



HAL
open science

Détection non-destructive pour l'interférométrie atomique et Condensation de Bose-Einstein dans une cavité optique de haute finesse

Thomas Vanderbruggen

► **To cite this version:**

Thomas Vanderbruggen. Détection non-destructive pour l'interférométrie atomique et Condensation de Bose-Einstein dans une cavité optique de haute finesse. Autre [cond-mat.other]. Université Paris Sud - Paris XI, 2012. Français. NNT: 2012PA112067 . tel-00702905

HAL Id: tel-00702905

<https://theses.hal.science/tel-00702905>

Submitted on 31 May 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique

École doctorale : Onde et Matière

Discipline : Physique quantique

Présentée par

Thomas VANDERBRUGGEN

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

Sujet :

**Détection non-destructive pour
l'interférométrie atomique
et
Condensation de Bose-Einstein dans une cavité
optique de haute finesse**

Soutenue le 13 avril 2012 devant la commission d'examen composée de :

M. Jean-François ROCH	Professeur	Rapporteur
M. Nicolas TREPS	Professeur	Rapporteur
M. Fabien BRETENAKER	Directeur de recherche	Examineur
Mme. Michèle LEDUC	Directeur de recherche	Présidente du jury
M. Wolfgang ERTMER	Professeur	Examineur
M. Philippe BOUYER	Directeur de recherche	Directeur de thèse
M. Arnaud LANDRAGIN	Directeur de recherche	Membre invité
M. Alain ASPECT	Directeur de recherche	Membre invité

Remerciements

Les travaux de thèse présentés dans ce mémoire se sont déroulés au Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique et je remercie les directeurs successifs Pierre Chavel et Christian Chardonnet de m'y avoir accueilli. Je remercie aussi la Direction Générale de l'Armement pour avoir financé ces travaux en me procurant une bourse de thèse.

Je remercie Nicolas Treps et Jean-François Roch d'avoir accepté le dur labeur d'être rapporteurs de ce manuscrit. Je remercie aussi Fabien Bratenaker, Wolfgang Ertmer et Michèle Leduc pour leur participation au jury.

D'une manière plus précise, cette thèse a été réalisée au sein du groupe d'Optique Atomique et je remercie Alain Aspect pour ces précieux conseils sur la manière de mener et communiquer un travail de recherche. Je remercie aussi bien évidemment Philippe Bouyer d'avoir encadré cette thèse et de m'avoir donné l'occasion de participer à un travail de recherche ambitieux et innovant. Son soutien sans faille a été déterminant à la réussite du projet de recherche. Ce projet est tout d'abord une collaboration entre l'Institut d'Optique et le SYRTE à l'Observatoire de Paris, je remercie en conséquence Arnaud Landragin pour avoir co-encadré ces travaux de thèse. Son entrain est toujours le bienvenu, particulièrement dans les moments difficiles.

Même si ce mémoire est rédigé à titre individuel, le travail décrit est avant tout un résultat collectif. Je remercie donc l'équipe au sein de laquelle j'ai eu grand plaisir à travailler au cours de ces quatre dernières années. Je remercie, par ordre d'apparition chronologique, Simon Bernon qui d'un an mon aîné a su m'intégrer à l'expérience et m'encadrer lors de mon stage. J'ai eu beaucoup de plaisir à découvrir le métier de chercheur à ces côtés et cela m'a permis de comprendre que se forger une expérience ensemble, en répondant aux problèmes rencontrés par l'apport des savoirs et savoirs-faire de chacun, s'avère être extrêmement instructif et stimulant. Je remercie ensuite Andrea Bertoldi qui est arrivé comme post-doc au début de mon stage, il a su encadrer au jour le jour l'expérience et partager son savoir-faire essentiel à la construction du dispositif. J'ai beaucoup appris de lui sur de nombreux aspects allant de la résolution de problèmes techniques à la manière de rédiger un article scientifique. J'ai également grandement apprécié les nombreuses discussions que nous avons pu avoir sur des sujets aussi divers que variés. Il me faut aussi remercier Ralf Kohlhaas avec qui j'ai eu grand plaisir à travailler et surtout discuter, même si cela a pu perturber, voire effrayer, les autres membres de notre bureau. Je lui souhaite bon courage pour la fin de sa thèse. Enfin, il me faut souhaiter bon vent à Etienne Cantin qui vient d'intégrer l'équipe.

Je tiens aussi à remercier les autres membres du groupe d'Optique Atomique, notamment Frédéric Moron et André Villing pour leur grande disponibilité et leurs précieux conseils, nos expériences ne pourraient jamais fonctionner sans eux. Je dois aussi remercier les thésards et ex-thésards avec qui j'ai pu collaborer et rigoler aux cours de ces années : Alain, Antoine, Baptiste, Bess, David, Fred, Guillaume, Jean-Christophe, Jean-François, Jean-Philippe, Josselin, Juliette, Killian, Karim, Lynn, les deux Marie, Pierre, Raphael, Rémi, Thibaut, Thomas, Valentina,

Vincent. Outre les thésards, je dois aussi remercier les autres « êtres », permanents et post-docs, déambulants ou ayant déambulés dans le labo : Antoine, Carlos, Chris, Denis, Guillaume, Guthrie, Isabelle, Luca, Patrick, Seb, Thomas, Vincent, Yvan.

Enfin, je remercie les membres de ma famille : ma mère, ma sœur et mon frère, pour leur soutien.

A mon père,

Table des matières

Introduction	1
I Mesures non-destructives : application à l'interférométrie atomique	5
1 La mesure en mécanique quantique	7
1.1 Le postulat de la mesure généralisée	8
1.1.1 Opérateurs de mesure	8
1.1.2 Probabilité d'obtention d'un résultat	8
1.1.3 Evolution de l'état	8
1.1.4 Définition d'un POVM (Positive Operator-Valued Measure)	8
1.2 Quelques exemples de mesures généralisées	8
1.2.1 Mesure projective	8
1.2.2 Photodétection	9
1.2.3 Mesure avec un détecteur de précision finie	10
1.2.3.1 Mesure faible	10
1.2.3.2 Mesure forte	11
1.2.4 Evolution unitaire	11
1.3 Le modèle de la mesure indirecte et les mesures non-destructives	11
1.3.1 Mesure indirecte	12
1.3.2 Mesure non-destructive	12
1.3.2.1 Modification de l'état de la sonde	12
1.3.2.2 Absence d'action en retour	12
1.3.2.3 L'observable est une constante du mouvement	12
1.3.3 Mesure quantique non-destructive	13
1.3.4 Exemples	13
1.3.4.1 Mesure non-destructive de l'intensité d'un faisceau optique	13
1.3.4.2 Mesure non-destructive d'un spin	13
1.3.4.3 L'expérience de Haroche	13
1.4 Conclusion	14
2 Préparation d'états collectifs de spin non-classiques par la mesure	15
2.1 Systèmes quantiques à deux niveaux et états collectifs de spins	16
2.1.1 Système à deux niveaux	16
2.1.1.1 Vecteur d'état d'un système à deux niveaux et sphère de Bloch	16
2.1.1.2 Evolution et rotations	17

2.1.2	Ensemble de spins indiscernables	19
2.1.2.1	Ensemble de deux ou trois spins	19
2.1.2.2	Ensemble de N spins indiscernables : états de Dicke	20
2.1.2.3	Rotation d'un état de Dicke	22
2.1.2.4	Etats cohérents de spins	23
2.1.2.5	Représentation de Husimi	25
2.2	Bruit quantique dans un interféromètre atomique	27
2.2.1	L'interféromètre de Ramsey	27
2.2.1.1	Equivalent optique	28
2.2.1.2	Couplage atomes-champ	28
2.2.1.3	Evolution d'un état collectif dans l'interféromètre	30
2.2.1.4	Bruit de projection quantique dans un interféromètre de Ramsey	31
2.2.2	Dépasser la limite quantique standard	32
2.2.2.1	Etats de spins non classiques	32
2.2.2.2	Limite de Heisenberg	33
2.2.2.3	Etats de spins comprimés	34
2.3	Dynamique du processus de mesure : préparation d'états de spins comprimés et d'états de Dicke	35
2.3.1	Présentation du problème	35
2.3.2	Interféromètre de Mach-Zehnder	36
2.3.2.1	Matrice de diffusion de l'interféromètre	36
2.3.2.2	Détection d'un photon et évolution de l'état atomique	37
2.3.2.3	Action en retour	38
2.3.3	Spectroscopie par modulation de fréquence	39
2.3.3.1	Qu'est-ce que la spectroscopie par modulation de fréquence ?	40
2.3.3.2	Détection d'un battement en régime de photons uniques	40
2.3.3.3	Matrice de diffusion	41
2.3.3.4	Détection d'un photon et évolution de l'état atomique	41
2.3.3.5	Action en retour	42
2.3.4	Dynamique du processus de projection	44
2.3.4.1	Simulation de Monte-Carlo des trajectoires quantiques	44
2.3.4.2	Trajectoires des deux premiers moments de la distribution	45
2.3.4.3	Loi de Born	47
2.3.4.4	Equation différentielle stochastique	48
2.3.4.5	Evolution dans l'espace des phases	49
2.4	Préparation d'autres états	50
2.4.1	Intrication de deux ensembles spatialement séparés	50
2.4.1.1	Description de l'état des deux nuages	50
2.4.1.2	Evolution du système sous le processus de mesure	50
2.4.1.3	Mesure géométrique de l'intrication	52
2.4.2	Préparation de superposition macroscopiques : chats de Schrödinger	53
2.4.2.1	Principe de la mesure et fonction d'action en retour	53
2.4.2.2	Figure de mérite	55
2.5	Conclusion	55
3	Mesure non-destructive d'un ensemble de spins indiscernables	57
3.1	La spectroscopie par modulation de fréquence comme sonde non-destructive	58
3.1.1	La spectroscopie par modulation de fréquence	58
3.1.1.1	Principe	58
3.1.1.2	Premiers résultats	59

3.1.2	Réjection des bruits de mode commun	59
3.2	Définition de la non-destructivité et contraintes expérimentales	62
3.3	Mise en œuvre expérimentale	63
3.3.1	Présentation générale du montage	63
3.3.2	Le détecteur optique	64
3.3.2.1	La photodiode avec amplificateur transimpédance intégré	65
3.3.2.2	Bruit de photon et mesure du gain de la photodiode	65
3.3.3	Caractérisation du modulateur de phase	67
3.3.3.1	Profondeur de modulation	67
3.3.3.2	Modulation d'amplitude résiduelle	67
3.3.4	Bruit technique du laser	69
3.3.5	Signal après démodulation	70
3.3.5.1	Bruit de photon après démodulation	71
3.3.6	Différentes configurations de mesure	74
3.3.6.1	Mesure de la population dans un niveau	74
3.3.6.2	Mesure de l'opérateur de spin collectif J_z	74
3.4	Préparation de l'état cohérent de spins	76
3.4.1	Ajustement de la fréquence de la micro-onde	77
3.4.1.1	Oscillations de Rabi	78
3.4.1.2	Franges de Ramsey	78
3.4.2	Pompage optique des sous-niveaux Zeeman	79
3.4.3	Méthodes alternatives	80
3.5	Observation en temps réel de manipulations cohérentes de spins	81
3.5.1	Oscillations de Rabi	81
3.5.2	Séquence d'écho de spin	83
3.6	Compensation du déplacement lumineux induit par la sonde	84
3.7	Interférométrie de Ramsey avec un nuage piégé	85
3.7.1	Déplacement lumineux différentiel induit par le piège sur la transition de l'horloge	85
3.7.2	Estimation du déphasage inhomogène subi par les atomes	88
3.7.3	Cohérence de l'ensemble atomique	89
3.7.4	Confrontation avec l'expérience	90
3.8	Conclusion	90
4	Stabilisation d'un état cohérent par rétroaction quantique et boucle à verrouillage de phase atomique	93
4.1	Rétroaction quantique sur un état cohérent de spins	93
4.1.1	Présentation du problème	94
4.1.2	Analyse théorique	95
4.1.2.1	Décohérence	96
4.1.2.2	Evolution sous la mesure	97
4.1.2.3	Rétroaction	98
4.1.3	Simulation de Monte-Carlo	100
4.1.4	Résultats expérimentaux	102
4.1.4.1	Mise en œuvre expérimentale	102
4.1.4.2	Détermination de la cohérence de l'état de sortie	102
4.1.4.3	Un unique cycle de rétro-action	103
4.1.4.4	Itération de la séquence de rétro-action	105
4.1.5	Applications possibles	106
4.2	Boucle à verrouillage de phase atomique	108

4.2.1	Principe de la méthode	108
4.2.1.1	Suivi et verrouillage de la phase de l'oscillateur local	108
4.2.1.2	Critère pour l'amélioration la sensilité d'une horloge	109
4.2.2	Montage expérimental	111
4.2.3	Mesure de la phase d'un oscillateur à l'aide d'une détection non-destructive	111
4.2.3.1	Suivi en temps réel d'un déplacement de phase en dents de scies	111
4.2.3.2	Compensation de la décohérence	112
4.2.4	Asservissement	113
4.2.5	Perspectives	115
4.2.5.1	Réduction de l'effet Dick	115
4.2.5.2	Application aux gravimètres atomiques	115
4.2.5.3	Verrouillage en phase de deux ensembles atomiques	115
4.3	Conclusion	116

II Condensation de Bose-Einstein dans une cavité optique de haute finesse 117

5	La cavité de haute finesse	119
5.1	Géométrie du résonateur optique	120
5.1.1	Conception mécanique	120
5.1.2	Géométrie du mode fondamental dans l'approximation paraxiale	121
5.1.2.1	Formalisme des matrices de transfert paraxiales	121
5.1.2.2	Faisceaux gaussiens	122
5.1.2.3	Matrice ABCD de la cavité	123
5.2	Structure modale	124
5.2.1	Spectre théorique dans l'approximation paraxiale	124
5.2.2	Confrontation à l'expérience	125
5.2.2.1	Détermination de l'intervalle spectral libre	125
5.2.2.2	Analyse du spectre des modes transverses du résonateur	126
5.3	Caractérisation par tomographie des déplacements lumineux	127
5.3.0.3	Principe de la méthode	127
5.3.0.4	Tomographie des modes transverses	128
5.4	Finesse	129
5.4.1	Mesure de la finesse	131
5.4.2	Pertes et diffusion	131
5.5	Asservissement en fréquence d'un laser à fibre	132
5.5.1	La méthode de Pound-Drever-Hall	133
5.5.2	Correction de fréquence avec un modulateur acousto-optique	134
5.5.3	Correction de fréquence par modulation serrodyne	135
5.5.3.1	Principe de la modulation serrodyne	136
5.5.3.2	Réalisation du signal en dents de scie	137
5.5.3.3	Mise en œuvre expérimentale	138
5.5.3.4	Résultats	139
5.5.4	Comparaison des deux méthodes	140
5.6	Bruit d'intensité du faisceau de piégeage	141
5.6.1	Bruit de l'EDFA	142
5.6.2	Bruit en sortie de la cavité	144
5.7	Compensation du déplacement lumineux différentiel	145
5.7.1	Analyse théorique	145

5.7.2	Mise en œuvre expérimentale	146
5.8	Conclusion	147
6	Piègeage tout optique et condensation dans une cavité	149
6.1	Généralités sur la condensation de Bose-Einstein	150
6.1.1	La condensation de Bose-Einstein	150
6.1.2	Effet des interactions	151
6.1.2.1	Equation de Gross-Pitaevskii	151
6.1.2.2	Approximation de Thomas-Fermi	151
6.1.2.3	Influence des interactions sur la transition	152
6.2	Le dispositif expérimental de refroidissement laser	152
6.2.1	Système laser pour le refroidissement	152
6.2.2	Pièges magnéto-optiques à deux et trois dimensions	152
6.3	Le piège dipolaire	153
6.3.1	Potentiel lumineux et piège dipolaire	153
6.3.2	Chargement du piège	154
6.3.3	Résultats	155
6.4	Mesure des fréquences	156
6.4.1	Analyse théorique des fréquences	156
6.4.1.1	Définition des fréquences d'un piège	156
6.4.1.2	Influence de la gravité	157
6.4.1.3	Effet d'un décalage vertical entre les bras	159
6.4.2	Mesure des fréquences	159
6.4.2.1	Mesure par chauffage paramétrique	160
6.4.2.2	Mesure des modes d'oscillation	161
6.4.2.3	Estimation de la taille <i>in-situ</i> du nuage	162
6.5	Rampe d'évaporation	163
6.6	Dimple	165
6.7	Condensat de Bose-Einstein	166
6.7.1	Structure bimodale et inversion d'ellipticité	166
6.7.2	Analyse de la transition	167
6.8	Conclusion	167
	Conclusion	169
A	Moments et minimalité des états cohérents de spin	171
A.1	Opérateurs du point de vue passif	171
A.2	Calcul des moments	172
A.2.1	Moments d'ordre un	172
A.2.2	Moments d'ordre deux	172
A.2.2.1	Moments de l'état $ J, -J\rangle$	172
A.2.2.2	Variances	172
A.2.2.3	Covariances	173
A.3	Minimalité des états cohérents	173
A.3.1	Relations d'incertitude	173
A.3.2	Les états cohérents de spin sont minimaux	174

B	Description quantique du modulateur électro-optique	175
B.1	Effet Pockels et Hamiltonien d'interaction	175
B.2	Modulation de phase d'un photon unique	176
B.3	Le modulateur électro-optique vu comme une séparatrice spectrale	176
B.3.1	Rappel : la séparatrice spatiale	176
B.3.2	Une séparatrice spectrale	178
B.4	Généralisation au cas d'une modulation avec deux bandes latérales	178
C	Systèmes ouverts en mécanique quantique	181
C.1	Systèmes ouverts en mécanique quantique	181
D	Conception de l'électronique d'un photodétecteur	183
D.1	Photodiode	183
D.2	L'amplificateur transimpédance	184
D.2.1	Avec une résistance	184
D.2.2	Montage à amplificateur opérationnel	185
D.2.3	Quelques exemples	186
D.2.3.1	Détection d'atomes par fluorescence	186
D.2.3.2	Détection d'une modulation radio-fréquence	186
D.2.3.3	Détection hyperfréquence	186
E	Montage électronique de la photodiode ultra-rapide	189
F	Publications	191

Table des figures

1.1	Mesure indirecte	12
2.1	La sphère de Bloch.	17
2.2	Les angles d'Euler.	18
2.3	Hierarchie des espaces de Hilbert associés à un ensemble de spins	21
2.4	Etat de Dicke sur la sphère de Bloch	22
2.5	Bruit induit par une séparatrice	24
2.6	Représentation Q d'états de Dicke sur la sphère de Bloch	26
2.7	Etat cohérent sur la sphère de Bloch	27
2.8	Equivalent optique de l'interféromètre de Ramsey	28
2.9	Interféromètre de Ramsey	31
2.10	Franges de Ramsey	32
2.11	Représentation de l'état $ \Psi_{in}\rangle$	33
2.12	Représentation schématique du processus de mesure	35
2.13	Interféromètre de Mach-Zehnder couplé à l'échantillon atomique	36
2.14	Allure de la fonction $(\cos^2 x)^k$	39
2.15	Battements de la fonction d'onde d'un photon unique	40
2.16	Modèle d'une détection par modulation de fréquence	41
2.17	Intensité de la mesure hétérodyne en fonction du contraste	44
2.18	Trajectoires des moments de la distribution atomique	45
2.19	Cas limites pour l'évolution à temps long	46
2.20	Histogramme des positions moyennes du spin collectif	48
2.21	Densité des trajectoires dans l'espace des phases	49
2.22	Représentation de l'état de la plan (\vec{n}_1, \vec{n}_2)	50
2.23	Evolution de l'intrication entre les deux nuages	53
2.24	Evolution de l'état vers un chat de Schrödinger	54
2.25	Simulation numérique de la préparation d'un chat de Schrödinger	55
3.1	Schéma spectroscopie par modulation de fréquence sur une cellule	59
3.2	Spectroscopie par modulation de fréquence sur une cellule	60
3.3	Spectroscopie par modulation de fréquence sur le MOT	60
3.4	Schéma général du système de détection non-destructive	64
3.5	Schéma du détecteur optique	65
3.6	Bruit en sortie de la photodiode en fonction de la puissance optique incidente	66
3.7	Réponse de la photodiode	67
3.8	Profondeur de modulation	68
3.9	Modulation d'amplitude résiduelle	68

3.10	Bruit de la détection à 3.4 GHz	69
3.11	Schéma démodulation	70
3.12	Linéarité de la détection	71
3.13	Bruit après démodulation à 2 GHz	72
3.14	Evolution du bruit de photon avec le temps d'intégration à 2 GHz	74
3.15	Bruit après démodulation à 3.4 GHz	75
3.16	Schéma Différentes configurations de mesure	76
3.17	Couplage en fonction de la fréquence de modulation	77
3.18	Nombre d'atomes transférer en fonction de la fréquence	78
3.19	Oscillations de Rabi	79
3.20	Franges de Ramsey lorsque le désaccord varie	80
3.21	Mesure non-destructive d'oscillations de Rabi	82
3.22	Evolution des oscillations de Rabi avec le décalage de la sonde	83
3.23	Suivi en temps réel d'une séquence d'écho de spin	84
3.24	Compensation du déplacement lumineux induit par la sonde	86
3.25	Compensation du déplacement lumineux de la sonde	86
3.26	Déplacement lumineux différentiel de l'état fondamental	87
3.27	Contraste en fonction du temps d'interrogation	90
4.1	Circuit quantique du schéma de rétro-action	95
4.2	Décohérence provoquée par un basculement	96
4.3	Cohérence, entropie et fidélité en fonction de la probabilité de succès	100
4.4	Probabilité limite en fonction de α	100
4.5	Simulation de Monte-Carlo de la rétroaction quantique	101
4.6	Mise en œuvre expérimentale	103
4.7	Cohérence lors d'une unique séquence de rétro-action	104
4.8	Exactitude des réponses du contrôleur	105
4.9	Séquence de rétro-action en temps réel	107
4.10	Principe de la boucle à verrouillage de phase atomique	109
4.11	Montage expérimental de la boucle à verrouillage de phase atomique	112
4.12	Suivi en temps réel d'un déplacement de phase en dents de scies	113
4.13	Compensation de la décohérence	114
4.14	Stabilisation contre des sauts de phase	114
5.1	La cavité optique	120
5.2	Faisceau gaussien	122
5.3	Spectre des modes transverses selon la configuration de la cavité	125
5.4	Mesure du spectre de la cavité	126
5.5	Déplacement des modes transverses	127
5.6	Déplacement lumineux différentiel	128
5.7	Tomographie du mode fondamental	129
5.8	Tomographie des modes d'ordres supérieurs	130
5.9	Potentiel optique mesuré par tomographie	130
5.10	Résonance de la cavité à 1560 nm	132
5.11	Schéma de principe de la méthode de Pound-Drever-Hall	133
5.12	Signal d'erreur obtenu par la méthode de Pound-Drever-Hall	134
5.13	Asservissement en fréquence à l'aide d'un modulateur acousto-optique	135
5.14	Bruit de fréquence relatif lors de l'asservissement avec l'acousto-optique	136
5.15	Signal en dent de scie	137
5.16	Propagation non-linéaire	138

5.17	Mise en œuvre de l'asservissement par modulation serrodyne	139
5.18	Décalage du signal d'erreur	139
5.19	Densité spectrale de puissance du bruit de fréquence	140
5.20	Comparaison de la densité spectrale de puissance des signaux d'erreur	141
5.21	Comparaison de la robustesse des asservissements	142
5.22	Bruit d'intensité et temps de vie	143
5.23	Schéma de l'asservissement en puissance	144
5.24	Déplacement lumineux résiduel	146
5.25	Ajustement grossier de la compensation	148
5.26	Ajustement de la compensation par la mesure non-destructive	148
6.1	Enceinte à vide	153
6.2	Atomes dans le piège dipolaire	155
6.3	Chargement du piège en fonction de la puissance intracavité	156
6.4	Temps de vie et température des atomes dans le piège dipolaire	157
6.5	Evolution de z_0 en fonction de U_0	158
6.6	Influence du décalage des bras sur les fréquences	160
6.7	Spectre obtenu par excitation paramétrique	160
6.8	Fréquences en fonction de la puissance optique intracavité	161
6.9	Mesure de la fréquence du piège par compression	162
6.10	Evolution de la taille du nuage lors d'un temps de vol	163
6.11	Fréquences à faible puissance optique	163
6.12	Densité dans l'espace des phases en fonction du nombre d'atomes	164
6.13	Le dimple	165
6.14	Excitation paramétrique dans le dimple	166
6.15	Structure bimodale lors de la transition	168
6.16	Fraction condensée en fonction de la température	168
B.1	Diagrammes associés aux deux processus d'interaction	176
B.2	Modélisation d'une lame séparatrice spatiale	177
B.3	Diagrammes dans le cas d'une modulation à deux bandes latérales	179
D.1	Schéma équivalent d'une photodiode	183
D.2	Montage transimpédance à l'aide d'une résistance	184
D.3	Montage transimpédance à amplificateur opérationnel	185
D.4	Bruits du montage transimpédance à amplificateur opérationnel	186
D.5	Bruits montage transimpédance pour détection par fluorescence.	187
D.6	Bruits montage transimpédance pour détection modulation rf.	188
E.1	Schéma du circuit imprimé de la photodiode ultra-rapide	189
E.2	Circuit imprimé de la photodiode	190

Liste des tableaux

3.1	Couplages dipolaires pour les transitions π sur les niveaux $m_F = 0$	77
4.1	Evolution des grandeurs caractéristiques	99
5.1	Moment dipolaire des principales transitions couplées à l'état excité	145
6.1	Caractéristiques du condensat dans l'approximation de Thomas-Fermi	167

Introduction

Aujourd'hui se joue une révolution : la révolution de l'information. Une quantité phénoménale d'information est générée, partagée et traitée à chaque instant, au point que cette activité rythme en grande partie notre existence contemporaine. Cette évolution a eu lieu en parallèle d'une mutation de l'environnement humain, devenu non seulement numérique mais universel : une connexion à l'Internet fournit à tout un chacun l'accès à un univers à la fois commun et riche d'une impressionnante diversité. On touche ici à une spécificité de l'Homme qui a toujours cherché à adapter son milieu plutôt que de s'y adapter. L'environnement virtuel constitue-t-il l'adaptation ultime ?

Mais si l'information a révolutionné notre monde, les concepts associés ont profondément modifié le point de vue porté sur certains problèmes physiques. En effet, le support de toute information est nécessairement une entité physique et une même information peut être encodée au sein de systèmes physiques différents. Par exemple, les mots qui composent ce manuscrit peuvent aussi bien être de l'encre sur du papier que des domaines magnétiques dans un disque dur ou encore de la lumière émise par un écran. Si initialement, pour des raisons pratiques, se pose la question de l'utilité d'un système physique pour la manipulation de l'information ; l'interrogation réciproque, à savoir quelle est l'information contenue dans un objet donné et quelles sont ses propriétés, fait de l'information une grandeur intrinsèque associée à toute entité physique. Autrement dit, les entités qui apparaissent dans une théorie physique sont toutes susceptibles de contenir de l'information. Les lois de cette théorie, qui régissent le comportement des entités, vont définir les propriétés de l'information associée. En particulier, la question du contenu informationnel des objets quantiques et de ses propriétés est à l'origine d'un champ scientifique récent et en pleine expansion : l'information quantique.

L'intersection de la théorie de l'information et de la mécanique quantique est riche d'interrogations nouvelles à l'interface des deux théories. Par exemple, dans quelle mesure la mécanique quantique favorise-t-elle la *transmission* de l'information et, en particulier, comment permet-elle de garder secrète les informations transmises ? C'est l'objet de la *cryptographie quantique*. Comment les propriétés du monde quantique peuvent-elles servir au *traitement* de l'information en le rendant plus efficace ? C'est le domaine du *calcul quantique*. Que nous apprend la théorie quantique sur l'*extraction* d'information d'un système, plus précisément, quelles sont les limites ultimes à l'information accessible ? C'est ce à quoi la *métrologie quantique* tente de répondre.

La métrologie est littéralement la « science de la mesure ». En conséquence, la métrologie quantique est sous-tendue par le problème fondamental de la mesure quantique. La mesure d'un système quantique est fort différente de celle d'un système classique, car non seulement le résultat obtenu est probabiliste, mais l'état du système est modifié lors de ce processus. La mesure apparaît donc comme un processus d'évolution des systèmes quantiques, à la fois non-déterministe et irréversible. Si la mesure est si difficile à appréhender, c'est peut-être parce qu'elle brise le paradigme selon lequel « l'objet est le connaissable, le déterminable, l'isolable,

et par conséquent le manipulable » et « le sujet est l'inconnu, inconnu parce qu'indéterminé » [Morin 05, p. 59]. L'*objet* est le vecteur d'état puisque « contrairement aux corpuscules, les fonctions d'ondes et les vecteurs d'état sont individués » [Bitbol 97, p. 391], de plus, le vecteur d'état évolue de manière déterministe car gouverné par l'équation de Schrödinger. Or, le postulat de la mesure quantique stipule l'existence d'un processus d'évolution non-déterministe de cet objet, ce qui lui donne la caractéristique d'un *sujet*. Cette propriété est peut-être la raison pour laquelle il est difficile d'imaginer la mesure en l'absence de tout observateur faisant office de sujet. Cette indissociabilité entre objet et sujet conduit certains auteurs à envisager les concepts de mesures « lues » et « non lues » [Haroche 06, p. 171-173], sous-entendant l'intervention ou non d'un « lecteur » conscient lors de ce processus.

Néanmoins, même si les questions philosophiques sous-jacentes à la mesure quantique sont loin d'être élucidées, il n'en reste pas moins que ses propriétés remarquables peuvent être exploitées. En effet, ce processus d'évolution des systèmes quantiques offre des possibilités bien plus larges que la « simple » rotation du vecteur d'état résultant de l'équation de Schrödinger. De telles propriétés peuvent être utilisées notamment pour l'ingénierie d'états quantiques. Dans le cadre de la métrologie quantique, on peut, par exemple, se demander si l'utilisation de certains états quantiques particuliers n'améliorerait pas la sensibilité d'une détection, et si c'est le cas, quelle méthode mettre en œuvre pour préparer ces états. L'ingénierie quantique, exploitant les propriétés de la mesure, peut alors être une solution à ce problème puisqu'elle permet de préparer de nouveaux états par la transformation drastique qu'engendre la mesure.

La métrologie quantique constitue le leitmotiv des travaux de recherche exposés dans ce manuscrit. De manière plus précise, nous nous interrogeons dans cette thèse sur les opportunités que procure la mesure quantique pour l'amélioration de la sensibilité des interféromètres atomiques. L'interféromètre atomique le plus connu est certainement l'interféromètre de Ramsey [Ramsey 49] qui est au cœur des horloges atomiques. C'est un interféromètre opérant sur les degrés de liberté internes d'une population atomique qui nous servira de modèle tout au long de ce manuscrit, aussi bien pour les analyses théoriques que les démonstrations expérimentales, car il est relativement simple à mettre en œuvre et il constitue un modèle type d'interféromètre à deux modes.

Si l'interféromètre de Ramsey trouve en lui-même des applications importantes, des généralisations de ce dernier, notamment l'interféromètre de Ramsey-Bordé [Bordé 89], ont élargi les champs d'applications de l'interférométrie atomique. Les senseurs reposant sur l'interférométrie atomique sont aujourd'hui à l'état de l'art et la variété des capteurs réalisés trouve de nombreuses applications : gyromètres [Canuel 06], accéléromètres [Geiger 11] et horloges [Santarelli 99] sont par exemple employés pour le géopositionnement, tandis que gravimètres [Merlet 10] et magnétomètres [Wasilewski 09] s'avèrent fort utiles en géophysique, notamment pour la prospection des matières premières [Marson 86]. Les interféromètres atomiques sont aussi très prometteurs en physique fondamentale : les horloges atomiques permettent de tester si la constante de structure fine est vraiment constante [Rosenband 08], des études poussées du principe d'équivalence peuvent être réalisées grâce à des accéléromètres atomiques [Varoquaux 09, Geiger 11]. Quant aux gravimètres, ils permettent de déterminer la constante universelle de gravitation [Fixler 07, Lamporesi 08] et pourraient être utilisés comme antennes à ondes gravitationnelles [Hogan 11].

Faire progresser les performances de ces capteurs est donc un enjeu technologique majeur. L'amélioration de la *portabilité* de ces instruments est actuellement un domaine très actif [Bodart 10, Geiger 11, van Zoest 10], tout comme la réalisation d'interféromètres piégés [Deutsch 10]. L'expérience décrite dans ce manuscrit se place également dans cette thématique, puisqu'au cœur du dispositif expérimental se trouve une cavité optique qui permet la préparation et la manipulation de condensats de Bose-Einstein dans un volume restreint tout en utilisant uniquement des technologies optiques matures, développées notamment pour les

télécommunications optiques. Ce dispositif ouvre donc des voies d'amélioration à la fois de la portabilité et de la fiabilité des sources d'atomes ultra-froids.

Si ces développements technologiques visent à mettre en œuvre des schémas éprouvés dans des situations de terrain, il convient aussi d'étudier en amont des schémas innovants permettant d'améliorer de manière significative la sensibilité des instruments. Ces études sont l'occasion de se poser des questions fondamentales, et notamment celle de la limite ultime d'un interféromètre qui est une interrogation fondatrice en métrologie quantique. Lors de cette thèse, nous avons étudié des méthodes de détections nouvelles, plus particulièrement, nous avons cherché à comprendre quels avantages une détection non-destructive, au sens où elle préserve la cohérence de l'échantillon, peut apporter à l'interférométrie atomique. Cette thématique nous a conduits à la confluence entre la mesure quantique et l'interférométrie.

Le projet de l'expérience est *in fine* de combiner une détection non-destructive et un condensat de Bose-Einstein pour former un capteur inertiel original au sein d'un résonateur optique de grande finesse. Durant ma thèse j'ai étudié et réalisé d'une part la détection non-destructive et d'autre part le condensat, ceci explique la structure de ce manuscrit qui est décomposé en deux parties : la première traite de l'utilisation d'une détection non-destructive en interférométrie atomique, quant à la seconde, elle se concentre sur la préparation d'un gaz quantique dégénéré au sein d'un résonateur optique de haute finesse. Ces deux parties ne sont toutefois pas complètement indépendantes, et ce essentiellement parce qu'elles interviennent sur le même dispositif expérimental. La dépendance principale est l'utilisation lors des expériences présentées dans la première partie de la source d'atomes piégés décrite dans la seconde. Néanmoins, la connaissance des détails expérimentaux sur l'obtention de cette source n'est pas nécessaire à la bonne compréhension des expériences de détection. Lors de la lecture du manuscrit, ces deux parties peuvent donc être abordées dans un ordre arbitraire.

La première partie se subdivise en quatre chapitres. Le premier chapitre sera l'occasion de rappeler le postulat de la mesure quantique généralisée et le concept de mesure quantique non-destructive. L'objectif de ce chapitre est double, il s'agit en premier lieu d'aborder la mesure avec un formalisme moderne, permettant de dépasser le simple point de vue de la mesure projective, et en deuxième lieu d'introduire le concept de mesure indirecte essentiel à la réalisation d'une mesure non-destructive. Une présentation de l'expérience de Haroche [Haroche 06], qui est un exemple type de mesure indirecte non-destructive, permettra d'asseoir les concepts introduits.

Après cette exposition du formalisme de la mesure généralisée et du concept de mesure non-destructive, le second chapitre aura pour objet une description théorique de la mesure non-destructive de l'état interne d'un ensemble d'atomes indiscernables et de ces applications en métrologie quantique. Il conviendra tout d'abord d'introduire le formalisme nécessaire à la description d'un ensemble d'atomes à deux niveaux indiscernables, ce qui permettra, après une présentation de l'interféromètre de Ramsey, d'étudier l'évolution de l'état quantique d'un tel ensemble au sein d'un interféromètre. L'étude des fluctuations en sortie de l'interféromètre pour différents états en entrée fera apparaître la limite quantique standard et la limite de Heisenberg. La notion d'état de spin comprimé sera alors introduite. La discussion s'attachera ensuite à la mesure à proprement parler, nous développerons un modèle décrivant l'évolution de l'état atomique sous le processus de mesure lorsque les photons de sonde sont envoyés un à un au travers du nuage atomique. Cette approche nous permettra d'analyser la dynamique du processus de réduction du paquet d'onde. Nous présenterons deux dispositifs de mesure, tout d'abord l'exemple canonique de l'interféromètre de Mach-Zehnder, puis la spectroscopie par modulation de fréquence dont la mise en œuvre expérimentale est rapportée dans la suite. Cette étude montrera que le processus de mesure conduit à la préparation d'états de spin comprimés et d'états de Dicke, fournissant par là-même un exemple d'utilisation de la mesure en ingénierie des états quantiques. D'autres exemples d'ingénierie reposant sur la mesure seront alors présentés : l'intrication de deux ensembles atomiques spatialement séparés et la préparation de chats de

Schrödinger.

Une fois les concepts et analyses théoriques développés, nous les mettrons en pratique. Le troisième chapitre présente donc comment nous avons mise en œuvre une détection non-destructive, au sens où elle préserve la cohérence de l'échantillon atomique. La méthode repose sur la spectroscopie par modulation de fréquence qui offre de nombreux avantages pour l'application visée. Le photodétecteur ultra-rapide, au cœur du dispositif, sera décrit en détail avant d'effectuer une analyse du système de détection complet. On constatera alors que le signal extrait est limité au bruit de photons. La préparation de l'échantillon atomique cohérent est ensuite discutée avant de présenter une première démonstration du suivi en temps réel de l'évolution cohérente d'un spin collectif qui fera la preuve de la non-destructivité de la mesure. On montrera alors comment le déplacement lumineux induit par la sonde peut être compensé, ce qui constitue un avantage majeur de la méthode pour toute application interférométrique. Enfin, un interféromètre de Ramsey réalisé avec un ensemble atomique piégé optiquement, démontrera la possibilité de manipulations cohérentes de l'état atomique tout en préservant un excellent contrôle des propriétés physiques du nuage, notamment en terme de stabilité temporelle.

Le quatrième chapitre, concluant cette première partie, sera pour nous l'occasion de mettre en œuvre quelques applications de la détection non-destructive. Plus particulièrement, on montrera comment une mesure faible, perturbant très peu l'ensemble atomique, permet de corriger l'effet d'un basculement de bit sur un état cohérent. En d'autres termes, la détection sera employée au sein d'un dispositif de rétroaction quantique protégeant l'état de la décohérence. Une seconde application sera exposée, elle exploite la préservation de la cohérence par la détection pour réaliser une boucle à verrouillage de phase où l'échantillon atomique sert de référence de phase. Les avantages d'une telle méthode pour les horloges atomiques seront discutés.

La seconde partie de ce manuscrit est consacrée à la préparation d'un condensat de Bose-Einstein dans un résonateur optique de haute finesse. Cette partie se décompose en deux chapitres, le premier d'entre eux, soit le cinquième chapitre du manuscrit, décrit et analyse la cavité de haute finesse. Il commence par une étude des propriétés géométriques essentielles à la bonne compréhension du piège dipolaire généré. Différentes méthodes de caractérisation ont été mises en œuvre et sont comparées. L'asservissement de la fréquence du laser sur la résonance de la cavité est ensuite présenté, nous introduirons notamment une technique originale reposant sur la modulation serrodyne. Enfin, on présentera comment le déplacement lumineux induit par le faisceau de piège sur la transition atomique peut être compensé. Cette étape est nécessaire pour sonder non-destructivement les atomes piégés.

Finalement, le sixième et dernier chapitre décrit la réalisation de l'échantillon dégénéré à proprement parler. Après un bref rappel sur la condensation de Bose-Einstein, le piège dipolaire est présenté et étudié. Les fréquences de ce dernier sont notamment analysées par différentes méthodes. Après une analyse de l'évaporation, il sera constaté la nécessité d'utiliser un faisceau optique supplémentaire en fin d'évaporation, ce qui permettra d'atteindre le régime de dégénérescence quantique.

Première partie

**Mesures non-destructives :
application à l'interférométrie atomique**

La mesure en mécanique quantique

L'homme ne peut aboutir qu'à des à peu près.

Jules Supervielle

La mesure, telle qu'elle fut initialement conçue [Von Neumann 55] et telle qu'elle est souvent présentée [Cohen-Tannoudji 73, p. 215-222] est la *mesure projective* ou *mesure de Von Neumann*. Lors d'une telle mesure, on considère un système quantique initialement placé dans une superposition d'états propres d'une observable donnée, le postulat de la mesure projective stipule alors que seul un état propre peut être détecté, et que la probabilité de mesurer un état propre est le module carré de la projection de l'état du système sur l'état propre considéré. Cette dernière règle, au centre de l'interprétation probabiliste de la mécanique quantique, est appelée *loi de Born*. Mais le postulat va plus loin, il affirme qu'après la mesure, le système n'est plus dans l'état de superposition initial, mais dans l'état propre détecté. Cette propriété, appelée *réduction du paquet d'onde*, fait de la mesure un processus d'évolution des systèmes quantiques, au même titre que l'évolution régie par l'équation de Schrödinger, la différence majeure entre les deux processus réside dans la *non-unitarité* du processus de mesure. Cette évolution fait de la mesure un outil très puissant pour l'ingénierie des états quantiques, comme nous aurons l'occasion de le constater au chapitre suivant.

Néanmoins, la mesure projective est un cas particulier dont la réalisation expérimentale est non seulement récente [Guerlin 07] mais aussi très difficile à mettre en œuvre. Si elle offre l'avantage d'une présentation simplifiée du problème, sans en éluder les difficultés conceptuelles, elle ne décrit pas la vaste majorité des situations expérimentales que l'on peut rencontrer. Par exemple, comment décrire :

- la précision finie du détecteur ?
- la destruction du système par le processus de mesure (ionisation, photodétection, etc.) ?
- un détecteur n'ayant pas la même dimensionnalité que le système observé ?

Afin de disposer des outils théoriques adéquats, à même de fournir un socle commun à la description des expériences contemporaines notamment autour des problématiques d'information quantique, il convient de placer la mesure dans un cadre plus général, appelé *postulat de la mesure généralisée* [Nielsen 00].

Après avoir énoncé ce postulat de la mesure généralisée, nous étudierons quelques cas particuliers : nous montrerons que la mesure projective entre dans le cadre de ce postulat et nous verrons comment décrire une mesure destructive sur l'exemple de la photodétection. Nous donnerons aussi une description sommaire du cas que nous étudierons de manière détaillée dans le chapitre 2 et qui correspond à notre situation expérimentale, à savoir une mesure utilisant un détecteur ayant une précision finie. Enfin, nous présenterons le *modèle de la détection indirecte*

qui nous permettra d'introduire le concept de *mesure non-destructive*, dont nous donnerons quelques exemples.

1.1 Le postulat de la mesure généralisée

1.1.1 Opérateurs de mesure

Soit \mathcal{S} un système quantique et $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ l'espace de Hilbert associé, on définit une mesure sur \mathcal{S} comme un ensemble $\{M_n\}$ d'opérateurs, dits *opérateurs de mesure*, agissant sur les états de l'espace $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$. Chaque valeur n indice un résultat possible de la mesure et l'ensemble des opérateurs de mesure doit vérifier la relation de complétude suivante :

$$\sum_n M_n^\dagger M_n = \mathbb{1}. \quad (1.1)$$

1.1.2 Probabilité d'obtention d'un résultat

Soit $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, la probabilité que le résultat n , associé à l'opérateur M_n , soit obtenu lors d'une mesure est :

$$P_n = \langle \psi | M_n^\dagger M_n | \psi \rangle. \quad (1.2)$$

Il s'agit d'une généralisation de la loi de Born. La relation de complétude Eq. (1.1) assure que la normalisation est bien respectée : $\sum_n P_n = 1$.

1.1.3 Evolution de l'état

Après l'obtention du résultat n lors de la mesure de l'état $|\psi\rangle$, ce dernier évolue de la manière suivante :

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{M_n |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_n^\dagger M_n | \psi \rangle}}. \quad (1.3)$$

1.1.4 Définition d'un POVM (Positive Operator-Valued Measure)

On peut aussi construire l'opérateur hermitique positif suivant :

$$E_n \equiv M_n^\dagger M_n, \quad (1.4)$$

la relation de complétude Eq. (1.1) se réécrit alors $\sum_n E_n = \mathbb{1}$ et la probabilité d'obtenir le résultat n devient $P_n = \langle \psi | E_n | \psi \rangle$. L'ensemble des opérateurs E_n forme un POVM (*Positive Operator-Valued Measure*). La description d'une mesure à l'aide du POVM $\{E_n\}$ au lieu des opérateurs de mesure $\{M_n\}$ est utile lorsque l'on s'intéresse uniquement à la probabilité de détection et non à l'état induit par la mesure. Nous allons voir que deux mesures différentes peuvent partager le même POVM, autrement dit, les probabilités d'obtenir chacun des résultats peuvent être les mêmes mais l'action de la mesure sur l'état peut différer.

1.2 Quelques exemples de mesures généralisées

1.2.1 Mesure projective

Vérifions tout d'abord que la mesure projective, dont nous avons discuté en introduction de ce chapitre, entre bien dans le cadre de la mesure généralisée. Soit $\{|n\rangle\}$ une base de l'espace de

Hilbert \mathcal{H}_S , on note $\Pi_n \equiv |n\rangle \langle n|$ le projecteur sur l'état $|n\rangle$. Puisque $\Pi_n^\dagger = \Pi_n$ et $\Pi_n^2 = \Pi_n$, la relation de complétude suivante est vérifiée :

$$\sum_n \Pi_n^\dagger \Pi_n = \sum_n \Pi_n = \sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbf{1}, \quad (1.5)$$

par conséquent, l'ensemble $\{\Pi_n\}$ des projecteurs sur la base $\{|n\rangle\}$ de l'espace de Hilbert forme un ensemble complet d'opérateurs de mesure. De plus, la probabilité de mesurer $|\psi\rangle$ dans l'état $|n\rangle$ est :

$$P_n = |\langle \psi | n \rangle|^2, \quad (1.6)$$

on retrouve ici la *loi de Born*. Après une telle mesure, si le résultat n est obtenu alors le système se retrouve projeté sur l'état propre $\Pi_n |\psi\rangle = |n\rangle$. On notera aussi que, dans ce cas précis, les éléments du POVM sont confondus avec les opérateurs de mesure :

$$E_n = \Pi_n^\dagger \Pi_n = \Pi_n \Pi_n = \Pi_n. \quad (1.7)$$

Nous allons maintenant présenter un exemple de mesure non-projective ayant le même POVM qu'une mesure projective.

1.2.2 Photodétection

Dans la grande majorité des situations expérimentales, la mesure détruit le système quantique. Un exemple extrêmement répandu est la photodétection d'un état du champ électromagnétique. De manière plus précise, considérons la mesure d'états de Fock à n photons $|n\rangle$ [Mandel 95] qui peut être réalisée grâce à des détecteurs capables de résoudre des nombres différents de photons. Une telle mesure est destructive car c'est l'absorption d'un photon sur une photo-cathode qui en générant l'émission d'un électron est responsable de la détection. Après la détection, et donc l'absorption des photons, le champ électromagnétique est vide, il est dans l'état de Fock $|0\rangle$. L'opérateur associé à la mesure de l'état $|n\rangle$ peut donc s'exprimer sous la forme [Haroche 06, p. 313] :

$$M_n = |0\rangle \langle n|. \quad (1.8)$$

Etant donné que l'ensemble des états nombre $|n\rangle$ forme une base de l'espace de Fock, les opérateurs M_n vérifient la relation de complétude propre aux opérateurs de mesure :

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n^\dagger M_n = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle 0|0\rangle \langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \mathbf{1}. \quad (1.9)$$

Le POVM associé à cette mesure est constitué des projecteurs $E_n = |n\rangle \langle n| = \Pi_n$, il est donc identique au POVM d'une mesure projective. Toutefois, si les probabilités de détection sont les mêmes, l'état résultant de la mesure est différent.

A titre d'exemple, considérons la mesure du nombre de photons dans un état cohérent d'amplitude complexe α :

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.10)$$

Que l'on réalise sur cet état une mesure projective ou bien une photodétection, la probabilité de détecter n photons est la même, elle suit une distribution de Poisson de valeur moyenne $\langle n \rangle = |\alpha|^2$:

$$P_n = \langle \alpha | E_n | \alpha \rangle = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}. \quad (1.11)$$

Néanmoins, l'état résultant est différent selon la mesure effectuée : une mesure projective génère un état de Fock : $\Pi_n |\alpha\rangle \propto |n\rangle$, tandis qu'une mesure destructive laisse le champ vide :

$M_n |\alpha\rangle \propto |0\rangle$. Notons que, si on est capable de réaliser une mesure projective sur le champ électromagnétique, alors elle peut être utilisée pour préparer des états de Fock à partir d'états cohérents [Guerlin 07] ; il s'agit là d'un exemple d'application des propriétés non-unitaires de la mesure à l'ingénierie d'états quantiques.

1.2.3 Mesure avec un détecteur de précision finie

En règle générale, la précision du détecteur utilisé lors d'une mesure est finie. Par conséquent, une observable est mesurée avec une précision elle aussi finie, ce qui modifie à la fois la probabilité de détection et l'action en retour de la mesure. Nous allons présenter un opérateur de mesure permettant de décrire une telle situation.

On considère une détection non-destructive utilisant un détecteur ayant un bruit gaussien d'écart-type σ_{det} , ce bruit pouvant être d'origine aussi bien quantique que classique. Si on mesure une observable A dont le spectre est continu, $A|x\rangle = x|x\rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors l'opérateur de mesure associé à la détection de l'état propre $|x\rangle$ est :

$$M_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{det}}^2}} e^{-\frac{1}{4\sigma_{\text{det}}^2}(A-x\mathbf{1})^2}. \quad (1.12)$$

C'est un opérateur hermitique ($M_x^\dagger = M_x$), qui vérifie la relation de complétude :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M_x^\dagger M_x dx = \mathbf{1}. \quad (1.13)$$

Si on considère un état $|\psi\rangle$ quelconque, dont la décomposition dans la base propre de l'observable A s'écrit $|\psi\rangle = \int dx f(x) |x\rangle$ avec $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\|f\|_2 = 1$, alors la probabilité d'obtenir le résultat x lors d'une mesure vaut :

$$p(x) = \langle \psi | M_x^\dagger M_x | \psi \rangle \quad (1.14)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{det}}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' f(x') f^*(x'') e^{-\frac{(x''-x)^2}{2\sigma_{\text{det}}^2}} \langle x' | x'' \rangle \quad (1.15)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{det}}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x')|^2 e^{-\frac{(x'-x)^2}{2\sigma_{\text{det}}^2}} dx', \quad (1.16)$$

où on a utilisé $\langle x' | x'' \rangle = \delta(x' - x'')$. La probabilité est donc la *convolution* du module carré de l'opérateur de mesure, qui est gaussien dans le cas présent, avec la distribution de probabilité $|f(x)|^2$ associée à l'état $|\psi\rangle$.

L'état induit après l'obtention du résultat x lors de la mesure est $|\psi'\rangle = M_x |\psi\rangle = \int dx' g(x') |x'\rangle$ avec

$$g(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{det}}^2}} e^{-\frac{(x'-x)^2}{2\sigma_{\text{det}}^2}} f(x'), \quad (1.17)$$

il s'agit du produit entre l'état initial et une gaussienne centrée en x . L'influence de la mesure sur l'état sondé dépendra alors du rapport entre la précision σ_{det} de la détection et la largeur σ_ψ de la fonction d'onde $|\psi\rangle$, ce qui permet de distinguer différents régimes de mesure.

1.2.3.1 Mesure faible

Dans le cas d'une détection insensible aux fluctuations quantiques du système observé ($\sigma_{\text{det}} \gg \sigma_\psi$), la projection de l'état engendrée par la mesure est négligeable, on réalise alors une *mesure*

faible. Une telle mesure a initialement été proposée dans l'objectif de mesurer simultanément deux observables qui ne commutent pas [Aharonov 88], par exemple pour mesurer l'observable $S_{\pi/4} = (S_x + S_y)/\sqrt{2}$ où S_x et S_y sont deux opérateurs de spin. En effet, si la mesure perturbe le système alors l'ordre selon lequel les observables sont mesurées est important, ce qui n'est pas le cas pour une mesure faible.

Néanmoins, si une mesure faible permet de restreindre la perturbation de l'état au prix d'une précision moindre, une telle mesure n'est pas pour autant nécessairement imprécise. Si l'on cherche, par exemple, à mesurer un ensemble de N particules, alors les fluctuations de la fonction d'onde associée vérifient $\sigma_\psi \sim \sqrt{N}$. Il est donc possible de réaliser une mesure faible avec une erreur relative de l'ordre de $\sqrt{N}/N = 1/\sqrt{N}$, elle peut donc être arbitrairement précise lorsque le nombre de particules est suffisamment grand.

1.2.3.2 Mesure forte

A l'inverse, lorsque la détection devient sensible aux fluctuations quantiques du système ($\sigma_{\text{det}} \lesssim \sigma_\psi$) la mesure est dite *forte*, elle projette partiellement l'état du système. Dans la limite d'un détecteur infiniment précis ($\sigma_{\text{det}} \rightarrow 0$), l'opérateur de mesure converge vers une distribution de Dirac, autrement dit un projecteur $M_x \rightarrow \delta(A - x\mathbb{1}) = |x\rangle\langle x|$, on retrouve alors une *mesure projective*.

L'opérateur de mesure M_x défini Eq. (1.12) permet donc de modéliser une mesure non-destructive avec un pouvoir projectif quelconque, ce qui en fait un outil très efficace pour décrire de nombreuses expériences et notamment celles que nous allons aborder dans ce manuscrit.

1.2.4 Evolution unitaire

Comme nous l'avons vu, afin de constituer un POVM un ensemble d'opérateurs $\{E_n\}$ doit former une partition de l'identité : $\sum_n E_n = \mathbb{1}$. Le POVM le plus simple est formé du singleton $\{\mathbb{1}\}$, il est dit *POVM trivial*. Si M est un opérateur de mesure associé à ce POVM alors il doit vérifier $MM^\dagger = \mathbb{1}$, autrement dit M doit être un *opérateur unitaire*. Par conséquent, l'ensemble des opérateurs de mesure du POVM trivial forme le groupe unitaire. De plus, la probabilité associée à l'unique élément de ce POVM est $P_{\mathbb{1}} = 1$, ce qui signifie qu'un système quantique subit nécessairement une évolution unitaire.

Cette remarque permet d'unifier les processus d'évolutions d'un système quantique. En effet, dans la présentation « habituelle » de la mécanique quantique, deux postulats régissent l'évolution du système, à savoir l'évolution unitaire donnée par l'équation de Schrödinger et le postulat de la mesure. On constate ici que *l'évolution unitaire peut être décrite dans le cadre du postulat de la mesure généralisée* puisque les opérateurs unitaires sont les opérateurs de mesure associés au POVM trivial.

1.3 Le modèle de la mesure indirecte et les mesures non-destructives

Nous venons de présenter l'opérateur de mesure d'une détection non-destructive (Sec. 1.2.3), et nous avons notamment constaté que la mesure projective (Sec. 1.2.1) correspond au cas limite d'un détecteur infiniment précis. Toutefois, ces résultats ne nous disent pas comment mettre en œuvre une telle mesure. En effet, les moyens de détection que nous connaissons sont destructifs, par exemple la photo-absorption pour un photon ou bien l'ionisation pour un atome. Nous allons voir comment dépasser cette limite pour mettre en œuvre une détection non-destructive.

1.3.1 Mesure indirecte

L'idée est de réaliser une mesure dite *indirecte*. Elle consiste à faire interagir le système \mathcal{S} que l'on désire mesurer avec un système auxiliaire \mathcal{M} appelé *sonde* ou *mètre*. L'interaction modifie l'état de la sonde d'une manière dépendante de l'état du système \mathcal{S} , si bien que le résultat d'une détection destructive de la sonde procure une information sur l'état de \mathcal{S} , en d'autres termes, l'interaction intrique les systèmes \mathcal{S} et \mathcal{M} . Le circuit quantique modélisant une telle mesure est présenté Fig. 1.1.

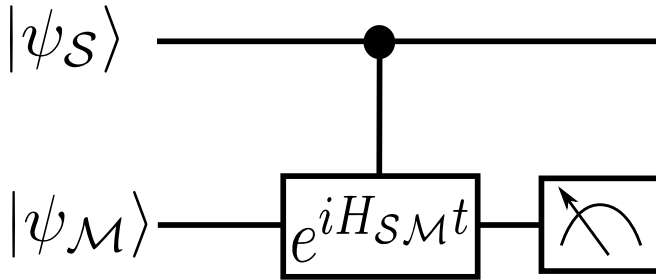


Figure 1.1 – Modélisation de la mesure indirecte. Après l'interaction $U = \exp(iH_{\mathcal{S}\mathcal{M}}t)$, l'état $|\psi_{\mathcal{M}}\rangle$ de la sonde est dépendant de l'état $|\psi_{\mathcal{S}}\rangle$ du système. L'interaction U est modélisée comme une porte quantique agissant sur l'état $|\psi_{\mathcal{M}}\rangle$ et contrôlée par l'état $|\psi_{\mathcal{S}}\rangle$. La sonde est alors mesurée de manière destructive.

1.3.2 Mesure non-destructive

Pour que la mesure soit non-destructive, un certain nombre de conditions doivent être vérifiées. Notons $H_{\mathcal{S}}$ ($H_{\mathcal{M}}$) le hamiltonien du système (de la sonde) et $H_{\mathcal{S}\mathcal{M}}$ le hamiltonien d'interaction entre les systèmes \mathcal{S} et \mathcal{M} . Introduisons aussi l'observable $A_{\mathcal{S}}$ que l'on désire mesurer sur \mathcal{S} , et enfin, notons $A_{\mathcal{M}}$ l'observable mesurée lors de la détection destructive de la sonde.

1.3.2.1 Modification de l'état de la sonde

On veut avant tout extraire de l'information sur \mathcal{S} en mesurant \mathcal{M} , il faut donc que l'interaction agisse sur l'observable $A_{\mathcal{M}}$ de la sonde, autrement dit, la condition suivante est nécessaire :

$$[H_{\mathcal{S}\mathcal{M}}, A_{\mathcal{M}}] \neq 0. \quad (1.18)$$

1.3.2.2 Absence d'action en retour

La condition précédente permet d'affirmer que la détection de la sonde procure de l'information sur le système \mathcal{S} , mais elle ne garantit pas le caractère non-destructif de la mesure. Ce dernier est assuré seulement si l'interaction avec la sonde ne modifie pas le système \mathcal{S} , plus précisément, si les états propres de l'observable $A_{\mathcal{S}}$ ne sont pas affectés par $H_{\mathcal{S}\mathcal{M}}$. Une condition suffisante, mais non nécessaire, pour cela est :

$$[H_{\mathcal{S}\mathcal{M}}, A_{\mathcal{S}}] = 0. \quad (1.19)$$

1.3.2.3 L'observable est une constante du mouvement

Il faut aussi pouvoir répéter la mesure, l'observable $A_{\mathcal{S}}$ doit donc être une constante du mouvement, autrement dit elle doit commuter avec le hamiltonien total $H = H_{\mathcal{S}} + H_{\mathcal{M}} + H_{\mathcal{S}\mathcal{M}}$. Si la condition Eq. (1.19) est déjà vérifiée alors $[H, A_{\mathcal{S}}] = 0$ impose :

$$[H_{\mathcal{S}}, A_{\mathcal{S}}] = 0. \quad (1.20)$$

1.3.3 Mesure quantique non-destructive

Si une mesure vérifie les critères d'une détection non-destructive (Sec. 1.3.2) tout en étant opérée dans le régime de mesure forte (Sec. 1.2.3.2), on dit que la mesure est *quantique* non-destructive (QND). Puisqu'une mesure QND est non-destructive on peut réaliser deux mesures successives sur le même système, de plus, dans le régime de mesure forte la projection de la fonction d'onde lors de la première mesure doit induire une forte corrélation entre les résultats des deux mesures. En d'autres termes, lors d'une mesure QND la *variance conditionnelle*, c'est-à-dire la variance des fluctuations entre deux mesures successives, est plus faible que la variance de la fonction d'onde initiale.

1.3.4 Exemples

1.3.4.1 Mesure non-destructive de l'intensité d'un faisceau optique

L'un des premiers exemples de mesure non-destructive indirecte est celle de l'intensité d'un faisceau optique [Grangier 98]. La sonde utilisée est un autre faisceau optique et les deux faisceaux sont couplés grâce à une interaction non-linéaire dans un milieu Kerr, ce milieu pouvant être, par exemple, un nuage d'atomes froids [Roch 97]. Plus précisément, l'intensité du premier faisceau est couplée avec la phase du faisceau sonde. La mesure destructive du faisceau sonde en sortie d'un interféromètre procure une estimation de la phase et donc de l'intensité du premier faisceau.

1.3.4.2 Mesure non-destructive d'un spin

Considérons que le système \mathcal{S} soit un spin \mathbf{J} auquel trois observables J_x , J_y et J_z sont associées. Supposons que l'on cherche à mesurer l'observable $A_{\mathcal{S}} = J_z$ de ce spin par l'intermédiaire du couplage avec un autre spin \mathbf{S} qui servira de sonde, les observables de cette sonde sont notés S_x , S_y et S_z et nous choisissons de détecter l'observable $A_{\mathcal{M}} = S_x$ de manière destructive. Le hamiltonien du système \mathcal{S} est $H_{\mathcal{S}} = \hbar\omega J_z$, il vérifie bien entendu la condition Eq. (1.20). Considérons maintenant le hamiltonien d'interaction suivant [Kuzmich 98] :

$$H_{\mathcal{SM}} = \hbar g J_z S_z, \quad (1.21)$$

étant donné que $[S_x, S_z] \neq 0$, la condition Eq. (1.18) est vérifiée, tout comme la seconde condition Eq. (1.19). Le hamiltonien d'interaction Eq. (1.21) est donc utilisable pour réaliser une détection non-destructive.

Par la suite, nous présenterons la mise en œuvre d'un tel couplage pour la réalisation d'une détection non-destructive. Le spin \mathbf{J} sera un spin collectif décrivant un ensemble d'atomes à deux niveaux, quant au spin \mathbf{S} de la sonde il sera composé de deux modes du champ électromagnétique et un interféromètre permettra de détecter l'observable S_x .

1.3.4.3 L'expérience de Haroche

L'expérience de Haroche [Haroche 06] est un exemple type de la mesure non-destructive indirecte. L'observable mesurée est le nombre de photons micro-ondes piégés dans une cavité supra-conductrice de très haute finesse. Le nombre de photons est mesuré grâce à une sonde réalisée à partir d'atomes de Rydberg envoyés un à un dans un interféromètre de Ramsey. L'idée est que plus le nombre de photons intracavité est important, plus le déplacement lumineux engendré sur un niveau atomique bien choisi est grand. Par conséquent, la phase accumulée par l'atome lors de la traversée de la cavité est elle aussi plus grande. Une détection destructive par ionisation des atomes en sortie de l'interféromètre permet alors de mesurer le déphasage et donc le nombre de photons.

Grâce à ce dispositif, le nombre de photons intra-cavité peut être suivi en temps réel. Cela permet, par exemple, d'observer les sauts quantiques associés à la perte d'un photon du résonateur [Gleyzes 07], ou bien encore d'étudier la décohérence d'états non-classiques [Deléglise 08]. La détection d'un atome unique ne procure pas l'information suffisante pour estimer de manière absolument certaine le nombre de photons, autrement dit, un atome n'engendre qu'une projection partielle de l'état. Néanmoins, dans la limite d'un grand nombre d'atomes détectés, la précision devient suffisante et la mesure est projective. Ainsi, en étudiant l'évolution de l'état avec le nombre d'atomes détectés, la projection progressive d'un état cohérent vers un état de Fock est observée [Guerlin 07]. Cela fournit aussi une méthode pour préparer un état de Fock à partir d'un état cohérent : c'est un exemple d'ingénierie quantique. Toutefois, l'état de Fock n'est pas préparé de manière déterministe puisque la probabilité d'obtenir un état donné obéit à la loi de Born. En utilisant une technique de rétro-action quantique, il est néanmoins possible de rendre cette préparation déterministe [Sayrin 11].

1.4 Conclusion

La mesure est un processus d'évolution des systèmes quantiques très diversifié : elle peut détruire le système, modifier son état par projection, ou encore n'induire quasiment aucune modification dans le cas d'une mesure faible. Cette diversité offre de nombreux degrés de liberté en ingénierie quantique : le régime de mesure forte peut être exploité pour la préparation d'états quantiques, tandis qu'un régime de mesure faible peut s'avérer utile au contrôle des états.

Dans la suite de ce manuscrit, nous allons nous intéresser à la mesure non-destructive de l'état interne d'un ensemble d'atomes à deux niveaux. Nous allons réaliser une mesure indirecte : la sonde sera un faisceau optique et la phase du faisceau sonde sera couplée à l'état interne de la population atomique. Cette phase sera estimée à l'aide d'un interféromètre optique en sortie duquel le faisceau sonde sera détecté de manière destructive. Nous aurons l'occasion de présenter quelques applications de la détection non-destructive dans la limite d'une mesure faible. Ce sera l'occasion pour nous de démontrer que ce régime de mesure, qui peut *a priori* sembler inutile puisqu'il n'engendre qu'une projection négligeable de la fonction d'onde, est en fait très pratique car il permet de monitorer le système quasiment sans l'influencer.

Préparation d'états collectifs de spin non-classiques par la mesure

L'homme se découvre quand il se mesure avec l'objet.

Antoine de Saint-Exupéry

A la base d'un interféromètre atomique se trouve un ensemble cohérent, *i.e.* un ensemble d'atomes indiscernables évoluant en phase. Chaque atome est décrit par un pseudo-spin et l'ensemble forme un *spin collectif*. Les performances de l'interféromètre et, plus particulièrement, les fluctuations à sa sortie, dépendent fortement de l'état quantique de ce spin collectif. L'état collectif le plus courant est l'*état cohérent de spin*, c'est un état pour lequel il n'existe aucune corrélation entre les atomes de l'ensemble, lorsqu'il est utilisé dans un interféromètre on observe en sortie des fluctuations proportionnelles à la racine carrée du nombre d'atomes. Ces fluctuations restreignent la sensibilité de l'interféromètre, elles sont à l'origine de la *limite quantique standard*. Un axe de recherche important dans l'objectif d'améliorer les performances des interféromètres vise à dépasser la limite quantique standard, ce qui peut être réalisé grâce à des ensembles corrélés au sein desquels les particules sont intriquées.

Nous avons vu au chapitre précédent, que la mesure d'un système quantique peut engendrer une évolution violemment non-linéaire, c'est notamment le cas de la mesure projective. Or, une évolution non-linéaire est à même de corrélérer un ensemble de spins : on peut alors se demander si les propriétés d'une mesure peuvent être exploitées pour préparer un tel état. Afin de répondre à cette question, il est essentiel d'avoir une compréhension approfondie de la dynamique du processus de mesure d'un état collectif de spin. Plus précisément, nous allons étudier comment le paquet d'ondes associé à ensemble atomique sondé dans un interféromètre optique, se réduit au fur et à mesure que des photons sont détectés en sortie de l'interféromètre.

Avant toute chose, nous allons introduire le formalisme nécessaire à la description des ensembles collectifs. En particulier, nous voulons pouvoir calculer l'évolution d'un état collectif dans un interféromètre, nous aurons pour cela besoin de connaître la géométrie unitaire formée par l'ensemble des transformations de ces états. Nous montrerons alors comment utiliser ces propriétés géométriques pour estimer la sensibilité d'un interféromètre atomique, puis, nous présenterons les concepts de limite quantique standard et de limite de Heisenberg, avant d'introduire la notion d'états comprimés de spins. Nous étudierons alors l'évolution d'un état cohérent sous la mesure lorsqu'elle est réalisée avec deux dispositifs différents : l'interféromètre de Mach-Zehnder et la spectroscopie par modulation de fréquence. Nous montrerons qu'ils induisent tous deux une dynamique de projection de la fonction d'onde similaire. Nous constaterons alors que

la mesure permet de préparer des états comprimés de spin et des états de Dicke. Une simulation de Monte-Carlo servira à vérifier les résultats analytiques obtenus. Enfin, nous montrerons que la mesure peut être utilisée pour intriquer deux ensembles atomiques distincts, mais aussi pour préparer des superpositions macroscopiques au sein d'un même nuage, autrement dit, des chats de Schödinger.

2.1 Systèmes quantiques à deux niveaux et états collectifs de spins

Le système à deux niveaux, que nous appellerons aussi de manière indifférenciée spin ou qubit, est un modèle fondamental et omniprésent en mécanique quantique. Ce modèle constitue notamment la base du calcul quantique à porte [Nielsen 00]. Par la suite, il nous servira entre autres à décrire les deux niveaux de la structure hyperfine de l'état fondamental d'atomes alcalins, mais aussi les deux modes spatiaux du champ électromagnétique dans un interféromètre de type Mach-Zehnder, ou bien encore les deux modes spectraux dans le cas d'une détection hétérodyne.

Nous nous intéressons plus particulièrement à l'amélioration de la sensibilité des interféromètres *via* l'ingénierie des états quantiques, or la sensibilité d'un interféromètre est *a priori* supérieure lorsqu'un grand nombre d'atomes est utilisé. Par conséquent, nous n'étudierons non pas l'évolution dans un interféromètre d'une particule unique mais celle d'un ensemble de particules indiscernables constituant un *état collectif de spins*. L'étude des propriétés de ces états collectifs est un préalable nécessaire à l'analyse de la sensibilité d'un interféromètre effectuée dans la suite de ce chapitre (Sec. 2.2). En effet, si pour des particules indépendantes, on peut déduire les propriétés statistiques des fluctuations à la sortie de l'interféromètre en connaissant le comportement d'une particule unique, il n'en est rien dans le cas d'un ensemble de particules corrélées. Des méthodes d'études spécifiques sont donc nécessaires. Cette partie se consacre à introduire les concepts et les outils mathématiques, notamment la structure de l'espace de Hilbert et la manière dont se transforment les états collectifs lors de rotations, cette analyse est primordiale puisqu'un interféromètre n'est rien d'autre qu'un enchaînement bien choisi de rotations.

Nous commencerons par décrire brièvement les concepts fondamentaux concernant un système à deux niveaux unique, notamment la sphère de Bloch et les rotations d'un qubit sur cette dernière. Nous étudierons ensuite comment passer d'un ensemble de spins discernables à un ensemble de spins indiscernables, ce qui nous permettra de comprendre la hiérarchie des états dans l'espace de Hilbert. Nous présentons ensuite les états de Dicke et la manière dont ils évoluent sous l'effet de rotations, nous introduisons alors la notion centrale d'état cohérent de spins. Enfin, nous montrons comment visualiser les états collectifs de spins sur la sphère de Bloch grâce à la représentation de Husimi.

2.1.1 Système à deux niveaux

2.1.1.1 Vecteur d'état d'un système à deux niveaux et sphère de Bloch

L'état d'un système à deux niveaux est décrit par un vecteur normé sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_2 \equiv \mathbb{C}^2$ dont les états $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ forment une base. Autrement dit, si $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_2$ alors il existe un couple de nombres complexes (α, β) tel que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ et :

$$|\psi\rangle = \alpha |a\rangle + \beta |b\rangle. \quad (2.1)$$

A une phase globale près, sans signification physique, cet état peut se réécrire :

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |a\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |b\rangle, \quad (2.2)$$

où $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ sont deux nombres réels qui peuvent être interprétés comme la paramétrisation en coordonnées polaires d'une sphère. En d'autres termes, l'état d'un système à deux niveaux peut être représenté comme un point sur une sphère unité à trois dimensions, la sphère représentant l'ensemble des états possibles pour le système. Cette sphère est dite *sphère de Bloch* (Fig. 2.1). Les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ correspondent respectivement aux pôles nord et sud de la sphère.

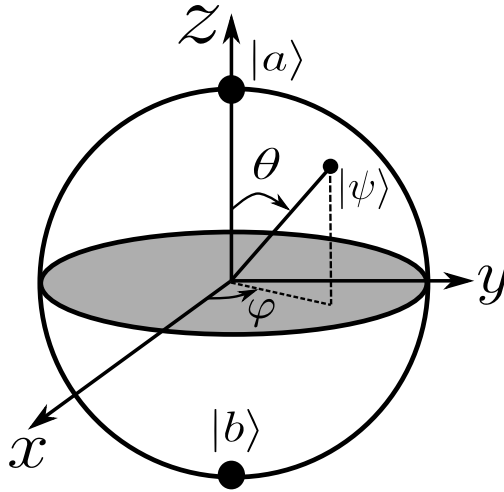


Figure 2.1 – La sphère de Bloch.

Lors d'une mesure projective, la probabilité d'obtenir l'état $|a\rangle$ est $\cos^2(\theta/2)$. On retrouve ainsi la loi de Malus dans le cas où le spin considéré est la polarisation du photon et dans cette situation la sphère de Bloch est généralement appelée *sphère de Poincaré*¹.

2.1.1.2 Evolution et rotations

Une évolution du qubit obéissant à l'équation de Schrödinger se traduit par une rotation sur la sphère de Bloch. L'ensemble des évolutions sur \mathcal{H}_2 forme un groupe de transformations noté $SU(2)$, il s'agit du groupe spécial unitaire à deux dimensions. Puisqu'un élément d'un groupe possède nécessairement un inverse, ces évolutions sont *réversibles*. L'unitarité garantit quant à elle la conservation de la norme du vecteur de Bloch *i.e.* de la cohérence. Les opérateurs suivants :

$$j_x = \frac{1}{2} (|a\rangle \langle b| + |b\rangle \langle a|), \quad (2.3)$$

$$j_y = \frac{i}{2} (|a\rangle \langle b| - |b\rangle \langle a|), \quad (2.4)$$

$$j_z = \frac{1}{2} (|b\rangle \langle b| - |a\rangle \langle a|), \quad (2.5)$$

forment les générateurs du groupe $SU(2)$, en d'autres termes, une rotation d'axe propre $\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ s'écrit :

$$R(\boldsymbol{\theta}) = e^{i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{j}} = e^{-i(\theta_x j_x + \theta_y j_y + \theta_z j_z)} \quad (2.6)$$

$$= \cos \theta \mathbb{1} + i \sin \theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}, \quad (2.7)$$

1. Précisons aussi que les mathématiciens l'appelleront *sphère de Riemann* [Appel 08]

où $\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z)$ et $\mathbf{n} = \boldsymbol{\theta} / |\boldsymbol{\theta}|$ est le vecteur unitaire orienté selon l'axe propre de la rotation. Les opérateurs $\sigma_k = 2j_k$, $k = x, y, z$, exprimés dans la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$, sont appelés *matrices de Pauli*, ils vérifient les relations de commutation suivantes :

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (2.8)$$

où ϵ_{ijk} est le tenseur antisymétrique. Cette relation de commutation est caractéristique du groupe $SU(2)$ et tout triplet d'opérateurs y obéissant, vérifie par là même les propriétés du groupe $SU(2)$ ², ce sera en particulier vrai pour les opérateurs collectifs de spin, voir Eq. (2.21). On notera aussi la relation utile en pratique :

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{1} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (2.9)$$

qui conduit à $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbb{1}$ et $\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i$ pour $i \neq j$. On définit de plus les opérateurs suivants :

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y), \quad (2.10)$$

qui 'inversent' l'orientation du spin et vérifient $\sigma_+ = \sigma_-^\dagger$.

Il est souvent utile de disposer d'une forme factorisée pour l'opérateur de rotation $R(\boldsymbol{\theta})$, ce qui n'est pas le cas lorsqu'on utilise la paramétrisation cartésienne, comme on peut le constater Eq. (2.6). Il est néanmoins possible d'obtenir une telle forme en décrivant la rotation à l'aide des angles d'Euler. Les angles d'Euler (α, β, γ) transforment un système d'axes (x, y, z) en un autre système (X, Y, Z) (voir Fig. 2.2). On définit d'abord l'axe des noeuds N , α est l'angle entre N et l'axe x , puis β est l'angle entre les axes z et Z , enfin γ est l'angle entre N et X . Dans la suite nous supposons que l'axe N est confondu avec l'axe y .

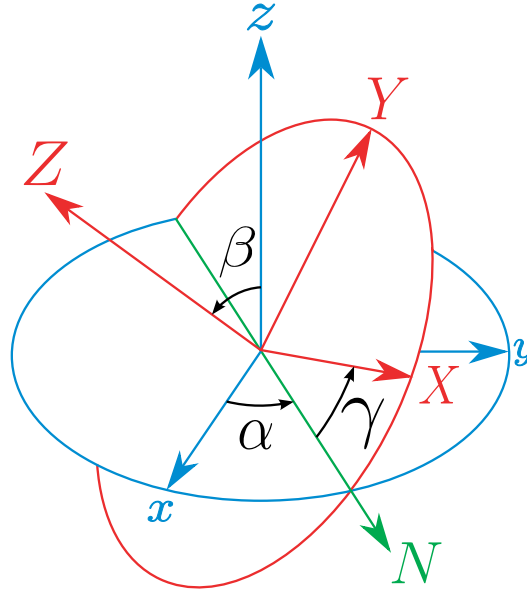


Figure 2.2 – Les angles d'Euler.

En utilisant cette paramétrisation pour décrire une rotation arbitraire, on peut montrer que l'opérateur de rotation s'écrit [Rose 95, p. 51] :

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha j_z} e^{-i\beta j_y} e^{-i\gamma j_z}, \quad (2.11)$$

2. Les générateurs du groupe des rotations sur \mathbb{R}^3 , noté $SO(3)$, vérifient bien entendu cette relation de commutation, c'est la raison d'être de la sphère de Bloch.

il se présente alors sous une forme factorisée des rotations autour des axes y et z . Cette décomposition nous sera utile lors de l'étude des rotations du spin collectif Sec. 2.1.2.3.

2.1.2 Ensemble de spins indiscernables

2.1.2.1 Ensemble de deux ou trois spins

Avant de généraliser à un nombre quelconque de particules, il est instructif d'observer les états générés par la combinaison d'un petit nombre de spins. Nous noterons $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ une base de \mathcal{H}_2 .

Considérons dans un premier temps l'espace $\mathcal{H}_2^{\otimes 2}$ constitué par la combinaison de deux spins, c'est un espace de dimension 4 engendré par la base suivante, dite *base produit* :

$$\mathcal{B}_P = \{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}. \quad (2.12)$$

Pour $k = x, y, z$, on note $j_k^{(1)}$ les opérateurs associés au premier spin et $j_k^{(2)}$ ceux associés au second, on construit alors les *opérateurs collectifs*, grâce à la somme des opérateurs individuels : $J_k = j_k^{(1)} + j_k^{(2)}$. Ces opérateurs collectifs vérifient les relations de commutation Eq. (2.8), ce sont donc des opérateurs de spin. Dans la base produit \mathcal{B}_P , les opérateurs collectifs s'expriment de manière explicite :

$$J_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

On introduit de plus l'opérateur $\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$, il s'écrit de la manière suivante dans la base produit \mathcal{B}_P :

$$\mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\uparrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\uparrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{matrix}. \quad (2.14)$$

On constate alors qu'il n'est pas diagonal dans cette base, il le devient si on diagonalise la restriction de \mathbf{J}^2 au sous-espace engendré par $\{|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle\}$, autrement dit, l'opérateur \mathbf{J}^2 est diagonal dans la base suivante :

$$\mathcal{B}_D = \left\{ |\uparrow\uparrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle), |\downarrow\downarrow\rangle \right\}. \quad (2.15)$$

Les états constituant la base symétrique \mathcal{B}_D sont à la fois états propres de \mathbf{J}^2 et de J_z , ils sont appelés *états de Dicke* et caractérisés par deux nombres quantiques J et M , tels que :

$$\mathbf{J}^2 |J, M\rangle = J(J+1) |J, M\rangle, \quad (2.16)$$

$$J_z |J, M\rangle = M |J, M\rangle, \quad (2.17)$$

avec $J \in \{0, 1\}$ et $-J \leq M \leq J$. On peut alors classer les états constituant la base \mathcal{B}_D , selon les valeurs de J et de M associées :

M	$J = 1$	$J = 0$	
-1	$ \uparrow\uparrow\rangle$		
0	$\frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\rangle + \downarrow\uparrow\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$	(2.18)
+1	$ \downarrow\downarrow\rangle$		

Deux groupes d'états se distinguent alors : le *triplet symétrique* ($J = 1$) et le *singulet antisymétrique* ($J = 0$), ce que l'on note $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1^3$.

Étudions maintenant ce qui advient dans le cas d'un ensemble de trois spins. On procède de manière similaire, l'espace de Hilbert associé est $\mathcal{H}_2^{\otimes 3}$, il est de dimension 8 et il admet pour base la base produit suivante $\{|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle\}$. On peut ici aussi construire les opérateurs collectifs $J_k = j_k^{(1)} + j_k^{(2)} + j_k^{(3)}$ et constater que \mathbf{J}^2 n'est pas diagonal dans la base produit. La base diagonalisant \mathbf{J}^2 se construit à l'aide des combinaisons symétriques et antisymétriques des vecteurs de la base produit, en classant ces combinaisons selon leurs valeurs de J et de M , on obtient :

M	$J = 3/2$		$J = 1/2$
-3/2	$ \uparrow\uparrow\uparrow\rangle$		
-1/2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + \uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \uparrow\uparrow\downarrow\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2 \uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\uparrow\rangle - \uparrow\downarrow\uparrow\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - \downarrow\uparrow\uparrow\rangle)$
+1/2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + \downarrow\uparrow\downarrow\rangle + \downarrow\downarrow\uparrow\rangle)$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}(2 \downarrow\downarrow\uparrow\rangle - \uparrow\downarrow\downarrow\rangle - \uparrow\uparrow\downarrow\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\downarrow\rangle)$
+3/2	$ \downarrow\downarrow\downarrow\rangle$		

(2.19)

On peut donc classer ces états selon un quadruplet symétrique ($J = 3/2$) et deux doublets antisymétriques ($J = 1/2$). La différence majeure distinguant cette situation du cas d'un ensemble de deux spins est qu'il n'y a pas suffisamment de nombres quantiques J et M pour que l'ensemble des états de Dicke $|J, M\rangle$ forme une base de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_2^{\otimes 3}$. Il est donc nécessaire d'ajouter d'autres nombres quantiques afin d'obtenir une base de dimensionnalité suffisante, on peut démontrer que ces nombres quantiques sont liés aux propriétés du groupe symétrique S_3 des permutations à 3 éléments [Arecchi 72].

2.1.2.2 Ensemble de N spins indiscernables : états de Dicke

Après cette analyse préliminaire, nous allons généraliser au cas d'un système constitué de N spins indiscernables, dont l'espace de Hilbert est $\mathcal{H}_N \equiv \mathcal{H}_2^{\otimes N}$. Cet espace est de dimension 2^N , et admet pour base l'ensemble des états produits :

$$\mathcal{B}_P = \left\{ \bigotimes_{k=1}^N |\nu_k\rangle, \nu_k = \downarrow, \uparrow \right\}. \quad (2.20)$$

On définit les *opérateurs collectifs de spin* comme les sommes des opérateurs individuels : $J_k = \sum_i j_k^{(i)}$, $k = x, y, z$, où $j_k^{(i)}$ est l'opérateur associé au i -ème spin. Ces opérateurs collectifs vérifient les relations de commutation de $SU(2)$:

$$[J_i, J_j] = 2i\epsilon_{ijk}J_k, \quad (2.21)$$

et sont donc des opérateurs de spin. A ces relations de commutation sont associées trois inégalités de Schrödinger-Robertson (voir Annexe A) :

$$\Delta J_x^2 \Delta J_y^2 \geq \frac{1}{4} \langle J_z \rangle^2 + \text{cov}(J_x, J_y)^2, \quad (2.22)$$

$$\Delta J_y^2 \Delta J_z^2 \geq \frac{1}{4} \langle J_x \rangle^2 + \text{cov}(J_y, J_z)^2, \quad (2.23)$$

$$\Delta J_x^2 \Delta J_z^2 \geq \frac{1}{4} \langle J_y \rangle^2 + \text{cov}(J_x, J_z)^2. \quad (2.24)$$

3. On retrouve ici, sur le cas particulier de la composition de deux spins 1/2, le résultat bien connu de la composition de deux moments angulaires j_1 et j_2 [Cohen-Tannoudji 73] :

$$[2j_1 + 1] \otimes [2j_2 + 1] = [2(j_1 + j_2) + 1] \oplus [2(j_1 + j_2 - 1) + 1] \oplus \dots \oplus [2(j_1 - j_2) + 1]$$

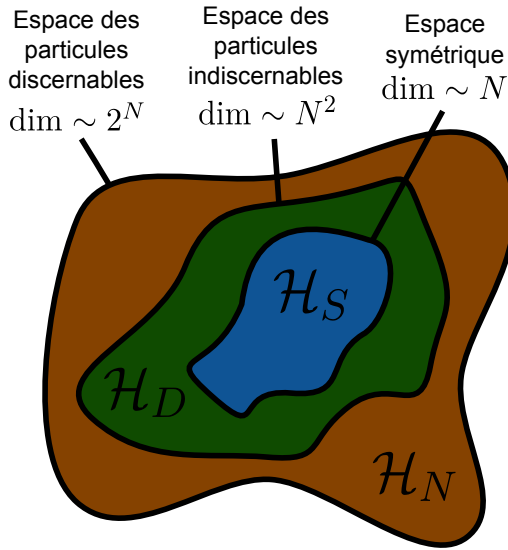


Figure 2.3 – Hiérarchie des espaces de Hilbert associés à un ensemble de spins.

L'opérateur $\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ est dit *opérateur de Casimir* car il commute avec chacun des générateurs J_k . Cet opérateur n'est pas diagonal dans la base produit et possède pour états propres les *états de Dicke* $|J, M\rangle$ [Dicke 54], où $0 \leq J \leq N/2$ et $-J \leq M \leq J$:

$$\mathbf{J}^2 |J, M\rangle = J(J+1) |J, M\rangle, \quad (2.25)$$

$$J_z |J, M\rangle = M |J, M\rangle. \quad (2.26)$$

La dimension de l'espace \mathcal{H}_D , engendré par l'ensemble des états de Dicke, est :

$$\dim \mathcal{H}_D = \begin{cases} \frac{1}{4} (N+3)(N+1), & \text{si } N \text{ impair} \\ \frac{1}{4} (N+2)^2, & \text{si } N \text{ pair} \end{cases} \quad (2.27)$$

On constate alors que pour $N > 2$, $\dim \mathcal{H}_D < \dim \mathcal{H}_N$, les états de Dicke ne forment donc pas une base de \mathcal{H}_N , et *a fortiori* le couple d'observables $\{\mathbf{J}^2, J_z\}$ n'est pas un ensemble complet d'observables qui commutent (ECOC). Il est alors nécessaire d'ajouter un ensemble de nombres quantiques α , tel que les états $|J, M; \alpha\rangle$ soit une base de \mathcal{H}_N . Les nombres α sont liés aux propriétés de permutation de l'hamiltonien associé à un ensemble atomique libre, ils permettent d'indicer les sous-espaces invariants par permutation des particules [Arecchi 72].

Néanmoins, si les particules sont indiscernables⁴, alors il suffit pour caractériser l'ensemble de connaître la cohérence de l'état, associée à l'observable \mathbf{J}^2 , et la différence entre l'occupation de l'état $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$, décrite par l'opérateur J_z . En d'autres termes, *les états de Dicke forme une base de l'espace de Hilbert associé à un système de spins indiscernables*. Dans la suite de cet exposé nous ne considérerons que l'état interne des atomes, ce qui justifiera l'hypothèse d'indiscernabilité.

Supposons de plus que le moment angulaire total de l'ensemble soit conservé et vaille $J = N/2$, on peut alors encore restreindre l'espace des états du système aux sous-espace \mathcal{H}_S de dimension $N+1$ engendré par la base dite *symétrique* $\mathcal{B}_S = \{|J, M\rangle, -J \leq M \leq J\}$. On a alors la chaîne d'inclusions suivante entre les espaces : $\mathcal{H}_S \subset \mathcal{H}_D \subset \mathcal{H}_N$, comme symbolisé Fig. 2.3. Les états $|J = N/2, M\rangle$ forment une *représentation de Fock* d'un ensemble de N spins indiscernables.

4. Des particules sont indiscernables si le hamiltonien, et donc la dynamique, de l'ensemble est invariant sous l'échange de particules :

$$H(1, \dots, i, \dots, j, \dots, N) = H(1, \dots, j, \dots, i, \dots, N).$$

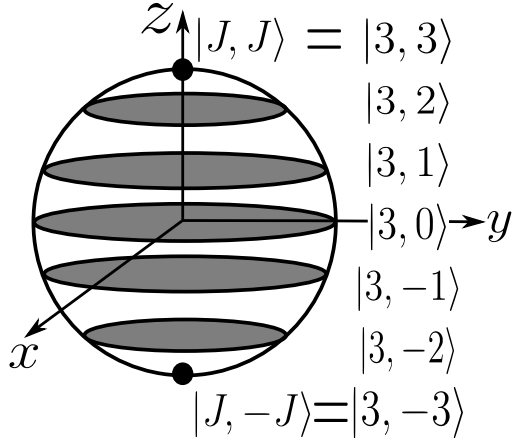


Figure 2.4 – Représentation des états de Dicke sur la sphère de Bloch dans le cas $N = 6$ ($J = 3$).

Soit S_N le groupe symétrique à N éléments, on associe à toute permutation $\sigma \in S_N$ l'opérateur P_σ qui agit sur les états de l'espace \mathcal{H}_N selon :

$$P_\sigma |1, 2, \dots, N\rangle \equiv |\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N)\rangle. \quad (2.28)$$

Cet opérateur nous permet d'exprimer la relation entre les états de Dicke constituant la base symétrique \mathcal{B}_S et ceux de la base produit \mathcal{B}_P :

$$|J, M\rangle = \frac{1}{(2J)!} \sum_{\sigma \in S_{2J}} P_\sigma \left[\bigotimes_{k=1}^{J+M} |\uparrow_k\rangle \bigotimes_{k=1}^{J-M} |\downarrow_k\rangle \right]. \quad (2.29)$$

Il est important de remarquer que la représentation d'un état de Dicke dans la base produit, représentation en 'première' quantification, correspond à un état maximalelement intriqué entre les particules.

De manière similaire à un spin unique, on introduit les opérateurs $J_\pm = J_x \pm iJ_y$ qui permettent de générer tous les états de Dicke à partir des états $|J, \pm J\rangle$:

$$J_\pm |J, M\rangle = \sqrt{(J \pm M + 1)(J \mp M)} |J, M \pm 1\rangle \quad (2.30)$$

$$= \sqrt{J(J+1) - M(M \pm 1)} |J, M \pm 1\rangle. \quad (2.31)$$

Ce sont, dans une certaine mesure, les analogues des opérateurs création et annihilation pour le champ électromagnétique. Ces opérateurs vérifient :

$$J_\mp J_\pm = \mathbf{J}^2 - J_z(J_z \pm 1). \quad (2.32)$$

La structure des relations de commutation Eq. (2.21) montre que l'évolution du spin collectif est donnée par une rotation du groupe $SU(2)$ et peut donc être représenté sur une sphère (Fig. 2.4). Dans cette représentation, les états de Dicke apparaissent comme des cercles parallèles à l'équateur dont la latitude dépend de la valeur de M . Cette représentation met clairement en évidence l'invariance par rotation autour de l'axe z des états de Dicke. Le pôle nord étant occupé par l'état $|J, J\rangle$ où tous les spins sont dans l'état $|\uparrow\rangle$ et le pôle sud par l'état $|J, -J\rangle$ où tous les spins sont dans l'état $|\downarrow\rangle$.

2.1.2.3 Rotation d'un état de Dicke

Afin de décrire l'évolution d'un spin collectif, il est nécessaire de comprendre comment un état collectif est transformé par une rotation. Pour cela, il nous suffit de savoir comment un état de Dicke évolue sous l'effet d'une rotation de $SU(2)$.

Considérons la rotation d'un état de Dicke paramétrée par les angles d'Euler (α, β, γ) , ce qui peut s'écrire :

$$R(\alpha, \beta, \gamma) |J, M\rangle = \sum_{M'} D_{M'M}^J(\alpha, \beta, \gamma) |J, M'\rangle \quad (2.33)$$

avec les éléments de la matrice de rotation $D_{M'M}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ tels que

$$D_{M'M}^J(\alpha, \beta, \gamma) = \langle J, M' | e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} |J, M\rangle \quad (2.34)$$

$$= e^{-i\alpha M'} d_{M'M}^J(\beta) e^{-i\gamma M}, \quad (2.35)$$

où on a introduit la matrice de rotation réduite :

$$d_{M'M}^J(\beta) = \langle J, M' | e^{-i\beta J_y} |J, M\rangle. \quad (2.36)$$

Un résultat dû à E. Wigner permet d'exprimer $d_{M'M}^J(\beta)$ sous la forme fermée suivante [Rose 95, p. 53] :

$$d_{M'M}^J(\beta) = \frac{(-1)^{M'-M}}{(M'-M)!} \sqrt{\frac{(J-M)!(J+M')!}{(J+M)!(J-M')!}} \cos^{2J+M-M'}\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin^{M'-M}\left(\frac{\beta}{2}\right) \times {}_2F_1\left(M'-J, -M-J; M'-M+1; -\tan^2(\beta/2)\right), \quad (2.37)$$

valable pour $M' \geq M$ et où ${}_2F_1$ désigne la fonction hypergéométrique de Gauss. En règle générale, il n'y a pas d'expression simple pour l'état d'un spin collectif subissant une rotation quelconque. Notons toutefois que dans de nombreux cas l'expression complète de la fonction d'onde n'est pas utile puisque que la connaissance des deux premiers moments d'une observable donnée est suffisante et ces moments prennent généralement des formes simples⁵.

On constatera aussi que l'espace \mathcal{H}_S^J engendré par $\{|J, M\rangle, -J \leq M \leq J\}$ est le plus petit sous-espace de \mathcal{H}_N stable sous l'action des matrices de rotation D^J , on dit que les D^J forment une représentation irréductible de $SU(2)$ de dimension $2J + 1$.

2.1.2.4 États cohérents de spins

Considérons N particules indépendantes incidentes sur une séparatrice. Chacune d'entre elles peut soit traverser la lame avec une probabilité η , soit être réfléchi avec une probabilité $1 - \eta$, comme représenté Fig. 2.5. On réalise ainsi N expériences de Bernoulli successives, la probabilité $P(M|N)$ que M particules parmi N traversent la lame obéit alors à une loi binomiale :

$$P(M|N) = \binom{N}{M} \eta^M (1 - \eta)^{N-M}. \quad (2.38)$$

Ainsi, un état composé d'un nombre fixé de N particules présente des fluctuations poissonniennes en \sqrt{N} lors de la traversée d'une lame séparatrice, elles proviennent du fait qu'une particule peut, soit être réfléchi, soit être transmise, mais ne peut en aucun cas se séparer en deux. Ces fluctuations sont appelées *bruit de grenaille* ou *bruit de projection quantique* puisqu'elles sont une conséquence de la quantification du champ incident sur la séparatrice. Remarquons que, si au lieu d'avoir un nombre déterminé N de particules incidentes sur la lame, le flux incident présente déjà des fluctuations poissonniennes (comme dans le cas d'un faisceau laser) alors la sortie fluctue en \sqrt{N} , en d'autres termes, la séparatrice n'induit pas de bruit supplémentaire. L'état préparé par l'action d'une séparatrice sur un état dont le nombre de particules est fixé est dit *état cohérent*. Nous allons maintenant appliquer ce concept aux états collectifs de spins et donner une définition rigoureuse d'un tel état.

5. Voir par exemple le calcul des fluctuations quantiques dans un interféromètre de Ramsey Sec. 2.2.1.3.

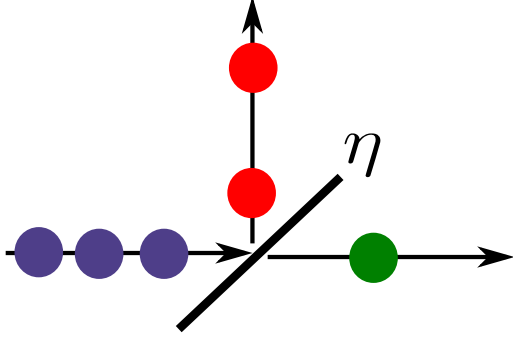


Figure 2.5 – Origine du bruit induit par une séparatrice sur un ensemble de particules. Une particule est soit transmise avec une probabilité η soit réfléchie avec une probabilité $1 - \eta$ mais ne peut pas être coupée en deux.

Une lame séparatrice réalise une transformation unitaire [Nielsen 00, p. 293], on appelle donc *état cohérent* de $SU(2)$ tout état engendré par une rotation de l'état de Dicke $|J, -J\rangle$, autrement dit, tout état de la forme [Arecchi 72] :

$$\boxed{|\theta, \varphi\rangle = e^{-i\varphi J_z} e^{-i\theta J_y} |J, -J\rangle} \quad (2.39)$$

La transformation $e^{-i\varphi J_z} e^{-i\theta J_y}$ est équivalente à l'opérateur déplacement en optique quantique, *i.e.* à l'opérateur $D(\alpha)$ qui engendre l'état cohérent $|\alpha\rangle$ en agissant sur le vide $|0\rangle$.

Nous pouvons maintenant établir de manière explicite la décomposition d'un état cohérent sur la base des états de Dicke. En utilisant les matrices de rotation Eq.(2.33), on obtient :

$$|\theta, \varphi\rangle = \sum_{M'} D_{M', -J}^J(\varphi, \theta, 0) |J, M'\rangle = \sum_{M'} e^{-i\varphi M'} d_{M', -J}^J(\theta) |J, M'\rangle. \quad (2.40)$$

La matrice de rotation réduite Eq. (2.37) prend une forme relativement simple pour ce cas particulier :

$$d_{M', -J}^J(\theta) = \sqrt{\frac{(2J)!(J+M')!}{(J-M')!}} \frac{(-1)^{J+M'}}{(J+M')!} \cos^{J-M'}\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^{J+M'}\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \underbrace{{}_2F_1\left(M'-J, 0; J+M'+1; -\tan^2(\theta/2)\right)}_{=1}, \quad (2.41)$$

ce qui fournit immédiatement la décomposition de l'état cohérent $|\theta, \varphi\rangle$ sur les états de Dicke :

$$\boxed{|\theta, \varphi\rangle = \sum_{M'} (-1)^{J+M'} \binom{2J}{J+M'}^{1/2} e^{-i\varphi M'} \cos^{J-M'}\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^{J+M'}\left(\frac{\theta}{2}\right) |J, M'\rangle} \quad (2.42)$$

Dans le cas $\varphi = 0$, en posant $J = N/2$ et $M' = M - J$ on retrouve la distribution binomiale Eq. (2.38) avec une probabilité $\eta = \sin^2(\theta/2)$ de transmission pour la séparatrice (ce qui correspond, là encore, à la loi de Malus dans le cas où la lame est un cube à séparation de polarisation).

En particulier, l'impulsion $\pi/2$ utilisée comme séparatrice en interférométrie atomique engendre l'état suivant :

$$\left|\frac{\pi}{2}, 0\right\rangle = \frac{1}{2^J} \sum_{M'} (-1)^{J+M'} \binom{2J}{J+M'}^{1/2} |J, M'\rangle. \quad (2.43)$$

Dans la limite $J = N/2 \gg 1$, le théorème de Moivre-Laplace⁶ (théorème central limite pour une loi binomiale) permet d'approcher cet état par un état gaussien :

$$\left|\frac{\pi}{2}, 0\right\rangle \sim \sum_{M'} (-1)^{J+M'} e^{-2M'^2/J} |J, M'\rangle. \quad (2.44)$$

6. Illustré par l'expérience de la *planche de Galton*.

La variance de cette distribution vaut $\Delta J_z^2 = N/4$, elle correspond au bruit de projection induit par une lame séparatrice sur un ensemble de N particules *indépendantes*. On remarquera aussi que dans le cas d'une impulsion π l'état est déplacé à l'autre pôle : $|\pi, 0\rangle = |J, J\rangle$.

Les états cohérents ne sont pas orthogonaux entre eux (nous le montrerons Eq. (2.49)) ils forment une base surcomplète de l'espace de Hilbert symétrique \mathcal{H}_S et vérifient la relation de surcomplétude suivante :

$$\frac{2J+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta |\theta, \varphi\rangle \langle\theta, \varphi| = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S}. \quad (2.45)$$

Comme nous le verrons Sec. 2.1.2.5, la décomposition d'un état collectif de spins dans cette base permet de le représenter sur la sphère de Bloch, procurant ainsi un important outil pour la visualisation des ces états.

L'étude des moments des états cohérents effectuée dans l'Annexe A démontre que les états cohérents sont des *états minimaux*, *i.e.* qu'ils vérifient le cas de l'égalité dans les inégalités de Heisenberg Eqs. (2.22), (2.23) et (2.24).

2.1.2.5 Représentation de Husimi

La représentation Fig. 2.4 des états de Dicke sur la sphère de Bloch n'est pas généralisable à un état quelconque. En effet, d'une part cette représentation n'est pas continue, à la différence de la sphère, et d'autre part elle ne permet pas de représenter un état non symétrique par rotation autour de l'axe z , autrement dit, les interférences destructives entre les différentes composantes ne peuvent pas être visualisées.

Il est néanmoins possible de lever ces limitations et d'obtenir une représentation sur la sphère de Bloch d'un état collectif quelconque grâce à la *fonction Q de Husimi* pour les états cohérents de $SU(2)$. La fonction associée à un état $|\Psi\rangle$ est définie de manière analogue à l'optique quantique⁷, il s'agit de la décomposition sur la base surcomplète des états cohérents :

$$Q_{|\Psi\rangle}(\theta, \varphi) = |\langle\theta, \varphi|\Psi\rangle|^2. \quad (2.46)$$

On remarque que cette distribution permet d'associer une valeur réelle à chaque coordonnée (θ, φ) de la sphère de Bloch.

Pour un état de Dicke $|J, M\rangle$ la distribution de Husimi est obtenue immédiatement à partir de la décomposition d'un état cohérent Eq. (2.42) :

$$Q_{|J, M\rangle}(\theta, \varphi) = |\langle\theta, \varphi|J, M\rangle|^2 = \binom{2J}{J+M} \cos^{2(J-M)}\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^{2(J+M)}\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (2.47)$$

On vérifie que cette expression est indépendante de φ et donc que la représentation de Husimi d'un état de Dicke est invariante par rotation autour de l'axe z . En particulier, on notera que, pour l'état au pôle sud de la sphère, la distribution est $Q_{|J, -J\rangle}(\theta, \varphi) = \cos^{4J}(\theta/2)$. Quelques-uns de ces états sont représentés sur la sphère de Bloch Fig. 2.6. Toutefois, une telle représentation peut porter à confusion puisqu'un état de Dicke ne présente pas de fluctuations selon z , tandis que la projection sur l'axe z de la représentation de Husimi associée a une variance non nulle. On remarquera néanmoins la ressemblance avec la distribution de Husimi d'un état de Fock photonique qui apparaît comme un anneau d'épaisseur non nulle autour de l'origine dans le plan $(\text{Re}\alpha, \text{Im}\alpha)$ et dont le rayon représente le nombre de photons de l'état [Haroche 06, p. 581]. Enfin, on notera qu'en son maximum la distribution atteint l'unité, ce qui est une caractéristique des états purs.

7. En optique quantique la fonction Q de Husimi est définie par rapport à un état cohérent $|\alpha\rangle$ du champ électromagnétique [Haroche 06, p. 580] :

$$Q_{|\Psi\rangle}(\alpha) = \frac{1}{\pi} |\langle\alpha|\Psi\rangle|^2.$$

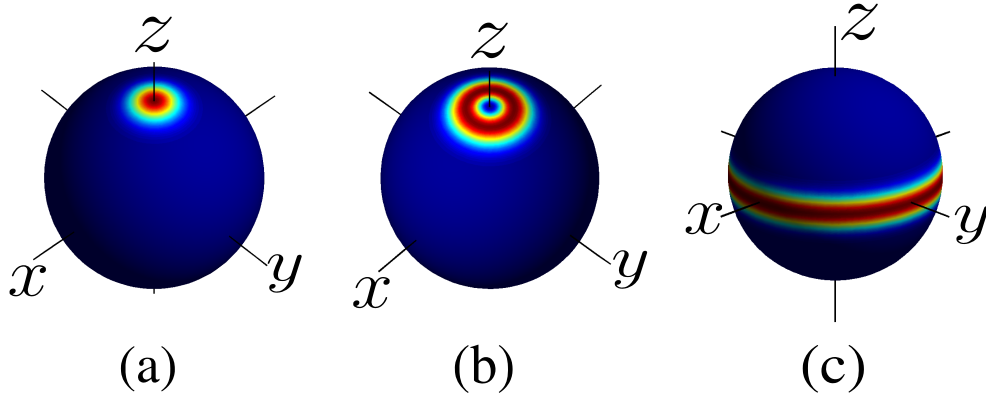


Figure 2.6 – Représentation Q de Husimi d'états de Dicke sur la sphère de Bloch. (a) L'état $|J, -J\rangle$. (b) L'état $|J, -J + 1\rangle$. (c) L'état $|J, 0\rangle$

Etudions maintenant la représentation Q d'un état cohérent de spins. En utilisant la décomposition d'un état cohérent $|\theta, \varphi\rangle$ dans la base des états de Dicke Eq. (2.42), on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \theta, \varphi | \theta', \varphi' \rangle &= \sum_{M=-J}^J \binom{2J}{J+M} e^{i(\varphi-\varphi')M} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) \right]^{J-M} \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) \right]^{J+M} \\ &= e^{-i(\varphi-\varphi')J} \cos^{2J}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^{2J}\left(\frac{\theta'}{2}\right) \sum_{M'=0}^{2J} \binom{2J}{M'} \left[e^{i(\varphi-\varphi')} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) \right]^{M'}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

où on a effectué le changement de variable $M' = J + M$. En utilisant la formule du binôme de Newton, il vient :

$$\langle \theta, \varphi | \theta', \varphi' \rangle = e^{-i(\varphi-\varphi')J} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) + e^{i(\varphi-\varphi')} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) \right]^{2J}, \quad (2.49)$$

et finalement,

$$\begin{aligned} |\langle \theta, \varphi | \theta', \varphi' \rangle|^2 &= \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) + 2 \cos(\varphi - \varphi') \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta'}{2}\right) \right]^{2J}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Dans la limite $N \gg 1$, on peut approcher la distribution $Q_{|\theta', \varphi'\rangle}(\theta, \varphi)$ par une distribution gaussienne. En effet, un développement de Taylor à deux dimensions de $Q_{|\theta', \varphi'\rangle}(\theta, \varphi)$ au voisinage du maximum (θ', φ') donne :

$$Q_{|\theta', \varphi'\rangle}(\theta, \varphi) \sim 1 - \frac{J}{2} \left[(\theta - \theta')^2 + \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta') (\varphi - \varphi')^2 \right], \quad (2.51)$$

ce développement peut être identifié avec celui de la distribution gaussienne à deux dimensions suivante :

$$Q_{|\theta', \varphi'\rangle}(\theta, \varphi) \sim e^{-\frac{J}{2} [(\theta - \theta')^2 + \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta') (\varphi - \varphi')^2]}. \quad (2.52)$$

Ce résultat renforce l'analogie avec l'optique quantique puisque la distribution de Husimi d'un état cohérent optique est une distribution gaussienne [Haroche 06, p. 580].

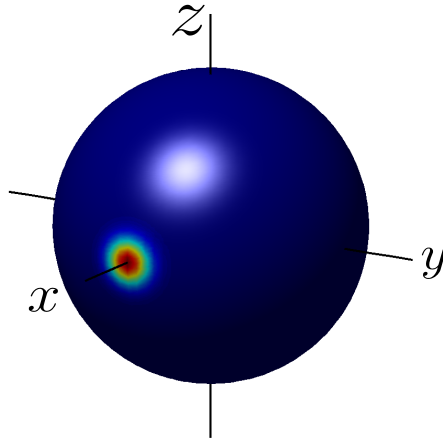


Figure 2.7 – Représentation sur la sphère de Bloch de la fonction Q de Husimi d'un état cohérent de spins polarisé selon l'axe x .

En particulier, l'état cohérent produit par une impulsion $\pi/2$ admet la représentation Q suivante :

$$Q_{|\pi/2,0\rangle}(\theta, \varphi) = \left| \left\langle \theta, \varphi \left| \frac{\pi}{2}, 0 \right\rangle \right|^2 = \left(\frac{1 + \cos \varphi \sin \theta}{2} \right)^{2J}. \quad (2.53)$$

Dans ce cas, la distribution gaussienne approchée dans la limite $N \gg 1$ vaut :

$$Q_{|\pi/2,0\rangle}(\theta, \varphi) \sim e^{-\frac{J}{2}[(\theta - \pi/2)^2 + \varphi^2]}, \quad (2.54)$$

cette distribution possède la même largeur (écart-type) selon les directions θ et φ : $\sigma_\theta = \sigma_\varphi = 1/\sqrt{J}$. On remarque sur la représentation Fig. 2.7, que l'état $|\pi/2, 0\rangle$ n'est pas symétrique par rotation selon l'axe z , en effet, les différentes composantes intervenant dans la décomposition de l'état cohérent sur les états de Dicke interfèrent constructivement selon la direction x de la sphère de Bloch et destructivement dans la direction opposée.

2.2 Bruit quantique dans un interféromètre atomique

L'étude qui vient d'être effectuée sur les états collectifs de spin va nous permettre de calculer la sensibilité d'un interféromètre atomique. Nous nous bornerons dans cette partie à l'étude d'un interféromètre de type Ramsey mais la discussion qui suit est aisément adaptable à d'autres interféromètres atomiques (notamment l'interféromètre de Ramsey-Bordé) et d'une manière générale, à tout interféromètre à deux modes.

Nous introduirons tout d'abord l'interféromètre de Ramsey en présentant un analogue optique, puis nous étudierons le couplage atome-champ afin de comprendre comment manipuler l'état atomique à l'aide d'un champ électromagnétique, en particulier, nous verrons comment réaliser une séparatrice. L'analyse de l'évolution d'un état cohérent dans un interféromètre de Ramsey, nous conduira au concept de *limite quantique standard*, et nous verrons que certains états corrélés permettent de dépasser cette limite et d'atteindre la limite dite de Heisenberg. Enfin, nous présenterons une classe d'états collectifs corrélés, appelés *états de spins comprimés*, qui permettent d'atteindre la limite de Heisenberg.

2.2.1 L'interféromètre de Ramsey

Nous allons présenter l'interférométrie atomique sur l'exemple de l'interféromètre de Ramsey, ce dernier est utilisé de manière récurrente au cours de ce manuscrit, aussi bien pour les considérations théoriques que pour les démonstrations expérimentales des chapitres suivants,

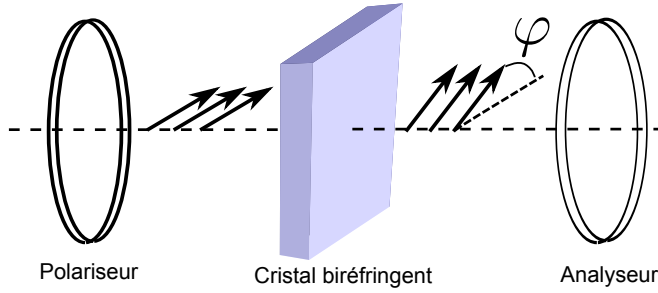


Figure 2.8 – *Equivalent optique de l'interféromètre de Ramsey. Un cristal biréfringent est placé entre polariseur et analyseur croisés.*

c'est donc ici l'occasion d'en présenter le concept. Il s'agit d'un interféromètre sur les états internes d'un atome à deux niveaux, en pratique nous utiliserons ici les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental d'un atome de type alcalin. Toutefois, la discussion suivante (excepté le passage sur le couplage atome-champ) reste valable pour n'importe quel interféromètre à deux modes.

2.2.1.1 Equivalent optique

L'interféromètre de Ramsey est un interféromètre à deux modes sur les degrés de liberté internes d'atomes à deux niveaux. Son équivalent optique est un interféromètre utilisant l'état interne du photon, autrement dit, sa polarisation. Un tel interféromètre est réalisé en plaçant un cristal biréfringent entre polariseur et analyseur croisés, comme représenté Fig. 2.8.

Les axes neutres du cristal sont orientés à 45° de l'axe du polariseur. Le cristal étant , son indice optique n_{\rightarrow} selon l'axe horizontal est différent de celui selon l'axe vertical n_{\uparrow} , par conséquent lorsque l'onde traverse le cristal sur une longueur L les deux composantes de polarisation acquièrent une différence de phase :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_{\rightarrow} - n_{\uparrow}) L. \quad (2.55)$$

L'intensité en sortie de l'analyseur dépendra donc de la différence entre les indices n_{\rightarrow} et n_{\uparrow} du cristal. Le polariseur prépare l'état d'entrée dans l'interféromètre, quant à l'analyseur, il mesure l'état de polarisation en sortie de l'interféromètre, l'intensité transmise constituant une mesure de l'opérateur J_z . Les impulsions $\pi/2$ (séparatrices) d'entrée et de sortie de l'interféromètre sont réalisées en ajustant à 45° l'angle relatif entre le polariseur et l'axe propre du cristal.

Si le dispositif est éclairé en lumière blanche, on observera une teinte de Newton différente pour chaque déphasage, c'est le principe de l'écran à cristaux liquides. Cette méthode est aussi utilisée pour étudier la composition cristalline de roches (diascopie).

2.2.1.2 Couplage atomes-champ

Avant de présenter l'interféromètre de Ramsey à proprement parler, nous commençons par un bref rappel sur le couplage entre atomes et champ électromagnétique. Considérons un ensemble de N_{at} atomes à deux niveaux auquel nous associons les opérateurs collectifs de spins J_x , J_y et J_z . L'énergie séparant les deux niveaux atomiques est $\hbar\omega_0$, et l'évolution du système atomique est gouvernée par le hamiltonien :

$$H_{\text{at}} = \hbar\omega_0 J_z. \quad (2.56)$$

Le système à deux niveaux est maintenant couplé à un champ électromagnétique monomode de pulsation ω et décrit par les opérateurs annihilation a et création a^\dagger . Le hamiltonien gouvernant l'évolution de ce champ est :

$$H_{\text{em}} = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (2.57)$$

L'interaction entre les atomes et le champ est modélisée par un couplage dipolaire, l'énergie de ce couplage est :

$$H_{\text{int}} = -DE, \quad (2.58)$$

où $E = E_0 (a + a^\dagger)$ est l'opérateur champ électrique et $D = d_0 (J_+ + J_-)$ est l'opérateur moment dipolaire. Cet hamiltonien d'interaction s'écrit alors :

$$H_{\text{int}} = -\frac{\hbar\Omega_0}{2} (a - a^\dagger) (J_+ - J_-), \quad (2.59)$$

où on a posé $\Omega_0 = 2d_0E_0/\hbar$ la constante du couplage atome-champ *i.e.* la pulsation de Rabi dans le vide. Dans le cadre de l'approximation de l'onde tournante, les termes en $a^\dagger J_+$ et $a J_-$ qui oscillent rapidement sont négligés. Le hamiltonien total du système atome-champ est alors :

$$H = H_{\text{at}} + H_{\text{em}} + H_{\text{int}} \quad (2.60)$$

$$= \hbar\omega_0 J_z + \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar\Omega_0}{2} (a^\dagger J_- + a J_+). \quad (2.61)$$

En introduisant $\delta \equiv \omega_0 - \omega$, le décalage entre la fréquence de la transition atomique et celle du champ électro-magnétique, le hamiltonien précédent peut se réécrire sous la forme $H = H_0 + H_I$, où :

$$H_0 = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} + J_z \right), \quad (2.62)$$

$$H_I = \hbar\delta J_z - \frac{\hbar\Omega_0}{2} (a^\dagger J_- + a J_+). \quad (2.63)$$

On constate alors que H_0 , qui décrit le nombre total de particules (atomes et photons) dans le système, est une constante du mouvement, en effet :

$$[H_0, H] \propto [a^\dagger a, a^\dagger] J_- + [a^\dagger a, a] J_+ + [J_z, J_-] a^\dagger + [J_z, J_+] a \quad (2.64)$$

$$= a^\dagger J_- - a J_+ - a^\dagger J_- + a J_+ = 0, \quad (2.65)$$

où on a utilisé $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}_{\text{em}}$ et $[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm$. H_0 ne contribue donc que pour une phase fixe lors de l'évolution de l'état du système atome-champ, on pourra alors ne considérer que l'évolution induite par H_I appelé *hamiltonien de Jaynes-Cummings* [Jaynes 63]⁸.

Supposons que le système atomique soit excité à résonance ($\delta = 0$). Si l'onde excitatrice est un champ cohérent $|\alpha\rangle$, on peut remplacer les opérateurs création a^\dagger et annihilation a par un champ classique d'amplitude complexe α , on supposera de plus que la phase à l'origine de l'onde est nulle si bien que α est un nombre réel. Le hamiltonien d'interaction Eq. (2.63) se réduit alors à :

$$H_I = -\hbar\Omega J_x, \quad (2.66)$$

où $\Omega \equiv \alpha\Omega_0$ est la fréquence de Rabi, elle est proportionnelle à l'amplitude du champ électro-magnétique. L'opérateur d'évolution associé à cet hamiltonien prend la forme suivante :

$$U(\tau) = e^{-iH_I\tau/\hbar} = e^{-i\theta J_x}, \quad (2.67)$$

avec $\theta = \Omega\tau$. On reconnaît ici l'opérateur rotation sur la sphère de Bloch, autrement dit le spin collectif tourne autour de l'axe x , il réalise des *oscillations de Rabi*, l'évolution de la différence de population entre les deux états est $\langle J_z \rangle(\tau) = \cos \Omega\tau$. En choisissant le temps d'interaction τ

8. Le hamiltonien de Jaynes-Cummings correspond en fait au couplage d'un spin unique avec le champ électromagnétique. Le hamiltonien présenté ici est à strictement parler le *hamiltonien de Tavis-Cummings* décrivant le couplage d'un ensemble symétrique de spins au champ électromagnétique [Tavis 68]

tel que $\theta = \pi/2$, on réalise une impulsion dite $\pi/2$ qui constitue la séparatrice de l'interféromètre de Ramsey.

Considérons maintenant l'évolution libre du système, *i.e.* en l'absence de champ électromagnétique, dans ce cas $E_0 = 0$ et donc $\Omega_0 = 0$. On a alors $H_I = \hbar\delta J_z$, et l'opérateur d'évolution du système pendant un temps τ s'écrit :

$$U_{\text{libre}}(\tau) = e^{-iH_I\tau/\hbar} = e^{-i\varphi J_z}, \quad (2.68)$$

où $\varphi = \delta\tau$. Cet opérateur correspond à une rotation d'un angle φ autour de l'axe z de la sphère de Bloch. Par conséquent, une mesure de la phase φ permet de déterminer le décalage δ entre la fréquence de la transition atomique et celle de l'onde excitatrice. En utilisant une telle mesure, on peut asservir la fréquence de l'onde électromagnétique sur la fréquence de la transition atomique : c'est le principe de l'horloge atomique, une horloge se définissant comme la comparaison de deux oscillateurs : l'un étant l'atome, l'autre le champ électromagnétique.

Afin de mesurer cette phase il faut réaliser un interféromètre, il s'agit de l'interféromètre de Ramsey que nous allons maintenant étudier.

2.2.1.3 Evolution d'un état collectif dans l'interféromètre

Dès lors que l'on considère deux modes, trois observables existent : J_x , J_y et J_z . Toutefois, expérimentalement seule l'énergie, représentée par l'observable J_z (voir Eq. (2.56)), est *directement* accessible. Pour mesurer les observables J_x et J_y il faut donc trouver un moyen de projeter ces opérateurs sur l'observable J_z , ce qui est réalisé par une combinaison appropriée de rotations, une telle combinaison est appelée un *interféromètre*.

La séquence réalisant un interféromètre, *i.e.* une mesure des observables J_x et J_y est présentée Fig. 2.9. L'état initial est situé sur un des pôles de la sphère de Bloch, toutefois cet état est invariant par rotation autour de l'axe z . Pour qu'il devienne sensible à une telle rotation, on prépare une superposition cohérente en appliquant une première rotation d'angle $\pi/2$ selon l'axe y de la sphère, cette rotation est appelée *séparatrice*. Cette première impulsion permet de définir l'origine de la phase relative φ entre les deux modes, cette phase apparaît comme une rotation du vecteur de Bloch dans le plan (x, y) ce qui rend la mesure de l'opérateur J_z insensible à cette phase. Pour mesurer la phase φ , il faut donc transposer le plan (x, y) dans le plan (y, z) , ce qui est réalisé grâce à une seconde rotation d'angle $\pi/2$ selon l'axe y .

Voyons maintenant comment un état collectif se propage au travers d'une telle séquence interférométrique, plus précisément étudions l'évolution de l'état d'entrée $|J, J\rangle$, où tous les atomes sont polarisés dans un niveau donné. Nous allons décrire l'évolution de l'état atomique dans l'interféromètre comme une évolution de l'opérateur J_z ⁹, la relation entre l'opérateur J_z^{in} en entrée et l'opérateur J_z^{out} en sortie est obtenu par application des rotations successives :

$$J_z^{\text{out}} = e^{-i\frac{\pi}{2}J_y} e^{-i\varphi J_z} e^{-i\frac{\pi}{2}J_y} J_z^{\text{in}} e^{i\frac{\pi}{2}J_y} e^{i\varphi J_z} e^{i\frac{\pi}{2}J_y} \quad (2.69)$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{2}J_y} e^{-i\varphi J_z} J_x e^{i\varphi J_z} e^{i\frac{\pi}{2}J_y} \quad (2.70)$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{2}J_y} (\cos \varphi J_x + \sin \varphi J_y) e^{i\frac{\pi}{2}J_y} \quad (2.71)$$

$$= \sin \varphi J_y^{\text{in}} - \cos \varphi J_z^{\text{in}}. \quad (2.72)$$

La valeur moyenne de l'observable J_z^{out} en sortie de l'interféromètre est alors :

$$\langle J_z^{\text{out}} \rangle = \sin \varphi \langle J, J | J_y^{\text{in}} | J, J \rangle - \cos \varphi \langle J, J | J_z^{\text{in}} | J, J \rangle, \quad (2.73)$$

or

$$\langle J, J | J_y^{\text{in}} | J, J \rangle = \frac{i}{2} \left(\langle J, J | J_z^{\text{in}} | J, J \rangle - \langle J, J | J_z^{\text{in}} | J, J \rangle \right) = 0, \quad (2.74)$$

9. Nous adoptons ici un point de vue *passif* pour les rotations (voir Annexe A), ce sont les axes de la sphère qui tournent et non le vecteur d'état.

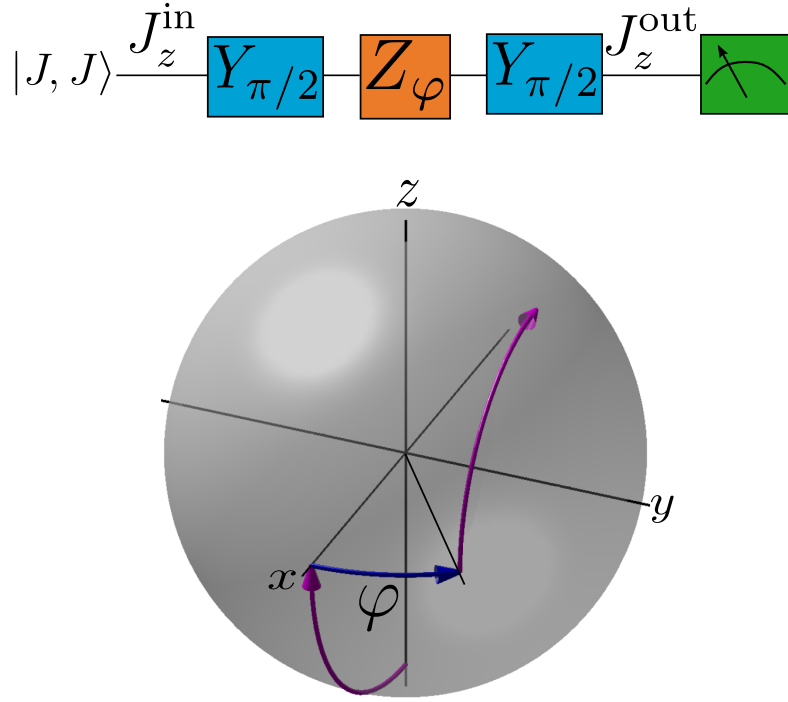


Figure 2.9 – *Interféromètre de Ramsey.* (Haut) Séquence interférométrique, $Y_{\pi/2}$ désigne la rotation d'angle $\pi/2$ selon y et Z_{φ} celle induite par le déphasage φ selon z . (Bas) Evolution du vecteur de Bloch lors de la séquence interférométrique.

par conséquent :

$$\langle J_z^{\text{out}} \rangle = -J \cos \varphi. \quad (2.75)$$

Comme attendu, il apparaît des franges d'interférences lorsqu'on fait varier la phase φ , elles sont représentées Fig. 2.10.

2.2.1.4 Bruit de projection quantique dans un interféromètre de Ramsey

On peut de manière similaire évaluer le bruit en sortie de l'interféromètre en calculant la variance de l'opérateur J_z^{out} . A partir du développement :

$$\left(J_z^{\text{out}} \right)^2 = \left(\sin \varphi J_y^{\text{in}} - \cos \varphi J_z^{\text{in}} \right)^2 \quad (2.76)$$

$$= \sin^2 \varphi \left(J_y^{\text{in}} \right)^2 + \cos^2 \varphi \left(J_z^{\text{in}} \right)^2 - \sin \varphi \cos \varphi \left(J_y^{\text{in}} J_z^{\text{in}} + J_z^{\text{in}} J_y^{\text{in}} \right), \quad (2.77)$$

puis en utilisant la relation suivante obtenue à partir de Eq. (2.32),

$$\left\langle \left(J_y^{\text{in}} \right)^2 \right\rangle = -\frac{1}{4} \left[\left\langle \left(J_+^{\text{in}} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left(J_-^{\text{in}} \right)^2 \right\rangle - \left\langle J_+^{\text{in}} J_-^{\text{in}} + J_-^{\text{in}} J_+^{\text{in}} \right\rangle \right] \quad (2.78)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left\langle \mathbf{J}^2 \right\rangle - \left\langle \left(J_z^{\text{in}} \right)^2 \right\rangle \right) = \frac{1}{2} \left(J(J+1) - J^2 \right) = \frac{J}{2}, \quad (2.79)$$

on obtient :

$$\left\langle \left(J_z^{\text{out}} \right)^2 \right\rangle = \frac{J}{2} \sin^2 \varphi + J^2 \cos^2 \varphi. \quad (2.80)$$

On en déduit alors la variance du bruit de projection quantique en sortie de l'interféromètre :

$$\Delta \left(J_z^{\text{out}} \right)^2 = \left\langle \left(J_z^{\text{out}} \right)^2 \right\rangle - \left\langle J_z^{\text{out}} \right\rangle^2 = \frac{J}{2} \sin^2 \varphi. \quad (2.81)$$

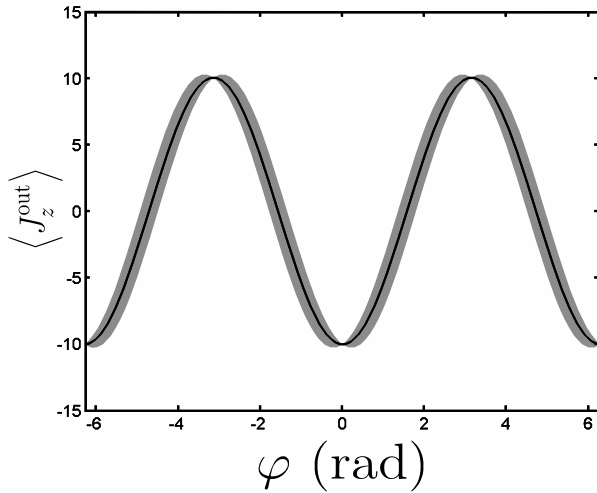


Figure 2.10 – Franges de Ramsey en fonction de la phase φ . La courbe en trait plein correspond à $\langle J_z^{\text{out}} \rangle$ pour $J = 10$, la zone grisée autour est l'écart-type des fluctuations quantiques autour de la valeur moyenne.

Ces fluctuations quantiques dépendent de la valeur de φ , ceci est illustré Fig. 2.10.

L'écart-type des fluctuations de la phase estimée, qui caractérise la sensibilité de l'interféromètre, est donc [Yurke 85] :

$$\delta\varphi = \sqrt{\frac{\Delta(J_z^{\text{out}})^2}{(\partial \langle J_z^{\text{out}} \rangle / \partial \varphi)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2J}} = \frac{1}{\sqrt{N_{\text{at}}}}. \quad (2.82)$$

La sensibilité d'un interféromètre dans lequel il n'existe aucune corrélation entre les particules évolue donc comme $1/\sqrt{N_{\text{at}}}$, ce qui correspond à la *limite quantique standard*. On constatera aussi que cette dernière est indépendante de la position sur la frange de l'interféromètre (*i.e.* indépendante de φ).

On notera que le calcul qui vient d'être effectué ne se limite pas au cas de l'interféromètre de Ramsey mais est bien plus général puisqu'il s'applique à tout interféromètre à deux ondes. On remarquera aussi que ce calcul des moments de J_z ne nécessite aucunement l'emploi des matrices de rotation. Enfin, on peut de cette manière calculer la sensibilité d'un interféromètre à deux modes pour un état collectif quelconque entrée, il suffit simplement de remplacer l'état $|J, J\rangle$ par l'état souhaité. C'est ce que nous allons réaliser maintenant afin de montrer que certains états collectifs ont une sensibilité dépassant la limite quantique standard.

2.2.2 Dépasser la limite quantique standard

Nous venons de voir que la sensibilité d'un interféromètre dans lequel des particules non corrélées sont utilisées est restreinte à la limite quantique standard. Cette limite a aujourd'hui été atteinte dans les interféromètres atomiques, aussi bien pour les horloges [Santarelli 99], que pour les senseurs inertiels [Gauguet 09], ou encore les magnétomètres [Wasilewski 09]. Il convient alors de se demander si cette limite est ultime et dans le cas contraire comment la dépasser ?

2.2.2.1 États de spins non classiques

On appellera *état non classique* tout état collectif de spins pur et différent d'un état cohérent $|\theta, \varphi\rangle$. En particulier, les états de Dicke sont des états non classiques (excepté pour les pôles $|J, -J\rangle$ et $|J, J\rangle$ qui sont les seuls états de Dicke confondus avec des états cohérents). De tels états peuvent présenter des fluctuations quantiques différentes de l'état cohérent, ils sont donc

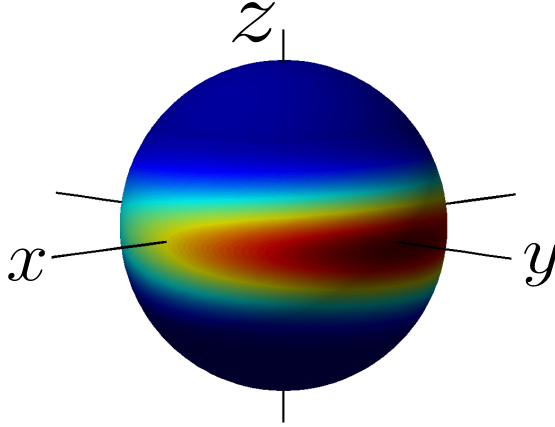


Figure 2.11 – Représentation Q de Husimi de l'état $|\Psi_{\text{in}}\rangle$ qui permet d'atteindre la limite de Heisenberg. La représentation est tracée pour $J = 8$.

susceptibles de dépasser la limite quantique standard lorsqu'ils sont utilisés en interférométrie ¹⁰.

2.2.2.2 Limite de Heisenberg

Reprenons l'interféromètre de Ramsey Fig. 2.9, mais cette fois au lieu d'injecter l'état $|J, J\rangle$ en entrée nous utilisons l'état [Yurke 85] :

$$|\Psi_{\text{in}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|J, 0\rangle - i|J, 1\rangle). \quad (2.83)$$

La distribution Q de Husimi de cet état est :

$$Q_{|\Psi_{\text{in}}\rangle}(\theta, \varphi) = \binom{2J}{J} \frac{\sin^{2J} \theta}{2^{2J+1}} \left[1 + \frac{1}{J+1} \tan^2 \frac{\theta}{2} + \frac{2}{\sqrt{J+1}} \sin \varphi \tan \frac{\theta}{2} \right], \quad (2.84)$$

comme on peut le voir sur la représentation Fig. 2.11, l'état est orienté selon l'axe y car les deux états de Dicke composants $|\Psi_{\text{in}}\rangle$ interfèrent constructivement selon la direction $+y$ et destructivement selon $-y$, de plus l'état est très allongé selon l'axe x .

On évalue alors la sensibilité d'un tel interféromètre de manière similaire au calcul effectué Sec. 2.2.1.3. La valeur moyenne de J_z en sortie de l'interféromètre est :

$$\langle J_z^{\text{out}} \rangle = -\frac{1}{2} \sqrt{J(J+1)} \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi, \quad (2.85)$$

et sa variance vaut :

$$\Delta (J_z^{\text{out}})^2 = \frac{1}{4} [J(J+1) - 1] \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \sqrt{J(J+1)} \sin \varphi \cos \varphi. \quad (2.86)$$

On obtient alors l'écart-type des fluctuations de phase en sortie de interféromètre :

$$\delta \varphi^2 = \frac{\Delta (J_z^{\text{out}})^2}{(\partial \langle J_z^{\text{out}} \rangle / \partial \varphi)^2} = \frac{[J(J+1) - 1] \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi - 4\sqrt{J(J+1)} \sin \varphi \cos \varphi}{(-\sqrt{J(J+1)} \cos \varphi + \sin \varphi)^2}. \quad (2.87)$$

10. Le fait que l'état d'entrée présente des fluctuations inférieures au bruit de grenaille n'est pas une condition suffisante pour que la sensibilité de l'interféromètre dépasse la limite quantique standard. Par exemple, dans l'interféromètre avec particules non corrélées, l'état d'entrée $|J, J\rangle$ présente des fluctuations nulles selon J_z et pourtant l'interféromètre est limité à la limite quantique standard. Il faut donc associer un état à une séquence interférométrique donnée.

Ces fluctuations sont minimales pour $\varphi = 0$ et valent :

$$\delta\varphi_{\min}^2 = \frac{1}{J(J+1)} = \frac{4}{N(N+2)}, \quad (2.88)$$

dans la limite d'un grand nombre de particules $N \gg 1$:

$$\delta\varphi_{\min} \sim 2/N, \quad (2.89)$$

ces fluctuations sont inférieures à la limite quantique standard en $1/\sqrt{N}$, cette limite en $1/N$ est dite *limite de Heisenberg*. Notons toutefois que, sur ce cas précis, cette limite n'est atteinte que pour une valeur donnée de φ , il est toutefois envisageable de travailler avec un interféromètre asservi à la position $\varphi = 0$ [Yurke 85].

2.2.2.3 États de spins comprimés

L'état présenté au paragraphe précédent permet certes d'atteindre la limite de Heisenberg mais sa préparation expérimentale n'est pas évidente, en particulier pour un grand nombre de particules. Toutefois, certains états collectifs dits *états de spins comprimés* [Kitagawa 93] sont plus simples à mettre en œuvre expérimentalement et permettent de dépasser la limite quantique standard.

Un état collectif de spins $|\Psi\rangle$ est dit comprimé si, lorsqu'il est placé sur l'équateur de la sphère de Bloch, sa variance est inférieure à celle de l'état cohérent préparé par une impulsion $\pi/2$:

$$\Delta J_z^2(|\Psi\rangle) < \Delta J_z^2(|\pi/2, 0\rangle). \quad (2.90)$$

On définit le facteur de compression de l'état $|\Psi\rangle$ comme le rapport entre la largeur de $|\Psi\rangle$ et celle de l'état cohérent $|\pi/2, 0\rangle$:

$$\xi_E^2 = \frac{\Delta J_z^2(|\Psi\rangle)}{\Delta J_z^2(|\pi/2, 0\rangle)}, \quad (2.91)$$

un état est donc comprimé si $\xi_E^2 < 1$. Ce critère est similaire à celui employé en optique quantique pour décrire la compression entre deux quadratures du champ électromagnétique. On peut montrer que lorsque ce critère est valable, l'état est *intriqué* [Kitagawa 93, Sørensen 01].

Ce critère présente néanmoins quelques limitations et ne constitue pas le bon critère pour les applications métrologiques. Considérons l'état de Dicke $|J, 0\rangle$, celui-ci est maximalelement comprimé puisque $\Delta J_z^2(|J, 0\rangle) = 0$ et par conséquent $\xi_E^2 = 0$, il est donc aussi maximalelement intriqué. Toutefois, la cohérence d'un état de Dicke est nulle $|\langle \mathbf{J} \rangle|^2(|J, 0\rangle) = 0$, autrement dit, si un tel état est utilisé en entrée d'un interféromètre le contraste des franges en sortie sera nul, ce qui est loin d'être la situation optimale pour une utilisation métrologique. Pour pallier à cette limitation, on introduit le critère suivant dit critère métrologique [Wineland 92] :

$$\xi_M^2 = \frac{\xi_E^2}{|\langle \mathbf{J} \rangle|^2}. \quad (2.92)$$

Puisque $|\langle \mathbf{J} \rangle|^2 \leq 1$, on a $\xi_M^2 \leq \xi_E^2$, le critère métrologique est donc plus restrictif que le critère d'intrication.

La principale méthode pour réaliser des états de spins comprimés est de faire subir une évolution non-linéaire à l'état cohérent $|\pi/2, 0\rangle$. Une technique consiste à faire évoluer l'état selon un hamiltonien dit de torsion [Kitagawa 93, Leroux 10a]. Il est aussi possible d'utiliser l'interaction entre particules [Estève 08, Gross 10], cette méthode est similaire à l'utilisation de l'effet Kerr pour la préparation d'états comprimés photoniques. Une autre solution consiste à transférer la compression d'un état optique sur un état de spins atomique [Kuzmich 97]. Enfin, la

forte non-linéarité de la mesure en mécanique quantique peut être exploitée pour la préparation d'état comprimés, l'idée étant que si l'on est capable de mesurer la différence de population d'un état cohérent avec une précision supérieure aux fluctuations quantiques de celui-ci, alors à l'issue de la mesure, il devrait être projeté dans un nouvel état présentant des fluctuations moindres. Cette technique a été mise en œuvre avec un interféromètre de Mach-Zehnder [Appel 09b], en utilisant la modulation d'amplitude induite par une variation de phase dans une cavité optique [Schleier-Smith 10, Leroux 10b] ou encore en exploitant l'exaltation du champ du vide dans une cavité [Chen 11]. C'est cette dernière méthode qui nous intéresse particulièrement, nous allons dans la prochaine partie de ce chapitre décrire de manière théorique l'évolution d'un état cohérent lorsqu'il est soumis au processus de mesure, nous montrerons que ce processus permet la préparation d'états de spin comprimés et d'états de Dicke.

2.3 Dynamique du processus de mesure : préparation d'états de spins comprimés et d'états de Dicke

Nous venons d'étudier les états collectifs de spins et avons constaté leur importance en interférométrie à plusieurs corps. Nous avons vu que la sensibilité d'un interféromètre est liée aux propriétés de l'état collectif utilisé, et notamment que certains états dits comprimés permettent d'obtenir une sensibilité accrue. Nous allons ici démontrer que des tels états peuvent être préparés à l'aide d'une mesure quantique non-destructive.

2.3.1 Présentation du problème

Nous nous intéressons à l'évolution d'un état cohérent de spins $|\pi/2, 0\rangle$ soumis à une mesure quantique non-destructive. L'observable J_z associée au spin collectif est mesurée grâce à la dispersion de phase induite par l'ensemble atomique sur sonde optique, en d'autres termes, le nuage est placé dans un interféromètre optique. Nous étudions la dynamique de projection de la fonction d'onde lors d'une mesure, pour cela un modèle où des photons sont envoyés un à un dans l'interféromètre est utilisé Fig. 2.12.

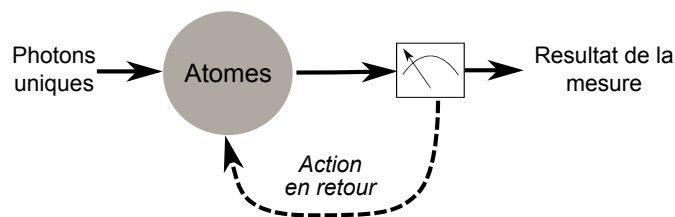


Figure 2.12 – Représentation schématique du processus de mesure : le déphasage induit par l'échantillon atomique est estimé via l'interaction répétée avec des photons uniques. Chaque détection projette partiellement la fonction d'onde atomique : c'est l'action en retour.

Nous présenterons tout d'abord le cas où la mesure est réalisée à l'aide d'un interféromètre de Mach-Zehnder, cela nous permettra d'exposer le formalisme sur un cas simple. Dans un second temps, nous analyserons le cas d'une détection utilisant la spectroscopie par modulation de fréquence, ce qui correspond au schéma que l'on se propose de réaliser expérimentalement et nous verrons que même si elle conduit à un résultat similaire à l'interféromètre de Mach-Zehnder, la dynamique du processus stochastique est plus subtile. Nous comparerons ensuite les résultats analytiques obtenus avec une simulation numérique de type Monte-Carlo des trajectoires quantiques. Enfin, nous présenterons quelques remarques sur le processus stochastique,

nous discuterons notamment de l'irréversibilité du processus et montrerons que la loi de Born est retrouvée dans la limite projective.

Dans la suite, les états collectifs de spin $|J, M\rangle$ seront notés $|n\rangle$ où $n = M$. On supposera que le nombre d'atomes N_{at} est grand et que le moment angulaire total $J = N_{\text{at}}/2$ est conservé. L'état initial $|\psi_{\text{at}}(0)\rangle = \sum_n c_n(0) |n\rangle$ est un état cohérent approché par une distribution gaussienne Eq. (2.44) :

$$c_n(0) \propto \exp\left(-\frac{n^2}{N_{\text{at}}}\right). \quad (2.93)$$

2.3.2 Interféromètre de Mach-Zehnder

Commençons par l'étude de la dynamique du processus de mesure lorsque cette dernière est réalisée à l'aide d'un interféromètre de Mach-Zehnder, cette étude a été initialement réalisée dans [Bouchoule 02]. Le Mach-Zehnder sert souvent de modèle canonique pour la description d'un interféromètre. Il est composé de deux lames séparatrices l'une à la suite de l'autre, deux modes du champ électromagnétique sont couplés sur la première lame, la détection de la différence d'intensité entre les deux modes de sortie fournit une mesure de la différence de phase entre les deux bras.

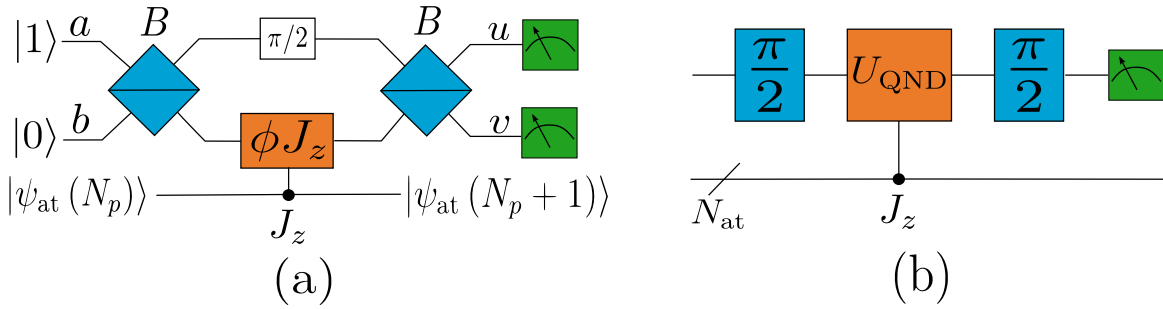


Figure 2.13 – Deux représentations de l'interféromètre de Mach-Zehnder couplé à l'échantillon atomique. (a) L'interféromètre de Mach-Zehnder réglé à flan de frange. Les deux modes d'entrée sont notés a et b , un photon unique est présent dans mode a . Les modes de sortie sont u et v . Les atomes induisent un déphasage dans le bras inférieur de l'interféromètre. (b) Représentation en terme de portes quantiques, la séparatrice 50/50 est représentée par une rotation d'angle $\pi/2$ du qubit photonique, l'interaction QND est modélisée par une porte de phase contrôlée par l'état atomique.

2.3.2.1 Matrice de diffusion de l'interféromètre

L'interféromètre est décrit à l'aide du formalisme des systèmes à deux niveaux étudié au début de ce chapitre. En suivant les notions Fig. 2.13 (a), on note a et b les opérateurs annihilations des deux modes d'entrée et ils sont notés u et v en sortie. On construit alors les opérateurs de spin suivants :

$$S_x = \frac{1}{2} (a^\dagger b + b^\dagger a), \quad (2.94)$$

$$S_y = \frac{i}{2} (a^\dagger b - b^\dagger a), \quad (2.95)$$

$$S_z = \frac{1}{2} (b^\dagger b - a^\dagger a). \quad (2.96)$$

La lame séparatrice 50/50 utilisée dans l'interféromètre est alors décrite comme une rotation d'angle $\pi/2$ selon l'axe y :

$$B = R_y(\pi/2) = e^{-i\frac{\pi}{2}S_y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.97)$$

Nous voulons mesurer la différence de population entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental d'un échantillon atomique, autrement dit, nous désirons mesurer l'observable J_z . L'hamiltonien de l'interaction non-destructive peut s'écrire [Kuzmich 98] :

$$H_{\text{QND}} = \frac{\hbar g}{2} J_z S_z, \quad (2.98)$$

où g est la fréquence de Rabi décrivant l'intensité du couplage. Cet hamiltonien est de la forme Eq. (1.21), il vérifie donc les critères d'une mesure non-destructive (voir Sec. 1.3). Afin de maximiser la sensibilité, l'interféromètre est réglé à flan de frange, pour cela une phase de $\pi/2$ est insérée dans le bras supérieur de l'interféromètre. L'opérateur évolution associé au couplage non-destructif est donc :

$$U_{\text{QND}} = e^{-iH_{\text{QND}}t/\hbar} e^{i\frac{\pi}{2}S_z} = e^{-i(\frac{\phi J_z}{2} - \frac{\pi}{2})S_z} = \begin{pmatrix} e^{i\pi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi J_z} \end{pmatrix}, \quad (2.99)$$

où on a posé $\phi = gt$, cela correspond au déphasage induit par une différence de population égale à deux. Cet opérateur est fonction de l'opérateur atomique J_z , il peut être interprété comme une porte de phase contrôlée par l'état atomique, Fig. 2.13 (b).

On obtient finalement la matrice de diffusion complète de l'interféromètre :

$$S(J_z) = BU_{\text{QND}}B = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}J_z - \frac{\pi}{4}\right) & i \sin\left(\frac{\phi}{2}J_z - \frac{\pi}{4}\right) \\ i \sin\left(\frac{\phi}{2}J_z - \frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}J_z - \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}, \quad (2.100)$$

il est important de constater que cette dernière dépend de l'opérateur atomique J_z et par conséquent, elle agit à la fois sur le champ électromagnétique et sur l'état atomique.

2.3.2.2 Détection d'un photon et évolution de l'état atomique

L'état du champ électromagnétique en entrée de l'interféromètre est $|\psi_{\text{MZ}}\rangle = |1_a, 0_b\rangle$, si de plus on note $|\psi_{\text{at}}\rangle$ l'état du champ atomique, alors l'état global à l'entrée s'écrit $|\Psi\rangle = |\psi_{\text{MZ}}\rangle \otimes |\psi_{\text{at}}\rangle$.

L'opérateur de mesure associé à la détection d'un photon dans le mode de sortie u est $M_u = u$, de même l'opérateur pour la détection sur le mode v est $M_v = v$, en effet la détection est ici destructive et consiste donc en l'annihilation d'un photon. Le POVM associé est composé des opérateurs $E_u = M_u^\dagger M_u = u^\dagger u$ et $E_v = M_v^\dagger M_v = v^\dagger v$.

Lors de la détection d'un photon sur le mode de sortie u , l'état devient $|\Psi\rangle \rightarrow M_u |\Psi\rangle$ et :

$$M_u |\Psi\rangle = \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}J_z - \frac{\pi}{4}\right) a + i \sin\left(\frac{\phi}{2}J_z - \frac{\pi}{4}\right) b \right] |1_a, 0_b\rangle \otimes |\psi_{\text{at}}\rangle \quad (2.101)$$

$$= \cos\left(\frac{\phi}{2}J_z - \frac{\pi}{4}\right) |0_a, 0_b\rangle \otimes |\psi_{\text{at}}\rangle. \quad (2.102)$$

De même, pour une détection sur v , on obtient :

$$M_v |\Psi\rangle = \sin\left(\frac{\phi}{2}J_z - \frac{\pi}{4}\right) |0_a, 0_b\rangle \otimes |\psi_{\text{at}}\rangle. \quad (2.103)$$

Après détection, l'état global est séparable et l'interféromètre est vide de tout photon. On peut alors introduire les opérateurs de mesure suivants qui agissent directement sur l'état atomique :

$$M_{u,\text{at}} \equiv \cos\left(\frac{\phi}{2}J_z - \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.104)$$

$$M_{v,\text{at}} \equiv \sin\left(\frac{\phi}{2}J_z - \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.105)$$

dont le POVM associé est constitué des opérateurs suivants :

$$E_{u,\text{at}} = M_{u,\text{at}}^\dagger M_{u,\text{at}} = \cos^2\left(\frac{\phi}{2}J_z - \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.106)$$

$$E_{v,\text{at}} = M_{v,\text{at}}^\dagger M_{v,\text{at}} = \sin^2\left(\frac{\phi}{2}J_z - \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.107)$$

qui vérifient bien la relation de complétude :

$$E_{u,\text{at}} + E_{v,\text{at}} = \cos^2\left(\frac{\phi}{2}J_z - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\phi}{2}J_z - \frac{\pi}{4}\right) = \mathbb{1}_{\text{at}}. \quad (2.108)$$

Si après N_p photons détectés, l'état atomique est $|\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle = \sum_n c_n(N_p) |n\rangle$, on a alors la relation de récurrence suivante après une détection sur u et sur v :

$$c_n(N_p + 1|u) \propto \cos\left(\frac{\phi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right) c_n(N_p), \quad (2.109)$$

$$c_n(N_p + 1|v) \propto \sin\left(\frac{\phi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right) c_n(N_p). \quad (2.110)$$

La probabilité de détecter le $(N_p + 1)$ -ème photon sur le mode u ou v est donnée respectivement par :

$$P_u(N_p + 1) = \langle \psi_{\text{at}}(N_p) | M_{u,\text{at}}^\dagger M_{u,\text{at}} | \psi_{\text{at}}(N_p) \rangle = \sum_n \cos^2\left(\frac{\phi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right) |c_n(N_p)|^2, \quad (2.111)$$

$$P_v(N_p + 1) = \langle \psi_{\text{at}}(N_p) | M_{v,\text{at}}^\dagger M_{v,\text{at}} | \psi_{\text{at}}(N_p) \rangle = \sum_n \sin^2\left(\frac{\phi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right) |c_n(N_p)|^2. \quad (2.112)$$

2.3.2.3 Action en retour

Soient N_u le nombre de photons détectés sur le mode u et N_v celui sur v , le nombre total de photons est alors $N_p = N_u + N_v$. Les relations de récurrence Eqs. (2.109) et (2.110) nous permettent d'écrire l'état atomique après N_p photons détectés :

$$c_n(N_p) \propto \mathcal{F}_{N_p}(n) c_n(0), \quad (2.113)$$

où $\mathcal{F}_{N_p}(n)$ est la fonction décrivant l'action en retour de la mesure :

$$\boxed{\mathcal{F}_{N_p}(n) = \cos^{N_u}\left(\frac{\phi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right) \sin^{N_v}\left(\frac{\phi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (2.114)$$

Cette fonction présente la propriété remarquable de converger vers une gaussienne lorsque N_u et N_v deviennent grands. De plus, comme nous allons le voir, sa largeur évolue comme $1/\sqrt{N_p}$. Afin d'illustrer cette propriété, nous avons représenté Fig. 2.14 la fonction $[\cos^2 x]^k$ pour des valeurs de k croissantes.

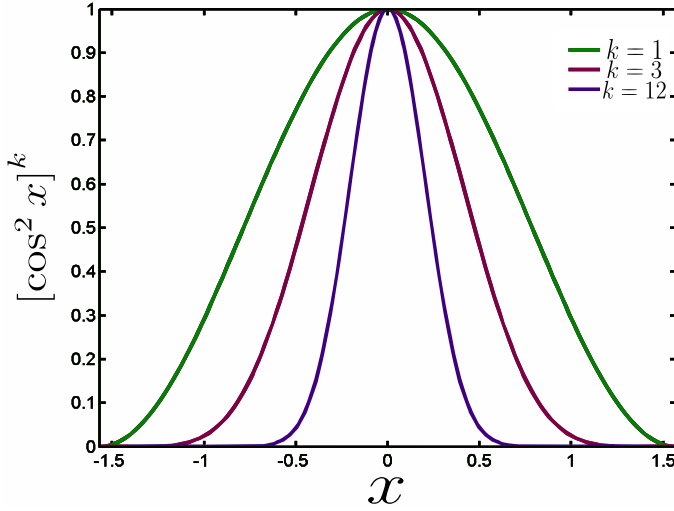


Figure 2.14 – Allure de la fonction $[\cos^2 x]^k$ pour des valeurs de k croissantes. La fonction tend vers une gaussienne de plus en plus piquée lorsque k augmente. La largeur de la fonction évolue comme \sqrt{k} .

La fonction $\mathcal{F}_{N_p}(n)$ admet un maximum à la position :

$$n_0 = \frac{2}{\phi} \left[\arccos \left(\sqrt{1 - \frac{N_u}{N_p}} \right) - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (2.115)$$

La position du maximum dépend du ratio du nombre de photons détectés entre les deux ports de sortie de l'interféromètre, autrement dit, $\varphi = \phi n_0$ est la position estimée sur la frange, c'est une *variable aléatoire*.

Afin d'obtenir la précision sur cette position, il faut déterminer la largeur de la fonction $\mathcal{F}_{N_p}(n)$. Le développement limité en $n = n_0$ de $\mathcal{F}_{N_p}(n)$ est, à l'ordre 2,

$$\mathcal{F}_{N_p}(n) \sim 1 - \frac{\phi^2 N_p}{4} (n - n_0)^2, \quad (2.116)$$

il peut être identifié avec celui d'une gaussienne de la forme :

$$\mathcal{F}_{N_p}(n) = e^{-M^2(n-n_0)^2 N_p}, \quad (2.117)$$

où $M = \phi/2$ est dit l'*intensité de la mesure*. La largeur de cette distribution évolue comme $1/M\sqrt{N_p}$, on retrouve la sensibilité d'une détection optique limitée au bruit de photons.

La relation Eq. (2.113) évaluée grâce à l'Eq. (2.117) nous donne l'évolution complète du système atomique sous l'effet de la mesure dans un interféromètre de Mach-Zehnder. Avant d'analyser en détail le processus de mesure, nous allons étudier un autre dispositif : une détection hétérodyne qui comme nous le verrons, possède une dynamique de mesure très similaire.

2.3.3 Spectroscopie par modulation de fréquence

Bien que l'interféromètre de Mach-Zehnder soit souvent utilisé pour modéliser les mesures de phases, ce n'est pas nécessairement le meilleur choix pour une mise en œuvre expérimentale. Notamment, dans sa version simple telle que présentée au paragraphe précédent, l'absence de réjection du bruit de phase induit par les fluctuations de longueur entre les deux bras peut s'avérer limitante. Pour plusieurs raisons qui seront détaillées au chapitre suivant, nous avons été amenés à considérer une détection utilisant la méthode de spectroscopie par modulation de fréquence. On se propose donc ici d'étudier l'évolution de l'état atomique induit par une telle détection à l'aide d'une modélisation simplifiée.

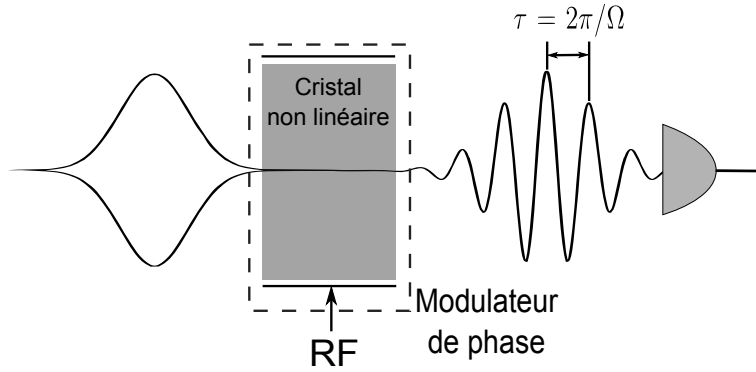


Figure 2.15 – *Battements de la fonction d'onde d'un photon unique après une modulation de phase.*

2.3.3.1 Qu'est-ce que la spectroscopie par modulation de fréquence ?

La spectroscopie par modulation de fréquence [Bjorklund 83, Savalli 99, Lye 03] consiste à moduler la phase d'un faisceau laser générant ainsi deux bandes latérales, l'une d'entre elles est placée proche d'une transition atomique et subit un déphasage. La détection du faisceau produit alors un signal de battement à la fréquence de modulation. La phase de ce battement, obtenue par comparaison avec l'oscillateur local, permet de déterminer la population sur la transition sondée. Une analyse détaillée de cette technique et de sa mise en œuvre est présentée dans le chapitre suivant.

2.3.3.2 Détection d'un battement en régime de photons uniques

Comme pour l'interféromètre de Mach-Zehnder, nous allons étudier la dynamique du processus de mesure en la modélisant par une détection successive de photons uniques. Nous allons donc, dans un premier temps, définir ce que signifie générer et détecter une modulation de phase sur un photon unique.

Nous supposons que la modulation de phase est réalisée par un modulateur électro-optique, dont une description quantique est présentée dans l'Annexe B, il y est notamment démontré qu'un modulateur à bande latérale unique (MBLU) peut être interprété comme une séparatrice spectrale. Nous appellerons (0) et (Ω) les deux modes d'entrée du MBLU avec pour fréquences respectives ω_0 et $\omega_0 + \Omega$, (0) est le mode de la porteuse et (Ω) celui de la bande latérale. Comme décrit dans l'Annexe B, l'action du modulateur sur le champ optique incident est modélisée par :

$$B \propto \begin{pmatrix} \sqrt{T} & -\sqrt{R} \\ \sqrt{R}e^{i\Omega t} & \sqrt{T}e^{i\Omega t} \end{pmatrix}, \quad (2.118)$$

où, en analogie avec la matrice d'une séparatrice spatiale, R désigne la probabilité pour un photon dans le mode (0) d'être dans le mode (Ω) à la sortie du modulateur et T est la probabilité que le photon reste dans la porteuse. On néglige toute absorption dans le modulateur si bien que $R + T = 1$. Lorsqu'un photon unique traverse le modulateur de phase, les deux composantes superposées de sa fonction d'onde battent l'une avec l'autre, cela est schématisé Fig. 2.15.

Il se pose maintenant la question de savoir comment détecter ce battement. Supposons que l'oscillateur local alimentant le modulateur soit asservi en phase avec une référence de fréquence qui produit des impulsions à intervalles réguliers $\tau = 2\pi/\Omega$ (voir Fig. 2.16). Lorsqu'un photon est détecté sur la photodiode, il génère une impulsion en sortie, un comparateur mesure alors le délai δt entre l'arrivée de la dernière impulsion de la référence de temps et celle de la photodiode. L'histogramme du nombre de coups sur la photodiode en fonction de δt produit une reconstruction du battement dont la phase vaut $\varphi = \Omega\delta t$.

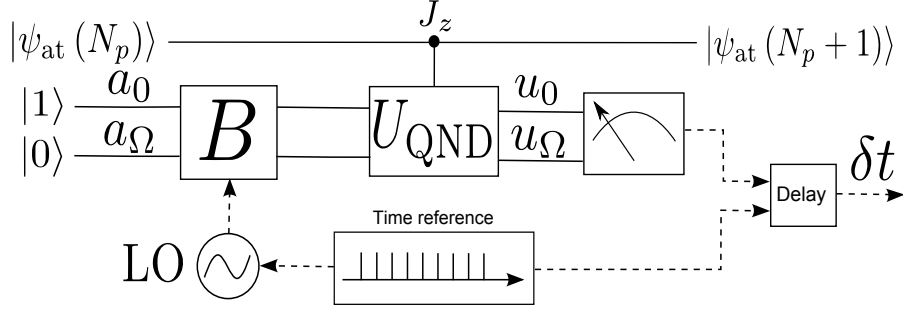


Figure 2.16 – Modèle d’une détection QND de J_z utilisant la spectroscopie par modulation de fréquence. Des photons uniques sont envoyés à travers la séparatrice spectrale B et interagissent de manière non-destructive avec l’ensemble atomique (U_{QND}). L’instant de détection de chaque photon est mesuré par comparaison avec une référence de fréquence.

2.3.3.3 Matrice de diffusion

Si la fréquence ω_0 est proche d’une transition atomique, alors l’onde dans le mode (0) subit un déphasage à la traversée du nuage. Le mode (Ω) sert de référence, si Ω est suffisamment grand, alors $\Omega + \omega_0$ est loin de la transition et le mode (Ω) ne subit aucun déphasage. L’interaction entre la sonde optique et les atomes est donnée par la relation Eq. (2.98), on a donc :

$$U_{\text{QND}} = \begin{pmatrix} e^{i\phi J_z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.119)$$

Conformément aux notations Fig. 2.16, a_0 et a_Ω désignent les opérateurs annihilations des modes à l’entrée du modulateur et u_0 et u_Ω ceux en sortie après interaction avec le nuage atomique. La matrice de diffusion est alors donnée par $S(J_z) = U_{\text{QND}}(J_z) B$, i.e. :

$$S(J_z) \propto \begin{pmatrix} \sqrt{T} e^{i(\phi J_z - \Omega t)} & -\sqrt{R} e^{i(\phi J_z - \Omega t)} \\ \sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix}. \quad (2.120)$$

2.3.3.4 Détection d’un photon et évolution de l’état atomique

La détection d’un photon fournit l’information qu’un photon était présent soit dans le mode u_0 , soit dans le mode u_Ω , l’opérateur de mesure est donc $M = u_0 + u_\Omega$. L’état atomique $|\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle$ après N_p photons détectés évolue donc comme :

$$|0_0, 0_\Omega\rangle \otimes |\psi_{\text{at}}(N_p + 1)\rangle \propto [u_0(J_z) + u_\Omega(J_z)] |1_0, 0_\Omega\rangle \otimes |\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle. \quad (2.121)$$

Soit t l’instant auquel le photon a été détecté, l’état atomique devient :

$$|\psi_{\text{at}}(N_p + 1)\rangle \propto \left[(\sqrt{T} + \sqrt{R}) \cos\left(\frac{\phi}{2} J_z - \frac{\Omega t}{2}\right) + i(\sqrt{T} - \sqrt{R}) \sin\left(\frac{\phi}{2} J_z - \frac{\Omega t}{2}\right) \right] |\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle. \quad (2.122)$$

La reconstruction du battement photon après photon est obtenue en comparant le temps d’arrivée t_k du k -ème photon avec le temps d’arrivée $p\tau$ de la dernière impulsion de la référence, p étant le nombre d’impulsions de la référence comptées entre $t = 0$ et $t = t_k$. Le déphasage $\varphi_k = \Omega \delta t_k$ est obtenu à partir du délai $\delta t_k = t_k - p\tau$. Les opérateurs de mesure de l’état atomique prennent donc la forme :

$$M_{\text{at}}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[(\sqrt{T} + \sqrt{R}) \cos\left(\frac{\phi}{2} J_z - \frac{\varphi}{2}\right) + i(\sqrt{T} - \sqrt{R}) \sin\left(\frac{\phi}{2} J_z - \frac{\varphi}{2}\right) \right], \quad (2.123)$$

les opérateurs du POVM associé sont :

$$E_{\text{at}}(\varphi) = M_{\text{at}}^\dagger(\varphi) M_{\text{at}}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} [\mathbb{1}_{\text{at}} + \mathcal{C} \cos(\phi J_z - \varphi)], \quad (2.124)$$

où $\mathcal{C} = 2\sqrt{RT}$ est le contraste du battement. On remarquera que φ est une variable continue sur $[-\pi, \pi[$ et, par conséquent, le POVM est continu. Il vérifie la relation de complétude :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} M_{\text{at}}^\dagger(\varphi) M_{\text{at}}(\varphi) d\varphi = \mathbb{1}_{\text{at}}. \quad (2.125)$$

On obtient ainsi la probabilité de détecter une phase φ au photon suivant :

$$P_{N_p+1}(\varphi) = \langle \psi_{\text{at}}(N_p) | M_{\text{at}}^\dagger(\varphi) M_{\text{at}}(\varphi) | \psi_{\text{at}}(N_p) \rangle \quad (2.126)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_n |c_n(N_p)|^2 [1 + \mathcal{C} \cos(\phi n - \varphi_k)]. \quad (2.127)$$

2.3.3.5 Action en retour

Après N_p photons détectés l'état atomique peut s'écrire à l'aide d'une fonction \mathcal{F}_{N_p} décrivant l'action en retour de la mesure, $|\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle = \sum_n \mathcal{F}_{N_p}(n) c_n(0) |n\rangle$, où :

$$|\mathcal{F}_{N_p}(n)|^2 \propto \prod_{k=1}^{N_p} [1 + \mathcal{C} \cos(\phi n - \varphi_k)] \quad (2.128)$$

Dans le cas général, ce processus est non-markovien puisque la phase φ_k dépend de l'ensemble des résultats précédents. C'est une différence majeure entre la détection hétérodyne et l'interféromètre de Mach-Zehnder pour lequel l'évolution est markovienne étant donné qu'il y a seulement deux résultats possibles pour la mesure.

Nous allons maintenant montrer que dans la limite de couplage faible, $\phi N_{\text{at}} \ll 1$, l'Eq. (2.128) peut se mettre sous la même forme que Eq. (2.117). Nous montrerons d'abord que dans cette limite, le processus est markovien et non-stationnaire. Puis, en utilisant encore l'approximation de couplage faible, nous montrerons que le processus peut être décomposé en sous-processus stationnaires.

Dans la limite de couplage faible, le déphasage induit par l'échantillon atomique sur la sonde optique est faible et par conséquent $\phi n \ll 1$ pour $-N_{\text{at}}/2 \leq n \leq N_{\text{at}}/2$. On peut alors développer l'Eq. (2.127) au premier ordre en ϕn :

$$P(\varphi) = P_0(\varphi) + \delta P[\delta\varphi](\varphi), \quad (2.129)$$

où $P_0(\varphi) = (1 + \mathcal{C} \cos \varphi) / 2\pi$ est la probabilité dans le cas où la différence de population est nulle et

$$\delta P[\delta\varphi](\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{C} \sin \varphi \delta\varphi, \quad (2.130)$$

est l'écart à la probabilité centrée produit par une différence de population $\langle J_z \rangle \neq 0$ induisant un déphasage non nul $\delta\varphi_{N_p} = -\phi \langle J_z \rangle (N_p)$. Ce déphasage est un paramètre stochastique dépendant de la trajectoire suivie. La chaîne de variables aléatoires $\{\varphi_k\}_{1 \leq k \leq N_p}$ est alors réduite à un paramètre unique $\delta\varphi_{N_p}$, ce qui prouve que le processus est markovien.

On sépare la mesure en sous-séquences de N_t photons telles que l'évolution de l'état atomique sur une sous-séquence soit négligeable. Cela est possible en régime de couplage faible, en effet, pour que l'évolution soit négligeable sur une sous-séquence il faut que la signal-à-bruit sur une sous-séquence soit faible ($\phi^2 N_{\text{at}} N_t \ll 1$), or dans la limite de couplage de faible, puisque

$\phi^2 N_{\text{at}} \ll 1$, il est possible d'avoir de longues sous-séquences $N_t \gg 1$ durant lesquelles l'état n'évolue presque pas.

La probabilité de détection à la fin de la j -ème sous séquence est $P_j(\varphi) = P_0(\varphi) + \delta P[\delta\varphi_j](\varphi)$. On divise l'intervalle des phases possibles $\varphi \in [-\pi, \pi]$ en pas de taille π/m , où $m \in \mathbb{N}$ et $m \gg 1$. On peut alors réécrire Eq. (2.128) sous la forme :

$$|\mathcal{F}_{N_p}(n)|^2 \propto \prod_{j=1}^{N_p/N_t} \prod_{l=-m}^m f_{N_p}^{(j,l)}(n), \quad (2.131)$$

où on a défini :

$$f_{N_p}^{(j,l)}(n) = [1 + \mathcal{C} \cos(\phi n - \pi l/m)]^{N_{jl}}. \quad (2.132)$$

Dans l'équation précédente, $N_{jl} = \frac{\pi}{m} P_j\left(\frac{\pi l}{m}\right) N_t$ est le nombre de détections ayant données pour résultat $\varphi = \pi l/m$ durant la j -ème séquence.

Il faut un grand nombre de photons détectés dans chaque intervalle de taille π/m en particulier dans les intervalles dans lesquels la probabilité $P_0(\varphi)$ est proche de zéro, *i.e.* $[-\pi, -\pi + \pi/m]$ et $[\pi - \pi/m, \pi]$. On doit donc vérifier $N_t \gg m^3$ puisque la relation suivante doit être valable lorsque $\mathcal{C} \sim 1$:

$$N_t \int_{\pi-\pi/m}^{\pi} P_0(\varphi) d\varphi \sim N_t \left(\frac{1-\mathcal{C}}{2m} + \frac{\pi^2 \mathcal{C}}{12m^3} \right) \gg 1. \quad (2.133)$$

Dans ce cas $N_{jl} \gg 1$ et le développement au second ordre en ϕn de $f_{N_p}^{(j,l)}(n)$ peut être identifié avec celui d'une gaussienne :

$$f_{N_p}^{(j,l)}(n) \propto \exp[-2M_l^2 N_{jl} (n - n_l)^2], \quad (2.134)$$

où

$$M_l^2 = \frac{\mathcal{C}\phi^2}{4} \frac{\mathcal{C} + \cos(\pi l/m)}{[1 + \mathcal{C} \cos(\pi l/m)]^2}, \quad (2.135)$$

$$n_l = \frac{1}{\phi} \frac{1 + \mathcal{C} \cos(\pi l/m)}{\mathcal{C} + \cos(\pi l/m)} \sin(\pi l/m). \quad (2.136)$$

L'intensité de la mesure M^2 est alors donnée par la relation :

$$M^2 N_p = \sum_{j=1}^{N_p/N_t} \sum_{l=-m}^m M_l^2 N_{jl}, \quad (2.137)$$

la somme discrète sur l peut être approchée par une intégrale, on obtient alors :

$$M^2 = \frac{\mathcal{C}\phi^2}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathcal{C} + \cos \varphi}{(1 + \mathcal{C} \cos \varphi)^2} d\varphi = \left(1 - \sqrt{1 - \mathcal{C}^2}\right) \frac{\phi^2}{4}, \quad (2.138)$$

cette expression est représentée en fonction du contraste Fig. 2.17. La fonction d'action en retour prend finalement la forme suivante identique à celle obtenue avec l'interféromètre de Mach-Zehnder :

$$|\mathcal{F}_{N_p}(n)|^2 \propto e^{-2M^2(n-n_0)^2 N_p}, \quad (2.139)$$

avec la position moyenne finale $n_0 = 4\overline{\delta\varphi}/\phi$, où :

$$\overline{\delta\varphi} = \lim_{\frac{N_t}{N_p} \rightarrow 0} \frac{N_t}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p/N_t} \delta\varphi_j, \quad (2.140)$$

est la moyenne de la position le long de la trajectoire suivie.

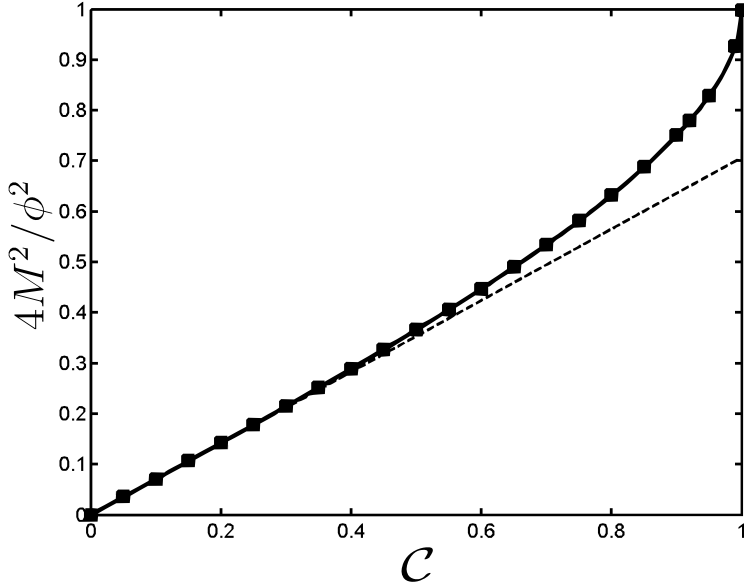


Figure 2.17 – Intensité de la mesure M^2 en fonction du contraste C . La ligne pleine est le résultat analytique Eq. (2.138), les carrés sont obtenus à l'aide de la simulation numérique décrite Sec. 2.3.4.1. Les traits pointillés décrivent le comportement à faible contraste $C/\sqrt{2}$.

2.3.4 Dynamique du processus de projection

Comme nous venons de le voir, aussi bien dans le cas de l'interféromètre de Mach-Zehnder que dans le cas d'une détection utilisant la spectroscopie par modulation de fréquence, l'action en retour de la mesure sur l'état atomique peut être décrite à l'aide d'une fonction $\mathcal{F}_{N_p}(n)$, telle que $c_n(N_p) = \mathcal{F}_{N_p}(n) c_n(0)$. Dans les deux cas, la fonction $\mathcal{F}_{N_p}(n)$ peut être approchée par une distribution gaussienne :

$$\boxed{|\mathcal{F}_{N_p}(n)|^2 \propto \exp\left[-2M^2(n - n_0)^2 N_p\right]} \quad (2.141)$$

où n_0 est une variable aléatoire dépendante de la réalisation du processus stochastique de mesure.

Cette fonction décrit l'intégralité du processus de mesure, elle va nous permettre d'étudier la dynamique de projection de la fonction d'onde atomique. Nous étudierons d'abord l'évolution des deux premiers moments de la distribution atomique, puis nous constaterons que le processus de mesure présenté vérifie la loi de Born pour un temps de mesure suffisamment long. Enfin, nous étudierons les trajectoires dans l'espace des phases et montrerons que les attracteurs sont les états propres de J_z . Mais avant toute chose, afin d'améliorer notre compréhension de la dynamique de projection du paquet d'onde, nous allons étudier les résultats d'une simulation de Monte-Carlo.

2.3.4.1 Simulation de Monte-Carlo des trajectoires quantiques

Afin de valider l'étude analytique qui vient d'être présentée, nous avons réalisé des simulations numériques. Il s'agit d'une simulation de type Monte-Carlo des trajectoires quantiques suivies par le système atomique lors du processus de mesure. A partir de la distribution atomique initiale Eq. (2.93), on obtient la probabilité $P_{N_p+1}(\varphi)$ à l'aide de la relation Eq. (2.127). On tire alors au hasard un résultat φ , plus précisément on utilise la fonction de répartition associée à la

distribution $P_{N_p+1}(\varphi)$ [Bercu 07] :

$$F_{N_p+1}(\varphi) = \int_{-\pi}^{\varphi} P_{N_p+1}(\varphi') d\varphi' \quad (2.142)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\varphi + \pi - (1 + \cos \varphi) \sum_n |c_n(N_p)|^2 \sin \phi n + \sin \varphi \sum_n |c_n(N_p)|^2 \cos \phi n \right], \quad (2.143)$$

qui vérifie $0 \leq F_{N_p+1}(\varphi) \leq 1$. En tirant un nombre aléatoirement selon une distribution équirépartie sur $[0, 1]$ puis en inversant numériquement la fonction $F_{N_p+1}(\varphi)$, on obtient une phase φ selon la distribution $P_{N_p+1}(\varphi)$.

On déduit le nouvel état atomique de la relation de récurrence Eq. (2.122). On calcule alors la nouvelle distribution de probabilité. La trajectoire quantique est obtenue en itérant cette séquence. Les résultats de cette simulation sont présentés Fig. 2.18.

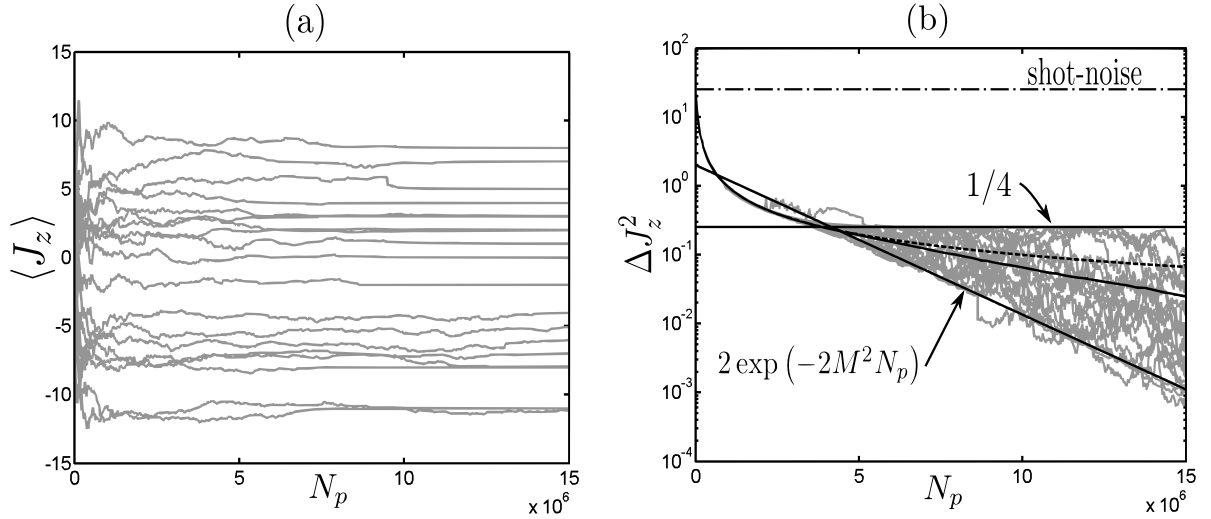


Figure 2.18 – Trajectoires des moments de la distribution atomique obtenus par une simulation de Monte-Carlo dans le cas de la détection hétérodyne. Les paramètres de la simulation sont $N_{\text{at}} = 200$, $\phi = 10^{-3}$ et $R = T = 1/2$. (a) Position moyenne de la distribution atomique $\langle J_z \rangle$ en fonction du nombre de photons mesurés. Pour un temps de mesure suffisamment long, la trajectoire n'évolue plus, la distribution atomique est dans un état de Dicke. (b) Evolution de la variance pendant la mesure. La ligne pleine est une moyenne sur 1000 trajectoires (seulement 20 sont représentées). La ligne pointillée est le résultat du calcul analytique de la variance à temps court, on constate d'après la simulation que celle-ci est quasi-déterministe comme le prédit l'analyse analytique. A temps long, la variance a un comportement stochastique mais reste bornée par les valeurs déduites du calcul analytique.

2.3.4.2 Trajectoires des deux premiers moments de la distribution

En utilisant l'expression analytique obtenue précédemment pour la fonction $\mathcal{F}_{N_p}(n)$ nous allons expliquer le comportement observé sur la simulation numérique Fig. 2.18 pour l'évolution des deux premiers moments de la distribution atomique.

On constate l'existence de deux régimes lors de l'évolution de la variance Fig. 2.18 (b), à temps court, elle est quasi-déterministe alors qu'elle devient stochastique à temps long. Afin d'expliquer ces deux régimes, il faut comparer la largeur de la fonction $\mathcal{F}_{N_p}(n)$ à la distance entre deux états propres de J_z , c'est-à-dire 1. La limite entre ces deux régimes apparaît donc pour $\Delta J_z^2 \sim 1$, autrement dit pour $N_p \sim M^{-2}$.

A temps court, $N_p \ll M^{-2}$, l'état $c_n(N_p)$ est large devant la distance entre deux valeurs propres de J_z , l'état est donc gaussien :

$$|c_n(N_p)|^2 \propto |\mathcal{F}_{N_p}(n)|^2 |c_n(0)|^2 = e^{-2M^2(n-n_0)^2 N_p} e^{-2\frac{n^2}{N_{\text{at}}}} \propto e^{-\frac{(n-\langle J_z \rangle)^2}{2\Delta J_z^2}}. \quad (2.144)$$

La position moyenne de la distribution est :

$$\langle J_z \rangle = \frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2} n_0, \quad (2.145)$$

et la variance prend la forme suivante :

$$\Delta J_z^2 = \frac{N_{\text{at}}}{4} \frac{1}{1 + \kappa^2} \quad (2.146)$$

où $\kappa^2 = M^2 N_{\text{at}} N_p$ est le carré du rapport entre la largeur de la fonction d'onde atomique et celle de la fonction de mesure \mathcal{F}_{N_p} . $\xi_E^2 = 1/(1 + \kappa^2)$ est le facteur de compression de l'état défini Eq. (2.91). On constate que ΔJ_z^2 est indépendant de n_0 et est par conséquent déterministe. L'expression analytique est en excellent accord avec le résultat de la simulation Fig. 2.18 (b). Pour $N_p \geq 1$, $\xi_E^2 < 1$: l'état cohérent devient un état de spins comprimés pour lequel les fluctuations de l'observable J_z sont inférieures à la limite quantique standard $N_{\text{at}}/4$.

En utilisant la relation Eq. (2.82) on obtient la sensibilité de l'interféromètre lorsqu'on injecte un état comprimé en entrée :

$$\delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{N_{\text{at}}(1 + M^2 N_{\text{at}} N_p)}} \xrightarrow{\kappa^2 \rightarrow \infty} \frac{1}{M\sqrt{N_p}} \frac{1}{N_{\text{at}}}. \quad (2.147)$$

Celle-ci évolue comme $1/N_{\text{at}}$ ce qui correspond à la *limite de Heisenberg*.

A temps long, $N_p \gg M^{-2}$, la largeur de la distribution est plus petite que la distance entre deux valeurs propres de J_z et l'état atomique $c_n(N_p) \sim \mathcal{F}_{N_p}(n)$ est réparti sur quelques états propres. L'évolution de l'état dépend alors fortement de la distance entre la valeur moyenne de la distribution $\langle J_z \rangle$ et la valeur propre de J_z la plus proche. Deux cas limites peuvent être considérés (Fig. 2.19) : soit $\langle J_z \rangle$ est au milieu de deux valeurs propres de J_z , ce qui est une position d'équilibre instable du système, soit $\langle J_z \rangle$ est une valeur propre de J_z , ce qui est une position d'équilibre stable.

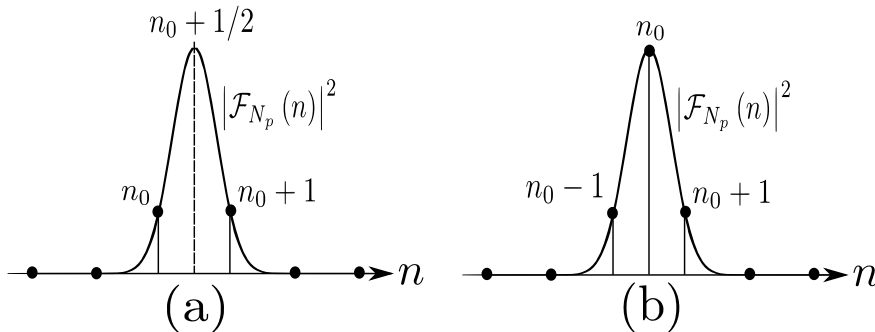


Figure 2.19 – Cas limites pour l'évolution à temps long. La position moyenne de la distribution est (a) au milieu de deux valeurs propres de J_z , ou (b) centrée sur une valeur propre.

Dans le premier cas, Fig. 2.19 (a), la distribution atomique est centrée entre deux états propres de J_z , nous les noterons $|n_0\rangle$ et $|n_0 + 1\rangle$. Etant donné que l'amplitude des autres états

décroit exponentiellement, l'état atomique est bien approché par la superposition :

$$|\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2}} (|n_0\rangle + |n_0 + 1\rangle). \quad (2.148)$$

Dans ce cas, la position moyenne de l'état est $\langle J_z \rangle = n_0 + 1/2$ et la variance vaut $\Delta J_z^2 = 1/4$ ce qui correspond à la limite supérieure Fig. 2.18 (b).

Dans le second cas, Fig. 2.19 (b), la distribution atomique est centrée sur une valeur propre $|n_0\rangle$ de J_z . La distribution peut alors s'approcher par la superposition de trois états propres :

$$|\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle \sim \sum_{k=-1,0,1} \mathcal{F}_{N_p}(n_0 + k) |n_0 + k\rangle. \quad (2.149)$$

En utilisant la condition de normalisation :

$$\sum_{k=-1,0,1} |\mathcal{F}_{N_p}(n_0 + k)|^2 = 1, \quad (2.150)$$

la symétrie de l'état autour de n_0 et la relation Eq. (2.141), on obtient :

$$|\mathcal{F}_{N_p}(n_0 \pm 1)|^2 = |\mathcal{F}_{N_p}(n_0)|^2 e^{-2M^2 N_p}. \quad (2.151)$$

Puisque $\langle J_z \rangle = n_0$, la variance de l'état atomique est :

$$\boxed{\Delta J_z^2 = 2e^{-2M^2 N_p}} \quad (2.152)$$

ce qui correspond à la limite inférieure Fig. 2.18 (b). L'état converge alors vers un état de Dicke de manière exponentielle avec le nombre de photons mesurés.

2.3.4.3 Loi de Born

En utilisant les résultats de la simulation Fig. 2.18 (a), on peut extraire l'histogramme des positions de $\langle J_z \rangle$ à temps long, celui-ci est présenté Fig. 2.20. On constate que le processus de mesure vérifie la loi de Born puisqu'il converge nécessairement vers un état propre $|n\rangle$ de J_z avec la probabilité $P_n = |\langle n | \psi_{\text{at}}(0) \rangle|^2$.

Le processus de mesure converge donc asymptotiquement vers une mesure projective. Il est possible d'interpréter la fonction \mathcal{F}_{N_p} comme un opérateur décrivant l'évolution de l'état sous la mesure :

$$|\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle = \widehat{\mathcal{F}}_{N_p} [J_z | \widetilde{n}_0 \rangle | \psi_{\text{at}}(0) \rangle, \quad (2.153)$$

il correspond à la transformation non-unitaire :

$$\widehat{\mathcal{F}}_{N_p} [J_z | \widetilde{n}_0 \rangle = \exp \left(-\mathcal{L}_{\widetilde{n}_0} [J_z] N_p \right), \quad (2.154)$$

dont le générateur est l'opérateur positif suivant :

$$\mathcal{L}_{\widetilde{n}_0} [J_z] = M^2 (J_z - \widetilde{n}_0)^2. \quad (2.155)$$

Ce générateur dépend du paramètre stochastique \widetilde{n}_0 auquel est associé la probabilité $P_{\widetilde{n}_0}(N_p)$ après N_p photons détectés. L'opérateur $\widehat{\mathcal{F}}_{N_p}$ prend donc une forme très similaire à l'opérateur de mesure associé au cas d'un détecteur de précision finie décrit Sec. 1.2.3, dans le cas présent, il s'agit d'un détecteur limité au bruit de photon : $\sigma_{\text{det}} = 1/2M\sqrt{N_p}$.

La convergence du processus de mesure vers la loi de Born dans la limite $N_p \rightarrow \infty$ se traduit par un comportement projectif à temps long :

$$\lim_{N_p \rightarrow \infty} \widehat{\mathcal{F}}_{N_p} [J_z | \widetilde{n}_0 \rangle = \Pi_{\widetilde{n}_0}, \quad (2.156)$$

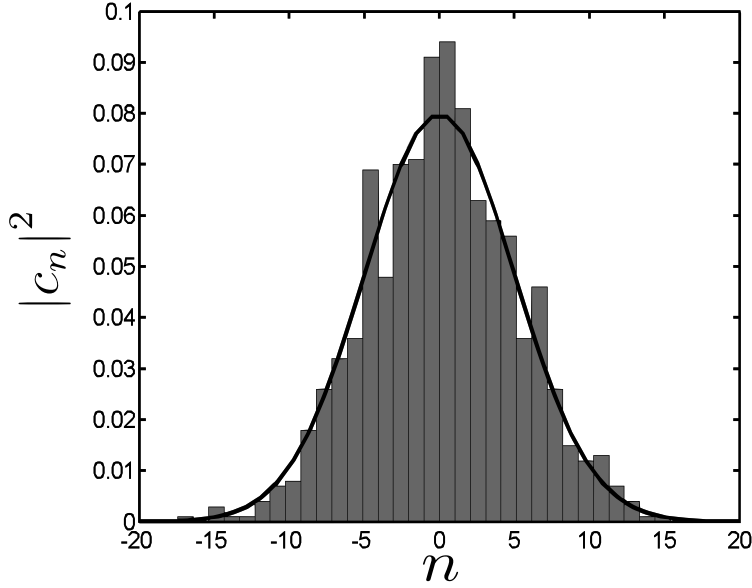


Figure 2.20 – Histogramme des positions moyennes du spin collectif à temps long comparé à la distribution initiale (ligne pleine).

où $\Pi_{\tilde{n}_0} = |\tilde{n}_0\rangle \langle \tilde{n}_0|$ et tel que \tilde{n}_0 soit un état propre de J_z et :

$$\lim_{N_p \rightarrow \infty} P_{\tilde{n}_0}^{\sim}(N_p) = |\langle \tilde{n}_0 | \psi_{\text{at}}(0) \rangle|^2. \quad (2.157)$$

Notons aussi que la positivité du générateur $\mathcal{L}_{\tilde{n}_0} [J_z]$ implique que l'ensemble des opérateurs $\hat{\mathcal{F}}_{N_p} [J_z | \tilde{n}_0]$ d'évolution sous le processus de mesure ne forme pas un groupe puisque le seul élément inversible est $\hat{\mathcal{F}}_{N_p=0} = \mathbb{1}$. Le processus de mesure est par conséquent *irréversible*.

2.3.4.4 Equation différentielle stochastique

En différenciant l'opérateur Eq. (2.154), on constate que l'état atomique est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dN_p} |\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle + M^2 (J_z - \tilde{n}_0(N_p))^2 |\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle = 0, \quad (2.158)$$

le nombre de photons détectés N_p est ici considéré comme une variable continue. La variable aléatoire $\tilde{n}_0(N_p)$ est proportionnelle à la phase mesurée, elle peut s'écrire comme la somme d'une valeur moyenne et de fluctuations :

$$\tilde{n}_0(N_p) = \langle \tilde{n}_0 \rangle_{N_p} + \zeta_{N_p}, \quad (2.159)$$

où ζ_{N_p} désigne le bruit de photon de la détection, c'est un bruit blanc, il est donc non-corrélé :

$$\langle \zeta_{N_p} \zeta_{N'_p} \rangle \propto \delta(N_p - N'_p). \quad (2.160)$$

En injectant cette expression pour \tilde{n}_0 dans l'équation Eq. (2.158) et en ne conservant que les termes au premier ordre en ζ_{N_p} , l'équation différentielle devient :

$$\frac{d}{dN_p} |\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle + M^2 \left[(J_z - \langle \tilde{n}_0 \rangle_{N_p})^2 - 2 (J_z - \langle \tilde{n}_0 \rangle_{N_p}) \zeta_{N_p} \right] |\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle = 0, \quad (2.161)$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\boxed{d|\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle + M^2 \left[(J_z - \langle \tilde{n}_0 \rangle_{N_p})^2 dN_p - 2 (J_z - \langle \tilde{n}_0 \rangle_{N_p}) dW_{N_p} \right] |\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle = 0} \quad (2.162)$$

où $dW_{N_p} = \zeta_{N_p} dN_p$ est un processus de Wiener [Gardiner 00]. On obtient ainsi l'équation différentielle stochastique décrivant l'évolution de l'état sous le processus de mesure, on retrouve le résultat obtenu dans [Gisin 92] à partir de l'équation maîtresse de Lindblad [Lindblad 76]. Cette équation et le formalisme du calcul stochastique associé sont bien adaptés pour l'étude de la rétroaction quantique [Wiseman 94, Adler 01, Thomsen 02b, Thomsen 02a, Geremia 03, Stockton 04], on peut par exemple l'utiliser pour simuler quelle rétroaction appliquer afin de préparer un état comprimé de manière déterministe.

2.3.4.5 Evolution dans l'espace des phases

Une autre manière de visualiser la dynamique de projection de la fonction d'onde consiste à étudier les trajectoires dans l'espace des phases. Ces trajectoires sont définies comme l'ensemble des couples position/vitesse $(\langle J_z \rangle (N_p), d\langle J_z \rangle (N_p) / dN_p)$. On a représenté Fig. 2.21 la densité des trajectoires dans l'espace des phases, *i.e.* le nombre de trajectoires passant par unité de surface de l'espace des phases.

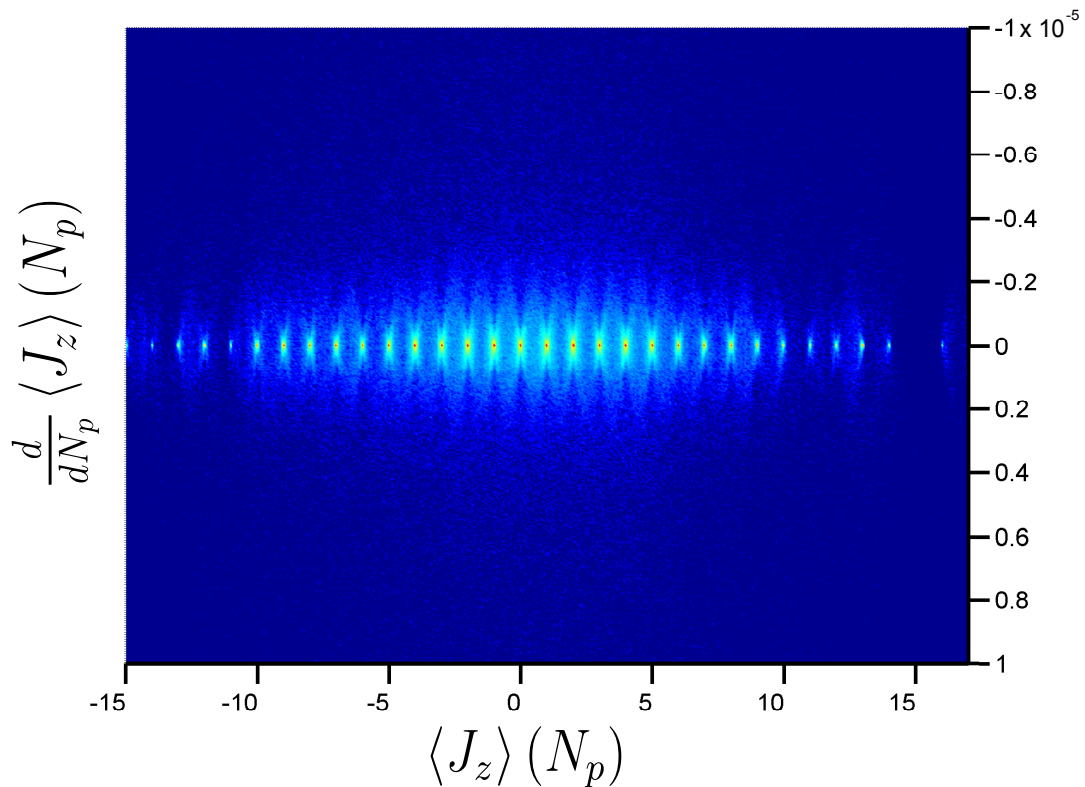


Figure 2.21 – Densité des trajectoires dans l'espace des phases représentée en échelle de couleurs logarithmique. Celle-ci est obtenue à partir de 1000 trajectoires simulées pour une détection hétérodyne avec les paramètres $N_{\text{at}} = 200$, $\phi = 10^{-3}$ et $R = T = 1/2$.

On constate des pics de densité sur l'axe des vitesses nulles avec des coordonnées entières pour $\langle J_z \rangle$, en d'autres termes aux valeurs propres de J_z . Les états propres de J_z sont les attracteurs correspondants aux différentes positions d'équilibres stables du système [Adler 01, Stockton 04].

2.4 Préparation d'autres états

Nous venons d'étudier comment le processus de mesure permet la préparation d'états de spin comprimés et d'états de Dicke. On peut alors se demander comment préparer d'autres états avec un tel processus, nous allons donner deux exemples. Tout d'abord, nous présenterons comment intriquer deux nuages spatialement séparés, puis nous montrerons que des chats de Schrödinger peuvent être réalisés.

2.4.1 Intrication de deux ensembles spatialement séparés

Nous considérons la mesure conjointe de deux ensembles atomiques séparés spatialement à l'aide de la même sonde optique. Nous montrons alors que le processus de mesure intrique les deux nuages, cela vient du fait que lors de la mesure on ne sait pas à quel nuage attribuer le déphasage induit sur la sonde. Cette analyse est similaire à celle réalisée dans [Lisi 02].

2.4.1.1 Description de l'état des deux nuages

On considère deux ensembles atomiques décrits par les opérateurs collectifs de spins atomiques $J_z^{(1)}$ et $J_z^{(2)}$, contenant respectivement $N_{\text{at}}^{(1)}$ et $N_{\text{at}}^{(2)}$ atomes. L'état initial est un état séparable constitué de deux états cohérents :

$$|\psi(N_p = 0)\rangle = \left(\sum_{n_1} c_{n_1}(0) |n_1\rangle \right) \otimes \left(\sum_{n_2} c_{n_2}(0) |n_2\rangle \right) \quad (2.163)$$

$$= \sum_{n_1, n_2} \exp\left(-\frac{n_1^2}{N_{\text{at}}^{(1)}} - \frac{n_2^2}{N_{\text{at}}^{(2)}}\right) |n_1, n_2\rangle. \quad (2.164)$$

D'une manière générale, la fonction d'onde associée aux deux nuages atomiques peut être décomposée dans la base produit $|\psi\rangle = \sum_{n_1, n_2} c_{n_1, n_2} |n_1, n_2\rangle$. On peut représenter cet état dans un plan à deux dimensions (\vec{n}_1, \vec{n}_2) (voir Fig. 2.22).

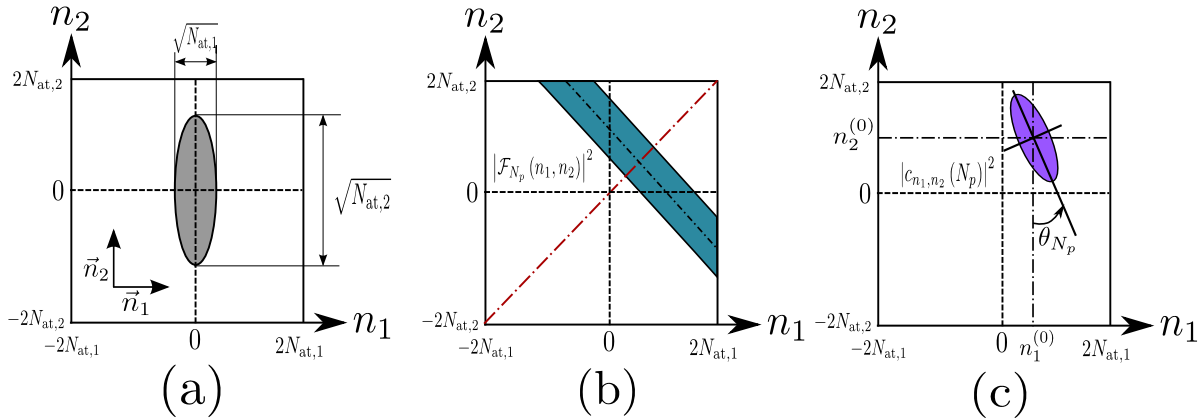


Figure 2.22 – Representation de l'état de la plan (\vec{n}_1, \vec{n}_2) . (a) Etat initial. (b) La fonction $|\mathcal{F}_{N_p}(n_1, n_2)|^2$. (c) Etat après N_p photons détectés.

2.4.1.2 Evolution du système sous le processus de mesure

La détection mesure ici le déphasage global engendré par les deux nuages sur la sonde optique, autrement dit, elle mesure l'opérateur $J_z^{(1)} + J_z^{(2)}$. Après N_p photons détectés, la distribution

associée aux deux nuages atomiques peut s'écrire $c_{n_1, n_2}(N_p) = \mathcal{F}_{N_p}(n_1, n_2) c_{n_1, n_2}(0)$. Dans ce cas, la fonction \mathcal{F}_{N_p} est une fonction à deux variables (n_1, n_2) , il s'agit d'une gaussienne bi-dimensionnelle :

$$|\mathcal{F}_{N_p}(n_1, n_2)|^2 \propto \exp \left[-2M^2 N_p \left((n_1 + n_2)^2 - \tilde{\gamma} (n_1 + n_2) \right) \right], \quad (2.165)$$

$\tilde{\gamma}$ étant le paramètre stochastique permettant d'établir le centre de la fonction $|\mathcal{F}_{N_p}|^2$ pour une trajectoire donnée. Puisque $|\mathcal{F}_{N_p}(n_1, n_2)|^2 = |\mathcal{F}_{N_p}(n_2, n_1)|^2$, l'axe $n_1 = n_2$ est un axe de symétrie, comme représenté Fig. 2.22 (b). L'inclinaison de l'axe propre de la gaussienne, orthogonal à l'axe de symétrie, est $\theta_0 = \pi/4$ et la largeur selon cet axe est infinie ($\sigma_x = \infty$). Selon l'axe transverse, parallèle à l'axe propre, la largeur de la gaussienne s'affine lorsque le nombre de photons détectés augmente ($\sigma_y = 1/\sqrt{4M^2 N_p}$).

Dans la suite, nous ne considérerons que la limite à temps court ($N_p \ll M^{-2}$). La fonction d'onde après N_p photons détectés peut se mettre sous la forme :

$$c_{n_1, n_2}(N_p) \propto \exp \left[- \left(\frac{n_1^2}{\delta_1^2} + \tilde{\gamma} n_1 \right) - \left(\frac{n_2^2}{\delta_2^2} + \tilde{\gamma} n_2 \right) - 2 \frac{n_1 n_2}{\Delta^2} \right], \quad (2.166)$$

où $\delta_i^{-2} = N_{\text{at}, i}^{-1} + \Delta^{-2}$ et $\Delta^{-2} = 2M^2 N_p$. L'état peut alors se réécrire de la manière suivante :

$$c_{n_1, n_2}(N_p) \propto \exp - \left(\frac{(n_1 - n_1^{(0)})^2}{\delta_1^2} + \frac{(n_2 - n_2^{(0)})^2}{\delta_2^2} + \frac{2}{\Delta^2} (n_1 - n_1^{(0)}) (n_2 - n_2^{(0)}) \right), \quad (2.167)$$

ce qui fait apparaître les coordonnées $(n_1^{(0)}, n_2^{(0)})$ du centre de la distribution :

$$n_1^{(0)} = \frac{\tilde{\gamma}}{2} \frac{1 - (\delta_1/\Delta)^2}{(\delta_1/\Delta)^2 - (\Delta/\delta_2)^2}, \quad (2.168)$$

$$n_2^{(0)} = \frac{\tilde{\gamma}}{2} \frac{1 - (\delta_2/\Delta)^2}{(\delta_2/\Delta)^2 - (\Delta/\delta_1)^2}. \quad (2.169)$$

On en déduit l'angle de l'axe propre de la gaussienne tel que décrit Fig. 2.22 (c) :

$$\theta(N_p) = \frac{1}{2} \arctan \left(4M^2 N_p \frac{N_{\text{at}}^{(1)} N_{\text{at}}^{(2)}}{N_{\text{at}}^{(2)} - N_{\text{at}}^{(1)}} \right). \quad (2.170)$$

On constate que lorsque le nombre d'atomes entre les deux nuages est différent, la distribution tourne progressivement d'un angle nul vers un angle de $\pi/4$. Pour que les deux nuages soient le plus intriqués possible, l'angle de $\pi/4$ est une condition nécessaire (mais non suffisante). On remarque aussi que si les deux nuages possèdent le même nombre d'atomes, l'angle est toujours de $\pi/4$, c'est donc la situation optimale pour obtenir une intrication maximale avec un nombre minimum de photons utilisés lors de la mesure. On obtient aussi les variances de la distribution selon les axes propres de la gaussienne :

$$\frac{1}{\sigma_x^2(N_p)} = \frac{1}{N_{\text{at}}^{(1)}} + \frac{1}{N_{\text{at}}^{(2)}} + \frac{2}{\Delta^2} \left(1 + \frac{1}{\sin 2\theta} \right), \quad (2.171)$$

$$\frac{1}{\sigma_y^2(N_p)} = \frac{1}{N_{\text{at}}^{(1)}} + \frac{1}{N_{\text{at}}^{(2)}} - \frac{2}{\Delta^2} \left(1 + \frac{1}{\sin 2\theta} \right). \quad (2.172)$$

2.4.1.3 Mesure géométrique de l'intrication

Afin de quantifier de manière rigoureuse le degré d'intrication entre les deux nuages atomiques, nous utilisons une définition géométrique. Elle consiste à mesurer la distance entre l'état dont on souhaite évaluer le degré d'intrication et l'état séparable le plus proche. On définit l'état séparable le plus proche $|\phi\rangle$ comme celui maximisant le recouvrement :

$$G(\psi) = \max_{|\phi\rangle \in \mathcal{S}} |\langle \psi | \phi \rangle|, \quad (2.173)$$

où \mathcal{S} est l'ensemble des états séparables. La mesure géométrique est alors définie comme :

$$E(\psi) = 1 - G(\psi). \quad (2.174)$$

On vérifie, par exemple, que pour $N_p = 0$, l'état initial est séparable : $|\psi(0)\rangle \in \mathcal{S}$ et donc $G(\psi) = |\langle \psi(0) | \phi \rangle| = 1$, autrement dit $E(\psi) = 0$ et il n'y a pas d'intrication.

Un état $|\phi\rangle$ est séparable si :

$$|\phi\rangle = \sum_{n_1, n_2} f_\phi(n_1, n_2) |n_1, n_2\rangle \in \mathcal{S} \Leftrightarrow f_\phi(n_1, n_2) = f_\phi^{(1)}(n_1) f_\phi^{(2)}(n_2). \quad (2.175)$$

En utilisant la relation Eq. (2.166), on peut écrire l'état $|\psi(N_p)\rangle$ de la manière suivante :

$$|\psi(N_p)\rangle = \mathcal{N} \sum_{n_1, n_2} f_\psi(n_1) f_\psi(n_2) e^{-2M^2 N_p n_1 n_2} |n_1, n_2\rangle, \quad (2.176)$$

avec $f_\psi(x_i) = \exp\left(-\frac{(x_i - x_{i0})^2}{\Delta_i^2}\right)$ et $\Delta_i^2 = \left(1/N_{\text{at}}^{(i)} + 2M^2 N_p\right)^{-1}$. On obtient le recouvrement entre un état séparable et l'état $|\psi(N_p)\rangle$ après mesure :

$$|\langle \psi | \phi \rangle| = \left| \sum_{n_1, n_2} f_\psi(n_1) f_\phi(n_1) f_\psi(n_2) f_\phi(n_2) e^{-2M^2 N_p n_1 n_2} \right| \quad (2.177)$$

$$\sim \mathcal{N}_\phi \mathcal{N}_\psi \left| \iint_{\mathbb{R}^2} dx_1 dx_2 f_\psi(x_1) f_\phi(x_1) f_\psi(x_2) f_\phi(x_2) e^{-2M^2 N_p x_1 x_2} \right|. \quad (2.178)$$

Les coefficients de normalisation sont :

$$\mathcal{N}_\psi = \mathcal{N}_\phi \left(1 - M^4 N_p^2 \Delta_1^4 \Delta_2^2\right)^{1/2} \exp\left(M^2 N_p \frac{M^2 N_p (x_{10}^2 \Delta_2^2 + x_{20}^2 \Delta_1^2) - 2x_{10} x_{20}}{M^4 N_p^2 \Delta_1^2 \Delta_2^2 - 1}\right), \quad (2.179)$$

et $\mathcal{N}_\phi = \sqrt{2/\pi \Delta_1 \Delta_2}$.

En supposant que le recouvrement $|\langle \psi | \phi \rangle|$ est maximal si $f_\phi(x_i) = f_\psi(x_i)$, on obtient :

$$G(\psi) = \pi \mathcal{N}_\phi \mathcal{N}_\psi \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\sqrt{4 - M^4 N_p^2 \Delta_1^2 \Delta_2^2}} \exp\left(-2M^2 N_p \frac{M^2 N_p (x_{10}^2 \Delta_2^2 + x_{20}^2 \Delta_1^2) - 4x_{10} x_{20}}{M^4 N_p^2 \Delta_1^2 \Delta_2^2 - 4}\right). \quad (2.180)$$

Dans le cas où la distribution est centrée, $x_{10} = x_{20} = 0$, on a :

$$\boxed{G(\psi) = 2 \frac{(1 - \beta)^{1/4}}{(4 - \beta)^{1/2}}} \quad (2.181)$$

avec

$$\beta = \frac{\kappa_1^2}{1 + 2\kappa_1^2} \cdot \frac{\kappa_2^2}{1 + 2\kappa_2^2}, \quad (2.182)$$

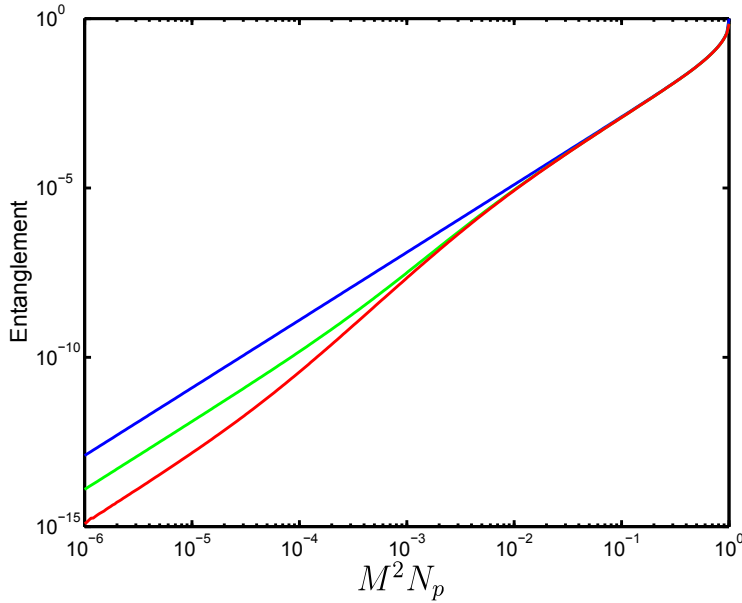


Figure 2.23 – Evolution du degré géométrique d'intrication $E(\psi)$ entre les deux nuages en fonction du nombre de photons détectés pour $N_{\text{at}} = 100$. En bleu dans le cas où les deux nuages possèdent le même nombre d'atomes $N_{\text{at}}^{(1)} = N_{\text{at}}^{(2)}$, en vert le cas $N_{\text{at}}^{(1)} = 10N_{\text{at}}^{(2)}$ et en rouge le cas $N_{\text{at}}^{(1)} = 100N_{\text{at}}^{(2)}$.

et $\kappa_i^2 = M^2 N_{\text{at}}^{(i)} N_p$. L'évolution de l'intrication $E(\psi) = 1 - G(\psi)$ entre les deux nuages atomiques en fonction du nombre de photons détectés est présentée Fig. 2.23. On constate que l'intrication croît au fur et à mesure que le nombre de photons utilisé augmente. On remarque aussi que pour un nombre de photons donné, l'intrication est plus importante si les deux nuages possèdent le même nombre d'atomes. Enfin, dans le cadre du calcul que nous venons de réaliser, les deux nuages sont maximalelement intriqués pour $M^2 N_p = 1$, or cela devrait être le cas seulement dans la limite $M^2 N_p \rightarrow \infty$; ce résultat est un artéfact du fait que le calcul réalisé ici ne prend pas en compte la discrétisation de l'état et n'est donc pas valable lorsque $M^2 N_p \sim 1$.

2.4.2 Préparation de superposition macroscopiques : chats de Schrödinger

Supposons que l'on mesure une observable \hat{O} ayant pour états propres à la fois $|n\rangle$ et $| -n\rangle$. Dans ce cas l'état $|\Psi\rangle = (|n\rangle + | -n\rangle) / \sqrt{2}$ est la superposition quantique de deux états macroscopiques, il s'agit donc d'un chat de Schrödinger. De plus, $|\Psi\rangle$ est aussi un état propre de l'observable \hat{O} et par conséquent, d'après la loi de Born, il est invariant sous le processus de mesure. Autrement dit, une mesure de l'observable \hat{O} permettrait de générer un chat de Schrödinger.

Nous allons montrer qu'une telle mesure est réalisable en utilisant un interféromètre qui est sensible uniquement au module de la phase et n'est donc pas capable de distinguer une phase $+\phi n$ d'une phase $-\phi n$.

2.4.2.1 Principe de la mesure et fonction d'action en retour

Pour qu'un interféromètre ne soit sensible qu'au module de la phase, il suffit de se placer au sommet d'une frange, *i.e.* de déphaser l'un des bras de π par rapport à l'autre. La matrice de diffusion décrivant l'interaction non-destructive est dans ce cas :

$$U_{\text{QND}} = \begin{pmatrix} e^{i\phi J_z} & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{pmatrix}, \quad (2.183)$$

on obtient alors la matrice de l'interféromètre complet, $S = BU_{\text{QND}}B$, soit :

$$S(J_z) \propto \begin{pmatrix} \cos(\phi J_z/2) & i \sin(\phi J_z/2) \\ i \sin(\phi J_z/2) & \cos(\phi J_z/2) \end{pmatrix}. \quad (2.184)$$

On en déduit la fonction d'action en retour associée à cette détection :

$$|\mathcal{F}_{N_p}(n)|^2 \propto \cos^{2N_u} \left(\frac{\phi n}{2} \right) \sin^{2(N_p - N_u)} \left(\frac{\phi n}{2} \right), \quad (2.185)$$

que l'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$|\mathcal{F}_{N_p}(n)|^2 \propto (1 + \cos \phi n)^{N_u} (1 - \cos \phi n)^{N_p - N_u}. \quad (2.186)$$

Si le contraste \mathcal{C} de l'interféromètre n'est pas parfait, on a :

$$|\mathcal{F}_{N_p}(n)|^2 \propto (1 + \mathcal{C} \cos \phi n)^{N_u} (1 - \mathcal{C} \cos \phi n)^{N_p - N_u}. \quad (2.187)$$

Cette fonction est représentée Fig. 2.24 (a).

Les probabilités de détecter un photon sur les ports de sortie u et v de l'interféromètre sont, dans la limite de couplage faible $\phi N_{\text{at}} \ll 1$,

$$P_u(N_p) = \frac{1 + \mathcal{C}}{2} - \delta P(N_p), \quad (2.188)$$

$$P_v(N_p) = \frac{1 - \mathcal{C}}{2} + \delta P(N_p), \quad (2.189)$$

où $\delta P(N_p) = M^2 \langle J_z^2 \rangle (N_p - 1)$ et $M^2 = \mathcal{C} \phi^2 / 4$ est l'intensité de la mesure. L'écart à la probabilité moyenne $\delta P(N_p)$ fait apparaître la variance de la distribution qui est de l'ordre de $\sqrt{N_{\text{at}}}$, donc $\delta P(N_p) \sim M^2 \sqrt{N_{\text{at}}} \ll 1$ ce qui entraîne $P_u(N_p) \sim (1 + \mathcal{C}) / 2$ qui est donc essentiellement indépendant de l'état atomique. Si on désire avoir un effet de la mesure sur l'état, il faut que P_v soit sensible à l'état atomique *i.e.* que $(1 - \mathcal{C}) / 2 \sim \delta P(N_p)$, en d'autres termes, il faut $\mathcal{C} \sim 1$. L'efficacité de cette méthode de détection sera donc très sensible au contraste de l'interféromètre. Un exemple d'évolution de la distribution atomique est présenté Fig. 2.24 (b).

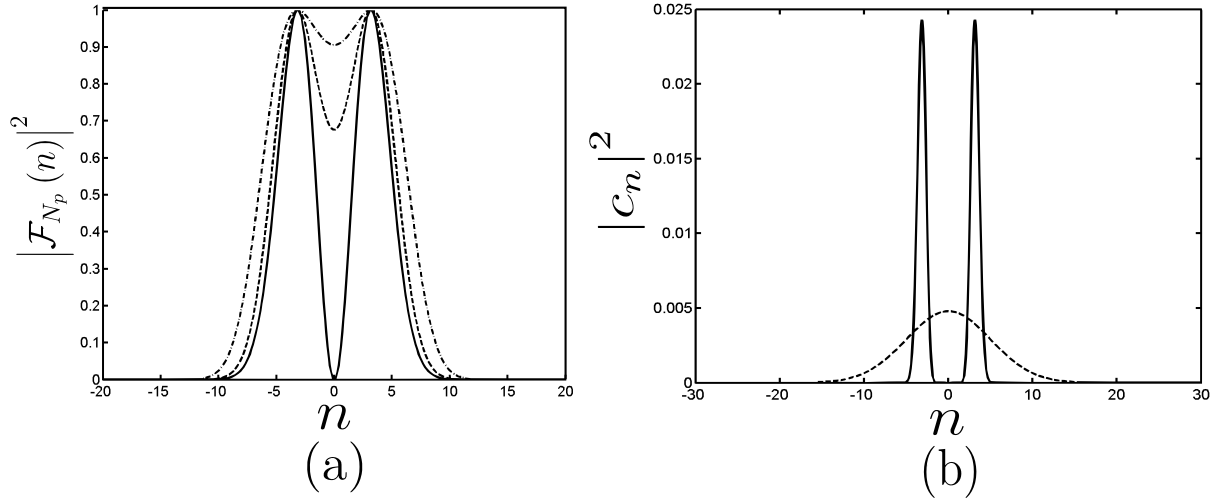


Figure 2.24 – Evolution de l'état vers un chat de Schrödinger, les résultats sont présentés pour $N_{\text{at}} = 100$. Les nombres de photons N_u et N_v sont obtenus à l'aide des probabilités Eqs. (2.188) et (2.189) en supposant $\langle J_z^2 \rangle \sim \sqrt{N_{\text{at}}}$. (a) La fonction $|\mathcal{F}_{N_p}(n)|^2$ avec $M^2 N_p = 0.1$ et les contrastes suivants $\mathcal{C} = 1$ (trait continu), $\mathcal{C} = 0.98$ (trait pointillé) et $\mathcal{C} = 0.9$ (trait point-pointillé). (b) Evolution de la distribution atomique pour $\mathcal{C} = 1$. En pointillés, la distribution initiale et, en trait continu, la distribution pour $M^2 N_p = 1$.

2.4.2.2 Figure de mérite

Afin d'évaluer la proximité de l'état préparé avec l'état final idéal $|\Psi\rangle = (|n_0\rangle + |-n_0\rangle)/\sqrt{2}$, on définit le critère suivant qui est le ratio entre la valeur de la distribution en $n = 0$ et sa valeur en son maximum n_0 :

$$\Xi(N_p) = 1 - \left| \frac{c_0(N_p)}{c_{n_0}(N_p)} \right|^2. \quad (2.190)$$

A l'aide de simulation de Monte-Carlo similaire à celle décrite Sec. 2.3.4.1, on peut étudier l'évolution de l'état atomique vers un chat de Schrödinger, en particulier on regarde l'évolution de la figure de mérite Eq. (2.190), le résultat est présenté Fig. 2.25.

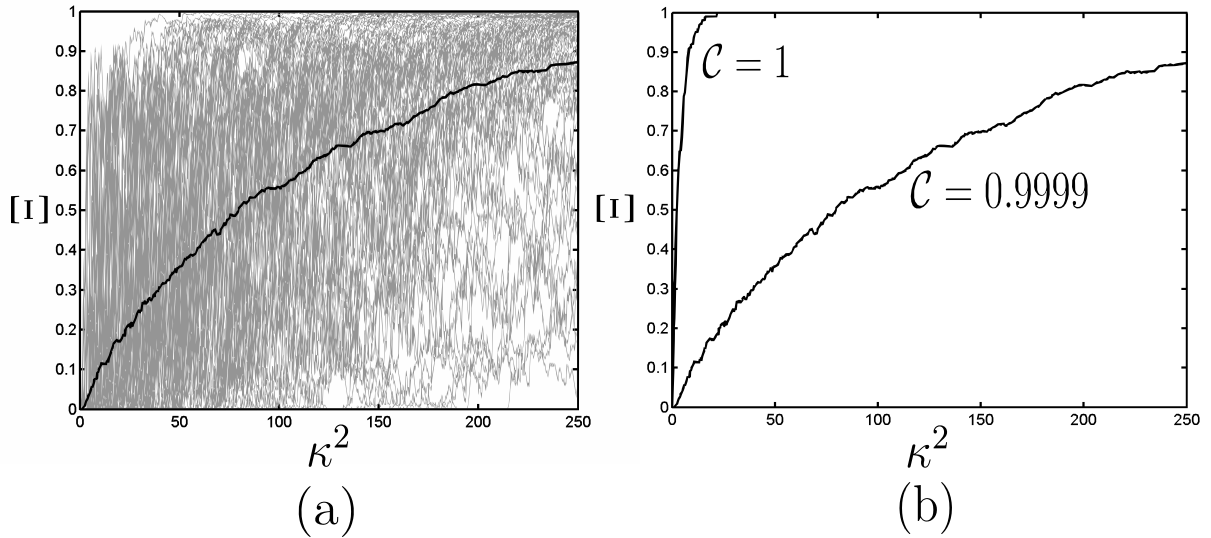


Figure 2.25 – Evolution de la figure de mérite en fonction du rapport signal-à-bruit de la détection $\kappa^2 = M^2 N_{\text{at}} N_p$. (a) Simulation numérique de 100 trajectoires pour $C = 0.9999$, la trajectoire moyenne apparaît en trait continu noir. On constate que la figure de mérite converge vers 1 et donc que l'état converge vers un chat de Schrödinger. (b) Comparaison des trajectoires moyennes obtenues à partir de 100 trajectoires chacune pour deux contrastes différents de l'interféromètre $C = 1$ et $C = 0.9999$.

Tout d'abord il est intéressant de constater que dans le cas $C = 1$, la détection d'un seul photon sur le port v de l'interféromètre projette à zéro la composante c_0 de la distribution atomique, par conséquent dans ce cas précis, la détection d'un seul photon donne une valeur maximale à la figure de mérite, cela explique la montée très rapide de la figure de mérite moyenne dans ce cas Fig. 2.25 (b). Toutefois, dès lors que le contraste est différent de un, la convergence de l'état vers un chat de Schrödinger est beaucoup moins rapide comme on le constate Fig. 2.25 (b) où la chute de contraste est pourtant très faible (10^{-4}). Cette forte sensibilité au contraste risque de rendre difficile toute mise en œuvre expérimentale de cette méthode pour la préparation de superpositions macroscopiques. Il serait néanmoins intéressant d'étudier si une méthode de rétroaction quantique pourrait permettre d'augmenter la vitesse de convergence.

2.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons rencontré les états collectifs de spin qui sont au cœur de l'interférométrie à plusieurs corps. Nous avons constaté que des ensembles décorrélés, formant des états dits cohérents, induisent un bruit de grenaille en sortie d'un interféromètre ce qui

restreint la sensibilité à la limite quantique standard. Nous avons de plus vu que l'utilisation de certains ensembles corrélés permet de dépasser cette barrière pour atteindre la limite dite de Heisenberg. Cette étude fut aussi l'occasion de présenter le couplage atome-champ et la manière dont il est utilisé pour mettre en œuvre l'interféromètre de Ramsey.

L'étude de la mesure d'état de spin cohérents nous a permis de lier le concept de mesure en mécanique quantique à l'interférométrie atomique. Plus précisément, nous avons vu comment les propriétés de la mesure peuvent être mises en œuvre dans le cadre de l'ingénierie des états quantiques appliquée à l'interférométrie atomique. Nous avons constaté que, sous certaines conditions, la mesure pouvait préparer des états de spin comprimés, mais aussi des chats de Schrödinger, ou bien encore qu'elle pouvait intriquer deux ensembles atomiques distincts.

L'étude de la mesure non-destructive reposant sur la technique de spectroscopie par modulation de fréquence ne doit bien sûr rien au hasard, puisqu'il s'agit de la méthode que nous souhaitons mettre en œuvre expérimentalement. Nous montrerons, au chapitre suivant, que cette méthode offre de nombreux avantages pratiques.

Mesure non-destructive d'un ensemble de spins indiscernables

*A l'origine n'est pas le mot, mais la phrase,
une modulation. Ecoutez le chant des oiseaux!*
Blaise Cendrars

Si les états de spin cohérents sont si importants en interférométrie c'est parce qu'un interféromètre est un appareil qui mesure la cohérence. Par conséquent, une mesure non-destructive appliquée à l'interférométrie doit être non-destructive au sens où elle préserve la cohérence de l'ensemble atomique sondé. Nous avons au cours des chapitres précédents donné des pistes sur la manière dont une telle mesure peut être mise en œuvre, notamment grâce à une mesure indirecte où des photons sondent l'ensemble atomique avant d'être détectés destructivement sur une photodiode.

Il faut maintenant passer du concept à la réalisation expérimentale. On désire mesurer le déphasage induit par le nuage sur le faisceau de sonde, les atomes doivent donc être placés dans un interféromètre optique, mais quel interféromètre utiliser? Nous allons voir que, pour un rapport signal-à-bruit donné, l'optimum en terme de destructivité est atteint si la détection est limitée au bruit de photons. Il nous faut donc un interféromètre qui soit limité au bruit de photon pour un faible nombre de photons. Nous avons fait le choix d'utiliser la *spectroscopie par modulation de fréquence*, nous verrons que cette technique répond au problème car c'est une détection hétérodyne combinée à une excellente réjection du bruit de phase provoqué par les fluctuations de chemin optique.

Ce chapitre commencera donc par une présentation de la spectroscopie par modulation de fréquence, on y exposera l'intérêt d'une détection hétérodyne en termes de rapport signal-à-bruit et de réjection du bruit de phase. Après une analyse des contraintes qu'implique la non-destructivité, nous présenterons la mise en œuvre expérimentale. Nous nous pencherons notamment sur la photodiode ultra-rapide au cœur du dispositif et montrerons que la détection est limitée au bruit de photon. Nous expliquerons ensuite comment est préparé l'état de spin cohérent, avant de démontrer la capacité de la détection à suivre, de manière non-destructive, l'évolution cohérente d'un ensemble atomique. Nous présenterons enfin quelques raffinements nécessaires à la suite de nos péripéties. Nous verrons que notre méthode permet intrinsèquement de compenser le déplacement lumineux provoqué par la sonde, ce qui est fondamental pour les applications en interférométrie. Finalement, nous présenterons un interféromètre de Ramsey réalisé directement avec des atomes piégés prouvant que l'on peut effectuer des manipulations cohérentes tout en conservant un excellent contrôle des propriétés physiques du nuage.

3.1 La spectroscopie par modulation de fréquence comme sonde non-destructive

Afin de mesurer une population atomique, deux approches sont envisageables : l'une consiste à faire fluorescer les atomes à l'aide d'une excitation proche de résonance, l'autre utilise la dispersion induite sur une sonde. La première méthode est très sensible mais présente l'inconvénient de détruire la cohérence de l'échantillon atomique d'autant plus qu'il est quasiment impossible de récupérer l'ensemble des photons diffusés. La seconde technique mesure le déphasage induit par l'échantillon sur une sonde optique, ce déphasage étant non négligeable même loin de transition il est possible de mesurer une population atomique tout en réduisant drastiquement le taux l'émission spontanée. On peut alors réaliser une mesure dite non-destructive dans le sens où elle préserve, du moins partiellement, la cohérence de l'état observé.

Il existe plusieurs techniques de mesures dispersives, plus précisément, il existe plusieurs manières de mesurer le déphasage induit par le nuage atomique sur une sonde optique : un interféromètre de Mach-Zehnder peut être utilisé [Appel 09b], on peut aussi transformer le déphasage en une intensité en utilisant la transmission autour de la résonance d'une cavité optique [Schleier-Smith 10, Leroux 10b], une autre méthode consiste à mesurer la rotation de polarisation induite par effet Faraday [Takano 09, Koschorreck 10]. Nous allons présenter en détail la technique dite de spectroscopie par modulation de fréquence que nous noterons de manière raccourcie, spectroscopie FM.

3.1.1 La spectroscopie par modulation de fréquence

3.1.1.1 Principe

La spectroscopie par modulation de fréquence repose sur le principe suivant : le faisceau sonde est modulé en phase produisant ainsi deux bandes latérales autour de la porteuse ; la porteuse et une des deux bandes latérales sont situées loin de résonance et ne subissent aucun déphasage tandis que l'autre bande latérale, plus proche de résonance, est déphasée lorsqu'elle traverse le nuage. Le déphasage entre cette bande latérale et la porteuse produit un battement à la fréquence de modulation lors de la détection du faisceau sur une photodiode, l'amplitude de ce battement dépend du déphasage et par conséquent de la population du niveau sondé. Avec cette méthode, la porteuse sert donc de référence de phase, la séparation de la référence est donc spectrale à la différence de l'interféromètre de Mach-Zehnder où la séparation est spatiale.

La spectroscopie FM est une méthode de détection hétérodyne, cela lui procure un grand avantage puisqu'elle permet de réaliser une détection limitée au bruit de photon d'une faible bande latérale grâce au battement avec la porteuse. En effet, si N_c désigne le nombre de photons dans la porteuse et N_s celui dans la bande latérale, alors le rapport signal-à-bruit est :

$$\text{SNR} \propto \sqrt{\frac{N_c N_s}{N_c + N_s + N_d}}, \quad (3.1)$$

où N_d est le bruit de l'électronique du photodétecteur exprimé en nombre de photons équivalent. Dans la limite où l'intensité dans la porteuse est grande comparée à celle dans la bande latérale ($N_c \gg N_s$) et si la détection est limitée au bruit de photon de la porteuse ($N_c \gg N_d$) alors le rapport signal-à-bruit devient :

$$\text{SNR} \propto \sqrt{N_s}, \quad (3.2)$$

la détection est alors limitée au bruit de photon de la bande latérale, et ce quel que soit sa puissance optique. Cette propriété de la détection hétérodyne en fait un excellent candidat pour une détection non-destructive où on désire être limité au bruit de photon avec une sonde la plus faible possible afin d'extraire le maximum d'information pour une destructivité (nombre d'émissions spontanées) donnée.

3.1.1.2 Premiers résultats

Afin de s'approprier la méthode, nous avons dans un premier temps réalisé la spectroscopie par modulation de fréquence d'atomes dans une cellule. Le montage réalisé est décrit Fig. 3.1. Une spectroscopie par absorption saturée est effectuée en parallèle. Sur ce montage, la fréquence de modulation est de 8 GHz, le battement est détecté avec une photodiode rapide G4176-03 de chez Hamamatsu suivie par deux amplificateurs LCA-0408 de chez Miteq (le gain transimpédance de la détection est donc l'impédance d'entrée de 50Ω des amplificateurs).

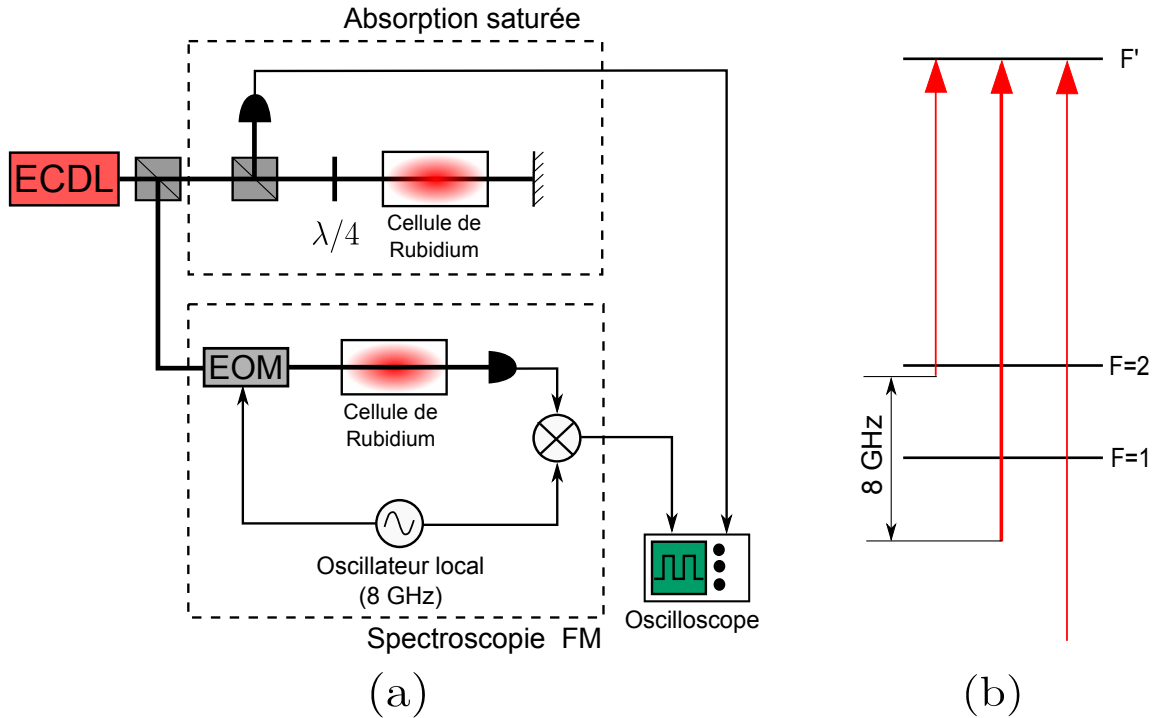


Figure 3.1 – (a) Schéma du montage utilisé pour la spectroscopie par modulation de fréquence sur une cellule. (b) Position de la porteuse (flèche épaisse) et des bandes latérales (flèches fines) lors de la spectroscopie du ^{87}Rb réalisée sur le piège magnéto-optique.

Le résultat obtenu est présenté Fig. 3.2 où la transition D2 du ^{85}Rb est sondée. On observe un profil dispersif de même largeur que le profil Doppler présent sur l'absorption spontanée. On peut aussi remarquer un effet de la structure hyperfine dans le profil dispersif de la spectroscopie FM, celui-ci est dû à une réflexion parasite sur la photodiode qui sature la transition lorsqu'elle revient dans la cellule.

A l'aide du même montage, la spectroscopie de la transition $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}\rangle$ du ^{87}Rb avec des atomes dans le piège magnéto-optique (MOT) a ensuite été réalisée. La configuration utilisée pour la porteuse et les bandes latérales lors de cette mesure est exposée Fig. 3.1 (b). Le résultat obtenu est présenté Fig. 3.3, on résout très clairement la structure hyperfine de la transition.

3.1.2 Réjection des bruits de mode commun

Comme nous l'avons vu précédemment, le fait que la spectroscopie par modulation de fréquence soit une détection hétérodyne aide grandement la détection à être limitée au bruit de photon. Ce n'est toutefois pas aussi simple car un certain nombre de bruits techniques, autres que ceux du détecteur, peuvent dégrader la qualité de la détection. Parmi ces bruits, la contribution

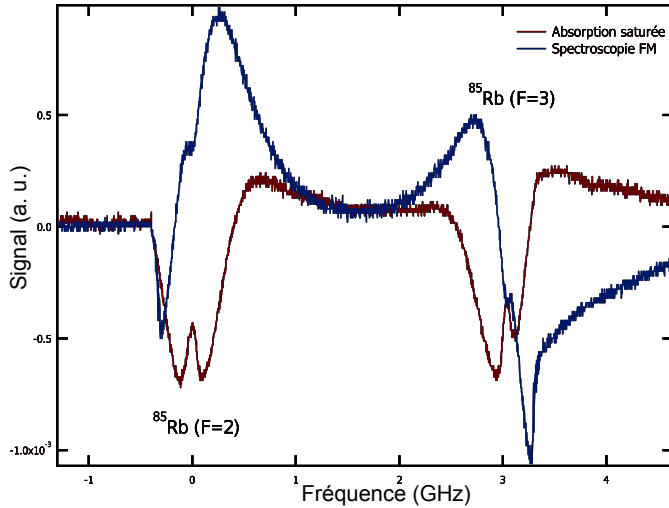


Figure 3.2 – Spectroscopie par modulation de fréquence sur une cellule. Comparaison entre la spectroscopie par absorption saturée et la spectroscopie par modulation de fréquence.

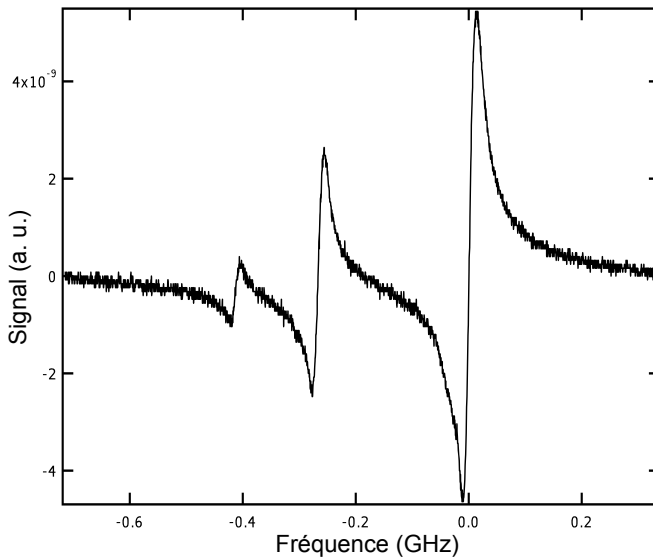


Figure 3.3 – Spectroscopie par modulation de fréquence de la transition $|5S_{1/2}, F=2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}\rangle$ du ^{87}Rb d'atomes dans le piège magnéto-optique.

dominante provient des fluctuations de chemin optique entre le faisceau sonde et le faisceau servant de référence de phase. C'est là qu'intervient un autre avantage majeur de la spectroscopie FM puisque ces deux faisceaux sont séparés spectralement et non spatialement, ils suivent donc tous deux le même chemin dans l'espace. Il convient toutefois de nuancer ce propos, en effet, on peut argumenter que la référence de phase est en fait l'oscillateur local qui est quant à lui séparé spatialement¹, toutefois, cet oscillateur est dans le domaine micro-onde, sa longueur d'onde est donc centimétrique, si on la compare à la longueur d'onde micrométrique d'un signal optique, on constate immédiatement que la sensibilité aux fluctuations de longueurs est fortement réduite.

Nous allons maintenant donner une expression précise du signal détecté et étudier la sensibilité de ce dernier à une fluctuation de longueur du chemin optique. Notons ω_c la pulsation de la porteuse optique, le champ électrique lorsque la porteuse est modulée en phase par une onde radio-fréquence de pulsation Ω s'écrit :

$$E = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_c t + n\Omega t), \quad (3.3)$$

1. On peut en fait interpréter la spectroscopie FM comme un interféromètre de Mach-Zehnder dans le domaine micro-onde dont un des deux bras évolue sur une porteuse optique modulée en phase.

où β est la profondeur de modulation et J_n désigne la fonction de Bessel du premier type d'ordre n . Dans le cas d'une faible modulation ($\beta \ll 1$), on pourra ne conserver que les premiers ordres ($n = -1, 0, 1$) du développement précédent, l'ordre $n = 0$ correspondant à la porteuse, les ordres $n = \pm 1$ désignant les deux bandes latérales. On note ϕ_{-1} , ϕ_0 et ϕ_1 les déphasages acquis par chacun des ordres lors de l'évolution spatiale du faisceau. Le photocourant en sortie du détecteur est alors :

$$i_{\text{det}} = \eta P_{\text{opt}} \{1 + \beta \cos [\Omega (t - L/c)] \Delta\Phi_+ + \beta \sin [\Omega (t - L/c)] \Delta\Phi_-\}, \quad (3.4)$$

où L est la distance entre le modulateur et le détecteur, P_{opt} la puissance optique de la porteuse, η est la sensibilité de la photodiode et

$$\Delta\Phi_+ = \cos(\phi_1 - \phi_0) - \cos(\phi_0 - \phi_{-1}), \quad (3.5)$$

$$\Delta\Phi_- = \sin(\phi_1 - \phi_0) - \sin(\phi_0 - \phi_{-1}). \quad (3.6)$$

Le signal est alors obtenu après démodulation avec l'oscillateur local, $\sin(\Omega t + \Phi_{\text{dem}})$, dont la phase est ajustée à $\Phi_{\text{dem}} = -\Omega L/c$, il vaut :

$$S_0 = \eta\beta P_{\text{opt}} \Delta\Phi_-. \quad (3.7)$$

Si dans la bande passante de détection la longueur L présente des fluctuations d'écart-type δL , alors le signal détecté fluctuera de la quantité suivante :

$$\delta S_L = 2\pi\eta\beta P_{\text{opt}} \frac{\delta L}{\lambda_{\text{mod}}} \Delta\Phi_+, \quad (3.8)$$

où $\lambda_{\text{mod}} = 2\pi c/\Omega$ est la longueur d'onde de l'oscillateur local. Si seul l'ordre $n = 1$ est déphasé par le nuage atomique : $\phi_1 = \phi_{\text{at}} \ll 1$ et $\phi_{-1} = \phi_0 = 0$ alors le signal est $S_0 = \eta\beta P_{\text{opt}} \phi_{\text{at}}$ et la sensibilité de ce dernier aux fluctuations de longueur vaut, à l'ordre deux en ϕ_{at} :

$$\delta S_L \sim \pi\eta\beta P_{\text{opt}} \frac{\delta L}{\lambda_{\text{mod}}} \phi_{\text{at}}^2, \quad (3.9)$$

les fluctuations sont donc rejetées par un facteur plus important que $\delta L/\lambda_{\text{mod}}$ puisque ce terme est pondéré par ϕ_{at}^2 qui en pratique sera très faible.

En réalité toutefois, la modulation de phase n'est pas parfaite et une modulation d'amplitude résiduelle existe, elle peut être limitante lors d'une spectroscopie FM [Gehertz 85]. La modulation d'amplitude résiduelle apparaît lorsque l'amplitude des deux bandes latérales est déséquilibrée, le champ électrique en sortie du modulateur est donc de la forme :

$$E = E_0 e^{i\omega_c t} \left[1 + \beta(1 + \epsilon) e^{i\Omega t} - \beta(1 - \epsilon) e^{-i\Omega t} \right], \quad (3.10)$$

après démodulation avec la même phase que lors d'une modulation de phase pure, le signal devient :

$$S = \eta\beta P_{\text{opt}} \left[\Delta\Phi_- + \epsilon \Delta\Phi_-^{\text{AM}} + 2\pi \frac{\delta L}{\lambda_{\text{mod}}} \left(\Delta\Phi_+ + \epsilon \Delta\Phi_+^{\text{AM}} \right) \right], \quad (3.11)$$

avec $\Delta\Phi_+^{\text{AM}} \sim 2 + \phi_{\text{at}}^2/2$ et $\Delta\Phi_-^{\text{AM}} = \phi_{\text{at}}$. Une fluctuation d'amplitude δL du chemin optique entraîne alors la fluctuation suivante sur le signal détecté :

$$\delta S_L = \pi\eta\beta P_{\text{opt}} \frac{\delta L}{\lambda_{\text{mod}}} \left(\phi_{\text{at}}^2 + \epsilon \right). \quad (3.12)$$

Si on compare cette sensibilité à celle d'un interféromètre de Mach-Zehnder travaillant à une longueur d'onde optique λ , les fluctuations de longueur sont rejetées avec un facteur $(\phi_{\text{at}}^2 + \epsilon) \lambda/\lambda_{\text{mod}}$.

Nous verrons plus loin (Sec. 3.3.3.2) que la modulation d'amplitude résiduelle de notre modulateur électro-optique est $\epsilon \sim 10^{-2}$, en prenant $\lambda_{\text{mod}} = 10$ cm, $\lambda = 1 \mu\text{m}$ et en supposant $\phi_{\text{at}}^2 \ll \epsilon$, les fluctuations de longueurs sont rejetées de 7 ordres de grandeurs par rapport à un interféromètre de Mach-Zehnder. On remarque aussi que pour ne pas être limité par la modulation d'amplitude résiduelle il faut $\phi_{\text{at}}^2 \gg \epsilon$, dans notre cas, cela impose donc $\phi_{\text{at}} \gg 0.1$ rad, ce qui est un fort déphasage. Notons enfin que des méthodes existent pour compenser cette modulation d'amplitude résiduelle [Wong 85, Whittaker 88].

3.2 Définition de la non-destructivité et contraintes expérimentales

On dira qu'une mesure est non-destructive si elle préserve la cohérence de l'échantillon observé. Puisque nous cherchons à mesurer l'opérateur collectif J_z associé à un ensemble de spins indiscernables, préserver la cohérence signifie conserver la longueur du vecteur de Bloch moyen de l'état collectif $\|\langle \mathbf{J} \rangle\|$. Dans le cas d'une mesure avec une sonde optique on distinguera deux phénomènes conduisant à la décohérence de l'échantillon : le déplacement lumineux et l'émission spontanée. Le déplacement lumineux provoque une inhomogénéité spatiale qui induit une forme de discernabilité entre les atomes, il n'est toutefois pas limitant car il peut être compensé comme nous le verrons Sec. 3.6. La source de décohérence véritablement limitante est donc l'émission spontanée induite par la sonde, dans la suite, ce que nous nommerons décohérence fera donc exclusivement référence à cet effet.

Mais que signifie une mesure qui préserve la cohérence ? Si l'objectif est d'éviter toute émission spontanée, il suffit de ne pas envoyer de lumière à travers l'échantillon mais dans ce cas il n'y aura pas de mesure, ce qui n'est pas vraiment le résultat recherché. Pour réaliser une mesure, *i.e.* extraire de l'information du système observé, il faut envoyer des photons pour sonder l'échantillon, ce qui engendre une probabilité d'émission spontanée non nulle, dès lors il ne s'agira pas de conserver la cohérence mais d'extraire le maximum d'information possible pour une décohérence donnée.

Si le désaccord Δ de la sonde est grand par rapport à la largeur de la transition ($\Delta \gg \Gamma$) alors le déphasage subit à la traversée du nuage évolue comme $1/\Delta$ tandis que le taux d'émission spontanée chute comme $1/\Delta^2$. Il semble donc *a priori* qu'en augmentant le décalage par rapport à la transition, on peut conserver un déphasage raisonnable pour un taux d'émission spontanée négligeable, ce n'est pas tout à fait vrai. En effet, le rapport signal-à-bruit de la détection pour un décalage Δ est :

$$\text{SNR}_{\Delta} = \sqrt{N_p} \phi_{\Delta} N_{\text{at}}, \quad (3.13)$$

où N_p est le nombre de photons dans les bandes latérales utilisé lors de la détection, N_{at} est le nombre d'atomes présents dans l'échantillon et ϕ_{Δ} est le déphasage effectif induit par un atome sur une sonde avec un décalage Δ . Supposons maintenant qu'on augmente le décalage de la sonde à 2Δ alors $\phi_{2\Delta} = \phi_{\Delta}/2$, si de plus on veut maintenir constante la destructivité, il faut augmenter le nombre de photons selon $N_p \rightarrow 4N_p$, le rapport signal-à-bruit est alors :

$$\text{SNR}_{2\Delta} = \sqrt{4N_p} \frac{\phi_{\Delta}}{2} N_{\text{at}} = \text{SNR}_{\Delta}, \quad (3.14)$$

on n'améliore donc pas le rapport signal-à-bruit en augmentant le décalage de la sonde par rapport à la transition. Le choix du désaccord est par conséquent un paramètre non contraignant, la seule condition étant qu'il doit être grand devant la largeur Γ de la transition.

Puisque l'important est de récupérer le maximum d'information possible pour une destructivité donnée, *i.e.* pour un nombre de photons donné, la condition primordiale d'une telle détection est donc d'être limitée au bruit de photon car cela assure d'obtenir le meilleur rapport signal-à-bruit possible pour un nombre de photons donné. Dans l'idéal, la détection doit en plus être

limitée au bruit de photon pour un faible nombre de photons afin d'obtenir le maximum d'information tout en pouvant choisir une destructivité aussi faible que possible. Nous avons vu plus haut qu'une détection hétérodyne offre l'avantage d'obtenir une détection limitée au bruit de photon pour une sonde arbitrairement faible à partir du moment où la détection est limitée au bruit de photon de la porteuse. En pratique, cela signifie qu'on pourra diminuer la puissance dans les bandes latérales tant que la destructivité est limitée par ces dernières et non par la porteuse, autrement dit, plus l'intensité de la porteuse sera faible et plus elle sera éloignée des bandes latérales, plus on pourra diminuer la destructivité. Cela nécessite donc de disposer d'un détecteur limité au bruit de photon pour une puissance incidente la plus faible possible tout en ayant la plus grande bande-passante possible, c'est sur ce point qu'il va nous falloir trouver un compromis.

3.3 Mise en œuvre expérimentale

Après les essais préalables exposés Sec. 3.1.1.2, nous présentons la mise en œuvre à proprement parler de la détection non-destructive. Nous donnerons tout d'abord une description générale du montage utilisé. Nous nous focaliserons ensuite sur la photodiode ultra-rapide utilisée pour la détection, celle-ci étant le point clef du montage, nous analyserons en particulier son bruit. La photodiode nous permettra aussi d'étudier le bruit du laser. Cette analyse sera suivie par une caractérisation du modulateur de phase avec, entre autres, une mesure de la modulation d'amplitude résiduelle. Enfin, nous analyserons le signal obtenu après démodulation afin de tester l'ensemble de la détection. Nous montrerons comment utiliser le bruit de photon pour mesurer le gain de la détection.

3.3.1 Présentation générale du montage

Le schéma général du dispositif de détection non-destructive utilisant la spectroscopie par modulation de fréquence est présenté Fig. 3.4. Un laser asservi par battement sur le laser repompeur traverse un modulateur acousto-optique utilisé pour générer des impulsions avec un temps de montée de 300 ns. Il est ensuite injecté dans le modulateur de phase qui génère les bandes latérales nécessaires à la spectroscopie. Le faisceau traverse alors le nuage atomique situé dans l'enceinte à vide avant d'être focalisé sur la photodiode à l'aide d'une lentille asphérique. Le signal après démodulation est numérisé grâce à un oscilloscope avant que les données ne soient transférées sur un ordinateur. Une antenne micro-onde alimentée par une chaîne de fréquence à 6.834 GHz [Bernon 11a] permet de réaliser des manipulations cohérentes sur l'échantillon atomique.

La source optique utilisée pour la détection est une diode laser montée en cavité étendue [Baillard 06], sa largeur spectrale est d'environ 300 kHz. Elle est asservie en fréquence par rapport à la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ de la raie D2 du ^{87}Rb à l'aide d'un battement avec le laser repompeur, lui même asservi sur le croisement des transitions $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 1, 2\rangle$ grâce à une spectroscopie par absorption saturée [Bernon 11a]. Le battement est détecté sur une photodiode rapide G4176-03 de chez Hamamatsu suivie par deux amplificateurs LCA-0408 de chez Miteq avant d'être envoyé à un détecteur de phase haute fréquence (PLL, modèle ADF4108 de chez Analog Devices) fournissant un signal d'erreur [Appel 09a]. Le signal d'erreur est alors intégré avant de réagir sur le courant de la diode laser, puis il est intégré une seconde fois afin de corriger les fluctuations basses fréquences sur le piézo-électrique contrôlant la longueur de la cavité étendue. Ce dispositif nous permet d'asservir le laser à une position arbitraire dans une limite d'environ 10 GHz d'un côté et de l'autre de la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$.

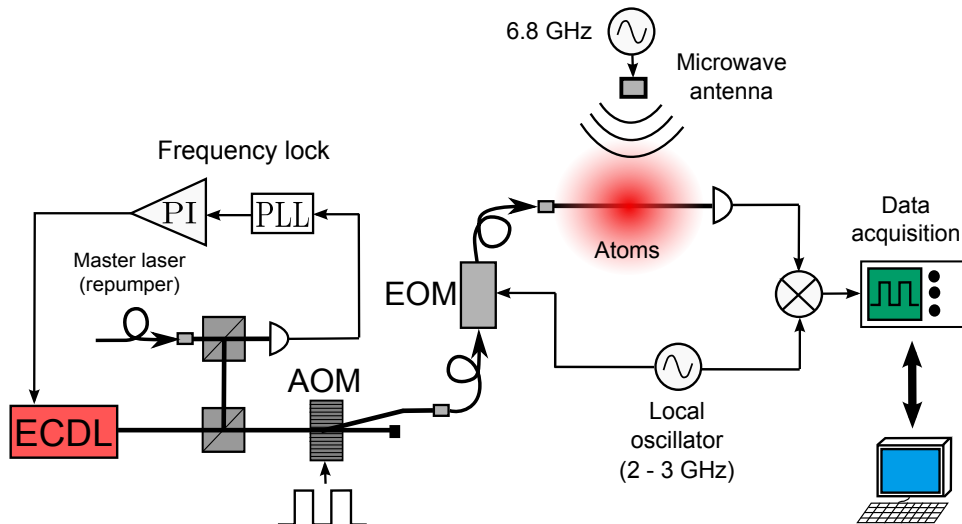


Figure 3.4 – Schéma général du système de détection non-destructive.

3.3.2 Le détecteur optique

Le détecteur optique est l'élément clef du système. Le choix et la conception du détecteur repose sur le compromis signal-à-bruit/bande-passante, qui est étudié en détail pour un certain nombre de montages types dans l'Annexe D. Un photodétecteur produit un courant proportionnel au flux optique incident, ce courant est ensuite transformé en une tension à l'aide d'un amplificateur transimpédance. L'amplificateur transimpédance le plus simple est composé d'une résistance, la tension aux bornes de celle-ci étant proportionnelle au courant la traversant et donc au flux optique. Cette résistance est alors montée en parallèle avec la capacité parasite de la photodiode, ce qui a pour effet de limiter la bande passante de détection : pour augmenter la bande-passante, il faut diminuer la valeur de la résistance. Hélas cela ne va pas dans l'intérêt du rapport signal-à-bruit, en effet pour que le bruit de photon domine le bruit Johnson de la résistance, il faut au contraire augmenter la valeur de cette dernière, d'où le compromis sur le choix de la valeur de la résistance. Un montage utilisant un amplificateur opérationnel (voir Annexe D) aide grandement à améliorer les performances du détecteur, mais ultimement le compromis demeure (d'autant plus qu'il est quasiment impossible de trouver des amplificateurs opérationnels fonctionnant dans le régime hyperfréquence).

Dans notre cas, nous avons besoin d'une grande bande passante de plusieurs GHz et nous désirons le meilleur rapport signal-à-bruit possible. Afin d'atteindre une grande bande passante sans sacrifier la valeur de la résistance, il faut minimiser la capacité parasite de la photodiode. Pour les photodiodes rapides, le boîtier limite souvent la capacité (~ 0.1 pF), la solution consiste alors à intégrer l'amplificateur transimpédance dans le même boîtier, ce qui réduit environ d'un facteur 10 la capacité parasite et augmente d'autant la bande passante². Des photodiodes rapides avec amplificateur intégré ont été développés pour les besoins des télécommunications optiques, nous avons donc naturellement cherché à utiliser ce type de technologie.

2. Une autre méthode consisterait à utiliser un circuit résonnant en remplaçant la résistance par une inductance et une capacitance en ajustant la fréquence de résonance avec celle de la détection, on peut alors obtenir un très grand gain. C'est probablement la meilleure méthode si on connaît exactement la fréquence de détection, toutefois dans notre cas nous voulions avoir la liberté de ce paramètre. De plus, réaliser un tel amplificateur pour des hyperfréquences reste difficile et nécessite probablement d'être intégré [Analui 04].

3.3.2.1 La photodiode avec amplificateur transimpédance intégré

Par chance, il existe une bande à 850 nm pour les télécommunications optiques, cela nous permet de disposer de photodiodes avec amplificateur transimpédance intégré fonctionnant à la longueur d'onde de détection de 780 nm. Nous utiliserons la photodiode HFD3180-203 de chez Finisar qui possède une bande passante d'environ 4 GHz et un gain transimpédance de l'ordre du $k\Omega$. Un schéma simplifié de la photodiode et de l'amplificateur transimpédance est présenté Fig. 3.5, en utilisant les notations de cette figure, on définit le gain du détecteur de la manière suivante :

$$G_{\text{PD}} = \frac{V_{\text{out}}}{P_{\text{opt}}} = gR_F S, \quad (3.15)$$

où $S \sim 0.5 \text{ A/W}$ est la sensibilité de la photodiode. Le schéma électronique et le circuit imprimé utilisés pour monter la photodiode sont décrits dans l'Annexe E.

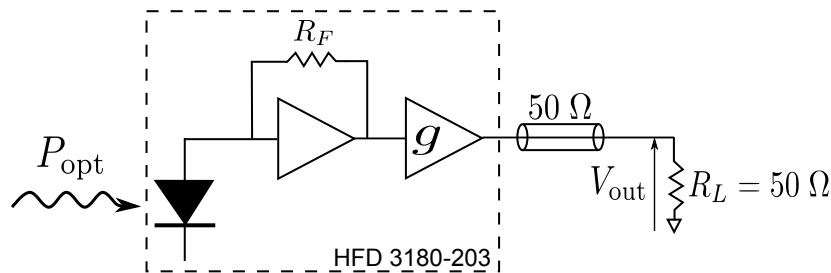


Figure 3.5 – Schéma du détecteur optique. Il est composé d'une photodiode PIN rapide en GaAs à laquelle est connecté un amplificateur transimpédance de gain R_F suivi par un étage de sortie avec un gain g faisant office de tampon.

3.3.2.2 Bruit de photon et mesure du gain de la photodiode

Pour étudier dans quelles conditions la détection est limitée au bruit de photon, on a mesuré le bruit en sortie de la photodiode en fonction de la puissance optique incidente. Pour cela, la densité spectrale de puissance de bruit à une fréquence de détection donnée est mesurée à l'aide d'un analyseur de spectre, en effet, l'analyseur de spectre mesure la puissance électrique qui passe au travers d'un filtre gaussien dont la largeur à mi-hauteur est la bande passante de résolution (RBW), on obtient alors directement la densité spectrale de puissance du bruit. Avant d'être connecté à l'analyseur de spectre, le signal provenant de la photodiode est préalablement injecté dans deux amplificateurs bas-bruit ZX-60-53LN-S+ de chez Minicircuits afin que le bruit de la photodiode dépasse le bruit propre de l'analyseur de spectre. Le résultat de cette mesure pour des fréquences de détection de 1 et 2 GHz est présenté Fig. 3.6.

On constate que la densité spectrale de puissance de bruit croît linéairement avec la puissance optique incidente, cela prouve que le laser est limité au bruit de photon aux fréquences de détection étudiées ici (nous verrons plus loin que ce n'est pas le cas pour toutes les fréquences). On caractérise la qualité de la détection par le bruit électronique de la photodiode équivalent au bruit de photon, *i.e.* la puissance optique nécessaire pour générer le même bruit que l'électronique de détection, cette puissance vaut $165 \mu\text{W}$ à 1 GHz et $469 \mu\text{W}$ à 2 GHz.

La pente nous fournit une mesure directe du gain de la photodiode. En sortie de l'amplificateur transimpédance, les fluctuations de tension induites par le bruit de photon sont :

$$v_n = gR_F \sqrt{2eSP_{\text{opt}}\Delta f}, \quad (3.16)$$

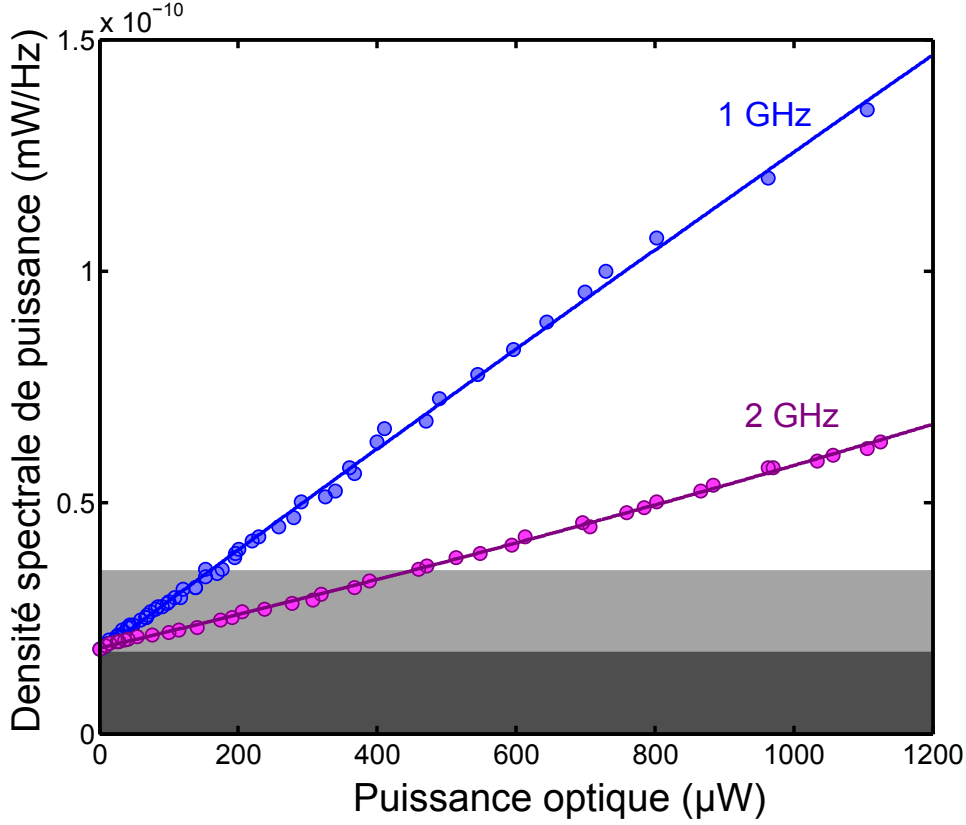


Figure 3.6 – Bruit en sortie de la photodiode en fonction de la puissance optique incidente pour différentes fréquences de détection : 1 GHz (bleu) et 2 GHz (violet). La zone en gris foncé correspond au bruit de l'électronique de détection, celle en gris clair correspond à la zone pour laquelle le bruit de photon est inférieur au bruit électronique.

où e est la charge électrique de l'électron et Δf est la bande-passante de la détection³. La densité spectrale de puissance de bruit, mesurée sur une charge $R_L = 50 \Omega$, vaut :

$$\text{PSD} = \frac{v_n^2}{R_L \Delta f} = 2e \frac{G_{\text{PD}}^2}{R_L S} P_{\text{opt}}. \quad (3.17)$$

On vérifie bien grâce à cette expression que la densité spectrale de puissance de bruit est proportionnelle à la puissance optique incidente si la détection est limitée au bruit de photon. En utilisant cette expression et les pentes mesurées Fig. 3.6, on obtient une estimation du gain de la photodiode : $G_{\text{PD}} = 1466 \text{ V/W}$ à 1 GHz et $G_{\text{PD}} = 880 \text{ V/W}$ à 2 GHz, ces valeurs sont en bon accord avec la valeur nominale de 1250 V/W fournie par le constructeur. Cette méthode nous permet alors de mesurer la réponse de la photodiode en fonction de la fréquence de détection, le résultat obtenu est présenté Fig. 3.7. A 4 GHz, le gain conserve une valeur raisonnable de l'ordre de 100 V/W , la détection est alors limitée au bruit de photon avec environ 1.5 mW de puissance optique.

3. Le filtre de l'analyseur de spectre étant gaussien, la bande passante de détection vaut :

$$\Delta f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\ln 2}} \text{RBW} \sim 1.06 \text{ RBW},$$

pour simplifier nous prendrons $\Delta f = \text{RBW}$.

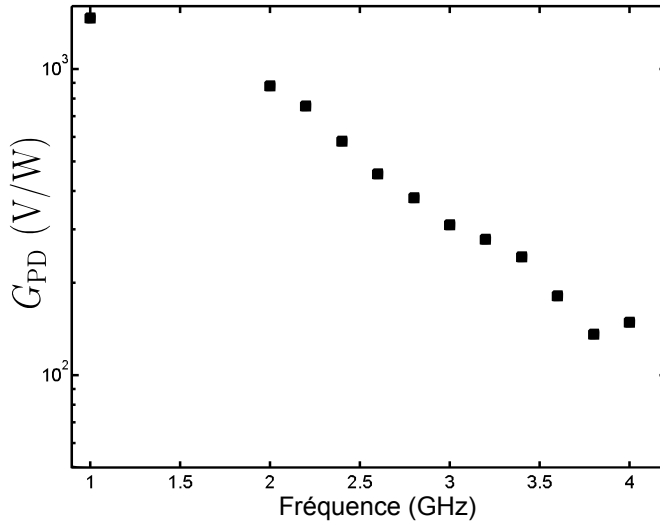


Figure 3.7 – Réponse de la photodiode en fonction de la fréquence de détection mesurée grâce au bruit de photon.

3.3.3 Caractérisation du modulateur de phase

Avec la photodiode, le modulateur de phase est le second composant essentiel de la détection, une caractérisation fine de ce dernier est donc nécessaire. Il nous faut tout d’abord connaître précisément la puissance optique dans les bandes latérales, pour cela nous avons mesuré la profondeur de modulation en fonction de la puissance de micro-onde appliquée. De plus, comme nous l’avons vu précédemment, la modulation d’amplitude résiduelle peut grandement influencer la sensibilité de la détection aux fluctuations de longueur du chemin optique et s’avère souvent le paramètre limitant pour la mesure de faibles déphasages. Nous présenterons donc une méthode de mesure de celle-ci. Le modulateur électro-optique utilisé est le modèle NIR-MPX800-LN-05 de chez Photline Technologies.

3.3.3.1 Profondeur de modulation

La puissance optique dans les bandes latérales doit être connue avec précision afin d’évaluer le couplage de la sonde avec la transition étudiée, plus précisément pour connaître le taux d’émission spontanée, le déphasage subi et le déplacement lumineux induit. Nous avons donc mesuré la profondeur de modulation du modulateur électro-optique à l’aide d’un spectromètre haute-résolution utilisant une cavité Fabry-Pérot, le résultat est présenté Fig. 3.8. On vérifie que la profondeur de modulation est proportionnelle à la puissance de l’onde radio-fréquence appliquée sur le modulateur.

3.3.3.2 Modulation d’amplitude résiduelle

Pour mesurer la modulation d’amplitude résiduelle, on exploite le fait qu’en l’absence de tout déphasage relatif entre les deux bandes latérales, la contribution liée à la modulation de phase s’annule lors de la détection du battement. En utilisant l’expression du champ électrique Eq. (3.10), on obtient la valeur de l’intensité du faisceau optique modulé :

$$|E|^2 = 4\beta P_{\text{opt}} \epsilon \cos \Omega t, \quad (3.18)$$

cette dernière est proportionnelle à la modulation d’amplitude résiduelle ϵ , par conséquent, en mesurant l’amplitude du signal à Ω sur une photodiode on peut en déduire ϵ .

On utilise la photodiode avec amplificateur transimpédance intégré présentée Sec. 3.3.2. La sortie de celle-ci est connectée à un analyseur de spectre dont l’impédance d’entrée est $R_L = 50 \Omega$,

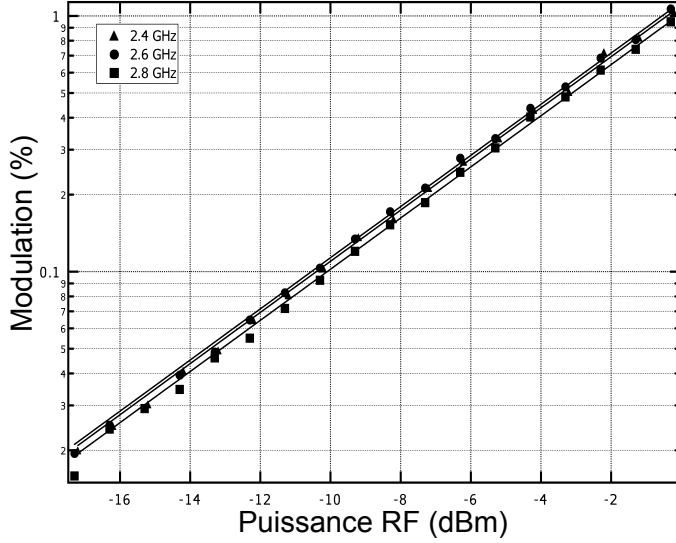


Figure 3.8 – Profondeur de modulation en fonction de la puissance de l'onde radio-fréquence appliquée sur le modulateur électro-optique pour différentes fréquences de modulation.

la puissance mesurée à la fréquence de modulation Ω est :

$$P_{\text{RF}} = \frac{\langle V^2 \rangle}{R_L} = \frac{(4G_{\text{PD}}P_{\text{opt}}\beta\epsilon)^2}{R_L} \underbrace{\langle \cos^2 \Omega t \rangle}_{1/2}, \quad (3.19)$$

où G est le gain de la photodiode. La modulation d'amplitude résiduelle est alors donnée par la relation suivante :

$$\epsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{P_{\text{RF}}R_L}}{\beta G_{\text{PD}}P_{\text{opt}}}. \quad (3.20)$$

La valeur de la profondeur de modulation β étant connue grâce à la caractérisation Sec. 3.3.3.1, on peut déterminer expérimentalement ϵ à l'aide de la relation précédente.

Nous avons mesuré la modulation d'amplitude résiduelle avec une fréquence de modulation de 2.4 GHz et une puissance optique $P_{\text{opt}} = 629 \mu\text{W}$, le résultat obtenu est présenté Fig. 3.9 pour différentes puissances micro-onde appliquées sur le modulateur. On constate que ϵ est indépendant de la puissance micro-onde utilisée et est de l'ordre de 1 %.

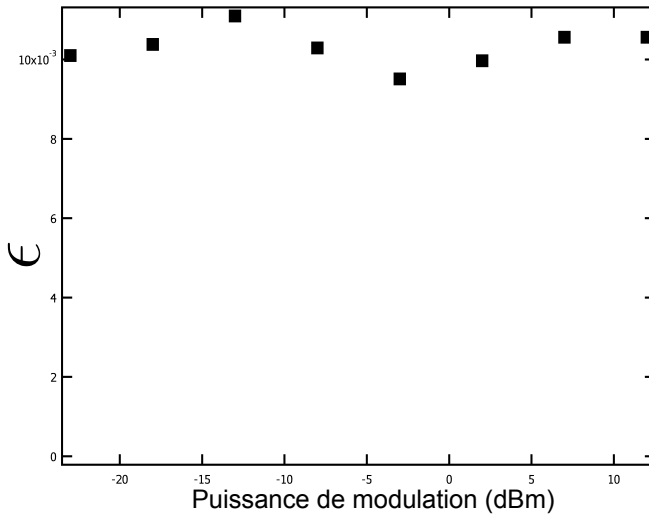


Figure 3.9 – Mesure de la modulation d'amplitude résiduelle en fonction de la puissance micro-onde appliquée sur le modulateur.

3.3.4 Bruit technique du laser

L'analyse du bruit Fig. 3.6 montre que le laser est limité au bruit de photon à 1 et 2 GHz de la porteuse (fréquence moyenne du laser), ce n'est toutefois pas le cas pour toutes les fréquences de détection. En effet, le laser utilisé est une diode en cavité étendue dont l'intervalle spectral libre est d'environ 1.5 GHz si bien que le laser n'est pas parfaitement monomode longitudinalement mais présente des oscillations résiduelles à chaque multiple de l'intervalle spectral libre où les pertes sont bien plus faibles. Ce phénomène va produire un bruit technique dont la variance évolue de manière quadratique avec la puissance optique.

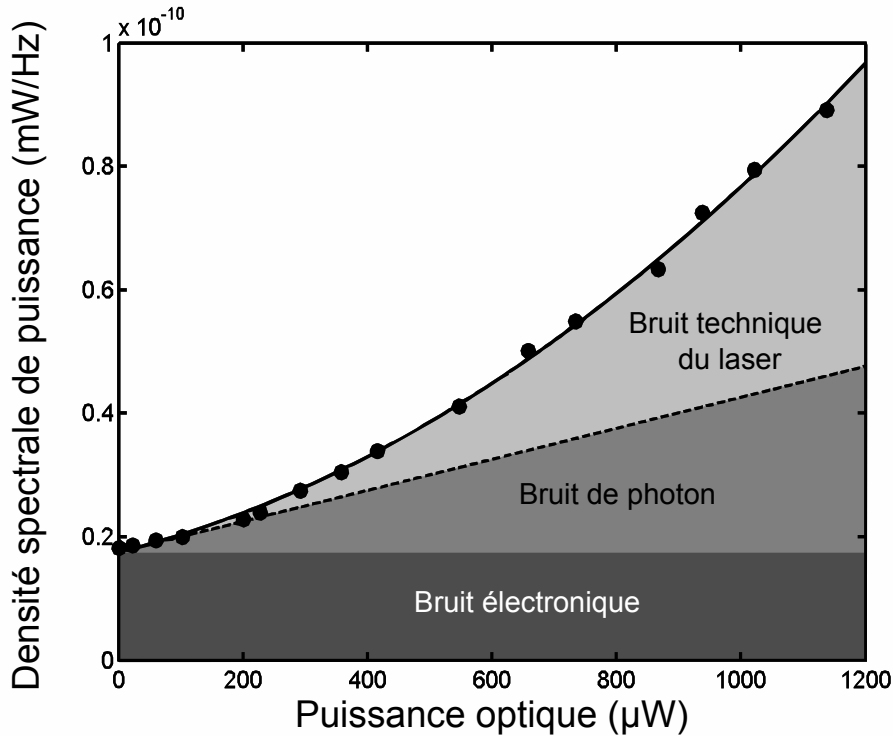


Figure 3.10 – Bruit de la détection en fonction de la puissance optique incidente à la fréquence de 3.4 GHz. Les points correspondent aux données mesurées à l'aide d'un analyseur de spectre. Le trait continu est un ajustement quadratique des données et le trait pointillé correspond à la composante linéaire de l'ajustement.

On observe ce phénomène Fig. 3.10 où sont tracées les différentes contributions au bruit en sortie de la photodiode lors d'une détection à 3.4 GHz. On constate que la variance du bruit évolue de manière quadratique avec la puissance optique, c'est le signe de l'existence d'un bruit technique sur le laser à cette fréquence de détection. On peut isoler les différentes contributions au bruit de détection à l'aide d'un ajustement quadratique des données expérimentales : la contribution indépendante de la puissance optique correspond au bruit de l'électronique de détection, celle évoluant linéairement avec la puissance est le bruit de photon et celle évoluant quadratiquement est le bruit technique.

Ce comportement quadratique du bruit technique est très limitant pour la détection hétérodyne, en effet dans ce cas le rapport signal-à-bruit Eq. (3.1) devient :

$$\text{SNR} \propto \sqrt{\frac{N_c N_s}{N_c^2 + N_s + N_d}} \xrightarrow{N_c \gg N_s, N_d} 0, \quad (3.21)$$

autrement dit, il s'effondre lorsque la puissance dans la porteuse devient importante.

3.3.5 Signal après démodulation

Nous venons d'étudier les propriétés du système avant démodulation par l'oscillateur local. L'oscillateur local étant de très bonne qualité, il peut *a priori* être considéré comme parfait, on s'attend donc à retrouver après démodulation les propriétés précédemment observées autour de la porteuse sur un signal continu. En particulier, nous devons étudier dans quelles conditions la détection est limitée au bruit de photon.

La démodulation du signal est présentée Fig. 3.11. La sortie de la photodiode est injectée dans un amplificateur hyperfréquence bas-bruit de gain G_{amp} (2 amplificateurs ZX60-33LN-S+ de chez Minicircuits pour les détections jusqu'à 3 GHz ou bien un amplificateur HMC716LP3 de chez Hittite pour des détections entre 3 et 4 GHz), le signal entre alors dans le mélangeur (ZX05-73L-S+ de chez Minicircuits) dont les pertes d'insertion sur une charge de 50Ω sont notées κ , la sortie du mélangeur est amplifiée avec un gain en tension G_{out} .

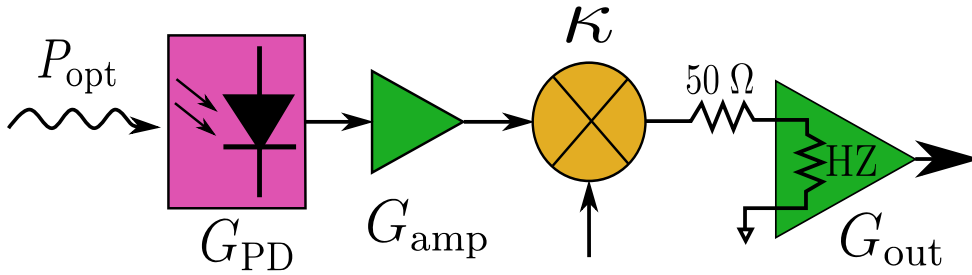


Figure 3.11 – Schéma de la démodulation du signal. HZ signifie une haute impédance d'entrée pour l'amplificateur en sortie du mélangeur.

Si le déphasage subi par la sonde lors de sa traversée de l'échantillon atomique est ϕ_{at} , et si la puissance dans une bande latérale est $P_s = \beta P_{\text{opt}}$, alors la tension mesurée en sortie est :

$$V_{\text{out}} = G P_{\text{opt}} \sqrt{\beta} \sin \phi_{\text{at}}, \quad (3.22)$$

où le gain de la détection après démodulation est :

$$G = 2 G_{\text{PD}} 10^{G_{\text{amp}}^{\text{dB}}/20} 10^{-\kappa_{\text{dB}}/20} G_{\text{out}}, \quad (3.23)$$

le facteur 2 provenant du fait que l'amplificateur en sortie du mélangeur à une haute impédance alors que les pertes de conversion du mélangeur sont caractérisées pour une impédance de sortie de 50Ω . La relation Eq. (3.22) montre que la tension de sortie doit être proportionnelle à la puissance optique incidente. Afin de vérifier cette relation de linéarité, le signal optique a été déphasé par les atomes présents dans le piège magnéto-optique, on a alors observé l'évolution du signal après démodulation en fonction de la puissance optique, le résultat Fig. 3.12 montre bien un comportement linéaire.

Nous souhaiterions maintenant mesurer le gain total G de la détection. Une méthode possible consisterait à insérer une phase ϕ_{at} bien déterminée sur le chemin optique, ce n'est toutefois pas évident. En effet, si la séparation entre le faisceau de référence et le faisceau de sonde est spatiale (comme dans l'interféromètre de Mach-Zehnder) on peut introduire un déphasage connu dans l'un des deux bras mais dans notre cas, les faisceaux sont spatialement coïncidents et seul un milieu fortement dispersif permet d'induire le déphasage d'un faisceau par rapport à l'autre. En pratique, un tel milieu est réalisé par l'échantillon atomique mais il est difficile de connaître précisément le déphasage qui est induit sur la sonde car il dépend de nombreux paramètres dont l'estimation expérimentale précise n'est pas aisée, c'est la raison pour laquelle on souhaiterait fonctionner de manière inverse, *i.e.* connaître précisément le déphasage afin d'en

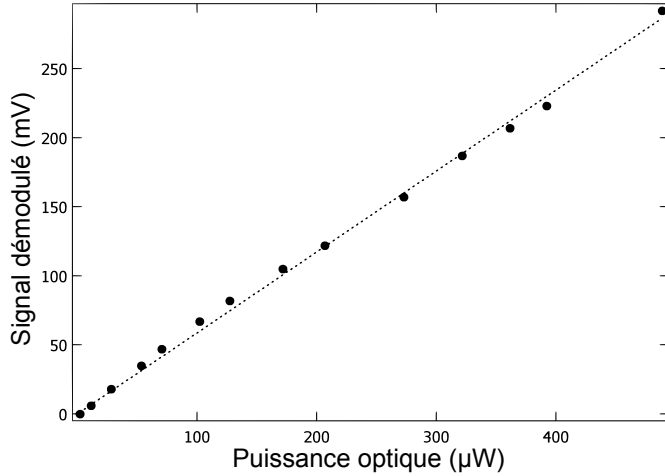


Figure 3.12 – Linéarité du signal après démodulation en fonction de la puissance optique incidente. La fréquence de modulation de la porteuse optique est 2.39 GHz.

déduire les propriétés de l'échantillon atomique. Nous allons voir qu'en fait il n'est pas nécessaire d'introduire une phase dans le faisceau, on peut extraire le gain de la détection des propriétés du bruit de photon incident sur la photodiode, c'est l'objet de l'étude qui suit.

3.3.5.1 Bruit de photon après démodulation

A partir de la densité spectrale de puissance associée au bruit de photon en sortie de la photodiode Eq. (3.17) on détermine la variance des fluctuations de tension par unité de bande passante après démodulation :

$$\delta V_{\text{out}}^2 = G_{\text{shot}} P_{\text{opt}}, \quad (3.24)$$

on retrouve bien que la variance des fluctuations dues au bruit de photon est proportionnelle à la puissance optique incidente, le coefficient de proportionnalité est :

$$G_{\text{shot}} = \frac{8e}{S} G_{\text{out}}^2 G_{\text{PD}}^2 10^{G_{\text{amp}}^{\text{dB}}/10} 10^{-\kappa_{\text{dB}}/10}. \quad (3.25)$$

Nous allons maintenant vérifier expérimentalement ce résultat.

Pour différentes puissances optiques incidentes sur le détecteur, on enregistre après démodulation deux impulsions rectangulaires consécutives de largeur τ , on répète cela 200 fois. Les impulsions sont alors moyennées, la moyenne de la première impulsion lors de la k -ème répétition est $S_1^{(k)}$, celle de la seconde est $S_2^{(k)}$. La variance du bruit de la détection après démodulation est alors obtenue selon :

$$\Delta S^2 = \frac{1}{2} \left\langle \left(S_2^{(k)} - S_1^{(k)} \right)^2 \right\rangle, \quad (3.26)$$

cette méthode permet de soustraire toute fluctuation intervenant sur le temps long qui sépare deux répétitions. L'écart-type décrivant l'incertude associée à l'estimation de la variance est ⁴ :

$$\sigma_{\Delta S^2} = \Delta S^2 \sqrt{2/N}, \quad (3.27)$$

où $N = 200$ est le nombre d'échantillons utilisés pour calculer la variance. Le résultat obtenu est présenté Fig. 3.13 pour la démodulation d'un signal à 2 GHz et différents temps d'intégration

4. De manière exacte la relation est

$$\sigma_{\Delta S^2} = \sqrt{\frac{2}{N-1} + \frac{\kappa}{N}} \Delta S^2,$$

où κ est le kurtosis, la distribution étant ici normale ce dernier est nul.

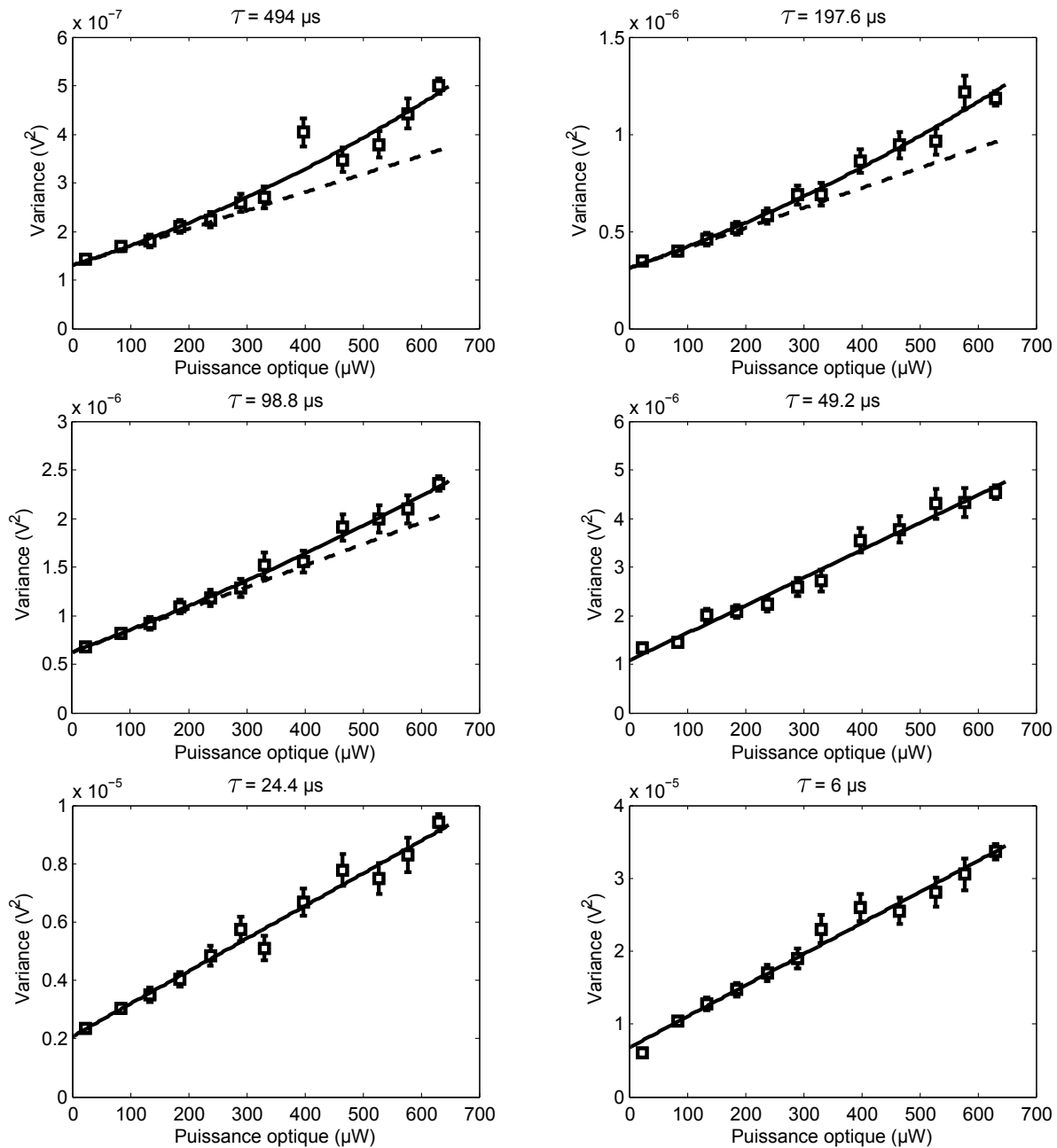


Figure 3.13 – Bruit après démodulation à 2 GHz en fonction de la puissance optique incidente. Chaque graphe correspond à un temps d'intégration τ différent. Les points carrés sont les données expérimentales. Pour les trois temps d'intégration les plus longs ($\tau = 494, 197.6, 98.8 \mu s$), la ligne continue est le résultat d'un ajustement quadratique des données et la ligne pointillée correspond à la composante linéaire de l'ajustement. Pour les trois temps d'intégration les plus courts ($\tau = 49.2, 24.4, 6 \mu s$), la ligne continue est le résultat d'un ajustement linéaire.

τ . On constate que pour des temps $\tau < 1 \mu\text{s}$ le comportement est linéaire, ce qui prouve que la détection est limitée au bruit de photon comme le montre l'Eq. (3.24). Pour des temps d'intégration plus longs une composante quadratique émerge, c'est le signe de l'apparition d'un bruit d'origine technique. Le bruit de photon reste néanmoins dominant sur des temps d'intégration aussi longs que $500 \mu\text{s}$, soit des temps bien supérieurs à ceux utilisés expérimentalement.

Afin de mesurer le gain global de la détection, mais aussi pour confirmer que le bruit observé est bien du bruit de photon, nous étudions la manière dont le bruit se moyenne en fonction de la largeur de la fenêtre d'intégration. La variance des fluctuations de tension mesurée dans une fenêtre temporelle rectangulaire de largeur τ est :

$$\langle \delta V_{\text{out}}^2 \rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \delta V_{\text{out}}^2(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \delta V_{\text{out}}^2(t) dt. \quad (3.28)$$

On peut évaluer cette expression en passant dans l'espace de Fourier, en effet la transformée de Fourier du contenu de l'intégrale est :

$$\mathcal{F}\left\{\text{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \delta V_{\text{out}}^2(t)\right\} = \frac{\sin(\pi\tau\nu)}{\pi\nu} * \delta V_{\text{out}}^2(\nu), \quad (3.29)$$

où l'opérateur $*$ désigne le produit de convolution et $\delta V_{\text{out}}^2(\nu) = G_{\text{shot}}P_{\text{opt}}$ est la densité spectrale de puissance du bruit de photon, c'est une constante puisque le bruit de photon est blanc. On peut alors évaluer le produit de convolution et calculer sa transformée de Fourier inverse :

$$\text{Rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \delta V_{\text{out}}^2(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{G_{\text{shot}}P_{\text{opt}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\tau\nu)}{\pi\nu} d\nu}_{=1}\right\} = G_{\text{shot}}P_{\text{opt}}\delta(t), \quad (3.30)$$

où δ désigne la distribution de Dirac. La variance du bruit de photon dans une fenêtre τ , Eq. (3.28), devient alors :

$$\langle \delta V_{\text{out}}^2 \rangle_{\tau} = \frac{G_{\text{shot}}P_{\text{opt}}}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \frac{G_{\text{shot}}P_{\text{opt}}}{\tau}. \quad (3.31)$$

A partir des ajustements des données Fig. 3.13 on obtient la valeur de G_{shot}/τ en fonction de τ , ceci est tracé Fig. 3.14. On observe bien le comportement en $1/\tau$ attendu, un ajustement des ces points nous donne expérimentalement la valeur

$$G_{\text{shot}} = (2.36 \pm 0.39) 10^{-7} \text{ V}^2 \cdot \text{W}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}. \quad (3.32)$$

En considérant les paramètres suivants $G_{\text{PD}} = 880 \text{ V/W}$, $S = 0.5 \text{ A/W}$, $G_{\text{amp}} = 30 \text{ dB}$, $G_{\text{out}} = 10$ et $\kappa_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$ et en utilisant la relation Eq. (3.25) on trouve $G_{\text{shot}} = 1.99 10^{-7} \text{ V}^2 \cdot \text{W}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$ ce qui est en bon accord avec la valeur expérimentale, toutefois pour ce résultat les pertes de conversion du mélangeur sont négligées, on s'attendrait donc à une valeur légèrement plus faible que celle mesurée. En utilisant les résultats Eq. (3.23) et Eq. (3.25), on obtient la relation suivante :

$$G = \sqrt{\frac{SG_{\text{shot}}}{2e}}, \quad (3.33)$$

ce qui nous donne une mesure du gain de la détection à 2 GHz :

$$G = (6.1 \pm 0.5) 10^5 \text{ V/W}. \quad (3.34)$$

A titre de comparaison, nous avons étudié le bruit en sortie du mélangeur lors d'une modulation à 3.4 GHz, le résultat est présenté Fig. 3.15. Lorsque nous avons observé le bruit à cette

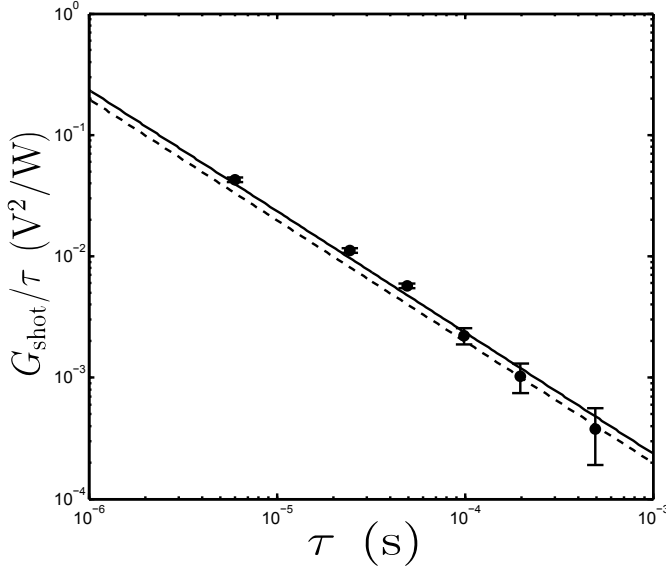


Figure 3.14 – Evolution du bruit de photon après démodulation avec le temps d'intégration pour une détection opérée à 2 GHz. Les points sont les données expérimentales, la courbe continue est un ajustement en $1/\tau$ des données. La courbe en pointillés est le résultat théorique obtenu avec les paramètres suivants $G_{PD} = 880$ V/W, $S = 0.5$ A/W, $G_{amp} = 30$ dB, $G_{out} = 10$ et $\kappa_{dB} = 0$ dB.

fréquence avant démodulation (Fig. 3.10), nous avons constaté une contribution d'origine technique au bruit, on retrouve ici ce phénomène puisque le comportement quadratique est bien plus prononcé que lors de la détection à 2 GHz (Fig. 3.13). Toutefois pour des temps d'intégration suffisamment courts ($\tau < 10 \mu\text{s}$) le bruit de photons devient dominant, or dans la pratique nous souhaitons utiliser des impulsions d'une durée d'environ $1 \mu\text{s}$, ce qui signifie qu'une détection limitée au bruit de photon à 3.4 GHz est réalisable.

3.3.6 Différentes configurations de mesure

Nous allons montrer qu'en choisissant différentes combinaisons de la position relative de la porteuse et des bandes latérales par rapport aux transitions des niveaux $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$, il est possible de mesurer, soit la population dans un seul de ces niveaux, soit la différence de population entre ces deux niveaux.

3.3.6.1 Mesure de la population dans un niveau

Afin de mesurer la population dans le niveau $|F = 1\rangle$ ou $|F = 2\rangle$, il suffit d'approcher une des bandes latérales du niveau désiré. Pour la mesure de la population dans $|F = 2\rangle$ on placera proche de résonance, la bande latérale la plus énergétique Fig. 3.16 (a), sinon la porteuse et la deuxième bande latérale risquent de se trouver proches du niveau $|F = 1\rangle$ et peuvent donc induire de l'émission spontanée, cela dépend bien sûr de la fréquence de modulation accessible par la détection. Pour la même raison, lors de la mesure de la population du niveau $|F = 1\rangle$ on placera la bande latérale la moins énergétique à proximité de la résonance.

3.3.6.2 Mesure de l'opérateur de spin collectif J_z

Il est aussi possible de mesurer directement la différence de population entre les niveaux $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$, autrement dit de mesurer l'opérateur de spin collectif J_z . On réalise cela en plaçant une bande latérale proche de la transition $|F = 1\rangle$ et l'autre proche de $|F = 2\rangle$, tel que représenté Fig. 3.16 (c). En notant S_1 le couplage de la première bande latérale au niveau $|F = 1\rangle$ et S_2 celle de la seconde à $|F = 2\rangle$, on a :

$$S_F \propto \sum_{F'} \frac{\gamma \Delta_{FF'}}{\Delta_{FF'}^2 + \gamma^2 (1 + I/I_{\text{sat}})} S_{FF'}, \quad (3.35)$$

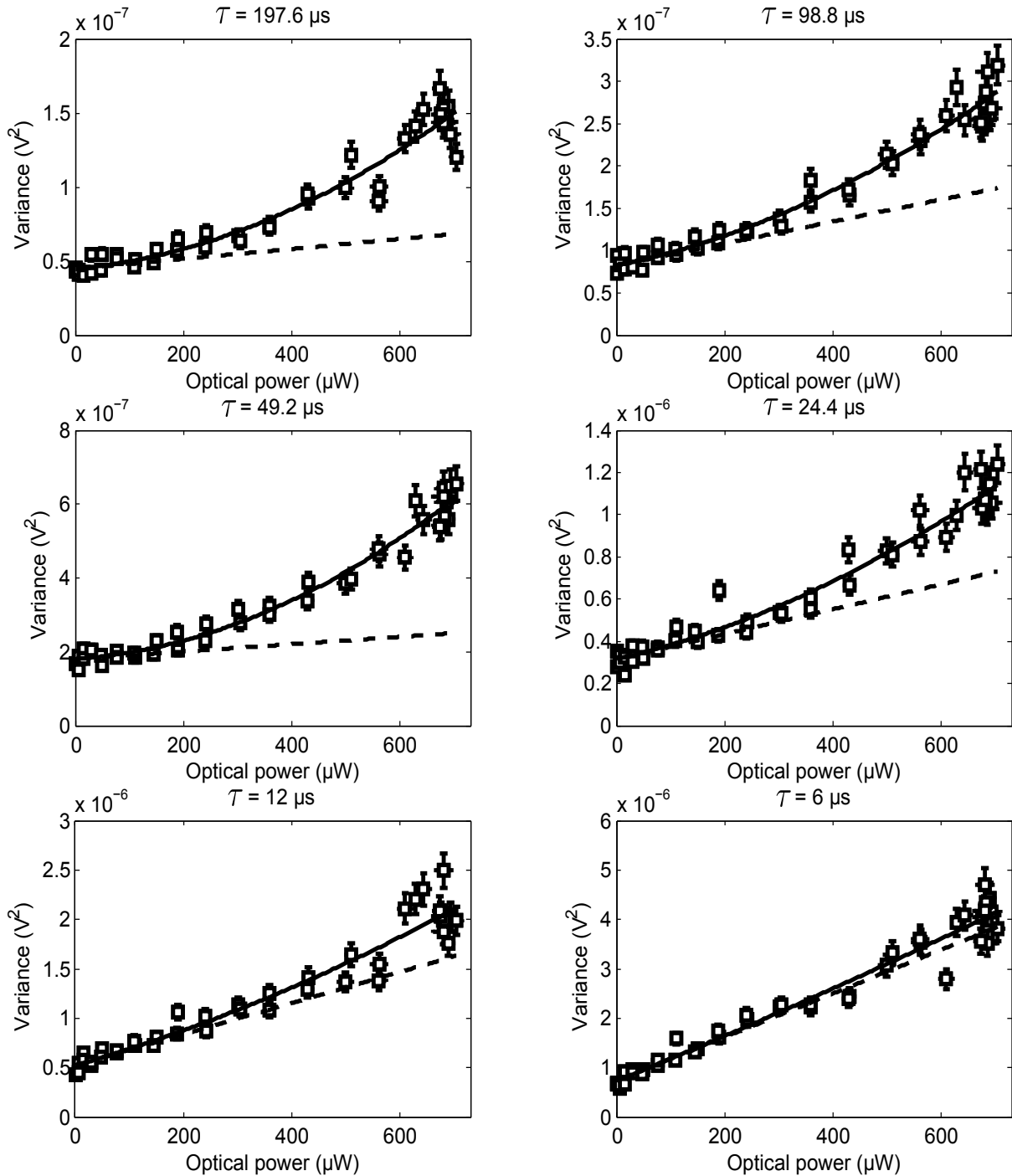


Figure 3.15 – Variance du bruit de tension après démodulation à 3.4 GHz en fonction de la puissance optique incidente pour différents temps d'intégration τ . Les carrés sont les données expérimentales, le trait continu correspond à un ajustement quadratique des données et le trait pointillé est la composante linéaire de l'ajustement.

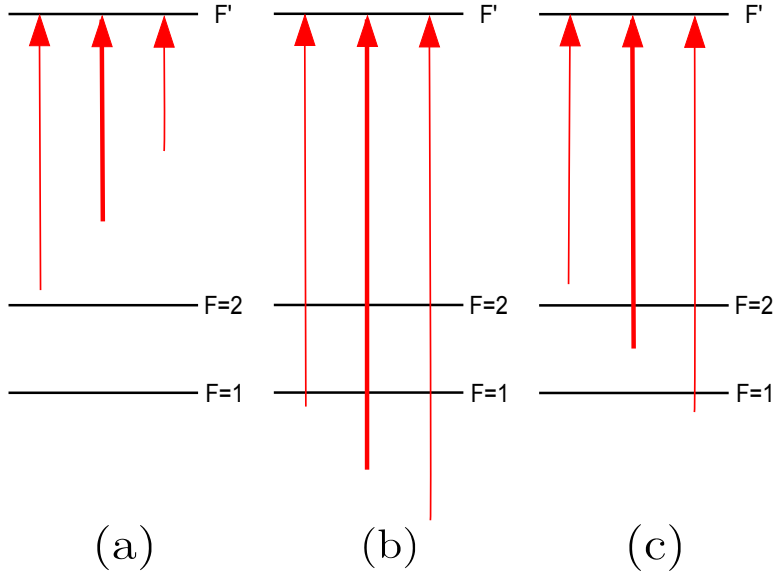


Figure 3.16 – Différentes configurations de mesure. (a) Mesure de la population dans l'état $|F = 2\rangle$. (b) Mesure de la population dans l'état $|F = 1\rangle$. (c) Mesure de l'opérateur de spin collectif J_z .

où γ est la largeur de la transition, I_{sat} est l'intensité de saturation de la transition sondée et les $S_{FF'}$ sont les couplages dipolaires associés à la transition $|F\rangle \rightarrow |F'\rangle$ [Steck 01]. Le déphasage mesuré est alors [Oblak 05, Vanderbruggen 11] :

$$\phi_{\text{at}} = \frac{\lambda}{2\pi\mathcal{A}} (N_1 S_1 + N_2 S_2), \quad (3.36)$$

où λ est la longueur d'onde de la sonde optique, \mathcal{A} est la surface du faisceau, N_1 et N_2 sont les populations dans les niveaux $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ respectivement. En plaçant les bandes latérales de part et d'autre de leur transition respective les signes de S_1 et S_2 sont opposés, si de plus on ajuste les décalages $\Delta_{FF'}$ de sorte que $S_1 = -S_2$ alors la phase mesurée est proportionnelle à $N_1 - N_2$ *i.e.* à J_z . La position de la porteuse et des bandes latérales par rapport aux différentes transitions hyperfines de la raie D2 du ^{87}Rb est présentée Fig. 3.17 (b)

Afin d'ajuster les décalages $\Delta_{FF'}$ on commence par fixer une fréquence de modulation pour la porteuse, dans le cas présent, on choisit $\Omega = 3.4213$ GHz. On prépare ensuite les atomes dans une superposition cohérente $|\pi/2, 0\rangle$ (voir Sec. 3.4), de sorte que $N_1 = N_2$. On mesure alors le signal démodulé en fonction de la position de la porteuse par rapport à la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$, le résultat obtenu est présenté Fig. 3.17 (a). Il est en très bon accord avec le résultat théorique fourni par la relation Eq. (3.35), sachant que la puissance dans la porteuse lors de cette mesure est de $153 \mu\text{W}$ et celle dans une bande latérale est de $7 \mu\text{W}$, de plus le diamètre à $1/e$ du faisceau au niveau du nuage atomique est de $200 \mu\text{m}$ si bien que l'intensité sur l'échantillon vaut $I = 11.2 \text{ mW/cm}^2$. Etant donné que l'on sonde une transition π sur les sous-niveaux Zeeman $m_F = 0$, l'intensité de saturation est $I_{\text{sat}} = 2.503 \text{ mW/cm}^2$ et les couplages dipolaires $S_{FF'}$ sont donnés Tab. 3.1 [Steck 01]. La condition $S_1 + S_2 = 0$ est atteinte lorsque la porteuse est placée à 3.291 GHz de la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$.

3.4 Préparation de l'état cohérent de spins

Après chargement dans le piège dipolaire, les atomes sont dans l'état $|F = 1\rangle$ et répartis selon un mélange statistique sur les différents sous-niveaux Zeeman $m_F = -1, 0, 1$. Afin de

S_{10}	1/6	S_{20}	0
S_{11}	0	S_{21}	1/30
S_{12}	1/6	S_{22}	0
S_{13}	0	S_{23}	3/10

Table 3.1 – Couplages dipolaires pour les transitions π sur les niveaux $m_F = 0$ (d'après [Steck 01]).

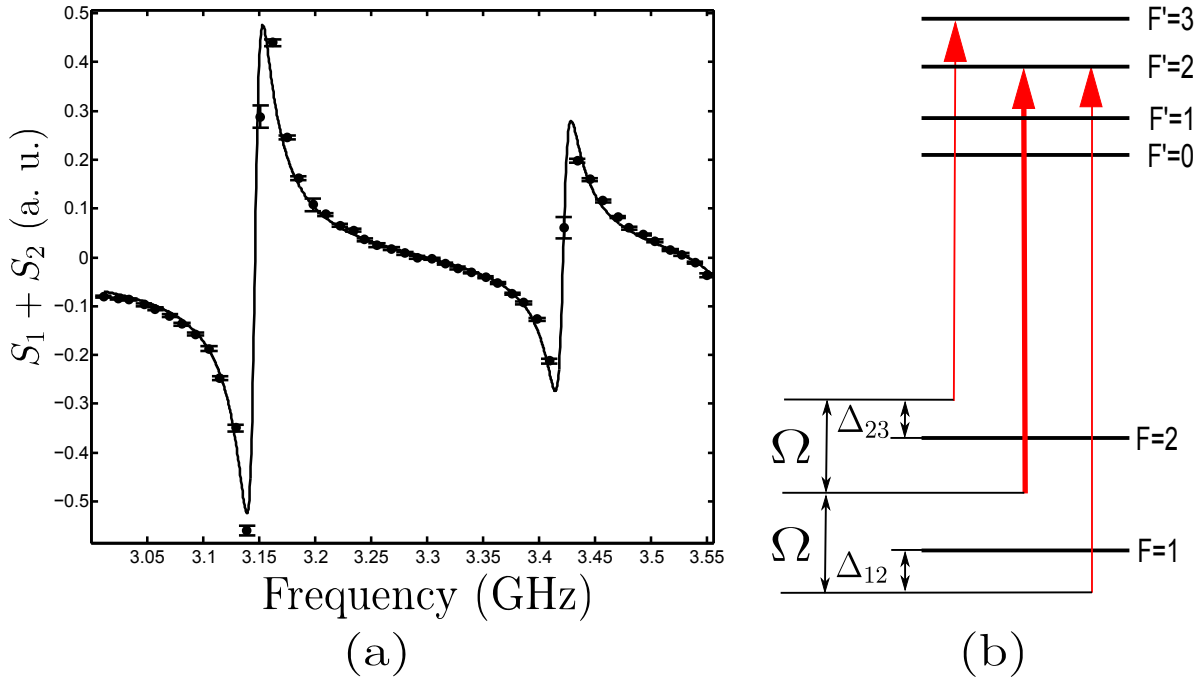


Figure 3.17 – (a) Couplage de la sonde en fonction de la position de la porteuse par rapport à la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$. La fréquence de modulation est $\Omega = 3.4213$ GHz. Les points avec les barres correspondent aux données expérimentales et la ligne continue est le couplage théoriquement attendu. (b) Positions de la porteuse et des bandes latérales par rapport au différentes transitions hyperfines de la raie D2 du ^{87}Rb .

préparer un état cohérent de spins, il nous faut polariser l'échantillon atomique, *i.e.* préparer tous les atomes dans le même sous-niveau Zeeman. En pratique, on choisira le niveau $m_F = 0$ puisqu'il est insensible au champ magnétique au premier ordre. Une autre condition est de pouvoir manipuler de manière cohérente l'échantillon, ce qui peut être réalisé soit à l'aide d'une paire de faisceaux Raman, soit avec une source micro-onde dont la fréquence est égale à l'écart hyperfin séparant les niveaux $F = 1$ et $F = 2$. C'est cette seconde méthode que nous utiliserons par la suite.

Dans cette partie, nous discuterons d'abord de la source micro-onde utilisée pour les manipulations cohérentes et de la manière dont sa fréquence est ajustée à l'aide des oscillations de Rabi et de l'interféromètre de Ramsey. Nous discuterons ensuite de la préparation de l'état cohérent et notamment des limitations liées aux fortes densités optiques à résonance dans le piège.

3.4.1 Ajustement de la fréquence de la micro-onde

Afin d'effectuer des manipulations cohérentes entre les deux niveaux hyperfins de l'atome de ^{87}Rb , on utilise une source micro-onde de fréquence approximative 6.834 GHz. Le source micro-onde est réalisée à l'aide d'une chaîne de fréquence. L'oscillateur initial est un quartz à très bas

bruit de phase (-113 dBc/Hz à 1 Hz) de chez Wenzel Associates (modèle Blue Top), sa fréquence de 100 MHz est alors multipliée par un facteur 10 avant que le signal ne soit injecté dans un composant non-linéaire (Step Recovery Diode, HP 33005C) qui génère un peigne d'harmoniques. L'harmonique à 7 GHz est alors isolée à l'aide d'un filtre en cavité puis mélangée à un signal radio-fréquence à 165 MHz (produit à l'aide d'un synthétiseur) afin de générer l'oscillateur à 6.834 GHz. Ce signal est à nouveau filtré afin d'éliminer les composantes à 7 et 7.165 GHz, puis amplifié à une puissance de 2 W (33 dBm) avant d'être connecté à une antenne dipolaire située à environ 20 cm de l'échantillon atomique.

3.4.1.1 Oscillations de Rabi

La première étape pour ajuster la fréquence de la micro-onde sur la transition hyperfine de l'état fondamental est d'observer et d'optimiser les oscillations de Rabi. On utilise les atomes relâchés du piège dipolaire, ils sont initialement dans $|F = 1\rangle$ et l'état est non polarisé, on applique un biais magnétique d'environ 0.5 Gauss afin de séparer les transitions associées aux différents sous-niveaux Zeeman et d'adresser uniquement les atomes dans $m_F = 0$, soit environ un tiers d'entre eux. On amène alors préalablement la fréquence de la micro-onde proche de celle attendue, soit 6.834682 GHz [Steck 01], cela permet d'observer des premières oscillations et d'ajuster l'orientation de l'antenne afin de maximiser ce premier signal. Pour une longueur d'impulsion donnée, on scanne la fréquence et on mesure le nombre d'atomes transférés dans le niveau $|F = 2\rangle$, le résultat est présenté Fig. 3.18, le maximum fournit une première estimation de la fréquence de la transition.

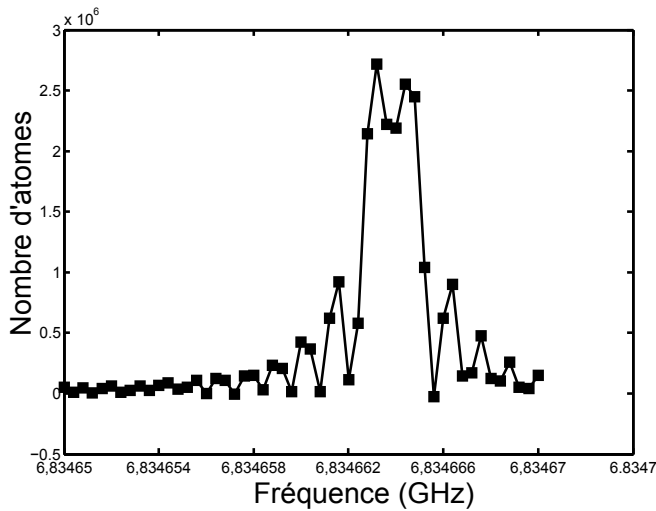


Figure 3.18 – Nombre d'atomes transférés dans l'état $|F = 2\rangle$ en fonction de la fréquence de la micro-onde pour une impulsion de 350 μ s.

On optimise alors les oscillations en maximisant le nombre d'atomes transférés dans $|F = 2\rangle$, on observe alors les oscillations Fig. 3.19, la longueur d'une impulsion π est $\tau_\pi = 134 \mu$ s. L'amortissement provient du fait que le nuage atomique est relâché du piège, sa température étant non nulle, le nuage s'étend avant de chuter sous l'effet de la gravité, il devient alors plus sensible aux inhomogénéités spatiales du champ micro-onde, la fréquence de Rabi est alors différente selon la position de l'atome dans le nuage.

3.4.1.2 Franges de Ramsey

Après avoir obtenu une première estimation de la fréquence de la transition à l'aide des oscillations de Rabi, nous réalisons un interféromètre de Ramsey qui offre une sensibilité accrue au désaccord, il nous permet un ajustement fin de la fréquence de la micro-onde. Pour un temps d'interrogation T fixé, la phase interférométrique est $\varphi = \Delta\nu \cdot T$. Par conséquent, en faisant varier

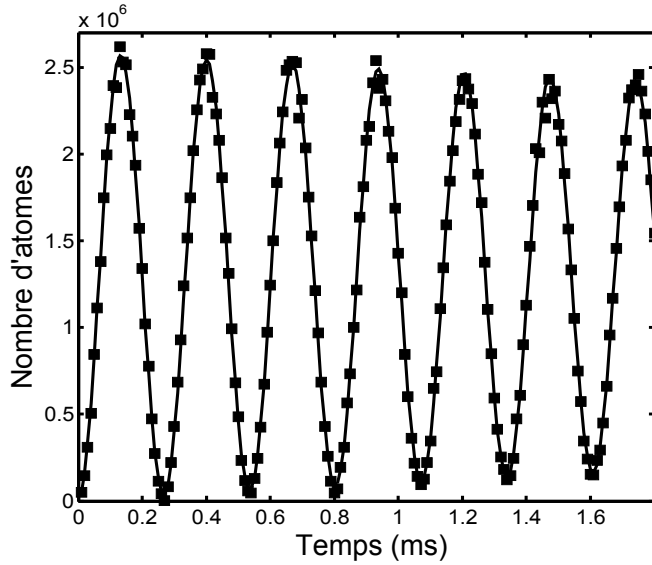


Figure 3.19 – Oscillations de Rabi d'un ensemble atomique relâché du piège dipolaire.

le désaccord $\Delta\nu$ de la micro-onde par rapport à la transition, on observe des franges en sortie de l'interféromètre, c'est ce que l'on constate Fig. 3.20. Si on augmente le temps d'interrogation T la phase est plus importante et on parcourt plus de franges pour un même désaccord, on peut le constater Fig. 3.20 où deux temps sont utilisées : $T_1 = 5$ ms et $T_2 = 14$ ms. La comparaison des franges obtenues pour deux temps d'interrogations différents permet de déterminer la fréquence de la transition, en effet, si les deux temps sont incommensurables ($T_1/T_2 \notin \mathbb{Q}$) alors la fréquence est celle de l'unique position pour laquelle deux maxima coïncident. On mesure alors la fréquence suivante pour l'écart hyperfin de l'état fondamental :

$$\nu_0 = 6.834684850 \pm 0.000000007 \text{ GHz}, \quad (3.37)$$

ce qui est 2.240 kHz au-dessus de la valeur obtenue dans [Bize 99]. Le résultat ci-dessus doit être interprété comme une calibration de nos instruments et non comme une mesure de la fréquence de la transition à proprement parler, sans compter qu'une étude des erreurs systématiques s'imposerait.

3.4.2 Pompage optique des sous-niveaux Zeeman

Une fois la source micro-onde correctement ajustée, nous allons pouvoir utiliser une combinaison d'impulsions π et d'impulsions de pompage optique pour préparer un échantillon polarisé dans l'état $|F = 1, m_F = 0\rangle$.

La méthode repose sur le principe du pompage optique, on exploite le fait que, pour des transitions π , les transitions $|F = 2, m_F \neq 0\rangle \rightarrow |F' = 2, m_F \neq 0\rangle$ sont autorisées tandis que la transition $|F = 2, m_F = 0\rangle \rightarrow |F' = 2, m_F = 0\rangle$ est interdite. Par conséquent, en excitant la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ on accumule les atomes dans l'état noir $|F = 2, m_F = 0\rangle$ ce qui permet de préparer un état polarisé. En pratique, nos atomes sont initialement dans l'état $|F = 1\rangle$, on applique une impulsion π ce qui permet déjà de transférer environ un tiers des atomes dans l'état $|F = 2, m_F = 0\rangle$, on allume ensuite le faisceau de pompage optique en parallèle avec un faisceau repompeur sur la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$. Après cette séquence de pompage, les atomes sont majoritairement dans l'état $|F = 2, m_F = 0\rangle$ mais le processus n'étant pas parfait un certain nombre d'atomes reste dans les états $|F = 2, m_F \neq 0\rangle$. Afin d'obtenir une grande pureté de l'échantillon, on applique une impulsion π qui transfère les atomes de $|F = 2, m_F = 0\rangle$ dans $|F = 1, m_F = 0\rangle$, puis on allume un faisceau résonnant avec la transition cyclante $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ afin de pousser les atomes restant dans les états $|F = 2, m_F \neq 0\rangle$.

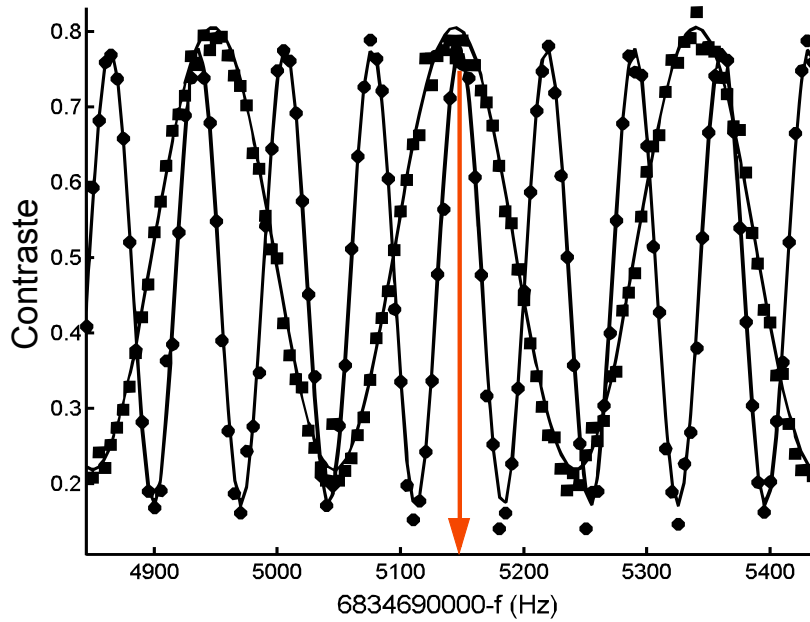


Figure 3.20 – *Franges de Ramsey lorsque le désaccord varie pour deux temps d'interrogation différents $T = 5$ ms (carrés) et $T = 14$ ms (ronds). Les lignes continues correspondent à des ajustements sinusoïdaux des données expérimentales.*

On caractérise l'efficacité de la préparation par la pureté de l'échantillon, c'est-à-dire par le rapport entre le nombre d'atomes dans l'état $|F = 1, m_F = 0\rangle$ et le nombre total d'atomes. En réalisant cette séquence sur des atomes relâchés du piège dipolaire on obtient une pureté supérieure à 99 %. Pour obtenir ce résultat, il faut attendre que le nuage s'étende afin que sa densité optique diminue, en effet, lorsque la densité optique du nuage est importante la diffusion multiple dépompe les atomes de l'état noir [Boyer 00]. Cet effet rend quasiment impossible tout pompage optique des sous-niveaux Zeeman sur un nuage optiquement dense. On ne peut donc pas appliquer cette technique pour la préparation d'états directement dans notre piège dipolaire⁵.

3.4.3 Méthodes alternatives

Les fortes contraintes précédemment évoquées nous obligent à adopter une autre stratégie pour préparer l'état directement dans le piège dipolaire. Une première méthode serait d'effectuer le pompage optique lors du chargement du piège, ce n'est toutefois pas trivial puisque le champ magnétique nécessaire au chargement est incompatible avec celui nécessaire au pompage. Une autre solution, plus réaliste, reposerait uniquement sur des transferts cohérents de population entre les différents états, il faudrait pour cela maîtriser la polarisation de la micro-onde afin d'effectuer des transferts entre différents m_F . Contrôler la polarisation d'une onde radio-fréquence n'est pas nécessairement évident, on peut toutefois remplacer la micro-onde par une paire de faisceaux Raman pour lesquels un bon contrôle de la polarisation est facilement réalisable.

A moyen terme, il serait intéressant d'essayer cette méthode, toutefois ne disposant pas de faisceaux Raman nous avons opté pour une technique plus simple. Il s'agit simplement d'effectuer

5. Cela est dû à la géométrie de notre piège dipolaire qui rend quasi-isotrope la densité optique. Dans le cas d'un piège fortement anisotrope, il est possible d'avoir une très forte densité optique selon l'axe long tout en maintenant une densité faible selon les directions transverses. On peut alors réaliser un pompage optique des sous-niveaux Zeeman en pompant selon la direction transverse du piège.

une impulsion π avant de repomper les atomes de $|F = 1\rangle$ vers $|F = 2\rangle$, ce pompage entre niveaux hyperfins est bien moins sensible que le pompage Zeeman et peut être réalisé sur un nuage dense [Boyer 00], en appliquant à nouveau une impulsion π puis en poussant les atomes restant dans le niveau $|F = 2\rangle$ on prépare un échantillon pur d'atomes dans $|F = 1, m_F = 0\rangle$. L'inconvénient de cette méthode étant la perte d'un peu moins des deux tiers des atomes. Si la pureté à la fin de cette étape n'est pas suffisante, on peut refaire un cycle pour l'améliorer, on ne perdra alors que les atomes indésirables. Cette méthode a toutefois une limitation lorsqu'on l'utilise sur le piège dipolaire. Lors de la dernière phase, il faut donner aux atomes dans $|F = 2, m_F \neq 0\rangle$ une énergie supérieure à la profondeur du piège afin de les en éjecter, en d'autres termes, si E_r est l'énergie de recul d'un photon et U la profondeur du piège, alors le nombre de cycles effectués par l'atome sur la transition $|F = 2\rangle \leftrightarrow |F' = 3\rangle$ doit être supérieur à U/E_r . Or l'atome a une certaine probabilité d'effectuer une transition hors de résonance $|F' = 2\rangle \rightarrow |F = 1\rangle$, il reste alors piégé et dégrade la pureté de l'état. Cet effet limite le nombre maximal de cycles réalisables et donc la profondeur de piège utilisable. Pour cette raison, nous effectuons préalablement une rampe d'évaporation pour réduire la profondeur du piège à environ 200 μK avant de réaliser la séquence de préparation.

3.5 Observation en temps réel de manipulations cohérentes de spins

A titre de démonstration, nous avons observé en temps réel des manipulations cohérentes du spin collectif. Cela nous permet de confirmer le caractère non-destructif de la détection dans le sens où elle préserve la cohérence, du moins partiellement. Nous présenterons tout d'abord une mesure non-destructive d'oscillations de Rabi, ce qui nous permettra d'étudier l'influence de la sonde sur la cohérence de l'échantillon atomique. Nous observerons ensuite l'évolution du spin collectif lors d'une séquence de type écho de spin.

Toutes les mesures présentées dans cette section ont été réalisées à partir d'atomes relâchés du piège magnéto-optique puis pompés optiquement dans le niveau $|F = 1, m_F = 0\rangle$, selon la méthode Sec. 3.4.2. Le nuage contient environ 10^7 atomes à la température de 80 μK . Le sonde optique a un waist de 800 μm , ce qui correspond approximativement à la taille du nuage atomique. La puissance optique dans la porteuse est de 70 μW et celle dans une bande latérale est de 90 nW. On sonde la population dans l'état $|F = 2\rangle$ selon la configuration Fig. 3.16 (a), la fréquence de modulation est fixée à $\Omega = 2.5$ GHz. On ajuste le décalage de la bande latérale par rapport à la transition en changeant la position de la porteuse.

3.5.1 Oscillations de Rabi

L'oscillation de Rabi est un exemple bien connu de manipulation cohérente, elle constitue donc un excellent banc d'essai pour étudier l'influence de la détection optique sur la cohérence de l'échantillon atomique [Chaudhury 06, Windpassinger 08a, Windpassinger 08b, Bernon 11b]. On a représenté Fig. 3.21 des oscillations de Rabi mesurées en temps réel à l'aide de la sonde non-destructive. La non-destructivité de la sonde apparaît clairement sur ces données puisque nous sommes capables d'extraire une information sur la population sans détruire totalement la cohérence, ce qui correspond à la définition Sec. 3.2.

Afin de caractériser l'influence de la sonde, nous avons mesuré des oscillations de Rabi pour différents décalages de la bande latérale par rapport à la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$. On peut constater Fig. 3.21 (a) que si la sonde est proche de résonance (0.8Γ) les oscillations s'amortissent rapidement et les atomes s'accumulent dans l'état $|F = 2\rangle$, cela provient de l'émission spontanée qui détruit peu à peu la cohérence et pompe optiquement les atomes. On remarque aussi que l'allure des oscillations est différente lorsqu'on s'éloigne de la résonance Fig. 3.21 (b). Afin de comprendre ces comportements, nous avons étudié l'évolution de la fréquence des os-

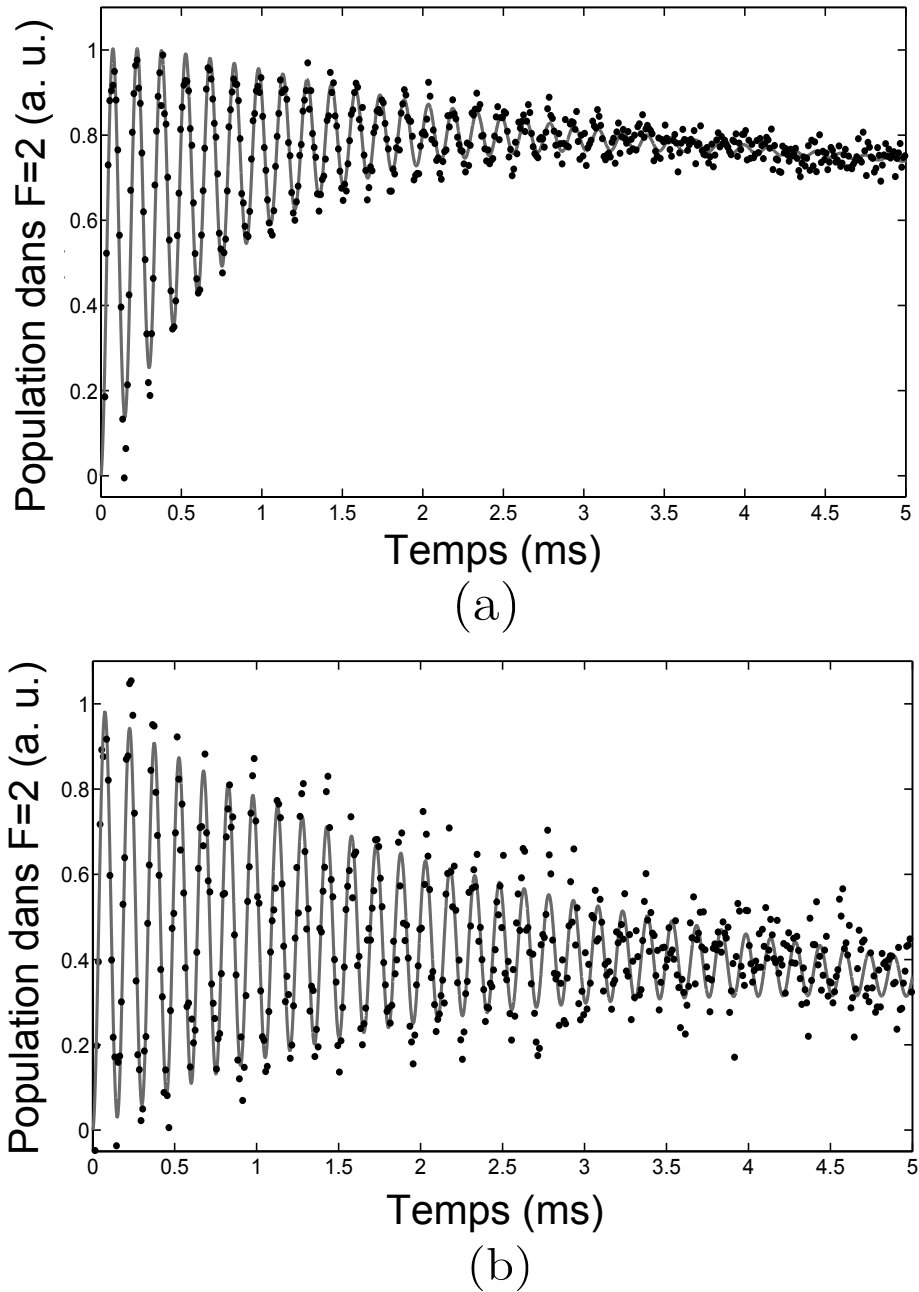


Figure 3.21 – Mesure non-destructive de la population dans l'état $|F = 2\rangle$ lorsque l'échantillon est soumis à des oscillations de Rabi. Les points correspondent aux mesures expérimentales et la ligne continue est un ajustement des données. Chaque impulsion de mesure dure $1.25 \mu\text{s}$, une mesure est réalisée toute les $10 \mu\text{s}$. (a) La bande latérale est placée à 0.8Γ de la transition. (b) La bande latérale est placée à 7.9Γ de la transition.

cillations de Rabi et leur taux d'amortissement en fonction du décalage de la sonde par rapport à la transition atomique et en fonction du nombre d'impulsions utilisées, le résultat est présenté Fig. 3.22.

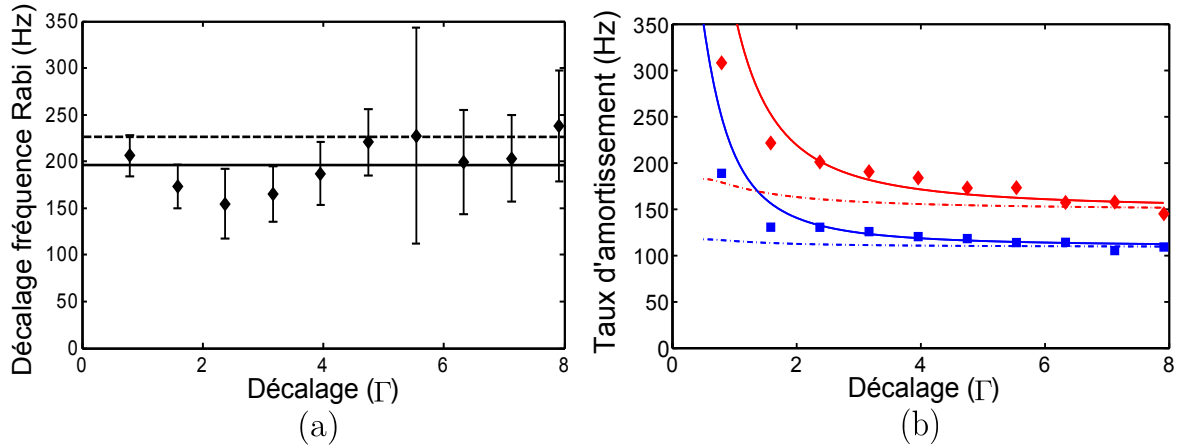


Figure 3.22 – Evolution des oscillations de Rabi avec le décalage de la bande latérale par rapport à la transition. (a) Décalage de la fréquence des oscillations lorsque la mesure est réalisée avec deux taux de répétitions différents (50 et 100 kHz). Les carrés sont les résultats expérimentaux, la ligne continue est la valeur moyenne des données et la ligne pointillée est le décalage attendu pour un déplacement lumineux induit par la porteuse. (b) Taux d'amortissement des oscillations pour un taux de répétition de 100 kHz (diamants rouges) et 50 kHz (carrés bleus). Les lignes continues correspondent à l'amortissement attendu en prenant en compte l'émission spontanée, le déplacement lumineux et l'expansion du nuage. Les lignes pointillées sont l'amortissement attendu en l'absence d'émission spontanée.

Nous avons tout d'abord mesuré la fréquence des oscillations de Rabi pour deux taux de répétitions différents des impulsions de mesure (50 et 100 kHz). La différence de fréquence mesurée entre les deux taux de répétitions en fonction du décalage de la sonde est présentée Fig. 3.22 (a). On constate que cette différence est non nulle et vaut environ 200 Hz, elle semble de plus indépendante du décalage par rapport à la transition. Cet effet s'explique bien en considérant le déplacement lumineux induit par la porteuse, le déplacement moyen étant plus élevé pour un taux de répétition plus important. Il faut noter que, dans ce cas de figure, le déplacement lumineux est dominé par la porteuse et non par la bande latérale de sonde.

Le second paramètre important est le taux d'amortissement des oscillations, qui est représenté Fig. 3.22 (b) pour deux taux de répétitions différents (50 et 100 kHz). On identifie trois causes principales à cet amortissement : l'émission spontanée induite par la bande latérale, l'inhomogénéité du déplacement lumineux produit par la porteuse et l'expansion du nuage puisqu'il n'est pas piégé. En estimant ces différentes contributions pour nos paramètres expérimentaux, on obtient un résultat en bon accord avec les mesures expérimentales. On constate que si la bande latérale est proche de la transition ($< 2 \Gamma$) l'amortissement est dominé par l'émission spontanée, tandis que pour des décalages plus importants ($> 5 \Gamma$) l'amortissement est dominé par le déplacement lumineux induit par la porteuse.

3.5.2 Séquence d'écho de spin

La détection permet non seulement de suivre des oscillations de Rabi, mais elle peut, d'une manière générale, suivre en temps réel la projection selon l'axe z de la sphère de Bloch de l'évolution arbitraire d'un spin collectif. A titre d'exemple, nous avons suivi une séquence d'écho de spin, le résultat est présenté Fig. 3.23. On peut ainsi suivre l'évolution de l'état atomique dans

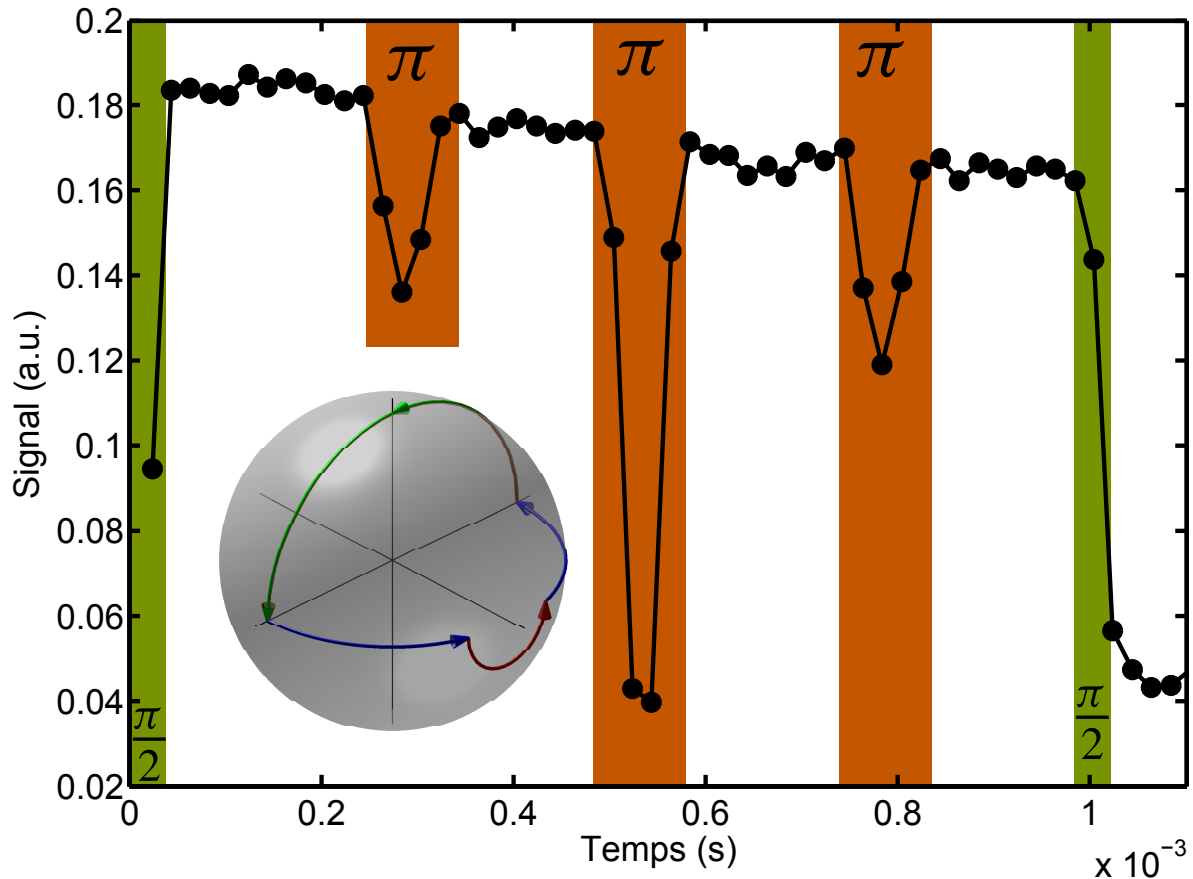


Figure 3.23 – Suivi en temps réel d'une séquence d'écho de spin. La trajectoire du spin collectif associée à cette séquence est représentée sur la sphère de Bloch.

un interféromètre de type Ramsey avec une faible perte de contraste. Comme nous le montrerons au chapitre suivant, ce résultat va nous permettre de réaliser une boucle à verrouillage de phase utilisant les atomes comme référence de phase.

3.6 Compensation du déplacement lumineux induit par la sonde

Nous venons de constater que le déplacement lumineux inhomogène induit par la sonde sur le nuage est une source de décohérence. Un tel déphasage empêche la mise en œuvre de la détection non-destructive dans des applications en interférométrie atomique. Il est donc absolument essentiel de disposer d'une méthode permettant de s'en affranchir. Nous allons montrer que la symétrie de la configuration Fig. 3.17 (b), utilisée lors de la mesure de l'opérateur J_z , permet de compenser le déplacement lumineux induit par les bandes latérales grâce à celui de la porteuse.

Lors de la mesure de l'opérateur J_z par la sonde, chaque bande latérale est couplée de manière identique avec la même puissance optique, par conséquent, chacune d'entre elles génère un déplacement lumineux de même ampleur sur les états $|F = 1\rangle$ et $|F = 2\rangle$ et puisque, dans la configuration adoptée, la porteuse est placée sur le côté opposé de la transition de chaque bande latérale, elle génère un déplacement lumineux opposé à celui des bandes latérales, comme schématisé Fig. 3.24 (a). Par un ajustement convenable du rapport entre la puissance dans la porteuse et celle dans les bandes latérales, il est possible de compenser le déplacement lumineux provoqué par chaque bande latérale grâce à celui de la porteuse. De manière plus quantitative,

on a représenté Fig. 3.24 (b) le déplacement engendré par la porteuse et les bandes latérales sur chaque sous-niveau hyperfin, ainsi que le déplacement résultant. On constate qu'il est non seulement possible de compenser le déplacement pour chaque niveau, mais de plus, le ratio de puissance pour lequel la compensation est réalisée est le même pour les deux niveaux hyperfins. Notons enfin, qu'étant donné que la porteuse et les bandes latérales sont toutes trois dans le même mode spatial du champ électromagnétique, la compensation est réalisée de manière parfaitement homogène, elle doit donc permettre de s'affranchir intégralement de la décohérence induite par le déphasage inhomogène.

Expérimentalement, le déplacement a été ajusté grâce à un interféromètre de Ramsey. En effet, lorsqu'une impulsion de sonde est envoyée pendant le temps d'interrogation de l'interféromètre, cette dernière engendre un déphasage si le déplacement n'est pas compensé. Par conséquent, pour un temps d'impulsion fixé, en faisant varier le ratio entre la puissance dans une bande latérale et celle dans la porteuse, on parcourt des franges d'interférences, comme on le constate Fig. 3.25. La position correspondante à un déphasage nul permet alors de déterminer le ratio pour lequel les déplacements lumineux sont compensés. Dans les conditions expérimentales choisies, à savoir une fréquence de modulation $\Omega = 3.4213$ GHz et les décalages $\Delta_{12} = 122$ MHz et $\Delta_{23} = 153$ MHz, la compensation est obtenue pour un ratio de 4.6 %.

3.7 Interférométrie de Ramsey avec un nuage piégé

Les résultats présentés jusqu'ici ont été obtenus sur un nuage en expansion libre, ce qui engendre d'importantes limitations expérimentales : temps d'interrogation réduits, chute de la densité optique pendant l'interrogation, sensibilité accrue aux inhomogénéités spatiales, etc. Afin de disposer d'un meilleur contrôle du nuage, et donc des paramètres expérimentaux, on souhaite utiliser un nuage piégé⁶. Néanmoins, un certain nombre de précautions préalables doivent être prises avant de réaliser la mesure directement dans le piège dipolaire. En effet, le faisceau de piège engendre des déplacements lumineux inhomogènes sur les états des atomes dans le piège. Il y a tout d'abord le déplacement lumineux induit sur l'état excité $5P_{3/2}$ qui modifie le couplage de la sonde non-destructive, nous expliquons Sec. 5.7 la manière dont il est compensé et nous pourrions supposer dans la suite que son influence est négligeable.

Il convient aussi de considérer que, même loin de résonance, le faisceau de piège induit un déplacement lumineux différentiel entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental $5S_{1/2}$. Ce déplacement va engendrer un déphasage relatif entre les atomes dans le piège, conduisant à la décohérence du spin collectif. Cette décohérence peut s'avérer limitante pour des applications de la mesure non-destructive en interférométrie. Nous allons donc caractériser et analyser cet effet grâce à un interféromètre de Ramsey réalisé sur des atomes piégés et nous comparerons nos résultats avec un modèle théorique simple. Nous verrons que le nuage conserve sa cohérence pendant environ 10 ms. Il s'agit là d'un temps suffisamment long qui nous permettra de mettre en œuvre, au chapitre suivant, des expériences de démonstration de l'utilisation de la sonde non-destructive en interférométrie atomique.

3.7.1 Déplacement lumineux différentiel induit par le piège sur la transition de l'horloge

Afin de comprendre l'influence du faisceau de piège sur la phase des atomes, nous évaluons tout d'abord le déplacement lumineux différentiel induit par le faisceau entre les deux états hyperfins du niveau fondamental $5S_{1/2}$. Le faisceau de piège couple principalement le niveau fondamental aux états excités $5P_{1/2}$ et $5P_{3/2}$, le laser de piège étant loin de résonance, nous

6. On trouvera Sec. 6.3 une description du piège dipolaire.

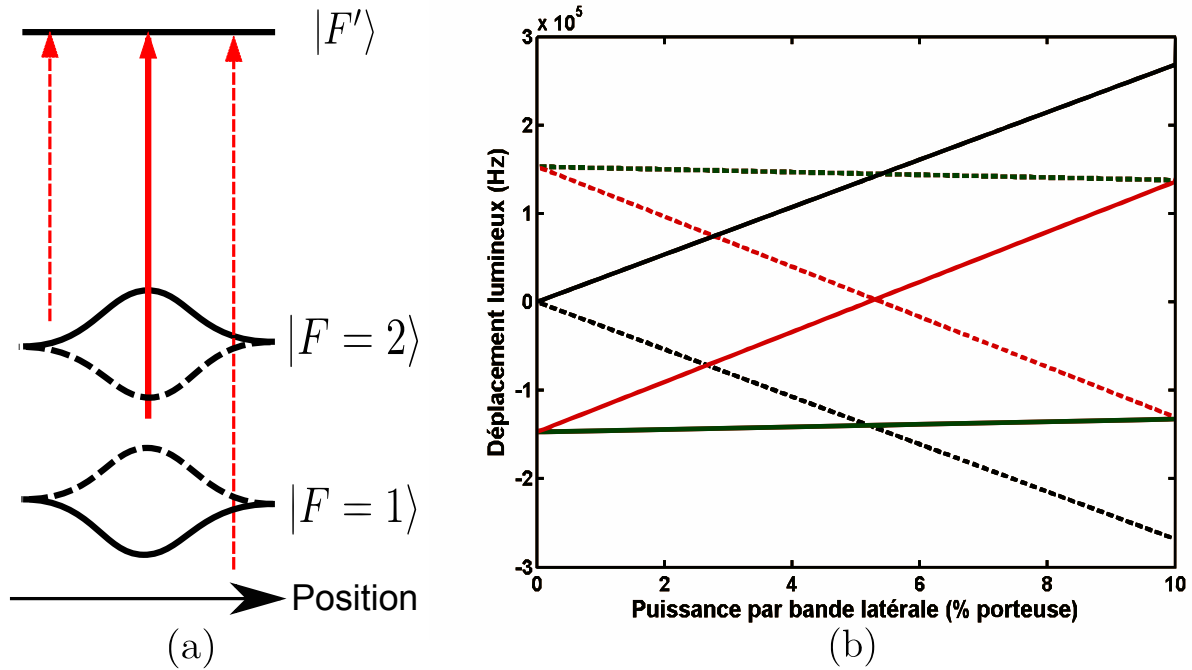


Figure 3.24 – Compensation du déplacement lumineux induit par la sonde. (a) Déplacements induits par la porteuse (traits continus) et les bandes latérales (traits pointillés). (b) Déplacements lumineux induits par la porteuse et les bandes latérales en fonction de la puissance par bande latérale exprimée en pourcentage de la puissance dans la porteuse pour une puissance totale de 1 mW dans la sonde, un waist de $200 \mu\text{m}$, une fréquence de modulation $\Omega = 3.4213 \text{ GHz}$, ainsi que les décalages $\Delta_{12} = 122 \text{ MHz}$ et $\Delta_{23} = 153 \text{ MHz}$. Les traits pointillés correspondent aux déplacements induits sur l'état $|F=1\rangle$ et les traits pleins sur l'état $|F=2\rangle$. Les courbes en vert sont les déplacements générés par la porteuse, en noir par les bandes latérales et en rouge le déplacement résultant de la combinaison des contributions de la porteuse et des bandes latérales.

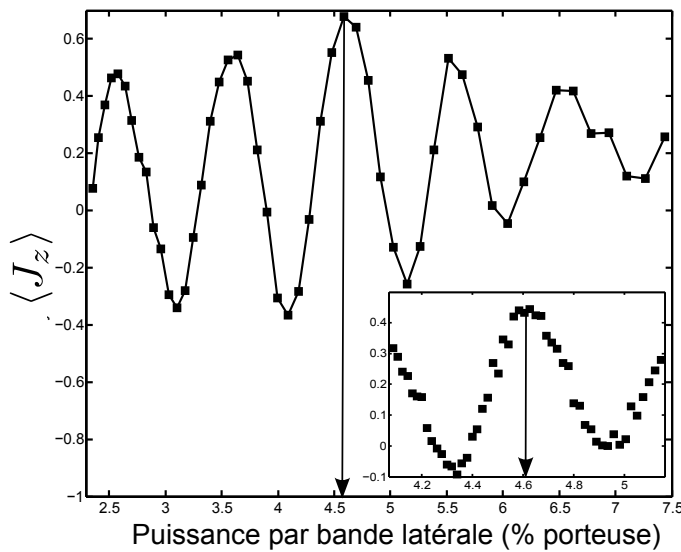


Figure 3.25 – Compensation du déplacement lumineux de la sonde. Différence de population en sortie d'un interféromètre de Ramsey en fonction de la puissance dans une bande latérale exprimée en pourcentage de la puissance dans la porteuse. Une impulsion de $40 \mu\text{s}$ est émise entre les deux impulsions micro-onde $\pi/2$. L'encart est le résultat de la même mesure réalisée avec une impulsion de $70 \mu\text{s}$ afin de déterminer plus précisément le ratio de compensation.

négligerons la structure hyperfine de ces deux états. Les transitions importantes ainsi que les notations utilisées dans la suite sont représentées Fig. 3.26 (a).

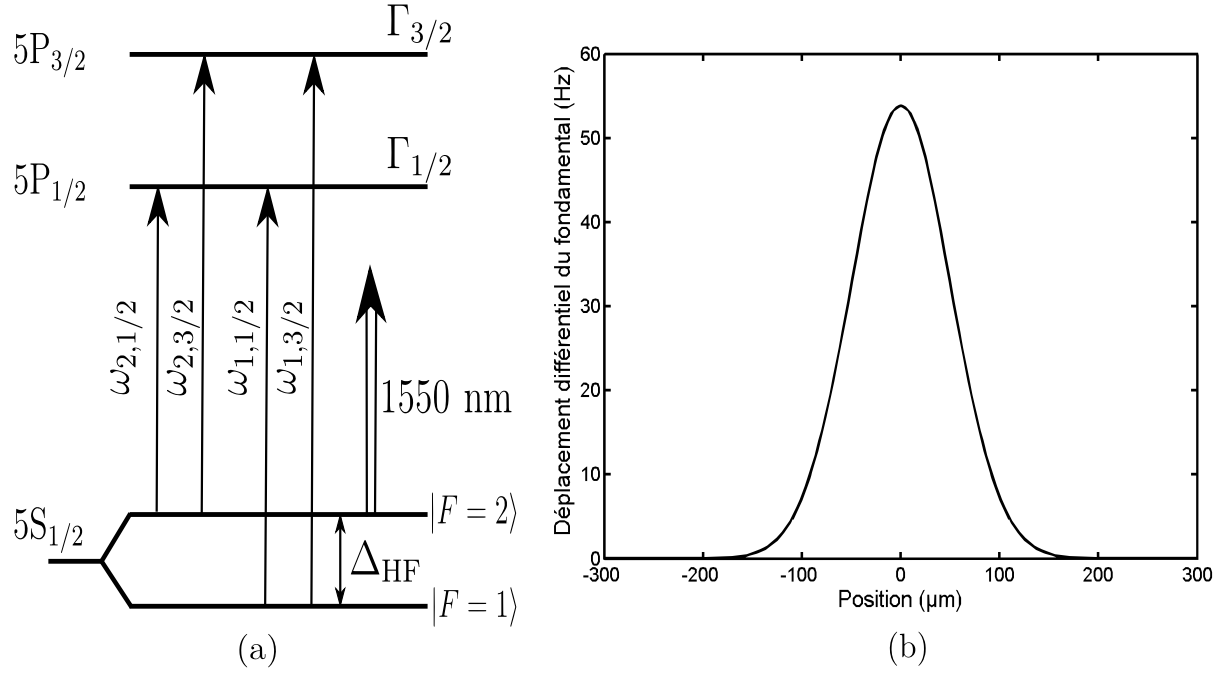


Figure 3.26 – Déplacement lumineux différentiel induit par le piège sur la structure hyperfine de l'état fondamental. (a) Transitions dominantes responsables du déplacement lumineux. (b) Déplacement différentiel en fonction de la position dans le piège pour une puissance de 20 W au croisement des bras et $w_0 = 100 \mu\text{m}$.

Le déplacement lumineux induit sur l'état $|5S_{1/2}, F\rangle$ est [Grimm 00] :

$$\Delta_F(\mathbf{r}) = \frac{\pi c^2}{2} \left(S_{1/2,1/2} \frac{\Gamma_{1/2}}{\omega_{F,1/2}^3 (\omega - \omega_{F,1/2})} + S_{1/2,3/2} \frac{\Gamma_{3/2}}{\omega_{F,3/2}^3 (\omega - \omega_{F,3/2})} \right) I(\mathbf{r}), \quad (3.38)$$

où ω est la fréquence du faisceau de piège, $S_{J,J'} = (2J' + 1)/(2J + 1)$ et $I(\mathbf{r})$ est le profil d'intensité du faisceau de piège. Le déplacement différentiel est alors donné par :

$$\delta\Delta_{12}(\mathbf{r}) = \Delta_2(\mathbf{r}) - \Delta_1(\mathbf{r}), \quad (3.39)$$

ce qui peut être mis sous la forme $\delta\Delta_{12}(\mathbf{r}) = \delta\Delta_{12}^0 i(\mathbf{r})$ où $i = I/I_0$ est l'intensité du faisceau normalisée à sa valeur maximale. L'écart hyperfin entre les niveaux du fondamental est $\Delta_{\text{HF}} = \omega_{2,1/2} - \omega_{1,1/2} = \omega_{2,3/2} - \omega_{1,3/2}$, puisque les hypothèses suivantes sont vérifiées pour $J' = 1/2, 3/2$: $\Delta_{\text{HF}} \ll \omega_{1,J'}$, $\omega_{2,J'}$, $\omega - \omega_{1,J'}$, on peut développer Eq. (3.38) au premier ordre en Δ_{HF} :

$$\delta\Delta_{12}(\mathbf{r}) = \frac{\pi c^2}{2} \Delta_{\text{HF}} \left[\frac{\Gamma_{1/2}}{\omega_{1/2}^3 \delta_{1/2}} \left(\frac{1}{\delta_{1/2}} - \frac{3}{\omega_{1/2}} \right) + \frac{2\Gamma_{3/2}}{\omega_{3/2}^3 \delta_{3/2}} \left(\frac{1}{\delta_{3/2}} - \frac{3}{\omega_{3/2}} \right) \right] I(\mathbf{r}), \quad (3.40)$$

où $\omega_{J'} \equiv \omega_{1,J'}$ et $\delta_{J'} \equiv \omega - \omega_{J'}$. Les longueurs d'onde des transitions sont $\lambda_{1/2} = 795 \text{ nm}$ et $\lambda_{3/2} = 780 \text{ nm}$, les largeurs de raie associées sont $\Gamma_{1/2} = 2\pi \times 5.746 \text{ MHz}$ et $\Gamma_{3/2} = 2\pi \times 6.065 \text{ MHz}$, quant à l'écart hyperfin il vaut $\Delta_{\text{HF}} = 2\pi \times 6.834 \text{ GHz}$ [Steck 01]. On a tracé Fig. 3.26 (b) le déplacement différentiel en fonction de la position dans un faisceau de 10 W avec un waist de 100 μm à 1550 nm, dans ces conditions, le déplacement au centre du piège vaut environ 27 Hz.

3.7.2 Estimation du déphasage inhomogène subi par les atomes

Afin d'estimer le déphasage accumulé par un atome en fonction du temps, il faut non seulement connaître le déplacement lumineux en fonction de la position dans le piège $\delta\Delta_{12}(\mathbf{r})$, mais aussi considérer le mouvement de l'atome. Le déphasage accumulé pendant un temps d'interrogation τ par un atome suivant une trajectoire $r(t)$ est :

$$\varphi(\tau) = \int_0^\tau \delta\Delta_{12}[r(t)] dt = \delta\Delta_{12}^0 \int_0^\tau i[r(t)] dt. \quad (3.41)$$

Afin de simplifier le problème, nous considérerons ici que l'atome évolue dans un potentiel harmonique unidimensionnel de fréquence Ω . Si r_0 et p_0 sont respectivement la position et l'impulsion initiale de l'atome, alors sa trajectoire dans le piège harmonique est :

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 + \left(\frac{p_0}{m\Omega}\right)^2} \sin \Omega t + r_0. \quad (3.42)$$

De plus, supposer le potentiel harmonique n'a de sens que si l'intensité du faisceau de piège est approchée au deuxième ordre en r :

$$i[r(t)] = e^{-2r^2(t)^2/w_0^2} \sim 1 - 2r^2(t)/w_0^2. \quad (3.43)$$

Après avoir combiné les relations Eqs. (3.43) et (3.42) et intégré l'Eq. (3.41), on obtient le déphasage accumulé par un atome en fonction de sa position initiale dans l'espace des phases (r_0, p_0) :

$$\begin{aligned} \varphi_{r_0, p_0}(\tau) = \delta\Delta_{12}^0 \left[\tau \left(1 - 2\frac{r_0^2}{w_0^2} \right) + 16\frac{r_0}{\Omega w_0^2} \sqrt{r_0^2 (\cos \Omega\tau - 1) + \left(\frac{p_0}{m\Omega}\right)^2} \right. \\ \left. + \frac{2}{\Omega w_0^2} \left(r_0^2 + \left(\frac{p_0}{m\Omega}\right)^2 \right) (\sin(2\Omega\tau) - 2\Omega\tau) \right]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Le déphasage moyen accumulé par un ensemble d'atomes est obtenu en sommant φ_{r_0, p_0} sur l'ensemble des positions initiales accessibles dans l'espace des phases :

$$\Phi(\tau) = \iint P(r_0, p_0) \varphi_{r_0, p_0}(\tau) dr_0 dp_0, \quad (3.45)$$

où $P(r_0, p_0)$ est la probabilité pour un atome d'être à la position r_0 avec une impulsion p_0 à l'instant $t = 0$. Dans le cas présent, l'ensemble atomique est un nuage thermique loin du seuil de dégénérescence quantique, la position initiale dans l'espace des phases (r_0, p_0) est donc distribuée selon une loi de Maxwell-Boltzmann :

$$P(r_0, p_0) = \frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_p} e^{-\frac{r_0^2}{2\sigma_r^2} - \frac{p_0^2}{2\sigma_p^2}}, \quad (3.46)$$

avec $\sigma_r^2 = k_B T / m\Omega^2$ and $\sigma_p^2 = mk_B T$. Néanmoins, nous sommes non pas intéressés par le déphasage total, mais par la dispersion de ce déphasage entre les atomes du nuage, autrement dit son élargissement inhomogène. Il est obtenu après soustraction du déphasage moyen :

$$\delta\Phi(\tau) = \left| \Phi(\tau) - \delta\Delta_{12}^0 \tau \right|. \quad (3.47)$$

Les relations Eqs. (3.45) et (3.46) fournissent alors :

$$\delta\Phi(\tau) = \frac{\delta\Delta_{12}^0}{\Omega\eta} [5\Omega\tau - 2\sin(2\Omega\tau)], \quad (3.48)$$

où $\eta \equiv mw_0^2\Omega^2/2k_B T$ est le ratio entre la profondeur du piège et l'énergie thermique moyenne du nuage. Toutefois, dans l'analyse qui vient d'être réalisée, tous les atomes sont supposés osciller en phase dans le piège. En pratique les conditions initiales pendant le chargement ainsi que les collisions inter-atomiques vont redistribuer de manière aléatoire la phase avec laquelle chaque atome oscille. On moyenne donc le résultat précédent sur l'ensemble des phases :

$$\overline{\delta\Phi}(\tau) = \frac{\delta\Delta_{12}^0}{2\pi\Omega\eta} \int_0^{2\pi} [5\Omega\tau - 2\sin(2\Omega\tau - \phi)] d\phi, \quad (3.49)$$

ce qui peut s'écrire sous la forme $\overline{\delta\Phi}(\tau) = \tau/\bar{\tau}$, faisant apparaître un temps caractéristique :

$$\boxed{\bar{\tau} = \frac{\eta}{5\delta\Delta_{12}^0}} \quad (3.50)$$

Dans ce modèle simple, la phase relative entre les atomes se disperse donc de manière proportionnelle au temps d'interrogation dans l'interféromètre. Avec les conditions de piégeage suivantes : $w_0 = 100 \mu\text{m}$, $\Omega = 2\pi \times 150 \text{ Hz}$ et $T = 10 \mu\text{K}$, on trouve $\eta = 4.6$. Sachant de plus que $\delta\Delta_{12}^0 = 27 \text{ Hz}$, on obtient une estimation du temps caractéristique : $\bar{\tau} = 34.4 \text{ ms}$.

3.7.3 Cohérence de l'ensemble atomique

Il nous reste à estimer comment évolue la cohérence en sortie de l'interféromètre. La cohérence \mathcal{C} est définie comme la norme du vecteur de Bloch moyen, $\mathcal{C} \equiv \|\langle \mathbf{J} \rangle\|$ où $\langle \mathbf{J} \rangle = (\langle J_x \rangle, \langle J_y \rangle, \langle J_z \rangle)$. Si ce vecteur est dans le plan (x, y) avec une phase φ parfaitement définie, il s'écrit $\langle \mathbf{J} \rangle = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$. Si la probabilité pour un atome d'avoir accumulé une phase φ pendant un temps τ est $p_\tau(\varphi)$, alors le vecteur de Bloch moyen d'un ensemble d'atomes distribués selon $p_\tau(\varphi)$ est :

$$\langle \mathbf{J} \rangle(\tau) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_\tau(\varphi) \cos \varphi d\varphi, \int_{-\infty}^{+\infty} p_\tau(\varphi) \sin \varphi d\varphi, 0 \right). \quad (3.51)$$

En supposant que la distribution $p_\tau(\varphi)$ est paire et puisque la fonction sinus est impaire, on a $\langle J_y \rangle = 0$, par conséquent, seule la composante $\langle J_x \rangle$ contribue au contraste, autrement dit :

$$\mathcal{C}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\tau(\varphi) \cos \varphi d\varphi. \quad (3.52)$$

En admettant que la distribution $p_\tau(\varphi)$ satisfasse une loi gaussienne centrée en $\varphi = 0$ et d'écart-type $\overline{\delta\Phi}$:

$$p_\tau(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\delta\Phi}(\tau)^2}} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{2\overline{\delta\Phi}(\tau)^2}\right), \quad (3.53)$$

on obtient l'évolution du contraste en fonction du temps d'interrogation de l'interféromètre :

$$\boxed{\mathcal{C}(\tau) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{\bar{\tau}}\right)^2}} \quad (3.54)$$

Le modèle que nous venons d'établir prédit donc un amortissement gaussien de la cohérence en fonction du temps d'interrogation, ce comportement est le même que celui obtenu dans [Zhao 09, Deutsch 10]. Pour $\tau = \bar{\tau}$, le contraste résiduel est $\mathcal{C}(\bar{\tau}) = 1/\sqrt{e} \sim 0.6$.

3.7.4 Confrontation avec l'expérience

Le contraste en sortie d'un interféromètre de Ramsey en fonction du temps d'interrogation est présenté Fig. 3.27, la mesure est réalisée sur un nuage à $10 \mu\text{K}$ piégé avec 10 W de puissance intracavité à 1550 nm . La réduction du contraste observée expérimentalement suit un profil en très bon accord avec le résultat Eq. (3.54) pour un temps caractéristique $\bar{\tau} = 15 \text{ ms}$. Ce temps caractéristique est de plus compatible avec celui de 34 ms estimés à partir du modèle simple Eq. (3.50). La différence pouvant s'expliquer, entre autres, par l'unidimensionnalité du modèle. En effet, dans le cas tridimensionnel, un atome peut rester plus longtemps à une position excentrée, il accumule donc une phase plus importante ce qui tend à réduire la valeur de $\bar{\tau}$. Ces résultats, à la fois le profil de décroissance et le temps caractéristique associé, confortent l'idée que la perte de cohérence observée a très probablement pour origine principale le déplacement différentiel entre les deux états hyperfins du niveau fondamental.

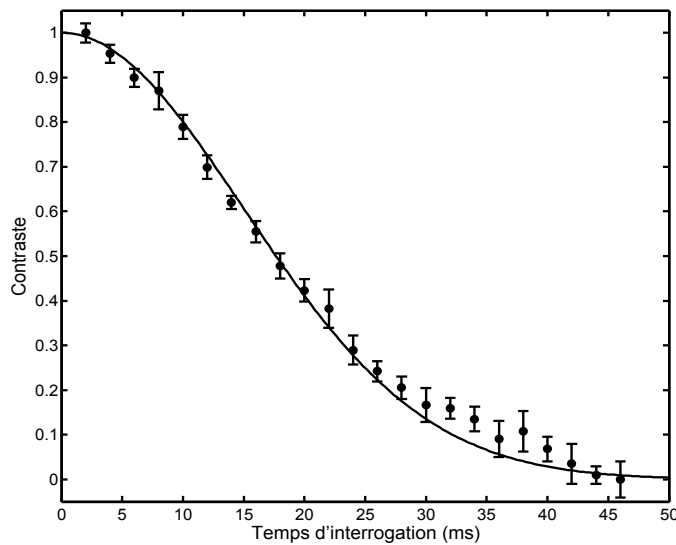


Figure 3.27 – *Contraste de l'interféromètre en fonction du temps d'interrogation. Les points sont les données expérimentales obtenues pour des atomes à $10 \mu\text{K}$ piégés avec 10 W de puissance à 1550 nm . La ligne continue correspond au résultat théorique Eq. (3.54) avec $\bar{\tau} = 15 \text{ ms}$.*

3.8 Conclusion

Nous venons de présenter la mise en œuvre expérimentale d'une détection non-destructive qui préserve la cohérence d'un échantillon atomique. Plus précisément, nous avons vu les avantages de la spectroscopie par modulation de fréquence pour l'application visée : le fait qu'il s'agisse d'une détection hétérodyne est d'une aide précieuse pour être limité au bruit de photon et la superposition spatiale des différentes composantes spectrales permet une forte réjection des fluctuations de chemin optique. Nous avons présenté un détecteur ultra-rapide adéquat développé pour les télécommunications optiques. Il combine au sein du même boîtier la photodiode et l'amplificateur transimpédance. Ceci nous a permis d'obtenir une détection limitée au bruit de photon. Après une présentation de la préparation de l'état cohérent, nous avons démontré que notre détection permet de suivre en temps réel l'évolution cohérente d'un ensemble atomique, ce qui constitue la preuve de la non-destructivité de notre détection. Nous avons ensuite exposé la manière dont le déplacement lumineux induit par la sonde peut être compensé, ceci est d'une extrême importance pour les applications interférométriques et s'avère être un avantage majeur de notre méthode. Enfin, nous avons constaté que nous pouvons manipuler de manière cohérente un échantillon atomique piégé pendant un temps suffisamment long, nous pourrions donc conserver un bon contrôle des propriétés physiques du nuages pendant de nombreuses interrogations successives.

Il nous faut maintenant trouver des applications à notre détection. La première application à laquelle on peut penser est bien sûr de préparer un état comprimé. Cela nécessite d'atteindre un régime de mesure forte et nous sommes à l'heure actuelle limités par la densité optique que voit la sonde, un nouveau dispositif optique devrait bientôt permettre d'atteindre ce régime. Néanmoins, nous allons voir que le régime de mesure faible, *i.e.* engendrant une projection négligeable de l'état, présente en lui-même d'importants avantages. Puisqu'une mesure effectuée dans ce régime ne modifie quasiment pas l'état, elle constitue la méthode idéale pour protéger l'état de perturbations, nous pourrions donc l'exploiter au sein d'un dispositif de rétroaction quantique réduisant drastiquement la décohérence de l'état. Elle permet aussi de suivre l'évolution du vecteur de Bloch dans un interféromètre sans l'influencer, nous allons voir que cette propriété permet de réaliser une boucle à verrouillage de phase atomique.

Stabilisation d'un état cohérent par rétroaction quantique et boucle à verrouillage de phase atomique

... la cohérence pure, c'est du délire, c'est du délire abstrait.

Edgar Morin

Le régime de mesure faible, qui engendre une projection négligeable de l'état, peut sembler bien peu utile au premier abord. Toutefois, même si la projection est négligeable, il n'en reste pas moins que la mesure faible procure une certaine quantité d'information sur l'état du système. Nous allons montrer ici que cette information extraite, combinée à la quasi-absence de modification de l'état par la mesure, est très avantageuse pour certaines situations, notamment lorsque la détection non-destructive est intégrée au sein de boucles de rétroaction.

Nous présenterons dans un premier temps, un exemple de stabilisation d'un état de spin cohérent par rétroaction quantique. Nous allons montrer qu'une mesure faible permet de protéger un état cohérent contre la décohérence induite par un basculement de bit. Nous introduirons ensuite la boucle à verrouillage de phase atomique. La préservation de la cohérence par la mesure nous permet d'accéder à la phase d'un oscillateur à résonance avec une transition atomique, on peut donc réaliser une horloge atomique qui ne stabilise pas seulement la fréquence de l'oscillateur local mais aussi sa phase. Nous verrons que cette méthode est très prometteuse pour l'amélioration des horloges atomiques.

4.1 Rétroaction quantique sur un état cohérent de spins

Pour être utile en pratique, un dispositif doit pouvoir être opéré de manière stable dans son environnement. Afin d'assurer cette stabilité, une méthode extrêmement répandue, sans laquelle nombre de dispositifs ne seraient pas fonctionnels, est l'*asservissement*. Un asservissement consiste à surveiller l'influence de l'environnement sur le système, puis à rétroagir sur ce dernier de sorte à le maintenir autour d'un point de fonctionnement stable.

Les systèmes quantiques sont extrêmement sensibles à tout couplage avec l'environnement, qui engendre la décohérence du système et le rend « classique ». L'influence de l'environnement sur un système quantique est donc bien plus grande que sur un système classique car elle modifie la *nature* même du système. Cette sensibilité accrue, bien supérieure à celle des systèmes classiques qui sont déjà fortement couplés à l'environnement, fait des techniques de rétro-action

un élément clef pour la mise en œuvre de technologies quantiques. La rétro-action quantique est donc un sujet essentiel en ingénierie quantique. Remarquons toutefois que si la rétro-action a pour objectif de protéger le système des effets de l'environnement, elle nécessite de coupler une sonde au système afin de monitorer son état. Or, la sonde est un médium en elle-même : elle couple le système à l'environnement qui devient ouvert, elle est donc potentiellement une source de décohérence supplémentaire. Par exemple, dans notre situation expérimentale, la sonde couple l'état atomique au continuum des modes du champ électromagnétique, qui constitue un environnement pour l'atome, ce couplage induit de l'émission spontanée qui décohère l'état collectif. Deux possibilités existent alors : soit le contrôleur prend en compte cette source de décohérence et la corrige, soit la sonde induit une décohérence négligeable par rapport à celle que l'on désire corriger ; c'est cette seconde situation que nous allons étudier ici.

La rétro-action quantique est un champ scientifique relativement récent qui possède aujourd'hui de bases théoriques assez développées [Wiseman 10], les premières démonstrations expérimentales ont été mises en œuvre dans différents contextes expérimentaux avec notamment le refroidissement des degrés de libertés externes d'un ion piégé [Bushev 06], la correction d'un basculement de phase induit sur un qubit photonique [Gillett 10], et plus récemment, la stabilisation en temps réel d'un état de Fock de photons micro-ondes piégés dans une cavité supraconductrice [Sayrin 11].

Nous allons ici présenter une méthode de rétro-action quantique permettant de protéger la cohérence des degrés de liberté internes d'un ensemble atomique cohérent contre un bruit engendrant un basculement de bit [Nielsen 00, p. 376]. Une introduction, dans laquelle nous définirons notamment des critères d'efficacité pour la boucle de rétroaction, précédera une analyse théorique du problème que nous confronterons à une simulation de Monte-Carlo. Enfin, après une présentation du dispositif expérimental, nous dévoilerons les résultats obtenus : nous étudierons le compromis entre précision de la mesure et décohérence induite par la sonde, puis nous montrerons que la rétro-action quantique permet de préserver la cohérence de l'ensemble atomique lors d'une stabilisation en temps réel.

4.1.1 Présentation du problème

A titre de démonstration, nous allons présenter comment une mesure faible et non-destructive permet de préserver la cohérence d'un état collectif de spins soumis à un bruit. Plus précisément, on cherche à préserver un état dans une superposition cohérente $|\pi/2, 0\rangle$ lorsqu'il subit, de manière aléatoire, une rotation d'un angle $+\alpha$ ou $-\alpha$ autour de l'axe Y de la sphère de Bloch. Ce schéma est similaire à celui proposé par [Brańczyk 07] dans le cas d'un photon unique. Nous montrerons qu'un tel bruit prépare un mélange statistique et réduit la cohérence de l'ensemble atomique. L'idée est alors d'utiliser la sonde non-destructive afin de déterminer quelle rotation a subi l'ensemble cohérent, et ainsi pouvoir appliquer la rotation opposée. Dans le cas idéal, cette procédure doit permettre de retrouver un état pur après la correction. Ces étapes successives sont décrites Fig. 4.1.

Dans l'objectif de quantifier la qualité du processus de rétro-action, nous introduisons un certain nombre de critères, chacun associé à une grandeur caractérisant l'état de sortie :

Cohérence *La rétro-action augmente la cohérence.* La cohérence étant définie comme la norme du vecteur de Bloch moyen normalisée par le rayon de la sphère : $\eta \equiv \|\langle \mathbf{J} \rangle\|/J$, où $\langle \mathbf{J} \rangle = (\langle J_x \rangle, \langle J_y \rangle, \langle J_z \rangle)$ et $\langle J_k \rangle = \text{Tr}(J_k \rho)$,

Entropie *La rétro-action réduit l'entropie de Von Neumann.* L'entropie de Von Neumann d'un système décrit par son opérateur densité ρ étant $S \equiv -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho)$ ¹,

1. Si la matrice densité admet une décomposition de la forme $\rho = \sum_k \lambda_k |k\rangle \langle k|$, alors l'entropie de Von

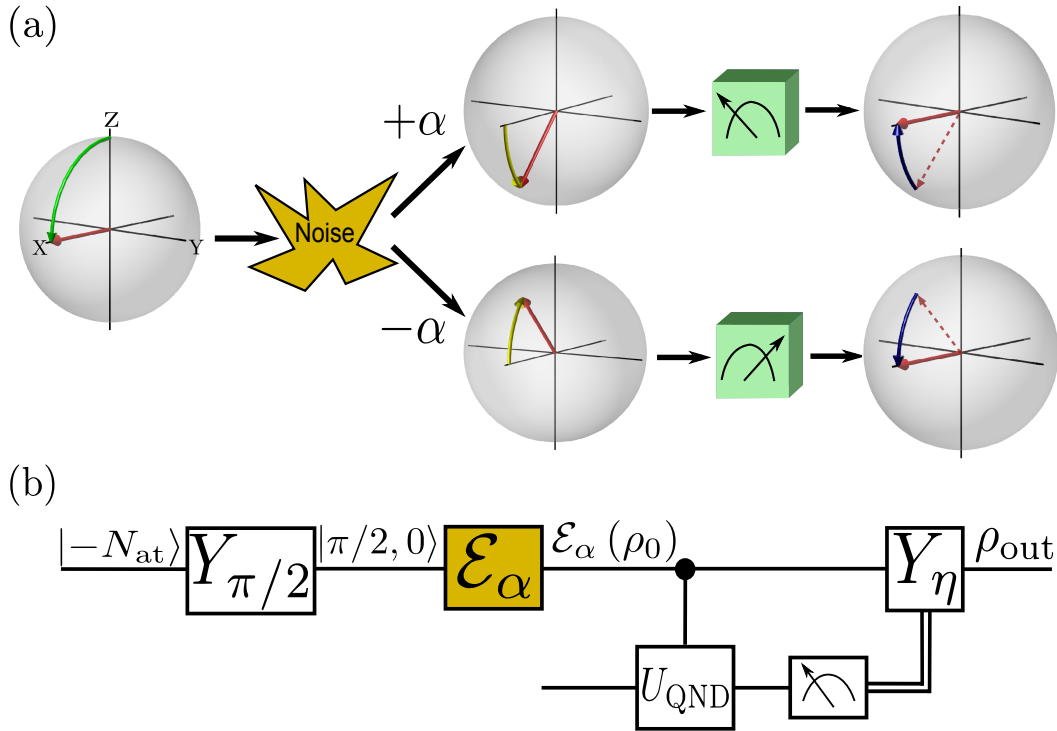


Figure 4.1 – (a) Evolution du spin collectif sur la sphère de Bloch lors de la rétro-action quantique. Après une rotation de $\pi/2$ qui prépare la superposition cohérente, l'état collectif subit un bruit, ici un basculement, ce dernier est alors détecté grâce à une mesure faible et non-destructive avant d'être corrigé. (b) Circuit quantique décrivant le schéma de rétro-action. La rotation finale Y_η , assurant la correction, est conditionnée au résultat de la mesure non-destructive.

Fidélité La rétro-action augmente la fidélité. La fidélité étant définie comme la projection de l'état en sortie ρ_{out} sur l'état d'entrée $|\psi_0\rangle$: $\mathcal{F}(\rho_{\text{out}}, |\psi_0\rangle) \equiv \langle \psi_0 | \rho_{\text{out}} | \psi_0 \rangle$.

Bien que chacun de ces critères permet de définir si la rétro-action est efficace ou non, certains sont plus facilement accessibles que d'autres selon le contexte expérimental. Dans la situation présente, nous utiliserons le critère associé à la cohérence car cette dernière quantité est facilement accessible par interférométrie de Ramsey, comme nous avons déjà pu le constater.

4.1.2 Analyse théorique

Dans cette partie, nous introduisons les outils théoriques permettant de décrire le système de rétro-action, une partie du travail ayant déjà été effectuée lors de l'étude du processus de mesure Sec. 2.3. Nous décrivons l'évolution du système après chaque étape : basculement de bit, mesure et rétro-action ; ce qui nous permet de déterminer l'état de sortie dans la limite d'une mesure faible et ainsi d'analyser l'efficacité du processus de rétro-action au regard des différents critères énoncés précédemment.

Neumann est

$$S = - \sum_k \lambda_k \log_2 \lambda_k,$$

cette relation est utile pour calculer l'entropie en pratique.

4.1.2.1 Décohérence

L'état initial, *i.e.* l'état que l'on désire protéger, est l'état cohérent de spin $|\psi_0\rangle = |\pi/2, 0\rangle$ obtenu après une rotation d'angle $\pi/2$ de l'état $|J, -J\rangle$ selon l'axe Y de la sphère de Bloch. Cet état subit un bruit qui induit, de manière aléatoire et équiprobable, une rotation d'un angle $+\alpha$ ou $-\alpha$ autour de l'axe Y . On peut modéliser l'action de ce bruit sur un opérateur densité ρ grâce au super-opérateur suivant :

$$\mathcal{E}_\alpha(\rho) \equiv \frac{1}{2}Y_\alpha\rho Y_\alpha^\dagger + \frac{1}{2}Y_{-\alpha}\rho Y_{-\alpha}^\dagger \tag{4.1}$$

où $Y_\alpha \equiv e^{i\alpha J_y}$ est la rotation du spin collectif d'un angle α selon l'axe Y . On construit les opérateurs de Kraus² :

$$E_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_{\pm\alpha}, \tag{4.2}$$

qui satisfont la relation de complétude :

$$E_+E_+^\dagger + E_-E_-^\dagger = \frac{1}{2}(Y_\alpha Y_\alpha^\dagger + Y_{-\alpha} Y_{-\alpha}^\dagger) = \mathbf{1}. \tag{4.3}$$

On constate que les opérateurs E_\pm sont les générateurs du super-opérateur $\mathcal{E}_\alpha(\rho)$, en effet, on peut réécrire la relation Eq. (4.1) de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_\alpha(\rho) = E_+\rho E_+^\dagger + E_-\rho E_-^\dagger, \tag{4.4}$$

autrement dit, la décomposition Eq. (4.1) est une *représentation de Kraus*. Cette évolution du système est une *décohérence*, plus particulièrement, il s'agit d'un *basculement de bit et de phase* [Nielsen 00, p. 376], qui transforme la sphère de Bloch en une ellipsoïde de révolution d'axe Y , Fig. 4.2 (a).

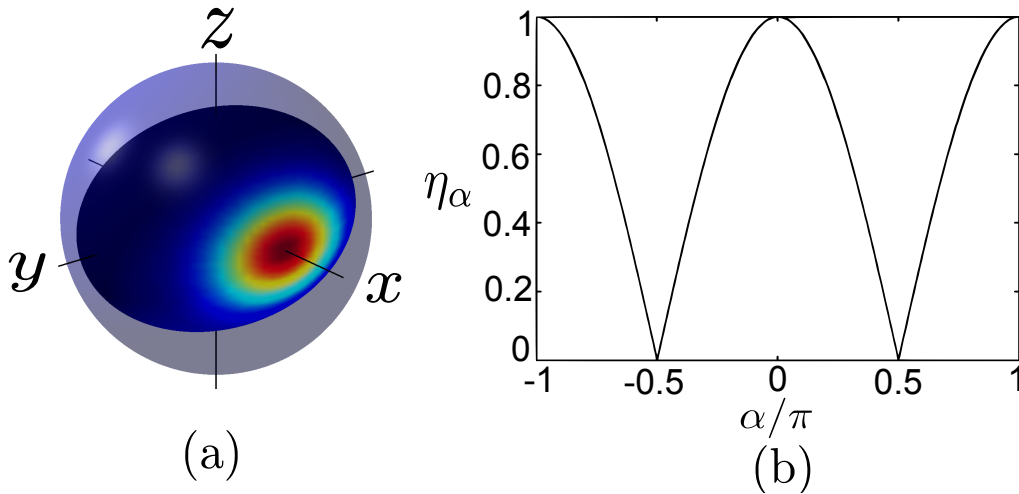


Figure 4.2 – Décohérence provoquée par un basculement de bit. (a) Déformation de la sphère de Bloch sous l'influence d'un basculement de bit et de phase d'angle $\alpha = \pi/4$. (b) Cohérence de l'état après un basculement d'angle α .

2. Pour un rappel sur le traitement des systèmes ouverts en mécanique quantique, et plus particulièrement sur le formalisme des opérateurs de Kraus, on pourra consulter l'Annexe C.

Lorsque l'état initial $|\psi_0\rangle = |\pi/2, 0\rangle$ subit ce basculement, il se transforme en un mélange statistique équirépartie entre les états $|\pi/2 + \alpha, 0\rangle$ et $|\pi/2 - \alpha, 0\rangle$:

$$\mathcal{E}_\alpha(\rho_0) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad (4.5)$$

où $\rho_0 \equiv |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ et $\rho(\theta) \equiv |\theta, 0\rangle\langle\theta, 0|$.

Nous pouvons maintenant estimer les trois quantités caractéristiques présentées précédemment, à savoir la cohérence, l'entropie de Von Neumann et la fidélité. Les résultats sur les valeurs moyennes des opérateurs de spin, présentés dans l'Annexe A, permettent de déterminer la cohérence de l'opérateur densité $\mathcal{E}_\alpha(\rho_0)$:

$$\eta_\alpha = |\cos \alpha|, \quad (4.6)$$

ce qui est représenté Fig. 4.2 (b). On constate que le basculement réduit la cohérence de l'état, pour $\alpha = \pi/2$ la cohérence s'annule. On montre aussi que l'entropie de Von Neumann vaut :

$$S(\mathcal{E}_\alpha(\rho_0)) = 1, \quad (4.7)$$

autrement dit, le basculement augmente l'entropie puisqu'elle était initialement nulle. Enfin, la fidélité de l'état $\mathcal{E}_\alpha(\rho_0)$ par rapport à l'état d'entrée $|\psi_0\rangle$ est obtenue, dans la limite $J \gg 1$, à partir de la relation Eq. (2.54) :

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}_\alpha(\rho_0), |\psi_0\rangle) = e^{-N_{\text{at}}\alpha^2}, \quad (4.8)$$

ici on constate que la fidélité décroît après le basculement, de plus elle diminue très fortement dès lors que $\alpha > 1/\sqrt{N_{\text{at}}}$.

Comme nous l'avons vu Sec. 2.1.2.5, la distribution Q de Husimi est un important outil pour la représentation des états collectifs, il est donc intéressant de déterminer quelle est la distribution de Husimi du mélange statistique $\mathcal{E}_\alpha(\rho_0)$. La distribution Q associée à un opérateur densité ρ est définie comme :

$$Q_\rho(\theta, \varphi) = \langle\theta, \varphi|\rho|\theta, \varphi\rangle, \quad (4.9)$$

en utilisant la relation Eq. (2.52), valable pour un état cohérent de spin dans la limite $J \gg 1$, on obtient la relation suivante après factorisation :

$$Q_{\mathcal{E}_\alpha(\rho_0)}(\theta, \varphi) = \cosh\left[J\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\alpha\right] e^{-\frac{J}{2}\left[\eta_\alpha^2\varphi^2 + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \alpha^2\right]}. \quad (4.10)$$

En particulier, le maximum de cette distribution est atteint pour $(\theta, \varphi) = (\pi/2, 0)$ et vaut

$$Q_{\mathcal{E}_\alpha(\rho_0)}(\pi/2, 0) = \exp\left(-N_{\text{at}}\alpha^2\right) = \mathcal{F}(\mathcal{E}_\alpha(\rho_0), |\psi_0\rangle), \quad (4.11)$$

ce qui est strictement plus petit que l'unité pour $\alpha \neq 0$, à la différence de ce que nous avons constaté pour un état pur (voir Sec. 2.1.2.5).

4.1.2.2 Evolution sous la mesure

On peut décrire l'évolution du système sous la mesure à l'aide des opérateurs de mesure $\{M_{n_0}\}$, où n_0 est valeur propre de l'observable J_z . On remarquera toutefois que l'ensemble des n_0 accessible par la mesure n'est pas borné entre $-J$ et J , car dans le cas d'une mesure faible l'incertitude de la détection peut être plus large que $2J + 1$. De plus, puisque $J \gg 1$, on suppose que le paramètre n_0 est continu, si bien que l'ensemble des opérateurs de mesure vérifie la relation de complétude :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M_{n_0} M_{n_0}^\dagger dn_0 = \mathbf{1}. \quad (4.12)$$

Dans notre situation expérimentale, nous avons démontré Sec. 2.3.3 que l'opérateur de mesure prend la forme suivante :

$$M_{n_0} = \left(\frac{2M^2 N_p}{\pi} \right)^{1/4} e^{-M^2 (J_z - n_0)^2 N_p} \quad (4.13)$$

où N_p est le nombre de photons dans l'impulsion de mesure. Cet opérateur permet de décrire l'ensemble des régimes d'une mesure non-destructive : de la mesure faible à la mesure forte.

Dans la limite $J \gg 1$, l'état cohérent $|\theta, \varphi\rangle = \sum_n c_n(\theta, \varphi) |n\rangle$ peut être approché par un état gaussien :

$$c_n(\theta, \varphi) = \left(\frac{2}{\pi J (1 - \cos 2\theta)} \right)^{1/4} e^{-i\varphi n} e^{-\frac{(n - J \cos \theta)^2}{J(1 - \cos 2\theta)}}. \quad (4.14)$$

Lorsqu'une mesure est réalisée sur l'état $|\theta, \varphi\rangle$, la probabilité d'obtenir le résultat n_0 est :

$$p(n_0|\theta, \varphi) = \langle \theta, \varphi | M_{n_0}^\dagger M_{n_0} | \theta, \varphi \rangle = \sqrt{\frac{2\xi_\theta^2 M^2 N_p}{\pi}} e^{-2\xi_\theta^2 M^2 N_p (n_0 - J \cos \theta)^2}, \quad (4.15)$$

où on a introduit le paramètre $\kappa^2 = M^2 N_{at} N_p$ et le facteur de compression $\xi_\theta^2 = 1 / (1 + \kappa^2 \sin^2 \theta)$, on rappelle que κ^2 est le carré du ratio entre la largeur de la fonction d'onde atomique et celle de la fonction de mesure, il caractérise le caractère projectif de la mesure.

4.1.2.3 Rétroaction

Le contrôleur de la boucle de rétro-action est très simple. Le signe de n_0 , que nous procure la mesure, permet de déterminer dans quel hémisphère est situé le vecteur de Bloch. Cette information est suffisante pour déterminer le basculement subi par le système : $Y_{-\alpha}$ si le signe est positif et Y_α sinon. Une fois le basculement déterminée, on peut appliquer la rotation opposée afin de ramener le système dans l'état initial $|\pi/2, 0\rangle$. Un tel contrôleur est modélisable par l'intermédiaire du super-opérateur suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\alpha(\rho) = & \frac{1}{2} \sum_{n_0=-\infty}^{\infty} \left\{ p(n_0 > 0 | \frac{\pi}{2} - \alpha) Y_{+\alpha} M_{n_0} Y_{-\alpha} \rho Y_{-\alpha}^\dagger M_{n_0}^\dagger Y_{+\alpha}^\dagger \right. \\ & + p(n_0 < 0 | \frac{\pi}{2} + \alpha) Y_{-\alpha} M_{n_0} Y_{+\alpha} \rho Y_{+\alpha}^\dagger M_{n_0}^\dagger Y_{-\alpha}^\dagger \\ & + p(n_0 < 0 | \frac{\pi}{2} - \alpha) Y_{-\alpha} M_{n_0} Y_{-\alpha} \rho Y_{-\alpha}^\dagger M_{n_0}^\dagger Y_{-\alpha}^\dagger \\ & \left. + p(n_0 > 0 | \frac{\pi}{2} + \alpha) Y_{+\alpha} M_{n_0} Y_{+\alpha} \rho Y_{+\alpha}^\dagger M_{n_0}^\dagger Y_{+\alpha}^\dagger \right\}, \quad (4.16) \end{aligned}$$

où $p(n_0 > 0 | \pi/2 \pm \alpha)$ ($p(n_0 < 0 | \pi/2 \pm \alpha)$) est la probabilité de mesurer $n_0 > 0$ ($n_0 < 0$) étant donné que l'état a subi une rotation $Y_{\pm\alpha}$.

On définit la *probabilité de succès* p_s , comme la probabilité pour que le résultat de la mesure soit positif, sachant que le système a subi une rotation $Y_{-\alpha}$ et réciproquement. En utilisant le résultat Eq. (4.15), on trouve :

$$p_s = \int_0^\infty p(n_0 | \pi/2 - \alpha, 0) dn_0 = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\sqrt{J \xi_{\pi/2-\alpha}^2} \kappa^2 \sin \alpha \right) \right] \quad (4.17)$$

Comme nous allons le voir, cette grandeur est le paramètre clef pour déterminer l'état du système dans la limite d'une mesure faible, elle permet, entre autres, de faire le lien entre les trois grandeurs caractéristiques : cohérence, entropie et fidélité.

Dans la limite d'une mesure faible ($\kappa^2 \ll 1$), une projection négligeable est induite sur l'état et $M_{n_0} \sim \mathbb{1}$. Dans ce cas, le super-opérateur décrivant le contrôleur se réduit à :

$$\mathcal{C}_\alpha(\rho) \sim p_s \rho + \frac{1-p_s}{2} \left[Y_{2\alpha} \rho Y_{2\alpha}^\dagger + Y_{-2\alpha} \rho Y_{-2\alpha}^\dagger \right]. \quad (4.18)$$

Pour obtenir cette expression, on a utilisé la propriété suivante, qui découle de la symétrie du problème par rapport au plan équatorial de la sphère de Bloch :

$$p(n_0 > 0 | \pi/2 - \alpha) = p(n_0 < 0 | \pi/2 + \alpha), \quad (4.19)$$

ainsi que les relations suivantes, obtenues à partir des conditions de normalisation :

$$p(n_0 > 0 | \pi/2 - \alpha) = 1 - p(n_0 < 0 | \pi/2 - \alpha), \quad (4.20)$$

$$p(n_0 > 0 | \pi/2 + \alpha) = 1 - p(n_0 < 0 | \pi/2 + \alpha). \quad (4.21)$$

On peut alors résumer l'action de la boucle de rétro-action dans ce cas de la manière suivante : soit le contrôleur a pris la bonne décision et l'état après correction est $|\pi/2, 0\rangle$, soit il a effectué le mauvais choix et l'état de sortie est $|\pi/2 \pm 2\alpha, 0\rangle$. L'opérateur densité en sortie est $\rho_{\text{out}} = \mathcal{C}_\alpha(\rho_0)$, soit de manière explicite :

$$\rho_{\text{out}} = p_s \rho \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{1-p_s}{2} \left[\rho \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha \right) + \rho \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) \right] \quad (4.22)$$

Nous pouvons à partir de cette expression déterminer la cohérence, l'entropie de Von Neumann et la fidélité de l'opérateur densité ρ_{out} . Ces grandeurs sont présentées Tab. 4.1 dans lequel sont résumés les résultats obtenus pour les états intervenants au cours du processus de rétro-action.

	$ \psi_0\rangle$	$\mathcal{E}_\alpha(\rho_0)$	ρ_{out}
Cohérence	1	$ \cos \alpha $	$p_s + (1-p_s) \cos 2\alpha$
Entropie	0	1	$-p_s \log_2 p_s + (1-p_s) [1 - \log_2 (1-p_s)]$
Fidélité	1	$e^{-N_{\text{at}} \alpha^2}$	$p_s + (1-p_s) e^{-N_{\text{at}} \alpha^2}$

Table 4.1 – Evolution des grandeurs caractéristiques au travers du processus de rétro-action : état initial $|\psi_0\rangle$, état après basculement $\mathcal{E}_\alpha(\rho_0)$ et état après correction ρ_{out} dans la limite d'une mesure faible.

Ces résultats permettent d'étudier l'efficacité de la méthode de rétro-action, en comparant ces paramètres avec ceux de l'état après basculement $\mathcal{E}_\alpha(\rho_0)$ au regard des critères énoncés précédemment. On a représenté Fig. 4.3 la manière dont ces quantités évoluent avec la probabilité de succès, pour un angle de basculement $\alpha = \pi/4$. Supposons tout d'abord que la mesure soit parfaite, dans ce cas $p_s = 1$ et l'état de sortie Eq. (4.22) est pur et vaut $|\psi_0\rangle$, la rétroaction est donc elle aussi parfaite. Dans le cas inverse, si la mesure n'est pas capable de distinguer entre les états $|\pi/2 + \alpha, 0\rangle$ et $|\pi/2 - \alpha, 0\rangle$, alors la probabilité de succès est $p_s = 1/2$ et la cohérence de l'état s'en retrouve réduite : $\eta_\alpha^{\text{out}} = \eta_\alpha^2 < \eta_\alpha$; quant à l'entropie, elle voit sa valeur augmenter à $S(\rho_{\text{out}}) = 3/2 > 1$; autrement dit, dans ce cas, la rétroaction dégrade l'état au lieu de le préserver.

On remarque de plus que la probabilité de succès $p_s^{(0)}$, définie comme la probabilité au-delà de laquelle un critère est vérifié, diffère selon le critère adopté. Pour le critère associé à la fidélité, on a $p_s^{(0)} = 0$, le critère est par conséquent toujours vérifié, ce qui le rend peu utile pour la caractérisation du système de rétro-action. Pour le critère associé à la cohérence, la valeur de $p_s^{(0)}$ dépend de l'angle de basculement α , plus précisément pour $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$:

$$p_s^{(0)}(\alpha) = \frac{\cos \alpha - \cos 2\alpha}{2 \sin^2 \alpha}, \quad (4.23)$$

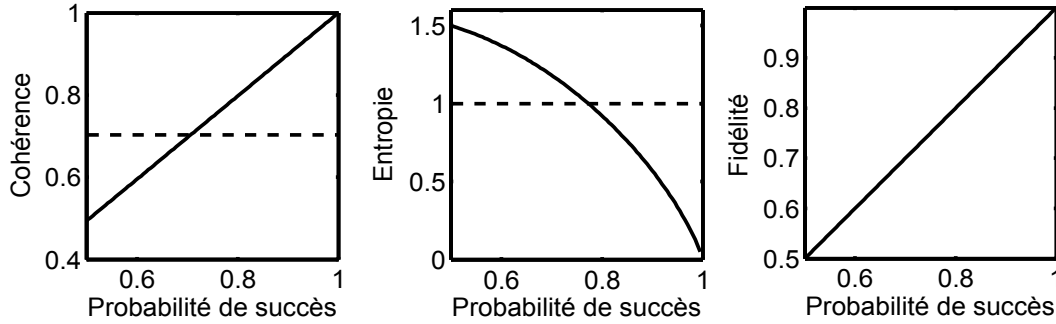


Figure 4.3 – Cohérence, entropie de Von Neumann et fidélité en fonction de la probabilité de succès, pour $\alpha = \pi/4$ et $N_{\text{at}} \gg 1$. Les lignes pointillées sont les valeurs de l'état $\mathcal{E}_{\pi/4}(\rho_0)$ après basculement.

on a représenté ce résultat Fig. 4.4, on constate que plus l'angle α est faible plus $p_s^{(0)}$ augmente et donc plus la détection doit être précise. Enfin, puisque l'entropie ne dépend pas de l'angle α , $p_s^{(0)}$ est constant quel que soit le basculement appliqué, il vaut $p_s^{(0)} \sim 0.77$. Pour conclure, si le critère reposant sur la fidélité est trop faible pour être utile à des fins de caractérisation de la méthode de rétro-action quantique, les deux autres critères, associés à la cohérence et à l'entropie de Von Neumann, sont *a priori* utilisables. Par la suite, nous choisirons le critère lié à la cohérence car cette dernière quantité est facilement accessible dans notre configuration expérimentale.

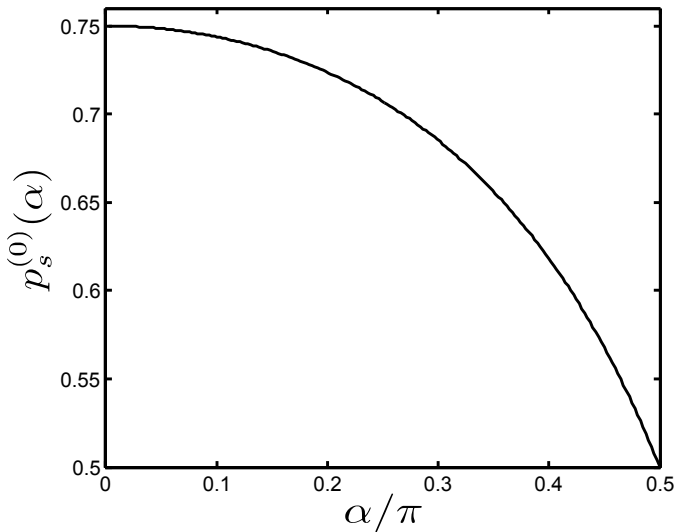


Figure 4.4 – Probabilité limite $p_s^{(0)}$, au-delà de laquelle le critère d'efficacité associé à la cohérence est vérifié, en fonction de l'angle α du basculement.

4.1.3 Simulation de Monte-Carlo

Afin d'acquérir une compréhension plus profonde du processus et de vérifier la justesse de l'analyse théorique qui vient d'être effectuée, nous avons réalisé une simulation de type Monte-Carlo du processus de rétro-action. Cette simulation permet de déterminer les implications d'une discrimination non-parfaite du basculement et d'étudier l'influence d'une projection partielle de l'état lors de la mesure.

Ces simulations ont été réalisées de la manière suivante : l'état initial $|\pi/2, 0\rangle$ subit de manière aléatoire et équiprobable une rotation Y_α ou $Y_{-\alpha}$; on calcule alors la densité de probabilité de mesurer une différence de population n_0 pour l'état après basculement, puis on tire au hasard une valeur pour n_0 distribuée selon la densité de probabilité venant d'être évaluée ; enfin, selon

le signe de n_0 , on corrige l'état avec la rotation appropriée, cette dernière est calculée de manière exacte *via* les matrices D de Wigner (voir Sec. 2.1.2.3). En répétant cette séquence, on détermine la probabilité de succès ainsi qu'un estimateur de l'opérateur densité en sortie grâce à la moyenne des états obtenus à la fin de chaque trajectoire quantique :

$$\overline{\rho_{\text{out}}} = \frac{1}{N_{\text{rep}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{rep}}} |\psi_{\text{out}}(k)\rangle \langle \psi_{\text{out}}(k)|, \quad (4.24)$$

où N_{rep} est le nombre de trajectoires simulées et $|\psi_{\text{out}}(k)\rangle$ est l'état obtenu à la fin de la k -ème séquence.

Nous avons réalisé cette simulation pour différentes forces de mesure κ^2 et différents angles de rotation α pour le basculement, les résultats obtenus sont présentés Fig. 4.5. On constate que le résultat Eq. (4.17) pour la probabilité de succès est en très bon accord avec la simulation. Les résultats analytiques obtenus dans la limite d'une mesure faible sont eux aussi en bon accord. On remarque aussi que, pour une mesure forte ($\kappa^2 \gg 1$), la fidélité s'effondre et l'entropie diverge, ce qui prouve qu'une mesure forte n'est pas optimale pour la rétroaction³. On observe, tant pour l'entropie que pour la fidélité, l'existence d'une valeur de κ^2 produisant un résultat optimal, cet optimum est atteint pour $\kappa^2 < 1$, *i.e.* pour une mesure faible.

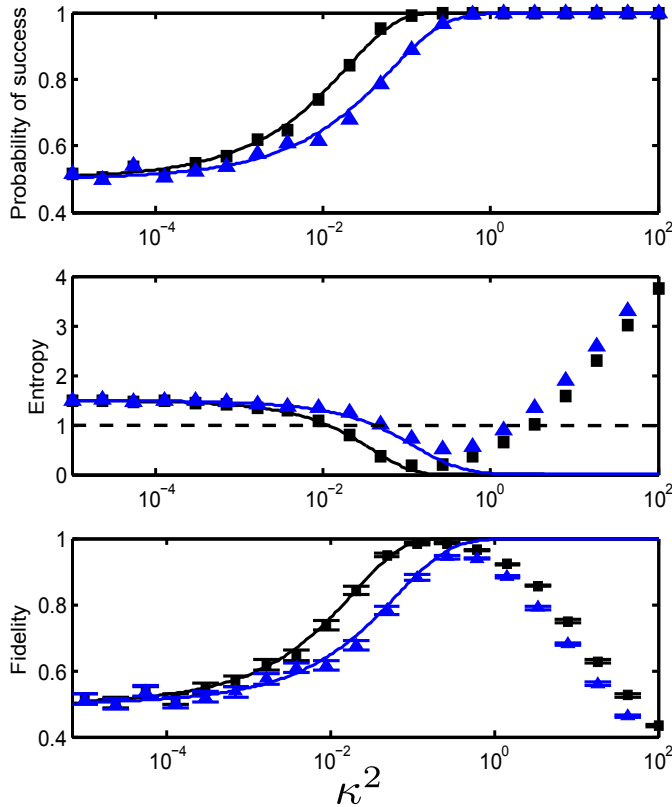


Figure 4.5 – Simulation de Monte-Carlo de la rétroaction quantique. Les résultats sont obtenus à partir de 1000 trajectoires, pour lesquelles on a utilisé les paramètres : $N_{\text{at}} = 100$, $\alpha = \pi/4$ (carrés noirs) et $\alpha = \pi/8$ (triangles bleus). De haut en bas, on a représenté la probabilité de succès, l'entropie de Von Neumann et la fidélité en fonction de κ^2 . Les lignes continues sont les résultats analytiques obtenus dans la limite d'une mesure faible ($\kappa^2 \ll 1$), sauf pour la probabilité de succès où le résultat est exact quelque soit la valeur de κ^2 (Eq. (4.17)).

3. Du moins pour le contrôleur envisagé, il est possible d'imaginer une rétro-action prenant en considération la projection de l'état et la corrigeant. Néanmoins, sa mise en œuvre n'est pas triviale de part la non-unitarité du processus de mesure, de plus il n'est pas évident que le résultat obtenu soit meilleur que le protocole utilisant la mesure faible.

4.1.4 Résultats expérimentaux

4.1.4.1 Mise en œuvre expérimentale

Le montage expérimental est présenté Fig. 4.6. La mise en œuvre de la détection non-destructive est inchangée par rapport à la description réalisée au chapitre précédent, elle est placée selon la configuration décrite Sec. 3.3.6.2 afin de mesurer l'observable J_z . La fréquence de modulation est fixée à $\Omega = 3.421$ GHz et les décalages des bandes latérales par rapport à leurs transitions respectives sont $\Delta_{12} = -122$ MHz et $\Delta_{23} = 153$ MHz. Les deux différences majeures résident dans le fait que l'on sonde ici un nuage piégé et qu'un contrôleur numérique, ajouté en sortie de la détection, permet un traitement en temps réel des données.

Travailler sur un échantillon piégé nous permet d'itérer des cycles de rétroaction pendant un temps long, tout en conservant un bon contrôle sur les paramètres du nuage (notamment le nombre d'atomes, la température et la taille). Comme nous l'avons vu Sec. 3.7, nous pouvons réaliser des séquences d'environ 10 ms avant que le faisceau de piège n'engendre une décohérence trop importante du fait de l'inhomogénéité des déplacements lumineux. Notons aussi le déplacement lumineux différentiel induit par le faisceau de piège sur l'état $5P_{3/2}$ est compensé grâce à un faisceau à 1529 nm, suivant la procédure décrite Sec. 5.7. Environ 5×10^5 atomes à 10 μ K sont présents dans le piège dipolaire à la fin de la séquence de préparation décrite Sec. 3.4.3, le nuage est polarisé dans l'état $|F = 1, m_F = 0\rangle$ avec une pureté supérieure à 99 %.

Pour réaliser le schéma de rétro-action quantique, nous avons besoin d'un traitement en temps réel du signal fourni par la détection non-destructive. Ce traitement s'effectue en plusieurs étapes : le signal en sortie du démodulateur est tout d'abord moyenné par intégration analogique pendant la durée correspondante à l'impulsion de mesure, la sortie de l'intégrateur est ensuite numérisée avant d'être traitée par un microcontrôleur. On utilise un ADuC814 de chez Analog Devices qui intègre à la fois le convertisseur analogique-numérique et le microcontrôleur, notons que ce composant intègre aussi des convertisseurs numériques-analogiques qui nous seront utiles dans la seconde partie de ce chapitre.

Un contrôle de la direction et de l'axe de rotation du spin collectif est nécessaire à la mise en œuvre de la rétro-action ainsi qu'à la réalisation du basculement Eq. (4.1). Ce contrôle est réalisé *via* l'ajustement de la phase de la source micro-onde. Cette modification s'effectue à l'aide d'un modulateur de phase (AD8345, Analog Devices) utilisé pour l'implémentation du protocole de télécommunication QPSK (Quadrature Phase-Shift Keying), ce qui permet grâce à deux bits de contrôle d'obtenir de manière précise les déphasages suivants : $0, \pi/2, \pi, -\pi/2$. Le basculement de bit est réalisé par un générateur quantique de nombres aléatoires (Quantis, IDQuantique) connecté au contrôleur de phase. Enfin, pour réaliser la correction, la sortie du microcontrôleur est elle aussi connectée au contrôleur de phase.

4.1.4.2 Détermination de la cohérence de l'état de sortie

Parmi les critères énoncés précédemment, nous choisissons de caractériser l'efficacité du processus de rétro-action par sa capacité à préserver la cohérence de l'état. Nous avons choisi cette quantité car elle est facilement accessible dans notre situation expérimentale, notamment grâce à l'interférométrie de Ramsey. On obtient la cohérence résiduelle de l'état final η_f , en estimant séparément la cohérence résiduelle liée à chaque source de décohérence :

- la probabilité de succès non-parfaite ($p_s < 1$) : η_α^{out} ,
- l'émission spontanée de la sonde : η_{sp} ,
- le piège dipolaire : η_{tr} ,

puis en réalisant le produit de chacune de ces contributions :

$$\eta_f = \eta_\alpha^{\text{out}} \eta_{\text{sp}} \eta_{\text{tr}}. \quad (4.25)$$

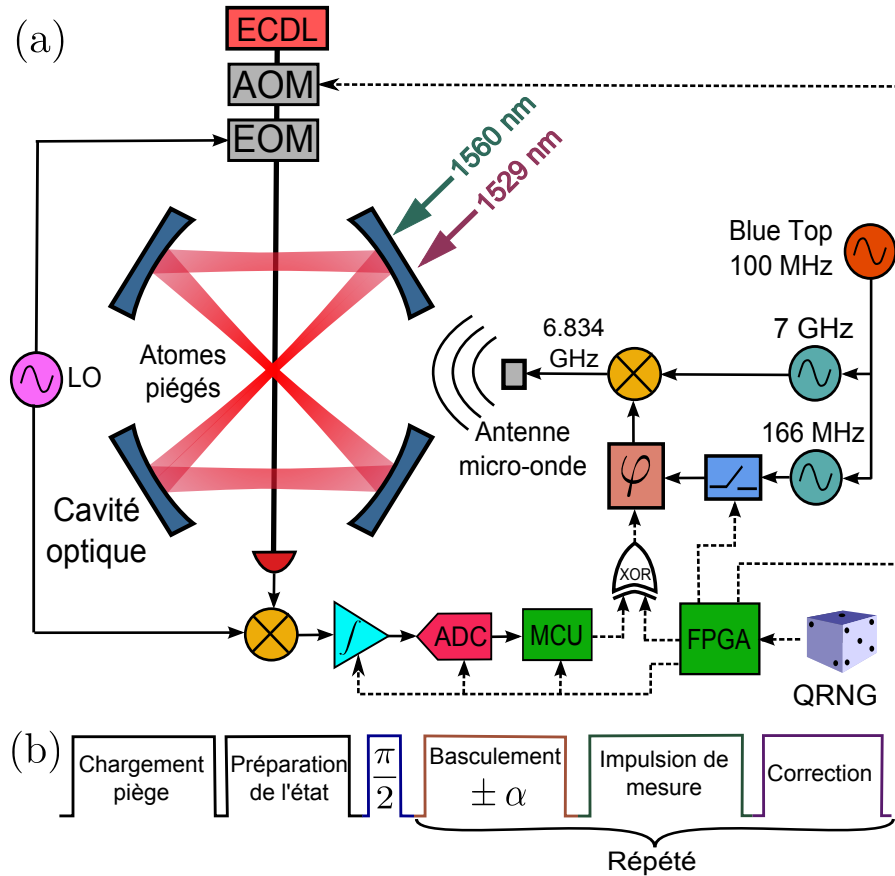


Figure 4.6 – (a) Montage expérimental pour la rétro-action quantique. La séquence de rétroaction quantique est synchronisée par un FPGA qui contrôle les impulsions de détection optique et les manipulations micro-onde, il synchronise aussi le signal asynchrone en provenance du générateur de nombre aléatoire quantique (QRNG). Les signaux en provenance du micro-contrôleur (MCU) et du QRNG (via le FPGA) sont combinés sur le contrôleur de phase (φ) grâce à une porte XOR. (b) Séquence expérimentale.

La mesure de la cohérence $\eta_{\alpha}^{\text{out}}$, liée à la précision de la mesure, est obtenue par l'estimation de la probabilité de succès. Celle induite par la sonde η_{sp} est mesurée avec un interféromètre de Ramsey où une impulsion lumineuse est émise pendant le temps d'interrogation. Enfin, la décohérence provoquée par le piège a, elle aussi, été obtenue par interférométrie de Ramsey Fig. 3.27.

Nous avons ici choisi un angle de basculement $\alpha = \pi/4$, car dans ce cas précis la mesure de la probabilité de succès procure une estimation directe de la cohérence $\eta_{\pi/4}^{\text{out}} = p_s$, comme on peut le constater Tab. 4.1.

4.1.4.3 Un unique cycle de rétro-action

En premier lieu, nous avons étudié l'efficacité du processus de rétro-action lors d'un unique cycle composé d'un basculement réalisé à partir d'une impulsion $\pi/4$ de direction aléatoire, d'une mesure et d'une impulsion micro-onde de correction. En réalisant l'acquisition simultanée de la direction du basculement fixée, par le générateur de nombres aléatoires, et de la direction de la correction en sortie du contrôleur, on peut estimer la probabilité du succès, puisqu'il s'agit du rapport entre le nombre de fois où le contrôleur a pris la bonne décision sur le nombre total de fois où la séquence a été répétée. En réalisant cette mesure pour différents nombres de photons dans l'impulsion de détection non-destructive, on obtient le résultat Fig. 4.7 (carrés). On réalise

aussi la mesure en l'absence d'atomes dans le piège, pour vérifier qu'il n'y a pas de biais lorsque la puissance optique augmente, on constate que la probabilité reste constante à une valeur de $1/2$, comme attendu.

On mesure aussi la décohérence induite par la sonde η_{sp} en fonction du nombre de photons. Cette mesure est réalisée grâce à une séquence de Ramsey puisque le contraste des franges en sortie de l'interféromètre fournit directement la cohérence résiduelle de l'échantillon. On obtient alors le résultat Fig. 4.7 (ronds) et on observe une décroissance exponentielle de la cohérence avec le nombre de photons. Une cohérence résiduelle de $1/e$ est obtenue pour 5.8×10^8 photons par bande latérale et par impulsion.

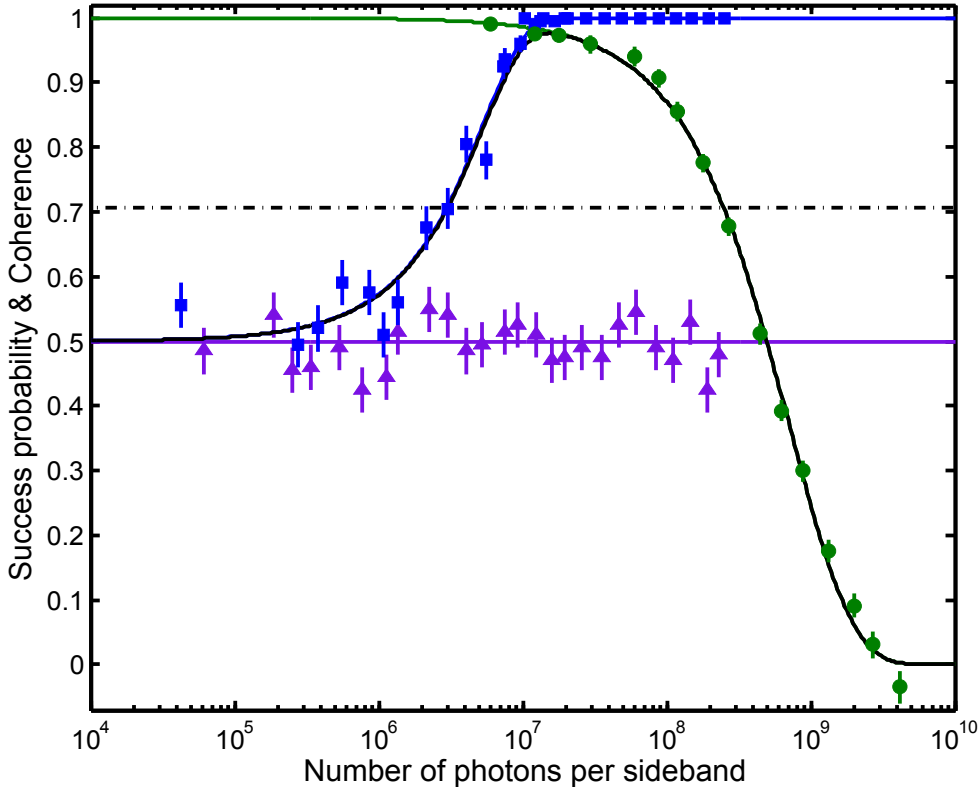


Figure 4.7 – Evolution de la cohérence et de la probabilité de succès, pour une unique séquence de rétroaction, en fonction du nombre de photons par bande latérale lors d'une impulsion de mesure de $2 \mu\text{s}$. Les carrés bleus sont la probabilité de succès et la ligne bleue continue est un ajustement par une fonction d'erreur. Les triangles mauves représentent la probabilité de succès en l'absence d'atomes, la ligne mauve continue est la valeur $1/2$ attendue. Les ronds verts représentent la décohérence due à la sonde mesurée par interférométrie de Ramsey, la ligne verte continue est un ajustement exponentiel des données. La ligne pointillée est la cohérence résiduelle de l'état après le basculement, $\eta_{\pi/4} = 1/\sqrt{2}$. Quant à la ligne noire pleine, elle représente la cohérence η_f de l'état final.

On constate que, pour un faible nombre de photons par impulsion, la cohérence est limitée par la probabilité de succès, autrement dit par la précision de la mesure; à l'inverse pour un grand nombre de photons, l'émission spontanée induite par la sonde devient limitante. Entre les deux, il apparaît un optimum résultant du compromis entre précision de la détection et destructivité. Dans le cas présent, cet optimum est atteint pour environ 1.5×10^7 photons par bande latérale et par impulsion, la cohérence résiduelle en ce point vaut 0.98. Pour quantifier l'efficacité de la rétroaction, il convient de comparer la cohérence résiduelle finale η_f avec celle de l'état après le basculement $\eta_{\pi/4} = 1/\sqrt{2}$, on constate alors que la rétro-action améliore la cohérence pour un nombre de photons situé entre 3×10^6 et 2.5×10^8 , en dehors de cette région, la

rétroaction dégrade la cohérence. Ce constat prouve l'efficacité de la rétroaction mise en œuvre.

4.1.4.4 Itération de la séquence de rétro-action

Nous venons de constater que la méthode permet de préserver, du moins partiellement, la cohérence de l'état lors d'une unique séquence de rétro-action, il s'agit là d'un premier pas essentiel. Néanmoins, pour que la démonstration soit complète, il faut être capable d'itérer une telle séquence et ainsi prouver que la rétroaction assure la stabilité du système dans le temps. Nous avons donc étudié comment évolue l'état lorsque la séquence est itérée.

En comparant le signal en sortie du générateur de nombres aléatoires avec la correction en provenance du contrôleur, on peut déterminer la trajectoire suivie par l'état lors d'une réalisation expérimentale. En moyennant ce résultat sur un grand nombre de réalisations, on obtient une estimation de la probabilité pour que le spin collectif soit dans un état donné en fonction du nombre d'itérations. Nous allons voir que cette probabilité nous permet alors de déterminer la matrice densité du système, et donc sa cohérence en l'absence de toute source de décohérence supplémentaire. Nous considérerons alors les autres sources de décohérence, émission spontanée et faisceaux de piège, afin d'obtenir la cohérence de l'échantillon en fonction du nombre d'itérations.

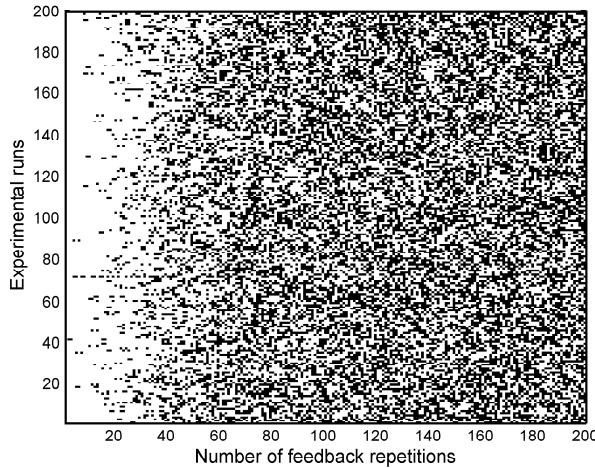


Figure 4.8 – Exactitude des réponses du contrôleur en fonction du nombre d'itérations et de cycles expérimentaux. En blanc, le contrôleur a pris la bonne décision et en noir, la mauvaise. Ce résultat est obtenu avec 1.5×10^7 photons par bande latérale et par impulsion.

Lors de son évolution, le système peut se retrouver dans un des états $|k\rangle \equiv |\pi/2 + k\alpha, 0\rangle$ avec $k \in \llbracket 0, 2\pi/\alpha - 1 \rrbracket$. D'une itération à l'autre, en négligeant toute décohérence en provenance de la sonde et du piège, l'état évolue selon la relation de récurrence suivante :

$$k_{N+1} = k_N + \begin{cases} +1 + \begin{cases} -1 & \text{si succès} \\ +1 & \text{si échec} \end{cases} & \text{si rotation} + \alpha \\ -1 + \begin{cases} +1 & \text{si succès} \\ -1 & \text{si échec} \end{cases} & \text{si rotation} - \alpha \end{cases} \pmod{\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)}. \quad (4.26)$$

On a représenté Fig. 4.8 l'exactitude de la réponse du contrôleur en fonction du nombre d'itérations pour plusieurs réalisations expérimentales. Ce résultat, combiné à la connaissance de la rotation appliquée lors du basculement, nous permet d'utiliser la relation Eq. (4.26) pour reconstruire *a posteriori* la trajectoire suivie par l'état d'une itération à l'autre. En estimant la trajectoire moyenne sur un grand nombre de réalisations expérimentales, on obtient une estimation de la probabilité $p_k(N)$ que le système soit dans l'état $|k\rangle$ après N itérations. Cette

probabilité est reliée à la matrice densité du système en l'absence de toute source additionnelle de décohérence :

$$\rho_{\text{out}}(N) = \sum_{k=0}^{\frac{2\pi}{\alpha}-1} p_k(N) |k\rangle \langle k|. \quad (4.27)$$

Le résultat obtenu est présenté Fig. 4.9 (a), où l'on compare l'évolution des probabilités $p_k(N)$ en présence et en l'absence de rétro-action. On constate qu'en l'absence de rétro-action, le système se retrouve très rapidement dispersé de manière équirépartie sur l'ensemble des états $|k\rangle$, à l'inverse en présence de rétro-action l'état $|k=0\rangle$ est majoritairement occupé pendant une centaine d'itérations.

Néanmoins, l'occupation majoritaire d'un état n'est pas une preuve suffisante du bon fonctionnement de la rétro-action quantique, il convient d'évaluer la cohérence de l'état en considérant non seulement la réussite de la mesure mais aussi les sources additionnelles de décohérence, à savoir ici l'émission spontanée induite par la sonde et le déphasage provoqué par les faisceaux de piège. La connaissance de la matrice densité Eq. (4.27) nous permet de déterminer la cohérence résiduelle du système liée à la précision de la mesure :

$$\eta_{\alpha}^{\text{out}}(N) = \sqrt{\left[\sum_{k=0}^{\frac{2\pi}{\alpha}-1} p_k(N) \cos(k\alpha) \right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{\frac{2\pi}{\alpha}-1} p_k(N) \sin(k\alpha) \right]^2}, \quad (4.28)$$

le résultat obtenu est exposé Fig. 4.9 (b). Les décohérences induites par la sonde et le piège sont aussi représentées Fig. 4.9 (b). Le produit de ces trois contributions fournit la cohérence de l'état de sortie. Afin de réaliser la comparaison, nous avons tracé l'évolution de la cohérence de l'état en l'absence de rétro-action, qui décroît exponentiellement : η_{α}^N . Cette étude est réalisée avec environ 1.5×10^7 photons par bande latérale et par impulsion de mesure.

On constate que la rétroaction augmente le temps de vie de cohérence du système, ce qui prouve qu'elle est efficace. Par exemple, après six itérations, la cohérence résiduelle en l'absence de rétro-action vaut environ 0.13, tandis qu'elle atteint 0.87 lorsque la rétro-action est utilisée. Pour visualiser l'effet de la rétro-action, nous avons représenté l'évolution de la sphère de Bloch Fig. 4.9 (c).

4.1.5 Applications possibles

La démonstration de rétro-action quantique qui vient d'être réalisée constitue un cas d'école où l'état d'un système est protégé contre une source de décohérence modèle, à savoir un basculement. Il n'en reste pas moins qu'il préfigure des mises en œuvre plus complexes dont nous allons présenter quelques exemples.

Dans la limite projective, une rétroaction similaire, ajustant l'angle du spin collectif autour de l'axe Y , combinée à une mesure non-destructive, doit permettre de préparer de manière *déterministe* un état de spin comprimé ou un état de Dicke [Wiseman 94, Thomsen 02b, Thomsen 02a, Stockton 04]; à l'inverse de ce qu'on observe sur la simulation Fig. 2.18 (a) où la préparation est non-déterministe et distribuée selon la loi de Born.

Les ensembles de spins sont aussi d'excellents candidats pour la réalisation de mémoires quantiques [Julsgaard 04, Zhu 11, Kubo 11], car le couplage g d'un unique spin est faible tandis que celui de N spins est exalté par les effets collectifs et vaut $g\sqrt{N}$. La rétro-action quantique que nous venons de présenter peut donc s'avérer utile pour la protection des états mémorisés. Par exemple, dans le cas où plusieurs ensembles sont juxtaposés pour former une mémoire capable de stocker simultanément plusieurs états, les problèmes d'adressabilité pourraient être fortement réduits, en effet, la manipulation d'un ensemble pourrait perturber les ensembles voisins, une

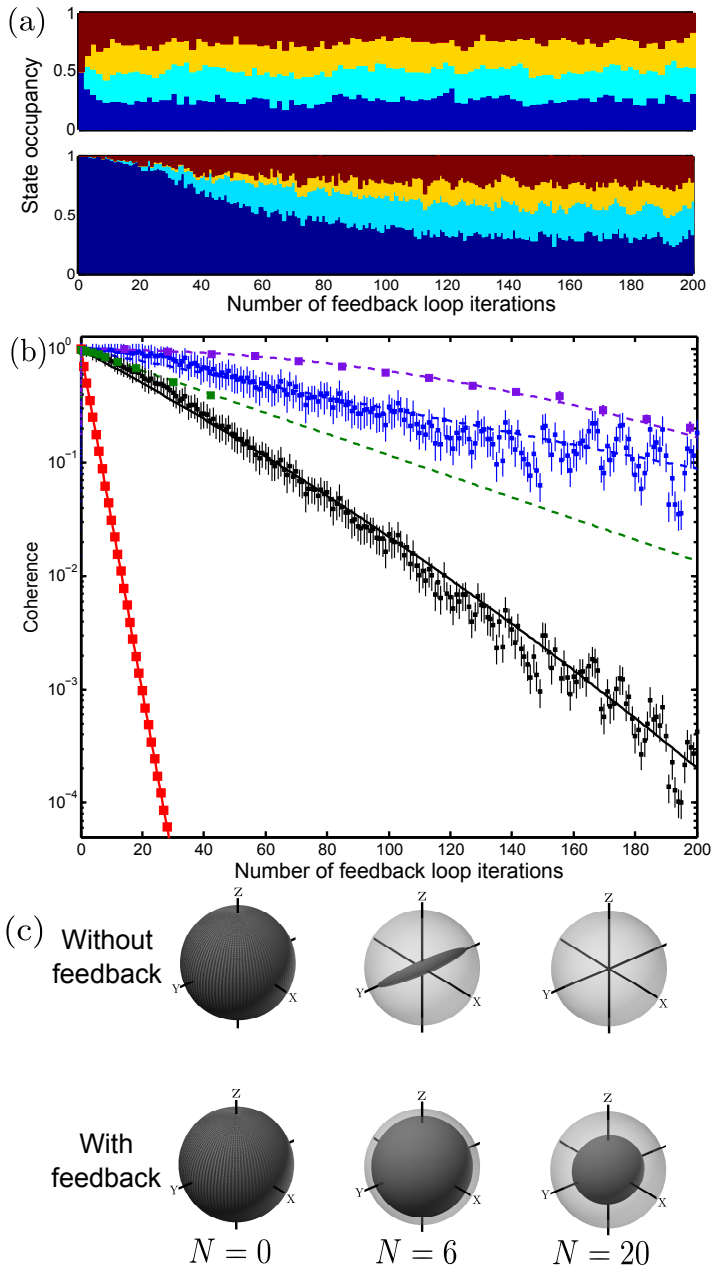


Figure 4.9 – Séquence de rétro-action en temps réel. (a) Occupation de l'état en fonction du nombre d'itérations : $|\pi/2, 0\rangle$ (bleu foncé), $|0, 0\rangle$ (bleu clair), $|\pi, 0\rangle$ (jaune) et $|\pi, 0\rangle$ (rouge). En l'absence (haut) et en présence (bas) de rétro-action. (b) Evolution de la cohérence en fonction du nombre d'itérations. Les carrés bleus sont la cohérence résiduelle obtenue à partir de l'occupation des états, la ligne pointillée est un ajustement exponentiel des données. Les carrés verts sont la mesure de la décohérence liée à l'émission spontanée de la sonde et la ligne verte pointillée est un ajustement exponentiel. Les points mauves sont la décohérence due au déplacement lumineux provoqué par le faisceau de piège, la courbe pointillée est un ajustement gaussien. Les points noirs représentent la cohérence de l'état de sortie obtenue par le produit des cohérences résiduelles. En rouge, la décohérence en l'absence de rétroaction $\eta_{\alpha}^N = 1/2^{N/2}$. (c) Evolution de la sphère de Bloch, avec et sans rétro-action, pour différents nombres d'itérations ($N = 0, N = 6$ et $N = 20$).

rétro-action similaire à celle que nous venons de réaliser permettrait alors de corriger les erreurs introduites.

Enfin, il a récemment été proposé d'utiliser des états cohérents de spin à des fins de calculs quantiques [Adcock 11], des méthodes de rétro-actions sur des états cohérents pourraient s'avérer fortes utiles pour l'implémentation de tels algorithmes, notamment en ce qui concerne la correction d'erreurs de manipulation.

4.2 Boucle à verrouillage de phase atomique

Une horloge est définie comme la comparaison entre deux oscillateurs, en particulier, une horloge atomique détermine l'écart de fréquence entre un oscillateur et une transition atomique, en mesurant la phase accumulée lors du temps d'interrogation qui sépare les deux impulsions $\pi/2$ dans un interféromètre de Ramsey. La répétition de cette séquence mesure les variations de fréquence de l'oscillateur, ce qui permet alors à une boucle de rétro-action d'asservir la fréquence de l'oscillateur sur celle de la transition. Néanmoins, si cette méthode stabilise la *fréquence* de l'oscillateur, sa *phase* reste libre, car la détection de l'état après chaque interrogation détruit la cohérence de l'échantillon atomique. Nous allons montrer ici qu'une détection non-destructive préservant la cohérence permet de déterminer la phase de l'oscillateur, en d'autres termes, il est possible de réaliser une boucle à verrouillage de phase sur une référence atomique.

L'intérêt premier de cette méthode est d'augmenter le temps d'interrogation de l'interféromètre de Ramsey et donc la sensibilité de la mesure. Le temps d'interrogation des meilleures horloges est couramment limité par le bruit de phase de l'oscillateur local. En effet, lorsque la phase accumulée pendant l'interrogation est supérieure à $\pi/2$, il n'est plus possible de déterminer sur quelle frange est opéré l'interféromètre, cet effet contraint alors à limiter le temps d'interrogation, et ce d'autant plus que le bruit de phase de l'oscillateur local est important. Pour améliorer la sensibilité des horloges, il est donc nécessaire de disposer d'oscillateurs locaux avec une pureté spectrale toujours meilleure, dans le domaine micro-onde, les horloges à fontaine atomique utilisent un oscillateur cryogénique à cristal de saphire [Mann 98], mais il est difficile de trouver une meilleure source. Pour améliorer la qualité de l'oscillateur, il faut alors augmenter sa fréquence, c'est la raison pour laquelle les horloges utilisent aujourd'hui des transitions optiques [Takamoto 05, Ludlow 08, Chou 10], et d'intenses recherches sont engagées pour stabiliser des lasers sur des cavités de haute finesse afin d'en réduire le bruit de phase [Jiang 11, Kessler 12]. Si une méthode permet de suivre la position du spin collectif au cours de l'interrogation, alors il est possible de déterminer la frange sur laquelle est situé l'interféromètre et le bruit de phase de l'oscillateur devient beaucoup moins limitant. Le temps d'interrogation peut alors être augmenté conduisant *in fine* à une amélioration de la sensibilité de l'horloge.

Nous introduirons tout d'abord dans cette partie le principe de la mesure de la phase de l'oscillateur local reposant sur la détection non-destructive, puis nous énoncerons un critère traduisant dans quelles conditions la séquence proposée permet de gagner en sensibilité par rapport à la séquence « standard ». Nous présenterons ensuite la mise en œuvre de la méthode sur notre dispositif expérimental et nous montrerons que notre système permet de suivre les déplacements de phase de l'oscillateur local, ce qui nous servira aussi à étudier la manière dont la décohérence influence le signal. Enfin, nous montrerons quelques résultats préliminaires de rétro-action.

4.2.1 Principe de la méthode

4.2.1.1 Suivi et verrouillage de la phase de l'oscillateur local

Pour suivre les déplacements de phase de l'oscillateur local, on utilise la séquence décrite Fig. 4.10 et proposée par [Shiga 12]. L'état initial est situé à un pôle de la sphère de Bloch,

une impulsion $\pi/2$ autour de l'axe Y prépare alors la superposition cohérente et définit la phase à l'origine. On répète alors une séquence composée d'une évolution libre, d'une impulsion $\pi/2$ autour de l'axe X , d'une mesure, et enfin d'une impulsion d'angle $-\pi/2$ autour de l'axe X ; après cette dernière impulsion, l'état est ramené sur l'équateur de la sphère de Bloch à l'endroit initial où il se trouvait à la fin de l'évolution libre, en supposant bien sur que la durée combinée des rotations et de la mesure soit négligeable en comparaison du temps d'interrogation. De cette manière, on peut suivre l'évolution du vecteur de Bloch dans le plan équatorial, autrement dit, on suit l'évolution de la phase relative entre l'ensemble atomique cohérent et l'oscillateur local.

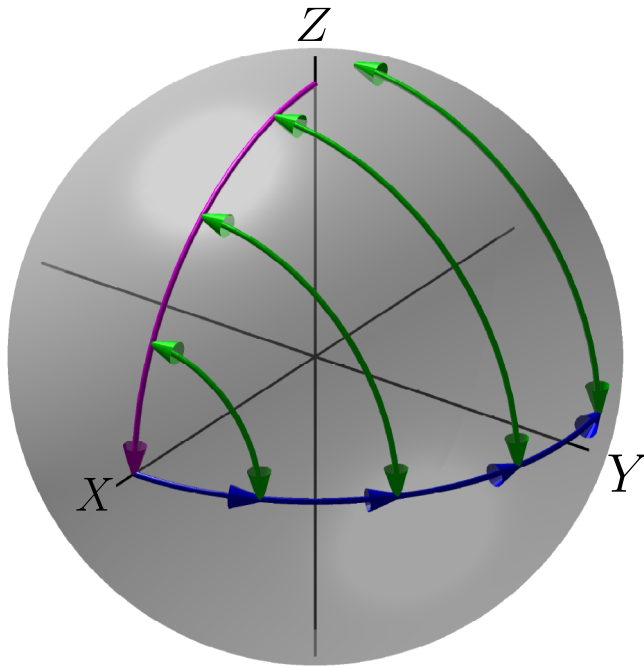


Figure 4.10 – Principe de la boucle à verrouillage de phase atomique. Après une impulsion $\pi/2$ initiale selon l'axe Y (en mauve), le spin collectif évolue librement (en bleu) avant d'être interrogé de manière périodique par la combinaison d'une impulsion $\pi/2$ selon l'axe X , d'une mesure et de l'impulsion opposée (en vert).

Une fois l'état replacé dans le plan équatorial, le résultat de la mesure permet de rétro-agir sur la phase de l'oscillateur local de sorte à maintenir le spin aligné selon l'axe X , ou toute autre direction dans le plan équatorial de la sphère de Bloch. L'oscillateur est alors verrouillé en phase sur l'ensemble atomique. Dans ces conditions, l'interféromètre travaille autour d'une position fixée sur une frange. Notons aussi qu'il s'agit d'un asservissement relatif de la phase, autrement dit, si l'environnement modifie la fréquence de la transition et engendre un déphasage supérieur aux fluctuations de phase de l'oscillateur local, alors le verrouillage de phase stabilise le spin collectif; cette situation est très similaire à la rétro-action quantique présentée au début de ce chapitre.

4.2.1.2 Critère pour l'amélioration la sensibilité d'une horloge

L'argument, selon lequel la séquence venant d'être présentée améliore la sensibilité de l'horloge atomique car elle augmente le temps d'interrogation, est quelque peu naïf. En effet, ce raisonnement suppose que le rapport signal-à-bruit de la détection est le même quelque soit la méthode de mesure utilisée : destructive ou non-destructive. Or, il est raisonnable de supposer que le rapport signal-à-bruit d'une détection non-destructive est plus faible que celui d'une détection destructive. Nous allons donc étudier la sensibilité de l'horloge pour les deux séquences et en déduire un critère permettant de déterminer dans quelles conditions la séquence de mesure de phase améliore effectivement la sensibilité par rapport à la séquence de Ramsey « standard ».

Considérons tout d'abord la séquence de Ramsey « standard », composée de deux impulsions $\pi/2$ séparées par un temps d'interrogation T . Supposons que la détection de l'état en sortie

de l'interféromètre soit limitée au bruit de grenaille atomique, alors le rapport signal-à-bruit atteint avec ensemble cohérent de N_{at} atomes vaut $\text{SNR}_{\text{D}} = \sqrt{N_{\text{at}}}$. Dans ce cas, la sensibilité de l'horloge, définie par la variance d'Allan⁴, évolue comme :

$$\sigma \propto \frac{1}{\sqrt{N_{\text{at}}}} \frac{1}{T}. \quad (4.29)$$

Lorsque la séquence est répétée N fois, la sensibilité s'améliore d'un facteur \sqrt{N} , car d'une séquence à l'autre, les phases initiales sont décorréelées. La variance d'Allan d'une horloge atomique, limitée au bruit de grenaille et utilisant une détection destructive, vaut donc :

$$\sigma_{\text{D}} \propto \frac{1}{\sqrt{N_{\text{at}}}} \frac{1}{\sqrt{NT}}. \quad (4.30)$$

Étudions maintenant la sensibilité dans le cas où une séquence mesurant la phase grâce à une détection non-destructive est utilisée. Puisque dans ce cas, la phase mesurée est corrélée d'une interrogation à la suivante, la sensibilité de l'horloge s'améliore proportionnellement au nombre de répétitions N , supposons de plus que le rapport signal-à-bruit de la détection non-destructive soit SNR_{ND} , alors la variance d'Allan vaut :

$$\sigma_{\text{ND}} \propto \frac{1}{\text{SNR}_{\text{ND}}} \frac{1}{NT}. \quad (4.31)$$

Dans le cas d'une mesure non-destructive limitée au bruit de photon, le bruit de la détection est donné par la largeur de la distribution Eq. (4.15) et vaut :

$$B_{\text{ND}} = \frac{\sqrt{N_{\text{at}}}}{2} \sqrt{\frac{1 + \kappa^2}{\kappa^2}}, \quad (4.32)$$

quant au signal détecté, il vaut $S_{\text{ND}} = J = N_{\text{at}}/2$, on obtient alors le rapport signal-à-bruit de la détection non-destructive grâce au ratio $\text{SNR}_{\text{ND}} = S_{\text{ND}}/B_{\text{ND}}$, soit :

$$\text{SNR}_{\text{ND}} = \sqrt{\frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2}} N_{\text{at}}. \quad (4.33)$$

Dans la limite d'une mesure faible ($\kappa^2 \ll 1$), on a $\text{SNR}_{\text{ND}} \sim MN_{\text{at}}\sqrt{N_p}$ et la détection est limitée par le bruit de photon ; à l'inverse, pour une mesure forte ($\kappa^2 \gg 1$) on retrouve une détection limitée au bruit de grenaille atomique : $\text{SNR}_{\text{ND}} \sim \sqrt{N_{\text{at}}}$.

Nous sommes maintenant en mesure de comparer les sensibilités que chacune des deux méthodes peut potentiellement atteindre. La séquence de mesure de phase, utilisant la détection non-destructive, améliore la sensibilité de l'horloge par rapport à la séquence de Ramsey « standard » si les variances d'Allan vérifient $\sigma_{\text{ND}} < \sigma_{\text{D}}$, ce qui conduit au critère suivant :

$$N \frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2} > 1. \quad (4.34)$$

Dans la limite où la détection réalise une mesure faible à chaque interrogation, ce critère devient $N\kappa^2 > 1$. En notant $N_p^{\text{tot}} = NN_p$ le nombre total de photons utilisé et $\kappa_{\text{tot}}^2 = M^2 N_{\text{at}} N_p^{\text{tot}}$, le critère se réduit à :

$$\boxed{\kappa_{\text{tot}}^2 > 1} \quad (4.35)$$

En terme de facteur de compression $\xi_{\text{tot}}^2 = 1/(1 + \kappa_{\text{tot}}^2)$, ce critère peut être réécrit $\xi_{\text{tot}}^2 < 1/2$, ce qui signifie que la détection doit être limitée au bruit de grenaille atomique sur l'ensemble des

4. La variance d'Allan, ou variance à deux points, décrit la manière dont se moyenne un signal stochastique en fonction de la fenêtre d'intégration [Allan 66].

N mesures. De plus, si la détection est capable d'atteindre un facteur de compression de 3 dB en induisant une décohérence suffisamment faible, alors la méthode permet effectivement de gagner en sensibilité par rapport à la séquence de Ramsey « standard ». De tels facteurs de compression ayant déjà été démontrés expérimentalement [Appel 09b, Schleier-Smith 10, Chen 11], on en déduit que la séquence de mesure de phase doit permettre d'améliorer la sensibilité d'une horloge limitée au bruit de grenaille atomique.

Remarquons enfin que les meilleures horloges à l'heure actuelle ne sont pas limitées au bruit de grenaille, si leur rapport signal-à-bruit vaut SNR_D alors le critère devient :

$$\frac{\text{SNR}_{\text{ND}}}{\text{SNR}_D} > \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (4.36)$$

Pour une horloge atomique avec $\text{SNR}_D = 100$, si la détection non-destructive possède un rapport signal-à-bruit $\text{SNR}_D = 10$, alors on doit être capable de réaliser $N = 100$ estimations de phase successives tout en maintenant une cohérence de l'échantillon suffisamment importante. Si on fixe, par exemple, la cohérence résiduelle de l'état après les 100 répétitions successives à une valeur de $\eta_f = 1/10$, alors la cohérence résiduelle à la fin d'une unique interrogation doit valoir $\eta = 0.977$. Dans les conditions expérimentales Fig. 4.7, on atteint $\text{SNR}_D = 10$ pour 2.8×10^7 photons par bande latérale et par impulsion, la cohérence résiduelle dans ce cas vaut $\eta = 0.96$, autrement dit, après 100 répétitions $\eta_f = 0.017$, nous ne vérifions donc pas exactement le critère mais nous n'en sommes pas très loin, une légère augmentation de la densité optique à résonance vue par la sonde devrait permettre de le vérifier.

4.2.2 Montage expérimental

Le montage expérimental est très similaire à celui utilisé pour la rétro-action quantique. Le signal en provenance de la détection non-destructive est, ici aussi, intégré et numérisé avant d'être traité par un micro-contrôleur. Le modulateur QPSK est utilisé dans le cas présent pour fixer l'axe de rotation : Y pour la rotation initiale et X pour les interrogations successives. La principale différence réside dans le fait que le signal de correction n'est pas discret (rotation dans un sens ou bien dans l'autre) mais continu (une phase quelconque entre 0 et 2π), et afin de réaliser une telle correction la sortie du micro-contrôleur est convertie en un signal analogique. Ce signal de correction est connecté à un contrôleur de phase micro-onde (HMC929LP4E, Hittite) analogique qui produit un déphasage dépendant de la tension de correction. Ce contrôleur sert aussi à appliquer un bruit ou un signal déterministe, ce qui nous sera utile pour étudier et calibrer la détection. Ce signal est sommé à celui du contrôleur, ce qui permet une comparaison directe des deux signaux : correction et perturbation. Enfin, le tout est synchronisé par un FPGA. Un schéma du système est présenté Fig. 4.11.

La séquence expérimentale mise en œuvre est la suivante : après le chargement du piège dipolaire et la préparation d'un échantillon polarisé (voir Sec. 3.4.3), on effectue une impulsion micro-onde $\pi/2$ selon l'axe Y de la sphère de Bloch. On itère alors une séquence composée d'un temps d'interrogation, d'une impulsion $\pi/2$ d'axe $+X$, d'une mesure et d'une impulsion $\pi/2$ d'axe $-X$ afin de ramener l'état dans le plan équatorial de la sphère de Bloch. A la fin de la séquence, la même mesure est réalisée en l'absence d'atomes afin de déterminer l'offset de la détection qui sera utilisé lors du cycle expérimental suivant.

4.2.3 Mesure de la phase d'un oscillateur à l'aide d'une détection non-destructive

4.2.3.1 Suivi en temps réel d'un déplacement de phase en dents de scies

Dans un premier temps, nous avons étudié le système en boucle ouverte et comparé la sortie du convertisseur numérique-analogique avec le signal utilisé pour produire un déplacement de

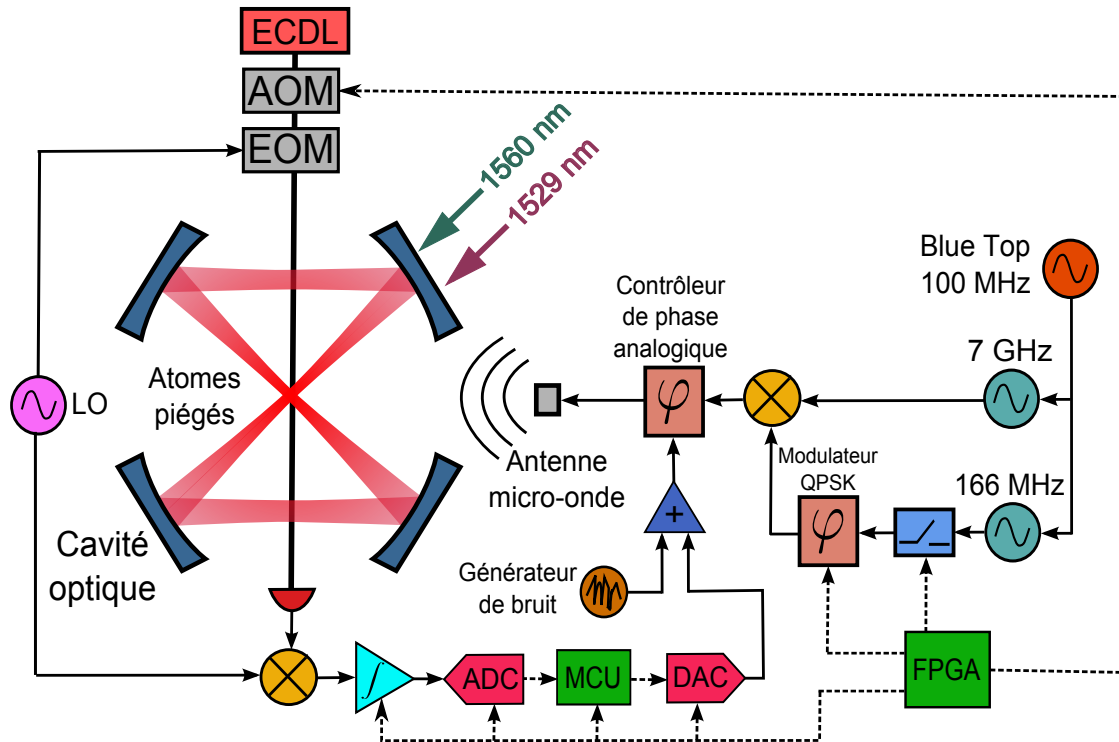


Figure 4.11 – Montage expérimental de la boucle à verrouillage de phase atomique.

phase déterministe, en l'occurrence ici, un signal en dents de scies. On obtient alors le résultat Fig. 4.12.

On observe alors le signal en dents de scies en sortie, ce signal s'amortit après un temps d'environ 15 ms, soit 15 répétitions de la séquence interrogation-mesure. Cet amortissement provoque une variation du gain de l'asservissement avec le temps, il faut en comprendre les origines et le corriger afin d'obtenir un signal aussi proche que possible du signal initial. Notons enfin qu'il faut prendre l'arcsinus du signal afin d'obtenir la phase φ puisque l'on mesure $\langle J_z \rangle = J \sin \varphi$.

4.2.3.2 Compensation de la décohérence

Même si l'état subit de la décohérence, principalement due à la sonde et au piège, il n'en reste pas moins que, même après une décohérence relativement importante, la mesure fournit une détermination de la direction du vecteur de Bloch. Néanmoins, l'amplitude du signal en sortie dépend de la décohérence subie par l'état, il convient par conséquent de compenser cette atténuation afin de ne pas réduire le gain de l'asservissement d'une interrogation à l'autre.

Nous avons donc analysé les données de la Fig. 4.12 en considérant les différentes sources de décohérence. Avant toute chose, nous avons pris le sinus de la phase appliquée sur le contrôleur afin de pouvoir le comparer directement à une mesure de l'opérateur J_z . Nous avons ensuite pris en compte l'émission spontanée de la sonde en multipliant le signal par l'inverse d'un amortissement exponentiel : $\exp(t/\tau_{sp})$ avec $\tau_{sp} \sim 9$ ms. Enfin, la décohérence provoquée par les faisceaux de piège est considérée en utilisant l'ajustement Fig. 3.27, autrement dit le signal a été multiplié par $\exp[(t/\bar{\tau})^2/2]$ avec $\bar{\tau} = 15$ ms. On obtient alors le résultat Fig. 4.13. Pour des temps allant jusqu'à 18 ms, on constate un accord raisonnable entre le signal appliqué sur le contrôleur de phase et le signal extrait de la détection non-destructive, pour des temps plus longs, la cohérence résiduelle de l'échantillon devient négligeable et le bruit de la détection est

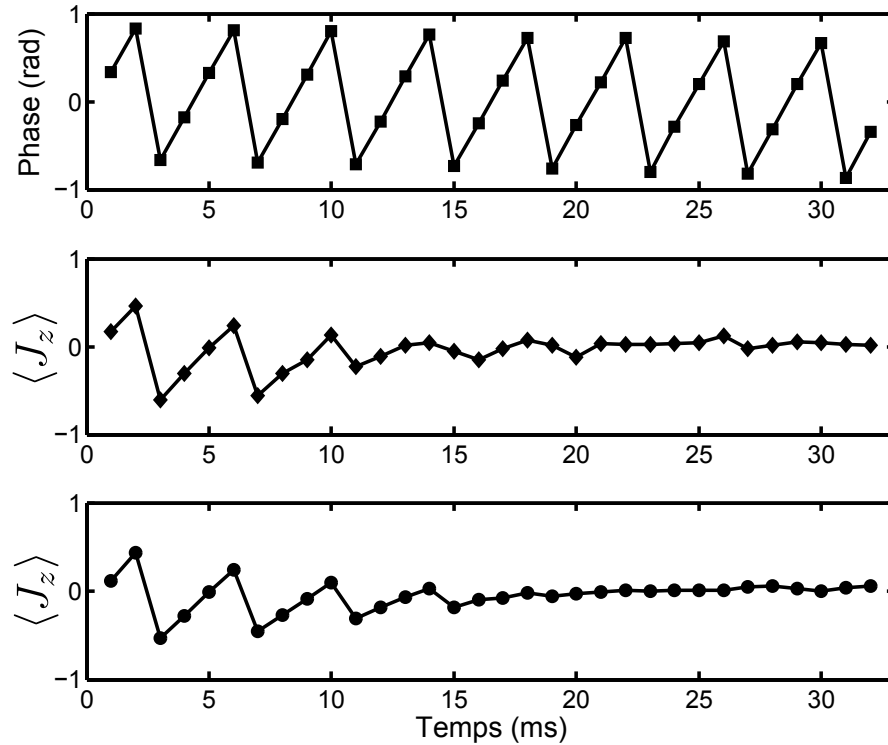


Figure 4.12 – *Suivi en temps réel d'un déplacement de phase en dents de scies. Le temps d'interrogation est de 1 ms, le nombre d'atomes est d'environ 3.5×10^5 et le nombre de photons par bande latérale et par impulsion de mesure vaut 5×10^7 . En haut, le déplacement de phase imposé sur la micro-onde en fonction du temps. Au milieu, le signal en sortie du micro-contrôleur après la conversion analogique lors d'une unique réalisation expérimentale. En bas, le signal est moyenné sur 32 réalisations expérimentales.*

amplifié exponentiellement par les corrections appliquées. Les corrections qui viennent d'être énoncées devraient donc être implémentées dans le programme du micro-contrôleur, il faudrait probablement tabuler ces corrections en mémoire car le calcul en temps réel risque d'être trop long et est de toute manière non-nécessaire.

4.2.4 Asservissement

Nous avons réalisé une première démonstration du verrouillage de phase en stabilisant une source micro-onde perturbée par des sauts de phase. On compense le signal en provenance de la détection non-destructive par une exponentielle $\exp(t/\tau_{sp})$, car le temps d'interrogation est de $500 \mu\text{s}$ si bien que, dans ce cas précis, la décohérence induite par l'émission spontanée domine celle liée aux faisceaux de piège. On constate une bonne compensation des sauts de phase sur une durée d'environ 10 ms, les écarts résiduels proviennent du délai imposé par le temps d'interrogation.

L'objectif à court terme est de réaliser un tel asservissement stabilisant véritablement le bruit de phase d'un oscillateur. Il s'agirait alors de démontrer que la variance d'Allan du bruit de fréquence de l'oscillateur décroît de manière inversement proportionnelle au temps, ou tout du moins à un taux supérieur à l'inverse de la racine carrée du temps.

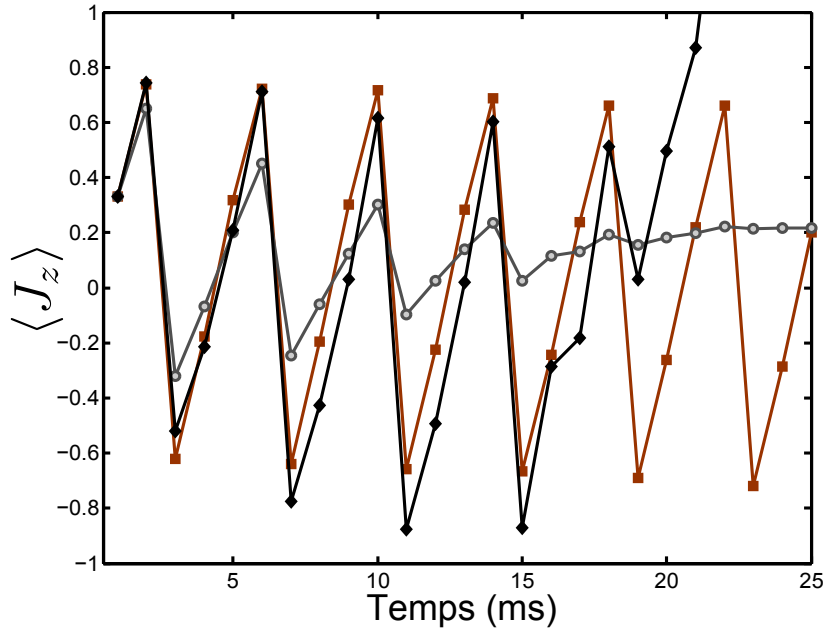


Figure 4.13 – Compensation de la décohérence sur le signal. Les carrés marrons correspondent au sinus du déphasage appliqué sur la micro-onde. Les ronds gris sont le résultat de la mesure de phase sans correction moyennés sur 32 réalisations. Les carrés noirs correspondent à la mesure de phase après correction de la décohérence induite par le piège et l'émission spontanée.

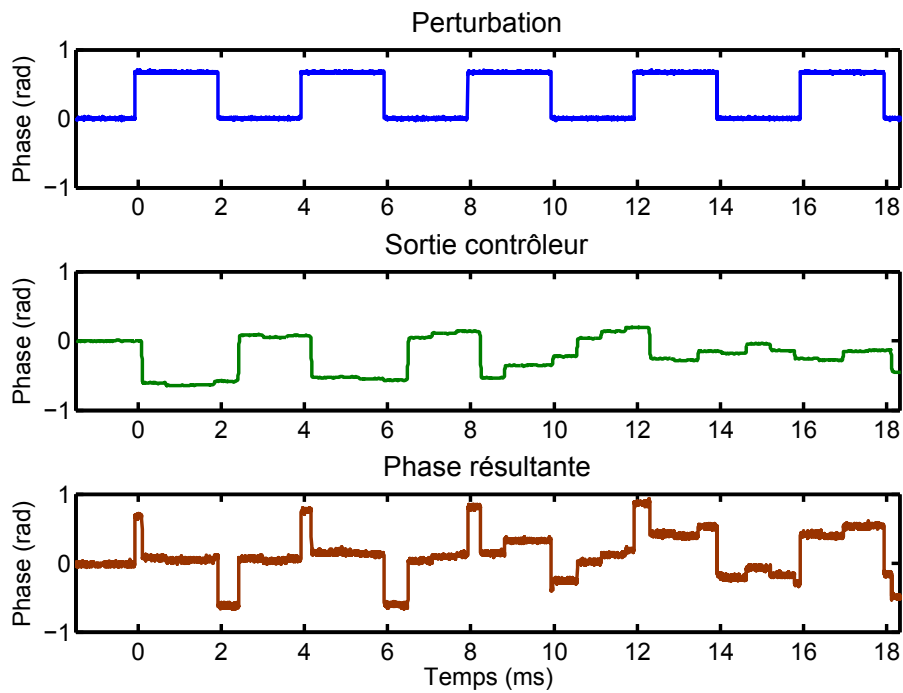


Figure 4.14 – Stabilisation de la source micro-onde perturbée par des sauts de phase. Le temps d'interrogation est fixé à $500 \mu\text{s}$. En haut, le signal de perturbation. Au milieu, la sortie du convertisseur numérique-analogique. En bas, le bruit de phase résiduel de la source.

4.2.5 Perspectives

4.2.5.1 Réduction de l'effet Dick

Un avantage supplémentaire et important de la méthode réside dans l'absence de pertes d'atomes lors de la détection, à la différence d'une mesure par fluorescence. Il est donc possible, à la fin d'une séquence de mesure, de repolariser l'échantillon atomique afin de recommencer une nouvelle séquence. Cette propriété permet de réduire drastiquement les temps morts liés au chargement et inhérents aux horloges utilisant des atomes froids. Ces temps morts sont responsables de l'effet Dick [Dick 87], car ils échantillonnent le signal, ce qui provoque le repliement du bruit à haute fréquence sur les basses fréquences, cet effet est actuellement le paramètre limitant la sensibilité des horloges optiques sur réseau [Lodewyck 09].

4.2.5.2 Application aux gravimètres atomiques

Si le bruit de phase de l'oscillateur peut limiter le temps d'interrogation des horloges du fait de la réciprocité de l'interféromètre, cette dernière limite aussi le temps d'interrogation d'autres senseurs. Par exemple, dans le cas des gravimètres, le bruit d'accélération limite le temps d'interrogation [Geiger 11], et ce d'autant plus que le déphasage est proportionnel au carré du temps d'interrogation pour de tels interféromètres. La corrélation des mesures de l'interféromètre avec celles en provenance d'un accéléromètre mécanique permet de s'affranchir partiellement du problème [Merlet 09], néanmoins la sensibilité limitée des accéléromètres mécaniques limite *in fine* le temps d'interrogation. Une méthode d'interrogation non-destructive telle que nous venons de la présenter pourrait permettre de dépasser cette limite. Il faudrait toutefois réfléchir à un interféromètre ayant une configuration adéquate afin de pouvoir y associer la détection [Impens 06, Robert-De-Saint-Vincent 10].

4.2.5.3 Verrouillage en phase de deux ensembles atomiques

Supposons maintenant que l'on réalise simultanément une mesure de phase sur deux ensembles cohérents distincts, à l'aide de deux détections elles aussi distinctes. En comparant le résultat des deux mesures, il est alors envisageable d'asservir la phase d'un nuage sur l'autre. Un tel procédé pourrait être utilisé pour transférer la phase d'un ensemble cohérent à un autre. Imaginons que la boucle à verrouillage de phase atomique permette d'augmenter grandement le temps d'interrogation, jusqu'au point où il devient limité par le temps de vie des atomes dans le piège; on pourrait alors utiliser deux ensembles atomiques : pendant qu'un premier nuage est interrogé, un autre est chargé et préparé puis, lorsque le nombre d'atomes dans le premier nuage devient trop faible, la phase est transférée au second nuage. Si la détection n'induit pas de décohérence, cette technique permettrait de générer une source cohérente continue.

Néanmoins, l'émission spontanée va limiter le temps de vie de cette source cohérente, puisque en réduisant le rayon de la sphère de Bloch, elle augmente l'incertitude sur la phase de l'ensemble cohérent sondé et cette incertitude est elle-aussi transférée. Si $p(\varphi)$ désigne la probabilité de mesurer une phase φ après une certaine décohérence, alors l'état préparé lors du transfert de phase n'est pas pur : c'est un mélange statistique des états cohérents $|\pi/2, \varphi\rangle$:

$$\rho = \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi p(\varphi) |\pi/2, \varphi\rangle \langle \pi/2, \varphi|, \quad (4.37)$$

en d'autres termes, la cohérence de l'échantillon se dégrade d'un transfert de phase à l'autre et la cohérence finale sera déterminée par la décohérence associée au nombre total de photons utilisés lors de la mesure. Néanmoins, en plaçant chacun des deux ensembles au sein d'un résonateur optique, on peut grandement augmenter la densité optique vue par la sonde non-destructive et ainsi fortement réduire la décohérence pour un même rapport signal-à-bruit. Dans de telles

conditions, on peut imaginer produire des sources quasi-continues ayant un long temps de vie, l'effet Dick sur un tel système serait alors complètement négligeable.

4.3 Conclusion

Nous venons de mettre en œuvre une mesure non-destructive de l'état interne d'un ensemble atomique au sein de dispositif de rétro-action. Nous avons démontré comment cela pouvait être utilisé pour protéger un état collectif de la décohérence engendrée par un basculement de bit grâce à une rétro-action quantique. Nous avons aussi vu qu'il était possible d'asservir la phase d'un oscillateur sur celle d'un échantillon atomique.

Lors de ces deux exemples d'applications, nous avons pu constater que la décohérence due à l'émission spontanée induite par la sonde est le facteur limitant le nombre de cycles de rétroaction réalisables. Ceci peut être réduit en augmentant la densité optique de l'échantillon, mais il convient toutefois de se demander quel est le *contrôleur optimal* en considérant la décohérence induite par la sonde. On pourrait par exemple envisager de sonder l'état de manière plus ou moins forte selon la perturbation subie : si la perturbation est faible, on sonde faiblement mais si on détecte un écart plus important, on sonde de manière plus forte afin de ramener l'état à la position voulue. L'idée étant de sonder fortement et donc d'induire plus d'émission spontanée uniquement lorsque nécessaire. Il serait donc intéressant d'étudier l'algorithme de sondage optimal en considérant la contrainte majeure de la détection, à savoir l'émission spontanée.

Deuxième partie

**Condensation de Bose-Einstein dans
une cavité optique de haute finesse**

La cavité de haute finesse

*Les ombres se déplacent lentement, et font
fuir devant elles ou éteignent les tons à
mesure que la lumière, déplacée elle-même, en
veut faire résonner de nouveaux.*

Charles Baudelaire

La cavité optique de haute finesse est la pièce maîtresse autour de laquelle s'articule le dispositif expérimental. Elle a deux vocations : permettre de réaliser un piège dipolaire profond à partir d'un laser de puissance modeste grâce à l'exaltation du champ électromagnétique en son sein, et contribuer à l'amélioration des performances de la détection non-destructive en augmentant grandement la densité optique à résonance perçue par la sonde. Pour cette raison, elle est résonante à deux longueurs d'onde : 1560 nm pour le piège dipolaire, et 780 nm pour la détection non-destructive. Comme nous avons pu le constater dans les chapitres précédents, la détection non-destructive a, pour l'instant, été réalisée en simple passage, l'utilisation de la cavité constituera une amélioration majeure du dispositif dans les travaux à venir. Nous utilisons néanmoins la cavité à des fins de piégeage dipolaire, c'est ce dont nous allons discuter dans cette partie, et c'est aussi la raison pour laquelle nous ne considérerons que les propriétés de la cavité à 1560 nm.

Comme nous le verrons au chapitre suivant, la force dipolaire exercée sur un atome est proportionnelle à l'intensité du champ électromagnétique, pour obtenir un piège suffisamment profond il faut donc utiliser un faisceau ayant, soit un faible diamètre, soit une forte puissance. L'inconvénient d'un faisceau de faible diamètre est qu'il possède un faible volume et ne permet donc pas de piéger un grand nombre d'atomes. A l'inverse, un piège de plus grand diamètre nécessite certes une puissance supérieure, mais permet la capture d'un large ensemble atomique. Néanmoins, l'augmentation de la puissance du faisceau ne se fait pas sans difficultés techniques : un laser de forte puissance consomme beaucoup d'énergie, les composants optiques assurant le contrôle du faisceau sont volumineux et sujets aux dérives thermiques, sans compter les questions de sécurité ; tous ces aspects compliquent l'utilisation des lasers de puissance, particulièrement dans l'objectif d'applications transportables. C'est là qu'intervient la cavité optique, nous allons en effet démontrer dans la suite de ce manuscrit qu'une cavité optique permet la réalisation d'un piège dipolaire à partir de composants standards en télécommunications optiques, nous montrerons de plus qu'il est possible d'atteindre le régime de dégénérescence quantique dans un tel piège.

Mais avant de discuter du piégeage à proprement parler, il convient d'étudier le résonateur optique, c'est l'objet de ce chapitre. Nous commencerons par analyser la géométrie du mode de la cavité en utilisant diverses méthodes, notamment l'analyse du spectre des modes du résonateur

et l'exploitation du déplacement lumineux différentiel induit par le faisceau sur certains niveaux de l'atome de Rubidium 87. Nous étudierons ensuite l'exaltation du champ grâce à la mesure de la finesse de la cavité. Puis, nous décrirons comment maintenir le laser de piège à résonance avec le mode de la cavité et présenterons une méthode originale d'asservissement reposant sur la modulation serrodyne. Nous analyserons ensuite le bruit d'intensité du faisceau dans le résonateur, et montrerons qu'il est compatible avec la réalisation d'un piège dipolaire. Enfin, nous discuterons et démontrerons une méthode permettant la compensation du déplacement lumineux différentiel, cette dernière est essentielle à la mise en œuvre de la détection non-destructive sur un nuage piégé.

5.1 Géométrie du résonateur optique

La cavité optique doit poursuivre deux objectifs, premièrement, réaliser un piège dipolaire à 1560 nm permettant d'atteindre le régime de condensation de Bose-Einstein, et deuxièmement, améliorer le rapport signal-à-bruit de la détection non-destructive. Le premier objectif va guider le choix de la géométrie de la cavité, en effet, afin de se placer dans des conditions favorables pour la condensation, on cherche à maximiser les fréquences de piège, il faut pour cela un confinement maximal des atomes selon les trois directions spatiales, il a donc été choisi de réaliser un résonateur en anneau replié ayant une forme en « papillon » et placé dans une configuration quasi-concentrique, Fig. 5.1 (a). La configuration concentrique permet de minimiser le diamètre du col des faisceaux au centre, quant au croisement des faisceaux il assure le confinement selon toutes les directions spatiales.

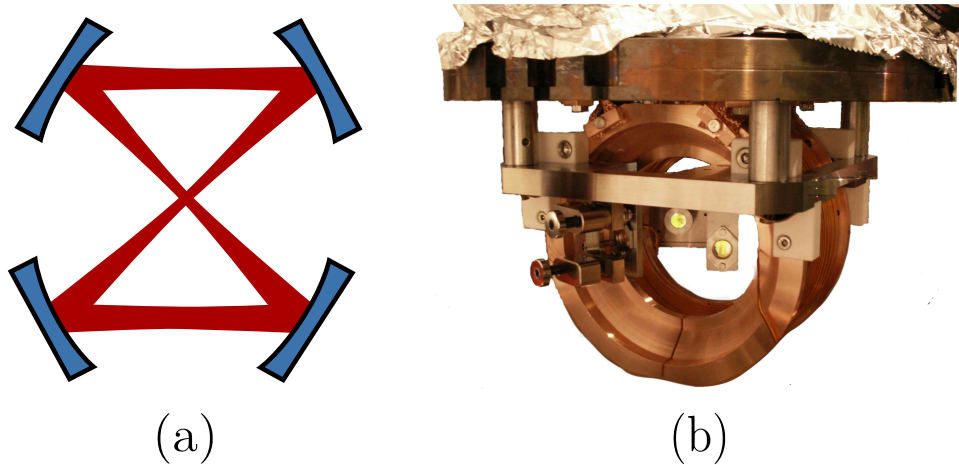


Figure 5.1 – (a) Géométrie du résonateur. (b) La cavité optique et les bobines assemblées avant la mise en place dans la chambre ultra-vide.

5.1.1 Conception mécanique

La cavité est réalisée à partir de quatre miroirs sphériques de rayon de courbure 100 mm. Chaque miroir est placé au sommet d'un carré de 63.6 mm de côté. La diagonale est donc longue de 90 mm *i.e.* légèrement plus courte que le rayon de courbure des miroirs, cela permet de s'approcher d'une configuration concentrique tout en assurant la stabilité géométrique de la cavité.

Les miroirs sont montés sur une plaque en titane servant de support au résonateur, elle supporte aussi les bobines du piège magnéto-optique. Le tout est placé à l'intérieur de la chambre

ultra-vide. L'assemblage final est présenté Fig. 5.1 (b). Deux montures sont fixes tandis que les deux autres permettent d'ajuster la position des miroirs à l'aide d'actuateurs piézo-électriques. Un des supports est muni d'actuateurs permettant de longs déplacements millimétriques selon deux axes. L'autre support muni de trois piézo-électriques permet des ajustements fins. Une description détaillée des propriétés mécaniques de chacun des éléments et de l'assemblage peut être trouvée dans [Bernon 11a].

5.1.2 Géométrie du mode fondamental dans l'approximation paraxiale

Nous allons ici décrire la structure géométrique du mode fondamental dans le cadre de l'approximation paraxiale. Après un bref rappel du formalisme des faisceaux gaussiens et des matrices ABCD, nous calculons les propriétés géométriques du mode fondamental au centre du résonateur où le piège dipolaire doit être opéré. On vérifiera aussi la stabilité du résonateur.

5.1.2.1 Formalisme des matrices de transfert paraxiales

L'évolution du champ électro-magnétique le long de l'axe du résonateur s'effectue en espace libre, elle est donc régie par l'équation de Helmholtz qui est linéaire. Le formalisme approprié pour l'étude de la propagation est d'utiliser une solution intégrale de cette équation *via* le propagateur de Fresnel [Born 99]. Néanmoins, dans le cadre de l'approximation paraxiale, le concept de rayon lumineux se transformant linéairement suffit à décrire l'évolution du champ électromagnétique.

Le faisceau lumineux est décrit comme un ensemble de rayons dont la direction moyenne est l'axe z . Pour décrire un rayon lumineux à une abscisse z le long de l'axe, il suffit de connaître la distance y qui le sépare de l'axe ainsi que l'angle α qu'il forme avec ce dernier. On associe donc à chaque rayon un couple (y, α) appelé *rayon vecteur*. Décrire l'évolution du faisceau optique le long de l'axe optique, se résume alors à décrire comment le rayon (y, α) à la position z est transformé en un rayon (y', α') à la position z' . Dans le cadre de l'approximation paraxiale, cette transformation est linéaire et peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} y' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

On parle alors de formalisme des *matrices de transfert paraxiales* ou, plus simplement, de formalisme des *matrices ABCD*.

A chaque élément d'un système optique est associé une matrice ABCD, il suffit ensuite de les multiplier afin d'obtenir la matrice de transfert du système complet. Pour le calcul du faisceau intra-cavité nous aurons besoin de connaître la matrice décrivant une propagation libre sur une distance L :

$$M_p(L) = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

ainsi que celle d'un miroir sphérique de rayon de courbure R :

$$M_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Ce formalisme, couramment utilisé en optique géométrique [Pérez 04], peut se généraliser et être utilisé dans le cadre de la théorie des faisceaux gaussiens [Kogelnik 66, Sigman 86, Yariv 89] que nous allons maintenant brièvement décrire.

5.1.2.2 Faisceaux gaussiens

L'onde sphérico-gaussienne, ou plus simplement onde gaussienne, est une solution approchée de l'équation de Helmholtz en régime paraxial Sec. 5.2.1, elle constitue une excellente approximation du champ dans un résonateur composé de miroirs sphériques et par conséquent du champ émis par la plupart des sources lasers. L'amplitude du champ électro-magnétique d'une onde gaussienne à la coordonnée spatiale (x, y, z) est :

$$U(x, y, z) = \frac{U_0}{q(z)} \exp\left(-i \frac{k}{2} \frac{x^2 + y^2}{R(z)}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right), \quad (5.4)$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est la norme du vecteur d'onde et $q(z)$ est le rayon de courbure complexe :

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}, \quad (5.5)$$

avec $w(z)$ le diamètre à $1/e$ du profil d'amplitude gaussien à la position z et $R(z)$ le rayon de courbure du front d'onde sphérique. Ils peuvent s'écrire :

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{Z_R}{z} \right)^2 \right], \quad (5.6)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{Z_R} \right)^2}, \quad (5.7)$$

où Z_R est la distance de Rayleigh :

$$Z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad (5.8)$$

pour $z \ll Z_R$ la section transverse du faisceau est quasiment inchangée, tandis que pour $z \gg Z_R$ on entre dans le régime de diffraction de Fraunhofer, on observe alors la dispersion en impulsion du faisceau. Ces différents paramètres sont représentés Fig. 5.2.

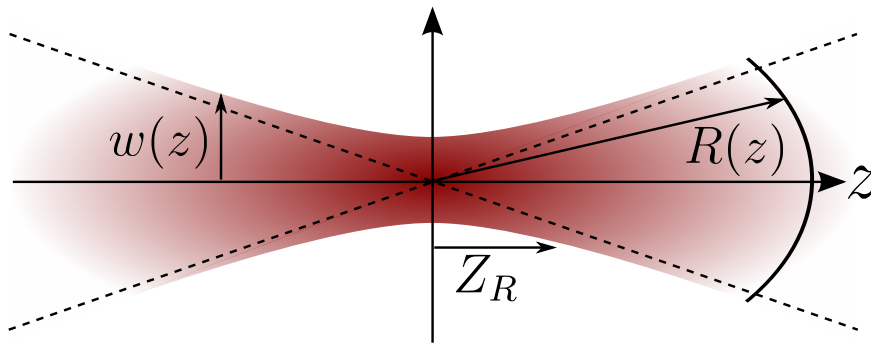


Figure 5.2 – Faisceau gaussien et principaux paramètres.

On remarquera aussi que le facteur de normalisation $U_0/q(z)$ est complexe, il apparaît donc un déphasage spécifique à l'onde gaussienne le long de l'axe z :

$$\phi(z) = \arctan\left(\frac{z}{Z_R}\right), \quad (5.9)$$

cette phase est appelée *phase de Gouy* [Gouy 90]. En particulier, l'onde subit un déphasage de π lors de la traversée du col du faisceau. Nous verrons plus bas que cette phase est essentielle pour la détermination des fréquences propres du résonateur.

L'amplitude transverse d'un faisceau gaussien à la position longitudinale z est entièrement déterminée par la connaissance du rayon de courbure complexe $q(z)$. Il suffit donc de savoir décrire comment évolue ce dernier pour déterminer la propagation d'un faisceau gaussien le long de son axe z . On peut exprimer cette évolution à l'aide de la matrice ABCD associée à la propagation [Sigman 86, Yariv 89] :

$$q(z') = \frac{Aq(z) + B}{Cq(z) + D}, \quad (5.10)$$

cette relation est dite *loi ABCD*.

5.1.2.3 Matrice ABCD de la cavité

Avant toute chose il faut constater que la cavité est composée de miroirs sphériques placés hors d'axe, le mode sera donc astigmatique puisque la distance focale des miroirs est différente selon que le faisceau soit parallèle ou orthogonal au plan d'incidence. Si θ est l'angle d'incidence avec le miroir alors $f'_x = R \cos \theta / 2$ est la focale effective dans le plan parallèle au plan d'incidence et $f'_y = R / (2 \cos \theta)$ est celle dans le plan normal.

Le faisceau étant astigmatique, la symétrie par rotation autour de l'axe z est brisée, il présente néanmoins une symétrie selon les axes propres d'astigmatisme, notés x et y . On traitera donc le faisceau gaussien en associant une matrice ABCD à chaque axe propre, ainsi que deux rayons de courbure complexe $q_x(z)$ et $q_y(z)$.

On peut maintenant déterminer la matrice ABCD du résonateur et ainsi en déduire les propriétés du mode fondamental. Les matrices ABCD des miroirs selon les axes d'astigmatisme x et y sont :

$$M_m^{(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R \cos \theta} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_m^{(y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2 \cos \theta}{R} & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

La matrice d'une propagation libre est la même pour les deux axes d'astigmatisme. En fixant $z = 0$ au centre de la cavité et en notant L la longueur d'un côté de cette dernière, la matrice ABCD de la cavité selon l'axe $\alpha = x, y$ est donnée en commençant la propagation à $z = 0$:

$$M_{\text{cav}}^{(\alpha)} = M_p \left(\frac{L}{\sqrt{2}} \right) M_m^{(\alpha)} M_p(L) M_m^{(\alpha)} M_p(\sqrt{2}L) M_m^{(\alpha)} M_p(L) M_m^{(\alpha)} M_p \left(\frac{L}{\sqrt{2}} \right). \quad (5.12)$$

On peut alors déterminer les paramètres du faisceau au centre de la cavité. Ce qui caractérise le mode de la cavité est le recouvrement du faisceau avec lui-même après un tour dans le résonateur, par conséquent, si $L_c = 2L(\sqrt{2} + 1)$ est la longueur totale de la cavité, le rayon de courbure complexe doit vérifier la relation suivante :

$$q_\alpha(z = L_c) = q_\alpha(z = 0), \quad (5.13)$$

en utilisant la loi ABCD, on obtient :

$$q_\alpha(0) = \frac{A_{\text{cav}}^{(\alpha)} q_\alpha(0) + B_{\text{cav}}^{(\alpha)}}{C_{\text{cav}}^{(\alpha)} q_\alpha(0) + D_{\text{cav}}^{(\alpha)}}, \quad (5.14)$$

en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient un système de deux équations à deux inconnues : le diamètre du faisceau et le rayon de courbure. On détermine alors les diamètres du col du faisceau au centre de la cavité pour chacun des axes d'astigmatisme, à la longueur d'onde de 1560 nm, on a : $w_0^{(x)} = 81 \mu\text{m}$ et $w_0^{(y)} = 129 \mu\text{m}$, on en déduit aussi les distances de Rayleigh : $Z_R^{(x)} = 13.3 \text{ mm}$ et $Z_R^{(y)} = 33.4 \text{ mm}$.

Enfin, l'expression de la matrice ABCD permet d'étudier la stabilité du résonateur, celui est stable si sa matrice M vérifie $\text{Tr } M < 2$. Dans notre cas on trouve : $\text{Tr } M_{\text{cav}}^{(x)} \sim 1.87$ et $\text{Tr } M_{\text{cav}}^{(y)} \sim 0.97$, on constate donc que la cavité est stable selon les deux axes. On remarque de plus que la cavité est en limite de stabilité selon l'axe x , elle est quasi-concentrique.

5.2 Structure modale

Nous venons de décrire la géométrie de la cavité grâce au formalisme des matrices ABCD, cela nous a permis de calculer les propriétés du mode fondamental de la cavité en supposant ce dernier gaussien. Nous allons ici étudier plus précisément les modes de la cavité et en particulier les modes transverses. Nous présentons tout d'abord une analyse théorique afin de déterminer les modes propres du résonateur dans le cadre de l'approximation paraxiale, puis nous menons une comparaison de ces résultats avec des mesures expérimentales. On montrera en particulier que l'analyse du spectre permet une caractérisation fine des propriétés géométriques de la cavité.

5.2.1 Spectre théorique dans l'approximation paraxiale

Nous voulons ici déterminer les modes propres du résonateur, pour se faire on recherche des solutions scalaires à l'équation de Helmholtz :

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) + k^2 E(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (5.15)$$

de la forme :

$$E(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r})e^{-ikz}e^{i\omega t}. \quad (5.16)$$

De plus, on cherche une solution dans la limite où les variations transverses de l'enveloppe U sont faibles lors de la propagation selon z , on supposera donc $\partial_z^2 U \ll k\partial_z U$. En injectant la solution Eq. (5.16) dans l'équation de Helmholtz Eq. (5.15), on obtient l'équation suivante pour l'enveloppe :

$$\nabla_{\perp}^2 U - 2ik\partial_z U = 0, \quad (5.17)$$

où ∇_{\perp}^2 désigne le Laplacien transverse $\nabla_{\perp}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$. Cette relation est l'équation de propagation paraxiale dont l'onde sphérido-gaussienne est une solution, nous cherchons alors une généralisation de cette dernière qui conserve des propriétés similaires, *i.e.* un front d'onde sphérique afin de s'adapter aux miroirs et une décroissance transverse exponentielle pour s'assurer que l'énergie reste confinée autour de l'axe de propagation. De plus l'astigmatisme du faisceau lui procure deux axes de symétrie, on considère donc une solution séparable selon ces deux axes :

$$U(x, y, z) = g(x)h(y)e^{iP(x)}e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}e^{-i\frac{k}{2}\frac{x^2+y^2}{R(z)}}. \quad (5.18)$$

En injectant cette solution dans l'équation de propagation paraxiale Eq. (5.17), on montre que les fonctions h et g sont solutions de l'équation de Schrödinger associée à un oscillateur harmonique¹, les solutions sont donc quantifiées et décomposables sur la base des polynômes de Hermite H_n ² :

$$U_{mn}(x, y, z) = U_0 \frac{w_0^{(x)} w_0^{(y)}}{w_x(z) w_y(z)} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w_x(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w_y(z)} \right) e^{i\phi_{mn}(z)} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} e^{-i\frac{k}{2}\frac{x^2+y^2}{R(z)}}, \quad (5.19)$$

les entiers m et n indices les différents modes transverses, ces modes sont appelés *modes de Hermite-Gauss* [Kogelnik 66]. Ces modes sont des fonctions propres de la transformée de Fourier,

1. Ce n'est pas vraiment une surprise puisque la cavité est finalement un piège harmonique pour photons (tant que ceux-ci restent confinés près de l'axe optique).

2. Les polynômes de Hermite $H_n(x)$ sont définis à partir de la dérivée n -ème de la fonction de Gauss :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

On construit alors les *fonctions de Hermite*, $\mathcal{H}_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}$, elle forment une base hilbertienne orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ qui diagonalise l'opérateur de transformation de Fourier [Schwartz 97, Appel 08].

ils sont donc self-similaires par propagation le long de l'axe optique. La phase de Gouy est :

$$\phi_{mn}(z) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \arctan\left(\frac{z}{Z_R^{(x)}}\right) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \arctan\left(\frac{z}{Z_R^{(y)}}\right), \quad (5.20)$$

elle correspond au déphasage qu'un mode propre TEM_{pmn} (p désigne le mode longitudinal) subit lors la propagation selon l'axe z , on remarque aussi que plus l'ordre du mode est élevé plus la phase de Gouy est importante. On peut alors déterminer la fréquence de ce mode [Sigman 86] :

$$\nu_{pmn} = \frac{c}{2\pi L_c} \left[2\pi p - \left(m + \frac{1}{2}\right) \arg\left(A_{\text{cav}}^{(x)} + \frac{B_{\text{cav}}^{(x)}}{q_x(0)}\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \arg\left(A_{\text{cav}}^{(y)} + \frac{B_{\text{cav}}^{(y)}}{q_y(0)}\right) \right]. \quad (5.21)$$

On remarque que la fréquence des modes dépend des coefficients de la matrice ABCD de la cavité et du rayon de courbure complexe, en d'autres termes, elle dépend de la configuration géométrique de la cavité, ce constat va nous permettre de faire de la mesure de la fréquence des modes transverses, un outil pour la caractérisation des paramètres géométriques.

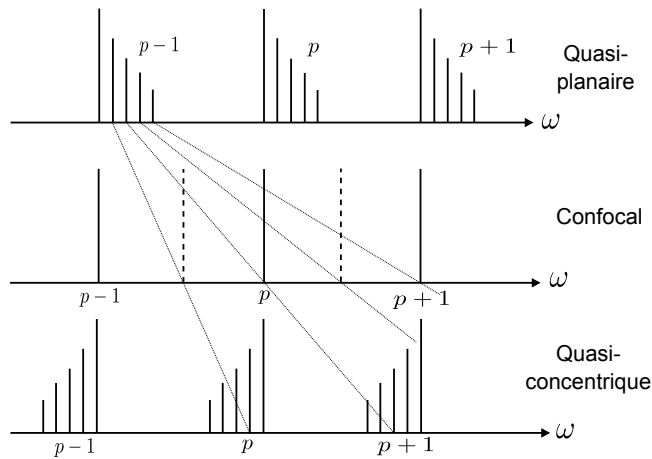


Figure 5.3 – Répartition spectrale des modes transverses selon la configuration géométrique de la cavité (planaire, confocale, concentrique).

On a schématisé Fig. 5.3 la répartition spectrale des modes transverses selon la géométrie du résonateur. Dans la limite d'une géométrie planaire tous les modes transverses sont dégénérés avec le mode fondamental. A l'inverse, dans le cas d'une configuration concentrique, le diamètre du faisceau est minimal au point focal, la phase de Gouy acquiert alors un déphasage supplémentaire de 2π entre un mode transverse et le mode suivant, ce qui provoque un saut d'un intervalle spectral libre. Entre les deux, se trouve la configuration confocale pour laquelle les modes transverses sont séparés par la fréquence d'un demi intervalle spectral libre, cette propriété rend les cavités confocales très simples à aligner, c'est pourquoi il s'agit souvent de la configuration retenue pour les spectromètres à base de résonateurs Fabry-Pérot.

5.2.2 Confrontation à l'expérience

5.2.2.1 Détermination de l'intervalle spectral libre

Avant toute étude sur les modes transverses, il nous faut connaître précisément les modes longitudinaux du résonateur. Ils sont caractérisés par l'intervalle spectral libre *i.e.* la distance qui sépare chacun d'entre eux. Dans le cas d'une cavité en anneau celui-ci vaut $\Delta\nu = c/L_c$, où L_c est la longueur totale du résonateur.

Afin de réaliser une mesure précise de l'intervalle spectral libre on utilise la méthode suivante : à l'aide d'un modulateur de phase, on produit deux bandes latérales autour d'une porteuse, on ajuste alors la position de cette dernière et la fréquence de modulation afin d'observer en

transmission à la fois la porteuse et les bandes latérales. La fréquence de modulation fournit donc une mesure directe de l'intervalle spectral libre. En utilisant une source laser à 1560 nm, on mesure :

$$\Delta\nu = 976.20 \pm 0.05 \text{ MHz.} \quad (5.22)$$

En admettant que les quatre miroirs de la cavité forment un carré parfait, on déduit de cette mesure que la diagonale doit être longue de 90.010(5) mm, ce qui est en bon accord avec les 90 mm prévus lors de la conception mécanique de la cavité.

5.2.2.2 Analyse du spectre des modes transverses du résonateur

Nous allons maintenant comparer l'analyse théorique qui vient d'être faite à la détermination expérimentale du spectre de la cavité. Comme précisé précédemment, cette analyse permet de vérifier les propriétés géométriques du résonateur. Le spectre de la cavité est obtenu en mesurant l'intensité transmise lorsque la fréquence du laser en entrée varie. Le faisceau en entrée est légèrement désaligné afin de coupler de la lumière dans le plus de modes transverses possibles. Le signal obtenu en transmission lors d'une telle mesure est présenté Fig. 5.4.

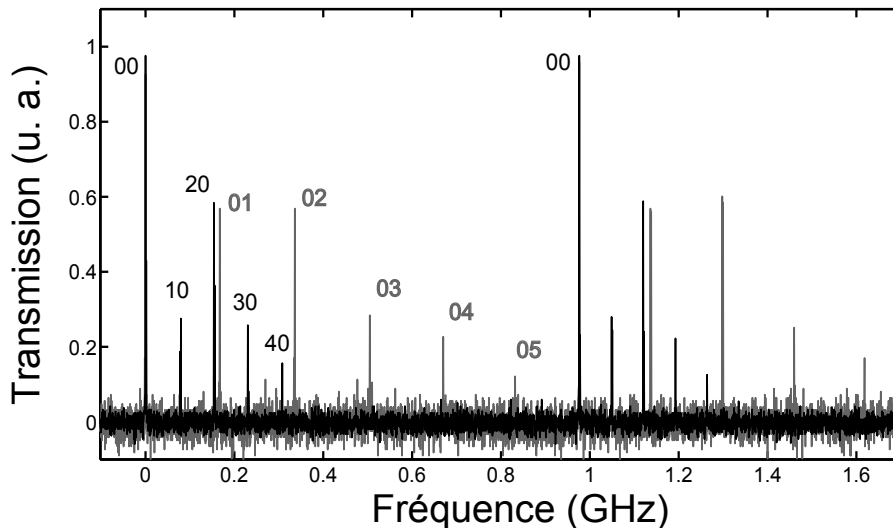


Figure 5.4 – Transmission de la cavité en fonction de la fréquence du laser. La cavité a été légèrement désalignée afin de coupler le plus de modes transverses. En noir lors d'un désalignement de l'axe vertical, on excite préférentiellement les modes TEM_{m0} . En gris, lors d'un désalignement de l'axe horizontal, on excite préférentiellement les modes TEM_{0n} .

A partir de ce spectre, et connaissant précisément la valeur de l'intervalle spectral libre, on peut déterminer la distance séparant chacun des modes transverses du mode fondamental le plus proche. Cela revient à replier tous les modes dans le même intervalle spectral libre, autrement dit, on soustrait une phase $2\pi(m+n)$ au mode TEM_{mn} . Le résultat obtenu est présenté Fig. 5.5 et comparé avec la solution théorique Eq. (5.21). On constate un très bon accord pour les modes verticaux mais un décalage pour les modes horizontaux. En modifiant de seulement 2 % le rayon de courbure des miroirs selon l'axe horizontal, on obtient un résultat concordant avec la mesure. Néanmoins, rien ne prouve que ce soit le rayon de courbure des miroirs qui soit à l'origine de la différence observée. En effet, nous sommes dans une configuration quasi-concentratique et l'axe horizontal est le proche de l'instabilité, en conséquence une faible variation d'un paramètre géométrique modifiera grandement le spectre selon cet axe. On peut

néanmoins envisager d'exploiter cette forte sensibilité pour réaliser, par exemple, des mesures très précises de rayons de courbure [Lawall 09]. En prenant en compte cette correction du rayon de courbure dans le calcul du diamètre du faisceau effectué à partir des matrices ABCD, on trouve $w_0^{(x)} = 93.1 \mu\text{m}$.

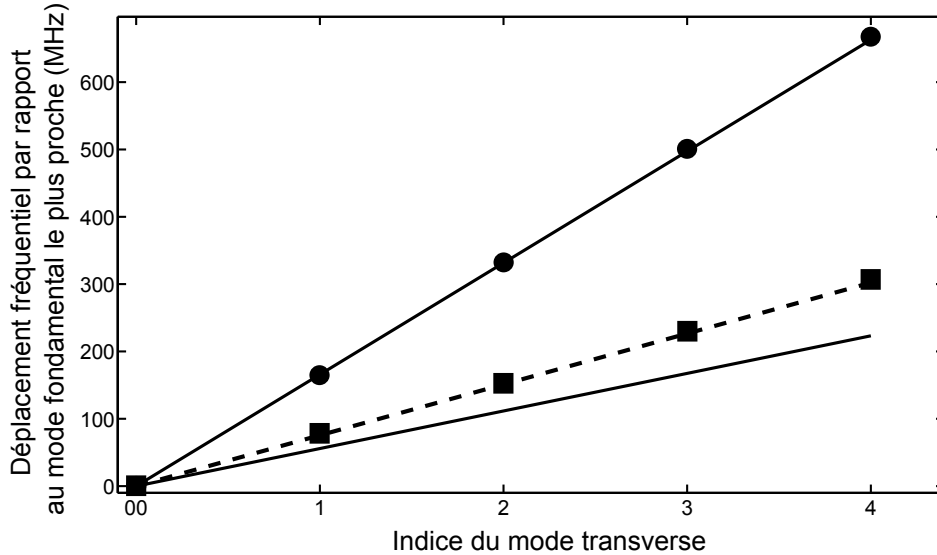


Figure 5.5 – Déplacement des modes transverses. Les points ronds sont les données expérimentales pour les modes transverses TEM_{0n} et les carrés ceux pour les modes TEM_{m0} . Les lignes continues correspondent aux résultats théoriques attendus pour chacun de ces deux modes à partir de l'Eq. (5.21). La ligne pointillée est le résultat obtenu en modifiant le rayon de courbure du miroir selon l'axe horizontal.

5.3 Caractérisation par tomographie des déplacements lumineux

Nous présentons ici une méthode permettant la caractérisation *in-situ* des modes du résonateur grâce à la tomographie du déplacement lumineux différentiel. Cette méthode profite de la longueur d'onde spécifique choisie pour réaliser le piège combinée à l'utilisation d'atomes de rubidium 87. Elle permet non seulement de mesurer les caractéristiques géométriques du mode mais aussi de connaître la puissance intracavité et donc la profondeur du piège dipolaire. Notons enfin qu'une caractérisation *in-situ* est un grand avantage puisqu'il est impossible de réaliser une méthode de type foucaultage à l'intérieur de la cavité, cela induirait de très fortes pertes au sein du résonateur et empêcherait tout couplage de lumière en son sein.

5.3.0.3 Principe de la méthode

Le laser de piège est à la longueur d'onde de 1560 nm, or la transition $5P_{3/2} \rightarrow 4D_{3/2,5/2}$ du ^{87}Rb est à 1529 nm, ce qui n'est pas très éloigné de 1560 nm, Fig. 5.6 (a). Le faisceau intracavité va donc induire un déplacement lumineux sur cette transition, ce déplacement va modifier le couplage sur la transition de sonde $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$, le rendant dépendant de la puissance optique du faisceau de piège et donc dépendant de la position dans le faisceau Fig. 5.6 (b). En décalant la position de la sonde optique à 780 nm par rapport à la transition, il est alors possible d'adresser les atomes à une position spatiale donnée, de plus la connaissance du décalage permet une mesure directe du potentiel optique de piègeage [Brantut 08, Clément 08, Brantut 09, Bertoldi 10].

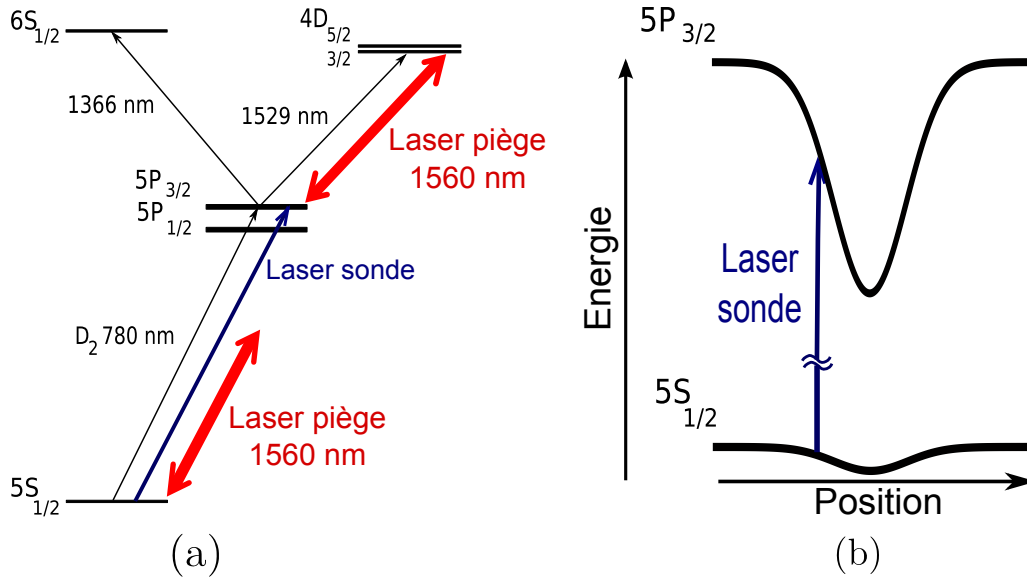


Figure 5.6 – (a) Transitions du ^{87}Rb susceptibles de se coupler avec une radiation à 1560 nm. (b) Déplacement lumineux différentiel induit sur la transition D_2 par le laser de piège à 1560 nm.

Dans l'hypothèse d'un couplage dipolaire, le champ électromagnétique induit le déplacement lumineux suivant la transition atomique [Grimm 00] :

$$\Delta E(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) I(\mathbf{r}), \quad (5.23)$$

où α est la polarisabilité atomique et $I(\mathbf{r})$ est l'intensité optique au point \mathbf{r} . On constate alors que le déplacement lumineux est directement proportionnel au profil du faisceau de piège, par conséquent en observant les atomes à un déplacement lumineux donné, on observera directement les lignes isopotentiels du piège dipolaire. Pour être plus précis, on sonde la différence entre le déplacement lumineux de l'état excité et celui de l'état fondamental Fig. 5.6 (b), or pour connaître le potentiel optique du piège dipolaire on a besoin du déplacement induit sur l'état fondamental. Le ratio entre les polarisabilités scalaires de l'état excité $\alpha_{5P_{3/2}}$ et de l'état fondamental $\alpha_{5S_{1/2}}$ est $\beta = 47.7$ pour un faisceau à 1560 nm [Clément 08, Bernon 11a], par conséquent lorsqu'on mesure des atomes à résonance avec une sonde décalée de δ par rapport à la transition D_2 , ceux-ci sont dans un potentiel optique :

$$U = \frac{h\delta}{\beta - 1}. \quad (5.24)$$

L'observation de la position des atomes à résonance et la connaissance du décalage de la sonde optique fournit donc à la fois une mesure de la géométrie du potentiel, mais aussi une mesure de sa profondeur. Obtenir une mesure *in-situ* de la profondeur est d'une grande aide dans notre cas, il n'est en effet pas évident de connaître précisément la puissance intra-cavité puisque, comme nous le verrons Sec. 5.4, la connaissance de la seule finesse n'est pas suffisante.

5.3.0.4 Tomographie des modes transverses

Nous avons tout d'abord réalisé la tomographie du mode fondamental de la cavité. Le laser à 1560 nm est asservi à résonance avec ce mode (voir Sec. 5.5.2). On éteint alors les faisceaux du piège magnéto-optique et on mesure sur un capteur CCD l'absorption induite par les atomes

sur une sonde [Bernon 11a]. Il y a absorption uniquement dans la région spatiale où la sonde est à résonance avec la transition atomique. En faisant varier le décalage de la sonde par rapport à la résonance, on observe alors les lignes d'isopotentielles du piège dipolaire croisé, Fig. 5.7. Ce signal nous permet également d'ajuster le croisement des deux bras de la cavité en s'assurant que la profondeur au niveau du croisement est égale au double de la profondeur dans un seul bras.

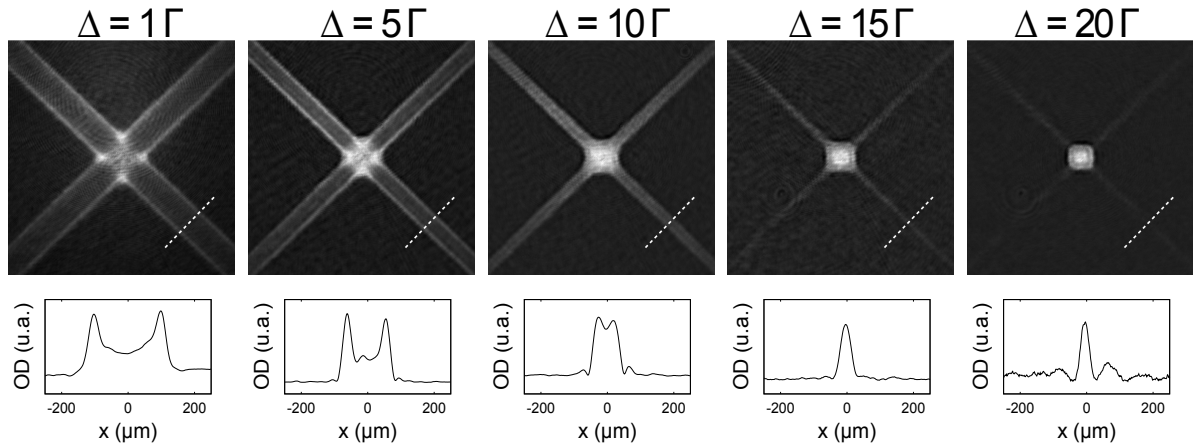


Figure 5.7 – Tomographie du mode fondamental TEM_{00} . (Haut) Image de la densité optique subie par la sonde pour différents décalages de celle-ci par rapport à la transition D_2 . (Bas) Profil des images intégrées par projection selon la ligne pointillée à 45° .

La même mesure peut être effectuée en asservissant non plus la cavité sur le mode fondamental mais sur les modes transverses TEM_{10} et TEM_{20} . Afin d'augmenter le couplage du faisceau incident sur ces modes, des masques de phase sont utilisés. Les modes de Hermite-Gauss étant self-similaires par propagation, on choisit les masques de phase de sorte à obtenir un bon recouvrement entre les champs juste après le masque. Si on choisit un masque avec un saut de phase de π en son centre ($0 - \pi$) alors le recouvrement entre le champ produit et le mode de Hermite-Gauss TEM_{10} à l'emplacement du masque est de 79 %. De même, en utilisant un masque présentant un créneau de phase π au centre ($0 - \pi - 0$) tel que la largeur du créneau soit égale au waist du faisceau gaussien incident, alors le recouvrement du champ en sortie avec le mode TEM_{20} est de 68 %. Des exemples de tomographie pour chacun de ces modes sont donnés Fig. 5.8.

A partir de ces observations et de la relation Eq. (5.24), on peut déduire le profil du potentiel optique généré par les différents modes transverses, on obtient alors le résultat Fig. 5.9. Un ajustement de ces données par le mode de Hermite-Gauss attendu Eq. (5.19) fournit une mesure du diamètre du faisceau $w_0^{(x)}$ dans le plan horizontal au niveau du col, on trouve $97.1(1) \mu\text{m}$, $101.1(1) \mu\text{m}$ et $99.8(4) \mu\text{m}$ pour les modes TEM_{00} , TEM_{10} et TEM_{20} , respectivement. Ce résultat est en bon accord avec les $93.1 \mu\text{m}$ obtenus grâce aux matrices ABCD en incluant la correction sur le rayon de courbure estimée à partir de l'étude spectrale Sec. 5.2.2.2.

5.4 Finesse

Nous avons jusqu'à présent étudié la positions des résonances de la cavité, toutefois, le résonateur est un système ouvert qui présente donc des pertes *via* le couplage avec le continuum des modes du champ électromagnétique en dehors du résonateur, ce couplage s'effectue notamment au travers des miroirs du résonateur dont la transmission est non-nulle. Comme pour tout oscil-

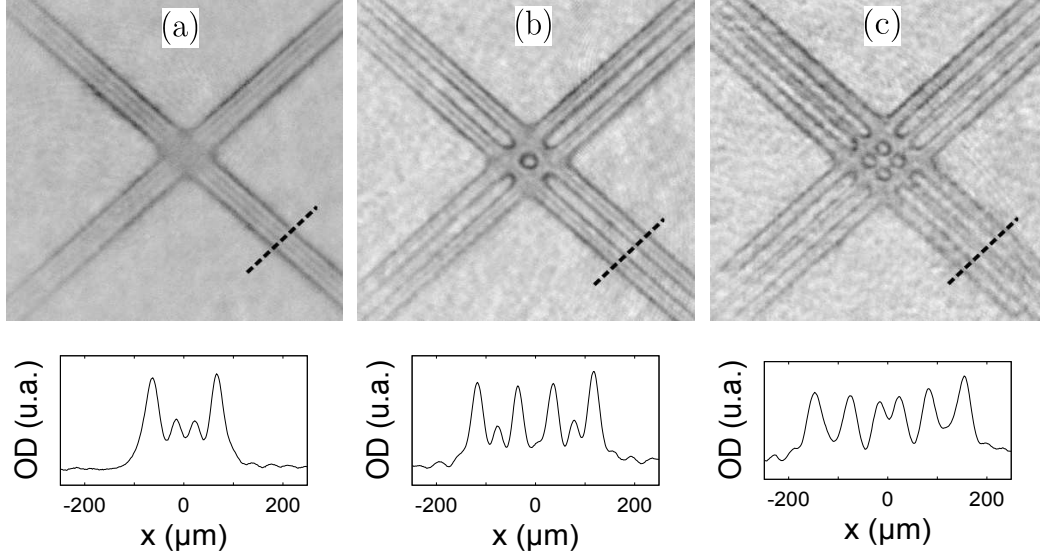


Figure 5.8 – Tomographie des modes d'ordres supérieurs pour une sonde décalée de 5Γ de la transition. (a) TEM_{00} . (b) TEM_{10} . (c) TEM_{20} .

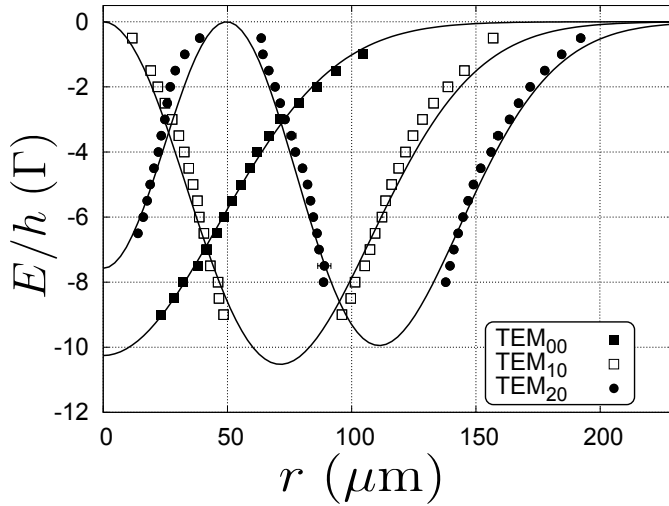


Figure 5.9 – Potentiel optique mesuré par tomographie pour les trois premiers modes transverses de la cavité à 1560 nm . Les lignes continues correspondent à des ajustements par les fonctions de Hermite-Gauss associées à chaque mode.

lateur, cela va provoquer un élargissement de la résonance de la cavité. On utilise comme figure de mérite, pour quantifier la qualité du résonateur, le rapport entre l'intervalle spectral libre $\Delta\nu$ qui sépare deux modes longitudinaux consécutifs et la largeur à mi-hauteur de la résonance $\delta\nu$, ce ratio est appelé la *finesse* de la cavité [Born 99] :

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu}{\delta\nu}, \quad (5.25)$$

plus elle est élevée, meilleur est le résonateur. La finesse peut aussi être interprétée comme le nombre moyen de tours qu'un photon effectue dans la cavité avant d'en sortir. Aujourd'hui des résonateurs ultra-stables et de très hautes finesesses permettent de générer des références optiques servant, par exemple, d'oscillateur local pour les horloges atomiques optiques [Jiang 11], pour les liens optiques ultra-stables [Jiang 08], ou bien encore pour les détecteurs d'ondes gravitationnelles [Ohmae 10].

Dans notre cas, la cavité poursuit deux objectifs pour lesquels la finesse est un paramètre essentiel : la réalisation d'un piège dipolaire et l'amélioration des performances de la détection

non-destructive. S'agissant du premier objectif, il faut obtenir un piège dipolaire profond à partir d'un laser de puissance modeste reposant sur des dispositifs standards en télécommunications optiques à 1560 nm. L'idée est de profiter de la surtension du champ électromagnétique à l'intérieur du résonateur, la facteur de surtension étant directement proportionnel à la finesse, on comprend qu'il s'agit là d'un paramètre critique qui se doit d'être bien connu et maîtrisé. Quant à la seconde application, elle repose sur le fait que, à destructivité donnée, le rapport signal-à-bruit de la détection non-destructive est amélioré d'un facteur $\sqrt{\mathcal{F}}$ si la détection est réalisée dans une cavité plutôt qu'en simple passage.

Dans la configuration particulière de notre résonateur, en désignant par r le coefficient de réflexion en amplitude d'un miroir de la cavité, on a l'expression théorique suivante pour la finesse [Bernon 11a] :

$$\mathcal{F} = \frac{\pi r^2}{1 - r^4}, \quad (5.26)$$

on constate, comme attendu, que celle-ci diverge si r^2 tend vers 100 %, la résonance devient alors infiniment fine. On vérifie aussi que la finesse est indépendante des paramètres géométriques de la cavité et dépend uniquement des pertes optiques. Les miroirs de la cavité ont, d'après les spécifications du fabricant, une transmission $t^2 = 0.03776$ % à 1560 nm et $t^2 = 0.001545$ % à 780 nm. En supposant que leur absorption est nulle on a $r^2 + t^2 = 1$, la finesse attendue à 1560 nm est alors $\mathcal{F} = 4160$ et celle à 780 nm est $\mathcal{F} = 101668$.

Nous allons maintenant mesurer expérimentalement la finesse de la cavité à 1560 nm et la comparer à celle attendue. Nous verrons que des pertes supplémentaires doivent être considérées et qu'elles limitent le couplage maximal dans la cavité.

5.4.1 Mesure de la finesse

Pour obtenir une mesure précise de la largeur spectrale de la résonance, nous avons modulé en phase le laser et scanné la fréquence de modulation. La mesure du temps mis par la bande latérale pour traverser la résonance ainsi que la connaissance de la vitesse de scan permet de déterminer la largeur spectrale, le résultat est présenté Fig. 5.10. Le scan en fréquence est réalisé grâce à un synthétiseur radio-fréquence proposant cette option, la vitesse de scan est donc précisément connue et vaut ici 12 MHz/ms.

A l'aide d'un ajustement des données par une fonction lorentzienne, on mesure la largeur spectrale à mi-hauteur de la résonance $\delta\nu = 546$ kHz. En combinant cette information à la connaissance de l'intervalle spectral libre obtenue précédemment, on obtient la valeur de la finesse du résonateur à 1560 nm :

$$\mathcal{F}_{1560\text{nm}} = 1788. \quad (5.27)$$

Cette valeur est à peu près deux fois plus faible que la valeur théorique attendue de 4160. Afin d'expliquer cet écart, on peut invoquer soit une réflectivité des miroirs plus faible que celle attendue, soit l'existence d'un autre mécanisme de pertes et notamment la diffusion liée à une rugosité résiduelle de la surface des miroirs.

5.4.2 Pertes et diffusion

Afin de prendre en considération la diffusion à la surface des miroirs, on introduit un terme de diffusion κ dans la conservation de l'énergie $r^2 + t^2 + \kappa^2 = 1$. L'expression Eq. (5.26) de la finesse en fonction de la réflectivité r est alors inchangée, mais cette dernière ne peut plus être estimée grâce à la transmission des miroirs. En fait, la mesure effectuée précédemment fournit une mesure de la réflectivité des miroirs $r^2 = 99.91$ %.

En introduisant le paramètre $x = \kappa^2/t^2$ qui décrit le coefficient de diffusion normalisé à la transmission des miroirs, on obtient la relation suivante entre la puissance intra-cavité et la

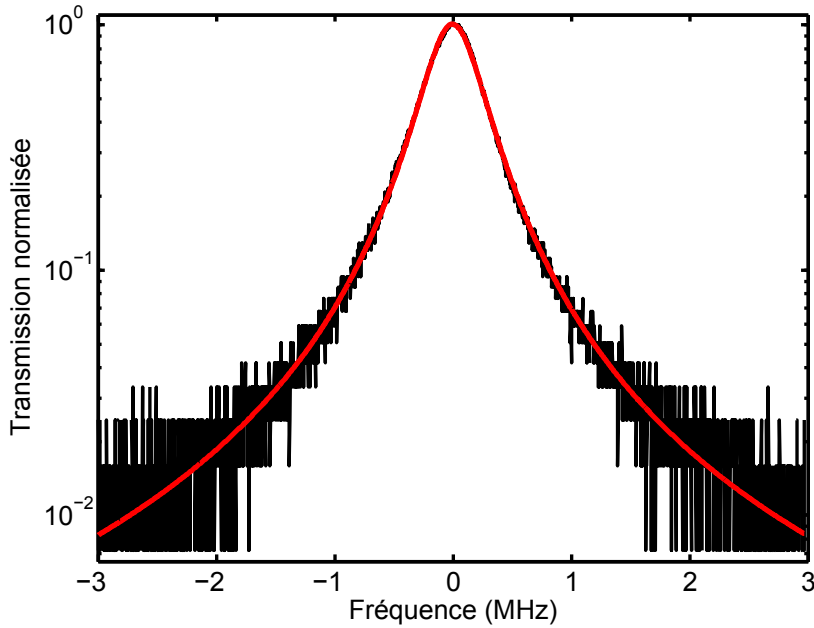


Figure 5.10 – Résonance de la cavité à 1560 nm. Le trait noir correspond au signal expérimental et le trait rouge à un ajustement des données par une fonction lorentzienne.

puissance optique à l'extérieur [Bernon 11a] :

$$\frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{out}}} = \frac{2}{\pi} (1 + x) \mathcal{F}. \quad (5.28)$$

La mesure de la profondeur du piège par tomographie des déplacements lumineux fournit alors une estimation du ratio entre les puissances intérieures et extérieures. Connaissant la polarisabilité atomique ainsi que les waists au centre, on trouve $P_{\text{out}} = 14.3 \text{ W}$ pour $P_{\text{in}} = 5.1 \text{ mW}$, on obtient alors $x \sim 1.5$. Ce résultat indique que les pertes par diffusion dominent les pertes par transmission.

5.5 Asservissement en fréquence d'un laser à fibre

Après cette description des paramètres de la cavité, il nous faut l'exploiter notamment pour la réalisation du piège dipolaire. La condition *sine qua non* est d'injecter de manière continue la radiation optique à l'intérieur du résonateur, en d'autres termes, il faut asservir le laser sur la résonance de la cavité. Comme pour tout asservissement, un signal d'erreur doit être extrait, pour cela nous utiliserons la méthode de Pound-Drever-Hall qui présente de fortes similarités avec la spectroscopie par modulation de fréquence. Mais extraire un signal d'erreur n'est pas suffisant pour que l'asservissement fonctionne, il faut aussi pouvoir réagir sur la fréquence du laser. Le paramètre critique est la bande passante de correction dont on dispose, en effet plus celle-ci est élevée, plus le gain unitaire sera atteint pour une fréquence élevée et plus le gain intégral à fréquence nulle sera lui-aussi élevé, ce qui assure une stabilité supérieure de l'asservissement.

Le laser à fibre que nous utilisons offre l'avantage d'avoir une largeur de raie de l'ordre du kilo-Hertz, ce qui est bien plus faible que la largeur de la résonance de la cavité qui est de l'ordre de 500 kHz, on ne cherchera donc pas à réduire le bruit de phase du laser mais simplement à faire en sorte que la valeur moyenne de la fréquence du laser suive la résonance du laser. Le laser à fibre présente toutefois une importante limitation puisque sa fréquence ne peut être ajusté qu'avec

un actuateur piézo-électrique qui modifie la longueur de la cavité laser³, cet actuateur permet de corriger des fréquences sur une gamme d'environ 1 GHz mais à une bande-passante limitée à environ 1 kHz ce qui n'est pas suffisant pour corriger le bruit acoustique de la cavité (jusqu'à environ 10 kHz). Il est donc nécessaire d'ajouter un actuateur externe pour les corrections à plus haute fréquence. Nous présenterons ici deux méthodes, la première est couramment utilisée et repose sur l'utilisation d'un modulateur acousto-optique en double passage, elle présente toutefois un certain nombre de limitations et nous avons développé une nouvelle technique utilisant la modulation serrodyne qui permet de dépasser toutes les limitations de la méthode précédente.

5.5.1 La méthode de Pound-Drever-Hall

La méthode a initialement été introduite dans le domaine micro-onde [Pound 46] avant d'être adaptée aux fréquences optiques [Drever 83], on trouvera une bonne introduction dans [Black 01]. Elle repose sur le même principe que la spectroscopie par modulation de fréquence [Bjorklund 80] : on module en phase le laser pour générer des bandes latérales à une fréquence supérieure à la largeur de la résonance de la cavité. Les bandes latérales sont donc hors de résonance et réfléchies sur le miroir d'entrée de la cavité, la porteuse est quand à elle injectée dans la cavité et déphasée selon sa position par rapport à la résonance, de la même manière que le déphasage dépend de la distance par rapport à la transition atomique lors de la spectroscopie FM, on réalise ici une spectroscopie de la cavité. En collectant le faisceau réfléchi sur une photodiode il apparaît un battement dont l'amplitude dépend du déphasage de la porteuse par rapport à la phase sur le miroir d'entrée, après démodulation on obtient un signal dispersif faisant office de signal d'erreur. Cette méthode à l'avantage qu'une bande passante de correction supérieure à la largeur spectrale du résonateur peut être utilisée. Le schéma type pour la mise en œuvre de la méthode est présenté Fig. 5.11.

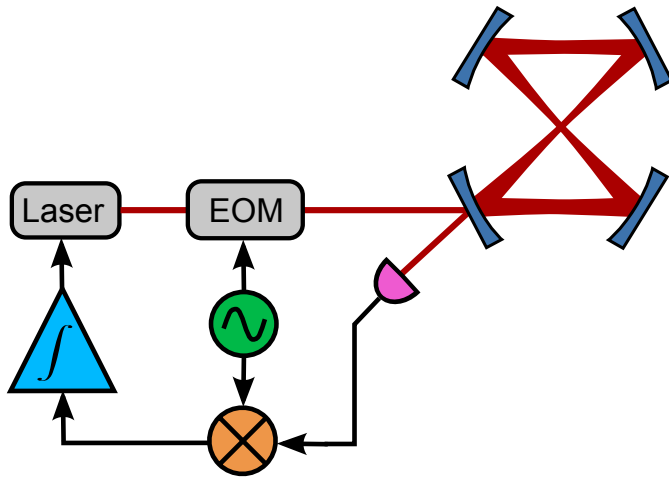


Figure 5.11 – Schéma de principe de la méthode de Pound-Drever-Hall. Le signal obtenu après démodulation est amplifié avec des gains proportionnel et intégrateur avant de rétroagir sur la fréquence du laser.

Quantifions maintenant l'expression du signal d'erreur, dans la limite où le faisceau subit une faible modulation ($\beta \ll 1$), le champ électrique en sortie du modulateur de phase est :

$$E_{\text{in}} = E_0 e^{i\omega t} \left[J_0(\beta) + J_1(\beta) e^{i\Omega t} - J_{-1}(\beta) e^{-i\Omega t} \right]. \quad (5.29)$$

Si on note $F(\omega)$ le coefficient de réflexion complexe de la cavité, *i.e.* sa forme de raie, alors le champ électrique après réflexion s'écrit :

$$E_{\text{ref}} = E_0 e^{i\omega t} \left[J_0(\beta) F(\omega) + J_1(\beta) F(\omega + \Omega) e^{i\Omega t} - J_{-1}(\beta) F(\omega - \Omega) e^{-i\Omega t} \right]. \quad (5.30)$$

3. On peut aussi ajuster la fréquence en modifiant la température de fonctionnement du laser, mais cette méthode est encore plus lente.

On calculant la puissance optique associée $P_{\text{ref}} = |E_{\text{ref}}|^2$, puis en ne conservant que les termes en $\cos \Omega t$ qui subsistent après démodulation, on obtient l'expression suivante pour le signal d'erreur :

$$\epsilon(\omega) \propto \text{Re} [F(\omega)F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega)F(\omega - \Omega)]. \quad (5.31)$$

Dans le cas de notre cavité, le coefficient de réflexion complexe est [Bernon 11a] :

$$F(\omega) = \frac{t^2 r^3 e^{i\omega L/c}}{1 - r^4 e^{i\omega L/c}}, \quad (5.32)$$

où t est le coefficient de transmission en amplitude et r celui en réflexion, le constructeur des miroirs fournit $t^2 = 0.03776\%$ à 1560 nm et en supposant qu'il n'y a pas de pertes, la conservation de l'énergie impose $r^2 + t^2 = 1$, on peut alors calculer le signal d'erreur attendu. Le résultat est présenté Fig. 5.12, il s'agit bien d'un signal dispersif centré autour de la résonance, on remarquera aussi sa forte ressemblance avec celui obtenu expérimentalement Fig. 5.18.

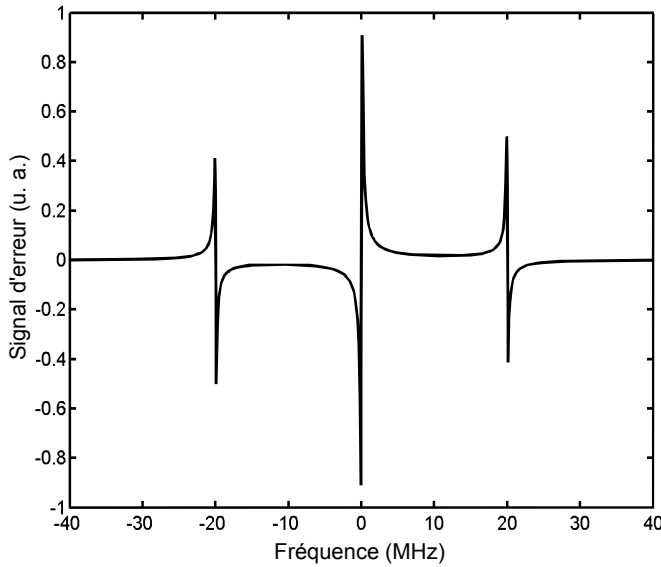


Figure 5.12 – Signal d'erreur théorique à 1560 nm obtenu par la méthode de Pound-Drever-Hall pour une modulation à 20 MHz et une transmission des miroirs $t^2 = 0.03776\%$.

Nous allons maintenant présenter la mise en œuvre de cette méthode en utilisant deux techniques différentes pour la correction en fréquence du laser à fibre. Dans un premier temps, nous présenterons l'asservissement d'un laser à fibre à 1560 nm dont les corrections à haute fréquence seront réalisées par un modulateur acousto-optique monté en double passage, puis nous montrerons l'asservissement d'un laser de même technologie à 1529 nm à l'aide d'une modulation serrodyne.

5.5.2 Correction de fréquence avec un modulateur acousto-optique

Le montage expérimental utilisé est présenté Fig. 5.13. La source optique est un laser à fibre dopé erbium (DFB EDFL) émettant à 1560 nm munie d'un actuateur piézo-électrique permettant d'ajuster la fréquence du laser avec une bande passante d'environ 1 kHz sur une plage de l'ordre de 2 GHz. Le laser passe alors dans un modulateur acousto-optique monté en configuration double passage, il permet la correction rapide de la fréquence du laser en changeant la fréquence de l'onde radio-fréquence appliquée sur le modulateur. Le faisceau est alors réinjecté dans une fibre avant d'être modulé en phase afin de générer les bandes latérales nécessaires à l'obtention du signal d'erreur *via* la méthode de Pound-Drever-Hall. Le laser est ensuite amplifié à une puissance de 5 W grâce à un amplificateur à fibre dopé erbium (EDFA) avant d'être injecté dans la cavité. Le signal réfléchi sur le miroir d'entrée de la cavité est alors récupéré sur

une photodiode suivie d'un montage transimpédance adapté à la détection d'une modulation radio-fréquence (voir Annexe D.2.3.2). Après démodulation du battement, le signal d'erreur est intégré une première fois avant de venir corriger la fréquence sur le modulateur acousto-optique, puis il est intégré une seconde fois afin de corriger les perturbations à basse fréquence grâce à l'actuateur piézo-électrique implanté sur le laser.

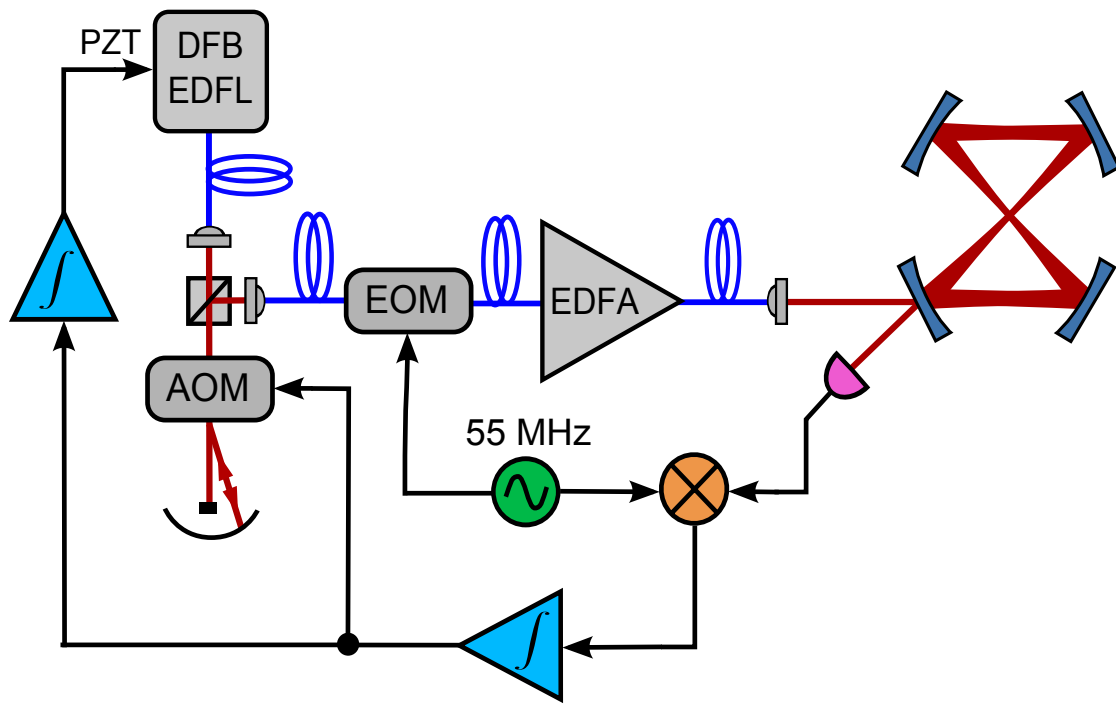


Figure 5.13 – Asservissement en fréquence à l'aide d'un modulateur acousto-optique.

Lors de la conception du contrôleur, il est important de remarquer qu'étant donné que la réponse de la cavité est une lorentzienne, il s'agit d'un filtre passe-bas du premier ordre. Autrement dit, l'amplitude du signal d'erreur décroît de 20 dB par décade pour une fréquence supérieure à la largeur de la résonance de la cavité, de plus le signal est déphasé de π à partir de cette fréquence de coupure. Par conséquent, si on désire réaliser un asservissement avec une bande-passante de correction supérieure à la largeur de la résonance de la cavité, il faut compenser la perte d'amplitude et ajouter une avance de phase sur la fonction de transfert du contrôleur⁴ [Fox 03].

L'asservissement a pour objectif de minimiser le bruit de fréquence relatif entre la fréquence du laser et celle de la résonance de la cavité. En utilisant le signal d'erreur, on peut estimer ce bruit relatif Fig. 5.14. On observe une bosse de bruit à 250 kHz, elle indique la bande passante de l'asservissement qui est ici limitée par la vitesse de propagation de l'onde acoustique dans le cristal de TeO_2 du modulateur acousto-optique.

5.5.3 Correction de fréquence par modulation serrodyne

Il est difficilement envisageable de dépasser une bande passante d'environ 1 MHz en utilisant un modulateur acousto-optique pour la correction de fréquence. Or, plus la bande passante est importante, plus la fréquence pour laquelle le gain unitaire est atteint est élevée et donc plus le gain à basse fréquence est important, il est donc avantageux de disposer d'une bande

4. La règle étant de ne pas atteindre le gain unitaire avec une pente supérieure à 20 dB par décade.

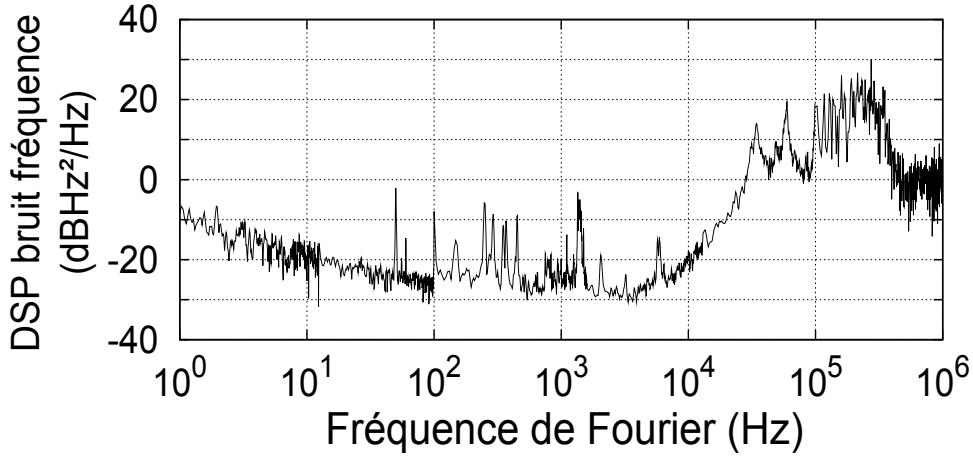


Figure 5.14 – *Bruit de fréquence relatif entre le laser et la résonance de la cavité lors de l’asservissement utilisant le modulateur acousto-optique.*

passante plus grande. Une méthode pour augmenter la bande passante consiste à alimenter un modulateur de phase avec le signal d’erreur intégré, cela produit un décalage de la fréquence du laser [Hall 84]. Cette méthode permet d’obtenir une grande bande passante, néanmoins plus la bande passante est importante plus l’amplitude de correction est réduite car la tension maximale acceptée par le modulateur est atteinte plus rapidement, de plus la correction en fréquence ne peut pas être maintenue, cet actuateur ne peut donc pas être utilisé seul.

Nous allons présenter ici une méthode utilisant elle aussi un modulateur de phase mais qui permet de dépasser les limitations précédentes, car, non seulement on dispose d’une grande passante, mais celle-ci est combinée avec une grande amplitude de correction. De plus, il est possible de maintenir cette correction si bien que la méthode se suffit à elle-même.

5.5.3.1 Principe de la modulation serrodyne

Plaçons en entrée d’un modulateur de phase une onde dont la phase est $\varphi_{\text{in}}(t) = \omega_0 t$; si on applique une rampe de tension de pente α sur le modulateur, alors la phase en sortie est $\varphi_{\text{out}}(t) = \varphi_{\text{in}}(t) + \alpha t = (\omega_0 + \alpha)t$, en d’autres termes, la fréquence de l’onde est déplacée d’une quantité correspondant à la pente de la rampe, $\omega = \omega_0 + \alpha$. C’est là l’idée de la modulation serrodyne [Izutsu 81, Wong 82, Thylen 85, Johnson 88, Johnson 10], on peut donc l’utiliser pour accorder la fréquence d’un faisceau laser. La modulation serrodyne a, par exemple, été utilisée pour la stabilisation des gyromètres optiques [Davis 81, Cahill 79, Kay 85, Ebbergh 85] ou bien pour réaliser un interrupteur optique ultra-rapide [Johnson 11]. On se propose ici d’utiliser cette méthode pour l’asservissement en fréquence d’un laser sur une cavité optique.

En pratique, on ne peut toutefois pas appliquer une rampe de manière continue sur le modulateur sous peine d’excéder la tension maximale qu’il peut supporter. Ce problème est néanmoins facilement soluble puisqu’il suffit de replier la rampe dès que la phase atteint la valeur de 2π , autrement dit, il faut appliquer sur le modulateur un signal en dents de scie d’amplitude 2π . Un signal en dents de scie de période T et d’amplitude 2π s’écrit :

$$\varphi(t) = 2\pi t/T, \quad \text{pour } -T/2 \leq t < T/2 \quad (5.33)$$

$$\varphi(t+T) = \varphi(t), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}, \quad (5.34)$$

ce signal est représenté Fig. 5.15. Dans ce cas $\alpha = 2\pi/T$, par conséquent, si un tel signal est appliqué sur le modulateur de phase, il décale la fréquence de l’onde d’une quantité $1/T$. On

peut donc retenir que le décalage en fréquence est égal à la fréquence du signal en dents de scie appliqué sur le modulateur de phase⁵. Le développement en série de Fourier de cette fonction est :

$$\varphi(t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right), \quad (5.35)$$

la puissance dans la n -ème harmonique doit donc vérifier $P_n = P_1/n^2$, où P_1 est la puissance du fondamental. Ce spectre de fréquence étant infiniment large, il est donc essentiel de disposer d'une grande bande passante sur le modulateur de phase afin d'obtenir la meilleure efficacité de transfert possible. Les modulateurs électro-optiques atteignent aujourd'hui des bandes-passantes de plusieurs dizaines de giga-Hertz, ce qui permet de réaliser des décalages de l'ordre du giga-Hertz [Johnson 10].

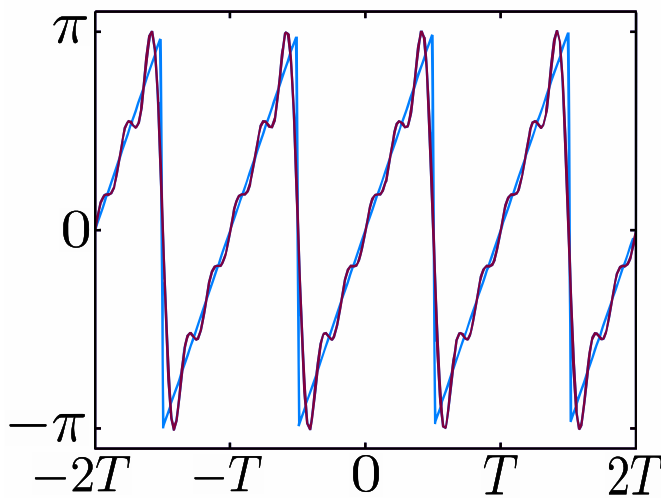


Figure 5.15 – Signal en dent de scie correspondant à la modulation de phase appliquée sur une onde pour obtenir un décalage de fréquence $\delta\nu = 1/T$. En bleu : le signal exact. En mauve : le signal obtenu à partir des 5 premières harmoniques.

5.5.3.2 Réalisation du signal en dents de scie

Pour réaliser un signal en dents de scie, on peut par exemple intégrer un signal continu et court-circuiter le condensateur de manière périodique [Johnson 88], il est néanmoins difficile de dépasser une fréquence de l'ordre de quelques MHz avec cette méthode. Or, on souhaite réaliser un décalage en fréquence de l'ordre de quelques centaines de MHz, il nous faut donc utiliser une autre technique. Une solution est d'utiliser une ligne de transmission non-linéaire (NLTL) [Johnson 10] dans laquelle la relation de dispersion est non-linéaire, autrement dit, la vitesse de l'onde électronique dépend de son amplitude [Rodwell 94]. Lorsque la partie de l'onde avec la plus grande amplitude rattrape celle d'amplitude la plus faible le front d'onde devient très raide, c'est le même effet qui provoque le déferlement des ondes de houle lorsqu'elles arrivent sur une côte Fig. 5.16 (a). Si en entrée d'un tel composant, on injecte une onde sinusoïdale, l'onde en sortie s'approche d'un signal en dents de scie de même fréquence que l'onde d'entrée. Par conséquent, le déplacement de fréquence de l'onde optique sera égal à la fréquence de l'onde sinusoïdale en entrée du NLTL.

La ligne de transmission non-linéaire utilisée est le modèle 7112-110 de chez Picosecond Pulse Labs, elle fonctionne pour une fréquence fondamentale située entre 300 et 700 MHz et génère des harmoniques jusqu'à environ 20 GHz. On injecte en entrée de la ligne de transmission une

5. Au lieu de choisir une amplitude de modulation égale à 2π , on peut choisir de manière générale tout multiple $2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$, la fréquence sera alors décalée de k fois celle du signal appliqué.

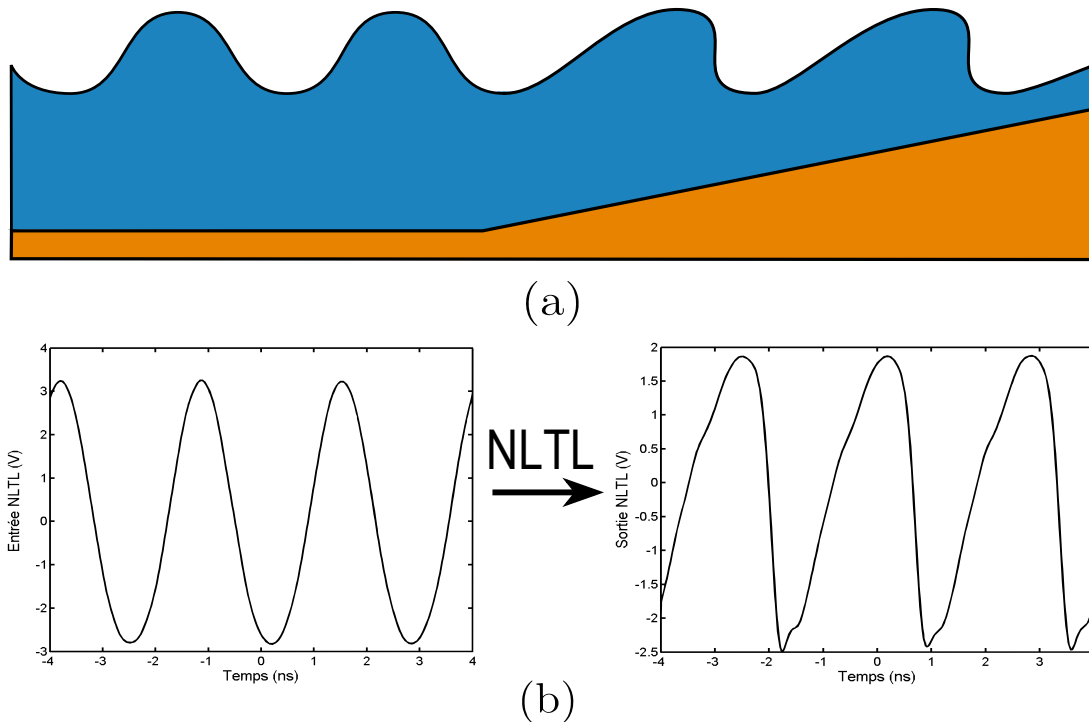


Figure 5.16 – Propagation non-linéaire. (a) Propagation dispersive non-linéaire d'une onde de houle à l'approche d'une côte. (b) Evolution d'une onde électro-magnétique sinusoïdale à 390 MHz au travers d'une ligne de transmission non-linéaire. Le signal est mesuré avec un oscilloscope ayant seulement 2 GHz de bande-passante, le front descendant est en réalité beaucoup plus raide.

onde sinusoïdale à 390 MHz produite par un oscillateur contrôlé en tension (VCO, modèle ZX95-625-S+ de chez Minicircuits) puis amplifiée à 27 dBm. On obtient alors en sortie de la NLTL le signal présenté Fig. 5.16 (b).

5.5.3.3 Mise en œuvre expérimentale

La source optique est un laser à fibre dopée erbium opérant à 1529 nm, à cette longueur d'onde la largeur de la résonance de la cavité est $\Delta\nu = 1$ MHz, soit une finesse de 1000. La sortie du laser est injectée dans un modulateur de phase électro-optique fibré possédant une bande-passante d'environ 10 GHz (modèle PM-0K5-00-PFA-PFA de chez Eospace). La sortie du modulateur est alors injectée dans la cavité, la réflexion sur le miroir d'entrée étant collectée sur une photodiode. Après démodulation du signal par l'oscillateur local, on obtient un signal d'erreur qui, après intégration, vient rétroagir sur le VCO qui contrôle la ligne de transmission non-linéaire, le signal d'erreur est aussi intégré une seconde fois avant de réagir sur l'actuateur piézo-électrique du laser afin de compenser les dérives à basse-fréquence. Le schéma du montage expérimental est donné Fig. 5.17.

Puisque la méthode de Pound-Drever-Hall nécessite déjà un modulateur de phase pour extraire le signal d'erreur, il peut aussi être exploité pour réaliser la modulation serrodyne. Pour se faire, les signaux provenant de l'oscillateur local et de la ligne de transmission non-linéaire sont combinés à l'aide d'un coupleur micro-onde large bande (ZX10R-14-S+, Minicircuits). Le résultat est présenté Fig. 5.18, on observe tout d'abord qu'en présence de la modulation serrodyne, la fréquence du laser est déplacée de 390 MHz ce qui est égal à la fréquence du VCO, l'efficacité du déplacement est de 69 %, ce qui correspond à une perte de 1.6 dB. Les 31 % de puissance

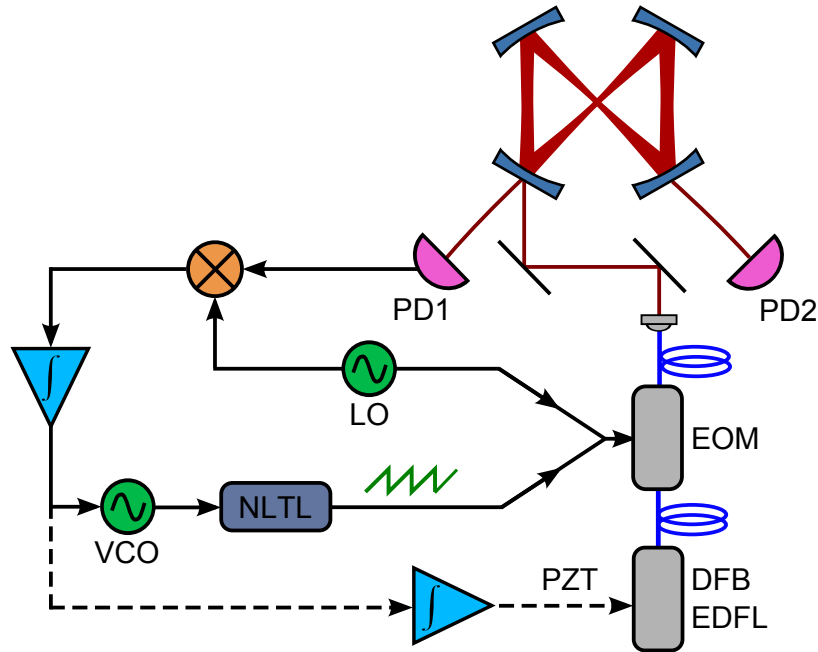


Figure 5.17 – Mise en œuvre de l'asservissement par modulation serrodyne.

optique non transférés sont filtrés par la cavité, ils ne constituent donc pas un problème. La fréquence du laser peut être décalée de 280 MHz à 500 MHz (limité par la bande-passante de l'amplificateur de puissance utilisé avant la NLTL). On constate aussi que le signal d'erreur est décalé avec une efficacité de 76 %, ce qui démontre bien la possibilité de combiner les deux signaux sur le même modulateur de phase.

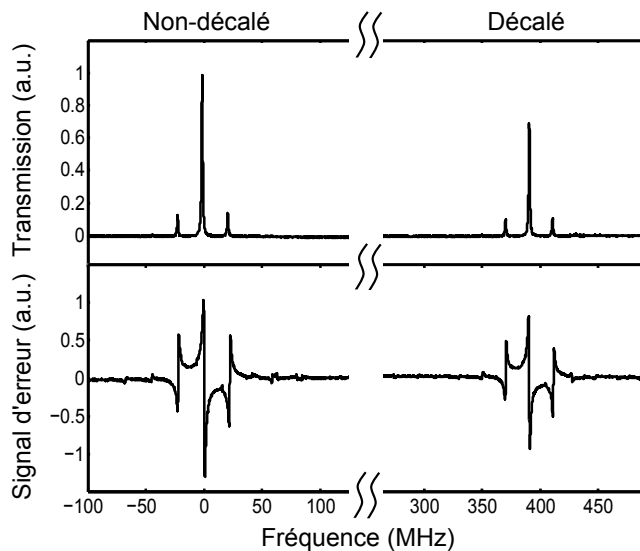


Figure 5.18 – (Haut) Signal en transmission lorsqu'on parcourt la longueur de la cavité, avec (droite) et sans (gauche) modulation serrodyne. (Bas) Le signal d'erreur obtenu grâce à la méthode de Pound-Drever-Hall est lui aussi décalé par la modulation serrodyne.

5.5.3.4 Résultats

Lorsque la boucle d'asservissement est fermée, une bande passante de 2.4 MHz est atteinte, celle-ci est limitée par le déphasage que l'électronique du contrôleur induit sur le signal. On a tracé Fig. 5.19 la densité spectrale de puissance du bruit de fréquence relatif entre la résonance

de la cavité et le laser, celle-ci a été compensée pour prendre en compte la fonction de transfert de la cavité $[1 + (2\nu/\Delta\nu)^2]^{-1/2}$. Le bruit de fréquence est limité par le bruit d'intensité sur la photodiode de détection du signal d'erreur pour des fréquences inférieures à 10 kHz. En principe, il ne devrait pas y avoir de pic à la fréquence de modulation, la présence de ce dernier est due à la fois à la modulation d'amplitude résiduelle du modulateur et à un signal parasite provenant de l'oscillateur local à travers le mélangeur.

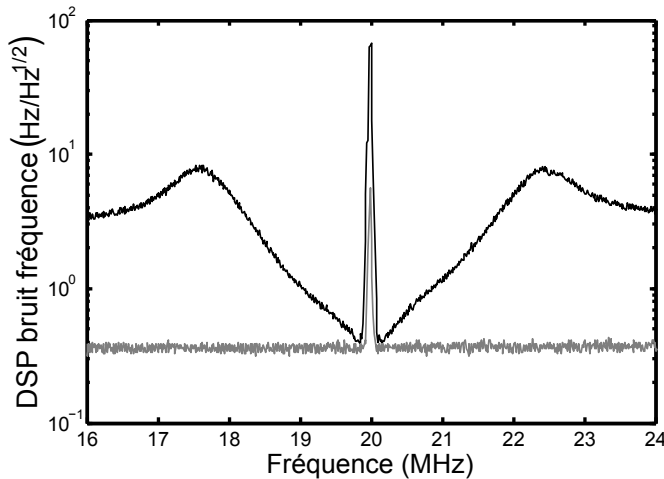


Figure 5.19 – Densité spectrale de puissance du bruit de fréquence relatif entre la résonance de la cavité et le laser (noir) et bruit d'intensité sur PD1 convertit en bruit de fréquence (gris).

5.5.4 Comparaison des deux méthodes

La méthode de correction de fréquence par modulation serrodyne présente de nombreux avantages par rapport à la technique reposant sur le modulateur acousto-optique monté en double passage. Tout d'abord, le modulateur électro-optique étant déjà présent, il n'est pas nécessaire de passer en espace libre, ce qui réduit drastiquement les pertes, d'environ 10 dB avec l'acousto-optique en comptant le re-couplage dans une fibre, on passe à seulement 1.6 dB avec la modulation serrodyne. De plus, le système peut être entièrement fibré voire réalisé en optique intégré, ce qui permet de profiter pleinement du savoir-faire technologique développé pour les applications en télécommunications.

Nous comparons tout d'abord la densité spectrale de puissance de bruit des signaux d'erreur obtenus lorsque la correction de fréquence est réalisée, soit par la modulation serrodyne, soit par un modulateur acousto-optique monté en double passage, le résultat est présenté Fig. 5.20. La comparaison est effectuée en utilisant le même laser fibré à 1560 nm. Dans les deux cas, le bruit mesuré a été compensé par la fonction de transfert de la cavité $1/(1 + (2\nu/\nu_0)^2)$, où $\nu_0 = 546$ kHz est la largeur de la résonance de à 1560 nm (voir Fig. 5.10). À l'aide de la correction par modulation serrodyne, la densité spectrale de puissance est limitée au bruit de photon sur le détecteur pour des fréquences comprises entre 2 kHz et 50 kHz ; en dessous de 2 kHz, le bruit de tension de l'amplificateur opérationnel en entrée du contrôleur (THS4601) est le facteur limitant. On constate que le bruit résiduel obtenu avec la correction par modulation serrodyne est plus faible que celui obtenu avec le modulateur acousto-optique, sur une plage de fréquence allant de 1 kHz à 500 kHz, ce qui démontre l'avantage de la bande passante de correction supérieure.

Mais l'avantage majeur de la méthode réside dans la combinaison de la grande bande passante et de la large gamme de fréquence de correction. Le modulateur acousto-optique à une bande-passante d'environ 250 kHz, et il peut corriger des perturbations de quelques méga-Hertz au maximum, tandis qu'avec la modulation serrodyne, nous avons démontré une bande passante de plusieurs méga-Hertz⁶ et une amplitude de correction de plusieurs centaines de méga-Hertz. Ces

6. Celle-ci est limitée par l'électronique de contrôle, elle peut en principe être bien plus élevée et est *in fine*

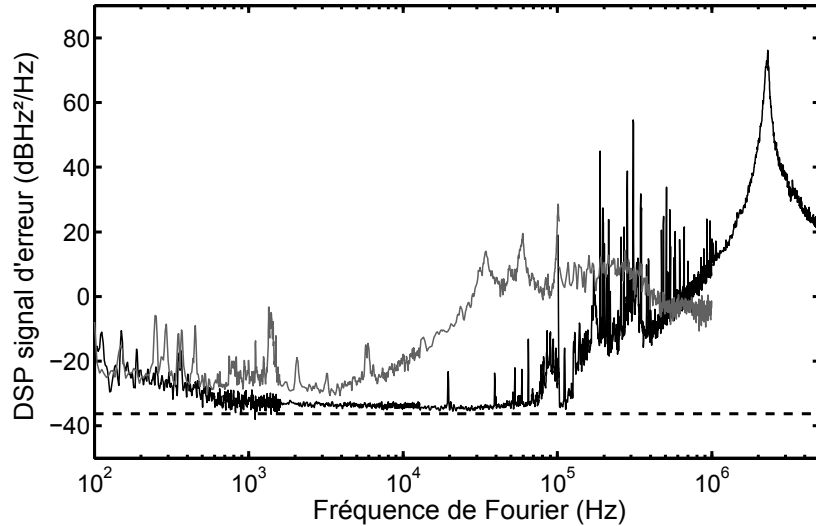


Figure 5.20 – Comparaison de la densité spectrale de puissance de bruit des signaux d'erreur entre la correction réalisée par la modulation serrodyne (noir) et celle effectuée avec un modulateur acousto-optique (gris). La ligne pointillée correspond au bruit de photon sur le détecteur.

caractéristiques permettent de réaliser un asservissement très robuste. De plus, avec une telle amplitude de correction, l'utilisation de l'actuateur piézo-électrique du laser devient optionnelle, elle permet néanmoins de maintenir la fréquence du VCO dans la gamme de fonctionnement optimale de la modulation serrodyne.

Afin de caractériser plus précisément la robustesse de l'asservissement et pour pouvoir comparer quantitativement les deux méthodes, on mesure la réponse du système lorsqu'une perturbation sinusoïdale externe est ajoutée sur la fréquence du laser. On définit l'amplitude maximale de correction comme l'amplitude de perturbation telle que la fluctuation de fréquence en boucle fermée est égale à la largeur de la résonance de la cavité. On a mesuré cette amplitude maximale en fonction de la fréquence de la perturbation appliquée Fig. 5.21. On constate que dans le cas de la modulation serrodyne, pour des perturbations de fréquences inférieures à 10 kHz, l'amplitude maximale de correction est limitée par la bande-passante de la NLTL (de 280 MHz à 500 MHz soit 220 MHz de plage de correction), pour des fréquences supérieures, celle-ci est limitée par le gain du contrôleur. Pour une perturbation à 800 kHz, le système peut compenser des déplacements en fréquence aussi important que 8 MHz. En comparaison, l'asservissement utilisant le modulateur acousto-optique permet seulement de compenser des perturbations ayant une amplitude de 1 MHz à 100 kHz.

5.6 Bruit d'intensité du faisceau de piégeage

Le bruit d'intensité du laser peut limiter le temps de vie des atomes dans le piège dipolaire. En effet, l'énergie du bruit d'intensité au double de la fréquence du piège est transférée aux atomes par excitation paramétrique, lorsque l'énergie accumulée par les atomes est supérieure à la profondeur du piège, ils ne sont plus piégés ce qui engendre des pertes. Ce processus est appelé *chauffage paramétrique*. On peut estimer le taux de chauffage paramétrique Γ_ϵ à partir de la relation suivante [Savard 97, Gehm 98, Clément 08] :

$$\Gamma_\epsilon = \pi^2 \nu_{\text{tr}}^2 S_\epsilon (2\nu_{\text{tr}}), \quad (5.36)$$

limitée par la bande passante du VCO.

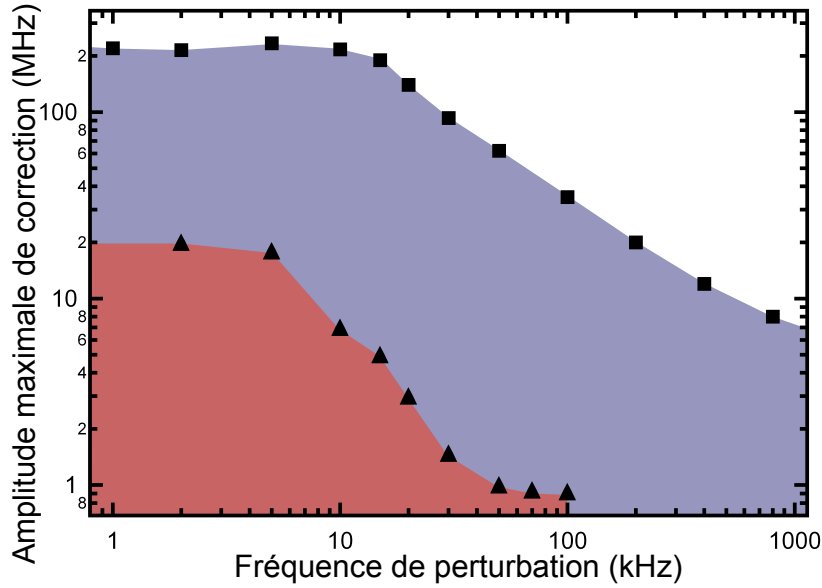


Figure 5.21 – Comparaison de la robustesse de l’asservissement obtenue avec le modulateur acousto-optique (triangles) et avec la modulation serrodyne (carrés).

où ν_{tr} est la fréquence du piège et $S_\epsilon(\nu)$ désigne la densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de l’intensité optique : $\epsilon(t) = [I(t) - I_0] / I_0$. Le temps de vie associé à ce taux d’excitation est $T_\epsilon = 1/\Gamma_\epsilon$.

Nous allons par conséquent étudier le bruit d’intensité du laser, ce qui nous permettra d’estimer le temps de vie associé. On pourra alors déterminer si ce bruit est un paramètre limitant pour le piégeage, sachant que le gaz résiduel dans la chambre ultra-vide limite le temps de vie à une dizaine de secondes. Le bruit d’amplitude à l’intérieur de la cavité a deux origines principales : le bruit d’intensité du laser d’entrée et le bruit de fréquence converti en bruit d’amplitude lors de l’injection à travers la résonance de la cavité. Nous étudierons donc le bruit en entrée et en sortie de la cavité optique afin de déterminer quel est le facteur limitant entre le bruit d’intensité et le bruit de fréquence.

5.6.1 Bruit de l’EDFA

Nous avons mesuré le spectre du bruit d’intensité en sortie de l’EDFA, on peut aussi le traduire en terme de temps de vie associé dans le piège dipolaire grâce à la relation Eq. (5.36), le résultat est présenté Fig. 5.22. On constate des fortes oscillations à 3 kHz et aux harmoniques associées, ces oscillations n’étant pas présentes sur le laser à fibre, on en conclut qu’elles sont introduites par l’EDFA. L’oscillation fondamentale est environ 25 dB au-dessus du bruit de fond. Si la fréquence de piège est de 1.5 kHz, alors l’oscillation à 3 kHz limite le temps de vie dans le piège dipolaire à 300 ms alors qu’en l’absence d’oscillation, le bruit de fond limite le temps de vie à environ 100 s pour la même fréquence.

Cette oscillation est relativement étroite, mais si par malchance la fréquence du piège venait à être égale à 1.5 kHz le chauffage paramétrique serait très brutal, nous avons donc décidé de réaliser un asservissement de l’intensité du laser. Un tel asservissement offre aussi l’avantage de travailler avec la même puissance d’un jour à l’autre. Dans un premier temps, nous avons asservi uniquement la sortie de l’EDFA, le schéma utilisé est décrit Fig. 5.23. La sortie de l’EDFA est injectée dans un modulateur d’amplitude électro-optique (il s’agit d’un modulateur de phase placé entre polariseur et analyseur croisés), la bande passante du modulateur est de 250 kHz.

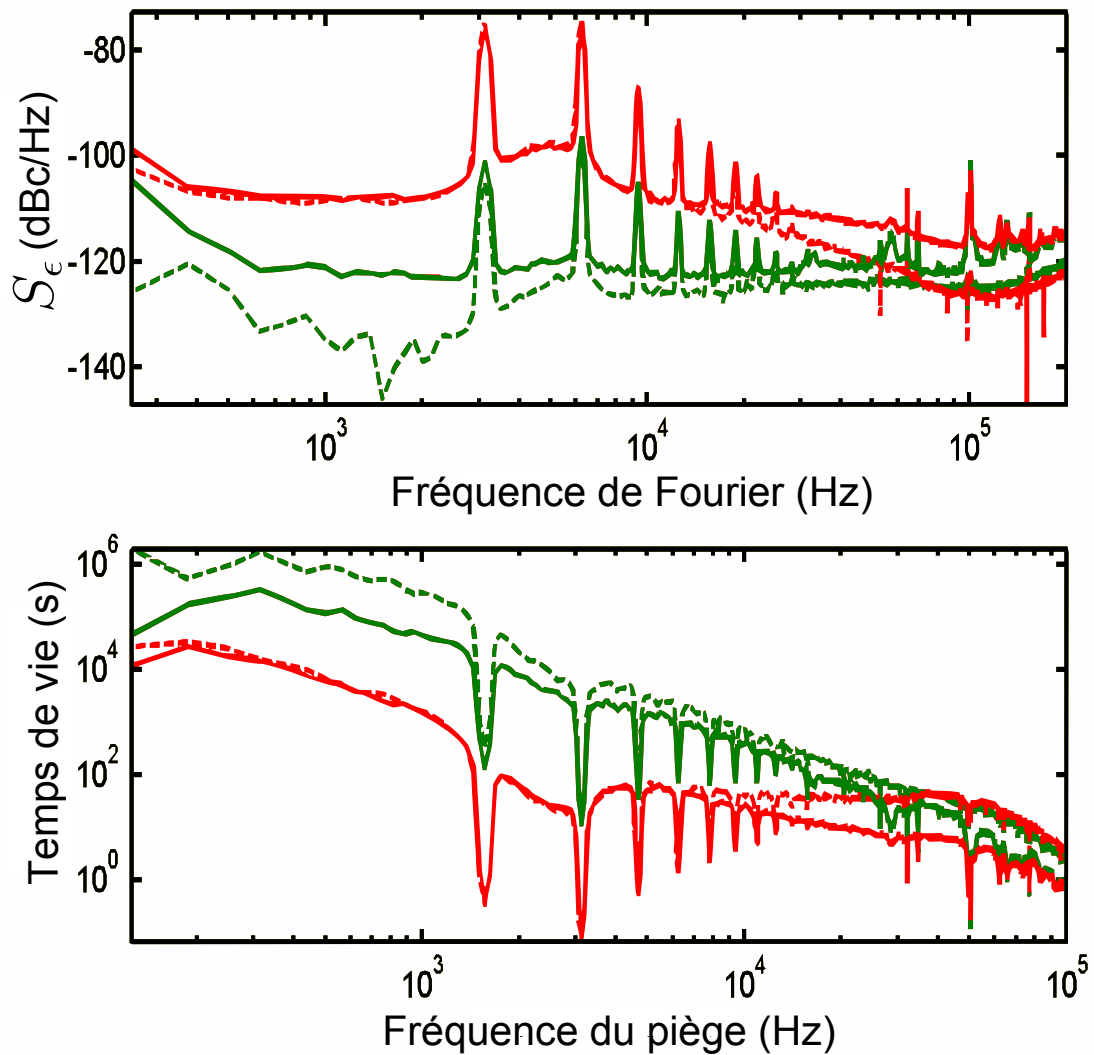


Figure 5.22 – Bruit d'intensité et temps de vie. Les courbes en rouge correspondent au bruit en l'absence d'asservissement d'intensité et celles en vert avec l'asservissement. Les courbes en pointillés sont les mesures réalisées en entrée de la cavité optique tandis que les courbes continues correspondent aux mesures en sortie de la cavité. (Haut) Bruit d'intensité. (Bas) Temps de vie associé au chauffage paramétrique induit par le bruit d'intensité en fonction de la fréquence du piège.

Une très faible partie des 5 W de puissance optique en sortie du modulateur est prélevée à l'aide d'un cube et envoyé sur une photodiode. Le courant en sortie de la photodiode est converti en tension grâce à un montage transimpédance à amplificateur opérationnel (THS4601) de gain 100 k Ω . On soustrait alors une tension continue à celle mesurée afin d'obtenir un signal d'erreur, cette tension soustraite permet de contrôler le point de fonctionnement de l'asservissement. Le signal d'erreur est alors amplifié avec des gains proportionnel et intégrateur avant de réagir sur le contrôleur du modulateur d'amplitude. La bande passante de l'asservissement est d'environ 100 kHz, elle est limitée par la bande passante du modulateur. Le résultat est présenté Fig. 5.22, on constate que l'asservissement retire environ 30 dB de bruit dans la région entre 1 kHz et 5 kHz, le temps de vie associé est donc multiplié par 1000. Dans ces conditions, même si le double de la fréquence du piège est égale à la fréquence de l'oscillation à 3 kHz, le temps de vie vaut 300 s, ce qui est bien au-delà des limites imposées par les particules résiduelles présentes dans la chambre ultra-vide.

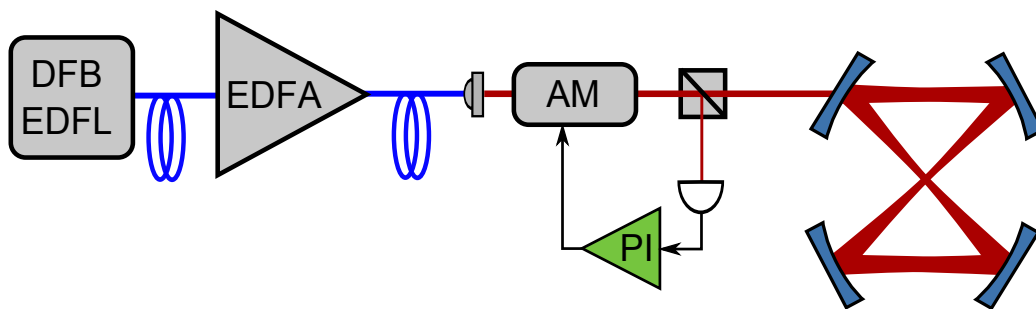


Figure 5.23 – Schéma de l'asservissement en puissance. AM désigne le modulateur d'amplitude électro-optique.

5.6.2 Bruit en sortie de la cavité

L'étude des temps de vie que nous venons d'effectuer n'est pas tout à fait exacte puisqu'elle ne considère que le bruit d'amplitude du laser à l'entrée de la cavité et non celui à l'intérieur de cette dernière où les atomes sont effectivement piégés. En effet, il faut ajouter au bruit d'amplitude en entrée le bruit de fréquence du laser qui est convertie en un bruit d'amplitude *via* la résonance de la cavité. Nous avons donc mesuré les fluctuations d'amplitude en sortie de la cavité.

On constate Fig. 5.22, qu'en l'absence d'asservissement de la puissance optique, le bruit d'intensité relatif est le même en entrée et en sortie de la cavité jusqu'à environ 10 kHz, il est donc dominé par le bruit d'intensité du laser. Au-delà de 10 kHz, le bruit en sortie de la cavité est plus important que le bruit en entrée, il est alors dominé par le bruit de fréquence du laser. Lorsque l'asservissement d'intensité est activé on constate que le bruit est dominé par le bruit de fréquence du laser sur l'ensemble de l'intervalle de fréquence mesuré, il n'est donc pas nécessaire d'augmenter le gain de l'asservissement de puissance.

In fine nous avons asservi en puissance le faisceau en sortie de la cavité, cela permet non seulement de réduire le bruit d'amplitude induit par le bruit de fréquence résiduel, mais aussi de s'assurer que la puissance intracavité reste constante d'un jour à l'autre, ce qui augmente grandement la stabilité des paramètres expérimentaux (notamment le nombre d'atomes et la température) et s'avère crucial pour la bonne répétabilité des rampes d'évaporation.

5.7 Compensation du déplacement lumineux différentiel

Nous avons vu Sec. 5.3 que la radiation à 1550 nm engendre un déplacement lumineux différentiel sur les états excités. Si cette propriété s'avère utile pour la caractérisation *in-situ* du potentiel dipolaire, elle est fortement limitante dès lors que l'on désire manipuler ou sonder les atomes piégés avec un faisceau accordé avec la transition $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$, ce qui est notamment le cas avec la détection non-destructive. On souhaiterait donc compenser ce déplacement lorsque cela se révèle nécessaire ce qui constitue un exemple d'ingénierie des déplacements lumineux.

Pour réaliser une telle compensation, on utilise un laser placé sur le bleu de la transition $5P_{3/2} \rightarrow 4D_{3/2,5/2}$. En injectant ce laser dans le mode fondamental de la cavité, on obtient un très bon recouvrement entre les faisceaux à 1550 et à 1529 nm, ce qui permet une bonne homogénéité spatiale. Nous présentons ici une analyse théorique du déplacement lumineux résiduel après compensation avant d'expliquer comment cette compensation est réalisée expérimentalement.

5.7.1 Analyse théorique

Le déplacement lumineux induit par un faisceau sur un état est obtenu par la relation Eq. (5.23), il nous faut donc avant toute chose, calculer les polarisabilités de l'état excité $5P_{3/2}$ lors d'un couplage avec des radiations à 1550 nm et 1529 nm. La polarisabilité scalaire induite par une radiation à ω sur un état $|v\rangle$ de moment angulaire total J_v est [Arora 07] :

$$\alpha_v = \frac{2}{3\hbar} \frac{1}{2J_v + 1} \sum_k \frac{\omega_{kv}}{\omega_{kv}^2 - \omega^2} |\langle k|d|v\rangle|^2, \quad (5.37)$$

où la somme est réalisée sur tous les états $|k\rangle$ couplés à $|v\rangle$ et où ω_{kv} est la fréquence de la transition $|v\rangle \rightarrow |k\rangle$.

Les radiations à 1529 nm et 1550 nm sont principalement couplées aux transitions $5P_{3/2} \rightarrow 4D_{3/2}$, $5P_{3/2} \rightarrow 4D_{5/2}$ et $5P_{3/2} \rightarrow 6S_{1/2}$, les longueurs d'onde et les moments dipolaires $d = \langle k|d|v\rangle$ associées à chacune de ces transitions sont donnés Tab. 5.1. On obtient alors les polarisabilités scalaires suivantes :

$$\alpha_{5P_{3/2}}^{1550 \text{ nm}} = 4.736 \cdot 10^{-37} \text{ Jm}^2/\text{W}, \quad (5.38)$$

$$\alpha_{5P_{3/2}}^{1528.7 \text{ nm}} = -1.422 \cdot 10^{-35} \text{ Jm}^2/\text{W}. \quad (5.39)$$

On vérifie bien que ces deux polarisabilités sont de signes opposés, il est donc possible de compenser le déplacement induit par un faisceau à 1550 nm en superposant un faisceau à 1528.7 nm. De plus, le rapport entre ces deux polarisabilités nous indique que pour réaliser la compensation, la puissance optique à 1528.7 nm doit être environ 500 fois moindre que celle à 1550 nm.

Transition	λ (nm)	d (ea_0)
$5P_{3/2} \rightarrow 4D_{3/2}$	1529.261	3.633
$5P_{3/2} \rightarrow 4D_{5/2}$	1529.366	10.899
$5P_{3/2} \rightarrow 6S_{1/2}$	1366.875	6.047

Table 5.1 – Moment dipolaire des principales transitions couplées à l'état $5P_{3/2}$ en présence de radiations à 1550 nm et 1529 nm [Arora 07]. Les longueurs d'ondes ont été confirmées expérimentalement [Lee 07, Moon 07, Moon 09]. Le moment dipolaire est donné en unités atomiques où e est la charge élémentaire et a_0 est le rayon de Bohr.

Nous avons fixé la longueur d'onde du laser de compensation à 1528.7 nm, soit à environ 0.6 nm sur le bleu de la transition $5P_{3/2} \rightarrow 4D_{3/2}$. De plus, si le waist du faisceau à 1550 nm est

100 μm alors celui du faisceau à 1529 nm est 99.3 μm ⁷. Le déplacement lumineux induit par les faisceaux à 1528.7 nm et 1550 nm ainsi que le déplacement résiduel sont présentés Fig. 5.24, il s'agit des déplacements dans un seul bras. On a choisi ici une puissance intracavité de 10 W pour le faisceau à 1550 nm, ce qui correspond à la situation expérimentale lors de la mise en œuvre de la rétroaction quantique et de la boucle de phase atomique (voir Chap. 4). On constate qu'en l'absence de toute compensation le déplacement au croisement des bras est de 170 MHz, ce qui est comparable avec les décalages utilisés pour mesurer l'opérateur J_z grâce à la détection non-destructive (voir Sec. 3.3.6.2), on ne peut donc pas sonder les atomes dans le piège sans une compensation appropriée.

Lorsque le faisceau à 1528.7 nm est injecté dans le mode fondamental de la cavité avec une puissance convenablement ajustée, il induit un déplacement lumineux opposé. Le déplacement résiduel, résultant des imperfections de recouvrement entre les deux faisceaux, atteint 1.3 MHz. Ce déplacement résiduel est donc bien plus faible que les décalages des faisceaux de la sonde non-destructive par rapport aux transitions, et est même plus faible que la largeur de raie de la transition D2 ($\Gamma \sim 6$ MHz). Notons également qu'il s'agit ici du déplacement maximal sur l'ensemble du piège, et des atomes suffisamment froids subiront un déplacement moyen plus faible.

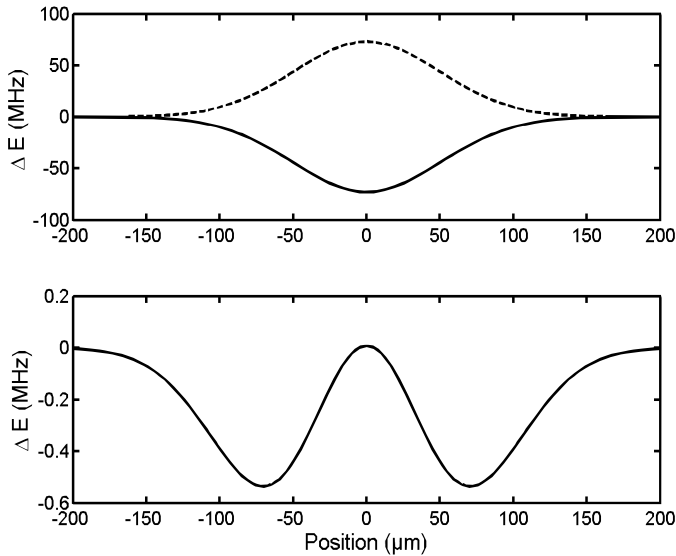


Figure 5.24 – (Haut) Déplacement lumineux induit sur l'état excité $5P_{3/2}$ par le laser à 1550 nm avec une puissance intracavité de 10 W (ligne continue) et le déplacement produit par la radiation à 1528.7 nm avec 330 mW. (Bas) Déplacement lumineux résiduel en fonction de la position dans le piège.

5.7.2 Mise en œuvre expérimentale

Nous avons dans un premier temps réalisé un ajustement grossier de la compensation. Pour cela, nous avons injecté dans la cavité le laser de compensation à une puissance donnée et fixé sa longueur d'onde en ajustant la température. Nous avons alors mesuré le nombre d'atomes à résonance avec une sonde accordée sur la transition $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F = 3\rangle$ en fonction de la puissance intracavité à 1550 nm, on obtient le résultat Fig. 5.25 (a). On observe un maximum du nombre d'atomes résonants pour une certaine valeur de la puissance intracavité : il s'agit de la position où le déplacement lumineux est compensé. On a reporté Fig. 5.25 (b) la puissance à 1550 nm nécessaire à la compensation en fonction de la longueur d'onde du laser, on constate que plus le laser de compensation est proche de résonance, plus le déplacement induit

7. Cela tient au fait que le rayon de courbure de l'onde au niveau des miroirs du résonateur est le même quelque soit la longueur d'onde, or le rayon de courbure ne dépend que de la distance de Rayleigh Z_R (cf. Eq. (5.6)). Cette dernière doit donc être invariante avec la longueur d'onde et puisqu'elle vaut $Z_R = \pi w_0^2/\lambda$, on en déduit que le waist w_0 doit vérifier $w_0 \propto \sqrt{\lambda}$.

par des puissances importantes à 1550 nm peut être compensé. Un ajustement des données expérimentales par une fonction dispersive nous fournit une estimation grossière de la position de la transition $5P_{3/2} \rightarrow 4D_{3/2,5/2}$ à environ 1529.3 nm, ce qui est en bon accord avec les valeurs attendues des transitions (voir Tab. 5.1).

Nous avons dans un second temps ajusté la compensation de manière plus fine à l'aide de la détection non-destructive. La puissance intracavité à 1550 nm est ici fixée à 10 W et nous avons choisi une longueur d'onde de 1528.7 nm pour le laser de compensation. Nous cherchons la puissance nécessaire à 1528.7 nm pour compenser le déplacement lumineux. Etant donné que la sonde non-destructive a été ajustée de sorte à mesurer l'observable J_z sur des atomes non piégés, une valeur nulle est obtenue lorsqu'une superposition cohérente $|\pi/2, 0\rangle$ est sondée. En réalisant la même mesure avec des atomes piégés, on obtiendra une valeur non nulle si le déplacement lumineux n'est pas compensé car il modifie le couplage de la sonde avec l'échantillon atomique. Lorsque l'on fait varier la puissance en sortie du laser de compensation, on obtient le résultat Fig. 5.26, le déplacement lumineux est compensé avec 39.6 ± 2.5 mW. L'incertitude relative de cette mesure est de 13 %, autrement dit, l'incertitude sur le déplacement résiduel est de l'ordre de 10 MHz. Cette valeur est plus élevée que le déplacement résiduel de 1.3 MHz attendu, il sera donc nécessaire de réaliser un ajustement plus précis et d'ajouter un asservissement de la puissance du laser de compensation pour s'assurer de la bonne stabilité temporelle. Néanmoins, ce déplacement résiduel est bien plus faible que le décalage des faisceaux de la sonde non-destructive par rapport aux transitions et est donc en lui-même suffisant pour réaliser la mesure non-destructive sur les atomes piégés.

5.8 Conclusion

Nous venons de présenter un résonateur dans une configuration quasi-concentrique repliée, adaptée au piègeage dipolaire d'atomes froids. Nous avons vérifié par diverses méthodes que les paramètres géométriques de la cavité sont en accord avec la conception initiale. Une de ces méthodes utilise le déplacement lumineux différentiel induit par le faisceau à 1560 nm, elle permet l'analyse *in-situ* du mode et procure à la fois les dimensions du faisceau, mais aussi la puissance intra-cavité, ce qui rend cette méthode très utile pour la caractérisation des potentiels dipolaires. Nous avons aussi décrit la manière dont ce déplacement peut être compensé, permettant de l'exploiter lorsque nécessaire, par exemple pour la caractérisation du mode, mais aussi de l'annuler lorsqu'il est gênant, notamment pour la détection non-destructive ; on réalise ainsi l'ingénierie des déplacements lumineux.

Un point essentiel pour la réalisation du piège est d'asservir le laser à résonance avec la cavité. Nous avons développé dans cet objectif une nouvelle méthode exploitant la modulation serrodyne. Cette technique offre de nombreux avantages et permet notamment la réalisation d'un asservissement robuste aux fortes perturbations, ce qui constitue un atout indéniable pour la mise en œuvre de résonateurs optiques au sein de systèmes transportables ou susceptibles d'être opérés dans des environnements difficiles. Nous avons finalement analysé le bruit d'intensité au sein du résonateur et nous avons vérifié qu'après la mise en place d'un asservissement de la puissance du faisceau, le dispositif est approprié pour la réalisation d'un piège dipolaire.

Il nous reste maintenant à réaliser le piège dipolaire avant d'essayer d'atteindre le régime de dégénérescence quantique au sein du résonateur. Ceci est l'objet du chapitre suivant.

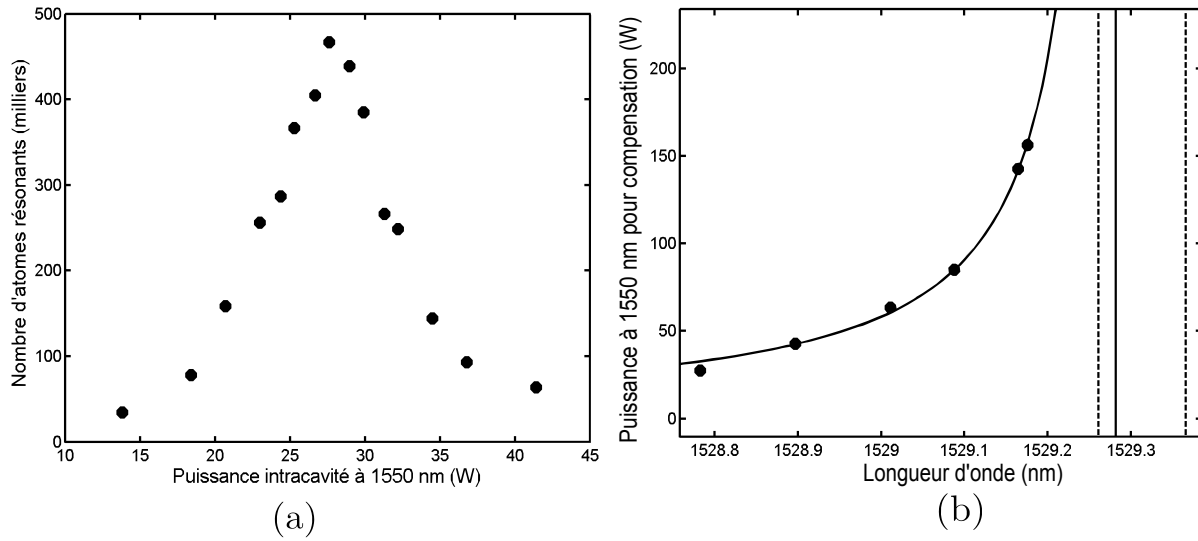


Figure 5.25 – Ajustement grossier de la compensation. (a) Nombre d'atomes résonants avec une sonde accordée sur la transition $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F = 3\rangle$ en fonction de la puissance intracavité à 1550 nm, la longueur d'onde du laser de compensation est 1528.8 nm. (b) Puissance intracavité à 1550 nm permettant la compensation en fonction de la longueur d'onde du laser de compensation. Les points sont les données expérimentales, la ligne continue est un ajustement des données par une fonction dispersive et les lignes pointillées verticales symbolisent la position attendue des transitions $5P_{3/2} \rightarrow 4D_{3/2}$ et $5P_{3/2} \rightarrow 4S_{5/2}$.

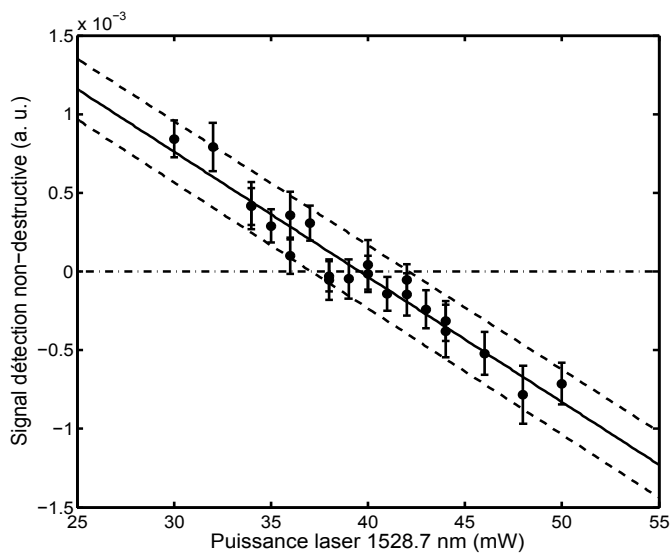


Figure 5.26 – Signal fourni par la détection non-destructive en fonction de la puissance en sortie du laser de compensation. Les points sont les résultats expérimentaux et les barres d'incertitude sont l'erreur standard des fluctuations statistiques. La ligne continue est une régression linéaire et les lignes pointillées indiquent l'incertitude à $\pm 1\sigma$ sur la régression.

Piègeage tout optique et condensation dans une cavité

La matière demeure et la forme se perd.

Pierre de Ronsard

Dans la première partie de ce manuscrit, nous avons eu l'occasion de rencontrer des ensembles cohérents, au sens où les particules de l'ensemble partagent toutes le même état *interne*. Nous allons ici présenter l'obtention d'un ensemble de particules ayant toutes la même fonction d'onde *externe*, un tel ensemble constitue un *condensat de Bose-Einstein* et le nuage atomique devient une onde de matière macroscopique. La forte cohérence spatiale d'un tel échantillon présente un intérêt certain en interférométrie atomique, en particulier, lors de la réalisation d'une séparatrice cohérente spatiale, les pertes liées à la sélection en impulsion deviennent négligeables, de même l'efficacité de la recombinaison des paquets d'onde refermant l'interféromètre est bien meilleure.

Ce régime quantique dégénéré est atteint lorsque le recouvrement entre les fonctions d'onde individuelles est suffisamment grand pour que l'on ne puisse plus distinguer individuellement les particules. Pour cela, il faut refroidir fortement l'échantillon, de sorte à accroître la dispersion de la fonction d'onde et donc délocaliser la position d'un atome. Toutefois, pour s'assurer du recouvrement entre les fonctions d'onde, une densité atomique suffisante doit être préservée lors du processus de refroidissement. La méthode employée consiste à *évaporer* le nuage atomique, en faisant en sorte que chaque atome extrait du nuage emporte avec lui la plus grande quantité d'énergie possible.

Nous allons donc présenter dans ce chapitre comment mettre en œuvre le processus d'évaporation avec notre dispositif, autrement dit, comment préparer un condensat de Bose-Einstein dans le piège dipolaire au sein de la cavité optique. Après un bref rappel sur la condensation de Bose-Einstein, nous présenterons et caractériserons le piège dipolaire intra-cavité. Les fréquences de piège sont un paramètre essentiel à la bonne compréhension du processus d'évaporation conduisant à la formation d'un condensat, nous consacrerons donc une partie de ce chapitre à leur étude, nous exposerons différentes méthodes pour la détermination expérimentale des fréquences et comparerons les résultats obtenus. Nous montrerons ensuite les performances d'une rampe d'évaporation et constaterons la nécessité d'adjoindre un faisceau supplémentaire au dispositif de piègeage. Enfin, nous présenterons le condensat obtenu.

6.1 Généralités sur la condensation de Bose-Einstein

Avant de décrire le dispositif expérimental permettant la réalisation d'un condensat tout optique, il convient de rappeler quelques notions sur le phénomène de condensation de Bose-Einstein d'une vapeur atomique. Nous décrivons ici brièvement la transition de Bose-Einstein d'un gaz de bosons, puis nous présentons comment cette dernière est influencée par les interactions inter-atomiques.

6.1.1 La condensation de Bose-Einstein

Le phénomène de condensation tient aux propriétés ondulatoires d'une particule, en effet, depuis les travaux de Louis De Broglie, on sait qu'à toute particule d'impulsion p est associée une onde de longueur d'onde $\lambda_{dB} = h/p$. Dans le cas d'une particule non-relativiste, l'impulsion est proportionnelle à la vitesse, en d'autres termes, elle dépend de son énergie cinétique. Dans le cas d'un gaz, l'énergie cinétique est liée à l'énergie thermique $3k_B T/2$, on introduit donc la longueur de De Broglie dite thermique¹ :

$$\Lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}, \quad (6.1)$$

où m est la masse de la particule et T la température du gaz. Ceci dit, le comportement ondulatoire à lui seul n'explique pas le phénomène de condensation de Bose-Einstein puisqu'il s'agit d'un effet à plusieurs corps. Il convient alors de comparer la longueur d'onde de De Broglie thermique avec la distance moyenne séparant deux particules du gaz, ce qui est quantifié par la densité dans l'espace des phases :

$$D = n\Lambda_{dB}^3, \quad (6.2)$$

où n est la densité du gaz exprimée en nombre d'atomes par unité de volume. On distingue alors deux régimes selon la valeur de D . Le premier régime est celui d'un gaz pour lequel la distance interparticulaire est grande devant la longueur d'onde thermique ($D \ll 1$), dans ce cas, le caractère ondulatoire n'intervient pas et le gaz est décrit par la statistique de Maxwell-Boltzmann, on dira alors qu'il est classique. A l'inverse, le gaz devient quantique lorsque la distance interparticulaire est comparable ou inférieure à la longueur d'onde de De Broglie ($D \lesssim 1$), le comportement ondulatoire devient prédominant et les ondes associées à chaque particule peuvent interférer. Si le gaz est constitué de bosons, les ondelettes de chaque particule interfèrent constructivement, elles forment alors une unique onde de matière macroscopique, cette onde est appelée *condensat de Bose-Einstein*.

On peut alors introduire une température critique T_c en-dessous de laquelle le phénomène de condensation apparaît, dans le cas d'un gaz piégé dans un oscillateur harmonique, elle vaut [Dalfovo 99] :

$$k_B T_c = \hbar\bar{\omega} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3}, \quad (6.3)$$

où N désigne le nombre d'atomes et $\bar{\omega} \equiv (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ est la fréquence moyenne du piège *i.e.* la moyenne géométrique des fréquences selon les trois axes propres de l'oscillateur harmonique. La

1. Pour un ensemble de particules, la vitesse est définie par rapport au centre de masse de l'ensemble, autrement dit, il faut considérer la fluctuation de vitesse entre les particules par rapport à la vitesse moyenne. D'une manière générale, une longueur d'onde n'a de sens que si la particule est placée dans un interféromètre, il faut donc définir la vitesse de la particule dans le référentiel de l'interféromètre, par exemple, le référentiel des fentes dans l'expérience de Young. Dans le cas présent, on fait interférer les atomes entre eux, c'est la raison pour laquelle on se place dans le référentiel du centre de masse.

fraction condensée, définie comme le ratio entre le nombre d'atomes occupant macroscopiquement l'état fondamental du piège harmonique N_0 et le nombre total d'atomes N , évolue de la manière suivante avec la température :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3. \quad (6.4)$$

On constate qu'on ne peut avoir un condensat pur ($N_0/N = 1$) qu'à température nulle, en d'autres termes, il existe toujours une fraction résiduelle d'atomes thermiques. Expérimentalement, cette fraction thermique permet de mesurer la température du condensat obtenu (tant que la taille du nuage thermique est supérieure au rayon de Thomas-Fermi du condensat).

6.1.2 Effet des interactions

6.1.2.1 Equation de Gross-Pitaevskii

La description qui vient d'être faite ne prend pas en compte les interactions entre les atomes qui composent le gaz, or ces dernières modifient la fonction d'onde du condensat. En décrivant le condensat comme une onde classique de densité $n_0(\mathbf{r}, t) = |\psi_0(\mathbf{r}, t)|^2$, on peut montrer [Dalfovo 99] que l'évolution de cette onde obéit à une équation de Schrödinger non-linéaire dite *équation de Gross-Pitaevskii* :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_0(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g |\psi_0(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \psi_0(\mathbf{r}, t), \quad (6.5)$$

où g est la constante de couplage des interactions. Dans le cas qui nous intéresse, *i.e.* dans le cas d'un gaz d'atomes froids dilué, on peut supposer que les interactions sont dominées par la diffusion en onde s , on a alors $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ où a est la longueur de diffusion. Si le condensat est à l'équilibre thermodynamique, on peut chercher une solution stationnaire à l'équation de Gross-Pitaevskii de la forme $\psi_0(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r}) e^{-i\mu t/\hbar}$, l'équation Eq. (6.5) devient alors :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g |\phi_0(\mathbf{r})|^2 \right) \phi_0(\mathbf{r}) = \mu \phi_0(\mathbf{r}), \quad (6.6)$$

où l'énergie μ est le potentiel chimique du condensat. Dans cette équation, l'énergie intervient sous différentes formes : énergie cinétique $\sim N_0 \hbar^2 \nabla^2 / 2m$, énergie potentielle $\sim N_0 V_{\text{ext}}$ et énergie d'interaction $\sim g N_0^3$.

6.1.2.2 Approximation de Thomas-Fermi

Dans l'hypothèse où la densité $n_0(\mathbf{r}) = |\phi_0(\mathbf{r})|^2$ présente une variation spatiale lente, le terme d'énergie potentielle est négligeable, cette situation est appelée *régime de Thomas-Fermi* [Dalfovo 99]. Dans ce cas, on obtient une solution analytique de l'Eq. (6.6) :

$$n_0(\mathbf{r}) = \max \left\{ \frac{\mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{g}, 0 \right\}. \quad (6.7)$$

La fonction d'onde adopte alors la forme du potentiel de piègeage. Dans le cas d'un piège harmonique, la fonction d'onde du condensat en présence d'interaction est donc une parabole inversée dont le rayon, dit de Thomas-Fermi, définit par les points où la densité $n_0(\mathbf{r})$ s'annule, vaut :

$$R_{\text{TF}} = a_0 \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar\bar{\omega}}}, \quad (6.8)$$

où $a_0 = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$ est le rayon de l'oscillateur harmonique. La densité au centre du condensat est limitée par les interactions, dans l'approximation de Thomas-Fermi elle vaut $n_0 = \mu/g$, ce qui diverge en l'absence d'interaction.

6.1.2.3 Influence des interactions sur la transition

Notons enfin que les interactions ne modifient pas seulement la fonction d'onde du condensat, mais influencent aussi la transition du gaz thermique vers le condensat. En effet, si ces dernières sont répulsives, elles repoussent les atomes si bien que le seuil de condensation apparaît pour une température inférieure à T_c . L'Eq. (6.4) devient alors [Gerbier 03] :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 - \eta \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3\right]^{2/5}, \quad (6.9)$$

où $\eta \equiv \mu/k_B T_c$ est un paramètre sans dimension caractérisant l'influence des interactions sur la thermodynamique du gaz de Bose piégé [Dalfovo 99].

6.2 Le dispositif expérimental de refroidissement laser

Après cette brève description du phénomène de condensation de Bose-Einstein, voyons comment nous avons atteint ce régime en pratique. Notre condensat est obtenu de manière tout-optique à l'aide d'atomes dans un piège dipolaire, mais avant de décrire et de caractériser ce dernier, nous présentons le piège magnéto-optique qui procure la source d'atomes froids initiale. Le piège magnéto-optique ainsi que le banc laser associé sont exposés en détail dans [Bernon 11a], on se contentera ici de donner une brève présentation du système et des performances atteintes.

6.2.1 Système laser pour le refroidissement

Afin de refroidir optiquement une vapeur de ^{87}Rb , deux lasers sont nécessaires. Le premier réalise le refroidissement à proprement parler, il est décalé d'environ 3Γ sur le rouge de la transition cyclante $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$, et c'est l'émission d'un photon de manière spontanée à chaque cycle qui permet la dissipation de l'énergie cinétique de l'atome et donc son refroidissement [Budker 04]. Toutefois, la probabilité d'exciter de manière non résonante la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ est non-nulle, puisque cette transition est non-cyclante, les atomes peuvent être déexcités dans l'état fondamental $|F = 1\rangle$, ils sont alors dans un état noir par rapport au laser de refroidissement. Il est par conséquent nécessaire d'utiliser un second laser accordé sur la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ afin de repomper les atomes de l'état $|F = 1\rangle$ vers l'état $|F = 2\rangle$, on appellera ce laser le repompeur.

En pratique, les deux lasers sont des diodes montées en cavités étendues dont la largeur de raie est d'environ 300 kHz. Le repompeur est asservi sur la transition hyperfine $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ à l'aide d'une spectroscopie par modulation de fréquence. Puis, le laser de refroidissement est asservi en fréquence par rapport au repompeur à l'aide d'un battement réalisé entre les deux lasers, cette méthode a l'avantage de permettre une modification rapide de la fréquence du laser de refroidissement par rapport à la transition atomique, ce qui nous sera d'un grand bénéfice lors du chargement dans le piège dipolaire.

6.2.2 Pièges magnéto-optiques à deux et trois dimensions

L'enceinte à ultra-vide, présentée Fig. 6.1, est séparée en deux parties principales : l'une contient le piège magnéto-optique à deux dimensions (MOT 2D), tandis que l'autre est la chambre de science au sein de laquelle se trouve la cavité et les bobines qui permettent de charger le piège magnéto-optique à trois dimensions (MOT 3D) à partir du flux atomique émis par le MOT 2D.

Les faisceaux en provenance du banc laser de refroidissement sont injectés dans des fibres optiques et séparés entre les MOTs 2D et 3D. Le MOT 2D utilise deux faisceaux rétro-réfléchis

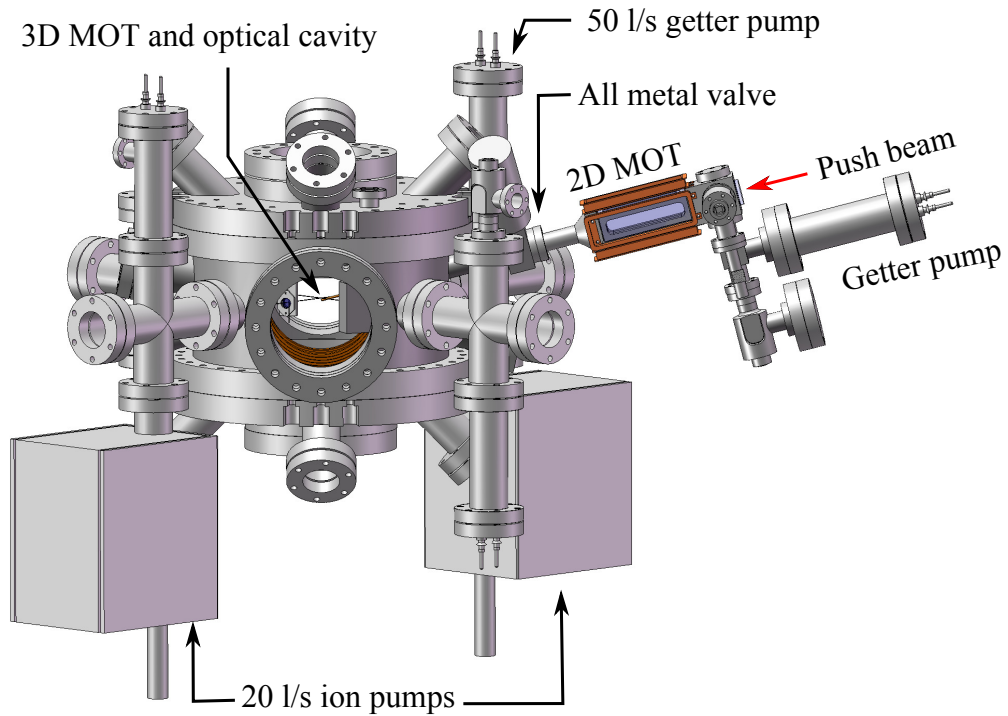


Figure 6.1 – Enceinte à vide. La chambre de science apparaît sur la droite de l'image et le piège magnéto-optique à deux dimensions sur la gauche.

contenant chacun environ 30 mW de puissance optique et un faisceau d'environ 1 mW permettant de pousser les atomes du MOT 2D vers la chambre de science. Le MOT 3D est, quant à lui, réalisé à partir de six faisceaux contrapropageant deux-à-deux d'une puissance d'environ 15 mW chacun.

Le MOT 2D permet de charger le MOT 3D avec un flux d'environ 5×10^8 atomes par seconde, ce qui permet d'obtenir environ 10^9 atomes dans le MOT 3D après 3 s de chargement. Le temps de vie des atomes dans le MOT 3D est d'environ 20 secondes, il est mesuré après coupure de l'approvisionnement en atomes provenant du MOT 2D.

6.3 Le piège dipolaire

Nous allons maintenant décrire le piège dipolaire qui constitue le socle nécessaire à l'obtention d'un condensat de Bose-Einstein tout-optique. Après un rappel sur les forces dipolaires et les potentiels lumineux, nous présenterons la stratégie adoptée pour le chargement de notre piège à partir des atomes du piège magnéto-optique. Enfin, nous exposerons les résultats obtenus en termes de temps de vie et de température.

6.3.1 Potentiel lumineux et piège dipolaire

Si une particule possède un moment dipolaire \mathbf{D} , alors tout champ électrique \mathbf{E} exerce une force sur cette particule, le potentiel dit dipolaire associé à cette force est $U_{\text{dip}} = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$. Le moment dipolaire est proportionnel à l'amplitude du champ électrique et à la polarisabilité complexe α associée à la particule, $\mathbf{D} = \alpha \mathbf{E}$, en conséquence, le potentiel dipolaire peut s'exprimer

par l'intermédiaire de l'intensité du champ électro-magnétique $I = 2\epsilon_0 c |\mathbf{E}|^2$:

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) I(\mathbf{r}). \quad (6.10)$$

Néanmoins, si le potentiel U_{dip} permet de piéger des particules, les photons utilisés pour réaliser ce piège peuvent aussi être diffusés de manière spontanée. Le taux de diffusion est proportionnel à la partie imaginaire de la polarisabilité complexe qui correspond à l'absorption :

$$\Gamma_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I(\mathbf{r}). \quad (6.11)$$

Ce processus va engendrer le chauffage de l'échantillon piégé et peut éventuellement limiter le temps de vie des atomes dans le piège. Dans le cas d'un atome à deux niveaux séparés d'une énergie $\hbar\omega_0$, si le décalage Δ de la fréquence du faisceau de piège par rapport à la transition atomique vérifie $\Delta \ll \omega_0$, alors le potentiel dipolaire et le taux d'émission spontanée s'écrivent [Grimm 00] :

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3 \Delta} I(\mathbf{r}), \quad (6.12)$$

$$\Gamma_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2 I(\mathbf{r}), \quad (6.13)$$

où Γ est la largeur de la transition atomique. On constate alors que la profondeur du potentiel de piège évolue comme $1/\Delta$ tandis que le taux d'émission spontanée évolue selon $1/\Delta^2$, par conséquent, en choisissant un décalage Δ suffisamment important, il est possible de réduire fortement le taux d'émission spontanée tout en conservant une profondeur de piège raisonnable, à condition toutefois d'utiliser une intensité optique importante pour le faisceau de piège. On remarquera de plus que, selon le signe du décalage, il est possible de réaliser soit un potentiel attractif (décalage sur le rouge de la transition), soit un potentiel répulsif (décalage sur le bleu de la transition). On notera enfin que le potentiel dipolaire correspond exactement au déplacement lumineux induit par le faisceau de piège [Grimm 00], par conséquent, une mesure du déplacement lumineux fournit directement une mesure du potentiel dipolaire. Cela justifie que l'étude *in-situ* des modes de la cavité réalisée Sec. 5.3 grâce au déplacement lumineux différentiel constitue aussi une caractérisation *in-situ* du potentiel dipolaire.

6.3.2 Chargement du piège

Lors du chargement du piège, nous exploitons le déplacement lumineux différentiel induit par la radiation de piégeage (Sec. 5.3). En effet, un atome présent dans les régions spatiales de forte intensité au centre du piège verra sa transition fortement décalée par rapport à la fréquence des lasers du piège magnéto-optique, il sera donc dans un état noir. L'idée est alors d'accumuler les atomes dans cet état noir au centre du piège afin de réaliser le chargement.

Lorsque la puissance optique au sein du résonateur est maximale (~ 250 W), le déplacement différentiel induit est supérieur à l'écart de 267 MHz qui sépare les niveaux hyperfins $|F' = 2\rangle$ et $|F' = 3\rangle$ de l'état excité $5P_{3/2}$, il convient donc de diminuer initialement la profondeur du piège dipolaire à environ 110 μK , ce qui correspond à un déplacement de 35 Γ . Après le chargement du piège magnéto-optique, le nuage est comprimé en décalant les faisceaux à environ 5 Γ sur le rouge de la transition pendant 50 ms, cela réduit la diffusion multiple des photons au sein du nuage et permet d'augmenter la densité au niveau du piège [Petrich 94].

Le laser de refroidissement du piège magnéto-optique est alors décalé de 40 Γ sur le rouge de la transition cyclante $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ pendant 100 ms, cela correspond à un décalage d'environ 5 Γ sur le rouge pour les atomes au centre du piège, tout en restant sur le bleu de

la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ pour les atomes hors du piège. Le faisceau repompeur est maintenu à résonance sur la transition $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ pour les atomes hors du piège. Les atomes entrant dans le piège se retrouvent hors de résonance avec le repompeur, ils sont alors dépompés et accumulés dans l'état $|F = 1\rangle$. Finalement, les faisceaux et les bobines du piège magnéto-optique sont éteints, avant que la puissance du faisceau du piège dipolaire ne soit augmentée.

Remarquons qu'il est aussi possible de piéger des atomes dans les modes d'ordres supérieurs du résonateur, ce qui permet de réaliser plusieurs pièges simultanément, comme on peut le voir Fig. 6.2. Ces pièges pourraient être utilisés pour mettre en œuvre l'intrication entre deux nuages par la mesure (Sec. 2.4.1), ou bien encore pour réaliser le verrouillage de phase entre deux ensembles cohérents (Sec. 4.2.5.3).

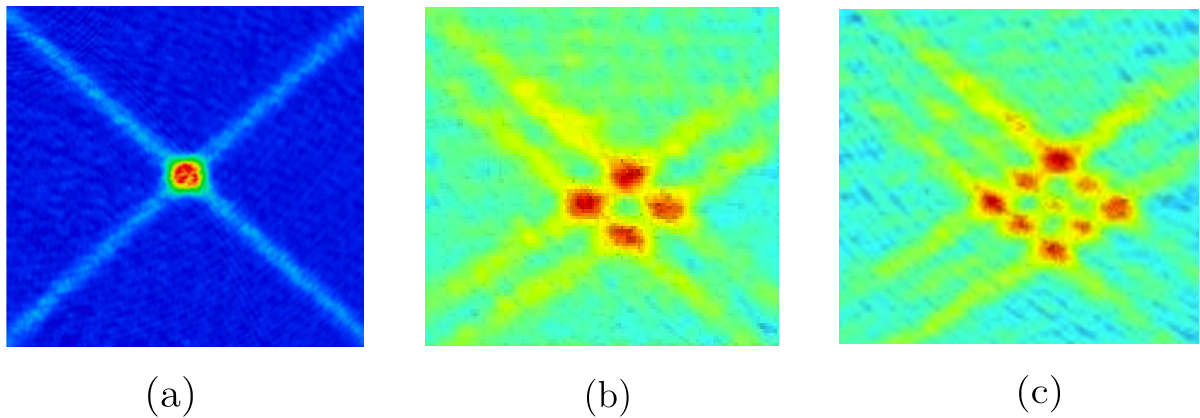


Figure 6.2 – Atomes piégés dans le potentiel dipolaire engendré par différents modes transverses de la cavité. (a) TEM_{00} . (b) TEM_{10} . (c) TEM_{20} .

6.3.3 Résultats

Nous avons mesuré le nombre d'atomes chargés ainsi que leur température en fonction de la puissance intracavité à la fin de la séquence de chargement, le résultat obtenu est présenté Fig. 6.3. On constate que le nombre d'atomes chargé est proportionnel à la puissance intracavité en fin de chargement. De plus, la température est elle aussi proportionnelle à la profondeur du piège après thermalisation, ce qui signifie que le ratio entre la profondeur du piège et l'énergie thermique $\eta \equiv U_0/k_B T$ est indépendant de la profondeur. Après chargement, environ 25 millions d'atomes sont piégés à une température de $230 \mu\text{K}$.

Afin de caractériser la qualité du piège, on mesure l'évolution du nombre d'atomes et de la température en fonction du temps, on obtient les résultats Fig. 6.4. On constate que le nombre d'atomes décroît exponentiellement avec un temps de vie de 6.7 s , la décroissance exponentielle indique que le piège est dépeuplé par des pertes à un corps correspondantes aux collisions avec le gaz résiduel au sein de l'enceinte ultra-vide. Quant à la température, on remarque qu'elle reste constante à environ $230 \mu\text{K}$, ce qui montre que le piège n'induit pas de chauffage sur l'échantillon atomique, plus précisément, le nuage reste dans un équilibre dynamique où les pertes par évaporation dissipent exactement l'énergie apportée au système. Le rapport entre la température et la profondeur du piège est $\eta = U_0/k_B T \sim 5$.

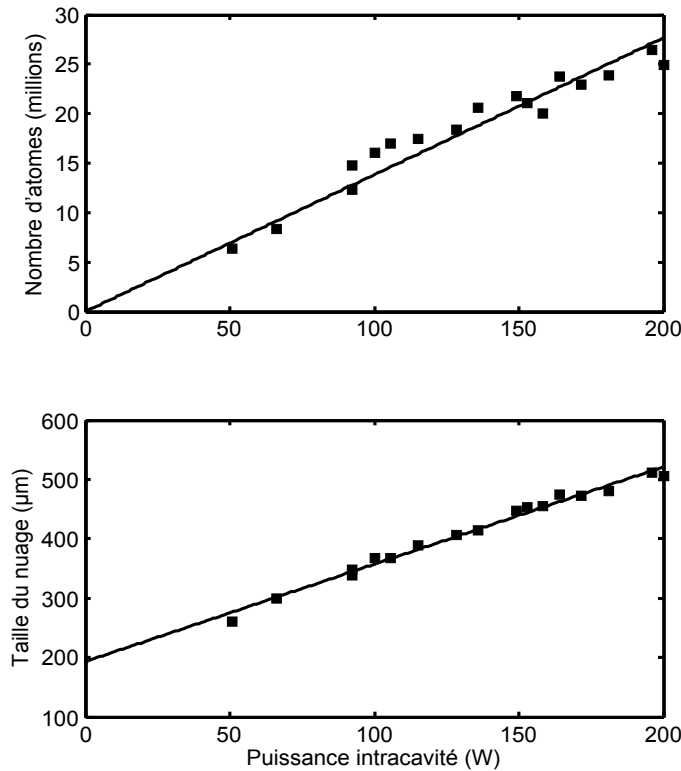


Figure 6.3 – Chargement du piège en fonction de la puissance intracavité. Les carrés correspondent aux données expérimentales et les lignes continues sont des ajustements linéaires de ces données. (Haut) Nombre d'atomes piégés. (Bas) Taille du nuage après un temps de vol de 3 ms.

6.4 Mesure des fréquences

Les fréquences de piège sont un élément clef pour atteindre le régime de dégénérescence quantique, elles traduisent en effet les propriétés géométriques qui conditionnent le confinement des atomes et donc la distance inter-atomique. Plus précisément, plus les fréquences sont élevées, plus la distance inter-atomique est faible, ce qui est favorable pour atteindre la transition de Bose-Einstein comme nous l'avons vu au début de ce chapitre.

Par conséquent, avant d'effectuer des rampes d'évaporation, il faut connaître les fréquences de piège. Ceci est d'autant plus important dans le cas d'une évaporation tout-optique, qui est réalisée en réduisant la puissance du piège dipolaire, or les fréquences chutent à mesure que la puissance diminue. La connaissance des fréquences est donc essentielle à la compréhension de la dynamique du processus d'évaporation, elle permet de s'assurer que la rampe réalisée augmente la densité dans l'espace des phases de l'échantillon atomique.

Nous effectuerons tout d'abord une analyse théorique des fréquences en étudiant l'influence de la puissance optique et du champ gravitationnel, nous évaluerons aussi l'effet d'une séparation des deux bras. Nous présenterons ensuite différentes méthodes de mesure des fréquences dans le piège et comparerons les résultats avec l'analyse théorique.

6.4.1 Analyse théorique des fréquences

6.4.1.1 Définition des fréquences d'un piège

Soit $U(\mathbf{r})$ le potentiel d'un piège où $\mathbf{r} = (x, y, z)$ est la coordonnée spatiale. Le développement de Taylor à trois dimensions du potentiel $U(\mathbf{r})$ au voisinage d'un point de coordonnées \mathbf{r}_0 s'écrit :

$$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}_0) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^T \nabla U(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^T \mathbf{H}_U(\mathbf{r}_0) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + o(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2), \quad (6.14)$$

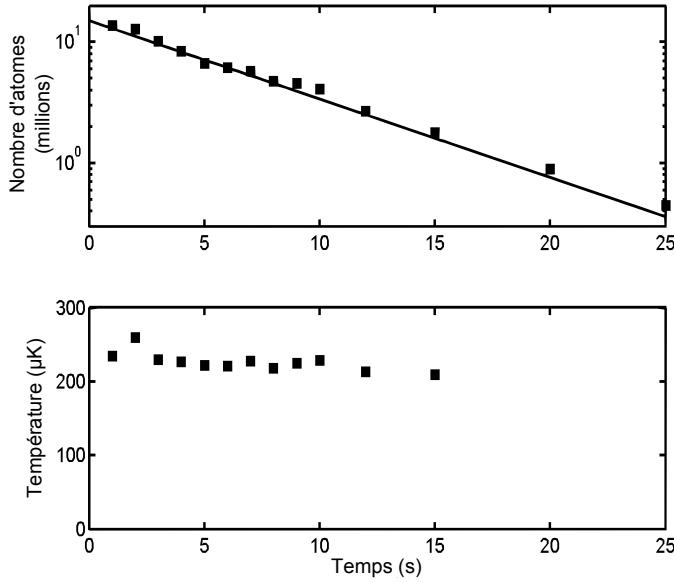


Figure 6.4 – Temps de vie et température des atomes dans le piège dipolaire. (Haut) Nombre d’atomes en fonction du temps de piégeage ; les carrés sont les données expérimentales et la ligne continue correspond à un ajustement avec une exponentielle. (Bas) Température du nuage en fonction du temps.

où $\mathbf{H}_U(\mathbf{r}_0) = \left(\partial_{ij}^2 U(\mathbf{r}_0) \right)_{ij}$ est la matrice hessienne de U prise en \mathbf{r}_0 , elle décrit les courbures du potentiel. Au voisinage d’un minimum $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ du potentiel, le gradient vérifie $\nabla U(\mathbf{r}_0) = \mathbf{0}$ et le développement de Taylor au second ordre peut être identifié avec le potentiel d’un oscillateur harmonique :

$$U_{\text{harm}}(\mathbf{r}) = U_0 + \frac{m}{2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^T \left(\omega_{ij}^2 \right) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (6.15)$$

où (ω_{ij}) est la matrice des fréquences du piège harmonique. Ces fréquences sont associées aux courbures du potentiel U au voisinage du minimum \mathbf{r}_0 :

$$\omega_{ij} = \sqrt{\frac{1}{m} [\mathbf{H}_U(\mathbf{r}_0)]_{ij}} = \sqrt{\frac{1}{m} \partial_{ij}^2 U(\mathbf{r}_0)}. \quad (6.16)$$

En règle générale, la matrice des fréquences est symétrique ($\omega_{ij} = \omega_{ji}$), car le potentiel U est suffisamment régulier ($U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$) pour que le théorème de Schwarz soit valable. De plus, puisque cette matrice est réelle, le théorème spectral nous permet d’affirmer qu’elle est diagonalisable. Il suffira donc de fournir la valeur de trois fréquences ω_x , ω_y et ω_z pour caractériser le potentiel harmonique. On définit aussi la fréquence moyenne du potentiel comme la moyenne géométrique de ces trois fréquences : $\bar{\omega} \equiv (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$.

6.4.1.2 Influence de la gravité

En fin d’évaporation, le potentiel est affecté par la gravité, ce qui fait chuter les fréquences de piège. De plus, en deçà d’un certain point, le potentiel n’est plus piègeant puisqu’il ne s’oppose plus au potentiel gravitationnel. Nous étudions donc dans ce paragraphe, l’influence de la gravité sur les caractéristiques de notre piège dipolaire réalisé par le croisement de deux faisceaux gaussiens.

Le potentiel gaussien croisé en présence d’un champ gravitationnel peut s’écrire :

$$U(x, y, z) = U_0 \left[2 - e^{-2z^2/w_v^2} \left(e^{-2x^2/w_h^2} + e^{-2y^2/w_h^2} \right) \right] + mgz, \quad (6.17)$$

dans le cas où la distance de Rayleigh est grande par rapport au diamètre des faisceaux, w_h désigne le diamètre à $1/e$ du faisceau dans le plan horizontal (x, y) de la cavité et w_v est le

diamètre selon la direction verticale z . Le minimum de ce potentiel est situé en $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ où $x_0 = y_0 = 0$ et z_0 est solution de l'équation transcendante :

$$z_0 e^{-2z_0^2/w_v^2} = -\frac{mgw_v^2}{8U_0}, \quad (6.18)$$

qui admet une solution sous la forme fermée suivante :

$$z_0 = -\frac{w_v}{2} \sqrt{-W \left[-\left(\frac{mgw_v}{4U_0} \right)^2 \right]}, \quad (6.19)$$

où W est la fonction W de Lambert. L'évolution de z_0 en fonction de U_0 est présentée Fig. 6.5. On constate tout d'abord que $z_0 \leq 0$, en d'autres termes, la gravité déplace le centre du potentiel vers le bas. De plus, z_0 n'existe que si $W \left[-\left(\frac{mgw_v}{4U_0} \right)^2 \right] \leq 0$, autrement dit, le potentiel est piégeant si la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{U_0}{mgw_v} \geq \frac{\sqrt{e}}{4}. \quad (6.20)$$

Dans le cas limite, $U_0 = \sqrt{e} mgw_v/4$, le déplacement vertical du centre du potentiel atteint $z_0 = -w_v/2$. Avec $w_v = 100 \mu\text{m}$ et $g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$, on obtient $U_0 \sim 4 \mu\text{K}$ pour la profondeur du potentiel optique en-dessous de laquelle le champ gravitationnel n'est plus compensé. On peut de plus considérer que la gravité influence le potentiel optique pour $U_0 \lesssim mgw_v$, soit environ $10 \mu\text{K}$ avec les paramètres précédents.

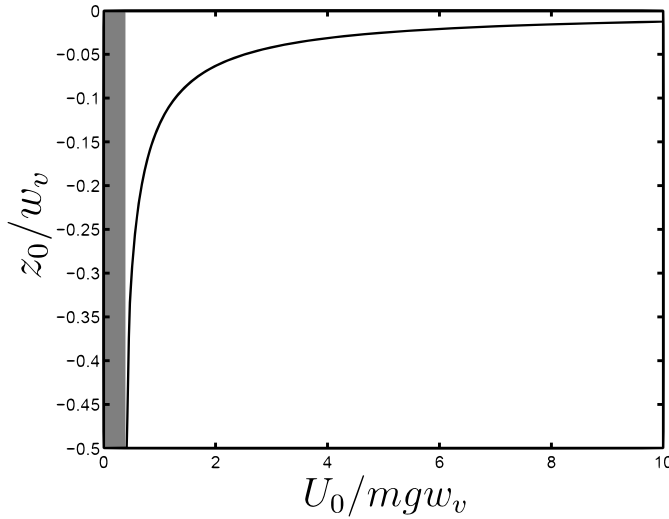


Figure 6.5 – Evolution de z_0 en fonction de U_0 . La région grisée représente la puissance en-dessous de laquelle le potentiel n'est plus piégeant.

En calculant les courbures du potentiel $\partial_{ij}^2 U(\mathbf{r}_0)$ au voisinage du minimum $\mathbf{r}_0 = (0, 0, z_0)$ et en utilisant la relation Eq. (6.18) ainsi que la formule Eq. (6.16), on obtient les fréquences du piège :

$$(\omega_{ij}) = \sqrt{\frac{g}{2|z_0|}} \begin{pmatrix} w_v/w_h & 0 & 0 \\ 0 & w_v/w_h & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2 - \frac{mg|z_0|}{U_0}} \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

En particulier lorsque l'influence de la gravité est négligeable ($U_0 \gg mgw_v$), les fréquences du piège dipolaire sont :

$$\omega_x^0 = \omega_y^0 = \sqrt{\frac{4U_0}{mw_h^2}}, \quad (6.22)$$

$$\omega_z^0 = \sqrt{\frac{8U_0}{mw_v^2}}. \quad (6.23)$$

Les fréquences dans le plan horizontal sont donc dégénérées, tandis que les fréquences horizontales et verticales sont dissociées d'un facteur proche de $\sqrt{2}$, en supposant $w_h \sim w_v$. Sachant qu'à pleine puissance la profondeur du piège estimée grâce à la tomographie des déplacements lumineux est $U_0 \sim 1$ mK, on trouve $\omega_x^0 = \omega_y^0 \sim 0.95$ kHz et $\omega_z^0 \sim 1.15$ kHz en considérant $w_h \sim 100$ μm et $w_v \sim 120$ μm .

6.4.1.3 Effet d'un décalage vertical entre les bras

Un point important du montage expérimental est le croisement entre les deux bras de la cavité, nous allons donc ici étudier la sensibilité des fréquences à un désalignement vertical entre les deux bras. Supposons que le bras supérieur soit à une altitude $z = +a/2$ et le bras inférieur à $z = -a/2$, en négligeant l'influence de la gravité, le potentiel dipolaire est :

$$U(x, y, z) = U_0 e^{-\frac{1}{2} \frac{a^2}{w_v^2}} \left[2e^{\frac{1}{2} \frac{a^2}{w_v^2}} - e^{-2 \frac{z^2}{w_v^2}} \left(e^{-2 \frac{x^2}{w_h^2} - 2 \frac{az}{w_v^2}} + e^{-2 \frac{x^2}{w_h^2} + 2 \frac{az}{w_v^2}} \right) \right]. \quad (6.24)$$

Le minimum de ce potentiel est situé en $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ avec $x_0 = y_0 = 0$ et z_0 vérifie l'équation transcendante suivante :

$$\tanh \left(2 \frac{az_0}{w_v^2} \right) = 2 \frac{z_0}{a}. \quad (6.25)$$

Les solutions de cette équation dépendent de la pente à l'origine $2a/w_v^2$ du membre de gauche comparée à celle du membre de droite $2/a$. Si $a \leq w_v$ alors cette équation admet une unique solution $z_0 = 0$, sinon l'équation admet trois solutions : $z_0 = 0$ qui correspond à un maximum local et deux autres solutions symétriques par rapport au plan $z = 0$ correspondantes à deux minima, dans ce cas, le potentiel est un double puit. Nous nous limiterons donc à l'étude d'un simple puit ($a \leq w_v$), le minimum est alors situé en $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0)$.

Après avoir calculé les courbures du potentiel en \mathbf{r}_0 , et en notant $\eta = a/w_v$, le déplacement des bras en unités du diamètre vertical du faisceau, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega_{ij}}{\omega_{ij}^0} \end{pmatrix} = e^{-\eta^2/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1 - \eta^2} \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

L'influence du décalage des bras sur les fréquences verticales et horizontales est présenté Fig. 6.6. On constate que les fréquences dans le plan horizontal ne sont pas très sensibles à un déplacement vertical, tandis que la fréquence selon l'axe vertical varie de manière beaucoup plus rapide jusqu'à atteindre une valeur nulle pour $a = w_v$. On remarque aussi que le ratio ω_x/ω_z diffère de la valeur $1/\sqrt{2}$ attendue dans le cas d'un décalage vertical nul, cette propriété constitue, comme nous le verrons plus bas, un moyen de s'assurer du croisement des bras de la cavité.

6.4.2 Mesure des fréquences

Il existe plusieurs méthodes pour mesurer les fréquences d'un piège. On peut tout d'abord mesurer l'échauffement que provoque sur les atomes une modulation de la profondeur du piège à une fréquence donnée, cette méthode exploite le phénomène de chauffage paramétrique. Une seconde méthode consiste à induire une déformation soudaine de la forme du potentiel optique, soit en déplaçant la position du piège, soit en le comprimant ; on observe ensuite directement les oscillations de position ou de taille du nuage atomique. Enfin, une dernière méthode permet de déterminer les fréquences à partir de la mesure de la taille *in-situ* du nuage.

Nous allons ici présenter les résultats obtenus avec ces différentes méthodes. La mesure des fréquences de piège peut s'avérer être une entreprise délicate pour laquelle il convient d'être conscient des avantages et des limites de chacune des méthodes selon le contexte expérimental.

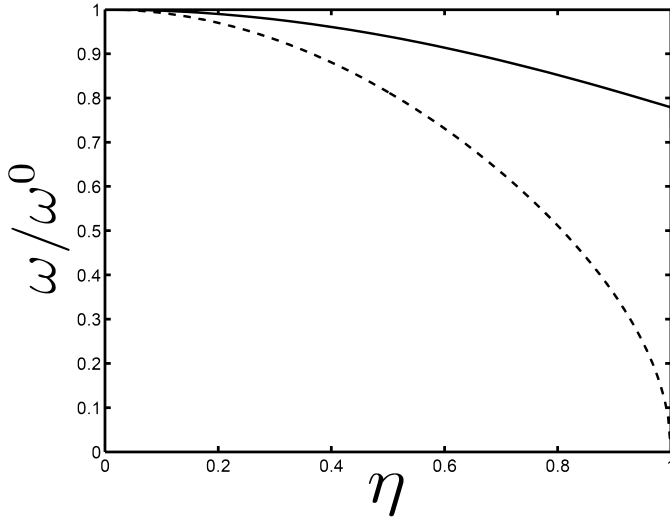


Figure 6.6 – Influence du décalage des bras $\eta = a/w_v$ sur les fréquences verticales (pointillés) et horizontales (trait plein).

6.4.2.1 Mesure par chauffage paramétrique

Dans l'objectif de mesurer les fréquences par chauffage paramétrique, la procédure suivante est utilisée : après le piégeage des atomes, on module sinusoidalement la profondeur du piège optique pendant un nombre fixé de 500 périodes. On mesure alors les pertes induites par l'excitation en fonction de la fréquence de modulation. On observe le spectre présenté Fig. 6.7 où les résonances se caractérisent par des pertes importantes. On constate l'existence de deux résonances du fait de la non-dégénérescence entre les fréquences horizontales et verticales du piège. La fréquence de la résonance est le double de la fréquence du piège puisqu'il s'agit d'une excitation paramétrique. Cette méthode est néanmoins difficile à mettre en œuvre pour mesurer de faibles fréquences car la largeur des résonances devient grande par rapport à la fréquence moyenne, de plus, étant donné le long temps d'excitation nécessaire, le temps de vie des atomes dans le piège peut devenir un paramètre critique.

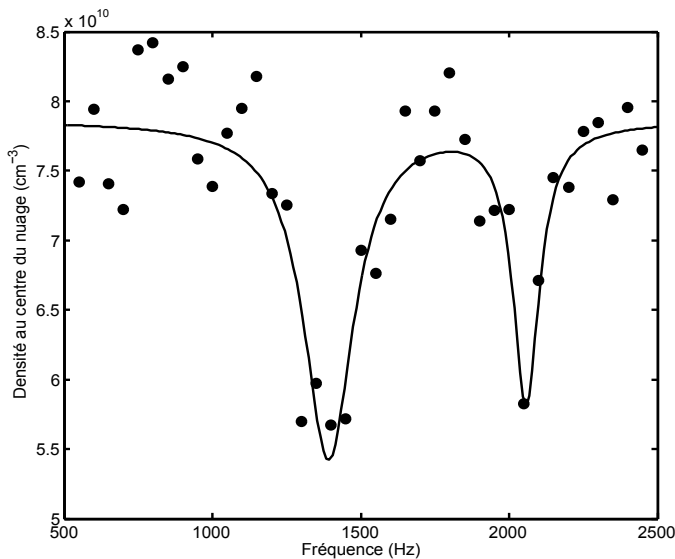


Figure 6.7 – Mesure des résonances du piège par excitation paramétrique. On mesure la densité atomique au centre du nuage restante après excitation en fonction de la fréquence de modulation. La ligne continue correspond à un ajustement de chacune des résonances par une lorentzienne. Lors de cette mesure, la puissance optique intracavité est de 240 W et 500 cycles d'excitations sont appliqués aux atomes avant le relâchement du piège.

Cette mesure est réalisée pour différentes profondeurs du piège dipolaire, on obtient alors le résultat Fig. 6.8. Les données suivent une loi en racine carré de la puissance comme attendu dans la limite où l'influence du champ gravitationnel est négligeable. A partir du résultat de l'ajustement et des relations Eqs. (6.22) et (6.23), on estime que la profondeur du piège pour une

puissance intracavité de 250 W est d'environ $530 \mu\text{K}$, ce qui est en bon accord avec le résultat obtenu par la tomographie des déplacements lumineux. On vérifie aussi que le rapport entre les fréquences horizontales et verticales ne dépend pas de la profondeur du piège, il est de plus consistant avec la valeur $1/\sqrt{2}$ obtenue à partir des relations Eqs. (6.22) et (6.23), ce qui nous assure au passage du bon croisement des deux bras de la cavité.

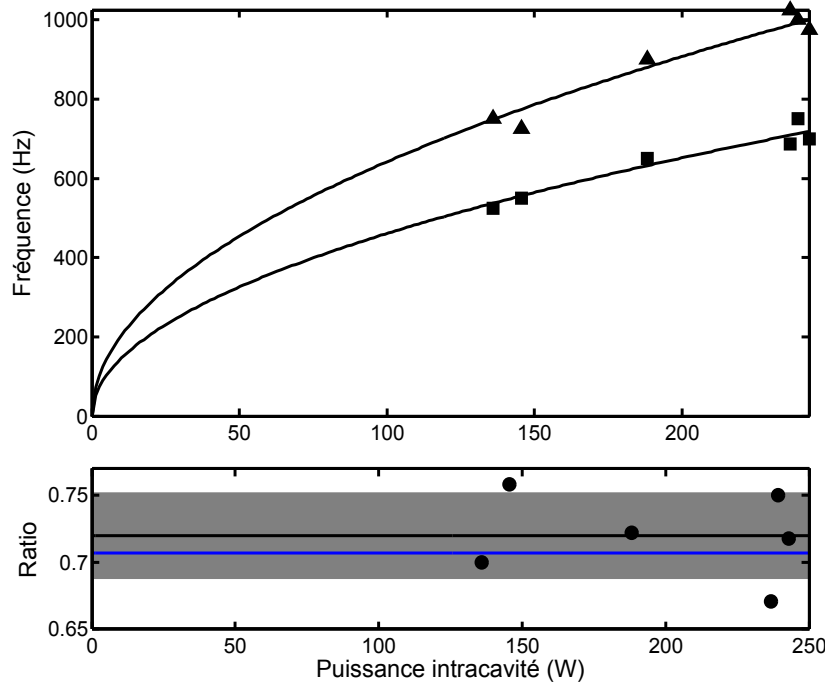


Figure 6.8 – (Haut) Fréquences en fonction de la puissance optique intracavité. Les triangles correspondent aux mesures de la fréquence selon l'axe vertical et les carrés selon l'axe horizontal. Les lignes continues sont des ajustements des données expérimentales par une loi en racine carrée, attendue dans la limite où l'influence de la gravité est négligeable. (Bas) Rapport entre les fréquences horizontales et verticales. Les points correspondent aux mesures expérimentales, la ligne noire continue est la moyenne des points et la zone grisée correspond à l'amplitude d'un écart-type de part et d'autre de la moyenne. La ligne bleue est la valeur $1/\sqrt{2}$ théoriquement attendue.

6.4.2.2 Mesure des modes d'oscillation

En induisant une brusque modification de la géométrie du piège, il est possible d'en mesurer les modes d'oscillation. L'observation de la position du nuage en fonction du temps, après un déplacement soudain de la position du piège, permet de mesurer les oscillations dipolaires qui apparaissent à la fréquence de piège. De même, l'observation de la taille du nuage dans le temps, après une brusque compression du piège, permet d'observer le mode de respiration qui oscille au double de la fréquence du piège.

Notre piège dipolaire au sein d'une cavité ne nous permet pas de déplacer la position d'un bras par rapport à l'autre, car cela modifierait la fréquence de résonance du mode fondamental de plusieurs intervalles spectraux libres, ce que l'asservissement ne peut pas suivre. Il nous est toutefois possible de comprimer brusquement le piège en augmentant soudainement la puissance intra-cavité. Pour cela, on réalise préalablement une rampe afin de refroidir le nuage à environ $6 \mu\text{K}$ et ainsi permettre une meilleure observation des variations de taille, puis on augmente brusquement la puissance intra-cavité en $10 \mu\text{s}$ jusqu'à environ 240 W. Le résultat obtenu est présenté Fig. 6.9, la taille est mesurée à partir de l'imagerie par absorption prise dans la direction

orthogonale au croisement, on mesure donc la fréquence dans le plan horizontal.

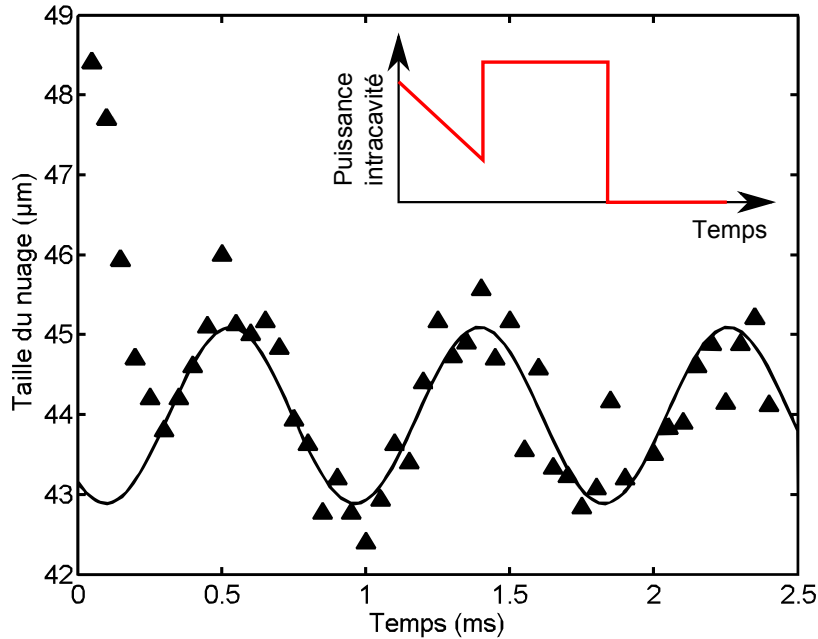


Figure 6.9 – Mesure de la fréquence du piège par compression. On mesure la taille du nuage en fonction du temps après compression. En encart, évolution de la puissance de piégeage lors de la séquence de mesure, après une rampe, la puissance est augmentée de manière soudaine afin de comprimer le piège.

On observe une diminution de la taille du nuage au cours des premières $250 \mu\text{s}$ due à la compression du piège, elle est suivie d'une oscillation à 1.2 kHz . Puisque l'on observe ici le mode de respiration dans le plan horizontal, la fréquence de piège estimée est donc la moitié soit environ 600 Hz , ce qui est en accord raisonnable avec la valeur de 700 Hz mesurée par excitation paramétrique.

6.4.2.3 Estimation de la taille *in-situ* du nuage

Lorsque l'on cherche à mesurer des fréquences de piège faibles, il est difficile d'utiliser l'excitation paramétrique car, d'une part, cela nécessite un temps d'excitation long, si bien que le temps de vie dans le piège peut devenir un facteur limitant, et d'autre part, la largeur de la résonance devient grande par rapport à la fréquence moyenne, ce qui rend la mesure très imprécise. Une autre méthode consiste à mesurer la taille *in-situ* du nuage dans le piège, en effet si σ_0 est le rayon à $1/e$ du nuage selon une direction donnée, alors la fréquence du piège selon cette même direction est :

$$\omega = \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{k_B T}{m}}. \quad (6.27)$$

En pratique, on mesure l'évolution du rayon σ en fonction du temps de vol t après relâchement du piège, ce dernier évolue selon :

$$\sigma(t) = \sqrt{\sigma_0^2 + \frac{k_B T}{m} t^2} = \sigma_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2}. \quad (6.28)$$

Les résultats d'une telle mesure pour différentes profondeurs de piège sont présentés Fig. 6.10.

En ajustant les données expérimentales Fig. 6.10 à l'aide de la relation Eq. (6.28), on obtient directement σ_0 et T , ce qui permet alors d'estimer la fréquence du piège. Pour le nuage à $7.8 \mu\text{K}$,

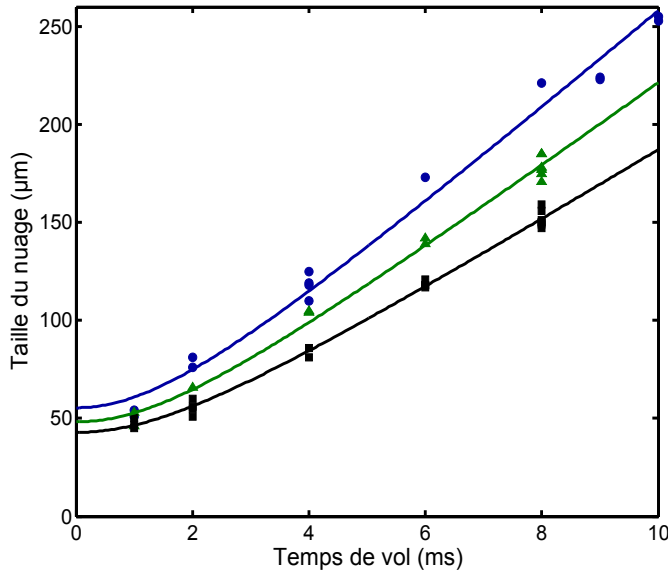


Figure 6.10 – Evolution de la taille du nuage lors d'un temps de vol. Les points bleus sont les données expérimentales obtenues avec $T = 7.8 \mu\text{K}$, les triangles verts avec $T = 4.4 \mu\text{K}$ et les carrés noirs avec $T = 3.4 \mu\text{K}$. Les lignes continues correspondent à des ajustements des données par la relation Eq. (6.28).

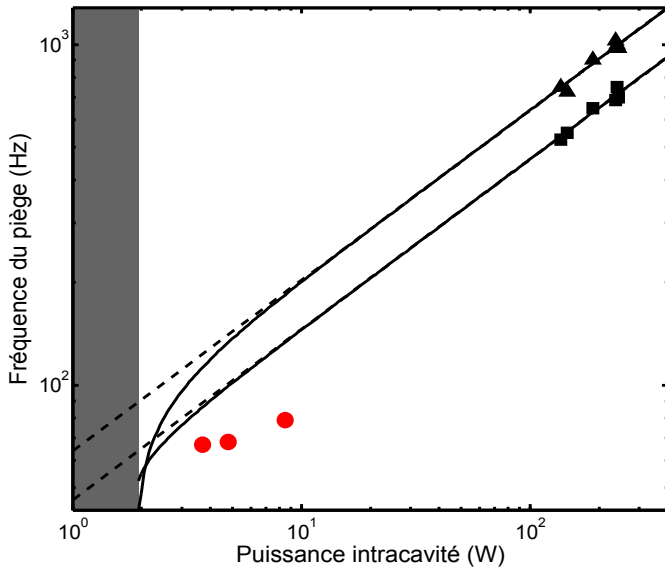


Figure 6.11 – Fréquences en fonction de la puissance optique intracavité. Les points rouges sont les résultats obtenus à partir de la mesure de la taille in-situ. Les triangles et carrés noirs sont les mesures effectuées par excitation paramétrique des fréquences verticales et horizontales, respectivement. Les lignes pointillées sont les ajustements par une loi en racine carré. Les lignes continues considèrent l'influence de la gravité sur les fréquences et la zone grisée est la région où le potentiel n'est plus piégeant.

on trouve une fréquence de 78 Hz, pour celui à $4.4 \mu\text{K}$ on trouve 68 Hz et enfin à $3.4 \mu\text{K}$ on a 67 Hz. Il s'agit ici des fréquences dans le plan horizontal. Néanmoins, la forte densité optique du nuage, lors des mesures réalisées à court temps de vol, provoque une saturation du profil de densité mesuré, par conséquent, lorsqu'un ajustement gaussien est réalisé sur ce profil, on a tendance à surestimer le taille du nuage et donc à sous-estimer la fréquence du piège. C'est ce que l'on constate Fig. 6.11 : les fréquences mesurées sont en-dessous des valeurs estimées à partir des mesures réalisées à forte puissance, et ceci en considérant aussi l'influence du potentiel gravitationnel grâce à la relation Eq. (6.21).

6.5 Rampe d'évaporation

Pour entrer dans le régime de dégénérescence quantique, il faut atteindre une densité dans l'espace des phases supérieure à l'unité. La densité dans l'espace des phases évolue selon :

$$D = N \left(\frac{\hbar\bar{\omega}}{k_B T} \right)^3, \quad (6.29)$$

on remarque que la fréquence moyenne du piège $\bar{\omega}$ est un paramètre important pour évaluer D , d'où l'intérêt de la caractérisation effectuée précédemment. Les paramètres initiaux sont les suivants : $T \sim 250 \mu\text{K}$, $\bar{\omega} = 2\pi \times 790 \text{ Hz}$ et $N \sim 10^8$, autrement dit, la densité dans l'espace des phases initiale est $D \sim 3.5 \times 10^{-4}$. Il nous faut donc gagner quatre ordres de grandeur afin d'atteindre la condensation de Bose-Einstein.

Pour augmenter la densité dans l'espace des phases, on cherche à diminuer la température tout en conservant un nombre d'atomes et des fréquences de piège raisonnables. L'extraction de l'énergie thermique du gaz piégé est réalisée par évaporation de l'échantillon [Davis 95] : en réduisant la profondeur du piège, les atomes qui possèdent une énergie cinétique supérieure à la moyenne sont extraits, et après rethermalisation de l'échantillon grâce aux collisions interatomiques, la température moyenne du nuage est diminuée. Cette méthode permet donc de réduire la température de l'échantillon, toutefois, pour augmenter la densité dans l'espace des phases, le processus d'évaporation ne doit pas engendrer une chute excessive ni du nombre d'atomes ni des fréquences de piège. De plus, le taux de collisions est un paramètre essentiel pour garantir l'efficacité du processus d'évaporation puisqu'il assure la rethermalisation de l'échantillon, or il dépend à la fois du nombre d'atomes et des fréquences de piège, par conséquent, si la rampe d'évaporation n'est pas maîtrisée, le taux de collision peut chuter et rendre l'évaporation inefficace.

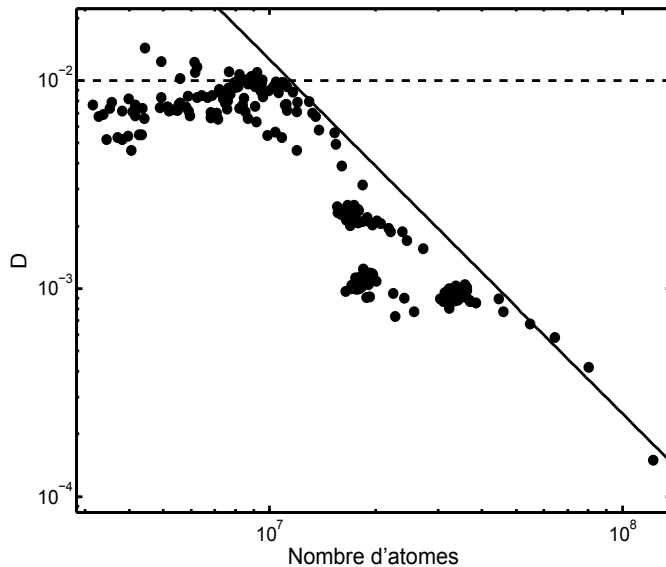


Figure 6.12 – Densité dans l'espace des phases en fonction du nombre d'atomes. Les points sont les données expérimentales, la ligne continue est une loi de puissance en $N^{-1.7}$ qui représente la borne supérieure de l'efficacité du processus d'interaction.

Dans l'objectif d'optimiser la rampe d'évaporation, on procède de la manière suivante : on choisit une profondeur finale du piège, puis on scanne la durée de la rampe. Pour des durées courtes, l'échantillon n'est pas complètement thermalisé, puis, à mesure que la durée de la rampe augmente, l'échantillon se rapproche de l'équilibre thermodynamique et la densité dans l'espace des phases augmente jusqu'au point où elle stagne. A partir de ce point, on réalise une nouvelle rampe atteignant une profondeur finale plus basse, on réitère alors la procédure précédente.

Afin de vérifier l'efficacité de la rampe d'évaporation, on trace l'évolution de la densité dans l'espace des phases en fonction du nombre d'atomes, on obtient le résultat Fig. 6.12. On constate que, pour un nombre d'atomes supérieur à 10^7 , la densité dans l'espace des phases est bornée par une loi de puissance $D \propto N^{-\gamma}$ avec $\gamma \sim 1.7$, ce paramètre caractérise le gain dans l'espace des phases par atome perdu [O'Hara 01], plus il est important, plus le processus d'évaporation est efficace.

Toutefois, pour des nombres d'atomes inférieurs à 10^7 , la densité dans l'espace est limitée à environ 10^{-2} . A la position intermédiaire entre ces deux régimes, les paramètres expérimentaux sont les suivants : $N \sim 10^7$, $T \sim 10 \mu\text{K}$ et $\bar{\omega} \sim 2\pi \times 230 \text{ Hz}$, le taux de collision est d'envi-

ron 800 s^{-1} . Cette position correspond à peu près au point limite en-dessous duquel le champ gravitationnel influence de manière sensible le potentiel de piège, et lorsque l'on poursuit l'évaporation au-delà de cette position, les fréquences chutent de manière trop importante, ce qui entraîne la baisse du taux de collision et rend l'évaporation inefficace : la densité dans l'espace des phases n'augmente plus.

En réalisant l'évaporation dans ces conditions, *i.e.* avec les atomes directement piégés dans le mode fondamental de la cavité sans autre potentiel, nous sommes limités à une densité dans l'espace des phases d'environ 10^{-2} , un gain de deux ordres de grandeurs est donc encore nécessaire afin d'atteindre la transition de Bose-Einstein. Nous sommes essentiellement limités par les fréquences trop faibles en fin d'évaporation qui limitent la densité dans l'espace et font chuter le taux de collisions.

6.6 Dimple

Pour atteindre le régime de dégénérescence quantique, il nous faut donc trouver une méthode pour évaporer les atomes tout en conservant des fréquences de piège suffisamment élevées. La solution que nous avons adoptée consiste à ajouter un faisceau orthogonal au plan de la cavité et focalisé en son centre Fig. 6.13 (a), ce faisceau forme un "dimple"². Il permet de conserver des fréquences élevées dans le plan de la cavité tout au long du processus d'évaporation.

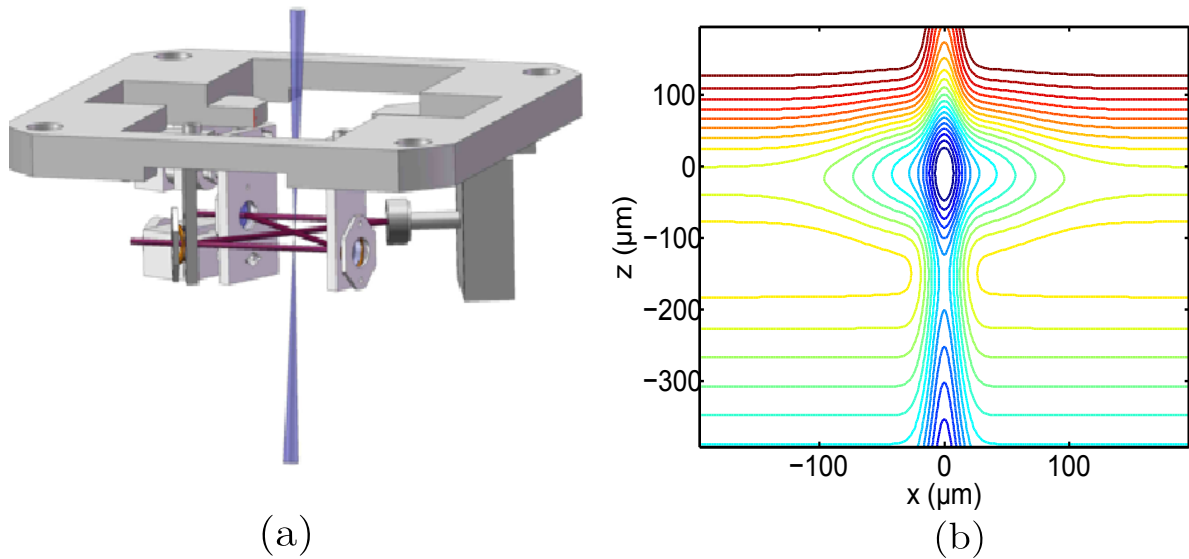


Figure 6.13 – (a) Position et alignement du dimple par rapport à la cavité. (b) Coupe selon le plan vertical des lignes isopotentiels du potentiel dipolaire obtenu par la combinaison du mode fondamental de la cavité et du dimple.

On a représenté Fig. 6.13 (b) une coupe selon le plan vertical du potentiel réalisé par la combinaison du mode de la cavité et du dimple, on remarque le fort confinement transverse imposé par le dimple. On constate de plus que le dimple présente un point de fuite pour les atomes selon l'axe vertical, c'est une assurance que les atomes évaporés ne reviennent pas dans le piège, ce qui peut perturber le processus d'évaporation. Le diamètre à $1/e$ du faisceau au point focal est de $23 \mu\text{m}$ et la puissance optique dans le faisceau est environ 200 mW . Les fréquences imposées par le dimple dans le plan horizontal (ω_x et ω_y) ont été déterminées par excitation

2. Ce que l'on peut traduire par "fossette", mais nous préférons ici conserver le terme anglais.

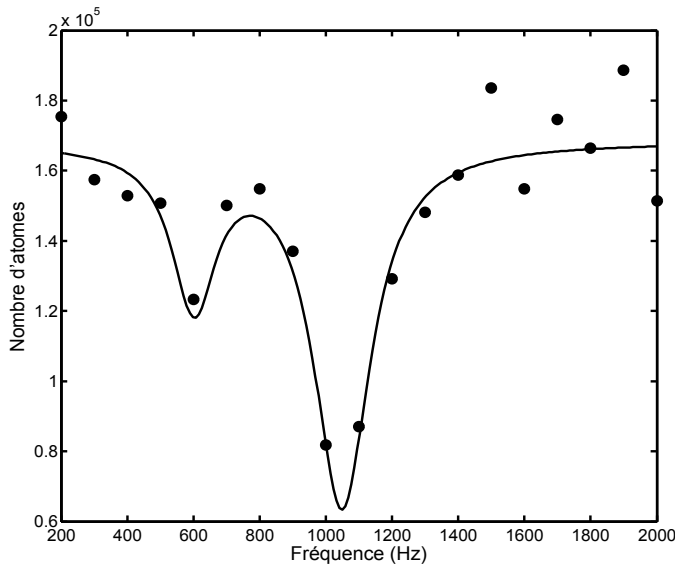


Figure 6.14 – *Excitation paramétrique dans le dimple, on constate aussi des pertes liées à une excitation linéaire à la fréquence propre du piège. La ligne continue correspond à un ajustement de chacune des résonances par une lorentzienne.*

paramétrique *via* une modulation sinusoïdale de la puissance du faisceau, le résultat est présenté Fig. 6.14, on trouve $\omega_x = \omega_y = 2\pi \times 550$ Hz.

En fin d'évaporation, le piège formé par le mode fondamental de la cavité permet de compenser la gravité et ainsi de garder les atomes piégés. On peut ainsi diminuer la profondeur du potentiel et descendre jusqu'à une fréquence $\omega_z \sim 2\pi \times 50$ Hz selon l'axe vertical, tout en conservant une fréquence moyenne relativement importante $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z) \sim 2\pi \times 250$ Hz. En atteignant cette position après une rampe de trois secondes, le nuage est composé d'environ 5×10^4 atomes à 200 nK, le taux de collisions vaut donc 160 s^{-1} , ce reste important et permet une évaporation efficace, même en fin de rampe. De plus, la densité dans l'espace des phases associée est $D \sim 4.3 > 1.2$, dans de telles conditions, la transition vers le condensat de Bose-Einstein doit avoir lieu. Nous allons donc maintenant étudier les signatures caractéristiques d'un condensat pour confirmer que le seuil de dégénérescence quantique a bien été franchi.

6.7 Condensat de Bose-Einstein

6.7.1 Structure bimodale et inversion d'ellipticité

La signature la plus évidente de la présence d'un condensat est l'apparition d'une *structure bimodale* dans la densité du nuage. Cette double structure est due à la coexistence d'une phase thermique et d'une phase condensée. Sont exposées Fig. 6.15 des images de la densité du nuage à différentes températures, la fraction condensée est de plus en plus importante à mesure que le nuage se refroidit.

On remarquera aussi l'évolution de la forme du nuage qui est sphérique pour un gaz thermique et devient elliptique dans la direction horizontale (perpendiculaire à l'axe du dimple) lorsque la fraction condensée augmente. Il s'agit là d'une autre signature de la transition : l'*inversion d'ellipticité*. Le condensat est initialement fortement anisotrope et orienté selon l'axe du dimple, lors d'un temps de vol, l'expansion libre du nuage obéit à une invariance d'échelle qui transforme le nuage en forme de cigare selon l'axe vertical et en une galette dans le plan horizontal [Kagan 96, Castin 96].

6.7.2 Analyse de la transition

Dans l'objectif d'étudier la transition, on représente la fraction condensée N_0/N en fonction de la température du nuage estimée à partir de la fraction thermique, on obtient alors le résultat Fig. 6.16. On observe une brusque augmentation de la fraction condensée en-dessous d'une certaine température, c'est la signature de la transition de phase vers un condensat de Bose-Einstein.

Les données ont été ajustées avec l'expression attendue dans le cas de la transition en présence d'interactions Eq. (6.9), on obtient alors $T_c = 189$ nK et $\eta = 0.4$. En sachant de plus que le nombre d'atomes est $N = (2.7 \pm 1.3) \times 10^4$, on en déduit les paramètres caractéristiques du condensat, calculés dans l'approximation de Thomas-Fermi et résumés Tab. 6.1.

Potentiel chimique	$\mu = \eta k_B T_c$	$h \times 1.55$ kHz
Densité au centre du nuage	$n_0 = \mu/g$	2.2×10^{14} at/cm ³
Longueur de relaxation	$\xi = \hbar/\sqrt{2m\mu}$	194 nm
Rayon de l'oscillateur harmonique	$a_0 = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$	915 nm
Fréquence moyenne du piège	$\bar{\omega} = k_B T_c / (0.94 \hbar N^{1/3})$	$2\pi \times 139$ Hz
Rayon de Thomas-Fermi	$R_{TF} = a_0 \sqrt{2\mu/\hbar\bar{\omega}}$	4.3 μ m

Table 6.1 – *Caractéristiques du condensat dans l'approximation de Thomas-Fermi.*

6.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons démontré l'adéquation de la cavité pour la réalisation d'un piège dipolaire, il contient initialement quelques dizaines de millions d'atomes et permet de les garder pendant plusieurs secondes. Nous avons ensuite présenté la manière dont un condensat de Bose-Einstein pouvait être obtenu à partir de ce piège dipolaire. Pour cela, un faisceau supplémentaire doit être superposé au piège en fin de rampe d'évaporation, la puissance modeste de ce faisceau (~ 200 mW) démontre qu'il est possible de réaliser un condensat de manière tout-optique reposant sur des technologies standards en télécommunications optiques. Cette démonstration, combinée à la robustesse de l'asservissement par modulation serrodyne décrite au chapitre précédent, ouvre la voie à la réalisation de sources atomiques cohérentes transportables à base de composants optiques fibrés, voire intégrés.

Nous avons constaté Sec. 6.3.2 la possibilité de piéger plusieurs nuages à la fois dans les modes d'ordre supérieur. On peut dès lors envisager la réalisation simultanée de plusieurs condensats. On peut aussi penser à la séparation adiabatique d'un condensat piégé dans le mode fondamental en plusieurs condensats dans un mode d'ordre supérieur, et réciproquement à la recombinaison de plusieurs condensats en un seul. De telles manipulations réalisées de manière cohérente pourraient servir de séparatrices dans un interféromètre atomique piégé.

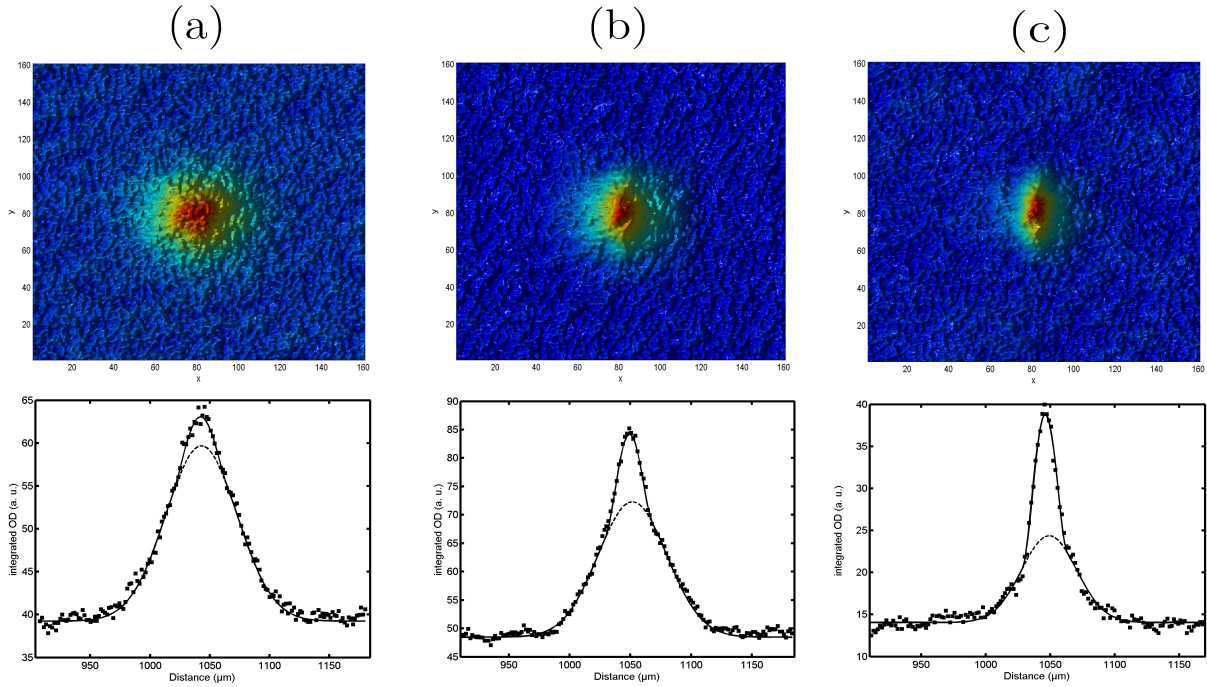


Figure 6.15 – Structure bimodale lors de la transition d'un gaz thermique vers un condensat de Bose-Einstein. En haut, les images montrent la densité optique après un temps de vol de 8 ms. En bas, la densité optique est intégrée verticalement, la partie thermique du profil est ajustée avec une gaussienne et le condensat est ajusté avec une parabole inversée, ces ajustements permettent de déterminer à la fois la température et la fraction condensée. (a) $T = 0.8 T_c$ (145 nK), fraction condensée 0.12. (b) $T = 0.7 T_c$ (131 nK), fraction condensée 0.27. (c) $T = 0.4 T_c$ (74 nK), fraction condensée 0.55.

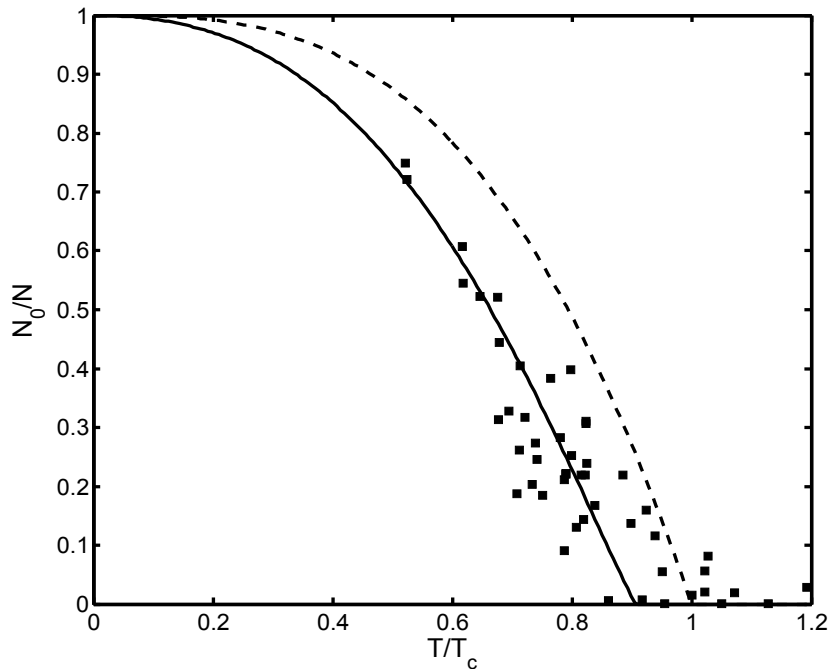


Figure 6.16 – Fraction condensée en fonction de la température. Les points correspondent aux données expérimentales. La courbe continue est un ajustement pour un gaz en présence d'interactions Eq. (6.9), la courbe en pointillés est le résultat attendu pour un gaz sans interaction Eq. (6.4).

Conclusion

Au cours de ce manuscrit, nous avons tout d'abord introduit une nouvelle méthode de détection non-destructive et montré son intérêt pour des applications en interférométrie atomique. Cette technique nous a permis de réaliser la première démonstration d'une rétroaction quantique sur un état atomique cohérent. Nous avons aussi présenté une nouvelle méthode de préparation de condensats de Bose-Einstein qui exploite les propriétés d'une cavité optique de haute finesse.

Dans la première partie de ce manuscrit, nous avons tout d'abord étudié de manière théorique la mesure non-destructive d'un ensemble atomique. Cela nous a permis de constater que cette méthode permet de préparer des états de spin comprimés, de tels états pouvant servir à atteindre la limite de Heisenberg dans des interféromètres atomiques et donc d'améliorer la sensibilité des senseurs associés. Nous avons ensuite étudié comment mettre en œuvre une telle détection non-destructive grâce à la spectroscopie par modulation de fréquence. Nous avons réalisé une détection limitée au bruit de photon qui permet de suivre en temps réel l'évolution cohérente d'un spin collectif. La configuration utilisée par notre détection permet de compenser le déplacement lumineux induit par la sonde, ce qui est un avantage majeur de la méthode. Nous avons ensuite exploité cette détection dans le régime de mesure faible. Une rétroaction quantique protégeant un état cohérent de la décohérence induite par un basculement de bit et corrigeant en temps réel l'état a été démontrée. Elle augmente grandement le temps de vie de cohérence de l'état. Nous avons ensuite exposé quelques résultats préliminaires de la mise en œuvre d'une boucle à verrouillage de phase atomique. Cette dernière méthode est très prometteuse pour surpasser un certain nombre de limitations apparaissant sur les horloges atomiques les plus modernes.

La seconde partie de ce mémoire fut l'occasion pour nous de présenter la réalisation d'un condensat de Bose-Einstein tout optique au sein d'un résonateur de haute finesse. Nous avons notamment exposé une méthode originale d'asservissement de la fréquence du laser sur la résonance de la cavité utilisant la modulation serrodyne, cette méthode permet un asservissement robuste puisqu'il fournit une large bande de correction combinée à une grande bande passante. La réalisation du condensat à partir d'une source optique reposant uniquement sur des technologies, non seulement standards, mais aussi matures en télécommunications optiques, fait de cette source d'atomes ultra-froids un bon candidat pour les applications embarquées.

Dans l'avenir, il sera intéressant de combiner la détection non-destructive et le condensat au sein d'un senseur inertiel. On pourrait par exemple adapter la boucle de phase atomique au cas d'un senseur inertiel et utiliser la non-destructivité de la sonde pour suivre le déphasage de l'interféromètre en temps réel. Cette méthode devrait permettre de réaliser un senseur robuste au bruit d'accélération.

Il sera aussi essentiel d'atteindre le régime de mesure forte, ceci devrait être réalisé dès que le nouveau dispositif optique, augmentant la densité optique vue par le faisceau, sera mis en place. On sera alors en mesure de préparer des états comprimés. De plus, la possibilité de choisir la projectivité de la mesure octroiera un degré de liberté supplémentaire lors des expériences

futures, on peut par exemple envisager de combiner la boucle à verrouillage de phase atomique avec des états comprimés. Enfin, ne perdons pas de vue que la cavité est aussi résonante à la longueur d'onde de détection et l'utilisation de la cavité lors de la détection non-destructive doit fortement augmenter la densité optique, dans de telles conditions les expériences utilisant la détection non-destructive doivent s'en retrouver grandement améliorées.

Moments et minimalité des états cohérents de spin

Dans cette annexe, nous calculons l'expression des deux premiers moments des opérateurs J_x , J_y et J_z pour les états cohérents $|\theta, \varphi\rangle$. Ces résultats nous permettront de démontrer que les états cohérents sont des états minimaux.

A.1 Opérateurs du point de vue passif

A partir de la définition d'un état cohérent Eq. (2.39), on constate que la valeur moyenne d'un opérateur A quelconque s'écrit :

$$\langle \theta, \varphi | A | \theta, \varphi \rangle = \langle J, -J | A(\theta, \varphi) | J, -J \rangle, \quad (\text{A.1})$$

où on a posé :

$$A(\theta, \varphi) = e^{i\theta J_y} e^{i\varphi J_z} A e^{-i\varphi J_z} e^{-i\theta J_y}. \quad (\text{A.2})$$

On prend donc ici un point de vue passif dans lequel le vecteur ne change pas, seule la base change [Delamotte 97]. L'intérêt de ce point de vue est qu'il nous suffit alors de calculer les valeurs de moments pour l'état $|J, -J\rangle$ afin de connaître ceux pour un état cohérent quelconque. Les opérateurs de spin prennent la forme suivante du point de vue passif :

$$J_x(\theta, \varphi) = \cos \theta \cos \varphi J_x + \sin \varphi J_y + \sin \theta \cos \varphi J_z, \quad (\text{A.3})$$

$$J_y(\theta, \varphi) = -\cos \theta \sin \varphi J_x + \cos \varphi J_y - \sin \theta \sin \varphi J_z, \quad (\text{A.4})$$

$$J_z(\theta, \varphi) = \sin \theta J_x + \cos \theta J_z. \quad (\text{A.5})$$

Pour le calcul des moments d'ordre deux, il nous sera aussi utile de connaître de carré de ces opérateurs :

$$\begin{aligned} J_x^2(\theta, \varphi) &= \cos^2 \theta \cos^2 \varphi J_x^2 + \sin^2 \varphi J_y^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi J_z^2 + \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi \{J_x, J_y\} \\ &\quad + \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi \{J_x, J_z\} + \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \{J_y, J_z\}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} J_y^2(\theta, \varphi) &= \cos^2 \theta \sin^2 \varphi J_x^2 + \cos^2 \varphi J_y^2 + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi J_z^2 - \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \{J_x, J_y\} \\ &\quad + \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi \{J_x, J_z\} - \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \{J_y, J_z\}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$J_z^2(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta J_x^2 + \cos^2 \theta J_z^2 + \sin \theta \cos \theta \{J_x, J_z\}, \quad (\text{A.8})$$

où $\{A, B\} = AB + BA$ désigne l'anti-commutateur entre les opérateurs A et B . Les produits croisés suivants seront aussi utilisés :

$$J_x J_y (\theta, \varphi) = -\cos \varphi \sin \varphi \left(\cos^2 \theta J_x^2 - J_y^2 + \sin^2 \theta J_z^2 \right) + \cos \theta \left(\cos^2 \varphi J_x J_y - \sin^2 \varphi J_y J_x \right) \\ + \sin \theta \left(\cos^2 \varphi J_z J_y - \sin^2 \varphi J_y J_z \right) - \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta \sin \theta \{J_x, J_z\}, \quad (\text{A.9})$$

$$J_x J_y (\theta, \varphi) = -\cos \varphi \sin \varphi \left(\cos^2 \theta J_x^2 - J_y^2 + \sin^2 \theta J_z^2 \right) + \cos \theta \left(\cos^2 \varphi J_y J_x - \sin^2 \varphi J_x J_y \right) \\ + \sin \theta \left(\cos^2 \varphi J_y J_z - \sin^2 \varphi J_z J_y \right) - \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta \sin \theta \{J_x, J_z\}. \quad (\text{A.10})$$

A.2 Calcul des moments

A.2.1 Moments d'ordre un

A l'aide des résultats suivants pour l'état $|J, -J\rangle$:

$$\langle J, -J | J_x | J, -J \rangle = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$\langle J, -J | J_y | J, -J \rangle = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\langle J, -J | J_z | J, -J \rangle = -J, \quad (\text{A.13})$$

on obtient l'expression des moment d'ordre un pour un état cohérent :

$$\langle J_x \rangle (\theta, \varphi) = -J \sin \theta \cos \varphi, \quad (\text{A.14})$$

$$\langle J_y \rangle (\theta, \varphi) = J \sin \theta \sin \varphi, \quad (\text{A.15})$$

$$\langle J_z \rangle (\theta, \varphi) = -J \cos \theta. \quad (\text{A.16})$$

A.2.2 Moments d'ordre deux

A.2.2.1 Moments de l'état $|J, -J\rangle$

On a les résultats suivants pour l'état $|J, -J\rangle$:

$$\langle J, -J | J_x^2 | J, -J \rangle = J/2, \quad (\text{A.17})$$

$$\langle J, -J | J_y^2 | J, -J \rangle = J/2, \quad (\text{A.18})$$

$$\langle J, -J | J_z^2 | J, -J \rangle = J^2, \quad (\text{A.19})$$

de plus, pour les moments croisés on a :

$$\langle J, -J | J_x J_y | J, -J \rangle = -\langle J, -J | J_y J_x | J, -J \rangle = -iJ/2, \quad (\text{A.20})$$

$$\langle J, -J | J_y J_z | J, -J \rangle = \langle J, -J | J_z J_y | J, -J \rangle = 0, \quad (\text{A.21})$$

$$\langle J, -J | J_x J_z | J, -J \rangle = \langle J, -J | J_z J_x | J, -J \rangle = 0, \quad (\text{A.22})$$

par conséquent, la valeur moyenne des anti-commutateurs vérifie pour $i \neq j$:

$$\langle J, -J | \{J_i, J_j\} | J, -J \rangle = 0. \quad (\text{A.23})$$

A.2.2.2 Variances

On obtient alors les moments d'ordre deux pour un état cohérent :

$$\langle J_x^2 \rangle (\theta, \varphi) = \frac{J}{2} \left(\sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \right) + J^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi, \quad (\text{A.24})$$

$$\langle J_y^2 \rangle (\theta, \varphi) = \frac{J}{2} \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \right) + J^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi, \quad (\text{A.25})$$

$$\langle J_z^2 \rangle (\theta, \varphi) = \frac{J}{2} \sin^2 \theta + J^2 \cos^2 \theta. \quad (\text{A.26})$$

Ce qui donne finalement la variance des opérateurs de spin pour un état cohérent $|\theta, \varphi\rangle$ quelconque :

$$\Delta J_x^2(\theta, \varphi) = \frac{J}{2} \left(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi\right), \quad (\text{A.27})$$

$$\Delta J_y^2(\theta, \varphi) = \frac{J}{2} \left(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi\right), \quad (\text{A.28})$$

$$\Delta J_z^2(\theta, \varphi) = \frac{J}{2} \sin^2 \theta. \quad (\text{A.29})$$

A.2.2.3 Covariances

La covariance entre deux opérateurs A et B est donnée par :

$$\text{cov}(A, B) = \frac{1}{2} \langle \{A, B\} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle. \quad (\text{A.30})$$

A titre d'exemple, nous calculons la covariance entre les opérateurs J_x et J_y . Il convient donc d'évaluer tout d'abord la moyenne des anti-commutateurs pour l'état cohérent $|\theta, \varphi\rangle$:

$$\langle \{J_x(\theta, \varphi), J_y(\theta, \varphi)\} \rangle = -2J \left(J - \frac{1}{2}\right) \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi, \quad (\text{A.31})$$

avant d'obtenir l'expression de la covariance :

$$\text{cov}(J_x(\theta, \varphi), J_y(\theta, \varphi)) = \frac{J}{2} \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi. \quad (\text{A.32})$$

A.3 Minimalité des états cohérents

A.3.1 Relations d'incertitude

La relation d'incertitude la plus générale est donnée par l'*inégalité de Schrödinger-Robertson* [Schrödinger 30], soient A et B deux opérateurs hermitiques :

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \frac{1}{4} | \langle [A, B] \rangle |^2 + \text{cov}(A, B)^2, \quad (\text{A.33})$$

de par la positivité du terme $\text{cov}(A, B)^2$, l'inégalité de Schrödinger-Robertson implique l'inégalité plus faible suivante :

$$\Delta A^2 \Delta B^2 \geq \frac{1}{4} | \langle [A, B] \rangle |^2, \quad (\text{A.34})$$

qui est usuelle appelée inégalité de Heisenberg (bien qu'elle fût en fait dérivée par Robertson [Robertson 29]).

Dans le cas où les observables du système sont les opérateurs collectifs de spins J_x , J_y et J_z , trois relations d'incertitude apparaissent :

$$\Delta J_x^2 \Delta J_y^2 \geq \frac{1}{4} \langle J_z \rangle^2 + \text{cov}(J_x, J_y)^2, \quad (\text{A.35})$$

$$\Delta J_y^2 \Delta J_z^2 \geq \frac{1}{4} \langle J_x \rangle^2 + \text{cov}(J_y, J_z)^2, \quad (\text{A.36})$$

$$\Delta J_x^2 \Delta J_z^2 \geq \frac{1}{4} \langle J_y \rangle^2 + \text{cov}(J_x, J_z)^2. \quad (\text{A.37})$$

A.3.2 Les états cohérents de spin sont minimaux

Un état collectif de spins est minimal s'il vérifie le cas de l'égalité pour les trois inégalités de Schrödinger-Robertson associées aux opérateurs collectifs de spins. Nous allons vérifier la première inégalité Eq. (A.35). Calculons tout d'abord le produit des variances à partir des relations Eqs. (A.27) et (A.28) :

$$\Delta J_x^2 \Delta J_y^2 = \frac{J^2}{4} \left(\cos^2 \theta + \sin^4 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right), \quad (\text{A.38})$$

on peut alors les comparer au membre de droite de l'inégalité de Schrödinger-Robertson Eq. (A.35) :

$$\frac{1}{4} \langle J_z \rangle^2 + \text{cov}(J_x, J_y)^2 = \frac{J^2}{4} \cos^2 \theta + \left(\frac{J}{2} \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi \right)^2. \quad (\text{A.39})$$

On constate alors immédiatement que ces expressions sont égales au résultat obtenu pour le produit des variances, les états cohérents de spins sont donc des états minimaux.

Description quantique du modulateur électro-optique

Nous présentons dans cette annexe une modélisation simple du modulateur de phase électro-optique en régime quantique, un modèle plus complet pourra être trouvé dans [Capmany 10]. Nous montrons en particulier que, en analogie avec la lame séparatrice spatiale, le modulateur à bande latérale unique peut être considéré comme une lame séparatrice spectrale. Cette constatation nous permet d'utiliser le formalisme des systèmes à deux niveaux pour traiter le problème. Puisque dans la majorité des cas, le modulateur produit non pas une mais deux bandes latérales, nous présentons une généralisation de la séparatrice adaptée à cette situation.

B.1 Effet Pockels et Hamiltonien d'interaction

Le modulateur électro-optique repose sur l'effet Pockels, il s'agit d'un effet non-linéaire du second ordre auquel est associée la polarisabilité tensorielle suivante :

$$\mathbf{P}^{(2)}(\omega_0 + \Omega) = \epsilon_0 \chi^{(2)}(\omega_0; \Omega) \mathbf{E}_m(\Omega) \mathbf{E}_0(\omega_0), \quad (\text{B.1})$$

où \mathbf{E}_0 est le champ électrique incident à la pulsation ω_0 et \mathbf{E}_m est le champ radio-fréquence utilisé pour la modulation de fréquence $\Omega \ll \omega_0$, il est donc considéré comme un champ quasi-statique. Ce processus du second ordre induit un champ optique \mathbf{E}_1 à la fréquence ω_1 , l'interaction est alors décrite par l'hamiltonien suivant :

$$H_I = -\frac{\epsilon_0}{2} \Delta V \chi^{(2)}(\omega_0; \Omega) \mathbf{E}_m(\Omega) \mathbf{E}_0(\omega_0) \mathbf{E}_1(\omega_1), \quad (\text{B.2})$$

où $\Delta V \gg \lambda^3$ est le volume d'interaction. Après quantification des champs électromagnétiques :

$$\hat{\mathbf{E}}_k = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}} \left(a_k e^{i\mathbf{k}_k \cdot \mathbf{r} - i\omega_k t} - a_k^\dagger e^{-i\mathbf{k}_k \cdot \mathbf{r} + i\omega_k t} \right), \quad (\text{B.3})$$

et en ne gardant que les termes qui conservent l'impulsion et l'énergie lors du processus considéré :

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0 + \mathbf{K} \quad (\text{B.4})$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \Omega, \quad (\text{B.5})$$

le hamiltonien d'interaction prend la forme suivante, dont on constate immédiatement qu'elle est hermitique :

$$H_I = i\hbar g \left(a_m^\dagger a_0^\dagger a_1 - a_m a_0 a_1^\dagger \right). \quad (\text{B.6})$$

Deux processus sont associés à cet hamiltonien : l'un abaisse la fréquence de la porteuse optique, il s'agit de l'effet de rectification optique, l'autre augmente la fréquence de la porteuse, il s'agit de l'effet Pockels à proprement parler. Ces processus sont représentés par les diagrammes Fig. B.1.

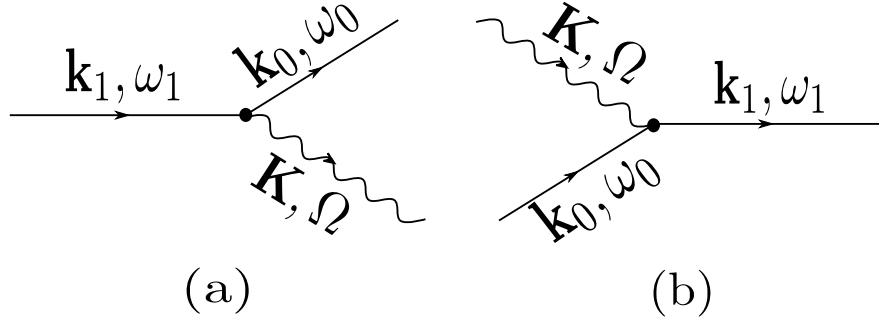


Figure B.1 – Diagrammes associés aux deux processus d'interaction. Les lignes droites représentent les photons optiques et les lignes ondulées les photons radio-fréquences. (a) Rectification optique. (b) Effet Pockels.

B.2 Modulation de phase d'un photon unique

Maintenant que nous connaissons l'expression de l'hamiltonien d'interaction, on peut calculer l'évolution d'un état quelconque du champ électromagnétique à travers le modulateur électro-optique. En particulier, on peut étudier comment évolue un photon unique.

L'évolution d'un état optique incident $|\psi_{\text{in}}\rangle$ à travers le cristal non-linéaire s'écrit :

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = e^{-iH_{\text{Int}}t/\hbar} |\psi_{\text{in}}\rangle, \quad (\text{B.7})$$

où $t = nL/c$ est le temps de propagation dans le cristal, n étant l'indice du cristal et L sa longueur. Dans la limite de couplage faible ($gt \ll 1$), il vient :

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = \left[\mathbb{1} + gt \left(a_m^\dagger a_0^\dagger a_1 - a_m a_0 a_1^\dagger \right) \right] |\psi_{\text{in}}\rangle. \quad (\text{B.8})$$

Si le champ radio-fréquence qui module le cristal est dans un état cohérent $|\alpha_m\rangle$, et si le champ optique est dans un état de Fock composé d'un photon unique, alors $|\psi_{\text{in}}\rangle = |\alpha_m, 1_0, 0_1\rangle$, et le champ en sortie du cristal est :

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = |\alpha_m\rangle \otimes (|1_0, 0_1\rangle + \eta |0_0, 1_1\rangle), \quad (\text{B.9})$$

où $\eta = gnL\alpha_m/c$ est la profondeur de modulation. On constate alors que le photon initialement dans le mode à ω_0 se retrouve dans une superposition des modes à ω_0 et ω_1 , le modulateur se comporte donc comme une « séparatrice » pour des modes *spectraux* (là où une séparatrice au sens ordinaire du terme agit sur les modes spatiaux). Nous allons préciser cette idée au paragraphe suivant.

B.3 Le modulateur électro-optique vu comme une séparatrice spectrale

B.3.1 Rappel : la séparatrice spatiale

Nous commençons par rappeler ce qu'est une lame séparatrice pour les modes spatiaux du champ électromagnétique, *i.e.* la séparatrice « usuelle » que l'on rencontre notamment dans

l'interféromètre de Mach-Zehnder. Une lame séparatrice est modélisée comme l'interface entre deux diélectriques d'indices de réfraction n_1 et n_2 , en d'autres termes, il s'agit d'un dioptre (voir Fig. B.2).

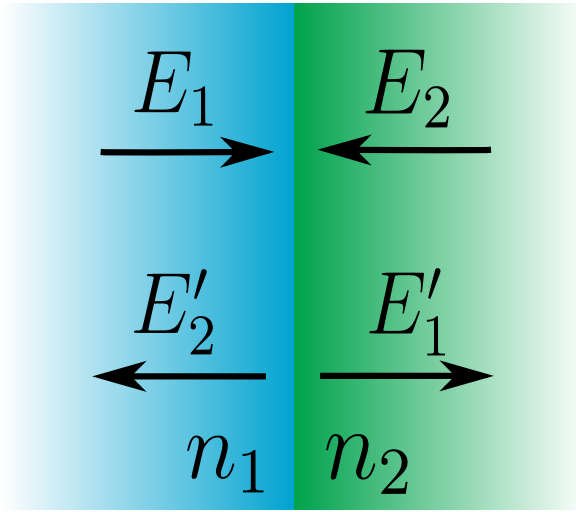


Figure B.2 – Modélisation d'une lame séparatrice spatiale par une interface entre deux milieux diélectriques.

Les deux champs incidents sur la séparatrice seront notés E_1 et E_2 , les champs en sortie seront E'_1 et E'_2 , ils sont reliés aux champs d'entrée par la matrice de transfert :

$$\begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & r_2 \\ r_1 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Pour des raisons de simplicité, nous supposons que les champs sont en incidence normale sur le dioptre et nous considérerons de plus une onde polarisée transverse magnétique. Les coefficients de la matrice de transfert sont alors obtenus grâce aux relations de Fresnel [Jackson 98, p. 305] :

$$\begin{pmatrix} t_1 & r_2 \\ r_1 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2n_1}{n_2+n_1} & \frac{n_1-n_2}{n_2+n_1} \\ \frac{n_2-n_1}{n_2+n_1} & \frac{2n_2}{n_2+n_1} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

On constate alors que le coefficient de transmission est différent selon que l'onde passe d'un indice fort vers un indice faible ou réciproquement. De plus, on a $r_1 = -r_2$, l'onde passant d'un indice faible vers un indice fort subit donc un déphasage de π à la réflexion, ce qui n'est pas le cas pour l'onde passant d'un indice fort vers un indice faible.

Dans le cas où le milieu est non-absorbant, la conservation de l'énergie impose :

$$r_1^2 + t_1^2 = 1, \quad (\text{B.12})$$

$$r_2^2 + t_2^2 = 1. \quad (\text{B.13})$$

On introduisant les angles θ_1 et θ_2 tels que :

$$r_1 = \sin \theta_1, \quad t_1 = \cos \theta_1, \quad (\text{B.14})$$

$$r_2 = \sin \theta_2, \quad t_2 = \cos \theta_2, \quad (\text{B.15})$$

la relation $r_1 = -r_2$ nous permet de poser $\theta \equiv \theta_1 = -\theta_2$, la relation de transfert prend alors la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

L'action d'une séparatrice spatiale est donc représentée par une transformation de $SU(2)$, par conséquent, le couple (E_1, E_2) est un spineur.

B.3.2 Une séparatrice spectrale

En supposant que le champ radio-fréquence de modulation soit un champ classique d'amplitude α_m dont nous fixons de manière arbitraire la phase initiale à zéro, le hamiltonien d'interaction Eq. (B.6) devient :

$$H_I = i\hbar g \alpha_m (a_0^\dagger a_1 - a_0 a_1^\dagger). \quad (\text{B.17})$$

On peut construire les opérateurs de spin suivants qui agissent sur un état du champ électromagnétique :

$$S_x = \frac{1}{2} (a_0^\dagger a_1 + a_0 a_1^\dagger), \quad (\text{B.18})$$

$$S_y = -\frac{i}{2} (a_0^\dagger a_1 - a_0 a_1^\dagger), \quad (\text{B.19})$$

$$S_z = \frac{1}{2} (a_0^\dagger a_0 + a_1^\dagger a_1), \quad (\text{B.20})$$

ils vérifient les relations de commutation de SU(2), $[S_i, S_j] = 2i\epsilon_{ijk} S_k$. L'hamiltonien Eq. (B.17) peut alors être réécrit à l'aide de ces opérateurs :

$$H_I = -2\hbar g \alpha_m S_y. \quad (\text{B.21})$$

L'évolution à travers le cristal non-linéaire prend alors la forme :

$$B = e^{iH_I t/\hbar} = e^{-i2gt\alpha_m S_y}, \quad (\text{B.22})$$

en notant $\theta \equiv 2gt\alpha_m$ l'angle de rotation, on obtient finalement :

$$B = e^{-i\theta S_y} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{B.23})$$

ce qui correspond à la matrice de transfert d'une lame séparatrice. Le modulateur électro-optique à bande latérale unique peut donc être considéré comme une séparatrice entre deux modes spectraux du champ électromagnétique.

Notons toutefois que l'expression précédente n'est en pratique valable que dans la limite $\theta \ll 1$ puisque si l'excitation α_m est importante, plusieurs ordres seront excités, en conséquence de quoi le modèle à deux niveaux n'aura plus de sens.

B.4 Généralisation au cas d'une modulation avec deux bandes latérales

Dans la majorité des cas, le modulateur de phase génère deux bandes latérales autour de la porteuse. On peut étendre l'analyse précédente en introduisant un mode optique supplémentaire d'impulsion $\mathbf{k}_{-1} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{K}$ et de fréquence $\omega_{-1} = \omega_0 - \Omega$. L'hamiltonien va en plus des interactions précédentes faire intervenir la rectification optique et l'effet Pockels entre les modes (0), (-1) et (Ω) :

$$H_I = i\hbar g (a_m^\dagger a_0^\dagger a_1 - a_m a_0 a_1^\dagger + a_m^\dagger a_0 a_{-1}^\dagger - a_m a_0^\dagger a_{-1}). \quad (\text{B.24})$$

Les différents processus associés à cet hamiltonien sont représentés Fig. B.3.

Supposons maintenant que la modulation rf s'effectue à l'aide d'un champ quasi-classique d'amplitude α_m , l'hamiltonien d'interaction devient alors :

$$H_I = i\hbar g \alpha_m (a_0^\dagger a_1 - a_0 a_1^\dagger + a_0 a_{-1}^\dagger - a_0^\dagger a_{-1}). \quad (\text{B.25})$$

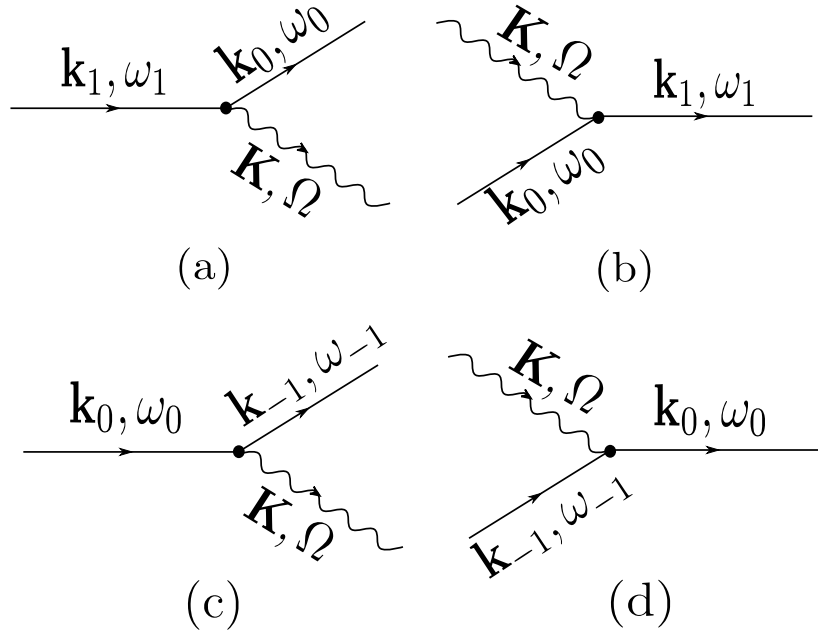


Figure B.3 – Diagrammes dans le cas d'une modulation à deux bandes latérales. (a) et (c) Rectification optique. (b) et (d) Effet Pockels.

On est alors dans le cas d'un système quantique à trois niveaux, autrement dit, un *qutrit*. L'évolution d'un tel système est régie par le groupe de transformations $SU(3)$. Ce groupe possède 8 axes de rotation. Les générateurs infinitésimaux des rotations de $SU(3)$ sont appelés *matrices de Gell-Mann*¹ :

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, & & (B.26)
 \end{aligned}$$

L'hamiltonien peut alors se réécrire comme :

$$H_I = \hbar g \alpha_m (\lambda_2 + \lambda_5). \quad (B.27)$$

L'opérateur d'évolution à travers le cristal non linéaire est :

$$U(\theta) = e^{i\theta(\lambda_2 + \lambda_5)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \cos(\sqrt{2}\theta) & \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}\theta) & \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}\theta) \\ -\sqrt{2} \sin(\sqrt{2}\theta) & \cos(\sqrt{2}\theta) + 1 & \cos(\sqrt{2}\theta) - 1 \\ -\sqrt{2} \sin(\sqrt{2}\theta) & \cos(\sqrt{2}\theta) - 1 & \cos(\sqrt{2}\theta) + 1 \end{pmatrix}, \quad (B.28)$$

avec $\theta \equiv g \alpha_m t$.

1. Les matrices de Gell-Mann sont pour $SU(3)$ ce que les matrices de Pauli sont pour $SU(2)$. Elles ont initialement été introduites par Gell-Mann pour décrire le modèle des quarks [Gell-Mann 67]

Systemes ouverts en mécanique quantique

C.1 Systemes ouverts en mécanique quantique

Un système physique n'est jamais seul, il ne peut jamais être isolé d'autres systèmes. Prenons un cas *a priori* simple, un atome seul dans le vide, on pourrait penser qu'il s'agit là d'un système isolé et qu'une description du système fermé que constitue l'atome suffit à prédire les propriétés du système. Néanmoins, le vide quantique n'est pas vide, et le couplage de l'atome au continuum du champ électromagnétique va induire de l'émission spontanée, phénomène qui n'est pas explicable par la considération du système atome seul. Il semble d'ailleurs bien difficile de définir l'atome en dehors de tout champ électro-magnétique¹.

Si le couplage d'un système quantique à d'autres systèmes, que nous appellerons *environnement*, est *a priori* une limitation que l'expérimentateur se doit de contrôler au mieux afin d'utiliser des systèmes quantiques, il est des cas où ce couplage est souhaité. Prenons l'exemple du laser, pour être utile il doit émettre de la lumière, on doit donc extraire des photons du résonateur *i.e.* coupler le mode intracavité au continuum de modes à l'extérieur ; le laser doit donc intrinsèquement être décrit comme un système ouvert.

Il existe diverses méthodes pour modéliser les systèmes quantiques ouverts : équations maîtresses, équations de Bloch, équations différentielles stochastiques, etc. Nous allons présenter ici le formalisme des *opérations quantiques*, il s'agit d'un formalisme relativement abstrait mais très pratique à des fins calculatoires. La présentation qui est faite ici s'inspire grandement de [Nielsen 00] auquel on pourra se reporter pour obtenir de plus amples détails.

Si un système quantique est décrit par l'opérateur densité ρ à un instant donné, on peut traduire l'évolution du système par une transformation de l'opérateur densité qui s'écrit d'une manière très générale :

$$\rho' = \mathcal{E}(\rho). \quad (\text{C.1})$$

L'application \mathcal{E} est dite une *opération quantique*, c'est un super-opérateur *i.e.* un endomorphisme sur l'espace des opérateurs densités. Par exemple, l'évolution unitaire d'un système gouvernée par l'équation de Schrödinger $U = \exp(iHt)$, où H est le hamiltonien, s'écrit $\rho' = U\rho U^\dagger$; ou bien encore l'évolution sous l'effet d'une *mesure généralisée* prend la forme $\rho' = M_n \rho M_n^\dagger$. Nous allons voir que la forme Eq. (C.1) permet de décrire des évolutions très générales, elle ne se limite

1. Nous pourrions même simplifier plus le problème en considérant simplement un électron dans le vide, du fait de sa charge l'électron est habillé par des photons et n'est donc jamais seul. Cet « habit de lumière » renormalise sa masse : c'est le déplacement de Lamb.

pas à décrire une évolution unitaire et une mesure mais permet aussi de modéliser l'évolution d'un système ouvert.

Nous modélisons un système ouvert par la combinaison de deux systèmes : le système à proprement parler décrit par un opérateur densité ρ et dont on cherche à déterminer l'évolution, et l'environnement décrit par l'opérateur ρ_{env} . On considère maintenant l'évolution du système global (système-environnement) qui est fermé, puisque par définition il n'y a pas de système plus large que l'environnement. On suppose que l'état initial est séparé $\sigma = \rho \otimes \rho_{\text{env}}$, lors d'une évolution unitaire U l'état devient $\sigma' = U\sigma U^\dagger$, on obtient alors l'état du système en calculant la trace partielle [Nielsen 00, p. 105] sur l'environnement $\rho' = \text{Tr}_{\text{env}}(\sigma')$, autrement dit :

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_{\text{env}} \left[U (\rho \otimes \rho_{\text{env}}) U^\dagger \right]. \quad (\text{C.2})$$

Soit $\{|e_k\rangle\}$ une base de l'espace de Hilbert associé à l'environnement, si ce dernier est initialement dans l'état $\rho_{\text{env}} = |e_0\rangle\langle e_0|$ alors la relation Eq. (C.2) devient :

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_k \langle e_k | U [\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|] U^\dagger |e_k\rangle = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger, \quad (\text{C.3})$$

où on a posé $E_k \equiv \langle e_k | U |e_0\rangle$. La forme prise par l'Eq. (C.3) est dite *décomposition de Kraus* de l'opération quantique \mathcal{E} . Les opérateurs E_k sont appelés les *générateurs* ou bien les *opérateurs de Kraus* du super-opérateur \mathcal{E} . Puisque la trace de l'opérateur densité doit être conservée $\text{Tr}(\mathcal{E}(\rho)) = 1$, les opérateurs de Kraus doivent vérifier la relation de complétude :

$$\sum_k E_k^\dagger E_k = \mathbb{1}. \quad (\text{C.4})$$

On remarque que les opérateurs de mesure tels que définis Sec. 1.1 par le postulat de la mesure généralisée vérifient aussi une relation de complétude Eq. 1.1, les opérateurs de mesure sont donc des opérateurs de Kraus².

La décomposition Eq. (C.3) est une forme extrêmement générale, cette forme est de plus très pratique pour calculer l'évolution d'un système, comme nous aurons l'occasion de le constater Sec. 4.1. Toutefois, si on sait qu'une telle décomposition existe, on ne connaît pas pour autant l'expression des opérateurs de Kraus E_k . Si le couplage entre le système et l'environnement est décrit par le hamiltonien $H = gA_S \otimes A_{\text{env}}$, où A_S (A_{env}) est un opérateur agissant sur le système (environnement) et g est l'intensité du couplage, alors les opérateurs de Kraus sont obtenus par le calcul de $E_k = \langle e_k | \exp(igA_S \otimes A_{\text{env}}t) |e_0\rangle$. Cette démarche est très similaire à celle utilisée pour l'obtention des équations pilotes [Cohen-Tannoudji 01, p. 250] : on considère l'évolution de l'ensemble fermé système-environnement avant de prendre la trace partielle sur l'environnement.

2. Qu'en est-il de la réciproque ?

Conception de l'électronique d'un photodétecteur

Le photodétecteur est un composant critique dans tout système optronique, une mauvaise conception de ce dernier conduira souvent à une bien piètre qualité du système. Une erreur courante est de négliger le rapport signal-à-bruit afin d'augmenter la bande-passante. Nous allons dans cette annexe essayer de présenter rapidement quelques principes à connaître pour la conception d'un photodétecteur performant. Pour une étude plus détaillée présentant d'autres montages, on pourra consulter [Hobbs 01].

D.1 Photodiode

Dans sa version simple, une photodiode est composée d'une jonction $p-n$ à l'interface de laquelle une zone de charge d'espace apparaît. Si un photon avec une énergie supérieure à la largeur de la bande interdite du semi-conducteur arrive dans la jonction, il peut être absorbé et ainsi générer une paire électron-trou qui est dissociée par le champ électrique de la zone de charge d'espace. Un courant dépendant du flux lumineux incident traverse alors la diode.

Une photodiode peut être modélisée (Fig. D.1) de manière simple comme une source de courant I_{ph} contrôlée par le flux lumineux incident $I_{ph} = SP_{opt}$ où S est la sensibilité de la photodiode, généralement exprimée en A/W.

En parallèle de la source de courant, une capacité C_p modélise la capacité de la jonction, elle est proportionnelle à la surface active de la photodiode. Pour les photodiodes rapides, la capacité $C_p \sim 0.1$ pF est souvent limitée par la capacité parasite du boîtier.

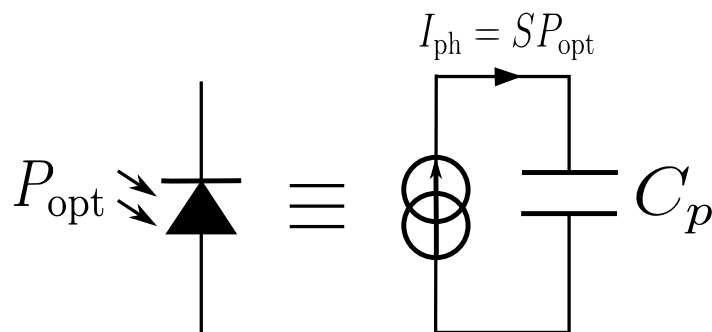


Figure D.1 – Schéma équivalent d'une photodiode

On peut modéliser le bruit de photon comme une source de courant aléatoire d'écart-type :

$$i_n^{\text{ph}} = \sqrt{2eI_{\text{ph}}} = \sqrt{2eSP_{\text{opt}}} \quad (\text{A}/\sqrt{\text{Hz}}). \quad (\text{D.1})$$

Il faut aussi considérer le bruit intrinsèque de la photodiode, néanmoins, dans la majorité des cas, celui-ci est négligeable comparé au bruit thermique de la résistance du transimpédance. Les photodiodes à avalanche constituent toutefois une exception notable, le processus d'avalanche produisant un bruit intrinsèque plus important, mais en échange la sensibilité de la photodiode est supérieure. Ce bruit est habituellement donné en puissance optique équivalente au bruit : NEP (pour *Noise Equivalent Power*) dont l'unité est le W/Hz, le bruit de courant associé est alors donné par :

$$i_n^{\text{det}} = S \text{ NEP}. \quad (\text{D.2})$$

D.2 L'amplificateur transimpédance

D.2.1 Avec une résistance

La solution la plus simple pour réaliser une conversion transimpédance consiste à placer une résistance R_F en série avec la photodiode Fig. D.2. On obtient alors aux bornes de la résistance une tension proportionnelle au photocourant et donc au flux lumineux incident sur la photodiode, $V_{\text{ph}} = R_F I_{\text{ph}} = R_F SP_{\text{opt}}$. La bande passante de ce montage est :

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_F C_p}. \quad (\text{D.3})$$

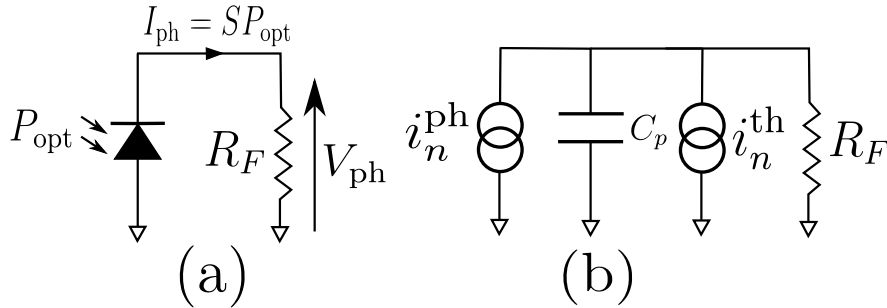


Figure D.2 – Montage transimpédance à l'aide d'une résistance. (a) Schéma du montage. (b) Modélisation des sources de bruit.

Afin d'étudier le bruit de ce montage, il faut considérer le bruit thermique (ou bruit de Johnson) dans la résistance R_F :

$$i_n^{\text{th}} = \sqrt{4kT/R_F} \quad (\text{A}/\sqrt{\text{Hz}}), \quad (\text{D.4})$$

où T est la température de la résistance (en Kelvin) et k la constante de Boltzmann. Le détecteur est limité au bruit de photon si $i_n^{\text{ph}} > i_n^{\text{th}}$ (on néglige le bruit de la photodiode), *i.e.* si :

$$V_{\text{ph}} > \frac{4kT}{2e}, \quad (\text{D.5})$$

pour $T = 300$ K, il faut $V_{\text{ph}} > 52$ mV ce qui constitue un critère très utile en pratique.

D.2.2 Montage à amplificateur opérationnel

Afin d'augmenter la bande-passante tout en conservant le rapport signal-à-bruit, on utilise la masse virtuelle d'un amplificateur opérationnel pour « court-circuiter » la capacité parasite de la photodiode. Le schéma du montage est présenté Fig. D.3.

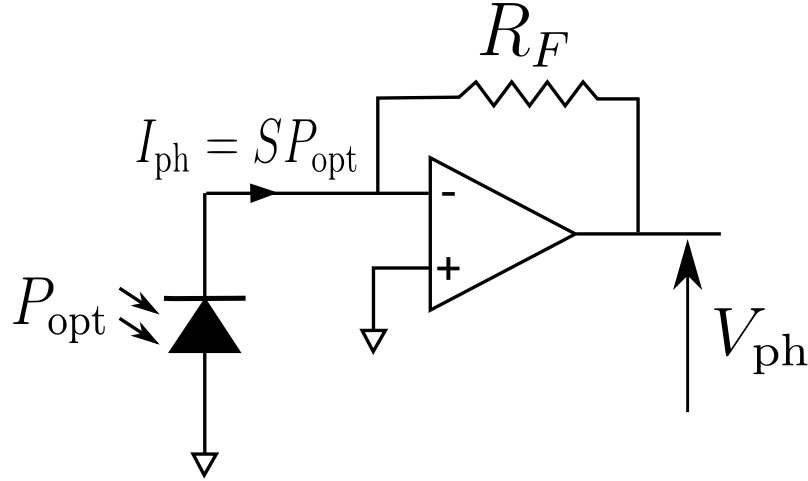


Figure D.3 – Montage transimpédance à amplificateur opérationnel.

La bande-passante de ce montage est donnée par :

$$f_c = \sqrt{\frac{\text{GBP}}{2\pi R_F C_t}}, \quad (\text{D.6})$$

où GBP est le produit gain-bande de l'amplificateur opérationnel et $C_t = C_p + C_{\text{amp}}$ est la capacité totale incluant celle de la photodiode et la capacité parasite d'entrée de l'amplificateur. Le gain transimpédance R_F en fonction de la fréquence f est alors donné par un filtre passe-bas du premier ordre :

$$R_F(f) = \frac{R_F(0)}{1 + (f/f_c)^2}. \quad (\text{D.7})$$

Lors de l'analyse des bruits, il faut, en plus du bruit de photon et du bruit thermique de la résistance, prendre en compte les bruits d'entrée de courant i_n^{amp} et de tension v_n^{amp} de l'amplificateur. La modélisation des sources de bruit pour le montage transimpédance à amplificateur opérationnel est présentée Fig. D.4.

Il est intéressant de constater que le bruit de tension de l'amplificateur n'est pas blanc en sortie. En effet, on peut évaluer la contribution du bruit de tension à l'aide du théorème de Millman :

$$v_n^{\text{amp}} = \frac{v_n^{\text{out,amp}}/R_F}{1/R_F + j2\pi C_t f}, \quad (\text{D.8})$$

où f est la bande passante de détection. On obtient alors la variance du bruit de tension de l'amplificateur en sortie :

$$\left(v_n^{\text{out,amp}}\right)^2 = \left[1 + (2\pi R_F C_t f)^2\right] \left(v_n^{\text{amp}}\right)^2. \quad (\text{D.9})$$

Les différentes contributions au bruit étant *a priori* indépendantes, le bruit de tension total en sortie est donné par somme incohérente des variances :

$$v_n^{\text{out}} = \sqrt{\left(R_F i_n^{\text{ph}}\right)^2 + \left(R_F i_n^{\text{th}}\right)^2 + \left(R_F i_n^{\text{amp}}\right)^2 + \left[1 + (2\pi R_F C_t f)^2\right] \left(v_n^{\text{amp}}\right)^2}. \quad (\text{D.10})$$

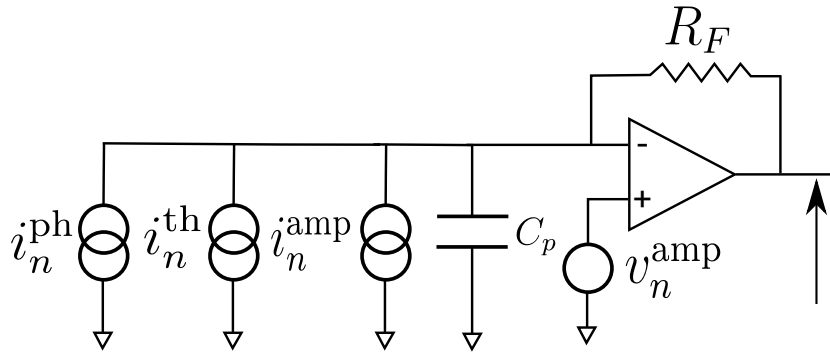


Figure D.4 – Analyse des bruits du montage transimpédance à amplificateur opérationnel (le bruit intrinsèque de la photodiode est négligé ici).

D.2.3 Quelques exemples

D.2.3.1 Détection d'atomes par fluorescence

Supposons que l'on veuille mesurer par fluorescence un nombre d'atomes. Considérons que le flux optique soit d'environ 10 nW et que l'on désire une bande passante de l'ordre de 100 kHz. Avec une résistance de 20 M Ω , on obtiendra une tension d'environ 200 mV (pour une sensibilité $S \sim 1$ A/W), on devrait donc être limité au bruit de photon d'après le critère Eq. (D.5). La résistance étant supérieure à 100 k Ω , on privilégiera un amplificateur opérationnel avec entrée FET étant donné leur très forte impédance d'entrée. Prenons le THS4601, il possède un produit gain bande de 180 MHz. L'analyse des bruits avec une photodiode S5972 à 780 nm de chez Hamamatsu ($S = 0.55$, $C_p = 3$ pF, $NEP = 3.1 \cdot 10^{-15}$ W/Hz) est présentée Fig. D.5.

D.2.3.2 Détection d'une modulation radio-fréquence

Une autre application typique est la détection d'une modulation radio-fréquence sur une porteuse optique. Contrairement à la détection de fluorescence, on dispose généralement dans ce cas d'une puissance optique importante (~ 1 mW), la difficulté réside alors dans la grande bande-passante de détection nécessaire. Supposons que l'on désire détecter un battement à 100 MHz avec 100 μ W de puissance optique : un amplificateur opérationnel de choix pour ce type d'application est l'OPA847 qui possède un important produit gain-bande de 3.9 GHz. L'analyse des bruits avec une photodiode S5972 et un gain transimpédance de 12 k Ω est présentée Fig. D.6.

Pour la conception du circuit, on prendra soin de minimiser la longueur de toutes les pistes et particulièrement entre la photodiode et l'entrée de l'amplificateur opérationnel afin de limiter les capacités et inductances parasites. On mettra aussi 50 Ω en série en sortie de l'amplificateur pour protéger ce dernier et adapter l'impédance du câble coaxial. Enfin, un plan de masse est nécessaire de chaque côté de la carte, les deux plans de masse devant être connectés par un nombre suffisant de vias pour minimiser les inductances parasites.

D.2.3.3 Détection hyperfréquence

Pour la détection à des fréquences micro-onde (> 1 GHz), la capacité parasite du boîtier de la photodiode devient très limitante. On privilégiera alors un montage constitué d'une simple résistance en série avec la photodiode. Les valeurs de la résistance doivent être faibles (10-50 Ω), il sera donc difficile d'avoir une détection limitée au bruit de photon pour des puissances n'excédant pas la limite de saturation de la photodiode (usuellement quelques mW). Une méthode simple

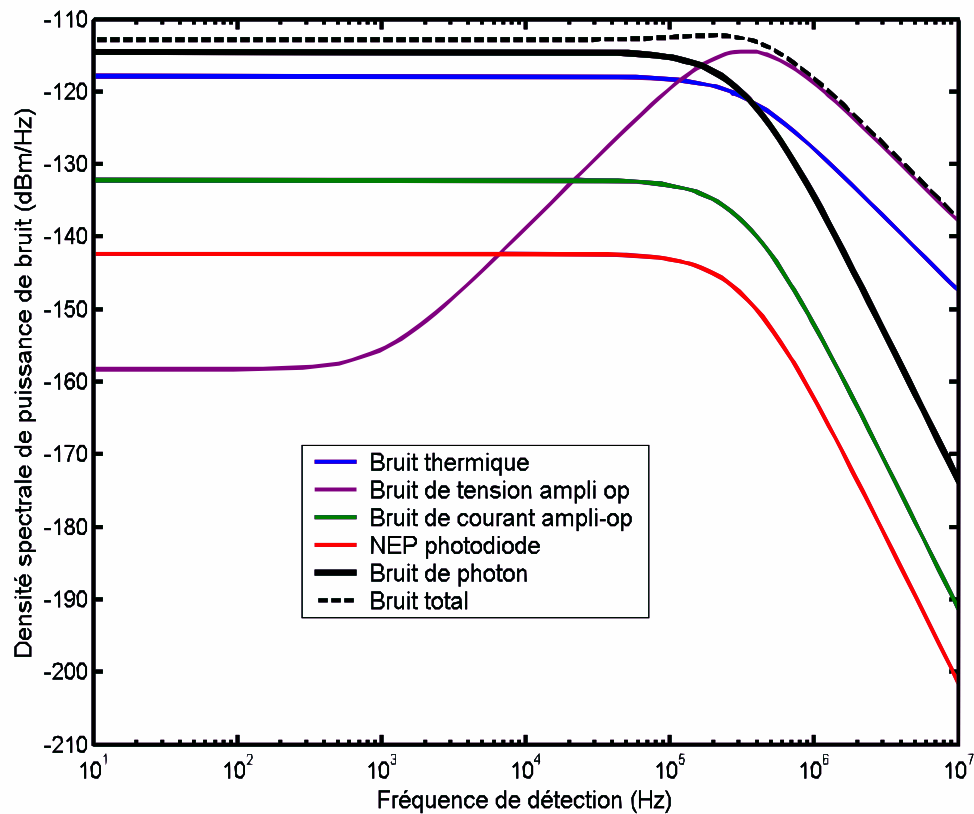


Figure D.5 – Différentes contributions de bruit du montage transimpédance pour la détection par fluorescence avec un THS4601. Les bruits sont donnés en puissance sur une résistance de 50 Ω . Le détecteur est limité au bruit de photon sur environ 200 kHz pour 10 nW de puissance optique incidente. Les bruits de tension en $1/f$ de l'amplificateur en dessous de 1 kHz ne sont pas pris en compte dans cette étude.

consiste à connecter une photodiode rapide directement à un amplificateur hyperfréquence, les 50 Ω d'impédance d'entrée de ce dernier servant alors de gain transimpédance.

Si l'on désire un gain transimpédance plus important afin d'améliorer le rapport signal-à-bruit, il faut opter pour une photodiode avec amplificateur transimpédance intégré, l'intégration de l'amplificateur dans le même boîtier que la photodiode réduisant fortement les capacités parasites (~ 100 fF), ce qui permet d'augmenter le gain transimpédance à des valeurs de l'ordre du k Ω .

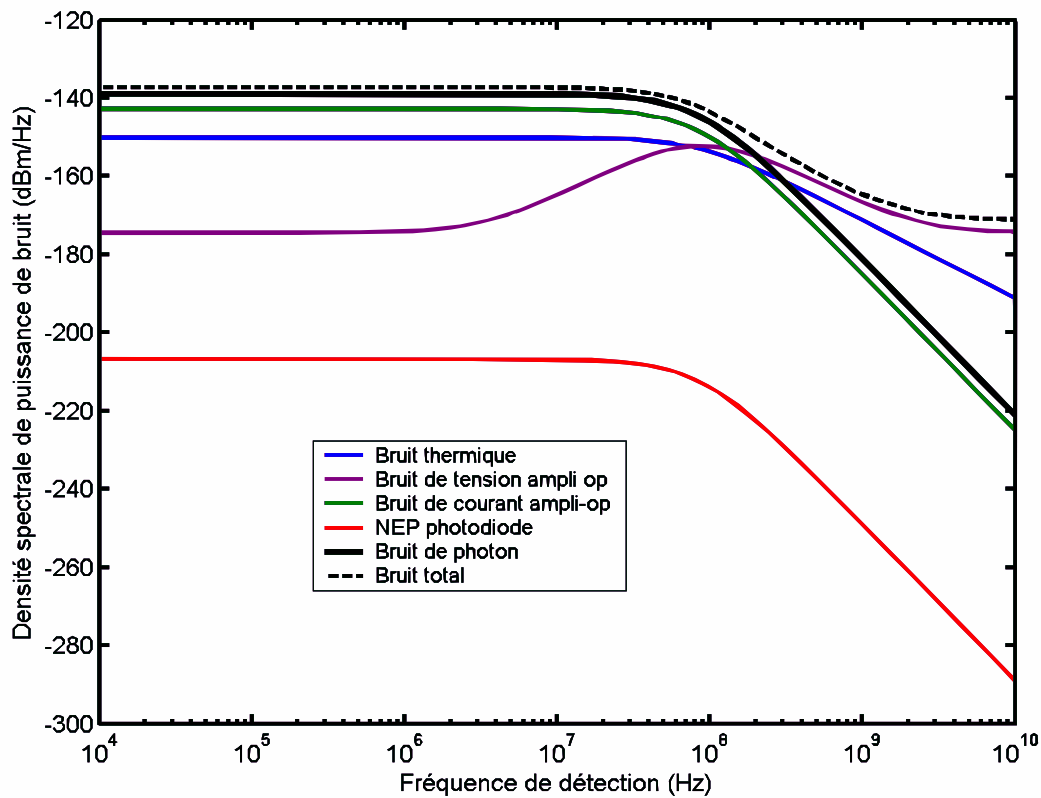


Figure D.6 – Différentes contributions de bruit du montage transimpédance pour détection d'une modulation radiofréquence avec un OPA847. Les bruits sont donnés en puissance sur une résistance de 50Ω . Le détecteur est limité au bruit de photon sur environ 200 MHz pour $100 \mu W$ de puissance optique incidente. On constate que le bruit limitant n'est pas le bruit thermique de la résistance mais le bruit de courant de l'amplificateur, ce qui est souvent le cas pour les applications haute-fréquence.

Montage électronique de la photodiode ultra-rapide

La photodiode ultra-rapide HFD3180-203 est montée selon le schéma Fig. E.1. La photodiode est alimentée avec 3.3 V générés par un régulateur de tension bas bruit ADP3300-3 de Analog Devices. Les deux sorties de la photodiode sont découplées à l'aide de condensateurs micro-ondes puis reliées à des connecteurs SMA *via* des guides d'ondes coplanaires d'impédance caractéristique 50 Ω . Afin de minimiser les inductances parasites, les plans de masses de chaque côté du circuit imprimé sont connectés entre eux avec un grand nombre de vias (Fig. E.2).

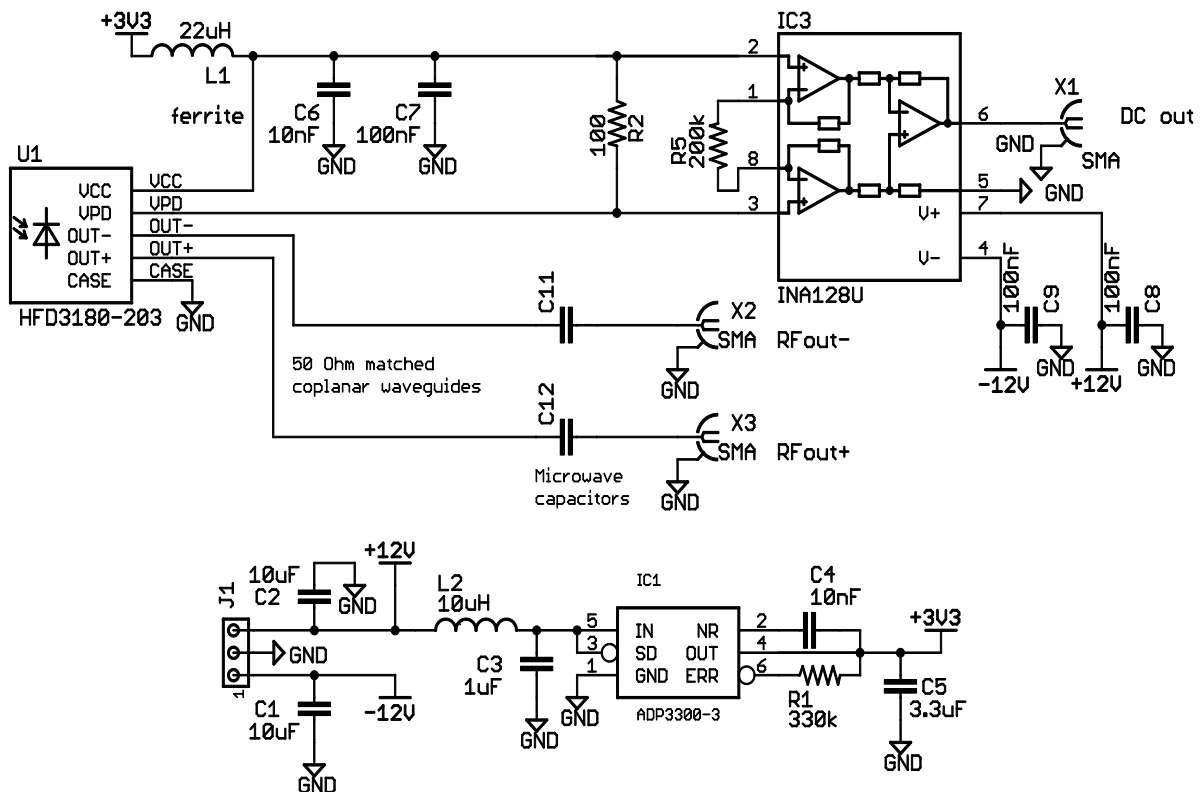


Figure E.1 – Schéma du circuit imprimé de la photodiode ultra-rapide.

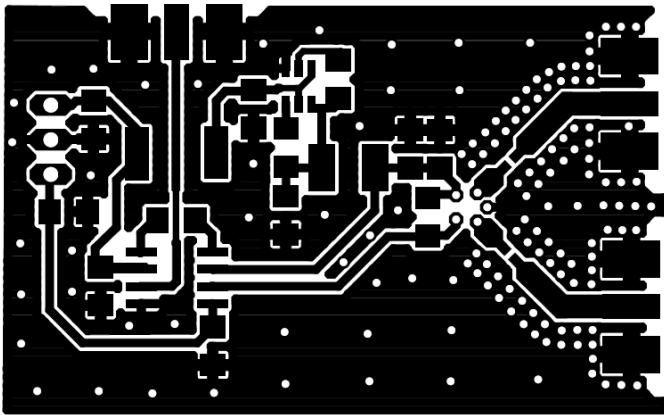


Figure E.2 – *Circuit imprimé de la photodiode.*

Publications

***In situ* characterization of an optical cavity using atomic light shift**

A. Bertoldi, S. Bernon, T. Vanderbruggen, A. Landragin et P. Bouyer

Optics Letters **35**, 3769 (2010)

p. 193

Spin-squeezing and Dicke-state preparation by heterodyne measurement

T. Vanderbruggen, S. Bernon, A. Bertoldi, A. Landragin et P. Bouyer

Physical Review A **83**, 013821 (2011)

p. 197

Heterodyne non-demolition measurements on cold atomic samples : towards the preparation of non-classical states for atom interferometry

S. Bernon, T. Vanderbruggen, R. Kohlhaas, A. Bertoldi, A. Landragin et P. Bouyer

New Journal of Physics **13**, 23 (2011)

p. 205

Robust laser frequency stabilization by serrodyne modulation

R. Kohlhaas, T. Vanderbruggen, S. Bernon, A. Bertoldi, A. Landragin et P. Bouyer

Optics Letters **37**, early position Doc. ID 161503 (2012)

p. 229

In situ characterization of an optical cavity using atomic light shift

A. Bertoldi,^{1,*} S. Bernon,¹ T. Vanderbruggen,¹ A. Landragin,² and P. Bouyer¹

¹Institut d'Optique, University of Paris Sud, CNRS, F-91127 Palaiseau, France

²LNE-SYRTE, Observatoire de Paris, CNRS and UPMC, F-75014 Paris, France

*Corresponding author: andrea.bertoldi@institutoptique.fr

Received July 6, 2010; accepted September 23, 2010;

posted October 14, 2010 (Doc. ID 131189); published November 4, 2010

We report the precise characterization of the optical potential obtained by injecting a distributed-feedback erbium-doped fiber laser at 1560 nm to the transverse modes of a folded optical cavity. The optical potential was mapped *in situ* using cold rubidium atoms, whose potential energy was spectrally resolved thanks to the strong differential light shift induced by the 1560 nm laser on the two levels of the probe transition. The optical potential obtained in the cavity is suitable for trapping rubidium atoms and eventually to achieve all-optical Bose–Einstein condensation directly in the resonator. © 2010 Optical Society of America

OCIS codes: 020.0020, 020.3690, 140.3425, 140.4780.

Optical dipole traps have proven [1] to be a reliable tool to manipulate ultracold neutral matter, both for atoms and molecules. Once the detuning from the resonance is fixed, the depth of the optical potential is directly proportional to the local intensity of the radiation. An optical cavity is a straightforward way to increase the optical intensity, thanks to the long storage time of the photons in the resonator. For this reason optical resonators are increasingly adopted in cold atom physics: after the demonstration of cavity trapping of atoms [2,3], cavity cooling schemes have been proposed [4], superradiance [5] and collective atomic motion [6] have been observed in resonators. Recently, spin squeezing of a cavity-confined atomic sample was proved [7], and Bose–Einstein condensates (BECs) have been coupled to the field of optical resonators [8,9].

In this Letter, we report the characterization of the optical potential generated in a high-finesse optical cavity using cold ⁸⁷Rb atoms as sensors of the local optical intensity. The scattering rate on the D₂ line at 780 nm becomes strongly dependent on the local potential depth because of the differential light shift of the two levels of the probe transition [10], determined by the 1560 nm radiation pumping the cavity. The ring folded resonator was designed to have two of its beams perpendicularly crossing at the center of the configuration. The optical potential obtained by locking the distributed-feedback (DFB) fiber laser to several transverse modes of the nondegenerate cavity was precisely characterized concerning the shape and optical depth. The resulting configuration meets the requirements to optically trap neutral atoms and could possibly bring to BEC directly in the optical resonator: the two arms result in a large capture volume for atoms precooled in a magneto-optical trap (MOT), whereas the central crossing region provides a tight confinement along all directions.

An overview of the laser frequency stabilization system is presented in Fig. 1. The optical cavity consists of four identical mirrors having a radius of curvature of 100 mm, and a dielectric coating with reflectivity $R = 0.99965$ at 1560 nm for *p*-polarized light. The mirrors are mounted on a rigid titanium platform and form a horizontal square with a diagonal of 88.5 mm measured from transverse

mode spacing. They are oriented to produce a folded, figure-eight-shaped cavity geometry. The resonator has a nearly concentric configuration, with a free spectral range (FSR) of 976 MHz. Two mirrors are fixed, and one is mounted on a three-axis nanopositioning system providing more than one FSR of cavity tuning. The horizontal and vertical angles of the fourth mirror are controlled by piezoelectric actuators, used to align the resonator. The cavity assembly is tightly fixed on a CF 250 flange, which is mounted on the main ultra-high-vacuum chamber.

The optical resonator is pumped with the radiation produced by a single longitudinal mode DFB erbium-doped fiber laser (EDFL) near 1560 nm (Koheras laser from NKT Photonics). The laser has a typical linewidth

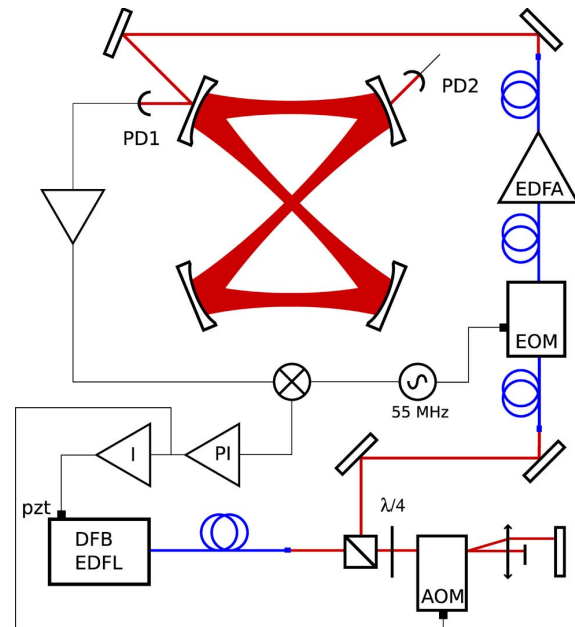


Fig. 1. (Color online) Frequency stabilization setup to lock the DFB EDFL to a transverse mode of the folded optical cavity. The fibered and the free-space optical path are shown in blue and red; the electronic connections are shown in black.

3770 OPTICS LETTERS / Vol. 35, No. 22 / November 15, 2010

of a few kilohertz, an output power of 100 mW, and a frequency noise spectral density dominated by $1/f$ components, as reported in [11]. Before its injection in the resonator, the laser radiation is amplified with a 5 W erbium-doped fiber amplifier (EDFA with a gain of 37 dB, using a monomode polarization maintaining fiber) to obtain an optical potential depth of the order of $k_B \times 1$ mK in each cavity arm for rubidium atoms. The radiation is coupled to the resonator through a beam expander and a tilted doublet to optimize the mode matching. The angle of the doublet allows us to correct for the astigmatism of the cavity modes, given by the off-axis incidence angle of 22.5° on the cavity mirrors. The degree of astigmatism was calculated with the ABCD matrix formalism for paraxial ray propagation [12] and experimentally confirmed by measuring the profile versus the distance of the beam transmitted by one cavity mirror. A coupling efficiency of about 25% was determined by measuring the reflected power on the input mirror when scanning the cavity length across its TEM_{00} resonance. The coupling efficiency of the TEM_{10} and TEM_{20} modes was optimized by using phase masks, achieving 17% and 12%, respectively. The power in the reverse mode, caused by scattering at the cavity mirrors, is 1.9×10^{-3} of the power in the pump mode.

The laser is locked to a mode of the cavity using the Pound–Drever–Hall technique [13]: optical sidebands at about 55 MHz are generated using a fibered electro-optic modulator (EOM), and the beatnote is detected in reflection with a InGaAs photodiode (PD1 in Fig. 1). The dispersive signal obtained by demodulating the beatnote is used to lock the laser frequency to the cavity. A 250 kHz bandwidth feedback is applied on an acousto-optic modulator (AOM) in double pass through a proportional and integral loop, whereas a 100 Hz feedback is applied to the piezoelectric element controlling the laser cavity length. The main delay limiting the total correction bandwidth is the propagation time of the RF signal in the AOM crystal from the electrode to the optical beam.

The power spectral density (PSD) of the frequency difference noise between the laser and the cavity was obtained by measuring the error signal for a closed servo

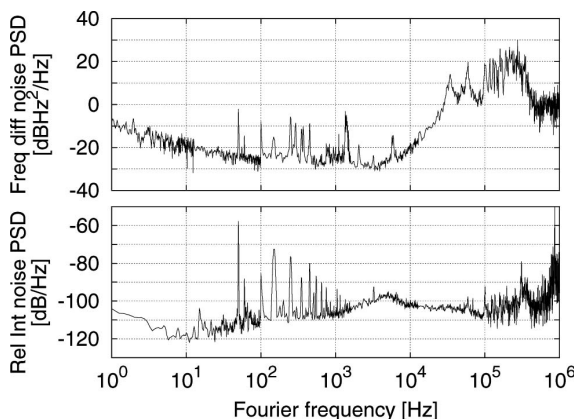


Fig. 2. Frequency difference noise (top) and relative intensity noise (bottom) versus Fourier frequency of the fiber laser stabilized on the fundamental transverse mode of the optical cavity.

loop (Fig. 2). The noise spectral density shows the servo bump of the fast AOM correction loop placed at about 250 kHz, and it stays below the $0.1 \text{ Hz}/\text{Hz}^{1/2}$ level between 10 Hz and 10 kHz. Below 100 Hz the frequency noise is dominated by a $1/f$ component with $0.1 \text{ Hz}/\text{Hz}^{1/2}$ at 10 Hz. The intensity noise of the radiation field in the cavity was measured by evaluating the FFT of the transmission signal (PD2 in Fig. 1): as shown on the spectrum of Fig. 2, the intensity noise PSD is always below 10^{-9} Hz^{-1} with respect to the dc level, except for narrow peaks in the acoustic band (important in relation to parametric excitation of the atom in the optical trap) and close to 1 MHz. The integral value of the noise PSD between 1 Hz and 10 kHz amounts to 2.8×10^{-6} .

In the crossing region of the two arms of the resonator was operated a ^{87}Rb MOT. The absorption signal of the laser-cooled atoms was used to characterize the cavity. The radiation field at 1560 nm [14] injected in the cavity is close to the rubidium transitions $5P_{3/2} - 4D_{3/2,5/2}$ at 1529 nm; therefore, it causes a widely stronger red light shift of the upper level ($5P_{3/2}$) with respect to the ground one ($5S_{1/2}$) when the D_2 line is adopted to probe the atoms. More precisely, the shift ratio of the two levels at 1560 nm, given by the scalar polarizability ratio, is 47.7. If the optical power in the cavity causes a light shift of the $5P_{3/2}$ level much larger than the natural linewidth of the probe transition [$\Gamma = 2\pi \times 6.065(9)$ MHz], the potential energy of the atoms in the 1560 nm beam is spectrally resolved. Atoms at different depths in the optical potential are thus imaged by changing the probe detuning with regard to the atomic resonance [10].

Using the absorption of a released MOT cloud, the optical resonator was aligned by tilting the two angles of the movable cavity mirror. The two central arms of the cavity were vertically overlapped. A precise orthogonality is important in relation with atom trapping, because it eliminates interferences between the two crossing beams when the radiation polarization is set to be in the plane of the cavity.

To determine the geometry and depth of the optical potential, the absorption of a probe beam was imaged at different values of its detuning δ with respect to the D_2 line. The probe interacts with atoms having potential energy $U(\mathbf{r}) = \hbar\delta/(47.7 - 1)$ in the ground level; the width in energy of the atomic class addressed is set by the linewidth of the probe transition ($\delta E = \hbar\Gamma/(47.7 - 1) = k_B \times 6.3 \mu\text{K}$), because the linewidth of the probe laser is much smaller than Γ . If the local potential energy gradient is known, δE can be converted into a spatial spread. A high ratio between the maximum ground state energy shift in each cavity arm and δE allows us to finely section the optical potential, but it reduces the number of atoms probed at each measurement. A good compromise was reached with a ratio of about 10, and the power of the input beam was set accordingly. To increase the atomic density in the region of interest, the MOT cloud was compressed before its release. After 5 ms the optical potential was imaged at different depths by measuring the atomic absorption with a $50 \mu\text{s}$ optical pulse containing both probe and repumper radiation. Typical images are reported in Fig. 3, where the 1560 nm laser is locked to the first three transverse cavity modes. The dark lines result from atomic absorption where the

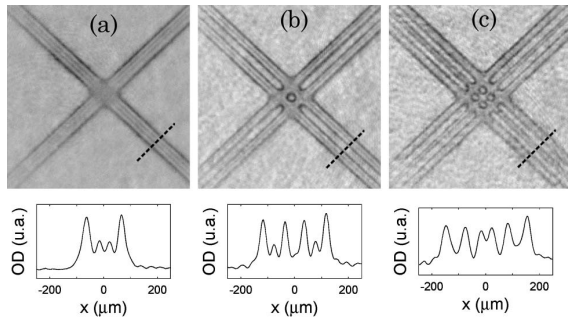


Fig. 3. Top, absorption images with the 1560 nm laser locked to the (a) TEM_{00} , (b) TEM_{10} , and (c) TEM_{20} mode of the cavity, with the detuning of the probe light set to 5Γ to the red of the transition. Bottom, integral optical density obtained by projecting the upper images on the 45° dashed curve crossing one arm of the cavity.

optical potential shifts the detuned probe into resonance. By fitting the projected optical density signal reported in the lower row of Fig. 3, the position of the isopotential lines was obtained. The smaller peaks in the projections of the TEM_{00} and TEM_{10} modes are due to a second, less-intense probe component, frequency redshifted with respect to the main one: it shows that the optical potential can be probed simultaneously at different depths. The measurement of the isopotential line position was repeated for different values of the probe detuning, which allowed us to reconstruct the cavity mode profile, as shown in Fig. 4. The waist of the cavity was obtained by fitting each series of data with the appropriate Hermite–Gauss mode: the result was $97(1)$, $101(1)$, and $99.8(4)$ μm for the TEM_{00} , TEM_{10} , and TEM_{20} , respectively. The ABCD formalism gives a waist of 96 μm in the imaged plane and 128 μm in the perpendicular direction, corresponding to Rayleigh ranges of 1.86 and 3.46 cm, respectively. In the case of the TEM_{00} mode, the potential depth of the $5S_{1/2}$ levels for each cavity arm is $k_B \times 60$ μK , which

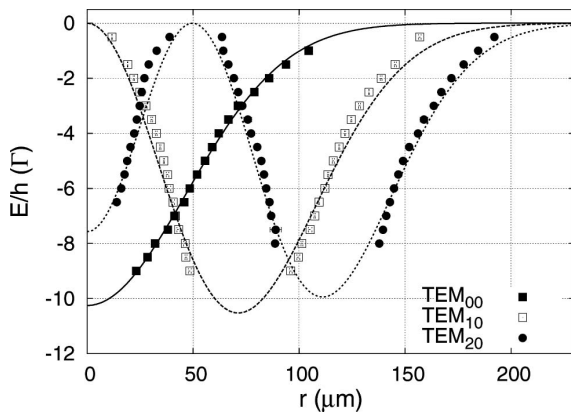


Fig. 4. Optical potential depth induced by the laser at 1560 nm locked to the first three transverse modes of the cavity. Each series of points is fitted with the corresponding Hermite–Gauss mode. Some points at high detuning were removed because of an instability of the probe laser.

corresponds to a power of 8.0 W in the cavity. Considering the power of the input beam and the coupling efficiency, it means a cavity gain factor of 160 . Using the full available power, the peak power in the resonator reaches about 200 W, which means an optical potential depth per arm of $k_B \times 1.4$ mK. The resulting curvatures at the center of the potential dimple are 1.2 kHz along the two cavity arms and 1.6 kHz in the vertical direction. The good degree of vertical alignment for the two beams was confirmed by the depth of the crossing region, which was measured to be twice the one-arm depth within 10% .

In conclusion, we have frequency locked a fiber telecom laser to different transverse modes of a folded optical cavity. The absorption of cold rubidium atoms, strongly modified by the light shift induced by the 1560 nm radiation, was used to align the optical resonator and map the optical potential *in situ*. The radiation field obtained will be exploited to optically trap and evaporatively cool neutral atoms to achieve a BEC directly in the cavity.

We thank J. P. Aoustin, A. Gérard, F. Moron, L. Pelay, and A. Villing for technical assistance and M. Prevedelli and G. Santarelli for valuable advice on the laser lock. We acknowledge funding support from the Direction Générale de l'Armement, the Institut Francilien de Recherche sur les Atomes Froids, the European Science Foundation (EuroQUASAR project), and the European Union (EU) (FINAQS project). The work of A. B. was supported by a Marie Curie Intra-European Fellowship.

References and Notes

1. R. Grimm, M. Weidemüller, and Y. B. Ovchinnikov, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **42**, 95 (2000).
2. A. Mosk, S. Jochim, H. Moritz, Th. Elsässer, M. Weidemüller, and R. Grimm, *Opt. Lett.* **26**, 1837 (2001).
3. D. Kruse, M. Ruder, J. Benhelm, C. von Cube, C. Zimmermann, Ph. W. Courteille, Th. Elsässer, B. Nagorny, and A. Hemmerich, *Phys. Rev. A* **67**, 051802 (2003).
4. V. Vuletić and S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3787 (2000).
5. H. W. Chan, A. T. Black, and V. Vuletić, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 063003 (2003).
6. B. Nagorny, Th. Elsässer, and A. Hemmerich, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 153003 (2003).
7. M. H. Schleier-Smith, I. D. Leroux, and V. Vuletić, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 073604 (2010).
8. S. Slama, S. Bux, G. Krenz, C. Zimmermann, and Ph. W. Courteille, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 053603 (2007).
9. F. Brennecke, T. Donner, S. Ritter, T. Bourdel, M. Köhl, and T. Esslinger, *Nature* **450**, 268 (2007).
10. J. P. Brantut, J. F. Clément, M. Robert de Saint Vincent, G. Varoquaux, R. A. Nyman, A. Aspect, T. Bourdel, and P. Bouyer, *Phys. Rev. A* **78**, 031401 (2008).
11. F. Kéfélian, H. Jiang, P. Lemonde, and G. Santarelli, *Opt. Lett.* **34**, 914 (2009).
12. H. Kogelnik and T. Li, *Appl. Opt.* **5**, 1550 (1966).
13. R. W. P. Drever, J. L. Hall, F. V. Kowalski, J. Hough, G. M. Ford, A. J. Munley, and H. Ward, *Appl. Phys. B* **31**, 97 (1983).
14. The two-photon transition on the D_2 line is inhibited by selection rules, and it is further suppressed by tuning the laser frequency so as to avoid the resonance condition.

PHYSICAL REVIEW A **83**, 013821 (2011)**Spin-squeezing and Dicke-state preparation by heterodyne measurement**T. Vanderbruggen,¹ S. Bernon,¹ A. Bertoldi,¹ A. Landragin,² and P. Bouyer¹¹*Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, CNRS and Univ. Paris-Sud, Campus Polytechnique, RD 128, F-91127 Palaiseau cedex, France*²*LNE-SYRTE, Observatoire de Paris, CNRS and UPMC, 61 avenue de l'Observatoire, F-75014 Paris, France*

(Received 22 February 2010; revised manuscript received 16 September 2010; published 26 January 2011)

We investigate the quantum nondemolition (QND) measurement of an atomic population based on a heterodyne detection and show that the induced back-action allows for the preparation of both spin-squeezed and Dicke states. We use a wave-vector formalism to describe the stochastic process of the measurement and the associated atomic evolution. Analytical formulas of the atomic distribution momenta are derived in the weak-coupling regime both for short- and long-time behavior, and they are in good agreement with those obtained by a Monte Carlo simulation. The experimental implementation of the proposed heterodyne detection scheme is discussed. The role played in the squeezing process by the spontaneous emission is considered.

DOI: [10.1103/PhysRevA.83.013821](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.83.013821)

PACS number(s): 42.50.Dv, 42.50.St, 03.65.Ta, 05.10.Gg

I. INTRODUCTION

Generation of entangled collective spin states such as spin-squeezed states (SSS) [1,2] and Dicke states [3–5] is of first importance for quantum information [6] and quantum metrology [7–10]. A nonlinear evolution of the system is required to create collective entanglement; common approaches exploit interactions between the particles [11,12], probing with squeezed light [13] or cavity-mediated interaction [9]. The strong nonlinearity of a measurement determined by the state renormalization can also lead to such states [14–17].

Measurement-induced squeezing of atomic ensembles has been performed using either a Mach-Zehnder interferometer and simultaneous interaction with several optical frequencies [18] or cavity transmission modulation [19,20]. Nevertheless, the experimental realization of highly engineered atomic states is still challenging, and a deep understanding of the underlying stochastic process of the measurement is needed. The dynamic of the atomic-state collapse can be described as a succession of partial measurements. Several methods have been used to model this collapse process, including the stochastic Schrödinger equation [4,21], master equation [22], and wave-vector formalism [14].

In this paper, we propose to use the frequency modulation (FM) spectroscopy technique [23–26] to generate both spin-squeezed and Dicke states. A laser beam is phase modulated to produce frequency sidebands; one sideband is placed close to an atomic transition and experiences a phase shift passing through the atomic sample. The detection of the beat note at the modulation frequency then allows us to estimate the atomic population of the probed state.

A theoretical analysis of the measurement process shows that a heterodyne detection performed on an atomic sample allows for the preparation of new quantum states. This study is based on the wave-vector formalism previously introduced for homodyne detection [14] and shows similarities with the method used in [27,28] to reconstruct the photonic state from the results of a QND measurement sequence. We study the quantum trajectories of the atomic state caused by the repeated interaction with single photons sent in the QND apparatus. In the weak-coupling limit, an analytical expression is derived for the evolution of the state variance during the measurement,

and it completely describes the atomic wave-function collapse. The result is in good agreement with a Monte Carlo simulation of the measurement process.

II. THE MEASUREMENT PROCESS

The principle of the QND measurement is presented in Fig. 1. An atomic system interacts coherently with an optical probe. As a result, the orientation component of the atomic state (such as the atom number in a well-defined hyperfine level) becomes weakly entangled with the probe photons, and the photodetection gradually provides the observer with information about the spin state. Continuous observation conditionally reduces the orientation uncertainty with respect to the QND measurement outcome, thanks to the measurement quantum back-action. In any individual measurement trajectory, the initial wave function will thus collapse in a single squeezed state, whereas the ensemble averaged uncertainty will not be reduced because the measurement outcomes over many QND trajectories are distributed within the variance of the initial state. Our model will allow us to study the dynamics of this collapse by considering single-photon detection events.

A. Heterodyne QND detection

We consider the QND measurement of the population difference between two atomic levels using a heterodyne detection. The measurement is realized by estimating the phase shift between the two frequency components of the detection beam. This configuration is equivalent to a frequency space interferometer, in which each path corresponds to a single frequency mode. In our model, we consider photons individually sent into this interferometer, and reconstruct the output beat-note photon after photon by comparing their arrival time with a time reference.

1. Model of the apparatus

The model for the QND apparatus is shown in Fig. 2. The input optical state is composed of two spectral modes. The probe mode (0) at a frequency $\omega_0/2\pi$ is close to the frequency of the atomic transition, and will therefore be strongly phase shifted when traveling through the atoms. The reference mode

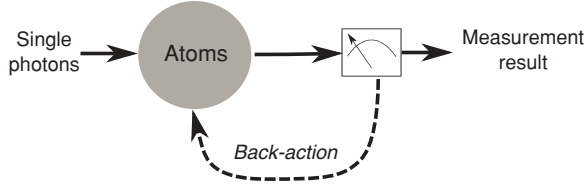
T. VANDERBRUGGEN *et al.*PHYSICAL REVIEW A **83**, 013821 (2011)

FIG. 1. Basic scheme of the measurement process: the phase shift induced by the atomic sample is estimated using the repeated interaction with single photons. The back-action on the atomic state increases with the precision of the phase measurement.

(Ω) is at a far-off resonance frequency $(\omega_0 + \Omega)/2\pi$ and will be unaffected. A single-photon state $|1\rangle$ in the mode (0) is associated to the photon annihilation operator a_0 , and the vacuum state $|0\rangle$ in the mode (Ω) is associated to a_Ω . A single-sideband optical phase modulator B is used as a spectral beamsplitter to generate spectrally mode-entangled single photons (see Appendix A). A local oscillator (LO) drives B with frequency $\Omega/2\pi$. We consider the driving signal as a noise-free classical field. After passing through the atoms, the two-channel optical state is sent to a single-photon detector, which is assumed to be ideal. The detection of a photon in the mode (0) is associated with the operator u_0 , whereas the detection of a photon in the mode (Ω) is associated with u_Ω . If the coherence length of the optical source is much larger than the LO wavelength, the two modes (0) and (Ω) are in a coherent superposition, and the spatial overlap of these two modes generates a beating at frequency $\Omega/2\pi$. A pulse generator, in phase with the LO, delivers regularly spaced pulses (at time interval $\tau = 2\pi/\Omega$) used as a reference to measure the arrival time of the photons. The histogram representation of the photon arrival time allows us to reconstruct the beating signal.

2. Atomic state

The atomic ensemble is a collection of a fixed number N_{at} of two-level atoms $\{|a_i\rangle, |b_i\rangle\}$, described as fictitious $1/2$ spins $\{j_x^{(i)}, j_y^{(i)}, j_z^{(i)}\}$, where

$$j_x^{(i)} = \frac{1}{2}(|b_i\rangle\langle a_i| + |a_i\rangle\langle b_i|), \quad (1)$$

$$j_y^{(i)} = \frac{i}{2}(|a_i\rangle\langle b_i| - |b_i\rangle\langle a_i|), \quad (2)$$

$$j_z^{(i)} = \frac{1}{2}(|b_i\rangle\langle b_i| - |a_i\rangle\langle a_i|). \quad (3)$$

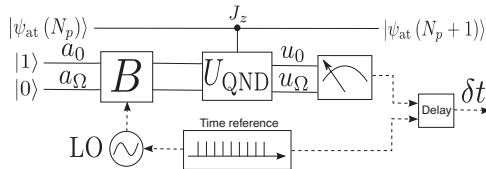


FIG. 2. Model for the QND-based heterodyne detection. Single photons are sent through a spectral beamsplitter B and interact nondestructively with the atomic ensemble (U_{QND}). The detection time of each photon is measured by comparison with a time reference signal.

The atomic ensemble is characterized by the collective spin operators $J_k = \sum_i j_k^{(i)}$, $k = x, y, z$. A collective state $|n\rangle$ is an eigenstate of both J_z and $\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$, and is called a Dicke state. It verifies

$$\mathbf{J}^2|n\rangle = \frac{N_{\text{at}}}{2} \left(\frac{N_{\text{at}}}{2} + 1 \right) |n\rangle, \quad (4)$$

$$J_z|n\rangle = n|n\rangle, \quad (5)$$

where $-N_{\text{at}}/2 \leq n \leq N_{\text{at}}/2$. After N_p photons are detected, the atomic state is $|\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle = \sum_n c_n(N_p)|n\rangle$. The initial atomic state is a coherent spin state (CSS) polarized along J_x , which means an average population difference $\langle J_z \rangle = 0$, and its explicit expression is [29]

$$c_n(0) = \frac{1}{2^{N_{\text{at}}/2}} \sqrt{\frac{N_{\text{at}}!}{\left(\frac{N_{\text{at}}}{2} + n\right)! \left(\frac{N_{\text{at}}}{2} - n\right)!}}. \quad (6)$$

From the Moivre-Laplace theorem, if $N_{\text{at}} \gg 1$, the coefficients $c_n(0)$ are well approximated by a Gaussian distribution

$$c_n(0) \propto \exp\left(-\frac{n^2}{N_{\text{at}}}\right). \quad (7)$$

B. Analytical description of the measurement process

1. Scattering matrix of the interferometer

The spectral beamsplitter B creates a coherent superposition of the two input spectral modes (0) and (Ω) (see Appendix A). Its action is described by the following matrix:

$$B \propto \begin{pmatrix} \sqrt{T} & -\sqrt{R} \\ \sqrt{R}e^{i\Omega t} & \sqrt{T}e^{i\Omega t} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

where, in analogy with a spatial beamsplitter, R is the probability for a photon in the probe mode (0) to be in the reference mode (Ω) at the output of B , and T is the probability for a photon to stay in the carrier mode. We neglect any absorption and dispersion in B so that $R + T = 1$.

When $\omega_0 + \Omega$ is far from any atomic transition, the reference beam experiences no phase shift and the QND interaction can be written as

$$U_{\text{QND}}(J_z) = \begin{pmatrix} e^{i\phi J_z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

ϕ is the optical phase shift induced by a number difference of two ($n = 1$), and depends on the coupling strength of the transition at ω_0 and on the optical density of the atomic cloud. Spontaneous emission induced by the probe beam is neglected in this analysis; the reduction it causes on the coherence of the atomic state is considered in Sec. IV.

The scattering matrix of this system is $S(J_z) = U_{\text{QND}}(J_z)B$ and it furnishes the output modes of the interferometer once the input ones are given: $(u_0(J_z), u_\Omega(J_z)) = S(J_z)(a_0, a_\Omega)$.

2. Measurement back-action

A click at the detector corresponds to the annihilation of a photon either in mode (0) or (Ω). After the measurement, the state of the system satisfies the relation

$$|0_0, 0_\Omega\rangle \otimes |\psi_{\text{at}}(N_p + 1)\rangle \\ \propto [u_0(J_z) + u_\Omega(J_z)]|1_0, 0_\Omega\rangle \otimes |\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle. \quad (10)$$

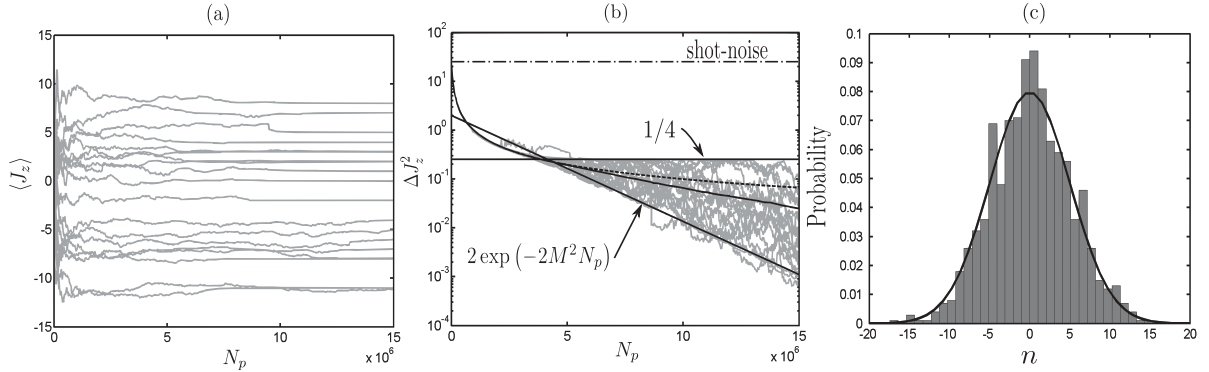


FIG. 3. Trajectories of the atomic distribution momenta obtained with a Monte Carlo simulation for $N_{\text{at}} = 200$, $\phi = 10^{-3}$ rad, and $R = T = 1/2$. (a) Mean position of the atomic population $\langle J_z \rangle$ as a function of the number of measured photons. For a long enough measurement, the state converges to a Dicke state. (b) Variance evolution during the measurement sequence. The solid line is the average over 1000 trajectories (only 20 are plotted), while the dashed line is the result of the analytical calculation of the variance at short time, given by Eq. (18). At short-time scale, the evolution is deterministic as predicted by the analytical study. At long-time scale, the variances become stochastic but remain bounded. In addition, the average variance over the trajectories is below the short-time behavior. (c) The histogram of the mean positions at the end of the trajectories is compared to the initial distribution (solid line). The measurement process satisfies the Born probability rule $P_n = |\langle n | \psi_{\text{at}}(N_p = 0) \rangle|^2$.

The stochastic recurrence relation that defines the atomic-state evolution after one measurement follows from the expression of $S(J_z)$:

$$|\psi_{\text{at}}(N_p + 1)\rangle \propto \left[(\sqrt{T} + \sqrt{R}) \cos\left(\frac{\phi J_z}{2} - \frac{\Omega \tilde{t}}{2}\right) + i(\sqrt{T} - \sqrt{R}) \sin\left(\frac{\phi J_z}{2} - \frac{\Omega \tilde{t}}{2}\right) \right] |\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle, \quad (11)$$

where \tilde{t} is the time at which the photon has been detected.

This expression contains a beat-note signal at frequency $\Omega/2\pi$ with a contrast $C = 2\sqrt{RT}$. The reconstruction of the beat-note photon after photon is achieved by comparing the arrival time \tilde{t}_k of the k th photon with the last time reference pulse $p\tau$, where p is the number of pulses counted between $t = 0$ and $t = \tilde{t}_k$. We estimate the phase shift $\tilde{\varphi}_k \equiv \Omega \tilde{t}_k$ from the time delay $\delta t_k = \tilde{t}_k - p\tau$ between the last pulse of the time reference and the photon detection.

The atomic state after the detection of N_p photons is obtained by applying N_p times the relation of Eq. (11) on the initial atomic state $|\psi_{\text{at}}(N_p = 0)\rangle$. Expressed as a superposition of collective states, it results in $|\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle = \sum_n \mathcal{F}_{N_p}(n) c_n(0) |n\rangle$, where

$$|\mathcal{F}_{N_p}(n)|^2 \propto \prod_{k=1}^{N_p} [1 + C \cos(\phi n - \tilde{\varphi}_k)] \quad (12)$$

is the back-action function. (It is interesting to note that, in the general case, the process is *non-Markovian* since the phase shift $\tilde{\varphi}_k$ depends on all the previous detection results. This is a main difference between the heterodyne and the homodyne detections; in the latter, the evolution is Markovian independently of the coupling regime, since only two measurement outcomes are possible [14].)

Equation (12) leads straightforwardly to the probability $P(\varphi)$ to measure a phase shift φ when the $(N_p + 1)$ th photon is detected:

$$P(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_n |c_n(N_p)|^2 [1 + C \cos(\phi n - \varphi)]. \quad (13)$$

Using this expression and the recurrence relation of Eq. (11), we simulated the quantum trajectories followed by the atomic state (see Appendix C). Typical results are presented in Fig. 3.

In the weak-coupling limit ($\phi N_{\text{at}} \ll 1$), it is possible to derive an analytical expression for the $|\mathcal{F}_{N_p}(n)|^2$ function (see Appendix B):

$$|\mathcal{F}_{N_p}(n)|^2 \propto \exp[-2M^2 N_p (n^2 + 2\overline{\delta\tilde{\varphi}} n / \phi)], \quad (14)$$

where

$$\overline{\delta\tilde{\varphi}} = \lim_{\frac{N_p}{N_t} \rightarrow 0} \frac{N_t}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p/N_t} \delta\tilde{\varphi}_j \quad (15)$$

is the average mean position over the followed trajectory, and

$$M^2 = \frac{\phi^2}{4} (1 - \sqrt{1 - C^2}) \quad (16)$$

is the measurement strength. This expression of the back-action function contains the complete description of the atomic-state evolution in the weak-coupling regime and allows us to quantitatively study the atomic wavefunction collapse, that is, the squeezing process.

III. DYNAMICS OF THE WAVE-FUNCTION COLLAPSE

The atomic-state evolution is studied by comparing the initial atomic-state distribution $c_n(0)$ of Eq. (7) with $\mathcal{F}_{N_p}(n)$. Depending on their relative width, two regimes appear during the atomic-state evolution: the short-time limit (where the width of the atomic distribution ΔJ_z^2 is large compared to

T. VANDERBRUGGEN *et al.*PHYSICAL REVIEW A **83**, 013821 (2011)

one and the atomic state is in a superposition of many atomic levels) and the long-time limit [where the distribution is very narrow and the state is split on a few levels of amplitude $\mathcal{F}_{N_p}(n)$]. The boundary between these two regimes occurs for $\Delta J_z^2 \sim 1$, that is, for $N_p \sim M^{-2}$.

A. Short-time limit

In the short-time limit, defined by the condition $N_p \ll M^{-2}$, $|\mathcal{F}_{N_p}(n)|^2$ is broad and $|c_n(N_p)|^2$ is a Gaussian distribution characterized by the following mean position and variance:

$$\langle J_z \rangle = -C^2 \xi^2 \kappa^2 \delta \bar{\varphi} / \phi, \quad (17)$$

$$\Delta J_z^2 = \xi^2 N_{\text{at}} / 4, \quad (18)$$

where $\kappa^2 = M^2 N_{\text{at}} N_p$ is the signal-to-noise ratio and $\xi^2 = 1/(1 + \kappa^2)$ is the squeezing factor. For $N_p \geq 1$, the squeezing factor drops below unity and the initial CSS collapses into a SSS as a consequence of the measurement process. The remarkable result is that ΔJ_z^2 is independent of the stochastic parameter $\delta \bar{\varphi}$ at first order and is thus deterministic, as shown with the numerical simulation in Fig. 3(b).

B. Long-time limit

In the long-time limit ($N_p \gg M^{-2}$), the atomic distribution is very narrow ($\Delta J_z^2 \ll 1$) and the atomic state $c_n(N_p) \sim \mathcal{F}_{N_p}(n)$ is spread over a few eigenstates. The evolution strongly depends on the distance between the mean value $\langle J_z \rangle$ and the closest eigenvalue of J_z . Two extreme cases can be considered (Fig. 4): either $\langle J_z \rangle$ is in the middle of two eigenvalues, which turns out to be an unstable equilibrium state of the system, or it is an eigenvalue of J_z , which corresponds to the stable equilibrium state (the stability of the attractors is treated in [4,30]).

In the first case, the distribution is centered between two eigenstates of J_z , namely, $|n_0\rangle$ and $|n_0 + 1\rangle$. The atomic state is well approximated by a superposition of these two states $|\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle \approx (|n_0\rangle + |n_0 + 1\rangle)/\sqrt{2}$, since the amplitude of the other states decreases exponentially. In this case, $\langle J_z \rangle = n_0 + 1/2$ and the variance is $\Delta J_z^2 = \langle \psi_{\text{at}}(N_p) | J_z^2 | \psi_{\text{at}}(N_p) \rangle - \langle J_z \rangle^2 = 1/4$, which results in being the upper bound value in the long-time limit. This limit clearly appears in the numerical calculations, as shown in Fig. 3(b).

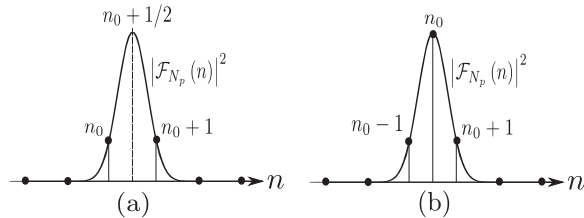


FIG. 4. Extreme cases for long-time evolution. The mean position of the atomic distribution is (a) in the middle of two eigenvalues of J_z , or (b) centered on an eigenvalue of J_z .

The second case represented in Fig. 4(b) corresponds to an atomic distribution centered on an eigenstate $|n_0\rangle$ of J_z . The atomic state is then a superposition of three eigenstates

$$|\psi_{\text{at}}(N_p)\rangle \approx \sum_{k=-1,0,1} \mathcal{F}_{N_p}(n_0 + k) |n_0 + k\rangle. \quad (19)$$

From the normalization condition, the symmetry of the state around n_0 , and Eq. (14), we have

$$\sum_{k=-1,0,1} |\mathcal{F}_{N_p}(n_0 + k)|^2 = 1, \quad (20)$$

$$|\mathcal{F}_{N_p}(n_0 \pm 1)|^2 = |\mathcal{F}_{N_p}(n_0)|^2 e^{-2M^2 N_p}. \quad (21)$$

Since $\langle J_z \rangle = n_0$, it follows that $\Delta J_z^2 = 2 \exp(-2M^2 N_p)$, which is the lower bound for the variance evolution as plotted in Fig. 3(b).

IV. EXPERIMENTAL CONSIDERATIONS

The main experimental challenge in a QND detection is to limit the spontaneous emission and hence the optical power while reaching the shot noise limit with a sufficient bandwidth. In this section, we show how a heterodyne detection allows us to reach the shot noise of a weak probe beam and how the existence of two sidebands rejects all the frequency-independent common dephasing sources. We finally discuss the effect of the spontaneous emission on the squeezing performances.

In a realistic setup, different configurations for the measurement can be implemented, depending on the relative position of the carrier and the sidebands with respect to the atomic transitions. Two examples of possible schemes are presented in Fig. 5, where the case of alkaline atoms is considered.

A. Shot noise limited detection

The intrinsic advantage of a heterodyne detection is that it makes it possible to reach the shot noise for a weak probe beam by beating it with a much stronger reference beam. In FM spectroscopy, the reference beam is the strong carrier and the probe beam is the weak sideband. If N_c is the number

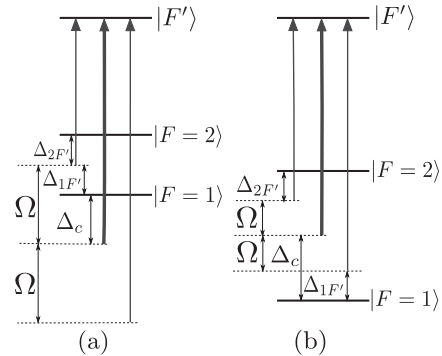


FIG. 5. Two possible measurement schemes. (a) One sideband is in the middle of the two probed states, whereas the carrier and the other sideband are far from the transition ($\Delta_{F'} \ll \Delta_c$). (b) Each sideband is close to an atomic transition, and the carrier is in the middle of the two probed states.

of photons in the carrier, N_s is the number of photons in the sideband, and N_e is the photon equivalent noise due to the detection electronics, the signal-to-noise ratio \mathcal{R} of the optical detection is

$$\mathcal{R} \propto \sqrt{\frac{N_c N_s}{N_c + N_s + N_e}}. \quad (22)$$

If $N_c \gg N_s, N_e$, then $\mathcal{R} \sim \sqrt{N_s}$; by using a strong reference, the detection can thus be limited to the shot noise of the weak probe.

Nevertheless, the reference must be far from the atomic transition to strongly reduce its absorption. A high modulation frequency Ω is thus required, which results in being the main technical limitation of the method. Nowadays, photodiodes designed for high-speed optical communications, provided with integrated transimpedance amplifiers with gains of a few kilo-ohms, set an indicative upper limit of 10 GHz for the achievable bandwidth.

B. Common mode noise rejection

All the systems where the phase induced by the atoms on a probe beam is measured by comparison with the phase of a reference beam require a precise control of all the sources of relative phase noise between the two beams. The geometrical splitting of the two components, as in a Mach-Zehnder interferometer, requires the precise stabilization of the relative length between the two paths. On the other hand, if the splitting is in frequency and the two components are spatially overlapped, all the noise sources acting on the optical path length (such as acoustic noise, optical index fluctuations, and mechanical displacements) are rejected, since they are of common mode. In the specific case of a two-sideband modulator, where only one sideband is close to an atomic resonance, the signal detected on the photodiode is the difference between the beat notes of each sideband with the carrier. The differential detection leaves only the atomic contribution to the optical index, and an active stabilization of the interferometer is not required.

In [18], an amplitude modulation method in a Mach-Zehnder interferometer is proposed that similarly rejects the common mode noise using two probe beams. Nevertheless, it requires a good spatial overlap, well-balanced power, and an active phase control of the two probes; all these features are intrinsic in the method we propose.

The proposed scheme could be further improved by injecting the probe in an optical cavity. The signal-to-noise ratio for the same destructivity is increased by a factor square-root of the finesse [25]. The injection in another cavity resonance can be used to perform a differential measurement when studying amplitude fluctuations of a dc signal as shown in [19,20]. In our scheme, a differential measurement that rejects the phase noise due to cavity length fluctuations is realized by placing the carrier in the middle of two cavity resonances and injecting the two sidebands in two different resonances.

C. Spontaneous emission

The performance of a QND detection is reduced by the spontaneous emission induced by the probe. The atomic decay causes a decoherence of the atomic state since the detection

of the emitted photon allows us to determine in which state the atom has been projected. The problem of quantifying this effect has been treated in [14,31,32].

We now analyze the performance of scheme (a) in Fig. 5 when the atomic decay is taken into account. The dephasing induced by the atomic cloud on the optical probe is given by [33]

$$\Delta\Phi = \frac{\lambda^2}{4\pi\mathcal{A}}(N_1 S_1 + N_2 S_2), \quad (23)$$

where N_F is the population of the $|F\rangle$ state, λ is the optical wavelength, \mathcal{A} is the probe beam area, and S_F is the probe coupling to the $|F\rangle$ state:

$$S_F = \sum_{F'} \frac{\gamma \Delta_{FF'}}{\Delta_{FF'}^2 + \gamma^2} S_{FF'}. \quad (24)$$

In Eq. (24), γ is the atomic linewidth and $S_{FF'}$ is the dipole transition strength of $|F\rangle \rightarrow |F'\rangle$ given by

$$S_{FF'} = (2F' + 1)(2J + 1) \begin{Bmatrix} J & J' & 1 \\ F' & F & I \end{Bmatrix}^2, \quad (25)$$

where I and J are the nuclear and total angular momentum, respectively. The detunings $\Delta_{1F'}$ and $\Delta_{2F'}$ are chosen so that $S_1 = -S_2 \equiv S$. Introducing ϵ so that $N_1 = N_{\text{at}}(1 + \epsilon)/2$ and $N_2 = N_{\text{at}}(1 - \epsilon)/2$, the optical dephasing can be written as $\Delta\Phi = \rho_0 S \epsilon$, where $\rho_0 = \lambda^2 N_{\text{at}}/4\pi\mathcal{A}$ is the resonant optical density. The phase shift ϕ induced by a population difference of one atom between the two atomic states is obtained for $\epsilon = 2/N_{\text{at}}$:

$$\phi = \frac{\lambda^2 S}{2\pi\mathcal{A}}. \quad (26)$$

The integrated probability for an atom to scatter a photon when probed by N_p photons is, in the limit $\mathcal{C} \ll 1$,

$$\eta = \frac{\rho_0}{N_{\text{at}}} \frac{\mathcal{C}^2 N_p}{2} \mathcal{L}, \quad (27)$$

where \mathcal{L} is the atomic lineshape

$$\mathcal{L} = \sum_{F,F'} \frac{\gamma^2}{\Delta_{FF'}^2 + \gamma^2} S_{FF'}. \quad (28)$$

The signal-to-noise ratio can be rewritten as a function of the decoherence: $\kappa^2 = \mu\rho_0\eta$, where $\mu = S^2/\mathcal{L}$. In [31], the squeezing factor is estimated to be

$$\xi^2 = \frac{(1 - \eta)^2}{1 + \mu\rho_0\eta} + 1 - (1 - \eta)^2. \quad (29)$$

Considering 10^7 atoms of ^{87}Rb optically trapped with a beam waist of $20 \mu\text{m}$ and probed on the D_2 ($5^2 S_{1/2} \rightarrow 5^2 P_{3/2}$) line at $\lambda = 780 \text{ nm}$ with a detuning $\Delta_{13} = 3.2 \text{ GHz}$, then $\mu \sim 1$ and $\phi = 4.1 \times 10^{-7} \text{ rad}$. The resulting resonant optical density is $\rho_0 \sim 2400$, from which a squeezing factor $\xi^2 = 0.06$ (about 12 dB) can be achieved for an optimum decoherence $\eta \sim 0.01$. It corresponds to a measurement of $N_p \sim 10^7$ photons in the total beam for a modulation depth of 1%.

The optimum squeezing factor strongly depends on the optical density of the atomic sample. Using a Bose-Einstein condensate (BEC), a much higher squeezing can be achieved,

T. VANDERBRUGGEN *et al.*

PHYSICAL REVIEW A **83**, 013821 (2011)

but much fewer photons have to be used during the measurement to reach the optimum.

With regard to the possibility of exploring the long-time regime behavior to prepare Dicke states, the decoherence due to spontaneous emission can be seen as a constraint that would make this regime hard to reach. Nevertheless, this discussion holds mainly for a large atom number; if the initial sample contains only a few atoms (for example, a BEC of 100 atoms), the variance of the coherent state is of the order of a few units, so that entering the Dicke-state regime in the presence of spontaneous emission is realistic.

V. CONCLUSION

In this paper, we analyze a QND heterodyne detection of an atomic sample to prepare spin-squeezed states. A theoretical model of the measurement process is proposed, which consists of the sequential detection of single photons that cause a back-action on the atomic wave vector. One should note that, in Eq. (12), no assumption has been made on the atom light coupling strength. An analytical solution is obtained in the weak-coupling regime and completely describes the atomic-state evolution. Remarkably, two regimes occur during the wave-function collapse: At short time, spin-squeezed states are prepared whereas they converge to Dicke states at long time.

Finally, experimental considerations to implement the detection scheme have been presented, pointing out the main advantages and limitations of the method as well as the role played by the atomic decay and its influence on the squeezing factor. The requirement of an active stabilization of the separated geometrical paths used in standard interferometric methods, such as the Mach-Zehnder configuration, is replaced by the need for a stable radio-frequency (RF) field. Moreover, the heterodyne detection allows us to reach the shot noise of a weak beam by mixing it with a stronger one.

This detection method could be used to generate other kinds of nonclassical states such as Schrödinger cats or N -particle path-entangled states ($|N,0\rangle + |0,N\rangle$). Such states could be employed in quantum-enhanced metrology to approach the Heisenberg limit sensitivity [34]. Moreover, sequential measurements allow us to prepare almost deterministic states by implementing a quantum feedback loop [4,35–37], and they can be exploited for quantum error correction [38].

ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge Isabelle Bouchoule, Carlos Garrido Alzar, and Luca Pezzé for useful discussions. This work was supported by IFRAF, DGA, the European Union (with STREP program FINAQS), and ESF (EUROQUASAR program). A. B. acknowledges support from the EU under an IEF Grant.

APPENDIX A: THE PHASE MODULATOR AS A SINGLE-PHOTON SPECTRAL BEAMSPLITTER

The electro-optic modulation relies on the Pockels effect, a second-order nonlinear interaction between an optical and a quasistatic, radio-frequency field. The Hamiltonian associated with this process is

$$H_P = i\hbar g(a_m^\dagger a_0^\dagger a_1 - a_m a_0 a_1^\dagger), \quad (\text{A1})$$

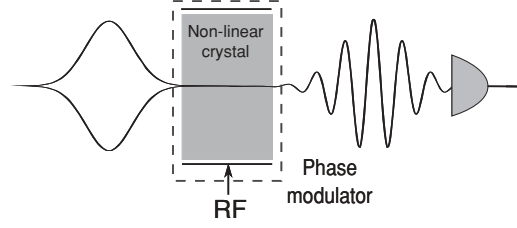


FIG. 6. Quantum beats of the single-photon wave function generated by a phase modulator.

where a_m , a_0 , and a_1 are the annihilation operators for the RF field, the input field, and the generated field, respectively, and g is a coupling constant (depending on the nonlinear crystal, the field frequencies, etc.). This Hamiltonian is the result of two processes: a down conversion from an optical to a quasistatic electric field, which is an optical rectification, and a frequency sum with a quasistatic electric field, which is the Pockels effect.

Let t be the propagation time of the optical wave in the nonlinear crystal. The evolution of an incident state $|\psi_{\text{in}}\rangle$ through the crystal in the weak-coupling limit ($gt \ll 1$) gives the following output state:

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = e^{-iH_P t/\hbar} |\psi_{\text{in}}\rangle \quad (\text{A2})$$

$$\sim [\mathbb{1} + gt(a_m^\dagger a_0^\dagger a_1 - a_m a_0 a_1^\dagger)] |\psi_{\text{in}}\rangle. \quad (\text{A3})$$

Considering a coherent RF field and a single-photon optical state in input $|\psi_{\text{in}}\rangle = |\alpha_m\rangle \otimes |1_0, 0_1\rangle$, the output field is

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = |\alpha_m\rangle \otimes (|1_0, 0_1\rangle + gt\alpha_m|0_0, 1_1\rangle). \quad (\text{A4})$$

The phase modulator thus splits the input photon wave function in two spectral components, the superposition of which determines a beating of the photon wave function with itself at the modulation frequency of the RF field, as shown in Fig. 6.

APPENDIX B: DERIVATION OF AN ANALYTICAL EXPRESSION OF $|\mathcal{F}_{N_p}(n)|^2$ IN THE WEAK-COUPLING LIMIT

The general stochastic measurement process described by Eq. (12) is non-Markovian. In the weak-coupling limit ($\phi N_{\text{at}} \ll 1$), the process becomes Markovian [39] but not stationary. Using again the weak-coupling approximation, we show that the overall process can be split into a sequence of stationary subprocesses, which brings us to an analytical expression of $|\mathcal{F}_{N_p}(n)|^2$.

1. Evaluation of the probability $P(\varphi)$

In the weak-coupling regime, the phase shift determined by the whole atomic sample is small, and then $\phi n \ll 1$ for $-N_{\text{at}}/2 \leq n \leq N_{\text{at}}/2$. We can expand Eq. (13) to the first order in ϕn around a centered probability distribution $P_0(\varphi) = (1 + \mathcal{C} \cos \varphi)/2\pi$. We find $P(\varphi) = P_0(\varphi) + \delta P[\delta\tilde{\varphi}](\varphi)$, where $\delta P[\delta\tilde{\varphi}](\varphi) = -\mathcal{C} \sin \varphi \delta\tilde{\varphi}/2\pi$ and $\delta\tilde{\varphi} = -\phi(J_z)$ is a stochastic parameter depending on the followed trajectory. The chain of stochastic variables $\{\tilde{\varphi}_k\}_{1 \leq k \leq N_p}$ is reduced to a single parameter $\delta\tilde{\varphi}_{N_p}$, which proves that the process is Markovian.

$P_0(\varphi)$ is the deterministic contribution for a zero phase detection, whereas $\delta P[\delta\tilde{\varphi}](\varphi)$ describes the atomic phase shift.

2. Decomposition into stationary subprocesses

To study the evolution of the atomic state, we split the measurement into sequences of N_t photon detections, each inducing a negligible evolution of the atomic wave function (the subprocesses are stationary). A small signal-to-noise ratio is required for each sequence ($\phi^2 N_{\text{at}} N_t \ll 1$). In the weak-coupling limit, the number of photons in each sequence can be large since $\phi^2 N_{\text{at}} \ll 1$.

The detection probability at the end of the j th sequence of N_t measurements is $P_j(\varphi) = P_0(\varphi) + \delta P[\delta\tilde{\varphi}_j](\varphi)$. If we choose a phase measurement resolution π/m ($m \in \mathbb{N}$ and $m \gg 1$), we find from Eq. (12)

$$|\mathcal{F}_{N_p}(n)|^2 \propto \prod_{j=1}^{N_p/N_t} \prod_{l=-m}^m f_{N_p}^{(j,l)}(n), \quad (\text{B1})$$

having defined

$$f_{N_p}^{(j,l)}(n) = [1 + C \cos(\phi n - \pi l/m)]^{N_{j,l}}. \quad (\text{B2})$$

$N_{j,l} = \frac{\pi}{m} P_j(\frac{\pi l}{m}) N_t$ is the number of measurements giving the result $\varphi = \pi l/m$ during the j th sequence.

The number of photons has to be large in the intervals $[-\pi, -\pi + \pi/m]$ and $[\pi - \pi/m, \pi]$, where $P(\varphi)$ is close to zero. This is verified for $N_t \gg m^3$, since the following condition must be satisfied when $C \sim 1$:

$$N_t \int_{\pi - \frac{\pi}{m}}^{\pi} P_0(\varphi) d\varphi \sim N_t \left(\frac{1-C}{2m} + \frac{\pi^2 C}{12m^3} \right) \gg 1. \quad (\text{B3})$$

In this case, $N_{j,l} \gg 1$ and the second-order term for the Taylor expansion of $f_{N_p}^{(j,l)}(n)$ in ϕn can be identified with that of a Gaussian distribution

$$f_{N_p}^{(j,l)}(n) \propto \exp[-2M_l^2 N_{j,l} (n - n_l)^2], \quad (\text{B4})$$

where

$$M_l^2 = \frac{C\phi^2}{4} \frac{C + \cos(\pi l/m)}{[1 + C \cos(\pi l/m)]^2}, \quad (\text{B5})$$

$$n_l = \frac{1}{\phi} \frac{1 + C \cos(\pi l/m)}{C + \cos(\pi l/m)} \sin(\pi l/m). \quad (\text{B6})$$

By converting the discrete sum over l into an integral, and using Eqs. (B1) and (B4), we obtain Eq. (14).

APPENDIX C: NUMERICAL SIMULATIONS

The numerical simulation of the quantum trajectories shown in Fig. 3 adopts the state of Eq. (7) as the initial state. For each photon, the probability $P_{N_p+1}(\varphi)$ to measure a phase φ for the next detected photon is given by Eq. (13). More explicitly, we use the cumulative distribution function associated to this density of probability, which is

$$F_{N_p+1}(\varphi) = \int_{-\pi}^{\varphi} P_{N_p+1}(\theta) d\theta. \quad (\text{C1})$$

By generating a random number with an uniform distribution over $[0, 1]$ and numerically inverting F_{N_p+1} , we get the phase detected for the $(N_p + 1)$ th photon. The recurrence relation given by Eq. (11) yields the new atomic distribution. The quantum trajectory is obtained iterating the sequence.

-
- [1] M. Kitagawa and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **47**, 5138 (1993).
- [2] D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano, F. L. Moore, and D. J. Heinzen, *Phys. Rev. A* **46**, R6797 (1992).
- [3] R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **93**, 99 (1954).
- [4] J. K. Stockton, R. van Handel, and H. Mabuchi, *Phys. Rev. A* **70**, 022106 (2004).
- [5] C. Thiel, J. von Zanthier, T. Bastin, E. Solano, and G. S. Agarwal, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 193602 (2007).
- [6] N. Katz *et al.*, *Science* **312**, 1498 (2006).
- [7] P. Bouyer and M. A. Kasevich, *Phys. Rev. A* **56**, R1083 (1997).
- [8] J. Appel, P. J. Windpassinger, D. Oblak, U. B. Hoff, N. Kjærgaard, and E. S. Polzik, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **106**, 10960 (2009).
- [9] I. D. Leroux, M. H. Schleier-Smith, and V. Vuletić, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 073602 (2010).
- [10] T. Takano, M. Fuyama, R. Namiki, and Y. Takahashi, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 033601 (2009).
- [11] J. Estève, C. Gross, S. Giovanazzi, and M. K. Oberthaler, *Nature (London)* **455**, 1216 (2008).
- [12] C. Gross, T. Zibold, E. Niklas, J. Estève, and M. K. Oberthaler, *Nature (London)* **464**, 1165 (2010).
- [13] A. Kuzmich, K. Mølmer, and E. S. Polzik, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4782 (1997).
- [14] I. Bouchoule and K. Mølmer, *Phys. Rev. A* **66**, 043811 (2002).
- [15] A. Kuzmich, N. P. Bigelow, and L. Mandel, *Europhys. Lett.* **42**, 481 (1998).
- [16] A. Kuzmich, L. Mandel, and N. P. Bigelow, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1594 (2000).
- [17] A. E. B. Nielsen, U. V. Poulsen, A. Negretti, and K. Mølmer, *Phys. Rev. A* **79**, 023841 (2009).
- [18] M. Saffman, D. Oblak, J. Appel, and E. S. Polzik, *Phys. Rev. A* **79**, 023831 (2009).
- [19] M. H. Schleier-Smith, I. D. Leroux, and V. Vuletić, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 073604 (2010).
- [20] I. D. Leroux, M. H. Schleier-Smith, and V. Vuletić, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 250801 (2010).
- [21] A. E. B. Nielsen and K. Mølmer, *Phys. Rev. A* **77**, 063811 (2008).
- [22] A. Sondberg Sørensen and K. Mølmer, *Phys. Rev. A* **66**, 022314 (2002).
- [23] G. C. Bjorklund, M. D. Levenson, W. Lenth, and C. Ortiz, *Appl. Phys. B* **32**, 145 (1983).
- [24] V. Savalli, G. Z. K. Horvath, P. D. Featonby, L. Cognet, N. Westbrook, C. I. Westbrook, and A. Aspect, *Opt. Lett.* **24**, 1552 (1999).
- [25] J. E. Lye, J. J. Hope, and J. D. Close, *Phys. Rev. A* **67**, 043609 (2003).

T. VANDERBRUGGEN *et al.*

PHYSICAL REVIEW A **83**, 013821 (2011)

- [26] I. Teper, G. Vrijsen, J. Lee, and M. A. Kasevich, *Phys. Rev. A* **78**, 051803(R) (2008).
- [27] M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre, J.-M. Raimond, and N. Zagury, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 976 (1990).
- [28] C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, *Nature (London)* **448**, 889 (2007).
- [29] R. N. Zare, *Angular Momentum: Understanding Spatial Aspects in Chemistry and Physics* (Wiley, New York, 1988).
- [30] S. L. Adler, D. C. Brody, T. A. Brun, and L. P. Hughston, *J. Phys. A* **34**, 8795 (2001).
- [31] L. B. Madsen and K. Mølmer, *Phys. Rev. A* **70**, 052324 (2004).
- [32] S. R. de Echaniz, M. W. Mitchell, M. Kubasik, M. Koschorreck, H. Crepaz, J. Eschner, and E. S. Polzik, *J. Opt. B* **7**, S548 (2005).
- [33] D. Oblak, P. G. Petrov, C. L. Garrido Alzar, W. Tittel, A. K. Vershovski, J. K. Mikkelsen, J. L. Sørensen, and E. S. Polzik, *Phys. Rev. A* **71**, 043807 (2005).
- [34] H. Lee, P. Kok, and J. P. Dowling, *J. Mod. Opt.* **49**, 2325 (2002).
- [35] H. M. Wiseman and G. J. Milburn, *Phys. Rev. A* **49**, 1350 (1994).
- [36] L. K. Thomsen, S. Mancini, and H. M. Wiseman, *Phys. Rev. A* **65**, 061801(R) (2002).
- [37] J. M. Geremia, J. K. Stockton, A. C. Doherty, and H. Mabuchi, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 250801 (2003).
- [38] C. Ahn, H. M. Wiseman, and G. J. Milburn, *Phys. Rev. A* **67**, 052310 (2003).
- [39] C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*, 2nd ed. (Springer, Berlin, 2000).

New Journal of Physics

The open-access journal for physics

Heterodyne non-demolition measurements on cold atomic samples: towards the preparation of non-classical states for atom interferometry

S Bernon^{1,4}, T Vanderbruggen¹, R Kohlhaas¹, A Bertoldi¹,
A Landragin² and P Bouyer^{1,3}

¹ Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, CNRS and Université Paris-Sud Campus Polytechnique, RD 128, F-91127 Palaiseau cedex, France

² LNE-SYRTE, Observatoire de Paris, CNRS and UPMC 61 avenue de l'Observatoire, F-75014 Paris, France

³ Laboratoire Photonique, Numérique et Nanosciences-LP2N, Université Bordeaux-IOGS-CNRS: UMR 5298 Bat A30, 351 cours de la liberation, Talence, France

E-mail: simon.bernon@institutoptique.fr

New Journal of Physics **13** (2011) 065021 (23pp)

Received 14 February 2011

Published 28 June 2011

Online at <http://www.njp.org/>

doi:10.1088/1367-2630/13/6/065021

Abstract. We report on a novel experiment to generate non-classical atomic states *via* quantum non-demolition (QND) measurements on cold atomic samples prepared in a high-finesse ring cavity. The heterodyne technique developed for QND detection exhibits an optical shot-noise limited behavior for local oscillator optical power of a few hundred μW , and a detection bandwidth of several GHz. This detection tool is used in a single pass to follow non-destructively the internal state evolution of an atomic sample when subjected to Rabi oscillations or a spin-echo interferometric sequence.

⁴ Author to whom any correspondence should be addressed.

Contents

1. Introduction	2
2. The experimental apparatus	3
2.1. 2D and 3D MOTs	3
2.2. The high-finesse cavity	4
3. Trapping in a folded cavity	8
4. Heterodyne non-demolition measurement	9
4.1. Collective measurement	9
4.2. A low sensitivity to common mode noise	10
4.3. Optical setup	12
4.4. The optical detector	12
5. Non-demolition measurement of an evolving atomic state	14
5.1. Effective scattering rate	14
5.2. Rabi oscillations	16
5.3. Interferometric phase in a spin-echo sequence	19
5.4. Cavity-enhanced measurements	20
6. Conclusions	21
Acknowledgments	21
References	21

1. Introduction

Quantum metrology [1] is the field of quantum information that studies the ultimate amount of information obtainable when measuring a given observable of a system. Quantum state engineering techniques are thus developed to maximize the sensitivity of measurement devices.

In quantum optics, after the first observation of squeezed states [2], squeezing enhancing techniques have been extensively investigated, leading to very highly squeezed states [4] and NOON states [5]. The benchtest to study the practical application of quantum technology is gravitational wave detection: the instruments used nowadays are reaching the classical limit due to the optical radiation pressure on the mirrors. Hence, further sensitivity improvements require quantum engineering techniques. Recently, squeezing enhancement has been proved in a gravitational wave detector prototype [6].

State-of-the-art atomic detectors, such as clocks [7], inertial sensors [8] and magnetometers [9], have also reached the standard quantum limit given by the atomic shot-noise. To go further, the sensitivity can be enhanced by either increasing the number of atoms or reducing the effect of quantum noise [18]. In this context, atomic spin-squeezed states [10] have recently been achieved [3, 11], [14–17], and they have allowed sensitivity enhancement in atomic clocks [11, 13, 14].

In this paper, we present apparatus designed to generate cold atomic samples in an optical cavity and to perform heterodyne non-demolition measurement in the perspective of spin-squeezed states preparation [29]. First, an overview of the experimental apparatus and a characterization of the high-finesse optical cavity are presented. The second part is dedicated to the heterodyne non-destructive measurement of an atomic population. More specifically, a scheme based on the frequency modulation spectroscopy technique is used. This allows one

3

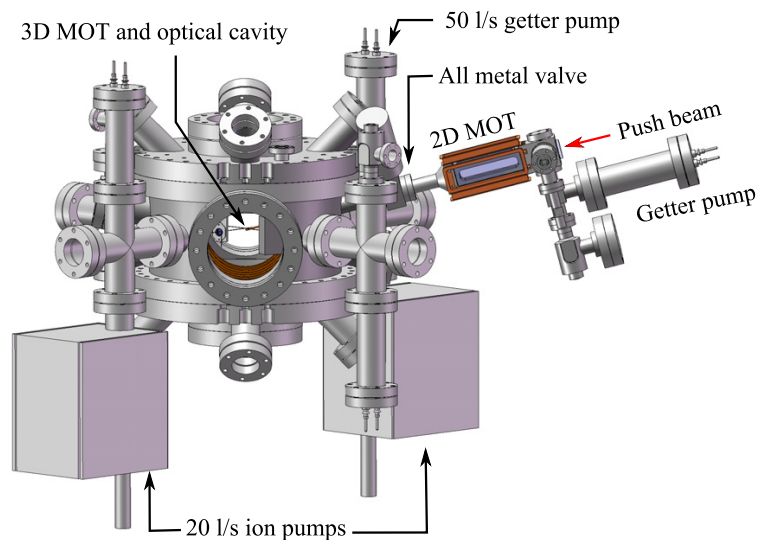
IOP Institute of Physics Φ DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

Figure 1. Overview of the vacuum system showing the compact two-dimensional (2D) MOT on the right and the science chamber with the high-finesse cavity on the left.

to be limited to the shot-noise of a weak optical probe and offers a high rejection of path length fluctuations, which are critical for small phase-shift measurements. After a presentation of the experimental setup, we demonstrate the non-demolition measurement of Rabi oscillations and characterize the influence of the probe on the oscillations. We finally show the real-time measurement of the internal atomic state evolution in a Ramsey interferometer.

2. The experimental apparatus

The apparatus is composed of two chambers: in the first a two-dimensional (2D) magneto-optical trap (MOT) is operated and used as a source of cold atoms; the second is the science chamber where the 3D MOT and the experiments are performed in the center of a crossed optical cavity (figure 1).

2.1. 2D and 3D MOTs

The 2D MOT vacuum chamber is a titanium machined piece with glue sealed windows, which are antireflection coated at 780 nm on both sides. The science chamber is made of non-magnetic stainless steel (AISI type 316LN) and titanium; its viewports are antireflection coated at 780 nm. To operate the resonator-enhanced optical trap, the viewports on the horizontal plane are additionally antireflection coated at 1560 nm.

The pressure in the 2D MOT chamber is below 7×10^{-8} mbar, whereas in the science chamber it is below 10^{-9} mbar. The differential vacuum operation relies on reduced conductivity between the two chambers.

The 2D MOT produces a bright source of pre-cooled atoms used to load the 3D MOT. The rubidium background pressure is obtained from the vapor pressure of a 1 g rubidium sample.

4

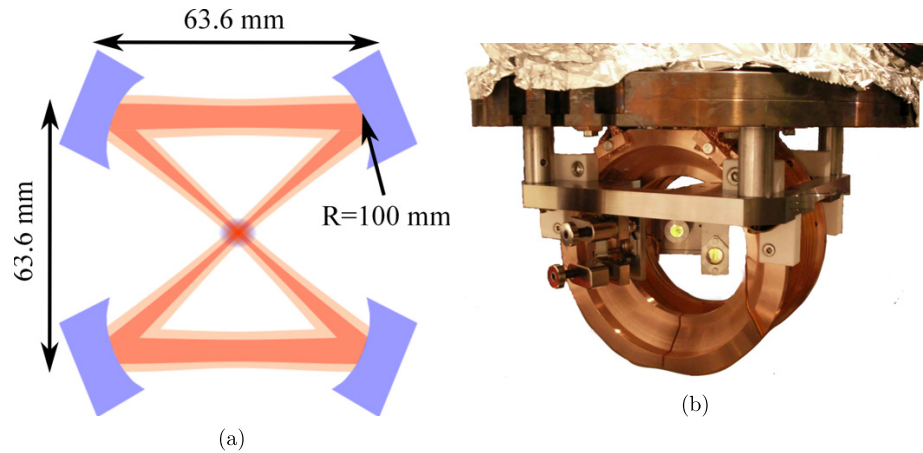
IOP Institute of Physics Φ DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

Figure 2. Folded optical cavity. (a) Schematic view of the cavity geometry and (b) the inner vacuum setup with the suspended cavity and the coils generating the MOT magnetic field.

The loading rate of the 3D MOT by the 2D MOT is about 5×10^8 at. s^{-1} at room temperature. The MOT lifetime is ~ 20 s. The center of the 3D MOT is placed 3 mm above the 2D MOT jet to avoid direct collisions with thermal atoms, and is centered on the cavity crossing region where atoms can be optically trapped in the resonator. The 3D MOT coils are mounted in vacuum and are mechanically tightened using ceramic supports to the titanium plate holding the cavity (figure 2(b)). The heat produced by the 3D MOT coils (2×9.6 W) is directly dissipated towards the vacuum chamber through copper braided links. These coils create a $2.2 \text{ G cm}^{-1} \text{ A}^{-1}$ gradient and are normally operated at 4 A.

The MOT beams are generated by external cavity diode lasers [19] amplified to 1 W by tapered amplifiers. Fiber-coupled splitters (Schäfer + Kirchhoff and OzOptics) are adopted to obtain independent MOT beams in a compact and reliable design.

The repump light frequency is fixed on the $|F = 1\rangle \rightarrow |F = 2\rangle$ atomic transition while the cooling and probing light are frequency locked to the repump laser. They can be continuously frequency shifted over a range of 400 MHz.

2.2. The high-finesse cavity

The optical cavity that is resonant for both 1560 nm and 780 nm is of dual interest in this experiment. In the first instance, it allows one to produce a deep optical potential to trap atoms using a low-power laser source by exploiting the build-up effect of the resonator at 1560 nm. On the other hand, the presence of resonance at 780 nm could be used in future experiments to enhance the light–atom coupling and thus to improve the efficiency of the non-demolition measurement.

2.2.1. The mechanical design. The cavity, shown in figure 2, is made up of four mirrors placed at the corners of a square with a diagonal of 90 mm. All of the mechanical components of the cavity are realized in titanium so as to maintain a low magnetic environment for the trapped atoms. The size of the cavity results from a compromise to maximize optical access

while minimizing the cavity mode to ensure tight trapping. The square geometry enables a 90° crossing angle, which avoids an interference pattern in the crossing region once the polarization is set to be in the cavity plane. The mirrors are all identical and are plane concave with a radius of curvature of $R = 100$ mm. They have a diameter of $1/2$ inch. All parts are tightly mounted on a 15 mm thick titanium plate, which provides mechanical stability to the setup. Two mirror mounts are completely fixed. One mount is actuated under vacuum by piezoelectric actuators (Newfocus Picomotors), which allow for a coarse alignment of the cavity. The last mount is a piezo-actuated three-axis nano-positioning system (Madcylabs M3Z) with a maximal angular displacement of 2 mrad and a translation of $50 \mu\text{m}$. It is used to finely adjust the cavity crossing angle and dynamically control the cavity length.

2.2.2. Spectral properties. The four mirrors of the cavity are highly reflecting at both 1560 and 780 nm. The free spectral range (FSR) of the cavity is 976.2 MHz and the cavity's full width at half maximum (FWHM) linewidth is $\gamma = 546$ kHz at 1560 nm. The FSR is measured by simultaneously injecting the carrier and a sideband created by an electro-optic modulator (EOM) in two adjacent longitudinal modes. γ is obtained from the Lorentzian profile of the transmission when the sideband is scanned across the resonance. The finesse is then $\mathcal{F}_{1560} = \text{FSR}/\gamma = 1788$. The corresponding mirror amplitude reflectivity, obtained from the formula $\mathcal{F} = \pi r^2/(1 - r^4)$, is $r = 99.956\%$ at 1560 nm. At 780 nm, the reflectivity measured by the manufacturer is $r = 99.999\,23\%$, meaning an expected finesse $\mathcal{F}_{780} = 102\,000$ that has not yet been measured in the present cavity.

2.2.3. Geometrical characterization. To estimate the mode parameters, the resonator was analyzed with the ABCD matrix formalism [20]. In more detail, the cavity is converted into an equivalent sequence of lenses and self-consistency is postulated. In the adopted geometry, an astigmatism arises from the non-zero angle of incidence θ on the curved mirrors. The effective radii of curvature are then $R_{\parallel} = R \cos \theta$ in the plane defined by the cavity (horizontal plane) and $R_{\perp} = R/\cos \theta$ in the orthogonal plane.

We measured the geometrical properties of the cavity by analyzing the transverse mode spectrum at 1560 nm. Since the cavity is astigmatic, the transverse modes have Hermite–Gauss profiles. The horizontal mode inter-spacing is 78.9 MHz and the vertical is 164.6 MHz. The mode eigenfrequencies are related to the Gouy phase [21] acquired by the photons while traversing the beam waist and are thus linked to the cavity geometry. The absolute mode frequencies are given by [22]

$$\nu_{p,m,n} = \frac{c}{2\pi L} \left[2p\pi + \left(m + \frac{1}{2}\right) \text{Arg}\left(A_m + \frac{B_m}{q_m}\right) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \text{Arg}\left(A_n + \frac{B_n}{q_n}\right) \right], \quad (1)$$

where p is the longitudinal mode order, m and n are the horizontal (TEM_{m0}) and vertical (TEM_{0n}) transverse mode numbers, A_m and B_m factors refer to the ABCD matrix element in the m direction, and q_m is the complex radius of curvature of the beam. Parameters A , B and q contain geometrical information about the cavity (length, angle and radius of curvature of the mirrors).

Figure 3 compares the experimental measurement of the transverse mode inter-spacing and its *a priori* calculation (red dashed line). The discrepancy of the horizontal splitting is corrected by a phenomenological factor α_{\parallel} that, for example, accounts for aberrations. This factor is

6

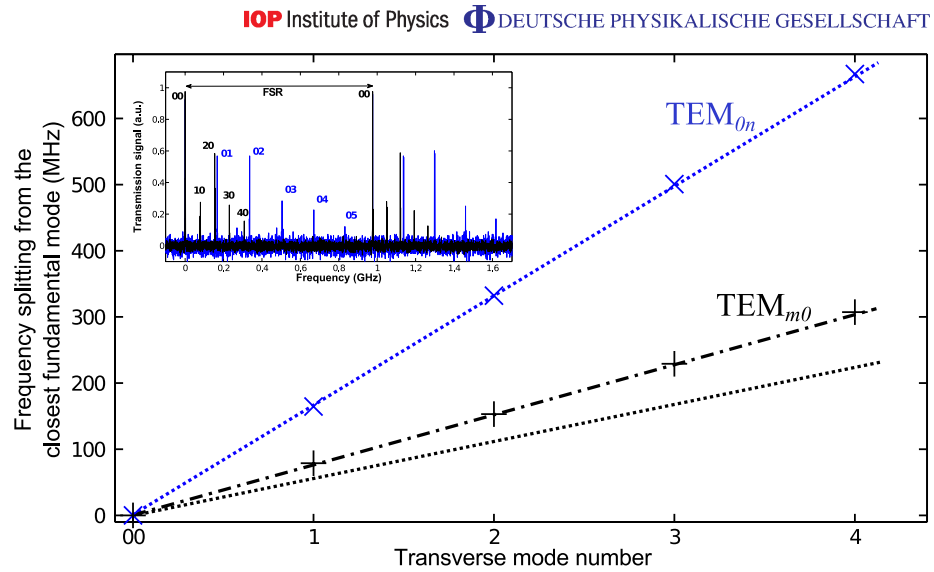


Figure 3. Frequency splitting of the transverse mode relative to the closest fundamental mode. The dashed lines represent equation (1) with no adjustable parameters for the two orthogonal directions when only the off-axis incidence on the mirrors is taken into account. For the horizontal direction, the dashed-dotted line also includes corrections on the effective radius of curvature. The inset gives the cavity transmission signal when the cavity length is scanned for a horizontal (black, TEM_{m0}) and a vertical (blue, TEM_{0n}) misalignment of the injection beam.

applied on the horizontal effective radius of curvature $R_{\parallel} = \alpha_{\parallel} R \cos \theta$, and is adjusted on the slope of the data giving $\alpha_{\parallel} = 1.020(5)$ (black curve in figure 3). In the adopted quasi-concentric configuration, the parallel direction is the closest to the instability regime. A 2% deviation of α_{\parallel} induces a noticeable frequency shift, as can be seen in figure 3. Including this correction for the astigmatism, we infer a horizontal waist $\omega_{\parallel} = 93.1 \mu\text{m}$ to be compared with $98(1) \mu\text{m}$ found using a tomographic measurement [23, 24] and reported in section 2.2.5. The vertical waist is calculated to be $\omega_{\perp} = 129.8 \mu\text{m}$. The corresponding Rayleigh ranges are $z_{\text{r}}^{\parallel} = 17.46 \text{ mm}$ and $z_{\text{r}}^{\perp} = 33.9 \text{ mm}$.

2.2.4. Frequency lock of the 1560 nm laser to the cavity. The optical cavity is pumped with the radiation produced by a single longitudinal-mode, distributed-feedback erbium-doped fiber laser (DF-EDFL) near 1560 nm (Koheras laser from NKT Photonics), amplified by a 5 W erbium-doped fiber amplifier (EDFA, from Keopsys). The typical laser linewidth is of the order of a few kHz, its output power is 100 mW single mode and it is linearly polarized. The radiation is coupled to the resonator through a beam expander and a tilted doublet, whose angle allows us to mode-match the astigmatism. The laser is locked to a transversal cavity mode using the Pound–Drever–Hall technique [25]. A low-frequency feedback is applied on the piezoelectric element controlling the laser cavity length. The fast-frequency correction is realized with an acousto-optic modulator (AOM) in a double-pass configuration with a bandwidth of 250 kHz. More details about the implemented lock scheme and its noise performance can be found in [24].

7

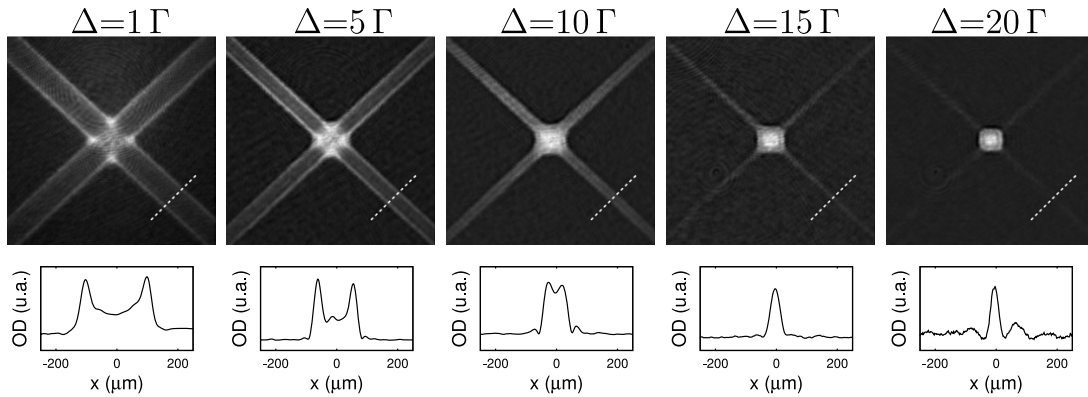
IOP Institute of Physics Φ DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

Figure 4. Top: tomographic images of the optical potential setting the probe frequency to different detuning with respect to the D_2 line. Bottom: integral optical density obtained by projecting the upper images onto the 45° dashed line crossing one arm of the cavity.

2.2.5. Light-shift tomography of the cavity optical potential. The atoms released from the MOT, operated in the crossing region of the two cavity arms, are used to characterize *in situ* the resonator geometry. The light at 1560 nm that pumps the cavity is close to the rubidium transitions $5P_{3/2}-4D_{3/2,5/2}$ at 1529 nm. This causes a strong differential light-shift on the two levels of the D_2 transition. More precisely, at 1560 nm, the scalar polarizability of the $5P_{3/2}$ level is 47.7 times that of the $5S_{1/2}$ level. As a consequence, by changing the detuning of the probe beam with regard to the D_2 transition, it is possible to bring into resonance atoms placed at different positions in the optical potential [23].

This method provides isopotential lines of the crossed dipole trap, as shown in figure 4, where the 1560 nm laser is locked to the fundamental transversal mode (TEM_{00}). In each shot, the probe detuned by δ is absorbed by atoms with potential energy $U(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 c \text{Re}(\alpha) I(\mathbf{r})/2 = \hbar\delta/(47.7 - 1)$ in the ground level; for this atomic class the probe is shifted into resonance because of the local differential light-shift. The optical density was projected onto an axis parallel to one cavity arm (lower row in figure 4), and the profile was fitted to obtain the distance between the couples of isopotential lines. Plotting the position of these isolines versus probe detuning provides the cavity mode profile, as shown in figure 5. A fit with the first Hermite–Gauss mode gives a waist $\omega_{\parallel} = 98(1) \mu\text{m}$. In [24], a similar analysis was also performed for the TEM_{10} and TEM_{20} modes, obtaining consistent results.

2.2.6. Scattering and losses. The differential light-shift presented in section 2.2.5 is proportional to the intracavity intensity and to the atomic polarizability ($\alpha = 6.83 \times 10^{-39} \text{Jm}^2 \text{V}^{-2}$ [26, 27]). In a four-mirror geometry, the intracavity power P_{intra} is related to the power at one output P_{out} by $P_{\text{intra}} = 2(1+x)\mathcal{F}P_{\text{out}}/\pi$, where $x = \kappa_L^2/t^2$ represents the loss of mirrors κ_L in units of mirror transmission t . Combining the measurement of the differential light-shift caused by the intracavity power with the output power in one arm, we infer scattering losses on the mirrors that are 1.5 times the mirror transmission.

Considering these extra-losses, the maximum coupling efficiency achievable is 36%. The maximum coupling obtained experimentally is 35(2)%. The total backward scattering intensity

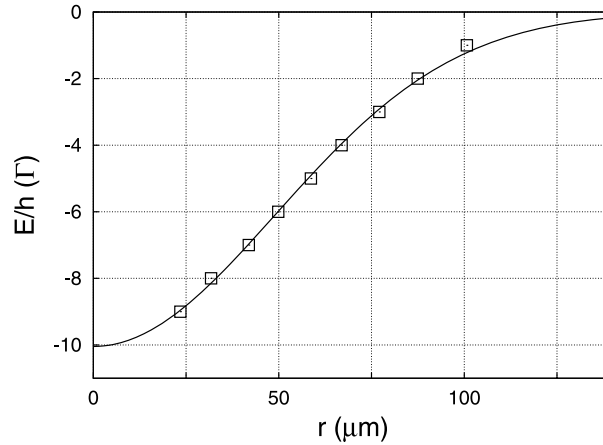


Figure 5. Optical potential depth when the 1560 nm laser is locked to the fundamental transversal mode of the optical resonator. The measurement was obtained by projecting the signal relative to one arm of the cavity. The result of the fit with the first Hermite–Gauss mode is shown by a solid line.

on the cavity mirrors is measured to be 1.9% of the intensity in the forward direction. This light, which propagates in the reverse direction, interferes with the forward propagating light. If the contrast of the interference is maximal, a modulation depth of the optical potential of 4.4% is expected. The standing wave formed by the retroreflection is phase related to the mirror positions and is then sensitive to the thermal drift and acoustic noise affecting the mirrors.

3. Trapping in a folded cavity

The optical resonator is used to enhance the 1560 nm input intensity in order to obtain a high intracavity power suitable to realize a far off resonance optical dipole trap for neutral atoms (FORT). More precisely, with an incident power of 5 W, an intracavity power of 200 W is reached. Moreover, at the cavity crossing, the potential presents high trapping frequencies in all spatial directions. At full power, a trap depth of $U_0 = 1.4$ mK is obtained and the trapping frequencies are $\omega_x/2\pi = \omega_y/2\pi = 1.2$ kHz and $\omega_z/2\pi = 1.6$ kHz.

The dipole trap is loaded from a MOT in a similar way as described in [28]. For the loading, the depth of the FORT starts at ~ 100 μ K. A compressed MOT phase is operated by detuning the MOT beams to 5 Γ from the atomic resonance for 50 ms. The cloud is compressed and the atomic density increases in the FORT region. The cooling beams are then further detuned to 40 Γ for 100 ms. The high detuning was chosen to red-detune the light with respect to the atomic transition even in the presence of the strong light-shift. Moreover, in the FORT region, the repump light is out of resonance and the atoms are accumulated in the $F = 1$ hyperfine state, realizing in this way a dark MOT induced by the atomic light-shift. Finally, the cooling radiation is turned off and the power in the FORT is ramped up to full power in 10 ms.

At the end of the loading sequence, about 20 million atoms are loaded at the crossing region of the dipole trap. After thermalization, the sample temperature is 230 μ K, leading to a temperature to trap depth ratio of $k_B T/U_0 \sim 6$. As demonstrated by the exponential decay in figure 6, the trapping time is limited to 6.6 s by one-body losses.

9

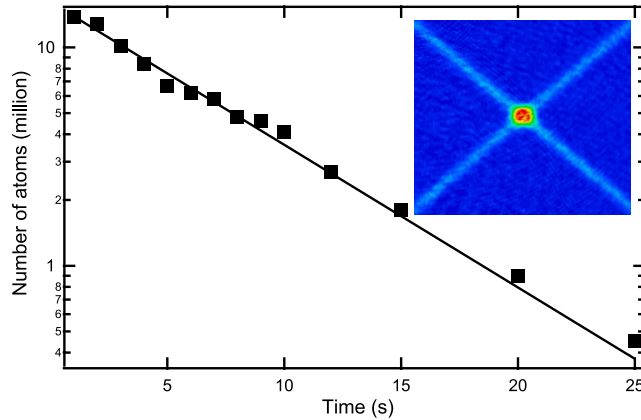
IOP Institute of Physics Φ DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

Figure 6. Number of atoms in the trap versus trapping time. The solid line is an exponential fit for one-body losses. The inset shows an image of the trapped atomic sample after 500 ms.

4. Heterodyne non-demolition measurement

4.1. Collective measurement

An ideal quantum non-demolition (QND) measurement can be seen as the textbook quantum projective measurement realized on an operator that commutes with the Hamiltonian. In the case of multi-particle measurement, the result of the measurement *collectively* constrains the sample and not individual atoms. Correlations between atoms have been created in what is called the measurement back-action. The back-action collapses the wavefunction and can be used to prepare spin-squeezed states [29].

In the following, we consider an ensemble of N_{at} two-level atoms $\{|a_i\rangle, |b_i\rangle\}$. We introduce the collective-spin operators,

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2} \sum_i (|b_i\rangle \langle a_i| + |a_i\rangle \langle b_i|), \quad (2)$$

$$\hat{J}_y = \frac{i}{2} \sum_i (|a_i\rangle \langle b_i| - |b_i\rangle \langle a_i|), \quad (3)$$

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2} \sum_i (|b_i\rangle \langle b_i| - |a_i\rangle \langle a_i|), \quad (4)$$

which obey the commutation relations $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k$. The observable of the measurement is $\hat{J}_z = \Delta\hat{N}/2$, which is one half of the population difference between the two internal atomic states. For a coherent spin state (CSS) polarized along \hat{J}_x , one has $(\langle\hat{J}_x\rangle, \langle\hat{J}_y\rangle, \langle\hat{J}_z\rangle) = (N_{\text{at}}/2, 0, 0)$ and $(\Delta\hat{J}_x^2, \Delta\hat{J}_y^2, \Delta\hat{J}_z^2) = (0, N_{\text{at}}, N_{\text{at}})/4$. If the measurement is sensitive to atomic fluctuations (ΔJ_z^2) , the atomic wavefunction collapses with respect to the measurement precision and thus we can prepare a spin-squeezed state [29] valuable for atom interferometry improvements [42].

A non-demolition measurement based on optical techniques requires reaching a high signal-to-noise detection together with a low light level to limit the decoherence induced by spontaneous emission. Spontaneous emission can be reduced using off-resonance probing, which is a dispersive measurement [30]. In that case, the off-resonance modification of the refractive index is measured by the phase shift induced on the probe optical field. Several techniques can be implemented to measure this phase shift, including Mach–Zehnder interferometry [14], mapping phase fluctuations into intensity fluctuations using a cavity tuned on the side of its resonance [11], or comparing the probe dephasing to a far from resonance local oscillator [29, 31]. The latter technique, called heterodyne detection, is adopted in the following.

The detection scheme considered is based on frequency modulation spectroscopy [25, 32, 33]. A laser beam is phase modulated to produce frequency sidebands; one sideband is placed close to an atomic transition and experiences a phase shift ϕ_{at} passing through the atomic sample. The detection of the beat note at the modulation frequency then allows us to estimate the atomic population of the probed state.

This scheme benefits highly from the almost non-interacting carrier used as a local oscillator. For a laser, limited by its quantum fluctuations (section 4.4), the signal-to-noise ratio (SNR) of the detection is

$$\text{SNR} \propto \frac{\sqrt{N_s N_c}}{\sqrt{(\sqrt{N_s})^2 + (\sqrt{N_c})^2 + (\sqrt{N_e})^2}} \sin \phi_{\text{at}}, \quad (5)$$

where N_s represents the total number of photons detected in the sideband and N_c represent the photon number in the carrier. The contribution of technical noises in units of photon number is N_e . We underline that the two first terms of the denominator in equation (5) are the quantum phase noise of the laser expressed in terms of photon number. For high power in the local oscillator, the shot-noise overcomes the detection noise, $N_c \gg N_e$, and equation (5) simplifies to $\text{SNR} \approx \sqrt{N_s} \sin \phi_{\text{at}}$, which corresponds to a sideband shot-noise limited detection, independent of the sideband power. The probe's sensitivity to fluctuations of the optical path is considered in the next section.

4.2. A low sensitivity to common mode noise

In homodyne detections, such as Mach–Zehnder interferometry, the sensitivity to path length fluctuations is determined by the optical wavelength λ . In a heterodyne detection scheme for which frequency components are spatially overlapped, the relevant length is the modulation wavelength $\lambda_{\text{mod}} = \Omega/(2\pi c)$. For a modulation in the microwave range, λ_{mod} is of the order of a few centimeters, whereas λ is of the order of a micrometer. As a consequence, the sensitivity to length fluctuations is greatly reduced.

In the following, we focus on the sensitivity of a phase-modulated detection with respect to optical path length fluctuations, and consider the effect of residual amplitude modulation (RAM) [34]. An optical field E , phase modulated at Ω , can be written as

$$E = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_c t + n\Omega t), \quad (6)$$

where J_n are Bessel functions of the first kind and β is the modulation depth.

For a small modulation depth ($\beta \ll 1$), the expansion can be limited to first order ($J_0(\beta)$, $J_1(\beta)$, $J_{-1}(\beta)$) $\approx (1, \beta, -\beta)$. Let ϕ_0 , ϕ_1 and ϕ_{-1} be the different atomic phase shifts

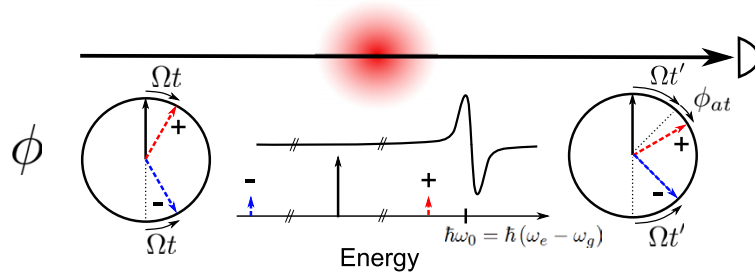


Figure 7. Schematic view of a population-sensitive heterodyne measurement. The circles are instantaneous phase representations of the optical frequency components in the frame rotating at the carrier frequency. The positive sideband (+, in red) starts in phase with the carrier and turns with angular frequency Ω , whereas the negative sideband (-, in blue) starts in opposite phase and turns with angular frequency $-\Omega$. The positive sideband is close to the atomic transition ω_0 ; it accumulates an additional phase ϕ_{at} , which is extracted after demodulation.

experienced by each frequency component of the optical field. The photocurrent i_{det} at the output of the photodetector is

$$i_{det} = \eta P_{opt} \left(1 + \beta \cos\left(\Omega t - \frac{\Omega L}{c}\right) \Delta\Phi_+ + \beta \sin\left(\Omega t - \frac{\Omega L}{c}\right) \Delta\Phi_- \right), \quad (7)$$

where L is the distance between the modulator and the detector, P_{opt} is the optical power in the local oscillator, η is the detection sensitivity of the photodiode, and

$$\Delta\Phi_+ = \cos(\phi_1 - \phi_0) - \cos(\phi_0 - \phi_{-1}), \quad (8)$$

$$\Delta\Phi_- = \sin(\phi_1 - \phi_0) - \sin(\phi_0 - \phi_{-1}). \quad (9)$$

After the demodulation of i_{det} by $\sin(\Omega t + \Phi_{dem})$ with $\Phi_{dem} = \Omega L/c$, and for length noise fluctuations δL of the optical path integrated in the detection bandwidth Δf , the dispersive signal obtained is $S = S_0 + \delta S_L$, where

$$S_0 = \eta\beta P_{opt} \Delta\Phi_-, \quad (10)$$

$$\delta S_L = 2\pi\eta\beta P_{opt} \frac{\delta L}{\lambda_{mod}} \Delta\Phi_+. \quad (11)$$

δS_L is the component of the noise that is due to fluctuations of the optical path length. Since the atomic contributions to the phase shift are small, $\phi_{-1}, \phi_0, \phi_1 \ll 1$, we have, at second order,

$$\Delta\Phi_+ = \frac{1}{2} (\phi_1 - \phi_{-1}) (2\phi_0 - \phi_1 - \phi_{-1}), \quad (12)$$

$$\Delta\Phi_- = \phi_1 + \phi_{-1} - 2\phi_0. \quad (13)$$

Considering the case depicted in figure 7, we have $\phi_1 = \phi_{at} \ll 1$ and $\phi_{-1} = \phi_0 = 0$. From equations (11), (12) and (13), the detection noise δS_L is $\eta\beta P_{opt} \phi_{at}^2 \delta L / \lambda_{mod}$. Hence, for a pure phase modulation, a small atomic phase-shift ϕ_{at} makes the signal even less sensitive to length fluctuations than $\delta L / \lambda_{mod}$.

A major noise source in this heterodyne scheme arises from the residual amplitude modulation due to phase modulation imperfections. The residual amplitude modulation unbalances the field amplitude in the sidebands and the optical electric field can be written as $E = E_0 e^{i\omega_c t} (1 + \beta(1 + \epsilon)e^{i\Omega t} - \beta(1 - \epsilon)e^{-i\Omega t})$. The signal after demodulation is

$$S = \eta\beta P_{\text{opt}} \left[(\Delta\Phi_- + \epsilon\Delta\Phi_{-,AM}) + 2\pi \frac{\delta L}{\lambda_{\text{mod}}} (\Delta\Phi_+ + \epsilon\Delta\Phi_{+,AM}) \right], \quad (14)$$

where $\Delta\Phi_{+,AM}$ and $\Delta\Phi_{-,AM}$ are the atomic phase contributions for a pure amplitude modulation,

$$\Delta\Phi_{+,AM} = 2 + \frac{1}{2} [(\phi_1 - \phi_0)^2 + (\phi_{-1} - \phi_0)^2], \quad (15)$$

$$\Delta\Phi_{-,AM} = \phi_1 - \phi_{-1}. \quad (16)$$

In the case of figure 7, the overall noise contribution of optical path length fluctuations is

$$\delta S_L = \eta\beta P_{\text{opt}} (\phi_{\text{at}}^2 + \epsilon) \frac{\delta L}{\lambda_{\text{mod}}}. \quad (17)$$

As a consequence, in a phase-modulated detection, the length fluctuations are rejected by a factor $(\phi_{\text{at}}^2 + \epsilon)\lambda/\lambda_{\text{mod}}$ with respect to a Mach–Zehnder interferometer (equation (17)). For our experimental parameters, $\epsilon = 10^{-2}$, $\lambda_{\text{mod}} = 10$ cm, $\lambda = 1$ μm , and for $\phi_{\text{at}} < 100$ mrad, it represents 7 orders of magnitude of rejection on δS_L . In addition, $\delta S_L/\delta S_{\text{shot}}$ scales as $\sqrt{P_{\text{opt}}}$. As a result, if the photodetector is shot-noise limited for a low optical power in the local oscillator (section 4.4), there is no need for dynamical control of the optical path length.

4.3. Optical setup

The optical setup is presented in figure 8. The detection beam is generated by an ECDL, frequency locked to the reference laser [35]. The detuning of the carrier, and thus of the sideband from the atomic resonance, is electronically controlled by a PLL. An AOM is used as a switch for the detection beam and generates pulses with 300 ns rise time. A polarization maintaining fibered EOM produces frequency sidebands that probe the atomic sample. The beating signal of the carrier with sidebands is detected on a fast photodiode (see section 4.4), and the demodulated signal is acquired with a digital oscilloscope. The internal atomic state is manipulated with a microwave signal at about 6.834 GHz, generated by a home-made frequency chain. This chain relies on a low-noise quartz oscillator (Wenzel Associates, mod. Blue Top Ultra Low Noise Oscillator), which has -113 dBc Hz $^{-1}$ phase noise at 1 Hz. After suitable amplification, the microwave is focused on atoms with an antenna placed at about 20 cm from the sample.

4.4. The optical detector

The beat-note signal is detected on a fast GaAs PIN photodiode with an integrated transimpedance amplifier designed for high-speed optical communications at 850 nm (Finisar, model HFD3180-203). The electronic scheme for the photodiode and the amplifier is presented in figure 9. The integration of the photodiode and amplifier in the same package greatly reduces parasitic capacitances and allows a high-detection bandwidth of a few GHz together with a high transimpedance gain of the order of one k Ω . The detector is mounted on a home-made high-frequency printed circuit board. The output of the amplifier is connected to a 50 Ω matched coplanar waveguide and ac-coupled to an SMA connector.

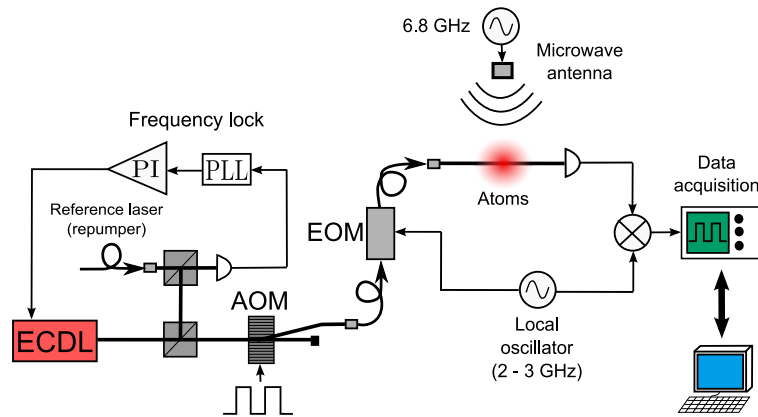


Figure 8. Setup of the single-pass non-destructive measurement. The probe light is generated by an extended cavity diode laser (ECDL) and offset locked to the atomic transition via a phase-locked loop (PLL) and a proportional integrator (PI) feedback loop. The absolute frequency of the light is controlled by changing the reference frequency of the PLL. Atoms are probed with the optical pulses generated by the AOM. The sidebands for heterodyne detection are inserted by a phase modulator.

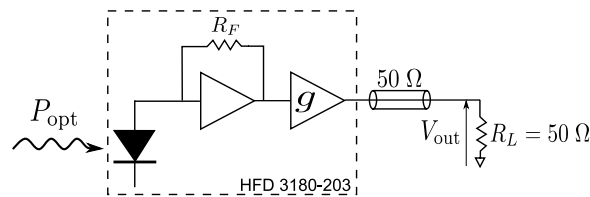


Figure 9. Scheme of the optical detector. This comprises a fast photodiode followed by a transimpedance amplifier of gain R_F and a buffer with gain g .

The noise at the output of the photodiode was measured with a spectrum analyzer. The output of the transimpedance amplifier was amplified by 36 dB to overcome the noise level of the spectrum analyzer. The noise power spectral density of the illuminated detector was measured at 1 and 2 GHz, as reported in figure 10.

The measurement shows very good linearity of the noise power spectral density versus the incident power, which means that both the laser and the detector are shot-noise limited at the adopted frequencies. The figure of merit κ considered is the electronic noise equivalent light shot-noise, that is the optical power required to generate the same noise as the detection electronics [36]. We measured $\kappa = 165 \mu\text{W}$ at 1 GHz and $\kappa = 469 \mu\text{W}$ at 2 GHz.

Moreover, the slope provides a direct measurement of the photodiode gain $G_{\text{PD}} = V_{\text{out}}/P_{\text{opt}} = gR_F\eta$, where $\eta \sim 0.5 \text{ A W}^{-1}$ is the sensitivity of the photodiode (see figure 9 for notations). At the output of the transimpedance amplifier, voltage fluctuations induced by the light shot-noise are $v_n = gR_F\sqrt{2e\eta P_{\text{opt}}\Delta f}$, where e is the charge of the electron and Δf is the detection bandwidth. Hence, the noise power spectral density on a resistance load R_L

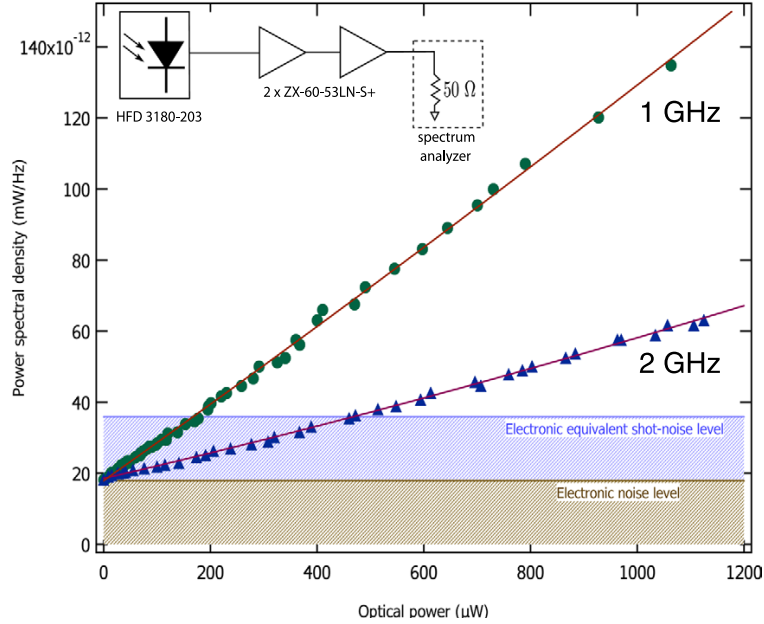


Figure 10. Noise power spectral density versus incident optical power for two different detection frequencies, 1 GHz (circles) and 2 GHz (triangles). The inset presents the setup used for the noise measurement.

of 50 Ω is

$$\text{PSD}_n = \frac{v_n^2}{R_L \Delta f} = 2e \frac{G_{\text{PD}}^2}{R_L \eta} P_{\text{opt}}. \quad (18)$$

From the slopes of figure 10, one obtains $G_{\text{PD}} = 1466 \text{ V W}^{-1}$ at 1 GHz and $G_{\text{PD}} = 880 \text{ V W}^{-1}$ at 2 GHz, values in good agreement with the nominal value that are of 1250 V W^{-1} .

5. Non-demolition measurement of an evolving atomic state

We now switch to the application of our heterodyne scheme to the measurement of a cold atomic cloud in free fall during the measurement. We emphasize that the measurements are here realized in free space and do not benefit from the cavity coupling enhancement. The spontaneous emission rate induced by the probe is first measured. Then a real-time measurement of atoms undergoing Rabi oscillations is realized. Finally, the detection tool is used to follow continuously the evolution of an atomic state during an interferometric sequence.

5.1. Effective scattering rate

In experiments that concern measurement-induced squeezing, the probe-induced spontaneous emission is among the limiting factors that reach highly entangled states [37]. To quantify the destructivity induced by the probe in our setup, the atoms prepared in the $|F = 1\rangle$ hyperfine state are released from the dipole trap and continuously probed. The cloud contains 4.7(3) million

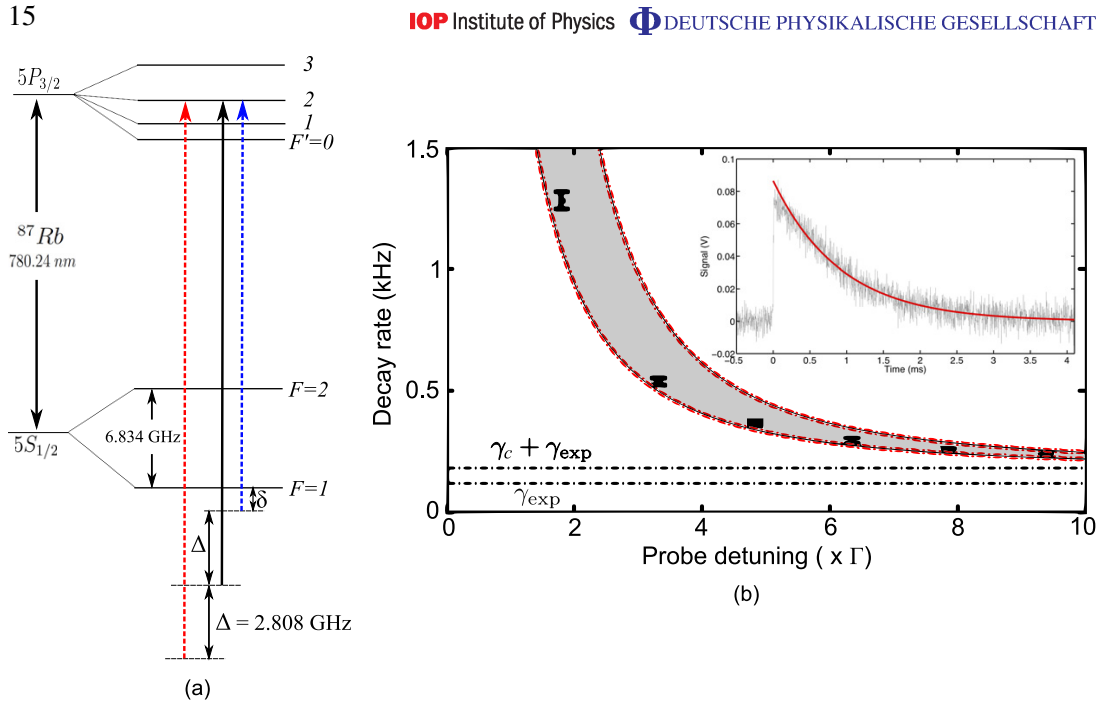


Figure 11. Destructivity as a function of probe detuning. (a) Frequency position of the optical triplet with respect to the D_2 atomic line. (b) Probe-induced scattering rate. The gray shaded area, with red dashed borders, represents the theoretical decay rate. The only adjustable parameter is the expansion rate of the cloud (γ_{exp}). The inset shows the demodulated atomic signal at $\delta = 4.81\Gamma$, with the relative exponential fit.

atoms in an initial rms size of $\sigma_{\text{at}} = 41 \mu\text{m}$ and expands with a temperature of $55(5) \mu\text{K}$. The optical frequency detunings with respect to the atomic transitions are presented in figure 11(a). The modulation frequency is fixed at 2.808 GHz. The detuning (δ) of the probing sideband with respect to the atomic transition is changed by moving the absolute frequency of the carrier. As a consequence, the quadrature set by the demodulation phase is independent of the detuning δ .

Spontaneous emission induced by the probe optically pumps the atoms to $|F = 2\rangle$ where they become transparent for the probe. The measured exponential decay time τ of the signal (inset of figure 11(b)) expressed as a decay rate $\gamma = 1/(\pi\tau)$ is then closely linked to the spontaneous emission rate of the probe.

The predicted decay rate γ , shown in figure 11(b) as a gray zone, is obtained by taking into account the contribution of the close to resonance sideband γ_s , the off resonance carrier γ_c and a constant γ_{exp} that apply for the signal loss due to the combination of fall and expansion of the cloud. This decay rate γ depends on the beam waist ($245 \mu\text{m}$), the carrier power ($P_c = 120 \mu\text{W}$) and the power in each sideband ($P_s = 76 \text{nW}$) of the linearly polarized probe, and it is expressed as

$$\gamma = \gamma_s + \gamma_c + \gamma_{\text{exp}} = b_2 \frac{\Gamma I_s / (2I_{\text{sat},2})}{1 + 4 \left(\frac{\delta}{\Gamma}\right)^2 + I_s / I_{\text{sat},2}} + \sum_{i=0}^2 b_i \frac{\Gamma I_c / (2I_{\text{sat},i})}{1 + 4 \left(\frac{\Delta_i}{\Gamma}\right)^2 + I_c / I_{\text{sat},i}} + \gamma_{\text{exp}}, \quad (19)$$

where $I_{\text{sat},i}$ is the saturation intensity for the π transition from $|F = 1\rangle$ to $|F' = i\rangle$, and the Zeeman sub-levels are considered equally populated. We have $I_{\text{sat},0} = 16.67 \text{ W m}^{-2}$, $I_{\text{sat},1} = 26.7 \text{ W m}^{-2}$ and $I_{\text{sat},2} = 61.23 \text{ W m}^{-2}$. The branching probabilities b_i to spontaneously scatter from $|F' = i\rangle$ to $|F = 2\rangle$ are $b_0 = 0$, $b_1 = 1/5$ and $b_2 = 1/2$. $I_s = 2P_s/(\pi w^2)$ is the sideband intensity, while I_c is the carrier intensity, $\Delta_i = 2.808 + \Delta_{2i}$ GHz is the carrier detuning from the transition, and Δ_{2i} is the angular frequency difference between $|F' = 2\rangle$ and $|F' = i\rangle$. The only adjustable parameter in figure 11(b) is $\gamma_{\text{exp}} = 120 \text{ Hz}$. A simulation of the loss of signal with the expansion gives a decay rate of 159 Hz, showing good qualitative agreement with this experimental value.

The gray zone in figure 11(b) represents the expected region for the decay rate versus the probe detuning when uncertainties in the experimental parameters are considered. It shows good agreement with the experimental data. Although the probe is very weak compared to the carrier, it dominates the spontaneous emission rate for $\delta < 5\Gamma$ in this specific experimental realization (figure 11(b)).

5.2. Rabi oscillations

Microwave-driven Rabi oscillation is a well-understood physical phenomenon and a typical demonstration of coherent manipulation. It is therefore very convenient to precisely characterize how a non-destructive probe affects the oscillating system [38–40].

The atomic system is released from the MOT and optically pumped in the hyperfine ground state $|F = 1, m_F = 0\rangle$. A magnetic bias field of 0.5 G is applied along the vertical axis so that other Zeeman transitions are off-resonance; the optical pumping sequence takes about 1 ms and its efficiency is 90%. At $t = 0$, a microwave-driven Rabi oscillation is induced between $|F = 1, m_F = 0\rangle$ and $|F = 2, m_F = 0\rangle$ levels. The cloud contains $\sim 10^7$ atoms and expands with a temperature of 80 μK . The probe used in this experiment has a waist of $w_0 = 800 \mu\text{m}$ that matches the MOT size and is delivered by pulses of 1.25 μs with a repetition rate of 100 kHz or 50 kHz. The carrier power is 70 μW and the sideband power is 90 nW. As described in figure 12(a), one sideband is blue detuned by δ from the $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ transition whereas the carrier is 2.5 GHz away from the resonance. Hence, the configuration is probing the population in the $|F = 2\rangle$ state.

Figure 12 shows two examples of real-time measurements of the atomic evolution obtained in a single shot. Figure 12(b) was taken with a probe detuning of 7.9 Γ and shows a trace of Rabi oscillation undergoing decoherence. Figure 12(c), which was taken with a detuning of 0.8 Γ , presents an uplift of the average oscillation. This effect is qualitatively explained by taking into account the probe-induced spontaneous emission, which transfers atoms from $|F = 2, m_F = 0\rangle$ to $|F = 2, m_F \neq 0\rangle$. There, the atoms still contribute to the detected signal while being off-resonance for the microwave excitation.

Figure 13(a) presents the difference of Rabi oscillation frequency $\delta\Omega_R$ for two different repetition rates of 100 and 50 kHz as a function of detuning ($\delta\Omega_R = \Omega_{R,100\text{kHz}} - \Omega_{R,50\text{kHz}}$). The Rabi frequency is obtained by fitting the first 800 μs of the oscillation where the expansion has little effect. It clearly shows that the probe light modifies the Rabi frequency around its unperturbed value ($\Omega_R \sim 6.6 \text{ kHz}$). For the experimental parameters given above, the carrier induces a light-shift $\Delta E_c/h \sim 2 \text{ kHz}$ for a 100 kHz repetition rate whereas the sideband light-shift is below 380 Hz for the smallest detuning considered. The difference in Rabi frequency

17

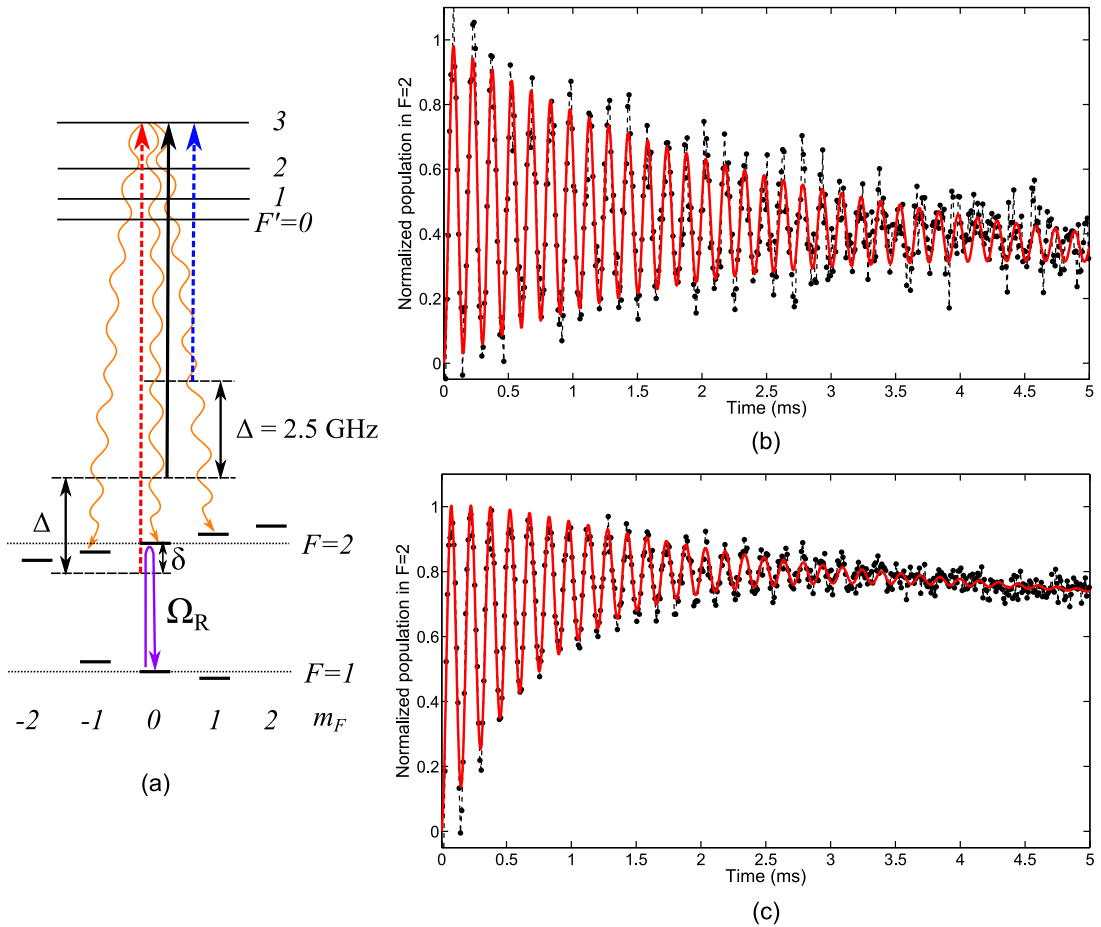


Figure 12. Non-demolition measurement of the atomic population in $|F = 2\rangle$ when Rabi oscillations are driven in the atomic sample. The probing sequence is realized with a $1.25 \mu\text{s}$ long pulse repeated every $10 \mu\text{s}$. Each graph is realized in a single experimental cycle. The detuning of the probe to the transition is set to 7.9Γ (b) and 0.8Γ (c). The red curve is a fit to the data and the dashed black line acts as a guide to the eyes.

calculated from the carrier light-shift is $\delta\Omega_R = 227 \text{ Hz}$, in reasonable agreement with the 197 Hz average of figure 13(a). In addition, from the fitting procedure, we determine that an $\text{SNR} = 1$ is obtained for a destructivity of 2.6×10^{-6} scattering events per atom.

The exponential damping of Rabi oscillations is described by its damping rate β , which is the sum of three independent terms,

$$\beta = \beta_{\text{spont}} + \beta_{\text{shift}} + \beta_{\text{else}}. \quad (20)$$

β_{spont} represents the damping of the oscillation by the spontaneous emission process of both the carrier and the sideband, β_{shift} results from the light-shift inhomogeneity induced by

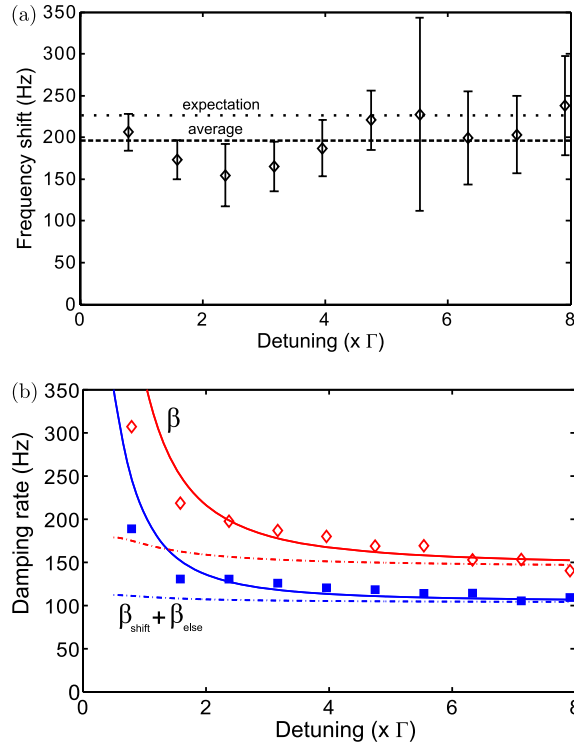


Figure 13. Dependence of the Rabi oscillation parameters from the probe detuning. (a) Difference in the Rabi frequency for data sets having repetition rates of 100 kHz and 50 kHz. (b) Damping rate of the oscillations. Red open diamonds present data with a repetition rate of 100 kHz, whereas blue squares represent data at 50 kHz. The solid lines are the expected decay rates, taking into account spontaneous emission, inhomogeneous light-shift and expansion. The dashed lines are the decay rates without the spontaneous emission contribution.

the Gaussian light profile [38], which is essentially limited to the carrier effect, and β_{else} represents probe-independent decoherence effects, such as microwave inhomogeneity and cloud expansion. The behavior of β versus probe detuning is presented in figure 13(b). The spatial inhomogeneity of the carrier light-shift contributes to dampen the oscillation in a characteristic time that is proportional to the inverse of the Rabi frequency dispersion $\Delta\Omega_R = \sqrt{\langle\Omega_R^2\rangle - \langle\Omega_R\rangle^2}$, where averages are taken over the cloud profile. It results in a damping rate $\beta_{\text{shift}} = \alpha\Delta E_c^2/(2\hbar^2\Omega_R)$, where α characterizes the inhomogeneity over the cloud size, and depends on the atomic and probe sizes. The theoretical curves plotted in figure 13(b) are given for $\beta_{\text{else}} = 90$ Hz and $\alpha = 0.162$.

The sum of the three damping coefficients reproduces well the observed behavior. Close to resonance, the damping of the oscillation is dominated by spontaneous emission events. Tuning the probe further from resonance greatly reduces the effect of spontaneous emission from the

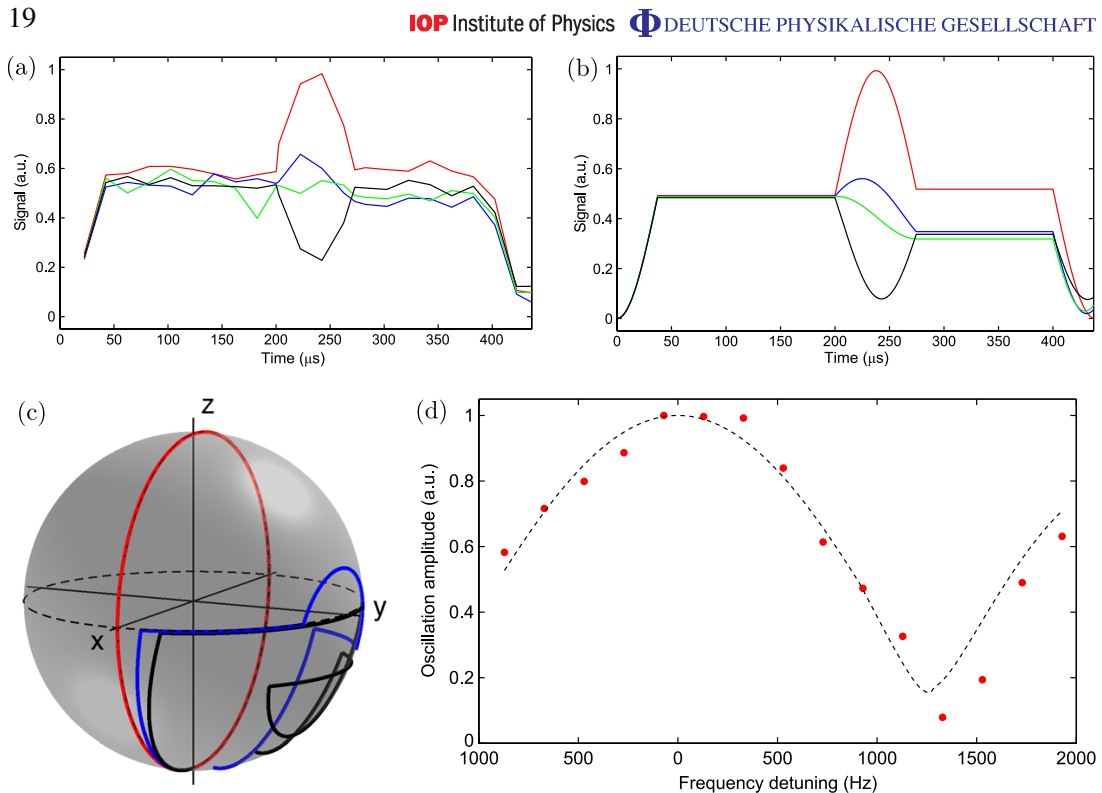


Figure 14. Spin-echo sequence. (a) Non-demolition measurement of the number of atoms in $|F = 2\rangle$ during the interferometric sequence. Each curve is the average of three repetitions. The measurement uses $1.25 \mu\text{s}$ long detection pulses with a repetition rate of 100 kHz. The different curves are obtained by scanning the microwave frequency. The microwave detuning from the atomic transition is 0 Hz (red curve), 1 kHz (blue curve), 1.2 kHz (green curve) and 1.8 kHz (black curve). The colors in (b) and (c) refer to the same microwave detuning. (b) Simulation of the expected signal during the evolution of the atomic sample. (c) Trajectories of the atomic state on the Bloch sphere. (d) Amplitude of the oscillation of the signal during the intermediate π pulse. The red dots are experimental data and the black dashed line is the expected amplitude.

sideband, and the damping becomes limited by the inhomogeneous light-shift induced by the carrier.

5.3. Interferometric phase in a spin-echo sequence

We present here the non-demolition measurement of the atomic state during an interferometric sequence. We are particularly interested in the evolution of the atomic pseudo-spin in the equatorial plane of the Bloch representation, since it is directly associated with the evolution of the interferometric phase.

The atoms are initially prepared in the $|F = 1, m_F = 0\rangle$ state and probed in the configuration of figure 12(a). The interferometer is a $\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\pi}{2}$ spin-echo sequence. The

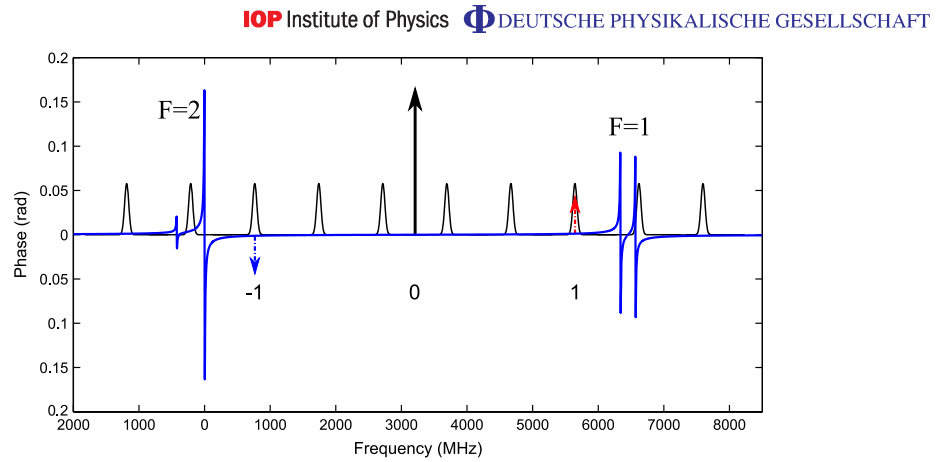


Figure 15. Scheme of the Pound–Drever–Hall-like measurement method. The carrier is locked at the center of two cavity resonances to suppress cavity noise. Each sideband probes one of the hyperfine states.

whole sequence was run in less than $500 \mu\text{s}$ to avoid loss of signal due to atomic cloud expansion and free fall. The π pulse has a duration of $74.5 \mu\text{s}$. The intermediate π pulse maps the interferometric phase on the measured observable $\hat{J}_z + \hat{N}/2$, which is the projection of the atomic spin vector on the z -axis in the Bloch representation of figure 14(c). To modify the interferometric phase, the frequency of the microwave driving field is scanned with respect to the ground state hyperfine transition.

Figure 14(a) shows the traces of the atomic state interferometer acquired in real time for different microwave detunings. The result is well understood in terms of rotations of the pseudo-spin vector on the Bloch sphere (figure 14(b) and (c)). The amplitudes of the signal oscillation during the intermediate π pulse were extracted from the traces and compare well with the predicted ones (figure 14(d)). The characterization shows that the superposition state of an interferometer can be measured without necessarily blurring the fringes. This indicates that the measurement was realized in the weak measurement regime, where the atomic state is not strongly projected. Moreover, in the usual interferometric sequence, atoms are lost after the destructive measurement. With such a non-demolition measurement at the end of the sequence, atoms can be reused so as to increase the duty cycle of atomic interferometers [41].

5.4. Cavity-enhanced measurements

As shown in [29, 42], the optimal level of squeezing $\xi^2 = 1/(1 + \kappa^2)$ is related to the SNR κ of the measurement,

$$\kappa^2 = \frac{\phi^2 N_{\text{at}} N_s}{2} \propto \rho_0 \eta, \quad (21)$$

where ϕ is the single-atom-induced phase shift, ρ_0 is the resonant optical density and η is the single-atom spontaneous emission probability for a pulse of N_s photons. The coherence loss due to spontaneous emission cannot be avoided since η enters in the equation of κ . Nevertheless, using a cavity to strengthen the atom–light interaction increases the coupling ϕ by the cavity

finesse \mathcal{F} . This results in an SNR enhancement proportional to $\sqrt{\mathcal{F}}$ [43] for a given spontaneous emission rate ($\eta \propto N_s$).

To prevent the light-shift effect of the carrier, the measurement can be realized in reflection [31]. In the scheme presented in figure 15, to measure the population difference, the detection realized with the two sidebands is shot-noise limited because of the strong local oscillator. In addition, the effective interaction between atoms and photons can take advantage of the trapping and probing that exploits the same cavity mode, hence guaranteeing an optimal mode overlap.

6. Conclusions

We have presented apparatus designed for the production of spin-squeezed cold atomic samples in a dual-frequency high-finesse cavity. We have shown that, thanks to the intra-cavity power enhancement, the chosen configuration is suitable for all-optical trapping of atoms using standard optical telecommunication technologies.

We described a new non-demolition heterodyne detection scheme. This scheme is limited by the optical shot-noise of the probe and presents a high rejection of optical path length fluctuations. We demonstrated the method by performing non-destructive measurements of the coherent evolution of internal atomic states. From the non-destructive measurement of Rabi oscillations, we have shown that the decoherence induced by the probe can be limited by the inhomogeneous light-shift from the carrier and not by the spontaneous emission induced by the sideband. We also presented a real-time measurement of the atomic state evolution in a Ramsey interferometer with low decoherence.

Our experiment is particularly suited for metrology with a high squeezing level of large particle numbers. Because of the power build-up at 1560 nm, we will achieve large degenerate samples with low intensity and heterodyne detection can be enhanced by using the cavity at 780 nm. Moreover, using the cavity-enhanced atom–light coupling combined with the intrinsic atomic and optical mode overlap should allow us to reach the ultimate sensitivity of the heterodyne measurement device while avoiding inhomogeneous light-shift from the carrier.

Acknowledgments

We thank David Holleville, Thierry Botter and Remi Geiger for their participation in the early stage of the experiment. This work was supported by IFRAF, DGA, European Union (with STREP program FINAQS) and ESF (EUROQUASAR program). AB acknowledges support from EU under an IEF Grant. SB acknowledges the Fulbright Foundation for support.

References

- [1] Lee H, Kok P and Dowling J P 2002 A quantum Rosetta stone for interferometry *J. Mod. Opt.* **49** 2325
- [2] Slusher R E, Hollberg L W, Yurke B, Mertz J C and Valley J F 1985 Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity *Phys. Rev. Lett.* **55** 2409
- [3] Chen Z, Bohnet J, Sankar S, Dai J and Thompson J 2011 Conditional spin squeezing of a large ensemble via the vacuum Rabi splitting *Phys. Rev. Lett.* **106** 133601

- [4] Vahlbruch H, Mehmet M, Chelkowski S, Hage B, Franzen A, Lastzka N, Gossler S, Danzmann K and Schnabel R 2008 Observation of squeezed light with 10-dB quantum-noise reduction *Phys. Rev. Lett.* **100** 033602
- [5] Afek I, Ambar O and Silberberg Y 2010 High-NOON states by mixing quantum and classical light *Science* **328** 879
- [6] Goda K, Miyakawa O, Mikhailov E E, Saraf S, Adhikari R, McKenzie K, Ward R, Vass S, Weinstein A J and Mavalvala N 2008 A quantum-enhanced prototype gravitational-wave detector *Nat. Phys.* **4** 472
- [7] Santarelli G, Laurent Ph, Lemonde P, Clairon A, Mann A G, Chang S, Luiten A N and Salomon C 1999 Quantum projection noise in an atomic fountain: a high stability cesium frequency standard *Phys. Rev. Lett.* **82** 4619
- [8] Gauguet A, Canuel B, Lévêque T, Chaibi W and Landragin A 2009 Characterization and limits of a cold-atom Sagnac interferometer *Phys. Rev. A* **80** 063604
- [9] Wasilewski W, Jensen K, Krauter H, Renema J J, Balabas M V and Polzik E S 2010 Quantum noise limited and entanglement-assisted magnetometry *Phys. Rev. Lett.* **104** 133601
- [10] Kitagawa M and Ueda M 1993 Squeezed spin states *Phys. Rev. A* **47** 5138–43
- [11] Schleier-Smith M H, Leroux I D and Vuletić V 2010 States of an ensemble of two-level atoms with reduced quantum uncertainty *Phys. Rev. Lett.* **104** 073604
- [12] Leroux I D, Schleier-Smith M H and Vuletić V 2010 Orientation-dependent entanglement lifetime in a squeezed atomic clock *Phys. Rev. Lett.* **104** 250801
- [13] Appel J, Windpassinger P J, Oblak D, Hoff U B, Kjærgaard N and Polzik E S 2009 Mesoscopic atomic entanglement for precision measurements beyond the standard quantum limit *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **106** 10960
- [14] Louchet-Chauvet A, Appel J, Renema J J, Oblak D, Kjærgaard N and Polzik E S 2010 Entanglement-assisted atomic clock beyond the projection noise limit *New J. Phys.* **12** 065032
- [15] Esteve J, Gross C, Weller A, Giovanazzi S and Oberthaler M K 2008 Squeezing and entanglement in a Bose–Einstein condensate *Nature* **455** 1216–9
- [16] Gross C, Zibold T, Nicklas E, Estève J and Oberthaler M K 2010 Nonlinear atom interferometer surpasses classical precision limit *Nature* **464** 1165–9
- [17] Riedel M F, Böhi P, Li Y, Hänsch T W, Sinatra A and Treutlein P 2010 Atom-chip-based generation of entanglement for quantum metrology *Nature* **464** 1170–3
- [18] Wineland D J, Bollinger J J, Itano W M, Moore F L and Heinzen D J 1992 Spin squeezing and reduced quantum noise in spectroscopy *Phys. Rev. A* **46** R6797–800
- [19] Baillard X, Gauguet A, Bize S, Lemonde P, Laurent Ph Clairon A and Rosenbusch P 2006 Interference-filter-stabilized external-cavity diode lasers *Opt. Commun.* **266** 609–13
- [20] Kogelnik H and Li T 1966 Laser beams and resonators *Appl. Opt.* **5** 1550
- [21] Gouy L G 1890 Sur une propriété nouvelle des ondes lumineuses *Acad. Sci. Paris* **110** 1251
- [22] Siegman A E 1986 *Lasers* (Mill Valley, CA: University Science Books)
- [23] Brantut J P, Clément J F, Robert de Saint Vincent M, Varoquaux G, Nyman R A, Aspect A, Bourdel T and Bouyer P 2008 Light-shift tomography in an optical-dipole trap for neutral atoms *Phys. Rev. A* **78** 031401R
- [24] Bertoldi A, Bernon S, Vanderbruggen T, Landragin A and Bouyer P 2010 *In situ* characterization of an optical cavity using atomic light shift *Opt. Lett.* **35** 3769
- [25] Drever R W P, Hall J L, Kowalski F V, Hough J, Ford G M, Munley A J and Ward H 1983 Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator *Appl. Phys. B* **31** 97
- [26] Arora B, Safronova M S and Clark C W 2007 Magic wavelengths for the np–ns transitions in alkali-metal atoms *Phys. Rev. A* **76** 052509
- [27] Safronova M S, Arora B and Clark C W 2006 Frequency-dependent polarizabilities of alkali-metal atoms from ultraviolet through infrared spectral regions *Phys. Rev. A* **73** 022505
- [28] Clément J-F, Brantut J-P, Robert de Saint-Vincent M, Nyman R A, Aspect A, Bourdel T and Bouyer P 2009 All-optical runaway evaporation to Bose–Einstein condensation *Phys. Rev. A* **79** 061406

- [29] Vanderbruggen T, Bernon S, Bertoldi A, Landragin A and Bouyer P 2011 Spin-squeezing and Dicke-state preparation by heterodyne measurement *Phys. Rev. A* **83** 013821
- [30] Kuzmich A, Bigelow N P and Mandel L 1998 Atomic quantum non-demolition measurements and squeezing *Europhys. Lett.* **42** 481–6
- [31] Teper I, Vrijsen G, Lee J and Kasevich M A 2008 Backaction noise produced via cavity-aided nondemolition measurement of an atomic clock state *Phys. Rev. A* **78** 051813
- [32] Black E D 2001 An introduction to Pound Drever Hall laser frequency stabilization *Am. J. Phys.* **69** 79
- [33] Bjorklund G C, Levenson M D, Lenth W and Ortiz C 1983 Frequency modulation spectroscopy *Appl. Phys. B* **32** 145–52
- [34] Gehrtz M, Bjorklund G C and Whittaker E A 1985 Quantum-limited laser frequency-modulation spectroscopy *J. Opt. Soc. Am. B* **2** 1510–26
- [35] Appel J, MacRae A and Lvovsky A I 2009 Versatile digital GHz phase lock for external cavity diode lasers *Meas. Sci. Technol.* **20** 055302
- [36] Windpassinger P J, Kubasik M, Koschorreck M, Boisen A, Polzik E S, Kjærgaard N and Müller J H 2009 Ultra-low noise differential AC-coupled photodetector for sensitive pulse detection applications *Meas. Sci. Technol.* **20** 055301
- [37] De Echaniz S R, Mitchell M W, Kubasik M, Koschorreck M, Crepaz H, Eschner J and Polzik E S 2005 Conditions for spin squeezing in a cold ^{87}Rb ensemble *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **7** S548–52
- [38] Windpassinger P J, Oblak D, Busk Hoff U, Appel J, Kjærgaard N and Polzik E S 2008 Inhomogeneous light shift effects on atomic quantum state evolution in non-destructive measurements *New J. Phys.* **10** 053032
- [39] Chaudhury S, Smith G A, Schulz K and Jessen P S 2006 Continuous nondemolition measurement of the Cs clock transition pseudospin *Phys. Rev. Lett.* **96** 043001
- [40] Smith G, Chaudhury S, Silberfarb A, Deutsch I and Jessen P 2004 Continuous weak measurement and nonlinear dynamics in a cold spin ensemble *Phys. Rev. Lett.* **93** 163602
- [41] Lodewyck J, Westergaard P G and Lemonde P 2009 Nondestructive measurement of the transition probability in a Sr optical lattice clock *Phys. Rev. A* **79** 061401
- [42] Oblak D, Petrov P G, Garrido Alzar C L, Tittel W, Vershovski A K, Mikkelsen J K, Sørensen J L and Polzik E S 2005 Quantum-noise-limited interferometric measurement of atomic noise: towards spin squeezing on the Cs clock transition *Phys. Rev. A* **71** 043807
- [43] Lye J E, Hope J J and Close J D 2003 Nondestructive dynamic detectors for Bose–Einstein condensates *Phys. Rev. A* **67** 043609

Robust laser frequency stabilization by serrodyne modulation

Ralf Kohlhaas,^{1,*} Thomas Vanderbruggen,¹ Simon Bernon,^{1,4} Andrea Bertoldi,¹
Arnaud Landragin,² and Philippe Bouyer^{1,3}

¹Laboratoire Charles Fabry, UMR 8501, Institut d'Optique, CNRS, Université Paris Sud 11, Campus Polytechnique, 2 Avenue Augustin Fresnel, F-91127 Palaiseau Cedex, France

²Laboratoire National de métrologie et d'Essais—SYstèmes de Référence Temps-Espace (LNE-SYRTE), Observatoire de Paris, CNRS and Université Pierre et Marie Curie (UPMC), 61 avenue de l'Observatoire, F-75014 Paris, France

³Laboratoire Photonique, Numérique et Nanosciences—LP2N Université Bordeaux—Institut d'Optique Graduate School (IOGS)—CNRS, UMR 5298 Bat A30, 351 cours de la liberation, Talence, France

⁴Now at Universität Tübingen, D-72076 Tübingen, Germany

*Corresponding author: Ralf.Kohlhaas@institutoptique.fr

Received January 19, 2012; revised January 25, 2012; accepted January 29, 2012;
posted January 30, 2012 (Doc. ID 161503); published March 7, 2012

We report the relative frequency stabilization of a distributed feedback erbium-doped fiber laser on an optical cavity by serrodyne frequency shifting. A correction bandwidth of 2.3 MHz and a dynamic range of 220 MHz are achieved, which leads to a strong robustness against large disturbances up to high frequencies. We demonstrate that serrodyne frequency shifting reaches a higher correction bandwidth and lower relative frequency noise level compared to a standard acousto-optical modulator based scheme. Our results allow us to consider promising applications in the absolute frequency stabilization of lasers on optical cavities. © 2012 Optical Society of America
OCIS codes: 000.2170, 140.3425, 140.4780, 230.2090.

The frequency stabilization of lasers is required in a wide range of applications, such as optical atomic clocks [1], fiber sensors [2], gravitational wave detectors [3], and quantum optomechanical setups [4]. In these systems, the correction bandwidth and correction range are two key parameters to reach a low noise stabilization as well as to ensure robustness against perturbations from the environment. Nevertheless, many commonly used lasers, such as fiber, dye, or diode-pumped solid state lasers, have only piezoelectric transducers (PZTs) as a means of frequency correction. This limits the correction bandwidth to typically a few kilohertz. As a consequence, for higher frequencies, an external actuator is usually needed to extend the correction range. An acousto-optical modulator (AOM) can only reach a few hundred kilohertz bandwidth and a dynamic range of up to a few tens of megahertz [5]. Instead, an electro-optical modulator (EOM) allows a higher correction bandwidth of several megahertz, but frequency shifts cannot be sustained and it operates on a small correction range [6,7]. An optimal frequency actuator should pair the high bandwidth of an EOM with a large dynamic range and have the ability to hold the correction signal.

In this Letter we present the implementation of optical serrodyne frequency shifting [8] in a stabilization scheme. This opens the way to using an EOM for a large correction bandwidth together with a broad correction range. It is thus very robust since it can compensate for large and fast disturbances. Moreover, the system offers very low optical losses thanks to the high shifting efficiency, and the method is suitable for all-fibered or integrated optics setups.

Serrodyne frequency shifting consists in the phase modulation of an optical wave with a sawtooth signal of frequency f_{saw} and phase amplitude $2\pi m$ ($m \in \mathbb{N}$), leading to a frequency displacement of mf_{saw} . The re-

quired sawtooth waveform can be generated by a non-linear transmission line (NLTL), a passive component that transforms a sinusoidal waveform into a high fidelity sawtooth signal with the same fundamental frequency. Recently, serrodyne modulation was applied by feeding the output of a NLTL into an EOM. This led to serrodyne frequency shifts from 200 MHz to 1.6 GHz and efficiencies as high as 80% [9, 10]. By changing the frequency of the sinusoidal wave at the input of the NLTL, the frequency of the light at the output of the EOM is tuned. This can be used as an actuator in laser frequency stabilization.

The method is demonstrated by the stabilization of a laser on an optical cavity, presented in Fig. 1. The employed cavity has a butterfly configuration [11]. It has a finesse of 1788 at a wavelength of 1560 nm and a free

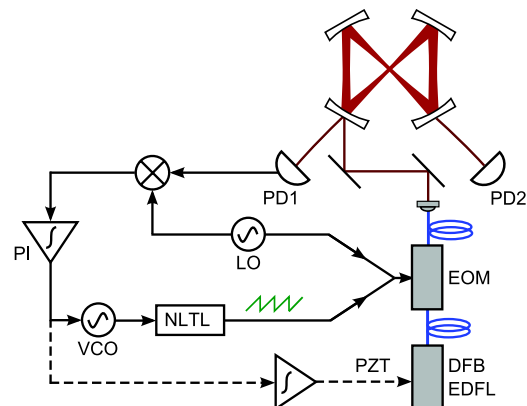


Fig. 1. (Color online) Setup of the laser stabilization on an optical cavity based on serrodyne frequency shifting (see text for notations). An optional feedback path (dashed lines) is added on the piezo transducer.

1006 OPTICS LETTERS / Vol. 37, No. 6 / March 15, 2012

spectral range of 976 MHz. A distributed feedback erbium-doped fiber laser (DFB EDFL, Koheras, NKT Photonics) at 1560 nm with a typical linewidth of a few kilohertz is injected into the cavity. The correction signal is obtained with the Pound–Drever–Hall (PDH) technique [12]. The optical beam is phase modulated at the local oscillator (LO) frequency of 20 MHz, and is detected with an InGaAs photodiode (PD1) after reflection on the injection mirror of the cavity. The demodulation with the LO provides an error signal (Fig. 2), which is sent to a proportional-integrator (PI) controller. The correction signal at the output of the controller is summed to a voltage offset chosen to set the open loop operating frequency of the voltage controlled oscillator (VCO, ZX95-625-S+, Minicircuits) to 390 MHz. The output of the VCO is amplified to a power of 27 dBm by a rf amplifier (ZHL-1-2W-S-09-SMA, Minicircuits) to reach the optimal serrodyne shifting efficiency. The signal feeds a NLTL (7112-110, Picosecond Pulse Labs, 300–700 MHz nominal input range), which generates harmonics of the fundamental frequency up to 20 GHz. The resulting sawtooth waveform is then combined to the LO signal using a broadband power combiner (ZX10R-14-S+, Minicircuits) and sent to the fibered EOM (PM-0K5-00-PFA-PFA, Eospace). The amplitude of the sawtooth is chosen to match a phase shift of 2π on the phase modulator, thus leading to a frequency shift of the light equal to the frequency of the VCO. In a thermally noncontrolled environment, large long term drifts may overcome the correction range of the serrodyne scheme. In such a case, a low frequency correction can be added on the laser PZT by an additional integration of the output of the PI (see Fig. 1). This additional correction also keeps constant the mean frequency of the serrodyne modulation and, therefore, the serrodyne shifting efficiency.

In Fig. 2, the transmission of the optical cavity and the error signal are shown when the length of the resonator is scanned. It demonstrates the feasibility of producing

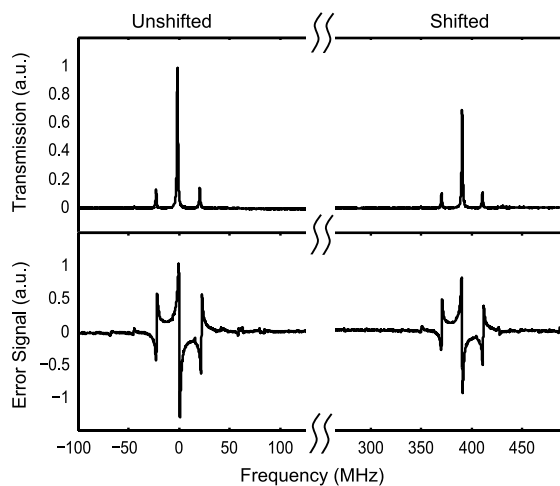


Fig. 2. (Top) The transmission signal obtained on PD2 when scanning the length of the optical cavity without (left) and with (right) serrodyne frequency shifting. (Bottom) The error signal obtained by the Pound–Drever–Hall technique is also shifted by the serrodyne modulation.

the frequency shifting and the modulation sidebands on a single EOM. The incident light and the error signal are shifted by 390 MHz. A shifting efficiency of 69% is reached on the transmission, whereas the shifting efficiency of the PDH signal is 76%. Since the EOM is already included in the optical system for error signal generation, an additional optical loss of only 1.6 dB is introduced by the serrodyne modulation. Indeed, light that is not frequency shifted remains either at the initial frequency (about 3% of the total power) or is transferred to higher harmonics of the modulation frequency (28%). These spurious frequency components are intrinsically filtered by the optical cavity. The frequency shifting range goes from 280 MHz (limited by the VCO) to 500 MHz (limited by the rf amplifier before the NLTL), corresponding to a span of 220 MHz. It could be potentially extended to more than 1 GHz by using another NLTL (e.g., NLTL 7113-110, Picosecond Pulse Labs), associated with a suitable controllable oscillator and rf amplifier.

With the serrodyne shifting technique, the stabilization of the laser to the optical cavity with a bandwidth of 2.3 MHz is obtained. This bandwidth is limited by phase shifts occurring in the servo electronics. The noise power spectral density (PSD) of the error signal with the laser locked to the cavity is shown in Fig. 3, where it is compared with that obtained using a double-pass AOM actuator on the same laser and cavity system [5]. It was measured with a fast Fourier transform spectrum analyzer, then converted to relative frequency noise using the slope of the PDH signal. In addition, it was corrected for the transfer function of the cavity of $(1 + (2f/f_0)^2)^{-1}$, where $f_0 = 546$ kHz is the cavity linewidth (FWHM). The servo bump at 2.3 MHz indicates the bandwidth of the lock. The noise spectrum is limited from 2 to 50 kHz by the light shot noise (within 3 dB) and below 2 kHz by the voltage noise of the input operational amplifier of the PI (THS4601, Texas Instruments). When compared with the noise PSD previously obtained with the double-pass AOM system [5], the lower noise level from 1 to 500 kHz indicates the advantage of the higher correction bandwidth provided by serrodyne frequency shifting.

The high loop bandwidth of 2.3 MHz and the broad dynamic range of 220 MHz lead to a very robust stabiliza-

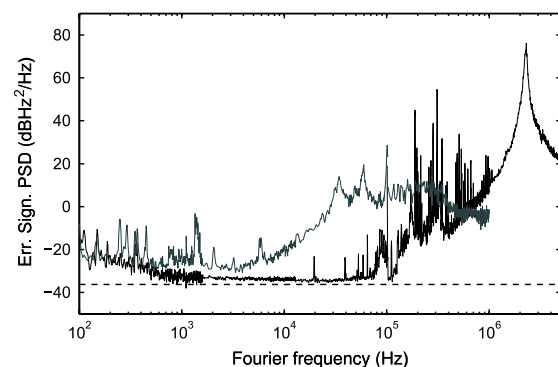


Fig. 3. Noise PSD of the error signal with the serrodyne technique (black) and the stabilization with an AOM in double pass (gray). The dashed line represents the light shot noise limit on PD1.

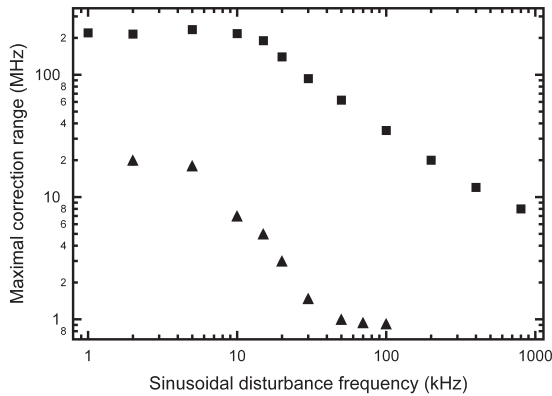


Fig. 4. Comparison of the lock robustness obtained with the serrodyne shifting technique (squares) and an AOM system (triangles).

tion against large disturbances. To simulate perturbations, we add a sinusoidal waveform to the correction signal that drives the VCO. In addition, we define the maximal correction range as the point beyond which the external perturbation leads to frequency fluctuations between the laser and the cavity equal to the cavity linewidth. The value of this limit versus the perturbation frequency is shown in Fig. 4. From 1 to 10 kHz, the upper limit is given by the full dynamic range. Above 10 kHz, the correction range is limited by the gain of the PI controller. For perturbations at 800 kHz, the system can still correct for frequency shifts of 8 MHz. The robustness with serrodyne modulation is compared with the one of the double-pass AOM system [6]. Here, a dynamical range of 20 MHz and a correction bandwidth of 250 kHz are found, as typical for AOM based systems. The serrodyne stabilization loop thus allows us to correct for frequency disturbances that are at least 1 order of magnitude larger than for an AOM and, thanks to its higher bandwidth, it can act where an AOM does not operate. In both systems, the PZT will increase the maximal correction range for frequencies below a few hundred hertz.

We demonstrated the relative frequency stabilization of a laser on an optical cavity by serrodyne frequency shifting. The technique benefits from an EOM for frequency correction, which leads to a high correction bandwidth (2.3 MHz here). At the same time, a large correction range can be achieved (220 MHz here). Since the EOM is already included for error signal generation, only electronic components are added to implement the feedback loop. This leads to a simple and efficient frequency stabilization scheme, which could be further improved by electro-

March 15, 2012 / Vol. 37, No. 6 / OPTICS LETTERS 1007

optical integration techniques [13]. We show, by comparison with an AOM-based system, that the higher bandwidth achieved with the serrodyne modulation leads to a lower relative frequency noise level. This can be exploited in the absolute frequency stabilization of lasers on ultrastable cavities. In addition, serrodyne frequency shifting provides very robust locks. It opens the way to using optical resonators in transportable systems that operate in harsh environments [14], e.g., for optical frequency generation [15] or applications in atomic physics [11].

We thank F. Moron and A. Villing for technical assistance. We acknowledge funding support from Direction Générale de l'Armement (DGA), Institut Francilien de Recherche sur les Atomes Froids (IFRAF), and the European Union (EU) (project iSENSE). The work of A. Bertoldi was supported by Intra-European Fellowship (IEF) Grant PIEF-GA-2009-235375.

References

1. Y. Y. Jiang, A. D. Ludlow, N. D. Lemke, R. W. Fox, J. A. Sherman, L.-S. Ma, and C. W. Oates, *Nat. Photon.* **5**, 158 (2011).
2. J. H. Chow, D. E. McClelland, and M. B. Gray, *Opt. Lett.* **30**, 1923 (2005).
3. I. Zawischa, M. Brendel, K. Danzmann, C. Fallnich, M. Heurs, S. Nagano, V. Quetschke, H. Welling, and B. Willke, *Classical Quantum Gravity* **19**, 1775 (2002).
4. P. Verlot, A. Tavernarakis, T. Briant, P.-F. Cohadon, and A. Heidmann, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 133602 (2010).
5. A. Bertoldi, S. Bernon, T. Vanderbruggen, A. Landragin, and P. Bouyer, *Opt. Lett.* **35**, 3769 (2010).
6. J. L. Hall and T. W. Hänsch, *Opt. Lett.* **9**, 502 (1984).
7. N. Ohmae, S. Moriwaki, and N. Mio, *Rev. Sci. Instrum.* **81**, 073105 (2010).
8. K. K. Wong, R. M. De La Rue, and S. Wright, *Opt. Lett.* **7**, 546 (1982).
9. R. Houtz, C. Chan, and H. Müller, *Opt. Express* **17**, 19235 (2009).
10. D. M. S. Johnson, J. M. Hogan, S.-W. Chiow, and M. A. Kasevich, *Opt. Lett.* **35**, 745 (2010).
11. S. Bernon, T. Vanderbruggen, R. Kohlhaas, A. Bertoldi, A. Landragin, and P. Bouyer, *New J. Phys.* **13**, 065021 (2011).
12. R. W. P. Drever, J. L. Hall, F. V. Kowalski, J. Hough, G. M. Ford, A. J. Munley, and H. Ward, *Appl. Phys. B* **31**, 97 (1983).
13. D. M. S. Johnson, J. M. Hogan, S.-w. Chiow, and M. A. Kasevich, *J. Lightwave Technol.* **29**, 666 (2011).
14. R. Geiger, V. Ménotet, G. Stern, N. Zahzam, P. Cheinet, B. Battelier, A. Villing, F. Moron, M. Lours, Y. Bidet, A. Bresson, A. Landragin, and P. Bouyer, *Nat. Commun.* **2**, 474 (2011).
15. E. Mimoun, L. De Sarlo, J.-J. Zondy, J. Dalibard, and F. Gerbier, *Opt. Express* **16**, 18684 (2008).

Bibliographie

- [Adcock 11] M. R. A. Adcock, P. Høyer & B. C. Sanders. *Quantum computation with coherent spin states and the close Hadamard problem*. 2011. arXiv :1112.1446. [Cité à la page 108.]
- [Adler 01] S. L. Adler, D. C. Brody, T. A. Brun & L. P. Hughston. *Martingale models for quantum state reduction*. J. Phys. A, vol. 34, page 8795, 2001. [Cité à la page 49.]
- [Aharonov 88] Y. Aharonov, D. Z. Albert & L. Vaidman. *How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particule can turn out to be 100*. Phys. Rev. Lett., vol. 60, page 1351, 1988. [Cité à la page 11.]
- [Allan 66] D. Allan. *Statistics of Atomic Frequency Standards*. Proc. IEEE, vol. 54, page 221, 1966. [Cité à la page 110.]
- [Analui 04] B. Analui & A. Hajimiri. *Bandwidth Enhancement for Transimpedance Amplifiers*. IEEE J. of Solid-State Circuits, vol. 39, page 1263, 2004. [Cité à la page 64.]
- [Appel 08] W. Appel. *Mathématiques pour la physique et les physiciens!* H&K éditions, quatrième édition, 2008. [Cité aux pages 17 et 124.]
- [Appel 09a] J. Appel, A. MacRae & A. I. Lvovsky. *Versatile digital GHz phase lock for external cavity diode lasers*. Meas. Sci. Technol., vol. 20, page 055302, 2009. [Cité à la page 63.]
- [Appel 09b] J. Appel, P. J. Windpassinger, D. Oblak, U. B. Hoff, N. Kjærgaard & E. S. Polzik. *Mesoscopic atomic entanglement for precision measurements beyond the standard quantum limit*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, vol. 106, page 10960, 2009. [Cité aux pages 35, 58 et 111.]
- [Arecchi 72] F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore & H. Thomas. *Atomic coherent states in quantum optics*. Phys. Rev. A, vol. 6, page 2211, 1972. [Cité aux pages 20, 21 et 24.]
- [Arora 07] B. Arora, M. S. Safronova & C. W. Clark. *Magic wavelengths for the np-ns transitions in alkali-metal atoms*. Phys. Rev. A, vol. 76, page 052509, 2007. [Cité à la page 145.]
- [Baillard 06] X. Baillard, A. Gauguet, S. Bize, P. Lemonde, Ph. Laurent, A. Clairon & P. Rosenbuch. *Interference-filter-stabilized external-cavity diode lasers*. Opt. Commun., vol. 266, page 609, 2006. [Cité à la page 63.]
- [Bercu 07] B. Bercu & D. Chafaï. *Modélisation stochastique et simulation*. Dunod, 2007. [Cité à la page 45.]

- [Bernon 11a] S. Bernon. *Piégeage et mesure non-destructive d'atomes froids dans une cavité en anneau de haute finesse*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2011. [Cité aux pages 63, 121, 128, 129, 131, 132, 134 et 152.]
- [Bernon 11b] S. Bernon, T. Vanderbruggen, R. Kohlhaas, A. Bertoldi, A. Landragin & P. Bouyer. *Heterodyne non-demolition measurements on cold atomic samples : towards the preparation of non-classical states for atom interferometry*. New J. Phys., vol. 13, page 065021, 2011. [Cité à la page 81.]
- [Bertoldi 10] A. Bertoldi, S. Bernon, T. Vanderbruggen, A. Landragin & P. Bouyer. *In-situ characterization of an optical cavity using atomic light shift*. Opt. Lett., vol. 35, page 3769, 2010. [Cité à la page 127.]
- [Bitbol 97] M. Bitbol. *Mécanique quantique. une introduction philosophique*. Flammarion, 1997. [Cité à la page 2.]
- [Bize 99] S. Bize, Y. Sortais, M. S. Santos, C. Mandache, A. Clairon & C. Salomon. *High-accuracy measurement of the ^{87}Rb ground-state hyperfine splitting in an atomic fountain*. Europhys. Lett., vol. 45, page 558, 1999. [Cité à la page 79.]
- [Bjorklund 80] G. C. Bjorklund. *Frequency-modulation spectroscopy : a new method for measuring weak absorptions and dispersions*. Opt. Lett., vol. 5, page 15, 1980. [Cité à la page 133.]
- [Bjorklund 83] G. C. Bjorklund, M. D. Levenson, W. Lenth & C. Ortiz. *Frequency modulation (FM) spectroscopy*. Appl. Phys. B, vol. 32, page 145, 1983. [Cité à la page 40.]
- [Black 01] E. D. Black. *An introduction to the Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization*. Am. J. Phys., vol. 69, page 79, 2001. [Cité à la page 133.]
- [Bodart 10] Q. Bodart, S. Merlet, N. Malossi, F. Pereira dos Santos, P. Bouyer & A. Landragin. *A cold atom pyramidal gravimeter with a single laser beam*. Appl. Phys. Lett., vol. 96, page 134101, 2010. [Cité à la page 2.]
- [Bordé 89] C. J. Bordé. *Atomic interferometry with internal state labeling*. Phys. Lett. A, vol. 140, page 10, 1989. [Cité à la page 2.]
- [Born 99] M. Born & E. Wolf. *Principles of optics*. Cambridge University Press, seventh edition, 1999. [Cité aux pages 121 et 130.]
- [Bouchoule 02] I. Bouchoule & K. Mølmer. *Preparation of spin-squeezed atomic states by optical-phase-shift measurement*. Phys. Rev. A, vol. 66, page 043811, 2002. [Cité à la page 36.]
- [Boyer 00] V. Boyer. *Condensation de Bose-Einstein avec un électroaimant à noyau ferromagnétique : stratégies de refroidissement dans des champs magnétiques intenses*. PhD thesis, Université Paris 6, 2000. [Cité aux pages 80 et 81.]
- [Brańczyk 07] A. M. Brańczyk, P. E. M. F. Mendonça, A. Gilchrist, A. C. Doherty & S. D. Bartlett. *Quantum control of a single qubit*. Phys. Rev. A, vol. 75, page 012329, 2007. [Cité à la page 94.]
- [Brantut 08] J.-P. Brantut, J.-F. Clément, M. Robert de Saint Vincent, G. Varoquaux, R. A. Nyman, A. Aspect, T. Bourdel & P. Bouyer. *Light-shift tomography in an optical dipole trap for neutral atoms*. Phys. Rev. A, vol. 78, page 031401(R), 2008. [Cité à la page 127.]

- [Brantut 09] J.-P. Brantut. *Manipulation d'atomes froids dans des potentiels lumineux*. PhD thesis, Université Paris XI, 2009. [Cité à la page 127.]
- [Budker 04] D. Budker, D. F. Kimball & D. P. DeMille. *Atomic physics, an exploration through problems and solutions*. Oxford University Press, first edition, 2004. [Cité à la page 152.]
- [Bushev 06] P. Bushev, D. Rotter, A. Wilson, F. Dubin, C. Becher, J. Eschner, R. Blatt, V. Steixner, P. Rabl & P. Zoller. *Feedback cooling of a single trapped ion*. Phys. Rev. Lett., vol. 96, page 043003, 2006. [Cité à la page 94.]
- [Cahill 79] R. F. Cahill & E. Udd. *Phase-nulling fiber-optic laser gyro*. Opt. Lett., vol. 4, page 93, 1979. [Cité à la page 136.]
- [Canuel 06] B. Canuel, F. Leduc, D. Holleville, A. Gauguet, J. Fils, A. Virdis, A. Clairon, N. Dimarcq, Ch. J. Bordé, A. Landragin & P. Bouyer. *Six-axis inertial sensor using cold-atom interferometry*. Phys. Rev. Lett., vol. 97, page 010402, 2006. [Cité à la page 2.]
- [Capmany 10] J. Capmany & C. R. Fernández-Pousa. *Quantum model for electro-optical phase modulation*. J. Opt. Soc. Am. B, vol. 27, page A119, 2010. [Cité à la page 175.]
- [Castin 96] Y. Castin & R. Dum. *Bose-Einstein condensates in time dependent traps*. Phys. Rev. Lett., vol. 77, page 5315, 1996. [Cité à la page 166.]
- [Chaudhury 06] S. Chaudhury, G. A. Smith, K. Schulz & P. S. Jessen. *Continuous non-demolition measurement of the Cs clock transition pseudospin*. Phys. Rev. Lett., vol. 96, page 043001, 2006. [Cité à la page 81.]
- [Chen 11] Z. Chen, J. G. Bohnet, S. R. Sankar, J. Dai & J. K. Thompson. *Conditional Spin Squeezing of a Large Ensemble via the Vacuum Rabi Splitting*. Phys. Rev. Lett., vol. 106, page 133601, 2011. [Cité aux pages 35 et 111.]
- [Chou 10] C. W. Chou, D. B. Hume, J. C. J. Koelemeij, D. J. Wineland & T. Rosenband. *Frequency Comparison of Two High-Accuracy Al^+ Optical Clocks*. Phys. Rev. Lett., vol. 104, page 070802, 2010. [Cité à la page 108.]
- [Clément 08] J.-F. Clément. *Réalisation d'un condensat de Bose-Einstein dans un piège dipolaire optique à 1565 nm*. PhD thesis, Université Paris XI, 2008. [Cité aux pages 127, 128 et 141.]
- [Cohen-Tannoudji 73] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu & F. Laloë. *Mécanique quantique*. Hermann, 1973. [Cité aux pages 7 et 20.]
- [Cohen-Tannoudji 01] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc & G. Grynberg. *Processus d'interaction entre photons et atomes*. EDP Sciences et CNRS Editions, 2001. [Cité à la page 182.]
- [Dalfovo 99] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii & S. Stringari. *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*. Rev. Mod. Phys., vol. 71, page 463, 1999. [Cité aux pages 150, 151 et 152.]
- [Davis 81] J. L. Davis & S. Ezekiel. *Closed-loop low-noise fiber-optic rotation sensor*. Opt. Lett., vol. 6, page 505, 1981. [Cité à la page 136.]
- [Davis 95] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. A. Joffe, M. R. Andrews & W. Ketterle. *Evaporative Cooling of Sodium Atoms*. Phys. Rev. Lett., vol. 74, page 5202, 1995. [Cité à la page 164.]

- [Delamotte 97] B. Delamotte. *Un soupçon de théorie des groupes : groupe des rotations et groupe de Poincaré*, 1997. [Cité à la page 171.]
- [Deléglise 08] S. Deléglise, I. Dotsenko, C. Sayrin, J. Bernu, M. Brune, J.-M. Raymond & S. Haroche. *Reconstruction of non-classical cavity field states with snapshots of their decoherence*. Nature (London), vol. 455, page 510, 2008. [Cité à la page 14.]
- [Deutsch 10] C. Deutsch, F. Ramirez-Martinez, C. Lacroûte, F. Reinhard, T. Schneider, J. N. Fuchs, F. Piéchon, F. Lalöe, J. Reichel & P. Rosenbuch. *Spin self-rephasing and very long coherence times in a trapped atomic ensemble*. Phys. Rev. Lett., vol. 105, page 020401, 2010. [Cité aux pages 2 et 89.]
- [Dick 87] G. J. Dick. *Local oscillator induced instabilities in trapped ion frequency standards*. Proc. 19th Precise Time and Time Interval, page 133, 1987. [Cité à la page 115.]
- [Dicke 54] R. H. Dicke. *Coherence in spontaneous radiation processes*. Phys. Rev., vol. 93, page 99, 1954. [Cité à la page 21.]
- [Drever 83] R. W. P. Drever, J. L. Hall, F. V. Kowalski, J. Hough, G. M. Ford, A. J. Munley & H. Ward. *Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator*. Appl. Phys. B, vol. 31, page 97, 1983. [Cité à la page 133.]
- [Ebbergh 85] A. Ebbergh & G. Schiffner. *Closed-loop fiber-optic gyroscope with a saw-tooth phase-modulated feedback*. Opt. Lett., vol. 10, page 300, 1985. [Cité à la page 136.]
- [Estève 08] J. Estève, C. Gross, S. Giovanazzi & M. K. Oberthaler. *Squeezing and entanglement in a Bose-Einstein condensate*. Nature (London), vol. 455, page 1216, 2008. [Cité à la page 34.]
- [Fixler 07] J. B. Fixler, G. T. Foster, J. M. McGuirk & M.A. Kasevich. *Atom interferometer measurement of the Newtonian constant of gravity*. Science, vol. 315, page 74, 2007. [Cité à la page 2.]
- [Fox 03] R. W. Fox, C. W. Oates & L. W. Hollberg. *Stabilizing diode lasers to high-finesse cavities*. Experimental Methods in the Physical Sciences, vol. 40, page 1, 2003. [Cité à la page 135.]
- [Gardiner 00] C. W. Gardiner & P. Zoller. Quantum noise. Springer, second edition, 2000. [Cité à la page 49.]
- [Gauguet 09] A. Gauguet, B. Canuel, T. Lévêque, W. Chaibi & A. Landragin. *Characterization and limits of a cold-atom Sagnac interferometer*. Phys. Rev. A, vol. 80, page 063604, 2009. [Cité à la page 32.]
- [Gehm 98] M. E. Gehm, K. M. O'Hara, T. A. Savard & J. E. Thomas. *Dynamics of noise-induced heating in atom traps*. Phys. Rev. A, vol. 58, page 3914, 1998. [Cité à la page 141.]
- [Gehertz 85] M. Gehertz, G. C. Bjorklund & E. A. Whittaker. *Quantum-limited laser frequency modulation spectroscopy*. J. Opt. Soc. Am. B, vol. 2, page 1510, 1985. [Cité à la page 61.]
- [Geiger 11] R. Geiger, V. Ménot, G. Stern, N. Zahzam, P. Cheinet, B. Battelier, A. Villing, F. Moron, M. Lours, Y. Bidel, A. Bresson, A. Landragin & P. Bouyer. *Detecting inertial effects with airborne matter-wave interferometry*. Nature Communications, vol. 2, page 474, 2011. [Cité aux pages 2 et 115.]

- [Gell-Mann 67] M. Gell-Mann & Y. Ne'eman. *The eightfold way*. Benjamin, New York, 1967. [Cité à la page 179.]
- [Gerbier 03] F. Gerbier. *Condensats de Bose-Einstein dans un piège anisotrope*. PhD thesis, Université Paris VI, 2003. [Cité à la page 152.]
- [Geremia 03] J. M. Geremia, J. K. Stockton, A. C. Doherty & H. Mabuchi. *Quantum Kalman Filtering and the Heisenberg Limit in Atomic Magnetometry*. Phys. Rev. Lett., vol. 91, page 250801, 2003. [Cité à la page 49.]
- [Gillett 10] G. G. Gillett, R. B. Dalton, B. P. Lanyon, M. P. Almeida, M. Barbieri, G. J. Pryde, J. L. O'Brien, K. J. Resch, S. D. Bartlett & A. G. White. *Experimental feedback control of quantum systems using weak measurements*. Phys. Rev. Lett., vol. 104, page 080503, 2010. [Cité à la page 94.]
- [Gisin 92] N. Gisin & I. C. Percival. *The quantum-state diffusion model applied to open systems*. J. Phys. A : Math. Gen., vol. 25, page 5677, 1992. [Cité à la page 49.]
- [Gleyzes 07] S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, U. B. Hoff, M. Brune, J.-M. Raimond & S. Haroche. *Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity*. Nature (London), vol. 446, page 297, 2007. [Cité à la page 14.]
- [Gouy 90] L. G. Gouy. *Sur une propriété nouvelle des ondes lumineuses*. C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 110, page 1251, 1890. [Cité à la page 122.]
- [Grangier 98] Ph. Grangier, J. A. Levenson & J.-Ph. Poizat. *Quantum Non-Demolition Measurements in Optics*. Nature (London), vol. 396, page 537, 1998. [Cité à la page 13.]
- [Grimm 00] R. Grimm, M. Weidemüller & Y. B. Ovchinnikov. *Optical dipole traps for neutral atoms*. Adv. At. Mol. Opt. Phys., vol. 42, page 95, 2000. [Cité aux pages 87, 128 et 154.]
- [Gross 10] C. Gross, T. Zibold, E. Niklas, J. Estève, & M. K. Oberthaler. *Nonlinear atom interferometer surpasses classical precision limit*. Nature (London), vol. 464, page 1165, 2010. [Cité à la page 34.]
- [Guerlin 07] C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, M. Brune, J.-M. Raimond & S. Haroche. *Progressive field-state collapse and quantum non-demolition photon counting*. Nature (London), vol. 448, page 889, 2007. [Cité aux pages 7, 10 et 14.]
- [Hall 84] J. Hall & T. W. Hänsch. *External dye-laser frequency stabilizer*. Opt. Lett., vol. 9, page 502, 1984. [Cité à la page 136.]
- [Haroche 06] S. Haroche & J.-M. Raimond. *Exploring the quantum*. Oxford University Press, first edition, 2006. [Cité aux pages 2, 3, 9, 13, 25 et 26.]
- [Hobbs 01] P. C. D. Hobbs. *Photodiode Front Ends : The Real Story*. Optics and Photonics News, vol. 12, page 44, 2001. [Cité à la page 183.]
- [Hogan 11] J. M. Hogan, D. M. S. Johnson, S. Dickerson, T. Kovachy, A. Sugarbaker, S.-W. Chiow, P. W. Graham, M. A. Kasevich, B. Saif, S. Rajendran, P. Bouyer, B. D. Seery, L. Feinberg & R. Keski-Kuha. *An Atomic Gravitational Wave Interferometric Sensor in Low Earth Orbit (AGIS-LEO)*. Gen. Rel. Grav., vol. 43, page 1953, 2011. [Cité à la page 2.]
- [Impens 06] F. Impens, P. Bouyer & Ch. J. Bordé. *Matter-Wave Cavity Gravimeter*. Appl. Phys. B, vol. 84, page 603, 2006. [Cité à la page 115.]

- [Izutsu 81] M. Izutsu, S. Shikama & T. Sueta. *Integrated optical SSB modulator/frequency shifter*. IEEE J. Quantum Electron., vol. 17, page 2225, 1981. [Cité à la page 136.]
- [Jackson 98] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley and Sons, New York, third edition, 1998. [Cité à la page 177.]
- [Jaynes 63] E. T. Jaynes & F. W. Cummings. *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*. Proc. IEEE, vol. 51, page 89, 1963. [Cité à la page 29.]
- [Jiang 08] H. Jiang, F. Kéfélian, S. Crane, O. Lopez, M. Lours, J. Millo, D. Holleville, P. Lemonde, Ch. Chardonnet, A. Amy-Klein & G. Santarelli. *Long-distance frequency transfert over an urban fiber link using optical phase stabilization*. J. Opt. Soc. Am. B, vol. 25, page 2029, 2008. [Cité à la page 130.]
- [Jiang 11] Y. Y. Jiang, A. D. Ludlow, N. D. Lemke, R. W. Fox, J. A. Sherman, L.-S. Ma & C. W. Oates. *Making optical atomic clocks more stable with 10^{-16} -level laser stabilization*. Nature Photon., vol. 5, page 158, 2011. [Cité aux pages 108 et 130.]
- [Johnson 88] L. M. Johnson & C. H. Cox. *Serrodyne optical frequency translation with high sideband suppression*. J. Lightwave Technol., vol. 6, page 109, 1988. [Cité aux pages 136 et 137.]
- [Johnson 10] D. M. S. Johnson, J. M. Hogan, S.-W. Chiow & M. A. Kasevich. *Broadband optical serrodyne frequency shifting*. Opt. Lett., vol. 35, page 745, 2010. [Cité aux pages 136 et 137.]
- [Johnson 11] D. M. S. Johnson, J. M. Hogan, S.-W. Chiow & M. A. Kasevich. *Picosecond optical switching using RF nonlinear transmission lines*. J. Lightwave Technol., vol. 29, page 666, 2011. [Cité à la page 136.]
- [Julsgaard 04] B. Julsgaard, J. Sherson, J. I. Cirac, J. Fiurásek & E. S. Polzik. *Experimental demonstration of quantum memory for light*. Nature (London), vol. 432, page 482, 2004. [Cité à la page 106.]
- [Kagan 96] Yu. Kagan, E. L. Surkov & G. V. Shlyapnikov. *Evolution of a Bose-condensed gas under variations of the confining potential*. Phys. Rev. A, vol. 54, page R1753, 1996. [Cité à la page 166.]
- [Kay 85] C. J. Kay. *Serrodyne modulator in a fiber-optic gyroscope*. Proc. Inst. Elec. Eng. vol. 132, page 359, 1985. [Cité à la page 136.]
- [Kessler 12] T. Kessler, C. Hagermann, C. Grebing, T. Legero, U. Sterr, F. Riehle, M. J. Martin, L. Chen & J. Ye. *A sub-40 mHz linewidth laser based on a silicon single-crystal optical cavity*. 2012. arXiv :1112.3854v2. [Cité à la page 108.]
- [Kitagawa 93] M. Kitagawa & M. Ueda. *Squeezed spin states*. Phys. Rev. A, vol. 47, page 5138, 1993. [Cité à la page 34.]
- [Kogelnik 66] H. Kogelnik & T. Li. *Laser Beams and Resonators*. Appl. Opt., vol. 5, page 1550, 1966. [Cité aux pages 121 et 124.]
- [Koschorreck 10] M. Koschorreck, M. Napolitano, B. Dubost & M. W. Mitchell. *Quantum nondemolition measurement of large-spin ensembles by dynamical decoupling*. Phys. Rev. Lett., vol. 105, page 093602, 2010. [Cité à la page 58.]

- [Kubo 11] Y. Kubo, C. Grezes, A. Dewes, T. Umeda, J. Isoya, H. Sumiya, N. Morishita, H. Abe, S. Onoda, T. Ohshima, V. Jacques, A. Dréau, J.-F. Roch, I. Diniz, A. Auffeves, D. Vion, D. Esteve & P. Bertet. *Hybrid Quantum Circuit with a Superconducting Qubit Coupled to a Spin Ensemble*. Phys. Rev. Lett., vol. 107, page 220501, 2011. [Cité à la page 106.]
- [Kuzmich 97] A. Kuzmich, K. Mølmer & E. S. Polzik. *Spin Squeezing in an Ensemble of Atoms Illuminated with Squeezed Light*. Phys. Rev. Lett., vol. 79, page 4782, 1997. [Cité à la page 34.]
- [Kuzmich 98] A. Kuzmich, N. P. Bigelow & L. Mandel. *Atomic quantum non-demolition measurements and squeezing*. Europhys. Lett., vol. 42, page 481, 1998. [Cité aux pages 13 et 37.]
- [Lamporesi 08] G. Lamporesi, A. Bertoldi, L. Cacciapuoti, M. Prevedelli & G. M. Tino. *Determination of the Newtonian gravitational constant using atom interferometry*. Phys. Rev. Lett., vol. 100, page 050801, 2008. [Cité à la page 2.]
- [Lawall 09] J. R. Lawall. *High resolution determination of radii of curvature using Fabry-Pérot interferometry*. Meas. Sci. Technol., vol. 20, page 045302, 2009. [Cité à la page 127.]
- [Lee 07] W.-K. Lee, H. S. Moon & H. S. Suh. *Measurement of the absolute energy level and hyperfine structure of the ^{87}Rb $4D_{5/2}$ state*. Opt. Lett., vol. 32, page 2810, 2007. [Cité à la page 145.]
- [Leroux 10a] I. D. Leroux, M. H. Schleier-Smith & V. Vuletić. *Implementation of Cavity Squeezing of a Collective Atomic Spin*. Phys. Rev. Lett., vol. 104, page 073602, 2010. [Cité à la page 34.]
- [Leroux 10b] I. D. Leroux, M. H. Schleier-Smith & V. Vuletić. *Orientation-Dependent Entanglement Lifetime in a Squeezed Atomic Clock*. Phys. Rev. Lett., vol. 104, page 250801, 2010. [Cité aux pages 35 et 58.]
- [Lindblad 76] G. Lindblad. *On the generators of quantum dynamical semi-groups*. Commun. Math. Phys., vol. 48, page 119, 1976. [Cité à la page 49.]
- [Lisi 02] A. Di Lisi & K. Mølmer. *Entanglement of two atomic samples by quantum-nondemolition measurements*. Phys. Rev. A, vol. 66, page 052303, 2002. [Cité à la page 50.]
- [Lodewyck 09] J. Lodewyck, P. G. Westergaard & P. Lemonde. *Nondestructive measurement of the transition probability in a Sr optical lattice clock*. Phys. Rev. A, vol. 79, page 061401, 2009. [Cité à la page 115.]
- [Ludlow 08] A. D. Ludlow, T. Zelevinsky, G. K. Campbell, S. Blatt, M. M. Boyd, M. H. G. de Miranda, M. J. Martin, J. W. Thomsen, S. M. Foreman, J. Ye, T. M. Fortier, J. E. Stalnaker, S. A. Diddams, Y. Le Coq, Z. W. Barber, N. Poli, N. D. Lemke, K. M. Beck & C. W. Oates. *Sr Lattice Clock at 1×10^{-16} Fractional Uncertainty by Remote Optical Evaluation with a Ca Clock*. Science, vol. 319, page 5871, 2008. [Cité à la page 108.]
- [Lye 03] J. E. Lye, J. J. Hope & J. D. Close. *Nondestructive dynamic detectors for Bose-Einstein condensates*. Phys. Rev. A, vol. 67, page 043609, 2003. [Cité à la page 40.]
- [Mandel 95] L. Mandel & E. Wolf. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge University Press, first edition, 1995. [Cité à la page 9.]

- [Mann 98] A. Mann, G. Santarelli, S. Chang, A. N. Luiten, P. Laurent, C. Salomon, D. G. Blair & A. Clairon. *A high stability atomic fountain clock using a cryogenic sapphire interrogation oscillator*. Proc. IEEE International Frequency Control Symposium, (Pasadena, CA.), page 13, 1998. [Cité à la page 108.]
- [Marson 86] I. Marson & J. E. Faller. *g - the acceleration of gravity : its measurement and its importance*. J. Phys. E, vol. 19, page 22, 1986. [Cité à la page 2.]
- [Merlet 09] S. Merlet, J. Le Gouët, Q. Bodart, A. Clairon, A. Landragin, F. Pereira Dos Santos & P. Rouchon. *Operating an atom interferometer beyond its linear range*. Metrologia, vol. 46, page 87, 2009. [Cité à la page 115.]
- [Merlet 10] S. Merlet, Q. Bodart, N. Malossi, A. Landragin, F. Pereira Dos Santos, O. Gitlein & L. Timmen. *Comparison between two mobile absolute gravimeters : optical versus atomic interferometers*. Metrologia, vol. 47, pages L9–L11, 2010. [Cité à la page 2.]
- [Moon 07] H. S. Moon, L. Lee & J. B. Kim. *Double-resonance optical pumping of Rb atoms*. J. Opt. Soc. Am. B, vol. 24, page 2157, 2007. [Cité à la page 145.]
- [Moon 09] H. S. Moon, W.-K. Lee & H. S. Suh. *Hyperfine-structure-constant determination and absolute-frequency measurement of the Rb $4D_{3/2}$ state*. Phys. Rev. A, vol. 79, page 062503, 2009. [Cité à la page 145.]
- [Morin 05] E. Morin. *Introduction à la pensée complexe*. Editions du Seuil, 2005. [Cité à la page 2.]
- [Nielsen 00] M. A. Nielsen & I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, first edition, 2000. [Cité aux pages 7, 16, 24, 94, 96, 181 et 182.]
- [Oblak 05] D. Oblak, P. G. Petrov, C. L. Garrido Alzar, W. Tittel, A. K. Vershovski, J. K. Mikkelsen, J. L. Sørensen & E. S. Polzik. *Quantum-noise-limited interferometric measurement of atomic noise : Towards spin squeezing on the Cs clock transition*. Phys. Rev. A, vol. 71, page 043807, 2005. [Cité à la page 76.]
- [O'Hara 01] K. M. O'Hara, M. E. Gehm, S. R. Granade & J. E. Thomas. *Scaling laws for evaporative cooling in time dependent optical traps*. Phys. Rev. A, vol. 64, page 051403, 2001. [Cité à la page 164.]
- [Ohmae 10] N. Ohmae, S. Moriwaki & N. Mio. *Wideband and high-gain frequency stabilization of a 100-W injection-locked Nd : YAG laser for second-generation gravitational wave detectors*. Rev. Sci. Instr., vol. 81, page 073105, 2010. [Cité à la page 130.]
- [Petrich 94] W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Ensher & E. A. Cornell. *Behavior of atoms in a compressed magneto-optical trap*. J. Opt. Soc. Am. B, vol. 11, page 1332, 1994. [Cité à la page 154.]
- [Pound 46] R. V. Pound. *Electronic frequency stabilization of microwave oscillators*. Rev. Sci. Instrum., vol. 17, page 490, 1946. [Cité à la page 133.]
- [Pérez 04] J.-P. Pérez. *Optique, fondements et applications*. Dunod, Paris, 7ème édition, 2004. [Cité à la page 121.]
- [Ramsey 49] N. F. Ramsey. *A New Molecular Beam Resonance method*. Phys. Rev., vol. 76, page 996, 1949. [Cité à la page 2.]

- [Robert-De-Saint-Vincent 10] M. Robert-De-Saint-Vincent, J.-P. Brantut, Ch. J. Bordé, A. Aspect, T. Bourdel & P. Bouyer. *A quantum trampoline for ultra-cold atoms*. *Europhys. Lett.*, vol. 89, page 1, 2010. [Cité à la page 115.]
- [Robertson 29] H. P. Robertson. *The Uncertainty Principle*. *Phys. Rev.*, vol. 43, page 163, 1929. [Cité à la page 173.]
- [Roch 97] J.-F. Roch, K. Vigneron, Ph. Grelu, A. Sinatra, J.-Ph. Poizat & Ph. Grangier. *Quantum Nondemolition Measurements using Cold Trapped Atoms*. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, page 634, 1997. [Cité à la page 13.]
- [Rodwell 94] M. J. W. Rodwell, S. T. Allen, R. Y. Yu, M. G. Case, U. Bhattacharya, M. Reddy, E. Carman, M. Kamegawa, Y. Konishi & R. Pulella. *Active and nonlinear wave propagation devices in ultrafast electronics and optoelectronics*. *Proc. IEEE*, vol. 82, page 1037, 1994. [Cité à la page 137.]
- [Rose 95] M. E. Rose. *Elementary theory of angular momentum*. Dover, 1995. [Cité aux pages 18 et 23.]
- [Rosenband 08] T. Rosenband, D. B. Hume, P. O. Schmidt, C. W. Chou, A. Brusch, L. Lorini, W. H. Oskay, R. E. Drullinger, T. M. Fortier, J. E. Stalnaker, S. A. Diddams, W. C. Swann, N. R. Newbury, W. M. Itano, D. J. Wineland & J. C. Bergquist. *Frequency Ratio of Al^+ and Hg^+ Single-Ion Optical Clocks; Metrology at the 17th Decimal Place*. *Science*, vol. 319, page 1808, 2008. [Cité à la page 2.]
- [Santarelli 99] G. Santarelli, Ph. Laurent, P. Lemonde, A. Clairon, A. G. Mann, S. Chang, A. N. Luiten & C. Salomon. *Quantum Projection Noise in an Atomic Fountain: A High Stability Cesium Frequency Standard*. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 82, page 4619, 1999. [Cité aux pages 2 et 32.]
- [Savalli 99] V. Savalli, G. Zs. K. Horvath, P. D. Featonby, L. Cognet, N. Westbrook, C. I. Westbrook & A. Aspect. *Optical detection of cold atoms without spontaneous emission*. *Opt. Lett.*, vol. 24, page 1552, 1999. [Cité à la page 40.]
- [Savard 97] T. A. Savard, K. M. O'Hara & J. E. Thomas. *Laser-noise-induced heating in far-off resonance optical traps*. *Phys. Rev. A*, vol. 56, page R1095, 1997. [Cité à la page 141.]
- [Sayrin 11] C. Sayrin, I. Dotsenko, X. Zhou, B. Peaudecerf, T. Rybarczyk, S. Gleyzes, P. Rouchon, M. Mirrahimi, H. Amini, M. Brune, J.-M. Raimond & S. Haroche. *Real-time quantum feedback prepares and stabilizes photon number states*. *Nature (London)*, vol. 477, page 73, 2011. [Cité aux pages 14 et 94.]
- [Schleier-Smith 10] M. H. Schleier-Smith, I. D. Leroux & V. Vuletić. *States of an Ensemble of Two-Level Atoms with Reduced Quantum Uncertainty*. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 104, page 073604, 2010. [Cité aux pages 35, 58 et 111.]
- [Schrödinger 30] E. Schrödinger. *Zum Heisenbergschen Unschärfepinzip*. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse*, vol. 14, page 296, 1930. [Cité à la page 173.]
- [Schwartz 97] L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, 1997. [Cité à la page 124.]
- [Shiga 12] N. Shiga & M. Takeuchi. *Locking local oscillator phase to the atomic phase via weak measurement*. *New J. Phys.*, vol. 14, page 023034, 2012. [Cité à la page 108.]

- [Sigman 86] A. E. Sigman. *Lasers*. University Science Books, 1986. [Cité aux pages 121, 123 et 125.]
- [Sørensen 01] A. S. Sørensen & K. Mølmer. *Entanglement and Extreme Spin Squeezing*. Phys. Rev. Lett., vol. 86, page 4431, 2001. [Cité à la page 34.]
- [Steck 01] D. A. Steck. *Rubidium 87 D Line Data*, 2001. [Cité aux pages 76, 77, 78 et 87.]
- [Stockton 04] J. K. Stockton, R. Van Handel & H. Mabuchi. *Deterministic Dicke-state preparation with continuous measurement and control*. Phys. Rev. A, vol. 70, page 022106, 2004. [Cité aux pages 49 et 106.]
- [Takamoto 05] M. Takamoto, F.-L. Hong, R. Higishi & H. Katori. *An optical lattice clock*. Nature (London), vol. 435, page 321, 2005. [Cité à la page 108.]
- [Takano 09] T. Takano, M. Fuyama, R. Namiki & Y. Takahashi. *Spin Squeezing of a Cold Atomic Ensemble with the Nuclear Spin of One-Half*. Phys. Rev. Lett., vol. 102, page 033601, 2009. [Cité à la page 58.]
- [Tavis 68] M. Tavis & F. W. Cummings. *Exact Solution for an N-Molecule-Radiation-Field Hamiltonian*. Phys. Rev., vol. 170, page 379, 1968. [Cité à la page 29.]
- [Thomsen 02a] L. K. Thomsen, S. Mancini & H. M. Wiseman. *Continuous quantum non-demolition feedback and unconditional atomic spin squeezing*. J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys., vol. 35, page 4937, 2002. [Cité aux pages 49 et 106.]
- [Thomsen 02b] L. K. Thomsen, S. Mancini & H. M. Wiseman. *Spin squeezing via quantum feedback*. Phys. Rev. A, vol. 65, page 061801(R), 2002. [Cité aux pages 49 et 106.]
- [Thylen 85] L. Thylen, P. Sjöberg & G. E. Lindquist. *Electrooptical serrodyne frequency translator for $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$* . Proc. Inst. Elec. Eng., vol. 132, page 119, 1985. [Cité à la page 136.]
- [van Zoest 10] T. van Zoest, N. Gaaloul, Y. Singh, H. Ahlers, W. Herr, S. T. Seidel, W. Ertmer, E. Rasel, M. Eckart, E. Kajari, S. Arnold, G. Nandi, W. P. Schleich, R. Walser, A. Vogel, K. Sengstock, K. Bongs, W. Lewoczko-Adamczyk, M. Schiemangk, T. Schuldtand, A. Peters, T. Könenmann, H. Müntinga, C. Lämmerzahl, H. Dittus, T. Steinmetz, T. W. Hänsch & J. Reichel. *Bose-Einstein Condensation in Microgravity*. Science, vol. 18, page 328, 2010. [Cité à la page 2.]
- [Vanderbruggen 11] T. Vanderbruggen, S. Bernon, A. Bertoldi, A. Landragin & P. Bouyer. *Spin-squeezing and Dicke-state preparation by heterodyne measurement*. Phys. Rev. A, vol. 83, page 013821, 2011. [Cité à la page 76.]
- [Varoquaux 09] G. Varoquaux, R. A. Nyman, R. Geiger, P. Cheinet, A. Landragin & P. Bouyer. *How to estimate the differential acceleration in a two-species atom interferometer to test the equivalence principle*. New J. Phys., vol. 11, page 113010, 2009. [Cité à la page 2.]
- [Von Neumann 55] J. Von Neumann. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton University Press, 1955. [Cité à la page 7.]
- [Wasilewski 09] W. Wasilewski, K. Jensen, H. Krauter, J. J. Renema, M. V. Balabas & E. S. Polzik. *Quantum Noise Limited and Entanglement-Assisted Magnetometry*. Phys. Rev. Lett., vol. 104, page 133601, 2009. [Cité aux pages 2 et 32.]

- [Whittaker 88] E. A. Whittaker, C. M. Shum, H. Grebel & H. Lotem. *Reduction of residual amplitude modulation in frequency-modulation spectroscopy by using harmonic frequency modulation*. J. Opt. Soc. Am. B, vol. 5, page 1253, 1988. [Cité à la page 62.]
- [Windpassinger 08a] P. J. Windpassinger, D. Oblack, U. Busk Hoff, J. Appel, N. Kjærgaard & E. S. Polzik. *Inhomogeneous light shift effects on atomic quantum state evolution in non-destructive measurements*. New. J. Phys., vol. 10, page 053032, 2008. [Cité à la page 81.]
- [Windpassinger 08b] P. J. Windpassinger, D. Oblack, P. J. Petrov, M. Kubasik, M. Saffman, C. L. Garrido Alzar, J. Appel, J. H. Müller, N. Kjærgaard & E. S. Polzik. *Nondestructive probing of Rabi oscillations on the Cesium clock transition near the standard quantum limit*. Phys. Rev. Lett., vol. 100, page 103601, 2008. [Cité à la page 81.]
- [Wineland 92] D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano, F. L. Moore & D. J. Heinzen. *Spin squeezing and reduced quantum noise in spectroscopy*. Phys. Rev. A, vol. 46, page R6797, 1992. [Cité à la page 34.]
- [Wiseman 94] H. M. Wiseman & G. J. Milburn. *Squeezing via feedback*. Phys. Rev. A, vol. 49, page 1350, 1994. [Cité aux pages 49 et 106.]
- [Wiseman 10] H. Wiseman & G. Milburn. *Quantum measurement and control*. Cambridge University Press, 2010. [Cité à la page 94.]
- [Wong 82] K. K. Wong, R. M. De La Rue & S. Wright. *Electro-optic-waveguide frequency translator in LiNbO₃ fabricated by proton exchange*. Opt. Lett., vol. 7, page 546, 1982. [Cité à la page 136.]
- [Wong 85] N. C. Wong & J. L. Hall. *Servo control of amplitude modulation in frequency-modulation spectroscopy : demonstration of shot-noise-limited detection*. J. Opt. Soc. Am. B, vol. 2, page 1527, 1985. [Cité à la page 62.]
- [Yariv 89] A. Yariv. *Quantum electronics*. John Wiley and Sons, New York, 1989. [Cité aux pages 121 et 123.]
- [Yurke 85] B. Yurke, S. L. McCall & J. R. Klauder. *SU(2) and SU(1,1) interferometers*. Phys. Rev. A, vol. 33, page 4033, 1985. [Cité aux pages 32, 33 et 34.]
- [Zhao 09] B. Zhao, Y.-A. Chen, X.-H. Bao, T. Strassel, C.-S. Chuu, X.-M. Jin, J. Schmiedmayer, Z.-S. Yuan, S. Chen & J.-W. Pan. *A millisecond quantum memory for scalable quantum networks*. Nat. Phys., vol. 5, page 95, 2009. [Cité à la page 89.]
- [Zhu 11] X. Zhu, S. Saito, A. Kemp, K. Kakuyanagi, S.-I. Karimoto, H. Nakano, W. J. Munro, Y. Tokura, M. S. Everitt, K. Nemoto, M. Kasu, N. Mizuochi & K. Semba. *Coherent coupling of a superconducting flux qubit to an electron spin ensemble in diamond*. Nature (London), vol. 478, page 221, 2011. [Cité à la page 106.]

Résumé

Ce mémoire de thèse étudie diverses méthodes visant à l'amélioration des interféromètres atomiques. Dans la première partie du manuscrit, nous analysons comment une détection non-destructive, au sens où elle préserve la cohérence entre les états internes de l'ensemble atomique, permet d'améliorer la sensibilité des interféromètres. Nous montrons tout d'abord, grâce à une étude théorique, que la projection de la fonction d'onde engendrée par la mesure permet de préparer des états comprimés de spin. Nous présentons ensuite la mise en œuvre de cette méthode à l'aide d'une détection reposant sur la spectroscopie par modulation de fréquence. Finalement, nous exposons quelques premières applications de cette détection non-destructive, plus précisément nous présentons la réalisation d'une rétroaction qui utilise une mesure faible pour protéger l'état atomique contre la décohérence induite par un basculement du spin collectif. Nous montrons aussi comment réaliser une boucle à verrouillage de phase où les atomes servent de référence de phase. Dans la seconde partie du manuscrit, nous présentons la réalisation tout-optique d'un condensat de Bose-Einstein dans une cavité de haute finesse en exploitant les technologies développées pour les télécommunications optiques. Nous commençons par une analyse du résonateur et des méthodes d'asservissement, nous introduisons notamment une méthode d'asservissement originale exploitant la modulation serrrodyne. Enfin, nous montrons comment un condensat est obtenu par évaporation dans le mode optique de la cavité.

Mots-clés : mesure quantique - détection non-destructive - interférométrie atomique - rétroaction quantique - résonateur optique - stabilisation en fréquence - condensat de Bose-Einstein

Abstract

In this thesis, we study several methods to improve atom interferometers. In the first part of the manuscript, we analyze how a nondestructive detection, that preserves the coherence between the internal degrees of freedom in an atomic ensemble, can be used to increase the sensitivity of interferometers. We first theoretically show how the projection of the wavefunction induced by the measurement prepares spin-squeezed states. We then present the implementation of this method using a detection based on the frequency modulation spectroscopy. Finally, some first applications are described, more explicitly we show how to implement a feedback scheme based on weak measurements that preserves the atomic state against the decoherence induced by a random collective flip. We also introduce a phase-locked loop where the atomic sample is used as the phase reference. In the second part of the manuscript, we present the all-optical realization of a Bose-Einstein condensate in a high-finesse cavity using a laser system based on standard telecom technologies. We first describe the resonator and the frequency lock of the laser on the resonance, in particular, we introduce a new stabilization method based on the serrrodyne modulation. Finally, we show how a condensate is obtained from the evaporation in the cavity mode.

Keywords : quantum measurement - nondestructive detection - atom interferometry - quantum feedback - optical resonator - laser frequency stabilization - Bose-Einstein condensate