la racine carré du nombre de Reynolds. En régime turbulent ce coefficient prend une valeur constante. Selon la forme des arrêtes des orifices de passage, la valeur de cette constante est comprise entre 0.816 et 0.98, [138]. Nous supposons que le servodistributeur est parfaitement symétrique, c'est-à-dire  $C_{d1} = C_{d2} = C_d$ .

La section de passage du tiroir  $S_t$  est une fonction qui dépend essentiellement de  $x_t$ . En réalité, elle dépend aussi des modes, découverture ( $x_t \geq 0$ ) ou recouvrement ( $x_t < 0$ ), pour lesquels la section de passage évolue de façon différente. En recouvrement cette section dépend essentiellement du jeu radial entre le tiroir et la chemise ; en découverture s'ajoute à ce jeu radial, l'ouverture de l'orifice ainsi que l'arrondi de l'arrête. Si on néglige le jeu radial et l'arrondi de l'arrête, il est alors possible d'exprimer la section de passage par une relation de proportionnalité avec la position du tiroir :

$$S_t(x_t) = K_t x_t \quad (3.44)$$

En régime stationnaire :

$$x_t = K_{sv} u \quad (3.45)$$

le gain  $K_{sv}$  relie la commande à la position du tiroir. Il est déterminé à partir de la caractéristique du constructeur donnant  $x_t$  en fonction de  $u$ .

Nous négligeons aussi la dynamique du servodistributeur par rapport à celle de l'actionneur.

Pour tenir en compte de l'effet des pertes de charge dans l'embase, l'expression (3.38) doit être considérée dans le modèle statique du distributeur. En considérant la relation (3.39) et à partir des comparaisons entre les résultats expérimentaux et de simulations, nous avons pu déterminer une valeur de  $C$  de l'ordre de  $10^5 [\text{m}^3/\text{s}^{-1}/\text{Pa}]$ . Le terme  $\frac{\alpha^2}{C^2 u^2}$  peut donc être négligé devant 1. En utilisant les équations (3.44) et (3.45), nous pouvons alors écrire les équations de débit sous une forme tenant en compte les pertes de charge dans l'embase :

$$\begin{cases} Q_{1sv} = Q_1 = \alpha u C_1^* \psi_1(p_1, p_P, p_T, \text{sign}(u)) \\ Q_{2sv} = Q_2 = \alpha u C_2^* \psi_2(p_2, p_P, p_T, \text{sign}(u)) \end{cases} \quad (3.46)$$

où :

$$\begin{cases} \psi_1(p_1, p_P, p_T, \text{sign}(u)) = [h(u)G_{11}(\cdot) + h(-u)G_{12}(\cdot)] \\ \psi_2(p_2, p_P, p_T, \text{sign}(u)) = [h(u)G_{21}(\cdot) + h(-u)G_{22}(\cdot)] \end{cases} \quad (3.47)$$

avec :

$$\begin{cases} G_{11}(\cdot) = \sqrt{|p_P - p_1|} \text{sign}(p_P - p_1) \\ G_{12}(\cdot) = \sqrt{|p_1 - p_T|} \text{sign}(p_1 - p_T) \\ G_{21}(\cdot) = \sqrt{|p_2 - p_T|} \text{sign}(p_2 - p_T) \\ G_{22}(\cdot) = \sqrt{|p_P - p_2|} \text{sign}(p_P - p_2) \end{cases} \quad (3.48)$$

$$\alpha = K_t K_{sv} \sqrt{\frac{2}{\rho}} C_d \quad (3.49)$$

et

$$h(u) = \frac{1 + \text{sign}(u)}{2} \quad (3.50)$$

Pour les modes (2) et (3),  $C_1^* = C_2^* = C^*$  en raison de la symétrie du circuit.

Finalement, les volumes de l'embase sont pris en compte en modifiant les équations des volumes (3.12) par les suivantes :

$$\begin{cases} V_1(y) = V_{01} + Sy, \\ V_2(y) = V_{02} - Sy, \end{cases} \quad (3.51)$$

avec  $V_{01} = V_m + V_{e1} + S\frac{l}{2}$  et  $V_{02} = V_m + V_{e2} + S\frac{l}{2}$ . Rappelons que  $V_{01}$  et  $V_{02}$  restent identiques pour les modes (2) et (3).

Pour résumer, le modèle de commande retenu repose sur les hypothèses suivantes :

- le comportement du système est supposé isotherme,
- les pressions dans les chambres sont considérées homogènes,
- la dynamique du servodistributeur est négligée devant celle du vérin,
- l'écoulement est décrit par un régime turbulent, les coefficients de débits  $C_{d1} = C_{d2}$  sont constants,
- le servodistributeur est parfaitement symétrique  $C_{d1} = C_{d2} = C_d$ ,
- le frottement est symétrique par rapport au sens de déplacement et l'effet d'hystérésis n'est pas pris en compte,
- les débits de fuite externes et inter-chambres sont négligés.

Le modèle de commande peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{X} = f(X) + g(X)U \quad (3.52)$$

avec  $X = [y \ v \ p_1 \ p_2]^T$ ,  $f(X)$  et  $g(X)$  des champs de vecteurs suffisamment différentiables considérés comme localement Lipschitziens (par rapport au domaine physique), et  $U$  le vecteur de commande.

Afin de ne pas alourdir l'écriture, la variable temps  $t$  sera omise dans les vecteurs d'état, de commande et de sortie.

Selon le nombre d'entrées (en fonction du mode de fonctionnement sélectionné) deux modèles affines en la commande peuvent être retenus. Pour le modèle mono-entrée (mode (1)), les champs de vecteurs  $f(X)$  et  $g(X)$  sont respectivement donnés par (3.53) et (3.54) :

$$f(X) = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{M} [S(p_1 - p_2) - Mg - bv - F_{fs}(v) - F_{ext}] \\ -\frac{\beta}{V_1(y)} Sv \\ \frac{\beta}{V_2(y)} Sv \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

et

$$g(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\beta}{V_1(y)} \alpha C_1^* \psi_1(p_1, p_P, p_T, \text{sign}(u)) \\ -\frac{\beta}{V_2(y)} \alpha C_2^* \psi_2(p_2, p_P, p_T, \text{sign}(u)) \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Dans le cas où le vérin est piloté par les deux servodistributeurs en parallèle (mode(2)), les deux commandes sont considérées de même signe  $u_1 = u_2 = u$ . Puisque les deux modulateurs de puissance sont supposés parfaitement symétriques, le débit est donc simplement doublé par rapport à celui donné par un seul modulateur. Il suffit donc de multiplier par 2 les deux fonctions  $\psi_1(\cdot)$  et  $\psi_2(\cdot)$ .

Pour le modèle de commande multi-entrée (mode(3)), le champ de vecteur  $f(X)$  est identique au cas précédent mais le champ de commande est donné par  $g(X) = (g_1(X) \ g_2(X))$  :

$$g(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\beta}{v_1(y)} \alpha C^* \psi_1(p_1, p_P, p_T, \text{sign}(u_1)) & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{v_2(y)} \alpha C^* \psi_2(p_2, p_P, p_T, \text{sign}(u_2)) \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

avec le vecteur de commande  $U = (u_1 \ u_2)^T$ .

### 3.4 Etude préliminaire : analyse linéaire

L'asservissement de position est souvent utilisé, dans différentes applications industrielles. Afin de concevoir un contrôleur permettant de prendre en compte les différentes nonlinéarités ainsi que les incertitudes paramétriques et fonctionnelles du système tout en assurant de bonnes performances, il est judicieux de débiter le travail de conception des lois de commande par une étude préliminaire basée sur une approche linéaire. Cette première étude consiste donc à présenter une analyse du modèle linéaire du système tout en se focalisant sur l'influence des caractéristiques du servodistributeur et du volume engendré par l'embase sur la dynamique du système.

Avant de tester une stratégie de commande, il est également important d'examiner les limitations technologiques imposées par les différents composants du système. Il est utile d'étudier les phénomènes qui dégradent la réponse de l'actionneur (pour les signaux de commande à faible amplitude) à savoir les défauts statiques des composants (seuils, frottement sec...), sans oublier les limitations en puissance (effets des signaux de commande à grande amplitude), butées, phénomènes de saturation, risques de surpression ou de cavitation qui limitent les performances dynamiques du vérin. Ce travail revient à effectuer une analyse des performances limites statiques et dynamiques du vérin qui sont indépendantes de l'architecture du contrôleur.

Suite à cette analyse, il sera donc plus simple d'imposer un cahier de charge cohérent, respectueux des limitations du système et conduisant à des commandes acceptables. Cette approche permettra également de définir des scénarii pour ce cahier de charge qui sera détaillé dans le chapitre suivant.

#### 3.4.1 Modèle linéaire

Pour cette étude préliminaire, nous faisons l'hypothèse que la dynamique du servodistributeur peut être approchée par un modèle d'ordre deux. En effet, en négligeant la dynamique du tiroir devant celle du système buse-palette, la dynamique du servodistributeur peut alors être décrite uniquement par la dynamique de la partie mobile du premier étage. Nous utilisons donc un

modèle de la forme :

$$\begin{aligned}\frac{x_t}{u} &= \frac{K_{sv}}{F_{sv}(s)} \\ &= \frac{K_{sv}}{1 + \frac{2\xi_{sv}}{\omega_{sv}}s + \frac{1}{\omega_{sv}^2}s^2}\end{aligned}$$

avec  $K_{sv}$  [m/V] le gain statique du servodistributeur,  $\xi_{sv}$  et  $\omega_{sv}$  [rad/s] étant respectivement le coefficient d'amortissement et la pulsation propre du servodistributeur.

En considérant les mêmes hypothèses citées précédemment pour le modèle de commande et en tenant en compte que  $C_1^* = C_2^* = C^*$ , le distributeur hydraulique peut être modélisé par :

$$Q_{1sv} = \begin{cases} C_d K_{sv} C^* x_t \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{|p_P - p_1|} \text{sign}(p_P - p_1) & \forall x_t \geq 0, \\ C_d K_{sv} C^* x_t \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{|p_1 - p_T|} \text{sign}(p_1 - p_T) & \forall x_t < 0. \end{cases} \quad (3.56)$$

et

$$Q_{2sv} = \begin{cases} C_d K_{sv} C^* x_t \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{|p_2 - p_T|} \text{sign}(p_2 - p_T) & \forall x_t \geq 0, \\ C_d K_{sv} C^* x_t \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{|p_P - p_2|} \text{sign}(p_P - p_2) & \forall x_t < 0. \end{cases} \quad (3.57)$$

Si on suppose que la charge hydraulique est symétrique, le débit moyen  $Q$  en régime établi est donné par  $Q = \frac{Q_{1sv} + Q_{2sv}}{2}$ , sous la condition  $Q_{1sv} = Q_{2sv}$ . Cette dernière condition conduit à  $p_P + p_T = p_1 + p_2$ . Par conséquent, les pressions au niveau des chambres du vérin peuvent être reformulées par les expressions suivantes :

$$p_1 = \frac{p_P + p_T}{2} - \frac{\Delta p}{2} \quad (3.58)$$

$$p_2 = \frac{p_P + p_T}{2} + \frac{\Delta p}{2} \quad (3.59)$$

Ceci conduit à une relation unique donnant le débit moyen  $Q$  :

$$Q = C^* Q_n \frac{x_t}{x_{tn}} \sqrt{\frac{P_{au}}{\Delta p_n}} \sqrt{1 - \frac{\Delta p \cdot \text{sign}(x_t)}{P_{au}}} = f((p_P - p_T), \Delta p, x_t) \quad (3.60)$$

avec  $Q_n$ ,  $x_{tn}$  et  $\Delta p_n$  sont les grandeurs nominales du débit moyen pour la pleine ouverture et la pression différentielle nominale données par le constructeur.

La caractéristique statique du modulateur de puissance est une fonction qui dépend de la pression d'alimentation utile  $P_{au} = p_P - p_T$ , de la pression différentielle de charge  $\Delta p$  et de la position du tiroir  $x_t$  autrement dit du signal de commande  $u$ . La limitation du modulateur donnée par l'équation (3.60) est formulée en considérant qu'il n'y a pas de phénomènes de cavitation et de surpression ( $p_i \in ]p_T, p_P[$ ,  $i = 1, 2$ ), ceci permet de supprimer la fonction "sign" dans l'expression du débit.

Pour cette étude, le modèle est linéarisé autour d'un point de fonctionnement défini par  $(Q_0, x_{t0}, \Delta p_0)$ , donné par l'équation (3.60) :

$$Q - Q_0 = K_{Qx_t}(x_t - x_{t0}) + K_{Q\Delta p}(\Delta p - \Delta p_0) \quad (3.61)$$

avec :

$$K_{Qx_t} = \left. \frac{\partial Q}{\partial x_t} \right|_{x_{t0}} = C^* \frac{Q_n}{x_{tn}} \sqrt{\frac{P_{au}}{\Delta p_n}} \sqrt{1 - \frac{\Delta p_0 \cdot \text{sign}(x_{t0})}{P_{au}}} \quad (3.62)$$

$K_{Qx_t}[m^3/s/m]$  : gain débit-ouverture tiroir.

$$K_{Q\Delta p} = \frac{\partial Q}{\partial \Delta p} \Big|_{\Delta p_0} = -C^* \frac{Q_n}{2\sqrt{1 - \frac{\Delta p_0}{P_{au}} \cdot \text{sign}(x_{t0})}} \frac{x_{t0}}{x_{tn}} \frac{1}{\sqrt{(p_P - p_T)\Delta p_n}} \cdot \text{sign}(x_{t0}) \quad (3.63)$$

$K_{Q\Delta p}[m^3/s/Pa]$  : gain débit – pression.

En choisissant le point de fonctionnement  $(Q_0, u_0, \Delta p_0) = (0, 0, 0)$ , l'équation (3.61) devient :

$$Q = K_{Qx_t}x_t + K_{Q\Delta p}\Delta p \quad (3.64)$$

A partir de l'équation de continuité (3.13), le débit moyen  $Q$  peut être exprimé par :

$$Q = \frac{Sy}{2\beta} \left( \frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} \right) + \frac{V_0}{2\beta} \left( \frac{dp_1}{dt} - \frac{dp_2}{dt} \right) + \frac{Sdy}{dt} \quad (3.65)$$

Remarquons que :

- si le déplacement du piston  $y$  est très faible devant la course totale  $l$  (position centrale  $y \approx 0$  alors  $Sy \ll 0$ ), le terme négligé est d'autant plus petit,
- si le distributeur est parfaitement symétrique, les deux pressions  $p_1$  et  $p_2$  évoluent symétriquement par rapport à la demi-pression d'alimentation  $\frac{p_P + p_T}{2}$  (puisqu'elles vérifient la condition  $p_1 + p_2 = p_P + p_T$ ), et donc on a  $\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = 0$ .

Dans ces conditions, on peut simplifier l'équation (3.65) qui devient :

$$Q = \frac{V_0}{2\beta} \frac{d\Delta p}{dt} + \frac{Sdy}{dt} \quad (3.66)$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la partie mobile du système (actionneur + charge) en négligeant l'effort extérieur et les phénomènes de frottement sec mais en conservant les frottements de type visqueux, on obtient :

$$M\ddot{y} = S\Delta p - Mg - b\dot{y} \quad (3.67)$$

avec  $b$  le coefficient de frottement visqueux.

A partir des équations (3.64), (3.66), (3.67) et en appliquant la transformée de Laplace, on en déduit l'expression ci-dessous :

$$y \left[ \frac{M}{r_h} s^3 + \left( \frac{b}{r_h} - \frac{MK_{Q\Delta p}}{S^2} \right) s^2 + \left( -\frac{bK_{Q\Delta p}}{S^2} + 1 \right) s \right] = \frac{K_{Qu}}{S \cdot F_{sv}(s)} u + \frac{K_{Q\Delta p}}{S^2} Mg \quad (3.68)$$

avec  $K_{Qu} = K_{sv}K_{Qx_t}$  et  $r_h = \frac{2\beta S^2}{V_0}^3$  correspond à la raideur hydraulique pour de faibles déplacements du vérin ( $y \approx 0$ ).

### 3.4.2 Analyse du mode hydraulique

La fonction de transfert définie en (3.68) peut se réduire à :

$$y \left[ 1 + \frac{2\xi_h}{\omega_h} s + \frac{1}{\omega_h^2} s^2 \right] s = \frac{K_{Qu}}{S \left( 1 - \frac{bK_{Q\Delta p}}{S^2} \right) F_{sv}(s)} u + \frac{K_{Q\Delta p}}{S^2 \left( 1 - \frac{bK_{Q\Delta p}}{S^2} \right)} Mg \quad (3.69)$$

avec  $\omega_h$  la pulsation hydraulique définie par :

$$\omega_h = \sqrt{\frac{2\beta S^2}{MV_0} \left( 1 - \frac{bK_{Q\Delta p}}{S^2} \right)} \quad (3.70)$$

3. Pour le vérin utilisé, cette valeur est égale à  $r_h(y \approx 0) = 1.785 \cdot 10^7 [\text{N/m}]$

et  $\xi_h$  le coefficient d'amortissement du mode hydraulique donné par :

$$\xi_h = \frac{\omega_h \left( \frac{b}{r_h} + \frac{MK_{Q\Delta p}}{S^2} \right)}{2 \left( 1 - \frac{bK_{Q\Delta p}}{S^2} \right)} = \frac{\left( \frac{b}{r_h} + \frac{MK_{Q\Delta p}}{S^2} \right)}{2 \sqrt{\left( 1 - \frac{bK_{Q\Delta p}}{S^2} \right)}} \quad (3.71)$$

L'équation (3.70) montre comment augmenter la rapidité naturelle de l'actionneur en agissant sur les caractéristiques géométriques du vérin à savoir l'augmentation de la section effective  $S$ , la réduction des volumes morts (raison pour laquelle il est toujours préférable que le distributeur soit placé au plus près du vérin). Remarquons également que la présence d'air dissout dans l'huile, par exemple suite à des phénomènes de cavitation, réduit le module de compressibilité effectif  $\beta$  et a donc un effet négatif sur la rapidité de l'actionneur. Si on néglige le gain de sensibilité  $K_{Q\Delta p}$ , en supposant que le débit est directement proportionnel au déplacement du tiroir ( $Q = K_{Qx_t}x_t$ ) alors le terme  $(bK_{Q\Delta p})$  peut être négligeable devant 1. Sous cette hypothèse,  $\omega_h$  et  $\xi_h$  deviennent :

$$\omega_h = \sqrt{\frac{2\beta S^2}{V_0 M}} \quad (3.72)$$

et

$$\xi_h = \frac{b}{2M\omega_h} = \frac{b}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{V_0}{\beta S^2}} \quad (3.73)$$

D'après les deux équations précédentes, nous mettons bien en évidence que le mode hydraulique dépend principalement du module de compressibilité, de la section effective du piston, de la masse déplacée (piston + masse inertielle) et du volume total du vérin.

Remarquons que dans un système hydraulique, tous ces paramètres présentent une incertitude souvent importante [133], ainsi :

- le module de compressibilité des fluides hydrauliques courants diminue rapidement avec la température (de l'ordre de 0.5%/( $^{\circ}C$ ) autour de 100 $^{\circ}C$ ).
- le module de compressibilité augmente légèrement avec la pression et diminue très rapidement avec la quantité d'air dissout dans l'huile,
- la section effective du piston peut être légèrement déformée ou dilatée en fonction des conditions de fonctionnement,
- le volume total n'est pas nécessairement facile à déterminer puisqu'il dépend aussi des conduites d'alimentation,
- la masse, principalement liée à la charge, est le plus souvent inconnue.

Nous pouvons donc nous interroger sur le degré d'influence de ces incertitudes paramétriques sur la valeur du mode hydraulique et ainsi déterminer la sensibilité de la dynamique du système à ces incertitudes.

La figure 3.21 donne l'évolution de la pulsation hydraulique calculée pour différents points de fonctionnement et des variations des paramètres de masse et de volume. En ajoutant le volume de l'embase dans chacun des modes de fonctionnement, nous obtenons une image de l'évolution de la fréquence hydraulique pour différents points de fonctionnement (voir figure 3.22).

A partir de la figure 3.21, nous pouvons conclure que pour une position proche de la position centrale du vérin, une variation de 10% de la masse ou du volume total présente peu d'effet sur la fréquence et peut donc être négligée. En revanche, à proximité des butées, l'effet devient très important et est plus sensible à une variation du volume total qu'à une variation de la masse. En considérant les données constructeur, la pulsation hydraulique est égale à 700 Hz pour  $y = -l/2$ , cette valeur devient 480 Hz pour une augmentation de 10% de  $V_0$  et 660 Hz

pour une augmentation de 10% de  $M$ . Remarquons que l'on aura une influence inverse sur le coefficient d'amortissement.

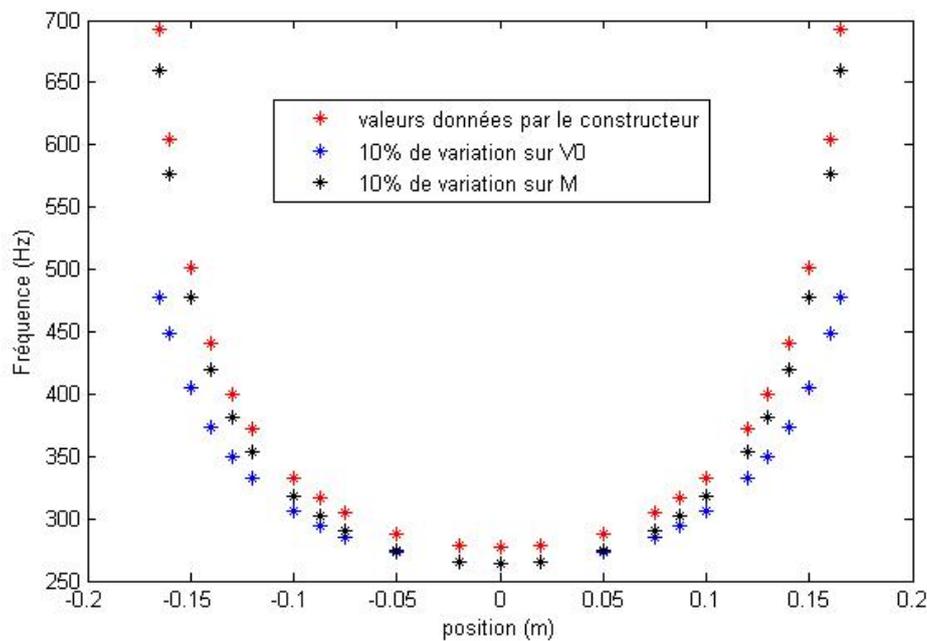


FIGURE 3.21 – Evolution de la pulsation hydraulique en fonction de la position.

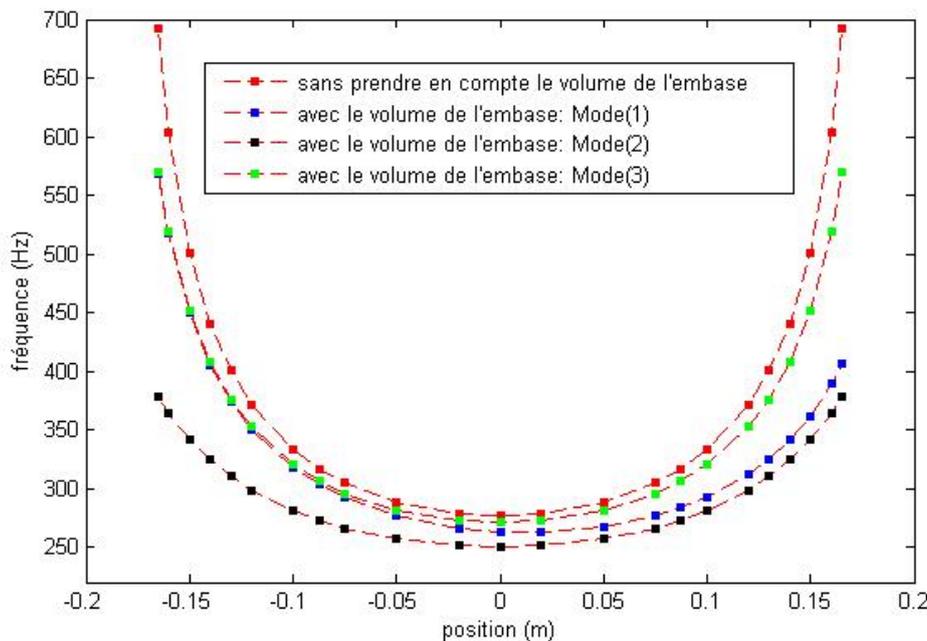


FIGURE 3.22 – Evolution de la fréquence hydraulique en ajoutant le volume de l'embase.

A partir de la figure 3.22, nous constatons que le volume ajouté dans le mode(2) n'est plus du tout négligeable ce qui réduit la dynamique du système. Pour les positions extrêmes, on passe d'une fréquence du mode hydraulique de 700 Hz à 381 Hz. Cette variation est moins importante pour le mode(3). Cependant, pour le mode(1), nous remarquons que la dynamique est dissymétrique, en raison de la différence entre les volumes des conduites d'alimentation de chacune des chambres.

Intéressons nous maintenant à l'influence du module de compressibilité en fonction de la quantité d'air dissout dans l'huile. Supposons qu'un volume  $V$ , initialement à la pression  $p$ , contienne un volume d'air  $V_a = \varepsilon V$ , on a donc un volume d'huile  $V_h = (1 - \varepsilon)V$ . Une augmentation de pression  $\Delta p$  conduit à une diminution de volume  $\Delta V = \Delta V_h + \Delta V_a$ , avec :

$$\Delta V = \frac{V_h}{\beta} \Delta p + \frac{V_a}{\beta} \Delta p \quad (3.74)$$

Généralement,  $V_h$  est voisine de  $V$  puisque  $\varepsilon$  est de petite valeur, ce qui nous permet alors d'écrire :

$$\Delta V = V \left( \frac{1}{\beta} + \frac{\varepsilon}{\beta} \right) \Delta p \quad (3.75)$$

A partir de (3.75), nous constatons qu'en présence d'air dissout de volume relatif de  $\varepsilon$ , le module de compressibilité équivalent  $\beta_1$  est donné par l'expression suivante :

$$\frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{\beta} + \frac{\varepsilon}{\beta} \quad (3.76)$$

Si  $p$  varie très peu, ce module peut être considéré comme constant. Notons que dans notre cas, le module de compressibilité  $\beta$  est égal à  $= 17000$  bars. Donc pour  $p = 150$  bars, nous pouvons avoir :

- si  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\beta_1 = 0.9\beta$ ,
- si  $\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $\beta_1 = 0.5\beta$ .

Ce qui est tout à fait cohérent avec les observations en pratique [67].

Nous illustrons cet effet en représentant l'évolution de la pulsation hydraulique en fonction des variations du module de compressibilité (figures 3.23 et 3.24).

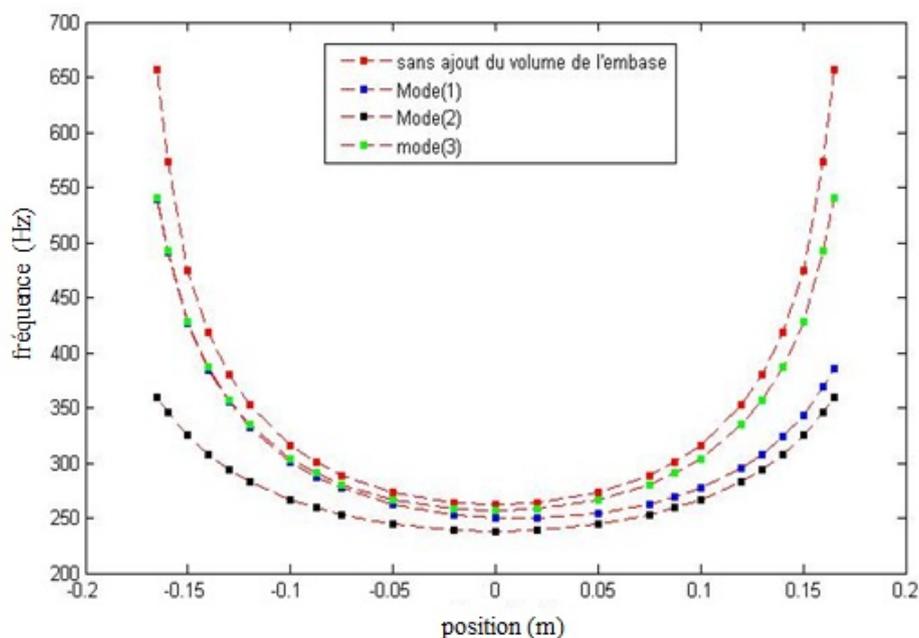


FIGURE 3.23 – Evolution de la pulsation hydraulique avec  $\beta_1 = 0.9\beta$ .

A partir de ces courbes, nous remarquons une diminution d'environ 5% des modes hydrauliques, pour  $\beta_1 = 0.9\beta$ . Par exemple, pour le mode (2) à une position en extrémité, on a 359 Hz pour une valeur initiale égale à 378 Hz. Pour  $\beta_1 = 0.5\beta$ , dans ce même mode et pour la même

position, cette valeur devient égale à 267 Hz. Cette variation est naturellement plus significative avec  $\beta_1 = 0.5\beta$ , valeur pour laquelle nous constatons une diminution de l'ordre de 29.5% des modes hydrauliques.

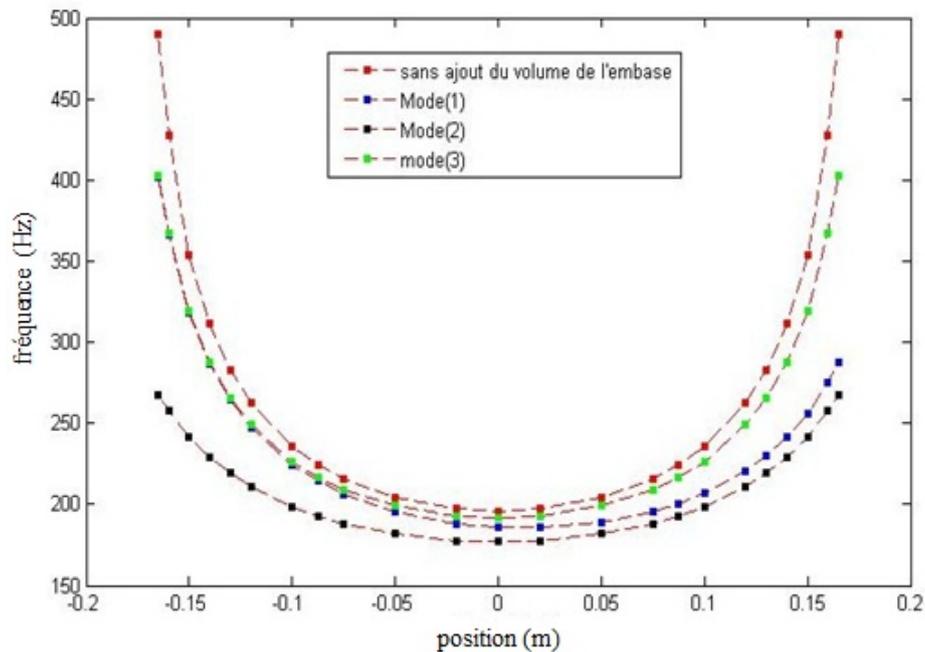


FIGURE 3.24 – Evolution de la pulsation hydraulique avec  $\beta_1 = 0.5\beta$ .

### 3.4.3 Séparation des dynamiques servodistributeur/vérin

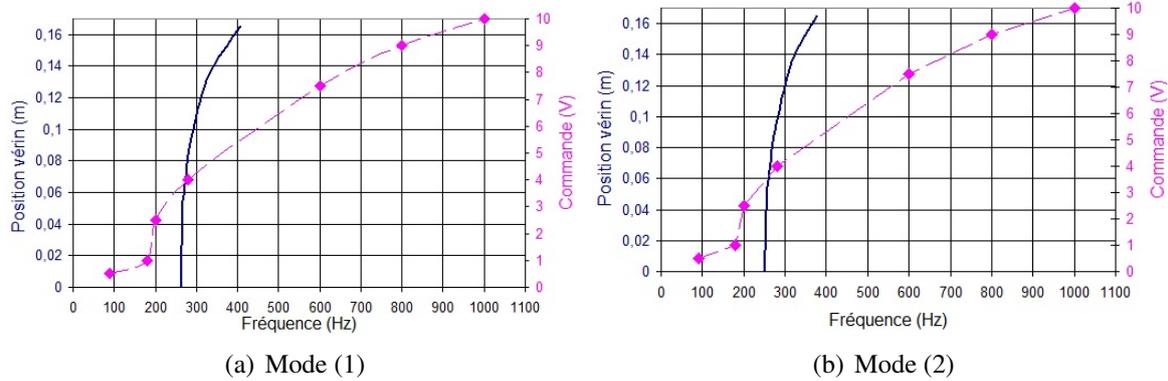
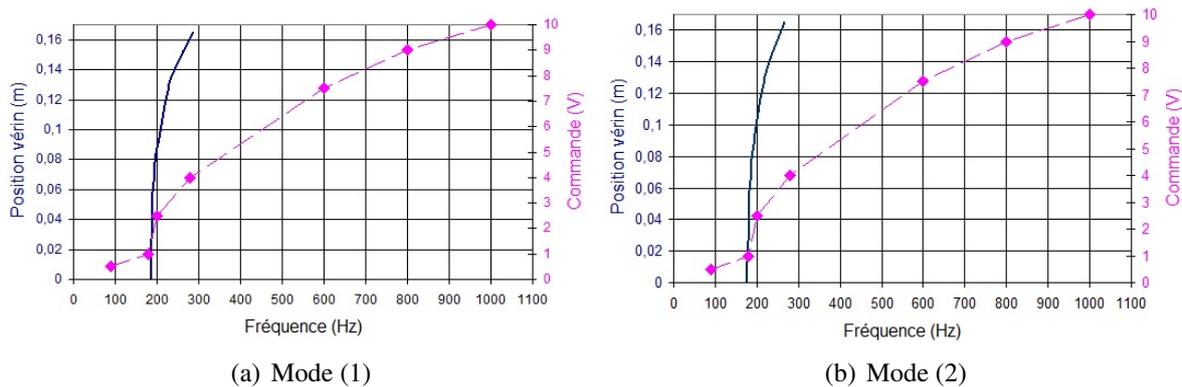
Dans le cas du système utilisé, les dynamiques du vérin et celle du servodistributeur peuvent avoir trois configurations :

- le mode du vérin est supérieur à celle du servodistributeur,
- le mode du vérin est inférieur à celle du servodistributeur,
- le mode du vérin est proche de celle du servodistributeur,

Pour justifier l'hypothèse utilisée dans le modèle de commande où la dynamique du servodistributeur est négligée devant celle du vérin, il est donc nécessaire d'effectuer une étude permettant de définir les plages de validité de cette hypothèse.

Pour ce faire, nous traçons l'évolution de la fréquence du vérin  $f_v$  en fonction de son déplacement et celle du servodistributeur en fonction de son ouverture, voir figure 3.25.

Etant donné que la valeur du module de compressibilité diminue fortement en présence de l'air dissout dans l'huile, nous présentons aussi l'évolution de ces fréquences pour  $\beta_1 = 0.5\beta$  (figure 3.26), pour les modes (1) et (2). A partir des courbes tracées, nous remarquons que l'hypothèse qui consiste à négliger la dynamique du servodistributeur devant celle du vérin n'est justifiée que pour les faibles déplacements du vérin et pour de faibles ouvertures du servodistributeur.

FIGURE 3.25 – Evolution de  $f_v$  en fonction de  $y$  et  $f_{sv}$  en fonction de  $u$  :  $\beta = 17000$  barsFIGURE 3.26 – Evolution de  $f_v$  en fonction de  $y$  et  $f_{sv}$  en fonction de  $u$  : avec  $\beta_1 = 0.5\beta$ 

Pour plus de précision, calculons le rapport de fréquence  $\frac{f_{sv}}{f_v}^4$  avec et sans diminution du module de compressibilité. Ce rapport est déterminé autour de certaines valeurs de déplacement du vérin et pour de faibles valeurs d'ouverture du servodistributeur et les résultats obtenus sont résumés sur les tableaux donnés par les figures 3.27 et 3.28.

Pour pouvoir négliger la dynamique du servodistributeur devant celle du vérin, nous imposons certaine condition sur le rapport de fréquence :

$$\frac{f_{sv}}{f_v} \leq 3 \quad (3.77)$$

Sans considérer de diminution du module de compressibilité (tableaux de la figure 3.27), nous constatons que pour une position très proche de la position centrale du vérin, la condition (3.77) n'est vérifiée que pour des variations d'ouvertures maximales du servodistributeur égales à  $10\%U_n$ . Pour une position égale à  $25\%$  du déplacement total du vérin, le domaine admissible de variation d'ouverture du servodistributeur est réduit à  $5\%U_n$ , (tableau 3.27(b)). Au-delà de cette valeur de déplacement, les deux dynamiques deviennent proches avec un rapport de 2.6 pour la plus petite ouverture du servodistributeur (tableau 3.27(c)).

En tenant compte d'une diminution de  $50\%$  du module de compressibilité (tableaux de la figure 3.28), il est possible de travailler loin de la position centrale du vérin et pour des faibles ouvertures du servodistributeur. Par exemple, pour une position égale à  $36.6\%$  du déplacement total, la condition (3.77) est vérifiée pour des ouvertures de  $10\%U_n$ . Cette condition est aussi vérifiée pour des ouvertures de  $5\%U_n$  autour de positions correspondant à  $50\%$  de la course totale du vérin, (tableau 3.28(c)).

4.  $f_{sv}$  : fréquence servodistributeur (Hz)

	Mode (1)	Mode (2)
5% $U_n$	3.8	4
10% $U_n$	3	3.2
25% $U_n$	2.28	2.4

(a)  $y \approx 0$

	Mode (1)	Mode (2)
5% $U_n$	3.5	3.7
10% $U_n$	2.8	2.9
25% $U_n$	2.1	2.2

(b)  $y = 25\%$  du déplacement total

	Mode (1)	Mode (2)
5% $U_n$	2.4	2.6
10% $U_n$	1.9	2.1
25% $U_n$	1.4	1.5

(c)  $y = 50\%$  du déplacement total

FIGURE 3.27 – Rapport de fréquence  $\frac{f_{sv}}{f_v}$  :  $\beta = 17000$  bars

	Mode (1)	Mode (2)
5% $U_n$	5	5.2
10% $U_n$	4	4.2
25% $U_n$	3	3.16

(a)  $y = 25\%$  du déplacement total

	Mode (1)	Mode (2)
5% $U_n$	4.5	4.7
10% $U_n$	3.6	3.8
25% $U_n$	2.7	2.8

(b)  $y = 36.6\%$  du déplacement total

	Mode (1)	Mode (2)
5% $U_n$	3.4	3.7
10% $U_n$	2.7	2.9
25% $U_n$	2	2.2

(c)  $y = 50\%$  du déplacement total

FIGURE 3.28 – Rapport de fréquence  $\frac{f_{sv}}{f_v}$  : avec  $\beta_1 = 0.5\beta$ 

De manière générale, négliger la dynamique du servodistributeur est loin d'être évident. Le couplage des deux dynamiques est inévitable dans la plupart des cas.

### 3.4.4 Performances limites de l'actionneur électrohydraulique

Dans ce paragraphe, nous allons maintenant évaluer l'amplitude maximale des grandeurs asservies en fonction des limitations physiques de l'actionneur. Pour cela, considérons dans un premier temps, que la charge est connue et que la dynamique du servodistributeur peut être négligée devant celle de l'actionneur.

En nous appuyant sur l'équation (3.60), nous pouvons définir la caractéristique du modulateur par l'équation suivante :

$$Q = Q_n \frac{u}{u_n} \sqrt{\frac{P_{au}}{\Delta p_n}} \sqrt{1 - \frac{\Delta p \cdot \text{sign}(u)}{P_{au}}} \quad (3.78)$$

Les phénomènes qui apparaissent pour des signaux de grande amplitude sont les phénomènes de cavitation, de surpression, de saturation, de butées. Afin de prendre en compte tous ces effets pour l'évaluation des performances limites du système, traduisons analytiquement ces phénomènes :

- la commande  $u$  est saturée par l'électronique à sa valeur nominale (saturation) :

$$- u_n \leq u \leq u_n \quad (3.79)$$

- la contrainte à introduire pour éviter les risques de cavitation ou de surpression est donnée par :

$$- \alpha P_{au} \leq \Delta p \leq \alpha P_{au} \quad (3.80)$$

avec  $\alpha$  le coefficient de marge de pression inférieur à 1 (typiquement égale à 0.7), [67].

- la limitation physique de la position imposée par les butées, peut être représentée par l'inégalité suivante :

$$- y_{max} \leq y \leq y_{max} \quad (3.81)$$

où  $y_{max}$  est l'amplitude maximale du déplacement.

- la limitation en vitesse peut s'exprimer en fonction du débit. Posons  $y(t) = y_c \sin(2\pi ft)$  où  $f$  et  $y_c$  sont respectivement la fréquence et l'amplitude du mouvement de la charge. Si on néglige le débit de compressibilité, on a :

$$|Q| = S|v| = 2\pi f S y_c \quad (3.82)$$

En introduisant (3.78), on obtient :

$$|Q| = S \left| Q_n \frac{u}{u_n} \sqrt{\frac{P_{au}}{\Delta p_n}} \sqrt{1 - \frac{\Delta p \cdot \text{sign}(u)}{P_{au}}} \right| \leq \left| Q_n \frac{u}{u_n} \sqrt{\frac{P_{au}}{\Delta p_n}} \right| \leq Q_n \sqrt{\frac{P_{au}}{\Delta p_n}} \quad (3.83)$$

On en conclut donc que :

$$y_c \leq \frac{Q_n}{2\pi f S} \sqrt{\frac{P_{au}}{\Delta p_n}} \quad (3.84)$$

- la limitation en accélération est déduite de manière similaire en utilisant l'équation mécanique (3.14) dans laquelle on néglige le frottement visqueux :

$$y_c \leq \frac{\frac{S}{M} \alpha P_{au} - g}{4f^2 \pi^2} \quad (3.85)$$

Cette étude analytique permet d'obtenir le tracé asymptotique de la figure 3.29 résultant des équations (3.81), (3.84) et (3.85). Ce tracé définit le domaine atteignable pour une réponse fréquentielle à vide. Ce domaine est plus restreint pour un fonctionnement en charge.

A partir des caractéristiques du système, ce tracé nous permet de conclure sur le domaine atteignable en termes de trajectoire. Ceci nous permettra de définir de façon cohérente les scénarii pour la validation des performances des lois de commande mais aussi de la stratégie de commande à appliquer qui sera développée dans le chapitre suivant.

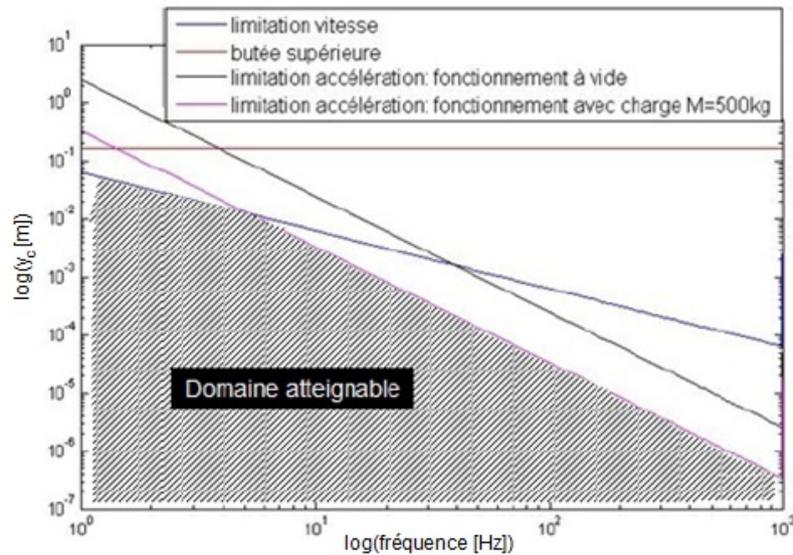


FIGURE 3.29 – Réponse en fréquence limite de l'actionneur.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la modélisation d'un système électrohydraulique composé de deux servodistributeurs, d'un vérin, d'une charge et d'un bloc intermédiaire nommé "embase". Après avoir rappelé les éléments de modélisation du vérin, nous avons détaillé la modélisation du comportement dynamique et statique du servodistributeur. Cette étude nous a permis de faire le passage entre le modèle de simulation vers le modèle de commande en précisant les différentes hypothèses utilisées. Nous avons aussi concentré notre exposé sur la modélisation du frottement qui est un enjeu majeur dans le cas des actionneurs à fluide sous pression. Afin d'établir un modèle représentatif du frottement, nous avons présenté quelques modèles issus de la tribologie. Nous avons appuyé notre réflexion sur l'analyse des résultats issus d'un protocole expérimental permettant l'identification des paramètres de frottement.

La présence d'un bloc intermédiaire entre l'actionneur et les servodistributeurs introduit un volume supplémentaire et des pertes de charge qui dépendent du signal de commande. Afin de prendre en compte ce phénomène, la caractéristique statique du servodistributeur a été réécrite en intégrant un facteur de correction sur les caractéristiques nominales du servodistributeur.

Après ces étapes de modélisation, nous avons étudié la sensibilité du système aux variations de certains paramètres, comme le volume de l'embase et la masse sur la dynamique du système. Pour analyser cette influence, un modèle linéaire a été développé. Il a également permis de mettre en évidence l'influence des caractéristiques du servodistributeur sur cette dynamique.

La dernière partie de ce chapitre a été dédiée à la présentation des performances limites de l'actionneur électrohydraulique utilisé. Ces performances limites vont nous servir à définir un cahier des charges pour la mise en oeuvre de la stratégie de commande qui va être développée dans le chapitre 4. La synthèse de lois de commande en intégrant le différentiateur robuste adaptatif sera donc abordé dans le chapitre suivant, à partir du modèle de commande fourni dans ce chapitre.

Pour conclure, cette phase de modélisation nous a permis en premier lieu d'enrichir nos connaissances en hydraulique, de développer des modèles qualitatifs et quantitatifs du système en ayant

connaissance de leurs zones de validité. En deuxième lieu, ces travaux nous ont permis de définir et de cadrer certaines problématiques rencontrées dans cette phase de modélisation. Ces problématiques ont permis de définir un sujet de thèse spécifique à la modélisation (embase + servodistributeurs) au sein du laboratoire, [XuSid10].

Dans le chapitre suivant, nous présenterons la synthèse de lois de commande ainsi que les résultats expérimentaux associés où nous mettrons l'accent sur l'efficacité de l'ensemble de la boucle "différentiateur-commande" pour différents algorithmes de différentiation.



# Chapitre 4

## Synthèse et expérimentation

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>154</b>
<b>4.2</b>	<b>Analyse du modèle de commande</b>	<b>155</b>
4.2.1	Changement de coordonnées	156
4.2.2	Stabilité de la dynamique résiduelle	157
<b>4.3</b>	<b>Commande en position par la technique du Backstepping</b>	<b>159</b>
4.3.1	Synthèse de la commande	159
4.3.2	Protocole expérimental	162
4.3.3	Résultats expérimentaux	163
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>170</b>

---

### 4.1 Introduction

Malgré une large utilisation, le problème de la commande des systèmes électrohydraulique reste encore fort intéressant. Le caractère fortement non linéaire des phénomènes hydrauliques modélisés au chapitre 3 rend les objectifs imposés difficiles à atteindre. Ces non-linéarités dépendent essentiellement des caractéristiques débit-pression du servodistributeur, des variations des volumes de contrôle et des frottements. Le choix du correcteur, dans ce cas est primordial afin d'assurer les performances souhaitées. Prenons le cas des commandes linéaires, la synthèse de ces correcteurs est basée sur un modèle linéaire valable au voisinage d'un point de fonctionnement. Malgré la simplicité de synthèse de telles lois de commandes, la première méthode de Lyapunov indique que celles-ci ont un caractère local et que généralement la dimension du bassin d'attraction est difficilement calculable, ce qui explique une perte d'information sur la dynamique du système. Ceci nous incite alors à la conception de stratégies de commandes non linéaire [Sidhom09], [Sidhom10b].

Pour tout cahier de charge, les objectifs de suivi de trajectoire en position et/ou en pression (effort) doit satisfaire des contraintes de précision statique et dynamique. Dans un contexte industriel, d'autres critères sont recherchés à savoir des critères économiques et des critères énergétiques afin de minimiser le coût de la solution à mettre en place. Pour le critère économique, il s'agit de minimiser le nombre de capteurs utilisés. Ces critères doivent être satisfaits sans diminuer les performances de l'asservissement. Il est aussi nécessaire d'obtenir ces performances sans intervention d'un opérateur sur les réglages des paramètres de commande et/ou du différentiateur (observateur).

L'étude dont il est sujet, à travers ce chapitre, porte sur la validation de l'intégration de l'algorithme de dérivation proposé dans une boucle de commande afin de tester son efficacité et dans le but de minimiser le nombre de capteur sur le banc d'essai, [Sidhom08], [Sidhom08b]. Dans notre cas, seul le capteur de position sera utilisé.

Après avoir décrit le système électrohydraulique au chapitre 3, nous allons maintenant synthétiser une loi de commande en position par la technique du Backstepping. Le choix de cette loi de commande va nous permettre d'utiliser le différentiateur d'ordre deux (DAO2/DO2) afin d'estimer la vitesse et l'accélération par la mesure de la position. Ainsi, en partant du modèle obtenu au chapitre précédent, ce chapitre sera entièrement consacré à la synthèse et à la mise en oeuvre expérimentale de cette association "commande-différentiateur". Cette loi de commande sera synthétisée pour des objectifs de suivi de trajectoire en position pour les deux modes de fonctionnement : mode(1)<sup>1</sup> et mode (2)<sup>2</sup>. Cependant, nous nous limiterons uniquement aux lois de commande mono-entrée/mono-sortie (SISO). Pour obtenir un modèle de commande SISO, il faut transformer via un difféomorphisme adéquat le modèle initial donné dans le chapitre 3. Ceci entraîne l'apparition d'une dynamique résiduelle. Nous avons choisi de proposer une loi de commande assurant la stabilité asymptotique de la partie commandée et de démontrer la stabilité asymptotique de la dynamique résiduelle au sens de la dynamique des zéros. Cette méthode est connue sous le nom de "Practical stability" [146]. Pour les essais expérimentaux, il est judicieux de définir des trajectoires qui soient à la fois admissibles par le système et qui permettent aussi de vérifier les hypothèses retenues dans la phase de modélisation. La deuxième partie permet alors de décrire un protocole expérimental à imposer pour l'association "différentiateur-commande". La troisième partie est consacrée à la synthèse de la loi de commande pour ensuite fournir les résultats expérimentaux obtenus. Ces résultats présenteront une comparaison des deux versions (à gains dynamiques/ à gains constants) des différentiateurs d'ordre deux (DAO2/DO2). La finalité de cette comparaison est de donner une idée sur la façon de régler ces algorithmes en précisant l'intérêt du filtrage apporté par la nouvelle version et d'illustrer le compromis qui existe entre la précision et le filtrage pour ces types d'algorithmes (DAO2/DO2).

## 4.2 Analyse du modèle de commande

Chaque variable d'état est physiquement bornée. En effet, sous les conditions normales de fonctionnement, le domaine physique du système noté par  $D_\varphi$  est donné comme suit :

$$D_\varphi : \begin{cases} y \in [-y_{max} = -\frac{l}{2}, y_{max} = \frac{l}{2}] \\ v \in [-v_{max}, v_{max}] \\ p_1 \in ]p_T, p_P[ \\ p_2 \in ]p_T, p_P[ \end{cases} \quad (4.1)$$

Quand au domaine physique de la commande, il est limité par la saturation des sorties de la carte d'acquisition correspondant aux saturations de l'entrée des servodistributeurs  $u \in [-10V, 10V]$ . Dans les conditions normales de fonctionnement, les pressions aux niveaux des chambres ne dépassent pas la pression d'alimentation (pas de surpression) et restent supérieures à la pression de retour. Ceci nous permet d'éliminer les termes de  $\text{sign}(p_P - p_i)$  et  $\text{sign}(p_i - p_T)$ ,  $i = (1, 2)$  ainsi que les valeurs absolues qui apparaissent dans les fonctions décrivant les expressions des débits (voir (3.48)).

- 
1. commander le vérin avec un seul servodistributeur
  2. commander le vérin avec deux servodistributeurs en parallèle

### 4.2.1 Changement de coordonnées

Nous considérons le modèle mono-entrée mono-sortie ("SISO") décrit par les champs de vecteurs (3.53), (3.54) :

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{M} [S(p_1 - p_2) - Mg - bv - F_{fs}(v) - F_{ext}] \\ \dot{p}_1 = -\frac{\beta}{V_1(y)} Sv + \frac{\beta}{V_1(y)} \alpha C_1^* \psi_1(p_1, p_P, p_T, \text{sign}(u)) u \\ \dot{p}_2 = \frac{\beta}{V_2(y)} Sv - \frac{\beta}{V_2(y)} \alpha C_2^* \psi_2(p_2, p_P, p_T, \text{sign}(u)) u \end{cases} \quad (4.2)$$

Dans toute la suite, nous considérons que  $F_{ext} = 0$ .

Etant donné que la grandeur physique à contrôler est la position, la sortie est alors définie par  $Y = h(X) = y$ , où  $X = [y \ v \ p_1 \ p_2]^T$  est le vecteur d'état. En utilisant ce modèle, nous constatons que le calcul des dérivées de Lie permet d'obtenir :

$$\begin{cases} L_g h = 0, \\ L_g L_f h = 0, \\ L_g L_f^2 h = \frac{S\beta\alpha}{M} \left[ \frac{1}{V_1(y)} C_1^* \psi_1(p_1, p_P, p_T, \text{sign}(u)) + \frac{1}{V_2(y)} C_2^* \psi_2(p_2, p_P, p_T, \text{sign}(u)) \right] \end{cases} \quad (4.3)$$

Suite à ce calcul, l'indice caractéristique du système nonlinéaire "SISO" est égal à trois à condition que  $L_g L_f^2 h \neq 0$ , une condition qui dépend des pressions aux niveaux des chambres du vérin, de la position du piston et du signe de la commande. Cette condition est vérifiée sur tout le domaine physique  $D_\varphi \subset \mathbb{R}^4$ . Ceci indique alors l'existence d'une dynamique résiduelle d'ordre 1 sur tout  $D_\varphi$ .

Afin de mettre ce modèle sous forme normale, un changement de coordonnées s'impose en utilisant le difféomorphisme  $z = \phi(X)$  classique suivant :

$$\begin{cases} z_1 = \phi_1(X) = h(X) = y, \\ z_2 = \phi_2(X) = L_f h(X) = v, \\ z_3 = \phi_3(X) = L_f^2 h(X) = a \\ z_4 = \phi_4(X) \end{cases} \quad (4.4)$$

Etant donné que le rang du système est égal à 4 donc ce difféomorphisme doit être complété par le choix d'une 4<sup>ième</sup> composante. Cette composante doit être choisie de telle sorte que le changement de base complété soit inversible et ait une matrice jacobienne régulière presque partout et si possible sur tout le domaine  $D_\varphi$ , [72]. Un des choix qui a été proposé par Isidori est de choisir  $z_4 = \phi_4(X)$  tel que  $L_g \phi_4(X) = 0$ . L'avantage de ce choix est qu'il évite l'apparition de la commande dans la dynamique résiduelle. Toutefois, ce choix nécessite de trouver une solution analytique à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial \phi_4(X)}{\partial p_1} \frac{\beta}{V_1(y)} \alpha C_1^* \psi_1(p_1, p_P, p_T, \text{sign}(u)) - \frac{\partial \phi_4(X)}{\partial p_2} \frac{\beta}{V_2(y)} \alpha C_2^* \psi_2(p_2, p_P, p_T, \text{sign}(u)) = 0 \quad (4.5)$$

La solution analytique de cette équation est difficile à trouver, nous utilisons alors un choix simple pour compléter le difféomorphisme  $\phi_4(X) = p_1$ . Avec ce choix, la matrice jacobienne  $M_J$  de ce difféomorphisme dont le déterminant est non nul sur tout  $D_\varphi$ , est donnée par :

$$M_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b - \frac{\partial F_{fs}(v)}{\partial v} & \frac{S}{M} & -\frac{S}{M} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Avec ce changement de coordonnées, nous avons :

$$\begin{cases} y = z_1 \\ v = z_2 \\ a = z_3 \\ p_1 = z_4 \\ p_2 = \frac{1}{S} (-Mz_3 + Sz_4 - bz_2 - Mg - F_{fs}(z_2)) \end{cases} \quad (4.7)$$

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = L_f^3 h(\phi^{-1}(z)) + L_g L_f^2 h(\phi^{-1}(z))u \\ \dot{z}_4 = \dot{p}_1 = \frac{\beta}{V_1(z_1)} [\alpha C_1^* \psi_1(z_4, p_P, p_T, \text{sign}(u))u - Sz_2] \end{cases} \quad (4.8)$$

Il est clair que le système obtenu conduit à une linéarisation partielle puisque nous pouvons aisément calculer une commande qui linéarise la première partie du système (de dimension 3). En effet, le système linéaire résultant représenté par une cascade d'intégrateurs est commandable et donc stabilisable par retour d'état. Par conséquent, le seul problème qui s'impose est celui relatif à cette dynamique résiduelle  $z_4$ .

## 4.2.2 Stabilité de la dynamique résiduelle

Notons que selon le choix du difféomorphisme, l'expression de cette dynamique est la même dans les coordonnées  $z$  ou pour les coordonnées initiales. Pour l'étude de cette dynamique, nous utilisons les coordonnées initiales. Nous reprenons alors les deux équations dynamiques des pressions en tenant compte ici du débit de fuite inter-chambre  $Q_{12}(p_1, p_2)$ <sup>3</sup>.

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = \frac{\beta}{V_1(y)} [Q_1(p_1, p_P, p_T, \text{sign}(u)) - Sv - Q_{12}(p_1, p_2)] \\ \dot{p}_2 = \frac{\beta}{V_2(y)} [-Q_2(p_2, p_P, p_T, \text{sign}(u)) + Sv + Q_{12}(p_1, p_2)] \end{cases} \quad (4.9)$$

En utilisant l'équation mécanique, on déduit :

$$\begin{cases} p_2 = p_1 - \frac{1}{S} [M\dot{v} + bv + Mg + F_{fs}(v)] \\ \dot{p}_2 = \dot{p}_1 - \frac{1}{S} [M\ddot{v} + b\dot{v} + \dot{F}_{fs}(v)] \end{cases} \quad (4.10)$$

Pour étudier la stabilité locale du point d'équilibre de la pression  $p_1 \in ]p_T, p_P[$ , nous considérons une commande  $u$  qui assure une stabilité asymptotique sur  $D_\varphi$  au système bouclé concernant les trois premières composantes de (4.8). Donc dans le cas d'une commande point à point, un équilibre partiel est atteint défini par :

$$y = y^e = \text{constante}, v^e = 0, \dot{v}^e = 0, \ddot{v}^e = 0, \quad (4.11)$$

*Remarque* : Pour un suivi de trajectoire, cet équilibre partiel se traduit alors par l'annulation des erreurs de suivi.

3. Sans cette hypothèse concernant l'existence d'un débit de fuite, aucune démonstration de la stabilité de la dynamique résiduelle n'a à ce jour été établie

L'étude des frottements secs dans le chapitre 3 nous a permis de montrer que  $F_{fs}(v = 0) = 0$ , ce qui s'explique par la présence d'un palier hydrodynamique sur le vérin hydraulique. Avec ces conditions (4.11), le système (4.10) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} p_2^m = p_1^m - \frac{M}{S}g \\ \dot{p}_2^m = \dot{p}_1^m \end{cases} \quad (4.12)$$

Note : A l'équilibre partiel, l'exposant "m" est utilisé pour les variables hydrauliques.

Prenons le cas où  $u \geq 0$ . Afin d'éliminer la commande dans les expressions des dynamiques de pression, nous écrivons alors le rapport de ces deux dynamiques à l'équilibre partiel comme suit :

$$-\frac{C_1^* \sqrt{p_P - p_1^m}}{C_2^* \sqrt{p_2^m - p_T}} = \frac{V_1^e(y^e) \dot{p}_1^m + \beta K_{12}(p_1^m - p_2^m)}{V_2^e(y^e) \dot{p}_2^m - \beta K_{12}(p_1^m - p_2^m)} \quad (4.13)$$

En utilisant le système (4.12), l'équation différentielle de  $p_1^m$  est donnée par :

$$\dot{p}_1^m = \frac{K_{12} \beta M g}{S} \frac{\left[ C_1^* \sqrt{p_P - p_1^m} - C_2^* \sqrt{p_1^m - \frac{M}{S}g - p_T} \right]}{\left[ C_1^* V_2^e(y^e) \sqrt{p_P - p_1^m} + C_2^* V_1^e(y^e) \sqrt{p_1^m - \frac{M}{S}g - p_T} \right]} \quad (4.14)$$

Le point d'équilibre de cette équation différentielle s'exprime alors comme suit :

$$C_1^* \sqrt{p_P - p_1^m} - C_2^* \sqrt{p_1^m - \frac{M}{S}g - p_T} = 0 \implies p_1^e = \frac{C_1^{*2} p_P + C_2^{*2} p_T + C_2^{*2} \frac{M}{S}g}{C_1^{*2} + C_2^{*2}} \quad (4.15)$$

Pour simplifier, nous supposons que  $C_1^* = C_2^* = C^*$  (valable pour le mode (2)) mais ceci ne change rien sur les résultats obtenus. Dans ce cas l'expression du point d'équilibre devient égale à  $p_1^e = \frac{p_P + p_T + \frac{M}{S}g}{2}$ . Si  $S$  est correctement dimensionnée pour une masse  $M$  fixé, la solution obtenue  $p_1^e \in ]p_T, p_P[$ .

Pour étudier la stabilité de ce point d'équilibre, nous choisissons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_p = \frac{1}{2} (p_1^m - p_1^e)^2 \quad (4.16)$$

La dérivée temporelle de cette fonction est alors donnée par :

$$\dot{V}_p = (p_1^m - p_1^e) \dot{p}_1^m \quad (4.17)$$

Pour montrer la négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov, il faut étudier le signe du numérateur de (4.14), plus précisément le signe du terme  $\sqrt{p_P - p_1^m} - \sqrt{p_1^m - \frac{M}{S}g - p_T}$  pour  $p_1^m > p_1^e$  et pour  $p_1^m < p_1^e$ . Pour ce faire, nous présentons l'évolution des termes  $A = p_P - p_1^m$  et  $B = p_1^m - \frac{M}{S}g - p_T$  en fonction de  $p_1^m$  (figure 4.1).

Selon le tracé de la figure 4.1, nous remarquons que si  $p_1^m > p_1^e$ , nous avons  $B > A$  et par conséquent  $\dot{p}_1^m < 0$ . Ceci permet alors de déduire que  $\dot{V}_p$  est définie négative pour  $p_1^m > p_1^e$ . De la même façon, nous obtenons la même déduction pour  $p_1^m < p_1^e$ , puisque dans ce cas l'inégalité  $B < A$  est assurée et donc  $\dot{p}_1^m > 0$  (voir figure 4.1).

Il est à noter qu'on obtient les mêmes résultats pour  $u < 0$ . Dans ce cas, nous pouvons alors conclure que la dynamique résiduelle est asymptotiquement stable  $\forall p_1 \in ]p_T, p_P[$ , lorsque l'équilibre partiel est atteint.

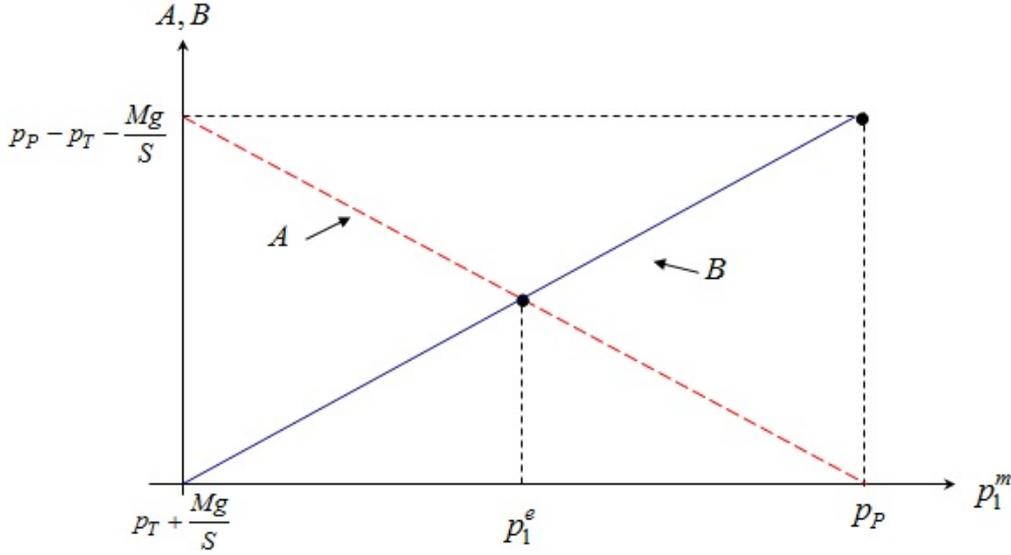


FIGURE 4.1 – Evolution des termes A et B.

## 4.3 Commande en position par la technique du Backstepping

### 4.3.1 Synthèse de la commande

Avec le changement de coordonnées effectué précédemment, le modèle utilisé pour l'élaboration de la loi de commande est donné par :

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = a \\ \dot{a} = \frac{1}{M} \left[ -ba - F_{fs}^i(v) - S^2\beta \left( \frac{1}{V_1(y)} + \frac{1}{V_2(y)} \right) v + S\beta \left( \frac{\alpha C_1^* \psi_1(\cdot)}{V_1(y)} + \frac{\alpha C_2^* \psi_2(\cdot)}{V_2(y)} \right) u \right] \\ \dot{p}_1 = -\frac{\beta}{V_1(y)} S v + \frac{\beta}{V_1(y)} \alpha C_1^* \psi_1(p_1, p_P, p_T, \text{sign}(u)) u \end{cases} \quad (4.18)$$

Commençons tout d'abord par synthétiser la loi de commande pour le mode (1).

Mode (1) : commande d'un seul servodistributeur

Etape 1 :

Définissons une variable d'erreur qui représente la différence entre la position mesurée et celle désirée :

$$e_1 = y - y_d \quad (4.19)$$

En utilisant la première équation du modèle, la dérivée de la variable d'erreur  $e_1$  est donnée par :

$$\dot{e}_1 = \dot{y} - \dot{y}_d = v - v_d \quad (4.20)$$

Où  $v$  est considérée comme une entrée de l'équation précédente. En considérant le premier sous-système décrit par l'équation (4.21), le but consiste alors à trouver un bouclage  $v = \alpha_0(e_1, y_d)$  permettant de stabiliser l'origine  $e_1$ . En choisissant :

$$\alpha_0(e_1, y_d) = v_d - c_1 e_1 \quad (4.21)$$

Avec  $c_1$  une constante positive. L'équation (4.20) devient alors :

$$\dot{e}_1 = -c_1 e_1 \quad (4.22)$$

Pour montrer la stabilité du premier sous-système, une fonction de Lyapunov est alors choisie comme suit :

$$V_1(e_1) = \frac{1}{2}e_1^2 \quad (4.23)$$

La dérivée de cette fonction est donnée par :

$$\dot{V}_1(e_1) = -c_1e_1^2 < 0 \quad (4.24)$$

D'où l'origine  $e_1 = 0$  est exponentiellement stable.

*Etape 2 :*

C'est une étape clé dans la procédure de conception. Puisque  $v$  n'est pas une commande effective du système mais plutôt une variable d'état, une nouvelle variable d'erreur est donc introduite afin de représenter la différence entre cette variable  $v$  considérée comme une commande virtuelle et la fonction stabilisante  $\alpha_0(\cdot)$  déjà définie dans l'étape précédente. Bien évidemment, si  $v$  est supposée être la commande effective du système, il suffit alors de choisir  $v = \alpha_0(e_1, y_d)$  dans le but de stabiliser le système. Soit une nouvelle variable d'erreur  $e_2$  définie comme étant la différence entre la commande virtuelle  $v$  et la fonction stabilisante associée :

$$\begin{aligned} e_2 &= v - \alpha_0(e_1, y_d) = v - v_d + c_1e_1 \\ &= \dot{e}_1 + c_1e_1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

A partir des équations (4.20) et (4.25), le sous-système  $(y, v)$  peut être transformé en fonction des variables d'erreur  $(e_1, e_2)$  comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -c_1e_1 + e_2 \\ \dot{e}_2 = \ddot{e}_1 + c_1\dot{e}_1 = \dot{v} - \dot{v}_d + c_1(e_2 - c_1e_1) \end{cases} \quad (4.26)$$

Définissons maintenant une deuxième fonction de Lyapunov augmentée par un terme quadratique en  $e_2$  :

$$\begin{aligned} V_2(e_1, e_2) &= V_1(e_1) + \frac{1}{2}(v - \alpha_0(e_1, y_d))^2 \\ &= V_1(e_1) + \frac{1}{2}e_2^2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

La dérivée de (4.27), le long des trajectoires est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(e_1, e_2) &= \dot{V}_1(e_1) + e_2\dot{e}_2 \\ &= -c_1e_1^2 + e_2[e_1 + \dot{v} - \dot{v}_d + c_1(e_2 - c_1e_1)] \end{aligned} \quad (4.28)$$

Considérons la variable d'état  $a$  comme étant une nouvelle entrée relative au sous-système (4.26). Choisissons un deuxième bouclage tel que  $a = \alpha_1(\cdot)$  et défini par :

$$\alpha_1(e_1, e_2, y_d, v_d, a_d) = a_d + e_1(c_1^2 - 1) - e_2(c_1 + c_2) \quad (4.29)$$

Avec  $c_2 > 0$ .

En substituant l'équation (4.29) dans la dérivée de  $V_2$ , l'équation suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(e_1, e_2) &= -c_1e_1^2 + e_2(e_1 + a - a_d + c_1(e_2 - c_1e_1)) \\ &= -c_1e_1^2 - c_2e_2^2 < 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$(4.31)$$

A partir de (4.30), nous pouvons en déduire que l'origine  $e_1 = e_2 = 0$  est asymptotiquement stable.

*Etape 3 :*

Finalement, une troisième variable d'erreur  $e_3$  est définie :

$$e_3 = a - \alpha_1(e_1, e_2, y_d, v_d, a_d) \quad (4.32)$$

A partir des différentes variables d'erreur déjà définies, un système d'erreur peut être décrit comme ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -c_1 e_1 + e_2 \\ \dot{e}_2 = e_3 - c_2 e_2 - e_1 \\ \dot{e}_3 = \dot{a} - \dot{\alpha}_1(e_1, e_2, y_d, v_d, a_d) = f_3(X) + g_3(X)u - \dot{\alpha}_1(\cdot) \end{cases} \quad (4.33)$$

avec :

$$f_3(X) = -\frac{b}{M}a - \frac{F'_{fs}(v)}{M} - \frac{S^2\beta}{M} \left( \frac{1}{V_1(y)} + \frac{1}{V_2(y)} \right) v \quad (4.34)$$

et

$$g_3(X) = \frac{S\beta}{M} \left( \frac{\alpha C_1^* \psi_1(\cdot)}{V_1(y)} + \frac{\alpha C_2^* \psi_2(\cdot)}{V_2(y)} \right) \quad (4.35)$$

La dérivée de  $\dot{\alpha}_1(\cdot)$  est donnée par :

$$\dot{\alpha}_1(\cdot) = \dot{a}_d + e_1(2c_1 + c_2 - c_1^3) + e_2(c_2^2 + c_1(c_2 + c_1) - 1) - e_3(c_1 + c_2) \quad (4.36)$$

La commande réelle  $u$  apparaît explicitement dans la dérivée de l'équation (4.32). A cette étape, construisons une fonction de Lyapunov pour tout le système augmentée par un terme quadratique en  $e_3$  :

$$V_3(e_1, e_2, e_3) = V_2(e_1, e_2) + \frac{1}{2}e_3^2 \quad (4.37)$$

Afin de garantir la négativité de la dérivée de  $V_3$  le long des trajectoires du système, la loi de commande effective  $u$  est choisie de la façon suivante :

$$u = \frac{1}{\frac{S\beta}{M} \left[ \frac{\alpha C_1^* \psi_1(\cdot)}{V_1(y)} + \frac{\alpha C_2^* \psi_2(\cdot)}{V_2(y)} \right]} \times [-f_3(X) + \dot{a}_d - K_{11}e_1 - K_{21}e_2 - K_{31}e_3] \quad (4.38)$$

Avec :

$$\begin{cases} K_{11} = c_1^3 - 2c_1 - c_2 \\ K_{21} = 1 - c_1(c_1 + c_2) - c_2^2 \\ K_{31} = c_1 + c_2 + c_3 \end{cases} \quad (4.39)$$

L'équation (4.38) possède une singularité donnée par ces deux égalités  $\psi_1(\cdot) = \psi_2(\cdot) = 0$  qui n'appartiennent pas au domaine physique. Malgré la présence de " $sign(u)$ " dans l'équation (4.38), il est à noter que cette équation n'est pas implicite.

En effet, tout le terme  $\frac{S\beta}{M} \left[ \frac{\alpha R_1^* \psi_1(\cdot)}{V_1(y)} + \frac{\alpha R_2^* \psi_2(\cdot)}{V_2(y)} \right]$  est strictement positif, donc le " $sign(u)$ " dépend uniquement du numérateur de l'équation (4.38).

En remplaçant l'expression de  $u$  dans la dérivée de  $V_3$  nous obtenons :

$$\dot{V}_3(e_1, e_2, e_3) = -c_1 e_1^2 - c_2 e_2^2 - c_3 e_3^2 < 0 \quad (4.40)$$

Donc l'origine  $(e_1, e_2, e_3) = (0, 0, 0)$  est asymptotiquement stable.

*Mode (2) : commande de deux servodistributeurs en parallèle* [Sidhom10b]

Pour le mode (2), uniquement l'expression de  $g(X)$  change et devient égale à :

$$g_3(X) = 2\alpha C^* \frac{S\beta}{M} \left( \frac{\psi_1(\cdot)}{V_1(y)} + \frac{\psi_2(\cdot)}{V_2(y)} \right) \quad (4.41)$$

Dans ce cas, la loi de commande s'écrit comme suit :

$$u = \frac{1}{\frac{2\alpha C^* S\beta}{M} \left[ \frac{\psi_1(\cdot)}{V_1(y)} + \frac{\psi_2(\cdot)}{V_2(y)} \right]} \times [-f_3(X) + \dot{a}_d - K_{11}e_1 - K_{21}e_2 - K_{31}e_3] \quad (4.42)$$

La même conclusion que le mode (1) est alors déduite, à savoir que le point d'équilibre  $(e_1, e_2, e_3) = (0, 0, 0)$  est asymptotiquement stable sur  $D_\varphi$ .

### 4.3.2 Protocole expérimental

La loi de commande présentée ci-dessus, nécessite l'utilisation d'un capteur de position, de vitesse et aussi d'un accéléromètre. Or aucun capteur de vitesse n'est installé au niveau du banc d'essai. D'autre part, l'accéléromètre utilisé présente une précision de  $\pm 2\%$  et une plage de fonctionnement assez large ( $\pm 100$  g) dimensionnée en fonction des performances du banc, ainsi pour des zones de fonctionnement à faible accélération, le signal de sortie du capteur est quasiment inutilisable pour la commande.

Ces deux raisons motivent l'utilisation des dérivateurs numériques. Ainsi, la vitesse et l'accélération seront reconstruites via les différentiateurs d'ordre deux (DAO2/DO2). Un schéma générique de l'association "commande-différentiateur" est donné par la figure 4.2.

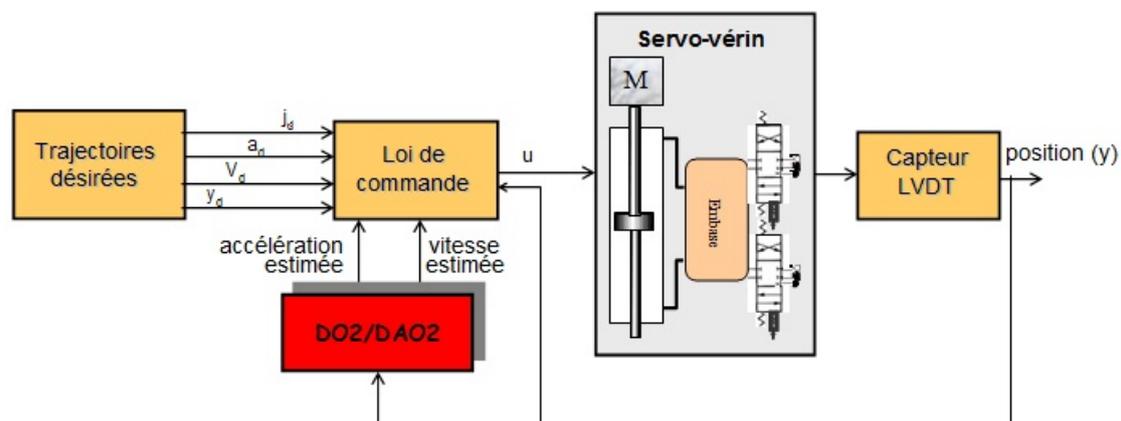


FIGURE 4.2 – Schéma de principe : association commande-différentiateur.

Du fait de l'impossibilité d'utiliser les capteurs, nous ne disposons d'aucunes références pour comparer les résultats donnés par les différentiateurs. Ceci nous amènera alors à effectuer une étude analytique des résultats obtenus par les deux algorithmes de dérivation (DAO2/DO2). Nous donnerons alors plus d'importance à la qualité des dérivées estimées par chacun de ces différentiateurs, puisqu'il sera difficile d'interpréter les résultats en terme de signal de commande et d'erreur de suivi en position par rapport aux signaux estimés vu que le système est bouclé.

Pour tester la validité des différentiateurs dans la boucle de commande et afin de pouvoir caractériser les performances de l'ensemble, la définition des différents critères et consignes à considérer est nécessaire. Pour ce qui concerne les trajectoires désirées, étant donné que le degré relatif de la position est égal à trois, ces trajectoires désirées doivent être au moins trois fois dérivables.

De plus, pour satisfaire les hypothèses considérées dans la phase de modélisation, nous devons imposer des conditions sur l'amplitude et la fréquence des trajectoires désirées. Il faut donc utiliser des consignes à basse et à moyenne fréquence pour que l'effet inertiel de l'embase soit négligeable. Pour pouvoir négliger la dynamique du servodistributeur, il est nécessaire de tenir compte de l'étude sur la séparation des dynamiques vérin/servodistributeur, effectuée dans le paragraphe 3.4.3 du chapitre 3. Dans les conditions normales de fonctionnement ("conditions théoriques"), nous pouvons travailler avec des ouvertures du servodistributeur de  $5\%U_n$  et de  $10\%U_n$  (ou des variations de  $5\%U_n$  et de  $10\%U_n$ ), pour des déplacements respectifs autour de la position centrale du vérin et à 25% du déplacement total du vérin. Pour les conditions "pratiques" (par exemple avec une diminution du module de compressibilité en présence d'air dissout dans l'huile), nous pouvons atteindre des mouvements de 50% du déplacement total du vérin pour des ouvertures du servodistributeur allant jusqu'à  $5\%U_n$ .

Afin de tenir compte de l'ensemble de ces contraintes, nous proposons d'effectuer deux types d'essais. Pour le premier essai (essai 1), nous utilisons une consigne de type sinusoïdale d'amplitude  $\pm 30$  mm et de fréquence 0.5 Hz.

Le deuxième essai (essai 2) consiste à imposer aussi une consigne sinusoïdale dont l'amplitude maximale de déplacement est de  $\pm 50$  mm et dont la fréquence est égale à 1 Hz.

Pour pouvoir donner un bilan comparatif de l'association "commande-dérivateur", certains critères seront pris en compte. Nous définissons deux classes de critères, des critères quantifiables à savoir :

- l'erreur maximale de suivi en position  $e_y$ ,
- l'erreur en vitesse  $e_v$ ,
- l'erreur en accélération  $e_a$ ,
- le nombre de paramètre à régler pour l'ensemble "commande-différentiateur".

Etant donné que nous ne disposons d'aucune référence (capteurs), nous choisissons alors d'utiliser l'erreur en vitesse  $e_v$  (respectivement  $e_a$ ) afin d'avoir plus d'information sur la qualité des signaux dérivés. Cette erreur est alors définie comme étant la différence entre la vitesse estimée (respectivement l'accélération estimée) et la vitesse désirée (respectivement l'accélération désirée).

Une série de 10 essais expérimentaux a été effectuée et a prouvé la répétabilité des résultats. Pour simplifier la présentation de ce mémoire, des résultats jugés reproductibles sont présentés. Finalement, nous considérons deux critères non quantifiables à savoir la complexité à régler l'ensemble "commande-différentiateur" et la qualité des signaux estimés en terme de filtrage.

### 4.3.3 Résultats expérimentaux

Cette partie est dédiée à la présentation et à l'analyse des résultats expérimentaux obtenus dans le cas de la commande d'un seul servodistributeur (mode (1)). Dans un premier temps, nous illustrons les résultats obtenus pour l'essai 1 pour chacun des différentiateurs, ensuite une ana-

lyse des résultats donnés pour le deuxième essai sera effectuée. Cette association "commande-différentiateur" a été implantée sur la carte dSpace DS1104 où la fréquence d'échantillonnage est fixée à 1 kHz.

La commande définie par (4.42) nécessite trois paramètres de réglage qui sont  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ . La seule condition requise est la stricte positivité de ces paramètres. Cependant, ces gains doivent être réglés pour garantir un suivi de trajectoire acceptable<sup>4</sup>. Il est à signaler que notre objectif est non pas de synthétiser des lois de commande robustes mais de valider les algorithmes de différentiation dans un bloc de commande. Ainsi, nous avons réglé  $c_1 = 500$ ,  $c_2 = 500$  et  $c_3 = 600$ . Le réglage des gains de la commande reste inchangé tout au long de ces essais (essai 1 et essai 2).

#### *Essai 1 : résultats expérimentaux :*

Dans ce paragraphe, les résultats relatifs à l'essai 1 sont présentés. Pour ce premier essai, les gains du différentiateur DO2 sont fixés à  $\lambda_0 = 18$ ,  $\lambda_1 = 15$  et  $\lambda_2 = 8$ . Les gains de convergence de l'algorithme DAO2 sont choisis tels que  $K_0 = 25$  et  $K_1 = 35$ . Les gains dynamiques de celui-ci sont initialisés à zéro. Le choix de ces valeurs est effectué afin d'obtenir la bonne précision et le meilleur filtrage par rapport à la consigne d'entrée imposée. Dans un premier temps, nous illustrons les résultats obtenus via le DO2. Par la suite, une analyse des résultats donnés par le DAO2 sera présentée.

La figure 4.3(a) présente l'évolution de la position mesurée et la position désirée. La figure 4.3(b) illustre l'évolution de l'erreur de suivi en position. Nous obtenons une erreur maximale en position de l'ordre de 0.18 mm, en valeur absolue. A titre indicatif, avec une commande linéaire par retour d'état, cette valeur vaut 1mm, ceci explique l'importance de tenir compte des non-linéarités du système et surtout de l'aspect résistif engendré par l'embase.

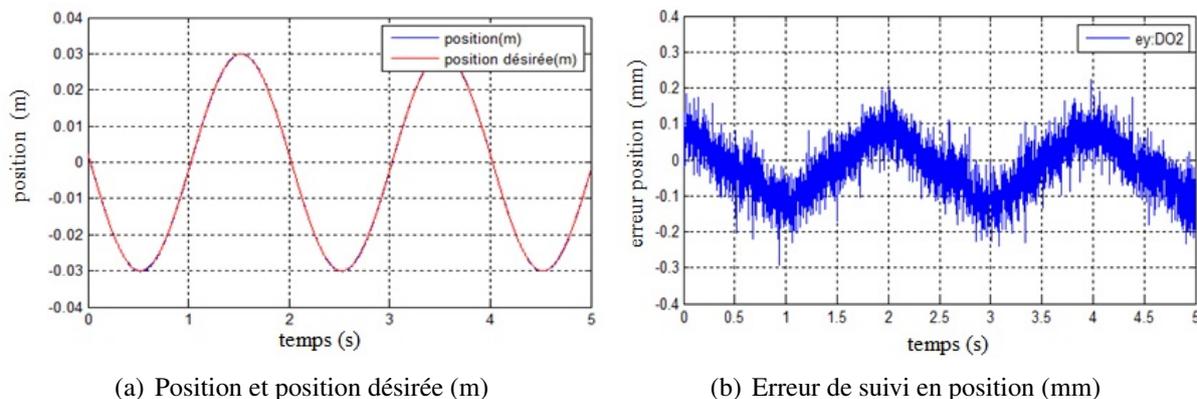


FIGURE 4.3 – Evolution de la position et de l'erreur en position : DO2

Les figures 4.4(a) et 4.4(b) représentent respectivement la vitesse et la vitesse désirée ainsi que l'accélération et l'accélération désirée. Etant donné le bon réglage des gains du DO2 par rapport au signal d'entrée, nous remarquons que les signaux de vitesse et d'accélération estimés n'introduisent pratiquement aucun déphasage comparés à la vitesse et l'accélération désirées. Même si cette comparaison n'est pas pertinente, rappelons que nous ne disposons pas d'une autre référence, nous constatons que les dérivées estimées sont relativement bruitées, malgré un choix des gains de valeurs faibles.

4. une erreur de position relativement faible

Le signal de commande relatif à l'association "DO2-commande" est donné par la figure 4.5. Malgré la présence d'un niveau relativement élevé de bruit au niveau de la vitesse et de l'accélération estimées, le signal de commande présente relativement peu de bruit (il faut voir l'échelle de mesure). Ceci peut être expliqué par le filtrage dû par la loi de commande.

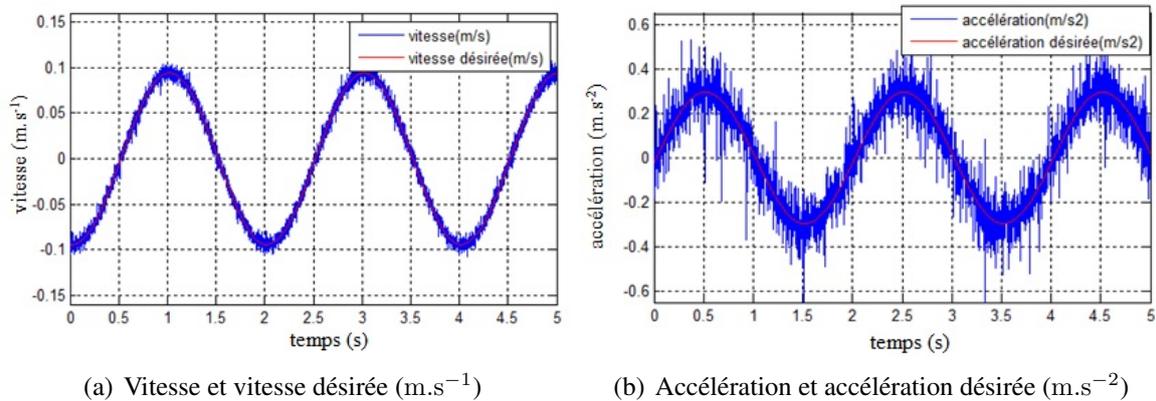


FIGURE 4.4 – Vitesse et accélération estimées : DO2

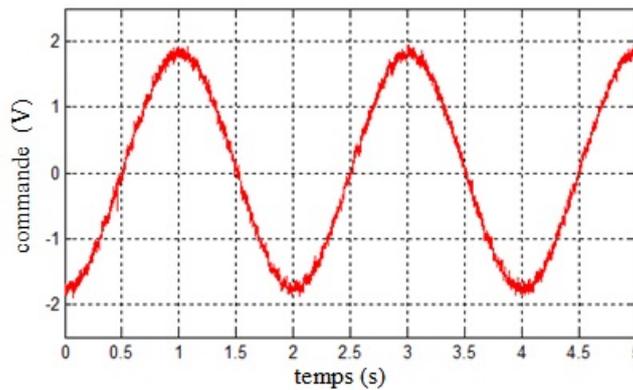


FIGURE 4.5 – Commande (V) : DO2.

Pour le DAO2, les figures 4.6(a) et 4.6(b) illustrent la position et position désirée ainsi que l'erreur en position. Celle-ci présente une valeur maximale (en valeur absolue) identique à celle donnée par le DO2, à savoir 0.18 mm.

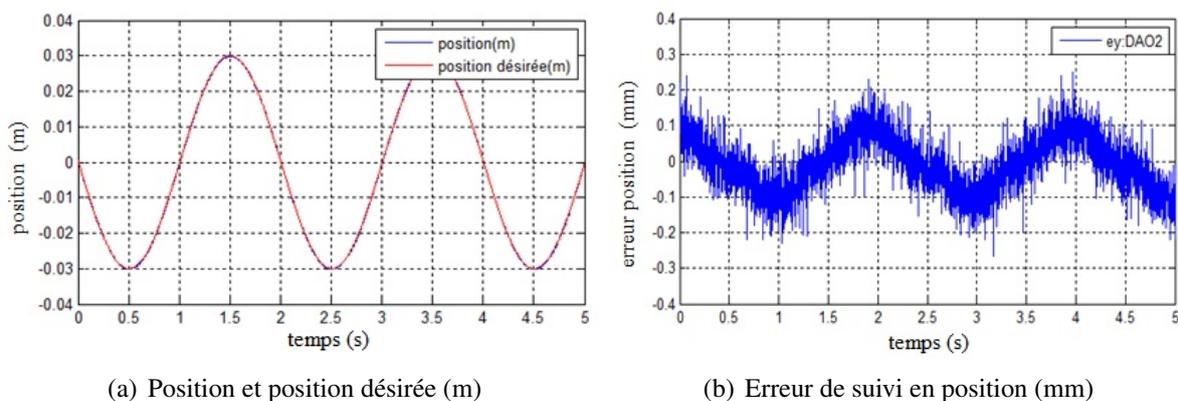


FIGURE 4.6 – Evolution de la position et de l'erreur en position : DAO2

Les figures 4.7(a) et 4.7(b) présentent les signaux estimés en vitesse et en accélération avec les

trajectoires désirés associées. Comparés aux signaux obtenus par le DO2, nous remarquons que celles estimés par le DAO2 sont beaucoup mieux filtrés.

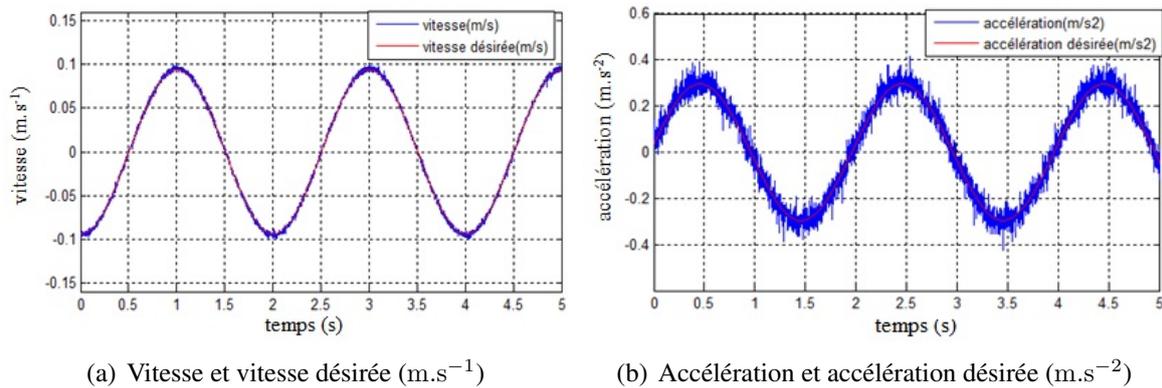


FIGURE 4.7 – Vitesse et accélération estimées : DAO2

Par utilisation de ces différentiateurs, visiblement il n'y a aucun déphasage au niveau de la vitesse et de l'accélération estimées par rapport aux trajectoires désirées, ce qui peut être justifié par l'obtention de la même valeur maximale en erreur en position.

La figure 4.8 présente le signal de commande donné par l'association "DAO2-commande".

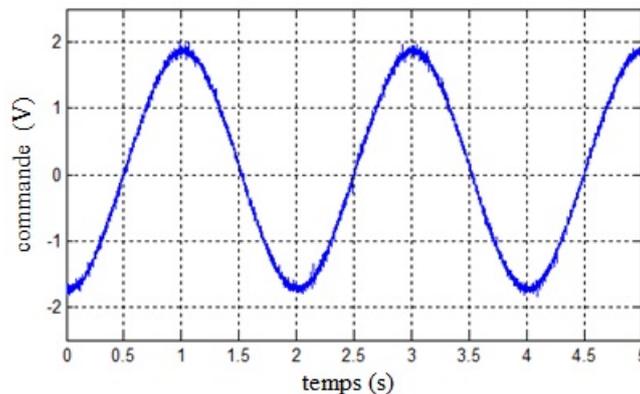


FIGURE 4.8 – Commande (V) : DAO2.

Il est à préciser qu'en utilisant le DAO2 ou le DO2, on ne note pas une différence lisible pour le signal de commande ainsi que pour l'erreur en position. A ce niveau donc, il est difficile de justifier le choix d'un différentiateur par rapport à un autre étant donné de plus que les résultats sont donnés pour l'ensemble "dérivateur-commande". Nous pouvons cependant en déduire que les signaux estimés par le DAO2 sont mieux filtrés que ceux estimés par le DO2.

#### Essai 2 : résultats expérimentaux :

Nous présentons maintenant les résultats expérimentaux relatifs à l'essai 2. Le but de cet essai est de montrer dans un premier temps le compromis existant entre la précision et le filtrage pour les deux versions d'algorithmes modes glissants et dans un second temps, nous précisons l'avantage apporté par la nouvelle version.

Pour ce faire, nous gardons le même réglage des gains pour les deux différentiateurs. Commençons tout d'abord à présenter les résultats donnés par le DO2. Ainsi, la figure 4.9(a) décrit l'évolution de la position et la position désirée.

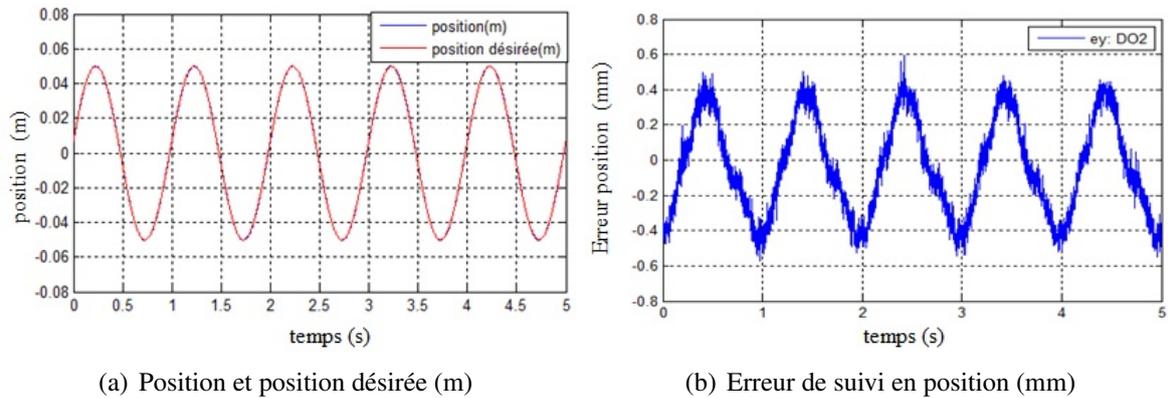


FIGURE 4.9 – Evolution de la position et de l'erreur en position : DO2

La figure 4.9(a) présente l'erreur en position. La valeur maximale de l'erreur est de l'ordre de 0.55 mm. L'augmentation de cette valeur est due à d'une part aux erreurs relatives sur les estimées de la vitesse et de l'accélération et d'autre part aux erreurs qui peuvent être issues des incertitudes paramétriques, plus précisément le coefficient de décharge, autour de cette plage de fonctionnement.

Les courbes relatives aux signaux estimés et les erreurs associées sont données sur les figures 4.10 et 4.11. Rappelons que ces erreurs sont calculées par rapport aux trajectoires désirées.

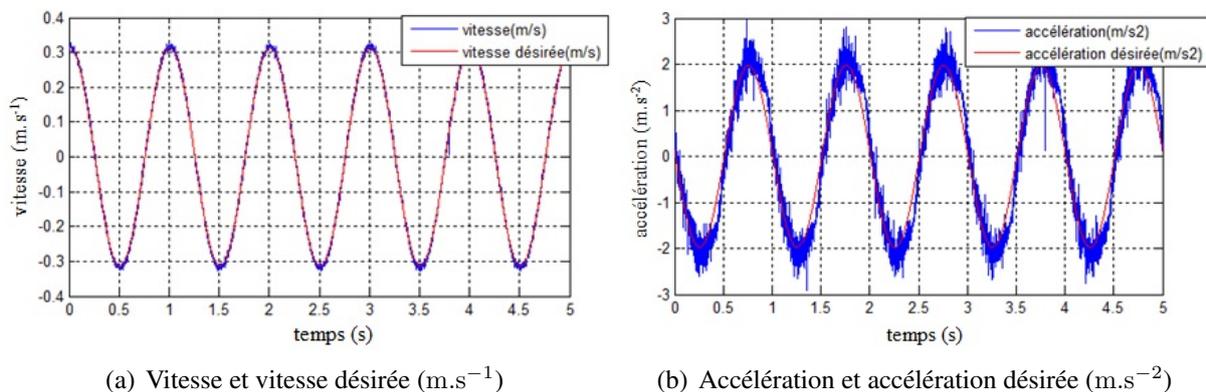


FIGURE 4.10 – Vitesse et accélération estimées : DO2

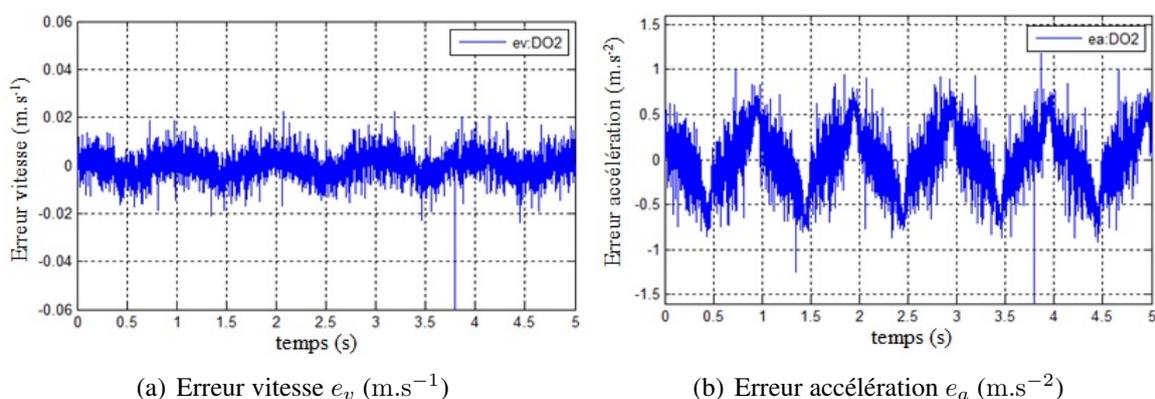


FIGURE 4.11 – Erreurs vitesse et accélération : DO2

Nous constatons que l'accélération estimée par le DO2 présente un déphasage qui se traduit par

une erreur maximale en accélération  $e_a$  égale à  $0.64 \text{ m.s}^{-2}$  (figure 4.11(b)).

Dans la figure 4.10(a), le déphasage n'est pas lisible au niveau de la courbe mais nous pouvons observer une erreur en vitesse de l'ordre de  $0.011 \text{ m.s}^{-1}$ .

L'évolution du signal d'entrée est donnée sur la figure 4.12. Le signal obtenu dans ce cas est moins bruité que celui donné avec le premier essai, ceci s'explique par le fait que les signaux estimés présentent moins de bruit.

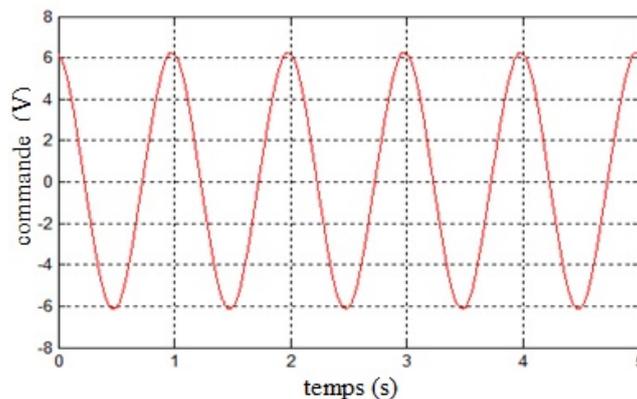
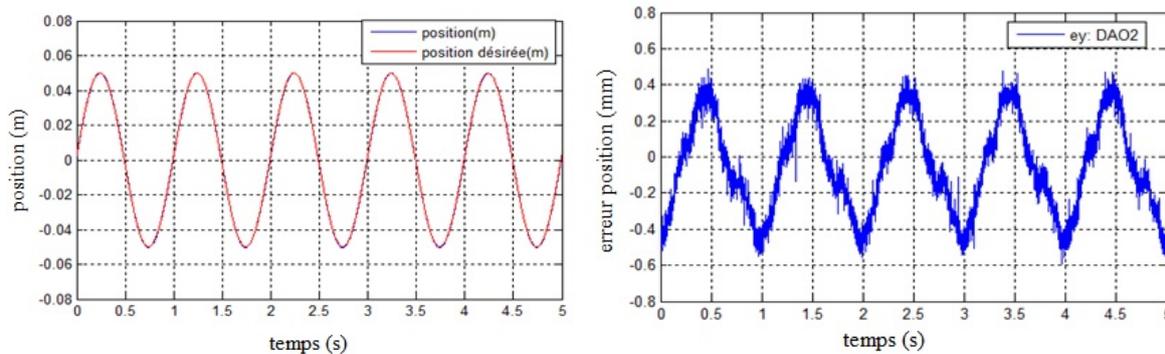


FIGURE 4.12 – Commande (V) : DO2.

Pour le DAO2, nous présentons les mêmes figures que celles données pour le DO2. Pour l'erreur en position, nous retrouvons relativement la même valeur que celle donnée par le DO2 (figure 4.13(b)).



(a) Position et position désirée (m)

(b) Erreur de suivi en position (mm)

FIGURE 4.13 – Evolution de la position et de l'erreur en position : DAO2

Comme pour le DO2, les estimées de la vitesse ainsi que l'accélération sont légèrement déphasées 4.14(a) et 4.14(b) mais elles présentent moins de bruit que celles données pour le DO2 (particulièrement sur l'accélération estimée). Ce déphasage se traduit par une valeur identique en erreur de vitesse que celle enregistrée par le DO2. Toutefois, nous observons une erreur en accélération plus faible que le DO2, de l'ordre de  $0.48 \text{ m.s}^{-2}$  (figure 4.15(b)).

Le signal de commande est donné sur la figure 4.16.

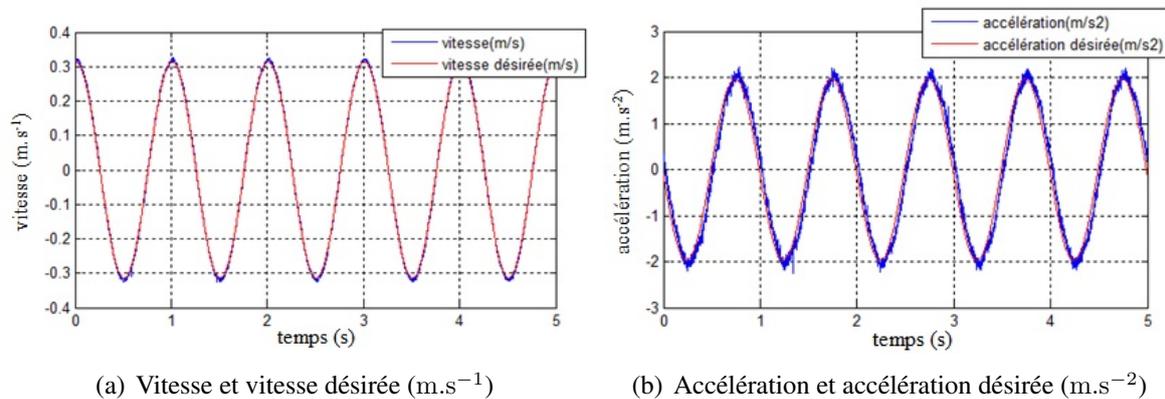


FIGURE 4.14 – Vitesse et accélération estimées : DAO2

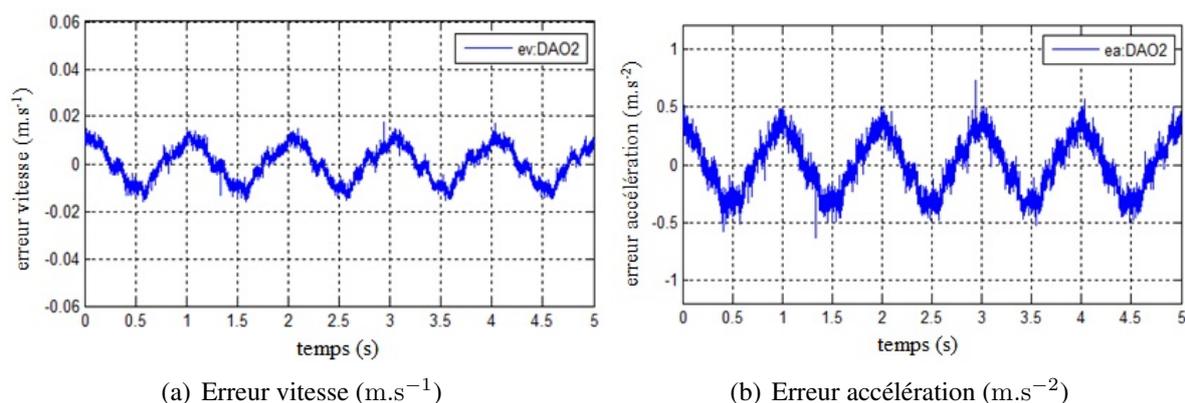


FIGURE 4.15 – Erreurs vitesse et accélération : DAO2

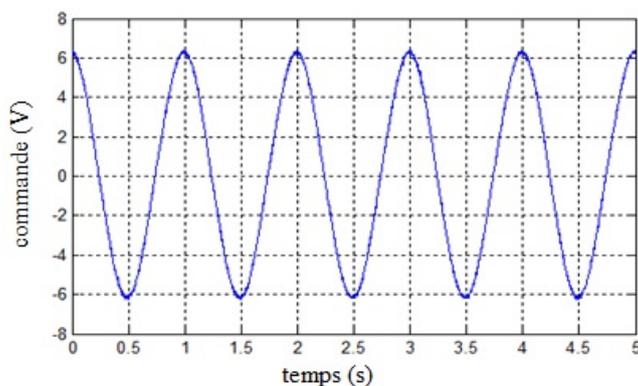


FIGURE 4.16 – Commande (V) : DAO2.

### Remarques générales sur les essais :

1/ Avec un bon réglage des deux algorithmes par rapport à un signal d'entrée donné, les dérivées estimées par le DAO2 sont mieux filtrées que celles données par le DO2. Les deux dérivateurs présentent une bonne précision.

2/ Avec le même réglage des deux versions d'algorithme modes glissants et en augmentant la fréquence ainsi que l'amplitude de la consigne en position, une légère dégradation des estimées est observée. Cependant, les signaux estimés par le DAO2 sont toujours mieux filtrés. Donc pour augmenter la précision des dérivateurs pour une certaine plage de fréquence du signal à dériver, il faut augmenter les gains des dérivateurs. Cependant, l'augmentation des valeurs des

gains du DO2 entraîne une très forte augmentation du bruit, ce qui peut rendre inutilisable les signaux estimés au niveau de la commande. Par contre, l'aspect filtrage apporté par le DAO2 donne la possibilité d'augmenter les gains tout en assurant une bonne précision pour un spectre donné de consigne. Ceci représente l'avantage majeur de la version proposée.

3/ Le deuxième point intéressant du DAO2 proposé est la réduction du nombre de paramètre à régler pour l'ensemble du système (5 paramètres pour le DAO2 et 6 paramètres pour le DO2).

## 4.4 Conclusion

Ce chapitre est dédié à la validation des algorithmes de différentiation dans un bloc de commande. Nous nous sommes intéressés à une application électrohydraulique où l'objectif était la commande du vérin en suivi de position. de commander la position du vérin. Pour ce faire, nous avons utilisé le modèle de commande donné dans le chapitre 3. Pour pouvoir utiliser ce modèle pour l'objectif requis, un changement de coordonnées est alors effectué. Ce changement fait apparaître une dynamique résiduelle dont nous avons justifié la stabilité "pratique" dans le domaine physique.

La commande en position du sero-vérin par la technique du Backstepping pour les deux modes (1) et (2) a été mise en oeuvre. Le choix de cette commande est justifié par le fait que celle-ci nécessite l'information de vitesse ainsi que celle d'accélération. Le banc d'essai ne dispose pas de capteur de vitesse et l'accéléromètre présente une plage trop large de fonctionnement. Nous avons alors reconstruit la vitesse et l'accélération par les algorithmes de dérivation d'ordre deux DO2 et DAO2. Afin de ne pas "surcharger" ce mémoire de résultats expérimentaux, nous ne présentons que ceux relatifs au mode (1).

Pour valider et effectuer une comparaison relative entre les résultats obtenus par ces deux versions d'algorithmes, deux essais ont été effectués, pour deux consignes en position différentes. Le premier essai met en évidence les propriétés de filtrage qu'apporte le DAO2 au niveau des signaux estimés. Le deuxième essai illustre le compromis entre la précision et le filtrage pour les deux algorithmes. Cet essai a aussi permis de mettre en évidence le point fort de la nouvelle version, qui est le filtrage. En effet, cet aspect donne la possibilité d'augmenter d'une manière plus significative les gains de convergence afin d'assurer une bonne précision tout en garantissant un faible bruit au niveau des dérivées estimées. Ce qui explique la possibilité d'appliquer ce type d'algorithme dans différents domaines.



# Conclusion générale et perspectives

## Conclusions

La qualité de la dérivation numérique en ligne joue un rôle primordial dans diverses applications touchant différents domaines (1D et 2D). Les observateurs présentent des résultats satisfaisants pour la dérivation mais en contrepartie une connaissance a priori du modèle observé est nécessaire. Dans le travail présenté, nous nous sommes intéressés aux dérivateurs type "signal", autrement dit, très peu, voir aucune connaissance sur la dynamique du signal et du système n'est a priori nécessaire.

Nos travaux s'inscrivent dans ce contexte et abordent des aspects théoriques et applicatifs. Du point de vue théorique, une étude de deux familles de dérivateurs a été effectuée. En premier lieu, nous avons étudié les dérivateurs de nature algébrique [travaux du projet INRIA-Non-A] et en deuxième lieu les différentiateurs modes glissants d'ordre supérieur [travaux de Levant]. Cette étude nous a permis de décrire les points forts et les points faibles de chacune de ces approches. Suite à cette étude, une nouvelle version des dérivateurs modes glissants a été proposée, cette dernière partie constituant le principal apport théorique de cette thèse.

Pour la validation de l'algorithme proposé, différentes applications ont été développées. Dans une première étude, nous l'avons utilisé pour l'identification paramétrique dans le cas d'un robot SCARA à deux axes. Dans une seconde étude, l'algorithme est employé comme détecteur de contour dans une image. Finalement, le dérivateur proposé est intégré dans la boucle de commande d'un axe hydraulique à hautes performances afin de réduire le nombre de capteurs installés sur le banc d'essai. Une loi de commande via la technique du Backstepping a été synthétisée pour des objectifs de suivi en position. Comme cette thèse est le premier travail réalisé sur le banc d'essai, une modélisation des éléments essentiels du système a été nécessaire, cette modélisation a été dédiée pour développer des modèles de simulation et de commande.

Afin d'entrer un peu plus dans le détail, la synthèse des dérivateurs algébriques ne nécessite aucune information sur le bruit. Du fait de leurs natures algébriques, ce type de dérivateur ne présente aucun critère de convergence. Toutefois, ils présentent une certaine complexité de mise en oeuvre. En effet, l'indétermination de la première version des dérivateurs algébriques à l'instant  $t = 0$  impose la suppression d'un certain nombre de points à l'instant initial. Du fait de la troncature de la série de Taylor, la précision des signaux estimés se dégrade lorsqu'on s'éloigne de l'origine temporelle. Pour pallier ce problème, il est alors nécessaire de réinitialiser régulièrement l'algorithme. Ainsi, la première version nécessite trois paramètres de réglages à savoir le choix de l'ordre de troncature, le nombre de points à éliminer et les instants de réinitialisation. Quant à la deuxième version, elle présente également le même nombre de paramètres de réglage : l'ordre de troncature, un gain  $\nu$  et la taille de la fenêtre d'estimation. Comme dans la première version, cette version utilise aussi les intégrales itérées qui sont alors calculées sur une fenêtre d'estimation de taille  $T$ . Ceci a permis d'une part de pallier au problème de (ré) initialisation rencontré dans la première version et d'autre part, d'assurer un bon dé-bruitage

des signaux estimés pour un signal d'entrée bruité. Ce filtrage est fortement lié à la taille de la fenêtre d'estimation. Cependant, l'estimation des dérivées avec cette version se fait aussi d'une façon récursive. Pour résoudre le problème de dépendance entre les différentes estimées, une troisième version des estimateurs algébriques est présentée. Cette version apporte de nombreux avantages par rapport aux deux autres versions et conduit à une bonne estimation de la dérivée désirée, mais elle nécessite le réglage de 5 paramètres. Pour un signal mono-fréquentiel, nous avons remarqué que les estimateurs algébriques de cette version présentent des résultats satisfaisants avec un bon choix de paramètres. En revanche, pour un même réglage paramétrique, la performance de ces estimateurs est dégradée en modifiant la fréquence du signal d'entrée.

Par la suite, nous avons effectuée une étude détaillée des différentiateurs modes glissants d'ordre supérieur. Pour cette étude, nous avons considéré deux différentiateurs : ordre un (Super Twisting) et ordre deux. Une démonstration dans le plan de phase de la convergence en temps fini du Super Twisting (ST) est présentée. Suite à cette étude, nous avons pu conclure que les algorithmes modes glissants sont moins robustes par rapport au bruit comparé à ceux basés sur l'approche algébrique (deuxième et troisième version), étant donné l'hypothèse "forte" sur le bruit associée à ces différentiateurs modes glissants. Toutefois, les algorithmes modes glissants nécessitent un temps de calcul plus faible comparé aux dérivateurs algébriques. Nous avons pu constater aussi que le choix des gains des algorithmes modes glissants joue un rôle primordial sur la qualité des signaux estimés. Les gains de réglage de ce type de dérivateurs dépendent de la constante de Lipschitz  $C$  de la dérivée d'ordre le plus élevé du signal. Cependant, cette constante n'est pas toujours connue surtout dans le cas où ce signal d'entrée est entaché de bruit. Un choix inadéquat de ces gains conduit à une détérioration de la précision des différentiateurs. Pour un signal non bruité et avec un bon choix des gains, les estimées des dérivées peuvent être identiques aux dérivées analytiques. En revanche, pour obtenir des résultats satisfaisants dans le cas d'un signal multi-fréquentiel (bruité ou non bruité), il est nécessaire d'augmenter les valeurs des gains ce qui amplifie le bruit en sortie, évidemment pour un signal d'entrée bruité. En pratique, le réglage des paramètres de ces différentiateurs se fait manuellement et chaque fois que le signal d'entrée change un nouveau réglage est nécessaire afin d'avoir le bon compromis entre la précision et la robustesse par rapport au bruit. De plus, ces algorithmes présentent une hypothèse sur la valeur absolue du bruit qui doit être bornée par une valeur très faible. Donc pour certains types d'applications, il est impossible de pouvoir estimer les dérivées d'un signal donné en présence de bruit qui ne satisfait pas l'hypothèse énoncée par Levant.

Afin d'assurer une bonne estimation des dérivées et de régler automatiquement les gains de tels algorithmes tout en garantissant surtout une bonne réduction de l'amplification du bruit dans les signaux estimés, nous avons proposé une nouvelle version de ces algorithmes modes glissants. La nouvelle version est fondée sur l'ajout d'une dynamique sur les gains de l'algorithme en fonction de la surface de glissement. Cette solution, à caractère adaptatif,<sup>5</sup> a permis d'obtenir une bonne précision tout en garantissant un bon compromis entre déphasage et erreur pour un signal d'entrée pouvant balayer un certain nombre de fréquences. Par l'ajout d'un terme continu dans les équations dynamiques des différentiateurs proposés et par la présence d'un terme intégral dans les dynamiques des gains, une réduction du bruit remarquable est obtenue par rapport à la version de base. Ce qui nous a permis d'utiliser cette version dans différentes applications touchant à différents domaines.

Nous avons pu présenter une démonstration de convergence en temps fini du différentiateur adaptatif d'ordre un (STA) via l'approche de Lyapunov en considérant une fonction de Lyapunov quadratique. Tandis que pour un différentiateur d'ordre supérieur à un, nous avons rencontré une difficulté pour prouver la convergence en temps fini. Nous avons cependant proposé une dé-

5. nous utilisons ici le vocabulaire "adaptatif" afin de désigner que les gains sont dynamiques

monstration de convergence asymptotique tout en ayant conscience que la propriété de temps fini est associée aux modes glissants d'ordre supérieur. A la fin de cette partie théorique, nous avons dressé un tableau récapitulatif permettant de donner un ordre de grandeur qualitatif des sept dérivateurs robustes (étudiés et proposés).

A partir du chapitre 2 et afin de vérifier son efficacité, nous avons utilisé le différentiateur proposé dans différentes applications. La première est liée au problème d'identification en ligne des paramètres physiques d'un robot à deux axes. En fait, nous avons à la fois exploité deux propriétés du modèle inverse : la platitude et la linéarité de ce modèle inverse par rapport aux paramètres (ou groupement de paramètres). Ceci a permis de ramener le problème de l'identification à une minimisation d'une erreur de prédiction par rapport au vecteur des paramètres inconnus. Cette minimisation est effectuée selon un critère quadratique. Ainsi, le vecteur des paramètres inconnus est obtenu via la méthode des moindres carrés. L'algorithme proposé est intégré dans la boucle d'identification afin d'estimer les dérivées successives de l'état mesuré. Pour valider cette méthode, nous avons comparé les couples réels à ceux estimés. Ces deux couples sont proches ce qui s'explique par une bonne identification des paramètres dynamiques. Une étude comparative avec d'autres méthodes utilisant d'autres algorithmes de dérivation est aussi présentée.

Dans le domaine bidimensionnel, nous avons exploité le différentiateur adaptatif modes glissants comme étant un détecteur de contour d'image. Seules des images en niveaux de gris ont été utilisées pour la validation. Pour avoir une base de comparaison, nous avons utilisé quelques détecteurs de contour connus dans la littérature. En imposant certains critères de comparaison et pour différents types de bruits, des tableaux récapitulatifs ont été dressés. D'une façon générale, les résultats obtenus par l'algorithme proposé sont satisfaisants par rapport aux méthodes conventionnelles. En revanche, avec le différentiateur proposé, la détection de contour est plus coûteuse en terme de temps de calcul.

La dernière application présentée dans ce manuscrit décrit l'intégration des nouveaux algorithmes de différentiation robuste sur des systèmes complexes commandés. A travers cette application, notre objectif était de valider expérimentalement le dérivateur proposé dans une boucle de commande. Le système physique étudié est un servo-vérin électrohydraulique à hautes performances ayant différents modes de fonctionnement. Nous avons consacré tout un chapitre (chapitre 3) pour la modélisation de ce système.

Nous nous sommes ensuite intéressés particulièrement à la commande en position de l'axe hydraulique. Une loi de commande basée sur la technique du Backstepping a été synthétisée pour deux modes de fonctionnement du système : utilisation d'un seul servodistributeur (mode (1)) et l'utilisation de deux servodistributeurs en parallèle (mode (2)). Les résultats expérimentaux fournis, uniquement dans le cas du mode (1), ont été présentés pour le système bouclé "différentiateur-commande" pour différentes consignes et pour deux types d'algorithmes de différentiation (adaptatif et non adaptatif). Ces résultats ont permis de vérifier l'efficacité du différentiateur proposé surtout vis-à-vis de ces bonnes propriétés de filtrage.

## Perspectives

La preuve de convergence en temps fini du différentiateur proposé d'ordre deux (DAO2) représente l'une des principales perspectives théoriques. Seule la propriété d'homogénéité a permis à Levant de démontrer la convergence en temps fini d'un différentiateur d'ordre supérieur à 1. Il serait alors intéressant de pouvoir démontrer la convergence temps fini de tels algorithmes

(adaptatifs ou non) en exploitant d'autres approches. Des investigations méritent aussi d'être conduites sur les différentiateurs modes glissants à gains dynamiques d'ordre arbitraire où, dans ce cas, le choix des dynamiques est très important et nous semble un choix clé pour démontrer la convergence en temps fini.

Pour les systèmes linéaires, la convergence du système bouclé "observateur-commande" peut être démontrée directement par application du principe de séparation. Ces travaux restent restreints pour les systèmes non linéaires. Dans notre cas, ce problème théorique est sans aucun doute l'une des perspectives de nos travaux.

Pour la commande des systèmes électrohydrauliques, nous notons quelques axes de recherche intéressants : commande en effort et commande hybride position/effort. Pour cette dernière, des travaux ont déjà débutés mais ils ne sont pas encore finalisés.

La commande en effort d'un axe électrohydraulique est beaucoup plus délicate que celle en position. En effet, les dynamiques des modes hydrauliques sont plus rapides que les dynamiques des modes mécaniques. De plus, pour ce type d'asservissement la variable d'état à contrôler est la plus dynamique. Pour ce type de commande, différents phénomènes peuvent apparaître à savoir la vibration de la structure, l'influence de la raideur du capteur d'effort, les pulsations de pression engendrées par l'installation hydraulique... Lors d'asservissement d'effort apparaît aussi une dynamique résiduelle mécanique pouvant poser des problèmes de stabilité. D'autre part, nous savons bien que l'asservissement de l'effort est assuré dans le domaine du gain en pression, autrement dit pour assurer ce type de modulation, on a besoin typiquement de 10% de la valeur nominale  $u_n$  de la commande. Le problème est que ce 10% de  $u_n$  risque de se noyer dans les défauts statiques. C'est pour cela, qu'il est nécessaire de modéliser et de prendre en compte ces défauts statiques (modèle des caractéristiques statiques du servodistributeur, modèles du frottements sec...), pour la construction de la loi de commande afin d'obtenir de bonnes performances.

Pour les perspectives de nos travaux du point de vue applicatif, nous pouvons utiliser la méthode d'identification en ligne proposée pour une certaine classe de système à temps variant, précisément pour la classe de système où le modèle d'évolution des paramètres est a priori connu. La détection de contour avec l'algorithme proposé présente une limite par rapport au temps de calcul car celui-ci devient élevé en augmentant la taille de l'image. Pour pallier ce problème, il faudra étudier la possibilité de considérer comme entrée de l'algorithme une matrice de pixel au lieu d'un pixel, ce qui nécessite une modification de la structure de l'algorithme. Toutefois, les résultats obtenus pour la détection de contour nous semblent intéressants ce qui nous amène à envisager d'autres applications dans ce domaine. L'algorithme proposé peut être utilisé pour la reconstruction d'image et la compression/décompression de séquence d'images (voir Annexe C). Nous avons déjà commencé à mettre en place la méthode proposée, des simulations sont à prévoir afin de vérifier la qualité des résultats obtenus.





# Bibliographie personnelle

- [Sidhom11] Sidhom, L., Smaoui, M., Thomasset, D., Brun, X., Bideaux, E. "Adaptive Higher Order Sliding Modes for Two-dimensional Derivative Estimation". 18<sup>th</sup> World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC), Milano, Italie 28 August - 2 Septembrer, 2011.
- [Sidhom10] Sidhom, L., Pham, M.T., Thévenoux, F., Gautier, M. "Identification of a robot manipulator based on an adaptive higher order sliding modes differentiator". IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, Montreal, Canada, 6-9 July, 2010.
- [Sidhom10b] Sidhom, L., Brun, X., Bideaux, E., Thomasset, D. "Suivi de trajectoire en position d'un servo-vérin hydraulique via la technique du Backstepping". 6ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA), Nancy, France, 2-4 june, 2010.
- [Sidhom09] Sidhom, L., Brun, X., Bideaux, E., Thomasset, D. "Nonlinear adaptive robust control of Electro-Hydraulic servo-actuator with some unknown parameters". Proceedings of the 11th Scandinavian International Conference on Fluid Power (SICFP), Linköping, Suède, 2-4 june, 2009.
- [Sidhom08] Sidhom, L., Smaoui, M., Di Loreto, M. "A 2nd-Order Robust Adaptive Differentiator-Controller Design for an Electropneumatic System". Proceedings of the 5th Fluid Power Net International PhD Symposium, Cracovie, Pologne, July 2008.
- [Sidhom08b] Sidhom, L., Smaoui, M., Di Loreto, M., Brun, X., Bideaux, E., Thomasset, D. "Higher-order sliding modes for an electropneumatic system : differentiation and output-feedback control". Proceedings of the Bath/ASME Symposium on Fluid Power and Motion Control, Bath, Royaume-Uni, Septembrer 2008.
- [XuSid10] XU, Y., Bideaux, E., Sesmat, S., Sidhom, L., Brun, X. "Hydro-Mechanical model of electro-hydraulic servovalve based on bond graph". Proceedings of the 6th Fluid Power Net International PhD Symposium (FPNI), Indiana, USA, July 2010.
- [Sidhom09b] Sidhom, L. "Rapport interne au laboratoire : Caractérisation du servodistributeur MOOG D765", Laboratoie AMPERE-MOOG, Mars, 2009, 30p.



# Bibliographie

- [1] Gérard, L., Mathiot, D., "Techniques audiovisuelles et multimédias", Second Edition, Dunod, 2007, 264p.
- [2] Wang, Z., Hang, D., "Progressive Switching Median Filter for the Removal of Impulse Noise from Highly Corrupted Images". IEEE Transactions on Circuits and Systems-II : Analog and Digital Signal processing, 1999, vol. 46, n° 1, pp. 78-80.
- [3] Abdou, I. E., et Pratt, W. K. "Quantitative design and evaluation of enhancement/thresholding edge detectors". Proceedings of the IEEE, 1979, vol. 67, n° 5, pp. 753763.
- [4] Armstrong-Hélouvry, B., Dupont, P., Canudas De Wit, C. "A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction". Automatica, 1994, vol. 30, n° 7, pp. 1083-1138.
- [5] Attar, B. "Modélisation réaliste en conditions extrêmes des servovalves électrohydraulique utilisées pour le guidage et la navigation aéronautique et spatiale", Thèse de Doctorat, Toulouse, INSA de Toulouse, 2008, 172p.
- [6] Bacciotti, A., Rosier, L. "Lyapunov functions and stability in control theory", Second Edition, New York Springer-Verlag, 2005, 238p.
- [7] Baev, S., Shkolnikov, I. Shtessel, Y., Poznyak, A. "Parameter identification of nonlinear systems using traditional and high order sliding modes", American Control Conference, Minneapolis, 14-16 June, 2006, pp. 2634-2639.
- [8] Bartolini, G., Ferrera, A., Levant, A., Usai, E. "On second order sliding mode controllers". Lecture notes in control and information sciences, 1999, vol. 247, pp. 329-350.
- [9] Basseville, M. "Distance measures for signal processing and pattern recognition". Signal Processing, 1989, vol. 18, n° 4, pp. 349-369.
- [10] Batur, C., Zhang, L. "Sliding mode observer and controller design for a hydraulic motion control system". American Control Conference, Denver, Colorado, 4-6 June, 2003, pp. 1721-1726.
- [11] Belgharbi, M., Brun, X., Scavarda, S., Sesmat, S., Thomasset, D. "PRC/GDR : Modélisation et Commande des Systèmes à Fluide sous Pression". Tome 2, Laboratoire Automatique Industrielle (ancien laboratoire AMPERE) INSA-Lyon, 1997, 170p.
- [12] Belgharbi, M., Thomasset, D., Scavarda, S., Sesmat, S. "Analytical model of the flow satge of a pneumatic servodistributor for simulation and nonlinear control", the 6<sup>th</sup> Scandinavian International Conference on Fluid Power (SICFP), Tampere, Finlande, May 1999, pp. 847-860.
- [13] Besançon, G., Zhang, Q., Hammouri, H. "High-gain observer based state and parameter estimation in nonlinear systems". Proceedings of the 6<sup>th</sup> IFAC Symposium Stuttgart, 1-3 September, 2004.
- [14] Bigot, C., Fossard, A., "Autoadaptation d'asservissement à large domaine de variation au moyen de lois de commandes pseudo-linéaires". Compte rendu à l'Académie des Sciences, 1963, vol. 256, n° 9, pp. 1912-1915.

- [15] Blackburn, J. F., Reethof, G., Shearer, J.L. "Mécanismes et Servomécanismes à Fluide Sous Pression", Tome 1, Paris, Dunod, 1966, 444p.
- [16] Bo, L. C., Pavelescu, D. "The friction-speed relation and its influence on the critical velocity of the stick-sleep motion". *Wear*, 1982, vol. 3, pp. 277-289.
- [17] Bornard, G., Hammouri, H. "A high gain observer for a class of uniformly observable systems". *Proceedings of the 30<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Broghton, Angleterre, 11-13 December, 1991, pp. 1494-1496.
- [18] Bouri, M., Thomasset, D. "Sliding control of an electropneumatic actuator using an integral switching surface". *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2001, vol. 9, n° 2, pp. 368-375.
- [19] Bouri, M. "Contribution à la commande non linéaire par mode de glissement, application aux actionneurs électropneumatiques", Thèse de Doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 1997, 194p.
- [20] Bregeault, V. "Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants", Thèse de Doctorat, Nantes, Ecole Centrale de Nantes, 2010, 140p.
- [21] Brown, R. B., Hwang, P. Y. C. "Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering", Seconde Edition, John Wiley & Sons, 1992, 496p.
- [22] Brun, X. "Commande linéaire et non linéaire en électropneumatique. Méthodologies et applications", Thèse de Doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 1999, 209p.
- [23] Canny, J.F. "A Computational Approach to Edge Detection". *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1986, vol. 8, n° 6, pp. 679-698.
- [24] Canny, J.F. "Finding edges and lines in images". Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Artificial Intelligence Laboratory MA, USA, 1983, 145p.
- [25] Canudas De Wit, C., Olsson, H., Astrom, K.J., Lischinsky, P. "A new model for control of system with friction". *IEEE Transactions On Automatic Control*, 1995, vol. 40, n° 3, pp. 419-425.
- [26] Canudas de Wit, C., Slotine, J.J.E. "Sliding observers for robot manipulators". *Automatica*, 1991, vol. 25, n° 5, pp. 859-864.
- [27] Carlsson, B., Ahlen, A., Sternad, M. "Optimal differentiation based on stochastic signal models". *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991, vol. 39, n° 2, pp. 341-353.
- [28] Castro-Linares, R., Glumineau, A., Laghrouche, S., Plestan, F. "High order sliding mode observer based control". *Proceeding 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Oaxaca, Mexico, 2004.
- [29] Chitour, Y. "Time varying high gain observers for numerical differentiation". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, vol. 47, n° 9, pp. 1565-1569.
- [30] Clarke, F.H., Ledyaev, Y., Stern, R.J., Wolenski, P.R. "Nonsmooth analysis and control theory", New York, Springer-Verlag, 1998, 276p.
- [31] Cocquerez, J.-P., Philipp, S. "Analyse d'images : filtrage et segmentation", Paris : Masson, 1995, 488p.
- [32] Collardo, F.A.G., D'Andres-Novet, B., Fliess, M., Mounier, H. "Analyse fréquentielle des dérivateurs algébriques". *XXIIe Colloque GRETSI*, 2009, 4p.
- [33] Dabroom, A.M., Khalil, H.K. "Discrete-time implementation of high gain observers for numerical differentiation". *International Journal of Control*, 1999, vol. 72, n° 17, pp. 1523-1537.
- [34] Deriche, R., Cocquerez, J.P. "Extraction des composantes connexes basées sur une détection optimale des contours". In *Cognitiva, CESTA*, 1987, pp. 1-9.

- [35] Dahl, P.R. "Solid friction damping of mechanical vibrations". Journal of American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1976, vol. 14,  $n^{\circ}$  12, pp. 1675-1682.
- [36] Davila, A., Moreno, J.A., Fridman, L. "Variable gains Super-Twisting algorithm : a Lypunov based design". American Control Conference, Baltimore, MD, USA, 30 June- 2 July, 2010, pp. 968-973.
- [37] Dridi, M., Scorletti, G., Smaoui, M. Tournier, D., Lin Shi, X. "Weighted  $H_{\infty}$  filtering versus observation : application to signal differentiation". American Control Conference, Baltimore, Maryland, 2010, pp. 1404-1409.
- [38] Davila, J., Fridman, L., Levant, A. "Second-order sliding mode observer for mechanical systems". IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, vol. 50,  $n^{\circ}$  11, pp. 1785-1789.
- [39] Davis, L.S. "A survey of edge detection techniques". Computer Graphics and Image Processing, 1975, vol. 4,  $n^{\circ}$  3, pp. 248-270.
- [40] Emalyanov, S.V. Korovin, S.V., Levantovsky, L.V. "Drift algorithm in control of uncertain processes". Problems of Control and Information Theory, 1986, vol. 15,  $n^{\circ}$ 6, pp. 1-11.
- [41] Deriche, R. "Fast Algorithms for Low-Level Vision". IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, vol. 12,  $n^{\circ}$  1, pp. 78-87.
- [42] Emalyanov, S.V., Korovin, S.V., Levantovsky, L.V. "Higher order sliding modes in control". Differential Equations, 1993, vol. 29,  $n^{\circ}$  11, pp. 1627-1647.
- [43] Filippov, A.F. "Application of the theory of differential equations with discontinuous right-hand sides to non-linear problems of automatic control". 1<sup>st</sup> IFAC Congress, Butterworths, London, 1961, pp. 923-927.
- [44] Dridi, M. "Dérivation numérique : synthèse, application et intégration", Thèse de Doctorat, Lyon, Ecole Centrale de Lyon, 2010, 196p.
- [45] Fleck., M.M. "Some defects in finite-difference edge finders". IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, vol. 14,  $n^{\circ}$  3, pp. 337-345.
- [46] Emalyanov, S.V., Korovin, S.V., Levantovsky, L.V. "Higher order sliding modes in the binary control system". Soviet Physics, Doklady, 1986, vol. 31,  $n^{\circ}$  4, pp. 291-293.
- [47] Deriche, R. "Using Canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector". International Journal of Computer Vision, 1987, vol. 1,  $n^{\circ}$  2, pp. 167-187.
- [48] Fliess, M., Join, C., Mboup, M., Sedoglavic, A. "Estimation des dérivées d'un signal multidimensionnel avec application aux images et aux vidéos". Actes 20e Col. GRETSI, Louvain-la-neuve :available at <http://hal.inria.fr/inria00001116>, 2005, pp. 136-139.
- [49] Fliess, M., Join, C., Mboup, M., Sira-Ramírez, H. "Analyse et représentation de signaux transitoires : application à la compression, au débruitage et à la detection de ruptures". Actes 20e Col. GRETSI, Louvain-la-neuve :available at <http://hal.inria.fr/inria00001115>, 2005, 4p.
- [50] Fliess, M., Join, C., Mboup, M., Sira-Ramírez, H. "Compression différentielle de transitoires bruités". Comptes Rendus Mathématique, 2004, vol. 339,  $n^{\circ}$  11, pp. 821-826.
- [51] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., Rouchon, P. "Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and examples". Inter. Journal of Control, 1995, vol. 61,  $n^{\circ}$  6, pp. 1327-1361.
- [52] Fliess, M., Sira-Ramírez, H. "An algebraic framework for linear identification". ESAIM : COCV, 2003, vol. 9, pp. 151168.
- [53] Floquet, T., Barbot, J.P. "Hierarchical second-order sliding-mode observer for linear time invariant systems with unknown inputs". International Journal of Systems Science, 2007, vol. 38,  $n^{\circ}$  10, pp. 793-802.

- [54] Floquet, T. "Contribution à la commande par modes glissants d'ordre supérieur". Thèse de Doctorat, Lille, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2000, 185p.
- [55] Floret-Pontet, F., Lamnabhi-Lagarrigue, F. "Parameter identification and state estimation for continuous-time nonlinear systems". American Control Conference, 2002, vol. 1, pp. 394-399.
- [56] Fridman, L. Levant, A. "Higher order sliding modes". In : W. Perruquetti et JP Barbot, Sliding mode Control in Engineering, New York : Marcel Dekker, 2002, pp. 53-101.
- [57] Fridman, L. "Singularly perturbed analysis of chattering in relay control systems". IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, vol. 47, n° 12, pp. 2079-2084.
- [58] Fridman, L. "An averaging approach to chattering". IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, vol. 46, n° 8, pp. 1260-1265.
- [59] Gagnon, L. et Smaili, F.D. "Speckle noise reduction of airborne SAR images with symmetric daubechies wavelets". Proceedings of SPIE, 31 May 1996, vol. 2759, pp. 14-24.
- [60] Gauthier, J.P., Hammouri, H., Othman, S. "A simple observer for non linear systems- Application to bioreactors". IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, vol. 37, n° 6, pp. 875-880.
- [61] Gautier, M., Khalil, W. "Exciting trajectories for the identification of base inertial parameters of robots". International Journal of Robotic Research, 1992, vol. 1, n° 4, pp. 362-375.
- [62] Gautier, M., Poignet, Ph. "Extended Kalman filtering and weighted least squares dynamic identification of robot". Control Engineering Practice, 2001, vol. 9, n° 12, pp. 1361-1372.
- [63] Gautier, M. "Numerical calculation of the base inertial parameters". Journal of Robotics Systems, 1991, vol. 8, n° 4, pp. 485-506.
- [64] Golembo, B.Z., Emelyanov, S.V., Utkin, V.I., Shubladze, "A.M. Application of piecewise-continuous dynamic systems to filtering problems". Automation and Remote Control, 1976, vol. 37, n° 3, pp. 369-377.
- [65] Guillon, M. "Asservissement hydraulique et électrohydraulique : 1-Théorie et technique", Tome 1, Paris : DUNOD, 1972, 246p.
- [66] Guillon, M. "Asservissement hydraulique et électrohydraulique : 2-Complément techniques et technologiques", Tome 2, Paris : DUNOD, 1972, 292p.
- [67] Guillon, M. "Commande et Asservissement Hydrauliques et Electrohydrauliques", Paris : Lavoisier, 1992, 452p.
- [68] Heath, M., Sarkar, S., Sanocki, T., et Bowyer, K. "Comparison of Edge Detectors : a methodology and initial study". Computer Vision and Image Understanding, 1998, vol. 69, n° 1, pp. 38-54.
- [69] Horn, B.K.P, Schunck, B.G. "Determining optical flow". Artificial Intelligence, 1981, vol. 17, pp. 185-203.
- [70] Huertas, A., Medioni, G. "Detection of intensity changes with subpixel accuracy using laplacian-gaussian masks". IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1986, vol. 8, n° 5, pp. 651-664.
- [71] Ibrir, S. "Linear time-derivatives trackers". Automatica, 2004, vol. 40, n° 3, pp. 397-405.
- [72] Isidori, A. "Nonlinear Control systems", Second Edition, Communications and Control Engineering Series Springer, 1989, 479p.
- [73] Itkiss, U. "Control systems of Variable Structure", Wiley, New York, 1976, 400p.
- [74] Juneja, M., et Sandhu., P. S. "Performance evaluation of edge detection techniques for images in spatial domain". International Journal of Comp. Theory and Engineering, 2009, vol. 1, n° 5, pp. 614-621.

- [75] Karnopp, D. "Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems". ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1985, vol. 107, n° 1, pp. 100-103.
- [76] Kass, M., Witkin, A., Terzopoulos, D. "Snakes : active contour model". International Journal of Computer Vision, 1988, vol. 107, n° 4, pp. 321-331.
- [77] Khalil, K. "Nonlinear systems", Second Edition, New Jersey : Prentice-Hall, 2001, 456p.
- [78] Khalil, W., Dombre, E. "Modeling, Identification and Control of Robots", Butterworth Heinemann, 2004, 500p.
- [79] Kobayashi, S., Furuta, K. "Frequency characteristics of Levant's differentiator and adaptive sliding mode differentiator". International Journal of Systems Science, 2007, vol. 38, n° 10, pp. 825-832.
- [80] Kobayashi, S., Suzuki, S., Furuta, K. "Adaptive VS differentiator". Proceeding of the 7<sup>th</sup> IEEE International Workshop on Variable Structure Systems, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, 2002, pp. 35-45.
- [81] Kozlowski, K. "Modelling and identification in robotics", London : Springer-Verlag New York, 1998, 249p.
- [82] Kumar, B., Roy, S.C.D. "Design of digital differentiators for low frequencies". Proceeding of the IEEE, 1988, vol. 76, n° 3, pp. 287-289.
- [83] Kunt, M., Granlund, G., Kocher, M. "Traitement numériques des images", Volume 2, Presses Polytechniques et universitaires Romandes, 1993, 562p.
- [84] Laghrouche, S., Smaoui, M., Plestan, F. "Robust control of electropneumatic actuator by third order sliding mode". 43<sup>rd</sup> IEEE Conference On Decision and Control, Paradise Island, Bahamas, December, 2004, vol. 5, pp. 4375 - 4380.
- [85] LaSalle, J.P. "Stability theory for ordinary differential equations". Journal of differential equations, 1968, vol. 4, n° 1, pp. 57-65.
- [86] Laval, L. "Modélisation et commande robuste en force d'un actionneur hydraulique confronté à un environnement incertain : Approche  $H_\infty$  et commande adaptative", Thèse de Doctorat, Versailles, Université de Versailles, 1997, 239p.
- [87] Lebrun, M. "Modélisation et simulation d'asservissements électrohydrauliques : application à l'étude et à la réalisation d'un ensemble destiné à la mesure des impédances en biomécanique", Thèse de Doctorat, Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, 1978, 128p.
- [88] Levant, A. "Homogeneity approach to high-order sliding mode design". Automatica, 2005, vol. 41, n° 5, pp. 823-830.
- [89] Levant, A. "Higher order sliding modes, differentiation and output-feedback control". International Journal of Control, 2003, vol. 76, n° 9-10, pp. 924-941.
- [90] Levant, A. "Quasi-continuous high-order sliding mode controllers". Proceedings of the 42<sup>nd</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Hawaii, USA, 2003, vol. 5, pp. 4605-4610.
- [91] Levant, A. "Universal SISO sliding mode controllers with finite time convergence". IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, vol. 46, n° 9, pp. 1447-1451.
- [92] Levant, A. "Full real time control of output variables via higher order sliding modes". European Control Conference, 1999, 6p.
- [93] Levant, A. "Robust exact differentiation via sliding mode technique". Automatica, 1998, vol. 34, n° 3, pp. 379-384.
- [94] Levant, A. "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control". International Journal of Control, 1993, vol. 58, n° 6, pp. 1247-1263.

- [95] Lewinera, T., Gomes Jr, J. D., Lopesa, H., Craizera, M. "Curvature and torsion estimators based on parametric curve fitting". *Computers and Graphics*, 2005, vol. 29, n° 5, pp. 641-655.
- [96] Ljung, L. et Soderstrom, T. "Theory and Practise of recursive identification", Mit Press, 1983, 551p.
- [97] Ljung, L. "Model validation and model error modeling". *Proceedings of the Astrm Symposium on Control*, 1999, pp. 15-42.
- [98] Lucas, B.D., Kanade, T. "An iterative image registration technique with an application to stereo vision". *Proceedings of the 7th international joint conference on Artificial intelligence*, 1981, vol. 2, pp. 121-130.
- [99] Luenberger, D.G. "An introduction to observer". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, vol. 16, n° 6, pp. 596-602.
- [100] Luxereau, F. "Compression du signal audiovisuel", Dunod, 2008, 184p.
- [101] Maini, R. et Sohal, J.S. "Performance evaluation of Prewitt edge detector for noisy images". *Inter.J.on Graphics, Vision and Image Processing*, 2006, vol. 6, n° 3, pp. 39-46.
- [102] Marr, D., Hildreth, E. "Theory of edge detection". In *Proceedings of the Royal Society of London*, 1980, vol. 207, n° 1167, pp. 187-217.
- [103] Maré, J-C. "Contribution à la modélisation, la simulation, l'identification et la commande d'actionneurs électrohydraulique", Thèse de Doctorat (d'état), Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, 1993, 219p.
- [104] Mayeda, H., Yoshida, K., Osuka, K. "Base parameters of manipulator dynamic models". *IEEE Transactions On Robotics and Automation*, 1990, vol. 6, n° 3, pp. 312-321.
- [105] Mboup, M. Join, C. et Fliess, M. "Numerical differentiation with annihilators in noisy environnement". *Numerical Algorithms*, 2009, vol. 50, n° 4, pp. 439-467.
- [106] Mboup, M., Join, C., Fliess, M. "A revised look at numerical differentiation with an application to nonlinear feedback control". *The 15<sup>th</sup> Mediterrean Conference on Control and Automation*, Athens, 2007, pp. 1-6.
- [107] Mensler M. "Analyse et étude comparative de méthodes d'identification des systèmes à représentation continue. Développement d'une boîte à outils logicielle", Thèse de Doctorat, Nancy, Université de Nancy 1, 1999, 231p.
- [108] Merritt, H.E. "Hydraulic control systems", John Wiley & Sons, New York, 1967, 368p.
- [109] Modestino, J.W., Fries, R.W. "Edge detection in noisy images using recursive digital filtering ". *Compt. Graphics and Image Processing*, 1977, vol. 6, n° 5, pp. 409-433.
- [110] Monga, O., Deriche, R., Maladon, G., Cocquerez. J.P. "Recursive filtering and edge tracking : two pramary touls for 3D edge detection". *Image and vision computing*, 1991, vol. 9, n° 4, pp. 203-214.
- [111] MOOG, "Transfer Function For MOOG Servovalves", *Technical Bulletin*, MOOG Inc. Controls Division, East Aurora, Ny 14052, 1965, 103p.
- [112] Nicosia, S., Tornambe, A., Valigi, P. "A solution to the generalized problem of nonlinear map inversion". *Systems and Control Letters*, 1991, vol. 17, n° 5, pp. 383-394.
- [113] Pei, S.C., Shyu, J.J. "Design of FIR Hilbert Transformers and differentaitors by eigenfilter". *IEEE Transaction on Acousticc, Speech, and Signal Processing*, 1989, vol. 37, n° 11, pp. 1457-1461.
- [114] Peli, T., Malah, D. "A study of edge detection algorithms". *Journal CVGIP*, 1982, vol. 19, n° 1, pp. 87-88.

- [115] Presse, C., Gautier, M. "New criteria of exciting trajectories for robot identification". IEEE international conference on robotics and automation, 1993, Atlanta, Georgia, USA, 2-6 May, vol. 3, pp. 907-912.
- [116] Quintas, M. R. "Contribution à la modélisation et à la commande robuste des systèmes électrohydrauliques", Thèse d Doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 1999, 298p.
- [117] Richalet, J. "Pratique de l'identification", Second Edition, Hermès, 1998, 222p.
- [118] Richard, E. "PRC/GDR : Modélisation et Commande des Systèmes à Fluide sous Pression, TOME 1", Laboratoire Automatique Industrielle (ancien laboratoire AMPERE) INSA-Lyon, 1997, 170p.
- [119] Richard, E. "De la commande linéaire et non linéaire en position des systèmes électropneumatiques", Thèse de Doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 1990, 291p.
- [120] Rosier, L. "Homogeneous lyapunov function for homogeneous continuous vector field". Systems and Control Letters, 1992, vol. 19, n° 6, pp. 467-473.
- [121] Rotella, F. et Borne, P. "Théorie et pratique du calcul matriciel", Technip, Paris, 1995, 338p.
- [122] Sesmat, S., Scavarda, S. "Static characteristics of a three way electropneumatic servo-valve". In 12<sup>th</sup> Aachen Conference On Fluid Power Technology, Aachen, Allemagne, 12-13 March, 1996, pp. 643-652.
- [123] Shaked, U.  $H_\infty$  Minimum error state estimation for linear stationary proceses". IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, vol. 35, n° 5, pp. 554-558.
- [124] Shanmugam, K.S., Green, J.A. "An optimal frequency domain filter for edge detection in digital pictures". IEEE Transactions Pattern Anal. Machine Intell, 1979, vol. 1, n° 1, pp. 37-49.
- [125] Shen, J., Castan, S. "An optimal linear operator for edge detection". Proceedings IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 1986.
- [126] Singer, R.A. "Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets". IEEE transaction on Aerospace and Electronic Systems, 1970, vol. 6, n° 4, pp. 473-483.
- [127] Sira-Ramirez, H. et Fliess, M. "On the output feedback control of a synchronous generator". 43<sup>rd</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, December, 2004, pp. 14-17.
- [128] Slotine, J.J.E., Li, W. "Applied Nonlinear Control", Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1991, 461p.
- [129] Slotine J.J., Hedrick, J.K., Misawa, E.A. "On sliding observers for nonlinear systems". Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1987, vol. 109, n° 9, pp. 245-252.
- [130] Smaoui, M., Brun, X. et Thomasset, D. "A study on tracking position control of an electropneumatic system using backstepping design". Control Engineering Practice, 2006, vol. 14, n° 8, pp. 923-933.
- [131] Smaoui, M., Brun, X., Thomasset, D. "A robust differentiator-controller design for an electropneumatic system". In Conference on Decision and Control and European Control Conference, Séville, Espagne, 12-15 December, 2005, pp. 4385 - 4390.
- [132] Smaoui, M. "Commandes nonlinéaires robustes mono et multidimensionnelles de dispositifs électropneumatiques : synthèses et applications", Thèse de Doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 2004, 195p.
- [133] Stemmelen, T. "Modélisation et identification des systèmes complexes rapides, instables et pseudo-stables. Application à la conception d'une servovalve à commande directe", Thèse de Doctorat, Haute Alsace, Université de Haute Alsace, 1996, 249p.

- [134] Suzuki, S., Furuta, K., Shiratori, S. "Adaptive impact shot control by pendulum-like juggling system". International Conference on Motion and Vibration Control, Japon, 2003, vol. 46, n° 3, pp. 973-981.
- [135] Tafazoli, S., De Silva, C.W., Lawrence, P.D. "Control of an Electrohydraulic Manipulator in the presence of friction". IEEE Transactions On Control Systems Technology, 1998, vol. 6, n° 3, pp. 401-411.
- [136] Tafraouiti, M. "Contribution la modélisation et la commande des systèmes électrohydrauliques", Thèse de Doctorat, Nancy, Université Henri Poincaré Nancy 1, 2006, 164p.
- [137] Tanaka, M., Pan, Y., Furuta, K. "Adaptive Sliding Mode Control of Belt Driven Prismatic Manipulator". IEEE International Workshop on Variable Structure Systems, Alghero, Italy, 2006, pp. 379-384.
- [138] Tchouprakov, Y. "Commande hydraulique et automatismes hydrauliques", Hardcover, 1979, 232p.
- [139] Tornambe, A. "High-gain observers for non-linear systems". International Journal of Systems Science, 1992, vol. 23, n° 9, pp. 1475-1489.
- [140] Torre, V., Poggio, T. "On edge detection". IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1986, vol. 8, n° 2, pp. 147-163.
- [141] Trabelsi, M.A. "Modélisation et commande des systèmes physiques à topologie variable : application au convertisseur multicellulaire", Thèse de Doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 2009, 193p.
- [142] Turki, K. "Nouvelles approches pour la synthèse de lois de commande non linéaires robuste. Application à un actionneur électropneumatique et proposition d'une solution au problème du rédécollage", Thèse de Doctorat, Lyon, INSA de Lyon, 2010, 152p.
- [143] Tustin, S. "The effects of backlash and of speed-dependent friction on the stability of closed-cycle controls system". Journal of the Institution of Electrical Engineers, 1947, vol. 94, n° 2A, pp. 143-151.
- [144] Utkin, V.I. Guldner, J., Shi, J. "Sliding mode control in electro-mechanical systems", First Edition, London : Taylor-Francis, 1999, 338p.
- [145] Utkin, V.I. "Sliding mode in control and optimization", Berlin : Springer-Verlag, 1992, 287p.
- [146] Utkin, V.I. "Nonlinear control system", 3rd Edition, Springer, 1995, 293p.
- [147] Utkin, V.I. "Variable structure systems with sliding modes". IEEE Transactions on Automatic Control, 1977, vol. 26, n° 2, pp. 212-222.
- [148] Villagra, J., D'Andréa-Novel, B., Fliess, M., et Mounier, H. "Synthèse algébrique d'estimateurs de vitesses longitudinale et latérale d'une automobile", e-STA, 2008, vol. 5, n° 3, pp. 12-17.
- [149] Walter, E., Pronzato, L. "Identification of Parametric Models from Experimental Data", First Edition, Springer, 1997, 413p.
- [150] Wang-Sajus, H., Irving, E., Coiffet, P. "Modélisation et identification de la force de frottement". Revue d'Automatique et de Productique appliquées, 1993, vol. 6, n° 1, pp. 65-79.
- [151] Wu, S.J. "Affine TS model based fuzzy regulating servo control design". Fuzzy Sets and Systems, 2007, vol. 158, n° 20, pp. 2288-2305.
- [152] Xu, J.X., Hashimoto, H. "VSS Theory-based parameter identification scheme for MIMO systems". Automatica, 1996, vol. 32, n° 2, pp. 279-284.
- [153] Yosida, K. "Operational Calculus : a theory of hyperfunctions", Springer-Verlag, 1984, 170p.

- [154] Young, K., Utkin, V., Ozguner, O. "A control engineer's guide to sliding mode control". IEEE Transaction on Control Systems Technology, 1999, vol. 7, *n*<sup>o</sup> 3, pp. 328-342.
- [155] Ziou, D.,Tabbone, S. "Corner detection by a cost minimization approach". Pattern Recognition, , 1993, vol. 26, *n*<sup>o</sup> 29, pp. 1305-1314.



# Annexe A

## Rappels mathématiques

Dans cet annexe, les démonstrations des résultats donnés dans le chapitre I, section 1.2.1 seront décrites.

Soit le signal  $f(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment différentiable. Soit la transformée de Laplace de  $f(t)$  :

$$L[f(t)] = F(s). \quad (4.43)$$

Le premier résultat à démontrer est donné par l'expression suivante :

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \frac{df(0)}{dt} - \dots - s \frac{d^{n-2} f(0)}{dt^{n-2}} - \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}}. \quad (4.44)$$

La transformée de Laplace de la dérivée première de la fonction  $f(t)$  est donnée par :

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0). \quad (4.45)$$

Ce dernier résultat s'obtient via une intégration par parties comme suit :

$$L[\dot{f}(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} \dot{f}(t) dt = [e^{-st} f(t)]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = sF(s) - f(0). \quad (4.46)$$

Par induction, le résultat donné par l'équation (4.46) peut s'étendre à l'ordre  $n$ , ce qui nous permet d'en-déduire l'expression (4.44).

Le deuxième résultat à démontrer est le suivant :

$$\int_0^t \int_0^v f(u) du dv = \int_0^t (t-u) f(u) du. \quad (4.47)$$

Soient  $f(t), g(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions suffisamment différentiables.

Posons :

$$\begin{cases} L^{-1}[F(s)] = f(t), \\ L^{-1}[G(s)] = g(t), \end{cases} \quad (4.48)$$

Par utilisation du théorème de convolution nous pouvons alors écrire :

$$L^{-1}[F(s)G(s)] = \int_0^t f(u)g(t-u)du. \quad (4.49)$$

Dans le cas où  $g(t) = t$ , il vient alors que :

$$L[t * f(t)] = L[t]L[f(t)] = L\left[\int_0^t (t-u)f(u)du\right] = \frac{F(s)}{s^2}. \quad (4.50)$$

Par conséquent :

$$\int_0^t (t-u)f(u)du = L^{-1} \left[ \frac{F(s)}{s^2} \right]. \quad (4.51)$$

Définissons une fonction  $h(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ .

Soit  $\frac{d^2h(t)}{dt^2} = f(t)$  donc en posant  $h(t) = \int_0^t \int_0^v f(u)dudv$  et en admettant les conditions initiales suivantes  $h(0) = 0$  et  $\dot{h}(0) = 0$ , il vient d'après l'équation (4.44) :

$$L \left[ \frac{d^2h(t)}{dt^2} \right] = s^2 L[h(t)] - sh(0) - \dot{h}(0) = F(s). \quad (4.52)$$

Ce qui nous ramène à écrire :

$$L^{-1} \left[ \frac{F(s)}{s^2} \right] = h(t). \quad (4.53)$$

Par application de la transformé inverse à l'équation (4.51) et en utilisant le résultat de (4.53), nous retrouvons alors :

$$\int_0^t (t-u)f(u)du = h(t). \quad (4.54)$$

Or nous avons :  $h(t) = \int_0^t \int_0^v f(u)dudv$ , donc à partir de (4.54), nous obtenons le résultat donné par (4.47).

Une généralisation de ce résultat à l'ordre  $n$ , c'est à dire pour  $\int_0^t \int_0^v \dots \int_0^\lambda f(t)dudv \dots d\lambda$  peut alors être donnée par l'équation ci-dessous :

$$\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t)dt^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-u)^{n-1} f(u)du. \quad (4.55)$$

# Annexe B

## Polynômes orthogonaux de Jacobi

Nous rappelons les éléments essentiels utilisés dans le chapitre I sur le calcul des polynômes orthogonaux de Jacobi. Dans le cas général, pour toute suite de polynômes orthogonaux il existe une relation de récurrence qui fait intervenir trois polynômes consécutifs définie par :

$$P_{n+1} = (a_n\tau + b_n)P_n - c_nP_{n-1} \quad (4.56)$$

Le tableau relatif aux polynômes de Jacobi est donné ci-dessous :

Tableau 4.1 – Polynômes de Jacobi

Nom et symbole	Polynôme Jacobi $P_n^{(\mu,k)}$
Domaine d'orthogonalité	$[-1, 1]$
Fonction poids	$(1 - \tau)^\mu(1 + \tau)^k$
Normalisation	$P_n^{(\mu,k)}(1) = \frac{\Gamma(n+1+\mu)}{n!\Gamma(1+\mu)}$
$a_n$	$\frac{(2n+1+\mu+k)(2n+2+\mu+k)}{2(n+1)(n+1+\mu+k)}$
$b_n$	$\frac{(\mu^2 - k^2)(2n+1+\mu+k)}{2(n+1)(n+k)(2n+2+\mu+k)}$
$c_n$	$\frac{(n+\mu)(n+k)(2n+2+\mu+k)}{(n+1)(n+1+\mu+k)(2n+\mu+k)}$

En fait, nous avons juste présenté au niveau du tableau 4.1 ce qui a été nécessaire pour notre calcul. Ce dernier est effectué pour un intervalle d'intégration égal à  $[0, 1]$  au lieu de  $[-1, 1]$ . Donc pour ce faire, un changement de variable est imposé. En effet, si la variable  $\tau$  dans notre cas est définie dans  $[0, 1]$ , alors il suffit de remplacer dans l'équation (4.56),  $\tau$  par  $2\tau - 1$ . Par conséquent, ce dernier terme sera alors définie dans  $[-1, 1]$ . Ceci permet alors d'utiliser directement les expressions définies dans ce tableau.



# Annexe C

## Perspectives des travaux 2D

L'estimation du mouvement est un problème très ancien dans le domaine de la vision par ordinateur. Cette problématique peut être traduite par la question suivante : quels sont les pixels d'une image qui correspondent aux pixels de l'image suivante ? Pour répondre à cette question, nous exposons un bref résumé de la littérature relative à ce problème.

Dans la méthode proposée, nous utilisons une approche basée sur l'estimation du flux optique. Mais avant d'exposer cette méthode il est nécessaire d'expliquer : "Qu'est ce qu'un flux optique ?"

En vision par ordinateur, on distingue trois champs de mouvement différents représentant le mouvement. Le premier est le mouvement tridimensionnel représentant le mouvement réel d'un objet dans le monde réel. Le deuxième est la projection bidimensionnelle sur le plan image du champ de mouvement réel. Le troisième est le champ de mouvement créé par le mouvement des gradients de l'intensité appelé flux optique. En effet, le mouvement estimé à partir des images, appelé mouvement apparent est perçu grâce aux changements des intensités lumineuses.

Il existe plusieurs méthodes d'estimation du mouvement apparent qui s'intéressent à la mesure du flux optique, parmi elles :

- La mise en correspondance de blocs
- les méthodes différentielles

L'estimation du mouvement basée sur le flux optique doit respecter certaines hypothèses, les plus importantes sont les suivantes :

- le champ de vecteurs vitesses est localement lisse : les points voisins situés sur un même objet sont animés par un mouvement semblable.
- L'intensité lumineuse est considéré comme invariante : l'intensité lumineuse de chaque point de la scène reste quasiment constante au cours du mouvement, cette hypothèse de base de toutes les techniques d'estimation du mouvement.

La méthode différentielle pour l'estimation du flux utilise les dérivées spatio-temporelles de l'image comme source d'information sur le mouvement. Comme indiqué auparavant, ce type de méthode s'appuie sur une hypothèse forte de conservation de la luminance le long de la trajectoire d'un pixel en mouvement. Autrement dit, un changement de l'intensité d'un pixel donné est causé seulement par le mouvement.

Notons  $I(x, y, t)$  l'intensité lumineuse à l'instant  $t$  d'un pixel localisé en  $(x, y)$ . L'hypothèse citée ci-dessus peut alors être traduite par l'équation suivante :

$$I(x, y, t) = I(x, y, t + dt) \implies \frac{dI(x, y, t)}{dt} = 0 \quad (4.57)$$

En utilisant les dérivées partielles, (4.57) devient :

$$\begin{aligned} \frac{dI(x, y, t)}{dt} &= \frac{\partial I}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial I}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial I}{\partial t} \\ &= \nabla I \cdot V + \frac{\partial I}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Posons :  $u = \frac{dx}{dt}$  et  $v = \frac{dy}{dt}$  les vitesses apparentes respectivement dans la direction de  $x$  et de  $y$ .  $V = (u, v)^T$  est le vecteur de vitesse apparente à estimer,  $\nabla I = (\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y}) = (I_x, I_y)$  représente le gradient de l'image au point  $(x, y)$  à l'instant  $t$  et  $I_t = \frac{\partial I}{\partial t}$  est la dérivée de l'intensité d'un pixel le long du temps.

Suite à ces notations, l'équation du flux optique est alors donnée par :

$$I_x u + I_y v + I_t = 0 \quad (4.59)$$

L'objectif est de pouvoir estimer les deux composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse apparente. Toutefois, il apparaît immédiatement que cette équation traduit un problème mal posé puisqu'il s'agit de résoudre une seule équation à deux inconnues. L'incapacité d'estimer les deux composantes du vecteur vitesse est couramment appelée problème d'ouverture. De multiples approches ont été proposées pour résoudre ce problème. La solution est d'introduire une hypothèse supplémentaire qui consiste à prendre en compte des critères de régularité sur la solution. A ce propos, nous pouvons citer la méthode de Lucas et Kanade [98] et celle de Horn et Schunk (HS) [69]. Dans notre cas, nous nous intéressons à cette dernière méthode. En effet, Horn et Schunk ont proposé d'introduire une contrainte de lissage du champ de mouvement afin de résoudre l'équation du flux optique. Le champ de vitesse est alors estimé en minimisant la fonctionnelle suivante :

$$\iint_D \left( (\nabla I \cdot V + \frac{\partial I}{\partial t})^2 + \lambda^2 (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) \right) dx dy \quad (4.60)$$

Avec  $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$ ,  $\nabla v = (\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y})$  et  $D$  est le domaine de définition spatiotemporel.

Cette fonctionnelle regroupe deux termes. Le premier représente la contrainte du flux optique. Le deuxième est la somme du module du gradient d'intensité de  $u$  et  $v$  pondéré par un coefficient de lissage  $\lambda$ .

Pour le calcul du flux optique entre deux images, la méthode décrite (HS) utilise alors la totalité des trames de la séquence d'images. La méthode proposée consiste à réduire le nombre d'images à utiliser pour estimer le flux optique. Puisque de cette façon, nous n'utilisons pas toutes les images de la séquence pour l'estimation des vecteurs de déplacement, alors il est possible dans ce cas d'utiliser moins de mémoire physique. En effet, il suffit de considérer un flux optique initial calculé par la méthode de HS comme entrée au différentiateur STA (ou même DAO2). Par utilisation de ce dernier, une prédiction du flux optique suivant est effectuée. Nous pouvons calculer hors-ligne l'erreur entre le flux optique prédit et celui calculé par la méthode de HS. Cette erreur sera alors un critère de décision pour la réinitialisation de l'algorithme. Bien évidemment, la méthode proposée sera plus efficace pour une séquence d'images (ou une partie de la séquence) présentant des objets se déplaçant avec une vitesse uniforme. Donc selon la séquence d'images utilisée, il est nécessaire de déterminer le nombre de réinitialisations possible, autrement dit, le nombre d'images nécessaire pour la prédiction.

Si l'estimation du déplacement entre deux images  $I(t)$  et  $I(t+1)$  par le STA est précise, nous pouvons alors espérer de reconstruire l'image  $I(t+1)$ . En effet, le déplacement de l'image  $I(t)$  le long du champ de vecteurs prédit, permet de retrouver  $I(t+1)$  ou de se rapprocher le plus possible à celle-ci. L'étape de reconstruction d'image impose alors d'effectuer une interpolation pour obtenir la matrice résultante. Cette interpolation fait parfois appel à un redimensionnement de l'image.

La possibilité de retrouver l'image à l'instant suivant, ouvre la possibilité d'utiliser ce résultat pour des objectifs de compression de séquence d'images par compensation de mouvement.

Le principe fondamental de la compression vidéo est de réduire autant que possible les redondances d'informations dans les données, sans bien sûr que cela ne soit visible de manière

flagrante pour l'œil humain. Deux grandes méthodes de compression existent : la compression sans perte et la compression avec perte, [1]. Dans le cas de cette dernière, les données sont différentes à la sortie du décodeur par rapport à l'entrée du codeur.

Dans une séquence vidéo, il existe deux sortes de redondances : la redondance spatiale et la redondance temporelle. La redondance spatiale est celle qui existe dans chaque image prise indépendamment des autres. On peut diminuer cette redondance en codant chaque image séparément en JPEG (Joint Photographic Experts Group). Pour la redondance temporelle, le but est alors de ne stocker que ce qui est modifié lors du passage d'une image à une autre. C'est à ce niveau qu'il y a une possibilité d'utiliser la technique de compensation du mouvement. La prédiction temporelle peut, dans plusieurs schémas et normes classiques être associée à la notion de groupe de trames. Ces trames ainsi compressées sont de trois types : les images I (images Intracodées), les images P (images prédictives) et les images B bidirectionnelles. Les images I sont des images complètes codées en JPEG. Les images P, par contre, ne contiennent que les pixels modifiés par rapport à l'image précédente. Enfin le codage bidirectionnel d'une trame fait appel aux deux types de codage : I et P. Les images bidirectionnelles sont codées, comme leur nom l'indique, à partir des trames codées I et P et sont placées entre celles-ci, [101], [1].

La technique que nous allons maintenant étudier permet d'exploiter les redondances temporelles, plus particulièrement le codage prédictif, vu le recours de ce dernier à la compensation du mouvement. Pour ce type de codage, l'image est codée par rapport à la précédente où la différence entre ces deux images est codée spatialement. En effet, il suffit de trouver ce que l'on appelle des blocs de mouvement. Ces blocs sont en fait des blocs que l'on trouve dans la trame précédente et qui ont simplement bougé. Cette idée permet de gagner largement en compression puisque chaque bloc trouvé par compensation de mouvement n'aura pas besoin d'être entièrement recodé, il suffira de stocker son vecteur de déplacement. Ce codage prédictif présente certains problèmes de perte et d'erreur. Donc pour résoudre ce problème, le fichier compressé ne contient pas uniquement les vecteurs de déplacement entre le bloc de référence et le bloc qui va être codé, mais aussi un terme d'erreur entre ces deux blocs. Ce terme joue un rôle correctif.

La compression par compensation de mouvement consiste pour une image, à ne coder que les erreurs résultantes de l'estimation de mouvement faite à partir d'une image donnée de la séquence. Pour le calcul des vecteurs de déplacement, la norme ne spécifie rien. C'est pour cette raison que nous pouvons utiliser l'algorithme STA pour prédire les vecteurs de déplacement. Pour mieux expliquer le rôle que peut jouer le STA dans ce type de codage, nous décrivons alors le codeur temporel MPEG (Motion Picture Experts Group) donné par la figure 4.17. Les figures 4.18 et 4.17 présentent les différentes étapes du codage spatial et le codage temporel. Un codeur typique commence par un codage (I) intra de la première image en utilisant une méthode spatiale. Ensuite, un codage de chacune des images suivantes par prédiction temporelle suivie par un codage spatial. Au cours de cette étape (voir figure 4.17), l'estimation de mouvement permet alors d'obtenir les vecteurs de mouvement correspondant. Cette estimation permet alors d'obtenir une image prédite de l'image actuelle. Cette image prédite est déterminée en appliquant les vecteurs de déplacement à l'image qui précède l'image actuelle. Cette estimation n'est qu'une approximation, donc pour ajouter une action corrective des erreurs résiduelles sont calculées et qui consistent en la différence entre l'image prédite et l'image actuelle (compensée).

Cette compensation et ces erreurs sont ensuite codées spatialement. Dans la figure 4.18, une description des différentes étapes du codage spatiale est présentée. Pour ne pas avoir des manipulations de quantités énormes de données et pour éviter un énorme temps de calcul, la matrice d'erreur est découpée en des blocs de  $(8 * 8)$  pixels, avant d'appliquer une transformation de Cosinus Discrète (TCD) à chacun de ces blocs. En transposant l'image du domaine spatial au

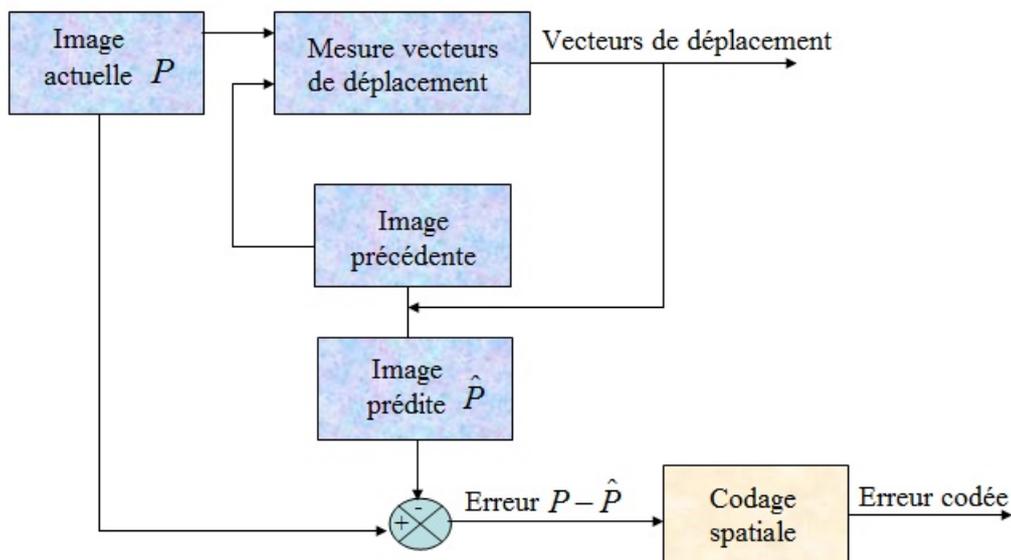


FIGURE 4.17 – Codeur Temporel MPEG

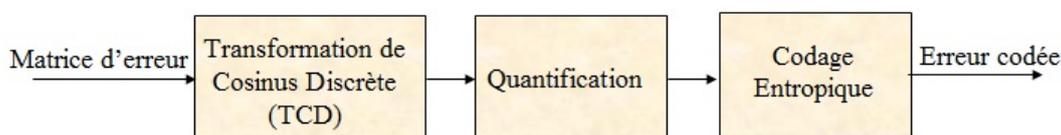


FIGURE 4.18 – Codage spatial

domaine fréquentiel, la TCD permet d'une part de classer les informations par ordre d'importance en regard de la vision humaine, et d'autre part de concentrer l'énergie sur un nombre réduit de coefficients. Elle n'effectue cependant aucune réduction de données, [101].

La quantification intervient juste après avoir transformé un bloc via la TCD. La quantification revient à diviser un tableau par un autre tableau. On divise généralement chaque valeur obtenue par une même valeur tous les coefficients. Finalement, les données simplifiées par quantification sont ensuite compressées par une méthode type entropique. Le codage entropique le plus classique est de parcourir la matrice de coefficient obtenu en zigzag et de donner à chaque suite un symbole (ce qu'on appelle l'algorithme de codage RLE : Run Length Encoding). Par la suite, un codage type Huffman est appliqué et qui consiste à représenter les symboles par des codes comportant un nombre de bits le plus petit possible.

Pour retrouver l'image décompressée, il suffit alors de faire la somme de l'erreur déjà décodé spatialement avec l'image prédite reconstruite via les vecteurs de déplacement estimés.

# Annexe D

## Méthode proposée : modélisation dynamique du servodistributeur

Nous exposons dans ce qui suit une méthode permettant de développer un modèle traduisant le comportement dynamique du servodistributeur, tout en prenant compte des conditions de fonctionnement. Le modèle proposé dans nos travaux est de type "boîte grise". En effet, sous certaines hypothèses classiquement utilisées, nous passons d'un modèle de connaissance complexe à un modèle simplifié prenant en compte les phénomènes physiques les plus dominants. De cette façon, nous pouvons intégrer certaines grandeurs physiques du servodistributeur dans le modèle utilisé. De plus, à partir de la méthode proposée, nous pouvons présenter la loi d'évolution de ces grandeurs géométriques en fonction de l'amplitude du signal d'entrée et de la pression d'alimentation. Et de cette façon, nous pouvons avoir une interprétation physique des lois d'évolution de ces grandeurs, par rapport aux conditions de fonctionnement.

### Choix d'un modèle mathématique

D'après [15], l'expression du couple électromagnétique utile est donnée par :

$$C_m = K_I(B)I + K_{em}(B)\theta_a \quad (4.61)$$

Dans [87] et [103], les gains  $K_I(B)$  et  $K_{em}(B)$  sont considérés linéaires en ajoutant un couple d'hystérésis. De cette manière, l'équation (4.61) devient :

$$C_m = K_I I + K_{em} \theta_a + C_{hys}(I) \quad (4.62)$$

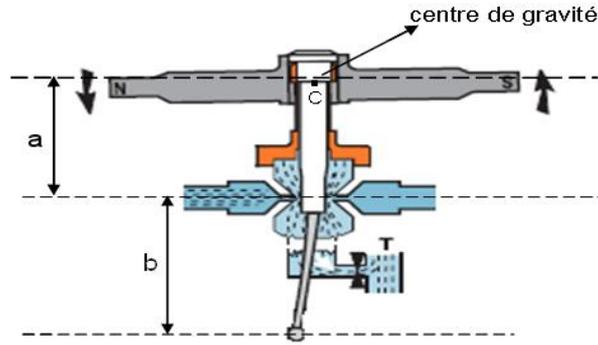
Avant de présenter les différentes hypothèses utilisées au cours de notre étude, nous décrivons les différents efforts agissant sur les diverses parties du servodistributeur.

Soit l'ensemble mobile  $S = \{\text{armature} + \text{palette} + \text{ressort de rétroaction}\}$  est soumis aux actions suivantes :

- Effort hydrostatique exercé par le fluide sur les faces de la palette. Cet effort est dû à la pression différentielle et définie par :  $F_{sta} = (p_{P1} - p_{P2})S_b$ . Avec  $p_{P1}$  et  $p_{P2}$  sont les pressions de pilotage,
- Effort hydrodynamique  $F_{hyd}$  appliqué sur les faces de la palette, qui est dû à la modification de la vitesse moyenne de l'écoulement du fluide,
- Effort de type visqueux  $F_{visq}$ ,
- Action du tube flexible qui tend à s'opposer au mouvement de la partie mobile  $F_{tube}$ ,
- Effort appliqué du tiroir sur le ressort de rétroaction  $F_{rea} = -K_{rea}(x_p + x_t + b\theta_a)$

Vu que les mouvements effectués par l'armature sont infiniment petits donc le déplacement de l'armature peut être donné par  $\tan(\theta_a) = \theta_a$ . Ceci permet d'écrire :

$$x_p = a\theta_a \quad (4.63)$$

FIGURE 4.19 – Schéma de la partie mobile  $S$ .

En exprimant les différents couples appliqués sur  $S$ , par rapport à l'axe passant par le centre de gravité (voir figure 4.19) de la partie mobile et perpendiculaire à l'axe des bobines du moteur. A partir de ce qui précède, l'équation dynamique relative à la partie mobile est donnée par :

$$J_s \ddot{\theta}_a = C_{em} + C_{sta} + C_{hyd} + C_{visq} + C_{tube} + C_{rea} \quad (4.64)$$

Où  $J_s$  est le moment d'inertie de  $S$  et avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{sta} = F_{sta} a \\ C_{hyd} = F_{hyd} a \\ C_{visq} = -f_{visq} \dot{\theta}_a \\ C_{tube} = -K_{tube} \theta_a \\ C_{rea} = -K_{rea} (x_t + \theta_a (a + b)) (a + b) \end{array} \right.$$

$K_{tube}$  et  $K_{rea}$  sont les raideurs associées respectivement au tube flexible et au ressort de rétroaction. Les longueurs  $a$  et  $b$  sont notés dans la figure 4.19.

Le tiroir de distribution est soumis aux efforts suivants :

- Forces de pression de pilotage :  $F_p = (p_{P1} - p_{P2}) S_t$
- Effort de type visqueux au niveau du tiroir :  $F_{visqT} = f_{visqT} \dot{x}_t$
- Effort hydraulique résultant par le jet du fluide sur le tiroir et qui tend à refermer les restrictions. Cette force dépend du débit et de l'angle de jet :  $F_{Hyd}$ ,
- Effort de retour appliqué du ressort de rétroaction sur le tiroir :  $F_{rea}$

L'équation dynamique du tiroir est donnée alors :

$$M_t \ddot{x}_t = F_p - F_{Hyd} - F_{visqT} - F_{rea} \quad (4.65)$$

Les équations de continuité sont données ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{PP1} = \frac{V_{P1}}{\beta} \dot{p}_{P1} + S_t \dot{x}_t \\ Q_{PP2} = \frac{V_{P2}}{\beta} \dot{p}_{P2} + S_t \dot{x}_t \end{array} \right. \quad (4.66)$$

Avec  $V_{p1}$  et  $V_{p2}$  sont les volumes de pilotage côté 1 et 2.

Après avoir décrit brièvement les équations dynamiques relatives à l'ensemble mobile et au

tiroir ainsi que les équations de débit du premier étage hydraulique, nous présentons ensuite les différentes hypothèses prises en compte pour le modèle proposé. L'importance de la force de pression de pilotage par rapport aux autres efforts, nous ramène à négliger les efforts  $F_{Hyd}$ ,  $F_{visqT}$  et  $F_{rea}$ .

Dans le système (4.66), on néglige le débit de compressibilité par rapport au débit fonctionnel. Au niveau de l'équation (4.64), il est possible de négliger les couples  $C_{sta}$  et  $C_{hyd}$  comparant aux autres couples. Ceci revient au fait que les raideurs du tube flexible, du moteur couple et de la palette sont prépondérantes. Notons qu'avec ces mêmes hypothèses, les résultats trouvés dans [5] sont très satisfaisants.

En se basant sur les hypothèses énoncées, les équations (4.64), (4.65), (4.66) deviennent :

$$\begin{cases} J_s \ddot{\theta}_a = C_{em} + C_{visq} + C_{tube} + C_{rea} \\ M_t \ddot{x}_t = F_p = (p_{P1} - p_{P2}) S_t = \Delta p_P \\ Q_{p_{P1}} = S_t \dot{x}_t \\ Q_{p_{P2}} = -S_t \dot{x}_t \\ x_p = a \theta_a \end{cases} \quad (4.67)$$

Par conséquent, l'équation (4.64) devient :

$$J_s \ddot{\theta}_a = -K_{tube} \theta_a - K_{rea} (x_t + \theta_p (a + b)) (a + b) + K_I(B) I + K_{em}(B) \theta_a - f_{visq} \dot{\theta}_a \quad (4.68)$$

Dans notre modèle, nous considérons l'équation (4.61) pour la description du couple électromagnétique. De plus, si nous utilisons l'approche linéaire pour définir l'expression du débit de pilotage moyen (linéarisé autour de zéro), donné par :

$$\Delta Q_P = K_{Q_P x_p} (u, p_P) x_p + K_{Q_P \Delta p_P} (u, p_P) \Delta p_P \quad (4.69)$$

Où les gains de sensibilités  $K_{Q_P x_p}$  et  $K_{Q_P \Delta p_P}$  sont considérés variables en fonction de l'amplitude du signal d'entrée et de la pression d'alimentation.

En remplaçant l'expression (4.63) dans (4.68) et en passant à la transformée de Laplace de l'équation résultante, nous pouvons décrire alors la dynamique du servodistributeur par le schéma bloc suivant : Avec  $K_M = K_{rea} (a + b)^2 + K_{tube} - K_{em}$ .

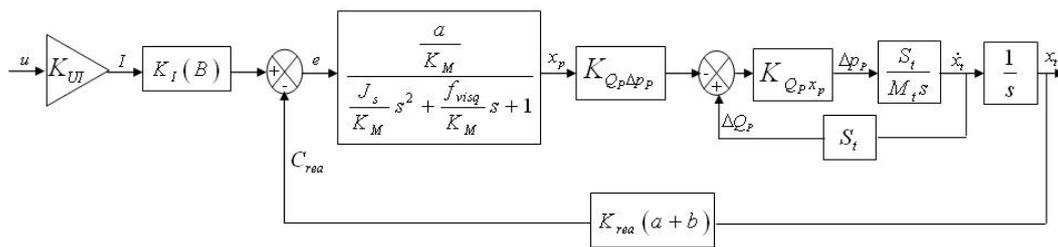


FIGURE 4.20 – Schéma représentatif de la dynamique du servodistributeur.

En imposant  $K_R = K_{rea} (a + b)$ ,  $K_n = K_R \frac{a}{K_M}$  et  $K_{UI}^* = \frac{K_{UI}}{K_R}$ , la fonction de transfert reliant le signal d'entrée  $u$  à la position du tiroir  $x_t$  peut être exprimée par :

$$\frac{x_t}{u} = \frac{k_1}{k_5 s^4 + k_4 s^3 + k_3 s^2 + k_2 s + 1} \quad (4.70)$$

Soient :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{K_{QP} x_p}{S_t} \\ c_2 = \frac{M_t}{K_{QP} \Delta p_P S_t^2} \\ W_s = \sqrt{\left(\frac{K_M}{J_s}\right)} \\ \xi = \frac{W_s f_{visq}}{2K_M} \end{array} \right.$$

En utilisant les paramètres déjà définis ci-dessus, les paramètres de la fonction de transfert sont exprimés par ces égalités :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = K_{UI}^* \\ k_2 = \frac{1}{K_n c_1} \\ k_3 = \frac{1}{K_n c_1} \left( \frac{2\xi}{W_s} + c_2 \right) \\ k_4 = \frac{1}{K_n c_1 W_s} \left( \frac{1}{W_s} + 2c_2 \xi \right) \\ k_5 = \frac{c_2}{K_n c_1 W_s^2} \end{array} \right.$$

### Procédé expérimental

Dans le paragraphe précédent, nous avons déterminé une structure mathématique du modèle dynamique en se basant sur des lois physiques. La deuxième partie de la démarche proposée consiste d'évaluer les paramètres du modèle à partir d'une suite de mesures d'entrées et des sorties du processus de façon à retrouver un comportement identique entre le modèle et le processus. Suite aux manques de données sur le servodistributeur, aucune connaissance de la partie électronique, nous procédons alors à une identification en boucle fermée de la dynamique relative au modulateur de puissance.

L'essai expérimental consiste en un asservissement de position du vérin en utilisant un contrôleur purement proportionnel. Au cours de cet essai, nous enregistrons les signaux d'entrée du servodistributeur et la position du tiroir. En effet, pour notre cas d'étude l'image de la position du tiroir est accessible à l'aide du capteur LVDT intégré dans le servodistributeur.

Notons que la qualité de l'identification dépend d'un premier temps de la méthode utilisée et d'un deuxième temps de la nature du signal d'entrée excitant le servodistributeur. Cette qualité sera d'autant meilleure que la quantité d'informations récupérées par le signal de sortie sera grande. Ce qui veut dire qu'il est indispensable de soumettre le système à des signaux à large spectre fréquentiel afin de garantir une bonne estimation des paramètres.

Pour se faire nous choisissons une consigne de position sur la tige du vérin en dents de scie (voir figure 4.21) ayant des pentes variables et des amplitudes variables afin de balayer en même temps l'axe d'amplitude et l'axe du temps. En effet, le choix de la forme de la consigne nous permet d'avoir en entrée du servodistributeur un signal créneau à fréquence variable et à amplitude variable (voir figure 4.21). La forme créneau est expliquée par la présence de l'effet intégrateur du vérin. Donc en faisant varier l'amplitude de la consigne jusqu'à une valeur  $y\%$  de  $y_{max}$ , nous enregistrons alors un signal d'entrée au servodistributeur ayant une amplitude variant jusqu'à  $U\%$  de "Un". Ceci nous permet alors de mettre en place un algorithme d'identification à  $U\%$  donnée. C'est-à-dire nous identifions les paramètres du modèle pour une amplitude du signal d'entrée variant jusqu'à la valeur  $U\%$  fixée.

Pour se faire, nous choisissons les amplitudes des valeurs d'entrée égales à 5% jusqu'à 90% par pas de 5% de la valeur nominale de U "Un". En effet, pour chaque enregistrement réalisé

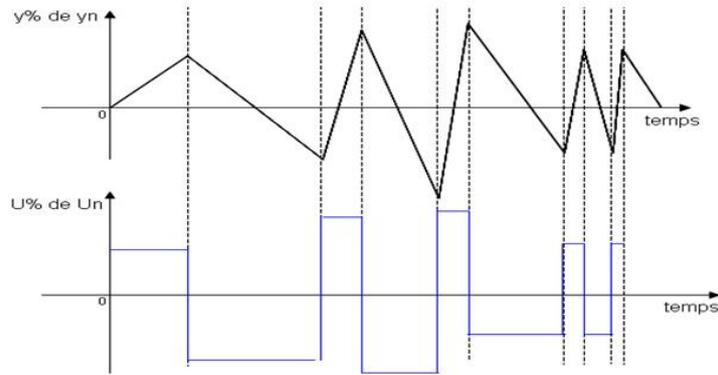


FIGURE 4.21 – Allure de la consigne et du signal d’entrée du servodistributeur.

associé à une valeur  $U\%$  de  $U_n$ , nous obtenons certaines valeurs des paramètres ( $k_1$  à  $k_5$ ). Donc si on réalise  $N$  essais nous obtenons  $N$  valeurs pour chaque paramètre et  $N$  modèles. Nous réglons à chaque essai l’amplitude maximale de la consigne qui permet de nous donner une valeur maximale du signal de commande égale à  $U\%$  de  $U_n$ .

La méthode d’identification considérée peut être décrite par la figure 4.22.

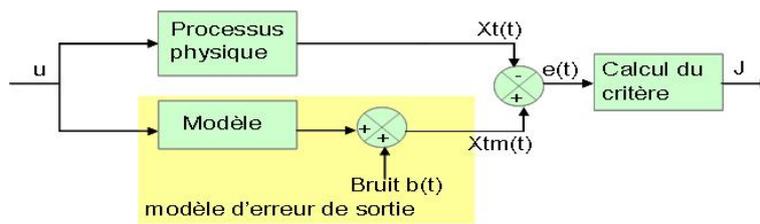


FIGURE 4.22 – Mécanisme d’identification.

Nous utilisons pour l’identification un modèle d’erreur de sortie. Pour se faire, nous ajoutons du bruit au modèle proposé. Ce bruit n’est d’autre qu’une séquence indépendante et gaussienne. Donc en se basant sur une méthode d’optimisation permettant de minimiser un critère quadratique de l’erreur  $e$  (voir figure 4.22).

Si nous choisissons le nombre d’essai  $N = 11$ , donc nous obtenons 11 modèles correspondant à  $U\%$  de  $U_n$ . Ce qui nous permet alors de présenter les valeurs de chaque paramètre en fonction de  $U\%$ . Afin de trouver la loi d’évolution de ce paramètre, nous réalisons une interpolation polynomiale des différents points.

L’objectif final de la méthode proposée est de pouvoir décrire la dynamique du servodistributeur par l’équation suivante :

$$x_t = \sum_{i,j} K_{ij} u^i z^{-j} \quad (4.71)$$

où  $z$  : est l’équivalent en discret de la variable de Laplace.

$i$  : est l’indice représentant le nombre de modèles déterminés (le nombre d’essai  $N$ ).

Pour prendre en compte la pression d’alimentation dans la loi d’évolution des paramètres, nous pouvons tracer à chacun des paramètres la courbe représentant (paramètre estimé,  $U\%$ ,  $p_P\%$ ). En d’autres termes avoir une courbe d’évolution 3D de chaque paramètre. Mais pour la non disponibilité des bancs spécifiques, il est difficile pour l’instant de valider la méthode proposée.



# FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES  
DE LYON

NOM : <b>SIDHOM</b>	DATE de SOUTENANCE : 29 Septembre 2011
Prénom : <b>Lilia</b>	
TITRE : <b>SUR LA DERIVATION NUMERIQUE : ALGORITHMES ET AP- PLICATIONS</b>	
NATURE : <b>Doctorat</b>	Numéro d'ordre : 2011ISAL0091
École doctorale : <b>Électronique, Électrotechnique, Automatique (EEA)</b>	
Spécialité : <b>Énergie Des Systèmes</b>	
<p>RÉSUMÉ : Nos travaux de thèse abordent des aspects théoriques et applicatifs. Du point de vue théorique, une étude de deux familles de dérivateurs a été effectuée. En premier lieu, nous avons étudié les dérivateurs de nature algébrique et en deuxième lieu les différentiateurs modes glissants d'ordre supérieur. Cette étude nous a permis de décrire les points forts et les points faibles de chacune de ces approches. Suite à cette étude, une nouvelle version des dérivateurs modes glissants a été proposée. Afin de tester l'efficacité de l'algorithme proposé, différentes applications ont été réalisées. Une première application dans le domaine 1D qui consiste à utiliser le dérivateur proposé pour l'identification paramétrique en ligne d'un robot SCARA à deux axes où des résultats expérimentaux ont été fournis. La deuxième application touche au domaine 2D. Dans ce cas, le différentiateur est utilisé comme un détecteur de contour dans une image. Pour la validation des résultats, différents essais sont réalisés pour différents types de bruits. La troisième application consiste à tester l'efficacité du différentiateur dans des boucles de commande. Le système d'application considéré est un servo-vérin électrohydraulique à haute performance. Pour la commande de tel système, une phase de modélisation des composants essentiels est effectuée. Après une succession d'hypothèses sur le modèle de simulation, des modèles de commande sont fournis. Finalement, une synthèse de loi de commande via la technique du Backstepping est réalisée pour le positionnement de l'axe électrohydraulique. La vitesse et l'accélération sont reconstruites en utilisant l'algorithme proposé. Comme base de comparaison, la version classique des algorithmes modes glissants est aussi utilisée. Une comparaison du système bouclé "commande-dérivateur", pour différentes consignes associées à différents dérivateurs est alors effectuée.</p>	
MOTS-CLÉS : <b>différentiateurs modes glissants, dérivateurs algébriques, commande non linéaire, système électrohydraulique, modélisation, expérimentation.</b>	
Laboratoire (s) de recherches : <b>Laboratoire Ampère (UMR CNRS 5005) EC INSA UCB de Lyon</b>	
Directeurs de thèse : <b>Daniel THOMASSET (Dir.), Xavier BRUN (Co-Dir.), Eric BIDEAUX (Co-Dir.)</b>	
Composition du jury : <b>P. Bolon (président), J.P. Barbot (R), A. Richard (R), F. Plestan (E) J-C. Maré (E), D. Thomasset (Dir.), M. Brun (Co-Dir.), E. Bideaux (Co-Dir.)</b>	