



**HAL**  
open science

# Effets coopératifs dans les nuages d'atomes froids

Tom Bienaimé

► **To cite this version:**

Tom Bienaimé. Effets coopératifs dans les nuages d'atomes froids. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Nice Sophia Antipolis, 2011. Français. NNT : . tel-00701991

**HAL Id: tel-00701991**

**<https://theses.hal.science/tel-00701991>**

Submitted on 29 May 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS  
UFR SCIENCES  
ÉCOLE DOCTORALE DE SCIENCES FONDAMENTALES  
ET APPLIQUÉES

## THÈSE

pour obtenir le titre de  
**Docteur en Sciences**  
de l'Université de Nice-Sophia Antipolis

Spécialité Physique

présentée et soutenue par  
Tom BIENAIMÉ

# Effets coopératifs dans les nuages d'atomes froids

Thèse soutenue le mardi 13 décembre 2011 devant le jury composé de :

M.	Fabrice MORTESSAGNE	Président
Mme.	Elisabeth GIACOBINO	Rapporteur
M.	Antoine BROWAEYS	Rapporteur
M.	Klaus MØLMER	Examinateur
M.	Patricio LEBŒUF	Examinateur
M.	Nicola PIOVELLA	Examinateur
M.	Robin KAISER	Directeur de thèse



# Effets coopératifs dans les nuages d'atomes froids

Tom BIENAIMÉ



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier très sincèrement Monsieur le président ainsi que Madame et Messieurs les membres du jury de m'avoir fait l'honneur de participer au jury de ma thèse.

L'aboutissement de cette thèse après trois années passées à l'Institut Non Linéaire de Nice est bien sûr un moment très important de ma vie. Devant beaucoup aux personnes qui m'ont accueilli, je tiens à remercier Monsieur Tredicce en sa qualité de directeur du laboratoire et tout particulièrement Robin Kaiser, pour avoir, avec un enthousiasme toujours renouvelé, encadré mes travaux et m'avoir conseillé pendant ces trois années de recherche. J'ai particulièrement apprécié la grande disponibilité dont il a fait preuve en dépit de ses nombreux projets et responsabilités. Je resterai profondément marqué par les fréquentes discussions scientifiques que nous avons partagées.

Je suis également très reconnaissant envers Nicola Piovella pour son accueil généreux lors de mes visites à Milan et pour la fructueuse collaboration scientifique qui en a découlé.

Ma participation aux travaux de recherche conduits à Nice a été, d'un point de vue scientifique, une expérience très enrichissante. Certaines rencontres ou discussions ont eu une grande importance et m'influenceront vraisemblablement bien au-delà. Je remercie toutes les personnes avec qui j'ai eu le plaisir de travailler dans l'atmosphère stimulante et conviviale du laboratoire : mes collègues chercheurs, post-doctorants et étudiants ainsi que tous ceux qui d'un point de vue technique ou administratif facilitent nos travaux.

J'ai aussi beaucoup appris de mes activités d'enseignement au sein du département de physique et à l'IUFM ; je remercie toute l'équipe enseignante avec qui j'ai partagé cette expérience.

En dehors du cadre professionnel, j'ai une pensée particulière pour celles et ceux qui m'ont entouré à titre familial ou amical.

En conclusion, grâce à tous, je garderai un excellent souvenir de ces trois années sans oublier le cadre exceptionnel dans lequel elles se sont déroulées.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Effets coopératifs pour un système d'atomes à deux niveaux</b>	<b>15</b>
1.1 Approche classique . . . . .	16
1.1.1 Évolution des amplitudes des dipôles . . . . .	16
1.1.2 Diagramme d'émission . . . . .	19
1.1.3 Bilan énergétique, superradiance, sousradiance . . . . .	19
1.1.4 Énergie potentielle des dipôles . . . . .	21
1.1.5 Solution stationnaire "timed Dicke" . . . . .	22
1.2 Description des champs et des systèmes atomiques . . . . .	30
1.2.1 Système d'atomes à deux niveaux . . . . .	30
1.2.2 Hamiltonien d'interaction atome-champ . . . . .	31
1.2.3 Photodétection . . . . .	32
1.3 Hamiltonien effectif pour la partie atomique . . . . .	33
1.3.1 Dérivation de l'Hamiltonien effectif . . . . .	33
1.3.2 Différences avec la description classique . . . . .	35
1.4 Méthode de l'équation maîtresse . . . . .	35
1.4.1 Équation maîtresse pour un ensemble atomique . . . . .	36
1.4.2 Émission collective d'un système atomique . . . . .	36
1.4.3 Équation maîtresse restreinte à une excitation . . . . .	41
1.5 Solution timed Dicke pour l'état stationnaire . . . . .	44
1.5.1 Dérivation de la solution timed Dicke . . . . .	44
1.5.2 Caractérisation de l'état stationnaire . . . . .	47
1.5.3 Force de pression de radiation collective . . . . .	50
1.6 Sousradiance . . . . .	54
1.6.1 Réponse temporelle du système : super et sousradiance . . . . .	55
1.6.2 Explication de la relaxation du système . . . . .	56
1.6.3 Taux d'émission sousradiant . . . . .	58
1.6.4 Contrôle de la sousradiance . . . . .	62
1.7 Conclusion . . . . .	66

<b>2</b>	<b>Étude expérimentale des effets coopératifs</b>	<b>69</b>
2.1	Dispositif expérimental . . . . .	69
2.1.1	Piège magnéto-optique . . . . .	69
2.1.2	Imagerie . . . . .	72
2.2	Observation d'une force de pression de radiation coopérative . . . . .	74
2.2.1	Protocole et séquence expérimentale . . . . .	74
2.2.2	Résultats et discussion . . . . .	77
2.2.3	Expérience préliminaire avec des atomes thermiques dans un piège dipolaire . . . . .	83
2.3	Premières étapes vers l'observation de la sousradiance . . . . .	86
2.4	Conclusion . . . . .	89
<b>3</b>	<b>Piège dipolaire bleu</b>	<b>91</b>
3.1	Potentiel dipolaire . . . . .	92
3.1.1	Modèle de l'oscillateur . . . . .	93
3.1.2	Modèle de l'atome habillé . . . . .	95
3.2	Dispositif expérimental . . . . .	95
3.2.1	Configuration du piège . . . . .	95
3.2.2	Système laser . . . . .	100
3.2.3	Contrôle électronique des signaux radiofréquence . . . . .	101
3.2.4	Paramètres et séquence expérimentale . . . . .	104
3.3	Chargement . . . . .	104
3.3.1	Régime transitoire . . . . .	105
3.3.2	Nombre d'atomes piégés à la fin du régime transitoire . . . . .	106
3.4	Propriété du piège en régime quasi-stationnaire . . . . .	110
3.4.1	Profil de densité spatiale <i>in situ</i> . . . . .	111
3.4.2	Pertes par collision avec gaz chaud résiduel . . . . .	112
3.4.3	Influence de la taille . . . . .	112
3.4.4	Influence de la fréquence de rotation . . . . .	113
3.4.5	Influence du désaccord . . . . .	115
3.4.6	Influence du piédestal du système laser . . . . .	116
3.4.7	Conclusion et performances finales . . . . .	120
3.5	Compression . . . . .	121
3.5.1	Réflexions préliminaires . . . . .	122
3.5.2	Réalisation expérimentale . . . . .	125
3.5.3	Collisions et thermalisation . . . . .	128
3.5.4	Refroidissement évaporatif forcé dans le régime d'emballement	130
3.6	Conclusion . . . . .	133
	<b>Conclusion</b>	<b>135</b>

<b>Annexes</b>	<b>137</b>
<b>A Développement temporel du système : Hamiltonien effectif</b>	<b>137</b>
<b>B Équations d'évolution, solutions et relaxation</b>	<b>143</b>
B.1 Notation <i>bra-ket</i> pour les équations de l'optique linéaire . . . . .	143
B.2 Équation d'évolution des dipôles dans différentes bases . . . . .	144
B.2.1 Base canonique . . . . .	144
B.2.2 Base timed Dicke . . . . .	145
B.2.3 Base des états propres de la matrice de couplage . . . . .	146
B.3 Solution des équations . . . . .	147
B.3.1 Solution formelle pour le pilotage du système . . . . .	147
B.3.2 Solution formelle pour la relaxation du système . . . . .	148
B.3.3 Approximation timed Dicke pour la solution stationnaire . .	148
B.4 Grandeurs physiques . . . . .	148
B.5 Remarques sur la relaxation du système . . . . .	149
B.5.1 Équation de relaxation du système . . . . .	149
B.5.2 Relaxation pour l'état timed Dicke . . . . .	150
B.5.3 Relaxation en termes des modes propres . . . . .	150
<b>C Potentiel dipolaire</b>	<b>153</b>
<b>D Entropie du gaz parfait dans une boîte et dans un piège harmonique</b>	<b>157</b>
D.1 Gaz parfait dans une boîte . . . . .	157
D.2 Gaz parfait dans un piège harmonique . . . . .	158
<b>E Publications</b>	<b>159</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>161</b>



# Introduction

L'étude de l'interaction lumière-matière et de la propagation de la lumière dans les vapeurs atomiques est un sujet très riche. Nous pouvons citer, par exemple, l'étude du piégeage radiatif par diffusion multiple avec des vapeurs chaudes [61, 88] ou froides [38, 78], l'étude de la diffusion anormale comme les vols de Lévy de photons dans les vapeurs chaudes [84], l'étude des cristaux photoniques d'atomes froids [103], l'étude de la superradiance [53, 62], l'étude de la rétrodiffusion cohérente sur un nuage d'atomes froids [76, 65], ou encore l'étude de la localisation d'Anderson [3, 11]. La richesse des vapeurs atomiques provient de leurs propriétés uniques : résonance atomique très étroite, effets mécaniques de la lumière s'exerçant sur les atomes ou encore nature quantique des diffuseurs.

Parmi tous ces effets, la superradiance, sujet très étudié dans les années 1970, prend une place particulière. Le sujet est bien introduit en décrivant phénoménologiquement le phénomène de *superfluorescence*. Dans une expérience de fluorescence "ordinaire", un ensemble d'atomes initialement inversé (atomes complètement excités) va rayonner son énergie de façon isotrope avec une intensité qui décroît avec un temps caractéristique  $1/\Gamma$  (voir figure 1), où  $\Gamma$  est le taux d'émission spontanée d'un atome unique. Ce comportement est généralement observé dans des échantillons dilués et se trouve modifié quand le nuage d'atomes devient plus dense. Dans ce cas, le système émet de façon plus rapide et plus intense que l'émission d'atomes indépendants, dans une direction bien précise résultant de la géométrie du nuage (voir figure 1). Ce phénomène, connu sous le nom de *superfluorescence*, est dû à une organisation cohérente des dipôles à travers le nuage. Ces dipôles émettent un champ proportionnel au carré du nombre d'atomes  $N$  de l'échantillon. L'énergie du système atomique est donc amortie sur une durée courte d'ordre  $\sim 1/(N\Gamma)$ .

Lorsque le comportement d'un système est déterminé par les interactions mutuelles entre ses constituants, cela peut donner lieu à des effets coopératifs. C'est, par exemple, le cas d'un ensemble de  $N$  atomes interagissant entre eux *via* un couplage par le champ électromagnétique. Dans son célèbre article de 1954 [34], Robert H. Dicke a montré qu'un ensemble de  $N$  atomes complètement inversé émet son énergie beaucoup plus rapidement qu'un ensemble d'atomes indépendants, avec un taux d'émission proportionnel au nombre d'atomes du système. Cet effet est dû à

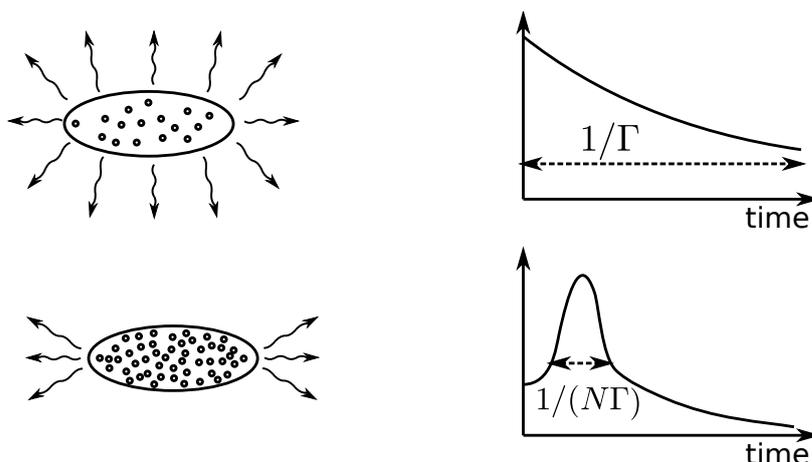


Figure 1 – Comparaison entre l'émission spontanée ordinaire et la superfluorescence. La figure du haut montre l'émission spontanée ordinaire : elle est essentiellement isotrope avec une intensité qui décroît exponentiellement avec un taux  $1/\Gamma$ , où  $\Gamma$  est taux d'émission spontanée d'un atome unique. La figure du bas montre une émission superfluorescente : elle est anisotrope et son intensité est émise sous forme d'un pulse rapide de durée  $\sim 1/(N\Gamma)$ . Figure reproduite d'après [53].

la création de corrélations entre les moments dipolaires des atomes qui sont séparés spatialement mais qui interagissent collectivement *via* le champ électromagnétique. Ceci conduit les atomes contenus dans un volume macroscopique à émettre de façon cohérente. Cette émission anormale a été appelée *émission spontanée collective* ou encore *superradiance*.

Généralement, l'étude de la superradiance s'effectue à partir d'un ensemble atomique complètement inversé et en considérant seulement la partie imaginaire du terme d'interaction dipôle-dipôle (en négligeant l'énergie d'interaction). De plus, le système atomique est supposé être de petite taille  $L$  par rapport à la longueur d'onde  $\lambda$  de la radiation lumineuse  $L \ll \lambda$ . À partir de ces hypothèses, on montre qu'un système de  $N$  atomes complètement inversé relaxe selon une cascade radiative où l'intensité et le taux d'émission maxima<sup>1</sup> sont  $\sim N$  fois plus importants que pour l'émission de  $N$  atomes indépendants [53, 57].

La superradiance à un photon (toujours dans la situation  $L \ll \lambda$ ) correspond au dernier étage de la cascade radiative superradiante où l'émission s'effectue à partir de l'état symétrique

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j |g \cdots e_j \cdots g\rangle, \quad (1)$$

vers l'état fondamental  $|G\rangle = |g \cdots g\rangle$ . L'état symétrique correspond à une super-

1. L'intensité et le taux d'émission sont maxima autour de la moitié de la cascade radiative.

position d'états : un atome est excité sans qu'on sache lequel. On montre que, dans ce cas, le taux d'émission spontanée du système est

$$\Gamma_c = N\Gamma. \quad (2)$$

Ce taux est donc  $N$  fois plus important que celui correspondant à un atome indépendant. La superradiance à un photon peut être expliquée classiquement dans le cadre de l'optique linéaire décrivant l'évolution de  $N$  dipôles couplés, où l'émission cohérente s'effectue à partir de  $N$  moments dipolaires parallèles émettant en phase.

Considérons maintenant la limite opposée  $L \gg \lambda$ . La superradiance à un photon, pour des échantillons dont la taille est grande devant la longueur d'onde, présente un intérêt particulier dans le domaine de l'information quantique où la taille des échantillons est généralement grande devant la longueur d'onde  $L \gg \lambda$  [22, 91, 69]. De plus, l'espace de Hilbert accessible peut être restreint aux états à une excitation au plus en utilisant par exemple le blocage de Rydberg [121, 108, 122, 46]. Ces systèmes étant dilués, i.e.  $n\lambda^3 \ll 1$  (avec  $n = N/L^3$  la densité du nuage), l'utilisation de *l'approximation scalaire pour le champ électromagnétique permet de simplifier le problème*. L'état initial pertinent pour étudier la relaxation du système est une généralisation de l'état symétrique (1), cet état est appelé état "timed Dicke"

$$|TD\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} |g \cdots e_j \cdots g\rangle, \quad (3)$$

où  $\mathbf{k}$  est un vecteur d'onde ( $\|\mathbf{k}\| = 2\pi/\lambda$ ). On montre alors que l'émission spontanée du système dans la limite  $L \gg \lambda$  s'effectue avec un taux [117]

$$\Gamma_c \sim \frac{N}{(L/\lambda)^2} \Gamma \sim b_0 \Gamma, \quad (4)$$

où  $b_0 \sim N/(L/\lambda)^2$  est l'épaisseur optique du nuage. Ce taux peut-être compris à partir du couplage coopératif de plusieurs atomes dans le même mode du vide [3]. Le nombre de modes disponibles pour un système de taille  $L \gg \lambda$  est  $N_m \propto (L/\lambda)^2$ , ce qui donne un nombre d'atomes par mode  $\sim N/N_m \propto N/(L/\lambda)^2$ . De plus, l'émission s'effectue dans la direction de  $\mathbf{k}$ , ce qui est à mettre en relation avec la diffusion de Mie, ou, de façon plus précise, la diffusion de Rayleigh-Debye-Gans [123].

Tous les résultats concernant le taux d'émission du système peuvent être obtenus en considérant seulement le terme imaginaire du couplage dipôle-dipôle (terme dissipatif). En considérant l'énergie d'interaction dipôle-dipôle (partie réelle), on peut montrer que ce terme contribue à un terme de self énergie du système appelé déplacement de Lamb collectif. Pour un système initialement dans l'état "timed Dicke" (3), le déplacement de Lamb collectif est donné par  $\mathcal{L}_c \sim -\frac{N}{(L/\lambda)^3} \Gamma \sim -n\lambda^3 \Gamma$ ,

et correspond à un déplacement vers le rouge proportionnel au nombre d’atomes par  $\lambda^3$  [104, 106].

Lors de l’étude de la superradiance à un photon, on considère souvent le problème de l’émission spontanée collective du nuage. Or, il n’est pas forcément facile de préparer l’état timed Dicke du système ni de détecter le temps de sortie et la direction du photon émis. Nous nous intéressons donc, dans le chapitre 1, à une situation expérimentalement plus simple, où un laser pilote un ensemble de systèmes à deux niveaux. Le pilotage du laser est faible de sorte que l’on peut se restreindre aux états atomiques ayant une excitation au plus, ce qui classiquement correspond à la réponse de l’optique linéaire. Le laser couple l’état fondamental du système  $|G\rangle$  à l’état timed Dicke  $|TD\rangle$  avec une fréquence de Rabi collective  $\Omega_c = \sqrt{N}\Omega$ , où  $\Omega$ , est la pulsation de Rabi associée à un atome. Le système répond collectivement grâce aux interactions dipôle-dipôle médiées par le champ électromagnétique. Il peut être décrit comme “un gros atome” possédant un taux d’émission modifié  $\Gamma_c$  et un déplacement de sa fréquence de résonance de  $\mathcal{L}_c$ . Nous montrons ensuite que la force de pression de radiation s’exerçant sur le centre de masse du nuage est une quantité pertinente pour mettre en évidence expérimentalement les effets coopératifs. Dans le chapitre 2, nous décrivons le dispositif expérimental ainsi que le protocole que nous avons mis en place pour mesurer la force de pression de radiation collective en observant la position du centre de masse du nuage.

La nature coopérative des ensembles atomiques interagissant *via* le champ électromagnétique peut se manifester par d’autres effets que ceux associés à la relaxation superradiante du système. C’est, par exemple, le cas de la sousradiance où le système atomique piège de façon partielle ou totale la radiation lumineuse par des effets d’interférences destructives. À la fin du chapitre 1, nous étudions théoriquement comment il est possible de comprendre et contrôler le couplage de la lumière dans les modes sousradiants du système. Contrôler la sousradiance d’un système permettrait de stocker des excitations dans des modes ayant une grande durée de vie ; ce qui est particulièrement intéressant dans le domaine de l’information quantique [91, 69]. En étudiant la relaxation du système, nous montrons que les nuages d’atomes froids dilués sont des systèmes idéaux pour observer, pour la première fois, le phénomène de sousradiance de  $N$  atomes dans l’espace libre. La fin du chapitre 2 est consacrée à la description du protocole et du dispositif expérimental que nous avons mis en place dans le but d’observer le phénomène de sousradiance.

Les chapitres 1 et 2 sont consacrés à l’étude des effets coopératifs dans les régimes dilués  $n\lambda^3 \ll 1$ . L’étude de l’interaction lumière-matière dans les régimes denses  $n\lambda^3 > 1$  est un sujet bien plus riche puisqu’on peut s’attendre à une compétition entre les effets coopératifs et les effets du désordre comme la localisation forte [6]. La description théorique de ce régime est plus compliquée puisqu’il est né-

cessaire de prendre en compte la nature vectorielle de la lumière (l'approximation scalaire n'est plus valable) pour décrire correctement le couplage en champ proche de l'interaction dipôle-dipôle. La question de l'existence de la localisation d'Anderson [6] dans de tels systèmes fait l'objet d'études théoriques récentes [3, 66, 111] sans encore apporter de réponse définitive pour savoir qui, des effets coopératifs ou de la localisation forte, domine. Il est donc particulièrement pertinent de s'intéresser expérimentalement à la propagation de la lumière dans des nuages atomiques denses comme a commencé de le faire le groupe de Mark Havey [11]. La première étape de l'expérience est l'obtention d'un échantillon suffisamment dense. Le seuil de localisation forte est donné qualitativement par le critère de Ioffe-Reggel [63] :  $k \cdot l \sim 1$ , où  $k = 2\pi/\lambda$  est le vecteur d'onde de la lumière et  $l = 1/(n\sigma)$  est le libre parcours moyen du photon ( $n$  la densité atomique,  $\sigma$  la section efficace de diffusion). Pour des diffuseurs résonnants, la section efficace de diffusion  $\sigma_0 \sim 3\lambda^2/(2\pi)$ , permet de réécrire le critère de Ioffe-Reggel sous la forme  $n\lambda^3 \sim 1$  (à ne pas confondre avec le seuil de condensation de Bose-Einstein  $n\Lambda_T^3 \sim 1$  où  $\Lambda_T = h/\sqrt{2\pi mk_B T}$  est la longueur d'onde thermique). Le régime des grandes densités est aussi utile à l'étude du déplacement de Lamb collectif  $\sim -n\lambda^3\Gamma$ . Pour le Rubidium, cela correspond à des densités de l'ordre de  $10^{13} - 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , trois ordres de grandeur supérieurs aux densités des pièges magnéto-optiques.

Dans le chapitre 3, nous développons une méthode originale pour piéger et comprimer les atomes vers le seuil de localisation forte. Il s'agit d'un piège dipolaire croisé désaccordé dans le bleu dont la taille peut-être contrôlée de façon dynamique pour comprimer le nuage. Nous souhaitons piéger un grand nombre d'atomes avec une forte densité tout en ayant une durée de cycle expérimental la plus faible possible pour pouvoir réaliser des moyennes et avoir un bon rapport signal sur bruit. Par contre, nous n'avons pas de contrainte stricte en ce qui concerne la température du nuage car le temps nécessaire aux mesures des photons, inférieur à  $1 \mu\text{s}$  (quelques  $\Gamma^{-1}$ ), est faible comparé à l'échelle de temps typique liée au mouvement des atomes  $\lambda/\sqrt{k_B T/m} \sim 20 \mu\text{s}$ . Le temps de vie du piège dipolaire (quelques centaines de ms) n'est pas non plus un facteur limitant. Ces contraintes sont différentes de celles requises pour l'obtention de gaz quantiques dégénérés, où le nombre d'atomes dans l'état final est relativement faible (quelques  $10^5$ ) et les durées des cycles sont longues à cause de l'étape d'évaporation forcée (entre 15 s et 2 min). De plus, l'étape d'évaporation nécessite un piège dipolaire très stable : temps de vie du piège supérieur à 1 s. Après avoir présenté le dispositif expérimental nous caractérisons le piège dipolaire statique et discutons ses performances avant de faire quelques essais de compression dynamique du nuage.



# Chapitre 1

## Effets coopératifs pour un système d'atomes à deux niveaux

Dans ce chapitre, nous considérons un ensemble de systèmes à deux niveaux (ou dipôles classiques) couplés entre eux par le champ électromagnétique qui sert de médiateur au couplage dipôle-dipôle. C'est par l'intermédiaire de ce couplage que le système ne réagit pas comme  $N$  atomes individuels mais réagit de façon *collective*. La nature des effets collectifs est diverse et nous étudions ici en particulier :

- la superradiance : l'augmentation du taux d'émission spontanée par effet d'interférences constructives ;
- le déplacement de Lamb collectif : le déplacement de la résonance du système par les effets coopératifs ;
- la sousradiance : le piégeage partiel de la radiation lumineuse par effet d'interférences destructives.

Ces effets bien connus sont généralement analysés d'un point de vue théorique en partant d'un état initial excité et en étudiant la relaxation du système vers l'état fondamental. Expérimentalement, il n'est pas forcément facile de préparer un état initial donné, ni même de détecter les photons spontanément émis. Ainsi, les investigations théoriques de cette partie sont motivées par la description d'une situation expérimentale plus simple à mettre en place : la diffusion d'un faisceau laser par un nuage d'atomes froids. Nous allons voir comment les effets collectifs se manifestent de façon naturelle dans cette situation. Nous appliquons nos résultats à l'évaluation de la force de pression coopérative s'exerçant sur le centre de masse du nuage, et montrons qu'il s'agit d'une quantité permettant de mettre en évidence simplement les effets coopératifs liés à la superradiance.

Notre étude est restreinte à l'espace de Hilbert engendré par les états contenant au plus une excitation. Cette approximation est valable non seulement pour les faibles champs pilotant les atomes mais également pour les systèmes dont les niveaux contenant plusieurs excitations sont bloqués ; comme c'est par exemple le

cas pour des atomes dans le régime de blocage de Rydberg.

Dans la dernière partie, on s'intéresse à la sousradiance en étudiant la relaxation de la population des états excités du système. En particulier, on étudie comment contrôler la sousradiance et la distinguer d'autres phénomènes conduisant au piégeage de la lumière, comme par exemple la diffusion multiple. Cette étude va nous aider à concevoir une expérience visant à mettre en évidence pour la première fois la sousradiance d'un ensemble atomique dans l'espace libre.

## 1.1 Approche classique

La théorie classique de l'interaction linéaire lumière-matière a été principalement étudiée par H. A. Lorentz en explorant l'idée que les phénomènes optiques proviennent des mouvements des charges élémentaires et des dipôles qui interagissent avec les champs électromagnétiques associés aux ondes lumineuses [80].

D'un point de vue pratique, la théorie classique nécessite d'être modifiée seulement dans les situations les plus extrêmes. Par exemple, les formules classiques de diffusion de Rayleigh et Thomson n'ont besoin d'être remplacées par la formule quantique de Compton que lorsque la longueur d'onde de la lumière diffusée atteint la région des rayons X. De plus, les formules classiques de dispersion et d'absorption réapparaissent dans l'approche quantique et ont été dérivées dans le cadre quantique, pour la première fois, par Kramers et Heisenberg en appliquant le principe de correspondance aux expressions classiques. Des déviations appréciables des prédictions de la théorie de Lorentz-Kramers-Heisenberg seront seulement observées pour des champs suffisamment intenses pour exciter les non-linéarités atomiques.

Dans cette partie, nous étudions la réponse de  $N$  dipôles à l'excitation d'une onde lumineuse incidente, les dipôles étant couplés par l'intermédiaire du champ diffusé. Nous verrons comment la théorie classique de l'interaction linéaire lumière-matière permet de décrire les effets coopératifs et nous discuterons, dans la suite, les différences avec les résultats quantiques.

### 1.1.1 Évolution des amplitudes des dipôles

Selon Lorentz, dans leur majorité, les phénomènes optiques peuvent être décrits par l'interaction de charges électriques avec le champ électromagnétique [80]. On suppose que ces charges sont contenues dans des atomes neutres et qu'elles oscillent autour de leurs positions d'équilibre avec de très petites amplitudes (en comparaison avec la longueur d'onde). Chaque paire électron-ion se comporte comme un oscillateur harmonique qui se couple au champ électromagnétique par son moment dipolaire électrique. L'équation du mouvement de l'oscillateur  $j$ , situé à la position

$\mathbf{r}_j(t)$  est donnée par

$$\ddot{\mathbf{r}}_j(t) + \omega_0^2 \mathbf{r}_j(t) = -\frac{e}{m} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_j), \quad (1.1)$$

avec  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}_j)$  le champ électrique,  $\omega_0$  la fréquence de résonance de l'oscillateur,  $-e$  la charge de l'électron et  $m$  sa masse. Le vecteur densité de courant est donné par

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = -e \sum_j \dot{\mathbf{r}}_j(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j). \quad (1.2)$$

En utilisant maintenant les équations de Maxwell microscopiques [64]  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$  et  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E})$ , où  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité du vide ( $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ ), nous obtenons

$$-\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \mu_0 \partial_t \mathbf{j}. \quad (1.3)$$

En utilisant la formule d'analyse vectorielle bien connue  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ , et en supposant le milieu globalement neutre  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  (la charge du noyau compense la charge de l'électron), on obtient

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} = -e \mu_0 \sum_j \ddot{\mathbf{r}}_j(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j). \quad (1.4)$$

Les équations (1.1) et (1.4) constituent un système fermé d'équations couplant les positions des dipôles  $\mathbf{r}_j(t)$  au champ électrique  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}_j)$ .

On suppose que les électrons sont soumis à un champ électrique extérieur  $E_0 \hat{e}$  et que les électrons bougent dans la même direction  $\hat{e}$ . En suivant la référence [118], nous cherchons des solutions de la forme

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \hat{e} E_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \hat{e} A(t, \mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{r}_j(t) = \hat{e} a \beta_j(t) e^{-i\omega t}, \quad (1.6)$$

où nous avons introduit la longueur caractéristique de l'oscillateur  $a = \sqrt{\hbar/m\omega}$  et  $A(t, \mathbf{r})$  et  $\beta_j(t)$  sont des fonctions variant lentement sur une échelle de temps  $1/\omega$ . Le fait de supposer que le champ diffusé est polarisé selon  $\hat{e}$  équivaut à faire l'approximation du *champ scalaire*. En remplaçant l'Eq. (1.5) et (1.6) dans l'Eq. (1.1) et (1.4), et gardant seulement le premier ordre des termes dérivés par rapport au temps ( $\beta_j(t)$  lentement variable), nous obtenons

$$-2i\omega a \dot{\beta}_j(t) = (\omega^2 - \omega_0^2) a \beta_j(t) - \frac{e}{m} [E_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} + A(t, \mathbf{r}_j)], \quad (1.7)$$

$$\nabla^2 A + k^2 A = \omega^2 \mu_0 e a \sum_j \beta_j(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (1.8)$$

avec  $k = \omega/c$ . L'équation (1.8) a la forme d'une équation de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2) A(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}). \quad (1.9)$$

À ce stade, nous introduisons la fonction de Green  $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , solution de l'équation  $(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  qui permet d'écrire la solution de l'équation (1.9) sous la forme

$$A(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' f(\mathbf{r}') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.10)$$

Le fait de chercher une solution causale, nous impose de choisir la fonction de Green retardée

$$G^R(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.11)$$

En utilisant les équations (1.8), (1.10) et (1.11), et en intégrant sur  $\mathbf{r}'$  on obtient

$$A(t, \mathbf{r}) = -\frac{\omega^2 \mu_0 e a}{4\pi} \sum_j \beta_j(t) \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}. \quad (1.12)$$

Puis en substituant cette solution dans l'équation (1.7)

$$-2i\omega a \dot{\beta}_j(t) = (\omega^2 - \omega_0^2) a \beta_j(t) - \frac{e}{m} E_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} + \frac{\omega^2 \mu_0 e^2 a}{4\pi m} \sum_m \beta_m(t) \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|}. \quad (1.13)$$

On fait maintenant l'hypothèse d'une diffusion quasi-résonnante  $\omega \simeq \omega_0$ , ce qui permet de simplifier l'expression ci-dessus. En introduisant le désaccord  $\Delta = \omega - \omega_0$  et la pulsation de Rabi  $\Omega = aeE_0/\hbar$ , nous obtenons finalement

$$\dot{\beta}_j = -\frac{i\Omega}{2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} + \left(i\Delta - \frac{\Gamma}{2}\right) \beta_j + \frac{i\Gamma}{2} \sum_{m \neq j} \beta_m(t) \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|)}{k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|}, \quad (1.14)$$

avec

$$\Gamma = \frac{\omega_0^2 \mu_0 e^2}{4\pi m c} = \frac{k_0^3 e^2 a^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar}. \quad (1.15)$$

Le taux d'émission obtenu dans le cas classique (1.15) est le même que celui trouvé dans une description quantique si l'on substitue  $ea/2$  par  $d_{eg} \equiv \langle e|d|g \rangle$ . L'application numérique de la formule (1.15) pour la transition  $D_2$  de l'atome de Rubidium donne  $\Gamma^{-1} \simeq 18$  ns, ce qui est compatible avec la valeur mesurée expérimentalement  $\Gamma^{-1} \simeq 27$  ns.

À partir d'un système d'équations couplant les évolutions du champ et des dipôles (Eq. (1.1) et (1.4)), nous aboutissons finalement, en ayant éliminé la dépendance explicite du champ, à un système linéaire de  $N$  équations couplées décrivant l'évolution des amplitudes des dipôles  $\beta_j$  (Eq. (1.14)). La richesse de ce type

de système vient du terme d'interaction dipôle-dipôle  $V_{ij} = \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$  qui est à l'origine des effets coopératifs que nous allons étudier.

Nous verrons, dans la suite, que ce système d'équations est le même que celui décrivant l'évolution de  $N$  systèmes à deux niveaux, traité quantiquement dans la limite des faibles excitations (une excitation au plus dans le système) [118], comme attendu par l'optique linéaire [4].

### 1.1.2 Diagramme d'émission

L'intensité diffusée par le système est égale à la moyenne temporelle du vecteur de Poynting. Le champ diffusé (dans l'approximation scalaire)

$$A(t, \mathbf{r}) = -\frac{\omega^2 \mu_0 e a}{4\pi} \sum_j \beta_j(t) \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}, \quad (1.16)$$

s'interprète très facilement comme étant la somme de  $N$  ondes sphériques émises par les dipôles  $j$ , aux positions  $r_j$  et avec des amplitudes  $\beta_j$ . En champ lointain,  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \simeq r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_j / r$  et le champ diffusé s'écrit

$$A(t, \mathbf{r}) = -\frac{\omega^2 \mu_0 e a}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_j \beta_j(t) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_j}, \quad (1.17)$$

avec  $\mathbf{k}_s = k(\mathbf{r}/r)$ . Ainsi, l'intensité au point  $\mathbf{r}$  vaut

$$I(t, \mathbf{r}) = \langle \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u}_s \rangle = \frac{\langle A^2(t, \mathbf{r}) \rangle}{\mu_0 c} = \frac{\omega^4 \mu_0 e^2 a^2}{32\pi^2 c r^2} \sum_i \sum_j \beta_i(t) \beta_j^*(t) e^{-i\mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}. \quad (1.18)$$

### 1.1.3 Bilan énergétique, superradiance, sousradiance

#### Bilan énergétique

Une des propriétés les plus élémentaires des dipôles oscillants est qu'ils émettent de l'énergie électromagnétique. L'énergie émise par les dipôles sous forme de radiation est liée à l'énergie perdue par les oscillateurs, ce qui se traduit par la relation de conservation locale de l'énergie suivante [21],

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi} + \partial_t U_{\text{em}} + \partial_t U_{\text{mat}} = 0, \quad (1.19)$$

où  $\mathbf{\Pi}$  est le vecteur de Poynting,  $U_{\text{em}}$  la densité d'énergie du champ électromagnétique, et  $U_{\text{mat}}$  la densité d'énergie de la matière. En intégrant l'équation (1.19) sur un volume  $\mathcal{V}$  centré sur le système, nous obtenons une relation sur l'énergie

$$\int_{\mathcal{S}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{\Pi} + \partial_t W_{\text{em}} + \partial_t W_{\text{mat}} = 0, \quad (1.20)$$

où  $\mathcal{S}$  est la surface limitant le volume  $\mathcal{V}$ .

On fait maintenant l'hypothèse (que l'on vérifiera plus tard) que la perte d'énergie des dipôles est relativement lente, au moins par rapport à la période d'oscillation des dipôles atomiques  $2\pi/\omega$ . Une conséquence de cette hypothèse est que l'énergie électromagnétique contenue dans le volume  $\mathcal{V}$  est quasiment constante, ce qui permet de négliger le terme  $\partial_t W_{\text{em}}$  dans l'équation (1.20) [4]. Une deuxième conséquence est que les oscillations des dipôles sont quasiment parfaitement harmoniques ce qui permet d'écrire l'énergie mécanique (cinétique et potentielle) du système d'oscillateurs

$$\langle W_{\text{mat}} \rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \sum_j |\beta_j|^2, \quad (1.21)$$

où la moyenne est prise sur une période  $2\pi/\omega$ .

Le taux de perte d'énergie électromagnétique par rayonnement des dipôles à travers une surface sphérique centrée sur le système peut être évalué à l'aide de l'expression du vecteur de Poynting Eq. (1.18) :

$$\int d\mathbf{S} \cdot \langle \Pi \rangle = \frac{\omega^4 \mu_0 e^2 a^2}{32\pi^2 c} \sum_i \sum_j \beta_i \beta_j^* \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-ik|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \cos \theta}, \quad (1.22)$$

ce qui se réécrit en évaluant les intégrales

$$\int d\mathbf{S} \cdot \langle \Pi \rangle = \Gamma \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \sum_i \sum_j \beta_i \beta_j^* \frac{\sin(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (1.23)$$

La relation traduisant la conservation de l'énergie (1.20) conduit ainsi à l'équation suivante pour les amplitudes des dipôles  $\beta_j$

$$\frac{d \sum_i |\beta_i|^2}{dt} = -\Gamma \sum_i \sum_j \beta_i \beta_j^* \frac{\sin(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (1.24)$$

Cette équation traduit le taux de perte d'énergie mécanique du système ; elle est semblable à l'équation donnant le temps de sortie des photons [36, 99, 3].

### Dipôles déphasés aléatoirement

Si les dipôles sont déphasés aléatoirement  $\beta_j = \beta_0 e^{i\phi_j}$  et si la taille du système  $L$  est petite devant la longueur d'onde  $L \ll \lambda$ , on a

$$\sum_i \sum_j \beta_i \beta_j^* = |\beta_0|^2 \sum_i \sum_j e^{i(\phi_i - \phi_j)} \simeq N |\beta_0|^2. \quad (1.25)$$

L'équation (1.24) devient

$$\partial_t W_{\text{mat}} = -\Gamma W_{\text{mat}}. \quad (1.26)$$

Dans ce cas, le système rayonne donc de la même manière que des dipôles indépendants.

## Superradiance

Considérons un système où l'état initial des dipôles est identique  $\beta_j = \beta_0$  (organisés symétriquement) et supposons, de plus, que la taille du système  $L$  soit petite devant la longueur d'onde  $L \ll \lambda$ . L'équation (1.24) se simplifie alors pour donner

$$\partial_t W_{\text{mat}} = -N\Gamma W_{\text{mat}}, \quad (1.27)$$

ce qui montre que, dans le cas de dipôles initialement synchronisés, le système rayonne  $N$  fois plus vite un champ  $N$  fois plus intense ( $I \propto N^2 |\beta_0|^2$  cf. Eq. (1.18)), par rapport au cas de dipôles indépendants. Les  $N$  dipôles se comportent comme un gros dipôle et se désexcitent de façon collective. Cette émission "anormale" a été appelée *superradiance* par Dicke [34, 53, 110, 97]. On remarque donc que l'origine de la superradiance vient des interférences constructives de l'émission collective.

## Sousradiance

Toujours pour un système dont la taille  $L \ll \lambda$ , on considère des dipôles de même amplitude mais alignés de façon aléatoire  $\beta_j = (-1)^j \beta_0$ , de telle sorte que la polarisation macroscopique du système est nulle. On obtient alors

$$\sum_i \sum_j \beta_i \beta_j^* = 0, \quad (1.28)$$

ce qui donne

$$\partial_t W_{\text{mat}} = 0. \quad (1.29)$$

Ainsi, le système préparé dans cet état initial piège la lumière grâce aux interférences destructives. Il ne se désexcite pas et ne peut pas être couplé à un champ extérieur. Ce type d'état est appelé état sousradiant [34, 115, 39, 90].

Dans cette partie, les phénomènes de superradiance et de sousradiance ont été introduits dans le cas de systèmes dont la taille est petite devant la longueur d'onde  $L \ll \lambda$ . Dans la suite, nous allons étudier ces deux phénomènes dans la limite opposée  $L \gg \lambda$ ; ce qui correspond à la situation expérimentale rencontrée généralement en optique quantique et dans nos expériences d'atomes froids.

### 1.1.4 Énergie potentielle des dipôles

Dans cette partie, on évalue l'énergie d'interaction des dipôles avec le champ électrique total qui s'écrit comme la somme d'un champ électrique extérieur  $\mathbf{E}_0$  et d'un champ diffusé  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (1.30)$$

Ainsi, l'énergie potentielle du dipôle  $i$  est donnée par

$$U_i = U_i^0 + U_i^d = -\langle \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_j, t) \rangle - \langle \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_j, t) \rangle, \quad (1.31)$$

où  $\mathbf{d}_j = -e\mathbf{r}_j$  et  $\langle \dots \rangle$  représente la moyenne temporelle sur une période  $2\pi/\omega$ . Le premier terme  $U_i^0$  correspond au déplacement lumineux dû au champ extérieur et le deuxième  $U_i^d$  au déplacement lumineux induit par l'interaction avec les  $N - 1$  autres dipôles (ou de façon équivalente à l'énergie d'interaction avec le champ diffusé). En utilisant la moyenne complexe  $\langle AB \rangle = \text{Re}(\underline{A}^* \underline{B})/2$  et à l'aide de Eq. (1.12) et Eq. (1.6) on obtient

$$U_i = -\frac{dE_0}{2} \text{Re}(\beta_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i}) - \frac{\hbar\Gamma}{2} \text{Re} \sum_{j \neq i} \beta_i^* \beta_j \frac{\cos(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (1.32)$$

L'énergie potentielle totale du système s'obtient en sommant les énergies des différents dipôles

$$U = \sum_i U_i^0 + \sum_i U_i^d. \quad (1.33)$$

Sous cette forme, le deuxième terme apparaît comme un terme de “self énergie”, i.e. un terme représentant l'énergie d'interaction du système sur lui même *via* l'interaction dipôle-dipôle. En explicitant les différents termes intervenant dans la self énergie on obtient finalement

$$U_{\text{self}} = -\frac{\hbar\Gamma}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \beta_i^* \beta_j \frac{\cos(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (1.34)$$

Il est commode de réécrire cette expression sous la forme

$$U_{\text{self}} = N \langle U_i^d \rangle, \quad (1.35)$$

où  $\langle U_i^d \rangle \equiv 1/N \sum_i U_i^d$  est la moyenne des énergies des dipôles dues au champ diffusé. Le champ diffusé étant une quantité fluctuante, i.e. un speckle, les énergies des dipôles associées au champ diffusé  $U_i^d$  possèdent de grandes fluctuations par rapport à leur valeur moyenne  $\langle U_i^d \rangle$ . Le déplacement lumineux moyen des dipôles  $\langle U_i^d \rangle$  conduit un déplacement moyen de la résonance atomique qui peut-être identifié au déplacement de Lamb collectif [104, 106, 102].

### 1.1.5 Solution stationnaire “timed Dicke”

Pour chercher une solution stationnaire de l'équation (1.14), on effectue le changement de variable suivant

$$\beta_j = \tilde{\beta}_j e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j}, \quad (1.36)$$

ce qui permet de simplifier le déphasage imposé par le champ incident  $\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ . En insérant Eq. (1.36) dans Eq. (1.14), on obtient

$$-\frac{i\Omega}{2} + \left(i\Delta - \frac{\Gamma}{2}\right) \tilde{\beta}_j + \frac{i\Gamma}{2} \sum_{m \neq j} \tilde{\beta}_m e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_j)} \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|)}{k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|} = 0. \quad (1.37)$$

La valeur moyenne de  $\tilde{\beta}_j$

$$\langle \tilde{\beta}_j \rangle = \frac{1}{N} \sum_j \tilde{\beta}_j \equiv \beta_{TD}, \quad (1.38)$$

est facilement calculée en sommant les équations (1.37). On obtient

$$\beta_{TD} = \frac{\Omega}{2(\Delta - \mathcal{L}_c) + i\Gamma_c}, \quad (1.39)$$

avec

$$\Gamma_c = \left(1 + \frac{1}{N} \sum_k \sum_{l \neq k} \frac{\sin(k|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k|)}{k|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k|} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l)}\right) \Gamma, \quad (1.40)$$

$$\mathcal{L}_c = -\frac{\Gamma}{2N} \sum_k \sum_{l \neq k} \frac{\cos(k|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k|)}{k|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k|} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l)}. \quad (1.41)$$

Les dipôles ont une largeur de résonance modifiée  $\Gamma_c$  et une fréquence de résonance déplacée  $\mathcal{L}_c$ . L'approximation ‘‘timed Dicke’’ revient à supposer que

$$\beta_j = \beta_{TD} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}. \quad (1.42)$$

La figure 1.1 montre, pour un nuage sphérique Gaussien, l'histogramme de la distribution des  $\tilde{\beta}_j$  calculé à partir de Eq. (1.37). On remarque l'excellent accord entre la valeur moyenne de la distribution et sa prédiction théorique donnée par l'équation (1.39).

## Interprétation

Nous allons discuter l'interprétation physique de  $\Gamma_c$  et  $\mathcal{L}_c$  et estimer leurs valeurs en fonction des paramètres expérimentaux. Nos résultats seront également comparés aux résultats obtenus récemment [105, 106] dans l'étude de la super-radiancia à un photon dans les nuages étendus (taille grande devant la longueur d'onde).

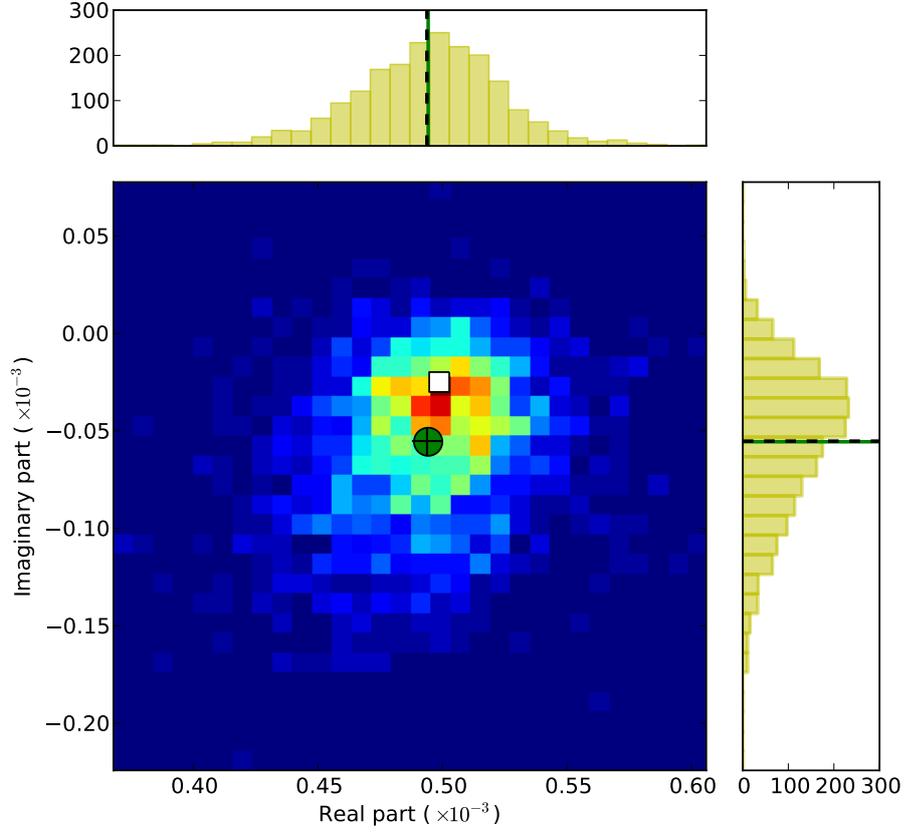


Figure 1.1 – Histogramme de la distribution des  $\tilde{\beta}_j$  pour un nuage Gaussien sphérique de densité spatiale  $\propto \exp(-\mathbf{r}^2/(2\sigma^2))$  avec  $N = 2000$  atomes,  $k\sigma = 20$  ( $b_0 = 3N/(k\sigma) = 15$ ),  $\Omega = 0.01 \Gamma$ ,  $\Delta = 10 \Gamma$ . Les données brutes correspondent à la solution de l'équation (1.37) et la moyenne de la distribution est représentée par un cercle vert. La croix noire correspond à la prédiction de l'équation (1.39). On remarque le très bon accord. Le carré blanc correspond à la solution pour des atomes indépendants.

### Diagramme d'émission : lien avec la diffusion de Mie

À partir de l'équation (1.18), le diagramme d'émission en champ lointain au point  $\mathbf{r}$  s'écrit

$$I(\mathbf{r}) = |\beta_{TD}|^2 \times \frac{\omega^4 \mu_0 e^2 a^2}{32\pi^2 c r^2} \sum_i \sum_j e^{-i(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}. \quad (1.43)$$

On peut calculer la moyenne des configurations de l'intensité diffusée dans la direction  $\{\theta, \phi\}$  pour le cas pertinent expérimentalement d'un nuage de profil de densité

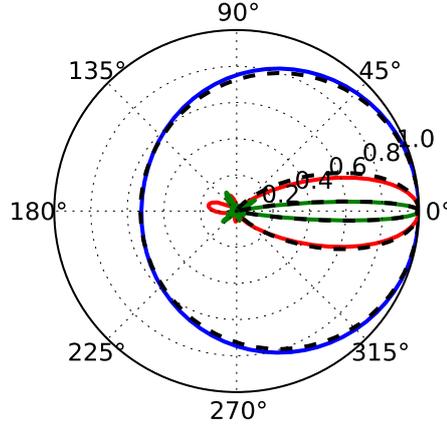


Figure 1.2 – Diagramme d'émission calculé selon l'équation (1.43) pour l'état timed Dicke avec  $N = 40$  atomes et  $k\sigma = 0.4$  (courbe bleue),  $k\sigma = 2$  (courbe rouge),  $k\sigma = 8$  (courbe verte). Les courbes en pointillés noirs correspondent aux expressions analytiques correspondantes calculées à partir de l'équation (1.44). On remarque que lorsque la taille du nuage augmente, l'émission est de plus en plus dirigée vers l'avant.

spatiale Gaussien  $n(\mathbf{r}) = n_0 \exp(-\mathbf{r}^2/2\sigma^2)$

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle_{\text{config}} = N^2 |\beta_{TD}|^2 \times \frac{\omega^4 \mu_0 e^2 a^2}{32\pi^2 c r^2} \left[ \frac{1}{N} + \exp\left(-4k^2 \sigma^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \right]. \quad (1.44)$$

On remarque que le diagramme d'émission ne dépend pas de  $\phi$ , comme prévu par la symétrie du problème. Pour les petits systèmes  $\sigma \ll \lambda$ , le diagramme d'émission est isotrope<sup>1</sup> et pour les systèmes de grande taille  $\sigma \gg \lambda$ , le diagramme d'émission est fortement piqué autour de  $\theta = 0$  avec une ouverture angulaire  $\Delta\theta \sim 1/(k\sigma)$ . Ceci est compatible avec la diffraction d'un objet de taille  $\sigma$ . La lumière est fortement diffusée dans la direction avant comme dans le cas de la diffusion de Mie, ou, de façon plus précise, dans le cas de la diffusion de Rayleigh-Debye-Gans [123]. La figure 1.2 montre le diagramme d'émission de l'état timed Dicke pour différentes tailles du système.

### Taux d'émission collectif - superradiance dans les systèmes étendus

L'équation (1.24) se réécrit pour la solution timed Dicke sous la forme

$$\partial_t W_{\text{mat}} = -\Gamma_c W_{\text{mat}}, \quad (1.45)$$

où  $\Gamma_c$  est donné par l'équation (1.40). On retrouve le résultat bien connu liant la largeur de la résonance des dipôles à l'émission radiative du système.

1. Dans l'approximation scalaire le diagramme du rayonnement dipolaire est isotrope.

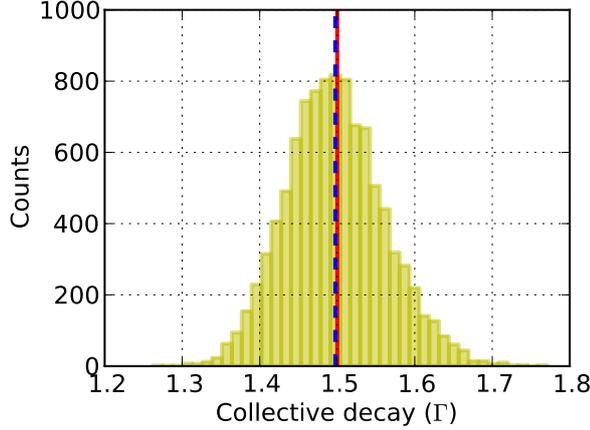


Figure 1.3 – Histogramme de la distribution des taux d’émission collectifs calculés à partir de l’équation (1.40) pour  $10^4$  réalisations,  $N = 200$ ,  $k\sigma = 10$  ( $b_0 = 6$ ). La prédiction (1.46) est représentée par trait plein rouge et correspond à  $\langle \Gamma_c \rangle = 1.5\Gamma$ . La courbe en pointillés correspond à la valeur moyenne de la distribution  $1.498\Gamma$ . La variance de la distribution est  $\sigma_{\Gamma_c} = 0.063\Gamma$ .

Dans le cas d’un système de taille petite devant la longueur d’onde, on retrouve le résultat bien connu de la superradiance à un photon  $\Gamma_c = N\Gamma$ . Cependant, il est pertinent d’étudier la limite inverse car en optique quantique la taille de l’échantillon est généralement grande par rapport à la longueur d’onde  $L \gg \lambda$ . Par exemple, dans les expériences d’atomes froids la taille de l’échantillon est de quelques centaines de  $\mu\text{m}$  et la longueur d’onde de la transition optique est inférieure à  $1\mu\text{m}$ .

Il est possible d’évaluer la moyenne des configurations du taux d’émission collective en considérant le cas d’un nuage sphérique Gaussien dans la limite  $\sigma \gg \lambda$  [30]

$$\langle \Gamma_c \rangle_{\text{config}} = \left( 1 + \frac{N}{4(k\sigma)^2} \right) \Gamma = \left( 1 + \frac{b_0}{12} \right) \Gamma, \quad (1.46)$$

où l’on a introduit l’épaisseur optique du nuage  $b_0 = 3\lambda^2/(2\pi) \int dz n(z) = 3N/(k\sigma)^2$ . Le taux d’émission collective est donc linéaire par rapport à l’épaisseur optique du nuage. On retrouve ainsi le résultat de la référence [117] obtenu dans l’étude de la superradiance à un photon dans les nuages de tailles étendues. Les auteurs calculent le taux d’émission d’un nuage d’atomes préparé initialement dans l’état timed Dicke et trouvent  $\Gamma_c \propto b_0\Gamma$  dans la limite  $b_0 \gg 1$  avec un facteur numérique différent du nôtre car les atomes sont supposés être répartis de façon homogène. Ce taux peut être compris à partir du couplage coopératif de plusieurs atomes dans le même mode du vide [3]. Le nombre de modes disponibles pour un système de taille  $\sigma \gg \lambda$  est  $N_m \propto (\sigma/\lambda)^2$ , ce qui donne un nombre d’atomes par mode

$\sim N/N_m \propto N/(\sigma/\lambda)^2 \sim b_0$ .

La figure 1.3 montre un histogramme de la distribution des taux d'émission collectifs calculés à partir de Eq. (1.40) pour  $10^4$  réalisations,  $N = 200$ ,  $k\sigma = 10$  ( $b_0 = 6$ ). On obtient un taux d'émission collectif  $\Gamma_c$  par configuration dont on fait l'historgramme pour différentes configurations du système. On remarque que la formule (1.46) est une très bonne prédiction pour la valeur moyenne de la distribution et que la distribution est assez piquée autour de sa valeur moyenne  $\langle \Gamma_c \rangle \gg \sigma_{\Gamma_c}$ .

### Énergie des dipôles, déplacement de Lamb collectif

Dans le cas de la solution timed Dicke, l'énergie du dipôle  $i$  due à l'interaction avec les  $N - 1$  autres dipôles (*via* le champ diffusé) s'écrit

$$U_i^d = -\frac{\hbar\Gamma}{2} |\beta_{TD}|^2 \sum_{j \neq i} \cos[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)] \frac{\cos(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (1.47)$$

La figure 1.4 montre l'historgramme des énergies des atomes  $U_i^d$  pour un nuage Gaussien. Le champ diffusé  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  a la structure du speckle, ce qui explique la dispersion des valeurs  $U_i^d$ . Le lien entre la figure 1.1 et 1.4 peut être compris en remarquant que la figure 1.1 donne l'historgramme des  $\tilde{\beta}_j$  calculés numériquement qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\tilde{\beta}_j = \frac{\Omega}{2(\Delta - U_j^d) + i\Gamma_j}, \quad (1.48)$$

alors que la figure 1.1 donne l'historgramme des  $U_i^d$ .

La valeur moyenne de la distribution est donnée par

$$\langle U_i^d \rangle = \frac{1}{N} \sum_i U_i = |\beta_{TD}|^2 \hbar \mathcal{L}_c, \quad (1.49)$$

où  $\mathcal{L}_c$  correspond au déplacement de la fréquence de résonance des atomes introduit par l'équation (1.41). Ce déplacement est appelé déplacement de Lamb collectif [104, 106]. L'écart type de la distribution peut être estimé pour un nuage Gaussien de densité  $n(\mathbf{r}) = n_0 \exp[-\mathbf{r}^2/(2\sigma^2)]$  en remarquant que l'équation (1.47) correspond à la somme de variables aléatoires d'amplitude  $\propto 1/(k\sigma)$ , ce qui, d'après le théorème central limite, conduit à une distribution Gaussienne des énergies avec un écart type

$$\sigma_{U_i^d} \propto \frac{\sqrt{N}}{k\sigma} \propto \sqrt{b_0}. \quad (1.50)$$

L'argument utilisé ci-dessus n'est pas rigoureux car les variables aléatoires ne sont pas indépendantes et il n'est donc, *a priori*, pas clair que le théorème central

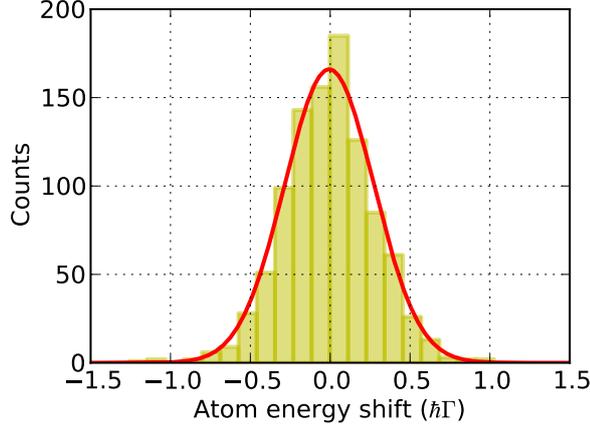


Figure 1.4 – Histogramme des énergies des atomes  $U_i^d$ , données par l'équation (1.47), pour  $N = 1000$ ,  $k\sigma = 20$ ,  $|\beta_{TD}|^2 = 1$ . La distribution est décrite par une loi normale (courbe rouge) de variance  $\sigma_{U_i^d} = 0.28 \hbar\Gamma$  et dont la moyenne correspond au déplacement de Lamb collectif.

limite s'applique. Cependant, ce raisonnement permet d'intuiter la bonne solution que nous vérifions numériquement par la suite. Un ajustement sur les données de la figure 1.4 montre, en effet, que les  $U_i$  sont bien distribués par une loi normale. L'évolution de l'écart type de la distribution en fonction des paramètres du système est donnée figure 1.5 ce qui permet de confirmer la formule (1.50). Numériquement on trouve, pour un nuage Gaussien,

$$\sigma_{U_i^d} \simeq (0.18 \pm 0.01) \hbar\Gamma |\beta_{TD}|^2 \frac{\sqrt{N}}{k\sigma} \simeq (0.11 \pm 0.01) \hbar\Gamma |\beta_{TD}|^2 \sqrt{b_0}. \quad (1.51)$$

Le terme de self énergie (1.34) du système s'écrit

$$U_{\text{self}} = N \langle U_i^d \rangle = N |\beta_{TD}|^2 \hbar \mathcal{L}_c, \quad (1.52)$$

Comme dans le paragraphe précédent, on peut évaluer la moyenne des configurations du déplacement de Lamb collectif  $\mathcal{L}_c$  pour un nuage Gaussien dans la limite  $\sigma \gg \lambda$  [15], et on montre que

$$\langle \mathcal{L}_c \rangle_{\text{config}} \propto -\frac{N}{(k\sigma)^3} \Gamma \propto -n_0 \lambda^3 \Gamma, \quad (1.53)$$

où  $n_0 = N / [(2\pi)^{3/2} \sigma^3]$  est la densité au centre du nuage. Ainsi, le déplacement de Lamb collectif est un déplacement vers le rouge proportionnel au nombre d'atomes par  $\lambda^3$  [40], i.e. à la densité et non à l'épaisseur optique. On retrouve le résultat de M. O. Scully et collaborateurs [104] dérivé dans le cas de la superradiance à un

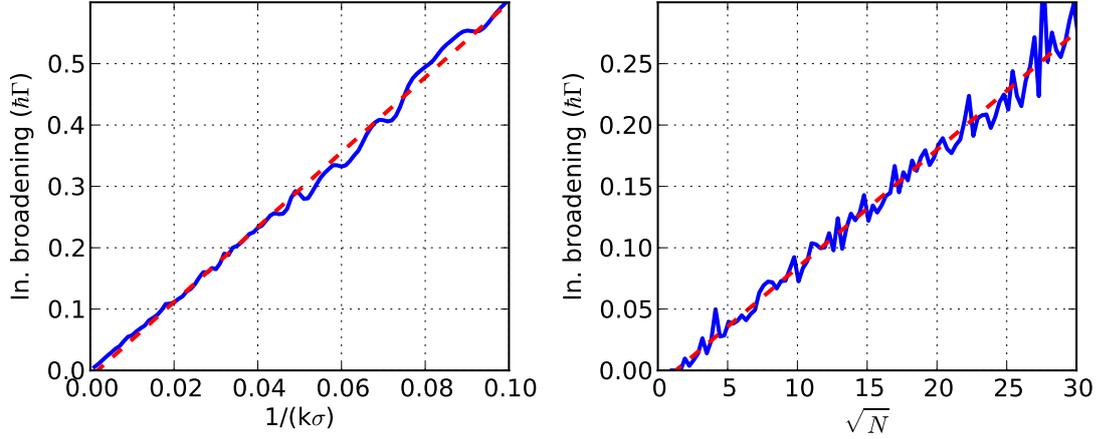


Figure 1.5 – Les courbes bleues montrent la dépendance de l'écart type de la distribution des énergies des atomes  $\sigma_{U_i^d}$  en fonction de  $1/(k\sigma)$  (figure de gauche) et de  $\sqrt{N}$  (figure de droite). Pour la courbe de gauche  $N = 1000$ ,  $|\beta_{TD}|^2 = 1$  et pour la courbe de droite  $k\sigma = 20$ ,  $|\beta_{TD}|^2 = 1$ . Cette étude numérique permet de trouver le scaling  $\sigma_{U_i^d} \propto \sqrt{b_0}$  donné plus précisément par l'équation (1.51) (courbes en pointillés rouges).

photon (toujours à un facteur numérique près). Il est intéressant de remarquer que le déplacement de Lamb devient important  $\sim \Gamma$  quand  $n_0\lambda^3 \sim 1$ , ce qui est semblable au critère de Ioffe-Regel donnant qualitativement le seuil de la localisation forte.

La figure 1.6 montre un histogramme de la distribution des déplacements de Lamb collectifs calculés à partir de Eq. (1.41) pour  $10^4$  réalisations,  $N = 200$ ,  $k\sigma = 10$ . Le déplacement de Lamb collectif est obtenu pour une configuration en faisant la moyenne de l'histogramme 1.4. La figure 1.6 correspond à l'histogramme des déplacements de Lamb collectifs calculés pour plusieurs configurations. On remarque que la distribution est large, i.e. que les fluctuations sont plus grandes que la valeur moyenne  $|\langle \mathcal{L}_c \rangle| \ll \sigma_{\mathcal{L}_c}$ . Même si la valeur moyenne est négative (déplacement dans le rouge), une partie de la distribution correspond à des valeurs positives du déplacement de Lamb (déplacement dans le bleu).

Une expérience de physique nucléaire récente à relativement basse énergie par Röhlsberger et collaborateurs [102] a permis de mettre en évidence ce phénomène, en analysant le spectre d'énergie de la radiation sortant de l'échantillon. Le déplacement de Lamb collectif a été étudié en excitant un réseau d'atomes de  $^{57}\text{Fe}$  dans un état superradiant particulier à l'aide de rayons X. En analysant le spectre d'énergie de la radiation réfléchi par l'échantillon, le déplacement de Lamb collectif a été mesuré et il a été remarqué que celui-ci est quasiment doublé lorsque le nombre de particules a doublé.

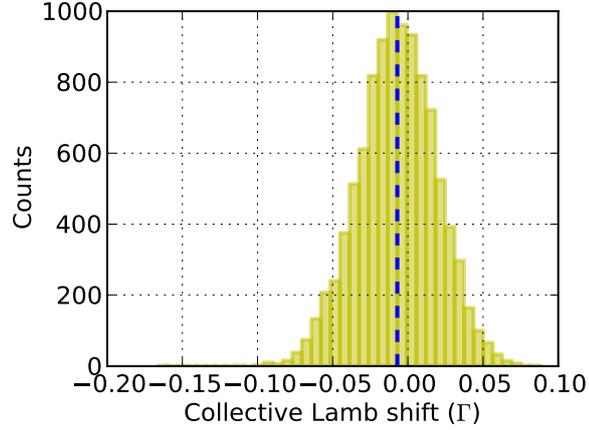


Figure 1.6 – Histogramme de la distribution des déplacements de Lamb collectifs  $\mathcal{L}_c$  calculés à partir de l'équation (1.41) pour  $10^4$  configurations,  $N = 200$ ,  $k\sigma = 10$ . La courbe en pointillés bleus correspond à la valeur moyenne de la distribution  $\langle \mathcal{L}_c \rangle = -7.05 \cdot 10^{-3} \Gamma$ . La variance de la distribution est  $\sigma_{\mathcal{L}_c} = 2.58 \cdot 10^{-2} \Gamma$ .

## 1.2 Description des champs et des systèmes atomiques

Dans cette partie, on introduit le cadre théorique nécessaire à la description des effets coopératifs pour un système d'atomes à deux niveaux.

### 1.2.1 Système d'atomes à deux niveaux

On considère  $N$  atomes à deux niveaux identiques situés à des positions  $\mathbf{r}_j$ . Chaque atome a seulement deux niveaux  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ , séparés par une énergie  $\hbar\omega_0$ . Ce type de système est analogue à un ensemble de spins 1/2 et il est pratique d'introduire les opérateurs de pseudospin [4, 34, 2]  $S_i^\pm$ ,  $S_i^z$  qui obéissent aux relations de commutation

$$[S_+^i, S_-^j] = \delta_{ij} S_z^i, \quad [S_\pm^i, S_z^j] = \mp \delta_{ij} S_\pm^i. \quad (1.54)$$

À partir de ces opérateurs, on peut définir l'opérateur dipôle électrique  $\mathbf{d}_i$  de l'atome  $i$

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_{eg} (S_-^i + S_+^i), \quad (1.55)$$

où les éléments de matrice du dipôle peuvent être pris réels en faisant un choix particulier des phases. Il est aussi pratique de définir les opérateurs de pseudospin collectifs

$$S_\pm = \sum_i S_\pm^i, \quad S_z = \sum_i S_z^i, \quad (1.56)$$

qui satisfont les relations de commutation

$$[S_+, S_-] = S_z, \quad [S_\pm, S_z] = \mp S_\pm. \quad (1.57)$$

## 1.2.2 Hamiltonien d'interaction atome-champ

L'interaction d'un système d'atomes à deux niveaux avec un champ électrique  $\mathbf{E}$  peut être décrite dans l'approximation dipolaire par l'Hamiltonien suivant (voir par exemple [107])

$$H = H_0 + V, \quad (1.58)$$

où

$$H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} S^z + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}, \quad (1.59)$$

est la partie sans interaction de l'Hamiltonien représentant l'énergie des atomes et l'énergie du champ et

$$V = - \sum_j \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_j, t), \quad (1.60)$$

décrit le couplage atome-champ. Le champ électrique se décompose en une onde plane monochromatique traitée de façon classique et les modes de radiation quantifiés du vide. Pour simplifier, nous avons choisi une base de polarisation linéaire, et le vecteur unitaire de polarisation  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  réel. Le champ s'écrit donc

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \left[ a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] + \frac{\mathbf{E}_0}{2} \left[ e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right], \quad (1.61)$$

où  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0\mathcal{V}}}$ ,  $\mathcal{V}$  étant le volume dans lequel le champ est quantifié. Il est maintenant pratique de passer en représentation d'interaction  $V_I = e^{iH_0 t/\hbar} V e^{-iH_0 t/\hbar}$ . En utilisant l'identité suivante,

$$e^{\alpha A} B e^{-\alpha A} = B + \alpha [A, B] + \frac{\alpha^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots, \quad (1.62)$$

il découle facilement

$$e^{i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} t} a_{\mathbf{q}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} t} = a_{\mathbf{q}} e^{-i\delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{k}} t}, \quad (1.63)$$

$$e^{i\omega_0 S_z t/2} S_{\pm}^j e^{-i\omega_0 S_z t/2} = S_{\pm}^j e^{\pm i\omega_0 t}. \quad (1.64)$$

En combinant ces différents résultats, on déduit l'Hamiltonien en représentation d'interaction

$$\begin{aligned} V_I &= \frac{\hbar\Omega}{2} \sum_j \left( e^{i\Delta t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} S_-^j + e^{-i\Delta t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} S_+^j \right) \\ &+ \hbar \sum_j \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \left( S_-^j e^{-i\omega_0 t} + S_+^j e^{i\omega_0 t} \right) \left( a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \right), \end{aligned} \quad (1.65)$$

avec la fréquence de Rabi  $\Omega = \mathbf{d}_{eg} \cdot \mathbf{E}_0/\hbar$ ,  $\Delta = \omega - \omega_0$  le désaccord du laser et  $g_{\mathbf{k}} = -\mathbf{d}_{eg} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}}/\hbar$  la constante de couplage atome-photon pour le mode  $\mathbf{k}$  [82]. À ce stade, en suivant [2, 32], nous avons fait l'approximation de l'onde tournante pour le couplage des atomes avec le laser, mais nous n'avons pas fait cette approximation pour le couplage des atomes aux modes du vide.

### 1.2.3 Photodétection

Dans cette partie, nous donnons quelques formules de photodétection qui seront utiles par la suite pour évaluer l'intensité diffusée par le nuage d'atomes. L'opérateur champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  peut être décomposé en somme de ses parties de fréquences positives et négatives  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$  [107] avec

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}(t) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.66)$$

$$\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t) e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.67)$$

de telle sorte que l'intensité moyenne au point  $\mathbf{r}$  à l'instant  $t$  s'écrit

$$\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle = \epsilon_0 c \langle \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (1.68)$$

En *représentation de Heisenberg*, il est possible d'obtenir l'équation d'évolution suivante pour les opérateurs photoniques  $a_{\mathbf{k}}(t)$  [15]

$$\frac{da_{\mathbf{k}}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [a_{\mathbf{k}}, H] = -ig_{\mathbf{k}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t} \sum_j e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} S_{-}^j. \quad (1.69)$$

En intégrant cette équation et en la substituant dans Eq. (1.66), on obtient

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = -i \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \sum_j e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) - i\omega_0 t} \int_0^t dt' e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_0)t'} S_{+}^j(t - t'). \quad (1.70)$$

En supposant  $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hat{\epsilon}$  (approximation champ scalaire) et en utilisant la relation (voir annexe A)

$$\sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \int_0^{\infty} dt' e^{-ic(k - k_0)t'} \rightarrow \frac{\Gamma}{2ik_0 |\mathbf{R}|} e^{ik_0 |\mathbf{R}|}, \quad (1.71)$$

où  $\Gamma = \mathcal{V} g_{k_0}^2 k_0^2 / (\pi c)$ , l'opérateur champ électrique en *représentation de Heisenberg*, dans l'approximation de Markov s'écrit [15]

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \simeq -\hat{\epsilon} \frac{k_0^2 d_{eg}}{2\epsilon_0} \sum_j \frac{e^{-i\omega_0(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|/c)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} S_{+}^j(t). \quad (1.72)$$

Ceci s'interprète très simplement en remarquant que le champ émis est la somme des champs diffusés par  $N$  dipôles situés à des positions  $\mathbf{r}_j$  et détecté à la position  $\mathbf{r}$  à l'instant  $t$ . En champ lointain,  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \simeq r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_j / r$ , on obtient

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \simeq -\hat{\epsilon} \frac{k_0^2 d_{eg}}{2\epsilon_0 r} e^{-i\omega_0(t-r/c)} \sum_j e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_j} S_+^j(t), \quad (1.73)$$

avec  $\mathbf{k}_s = k_0(\mathbf{r}/r)$ . On en déduit alors simplement l'intensité moyenne au point  $\mathbf{r}$  à l'instant  $t$

$$\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\omega_0^4 d_{eg}^2}{4\epsilon_0 c^3 r^2} \sum_i \sum_j e^{-i\mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} \langle S_+^j(t) S_-^i(t) \rangle. \quad (1.74)$$

Sous cette forme, l'intensité diffusée ne dépend que des opérateurs atomiques  $S_{\pm}^j(t)$  ce qui sera utile par la suite lorsque nous allons donner des équations d'évolution pour la partie atomique en "traçant" sur les degrés de liberté du champ.

## 1.3 Hamiltonien effectif pour la partie atomique

Nous allons dériver une équation d'évolution pour la partie atomique de la fonction d'onde, en éliminant les degrés de liberté du champ. Cette équation peut se réécrire sous la forme d'une équation de Schrödinger faisant intervenir un Hamiltonien effectif. Les différences et similitudes avec la description classique sont discutées.

### 1.3.1 Dérivation de l'Hamiltonien effectif

Lorsque le système est faiblement excité, il est possible d'éliminer la partie photonique de l'Hamiltonien (1.65) pour obtenir une équation d'évolution temporelle de la partie atomique seulement. On se restreint alors à un espace de Hilbert engendré par  $|G\rangle \equiv |g \cdots g\rangle$  et les états à une excitation  $|i\rangle \equiv |g \cdots e_i \cdots g\rangle$ . Un état quelconque du système  $|\psi\rangle$  se décompose donc selon

$$|\psi\rangle = \alpha |G\rangle + \sum_j \beta_j |j\rangle. \quad (1.75)$$

La dérivation de l'Hamiltonien effectif (quelque peu calculatoire) est donnée dans l'annexe A en utilisant une méthode à la Weisskopf-Wigner (voir par exemple [118]). Il est aussi possible d'aboutir au même résultat en utilisant la méthode

de la résolvante [28, 89, 83]. On obtient finalement un système fermé de  $N + 1$  équations linéaires couplées pour les coefficients  $(\alpha, \beta_j)$

$$\dot{\alpha} = -\frac{i\Omega}{2} \sum_j \beta_j e^{i\Delta t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}, \quad (1.76)$$

$$\dot{\beta}_j = -\frac{i\Omega}{2} \alpha e^{-i\Delta t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} - \frac{\Gamma}{2} \beta_j + \frac{i\Gamma}{2} \sum_{l \neq j} \beta_l \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|)}{k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|}, \quad (1.77)$$

qu'il est possible de réécrire sous la forme d'une équation de Schrödinger agissant dans l'espace de Hilbert restreint à une excitation au plus

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H_{\text{eff}}|\psi\rangle, \quad (1.78)$$

avec

$$H_{\text{eff}} = \frac{\hbar\Omega}{2} \sum_i [e^{i\Delta t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} S_-^i + e^{-i\Delta t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} S_+^i] - i\frac{\hbar\Gamma}{2} \sum_i S_+^i S_-^i - \frac{\hbar\Gamma}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V_{ij} S_+^i S_-^j, \quad (1.79)$$

où  $V_{ij} = \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$ . Le premier terme décrit le couplage des dipôles au laser, le second permet de tenir compte de la durée de vie des niveaux excités et le dernier terme décrit les interactions dipôle-dipôle. À faible saturation, là où l'approximation de négliger les niveaux contenant plusieurs excitations est valable, on peut supposer  $\alpha \sim 1$  car le système est faiblement excité. En passant dans le référentiel tournant, i.e. en faisant le changement de variable  $\tilde{\beta}_j = e^{i\Delta t} \beta_j$ , et en oubliant le tilde pour des raisons de clarté de notation, on obtient

$$\dot{\beta}_j = -\frac{i\Omega}{2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} + \left(i\Delta - \frac{\Gamma}{2}\right) \beta_j + \frac{i\Gamma}{2} \sum_{l \neq j} \beta_l \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|)}{k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|}. \quad (1.80)$$

Cette équation est la même que l'équation (1.14) qui décrit l'évolution temporelle de  $N$  oscillateurs harmoniques pilotés par un champ électrique extérieur. L'évolution des amplitudes des dipôles à faible saturation est décrite par la physique classique comme prévu par l'optique linéaire [4, 116]. Lorsque le système est faiblement excité, l'émission d'un ensemble d'atomes à deux niveaux est analogue à celle d'oscillateurs harmoniques. Dans la limite opposée (forte excitation), l'émission coopérative peut être qualitativement différente dans le cas classique et quantique.

### 1.3.2 Différences avec la description classique

La description classique donne les équations d'évolution des amplitudes des dipôles  $\beta_j$ , alors que l'approche quantique donne les composantes de la fonction d'onde du système. Par exemple, la solution timed Dicke dans le cas classique correspond à des dipôles dont l'amplitude est donnée par  $\beta_j = \beta_{TD} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}$ , alors que, dans le cas quantique, l'état stationnaire est décrit par

$$|\psi\rangle = |G\rangle + \epsilon|TD\rangle, \quad (1.81)$$

où le couplage laser s'effectue entre  $|G\rangle$  et l'état timed Dicke à une excitation

$$|TD\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} |j\rangle, \quad (1.82)$$

avec

$$\epsilon = \frac{\Omega_c}{2(\Delta - \mathcal{L}_c) + i\Gamma_c}. \quad (1.83)$$

Dans la description quantique, il apparaît une nouvelle quantité, la pulsation de Rabi collective

$$\Omega_c = \sqrt{N}\Omega, \quad (1.84)$$

qui décrit le couplage du laser entre l'état fondamental  $|G\rangle$  et l'état timed Dicke  $|TD\rangle$ . Nous reviendrons plus tard sur l'interprétation de ce facteur. Sous cette forme, il est clair que l'hypothèse de faible excitation s'écrit  $|\epsilon|^2 \ll 1$ .

On remarque que l'état  $|TD\rangle$  est intriqué. Une question intéressante concerne l'existence d'observables qui donneraient des résultats différents entre la description quantique et classique. Dans cette thèse nous nous intéressons seulement à des valeurs moyennes comme par exemple le diagramme d'émission (fonction de corrélation du champ d'ordre un  $g^{(1)}$ ) ou la force de pression de radiation. Dans ce cas, les modèles classique et quantique donnent les mêmes résultats.

Il serait intéressant de chercher des signatures quantiques dans les fluctuations des observables pour exploiter les corrélations existant dans la description quantique. Par exemple, on pourrait s'intéresser aux fonctions de corrélation du champ d'ordre deux  $g^{(2)}$  ou aux fluctuations du centre de masse du nuage.

## 1.4 Méthode de l'équation maîtresse

Une description correcte de l'évolution du système atomes-champs doit se faire dans le cadre de la théorie de la relaxation [2] [57] [53]. Celle-ci permet de tenir compte des effets de saturation ce que ne permet pas la théorie de l'optique linéaire.

### 1.4.1 Équation maîtresse pour un ensemble atomique

L'équation maîtresse décrivant l'évolution de l'opérateur densité atomique en faisant l'approximation de l'onde tournante et celle de Born-Markov a déjà été dérivée (voir par exemple [2, 24]). En considérant un couplage des atomes à un champ laser extérieur, elle s'écrit en représentation d'interaction

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & -i\frac{\Omega}{2} \sum_i [e^{i\Delta t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} S_-^i + e^{-i\Delta t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} S_+^i, \rho] \\ & - i \sum_i \sum_{j \neq i} \Delta_{ij} [S_+^i S_-^j, \rho] \\ & + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \gamma_{ij} (2S_-^j \rho S_+^i - S_+^i S_-^j \rho - \rho S_+^i S_-^j), \end{aligned} \quad (1.85)$$

avec dans l'approximation scalaire

$$\Delta_{ij} = -\frac{\Gamma \cos(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{2 k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad \gamma_{ij} = \Gamma \frac{\sin(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (1.86)$$

Les termes proportionnels à  $\Delta_{ij}$  sont dus à l'énergie d'interaction dipôle-dipôle, et ceux proportionnels à  $\gamma_{ij}$  sont liés à l'émission collective. Comme on l'a remarqué précédemment, l'approximation de Markov ne permet pas de prendre complètement en compte les effets de propagation. Ainsi, pour être valide, le système ne doit pas être trop grand : un photon doit traverser le milieu beaucoup plus rapidement que le temps caractéristique de l'émission collective.

**Remarque** L'équation maîtresse peut se réécrire sous la forme suivante

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} (H_{\text{eff}}\rho - \rho H_{\text{eff}}^\dagger) + \sum_i \sum_j \gamma_{ij} S_-^j \rho S_+^i. \quad (1.87)$$

### 1.4.2 Émission collective d'un système atomique

Dans les parties précédentes, nous avons introduit la superradiance et la sousradiance dans le cadre de l'optique linéaire, qui, comme nous l'avons vu, correspond à un système faiblement excité. Dans cette partie, nous introduisons de façon plus générale le concept d'émission collective dans les ensembles atomiques [53, 58, 59]. L'équation maîtresse (1.85) est valable pour tout l'espace de Hilbert  $[\mathcal{H}_{1/2}]^{\otimes N}$  où  $\mathcal{H}_{1/2}$  est l'espace de Hilbert associé à un atome à deux niveaux.

Pour simplifier le problème, nous considérons le cas d'un système de taille  $L \ll \lambda$  et nous étudions seulement le problème de l'émission collective, i.e. il n'y

a pas de champ extérieur pilotant les atomes. Dans ce cas, l'équation maîtresse s'écrit

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\Gamma}{2} (2S_- \rho S_+ - S_+ S_- \rho - \rho S_+ S_-) - i [W, \rho], \quad (1.88)$$

où  $S_{\pm}$  sont les opérateurs collectifs de pseudospin introduits par l'équation (1.56) et  $W = \sum_i \sum_{j \neq i} \Delta_{ij} S_+^i S_-^j$  est un opérateur de déplacement. Le premier terme de l'équation décrit la partie dissipative du processus et représente une émission spontanée collective, complètement symétrique par permutation des atomes. En supposant qu'à l'instant initial le système est complètement excité  $|e \cdots e\rangle$ , on remarque que les états  $(S_-)^{J-M} |e \cdots e\rangle$  sont isomorphes aux vecteurs  $|JM\rangle$  d'un moment angulaire  $J = N/2$  [82]

$$|JM\rangle = \sqrt{\frac{(J+M)!}{N!(J-M)!}} (S_-)^{J-M} |e \cdots e\rangle. \quad (1.89)$$

Il y a  $N + 1$  états puisque  $-J < M < J$ . Les niveaux  $|JM\rangle$  sont appelés états symétriques de Dicke [34]. L'état  $|JM\rangle$  est un état complètement symétrique où  $J + M$  atomes sont excités et  $J - M$  atomes sont dans leur état fondamental. On peut donc, de façon formelle, écrire

$$|JM\rangle = \text{Sym}[\underbrace{|e \cdots e\rangle}_{J+M}; \underbrace{|g \cdots g\rangle}_{J-M}], \quad (1.90)$$

où  $\text{Sym}[\cdots]$  est l'opérateur de symétrisation.

En introduisant finalement le carré de l'opérateur moment angulaire total  $\mathbf{S}$

$$S^2 = \frac{1}{2} (S_+ S_- + S_- S_+) + S_z^2, \quad (1.91)$$

on peut écrire les relations utiles suivantes

$$\begin{aligned} S_z |JM\rangle &= M |JM\rangle, \\ S^2 |JM\rangle &= J(J+1) |JM\rangle, \\ S_+ |JM\rangle &= \sqrt{(J+M+1)(J-M)} |J, M+1\rangle, \\ S_- |JM\rangle &= \sqrt{(J+M)(J-M+1)} |J, M-1\rangle, \\ \langle JM | \sum_i S_+^i S_-^i |JM\rangle &= J+M, \\ \langle JM | \sum_i S_-^i S_+^i |JM\rangle &= J-M. \end{aligned}$$

Il est important de remarquer que les états  $|JM\rangle$  présentent de *fortes corrélations* entre les dipôles des différents atomes ce qui joue un rôle important dans l'évolution du système.

En partant de l'état symétrique  $|e \cdots e\rangle$ , il est clair que la partie dissipative de l'équation maîtresse (1.88) laisse, si elle agissait seule, les atomes à tout instant dans le sous-espace à  $N + 1$  dimensions des états de Dicke symétriques (1.89). Autrement dit, en supposant que la contribution de  $W$  peut être négligée, le processus de relaxation est formellement identique à l'émission spontanée d'un moment angulaire  $J = N/2$  "cascadant" de l'état  $M = J$  vers l'état  $M = -J$  [58]. Le nombre de photons émis lorsque l'atome atteint l'état  $|JM\rangle$  est  $n = J - M$ . La partie dissipative de l'équation maîtresse (1.88) pour les populations de la matrice densité  $\langle JM|\rho|JM\rangle$  (noté  $\rho_M$ ) s'écrit

$$\frac{d\rho_M}{dt} = -\Gamma(J + M)(J - M + 1)\rho_M + \Gamma(J + M + 1)(J - M)\rho_{M+1}. \quad (1.92)$$

Sur une trajectoire quantique, la probabilité par unité de temps d'émission du  $n + 1$  ième photon est

$$\Gamma_{n \rightarrow n+1} = \Gamma(J + M)(J - M + 1) = \Gamma(N - n)(n + 1). \quad (1.93)$$

Cette probabilité est une fonction quadratique de  $n$ , qui passe par un maximum égal à  $\Gamma N(N + 2)/4$  lorsque  $N/2$  photons ont été émis. Ainsi, si tous les atomes sont excités dans l'état initial  $|e \cdots e\rangle$ , le premier photon émis spontanément initialise la construction d'une grande polarisation atomique macroscopique conduisant à l'émission d'un pulse superfluorescent. Le pic d'intensité et le taux d'émission du pulse superfluorescent sont  $N$  fois plus grands par rapport au cas de  $N$  atomes indépendants [34]. L'augmentation du taux d'émission spontanée est directement liée à la construction de corrélations entre atomes dans la première phase d'évolution du système.

Dans de nombreux articles sur la superradiance, l'équation maîtresse est souvent restreinte à sa partie dissipative (1.92) et la contribution de  $W$  est négligée. Cette approximation n'est pas valide dans le cas du système de taille  $L \ll \lambda$  dans l'espace libre [57]. Puisque  $W$  n'est généralement pas symétrique par permutation des atomes, la présence de  $W$  dans l'équation (1.88) casse la symétrie du système ; ce qui complique le problème puisque celui-ci ne se restreint plus à l'espace vectoriel engendré par les  $N + 1$  états symétriques de Dicke. Nous n'allons pas étudier ce problème ici et nous nous contenterons de la structure simple de l'équation (1.92). Remarquons cependant que, bien que cette équation ne soit pas réaliste pour décrire l'évolution d'un système de petite taille dans l'espace libre, celle-ci décrit correctement l'émission collective d'un ensemble de systèmes à deux niveaux dans une cavité résonnante [57].

**Superradiance à un photon** La situation discutée précédemment dans le cadre de l'optique linéaire et de l'Hamiltonien effectif correspond au dernier étage de

l'échelle de Dicke  $|J, -J + 1\rangle \rightarrow |J, -J\rangle$  avec un taux d'émission  $N\Gamma$ . L'état symétrique initial  $|J, -J + 1\rangle$  correspond à la situation où il y a un atome excité parmi  $N$  (sans qu'on sache lequel). Intuitivement, comme il y a seulement un atome excité, on pourrait s'attendre à ce que le taux d'émission soit  $\Gamma$ . Cependant, comme les atomes sont organisés de façon symétrique, le taux d'émission spontanée est  $N\Gamma$ .

## Sousradiance

La discussion qui suit s'inspire du cours du Collège de France donné par Serge Haroche au cours de l'année 2004-2005 [59].

**Présentation : sousradiance pour deux atomes proches** La superradiance correspond à une interférence constructive du processus d'émission collective. Ceci est clair dans le cas de deux atomes, lorsqu'on calcule l'élément de matrice du couplage induit par le champ entre l'état symétrique  $|S\rangle = (|eg\rangle + |ge\rangle)/\sqrt{2}$  et l'état désexcité  $|G\rangle = |gg\rangle$ . Le couplage du système avec le champ est proportionnel au dipôle électrique du couple d'atomes  $D = D_1 + D_2$  et l'on obtient  $\langle S|D|G\rangle = \sqrt{2}\langle e|D|g\rangle$ . Pour l'émission d'un seul photon partagé entre deux dipôles intriqués, on a une interférence constructive entre amplitudes de transition. Ceci donne une amplitude multipliée par  $\sqrt{2}$ , donc une probabilité d'émission multipliée par 2 par rapport à un atome isolé (en accord avec la description classique de la partie 1.1.3).

Si les deux atomes sont préparés dans l'état antisymétrique  $|A\rangle = (|eg\rangle - |ge\rangle)/\sqrt{2}$ , on a, au contraire, une interférence destructive des amplitudes  $\langle S|D|G\rangle = 0$ . L'état antisymétrique ne peut rayonner. C'est un état sousradian.

**États sousradiants d'un système de  $N$  atomes à deux niveaux** L'état antisymétrique  $|A\rangle$  est sousradian en raison d'une symétrie fondamentale. Il correspond à un pseudo moment cinétique total  $J = 0$  et n'est pas couplé par l'opérateur de saut collectif  $S_-$  à l'état fondamental  $|G\rangle$ , état propre du moment cinétique de valeur propre  $J = 1$ . Seuls des états appartenant à un même sous-espace propre du moment cinétique total sont couplés entre eux par l'opérateur de saut. Dans le cadre de la théorie des *états pointeurs* [126, 127]<sup>2</sup>,  $|A\rangle$  est un état propre de l'opérateur saut de valeur propre nulle. C'est un pointer state parfait, indéfiniment stable sous l'effet du processus de décohérence. Ce raisonnement se généralise à un nombre quelconque de bits, en faisant appel à des résultats de la théorie des groupes appliquée au couplage des spins.

Un ensemble de  $N$  systèmes à deux niveaux définit un espace de dimension  $2^N$  qui se décompose en produit tensoriel de sous-espaces propres de moment cinétique

---

2. Le concept d'*états pointeurs* a été introduit par Zurek [126] pour décrire le fait que les états purs initiaux d'un système quantique ouvert ne sont pas tous aussi fragiles par rapport à leur interaction avec l'environnement.

$j$  compris entre 0 et  $N/2$  ( $N$  pair) ou entre  $1/2$  et  $N/2$  ( $N$  impair). Dans chaque sous-espace  $E_j$  (de dimension  $2j + 1$ ), l'état  $|j, -j\rangle$  est stable car  $S_-|j, -j\rangle = 0$ . Dans cet état, les  $N$  atomes partagent  $N/2 - j$  excitations, mais ne peuvent rayonner en raison de cette symétrie fondamentale.

**Rappels sur l'addition de  $N$  spins  $1/2$**  Décomposition de l'espace vectoriel de  $N$  systèmes à deux niveaux en somme d'espaces propres de  $\{S^2, S_z\}$  ( $N$  pair) :

$$[\mathcal{H}_{1/2}]^{\otimes N} = \mathcal{H}_J \oplus \left[ \sum_{i_{J-1}} \mathcal{H}_{J-1}^{i_{J-1}} \right] \oplus \left[ \sum_{i_{J-2}} \mathcal{H}_{J-2}^{i_{J-2}} \right] \oplus \cdots \oplus \left[ \sum_{i_0} \mathcal{H}_0^{i_0} \right], \quad (1.94)$$

où  $J = N/2$  et  $i_{J-k} = 1, 2, \dots, d_{J-k}$ . Le sous-espace de  $J$  maximum (égal à  $N/2$ ) est unique, mais les états propres  $\{j, m_j\}$  de valeurs de  $j < J$  sont dégénérés. L'indice  $i_{J-k}$  rend compte de cette dégénérescence (il y a plusieurs façons de combiner  $N$  spins pour fabriquer un moment angulaire non maximum). On appelle  $d_{J-k}$  le degré de dégénérescence du sous-espace ( $j = J - k$ ). Un dénombrement simple donne :

$$d_J = 1, \quad d_{J-k} = C_{2J}^k - C_{2J}^{k-1} = \frac{(2J)!(2J - 2k + 1)}{k!(2J - k + 1)!} \quad (0 < k \leq J). \quad (1.95)$$

Par exemple, pour  $N = 4$  ( $J = 2$ ) ;

$$d_2 = 1, \quad d_1 = 3, \quad d_0 = 2, \quad (1.96)$$

et, en faisant le compte des dimensions, on retrouve bien celle de l'espace des quatre systèmes à deux niveaux  $1 \times 5 + 3 \times 3 + 2 \times 1 = 16 = 2^4$ . La figure 1.7 montre la décomposition de l'espace de Hilbert pour quatre systèmes à deux niveaux, faisant apparaître cinq états sousradiants.

**Intérêt des états sousradiants [59]** Les états sousradiants peuvent être utilisés pour le "codage sans bruit" de l'information quantique dans des espaces sans décohérence. Le nombre d'états propres de  $S_-$  de valeur propre nulle est égal à celui des sous-espaces

$$q = d_J + d_{J-1} + \cdots + d_0 = \frac{(2J)!}{(J!)^2}, \quad (J \text{ entier} \rightarrow N \text{ pair}). \quad (1.97)$$

Par exemple, pour  $N = 4$ ,  $q = 6$  et  $q/2^N = 3/8$ . On peut évaluer à l'aide de la formule de Stirling la valeur asymptotique pour  $J$  grand du rapport  $\eta$  entre le nombre d'états sousradiants (au sens large, i.e. en comptant  $|G\rangle$ ) et la dimension de l'espace de Hilbert

$$\eta = \frac{(2J)!}{2^{2J}(J!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi J}}. \quad (1.98)$$

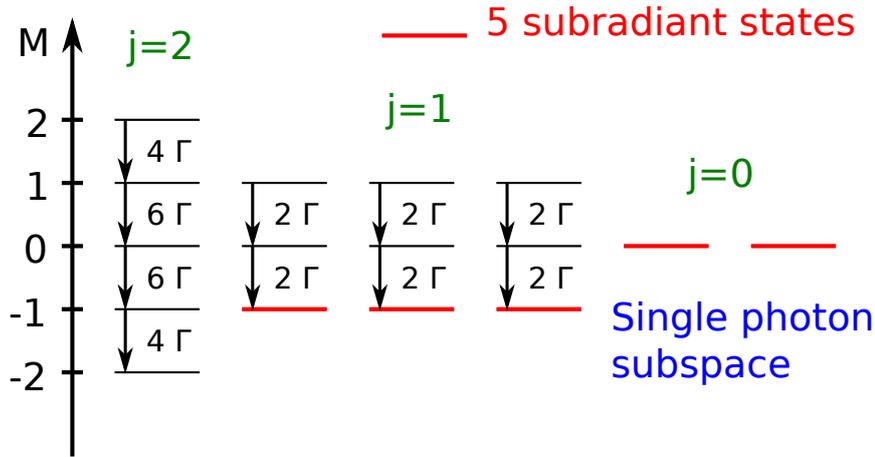


Figure 1.7 – Décomposition de l’espace de Hilbert pour un système de quatre atomes à deux niveaux en somme d’espaces propres de  $\{S^2, S_z\}$  (voir Eq. 1.94). Les taux d’émission spontanée entre états sont donnés par l’équation (1.93). Les cinq états sousradiants sont représentés en rouge. La région bleutée représente le sous-espace de Hilbert engendré par  $|G\rangle$  et les états à une excitation. C’est dans cet espace que nous étudions les effets coopératifs.

La dimension du sous-espace sousradiant (sous-espace sans décohérence) est  $2^{2J}\eta$ . Ce sous-espace peut donc être appliqué de façon unitaire dans un espace de  $2J + \log_2 \eta \rightarrow 2J$  ( $J \gg 1$ ) qubits indépendants. On peut ainsi “coder sans bruit”  $2J - \log_2(\pi J)/2$  qubits dans un espace sans décohérence de  $2J$  systèmes à deux niveaux.

### 1.4.3 Équation maîtresse restreinte à une excitation

Nous allons maintenant étudier l’équation maîtresse sur le sous-espace engendré par  $|G\rangle$  et les états atomiques à une excitation. Ces équations décrivent l’évolution des atomes à faible champ, mais peuvent être valables quelle que soit l’intensité de l’excitation dans le cadre d’atomes de Rydberg où le régime de blocage de Rydberg [121, 108, 122, 46] permet d’avoir un système restreint à une excitation au plus. L’évolution temporelle des composantes de la matrice densité est obtenue en projetant l’équation (1.85) sur les différents états de Fock. Comme dans les paragraphes précédents, en considérant seulement l’état fondamental  $|G\rangle$  et les premiers états excités  $|i\rangle$  (i.e. en négligeant les états à deux excitations ou plus) et

en définissant  $\rho_{G|G} \equiv \langle G|\rho|G\rangle$ ,  $\rho_{i|G} \equiv e^{i\Delta t}\langle i|\rho|G\rangle$  et  $\rho_{i|j} = \langle i|\rho|j\rangle$ , on obtient

$$\frac{d\rho_{G|G}}{dt} = -i\frac{\Omega}{2} \sum_k [e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_k} \rho_{k|G} - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_k} \rho_{G|k}] + \sum_k \sum_l \gamma_{kl} \rho_{l|k}, \quad (1.99)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{i|G}}{dt} &= \left[ i\Delta - \frac{\Gamma}{2} \right] \rho_{i|G} - i\frac{\Omega}{2} \left[ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \rho_{G|G} - \sum_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_k} \rho_{i|k} \right] \\ &\quad - \sum_{k \neq i} \left[ \frac{1}{2} \gamma_{ik} + i\Delta_{ik} \right] \rho_{k|G}, \end{aligned} \quad (1.100)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{i|j}}{dt} &= -i\frac{\Omega}{2} [-e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \rho_{i|G} + e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \rho_{G|j}] - i \sum_{k \neq i} \Delta_{ik} \rho_{k|j} + i \sum_{k \neq j} \Delta_{kj} \rho_{i|k} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_k [\gamma_{ik} \rho_{k|j} + \gamma_{kj} \rho_{i|k}]. \end{aligned} \quad (1.101)$$

On remarque que l'équation maîtresse restreinte à une excitation conserve toujours la probabilité

$$\frac{d}{dt} \left( \rho_{G|G} + \sum_i \rho_{i|i} \right) = 0.$$

En termes de complexité, l'équation maîtresse totale correspond à un système de  $\propto 2^N$  équations couplées, l'équation maîtresse restreinte à une excitation à  $\propto N^2$  équations et l'approche optique linéaire (ou Hamiltonien effectif) à  $\propto N$  équations. On voit ici la hiérarchie dans la difficulté des problèmes à résoudre.

## Solution perturbative

On cherche une solution perturbative de l'équation maîtresse par rapport au champ extérieur, i.e. par rapport à la pulsation de Rabi  $\Omega$ . La matrice densité du système se développe selon

$$\rho = \rho^{(0)} + \rho^{(1)} + \dots, \quad (1.102)$$

où  $\rho^{(n)} \propto \Omega^n$ .

### Ordre zéro

$$\frac{d\rho_{G|G}^{(0)}}{dt} = \sum_k \sum_l \gamma_{kl} \rho_{l|k}^{(0)}, \quad (1.103)$$

$$\frac{d\rho_{i|G}^{(0)}}{dt} = \left[ i\Delta - \frac{\Gamma}{2} \right] \rho_{i|G}^{(0)} - \sum_{k \neq i} \left[ \frac{1}{2} \gamma_{ik} + i\Delta_{ik} \right] \rho_{k|G}^{(0)}, \quad (1.104)$$

$$\frac{d\rho_{i|j}^{(0)}}{dt} = -i \sum_{k \neq i} \Delta_{ik} \rho_{k|j}^{(0)} + i \sum_{k \neq j} \Delta_{kj} \rho_{i|k}^{(0)} - \frac{1}{2} \sum_k \left[ \gamma_{ik} \rho_{k|j}^{(0)} + \gamma_{kj} \rho_{i|k}^{(0)} \right]. \quad (1.105)$$

En supposant qu'à l'état initial  $\rho_{G|G}(0) = 1$ ,  $\rho_{i|G}(0) = 0$  et  $\rho_{i|j}(0) = 0$ , on obtient

$$\rho_{G|G}^{(0)} = 1, \quad \rho_{i|G}^{(0)} = 0, \quad \rho_{i|j}^{(0)} = 0. \quad (1.106)$$

### Premier ordre

$$\frac{d\rho_{G|G}^{(1)}}{dt} = \sum_k \sum_l \gamma_{kl} \rho_{l|k}^{(1)}, \quad (1.107)$$

$$\frac{d\rho_{i|G}^{(1)}}{dt} = \left[ i\Delta - \frac{\Gamma}{2} \right] \rho_{i|G}^{(1)} - i \frac{\Omega}{2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} - \sum_{k \neq i} \left[ \frac{1}{2} \gamma_{ik} + i\Delta_{ik} \right] \rho_{k|G}^{(1)}, \quad (1.108)$$

$$\frac{d\rho_{i|j}^{(1)}}{dt} = -i \sum_{k \neq i} \Delta_{ik} \rho_{k|j}^{(1)} + i \sum_{k \neq j} \Delta_{kj} \rho_{i|k}^{(1)} - \frac{1}{2} \sum_k \left[ \gamma_{ik} \rho_{k|j}^{(1)} + \gamma_{kj} \rho_{i|k}^{(1)} \right]. \quad (1.109)$$

Puisque  $\rho_{i|j}^{(1)}(0) = 0$ , les équations (1.107) et (1.109) impliquent

$$\rho_{G|G}^{(1)} = 0, \quad \rho_{i|j}^{(1)} = 0. \quad (1.110)$$

L'équation (1.108) est équivalente à l'équation (1.14) avec la correspondance  $\rho_{i|G}^{(1)} \leftrightarrow \beta_i$ . Ainsi, on retrouve qu'au premier ordre en champ l'équation maîtresse et l'équation des dipôles couplés donnent le même résultat. Au premier ordre, les corrélations entre les paires d'atomes excités sont nulles.

En remarquant que

$$\rho_{i|j} = \langle i|\rho|G\rangle \langle G|\rho|j\rangle + \sum_k \langle i|\rho|k\rangle \langle k|\rho|j\rangle, \quad (1.111)$$

le premier ordre non nul, pour les corrélations entre dipôles, est d'ordre deux en champ

$$\rho_{i|j}^{(2)} = \rho_{i|G}^{(1)} \rho_{G|j}^{(1)} = \beta_j^* \beta_i. \quad (1.112)$$

## Temps de sortie des photons

En l'absence de champ extérieur, l'évolution de la population des états excités  $\sum_i \rho_{i|i}$  est donnée par l'équation suivante obtenue à partir de Eq. (1.99)

$$\frac{d \sum_i \rho_{i|i}}{dt} = -\frac{d\rho_{G|G}}{dt} = -\sum_k \sum_l \gamma_{kl} \rho_{l|k}. \quad (1.113)$$

La diminution de la population des états excités correspondant à l'émission de radiation lumineuse, cette équation donne le temps de sortie des photons du système lors de la désexcitation du système. Cette équation est identique à Eq. (1.24) développée dans le cadre de l'optique linéaire lorsque l'excitation est faible (i.e. où l'on a la correspondance  $\rho_{i|j} \leftrightarrow \beta_j^* \beta_i$ ).

## Self énergie et dissipation du système

Nous évaluons, l'énergie propre du système due aux termes d'interaction dipôles-dipôles ce qui revient à prendre la valeur moyenne de l'Hamiltonien effectif sans le couplage au laser :

$$\langle H_{\text{eff}} \rangle = -\frac{\hbar\Gamma}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{\cos(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \rho_{i|j} - i \frac{\hbar\Gamma}{2} \sum_i \sum_j \frac{\sin(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \rho_{i|j}. \quad (1.114)$$

Sous cette forme, l'interprétation de cette équation est très claire. La partie réelle correspond au déplacement de Lamb collectif compatible avec l'équation (1.34), et la partie imaginaire correspond à la partie dissipative du système, i.e. à son émission coopérative (largeur de raie collective du système). La partie imaginaire se retrouve aussi dans le terme de droite de l'équation caractérisant le temps de sortie des photons Eq. (1.113) (cf. Eq. (1.24) dans le cas de l'optique linéaire).

## 1.5 Solution timed Dicke pour l'état stationnaire

Dans cette partie nous dérivons une solution approchée de l'état stationnaire du système dans le régime de faible intensité (en se limitant au premier étage d'excitation) et du nuage de faible épaisseur optique  $b(\Delta) < 1$  (l'épaisseur optique à résonance  $b_0$  peut être grande).

### 1.5.1 Dérivation de la solution timed Dicke

Nous avons choisi de présenter la solution stationnaire à partir de l'équation maîtresse mais celle-ci peut aussi être trouvée en utilisant les équations couplées

pour les  $\beta_j$  (i.e. à partir de l'Hamiltonien effectif). La première étape consiste à remarquer que le laser couple l'état fondamental  $|G\rangle$  à l'état "timed Dicke"

$$|TD\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} |j\rangle. \quad (1.115)$$

La population et la cohérence de la matrice densité impliquant l'état "timed Dicke" s'écrivent

$$\rho_{TD|G} \equiv \langle TD|\rho|G\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \rho_{i|G}, \quad (1.116)$$

$$\rho_{TD|TD} \equiv \langle TD|\rho|TD\rangle = \frac{1}{N} \sum_i \sum_j e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)} \rho_{i|j}. \quad (1.117)$$

L'évolution temporelle de ces éléments de matrice densité se déduisent des équations (1.99), (1.100) et (1.101)

$$\frac{d\rho_{G|G}}{dt} = -i\frac{\sqrt{N}\Omega}{2} (\rho_{TD|G} - \rho_{G|TD}) + \sum_k \sum_l \gamma_{kl} \rho_{l|k}, \quad (1.118)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{TD|G}}{dt} &= \left(i\Delta - \frac{\Gamma}{2}\right) \rho_{TD|G} - i\frac{\sqrt{N}\Omega}{2} (\rho_{G|G} - \rho_{TD|TD}) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \sum_{k \neq i} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \left(\frac{1}{2}\gamma_{ik} + i\Delta_{ik}\right) \rho_{k|G}, \end{aligned} \quad (1.119)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{TD|TD}}{dt} &= -i\frac{\sqrt{N}\Omega}{2} (\rho_{G|TD} - \rho_{TD|G}) \\ &\quad + \frac{i}{N} \sum_i \sum_j e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)} \left(\sum_{k \neq j} \Delta_{kj} \rho_{i|k} - \sum_{k \neq i} \Delta_{ik} \rho_{k|j}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2N} \sum_i \sum_j \sum_k e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)} (\gamma_{ik} \rho_{k|j} + \gamma_{kj} \rho_{i|k}). \end{aligned} \quad (1.120)$$

Ces équations font clairement apparaître le couplage du laser entre  $|G\rangle$  et  $|TD\rangle$ . Jusqu'ici tout est "exact" et, pour aller plus loin, nous devons faire des approximations. On considère une nouvelle base de l'espace vectoriel des états à une excitation  $\{|TD\rangle, |s_1\rangle, \dots, |s_{N-1}\rangle\}$ . Les états  $|s_j\rangle$ , non précisés ici, complètent la base et on fait l'hypothèse que tout élément de la matrice densité impliquant  $|s_j\rangle$  peut être négligé. Cette hypothèse revient à considérer que les populations et les cohérences de ces états sont faibles par rapport à celles impliquant l'état  $|TD\rangle$ .

$$\rho_{i|G} = \langle i|TD\rangle \langle TD|\rho|G\rangle + \sum_s \langle i|s\rangle \langle s|\rho|G\rangle \simeq \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \rho_{TD|g}, \quad (1.121)$$

$$\rho_{i|j} = \langle i|TD\rangle\langle TD|\rho|TD\rangle\langle TD|j\rangle + \dots \simeq \frac{1}{N}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)}\rho_{TD|TD}. \quad (1.122)$$

En substituant Eq. (1.121) et (1.122) dans Eq. (1.118), (1.119) et (1.120) on obtient

$$\frac{d\rho_{G|G}}{dt} = -i\frac{\Omega_c}{2}(\rho_{TD|G} - \rho_{G|TD}) + \Gamma_c\rho_{TD|TD}, \quad (1.123)$$

$$\frac{d\rho_{TD|G}}{dt} = \left(i(\Delta - \mathcal{L}_c) - \frac{\Gamma_c}{2}\right)\rho_{TD|G} - i\frac{\Omega_c}{2}(\rho_{G|G} - \rho_{TD|TD}), \quad (1.124)$$

$$\frac{d\rho_{TD|TD}}{dt} = -i\frac{\Omega_c}{2}(\rho_{G|TD} - \rho_{TD|G}) - \Gamma_c\rho_{TD|TD}, \quad (1.125)$$

avec

$$\Omega_c = \sqrt{N}\Omega, \quad (1.126)$$

$$\Gamma_c = \frac{1}{N}\sum_k\sum_l\gamma_{kl}e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_l)}, \quad (1.127)$$

$$\mathcal{L}_c = \frac{1}{N}\sum_k\sum_{l\neq k}\Delta_{kl}e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_l)}. \quad (1.128)$$

Les équations (1.123), (1.124), (1.125) sont semblables aux équations de Bloch optiques pour un système à deux niveaux. Ainsi, le système est équivalent à un gros atome à deux niveaux  $\{|G\rangle, |TD\rangle\}$  interagissant avec une fréquence de Rabi collective  $\Omega_c$ , une fréquence de résonance modifiée par le déplacement de Lamb collectif  $\mathcal{L}_c$  et une largeur de raie  $\Gamma_c$ .

La résolution des équations de Bloch optiques pour un système à deux niveaux est bien connue (voir par exemple [107]). Il est pratique d'introduire les trois quantités réelles suivantes

$$R_1 = \rho_{TD|G} + \rho_{G|TD}, \quad (1.129)$$

$$R_2 = i(\rho_{TD|G} - \rho_{G|TD}), \quad (1.130)$$

$$R_3 = \rho_{TD|TD} - \rho_{G|G}, \quad (1.131)$$

qui satisfont le système d'équations

$$\frac{dR_1}{dt} = -\frac{\Gamma_c}{2}R_1 + \Delta_c R_2, \quad (1.132)$$

$$\frac{dR_2}{dt} = -\Delta_c R_1 - \frac{\Gamma_c}{2}R_2 - \Omega_c R_3, \quad (1.133)$$

$$\frac{dR_3}{dt} = \Omega_c R_2 - \Gamma_c R_3 - \Gamma_c, \quad (1.134)$$

où on a introduit  $\Delta_c \equiv \Delta - \mathcal{L}_c$ . L'état stationnaire de ce système est

$$R_1 = \frac{2\Delta_c}{\Omega_c} \frac{s_c}{1+s_c}, \quad (1.135)$$

$$R_2 = \frac{\Gamma_c}{\Omega_c} \frac{s_c}{1+s_c}, \quad (1.136)$$

$$R_3 = -\frac{1}{1+s_c}, \quad (1.137)$$

où on a introduit le paramètre de saturation collective

$$s_c = \frac{2\Omega_c^2}{4\Delta_c^2 + \Gamma_c^2}. \quad (1.138)$$

À titre d'exemple la population de l'état timed Dicke en régime stationnaire s'écrit

$$\rho_{TD|TD}^{\text{st}} = \frac{1}{2} \frac{s_c}{1+s_c}. \quad (1.139)$$

**Limite de faible excitation** Pour pouvoir se limiter à l'espace de Hilbert engendré par le fondamental et les niveaux à une excitation, il faut que  $\rho_{TD|TD} \ll 1$ , i.e. que la saturation collective soit faible  $s_c \ll 1$ .

Dans le cadre d'atomes de Rydberg, le régime de blocage de Rydberg [121, 108, 122, 46] permet d'avoir un système restreint à une excitation au plus. Les équations données ci-dessus sont alors correctes quelle que soit la saturation du système.

## 1.5.2 Caractérisation de l'état stationnaire

Nous allons voir comment il est possible de caractériser l'état collectif du système en suivant l'évolution de la population des états excités du système  $\sum_i \rho_{i|i} = 1 - \rho_{G|G}$  qui correspond à l'énergie mécanique des dipôles (voir Eq. (1.21)).

### Oscillations de Rabi collectives

La fréquence de Rabi correspond à la fréquence d'oscillation des populations lorsque le système est excité par un champ lumineux extérieur. Elle dépend de la force de couplage entre le champ lumineux et la transition atomique. La précession de Rabi entre les niveaux d'un système à deux niveaux éclairé par une lumière résonnante s'effectue à la fréquence de Rabi.

Dans l'image précédente d'un système à deux niveaux  $\{|G\rangle, |TD\rangle\}$  excité à résonance par le laser, nous avons vu que la pulsation de Rabi collective est donnée par

$$\Omega_c = \sqrt{N}\Omega. \quad (1.140)$$

Ceci s'interprète simplement en remarquant que l'élément de matrice  $\langle TD | \sum_j \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{E}_0 | G \rangle = \sqrt{N} \hbar \Omega$  où  $\mathbf{E}_0$  est le champ électrique du laser incident. Le système réagit collectivement comme un gros dipôle  $\mathbf{D} = \sqrt{N} \mathbf{d}$  ( $\mathbf{d}$  est le dipôle d'un atome) couplé au champ extérieur  $\mathbf{E}_0$ .

Pour un laser désaccordé de  $\Delta$  par rapport à la transition atomique, la précession de Rabi s'effectue à la pulsation de Rabi généralisée

$$\omega_R = \sqrt{\Omega_c^2 + \Delta^2} \simeq \sqrt{N\Omega^2 + \Delta^2}, \quad (1.141)$$

où on a négligé le déplacement de Lamb collectif (bonne approximation pour les nuages dilués). Les oscillations collectives ne sont correctement décrites que par l'équation maîtresse. Dans le cadre de la théorie linéaire, les dipôles oscillent à la fréquence  $\Delta/(2\pi)$ . Pour observer des oscillations de Rabi, il faut que la pulsation de Rabi  $\omega_R$  soit grande devant le taux d'amortissement du système  $\Gamma_c$

$$\omega_R \gg \Gamma_c, \quad (1.142)$$

et, pour que l'oscillation soit dominée par  $\Omega_c$ , il faut que

$$\Omega_c \gg \Delta. \quad (1.143)$$

Les conditions (1.142) et (1.143) équivalent à ce que la saturation collective du système  $s_c$  introduite dans Eq. (1.138) soit importante. Nous avons vu qu'une condition pour pouvoir négliger les états à plus d'une excitation s'écrit  $s_c \ll 1$  ce qui est donc incompatible avec Eq. (1.142) et Eq. (1.143). Cependant, comme nous l'avons déjà mentionné, des atomes dans le régime de blocage de Rydberg sont de bons candidats pour observer ce phénomène. Par exemple, l'excitation collective de deux atomes de Rydberg a été observée [46].

La figure 1.8 montre les oscillations de Rabi collectives simulées à partir de l'équation maîtresse ainsi que leurs dépendances en  $\Omega$ . On remarque le très bon accord avec la prédiction Eq. (1.141)

**Développement pour les grands désaccords** Pour  $\Delta_c \gg \Omega$ , la pulsation des oscillations de Rabi collectives se simplifie en  $\omega_R \simeq \Delta (1 + s_c)$  avec  $s_c \simeq \Omega_c^2 / (2\Delta^2)$ . À l'ordre le plus bas, on retrouve le résultat de l'optique linéaire, i.e. les dipôles oscillent à  $\Delta$ . En restant dans le régime faiblement saturant  $s_c \ll 1$ , la correction à la pulsation de Rabi est de l'ordre de  $s_c$ , donc faible. Elle sera par conséquent difficile à mesurer expérimentalement. Les atomes dans le régime de Blocage de Rydberg semblent ainsi constituer un système idéal pour étudier cette physique.

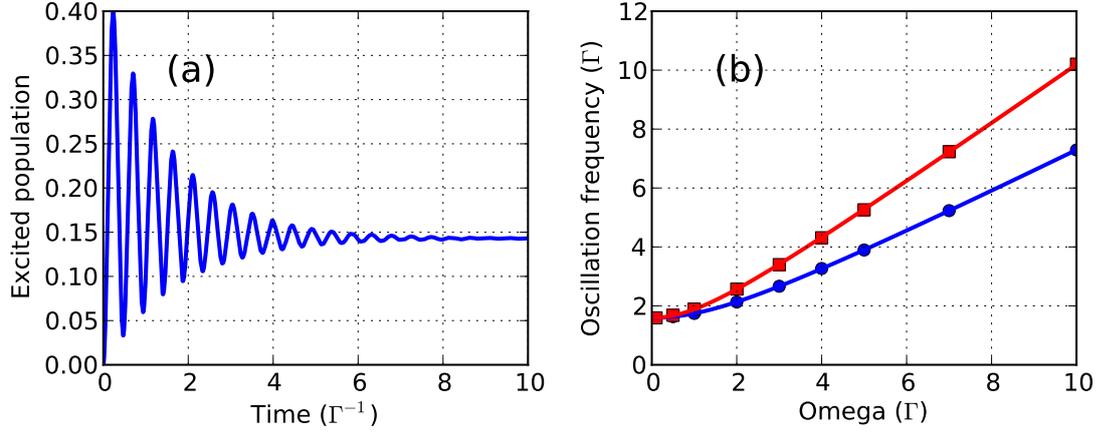


Figure 1.8 – (a) Population des états excités en fonction du temps. Les atomes sont initialement dans l'état fondamental  $|G\rangle$  et le laser est allumé à  $t = 0$ . On observe des oscillations de Rabi amorties. Paramètres de la simulation :  $N = 40$ ,  $k\sigma = 10$ ,  $\Delta = 10\Gamma$ ,  $\Omega = 2\Gamma$ . (b) Fréquences d'oscillation de la population des états excités en fonction de  $\Omega$  pour  $N = 20$  (cercles bleus) et  $N = 40$  (carrés rouges) ainsi que leurs prédictions théoriques sans ajustement  $f_R = \sqrt{N\Omega^2 + \Delta^2}/(2\pi)$  (courbes continues).

## Résonance de l'état stationnaire

La figure 1.9 montre la solution numérique de l'équation maîtresse restreinte à une excitation donnant l'évolution de la population des états excités  $\sum_i \rho_{i|i}$  en fonction du désaccord du laser incident. Dans le cas d'atomes indépendants (i.e. nuage très dilué), la courbe de résonance est une Lorentzienne de largeur  $\Gamma$ , centrée en zéro. Lorsque l'épaisseur optique du nuage est augmentée, le couplage collectif entre  $|G\rangle$  et  $|TD\rangle$  élargit de  $\Gamma_c$  la courbe de résonance et la déplace de  $\mathcal{L}_c$ . Pour mesurer la largeur de raie et la fréquence de résonance issues de la simulation numérique, nous effectuons un ajustement dans la région où l'épaisseur optique  $b(\Delta) < 1$ , pour éviter les effets de diffusion multiple qui déforment la courbe. La figure 1.9 illustre notre démarche. Nous avons cependant remarqué qu'un ajustement sur la courbe complète donne des résultats similaires à ceux obtenus en excluant la région  $b(\Delta) > 1$ .

La figure 1.10 donne l'évolution de la largeur ainsi que le centre de la courbe de résonance en fonction de l'épaisseur optique  $b_0$  et de la densité  $N/(k\sigma)^3$  du nuage. Pour réaliser la simulation numérique, on a gardé le nombre d'atomes constant et on a fait varier la taille du nuage  $k\sigma$ . Les points bleus et rouges correspondent à deux réalisations du désordre différentes. On remarque que la largeur de la résonance est en bon accord avec la prédiction  $\Gamma_c = (1 + b_0/12)\Gamma$ . En ce qui concerne la position de la résonance, on remarque de fortes fluctuations suivant la réalisation

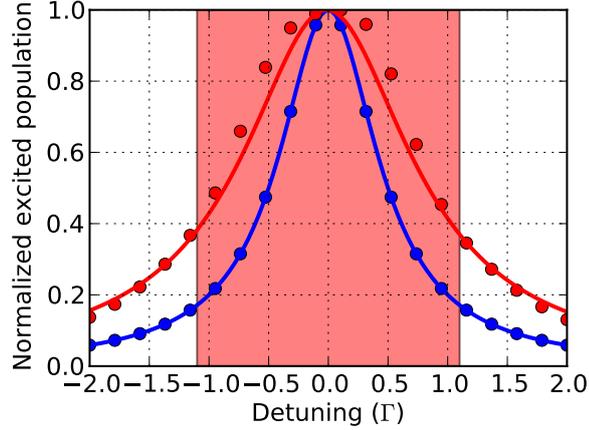


Figure 1.9 – Population normalisée des états excités en fonction du désaccord  $\Delta$  pour un nuage de  $N = 200$  atomes très dilué (cercles bleus) et pour  $N = 200$  atomes,  $k\sigma = 8.6$  ( $b_0 = 8.2$ ) (cercles rouges). En faisant l’ajustement  $1/(4(\Delta - \mathcal{L}_c)^2 + \Gamma_c^2)$  dans la zone de diffusion simple (i.e. en dehors de la région colorée), on extrait les paramètres collectifs du nuage. Pour la courbe rouge on obtient  $\Gamma_c = 1.7 \Gamma$ ,  $\mathcal{L}_c = -0.02 \Gamma$ , ce qui est en très bon accord avec la prédiction théorique  $\Gamma_c = (1 + b_0/12) \Gamma = 1.68 \Gamma$ .

du désordre en accord avec notre discussion de la partie 1.1.5, où l’on a remarqué que le déplacement de Lamb collectif est caractérisé par une loi de probabilité dont la valeur moyenne est petite devant l’écart type de la distribution.

### 1.5.3 Force de pression de radiation collective

La mise en évidence expérimentale des effets coopératifs en observant les photons diffusés peut être difficile. En effet, le diagramme d’émission étant fortement dirigé vers l’avant, il est nécessaire de placer un détecteur dans cette direction pour récupérer du signal. Cependant, le détecteur sera saturé par le faisceau incident ce qui rend l’expérience difficile à réaliser. C’est ainsi que l’expérience de fluorescence proposée ci-dessus s’avère ne pas être facile à réaliser. Il pourrait aussi être intéressant de conduire une expérience en transmission mais, là encore, il faudrait tenir compte de l’interférence entre le champ diffusé et le champ incident. Une telle étude serait très utile en pratique pour comprendre l’influence des effets coopératifs sur l’imagerie d’absorption.

Pour pallier cette difficulté expérimentale, nous nous intéressons à l’influence des effets coopératifs sur la force mécanique exercée par la lumière sur les atomes, i.e. la *force de pression de radiation*. Le mouvement des atomes est utilisé comme détecteur efficace ; comme cela est couramment le cas dans les expériences d’atomes froids, par exemple dans l’expérience de W. Ketterle sur la diffusion Rayleigh su-

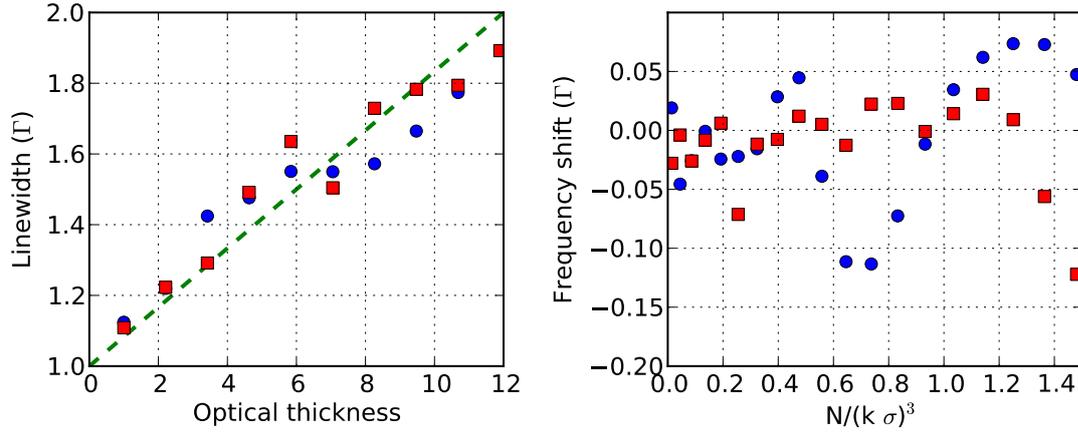


Figure 1.10 – La figure de gauche montre la largeur de raie de l'état collectif du nuage en fonction de son épaisseur optique ( $N = 200$  constant,  $k\sigma$  est varié) ainsi que la prédiction théorique Eq. (1.46) (pointillés verts). Les cercles bleus et les carrés rouges correspondent à deux réalisations différentes du désordre. Les valeurs ont été obtenues en utilisant la méthode de la figure 1.9. La courbe de droite correspond à la fréquence de résonance du nuage en fonction de  $N/(k\sigma)^3$  ( $N = 200$  constant,  $k\sigma$  est varié). Comme nous l'avons vu, le déplacement de Lamb collectif est une quantité possédant des fluctuations larges ce qui explique la dispersion importante des valeurs suivant la configuration des atomes.

perradiante à partir d'un condensat de Bose-Einstein [62]. On a ainsi une détection très sensible sur un fond important (laser incident).

La force de pression de radiation s'exerçant sur le centre de masse du nuage peut être calculée en prenant la valeur moyenne de l'opérateur

$$\mathbf{F} = \sum_j \mathbf{F}_j, \quad (1.144)$$

où  $\mathbf{F}_j = \nabla_{\mathbf{r}_j} H$  est la force s'exerçant sur l'atome  $j$ . Nous renvoyons le lecteur intéressé par le détail des calculs à nos publications [30, 15] et proposons ici une dérivation de la force de pression de radiation mettant plus en avant la physique des effets coopératifs. Nous allons montrer comment, à partir des quantités que nous venons de calculer, on peut très simplement déduire la force de pression de radiation. Cette démarche est, au final, validée par le fait que l'on retrouve bien le même résultat que celui obtenu par le calcul direct.

Dans ce qui précède, nous avons vu que le laser couple l'état fondamental  $|G\rangle$  à l'état collectif  $|TD\rangle$  caractérisé par  $\{\Omega_c, \Gamma_c, \mathcal{L}_c\}$ . On peut écrire très naturellement la résultante force s'exerçant sur le centre de masse du système le long de la direction du laser incident  $z$  sous la forme suivante

$$\mathbf{F}_c = \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} = (\Gamma_c \rho_{TD|TD}) (\hbar \mathbf{k}) (1 - \overline{\cos \theta}). \quad (1.145)$$

Le premier terme est le taux de fluorescence entre  $|G\rangle$  et  $|TD\rangle$ , le deuxième terme correspond au quantum d'impulsion d'un photon. Le dernier terme est plus subtil. Le "1" est la contribution du photon absorbé qui transmet une impulsion au nuage le long de la direction du laser incident. Le " $-\overline{\cos\theta}$ " représente la valeur moyenne de la contribution du photon émis, la moyenne étant faite sur le diagramme d'émission du système

$$\overline{\cos\theta} = \frac{\int d\Omega \cos\theta I(\theta, \phi)}{\int d\Omega I(\theta, \phi)}, \quad (1.146)$$

où  $\int d\Omega \equiv \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta)$  est l'intégration sur l'angle solide. Pour un diagramme d'émission isotrope (c'est le cas d'un atome seul),  $\overline{\cos\theta} = 0$  et la contribution du photon émis pour la force de pression de radiation est nulle. L'émission est alors uniquement source de chauffage. Nous avons vu que les systèmes de taille  $L \gg \lambda$  possèdent un diagramme d'émission fortement anisotrope, dirigé dans la direction avant. Ainsi le photon émis va avoir tendance à repousser le nuage dans la direction du photon incident. Dans le cas d'un diagramme infiniment piqué vers l'avant, on obtient  $\overline{\cos\theta} = 1$  et la force de pression de radiation est nulle  $\mathbf{F} = 0$ . On remarque que l'expression fait appel à des quantités que nous avons déjà calculées et il ne nous reste plus qu'à évaluer  $\overline{\cos\theta}$ . En utilisant l'expression du diagramme d'émission Eq. (1.43) et en intégrant sur l'angle solide  $d\Omega$  on obtient

$$\int d\Omega \cos\theta I(\theta, \phi) \propto \frac{1}{N} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{z_i - z_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} j_1(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \sin(k(z_i - z_j)), \quad (1.147)$$

où  $j_1(z) = \sin(z)/z^2 - \cos(z)/z$  est la fonction de Bessel sphérique du premier ordre. En faisant la même chose pour le dénominateur de  $\overline{\cos\theta}$ , on obtient

$$\int d\Omega I(\theta, \phi) \propto 1 + \frac{1}{N} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{\sin(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}, \quad (1.148)$$

avec, évidemment, la même constante de proportionnalité entre Eq. (1.147) et Eq. (1.148). Comme précédemment, on peut évaluer la moyenne des configurations de ces expressions pour un profil de densité spatiale Gaussien dans la limite  $\sigma \gg \lambda$  et obtenir

$$\left\langle \int d\Omega \cos\theta I(\theta, \phi) \right\rangle_{\text{config}} \propto \frac{N}{4(k\sigma)^2} - \frac{N}{8(k\sigma)^4} = \frac{b_0}{12} - \frac{b_0}{24(k\sigma)^2} \quad (1.149)$$

et

$$\left\langle \int d\Omega I(\theta, \phi) \right\rangle_{\text{config}} \propto 1 + \frac{N}{4(k\sigma)^2} = 1 + \frac{b_0}{12}. \quad (1.150)$$

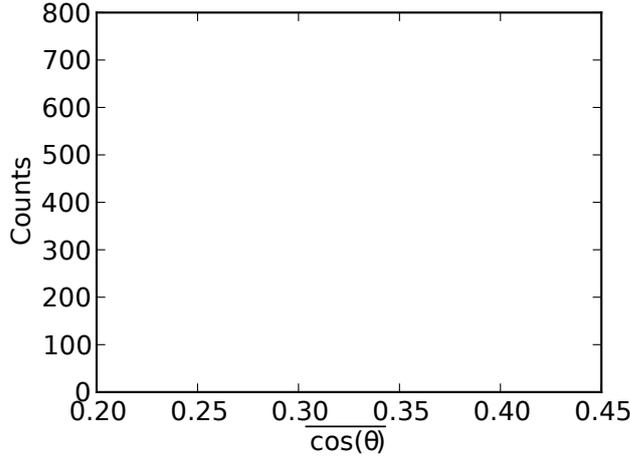


Figure 1.11 – Histogramme de la distribution des contributions des photons émis  $\overline{\cos \theta}$  calculé à partir du rapport des équations (1.147) et (1.148) pour  $10^4$  réalisations,  $N = 200$ ,  $k\sigma = 10$  ( $b_0 = 6$ ). La prédiction analytique (1.151) donnant la moyenne de la distribution est représentée en trait plein rouge et vaut  $0.33(2)$ . Celle-ci est en très bon accord avec la valeur moyenne de la distribution estimée à  $0.33(1)$  et représentée en pointillés bleus. La variance de la distribution est de  $0.028$ .

La moyenne des configurations de  $\overline{\cos \theta}$  s'écrit finalement

$$\langle \overline{\cos \theta} \rangle_{\text{config}} = \frac{\frac{N}{4(k\sigma)^2} - \frac{N}{8(k\sigma)^4}}{1 + \frac{N}{4(k\sigma)^2}} = \frac{\frac{b_0}{12} - \frac{b_0}{24(k\sigma)^2}}{1 + \frac{b_0}{12}}. \quad (1.151)$$

On remarque que, dans son domaine de validité  $k\sigma \gg 1$ , l'expression précédente est positive ce qui montre que les photons émis poussent le nuage dans le sens opposé au laser incident comme on s'y attendait. La figure 1.11 montre l'histogramme de  $\overline{\cos \theta}$  pour  $N = 200$ ,  $k\sigma = 10$  ( $b_0 = 6$ ) et  $10^4$  réalisations. On remarque l'excellent accord en ce qui concerne la valeur moyenne de la distribution Eq. (1.151).

L'expression finale de la force de pression de radiation collective s'écrit

$$\mathbf{F}_c = \hbar \mathbf{k} \Gamma \frac{N \Omega^2}{4(\Delta - \mathcal{L}_c)^2 + (1 + \frac{b_0}{12})^2 \Gamma^2} \left[ 1 + \frac{b_0}{24(k\sigma)^2} \right]. \quad (1.152)$$

Pour des atomes indépendants, la force de pression de radiation s'exerçant sur le centre de masse est égale à  $N$  fois la force s'exerçant sur un atome

$$\mathbf{F}_{\text{ind}} = N \times \hbar \mathbf{k} \Gamma \frac{\Omega^2}{4\Delta^2 + \Gamma^2}, \quad (1.153)$$

ce qui permet d'écrire le rapport de ces deux quantités

$$\frac{F_c}{F_{\text{ind}}} = \frac{4\Delta^2 + \Gamma^2}{4(\Delta - \mathcal{L}_c)^2 + (1 + \frac{b_0}{12})^2 \Gamma^2} \left[ 1 + \frac{b_0}{24(k\sigma)^2} \right]. \quad (1.154)$$

Nous verrons dans le chapitre suivant comment il est possible de mesurer cette quantité en observant la position du centre de masse d'un nuage d'atomes froids [14, 13]. La coopérativité modifie à la fois le taux d'émission spontanée, en augmentant la largeur de raie et en déplaçant la résonance, mais aussi la direction de propagation. Mentionnons, de plus, que les expressions de la force de pression coopérative dans le cas d'un nuage Gaussien anisotrope sont données dans la référence [30].

### Limite des petits nuages

Les expressions ci-dessus sont valables dans la situation pertinente pour notre étude expérimentale où la taille du système  $L \gg \lambda$ . On peut cependant s'intéresser à la limite opposée d'un système dont la taille satisfait  $L \ll \lambda$ . Le diagramme d'émission est isotrope conduisant directement à  $\overline{\cos \theta} = 0$  et la largeur de raie du système est alors  $\Gamma_c = N\Gamma$ , ce qui donne finalement

$$\mathbf{F}_c = \hbar \mathbf{k} \Gamma \frac{N^2 \Omega^2}{4(\Delta - \mathcal{L}_c)^2 + N^2 \Gamma^2}. \quad (1.155)$$

Le rapport de la force de pression de radiation coopérative  $F_c$  sur la force de pression de radiation, pour des atomes indépendants  $F_{\text{ind}}$ , s'écrit dans ce cas

$$\frac{F_c}{F_{\text{ind}}} = N \frac{4\Delta^2 + \Gamma^2}{4(\Delta - \mathcal{L}_c)^2 + N^2 \Gamma^2}. \quad (1.156)$$

## 1.6 Sousradiancie

Le phénomène de sousradiancie est un effet d'interférences destructives conduisant au piégeage partiel de la lumière dans le système. Dans cette partie, nous montrons comment il est possible de comprendre et contrôler le couplage de la lumière dans les modes sousradiants du système. En étudiant la relaxation du système, nous montrons que les nuages d'atomes froids dilués sont des systèmes idéaux pour observer, pour la première fois, le phénomène de sousradiancie de  $N$  atomes dans l'espace libre. Le phénomène de sousradiancie a été observé pour deux ions [33] et pour  $N$  atomes : une réduction du taux d'émission dans un mode de radiation a été obtenue [90]. Cependant, il n'a pas été possible de contrôler et de supprimer l'émission dans tous les modes du vide pour  $N$  atomes dans l'espace libre, augmentant ainsi la durée de vie de l'excitation à plusieurs fois le temps de vie naturel d'un atome seul.

Nous montrons que le pilotage du système par le laser extérieur permet de peupler différents modes du système caractérisés par leurs énergies et leurs taux de

relaxation. Les modes sousradiants sont alors observés lors de la relaxation du système au temps long, où seuls les modes ayant une grande durée de vie subsistent. En suivant la référence [120], nous étudions différents mécanismes d'élargissement inhomogène qui permettent d'aller au delà du couplage de Fano [37] en couplant les modes superradiants et sousradiants. Nous étudions aussi comment il est possible de distinguer le piégeage radiatif par diffusion multiple et la sousradiance en désaccordant le laser extérieur lors de l'excitation du système.

### 1.6.1 Réponse temporelle du système : super et sousradiance

Avant d'aborder cette partie, il est conseillé au lecteur de lire l'annexe B pour comprendre de façon précise les discussions qui vont suivre. Dans cette annexe, nous avons montré que les équations de l'optique linéaire décrivent l'évolution temporelle du système de  $N$  dipôles

$$i \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \mathcal{H}|\psi\rangle + \frac{\sqrt{N}\Omega}{2}|TD\rangle, \quad (1.157)$$

où l'état du système se décompose sur la base canonique  $|\psi\rangle = \sum_j \beta_j |j\rangle$  et l'état timed Dicke s'écrit  $|TD\rangle = 1/\sqrt{N} \sum_j e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} |j\rangle$ . Les composantes de la matrice  $\mathcal{H} = \sum_i \sum_j \mathcal{H}_{ij} |i\rangle\langle j|$  dans la base canonique s'écrivent (voir annexe B.1)

$$\mathcal{H}_{ij} = \left\{ -\Delta\delta_{ij} - \frac{\Gamma}{2} \left[ (1 - \delta_{ij}) \frac{\cos(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + i \frac{\sin(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right] \right\}. \quad (1.158)$$

Le laser se couple seulement à l'état symétrique, aussi appelé état timed Dicke, avec une fréquence de Rabi collective  $\sqrt{N}\Omega$  et  $\mathcal{H}$  décrit le couplage dipôle-dipôle induit par le champ électromagnétique. Nous utilisons ici la notation *bra-ket* pour écrire de façon pratique et concise le système de  $N$  équations couplées de l'optique linéaire. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe B pour plus de détails.

Dans ce qui précède, nous nous sommes principalement intéressés à l'état stationnaire du système. Dans cette partie, le système est "piloté" par un champ lumineux extérieur pour atteindre l'état stationnaire, puis nous coupons le laser ( $\Omega \rightarrow 0$ ) et nous étudions la relaxation du système. Dans l'annexe B, nous montrons que l'équation de relaxation de l'énergie du système s'écrit

$$\frac{d\langle\psi|\psi\rangle}{dt} = -i\langle\psi|\mathcal{H} - \mathcal{H}^\dagger|\psi\rangle = 2\langle\psi|\text{Im}\mathcal{H}|\psi\rangle. \quad (1.159)$$

Après la coupure du laser, si on suppose que la solution timed Dicke est une bonne approximation de l'état du système  $|\psi\rangle$ , on observe aux temps courts une

relaxation rapide (i.e. superadiante) qui s'effectue avec un taux

$$\Gamma_c = \left( 1 + \frac{1}{N} \sum_k \sum_{l \neq k} \frac{\sin(k|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k|)}{k|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_k|} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l)} \right) \Gamma \simeq \left( 1 + \frac{b_0}{12} \right) \Gamma,$$

où l'équation de droite est valable pour des nuages Gaussiens de grande taille ( $k\sigma \gg 1$ ).

Après cette première relaxation rapide, il reste dans le système une fraction de la radiation lumineuse initiale. Les dipôles sont alors plus ou moins déphasés aléatoirement ce qui conduit à une diminution du taux d'émission spontanée (voir Eq. (1.24)). Lorsque le taux d'émission spontanée instantané devient inférieur à  $\Gamma$ , on dit que l'émission du système est *sousradiante*. La sousradiance correspond au piégeage de la radiation dans le système et est due à un effet d'interférence destructive conduisant à l'inhibition partielle de l'émission du système. La figure 1.12 montre une courbe typique de relaxation du système laissant clairement apparaître l'émission superradiante juste après la coupure du laser suivie d'une émission sousradiante.

Le diagramme d'émission de l'état superradiant initial (décrit avec une bonne approximation pour la solution timed Dicke) est fortement dirigé vers l'avant (phénomène similaire à la diffusion de Mie), dans la direction du laser incident qui a imposé sa phase aux dipôles. Les états souradiants correspondent à des dipôles déphasés aléatoirement conduisant à des diagrammes d'émission aléatoires (le diagramme est isotrope si on fait une moyenne des configurations). La figure 1.12 illustre l'évolution du diagramme d'émission au cours de la relaxation du système.

## 1.6.2 Explication de la relaxation du système

L'équation d'évolution des dipôles en l'absence de champ lumineux extérieur ( $\Omega = 0$ ) s'écrit sous la forme

$$i \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \mathcal{H}|\psi\rangle.$$

Dans la base canonique du système  $\{|i\rangle, i = 1, \dots, N\}$ , les composantes de la matrice  $\mathcal{H}$  s'écrivent

$$\mathcal{H}_{ij} = -\frac{\Gamma}{2} \left[ (1 - \delta_{ij}) \frac{\cos(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + i \frac{\sin(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right]. \quad (1.160)$$

La matrice  $\mathcal{H}$  est une matrice aléatoire Euclidienne<sup>3</sup> non Hermitienne. Cette matrice décrit la propagation d'ondes scalaires dans les milieux désordonnés. Elle

---

3. Les éléments  $M_{ij}$  d'une matrice aléatoire Euclidienne de dimension  $N \times N$  sont donnés par une fonction déterministe  $f$  des positions des paires de points qui sont distribués aléatoirement dans une région de l'espace Euclidien :  $M_{ij} = f(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ .

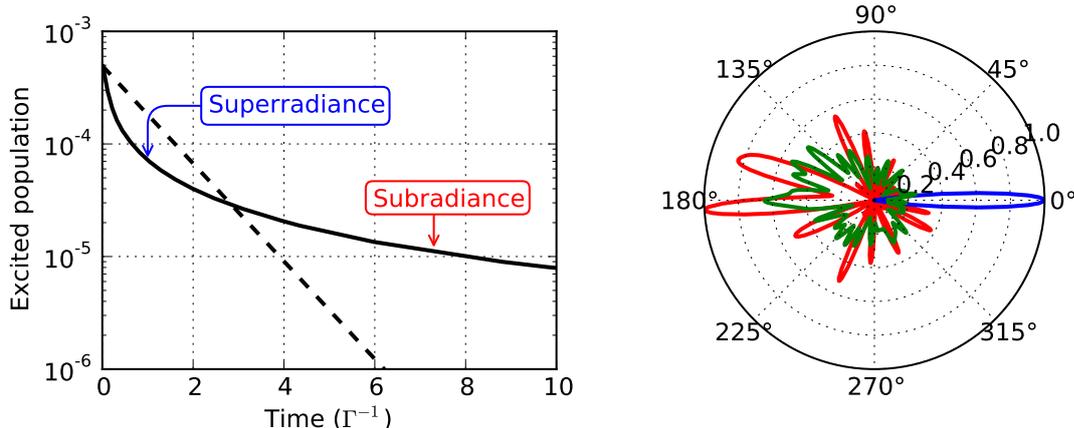


Figure 1.12 – Relaxation de la population des états excités du système après coupure du laser (l'état initial correspond au régime stationnaire). La courbe en pointillés noirs montre la désexcitation d'un atome unique (sans effets collectifs). Au début, la relaxation du système est plus rapide que celle d'un atome unique, c'est le phénomène de *superradiance*. Aux temps longs, le taux de relaxation devient inférieur à celui d'un atome unique et une partie de la lumière reste piégée dans le nuage, on dit que l'émission du système est *sousradiante*. Paramètres de la simulation :  $N = 2000$ ,  $k\sigma = 10$ ,  $\Omega = 0.01\Gamma$ ,  $\Delta = 10\Gamma$ . Le diagramme d'émission des états superradiants (courbe bleue) est fortement dirigé vers l'avant (cf. diagramme d'émission de l'état *timed Dicke*), alors que le diagramme des états sousradiants (courbe rouge) est isotrope. La courbe verte montre le diagramme d'émission des états sousradiants moyenné pour huit réalisations du désordre.

est particulièrement importante pour l'étude de la localisation d'Anderson des ondes électromagnétiques [101, 100, 94] et des ondes de matière [7] ainsi que pour l'étude de l'émission coopérative de systèmes atomiques [35, 117, 104]. La compétition entre la localisation d'Anderson et la superradiance de Dicke peut aussi être étudiée en utilisant cette matrice [3]. Les propriétés de ses valeurs propres sont importantes pour comprendre les lasers aléatoires [95, 47] et la dynamique des instabilités dans les milieux non-linéaires désordonnés [54]. Cette matrice a été principalement étudiée numériquement dans les références citées précédemment mais aussi, plus récemment, analytiquement [118, 109, 48].

La figure 1.13 donne l'énergie et la durée de vie des modes du système obtenues en calculant numériquement les valeurs propres de la matrice (1.160). On identifie tous les modes ayant un taux d'émission supérieur à  $\Gamma$  à des modes superradiants, et tous les modes ayant un taux d'émission inférieur à  $\Gamma$  à des modes sousradiants. Cette définition généralise la notion d'état superradiant et sousradiant introduite dans la partie 1.4.2 dans le cadre d'un système de taille  $L \ll \lambda$  et en négligeant l'opérateur de déplacement. En particulier, les modes sousradiants ne sont plus ici

des états noirs et possèdent un taux d'émission spontanée faible mais non nul.

On remarque sur la figure 1.13 que le taux d'émission collectif  $\Gamma_c$  correspondant à l'état timed Dicke est compris dans la distribution des taux de relaxation des modes propres du système :  $\Gamma_c \in [\Gamma_{\min}, \Gamma_{\max}]$ . Cette propriété a déjà été remarquée dans l'annexe B. Lorsque le nuage est optiquement peu dense (en vert sur la figure 1.13), le taux d'émission collectif est centré sur la distribution et  $\Gamma_c \simeq \Gamma$ . Lorsque la densité optique du nuage augmente (en bleu sur la figure 1.13), le taux d'émission collectif se déplace vers la queue de la distribution et  $\Gamma_c \simeq \Gamma_{\max}$ .

Soient  $\{|\alpha\rangle, \Lambda_\alpha \equiv E_\alpha - i\Gamma_\alpha/2\}$  les valeurs propres et vecteurs propres de droite normalisés de la matrice  $\mathcal{H}$ . Les vecteurs propres de droite de  $\mathcal{H}$  forment une base mais ne sont pas orthogonaux car la matrice n'est pas Hermitienne. Si on suppose que, juste après la coupure du laser à  $t = 0$ , l'état du système peut se décomposer en

$$|\psi(0)\rangle = c_{TD}|TD\rangle + \sum_{\alpha} c_{\alpha}|\alpha\rangle, \quad (1.161)$$

avec  $|c_{TD}| \gg |c_{\alpha}|$ , alors, aux temps courts juste après la coupure du laser, l'énergie du système  $W_{\text{mat}} \propto \langle\psi|\psi\rangle$  relaxe dans le cadre de l'approximation timed Dicke selon

$$\frac{d\langle\psi|\psi\rangle}{dt} \simeq -\Gamma_c \langle\psi|\psi\rangle, \quad (1.162)$$

c'est-à-dire que le système se désexcite avec le taux d'émission collectif  $\Gamma_c$ . Dans la limite opposée des temps longs  $t \gg 1/\Gamma_{\text{sub}}$ , avec le taux d'émission sousradiant défini par  $\Gamma_{\text{sub}} \equiv \min(\Gamma_i)$ , l'énergie des oscillateurs s'écrit

$$\langle\psi|\psi\rangle \simeq |c_{\text{sub}}|^2 e^{-\Gamma_{\text{sub}} t}. \quad (1.163)$$

Aux temps longs, le système rayonne avec le taux d'émission sousradiant  $\Gamma_{\text{sub}}$ . Dans le régime intermédiaire  $1/\Gamma_c < t < 1/\Gamma_{\text{sub}}$ , la relaxation de l'énergie mécanique du système n'est pas exponentielle car plusieurs modes (non orthogonaux) se désexcitent simultanément (voir annexe B).

La figure 1.14 illustre les différents régimes de relaxation du système. On observe une première relaxation rapide avec un taux d'émission proportionnel à  $\Gamma_c$  correspondant à la désexcitation de l'état timed Dicke, suivie d'un régime intermédiaire où plusieurs modes se désexcitent simultanément, ce qui conduit à une relaxation non exponentielle du système (voir annexe B). La partie finale de la désexcitation  $t \gg 1/\Gamma_{\text{sub}}$  correspond à une décroissance exponentielle avec un taux  $\Gamma_{\text{sub}}$  (partie rouge de la courbe).

### 1.6.3 Taux d'émission sousradiant

Il est intéressant d'étudier la dépendance du taux d'émission sousradiant en fonction des paramètres du système. La figure 1.15 donne le taux d'émission sous-

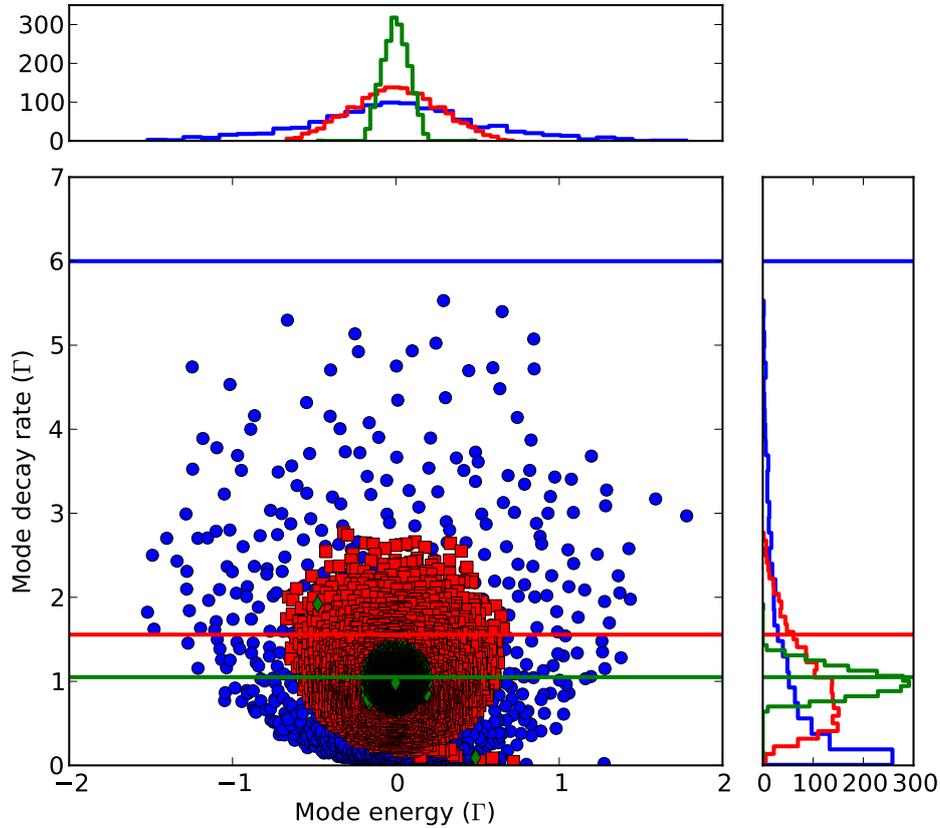


Figure 1.13 – Énergies et durées de vie des modes du système obtenues en calculant numériquement les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{H}$  pour un nuage Gaussien. Les cercles bleus, carrés rouges et diamants verts correspondent respectivement aux paramètres suivants :  $N = 2000$ ,  $k\sigma = 10, 30, 100$  ( $b_0 = 60, 6.7, 0.6$ ). Comme on s’y attend intuitivement, plus le nuage est dense, plus les distributions des énergies et des taux de relaxation des modes du système sont larges. Les modes ayant un taux d’émission supérieur à  $\Gamma$  sont appelés modes superradiants. Les modes ayant un taux d’émission inférieur à  $\Gamma$  sont appelés modes sousradiants. Les courbes continues représentent les taux de relaxation de l’état timed Dicke correspondant à chaque régime de paramètres. Pour les nuages optiquement peu denses (en vert), le taux d’émission de l’état timed Dicke  $\Gamma_c$  est centré sur la distribution  $P(\Gamma)$  et  $\Gamma_c \simeq \Gamma$ . Lorsque la densité optique du nuage augmente (en bleu), le taux d’émission collectif tend vers la queue de la distribution  $P(\Gamma)$  et  $\Gamma_c \simeq \Gamma_{\max}$ .

radiant en fonction de l’inverse de l’épaisseur optique à résonance  $1/b_0$ . Cette courbe a été obtenue en mesurant la pente finale de la relaxation temporelle du système (voir figure 1.14). Le nombre d’atomes  $N$  a été maintenu constant et la taille du système  $k\sigma$  a été variée (le nuage est Gaussien). On remarque que, pour

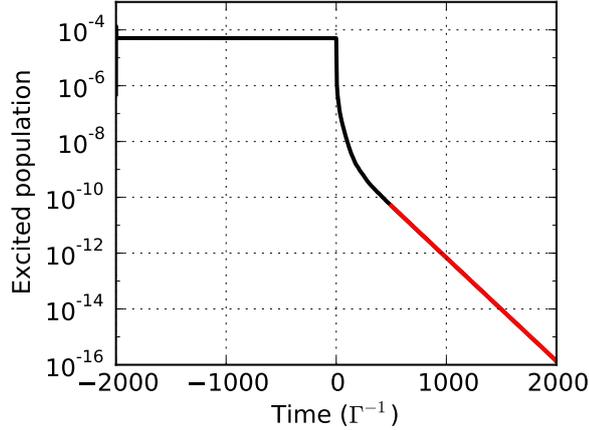


Figure 1.14 – Population des états excités en fonction du temps pour les mêmes paramètres que ceux de la figure 1.12 :  $N = 2000$ ,  $k\sigma = 10$ ,  $\Omega = 0.01\Gamma$ ,  $\Delta = 10\Gamma$ . Le laser est éteint à  $t = 0$ . Cette courbe et la figure 1.12 mettent en évidence que la sousradiance n’a une décroissance purement exponentielle qu’après un certain temps (partie rouge de la courbe). Cela se produit lorsque le mode avec le plus grand temps de vie domine. Le taux de relaxation associé à ce régime est appelé *taux de relaxation sousradiant*  $\Gamma_{\text{sub}}$ . Dans cet exemple, ce dernier vaut  $8.5 \cdot 10^{-3}\Gamma$ .

les grandes épaisseurs optiques, le taux d’émission sousradiant varie selon

$$\Gamma_{\text{sub}} \sim \frac{\Gamma}{b_0}, \quad (1.164)$$

et tend vers  $\Gamma$  pour les nuages dilués. Les points verts correspondent au mode de la matrice  $\mathcal{H}$  (voir Eq. (1.160)) ayant la plus grande durée de vie. La très bonne correspondance entre les deux courbes valide notre discussion précédente selon laquelle la relaxation du système aux temps longs s’effectue avec un taux égal à celui du mode ayant la plus grande durée de vie.

La dépendance du taux d’émission sousradiant  $\propto \Gamma/b_0$  pour  $b_0 > 1$  peut être comparée aux lois d’échelle obtenues à partir de la théorie quantique de la diffusion chaotique [112] : pour de grands  $b_0$  correspondants à un grand nombre d’atomes  $N$  par rapport aux modes sortants  $M \sim (k\sigma)^2$ , la largeur minimale de la résonance varie comme  $\Gamma_{\text{sub}} \sim M/N \sim 1/b_0$ . Notons qu’il n’est, *a priori*, pas évident que les hypothèses de la référence [112] s’appliquent pour notre système. L’analogie est donc à considérer avec précaution.

Nous avons essayé de produire une courbe similaire à celle de la figure 1.15 de gauche en faisant varier le nombre d’atomes  $N$  et en maintenant la taille du nuage  $k\sigma$  constante. Cependant, il est difficile de faire varier  $b_0$  sur une large gamme de valeurs en changeant  $N$  tout en maintenant l’hypothèse du régime

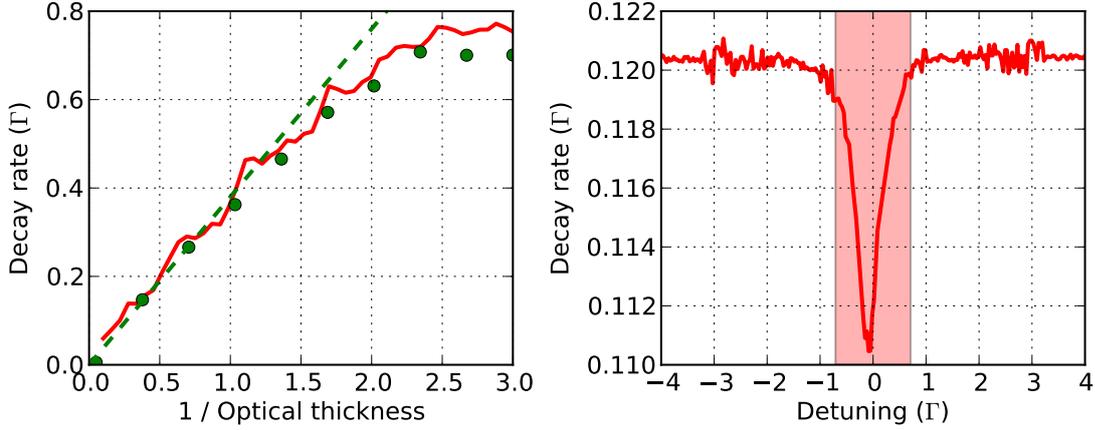


Figure 1.15 – La figure de gauche donne le taux d'émission sousradiant en fonction de  $1/b_0$ . Nous avons gardé le nombre d'atomes  $N = 400$  et le désaccord  $\Delta = 10\Gamma$  constants et nous avons fait varier la taille du système  $k\sigma$ . La courbe rouge correspond au taux de relaxation sousradiant mesuré sur les courbes de relaxation temporelle. Pour de grandes épaisseurs optiques, le taux d'émission est proportionnel à  $\Gamma/b_0$  (cf. courbe en pointillés verts) et tend vers  $\Gamma$  pour les nuages dilués. Les cercles verts correspondent aux taux de relaxation du mode de la matrice  $\mathcal{H}$  (Eq.(1.160)) ayant le plus grand temps de vie. On remarque le très bon accord entre l'approche de la relaxation temporelle du système et l'étude des modes de la matrice  $\mathcal{H}$ . La figure de droite montre le taux d'émission sousradiant en fonction du désaccord pour  $b_0 = 3$  ( $N = 400$ ,  $k\sigma = 20$ ). La région colorée correspond à la région de diffusion multiple  $b(\Delta) > 1$ .

dilué  $N/(k\sigma)^3 \ll 1$  (régime où l'approximation scalaire est valable) car les temps nécessaires aux simulations numériques sont très longs. De plus, en faisant varier  $N$ , nous avons observé que les résultats peuvent dépendre de la configuration du système. Dans ce cas, il est nécessaire de faire des moyennes de configurations ce qui est coûteux numériquement.

### Différence entre sousradiance et piégeage radiatif

Le piégeage radiatif correspond au piégeage de radiation dans le système par diffusion multiple cohérente ou incohérente. Ce régime de piégeage a été étudié de façon approfondie pour les vapeurs atomiques chaudes [61, 88] et les nuages d'atomes froids [38, 78]. Contrairement à la diffusion multiple, la sousradiance a lieu en régime de diffusion simple et est basée sur un phénomène d'interférences destructives impliquant, de ce fait, d'avoir une diffusion cohérente des photons. La diffusion multiple et la sousradiance conduisant à l'augmentation du temps de piégeage d'une excitation lumineuse dans le milieu, il est important de trouver un moyen de différencier les deux régimes. La courbe de droite de la figure 1.15

donne l'évolution du taux de relaxation du système aux temps longs en fonction du désaccord du laser excitateur. Proche de résonance, on observe une diminution du taux de relaxation, ce que nous attribuons à la grande épaisseur optique “vue” par les photons résonnants. Pour des désaccords plus grands, le taux de relaxation devient indépendant de la fréquence d'excitation ce qui est compatible avec le phénomène de sousradianance des modes faiblement excités hors de résonance.

#### 1.6.4 Contrôle de la sousradianance

Les effets coopératifs dans les nuages d'atomes froids sont dus au couplage dipôle-dipôle par l'intermédiaire du champ rayonné. Dans la base canonique des dipôles  $\{|i\rangle, i = 1, \dots, N\}$ , les dipôles sont couplés par les termes hors diagonaux de la matrice  $\mathcal{H}_{ij}$ . Dans la base des modes propres de  $\mathcal{H}$ ,  $\{|\alpha\rangle, \alpha = 1, \dots, N\}$  associés aux valeurs propres  $\Lambda_\alpha$ , les éléments de matrices sont donnés par

$$\mathcal{H}_{\alpha'\alpha} = \Lambda_\alpha \langle \alpha' | \alpha \rangle. \quad (1.165)$$

Le fait que les vecteurs propres de droite ne soient pas orthogonaux  $\langle \alpha' | \alpha \rangle \neq 0$  implique qu'il existe des couplages non diagonaux entre les modes du système<sup>4</sup>. Ainsi, le système possède des similitudes avec les résonances de Fano [37]. Ce couplage de type Fano entre les modes sousradiants et superradiants fournit des canaux de relaxation supplémentaires en plus des canaux de relaxation directs des états sousradiants vers l'état fondamental  $|G\rangle$ . Cette situation est similaire à l'effet Hanle [67] où la compétition entre la relaxation directe vers l'état fondamental et le couplage transverse produit des résonances étroites.

Dans la suite, nous montrons comment il est possible de contrôler l'émission sousradiante grâce aux paramètres du système. Ceci ouvre la possibilité de contrôler le stockage d'excitations dans les modes à grandes durées de vie, ce qui est particulièrement intéressant pour le stockage d'information quantique [69, 91].

#### En modifiant les propriétés du système $(N, k\sigma)$

La méthode la plus évidente consiste à modifier les propriétés du système  $(N, k\sigma)$ . Comme nous l'avons vu ci-dessus, les taux de relaxation et les énergies des modes du système dépendent de sa taille  $k\sigma$  et du nombre d'atomes  $N$  (voir figure 1.13). Plus précisément, les taux de décroissance superradiant et sousradiant sont des quantités qui dépendent de l'épaisseur optique à résonance du nuage  $b_0 \propto N/(k\sigma)^2$  et le déplacement de Lamb collectif dépend de la densité du nuage  $n_0 \propto N/(k\sigma)^3$ . En modifiant les paramètres  $(N, k\sigma)$  du système, il est donc

---

4. Le cas  $N = 2$  est particulier car dans ce cas les deux modes propres sont orthogonaux.

possible de contrôler le taux de relaxation sousradiant  $\Gamma_{\text{sub}}$  ainsi que la fraction sousradiante  $SF(t)$  qui est définie comme le rapport

$$SF(t) = \frac{\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle}{\langle \psi(0) | \psi(0) \rangle}. \quad (1.166)$$

À un instant  $t$  donné (de la partie sousradiante de la relaxation), la fraction sousradiante correspond au rapport entre la population des états excités à l'instant  $t$  et la population des états excités au moment de la coupure du laser  $t = 0$ . Elle représente la fraction de la population initiale des états excités se couplant aux états sousradiants i.e. elle indique avec quelle efficacité le système relaxe dans les modes sousradiants.

### En exploitant l'élargissement Doppler

L'équation donnant l'évolution temporelle des dipôles couplés peut-être modifiée pour tenir compte des déplacements Doppler et des positions des atomes qui sont maintenant dépendantes du temps. Pour cela il suffit de prendre en compte la nouvelle matrice de couplage  $\mathcal{H}$  dont les composantes dans la base canonique  $\{|i\rangle, i = 1, \dots, N\}$  s'écrivent

$$\mathcal{H}_{ij}(t) = -\delta_{ij} (\Delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i) - \frac{\Gamma}{2} \left[ (1 - \delta_{ij}) \frac{\cos \xi_{ij}(t)}{\xi_{ij}(t)} + i \frac{\sin \xi_{ij}(t)}{\xi_{ij}(t)} \right], \quad (1.167)$$

avec  $\xi_{ij}(t) \equiv k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j + (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)t|$  qui, maintenant, n'est plus seulement fonction des positions mais aussi du temps par l'intermédiaire des vitesses des atomes. On remarque que l'effet Doppler a deux effets. Le premier effet correspond à l'élargissement inhomogène Doppler bien connu qui affecte les termes diagonaux de la matrice  $\mathcal{H}$  en modifiant la fréquence de résonance de chaque dipôle  $\Delta \rightarrow \Delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i$ . Le deuxième effet affecte les termes de couplage hors diagonaux de  $\mathcal{H}$  grâce à la dépendance temporelle des positions des atomes  $\mathbf{r}_i(t)$ .

On résout numériquement l'équation (1.157) en augmentant la température, i.e. en variant l'écart type  $k\sigma_v$  de la distribution de vitesse des atomes supposée Gaussienne (nuage thermique). La figure 1.16 montre que les taux de relaxation superradiant et sousradiant convergent vers le taux d'émission d'un atome unique  $\Gamma$  lorsque la température du nuage augmente. Ce résultat montre que les modes sousradiants sont fragiles et rapidement détruits par un mouvement atomique relativement faible.

Ces résultats sont compatibles avec ceux obtenus dans la référence [120], où les auteurs considèrent l'émission à partir d'un système de quantum dots initialement complètement inversé  $|e \cdots e\rangle$  en présence d'élargissement inhomogène. Les auteurs observent que lorsque le temps de déphasage inhomogène  $T_2^* \ll 1/\Gamma_c$ , les constantes

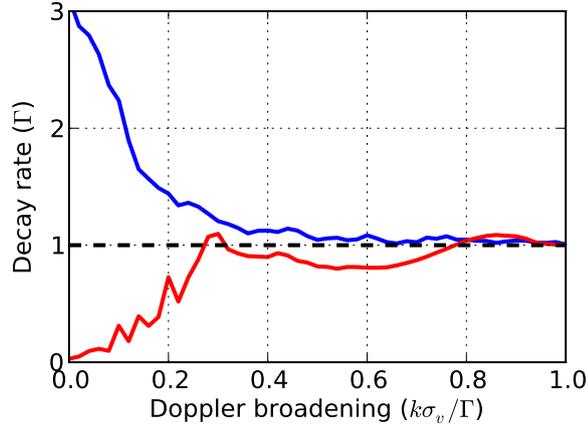


Figure 1.16 – Taux de relaxation superradiant (courbe bleue) et sousradiant (courbe rouge) en fonction de l'élargissement Doppler  $k\sigma_v$  pour  $N = 200$  atomes,  $k\sigma = 5$  et un désaccord de  $\Delta = 10\Gamma$ . Les courbes ont été calculées pour une unique configuration des atomes. Le laser est allumé pendant  $50\Gamma^{-1}$ . Le taux de relaxation sousradiant est ensuite évalué  $50\Gamma^{-1}$  après sa coupure.

de temps de relaxation superradiante et sousradiante tendent vers celle d'un atome unique. Bien que leur situation soit limitée à un élargissement inhomogène, i.e. un désordre diagonal, nous observons qualitativement les mêmes résultats.

Les atomes froids semblent être un système bien adapté pour contrôler le mouvement des atomes à partir d'une situation où celui-ci est négligeable jusqu'à des situations où il devient dominant. Nous avons vérifié que le terme dominant responsable de la diminution des taux d'émission superradiant et sousradiant provenait des couplages transverses dans la base canonique *via* les termes d'interaction dipôle-dipôle qui dépendent des positions  $\xi_{ij}(t)$  plutôt que des termes diagonaux  $-(\Delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i)$  de la matrice  $\mathcal{H}$ . Cette influence du mouvement des atomes sur la relaxation sousradiante du système peut expliquer pourquoi la sousradiance de  $N$  atomes n'a pas été observée dans les vapeurs chaudes, malgré les efforts consentis dans ce domaine dans les années 70 [53].

### En augmentant l'intensité du laser

En augmentant l'intensité du laser incident, l'amplitude du champ diffusé (qui a la structure d'un speckle) augmente, ce qui modifie les couplages dipôle-dipôle qui sont à l'origine des effets coopératifs. Ceci explique pourquoi il est intéressant d'étudier l'influence de l'intensité laser sur la superradiance et la sousradiance. Comme nous l'avons vu précédemment, l'équation d'évolution des dipôles couplés Eq. (1.157) est linéaire en champ. Pour étudier les déviations par rapport à la théorie

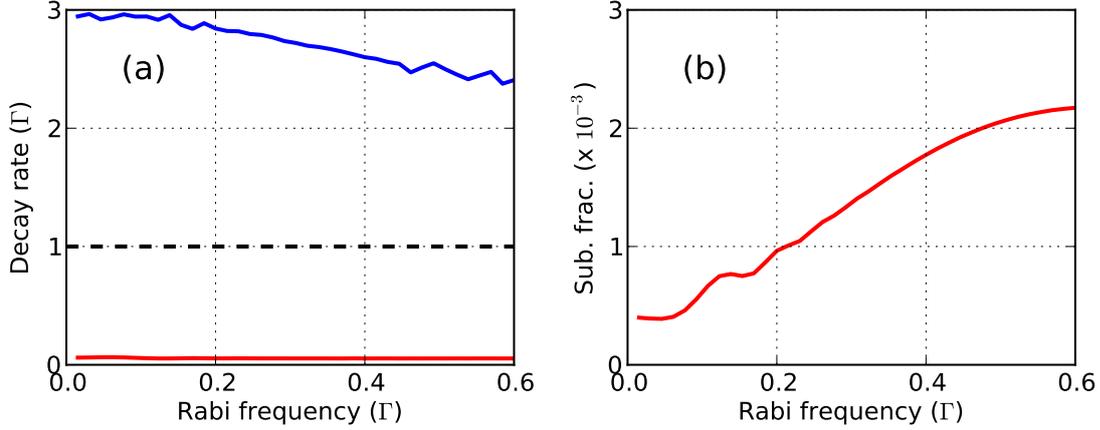


Figure 1.17 – La figure de gauche montre les taux de relaxation superradiant (courbe bleue) et sousradiant (courbe rouge) en fonction de la fréquence de Rabi (intensité du laser) pour  $N = 200$  atomes,  $k\sigma = 5$  ( $b_0 = 24$ ) et un désaccord de  $\Delta = 10\Gamma$ . La figure de droite donne la fraction sousradiante Eq. (1.168) pour les mêmes paramètres. Le laser est allumé pendant  $50\Gamma^{-1}$ . Le taux de relaxation sousradiant et la fraction sousradiante sont calculés  $50\Gamma^{-1}$  après avoir éteint le laser.

de l'optique linéaire, nous devons utiliser l'équation maîtresse (1.85) introduite dans la partie 1.4. Dans la partie 1.4.3, nous avons remarqué qu'à l'ordre un en  $\Omega$ , l'équation maîtresse est équivalente aux équations de l'optique linéaire. En augmentant l'intensité tout en restant dans le régime de faible excitation, on peut étudier l'ordre suivant en  $\Omega$ . Comme nous l'avons discuté plus haut, la condition pour pouvoir se limiter à une excitation est que la population des états excités du premier étage soit faible i.e.  $\sum_i \rho_{i|i} \ll 1$ . Comme nous l'avons déjà évoqué, la restriction de l'équation maîtresse au sous-espace ayant au plus une excitation peut aussi décrire de façon exacte (i.e. quelle que soit l'intensité) des systèmes où les états multiples excités sont interdits comme c'est par exemple le cas pour des atomes dans le régime de blocage de Rydberg.

La figure 1.17 donne les taux de relaxation superradiant et sousradiant en fonction de la fréquence de Rabi  $\Omega$ , et la fraction sousradiante  $50\Gamma^{-1}$  après avoir éteint le laser. Dans le cadre du formalisme de la matrice densité, la fraction sousradiante du système  $SF(t)$  est donnée par la formule suivante

$$SF(t) = \frac{\sum_i \rho_{i|i}(t)}{\sum_i \rho_{i|i}(0)}. \quad (1.168)$$

Lorsque nous avons fait varier la fréquence de Rabi, nous avons vérifié que la population des états excités restait faible ( $\sum_i \rho_{i|i} < 0.15$ ), pour que nos calculs soient consistants avec l'approximation de se limiter à une excitation au plus.

On observe figure 1.17, sur la figure de droite, une augmentation de la fraction sousradiante d'un facteur trois lorsqu'on augmente l'intensité par rapport à la limite  $\Omega \rightarrow 0$  déterminée par le couplage Fano. Insistons encore sur le fait que les équations des dipôles couplés donneraient la même fraction sousradiante quelle que soit l'intensité à cause de la linéarité des équations. La figure 1.17 montre comment il est possible de contrôler le couplage entre les modes superradiant et sousradiant en modifiant l'intensité du laser lors de la phase de pilotage du système.

Sur la figure 1.17 de gauche, on remarque que le taux de relaxation superradiant diminue lorsque  $\Omega$  augmente, ce qui n'est pas le cas pour le taux de relaxation sousradiante. Ceci peut-être compris en remarquant que la relaxation superradiante a lieu juste après la coupure du laser. Ainsi, pour des champs incidents de "grande intensité", les amplitudes des dipôles, au moment de la coupure, sont importantes, tout comme l'amplitude du champ diffusé, ce qui entraîne une modification des couplages entre dipôles et donc une réduction du taux d'émission superradiant. Par contre, au moment où on "mesure" le taux d'émission sousradiant,  $50 \Gamma^{-1}$  après la coupure du laser, les dipôles ont déjà relaxé et leurs amplitudes sont faibles ce qui ne modifie pas la valeur du taux d'émission sousradiant par rapport à la limite  $\Omega \rightarrow 0$ . Dans ce cas, le taux d'émission sousradiant est le même que celui donné par le couplage Fano. De la même manière, pour des intensités  $\Omega < 0.1$ , on remarque que le taux d'émission superradiant n'a pas encore diminué : le champ électrique extérieur n'est pas encore assez fort pour dépasser l'effet du couplage Fano. Ceci peut aussi s'observer sur la courbe de la fraction sousradiante.

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le problème de la diffusion d'un faisceau laser incident sur un système constitué de  $N$  atomes à deux niveaux couplés entre eux par l'intermédiaire d'interactions dipôle-dipôle. Plusieurs approches ont été abordées : équations classiques de l'optique linéaire, Hamiltonien effectif et équation maîtresse. Nous nous sommes limités à l'espace de Hilbert contenant au plus une excitation ; ce qui est valable lorsque le champ laser n'est pas trop intense ou dans des régimes particuliers où les états contenant plusieurs excitations ne sont pas accessibles (blocage de Rydberg par exemple).

Dans le cadre de l'approximation timed Dicke, le système est équivalent à un gros atome à deux niveaux : état fondamental  $|G\rangle$ , état excité  $|TD\rangle$ , caractérisé par une fréquence de Rabi collective  $\Omega_c$ , un taux d'émission collectif  $\Gamma_c$ , et un déplacement de Lamb collectif  $\mathcal{L}_c$ . De plus, l'état timed Dicke possède un diagramme d'émission fortement dirigé vers l'avant (pour un système de taille  $L \gg \lambda$ ), ce qui est à mettre en relation avec le phénomène de diffusion de Mie.

Cette description simplifiée du système nous a permis de calculer de façon

intuitive la force de pression de radiation coopérative  $F_c$ . Cette quantité permet de mettre facilement en évidence les effets coopératifs en observant le déplacement du centre de masse du nuage comme nous le verrons au cours de l'étude expérimentale présentée dans le chapitre suivant.

La dernière partie de ce chapitre a été consacrée à l'étude de la sousradiane dans les nuages d'atomes froids dilués. Celle-ci est caractérisée en étudiant la relaxation du système après avoir coupé le laser. Elle se manifeste aux temps longs par une décroissance lente de la population des états excités. Contrairement au "mode" timed Dicke ayant un diagramme fortement dirigé dans la direction avant, les modes sousradiants ont des diagrammes d'émission dirigés dans des directions aléatoires, ce qui pourra être mis à profit pour leur future observation. Nous avons montré que le taux d'émission sousradiant se comportait comme  $\propto \Gamma/b_0$  pour les grandes épaisseurs optiques  $b_0 \gg 1$  et saturait à  $\Gamma$  pour les nuages très dilués. En changeant le désaccord du laser, nous avons vu qu'il était possible de faire la différence entre le piégeage radiatif par diffusion multiple et le phénomène de sousradiane. Finalement, nous avons étudié plusieurs mécanismes pour contrôler la sousradiane : nombre d'atomes, taille et température du nuage mais aussi intensité du laser de pilotage. Ces résultats permettent d'envisager l'étude expérimentale du contrôle et de la suppression de l'émission sousradiante d'un système de  $N$  atomes dans l'espace libre. Les étapes préliminaires de cette étude seront abordées par la suite.



# Chapitre 2

## Étude expérimentale des effets coopératifs

Nous avons montré dans la partie 1.5.3 du chapitre précédent que la mesure de la force de pression de radiation permet de mettre en évidence les effets coopératifs lors de la diffusion de la lumière sur un nuage d'atomes froids. Dans ce chapitre, nous décrivons le protocole expérimental que nous avons mis en place pour mesurer la force de pression de radiation coopérative. Dans un deuxième temps, nous présentons les premières étapes de la mise en place d'une expérience dont le but est de mesurer, pour la première fois, la sousradianance d'un ensemble atomique dans l'espace libre.

### 2.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental que nous utilisons est un piège magnéto-optique de Rubidium, qui constitue le point de départ de la majorité des expériences d'atomes froids. Son principe est bien connu et a été décrit dans de nombreux ouvrages. Nous nous contentons de donner les spécificités du dispositif expérimental utilisé dans notre laboratoire à Nice.

#### 2.1.1 Piège magnéto-optique

Dans les expériences présentées ci-dessous, nous utilisons un piège magnéto-optique (magneto-optical trap MOT) de  $^{87}\text{Rb}$  chargé à partir d'une vapeur atomique pour piéger et refroidir les atomes dans le régime du micro-Kelvin [98, 1, 93, 85]. Le principe du MOT est d'utiliser les forces dissipatives de l'interaction lumière-matière qui introduisent une force de friction pour ralentir et refroidir un gaz atomique. Le confinement du nuage est obtenu en ajoutant un champ ma-

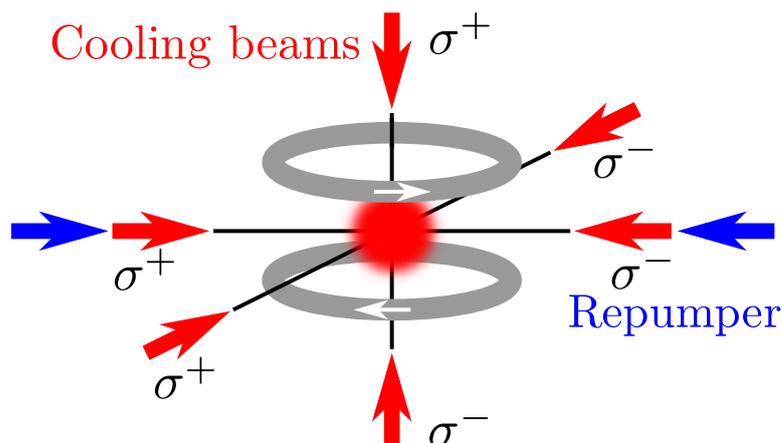


Figure 2.1 – Géométrie du piège magnéto-optique. Le champ magnétique quadrupolaire est généré par une paire de bobines en configuration anti-Helmoltz. Six faisceaux laser polarisés circulairement, désaccordés dans le rouge (flèches rouges) et deux faisceaux repompeurs (flèches bleues) sont alignés sur le centre du piège.

gnétique inhomogène qui introduit une dépendance spatiale de la force. La figure 2.1 montre le schéma de la configuration du MOT. Six lasers désaccordés dans le rouge et polarisés circulairement sont dirigés vers le centre du piège. Une paire de bobines en configuration anti-Helmoltz crée le champ magnétique.

Une des spécificités de notre dispositif expérimental est d'utiliser de grandes lentilles permettant de créer des faisceaux laser avec un grand waist de 28 mm. Ceci permet de capturer un grand nombre d'atomes à partir de la vapeur chaude contenue dans la cellule. Pour le MOT, nous utilisons un laser désaccordé dans le rouge de  $3\Gamma$  par rapport à la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  de la raie  $D_2$  du Rubidium [114]. De plus, nous utilisons un laser repompeur sur la transition  $F = 1 \rightarrow F' = 2$ .

**Chambre à vide - LIAD** Nous disposons d'une cellule cubique de quartz Hellma, de 10 cm de côté permettant d'avoir un excellent accès optique. La cellule est chargée d'une vapeur atomique de Rubidium ( $^{85}\text{Rb} + ^{87}\text{Rb}$ ). La chambre à vide est pompée par une pompe ionique Varian VacIon Plus 20 (modèle Diode,  $27\text{ L s}^{-1}$ ). Ne disposant pas d'un capteur de pression, la valeur absolue de la pression n'est pas connue. Cependant celle-ci peut être estimée à partir du temps de chargement à  $1/e$  du MOT qui est d'environ 30 s (correspondant à une pression d'environ  $10^{-9}$  mbar). La technique de désorption d'atomes induite par lumière (light-induced atomic desorption LIAD) [49, 5] permet de rapidement moduler la pression de la vapeur atomique. C'est un phénomène semblable à l'effet photoélectrique où un atome adsorbé sur une surface est expulsé de celle-ci en absorbant un photon (dans l'ultra-violet). L'effet LIAD a été étudié pour différentes espèces

atomiques et différents substrats et s’est montré efficace comme source atomique dans des expériences d’atomes froids, dans le cas d’atomes de Rubidium [56, 5, 8], Potassium [9, 74] et Sodium [119, 87]. Dans notre dispositif expérimental, quatre LEDs UV Roithner H2A1-H395, fournissant chacune une puissance de 95 mW à 395 nm permettent d’augmenter la pression de vapeur de Rubidium dans la cellule. Ceci a pour conséquence de réduire le temps de chargement du MOT de  $\sim 30$  s à  $\sim 8$  s et d’augmenter le nombre d’atomes en régime stationnaire de  $\sim 10^8$  à  $\sim 10^9$ . Après la phase de chargement du MOT, les LEDs UV sont éteintes, diminuant rapidement la pression vers sa valeur d’origine. Ceci est particulièrement utile dans le chapitre suivant où, après avoir chargé un piège dipolaire, on cherche à obtenir une faible valeur de pression pour minimiser les pertes à un corps provenant des collisions entre les atomes froids piégés et le gaz chaud résiduel.

**Système laser** Les lasers utilisés pour le piégeage et l’imagerie sont centrés sur la raie  $D_2$  du Rubidium correspondant à une longueur d’onde de 780 nm. Pour cette longueur d’onde, il existe un grand nombre de diodes laser monomodes avec de relativement grandes puissances de sortie. Nous utilisons deux diodes laser DFB de largeur spectrale typique 2 MHz (données constructeur) délivrant chacune une puissance d’environ 80 mW. Ces lasers sont plus faciles d’utilisation que les lasers traditionnels en cavité étendue et peuvent être balayés sans saut de mode sur plusieurs dizaines de GHz. Chacun de ces lasers est locké par spectroscopie d’absorption saturée : le laser de refroidissement sur le croisement  $F = 2 \rightarrow F' = \{2, 3\}$  et le repompeur sur le croisement  $F = 1 \rightarrow F' = \{1, 2\}$ .

La diode servant pour le refroidissement injecte un amplificateur laser semi-conducteur (semiconductor tapered amplifier) Sacher, de puissance nominale 1 W. La puissance du laser de refroidissement est de  $300 \text{ mW}^1$  après le trou de filtrage (avant d’être divisé en six), de façon à avoir une intensité au niveau des atomes de  $2.5 \text{ mW cm}^{-2}$ . La puissance disponible pour le repompeur en sortie de fibre (avant que les faisceaux ne soit séparés en deux) est de 8 mW, ce qui donne une intensité de  $0.2 \text{ mW cm}^{-2}$  sur les atomes. La puissance et le désaccord des lasers sont contrôlés à l’aide de modulateurs acousto-optiques ce qui permet de créer des “temporal dark MOTs”, des mélasses optiques, et est aussi utile pour l’imagerie (voir chapitre suivant).

**Bobines de champ magnétique et alimentation** Une alimentation à découpage TDK-Lambda (max 30 V, 25 A) débite  $\sim 4$  A dans des bobines en configura-

---

1. L’amplificateur laser à semi-conducteur est utilisé à une puissance plus faible (500 mW) que sa puissance nominale (1 W). Il est suivi d’un modulateur acousto-optique pour couper le faisceau laser et d’un trou de filtrage. On obtient finalement 300 mW de lumière disponible pour le MOT. Si on a besoin de plus de puissance, il suffit d’augmenter la puissance en sortie de l’amplificateur laser.

tion anti-Hemoltz (diamètre 26 cm) placées verticalement pour créer un gradient de champ magnétique au centre de la cellule de  $\sim 12 \text{ G cm}^{-1}$  (selon l'axe vertical). De plus, trois paires de bobines de compensation en configuration Helmholtz, placées selon les trois directions de l'espace, permettent de compenser les champs magnétiques résiduels pendant les phases de mélasses.

### 2.1.2 Imagerie

Les techniques d'imagerie d'absorption et de fluorescence sont utilisées de façon systématique dans les expériences d'atomes froids pour caractériser les propriétés du nuage : nombre d'atomes, densité, distribution en impulsion, température... Ici, nous nous contentons de rappeler très brièvement leurs principes et leurs implémentations dans l'expérience.

**Imagerie d'absorption** Cette technique permet de mesurer l'épaisseur optique d'un nuage d'atomes [70]. Lorsqu'un nuage d'atomes est éclairé par un laser quasi-résonnant (sonde), les atomes diffusent<sup>2</sup> la lumière, produisant une ombre dans la lumière transmise. Cette ombre peut être ensuite analysée en imageant le nuage dans la direction sonde à l'aide d'une caméra CCD.

La transmission d'une onde lumineuse de désaccord  $\Delta$ , faiblement saturante, d'intensité spatiale  $I_0(x, y)$  se propageant selon l'axe  $z$  à travers un nuage d'atomes de densité spatiale  $n$  dépend de son épaisseur optique  $b(x, y)$

$$T(x, y) = \frac{I(x, y)}{I_0(x, y)} = \exp[-b(x, y)]. \quad (2.1)$$

L'épaisseur optique est donnée par  $b(x, y) = \sigma \int dz n$  avec  $\sigma = \sigma_0 / (1 + 4\Delta^2 / \Gamma^2)$  la section efficace de diffusion de la lumière sur les atomes et  $n$  la densité atomique. La section efficace à résonance vaut  $\sigma_0 = g \frac{3\lambda^2}{2\pi}$ <sup>3</sup>.

En pratique, pour tenir compte des imperfections de l'environnement (lumière de fond, lumière diffusée de la sonde, défauts optiques), nous avons besoin de trois images pour connaître la transmission. Une image  $I_S$  du faisceau sonde ayant diffusée sur les atomes, une image  $I_P$  du faisceau sonde et une image  $I_{BG}$  de la lumière de fond. La transmission est alors calculée selon

$$T = \frac{I_S - I_{BG}}{I_P - I_{BG}}, \quad (2.2)$$

ce qui permet de remonter directement à la cartographie de l'épaisseur optique du nuage  $b = -\ln T$  (voir figure 2.2). La connaissance de l'épaisseur optique et de la

2. Couramment, on dit que les atomes absorbent la lumière, ce qui est incorrect.

3. Si on suppose les atomes uniformément distribués dans tous les sous-niveaux Zeeman,  $g = 1/3(2F' + 1)/(2F + 1) = 7/15$ , pour la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  du  $^{87}\text{Rb}$ .

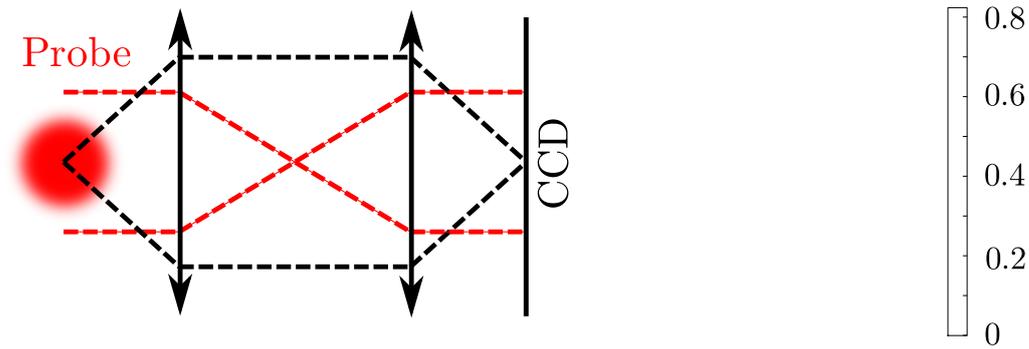


Figure 2.2 – Schéma du montage d’imagerie d’absorption. Cartographie de l’épaisseur optique d’un nuage thermique après 10 ms de temps de vol.

taille du nuage permet de facilement remonter à ses propriétés (nombre d’atomes, densité, température).

Le schéma du système optique utilisé dans l’expérience est donné sur la figure 2.2. On utilise une sonde quasi-résonnante avec la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  dont l’intensité est de l’ordre de  $100 \mu\text{W cm}^{-2}$  (inférieure à  $I_{\text{sat}}/10$ ). Les images sont enregistrées sur une caméra CCD Point Grey GRAS-20S4M-C avec un temps d’exposition de  $100 \mu\text{s}$ . Les lentilles utilisées pour l’imagerie sont toutes des doublets achromatiques. Pour mesurer les paramètres du nuage, il est nécessaire de connaître avec précision le désaccord de la sonde. Pour calibrer la sonde, on trace l’épaisseur optique au centre du nuage en balayant la fréquence de la sonde. La courbe obtenue est une Lorentzienne dont le centre donne la fréquence de résonance des atomes (voir figure 2.3).

**Imagerie de fluorescence** Dans le cas de l’imagerie de fluorescence, les atomes sont éclairés par les six faisceaux du MOT quasi-résonnant avec la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$ . La lumière diffusée par les atomes est collectée en imageant le nuage sur un capteur CCD selon l’axe  $z$  (voir figure 2.4). L’intensité au niveau du détecteur est donnée par

$$I(x, y) = \frac{\Omega}{4\pi} \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \hbar\omega_0 \int dz n(x, y, z), \quad (2.3)$$

avec  $\Omega$  l’angle solide de collecte des photons diffusés et  $s$  le paramètre de saturation. Ceci permet d’obtenir des informations sur la taille et la densité atomique<sup>4</sup>. Dans le cas de nuages de grande épaisseur optique, il est nécessaire de choisir un désaccord suffisamment grand pour se trouver dans le régime de diffusion simple  $b(\Delta) < 1$ .

4. En ayant préalablement calibré le coefficient de proportionnalité entre l’amplitude mesurée et la densité atomique, en comparant des images de fluorescence aux images d’absorption, pour des nuages de densités optiques identiques.

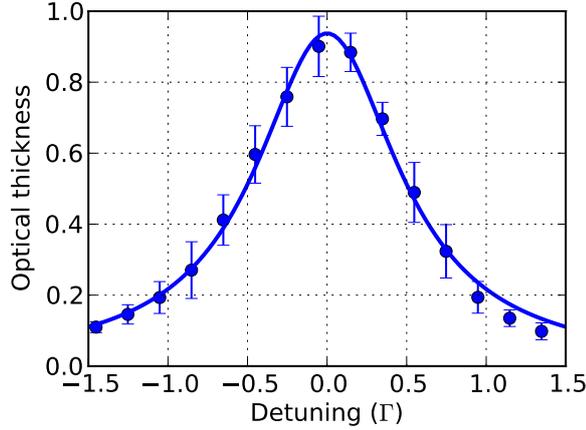


Figure 2.3 – Épaisseur optique au centre du nuage en fonction de la fréquence de la sonde. Cette courbe permet d’identifier précisément la fréquence de la résonance atomique. L’ajustement Lorentzien donne une largeur de raie de  $\tilde{\Gamma} \simeq 1.1 \Gamma$ , soit légèrement plus que la largeur de la transition atomique. Cet élargissement est compatible avec la largeur spectrale de la diode DFB que nous utilisons (typiquement 2 MHz d’après le constructeur).

En pratique, deux images sont nécessaires pour s’affranchir de la lumière parasite. Une image  $I_A$  de la fluorescence des atomes et une image  $I_{BG}$  de fond, sans les atomes. L’image de fluorescence est alors simplement calculée selon  $I = I_A - I_{BG}$  (voir l’image expérimentale figure 2.4). Dans notre dispositif expérimental, les six faisceaux du MOT ( $2.5 \text{ mW cm}^{-2}$ ) sont utilisés et nous disposons de deux caméras (Point Grey GRAS-20S4M-C et GRAS-03S3M-C) avec des objectifs de 50 mm ou 75 mm. Le temps d’exposition des caméras varie généralement entre  $100 \mu\text{s}$  et 1 ms. La position et le grandissement des dispositifs d’imagerie de fluorescence sont choisis en fonction de l’expérience effectuée.

## 2.2 Observation d’une force de pression de radiation coopérative

Dans cette partie, nous présentons les premières mesures expérimentales de la force de pression de radiation coopérative en utilisant un nuage d’atomes froids de  $^{87}\text{Rb}$  [14].

### 2.2.1 Protocole et séquence expérimentale

Dans la partie 1.5.3, nous avons vu que la force de pression de radiation moyenne s’exprimait en fonction de l’épaisseur optique à résonance  $b_0$  et de la

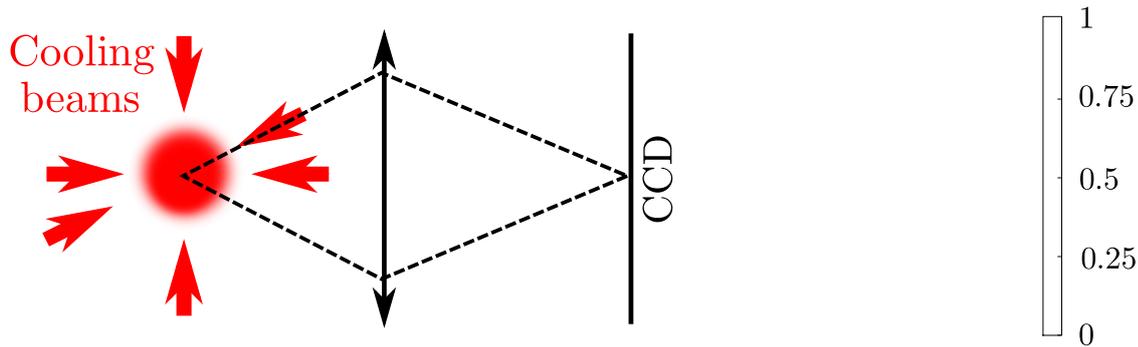


Figure 2.4 – Schéma du montage d'imagerie de fluorescence. Image de fluorescence d'un nuage thermique après 10 ms de temps de vol (normalisée au maximum d'intensité). Le caractère incohérent de l'imagerie de fluorescence donne une image sans frange.

taille rms du nuage  $\sigma$  supposé Gaussien (dans la limite  $\sigma \gg \lambda$ )

$$\frac{F_c}{F_{\text{ind}}} = \frac{4\Delta^2 + \Gamma^2}{4\Delta^2 + \left(1 + \frac{b_0}{12}\right)^2 \Gamma^2} \left[1 + \frac{b_0}{24(k\sigma)^2}\right]. \quad (2.4)$$

Différents régimes peuvent être explorés, suivant la forme, la taille et l'épaisseur optique du nuage ainsi que le désaccord du laser. Notre protocole expérimental vise à mesurer la force de pression de radiation coopérative en faisant varier l'épaisseur optique (à résonance  $b_0$ ) du nuage et en maintenant tous les autres paramètres constants. Pour cela, voici les différentes étapes expérimentales suivies (voir figure 2.5) :

- **MOT** : cette étape permet de piéger  $\sim 10^9$  atomes en 3 s en utilisant le LIAD. Le désaccord du laser de refroidissement est de  $-3\Gamma$ . La température du nuage est de  $\sim 80 \mu\text{K}$ .
- **Dark MOT** : pendant 50 ms, l'intensité du repompeur est réduite à 10 % de sa valeur initiale et le désaccord du laser de refroidissement est progressivement augmenté de  $-3\Gamma$  à  $-6\Gamma$ . Cela permet de comprimer le nuage<sup>5</sup> et de produire une distribution Gaussienne homogène d'atomes, principalement dans l'état fondamental hyperfin  $F = 1$ , de température  $\sim 40 \mu\text{K}$ . Après cette étape, on éteint les gradients de champ magnétique et les lasers, laissant les atomes en chute libre.
- **Pompage optique** : pendant 0.6 ms, une phase de mélasse sans repompeur met les atomes dans l'état hyperfin  $F = 1$ . Avant que le nuage n'ait le temps de s'étendre significativement, on éclaire les atomes avec le laser repompeur pendant 0.5 ms. En faisant varier son intensité, on peut contrôler

5. La densité varie de quelques  $10^{10} \text{ cm}^{-3}$  pour le MOT à quelques  $10^{11} \text{ cm}^{-3}$  pour le dark MOT.

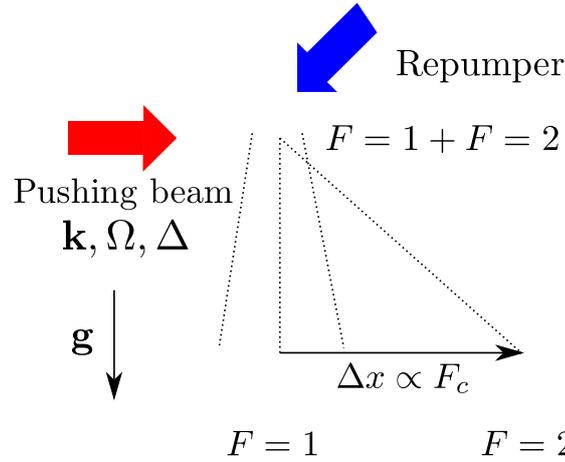


Figure 2.5 – Protocole expérimental pour mesurer la force de pression de radiation coopérative. Les atomes repompés dans l'état  $F = 2$  sont poussés par un faisceau laser quasi-résonnant. Les atomes dans  $F = 1$  ne sont pas affectés par le laser. Ils sont donc en chute libre.

la fraction d'atomes que l'on repompe dans l'état hyperfin  $F = 2$  sans modifier la taille du nuage. Ainsi, nous pouvons contrôler l'épaisseur optique  $b_0$  du nuage d'atomes quasiment Gaussien en maintenant une taille constante  $650 \mu\text{m}$  ( $k\sigma \sim 5 \cdot 10^3$ ).

- **Faisceau pousseur** : un faisceau pousseur horizontal polarisé circulairement et désaccordé de  $\Delta$  par rapport à la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  est appliqué pendant  $t_{\text{push}} = 0.8 \text{ ms}$  (figure 2.5). L'intensité est ajustée suivant le désaccord choisi pour diffuser environ 100 photons par atome avec le nuage  $F = 2$ . Les atomes dans  $F = 1$  ne sont pas affectés par le faisceau pousseur.
- **Temps de vol** : pendant  $t_{\text{TOF}} = 13 \text{ ms}$ , on laisse tomber les atomes avant de les repomper puis les détecter par imagerie de fluorescence placée à  $90^\circ$  du faisceau pousseur. Après le temps de vol, les nuages sont nettement séparés (voir figure 2.6).

**Estimation de l'épaisseur optique du nuage** Dans une expérience préliminaire (ayant le même cycle expérimental), on mesure par imagerie d'absorption l'épaisseur optique totale du nuage  $b_0^{\text{tot}}$  juste avant que le faisceau pousseur ne soit allumé en repompant complètement le nuage dans  $F = 2$ . Ensuite, au cours de l'expérience, l'imagerie de fluorescence après temps de vol permet de déterminer la fraction d'atomes  $\mathcal{F}$  qui ont été poussés (i.e. les atomes dans  $F = 2$ ). Comme l'expérience s'effectue à taille constante, l'épaisseur optique du nuage ayant subi la force de pression de radiation au moment où le faisceau pousseur agit est simplement donnée par  $b_0 = \mathcal{F} \times b_0^{\text{tot}}$ .

**Choix de l'imagerie de fluorescence** Le faisceau pousseur que nous avons utilisé est en fait le faisceau laser servant à l'imagerie d'absorption. Il était donc pratique de mettre en place, à  $90^\circ$  du faisceau pousseur, une imagerie de fluorescence qui est plus facile à mettre en place qu'une imagerie d'absorption. Ainsi, le choix est motivé par des raisons de simplicité. Une imagerie d'absorption aurait aussi pu être utilisée.

Ce protocole permet de distinguer les atomes (dans  $F = 2$ ) ayant subi la force de pression de radiation, et ceux n'ayant pas subi l'influence du faisceau pousseur (dans  $F = 1$ ). Le déplacement  $\Delta x$  du nuage après temps de vol est proportionnel à la force de pression de radiation coopérative  $F_c$  (i.e. à l'accélération donnée par le faisceau pousseur)

$$\Delta x = F_c \left( \frac{t_{\text{push}}^2}{2m} + \frac{t_{\text{push}} t_{\text{TOF}}}{m} \right). \quad (2.5)$$

Différents protocoles peuvent être utilisés, mais pour obtenir une mesure quantitative de la force de pression de radiation, il est très intéressant de faire varier le nombre d'atomes sans modifier la taille du nuage.

Le protocole ci-dessus peut seulement être utilisé dans le régime quasi-résonnant. En effet, pour des désaccords importants, le pompage optique dans les niveaux hyperfins impose des contraintes sur le nombre de photons diffusés sur la transition cyclante  $F = 2 \rightarrow F' = 3$ . Expérimentalement, lorsque le désaccord est trop important, le pompage optique hyperfin produit une trainée d'atomes entre le nuage initial et les atomes dans l'état  $F = 2$ . De plus, lorsque le désaccord du faisceau laser est beaucoup plus grand que l'écartement entre les niveaux hyperfins, on ne résout plus la structure hyperfine des états excités et les atomes dans  $F = 1$  et  $F = 2$  sont poussés de façon plus ou moins identique.

## 2.2.2 Résultats et discussion

La figure 2.6 montre une série d'images obtenues en faisant varier la durée du repompeur et, par conséquent, l'épaisseur optique du nuage où les atomes sont dans  $F = 2$ . Dans cette série de données, le faisceau pousseur est désaccordé de  $-4.2\Gamma$ . Chaque image est moyennée 100 fois pour augmenter le rapport signal sur bruit ce qui produit un léger élargissement du nuage  $F = 2$  dû aux fluctuations d'intensité du faisceau pousseur. On remarque clairement une diminution du déplacement du nuage  $F = 2$ , et donc, de la force de pression de radiation coopérative lorsque l'épaisseur optique augmente.

Une analyse quantitative des images expérimentales est donnée figure 2.7. La force de pression de radiation coopérative normalisée par la force de pression de

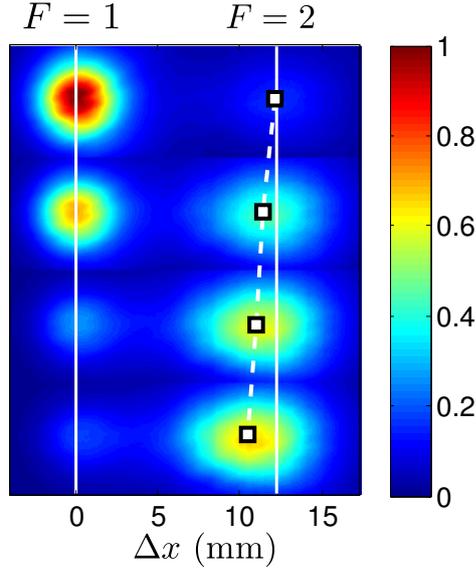


Figure 2.6 – Images de fluorescence des nuages dans les états hyperfins  $F = 1$  (gauche) et  $F = 2$  (droite). Les images sont normalisées au maximum d'intensité. Chaque ligne correspond à une réalisation expérimentale différente en pompant de plus en plus d'atomes dans le nuage  $F = 2$ . Les carrés blancs représentent la position du centre du nuage  $F = 2$  qui est déplacé d'une distance dépendant de son épaisseur optique. Pour cette expérience  $\Delta = -4.2\Gamma$  et, de haut en bas,  $b_0 = 5.5, 13.5, 17.9, 19.1$ .

radiation à un atome est tracée en fonction de l'épaisseur optique à résonance du nuage  $b_0$  pour deux valeurs du désaccord du faisceau pousseur :  $\Delta = -1.9\Gamma$  et  $\Delta = -4.2\Gamma$ . La valeur de la force de pression de radiation, estimée à partir des paramètres expérimentaux (intensité, désaccord, durée du pulse du laser pousseur, épaisseur optique), est en accord avec la formule théorique avec une erreur de  $\pm 20\%$ . La formule donnant la force de pression coopérative Eq. (2.4) peut être simplifiée en remarquant qu'avec les paramètres expérimentaux utilisés  $b_0/(k\sigma)^2 \ll 1$ , ce qui donne

$$\frac{F_c}{F_{\text{ind}}} = \frac{4\Delta^2 + \Gamma^2}{4\Delta^2 + \left(1 + \frac{b_0}{12}\right)^2 \Gamma^2}. \quad (2.6)$$

Ainsi, la force de pression de radiation coopérative a une dépendance Lorentzienne en épaisseur optique avec un maximum à  $b_0 = -12$ . Il est important de remarquer que cette formule dépend de l'épaisseur optique à *résonance*  $b_0$ , qui varie entre 0 et 30 au cours des expériences. Cependant, le désaccord du faisceau pousseur a été choisi de telle sorte que  $b(\Delta) < 1$ , pour rester dans le régime de diffusion simple où la solution "timed Dicke" est une bonne approximation. Une modélisation des données expérimentales à partir de l'équation (2.6), en utilisant le désaccord du faisceau pousseur comme seul paramètre ajustable, donne pour les deux courbes

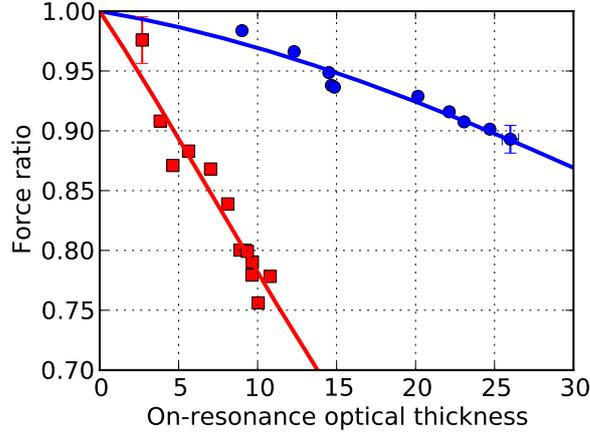


Figure 2.7 – Données expérimentales de la force de pression de radiation coopérative en fonction de l'épaisseur optique à résonance du nuage pour  $\Delta = -1.9\Gamma$  (carrés rouges) et  $\Delta = -4.2\Gamma$  (cercles bleus). Les barres d'erreurs typiques des fluctuations coup sur coup sont données. Les courbes continues correspondent à des ajustements à partir de l'équation 2.4, en utilisant le désaccord du faisceau pousseur comme seul paramètre ajustable. Elles permettent d'obtenir  $\Delta^{\text{mod}} = -1.4 \pm 0.2\Gamma$  et  $\Delta^{\text{mod}} = -4.3 \pm 0.2\Gamma$ , ce qui est en bon accord avec les paramètres expérimentaux utilisés.

$\Delta^{\text{mod}} = -1.4 \pm 0.2\Gamma$  et  $\Delta^{\text{mod}} = -4.3 \pm 0.2\Gamma$ . On remarque que, pour des désaccords trop proches de la résonance atomique, le nuage est fortement déformé (de façon différente au centre et sur les bords), ce qui illustre l'influence de la diffusion multiple. On a remarqué que l'accord expérimental avec le modèle théorique est moins bon (jusqu'à 20%) si on utilise un faisceau pousseur polarisé linéairement. Nous attribuons cet effet aux transitions Raman entre les différents sous-niveaux Zeeman qui ne sont pas incluses dans notre modèle à deux niveaux. Les effets de la structure interne atomique peuvent avoir des conséquences importantes comme cela a été observé, par exemple, dans le cas de la rétrodiffusion cohérente de la lumière sur un nuage d'atomes froids [76, 65]. Un scénario possible lors d'une excitation avec une lumière polarisée  $\pi$  est que deux photons diffusés peuvent avoir des états de polarisation différents, qui par conséquent, n'interfèrent pas ou que partiellement. Or, la superradiance étant basée sur des effets d'interférences, cela peut avoir des conséquences drastiques<sup>6</sup>. La solution est d'utiliser une polarisation  $\sigma$ , qui après deux ou trois diffusions au plus, pompe les atomes dans un sous niveau Zeeman de  $m_F$  maximum. Le nombre de photons diffusés étant de l'ordre de 100, les quelques photons nécessaires au pompage n'auront pas d'influence sur la mesure. De plus, avec un taux de diffusion de 100 kHz, le pompage optique dans

6. Une question intéressante serait d'étudier comment les effets coopératifs sont modifiés lors d'une diffusion Raman.

l'état  $F = 2$  par un faisceau polarisé circulairement est peu affecté par la précession de Larmor pour des champs magnétiques résiduels inférieurs à 20 mG.

Deux hypothèses importantes de notre modèle doivent être discutées : le fait que l'on suppose qu'un photon au plus est présent dans le nuage et que les positions des atomes sont fixées. Les expériences ont été effectuées à faible intensité (paramètre de saturation à un atome  $< 10^{-2}$ ). Cependant, il serait intéressant de voir à partir de quelle intensité des déviations du modèle linéaire ("un photon") commencent à apparaître (saturation collective). On s'attend à des déviations lorsque l'intensité est suffisamment importante pour exciter les autres étages de l'échelle de Dicke. Une autre hypothèse importante de notre modèle est de négliger l'effet Doppler qui peut produire un déphasage entre les dipôles induits [77]. Par exemple, des expériences sur la diffusion superradiante (superradiant scattering) dans des condensats de Bose-Einstein [62] ont montré qu'aucun signe de superradiance n'est observé au delà de la température de condensation à cause de ces mécanismes de déphasage. Contrairement à nos expériences, ce régime de superradiance où le temps de sortie des photons varie en  $N^2$  nécessite une forte excitation (où environ la moitié des atomes sont excités en même temps [34]). De plus, dans notre géométrie, la diffusion coopérative est fortement dirigée vers l'avant, ce qui diminue l'impact de l'effet Doppler  $(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}$  comparé à une géométrie où la diffusion coopérative se produit à  $90^\circ$  du faisceau incident ( $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde du photon incident,  $\mathbf{k}'$  est le vecteur d'onde du photon émis).

### Modèle "incohérent"

Nous avons vu que les effets coopératifs interviennent en conséquence d'interférences du champ diffusé et nécessitent donc un champ lumineux cohérent. Ici, nous considérons le cas d'un modèle où le champ lumineux est incohérent, i.e. où il n'y a pas d'effet d'interférences entre les champs diffusés par les atomes (pas de couplage dipôle-dipôle). Ceci équivaut à considérer les atomes comme indépendants. Le champ laser incident est alors exponentiellement atténué lors de sa propagation dans le nuage d'atomes froids (effet d'ombre [31]). Comme les atomes sont indépendants, les photons diffusés de façon isotrope diminuent l'intensité "vue" par les atomes suivants. En supposant que le nuage se trouve dans une boîte avec une densité uniforme, on obtient le rapport entre la force due à l'effet d'ombre  $F_{\text{shadow}}$  et la force s'exerçant sur les atomes sans que le laser soit atténué

$$\frac{F_{\text{shadow}}}{F_{\text{ind}}} = \frac{1 - e^{-b}}{b} \quad (2.7)$$

où  $b = b_0/(1 + 4\Delta^2/\Gamma^2)$  est l'épaisseur optique du nuage. Pour de petites épaisseurs optiques, la formule se simplifie  $F_{\text{shadow}}/F_{\text{ind}} = 1 - b/2$ , ce qui donne une dépendance linéaire en  $b$ . Le calcul précédent a été effectué pour une boîte car cela

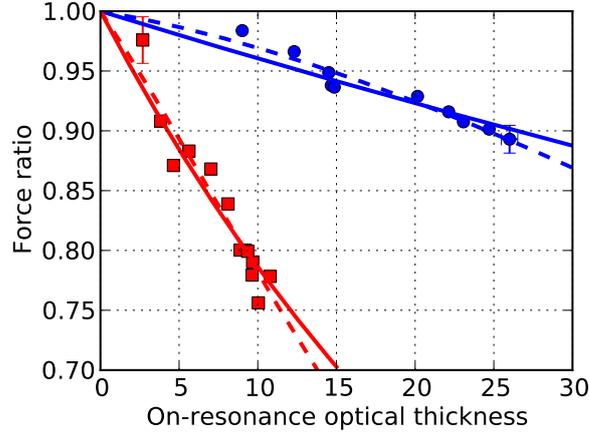


Figure 2.8 – Données expérimentales et modélisations pour  $\Delta = -1.9\Gamma$  (carrés rouges) et  $\Delta = -4.2\Gamma$  (cercles bleus). Les courbes en traits pleins représentent un ajustement selon l'équation (2.7). Avec le désaccord comme seul paramètre libre on obtient respectivement  $\Delta = -2.2\Gamma$  et  $\Delta = -5.5\Gamma$ . Les courbes en pointillés représentent les modélisations à partir de la formule (2.6) tenant compte des effets coopératifs. À titre de rappel, un ajustement en laissant le désaccord comme seul paramètre libre donne dans ce cas  $\Delta = -1.4 \pm 0.2\Gamma$  et  $\Delta = -4.3 \pm 0.2\Gamma$ .

simplifie considérablement les calculs tout en gardant l'essentiel de la physique. Nous remarquons que, contrairement au modèle cohérent, l'influence du détail de la structure atomique des atomes ne joue pas de rôle.

La figure 2.8 compare l'équation (2.7) aux données expérimentales obtenues précédemment. Dans les régimes de paramètres explorés, on remarque que l'équation (2.7) donne une interprétation alternative à la réduction de la force de pression de radiation malgré la simplicité du modèle que nous avons utilisé. Le désaccord  $\Delta$  est le seul paramètre libre lors des ajustements (comme cela était le cas pour la modélisation à partir de la formule tenant compte des effets coopératifs). Les données expérimentales ont été prises pour des désaccords de  $-1.9\Gamma$  et  $\Delta = -4.2\Gamma$  et les ajustements donnent  $\Delta = -2.2\Gamma$  et  $\Delta = -5.5\Gamma$ . Ceci est à comparer aux ajustements obtenus avec la formule tenant compte des effets coopératifs Eq. (2.6) donnant  $\Delta = -1.4 \pm 0.2\Gamma$  et  $\Delta = -4.3 \pm 0.2\Gamma$ . On remarque que, dans le cas du plus grand désaccord, la valeur trouvée par l'ajustement Eq. (2.7) est clairement moins bonne que celle tenant compte des effets coopératifs Eq. (2.6).

Même s'il permet de modéliser correctement les données expérimentales dans les régimes de paramètres explorés, le modèle incohérent n'est pas complet. Il possède le défaut de son avantage : *sa simplicité*. En effet, la diffusion de la lumière par un ensemble atomique est un problème intrinsèquement cohérent. Comme nous l'avons discuté jusqu'à présent, cela a d'importantes conséquences sur la réponse

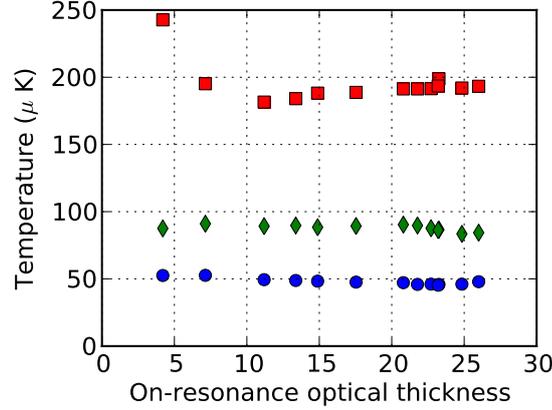


Figure 2.9 – Données expérimentales donnant les températures des nuages dans l'état  $F = 1$  et  $F = 2$  selon l'axe du faisceau pousseur et perpendiculairement à celui-ci en fonction de l'épaisseur optique à résonance du nuage dans  $F = 2$ . Les données ont été prises dans les mêmes conditions que précédemment avec un désaccord du faisceau pousseur de  $\Delta = -4.2\Gamma$ . Pour les atomes dans  $F = 1$ ,  $T_z = T_y \simeq 48 \mu\text{K}$  (cercles bleus). Pour les atomes dans  $F = 2$ ,  $T_z \simeq 189 \mu\text{K}$  (carrés rouges),  $T_y \simeq 90 \mu\text{K}$  (diamants verts).

du système. Le modèle décrivant la force de pression de radiation collective, présenté dans la partie 1.5.3, repose quant à lui sur une description autoconsistante de l'évolution du champ et des dipôles en partant d'équations fondamentales (équations de Maxwell et équations d'évolution des dipôles). Ainsi, le modèle incohérent est écarté du fait de son manque de consistance pour décrire le système plutôt que par les données expérimentales.

## Chauffage

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à la valeur moyenne de la force de pression de radiation collective et non à ses fluctuations. De façon très générale, les fluctuations des quantités physiques (ou les fonctions de corrélation) apportent des informations supplémentaires par rapport aux valeurs moyennes. Citons, par exemple, le rôle important du  $g^{(2)}$  en optique quantique ou celui des fluctuations de conductance pour caractériser la localisation d'Anderson en physique du solide.

Il est bien connu que les fluctuations de la force de pression de radiation conduisent à un chauffage des atomes. Comme nous pouvons le voir sur la figure 2.6, le nuage est chauffé de façon anisotrope lorsqu'il diffuse des photons. Même si, à ce stade, nous n'avons que des résultats très préliminaires concernant la théorie du chauffage dû aux effets coopératifs, cela ne nous a pas empêché de réaliser des mesures expérimentales.

La figure 2.9 donne les températures selon l’axe du faisceau pousseur et perpendiculairement à celui-ci. Les données ont été prises dans les mêmes conditions que celles utilisées dans la partie précédente avec un désaccord de  $\Delta = -4.2 \Gamma$ . La température du nuage qui n’est pas poussé ( $F = 1$ ) est de  $48 \mu\text{K}$ , alors que le nuage qui est poussé possède une distribution de vitesse anisotrope : dans la direction du laser incident  $T_z \simeq 189 \mu\text{K}$ , et dans une direction perpendiculaire  $T_y \simeq 90 \mu\text{K}$ . Comme nous l’avons discuté dans la partie précédente, environ  $N_{\text{sc}} = 100$  photons sont diffusés au cours de l’expérience, ce qui correspond à une augmentation de température pour des atomes indépendants de  $\Delta T = N_{\text{sc}} \times T_{\text{rec}} \simeq 36 \mu\text{K}$  où  $T_{\text{rec}} = 362 \text{ nK}$  est la température de recul du Rubidium. Ainsi, l’augmentation de température selon  $y$  (i.e. perpendiculairement à la direction du laser incident)  $\Delta T_y = 42 \mu\text{K}$  est compatible avec la valeur calculée pour des atomes indépendants. Par contre l’augmentation de température selon  $z$  (dans la direction du laser) est beaucoup plus importante  $\Delta T_z = 141 \mu\text{K}$ . Ces résultats sont seulement préliminaires et de nouvelles expériences plus quantitatives sont en cours.

### 2.2.3 Expérience préliminaire avec des atomes thermiques dans un piège dipolaire

Avant d’utiliser le protocole expérimental décrit ci-dessus pour mettre en évidence la force de pression de radiation collective, nous avons réalisé en 2008 une première série d’expériences où nous cherchions des signatures possibles du “*collective atomic recoil lasing*” (CARL) [23, 81]. L’effet CARL correspond à une organisation spontanée des atomes lorsque ceux-ci sont éclairés par un laser désaccordé hors de résonance. Par rapport aux expériences précédentes [75], ce dispositif expérimental n’utilise pas une cavité haute finesse, mais repose sur l’idée que le nombre important d’atomes que nous pouvons piéger pourrait compenser l’absence de cavité. Les résultats de ces expériences n’ont pas mis en évidence le phénomène de CARL mais ont fourni les premiers signaux expérimentaux de la diffusion collective de la lumière.

L’expérience a été réalisée en utilisant le même dispositif expérimental que celui décrit précédemment à la différence près que l’isotope utilisé est le  $^{85}\text{Rb}$ <sup>7</sup>. Après avoir chargé le MOT suivi d’une étape de dark MOT de 35 ms, les atomes sont chargés dans un piège dipolaire rouge consistant en un faisceau laser focalisé de waist  $\simeq 200 \mu\text{m}$ . Le laser du piège dipolaire est constitué d’un laser DFB qui est ensuite amplifié par un amplificateur laser semi-conducteur Sacher de puissance nominale 1 W. Pour plus de détails sur le dispositif expérimental, se reporter au

---

7. Nous avons changé par la suite pour le  $^{87}\text{Rb}$  quand nous sommes passés à l’étude du piège dipolaire à cause de ses propriétés favorables en ce qui concerne les collisions “s-wave”. En effet, le  $^{87}\text{Rb}$  a une longueur de diffusion positive alors que celle du  $^{85}\text{Rb}$  est négative.

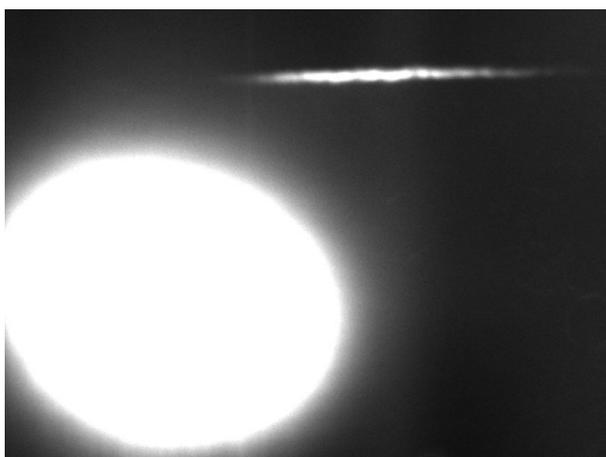


Figure 2.10 – Image de fluorescence des atomes froids. Le gros nuage correspond aux atomes en chute libre et le nuage fin de forme allongée correspond aux atomes dans le piège dipolaire.

chapitre suivant où le même système laser a été utilisé. Le piège dipolaire a un double rôle : il maintient les atomes contre la gravité grâce aux forces dipolaires, et, d'autre, part comme le désaccord du laser n'est pas très important<sup>8</sup>, la force de pression de radiation résiduelle pousse les atomes le long du piège dipolaire. Comme on peut le voir sur la figure 2.10, la plupart des atomes ne sont pas chargés dans le piège dipolaire et tombent sous l'effet de la gravité. Une petite fraction d'atomes est cependant chargée dans le piège dipolaire et est poussée le long de l'axe de propagation du laser. Cette observation n'est pas surprenante étant donné le désaccord relativement faible (par rapport aux pièges dipolaires typiques) que nous avons utilisé : entre  $\Delta = -50$  GHz et  $\Delta = -200$  GHz par rapport à la transition  $F = 3 \rightarrow F' = 4$  de la transition  $D_2$  du  $^{85}\text{Rb}$ . Ce régime de piège dipolaire où la pression de radiation ne peut pas être négligée est peu étudié puisque généralement on choisit des pièges très désaccordés de façon à minimiser le taux d'émission spontanée. Le protocole expérimental utilisant le piège dipolaire pour, tout à la fois, maintenir les atomes et les pousser rend difficile de contrôler indépendamment les paramètres du piège dipolaire (et donc la taille et la forme du piège) et ceux liés aux effets de pression de radiation. Cependant, cette expérience a fourni les premières signatures de force de pression de radiation coopérative que nous avons étudiées par la suite de façon plus quantitative. Dans cette partie, nous étudions les premiers résultats qualitatifs, qui ne peuvent pas être quantitativement comparés aux résultats théoriques. Comme ce protocole expérimental nécessite un temps d'interaction fini dans le piège dipolaire pour permettre la séparation entre les

---

8. Peu important pour un piège dipolaire mais bien plus important que le désaccord utilisé pour mesurer la force de pression de radiation coopérative dans la partie 2.2.

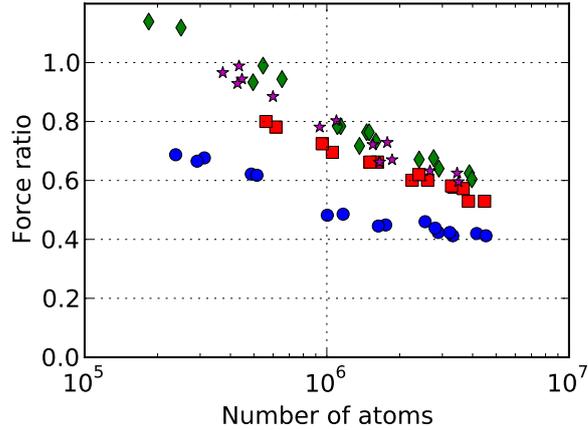


Figure 2.11 – Rapport entre la force de pression de radiation coopérative et la force s’exerçant sur des atomes indépendants. Lorsque le nombre d’atomes augmente, le nuage est moins poussé par le laser. Le temps d’interaction pour cette expérience est de 50 ms, la puissance du laser est de 100 mW et le désaccord de  $-76$  GHz (cercles bleus),  $-87$  GHz (carrés rouges),  $-90$  GHz (diamants verts),  $-108$  GHz (étoiles violettes).

atomes piégés et non-piégés, la forme du nuage d’atomes change pendant le temps d’interaction compliquant d’autant plus la comparaison avec le modèle théorique.

La figure 2.11 montre la force de pression de radiation coopérative normalisée par la force de pression de radiation pour des atomes indépendants. Cette force est extraite à partir du déplacement spatial du nuage puisque le temps d’interaction est connu. La normalisation de la force collective par rapport à la force s’exerçant sur des atomes indépendants est estimée grossièrement à partir de la puissance du laser et de son désaccord. On remarque clairement la réduction de la force de pression de radiation lorsque le nombre d’atomes dans le piège augmente.

Au cours de ces expériences, nous avons observé des phénomènes intéressants qui n’ont pas encore été étudiés de façon quantitative. Par exemple, nous avons observé des oscillations de la force de pression de radiation collective comme cela est montré sur la figure 2.12. Ces oscillations sont clairement visibles au-dessus des fluctuations coup sur coup qui, dans le cas de cette expérience, sont de l’ordre de 2.5 % pour le déplacement du centre de masse. Cette observation mérite d’être étudiée plus en détails, puisque s’il ne s’agit pas d’un artefact expérimental ; ceci pourrait être relié aux résonances de Mie [10] ou à des effets au-delà de l’approximation de Markov [117].

**Résonances de Mie** Un problème intéressant est de voir comment la diffusion collective de la lumière par un nuage d’atomes froids peut être interprétée classiquement en décrivant le système comme un objet macroscopique avec un indice

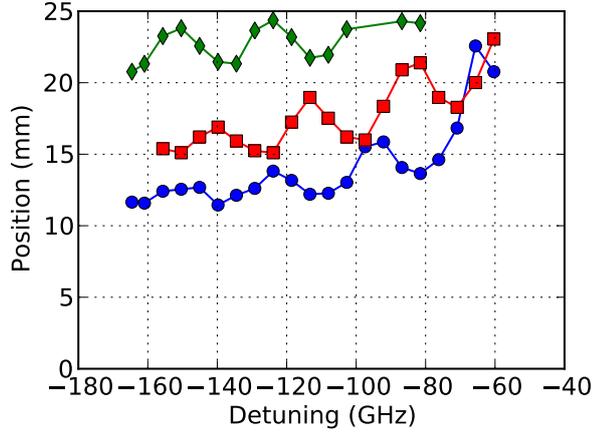


Figure 2.12 – Déplacement du centre de masse du nuage en fonction du désaccord pour différents temps d’interaction : 50 ms (cercles bleus), 60 ms (carrés rouges), 70 ms (diamants verts). La puissance du laser est de 100 mW.

complexe. Les auteurs de la référence [10] ont montré que des résonances de Mie peuvent être observées en modifiant la fréquence du faisceau laser incident ou le nombre d’atomes ce qui pourrait expliquer les données de la figure 2.11. Nous allons mettre en place des mesures plus systématiques de cet effet.

**Expérience de Tübingen** Le groupe de Tübingen s’est aussi intéressé aux effets coopératifs dans les nuages d’atomes ultra-froids. En mesurant la force de pression de radiation coopérative exercée par un faisceau laser très désaccordé avec un échantillon d’atomes ultra-froids très dense, Philippe Courteille et ses collaborateurs [13] ont pu identifier les rôles respectifs de l’augmentation du taux d’émission spontanée dû à la superradiance et ceux liés à la diffusion de Mie (diagramme d’émission). Nous renvoyons le lecteur à la référence [13] pour plus de détails.

## 2.3 Premières étapes vers l’observation de la sous-radiance

Comme nous le mentionnons dans le chapitre précédent, le phénomène de sous-radiance a été observé pour  $N$  atomes [90] où une réduction du taux d’émission dans un mode de radiation a été obtenue. Cependant, il n’a pas été possible de contrôler et de supprimer l’émission dans tous les modes du vide pour  $N$  atomes dans l’espace libre. Ceci explique le fait que l’augmentation de la durée de piégeage observée ne dépasse pas (ou de très peu) la durée de vie d’un atome individuel.

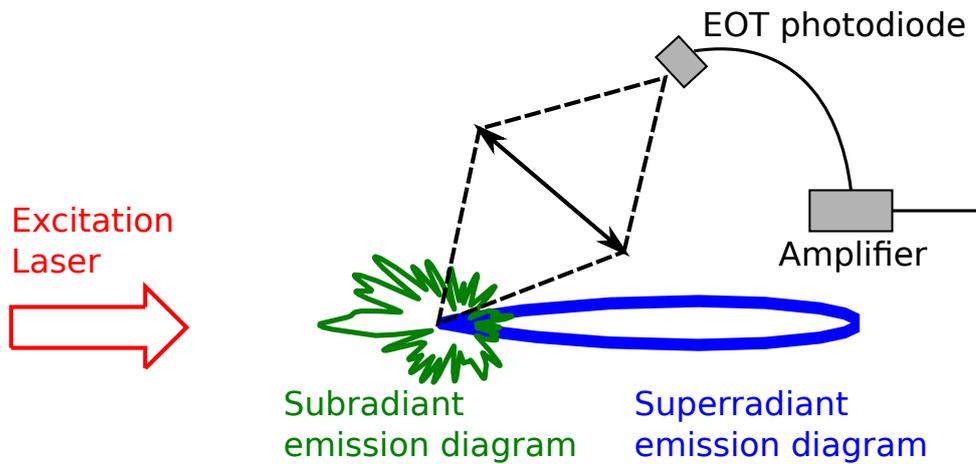


Figure 2.13 – Dispositif expérimental pour l’observation de la sousradiance.

Dans cette partie, nous décrivons la méthode et le dispositif expérimental que nous avons commencé à mettre en place pour observer, pour la première fois, la sousradiance d’un ensemble d’atomes dans l’espace libre.

Comme nous l’avons étudié dans la partie 1.6, nous voulons étudier la relaxation du système pour mettre en évidence le phénomène de sousradiance. Notre idée est de mesurer la fluorescence du nuage après avoir coupé le faisceau laser incident. Techniquement, il s’agit de pouvoir couper rapidement un faisceau laser, idéalement plus rapidement que  $\Gamma^{-1} = 27 \text{ ns}$ , tout en ayant une bonne extinction car la fraction sousradiante représente une faible partie de la fluorescence totale. De même, pour la détection, il faut un détecteur rapide ayant une bonne sensibilité, ainsi que des optiques ayant une grande ouverture numérique pour capter le maximum de signal. Comme nous l’avons vu, juste après la coupure du laser l’état *timed Dicke* émet dans la direction avant alors que les états sousradiants ont des diagrammes d’émission plutôt isotropes. Ainsi, nous avons intérêt à observer le nuage avec un angle par rapport à la direction de propagation du laser.

La fluorescence totale du nuage correspond au flux du vecteur de Poynting à travers une sphère centrée sur le nuage. D’après la partie 1.1.3 et l’annexe B, elle est égale à la perte d’énergie des atomes  $\propto d\langle\psi|\psi\rangle/dt$ . Ainsi, la fluorescence totale est proportionnelle à la dérivée de la population des états excités en fonction du temps. Bien évidemment, nous n’allons pas détecter la fluorescence totale, mais seulement l’intensité émise dans un angle solide donné. Cependant, comme les modes sousradiants émettent dans tout l’espace, on peut s’attendre pour ces derniers, à ce que l’intensité détectée corresponde à une fraction de la fluorescence totale.

La figure 2.13 montre un schéma du dispositif expérimental que nous allons mettre en place. Pour collecter la fluorescence des atomes, nous les imageons sur le

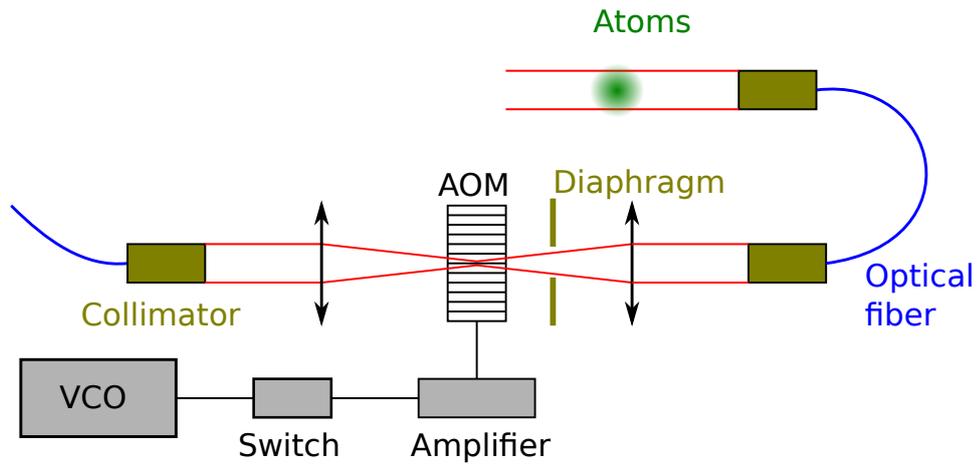


Figure 2.14 – Dispositif expérimental mis en place pour la coupure rapide du laser.

détecteur à l'aide d'un condenseur de 75 mm de diamètre et de 60 mm de distance focale. Le détecteur est une photodiode EOT ET-2030 ayant une bande passante de 1.2 GHz, une transimpédance de  $0.4 \text{ A W}^{-1}$  et une surface active de  $400 \mu\text{m}$  de diamètre. La photodiode est amplifiée par un amplificateur FEMTO HCA-200M-20K-C ayant une bande passante de 200 MHz et un gain de  $20 \text{ kV A}^{-1}$ . Dans le futur, nous allons aussi utiliser un autre système de détection consistant en une photodiode et un amplificateur regroupés dans un même module FEMTO HCA-S-200M-SI-FS. Ce système possède une bande passante de 200 MHz, un gain maximum de  $1.1 \cdot 10^4 \text{ V W}^{-1}$  et une surface active de  $800 \mu\text{m}$  de diamètre.

On peut s'attendre à avoir des signaux de fluorescence en fonction du temps semblables à la dérivée de la courbe de la figure 1.12, peut-être sans la première décroissance correspondant au mode superradiant car nous n'allons pas observer la fluorescence dans la direction avant. En fait, il y a aussi des modes superradiants dans toutes les directions mais ceux-ci ne sont pas plus peuplés que les modes sous-radiants. Par la suite, il s'agira de faire varier les différents paramètres : désaccord du laser, intensité, épaisseur optique du nuage, température, pour voir comment la sous-radiance se comporte par rapport à l'étude préliminaire faite dans la partie 1.6.

La coupure rapide du laser avec une bonne extinction est un élément primordial du dispositif expérimental. Nous avons envisagé deux solutions : une coupure à l'aide d'un modulateur électro-optique EOspace AZ-0K5-10-PFU-SFU-780, ou d'un modulateur acousto-optique (AOM) Crystal technology 3080-122. La solution mise en place pour l'instant est décrite sur la figure 2.14. Elle consiste en un faisceau laser fortement focalisé de  $25 \mu\text{m}$  de waist dans un modulateur acousto-optique suivi d'un diaphragme laissant passer seulement l'ordre  $-1$ . Une courbe d'extinction rapide est donnée sur la figure 2.15. Initialement, l'extinction s'effec-

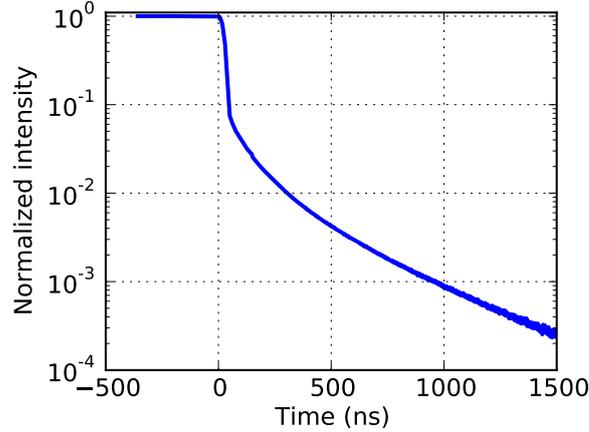


Figure 2.15 – Intensité du faisceau laser en fonction du temps lors de la coupure du laser ayant lieu à  $t = 0$ . Le dispositif expérimental utilisé est celui de la figure 2.14. La détection est effectuée à l’aide de la photodiode EOT.

tue avec un taux de  $5\Gamma$  sur un peu plus qu’une décade, puis est suivi d’un taux d’environ  $0.6\Gamma$ . L’extinction du faisceau laser après  $1.5\mu\text{s}$  est de l’ordre de  $10^{-4}$ . Ces résultats sont seulement préliminaires et devront être améliorés par la suite, ils sont *a priori* suffisants pour faire les premières mesures de sous radiance.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude expérimentale permettant de mesurer la force de pression de radiation coopérative s’exerçant sur un nuage d’atomes froids. Les effets coopératifs se manifestent par une réduction de la force de pression de radiation lorsque l’épaisseur optique du nuage augmente. La théorie de la diffusion collective développée au chapitre précédent permet de décrire quantitativement les résultats expérimentaux obtenus. Ces résultats représentent la première mesure de l’influence des effets coopératifs sur la force de pression de radiation.

La fin de cette partie est consacrée aux premières étapes de l’étude expérimentale de la sousradiance. À partir des investigations théoriques présentées précédemment, nous avons déduit un protocole expérimental visant à mettre en évidence pour la première fois la sousradiance d’un ensemble atomique dans l’espace libre.

Ce travail ouvre de nouvelles et nombreuses perspectives pour avancer dans la compréhension de l’interaction lumière-matière dans les nuages d’atomes froids. En particulier, nous souhaitons explorer de façon systématique un plus grand domaine de paramètres. Cela est désormais rendu possible grâce à l’automatisation de la

prise de données de l'expérience, ce qui n'était pas le cas au moment des expériences décrites dans cette partie. Nous souhaitons aussi étudier le chauffage du nuage (fluctuations), la saturation du système, les oscillations de la force de pression de radiation (résonances de Mie ou au-delà de l'approximation de Markhov) ainsi que l'influence des effets coopératifs dans le régime de diffusion multiple lorsque le faisceau laser incident est résonnant.

L'étude expérimentale des effets coopératifs présentée dans ce chapitre concerne les nuages dilués  $n\lambda^3 \ll 1$ . Un enjeu majeur consiste à explorer l'interaction lumière-matière dans les régimes denses  $n\lambda^3 \sim 1$  afin d'étudier la compétition entre les effets coopératifs et la localisation forte. Pour atteindre ce régime, nous développons dans la partie suivante une méthode de compression originale utilisant un piège dipolaire bleu croisé.

# Chapitre 3

## Piège dipolaire bleu

L'utilisation de pièges dipolaires pour manipuler et piéger les atomes froids et ultra-froids a permis de faire des progrès importants dans ce domaine de recherche. Ils peuvent, par exemple, être utilisés pour atteindre le régime de dégénérescence quantique pour des bosons [12] ou des fermions [50], créer des réseaux artificiels de lumière [51, 20], ou encore étudier la physique de basses dimensions en gelant certains degrés de liberté spatiaux [55].

L'interaction lumière-matière dans les régimes denses a fait l'objet d'études récentes [3, 66, 111] dont l'un des enjeux est de comprendre les rôles des effets coopératifs (superradiance, sousradiance, déplacement de Lamb collectif) et du désordre (localisation forte, ...). Pour atteindre ces régimes, un piège dipolaire peut être utilisé pour comprimer le nuage jusqu'aux densités où la localisation forte [6] est attendue et dont un seuil qualitatif est donné par le critère de Ioffe-Reggel [63] :  $k \cdot l \sim 1$ , où  $k = 2\pi/\lambda$  est le vecteur d'onde de la lumière et  $l = 1/(n\sigma)$  est le libre parcours moyen du photon ( $n$  la densité atomique,  $\sigma$  la section efficace de diffusion). Pour des diffuseurs résonnants, la section efficace de diffusion  $\sigma_0 \sim 3\lambda^2/(2\pi)$ , permet de réécrire le critère de Ioffe-Reggel sous la forme  $n\lambda^3 \sim 1$  (à ne pas confondre avec le seuil de condensation de Bose-Einstein  $n\Lambda_T^3 \sim 1$  où  $\Lambda_T = h/\sqrt{2\pi mk_B T}$  est la longueur d'onde thermique). Le régime des grandes densités est aussi utile à l'étude du déplacement de Lamb collectif  $\sim -n\lambda^3\Gamma$ . Pour le Rubidium, cela correspond à des densités de l'ordre de  $10^{13} - 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , trois ordres de grandeur supérieurs aux densités des pièges magnéto-optiques. De telles densités sont couramment obtenues dans des gaz ultra-froids aussi bien bosoniques [70] que fermioniques [72]. Cependant le nombre d'atomes relativement faible (quelques  $10^5$ ) et les longues durées de cycles (entre 15 s et 2 min) rendent particulièrement difficile l'étude de l'interaction lumière-matière dans de tels systèmes (voir par exemple les expériences du groupe de Mark Havey qui utilise un piège dipolaire  $\text{CO}_2$  de Rubidium pour étudier la localisation forte de la lumière [11]). Nos contraintes particulières imposent d'avoir un grand nombre d'atomes

piégés (pour avoir une taille du nuage plus grande que la longueur de localisation) ainsi qu’une durée de cycle la plus courte possible (pour pouvoir réaliser des moyennes et améliorer le rapport signal sur bruit), tout cela avec des densités importantes. Cependant, contrairement aux gaz ultra-froids nous n’avons pas de contraintes sur la température (tout du moins elles ne sont pas aussi fortes).

Dans cette partie, nous étudions un piège dipolaire croisé, désaccordé dans le bleu, dont la taille peut être ajustée de façon dynamique. Piéger les atomes dans des régions sombres entourées de lumière permet de minimiser le taux d’émission spontanée, les déplacements lumineux des niveaux atomiques ainsi que les collisions assistées par lumière [52]. Expérimentalement, les pièges dipolaires bleus nécessitent le développement de méthodes spécifiques pour produire des murs de lumière répulsifs. Ils sont donc plus difficiles à réaliser que les pièges rouges, où un faisceau unique fortement focalisé constitue déjà un piège intéressant. Cependant, une méthode originale [44] consiste à utiliser un faisceau laser qui tourne rapidement grâce à deux modulateurs acousto-optiques (AOMs). Lorsque la fréquence de rotation est suffisamment importante, le potentiel lumineux moyenné temporellement crée alors un tube de lumière. En croisant deux de ces tubes, on obtient un volume sombre où l’on piège les atomes. Cette méthode permet de contrôler de façon dynamique la forme et la taille du piège ce qui peut être utilisé pour obtenir un chargement efficace grâce à un grand volume de capture, puis de comprimer le nuage en diminuant sa taille. Ces potentiels dipolaires désaccordés dans le bleu et moyennés dans le temps ont déjà été utilisés dans le passé pour étudier la compression de nuages thermiques [44], les billards optiques et le chaos [86, 43, 68] ou encore pour créer des potentiels arbitraires microscopiques et dynamiques pour des condensats de Bose-Einstein [60] ou des gaz de Fermi ultra-froids [125]. Pour atteindre le régime de dégénérescence quantique, on pourrait imaginer réaliser une phase d’évaporation forcée en régime d’emballement (runaway), régime qui n’est pas facilement atteignable pour des pièges dipolaires classiques. Pour cela, il faut compenser la réduction des fréquences du piège due à l’abaissement de l’intensité du laser (ou augmenter le désaccord à puissance constante) en réduisant la taille du piège. Cette méthode a été utilisée pour des pièges dipolaires rouges en utilisant des lentilles de translation pour comprimer les atomes de façon dynamique [73].

### 3.1 Potentiel dipolaire

Les atomes interagissent avec la lumière de manière conservative et dissipative. La valeur moyenne de la composante dissipative correspond à la force de pression de radiation, déjà introduite précédemment. Elle provient du transfert d’impulsion des photons lors des cycles d’émission-absorption.

La composante conservative de l’interaction atome-lumière provient de l’inter-

action entre le dipôle induit par le laser avec le champ lumineux lui-même. Elle produit un décalage de l'énergie potentielle de l'atome appelé *déplacement Stark AC*. Pour de grands désaccords du laser par rapport aux transitions atomiques, les processus d'émissions spontanées peuvent être négligés et le déplacement lumineux permet de créer un potentiel conservatif pour piéger les atomes. En éclairant un nuage d'atomes avec un champ lumineux variant spatialement, on peut ainsi créer un champ d'énergie potentielle pour les atomes proportionnel à l'intensité lumineuse locale [19, 26].

### 3.1.1 Modèle de l'oscillateur

Le modèle de l'oscillateur [52] permet de calculer l'expression du potentiel dipolaire ainsi que le taux d'émission spontanée. Lorsqu'un atome est placé dans un champ électrique  $\mathbf{E}$  (considéré ici complexe), oscillant à la fréquence  $\omega/2\pi$ , celui-ci crée un moment dipolaire induit  $\mathbf{d}$ , oscillant à la même fréquence que le champ  $\mathbf{d} = \alpha(\omega)\mathbf{E}$  [64] ( $\alpha$  est la polarisabilité complexe de l'atome). Le potentiel dipolaire qui en résulte est obtenu en prenant la moyenne temporelle de l'énergie potentielle

$$U_{\text{dip}} = -\frac{1}{2}\langle \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \rangle = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha)I, \quad (3.1)$$

où l'intensité du champ laser est donnée par  $I = \epsilon_0 c |\mathbf{E}|^2/2$ . L'énergie potentielle de l'atome dans le champ lumineux est donc proportionnelle à l'intensité du champ laser et à la partie réelle de la polarisabilité. Le taux d'émission spontanée est obtenu en prenant le rapport de la puissance rayonnée par le dipôle divisée par l'énergie d'un photon  $\hbar\omega$  ce qui, après calcul, donne

$$\Gamma_{\text{sc}} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha)I. \quad (3.2)$$

Il dépend de la partie imaginaire de la polarisabilité.

La polarisabilité de l'atome peut être calculée à partir du modèle de Lorentz, théorie classique de l'interaction lumière-matière [4]

$$\alpha(\omega) = 6\pi\epsilon_0 c^3 \frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_0^2)\Gamma}, \quad (3.3)$$

où  $\omega_0$  est la fréquence de l'oscillateur et  $\Gamma$  son taux d'amortissement. À partir d'un modèle semi-classique qui traite l'atome comme un système à deux niveaux interagissant avec un champ laser classique [107], on retrouve le même résultat quand les effets de saturation peuvent être négligés (régime linéaire). L'amortissement  $\Gamma$  est alors déterminé par la valeur de l'élément de matrice du dipôle entre

l'état fondamental et l'état excité  $\Gamma = \omega_0^3 |\langle e|\mathbf{d}|g\rangle|^2 / (3\pi\epsilon_0\hbar c^3)$ . Dans le cadre d'intérêt pratique d'un grand désaccord  $|\Delta| \gg \Gamma$  (et en négligeant la saturation), on obtient en substituant la polarisabilité dans les formules précédentes

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left( \frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right) I(\mathbf{r}) \simeq \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\Delta} I(\mathbf{r}), \quad (3.4)$$

$$\Gamma_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \left( \frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right) I(\mathbf{r}) \simeq \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left( \frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 I(\mathbf{r}). \quad (3.5)$$

Pour les dernières égalités des équations (3.4) et (3.5), nous avons fait l'approximation de l'onde tournante, valable pour  $|\Delta| \ll \omega_0$ . Elle permet de négliger les termes anti-résonnants et de substituer  $\omega/\omega_0 \simeq 1$ . En introduisant l'intensité de saturation  $I_{\text{sat}} = \pi\hbar c\Gamma/(3\lambda^3)$ , nous pouvons réexprimer les quantités précédentes sous une forme utile en pratique pour l'expérimentateur

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\hbar\Gamma}{8} \frac{\Gamma}{\Delta} \frac{I(\mathbf{r})}{I_{\text{sat}}}, \quad (3.6)$$

$$\Gamma_{\text{sc}}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\Gamma}{8} \left( \frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 \frac{I(\mathbf{r})}{I_{\text{sat}}}. \quad (3.7)$$

Ces équations permettent de déduire trois points importants des pièges dipolaires :

**Signe du désaccord** Le signe du potentiel dipolaire dépend du désaccord du laser. Pour un laser désaccordé dans le rouge  $\Delta < 0$ , le potentiel est attractif. Les atomes sont attirés par les régions de forte intensité lumineuse. Pour un désaccord bleu  $\Delta > 0$ , le potentiel est répulsif et, par conséquent, repousse donc les atomes dans les régions de faible intensité.

**Dépendance en désaccord et intensité** Le potentiel dipolaire dépend de  $I/\Delta$ , alors que le taux d'émission spontanée dépend de  $I/\Delta^2$ . Ainsi, il faut choisir le désaccord du laser le plus grand possible, en tenant évidemment compte de la puissance totale disponible, pour minimiser le chauffage par émission spontanée et créer un piège quasi conservatif.

**Relation entre potentiel et taux d'émission spontanée** La relation

$$\hbar\Gamma_{\text{sc}} = \frac{\Gamma}{\Delta} U_{\text{dip}} \quad (3.8)$$

est une conséquence directe du lien qui existe entre la dispersion et l'absorption (c.f. relations de Kramers-Krönig).

### 3.1.2 Modèle de l'atome habillé

Il est possible de retrouver l'expression du potentiel dipolaire en calculant le déplacement lumineux de l'état fondamental à partir du modèle de l'atome habillé [29]. Le système considéré est l'atome, plus le champ lumineux quantifié. L'état fondamental  $|g, n\rangle$  correspond à l'atome dans son fondamental et  $n$  photons d'énergie non perturbée  $E_{g,n} = n\hbar\omega$ . L'état  $|e, n-1\rangle$ , un atome excité et  $n-1$  photons possèdent une énergie non perturbée  $E_{e,n-1} = n\hbar\omega - \hbar\Delta$ . Si le couplage est assez faible, on peut calculer le déplacement du niveau fondamental en utilisant la théorie des perturbations au deuxième ordre

$$\Delta E_{g,n} = \frac{|\langle e, n-1 | H_{\text{int}} | g, n \rangle|^2}{E_{g,n} - E_{e,n-1}} = \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta} \quad (3.9)$$

avec  $H_{\text{int}} = \hbar\Omega/2(a^\dagger S_- + a S_+)$  et  $\Omega = d_{eg}E/\hbar$ . On retrouve donc exactement l'expression (3.4) calculée dans le cadre du modèle de l'oscillateur.

## 3.2 Dispositif expérimental

Pour réaliser un piège dipolaire désaccordé dans le bleu, il s'agit d'entourer une région de l'espace avec des "murs optiques" qui repoussent les atomes. Ci-dessous, nous décrivons le dispositif expérimental permettant de créer une "boîte de lumière" dont la taille et la forme peuvent être contrôlées de manière dynamique.

### 3.2.1 Configuration du piège

Le piège est formé en croisant deux tubes de lumière laser désaccordée dans le bleu (voir figure 3.1), dont le diamètre et la section sont contrôlés temporellement (en pratique, on utilise des pièges de section carrée ou circulaire). À l'intersection de ces deux tubes, on obtient une "boîte de lumière" dont les murs confinent les atomes dans une région sombre.

Un schéma du dispositif expérimental permettant de créer les tubes de lumière est donné figure 3.2. Un faisceau laser collimaté de waist 1 mm traverse deux modulateurs acousto-optiques (AOMs) Gooch & Housego M080-2B/F-GH2 croisés à 90°. Ils sont alimentés respectivement par des signaux radiofréquence de fréquence instantanée respective  $f_1(t) = f_0 + \Delta f \cos(2\pi f_m t)$  et  $f_2(t) = f_0 + \Delta f \sin(2\pi f_m t)$ . La fréquence centrale  $f_0$  est fixée à 80 MHz, l'excursion en fréquence  $\Delta f$  est au maximum de 20 MHz et la fréquence de modulation d'environ 90 kHz. Il en résulte dans l'ordre (+1, +1) de diffraction des AOMs, un faisceau laser tournant rapidement à fréquence  $f_m$  (voir figure 3.3). Une lentille de 150 mm de focale placée à distance focale de deux AOMs permet de créer un tube de lumière (potentiel

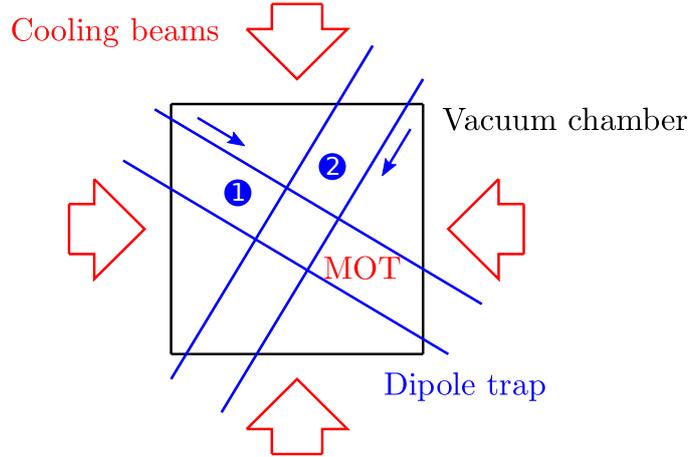


Figure 3.1 – Schéma du dispositif expérimental vu du haut de la chambre à vide montrant les deux tubes de lumière se croisant à  $90^\circ$  pour former le piège dipolaire.

moyenné) de diamètre  $\sim 1$  mm dont les bords mesurent  $65 \mu\text{m}$  de waist (dans le plan focal objet de la lentille). C'est à cet endroit que les atomes sont piégés. En utilisant un système de miroirs et de lentilles, on recycle le faisceau laser pour recroiser le même tube à  $90^\circ$  de sa direction initiale. En variant l'excursion en fréquence  $\Delta f$ , on contrôle dynamiquement la taille du piège, ce qui permettra plus tard de comprimer le nuage.

Un faisceau laser de profil d'intensité radial  $I(x, y) = \frac{2P}{\pi w^2} \exp(-2(x^2 + y^2)/w^2)$  décrivant une trajectoire circulaire de rayon  $a$ , produit un potentiel moyenné dans le temps

$$I(r) = \frac{2P}{\pi w^2} \exp\left(\frac{-2(r^2 + a^2)}{w^2}\right) \mathcal{I}_0\left(\frac{4ar}{w^2}\right), \quad (3.10)$$

où  $\mathcal{I}_0$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0<sup>1</sup>. Le potentiel dipolaire peut ensuite être évalué en substituant Eq. (3.10) dans Eq. (3.7).

**Potentiel dipolaire pour les grands pièges** Dans le cas où  $a^2/w^2 \gg 1$ , c'est-à-dire quand le rayon est grand devant le waist, i.e. pour les grands pièges, on remarque que la formule précédente devient

$$I(r) \simeq \frac{P}{\sqrt{2\pi^{3/2}}aw} \exp\left(\frac{-2(r-a)^2}{w^2}\right). \quad (3.11)$$

Sous cette forme, le profil d'intensité prend une forme très intuitive. Il s'agit d'une Gaussienne centrée en  $r = a$  dont l'intensité  $\propto P/(aw)$  est proportionnelle à la

1.  $I(r)$  est normalisé de telle sorte que  $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r dr I(r) = P$ .

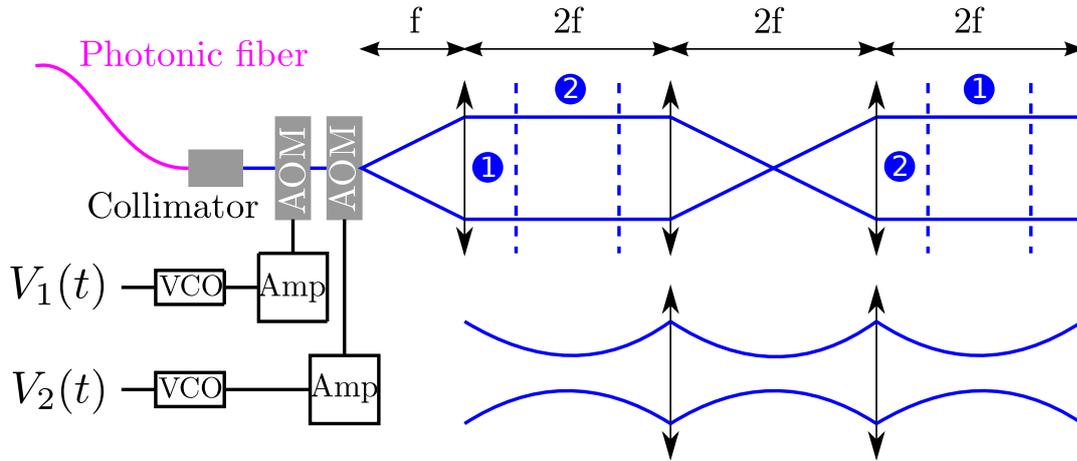


Figure 3.2 – Détails du dispositif expérimental utilisé pour produire les deux tubes (correspondant aux ordres  $(+1, +1)$  des AOMs). Sur la figure du haut, nous avons seulement représenté les contours du piège. La figure du bas représente l'évolution spatiale du profil du faisceau. Pour des raisons de simplicité, nous n'avons pas représenté les deux miroirs qui sont utilisés pour croiser les tubes 1 et 2 (les lignes pointillées montrent la position du croisement). Les trois lentilles utilisées sont identiques et possèdent une focale  $f = 150$  mm.

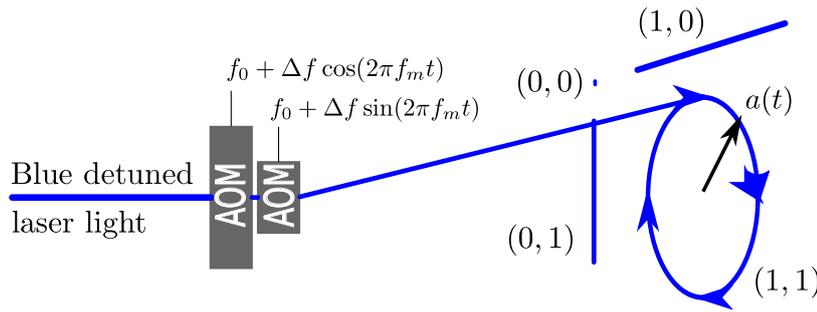


Figure 3.3 – Dispositif expérimental consistant en deux AOMs croisés. Dans l'ordre de diffraction  $(+1, +1)$  se crée un cône de lumière qui est ensuite converti en tube en plaçant les AOMs au foyer d'une lentille convergente.

puissance totale du laser divisée par l'aire de la couronne de rayon  $a$  et de waist  $w$ . À partir de l'intensité, et en utilisant l'équation (3.4), on déduit la forme du potentiel dipolaire

$$U_{\text{dip}} = U_{\text{dip}}^{\text{max}} \exp(-2(r - a)^2/w^2), \quad (3.12)$$

où la hauteur de la barrière est donnée par

$$U_{\text{dip}}^{\text{max}} = \frac{\hbar\Gamma}{8\sqrt{2}\pi^{3/2}} \frac{\Gamma}{\Delta} \frac{P}{I_{\text{sat}}aw}. \quad (3.13)$$

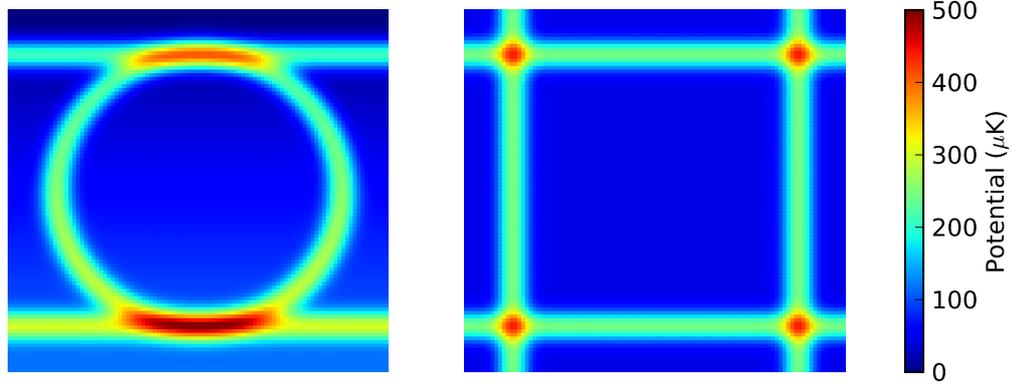


Figure 3.4 – Potentiel total vu par les atomes (dipolaire et gravité) pour le piège croisé dans les plans  $x, y = 0$  à gauche et  $z = 0$  à droite. Paramètres : hauteur de barrière  $U_{\text{dip}}^{\text{max}} = 220 \mu\text{K}$ , rayon  $a = 450 \mu\text{m}$  et waist  $w = 65 \mu\text{m}$ .

On remarque la dépendance en  $1/a$  de la hauteur de potentiel. En réduisant le rayon lors de la phase de compression, la hauteur de barrière va augmenter. De plus, la dépendance en  $1/w$  montre qu'il est intéressant de minimiser le waist pour avoir une hauteur de barrière maximale (ou pour une hauteur de barrière donnée permettre l'utilisation d'un plus grand désaccord pour réduire le taux d'émission spontanée).

Le potentiel total vu par les atomes dans le piège croisé correspond au potentiel dipolaire ayant la forme d'une boîte avec des murs Gaussiens, plus le potentiel de gravité. La figure 3.4 montre des coupes du potentiel total vu par les atomes dans les plans  $x, y = 0$  et  $z = 0$ , calculées pour des paramètres typiques de l'expérience.

**Potentiel dipolaire pour les petits pièges** Quand la taille du piège est réduite, il arrive un moment où les deux murs se touchent. Le potentiel ne peut alors plus être décrit par une boîte avec des murs Gaussiens. En développant l'expression (3.10) de  $I(r)$  à l'ordre deux en  $r$

$$I(r) = \frac{2P}{\pi w^2} \exp\left(\frac{-2a^2}{w^2}\right) \left(1 + \frac{4a^2 - 2w^2}{w^4} r^2\right), \quad (3.14)$$

on remarque que le potentiel dipolaire peut être décrit par un piège harmonique

$$U(r) = U_0 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2, \quad (3.15)$$

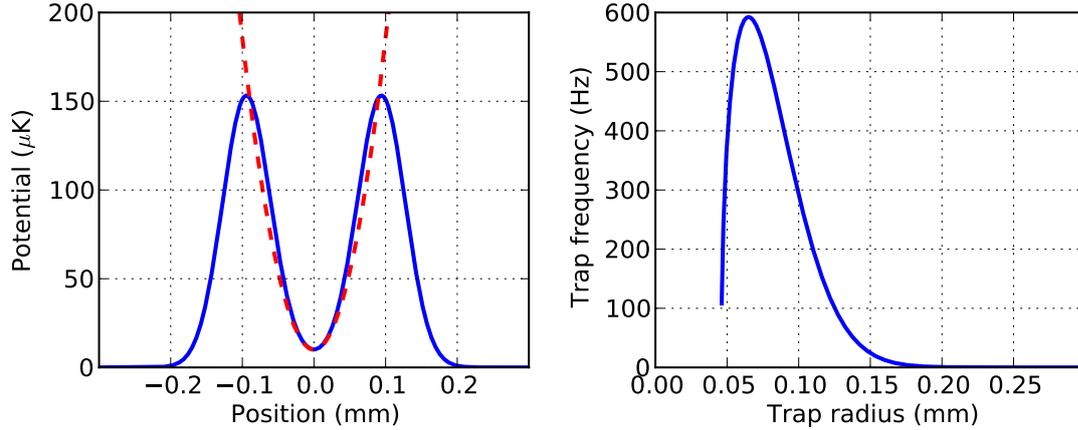


Figure 3.5 – La figure de gauche montre le potentiel dipolaire et son approximation harmonique donnée par l'équation (3.15). Paramètres utilisés :  $P = 2\text{ W}$ , désaccord  $8\text{ nm}$ ,  $a = 100\text{ }\mu\text{m}$ ,  $w = 65\text{ }\mu\text{m}$ . La fréquence du piège est de  $\omega/2\pi = 290\text{ Hz}$ . La figure de droite montre l'évolution de la fréquence du piège harmonique en fonction du rayon du piège.

où  $U_0$  et la pulsation du piège  $\omega$  s'expriment en fonction des paramètres du piège

$$U_0 = \frac{\hbar\Gamma}{4\pi} \frac{\Gamma}{\Delta} \frac{P}{I_{\text{sat}} w^2} \exp\left(\frac{-2a^2}{w^2}\right), \quad (3.16)$$

$$\omega = 2\sqrt{\frac{U_0}{m} \frac{\sqrt{2a^2 - w^2}}{w^2}}. \quad (3.17)$$

La figure 3.5 montre le potentiel dipolaire dans le cas d'un “petit piège” de rayon  $100\text{ }\mu\text{m}$  et de waist  $65\text{ }\mu\text{m}$ . Le potentiel harmonique (3.15) est une très bonne approximation. La figure de droite montre l'évolution de la fréquence du piège en fonction de son rayon. Lorsque le rayon  $a > 0.15\text{ mm}$ , le potentiel peut être avec une bonne approximation considéré comme une boîte et pour  $a < 0.15\text{ mm}$ , le piège devient harmonique. La possibilité de contrôler la fréquence du piège en modifiant sa taille est très intéressante dans la perspective de réaliser une évaporation dans le régime d'emballlement en compensant l'ouverture du piège due à l'abaissement de la barrière par une réduction de la taille du piège. La forte dépendance de la fréquence du piège en fonction de son rayon nous indique qu'il faudra porter une attention particulière au contrôle du rayon du piège lorsque l'on rentre dans le régime harmonique.

**Fréquence minimale de rotation** Un critère simple est de considérer que pendant une période de rotation  $1/f_m$ , les atomes ayant une vitesse  $\sim \sqrt{k_B T/m}$  ne s'échappent pas du piège, i.e. ils ne parcourent pas une distance supérieure au

waist du laser  $w$ . Cette condition s'écrit

$$f_m > \frac{1}{w} \sqrt{\frac{k_B T}{m}}. \quad (3.18)$$

Pour un waist de  $65 \mu\text{m}$  et une température de  $40 \mu\text{K}$ , on obtient  $f_m < 1 \text{ kHz}$ , ce qui est facilement réalisable en pratique.

Pour les petits pièges bien décrits dans l'approximation harmonique, la fréquence de rotation du piège doit être grande devant la fréquence du piège harmonique  $\omega/2\pi$ . Les fréquences maximales que l'on peut obtenir avec nos paramètres sont de l'ordre du kHz. En utilisant des fréquences de rotation proche de  $100 \text{ kHz}$ , on se place loin des deux contraintes précédentes.

### 3.2.2 Système laser

Une diode laser DFB, identique à celle utilisée pour le piège magnéto-optique (puissance  $80 \text{ mW}$ , largeur spectrale  $2 \text{ MHz}$ ) injecte un amplificateur laser semi-conducteur (semiconductor tapered amplifier) Sacher de puissance nominale  $1 \text{ W}$ . Le faisceau laser en sortie d'isolateur optique, d'une puissance d'environ  $900 \text{ mW}$ , injecte une fibre optique photonique<sup>2</sup> large cœur, monomode à maintien de polarisation (NTK Photonics LMA-PM-10). Le grand diamètre du cœur de fibre<sup>3</sup>  $10 \mu\text{m}$  permet de transporter une puissance lumineuse importante sans risque d'endommagement. L'efficacité de couplage dans la fibre est de  $60 \%$ , limitée par la faible qualité du mode laser sortant de l'amplificateur. Nous disposons donc en sortie de fibre de  $550 \text{ mW}$  de puissance lumineuse balayable sans saut de mode sur  $100 \text{ GHz}$  en jouant sur le courant de la diode laser. Une calibration à l'aide d'un interféromètre de Fabry-Perot donne une variation de  $2 \text{ GHz mA}^{-1}$ . Les désaccords utilisés varient entre  $5$  et  $100 \text{ GHz}$ . La puissance laser du piège dipolaire est contrôlée en ajustant la puissance RF des deux AOMs.

Pour ce dispositif expérimental, nous avons opté pour un système laser économique et facile d'utilisation basé sur des lasers à semi-conducteur. Un autre choix possible aurait été d'utiliser un laser titane-saphir. Les derniers modèles commerciaux sont maintenant beaucoup plus faciles à régler et à entretenir que par le passé et fournissent jusqu'à  $4 \text{ W}$ . La table 3.1 ci-dessous compare les avantages et inconvénients de chaque système.

	Avantages	Inconvénients
<b>Laser à semi-conducteur</b>	Prix (20 000 euros) Facilité d'utilisation Balayable sur 100 GHz	Piédestal Qualité du mode
<b>Laser titane-saphir</b>	Sans piédestal Qualité du mode Balayable sur plusieurs nm Puissance 4 W	Prix (150 000 euros) Entretien

Table 3.1 – Comparaison des avantages et inconvénients pour le choix de système laser.

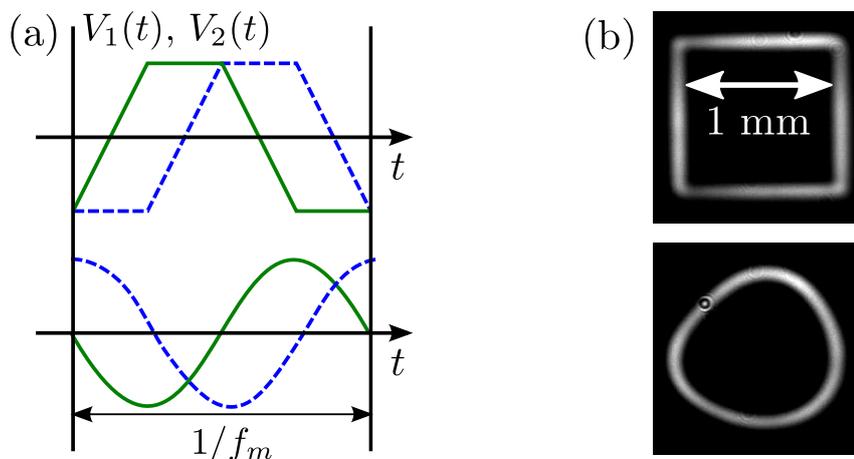


Figure 3.6 – Image d'une coupe transverse d'un tube du piège pour deux types de modulation différents. À titre d'exemple, nous montrons deux configurations utiles en pratique. (a) Signaux électriques ( $V_1(t)$ ,  $V_2(t)$ ) envoyés aux VCOs. (b) Images des coupes transverses. La taille du piège est de  $L = 1.05$  mm pour un waist de  $w = 65$   $\mu$ m.

### 3.2.3 Contrôle électronique des signaux radiofréquence

Pour générer les tubes de lumière, il faut piloter de façon précise les signaux RF des AOMs. Pour cela, nous utilisons des oscillateurs contrôlés en tension (VCOs) qui fournissent en sortie des signaux radiofréquence (RF) dont les fréquences instantanées  $f_i(t)$  dépendent linéairement des tensions d'entrées  $V_i(t)$ . Ainsi, pour un couple de tension d'entrée ( $V_1(t)$ ,  $V_2(t)$ ), on peut associer dans l'ordre de diffraction (+1, +1) des AOMs, une position  $(x(t), y(t))$  du faisceau laser. Il est donc possible

2. La nature microstructurée de la fibre permet de créer un saut d'indice effectif mais la lumière n'est pas confinée par un bandgap.

3. À comparer à une fibre 780 nm monomode, à maintien de polarisation de style Panda ayant un diamètre de cœur de 5.3  $\mu$ m.

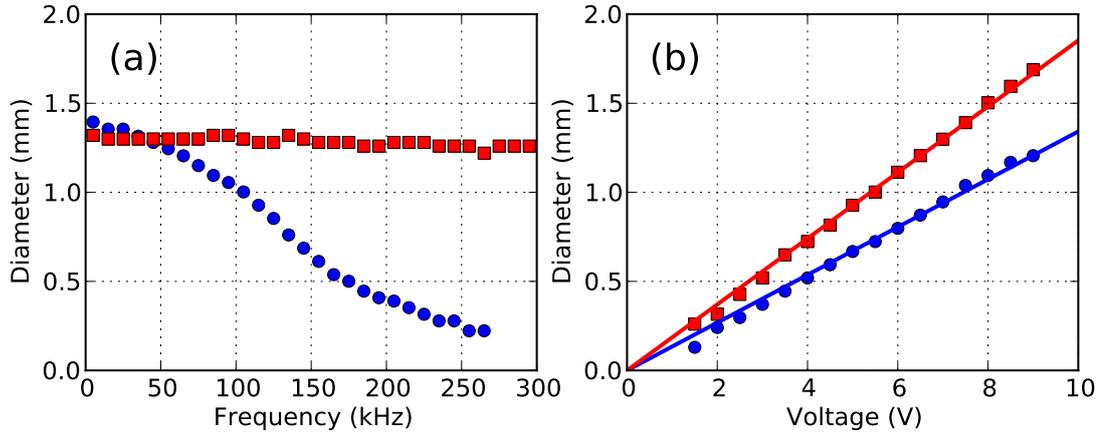


Figure 3.7 – (a) Diamètre du piège en fonction de la fréquence de contrôle du VCO1 (cercles bleus) et du VCO2 (carrés rouges) mesuré pour une tension de contrôle de 5 V. (b) Diamètre du piège en fonction de la tension de contrôle du VCO1 (cercles bleus) et du VCO2 (carrés rouges) mesuré pour une fréquence de contrôle de 90 kHz. La pente obtenue est respectivement de  $0.134 \text{ mm V}^{-1}$  et de  $0.185 \text{ mm V}^{-1}$ .

de créer des tubes de lumière de section arbitraire. À titre d'exemple, la figure 3.6 montre les signaux  $V_i(t)$  nécessaires à la production de tubes de sections circulaire et carrée ainsi qu'une mesure expérimentale du profil du tube qui en résulte. Le pilotage des VCOs est assuré par une paire de générateurs de fonction Agilent 33220A, verrouillés en phase.

Les performances et caractéristiques des VCOs utilisés sont essentielles au bon fonctionnement de l'expérience. Les paramètres importants sont la bande passante d'entrée et la stabilité en fréquence. Dans le montage expérimental total, cela correspond à la vitesse et à la précision avec laquelle on peut passer d'un point à un autre. Nous avons testé et caractérisé deux modèles de VCOs. Le premier est basé sur la puce Mini-Circuits POS-150 dont la fréquence de sortie peut être modulée entre 50 et 150 MHz avec une bande passante d'entrée à  $-3 \text{ dB}$  de 100 kHz. Ce système est limité par sa faible bande passante d'entrée et nous n'avons pas trouvé d'autre puce pouvant convenir. Dans la suite nous faisons référence à ce VCO sous le nom VCO1.

Le deuxième oscillateur est un montage consistant en deux VCOs Mini-Circuits POS-1060 pouvant être balayés entre 750 et 1060 MHz avec une bande passante d'entrée de 1 MHz. En multipliant les signaux de sortie des deux oscillateurs puis en filtrant le signal obtenu à l'aide d'un filtre passe bas, il est possible d'obtenir un système équivalent à un VCO modulable entre 50 et 150 MHz avec une bande passante d'entrée de 1 MHz. Ce système est appelé VCO2 dans la suite.

Nous avons non seulement caractérisé entièrement de façon électronique les

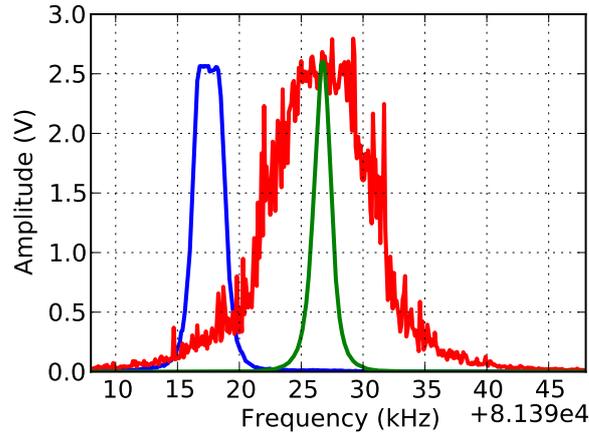


Figure 3.8 – Spectre électrique du VCO1 (courbe bleue, largeur 1.6 kHz) et du VCO2 (courbe rouge, largeur 6.7 kHz). Le spectre d'un synthétiseur (courbe verte) permet de montrer la limite de résolution de l'instrument de mesure utilisé (1 kHz).

deux VCOs mais aussi le système global composé du VCO, de l'amplificateur 1 W Mini-Circuits ZHL-1A, et du modulateur acousto-optique Gooch & Housego M080-2B/F-GH2. Dans un souci de concision, nous présentons seulement l'influence des performances des VCOs sur le système global. La figure 3.7 (a) donne le diamètre du piège en fonction de la fréquence du signal d'entrée. La bande passante d'entrée du VCO1 limitée à 100 kHz est clairement visible. Le VCO2 donne une réponse constante sur le domaine de fréquence exploré en accord avec sa bande passante d'entrée de 1 MHz. La figure 3.7 (b) montre la linéarité du diamètre du piège en fonction de la tension crête à crête du signal d'entrée. Sur ces données, il est clair que le VCO2 est très intéressant de part sa grande bande passante d'entrée.

Une autre caractéristique importante est la stabilité de la fréquence de sortie des VCOs. Pour une tension de commande des VCOs donnée, il faut que la fréquence de sortie ne fluctue pas pour définir de façon très précise la position du faisceau laser. Pour cette mesure, une tension de commande constante est appliquée sur l'entrée du VCO et le signal de sortie est envoyé sur un analyseur de spectre. On obtient une largeur spectrale de 1.6 kHz pour le VCO1 et de 6.7 kHz pour le VCO2 (voir figure 3.8). La mauvaise stabilité en fréquence du VCO2 peut se comprendre car il est composé de deux VCOs fonctionnant autour de 1 GHz. Ceux-ci ont une stabilité en fréquence absolue moins bonne qu'un VCO fonctionnant vers 100 MHz. Lorsque nous avons caractérisé le piège dipolaire avec les deux types de VCOs, nous avons mesuré des temps de vie beaucoup plus faibles avec le VCO2, démontrant l'importance de la stabilité en fréquence des VCOs. Malgré l'amélioration importante apportée par le VCO2 en termes de bande passante d'entrée, sa mauvaise stabilité en fréquence ne l'a pas rendu utilisable en pratique.

### 3.2.4 Paramètres et séquence expérimentale

Sauf précision contraire, les paramètres du piège utilisés dans la suite sont les suivants : taille  $L = 1$  mm, waist  $w = 65 \mu\text{m}$ , désaccord  $\Delta = 40$  GHz, fréquence de rotation  $f_m = 90$  kHz, puissance laser disponible  $P = 200 - 240$  mW, polarisation linéaire. Ces paramètres créent une barrière de potentiel de  $285 \mu\text{K}$  (voir Eq. (3.13)) dans le cadre du modèle de l'atome à deux niveaux. Pour tenir compte de la structure des niveaux atomiques, cette valeur doit être corrigée d'un facteur  $g = 2/3$  comme discuté dans l'annexe C, ce qui donne une hauteur de barrière de  $190 \mu\text{K}$ .

La séquence expérimentale se déroule en quatre étapes :

- **MOT** : cette étape permet de piéger  $\sim 3 \cdot 10^7$  atomes en  $2.5 \text{ s}^4$ . Le désaccord du laser de refroidissement est de  $-3\Gamma$ . La température du nuage est de  $\sim 55 \mu\text{K}$ .
- **Dark MOT** : l'intensité du repompeur est réduite à 10 % de sa valeur initiale et le désaccord du laser de refroidissement est progressivement augmenté de  $-3\Gamma$  à  $-6\Gamma$  pendant 50 ms. Cela permet de comprimer le nuage et de le refroidir à une température d'environ  $\sim 20 \mu\text{K}$ . Au cours de cette étape, l'intensité du piège dipolaire est augmentée progressivement pour avoir le meilleur "mode matching" possible entre le dark MOT et le piège dipolaire.
- **Piège dipolaire** : dans cette étape, les faisceaux de refroidissement du MOT et le champ magnétique sont coupés. Seul le faisceau repompeur reste allumé ce qui permet de garder les atomes dans le niveau hyperfin  $F = 2$  tout au long de l'expérience. Les atomes évoluent librement dans le potentiel dipolaire. La durée de cette étape est variable de 5 ms à 1.2 s.
- **Mesures** : les techniques d'imagerie décrites plus haut permettent de caractériser les propriétés du nuage : nombre d'atomes, température, densité...

La figure 3.9 montre une vue du piège du haut de la cellule dans le cas d'un piège contenant un seul tube et dans le cas d'un piège croisé.

## 3.3 Chargement

L'étape de chargement correspond au transfert d'atomes du dark MOT dans le piège dipolaire. Pendant les premières 60 ms, les atomes sont dans un régime transitoire avant d'atteindre un régime quasi-stationnaire. Au cours du chargement, tous les atomes ne sont pas transférés dans le piège dipolaire. Il est donc

---

4. Cette valeur est faible car il y a un très bon vide à l'intérieur de la cellule. Cela implique un temps de chargement long et peu d'atomes piégés en régime stationnaire. Il est possible d'augmenter la pression de la vapeur de Rubidium ou d'utiliser les diodes LIAD pour collecter plus d'atomes en un temps plus court. Cependant, nous voulons ici avoir un très bon vide pour ne pas être limité par les collisions avec le gaz chaud.

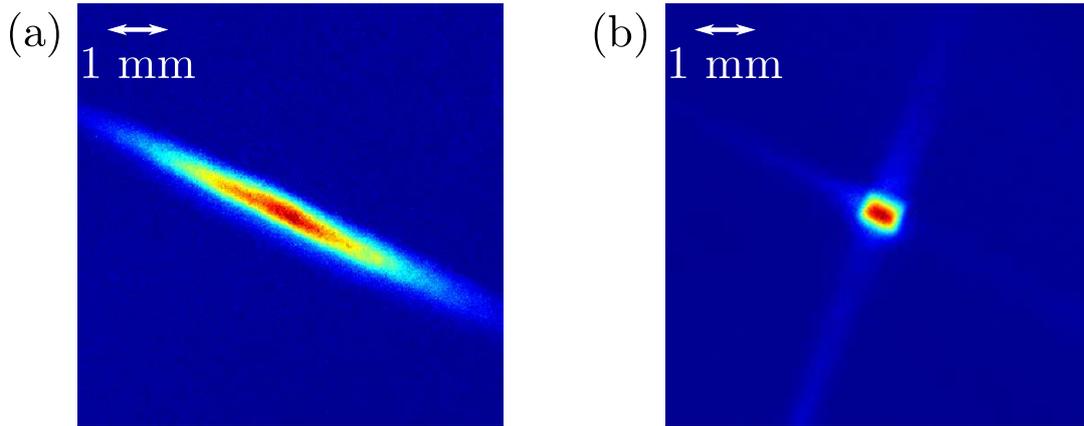


Figure 3.9 – Images de fluorescence des atomes dans le piège dipolaire vu du haut de la cellule après 100 ms de temps de maintien. (a) Piège avec un seul tube. (b) Piège croisé. Paramètres :  $P = 200$  mW,  $\Delta = 40$  GHz,  $L = 1$  mm,  $w = 65$   $\mu$ m,  $f_m = 90$  kHz.

important de comprendre les mécanismes ayant lieu au cours de cette étape pour pouvoir optimiser l’efficacité du transfert.

### 3.3.1 Régime transitoire

Ici, nous nous intéressons au régime transitoire conduisant au chargement du piège dipolaire. Les atomes sont transférés dans le piège dipolaire après une phase de dark MOT. Au cours du transfert, le “mode-matching” entre le dark MOT et le piège dipolaire n’est pas parfait, ce qui excite les atomes sous forme d’oscillations du centre de masse et de modes de respiration.

Cet effet est clairement visible sur la figure 3.10 qui donne la position du centre de masse du nuage après un temps de maintien dans le piège  $t_{\text{Hold}}$  suivi d’un temps de vol  $t_{\text{TOF}} = 3$  ms. La position du centre de masse à l’instant  $t = t_{\text{Hold}} + t_{\text{TOF}}$  s’écrit

$$\mathbf{r}_{CM}(t) = \mathbf{r}_{CM}(t_{\text{Hold}}) + \mathbf{v}_{CM}(t_{\text{Hold}})t_{\text{TOF}} + \frac{1}{2}\mathbf{g}t_{\text{TOF}}^2, \quad (3.19)$$

où  $\mathbf{r}_{CM}(t_{\text{Hold}})$  et  $\mathbf{v}_{CM}(t_{\text{Hold}})$  correspondent respectivement à la position et à la vitesse *in situ* du centre de masse du nuage après  $t_{\text{Hold}}$ . Si le centre de masse oscille dans le piège dipolaire, la formule (3.19) montre qu’il en est de même après un temps de vol. C’est bien ce qu’on observe sur la figure 3.10. La figure de droite montre la “température effective” du nuage obtenue par temps de vol en fonction du temps de maintien dans le piège. On observe aussi des oscillations ayant sensiblement la même fréquence que l’on identifie aux modes de respiration (“*breathing modes*”) du système.

On remarque que la période des oscillations est d’environ 25 – 30 ms, ce qui

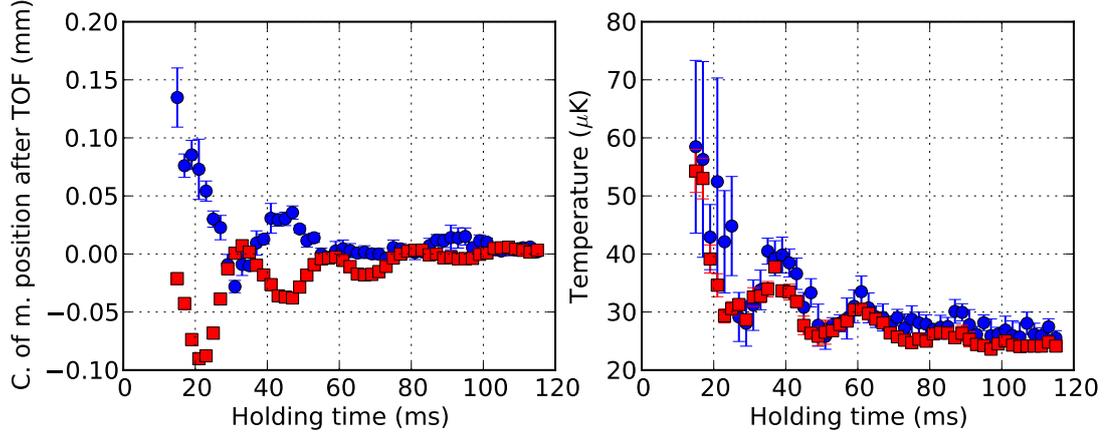


Figure 3.10 – Positions du centre de masse après temps de vol et températures du nuage pour différents temps de maintien dans le piège dipolaire (cercles bleus selon l'axe  $x$ , carrés rouges selon l'axe  $z$ ). Les mesures des positions ont été effectuées après 3 ms de temps de vol ce qui amplifie les distances. Paramètres :  $P = 200$  mW,  $\Delta = 40$  GHz,  $L = 1$  mm,  $w = 65$   $\mu$ m,  $f_m = 90$  kHz.

est compatible avec les atomes tombant d'une hauteur  $h = 500$   $\mu$ m sous l'effet de la gravité et rebondissant sur le fond du piège avec une période  $T = 2\sqrt{2h/g} \sim 20$  ms. La description exacte du problème est évidemment plus compliquée et des simulations numériques de la dynamique des atomes dans le piège confirment aussi le bon accord avec les valeurs de périodes observées expérimentalement. La figure 3.11 montre une simulation numérique du problème en une dimension donnant la position du centre de masse du nuage ainsi que sa taille rms *in situ* en fonction du temps de maintien dans le piège. Initialement, le nuage Gaussien est lâché au centre du piège. On observe qualitativement le même comportement que celui des données expérimentales. On remarque aussi que les oscillations sont fortement amorties, ce qui est principalement dû au caractère anharmonique du piège dipolaire. Le taux d'amortissement obtenu numériquement est moins important que celui observé expérimentalement. Cela peut être dû au fait que les simulations numériques ont été effectuées en une dimension, alors que l'expérience se passe en trois dimensions.

### 3.3.2 Nombre d'atomes piégés à la fin du régime transitoire

Après l'étude du régime transitoire, on s'intéresse au nombre et à la fraction d'atomes transférés à partir du dark MOT dans le piège dipolaire. Il est particulièrement important de comprendre les mécanismes intervenant lors du chargement du piège dipolaire pour pouvoir maximiser le transfert d'atomes. Pour cela, nous avons mesuré le nombre d'atomes et la température du nuage 60 ms après son

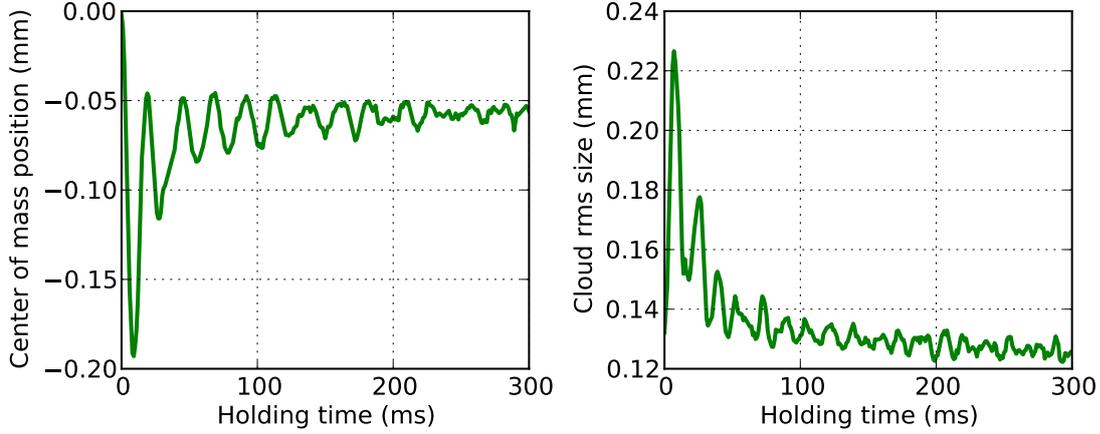


Figure 3.11 – Simulations en une dimension de la dynamique du nuage dans le piège dipolaire pour des paramètres comparables à ceux utilisés pour les données expérimentales. On remarque que les simulations numériques donnent qualitativement le même comportement que les données expérimentales.

chargement. Ce temps d’attente est nécessaire pour dépasser le régime transitoire et aussi pour que les atomes non piégés tombent et ne gênent pas la mesure. La puissance du laser peut être ajustée jusqu’à une puissance maximale de 200 mW. Nous avons pris des données pour deux valeurs de désaccord 20 GHz et 40 GHz, la taille du piège étant d’environ 1 mm. Initialement, le piège est chargé à partir d’un dark MOT d’environ  $1.3 \cdot 10^7$  atomes, à une température de  $22 \mu\text{K}$ . La figure 3.12 donne les résultats de ces mesures. Les courbes continues sont des ajustements à partir du modèle de chargement détaillé ci-dessous. Elles permettent, grâce à un unique paramètre ajustable, de déterminer la hauteur de barrière du piège correspondant à  $P_{\text{max}} = 200 \text{ mW}$ . Pour le piège à 20 GHz, on obtient  $U_{\text{dip}} = 320 \mu\text{K}$ , et  $U_{\text{dip}} = 190 \mu\text{K}$  pour le piège à 40 GHz. On peut comparer ces valeurs à la hauteur de barrière estimée théoriquement (voir Eq. (3.13) et annexe C), où l’on obtient respectivement  $U_{\text{dip}} = 380 \mu\text{K}$  et  $U_{\text{dip}} = 190 \mu\text{K}$ . On remarque le très bon accord entre les valeurs de hauteurs de barrières trouvées à partir de notre modèle de chargement et les valeurs estimées à partir des paramètres du piège.

Les courbes de température ont été obtenues par mesure du temps de vol. On remarque qu’elles se stabilisent sur un plateau correspondant à une température finale proche de celle du dark MOT, et que, la stabilisation en température et en nombre d’atomes s’effectue à des puissances quasiment identiques : autour de  $0.7 P_{\text{max}}$  pour la courbe à 40 GHz et de  $0.5 P_{\text{max}}$  pour la courbe à 20 GHz. Quand le piège est suffisamment profond, on piège tous les atomes et la température est celle du dark MOT initial. Avant le plateau, l’augmentation linéaire de la température peut être attribuée à l’augmentation linéaire de la profondeur du

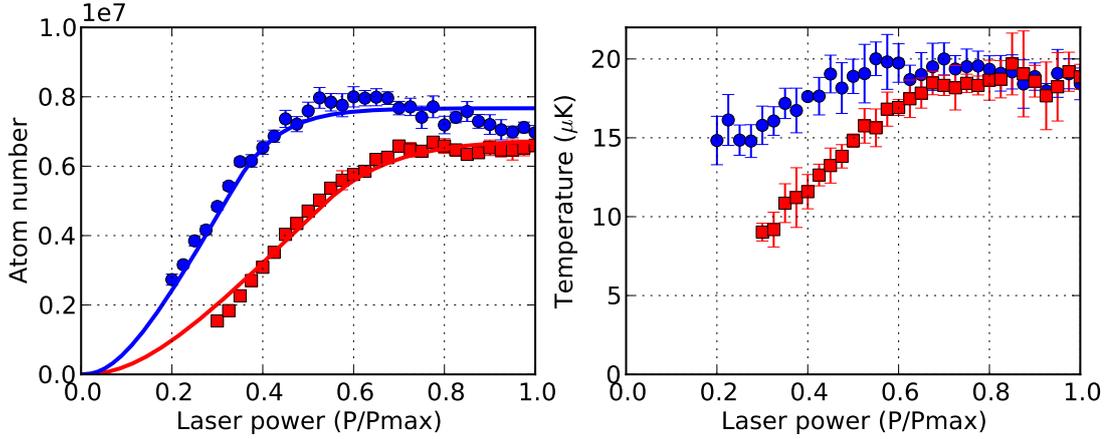


Figure 3.12 – Nombre d’atomes et température des atomes dans le piège dipolaire, 60 ms après le chargement, en fonction de la puissance laser ( $P_{\max} = 200$  mW) pour un désaccord de  $\Delta = 20$  GHz (cercles bleus) et  $\Delta = 40$  GHz (carrés rouges). Les courbes en traits pleins sur la figure de gauche correspondent aux ajustements à partir de la formule 3.22. Paramètres :  $L = 1$  mm,  $w = 65$   $\mu\text{m}$ ,  $f_m = 90$  kHz.

piège. La courbe rouge passe par l’origine (au signal sur bruit prêt) ce qui est consistant avec l’interprétation selon laquelle seuls les atomes ayant une énergie mécanique inférieure à la hauteur de la barrière sont piégés lors du chargement. Cependant, la courbe bleue ne semble pas se prolonger par l’origine. Cela peut être dû au chauffage par émission spontanée qui est plus important pour le piège à 20 GHz que pour celui à 40 GHz.

L’efficacité de chargement est définie comme étant le rapport entre le nombre d’atomes dans le piège dipolaire après 60 ms de temps de maintien et le nombre d’atomes dans le dark MOT mesuré avant le chargement. Pour les données expérimentales présentées sur la figure 3.12, le nombre d’atomes dans le dark MOT est d’environ  $1.3 \cdot 10^7$  atomes ce qui correspond à une efficacité de chargement d’environ 60 %. On remarque la très bonne efficacité de chargement par rapport aux pièges dipolaires rouges. Lorsque la taille du dark MOT est plus petite que le volume de piégeage des atomes, les atomes non piégés sont ceux possédant une énergie mécanique (cinétique + potentielle) trop grande : ils passent par-dessus la barrière de potentiel. En compensant la gravité (en pompant optiquement les atomes dans un sous-niveau Zeeman et en appliquant un gradient de champ magnétique vertical), les atomes ne possèdent plus qu’une énergie cinétique et il doit être possible d’améliorer de façon significative l’efficacité de chargement. Il est aussi possible de piéger plus d’atomes en augmentant la hauteur de la barrière de potentiel en modifiant la puissance ou le désaccord du laser. Le nombre maximum d’atomes pouvant être piégés est égal à la densité du dark MOT ( $< 5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ ), multipliée

par le volume de capture ( $\sim 1 \text{ mm}^3$ ) ce qui donne un nombre maximum d'atomes potentiellement piégés de  $5 \cdot 10^8$ .

**Modèle pour le chargement** Pour simplifier le problème (tout en gardant la physique), on considère le chargement des atomes dans une boîte cubique de taille  $L$  qui est la modélisation la plus simple du volume de capture lorsque le piège dipolaire est croisé. On suppose que, lors du chargement du piège, les atomes sont distribués uniformément dans l'espace de dimension  $n$ , avec une distribution d'impulsion donnée par la distribution de Boltzmann<sup>5</sup>

$$p(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{\Lambda_T^n}{L^n} \exp \left[ -\frac{\mathbf{p}^2}{2mk_B T} \right], \quad (3.20)$$

où  $\Lambda_T = h/\sqrt{2\pi mk_B T}$  est la longueur de Broglie. La densité de probabilité qu'un atome ait une énergie  $E$  est

$$p(E) = \int \frac{d^n \mathbf{p} d^n \mathbf{r}}{h^n} \delta(E(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - E) p(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \quad (3.21)$$

où l'énergie d'un atome a la forme  $E(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathbf{p}^2/(2m) + mgz$ . Après quelques lignes de calculs (non détaillées ici pour ne pas ennuyer le lecteur), on obtient la probabilité pour qu'une particule ait une énergie  $E$

$$p(E) = \frac{nC_n}{2\pi^{\frac{n}{2}} k_B T} \left( \frac{E}{k_B T} \right)^{\frac{n}{2}-1} \exp \left[ -\frac{E}{k_B T} \right] \mathcal{F}_n \left( \frac{E}{mgL}, \frac{mgL}{k_B T} \right), \quad (3.22)$$

avec  $C_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$  le volume de la boule unité en dimension  $n$ <sup>6</sup> et  $\mathcal{F}_n$  la fonction définie par

$$\mathcal{F}_n(\alpha, \beta) = \int_0^{\min(\alpha, 1)} du \left( 1 - \frac{u}{\alpha} \right)^{\frac{n}{2}-1} \exp(\beta u). \quad (3.23)$$

Si on suppose que la hauteur du piège dipolaire est  $U$ , alors la fraction d'atomes  $N/N_0$  qui reste dans le piège lors du chargement est donnée par

$$\frac{N}{N_0} = \int_0^U dE p(E). \quad (3.24)$$

La figure 3.13 donne la densité de probabilité  $p(E)$  ainsi que la fraction d'atomes piégés  $N/N_0$  en fonction de la hauteur de potentiel  $U$  avec et sans gravité en dimension 3. Cela permet de mettre en évidence l'importance de la gravité qui tend

5. Elle est normalisée de sorte que  $\int \frac{d^n \mathbf{p} d^n \mathbf{x}}{h^n} p(p, x) = 1$ .

6.  $C_1 = 2, C_2 = 2\pi, C_3 = \frac{4}{3}\pi, \dots$

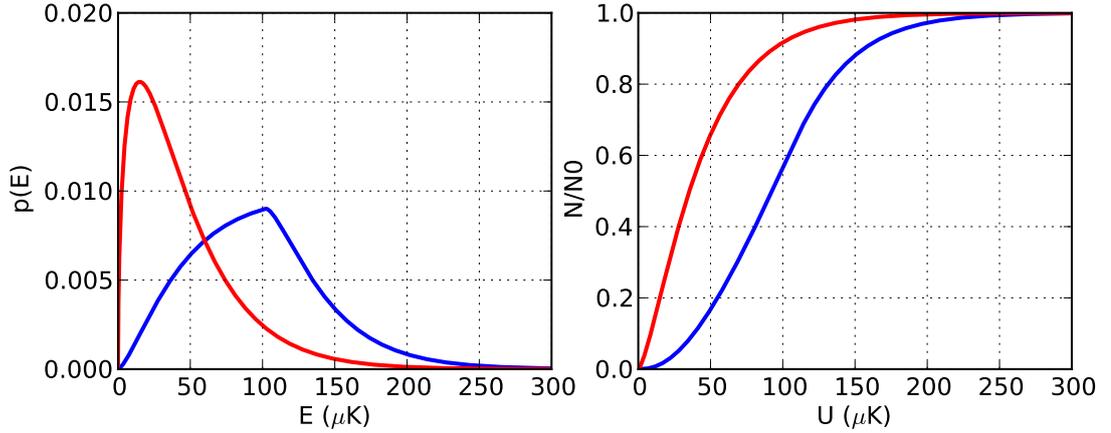


Figure 3.13 – Densité de probabilité  $p(E)$  de trouver un atome avec une énergie  $E$  dans la boîte (figure de gauche) et fraction d’atomes piégés en fonction de la hauteur de barrière  $U$  (figure de droite) pour une température initiale du nuage de  $30 \mu\text{K}$  et une taille de boîte de  $1 \text{ mm}$  (en dimension 3). La courbe bleue tient compte de la gravité et la courbe rouge est sans gravité. On voit ici l’importance de la gravité qui, lors du chargement, tend à diminuer son efficacité.

à diminuer l’efficacité de chargement. On peut imaginer compenser la gravité à l’aide de champs magnétiques ce qui aurait, de plus, l’avantage de réduire l’interaction avec les murs en assurant une répartition homogène des atomes dans tout le nuage. Cependant, le taux d’émission spontanée du piège peut réduire l’efficacité du pompage optique nécessaire pour compenser la gravité.

**Remarque** Dans la limite sans gravité ( $g \rightarrow 0$ ), la formule (3.22) se simplifie pour donner la densité de probabilité de l’espace libre

$$p(E) = \frac{nC_n}{2\pi^{\frac{n}{2}}k_B T} \left( \frac{E}{k_B T} \right)^{\frac{n}{2}-1} \exp \left[ -\frac{E}{k_B T} \right]. \quad (3.25)$$

Devant le facteur de Boltzmann, on reconnaît la densité d’état d’une boîte de dimension  $n$ .

### 3.4 Propriété du piège en régime quasi-stationnaire

Après un régime transitoire conduisant au chargement du piège dipolaire, la dynamique des atomes a lieu sur une échelle de temps plus longue : le régime quasi-stationnaire. Nous allons étudier l’évolution du nuage dans le piège dipolaire en fonction des différents paramètres de l’expérience pour comprendre les phénomènes

limitant les performances du piège. Les principales quantités auxquelles nous allons nous intéresser sont :

- le nombre d’atomes dans le piège en fonction du temps de maintien,
- le temps de vie du nuage qui est extrait de la courbe donnant le nombre d’atomes en fonction du temps de maintien,
- la température du nuage qui est obtenue en utilisant la méthode de temps de vol.

Les principaux critères de performance pour l’application que nous voulons faire du piège dipolaire (comprimer le nuage) sont un nombre important d’atomes initialement chargés, un grand temps de vie et une température du nuage la plus faible possible (chauffage faible).

### 3.4.1 Profil de densité spatiale *in situ*

Pour un piège de taille  $L$ , les effets de gravité peuvent être négligés quand  $mgL \ll k_B T$ . Pour une température du nuage de  $40 \mu\text{K}$ , cette condition donne  $L \ll 400 \mu\text{m}$ , ce qui montre que la gravité est un paramètre important à prendre en compte pour les grands pièges. L’influence de la gravité peut être observée sur l’imagerie d’absorption latérale (voir figure 3.14) où les atomes sont posés sur le fond du piège. Cette situation est analogue à ce qui est observé pour les pièges magnéto-optiques de Strontium sur la raie d’intercombinaison à  $689 \text{ nm}$  [25].

Si les atomes sont à l’équilibre thermodynamique, on peut s’attendre à ce que l’épaisseur optique du nuage soit donnée par le facteur de Boltzmann

$$b(z) = b(0) \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right). \quad (3.26)$$

La figure 3.14 montre le profil vertical d’épaisseur optique du nuage. Une modélisation à partir de Eq. (3.26) donne une température de  $T = 18 \mu\text{K}$ . Une mesure de température en utilisant la méthode du temps de vol donne une température de  $21 \mu\text{K}$ , ce qui est en bon accord avec la mesure précédente. Le bon accord concernant les deux mesures de température n’est pas du tout évident *a priori*. En effet, le seul mécanisme pouvant conduire vers un nouvel état d’équilibre thermodynamique auquel nous avons pensé est celui des collisions “s-wave”. Or, les densités mesurées dans ces expériences conduisent à des taux de collisions “s-wave” très faibles qui ne peuvent pas expliquer la thermalisation du nuage. Une question ouverte est de savoir si ces résultats peuvent être décrits en suivant la dynamique individuelle des atomes sans interaction (collision).

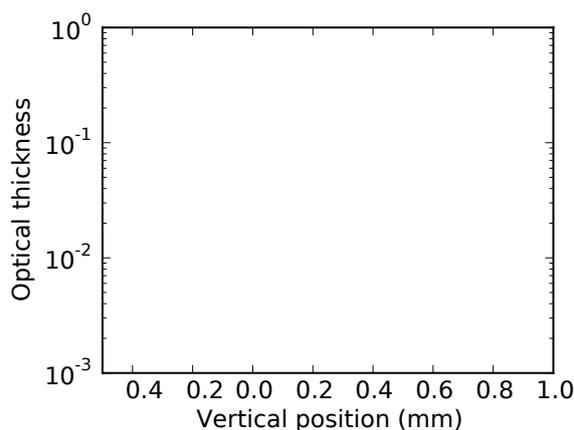


Figure 3.14 – Image d’absorption *in situ* du nuage d’atomes 450 ms après le chargement du piège. Le cercle pointillé blanc représente la limite du piège. Les atomes sont posés sur le fond du piège à cause de la gravité. La figure de droite montre une coupe verticale du profil d’épaisseur optique du nuage. L’origine a été choisie à la position où l’épaisseur optique est maximale. L’ajustement  $b(z) = b(0) \exp(-mgz/k_B T)$  (courbe en pointillés rouges) donne une température  $T = 18 \mu\text{K}$ . La température mesurée par temps de vol dans les mêmes conditions donne  $21 \mu\text{K}$ . Paramètres :  $P = 200 \text{ mW}$ ,  $\Delta = 40 \text{ GHz}$ ,  $L = 1 \text{ mm}$ ,  $w = 65 \mu\text{m}$ ,  $f_m = 90 \text{ kHz}$ .

### 3.4.2 Pertes par collision avec gaz chaud résiduel

Pour savoir si le temps de vie du piège est limité par les collisions des atomes piégés avec le gaz chaud résiduel, nous avons effectué deux mesures de temps de vie. Une, en suivant la séquence expérimentale standard, et une autre, en allumant les diodes LIAD pendant le temps de piégeage ce qui a pour effet d’augmenter temporairement la pression de la vapeur chaude de la cellule. Nous n’avons remarqué aucune différence de temps de vie entre ces deux expériences, ce qui nous permet de conclure que le temps de vie n’est pas limité par les collisions avec le gaz chaud résiduel.

### 3.4.3 Influence de la taille

La mesure du temps de vie du piège en fonction de sa taille est une donnée importante dans la perspective de la compression. Après avoir suivi la procédure standard de chargement, les atomes sont maintenus dans le piège dipolaire pendant 20 ms, puis la taille du piège est ensuite réduite linéairement en 20 ms. La fin de cette procédure sert de condition initiale pour mesurer le temps de vie. Nous suivons cette démarche expérimentale car elle permet d’obtenir un chargement efficace du piège et de s’affranchir des atomes non piégés qui tombent sous l’effet de la gravité. Les conditions expérimentales ont été choisies de telle sorte que la

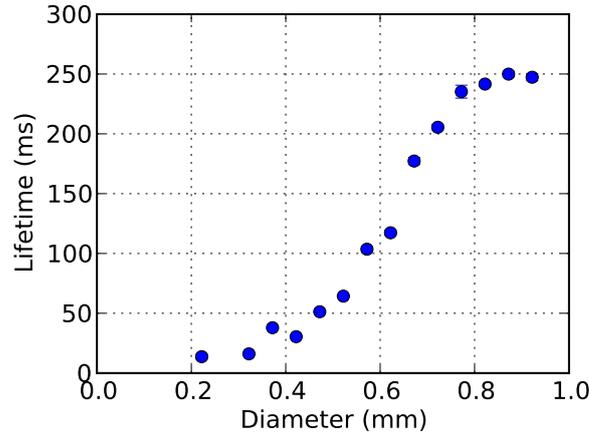


Figure 3.15 – Temps de vie du nuage en fonction du diamètre du piège. Paramètres :  $P = 200 \text{ mW}$ ,  $\Delta = 40 \text{ GHz}$ ,  $w = 65 \mu\text{m}$ ,  $f_m = 90 \text{ kHz}$ .

densité initiale du piège soit faible et, qu’en conséquence, il n’y ait pas d’effet de densité (taux de collisions “s-wave” faible). La procédure expérimentale décrite ci-dessus ne conserve pas la hauteur de barrière constante comme on peut le voir sur l’équation (3.13) où  $U \propto 1/L$ .

La figure 3.15 montre que le temps de vie des atomes dans le piège diminue fortement lorsque la taille du piège est réduite. Ceci peut se comprendre simplement en remarquant que les pertes d’atomes ont lieu lorsque les atomes interagissent avec les murs du piège (sans même préciser le type de perte qui entre en jeu). Or, plus la taille du piège est petite, plus les atomes ont d’interactions avec les murs, ce qui conduit à plus de pertes, et donc à une durée de vie réduite. La diminution du temps de vie avec la taille du piège sera une contrainte importante à considérer lorsqu’on s’intéressera à la compression.

### 3.4.4 Influence de la fréquence de rotation

On s’intéresse à l’influence de la fréquence de rotation sur le temps de vie et la température des atomes piégés. La figure 3.16 montre que le temps de vie du piège dipolaire croît avec la vitesse de rotation sans jamais atteindre de plateau dans la zone des fréquences explorées (contrairement à la référence [44]). Ceci peut être compris intuitivement en remarquant que plus le faisceau laser tourne vite, meilleure est l’approximation consistant à considérer le piège comme statique. Il serait donc avantageux d’avoir une fréquence de rotation plus élevée ce qui, en extrapolant, donnerait une plus grande durée de vie au piège dipolaire. C’est pour cela que nous avons développé un VCO ayant une fréquence de coupure d’entrée plus élevée, mais qui, malheureusement, a posé d’autres problèmes. Les courbes

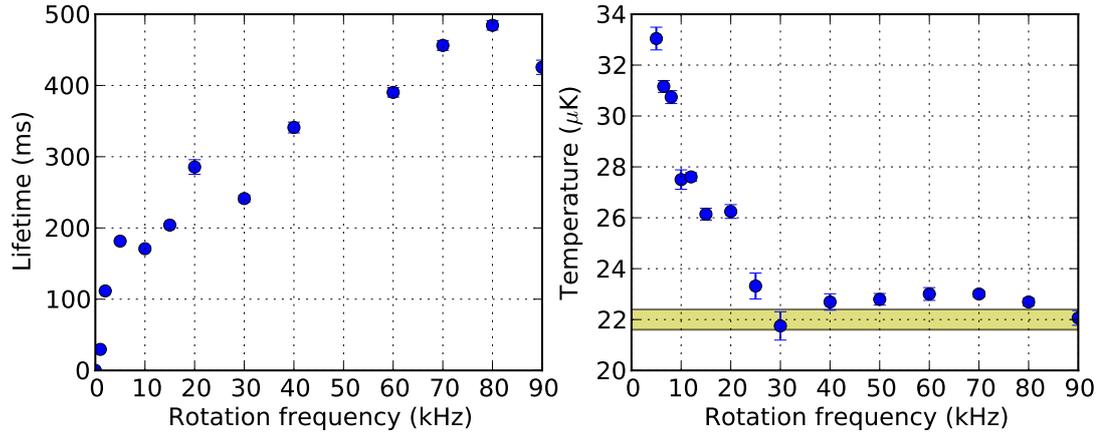


Figure 3.16 – La figure de gauche montre la durée de vie dans le piège dipolaire en fonction de la fréquence de rotation du piège. La figure de droite donne la température du nuage après 150 ms de temps de maintien en fonction de la fréquence de rotation. Initialement, le piège est chargé à partir d’un dark MOT dont la température est représentée par la région colorée. Paramètres :  $P = 200$  mW,  $\Delta = 40$  GHz,  $L = 1$  mm,  $w = 65$   $\mu$ m.

de température, après 150 ms de temps de maintien, montrent qu’en dessous d’une fréquence de rotation de 30 kHz, on observe un chauffage d’autant plus élevé que la fréquence de rotation est basse (voir figure 3.16). Au-dessus de 30 kHz, la température reste constante, proche de la température du dark MOT initial. Nous attribuons ce phénomène au chauffage dipolaire. Par chauffage dipolaire, nous entendons chauffage dû aux fluctuations de la force dipolaire subies à chaque tour à cause de la rotation du faisceau laser.

Comme nous l’avons estimé précédemment, il existe une première limite dans laquelle les atomes peuvent sortir du piège car le faisceau laser ne tourne pas assez rapidement. Nous avons évalué cette fréquence limite dans la partie 3.2.1 à 1 kHz. Les deux premiers points de la figure 3.16 de gauche peuvent être identifiés à cette situation. Dans le régime intermédiaire  $3 \text{ kHz} < f_m < 30 \text{ kHz}$ , on observe une réduction du chauffage sur la figure 3.16 de droite et on peut supposer que le mécanisme dominant conduisant aux pertes dans ce régime correspond au chauffage dipolaire créé par le faisceau laser tournant. La situation n’est pas claire dans la région  $f_m > 30 \text{ kHz}$ , où nous observons toujours une augmentation de la durée de vie du nuage mais également une stabilisation de la température.

D’après les arguments présentés précédemment, on pourrait penser que plus la fréquence de rotation est élevée, plus le piège dipolaire sera performant. Cependant, il faut tenir compte du fait que moduler un signal à une fréquence  $f_m$  crée des bandes latérales séparées par  $f_m$ . Ces bandes latérales sont présentes dans le potentiel dipolaire. Pour avoir un piège “continu”, la limite est de considérer

que la distance entre deux pics associés à deux bandes latérales doit être plus petite que le waist du laser  $w = 65 \mu\text{m}$ . L'angle de déflexion des AOMs est de  $\alpha = 9.3 \times 10^{-5} \text{ rad MHz}^{-1}$ , et après une distance  $L = 150 \text{ mm}$  (distance focale de la lentille), la distance entre deux points va être  $d = \alpha f_m L$ . La condition précédente s'écrit donc

$$f_m \ll \frac{w}{\alpha L} \simeq 5 \text{ MHz}. \quad (3.27)$$

Ceci montre qu'il existe une limite intrinsèque pour la fréquence maximale de rotation que nous pouvons utiliser. Cependant, dans notre dispositif expérimental actuel, nous sommes limités par la bande passante d'entrée des VCOs  $f_m < 100 \text{ kHz}$ . Nous sommes donc loin de la limite discutée ci-dessus. En utilisant les VCOs basés sur la puce Mini-Circuits POS-1060 qui ont été décrits dans la partie 3.2.3, nous avons pu constater que cette limite est bien réelle en imageant les pics associés aux bandes latérales sur une caméra CCD pour un signal modulé à 5 MHz.

Les résultats obtenus justifient le choix de 90 kHz comme fréquence de rotation du piège. Il s'agit de la fréquence la plus élevée possible lorsque l'on tient compte de la fréquence de coupure d'entrée des VCOs (100 kHz). Les performances du piège pourraient certainement être améliorées en utilisant un VCO ayant une plus grande bande passante d'entrée (et une bonne stabilité en fréquence).

### 3.4.5 Influence du désaccord

L'effet du désaccord sur les temps de vie et la température du nuage est étudié en faisant varier le désaccord du laser  $\Delta$  et sa puissance  $P$  en maintenant la hauteur de potentiel  $U \propto P/\Delta$  constante. La première mesure est prise pour une puissance de  $P = 200 \text{ mW}$  et un désaccord de 60 GHz, ce qui correspond à une hauteur de potentiel  $U = 126 \mu\text{K}$ <sup>7</sup>.

La figure 3.17 résume les résultats des mesures. Pour des désaccords faibles, le temps de vie dans le piège dépend fortement du désaccord puis, au-delà de 20 GHz, le temps de vie devient constant, proche de 280 ms. À ce stade, il convient de rappeler que nous utilisons des lasers à semiconducteur qui, en plus d'un mode laser principal, possèdent un piédestal qui s'étend sur  $\pm 20 \text{ nm}$  autour du mode principal. On en déduit, qu'à partir de 20 GHz, l'émission spontanée des atomes due au mode laser principal n'est plus le phénomène contribuant majoritairement aux pertes. Cependant, nous ne pouvons pas exclure à ce stade que ce ne soient pas les photons résonnants du piédestal qui limitent la durée de vie pour des désaccords au-delà de 20 GHz (voir partie 3.4.6). Une autre hypothèse possible est que le temps de vie se trouve limité par le chauffage dû à la mauvaise stabilité en fréquence des VCOs qui engendrent des fluctuations dans la position du piège (voir partie 3.2.3).

---

7.  $2/3 \times 190 \mu\text{K}$ .

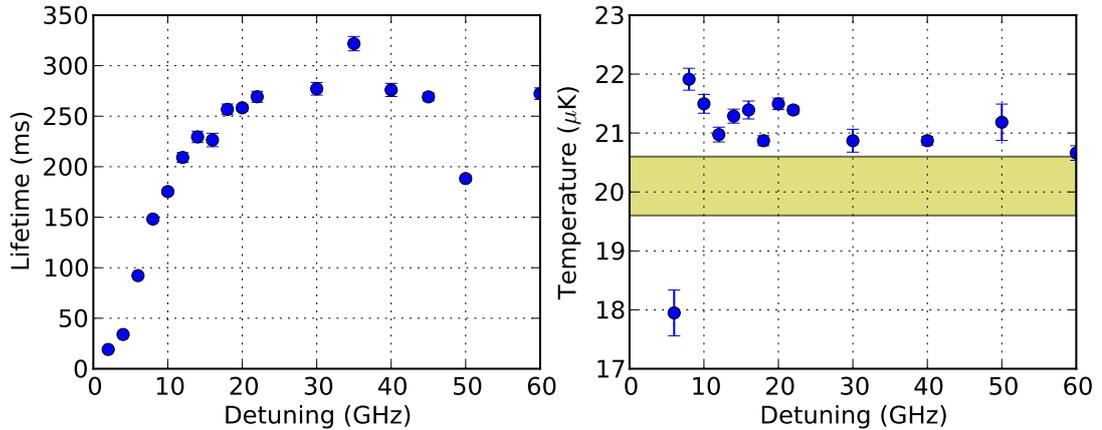


Figure 3.17 – La figure de gauche montre la durée de vie dans le piège dipolaire en fonction du désaccord du piège pour une hauteur de barrière constante (obtenue en ajustant l'intensité). La figure de droite représente la température du nuage 150 ms après le chargement. Initialement, le piège est chargé à partir d'un dark MOT dont la température est représentée par la région colorée. Paramètres :  $L = 1$  mm,  $w = 65$   $\mu$ m,  $f_m = 90$  kHz.

Nos mesures montrent, de plus, que la température reste constante quel que soit le désaccord, légèrement supérieure à la température initiale du dark MOT. Cela peut-être interprété comme un chargement du piège à la température du dark MOT précédant le chauffage par émission spontanée qui fait déborder les atomes du piège ; ce qui contribue aux pertes mais maintient la température constante.

**Résonance autour de 50 GHz** Nous avons remarqué sur la figure 3.17 un temps de vie particulièrement faible pour des désaccords autour de 50 GHz. En prenant plusieurs fois la mesure, la valeur s'est toujours confirmée. Pour étudier cela plus quantitativement, nous avons mesuré, dans les mêmes conditions expérimentales que celles de la figure 3.17, le nombre d'atomes dans le piège dipolaire après 150 ms de temps de maintien. Ces données sont présentées sur la figure 3.18. Elles montrent clairement une résonance sous forme de pertes d'atomes autour de 50 GHz sur une largeur d'environ 10 GHz. Nous avons vérifié qu'il ne s'agissait pas d'un problème du système laser (saut de mode par exemple). Pour l'instant, nous n'avons pas identifié le mécanisme à l'origine de cette résonance.

### 3.4.6 Influence du piédestal du système laser

Les diodes et amplificateurs laser fournissent l'essentiel de leur puissance dans un mode. Cependant ils émettent aussi une lumière incohérente sous forme d'un piédestal. La puissance totale du piédestal est petite devant celle du mode laser

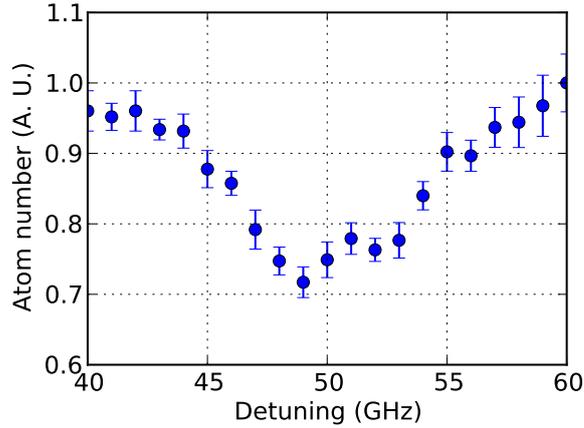


Figure 3.18 – Nombre d’atomes dans le piège après 150 ms de temps de maintien. Les paramètres sont les mêmes que ceux utilisés pour la figure 3.17 :  $L = 1$  mm,  $w = 65$   $\mu$ m,  $f_m = 90$  kHz. Le nombre d’atomes a été mesuré par imagerie de fluorescence non calibrée, d’où les unités arbitraires. Cette courbe laisse clairement apparaître une résonance autour de 50 GHz.

mais comme le piedestal s’étend sur environ 40 nm, la contribution des photons résonnants avec les atomes peut avoir un impact important sur le taux d’émission spontanée. La figure 3.19 donne le spectre mesuré du système global diode DFB et amplificateur. À partir de cette mesure, nous avons estimé que la puissance du piedestal représente 0.9 % de la puissance totale et que, pour un mode laser désaccordé de 20 GHz, la contribution du piedestal au taux d’émission spontanée est six fois plus importante que celle due au mode laser principal. Dans la suite, nous présentons deux méthodes que nous avons utilisées pour diminuer l’importance des photons résonnants et nous discutons leurs conséquences sur le piège dipolaire.

**Filtrage par étalon** La figure 3.19 montre le spectre du système laser après y avoir placé un étalon de finesse  $\mathcal{F} = 60^8$  et d’intervalle spectral libre ISL = 210 GHz. Spectralement, la transmission de l’étalon prend la forme de pics de transmission de largeur à mi-hauteur  $\text{ISL}/\mathcal{F} = 3.5$  GHz espacés de 210 GHz. Pour un appareil ne résolvant pas les pics de transmission comme c’est le cas de l’analyseur de spectre optique que nous avons utilisé, la diminution attendue du spectre du piedestal est de  $10 \log_{10} \mathcal{F} = 17$  dB, ce qui est en accord avec les données mesurées (voir figure 3.19). En présence d’étalon, le piedestal contribue pour seulement 0.04 % de la puissance totale. Cependant, les mesures de temps de vie (voir figure 3.19) n’ont pas été améliorées de façon significative par la présence de l’étalon. La perte de puissance, résultant du passage du faisceau laser à travers l’étalon,

8.  $\mathcal{F} = \pi\sqrt{R}/(1 - R)$  et l’étalon est commercialisé pour un coefficient de réflexion  $R = 0.95$ .

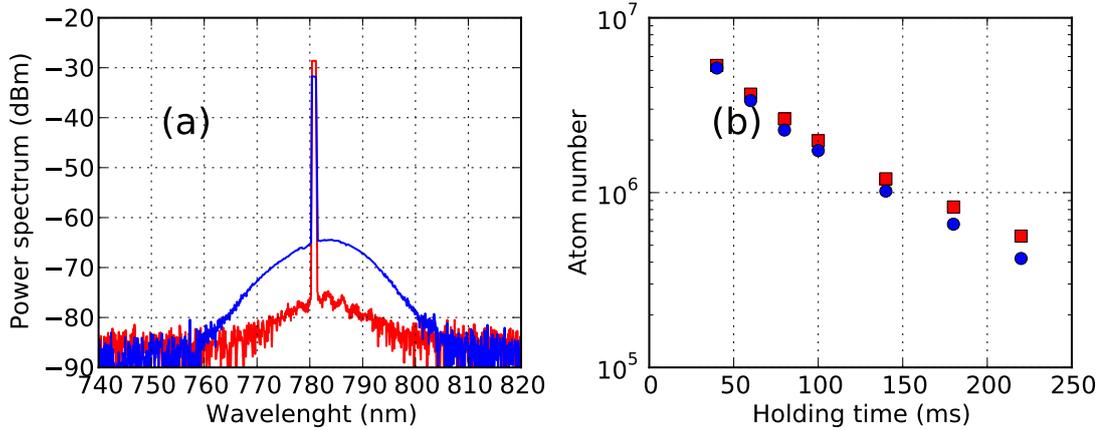


Figure 3.19 – (a) Spectres de puissance du système laser (courbe bleue) et du système laser auquel on a ajouté un étalon (courbe rouge). (b) Nombre d'atomes en fonction du temps pour le système laser (cercles bleus) et pour le système laser avec étalon (carrés rouges). Les temps de vie sont respectivement 58 ms et 66 ms. Les deux mesures ont été effectuées avec la même puissance laser. Paramètres :  $P = 70$  mW,  $\Delta = 24$  GHz,  $L = 1$  mm,  $w = 65$   $\mu$ m,  $f_m = 90$  kHz.

laisse seulement 70 mW disponibles pour le piège dipolaire ce qui rend la mesure expérimentale difficile à réaliser. Le désaccord du piège nécessaire pour pallier la perte de puissance est de 24 GHz. Ces mesures montrent que, dans ce régime de paramètres, l'émission spontanée due au piédestal du système laser n'est pas le phénomène de perte dominant. Ceci est compatible avec les données de la partie 3.4.5 qui montrent que, pour un désaccord inférieur à 20 GHz, les pertes sont dominées par le mode laser principal.

**Filtrage par cellule chaude** La deuxième technique de filtrage mise en place consiste à faire passer le faisceau laser à travers une cellule de Rubidium chaud longue de 7.5 cm. La figure 3.20 montre la transmission d'une sonde faiblement saturante à travers la cellule. En augmentant la température, la pression de vapeur saturante augmente de plusieurs ordres de grandeur ce qui permet de filtrer efficacement les photons résonnants sur la largeur Doppler des atomes. La figure 3.20 montre l'influence de la cellule de Rubidium chaud sur le temps de vie du piège dipolaire. Le désaccord du piège est ici de 43 GHz. Après une période transitoire de 60 ms, correspondant sur la courbe à la première décroissance rapide, on observe deux pentes différentes en régime quasi-stationnaire. Cette expérience montre l'efficacité du filtrage des photons résonnants du piédestal du système laser en chauffant la cellule de Rubidium entre 20 °C et 120 °C.

La différence d'efficacité du filtrage entre l'étalon et la cellule chaude provient

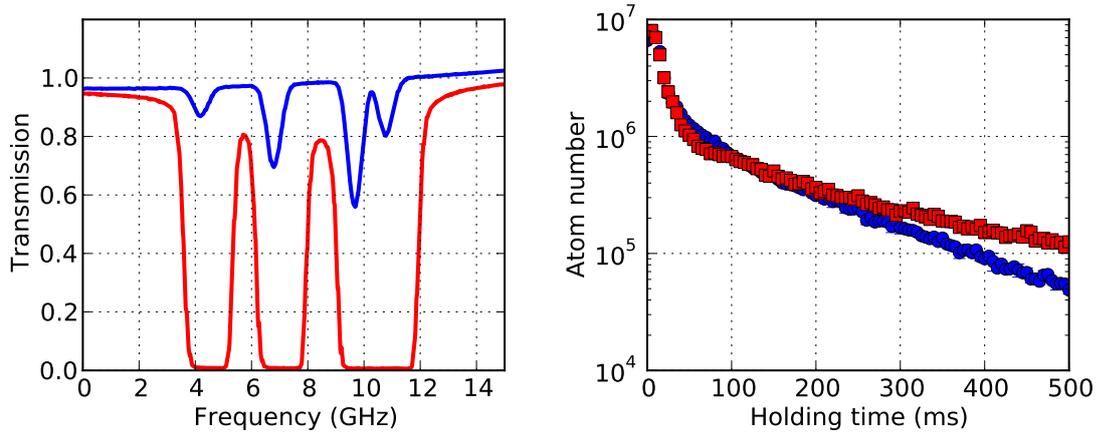


Figure 3.20 – La figure de gauche donne la transmission à travers une cellule de Rubidium (longueur 7.5 cm) d’une sonde faiblement saturante. La courbe bleue correspond à la température ambiante de 22 °C et la courbe rouge à une température de 120 °C. La figure de droite montre le temps de vie du nuage en fonction du temps de maintien pour la cellule à 22 °C (cercles bleus) et 120 °C (carrés rouges). Paramètres :  $P = 200$  mW,  $\Delta = 43$  GHz,  $L = 1$  mm,  $w = 65$   $\mu$ m,  $f_m = 90$  kHz.

des désaccords utilisés dans les deux expériences. En analysant les données de la figure 3.17, on remarque que, pour des désaccords inférieurs à 20 GHz, le temps de vie du piège est limité par l’émission spontanée due au mode laser principal. La perte de puissance après passage du faisceau laser dans l’étalon nous oblige à utiliser un désaccord modeste de 24 GHz pour obtenir un piège suffisamment profond. Ce désaccord est très proche de la limite des 20 GHz observée sur la figure 3.17. La raison de l’inefficacité du filtrage des photons résonnants du piédestal trouve peut-être là son origine car ce n’est pas le phénomène limitant dans ce régime de paramètres. Par contre, dans le cas du filtrage à l’aide de la cellule de Rubidium, nous avons pu utiliser un désaccord suffisamment important pour être dans la région où le piège dipolaire n’est plus limité par l’émission spontanée due au mode laser principal. Dans ce cas le filtrage du piédestal a une réelle influence sur le temps de vie du piège dipolaire.

En conclusion de cette étude, le filtrage des photons résonnants s’est révélé efficace à condition d’utiliser le piège dans un régime où les pertes dues au mode laser principal ne sont pas dominantes. Cela implique d’utiliser des désaccords supérieurs à 20 GHz, ce qui ne peut être atteint dans le cas du filtrage par l’étalon à cause de la trop grande perte de puissance. Ce régime de désaccord est accessible grâce à la cellule de Rubidium chauffée comme nous l’avons montré ci-dessus. L’utilisation de la cellule de Rubidium implique de chauffer la cellule à relativement haute température ce qui crée des gradients thermiques ayant pour conséquence de

défléchir les faisceaux laser. Ceci perturbe l'injection de la fibre optique et conduit à des fluctuations d'intensité du piège dipolaire. C'est ce principal inconvénient qui fait, qu'en pratique, nous n'utilisons pas le filtrage du faisceau laser par la cellule chaude.

### 3.4.7 Conclusion et performances finales

Le piège dipolaire présenté ci-dessus permet de piéger un grand nombre d'atomes avec une très bonne efficacité de chargement. La caractérisation du piège dipolaire nous a permis de comprendre certains mécanismes contrôlant le temps de vie du nuage et l'évolution de sa température. La table 3.2 résume les différentes études effectuées dans cette partie et les conclusions que nous en avons tirées.

Paramètres expérimentaux	Mécanismes pertes/chauffage	Solutions
Diamètre	Interactions avec les murs/Volume de capture	Diamètre le plus grand possible $\sim 1$ mm pour meilleurs chargement et temps de vie
Fréquence de rotation $f_m$	Chauffage dipolaire	$f_m > 30$ kHz, idéalement le plus grand possible. Limité par performance VCOs : 90 kHz
Désaccord mode laser $\Delta$	Émission spontanée	$\Delta > 20$ GHz, idéalement le plus grand possible mais en gardant une profondeur de potentiel raisonnable
Piédestal système laser	Émission spontanée	Filtrage par cellule Rb chaude (pas mis en place car fluctuations d'intensité)

Table 3.2 – Bilan de l'étude du piège dipolaire en régime quasi-stationnaire. Pour chaque mesure effectuée nous avons identifié un mécanisme de pertes/chauffage et trouvé un régime de paramètres maximisant les performances du piège.

À partir des conclusions données dans la table 3.2, nous pouvons choisir les paramètres expérimentaux maximisant le chargement, le temps de vie et la température du nuage. La figure 3.21 donne le nombre d'atomes et la température en fonction du temps de maintien dans le piège pour les paramètres expérimentaux suivants :  $\Delta = 40$  GHz, diamètre du piège 1 mm,  $P = 200$  mW,  $f_m = 90$  kHz. On remarque que la décroissance du nombre d'atomes n'est pas purement exponentielle sur ces données comme on pourrait s'y attendre dans le cas de pertes à un

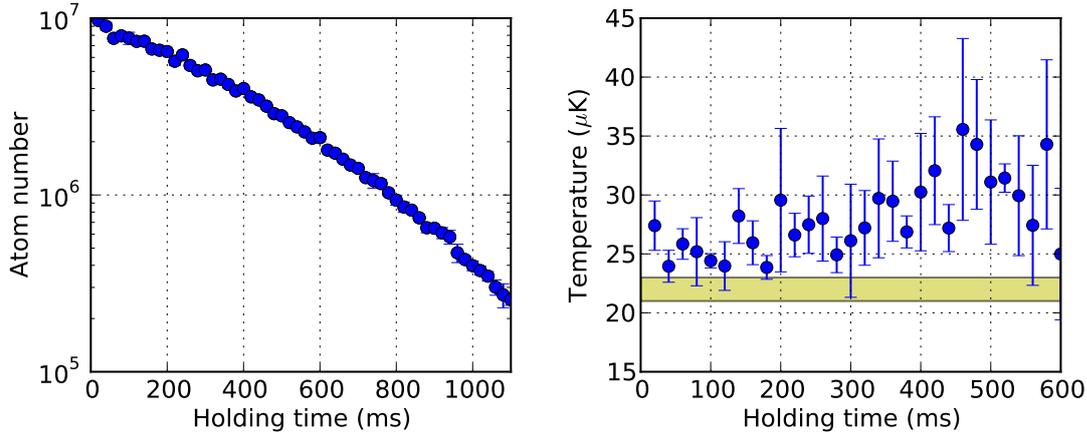


Figure 3.21 – Nombre d’atomes et température du nuage piégé en fonction du temps de maintien pour les paramètres suivants :  $P = 200 \text{ mW}$ ,  $\Delta = 40 \text{ GHz}$ ,  $L = 1 \text{ mm}$ ,  $w = 65 \mu\text{m}$ ,  $f_m = 90 \text{ kHz}$ . Un ajustement sur les premières 500 ms de la courbe donne un temps de vie de 442 ms. La zone colorée correspond à la température initiale du dark MOT ( $22 \mu\text{K}$ ) avant le chargement du piège dipolaire bleu.

corps. Le temps de vie extrait des premières 500 ms de la courbe est de 442 ms. La température n’évolue pas beaucoup au cours du temps et est à peu près égale à la température du dark MOT initial. Cette observation n’est pas suffisante pour conclure que le taux de chauffage par émission spontanée est négligeable, car le chauffage peut faire “sauter” les atomes par-dessus la barrière et contribuer alors aux pertes mais sans modification de température. La hauteur de la barrière de potentiel est de  $190 \mu\text{K}$  et la température des atomes d’environ  $25 \mu\text{K}$ , ce qui, dans notre cas, donne un facteur  $\eta \equiv U/k_B T \simeq 7.6$ . Ce facteur important pour le refroidissement évaporatif n’est pas très important ici car le taux de collisions “s-wave” est très faible (cf. partie 3.5.3).

### 3.5 Compression

Dans cette partie, nous utilisons le piège dipolaire que nous venons de caractériser pour comprimer le nuage d’atomes en diminuant de façon dynamique la taille du piège. Le but est de comprimer rapidement le maximum d’atomes sous le seuil de localisation forte, qualitativement donné par le critère de Ioffe-Reggel. Ce seuil correspond à des densités de  $10^{13} - 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  pour le Rubidium.

### 3.5.1 Réflexions préliminaires

Le but de ce paragraphe est de comprendre les paramètres qui sont importants lors de la compression du nuage. Nous faisons appel à des arguments simples ne décrivant pas l'expérience de façon exacte (notamment, le rôle de la gravité) mais donnant une bonne compréhension des phénomènes physiques impliqués. Cette démarche est essentielle avant de réaliser l'expérience.

**Vitesse maximale de compression** Nous nous intéressons ici à la vitesse maximale de compression d'un point de vue mécanique, i.e. la vitesse à laquelle on peut déplacer la barrière de potentiel de hauteur  $U$  sans que l'atome ne "passe" par-dessus. On considère le cas le plus défavorable, celui où la barrière de potentiel se déplace en direction de l'atome avec une vitesse  $v_{\text{mur}}$  dans le référentiel du laboratoire, l'atome se déplaçant lui vers la barrière avec une vitesse  $v_{\text{atome}}$ . Dans le référentiel lié à la barrière de potentiel, l'atome possède une vitesse  $v = v_{\text{mur}} + v_{\text{atome}}$ . Il ne passera pas par-dessus la barrière si son énergie cinétique est inférieure à la hauteur de barrière ce qui s'écrit  $v_{\text{mur}} < \sqrt{2U/m} - v_{\text{atome}}$ . En pratique  $\sqrt{2U/m} \gg v_{\text{atome}}$  (conséquence de  $U/(k_B T) \gg 1$ ) et, donc, l'expression précédente se simplifie

$$v_{\text{mur}} < \sqrt{\frac{2U}{m}}. \quad (3.28)$$

Pour une hauteur de barrière de  $200 \mu\text{K}$ , on obtient une vitesse limite de mur de  $0.2 \text{ m.s}^{-1}$ . Si on diminue le rayon de façon linéaire sur  $500 \mu\text{m}$ <sup>9</sup>, le temps minimal pour effectuer la compression est de 2.5 ms. Ce ne sera donc pas une contrainte pour la mise en pratique expérimentale. De plus, sachant que la hauteur de barrière augmente lors de la compression (c.f. Eq. (3.13)), le temps estimé ici est surévalué.

**Chauffage lors de la compression** Le chauffage peut être simplement évalué pour une compression isentropique (adiabatique réversible) d'un gaz parfait en utilisant la loi de Laplace  $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$ , avec  $\gamma$  le coefficient de Laplace<sup>10</sup>. Pour un gaz parfait monoatomique  $\gamma = 5/3$ . Ainsi, un gaz initialement à une température  $T_i$ , dans un piège de taille  $L_i$ , comprimé de façon isentropique dans un piège de taille  $L_f$ , aura une température finale  $T_f$  donnée par la relation

$$\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{L_i}{L_f}\right)^2. \quad (3.29)$$

---

9. La moitié de 1 mm car les deux murs se déplacent.

10.  $\gamma = C_p/C_v$  avec  $C_p$  la capacité calorifique à pression constante et  $C_v$  la capacité calorifique à volume constant.

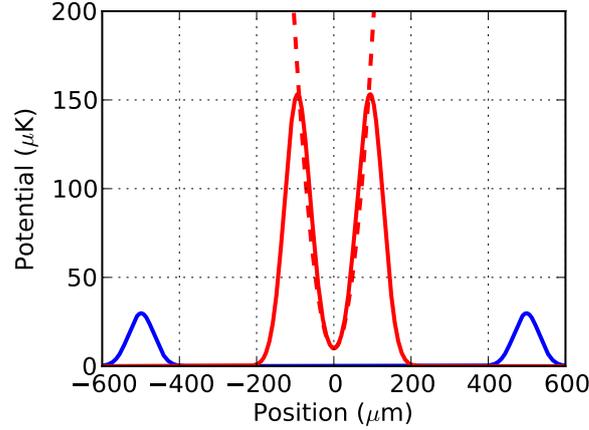


Figure 3.22 – Courbes illustrant le passage du piège en forme de boîte à un piège harmonique quand la taille du piège est réduite. Lors d’une compression adiabatique, cela conduit à une augmentation de la densité dans l’espace des phases. Paramètres :  $P = 2 \text{ W}$ , désaccord  $8 \text{ nm}$ ,  $a = 500 \mu\text{m}$  (courbe bleue),  $a = 100 \mu\text{m}$  (courbe rouge),  $w = 65 \mu\text{m}$ .

Toute compression non isentropique conduirait à une température finale plus élevée que celle donnée par la formule ci-dessus. Une façon de retrouver le résultat donné ci-dessus est de considérer la compression adiabatique comme un processus lent où le système suit à tout instant les valeurs propres et vecteurs propres de l’Hamiltonien dépendant du temps. Comme les populations ne changent pas, il n’y a pas de chauffage ou de friction.

**Gain de densité dans l’espace des phases lors du changement de géométrie du piège** Dans la partie 3.2.1, on a vu que, lorsque la taille du piège est réduite, celui-ci ne peut plus être considéré comme une boîte ayant des murs Gaussiens mais est correctement décrit par un potentiel harmonique  $U = U_0 + 1/2m\omega^2r^2$ , où les expressions analytiques de  $U_0$  et  $\omega$  sont données par les équations (3.16) et (3.17). La figure 3.22 illustre le changement de géométrie du piège lors de la compression. Lors d’une compression adiabatique, l’entropie du système est conservée, ce qui implique la conservation de la densité dans l’espace des phases lorsque le piège ne change pas de géométrie. En revanche, lors du passage d’une géométrie en forme de boîte à un potentiel harmonique, la densité dans l’espace des phases augmente. À partir de l’annexe D, donnant les expressions de l’entropie d’un gaz parfait dans une boîte et dans un piège harmonique, on peut estimer la température finale  $T_f$  en fonction de la température initiale  $T_i$  et des paramètres du piège

$$k_B T_f = e^{-1/2} \hbar \omega \frac{L}{\Lambda_{T_i}}. \quad (3.30)$$

On peut alors évaluer la densité au centre du piège harmonique

$$n_0 = N \left( \frac{m\omega^2}{2\pi k_B T} \right)^{3/2}. \quad (3.31)$$

Lors de la compression adiabatique, on observe une augmentation de la densité dans l'espace des phases <sup>11</sup>

$$\text{PSD}_i = n\Lambda_{T_i}^3 \rightarrow \text{PSD}_f = n_0\Lambda_{T_f}^3 = N \left( \frac{\hbar\omega}{k_B T_f} \right)^3, \quad (3.32)$$

ce qui permet d'écrire

$$\text{PSD}_f = e^{3/2} \text{PSD}_i. \quad (3.33)$$

Ce gain de densité dans l'espace des phases vient du changement de géométrie du piège (d'une boîte vers un piège harmonique) et de la modification de la densité d'états qui en découle [96, 113] (sans changement de géométrie, il y a conservation de la densité d'états lors d'une compression adiabatique).

**Évolution de la hauteur de la barrière** L'élévation de température résultant de la compression tend à faire déborder les atomes par-dessus la barrière de potentiel. Cependant, lorsque la taille du piège est réduite, la hauteur de barrière augmente. L'équation (3.13) permet de dire qu'un piège de taille initiale  $L_i$ , possédant une hauteur de potentiel  $U_i$ , comprimé vers une taille  $L_f$ , aura une hauteur de potentiel finale  $U_f$  donnée par

$$\frac{U_f}{U_i} = \frac{L_i}{L_f}. \quad (3.34)$$

En utilisant Eq. (3.29) et Eq. (3.34), et en négligeant les collisions (évaporation), les atomes ne débordent pas du piège tant que  $k_B T_f = U_f$ , ce qui donne une taille minimale du piège limite avant débordement

$$\frac{L_f}{L_i} = \frac{k_B T_i}{U_i}. \quad (3.35)$$

Typiquement dans l'expérience  $k_B T_i / U_i = 1/8$  et donc, en partant d'une taille initiale de 1 mm, on peut comprimer le nuage jusqu'à 100  $\mu\text{m}$  laissant une marge de manœuvre confortable. De plus, pour ces tailles, la densité sera importante et on ne pourra plus négliger l'évaporation.

---

11. Dans l'état final nous calculons la densité dans l'espace final au centre du piège.

**Contrainte du temps de vie** Dans ce qui précède, nous avons montré qu’il existait des contraintes sur le temps minimal de compression. Cependant, la durée de vie des atomes dans le piège nous donne une limite supérieure sur le temps de compression. Comme nous l’avons vu dans la figure 3.15, le temps de vie diminue fortement avec la taille du piège, ce qui donne des contraintes importantes. Par exemple, pour comprimer le nuage à une taille finale de  $400\ \mu\text{m}$ , il faudra le faire en moins de 30 ms (qui est le temps de vie du piège) pour éviter de perdre trop d’atomes lors de la compression.

### 3.5.2 Réalisation expérimentale

Après avoir chargé le piège dipolaire de grande taille en suivant le même protocole que celui utilisé pour le piège statique (voir partie 3.2.4), on maintient la taille du piège constante pendant 20 ms pour que les atomes non piégés sortent du champ de l’imagerie. La taille du piège est ensuite réduite pendant une durée qui peut-être ajustée. Les données présentées dans la suite ont été prises pour différentes valeurs de taille finale du piège, le temps de compression étant lui fixé. Ce choix est motivé par sa simplicité de mise en œuvre expérimentale. D’autres types de rampes de compression pourront être essayés par la suite dans un but d’optimisation. La figure 3.23 montre des images du nuage, avant et après compression, prises du haut de la cellule par imagerie de fluorescence et de côté par imagerie d’absorption. Le nuage d’atomes piégés n’apparaît pas circulaire sur les images d’absorption car l’imagerie n’est pas faite dans l’axe d’un des deux tubes mais avec un léger angle.

La figure 3.24 montre la densité et la température du nuage en fonction de la taille finale du piège pour trois durées de compression différentes : 5 ms, 10 ms et 60 ms. Les courbes vertes et rouges correspondent à  $10^7$  atomes initialement dans le piège et la courbe bleue à  $2 \cdot 10^7$ . La variation du nombre d’atomes initial a été obtenue en augmentant la durée du MOT. On remarque qu’une augmentation de densité de plus d’un ordre de grandeur a été obtenue atteignant  $5 \cdot 10^{12}\ \text{cm}^{-3}$  pour une réduction de taille d’un facteur 5. Les courbes de température montrent un fort chauffage lors de la compression. Ce chauffage est d’autant plus important que la compression est rapide, ce qui est en accord avec la discussion précédente sur la compression adiabatique. On remarque que, pour de faibles compressions ( $L > 0.6\ \text{mm}$ ), la densité et la température ne sont pas beaucoup affectées. Ceci peut être compris en regardant les images d’absorption de la figure 3.23 où l’on remarque que les atomes n’occupent pas la totalité du volume du piège à cause de la gravité. Le changement de pente observé pour  $L = 0.6\ \text{mm}$  correspond à la taille limite où le nuage remplit entièrement le volume du piège. Pour des compressions vers des tailles très petites, on observe une saturation de la densité qui peut être causée par la mauvaise stabilité du piège pour des petites tailles ou par des pertes

Figure 3.23 – Images de fluorescence vues du haut de la cellule (en haut) et images d’absorption vues latéralement lors de la compression (en bas). Les images de gauche correspondent au nuage avant compression (taille du piège  $L = 1 \text{ mm}$ ) et celles de droite au nuage comprimé (taille du piège  $L = 300 \mu\text{m}$ ). Paramètres :  $P = 200 \text{ mW}$ ,  $\Delta = 40 \text{ GHz}$ ,  $w = 65 \mu\text{m}$ ,  $f_m = 90 \text{ kHz}$ .

dues aux collisions “s-wave”.

La figure 3.25 montre l’évolution de la densité dans l’espace des phases  $n\Lambda_T^3$  où  $n$  est la densité du nuage et  $\Lambda_T = h/\sqrt{2\pi mk_B T}$  est la longueur d’onde thermique. Lors d’une compression adiabatique, l’entropie du système est conservée. Si on suppose, de plus, que la densité d’états du système garde la même forme au cours de la compression<sup>12</sup>, on montre que la densité dans l’espace des phases est conservée. Ceci est mis en évidence sur la figure 3.25 où la perte de densité dans l’espace des phases est plus importante quand la compression est rapide.

La figure 3.26 montre la fraction d’atomes restant dans le piège après compres-

---

12. i.e. que le potentiel reste bien décrit par une boîte.

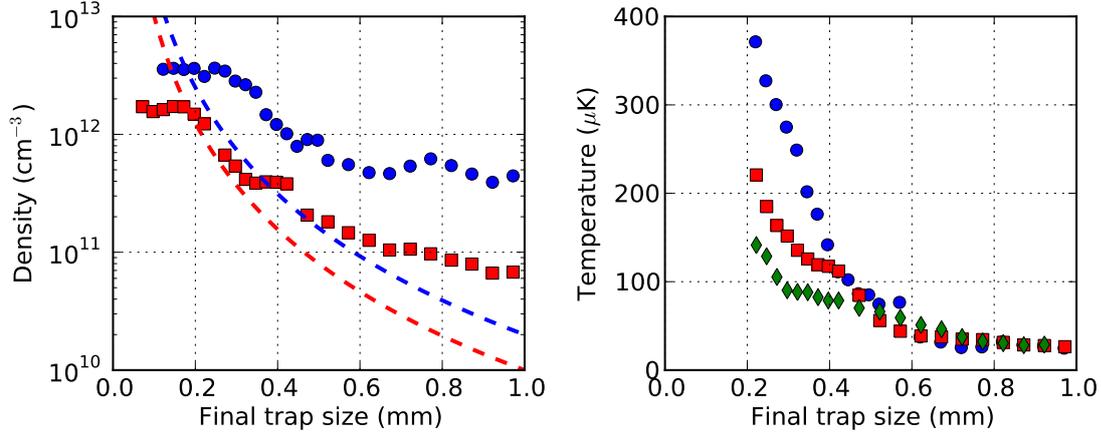


Figure 3.24 – Densité et température du nuage en fonction de la taille finale du piège après compression. La taille initiale est de 1 mm. Les cercles bleus correspondent à un temps de compression de 5 ms, les carrés rouges à 10 ms et les diamants verts à 60 ms. Les conditions initiales sont  $10^7$  atomes initialement chargés pour les carrés rouges et les diamants verts et  $2 \cdot 10^7$  atomes pour les cercles bleus. Les courbes pointillées correspondent aux densités que l'on obtiendrait si le piège était uniformément chargé  $n = N/V$  pour  $N = 2 \cdot 10^7$  (courbe pointillée bleue) et  $N = 10^7$  (courbe pointillée rouge). Paramètres :  $P = 200$  mW,  $\Delta = 40$  GHz,  $w = 65 \mu\text{m}$ ,  $f_m = 90$  kHz.

sion. Pour les temps de compression courts (5 ms, 10 ms), on remarque que la perte d'atomes est de  $\sim 20\%$ . Pour un temps de compression de 60 ms, les pertes liées aux faibles temps de vie du piège pour des diamètres faibles expliquent le plus fort taux de perte de  $\sim 60\%$ .

**Plus grande densité obtenue** En laissant le MOT se charger pendant 20 s (2.5 s dans ce qui précède) et en utilisant un piège dipolaire désaccordé de 20 GHz seulement, pour augmenter la hauteur de la barrière de potentiel, le piège dipolaire se charge avec  $5 \cdot 10^7$  atomes. En comprimant le nuage à une taille finale de 0.2 mm en 5 ms, on obtient une densité de  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$ , ce qui correspond à

$$k \cdot l \simeq 2.8 \tag{3.36}$$

très proche du seuil de localisation qualitativement donné par le critère de Ioffe-Regel. Les grandes densités obtenues permettent aussi d'envisager la réalisation d'expériences sur le déplacement de Lamb collectif [104, 106, 102].

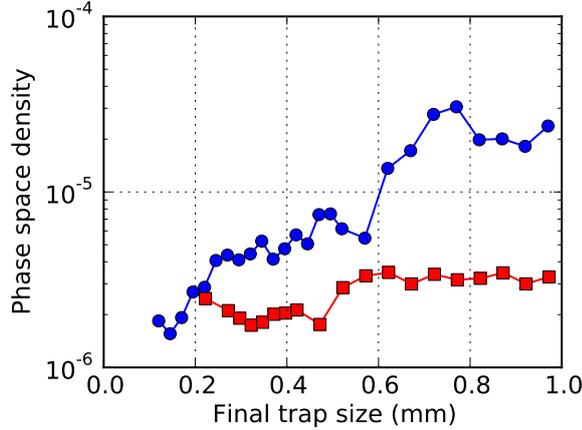


Figure 3.25 – Évolution de la densité dans l’espace des phases du nuage lors de la compression. Les cercles bleus correspondent à  $2 \cdot 10^7$  atomes initialement chargés et à un temps de compression de 5 ms. Les carrés rouges correspondent à  $10^7$  atomes initialement chargés et à un temps de compression de 10 ms. Paramètres :  $P = 200$  mW,  $\Delta = 40$  GHz,  $w = 65 \mu\text{m}$ ,  $f_m = 90$  kHz.

### 3.5.3 Collisions et thermalisation

Lors de la compression du nuage, la densité spatiale et la température augmentent, faisant entrer le nuage dans un régime où les collisions deviennent non négligeables sur les échelles de temps des expériences. Les collisions élastiques (“bonnes” collisions) conduisent le nuage vers un nouvel équilibre grâce aux phénomènes d’évaporation et de thermalisation [71]. Le but de cette partie est de caractériser les collisions et la thermalisation qui pourront, par la suite, être mises à profit dans des rampes de refroidissement évaporatif forcé ; ce qui est, à ce jour, la seule méthode ayant conduit à la production de gaz atomique quantique dégénéré [70, 72].

Si l’on suppose la collision purement “s-wave”, la section efficace de diffusion totale pour des bosons identiques est donnée par<sup>13</sup>

$$\sigma = 8\pi a^2, \quad (3.37)$$

où  $a$  est la longueur de diffusion ( $a = 5.3$  nm pour le  $^{87}\text{Rb}$ ). Il est pratique de définir un taux de collisions élastiques [92]

$$\Gamma_{\text{el}} = n\sigma\bar{v}_{\text{rel}}, \quad (3.38)$$

où  $n$  est la densité du nuage,  $v_{\text{rel}} = \sqrt{2}\bar{v}$  est la vitesse relative moyenne des atomes.

13.  $\sigma = 4\pi a^2$  pour des particules non-identiques.

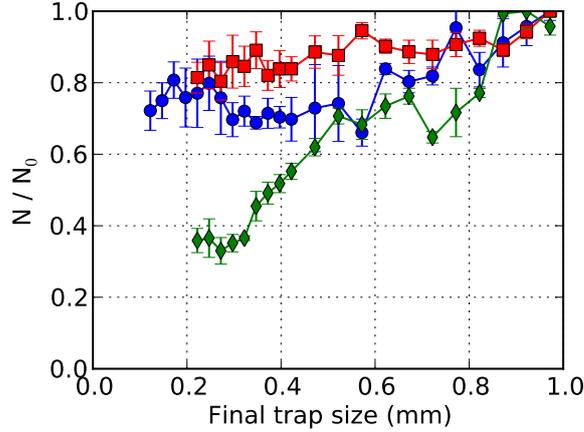


Figure 3.26 – Fraction d’atomes restant dans le piège après compression en fonction de la taille finale du piège pour différents temps de compression : 5 ms (cercles bleus), 10 ms (carrés rouges), 60 ms (diamants verts). Paramètres :  $P = 200$  mW,  $\Delta = 40$  GHz,  $w = 65$   $\mu$ m,  $f_m = 90$  kHz.

La vitesse thermique moyenne  $\bar{v}$  est, elle, donnée par

$$\bar{v} = \frac{\int_0^\infty dv v^3 \exp(-mv^2/2k_B T)}{\int_0^\infty dv v^2 \exp(-mv^2/2k_B T)} = \left( \frac{8k_B T}{\pi m} \right)^{1/2}. \quad (3.39)$$

Les taux de collisions élastiques “s-wave” lors des expériences de compression discutées précédemment sont tracés dans la figure 3.27. Au cours de la compression, le taux de collision varie sur deux ordres de grandeur (entre  $10$  s<sup>-1</sup> et  $10^3$  s<sup>-1</sup>). Ne contrôlant pas l’état interne des atomes dans le piège dipolaire<sup>14</sup>, le taux de collisions calculé est approximatif car les collisions ne s’effectuent pas forcément entre deux atomes ayant le même état interne. De plus, les températures après compression étant relativement élevées (voir figure 3.24), l’approximation consistant à se limiter aux collisions “s-wave” n’est pas strictement valable. Cependant, à ce stade, nous cherchons seulement à comprendre les mécanismes mis en jeu et l’approche présentée ci-dessus remplit bien ce rôle en donnant le bon ordre de grandeur du taux de collisions.

La figure 3.28 montre l’évolution de la température des atomes dans le piège après compression. Le nuage est comprimé en 40 ms puis on étudie l’évolution de la température en fonction du temps en maintenant le piège avec les paramètres de fin de compression. L’état du système en fin de compression sert d’état initial à cette expérience. Plus la taille du piège est petite en fin de compression, plus le nuage

14. La présence du repompeur tout au long du piégeage assure seulement que les atomes soient répartis dans les sous-niveaux Zeeman de  $F = 2$ .

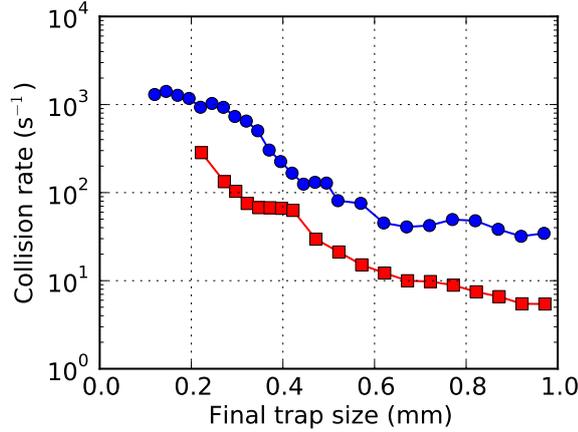


Figure 3.27 – Taux de collisions élastiques “s-wave” en fonction de la taille finale du piège après compression. Les cercles bleus correspondent à un temps de compression de 5 ms et à  $2.10^7$  atomes initialement chargés. Les carrés rouges correspondent à 10 ms de temps de compression et à  $10^7$  atomes initialement chargés. Paramètres :  $P = 200$  mW,  $\Delta = 40$  GHz,  $w = 65$   $\mu$ m,  $f_m = 90$  kHz.

est chaud et dense, et donc, plus le taux de collisions “s-wave” est important. On remarque que la diminution de température est d’autant plus rapide que le nuage est initialement dense et chaud (i.e. que la taille du piège en fin de compression est petite), ce que nous attribuons à la thermalisation du nuage due aux collisions “s-wave”. À partir de la densité et de la température initiales des atomes, il est possible de calculer le taux de collisions élastiques du gaz grâce à l’Eq. (3.38) du gaz. Les valeurs de taux de collisions ainsi évaluées (voir figure 3.28) sont compatibles avec les temps caractéristiques de diminution de température observés. En effet, il est bien connu que le nombre de collisions élastiques nécessaires à la thermalisation du gaz varie entre trois et quatre [71].

### 3.5.4 Refroidissement évaporatif forcé dans le régime d’emballement

Dans cette partie, nous allons voir comment il est possible, en exploitant un piège dipolaire spécifique, d’atteindre le régime d’emballement lors de l’étape de refroidissement évaporatif forcé. Cette étape est particulièrement intéressante dans la perspective d’utiliser ce piège pour obtenir un condensat de Bose-Einstein. Les investigations de ce chapitre sont uniquement théoriques car les performances actuelles du piège ne permettent pas de réaliser de telles expériences. Il faudrait, en effet, rendre le piège plus conservatif en choisissant un laser plus puissant et plus désaccordé et utiliser des VCOs ayant une meilleure bande passante d’entrée et

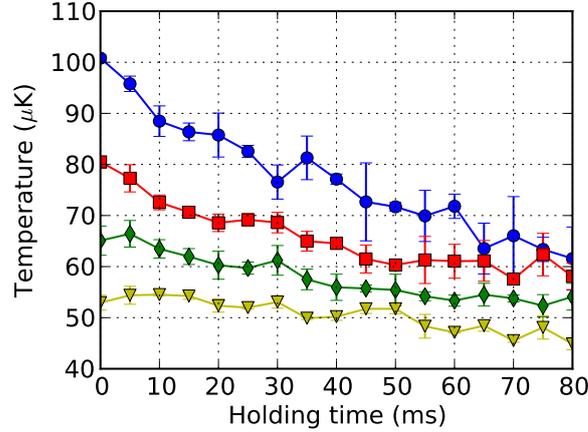


Figure 3.28 – Évolution des températures pour différents états initiaux des atomes dans le piège dipolaire. Les différents états initiaux ont été préparés en comprimant le nuage à partir d'un diamètre de 1 mm vers des diamètres en fin de compression de 0.42, 0.47, 0.52, 0.57 mm. Après compression, le diamètre du piège est maintenu constant. L'état du système en fin de compression sert d'état initial à cette mesure. Plus la taille du piège en fin de compression est petite, plus l'état initial du nuage est chaud et dense. Les densités et températures initiales sont respectivement de  $1.7 \cdot 10^{11}$ ,  $1.6 \cdot 10^{11}$ ,  $1.4 \cdot 10^{11}$ ,  $1.2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$  et 101, 81, 65, 53  $\mu\text{K}$  ce qui correspond à des taux de collisions élastiques "s-wave" de 27, 23, 17, 14  $\text{s}^{-1}$ . Ces taux de collisions "s-wave" sont compatibles avec les courbes de décroissance de la température. Paramètres :  $P = 200 \text{ mW}$ ,  $\Delta = 40 \text{ GHz}$ ,  $w = 65 \mu\text{m}$ ,  $f_m = 90 \text{ kHz}$ .

une meilleure stabilité en fréquence. Ces deux améliorations devraient permettre d'obtenir des temps de vie compatibles avec le temps d'évaporation nécessaire à l'obtention de condensat de Bose-Einstein. Pour illustrer notre discussion théorique, nous considérons dans la suite une source laser titane-saphir désaccordée de 8 nm fournissant 4 W (laissant 2 W disponibles après l'ordre (+1, +1) des AOMs). La géométrie du piège est la même que celle utilisée tout au long du chapitre ( $a = 500 \mu\text{m}$ ,  $w = 65 \mu\text{m}$ ).

L'étape de refroidissement évaporatif forcé est jusqu'à présent la seule méthode permettant d'obtenir un condensat de Bose-Einstein. Elle consiste à diminuer la hauteur de la barrière de potentiel en suivant une rampe d'évaporation dont la forme et la durée sont généralement optimisées expérimentalement. En utilisant des lasers balayables en fréquence comme le laser titane-saphir ou les diodes DFB, il est possible de diminuer la hauteur de barrière en désaccordant le piège plutôt qu'en réduisant la puissance laser, ce qui permet de diminuer le taux d'émission spontanée.

Généralement, un des inconvénients des pièges dipolaires est que, lors du refroidissement évaporatif forcé, la réduction de la hauteur de barrière conduit aussi

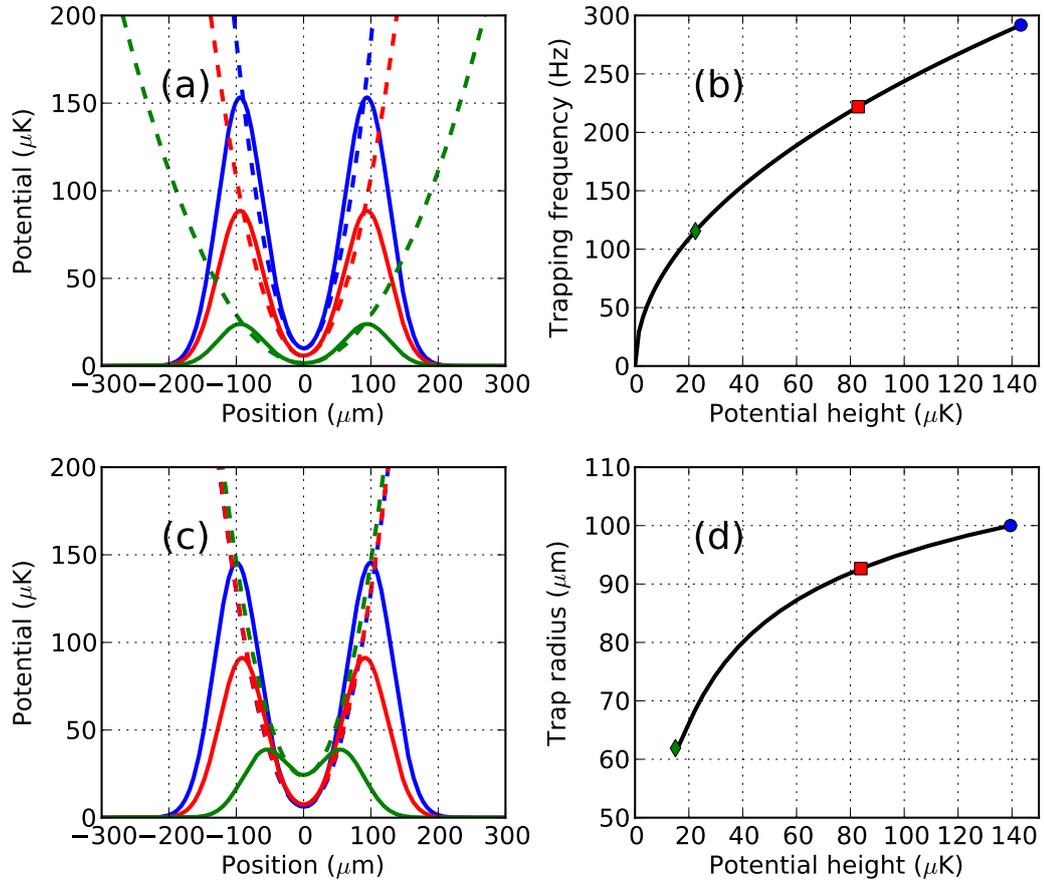


Figure 3.29 – Les figures (a) et (b) illustrent la diminution du confinement lorsque la barrière de potentiel est abaissée en maintenant la taille du piège constante ce qui conduit à une évaporation peu efficace. Les figures (c) et (d) montrent comment notre dispositif expérimental permet de surmonter ce problème. Lorsque la barrière de potentiel est baissée (en variant la puissance ou le désaccord du laser), le rayon du piège est ajusté de façon à maintenir la pulsation du piège harmonique constante  $\omega = 2\pi \times 290$  Hz selon la courbe de la figure (d). Les marqueurs colorés sur les figures de droite correspondent respectivement aux paramètres des courbes des figures de gauche. Paramètres :  $P = 2$  W, désaccord 2 nm,  $w = 65$   $\mu\text{m}$ .

à une réduction des fréquences de piégeage (voir figure 3.29), du taux de collisions et, donc, de l'efficacité de l'évaporation. Cette difficulté a été surmontée dans les premières expériences de condensation toute optique par un chargement initial du piège efficace conduisant à une forte densité dans l'espace des phases et aussi à un taux de collisions important [12]. Plusieurs stratégies ont été utilisées pour augmenter le nombre d'atomes condensés : une lentille mobile pour modifier le waist du piège de façon dynamique [73], l'utilisation d'un second piège dipolaire pour

comprimer le nuage après une période d'évaporation [124] ou encore l'association d'un faisceau large et d'un faisceau petit permettant un contrôle indépendant de la profondeur et du confinement du piège [27].

Notre dispositif expérimental offre la possibilité d'avoir un contrôle indépendant de la hauteur de la barrière en modifiant la puissance ou le désaccord du laser, et du confinement en changeant le rayon du piège (voir Eq. (3.16) et (3.17)). Ceci devrait permettre de réaliser l'évaporation forcée dans le régime d'emballement où la diminution de température conduit à une augmentation de la densité et du taux de collisions malgré la perte d'atomes. Les figures 3.29 (a) et (b) montrent la réduction des fréquences de piégeage lors de la diminution de la hauteur de la barrière de potentiel en maintenant le rayon du piège constant. Pour pallier cet effet, on peut dynamiquement ajuster le rayon du piège de façon à maintenir la fréquence de piégeage constante au cours de l'étape d'évaporation forcée. Les figures 3.29 (c) et (d) donnent la variation du rayon du piège  $a$  nécessaire pour maintenir le confinement  $\omega = 2\pi \times 290$  Hz constant en fonction de la hauteur du piège lors de l'étape d'évaporation forcée. Cette courbe est donnée à titre d'exemple car il peut être plus avantageux d'augmenter le confinement lors de l'étape d'évaporation. En pratique dans l'expérience, les rampes d'évaporation pour le désaccord (ou la puissance) et le rayon du piège devront être optimisées. On remarque que le contrôle précis de la fréquence de piégeage nécessite un très bon contrôle de la taille du piège.

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié expérimentalement un piège dipolaire bleu croisé dont le but est de comprimer le nuage d'atomes dans les régimes denses  $n\lambda^3 \sim 1$ ; domaine où les effets coopératifs et les effets du désordre (localisation forte) entrent en compétition. Ce piège dipolaire permet de piéger un grand nombre d'atomes avec une très bonne efficacité de chargement. Après avoir développé et mis en place le dispositif expérimental, nous avons étudié le chargement du piège dipolaire ainsi que les phénomènes intervenant en régime quasi-statique. Cela nous a permis de trouver la bonne gamme de paramètres maximisant les performances du piège, permettant de commencer l'étape de compression dans les conditions les plus favorables.

Ensuite, nous avons pu comprimer le nuage d'une densité initiale de  $5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$  à une densité finale de  $5 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  en 5 ms, ce qui correspond, en termes de critère de densité pertinent à  $n\lambda^3 \sim 4$ , très proche du seuil qui nous intéresse. Ceci constitue seulement les étapes préliminaires de compression et il va être possible d'améliorer les performances du piège pour pouvoir atteindre le seuil de la localisation forte  $n\lambda^3 \sim 1$  en un temps de cycle expérimental minimal.

Les améliorations possibles consistent en particulier à travailler sur un meilleur chargement (dark MOT plus dense), obtenir un meilleur contrôle de l'étape finale de compression<sup>15</sup> et utiliser le refroidissement laser lors des premières étapes de la compression à l'aide d'une mélasse désaccordée. Au delà des optimisations du protocole expérimental, il est aussi possible d'améliorer le dispositif expérimental en choisissant, par exemple, un laser plus puissant et plus désaccordé ou en utilisant des VCOs ayant une plus grande bande passante d'entrée.

---

15. L'étape finale de la compression se passe en régime harmonique. Dans ce régime, la fréquence du piège devient très sensible lorsqu'on modifie le rayon du piège.

# Conclusion

Au cours de ce travail, nous avons étudié théoriquement et expérimentalement les effets coopératifs dans les nuages d'atomes froids dilués. Nous avons aussi développé un piège dipolaire original afin de comprimer le nuage d'atomes dans les régimes denses dans le but d'étudier plus tard la compétition entre les effets coopératifs et la localisation forte.

Le chapitre 1 explique comment les interactions dipôle-dipôle d'un ensemble atomique donnent naissance aux effets coopératifs : superradiance, sousradiance, déplacement de Lamb collectif... Nous nous sommes intéressés plus particulièrement aux domaines des faibles excitations où l'on peut négliger les états de l'espace de Hilbert contenant plus de deux excitations. Alors que la plupart des études théoriques considèrent l'émission spontanée du système, nous avons étudié une situation où les atomes sont pilotés par un champ laser extérieur. Cette situation, plus proche de ce qui peut-être réalisé expérimentalement, nous a permis d'évaluer la force de pression de radiation collective s'exerçant sur le centre de masse du nuage. Celle-ci permet de mettre expérimentalement en évidence les effets coopératifs grâce au protocole décrit dans le chapitre 2. La fin du chapitre 1 est consacrée à l'étude du phénomène de sousradiance lors de la relaxation du système après avoir coupé le laser pilotant les atomes. Nous montrons comment la sousradiance dépend des différents paramètres du système et comment il est possible de la contrôler.

Le chapitre 2 présente les spécificités du dispositif expérimental que nous utilisons à Nice puis expose les mesures de la force de pression de radiation coopérative s'exerçant sur un nuage d'atomes froids. Nos mesures sont en bon accord avec le modèle théorique développé au chapitre 1. Enfin, nous avons décrit les étapes préliminaires et le protocole expérimental visant à mettre en évidence, pour la première fois, la sousradiance de  $N$  atomes dans l'espace libre.

Le chapitre 3 a été consacré à la réalisation expérimentale d'une méthode originale pour comprimer le nuage d'atomes froids dans le régime des fortes densités c'est-à-dire  $n\lambda^3 \sim 1$  ( $n$  la densité du nuage et  $\lambda$  la longueur d'onde de la radiation lumineuse). Ce régime est particulièrement intéressant pour l'étude de la compétition entre la localisation d'Anderson et les effets coopératifs intervenant

dans les régimes de grandes densités. Les densités nécessaires correspondent à une augmentation de trois ordres de grandeur de la densité spatiale par rapport à celle d'un piège magnéto-optique. La spécificité de ce type d'étude nous a conduit à concevoir un piège dipolaire bleu croisé dont la taille peut-être réduite de façon dynamique pour comprimer le nuage. Ce type de piège permet de piéger un grand nombre d'atomes à l'aide d'une très bonne efficacité de chargement. Nous avons caractérisé les propriétés de ce piège et réalisé des tests de compression. Ceci nous a finalement permis de comprimer un nuage de  $5 \cdot 10^7$  atomes d'une densité de  $5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$  à  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$  en 5 ms ( $n\lambda^3 \sim 4$ ). Il s'agit là seulement des tests préliminaires de compression qui pourront être poussés plus tard vers les densités souhaitées.

Les perspectives de ce travail de thèse sont multiples. On peut envisager la poursuite de l'étude des effets coopératifs dans les nuages d'atomes froids dilués en étudiant par exemple la saturation du système, les fluctuations d'intensité, le chauffage du nuage ou encore la description du système en termes de modes de Mie. Un des enjeux majeurs étant la mise en place de l'expérience visant à observer la sousradianance de  $N$  atomes dans l'espace libre pour la première fois. On peut aussi, à plus long terme, envisager l'étude de la compétition entre la localisation d'Anderson et les effets coopératifs dans les régimes denses pouvant être obtenus à l'aide du piège dipolaire bleu croisé développé dans la dernière partie de cette thèse.

# Annexe A

## Développement temporel du système : Hamiltonien effectif

Cette annexe détaille la dérivation de l'Hamiltonien effectif concernant la partie atomique du système. Ici, nous utilisons la méthode similaire à celle de Weisskopf-Wigner, où l'on effectue un développement temporel du système [118]. Il est aussi possible d'utiliser la méthode de la résolvante [28, 89, 83] pour aboutir au même résultat.

Tout d'abord, nous rappelons que l'Hamiltonien d'interaction atome-champ en représentation d'interaction est donné par l'équation (1.65)

$$V_I = \frac{\hbar\Omega}{2} \sum_j (e^{i\Delta t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} S_-^j + e^{-i\Delta t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} S_+^j) + \hbar \sum_j \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} (S_-^j e^{-i\omega_0 t} + S_+^j e^{i\omega_0 t}) (a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}). \quad (\text{A.1})$$

Nous considérons le problème d'un système d'atomes où il y a au plus une excitation dans le système. Pour décrire correctement le problème au deuxième ordre de l'Hamiltonien d'interaction (approximation de Born), la fonction d'onde sur laquelle on doit développer le système s'écrit [41, 116, 42]

$$|\psi\rangle = \alpha |G\rangle |0\rangle + \sum_j \beta_j |j\rangle |0\rangle + \sum_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}} |G\rangle |1_{\mathbf{k}}\rangle + \sum_m \sum_{n < m} \sum_{\mathbf{k}} \alpha_{mn, \mathbf{k}} |mn\rangle |1_{\mathbf{k}}\rangle, \quad (\text{A.2})$$

avec  $\alpha_{mn, \mathbf{k}} = \alpha_{nm, \mathbf{k}}$ . Le premier état correspond à zéro atome excité et zéro photon, les deuxièmes à l'atome  $j$  excité et zéro photon, les troisièmes à zéro atome excité et un photon dans le mode  $\mathbf{k}$ , les quatrièmes aux atomes  $m, n$  excités et un photon dans le mode  $\mathbf{k}$ . En utilisant l'orthogonalité des états de Fock, l'équation

de Schrödinger donne le système suivant d'équations couplées du premier ordre

$$\dot{\alpha} = -\frac{i}{2}\Omega \sum_j \beta_j e^{i\Delta t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}, \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_j = & -\frac{i}{2}\Omega\alpha e^{-i\Delta t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} - i \sum_{\mathbf{k}} g_k \gamma_{\mathbf{k}} e^{-i\Delta_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \\ & - i \sum_{l \neq j} \sum_{\mathbf{k}} g_k \alpha_{j l, \mathbf{k}} e^{-i(\omega_k + \omega)t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_l}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\dot{\gamma}_{\mathbf{k}} = -i g_k \sum_j \beta_j e^{i\Delta_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}, \quad (\text{A.5})$$

$$\dot{\alpha}_{mn, \mathbf{k}} = -i g_k \beta_n e^{i(\omega_k + \omega_0)t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_m} - i g_k \beta_m e^{i(\omega_k + \omega_0)t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}. \quad (\text{A.6})$$

où nous avons introduit  $\Delta_k = \omega_k - \omega_0$ . En intégrant les Eq. (A.5) et (A.6) par rapport au temps avec les conditions initiales  $\gamma_{\mathbf{k}}(0) = 0$ ,  $\alpha_{mn, \mathbf{k}}(0) = 0$ , on obtient

$$\gamma_{\mathbf{k}}(t) = -i g_k \int_0^t dt' \sum_j \beta_j e^{i\Delta_k t' - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}, \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \alpha_{mn, \mathbf{k}}(t) = & -i g_k \int_0^t dt' \beta_n(t') e^{i(\omega_k + \omega_0)t' - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_m} \\ & - i g_k \int_0^t dt' \beta_m(t') e^{i(\omega_k + \omega_0)t' - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

En substituant  $\gamma_{\mathbf{k}}(t)$  et  $\alpha_{mn, \mathbf{k}}(t)$  dans l'Eq. (A.5), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_j = & -\frac{i}{2}\Omega\alpha e^{-i\Delta t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} - \sum_l \sum_{\mathbf{k}} g_k^2 \int_0^t dt' \beta_l(t') e^{-i\Delta_k(t-t') + i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)} \\ & - \sum_{l \neq j} \sum_{\mathbf{k}} g_k^2 \int_0^t dt' \beta_l(t') e^{-i(\omega_k + \omega_0)(t-t') - i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)} \\ & - (N-1) \sum_{\mathbf{k}} g_k^2 \int_0^t dt' \beta_j(t') e^{-i(\omega_k + \omega_0)(t-t')}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Cette étape permet d'éliminer les degrés de liberté du champ et d'obtenir ainsi un système d'équations fermé pour  $(\alpha, \beta_j)$ . Nous faisons maintenant l'approximation de Markov (i.e. désexcitation lente), qui est valable quand le taux d'émission collectif est plus grand que le temps mis par un photon pour traverser le nuage. Cela permet de remplacer  $\beta_j(t') \simeq \beta_j(t)$  dans les intégrales. En effectuant l'intégrale sur

$t'$  et en remplaçant la somme sur  $\mathbf{k}$  par une intégration  $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \mathcal{V}/(2\pi)^3 \int d\mathbf{k}$ , on a

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_j = & -\frac{i}{2}\Omega\alpha e^{-i\Delta t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} + \frac{i\mathcal{V}}{(2\pi)^3}\beta_j \int d\mathbf{k} g_k^2 \frac{1 - e^{-i(\omega_k-\omega_0)t}}{\omega_k - \omega_0} \\ & + (N-1) \frac{i\mathcal{V}}{(2\pi)^3}\beta_j \int d\mathbf{k} g_k^2 \frac{1 - e^{-i(\omega_k+\omega_0)t}}{\omega_k + \omega_0} \\ & + \frac{i\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} g_k^2 \sum_{l \neq j} \beta_l \left[ \frac{1 - e^{-i(\omega_k-\omega_0)t}}{\omega_k - \omega_0} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_l)} + \frac{1 - e^{-i(\omega_k+\omega_0)t}}{\omega_k + \omega_0} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_l)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Une intégration sur les directions de  $\mathbf{k}$  donne ( $\omega_k = ck$ ,  $k_0 = \omega_0/c$ )

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_j = & -\frac{i}{2}\Omega\alpha e^{-i\Delta t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} + \frac{i\mathcal{V}}{2\pi^2 c}\beta_j \int_0^\infty dk k^2 g_k^2 \frac{1 - e^{-ic(k-k_0)t}}{k - k_0} \\ & + (N-1) \frac{i\mathcal{V}}{2\pi^2 c}\beta_j \int_0^\infty dk k^2 g_k^2 \frac{1 - e^{-ic(k+k_0)t}}{k + k_0} \\ & + \frac{i\mathcal{V}}{2\pi^2 c} \int_0^\infty dk k^2 g_k^2 \sum_{l \neq j} \beta_l \left[ \frac{1 - e^{-ic(k-k_0)t}}{k - k_0} + \frac{1 - e^{-ic(k+k_0)t}}{k + k_0} \right] \frac{\sin(k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|)}{k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Ensuite, nous remplaçons  $k_0$  par  $k_0 + i0^+$  et enlevons les facteurs exponentiels contenant  $t$ . En effet, ces facteurs oscillent rapidement lors de l'intégration sur  $k$  et peuvent donc être négligés.

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_j = & -\frac{i}{2}\Omega\alpha e^{-i\Delta t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} + \frac{i\mathcal{V}}{2\pi^2 c}\beta_j \int_0^\infty dk k^2 g_k^2 \frac{1}{k - k_0 - i0^+} \\ & + (N-1) \frac{i\mathcal{V}}{2\pi^2 c}\beta_j \int_0^\infty dk k^2 g_k^2 \frac{1}{k + k_0 + i0^+} \\ & + \frac{i\mathcal{V}}{2\pi^2 c} \int_0^\infty dk g_k^2 \sum_{l \neq j} \beta_l \left[ \frac{1}{k - k_0 - i0^+} + \frac{1}{k + k_0 + i0^+} \right] \frac{\sin(k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|)}{k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

On peut réécrire les deux premiers termes de l'Eq. (A.12) en utilisant la relation

$$\frac{1}{x \mp i0^+} = \text{Vp} \left( \frac{1}{x} \right) \pm i\pi\delta(x), \quad (\text{A.13})$$

où Vp est la valeur principale de Cauchy. En se rappelant que  $g_k = \omega_0 \frac{d_{eg}}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{\epsilon_0 \omega_k \mathcal{V}}}$ , on trouve

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_j = & -\frac{i}{2}\Omega\alpha e^{-i\Delta t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} + \frac{i\Gamma}{2\pi k_0}\beta_j \int_0^\infty dk k \left[ \text{Vp} \frac{1}{k - k_0} + i\pi\delta(k - k_0) \right] \\ & + (N-1) \frac{i\Gamma}{2\pi k_0}\beta_j \int_0^\infty dk k \left[ \text{Vp} \frac{1}{k + k_0} - i\pi\delta(k + k_0) \right] \\ & + \frac{i\Gamma}{2\pi k_0} \int_0^\infty dk \sum_{l \neq j} \beta_l \left[ \frac{1}{k - k_0 - i0^+} + \frac{1}{k + k_0 + i0^+} \right] \frac{\sin(k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

où  $\Gamma = k_0^3 d_{eg}^2 / (\pi \epsilon_0 \hbar)$  est la largeur de raie de l'atome. L'intégrale sur  $k$  du dernier terme peut-être transformée en une intégrale entre  $-\infty$  à  $\infty$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dk \left[ \frac{1}{k - k_0 - i0^+} + \frac{1}{k + k_0 + i0^+} \right] \sin(k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|) \\ &= \int_{-\infty}^\infty dk \frac{\sin(k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|)}{k - k_0 - i0^+} \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty dk \left[ \frac{\exp(ik|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|)}{k - k_0 - i0^+} - \frac{\exp(-ik|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|)}{k - k_0 - i0^+} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

L'intégration de l'équation précédente s'effectue dans le plan complexe par la méthode des résidus. Pour le premier terme, on choisit un contour dans le plan complexe supérieur, et, pour le deuxième terme, on choisit un contour dans le plan complexe inférieur. L'intégration du deuxième terme donne zéro. On obtient donc à partir de l'Eq. (A.14)

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_j &= -\frac{i}{2} \Omega \alpha e^{-i\Delta t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} + \frac{i\Gamma}{2\pi k_0} \beta_j \int_0^\infty dk k \left[ \text{Vp} \frac{1}{k - k_0} + \text{Vp} \frac{N-1}{k + k_0} \right] \\ &\quad - \frac{\Gamma}{2} \beta_j + \frac{i\Gamma}{2} \sum_{l \neq j} \beta_l \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|)}{k_0|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Le deuxième terme de l'équation (A.16) correspond à un déplacement de fréquence de la même valeur pour tous les  $\beta_j$ . Nous le négligerons dans la suite pour finalement obtenir un système d'équations fermé pour  $(\alpha, \beta_j)$

$$\dot{\alpha} = -\frac{i\Omega}{2} \sum_j \beta_j e^{i\Delta t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j}, \quad (\text{A.17})$$

$$\dot{\beta}_j = -\frac{i\Omega}{2} \alpha e^{-i\Delta t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} - \frac{\Gamma}{2} \beta_j + \frac{i\Gamma}{2} \sum_{l \neq j} \beta_l \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|)}{k_0|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|}. \quad (\text{A.18})$$

Il est possible de réécrire ce résultat sous la forme d'une équation de Schrödinger pour la fonction d'onde  $|\psi\rangle = \alpha|G\rangle + \sum_j \beta_j|j\rangle$  agissant dans l'espace de Hilbert restreint à une excitation au plus

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H_{\text{eff}}|\psi\rangle, \quad (\text{A.19})$$

avec

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= \frac{\hbar\Omega}{2} \sum_i [e^{i\Delta t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} S_-^i + e^{-i\Delta t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} S_+^i] \\ &\quad - i\frac{\hbar\Gamma}{2} \sum_i S_+^i S_-^i - \frac{\hbar\Gamma}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V_{ij} S_+^i S_-^j, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

avec  $V_{ij} = \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|)}{k_0|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|}$ . Le premier terme décrit le couplage des dipôles au laser, le second permet de tenir compte de la durée de vie des niveaux excités et le dernier terme vient des interactions dipôle-dipôle résonnants.



# Annexe B

## Équations d'évolution, solutions et relaxation

Dans cette annexe nous revisitons les équations de l'optique linéaire décrivant l'évolution des  $N$  dipôles couplés. Nous montrons comment écrire formellement les solutions de ces équations. Ceci nous permettra de revenir sur l'approximation timed Dicke.

### B.1 Notation *bra-ket* pour les équations de l'optique linéaire

Nous rappelons que les équations de l'optique linéaire contrôlant l'évolution des amplitudes des dipôles  $\beta_j$  s'écrivent (voir Eq. (1.14)),

$$\dot{\beta}_j = -\frac{i\Omega}{2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} + \left(i\Delta - \frac{\Gamma}{2}\right)\beta_j + \frac{i\Gamma}{2}\sum_{m\neq j}\beta_m(t)\frac{\exp(ik|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|)}{k|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_m|}. \quad (\text{B.1})$$

Elles forment un système de  $N$  équations linéaires couplées dont l'inconnue est un vecteur complexe de dimension  $N$  que nous notons formellement  $|\psi\rangle$ . Pour des raisons pratiques, nous utilisons la notation *bra-ket* pour décrire ce système d'équations, en gardant à l'esprit que ce système n'a rien de quantique. Nous notons  $\{|j\rangle, j = 1, \dots, N\}$ , la base canonique de telle sorte que les composantes de  $|\psi\rangle$  dans cette base soient  $(\beta_1, \dots, \beta_N)$ , i.e.

$$|\psi\rangle = \sum_j \beta_j |j\rangle. \quad (\text{B.2})$$

alors le système d'équation (B.1), se réécrit de la façon suivante

$$i\frac{d|\psi\rangle}{dt} = \mathcal{H}|\psi\rangle + \frac{\sqrt{N}\Omega}{2}|TD\rangle, \quad (\text{B.3})$$

où  $|TD\rangle = 1/\sqrt{N} \sum_j e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} |j\rangle$  est l'état timed Dicke et

$$\mathcal{H} = \sum_i \sum_j |i\rangle\langle j| \left\{ -\Delta\delta_{ij} - \frac{\Gamma}{2} \left[ (1 - \delta_{ij}) \frac{\cos(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + i \frac{\sin(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right] \right\},$$

est une matrice complexe de dimension  $N \times N$  décrivant le couplage dipôle-dipôle induit par le champ électromagnétique. Sous cette forme, il apparaît clairement que le couplage du laser s'effectue par l'intermédiaire de l'état timed Dicke  $|TD\rangle$  avec une fréquence de Rabi collective  $\sqrt{N}\Omega$ . L'équation (B.3) est très pratique à manipuler formellement comme nous allons le voir dans la suite. Par exemple, l'équation régissant la dissipation du système prend une forme très compacte, où l'énergie du système est associée à la norme de  $|\psi\rangle$  (voir Eq. (B.35)).

**Lien avec la description quantique** Bien que les équations décrites ci-dessus soient classiques et que la notation *bra-ket* soit uniquement utilisée dans le but de simplifier les notations, les similarités avec la description quantique du système atomique par un Hamiltonien effectif  $H_{\text{eff}}$  décrite dans la partie 1.3 et l'annexe A sont frappantes. L'état quantique  $|\phi\rangle$  équivalent à l'état  $|\psi\rangle = \sum_j \beta_j |j\rangle$  de l'optique linéaire est

$$|\phi\rangle = |g \cdots g\rangle + \sum_j \beta_j |g \cdots e_j \cdots g\rangle, \quad (\text{B.4})$$

où l'on a explicité les vecteurs de la base quantique pour éviter toute confusion.

## B.2 Équation d'évolution des dipôles dans différentes bases

Nous allons décrire l'évolution des dipôles dans trois bases différentes : la base canonique des dipôles, la base timed Dicke et la base propre de la matrice de couplage dipôle-dipôle. Chacune possède des avantages dont nous discutons ci-dessous. Par souci de clarté et pour ne pas rendre le problème trop formel, nous abordons le cas de deux atomes avant de généraliser au problème de  $N$  dipôles couplés.

### B.2.1 Base canonique

La base canonique des dipôles  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  possède l'avantage d'avoir une interprétation physique très simple<sup>1</sup>. L'état du système s'écrit  $|\psi\rangle = \beta_1 |1\rangle + \beta_2 |2\rangle$  et les composantes  $\beta_j$  représentent l'amplitude associée à chaque dipôle. Nous avons

---

1. L'équivalent quantique des états  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  sont  $\{|eg\rangle, |ge\rangle\}$ .

vu dans la partie 1.1.1 que l'équation d'évolution des amplitudes des dipôles dans la base canonique (cf. Eq. (1.14)) s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$i \begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \frac{\Omega}{2} \begin{pmatrix} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} \\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Le dernier terme correspond au couplage des dipôles au champ électrique extérieur et la matrice  $\mathcal{M}$  décrit le couplage dipôle-dipôle

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -\Delta - i\Gamma/2 & -\delta - i\gamma/2 \\ -\delta - i\gamma/2 & -\Delta - i\Gamma/2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

où

$$\delta = -\frac{\Gamma \cos(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{2k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad \gamma = \Gamma \frac{\sin(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (\text{B.7})$$

Dans la suite, pour alléger les notations on note

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} U & V \\ V & U \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

avec  $U = -\Delta - i\Gamma/2$  et  $V = -\delta - i\gamma/2$ . Cette équation s'étend très facilement à  $N$  dipôles couplés (cf. partie 1.1.1). Les composantes de la matrice  $\mathcal{M}$  s'écrivent alors

$$\mathcal{M}_{ij} = -\Delta\delta_{ij} - \frac{\Gamma}{2} \left[ (1 - \delta_{ij}) \frac{\cos(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + i \frac{\sin(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right]. \quad (\text{B.9})$$

La matrice  $\mathcal{M}$  est une matrice symétrique aléatoire Euclidienne<sup>2</sup>. On remarque qu'elle est non Hermitienne.

## B.2.2 Base timed Dicke

On introduit la base timed Dicke en définissant deux nouveaux vecteurs de base

$$|s\rangle = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1}|1\rangle + e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}|2\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |a\rangle = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1}|1\rangle - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}|2\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (\text{B.10})$$

L'état  $|s\rangle$  correspond à l'état symétrique timed Dicke. L'état du système s'écrit  $|\psi\rangle = \xi_s|s\rangle + \xi_a|a\rangle$ . Dans la base  $\{|s\rangle, |a\rangle\}$ , l'équation (B.5) s'écrit

$$i \begin{pmatrix} \dot{\xi}_s \\ \dot{\xi}_a \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \xi_s \\ \xi_a \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}\Omega}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.11})$$

---

2. Les éléments  $M_{ij}$  d'une matrice aléatoire Euclidienne de dimension  $N \times N$  sont donnés par une fonction déterministe  $f$  des positions des paires de points distribués aléatoirement dans une région de l'espace Euclidien :  $M_{ij} = f(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ .

avec

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} U + V \cos [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] & -iV \sin [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] \\ iV \sin [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] & U - V \cos [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] \end{pmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

On remarque immédiatement l'avantage de la base timed Dicke : dans cette base, seul l'état symétrique est couplé au laser avec une constante de couplage  $\sqrt{2}^3$  fois plus grande que celle des états de la base canonique. L'état antisymétrique n'est pas directement couplé. Cependant, il existe un couplage indirect par l'intermédiaire de la matrice de couplage  $\mathcal{A}$ .

En l'absence de terme de couplage  $V = 0$ , la matrice  $\mathcal{A}$  est diagonale. L'état du système  $|\psi\rangle$  reste donc proportionnel à  $|s\rangle$  tout au long de son évolution.

De façon plus générale, il existe une base orthonormale timed Dicke pour  $N$  dipôles couplés  $\{|s\rangle, |a_l\rangle, l = 1, \dots, N-1\}$  [117] où l'état  $|s\rangle = 1/\sqrt{N} \sum_j e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} |j\rangle$  est l'état timed Dicke et les états  $|a_l\rangle$  s'écrivent

$$|a_l\rangle = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left\{ \sum_{j=1}^l e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} |j\rangle - l e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{l+1}} |l+1\rangle \right\}. \quad (\text{B.13})$$

Dans ce cas, encore, le laser se couple seulement à l'état symétrique  $|s\rangle$ , avec une fréquence de Rabi collective  $\sqrt{N}\Omega$ . Tous les états  $|a\rangle$  ne sont pas directement couplés au laser. Les éléments de matrice de  $\mathcal{A}$  peuvent alors être calculés facilement à l'aide de  $\mathcal{M}$  et des définitions des vecteurs de base (cf. Eq. (B.13)).

### B.2.3 Base des états propres de la matrice de couplage

Les vecteurs propres de la matrice  $\mathcal{M}$  sont très facilement obtenus dans le cas de deux atomes

$$|+\rangle = \frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |-\rangle = \frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (\text{B.14})$$

Ils correspondent aux dipôles parallèles et antiparallèles. On remarque que les vecteurs propres sont orthogonaux malgré le caractère non Hermitien de la matrice  $\mathcal{M}$ . Cela est dû aux symétries particulières du système lorsqu'on considère le cas de deux atomes seulement. Pour  $N > 2$ , les vecteurs propres ne sont en général pas orthogonaux. Dans la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , l'évolution temporelle du système s'écrit

$$i \begin{pmatrix} \dot{\chi}_+ \\ \dot{\chi}_- \end{pmatrix} = \mathcal{D} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix} + \frac{\Omega}{2} \begin{pmatrix} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} + e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.15})$$

---

3.  $\sqrt{N}$  fois plus grande pour  $N$  atomes.

où

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} U + V & 0 \\ 0 & U - V \end{pmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

L'avantage de la description du système en termes de modes propres de la matrice de couplage permet d'étudier simplement la relaxation du système. En effet, lorsque le couplage au laser incident est coupé  $\Omega = 0$ , les amplitudes  $\chi_{\pm}$  évoluent alors de façon indépendante

$$\chi_{\pm}(t) = \chi_{\pm}^{\text{st}} \exp[-i(U \pm V)t]. \quad (\text{B.17})$$

**Généralisation au cas de  $N$  atomes couplés** Dans le cas de la base canonique ou timed Dicke, le passage de deux atomes à  $N$  atomes ne pose pas de problème particulier. Pour  $N > 2$  et pour des dipôles distribués aléatoirement, il faut généralement avoir recours à une méthode numérique pour trouver les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice  $\{|\alpha\rangle, \Lambda_{\alpha} \equiv E_{\alpha} - i\Gamma_{\alpha}/2\}$ . La partie réelle de chaque valeur propre représente l'énergie du mode et la partie imaginaire son temps de vie. *La matrice  $\mathcal{M}$  étant non Hermitienne, les vecteurs propres forment une base mais ne sont généralement pas orthogonaux.* Nous verrons que cette propriété est particulièrement importante dans l'étude de la sousradiance.

## B.3 Solution des équations

### B.3.1 Solution formelle pour le pilotage du système

Indépendamment de la base, nous pouvons écrire l'équation d'évolution du système de  $N$  dipôles couplés  $|\psi\rangle$  par

$$i \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \mathcal{H}|\psi\rangle + \frac{\sqrt{N}\Omega}{2}|s\rangle. \quad (\text{B.18})$$

Sous cette forme, il apparaît clairement que le couplage au laser s'effectue par l'intermédiaire de l'état symétrique  $|s\rangle$ . La solution stationnaire de cette équation (solution particulière) s'écrit

$$|\psi^{\text{st}}\rangle = -\frac{\sqrt{N}\Omega}{2}\mathcal{H}^{-1}|s\rangle. \quad (\text{B.19})$$

Ce qui permet d'écrire la solution complète sous la forme<sup>4</sup>

$$|\psi(t)\rangle = (1 - e^{-i\mathcal{H}t})|\psi^{\text{st}}\rangle. \quad (\text{B.20})$$

On remarque que la solution est proportionnelle à  $\Omega$  comme on s'y attend pour une description dans le cadre de l'optique linéaire.

---

4. À titre de remarque, on peut réécrire Eq. (B.18) sous la forme  $id_t|\psi\rangle = \mathcal{H}(|\psi\rangle - |\psi^{\text{st}}\rangle)$ .

### B.3.2 Solution formelle pour la relaxation du système

Supposons que le laser soit coupé à  $t = 0$ . La solution formelle s'écrit

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\mathcal{H}t}|\psi(0)\rangle, \quad (\text{B.21})$$

où  $|\psi(0)\rangle$  correspond à l'état du système au moment de la coupure du laser. Si le système a été piloté pendant une période suffisamment longue,  $|\psi(0)\rangle = |\psi^{\text{st}}\rangle$ .

### B.3.3 Approximation timed Dicke pour la solution stationnaire

En décomposant l'état du système sur la base timed Dicke  $|\psi\rangle = \xi_s|s\rangle + \sum_{l=1}^{N-1} \xi_{a_l}|a_l\rangle$  et en projetant Eq. (B.18) sur  $\langle s|$  et  $\langle a_l|$ , on obtient

$$i\dot{\xi}_s = \langle s|\mathcal{H}|s\rangle\xi_s + \sum_l \langle s|\mathcal{H}|a_l\rangle\xi_{a_l} + \frac{\sqrt{N}\Omega}{2}, \quad (\text{B.22})$$

$$i\dot{\xi}_{a_l} = \langle a_l|\mathcal{H}|s\rangle\xi_s + \sum_{l'} \langle a_l|\mathcal{H}|a_{l'}\rangle\xi_{a_{l'}}. \quad (\text{B.23})$$

L'approximation timed Dicke consiste à négliger les couplages hors diagonaux entre les états  $|s\rangle$  et  $|a_l\rangle$ . Ainsi, les états  $|a_l\rangle$  n'étant pas directement couplés au laser ne sont jamais peuplés et l'équation (B.22) se réécrit

$$i\dot{\xi}_s = \langle s|\mathcal{H}|s\rangle\xi_s + \frac{\sqrt{N}\Omega}{2}, \quad (\text{B.24})$$

avec  $\langle s|\mathcal{H}|s\rangle = -(\Delta - \mathcal{L}_c) - i\Gamma_c/2$  où  $\mathcal{L}_c$  est le déplacement de Lamb collectif et  $\Gamma_c$  est le taux d'émission collectif. La solution de Eq. (B.24) s'écrit

$$\xi_s(t) = -\frac{\sqrt{N}\Omega}{2\langle s|\mathcal{H}|s\rangle} (1 - e^{-i\langle s|\mathcal{H}|s\rangle t}). \quad (\text{B.25})$$

## B.4 Grandeurs physiques

En utilisant le formalisme développé ci-dessus, il est possible d'exprimer les grandeurs physiques sous une forme compacte. Dans cette partie, nous donnons quelques unes de leurs expressions.

**Énergie mécanique du système** L'équation (1.21) permet de relier l'énergie mécanique des dipôles à la norme du vecteur  $|\psi\rangle$

$$W_{\text{mat}} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2 \langle \psi|\psi\rangle. \quad (\text{B.26})$$

**Diagramme d'émission** À partir de l'équation (1.18), l'intensité du champ rayonné par l'état  $|\psi\rangle$  s'écrit

$$I(\mathbf{r}, t) = \langle \psi | \mathcal{I}(\mathbf{r}) | \psi \rangle, \quad (\text{B.27})$$

où l'opérateur  $\mathcal{I}(\mathbf{r})$  prend la forme suivante

$$\mathcal{I}(\mathbf{r}) = \frac{\omega_0^4 d_{eg}^2}{4\epsilon_0 c^3 r^2} \sum_i \sum_j e^{-i\mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} |j\rangle \langle i|. \quad (\text{B.28})$$

**Largeur de raie et déplacement de Lamb collectif** Le déplacement de Lamb collectif  $\mathcal{L}_\psi$  et la largeur de raie  $\Gamma_\psi$  associés de l'état  $|\psi\rangle$  s'écrivent simplement en remarquant que  $\langle \psi | \mathcal{H}(\Delta = 0) | \psi \rangle = \mathcal{L}_\psi - i\Gamma_\psi/2$ . Ceci permet de trouver les égalités suivantes

$$\mathcal{L}_\psi = \text{Re} \langle \psi | \mathcal{H}(\Delta = 0) | \psi \rangle, \quad (\text{B.29})$$

$$\Gamma_\psi = -2 \text{Im} \langle \psi | \mathcal{H}(\Delta = 0) | \psi \rangle. \quad (\text{B.30})$$

**Force de pression de radiation** Dans la partie 1.5.3, nous avons donné une dérivation heuristique de la force de pression de radiation s'exerçant sur le nuage dans le cadre de l'approximation timed Dicke. L'expression de cette force se généralise pour un état  $|\psi\rangle$  quelconque. Elle prend la forme suivante [30, 15]  $F = F_{az} + F_{ez}$ , où

$$F_{az} = -\hbar k \sqrt{N} \Omega \text{Im} \langle TD | \psi \rangle, \quad (\text{B.31})$$

est la contribution de la force due à l'absorption d'un photon et

$$F_{ez} = \langle \psi | \mathcal{F}_{ez} | \psi \rangle, \quad (\text{B.32})$$

représente la contribution due à l'émission. L'opérateur  $\mathcal{F}_{ez}$  est donné par

$$\mathcal{F}_{ez} = -i\hbar k \Gamma \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{z_i - z_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} j_1(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) |j\rangle \langle i|, \quad (\text{B.33})$$

où  $j_1(z) = \sin(z)/z^2 - \cos(z)/z$  est la fonction de Bessel sphérique du premier ordre.

## B.5 Remarques sur la relaxation du système

### B.5.1 Équation de relaxation du système

Le formalisme mis en place dans cette annexe permet d'écrire de façon concise l'énergie du système (voir Eq. (1.21)) comme étant proportionnelle à la norme du

vecteur  $|\psi\rangle$  décrivant le système

$$W_{\text{mat}} \propto \langle\psi|\psi\rangle. \quad (\text{B.34})$$

Lors de la relaxation du système  $\Omega = 0$ , et en utilisant l'équation (B.18), l'évolution de la norme de  $|\psi\rangle$  s'écrit

$$\frac{d\langle\psi|\psi\rangle}{dt} = -i\langle\psi|\mathcal{H} - \mathcal{H}^\dagger|\psi\rangle = 2\langle\psi|\text{Im}\mathcal{H}|\psi\rangle, \quad (\text{B.35})$$

où la dernière égalité peut être écrite car la matrice  $\mathcal{H}$  est symétrique  $\mathcal{H}_{ij} = \mathcal{H}_{ji}$ . Écrite sous cette forme, cette équation décrivant la relaxation du système est très intéressante. Elle permet de retrouver l'équation (1.24) donnant le temps de sortie des photons, obtenue précédemment par un raisonnement sur la conservation de l'énergie du système (voir partie 1.1.3). Écrite comme cela, l'équation est sous une forme indépendante de la base.

### B.5.2 Relaxation pour l'état timed Dicke

Dans l'approximation timed Dicke, l'équation de relaxation s'écrit

$$\frac{d|\xi_s|^2}{dt} = -i|\xi_s|^2\langle s|\mathcal{H} - \mathcal{H}^\dagger|s\rangle, \quad (\text{B.36})$$

ce qui, en explicitant, devient

$$\frac{d|\xi_s|^2}{dt} = -\Gamma_c|\xi_s|^2, \quad (\text{B.37})$$

où  $\Gamma_c$  est le taux d'émission collectif donné par l'équation Eq. (1.40).

### B.5.3 Relaxation en termes des modes propres

Dans cette partie, nous allons analyser l'Eq. (B.36) en la développant sur la base des modes propres.

#### Cas de deux atomes

Commençons par le cas simple de deux atomes. Dans ce cas, le système possède deux modes propres  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  qui sont orthogonaux à cause des symétries particulières du système. Les modes orthogonaux ne sont pas couplés entre eux et relaxent donc de façon indépendante

$$\frac{d|\chi_\pm|^2}{dt} = -i|\chi_\pm|^2\langle\pm|\mathcal{H} - \mathcal{H}^\dagger|\pm\rangle, \quad (\text{B.38})$$

ce qui, en explicitant, se réécrit

$$\frac{d|\chi_{\pm}|^2}{dt} = -\Gamma_{\pm}|\chi_{\pm}|^2, \quad (\text{B.39})$$

où

$$\Gamma_{\pm} = \Gamma \left[ 1 \pm \frac{\sin(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right]. \quad (\text{B.40})$$

**Remarque**  $\Gamma_c = \Gamma \left[ 1 + \frac{\sin(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \cos[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \right] \in [\Gamma_-, \Gamma_+]$ , ce qui signifie que le taux d'émission collectif correspondant à l'état *timed Dicke* est compris dans l'intervalle créé par les taux de relaxation des modes propres de  $\mathcal{H}$ . Ceci se généralise au cas de  $N$  atomes.

### Cas de $N$ atomes

Le cas de  $N > 2$  est plus compliqué à traiter car les modes propres ne sont en général pas orthogonaux. On appelle  $\{|\alpha\rangle, \Lambda_{\alpha} \equiv E_{\alpha} - i\Gamma_{\alpha}/2\}$ , les vecteurs propres de droite et valeurs propres de  $\mathcal{H}$ . L'équation (B.35) se réécrit

$$\frac{d\langle\psi|\psi\rangle}{dt} = -i \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} \chi_{\alpha'}^* \chi_{\alpha} (\Lambda_{\alpha} - \Lambda_{\alpha'}^*) \langle\alpha'|\alpha\rangle, \quad (\text{B.41})$$

avec  $\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} \chi_{\alpha'}^* \chi_{\alpha} \langle\alpha'|\alpha\rangle$ . Cette équation montre comment la nature non orthogonale des modes complique le problème.

On peut décomposer l'état initial du système sur la base des modes propres

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle, \quad (\text{B.42})$$

alors d'après l'équation (B.21), l'évolution temporelle s'écrit

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha} e^{-i\Lambda_{\alpha}t} |\alpha\rangle. \quad (\text{B.43})$$

L'énergie du système est proportionnelle à

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{\alpha} |\chi_{\alpha}|^2 e^{-\Gamma_{\alpha}t} + \sum_{\alpha} \sum_{\alpha' \neq \alpha} \chi_{\alpha'}^* \chi_{\alpha} e^{-i(\Lambda_{\alpha} - \Lambda_{\alpha'}^*)t} \langle\alpha'|\alpha\rangle. \quad (\text{B.44})$$

Cette expression montre comment le fait que les modes du système soient non-orthogonaux complexifie la relaxation de l'énergie du système à cause du deuxième

terme de l'équation (B.44) qui correspond aux couplages entre les modes du système. Ainsi, les  $\Gamma_\alpha$  ne donnent pas les taux de désexcitation du système. Cependant, aux très grands temps, seul le mode de plus grande durée de vie domine et l'énergie mécanique évolue donc selon

$$\langle \psi | \psi \rangle \simeq |\chi_{\text{sub}}|^2 e^{-\Gamma_{\text{sub}} t}, \quad (\text{B.45})$$

où  $\Gamma_{\text{sub}} = \min_\alpha (\text{Im } \Lambda_\alpha)$ . Ainsi, malgré une relaxation compliquée à cause de la nature non orthogonale des modes propres de la matrice de couplage, aux temps longs on retrouve une relaxation exponentielle avec une constante de temps du mode ayant la plus grande durée de vie. Nous appelons ce mode, le *mode sous-radiant*.

# Annexe C

## Potentiel dipolaire

Dans le chapitre 3, nous avons donné l'expression du potentiel dipolaire pour un atome à deux niveaux. La structure interne des niveaux atomiques complexifie le problème. Nous consacrons cette annexe au calcul du potentiel dipolaire pour le  $^{87}\text{Rb}$  et un laser désaccordé de quelques dizaines de GHz dans le bleu par rapport à la transition  $|5^2S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}, F' = 3\rangle$ .

La lumière du piège dipolaire est polarisée linéairement ; nous pouvons donc choisir l'axe de quantification de sorte que la lumière ait une polarisation  $\pi$  par rapport aux transitions atomiques. Dans notre piège dipolaire, un repompeur force les atomes à rester dans le niveau  $|5^2S_{1/2}, F = 2\rangle$ , sans que nous ayons cependant de contrôle sur les populations des différents sous-niveaux Zeeman. Le potentiel dipolaire agissant sur l'atome est différent suivant le sous-niveau Zeeman peuplé.

On suppose qu'initialement l'atome se trouve dans l'état  $|g\rangle \equiv |5^2S_{1/2}, F = 2, m_F\rangle$  et, on note  $|e_i\rangle$  les états excités accessibles à partir de  $|g\rangle$  pour un laser polarisé  $\pi$  (voir figure C.1). Le potentiel dipolaire s'écrit alors [114, 45]

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\hbar\Gamma^2}{8} \frac{I(\mathbf{r})}{I_{\text{sat}}} \sum_i \frac{2J'_{e_i} + 1}{2J + 1} \frac{|C_g^{e_i}|^2}{\Delta_{ge_i}}, \quad (\text{C.1})$$

où  $C_g^{e_i}$  sont les coefficients de Clebsch-Gordan<sup>1</sup> et  $\Delta_{ge_i}$  les désaccords du laser par rapport aux transitions  $|g\rangle \rightarrow |e_i\rangle$ . Pour simplifier, on a supposé dans la formule précédente que le taux de relaxation  $\Gamma_{ge_i}$  est le même quelles que soient les transitions considérées, ce qui constitue une bonne approximation pour les raies D<sub>1</sub> et D<sub>2</sub> du Rubidium [114].

Dans notre situation particulière d'un laser désaccordé de quelques dizaines de GHz par rapport à la transition  $|5^2S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}, F' = 3\rangle$ , on peut négliger la contribution des états  $|5^2P_{1/2}, F', m_{F'}\rangle$  de la raie D<sub>1</sub> car l'écart d'énergie entre la structure fine du Rubidium (15 nm) est grande devant le désaccord du laser.

---

1. Une liste complète des coefficients de Clebsch-Gordan peut être trouvée dans [114].

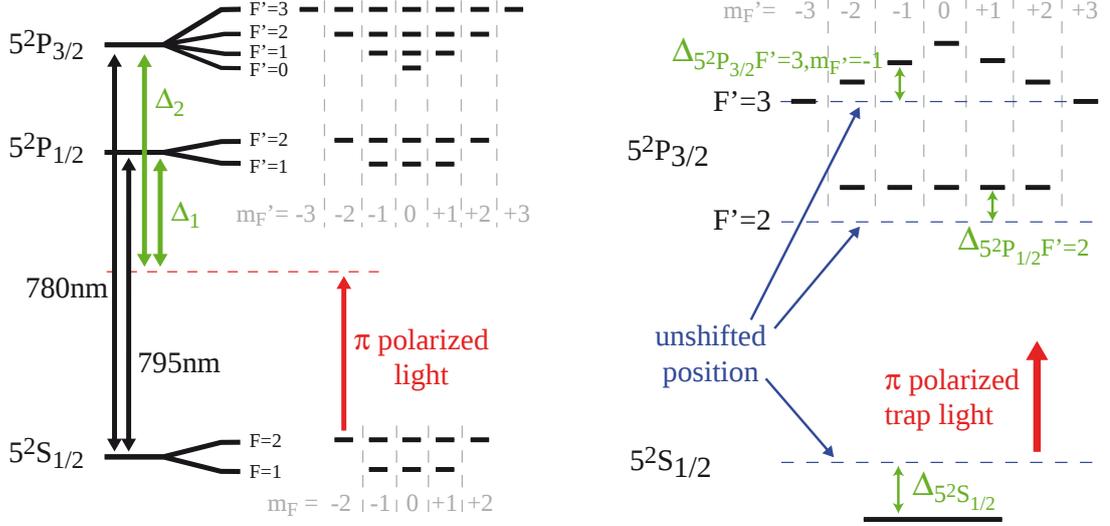


Figure C.1 – Déplacement lumineux pour les niveaux du  $^{87}\text{Rb}$  pour une lumière polarisée  $\pi$ . L'état initial du système est  $|g\rangle \equiv |5^2S_{1/2}, F = 2, m_F = 0, \pm 1, \pm 2\rangle$ . La figure de gauche montre les différents niveaux excités couplés par le laser. Dans notre situation, on peut négliger les transitions de la raie D<sub>1</sub> et considérer un même désaccord pour tous les niveaux de la raie D<sub>2</sub>. La figure de droite illustre les déplacements des niveaux hyperfins  $|5^2P_{3/2}, F' = 2, m_{F'}\rangle$  et  $|5^2P_{3/2}, F' = 3, m_{F'}\rangle$ . Figure tirée de [45].

De plus, on peut considérer que les désaccords pour les états  $|5^2P_{3/2}, F', m_{F'}\rangle$  sont à peu près égaux  $\Delta_{ge_i} \simeq \Delta_2$  car les écarts entre niveaux hyperfins sont de l'ordre du MHz et, donc, sont faibles par rapport au désaccord du laser. Avec ces simplifications le potentiel dipolaire peut s'écrire

$$U_{|5^2S_{1/2}, F=2, m_F\rangle} \simeq \frac{\hbar\Gamma}{8} \frac{\Gamma}{\Delta_2} \frac{I}{I_{\text{sat}}} \sum_i 2|C_g^{e_i}|^2 = g_{m_F} \frac{\hbar\Gamma}{8} \frac{\Gamma}{\Delta_2} \frac{I}{I_{\text{sat}}}, \quad (\text{C.2})$$

où  $g_{m_F}$  est un facteur numérique. La table C.1 donne les valeurs du potentiel dipolaire pour les différents sous-niveaux Zeeman du niveau  $|5^2S_{1/2}, F = 2, m_F\rangle$ . On remarque que la valeur du potentiel est la même quel que soit le sous-niveau Zeeman considéré. Ce résultat est bien connu lorsqu'on ne résout pas la structure hyperfine des états excités à cause des règles de somme des coefficients de Clebsch-Gordan [52]. Dans ce cas, il existe une formule générale pour toutes les polarisations [52]

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\hbar\Gamma^2}{8} \frac{I(\mathbf{r})}{I_{\text{sat}}} \left( \frac{2 + \mathcal{P}g_F m_F}{3\Delta_2} + \frac{1 - \mathcal{P}g_F m_F}{3\Delta_1} \right), \quad (\text{C.3})$$

où  $g_F$  est le facteur de Landé et  $\mathcal{P}$  caractérise la polarisation du laser ( $\mathcal{P} = 0, \pm 1$  pour une lumière polarisée linéairement et circulairement  $\sigma^\pm$ ). Les désaccords  $\Delta_2$  et  $\Delta_1$  représentent respectivement les désaccords par rapport aux raies D<sub>2</sub> et D<sub>1</sub>.

$m_F$	2	1	0	-1	-2
$ e_i\rangle \equiv  5^2P_{3/2}, F', m_{F'} = m_F\rangle$	$F' = 3$				
	$F' = 2$				
		$F' = 1$	$F' = 1$	$F' = 1$	
$g_{m_F}$	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3

Table C.1 – Potentiel dipolaire pour des atomes dans les différents sous-niveaux Zeeman  $|5^2S_{1/2}, F = 2, m_F\rangle$  pour un laser polarisé  $\pi$ .

Dans notre situation expérimentale où l'on utilise une polarisation  $\pi$ , la hauteur de la barrière de potentielle est la même quelle que soit le sous-niveaux Zeeman dans lequel l'atome se trouve. En revanche, pour des polarisations circulaires, la hauteur du potentiel est différente suivant le sous-niveau Zeeman peuplé. Ainsi, on note l'importance d'utiliser une polarisation linéaire.

**Conclusion** Dans notre situation expérimentale, la hauteur de la barrière est donnée par

$$U_{\text{dip}} = \frac{2}{3}U_{\text{deux niveaux}}, \quad (\text{C.4})$$

où  $U_{\text{deux niveaux}}$  est le potentiel dipolaire pour un atome à deux niveaux.



# Annexe D

## Entropie du gaz parfait dans une boîte et dans un piège harmonique

Cette annexe concerne le calcul de l'entropie pour un gaz parfait dans une boîte et dans un piège harmonique. Une étude plus détaillée sur la thermodynamique classique d'un gaz parfait dans un piège harmonique se trouve dans la référence [79]<sup>1</sup>.

### D.1 Gaz parfait dans une boîte

L'Hamiltonien d'un gaz parfait de  $N$  particules de masse  $m$  sans interaction dans une boîte de taille  $L$  (volume  $V$ ) s'écrit

$$H(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i) = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}. \quad (\text{D.1})$$

La fonction de partition du système à une température  $T$  est

$$Z_N = \int \frac{d^{3N}\mathbf{p} d^{3N}\mathbf{r}}{N! h^{3N}} \exp \left[ -\frac{H(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i)}{k_B T} \right] = \frac{1}{N!} \frac{V}{\Lambda_T^3}, \quad (\text{D.2})$$

où  $\Lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$  est la longueur d'onde thermique du système. L'énergie libre du système  $F = -k_B T \ln Z_N$  se calcule facilement en utilisant la formule de Stirling

$$F = -N k_B T \left[ \ln \left( \frac{V}{N \Lambda_T^3} \right) + 1 \right]. \quad (\text{D.3})$$

---

1. Attention, la valeur de l'entropie dans le cas du piège harmonique est fautive dans cette référence (oubli d'un facteur  $1/N$ ).

L'énergie interne du système s'évalue simplement

$$U = \frac{1}{Z_N} \int \frac{d^{3N} \mathbf{p} d^{3N} \mathbf{r}}{N! h^{3N}} H(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i) \exp \left[ -\frac{H(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i)}{k_B T} \right] = \frac{3}{2} N k_B T. \quad (\text{D.4})$$

On retrouve le résultat bien connu de  $k_B T/2$  par degré de liberté. On en déduit l'entropie du système

$$S = \frac{U - F}{T} = N k_B \left[ \ln \left( \frac{V}{N \Lambda_T^3} \right) + \frac{5}{2} \right], \quad (\text{D.5})$$

qui peut aussi facilement se retrouver en utilisant  $S = (\partial F / \partial T)_{V, N}$ .

## D.2 Gaz parfait dans un piège harmonique

L'Hamiltonien d'un système de particules sans interaction dans un piège harmonique isotrope de fréquence  $2\pi/\omega$  s'écrit

$$H(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_i) = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \mathbf{r}_i^2. \quad (\text{D.6})$$

On calcule alors facilement la fonction de partition

$$Z_N = \frac{1}{N!} \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^{3N}, \quad (\text{D.7})$$

l'énergie libre

$$F = -N k_B T \left\{ \ln \left[ \frac{1}{N} \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 \right] + 1 \right\}, \quad (\text{D.8})$$

l'énergie interne

$$U = 3N k_B T, \quad (\text{D.9})$$

et l'entropie

$$S = N k_B \left\{ \ln \left[ \frac{1}{N} \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 \right] + 4 \right\}. \quad (\text{D.10})$$

# Annexe E

## Publications

- [16] **Fast cold atom cloud compression using a blue detuned crossed dipole trap**  
T. Bienaimé, G. Barontini, L. Mercier de Lépinay, L. Bellando, J. Chabé, et R. Kaiser.  
En préparation (2012).
- [18] **Cooperativity in light scattering by cold atoms**  
T. Bienaimé, N. Piovella, et R. Kaiser.  
Soumis (2012).
- [17] **Controlled Dicke subradiance from a large cloud of two-Level systems**  
T. Bienaimé, N. Piovella, et R. Kaiser.  
Physical Review Letters **108**, 123602 (2012).
- [15] **Atom and photon measurement in cooperative scattering by cold atoms**  
T. Bienaimé, M. Petruzzo, D. Bigerni, N. Piovella, et R. Kaiser.  
Journal of Modern Optics **58**, 1942 (2011).
- [23] **Cooperative scattering by cold atoms**  
S. Bux, E. Lucioni, H. Bender, T. Bienaimé, K. Lauber, C. Stehle, C. Zimmermann, S. Slama, Ph. W. Courteille, N. Piovella, et R. Kaiser.  
Journal of Modern Optics **57**, 1841 (2010).
- [14] **Observation of a cooperative radiation force in the presence of disorder**  
T. Bienaimé, S. Bux, E. Lucioni, Ph. W. Courteille, N. Piovella, et R. Kaiser.  
Physical Review Letters **104**, 183602 (2010).

[30] **Modification of radiation pressure due to cooperative scattering of light**

Ph. W. Courteille, S. Bux, E. Lucioni, K. Lauber, T. Bienaimé, R. Kaiser, et N. Piovella.

European Journal of Physics D **58**, 69 (2010).

# Bibliographie

- [1] C. S. Adams and E. Riis. Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Progress in Quantum Electronics*, 21(1) :1 – 79, 1997.
- [2] G. Agarwal. Quantum statistical theories of spontaneous emission and their relation to other approaches. In *Quantum Optics*, volume 70 of *Springer Tracts in Modern Physics*, pages 1–128. Springer Berlin / Heidelberg, 1974. 10.1007/BFb0042382.
- [3] E. Akkermans, A. Gero, and R. Kaiser. Photon localization and dicke superradiance in atomic gases. *Phys. Rev. Lett.*, 101(10) :103602, Sep 2008.
- [4] L. Allen and J. H. Eberly. *Optical resonance and two-level atoms*. Wiley, New York, 1987.
- [5] B. P. Anderson and M. A. Kasevich. Loading a vapor-cell magneto-optic trap using light-induced atom desorption. *Phys. Rev. A*, 63(2) :023404, Jan 2001.
- [6] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109(5) :1492–1505, Mar 1958.
- [7] M. Antezza, Y. Castin, and D. A. W. Hutchinson. Quantitative study of two- and three-dimensional strong localization of matter waves by atomic scatterers. *Phys. Rev. A*, 82 :043602, Oct 2010.
- [8] S. N. Atutov, R. Calabrese, V. Guidi, B. Mai, A. G. Rudavets, E. Scansani, L. Tomassetti, V. Biancalana, A. Burchianti, C. Marinelli, E. Mariotti, L. Moi, and S. Veronesi. Fast and efficient loading of a rb magneto-optical trap using light-induced atomic desorption. *Phys. Rev. A*, 67(5) :053401, May 2003.
- [9] S. Aubin, S. Myrskog, M. H. T. Extavour, L. J. LeBlanc, D. McKay, A. Stummer, and J. H. Thywissen. Ultracold quantum gases in optical lattices. *Nature Physics*, 2 :384, 2006.
- [10] R. Bachelard, Ph. W. Courteille, R. Kaiser, and N. Piovella. Resonances in mie scattering by an inhomogeneous atomic cloud. *Europhysics Letters*, 97(1) :14004, 2012.

- [11] S. Balik, M. D. Havey, I. M. Sokolov, and D. V. Kupriyanov. Optical pumping dynamics and near-resonance light scattering in an ultracold sample of  $^{87}\text{Rb}$  atoms. *Phys. Rev. A*, 79 :033418, Mar 2009.
- [12] M. D. Barrett, J. A. Sauer, and M. S. Chapman. All-optical formation of an atomic bose-einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 87(1) :010404, Jun 2001.
- [13] H. Bender, C. Stehle, S. Slama, R. Kaiser, N. Piovella, C. Zimmermann, and Ph. W. Courteille. Observation of cooperative mie scattering from an ultracold atomic cloud. *Phys. Rev. A*, 82(1) :011404, Jul 2010.
- [14] T. Bienaimé, S. Bux, E. Lucioni, Ph. W. Courteille, N. Piovella, and R. Kaiser. Observation of a cooperative radiation force in the presence of disorder. *Phys. Rev. Lett.*, 104(18) :183602, May 2010.
- [15] T. Bienaimé, M. Petruzzo, D. Bigerni, N. Piovella, and R. Kaiser. Atom and photon measurement in cooperative scattering by cold atoms. *Journal of Modern Optics*, 58(21) :1942–1950, 2011.
- [16] T. Bienaimé, G. Barontini, L. Mercier de Lépinay, L. Bellando, J. Chabé, and R. Kaiser. Fast cold atom cloud compression using a blue detuned crossed dipole trap. *En préparation*, 2012.
- [17] T. Bienaimé, N. Piovella, and R. Kaiser. Controlled dicke subradiance from a large cloud of two-level systems. *Phys. Rev. Lett.*, 108 :123602, Mar 2012.
- [18] T. Bienaimé, N. Piovella, and R. Kaiser. Cooperativity in light scattering by cold atoms. *Soumis*, 2012.
- [19] J. E. Bjorkholm, R. R. Freeman, A. Ashkin, and D. B. Pearson. Observation of focusing of neutral atoms by the dipole forces of resonance-radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 41(20) :1361–1364, Nov 1978.
- [20] I. Bloch. Ultracold quantum gases in optical lattices. *Nature Physics*, 1 :23, 2005.
- [21] M. Born and Wolf E. *Principles of Optics - 7th ed.* Cambridge University Press, 1999.
- [22] T. Brandes. Coherent and collective quantum optical effects in mesoscopic systems. *Physics Reports*, 408(5-6) :315 – 474, 2005.
- [23] S. Bux, E. Lucioni, H. Bender, T. Bienaimé, K. Lauber, C. Stehle, C. Zimmermann, S. Slama, Ph.W. Courteille, N. Piovella, and R. Kaiser. Cooperative scattering by cold atoms. *Journal of Modern Optics*, 57(19) :1841–1848, November 2010.
- [24] H. J. Carmichael. *An Open System Approach to Quantum Optics : Lecture notes in Physics, Vol. m18.* Springer, Berlin, 1993.

- [25] T. Chanelière, L. He, R. Kaiser, and D. Wilkowski. Three dimensional cooling and trapping with a narrow line. *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 46 :507–515, 2008.
- [26] S. Chu, J. E. Bjorkholm, A. Ashkin, and A. Cable. Experimental observation of optically trapped atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 57(3) :314–317, Jul 1986.
- [27] J.-F. Clément, J.-P. Brantut, M. Robert-de Saint-Vincent, R. A. Nyman, A. Aspect, T. Bourdel, and P. Bouyer. All-optical runaway evaporation to bose-einstein condensation. *Phys. Rev. A*, 79(6) :061406, Jun 2009.
- [28] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Atom-Photon Interactions*. Wiley, New York, 1992.
- [29] C. N. Cohen-Tannoudji. Nobel lecture : Manipulating atoms with photons. *Rev. Mod. Phys.*, 70(3) :707–719, Jul 1998.
- [30] Ph. W. Courteille, S. Bux, E. Lucioni, K. Lauber, T. Bienaimé, R. Kaiser, and N. Piovella. Modification of radiation pressure due to cooperative scattering of light. *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 58 :69–73, 2010.
- [31] J. Dalibard. Laser cooling of an optically thick gas : The simplest radiation pressure trap? *Optics Communications*, 68(3) :203 – 208, 1988.
- [32] S. Das, G. S. Agarwal, and M. O. Scully. Quantum interferences in cooperative dicke emission from spatial variation of the laser phase. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :153601, Oct 2008.
- [33] R. G. DeVoe and R. G. Brewer. Observation of superradiant and subradiant spontaneous emission of two trapped ions. *Phys. Rev. Lett.*, 76 :2049–2052, Mar 1996.
- [34] R. H. Dicke. Coherence in spontaneous radiation processes. *Phys. Rev.*, 93(1) :99, Jan 1954.
- [35] V. Ernst. Coherent emission of a photon by many atoms. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 218 :111–128, 1969.
- [36] V. Ernst and P. Stehle. Emission of radiation from a system of many excited atoms. *Phys. Rev.*, 176(5) :1456–1479, Dec 1968.
- [37] U. Fano. Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts. *Phys. Rev.*, 124 :1866–1878, Dec 1961.
- [38] A. Fioretti, A. F. Molisch, J. H. Müller, P. Verkerk, and M. Allegrini. Observation of radiation trapping in a dense cs magneto-optical trap. *Optics Communications*, 149(4-6) :415 – 422, 1998.
- [39] H. Freedhoff and J. Van Kranendonk. Theory of coherent resonant absorption and emission at infrared and optical frequencies. *Canadian Journal of Physics*, 45(5) :1833–1859, 1967.

- [40] R. Friedberg, S. R. Hartmann, and J. T. Manassah. Frequency shifts in emission and absorption by resonant systems of two-level atoms. *Physics Reports*, 7(3) :101 – 179, 1973.
- [41] R. Friedberg and J. T. Manassah. Effects of including the counterrotating term and virtual photons on the eigenfunctions and eigenvalues of a scalar photon collective emission theory. *Physics Letters A*, 372(14) :2514 – 2521, 2008.
- [42] R. Friedberg and J. T. Manassah. Reply to : Comment on : Effects of including the counterrotating term and virtual photons on the eigenfunctions and eigenvalues of a scalar photon collective emission theory [phys. lett. a 372 (2008) 2514] [phys. lett. a 372 (2008) 5732]. *Physics Letters A*, 372(35) :5734 – 5740, 2008.
- [43] N. Friedman, A. Kaplan, D. Carasso, and N. Davidson. Observation of chaotic and regular dynamics in atom-optics billiards. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :1518–1521, Feb 2001.
- [44] N. Friedman, L. Khaykovich, R. Ozeri, and N. Davidson. Compression of cold atoms to very high densities in a rotating-beam blue-detuned optical trap. *Phys. Rev. A*, 61(3) :031403, Feb 2000.
- [45] A. Fuhrmanek. *From single to many atoms in a microscopic optical dipole trap*. PhD thesis, Université Paris-Sud XI, 2011.
- [46] A. Gaetan, Y. Miroshnychenko, T. Wilk, A. Chotia, M. Viteau, D. Comparat, P. Pillet, A. Browaeys, and P. Grangier. Observation of collective excitation of two individual atoms in the rydberg blockade regime. *Nat Phys*, 5 :115 – 118, Feb 2009.
- [47] A. Goetschy and S. E. Skipetrov. Euclidean matrix theory of random lasing in a cloud of cold atoms. *EPL (Europhysics Letters)*, 96(3) :34005, 2011.
- [48] A. Goetschy and S. E. Skipetrov. Non-hermitian euclidean random matrix theory. *Phys. Rev. E*, 84 :011150, Jul 2011.
- [49] A. Gozzini, F. Mango, J. Xu, G. Alzetta, F. Maccarrone, and R. Bernheim. Light-induced ejection of alkali atoms in polysiloxane coated cells. *Il Nuovo Cimento D*, 15 :709–722, 1993. 10.1007/BF02482437.
- [50] S. R. Granade, M. E. Gehm, K. M. O’Hara, and J. E. Thomas. All-optical production of a degenerate fermi gas. *Phys. Rev. Lett.*, 88(12) :120405, Mar 2002.
- [51] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hansch, and I. Bloch. Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 415 :39, 2002.

- [52] R. Grimm, M. Weidemuller, and Y. B. Ovchinnikov. Optical dipole trap for neutral atoms. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, 42 :95, 1999.
- [53] M. Gross and S. Haroche. Superradiance : An essay on the theory of collective spontaneous emission. *Physics Reports*, 93(5) :301 – 396, 1982.
- [54] B. Grémaud and T. Wellens. Speckle instability : Coherent effects in nonlinear disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :133901, Mar 2010.
- [55] Z. Hadzibabic, P. Kruger, M. Cheneau, B. Battelier, and J. Dalibard. Berezinskii-kosterlitz-thouless crossover in a trapped atomic gas. *Nature*, 441 :1118, 2006.
- [56] W. Hansel, P. Hommelhoff, T. W. Hansch, and J. Reichel. Bose-einstein condensation on a microelectronic chip. *Nature*, 413 :498, 2001.
- [57] S. Haroche. *Course 2 - Rydberg atoms and radiation in a resonant cavity*. Les Houches, Session XXXVIII, Elsevier Science Publishers, 1982.
- [58] S. Haroche. Couplage symétrique à l’environnement : exemple de la superradiance en cavité. In *Cours du collège de France, 2004-2005*.
- [59] S. Haroche. Découplage symétrique de l’environnement : subradiance dans une cavité et sous espaces sans décohérence. In *Cours du collège de France, 2004-2005*.
- [60] K. Henderson, C. Ryu, C. MacCormick, and M. G. Boshier. Experimental demonstration of painting arbitrary and dynamic potentials for bose-einstein condensates. *New J. Phys.*, 11(4) :043030, 2009.
- [61] T. Holstein. Imprisonment of resonance radiation in gases. *Phys. Rev.*, 72 :1212–1233, Dec 1947.
- [62] S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, J. Stenger, D. E. Pritchard, and W. Ketterle. Superradiant rayleigh scattering from a bose-einstein condensate. *Science*, 285(5427) :571–574, 1999.
- [63] A. F. Ioffe and A. R. Regel. Non-crystalline, amorphous and liquid electronic semiconductors. *Prog. Semicond.*, 4 :237–291, 1960.
- [64] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, New York, 1962.
- [65] T. Jonckheere, C. A. Müller, R. Kaiser, C. Miniatura, and D. Delande. Multiple scattering of light by atoms in the weak localization regime. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :4269–4272, Nov 2000.
- [66] R. Kaiser. Quantum multiple scattering. *Journal of Modern Optics*, 56(18) :2082, Oct 2009.
- [67] R. Kaiser, N. Vansteenkiste, A. Aspect, E. Arimondo, and C. Cohen-Tannoudji. Mechanical hanle effect. *Zeitschrift für Physik D Atoms, Molecules and Clusters*, 18 :17–24, 1991.

- [68] A. Kaplan, N. Friedman, M. Andersen, and N. Davidson. Observation of islands of stability in soft wall atom-optics billiards. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :274101, Dec 2001.
- [69] R. I. Karasik, K.-P. Marzlin, B. C. Sanders, and K. B. Whaley. Multiparticle decoherence-free subspaces in extended systems. *Phys. Rev. A*, 76 :012331, Jul 2007.
- [70] W. Ketterle, D. S. Durfee, and D. M. Stamper-Kurn. *Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates : Proc. of the International School of Physics Enrico Fermi, Course CXL*. IOS Press, Amsterdam, 1999.
- [71] W. Ketterle and N. J. Van Druten. Evaporative cooling of trapped atoms. volume 37 of *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, pages 181 – 236. Academic Press, 1996.
- [72] W. Ketterle and M. W. Zwierlein. *Making, probing and understanding ultra-cold Fermi gases : Proc. of the International School of Physics Enrico Fermi, Course CLXIV*. IOS Press, Amsterdam, 2008.
- [73] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss. All-optical bose-einstein condensation using a compressible crossed dipole trap. *Phys. Rev. A*, 71(1) :011602, Jan 2005.
- [74] C. Klempt, T. van Zoest, T. Henninger, O. Topic, E. Rasel, W. Ertmer, and J. Arlt. Ultraviolet light-induced atom desorption for large rubidium and potassium magneto-optical traps. *Phys. Rev. A*, 73(1) :013410, Jan 2006.
- [75] D. Kruse, C. von Cube, C. Zimmermann, and Ph. W. Courteille. Observation of lasing mediated by collective atomic recoil. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :183601, Oct 2003.
- [76] G. Labeyrie, F. de Tomasi, J.-C. Bernard, C. A. Müller, C. Miniatura, and R. Kaiser. Coherent backscattering of light by cold atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :5266–5269, Dec 1999.
- [77] G. Labeyrie, D. Delande, R. Kaiser, and C. Miniatura. Light transport in cold atoms and thermal decoherence. *Phys. Rev. Lett.*, 97(1) :013004, Jul 2006.
- [78] G. Labeyrie, E. Vaujour, C. A. Müller, D. Delande, C. Miniatura, D. Wilkowski, and R. Kaiser. Slow diffusion of light in a cold atomic cloud. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :223904, Nov 2003.
- [79] M. Ligare. Classical thermodynamics of particles in harmonic traps. *Am. J. Phys.*, 78(8) :815–819, 2010.
- [80] H. A. Lorentz. *The Theory of Electrons*. Dover, New York, 1952.

- [81] E. Lucioni. Realization of a dipole trap for ultracold atoms of rubidium and study of the collective effects. Master's thesis, Universita Degli Studi di Milano, 2008.
- [82] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [83] E. Mandonnet. *Etude théorique d'un gaz de Bose atomique ultra-froid : 1. Diffusion et localisation de la lumière 2. Condensation de Bose-Einstein en dimensionalité réduite*. PhD thesis, Université Paris VI, 2000.
- [84] N. Mercadier, W. Guerin, M. Chevrollier, and R. Kaiser. Levy flights of photons in hot atomic vapours. *Nat. Phys.*, 5 :602 – 605, May 2009.
- [85] H. J. Metcalf and P. Van der Straten. *Laser Cooling and Trapping*. Springer, 1999.
- [86] V. Milner, J. L. Hanssen, W. C. Campbell, and M. G. Raizen. Optical billiards for atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :1514–1517, Feb 2001.
- [87] E. Mimoun, L. De Sarlo, D. Jacob, J. Dalibard, and F. Gerbier. Fast production of ultracold sodium gases using light-induced desorption and optical trapping. *Phys. Rev. A*, 81(2) :023631, Feb 2010.
- [88] A. F. Molisch and B. P. Oehry. *Radiation Trapping in Atomic Vapours*. Oxford University Press, 1998.
- [89] O. Morice. *Atomes refroidis par laser : du refroidissement sub-recul à la recherche d'effets quantiques collectifs*. PhD thesis, Université Paris VI, 1995.
- [90] D. Pavolini, A. Crubellier, P. Pillet, L. Cabaret, and S. Liberman. Experimental evidence for subradiance. *Phys. Rev. Lett.*, 54(17) :1917–1920, Apr 1985.
- [91] L. H. Pedersen and K. Mølmer. Few qubit atom-light interfaces with collective encoding. *Phys. Rev. A*, 79 :012320, Jan 2009.
- [92] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge University Press, 2002.
- [93] W. D. Phillips. Nobel lecture : Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Rev. Mod. Phys.*, 70(3) :721–741, Jul 1998.
- [94] F. A. Pinheiro, M. Rusek, A. Orłowski, and B. A. van Tiggelen. Probing anderson localization of light via decay rate statistics. *Phys. Rev. E*, 69 :026605, Feb 2004.
- [95] F. A. Pinheiro and L. C. Sampaio. Lasing threshold of diffusive random lasers in three dimensions. *Phys. Rev. A*, 73 :013826, Jan 2006.
- [96] P. W. H. Pinkse, A. Mosk, M. Weidemüller, M. W. Reynolds, T. W. Hijmans, and J. T. M. Walraven. Adiabatically changing the phase-space density of a trapped bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 78 :990–993, Feb 1997.

- [97] S. Prasad and R. J. Glauber. Polarium model : Coherent radiation by a resonant medium. *Phys. Rev. A*, 61(6) :063814, May 2000.
- [98] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D. E. Pritchard. Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 59(23) :2631–2634, Dec 1987.
- [99] E. Ressayre and A. Tallet. Quantum theory for superradiance. *Phys. Rev. A*, 15(6) :2410–2423, Jun 1977.
- [100] M. Rusek, J. Mostowski, and A. Orłowski. Random green matrices : From proximity resonances to anderson localization. *Phys. Rev. A*, 61 :022704, Jan 2000.
- [101] M. Rusek, A. Orłowski, and J. Mostowski. Localization of light in three-dimensional random dielectric media. *Phys. Rev. E*, 53 :4122–4130, Apr 1996.
- [102] R. Röhlsberger, K. Schlage, B. Sahoo, S. Couet, and R. Ruffer. Collective Lamb Shift in Single-Photon Superradiance. *Science*, 328(5983) :1248–1251, 2010.
- [103] A. Schilke, C. Zimmermann, P. W. Courteille, and W. Guerin. Photonic band gaps in one-dimensionally ordered cold atomic vapors. *Phys. Rev. Lett.*, 106 :223903, Jun 2011.
- [104] M. O. Scully. Collective lamb shift in single photon dicke superradiance. *Phys. Rev. Lett.*, 102(14) :143601, Apr 2009.
- [105] M. O. Scully and A. A. Svidzinsky. The super of superradiance. *Science*, 325(5947) :1510–1511, 2009.
- [106] M. O. Scully and A. A. Svidzinsky. The Lamb Shift—Yesterday, Today, and Tomorrow. *Science*, 328(5983) :1239–1241, 2010.
- [107] M. O. Scully and M. S. Zubairy. *Quantum optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [108] K. Singer, M. Reetz-Lamour, T. Amthor, L. G. Marcassa, and M. Weidemüller. Suppression of excitation and spectral broadening induced by interactions in a cold gas of rydberg atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 93(16) :163001, Oct 2004.
- [109] S. E. Skipetrov and A. Goetschy. Eigenvalue distributions of large euclidean random matrices for waves in random media. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 44(6) :065102, 2011.
- [110] N. Skribanowitz, I. P. Herman, J. C. MacGillivray, and M. S. Feld. Observation of dicke superradiance in optically pumped hf gas. *Phys. Rev. Lett.*, 30(8) :309–312, Feb 1973.

- [111] I. M. Sokolov, M. D. Kupriyanova, D. V. Kupriyanov, and M. D. Havey. Light scattering from a dense and ultracold atomic gas. *Phys. Rev. A*, 79(5) :053405, May 2009.
- [112] H.-J. Sommers, Y. V. Fyodorov, and M. Titov. S -matrix poles for chaotic quantum systems as eigenvalues of complex symmetric random matrices : from isolated to overlapping resonances. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 32(5) :L77, 1999.
- [113] D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A. P. Chikkatur, S. Inouye, J. Stenger, and W. Ketterle. Reversible formation of a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :2194–2197, Sep 1998.
- [114] D. A. Steck. Rubidium 87 d line data.
- [115] C. R. Stroud, J. H. Eberly, W. L. Lama, and L. Mandel. Superradiant effects in systems of two-level atoms. *Phys. Rev. A*, 5(3) :1094–1104, Mar 1972.
- [116] A. Svidzinsky and J.-T. Chang. Cooperative spontaneous emission as a many-body eigenvalue problem. *Phys. Rev. A*, 77(4) :043833, Apr 2008.
- [117] A. A. Svidzinsky, J.-T. Chang, and M. O. Scully. Dynamical evolution of correlated spontaneous emission of a single photon from a uniformly excited cloud of  $n$  atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 100(16) :160504, Apr 2008.
- [118] A. A. Svidzinsky, J.-T. Chang, and M. O. Scully. Cooperative spontaneous emission of  $n$  atoms : Many-body eigenstates, the effect of virtual lamb shift processes, and analogy with radiation of  $n$  classical oscillators. *Phys. Rev. A*, 81(5) :053821, May 2010.
- [119] G. Telles, T. Ishikawa, M. Gibbs, and C. Raman. Light-induced atomic desorption for loading a sodium magneto-optical trap. *Phys. Rev. A*, 81(3) :032710, Mar 2010.
- [120] V. V. Temnov and U. Woggon. Superradiance and subradiance in an inhomogeneously broadened ensemble of two-level systems coupled to a low- $q$  cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 95(24) :243602, Dec 2005.
- [121] D. Tong, S. M. Farooqi, J. Stanojevic, S. Krishnan, Y. P. Zhang, R. Côté, E. E. Eyler, and P. L. Gould. Local blockade of rydberg excitation in an ultracold gas. *Phys. Rev. Lett.*, 93(6) :063001, Aug 2004.
- [122] E. Urban, T. A. Johnson, T. Henage, D. D. Yavuz, T. G. Walker, and M. Saffman. Observation of rydberg blockade between two atoms. *Nat. Phys.*, 5 :110 – 114, Feb 2009.
- [123] H. C. van de Hulst. *Light scattering by small particles*. Dover, New York, 1981.
- [124] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.-C. Nägerl, and R. Grimm. Bose-einstein condensation of cesium. *Science*, 299(5604) :232–235, 2003.

- [125] B. Zimmermann, T. Müller, J. Meineke, T. Esslinger, and H. Moritz. High-resolution imaging of ultracold fermions in microscopically tailored optical potentials. *New Journal of Physics*, 13(4) :043007, 2011.
- [126] W. H. Zurek. Pointer basis of quantum apparatus : Into what mixture does the wave packet collapse? *Phys. Rev. D*, 24 :1516–1525, Sep 1981.
- [127] W. H. Zurek. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Rev. Mod. Phys.*, 75 :715–775, May 2003.



## RÉSUMÉ

Ce travail de thèse concerne d'une part l'étude théorique et expérimentale des effets coopératifs dans les nuages d'atomes froids dilués ( $n\lambda^3 \ll 1$ ) et, d'autre part, le développement d'un piège dipolaire pour comprimer le nuage vers les régimes denses ( $n\lambda^3 \sim 1$ ) afin d'étudier la compétition entre les effets coopératifs et la localisation forte.

Le premier chapitre montre comment un système de  $N$  atomes interagissant *via* le champ électromagnétique donne naissance aux effets coopératifs : superradiance, sousradiance, déplacement de Lamb collectif. En considérant la situation où les atomes sont pilotés par un champ laser extérieur, nous montrons comment les effets coopératifs se manifestent et calculons la force de pression de radiation collective s'exerçant sur le centre de masse du nuage. Le phénomène de sousradiance est ensuite étudié en considérant la relaxation du système après avoir coupé le laser.

Le deuxième chapitre traite l'étude expérimentale des effets coopératifs en mesurant la force de pression de radiation coopérative. Les mesures sont en bon accord avec le modèle théorique développé précédemment.

Enfin, le dernier chapitre décrit la réalisation d'un piège dipolaire croisé, désaccordé dans le bleu, dont la taille peut être ajustée dynamiquement pour comprimer le nuage dans les régimes de forte densité.

## MOTS-CLÉS

Atomes froids - Optique quantique - Effets coopératifs - Localisation forte - Piège dipolaire

---

## ABSTRACT

In this thesis, we investigate experimentally as well as theoretically collective effects in dilute clouds of cold atoms ( $n\lambda^3 \ll 1$ ). In order to study the competition between cooperative effects and strong localization, we then implement a dipole trap that allows us to compress the cloud to dense regimes ( $n\lambda^3 \sim 1$ ).

The first chapter shows how a system of  $N$  atoms interacting *via* the electromagnetic field gives rise to cooperative effects : superradiance, subradiance, collective Lamb shift. Considering the situation where atoms are driven by an external laser field, we point out how collective effects occur and compute the cooperative radiation pressure force acting on the center of mass of the cloud. Subradiance is then studied by considering the system relaxation after switching off the driving laser field.

The second chapter describes the experimental investigation of cooperative effects through measurements of the collective radiation pressure force. These measurements show good agreement with the theoretical model we have previously developed.

The last chapter explores the experimental realization of a blue detuned crossed dipole trap whose size can be dynamically adjusted enabling us to compress the cloud to reach high density regimes.

## KEYWORDS

Cold atoms - Quantum optics - Cooperative effects - Strong localization - Dipole trap