



**HAL**  
open science

# Etude infinitésimale et asymptotique de certains flots stochastiques relativistes

Camille Tardif

► **To cite this version:**

Camille Tardif. Etude infinitésimale et asymptotique de certains flots stochastiques relativistes. Probabilités [math.PR]. Université de Strasbourg, 2012. Français. NNT : . tel-00703181v1

**HAL Id: tel-00703181**

**<https://theses.hal.science/tel-00703181v1>**

Submitted on 1 Jun 2012 (v1), last revised 27 Nov 2012 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT DE  
RECHERCHE  
MATHÉMATIQUE  
AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

# Thèse

présentée pour obtenir le grade de docteur de  
l'Université de Strasbourg  
Spécialité MATHÉMATIQUES

**Camille Tardif**

**Étude infinitésimale et asymptotique de certains  
flots stochastiques relativistes.**

Soutenue le 13 juin 2012  
devant la commission d'examen

Jacques Franchi, directeur de thèse

Shizan Fang, co-directeur de thèse

Yves Le Jan, rapporteur

Mihaï Gradinaru, rapporteur

Marc Arnaudon, examinateur

Michel Emery, examinateur

Anton Thalmaier, examinateur

[www-irma.u-strasbg.fr](http://www-irma.u-strasbg.fr)



Étude infinitésimale et asymptotique de certains  
flots stochastiques relativistes.

1<sup>er</sup> juin 2012

# Remerciements

C'est avec un réel grand plaisir que je remercie mes directeurs de thèse Jacques Franchi et Shizan Fang pour avoir accepté d'encadrer cette thèse. Je remercie particulièrement Jacques pour l'attention qu'il a portée à mon travail, pour sa disponibilité, pour les patientes relectures de mes écrits ainsi que pour le bon vin qu'il m'a fait goûter. Merci Shizan pour ton accueil chaleureux lors de mes trop rares venues à Dijon. Je ne perds pas espoir de revenir te voir plus souvent dans la capitale bourguignonne.

Je tiens également à remercier vivement Yves Le Jan et Mihai Gradinaru pour avoir accepté de rapporter ce travail. Merci Mihai pour ta disponibilité lors de ma venue à Rennes et d'avoir accepté de ressortir tes vieux papiers. Merci Yves de m'avoir insufflé le courage de rédiger cette thèse en assez peu de temps.

Je remercie sincèrement Marc Arnaudon, Anton Thalmaier et Michel Emery d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Merci Marc pour l'organisation de la conférence qui a pu permettre la bonne tenue de cette soutenance à Poitiers. Merci Anton de me permettre de continuer de faire de la recherche en mathématiques dans de très bonnes conditions l'année prochaine. Enfin, merci Michel pour ta présence, ton écoute et tes encouragements lors de mes plusieurs irruptions dans ton bureau.

Je n'aurais pas pu écrire cette thèse sans avoir pu bénéficier de l'expérience de mes aînés Ismaël Bailleul et Jürgen Angst. Merci Ismaël pour tes conseils, tes questions et ton accueil bienveillant lors de ma venue à Cambridge. Merci Jürgen pour ta disponibilité, ta bonne humeur ainsi que pour ta chaleureuse hospitalité lors de mon séjour à Rennes.

Je tiens à exprimer ma sincère et profonde gratitude à Vincent Vigon et Nicolas Juillet qui ont toujours été présents pour m'écouter et m'encourager... que ce soit à l'EVUS ou bien au labo. Merci Vincent pour ta joie de vivre permanente et Nicolas pour tes conseils avisés concernant la recherche mais aussi l'enseignement, j'ai beaucoup apprécié assurer les TD de ton cours.

Mes quatre années passées à Strasbourg m'ont toutes été rendues très agréables grâce aux différentes personnes que j'ai eu plaisir à côtoyer, que ce soit dans un contexte mathématique ou non. L'existence de cette thèse leur doit beaucoup.

Je n'aurais très probablement pas traversé la France dans ce sens si Mickael Crampon n'avait pas lui-même atterri en Alsace ; merci l'ami d'avoir partagé ta philosophie de la vie et des mathématiques. Je remercie les collègues de la fac et particulièrement Cédric que j'ai tellement embêté, Antoine et André pour les nombreux bavardages notamment au ru à 12h45, à Alexandre et Nicolas pour les bons moments passés au 106, Aurélien et Thomas pour les discussions mathématiques partagées, Alain pour les tacles dans les couloirs, Vince et Adrien pour les Picons du Zouave et les Doigts-de-Dieu du Marché Bar, Enrica et Valentina pour avoir introduit de l'Italie au labo, merci aussi à Philippe, Olivier, Ambroise, Auguste, Fabien, Anaïs, Gilles et merci à tous ceux que j'oublie. Je tiens à remercier aussi les copains et copines du GENEPI avec qui j'ai partagé une bien belle aventure humaine ; merci en particulier à Béranger, Lila, Félicie, Camille, Quentin, Sarah, Léonie, Simon, Lucie, Alice, Elsa et Fanny. Merci aussi à la coloc familiale de la rue de Belfort pour les bons moments passés ensemble dans le jardin et les salons, en particulier merci à Elisabeth, Anne, Cyril, Ludo, Paddy, Marie, Pauline, Sandra, Gasper et Sophie...

C'est le moment de remercier ma famille toujours présente dans les coups durs, même à plusieurs centaines de kilomètres de Strasbourg. Merci maman, papa et Loulou pour votre soutien permanent et pour les week-ends familiaux bien ressourçants que ce soit au Mans où ailleurs.

Enfin merci à toi Ceci pour ta présence à mes côtés, bienveillante et réconfortante, surtout pendant la délicate période qui a précédé cette soutenance.

# Introduction

Ce travail comporte trois parties qui peuvent se lire de manière indépendante bien que les deux dernières s'intéressent à une même question posée dans deux contextes différents. Avant d'introduire le contenu des chapitres nous proposons de donner un cadre historique et de motiver ce travail.

L'objet d'étude est une classe de processus introduits par Dudley dans les années 60 ([28]). Il s'agit d'une classe de processus markoviens à valeurs dans *l'espace des phases relativistes* qui possèdent deux propriétés de nature géométrique. Ils sont invariants par les isométries de l'espace de Minkowski et leur trajectoires sont de genre temps. Dudley montre, entre autre, qu'il existe essentiellement un seul de ces processus dont les trajectoires sont continues. Il propose quelques années plus tard ([29]) une étude asymptotique qui ne semble pas tout à fait complète mais ses travaux ne connaissent pas immédiatement de suite. Ce n'est que plus de quarante années après ses travaux que certains mathématiciens ont poursuivi le travail en étudiant et généralisant la diffusion introduite par Dudley. Il a fallu attendre le travail de Franchi et Le Jan ([39]) pour définir, dans un contexte lorentzien générique, des diffusions possédant une dynamique *Lorentz co-variante* et dont les trajectoires sont de genre temps et pour envisager une étude dans l'univers de Schwarzschild puis celui de Bailleul ([6], [9]) pour déterminer complètement la frontière de Poisson de la diffusion de Dudley. Citons également la thèse récente de Angst ([1]) dont un chapitre est consacré à l'étude asymptotique de ces diffusions dans les espace-temps de Robertson-Walker ainsi qu'un travail de Franchi ([37]) pour le cas de l'espace-temps de Gödel. Dans l'optique d'utiliser ces diffusions pour rendre compte de la géométrie Lorentzienne ambiante, on peut citer le travail récent de Bailleul et Franchi ([8]) qui proposent un critère de non-explosion des trajectoires relativistes aléatoires.

Parallèlement à ces travaux de nature mathématique, des physiciens (citons Debbasch et al. [10] [11] [21] [22] [24] [25] [26] ainsi que Dunkel et al. [32] [30] [31]) tentent depuis une dizaine d'années de proposer un modèle au mouvement brownien physique qui prenne en compte la relativité. Il s'agit, par exemple, d'incorporer la relativité dans le modèle introduit par Langevin ([57]). L'article de Angst et Franchi ([2]) répond, dans un cadre général, à plusieurs questions posées

les physiciens concernant ces processus d'Orstein-Uhlenbeck relativistes (ROUP) dans l'espace de Minkowski. Dans [7], Bailleul définit, par le calcul stochastique, une large classe de processus relativistes qui regroupe le point de vue des physiciens ainsi que celui des mathématiciens. Dans [38], Franchi et Le Jan exhibent des diffusions Lorentz-covariantes sensibles à la courbure de l'espace-temps et les étudient en particulier dans les univers d'Einstein-de Sitter.

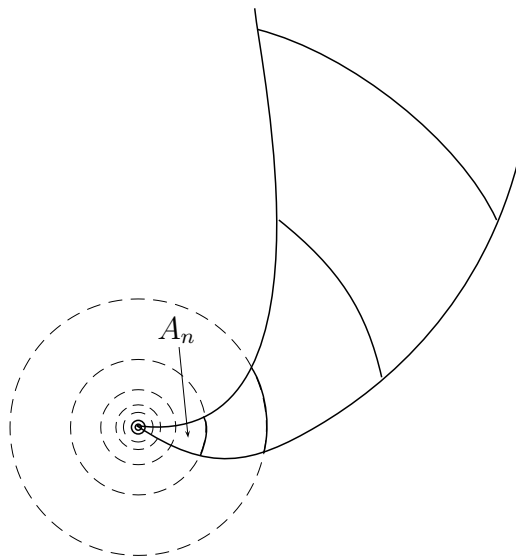
Les modèles mathématiques originels du mouvement d'une particule brownienne dans un fluide visqueux, introduits par Einstein ([33]) et Langevin ([57]), qui correspondent respectivement aux processus de Wiener et d'Orstein-Uhlenbeck, ne sont pas des modèles relativistes, au sens où leur dynamique n'est pas invariante par les transformations Galiléennes. Le référentiel du fluide au repos joue un rôle particulier et on n'obtient plus le même processus si on le translate uniformément. Les processus de Dudley sont l'analogue, dans le cadre de la relativité restreinte, des processus invariants par transformations Galiléenne, dans le cadre de la mécanique classique. Un exemple de tel processus est  $(t, \int_0^t B_s ds)$  où  $B$  est un mouvement brownien usuel. Cela correspond à une solution de l'équation de Langevin dans un fluide avec une constante de viscosité nulle. On peut imaginer d'autres processus dans l'espace de Minkowski possédant l'invariance lorentzienne avec des trajectoires non nécessairement de genre temps. Par exemple, Emery définit ([34]) des processus dont les trajectoires sont de genre espace et qui possèdent l'invariance relativiste.

Voici maintenant le contenu de cette thèse.

## Premier chapitre

La diffusion de Dudley  $(\dot{\xi}_t, \xi_t)$  à valeurs dans le fibré unitaire de l'espace-temps de Minkowski  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$ , est constituée d'un mouvement brownien  $\dot{\xi}_t$  sur la nappe hyperbolique et de son intégrale en temps dans l'espace de Minkowski  $(\xi_t := \int^t \dot{\xi}_s ds)$ . En considérant la construction de Eells-Elworthy-Malliavin du mouvement brownien hyperbolique on obtient la diffusion de Dudley comme la projection de d'une diffusion  $(g_t, \xi_t)$  invariante à gauche à valeurs dans le groupe connexe des isométries de Minkowski  $G = PSO(1, d) \ltimes \mathbb{R}^{1,d}$  (le groupe de Poincaré). Cette diffusion est en quelque sorte le mouvement aléatoire d'un petit objet spatio-temporel rigide qui subit des accélérations browniennes dans les directions des *boosts*. La question est d'établir un critère d'effilement pour savoir si, partant d'un point donné, cette diffusion atteint immédiatement et presque sûrement un ensemble donné. Il s'agit d'une question issue de la théorie du potentiel, qui se pose pour un processus markovien général, et qui revient à déterminer les voisinages d'une topologie, dite *fine*, associée à ce processus. En ce qui concerne le mouvement brownien, cette question est connue depuis longtemps et le critère de

Wiener donne une condition nécessaire et suffisante pour savoir si une partie est effilée relativement à un point (c'est à dire si son complémentaire est un voisinage *fin* de ce point). Ce critère porte sur la finitude d'une série dont les termes sont les capacités de tranches concentriques de l'ensemble autour du point.



L'enjeu est de spécifier ce que "tranches" veut dire. Faisons un petit résumé des résultats connus pour différentes diffusions.

Dans le cas du mouvement brownien usuel de  $\mathbb{R}^d$  ces tranches sont des morceaux d'anneaux sphériques. Et il en est de même pour une diffusion elliptique générale ([12]). La topologie fine est la même (localement) pour toutes les diffusions elliptiques. En regardant la preuve de ce critère il apparaît que la géométrie des tranches est donnée par les ensembles de niveau de la fonction de Green. Ainsi, en ce qui concerne les diffusions sous-elliptiques les tranches sont obtenues en remplaçant les sphères (ou ellipses) usuelles par des sphères sous-riemanniennes données par la géométrie des crochets des champs de vecteurs définissant la diffusion elliptique. Pour cela on trouvera, pour certains exemples de diffusions sous-elliptiques, une approche analytique dans [65] et probabiliste dans [20] (pour l'exemple du Laplacien dans le groupe d'Heisenberg), ce dernier travail a été généralisé ([15]) au cas de diffusions sous-elliptiques générales vérifiant une hypothèse forte de Hörmander. Les preuves sont basées sur la connaissance explicite de la fonction de Green ou bien sur des estimées de celle-ci, obtenues dans [64] ou [69].

Dans le contexte des diffusions paraboliques la situation est plus délicate, compte tenu de la difficulté de connaître la géométrie des ensembles de niveau des fonctions de Green et de dégager un résultat général. Pour l'opérateur de la chaleur, on peut trouver une preuve probabiliste du critère de Wiener dans [71]



et une preuve analytique dans [35]. Dans le cas où les coefficients de diffusion varient on trouve un critère de Wiener parabolique dans [42]. Pour l'opérateur de la chaleur dans le groupe de Heisenberg un résultat est donné dans [44]. Les preuves sont basées sur la connaissance explicite des fonctions de Green ou bien d'estimées Gaussiennes fortes.

Dans notre cas, la diffusion  $(g_t, \xi_t)$  n'est ni sous-elliptique ni (purement) parabolique et la fonction de Green n'est pas connue explicitement. Cependant, la composante temporelle du processus dans Minkowski est strictement croissante et on peut effectuer un changement de temps afin d'obtenir un processus qui, au temps  $t$  soit dans l'hyperplan affine de genre espace constitué des points dont la coordonnée temporelle est  $t$ . On obtient ainsi, par changement de temps, un processus parabolique. En revenant quelques instants, pour simplifier, à la diffusion de Dudley dans le fibré unitaire de Minkowski  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$  et en considérant le changement de temps, on peut montrer que le générateur de la diffusion parabolique a la forme, exprimé en  $(x, y, t)$  dans une carte locale  $U \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  de  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$  :

$$\sum_{i,j=1}^d a^{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + a^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + b^i(x) \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial t},$$

où  $(a^{ij})$  est définie positive,  $(a^i)$  et  $b^i$  peuvent être donnés explicitement (et ne sont pas linéaires).

Ce type de générateur est plus général que les opérateurs paraboliques de Kolmogorov (pour lesquels  $b^i(x) = x^i$ ). Dans les travaux récents de Menozzi et al. ([55], [27] et [63]) on trouve des estimations gaussiennes locales de la fonction de Green des opérateurs de Kolmogorov mais leurs résultats ne peuvent s'utiliser directement pour le générateur de Dudley. Enfin, citons [43], où les ensembles de niveau de la fonction de Green des opérateurs de Kolmogorov lorsque  $a^{ij}$  est constante ont été étudiés afin d'obtenir une inégalité de Harnack.

Il semble ainsi que nous soyons encore assez loin d'avoir des estimations de la fonctions de Green de  $(g_t, \xi_t)$  qui puissent nous permettre d'obtenir un critère de Wiener pour la diffusion. Nous allons néanmoins pouvoir en écrire un pour certaines parties qui seront à l'intérieur d'un cône homogène et déduire une condition suffisante de non-effilement, qui est une condition de cône de Poincaré. Nous commencerons par transcrire la preuve du théorème 1.9 de [15] pour le cas des diffusions hypoelliptiques générales vérifiant l'hypothèse de Hörmander faible. Cette preuve utilise les estimations a priori de [64] et la formule de Taylor stochastique de [19]. On obtient ainsi le théorème suivant où  $G(x, y)$  est la fonction de Green de la diffusion hypoelliptique,  $Q(x)$  une dimension liée à la géométrie des crochets de Lie.

**Théorème 4.** *Il existe une fonction lisse  $\psi_x > 0$  telle que :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\|x-y\| < \varepsilon} |G(x, y) |y|_x^{Q(x)-2} - \psi_x(\theta_x(y))| = 0$$

Ce théorème, même s'il est loin de décrire complètement la singularité des fonctions de Green hypoelliptiques générales, peut être utilisé pour la diffusion dans le groupe de Poincaré afin d'obtenir un critère de Wiener et une condition de cône de Poincaré.

**Proposition 7** (Critère d'effilement). *Soit  $B$  une partie de  $\mathcal{G}$  contenue dans un cône homogène  $C_h(g_0, \xi_0)$  issu de  $(g_0, \xi_0)$ .*

*Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le point  $(g_0, \xi_0)$  est régulier pour  $B$ .*
- (ii) *La série  $\sum_n \lambda^{d(d+3)n} C(B_n)$  est divergente.*

Ce chapitre a fait l'objet d'un article soumis ([70]).

## Deuxième chapitre

Nous commençons par présenter les résultats de [28] sous une forme plus moderne. Précisons dès maintenant la notion centrale d'invariance d'un processus markovien sous l'action d'un groupe. Un processus de Markov de générateur  $\mathcal{L}$ , à valeurs dans un espace  $X$  sur lequel un groupe  $G$  agit est dit  *$G$ -invariant* lorsque

$$\forall f \in \text{dom}(\mathcal{L}), \forall g \in G, \quad \mathcal{L}(f \circ g) = \mathcal{L}(f) \circ g.$$

Le groupe connexe des isométries de  $\mathbb{R}^{1,d}$  est le groupe de Poincaré  $PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d}$ . Ainsi  $\mathbb{R}^{1,d}$  s'identifie naturellement à l'espace homogène  $(PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d}) / PSO(1, d)$ . La non compacité des orbites non triviales de  $PSO(1, d)$  sur  $\mathbb{R}^{1,d}$  l'empêche de porter une mesure de probabilité  $PSO(1, d)$ -invariante. De cela, il résulte qu'il n'existe pas de processus de Markov non trivial à valeurs dans  $\mathbb{R}^{1,d}$  qui soit  $PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d}$ -invariant. Cette situation diffère radicalement du cas euclidien où  $\mathbb{R}^d$  est l'espace naturel des états des processus  $(SO(d) \times \mathbb{R}^{1,d})$ -invariants, dont le mouvement brownien usuel en est essentiellement l'unique continu. Pour obtenir des processus invariants par le groupe de Poincaré il faut considérer un espace d'état qui soit un quotient compact de ce groupe. Un sous-groupe compact maximal de  $PSO(1, d)$  est  $SO(d)$ , et il en ressort que l'espace d'état minimal sur lequel on puisse obtenir un processus markovien invariant est  $(PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d}) / SO(d)$ . Cet espace d'état s'identifie naturellement au fibré unitaire de  $\mathbb{R}^{1,d}$  soit précisément  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$ . En utilisant un résultat que l'on trouve par exemple dans [61], on peut écrire explicitement la forme des générateurs des processus  $(PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d})$ -invariants

sur  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$ . Ils peuvent, par ailleurs, s'obtenir comme projection de processus de Lévy invariants à gauche sur  $(PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d})$  et  $SO(d)$ -invariants à droite. Parmi ces processus markoviens invariants dans  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$  il est aisé de décrire ceux dont les trajectoires dans  $\mathbb{R}^{1,d}$  sont de genre temps. Ce sont ceux qui sont formés d'un processus markovien  $PSO(1, d)$ -invariant dans  $\mathbb{H}^d$  et de son intégrale en temps dans  $\mathbb{R}^{1,d}$ . Il apparaît alors qu'il existe essentiellement une unique diffusion invariante et à trajectoire de genre-temps, c'est la diffusion de Dudley, formée du mouvement brownien hyperbolique dans  $\mathbb{H}^d$  et de son intégrale en temps dans  $\mathbb{R}^{1,d}$ . L'étude du comportement asymptotique de cette diffusion a été faite par Bailleul dans [6] et [9].

La question que l'on pose dans cette partie est de déterminer la dynamique asymptotique des flots stochastiques engendrés par les processus de Dudley dans le groupe de Poincaré. Il s'agit des flots invariants à gauche dans  $PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d}$  suivants

$$\begin{array}{ccc} PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d} & \longrightarrow & PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d} \\ g & \longmapsto & gg_t \end{array}$$

où  $g_t$  est un processus de Lévy invariant à gauche dans le groupe de Poincaré partant de l'identité qui se projette sur un processus de Dudley dans  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$ .

Il s'agit de trouver les variétés stables et les coefficients de Lyapunov de ce flot. Ce travail est l'analogue relativiste de ce qui a été fait précédemment pour les mouvements browniens riemanniens ([13], [18], [58]). Nous proposons ici un calcul direct s'appuyant sur les décompositions polaires et d'Iwasawa de  $PSO(1, d)$ . La dynamique asymptotique obtenue est alors hyperbolique

**Théorème 7.** *Il existe deux sous-algèbres de  $Lie(PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d})$  aléatoires  $V^- \subset V^0$  dépendantes de  $(\theta_\infty, \lambda_\infty)$  et un réel positif  $\alpha$  tel que*

$$\frac{1}{t} \log \|D\phi_t(\text{Id}).\tilde{B}\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{a.s.} \begin{cases} -\alpha & \text{if } \tilde{B} \in V^- \setminus \{0\} \\ 0 & \text{if } \tilde{B} \in V^0 \setminus V^- \\ \alpha & \text{if } v \in Lie(\mathcal{G}) \setminus V^0 \end{cases}$$

Puis nous déterminons les variétés stables dans  $PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d}$  :

**Théorème 8.** *Soit  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \in PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d}$  tels que  $\tilde{A}_1 \neq \tilde{A}_2$ .*

- *Si  $\tilde{A}_1 \in \tilde{A}_2 \exp(V^-)$  alors :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log d(\phi_t(\tilde{A}_1), \phi_t(\tilde{A}_2)) = -\alpha.$$

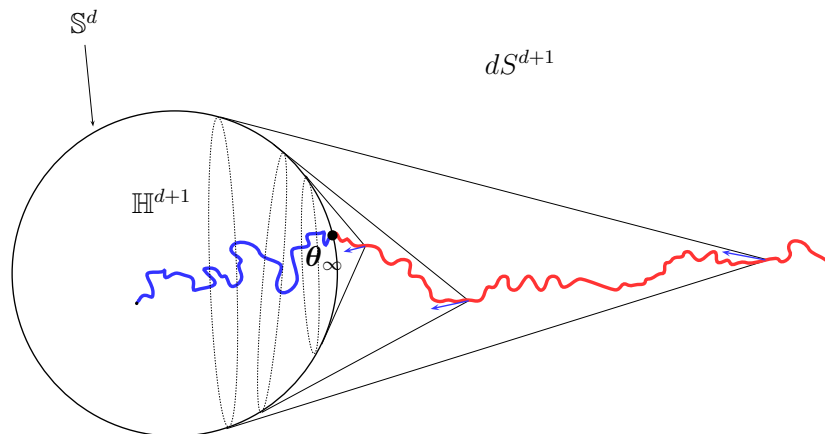
- *Si  $\tilde{A}_1 \notin \tilde{A}_2 \exp(V^-)$  alors :*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(\tilde{A}_1), \phi_t(\tilde{A}_2)) > 0.$$

Nous en donnons une idée géométrique en montrant que les projections dans  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$  sont des fibrés en droite d'horosphères.

## Troisième chapitre

Dans ce troisième chapitre nous montrons que les processus de Dudley peuvent également se définir dans le fibré unitaire des espaces-temps de de Sitter ( $dS^{d+1}$ ) et Anti-de-Sitter ( $AdS^{d+1}$ ) qui sont, comme pour l'espace-temps de Minkowski, des espaces homogènes. Cette fois, dans les deux cas, le groupe d'isométrie est semi-simple, il s'agit de  $PSO(1, d + 1)$  pour  $dS^{d+1}$  et de  $PSO(2, d)$  pour  $AdS^{d+1}$ . Ces processus invariants avec des trajectoires de genre temps s'obtiennent comme des projections de processus de Lévy  $g_t$  dans le groupe d'isométrie semi-simple. Dans [46] Guivarc'h et Raugi décrivent le comportement asymptotique d'une marche aléatoire  $g_p$  dans un groupe de Lie semi-simple. Sous les hypothèses d'*irréductibilité* et de *contraction* de la mesure définissant la marche, ils obtiennent, en écrivant  $g_p = n_p a_p k_p$  dans une décomposition d'Iwasawa du groupe, la convergence presque-sûre de  $n_p$ . Ces conditions d'*irréductibilité* et de *contraction* sont algébriques et les auteurs s'affranchissent des précédentes conditions de régularité et d'intégrabilité de la loi que l'on trouve dans les travaux précédents de Furstenberg ([40]) Azencott ([4]) et Raugi ([67]). Liao ([61], [60]) adapte ce travail dans le cadre des processus de Lévy dans un groupe de Lie semi-simple et montre, entre autre, la convergence de  $n_t$  sous des hypothèses d'*irréductibilité* et de *contraction* analogue à celles pour les marches aléatoires. La difficulté est de montrer que ces conditions sont vérifiées à partir de la donnée du générateur du processus de Lévy. Pour cela, Liao donne des conditions suffisantes qui peuvent s'appliquer et nous pouvons alors décrire le comportement asymptotique pour une large classe de processus de Dudley comprenant les diffusions. Géométriquement, le processus de Dudley dans l'espace-temps de Sitter converge vers un point du bord causal de  $dS^{d+1}$  qui s'identifie à la sphère  $\mathbb{S}^d$ . La nappe  $dS^{d+1} \subset \mathbb{R}^{1, d+1}$  se projette dans  $\mathbb{P}^{d+1} \mathbb{R}$  sur le complémentaire d'une boule et le dessin suivant présente le comportement asymptotique de la trajectoire d'une diffusion de Dudley dans le fibré  $T^1 dS^{d+1}$  (les vitesses sont dans  $T^1 dS^{d+1} \subset \mathbb{H}^{d+1}$  qui s'identifie à l'intérieur de la boule).



L'espace-temps Anti-de-Sitter se projette dans  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R}$  en un ouvert dont le bord est l'image d'une quadrique de signature  $(+, +, -, \dots, -)$  homéomorphe à  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{d-1}$  muni d'une structure Lorentzienne conforme, appelé *univers d'Einstein* et noté  $Ein^d$ . On montre que les trajectoires des processus de Dudley dans Anti-de-Sitter sont asymptotiques à un hyperplan de codimension 2 tangent à  $Ein^d$  en un cercle de lumière. Pour obtenir la dynamique asymptotique du flot invariant à gauche associé à  $g_t$  dans le groupe d'isométrie, il faut préciser la vitesse de convergence de  $n_t$  vers  $n_\infty$ . Cela peut s'obtenir en supposant une condition d'intégrabilité de la mesure de Lévy qui permet d'obtenir la convergence du taux  $-(\log a_t)/t$  vers un  $H_\infty$  déterministe appartenant à la chambre de Weyl associée à la décomposition d'Iwasawa. Les coefficients de Lyapunov du flot sont alors donnés par les valeurs propres de  $ad(H_\infty)$  et la distribution des sous-espaces du spectre s'obtient à partir des sous-espaces propres de  $ad(H_\infty)$ . Précisément, on obtient les théorèmes suivants

**Théorème 12** (Spectre de Lyapunov dans  $dS^{d+1}$ ). *Dans le cas de l'espace-temps de de Sitter  $dS^{d+1}$ , il existe un réel positif  $\alpha > 0$  et deux sous-algèbres de Lie aléatoires  $V^- \subset V^0 \subset Lie(PSO(1, d+1))$  tels que pour une métrique  $\|\cdot\|$  invariante à gauche et pour  $g \in G$ ,  $v \in Lie(PSO(1, d+1))$  on a :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|D\phi_t(g) \cdot gv\| = \begin{cases} \alpha & \text{si } v \in Lie(G) \setminus V^0 \\ 0 & \text{si } v \in V^0 \setminus V^- \\ -\alpha & \text{si } v \in V^- \setminus \{0\} \end{cases}$$

**Théorème 13** (Spectre de Lyapunov dans  $AdS^{d+1}$ ). *Dans le cas de l'espace-temps Anti-de-Sitter  $AdS^{d+1}$ , il existe  $\alpha_4 > \alpha_3 \geq \alpha_2 \geq \alpha_1 > 0$  et huit sous-algèbres aléatoires  $V_4^- \subset \dots \subset V_1^- \subset V^0 \subset V_1^+ \subset \dots \subset V_3^+ \subset Lie(PSO(2, d))$  tels que pour une métrique  $\|\cdot\|$  invariante à gauche et pour  $g \in G$ ,  $v \in Lie(PSO(2, d))$  on a :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|D\phi_t(g) \cdot gv\| = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } v \in V_i^+ \setminus V_{i-1}^+ \quad i = 1, \dots, 4 \\ 0 & \text{si } v \in V^0 \setminus V_1^- \\ -\alpha_i & \text{si } v \in V_i^- \setminus V_{i+1}^- \quad i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

en posant  $V_0^+ := V^0$ ,  $V_4^+ := Lie(G)$  et  $V_5^- := \{0\}$ .

Nous avons néanmoins tenu à présenter les calculs explicites pour déterminer le spectre de Lyapunov des diffusions. On illustre, en outre, la méthode de Raugi pour calculer la frontière de Poisson des diffusions de Dudley dans de Sitter et obtenons le résultat suivant :

**Théorème 14.** *La tribu invariante de la diffusion  $g_t$  dans  $PSO(1, d+1)$  est engendrée par la variable asymptotique  $\theta_\infty$ . Plus précisément nous avons  $\text{Inv}\{g_t\} = \sigma(\theta_\infty)$  aux ensembles  $\mathbb{P}_g$ -négligeables près, pour tout  $g \in G$ .*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Une condition de cône de Poincaré dans le groupe de Poincaré</b>	<b>14</b>
1.1	Introduction . . . . .	14
1.2	Rappels sur la fonction de Green . . . . .	16
1.2.1	De l'analyse . . . . .	16
1.2.2	Aux probabilités . . . . .	17
1.3	État de l'art de l'estimation d'une fonction de Green sur la diagonale	18
1.4	Processus tangent et diffusion rééchelonnée . . . . .	21
1.4.1	Notations et hypothèses techniques . . . . .	21
1.4.2	Le processus tangent . . . . .	24
1.4.3	Diffusions rééchelonnées . . . . .	28
1.5	Preuve du théorème 5 . . . . .	29
1.5.1	Preuve de la proposition 3 . . . . .	32
1.5.2	Preuve de la proposition 4 . . . . .	34
1.5.3	Preuve de la proposition 5 . . . . .	35
1.6	Critère d'effilement local de Wiener, capacités de petits compacts et test de Poincaré pour la diffusion relativiste dans le groupe de Poincaré . . . . .	38
1.6.1	Cadre géométrique . . . . .	38
1.6.2	La diffusion relativiste . . . . .	39
1.6.3	Critère d'effilement de Wiener . . . . .	42
1.6.4	Capacités des petits compacts et test de Poincaré . . . . .	43
1.7	Appendice . . . . .	46
1.7.1	Sur les estimations a priori et les résultats de [64] . . . . .	46
<b>2</b>	<b>Dynamique asymptotique d'un flot associé à une classe de pro- cessus relativistes dans l'espace-temps de Minkowski</b>	<b>50</b>
2.1	Introduction . . . . .	50
2.2	Les processus de Dudley et leur relèvement dans $\mathcal{G}$ . . . . .	55
2.3	Comportement asymptotique du processus $\tilde{A}_t$ . . . . .	57
2.4	Calcul du spectre de Lyapunov . . . . .	65
2.4.1	Flot, métrique et diagonalisation . . . . .	65

2.4.1.1	Flot dans le groupe de Poincaré . . . . .	65
2.4.1.2	Métrie dans le groupe de Poincaré . . . . .	66
2.4.1.3	Diagonalisations . . . . .	67
2.4.2	Calculs asymptotiques . . . . .	69
2.4.3	Spectre de Lyapunov . . . . .	77
2.5	Variétés stables . . . . .	84
2.6	Projection des variétés stables dans $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$ . . . . .	88

### 3 Dynamique asymptotique des flots associés à certains processus relativistes dans les espaces-temps de de Sitter et Anti de Sitter 91

3.1	Introduction . . . . .	91
3.2	Processus de Dudley dans les espace-temps de Sitter et Anti-de-Sitter 93	
3.2.1	Espaces temps de Sitter et Anti-de-Sitter . . . . .	93
3.2.1.1	De Sitter . . . . .	93
3.2.1.2	Anti-de-Sitter . . . . .	95
3.2.2	Processus de Dudley . . . . .	96
3.2.2.1	Rappel : processus de Dudley dans $\mathbb{R}^{1,d}$ . . . . .	96
3.2.2.2	Processus de Dudley dans $dS^{d+1}$ et $AdS^{d+1}$ . . . . .	97
3.2.2.3	Relèvement dans $G$ . . . . .	100
3.2.2.4	Décomposition d'Iwasawa de $G$ . . . . .	101
3.2.2.5	Dynamique asymptotique . . . . .	102
3.2.2.6	Projection sur la variété de base . . . . .	105
3.3	Calculs explicites pour les diffusions relativistes . . . . .	111
3.3.1	Coefficients de Lyapunov et frontière de Poisson pour les diffusions relativistes dans de Sitter . . . . .	112
3.3.1.1	Décomposition d'Iwasawa de $PSO(1, d+1)$ : précisions 112	
3.3.1.2	Comportement asymptotique en coordonnées d'Iwasawa . . . . .	113
3.3.1.3	Dynamique asymptotique en coordonnées polaires .	121
3.3.1.4	Projection des variétés stables sur $dS^{d+1}$ . . . . .	124
3.3.2	La tribu invariante de la diffusion de Dudley dans $dS^{d+1}$ est engendrée par $\theta_\infty$ . . . . .	125
3.3.2.1	Fonctions $\mathcal{L}$ -harmoniques bornées. . . . .	126
3.3.2.2	Un lemme général. . . . .	129
3.3.2.3	Régularité de la loi de $\theta_\infty$ . . . . .	130
3.3.2.4	Frontière de Poisson de $g_t$ . . . . .	133
3.3.3	Coefficients de Lyapunov pour les diffusions dans Anti-de-Sitter . . . . .	137
3.3.3.1	Décompositions de $G = PSO(2, d)$ . . . . .	138
3.3.3.2	Calcul des coefficients de Lyapunov . . . . .	140

# Chapitre 1

## Une condition de cône de Poincaré dans le groupe de Poincaré

### 1.1 Introduction

A l'instar du mouvement Brownien euclidien, invariant par rotation et réflexion, Dudley montre, au début des années 60 ([28]), qu'il n'existe pas de diffusion dans l'espace de Minkowski ( $\mathbb{R}^{1,d}$ ) invariante par transformation lorentzienne. Le bon espace d'état est en fait l'espace des phases  $\mathbb{H} \times \mathbb{R}^{1,d}$ <sup>1</sup> et Dudley montre que le seul processus de Markov, de genre temps, continu sur cet espace et invariant par transformation lorentzienne est  $(\dot{\xi}_s, \int \dot{\xi}_s ds)$  où  $\dot{\xi}_s$  est un mouvement brownien hyperbolique. Dudley obtient également le comportement asymptotique de cette diffusion. Bien que les physiciens s'intéressent à des modèles de diffusions relativistes (dans le cadre par exemple d'une théorie de Boltzmann relativiste), les travaux de Dudley n'ont pas immédiatement connu de suite dans la communauté mathématique. Il faut, en effet, attendre les travaux de Franchi et Le Jan ([39]) pour avoir une généralisation naturelle courbe de cette diffusion dans le cadre de la relativité générale et Bailleul ([6]) pour avoir une description complète de la frontière de Poisson (de la diffusion de Dudley). La théorie du potentiel associée à cette diffusion relativiste reste cependant encore incomplète.

L'objectif de ce chapitre est d'établir un critère d'effilement local de Wiener pour la diffusion relativiste de Dudley. Ce critère permet de décrire la régularité, pour cette diffusion, d'un point relativement à une partie de  $\mathbb{H} \times \mathbb{R}^{1,d}$ , c'est-à-dire de savoir si la diffusion, partant de ce point, atteint immédiatement, presque sûrement, cette partie. Ce critère, qui est bien connu depuis longtemps ([12]) pour

---

1.  $\mathbb{H}$  est la nappe hyperbolique.



le mouvement Brownien euclidien (et plus généralement pour les diffusions elliptiques), résulte du comportement de la fonction de Green sur la diagonale.

Cependant, la diffusion de Dudley est hypoelliptique, avec une dérive, et le comportement de sa fonction de Green sur la diagonale n'est a priori pas connu. En effet, comme le rappelle la section 1.3, le résultat le plus général concernant l'explosion d'une fonction de Green sur la diagonale est celui que Ben Arous et Gradinaru ont obtenu dans [15]; il concerne des diffusions sous-elliptiques sans dérive. Les auteurs montrent, par un exemple, les difficultés qui apparaissent en présence d'une dérive : la fonction de Green peut ne pas exploser sur la diagonale.

Leur preuve s'appuie sur un développement de Taylor du flot stochastique obtenu par Castell dans [19] et sur des estimées à priori de la fonction de Green obtenu par Nagel-Stein-Wainger dans [64].

Les parties 1.4 et 1.5 proposent une réécriture de leur preuve, en apportant quelques simplifications et précisions et en prenant en compte une dérive. On aboutit alors au théorème 5 qui, s'il est loin de résoudre le problème général du comportement sur la diagonale d'une fonction de Green hypoelliptique avec dérive, fournit néanmoins une bonne estimation lorsque le support de la diffusion est connu.

Ceci étant le cas pour la diffusion de Dudley, que l'on voit comme projection de la diffusion relativiste sur le groupe de Poincaré, on obtient, dans la partie 1.6, un critère d'effilement de Wiener.

## 1.2 Rappels sur la fonction de Green

On rappelle, dans cette partie, la notion d'hypoellipticité d'un opérateur, la fonction de Green associée et le lien avec les diffusions.  $\mathcal{M}$  est une variété lisse de dimension  $d$ .

### 1.2.1 De l'analyse

Dans [48], Hörmander montre le célèbre théorème :

**Théorème 1.** *Soit une famille  $(X_1, \dots, X_m, X_0)$  de champs de vecteurs lisses sur  $\mathcal{M}^{(d)}$  vérifiant la condition, en tout point  $x$  :*

$$\mathfrak{Lie}(X_1, \dots, X_m, X_0)|_x = T_x\mathcal{M}, \quad (\text{H})$$

Alors l'opérateur du second ordre :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (X_i)^2 + X_0, \quad (1.1)$$

est hypoelliptique ; c'est-à-dire que toute distribution  $u$  est  $C^\infty$  dans un ouvert dès que  $\mathcal{L}u$  l'est dans cet ouvert.

Comme il est rappelé dans [17], une application du théorème du graphe fermé fournit le :

**Corollaire 1.** *Sur l'espace des solutions  $u$  de  $\mathcal{L}u = 0$  sur un ouvert  $U$ , la topologie  $C^\infty$  coïncide avec la topologie de la convergence au sens des distributions.*

Pour un tel opérateur tel qu'en outre, en chaque point  $x \in \mathcal{M}$ , l'un au moins des  $X_i(x)$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , est non nul, Bony montre dans [17] :

**Théorème 2.** *Il existe une base de la topologie de  $\mathcal{M}$  formée d'ouverts pour lesquels il y a existence et unicité de la solution du problème de Dirichlet ; c'est-à-dire que pour  $\omega$  ouvert de cette base,  $\varphi$  continue sur  $\partial\omega$  et  $f$  continue sur  $\bar{\omega}$ , il existe une unique solution continue sur  $\bar{\omega}$  telle que :*

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{dans } \omega \quad (1.2)$$

$$u = \varphi \quad \text{sur } \partial\omega. \quad (1.3)$$

On définit alors l'opérateur de Green  $G$  de  $C(\bar{\omega})$  dans  $C(\bar{\omega})$  qui à toute fonction  $f$  fait correspondre la solution  $u = Gf$  de :

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{dans } \omega \quad (1.4)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\omega. \quad (1.5)$$

Bony montre alors, toujours sous l'hypothèse (H) :

**Théorème 3.** *Il existe une fonction  $G(x, y)$ , dite fonction de Green, positive et de classe  $C^\infty$  dans le complémentaire de la diagonale de  $\omega \times \omega$  telle que, pour toute fonction  $f$  continue sur  $\bar{\omega}$ , on ait :*

$$Gf(x) = \int G(x, y)f(y)dy. \quad (1.6)$$

**Remarque 1.** *L'opérateur et la fonction de Green dépendent de l'ouvert  $\omega$  ; on devrait donc noter  $G_\omega$ . De plus pour  $x \in \omega$ , la fonction  $G_\omega(x, \cdot)$  est une solution fondamentale dans  $\omega$  de l'opérateur dual  $\mathcal{L}^*$  associé à  $\mathcal{L}$ . C'est-à-dire que  $\mathcal{L}^*G_\omega(x, \cdot) = \delta_x$  dans  $\omega$  au sens des distributions. Si maintenant  $\omega'$  est un ouvert régulier contenant  $\omega$  on a également  $\mathcal{L}^*G_{\omega'}(x, \cdot) = \delta_x$  dans  $\omega$  de sorte que  $\mathcal{L}^*(G_\omega(x, \cdot) - G_{\omega'}(x, \cdot)) = 0$  dans  $\omega$ . Ainsi  $G_\omega(x, \cdot)$  et  $G_{\omega'}(x, \cdot)$  ne diffèrent, dans  $\omega$ , que par une fonction  $C^\infty$  et l'étude de la singularité en  $x$  ne va pas dépendre de l'ouvert régulier  $\omega$  contenant  $x$ .*

## 1.2.2 Aux probabilités

Donnons maintenant une interprétation probabiliste à la fonction de Green de l'opérateur  $\mathcal{L}$ . Soit  $B_s = (B_s^i)_{i=1, \dots, m}$  un mouvement brownien de  $\mathbb{R}^m$ .

On considère l'équation différentielle stochastique de Stratonovich suivante :

$$dx_s = \sum_{i=1}^m X_i(x_s) \circ dB_s^i + X_0(x_s)ds. \quad (1.7)$$

On rappelle la propriété suivante ([49]).

**Proposition 1.** *La solution  $x_s$  de (1.7) est une diffusion sur  $\mathcal{M}$  de générateur  $\mathcal{L}$ .*

L'opérateur de Green de  $\omega$  s'exprime en fonction de  $x_t$  par l'égalité, pour  $x \in \omega$  :

$$Gf(x) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^\tau f(x_t)dt \right] \quad (1.8)$$

$$= \mathbb{E}_x \left[ \int_0^\infty f(x_{t \wedge \tau})dt \right], \quad (1.9)$$

où  $\tau = \inf\{s > 0; x_s \in \omega^c\}$  est le temps de sortie de  $\omega$ .

Si  $x_{t \wedge \tau}$  possède une loi qui admet une densité  $p_t(x, y)$  par rapport à la mesure de Lebesgue on obtient :

$$G(x, y) = \int_0^{+\infty} p_t(x, y) dt. \quad (1.10)$$

Une condition plus forte que (H) pour garantir l'existence de  $p_t(x, y)$  est que l'opérateur  $\mathcal{L} - \partial_t$  sur  $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ , vérifie lui même (H). Cette condition est équivalente à la condition sur les crochets suivante :

$$\text{Vect} (X^J(x), J \neq (0)) = T_x \mathcal{M}, \quad (H')$$

où  $J$  est un multi-indice  $(j_1, \dots, j_n) \in \{0, \dots, m\}^n$  de longueur arbitraire et  $X^J$  désigne le crochet  $[X_{j_1}, [X_{j_2}, [\dots, [X_{j_{n-1}}, X_{j_n}]] \dots]]$  et  $X^{(j)} := X_j$ .

### 1.3 État de l'art de l'estimation d'une fonction de Green sur la diagonale

On présente dans cette partie les résultats connus concernant l'estimation d'une fonction de Green sur la diagonale et on énonce le théorème que l'on va montrer dans les parties 1.4 et 1.5.

Il est question du comportement local au voisinage de la diagonale de la fonction de Green. La connaissance de ce comportement va permettre d'établir un critère d'effilement de Wiener qui détermine les points réguliers des ouverts. L'étude des opérateurs  $\mathcal{L}$  s'inscrit ainsi dans le cadre de la théorie du potentiel et nous nous concentrons sur une propriété locale.

Le laplacien d'une variété riemannienne a beaucoup été (et est toujours) étudié. C'est le prototype des opérateurs elliptiques (du type (1.1)) qui vérifient l'hypothèse, en tout point  $x$  :

$$\text{Vect} (X_1(x), \dots, X_m(x)) = T_x \mathcal{M}. \quad (E)$$

Ces opérateurs vérifient (H'), et donc a fortiori (H), et la fonction de Green s'écrit comme en (1.10). Le comportement de la fonction de Green au voisinage de la diagonale est bien compris ; c'est celui du Laplacien classique sur  $\mathbb{R}^d$  ; pour  $d \geq 3$  :

$$G(x, y) \underset{y \rightarrow x}{\sim} \frac{c_x}{\rho(x, y)^{d-2}},$$

où  $\rho(x, y)$  désigne la distance Riemannienne.

Une classe intermédiaire entre celle des opérateurs elliptiques et celle des opérateurs hypoelliptiques est celle des opérateurs sous-elliptiques qui vérifient la condition plus forte que (H) :

$$\mathfrak{L}\mathfrak{ie}(X_1, \dots, X_m)|_x = T_x\mathcal{M}, \quad (\text{SE})$$

en tout point  $x$ . Afin de décrire l'éventuelle explosion de la fonction de Green sur la diagonale, on dispose du travail de Nagel, Stein et Wainger effectué dans [64], qui associent à la famille de champs de vecteurs  $(X_1, \dots, X_m)$  une distance sous-riemannienne  $\rho(x, y)$  définie au moyen de courbes horizontales (cf appendice).

Ils établissent, en corollaire du théorème 5 de [64], l'estimation a priori suivante :

$$|G(x, y)| \leq C \frac{\rho^2(x, y)}{|B(x, \rho(x, y))|}.$$

Dans [20], Chaleyat-Maurel et Le Gall se sont intéressés au cas de champs de vecteurs  $X_1, X_2$  sur  $\mathbb{R}^3$  tels que  $(X_1, X_2, [X_1, X_2])$  engendrent  $\mathbb{R}^3$ . Ils ont obtenus que la fonction de Green de l'opérateur  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2) + X_0$  vérifie :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\|x-y\| < \varepsilon} |G(x, y)J(x)D(x, y)^2 - 1| = 0,$$

où  $J(x) = |\det(X_1(x), X_2(x), [X_1, X_2](x))|$  et  $D(x, y)$  est une pseudo-distance localement équivalente à la distance sous-riemannienne  $\rho(x, y)$  dans le cas où  $X_0 = 0$ . En absence de dérive, on peut donc remplacer  $D$  par  $\rho$ .

Pour établir cette estimation fine, Chaleyat-Maurel et Le Gall s'appuient sur l'estimée a priori de [64] et comparent la fonction de Green à celle d'un processus appelé "tangent", introduit par Ben Arous dans [14] pour l'étude d'un développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique sur la diagonale. Une formule de Taylor stochastique établie par Azencott dans [5] est alors utilisée.

Le résultat d'Azencott constitue le fondement du travail de Castell réalisé dans [19] qui établit une formule de Taylor pour le flot stochastique d'une équation différentielle stochastique.

Dans [15], les auteurs étendent le travail de Chaleyat-Maurel et Le Gall au cas sous-elliptique général mais sans dérive ( $X_0 = 0$ ) et obtiennent le théorème suivant :

**Théorème 4.** *Il existe une fonction lisse  $\psi_x > 0$  telle que :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\|x-y\| < \varepsilon} |G(x, y)|y|_x^{Q(x)-2} - \psi_x(\theta_x(y))| = 0.$$

$|y|_x$  est une norme homogène locale autour de  $x$  construite à partir des champs de vecteurs  $X_i$  et équivalente à la distance sous-riemannienne  $\rho(x, y)$ . La fonction  $\psi_x$  et l'entier  $Q(x)$  sont des objets liés à la géométrie locale des champs de vecteurs  $(X_i)$ .  $\theta_x(y)$  est une variable angulaire unitaire pour la norme homogène  $|\cdot|_x$ . Tous ces objets seront décrits plus précisément par la suite.

Pour établir ce résultat, Ben Arous et Gradinaru utilisent les estimations a priori de [64] et le développement de Taylor du flot stochastique de Castell.

Un corollaire immédiat du théorème 4 est la double inégalité suivante pour un tout petit voisinage  $U_x$  de  $x$  :

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0, \forall y \in U_x \quad \frac{\alpha}{|y|_x^{Q(x)-2}} \leq G(x, y) \leq \frac{\beta}{|y|_x^{Q(x)-2}}.$$

Ce genre d'inégalité permet d'obtenir des résultats de théorie du potentiel local de l'opérateur  $\mathcal{L}$ ; en particulier une estimation des capacités de petits compacts au voisinage de  $x$  ou bien un test d'effilement de Wiener local.

Dans [45], Gradinaru donne une idée de ce qui se passe en présence d'une dérive  $X_0$ . Il donne un exemple où il n'y a pas explosion de la fonction de Green. Plus précisément, lorsque  $(X_1, \dots, X_m)$  engendrent librement l'algèbre de Lie  $g(m, r)$  libre nilpotente d'ordre  $r$  et que  $X_0$  est dans le centre de celle-ci, on a alors le résultat suivant sur la fonction de Green de la diffusion associée sur le groupe de Lie nilpotent :

$$\limsup_{s \rightarrow 0} G(e, \exp(-sX_0)(e)) \leq k. \quad (1.11)$$

Où  $e$  est l'élément neutre du groupe de Lie.

Ainsi, lorsqu'on s'approche de la diagonale par la direction opposée au drift, la fonction de Green reste bornée.

Un des buts de ce travail est d'étendre le résultat de Ben Arous et Gradinaru au cas général où  $(X_0, X_1, \dots, X_m)$  vérifient la conditions d'Hörmander (H). Il y a donc une dérive  $X_0$  et nous sommes dans un cadre plus général que sous-elliptique.

Précisément on va montrer le théorème suivant :

**Théorème 5.** *Il existe une fonction lisse  $\psi_x \geq 0$  telle que :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\|x-y\| < \varepsilon} |G(x, y)|_x^{Q(x)-2} - \psi_x(\theta_x(y))| = 0.$$

La fonction  $\psi_x$  est liée a la fonction de Green du processus tangent qui, en présence d'une dérive, ne visite, en général, qu'un demi espace :  $\psi_x$  pourra s'annuler sur ce demi-espace.

Ainsi lorsque  $y$  approche  $x$  selon la direction  $\theta_x(y)$  telle que  $\psi_x(\theta_x(y)) = 0$  on obtient seulement  $G(x, y) = o\left(\frac{1}{|y|_x^{Q(x)-2}}\right)$ . Ce résultat général est moins précis que

(1.11) mais va dans son sens. Le théorème (5) ne permet donc pas de décrire le comportement précis de la fonction de Green sur la diagonale mais fournit assez d'information lorsque le support de la diffusion est connu. Ce qui sera le cas de la diffusion relativiste du groupe de Poincaré de la partie (1.6).

## 1.4 Processus tangent et diffusion rééchelonnée

**Dans cette partie on introduit les notations et les objets en jeu (processus tangent et diffusion rééchelonnée) pour démontrer le théorème 5.**

On s'intéresse à une diffusion solution de (1.7) lorsque les champs de vecteurs satisfont la condition de crochet ( $H$ ). Nous voulons démontrer un résultat local sur la diffusion  $x_t$  engendrée par  $\mathcal{L}$ . Pour cela nous allons introduire une famille de diffusions  $v_t^{(x,\varepsilon)}$  qui correspondent à des zooms, d'autant plus importants que  $\varepsilon > 0$  est plus petit, de  $x_t$  au voisinage de  $x$ ; on les appelle diffusions "rééchelonnées"; elles vivent dans le tangent  $T_x\mathcal{M} \cong \mathbb{R}^d$ . Dans l'esprit de [5], on montrera qu'il existe un développement asymptotique de la forme  $v_t^{(x,\varepsilon)} = u_t^{(x)} + \varepsilon R^{(x)}(\varepsilon, t)$  où le reste  $R^{(x)}(\varepsilon, t)$  est borné uniformément en probabilité et où le processus  $u_t^{(x)}$  sera le processus tangent défini comme combinaisons linéaires d'intégrales de Stratonovich itérées. Ce processus tangent n'est en général pas une diffusion, mais on montre qu'il est la projection d'une diffusion et qu'il admet une fonction de Green notée  $g^{(x)}$ . En notant  $G^{(x,\varepsilon)}$  la fonction de Green de la diffusion rééchelonnée et en utilisant le développement asymptotique et les estimations a priori de [64], on va montrer la convergence uniforme sur les compacts de  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  suivante :

$$\sup_{u \in K} |G^{(x,\varepsilon)}(0, u) - g^{(x)}(0, u)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

où  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ .

De ce résultat découlera simplement le théorème 5. Il suffit pour cela d'écrire  $G$  en fonction de  $G^{(x,\varepsilon)}$  et de prendre  $\varepsilon = |y|_x$ .

Mais avant de rentrer dans les détails, introduisons quelques notations.

### 1.4.1 Notations et hypothèses techniques

Pour tout multi-indice  $J \in \{0, \dots, m\}^l$ , on note :

- $|J|$  la longueur  $l$  de  $J$ .
- $\|J\|$  l'ordre de  $J$  :

$$\|J\| := |J| + \text{Nombre de zéros dans } J.$$

- $X^J := [X_{j_1}, [X_{j_2}, [\dots, [X_{j_{n-1}}, X_{j_n}]] \dots]]$  et  $X^{(j)} = X_j$  (pour  $|J| = 1$ ) .

- Si  $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^l)$  est un mouvement Brownien de  $\mathbb{R}^l$  et si  $B_t^0 = t$ , on note  $B_t^J$  l'intégrale de Stratonovitch itérée suivante :

$$B_t^J := \int_{\Delta_t^l} \circ dB_{t_1}^{j_1} \cdots \circ dB_{t_l}^{j_l},$$

où  $\Delta_t^l = \{(t_1, \dots, t_l); 0 < t_1 < \dots < t_l < t\}$ .

- Si  $\sigma$  est une permutation de  $\{1, \dots, l\}$ , on note  $J \circ \sigma = (j_{\sigma(1)}, \dots, j_{\sigma(l)})$  et  $e(\sigma) = \text{Card}\{j \in \{1, \dots, l-1\}; \sigma(j) > \sigma(j+1)\}$  le nombre d'inversions de  $\sigma$ .
- On note  $c_t^J$  la combinaison linéaire d'intégrales de Stratonovitch itérées suivante :

$$c_t^J := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{|J|}} \frac{(-1)^{e(\sigma)}}{|J|^{2C_{|J|-1}^{e(\sigma)}}} B_t^{J \circ \sigma^{-1}}.$$

- Si  $X$  est un champ de vecteurs lisse, on note  $\exp(sX)(x_0)$  la solution au temps  $s$  de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = X(u(s)) \\ u(0) = x_0. \end{cases}$$

On introduit également :

$$C_i(x) = \text{vect} \{X^J(x); \|J\| \leq i\}.$$

Puisque nos champs de vecteurs satisfont l'hypothèse  $(H)$ , il existe un plus petit entier  $r(x)$  tel que  $C_{r(x)}(x) = T_x \mathcal{M}$ .

On peut toujours trouver  $\mathcal{B} = (J_1, \dots, J_d)$ , une famille de multi-indices tels que  $(X^J)_{J \in \mathcal{B}}$  est une base triangulaire de  $T_x$ , c'est-à-dire que pour  $j \leq r$ ,  $\{X^J; J \in \mathcal{B}, \|J\| \leq j\}$  est une base de  $C_j$  et ainsi  $\dim C_j = \text{Card}\{k, \|J_k\| \leq j\}$ .

Pour chaque multi-indice  $L$  il existe des fonctions lisses  $a_J^L(x)$  telles que :

$$X^L = \sum_{J \in \mathcal{B}} a_J^L X^J.$$

On note  $Q(x)$  la dimension graduée :

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{i=1}^{r(x)} i \times (\dim C_i(x) - \dim C_{i-1}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{r(x)} i \times \text{Card}\{k, \|J_k\| = i\}. \end{aligned}$$



**Hypothèses :**

i Nous allons supposer que la géométrie des crochets est localement constante, c'est-à-dire que tout  $x$  admet un voisinage  $V$  tel que pour  $y \in V$  et  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $\dim C_i(y) = \dim C_i(x)$ . Ainsi  $r$  et  $Q$  sont localement constants. On dit également que les points sont normaux pour la famille de champs de vecteurs  $(X_i)$ .

ii  $r \geq 2$

iii  $\dim C_i - \dim C_{i-1} (= \text{Card}\{k; \|J_k\| = i\}) \geq 1, \forall i = 2, \dots, r$

iv  $\dim C_1 (= \text{Card}\{k; \|J_k\| = 1\}) \geq 2$ .

Les hypothèses ii iii et iv sont techniques et garantissent la convergence de certaines intégrales qui apparaissent dans la preuve de la proposition 4. Ces hypothèses i, ii, iii, iv sont vérifiées par la diffusion de Dudley présentée en 1.6.

Il existe un voisinage  $W$  de 0 dans  $\mathbb{R}^d$  tel que l'application :

$$\varphi_x : u \mapsto \exp \left( \sum_{i=1}^d u_i X^{J_i} \right) (x)$$

définisse un difféomorphisme de  $W$  sur son image  $\varphi_x(W)$ .

Soit  $U \subset V \cap \varphi_x(W)$ , un voisinage de  $x$ . Pour  $y \in U$  on définit la norme homogène en  $x$  de  $y = \varphi_x(u)$  par :

$$|y|_x := \left[ \sum_{k=1}^r \left( \sum_{i, \|J_i\|=k} u_i^2 \right)^{\frac{Q}{2k}} \right]^{\frac{1}{Q}}.$$

Pour  $(u_i)_{i=1, \dots, d} \in \mathbb{R}^d$ , on note  $|u|_d := \left[ \sum_{k=1}^r \left( \sum_{i, \|J_i\|=k} u_i^2 \right)^{\frac{Q}{2k}} \right]^{\frac{1}{Q}}$  (i.e  $|\varphi_x(u)|_x =: |u|_d$ ), et  $\|u\|$  désignera sa norme euclidienne.

Par la suite nous voudrions aussi manipuler des normes homogènes en d'autres points que  $x$  mais assez proches de ce point de référence.

Pour cela on utilise le fait que  $\varphi_x$  dépend continuellement de  $x$ , et qu'il est donc possible de prendre  $U$  assez petit pour que chaque  $\varphi_y^{-1} : U \rightarrow \varphi_y^{-1}(U)$ , où  $y \in U$ , soit un difféomorphisme.

Ainsi,  $|z|_y$  est bien défini pour  $z, y \in U$ .

Elle est homogène pour les dilatations  $T_\varepsilon : u \mapsto (\varepsilon^{\|J_i\|} u_i)_{i=1, \dots, d}$ , c'est-à-dire que :

$$|\varphi_x \circ T_\varepsilon(u)|_x = \varepsilon |\varphi_x(u)|_x.$$

## 1.4.2 Le processus tangent

Dans cette section, on introduit le processus tangent, on montre qu'il est la projection d'une diffusion sur un groupe de Lie universel et qu'il possède une fonction de Green invariante par dilatation (exprimée par l'égalité (1.17)).

On définit le processus tangent sur  $\mathbb{R}^d$  :

$$u_t^{(x)} = \left( \sum_{L, \|L\|=\|J\|} a_J^L c_t^L \right)_{J \in \mathcal{B}}.$$

Les  $c_t^L$  sont les combinaisons explicites d'intégrales de Stratonovich itérées introduites précédemment.

**Remarque 2.** *Ce processus tangent dépend de la famille de multi-indices  $\mathcal{B}$  choisie. Si  $\mathcal{B}'$  est une autre famille telle que  $(X^K)_{K \in \mathcal{B}'}$  est une base triangulaire de  $T_x \mathcal{M}$  alors il existe des fonctions lisses  $b_K^J$  telles que :*

$$X^J = \sum_{K \in \mathcal{B}', \|K\|=\|J\|} b_K^J X^K.$$

On a alors l'égalité :

$$\sum_{J \in \mathcal{B}} \left( \sum_{L, \|L\|=\|J\|} a_J^L c_t^L \right) X^J = \sum_{K \in \mathcal{B}'} \left( \sum_{L, \|L\|=\|K\|} \underbrace{\left( \sum_{J \in \mathcal{B}, \|J\|=\|K\|} b_K^J a_J^L \right)}_{=\tilde{a}_K^L} c_t^L \right) X^K.$$

Le processus tangent n'est pas une diffusion mais dans l'esprit de [15], on montre qu'il est la projection d'une diffusion sur un groupe de Lie nilpotent.

En effet, soit  $\mathcal{G}_{(m,r)}$  l'algèbre de Lie formelle libre engendrée par  $(Y_0, \dots, Y_m)$  telle que si  $J$  est un multi-indice d'ordre  $\|J\|$  supérieur strictement à  $r$ , alors  $Y^J = 0$ .  $\mathcal{G}_{(m,r)}$  se décompose en somme directe :  $V_1 \oplus \dots \oplus V_r$  où  $V_i = \text{vect}\{Y^J; \|J\| = i\}$ .

Soit  $\mathcal{A}$  une famille de multi-indices telle que  $(Y^J)_{J \in \mathcal{A}}$  est une base de Hall, c'est-à-dire que  $(Y^J)_{\|J\|=i, J \in \mathcal{A}}$  est une base de  $V_i$ .

Pour chaque multi-indice  $L$  il existe des coefficients constants  $b_J^K$  universels tels que :

$$Y^L = \sum_{J \in \mathcal{A}, \|J\|=\|L\|} b_J^L Y^J. \quad (\star)$$

On note  $\mathcal{N}_{(m,r)}$  le groupe de Lie nilpotent associé à  $\mathcal{G}_{(m,r)}$  et  $e$  l'élément neutre. On considère la diffusion  $\xi_t$  sur  $\mathcal{N}_{(m,r)}$  solution de l'équation stochastique :

$$d\xi_t = \sum_{i=0}^m Y_i(\xi_t) \circ dB_t^i, \quad \xi_0 = e,$$

avec toujours la notation  $B_t^0 = t$ .

D'après [19], on a l'expression :

$$\xi_t = \exp \left( \sum_{k=1}^r \left( \sum_{L, \|L\|=k} c_t^L Y^L \right) \right) (e). \quad (1.12)$$

Ce qui se réécrit avec la base de Hall :

$$\xi_t = \exp \left( \sum_{J \in \mathcal{A}} \left( \sum_{L, \|L\|=\|J\|} b_J^L c_t^L \right) Y^J \right) (e). \quad (1.13)$$

Cette fois, le processus tangent s'écrit :

$$\tilde{u}_t^{(e)} := \left( \sum_{L, \|L\|=\|J\|} b_J^L c_t^L \right)_{J \in \mathcal{A}}. \quad (1.14)$$

L'égalité formelle  $(\star)$  est valable pour les champs de vecteurs  $X$  tant que  $\|L\| \leq r$  et en particulier pour  $L \in \mathcal{B}$ . Ainsi  $(X^L(x))_{L \in \mathcal{A}}$  est une famille génératrice de  $T_x \mathcal{M}$  et  $\text{card}(\mathcal{A}) \geq \text{card}(\mathcal{B})$ .

Posons  $n := \text{card}(\mathcal{A}) - \text{card}(\mathcal{B}) = \dim \mathcal{G}_{(m,r)} - d$  et écrivons  $\mathcal{A} = \{K_i; i = 1, \dots, d+n\}$  et  $\mathcal{B} = \{J_i; i = 1, \dots, d\}$ .

Il existe alors un difféomorphisme  $\psi_e$  de  $\mathbb{R}^{d+n}$  dans  $\mathcal{N}_{(m,r)}$  :

$$\psi_e : w \mapsto \psi_e(w) = \exp \left( \sum_{i=1}^{d+n} w_i Y^{K_i} \right) (e).$$

Ainsi  $\tilde{u}_t^{(e)} = \psi_e^{-1}(\xi_t)$  et, tout comme  $\xi_t$ , c'est une diffusion satisfaisant la condition  $(H)$  de Hörmander. **Nous notons  $\tilde{g}$  la fonction de Green du processus  $\tilde{u}_t^{(e)}$ .**

Notons  $p_x : \mathbb{R}^{d+n} \rightarrow \mathbb{R}^d$  la projection :

$$p_x(w) := \left( \sum_{i, \|K_i\|=\|J_j\|} a_{J_j}^{K_i}(x) w_i \right)_{j=1, \dots, d}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
X^L &= \sum_{i=1}^{d+n} b_{K_i}^L X^{K_i} \\
&= \sum_{i, \|K_i\| \leq \|L\|} b_{K_i}^L X^{K_i} \\
&= \sum_{i, \|K_i\| \leq \|L\|} b_{K_i}^L \left( \sum_{j, \|J_j\| \leq \|K_i\|} a_{J_j}^{K_i} X^{J_j} \right) \\
&= \sum_{j, \|J_j\| \leq \|L\|} \left( \sum_{i, \|J_j\| \leq \|K_i\| \leq \|L\|} b_{K_i}^L a_{J_j}^{K_i} \right) X^{J_j}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$a_{J_j}^L(x) = \sum_{i, \|J_j\| \leq \|K_i\| \leq \|L\|} b_{K_i}^L a_{J_j}^{K_i}(x). \quad (1.15)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
p_x(\tilde{u}_t^{(e)}) &= \left( \sum_{i, \|K_i\| = \|J_j\|} a_{J_j}^{K_i}(x) \left( \sum_{L, \|L\| = \|K_i\|} c_t^L b_{K_i}^L \right) \right)_{j=1 \dots d} \\
&= \left( \sum_{L, \|L\| = \|J_j\|} c_t^L \left( \sum_{i, \|K_i\| = \|J_j\|} a_{J_j}^{K_i}(x) b_{K_i}^L \right) \right)_{j=1, \dots, d} \\
&= u_t^{(x)} \text{ par (1.15)}.
\end{aligned}$$

En écrivant (1.15) avec  $L = J_l$  on voit que :

$$\sum_{i, \|K_i\| = \|J_j\|} a_{J_j}^{K_i}(x) b_{K_i}^{J_l} = \begin{cases} 1 & \text{si } l = j \\ 0 & \text{si } l \neq j \text{ et } \|J_j\| \geq \|J_l\| \end{cases}$$

Les vecteurs  $w_l = (b_{K_i}^{J_l})_{i=1, \dots, d+n}$  sont donc envoyés, par  $p_x$ , sur une famille de vecteurs échelonnée de  $\mathbb{R}^d$ . La projection  $p_x$  est donc surjective et il existe alors  $s_x : \mathbb{R}^{d+n} \rightarrow \mathbb{R}^{d+n}$  et  $q_x : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d+n}$  linéaires telles que  $\forall u \in \mathbb{R}^d$ ,  $p_x(q_x(u)) = u$ , et chaque  $w \in \mathbb{R}^{d+n}$  se décompose en  $s_x(w) + q_x(p_x(w))$ . Il existe aussi un isomorphisme linéaire  $h : \text{Im}(s_x) \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Soit  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue bornée; on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0 \left[ \int_0^{+\infty} \varphi(u_t^{(x)}) dt \right] &= \mathbb{E} \left[ \int_0^{+\infty} \varphi(p_x(\tilde{u}_t^{(e)})) dt \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d+n}} \varphi(p_x(w)) \tilde{g}(0, w) dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d+n}} \varphi(p_x(w)) \tilde{g}(0, s_x(w) + q_x(p_x(w))) dw \\
&= \int_{u \in \mathbb{R}^d} \int_{v \in \mathbb{R}^n} \varphi(u) \tilde{g}(0, h^{-1}(v) + q_x(u)) |\det(h^{-1}) \cdot \det(q_x)| dudv \\
&= \int_{u \in \mathbb{R}^d} \varphi(u) \left( \int_{v \in \mathbb{R}^n} \tilde{g}(0, h^{-1}(v) + q_x(u)) |\det(h^{-1}) \cdot \det(q_x)| dv \right) du.
\end{aligned}$$

On voit donc que  $u_t^x$  admet une fonction de Green continue positive, que l'on note dorénavant  $g^{(x)}(0, u)$ .

Jusqu'à présent nous mimons le travail de [15] en prenant en compte la présence d'une dérive. La différence apparait par le fait que les fonctions de Green, en présence d'un  $X_0$ , ne seront pas strictement positives mais seulement positives. On peut penser au cas purement parabolique de la diffusion  $(B_t, t)$  dont la fonction de Green  $g(x, t)$  (qui n'est d'autre que la densité gaussienne de  $\mathcal{N}(0, t)$  pour  $t > 0$ ) est nulle sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ . Il faut prendre en compte le support du processus tangent défini comme l'ensemble des  $u \in \mathbb{R}^d$  tels que  $g^{(x)}(0, u) > 0$ .

Le processus tangent est invariant par changement d'échelle :  $u_{\varepsilon^2 t}^{(x)}$  a la même loi que  $T_\varepsilon(u_t^{(x)})$ . On en déduit que :

$$\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}), \quad \mathbb{E} \left[ \int_0^{+\infty} f(u_{\varepsilon^2 t}^{(x)}) dt \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^{+\infty} f(T_\varepsilon(u_t^{(x)})) dt \right],$$

On écrit d'une part

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \int_0^{+\infty} f(u_{\varepsilon^2 t}^{(x)}) dt \right] &= \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \left[ \int_0^{+\infty} f(u_t^{(x)}) dt \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \frac{g^{(x)}(0, u)}{\varepsilon^2} du ;
\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \int_0^{+\infty} f(T_\varepsilon(u_t^{(x)})) dt \right] &= \int_{\mathbb{R}^d} f \circ T_\varepsilon(u) g^{(x)}(0, u) du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(v) g^{(x)}(0, T_{1/\varepsilon}(v)) \frac{dv}{\varepsilon^Q}
\end{aligned}$$

**Nota Bene :** ( $v = T_\varepsilon(u) \Rightarrow dv = \varepsilon^Q du$ ) puisque par définition  $Q = \sum_{i=1}^d i \times \text{Card}\{k; \|J_k\| = i\}$ . (cf notations en 1.4.1)

On a donc l'égalité suivante concernant  $g^{(x)}(0, u)$  :

$$g^{(x)}(0, T_{1/\varepsilon}(u)) = \varepsilon^{Q-2} g^{(x)}(0, u). \quad (1.16)$$

Donc en particulier, en prenant  $\varepsilon = 1/|y|_x$  :

$$g^{(x)}(0, \varphi_x^{-1}(y)) = \frac{1}{|y|_x^{Q-2}} g^{(x)}(0, \theta_x(y)), \quad (1.17)$$

où  $\theta_x(y) := \mathbf{T}_{1/|y|_x}(\varphi_x^{-1}(y))$  est une variable angulaire qui vit dans la sphère unité  $S_x$  de  $T_x\mathcal{M}$  muni de la norme homogène  $|\cdot|_d$ .

### 1.4.3 Diffusions rééchelonnées

Dans cette partie on introduit les diffusions rééchelonnées et on exprime leurs fonctions de Green en fonction de celle de  $x_t$ .

Pour pouvoir zoomer sur  $x_t$  au voisinage de  $x$  on introduit la diffusion rééchelonnée :  $v_t^{(x,\varepsilon)} := T_{1/\varepsilon} \circ \varphi_x^{-1}(x_t^\varepsilon)$ , où  $x_t^\varepsilon$  est la diffusion solution de

$$dx_t^\varepsilon = \sum_{i=1}^m \varepsilon X_i^2(x_t^\varepsilon) \circ dB_t^i + \varepsilon^2 X_0(x_t^\varepsilon) dt.$$

Ce processus est identique en loi à  $x_{\varepsilon^2 t}$ . La diffusion rééchelonnée  $v^{(x,\varepsilon)}$  est définie jusqu'au temps  $\tau_\varepsilon$  de sortie du voisinage ouvert de 0 :  $\tilde{U}^\varepsilon := T_{1/\varepsilon} \circ \varphi_x^{-1}(U)$ . En loi,  $\tau_\varepsilon = \tau/\varepsilon^2$ .

Notons  $G^{(\varepsilon,x)}$  la fonction de Green, définie sur  $\tilde{U}^\varepsilon \times \tilde{U}^\varepsilon$  privée de la diagonale, de cette diffusion changée d'échelle. Pour  $u \in \tilde{U}^\varepsilon$  et  $\psi \in C_c^0(\tilde{U}^\varepsilon \setminus \{u\})$  :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{U}^\varepsilon} \psi(v) G^{(x,\varepsilon)}(u, v) dv &= \mathbb{E}_u \left[ \int_0^{\tau_\varepsilon} \psi(v_t^{(x,\varepsilon)}) dt \right] \\ &= \mathbb{E}_{\varphi_x \circ T_\varepsilon(u)} \left[ \int_0^{\tau_\varepsilon} \psi(T_{1/\varepsilon} \circ \varphi_x^{-1}(x_{\varepsilon^2 t})) dt \right] \\ &= \mathbb{E}_{\varphi_x \circ T_\varepsilon(u)} \left[ \varepsilon^{-2} \int_0^\tau \psi(T_{1/\varepsilon} \circ \varphi_x^{-1}(x_t)) dt \right] \\ &= \varepsilon^{-2} \int_U \psi(T_{1/\varepsilon} \circ \varphi_x^{-1}(y)) G(\varphi_x \circ T_\varepsilon(u), y) dy \\ &= \varepsilon^{Q-2} \int_{\tilde{U}^\varepsilon} \psi(v) G(\varphi_x \circ T_\varepsilon(u), \varphi_x \circ T_\varepsilon(v)) J_x(T_\varepsilon(v)) dv. \end{aligned}$$

Où  $J_x := |\text{Jac}(\varphi_x)|$ .

On a donc :

$$G^{(x,\varepsilon)}(u, v) = \varepsilon^{Q-2} J_x(T_\varepsilon(v)) G(\varphi_x \circ T_\varepsilon(u), \varphi_x \circ T_\varepsilon(v)). \quad (1.18)$$

En particulier, pour  $y \in U$ ,

$$G(x, y) = \frac{1}{J_x(\varphi_x^{-1}(y)) \varepsilon^{Q-2}} G^{(x,\varepsilon)}(0, T_{1/\varepsilon} \circ \varphi_x^{-1}(y)). \quad (1.19)$$

## 1.5 Preuve du théorème 5

On énonce précisément le théorème 5 et montre comment sa preuve se ramène à celle de la proposition 2 qui elle même se déduit de trois propositions que l'on démontre ensuite. Cette démonstration est semblable à celle que l'on trouve dans [15] à ceci près que l'on travaille ici avec une dérive ( $X_0$ ) même si celle-ci est un peu cachée dans le formalisme. On apporte néanmoins quelques simplifications (une convergence uniforme est déduite d'une convergence faible en utilisant simplement le corollaire 1) et quelques précisions (concernant des interversions de limites non détaillées dans [15]).

Avec les notations introduites précédemment nous pouvons maintenant préciser l'énoncé du théorème 5 :

**Théorème 5.**

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|y|_x < \varepsilon} \left| G(x, y) |y|_x^{Q(x)-2} - \frac{1}{J_x(0)} g^{(x)}(0, \theta_x(y)) \right| = 0.$$

Afin de montrer ce théorème on va montrer le résultat intermédiaire et fondamental suivant :

**Proposition 2.** *Pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  nous avons*

$$\sup_{u \in K} \left| G^{(x,\varepsilon)}(0, u) - g^{(x)}(0, u) \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

*Preuve du théorème 5 en admettant la proposition 2.* Soit  $\eta > 0$ .

Puisque  $y \mapsto J_x(\varphi_x^{-1}(y))$  est continue en  $x$  et que  $J_x(\varphi_x^{-1}(x)) = J_x(0) \neq 0$  :

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \quad \sup_{y, |y|_x \leq \varepsilon_0} \left| \frac{1}{J_x(\varphi_x^{-1}(y))} - \frac{1}{J_x(0)} \right| \leq \eta.$$

Soit

$$K = S_x = \left\{ u \in \mathbb{R}^d; \left[ \sum_{k=1}^r \left( \sum_{i, \|J_i\|=k} u_j^2 \right)^{\frac{Q}{2k}} \right]^{\frac{1}{Q}} = 1 \right\},$$

la sphère unité pour la norme homogène.

Par la proposition 2 :

$$\exists \varepsilon_1 > 0, \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_1 \quad \sup_{u \in K} |G^{(x, \varepsilon)}(0, u) - g^{(x)}(0, u)| < \eta.$$

Soit  $\varepsilon_2 < \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ , en utilisant (1.19) :

$$\begin{aligned} & \sup_{|y|_x \leq \varepsilon_2} \left| G(x, y) |y|_x^{Q(x)-2} - \frac{1}{J_x(0)} g^{(x)}(0, \theta_x(y)) \right| \\ & \leq \sup_{|y|_x \leq \varepsilon_2} \left| \frac{1}{J_x(\varphi_x^{-1}(y))} G^{(x, |y|_x)}(0, \theta_x(y)) - \frac{1}{J_x(0)} g^{(x)}(0, \theta_x(y)) \right| \\ & \leq \sup_{|y|_x \leq \varepsilon_2} \left| \left( \frac{1}{J_x(\varphi_x^{-1}(y))} - \frac{1}{J_x(0)} \right) G^{(x, |y|_x)}(0, \theta_x(y)) \right| + \\ & \quad \frac{1}{J_x(0)} \sup_{|y|_x \leq \varepsilon_2} |G^{(x, |y|_x)}(0, \theta_x(y)) - g^{(x)}(0, \theta_x(y))| \\ & \leq \eta \sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_2, u \in K} |G^{(x, \varepsilon)}(0, u)| + \frac{1}{J_x(0)} \sup_{\varepsilon \leq \varepsilon_2, u \in K} |G^{(x, \varepsilon)}(0, u) - g^{(x)}(0, u)| \\ & \leq \eta(\eta + \sup_{u \in K} |g^{(x)}(0, u)|) + \frac{1}{J_x(0)} \eta. \end{aligned}$$

Cela prouve bien le théorème 5. □

**Il reste donc à montrer la proposition 2.** On adapte la démonstration de [15].

La fonction de Green  $G^{(x, \varepsilon)}$  est harmonique sur  $K$  pour l'opérateur hypoelliptique  $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon(g) := \mathcal{L}(g \circ T_{1/\varepsilon} \circ \varphi_x^{-1})$ . Le corollaire 1 indique que pour montrer la proposition 2, **il suffit de montrer la convergence au sens des distributions.**

Soit donc  $f$  une fonction  $C^\infty$  à support compact  $K$  dans  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ; il suffit de montrer la convergence vers 0 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  de :

$$\left| \int f(u) G^{(x, \varepsilon)}(0, u) du - \int f(u) g^{(x)}(0, u) du \right| = \left| \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\varepsilon} f(v_t^{(x, \varepsilon)}) dt - \int_0^{+\infty} f(u_t^{(x)}) dt \right] \right|.$$



Pour cela on écrit, pour un  $T > 0$  fixé :

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\varepsilon} f(v_t^{(x,\varepsilon)}) dt - \int_0^{+\infty} f(u_t^{(x)}) dt \right] \right| \\
&= \left| \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{T \leq \tau_\varepsilon} \int_0^T \left( f(v_t^{(x,\varepsilon)}) - f(u_t^{(x)}) \right) dt + \mathbf{1}_{T \leq \tau_\varepsilon} \int_T^{\tau_\varepsilon} f(v_t^{(x,\varepsilon)}) dt - \int_T^{+\infty} f(u_t^{(x)}) dt + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \mathbf{1}_{T > \tau_\varepsilon} \int_0^{\tau_\varepsilon} f(v_t^{(x,\varepsilon)}) dt - \mathbf{1}_{T > \tau_\varepsilon} \int_0^T f(u_t^{(x)}) dt \right] \right| \\
&\leq \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{T \leq \tau_\varepsilon} \int_0^T |f(v_t^{(x,\varepsilon)}) - f(u_t^{(x)})| dt \right] + \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{T \leq \tau_\varepsilon} \int_T^{\tau_\varepsilon} |f(v_t^{(x,\varepsilon)})| dt \right] + \\
&\mathbb{E} \left[ \int_T^{+\infty} |f(u_t^{(x)})| dt \right] + 2\|f\|_\infty T \mathbb{P}(T \geq \tau_\varepsilon).
\end{aligned}$$

On va montrer les propositions suivantes :

**Proposition 3.**  $T$  étant un réel  $> 0$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{T \leq \tau_\varepsilon} \int_0^T |f(v_t^{(x,\varepsilon)}) - f(u_t^{(x)})| dt \right] = 0.$$

**Proposition 4.**

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \int_T^{+\infty} |f(u_t^{(x)})| dt \right] = 0.$$

**Proposition 5.**

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{T \leq \tau_\varepsilon} \int_T^{\tau_\varepsilon} |f(v_t^{(x,\varepsilon)})| dt \right] = 0.$$

Une fois ces propositions démontrées, et en remarquant qu'à  $T$  fixé,

$$\mathbb{P}(T \geq \tau_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

la convergence en 0 de

$$\left| \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\varepsilon} f(v_t^{(x,\varepsilon)}) dt - \int_0^{+\infty} f(u_t^{(x)}) dt \right] \right|$$

est alors immédiate.

### 1.5.1 Preuve de la proposition 3

Cette proposition fait le lien entre les diffusions rééchelonnées et le processus tangent : c'est un développement de Taylor stochastique qui fait fonctionner la preuve.

On commence par démontrer le lemme suivant, qui repose sur le développement de Taylor du flot stochastique obtenu dans [19] :

**Lemme 1.** *Si  $R^{(x)}(\varepsilon, t)$  est défini par  $v_t^{(x,\varepsilon)} = u_t^{(x)} + \varepsilon R^{(x)}(\varepsilon, t)$  alors il existe  $\alpha > 0$  et  $c > 0$  tels que pour tout  $R > c$  :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} \|R^{(x)}(\varepsilon, s)\| > R, T < \tau_\varepsilon \right) \leq \exp \left( -\frac{R^\alpha}{cT} \right).$$

*Démonstration du lemme 1.* On veut un développement à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  de  $v_t^{(x,\varepsilon)} := T_{1/\varepsilon} \circ \varphi_x^{-1}(x_{\varepsilon^2 t})$  ; pour cela on va chercher un développement asymptotique de  $x_{\varepsilon^2 t}$  à l'ordre  $r + 1$ .

On peut choisir l'ouvert  $U$  assez petit pour pouvoir se placer dans une carte de  $\mathcal{M}$ . On note toujours  $X_i$  les champs de vecteurs et  $x_t$  la diffusion étudiée, bien que ces symboles désignent maintenant des vecteurs de  $\mathbb{R}^d$ . D'après le théorème 4.1 de [19] on a le développement de Taylor :

$$\begin{aligned} x_{\varepsilon^2 t} &= \exp \left( \sum_{k=1}^r \sum_{L, \|L\|=k} \varepsilon^k c_t^L X^L \right) + \varepsilon^{r+1} \tilde{R}(\varepsilon, t) \\ &= \exp \left( \sum_{k=1}^r \sum_{L, \|L\|=k} \varepsilon^k c_t^L \sum_{i=1}^d a_{J_i}^L X^{J_i} \right) + \varepsilon^{r+1} \tilde{R}(\varepsilon, t) \\ &= \exp \left( \sum_{i=1}^d \left( \sum_{L, \|J_i\| \leq \|L\| \leq r} \varepsilon^{\|L\|} a_{J_i}^L c_t^L \right) X^{J_i} \right) + \varepsilon^{r+1} \tilde{R}(\varepsilon, t). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Le reste  $\tilde{R}$  est borné en probabilité. Plus précisément, il existe  $\alpha > 0, c > 0$  tels que :

$$\forall R > c, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} \|\tilde{R}(\varepsilon, s)\| \geq R \right] \leq \exp \left( -\frac{R^\alpha}{cT} \right). \quad (1.21)$$

Supposons un instant que les coefficients  $(a_J^L)$  sont constantes (ce qui est le cas si les  $X_i$  sont des champs de vecteurs invariants sur un groupe de Lie). En composant

---

2. On rappelle que puisque  $(X^J)_{J \in \mathcal{B}}$  est une base triangulaire,  $a_J^L = 0$  dès que  $\|L\| < \|J\|$ .  
3. On note  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ .

(1.20) avec  $\varphi_x^{-1}$ , il vient :

$$\varphi_x^{-1}(x_{\varepsilon^2 t}) = \left( \sum_{L, \|J_i\| \leq \|L\| \leq r} \varepsilon^{\|L\|} a_{J_i}^L c_t^L \right)_{i=1, \dots, d} + \varepsilon^{r+1} \widehat{R}(\varepsilon, t) \quad (1.22)$$

avec  $\|\widehat{R}(\varepsilon, t)\| \leq \|D\varphi^{-1}\|_{\infty} \|\widetilde{R}(\varepsilon, t)\|$ , et  $\widehat{R}(\varepsilon, t)$  est borné en probabilité comme  $\widetilde{R}(\varepsilon, t)$ .

Puis en composant (1.22) avec la dilatation  $T_{1/\varepsilon}$ , il vient

$$\begin{aligned} v_t^{(x, \varepsilon)} &= T_{1/\varepsilon} \circ \varphi_x^{-1}(x_{\varepsilon^2 t}) \\ &= \left( \sum_{L, r \geq \|L\| \geq \|J_i\|} \varepsilon^{\|L\| - \|J_i\|} a_{J_i}^L c_t^L \right)_{i=1, \dots, d} + \varepsilon \bar{R}(\varepsilon, t)^4 \\ &= u_t^{(x)} + \varepsilon \left( \left( \sum_{L, r \geq \|L\| > \|J_i\|} \varepsilon^{\|L\| - \|J_i\| - 1} a_{J_i}^L c_t^L \right)_{i=1, \dots, d} + \bar{R}(\varepsilon, t) \right). \end{aligned}$$

D'après les propriétés  $P_1$  et  $P_2$  p238 de [19], il existe  $\alpha', c' > 0$  tels que, pour  $\varepsilon \leq 1$  :

$$\forall R > c', \quad \mathbb{P} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \left( \sum_{L, r \geq \|L\| > \|J_i\|} \varepsilon^{\|L\| - \|J_i\| - 1} a_{J_i}^L c_t^L \right)_{i=1, \dots, d} \right\| > R \right] \leq \exp \left( -\frac{R^{\alpha'}}{c'T} \right). \quad (1.23)$$

Avec (1.21) et (1.23) et le fait qu'il existe  $C > 0$  tel que  $(\forall t \leq T) \|\bar{R}(\varepsilon, t)\| \leq C \|\widetilde{R}(\varepsilon, t)\|$ , le lemme 1 est démontré.

Dans le cas où les  $(a_j^L)$  ne sont pas constant le résultat demande plus de travail mais reste vrai et repose essentiellement sur l'hypothèse de *géométrie des crochets constante* :  $(X^J(y))_{J \in \mathcal{B}}$  forme une base de  $T_y U$  pour  $y$  dans  $U$ . La preuve est détaillée dans [70].  $\square$

*Démonstration de la proposition 3.* Soit  $\eta > 0$ ; le lemme 1 indique qu'il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $R > 0$  tels que pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$  :

$$\mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} \|R^{(x)}(\varepsilon, s)\| > R, T < \tau_{\varepsilon} \right) \leq \frac{\eta}{2T \|f\|_{\infty}}.$$

---

4. Pour  $\varepsilon \leq 1$ ,  $\|\bar{R}(\varepsilon, t)\| \leq \|\widehat{R}(\varepsilon, t)\|$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{T \leq \tau_\varepsilon} \int_0^T |f(v_t^{(x,\varepsilon)}) - f(u_t^{(x)})| dt \right] &= \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} \|R^{(x)}(\varepsilon, s)\| > R, T \leq \tau_\varepsilon \right\}} \int_0^T |f(v_t^{(x,\varepsilon)}) - f(u_t^{(x)})| dt \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} \|R^{(x)}(\varepsilon, s)\| \leq R, T \leq \tau_\varepsilon \right\}} \int_0^T |f(v_t^{(x,\varepsilon)}) - f(u_t^{(x)})| dt \right] \\ &\leq \eta + \varepsilon T R \|Df\|_\infty. \end{aligned}$$

Et donc, pour tout  $\eta > 0$  :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{T \leq \tau_\varepsilon} \int_0^T |f(v_t^{(x,\varepsilon)}) - f(u_t^{(x)})| dt \right] \leq \eta.$$

□

## 1.5.2 Preuve de la proposition 4

Cette proposition ne concerne que le processus tangent ; on reprend notamment les notations de la section 1.4.2 dans laquelle il est exprimé comme projection d'une diffusion d'un groupe de Lie.

Pour montrer la proposition 4, il suffit de montrer que :

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{B(0,\rho)}(u_t^{(x)}) dt \right] < \infty, \quad (1.24)$$

où  $B(0, \rho)$  est la boule de rayon  $\rho$  pour la norme homogène  $|u|_d = \left[ \sum_{k=1}^r \left( \sum_{i, \|J_i\|=k} u_i^2 \right)^{\frac{Q}{2k}} \right]^{\frac{1}{Q}}$ .

Rappelons que  $u_t^{(x)}$  est la projection d'une diffusion  $\tilde{u}_t^{(e)}$  qui est le processus tangent de la diffusion  $\xi_t$  sur le groupe de Lie nilpotent  $\mathcal{N}_{(m,r)}$  (cf (1.13) et (1.14)).

On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{B(0,\rho)}(u_t^{(x)}) dt \right] &= \int_{B(0,\rho)} g^{(x)}(0, u) du \\ &= \int_{p_x^{-1}(B(0,\rho)) \subset \mathbb{R}^{d+n}} \tilde{g}(0, \tilde{u}) d\tilde{u}. \end{aligned}$$

On note  $\tilde{Q} := \sum_{i=1}^m i \dim V_i$ , et  $\tilde{T}_\varepsilon(\tilde{u}) = (\varepsilon^{\|K_i\|} \tilde{u}_i)_{i=1, \dots, d+n}$ . On a par propriété de rééchelonnement des processus tangents (comme en (1.16)) :

$$\tilde{g}\left(0, \tilde{T}_\varepsilon(\tilde{u})\right) = \varepsilon^{2-\tilde{Q}} \tilde{g}(0, \tilde{u}).$$

Ainsi en prenant  $1/\varepsilon = |\tilde{u}|_{d+n} := \left[ \sum_{k=1}^r \left( \sum_{i, \|K_i\|=k} \tilde{u}_i^2 \right)^{\frac{\tilde{Q}}{2k}} \right]^{\frac{1}{\tilde{Q}}}$  on obtient la majoration a priori :

$$|\tilde{g}(0, \tilde{u})| \leq \frac{c}{|\tilde{u}|_{d+n}^{\tilde{Q}-2}}.$$

Il suffit de montrer que :

$$\int_{p_x^{-1}(B(0, \rho))} \frac{1}{|\tilde{u}|_{d+n}^{\tilde{Q}-2}} d\tilde{u} < \infty.$$

Ce résultat technique est démontré dans l'appendice de [15] avec les hypothèses sur les dimensions suivantes :

1.  $r \geq 2$
2.  $\dim C_i - \dim C_{i-1} (= \text{Card}\{k; \|J_k\| = i\}) \geq 1 \forall i = 2, \dots, r$
3.  $\dim C_1 (= \text{Card}\{k; \|J_k\| = 1\}) \geq 2$ .

Cela impose notamment que  $Q \geq 4$ .

**Remarque 3.** *Le cas elliptique où  $r = 1$  ne semble donc pas pris en compte. On sait néanmoins que le théorème 5 reste vrai dans ce cas lorsque  $d \geq 3$  (dans le cas elliptique  $Q=d$ ).*

### 1.5.3 Preuve de la proposition 5

Commençons par écrire, grâce à la propriété de Markov :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \left[ \mathbf{1}_{T < \tau_\varepsilon} \int_T^{\tau_\varepsilon} |f(v_t^{(x, \varepsilon)})| dt \right] &= \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{T < \tau_\varepsilon} \mathbb{E}_{v_T^{(x, \varepsilon)}} \left[ \int_0^{\tau_\varepsilon} |f(v_t^{(x, \varepsilon)})| dt \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_0 \left[ \mathbf{1}_{T < \tau_\varepsilon} \int_{T_{1/\varepsilon} \circ \varphi_x^{-1}(U)} G^{(x, \varepsilon)}(v_T^{(x, \varepsilon)}, v) |f(v)| dv \right] \\ &= \int_{T_{1/\varepsilon} \circ \varphi_x^{-1}(U)} d\mu_T^{(x, \varepsilon)}(u) \int_{T_{1/\varepsilon} \circ \varphi_x^{-1}(U)} G^{(x, \varepsilon)}(u, v) |f(v)| dv. \end{aligned}$$

Où  $\mu_T^{(x, \varepsilon)}$  est la mesure qui a la densité  $\mathbf{1}_{T < \tau_\varepsilon}$  relativement à la loi de  $v_T^{(x, \varepsilon)}$ .

Pour  $u, v \in T_{1/\varepsilon} \circ \varphi_x^{-1}(U)$ , on note  $u_\varepsilon^x := \varphi_x \circ T_\varepsilon(u)$ .<sup>5</sup>

L'égalité (1.18) s'écrit donc :

$$G^{(x, \varepsilon)}(u, v) = \varepsilon^{Q-2} J_x(T_\varepsilon(v)) G(u_\varepsilon^x, v_\varepsilon^x),$$

---

5. Ne pas confondre avec  $u_\varepsilon^{(x)}$  qui désigne le processus tangent au temps  $\varepsilon$ .

et en utilisant la proposition 10 de l'appendice, il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\int_{T_{1/\varepsilon} \circ \varphi_x^{-1}(U)} G^{(x,\varepsilon)}(u, v) |f(v)| dv \leq \int_{B(0,\rho)} \frac{C\varepsilon^{Q-2}}{|v_\varepsilon^x|_{u_\varepsilon^x}^{Q-2}} dv,$$

où  $\rho$  est tel que le support de  $f$  soit contenu dans la boule  $B(0, \rho)$ .

On montre le :

**Lemme 2.** *Soit  $R > 0$ ; il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $c > 0$  tels que pour tous  $\varepsilon < \varepsilon_0$  et  $u$  de norme  $\geq R$  dans  $\mathbb{R}^d$ , on ait :*

$$\int_{B(0,\rho)} \frac{\varepsilon^{Q-2}}{|v_\varepsilon^x|_{u_\varepsilon^x}^{Q-2}} dv \leq c.$$

De plus,

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \int_{B(0,\rho)} \frac{\varepsilon^{Q-2}}{|v_\varepsilon^x|_{u_\varepsilon^x}^{Q-2}} dv = 0,$$

uniformément en  $\varepsilon$ .

*Démonstration.* Pour  $u = 0$ , c'est-à-dire  $u_\varepsilon^x = x$ ,  $\frac{\varepsilon^{Q-2}}{|v_\varepsilon^x|_{u_\varepsilon^x}^{Q-2}} = \frac{1}{|\varphi_x(v)|_x^{Q-2}} = \frac{1}{|v|_d^{Q-2}}$ .

Le lemme (A-1) de l'appendice de [15] indique que  $\int_{B(0,\rho)} \frac{dv}{|v|_d^{Q-2}}$  est finie et majorée par une constante ne dépendant que de  $\rho$ .

Puisque la famille de difféomorphismes  $\varphi_y^{-1}$  varie continuellement avec  $y \in U$ , il existe un voisinage  $U_x$  de  $x$ , une constante  $C > 0$  et un  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $y \in U_x$  et  $\varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $B(0, \varepsilon\rho) \subset \varphi_x^{-1}(U) \cap \varphi_y^{-1}(U)$  et pour chaque  $w \in B(0, \varepsilon\rho)$ ,  $|\varphi_y^{-1} \circ \varphi_x(w)|_d \geq C|w|_d$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \sup_{y \in U_x} \int_{B(0,\rho)} \frac{\varepsilon^{Q-2}}{|v_\varepsilon^x|_y^{Q-2}} dv &= \sup_{y \in U_x} \int_{B(0,\rho)} \frac{\varepsilon^{Q-2}}{|\varphi_y^{-1}(v_\varepsilon^x)|_d^{Q-2}} dv \\ &= \sup_{y \in U_x} \int_{B(0,\rho)} \frac{\varepsilon^{Q-2}}{|\varphi_y^{-1} \circ \varphi_x \circ T_\varepsilon(v)|_d^{Q-2}} dv \\ &\leq \tilde{C} \int_{B(0,\rho)} \frac{\varepsilon^{Q-2}}{|T_\varepsilon(v)|_d^{Q-2}} dv \\ &\leq \tilde{C} \int_{B(0,\rho)} \frac{dv}{|v|_d^{Q-2}}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Soit maintenant  $\varepsilon_1 > 0$  tel que  $\forall \varepsilon < \varepsilon_1$  et  $\forall u \in \mathbb{R}^d$ ,  $\|u\| \leq R$ , on ait  $u_\varepsilon^x \in U_x$ . Selon (1.25), il existe une constante  $c$  tel que pour  $\varepsilon < \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$  et pour tout

$u \in \mathbb{R}^d$ ,  $\|u\| \leq R$  :

$$\int_{B(0,\rho)} \frac{\varepsilon^{Q-2}}{|v_\varepsilon^x|_{u_\varepsilon^x}^{Q-2}} dv \leq c.$$

C'est le premier point du lemme.

Pour le deuxième point, on utilise l'inégalité triangulaire (1.42) 49 et la comparaison avec une norme euclidienne (1.43) 49 démontrées dans l'appendice. Pour  $\|u\|$  suffisamment grand pour que  $\frac{1}{c_0}|u_\varepsilon^x|_x - |v_\varepsilon^x|_x > 0$  :

$$\begin{aligned} \int_{B(0,\rho)} \frac{\varepsilon^{Q-2}}{|v_\varepsilon^x|_{u_\varepsilon^x}^{Q-2}} dv &\leq \int_{B(0,\rho)} \frac{\varepsilon^{Q-2}}{\left(\frac{1}{c_0}|u_\varepsilon^x|_x - |v_\varepsilon^x|_x\right)^{Q-2}} dv \\ &\leq \int_{B(0,\rho)} \frac{1}{\left(\frac{1}{c_0}|\varphi^{-1}(u)|_x - |\varphi^{-1}(v)|_x\right)^{Q-2}} dv \\ &\leq \int_{B(0,\rho)} \frac{1}{\left(\frac{c'}{c_0}\|u\| - \rho\right)^{Q-2}} dv \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité prouve la convergence uniforme en  $\varepsilon$  qu'il fallait démontrer.  $\square$

Retournons à la preuve de la proposition 5.

Grâce au lemme précédent on a l'inégalité :

$$\mathbb{E}_0 \left[ \mathbf{1}_{T < \tau_\varepsilon} \int_T^{\tau_\varepsilon} |f(v_t^{(x,\varepsilon)})| dt \right] \leq c\mu_T^{(x,\varepsilon)}(B(0, R)) + \underbrace{\sup_{u, \|u\| \geq R} \int_{B(0,\rho)} \frac{C_\varepsilon^{Q-2}}{|v_\varepsilon^x|_{u_\varepsilon^x}^{Q-2}} dv}_{\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0}$$

Pour finir de démontrer la proposition 5, il suffit de démontrer le lemme :

**Lemme 3.** *Pour tout  $R > 0$ ,*

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_T^{(x,\varepsilon)}(B(0, R)) = 0.$$

*Démonstration.* Rappelons que par définition,

$$\mu_T^{(x,\varepsilon)}(B(0, R)) = \mathbb{E}_0 \left[ \mathbf{1}_{T < \tau_\varepsilon} \mathbf{1}_{B(0,R)}(v_T^{(x,\varepsilon)}) \right].$$

Soit  $\chi$  une fonction lisse valant 1 sur  $B(0, R)$  et dont le support est dans  $B(0, R+1)$  :

$$\mu_T^{(x,\varepsilon)}(B(0, R)) \leq \mathbb{E}_0 \left[ \mathbf{1}_{T < \tau_\varepsilon} \chi(v_T^{(x,\varepsilon)}) \right].$$

En utilisant le lemme 1, il est facile de montrer (comme on l'a fait pour montrer la proposition 3) que :

$$\mathbb{E}_0 \left[ \mathbf{1}_{T < \tau_\varepsilon} \chi(v_T^{(x,\varepsilon)}) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}_0 \left[ \chi(u_T^{(x)}) \right].$$

Maintenant,  $\mathbb{E}_0 \left[ \chi(u_T^{(x)}) \right] \leq \mathbb{E}_0 \left[ \mathbf{1}_{B(0,R+1)}(u_T^{(x)}) \right]$  et  $t \mapsto \mathbb{E}_0 \left[ \mathbf{1}_{B(0,R+1)}(u_t^{(x)}) \right]$  est une fonction bornée positive et qui par (1.24) est intégrable, de sorte que

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_0 \left[ \mathbf{1}_{B(0,R+1)}(u_T^{(x)}) \right] = 0.$$

□

## 1.6 Critère d'effilement local de Wiener, capacités de petits compacts et test de Poincaré pour la diffusion relativiste dans le groupe de Poincaré

Dans cette partie, on va étudier un exemple de diffusion avec dérive particulier, la diffusion relativiste de Dudley dans un groupe d'isométries affine Lorentziennes. Le théorème 5 démontré précédemment et la connaissance du support de cette diffusion seront suffisants pour établir un critère d'effilement local de Wiener puis on pourra estimer la capacité de petits compacts et en déduire un test de Poincaré.

### 1.6.1 Cadre géométrique

On note  $\mathbb{R}^{1,d}$  l'espace  $\mathbb{R}^{d+1}$  muni de la forme quadratique de Lorentz :

$$q(\xi) = (\xi^0)^2 - \sum_{i=1}^d (\xi^i)^2.$$

$SO(1,d)$  est le sous-groupe de  $SL(\mathbb{R}^{d+1})$  préservant  $q$ , et on note  $SO_0(1,d)$  la composante connexe de l'identité dans  $SO(1,d)$ . Le groupe de Poincaré est par définition le groupe connexe affine  $\mathcal{G} := SO_0(1,d) \times \mathbb{R}^{1,d}$  muni de la loi :

$$(g, \xi)(g', \xi') = (gg', \xi + g\xi').$$

$\mathcal{G}$  est vu comme le groupe de matrices de taille  $d+2$  suivant :

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} g & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; g \in SO_0(1,d), \xi \in \mathbb{R}^{(1,d)} \right\}.$$



$SO(1, d)$  est un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est :

$$so(1, d) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & {}^t(u_i) \\ (u_i) & (u_{ij}) \end{pmatrix}; (u_i) \in \mathbb{R}^d, (u_{ij}) \in \mathbb{R}^{d \times d}; (u_{ji}) = -(u_{ij}) \right\}.$$

Ainsi,  $SO_0(1, d) = \exp(so(1, d))$  et  $\mathcal{G} = \exp(\mathfrak{g})$  où :

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & {}^t(u_i) & u_0 \\ (u_i) & (u_{ij}) & (u_{i0}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; (u_i)_{i=1, \dots, d} \in \mathbb{R}^d, (u_{ji}) = -(u_{ij}), (u_0, (u_{i0})_{i=1, \dots, d}) \in \mathbb{R}^{1, d} \right\}.$$

## 1.6.2 La diffusion relativiste

On note pour  $i = 1, \dots, d$ ,  $X_i$  le champ de vecteurs invariant à gauche sur  $\mathcal{G}$  défini par :

$$X_i(g, \xi) = (g, \xi) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & {}^t e_i & 0 \\ e_i & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{:= E_i \in \mathfrak{g}}.$$

$X_0$  est le champ de vecteurs invariant à gauche défini par :

$$X_0(g, \xi) = (g, \xi) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{:= E_0 \in \mathfrak{g}}.$$

La diffusion relativiste de Dudley dans  $\mathcal{G}$  est par définition la diffusion solution de l'EDS :

$$d(g_s, \xi_s) = \sum_{i=1}^d X_i(g_s, \xi_s) \circ dB_s^i + X_0(g_s, \xi_s) ds.$$

Son opérateur associé est :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d X_i^2 + X_0.$$

Un calcul simple montre que, pour  $i, j = 1, \dots, d$  :

$$[X_i, X_j](g, \xi) = (g, \xi) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{:=E_{ij} \in \mathfrak{g}}$$

$$[X_i, X_0](g, \xi) = (g, \xi) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & e_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{:=E_{i0} \in \mathfrak{g}}$$

On a donc en chaque point  $(g, \xi)$  de  $\mathcal{G}$  :

$$\text{vect}\{X_0, X_i, [X_i, X_j], [X_i, X_0], i, j = 1, \dots, d\} = T_{(g, \xi)}\mathcal{G},$$

et le théorème d'Hörmander affirme que  $\mathcal{L}$  est hypoelliptique.

On a même :

$$[X_i, [X_i, X_0]] = X_0, \quad (1.26)$$

de sorte que,

$$\text{vect}\{X_i, [X_i, X_j], [X_i, X_0], [X_i, [X_i, X_0]] i, j = 1, \dots, d\} = T_{(g, \xi)}\mathcal{G},$$

et le théorème d'Hörmander affirme que la loi de la diffusion à l'instant  $t$  admet une densité par rapport à la mesure de Haar sur  $\mathcal{G}$ .

Avec les notations de la section 1.4 :

$$C_1(g, \xi) = \left\{ (g, \xi) \begin{pmatrix} 0 & {}^t(u_i) & 0 \\ (u_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; (u_i) \in \mathbb{R}^d \right\} \quad (1.27)$$

$$C_2(g, \xi) = \left\{ (g, \xi) \begin{pmatrix} 0 & {}^t(u_i) & u_0 \\ (u_i) & (u_{ij}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; u_0 \in \mathbb{R}, (u_i) \in \mathbb{R}^d, u_{ji} = -u_{ji} \right\} \quad (1.28)$$

$$C_3(g, \xi) = T_{(g, \xi)}\mathcal{G}. \quad (1.29)$$

Ainsi,  $r(g, \xi) = 3$ .

Une base triangulaire est  $(X_i, X_0, [X_i, X_j], [X_i, X_0])_{i < j = 1, \dots, d}$ . La dimension graduée  $Q$  vaut :

$$Q(g, \xi) = d + 2(d(d-1)/2 + 1) + 3d = d^2 + 3d + 2.$$

Les dilatations sur  $\mathfrak{g}$  sont données par :

$$T_\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & {}^t(u_i) & u_0 \\ (u_i) & (u_{ij}) & (u_{i0}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon {}^t(u_i) & \varepsilon^2 u_0 \\ \varepsilon (u_i) & \varepsilon^2 (u_{ij}) & \varepsilon^3 (u_{i0}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Et la norme homogène associée est (en l'unité  $\mathbf{e} = (id, 0)$ ) :

$$\left| \exp \left( \begin{pmatrix} 0 & {}^t(u_i) & u_0 \\ (u_i) & (u_{ij}) & (u_{i0}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right|_{\mathbf{e}} = \left( \left( \sum_{i=1}^d u_i^2 \right)^{Q/2} + (u_0^2 + \sum_{1=i < j=d} u_{ij}^2)^{Q/4} + \left( \sum_{i=1}^d u_{i0}^2 \right)^{Q/6} \right)^{1/Q} \quad (1.31)$$

Le processus tangent, qui vit dans  $\mathfrak{g}$ , se calcule aisément et on obtient :

$$u_t^{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 0 & B_t^1 & \dots & B_t^d & t \\ B_t^1 & & & & \frac{1}{2} \left( \int_0^t B_s^1 ds - \int_0^t s \circ dB_s^1 \right) \\ \vdots & \left( \frac{1}{2} \left( \int_0^t B_s^i \circ dB_s^j - \int_0^t B_s^j \circ dB_s^i \right) \right)_{\substack{j=1, \dots, d \\ i=1 \dots d}} & & & \vdots \\ B_t^d & & & & \frac{1}{2} \left( \int_0^t B_s^d ds - \int_0^t s \circ dB_s^d \right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

La proposition 8 de [6] affirme que la fonction de Green de la diffusion  $(g_s, \xi_s)$  est strictement positive dans le cône du futur de  $(g_0, \xi_0) = \mathbf{e}$  :

$$G(\mathbf{e}, (g, \xi)) > 0 \iff q(\xi) > 0 \text{ et } \xi^0 > 0.$$

Le support de  $T_{1/\varepsilon} \circ \exp^{-1}(g_{\varepsilon^2 s}, \xi_{\varepsilon^2 s})$  est le cône :

$$\{(g, \xi); (\varepsilon^2 \xi^0)^2 - \|\varepsilon^3 \vec{\xi}\|^2 > 0, \xi^0 > 0\},$$

qui est d'autant plus évasé que  $\varepsilon$  est petit.

La proposition 2 montre alors que le support du processus tangent est égal au demi espace :  $\{(g, \xi) \in \mathfrak{g}; \xi^0 > 0\}$ . Résultat qu'on aurait pu obtenir directement.

On appelle alors **cône homogène** de sommet  $(g_0, \xi_0)$ , une partie  $C_h(g_0, \xi_0)$  de  $\mathcal{G}$  invariante par les dilatations  $T_\varepsilon$  centrées en  $(g_0, \xi_0)$  telle que l'ensemble "semelle"

$$\{(g, \xi) \in C_h(g_0, \xi_0); |(g, \xi)|_{(g_0, \xi_0)} = 1\}$$

soit un compact du demi-espace :

$$\{(g, \xi) \in \mathcal{G}; (\xi - \xi_0)^0 > 0\}.$$

Le théorème 5 fournit alors un voisinage de  $(g_0, \xi_0)$  tel que pour toute partie  $B$ , contenue dans un cône homogène,  $C_h(g_0, \xi_0)$ , issu de  $(g_0, \xi_0)$ , il existe  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  tels que :

$$\forall (g, \xi) \in B, \quad \frac{\alpha}{|(g, \xi)|_{(g_0, \xi_0)}^{Q-2}} \leq G((g_0, \xi_0), (g, \xi)) \leq \frac{\beta}{|(g, \xi)|_{(g_0, \xi_0)}^{Q-2}}. \quad (1.33)$$

**Rappel :**  $Q = d(d+3) + 2$ .

**Remarque 4.** *La majoration dans l'inégalité (1.33) reste valable même si la selle du cône n'est pas compacte.*

### 1.6.3 Critère d'effilement de Wiener

On dit qu'un point  $(g, \xi)$  est régulier par rapport à un ensemble mesurable  $B$  lorsque  $\mathbb{P}_{(g, \xi)}(T_B = 0) = 1$ , où  $T_B = \inf\{s > 0; (g_s, \xi_s) \in B\}$ .

On note  $B^r$  l'ensemble des points réguliers de  $B$ . Par continuité des trajectoires,  $\overset{\circ}{B} \subset B^r \subset \bar{B}$ .

**Proposition 6.** *Il existe une unique mesure finie  $\mu_B$  portée par  $B^r$  telle que :*

$$\mathbb{P}_{(g, \xi)}[T_B < +\infty] = \int G((g, \xi), (g', \xi')) \mu_B(d(g', \xi')).$$

*Démonstration.* Il a été montré dans [6] que l'opérateur  $\mathcal{L}$  admet un adjoint (relativement à la mesure de Haar) qui est sans terme constant. La théorie des processus duaux décrite dans [16] et rappelée dans [20] peut donc s'appliquer et garantir l'existence et l'unicité de  $\mu_B$ .  $\square$

On appelle capacité de  $B$ , et on note  $C(B)$ , la masse totale de  $\mu_B$ , qui s'écrit aussi :

$$C(B) = \sup\{\mu(B); \mu \in \mathcal{M}(B), G\mu \leq 1\}. \quad (1.34)$$

Où  $\mathcal{M}(B)$  est l'ensemble des mesures positives finies dont le support est dans  $B$ .

Soit  $\lambda < 1$ ; on note :

$$B_n = \{(g, \xi) \in B; \lambda^{n+1} \leq |(g, \xi)|_{(g_0, \xi_0)} < \lambda^n\}.$$

On a le critère d'effilement de Wiener suivant :

**Proposition 7** (Critère d'effilement). *Soit  $B$  une partie de  $\mathcal{G}$  contenue dans un cône homogène  $C_h(g_0, \xi_0)$  issu de  $(g_0, \xi_0)$ .*

*Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) Le point  $(g_0, \xi_0)$  est régulier pour  $B$ .
- (ii) La série  $\sum_n \lambda^{d(d+3)n} C(B_n)$  est divergente.

*Démonstration.* Le schéma de la démonstration est classique et donnée par exemple dans [12] pour le mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^d$  et dans [41] dans le cas de diffusion sur un groupe nilpotent. On rappelle brièvement le point clef : La double inégalité (1.33) permet d'utiliser un lemme de Borel-Cantelli du à Lamperti dans [56], qui fournit l'équivalence souhaitée.  $\square$

### 1.6.4 Capacités des petits compacts et test de Poincaré

Soit  $H$  la fermeture d'un domaine borné de  $\mathfrak{g}$  inclus dans

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & {}^t(u_i) & u_0 \\ (u_i) & (u_{ij}) & (u_{i0}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}; u_0 > 0 \right\}.$$

On note  $H_\varepsilon := \exp(T_\varepsilon(H))$  les “petits compacts” dans le futur de  $e$ . On va étudier le comportement de  $C(H_\varepsilon)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Pour cela on a besoin du lemme suivant, où  $u_\varepsilon$  et  $v_\varepsilon$  désignent deux points de  $H_\varepsilon$  et  $\theta_{u_\varepsilon}(v_\varepsilon) := T_{1/|v_\varepsilon|_{u_\varepsilon}}(\exp_{u_\varepsilon}^{-1}(v_\varepsilon))$  est l'angle solide, relativement à la norme homogène, de  $v_\varepsilon$  vu depuis  $u_\varepsilon$ .

**Lemme 4.** *Les limites suivantes existent :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|v_\varepsilon|_{u_\varepsilon}}{\varepsilon} := \alpha(u, v) > 0.$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta_{u_\varepsilon}(v_\varepsilon) := \beta(u, v) \in \mathfrak{g} - \{0\}.$$

*Démonstration.* Soit  $u, v \in \mathfrak{g}$  tels que  $u_\varepsilon = \exp(T_\varepsilon(u))$  et  $v_\varepsilon = \exp(T_\varepsilon(v))$ .

On cherche  $w \in \mathfrak{g}$  tel que  $v_\varepsilon = u_\varepsilon \times \exp(w)$ , i.e  $\exp(w) = \exp(-T_\varepsilon(u)) \exp(T_\varepsilon(v))$ .

La formule de Campell-Hausdorff s'écrit :

$$w = T_\varepsilon(v) - T_\varepsilon(u) - \frac{1}{2}[T_\varepsilon(u), T_\varepsilon(v)] \tag{1.35}$$

$$+ \frac{1}{12}([-T_\varepsilon(u), [-T_\varepsilon(u), T_\varepsilon(v)]] + [T_\varepsilon(v), [T_\varepsilon(v), -T_\varepsilon(u)]]) + \dots$$

Un calcul simple fournit :

$$[T_\varepsilon(v), T_\varepsilon(u)] = \sum_{i=1}^d o(\varepsilon) X_i + \sum_{1 \leq i < j \leq d} (\varepsilon^2 (u_i v_j - u_j v_i) + o(\varepsilon^2)) [X_i, X_j] +$$

$$\sum_{i=1}^d (\varepsilon^3 (v_i u_0 - v_0 u_i) + o(\varepsilon^3)) [X_i, X_0] + o(\varepsilon^2) X_0.$$

Avec (1.35) on obtient :

$$w_i = \varepsilon(v_i - u_i) + o(\varepsilon), \quad w_0 = \varepsilon^2(v_0 - u_0) + o(\varepsilon^2),$$

$$w_{ij} = \varepsilon^2(v_{ij} - u_{ij} - \frac{1}{2}(v_i u_j - u_i v_j)) + o(\varepsilon^2),$$

$$w_{i0} = \varepsilon^3(v_{i0} - u_{i0} - \frac{1}{2}(u_i v_0 - u_0 v_i)) + o(\varepsilon^3).$$

Par définition de la norme homogène :  $\frac{|v_\varepsilon|_{u_\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{|w|_e}{\varepsilon}$  et cette quantité converge lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 vers la norme homogène  $\alpha(u, v) \neq 0$  de :

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^t(v_i - u_i) & (v_0 - u_0) \\ (v_i - u_i) & (v_{ij} - u_{ij} - \frac{1}{2}(v_i u_j - u_i v_j)) & (v_{i0} - u_{i0} - \frac{1}{2}(u_i v_0 - u_0 v_i)) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}.$$

De plus, par définition  $\theta_{u_\varepsilon}(v_\varepsilon) = T_{1/|w|_e}(w)$  et on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta_{u_\varepsilon}(v_\varepsilon) = \beta(u, v)$$

Où

$$\beta(u, v) := \frac{1}{\alpha(u, v)} \begin{pmatrix} 0 & {}^t(v_i - u_i) & (v_0 - u_0) \\ (v_i - u_i) & (v_{ij} - u_{ij} - \frac{1}{2}(v_i u_j - u_i v_j)) & (v_{i0} - u_{i0} - \frac{1}{2}(u_i v_0 - u_0 v_i)) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$$

□

Notons alors :

$$q(H) := \frac{m(H)}{\max_{u \in \partial H} \int_H \frac{\psi_\varepsilon(\beta(u, v))}{\alpha(u, v)^{Q-2}} m(dv)}.$$

**Rappel :**  $\psi_x(\cdot) := \frac{1}{J_x(0)} g^{(x)}(0, \cdot)$  et  $g^{(x)}$  est la fonction de Green du processus tangent en  $x$ .

On désigne par  $m$  la mesure image de *Haar* par  $\exp^{-1}$ . C'est donc une mesure sur  $\mathfrak{g}$ .

On peut maintenant énoncer la proposition suivante :

**Proposition 8** (Capacité des petits compacts).

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C(H_\varepsilon)}{\varepsilon^{Q-2}} \geq q(H).$$

*Démonstration.* Soit  $\nu := \mathbf{1}_H m$  et  $\nu_\varepsilon := \mathbf{1}_{H_\varepsilon} Haar$  son image par  $\exp \circ T_\varepsilon$ .

Au vu de (1.34), une borne inférieure pour  $C(H_\varepsilon)$  est obtenue dès lors qu'on a une majoration uniforme de  $G\nu_\varepsilon$ . Si  $\tau$  désigne le temps d'entrée dans  $H_\varepsilon$ , pour  $(g, \xi) \in \mathcal{G}$  :

$$\begin{aligned} G\nu_\varepsilon(g, \xi) &= \int_{H_\varepsilon} G((g, \xi), (g', \xi')) Haar(d(g', \xi')) \\ &= \mathbb{E}_{(g, \xi)} \left[ \int_\tau^{+\infty} \mathbf{1}_{H_\varepsilon}(g_t, \xi_t) dt \right] \\ &= \mathbb{E}_{(g, \xi)} \left[ \mathbb{E}_{(g_\tau, \xi_\tau)} \left[ \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{H_\varepsilon}(g_t, \xi_t) dt \right] \right] \\ G\nu_\varepsilon(g, \xi) &= \mathbb{E}_{(g, \xi)} [G\nu_\varepsilon(g_\tau, \xi_\tau)]. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Il suffit donc de majorer  $G\nu_\varepsilon$  sur  $\partial H_\varepsilon$ .

Soit  $u_\varepsilon \in \partial H_\varepsilon$ , par définition de  $\nu_\varepsilon$  :

$$G\nu_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_H G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) m(dv),$$

où  $v_\varepsilon := \exp(T_\varepsilon(v))$ .

Soit  $\eta > 0$ . D'après le théorème 5 il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour  $\varepsilon < \varepsilon_0$  :

$$\forall u_\varepsilon, v_\varepsilon \in H_\varepsilon \quad G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \leq \frac{\eta + \psi_{u_\varepsilon}(\theta_{u_\varepsilon}(v_\varepsilon))}{|v_\varepsilon|_{u_\varepsilon}^{Q-2}}.$$

De plus, d'après le lemme 4, il existe  $\varepsilon_1 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_1$  :

$$\forall u_\varepsilon, v_\varepsilon \in H_\varepsilon \quad \varepsilon^{Q-2} \frac{\eta + \psi_{u_\varepsilon}(\theta_{u_\varepsilon}(v_\varepsilon))}{|v_\varepsilon|_{u_\varepsilon}^{Q-2}} \leq \frac{\eta + \psi_e(\beta(u, v))}{\alpha(u, v)^{Q-2}} + \eta$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall u_\varepsilon \in \partial H_\varepsilon \quad \varepsilon^{Q-2} G\nu_\varepsilon(u_\varepsilon) &\leq \int_H \left( \frac{\eta + \psi_e(\beta(u, v))}{\alpha(u, v)^{Q-2}} + \eta \right) m(dv). \\ &\leq \eta \times m(H) + \max_{u \in \partial H} \int_H \frac{\eta + \psi_e(\beta(u, v))}{\alpha(u, v)^{Q-2}} m(dv). \end{aligned}$$

Par (1.36) on obtient :

$$\|G\nu_\varepsilon\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon^{Q-2}} \left( \eta \times m(H) + \max_{u \in \partial H} \int_H \frac{\eta + \psi_e(\beta(u, v))}{\alpha(u, v)^{Q-2}} m(dv) \right).$$

Par (1.34), on déduit :

$$C(H_\varepsilon) \geq \frac{\varepsilon^{Q-2} \nu_\varepsilon(H_\varepsilon)}{\eta \times m(H) + \max_{u \in \partial H} \int_H \frac{\eta + \psi_\varepsilon(\beta(u,v))}{\alpha(u,v)^{Q-2}} m(dv)}.$$

Puisque  $\nu_\varepsilon(H_\varepsilon) = m(H)$ , on obtient après avoir fait tendre  $\eta$  vers 0 :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C(H_\varepsilon)}{\varepsilon^{Q-2}} \geq q(H) := \frac{m(H)}{\max_{u \in \partial H} \int_H \frac{\psi_\varepsilon(\beta(u,v))}{\alpha(u,v)^{Q-2}} m(dv)}.$$

□

Les propositions 7 et 8 ci-dessus fournissent une condition de régularité de type Poincaré :

**Corollaire 2** (Condition de cône de Poincaré). *S'il existe un cône homogène issu de  $(g_0, \xi_0)$  qui est contenu localement dans  $B$ , alors ce point est régulier pour  $B$ .*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que le sommet d'un cône homogène est régulier pour celui-ci. En effet, les "tranches"  $B_n$  de ce cône sont telles que  $B_n = T_{\lambda^n}^{(g_0, \xi_0)}(B_0)$  et les capacités  $C(B_n)$  sont ainsi, par la proposition 8, de l'ordre de  $\lambda^{n(2-Q)}$ . Ainsi, la série  $\sum_n \lambda^{(Q-2)n} C(B_n)$  diverge grossièrement et par la proposition 7 le sommet du cône homogène est régulier. □

## 1.7 Appendice

### 1.7.1 Sur les estimations a priori et les résultats de [64]

On rappelle le travail de Nagel, Stein et Wainger dans [64]. On suppose que  $(X^J)_{J \in \mathcal{B}}$  forme une base de  $T_y \mathcal{M}$  pour tout  $y \in U$  (la géométrie des champs de vecteurs est constante). On note  $\rho$  la pseudo-distance définie par :

$$\rho(y, z) = \inf\{\delta > 0; \exists \varphi \in C(\delta) \text{ tq } \varphi(0) = y \text{ et } \varphi(1) = z\} \quad (1.37)$$

Où  $C(\delta)$  est l'ensemble des fonctions absolument continues telles qu'on ait presque partout :

$$\varphi'(t) = \sum_{L, \|L\| \leq r}^d a_L(t) X^L(\varphi(t)),$$

avec  $|a_L(t)| < \delta^{\|L\|}$ . Le corollaire p 114 de [64] affirme que lorsque  $d \geq 2$ , pour  $K$  compact de  $U \times U$ , il existe  $C > 0$  tel que :

$$\forall y, z \in K, \quad |G(y, z)| \leq C \frac{\rho^2(y, z)}{\text{Vol}(B(y, \rho(y, z)))} \quad (1.38)$$



et pour  $J = (j_1, \dots, j_k)$  :

$$\forall y, z \in K, |X_{j_1} \cdots X_{j_k} G(x, y)| \leq C \frac{\rho^{2-\|J\|}(y, z)}{\text{Vol}(B(y, \rho(y, z)))}. \quad (1.39)$$

On a la propriété suivante :

**Proposition 9** (Équivalence locale des normes). *Il existe un voisinage  $\tilde{U} \subset U$  de  $x$  et des constantes  $C_1, C_2 > 0$  tels que :*

$$\forall y, z \in U', \quad C_1 \rho(y, z) \leq |z|_y \leq C_2 \rho(y, z). \quad (1.40)$$

*Démonstration.* Nous allons tout d'abord introduire une pseudo-distance intermédiaire qui est une légère modification de  $|\cdot|$ . Comme dans [64], nous notons  $C_3(\delta, \mathcal{B})$  la classe des fonctions absolument continues  $\phi : [0, 1] \rightarrow U$  telles que

$$\phi'(t) = \sum_{J \in \mathcal{B}} a_J X^J(\phi(t)),$$

où les  $a_J$  sont des constantes telles que

$$|a_J| < \delta^{\|J\|}.$$

Définissons, pour  $y, z \in U$  :

$$d_{\mathcal{B}}(y, z) = \inf\{\delta > 0 \mid \exists \phi \in C_3(\delta, \mathcal{B}) \text{ telle que } \phi(0) = y, \phi(1) = z\}.$$

Rappelons que  $U$  a été pris suffisamment petit pour que l'application  $\varphi_y$  soient un difféomorphisme de  $\varphi_y^{-1}(U)$  dans  $U$ . Ainsi pour  $y, z \in U$ , il existe des uniques constantes  $(a_J)_{J \in \mathcal{B}}$  telles que

$$z = \exp\left(\sum_{J \in \mathcal{B}} a_J X^J\right)(y),$$

et ainsi

$$d_{\mathcal{B}}(y, z) = \max_{J \in \mathcal{B}} |a_J|^{1/\|J\|}.$$

Ainsi nous obtenons

$$d_{\mathcal{B}}(y, z) \leq |z|_y \leq C d_{\mathcal{B}}(y, z),$$

où

$$C := \left(\sum_{k=1}^r (\dim C_k - \dim C_{k-1})^{Q/k}\right)^{1/Q}.$$

Cela nous ramène à montrer que  $d_{\mathcal{B}}$  est localement équivalente à  $\rho$ . Puisque  $C_3(\delta, \mathcal{B}) \subset C(\delta)$  nous avons

$$\forall y, z \in U, \quad \rho(y, z) \leq d_{\mathcal{B}}(y, z),$$

et il nous reste à montrer que  $d_{\mathcal{B}}$  est localement dominée par  $\rho$ . C'est essentiellement le résultat contenu dans le lemme 2.16 de [64]. Afin d'appliquer ce lemme il nous faut introduire quelques notations. Pour un  $d$ -uplet  $\mathcal{B}'$  de multi-indices de poids  $\leq r$ , nous notons  $\|\mathcal{B}'\|$  la somme des poids de ses composantes.

$$\|\mathcal{B}'\| := \sum_{J \in \mathcal{B}'} \|J\|.$$

De plus notons  $\lambda_{\mathcal{B}'}(y)$  le déterminant de la famille  $(X^J(y))_{J \in \mathcal{B}'}$  en  $y$  :

$$\lambda_{\mathcal{B}'}(y) := \det(X^J(y), J \in \mathcal{B}').$$

Souvenons-nous que le  $d$ -uplet  $\mathcal{B}$  a été choisi tel que  $(X^J(y))_{J \in \mathcal{B}}$  est une base triangulaire de  $T_y \mathcal{M}$ . Cela signifie que si  $\mathcal{B}'$  est tel que  $\lambda_{\mathcal{B}'}(y) \neq 0$  alors  $\|\mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{B}'\|$ . Nous avons de plus

$$M := \sup_{\mathcal{B}', y} |\lambda_{\mathcal{B}'}(y)| < +\infty,$$

où le supremum est pris sur tout les  $y \in U$  et sur l'ensemble fini des  $d$ -uplet de multi-indices de poids  $\leq r$ . Nous avons alors pour un  $d$ -uplet  $\mathcal{B}'$  de multi-indices, pour tout  $y \in U$  et pour  $\delta \in ]0, 1]$

$$|\lambda_{\mathcal{B}'}(y)| \delta^{|\mathcal{B}'|} \leq M \delta^{|\mathcal{B}'|} \leq M \delta^{|\mathcal{B}|} \leq \frac{M}{\inf_{z \in U} |\lambda_{\mathcal{B}}(z)|} |\lambda_{\mathcal{B}}(y)| \delta^{|\mathcal{B}|}.$$

Ainsi, en prenant

$$t := \frac{\inf_{y \in U} |\lambda_{\mathcal{B}}(y)|}{M} > 0,$$

nous avons

$$\forall y \in U, \forall \delta \in ]0, 1] \quad |\lambda_{\mathcal{B}}(y)| \delta^{|\mathcal{B}|} \geq t \sup_{\mathcal{B}'} |\lambda_{\mathcal{B}'}(y)| \delta^{|\mathcal{B}'|}.$$

Nous pouvons désormais appliquer le lemme 2.16 de [64] et trouver un  $\eta > 0$  et  $\varepsilon(t) > 0$  tels que

$$\forall y \in U, \forall \delta \in ]0, 1], \quad B(y, \eta \varepsilon(t) \delta) \subset B_{\mathcal{B}}(y, \varepsilon(t) \delta),$$

où  $B$  et  $B_{\mathcal{B}}$  sont les boules associées respectivement à  $\rho$  et  $d_{\mathcal{B}}$ . Ainsi, si  $\rho(y, z) \leq \eta \varepsilon(t)$  alors

$$\begin{aligned} \rho(y, z) &= \inf \{ n \varepsilon(t) \delta, z \in B(y, \eta \varepsilon(t) \delta) \} \\ &\geq \eta \inf \{ \varepsilon(t) \delta, z \in B_{\mathcal{B}}(y, \varepsilon(t) \delta) \} \\ &\geq \eta d_{\mathcal{B}}(y, z). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Enfin nous pouvons trouver un voisinage  $U'$  de  $x$  assez petit pour que  $\forall y, z \in U'$   $\rho(y, z) \leq \eta\varepsilon(t)$  et ainsi dans lequel l'inégalité (1.41) est satisfaite.  $\square$

En utilisant (1.38) et la proposition précédente, on obtient :

**Proposition 10** (Estimation a priori). *Quitte à prendre  $U$  assez petit et relativement compact, il existe  $C > 0$  tel que :*

$$\forall y, z \in U, |G(y, z)| \leq \frac{C}{|z|_y^{Q-2}}.$$

De plus, pour  $J = (j_1, \dots, j_k)$  nous avons :

$$\forall y \neq z \in U, |X_{j_1} \cdots X_{j_k} G(y, z)| \leq \frac{C}{|z|_y^{Q-2+\|J\|}}.$$

*Démonstration.* Puisque  $d(T_\varepsilon u) = \varepsilon^Q du$  il vient

$$\text{Vol}(B(y, |z|_y)) = \int_{|u|_d < |z|_y} du = |z|_y^Q \int_{|u|_d < 1} du.$$

La preuve se déduit donc de l'équivalence local entre la norme homogène et  $\rho$  ainsi que les estimations à priori (1.38) et (1.39).  $\square$

**Proposition 11** (Inégalité triangulaire et comparaison à une norme euclidienne.). *Quitte à prendre  $U$  assez petit et relativement compact, il existe  $c_0 > 0$  tel que  $\forall t, y, z \in U$  :*

$$|y|_t \leq c_0 (|z|_t + |z|_y). \quad (1.42)$$

Il existe également  $c', c'' > 0$  tel que  $\forall y, z \in U$  :

$$c' \|\varphi_y^{-1}(z)\| \leq |z|_y \leq c'' \|\varphi_y^{-1}(z)\|^{1/r}, \quad (1.43)$$

*Démonstration.* Cela résulte de l'équivalence locale avec la pseudo distance  $\rho$ , de la proposition (1.1) p 107 et du (iii') p 109 de [64].  $\square$

# Chapitre 2

## Dynamique asymptotique d'un flot associé à une classe de processus relativistes dans l'espace-temps de Minkowski

### 2.1 Introduction

Rappelons que  $\mathbb{R}^{1,d}$  désigne l'espace temps de Minkowski, c'est-à-dire l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{d+1} = \{\sum_{i=0}^d \xi^i e_i \mid \xi^i \in \mathbb{R}\}$  muni de la forme quadratique de Lorentz

$$q(\xi) := (\xi^0)^2 - \|\vec{\xi}\|^2.$$

Le groupe connexe des transformations linéaires qui préservent cette structure est le groupe de Lorentz noté  $PSO(1, d)$ . Le groupe de Poincaré  $\mathcal{G}$  est le groupe connexe des transformations affines invariant par  $q$  :

$$\mathcal{G} := PSO(1, d) \ltimes \mathbb{R}^{1,d}.$$

On peut alors identifier  $\mathbb{R}^{1,d}$  avec l'espace homogène  $\mathcal{G}/PSO(1, d)$ . Les orbites de  $PSO(1, d)$  dans  $\mathbb{R}^{1,d}$  n'étant pas compactes, il ne peut exister de mesure finie invariante par  $PSO(1, d)$  et a fortiori il n'existe pas de processus de Markov à valeurs dans  $\mathbb{R}^{1,d}$  invariants en loi par l'action de  $\mathcal{G}$  ; c'est-à-dire qu'il n'existe pas de générateur  $\mathcal{L}$  tels que pour  $f$  dans le domaine de  $\mathcal{L}$

$$\forall g \in \mathcal{G}, \quad \mathcal{L}(f \circ g) = (\mathcal{L}f) \circ g.$$

Le contexte lorentzien est donc fortement différent de celui euclidien  $\mathbb{R}^d$  qui, vu comme espace homogène  $(SO(d) \ltimes \mathbb{R}^d)/SO(d)$ , peut être pourvu de processus

de Markov ( $SO(d) \ltimes \mathbb{R}^d$ )-invariants comme par exemple un mouvement brownien  $d$ -dimensionnel. Pour espérer obtenir des processus de Markov  $\mathcal{G}$ -invariants sur un espace homogène de  $\mathcal{G}$  nous sommes amenés à quotienter  $\mathcal{G}$  par un sous-groupe compact. Le sous-groupe  $SO(d)$ , défini comme le sous-groupe de  $PSO(1, d)$  préservant le vecteur  $e_0 := (1, 0, \dots, 0)^*$ , est un groupe maximal de  $\mathcal{G}$ . L'espace homogène minimal  $\mathcal{G}/SO(d)$  s'identifie au produit  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1, d}$  où  $\mathbb{H}^d$  est l'espace hyperbolique défini comme la nappe supérieure de l'hyperboloïde à deux nappes de  $\mathbb{R}^{1, d}$

$$\mathbb{H}^d := \{ \xi \in \mathbb{R}^{1, d} \mid \xi^0 > 0, q(\xi) = 1 \}.$$

En appliquant le Théorème 2.2 de [61] à notre cadre particulier, nous obtenons que les processus de Markov  $\mathcal{G}$ -invariants à valeurs dans  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1, d}$  sont obtenus en projetant des processus de Lévy invariants à gauche et  $SO(d)$ -invariants à droite dans  $\mathcal{G}$ .

Dans [28], Dudley considère la classe des processus  $\mathcal{G}$ -invariants dans  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1, d}$  tels que les trajectoires dans  $\mathbb{R}^{1, d}$  soient de genre temps. Ce sont précisément les processus  $(\dot{\xi}_t, \xi_t)$  où  $\dot{\xi}_t$  est un processus de Markov  $PSO(d)$ -invariant de  $\mathbb{H}^d = PSO(1, d)/SO(d)$  et  $\xi_t$  est l'intégrale en temps de  $\dot{\xi}_t$ . Les processus à trajectoires continues sont ceux pour lesquels  $\dot{\xi}_t$  est un mouvement brownien de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^d$ . Cette diffusion est un mouvement brownien naturel (géométrique) associé à l'espace-temps de Minkowski. Son comportement asymptotique a été étudié par Bailleul ([9] et [6]). En considérant  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1, d}$  comme le fibré unitaire de l'espace de Minkowski et le groupe de Poincaré  $\mathcal{G}$  comme le fibré des repères orthonormés au dessus de  $\mathbb{R}^{1, d}$ , on peut généraliser et considérer des diffusions relativistes à valeurs dans le fibré unitaire d'une variété Lorentzienne générique ([39]). Elles sont obtenues en faisant rouler sans glisser  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1, d}$  le long de trajectoires de diffusions de Dudley. Cette construction, à la Eells-Elworthy-Malliavin, est obtenue en projetant des diffusions à valeurs dans le fibré des repères de la variété sur le fibré unitaire. Ces diffusions ont été étudiées dans les espace-temps de Schwarzschild ([39]), de Robertson-Walker ([1]) et de Gödel ([37]). Comme il est suggéré dans [7] il est également intéressant de s'intéresser aux processus à valeurs dans le fibré des repères que l'on peut considérer comme des trajectoires de petits objets rigides évoluant aléatoirement dans l'espace-temps. La diffusion dans le fibré des repères est solution d'une équation différentielle stochastique et dans ce travail on se pose la question de la dynamique asymptotique du flot stochastique engendrée par cette EDS. Il s'agit précisément de calculer les variétés stables et les coefficients de Lyapunov. Ce travail est l'analogue lorentzien de ce qui avait précédemment été fait dans le mouvement brownien riemannien dans [13], [18], [58].

Précisément nous allons considérer un processus de Lévy  $\tilde{A}_t$  à valeurs dans  $\mathcal{G}$  invariant à gauche et  $SO(d)$ -invariant à droite tel que les trajectoires dans  $\mathbb{R}^{1, d}$

soient de genre temps. Un tel processus se projette sur  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$  en un processus markovien introduit par Dudley. Ces processus génèrent des flots stochastiques invariants dans  $\mathcal{G}$

$$\phi_t(\tilde{A}) := \tilde{A}\tilde{A}_t.$$

Nous calculons explicitement le spectre de Lyapunov et les variétés stables associées à ce flot. Précisément nous calculons pour  $\tilde{B} \in Lie(\mathcal{G})$  et pour une norme  $\|\cdot\|$  dans  $Lie(\mathcal{G})$  le taux de croissance ou décroissance exponentiel suivant :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|D\phi_t(\text{Id}).\tilde{B}\|.$$

Le processus  $A_t$  obtenu en projetant  $\tilde{A}_t$  sur  $PSO(1, d)$  est un processus de Lévy invariant à gauche et  $SO(d)$ -invariant à droite. Il génère un flot dans  $PSO(1, d)$  qui a été étudié, dans le cas d'une diffusion, par Baxendale dans [13]. Plus généralement la dynamique asymptotique des flots générés par des processus de Lévy dans des groupes de Lie semi-simple a été étudié par Liao ([61]). Ici le groupe de Lie ambiant n'est pas semi-simple et les calculs semblent plus délicats. Dans la première section nous introduisons la classe des processus  $\tilde{A}_t$  considérée. Dans la seconde nous montrons, sous une hypothèse d'intégrabilité de la mesure de Lévy, que le comportement asymptotique de ces processus est caractérisé par un couple de variables  $(\theta_\infty, \lambda_\infty)$ . Géométriquement,  $\theta_\infty \in \mathbb{S}^{d-1}$  est un angle limite pour le processus  $\dot{\xi}_t$  dans  $\mathbb{H}^d$  et  $\lambda_\infty$  décrit la position d'un hyperplan affine dans  $\mathbb{R}^{1,d}$  pour lequel  $\xi_t$  est asymptotiquement tangent. La figure 2.1 illustre ce comportement asymptotique, le processus à valeurs dans la nappe hyperbolique est continu, c'est la *diffusion de Dudley*.

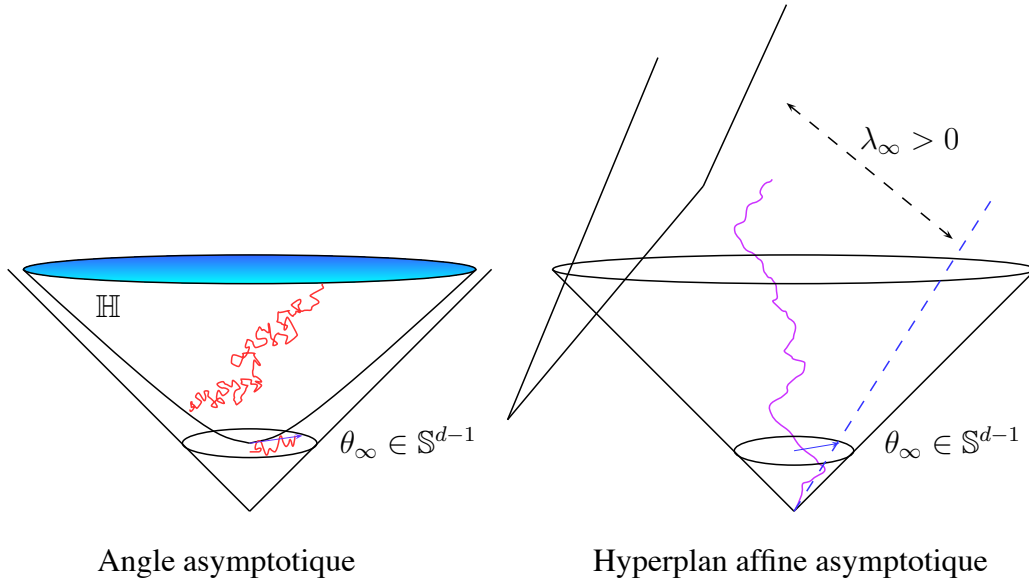


FIGURE 2.1 – Angle asymptotique  $\theta_\infty \in \mathbb{S}^{d-1}$  et hyperplan affine asymptotique.

De ces résultats asymptotiques nous calculerons le spectre de Lyapunov dans la troisième partie :

**Théorème 7.** *Il existe deux sous-algèbres de  $Lie(\mathcal{G})$  aléatoires  $V^- \subset V^0$  dépendant de  $(\theta_\infty, \lambda_\infty)$  et un réel positif  $\alpha$  tels que*

$$\frac{1}{t} \log \|D\phi_t(\text{Id}).\tilde{B}\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{a.s.} \begin{cases} -\alpha & \text{si } \tilde{B} \in V^- \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } \tilde{B} \in V^0 \setminus V^- \\ \alpha & \text{si } v \in Lie(\mathcal{G}) \setminus V^0 \end{cases}.$$

Dans la dernière section nous montrons que les variétés stables sont exactement celles obtenues en intégrant la distribution stable  $V^-$ . Nous notons  $d$  la distance associée à la métrique invariante à gauche engendrée par  $\|\cdot\|$  définie dans la deuxième partie et nous obtenons le théorème suivant :

**Théorème 8.** *Soient  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \in \mathcal{G}$  tels que  $\tilde{A}_1 \neq \tilde{A}_2$ .*

– *Si  $\tilde{A}_1 \in \tilde{A}_2 \exp(V^-)$  alors :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log d(\phi_t(\tilde{A}_1), \phi_t(\tilde{A}_2)) = -\alpha.$$

– *Si  $\tilde{A}_1 \notin \tilde{A}_2 \exp(V^-)$  alors :*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(\tilde{A}_1), \phi_t(\tilde{A}_2)) > 0.$$

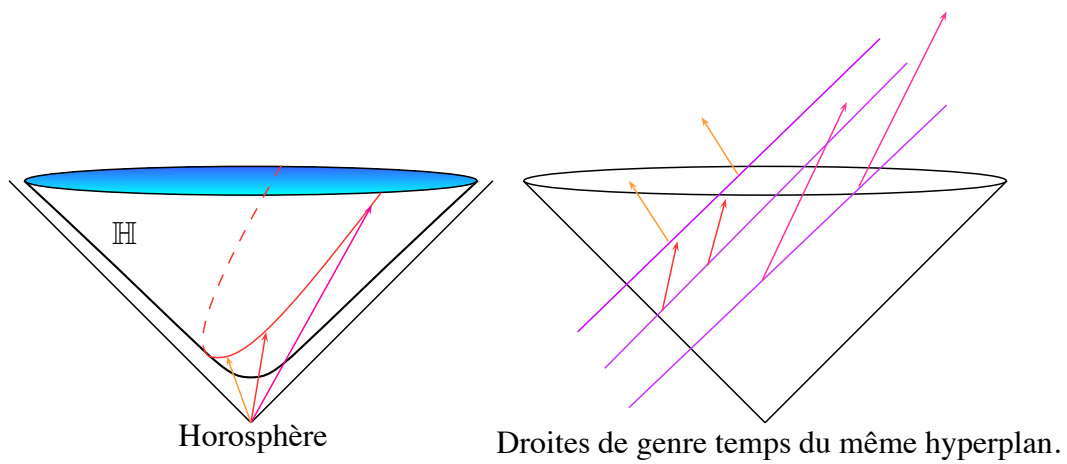


FIGURE 2.2 – La projection des variétés stables sur  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$  est un fibré en droite d'une horosphère.

Enfin dans la dernière section nous montrons que la projection sur  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$  des variétés stables sont des fibrés en droite au dessus d'horosphères.



## 2.2 Les processus de Dudley et leur relèvement dans $\mathcal{G}$

Dans cette section nous introduisons la classe de processus de Markov  $(\dot{\xi}_t, \xi_t)$  introduis par Dudley ([28]) ainsi qu'un relèvement  $\tilde{A}_t$  dans  $\mathcal{G}$ .

Nous voyons le groupe affine  $\mathcal{G} := PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d}$  comme le groupe des matrices de taille  $d + 2 \times d + 2$  suivant

$$\mathcal{G} = \left\{ \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in PSO(1, d), \xi \in \mathbb{R}^{1,d} \right\}.$$

Pour simplifier on notera souvent  $\tilde{A} = (A, \xi)$  pour désigner la matrice  $\begin{pmatrix} A & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Ce groupe connexe est l'exponentielle de son algèbre de Lie

$$Lie(\mathcal{G}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & e^* & \eta_0 \\ e & C & \vec{\eta} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid e \in \mathbb{R}^d, C \in \mathbb{R}^{d \times d} \text{ with } C^* = -C, \eta := (\eta_0, \vec{\eta}) \in \mathbb{R}^{1,d} \right\}.$$

Maintenant en interprétant  $\mathcal{G}$  comme le fibré des repères au dessus de  $\mathbb{R}^{1,d}$  nous obtenons des champs horizontaux  $(H_i^l)_{i=0, \dots, d}$  et verticaux  $(V_i^l)_{i=1, \dots, d}$  et  $(V_{ij}^l)_{1=i < j=d}$ . Ce sont des champs de vecteurs invariants à gauche dans  $\mathcal{G}$  et nous notons pour alléger les notations  $H_i = H_i^l(Id)$ ,  $V_i = V_i^l(Id)$  et  $V_{ij} = V_{ij}^l(Id)$ . On a alors

$$H_i := \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad V_i := \begin{pmatrix} 0 & e_i^* & 0 \\ e_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad V_{ij} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_i e_j^* - e_j e_i^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons  $K$  le sous groupe de  $\mathcal{G}$  isomorphe à  $SO(d)$  dont l'algèbre de Lie est engendrée par  $V_{ij}$ . L'espace homogène  $\mathcal{G}/K$  est identifié à  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$ . On note  $o := Id \cdot K \in \mathcal{G}/K$  le point stabilisé par  $K$  correspondant donc à  $(e_1, 0) \in \mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$ . Les matrices  $V_i \in Lie(\mathcal{G})$  induisent les opérateurs de dérivation suivants dans  $\mathcal{G}/K$

$$\frac{\partial}{\partial v_i} f(o) := \left. \frac{d}{dt} f(\exp(tV_i) \cdot K) \right|_{t=0}$$

Le résultat de Dudley ([28]) s'énonce de la manière suivante :

**Théorème 6** (Dudley). *Les processus de Markov  $\mathcal{G}$ -invariants à valeurs dans  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$  et dont les trajectoires dans  $\mathbb{R}^{1,d}$  sont de genre temps, ont un générateur de la forme (exprimé ici en  $o$  et calculé pour  $f \in C_c^2(\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d})$ )*

$$\begin{aligned} Tf(o) &= a\dot{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} f(o) + \frac{\sigma^2}{2} \Delta_{\dot{\xi}}^{\mathbb{H}^d} f(o) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{d-1}} \left( f(\psi(r, \theta), 0) - f(o) - r \mathbf{1}_{]0,1]}(r) \sum_{i=1}^d \theta^i \frac{\partial}{\partial v_i} f(o) \right) \nu(dr) d\theta. \end{aligned}$$

Dans cette expression  $a$  est strictement positif,  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $d\theta$  est la probabilité uniforme sur  $\mathbb{S}^{d-1}$  et  $\nu$  est une mesure sur  $]0, +\infty[$  telle que

$$\int_{]0, +\infty[} \min(r^2, 1) \nu(dr) < +\infty \quad (2.1)$$

De plus  $\dot{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} := \sum_{i=0}^d \dot{\xi}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ ;  $\Delta_{\dot{\xi}}^{\mathbb{H}^d}$  est le Laplacien sur  $\mathbb{H}^d$  et  $\psi(r, \theta)$  est définie par  $\psi(r, \theta) := \cosh(r)e_0 + \sinh(r) \sum_{i=1}^d \theta^i e_i$ .

**Définition 1** (Processus de Dudley). On appelle processus de Dudley un processus dans  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$  de générateur  $T$  de la forme précédente tel que  $a = 1$  et avec  $\sigma \neq 0$  ou  $\nu \neq 0$ .

De manière plus explicite, un processus de Dudley partant de  $o$  s'écrit  $(\dot{\xi}_t, \xi_t)$  où  $\dot{\xi}_t$  est un processus de Markov  $PSO(1, d)$ -invariant dans  $\mathbb{H}^d$ , partant de  $e_1$ , et  $\xi_t = \int_0^t \dot{\xi}_s ds$ . Le processus markovien  $\dot{\xi}_t$  possède une partie diffusive paramétrée par  $\sigma$  et une partie à sauts radiaux paramétrée par la mesure  $\nu$  sur  $]0, +\infty[$ .

Notons  $\pi$  et  $\tilde{\pi}$  les projections de  $PSO(1, d)$  dans  $\mathbb{H}^d$  et de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$  :

$$\begin{array}{ccc} \pi : PSO(1, d) & \rightarrow & \mathbb{H}^d \\ A & \mapsto & A(e_0) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\pi} : \mathcal{G} & \rightarrow & \mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d} \\ (A, \xi) & \mapsto & (A(e_0), \xi) \end{array}$$

De plus, introduisons l'application  $S$  suivante

$$\begin{array}{ccc} S : ]0, +\infty[ \times \mathbb{S}^d & \longrightarrow & PSO(1, d) \\ (r, \theta) & \longmapsto & \exp(r \sum_{i=1}^d \theta^i V_i), \end{array}$$

de sorte que  $S \circ \psi^{-1}$  est une section de  $\pi$ .

Nous noterons  $\Pi$  la mesure de Lévy sur  $PSO(1, d)$   $Ad(K)$ -invariante définie par

$$\forall f \in C_c^\infty(PSO(1, d)), \quad \int_{PSO(1, d)} f(g) \Pi(dg) := \int_{K \times \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}^+} f(kS(r, \theta)k^{-1}) Haar_K(dk) d\theta \nu(dr).$$

Pour  $g \in PSO(1, d)$ , différent de  $Id$ , nous noterons  $r(g)$  et  $\theta^i(g)$  les coordonnées dans la décomposition polaire de sorte qu'on ait  $g = S(r(g), \theta(g))R$  avec  $R \in K$ . Enfin nous notons  $U_0 := \{g \in PSO(1, d); \quad r(g) \leq 1\}$ .

D'après le Théorème 2.2 p 43 de [61] les processus de Markov  $\mathcal{G}$ -invariants de  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$  sont obtenus comme projection de processus de Lévy invariants à gauche et  $K$ -invariants à droite dans  $\mathcal{G}$ . Précisément on obtient la proposition suivante.

**Proposition 12.** Soit  $\tilde{A}_t$  un processus de Lévy sur  $\mathcal{G}$  partant de  $\text{Id}$  généré par  $\mathcal{L}$  défini, en  $\text{Id}$  et pour  $f \in C_c^\infty(\mathcal{G})$ , par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(\text{Id}) &= H_0^l f(\text{Id}) + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^d (V_i^l)^2 f(\text{Id}) + \\ &\int_{PSO(1,d)} \left( f(g, 0) - f(\text{Id}) - r(g) \mathbf{1}_{U_0}(g) \sum_{i=1}^d \theta^i(g) V_i^l f(\text{Id}) \right) \Pi(dg), \end{aligned}$$

alors  $\tilde{\pi}(\tilde{A}_t)$  est un processus de Dudley dans  $\mathbb{H} \times \mathbb{R}^{1,d}$  partant de  $o$ .

Un processus de Dudley partant de  $o$  se relève donc dans  $\mathcal{G}$  en un processus  $\tilde{A}_s = \begin{pmatrix} A_t & \xi_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , où  $A_t$  est un processus de Lévy dans  $PSO(1, d)$ , partant de  $\text{Id}$  invariant à gauche et  $K$ -invariant à droite. Le projeté  $\xi_t$  de  $\tilde{A}_t$  dans  $\mathbb{R}^{1,d}$  est l'intégrale en temps de la première colonne de  $A_t$  c'est-à-dire

$$\xi_t := \int_0^t A_s(e_0) ds.$$

## 2.3 Comportement asymptotique du processus $\tilde{A}_t$

Dans cette partie nous déterminons le comportement asymptotique de  $\tilde{A}_t$  en exhibant deux variables asymptotiques  $\theta_\infty \in S^d$  qui est l'angle asymptotique du processus  $\tilde{\xi}_t$  et  $\lambda_\infty > 0$  qui décrit la position d'un hyperplan asymptotique pour le processus  $\xi_t$  dans  $\mathbb{R}^{1,d}$ . Lorsqu'on suppose une condition d'intégrabilité pour la mesure de Lévy  $\nu$  nous obtenons un taux de convergence qui se trouve être suffisant pour décrire complètement le spectre de Lyapunov dans la section suivante.

Le comportement asymptotique de  $\tilde{A}_t$  se déduit du comportement asymptotique de  $A_t$  qui est un processus de Lévy dans  $PSO(1, d)$  invariant à gauche et  $K$ -invariant à droite, partant de  $\text{Id}$ , dont le générateur (calculé en  $\text{Id}$  et pour  $f \in C_c^\infty(PSO(1, d))$ ) est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}f(\text{Id}) &= \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^d (V_i^l)^2 f(\text{Id}) + \\ &\int_{PSO(1,d)} \left( f(g, 0) - f(\text{Id}) - r(g) \mathbf{1}_{U_0}(g) \sum_{i=1}^d \theta^i(g) V_i^l f(\text{Id}) \right) \Pi(dg). \end{aligned}$$

De manière générale, l'étude du comportement asymptotique d'un processus de Lévy dans un groupe de Lie semi-simple peut s'obtenir en utilisant des coordonnées

d'Iwasawa. Rappelons la décomposition en somme directe d'Iwasawa de  $so(1, d) := Lie(PSO(1, d))$  ([54]) :

$$so(1, d) = \bar{\mathcal{N}} \oplus \mathcal{A} \oplus \mathcal{K}, \quad (2.2)$$

où

$$\mathcal{A} := \text{Vect}\{V_1\}, \quad \bar{\mathcal{N}} := \text{Vect}\{V_i - V_{1i}, i = 2, \dots, d\}, \quad \mathcal{K} := \text{Vect}\{V_{ij}, 1 = i < j = d\}.$$

Pour  $X \in so(1, d)$ , on note  $\{X\}_{\bar{\mathcal{N}}}$ ,  $\{X\}_{\mathcal{A}}$  et  $\{X\}_{\mathcal{K}}$  les projections de  $X$  sur  $\bar{\mathcal{N}}$ ,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{K}$  dans la décomposition (2.2). Ainsi  $K = \exp(\mathcal{K})$  est un sous-groupe compact maximal,  $\mathcal{A}$  est une algèbre de Lie abélienne maximale dans le supplémentaire de  $\mathcal{K}$  pour la métrique de Killing. De plus pour  $X \in \bar{\mathcal{N}}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a  $ad(\alpha V_1)X = -\alpha X$ . Nous notons  $\bar{N} := \exp(\bar{\mathcal{N}})$  et, dans cette section exclusivement, la lettre  $A$  désignera le sous-groupe abélien  $A := \exp(\mathcal{A})$  et on notera  $g$  une matrice de  $PSO(1, d)$  (qui sera notée  $A$  en dehors de cette section). De même, uniquement dans le cadre de cette section, nous noterons  $g_t$  le processus  $A_t$ . L'application de  $\bar{N} \times A \times K$  dans  $PSO(1, d)$  qui à  $(n, a, k)$  associe le produit  $nak$  est un difféomorphisme analytique. Toute matrice  $g \in PSO(1, d)$  se décompose de manière unique comme produit  $g = (g)_{\bar{N}}(g)_A(g)_K$ . Et on note  $n_t := (g_t)_{\bar{N}}$ ,  $a_t := (g_t)_A$  et  $k_t := (g_t)_K$  de sorte que

$$g_t = n_t a_t k_t.$$

Commençons par décrire le comportement asymptotique dans la décomposition d'Iwasawa de  $g_t$ . Nous allons supposer l'hypothèse d'intégrabilité suivante :

**Hypothèse :**

$$\int_1^{+\infty} r\nu(dr) < +\infty.$$

On obtient la proposition suivante

**Proposition 13.** *Dans la décomposition d'Iwasawa  $g_t = n_t a_t k_t$ , le processus réel  $\alpha_t$  tel que  $a_t = \exp(\alpha_t V_1)$  converge presque sûrement vers un réel  $\alpha$  qui s'exprime explicitement en fonction de  $\nu$  et  $\sigma$*

$$\alpha := \frac{d-1}{2}\sigma^2 + \int_0^{+\infty} \frac{r \cosh(r) - \sinh(r)}{\sinh(r)} \nu(dr).$$

De plus, puisque  $\int_1^{+\infty} r\nu(dr) < +\infty$  on obtient que  $\alpha$  est un réel strictement positif.

*Démonstration.* Commençons par écrire l'équation différentielle stochastique satisfait par  $g_t$ . La formule d'Itô, donnée dans [3], s'écrit pour  $f \in C^2(PSO(1, d))$

$$\begin{aligned}
f(g_t) = f(Id) &+ \sigma \sum_{i=1}^d \int_0^t V_i^l f(g_{s-}) dB_s^i + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^d \int_0^t (V_i^l)^2 f(g_{s-}) ds + \quad (*) \\
&+ \int_0^t \int_{U_0} (f(g_{s-}g) - f(g_{s-})) \tilde{N}(ds, dg) \\
&+ \int_0^t \int_{U_0} \left( f(g_{s-}g) - f(g_{s-}) - r(g) \sum_{i=1}^d \theta^i(g) V_i^l f(g_{s-}) \right) ds \Pi(dg) \\
&+ \int_0^t \int_{U_0^c} (f(g_{s-}g) - f(g_{s-})) N(ds, dg),
\end{aligned}$$

où  $B_t$  est un brownien de  $\mathbb{R}^d$ ,  $N$  est une mesure de Poisson aléatoire associée à la mesure de Lévy  $\Pi$  et  $\tilde{N} := N - dt\Pi(dg)$  est la mesure compensée associée.

Nous allons appliquer cette formule à  $f : g \mapsto \log(g)_A$ . Commençons par remarquer que pour  $g, u \in PSO(1, d)$  on a  $(gu)_A = (g)_A (Ad(k)u)_A$  et donc

$$f(g_{s-}g) - f(g_{s-}) = \log(Ad(k_{s-})g)_A.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
V_i^l f(g_{s-}) &= \frac{d}{dt} \log(g_{s-} e^{tV_i})_A \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \log(e^{tAd(k_{s-})V_i})_A \Big|_{t=0} = \{Ad(k_{s-})V_i\}_A \\
(V_i^l)^2 f(g_{s-}) &= \frac{d}{dt} \{Ad(g_{s-} e^{tV_i})_K V_i\}_A \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \{Ad(e^{tAd(k_{s-})V_i})_K Ad(k_{s-})V_i\}_A \Big|_{t=0} \\
&= \{[\{Ad(k_{s-})V_i\}_K, Ad(k_{s-})V_i]\}_A.
\end{aligned}$$

Pour  $k \in K$  on a  $Ad(k)V_i = \sum_{j=1}^d k_{ij}V_j$  et on obtient ainsi :

$$\sum_{i=1}^d \{[\{Ad(k_{s-})V_i\}_K, Ad(k_{s-})V_i]\}_A = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d (k_{s-})_{ij} (k_{s-})_{il} \{[\{V_j\}_K, V_l]\}_A,$$

et puisque  $\{V_j\}_K = 0$  si  $j = 1$  et  $V_{1j}$  sinon et que  $[V_{1j}, V_l] = V_1 \delta_{jl}$  on a finalement

$$\sum_{i=1}^d \{[\{Ad(k_{s-})V_i\}_K, Ad(k_{s-})V_i]\}_A = \sum_{j=2}^d \sum_{i=1}^d ((k_{s-})_{ij})^2 V_1 = (d-1)V_1.$$

Retournons maintenant à l'équation d'Itô qu'on écrit maintenant :

$$\begin{aligned} \log(a_t) &= M_t + \frac{d-1}{2}\sigma^2 t + \int_0^t \int_{U_0^c} \log(Ad(k_{s-})g)_A N(ds, dg) \\ &\quad + \int_0^t \int_{U_0} \log \left( (Ad(k_{s-})g)_A - r(g) \sum_{i=1}^d \theta^i(g) \{Ad(k_{s-})V_i\}_{\mathcal{A}} \right) ds \Pi(dg), \end{aligned}$$

où  $M_t := \sigma \sum_{i=1}^d \int_0^t \{Ad(k_{s-})V_i\}_{\mathcal{A}} dB_s^i + \int_0^t \int_{U_0} (Ad(k_{s-})g)_A \tilde{N}(ds, dg)$  est une martingale. Son crochet vaut  $\sigma^2 \int_0^t \sum_{i=1}^d \|\{Ad(k_{s-})V_i\}_{\mathcal{A}}\|^2 ds + \int_0^t \int_{U_0} \|\log(Ad(k_{s-})g)_A\|^2 ds \Pi(dg) = t \left( \sigma^2 + \int_{U_0} \|\log(g)_A\|^2 \Pi(dg) \right)$  et donc, presque sûrement, on a

$$\frac{M_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

De plus, puisque  $\Pi$  est  $Ad(K)$ -invariante on obtient par le changement de variable  $g' = Ad(k_{s-})g$

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{U_0} \log \left( (Ad(k_{s-})g)_A - r(g) \sum_{i=1}^d \theta^i(g) \{Ad(k_{s-})V_i\}_{\mathcal{A}} \right) ds \Pi(dg) \\ &= \int_0^t \int_{U_0} \log(g')_A - r(g') \sum_{i=1}^d \theta^i(Ad(k_{s-}^{-1})g') \{Ad(k_{s-})V_i\}_{\mathcal{A}} ds \Pi(dg') \\ &= \int_0^t \int_{U_0} \log(g')_A - r(g') \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (k_{s-})_{ij} \theta^j(g') (k_{s-})_{i1} V_1 ds \Pi(dg') \\ &= \int_0^t \int_{U_0} \log(g')_A - r(g') \theta^1(g') V_1 ds \Pi(dg') \\ &= t \int_K \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \log(kS(r, \theta)k^{-1})_A - r\theta^1 V_1 \nu(dr) d\theta Haar_K(dk) \\ &= t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \log(S(r, \theta))_A \nu(dr) d\theta \end{aligned}$$

De plus on a  $\log(S(r, \theta))_A = \log(\cosh(r) + \theta^1 \sinh(r))V_1$  et on obtient finalement :

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{U_0} \log \left( (Ad(k_{s-})g)_A - r(g) \sum_{i=1}^d \theta^i(g) \{Ad(k_{s-})V_i\}_{\mathcal{A}} \right) ds \Pi(dg) \\ &= t \int_0^1 \left( \int_{-1}^1 \log(\cosh(r) + \theta^1 \sinh(r)) \frac{d\theta^1}{2} \right) \nu(dr) \\ &= t \int_0^1 \frac{r \cosh(r) - \sinh(r)}{\sinh(r)} \nu(dr). \end{aligned}$$

Il reste à déterminer le comportement asymptotique de l'intégrale stochastique  $\int_0^t \int_{U_0^c} \log(\text{Ad}(k_{s-})g)_A N(ds, dg)$ . On sait qu'il existe des temps  $T_i$  de sauts d'un processus de Poisson d'intensité  $\Pi(U_0^c)$  et des variables aléatoires  $g_n$  i.i.d. de loi  $\Pi|_{U_0^c}/\Pi(U_0^c)$  et indépendantes des  $T_i$  tels que :

$$\int_0^t \int_{U_0^c} \log(\text{Ad}(k_{s-})g)_A N(ds, dg) = \sum_{n, T_n \leq t} \log(\text{Ad}(k_{T_n^-})g_n)_A.$$

De plus, puisque  $\Pi$  est  $\text{Ad}(K)$ -invariante, les variables  $g'_n := \text{Ad}(k_{T_n^-})g_n$  sont i.i.d de loi  $\Pi|_{U_0^c}/\Pi(U_0^c)$  et on a :

$$\int_0^t \int_{U_0^c} \log(\text{Ad}(k_{s-})g)_A N(ds, dg) = \sum_{n=1}^{N_t} \log(g'_n)_A,$$

où  $N_t$  est un processus de Poisson d'intensité  $\Pi(U_0^c)$  et indépendant des  $g'_n$ . De plus si  $\int_1^{+\infty} r\nu(dr) < +\infty$  alors  $\log(g'_n)_A$  est intégrable et on calcule, comme précédemment, que

$$\mathbb{E}[\log(g'_n)_A] = \frac{1}{\Pi(U_0^c)} \int_1^{+\infty} \frac{r \cosh(r) - \sinh(r)}{\sinh(r)} \nu(dr) V_1.$$

La loi forte des grands nombres permet de conclure que, presque sûrement

$$\frac{1}{t} \int_0^t \int_{U_0^c} (\text{Ad}(k_{s-})g)_A N(ds, dg) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{r \cosh(r) - \sinh(r)}{\sinh(r)} \nu(dr) V_1.$$

□

**Remarque 5.** Dans le cas où  $\int_1^{+\infty} r\nu(dr) = \infty$ , les variables  $\log(g'_n)_A$  n'ont pas de moment d'ordre 1 mais

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left| (\log(g'_n)_A)^- \right| \right] &= \int_1^{+\infty} \int_{-1}^1 -\inf(\log(\cosh(r) + \theta^1 \sinh(r)), 0) \frac{d\theta^1}{2} \nu(dr) \\ &= \int_1^{+\infty} \int_{e^{-r}}^1 -\log(v) \frac{dv}{2 \sinh(r)} \nu(dr) \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{2 \sinh(r)} (1 - e^{-r}(r+1)) \nu(dr) < +\infty, \end{aligned}$$

et en appliquant la loi forte des grands nombres généralisée ([52]) on déduit que presque sûrement

$$\frac{1}{t} \int_0^t \int_{U_0^c} (\text{Ad}(k_{s-})g)_A N(ds, dg) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty.$$

**Proposition 14.** *Dans la décomposition d'Iwasawa  $g_t = n_t a_t k_t$  le processus  $n_t$  converge presque sûrement vers une variable asymptotique  $n_\infty \in \bar{N}$ .*

*Démonstration.* On identifie  $\bar{N}$  à  $\mathbb{R}^{d-1}$  via la base  $(V_i - V_{1i})_{i=2,\dots,d}$  et on applique la formule d'Itô à la fonction  $f \in C^2(PSO(1, d), \mathbb{R}^{d-1})$  définie par  $f(g) := \log(g)_{\bar{N}}$ . Remarquons que pour  $g, u \in PSO(1, d)$  :

$$(gu)_{\bar{N}} = (g)_{\bar{N}} Ad((g)_A) \cdot ((g)_K u)_{\bar{N}},$$

de sorte que  $f(g_{s-}g) - f(g) = Ad(a_{s-}) \log(Ad(k_{s-})g)_{\bar{N}} = e^{-\alpha_s} \log(Ad(k_{s-})g)_{\bar{N}}$ . De plus, nous calculons

$$\begin{aligned} V_i^l f(g_{s-}) &= \left. \frac{d}{dt} \log(g_{s-} e^{tV_i})_{\bar{N}} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \log(Ad(a_{s-}) \cdot (e^{tAd(k_{s-})V_i})_{\bar{N}}) \right|_{t=0} \\ &= Ad(a_{s-}) \{Ad(k_{s-})V_i\}_{\bar{N}} = e^{-\alpha_{s-}} \{Ad(k_{s-})V_i\}_{\bar{N}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (V_i^l)^2 f(g_{s-}) &= \left. \frac{d}{dt} Ad((g_{s-} e^{tV_i})_A) \{Ad((g_{s-} e^{tV_i})_K) V_i\}_{\bar{N}} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} Ad(a_{s-}) \circ Ad(e^{tAd(k_{s-})V_i})_A \{Ad(e^{tAd(k_{s-})V_i})_K (Ad(k_{s-})V_i)\}_{\bar{N}} \right|_{t=0} \\ &= Ad(a_{s-}) \left( [\{Ad(k_{s-})V_i\}_{\mathcal{A}}, \{Ad(k_{s-})V_i\}_{\bar{N}}] + [\{Ad(k_{s-})V_i\}_{\mathcal{K}}, Ad(k_{s-})V_i]_{\bar{N}} \right) \\ &= e^{-\alpha_{s-}} \phi_i^{\bar{N}}(k_{s-}), \end{aligned}$$

où nous notons  $\phi_i^{\bar{N}}(k_{s-})$  le terme  $\phi^{\bar{N}}(k_{s-}) := [\{Ad(k_{s-})V_i\}_{\mathcal{A}}, \{Ad(k_{s-})V_i\}_{\bar{N}}] + [\{Ad(k_{s-})V_i\}_{\mathcal{K}}, Ad(k_{s-})V_i]_{\bar{N}}$  qui, par ailleurs, est à valeurs dans  $\bar{N}$ .

Écrivons maintenant la formule d'Itô pour  $f(g_t)$  :

$$\begin{aligned} \log(n_t) &= \int_0^t \sum_{i=1}^d e^{-\alpha_{s-}} \{Ad(k_{s-})V_i\}_{\bar{N}} dB_s^i + \int_0^t \int_{U_0} e^{-\alpha_{s-}} \log(Ad(k_{s-})u) \tilde{N}(ds, du) \\ &\quad + \int_0^t e^{-\alpha_{s-}} \sum_{i=1}^d \phi_i^{\bar{N}}(k_{s-}) ds + \sum_{n=0}^{N_t} e^{-\alpha_{T_n-}} \log(Ad(k_{T_n-})g'_n)_{\bar{N}} \\ &\quad + \int_0^t \int_{U_0} e^{-\alpha_{s-}} \left( \log(Ad(k_{s-})g)_N - r(g) \sum_{i=1}^d \theta^i(g) \{Ad(k_{s-})\}_{\bar{N}} \right) d\Pi(g) ds, \end{aligned}$$

où, comme précédemment,  $(g'_n)_n$  sont des variables aléatoires i.i.d de loi  $\Pi|_{U_0^c}/\Pi(U_0^c)$  et indépendantes du processus de Poisson  $N_t$  d'intensité  $\Pi(U_0^c)$  et dont les temps de sauts sont les  $(T_n)$ .



On va montrer que chacun de ces cinq termes converge presque sûrement. Cela provient essentiellement de la convergence de  $\alpha_t/t$  vers  $\alpha > 0$ . Les deux premiers termes sont des martingales presque convergentes car leurs crochets, dominés par  $\int_0^t e^{-2\alpha s} ds$ , convergent presque sûrement lorsque  $t \rightarrow \infty$ . De même, la troisième et la cinquième intégrale sont presque sûrement convergentes, leurs intégrandes étant dominés par  $e^{-\alpha s}$ . Il reste à se convaincre que le quatrième terme converge également presque sûrement. Lorsque  $\Pi(U_0^c) = 0$  le terme est nul et on supposera que  $\Pi(U_0^c) > 0$ . Remarquons d'abord que pour  $g \in PSO(1, d)$ ,  $\|\log(g)_{\bar{N}}\| \leq r(g)$  et on obtient ainsi  $\mathbb{E}[\|\log(Ad(k_{T_n} g'_n))_{\bar{N}}\|] \leq \mathbb{E}[r(g'_n)] = \int_1^{+\infty} r d\nu(r) < +\infty$ . De plus  $\alpha_{T_n}/n$  converge presque sûrement vers  $\alpha\Pi(U_0^c) > 0$  et le résultat découle du lemme élémentaire suivant :

**Lemme 5.** *Soit  $\tilde{\alpha}_n$  et  $X_n$  deux suites de variables aléatoires réelles tels que  $\tilde{\alpha}_n/n$  converge presque sûrement vers une constante  $\tilde{\alpha} > 0$  et  $\exists C > 0, \forall n \mathbb{E}[|X_n|] \leq C$ , alors la série  $\sum e^{-\tilde{\alpha}_n} X_n$  converge presque sûrement.*

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe presque sûrement un entier  $n_0$  tel que  $\forall n \geq n_0, \tilde{\alpha}_n \geq (\tilde{\alpha} - \varepsilon)n$ . On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\tilde{\alpha}_n} |X_n| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} e^{-\tilde{\alpha}_n} |X_n| + \sum_{n=n_0}^{\infty} e^{-(\tilde{\alpha}-\varepsilon)n} |X_n| < +\infty,$$

car la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(\tilde{\alpha}-\varepsilon)n} |X_n|$  est finie presque sûrement puisque étant d'espérance finie. □

□

Nous notons  $h_t$  le processus de  $\mathbb{R}^{d-1}$  tel que :

$$n_t = \exp\left(\sum_{i=2}^d h_t^i (V_i - V_{1i})\right) = \begin{pmatrix} 1 + \|h_t\|^2/2 & \|h_t\|^2/2 & h_t^* \\ -\|h_t\|^2/2 & 1 - \|h_t\|^2/2 & -h_t^* \\ h_t & h_t & Id \end{pmatrix}.$$

On a donc  $h_t$  converge presque sûrement vers une variable aléatoire  $h_\infty$  et on peut préciser cette convergence. Précisément, on obtient la proposition suivante :

**Proposition 15.** *Lorsque  $\int_1^{+\infty} r\nu(dr) < +\infty$  on a, pour presque toute trajectoire,*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(\|h_t - h_\infty\|) \leq -\alpha.$$

*Démonstration.* Ce résultat est une conséquence du Théorème 7.3 p 191 de [61], dans lequel Liao montre la convergence exponentielle de la matrice  $Ad(n_t^{-1}n_\infty)$  vers l'identité. Il semble néanmoins que l'on puisse l'obtenir directement à l'aide

du développement d'Itô écrit précédemment pour  $\log(n_t)$  ; mais nous n'avons pas réussi à le démontrer rigoureusement. Remarquons que les résultats de [61] concernant la vitesse de convergence de  $n_t$  sont établis sous l'hypothèse d'intégrabilité correspondant dans notre cas à  $\int_0^{+\infty} r\nu(dr) < +\infty$ . Ici nous supposons seulement que  $\int_1^{+\infty} r\nu(dr) < +\infty$  mais en examinant sa preuve il semble que cette condition suffise pour obtenir le résultat.  $\square$

On déduit des propositions précédentes le comportement asymptotique en coordonnées polaires.

**Proposition 16.** *Dans la décomposition polaire  $g_t = S(r_t, \theta_t)R_t$  on a*

$$\frac{r_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \alpha \quad \text{et} \quad \theta_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \theta_\infty,$$

de plus on a presque sûrement

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log d(\theta_t, \theta_\infty) \leq -\alpha,$$

où  $d$  désigne la métrique riemannienne sur  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

*Démonstration.* On a explicitement  $\cosh(r_t) = \cosh(\alpha_t) + e^{\alpha_t} \|h_t\|^2/2$  et donc  $e^{r_t} \sim e^{\alpha_t} (1 + \|h_\infty\|^2)$ , d'où  $r_t/t \rightarrow \alpha$ .

De plus

$$\theta_t = \frac{1}{\sinh(r_t)} \begin{pmatrix} e^{-\alpha_t}/2 + e^{\alpha_t} (\|h_t\|^2 - 1)/2 \\ e^{\alpha_t} h_t \end{pmatrix},$$

avec  $\sinh(r_t) = \sqrt{(\sinh(\alpha_t) - e^{\alpha_t} \|h_t\|^2/2)^2 + e^{2\alpha_t} \|h_t\|^2} = e^{\alpha_t} (1 + \|h_t\|^2)/2 + O(e^{-\alpha_t})$  on déduit que

$$\begin{aligned} \theta_t &= \left( \frac{2}{1 + \|h_t\|^2} + O(e^{-\alpha_t}) \right) \begin{pmatrix} (1 - \|h_t\|^2)/2 + O(e^{-2\alpha_t}) \\ h_t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 + \|h_\infty\|^2} \begin{pmatrix} 1 - \|h_\infty\|^2 \\ 2h_\infty \end{pmatrix} + O(\|h_t - h_\infty\|) + O(e^{-\alpha_t}). \end{aligned}$$

On a donc

$$\theta_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \frac{1}{1 + \|h_\infty\|^2} \begin{pmatrix} 1 - \|h_\infty\|^2 \\ 2h_\infty \end{pmatrix},$$

et de plus que  $d(\theta_t, \theta_\infty) = 1 - \theta_t \cdot \theta_\infty = (\theta_\infty - \theta_t) \cdot \theta_\infty = O(\|h_t - h_\infty\|) + O(e^{-\alpha t})$ , d'où le résultat.  $\square$

Désormais nous n'utiliserons plus, dans ce chapitre, la décomposition d'Iwasawa dans  $PSO(1, d)$  et le processus de Levy de  $g_t$  sera de nouveau noté  $A_t$  et désignera une matrice. La décomposition polaire est  $A_t = S(r_t, \theta_t)R_t$ . Le comportement asymptotique de la composante  $\xi_t := \int_0^t A_s(e_0)ds$  du processus de Dudley est décrit dans la proposition suivante :

**Proposition 17.** *La composante  $\xi_t$  du processus de Dudley qui est à valeurs dans l'espace-temps de Minkowski est asymptotiquement tangent à un hyperplan affine de direction  $q$ -orthogonale à  $e_0 + \theta_\infty$ . Plus précisément, il existe une variable aléatoire réelle asymptotique  $\lambda_\infty$  telle que*

$$q(\xi_t, e_0 + \theta_t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \lambda_\infty.$$

*Démonstration.* C'est un calcul direct :

$$q(\xi_t, e_0 + \theta_t) = \int_0^t (e^{-r_s} + \sinh(r_s)(1 - \theta_s \cdot \theta_t)) ds,$$

puisque que  $r_s/s \rightarrow \alpha$  p.s on obtient que  $\int_0^t e^{-r_s} ds$  converge presque sûrement. De plus  $1 - \theta_s \cdot \theta_t = \|\theta_s - \theta_\infty\|^2/2 + \|\theta_t - \theta_\infty\|^2/2 + (\theta_t - \theta_\infty) \cdot (\theta_s - \theta_\infty)$  et au vu de la proposition 16 on obtient la convergence presque sûre des termes suivants :

$$\int_0^t \sinh(r_s) \|\theta_s - \theta_\infty\|^2 ds, \quad \|\theta_t - \theta_\infty\|^2 \int_0^t \sinh(r_s) ds, \quad (\theta_t - \theta_\infty) \cdot \int_0^t \sinh(r_s) (\theta_s - \theta_\infty) ds.$$

□

**Remarque 6.** *Dans le cas où  $\tilde{A}_t$  admet une loi régulière par rapport à la mesure de Haar sur  $\mathcal{G}$ , il semble qu'on puisse démontrer, en suivant la même preuve que dans [9], que la frontière de Poisson est précisément engendrée par le couple de variable aléatoire  $(\theta_\infty, \lambda_\infty)$ . Ce résultat, connu pour les diffusions de Dudley, semble ainsi être également valable pour une large classe de processus de Dudley. La question reste cependant ouverte lorsqu'on ne suppose plus la condition d'intégrabilité de la mesure de Lévy. Il serait intéressant d'utiliser les résultats de [50] ou [23] pour résoudre ce problème.*

## 2.4 Calcul du spectre de Lyapunov

Nous commençons par introduire une bonne norme dans  $Lie(\mathcal{G})$  qui nous permettra d'exprimer la quantité que l'on veut estimer comme une somme de six termes. Plusieurs propositions, qui découleront des résultats de convergence obtenus dans la section précédente, seront établies pour permettre, in fine, de calculer le spectre de Lyapunov.

### 2.4.1 Flot, métrique et diagonalisation

#### 2.4.1.1 Flot dans le groupe de Poincaré

Le processus de Lévy invariant à gauche  $\tilde{A}_t$  est solution de l'équation intégrodifférentielle (\*) (p 59) et définit un flot stochastique invariant à gauche  $\phi_t$  dans le

groupe de Poincaré :

$$\phi_t(\tilde{A}) := \tilde{A}\tilde{A}_t,$$

où  $\tilde{A}_t$  est une trajectoire aléatoire dans le groupe de Poincaré partant de  $Id$ . Dans cette section nous allons déterminer le spectre de Lyapunov. Plus précisément nous allons calculer le taux de dilatation ou de contraction d'un vecteur tangent à un point du groupe lorsqu'il est poussé par le flot, c'est-à-dire que nous calculons, pour  $\tilde{A} \in \mathcal{G}$  et  $\tilde{B} \in Lie(\mathcal{G})$  la limite suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|D\phi_t(\tilde{A})(\tilde{A}\tilde{B})\|_{\tilde{A}\tilde{A}_t}^{1/t}.$$

Le résultat ne dépend pas (la dimension est finie) de la métrique  $\|\cdot\|$  invariante à gauche sur  $\mathcal{G}$  choisie et nous allons en introduire une particulière qui est pratique pour mener les calculs.

La différentielle de  $\phi_t$  est donnée par

$$D\phi_t(\tilde{A}) : \begin{array}{ccc} T_{\tilde{A}}\mathcal{G} & \longrightarrow & T_{\tilde{A}\tilde{A}_t}\mathcal{G} \\ \tilde{A}\tilde{B} & \longmapsto & \tilde{A}\tilde{B}\tilde{A}_t = \tilde{A}\tilde{A}_t(\tilde{A}_t^{-1}\tilde{B}\tilde{A}_t) \end{array}$$

nous obtenons pour une métrique  $\|\cdot\|$  sur  $\mathcal{G}$  invariante à gauche :

$$\begin{aligned} \|D\phi_t(\tilde{A})(\tilde{A}\tilde{B})\|_{\phi_t(\tilde{A})} &= \|\tilde{A}_t^{-1}\tilde{B}\tilde{A}_t\|_{Id} \\ &= \|A_t^{-1}\tilde{B}\tilde{A}_t\|_{Id}. \end{aligned}$$

#### 2.4.1.2 Métrique dans le groupe de Poincaré

Introduisons la métrique, notée  $\|\cdot\|$ , invariante à gauche définie en  $Id$  et dans la direction  $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & e^* & \eta^0 \\ e & C & \vec{\eta} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Lie(\mathcal{G})$  par

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}\tilde{B}\|_{\tilde{A}}^2 &= \|\tilde{B}\|_I^2 \\ &= \|\eta\|^2 + \frac{1}{2}\text{Trace}(C^*C) + \|e\|^2; \end{aligned}$$

où  $\|\cdot\|$  désigne également la norme Euclidienne usuelle dans  $\mathbb{R}^{d+1}$  et  $\mathbb{R}^d$ .

Rappelons que  $K$  est le sous-groupe de  $\mathcal{G}$  isomorphe à  $SO(d)$  qui stabilise  $e_0$ . Un  $\tilde{R} \in K$  s'écrit

$$\tilde{R} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R \in SO(d).$$

Explicitons l'action adjointe d'un élément  $\tilde{A} := (A, \xi) \in \mathcal{G}$  sur  $\tilde{B} := (B, \eta) \in \text{Lie}(\mathcal{G})$  :

$$\tilde{A}^{-1}\tilde{B}\tilde{A} = \begin{pmatrix} A^{-1}BA & A^{-1}\eta + A^{-1}B\xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De sorte que

$$\|\tilde{A}^{-1}\tilde{B}\tilde{A}\|_{Id}^2 = \|A^{-1}BA\|^2 + \|A^{-1}\eta + A^{-1}B\xi\|^2.$$

Nous vérifions alors que la métrique  $\|\cdot\|$  est invariante par conjugaison par les éléments de  $K$  :

$$\|\text{Ad}(\tilde{R})(\tilde{B})\| = \|\tilde{R}\tilde{B}\tilde{R}^{-1}\| = \|\tilde{B}\|.$$

Ainsi, en utilisant la décomposition polaire  $A_t = S(r_t, \theta_t)R_t$  introduite précédemment nous obtenons une forme simplifiée pour la norme au carré de la différentielle, qui ne dépend plus de  $R_t$

$$\|\tilde{A}_t^{-1}\tilde{B}\tilde{A}_t\|_I^2 = \|S(r_t, \theta_t)^{-1}BS(r_t, \theta_t)\|^2 + \|S(r_t, \theta_t)^{-1}\eta + S(r_t, \theta_t)^{-1}B\xi_t\|^2. \quad (2.3)$$

De plus

$$\begin{aligned} S(r_t, \theta_t)^{-1}BS(r_t, \theta_t) &= \text{Ad}(S(r_t, \theta_t)^{-1})B \\ &= \exp\left(-r_t \text{ad}\begin{pmatrix} 0 & \theta_t^* \\ \theta_t & 0 \end{pmatrix}\right)B, \end{aligned}$$

et afin de déterminer le comportement asymptotique de (2.3) nous allons donner la diagonalisation de  $\text{ad}\begin{pmatrix} 0 & \theta_t^* \\ \theta_t & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & \theta_t^* \\ \theta_t & 0 \end{pmatrix}$ .

### 2.4.1.3 Diagonalisations

La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & \theta_t^* \\ \theta_t & 0 \end{pmatrix}$  définit naturellement un endomorphisme of  $\mathbb{R}^{1,d}$  et ses valeurs propres sont -1,0, 1 associées respectivement aux espaces propres :

$$\begin{aligned} U_t^+ &:= \left\{ u \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta_t \end{pmatrix}; u \in \mathbb{R} \right\} \\ U_t^0 &:= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R}^d, x \cdot \theta_t = 0 \right\} \\ U_t^- &:= \left\{ u \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_t \end{pmatrix}; u \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Ces notations seront cohérentes lorsqu'on diagonalise  $S(r_t, \theta_t)^{-1}$  et  $Ad(S(r_t, \theta_t)^{-1})$  : puisque  $U_t^+$  est l'espace propre des directions dilatées exponentiellement (d'où le +) et  $U_t^-$  l'espace des directions contractées exponentiellement (d'où le -).

Nous obtenons de plus  $\mathbb{R}^{1,d} = U_t^+ \oplus U_t^0 \oplus U_t^-$  et cette somme directe est orthogonale pour la métrique Euclidienne usuelle dans  $\mathbb{R}^{1,d} = \mathbb{R}^{1+d}$ .

Nous notons  $\pi_t^+$ ,  $\pi_t^0$ ,  $\pi_t^-$  les projections associées à cette décomposition. Pour  $\eta = (\eta_0, \vec{\eta}) \in \mathbb{R}^{1,d}$  nous avons explicitement :

$$\begin{aligned}\pi_t^+(\eta) &= \frac{1}{2}(\eta_0 - \vec{\eta} \cdot \theta_t) \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta_t \end{pmatrix} \\ \pi_t^0(\eta) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\eta} - (\vec{\eta} \cdot \theta_t)\theta_t \end{pmatrix} \\ \pi_t^-(\eta) &= \frac{1}{2}(\eta_0 + \vec{\eta} \cdot \theta_t) \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

L'endomorphisme  $\text{ad} \begin{pmatrix} 0 & \theta_t^* \\ \theta_t & 0 \end{pmatrix}$  de  $so(1, d)$  est diagonalisable avec valeurs propres -1, 0, 1 associées respectivement aux sous-espaces propres :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_t^+ &:= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -e^* \\ -e & \theta_t e^* - e\theta_t^* \end{pmatrix}; e \in \mathbb{R}^d, e \cdot \theta_t = 0 \right\} \\ \mathcal{U}_t^0 &:= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u\theta_t^* \\ u\theta_t & C \end{pmatrix}; u \in \mathbb{R}, C^* = -C, C\theta_t = 0 \right\} \\ \mathcal{U}_t^- &:= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & e^* \\ e & \theta_t e^* - e\theta_t^* \end{pmatrix}; e \in \mathbb{R}^d, e \cdot \theta_t = 0 \right\}.\end{aligned}$$

De plus nous obtenons la décomposition  $so(1, d) = \mathcal{U}_t^+ \oplus \mathcal{U}_t^0 \oplus \mathcal{U}_t^-$  qui est orthogonale pour la métrique sur  $so(1, d)$  :  $\left\| \begin{pmatrix} 0 & e^* \\ e & C \end{pmatrix} \right\|^2 = \|e\|^2 + \frac{1}{2}\text{Trace}(C^*C)$ . En prenant soin de ne pas confondre avec les projections précédentes, nous noterons également  $\pi_t^+$ ,  $\pi_t^0$ ,  $\pi_t^-$  les projections associées à cette décomposition. Pour  $B = \begin{pmatrix} 0 & e^* \\ e & C \end{pmatrix} \in so(1, d)$  nous calculons explicitement :

$$\begin{aligned}\pi_t^+(B) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & (e - (e \cdot \theta_t)\theta_t + C\theta_t)^* \\ (e - (e \cdot \theta_t)\theta_t + C\theta_t) & (e + C\theta_t)\theta_t^* - \theta_t(e + C\theta_t)^* \end{pmatrix} \\ \pi_t^0(B) &= \begin{pmatrix} 0 & (e \cdot \theta_t)\theta_t^* \\ (e \cdot \theta_t)\theta_t & C + \theta_t(C\theta_t)^* - (C\theta_t)\theta_t^* \end{pmatrix} \\ \pi_t^-(B) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & (e - (e \cdot \theta_t)\theta_t - C\theta_t)^* \\ (e - (e \cdot \theta_t)\theta_t - C\theta_t) & \theta_t(e - C\theta_t)^* - (e - C\theta_t)\theta_t^* \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**Action des éléments de  $\mathcal{U}_t^{+,0,-}$  sur ceux de  $U_t^{+,0,-}$**

Pour  $B^i \in \mathcal{U}_t^i$  et  $\eta^i \in U_t^i$  pour  $i = -, 0, +$ , on trouve que

$$\begin{aligned} B^+ \eta^+ &= 0 & B^+ \eta^0 &\in U_t^+ & B^+ \eta^- &\in U_t^0 \\ B^- \eta^+ &\in U_t^0 & B^- \eta^0 &\in U_t^- & B^- \eta^- &= 0 \\ B^0 \eta^+ &\in U_t^+ & B^0 \eta^0 &\in U_t^0 & B^0 \eta^- &\in U_t^-. \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \pi_t^+(B\eta) &= \pi_t^+(B)\pi_t^0(\eta) + \pi_t^0(B)\pi_t^+(\eta) \\ \pi_t^0(B\eta) &= \pi_t^0(B)\pi_t^0(\eta) + \pi_t^+(B)\pi_t^-(\eta) + \pi_t^-(B)\pi_t^+(\eta) \\ \pi_t^-(B\eta) &= \pi_t^-(B)\pi_t^0(\eta) + \pi_t^0(B)\pi_t^-(\eta). \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant exprimer  $\|\tilde{A}_t^{-1}\tilde{B}\tilde{A}_t\|_I^2$  comme une somme de six termes :

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}_t^{-1}\tilde{B}\tilde{A}_t\|_I^2 &= \exp(2r_t)\|\pi_t^+(B)\|^2 + \|\pi_t^0(B)\|^2 + \exp(-2r_t)\|\pi_t^-(B)\|^2 \\ &\quad + \exp(2r_t)\|\pi_t^+(\eta + B\xi_t)\|^2 + \|\pi_t^0(\eta + B\xi_t)\|^2 + \exp(-2r_t)\|\pi_t^-(\eta + B\xi_t)\|^2 \\ &= \exp(2r_t)\|\pi_t^+(B)\|^2 + \|\pi_t^0(B)\|^2 + \exp(-2r_t)\|\pi_t^-(B)\|^2 \quad (2.4) \\ &\quad + \exp(2r_t)\|\pi_t^+(\eta) + \pi_t^+(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^0(B)\pi_t^+(\xi_t)\|^2 \quad (2.5) \\ &\quad + \|\pi_t^0(\eta) + \pi_t^0(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^+(B)\pi_t^-(\xi_t) + \pi_t^-(B)\pi_t^+(\xi_t)\|^2 \quad (2.6) \\ &\quad + \exp(-2r_t)\|\pi_t^-(\eta) + \pi_t^-(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^0(B)\pi_t^-(\xi_t)\|^2. \quad (2.7) \end{aligned}$$

## 2.4.2 Calculs asymptotiques

Afin de pouvoir décrire le comportement asymptotique de chacun de ces six termes nous allons démontrer une série de quatre propositions qui seront utiles pour pouvoir calculer le spectre de Lyapunov dans la section suivante.

**Proposition 18.**

(i) Pour  $\eta \in \mathbb{R}^{1,d}$  les limites p.s suivantes existent  $\eta^+ := \lim_{\infty} \pi_t^+(\eta)$ ,  $\eta^0 := \lim_{\infty} \pi_t^0(\eta)$ ,  $\eta^- := \lim_{\infty} \pi_t^-(\eta)$  et nous obtenons de plus :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^i(\eta) - \eta^i\| \leq -\alpha, \quad \text{pour } i \in \{+, 0, -\}.$$

(ii) Pour  $B \in so(1, d)$ , les limites p.s suivantes existent :  $B^+ := \lim_{\infty} \pi_t^+(B)$ ,  
 $B^0 := \lim_{\infty} \pi_t^0(B)$ ,  $B^- := \lim_{\infty} \pi_t^-(B)$  et nous avons également :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^i(B) - B^i\| \leq -\alpha, \quad \text{pour } i \in \{+, 0, -\}.$$

**Remarque 7.** Prêtons attention au fait que  $\eta_0$  désigne la première coordonnée de  $\eta \in \mathbb{R}^{1,d}$  tandis que  $\eta^0$  est la limite de la projection de  $\eta$  sur  $U_t^0$ .

*Démonstration.* L'existence des limites est une conséquence immédiate des expressions explicites des projections et de la proposition 16. De plus on obtient la vitesse de convergence des projections en utilisant, toujours d'après la proposition 16, que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\theta_t - \theta_{\infty}\| \leq -\alpha.$$

En effet,

$$\pi_t^+(\eta) - \eta^+ = \frac{1}{2} \left( \eta_0(\theta_{\infty} - \theta_t) + (\vec{\eta} \cdot \theta_t)(\theta_t - \theta_{\infty}) + \vec{\eta} \cdot (\theta_t - \theta_{\infty})\theta_{\infty} \right),$$

et ainsi

$$\|\pi_t^+(\eta) - \eta^+\| \leq \left( \frac{3}{2} \|\vec{\eta}\| + \frac{1}{2} |\eta_0| \right) \|\theta_t - \theta_{\infty}\|.$$

De la même manière on obtient

$$\|\pi_t^-(\eta) - \eta^-\| = O(\|\theta_t - \theta_{\infty}\|).$$

Également,

$$\begin{aligned} \|\pi_t^0(\eta) - \eta^0\| &= \|(\vec{\eta} \cdot \theta_t)\theta_t - (\vec{\eta} \cdot \theta_{\infty})\theta_{\infty}\| \\ &= \|(\vec{\eta} \cdot \theta_t)(\theta_{\infty} - \theta_t) + (\vec{\eta} \cdot (\theta_t - \theta_{\infty}))\theta_{\infty}\| \\ &\leq 2\|\vec{\eta}\| \|\theta_t - \theta_{\infty}\|. \end{aligned}$$

En ce qui concerne les projections à valeurs dans  $Lie(\mathcal{G})$  on écrit

$$\pi_t^+(B) = \begin{pmatrix} 0 & f_t^* \\ f_t & f_t \theta_t^* - \theta_t f_t^* \end{pmatrix},$$

où  $f_t := \frac{1}{2}(e - (e \cdot \theta_t)\theta_t + C\theta_t)$ . Et il vient que

$$\pi_t^+(B) - B^+ = \begin{pmatrix} 0 & (f_t - f_{\infty})^* \\ (f_t - f_{\infty}) & f_t \theta_t^* - f_{\infty} \theta_{\infty}^* - \theta_t f_t^* + \theta_{\infty} f_{\infty}^* \end{pmatrix}.$$



de plus,

$$\begin{aligned} f_t - f_\infty &= \frac{1}{2} ((e \cdot \theta_t) \theta_t - (e \cdot \theta_\infty) \theta_\infty + C(\theta_t - \theta_\infty)) \\ &= \frac{1}{2} ((e \cdot \theta_t)(\theta_t - \theta_\infty) + (e \cdot (\theta_t - \theta_\infty)) \theta_\infty + C(\theta_t - \theta_\infty)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_t \theta_t^* - f_\infty \theta_\infty^* - \theta_t f_t^* + \theta_\infty f_\infty^* &= \\ f_t(\theta_t - \theta_\infty)^* - (\theta_t - \theta_\infty) f_t^* + (f_t - f_\infty) \theta_\infty^* - \theta_\infty (f_t - f_\infty)^*. \end{aligned}$$

Ainsi on a les comportements asymptotiques suivants :

$$\|\pi_t^+(B) - B^+\|_{t \rightarrow \infty} = O(\|\theta_t - \theta_\infty\|).$$

Par des arguments similaires on montre sans difficulté que, presque sûrement

$$\begin{aligned} \|\pi_t^-(B) - B^-\|_{t \rightarrow \infty} &= O(\|\theta_t - \theta_\infty\|) \\ \|\pi_t^0(B) - B^0\|_{t \rightarrow \infty} &= O(\|\theta_t - \theta_\infty\|) \end{aligned}$$

□

La proposition suivante montre qu'il y a une convergence des projections plus rapide que celles établies précédemment lorsque les vecteurs sont dans certains sous-espaces asymptotiques.

**Proposition 19.**

(i) Si  $\eta \in \mathbb{R}^{1,d}$  est tel que  $\eta^+ = 0$  et  $\eta^0 = 0$  alors on a :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^+(\eta)\| \leq -2\alpha.$$

(ii) Si  $B \in so(1, d)$  vérifie  $B^+ = 0$  et  $B^0 = 0$  alors :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^+(B)\| \leq -2\alpha.$$

*Démonstration.*

(i) Si  $\eta^+ = \eta^0 = 0$  alors  $\eta_0 = \vec{\eta} \cdot \theta_\infty$  et  $\vec{\eta} = (\vec{\eta} \cdot \theta_\infty) \theta_\infty$ , ainsi :

$$\begin{aligned}
\|\pi_t^+(\eta)\| &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\vec{\eta} \cdot \theta_\infty|(1 - \theta_t \cdot \theta_\infty) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}|\vec{\eta} \cdot \theta_\infty|\|\theta_t - \theta_\infty\|^2 \\
&= O(d^2(\theta_t, \theta_\infty)).
\end{aligned}$$

Donc p.s

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^+(\eta)\| \leq -2\alpha.$$

(ii) Nous écrivons

$$\pi_t^+(B) = \begin{pmatrix} 0 & f_t^* \\ f_t & f_t \theta_t^* - \theta_t f_t^* \end{pmatrix},$$

où  $f_t := \frac{1}{2}(e - (e \cdot \theta_t)\theta_t + C\theta_t)$ . De plus, puisque  $B^+ = 0$  et  $B^0 = 0$  nous obtenons :

$$\begin{aligned}
e &= -C\theta_\infty \\
C &= (C\theta_\infty)\theta_\infty^* - \theta_\infty(C\theta_\infty)^*
\end{aligned}$$

Donc, en remplaçant  $e$  et  $C$  il vient

$$\begin{aligned}
2f_t &= -C\theta_\infty + (C\theta_\infty \cdot \theta_t)\theta_t + (\theta_\infty \cdot \theta_t)C\theta_\infty - (C\theta_\infty \cdot \theta_t)\theta_\infty \\
&= C\theta_\infty(\theta_\infty \cdot \theta_t - 1) + (C\theta_\infty \cdot \theta_t)(\theta_t - \theta_\infty) \\
&= -\frac{1}{2}C\theta_\infty\|\theta_t - \theta_\infty\|^2 + (C\theta_\infty \cdot \theta_t)(\theta_t - \theta_\infty)
\end{aligned}$$

Puisque  $C^* = -C$  nous avons de plus  $C\theta_\infty \cdot \theta_\infty = 0$  et donc

$$f_t = -\frac{1}{2}C\theta_\infty\|\theta_t - \theta_\infty\|^2 + (C\theta_\infty \cdot (\theta_t - \theta_\infty))(\theta_t - \theta_\infty).$$

Puis,

$$\|f_t\| \underset{t \rightarrow \infty}{=} O(\|\theta_t - \theta_\infty\|^2)$$

ce qui termine la preuve. □

La proposition suivante décrit le comportement asymptotique du processus  $\xi_t$  dans  $\mathbb{R}^{1,d}$ . Elle précise la proposition 17.

**Proposition 20.** *Pour presque toute trajectoire*

(i)  $\pi_t^+(\xi_t)$  converge asymptotiquement vers une limite  $\xi^+$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , et de plus

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^+(\xi_t) - \xi^+\| \leq -\alpha.$$

(ii)  $\pi_t^-(\xi_t)$  tend vers l'infini et de plus

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^-(\xi_t)\| = \alpha.$$

(iii)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^0(\xi_t)\| \leq 0.$$

*Démonstration.* (i) Rappelons que

$$\xi_t = \begin{pmatrix} \int_0^t \cosh(r_s) ds \\ \int_0^t \sinh(r_s) \theta_s ds \end{pmatrix},$$

ainsi

$$\pi_t^+(\xi_t) = \frac{1}{2} \left( \int_0^t \cosh(r_s) ds - \int_0^t \sinh(r_s) (\theta_s \cdot \theta_t) ds \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta_t \end{pmatrix}.$$

De plus

$$\begin{aligned} \int_0^t \cosh(r_s) ds - \int_0^t \sinh(r_s) (\theta_s \cdot \theta_t) ds &= \int_0^t \exp(-r_s) ds - \int_0^t \sinh(r_s) ((\theta_s \cdot \theta_t - 1) ds \\ &= \int_0^t \exp(-r_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sinh(r_s) \|\theta_s - \theta_t\|^2 ds \\ &= \int_0^t \exp(-r_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sinh(r_s) \|\theta_s - \theta_\infty\|^2 ds \\ &\quad - \int_0^t \sinh(r_s) (\theta_s - \theta_\infty) \cdot (\theta_t - \theta_\infty) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sinh(r_s) \|\theta_\infty - \theta_t\|^2 ds. \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 16 nous obtenons que  $\int_0^t \exp(-r_s) ds + 1/2 \int_0^t \sinh(r_s) \|\theta_s - \theta_\infty\|^2 ds$  converge presque sûrement vers la variable  $\lambda_\infty$  introduite à la proposition 17 puisque  $\int_0^t \sinh(r_s) (\theta_s - \theta_\infty) \cdot (\theta_t - \theta_\infty) ds$  et  $\int_0^t \sinh(r_s) \|\theta_\infty - \theta_t\|^2 ds$  converge vers 0. Ainsi

$$\pi_t^+(\xi_t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \lambda_\infty \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta_\infty \end{pmatrix}.$$

De plus, toujours par la proposition 16 :

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \int_t^\infty \exp(-r_s) ds &\leq -\alpha \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \int_t^\infty \sinh(r_s) \|\theta_s - \theta_\infty\|^2 ds &\leq -\alpha \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left| \int_0^t \sinh(r_s) (\theta_s - \theta_\infty) \cdot (\theta_t - \theta_\infty) ds \right| &\leq -\alpha \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \int_0^t \sinh(r_s) \|\theta_\infty - \theta_t\|^2 ds &\leq -\alpha. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^+(\xi_t) - \xi^+\| \leq -\alpha.$$

(ii) Nous avons

$$\pi_t^-(\xi_t) = \frac{1}{2} \left( \int_0^t \cosh(r_s) ds + \int_0^t \sinh(r_s) (\theta_s \cdot \theta_t) ds \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_t \end{pmatrix},$$

et en écrivant

$$\begin{aligned} \left( \int_0^t \cosh(r_s) ds + \int_0^t \sinh(r_s) (\theta_s \cdot \theta_t) ds \right) &= \int_0^t \exp(r_s) ds + \int_0^t \sinh(r_s) (\theta_s \cdot \theta_t - 1) ds \\ &= \int_0^t \exp(r_s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t \sinh(r_s) \|\theta_s - \theta_t\|^2 ds \\ &= \int_0^t \exp(r_s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t \sinh(r_s) \|\theta_s - \theta_\infty\|^2 ds \\ &\quad + \int_0^t \sinh(r_s) (\theta_s - \theta_\infty) \cdot (\theta_t - \theta_\infty) ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \sinh(r_s) \|\theta_\infty - \theta_t\|^2 ds, \end{aligned}$$

nous concluons, par la proposition 16 que

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \int_0^t \exp(r_s) ds &= \alpha \\ \int_0^t \sinh(r_s) \|\theta_s - \theta_\infty\|^2 ds &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} R_\infty \in \mathbb{R}_+^* \\ \int_0^t \sinh(r_s) (\theta_s - \theta_\infty) \cdot (\theta_t - \theta_\infty) ds &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \\ \int_0^t \sinh(r_s) \|\theta_\infty - \theta_t\|^2 ds &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^-(\xi_t)\| = \alpha.$$

(iii) Nous savons que

$$\pi_t^0(\xi_t) = \left( \int_0^t \sinh(r_s) (\theta_s - (\theta_s \cdot \theta_t) \theta_t) ds \right),$$

de plus, avec

$$\begin{aligned} \theta_s - (\theta_s \cdot \theta_t) \theta_t &= \theta_s - \theta_\infty - (\theta_t - \theta_\infty) + (1 - \theta_s \cdot \theta_t) \theta_t \\ &= \theta_s - \theta_\infty - (\theta_t - \theta_\infty) + \frac{1}{2} \|\theta_s - \theta_t\|^2 \theta_t \\ &= \theta_s - \theta_\infty - (\theta_t - \theta_\infty) + \frac{1}{2} \|\theta_s - \theta_\infty\|^2 \theta_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\theta_t - \theta_\infty\|^2 \theta_t - (\theta_t - \theta_\infty) \cdot (\theta_s - \theta_\infty) \theta_t, \end{aligned}$$

et en utilisant la proposition 16 on obtient

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^0(\xi_t)\| \leq 0.$$

□

La proposition suivante est l'analogie de la proposition 19 et précise que la vitesse de convergence est plus rapide pour les projections dans certains sous-espaces asymptotiques.

**Proposition 21.**

(1) Si  $\tilde{B} = \begin{pmatrix} B & \eta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Lie}(\mathcal{G})$  est telle que

$$\eta^+ + B^0 \xi^+ = 0,$$

alors

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^+(\eta) + \pi_t^0(B) \pi_t^+(\xi_t)\| \leq -\alpha.$$

(2) Si

$$B^+ = B^0 = \eta^+ + B^0 \xi^+ = \eta^0 + B^- \xi^+ = 0,$$

alors :

(i)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^+(\eta) + \pi_t^0(B) \pi_t^+(\xi_t)\| \leq -2\alpha.$$

(ii)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^0(\eta) + \pi_t^-(B)\pi_t^+(\xi_t)\| \leq -\alpha.$$

*Démonstration.* (1) En écrivant  $\pi_t^+(\xi_t) = \frac{1}{2}\lambda_t \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta_t \end{pmatrix}$ , nous avons

$$\pi_t^+(\eta) + \pi_t^0(B)\pi_t^+(\xi_t) = \frac{1}{2}(\eta_0 - \vec{\eta} \cdot \theta_t - \lambda_t(e \cdot \theta_t)) \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta_t \end{pmatrix}.$$

Puisque  $\eta^+ + B^0\xi^+ = 0$  nous obtenons, en écrivant  $\xi^+ = \frac{1}{2}\lambda_\infty \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta_\infty \end{pmatrix}$

$$\eta_0 = \vec{\eta} \cdot \theta_\infty + \lambda_\infty(e \cdot \theta_\infty).$$

Puis,

$$\begin{aligned} \eta_0 - \vec{\eta} \cdot \theta_t - \lambda_t(e \cdot \theta_t) &= \vec{\eta} \cdot (\theta_t - \theta_\infty) + \lambda_\infty(e \cdot \theta_\infty) - \lambda_t(e \cdot \theta_t) \\ &= \vec{\eta} \cdot (\theta_t - \theta_\infty) + (\lambda_\infty - \lambda_t)(e \cdot \theta_\infty) - \lambda_t(e \cdot (\theta_t - \theta_\infty)). \end{aligned}$$

On conclut en invoquant (ii) et (i) de la proposition 20.

(2) (i) Puisque  $B^+ = B^0 = \eta^+ + B^0\xi^+ = \eta^0 + B^-\xi^+ = 0$  alors :

$$\begin{aligned} e &= (e \cdot \theta_\infty)\theta_\infty - C\theta_\infty \\ (e \cdot \theta_\infty) &= 0 \\ C &= (C\theta_\infty)\theta_\infty^* - \theta_\infty(C\theta_\infty)^* \\ \eta_0 &= \vec{\eta} \cdot \theta_\infty \\ \vec{\eta} &= (\vec{\eta} \cdot \theta_\infty)\theta_\infty - \frac{1}{2}\lambda_\infty(e - C\theta_\infty). \end{aligned}$$

Et donc finalement

$$\begin{aligned} e &= -C\theta_\infty \\ \vec{\eta} &= (\vec{\eta} \cdot \theta_\infty)\theta_\infty + \lambda_\infty C\theta_\infty \\ \eta_0 &= \vec{\eta} \cdot \theta_\infty. \end{aligned}$$

Cela implique

$$\begin{aligned} \eta_0 - \vec{\eta} \cdot \theta_t - \lambda_t(e \cdot \theta_t) &= (\vec{\eta} \cdot (\theta_\infty - \theta_t)) + \lambda_t(C\theta_\infty \cdot \theta_t) \\ &= (\vec{\eta} \cdot \theta_\infty)(\theta_\infty \cdot (\theta_\infty - \theta_t)) + \lambda_\infty(C\theta_\infty \cdot (\theta_\infty - \theta_t)) + \lambda_t(C\theta_\infty \cdot \theta_t) \\ &= (\vec{\eta} \cdot \theta_\infty)(1 - \cos d(\theta_\infty, \theta_t)) + (\lambda_t - \lambda_\infty)(C\theta_\infty \cdot (\theta_t - \theta_\infty)). \end{aligned}$$

On conclut en utilisant la proposition 16 et (i) de la proposition 20.

(ii) La proposition 16 et (i) de la proposition 20 permettent facilement de montrer que

$$\eta^0 + B^-\xi^+ = 0 \implies \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^0(\eta) + \pi_t^-(B)\pi_t^+(\xi_t)\| \leq -\alpha.$$

□

### 2.4.3 Spectre de Lyapunov

Nous avons maintenant tous les outils pour pouvoir déterminer le comportement asymptotique de chacun des six termes de la décomposition 2.4 de  $\|\tilde{A}_t^{-1}\tilde{B}\tilde{A}_t\|^2$  et ainsi calculer les coefficients de Lyapunov.

Notons  $V^-$  et  $V^0$  les sous-algèbres de Lie de  $Lie(\mathcal{G})$ , dépendantes de  $\theta_\infty$  et  $\xi^+ := \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t^+(\xi_t)$ , définies par

$$V^- := \left\{ \begin{pmatrix} B & \eta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Lie(\mathcal{G}), B^+ = B^0 = \eta^+ = \eta^0 + B^-\xi^+ = 0 \right\},$$

et

$$V^0 := \left\{ \begin{pmatrix} B & \eta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Lie(\mathcal{G}), B^+ = \eta^+ + B^0\xi^+ = 0 \right\}.$$

Ainsi par définition  $V^- \subset V^0$ .

Nous obtenons alors le théorème suivant qui décrit le spectre de Lyapunov pour le processus de Lévy  $\tilde{A}_t$

**Théorème 7.** [*Spectre de Lyapunov*] Soit  $\tilde{B} \in Lie(\mathcal{G})$ ,

(i) Si  $B \notin V^0$ , c'est-à-dire que  $B^+ \neq 0$  ou  $(\eta^+ + B^0\xi^+) \neq 0$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left( \left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\| \right) = \alpha.$$

(ii) Si  $B \in V^0 \setminus V^-$  c'est-à-dire que  $B^+ = \eta^+ + B^0\xi^+ = 0$  et ( $B^0 \neq 0$  ou  $(\eta^0 + B^-\xi^+) \neq 0$ ), alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left( \left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\| \right) = 0.$$

(iii) Si  $B \in V^- \setminus \{0\}$ , c'est-à-dire que  $B^+ = B^0 = \eta^+ = \eta^0 + B^-\xi^+ = 0$  et ( $B^- \neq 0$  ou  $\eta^- \neq 0$ ), alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left( \left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\| \right) = -\alpha.$$

**Remarque 8.** *Le spectre de Lyapunov et la distribution  $V^- \subset V^0$  ne dépendent pas de la métrique invariante à gauche choisie.*

*Démonstration.* La preuve utilise intensivement le fait élémentaire et immédiat suivant

**Lemme 6.** *Si  $x_t$  et  $y_t$  sont deux fonctions positives telles qu'il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que*

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log x_t &\leq a \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log y_t &\leq b, \end{aligned}$$

alors

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(x_t + y_t) \leq \max\{a, b\}.$$

Commençons la preuve du théorème et rappelons la décomposition (2.4) de  $\left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\|^2$  obtenue précédemment

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\|^2 &= \exp(2r_t) \|\pi_t^+(B)\|^2 + \|\pi_t^0(B)\|^2 + \exp(-2r_t) \|\pi_t^-(B)\|^2 \\ &\quad + \exp(2r_t) \|\pi_t^+(\eta) + \pi_t^+(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^0(B)\pi_t^+(\xi_t)\|^2 \\ &\quad + \|\pi_t^0(\eta) + \pi_t^0(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^+(B)\pi_t^-(\xi_t) + \pi_t^-(B)\pi_t^+(\xi_t)\|^2 \\ &\quad + \exp(-2r_t) \|\pi_t^-(\eta) + \pi_t^-(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^0(B)\pi_t^-(\xi_t)\|^2 \end{aligned}$$

Nous souhaitons déterminer le comportement asymptotique de  $\frac{1}{t} \log$  de la somme de ces six carrés.

**Étape 1 : On suppose  $B^+ \neq 0$ .**

Par les propositions 16 et 18 nous avons que  $\frac{r_t}{t} \rightarrow \alpha$  et  $\pi_t^+(B) \rightarrow B^+ \neq 0$  ainsi :

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\| &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log (\exp(2r_t) \|\pi_t^+(B)\|^2) \\ &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{r_t}{t} + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^+(B)\| \\ &\geq \alpha. \end{aligned}$$



Puis en utilisant les propositions 16 et 20 il vient que

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log (\exp(2r_t) \|\pi_t^+(B)\|^2) &\leq \alpha \\
\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log (\|\pi_t^0(B)\|^2) &\leq 0 \\
\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log (\exp(-2r_t) \|\pi_t^-(B)\|^2) &\leq -\alpha \\
\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log (\exp(2r_t) \|\pi_t^+(\eta) + \pi_t^+(B)\pi_t^0(\eta) + \pi_t^0(B)\pi_t^+(\xi_t)\|^2) &\leq \alpha \\
\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log (\|\pi_t^0(\eta) + \pi_t^0(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^+(B)\pi_t^-(\xi_t) + \pi_t^-(B)\pi_t^+(\xi_t)\|^2) &\leq \alpha \\
\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log (\exp(-2r_t) \|\pi_t^-(\eta) + \pi_t^-(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^0(B)\pi_t^-(\xi_t)\|^2) &\leq 0.
\end{aligned}$$

On termine en utilisant le lemme (6)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\| \leq \alpha.$$

**Étape 2 : On suppose  $\mathbf{B}^+ = \mathbf{0}$  et  $\eta^+ + \mathbf{B}^0 \xi^+ \neq \mathbf{0}$**

Par (ii) de la proposition 18 et (iii) de la proposition 20 il vient que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t^+(B)\pi_t^0(\eta) = 0,$$

ainsi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\pi_t^+(\eta) + \pi_t^+(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^0(B)\pi_t^+(\xi_t)\|^2 = \|\eta^+ + B^0 \xi^+\|^2 \neq 0,$$

qui à son tour implique que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^+(\eta) + \pi_t^+(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^0(B)\pi_t^+(\xi_t)\| = 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\| &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log (\exp(2r_t) \|\pi_t^+(\eta) + \pi_t^+(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^0(B)\pi_t^+(\xi_t)\|^2) \\
&\geq \alpha \quad \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r_t}{t} = \alpha \right).
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant des arguments semblables à ceux de l'étape 1 on montre, en utilisant (ii) de la proposition 18 et (iii) de la proposition 20, que

la “ $\limsup \frac{1}{2t} \log(\cdot)$ ” des six carrés dans la decomposition (2.4) de  $\left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\|^2$  est plus petite que  $\alpha$ . On conclut par le lemme 6 que :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\| \leq \alpha.$$

Les étapes 1 et 2 prouvent le (i) du théoreme.

**Étape 3. On suppose  $\mathbf{B}^+ = \eta^+ + \mathbf{B}^0 \xi^+ = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{B}^0 \neq \mathbf{0}$ .**

Puisque  $\pi_t^0(B) \rightarrow B^0 \neq 0$  nous avons

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\|^2 &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \|\pi_t^0(B)\|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

On vérifie que  $\limsup \frac{1}{2t} \log \left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\|^2$  est négatif ou nul ; et pour cela, par le lemme 6, il suffit de le vérifier pour chacun des six termes de la décomposition.

Premièrement

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log (\exp(2r_t) \|\pi_t^+(B)\|^2) \leq 0 \quad \text{par (ii) de la proposition 18,}$$

et on a encore

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log (\|\pi_t^0(B)\|^2) &\leq 0, \\ \text{et } \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log (\exp(-2r_t) \|\pi_t^-(B)\|^2) &\leq -\alpha. \end{aligned}$$

De plus, par (1) de la proposition 21, (iii) de la proposition 20, et (ii) de la proposition 18 on obtient

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log (\exp(2r_t) \|\pi_t^+(\eta) + \pi_t^+(B)\pi_t^0(\eta) + \pi_t^0(B)\pi_t^+(\xi_t)\|^2) \leq 0$$

Le (ii) de la proposition 20 et le (ii) de la proposition 18 implique que

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^+(B)\pi_t^-(\xi_t)\| \leq 0$$

et par (iii) de la proposition 20 et (ii) de la proposition 18 on obtient aussi

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log (\|\pi_t^0(B)\pi_t^0(\xi_t)\|^2) \leq 0.$$

Avec (i) de la proposition 20, ceci implique que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \left( \|\pi_t^0(\eta) + \pi_t^0(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^+(B)\pi_t^-(\xi_t) + \pi_t^-(B)\pi_t^+(\xi_t)\|^2 \right) \leq 0.$$

Enfin, en utilisant la proposition 20, il vient que :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \left( \exp(-2r_t) \|\pi_t^-(\eta) + \pi_t^-(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^0(B)\pi_t^-(\xi_t)\|^2 \right) \leq 0.$$

En utilisant le lemme 6 on montre que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\|^2 \leq 0.$$

**Étape 4. Supposons que  $\mathbf{B}^+ = \eta^+ + \mathbf{B}^0 \xi^+ = \mathbf{B}^0 = \mathbf{0}$  et  $\eta^0 + \mathbf{B}^- \xi^+ \neq \mathbf{0}$ .**

Par (ii) de la proposition 18 et (ii), (iii) de la proposition 20 et (ii) de la proposition 19 on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t^0(B)\pi_t^0(\xi_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t^+(B)\pi_t^-(\xi_t) = 0,$$

et ainsi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\pi_t^0(\eta) + \pi_t^0(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^+(B)\pi_t^-(\xi_t) + \pi_t^-(B)\pi_t^+(\xi_t)\| = \|\eta^0 + B^- \xi^+\| \neq 0.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\|^2 &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \|\pi_t^0(\eta) + \pi_t^0(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^+(B)\pi_t^-(\xi_t) + \pi_t^-(B)\pi_t^+(\xi_t)\|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Des arguments semblables à ceux avancés dans l'étape 3 montrent que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\|^2 \leq 0.$$

Le troisième et quatrième étapes montrent le (ii) du théorème.

**Étape 5. Supposons que  $\mathbf{B}^+ = \eta^+ + \mathbf{B}^0 \xi^+ = \mathbf{B}^0 = \eta^0 + \mathbf{B}^- \xi^+ = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{B}^- \neq \mathbf{0}$ .**

Puisque  $\pi_t^-(B) \rightarrow B^- \neq 0$  on a

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\|^2 &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \left[ \exp(-2r_t) \|\pi_t^-(B)\|^2 \right] \\ &\geq -\alpha. \end{aligned}$$

Vérifions maintenant la  $\limsup$ .  
Par (ii) de la proposition 19 il vient

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log [\exp(2r_t) \|\pi_t^+(B)\|^2] \leq -\alpha.$$

Par (ii) de la proposition 18 nous obtenons

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \|\pi_t^0(B)\|^2 \leq -\alpha.$$

De plus, on a toujours

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log [\exp(-2r_t) \|\pi_t^-(B)\|^2] \leq -\alpha.$$

Par (ii) de la proposition 19 et le (iii) de la proposition 20 on a

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log [\exp(2r_t) \|\pi_t^+(B)\pi_t^0(\xi_t)\|^2] \leq -\alpha.$$

Par (2)(i) de la proposition 21 il vient

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log [\exp(2r_t) \|\pi_t^+(\eta) + \pi_t^0(B)\pi_t^+(\xi_t)\|^2] \leq -\alpha.$$

Enfin on conclut que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log [\exp(2r_t) \|\pi_t^+(\eta) + \pi_t^+(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^0(B)\pi_t^+(\xi_t)\|^2] \leq -\alpha.$$

Par (ii) de la proposition 20 et (ii) de la proposition 19 :

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \|\pi_t^+(B)\pi_t^-(\xi_t)\| \leq -\alpha,$$

et par (iii) de la proposition 20 et (ii) de la proposition 18 :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log (\|\pi_t^0(B)\pi_t^0(\xi_t)\|^2) \leq -\alpha.$$

On conclut, grâce à (2)(ii) de la proposition 21, que :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log (\|\pi_t^0(\eta) + \pi_t^0(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^+(B)\pi_t^-(\xi_t) + \pi_t^-(B)\pi_t^+(\xi_t)\|^2) \leq -\alpha.$$

Pour finir, les propositions 18 et 20 fournissent que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \left( \exp(-2r_t) \|\pi_t^-(\eta) + \pi_t^-(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^0(B)\pi_t^-(\xi_t)\|^2 \right) \leq -\alpha.$$

**Étape 6.** On suppose que  $\mathbf{B}^+ = \mathbf{B}^0 = \eta^+ = \eta^0 + \mathbf{B}^-\xi^+ = \mathbf{B}^- = \mathbf{0}$  et  $\eta^- \neq \mathbf{0}$

Dans ce cas on a  $B = 0$ . Ainsi  $\pi_t^-(B) = \pi_t^0(B) = 0$  et

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\|^2 &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \left( \exp(-2r_t) \|\pi_t^-(\eta) + \pi_t^-(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^0(B)\pi_t^-(\xi_t)\|^2 \right) \\ &\geq -\alpha. \end{aligned}$$

Les mêmes arguments que ceux de l'étape 5 montrent que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \left\| \tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t \right\|^2 \leq -\alpha.$$

Cela termine la preuve du théorème.  $\square$

**Remarque 9.** Donnons nous un  $\theta \in S^{d-1}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$  fixés et considérons l'équation différentielle ordinaire dans  $\mathcal{G}$  suivante

$$\begin{aligned} d\tilde{A}_t &= \tilde{A}_t \begin{pmatrix} 0 & \theta^* & \lambda \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha dt. \\ &= \sum_{i=1}^d V_i(\tilde{A}_t) \theta^i \alpha dt + \lambda H_0(\tilde{A}_t) \alpha dt. \end{aligned}$$

On associe à cette EDO le flot suivant dans  $\mathcal{G}$  :

$$\tilde{\phi}_t(\tilde{A}) := \tilde{A} \exp \left( \alpha t \begin{pmatrix} 0 & \theta^* & \lambda \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

En suivant ligne à ligne la preuve du théorème 7 on peut montrer que  $\tilde{\phi}$  possède le même spectre de Lyapunov et la même distribution que  $\phi$  lorsque  $\theta_\infty = \theta$  et  $\lambda_\infty = \lambda$ . La preuve est plus simple étant donné que  $\theta_t = \theta$  est constant. Cela revient à dire que la trajectoire du processus markovien  $PSO(1, d)$ -invariant dans  $\mathbb{H}^d$  partant de  $e_0$  et tendant vers  $\theta_\infty$  est remplacée par une trajectoire géodésique partant de  $e_0$  dans la direction donnée par  $\theta_\infty$ . On peut ainsi dire que ce flot déterministe possède la même dynamique asymptotique que le flot stochastique relativiste de Dudley pour une trajectoire aléatoire donnée.

## 2.5 Variétés stables

Dans cette partie nous montrons que les variétés stables pour le flot  $\phi_t$  sont précisément les sous-variétés  $\tilde{A} \exp(V^-)$  où  $\tilde{A}$  décrit  $\mathcal{G}$ . Nous notons  $d$  la distance associée à la métrique invariante à gauche  $\|\cdot\|$  introduite précédemment. On obtient précisément le résultat suivant :

**Théorème 8.** *Soient  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \in \mathcal{G}$  tels que  $\tilde{A}_1 \neq \tilde{A}_2$ .*

– *Si  $\tilde{A}_1 \in \tilde{A}_2 \exp(V^-)$  alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log d(\phi_t(\tilde{A}_1), \phi_t(\tilde{A}_2)) = -\alpha.$$

– *Si  $\tilde{A}_1 \notin \tilde{A}_2 \exp(V^-)$  alors :*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(\tilde{A}_1), \phi_t(\tilde{A}_2)) > 0.$$

Avant de démontrer ce théorème nous présentons dans la proposition suivante quelques résultats utiles concernant la distance  $d$ .

**Proposition 22.** *Pour  $\xi \in \mathbb{R}^{1,d}$  nous posons  $T_\xi := \begin{pmatrix} I & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .*

(i) *Il existe un voisinage  $U$  de 0 dans  $\mathbb{R}^{1,d}$  tel que*

$$\exists C > 0, \forall \xi \in U \quad C\|\xi\| \leq d(I, T_\xi).$$

(ii) *Pour  $\tilde{A} = \exp(\tilde{B})$ , avec  $\tilde{B} \in \text{Lie}(\mathcal{G})$ , nous obtenons*

$$d(I, \tilde{A}) \leq \|\tilde{B}\|.$$

(iii) *Pour  $\tilde{A} := \begin{pmatrix} A & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A \in \text{PSO}(1, d)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{1,d}$  nous avons*

$$d(I, A) \leq d(I, \tilde{A})$$

*avec égalité lorsque  $\xi = 0$  et de plus*

$$d(I, T_{A^{-1}\xi}) \leq d(I, A) + d(I, \tilde{A}).$$

*Démonstration.* (i) Soit  $\text{exp} : \text{Lie}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{G}$  la fonction exponentielle en  $I$  induite par la métrique  $\|\cdot\|$  dans  $\mathcal{G}$ , c'est-à-dire que pour  $\tilde{B} \in \text{Lie}(\mathcal{G})$ ,  $\text{exp}(\tilde{B}) = \gamma_{\tilde{B}}(1)$  où  $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \gamma_{\tilde{B}}(t)$  est la géodésique partant de  $I$  dans la direction  $\tilde{B}$ . La différentielle en 0 de  $\text{exp}$  est l'identité et il existe un voisinage  $V$  de  $0 \in \text{Lie}(\mathcal{G})$  suffisamment petit pour que

$$\forall \tilde{\beta} \in V, \quad \|\tilde{\beta}\| = d(I, \text{exp}(\tilde{\beta})). \quad (**)$$

De plus, l'application  $\hat{\exp}^{-1} \circ \exp$  peut être définie dans un voisinage de 0 et sa différentielle en 0 est l'identité, d'où  $\hat{\exp}^{-1} \circ \exp(\tilde{B}) = \tilde{B} + o(\|\tilde{B}\|)$ . Ainsi, il existe un voisinage  $U$  de 0 dans  $Lie(\mathcal{G})$  et  $C > 0$  tel que pour tout  $\tilde{B} \in U$ ,  $C\|\tilde{B}\| \leq \|\hat{\exp}^{-1} \circ \exp(\tilde{B})\| \leq \frac{1}{C}\|\tilde{B}\|$ . En prenant  $U$  assez petit pour que  $\hat{\exp}^{-1} \circ \exp(U) \subset V$ , on peut appliquer (\*\*\*) à  $\hat{\exp}^{-1} \circ \exp(\tilde{B})$ , il s'en suit que  $\|\hat{\exp}^{-1} \circ \exp(\tilde{B})\| = d\left(I, \exp(\tilde{B})\right)$  pour chaque  $\tilde{B} \in U$ . En particulier, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^{1,d}$  tels que  $\begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$ , on a  $C\|\xi\| \leq d(I, T_\xi)$ .

- (ii)  $\|\tilde{B}\|$  est la longueur du chemin  $t \in [0, 1] \mapsto \exp(t\tilde{B})$  de  $I$  à  $\tilde{A}$ .  
(iii) La première inégalité est une conséquence directe des définitions de la distance dans  $\mathcal{G}$  et de la distance dans  $PSO(1, d)$ . Pour la seconde inégalité on a

$$\begin{aligned} d(I, T_{A^{-1}\xi}) &= d\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{A}\right) \quad \text{par invariance à gauche de } d \\ &\leq d\left(I, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + d(I, \tilde{A}) \\ &= d(I, A) + d(I, \tilde{A}). \end{aligned}$$

□

Pour démontrer le théorème 8 nous allons utiliser les résultats du Théorème 4.5 de [13]. Rappelons ce résultat donnant le comportement de  $d(F_t(A_1), F_t(A_2))$  lorsque  $t$  tend vers  $\infty$ ,  $F_t$  étant le flot dans  $PSO(1, d)$  défini par  $F_t(A) = AA_t$ . Baxendale ne se consacre qu'aux processus à trajectoires continues (i.e  $\nu = 0$ ) mais sa preuve n'utilise en fait que le résultat de la proposition 16 que nous avons démontré dans le cas général.

**Théorème 9** (Théorème 4.5 de [13]). *Soient  $A_1, A_2 \in PSO(1, d)$ ,  $A_1 \neq A_2$  et  $B \in so(1, d)$  tel que  $A_1 = A_2 \exp(B)$ .*

- Si  $B^+ = B^0 = 0$  alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log d(F_t(A_1), F_t(A_2)) = -\alpha$ .
- Si  $B^+ = 0$  et  $B^0 \neq 0$  alors  $\liminf_{t \rightarrow \infty} d(F_t(A_1), F_t(A_2)) > 0$  et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} d(F_t(A_1), F_t(A_2)) = 0.$$

- Si  $B^+ \neq 0$  alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} d(F_t(A_1), F_t(A_2)) = 2\alpha$ .

*Preuve du théorème 8.* Soient  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \in \mathcal{G}$ ,  $\tilde{A}_1 \neq \tilde{A}_2$  et  $\tilde{B} = \begin{pmatrix} B & \eta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Lie(\mathcal{G})$  tels que  $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 \exp(\tilde{B})$  et posons de plus  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := \exp(\tilde{B})$ .

– Soit  $\tilde{B} \in V^-$ .

$$\begin{aligned} d(\phi_t(\tilde{A}_1), \phi_t(\tilde{A}_2)) &= d(\tilde{A}_1 \tilde{A}_t, \tilde{A}_1 \exp(\tilde{B}) \tilde{A}_t) = d(I, \tilde{A}_t^{-1} \exp(\tilde{B}) \tilde{A}_t) \\ &= d(I, \exp(\tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t)) \\ &\leq \|\tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t\| \quad \text{par ii) de la proposition 22.} \end{aligned}$$

Ainsi, par le Théorème 7 nous obtenons

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log d(\phi_t(\tilde{A}_1), \phi_t(\tilde{A}_2)) \leq -\alpha.$$

On peut donc trouver  $t_0 > 0$  tel que pour tout  $t > t_0$ ,  $\tilde{A}_t^{-1} \exp(\tilde{B}) \tilde{A}_t$  est dans le voisinage  $U$  donné par i) de la proposition 22. Ainsi

$$\forall t > t_0 \quad C \|\tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t\| \leq d(I, \exp(\tilde{A}_t^{-1} \tilde{B} \tilde{A}_t)).$$

Donc  $\liminf \frac{1}{t} \log d(\phi_t(\tilde{A}_1), \phi_t(\tilde{A}_2)) \geq -\alpha$ , et cela montre le premier point.

– Soit  $\tilde{B} \notin V^-$ ; c'est-à-dire que  $B^+ \neq 0$  ou  $B^0 \neq 0$  ou  $\eta^+ \neq 0$  ou  $\eta^0 + B^- \xi^+ \neq 0$ .  
**1<sup>er</sup> cas : si  $B^+ \neq 0$  ou  $B^0 \neq 0$ .**

Par iii) de la proposition 22 on obtient :

$$d(I, A_t^{-1} \exp(B) A_t) \leq d(I, \tilde{A}_t^{-1} \exp(\tilde{B}) \tilde{A}_t).$$

On peut alors conclure en invoquant ii) et iii) du théorème 4.5 de [13] qui montre en particulier que :

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} d(I, A_t^{-1} \exp(B) A_t) > 0.$$

**Second cas : on suppose que  $B^+ = B^0 = 0$  mais  $\eta^+ \neq 0$  ou  $\eta^0 + B^- \xi^+ \neq 0$ .**  
Rappelons que

$$\tilde{A}_t^{-1} \tilde{A} \tilde{A}_t = \begin{pmatrix} A_t^{-1} A A_t & A_t^{-1} A \xi_t + A_t^{-1} \xi - A_t^{-1} \xi_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la seconde inégalité de iii) de la proposition 22 il vient

$$d\left(I, \begin{pmatrix} I & A_t^{-1} \xi_t + A_t^{-1} A^{-1} \xi - A_t^{-1} A^{-1} \xi_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \leq d(I, A_t^{-1} A A_t) + d(I, \tilde{A}_t^{-1} \tilde{A} \tilde{A}_t).$$

Puisque  $B^0 = B^+ = 0$  nous avons  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(I, A_t^{-1} A A_t) = 0$ . Donc, afin de montrer que  $\liminf d(I, \tilde{A}_t^{-1} \tilde{A} \tilde{A}_t) > 0$  nous avons à vérifier que, par i) de la proposition 22,  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \|A_t^{-1} \xi_t + A_t^{-1} A^{-1} \xi - A_t^{-1} A^{-1} \xi_t\| > 0$ . Mais, puisque



$A_t^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_t^{-1} \end{pmatrix} S(r_t, \theta_t)^{-1}$  et en utilisant la diagonalisation de  $S(r_t, \theta_t)$  on obtient

$$\begin{aligned} \|A_t^{-1}\xi_t + A_t^{-1}A^{-1}\xi - A_t^{-1}A^{-1}\xi_t\|^2 &= \|S(r_t, \theta_t)^{-1}(\xi_t + A^{-1}\xi - A^{-1}\xi_t)\|^2 \\ &\geq \exp(2r_t)\|\pi_t^+((I - A^{-1})\xi_t + A^{-1}\xi)\|^2 + \\ &\quad \|\pi_t^0((I - A^{-1})\xi_t + A^{-1}\xi)\|^2. \end{aligned}$$

Pour finir la preuve nous allons montrer que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t^+((I - A^{-1})\xi_t + A^{-1}\xi) = \eta^+ \quad (2.8)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t^0((I - A^{-1})\xi_t + A^{-1}\xi) = \eta^0 + B^-\xi^+. \quad (2.9)$$

Puisque  $\tilde{B} = \tilde{B}^-$  on a  $\tilde{B}^3 = 0$ , ainsi  $\tilde{A} = I + \tilde{B} + \frac{\tilde{B}^2}{2}$ ,  $B^3 = 0$  et  $A = I + B + \frac{B^2}{2}$  et  $\xi = \eta + B\eta$ . Donc

$$\begin{aligned} (I - A^{-1})\xi_t + A^{-1}\xi &= (B - \frac{B^2}{2})\xi_t + (I - B + \frac{B^2}{2})(\eta + B\eta) \\ &= \eta + B\xi_t - \frac{B^2}{2}\xi_t - \frac{B^2}{2}\eta. \end{aligned}$$

Ainsi, pour montrer (2.8) on écrit

$$\pi_t^+((I - A^{-1})\xi_t + A^{-1}\xi) = \pi_t^+(\eta) + \pi_t^+(B\xi_t) - \frac{1}{2}\pi_t^+(B^2(\xi_t + \eta))$$

avec

$$\pi_t^+(\eta) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \eta^+, \quad \text{par la proposition 18}$$

et

$$\begin{aligned} \pi_t^+(B\xi_t) &= \pi_t^+(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^0(B)\pi_t^+(\xi_t) \\ &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{par les propositions 18, 19 et 20,} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \pi_t^+(B^2(\xi_t + \eta)) &= \pi_t^+(B)\pi_t^0(B(\xi_t + \eta)) + \pi_t^0(B)\pi_t^+(B(\xi_t + \eta)) \\ &= \pi_t^+(B)\pi_t^0(B)\pi_t^0(\xi_t + \eta) + \pi_t^+(B)^2\pi_t^-(\xi_t + \eta) + \\ &\quad \pi_t^+(B)\pi_t^-(B)\pi_t^+(\xi_t + \eta) + \pi_t^0(B)\pi_t^+(B)\pi_t^0(\xi_t + \eta) + \pi_t^0(B)^2\pi_t^+(\xi_t + \eta) \\ &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{par les propositions 18, 19 et 20.} \end{aligned}$$

Pour montrer (2.9) on écrit

$$\pi_t^0((I - A^{-1})\xi_t + A^{-1}\xi) = \pi_t^0(\eta) + \pi_t^0(B\xi_t) - \frac{1}{2}\pi_t^0(B^2(\xi_t + \eta))$$

avec

$$\pi_t^0(\eta) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \eta^0,$$

et

$$\begin{aligned} \pi_t^0(B\xi_t) &= \pi_t^0(B)\pi_t^0(\xi_t) + \pi_t^+(B)\pi_t^-(\xi_t) + \pi_t^-(B)\pi_t^+(\xi_t) \\ &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} B^-\xi^+ \quad \text{par les propositions 18, 19 et 20.} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \pi_t^0(B^2(\xi_t + \eta)) &= \pi_t^0(B)\pi_t^0(B(\xi_t + \eta)) + \pi_t^+(B)\pi_t^-(B(\xi_t + \eta)) + \pi_t^-(B)\pi_t^+(B(\xi_t + \eta)) \\ &= \pi_t^0(B)\pi_t^0(B)\pi_t^0(\xi_t + \eta) + \pi_t^0(B)\pi_t^+(B)\pi_t^-(\xi_t + \eta) + \pi_t^0(B)\pi_t^-(B)\pi_t^+(\xi_t + \eta) + \\ &\pi_t^+(B)\pi_t^-(B)\pi_t^0(\xi_t + \eta) + \pi_t^+(B)\pi_t^0(B)\pi_t^-(\xi_t + \eta) + \\ &\pi_t^-(B)\pi_t^+(B)\pi_t^0(\xi_t + \eta) + \pi_t^-(B)\pi_t^0(B)\pi_t^+(\xi_t + \eta) \\ &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{par les propositions 18, 19 et 20.} \end{aligned}$$

□

**Remarque 10.** *Nous n'avons pas réussi à décrire le comportement de  $d(\phi_t(\tilde{A}_1), \phi_t(\tilde{A}_2))$  lorsque  $\tilde{A}_1 \notin \tilde{A}_2 \exp(V^-)$  comme cela est fait dans le théorème 4.5 de [13]. La difficulté provient du fait que l'inégalité  $C\|\xi\| \leq d(I, T_\xi)$  de la proposition 22 est seulement locale et devient fausse lorsque  $\xi$  est loin de 0. En effet, pour  $\xi$  de genre temps (i.e  $q(\xi) > 0$ ) ou de genre espace (i.e  $q(\xi) < 0$ ), en écrivant  $\xi = \sqrt{q(\xi)} \begin{pmatrix} \cosh(\rho) \\ \theta \sinh(\rho) \end{pmatrix}$  (si de genre temps) ou bien  $\xi = \sqrt{q(\xi)} \begin{pmatrix} \sinh(\rho) \\ \theta \cosh(\rho) \end{pmatrix}$  (si de genre espace), on peut montrer que  $d(I, T_\xi) \leq 2\rho + \sqrt{q(\xi)}$  tandis que  $\|\xi\| = \sqrt{q(\xi)} \cosh(2\rho)$ .*

**Remarque 11.** *Si  $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 \exp(\tilde{B})$  avec  $\tilde{B}^+ \neq 0$ , alors iii) du théorème 4.5 de [13] et iii) de la proposition 22 montrent que :  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} d(\phi_t(\tilde{A}_1), \phi_t(\tilde{A}_2)) \geq 2\alpha$ .*

## 2.6 Projection des variétés stables dans $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$

Dans la section précédente nous avons obtenu les variétés stables pour le flot  $\phi_t$ . Ce sont précisément les sous-variétés  $\mathcal{V}^s(\tilde{A}) := \tilde{A} \exp(V^-)$  où  $\tilde{A}$  décrit  $\mathcal{G}$ . Dans cette section nous explicitons les projections de ces sous-variétés dans  $\mathbb{H} \times \mathbb{R}^{1,d}$  et montrons que ce sont des fibrés en droite au dessus d'horosphères.

### Horosphères dans $\mathbb{H}^d$ .

Pour  $\theta \in S^{d-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^d$  notons  $\mathcal{P}(\theta)$  l'hyperplan de  $\mathbb{R}^{1,d}$  tangent au cône de lumière dans la direction  $\begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix}$  :

$$\mathcal{P}(\theta) := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{1,d}; q(\xi, \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix}) = 0 \right\}.$$

Pour  $\dot{\xi} \in \mathbb{H}^d$  et  $\theta \in S^{d-1} = \partial\mathbb{H}^d$ , on appelle horosphère passant par  $\dot{\xi}$  et tangent à  $\theta$ , que l'on note  $\text{Hor}(\dot{\xi}, \theta)$ , l'intersection de  $\mathbb{H}^d$  avec l'hyperplan affine de  $\mathbb{R}^{1,d}$  passant par  $\dot{\xi}$  et dirigé par  $\mathcal{P}(\theta)$  :

$$\text{Hor}(\dot{\xi}, \theta) := \mathbb{H}^d \cap \left( \dot{\xi} + \mathcal{P}(\theta) \right).$$

On note  $\mathcal{C}^+$  le demi cône de lumière :

$$\mathcal{C}^+ := \{ \xi \in \mathbb{R}^{1,d}, q(\xi) = 0 \text{ et } \xi^0 > 0 \}$$

Soit

$$\begin{aligned} \text{KB} : \mathbb{H}^d \cup \mathcal{C}^+ &\rightarrow \bar{\mathbb{D}}^d \\ \xi &\mapsto \frac{1}{\xi^0} \vec{\xi} \end{aligned}$$

la projection de  $\mathbb{H}^d \cup \mathcal{C}^+$  sur  $\bar{\mathbb{D}}^d$ . Muni de la métrique  $KB^*(-q|_{\mathbb{H}^d})$ ,  $\bar{\mathbb{D}}^d$  est le modèle de Klein-Beltrami de l'espace hyperbolique  $d$ -dimensionnel. L'ensemble  $\text{KB}(\text{Hor}(\dot{\xi}, \theta))$  est la sphère passant par  $\text{KB}(\dot{\xi})$  et tangente à  $S^{d-1}$  en  $\theta$ .

### Action de $\text{PSO}(1, d)$ sur $S^{d-1}$ et sur les horosphères.

Un élément  $A \in \text{PSO}(1, d)$  induit une transformation  $\hat{A}$  de  $S^{d-1}$  :

$$\hat{A} : \theta \mapsto \hat{A}(\theta) := \text{KB} \left( A \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} \right).$$

De plus pour  $A \in \text{PSO}(1, d)$  vu comme une isométrie de  $\mathbb{H}^d$  on a

$$A \left( \text{Hor}(\dot{\xi}, \theta) \right) = \text{Hor}(A\dot{\xi}, \hat{A}(\theta)). \quad (2.10)$$

### Projections de $\mathcal{V}^s(\tilde{\mathbf{A}})$ sur $\mathbb{H}^d$ , $\mathbb{R}^{1,d}$ et $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$

Rappelons que nous avons noté  $\pi$  et  $\tilde{\pi}$  les projections de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathbb{H}^d$  et  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d} \\ \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\longmapsto (A(e_0), \xi) \quad \text{et} \quad \pi(\tilde{A}) = A(e_0), \end{aligned}$$

Notons  $\hat{\pi}$  la projection sur  $\mathbb{R}^{1,d}$

$$\hat{\pi}(\tilde{A}) = \xi.$$

Fixons  $\theta_\infty$  et  $\xi^+ = \lambda_\infty \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_\infty \end{pmatrix}$ .

**Proposition 23.** Soit  $\tilde{A} \in \mathcal{G}$ . La projection de  $\mathcal{V}^s(\tilde{A})$  sur  $\mathbb{H}^d$  est l'horosphère  $\text{Hor}(\pi(\tilde{A}), \hat{A}(\theta_\infty))$ , la projection sur  $\mathbb{R}^{1,d}$  est l'hyperplan affine  $\hat{\pi}(\tilde{A}) + \mathcal{P}(\hat{A}(\theta_\infty))$  et la projection sur  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$  est un fibré en droite d'une horosphère :

$$\tilde{\pi} \left( \mathcal{V}^s(\tilde{A}) \right) = \left\{ \left( \dot{\xi}, \hat{\pi}(\tilde{A}) + u \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{A}(\theta_\infty) \end{pmatrix} + 2\lambda_\infty(\dot{\xi} - \pi(\tilde{A})) \right); \right. \\ \left. \dot{\xi} \in \text{Hor}(\pi(\tilde{A}), \hat{A}(\theta_\infty)), u \in \mathbb{R} \right\}$$

*Démonstration.* Pour  $\tilde{A} = I$  on montre par un calcul que

$$\mathcal{V}^s(I) = \left\{ \tilde{A}_{e,u} = \begin{pmatrix} A_e & \xi_{e,u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } e \cdot \theta_\infty = 0 \text{ et } u \in \mathbb{R} \right\},$$

où  $A_e := \begin{pmatrix} 1 + \frac{\|e\|^2}{2} & e^* - \frac{\|e\|^2}{2}\theta_\infty^* \\ e + \frac{\|e\|^2}{2}\theta_\infty & I + \theta_\infty e^* - e\theta_\infty^* - \frac{\|e\|^2}{2}\theta_\infty\theta_\infty^* \end{pmatrix} \in PSO(1, d)$  et  $\xi_{e,u} := (u + \lambda_\infty\|e\|^2) \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_\infty \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\lambda_\infty e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,d}$ .

Ainsi, lorsque  $e$  décrit l'hyperplan de  $\mathbb{R}^d$  orthogonal à  $\theta_\infty$ , la projection  $\pi(\tilde{A}_{e,u})$  sur  $\mathbb{H}^d$ , qui est la première colonne de  $A_e$ , décrit l'horosphère de  $\mathbb{H}^d$  tangente à  $\partial\mathbb{H}^d = \mathbb{S}^{d-1}$  en  $\theta_\infty$  et passant par  $e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . De plus, on peut écrire  $\xi_{e,u} = u \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_\infty \end{pmatrix} + 2\lambda_\infty \left( \pi(\tilde{A}_{e,u}) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .

Pour un  $\tilde{A}$  quelconque, le résultat provient du fait que  $\mathcal{V}^s(\tilde{A}) = \tilde{A}\mathcal{V}^s(I)$  et de (2.10).  $\square$

# Chapitre 3

## Dynamique asymptotique des flots associés à certains processus relativistes dans les espaces-temps de de Sitter et Anti de Sitter

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons étudié la dynamique asymptotique d'un flot dans le groupe de Poincaré associé à une large classe de processus relativistes que nous avons appelés processus de Dudley. Rappelons qu'ils ont été introduits par Dudley dans [28] comme les seuls processus markoviens à valeurs dans le fibré unitaire de l'espace de Minkowski qui sont invariants sous l'action du groupe de Poincaré et dont les trajectoires dans  $\mathbb{R}^{1,d}$  sont de genre temps. Au sein de cette classe de processus, il existe essentiellement une seule diffusion qui joue alors le rôle de mouvement brownien lorentzien. Il s'agit du couple formé d'un mouvement brownien hyperbolique et de son intégrale en temps dans  $\mathbb{R}^{1,d}$ . Dans [39], Franchi et Le Jan construisent des généralisations de ces processus dans des variétés lorentziennes génériques. Leur construction, semblable à celle de Eells-Elworthy-Malliavin pour le mouvement brownien Riemannien, s'obtient en faisant rouler sans glisser le fibré unitaire de la variété lorentzienne sur  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$  le long des trajectoires de la diffusion de Dudley. Plus précisément, il s'agit de projeter sur le fibré unitaire une certaine diffusion à valeurs dans le fibré des repères qui est solution d'une équation différentielle stochastique dirigée par des champs de vecteurs horizontaux et verticaux. Plus tard, les mêmes auteurs ont introduit, dans [38], une classe de diffusions relativistes dont la dynamique peut varier avec la courbure de la variété. Il apparait alors, contrairement au cas plat de l'espace de Minkowski,

qu'il n'y a pas unicité des diffusions relativistes lorsque la courbure est non nulle.

Dans cette partie nous nous intéressons à des espaces homogènes à savoir l'espace-temps de de Sitter ( $dS^{d+1}$ ) qui est de courbure constante positive et l'espace-temps Anti-de-Sitter ( $AdS^{d+1}$ ) qui est de courbure constante négative. Ces deux espaces-temps sont géométriquement des quadriques ; précisément  $dS^{d+1}$  est une pseudo-sphère pour la forme de Lorentz dans  $\mathbb{R}^{1,d+1}$  et  $AdS^{d+1}$  est une pseudo-sphère pour la forme de signature  $(2, d)$  dans  $\mathbb{R}^{2,d}$ . Nous montrons, de la même manière que pour l'espace de Minkowski, qu'il est possible de déterminer la classe de processus de Markov à valeurs dans le fibré unitaire qui sont invariants par le groupe d'isométries de la variété et dont les trajectoires sont de genre temps. Nous les nommerons *processus de Dudley* et constaterons qu'il en existe essentiellement un qui soit continu. On retrouve les diffusions définies dans [39] pour l'exemple particulier de  $dS^{d+1}$  et  $AdS^{d+1}$ . Les processus de Dudley sont obtenus comme projection de processus de Lévy invariants à gauche dans les groupes d'isométries respectifs de  $dS^{d+1}$  et  $AdS^{d+1}$ , à savoir  $PSO(1, d + 1)$  et  $PSO(2, d)$ . Ces groupes étant semi-simples nous pouvons ainsi utiliser la théorie de Guivarc'h et Raugi ([46]), développée pour les processus de Lévy par Liao ([61]), et obtenir, pour une large classe de ces processus, le comportement asymptotique et la dynamique asymptotique du flot stochastique associé. Il s'avère alors que les processus relativistes dans l'espace-temps de de Sitter convergent presque sûrement vers un point de la frontière causale  $\mathbb{S}^d$  et que les variétés stables du flot se projettent sur  $dS^{d+1}$  en des horosphères. L'espace-temps  $AdS^{d+1}$  n'est pas causal puisque les géodésiques de genre temps sont des cercles mais les processus relativistes contiennent néanmoins une information asymptotique qui s'interprète géométriquement comme la frontière de Furstenberg de  $AdS^{d+1}$ . Il s'agit de l'ensemble des géodésiques de lumière pointées de l'univers d'Einstein (ce dernier est également le bord topologique de  $AdS$ ). Enfin, nous avons souhaité, à la manière de Baxendale dans [13] mener les calculs explicites jusqu'au bout pour l'étude asymptotique des diffusions relativistes. Aussi nous calculons, dans la troisième section de cette partie, les coefficients de Lyapunov du flot stochastique pour les diffusions relativistes et nous avons, comme dans [9], illustré la méthode d'Azencott-Furstenberg-Raugi pour montrer que la frontière de Poisson des diffusions dans  $dS$  coïncide bien avec la sphère  $\mathbb{S}^d$ . Il aurait été également possible de montrer que la frontière de Poisson des diffusions dans  $AdS$  est la frontière maximale de Furstenberg de  $PSO(2, d)$  mais nous nous sommes contentés du calcul explicite des coefficients de Lyapunov du flot associé.

## 3.2 Processus de Dudley dans les espace-temps de Sitter et Anti-de-Sitter

### 3.2.1 Espaces temps de Sitter et Anti-de-Sitter

Nous introduisons les espaces-temps de de Sitter et Anti-de-Sitter. Ce sont des pseudo-sphères pour certaines formes quadratiques qui s'identifient à des quotients de leur groupe d'isométrie.

#### 3.2.1.1 De Sitter

On note  $q$  la forme quadratique de Lorentz dans  $\mathbb{R}^{1,d+1}$ , pour  $\xi = (\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^{d+1})^* \in \mathbb{R}^{1,d+1}$

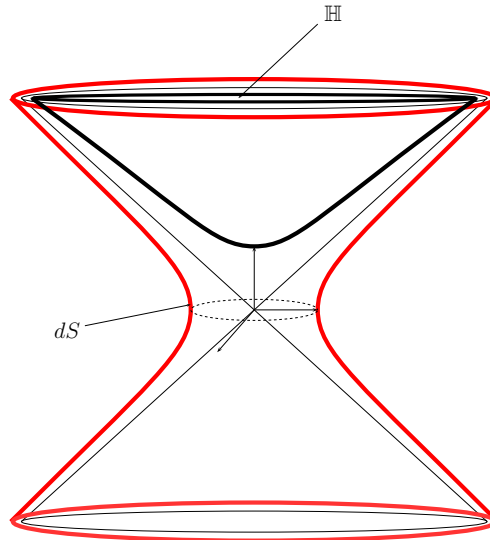
$$q(\xi) = (\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - \dots - (\xi^{d+1})^2.$$

La base canonique de  $\mathbb{R}^{1,d+1}$  sera notée  $(e_0, e_1, \dots, e_{d+1})$  et un élément  $g$  du groupe d'isométrie de Lorentz  $PSO(1, d+1)$  préservant  $q$ , l'orientation et l'orientation du temps sera identifié à sa matrice dans la base  $(e_0, \dots, e_{d+1})$ . Le groupe  $PSO(1, d+1)$  désigne le groupe de Lie connexe matriciel qui s'obtient comme l'exponentielle de son algèbre de Lie  $so(1, d+1)$  :

$$so(1, d+1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b^* \\ b & C \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad C = -C^* \right\}.$$

L'espace-temps de de Sitter de dimension  $d+1$ , noté  $dS^{d+1}$ , est l'hyperboloïde à une nappe dans l'espace-temps de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,d+1}$

$$dS^{d+1} := \{ \xi \in \mathbb{R}^{1,d+1}, \quad q(\xi) = -1 \}.$$



Pour  $\xi \in dS^{d+1}$ , la forme quadratique  $q$  restreinte à  $T_\xi dS^{d+1}$  est non-dégénérée et de signature  $(1, d)$  (i.e  $(+, -, \dots, -)$ ). Ainsi  $dS^{d+1}$  est une variété lorentzienne qui est, de plus, de courbure constante positive. C'est l'équivalent lorentzien de la sphère riemannienne. Sa structure causale est induite par celle de  $\mathbb{R}^{1, d+1}$ . Ainsi  $\xi' \in dS^{d+1}$  est dans le futur de  $\xi \in dS^{d+1}$  si et seulement si il est dans le cône du futur (pour  $\mathbb{R}^{1, d+1}$ ) issu de  $\xi$ . Une isométrie lorentzienne linéaire de  $\mathbb{R}^{1, d+1}$  induit une isométrie de  $dS^{d+1}$  et le groupe d'isométrie de  $dS^{d+1}$  préservant l'orientation et l'orientation du temps est le groupe de Lorentz  $PSO(1, d+1)$ . Le stabilisateur d'un point  $\xi_o \in dS^{d+1}$ , sous l'action de  $PSO(1, d+1)$  sur  $dS^{d+1}$ , est isomorphe à  $PSO(1, d)$  de sorte que  $dS^{d+1}$  s'identifie à l'espace homogène  $PSO(1, d+1)/PSO(1, d)$ . Dans ce travail, nous allons faire un choix et prendre  $\xi_o = e_1$ , et  $PSO(1, d)$  désignera le stabilisateur de  $e_1$ . De plus, la projection

$$\begin{aligned} \pi : \quad PSO(1, d+1) &\longrightarrow dS^{d+1} \\ g &\longmapsto g(e_1) \end{aligned}$$

permet d'identifier  $PSO(1, d+1)$  au fibré des repères orthonormés au dessus de  $dS^{d+1}$ . Précisément, un élément  $g \in PSO(1, d+1)$  s'identifie au repère orthonormé  $(g(e_0), g(e_1), \dots, g(e_{d+1}))$  de  $\mathbb{R}^{1, d+1}$  qui lui même est la donnée d'un point  $g(e_1) \in dS^{d+1}$  et d'un repère orthonormé  $(g(e_0), g(e_2), \dots, g(e_{d+1}))$  de  $T_{g(e_1)} dS^{d+1}$ . On peut alors définir les champs de vecteurs horizontaux et verticaux dans  $PSO(1, d+1)$ . Ce sont des champs de vecteurs invariants à gauche que l'on notera  $H_0^l, \dots, H_d^l$  pour les horizontaux et  $V_1^l, \dots, V_d^l$  et  $V_{ij}^l, 1 = i < j = d$ , pour les verticaux. On notera  $H_i, V_i$  et  $V_{ij}$  les matrices dans  $so(1, d+1)$  correspondantes à leurs valeurs en l'identité. Précisément on définit  $H_0^l(g)$  comme le déplacement horizontal infinitésimal de  $g(e_0), g(e_1), \dots, g(e_{d+1})$  dans la direction  $e_0$  :

$$H_0^l(g) := gH_0$$

avec  $H_0 := e_0 e_1^* + e_1 e_0^*$ .

$V_i^l(g)$  est le déplacement vertical infinitésimal du repère  $g(e_0), g(e_2), \dots, g(e_{d+1})$  au dessus de  $g(e_1)$  correspondant au déplacement de  $g(e_0)$  dans la direction  $g(e_{i+1})$ . Autrement dit c'est l'action d'un boost infinitésimal de  $so(1, d)$  qui dérive  $g(e_0)$  dans la direction  $g(e_{i+1})$  :

$$V_i^l(g) := gV_i$$

avec  $V_i := e_0 e_{i+1}^* + e_{i+1} e_0^*$ .

De même, pour  $i = 1, \dots, d$  on définit  $H_i^l(g) := gH_i$  avec  $H_i := e_{i+1} e_1^* - e_1 e_{i+1}^*$  et pour  $i < j = 1, \dots, d$  on définit  $V_{ij}^l(g) := gV_{ij}$  avec  $V_{ij} := e_{i+1} e_{j+1}^* - e_{j+1} e_{i+1}^*$ .

La famille  $(H_0, H_i, V_{ij})_{i < j = 1, \dots, d}$  forme une base orthonogonale de  $so(1, d+1)$  pour la métrique de Killing.



### 3.2.1.2 Anti-de-Sitter

On note également  $q$  la forme quadratique dans  $\mathbb{R}^{d+2}$  de signature  $(2, d) = (+, +, -, \dots, -)$  et on notera  $\mathbb{R}^{2,d}$  l'espace  $\mathbb{R}^{d+2}$  muni de  $q$ . Pour  $\xi \in \mathbb{R}^{2,d}$

$$q(\xi) := (\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - \dots - (\xi^{d+1})^2.$$

Le groupe connexe d'isométrie de  $\mathbb{R}^{2,d}$  est noté  $PSO(2, d)$  et sera identifié, via la base canonique  $(e_0, e_1, \dots, e_{d+1})$ , au groupe de Lie matriciel qui est l'exponentielle de l'algèbre de Lie  $so(2, d)$

$$so(2, d) := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b^* \\ -a & 0 & c^* \\ b & c & D \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}, b, c \in \mathbb{R}^d, D = -D^* \right\}.$$

L'espace-temps Anti-de-Sitter de dimension  $d + 1$ , noté  $AdS^{d+1}$ , est la pseudo-sphère :

$$AdS^{d+1} := \{\xi \in \mathbb{R}^{2,d}, \quad q(\xi) = 1\}.$$

Pour chaque  $\xi \in AdS^{d+1}$ , la forme quadratique  $q$  restreinte à  $T_\xi AdS^{d+1}$  est de signature  $(1, d) = (+, -, \dots, -)$ . Ainsi  $AdS^{d+1}$  est une variété lorentzienne et on peut montrer, de plus, que la courbure est constante négative. C'est l'analogie lorentzien de la nappe hyperbolique  $\mathbb{H}^d$ . Une isométrie de  $\mathbb{R}^{2,d}$  induit une isométrie de  $AdS^{d+1}$  et le groupe  $PSO(2, d)$  est le groupe connexe des isométries de  $AdS^{d+1}$ . De même que pour  $dS^{d+1}$  l'espace-temps Anti-de-Sitter s'identifie à un espace homogène. Précisément :

$$AdS^{d+1} = PSO(2, d)/PSO(1, d).$$

Nous allons également faire le choix d'un point particulier de  $AdS^{d+1}$ . Nous prenons  $e_0$  comme point privilégié et  $PSO(1, d)$  est le sous groupe de  $PSO(2, d)$  qui stabilise  $e_0$ . En définissant la projection suivante

$$\begin{aligned} \pi : \quad PSO(2, d) &\longrightarrow AdS^{d+1} \\ g &\longmapsto g(e_0) \end{aligned}$$

on identifie  $PSO(2, d)$  au fibré des repères de  $AdS^{d+1}$ . Plus précisément, un élément  $g \in PSO(2, d)$  définit un point  $g(e_0)$  de  $AdS^{d+1}$  et un repère  $g$ -orthonormé

$$(g(e_1), g(e_2), \dots, g(e_d))$$

dans  $T_{g(e_0)}AdS^{d+1}$ . On peut définir l'orientation du temps dans  $AdS^{d+1}$  en disant qu'un vecteur  $\dot{\xi} \in T_\xi AdS^{d+1}$  est de genre temps et orienté vers le futur s'il existe  $g \in PSO(2, d)$  tel que  $\xi = g(e_0)$  et  $\dot{\xi} = g(e_1)$ . Les géodésiques de genre temps dans

$AdS^{d+1}$  sont des cercles. Précisément, la géodésique partant de  $\xi \in AdS^{d+1}$  dans la direction  $\dot{\xi} \in T_\xi AdS^{d+1}$  est l'intersection, dans  $\mathbb{R}^{2,d}$ , du plan engendré par  $(\xi, \dot{\xi})$  avec  $AdS^{d+1}$ . La structure causale de  $AdS^{d+1}$  est donc triviale.

Introduisons les champs de vecteurs horizontaux et verticaux dont on aura besoin pour la suite. Ce sont également des champs invariants à gauche dans  $PSO(2, d)$  que l'on notera également  $H_i^l$  pour les horizontaux et  $V_i^l, V_{ij}^l$  pour les verticaux. Précisément on obtient

$$H_0^l(g) := gH_0,$$

où  $H_0 := e_1 e_0^* - e_0 e_1^*$ , et

$$V_i^l(g) := gV_i,$$

où  $V_i := e_1 e_{i+1}^* + e_{i+1} e_1^*$ . Puis pour les autres horizontaux et verticaux on a pour  $i = 1, \dots, d$   $H_i^l(g) := gH_i$  où  $H_i = e_0 e_{i+1}^* + e_{i+1} e_0^*$  et pour  $i < j = 1, \dots, d$ ,  $V_{ij} := e_i e_j^* - e_j e_i^*$ .

La famille  $(H_0, H_i, V_i, V_{ij})$  définit une base de  $so(2, d)$  qui est orthogonale pour la métrique de Killing.

### 3.2.2 Processus de Dudley

Avant d'introduire les processus de Dudley dans  $dS^{d+1}$  et  $AdS^{d+1}$  nous rappelons leur définition dans l'espace-temps de Minkowski.

#### 3.2.2.1 Rappel : processus de Dudley dans $\mathbb{R}^{1,d}$

Dans  $\mathbb{R}^{1,d}$ , il n'existe pas de probabilité  $\mu$  différente de  $\delta_0$  qui soit invariante par les isométries  $g \in PSO(1, d)$  (i.e  $g(\mu) = \mu$ ). En effet si  $\mu \neq \delta_0$  on peut trouver un compact  $C \subset \mathbb{R}^{1,d} \setminus \{0\}$  tel que  $\mu(C) > 0$  et une suite de transformations  $g_n \in PSO(1, d)$  telle que les  $g_n(C)$  soient disjoints. On aurait alors  $\mu(\cup_n g_n(C)) = \sum_n \mu(g_n(C)) = +\infty$  ce qui est absurde. On déduit de cela qu'il ne peut exister de processus de Markov sur  $\mathbb{R}^{1,d}$  qui soit invariant sous l'action du groupe de Poincaré  $PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d}$ . En quelque sorte, c'est la non compacité de  $PSO(1, d)$  qui empêche de munir  $\mathbb{R}^{1,d} = (PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d})/PSO(1, d)$  de tels processus invariants, ce qu'on pouvait naturellement obtenir avec l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d = (SO(d) \times \mathbb{R}^d)/SO(d)$  du fait de la compacité de  $SO(d)$ . En cherchant des processus de Markov à valeurs dans un espace homogène sous l'action de  $PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d}$  on est amené à considérer l'espace  $(PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d})/SO(d)$  comme espace d'état minimal pour de tels processus. Dans [28], Dudley s'intéresse à des processus markoviens à valeurs dans  $(PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d})/SO(d) = \mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$ , qui sont  $PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d}$ -invariants et dont les trajectoires dans  $\mathbb{R}^{1,d}$  sont de genre temps. Redonnons ici le résultat de Dudley que l'on a déjà rappelé dans la partie précédente :

**Théorème 10** (Dudley). *Les processus de Markov à valeurs dans  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$  qui sont  $(PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d})$ -invariants et dont les trajectoires dans l'espace-temps de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,d}$  sont de genre temps ont un générateur, calculé en  $o = (e_1, 0)$  et pour  $f \in C_c^2(\mathbb{H} \times \mathbb{R}^{1,d})$ , de la forme :*

$$Tf(o) = a\dot{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} f(o) + \frac{\sigma^2}{2} \Delta_{\dot{\xi}}^{\mathbb{H}^d} f(o) + \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{d-1}} \left( f(\psi(r, \theta), 0) - f(o) - r \mathbf{1}_{]0,1[}(r) \sum_{i=1}^d \theta^i \frac{\partial}{\partial v_i} f(o) \right) \nu(dr) d\theta,$$

où  $\psi(r, \theta)$  désigne les coordonnées polaires dans  $\mathbb{H}^d$  et  $\nu$  une mesure de Lévy dans  $]0, +\infty[$  (i.e  $\int \min(1, r^2) \nu(dr) < +\infty$ ). Les processus à trajectoires continues ( $\nu = 0$ ) sont donc essentiellement ceux de la forme  $(\dot{\xi}_t, \int_0^t \dot{\xi}_s ds)$  où  $\dot{\xi}_t$  est un mouvement brownien sur la nappe hyperbolique.

### 3.2.2.2 Processus de Dudley dans $dS^{d+1}$ et $AdS^{d+1}$

Dans [39] et [38], Franchi et Le Jan définissent des généralisations de diffusions, à valeurs dans le fibré unitaire de variétés lorentziennes génériques  $T^1\mathcal{M}$ , qui sont invariantes en loi pour l'action infinitésimale de  $SO(d)$  sur la fibre et dont les trajectoires dans la variété lorentzienne sont de genre temps. Plus précisément, dans [39] Franchi et Le Jan construisent les diffusions, à la Eells-Elworthy-Malliavin, en faisant rouler sans glisser  $T^1\mathcal{M}$  sur  $\mathbb{H}^d \times \mathbb{R}^{1,d}$  le long d'une trajectoire d'une diffusion de Dudley. Dans un second article ([38]), les mêmes auteurs définissent une classe plus large de diffusions relativistes dont le coefficient de diffusion peut dépendre de la courbure et de l'énergie. Il apparait alors que, contrairement à la situation minkowskienne, il n'y a pas unicité de telles diffusions pour des variétés lorentziennes à courbure non nulle.

Dans le cas des espace-temps de Sitter et Anti-de-Sitter la situation est semblable à celle de Minkowski. En effet, de la même manière que

$$\mathbb{R}^{1,d} = (PSO(1, d) \times \mathbb{R}^{1,d}) / PSO(1, d)$$

on a

$$dS^{d+1} = PSO(1, d+1) / PSO(1, d) \quad \text{et} \quad AdS^{d+1} = PSO(2, d) / PSO(1, d)$$

et, pour les mêmes raisons invoquées pour  $\mathbb{R}^{1,d}$ , il n'existe pas de processus de Markov à valeurs dans  $dS^{d+1}$  (resp.  $AdS^{d+1}$ ), qui soient invariants par les isométries de celle-ci, c'est-à-dire, en notant  $\mathcal{L}$  le générateur, tels que  $\mathcal{L}(f \circ g) = \mathcal{L}(f) \circ g$  pour  $g \in PSO(1, d+1)$  (resp.  $g \in PSO(2, d)$ ). Les espaces homogènes minimaux qui s'imposent pour être des espaces d'états de processus markoviens invariants sont

donc  $PSO(1, d+1)/SO(d)$  et  $PSO(2, d)/SO(d)$ . Ces espaces homogènes s'identifient aux fibrés unitaires respectifs de  $dS^{d+1}$  et  $AdS^{d+1}$ . Nous noterons par le même symbole  $\tilde{\pi}$  les projections de  $PSO(1, d+1)$  dans  $T^1dS^{d+1}$  et  $PSO(2, d)$  dans  $T^1AdS^{d+1}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : PSO(1, d+1) &\longmapsto T^1dS^{d+1} \\ g &\longmapsto (g(e_0), g(e_1)) \quad (\text{avec ici } g(e_0) \in T_{g(e_1)}^1dS^{d+1}) \\ \tilde{\pi} : PSO(2, d) &\longmapsto T^1AdS^{d+1} \\ g &\longmapsto (g(e_1), g(e_0)) \quad (\text{avec ici } g(e_1) \in T_{g(e_0)}^1AdS^{d+1}) \end{aligned}$$

Dans la suite  $\mathcal{M}$  désigne soit  $dS^{d+1}$  soit  $AdS^{d+1}$ . On notera  $G$  le groupe d'isométrie de  $\mathcal{M}$ . Le fibré unitaire sera noté  $T^1\mathcal{M}$  et sera identifié à l'espace homogène  $G/SO(d)$ . L'application  $\tilde{\pi}$ , définie ci-dessus, projette donc  $G$  sur  $T^1\mathcal{M}$ . Rappelons que  $SO(d)$  est alors le sous groupe de  $G$  dont l'algèbre de Lie est engendrée par  $(V_{ij})_{1 \leq i < j = d}$  et  $PSO(1, d)$  est le sous-groupe de  $G$  dont l'algèbre de Lie est engendrée par  $(V_i, V_{ij})$ . Nous noterons  $o := \tilde{\pi}(Id)$  de sorte que  $o = (e_0, e_1)$  pour  $T^1dS^{d+1}$  et  $o = (e_1, e_0)$  pour  $T^1AdS^{d+1}$ .

**Notation 1.** Pour  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^d$ , nous noterons  $S(r, \theta)$  l'élément de  $PSO(1, d)$  défini par :

$$S(r, \theta) = \exp \left( r \sum_{i=1}^d \theta^i V_i \right).$$

**Proposition 24.** Les processus de Markov à valeurs dans  $T^1\mathcal{M}$  qui sont  $G$ -invariants et dont les trajectoires dans  $\mathcal{M}$  sont de genre temps possèdent un générateur  $T$ , calculé en  $o$  et pour  $f \in C_c^2(T^1\mathcal{M})$ , de la forme :

$$\begin{aligned} Tf(o) &= aH_0^l(f \circ \tilde{\pi})(Id) + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^d (V_i^l)^2 (f \circ \tilde{\pi})(Id) \\ &+ \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left[ f \circ \tilde{\pi}(S(r, \theta)) - f(o) - r \mathbf{1}_{]0,1[} \sum_{i=1}^d \theta^i (V_i^l)^2 (f \circ \tilde{\pi})(Id) \right] \nu(dr) d\theta, \end{aligned}$$

où  $a > 0$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$  et  $\nu$  est une mesure sur  $]0, +\infty[$  vérifiant  $\int \min(1, r^2) \nu(dr) < +\infty$ . On dira que le processus de Markov associé est un processus de Dudley lorsque  $a = 1$ , et ( $\sigma \neq 0$  ou  $\nu \neq 0$ ).

*Démonstration.* Nous allons appliquer le théorème 2.1 de [61], et donner la forme générale du générateur d'un processus markovien à valeurs dans  $T^1\mathcal{M}$  qui est  $G$ -invariant. Introduisons des coordonnées locales  $(v^i, h^0, h^i)_{i=1, \dots, d}$  dans un voisinage

$U_0$  de  $o$  dans  $T^1\mathcal{M}$  associée à la famille  $(V_i, H_0, H_i)$ . Ce sont des fonctions telles que

$$\forall(\dot{\xi}, \xi) \in U_0, \quad (\dot{\xi}, \xi) = \tilde{\pi} \left( \exp \left( \sum_{i=1}^d v^i(\dot{\xi}, \xi) V_i \right) \exp \left( \sum_{i=0}^d h^i(\dot{\xi}, \xi) H_i \right) \right).$$

D'après le théorème 2.1 de [61], le générateur d'un processus markovien  $G$ -invariant est de la forme :

$$Tf(o) = Df(o) + \int_{T^1\mathcal{M}} \left[ f(\dot{\xi}, \xi) - f(o) - \sum_{i=1}^d v^i(\dot{\xi}, \xi) \frac{\partial}{\partial v^i} f(o) - \sum_{i=0}^d h^i(\dot{\xi}, \xi) \frac{\partial}{\partial h^i} f(o) \right] \tilde{\Pi}(d(\dot{\xi}, \xi)),$$

où  $\tilde{\Pi}$  est une mesure  $SO(d)$ -invariante sur  $T^1\mathcal{M}$  vérifiant :

$$\tilde{\Pi}(\{0\}) = 0, \quad \int \left[ \sum_{i=0}^d (h^i)^2 + \sum_{i=1}^d (v^i)^2 \right] d\tilde{\Pi} < +\infty, \quad \tilde{\Pi}(U_0^c) < +\infty,$$

et enfin,  $D$  est un opérateur de diffusion  $SO(d)$ -invariant sur  $T^1\mathcal{M}$ . En suivant le raisonnement qui précède l'énoncé du Théorème 2.1 on peut préciser, dans notre cadre, la forme explicite de  $D$  à l'aide de la famille  $(V_i, H_0, H_i)$ . En la notant temporairement

$$X_1 := H_0, \quad X_2 := H_1, \quad \dots, \quad X_{d+1} := H_d, \quad X_{d+2} := V_1, \quad \dots, \quad X_{2d+1} := V_d,$$

la famille  $(X_i)_{i=1, \dots, 2d+1}$  est orthonormale pour un produit scalaire  $Ad(SO(d))$ -invariant bien choisi dans  $Lie(G)$ . Par le théorème 2.1 de [61], il existe une matrice symétrique positive  $(a_{ij})_{i,j=1, \dots, 2d+1}$  et des réels  $(c_i)_{i=1, \dots, 2d+1}$  tels que :

$$Df(o) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2d+1} a_{ij} X_i^l X_j^l (f \circ \tilde{\pi})(Id) + \sum_{i=1}^{2d+1} c_i X_i^l (f \circ \tilde{\pi})(Id).$$

Puisque  $T$  est  $G$ -invariant,  $D$  l'est également. En notant, pour  $k \in SO(d)$ ,  $L_k$  l'action de  $k$  sur  $T^1\mathcal{M}$  on a donc que  $D(f \circ L_k)(o) = Df(o)$ . De plus  $X_i^l(f \circ L_k \circ \tilde{\pi}) = Ad(k)X_i^l(f \circ \tilde{\pi})$  et on obtient explicitement :

$$Ad(k)H_0 = H_0, \quad Ad(k)H_i = \sum_{j=1}^d k_{ij} H_j, \quad Ad(k)V_i = \sum_{j=1}^d k_{ij} V_j.$$

Ainsi la matrice symétrique  $(a_{ij})$  est nécessairement de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma} I_d & \mu I_d \\ 0 & \mu I_d & \sigma I_d \end{pmatrix} \quad a, \sigma, \tilde{\sigma}, \mu \in \mathbb{R},$$

et puisqu'elle est positive on a  $\mu^2 \leq \sigma^2 \tilde{\sigma}^2$  et  $a > 0$ . Ainsi la forme générale d'un opérateur de diffusion  $SO(d)$ -invariant sur  $T^1\mathcal{M}$  est

$$\begin{aligned} Df(o) &= aH_0(f \circ \tilde{\pi})(Id) + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^d (V_i^l)^2 (f \circ \tilde{\pi})(Id) + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \sum_{i=1}^d (H_i^l)^2 (f \circ \tilde{\pi})(Id) \\ &\quad + \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^d [H_i^l V_i^l + V_i^l H_i^l] (f \circ \tilde{\pi})(Id). \end{aligned}$$

Maintenant pour obtenir un processus dont les trajectoires sont de genre-temps dans  $\mathcal{M}$  il faut imposer  $\tilde{\sigma} = 0$  (et donc  $\mu = 0$ ). On retrouve ainsi la forme voulue de partie diffusion de l'opérateur. Maintenant, en ce qui concerne la partie du générateur qui définit les sauts, afin d'obtenir des trajectoires continues dans  $\mathcal{M}$ , il est nécessaire d'imposer que  $\tilde{\Pi}$  soit portée par la fibre  $\tilde{\pi}(PSO(1, d))$  (identifiée à  $\mathbb{H}^d$ ). En introduisant les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  associée aux coordonnées  $v^i$  on déduit, puisque  $\tilde{\Pi}$  est  $SO(d)$ -invariante, qu'il existe une mesure de Lévy  $\nu$  sur  $]0, +\infty[$  telle que :

$$\begin{aligned} &\int_{\tilde{\pi}(PSO(1,d))} \left[ f(\dot{\xi}, \xi) - f(o) - \sum_{i=1}^d v^i(\dot{\xi}, \xi) V_i^l (f \circ \tilde{\pi})(Id) \right] \tilde{\Pi}(d(\dot{\xi}, \xi)) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left[ f \circ \tilde{\pi}(S(r, \theta)) - f(o) - r \mathbf{1}_{]0,1[} \sum_{i=1}^d \theta^i V_i^l (f \circ \tilde{\pi})(Id) \right] \nu(dr) d\theta. \end{aligned}$$

□

**Remarque 12.** *Il apparait alors, comme dans la situation minkowskienne, qu'il existe une unique classe de diffusions relativistes à valeurs dans le fibré unitaire de  $dS^{d+1}$  et  $AdS^{d+1}$ . On les nommera diffusions de Dudley. Elles correspondent à celles introduites par Franchi et Le Jan dans [39] pour notre cas particulier de  $dS^{d+1}$  et  $AdS^{d+1}$ .*

### 3.2.2.3 Relèvement dans $G$

Nous allons choisir un relèvement particulier de ces processus. Il s'agit de processus de Lévy à valeurs dans  $G$ , invariants à gauche et  $SO(d)$ -invariants à droite qui se projettent, par  $\tilde{\pi}$ , en des processus de Dudley sur  $T^1\mathcal{M}$ .

Notons  $g_t$  le processus de Lévy dans  $G$ , invariant à gauche,  $SO(d)$ -invariant à

droite défini par le générateur  $\mathcal{L}$  :

$$\mathcal{L}f(g) = H_0^l f(g) + \frac{\sigma}{2} \sum_{i=1}^d (V_i^l)^2 f(g) \quad (3.1)$$

$$+ \int_{SO(d)} \int_{\mathbb{S}^d} \int_0^{+\infty} \left[ f(gkS(r, \theta)k^{-1}) - f(g) - r \mathbf{1}_{]0,1[} \left[ \sum_{i=1}^d \theta^i V_i^l f(g) \right] \right] \nu(dr) d\theta dk, \quad (3.2)$$

où  $d\theta$  désigne la mesure de Lebesgue renormalisée sur  $\mathbb{S}^d$  et  $dk$  la mesure de Haar sur  $SO(d)$ .

Il est clair que le processus  $\tilde{\pi}(g_t)$  est un processus de Dudley sur  $T^1\mathcal{M}$ . Lorsqu'on suppose certaines hypothèses sur  $\sigma$  et  $\nu$ , le comportement asymptotique de  $g_t$ , et donc de  $\tilde{\pi}(g_t)$  se déduit des résultats sur les marches aléatoires dans les groupes de Lie semi-simples de Guivarch et Raugi ([46]), adaptés au cadre des processus de Lévy par Liao ([61]).

### 3.2.2.4 Décomposition d'Iwasawa de $G$

Avant d'énoncer les résultats de Liao pour les processus de Dudley, rappelons comment obtenir des décompositions d'Iwasawa de  $PSO(1, d+1)$  et  $PSO(2, d)$ . Les références sont [54] et [61].

La forme de Killing  $B$  est la forme bilinéaire symétrique sur  $Lie(G)$  définie par

$$\forall X, Y \in G, \quad B(X, Y) = \text{Trace}[ad(X)ad(Y)].$$

Puisque  $G$  est semi-simple, cette forme est non-dégénérée. Notons  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$  et  $\mathcal{K}$  son algèbre de Lie. Soit  $\mathcal{P}$  le supplémentaire  $B$ -orthogonal à  $\mathcal{K}$ . Alors  $B$  est définie négative sur  $\mathcal{K}$  et définie positive sur  $\mathcal{P}$  et on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire sur  $Lie(G)$  égal à  $B$  sur  $\mathcal{P}$ ,  $-B$  sur  $\mathcal{K}$ , qui préserve l'orthogonalité entre  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{K}$ . Lorsque  $G = PSO(1, d+1)$ ,  $K$  est isomorphe à  $SO(d+1)$  et lorsque  $G = PSO(2, d)$ ,  $K$  est isomorphe à  $SO(2) \times SO(d)$ . Notons  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre abélienne maximale contenue dans  $\mathcal{P}$ . Lorsque  $G = PSO(1, d+1)$ ,  $\mathcal{A}$  est de dimension 1 et lorsque  $G = PSO(2, d)$  elle est de dimension 2. On appelle *racine* une forme linéaire non nulle sur  $\mathcal{A}$  telle que le sous-espace vectoriel

$$E_\alpha := \{X \in Lie(G), \quad ad(H)X = \alpha(H)X \quad \forall H \in \mathcal{A}\}$$

soit non réduit à  $\{0\}$ . Nous verrons que  $PSO(1, d+1)$  possède deux racines et  $PSO(2, d)$  en possède huit. En notant  $\Phi$  l'ensemble des racines on a la décomposition en somme directe orthogonale pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $Lie(G)$

$$Lie(G) = E_0 \oplus \sum_{\alpha \in \Phi} E_\alpha.$$

Dans  $\mathcal{A}$ , le complémentaire de la réunion d'hyperplans  $\cup_{\alpha \in \Phi} \{\alpha = 0\}$  est constitué d'autant de composantes connexes que d'éléments de  $\Phi$ , appelées *chambres de Weyl*. Ainsi dans  $PSO(1, d+1)$  il y a deux chambres qui sont des demi-droites et dans  $PSO(2, d)$ , il y a huit chambres qui sont des huitièmes de plan. On fait le choix d'une chambre  $\mathcal{W}$  et on dit qu'une racine est positive lorsqu'elle est positive sur  $\mathcal{W}$ . On note  $\Phi^+$  l'ensemble des racines positives. Dans le cas de  $PSO(1, d+1)$ ,  $\Phi^+$  contient un seul élément et dans celui de  $PSO(2, d)$  il en contient quatre. On note  $\mathcal{N} := \sum_{\alpha \in \Phi^+} E_\alpha$  et  $\bar{\mathcal{N}} := \sum_{\alpha \in \Phi^+} E_{-\alpha}$ . Ce sont des algèbres de Lie et on peut écrire une décomposition d'Iwasawa de  $Lie(G)$

$$Lie(G) = \bar{\mathcal{N}} \oplus \mathcal{A} \oplus \mathcal{K}.$$

Notons  $A = \exp(\mathcal{A})$  et  $\bar{N} = \exp(\bar{\mathcal{N}})$ . L'application suivante réalise un isomorphisme analytique :

$$\begin{aligned} \bar{N} \times A \times K &\longrightarrow G \\ (n, a, k) &\longmapsto nak \end{aligned}$$

**Remarque 13.** *On a aussi la décomposition d'Iwasawa  $G = NAK$  qu'on va utiliser dans la section suivante dans laquelle on fera des calculs explicites pour les diffusions de Dudley. Dans cette section, nous prendrons la décomposition  $G = \bar{N}AK$  car c'est celle qu'utilise Liao dans [61] pour établir le comportement asymptotique.*

### 3.2.2.5 Dynamique asymptotique

$G$  est un groupe semi-simple et on peut appliquer directement les résultats de [61] qui décrivent, sous des hypothèses générales, la dynamique asymptotique d'un processus de Lévy dans les coordonnées d'Iwasawa. On note  $g_t = n_t a_t k_t$  la décomposition de  $g_t$  dans  $\bar{N}AK$ . De plus on posera  $H_t := \log(a_t)$  le processus à valeurs dans  $\mathcal{A}$ . Nous prendrons garde à ne pas confondre la valeur de ce processus au temps 0 (qui dans la suite sera  $\log(I) = 0$ ) avec la matrice  $H_0 := e^0 e_1^* + e_1 e_0^*$ .

**Théorème 11** (Liao-Guivarch-Raugi). *En faisant l'hypothèse que  $\nu$  est finie et  $\sigma \neq 0$  on a la convergence presque sûre de  $n_t$  vers une variable aléatoire asymptotique  $n_\infty$ .*

*Démonstration.* Les conditions des propositions 6.12 et 6.13 de [61], qui permettent d'appliquer le théorème 6.4 de [61] se vérifient facilement. En effet la partie diffusive du générateur  $\mathcal{L}$  est hypoelliptique et la proposition 6.12 de [61] assure que le sous-groupe engendré par le processus est *irréductible* (au sens de [61] et [46]). Pour montrer que le semi-groupe est contractant (cf [46] et [61]) il suffit de vérifier, par la proposition 6.13 de [61], qu'il existe  $X \in Lie(V_i)$  et  $c \leq 0$  tel que  $X + cH_0$  est un élément régulier de  $\mathcal{P}$ , c'est-à-dire qui est de la forme  $Ad(k)H$  avec  $k \in K$  et  $H$  dans la chambre de Weyl  $\mathcal{W}$ . Dans nos deux situations, il suffit de prendre  $X = V_2$  et  $c = 0$  puisque  $V_1$  (comme les autres  $V_i$  d'ailleurs) est régulier.  $\square$



De plus, la condition d'intégrabilité  $\int_0^{+\infty} r\nu(dr) < +\infty$  est équivalente à la condition 7.7 p 175 de [61] et lorsque celle-ci est vérifiée (ainsi que les conditions précédentes), on peut appliquer le théorème 7.3 de [61] et on obtient la convergence presque sûre

$$\frac{1}{t}H_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} H_\infty, \quad (3.3)$$

où  $H_\infty$  est déterministe et appartient à la chambre de Weyl  $\mathcal{W}$ .

**Remarque 14.** *Notons, seulement dans le cadre de cette remarque,  $g_t = n_t a_t k_t$  la décomposition d'Iwasawa du processus dans la décomposition  $G = NAK$  (c'est ce qu'on fera dans la section suivante dans laquelle nous expliciterons les calculs pour les diffusions de Dudley). On a alors que  $n_t$  converge presque sûrement vers une variable aléatoire dans  $N$ , de plus  $-\log(a_t)/t$  converge vers  $H_\infty \in \mathcal{W}$  (le même que celui obtenu avec la décomposition  $G = \bar{N}AK$ ).*

En utilisant le théorème 7.3 de [61], on peut préciser la vitesse de convergence de  $n_t$  vers  $n_\infty$  et obtenir le spectre de Lyapunov du flot  $\phi_t : g \mapsto gg_t$ .

**Théorème 12** (Spectre de Lyapunov pour  $G = PSO(1, d+1)$ ). *Dans le cas de l'espace-temps de de Sitter  $dS^{d+1}$  ( $G = PSO(1, d+1)$ ), il existe un réel positif  $\alpha > 0$  et deux sous-algèbres de Lie aléatoires  $V^- \subset V^0 \subset Lie(G)$  tels que pour une métrique  $\|\cdot\|$  invariante à gauche et pour  $g \in G$ ,  $v \in Lie(G)$  on a :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|D\phi_t(g) \cdot gv\| = \begin{cases} \alpha & \text{si } v \in Lie(G) \setminus V^0 \\ 0 & \text{si } v \in V^0 \setminus V^- \\ -\alpha & \text{si } v \in V^- \setminus \{0\} \end{cases}$$

**Théorème 13** (Spectre de Lyapunov pour  $G = PSO(2, d)$ ). *Dans le cas de l'espace-temps Anti-de-Sitter  $AdS^{d+1}$  ( $G = PSO(2, d)$ ), il existe  $\alpha_4 > \alpha_3 \geq \alpha_2 \geq \alpha_1 > 0$  et huit sous-algèbres aléatoires  $V_4^- \subset \dots \subset V_1^- \subset V^0 \subset V_1^+ \subset \dots \subset V_3^+ \subset Lie(G)$  tels que pour une métrique  $\|\cdot\|$  invariante à gauche et pour  $g \in G$ ,  $v \in Lie(G)$  on a :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|D\phi_t(g) \cdot gv\| = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } v \in V_i^+ \setminus V_{i-1}^+ \quad i = 1, \dots, 4 \\ 0 & \text{si } v \in V^0 \setminus V_1^- \\ -\alpha_i & \text{si } v \in V_i^- \setminus V_{i+1}^- \quad i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

en posant  $V_0^+ := V^0$ ,  $V_4^+ := Lie(G)$  et  $V_5^- := \{0\}$ .

**Remarque 15.** *Il semble qu'on puisse relâcher l'hypothèse d'intégrabilité de  $\Pi$  dans [61]. En effet, en reprenant les démonstrations de [61] il apparaît que la condition  $\int_{U_0^c} \|g_p\| < +\infty$ , où  $U_0$  est un voisinage compact de  $Id$ , suffise pour obtenir un taux de convergence. Dans notre cas cela correspondrait à supposer seulement  $\int_1^{+\infty} r\nu(dr) < +\infty$  comme cela était le cas dans la partie 2 de cette thèse.*

*Démonstration.* Pour une métrique invariante à gauche  $\|\cdot\|$ , on a  $\|D\phi_t(g) \cdot gv\|_{gg_t} = \|Ad(g_t)^{-1}v\|_I$  et par l'équivalence des normes dans  $Lie(G)$ , le résultat ne va pas dépendre de la norme choisie. On peut prendre le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  associé à la métrique de Killing. Il est  $Ad(K)$ -invariant et on obtient  $\|D\phi_t(g) \cdot gv\|_{gg_t} = \|Ad(a_t)^{-1} \circ Ad(n_t)^{-1}v\| = \|Ad(a_t^{-1}) \circ Ad(n_t^{-1}n_\infty)(Ad(n_\infty)^{-1}v)\|$ . Notons  $(X_i)$  une base de  $Lie(G)$  adaptée à la décomposition de diagonalisation  $Lie(G) = E_0 \oplus \sum_{\alpha \in \Phi} E_\alpha$ . Chaque  $X_i$  appartient à un  $E_\alpha$ . Nous notons  $\lambda_i$  les racines, avec 0, comptées avec multiplicité et  $h_{ij}(t)$  les coefficients tels que :

$$Ad(n_t^{-1}n_\infty)X_j = \sum_i h_{ij}(t)X_i.$$

Le théorème 7.3 p 191 de [61] énonce que pour presque toute trajectoire et pour  $\varepsilon > 0$  on a

$$|h_{ij}(t)| \leq e^{-t(\lambda_j(H_\infty) - \lambda_i(H_\infty) - \varepsilon)} \quad (3.4)$$

pour  $t$  suffisamment grand. Ainsi, pour un  $Y \in Lie(G)$  que l'on écrit  $Y = \sum_i y_i X_i$  on obtient

$$Ad(a_t^{-1}) \circ Ad(n_t^{-1}n_\infty)(Y) = \sum_i \left( \sum_j h_{ij}(t) e^{-\lambda_i(H_t)} y_j \right) X_i,$$

et donc

$$\|Ad(a_t^{-1}) \circ Ad(n_t^{-1}n_\infty)(Y)\|^2 = \sum_i \left( \sum_j h_{ij}(t) e^{-\lambda_i(H_t)} y_j \right)^2.$$

Comme il est rappelé dans la preuve du théorème 7.3 de [61], la matrice  $h_{ij}(t)$  est sur-diagonale avec des 1 sur la diagonale. Précisément  $h_{ij}(t) = 1$  pour  $i = j$  et  $h_{ij}(t) = 0$  lorsque  $\lambda_i \geq \lambda_j$ ; on a donc :

$$\|Ad(a_t^{-1}) \circ Ad(n_t^{-1}n_\infty)(Y)\|^2 = \sum_i \left( e^{-\lambda_i(H_t)} y_i + \sum_{j, \lambda_i(H_\infty) < \lambda_j(H_\infty)} h_{ij}(t) e^{-\lambda_i(H_t)} y_j \right)^2,$$

et l'inégalité (3.4) implique que

$$h_{ij}(t) = O\left(e^{-t(\lambda_j(H_\infty) - \lambda_i(H_\infty) + o(1))}\right)$$

, de plus, par (3.3) on a  $\lambda_i(H_t) = t(\lambda_i(H_\infty) + o(1))$  et finalement il vient que

$$\|Ad(a_t^{-1}) \circ Ad(n_t^{-1}n_\infty)(Y)\|^2 = \sum_i \left( e^{-\lambda_i(H_t)} y_i + \sum_{j, \lambda_i(H_\infty) < \lambda_j(H_\infty)} O\left(e^{-t(\lambda_j(H_\infty) + o(1))}\right) y_j \right)^2.$$

Notons alors  $(\tilde{\alpha}_i)_{i=1,\dots,k_0}$  les racines (avec 0 compris) sans compter les multiplicités, avec  $\tilde{\alpha}_1(H_\infty) \leq \tilde{\alpha}_2(H_\infty) \leq \dots \leq \tilde{\alpha}_{k_0}(H_\infty)$ . Posons  $J_k := \{j; \lambda_j(H_\infty) = \tilde{\alpha}_k(H_\infty)\}$ . On voit donc que si  $\sum_{j \in J_1} (y_j)^2 \neq 0$  alors

$$\frac{1}{t} \log \|Ad(a_t^{-1}) \circ Ad(n_t^{-1}n_\infty)(Y)\| \rightarrow -\tilde{\alpha}_1(H_\infty)$$

et que si  $\sum_{j \in J_1} (y_j)^2 = 0$  mais que  $\sum_{j \in J_2} (y_j)^2 \neq 0$  alors

$$\frac{1}{t} \log \|Ad(a_t^{-1}) \circ Ad(n_t^{-1}n_\infty)(Y)\| \rightarrow -\tilde{\alpha}_2(H_\infty)$$

... etc... et on obtient ainsi l'échelonnement voulu. Le spectre de Lyapunov est alors la famille décroissante des  $-\tilde{\alpha}_i(H_\infty)$ . Cette famille est impaire et centrée en 0. De plus, la distribution croissante des sous-espaces aléatoires est

$$\begin{aligned} \{0\} \subset Ad(n_\infty) \left( E_{\alpha_{k_0}} \right) \subset Ad(n_\infty) \left( E_{\alpha_{k_0}} \oplus E_{\alpha_{k_0-1}} \right) \subset \dots \\ \dots \subset Ad(n_\infty) \left( E_{\alpha_{k_0}} \oplus \dots \oplus E_{\alpha_2} \right) \subset Lie(G). \end{aligned}$$

Particularisons ce résultat général aux différents cas étudiés ici.

Lorsque  $G = PSO(1, d+1)$ , il n'y a qu'une racine positive  $\alpha_0$  et puisque  $H_\infty$  est dans la chambre de Weyl il vient que  $-\alpha < 0 < \alpha$  en posant  $\alpha := \alpha_0(H_\infty)$ .

Lorsque  $G = PSO(2, d)$ , nous verrons par la suite que les racines positives peuvent être choisies de la forme  $\{f_1, f_2, f_2 - f_1, f_1 + f_2\}$ , où  $(f_1, f_2)$  est une base de  $\mathcal{A}^*$ . Les réels  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sont choisis croissant et tels que  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \{f_1(H_\infty), f_2(H_\infty), (f_2 - f_1)(H_\infty)\}$  et  $\alpha_4 = (f_1 + f_2)(H_\infty)$ . On sait seulement, puisque  $H_\infty$  est dans la chambre de Weyl, que  $\alpha_4 > \alpha_3 \geq \alpha_2 \geq \alpha_1 > 0$  mais on ne sait pas, a priori, quand les inégalités larges sont strictes.  $\square$

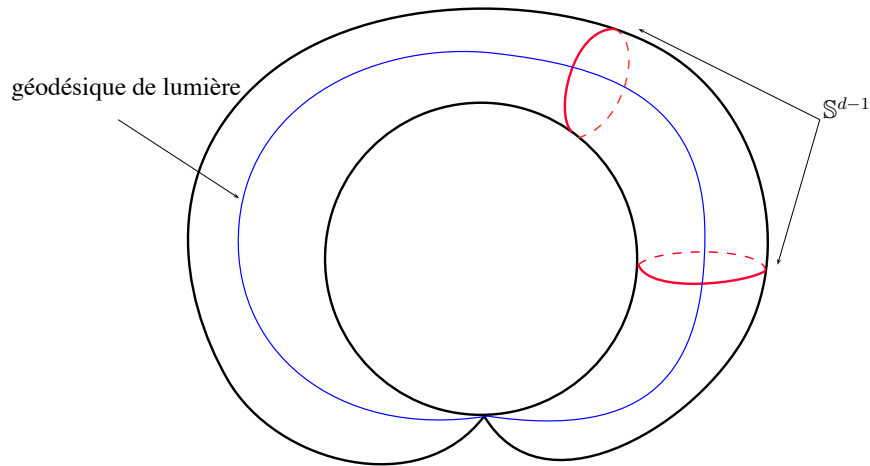
### 3.2.2.6 Projection sur la variété de base

Lorsque la loi de  $g_t$  est absolument continue par rapport à la mesure de Haar sur  $G$  (c'est le cas pour les diffusions en appliquant le théorème de Hörmander), les travaux de Furstenberg ([40]) Azencott [4] et Raugi [67] assurent que la tribu invariante de  $g_t$  est engendrée par la variable asymptotique  $n_\infty$ . Pour obtenir une réalisation géométrique de la frontière de Poisson de  $g_t$  on peut écrire ce processus dans la décomposition polaire de  $G$ . Notant  $M$  le sous-groupe de  $K$  formé des éléments qui commutent avec  $A$ . On peut décomposer presque tout (pour la mesure de Haar sur  $G$ )  $g \in G$  de manière unique

$$g = xa^+k,$$

où  $x \in K/M$ ,  $a^+ \in \exp(\mathcal{W})$  et  $k \in K$ . En écrivant  $g_t = x_t a_t^+ k_t$  on a presque sûrement la convergence de  $x_t$  vers une variable asymptotique  $x_\infty \in K/M$  et  $\log(a_t^+)/t \rightarrow H_\infty$ . De plus  $x_\infty$  est une transformation géométrique de  $n_\infty$  et la tribu invariante de  $g_t$  est également engendrée par  $x_\infty$ . Ainsi on obtient une réalisation géométrique de la frontière de Poisson de  $g_t$  comme l'espace compact homogène  $K/M$  muni de la loi de  $x_\infty$ . Dans le cas de  $PSO(1, d+1)$  on a  $M = SO(d)$  et  $K/M$  s'identifie alors à la sphère  $\mathbb{S}^d$ . Dans le cas de  $PSO(2, d)$  on a  $M = SO(d-2)$  (voir dans la section suivante) et donc la frontière de Poisson de  $g_t$  est  $\mathbb{S}^1 \times T^1\mathbb{S}^{d-1}$ . Revenons aux processus de Dudley  $(\dot{\xi}_t, \xi_t)$  qui s'obtiennent en projetant  $g_t$ , par  $\tilde{\pi}$ , sur le quotient compact  $G/SO(d) = T^1\mathcal{M}$ . La frontière de Poisson de ces processus markoviens est la même que pour  $g_t$  (on n'a pas perdu d'information asymptotique en quotientant par le compact  $SO(d)$ ) et il est intéressant de parvenir à une description géométrique de cette frontière.

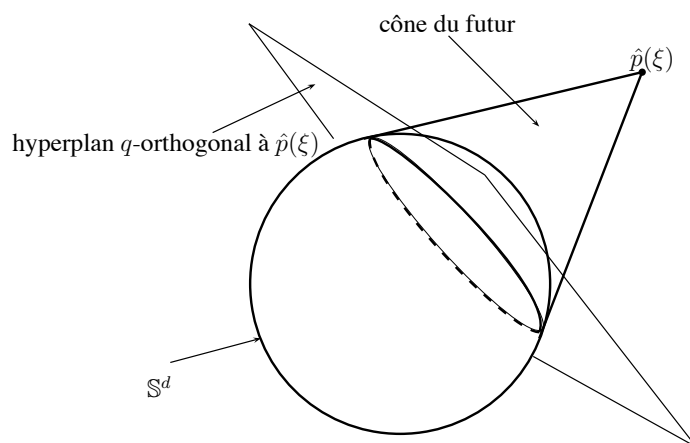
Pour la diffusion de Dudley dans l'espace de Minkowski l'interprétation géométrique a été faite dans [9]. En plongeant conformément  $\mathbb{R}^{1,d}$  dans l'univers d'Einstein  $Ein^{d+1}$  (cf [36] pour une très belle description de ce plongement) on munit l'espace de Minkowski d'un bord topologique qui coïncide avec sa frontière causale et qui s'identifie à un *cône de lumière* dans  $Ein^{d+1}$ . En fait  $\mathbb{R}^{1,d}$  s'identifie au complémentaire d'un *cône de lumière* dans  $Ein^{d+1}$ . Topologiquement ce bord est un tore  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{d-1}$  dont une sphère  $\mathbb{S}^d$  a été contractée en un point. Le processus dans  $\mathbb{R}^{1,d}$  converge presque sûrement vers un point de ce cône de lumière.



En ce qui concerne les processus de Dudley dans  $dS^{d+1}$  et  $AdS^{d+1}$  nous pouvons également donner une interprétation géométrique de la frontière de Poisson en décrivant la situation dans l'espace projectif.

L'espace-temps de de Sitter a été défini comme étant une hyperboloïde à une nappe de  $\mathbb{R}^{1,d+1} = \mathbb{R}^{d+2}$ . En projetant radialement sur la sphère unité  $\mathbb{S}^{d+1}$  de  $\mathbb{R}^{d+2}$

on voit que le bord topologique de cette  $dS^{d+1}$  est la réunion de deux sphère  $\mathbb{S}^d$  dont l'une est à l'infini dans le futur et l'autre dans le passé. Nous allons maintenant considérer la situation dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R}$  que nous identifierons avec la carte affine  $\{\xi^0 = 1\}$  muni d'une droite projective à l'infini. Le cône de lumière  $\{q = 0\}$  de  $\mathbb{R}^{1,d+1}$  est alors identifié avec la sphère  $\mathbb{S}^d$ . Pour un point  $\xi \neq 0$  de  $\mathbb{R}^{1,d+1}$  nous noterons  $\hat{p}(\xi)$  sa projection dans  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R}$ . L'espace-temps de de Sitter se projette sur le complémentaire de la boule bordée par la sphère  $\{q = 0\}$ . En fait  $dS^{d+1}$  est un revêtement double de cet ouvert de  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R}$  puisque un point se relève en deux points antipodaux de  $dS^{d+1}$ . Les deux sphères à l'infini de  $dS^{d+1}$  se projettent sur la sphère  $\mathbb{S}^d$ . Notons de plus que la nappe hyperbolique  $\mathbb{H}^{d+1}$  de  $\mathbb{R}^{1,d+1}$  se projette (et est difféomorphe) à l'intérieur de cette boule. Puisque nous faisons partir le processus de Dudley depuis  $e_1$  qui est sur l'équateur de  $dS^{d+1}$  et que les trajectoires sont de genre temps, le processus va rester dans l'hémisphère supérieure de  $dS^{d+1}$ . Ainsi les trajectoires peuvent être dessinés dans l'espace projectif et seront à valeurs dans le complémentaire de la boule, de plus la sphère dans  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R}$  correspond à la sphère du futur. Le processus partira d'un point de la droite projective à l'infini correspondant à  $e_1$ . La trajectoire, de genre temps, évolue dans le futur de chaque point. Pour un  $\xi \in dS^{d+1}$  tel que  $\xi^0 > 0$  (i.e dans l'hémisphère supérieure), son cône du futur dans  $dS^{d+1}$  est par définition l'intersection du cône du futur dans  $\mathbb{R}^{1,d+1}$  avec  $dS^{d+1}$ . C'est également le demi-cône formé des demi-géodésiques de lumière issues de  $\xi$ . Une telle géodésique est l'intersection, dans  $\mathbb{R}^{1,d+1}$ , de  $dS^{d+1}$  avec le plan engendré par  $\xi$  et un  $\eta$  tel que  $q(\eta) = 0$  et  $\eta \in TdS^{d+1}$  (autrement dit  $q(\xi, \eta) = 0$ ). Dessinée dans  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R}$ , cette géodésique de lumière est donc la droite passant par  $\hat{p}(\xi)$  et  $\hat{p}(\eta)$  qui est un point de la sphère (car  $q(\eta) = 0$ ) et de la projection de l'hyperplan orthogonal à  $\xi$  (car  $q(\eta, \xi) = 0$ ). Cette géodésique de lumière est alors, projectivement, une droite tangente à la sphère. Le cône du futur dans  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R}$  est la réunion de ces droites tangentes à la sphère et issues de  $\hat{p}(\xi)$ . Autrement dit c'est encore un cône!



Une courbe *causale* de  $dS^{d+1}$ , c'est-à-dire de genre lumière ou de genre temps, qui sort de tout compact va tendre vers un point de cette sphère  $\mathbb{S}^d$  du futur qui s'identifie donc avec la frontière causale de  $dS^{d+1}$ . Les trajectoires dans  $dS^{d+1}$  des processus de Dudley sont de genre temps et vont donc converger presque sûrement vers un angle asymptotique de  $\mathbb{S}^d$ . Pour pouvoir identifier cette variable asymptotique nous allons préciser la décomposition d'Iwasawa de  $g_t = n_t a_t k_t$  dans  $G = \bar{N}AK$ . On a noté  $a_t = \exp(H_t)$  et ici on a explicitement  $H_t$  de la forme  $\lambda_t H_0$  où on rappelle que  $H_0 = e_0 e_1^* + e_1 e_0^*$ . La convergence p.s de  $H_t/t$  vers un élément de  $\mathcal{W}$  se traduit par le fait que  $\lambda_t/t$  converge p.s vers un réel  $\lambda > 0$ . De plus  $a_t$  est diagonalisable et  $(e_0 + e_1)$  est un vecteur propre associé à  $\exp(\lambda_t)$ . Notons  $\theta_\infty$  le projeté de  $n_\infty(e_0 + e_1)$  dans  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R} : \theta_\infty := \hat{p}(n_\infty(e_0 + e_1))$ . C'est un point de la sphère puisque  $q(n_\infty(e_0 + e_1)) = q(e_0 + e_1) = 0$ . Rappelons que le processus de Dudley  $(\dot{\xi}_t, \xi_t) \in T^1 dS^{d+1}$  est défini, à partir de  $g_t$ , par  $\xi_t := g_t(e_1)$  et  $\dot{\xi}_t := g_t(e_0)$ . On alors

$$\begin{aligned} q(\dot{\xi}_t, n_t(e_0 + e_1)) &= q(n_t a_t k_t(e_1), n_t(e_0 + e_1)) \\ &= q(k_t(e_1), a_t^{-1}(e_0 + e_1)) = e^{-\lambda_t} q(k_t(e_1), e_0 + e_1) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Notons  $\xi$  un point dans l'adhérence de la trajectoire  $\hat{p}(\dot{\xi}_t)$  dans  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R}$ . La convergence précédente implique que  $q(\xi, \theta_\infty) = 0$  (la q-orthogonalité dans  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R}$  est bien définie). Autrement dit le lieu des points d'adhérence de  $\hat{p}(\dot{\xi}_t)$  est sur l'hyperplan orthogonal à  $\theta_\infty$ . Or le seul point de cet hyperplan qui soit sur la frontière causale de  $dS^{d+1}$  (c'est-à-dire la sphère  $\mathbb{S}^d$ ) est  $\theta_\infty$ . On a donc montré que l'angle asymptotique géométrique imposé par le fait que les trajectoires des processus de Dudley sont de genre-temps est en fait donné par la variable asymptotique  $n_\infty$ .

Concernant le comportement asymptotique de  $\dot{\xi}_t$  dans l'espace projectif, le raisonnement est semblable. La quantité  $q(\dot{\xi}_t, n_t(e_0 + e_1))$  converge également vers 0. Ainsi n'importe quel point dans l'adhérence de  $\hat{p}(\dot{\xi}_t)$  appartient à l'hyperplan tangent à  $\theta_\infty$ . Or un tel point doit également appartenir à la boule fermée (puisque  $\dot{\xi}_t = g_t(e_0) \in \mathbb{H}^{d+1}$ ) et il n'y a que  $\theta_\infty$  qui satisfait ces deux conditions. Ainsi  $\hat{p}(\dot{\xi}_t)$  converge vers  $\theta_\infty$ .

Pour être cohérent avec les notations que nous utiliserons dans les calculs explicite de la prochaine section nous notons  $\theta_\infty$  la variable asymptotique de  $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1} = \{\xi^0 = 0\}$  telle que  $\theta_\infty = \hat{p}(e_0 + \theta_\infty)$ . C'est la variable asymptotique limite de  $\theta_t$  qui est l'angle de  $g_t$  dans la décomposition polaire.

La figure 3.2.2.6 résume la situation dans  $T^1 dS^{d+1}$ . Le dessin est réalisé pour la diffusion puisque la trajectoire dans  $\mathbb{H}^{d+1}$  est continue. Les cônes de lumière sont également dessinés. Ils sont tangents à la sphère  $\mathbb{S}^d$  en des sphères  $\mathbb{S}^{d-1}$ . Dans le cas général le processus dans  $\mathbb{H}^{d+1}$  peut sauter. Précisément au point  $(\dot{\xi}_{t_0-}, \xi_{t_0-})$ , un saut de  $\dot{\xi}_t$  s'effectue dans la boule bordée par la sphère  $\mathbb{S}^{d-1}$  commune à  $\mathbb{S}^d$  et au cône de lumière issu de  $\xi_{t_0-}$ .

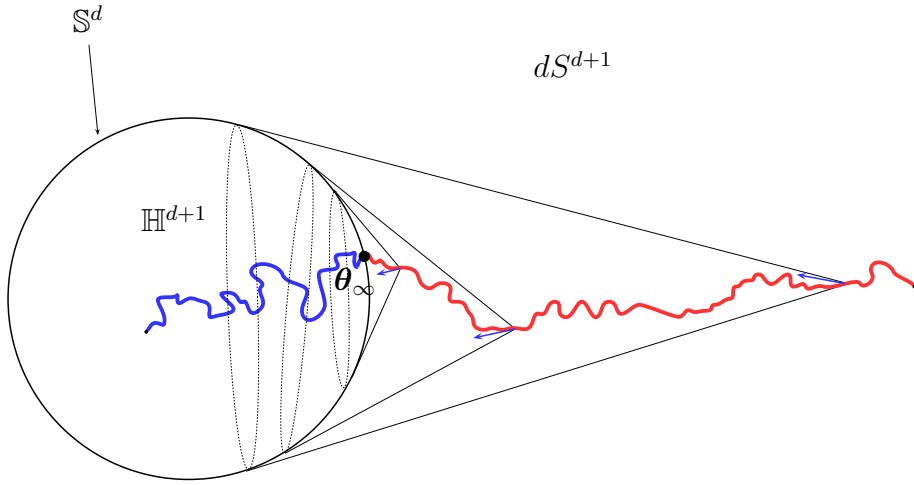
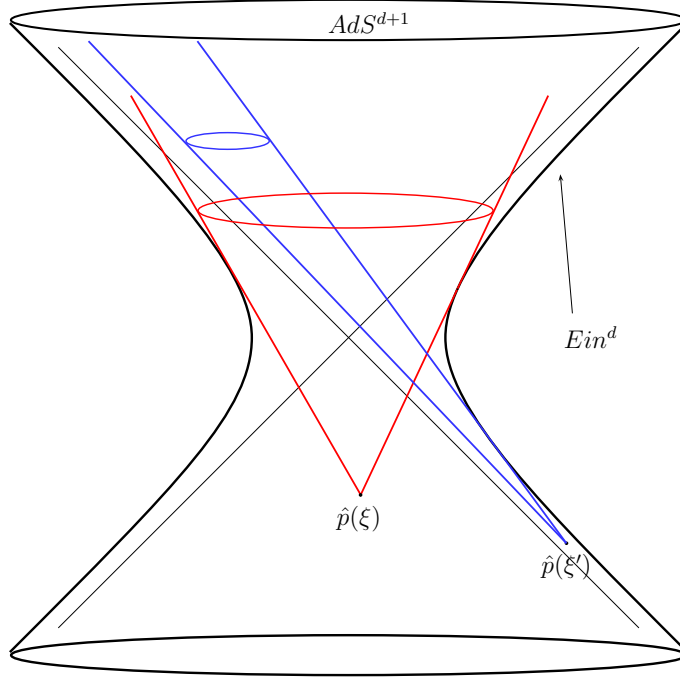


FIGURE 3.1 – Trajectoires, dans une carte projective, de  $\xi_t \in dS^d$  et  $\dot{\xi}_t \in \mathbb{H}^d$ , ainsi que leur angle asymptotique  $\theta_\infty \in \mathbb{S}^d$ .

Analysons maintenant la situation pour l'espace-temps anti-de-Sitter  $AdS^{d+1}$ . Cet espace a été défini comme la nappe  $\{q = 1\}$  dans  $\mathbb{R}^{d+2}$  (ici  $q$  est de signature  $(+, +, -, \dots, -)$ ). La restriction  $q_\xi$  de  $q$  à l'espace tangent au cône d'isotropie  $\{q = 0\}$  en  $\xi \neq 0$  est dégénérée de signature  $(0, +, -, \dots, -)$ . Le noyau de  $q_\xi$  est engendrée par la direction de  $\xi$  si bien qu'on peut munir la projection de  $\{q = 0\}$  dans  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R}$  d'une structure Lorentzienne conforme. Cette sous-variété de  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R}$ , appelé l'univers d'Einstein et notée  $Ein^d$ , est homéomorphe au tore  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^d$ . L'espace-temps  $AdS^{d+1}$  se projette sur  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R}$  en un ouvert bordé par  $Ein^d$ . Un point de cet ouvert se relève en deux points antipodaux si bien que  $AdS^{d+1}$  est un revêtement à deux feuillets de cet ouvert. Dans certains textes (par exemple [36]) cet ouvert de  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R}$  est défini comme l'espace anti-de-Sitter. Dans la carte affine  $\{\xi^0 = 1\}$  l'univers d'Einstein est une hyperboloïde à une nappe (comme  $dS^d$ ) et la projection de  $AdS^{d+1}$  est l'intérieur de cette nappe. Dans ce modèle projectif de  $AdS^{d+1}$ , les géodésiques causales sont des droites projectives (donc des cercles topologique) et les géodésiques de genre espace sont des segments. On peut également donner une caractérisation géométrique du cône du futur d'un point dans  $AdS^{d+1}$ . C'est le demi-cône, orienté vers le futur, formé des droites issues de ce point et tangentes à la quadrique  $q$ . Le dessin ci-dessous présente les cônes du futur de deux points  $\xi$  et  $\xi'$  de  $AdS^{d+1}$  vus dans la carte affine  $\{\xi^0 = 1\}$ .



Les géodésiques de lumière dans  $Ein^d$  sont des droites projectives (et correspondent dans la carte affine à des géodésiques de lumières de  $dS^d$ ). Précisément, le cône d'isotropie  $\{q = 0\}$  contient des plans et les géodésiques de lumière de  $Ein^d$  sont les projetés de ces plans dans  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R}$ . Comme pour la situation précédente, le comportement asymptotique du processus de Dudley  $(\dot{\xi}_t, \xi_t)$  se déduit de celui de  $g_t$  dans  $PSO(2, d)$  (rappelons qu'ici  $\xi_t = g_t(e_0)$  et  $\dot{\xi}_t = g_t(e_1)$ ). Dans la section suivante nous donnons une décomposition d'Iwasawa de  $PSO(2, d)$  dans laquelle le processus  $a_t$  s'écrit  $a_t = \exp(\alpha_t H_1 + \beta_t V_2)$  où  $H_1 = e_0 e_2^* + e_2 e_0^*$  et  $V_2 = e_1 e_3^* + e_3 e_1^*$ . Le fait que  $(\log a_t)/t$  converge p.s vers un élément de la chambre de Weyl  $\mathcal{W}$  se traduit ici par la convergence de  $\alpha_t/t$  et  $\beta_t/t$  vers deux réels  $\alpha_\infty$  et  $\beta_\infty$  tels que

$$\alpha_\infty > 0, \quad \beta_\infty > 0, \quad \text{et} \quad \alpha_\infty - \beta_\infty > 0.$$

Remarquons que les vecteurs propres de  $a_t$   $u := (e_0 + e_2)$  et  $v := (e_1 + e_3)$ , associés respectivement aux valeurs propres  $e^{\alpha t}$  et  $e^{\beta t}$ , appartiennent au cône d'isotropie de  $q$ . Le plan engendré par  $u$  et  $v$  est inclu dans ce cône et définit donc, en projetant sur  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R}$ , une géodésique de lumière dans l'univers d'Einstein  $Ein^d$ . Pour un vecteur  $w = \mu u + \nu v$  du plan engendré par  $u$  et  $v$  privé de 0 on a

$$\begin{aligned} q(\xi_t, n_t w) &= q(g_t(e_0), n_t w) \\ &= q(k_t(e_0), a_t^{-1} w) = q(k_t(e_0), \mu e^{-\alpha t} u + \nu e^{-\beta t} v) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

donc un point  $\xi$  dans l'adhérence de  $\hat{p}(\xi_t)$  dans  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R}$  est  $q$ -orthogonal à  $\hat{p}(n_\infty(w))$  (i.e  $q(\xi, \hat{p}(n_\infty(w))) = 0$ ). Ceci étant vrai pour tout  $w$  du plan,  $\xi$  est nécessairement



dans l'hyperplan de codimension 2 tangent à  $Ein^d$  en la géodésique de lumière passant par  $\hat{p}(n_\infty(u))$  et  $\hat{p}(n_\infty(v))$  que nous noterons  $\mathbf{P}_\infty$ . Il en est de même pour les points dans l'adhérence de  $\hat{p}(\xi_t)$ . Contrairement à la situation précédente nous ne pourrions pas aller plus loin. Ici les trajectoires ne tendent pas vers l'infini dans  $AdS^{d+1}$  (on peut montrer que  $\xi_t = n_t a_t k_t(e_0)$  ne tend pas vers l'infini dans  $\mathbb{R}^{2,d}$ ) et elles ne sont donc pas asymptotiques à la géodésique de lumière dans  $Ein^d$ . Ainsi, en regardant dans  $\mathbb{P}^{d+1}\mathbb{R}$  on trouve des points d'accumulation qui sont à la fois dans  $AdS^{d+1}$  et dans  $\mathbf{P}_\infty$ . La conjecture posée par Franchi et Le Jan dans [39] est vérifiée ici puisque  $\mathbf{P}_\infty$  est un ensemble de géodésiques de lumière de  $AdS^{d+1}$ . Cependant l'information asymptotique ne semble pas entièrement contenue dans la donnée de  $\mathbf{P}_\infty$  (ou ce qui revient au même la géodésique de lumière de  $Ein^d$  qui est le lieu de tangence). En effet, en utilisant les résultats de Azencott et Raugi ([4] [67]) on pourrait montrer, en supposant une hypothèse d'hypoellipticité (vérifiée pour les diffusions), que la tribu invariante de  $g_t$  (et également celle de  $(\xi_t, \xi_t)$ ) est engendrée par la variable asymptotique  $n_\infty$  et que sa loi est absolument continue par rapport à la mesure de  $Haar$  sur  $\bar{N}$ . Cela revient à dire que la frontière de Poisson s'identifie avec la frontière maximale de  $PSO(2, d)$  ( $\mathbb{S}^1 \times T^1\mathbb{S}^{d-1}$ ) ( qui s'identifie géométriquement à l'ensemble des géodésiques de lumière pointées de l'univers d'Einstein). Avec notre hyperplan asymptotique nous n'obtenons qu'une géodésique de lumière et il manque donc la donnée d'un point ! Signalons également que  $g_t$  agit par transformation conforme sur l'univers d'Einstein et Frances ([36]) décrit de manière géométrique toutes les dynamiques asymptotiques possibles d'une suite de transformations conforme de  $Ein^d$ . Elles peuvent être de trois types différents : *bornée*, *équilibrée* ou bien *mixte*. Dans le cas stochastique qui est le nôtre, la dynamique est mixte (cela correspond au fait que  $H_\infty \in \mathcal{W}$ ) et il y a une géodésique pointée attractive et une autre répulsive.

### 3.3 Calculs explicites pour les diffusions relativistes

Dans cette section nous allons calculer explicitement les coefficients de Lyapunov pour les diffusions relativistes ( $\nu = 0, \sigma \neq 0$ ). À la manière de [59] ou de [62], nous écrivons les équations différentielles stochastiques vérifiées par les coordonnées d'Iwasawa de la diffusion. Nous calculons le spectre de Lyapunov qui s'écrit comme une certaine intégrale d'une mesure invariante dépendant de  $\sigma$  dont on donne une expression assez explicite. Il s'agit ici de retrouver, par le calcul, les résultats de [61] qui utilisent [46]. Dans le cas de Anti-de-Sitter, pour montrer directement que  $H_\infty$  est dans la chambre de Weyl il faut obtenir des inégalités qui ne semblent pas être évidentes à démontrer de manière directe. Néanmoins, en

faisant le lien entre la décomposition d'Iwasawa avec les décompositions polaires et de Bruhat de  $PSO(2, d+1)$  nous parvenons à le démontrer.

Au passage nous montrerons, en utilisant les techniques de Raugi [67], que la variable aléatoire  $n_\infty$  engendre la tribu invariante des diffusions relativistes dans  $dS^{d+1}$ .

### 3.3.1 Coefficients de Lyapunov et frontière de Poisson pour les diffusions relativistes dans de Sitter

#### 3.3.1.1 Décomposition d'Iwasawa de $PSO(1, d+1)$ : précisions

La sous-algèbre de  $Lie(G)$

$$\mathcal{K} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C} \end{pmatrix}, \mathbf{C} \in so(d+1) \right\}$$

est l'algèbre de Lie du sous-groupe de  $G$  compact maximal  $K := \exp(\mathcal{K})$  (isomorphe à  $SO(d+1)$ ).

Rappelons que  $\mathcal{P}$  est l'orthogonal de  $\mathcal{K}$  pour la forme de Killing. Le produit scalaire associé à la forme de Killing correspond ici à  $\langle X, Y \rangle = d \text{Trace}(XY^*)$ . On calcule explicitement que :

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b^* \\ b & 0 \end{pmatrix}; b \in \mathbb{R}^{d+1} \right\},$$

Une sous-algèbre abélienne maximale de  $\mathcal{P}$  est nécessairement de dimension 1 et on choisit ici de prendre

$$\mathcal{A} := \text{Vect}(H_0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda e_1^* \\ \lambda e_1 & 0 \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il n'y a que deux racines (non nulles) dans  $so(1, d+1)$ , ce sont  $\{-\alpha_0, \alpha_0\}$  où  $\alpha_0$  est la forme linéaire sur  $\mathcal{A}$  qui envoie  $H_0$  sur 1. La chambre de Weyl est choisie de telle sorte que  $\alpha_0$  est positive; c'est donc la demi-droite  $\{\lambda H_0; \lambda > 0\}$ .

Rappelons que par définition  $\mathcal{N} := \{X; ad(H)(X) = \alpha_0(H)X, \forall H \in \mathcal{A}\}$  et on vérifie que :

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & h^* \\ 0 & 0 & h^* \\ h & -h & 0 \end{pmatrix}; h \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Nous notons les projections de  $X \in Lie(G)$  relativement à la décomposition d'Iwasawa de  $Lie(G)$

$$Lie(G) = \mathcal{N} \oplus \mathcal{A} \oplus \mathcal{K},$$

par  $\{X\}_{\mathcal{N}}$ ,  $\{X\}_{\mathcal{A}}$  et  $\{X\}_{\mathcal{K}}$ .

En posant  $A := \exp(\mathcal{A})$  et  $N := \exp(\mathcal{N})$ , on rappelle que l'application de  $N \times A \times K$  dans  $G$  qui envoie  $(n, a, k)$  sur  $nak$  est un difféomorphisme analytique.

De plus nous noterons  $M$  le sous-groupe de  $K$  qui commute avec  $A$ . C'est le sous-groupe, noté précédemment  $SO(d)$ , qui stabilise  $e_0$  et  $e_1$ .

### 3.3.1.2 Comportement asymptotique en coordonnées d'Iwasawa

La diffusion  $g_t$  est solution de l'équation différentielle stochastique dans  $G$

$$dg_t = \sigma \sum_{i=1}^d V_i^l(g_t) \circ dB_t^i + H_0^l(g_t)dt, \quad (3.5)$$

où  $B_t$  est un mouvement brownien de  $\mathbb{R}^d$ . Dans la proposition suivante nous projetons cette équation sur les sous-groupes  $N, A$  et  $K$  en écrivant les équations satisfaites par les processus  $n_t, a_t, k_t$  de la décomposition d'Iwasawa de  $g_t = n_t a_t k_t$ .

**Proposition 25.** *On obtient le système d'équations différentielles stochastiques suivant :*

$$\circ dk_t = \sigma \sum_{i=1}^d \{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{K}} k_t \circ dB_t^i + \{Ad(k_t)H_0\}_{\mathcal{K}} k_t dt \quad (3.6)$$

$$\circ da_t = \sigma \sum_{i=1}^d a_t \{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{A}} \circ dB_t^i + a_t \{Ad(k_t)H_0\}_{\mathcal{A}} dt \quad (3.7)$$

$$\circ dn_t = \sigma \sum_{i=1}^d n_t Ad(a_t) \{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{N}} \circ dB_t^i + n_t Ad(a_t) \{Ad(k_t)H_0\}_{\mathcal{N}} dt. \quad (3.8)$$

*Démonstration.* Puisque  $g_t = n_t a_t k_t$  il vient :

$$\circ dg_t = \circ dn_t a_t k_t + n_t \circ da_t k_t + n_t a_t \circ dk_t;$$

et ainsi :

$$a_t^{-1} n_t^{-1} \circ dg_t k_t^{-1} = a_t^{-1} n_t^{-1} \circ dn_t a_t + a_t^{-1} \circ da_t + \circ dk_t k_t^{-1}.$$

Maintenant, en utilisant (3.5) on obtient :

$$a_t^{-1} n_t^{-1} \circ dg_t k_t^{-1} = \sigma \sum_{i=1}^d Ad(k_t)V_i \circ dB_t^i + Ad(k_t)H_0 dt,$$

nous avons donc :

$$a_t^{-1}n_t^{-1} \circ dn_t a_t + a_t^{-1} \circ da_t + \circ dk_t k_t^{-1} = \sigma \sum_{i=1}^d Ad(k_t)V_i \circ dB_t^i + Ad(k_t)H_0 dt.$$

On obtient (3.6) (resp. (3.7), resp. (3.8)) en projetant cette équation sur  $\mathcal{K}$  (resp.  $\mathcal{A}$ , resp.  $\mathcal{N}$ ).  $\square$

Ainsi  $k_t$  est une diffusion dans  $K$  et la dynamique de  $a_t$  dépend seulement de cette diffusion. Puisque  $Ad(a_t^{-1})\{\cdot\}_{\mathcal{N}} = e^{\log a_t}\{\cdot\}_{\mathcal{N}}$ , on constate que les “variations infinitésimales”  $dn_t$  vont tendre vers 0 dès que  $\log a_t$  est suffisamment “négatif”. Ainsi nous allons commencer par étudier le comportement asymptotique de  $H_t := \log a_t$  et dans le lemme suivant nous calculons la correction d’Itô pour ce terme.

**Lemme 7.** *Soit  $H_t$  le processus de  $\mathcal{A}$  tel que  $a_t = \exp(H_t)$ .*

*Nous avons*

$$H_t = m_t + \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{i=1}^d \{[\{Ad(k_s)V_i\}_{\mathcal{K}}, Ad(k_s)V_i]\}_{\mathcal{A}} + \{Ad(k_s)H_0\}_{\mathcal{A}} \right\} ds,$$

où  $m_t := \sigma \sum_{i=1}^d \int_0^t \{Ad(k_s)V_i\}_{\mathcal{A}} dB_s^i$  est une martingale.

*Démonstration.* Puisque  $A$  est abélien nous avons  $\circ dH_t = a_t^{-1} \circ da_t$  et en utilisant (3.7) on obtient :

$$\circ dH_t = \sigma \sum_{i=1}^d \{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{A}} \circ dB_t^i + \{Ad(k_t)H_0\}_{\mathcal{A}} dt.$$

En utilisant (3.6) il vient :

$$\begin{aligned} d\{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{A}} dB_t^i &= \{\circ dk_t V_i k_t^{-1} + k_t V_i \circ dk_t^{-1}\}_{\mathcal{A}} dB_t^i \\ &= \{\sigma \{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{K}} Ad(k_t)V_i - \sigma Ad(k_t)V_i \{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{K}}\}_{\mathcal{A}} dt \\ &= \sigma \{[\{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{K}}, Ad(k_t)V_i]\}_{\mathcal{A}} dt. \end{aligned}$$

Et on obtient donc

$$\begin{aligned} dH_t &= \sigma \sum_{i=1}^d \{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{A}} dB_t^i \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{i=1}^d \{[\{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{K}}, Ad(k_t)V_i]\}_{\mathcal{A}} + \{Ad(k_t)H_0\}_{\mathcal{A}} \right\} dt. \end{aligned}$$

$\square$

Puisque  $\int_0^t \sum_i \alpha_0(\{Ad(k_s)V_i\}_{\mathcal{A}})^2 ds = O(t)$ , on voit que  $\frac{m_t}{t}$  converge presque sûrement vers 0.

Ainsi  $\frac{H_t}{t}$  et

$$\frac{1}{t} \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{i=1}^d \{[\{Ad(k_s)V_i\}_{\mathcal{K}}, Ad(k_s)V_i]_{\mathcal{A}} + \{Ad(k_s)H_0\}_{\mathcal{A}} \} ds \right.$$

ont la même limite dans  $\mathcal{A}$  lorsque  $t$  tend vers  $\infty$ .

Nous allons montrer que cette limite est de la forme  $-\alpha H_0$  avec  $\alpha > 0$ . Pour cela nous calculons plus explicitement les corrections d'Itô.

**Lemme 8.** *Pour  $k \in K$  on a*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{i=1}^d \{[\{Ad(k)V_i\}_{\mathcal{K}}, Ad(k)V_i]_{\mathcal{A}} + \{Ad(k)H_0\}_{\mathcal{A}} \\ & = - \left( \frac{1}{2} \sigma^2 (d-1) + \frac{1}{2} \sigma^2 q(k(e_1), e_1)^2 + q(k(e_1), e_1) \right) H_0. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous calculons

$$\{Ad(k)V_i\}_{\mathcal{K}} = \{k(e_{i+1})e_0^* + e_0k(e_{i+1})^*\}_{\mathcal{K}} = k(e_{i+1})e_1^* - e_1k(e_{i+1})^*.$$

Et

$$\begin{aligned} [\{Ad(k)V_i\}_{\mathcal{K}}, Ad(k)V_i] &= [k(e_{i+1})e_1^* - e_1k(e_{i+1})^*, k(e_{i+1})e_0^* + e_0k(e_{i+1})^*] \\ &= e_1^*k(e_{i+1})(k(e_{i+1})e_0^* + e_0k(e_{i+1})^*) - (e_0e_1^* + e_1e_0^*) \end{aligned}$$

Donc

$$\{[\{Ad(k)V_i\}_{\mathcal{K}}, Ad(k)V_i]_{\mathcal{A}} = ((e_1^*k(e_{i+1}))^2 - 1) H_0,$$

et puisque  $\sum_{i=1}^d (e_1^*k(e_{i+1}))^2 = 1 - (e_1^*k(e_1))^2$  nous avons

$$\frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{i=1}^d \{[\{Ad(k)V_i\}_{\mathcal{K}}, Ad(k)V_i]_{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2} \sigma^2 \{(d-1) + (e_1^*k(e_1))^2\} H_0.$$

On conclut en invoquant que  $\{Ad(k)H_0\}_{\mathcal{A}} = (e_1^*k(e_1))H_0$  et  $q(k(e_1), e_1) = -e_1^*k(e_1)$ .  $\square$

Soit  $u_t$  le processus dans  $[-1, 1]$  défini par

$$u_t := q(e_1, k_t(e_1)) = -e_1^*k_t(e_1). \quad (3.9)$$

Les deux lemmes précédents nous invitent à étudier l'ergodicité de  $u_t$  afin de calculer le comportement asymptotique de  $\frac{H_t}{t}$ . Le lemme suivant prouve que  $u_t$  est une diffusion sur le segment  $[-1, 1]$  et on obtient l'ergodicité dans la proposition qui le suit.

**Lemme 9.** *Il existe un mouvement brownien  $W$  sur  $\mathbb{R}$  tel que*

$$du_t = \sigma u_t \sqrt{1 - u_t^2} dW_t + \left\{ -\sigma^2 u_t^3 - u_t^2 - \frac{d-2}{2} \sigma^2 u_t + 1 \right\} dt. \quad (3.10)$$

*Démonstration.* En utilisant (3.6) on déduit que

$$\begin{aligned} d(e_1^* k_t) &= \sigma \sum_{i=1}^d (e_1^* k_t(e_{i+1}) e_1^* - k_t(e_{i+1})^*) k_t \circ dB_t^i + (e_1^* k_t(e_1) e_1^* - k_t(e_1)^*) k_t dt \\ &= \sigma \sum_{i=1}^d (e_1^* k_t(e_{i+1}) e_1^* k_t - e_{i+1}^*) \circ dB_t^i + (e_1^* k_t(e_1) e_1^* k_t - e_1^*). \end{aligned}$$

Ainsi

$$d(e_1^* k_t(e_1)) = \sigma \sum_{i=1}^d (e_1^* k_t(e_{i+1})) (e_1^* k_t(e_1)) \circ dB_t^i + ((e_1^* k_t(e_1))^2 - 1) dt.$$

Et on calcule la correction d'Itô suivante :

$$\begin{aligned} d((e_1^* k_t(e_{i+1})) (e_1^* k_t(e_1))) dB_t^i &= \sigma \left\{ (e_1^* k_t(e_{i+1}) e_1^* k_t - e_{i+1}^*) e_{i+1} e_1^* k_t(e_1) \right. \\ &\quad \left. + e_1^* k_t(e_{i+1}) e_1^* k_t(e_{i+1}) e_1^* k_t(e_1) \right\} dt \\ &= \sigma (2(e_1^* k_t(e_{i+1}))^2 - 1) (e_1^* k_t(e_1)) dt. \end{aligned}$$

Donc, puisque  $u_t = -e_1^* k_t(e_1)$  et  $\sum_{i=1}^d (e_1^* k_t(e_{i+1}))^2 = 1 - u_t^2$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} du_t &= \sigma u_t \sum_{i=1}^d e_1^* k_t(e_{i+1}) dB_t^i + \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{i=1}^d (2(e_1^* k_t(e_{i+1}))^2 - 1) u_t + (1 - u_t^2) \right\} dt \\ &= \sigma u_t \sqrt{1 - u_t^2} dW_t + \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 (2(1 - u_t^2) - d) u_t + (1 - u_t^2) \right\} dt, \end{aligned}$$

où  $W_t$  est un mouvement brownien. □

**Proposition 26.** *Il y a unicité trajectorielle et existence faible des solutions de (3.10). Lorsqu'il part de  $u \in [-1, 0]$ ,  $u_t$  atteint presque sûrement 0 qui est absorbant à gauche :  $\mathbb{P}_0(\exists s > 0, u_s \in [-1, 0]) = 0$ . De plus  $u_t$  est ergodique dans  $[0, 1]$  et l'unique probabilité invariante sur  $[0, 1]$ ,  $\mu(du)$ , est donnée par la formule :*

$$\mu(du) = c_d u^{-d} (1 - u^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-\frac{2}{\sigma^2 u}} \mathbf{1}_{]0,1]}(u) du,$$

où  $c_d$  est le coefficient de normalisation.

*Démonstration.* Posons  $\Sigma(u) := \sigma u \sqrt{1-u^2}$  et  $\beta(u) := 1 - \frac{d-2}{2}\sigma^2 u - u^2 - \sigma^2 u^3$ . Puis considérons l'EDS

$$du_t = \Sigma(u_t)dW_t + \beta(u_t)dt. \quad (3.11)$$

On vérifie que  $\Sigma$  et  $\beta$  satisfont les conditions du théorème de Yamada-Watanabe (théorème 40.1 p 265 de [68]) qui assurent l'existence trajectorielle pour (3.11). De plus, en considérant  $\Sigma' := \Sigma \mathbf{1}_{[-1,1]}$  et  $\beta' := \beta \mathbf{1}_{[-1,1]} + \frac{d}{2}\sigma^2(\mathbf{1}_{]-\infty,-1]} - \mathbf{1}_{[1,+\infty[})$  on peut appliquer le théorème 23.5 p 168 de [68] et on obtient l'existence d'une solution faible de (3.11).

La diffusion  $u_t$  n'est pas régulière (au sens de [68]) sur le segment entier  $[-1, 1]$  mais l'est sur chacun des intervalles  $[-1, 0]$  et  $[0, 1]$ .

– **Étude de  $u_t$  sur  $[-1, 0]$ .**

On introduit la fonction d'échelle de  $u_t$  sur  $[-1, 0]$

$$\begin{aligned} \phi : ]-1, 0[ &\longrightarrow [0, +\infty[ \\ u &\longmapsto \int_u^0 \frac{|s|^{d-2}}{(\sqrt{1-s^2})^d} e^{\frac{2}{\sigma^2} \frac{1}{s}} ds, \end{aligned}$$

elle est strictement décroissante et régulière sur  $] - 1, 0[$ . Soit  $v_t$  la diffusion sur  $[0, +\infty[$  solution de :

$$dv_t = \phi'(\phi^{-1}(v_t))\Sigma(\phi^{-1}(v_t))dW_t. \quad (3.12)$$

En appliquant la formule d'Itô's on obtient que  $\phi^{-1}(v_t)$  est une diffusion sur  $] - 1, 0[$  solution de (3.11). Ainsi il reste à vérifier que  $+\infty$  est un point d'entrée et 0 une frontière absorbante pour  $v_t$ . Notons  $m(dv) = (\phi'\Sigma)^{-2} \circ \phi^{-1}(v)dv$  la mesure vitesse de  $v_t$  sur  $[0, +\infty[$ . En utilisant le théorème 23.12 de [51], nous avons que  $+\infty$  est un point d'entrée si et seulement si  $\int^{+\infty} v dm(v) < +\infty$ . Maintenant en posant  $u = \phi^{-1}(v)$  il vient

$$\int^{+\infty} v dm(v) = \int_{-1}^0 \frac{\phi(u)}{\phi'(u)\Sigma(u)^2} du.$$

De plus, un calcul montre que

$$\frac{\phi(u)}{\phi'(u)\Sigma(u)^2} \underset{u \rightarrow -1^+}{\sim} \begin{cases} (1-d/2)/2\sigma^2 & \text{si } d \geq 3 \\ \log(1+u)/2\sigma^2 & \text{si } d = 2 \end{cases},$$

donc  $\int^{+\infty} v dm(v) < +\infty$  et  $+\infty$  est un point d'entrée pour  $v_t$ .

Maintenant, le théorème 51.2 p 295 de [68] assure que  $u_t$ , partant de  $u_0 \in [-1, 0]$ , atteint presque sûrement 0 en un temps fini et que 0 est absorbant à gauche si et seulement si

$$\int_{0^+} v m(dv) < +\infty, \quad \text{et} \quad \int_{0^+} m(dv) = +\infty. \quad (3.13)$$

Mais on a

$$\int_{0+} v m(dv) \stackrel{v=\phi(u)}{=} \int^{0-} \frac{\phi(u)}{\phi'(u)\Sigma^2(u)} du, \quad \text{et } \frac{\phi(u)}{\phi'(u)\Sigma^2(u)} \underset{u \rightarrow 0-}{\sim} -\frac{1}{2},$$

et

$$\int_{0+} m(dv) \stackrel{v=\phi(u)}{=} \int^{0-} \frac{1}{\phi'(u)\Sigma^2(u)} du, \quad \text{et } \frac{1}{\phi'(u)\Sigma^2(u)} \underset{u \rightarrow 0-}{\sim} -\frac{e^{-\frac{2}{\sigma^2}\frac{1}{u}}}{\sigma^2|u|^d},$$

ce qui implique (3.13).

– **Étude de  $u_t$  sur  $[0, 1]$ .**

La fonction strictement croissante de  $]0, 1[$  dans  $\mathbb{R}$  suivante

$$\begin{aligned} \varphi : ]0, 1[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \int_{1/2}^u \frac{s^{d-2}}{(\sqrt{1-s^2})^d} e^{\frac{2}{\sigma^2}\frac{1}{s}} ds \end{aligned}$$

est la fonction d'échelle de  $u_t$  sur  $]0, 1[$ . Cela signifie que la diffusion  $\bar{v}_t$  solution de

$$d\bar{v}_t = \varphi'(\varphi^{-1}(\bar{v}_t))\Sigma(\varphi^{-1}(\bar{v}_t))dW_t. \quad (3.14)$$

est telle que  $\varphi(\bar{v}_t)$  est solution de (3.11) (en appliquant la formule d'Itô). Nous notons  $\bar{m}(dv) := (\varphi'\Sigma)^{-2} \circ \varphi^{-1}(v)dv$  la mesure vitesse de  $\bar{v}_t$  sur  $\mathbb{R}$ .

Nous allons montrer que 0 est un point d'entrée à droite pour  $u_t$  et qu'elle est ergodique dans  $[0, 1]$ . Ceci est équivalent à ce que  $-\infty$  est un point d'entrée pour  $\bar{v}_t$  et que ce processus est ergodique dans  $\mathbb{R}$ . Par les théorèmes 23.12 p 462 et 23.15 p 465 de [51] il reste à vérifier que :

$$\int_{-\infty} v \bar{m}(dv) < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{m}(dv) < +\infty.$$

Cela est clair en observant que

$$\int_{-\infty} v \bar{m}(dv) = \int_{0+} \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)\Sigma^2(u)} du \quad \text{et} \quad \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)\Sigma^2(u)} \underset{u \rightarrow 0+}{\sim} -1/2,$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{m}(dv) &= \int_0^1 \frac{1}{\varphi'(u)\Sigma^2(u)} du \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi'(u)\Sigma^2(u)} \underset{u \rightarrow 0+}{\sim} \sigma^{-2} u^{-d} e^{-\frac{2}{\sigma^2}\frac{1}{u}} \\ &\quad \frac{1}{\varphi'(u)\Sigma^2(u)} \underset{u \rightarrow 1-}{=} O(1). \end{aligned}$$

La probabilité invariante  $\mu(du)$  de  $u_t$  sur  $[0, 1]$  est la mesure image de  $1/\bar{m}(\mathbb{R})\bar{m}(dv)$  par  $\varphi^{-1}$ .



□

En utilisant les lemmes précédents et le théorème ergodique (cf théorème 20.21 p409 [51]) nous obtenons le résultat clé suivant :

**Corollaire 3.** *On a la limite presque-sûre suivante*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H_t}{t} = -\alpha H_0,$$

où

$$\alpha := \frac{1}{2}\sigma^2(d-1) + \int_{[0,1]} \left( \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + u \right) \mu(du) > 0.$$

On note  $h_t$  le vecteur de  $\mathbb{R}^d$  tel que :

$$\begin{aligned} n_t &= \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_t^* \\ 0 & 0 & h_t^* \\ h_t & -h_t & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \|h_t\|^2/2 & -\|h_t\|^2/2 & h_t^* \\ \|h_t\|^2/2 & 1 - \|h_t\|^2/2 & h_t^* \\ h_t & -h_t & \mathbf{Id} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous allons démontrer la convergence presque-sûre de  $n_t$  vers une variable aléatoire  $n_\infty$  et préciser la vitesse de convergence.

**Proposition 27** (Convergence de  $n_t$ ). *Le processus  $n_t$  converge presque-sûrement vers une variable aléatoire asymptotique  $n_\infty \in N$ . De plus, on a presque-sûrement*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|h_t - h_\infty\| \leq -\alpha.$$

*Démonstration.* Rappelons que  $n_t$  satisfait (3.8)

$$dn_t = \sigma \sum_{i=1}^d n_t Ad(a_t) \{Ad(k_t) V_i\}_{\mathcal{N}} \circ dB_t^i + n_t Ad(a_t) \{Ad(k_t) H_0\}_{\mathcal{N}} dt,$$

et posons  $\tilde{h}_t^i \in \mathbb{R}^d$  tel que

$$Ad(a_t) \{Ad(k_t) V_i\}_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\tilde{h}_t^i)^* \\ 0 & 0 & (\tilde{h}_t^i)^* \\ \tilde{h}_t^i & -\tilde{h}_t^i & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

et de la même manière,  $\tilde{h}_t^0 \in \mathbb{R}^d$  associé à  $Ad(a_t)[Ad(k_t)H_0]_{\mathcal{N}}$ .

Maintenant

$$\begin{aligned} Ad(a_t)\{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{N}} &= \exp(ad(H_t))\{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{N}} \\ &= e^{\alpha_0(H_t)}\{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{N}}, \end{aligned}$$

où  $\{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{N}}$  est borné puisque  $k_t$  reste dans un compact. De plus  $\alpha_0(H_t) \sim -\alpha/t$  avec  $\alpha > 0$  et on déduit donc que  $\tilde{h}_t^i$  converge vers zero exponentiellement vite et est asymptotiquement dominé par  $Cste \times e^{-(\alpha-\varepsilon)t}$  pour un  $\varepsilon$  arbitrairement petit (i.e pour presque toute trajectoire on a  $(\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0, t_0 > 0, \forall t > t_0, |\tilde{h}_t^i| \leq Ce^{-(\alpha-\varepsilon)t})$ ).

De plus, la correction d'Itô vaut

$$\begin{aligned} dAd(a_t)\{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{N}}dB_t^i &= \sigma Ad(a_t) \left( [\{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{A}}, \{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{N}}] \right. \\ &\quad \left. + [\{\{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{K}}, Ad(k_t)V_i\}]_{\mathcal{N}} \right) dt, \end{aligned}$$

et on déduit que  $\tilde{h}_t^i \circ dB_t^i = \tilde{h}_t^i dB_t^i + \hat{h}_t^i dt$  où  $\hat{h}_t^i$  est également dominé par  $Cste \times e^{-(\alpha-\varepsilon)t}$ .

Puisque

$$n_t = \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_t^* \\ 0 & 0 & h_t^* \\ h_t & -h_t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \|h_t\|^2/2 & -\|h_t\|^2/2 & h_t^* \\ \|h_t\|^2/2 & 1 - \|h_t\|^2/2 & h_t^* \\ h_t & -h_t & \mathbf{Id} \end{pmatrix}.$$

nous avons, avec (3.8)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h_t^* \circ dh_t & -h_t^* \circ dh_t & dh_t^* \\ h_t^* \circ dh_t & -h_t^* \circ dh_t & dh_t^* \\ dh_t & -dh_t & \mathbf{0} \end{pmatrix} &= \sigma \sum_{i=1}^d \begin{pmatrix} h_t^* \tilde{h}_t^i & h_t^* \tilde{h}_t^i & (\tilde{h}_t^i)^* \\ h_t^* \tilde{h}_t^i & -h_t^* \tilde{h}_t^i & (\tilde{h}_t^i)^* \\ \tilde{h}_t^i & -\tilde{h}_t^i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \circ dB_t^i + \\ &\quad \begin{pmatrix} h_t^* \tilde{h}_t^0 & h_t^* \tilde{h}_t^0 & (\tilde{h}_t^0)^* \\ h_t^* \tilde{h}_t^0 & -h_t^* \tilde{h}_t^0 & (\tilde{h}_t^0)^* \\ \tilde{h}_t^0 & -\tilde{h}_t^0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} dt, \end{aligned}$$

et on obtient en particulier

$$dh_t = \sigma \sum_{i=1}^d \tilde{h}_t^i \circ dB_t^i + \tilde{h}_t^0 dt,$$

et donc

$$dh_t = \sigma \sum_{i=1}^d \tilde{h}_t^i dB_t^i + \left\{ \sigma \sum_{i=1}^d \hat{h}_t^i + \tilde{h}_t^0 \right\} dt.$$

Pour conclure il suffit de démontrer le lemme général suivant :

**Lemme 10.** Si  $f_s$  est un processus adapté qui est presque-sûrement asymptotiquement dominé par  $e^{-(\alpha-\varepsilon)t}$  pour  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit (et  $\alpha > 0$ ) alors l'intégrale stochastique  $x_t := \int_0^t f_s dB_s$  converge p.s vers une variable aléatoire  $x_\infty$  et :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |x_t - x_\infty| \leq -\alpha \quad \text{p.s.}$$

*Preuve du lemme.* On considère un mouvement brownien  $\tilde{B}$  tel que  $x_t = \tilde{B} \int_0^t f_s^2 ds$ . La convergence est assurée par celle de  $\int_0^t f_s^2 ds$ , et puisque  $\tilde{B}$  est  $(1/2 - \varepsilon)$ -Hölder nous contrôlons la convergence en écrivant :

$$|x_t - x_\infty| \leq Cste \times \left| \int_t^{+\infty} f_s^2 ds \right|^{(1/2-\varepsilon)} \leq Cste \times e^{-(\alpha-\varepsilon)(1-2\varepsilon)t}.$$

Ainsi nous avons montré que pour tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |x_t - x_\infty| \leq -(\alpha - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon),$$

et cela termine la preuve. □

□

### 3.3.1.3 Dynamique asymptotique en coordonnées polaires

Nous allons maintenant considérer la décomposition polaire de  $g_t$  :

$$g_t = \exp \left( r_t \begin{pmatrix} 0 & \theta_t^* \\ \theta_t & 0 \end{pmatrix} \right) R_t,$$

où  $R_t \in K$ ,  $r_t > 0$  and  $\theta_t \in \mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ .

**Lemme 11.** On a presque-sûrement

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r_t}{t} &= \alpha \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_t &= \theta_\infty := \frac{1}{1 + \|h_\infty\|^2} \begin{pmatrix} \|h_\infty\|^2 - 1 \\ 2h_\infty \end{pmatrix} \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\theta_t - \theta_\infty\| &\leq -\alpha \end{aligned}$$

*Démonstration.* Remarquons que le résultat de ce lemme est semblable à celui de la proposition 16 p 64 à ceci près que nous avons obtenus la convergence de  $\theta_t$  vers  $1/(1 + \|h_\infty\|) \begin{pmatrix} 1 - \|h_\infty\|^2 \\ 2h_\infty \end{pmatrix}$  ceci étant dû au fait que nous travaillions avec  $\bar{N}$

et que ici nous considérons  $N$ . Notons  $\alpha_t$  le processus dans  $\mathbb{R}$  tel que  $H_t = \alpha_t H_0$ , i.e.  $\alpha_t = \alpha_0(H_t)$ . Par le corollaire 3 nous savons que  $\alpha_t/t$  converge vers  $-\alpha < 0$ .

En utilisant la décomposition d'Iwasawa de  $g_t = n_t a_t k_t$  on a explicitement

$$g_t(e_0) = n_t a_t(e_0) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha_t)(1 + \|h_t\|^2/2) - \sinh(\alpha_t)\|h_t\|^2/2 \\ \cosh(\alpha_t)\|h_t\|^2/2 + \sinh(\alpha_t)(1 - \|h_t\|^2/2) \\ e^{-\alpha_t} h_t \end{pmatrix}.$$

Maintenant, en utilisant les coordonnées polaire il vient également que

$$g_t(e_0) = \begin{pmatrix} \cosh(r_t) \\ \theta_t \sinh(r_t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\cosh(r_t) = \frac{1}{2}e^{\alpha t} + \frac{e^{-\alpha t}}{2}(1 + \|h_t\|^2) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\alpha t} \frac{1 + \|h_\infty\|^2}{2},$$

d'où,

$$e^{r_t} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\alpha t}(1 + \|h_\infty\|^2)$$

et  $r_t/t \rightarrow \alpha$ .

De plus,

$$\theta_t = \frac{1}{\sinh(r_t)} \begin{pmatrix} e^{\alpha t}/2 + e^{-\alpha t}(\|h_t\|^2 - 1)/2 \\ e^{-\alpha t} h_t \end{pmatrix},$$

et  $\sinh(r_t) = \sqrt{\cosh(r_t)^2 - 1} \sim e^{-\alpha t} \frac{1 + \|h_\infty\|^2}{2}$ . Ainsi nous obtenons la convergence souhaitée

$$\theta_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \|h_\infty\|^2} \begin{pmatrix} \|h_\infty\|^2 - 1 \\ 2h_\infty \end{pmatrix} := \theta_\infty,$$

La borne du taux exponentiel de convergence se déduit de celle obtenue pour  $h_t$  dans la proposition 27 et le calcul est identique à celui de la preuve de la proposition 16 du chapitre 2.  $\square$

Pour  $\theta \in S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ , l'endomorphisme  $Lie(G) : v \mapsto ad \left( \begin{pmatrix} 0 & \theta^* \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \right) (v)$  est diagonalisable, ses valeurs propres sont  $+1$ ,  $-1$ , et  $0$  et les sous-espaces propres associées sont respectivement :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\theta^- &:= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & e^* \\ e & \theta e^* - e\theta^* \end{pmatrix}; e \in \mathbb{R}^{d+1}, e^* \theta = 0 \right\} \\ \mathcal{U}_\theta^+ &:= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & e^* \\ e & -\theta e^* + e\theta^* \end{pmatrix}; e \in \mathbb{R}^{d+1}, e^* \theta = 0 \right\} \\ \mathcal{U}_\theta^0 &:= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u\theta^* \\ u\theta & C \end{pmatrix}; C^* = -C, C\theta = 0, u \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Notons  $\mathcal{V}^- := \mathcal{U}_{\theta_\infty}^-$  et  $\mathcal{V}^0 := \mathcal{U}_{\theta_\infty}^0 + \mathcal{U}_{\theta_\infty}^-$  les sous-algèbres aléatoires dépendant de  $\theta_\infty$ . La proposition suivante donne le spectre de Lyapunov du flot linéaire  $\phi : g \mapsto gg_t$ .

**Proposition 28.** *Pour  $v \in \text{Lie}(G)$  nous avons, presque sûrement,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|D\phi_t(g).gv\| = \begin{cases} \alpha & \text{si } v \in \text{Lie}(G) \setminus \mathcal{V}^0 \\ 0 & \text{si } v \in \mathcal{V}^0 \setminus \mathcal{V}^- \\ -\alpha & \text{si } v \in \mathcal{V}^- \setminus \{0\} \end{cases}$$

*Démonstration.* Notons  $\pi_t^i$  la projection sur  $\mathcal{U}_{\theta_t}^i$  pour  $i = +, -$  ou  $0$ .

Rappelons que  $\|\cdot\|$  désigne la métrique invariante à gauche sur  $G$  associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\text{Lie}(G)$  (induit lui-même par la forme de Killing). Nous savons que  $Ad(R_t)$  est alors une isométrie et que les  $\mathcal{U}_\theta^i$  sont orthogonaux. Ainsi

$$\begin{aligned} \|Ad(g_t^{-1})(v)\|^2 &= \|Ad(R_t)^{-1} Ad \left( \exp \left( r_t \begin{pmatrix} 0 & \theta_t^* \\ \theta_t & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) \right)^{-1} (v)\|^2 \\ &= \|\exp(-r_t ad \begin{pmatrix} 0 & \theta_t^* \\ \theta_t & \mathbf{0} \end{pmatrix})(v)\|^2 \\ &= e^{2r_t} \|\pi_t^+(v)\|^2 + \|\pi_t^0(v)\|^2 + e^{-2r_t} \|\pi_t^-(v)\|^2. \end{aligned}$$

- Si  $v \in \text{Lie}(G) \setminus \mathcal{V}^0$  alors  $\pi_\infty^+(v) \neq 0$ ; et puisque  $r_t/t \rightarrow \alpha$  on déduit facilement que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|Ad(g_t^{-1})(v)\| = \alpha.$$

- Si  $v \in \mathcal{V}^0 \setminus \mathcal{V}^-$  alors  $\pi_\infty^+(v) = 0$  et  $\pi_\infty^0(v) \neq 0$ . De plus,

$$\limsup \frac{1}{t} \log \|\theta_t - \theta_\infty\| \leq -\alpha$$

et  $\pi_\infty^+(v) = 0$  implique que

$$\limsup \frac{1}{t} \log (\|\pi_t^+(v)\|) \leq -\alpha.$$

Puisque  $\pi_\infty^0(v) \neq 0$  on obtient le résultat.

- Si  $v \in \mathcal{V}^- \setminus \{0\}$  alors  $\pi_\infty^+(v) = \pi_\infty^0(v) = 0$  et  $\pi_\infty^-(v) \neq 0$ . Puisque  $\pi_\infty^+(v) = \pi_\infty^0(v) = 0$  et

$$\limsup \frac{1}{t} \log \|\theta_t - \theta_\infty\| \leq -\alpha$$

alors

$$\limsup \frac{1}{2t} \log \|\pi_t^+(v)\|^2 \leq -2\alpha$$

et

$$\limsup \frac{1}{2t} \log \|\pi_t^0(v)\|^2 \leq -\alpha.$$

Ainsi on déduit que

$$\limsup \frac{1}{t} \log \|Ad(g_t^{-1})(v)\| \leq -\alpha.$$

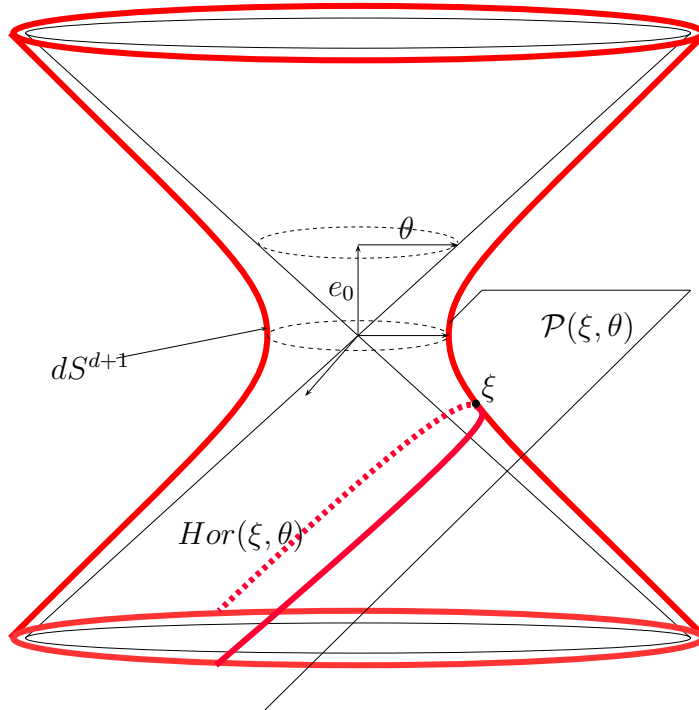
De plus, puisque  $\pi_\infty^-(v) \neq 0$ , la  $\liminf$  ne peut-être strictement inférieure à  $-\alpha$ .

□

### 3.3.1.4 Projection des variétés stables sur $dS^{d+1}$

Pour  $g \in G$ , l'espace  $g \exp(\mathcal{V}^-)$  est une variété stable par le flot ; cela signifie que  $\tilde{g} \in g \exp(\mathcal{V}^-)$  si et seulement si  $d(\varphi_t(g), \varphi_t(\tilde{g})) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ , où  $d$  est la distance dans  $G$  associée à la métrique  $\|\cdot\|$ .

Soit  $\theta \in \mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$  et  $\xi \in dS^{d+1}$ . L'horosphère  $Hor(\xi, \theta)$  de  $dS^{d+1}$  passant par  $\xi$  et tangente à  $\mathbb{S}^d$  en  $\theta$  est l'intersection de  $dS^{d+1}$  avec l'hyperplan affine  $\mathcal{P}(\xi, \theta)$  passant par  $\xi$  et  $q$ -orthogonal à  $\begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix}$ .



Nous notons  $\mathcal{C}^+$  le demi-cône de lumière orienté du futur et  $p$  la projection :

$$\begin{aligned} p : \mathcal{C}^+ &\longrightarrow \mathbb{S}^d \\ \xi &\longmapsto \frac{1}{\xi^0} \vec{\xi} \end{aligned}$$

Chaque  $g \in G$  induit une transformation conforme  $\tilde{g}$  de  $\mathbb{S}^d$  définie par

$$\begin{aligned} \tilde{g} : \mathbb{S}^d &\longrightarrow \mathbb{S}^d \\ \theta &\longmapsto p \left( g \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Si  $g \in G$ , on vérifie facilement que  $g(\text{Hor}(\xi, \theta)) = \text{Hor}(g(\xi), \tilde{g}(\theta))$ .

Maintenant, par la projection  $\pi$  de  $G$  sur  $dS^{d+1}$  introduite précédemment, nous envoyons les variétés stables sur  $dS^{d+1}$  et nous obtenons les horosphères.

**Proposition 29.** *La projection de  $g \exp(\mathcal{V}^-)$  sur  $dS^{d+1}$  est  $\text{Hor}(\pi(g), \tilde{g}(\theta_\infty))$ .*

*Démonstration.* Puisque  $\text{Hor}(\pi(g), \tilde{g}(\theta_\infty)) = g(\text{Hor}(e_1, \theta_\infty))$ , il suffit de le vérifier pour  $g = Id$ . Si  $v \in \mathcal{V}^-$  alors  $\pi(\exp(v)) = \exp(v)(e_1) = e_1 + v(e_1) + v^2(e_1)/2$  et on vérifie que  $v(e_1)$  et  $v^2(e_1)/2$  sont  $q$ -orthogonaux à  $\begin{pmatrix} 1 \\ \theta_\infty \end{pmatrix}$ . Donc  $\exp(v)(e_1)$  appartient à l'intersection de  $dS^{d+1}$  avec un hyperplan passant par  $e_1$  et  $q$ -orthogonal à  $\begin{pmatrix} 1 \\ \theta_\infty \end{pmatrix}$ .  $\square$

### 3.3.2 La tribu invariante de la diffusion de Dudley dans $dS^{d+1}$ est engendrée par $\theta_\infty$

L'objectif de cette section est de montrer que toute l'information asymptotique de la diffusion  $g_t$  est contenue dans la variable  $\theta_\infty$  (ou de manière équivalente dans  $n_\infty$ ). La méthode que nous utiliserons est celle de Raugi décrite dans [67] et qu'on peut trouver également dans [9] pour le cas de la diffusion de Dudley dans l'espace de Minkowski.

Nous commençons par rappeler quelques généralités faisant le lien entre la tribu invariante et l'ensemble des fonctions  $\mathcal{L}$ -harmoniques bornées. Nous allons ensuite avoir besoin d'explicitier le support de la diffusion et de montrer que la variable asymptotique  $\theta_\infty$  admet une loi régulière par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{S}^d$ . De plus nous rappelons un lemme clé, qu'on trouve également dans [4], concernant les périodes à droite des fonctions  $\mathcal{L}$ -harmoniques bornées. Ce lemme est utilisé dans la preuve du théorème qui établit que les fonctions  $\mathcal{L}$ -harmoniques bornées  $N$ -invariantes à gauche sont constantes.

### Tribu invariante de $g_t$ .

La diffusion  $g_t$  induit une famille  $\{\mathbb{P}_g\}_g$  de probabilités sur l'espace des trajectoires  $\Omega := C^0([0, +\infty[, G)$  telles que

$$\mathbb{P}_g(\{\omega; \omega(0) = g\}) = 1.$$

Il y a une action naturelle de  $G$  sur  $\Omega$

$$\begin{aligned} G \times \Omega &\longrightarrow \Omega \\ (g, \omega) &\longmapsto g\omega := (g\omega_t)_t. \end{aligned}$$

De plus, puisque  $g_t$  est invariante à gauche sur  $G$ , pour un ensemble mesurable  $A \in \Omega$  nous avons

$$\mathbb{P}_g(A) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_A(\omega) \mathbb{P}_g(d\omega) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_A(g\omega) \mathbb{P}_I(d\omega) = \mathbb{P}_I(g^{-1}A).$$

Nous interprétons  $g_t$  comme la projection

$$\begin{aligned} g_t : \Omega &\longrightarrow G \\ \omega &\longmapsto \omega(t). \end{aligned}$$

Nous notons  $\mathcal{F}_t := \sigma(g_s, s \leq t)$  la filtration naturelle associée à  $g_t$ , et par  $\tau_t$  l'opérateur de décalage sur  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} \tau_t : \Omega &\longrightarrow \Omega \\ \omega &\longmapsto (\omega_{s+t})_{s \geq 0} \end{aligned}$$

Une partie mesurable  $A$  de  $\Omega$  est dite invariante si pour tout  $t > 0$ ,  $\tau_t(A) = A$ . La tribu invariante associée à  $g_t$  est celle engendrée par les parties mesurables invariantes. Nous notons  $\text{Inv}\{g_t\}$  cette tribu. Une variable aléatoire  $Z$  est  $\text{Inv}\{g_t\}$ -mesurable si et seulement si, pour tout  $g \in G$  :

$$Z = Z \circ \tau_t, \quad \mathbb{P}_g - p.s.$$

#### 3.3.2.1 Fonctions $\mathcal{L}$ -harmoniques bornées.

Rappelons qu'ici  $\mathcal{L}$  est le générateur du relevé de la diffusion de Dudley, définit par (3.2) p 101, avec  $\nu = 0$ . Une fonction  $h$  de  $G$  est  $\mathcal{L}$ -harmonique si  $\mathcal{L}(h) = 0$ . On vérifie aisément que  $V_i$ ,  $[H_0, V_i]$ ,  $[V_i, V_j]$  et  $[V_i, [V_i, H_0]]$  pour  $i, j = 1, \dots, d$  engendrent  $\text{Lie}(G)$ . Par le théorème d'Hörmander on obtient donc que  $\mathcal{L}$  (resp.  $\mathcal{L} - \partial_t$ ) est hypoelliptique sur  $G$  (resp.  $G \times \mathbb{R}$ ).

L'hypoellipticité de  $\mathcal{L}$  implique que chaque fonction  $\mathcal{L}$ -harmonique est régulière. De plus, l'hypoellipticité de  $\mathcal{L} - \partial_t$  fournit l'existence d'une densité régulière,  $g' \mapsto p_t(g, g')$ , pour la loi de  $g_t$  sous  $\mathbb{P}_g$  relativement à la mesure de Haar de  $G$ .

La proposition classique suivante, qu'on peut trouver par exemple dans [66], fait le lien entre les probabilités et l'analyse. Voir le théorème 2.1 p 436 de [66].



**Proposition 30.**

– Si  $Z$  est une variable aléatoire bornée  $\text{Inv}\{g_t\}$ -mesurable alors la fonction

$$\begin{aligned} h : G &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \mathbb{E}_g[Z] \end{aligned}$$

est une fonction  $\mathcal{L}$ -harmonique.

– Réciproquement, si  $h$  est une fonction  $\mathcal{L}$ -harmonique bornée alors il existe une variable aléatoire  $\text{Inv}\{g_t\}$ -mesurable bornée  $Z$  telle que

$$\forall g \in G, \quad h(g) = \mathbb{E}_g[Z].$$

*Démonstration.* – Si  $Z$  est une variable aléatoire bornée  $\text{Inv}\{g_t\}$ -mesurable alors  $g \mapsto h(g) = \mathbb{E}_g[Z]$  est bornée et par la propriété de Markov nous avons

$$\int_G p_t(g, g') h(g') dg' = \mathbb{E}_g[h(g_t)] = \mathbb{E}_g[\mathbb{E}_{g_t}[Z]] = \mathbb{E}_g[\mathbb{E}_g[Z \circ \tau_t | \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}_g[Z] = h(g).$$

Par hypoellipticité,  $h$  est donc régulière. En appliquant la formule d'Itô on a  $\mathbb{E}_g[h(g_t)] = h(g) + \int_0^t \mathbb{E}_g[\mathcal{L}h(g_s)] ds$  et en dérivant en 0 par rapport à  $t$  nous obtenons bien  $\mathcal{L}(h)(g) = \frac{d}{dt} \mathbb{E}_g[h(g_t)]|_{t=0} = 0$ .

– Si  $h$  est une fonction  $\mathcal{L}$ -harmonique bornée alors, par la formule d'Itô,  $h(g_t)$  est une martingale bornée et converge presque-sûrement vers une variable  $Z$  qui est nécessairement  $\text{Inv}\{g_t\}$ -mesurable. De plus

$$h(g) = \mathbb{E}_g[h(g_t)] = \mathbb{E}_g[\lim_{t \rightarrow \infty} h(g_t)] = \mathbb{E}_g[Z].$$

□

**Support de  $g_t$**

Soit  $S$  le support de  $(g_t)$  partant de  $I$  :

$$S := \{g \in G; \exists s > 0 \ p_s(I, g) > 0\}.$$

Le but de ce paragraphe est de montrer la proposition suivante

**Proposition 31.** *Le support de  $g_t$  est l'ensemble des  $g$  dans  $G$  tels que  $g(e_1)$  est dans le futur de  $e_1$  dans  $dS^{d+1}$  :*

$$S = \{g \in G; \quad q(g(e_1), e_0) > 0 \text{ and } q(g(e_1), e_1) < -1\}.$$

*Démonstration.* Pour  $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  continue, régulière par morceaux, on note  $\gamma_s^\phi$  la solution de :

$$d\gamma_s^\phi = \sum_{i=1}^d V_i(\gamma_s^\phi) \phi_s ds + H_0(\gamma_s^\phi) ds, \quad (3.15)$$

partant de  $I$ .

Pour un voisinage  $U$  de  $\gamma_T^\phi$  on a la convergence des probabilités conditionnelles suivantes

$$\mathbb{P}_I \left( g_T \in U \mid \sup_{s \in [0, T]} \|\phi_s - B_s\| < \varepsilon \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1.$$

Nous avons donc à démontrer les deux points suivants

- (i) **Soit  $g$  tel qu'il existe  $\phi$  avec  $\gamma_T^\phi = g$ ; alors  $q(g(e_1), e_0) > 0$  et  $q(g(e_1), e_1) < -1$ .**
- (ii) **Pour un  $g$  tel que  $q(g(e_1), e_0) > 0$  et  $q(g(e_1), e_1) < -1$  et pour un voisinage  $U$  de  $g$ , il existe  $\phi$  telle que  $\gamma_T^\phi \in U$ .**

*Preuve de (i).* Fixons  $g$  tel qu'il existe  $\phi$  telle que  $\gamma_T^\phi = g$ . Notons, pour  $s \in [0, T]$ ,  $x_s := q(\gamma_s^\phi(e_1), e_0)$  et  $y_s := q(\gamma_s^\phi(e_1), e_1)$ . Nous avons :

$$\dot{x}_s = q(\gamma_s^\phi(e_0), e_0) \geq 1,$$

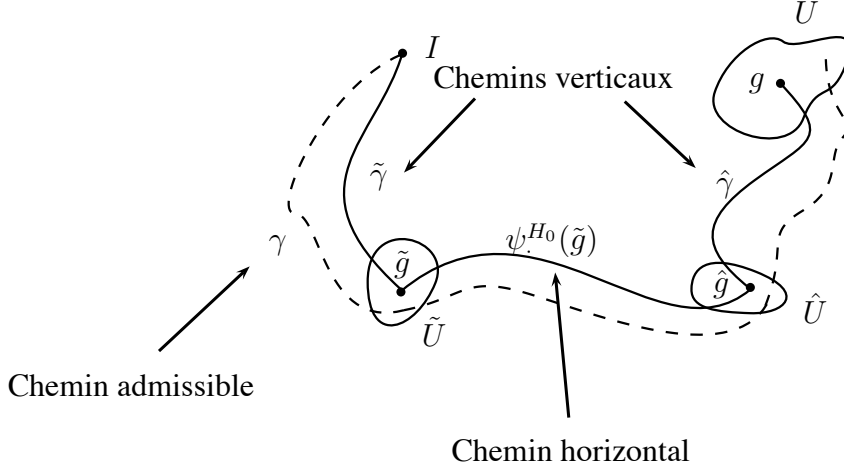
et donc  $q(\gamma_T^\phi(e_1), e_0) \geq T > 0$ .

Maintenant, pour  $y_s$  nous avons

$$\begin{aligned} \dot{y}_s &= q(\gamma_s^\phi(e_0), e_1) \\ \ddot{y}_s &= \sum_{i=1}^d \phi_s^i q(\gamma_s^\phi(e_{i+1}), e_1) + q(\gamma_s^\phi(e_1), e_1), \end{aligned}$$

donc  $y_0 = -1$ ,  $\dot{y}_0 = 0$  et  $\ddot{y}_0 = -1$ . Alors  $s_0 := \sup\{s \in [0, T]; \forall u \in ]0, s[ y_u < -1\} > 0$ . Supposons par l'absurde que  $s_0 < T$ . Par continuité nous avons  $y_{s_0} = -1$ . De plus, puisque  $(\dot{y}_s)^2 - (y_s)^2 - \sum_{i=1}^d q(\gamma_s^\phi(e_{i+1}), e_1)^2 = -1$ , on déduit que  $\dot{y}_s$  ne peut s'annuler sur  $]0, s_0[$  et est nécessairement négatif sur cet interval. Ainsi  $y_{s_0} = -1 + \int_0^{s_0} \dot{y}_u du < -1$  contredit  $s_0 < T$ . □

*Preuve de (ii).* Fixons  $g$  tel que  $q(g(e_1), e_0) > 0$  et  $q(g(e_1), e_1) < -1$ . Nous devons joindre  $I$  à  $g$  par un chemin admissible  $\gamma_s^\phi$  solution de (3.15). Nous procédons en deux temps. Premièrement nous trouvons un déplacement horizontal reliant un  $\tilde{g}$  de la composante verticale de  $I$  à un  $\hat{g}$  dans celle de  $g$ . Puis, dans un second temps, nous effectuons une petite perturbation horizontale des flots verticaux, pour envoyer, au moyen de chemins admissibles, le point  $I$  dans un voisinage de  $\tilde{g}$  et un voisinage de  $\hat{g}$  dans un voisinage de  $g$ .



Soit  $T_0 > 0$  tel que  $\cosh(T_0) = -q(g(e_1), e_1)$ . Notons  $(\psi_s^{H_0})_s$  le flot engendré par  $H_0$ . En prenant un  $\tilde{g} \in G$  avec  $\tilde{g}(e_1) = e_1$  et  $\tilde{g}(e_0) = 1/\sinh(T_0)(g(e_1) + q(g(e_1), e_1)e_1)$  nous obtenons que  $\hat{g} := \psi_{T_0}^{H_0}(\tilde{g})$  satisfait  $\hat{g}(e_1) = g(e_1)$ .

Maintenant, puisque  $\tilde{g}(e_1) = e_1$  et  $\hat{g}(e_1) = g(e_1)$ , il existe  $\tilde{\phi}$  (resp.  $\hat{\phi}$ ) et des temps  $\tilde{T}$ ,  $\hat{T}$  tels que le chemin vertical  $\tilde{\gamma}$  (resp.  $\hat{\gamma}$ ) solution de  $\dot{\tilde{\gamma}}_s = \sum_{i=1}^d V_i(\tilde{\gamma}_s)\tilde{\phi}_s^i$  (resp.  $\dot{\hat{\gamma}}_s = \sum_{i=1}^d V_i(\hat{\gamma}_s)\hat{\phi}_s^i$ ) relie  $I$  à  $\tilde{g}$  en un temps  $\tilde{T}$  (resp.  $\hat{g}$  à  $g$  en  $\hat{T}$ ). Pour  $\varepsilon > 0$ , notons  $\tilde{\psi}^\varepsilon$  (resp.  $\hat{\psi}^\varepsilon$ ) le flot engendré par  $\sum_{i=1}^d V_i\tilde{\phi}^i + \varepsilon H_0$  (resp.  $\sum_{i=1}^d V_i\hat{\phi}^i + \varepsilon H_0$ ).

En fixant un voisinage  $U$  de  $g$ , on peut trouver un voisinage  $\hat{U}$  de  $\hat{g}$  et  $\hat{\varepsilon} > 0$  tels que  $\hat{\psi}_{\hat{T}}^{\hat{\varepsilon}}(\hat{U}) \subset U$ . Puis, on peut choisir un voisinage  $\tilde{U}$  de  $\tilde{g}$  tel que  $\psi_{T_0}^{H_0}(\tilde{U}) \subset \hat{U}$  et  $\tilde{\varepsilon} > 0$  tel que  $\tilde{\psi}_{\tilde{T}}^{\tilde{\varepsilon}}(I) \subset \tilde{U}$ .

Maintenant définissons  $\gamma$  le chemin partant de  $I$  vérifiant  $\gamma_s := \tilde{\psi}_{\tilde{\varepsilon}}^{\tilde{\varepsilon}}$  pour  $s \in [0, \tilde{\varepsilon}\tilde{T}]$  et  $\gamma_s := \psi_{s-\tilde{\varepsilon}\tilde{T}}^{H_0}(\tilde{\psi}_{\tilde{T}}^{\tilde{\varepsilon}}(I))$  pour  $s \in [\tilde{\varepsilon}\tilde{T}, \tilde{\varepsilon}\tilde{T} + T_0]$  et  $\gamma_s := \hat{\psi}_{\frac{s-\tilde{\varepsilon}\tilde{T}-T_0}{\hat{\varepsilon}}}^{\hat{\varepsilon}}(\psi_{T_0}^{H_0}(\tilde{\psi}_{\tilde{T}}^{\tilde{\varepsilon}}(I)))$  pour  $s \in [\tilde{\varepsilon}\tilde{T} + T_0, \tilde{\varepsilon}\tilde{T} + T_0 + \hat{\varepsilon}\hat{T}]$ .

Ainsi, pour tout voisinage  $U$  de  $g$ , nous avons trouvé un chemin  $\gamma$  et un temps  $T := \tilde{\varepsilon}\tilde{T} + T_0 + \hat{\varepsilon}\hat{T}$  tels que  $\gamma_T$  appartient à  $U$ .

□

□

### 3.3.2.2 Un lemme général.

Nous énonçons un lemme général que l'on trouvera dans les travaux d'Azencott et de Raugi ([4] et [67]) qui affirme que les éléments du support sont des périodes à droite des fonctions harmoniques.

**Lemme 12.** Soient  $h$  une fonction  $\mathcal{L}$ -harmonique bornée et  $s \in S$ . Nous avons, pour tout  $g \in G$  et pour  $\mathbb{P}_g$ -presque toute trajectoire

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(g_t s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} h(g_t).$$

*Démonstration.* Soit  $u > 0$  et  $g \in G$ . Nous écrivons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_g \left[ \int_S (h(g_t) - h(g_t x))^2 p_u(I, x) \text{Haar}(dx) \right] &= \mathbb{E}_g [h(g_t)^2 - 2h(g_t)h(g_{t+u}) + \mathbb{E}_g[h(g_{t+u})^2 | g_t]] \\ &= \mathbb{E}_g[h(g_{t+u})^2] - \mathbb{E}_g[h(g_t)^2] \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Ainsi pour presque tout  $x$  tel que  $p_u(I, x) > 0$  et pour  $\mathbb{P}_g$ -presque toute trajectoire nous avons  $\lim_t h(g_t x) = \lim_t h(g_t)$ . Puisque  $S = \cup_{u>0} \{x; p_u(I, x) > 0\}$ , cela termine la preuve du lemme.  $\square$

### 3.3.2.3 Régularité de la loi de $\theta_\infty$

Rappelons que  $\tilde{g}$  désigne la transformation conforme de  $\mathbb{S}^d$  associée à  $g \in G$ .

**Proposition 32.** La loi de  $\theta_\infty$  sous  $\mathbb{P}_g$  est la loi de  $\tilde{g}(\theta_\infty)$  sous  $\mathbb{P}_I$ .

*Démonstration.* Soit  $\hat{p}$  la projection de  $\mathbb{H} \cup \mathcal{C}^+$  sur  $\bar{B}_d(0, 1) \subset \mathbb{R}^{d+1}$  qui envoie  $\xi \in \mathbb{H} \cup \mathcal{C}^+$  sur  $\frac{1}{\xi^0} \vec{\xi}$ . Si  $\hat{p}(\xi) = \hat{p}(\xi')$ , alors  $\xi = \xi'$  s'ils sont dans  $\mathbb{H}$ , et  $\xi = \lambda \xi'$  pour un  $\lambda > 0$  s'ils sont dans  $\mathcal{C}^+$ . Ainsi, pour  $g \in G$  la transformation suivante de  $\bar{B}_d(0, 1)$  est bien définie

$$\begin{aligned} \hat{g} : \bar{B}_d(0, 1) &\longrightarrow \bar{B}_d(0, 1) \\ \hat{p}(\xi) &\longmapsto \hat{p}(g(\xi)). \end{aligned}$$

C'est la transformation projective de la boule associée à  $g$ . Par définition nous avons  $\hat{p}|_{\mathcal{C}^+} = p$ , où  $p = (\xi \mapsto \vec{\xi}/\xi^0)$  est la projection introduite précédemment en 3.3.1.4. Ainsi  $\hat{g}|_{\mathbb{S}^d} = \tilde{g}$ .

Pour une fonction  $F$  mesurable bornée sur  $\mathbb{S}^d$  nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_g[F(\theta_\infty)] &= \mathbb{E}_g[F(\lim_t \hat{p}(g_t(e_0)))] = \mathbb{E}_I[F(\lim_t \hat{p}(g g_t(e_0)))] \\ &= \mathbb{E}_I[F(\lim_t \hat{g} \circ \hat{p} \circ g_t(e_0))] \\ &= \mathbb{E}_I[F(\hat{g}(\lim_t \hat{p} \circ g_t(e_0)))] \\ &= \mathbb{E}_I[F(\tilde{g}(\theta_\infty))], \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition.  $\square$

**Proposition 33.** *La loi de  $\theta_\infty$  sous  $\mathbb{P}_I$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $d\theta$  de  $\mathbb{S}^d$ .*

*Démonstration.* Notons  $\tilde{\nu}(d\theta)$  la loi de  $\theta_\infty$  sous  $\mathbb{P}_I$ . Dans le but d'obtenir la régularité de la loi de  $\tilde{\nu}$  nous allons montrer qu'elle est stationnaire pour une certaine diffusion hypoelliptique induite par  $g_t$  sur la sphère  $\mathbb{S}^d$ . Cette diffusion sera une projection sur la sphère d'une diffusion invariante à droite sur  $G$ . Introduisons la projection suivante

$$\begin{aligned} \tilde{p} : G &\longrightarrow \mathbb{S}^d \\ g &\longmapsto \tilde{g}(p(e_0 + e_1)). \end{aligned}$$

Le lemme suivant définit la diffusion invariante à droite sur  $G$  :

**Lemme 13.** *Soit  $g_t^r$  la diffusion invariante à droite sur  $G$  définie par l'équation différentielle stochastique suivante*

$$dg_t^r = \sigma \sum_{i=1}^d V_i^r(g_t^r) \circ dB_t^i + H_0^r(g_t^r) dt,$$

où

$$\begin{aligned} V_i^r(g) &:= V_i g = \begin{pmatrix} 0 & e_{i+1}^* \\ e_{i+1} & 0 \end{pmatrix} g \quad i = 1 \cdot d, \\ H_0^r(g) &:= H_0 g = \begin{pmatrix} 0 & e_1^* \\ e_1 & 0 \end{pmatrix} g. \end{aligned}$$

Notons  $\mathcal{L}^r := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d (V_i^r)^2 + H_0^r$  son générateur. Alors, le processus  $\mathbf{x}_t := \tilde{p}(g_t^r)$  est une diffusion hypoelliptique sur  $\mathbb{S}^d$ . Nous notons son générateur  $\tilde{\mathcal{L}}$ , de sorte que pour  $\varphi : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$  régulière on a

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varphi) \circ \tilde{p} = \mathcal{L}^r(\varphi \circ p).$$

*Preuve du lemme.* Premièrement, si on écrit  $g \in G$  dans la décomposition d'Iwasawa inversée  $g = kan$ , on obtient

$$\tilde{p}(g) = \tilde{g}(p(e_0 + e_1)) = p(g(e_0 + e_1)) = p(kan(e_0 + e_1)) = p(k(e_0 + e_1)) = k(e_1).$$

Ainsi on décompose  $g_t^r$  en  $g_t^r = k_t^r a_t^r n_t^r$  et on montre que  $\mathbf{x}_t = k_t^r(e_1)$  est une diffusion hypoelliptique. Comme dans la preuve de la proposition 25 nous appliquons la formule d'Itô à  $g_t^r = k_t^r a_t^r n_t^r$  et nous obtenons que  $k_t^r$  est une diffusion sur  $K$  satisfaisant l'EDS suivante

$$dk_t^r = \sigma \sum_{i=1}^d k_t^r \{Ad(k_t^r)^{-1} V_i\}_{\mathcal{K}} \circ dB_t^i + k_t^r \{Ad(k_t^r)^{-1} H_0\}_{\mathcal{K}} dt.$$

Ainsi, puisque  $\{Ad(k_t^r)^{-1}V_i\}_{\mathcal{K}} = (e_{i+1}^*k_t^r)^*e_1^* - e_1e_{i+1}^*k_t^r$  et  $\{Ad(k_t^r)^{-1}H_0\}_{\mathcal{K}} = (e_1^*k_t^r)^*e_1^* - e_1e_1^*k_t^r$  nous obtenons :

$$dk_t^r = \sigma \sum_{i=1}^d (e_{i+1}e_1^* - k_t^r(e_1)e_{i+1}^*k_t^r) \circ dB_t^i + (e_1e_1^* - k_t^r(e_1)e_1^*k_t^r)dt.$$

Notons  $\mathbf{x}_t := k_t^r(e_1)$ . On obtient

$$d\mathbf{x}_t = \sigma \sum_{i=1}^d (e_{i+1} - \mathbf{x}_te_{i+1}^*\mathbf{x}_t) \circ dB_t^i + (e_1 - \mathbf{x}_te_1^*\mathbf{x}_t)dt.$$

Le générateur de  $\mathbf{x}_t$  est  $\tilde{\mathcal{L}} := \frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{i=1}^d \mathbf{X}_i^2 + \mathbf{X}_0$  où  $\mathbf{X}_i(\mathbf{x}) = e_{i+1} - \mathbf{x}e_{i+1}^*\mathbf{x}$ , pour  $i = 0, \dots, d$ , sont des champs de vecteurs sur  $\mathbb{S}^d$  correspondant, en  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d$ , à la projection orthogonale de  $e_{i+1}$  sur  $T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}^d$ . Ainsi nous avons avec  $\tilde{\mathcal{L}}$  un opérateur hypoelliptique sur  $\mathbb{S}^d$ . En effet, quelque soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d$  nous avons  $\text{vect}\{X_1(\mathbf{x}), \dots, X_d(\mathbf{x}), X_0(\mathbf{x})\} = T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}^d$  et l'hypoellipticité est fournie par le théorème de Hörmander ( théorème 1 p 16).  $\square$

Retournons maintenant à la preuve de la proposition 33. Soit  $\varphi$  une fonction régulière sur  $\mathbb{S}^d$ . L'application  $g \mapsto \mathbb{E}_g[\varphi(\theta_\infty)] = \mathbb{E}_I[\varphi(\tilde{g}(\theta_\infty))]$  est  $\mathcal{L}$ -harmonique. Posant  $\varphi_\theta : g \mapsto \varphi(\tilde{g}(\theta))$ , nous obtenons en particulier  $\mathbb{E}_I[\mathcal{L}(\varphi_\theta)(I)] = 0$ , qu'on écrit

$$\int_{\mathbb{S}^d} \mathcal{L}(\varphi_\theta)(I)\nu(d\theta) = 0.$$

Rappelons que  $\bar{N}$  est le sous-groupe des éléments de  $G$  de la forme

$$\tilde{n} = \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & h^* \\ 0 & 0 & -h^* \\ h & h & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \|h\|^2/2 & \|h\|^2/2 & h^* \\ -\|h\|^2/2 & 1 - \|h\|^2/2 & -h^* \\ h & h & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Soient  $\tilde{n}_\infty$  la variable asymptotique  $\exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_\infty^* \\ 0 & 0 & -h_\infty^* \\ h_\infty & h_\infty & \mathbf{0} \end{pmatrix}$  et  $\mathbb{P}_{\tilde{n}_\infty}$  sa loi sous  $\mathbb{P}_I$ .

Remarquons que ce que nous avons noté ici  $\tilde{n}_\infty$  est la variable asymptotique notée  $n_\infty$  dans le théorème ?? ??. Par construction, l'image de  $\mathbb{P}_{\tilde{n}_\infty}$  par  $\tilde{p}$  est  $\tilde{\nu}$ . Nous

avons maintenant

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^d} \mathcal{L}(\varphi_\theta)(I)\nu(d\theta) &= \int_{\mathbb{S}^d} \mathcal{L}^r(\varphi_\theta)(I)\nu(d\theta) \\
&= \int_{\tilde{N}} \mathcal{L}^r(\varphi_{\tilde{p}(\tilde{n})})(I)\mathbb{P}_{\tilde{n}_\infty}(d\tilde{n}) \\
&= \int_{\tilde{N}} \mathcal{L}^r(\varphi \circ \tilde{p})(\tilde{n})\mathbb{P}_{\tilde{n}_\infty}(d\tilde{n}) \\
&= \int_{\tilde{N}} \tilde{\mathcal{L}}(\varphi) \circ \tilde{p}(\tilde{n})\mathbb{P}_{\tilde{n}_\infty}(d\tilde{n}) \\
&= \int_{\mathbb{S}^d} \tilde{\mathcal{L}}(\varphi)(\theta)\nu(d\theta).
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons prouvé que  $\tilde{\mathcal{L}}^*(\tilde{\nu}) = 0$  et, de par l'hypoellipticité de  $\tilde{\mathcal{L}}$ ,  $\tilde{\nu}$  est alors absolument continue et régulière par rapport à  $d\theta$ .  $\square$

**Corollaire 4.** *La loi de  $n_\infty$  sous  $\mathbb{P}_g$  est absolument continue par rapport à la mesure de Haar de  $N$ .*

*Démonstration.* L'application  $h \in \mathbb{R}^d \mapsto \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & h^* \\ 0 & 0 & h^* \\ h & -h & \mathbf{0} \end{pmatrix}$  est un difféomorphisme

de  $\mathbb{R}^d$  sur  $N$  qui envoie la mesure de Lebesgue sur la mesure de Haar de  $N$ . De plus, par définition  $\theta_\infty = \frac{1}{1+\|h_\infty\|^2} \begin{pmatrix} 1 - \|h_\infty\|^2 \\ 2h_\infty \end{pmatrix}$  et donc  $h_\infty$  est la projection

stéréographique de  $\theta_\infty$ . Il est alors clair que la loi de  $n_\infty := \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_\infty^* \\ 0 & 0 & h_\infty^* \\ h_\infty & -h_\infty & \mathbf{0} \end{pmatrix}$  sous  $\mathbb{P}_g$  est absolument continue et régulière par rapport à la mesure de Haar sur  $N$ .  $\square$

**Remarque 16.** *En utilisant les résultats de Kliemann dans [53], on peut montrer que  $\mathbf{x}_t$  est ergodique sur la sphère et plus précisément que la demi-sphère  $\{\theta \in \mathbb{S}^d, \theta^1 \geq 0\}$  est l'unique ensemble de contrôle. Nous venons de montrer que  $\tilde{\nu}$  est  $\tilde{\mathcal{L}}$ -invariante et donc, par ergodicité, elle est l'unique mesure invariante et est supportée par la demi-sphère.*

### 3.3.2.4 Frontière de Poisson de $g_t$

**Théorème 14.** *La tribu invariante  $\text{Inv}\{g_t\}$  est engendrée par la variable asymptotique  $\theta_\infty$ . Plus précisément nous avons  $\text{Inv}\{g_t\} = \sigma(\theta_\infty)$  aux ensembles  $\mathbb{P}_g$ -négligeables près, pour tout  $g \in G$ .*

*Démonstration.* L'idée de la preuve est de montrer que les fonctions  $\mathcal{L}$ -harmoniques bornées qui sont  $\mathbf{N}$ -invariantes à gauche sont constantes.

– **Étape 1 : Il suffit de montrer que les fonctions  $\mathcal{L}$ -harmoniques qui sont  $\mathbf{N}$ -invariantes à gauche sont constantes.**

Soit  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire bornée qui est  $\text{Inv}\{g_t\}$ -mesurable. En utilisant le fait que toutes les fonctions  $\mathcal{L}$ -harmoniques bornées et  $N$ -invariantes à gauche sont constantes, nous souhaitons montrer qu'il existe une fonction mesurable sur  $\mathbb{S}^d$  bornée  $H$  telle que

$$\forall g \in G, \quad Z = H(\theta_\infty) \quad \mathbb{P}_g - \text{presque sûrement.}$$

Notons que puisque  $\theta_\infty$  est envoyé sur  $n_\infty$  par un difféomorphisme, cela revient à prouver qu'il existe une fonction  $H$  mesurable et bornée sur  $N$  telle que  $Z = H(n_\infty) \quad \mathbb{P}_g$ -presque sûrement.

Pour  $g' \in G$  nous notons  $\hat{Z}^{g'}$  la variable aléatoire suivante :

$$\hat{Z}^{g'}(\omega) := Z(g'(n_\infty(\omega))^{-1}\omega).$$

Puisque  $n_\infty$  et  $Z$  sont  $\text{Inv}\{g_t\}$  mesurable,  $\hat{Z}^{g'}$  est aussi  $\text{Inv}\{g_t\}$  mesurable. Ainsi on a la famille  $\{\hat{h}^{g'}\}_{g'}$  de fonctions harmoniques bornées définie par

$$\hat{h}^{g'}(g) = \mathbb{E}_g[\hat{Z}^{g'}].$$

De plus, pour  $n \in N$  nous avons

$$\begin{aligned} \hat{h}^{g'}(ng) &= \int_{\Omega} Z(g'(n_\infty(\omega))^{-1}\omega) \mathbb{P}_{ng}(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} Z(g'(n_\infty(n\omega))^{-1}n\omega) \mathbb{P}_g(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} Z(g'(n_\infty(\omega))^{-1}\omega) \mathbb{P}_g(d\omega) \quad \text{puisque } n_\infty(n\omega) = nn_\infty(\omega) \\ &= \mathbb{E}_g[\hat{Z}^{g'}] = \hat{h}^{g'}(g). \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $g'$ ,  $\hat{h}^{g'}$  est une fonction  $\mathcal{L}$ -harmonique bornée et  $\mathbf{N}$ -invariante à gauche, elle est donc constante. On note cette constante  $\hat{H}(g')$  :

$$\forall g', g \in G, \quad \hat{h}^{g'}(g) = \hat{H}(g').$$

L'application  $g' \mapsto \hat{H}(g')$  est une fonction mesurable et bornée sur  $G$ . Maintenant considérons  $\{f_p\}_p$  une approximation de l'unité dans  $G$ . Nous posons  $\hat{H}_p(g') := \int \hat{H}(g'') f_p((g'')^{-1}g') \text{Haar}(dg'')$ . En considérant

$$\hat{Z}_p^{g'} := \int \hat{Z}^{g''} f_p((g'')^{-1}g') \text{Haar}(dg''),$$



il vient

$$\hat{H}_p(g') = \mathbb{E}_g[\hat{Z}_p^{g'}].$$

De plus, la variable aléatoire  $\hat{Z}_p^{g'}$  est  $\text{Inv}\{g_t\}$  mesurable et donc,  $\forall p \in \mathbb{N}, \forall g' \in G$  :

$$\mathbb{E}_{g_t}[\hat{Z}_p^{g'}] \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathbb{P}_g^{-p.s.}} \hat{Z}_p^{g'}.$$

Ainsi, pour tout  $p \in \mathbb{N}, g', g \in G$ , on peut trouver  $\Omega^{p,g,g'}$  tel que  $\mathbb{P}_g(\Omega^{p,g,g'}) = 1$  et :

$$\forall \omega \in \Omega^{p,g,g'}, \quad \hat{Z}_p^{g'}(\omega) = \hat{H}_p(g').$$

Considérons maintenant un sous-ensemble  $D \subset G$  dénombrable dense et  $\Omega^g := \bigcap_{g' \in D, p \in \mathbb{N}} \Omega^{g,g',p}$ .

On a,  $\forall g \in G$  et  $\forall \omega \in \Omega^g$  :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall g' \in D, \quad \hat{Z}_p^{g'}(\omega) = \hat{H}_p(g').$$

Puisque ces expressions sont continues en  $g'$  (puisque il y a la convolution par  $f_p$ ) nous avons l'égalité pour tout  $g' \in G$ . En particulier, si nous prenons  $g' = n_\infty(\omega)$  nous obtenons,  $\forall \omega \in \Omega^g$  :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \int Z(g''\omega) f_p((g'')^{-1}) \text{Haar}(dg'') = \hat{H}_p(n_\infty(\omega)).$$

Soit  $h(g) := \mathbb{E}_g[Z]$  la fonction harmonique associée à  $Z$ . En prenant l'espérance dans l'égalité précédente nous obtenons :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \int h(g''g) f_p((g'')^{-1}) \text{Haar}(dg'') = \mathbb{E}_g[\hat{H}_p(n_\infty)].$$

Puisque  $h$  est continue, le membre de gauche converge vers  $h(g)$  lorsque  $p$  tend vers l'infini. De plus, puisque  $\|H_p\|_\infty \leq \|Z\|_\infty$ , par compacité faible\* on peut trouver une sous-suite  $\{p_l\}_l$  telle que  $\hat{H}_{p_l}$  converge pour la topologie faible\* vers  $H$ . De plus, par le corollaire 4,  $n_\infty$  admet une densité régulière sous  $\mathbb{P}_g$  par rapport à la mesure de Haar de  $N$ . Ainsi  $\mathbb{E}_g[\hat{H}_{p_l}(n_\infty)]$  converge vers  $\mathbb{E}_g[H(n_\infty)]$  et on déduit finalement que :

$$\forall g \in G, \quad h(g) = \mathbb{E}_g[H(n_\infty)],$$

et puis :

$$Z \stackrel{\mathbb{P}_g^{-p.s.}}{\underset{t}{\lim}} h(g_t) = \lim_t \mathbb{E}_{g_t}[H(n_\infty)] \stackrel{\mathbb{P}_g^{-p.s.}}{=} H(n_\infty).$$

Rappelons que  $M$  est le sous-groupe des éléments de  $K$  qui commutent avec  $A$  :

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} ; R \in SO(d) \right\}.$$

– **Étape 2 : Toute fonction  $\mathcal{L}$ -harmonique bornée et  $N$ -invariante à gauche est  $A$  et  $M$  invariante à gauche.**

Soit  $h$  une fonction  $\mathcal{L}$ -harmonique bornée et  $N$ -invariante à gauche. Soit  $a \in A$ ,  $m \in M$  et  $g \in G$ . Nous souhaitons montrer que  $h(ag) = h(g)$  et que  $h(mg) = h(g)$ . Commençons tout d'abord par démontrer les faits suivants

**Fait 1.** *Pour  $\mathbb{P}_g$ -presque toute trajectoire on peut trouver une sous-suite  $(t_n)$  telle que  $k_{t_n}^{-1}ak_{t_n}$  converge vers un élément de  $SS^{-1}$ .*

*Preuve du fait 1.* Nous avons vu que le processus  $u_t := q(e_1, k_t(e_1)) = -e_1^*k_t(e_1)$  est transitoire dans  $[-1, 0]$  et ergodique dans  $[0, 1]$ . Ainsi pour  $\mathbb{P}_g$  presque toute trajectoire on peut trouver une sous-suite  $(t_n)$  telle que  $u_{t_n}$  converge vers 1. Maintenant nous écrivons  $a = \exp(\alpha H_0)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et choisissons  $s := \exp(\beta H_0)$  avec  $\beta > 0$  et  $\beta > \alpha$ . Nous avons  $s \in S$  et un calcul explicite de  $k_t^{-1}ak_t$  conduit à

$$\begin{aligned} q(e_0, k_{t_n}^{-1}ak_{t_n}s) &= \sinh(\beta) \cosh(\alpha) - u_{t_n} \cosh(\beta) \sinh(\alpha) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sinh(\beta - \alpha) > 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} q(e_1, k_{t_n}^{-1}ak_{t_n}s) &= u_{t_n} \sinh(\beta) \sinh(\alpha) - (u_{t_n})^2 \cosh(\beta) \cosh(\alpha) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\cosh(\beta - \alpha) < -1. \end{aligned}$$

On a donc trouvé un  $s \in S$  tel que  $k_{t_n}^{-1}ak_{t_n}s$  converge vers un élément de  $S$ , de sorte que  $k_{t_n}^{-1}ak_{t_n}$  converge vers un élément de  $SS^{-1}$ .  $\square$

**Fait 2.** *Pour  $\mathbb{P}_g$ -presque toute trajectoire on peut trouver une sous-suite  $(t_n)$  telle que  $k_{t_n}^{-1}mk_{t_n}$  converge vers un élément de  $SS^{-1}$ .*

*Preuve du fait 2.* Comme pour la preuve du fait 1, pour  $\mathbb{P}_g$ -presque toute trajectoire on choisit une sous-suite  $(t_n)$  telle que  $k_{t_n}$  converge et  $u_{t_n}$  converge vers 1. Ainsi  $k_{t_n}(e_1)$  converge vers  $e_1$  et pour chaque  $s \in S$ ,

$$q(e_0, \lim_n k_{t_n}^{-1}mk_{t_n}s(e_1)) = q(e_0, s(e_1)) > 0$$

et  $q(e_1, \lim_n k_{t_n}^{-1}mk_{t_n}s(e_1)) = q(e_1, s(e_1)) < -1$  et la limite  $\lim_n k_{t_n}^{-1}mk_{t_n}s$  appartient à  $S$ .  $\square$

Maintenant retournons à la preuve des égalités  $h(ag) = h(g)$  et  $h(mg) = h(g)$ . Nous notons par  $x$  l'élément  $a$  ou  $m$ , ainsi  $x$  commute avec  $A$  et posons  $s$  un élément de  $S$  tel que  $k_{t_n}^{-1}xk_{t_n}s$  converge dans  $S$  (cf la preuve des faits précédents).

Alors on a,

$$\begin{aligned}
h(xg) &= \mathbb{E}_g[\lim_t h(xg_t)] = \mathbb{E}_g[\lim_t h(xg_t s)] \text{ par le lemme 12,} \\
&= \mathbb{E}_g[\lim_t h(xn_t a_t k_t s)] = \mathbb{E}_g[\lim_t h(xn_t x^{-1} x a_t k_t s)] \\
&= \mathbb{E}_g[\lim_t h(x a_t k_t s)] \text{ puisque } xn_t x^{-1} \in N \text{ et } h \text{ est } N\text{-invariant à droite} \\
&= \mathbb{E}_g[\lim_t h(a_t x k_t s)] \text{ puisque } x \text{ commute avec les éléments de } A \\
&= \mathbb{E}_g[\lim_t h(n_t a_t k_t k_t^{-1} x k_t s)] = \mathbb{E}_g[\lim_n h(g_{t_n} k_{t_n}^{-1} x k_{t_n} s)] \\
&= \mathbb{E}_g[\lim_n h(g_{t_n})] \text{ par le lemme 12} \\
&= h(g).
\end{aligned}$$

– **Étape 3 : Toute fonction  $\mathcal{L}$ -harmonique bornée qui est  $N$ ,  $A$  et  $M$ -invariante à gauche est constante.**

Nous rappelons que  $M$  est le sous-groupe des éléments de  $K$  qui commutent avec  $A$ . Nous avons  $M \simeq SO(d)$  et  $NAM$  est un sous-groupe fermé de  $G$  et l'espace homogène  $NAM \setminus G$  s'identifie à la sphère  $\mathbb{S}^d$ , (c'est la frontière de Furstenberg maximale de  $G$ ).

Maintenant considérons une fonction  $\mathcal{L}$ -harmonique bornée  $h$  qui est  $N$ ,  $A$  et  $M$ -invariante à gauche. Elle définit une fonction continue  $\bar{h}$  sur  $NAM \setminus G \simeq \mathbb{S}^d$ , et pour  $g = nak \in G$  on a

$$h(g) = \bar{h}(e_1^* k),$$

où  $e_1^* k$  est un vecteur de  $\mathbb{S}^d$ .

Rappelons ((3.9), p 115) que  $u_t := q(e_1, k_t(e_1)) = -e_1^* k_t e_1$  est une diffusion dans  $[-1, 1]$  qui est transitoire sur  $[-1, 0]$  et ergodique dans  $[0, 1]$ . En particulier, pour presque toute trajectoire nous avons  $\limsup_t u_t = 1$ , de sorte qu'on peut trouver une sous-suite  $(t_n)$  telle que  $e_1^* k_{t_n}$  converge vers  $-e_1^*$ . Cela signifie que pour tout  $g \in G$  et pour  $\mathbb{P}_g$ -presque toute trajectoire, la limite de  $h(g_t) = \bar{h}(e_1^* k_t)$  est égale à  $\bar{h}(-e_1^*)$ , qui est déterministe.

Ainsi, pour tout  $g \in G$ ,  $h(g) = \mathbb{E}_g[\lim_t h(g_t)] = \mathbb{E}_g[\bar{h}(-e_1^*)] = \bar{h}(-e_1^*)$ , ce qui termine la preuve. □

### 3.3.3 Coefficients de Lyapunov pour les diffusions dans Anti-de-Sitter

Dans cette section nous calculons explicitement les coefficients de Lyapunov pour le flot stochastique associé aux diffusions relativistes dans  $AdS^{d+1}$ . Nous

constaterons alors qu'il n'est pas évident de prouver directement que la limite de  $-\frac{1}{t} \log a_t$  appartienne à la chambre de Weyl. Nous le montrerons par une méthode plus générale qui utilise les décompositions de Cartan et de Bruhat de  $PSO(2, d)$ .

Commençons par préciser la décomposition d'Iwasawa que l'on va choisir pour mener les calculs. On rappelle également les décompositions de Cartan et de Bruhat.

### 3.3.3.1 Décompositions de $G = PSO(2, d)$

Nous noterons  $G = PSO(2, d)$ . Rappelons que

$$Lie(G) := \left\{ \left( \begin{array}{cc|c} 0 & -a & b^* \\ a & 0 & c^* \\ \hline b & c & A \end{array} \right), \quad a \in \mathbb{R}, \quad b, c \in \mathbb{R}^d, \quad A \in so(d) \right\},$$

et que  $(e_0, e_1, \dots, e_{d+1})$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^{2,d}$ .

Rappelons les notations introduites précédemment

$$\begin{aligned} H_0 &:= e_1 e_0^* - e_0 e_1^* \\ H_i &:= e_{i+1} e_0^* + e_0 e_{i+1}^*, \quad i = 1, \dots, d \\ V_i &:= e_{i+1} e_1^* + e_1 e_{i+1}^* \quad i = 1, \dots, d \\ V_{ij} &:= e_{i+1} e_{j+1}^* - e_{j+1} e_{i+1}^* \quad i < j = 1, \dots, d \end{aligned}$$

Notons

$$\mathcal{K} := \text{Vect}\{H_0, V_{ij}, 1 \leq i < j \leq d\}.$$

Le sous-groupe  $K := \exp(\mathcal{K})$  est un sous-groupe compact maximal de  $G$  et est isomorphe à  $SO(2) \times SO(d)$ . Puis notons

$$\mathcal{A} := \text{Vect}\{H_1, V_2\};$$

c'est une algèbre de Lie abélienne maximale contenue dans le supplémentaire de  $\mathcal{K}$  pour la métrique de Killing. Notons  $A$  le sous-groupe abélien associé à  $\mathcal{A}$  ( $A := \exp(\mathcal{A})$ ).

Notons  $f_1$  et  $f_2$  les formes linéaires définies sur  $\mathcal{A}$  par

$$\begin{aligned} f_1 &: bH_1 + cV_2 \mapsto b \\ f_2 &: bH_1 + cV_2 \mapsto c. \end{aligned}$$

On peut montrer ([54]) qu'il y a huit racines dans  $G$

$$\pm f_1 \pm f_2, \quad \pm f_1, \quad \pm f_2.$$

On choisit la chambre de Weyl, qu'on note  $\mathcal{A}^+$ , telle que les (quatre) racines  $f_1, f_2, (f_1 + f_2)$  et  $(f_1 - f_2)$  soient positives. On note  $\Phi^+$  l'ensemble de ces racines positives. On calcule explicitement les sous-espaces de  $Lie(PSO(2, d))$  associés (voir 3.2.2.4) :

$$\begin{aligned} E_{f_1} &:= \text{Vect}\{H_i + V_{1i}, \quad i = 3, \dots, d\} \\ E_{f_2} &:= \text{Vect}\{V_i + V_{2i}, \quad i = 3, \dots, d\} \\ E_{f_1+f_2} &:= \text{Vect}\{H_0 + H_2 - V_1 + V_{12}\} \\ E_{f_1-f_2} &:= \text{Vect}\{H_0 - H_2 - V_1 - V_{12}\}. \end{aligned}$$

Notons  $\mathcal{N}$  (resp.  $\bar{\mathcal{N}}$ ) la sous-algèbre  $\oplus_{f \in \Phi^+} E_f$ , (resp.  $\oplus_{f \in \Phi^+} E_{-f}$ ) et  $N$  (resp.  $\bar{N}$ ) le sous-groupe associé.

Dans la décomposition d'Iwasawa de  $Lie(G)$

$$Lie(G) = \mathcal{N} \oplus \mathcal{A} \oplus \mathcal{K},$$

nous notons  $\{\cdot\}_{\mathcal{N}}$ ,  $\{\cdot\}_{\mathcal{A}}$  and  $\{\cdot\}_{\mathcal{K}}$  les projections sur  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{K}$ .

Cela donne lieu à la décomposition d'Iwasawa de  $G$  :

$$G = NAK,$$

et chaque  $g \in G$  s'écrit  $g = nak$  où  $n \in N$ ,  $a \in A$  et  $k \in K$ . De plus cette décomposition est unique et nous notons  $n = (g)_N$ ,  $a = (g)_A$  et  $k = (g)_K$  les coordonnées d'Iwasawa de  $g$ . De manière équivalente, l'application  $(n, a, k) \mapsto nak$  est un difféomorphisme de  $N \times A \times K$  vers  $G$ .

Notons  $A^+ = \exp(\mathcal{A}^+)$ . Nous avons également la décomposition de Cartan suivante

**Théorème 15** (décomposition de Cartan). *Nous avons*

$$G = K\bar{A}^+K,$$

*c'est-à-dire que  $g \in G$  peut s'écrire  $g = k'a^+k''$  où  $k', k'' \in K$  et  $a^+ \in \bar{A}^+$ . De plus,  $a^+ = (g)_{A^+}$  est unique.*

Notons  $M = \{m \in K; mam^{-1} = a \forall a \in A\}$  et  $M' := \{m' \in K; mAm^{-1} \subset A\}$ , respectivement, le centralisateur et le normalisateur de  $A$  dans  $K$ . On a explicitement  $M = SO(d-2)$  et  $M' = D_4 \times SO(d-2)$  de sorte que le groupe de Weyl  $W := M'/M$  de  $G$  est isomorphe au groupe diédral  $D_4$  d'ordre 8. Pour  $s \in W$  on fixe un représentant  $m_s \in M'$ . L'action adjointe de  $W$  sur  $A$  permute les différentes chambres de Weyl et il existe un unique  $s^* \in W$  qui envoie  $\mathcal{A}^+$  sur  $-\mathcal{A}^+$ . Le sous-groupe  $M$  normalise également  $N$ , ainsi  $B = NAM$  est un sous-groupe de  $G$ . Nous pouvons alors écrire la décomposition de Bruhat de  $G$  ([47]) :

**Théorème 16** (Décomposition de Bruhat). *Nous avons la réunion disjointe*

$$G = \bigcup_{s \in W} Bm_s B;$$

de plus,  $Bm_s B$  est un ouvert de  $G$ , et les autres parties sont des sous-variétés de plus petite dimension.

De plus  $Bm_s B = NA\bar{N}Mm_s$  et pour  $g \in NA\bar{N}M$  la décomposition est unique.

**Remarque 17.** *La décomposition de Bruhat associée à celle de Cartan nous donne que pour Haar $_G$ -presque tout  $g$  nous avons la décomposition :*

$$g = (g)_N^{Br} (g)_A^{Br} (g)_\bar{N}^{Br} m_{s^*}(g)_{A^+} k''(g),$$

où  $(g)_N^{Br} \in N$ ,  $(g)_A^{Br} \in A$ ,  $(g)_\bar{N}^{Br} \in \bar{N}$ ,  $k''(g) \in K$  et  $(g)_{A^+}$  est l'élément de  $A^+$  de la décomposition de Cartan.

### 3.3.3.2 Calcul des coefficients de Lyapunov

Rappelons que nous traitons ici le cas des diffusions  $g_t$  qui sont solution de l'EDS suivante :

$$dg_t = \sigma \sum_{i=1}^d V_i^l(g_t) \circ dB_t^i + H_0^l(g_t) dt.$$

Notons pour simplifier l'écriture  $n_t := (g_t)_N$ ,  $a_t := (g_t)_A$  et  $k_t := (g_t)_K$ . Rappelons les équations différentielles vérifiées par ces processus (ce sont en fait (3.6), (3.7) and (3.8)) :

$$dk_t = \sigma \sum_{i=1}^d \{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{K}} k_t \circ dB_t^i + \{Ad(k_t)H_0\}_{\mathcal{K}} k_t dt \quad (3.16)$$

$$da_t = \sigma \sum_{i=1}^d a_t \{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{A}} \circ dB_t^i + a_t \{Ad(k_t)H_0\}_{\mathcal{A}} dt \quad (3.17)$$

$$dn_t = \sigma \sum_{i=1}^d n_t Ad(a_t) \{Ad(k_t)V_i\}_{\mathcal{N}} \circ dB_t^i + n_t Ad(a_t) \{Ad(k_t)H_0\}_{\mathcal{N}} dt. \quad (3.18)$$

Notons  $H_t$  le processus dans  $\mathcal{A}$  tel que  $a_t = \exp(H_t)$ . On a donc

$$H_t = m_t + \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{i=1}^d \{[\{Ad(k_s)V_i\}_{\mathcal{K}}, Ad(k_s)V_i]\}_{\mathcal{A}} + \{Ad(k_s)H_0\}_{\mathcal{A}} \right\} ds,$$

où  $m_t := \sigma \sum_{i=1}^d \int_0^t \{Ad(k_s)V_i\}_{\mathcal{A}} dB_s^i$  est une martingale.

Nous allons calculer explicitement le terme à variation finie de  $H_t$  :

**Lemme 14.** *Le terme*

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{i=1}^d \{[\{Ad(k_s)V_i\}_{\mathcal{K}}, Ad(k_s)V_i]\}_{\mathcal{A}} + \{Ad(k_s)H_0\}_{\mathcal{A}}$$

est égal à

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 \left\{ (d-1 - 2(d-2)u_s^2)H_1 + ((d-2)u_s^2)\tilde{H} \right\},$$

où  $u_s := k_s(e_1)^*e_1$  et  $\tilde{H} := H_1 + V_2$ .

*Démonstration.* Notons que  $Ad(k_s)(H_0) \in \mathcal{K}$  et donc  $\{Ad(k_s)(H_0)\}_{\mathcal{A}} = 0$ . Maintenant nous calculons les termes  $\{[\{Ad(k)V_i\}_{\mathcal{K}}, Ad(k)V_i]\}_{\mathcal{A}}$  pour  $k \in K$ . Pour simplifier les notations notons pour  $j = 1, \dots, d$  :

$$\begin{aligned} (kV_i)_{1j} &:= e_{j+1}^*k(e_{i+1})k(e_1)^*e_0 \\ (kV_i)_{2j} &:= e_{j+1}^*k(e_{i+1})k(e_1)^*e_1 \end{aligned}$$

les entrées de la matrice  $Ad(k)V_i (= k(e_{i+1})k(e_1)^* + k(e_1)k(e_{i+1})^*)$  de sorte qu'elle s'écrit  $Ad(k)V_i = \sum_{j=1}^d (kV_i)_{1j}H_j + (kV_i)_{2j}V_j$ . Décomposons  $Ad(k)V_i$  dans  $\mathcal{N} \oplus \mathcal{A} \oplus \mathcal{K}$  :

$$Ad(k)V_i = \{Ad(k)V_i\}_{\mathcal{N}} + \{Ad(k)V_i\}_{\mathcal{A}} + \{Ad(k)V_i\}_{\mathcal{K}}$$

où

$$\begin{aligned} \{Ad(k)V_i\}_{\mathcal{N}} &= \sum_{j=3}^d b^j (H_j + V_{1j}) + \sum_{j=3}^d c^j (V_j + V_{2j}) \\ &\quad + a^{1,1}(H_0 + H_2 - V_1 + V_{12}) + a^{1,-1}(H_0 - H_2 - V_1 - V_{12}) \\ \{Ad(k)V_i\}_{\mathcal{A}} &= uH_1 + vV_2 \\ \{Ad(k)V_i\}_{\mathcal{K}} &= aH_0 + \sum_{j=2}^d d^{1,j}V_{1j} + \sum_{j=3}^d d^{2,j}V_{2j}. \end{aligned}$$

Cela est équivalent à

$$\begin{aligned} 0 &= a + a^{1,1} + a^{1,-1} & 0 &= d^{1,j} + b^j, \quad j \geq 3 \\ (kV_i)_{11} &= u & 0 &= d^{1,2} + a^{1,1} - a^{1,-1} \\ (kV_i)_{12} &= a^{1,1} - a^{1,-1} & 0 &= d^{2,j} + c^j, \quad j \geq 3 \\ (kV_i)_{1j} &= b^j \quad j \geq 3 & (kV_i)_{21} &= -a^{1,1} - a^{1,-1} \\ (kV_i)_{22} &= v & (kV_i)_{2j} &= c^j. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$a = (kV_i)_{21}, \quad d^{1,j} = -(kV_i)_{1j} \text{ pour } j \geq 2, \quad \text{et} \quad d^{2,j} = -(kV_i)_{2j}, \text{ pour } j \geq 3.$$

Ainsi

$$\{Ad(k_s)V_i\}_{\mathcal{K}} = (kV_i)_{21}H_0 - \sum_{j=2}^d (kV_i)_{1j}V_{1j} - \sum_{j=3}^d (kV_i)_{2j}V_{2j},$$

et

$$\begin{aligned} [\{Ad(k)V_i\}_{\mathcal{K}}, Ad(k)V_i] &= \sum_{j=1}^d (kV_i)_{21}(kV_i)_{1j}[H_0, H_j] + \sum_{j=1}^d (kV_i)_{21}(kV_i)_{2j}[H_0, V_j] \\ &\quad - \sum_{j=2}^d \sum_{l=1}^d (kV_i)_{1j}(kV_i)_{1l}[V_{1j}, H_l] - \sum_{j=2}^d \sum_{l=1}^d (kV_i)_{1j}(kV_i)_{2l}[V_{1j}, V_l] \\ &\quad - \sum_{j=3}^d \sum_{l=1}^d (kV_i)_{2j}(kV_i)_{1l}[V_{2j}, H_l] - \sum_{j=3}^d \sum_{l=1}^d (kV_i)_{2j}(kV_i)_{2l}[V_{2j}, V_l]. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} [H_0, H_j] &= V_j \quad (j \geq 1) & [H_0, V_j] &= -H_j, \quad (j \leq 1) \\ [V_{1j}, H_l] &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq l \text{ et } l \neq 1 \\ H_1 & \text{si } j = l \text{ et } l \neq 1 \\ -H_j & \text{si } l = 1 \text{ et } j \neq l \end{cases} & [V_{1j}, V_l] &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq l \text{ et } l \neq 1 \\ V_1 & \text{si } j = l \text{ et } l \neq 1 \\ -V_j & \text{si } l = 1 \text{ et } j \neq l \end{cases} \\ [V_{2j}, H_l] &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq l \text{ et } l \neq 2 \\ H_2 & \text{si } j = l \text{ et } l \neq 2 \\ -H_j & \text{si } l = 2 \text{ et } j \neq l \end{cases} & [V_{2j}, V_l] &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq l \text{ et } l \neq 2 \\ V_2 & \text{si } j = l \text{ et } l \neq 2 \\ -V_j & \text{si } l = 2 \text{ et } j \neq l \end{cases} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \{[\{Ad(k)V_i\}_{\mathcal{K}}, Ad(k)V_i]\}_{\mathcal{A}} &= \left( -(kV_i)_{21}^2 - \sum_{j=2}^d (kV_i)_{1j}^2 \right) H_1 + \\ &\quad \left( 2(kV_i)_{12}(kV_i)_{21} - \sum_{j=3}^d (kV_i)_{2j}^2 \right) V_2. \end{aligned}$$



Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^d (kV_i)_{1j}^2 &= \sum_{j=2}^d (e_{j+1}^* k(e_{i+1}) k(e_1)^* e_0)^2 \\
&= (k(e_1)^* e_0)^2 (1 - (e_2^* k(e_{i+1}))^2); \\
\sum_{j=3}^d (kV_i)_{2j}^2 &= \sum_{j=3}^d (e_{j+1}^* k(e_{i+1}) k(e_1)^* e_1)^2 \\
&= (k(e_1)^* e_1)^2 (1 - (e_2^* k(e_{i+1}))^2 - (e_3^* k(e_{i+1}))^2); \\
\sum_{i=1}^d (kV_i)_{12} (kV_i)_{21} &= (k(e_1) e_1^*) (k(e_1) e_0^*) \sum_{i=1}^d e_2^* k(e_{i+1}) e_3^* k(e_{i+1}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^d \{ \{ \{ Ad(k)V_i \}_{\mathcal{K}}, Ad(k)V_i \}_{\mathcal{A}} = \\
&\left( - \sum_{i=1}^d (e_2^* k(e_{i+1}))^2 (k(e_1)^* e_1)^2 - (k(e_1)^* e_0)^2 \left( d - \sum_{i=1}^d (e_2^* k(e_{i+1}))^2 \right) \right) H_1 \\
&- (k(e_1)^* e_1)^2 \left( d - \sum_{i=1}^d (e_2^* k(e_{i+1}))^2 - \sum_{i=1}^d (e_3^* k(e_{i+1}))^2 \right) V_2,
\end{aligned}$$

et avec  $\sum_{i=1}^d (e_2^* k(e_{i+1}))^2 = \sum_{i=1}^d (e_3^* k(e_{i+1}))^2 = 1$  on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^d \{ \{ \{ Ad(k)V_i \}_{\mathcal{K}}, Ad(k)V_i \}_{\mathcal{A}} = \\
&(- (d-1) + (d-2)(k(e_1)^* e_1)^2) H_1 - (d-2)(k(e_1)^* e_1)^2 V_2.
\end{aligned}$$

□

Précisons la nature du processus  $u_t$ .

**Lemme 15.** *Le processus  $u_s$  peut s'écrire  $u_s = \sin(\theta_s)$  où  $\theta_s$  est une diffusion sur  $S^1$  solution de*

$$d\theta_s = \sigma \sin(\theta_s) dW_s + \left\{ 1 - \frac{d-2}{4} \sigma^2 \sin(2\theta_s) \right\} ds.$$

Le générateur de  $\theta$  s'écrit

$$\mathcal{L}_\theta := \frac{1}{2} X^2 + Y,$$

où  $X = \sigma \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta}$  et  $Y = \left( 1 - \frac{d-1}{4} \sigma^2 \sin(2\theta) \right) \frac{\partial}{\partial \theta}$ .

*Démonstration.* Nous écrivons

$$\begin{aligned}
du_s &= \sigma \sum_{i=1}^d (e_2^* k_t(e_{i+1}))(e_0^* k_t(e_1))(e_1^* k_t(e_1)) \circ dB_t^i + e_0^* k_t(e_1) dt \\
&= \sigma \sum_{i=1}^d (e_2^* k_t(e_{i+1}))(e_0^* k_t(e_1))(e_1^* k_t(e_1)) dB_t^i + e_0^* k_t(e_1) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \sigma \left( \sum_{i=1}^d (e_2^* dk_t(e_{i+1}))(e_0^* k_t(e_1))(e_1^* k_t(e_1)) dB_t^i + (e_2^* k_t(e_{i+1}))(e_0^* dk_t(e_1))(e_1^* k_t(e_1)) dB_t^i \right. \\
&\quad \left. + (e_2^* k_t(e_{i+1}))(e_0^* k_t(e_1))(e_1^* dk_t(e_1)) dB_t^i \right) \\
&\text{et calculons les termes } (e_2^* dk_t(e_{i+1})) dB_t^i, (e_0^* dk_t(e_1)) dB_t^i \text{ et } (e_1^* dk_t(e_1)) dB_t^i :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(e_2^* dk_t(e_{i+1})) dB_t^i &= \sigma e_2^* \{Ad(k_t)V_i\} \kappa k_t(e_{i+1}) dt \\
&= \sigma e_2^* \left( (k_t V_i)_{21} H_0 + \sum_{j=2}^d -(k_t V_i)_{1j} V_{1j} + \sum_{j=3}^d -(k_t V_i)_{2j} V_{2j} \right) k_t(e_{i+1}) dt \\
&= -\sigma \left( \sum_{j=2}^d (k_t V_i)_{1j} e_{j+1}^* k_t(e_{i+1}) \right) dt \\
&= -\sigma (e_0^* k_t(e_1)) \left( \sum_{j=2}^d (e_{j+1}^* k_t(e_{i+1}))^2 \right) dt \\
&= -\sigma (e_0^* k_t(e_1)) (1 - (e_2^* k_t(e_{i+1}))^2) dt,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
e_0^* dk_t(e_1) dB_t^i &= \sigma e_0^* \{Ad(k_t)V_i\} \kappa k_t(e_1) dt \\
&= -\sigma (k_t V_i)_{21} e_1^* k_t(e_1) dt \\
&= -\sigma (e_2^* k_t(e_{i+1})) (e_1 k_t(e_1))^2 dt,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
e_1^* dk_t(e_1) dB_t^i &= \sigma e_1^* \{Ad(k_t)V_i\} \kappa k_t(e_1) dt \\
&= \sigma (k_t V_i)_{21} e_0^* k_t(e_1) dt \\
&= \sigma (e_2^* k_t(e_{i+1})) (e_1^* k_t(e_1)) (e_0^* k_t(e_1)) dt.
\end{aligned}$$

Ainsi la correction d'Itô dans le calcul de  $du_t$  est égale à

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{i=1}^d \left( (e_0^* k_t(e_1))^2 (e_1^* k_t(e_1)) ((e_2^* k_t(e_{i+1}))^2 - 1) - (e_2^* k_t(e_{i+1}))^2 (e_1^* k_t(e_1))^3 \right. \\
&\quad \left. + (e_2^* k_t(e_{i+1}))^2 (e_0^* k_t(e_1))^2 e_1^* k_t(e_1) \right) dt,
\end{aligned}$$

et puisque  $\sum_{i=1}^d (e_2^* k_t(e_{i+1}))^2 = 1$  nous obtenons finalement pour la correction d'Itô :

$$\frac{1}{2}\sigma^2((d-3)(e_1^* k_t(e_1))^3 - (d-2)(e_1^* k_t(e_1)))dt.$$

Notons  $u_t = (e_1^* k_t(e_1))$  (ce n'est pas le même que pour de Sitter même si nous utilisons la même lettre) et  $v_t = (e_0^* k_t(e_1))$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} du_t &= \sigma u_t v_t \sum_{i=1}^d e_2^* k_t(e_{i+1}) dB_t^i + \frac{1}{2}\sigma^2((d-3)u_t^3 - (d-2)u_t) dt + v_t dt \\ &= \sigma u_t v_t dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2((d-3)u_t^3 - (d-2)u_t) dt + v_t dt, \end{aligned}$$

où  $W_t := \int_0^t \sum_{i=1}^d e_2^* k_t(e_{i+1}) dB_t^i$  est un mouvement brownien.

Notons alors  $\theta_t$  le processus dans  $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  tel que  $u_t = \sin(\theta_t)$  et  $v_t = \cos(\theta_t)$ . Il vient alors que  $\theta_t$  est une diffusion sur  $S^1$  et vérifie

$$d\theta_t = \sigma \sin(\theta_t) dW_t + \left\{ 1 - \frac{d-2}{4}\sigma^2 \sin(2\theta_t) \right\} dt.$$

□

Dans la proposition suivante nous montrons l'ergodicité de  $\theta_s$ , et donnons une expression de la probabilité invariante.

**Proposition 34.** *La diffusion  $\theta_s$  est ergodique et nous notons  $\mu_{d,\sigma}$  l'unique probabilité invariante. On a explicitement*

$$\mu_{d,\sigma}(d\theta) = f_{d,\sigma}(\theta)d\theta,$$

où  $f_{d,\sigma}$  est la fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $\pi$ -périodique définie sur  $]0, \pi[$  par :

$$f_{d,\sigma}(\theta) = C_{d,\sigma} \left( \int_\theta^\pi \sin(u)^{d-2} e^{\frac{2}{\sigma^2} \frac{\cos(u)}{\sin(u)}} du \right) \sin(\theta)^{-d} e^{-\frac{2}{\sigma^2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}},$$

avec  $C_{d,\sigma}$  telle que  $\int_0^{2\pi} f_{d,\sigma}(\theta)d\theta = 1$ .

Le processus  $\frac{H_t}{t}$  converge presque sûrement vers  $-H_\infty \in \mathcal{A}$ . Nous avons explicitement

$$H_\infty = \alpha_{d,\sigma} H_1 + \beta_{d,\sigma} V_2,$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_{d,\sigma} &:= \frac{1}{2}\sigma^2 \left( (d-1) - (d-2) \int_{S^1} \sin^2(\theta) \mu_{d,\sigma}(d\theta) \right) \\ \beta_{d,\sigma} &:= \frac{d-2}{2}\sigma^2 \int_{S^1} \sin^2(\theta) \mu_{d,\sigma}(d\theta). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Par les lemmes 14 et 15, la convergence de  $\frac{H_t}{t}$  se déduira du théorème ergodique et de l'ergodicité de  $\theta_s$ . Nous prouvons l'ergodicité en montrant qu'il n'existe qu'une mesure de probabilité invariante. C'est-à-dire que nous allons montrer qu'il existe une unique fonction  $f \in C^2(S^1)$  solution de  $\mathcal{L}_\theta^* f = 0$  telle que  $\int_{S^1} f(\theta) d\theta = 1$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\theta^* f = 0 &\Leftrightarrow \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) f) \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \left( 1 - \frac{d-1}{4} \sigma^2 \sin(2\theta) \right) f \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sigma^2}{2} \sin(\theta)^2 \frac{\partial f}{\partial \theta} + \left( -1 + \frac{\sigma^2 d}{4} \sin(2\theta) \right) f = -f(0). \end{aligned}$$

De plus, les solutions de l'équation sans second membre

$$\frac{\sigma^2}{2} \sin^2(\theta) y' + \left( -1 + \frac{\sigma^2 d}{4} \sin(2\theta) \right) y = 0$$

sont  $y(\theta) = \lambda \sin^{-d}(\theta) e^{-\frac{2}{\sigma^2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}}$  où  $\theta \neq 0[\pi]$  et la constante  $\lambda$  peut être différente sur chaque intervalle  $]k\pi, (k+1)\pi[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . En utilisant une variation des constantes on obtient que les solutions de

$$\frac{\sigma^2}{2} \sin^2(\theta) y' + \left( -1 + \frac{\sigma^2 d}{4} \sin(2\theta) \right) y = -f(0)$$

sont de la forme

$$y(\theta) = \frac{2f(0)}{\sigma^2} \left( \int_{\theta-k\pi}^{\pi} \sin(u)^{d-2} e^{\frac{2}{\sigma^2} \frac{\cos(u)}{\sin(u)}} du + \lambda_k \right) \sin(\theta)^{-d} e^{-\frac{2}{\sigma^2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}},$$

pour  $\theta \in ]k\pi, (k+1)\pi[$  et où  $\lambda_k$  sont les constantes sur  $]k\pi, (k+1)\pi[$ .

La seule solution régulière est obtenue en prenant  $\lambda_k = 0$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ainsi, l'ensemble des solutions de  $\mathcal{L}_\theta^* f = 0$  est de dimension 1 et l'unique probabilité invariante est  $d\mu_{d,\sigma}(\theta) = f_{d,\sigma}(\theta) d\theta$  où  $f_{d,\sigma}$  est la fonction  $C^\infty$ ,  $\pi$ -périodique définie sur  $]0, \pi[$  par

$$f_{d,\sigma}(\theta) = C_{d,\sigma} \left( \int_{\theta}^{\pi} \sin(u)^{d-2} e^{\frac{2}{\sigma^2} \frac{\cos(u)}{\sin(u)}} du \right) \sin(\theta)^{-d} e^{-\frac{2}{\sigma^2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}},$$

où  $C_{d,\sigma}$  est le coefficient de normalisation tel que  $\int_0^{2\pi} f_{d,\sigma}(\theta) d\theta = 1$ . □

Bien que le résultat suivant soit contenu dans les travaux de Guivarc'h-Raugi et ceux de Liao, nous allons le redémontrer pour mettre en évidence qu'une preuve directe semble être délicate et que le bon argument est d'ordre géométrique, et fait intervenir les différentes décompositions de  $G$ .

**Proposition 35.**  $H_\infty$  appartient à la chambre de Weyl  $\mathcal{A}^+$ .

*Démonstration.* Nous avons clairement  $f_1(H_\infty) = \alpha_{d,\sigma} > 0$ ,  $f_2(H_\infty) = \beta_{d,\sigma} > 0$  et  $(f_1 + f_2)(H_\infty) = \alpha_{d,\sigma} + \beta_{d,\sigma} > 0$ . Cependant nous devons également vérifier que  $(f_1 - f_2)(H_\infty) = \alpha_{d,\sigma} - \beta_{d,\sigma} > 0$  et cela semble moins évident à établir directement puisque cela revient à vérifier que

$$\int_{S^1} \sin^2(\theta) \mu_{d,\sigma}(d\theta) < \frac{d-1}{2(d-2)}.$$

Pour  $d = 3$  cette inégalité est triviale, mais elle ne l'est pas du tout pour  $d \geq 4$  et un  $\sigma > 0$  quelconque. En effet, en utilisant l'expression explicite de  $\mu_{d,\sigma}$ , nous devons montrer l'inégalité suivante :

$$\int_0^\pi \left( \int_\theta^\pi \sin(u)^{d-2} e^{\frac{2}{\sigma^2} \frac{\cos(u)}{\sin(u)}} du \right) \sin(\theta)^{-d+2} e^{-\frac{2}{\sigma^2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}} d\theta < \frac{d-1}{2(d-2)} \int_0^\pi \left( \int_\theta^\pi \sin(u)^{d-2} e^{\frac{2}{\sigma^2} \frac{\cos(u)}{\sin(u)}} du \right) \sin(\theta)^{-d} e^{-\frac{2}{\sigma^2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}} d\theta.$$

Par des calculs élémentaires on peut se convaincre qu'elle est vraie pour  $\sigma > 0$  et un entier pair  $d \leq 10$  ou bien pour un entier  $d \geq 3$  mais alors seulement pour des petites valeurs de  $\sigma > 0$ . Nous n'avons pas réussi à trouver d'arguments directs simples qui puissent démontrer une telle inégalité. Elle est pourtant vraie mais pour des raisons plus profondes et géométriques, qui apparaissent en utilisant les différentes décompositions de  $G$ .

Les deux lemmes suivants vont nous permettre de montrer l'inégalité large, et nous démontrerons dans un second temps qu'elle est stricte.

– **Inégalité large**

**Lemme 16.** Pour  $a \in A$  notons  $\log(a)$  l'unique  $H \in \mathcal{A}$  tel que  $a = \exp(H)$ . Et notons  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathcal{A}$ . Pour Haar $_K$ -presque tout  $k \in K$  :

$$\sup_{a_+ \in A^+} \|\log(a_+) + \log((ka_+)_A)\| < +\infty$$

*Démonstration.* Par la décomposition de Bruhat de  $G$  nous avons pour Haar $_K$ -presque tout  $k \in K$

$$k = n^{Br} a^{Br} \bar{n}^{Br} m^{Br} m_{s^*}.$$

Ainsi pour  $a_+ \in A^+$

$$\begin{aligned} ka_+ &= n^{Br} a^{Br} \bar{n}^{Br} m^{Br} m_{s^*} a_+ \\ &= n^{Br} a^{Br} \bar{n}^{Br} a_+^{-1} m_{s^*} m^{Br} \quad \text{since } m_{s^*} a_+ m_{s^*}^{-1} = a_+^{-1} \\ &= n^{Br} a^{Br} a_+^{-1} a_+ \bar{n}^{Br} a_+^{-1} m_{s^*} m^{Br}. \end{aligned}$$

Écrivons  $\bar{n}^{Br} = \exp(\bar{h}^{Br})$  avec  $\bar{h}^{Br} \in \bar{\mathcal{N}}$ ; en décomposant  $\bar{h}^{Br} = \sum_{f \in \Phi^+} h^f$  dans  $\bar{\mathcal{N}} = \bigoplus_{f \in \Phi^+} E_{-f}$  on déduit que  $Ad(a^+) \bar{h}^{Br} = \sum_{f \in \Phi^+} e^{-f(\log a^+)} h^f$  reste dans un compact lorsque  $a_+$  décrit  $A^+$ . Il en résulte qu'il en est de même pour  $a_+ \bar{n}^{Br} a_+^{-1} = \exp(Ad(a_+) \bar{h}^{Br})$ . Puis en invoquant la décomposition d'Iwasawa de  $a_+ \bar{n}^{Br} a_+^{-1}$  il vient

$$\begin{aligned} ka_+ &= n^{Br} a^{Br} a_+^{-1} (a_+ \bar{n}^{Br} a_+^{-1})_N (a_+ \bar{n}^{Br} a_+^{-1})_A (a_+ \bar{n}^{Br} a_+^{-1})_K m_{s^*} m^{Br} \\ &= n^{Br} Ad(a^{Br} a_+^{-1}) (a_+ \bar{n}^{Br} a_+^{-1})_N a^{Br} a_+^{-1} (a_+ \bar{n}^{Br} a_+^{-1})_A (a_+ \bar{n}^{Br} a_+^{-1})_K m_{s^*} m^{Br}. \end{aligned}$$

D'où finalement

$$(ka_+)_A = a^{Br} a_+^{-1} (a_+ \bar{n}^{Br} a_+^{-1})_A.$$

Puisque  $(a_+ \bar{n}^{Br} a_+^{-1})_A$  reste dans un compact de  $A$  lorsque  $a_+$  décrit  $A^+$  nous avons montré que pour  $Haar_K$ -presque tout  $k \in K$ ,  $\{(ka_+)_A; a_+ \in A^+\}$  est dans un compact de  $A$  ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

**Corollaire 5.** *Pour  $\mathbb{P}_{Haar_K}$ -presque toute trajectoire on a*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\log(g_n)_{A^+} + \log(g_n)_A\| < +\infty$$

*Démonstration.* Puisque la diffusion  $g_t$  est hypoelliptique, la loi de  $g_{n+1}$  conditionnée par  $g_n$  est absolument continue par rapport à la mesure  $Haar_G$ . Ainsi par la remarque 17, on a pour  $\mathbb{P}_{Haar_K}$ -presque toute trajectoire et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  l'égalité  $g_n = x_n(g_n)_{A^+} k_n''$  où  $x_n := (g_n)_{N'}^{Br} (g_n)_A^{Br} (g_n)_{\bar{N}}^{Br} m_{s^*}$ . Puisque la loi de  $g_n$  sous  $\mathbb{P}_{Haar_K}$  coïncide avec celle de  $kg_n$  sous  $Haar_K \otimes \mathbb{P}_I$  nous obtenons

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{Haar_K} \left\{ \sup_n \|\log(g_n)_{A^+} + \log(g_n)_A\| < +\infty \right\} \\ &= Haar_K \otimes \mathbb{P}_I \left\{ \sup_n \|\log(g_n)_{A^+} + \log(kg_n)_A\| < +\infty \right\} \\ &= Haar_K \otimes \mathbb{P}_I \left\{ \sup_n \|\log(g_n)_{A^+} + \log((kx_n(g_n)_{A^+})_A)\| < +\infty \right\} \\ &\geq Haar_K \otimes \mathbb{P}_I \left\{ \sup_n \sup_{a_+ \in A^+} \|\log a_+ + \log(kx_n a_+)_A\| < +\infty \right\} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} Haar_K \otimes \mathbb{P}_I \left\{ \sup_{a_+ \in A^+} \|\log a_+ + \log(kx_n a_+)_A\| < +\infty \right\} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} Haar_K \left\{ \sup_{a_+ \in A^+} \|\log a_+ + \log(a_+)_A\| < +\infty \right\} = 1, \end{aligned}$$

puisque la loi de  $kx_n$  sous  $Haar_K \otimes \mathbb{P}_I$  est  $Haar_K$ .

Maintenant, pour chaque  $f \in \Phi^+$ , et en particulier pour  $f = f_1 - f_2$ , nous avons pour tout  $n > 0$  :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\log(g_n)_A}{n}\right) &\leq f\left(\frac{\log(g_n)_A + \log(g_n)_{A^+}}{n}\right) - f\left(\frac{\log(g_n)_{A^+}}{n}\right) \\ &\leq f\left(\frac{\log(g_n)_A + \log(g_n)_{A^+}}{n}\right). \end{aligned}$$

De plus, pour  $\mathbb{P}_{Haar_K}$ -presque toute trajectoire on a que  $\frac{\log(g_n)_A}{n}$  converge, lorsque  $n$  tend vers l'infini, vers  $-H_\infty$ . Par le corollaire précédent, nous obtenons que  $\frac{\log(g_n)_A + \log(g_n)_{A^+}}{n}$  converge vers 0. Nous avons donc montré l'inégalité large suivante

$$f(H_\infty) \geq 0.$$

□

– **Inégalité stricte.**

**Lemme 17.** *Si  $\phi$  est une fonction  $C^\infty$ ,  $\pi$ -périodique telle que  $\int_0^\pi \phi(\theta)\mu(d\theta) = 0$  alors il existe une fonction régulière  $\pi$ -périodique  $\psi$  telle que  $\mathcal{L}_\theta\psi = \phi$ .*

*Démonstration.* L'équation  $\mathcal{L}_\theta\psi = \phi$  est équivalente à

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \sin^2(\theta)\psi''(\theta) + \left(1 - \frac{d-2}{4}\sigma^2 \sin(2\theta)\right)\psi'(\theta) = \phi(\theta),$$

et en posant  $z(\theta) := \psi'(\theta)$  nous voulons trouver une fonction régulière  $\pi$ -périodique telle que  $\int_0^\pi z(\theta)d\theta = 0$  et :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \sin^2(\theta)z'(\theta) + \left(1 - \frac{d-2}{4}\sigma^2 \sin(2\theta)\right)z(\theta) = \phi(\theta).$$

En calculant directement les solutions on s'aperçoit qu'il n'y a qu'une seule solution régulière  $\pi$ -périodique à l'équation précédente et qu'elle est définie sur  $[0, \pi]$  par

$$z(\theta) = \sin(\theta)^{d-2} e^{\frac{2}{\sigma^2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}} \left( \int_0^\theta \frac{2}{\sigma^2} \sin(u)^{-d} e^{-\frac{2}{\sigma^2} \frac{\cos(u)}{\sin(u)}} \phi(u) du \right).$$

Puisque  $\int_0^\pi \phi(\theta)\mu(d\theta) = 0$  on déduit par intégration par parties que  $\int_0^\pi z(\theta)d\theta = 0$ , ce qui était demandé. □

Retournons maintenant à la preuve de  $(f_1 - f_2)(H_\infty) > 0$ . Nous savons déjà que l'inégalité est large et nous allons supposer, par l'absurde, que  $(f_1 - f_2)(H_\infty) = 0$  c'est-à-dire que

$$\int_{S^1} (2(d-2)\sin(\theta)^2 - (d-1)) d\mu(\theta) = 0.$$

Notons par  $\bar{W}_t := \int_0^t \sum_{i=1}^d e_3^* k_s(e_{i+1}) dB_s^i$  et souvenons nous que

$$W_t := \int_0^t \sum_{i=1}^d e_2^* k_s(e_{i+1}) dB_s^i.$$

On a ainsi explicitement que

$$\begin{aligned} H_t &= (\sigma \cos(\theta_t) dW_t + ((d-2)\sin^2(\theta_t) - (d-1))) H_1 \\ &\quad + (\sigma \sin(\theta_t) d\bar{W}_t - (d-2)\sin^2(\theta_t)) V_2, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} (f_1 - f_2)(H_t) &= \sigma \int_0^t \cos(\theta_s) dW_s - \sigma \int_0^t \sin(\theta_s) d\bar{W}_s \\ &\quad + \int_0^t (2(d-2)\sin(\theta_s)^2 - (d-1)) ds. \end{aligned}$$

Par le lemme précédent, et puisque  $\int_{S^1} (2(d-2)\sin(\theta)^2 - (d-1)) d\mu(\theta) = 0$ , il existe une fonction régulière  $\psi$ ,  $\pi$ -périodique telle que

$$(2(d-2)\sin(\cdot)^2 - (d-1)) = \mathcal{L}_\theta \psi$$

et ainsi, en appliquant la formule d'Itô on obtient

$$\int_0^t (2(d-2)\sin(\theta_s)^2 - (d-1)) ds = \psi(\theta_t) - \psi(\theta_0) - \int_0^t \psi'(\theta_s) \sigma \sin(\theta_s) dW_s.$$

Donc  $\frac{(f_1 - f_2)(H_t)}{\sqrt{t}}$  converge en loi vers la gaussienne  $W_{\sigma^2 \int \cos^2 + (\sin \psi')^2 d\mu} + \bar{W}_{\sigma^2 \int \sin^2 d\mu}$  ce qui contredit le fait que  $\mathbb{P}_{Haar_K}$ -presque sûrement

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{(f_1 - f_2)(H_t)}{\sqrt{t}} \geq 0.$$

□



# Bibliographie

- [1] J Angst. *Étude de diffusions à valeurs dans des variétés Lorentziennes*. PhD thesis, Université de Strasbourg, 2009.
- [2] J Angst and J Franchi. Central limit theorem for a class of relativistic diffusions. *J. Math. Phys*, 2007.
- [3] D Applebaum and H Kunita. Lévy flows on manifolds and Lévy processes on Lie groups. *J. Math. Kyoto Univ*, 1993.
- [4] R Azencott. Espaces de Poisson des groupes localement compacts. *Lectures notes*, 1970.
- [5] R Azencott. Formule de Taylor stochastique et développement asymptotiques d'intégrales de Feynman. *Séminaire de probabilités XVI.*, 1982.
- [6] I Bailleul. Poisson boundary of a relativistic diffusion. *Probability theory and related fields*, 2006.
- [7] I Bailleul. A pathwise approach to relativistic diffusions. *Annales de l'institut Henri Poincaré.*, 2010.
- [8] I Bailleul and J Franchi. Non-explosion criteria for relativistic diffusions, 2011.
- [9] I. Bailleul and A Raugi. Where does randomness lead in spacetime ? *ESAIM : Probability and Statistics*, 2008.
- [10] C Barbachoux, F Debbasch, and J.P Rivet. Covariant kolmogorov equation and entropy current for the relativistic ornstein-ullhbeck process. *European J. Phys*, 2001.
- [11] C Barbachoux, F Debbasch, and J.P Rivet. The spatially one-dimensional relativistic Ornstein-Uhlenbeck process in an arbitrary inertial frame. *European J. Phys*, 2001.
- [12] R Bass. *Probabilistic Techniques in Analysis*. Springer-Verlag, 1991.
- [13] P. Baxendale. Asymptotic behavior of stochastic flows of diffeomorphisms : Two case studies. *Probability Theory and Related Fields*, 1986.
- [14] G Ben Arous. Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique sur la diagonale. *Annales de l'institut Fourier*, 1989.

- [15] G Ben Arous and M Gradinaru. Singularities of Hypoelliptic Green Functions. *Potential Analysis*, 1998.
- [16] R.M. Blumenthal and R.K. Gettoor. Markov Processes and Potential Theory. *Academic Press, N-Y*, 1968.
- [17] J.M Bony. Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés. *Annales de l'institut Fourier*, 1969.
- [18] A Carverhill and K.D. Elworthy. Lyapunov exponents for a stochastic analogue of the geodesic flow. *Trans. Amer. Math. Soc*, 1986.
- [19] F Castell. Asymptotic expansion of stochastic flows. *Probability theory and related fields*, 1993.
- [20] M Chaleyat-Maurel and J-F Le Gall. Green function, capacity and sample paths properties for a class of hypoelliptic diffusion processes. *Probability theory and related fields*, 1989.
- [21] C Chevalier and F Debbasch. Relativistic diffusions : a unifying approach. *J. Math. Phys*, 2008.
- [22] C Chevalier and F Debbasch. A unifying approach to relativistic diffusions and h-theorems. *Modern Phys. Lett.*, 2008.
- [23] C Cuny. Sur les fonctions harmoniques bornées sur les groupes de lie résolubles connexes et l'existence de mesure invariante. *J. Anal. Math*, 2004.
- [24] F Debbasch. A diffusion process in curved space-time. *J. Math. Phys*, 2004.
- [25] F Debbasch, K Mallick, and J.P Rivet. Relativistic Ornstein-Uhlenbeck process. *J. Statist. Phys*, 1997.
- [26] F Debbasch, J.P Rivet, and W.A Van Leeuwen. Invariance of the relativistic one-particle distribution function. *Physica A*, 2001.
- [27] F Delarue and S Menozzi. Density estimates for a random noise propagating through a chain of differential equations. *Journal of functional analysis*, 2010.
- [28] R.M. Dudley. Lorentz-invariant Markov processes in relativistic phase space. *Ark. Mat*, 1966.
- [29] R.M. Dudley. Asymptotics of some relativistic Markov processes. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A*, 1973.
- [30] J Dunkel and P Hänggi. Theory of relativistic Brownian motion : The (1+3)-dimensional case. *Phys. Rev. E*, 2005.
- [31] J Dunkel and P Hänggi. Relativistic Brownian motion. *Physics Reports*, 2009.
- [32] J Dunkel, P Talkner, and P Hänggi. Relativistic diffusion processes and random walk models. *Phys. Rev. D*, 2007.

- [33] A Einstein. Über die von der molekularkinetischen Theorie der wärme gefordert Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, 1905.
- [34] M Emery. On some relativistic-covariant stochastic processes in lorentzian space-times. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 2009.
- [35] L Evans and R Gariepy. Wiener's criterion for the heat equation. *Arch. Rational Mech. Anal*, 1982.
- [36] C Frances. *Géométrie et dynamique lorentziennes conformes*. PhD thesis, ENS Lyon, 2002.
- [37] J Franchi. Relativistic diffusion in Gödel's universe. *Comm. Math. Phys.*, 2009.
- [38] J Franchi and Y Le Jan. Curvature diffusions in general relativity. *Springer Verlag*, 2011.
- [39] J Franchi and Y Le Jan. Relativistic Diffusions and Schwarzschild Geometry. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2007.
- [40] H Furstenberg. A Poisson formula for semi-simple Lie groups. *Ann. of Math*, 1963.
- [41] L Gallardo. Capacités, mouvement Brownien et problème de l'épine de Lebesgue sur les groupes de Lie nilpotents. *Proc. 7th Oberwolfach Conference on Probability Measures on Groups.*, 1981.
- [42] N Garofalo and E Lancolleni. Wiener's criterion for parabolic equations with variable coefficients and its consequences. *Transactions of the AMS*, 1988.
- [43] N Garofalo and E Lancolleni. Level sets of the fundamental solution and Harnack inequality for degenerate equations of Kolmogorov type. *Transactions of the AMS*, 1990.
- [44] N Garofalo and F Segala. Estimates of the fundamental solution and Wiener's criterion for the heat equation on the Heisenberg group. *Indiana Univ. Math. J.*, 1990.
- [45] M Gradinaru. Fonction de Green et support de diffusions hypoelliptiques. *Thèse université Paris-Sud*, 1995.
- [46] Y Guivarc'h and A Raugi. Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 1985.
- [47] S Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Academic press, 1978.
- [48] L Hörmander. Linear partial differential operators. *Springer Verlag*, 1963.
- [49] N Ikeda and S Watanabe. Stochastic differential equations and diffusion processes. *North-Holland Mathematiczl Library*, 1989.

- [50] W Jaworski. Random walks on almost connected locally compact groups : boundary and convergence. *J. Anal. Math*, 1998.
- [51] O Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer-Verlag, 2001.
- [52] H Kersten. The limit points of a normalized random walk. *The Annals of Math. Stat*, 1970.
- [53] W Kliemann. Recurrence and invariant measures for degenerate diffusions. *Ann. Probab.*, 1987.
- [54] A W Knapp. *Lie groups beyond an introduction*. Progress in Mathematics, 140., 2002.
- [55] V Konakov, S Menozzi, and S Molchanov. Explicit parametrix and local limit theorem for some degenerate diffusion processes. *Annales de l'institut Henri Poincaré.*, 2011.
- [56] Lamperti. Wiener test and Markov chains. *Journal Math . Anal. Appl.*, 1963.
- [57] P Langevin. Sur la théorie du mouvement brownien. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1908.
- [58] M Liao. The Brownian motion and the canonical flow on a symmetric space. *Trans. Amer. Math. Soc*, 1994.
- [59] M Liao. Invariant diffusion processes in lie groups and stochastic flows. In *Stochastic analysis*. Proc. Sympos. Pure Math., 57, 1995.
- [60] M Liao. Dynamical properties of Lévy processes in Lie groups. *Stochastics Dynam.*, 2002.
- [61] M Liao. *Levy processes in Lie groups*. Cambridge university press, 2004.
- [62] M.P. Malliavin and P Malliavin. Factorisation et lois limites de la diffusion horizontale au dessus d'un espace riemannien symétrique. *Théorie du Potentiel et Analyse Harmonique.*, 1974.
- [63] S Menozzi. Parametrix techniques and martingale problems for some degenerate Kolmogorov equations. *Electronic communications in probability*, 2011.
- [64] A Nagel, E.M Stein, and S Wainger. Balls and metrics defined by vector fields I : Basics properties. *Acta Mathematica*, 1985.
- [65] P Negrini and V Scornazzani. Wiener criterion for a class of degenerate elliptic operators. *Journal of differential equations*, 1987.
- [66] RG Pinsky. *Positive harmonic functions and diffusions*. Cambridge university press, 1995.
- [67] A Raugi. *Fonctions harmoniques sur les groupes localement compacts à base dénombrable*. PhD thesis, Université de Rennes, 1977.
- [68] LCG Rogers and D Williams. *Diffusion, Markov Processes and Martingales*, volume 2. John Wiley and Sons Ltd, 1987.

- [69] A Sánchez-Calle. Fundamental solutions and geometry of the sum of square of vector fields. *Invent. math.*, 1984.
- [70] C Tardif. A Poincaré cone condition in the Poincaré group.
- [71] K Uchiyama. A probabilistic proof and applications of Wiener's test for the heat operator. *Mathematische Annalen*, 1989.

Nous étudions certains processus de Lévy à valeurs dans les groupes d'isométries respectifs des espace-temps de Minkowski, de De Sitter et de Anti-De-Sitter. Le groupe d'isométries est vu comme le fibré des repères de l'espace-temps et les processus de Lévy considérés se projettent sur le fibré unitaire en un processus markovien *relativiste*; c'est-à-dire que les trajectoires dans l'espace-temps sont de genre temps et que le générateur est invariant par les isométries. Dans la première partie nous adaptons pour les diffusions hypoelliptiques générales un résultat de Ben Arous et Gradinaru concernant la singularité de la fonction de Green hypoelliptique. Nous déduisons de cela un critère d'effilement de Wiener local pour les diffusions *relativistes* dans le groupe de Poincaré, groupe des isométries de l'espace-temps de Minkowski. Dans les deux dernières parties nous nous intéressons au comportement asymptotique du flot stochastique associé à ces processus de Lévy dans les différents groupes d'isométries. Sous une condition d'intégrabilité de la mesure de Lévy nous calculons explicitement les coefficients de Lyapounov des processus dans le groupe de Poincaré. Nous effectuons un travail similaire pour les espace-temps de De Sitter et Anti-De-Sitter en nous limitant au cas des diffusions. Nous explicitons de plus la frontière de Poisson pour la diffusion dans le groupe d'isométries de l'espace-temps de De Sitter.



UNIVERSITÉ DE STRASBOURG



Institut de Recherche  
Mathématique Avancée

**INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE**  
UMR 7501  
Université de Strasbourg et CNRS  
7 Rue René Descartes  
67 084 STRASBOURG CEDEX

Tél. 03 68 85 01 29  
Fax 03 68 85 03 28  
[www-irma.u-strasbg.fr](http://www-irma.u-strasbg.fr)  
[irma@math.unistra.fr](mailto:irma@math.unistra.fr)

ISSN 0755-3390

IRMA 2012/04

??????