HAL
open science

Etude de l'interaction entre le vent et les vagues scélérates

Julien Touboul

To cite this version:

Julien Touboul. Etude de l'interaction entre le vent et les vagues scélérates. Océan, Atmosphère. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2007. Français. NNT : . tel-00703258

HAL Id: tel-00703258

https://theses.hal.science/tel-00703258v1

Submitted on 1 Jun 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE - AIX MARSEILLE I

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

Spécialité : Systèmes Complexes

École doctorale : Physique, modélisation et sciences pour l'ingénieur

Préparée à l'**I**nstitut de **R**echerche sur les **P**hénomènes **H**ors **É**quilibre

Présentée par

Julien TOUBOUL

Étude de l'interaction entre le vent et les vagues scélérates

Dirigée par Christian KHARIF et Tanos ELFOUHAILY

Soutenue le 23 Novembre 2007 devant le jury composé de :

M.	Abid,	Me. Conf., Université de Provence,	(Examinateur)
E.	Barthelemy,	Pr., Université Joseph Fourier,	(Rapporteur)
D.	Clamond,	Pr., Université Nice Sofia-Antipolis,	(Président)
J.-P.	Giovanangeli,	IR, IRPHE, CNRS,	(Examinateur)
C.	Kharif,	Pr., Ecole Centrale Marseille,	(Directeur)
E.	Pelinovsky,	Pr., Nizhny Novgorod State Technical University,	(Examinateur)
V.	Rey,	Pr., Université du Sud Toulon-Var.	(Rapporteur)

Ce qui ne nous tue pas nous rend plus fort.
F. W. Nietzsche,
Crépuscule des idoles (1888)

Abstract

The rogue wave phenomenon, which is of majeur interest for marine safety, cannot be correlated to any specific geophysical phenomenon. Such waves can appear on every ocean of the world, in deep or shallow water, and encounter strong winds in tempest zones. This work aims to study the influence of wind on rogue waves.
An experimental approach showed that rogue waves generated by means of energy focusing due to the dispersive nature of water waves, were slightly amplified, that there was a drift of the focusing point, and that their life time was significantly increased. A strong asymmetry is indeed observed between the focusing and defocusing stages. Numerical simulations are performed to analyse, understand, and reproduce the phenomenon. Experiments performed in the air-sea interaction facility are reproduced in a numerical wave tank using boundary integrals method. Miles' mechanism and the modified Jeffreys sheltering mechanism are both considered to model wind action. Jeffreys' sheltering mechanism is modified by introducing a threshold in local slope above which air flow separation occurs over steep crests. Rogue waves can also be generated using another physical mechanism : modulationnal instability of wave fields, or Benjamin-Feir instability. An extension of the study to rogue waves due to modulationnal instability is developed. Numerical simulations of this phenomenon are performed with a pseudo-spectral method. These simulations show that the modified Jeffreys' sheltering mechanism is responsible for a significant increase of the lifetime of those extreme waves, such as for rogue waves due to dispersive focusing. However, the underlying physics are different in both cases.
However, these approaches are both based on a linear wind wave coupling, neglecting the influence of waves on the air flow, and based on a potential description of the flow. The existence of a recirculation area (air vortex) observed experimentally above the highest crests can only be simulated correctly when vorticity is taken into account. A numerical method to simulate the rotationnal flow of the two phases viscous fluids, separated by an interface, is introduced.

Résumé

Le phénomène de vague scélérate, qui constitue un enjeu majeur pour la sécurité maritime, ne peut être corrélé à un phénomène géophysique particulier. En effet, de telles vagues peuvent surgir sur tous les océans du monde, en eaux profonde ou peu profonde, en eaux calmes ou en zone de tempête. Ce travail s'attache à étudier l'influence du vent sur la dynamique de ces vagues.
Une approche expérimentale a mis en évidence que des vagues scélérates générées par focalisation d'énergie due à la nature dispersive des vagues, étaient légèrement amplifiées par le vent, et que leur point de formation variait peu, mais surtout que leur durée de vie était significativement augmentée. Une forte asymétrie est effectivement observée entre les phases de focalisation et de défocalisation. Des simulations numériques sont réalisées dans le but d'analyser, de comprendre, et de modéliser ce phénomène. Les expériences effectuées dans la grande soufflerie des échanges air-mer de Luminy sont reproduites dans un canal numérique à partir d'une méthode d'intégrales de frontière. Le mécanisme de Miles, ainsi que le mécanisme d'abri de Jeffreys modifié sont tous les deux considérés pour modéliser l'influence du vent. Le mécanisme d'abri proposé par Jeffreys est modifié par l'introduction d'un seuil de pente pour lequel un décollement de l'écoulement aérien se produit au-dessus des crêtes les plus cambrées. Les vagues scélérates peuvent également être dues à un autre mécanisme physique : l'instabilité modulationnelle des champs de vagues ou instabilité de Benjamin-Feir. Une extension de l'étude à des vagues scélérates obtenues par instabilité modulationnelle est donc développée. Des simulations numériques de ce phénomène à partir d'un modèle pseudo-spectral ont été réalisées. Ces simulations montrent, comme dans le cas de la focalisation dispersive, que le mécanisme d'abri modifié de Jeffreys augmente la durée de vie de ces vagues extrêmes, bien que la physique mise en oeuvre soit différente.
Cependant, ces approches reposent toutes sur un couplage vent/vagues linéaire sans rétroaction des vagues sur l'écoulement aérien, ainsi qu'une description potentielle de l'écoulement. Or la présence d'une recirculation (tourbillon aérien) au-dessus des crêtes les plus hautes mise en évidence expérimentalement ne peut être correctement simulé que si la vorticité est prise en compte. Nous introduisons donc une approche numérique permettant la simulation de l'écoulement rotationnel et diphasique de deux fluides visqueux séparés par une interface.

Remerciements

Pour un étudiant, une thèse constitue une occasion unique d'acquérir une expérience hors du commun, notamment parce qu'elle permet de côtoyer des personnes exceptionnelles. Dans cet esprit, il y a plusieurs personnes que je voudrais tout particulièrement remercier, pour le temps qu'elles m'ont consacré, et l'expérience dont elles m'ont fait bénéficier. Ces trois années passées à l'IRPHE ont été très formatrices, tant sur le plan scientifique que personnel.
Ma première pensée va naturellement à Tony Elfouhaily, qui a co-encadré cette thèse. Je ne l'ai pas connu autant que je l'aurais souhaité. Sa disparition tragique a limité l'avancée de nos travaux communs, ce que je regrette profondément. Tony faisait partie de ces chercheurs hors norme, qui sont capables de transmettre leur passion avec enthousiasme et conviction. Nous avons eu de longues conversations sur des sujet aussi variés que les mathématiques, ou la littérature. Tony m'a de nombreuses fois montré l'étendue de ses connaissances, ainsi que son exceptionnelle ouverture d'esprit. De nos longues conversations, j'ai retiré le goût de la modélisation physique. Tony m'a montré comment il associait avec simplicité ses observations et sa vaste culture pour donner naissance à des idées réellement novatrices en matière de représentation physique. Il a constamment illustré ces principes simples par de nouvelles idées. Je tiens donc à le remercier sincèrement pour avoir su me transmettre ce goût.
Je voudrais également remercier Christian Kharif, directeur de cette thèse. Christian s'illustre notamment par sa conception du respect de l'individu. Il m'a manifesté ce respect en m'accordant confiance et autonomie. A aucun moment, je ne me suis senti contraint dans mes travaux. Christian m'a toujours encouragé à explorer toutes les pistes qui s'ouvraient à moi, sans jamais exprimer le moindre mépris devant des idées parfois douteuses. A contrario, je ne me suis jamais senti abandonné, ou délaissé. J'ai rencontré, au cours de cette thèse, de nombreux moments de doutes ou d'égarement. Christian m'a toujours soutenu dans ces moments difficiles. Il a donc su me guider d'une manière que j'ai profondément appréciée, d'une manière bien à lui. Je voudrais lui en exprimer ma reconnaissance.
Il me tient à cœur de remercier ici Efim Pelinovsky. Il est toujours extrêmement impressionnant, pour un étudiant, d'interagir avec des experts de son envergure. Outre la qualité de ses conseils scientifiques, je voudrais le remercier pour son accessibilité, sa patience, et pour l'attitude encourageante dont il fait preuve vis à vis des étudiants.
Je ne saurais passer sous silence ma sympathie pour tous les membres de l'équipe Interactions Océan–Atmosphère que je n'ai pas encore cités. Cette équipe d'IRPHE, qui m'a accueilli, a très largement contribué au bon dérouelement de ma thèse. En particulier, Hubert Branger, Olivier Kimmoun, Alain Laurence, Bertrand Zucchini, Laurent Grare, et le chef, Jean-Paul Giovanangeli, m'ont démontré à quel point il était agréable de travailler dans de bonnes conditions, et

dans une excellente ambiance. C'est sûrement grâce à eux que j'ai pris tant de plaisir à mener ces travaux.
Malek Abid fait certainement partie des personnes avec lesquelles j'ai pris un très grand plaisir à travailler. Au cours des conversations que nous avons partagées, j'ai été frappé par la pédagogie dont il faisait preuve. Son regard pertinent m'a souvent permis de résoudre de nombreux problèmes, et je souhaite lui exprimer ma gratitude.
J'ai également énormément apprécié de rencontrer Alexey Slunyaev et Marc Francius. Ces « vieux jeunes chercheurs » sont aussi passionnés que passionnants. J'ai adoré les retrouver dans des congrès, des écoles d'été, ou lors de leurs visites à Marseille. Les échanges que nous avons pu avoir ont, ici encore, largement contribué à mon épanouissement.
D'une manière générale, je voudrais remercier tous les étudiants d'IRPHE pour la bonne ambiance qu'ils font régner dans le laboratoire. J'ai déjà dit l'importance que j'attache à l'ambiance au sein d'une équipe, et je me devais de citer la bonne atmosphère qui règne entre les étudiants de ce laboratoire. Lucienne Bazzali et Delphine Lignon contribuent d'ailleurs certainement à cette bonne ambiance, aussi bien à travers leur bonne humeur qu'en nous apportant un soutient technique infini, et je tient à le souligner.
A mes amis, et ma famille, je voudrais dire que je suis conscient du soutien qu'il m'ont apporté. Dans les moments de doute, un doctorant est souvent d'humeur massacrante, et dans ses périodes de succès, il ne cesse de parler de ses travaux. Autrement dit, il est toujours imbuvable pour son entourage. Je remercie donc Marie, pour m'avoir supporté au quotidien, mes parents, pour m'avoir sans cesse encouragé, et tous mes amis. J'ai trouvé un réconfort énorme dans leur présence.

D'autre part, je voudrais remercier Messieurs Malek Abid, Didier Clamond, Jean-Paul Giovanangeli, Christian Kharif et Efim Pelinovsky d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse. Je tiens particulièrement à exprimer ma reconnaissance à Messieurs Eric Barthelemy et Vincent Rey, pour avoir accepté de rapporter sur ces travaux. C'est un grand honneur que me font ces experts du domaine.

Table des matières

Abstract **v**

Résumé **vii**

Remerciements **ix**

I Etat de l'art **1**

1 Motivations de l'étude **5**

2 Les vagues scélérates **9**
2.1 Définition d'une vague scélérate 9
2.2 Mécanismes physiques mis en jeu 11

3 L'interaction vent vagues **25**
3.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz 25
3.2 Mécanisme d'abri de Jeffreys 28
3.3 Théorie de Phillips 29
3.4 Théorie de Miles 32

II Méthodes numériques dans le contexte de l'interaction vent-vagues **37**

4 Généralités sur les méthodes numériques **41**

5 Approches Potentielles **43**
5.1 Equations générales dans le domaine fluide 43
5.2 Méthode intégrale (BIEM) 44
5.3 Méthode pseudo-spectrale (HOSM) 47

6 Approche diphasique **49**
6.1 Equations générales du mouvement 49
6.2 Méthode de suivi d'interface 50
6.3 Résolution du problème 53

III Interaction entre vent et vagues scélérates **59**

7 Vagues scélérates générées par focalisation dispersive **63**

7.1 Touboul J., Giovanangeli J.-P., Kharif C., Pelinovsky E., Freak waves under the action of wind : experiments and simulations, *Eur. J. Mech. B/ Fluids,* **25**, p. 662–676, 2006 63
7.2 Touboul J., Peliniovsky E., Kharif C., Nonlinear Focusing Wave groups on current, *J. Kor. Soc. Coast. and Oce. Eng.,* **19(3)**, p. 222–227, 2007 79
7.3 Touboul J., Kharif C., Pelinovsky E., Giovanangeli J.-P., Miles' mechanism effect on gravity wave groups, *J. Fluid Mech.*, In Revision 86
7.4 Kharif C., Giovanangeli J.-P., Touboul J., Grare L., Pelinovsky E., Influence of wind on extreme wave events : Experimental and numerical approaches, *J. Fluid Mech.*, **594**, p. 209–247, 2008 98

8 Vagues scélérates générées par instabilité modulationnelle 139
8.1 Touboul J., Kharif C., On the interaction of wind and extreme gravity waves due to modulational instability, *Phys. Fluids*, **18**, 108103, 2006 139
8.2 Touboul J., On the influence of wind on extreme wave events, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.,* **7**, p. 123–128, 2007 144

9 Approche diphasique 151
9.1 Touboul J., Abid M., Kharif C., Simulation numérique d'ondes interfaciales en milieu océanique, *Proceedings du* 18ème *Congrès Français de Mécanique,* Grenoble, 2007 151
9.2 Perspectives de la méthode 158

IV Travaux futurs 159

10 Conclusions et perspectives 161

Table des figures

I.1.1 Exemples de vagues scélérates conformes aux légendes maritimes. 5
I.1.2 Exemples de dégâts causés par des vagues scélérates. 6
I.1.3 Enregistrement temporel de la "vague du nouvel an", enregistrée le 01/01/95 par la plate-forme Draupner, en mer du Nord. 7

I.2.1 (a) : Distribution de Rayleigh, correspondant à la densité de probabilité des hauteurs de vagues. (b) : Fonction de répartition de probabilité associée à cette distribution. 10
I.2.2 Localisation de plusieurs collisions liées à des vagues scélérates survenues pendant la période 1968–1994. 11
I.2.3 (a) : Evolution du facteur d'amplification liée à l'action d'un courant colinéaire. (b) : Evolution du facteur d'amplification pour des vagues se propageant sur un courant cisaillé, avec un angle θ, pour différents angles initiaux θ_0. 14
I.2.4 Représentation schématique du principe de focalisation spatio-temporelle. 15
I.2.5 Élévation de la surface libre correspondant à la focalisation géométrique d'un train de vagues à différents instants $T = -30$, $T = -20$, $T = -10$ et $T = 0$. . . . 16
I.2.6 Lignes de niveau du taux de croissance de l'instabilité modulationnelle dans le plan $(l - m)$ des nombres d'onde longitudinal et transversal. Les zones notées (S) correspondent aux zones stables. La zone notée (I) correspond à la zone instable. 18
I.2.7 (a) : Représentation du breather algébrique, où soliton de Peregrine, dans le plan $(X-T)$. (b) : Représentation spatiale de ce soliton aux instants $T = \pm 2$, $T = \pm 0.4$, $T = \pm 0.2$ et $T = 0$. 19
I.2.8 Élévation de la surface libre, tracée avec son enveloppe, correspondant à l'évolution d'un train d'ondes de Stokes de cambrure initiale $a_0 k_0 = 0.03$, excité par la perturbation instable $\Delta k/k_0 = a_0 k_0$. 20
I.2.9 Vagues de fortes amplitudes liées à l'interaction de solitons en eau peu profonde. Figure extraite de Peterson *et al.* (2003). 22
I.2.10 Evolution au temps longs de solitons d'enveloppe, conduisant à la formation de vagues scélérates. Figure extraite de Clamond *et al.* (2006). 23

I.3.1 Présentation schématique du problème de Kelvin-Helmholtz. 26
I.3.2 Présentation schématique du problème de Jeffreys. 29
I.3.3 Présentation schématique du problème de Phillips. 30
I.3.4 Présentation schématique du problème de Miles. 33
I.3.5 Taux de croissance adimensionnel γ/f tracé en fonction de l'age des vagues $U*/c$. $(\triangle, \square, \circ)$: Données obtenues *in situ* ; $(\times, \bullet)$: Données obtenues en laboratoire ; (—) : Théorie de Miles 35

II.6.1 Illustration des différents types de méthodes de reconstruction d'interfaces. Figure extraite de Gueyffier (2000). 52

II.6.2Géométrie d'une maille de type "Marker And Cell" (MAC). 54
II.6.3A Gauche : Extrapolation d'une grille grossière (□) à partir d'une grille fine (•).
A Droite : Algorithme de V-cycle représenté ici sur 5 niveaux de grilles. 56

Première partie

Etat de l'art

Table des matières

1 Motivations de l'étude **5**

2 Les vagues scélérates **9**

2.1 Définition d'une vague scélérate 9

2.2 Mécanismes physiques mis en jeu 11

2.2.1 Interactions Vagues/Courant 11

2.2.2 Focalisation Spatio-Temporelle 14

2.2.3 Focalisation Géométrique 16

2.2.4 Instabilité Modulationnelle 17

2.2.5 Collision de solitons 21

3 L'interaction vent vagues **25**

3.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz 25

3.2 Mécanisme d'abri de Jeffreys 28

3.3 Théorie de Phillips 29

3.4 Théorie de Miles 32

Chapitre 1

Motivations de l'étude

Depuis que l'homme navigue, il est impressionné par l'océan. En effet, cet élément est relativement hostile à l'activité humaine, et inspire respect et crainte. Pour témoigner de cette peur, de nombreuses légendes ont toujours circulé au sein de la communauté des marins, telles que les récits faisant part de l'existence de sirènes naufrageuses, de vaisseaux fantômes attaquant sauvagement les navires, ou bien encore plus récemment les croyances relatives au triangle des Bermudes, dans lequel disparaîtraient les navires de manière inexpliquée. Parmi ces légendes, figure celle des vagues scélérates.

Figure I.1.1 – Exemples de vagues scélérates conformes aux légendes maritimes.

De nombreux témoignages de marins ont fait allusion à des murs d'eau se levant sans aucune raison au milieu de la mer, et percutant les navires avec une violence extraordinaire. Ces récits étaient peu crédibles, jusqu'en 1978, date à laquelle le cargo « Munchen »disparut dans des circonstances mystérieuses. Ce navire à la pointe de la technologie navale faisait route en Atlantique nord, sans aucun problème apparent, jusqu'à la nuit du 12 décembre. Il envoya un ultime message de détresse, et sombra totalement, ne laissant que quelques traces du naufrage. Parmi ces traces, les équipes de sauvetage trouvèrent un cannot de sauvetage qui avait manifestement été arraché violemment, vingt mètres au dessus de la ligne de flottaison. La météo n'ayant enregistré aucune tempête cette nuit là, une vague scélérate constituait un bon candidat pour expliquer le naufrage.

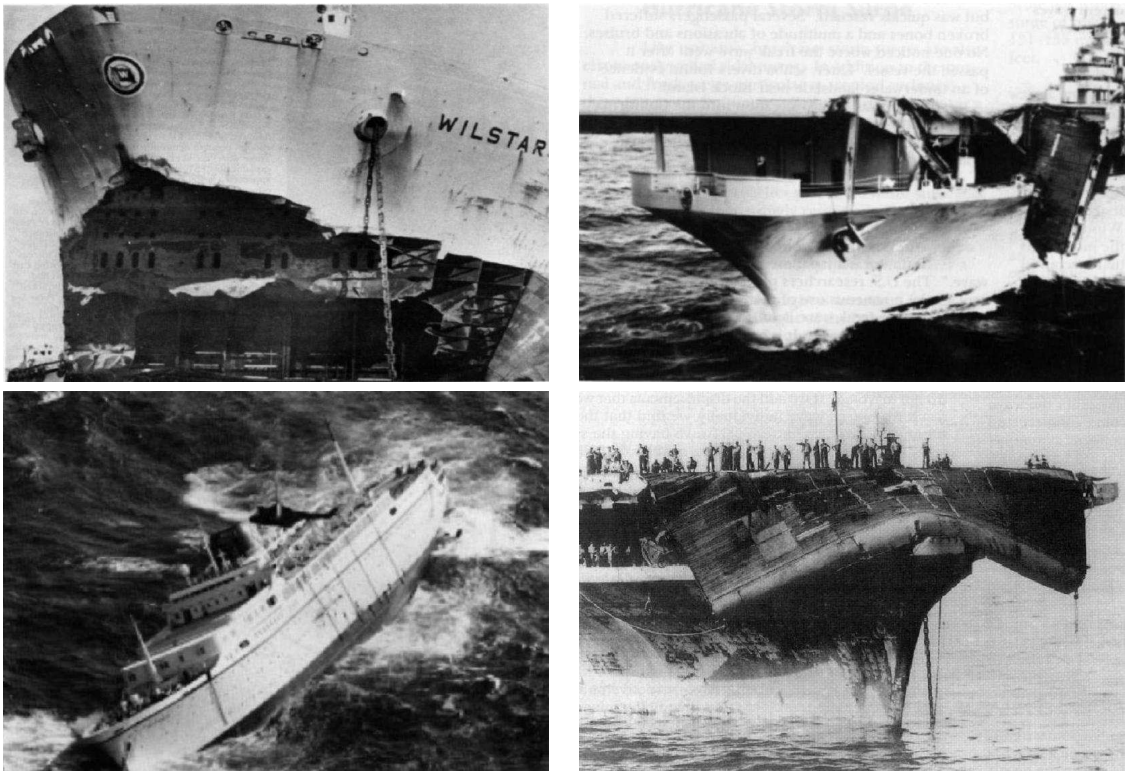


FIGURE I.1.2 – Exemples de dégâts causés par des vagues scélérates.

En 1980, Philippe Lijour, commandant de bord du pétrolier « Esso Languedoc », témoignait avoir fait route dans une tempête face à la houle. Une vague extraordinaire, spéciale, beaucoup plus haute que les autres, les avait pris par surprise, déferlant sur le pont. Cependant, le Commandant Lijour avait eu le temps de prendre une photographie de la vague, apportant la première preuve de l'existence des vagues scélérates.

Les témoignages et récits relatant des événements de vagues scélérates se sont alors multipliés, fournissant de précieuses informations à la communauté scientifique afin de comprendre le phénomène. Notamment, le capitaine Mallory (1974), recense une série d'événements survenus dans le courant des Aiguilles, le long de la côte sud-est Africaine. De manière similaire, Lavrenov (1998) énumère d'autres événements qui se sont déroulés au même endroit, le long du courant des Aiguilles. Plus récemment, Lawton (2001), relate les témoignages de plusieurs navires, témoignages réalisés dans de nombreuses parties du monde, et dans diverses conditions de vent, de courant, ou de profondeur.

D'autre part, le développement des moyens d'observation en milieu marin au cours du siècle dernier, et plus particulièrement au cours de ces vingt dernières années, ont permis d'obtenir de

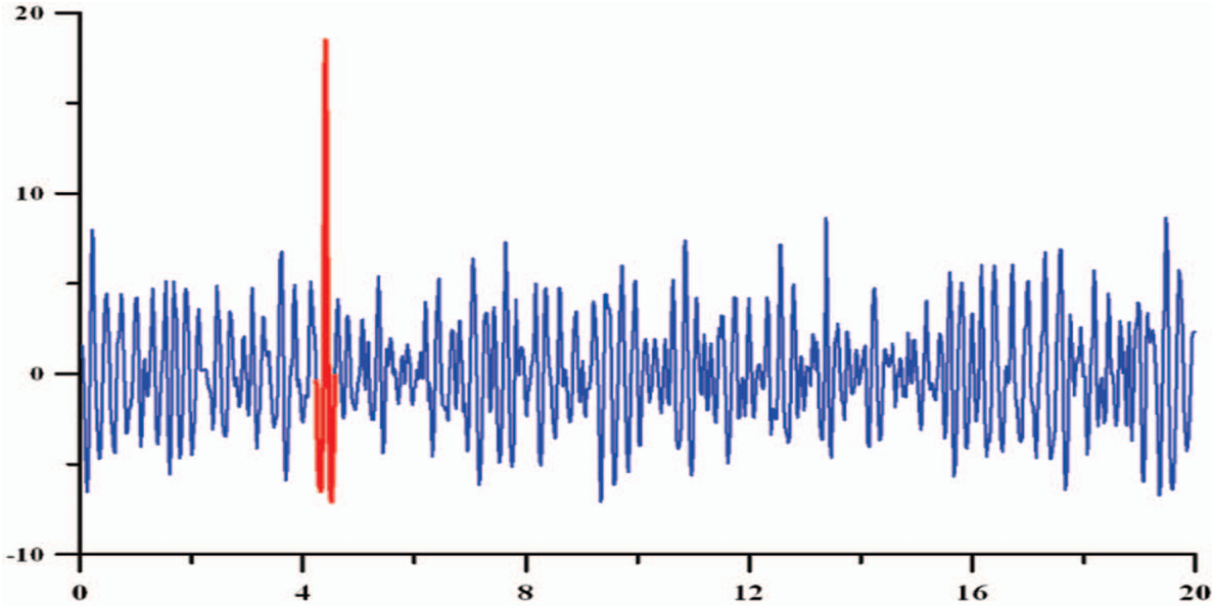


FIGURE I.1.3 – Enregistrement temporel de la "vague du nouvel an", enregistrée le 01/01/95 par la plate-forme Draupner, en mer du Nord.

nouvelles données, de plus en plus fiables. Ainsi, avec le développement de l'industrie pétrolière, sont apparues de nombreuses sondes à vagues, fixes, au large de nos côtes. Ces sondes ont permis d'enregistrer en un point, et de manière quasiment permanente, l'élévation du niveau de la mer. L'exemple le plus connu est certainement l'enregistrement de la plate-forme Draupner, une plate-forme située en mer du Nord, au dessus d'une zone de profondeur à peu près constante, et d'environ 70 mètres. Le 1er Janvier 1995, la sonde de la plate-forme a enregistré une vague d'une hauteur crête-creux voisine de 26 mètres, tandis que l'état de mer environnant présentait une hauteur significative d'environ 12 mètres. L'enregistrement de cette vague est présenté sur la Figure (I.1.3), et permet d'illustrer l'importance d'une telle vague.

L'existence des vagues scélérates, dites « *Freak* », ou « *Rogue* », en anglais, est universellement reconnue à présent. De nombreuses images sont disponibles, dont certaines sont présentées en Figure (I.1.1) et quelques exemples de dégâts occasionnés apparaissent en Figure (I.1.2). Cependant, la compréhension du phénomène, ainsi que sa prédiction ne sont pas complètement maitrisées. Devant le nombre croissant de naufrages associés à des vagues scélérates, cet enjeu devient prépondérant. En effet, le nombre de vies disparues dans des naufrages liés à des vagues scélérates augmente sans cesse, et pour des raisons évidentes, des solutions doivent être trouvées. D'autre part, des considérations financières entrent en ligne de compte. L'étude du phénomène, grâce notamment au projet européen Maxwave, tend à montrer que la fréquence d'apparition des vagues scélérates ne peut être négligée. Les différentes observations satellitaires obtenues au sein de ce projet révèlent un nombre très élevé de vagues scélérates, augmentant significativement la probabilité pour un navire ou une plate-forme d'en rencontrer une un jour. Il devient donc nécessaire de chiffrer cette fréquence, afin de savoir s'il faut en tenir compte comme critère de design des navires et plates-formes offshore.

Dans cette logique, de nombreux auteurs ont essayé de comprendre la dynamique de ces vagues, afin de mieux les prévoir. Notamment, Kharif & Pelinovsky (2003) ont passé en revue les différents mécanismes susceptibles d'être à l'origine de leur formation. Diverses tentatives de prédiction de la distribution statistique de tels événements ont été réalisées, comme l'ont fait Osborne *et al.* (2000). Les résultats ont été plus ou moins satisfaisants, mais la dynamique de ces événements est globalement mieux comprise. Cependant, à l'heure actuelle, personne ne s'est

encore interrogé sur l'influence que peut avoir le vent sur de telles vagues. Comme nous l'avons vu, ces vagues peuvent apparaître partout. Lorsqu'elles se forment en zone de tempête, elles peuvent subir l'action de vents violents. Or les dégâts causés par les vagues scélérates sont spécialement importants dans ces zones de tempêtes. Il est donc légitime de se demander si les vents peuvent influencer leur dynamique. Le travail présent est basé sur ce constat. Une démarche scientifique est ici mise en place pour mesurer l'influence du vent sur les vagues extrêmes. Différents outils numériques sont mis en œuvre afin de décrire et d'expliquer les observations expérimentales.

Ainsi, la première partie du manuscrit s'attache à décrire en détails le contexte de cette étude. Tout d'abord, le chapitre 2 décrit les connaissances actuelles en matière de vagues scélérates. Les mécanismes de génération de ces vagues sont ainsi passés en revue, d'une manière globale. Notre étude utilisera deux des mécanismes de génération présentés dans ce chapitre, à savoir la focalisation dispersive et l'instabilité modulationnelle. Ensuite, le chapitre 3 retrace l'historique des théories associées à l'interaction vent-vagues. Deux des mécanismes d'amplification des vagues par le vent, présentés dans ce chapitre, seront considérés dans la suite de notre étude comme les candidats potentiels pour expliquer le comportement des vagues scélérates sous l'action du vent. Le mécanisme de Miles est en effet le modèle utilisé de manière classique dans l'interaction vent-vagues. Le mécanisme de Jeffreys, quant à lui, a été initialement abandonné car aucun décollement n'était observé au dessus d'une majeure partie des vagues. Nous introduisons ici un seuil d'activation, témoignant du fait qu'un tourbillon se forme au dessus des vagues dépassant une certaine cambrure locale. Ce mécanisme de Jeffreys modifié pourrait être adapté à la description de l'interaction entre vent et vagues scélérates.

Les travaux présentés ici s'appuient essentiellement sur une approche numérique, permettant de simuler les vagues considérées et leur évolution en présence de vent. La seconde partie s'attache à décrire les différents schémas numériques mis en œuvre, ainsi qu'à expliquer leurs avantages et inconvénients respectifs. Ainsi, le chapitre 5 décrit deux approches en théorie potentielle, à savoir une méthode à intégrales de frontière (BIEM), et une approche pseudo-spectrale (HOSM). Ces deux méthodes ne permettent l'introduction de vent qu'à partir d'un terme modèle, et ne permettent donc pas la simulation directe du couplage entre les deux écoulements. Le chapitre 6 décrit une méthode Volume of Fluid (VOF) qui permettra, à terme, de prendre en compte cette interaction, c'est-à-dire considérer aussi l'effet des vagues sur l'écoulement d'air.

La troisième partie du manuscrit présente les travaux réalisés pour étudier l'interaction entre le vent et les vagues scélérates. Les premières observations ont été réalisées expérimentalement sur des vagues scélérates générées par focalisation dispersive dans la grande soufflerie de simulation des échanges air-mer de l'IRPHE, à Luminy. Ces expériences, ainsi que les différentes approches modèle effectuées dans ce contexte, au moyen de la méthode BIEM, sont présentées dans le chapitre 7. Cette approche a ensuite été étendue à des vagues scélérates obtenues par instabilité modulationnelle. Pour cela, le modèle de vent utilisé dans le chapitre 7 a été introduit dans la méthode HOSM. Les différents résultats sont présentés dans le chapitre 8. Le chapitre 9 expose les travaux préliminaires réalisés sur la méthode de projection couplée à un suivi d'interface de type « Volume of Fluid »(VoF) pour la résolution des équations de Navier-Stokes en diphasique. En effet, la simulation numérique directe de l'interaction vent-vagues n'a, à ce stade, pas encore été réalisée. Les tests préliminaires étant concluants, il parait donc intéressant de les présenter ici, réalisant ainsi une ouverture sur les travaux futurs à réaliser. L'utilisation d'une méthode résolvant les équations de Navier-Stokes autorise la simulation d'écoulements rotationnels, et du tourbillon associé au décollement aérien au dessus des crêtes des vagues. Une étude paramétrique de la transition entre les écoulements laminaire et turbulent est donc nécessaire. Cette transition dépend de la pente locale des vagues, ainsi que de la vitesse du vent, comme l'ont montré des expériences préliminaires réalisées à Luminy. La détermination précise de cette transition reste à faire.

Chapitre 2

Les vagues scélérates

Comme nous l'avons brièvement souligné, les vagues scélérates étaient encore particulièrement méconnues il y a quelques années. Depuis, de nombreux travaux ont été réalisés afin de mieux comprendre le phénomène. Ce chapitre présente le contexte, et les connaissances actuelles en matière de vagues scélérates.

2.1 Définition d'une vague scélérate

Parmi les approches permettant de représenter les déformations de la surface marine, la plus simple consiste à considérer les vagues comme une somme de sinusoïdes d'amplitudes et de phases différentes. Dans l'approximation linéaire, un état de mer aléatoire obéit à une distribution aléatoire Gaussienne stationnaire. La densité de probabilité des élévations de la surface marine est alors

$$g\left(\eta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right), \tag{I.2.1}$$

où la variable aléatoire η désigne l'élévation de la mer, et σ^2 correspond à la variance de cette variable. La variance est obtenue à partir du spectre en fréquence, $S(\omega)$,

$$\sigma^2 =< \eta^2 >= \int_0^\infty S(\omega) d\omega. \tag{I.2.2}$$

Traditionnellement, le spectre de la mer du vent est supposé être un spectre à bande étroite. Par conséquent, les hauteurs de vagues suivent une distribution de Rayleigh

$$f(H) = \frac{H}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{H^2}{8\sigma^2}\right). \tag{I.2.3}$$

Cette densité de probabilité est illustrée Figure (I.2.1(a)). En estimant la fonction de répartition de probabilité associée, c'est-à-dire la probabilité qu'une vague, pour un état de mer considéré, dépasse une certaine hauteur H^*, on a

$$P(H > H^*) = \int_{H^*}^\infty f(H) dH = \exp\left(-\frac{{H^*}^2}{8\sigma^2}\right). \tag{I.2.4}$$

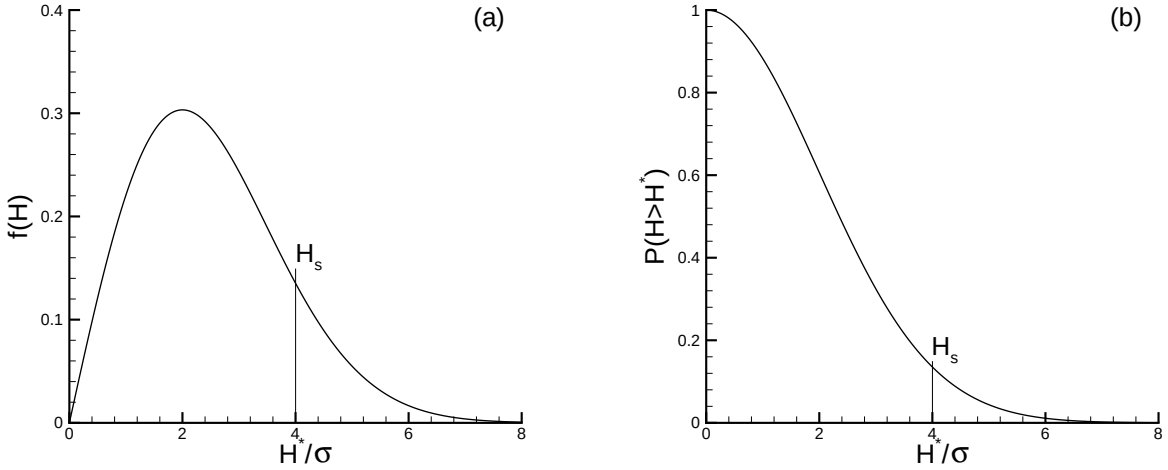


FIGURE I.2.1 – (a) : Distribution de Rayleigh, correspondant à la densité de probabilité des hauteurs de vagues. (b) : Fonction de répartition de probabilité associée à cette distribution.

Cette distribution, présentée sur la Figure (I.2.1(b)), nous permet d'introduire une hauteur couramment utilisée en océanographie physique et en ingénierie côtière, la hauteur significative d'un état de mer H_s. Ce concept a été introduit par Sverdrup & Munk (1947), qui ont défini la hauteur significative H_s comme la moyenne des hauteurs du tiers des vagues les plus hautes. En utilisant une distribution de Rayleigh, Massel (1996) a montré que la hauteur significative correspond à

$$H_s = 3\sqrt{2\pi}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\ln(3)} + 2\sqrt{2\ln(3)}\right)\sigma \simeq 4\sigma \tag{I.2.5}$$

où erfc(.) désigne la fonction d'erreur complémentaire de Gauss. En effet, la hauteur H^* du tiers des vagues les plus hautes est fournie par $P(H > H^*) = 1/3$, c'est-à-dire que

$$H^* = 2\sqrt{2\ln(3)}\sigma \tag{I.2.6}$$

Ainsi, la hauteur moyenne des vagues considérées est obtenue en écrivant que

$$H_s = \int_{H^*}^{\infty} H f(H)\mathrm{d}H. \tag{I.2.7}$$

La hauteur significative correspond environ à quatre fois l'écart type. Cette hauteur correspond à peu près à la hauteur moyenne d'un champ de vague estimée par l'oeil humain. En introduisant cette grandeur, l'équation (I.2.3) se réécrit

$$P(H > H^*) = \exp\left(\frac{2{H^*}^2}{H_s^2}\right). \tag{I.2.8}$$

De manière classique, une vague est considérée comme scélérate dès que

$$H > 2.2H_s, \tag{I.2.9}$$

Ce qui, conformément à l'équation (I.2.8) correspond statistiquement à la formation d'une vague scélérate toutes les 16000 vagues. En considérant une période caractéristique des vagues de $10s$, cela signifie que l'on observerait une vague scélérate toutes les 44 heures.

2.2 Mécanismes physiques mis en jeu

De nombreux témoignages concernant les vagues scélérates existent. La Figure (I.2.2) présente sur un planisphère quelques uns de ces événements, survenus pendant la période 1968–1994. Le

FIGURE I.2.2 – Localisation de plusieurs collisions liées à des vagues scélérates survenues pendant la période 1968–1994.

premier constat que l'on peut faire est la variété géographique des lieux d'apparition de ces vagues. En effet, on constate que ces événements surviennent au beau milieu des océans, à la côte, en présence de forts courants, ou non, ou encore avec ou sans l'action de vents violents. Par conséquent, il paraît impossible d'établir une corrélation directe entre un phénomène géophysique en particulier, et entre ces vagues. C'est pour cette raison que de nombreux mécanismes physiques ont été avancés pour expliquer la formation des vagues scélérates. Nous nous attachons ici à présenter ces différents mécanismes, décrits par Kharif & Pelinovsky (2003).

2.2.1 Interactions Vagues/Courant

Historiquement, les premières observations avérées de vagues scélérates ont été réalisées dans le courant des Aiguilles, longeant la côte Est de l'Afrique du Sud. En effet, cette zone très fréquentée par la marine commerciale a été le théâtre de nombreux accidents, comme en témoignent les récits de Mallory (1974). Smith (1976), a suggéré que ces vagues géantes se forment aux endroits où les groupes sont bloqués par le courant. Ce résultat à été observé expérimentalement par Wu & Yao (2004). En utilisant une approche linéaire plus globale, Lavrenov (1998) à montré que la transformation des vagues par le courant conduisait à la focalisation de rayons, formant des caustiques pouvant justifier l'apparition de telles vagues. Dysthe (2001*a*,*b*) a d'ailleurs montré que la courbure de ces rayons dépendait de la vorticité du courant. Ainsi, une faible distribution des directions initiales d'un train de vague pouvait conduire à la formation de vagues scélérates. White & Fornberg (1998) ont également étudié l'interaction vagues-courant, mais d'un point de vue statistique. Ils ont montré qu'une distribution aléatoire de courants conduisait à la formation de vagues scélérates. De plus, la distribution de probabilité de ces vagues est universelle, c'est-à-dire indépendante de la statistique du courant.
Pour reprendre ces approches, considérons un champ de vagues comme un système d'ondes

propagatives quasi-sinusoïdales de fréquence dominante ω, de vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$, et d'amplitude a, réels. Toutes ces grandeurs sont considérées comme faiblement variables en fonction de $\boldsymbol{x} = (x, y)$, les coordonnées spatiales horizontales, et de t, le temps. La fréquence et le nombre d'onde dérivent alors d'une fonction de phase $\chi(\boldsymbol{x}, t)$, et sont donnés par les relations

$$\omega = -\chi_t \text{ et } \boldsymbol{k} = \boldsymbol{\nabla}_h \chi, \tag{I.2.10}$$

où $\boldsymbol{\nabla}_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ est le gradient horizontal. Fréquence et vecteur d'onde sont liés en tous points par la relation de dispersion

$$\omega = W(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}, t), \tag{I.2.11}$$

où la présence des coordonnées d'espace et de temps témoignent de la variabilité du milieu. A partir de l'équation (I.2.10) on obtient les relations

$$\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}_h \omega = 0, \tag{I.2.12}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_h \times \boldsymbol{k} = 0, \tag{I.2.13}$$

Les composantes de la vitesse de groupe sont fournies par

$$c_{g_i} = \frac{\partial W}{\partial k_i}, \quad i = 1, 2. \tag{I.2.14}$$

Ainsi, en utilisant les équations (I.2.12), (I.2.13) et (I.2.14), et en introduisant la notation $\mathrm{d}/\mathrm{d}t = \partial/\partial t + c_{g_i}\partial/\partial x_i$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}k_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial W}{\partial x_i} \text{ sur la caractéristique d'équation } \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial W}{\partial k_i}. \tag{I.2.15}$$

De la même manière, on peut montrer que

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial W}{\partial t} \text{ sur la caractéristique d'équation } \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial W}{\partial k_i}. \tag{I.2.16}$$

En particulier, si le milieu est homogène, $\partial W/\partial x_i = 0$, et $\boldsymbol{k}$ est un vecteur constant le long des droites caractéristiques définies par $\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t = c_{g_i}$. Si le milieu est stationnaire, $\partial W/\partial t = 0$, et ω est constant le long des caractéristiques. En pratique, les équations (I.2.15) et (I.2.16) ne dépendent que de l'existence de la fonction de phase χ, et de la relation de dispersion (I.2.11). Dans le cadre d'un train de vague décrit par $\eta(\boldsymbol{x}, t) = Re\,(a(\boldsymbol{x}, t)\exp(i\chi(\boldsymbol{x}, t)))$, et se propageant sur un courant inhomogène et instationnaire $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t)$, la fréquence est donnée par

$$\omega = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t) + \sigma(\boldsymbol{k}) = W(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}, t), \tag{I.2.17}$$

où $\sigma(\boldsymbol{k})$ est la fréquence intrinsèque, c'est-à-dire la fréquence liée au référentiel se déplaçant à la vitesse du courant.
Dans le cas linéaire, Bretherton & Garrett (1969) ont montré la conservation de l'action E/σ

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E}{\sigma}\right) + \boldsymbol{c}_g \cdot \boldsymbol{\nabla}_h \left(\frac{E}{\sigma}\right) = 0, \tag{I.2.18}$$

où $E(\mathbf{x}, t)$ est proportionnelle à la densité moyenne d'énergie par unité de surface. Or la densité d'énergie, et la vitesse de groupe sont données par

$$E(\boldsymbol{x}, t) = \rho g |a(\boldsymbol{x}, t)|^2 \tag{I.2.19}$$

$$\boldsymbol{c}_g = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{\nabla}_k \sigma \tag{I.2.20}$$

où g désigne la gravité, et où $\boldsymbol{\nabla}_k \sigma$ correspond à la vitesse de groupe intrinsèque, c'est-à-dire la vitesse de groupe liée au référentiel se déplaçant à la vitesse du courant.
Considérons tout d'abord le cas le plus simple, bidimensionnel, dans lequel les vagues et le courant sont colinéaires. On considère le cas d'un référentiel dans lequel le courant est $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t) = (U(x), 0)$ et le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}, t) = (k(x), 0)$. Le milieu étant stationnaire, on à $\omega = \text{const.}$ et donc

$$\omega = kU + \sigma = k_0 U_0 + \sigma_0 = \text{const.} \tag{I.2.21}$$

où l'indice fait référence à la valeur au repos, ou $U_0 = 0$. On obtient alors

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4\frac{U}{c_0}}\right) \tag{I.2.22}$$

où $c^2 = g/k$ et $c_0^2 = g/k_0$ sont respectivement les vitesses de phases intrinsèques et initiales dans le milieu au repos. Plus de détails figurent dans Grue & Palm (1985). On constate qu'un courant adverse ($U \leq 0$) ralentit les vagues et diminue leur longueur d'onde. On observe l'existence d'une valeur critique $U_c = -c_0/4 = -c/2$, qui correspond au bloquage des vagues dans un courant adverse. De plus, en intégrant l'équation de conservation de l'action (I.2.18), on montre que $C_g E/\sigma = \text{const.}$, et par conséquent,

$$\frac{a^2}{a_0^2} = \frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{U_0 + \partial\sigma_0/\partial k_0}{U + \partial\sigma/\partial k} = \frac{4}{\left(1 + \sqrt{1 + 4\frac{U}{c_0}}\right)\left(1 + 4\frac{U}{c_0} + \sqrt{1 + 4\frac{U}{c_0}}\right)} \tag{I.2.23}$$

L'équation (I.2.23) met en évidence une singularité pour le cas $U = -\partial\sigma/\partial k$, c'est-à-dire quand la vitesse du courant est égale et opposée à la vitesse de groupe intrinsèque.
De la même manière, on peut se restreindre au problème de la propagation bidimensionnelle, comme l'ont fait Longuet-Higgins & Stewart (1961). Ces derniers considèrent un courant stationnaire, inhomogène, de la forme $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = (0, V(x), 0)$, avec $\partial V/\partial y = \partial V/\partial z = 0$. Ils supposent également que l'amplitude et le nombre d'onde des vagues étaient indépendants de y. L'angle entre le vecteur d'onde et l'axe x est noté θ. Pour des considérations d'ordre cinématique, il en résulte que la composante y du vecteur d'onde, $|\boldsymbol{k}| \sin\theta$, est indépendante de x. Par conséquent,

$$|\boldsymbol{k}| \sin\theta = |\boldsymbol{k_0}| \sin\theta_0, \tag{I.2.24}$$

où l'indice fait référence à la valeur pour laquelle la composante transverse s'annule. En utilisant la relation de dispersion (I.2.17), la relation de dispersion en profondeur infinie $\sigma^2 = g|\boldsymbol{k}|$, et grâce à la relation (I.2.24), on montre que

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta_0}{(1 - (V/c_0)\sin\theta_0)^2} \tag{I.2.25}$$

avec ici $c_0 = \omega_0/|\boldsymbol{k}|$, et avec $\omega_0 = \omega$, le milieu étant stationnaire. La fonction $\sin\theta$ étant bornée, l'équation (I.2.25) admet clairement un maximum permettant à la solution d'exister. Ainsi,

$$\frac{V}{c_0} \leq \frac{1 - \sqrt{\sin\theta_0}}{\sin\theta_0} \tag{I.2.26}$$

Cette limite d'existence correspond à $\theta = \pi/2$, angle pour lequel les vagues sont complètement réfléchies par le courant. En terme d'amplitude, on obtient la relation

$$\frac{a}{a_0} = \sqrt{\frac{\sin 2\theta_0}{\sin 2\theta}}. \tag{I.2.27}$$

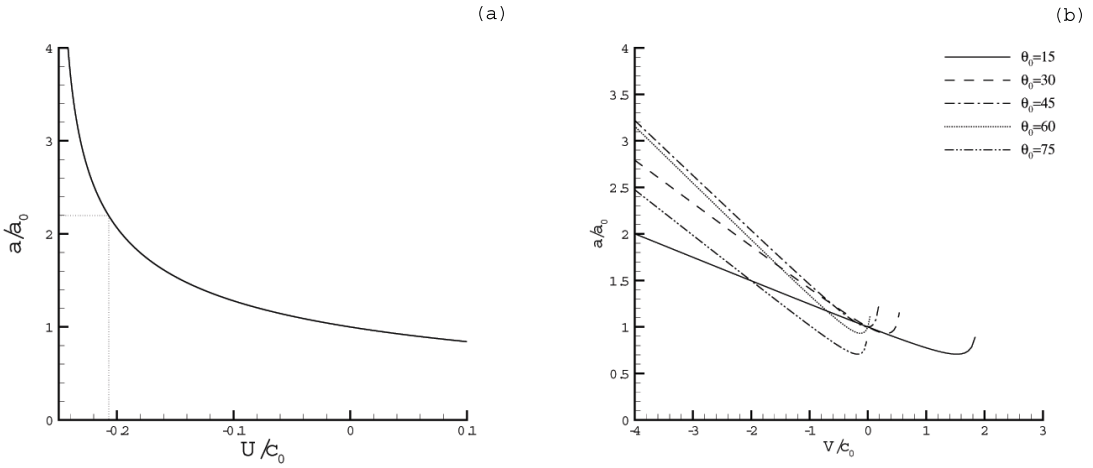


FIGURE I.2.3 – (a) : Evolution du facteur d'amplification liée à l'action d'un courant colinéaire. (b) : Evolution du facteur d'amplification pour des vagues se propageant sur un courant cisaillé, avec un angle θ, pour différents angles initiaux θ_0.

Sur la Figure (I.2.3) sont portés les facteurs d'amplification en fonction de la vitesse du courant. La Figure (I.2.3a) correspond au cas d'un train de vagues se propageant sur un courant colinéaire faiblement variable. La Figure (I.2.3b) montre l'évolution d'un train de vagues se propageant sur un courant transverse cisaillé, pour différents angles d'incidence initiaux. Dans les deux cas, on constate que le critère de vague scélérate $H > 2.2H_s$ est atteint, et largement dépassé.

2.2.2 Focalisation Spatio-Temporelle

En théorie linéaire, un champ de vagues donné peut être interprété comme une somme de groupes d'ondes sinusoïdales monochromatiques. Par conséquent, la géométrie du champ de vagues peut tout à fait conduire à une interaction constructive de ces différentes composantes. Dans le cadre bidimensionnel, la focalisation est due uniquement au caractère dispersif des vagues. Ainsi, les vagues de grandes longueurs d'ondes se propagent plus vite que celles de longueurs d'ondes plus faibles. Une focalisation spatio-temporelle peut alors se produire. Les vagues les plus rapides vont rattraper les plus lentes, pouvant conduire à une interaction constructive de ces ondes, engendrant une vague d'amplitude beaucoup plus élevée. Cette méthode a notamment été utilisée par Baldock *et al.* (1996), qui ont étudié expérimentalement le comportement de vagues fortement non linéaires, obtenues par focalisation dispersive. Plus récemment, Johannessen & Swan (2003) ont reproduit ces expériences numériquement, obtenant plus de précisions sur l'écart à la théorie linéaire de vagues très cambrées. Dans le contexte des vagues scélérates, plus spécifiquement, Pelinovsky *et al.* (2000) ont étudié ce scénario dans le cadre de la théorie de l'eau peu profonde. Enfin, Slunyaev *et al.* (2002) ont considéré le problème tridimensionnel en profondeur finie à partir du système d'équations de Davey-Stewartson.

Représentons la surface de l'océan comme la superposition de groupes d'ondes linéaires de fréquences $\omega(x,t)$, qui vérifient l'équation cinématique donnée par Whitham (1974) :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + c_g(\omega)\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \tag{I.2.28}$$

où la vitesse de groupe $c_g = \partial\omega/\partial k$ est calculée à partir de la relation de dispersion $\omega^2 = gk\tanh(kh)$, dans laquelle h désigne la profondeur d'eau, et k le nombre d'onde. Cette équation aux dérivées partielles est une équation hyperbolique qui peut être résolue par la méthode des

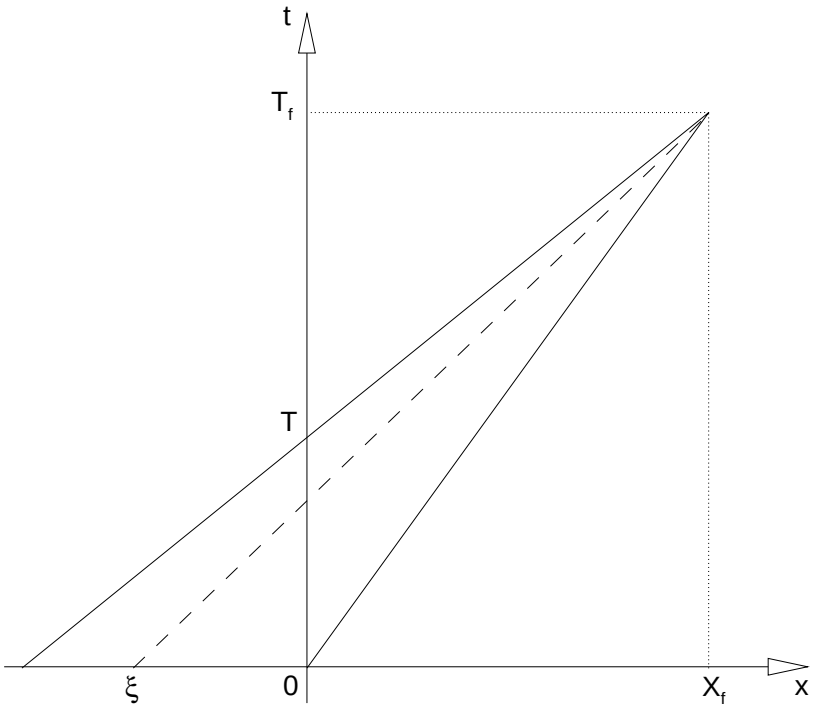


FIGURE I.2.4 – Représentation schématique du principe de focalisation spatio-temporelle.

caractéristiques. Ainsi, si $\omega(x,0) = \omega_0(x)$ désigne la condition initiale du problème, et en opérant le changement de variables $\xi = x - c_g t$, la solution de cette équation s'écrit

$$\omega(x,t) = \omega_o(\xi) = \omega_o(x - c_g t). \tag{I.2.29}$$

D'autre part, la dérivée spatiale de la fréquence est donnée par

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\omega_o/\mathrm{d}\xi}{1 + t\mathrm{d}c_g/\mathrm{d}\xi}. \tag{I.2.30}$$

Le cas $\mathrm{d}c_g/\mathrm{d}\xi < 0$ à $t = 0$ correspond au cas où les vagues courtes précèdent les longues. Dans ce cas, une singularité apparaît pour la dérivée spatiale de ω, et les vagues focalisent en X_f au temps $T_f = 1/max(-\mathrm{d}c_g/\mathrm{d}x)$. La vitesse de groupe c_g est constante le long des lignes caractéristiques, qui sont les droites représentées par la Figure (I.2.4). La distribution initiale de c_g est donc fournie par

$$c_g = \frac{X_f - x}{T_f}, \tag{I.2.31}$$

ou encore, avec $kh \to \infty$, puisque $c_g = g/(2\omega)$,

$$\omega_0(x) = \frac{g}{2}\frac{T_f}{X_f - x} \tag{I.2.32}$$

D'autre part, Whitham (1974) montre que l'amplitude des vagues doit satisfaire l'équation

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(c_g a^2) = 0 \tag{I.2.33}$$

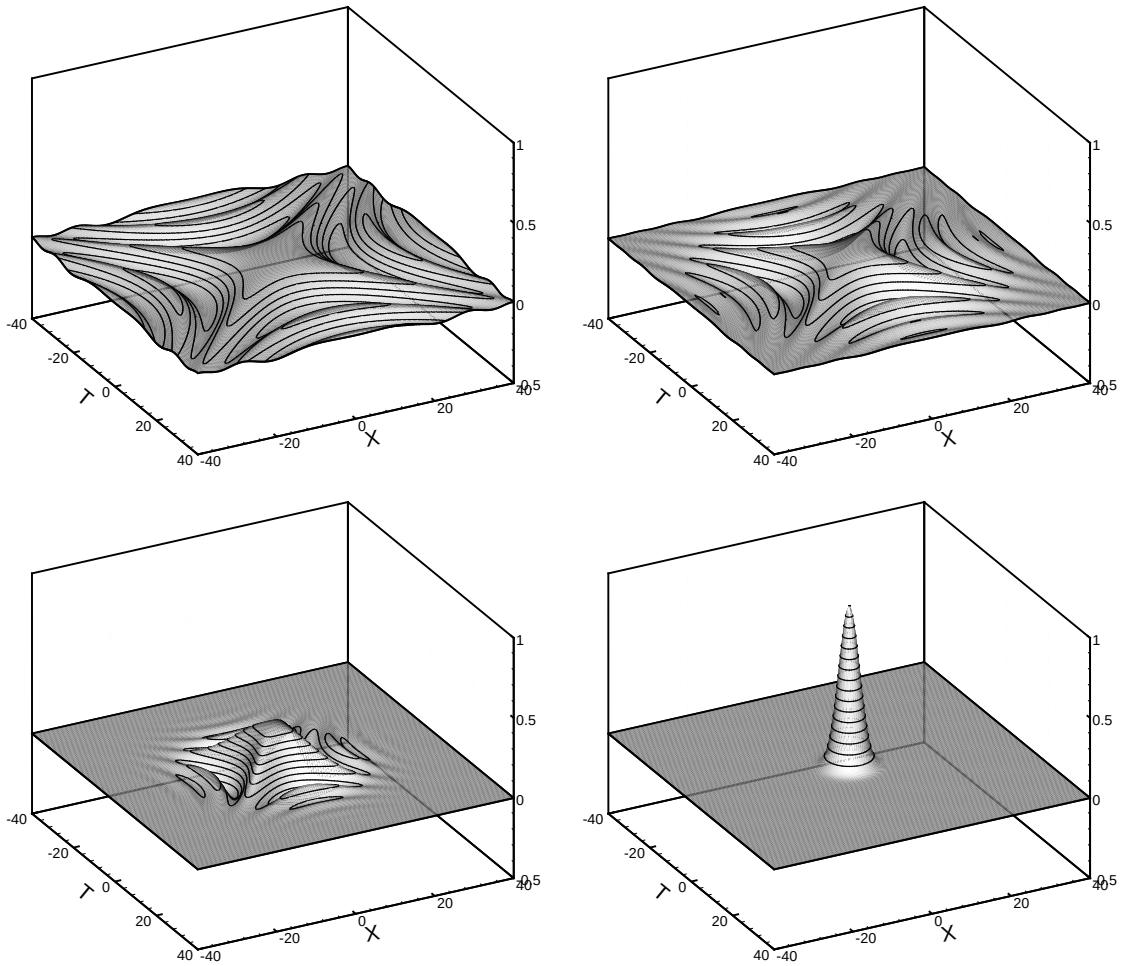


FIGURE I.2.5 – Élévation de la surface libre correspondant à la focalisation géométrique d'un train de vagues à différents instants $T = -30$, $T = -20$, $T = -10$ et $T = 0$.

dont la solution explicite est donnée par

$$a(x,t) = \frac{a_o(\xi)}{\sqrt{1 + t(dc_o/d\xi)}} \tag{I.2.34}$$

où $a_o(x)$ désigne la distribution initiale des amplitudes du champ de vagues, et $c_0 = c_g(\omega_0)$. Cette solution devient infinie au point de focalisation, témoignant de la limite de cette approche linéaire. Le mécanisme de focalisation dispersive est utilisé pour engendrer les vagues scélérates du chapitre 7.

2.2.3 Focalisation Géométrique

Dans le cas tridimensionnel, une focalisation géométrique est également possible. Johannessen & Swan (2001) ont considéré la focalisation géométrique de trains de vagues en un point de l'espace. Ils ont ainsi pu étendre les études de Baldock *et al.* (1996) sur les groupes d'ondes non-linéaires au cas tridimensionnel. Peu après, Bateman *et al.* (2001) ont réalisé des comparaisons numériques aux expériences de Johannessen & Swan (2001), et ont ainsi montré l'importance de l'interaction vague-vague non-linéaire au sein de ces groupes. Plus récemment, Fochesato *et al.* (2007) ont réalisé une étude détaillée du rôle de la non-linéarité sur la forme de ces vagues, obtenues numériquement par focalisation géométrique. Dans ces travaux, cette

focalisation géométrique est obtenue à partir de trains de vagues propagés dans un faisceau de directions différentes. Ce phénomène existe également à l'état naturel. Ainsi, Whitham (1974) a étudié l'évolution du front d'onde en fonction de la bathymétrie, et a montré que la topographie courbait les rayons de propagation de la houle, conduisant à la formation de caustiques. En milieu naturel, sur des fonds variables, les interactions entre champs de vagues deviennent beaucoup plus complexes, et peuvent conduire à la formation de nombreux points de focalisation, comme l'ont illustré Kharif & Pelinovsky (2003). Ce phénomène peut justifier la formation de vagues scélérates.

L'exemple le plus classique traite de l'evolution des fronts d'ondes en profondeur constante. Sur un tel fond, la houle se propage en suivant des droites. Ainsi, deux trains de vagues qui se propagent dans des directions différentes définiront deux droites dont l'intersection constituera un point de focalisation géométrique. L'interaction constructive de la houle en ce point conduira à la formation d'une vague extrême. L'équation de Schrödinger permet d'illustrer ce phénomène. En effet, cette équation s'écrit

$$i\left(\frac{\partial a}{\partial t}+c_g\frac{\partial a}{\partial x}\right)=\frac{\omega_0}{8k_0^2}\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}-\frac{\omega_0}{4k_0^2}\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}=0. \tag{I.2.35}$$

Introduisons le changement de variables :

$$T=\frac{\omega_0 t}{2},\qquad X=2k_0x-\omega_0 t,\qquad Y=\sqrt{2}k_0y,\ \text{ et }\ q=\frac{1}{\sqrt{2}}k_0a^*, \tag{I.2.36}$$

où * désigne le conjugué complexe, et on obtient ainsi l'equation de Schrödinger sous sa forme adimensionnelle

$$i\frac{\partial q}{\partial T}+\frac{\partial^2 q}{\partial X^2}-\frac{\partial^2 q}{\partial Y^2}=0. \tag{I.2.37}$$

Cette équation admet pour solution la forme Gaussienne, illustrée par la Figure (I.2.5), et donnée par la relation

$$\begin{aligned} q(X,Y,T)=&\frac{q_0}{(G_XG_Y)^{1/4}}\exp\left(-\frac{l^2X^2}{G_X}-\frac{m^2Y^2}{G_Y}\right)\times\\ &\exp\left[i\left(\frac{4TX^2l^4}{G_X}-\frac{4TY^2m^4}{G_Y}-\frac{\arctan(4Tl^2)}{2}+\frac{\arctan(4Tm^2)}{2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{I.2.38}$$

Sur cette figure, l'élévation de la surface libre est représentée à différents instants. On constate que les trains de vagues convergent en $(X,Y)=(0,0)$ pour donner naissance à une vague d'amplitude extrême. Ce mécanisme illustre donc l'empilement de trains d'ondes se propageant dans des directions différentes.

2.2.4 Instabilité Modulationnelle

Il existe un autre mécanisme de formation des vagues scélérates correspondant à la modulation de groupes d'ondes. Parmi les phénomènes remarquables liés à la non-linéarité des ondes de surface, on peut citer l'instabilité modulationnelle mise en évidence par Benjamin & Feir (1967). Cette instabilité, connue sous le nom d'instabilité de Benjamin-Feir, correspond à la modulation progressive d'un train d'ondes de Stokes. En pratique, la modulation est due aux échanges d'énergie entre la composante fondamentale du spectre et les nombres d'onde voisins (les satellites). Ce résultat est d'ailleurs en accord avec des travaux antérieurs de Lighthill (1965) et Zakharov (1966, 1968), qui avaient également observé et prédit cette instabilité. Un train de vagues soumis à cette instabilité présente un cycle de modulation-démodulation, la récurrence de Fermi-Pasta-Ulam. De nombreux auteurs, comme par exemple Henderson *et al.* (1999), Dysthe

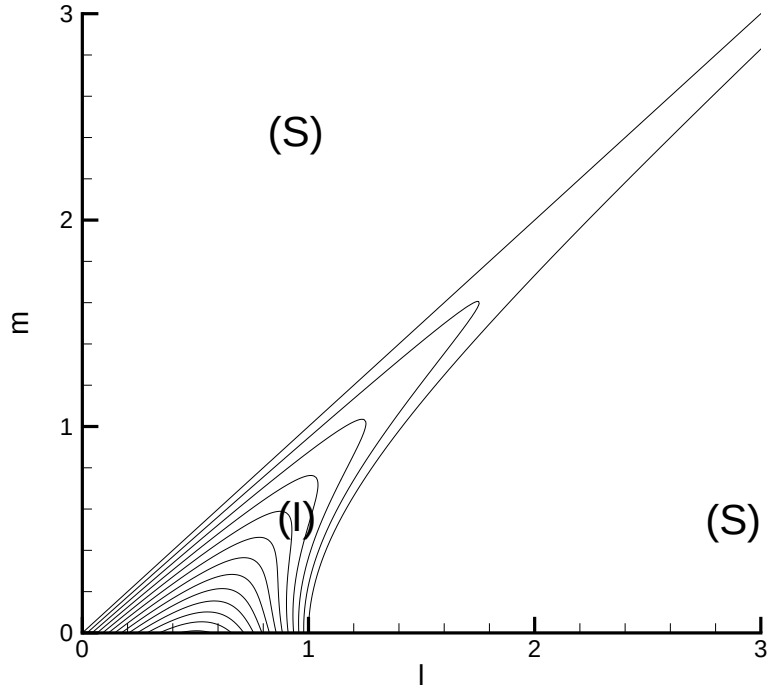


FIGURE I.2.6 – Lignes de niveau du taux de croissance de l'instabilité modulationnelle dans le plan $(l-m)$ des nombres d'onde longitudinal et transversal. Les zones notées (S) correspondent aux zones stables. La zone notée (I) correspond à la zone instable.

& Trulsen (1999), Osborne *et al.* (2000), Calini & Schober (2002), Slunyaev *et al.* (2002), ou encore Dyachenko & Zakharov (2005), ont suggéré qu'au maximum de modulation de la récurrence de Fermi-Pasta-Ulam une vague scélérate pouvait se former.

L'approche la plus simple permettant de tenir compte d'une faible non-linéarité est l'équation non-linéaire de Schrödinger (NLS). Cette équation s'écrit

$$i\left(\frac{\partial a}{\partial t}+c_g\frac{\partial a}{\partial x}\right)=\frac{\omega_0}{8k_0^2}\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}-\frac{\omega_0}{4k_0^2}\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}+\frac{\omega_0 k_0^2}{2}|a|^2 a \tag{I.2.39}$$

où l'élévation de surface libre est donnée par

$$\eta(x,y,t)=Re\left\{a(x,y,t)\exp(ik_0x-i\omega_0 t)\right\}. \tag{I.2.40}$$

ω_0 et k_0 font référence à la fréquence et au nombre d'onde de la porteuse, et $c_{g_0}=\partial\omega/\partial k$ est la vitesse de groupe. L'amplitude complexe a est une fonction lentement variable de l'espace et du temps. Il est important de constater que cette équation a un comportement anisotropique. Les perturbations longitudinales et transverses ne se comportent pas de la même manière. Notamment, les perturbations transverses au sens de propagation sont stables. En introduisant, ici encore, le changement de variables (I.2.36), l'équation non-linéaire de Schrödinger se réécrit sous sa forme adimensionnelle

$$i\frac{\partial q}{\partial T}+\frac{\partial^2 q}{\partial X^2}-\frac{\partial^2 q}{\partial Y^2}+2|q|^2 q=0. \tag{I.2.41}$$

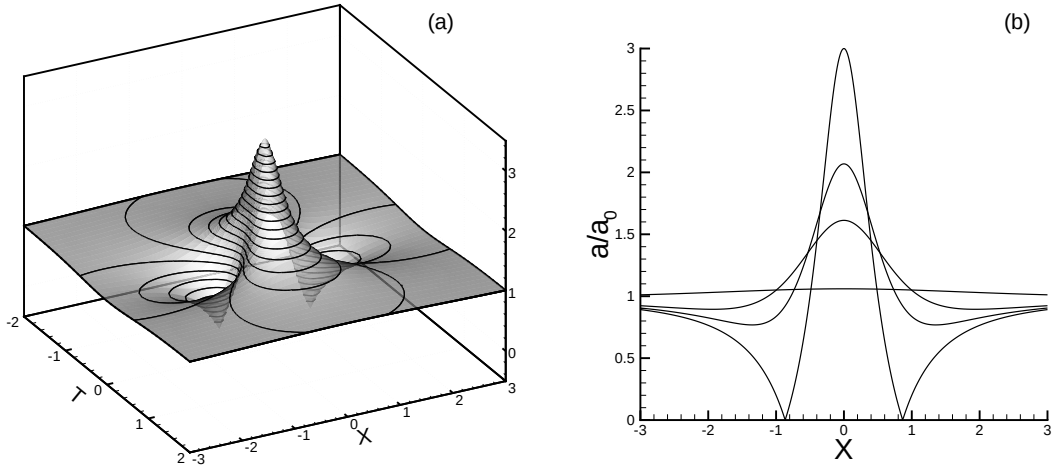


FIGURE I.2.7 – (a) : Représentation du breather algébrique, où soliton de Peregrine, dans le plan $(X-T)$. (b) : Représentation spatiale de ce soliton aux instants $T=\pm 2$, $T=\pm 0.4$, $T=\pm 0.2$ et $T=0$.

L'équation NLS est une équation universelle qui a joué un rôle essentiel dans la compréhension du comportement des ondes non-linéaires. Une des solutions de cette équation s'écrit

$$q(X,Y,T) = q_0 e^{2iq_0^2 T}, \tag{I.2.42}$$

et n'est autre que l'onde de Stokes. Il est cependant connu que ces ondes de surface sont soumises à l'instabilité modulationnelle. Afin de réaliser une étude de stabilité de ces ondes, on peut chercher des solutions à cette équation sous la forme

$$q(X,Y,T) = q_0\left(1 + p(X,Y,T)\right) e^{2iq_0^2 T}, \tag{I.2.43}$$

où p est une grandeur complexe petite devant q_0 qui doit être déterminée. Physiquement, $p(X,Y,T)$ correspond à une modulation de l'onde de Stokes, dont on s'interroge sur la stabilité. En introduisant cette décomposition dans l'equation (I.2.41), et en ne conservant que les termes d'ordre $\mathcal{O}(p)$, on constate que p doit satisfaire l'équation

$$i\frac{\partial p}{\partial T} + \frac{\partial^2 p}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial Y^2} + 2q_0^2(p+p^*) = 0. \tag{I.2.44}$$

Cherchons des solutions à cette nouvelle équation sous la forme

$$p(X,T) = p_1 \exp(\Omega T + ilX + imY) + p_2 \exp(\Omega^* T - ilX - imY), \tag{I.2.45}$$

où p_1 et p_2 sont des constantes complexes, l et m sont respectivement les nombres d'onde longitudinal et transverse, et Ω un taux de croissance, dès qu'il s'agit d'un réel positif. On obtient alors la relation de dispersion

$$\Omega^2 = \left(4q_0^2 - l^2 + m^2\right)\left(l^2 - m^2\right), \tag{I.2.46}$$

qui permet de mettre en évidence les limites du domaine d'instabilité. En effet, cette région est contenue, dans le plan $(l-m)$, entre les droites d'équations $l=\pm m$, et les hyperboles d'équations $l^2-m^2=4q_0^2$. Le maximum de Ω, qui correspond au taux de croissance maximal, est $Re(\Omega)=a_0^2k_0^2=2q_0^2$, et est atteint le long des courbes $l^2-m^2=2q_0^2$. La figure (I.2.6) représente les lignes de niveau du taux de croissance dans le plan $(l-m)$. La zone instable est notée (I),

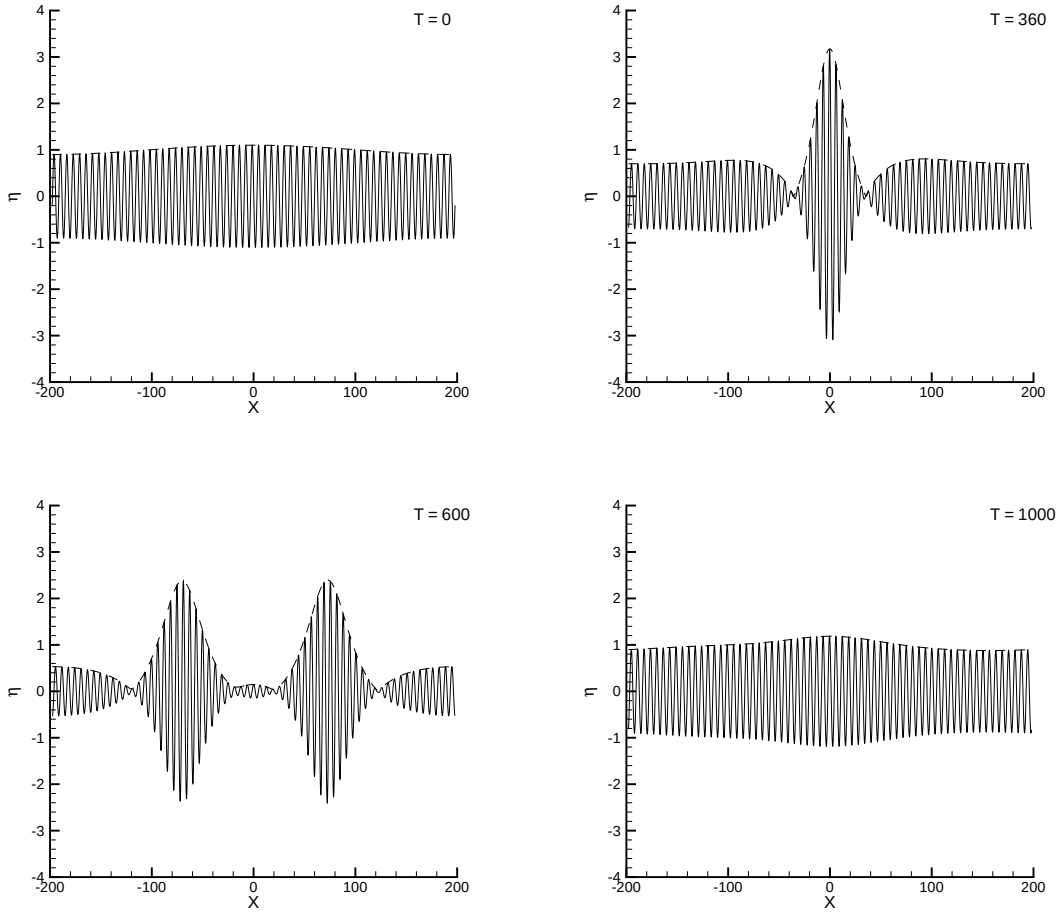


FIGURE I.2.8 – Élévation de la surface libre, tracée avec son enveloppe, correspondant à l'évolution d'un train d'ondes de Stokes de cambrure initiale $a_0k_0 = 0.03$, excité par la perturbation instable $\Delta k/k_0 = a_0k_0$.

tandis que le domaine stable apparaît sous la notation (S). L'instabilité modulationnelle est un phénomène qui a été largement étudié, comme en témoigne l'article de revue de Dias & Kharif (1999). Dans le cadre tridimensionnel, Slunyaev *et al.* (2002) ont utilisé cette instabilité pour justifier la formation de vagues scélérates en profondeur finie. Cependant, McLean (1982*a*,*b*) a montré qu'en profondeur infinie et pour des cambrures modérées, les modes les plus instables sont les modes longitudinaux, bidimensionnels. Ce constat justifie l'effort important qui a été consacré à l'étude du cas bidimensionnel par de nombreux auteurs. En propagation $1D$, l'équation non-linéaire de Schrödinger se réécrit

$$i\frac{\partial q}{\partial T} + \frac{\partial^2 q}{\partial X^2} + 2|q|^2 q = 0. \tag{I.2.47}$$

On retrouve dans ce contexte tous les résultats précédents, avec $m = 0$. Ainsi, un train de vagues est instable dès que $0 \leq l \leq 2q_0$, et le mode le plus instable est le mode $l = \sqrt{2}q_0$. Son taux de croissance est $RE(\Omega) = 2q_0^2$. En terme de variables dimensionnelles, cela correspond à une limite marginale de stabilité $\Delta k/k_0 \leq 2\sqrt{2}a_0k_0$ et à un maximum d'instabilité pour $\Delta k/k_0 = 2a_0k_0$, où Δk correspond au nombre d'onde dimensionnel de la perturbation. Le taux de croissance correspondant est $\omega_0(a_0k_0)^2/2$. Dans le cas bidimensionnel, de nombreuses solutions de l'équation non-linéaire de Schrödinger sont connues. Notamment, certaines d'entre

elles présentent un intérêt particulier dans le cadre des vagues scélérates. Il s'agit de solutions qui satisfont localement dans le temps et dans l'espace le critère de vague scélérate (I.2.9). Notamment, Henderson *et al.* (1999) ont montré que certaines fonctions particulières, les solitons, décrivaient l'évolution non-linéaire de l'enveloppe des groupes de vagues. Dysthe & Trulsen (1999) ont constaté que le soliton de Ma, le soliton d'Akhmediev, ou encore le soliton de Peregrine (où "breather algébrique") pouvaient représenter la formation de vagues scélérates. Le soliton de Peregrine s'exprime, dans un référentiel fixe,

$$\frac{a}{a_0} = \left(1 - \frac{4(1+2i\omega_0 t)}{1+16k_0^2x^2 - 16k_0\omega_0 xt + 8\omega_0^2 t^2}\right)\exp(i\omega_0 t). \tag{I.2.48}$$

où encore, dans le système de coordonnées introduit précédemment,

$$\frac{q}{q_0} = \left(1 - \frac{4(1+iT)}{1+4X^2+16T^2}\right)\exp(2iT), \tag{I.2.49}$$

La figure (I.2.7) représente le soliton de Peregrine dans le plan $(X-T)$, ansi que quelques coupes à des instants choisis. Cette figure permet de mettre en évidence la récurrence temporelle observée au cours de l'évolution de ce soliton. En effet, lorsque $t \to \pm\infty$, on constate que l'enveloppe du train de vagues tend vers une constante, ce qui correspond à un champ de vagues d'amplitude constante, et d'extension infinie dans l'espace. Au voisinage de $T = 0$, et en $X = 0$, on observe un cycle de modulation-démodulation de ce train de vague. Il présente une amplitude trois fois supérieure à sa valeur à l'infini, et donne ainsi naissance à une vague scélérate.
Cependant, cette évolution reste théorique, dans la mesure où toute une gamme de modulations est instable. La Figure (I.2.8) représente l'évolution d'un train d'ondes de Stokes de cambrure initiale $a_0k_0 = \varepsilon = 0.03$, initialement excité par une perturbation instable de nombre d'onde $\Delta k/k_0 = a_0k_0$. Cette perturbation, comme nous l'avons vu, ne correspond pas à la perturbation la plus instable $\Delta k/k_0 = 2a_0k_0$. La modulation liée à la première perturbation excite la perturbation la plus instable, et un nouveau de cycle de modulation-démodulation lié à cette perturbation se met en place. Cette approche permet de simplifier la dynamique des ondes de surface en considérant la dynamique de solitons. Certains auteurs, comme Osborne *et al.* (2000) où encore Calini & Schober (2002) ont utilisé l'approche des orbites homoclines ("Inverse Scattering Technique") pour décrire le problème des vagues scélérates à partir de cette approche. Le mécanisme d'instabilité modulationnelle est utilisé pour engendrer les vagues scélérates du chapitre 8.

2.2.5 Collision de solitons

Russell (1844) est le premier à avoir observé une onde solitaire. Il observa une vague qui se propageait dans un canal en conservant sa forme et sa vitesse. Depuis, le phénomène de soliton est largement documenté, et son importance est remarquable, dans de nombreux domaines de la physique. L'équilibre entre dispersion et non linéarité permet à cette vague d'eau peu profonde de conserver sa forme. L'équation de Korteweg-De Vries (KdV), initialement obtenue par Korteweg & de Vries (1895), s'écrit

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + c_0\left(1+\frac{3\eta}{2h}\right)\frac{\partial\eta}{\partial t} + c_0\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3\eta^3}{\partial x^3} = 0. \tag{I.2.50}$$

Cette équation est très adaptée pour représenter les solitons. L'équation de Kadomtsev-Petviashvili (ou équation de KP), qui n'est autre que la généralisation au cas tridimensionnel de l'équation de KdV, permet donc de représenter la collision de deux solitons se propageant dans des directions différentes. Cette équation s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t} + c_0\left(1+\frac{3\eta}{2h}\right)\frac{\partial\eta}{\partial t} + c_0\frac{h^2}{6}\frac{\partial^3\eta^3}{\partial x^3}\right) = -\frac{c_0}{2}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}, \tag{I.2.51}$$

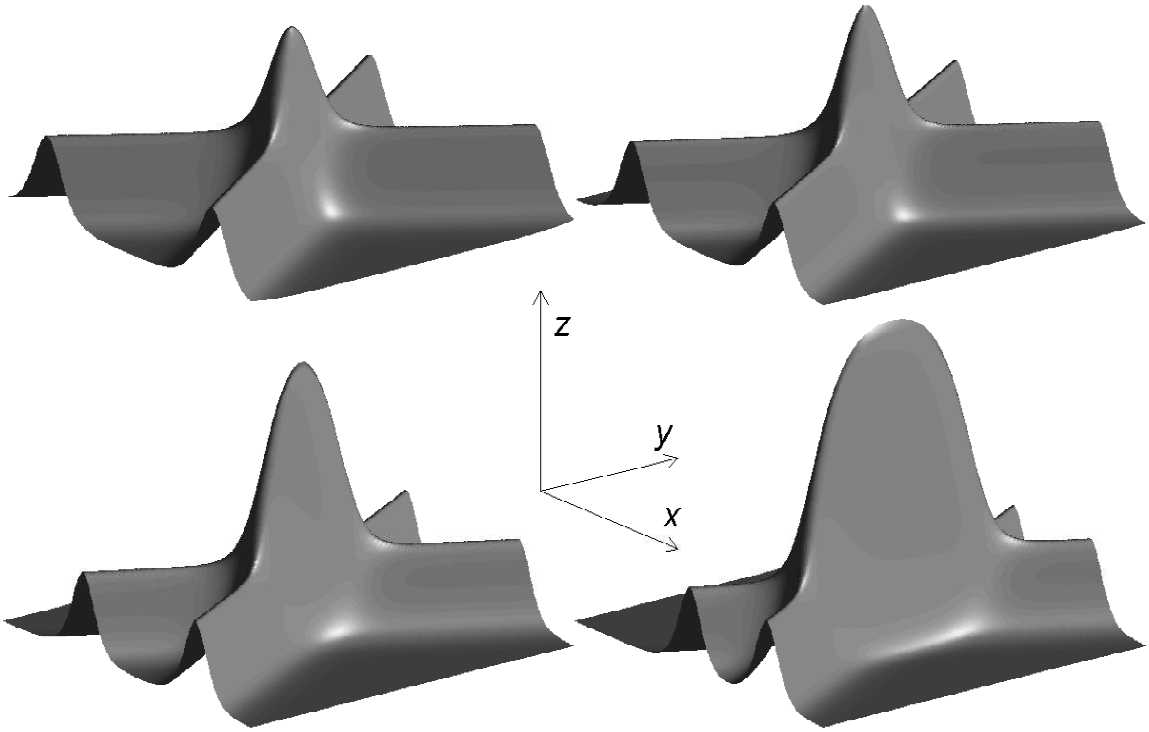


FIGURE I.2.9 – Vagues de fortes amplitudes liées à l'interaction de solitons en eau peu profonde. Figure extraite de Peterson *et al.* (2003).

où $c_0 = \sqrt{gh}$ est la vitesse de l'onde. Cette équation, au même titre que les équations non-linéaires de Schrödinger et de Korteweg–De Vries, est intégrable. On peut donc en trouver certaines solutions. En particulier, une solution tridimensionnelle présentant l'évolution de deux solitons s'écrit

$$\begin{aligned} \eta(x,y,t) &= h^3 \frac{\partial^2 \log(F)}{\partial x^2}, \\ \text{avec } F(x,y,t) &= 1 + e^{\zeta_1} + e^{\zeta_2} + d e^{(\zeta_1+\zeta_2)} \\ \zeta_i &= k_i x - p_i y - V_i t, \quad i = 1,2, \\ V_i &= c_g \left(k_i^2 + p_i^2\right), \quad i = 1,2, \\ d &= \frac{(k_1+k_2)^2 - (p_1-p_2)^2}{(k_1-k_2)^2 - (p_1-p_2)^2} \end{aligned} \tag{I.2.52}$$

Cette solution est obtenue par Onkuma & Wadati (1983), et plus de détails sont donnés par Pelinovsky (1996). En se limitant au cas simplifié $k_1 = k_2$ et $p_1 = -p_2$, on observe l'interaction de deux solitons d'amplitudes et de vitesses égales. Ce problème est équivalent au problème d'un soliton se réfléchissant sur un mur situé en $y = 0$, c'est-à-dire parallèle à la composante longitudinale du vecteur d'onde. Ainsi, l'amplitude au point de contact est donnée par

$$\frac{a}{a_0} = \frac{4}{1 + \sqrt{1 - \frac{3a_0}{4h\tan^2(\theta)}}} \tag{I.2.53}$$

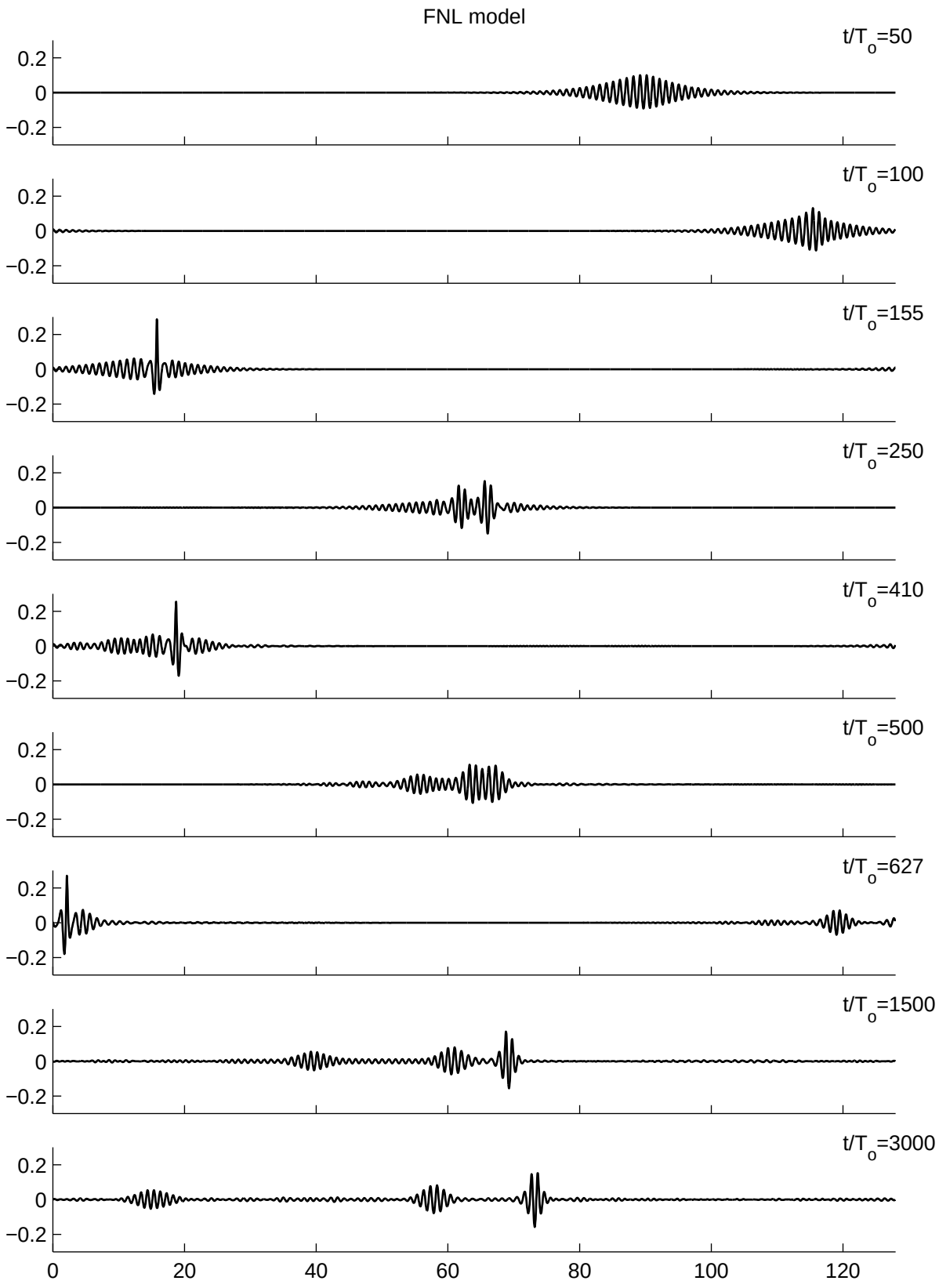


FIGURE I.2.10 – Evolution au temps longs de solitons d'enveloppe, conduisant à la formation de vagues scélérates. Figure extraite de Clamond *et al.* (2006).

où a_0 est l'amplitude de la vague incidente, et ou θ désigne l'angle entre le vecteur d'onde et l'axe x. On constate que pour de petits angles, de l'ordre du paramètre de non-linéarité a_0/h, le facteur d'amplification devient significatif. Ce résultat est confirmé Porubov *et al.* (2005), qui ont obtenu une autre solution de l'équation KP, et ont observé un comportement similaire dans un cadre plus général. Peterson *et al.* (2003) et Soomere & Engelbrecht (2005) ont suggéré que les solutions à N-solitons de l'équation de KP expliquaient très bien la formation de vagues scélérates tridimensionnelles en eau peu profonde. La Figure (I.2.9) représente différents exemples de ces vagues pour différentes valeurs d'angle d'incidence. Il est important de constater que ces vagues d'amplitudes extrêmes ont une durée de vie infinie, et se propagent à vitesse constante. Cependant, ces solitons n'existent qu'en profondeur finie, et de telles vagues ne peuvent se former que dans des zones de faible profondeur. Cette approche ne s'applique qu'aux zones côtières.

Clamond *et al.* (2006) ont proposé un autre mécanisme de formation des vagues scélérates, basé sur la collision de solitons limités au cas bidimensionnel. Ces solitons d'enveloppe se propagent à des vitesses différentes, et peuvent entrer en collision. La Figure (I.2.10) présente l'évolution à long terme de groupes de vagues, dont l'enveloppe n'est pas solution de l'équation non-linéaire de Schrödinger. On constate que ce groupe initial évolue tout d'abord en donnant naissance à une vague d'amplitude extrême. Deux groupes distincts se forment alors. Ces groupes, qui se propagent à des vitesses différentes, entrent ensuite en collision, formant une seconde vague extrême. Un troisième groupe est alors formé. Les trois groupes obtenus se propagent alors de manière indépendante, à des vitesses qui leur sont propres. Les résultats laissent supposer qu'aux temps longs, d'autres collisions se produiront, donnant naissance à d'autres vagues scélérates. Cette approche en terme de solitons d'enveloppe permet de décrire une nouveau mécanisme de génération de vagues scélérates valable en profondeur infinie.

Chapitre 3

L'interaction vent vagues

La question de l'interaction entre le vent et les vagues est une question qui est ouverte depuis de nombreuses années. Au cours du dernier siècle, de nombreux scientifiques se sont penchés sur la question, et différentes théories ont vu le jour. Nous nous attachons ici à présenter les principaux mécanismes permettant de décrire le problème de la génération et de l'amplification des vagues par le vent. Les théories de Kelvin-Helmholtz, de Jeffreys, de Phillips, et de Miles sont ainsi brièvement présentées.

3.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz

Le problème de l'interaction entre le vent et les vagues est un problème qui est étudié depuis plus d'un siècle. Cependant, comme nous allons le voir, la question n'est toujours pas fermée. En effet, ce débat a conduit à de nombreuses controverses, ce qui se justifie par plusieurs raisons. Tout d'abord, il faut garder en tête la complexité du problème. Il s'agit effectivement de décrire le problème d'un écoulement turbulent au dessus d'une surface déformable, mobile, dont on ne connaît pas la position *a priori*. D'autre part, l'approche expérimentale du problème est particulièrement compliquée, puisqu'il s'agit d'étudier les taux de croissance de vagues, ce qui nécessite une très grande précision dans la mesure de la position de l'interface. Il faut également accéder aux fluctuations de pression à l'interface, d'amplitudes très faibles, et qui ne peuvent être observées qu'au moyen d'appareils extrêmement précis, qui ne supportent pas l'eau.

Les premiers travaux avançant une théorie probante quant à la formation des vagues sous l'action du vent sont dus à Kelvin (1871) et Helmholtz (1868), qui ont d'ailleurs laissé leurs noms à l'instabilité d'une interface entre deux fluides en écoulement cisaillé. Ainsi, le problème qu'ils considèrent est celui de deux fluides superposés, en configuration stable au sens de Rayleigh-Taylor, et dont l'interface est soumise à un cisaillement lié à la différence de vitesse entre les deux fluides. Ce problème est illustré par la Figure (I.3.1). On note U_1 et U_2 les vitesses respectives des deux fluides, tandis que ρ_1 et ρ_2 désignent leurs masses volumiques. L'analyse de stabilité linéaire correspond donc à l'étude de petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre $z = 0$. On utilise une approche perturbative, et on note les potentiels vitesses des deux fluides

$$\Phi_1 = U_1 x + \varphi_1, \quad \text{et} \quad \Phi_2 = U_2 x + \varphi_2. \tag{I.3.1}$$

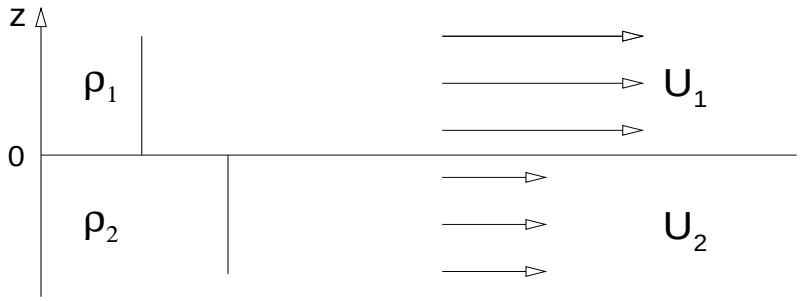


FIGURE I.3.1 – Présentation schématique du problème de Kelvin-Helmholtz.

où φ_1 et φ_2 sont petits, par hypothèse. En écrivant la condition cinématique à l'interface, pour chaque fluide, on obtient

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \tag{I.3.2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}. \tag{I.3.3}$$

Si l'on écrit à présent la condition dynamique dans le fluide léger, on obtient

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = -\left(\frac{\nabla \Phi_1}{2} + \frac{p}{\rho_1} + g\eta \right). \tag{I.3.4}$$

En introduisant la décomposition (I.3.1), puis en négligeant les termes d'ordre 2, cette équation nous fournit

$$-\frac{p}{\rho_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + gz. \tag{I.3.5}$$

En tenant le même raisonnement dans l'autre fluide, et en écrivant la condition de continuité de pression à l'interface, on peut donc écrire que

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + g\eta \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + g\eta \right). \tag{I.3.6}$$

Si l'on suppose que les deux fluides sont de profondeur infinie, on peut chercher des solutions de la forme

$$\varphi_1 = C_1 e^{-kz + i(\sigma t - kx)}, \qquad \varphi_2 = C_2 e^{kz + i(\sigma t - kx)} \quad \text{et} \quad \eta = a e^{i(\sigma t - kx)}. \tag{I.3.7}$$

La condition cinématique (I.3.2) impose les relations

$$i\,(\sigma - kU_1)\,a = kC_1 \quad \text{et} \quad i\,(\sigma - kU_2)\,a = -kC_2, \tag{I.3.8}$$

tandis que la continuité de pression (I.3.6) nous donne

$$\rho_1 \left\{ i(\sigma - kU_1)C_1 + ga \right\} = \rho_2 \left\{ i(\sigma - kU_2)C_2 + ga \right\}. \tag{I.3.9}$$

Aussi, en éliminant C_1 et C_2, on obtient

$$\rho_1(\sigma - kU_1)^2 + \rho_2(\sigma - kU_2)^2 = gk(\rho_2 - \rho_1). \tag{I.3.10}$$

Les solutions de cette équation s'écrivent sous la forme

$$\frac{\sigma}{k} = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{g}{k}\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}(U_1 - U_2)^2}. \tag{I.3.11}$$

Le premier terme du membre de droite peut être compris comme une vitesse moyenne de l'écoulement, ou bien une vitesse pondérée par les masses volumiques. De plus, ces solutions mettent en évidence la présence d'ondes propagatives, dont la vitesse, relativement à cette vitesse moyenne, est donnée par

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)^2}(U_1-U_2)^2, \tag{I.3.12}$$

où c_0 fait référence à la vitesse des ondes en l'absence de courant. D'autre part, il est important de remarquer que σ prend des valeurs imaginaires dès que

$$(U_1-U_2)^2 > \frac{g}{k}\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{\rho_1\rho_2}. \tag{I.3.13}$$

Par conséquent, on pourra toujours trouver un nombre d'onde k permettant de vérifier cette condition, c'est-à-dire un mode instable. Ceci signifie que le moindre souffle de vent à la surface de l'eau devrait suffire à faire croître des vagues. Ce résultat, bien entendu, n'est pas vérifié dans la nature, et il est donc intéressant de reprendre notre étude en incluant la tension de surface. En prenant en compte les effets capillaires, la condition dynamique de surface libre se réécrit

$$p_2 - p_1 = T\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}, \tag{I.3.14}$$

T désignant la tension capillaire, et par conséquent, l'équation (I.3.6) devient

$$\rho_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + U_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + g\eta\right) = \rho_2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + U_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + g\eta\right) + T\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}. \tag{I.3.15}$$

En recherchant des solutions de la même forme que (I.3.7), on obtient alors

$$\rho_1(\sigma-kU_1)^2 + \rho_2(\sigma-kU_2)^2 = gk(\rho_2-\rho_1) + k^3T, \tag{I.3.16}$$

et la résolution de cette nouvelle condition nous fournit

$$\frac{\sigma}{k} = \frac{\rho_1U_1+\rho_2U_2}{\rho_1+\rho_2} \pm \sqrt{\frac{g}{k}\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+\rho_2} + \frac{kT}{\rho_1+\rho_2} - \frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)^2}(U_1-U_2)^2}. \tag{I.3.17}$$

Ainsi, on constate que σ est complexe dès que

$$(U_1-U_2)^2 > \frac{g}{k}\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{\rho_1\rho_2} + kT\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}. \tag{I.3.18}$$

Cette condition d'instabilité est cependant moins triviale que la condition obtenue précédemment. En effet, le membre de gauche admet un minimum pour

$$k_m = \sqrt{\frac{g}{T}(\rho_2-\rho_1)}, \tag{I.3.19}$$

et ce nombre d'onde correspond aux ondes les plus lentes pouvant se propager à la surface d'un liquide avec tension de surface. De cette manière, Lamb (1932) établit que dans le cas de l'interface air-eau, ces ondes, de longueur d'onde $\lambda_m \simeq 1.8cm$, se propagent à $c_m \simeq 23.2cm/s$, et que l'on obtient un seuil de stabilité de l'ordre de $|U_1-U_2| = 6.46m/s$. Cependant, il est évident que dans ce cas précis, des vagues, ou des rides, peuvent se former à l'interface air-eau pour des vitesses de vent beaucoup plus faibles, de l'ordre de $|U_1-U_2| = 1.1m/s$. Par conséquent, le mécanisme suggéré par Kelvin (1871) et Helmholtz (1868) permet d'expliquer un mécanisme à seuil pour la génération des vagues par le vent, mais ne reproduit pas quantitativement les seuils observés dans la nature.

3.2 Mécanisme d'abri de Jeffreys

Devant l'échec de la théorie de Kelvin-Helmholtz pour expliquer la génération des vagues par le vent, Jeffreys (1925, 1926) remet en cause l'hypothèse de mouvement irrotationnel du fluide léger (phase 1) pour décrire l'interaction vent-vagues. Il est en effet le premier à suggérer que les mouvements irréguliers de cette phase au dessus de l'interface peuvent être à l'origine de la formation des oscillations de cette interface. Il suppose ainsi que les lignes de courant de l'écoulement dans la phase 1 pourraient ne pas suivre les déformations de la surface. Par analogie aux tourbillons observés dans le sillage d'une sphère, il suppose l'existence de décollements aériens au dessus des crêtes des vagues.

Si l'on conserve l'hypothèse de mouvement irrotationnel dans le fluide lourd (phase 2), une solution linéaire du problème est donnée par

$$\phi(x,z,t) = \frac{\omega}{k} a e^{-kz} \sin(\omega t - kx) \tag{I.3.20}$$

$$\eta(x,t) = a\cos(\omega t - kx) \tag{I.3.21}$$

où a est l'amplitude des vagues. En tenant compte de la viscosité, on peut estimer le taux de dissipation d'énergie moyenné sur une période

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\mu \iint \frac{\partial \nabla \phi^2}{\partial n} \mathrm{d}s = -2\mu k \omega^2 a^2, \tag{I.3.22}$$

n étant la normale à l'interface. D'autre part, l'énergie moyenne des vagues étant donnée par $E = \rho_2 \omega^2 a^2 / 2k$, nous déduisons que l'amplitude varie comme

$$a(t) = a_0 \exp(-2\nu k^2 t), \tag{I.3.23}$$

ν faisant référence à la viscosité cinématique du fluide 2. On peut à présent s'intéresser au mouvement rotationnel de la phase 1. En supposant que des décollements puissent survenir au dessus de l'interface, la pression variera en fonction de l'espace et du temps. Ainsi, Jeffreys (1925) suppose que ce phénomène correspond à une distribution de pression de la forme

$$p = s\rho_1 (U-c)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{à l'interface}, \tag{I.3.24}$$

où $c = \omega/k$ désigne la vitesse de phase des vagues, et où s est le coefficient d'abri empirique. Il s'agit d'une mesure de la résistance de traînée opposée à l'écoulement dans la phase 1 par la déformée de l'interface. Ainsi, le flux d'énergie transférée à l'interface par le fluide 1 est donnée par

$$\frac{d\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\int p \frac{\partial \eta}{\partial t} \mathrm{d}x, \tag{I.3.25}$$

et sa moyenne sur une période est

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} s\rho_1 (U-c)^2 k\omega a^2. \tag{I.3.26}$$

On déduit de cette relation que le taux de croissance de l'amplitude des vagues est de l'ordre de $s\rho_1(U-c)^2 k/2\rho_2 c$. Par conséquent, en comparant le taux de croissance lié à l'écoulement dans la phase 1 au taux de dissipation lié à la viscosité de la phase 2, on obtient directement le critère de stabilité

$$\frac{(U-c)^2}{c} < 4s\frac{\rho_2}{\rho_1}\nu k. \tag{I.3.27}$$

Cette condition met donc en évidence un mécanisme à seuil. Cependant, le coefficient d'abri reste un paramètre ajustable. En jouant sur sa valeur, Jeffreys (1925, 1926) parvient à reproduire le

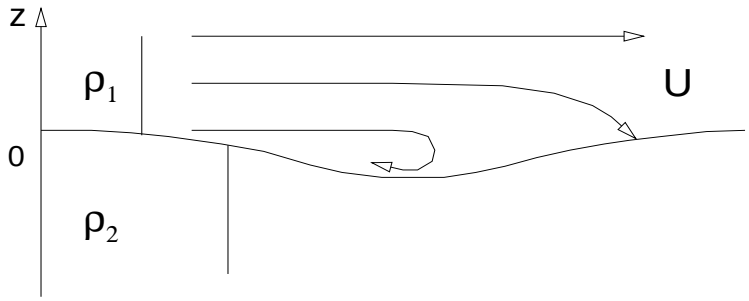


FIGURE I.3.2 – Présentation schématique du problème de Jeffreys.

seuil d'instabilité observé, pour des vitesses de vent de l'ordre de $U = 1.1m/s$. Cependant, des expériences ultérieures ont mis en évidence que les pressions mesurées au dessus d'une surface rigide ne correspondaient pas aux valeurs de s avancées par Jeffreys (1925, 1926). Il a de plus été mis en évidence expérimentalement qu'aucun décollement de l'écoulement aérien n'était observé au dessus de surfaces rigides présentant des déformations de faibles amplitudes (Stanton *et al.*, 1932). Cette théorie a alors été abandonnée, dans la mesure où elle ne pouvait expliquer le phénomène de génération des vagues par le vent. De nombreuses théories ont suivi, basées sur différentes hypothèses. On pourra notamment citer les travaux de Eckart (1953), qui a représenté les distributions de pression associées à un vent turbulent par des agrégats de surpressions limités en espace et en temps, schématisant ainsi les rafales du vent. Ursell (1956) publie alors une revue des différentes théories existantes à cette époque, et conclut qu'elles ne peuvent décrire correctement le phénomène d'amplification des vagues par le vent. Toutefois, des travaux plus récents (Banner & Melville (1976),Reul *et al.* (1999)) indiquent que ces décollements existent dans certains cas. Ils ont en effet observé la formation de tourbillon au dessus de vagues très cambrées. Cette remarque nous incite à introduire un mécanisme d'abri modifié. En effet, nous pouvons considérer que la pente locale présentée par les vagues est un critère de formation du tourbillon, au même titre que la vitesse du vent. Ainsi, dès que la pente locale critique sera rencontrée, on appliquera une distribution de pression de type Jeffreys au dessus de la vague concernée. La pression sera nulle au dessus des vagues ne rencontrant pas ce critère. Le mécanisme de Jeffreys modifié ainsi défini est utilisé dans la partie IV.

3.3 Théorie de Phillips

Devant l'échec des théories précédentes, Phillips (1957) propose une approche un peu différente. En effet, il conserve les hypothèses de Jeffreys (1925, 1926), c'est-à-dire que le fluide lourd de la phase 2 relève de la théorie potentielle, et que l'écoulement de la phase 1 est en revanche turbulent. Son approche n'est pourtant pas une analyse de stabilité. Il montre en effet que la génération des vagues par le vent s'explique par un phénomène de resonance entre des fluctuations de pression aléatoires générées par la turbulence et les vagues formées par ces fluctuations.

Considérons que la phase 2 est initialement au repos, et de profondeur infinie. Le vent correspond à une distribution de fluctuations de pression $p(\boldsymbol{x}, t)$ représentées par une fonction aléatoire stationnaire. Ces structures sont advectées par le vent à une vitesse $\boldsymbol{U}_c(\boldsymbol{\kappa})$ variable en fonction de leur vecteur d'onde $\boldsymbol{\kappa}$. On définit le spectre de la pression par le spectre de sa covariance, avec

$$\Pi(\boldsymbol{\kappa}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int \overline{p(\boldsymbol{x}, t')p(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, t' + t)} e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{I.3.28}$$

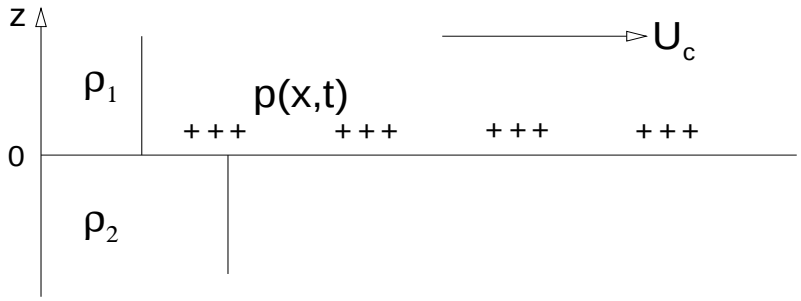


FIGURE I.3.3 – Présentation schématique du problème de Phillips.

Si l'on utilise la transformée de Fourier-Stieltjes

$$p(\boldsymbol{x},t) = \int d\varpi(\boldsymbol{\kappa},t)e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}, \tag{I.3.29}$$

le spectre des fluctuations de pression Π est relié à $d\varpi$ par la relation

$$\Pi(\boldsymbol{\kappa},t) = \frac{\overline{d\varpi(\boldsymbol{\kappa},t')d\varpi^*(\boldsymbol{\kappa},t'+t)}}{\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2}, \tag{I.3.30}$$

où * désigne le conjugué complexe, et $\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2$ correspond à $\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}$. On procède de la même manière pour les élévations η de l'interface, et

$$\Phi(\boldsymbol{\kappa},t) = \frac{1}{4\pi^2}\int \overline{\eta(\boldsymbol{x},t)\eta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t)}e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}, \tag{I.3.31}$$

c'est-à-dire que

$$\Phi(\boldsymbol{\kappa},t) = \frac{\overline{d\mathcal{A}(\boldsymbol{\kappa},t)d\mathcal{A}^*(\boldsymbol{\kappa},t)}}{\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2}, \quad \text{où} \quad \eta(\boldsymbol{x},t) = \int d\mathcal{A}(\boldsymbol{\kappa},t)e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}. \tag{I.3.32}$$

Supposons à présent que les vitesses dans la phase 2 découlent d'un potentiel vitesse φ, et que la profondeur est infinie. La condition cinématique à l'interface s'écrit

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} - U_i\frac{\partial\eta}{\partial x_i} = \int d\mathcal{A}' - i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{U}d\mathcal{A}e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa} \ \text{ en } \ z=0. \tag{I.3.33}$$

En prenant en compte la condition de décroissance du potentiel en profondeur infinie, nous obtenons l'expression du potentiel vitesse en terme de transformée de Fourier-Stieltjes

$$\varphi = \int \frac{d\mathcal{A}' - i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{U}d\mathcal{A}}{k}\mathrm{e}^{-kz}\mathrm{e}^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}, \tag{I.3.34}$$

où $k = |\boldsymbol{\kappa}|$. D'autre part, la condition dynamique à l'interface s'exprime, dans un référentiel se déplaçant à une vitesse $\boldsymbol{U}$ arbitraire,

$$\frac{p}{\rho_2} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - U_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - g\eta + \frac{T}{\rho_2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right), \ \text{ en } \ z=0, \tag{I.3.35}$$

ρ_2 étant la masse volumique de la phase 2, et T la tension superficielle. Cette equation devient, en terme de transformée de Fourier-Stieltjes,

$$d\mathcal{A}'' - 2in_1d\mathcal{A}' - (n_1^2 - n_2^2)d\mathcal{A} = -\frac{k}{\rho_2}d\varpi(t), \tag{I.3.36}$$

avec

$$n_1 = \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{U} = kU\cos(\alpha), \quad \text{et} \quad n_2 = \sqrt{gk + Tk^3/\rho_2}. \tag{I.3.37}$$

L'équation (I.3.36) décrit la croissance de chaque composante de l'élévation de la surface, en fonction de la composante correspondante des fluctuations de pression. Si l'on impose la vitesse arbitraire $\boldsymbol{U}$ égale à la vitesse d'advection des fluctuations de pression $\boldsymbol{U}_c$, on constate de plus que n_1 correspond à la fréquence de vagues de nombre d'onde k, se propageant à une vitesse $U_c\cos(\alpha)$ dans une direction d'angle α avec la vitesse du vent. $n_2 = c(k)k$ correspond à la fréquence des ondes de surface libre de nombre d'onde k, qui se déplacent à la vitesse $c(k)$. En supposant que la surface était initialement au repos, les conditions initiales du problème sont donc $d\mathcal{A} = d\mathcal{A}' = 0$ à $t = 0$. La solution de l'équation (I.3.36) s'exprime alors

$$d\mathcal{A}(\boldsymbol{\kappa}, t) = \frac{ik}{2\rho_2 n_2}\int_0^t d\varpi(\boldsymbol{\kappa}, \tau)\left[\mathrm{e}^{-i(n_1-n_2)(\tau-t)} - \mathrm{e}^{-i(n_1+n_2)(\tau-t)}\right]\mathrm{d}\tau. \tag{I.3.38}$$

Le spectre des élévations, Φ, devient alors

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{\kappa}, t) &= \frac{\overline{d\mathcal{A}(\boldsymbol{\kappa}, t)d\mathcal{A}^*(\boldsymbol{\kappa}, t)}}{\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2} \\ &= \frac{k^2}{4\rho_2^2 n_2^2}\int_0^t\int_0^t \Pi(\boldsymbol{\kappa}, \tau-\tau')\left[\mathrm{e}^{-i(n_1+n_2)(\tau-\tau')} + \mathrm{e}^{-i(n_1-n_2)(\tau-\tau')}\right. \\ &\qquad \left. -2\mathrm{e}^{-in_1(\tau-\tau')}\mathrm{e}^{-in_2(\tau+\tau')}\cos(2n_2 t)\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'.\end{aligned} \tag{I.3.39}$$

En introduisant les variables $\tau_1 = \tau - \tau'$ et $\tau_2 = \tau + \tau'$, le comportement asymptotique de cette expression, lorsque $t \to \infty$, est donné par

$$\Phi(\boldsymbol{\kappa}, t) \simeq \frac{k^2 t}{4\rho_2^2 n_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\boldsymbol{\kappa}, \tau_1)\left[\mathrm{e}^{-i(n_1+n_2)\tau_1} + \mathrm{e}^{-i(n_1-n_2)\tau_1}\right]\mathrm{d}\tau_1. \tag{I.3.40}$$

Introduisons, par souci de simplification, un nouveau référentiel mobile à une vitesse $\mathbf{V}$ par rapport au référentiel précédent. Dans ce référentiel, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{V}\tau$, et la relation entre la covariance des fluctuations de pression et son spectre devient

$$\overline{p(\boldsymbol{x}, \tau)p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}, \tau)} = \int \Pi(\boldsymbol{\kappa}, \tau)e^{i(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{q} + \boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{V}\tau)}\mathrm{d}\boldsymbol{\kappa}, \tag{I.3.41}$$

c'est-à-dire que

$$\Pi(\boldsymbol{\kappa}, t)\mathrm{e}^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{V}\tau} = \frac{1}{4\pi^2}\int \overline{p(\boldsymbol{x}, \tau)p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}, \tau)}\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{q}}\mathrm{d}\mathbf{q}. \tag{I.3.42}$$

Ceci nous permet d'introduire l'échelle de temps globale $\theta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{V})$ liée au vecteur d'onde $\boldsymbol{\kappa}$ dans le nouveau référentiel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\boldsymbol{\kappa}, t)\mathrm{e}^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{V}\tau}\mathrm{d}\tau = 2\Pi(\boldsymbol{\kappa}, 0)\theta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{V}). \tag{I.3.43}$$

Ce temps caractéristique peut s'interpréter comme le temps caractéristique de durée de vie des structures de vecteur d'onde $\boldsymbol{\kappa}$ dans le référentiel se déplaçant à la vitesse $\boldsymbol{V}$. L'équation (I.3.40) devient, avec cette notation,

$$\Phi(\boldsymbol{\kappa}, t) \simeq \frac{k^2\Pi(\boldsymbol{\kappa}, 0)t}{2\sqrt{2}\rho_2^2 n_2^2}\left[\theta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{V}_1) + \theta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{V}_2)\right]. \tag{I.3.44}$$

dans laquelle

$$-\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{V}_1 = n_1 + n_2 = \boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{U}_c + \sqrt{gk + Tk^3/\rho_2} \tag{I.3.45}$$

$$-\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{V}_2 = n_1 - n_2 = \boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{U}_c - \sqrt{gk + Tk^3/\rho_2} \tag{I.3.46}$$

si bien que

$$(U_c + V_1)\cos(\alpha) = -c(k) \quad \text{et} \quad (U_c + V_2)\cos(\alpha) = c(k). \tag{I.3.47}$$

où $c(k)$ désigne, comme précédemment, la vitesse des ondes de surface libre de nombre d'onde k. Le signe négatif, dans l'expression de V_1, fait référence à des ondes se déplaçant dans le sens opposé au vent. Il paraît évident, dans ces conditions, que le temps caractéristique d'existence de structure remontant au vent est bien plus faible que celui de structures advectées par l'écoulement, et par conséquent, $\theta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{V}_1) << \theta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{V}_2)$. Ainsi,

$$\Phi(\boldsymbol{\kappa}, t) \simeq \frac{k^2 \Pi(\boldsymbol{\kappa}, 0) t}{2\sqrt{2}\rho_2^2 n_2^2} \theta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{V}_2), \tag{I.3.48}$$

où bien, en terme de covariance,

$$\overline{\eta^2} \simeq \frac{k^2 \overline{p^2} t}{2\sqrt{2}\rho_2^2 n_2^2} \theta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{V}_2), \tag{I.3.49}$$

Ce résultat met en évidence la dépendance du spectre des élévations en fonction du temps. En effet, puisque le temps intervient linéairement dans le seul membre de droite, la variance des élévations croît linéairement en fonction du temps. D'autre part, on constate que l'allure du spectre n'est pas fonction du temps, puisqu'il est toujours proportionnel au spectre à l'origine de la pression. Toutefois, le développement asymptotique de l'équation (I.3.40) n'est valide que sous l'hypothèse de vagues très faiblement non-linéaires. Cette théorie ne s'applique donc qu'aux premiers instants de la vie des vagues de vent. Notre étude se focalise sur des vagues extrêmes, de cambrures très importante, et donc très fortement non-linéaires. Cette théorie ne s'applique donc pas dans le cadre des vagues scélérates.

3.4 Théorie de Miles

Au même moment que Phillips (1957), Miles (1957) reprend les travaux antérieurs, et pose plusieurs hypothèses. Ainsi, il suppose que la phase 2 peut être décrite par un mouvement irrotationnel, obéissant ainsi aux équations potentielles. Comme l'avait fait Jeffreys (1925), il estime l'effet de la viscosité *a posteriori*, comme une perturbation du mouvement non-visqueux. Miles (1957) suppose également que l'influence de la phase 1 sur la vitesse des vagues se limite à l'influence de la composante en phase avec les oscillations de l'interface. En ce qui concerne la phase supérieure, il estime qu'il s'agit d'un écoulement non-visqueux, et incompressible. La viscosité, ici aussi, est introduite *a posteriori* en supposant que l'écoulement moyen dans cette phase présente un profil cisaillé $U(z)$. Pour reprendre son approche, on peut supposer que les perturbations sont suffisamment petites pour permettre de linéariser les équations du mouvement. Ainsi, les conditions cinématique et dynamique à l'interface peuvent se réécrire sous la forme

$$L\eta + m\eta_{tt} = -p, \tag{I.3.50}$$

où η est l'élévation de l'interface, m désigne une masse effective par unité de surface, L un opérateur linéaire correspondant à la contrainte résistant à la déformation de la surface, et p fait référence à la pression aérodynamique qui agit à la surface. De cette manière, on peut supposer que les solutions de cette équation sont de la forme

$$\eta(x, t) = a \exp(ik(x - ct)), \tag{I.3.51}$$

a étant naturellement l'amplitude des ondes, k le nombre d'onde, et c la vitesse de phase. Supposons à présent que le terme de pression p obéisse à une loi de la forme

$$p = (\alpha + i\beta)\rho_1 U_1^2 k\eta, \tag{I.3.52}$$

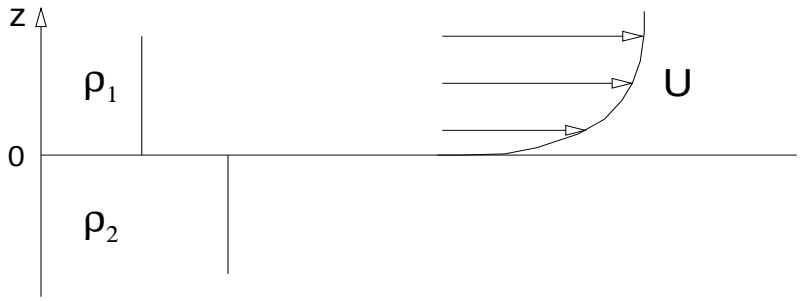


FIGURE I.3.4 – Présentation schématique du problème de Miles.

où ρ_1 est la densité de la phase supérieure, U_1 désigne une vitesse arbitraire, caractéristique de l'écoulement dans cette phase, et $k\eta$ correspond à la pente locale des vagues. Le coefficient complexe $(\alpha + i\beta)$ est alors un coefficient de pression sans dimension, où α et β, en pratique, sont des fonctions de c et k, solutions d'un problème aux limites que nous considérerons plus loin. L'équation (I.3.50) peut dès lors se réécrire

$$L\eta - mk^2c^2\eta = -(\alpha + i\beta)\rho_1 U_1^2 k\eta, \tag{I.3.53}$$

qui n'est autre qu'une équation aux valeurs propres reliant c et k dans le cadre des hypothèses formulées. En introduisant c_0, la vitesse des ondes en l'absence de pression aérodynamique, on peut éliminer L. En effet,

$$L\eta = mk^2c_0^2\eta. \tag{I.3.54}$$

On obtient ainsi le résultat, que l'on peut écrire sous la forme

$$c^2 = c_0^2\left\{1 + \frac{\rho_1}{mk}(\alpha + i\beta)\left(\frac{U_1}{c_0}\right)^2\right\}. \tag{I.3.55}$$

On notera toutefois que cette équation ne correspond pas à une solution explicite de c, dans la mesure où α et β sont dépendants de c. Pour le cas des ondes de gravité en profondeur infinie, on a

$$c_0^2 = g/k \quad \text{et} \quad m = \rho_2/k, \tag{I.3.56}$$

et l'on pourra constater, en prenant $U_1 = U - c$, que (i) la théorie de Kelvin-Helmholtz correspond au cas $(\alpha + i\beta) = -1$, et que (ii) la théorie de Jeffreys correspond au cas $(\alpha + i\beta) = is$, s étant le coefficient d'abri introduit par Jeffreys. Le taux de croissance de l'amplitude des ondes de surface sera de la forme

$$\tau^{-1} = \frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_2}\beta\left(\frac{U_1}{c}\right)^2 kc. \tag{I.3.57}$$

Si l'on s'interesse à présent aux équations régissant la phase 1, on peut écrire les équations d'Euler pour un écoulement cisaillé $U(z)$, et

$$\rho_1\left(\frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial U}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{I.3.58}$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial v}{\partial t} + U\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{I.3.59}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \tag{I.3.60}$$

où u et v désignent respectivement les composantes horizontale et verticale d'une petite perturbation de vitesse de l'écoulement, tandis que p désigne la pression associée à cette perturbation. Si, de plus, on introduit une fonction de courant ψ telle que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{I.3.61}$$

et que l'on suppose que ψ et p présentent une dépendance périodique en temps et en espace du même type que (I.3.51), on obtient le système

$$\rho_1 \left((U-c)\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z}\psi \right) = p, \tag{I.3.62}$$

$$\rho_1 k^2 (U-c)\psi = \frac{\partial p}{\partial z}, \tag{I.3.63}$$

qui, en éliminant p, nous permet d'obtenir l'équation de Rayleigh (1880), c'est-à-dire

$$(U-c)\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \left(k^2(U-c) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)\psi = 0. \tag{I.3.64}$$

On peut remarquer que cette équation correspond à l'équation de Orr-Sommerfeld, dans laquelle nous avons négligé la viscosité. Introduisons à présent les variables sans dimensions

$$\xi = kz, \quad w(\xi) = (U-c)/U_1, \quad \text{et} \quad \phi(\xi) = \psi/U_1\eta(x,t). \tag{I.3.65}$$

L'équation (I.3.64) se réécrit alors

$$\phi'' - [1 + w''/w]\phi = 0. \tag{I.3.66}$$

Deux conditions aux limites sont alors à prendre en compte. Tout d'abord, l'interface entre les deux phases doit rester une ligne de courant pour l'écoulement dans la phase 1. Ainsi, en considérant que la composante horizontale de la vitesse de l'écoulement est voisine de $U - c$, on obtient la condition

$$\psi_x/(U-c) = ik\eta \quad \text{en} \quad z = z_0 + \eta \simeq z_0, \tag{I.3.67}$$

c'est-à-dire, en terme de variables adimensionnelles (I.3.66),

$$\phi_0 = w(\xi_0). \tag{I.3.68}$$

La seconde condition limite doit exprimer le fait que la perturbation doit disparaître quand z tend vers l'infini, et par conséquent,

$$\phi \to 0 \quad \text{quand} \quad \xi \to \infty. \tag{I.3.69}$$

D'autre part, en introduisant les variables sans dimensions dans l'équation (I.3.62), on obtient l'expression de la pression

$$p = \rho_1 U_1^2 k(w\phi' - w'\phi)\eta. \tag{I.3.70}$$

Ainsi, en comparant ce résultat à l'équation (I.3.52), il vient immédiatement

$$\alpha + i\beta = w_0(\phi_0' - w_0'). \tag{I.3.71}$$

Par conséquent, le problème aérodynamique est résumé par les équations (I.3.66), (I.3.68), (I.3.69) et (I.3.71). Si on multiplie à présent l'équation (I.3.66) par ϕ^*, le conjugué complexe de ϕ, que l'on calcule l'intégrale de l'équation obtenue de ξ_0 à $+\infty$, que l'on réalise une intégration

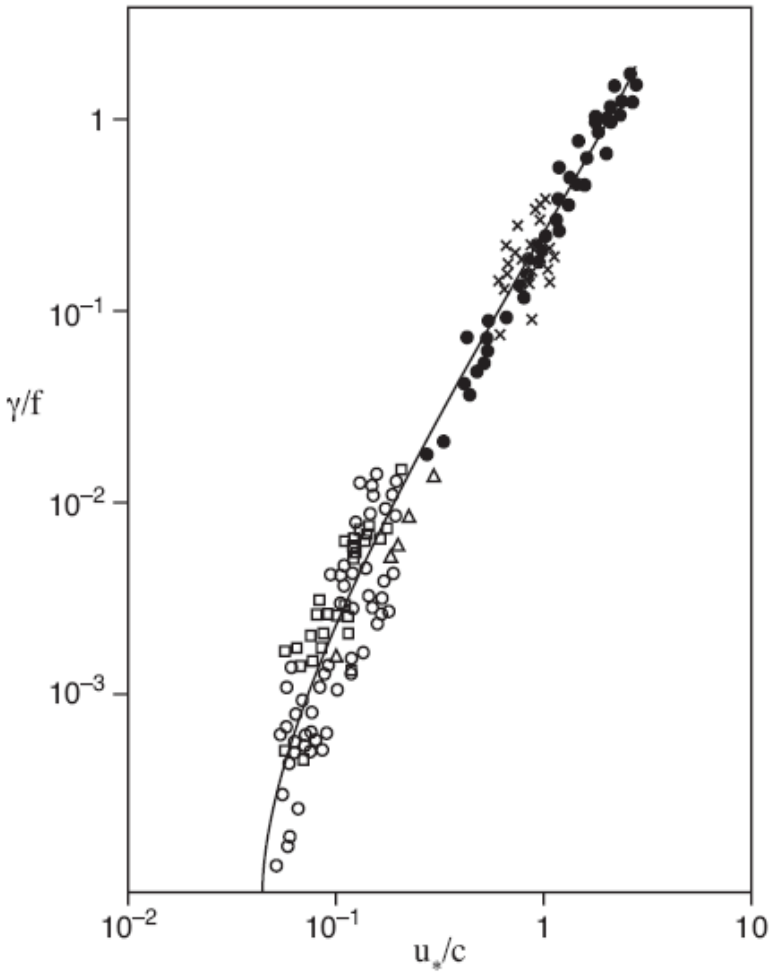


FIGURE I.3.5 – Taux de croissance adimensionnel γ/f tracé en fonction de l'age des vagues $U*/c$. ($\triangle, \square, \circ$) : Données obtenues *in situ*; ($\times, \bullet$) : Données obtenues en laboratoire; (—) : Théorie de Miles

par parties du terme $\phi''\phi^*$, et que l'on prend en compte les conditions aux limites (I.3.68) et (I.3.69), on obtient la relation

$$\int_{\xi_0}^{+\infty} \left\{|\phi'|^2 + [1 + (w''/w)]|\phi|^2\right\} d\xi = [\phi^*\phi']_0^{+\infty} = -w_0\phi'_0. \tag{I.3.72}$$

D'après la définition de w, on peut en première approximation considérer que w est réel. Par conséquent, on obtient une estimation de β de la forme

$$\beta = -\Im\left\{\int_{\xi_0}^{+\infty} |\phi|^2(w''/w)d\xi\right\}. \tag{I.3.73}$$

On peut constater, cependant, que cette intégrale contient une singularité en ξ_c, altitude critique à laquelle $U(z_c) = c$, c'est-à-dire où $w(\xi_c) = 0$. Une extraction de cette singularité permet d'obtenir

$$\beta = -\pi|\phi_c|^2(w''_c/w'_c), \quad w_c = 0. \tag{I.3.74}$$

Ce résultat indique donc que des ondes de surface seront stables, ou instables, selon le signe de la courbure du champ de vitesse ($U''(z_c)$) à une altitude critique à laquelle $U = c$. Un profil de

vitesse dont la courbure à l'altitude critique est positif stabilise donc les vagues, tandis qu'un profil de courbure négative déstabilise ces ondes.
De cette manière, il paraît clair que ce mécanisme décrit le phénomène de croissance des vagues sous l'action de vent de manière relativement satisfaisante. En effet, cette approche met en évidence l'importance du profil vertical du vent au dessus de la surface, qui influence la stabilité de l'interface. La résolution précise repose donc sur la connaissance de ce profil. L'approche la plus classique tend à représenter la couche limite turbulente à flux constant de l'écoulement au moyen d'un profil logarithmique du type

$$U(z) = U_1 \log(z/z_0), \quad U_1 = U^*/\kappa, \tag{I.3.75}$$

où κ désigne la constante de Von Karman, $U^* = \tau_0/\rho_1$ est la vitesse de frottement à l'interface, τ_0 la contrainte à l'interface, et z_0 désigne un paramètre de rugosité. Sous ces hypothèses, Miles (1957) obtient des résultats très similaires aux données expérimentales, données obtenues *in situ* aussi bien qu'en soufflerie. La Figure (I.3.5), extraite de l'article de Janssen (2004), présente une comparaison des taux de croissance

$$\frac{\gamma}{f} = \frac{\pi}{\kappa^2}\frac{\rho_1}{\rho_2}\beta\left(\frac{U^*}{c}\right)^2 \tag{I.3.76}$$

obtenus grâce à la théorie de Miles avec différentes valeurs expérimentales. Cette théorie est actuellement la meilleure décrivant le phénomène. Depuis, de nombreuses études se sont succédées, et ont permis d'améliorer cette théorie. Toutefois, la question reste ouverte. En effet, l'existence des décollements aériens, suggérée par Jeffreys (1925), reste très controversée. Une extension de la théorie de Miles à des vagues très cambrées paraît donc nécessaire.

Deuxième partie

Méthodes numériques dans le contexte de l'interaction vent-vagues

Table des matières

4 Généralités sur les méthodes numériques **41**

5 Approches Potentielles **43**
5.1 Equations générales dans le domaine fluide 43
5.2 Méthode intégrale (BIEM) 44
5.2.1 La seconde identité de Green 44
5.2.2 Conditions aux limites 46
5.3 Méthode pseudo-spectrale (HOSM) 47
5.3.1 Conditions aux limites 47
5.3.2 Résolution du problème 48

6 Approche diphasique **49**
6.1 Equations générales du mouvement 49
6.2 Méthode de suivi d'interface 50
6.3 Résolution du problème 53
6.3.1 Méthode de projection 53
6.3.2 Résolution de l'équation de type Poisson 55

Chapitre 4

Généralités sur les méthodes numériques

Dans la partie précédente, nous avons présenté un certain nombre d'équations modèles permettant de simuler les écoulements à surface libre, ainsi que les problèmes liés à l'interaction entre le vent et les vagues. Dans tous les cas, ces équations simplifiées sont obtenues au moyen d'hypothèses fortes quant à la nature de l'écoulement. Notamment, la dynamique des ondes de surface est fréquemment étudiée en considérant que le problème est faiblement non-linéaire, ou bien faiblement dispersif. De la même manière, l'étude de l'interaction entre le vent et les vagues se restreint à une approche purement spatiale, ou purement temporelle. Les champs de vagues sont souvent considérés comme parfaitement périodiques, d'extensions infinies en temps et en espace, et d'amplitudes suffisamment faibles pour considérer un comportement linéaire.

Dans le problème qui nous interesse, les champs de vagues se caractérisent par des évolutions d'amplitudes très importantes, sur des temps caractéristiques très courts. La dynamique présente ainsi un comportement extrêmement non-linéaire. Cette caractéristique est partiellement négligée par les hypothèses des différentes équations modèle que nous avons présentées au chapitre 2 de la partie I. En effet, le caractère ponctuel de cette non-linéarité peut, lors d'une approche globale du problème, éventuellement être négligé. Nous avons vu d'autre part, dans le chapitre 3, que le vent était représenté, de manière classique, par un terme de pression agissant sur une surface de dynamique linéaire. Ce choix, ici encore, peut être justifié par la faible cambrure des vagues étudiées.

Cependant, dans le cadre de l'interaction entre le vent et les vagues scélérates, ces deux hypothèses deviennent criticables. En effet, l'action du vent sur une vague scélérate est extrêmement locale, et s'applique à des déformations très importantes de l'interface. La dynamique du champ de vagues est largement affecté par l'action du vent sur une période très courte d'existence de la vague scélérate, où la non-linéarité est extrêmement importante. Ce constat impose donc de tirer deux conclusions. Tout d'abord, la prise en compte de la non-linéarité est essentielle pour simuler correctement cette interaction. D'autre part, les modèles classiques d'amplification des vagues par le vent sont mis en défaut dans le cas considéré. Nous avons donc choisi, pour décrire les mouvements de la surface, d'avoir recours à des méthodes permettant de simuler parfaitement le caractère non-linéaire des ondes de surface.

Historiquement, la première méthode numérique permettant de résoudre les équations po-

tentielles complètes du problème d'ondes de surface à été introduite par Longuet-Higgins & Cokelet (1976). Cette méthode (BIEM), basée sur la discrétisation d'une équation intégrale, a ensuite été utilisée par Vinje & Brevig (1981) pour simuler le problème du déferlement, dans la mesure où elle permettait de représenter le retournement de la surface. Par la suite, cette méthode a largement été étudiée, et améliorée. La méthode que nous avons retenue, et que nous présentons ici est basée sur les travaux de Greco (2001), et de Faltinsen *et al.* (2002). Elle permet de simuler un canal numérique, et de reproduire des expériences réalisées en soufflerie. Cette méthode, comme nous venons de l'évoquer, décrit le mouvement d'ondes extrêmement non-linéaires, incluant le retournement de la surface, mais s'arrêtant toutefois à la reconnection de l'interface. Ceci est donc très avantageux pour la description de notre problème. Cependant, l'aspect numérique de cette méthode présente quelques limitations. Les temps de calcul, en effet, sont importants, dans la mesure où la discrétisation de l'équation intégrale conduit à l'inversion d'une matrice ne présentant aucune particularité de symétrie, et donc aucun algorithme performant d'inversion. Cette méthode est bien adaptée à l'étude de houles extrêmement cambrées, allant jusqu'au déferlement, mais ne l'est pas particulièrement pour l'étude de ces houles aux temps longs.

Pour pallier à ce défaut, Dommermuth & Yue (1987) ont développé une méthode pseudo-spectrale (HOSM). Cette méthode simule l'évolution de houles dans un domaine périodique, grâce à l'analyse de Fourier. Elle se base sur un développement de Taylor des équations potentielles à un ordre extrêmement élevé. L'ordre d'approximation y est suffisamment élevé pour que l'on puisse estimer qu'il s'agit d'une méthode exacte. Cette méthode a depuis été largement étudiée et améliorée. Les travaux présentés ici se basent sur ceux antérieurs de Skandrani *et al.* (1996) et Skandrani (1997). L'usage de la transformée de Fourier justifie une vitesse de calcul extrêmement élevée, grâce aux nombreux algorithmes de FFT (Fast Fourier Transform) connus. En revanche, l'usage d'une représentation spectrale de la surface interdit intrinsèquement de représenter des pentes tendant vers l'infini, et exclut donc la modélisation du déferlement.

L'usage de la méthode intégrale et de la méthode pseudo-spectrale sont donc complémentaires, et nous permettent d'accéder à une large gamme de phénomènes physiques. Toutefois, ces deux méthodes sont potentielles, et se bornent à l'étude de la dynamique non-linéaire des ondes de surface. L'action du vent n'est présentée qu'à travers l'usage d'un terme de pression agissant à la surface. Si d'un point de vue hydrodynamique, cette approche est très satisfaisante, elle présente un défaut majeur du point de vue aérodynamique. En effet, aucune simulation de l'écoulement aérien n'est réalisée, et cette approche nous contraint, par conséquent, à avoir recours à une approche modèle pour le terme de pression utilisé. Comme nous l'avons évoqué précédemment, le débat porte également sur la structure de l'écoulement d'air au dessus des vagues. Il paraît donc essentiel de le représenter de manière satisfaisante. Cette remarque nous a donc incité à mettre en oeuvre un troisième outil, permettant de modéliser complètement le problème à travers une approche diphasique, et rotationnelle. La méthode développée par Lafaurie *et al.* (1994) correspond parfaitement aux conditions du problème. Il s'agit en effet d'une méthode Volume of Fluid (VOF) résolvant les équations de Navier-Stokes, en diphasique, et simulant la structure de l'écoulement aérien ainsi que la dynamique de l'interface entre les deux fluides. Cette approche, contrairement aux méthodes précédentes utilise un maillage Eulérien du domaine complet, ce qui pose un problème de traitement numérique dans des temps de calculs raisonnables. Elle ne permet donc que l'étude à court terme de la dynamique du phénomène qui nous intéresse.
Le but de cette partie est de présenter les différentes méthodes évoquées ci-dessus, tout en donnant suffisamment de détails quant à leur mise en oeuvre numérique pour permettre au lecteur de les reproduire. Les approches potentielles sont présentées dans un premier temps, chapitre 5, puis une description de la méthode diphasique est réalisée au chapitre 6.

Chapitre 5

Approches Potentielles

Dans ce chapitre, nous présentons les deux modèles mathématiques utilisés pour simuler les problèmes à surface libre, sous hypothèse d'écoulements potentiels, ainsi que leur mise en œuvre numérique. Tout d'abord, la méthode intégrale est adaptée à la simulation d'un canal à houle numérique. Elle permet en effet de simuler des problèmes à valeur aux limites, et ainsi de reproduire les expériences de focalisation spatio-temporelle réalisées en soufflerie. Elle autorise de plus la description d'interfaces « multivaluées ». La méthode pseudo-spectrale, quant à elle, permet une représentation fréquentielle de l'évolution temporelle d'un groupe de vagues, et nécessite donc l'usage de conditions aux limites périodiques. Cet outil est plus adapté à la simulation de l'évolution de la houle aux temps longs, et donc à l'étude de l'instabilité modulationnelle.

5.1 Equations générales dans le domaine fluide

Le problème est résolu en supposant que la théorie potentielle est applicable, c'est-à-dire que le fluide est supposé être non-visqueux, incompressible, et soumis à un mouvement irrotationnel. En introduisant l'incompressibilité dans l'équation de conservation de la masse, on obtient

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{U} = 0, \tag{II.5.1}$$

où $\boldsymbol{U}$ désigne le vecteur vitesse de l'écoulement. De plus, l'approximation selon laquelle le mouvement du fluide est irrotationnel s'écrit $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{U} = 0$. Ceci permet de justifier que la vitesse dérive d'un potentiel Φ, c'est-à-dire que $\boldsymbol{\nabla}\Phi = \boldsymbol{U}$. En introduisant ce potentiel dans l'équation (II.5.1), on constate que ce dernier est régit par l'équation de Laplace

$$\Delta\Phi = 0, \tag{II.5.2}$$

Sous les mêmes hypothèses, les équations d'Euler se réécrivent

$$\frac{\partial\left(\boldsymbol{\nabla}\Phi\right)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\Phi \cdot \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\Phi\right) = -g\boldsymbol{e}_z - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p \tag{II.5.3}$$

où $\boldsymbol{e}_z$ désigne le vecteur unitaire vertical. Elles peuvent être intégrées en espace,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\nabla\Phi^2}{2} = -gz - \frac{p}{\rho} + C(t), \tag{II.5.4}$$

où $C(t)$ désigne une constante spatiale d'intégration, qui peut être intégrée dans le potentiel des vitesses. On obtient ainsi l'équation de Bernoulli. Pour évaluer la solution du problème, l'équation (II.5.2) doit être résolue à tout moment dans le domaine fluide. La dépendance temporelle intervient dans le problème à travers les conditions aux limites.

5.2 Méthode intégrale (BIEM)

5.2.1 La seconde identité de Green

Comme nous venons de le voir, le problème se ramène donc principalement à la résolution de l'équation de Laplace (II.5.2). En effet, à chaque pas de temps, la géométrie est figée et le problème peut s'écrire

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 & \text{dans le domaine fluide } (\Omega) \\ \Phi & \text{connu sur la surface libre } (\partial\Omega_F) \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial n} & \text{connu sur les parois } (\partial\Omega_B) \end{cases}$$

L'équation de Laplace, grâce au théorème de Stokes, peut être ramenée à une intégrale de frontière. L'équation intégrale ainsi obtenue est connue sous le nom de seconde identité de Green

$$\int_{\partial\Omega} \Phi(\mathrm{P})\frac{\partial G}{\partial n}(\mathrm{P},\mathrm{Q})\mathrm{d}\ell - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi}{\partial n}(\mathrm{P})G(\mathrm{P},\mathrm{Q})\mathrm{d}\ell = c(\mathrm{Q})\Phi(\mathrm{Q}), \tag{II.5.5}$$

dans laquelle $\partial\Omega = \partial\Omega_F \cup \partial\Omega_B$ désigne la frontière du domaine fluide, G une fonction de Green, et le vecteur $\boldsymbol{n}$ est la normale à $\partial\Omega$, pointant vers l'exterieur du domaine fluide. P et Q désignent deux points du domaine. L'angle $c(\mathrm{Q})$ est défini par

$$c(\mathrm{Q}) = \begin{cases} 0 & \text{si Q est hors du domaine fluide} \\ \alpha & \text{si Q est sur la frontière} \\ 2\pi & \text{si Q est dans le domaine fluide} \end{cases}$$

pour le cas bidimensionnel, et où α est l'angle intérieur relatif au domaine fluide au point Q. En appliquant cette representation à tous les points Q le long des frontières du domaine fluide $\partial\Omega$, nous obtenons les équations nécessaires à la résolution du problème. Ainsi, si Q appartient à la surface libre,

$$\begin{aligned} \alpha\Phi - \int_{\partial\Omega_F} \Phi(\mathrm{P})\frac{\partial G}{\partial n}(\mathrm{P},\mathrm{Q})\mathrm{d}\ell \quad &+ \quad \int_{\partial\Omega_B} \frac{\partial\Phi}{\partial n}(\mathrm{P})G(\mathrm{P},\mathrm{Q})\mathrm{d}\ell = \\ &\int_{\partial\Omega_B} \Phi(\mathrm{P})\frac{\partial G}{\partial n}(\mathrm{P},\mathrm{Q})\mathrm{d}\ell - \int_{\partial\Omega_F} \frac{\partial\Phi}{\partial n}(\mathrm{P})G(\mathrm{P},\mathrm{Q})\mathrm{d}\ell, \end{aligned} \tag{II.5.6}$$

et si Q appartient aux parois solides,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_F} \Phi(\mathrm{P})\frac{\partial G}{\partial n}(\mathrm{P},\mathrm{Q})\mathrm{d}\ell \quad &- \quad \int_{\partial\Omega_B} \frac{\partial\Phi}{\partial n}(\mathrm{P})G(\mathrm{P},\mathrm{Q})\mathrm{d}\ell = \\ \alpha\Phi \quad &- \quad \int_{\partial\Omega_B} \Phi(\mathrm{P})\frac{\partial G}{\partial n}(\mathrm{P},\mathrm{Q})\mathrm{d}\ell + \int_{\partial\Omega_F} \frac{\partial\Phi}{\partial n}(\mathrm{P})G(\mathrm{P},\mathrm{Q})\mathrm{d}\ell. \end{aligned} \tag{II.5.7}$$

Les inconnues sont $\partial\Phi/\partial n$ sur $\partial\Omega_F$ et Φ sur $\partial\Omega_B$. En discrétisant la frontière du domaine $\partial\Omega_F$ en N_F panneaux, soit $N_F + 1$ points de collocation, et la frontière du domaine solide $\partial\Omega_B$ en

N_B panneaux (où $N_B + 1$ points de collocation), les équations (II.5.6) et (II.5.7) deviennent

$$\begin{aligned} \alpha\Phi_i - \sum_{j=1}^{N_F} \int_j \Phi \frac{\partial G}{\partial n}(i,j)\mathrm{d}s \quad + \quad & \sum_{j=1}^{N_B} \int_j \frac{\partial \Phi}{\partial n} G(i,j)\mathrm{d}s = \\ & \sum_{j=1}^{N_B} \int_j \Phi \frac{\partial G}{\partial n}(i,j)\mathrm{d}s - \sum_{j=1}^{N_F} \int_j \frac{\partial \Phi}{\partial n} G(i,j)\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{II.5.8}$$

où $1 < i < N_F + 1$ fait référence au $i^{\text{ème}}$ point de la surface libre, et

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_F} \int_j \Phi \frac{\partial G}{\partial n}(i,j)\mathrm{d}s \quad - \quad & \sum_{j=1}^{N_B} \int_j \frac{\partial \Phi}{\partial n} G(i,j)\mathrm{d}s = \\ \alpha\Phi_i \quad - \quad & \sum_{j=1}^{N_B} \int_j \Phi \frac{\partial G}{\partial n}(i,j)\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{N_F} \int_j \frac{\partial \Phi}{\partial n} G(i,j)\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{II.5.9}$$

où $1 < i < N_B + 1$ fait référence au $i^{\text{ème}}$ point de la paroi solide. La fonction de Green choisie est la source de Rankine. Ainsi,

$$G(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \ln(|\mathbf{Q} - \mathbf{P}|). \tag{II.5.10}$$

Il est intéressant de constater que cette fonction, qui ne fait intervenir que la distance entre les points P et Q, est indépendante du système de coordonnées. Ainsi, si l'on définit des coordonnées locales au panneau d'intégration, (ξ, ϑ), cette fonction se réécrit

$$G(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \ln(\sqrt{\xi^2 + \vartheta^2}). \tag{II.5.11}$$

On peut alors calculer la dérivée normale, qui n'est autre que la dérivée suivant ϑ, et on obtient

$$\frac{\partial G}{\partial n}(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \frac{\vartheta}{\xi^2 + \vartheta^2}. \tag{II.5.12}$$

Si nous supposons à présent que Φ et $\partial\Phi/\partial n$ varient linéairement le long de chacun des panneaux, alors les équations (II.5.8) et (II.5.9) deviennent

$$\begin{aligned} c(i)\Phi_i - \sum_{j=1}^{N_F} \left\{ \Phi_{j+1} \frac{I_4 - \xi_j I_2}{\xi_{j+1} - \xi_j} + \Phi_j \frac{I_2 \xi_{j+1} - I_4}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right\} \quad + \quad & \sum_{j=1}^{N_B} \left\{ \Psi_{j+1} \frac{I_3 - \xi_j I_1}{\xi_{j+1} - \xi_j} + \Psi_j \frac{I_1 \xi_{j+1} - I_3}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right\} = \\ \sum_{j=1}^{N_B} \left\{ \Phi_{j+1} \frac{I_4 - \xi_j I_2}{\xi_{j+1} - \xi_j} + \Phi_j \frac{I_2 \xi_{j+1} - I_4}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right\} \quad - \quad & \sum_{j=1}^{N_F} \left\{ \Psi_{j+1} \frac{I_3 - \xi_j I_1}{\xi_{j+1} - \xi_j} + \Psi_j \frac{I_1 \xi_{j+1} - I_3}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right\} \end{aligned} \tag{II.5.13}$$

pour les points i de la surface libre, et

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_F} \left\{ \Phi_{j+1} \frac{I_4 - \xi_j I_2}{\xi_{j+1} - \xi_j} + \Phi_j \frac{I_2 \xi_{j+1} - I_4}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right\} \quad - \quad & \sum_{j=1}^{N_B} \left\{ \Psi_{j+1} \frac{I_3 - \xi_j I_1}{\xi_{j+1} - \xi_j} + \Psi_j \frac{I_1 \xi_{j+1} - I_3}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right\} = \\ c(i)\Phi_i + \sum_{j=1}^{N_F} \left\{ \Psi_{j+1} \frac{I_3 - \xi_j I_1}{\xi_{j+1} - \xi_j} + \Psi_j \frac{I_1 \xi_{j+1} - I_3}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right\} \quad - \quad & \sum_{j=1}^{N_B} \left\{ \Phi_{j+1} \frac{I_4 - \xi_j I_2}{\xi_{j+1} - \xi_j} + \Phi_j \frac{I_2 \xi_{j+1} - I_4}{\xi_{j+1} - \xi_j} \right\} \end{aligned} \tag{II.5.14}$$

pour les points i des parois solides. Ψ fait ici référence à la dérivée normale du potentiel $\partial\Phi/\partial n$, et les termes I_1, I_2, I_3 et I_4 sont définis par

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \ln(\sqrt{x^2+\vartheta^2})dx \\
&= \frac{1}{2}\xi_2 \ln(\xi_2^2+\vartheta^2) - \xi_2 + \vartheta \arctan(\frac{\xi_2}{\vartheta}) - \frac{1}{2}\xi_1 \ln(\xi_1^2+\vartheta^2) + \xi_1 - \vartheta \arctan(\frac{\xi_1}{\vartheta}) \\
I_2 &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\vartheta}{x^2+\vartheta^2}dx \\
&= \arctan(\frac{\xi_2}{\vartheta}) - \arctan(\frac{\xi_1}{\vartheta}) \\
I_3 &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} x\ln(\sqrt{x^2+\vartheta^2})dx \\
&= \frac{1}{4}\xi_2^2 \ln(\xi_2^2+\vartheta^2) + \frac{1}{4}\vartheta^2 \ln(\xi_2^2+\vartheta^2) - \frac{1}{4}\xi_2^2 - \frac{1}{4}\xi_1^2 \ln(\xi_1^2+\vartheta^2) - \frac{1}{4}\vartheta^2 \ln(\xi_1^2+\vartheta^2) + \frac{1}{4}\xi_1^2 \\
I_4 &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{x.\vartheta}{x^2+\vartheta^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\vartheta \ln(\xi_2^2+\vartheta^2) - \frac{1}{2}\eta \ln(\xi_1^2+\vartheta^2)
\end{aligned} \tag{II.5.15}$$

Ainsi, les équations (II.5.13) et (II.5.14) constituent un système linéaire, dont tous les termes connus sont écrits dans les membres de gauches, et toutes les inconnues dans les membres de droite. La résolution de ce système permet de connaître Φ et $\partial\Phi/\partial n$ partout sur les frontières du domaine Ω. Si besoin est, on peut dès lors utiliser l'équation (II.5.5) et obtenir le potentiel vitesse en tous points du fluide.

5.2.2 Conditions aux limites

Comme nous l'avons vu, la résolution du problème nécessite de connaître les valeurs du potentiel Φ sur la surface, et de sa dérivée normale $\partial\Phi/\partial n$ sur les parois solides. Ces valeurs sont obtenues à chaque instant grâce aux conditions aux limites, qui doivent être exprimées sur les contours du domaine fluide. Etant donnée la géométrie de notre problème, ces conditions sont exprimées par des conditions de mur sur le batteur et les parois, et par les conditions cinématique et dynamique de surface libre.

a/ Condition de mur

Nous nous plaçons ici dans le cadre de la théorie potentielle. Par conséquent, il n'existe pas de contrainte sur la composante tangentielle de la vitesse sur les parois. La condition de mur s'exprime par la condition d'imperméabilité

$$\boldsymbol{\nabla}\Phi \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}, \tag{II.5.16}$$

où $\boldsymbol{V}$ désigne le vecteur vitesse de la paroi. Pour notre problème, la vitesse des parois est une donnée du problème. Par conséquent, ces termes sont connus et fixés par les conditions que nous nous donnons.

b/ Condition de surface libre

Au niveau de la surface libre, on peut introduire une définition cinématique. Les particules fluides de la surface libre doivent rester sur cette surface. Il faut donc exprimer une condition de non-pénétration, bien que nous ne connaissions pas *a priori* sa position. Ainsi, en introduisant une description Lagrangienne de la surface libre,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \end{aligned} \tag{II.5.17}$$

où $\mathrm{d}/\mathrm{d}t = \partial/\partial t + \boldsymbol{\nabla}\Phi \cdot \boldsymbol{\nabla}$ correspond à une dérivée particulaire. En utilisant cette description de la surface libre, la condition de non-pénétration est automatiquement satisfaite. Puisque la position de la surface libre est inconnue, nous avons besoin d'une condition supplémentaire. La condition dynamique de surface libre consiste à supposer que la pression à la surface sera égale à la pression atmosphérique. En introduisant cela dans l'équation de Bernoulli (II.5.4), nous obtenons

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\Phi^2 + gz + p\right), \tag{II.5.18}$$

où p désigne la pression atmosphérique. En réalisant une intégration temporelle de ces équations, nous connaissons la nouvelle position de la surface libre, et la valeur de Φ sur cette surface. Cette intégration temporelle est réalisée au moyen du schéma classique de Runge-Kutta d'ordre quatre, à pas constant.

5.3 Méthode pseudo-spectrale (HOSM)

5.3.1 Conditions aux limites

Ici, les équations à résoudre sont celles que nous avons déjà présentées, mais la surface libre est décrite de la manière suivante

$$z = \eta(x,t) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_F \tag{II.5.19}$$

Ceci interdit notamment de représenter un déferlement, puisque cette fonction ne peut fournir deux valeurs de z pour un x donné. Cette description est intrinsèquement monovaluée. On introduit également le potentiel à la surface Φ^s donné par

$$\Phi^s(x,t) = \Phi(x, z = \eta(x,t), t). \tag{II.5.20}$$

En introduisant ce potentiel à la surface Φ^s dans les conditions cinématique et dynamique de surface libre, que nous avons écrites dans le cadre de la méthode intégrale, nous obtenons, en adimensionnel,

$$\begin{aligned} \eta_t + \Phi^s_x \eta_x - (1+\eta_x^2)\Phi_z(x, z=\eta, t) &= 0 \\ \Phi^s_t + \eta + \frac{1}{2}\Phi_x^{s^2} - \frac{1}{2}(1+\eta_x^2)\Phi_z^2(x, z=\eta, t) &= -p \end{aligned} \tag{II.5.21}$$

ou p désigne la pression atmosphérique. La condition de fond est ici remplacée par une hypothèse de profondeur infinie, c'est-à-dire que $\nabla\Phi \to 0$ lorsque $z \to -\infty$. Le domaine est limité à ses bords par une hypothèse de périodicité, imposée par le traitement spectral des équations.

5.3.2 Résolution du problème

En supposant que Φ et η sont des quantités de l'ordre de $O(\varepsilon)$, où ε est la cambrure de la vague, nous développons Φ en série de puissances de ε.

$$\Phi(x,z,t) = \sum_{m=1}^{M} \Phi^{(m)}(x,z,t) \tag{II.5.22}$$

où $\Phi^{(m)}$ est une quantité de l'ordre de grandeur de $O(\epsilon^{(m)})$. En développant chaque $\Phi^{(m)}$ en série de Taylor autour de la position $z=0$, nous obtenons

$$\Phi^s(x,t) = \Phi(x,z=\eta,t) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=0}^{M-m} \frac{\eta^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\Phi^{(m)}(x,z=0,t). \tag{II.5.23}$$

En pratique, le rayon de convergence de cette série nous fournit la cambrure maximale à considérer. D'autre part, en développant cette expression, et en regroupant tous les termes du même ordre de grandeur, nous obtenons un système de conditions aux limites pour les inconnues $\Phi^{(m)}$.

$$\Phi^{(m)}(x,z=0,t) = R^{(m)},\ m=1,\dots,M \tag{II.5.24}$$

avec

$$\begin{aligned} R^{(1)} &= \Phi^s \\ R^{(m)} &= -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\Phi^{(m-k)}(x,z=0,t),\ m=2,\dots,M \end{aligned}$$

On se ramène à un problème de valeurs aux limites pour $\Phi^{(m)},\ m=1,\dots,M$ dans le domaine $z\le 0$. En décomposant chaque $\Phi^{(m)}$ sur une base de modes propres Ψ_n satisfaisant le problème linéarisé, ainsi que la condition de fond, les $\Phi^{(m)}$ se réécrivent

$$\Phi^{(m)}(x,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(m)}(t)\Psi_n(x,z),\ z\le 0, \tag{II.5.25}$$

où, en pratique, le nombre de modes propres est tronqué à une valeur N. En introduisant cette notation dans le système précédent, puis dans l'équation (II.5.23), nous obtenons

$$\Phi^s(x,t) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=0}^{M-m} \frac{\eta^k}{k!}\sum_{n=1}^{N}\Phi_n^{(m)}(t)\frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}}\Psi_n(x,z=0), \tag{II.5.26}$$

qui, en l'introduisant dans les conditions de surface libre (II.5.21), nous fournit le résultat final

$$\begin{aligned} &\eta_t + \Phi_x^s\eta_x - (1+\eta_x^2)\left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=0}^{M-m}\frac{\eta^k}{k!}\sum_{n=1}^{N}\Phi_n^{(m)}(t)\frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}}\Psi_n(x,z=0)\right] = 0 \\ &\Phi_t^s + \eta + \frac{1}{2}{\Phi_x^s}^2 - \frac{1}{2}(1+\eta_x^2)\left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=0}^{M-m}\frac{\eta^k}{k!}\sum_{n=1}^{N}\Phi_n^{(m)}(t)\frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}}\Psi_n(x,z=0)\right]^2 = -p \end{aligned} \tag{II.5.27}$$

Ces équations sont les équations d'évolution de Φ^s et η en termes d'amplitudes modales. Ici encore, elles sont intégrées au moyen d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre, à pas constant.

Chapitre 6

Approche diphasique

Dans le chapitre précédent, nous avons détaillé les méthodes potentielles permettant de décrire les écoulements à surface libre qui nous intéressent. Nous présentons ici une méthode diphasique, permettant de traiter la surface de l'eau comme une interface entre air et eau, et non plus comme une simple surface libre. De plus, cette description abandonne l'hypothèse d'écoulement irrotationnel. Cette approche permet donc la résolution complète du problème, incluant la simulation de la structure de l'écoulement aérien, tout en réduisant significativement les hypothèses de base.

6.1 Equations générales du mouvement

Le problème qui nous intéresse ici consiste à suivre la position d'une interface entre deux fluides non miscibles. Pour cela, il est nécessaire de résoudre les équations du mouvement dans les deux phases, de décrire l'interface dans l'espace, et de caractériser son mouvement. La description du mouvement nécessite de réaliser quelques hypothèses. Notamment, les deux fluides sont supposés être newtoniens. Nous considérons qu'ils sont immiscibles, et incompressibles. Nous négligeons également tous les transferts de chaleur. Sous ces hypothèses, le mouvement de chacun des fluides est décrit par les équations de Navier-Stokes, qui s'écrivent

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}\right)=-\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{\nabla}\left(2\mu\mathbb{D}\right)+\boldsymbol{f}_v, \tag{II.6.1}$$

où $\boldsymbol{u}$ désigne la vitesse locale du fluide, p la pression locale, ρ et μ sont respectivement la masse volumique et la viscosité, $\boldsymbol{f}_v$ désigne une force volumique, dans notre problème la gravité ($\boldsymbol{f}_v=\rho\boldsymbol{g}$), et où $\mathbb{D}$ est le tenseur des taux de déformation, défini par

$$\mathbb{D}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^T\right). \tag{II.6.2}$$

$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^T$ désigne ici la transposée du tenseur $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}$. En ajoutant à ces équations la condition d'incompressibilité, qui s'écrit

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}=0 \tag{II.6.3}$$

on obtient le système d'équations permettant de décrire les mouvements fluides, sous ces hypothèses. Cependant, notre problème fait intervenir deux fluides. Pour les différencier, il est nécessaire d'introduire une fonction caractéristique χ. En effet, cette fonction prend pour valeur 1 dans une fluide, et 0 dans l'autre. En l'absence de transfert de masse, cette fonction se comporte comme un scalaire passif, et

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \chi = 0. \tag{II.6.4}$$

La discontinuité de χ correspond à la position de l'interface. Ainsi, on peut décrire les mouvements de l'interface grâce à une définition cinématique de cette dernière. En effet, si l'on note $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ les vitesses des fluides 1 et 2 respectivement, et si l'on désigne par $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{t}$ les vecteurs normaux et tangents de l'interface, on obtient

$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{n}, \tag{II.6.5}$$

$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{t} = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{t}. \tag{II.6.6}$$

L'équation (II.6.5) exprime le fait que la composante normale de la vitesse de l'interface est égale aux composantes normales des vitesses des fluides présents de part et d'autre de l'interface. L'équation (II.6.6), elle, exprime la condition de non glissement des fluides au niveau de l'interface, puisque les composantes tangentielles des deux fluides présents de chaque côté de l'interface sont égales. De plus, il faut exprimer la continuité des contraintes fluides en traversant l'interface. Il y a en effet continuité de la contrainte tangentielle. Si on néglige la tension de surface, il y a également continuité de la contrainte normale. On obtient ainsi la condition dynamique

$$\delta \left\{ p\boldsymbol{n} + 2\mu \mathbb{D} \cdot \boldsymbol{n} \right\}_S = 0, \tag{II.6.7}$$

où $\delta\{\}_S$ désigne la discontinuité d'une valeur en traversant l'interface. En écrivant cette condition en projection sur $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t})$, on obtient alors

$$\delta \left\{ p + 2\mu \boldsymbol{n}.\mathbb{D}.\boldsymbol{n} \right\}_S = 0, \tag{II.6.8}$$

$$\text{et} \quad \delta \left\{ 2\mu \boldsymbol{t}.\mathbb{D}.\boldsymbol{n} \right\}_S = 0. \tag{II.6.9}$$

L'équation (II.6.8) permet notamment de retrouver, dans un cas statique, la condition de continuité du champ de pression

$$p_1 = p_2 \tag{II.6.10}$$

de part et d'autre de l'interface. En intégrant l'équation (II.6.1), on constate que l'on retrouve les équations (II.6.8) et (II.6.9). Ceci signifie que le problème à l'interface est intrinsèquement décrit par le système d'équations (II.6.1,II.6.3). En revanche, une méthode de suivi d'interface est nécessaire pour décrire la condition cinématique (II.6.5,II.6.6).

6.2 Méthode de suivi d'interface

Comme nous l'avons déjà évoqué, la résolution de notre problème nécessite de décrire la géométrie de l'interface, et de caractériser son mouvement. La littérature fournit de nombreuses méthodes permettant de réaliser cette description. Ces méthodes sont très différentes les unes des autres, et le choix d'une de ces méthodes doit être fait en fonction de la nature du problème. La méthode que nous avons choisie ici présente l'intérêt d'être une méthode implicite. En effet, l'interface n'est pas décrite comme une surface qui traverse le maillage, mais elle est décrite au moyen d'une fonction de phase. Le suivi de l'évolution de cette fonction de phase permet

de décrire l'évolution de l'interface. Traditionnellement, les méthodes de type Volume of Fluid (VoF) utilisent un champ de fraction volumique C, défini dans la cellule (i, j) par

$$C_{i,j} = \frac{1}{hx.hz} \int_0^{hx} \int_0^{hz} \chi(x, z) \mathrm{d}x\mathrm{d}z, \tag{II.6.11}$$

où hx et hz désignent les dimensions horizontales et verticales de la cellule (i, j). Cette fraction volumique prend pour valeur 0 ou 1 dans toute cellule ne contenant que du fluide 1, ou que du fluide 2. Dans les cellules traversées par l'interface, en revanche, cette fraction volumique prend une valeur strictement comprise entre 0 et 1. A chaque pas de temps, la position de l'interface n'est pas connue, et elle doit donc être reconstruite. Cette interface doit ensuite être advectée par l'écoulement. De nombreuses méthodes permettant de réaliser les étapes de reconstruction et d'advection ont été développées depuis l'introduction des méthodes de type VoF, dans les années 70. Ces méthodes sont présentées Figure (II.6.1). Ainsi, à l'origine, la méthode SLIC (Simple Line Interface Calculation) a été introduite par Noh & Woodward (1976). Cette méthode utilisait des segments de droite alignés avec l'une des directions du maillage, comme l'illustre la Figure (6.1(b)). Hirt & Nicholls (1981) ont par la suite développé une méthode de reconstruction d'interface en escaliers. Cette méthode est illustrée par la Figure (6.1(c)). Une autre méthode possible est la méthode PLIC (Piecewise Linear Interface Calculation) ou CIAM (Calcul d'Interface Affine par Morceaux), en Français. Cette méthode, présentée en Figure (6.1(d)), réalise une estimation affine par morceaux de l'interface. Une méthode plus récente, introduite par Ashgriz & Poo (1991), est la méthode FLAIR. Cette dernière reconstruit une interface affine par morceaux, dont les segments sont connectés au niveau des faces des cellules. Cette méthode est présentée en Figure (6.1(e)). Elle présente l'avantage d'obtenir des interfaces plus régulières, mais elle impose une contrainte intrinsèquement incompatible avec la conservation de la masse. Compte tenu du problème que nous considérons, et au regard de l'efficacité de ces différentes méthodes, nous avons décidé d'utiliser ici la méthode PLIC, ou CIAM, introduite par Li (1995), et que nous présentons ici.

Comme nous l'avons évoqué, la première étape de cette méthode consiste à reconstruire l'interface. Pour cela, nous commençons par estimer son vecteur normal. Ainsi,

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\nabla} C. \tag{II.6.12}$$

Par conséquent, pour notre cas bidimensionnel, nous avons

$$\boldsymbol{n}_{i+1/2,j+1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2hx}(C_{i+1,j} - C_{i,j} + C_{i+1,j+1} - C_{i,j+1}) \\ \\ \frac{1}{2hz}(C_{i,j+1} - C_{i,j} + C_{i+1,j+1} - C_{i+1,j}) \end{pmatrix}. \tag{II.6.13}$$

On peut donc définir le vecteur normal de l'interface au centre de la cellule, en écrivant que

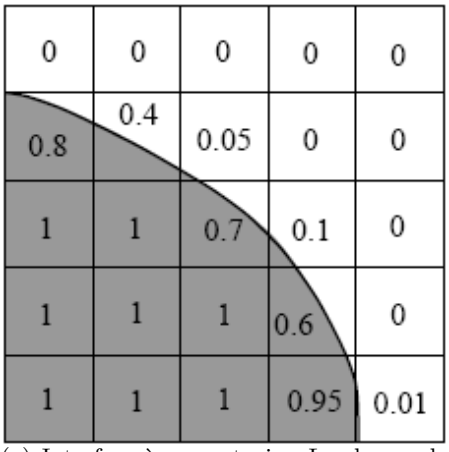
$$\boldsymbol{n}_{i,j} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{n}_{i+1/2,j+1/2} + \boldsymbol{n}_{i+1/2,j-1/2} + \boldsymbol{n}_{i-1/2,j-1/2} + \boldsymbol{n}_{i-1/2,j+1/2}). \tag{II.6.14}$$

Une fois ce vecteur connu, on connaît l'ensemble des droites admettant ce vecteur pour normale. En effet, les droites d'équations

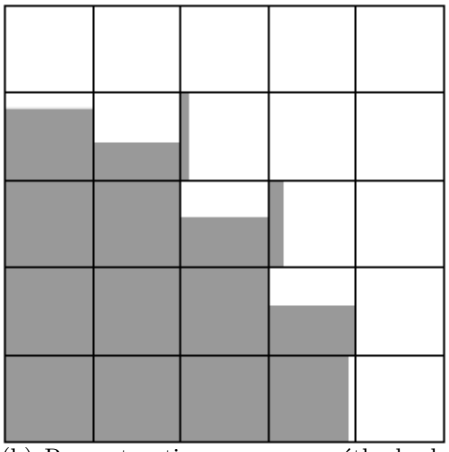
$$n_1 x + n_2 z = \alpha, \quad \alpha \epsilon \mathbb{R}, \tag{II.6.15}$$

sont toutes perpendiculaires au vecteur $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$. Cependant, il existe une unique droite appartenant à cette famille, et délimitant une aire A égale à $C_{i,j}$ dans la cellule considérée. Le paramètre α correspondant à cette droite défini donc le segment qui nous interesse, et nous pouvons identifier α en inversant un système du type

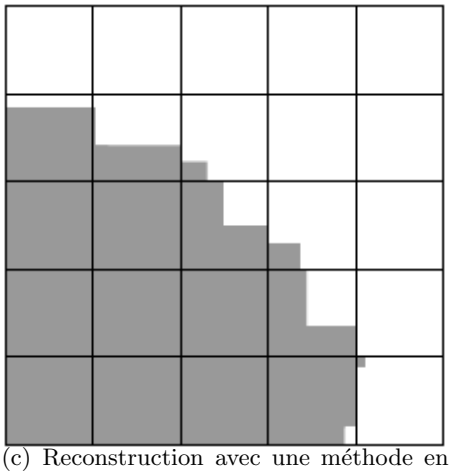
$$A = \mathfrak{F}(\alpha, n_1, n_2, hx, hz). \tag{II.6.16}$$



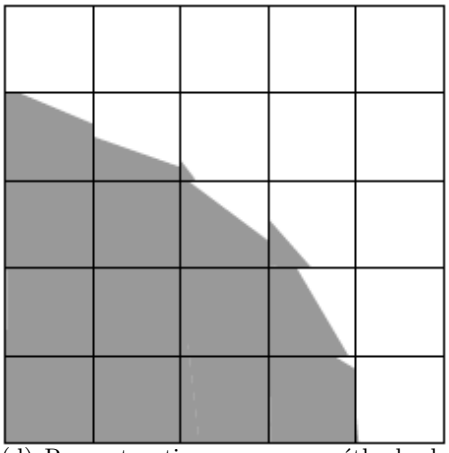
(a) Interface à reconstruire. Le champ de fraction volumique correspondant est indiqué.



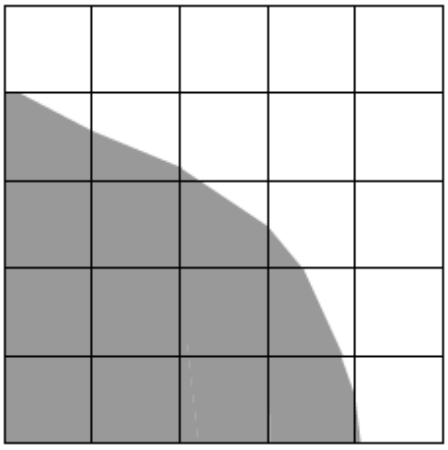
(b) Reconstruction avec une méthode de type SLIC.



(c) Reconstruction avec une méthode en escalier.



(d) Reconstruction avec une méthode de type PLIC.



(e) Reconstruction avec une méthode de type FLAIR.

FIGURE II.6.1 – Illustration des différents types de méthodes de reconstruction d'interfaces. Figure extraite de Gueyffier (2000).

De pures considérations géométriques nous permettent d'écrire, dans tous les cas, la valeur de l'aire qui nous intéresse :

$$A = \frac{\alpha^2}{2n_1n_2}\left[1 - \mathrm{H}(\alpha - hxn_1)\left(\frac{\alpha - hxn_1}{\alpha}\right)^2 - \mathrm{H}(\alpha - hzn_2)\left(\frac{\alpha - hzn_2}{\alpha}\right)^2\right] \tag{II.6.17}$$

où H(.) désigne la fonction de Heaviside. On peut à présent procéder à l'étape d'advection de l'interface. La méthode introduite par Li (1995) s'appuie sur une advection lagrangienne à pas fractionnaires. En effet, à chaque pas de temps, l'interface est advectée dans une direction, puis dans l'autre. Intéressons nous ici au pas dans la direction x, généralisable à l'autre direction de l'espace. Désignons par u_1 et u_2 les composantes horizontales respectives de la vitesse du fluide en $x = 0$ et en $x = hx$. On peut notamment supposer que la vitesse dans la cellule admet une variation linéaire, c'est-à-dire que

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{hx}\right)u_1 + \frac{x}{hx}u_2. \tag{II.6.18}$$

Ainsi, un point $M(x, z)$ de l'interface aura pour coordonnées, après advection par ce champ de vitesse,

$$\begin{aligned} x' &= x + \delta t.u(x) \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{II.6.19}$$

δt faisant naturellement référence au pas de temps. L'image du plan reconstruit sera alors l'image de l'équation (II.6.15) par la transformation (II.6.19). Par conséquent, son équation sera

$$n_1'x' + n_2'z' = \alpha', \tag{II.6.20}$$

où n_1', n_2' et α' sont définis par

$$n_1' = \frac{n_1}{1 + (u_2 - u_1)\delta t/hx} \tag{II.6.21}$$

$$n_2' = n_2 \tag{II.6.22}$$

$$\alpha' = \alpha + \frac{n_1\delta t u_1}{1 + (u_2 - u_1)\delta t/hx} \tag{II.6.23}$$

Cette nouvelle équation étant connue, il devient possible d'estimer $\Phi_{i,j}^-$ et $\Phi_{i,j}^+$, les flux algébriques de fraction volumique entrant dans la cellule (i, j) et provenant des cellules voisines $(i-1, j)$ et $(i+1, j)$. Si l'on désigne par $\Phi_{i,j}^0$ la fraction volumique présente au début du pas fractionnaire, on obtient

$$C_{i,j} = \Phi_{i,j}^0 + \Phi_{i,j}^- + \Phi_{i,j}^+ \tag{II.6.24}$$

Il est à noter que cette méthode décrit les changements de pente de l'interface, et prend ainsi en compte les étirements et les compressions de l'interface.

6.3 Résolution du problème

6.3.1 Méthode de projection

Afin de résoudre le problème considéré, il est nécessaire de discrétiser les équations du mouvement (II.6.1,II.6.3). Pour cela, nous avons recours à un maillage de type "Marker And Cell" (MAC). La géométrie de telles mailles est présentée Figure (II.6.2). Nous notons hx et hz les longueurs horizontale et verticale de la maille. Le pas de temps est noté δt. De plus, afin de faciliter l'obtention d'un schéma discret conservatif, on peut réécrire l'équation (II.6.1) sous la forme

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}p + \boldsymbol{\nabla}\left(2\mu\mathbb{D}\right) + \rho\boldsymbol{g}. \tag{II.6.25}$$

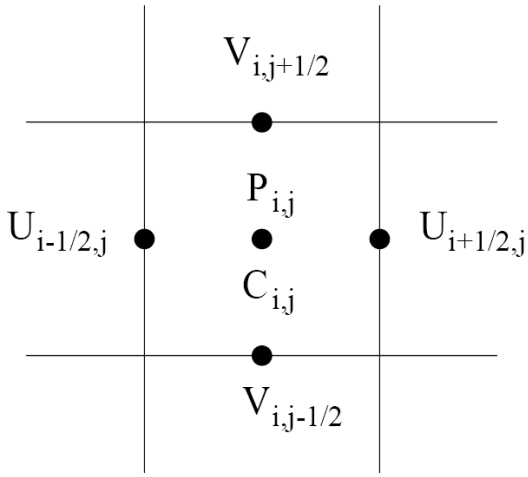


FIGURE II.6.2 – Géométrie d'une maille de type "Marker And Cell" (MAC).

Dès lors, la résolution de notre problème se divise en plusieurs étapes, permettant d'obtenir le champ de vitesse $\boldsymbol{u}^{(n+1)}$ du pas de temps $(n+1)$, connaissant tous les champs au pas de temps (n). Pour cela, on a recours à une méthode de projection, qui consiste à obtenir un champ de vitesse intermédiaire, noté $\boldsymbol{u}^*$, dans un premier temps, que l'on utilise par la suite pour résoudre la condition d'incompressibilité. Ainsi,

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial t} = -\rho \boldsymbol{u}^{(n)} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u}^{(n)} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(2\mu \mathbb{D}^{(n)}\right) + \rho \boldsymbol{g}, \tag{II.6.26}$$

ou $\boldsymbol{u}^{(n)}$ désigne le champ de vitesse au pas de temps (n). Cette équation étant valable dans tout le domaine fluide, la masse volumique ρ et la viscosité μ sont des fonctions d'espace que l'on obtient grâce à la fonction de phase χ. On a, en effet,

$$\rho = \chi \rho_1 + (1-\chi)\rho_2, \tag{II.6.27}$$

$$\mu = \chi \mu_1 + (1-\chi)\mu_2. \tag{II.6.28}$$

On utilise alors un schéma aux différences finies centré standard pour réécrire l'équation (II.6.26) sous forme discrète. Ainsi, en notant $\boldsymbol{u} = (u, v)$, et $\rho \boldsymbol{g} = (f_v^x, f_v^z)$ les composantes horizontale et verticale de la vitesse, et des forces volumiques, cette équation devient, en projection

$$\begin{aligned} &\frac{\rho_{i+1/2,j}}{\delta t}(u^*_{i+1/2,j} - u^{(n)}_{i+1/2,j}) + \rho_{i+1/2,j}(\nabla_x uu)^{(n)}_{i+1/2,j} + \rho_{i+1/2,j}(\nabla_z vu)^{(n)}_{i+1/2,j} = \\ &\qquad (\nabla_x(\mu D_{xx}))^{(n)}_{i+1/2,j} + (\nabla_y(\mu D_{xz}))^{(n)}_{i+1/2,j} + f^x_{v_{i+1/2,j}} \end{aligned} \tag{II.6.29}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\rho_{i,j+1/2}}{\delta t}(v^*_{i,j+1/2} - v^{(n)}_{i,j+1/2}) + \rho_{i,j+1/2}(\nabla_x uv)^{(n)}_{i,j+1/2} + \rho_{i,j+1/2}(\nabla_z vv)^{(n)}_{i,j+1/2} = \\ &\qquad (\nabla_x(\mu D_{zx}))^{(n)}_{i,j+1/2} + (\nabla_y(\mu D_{zz}))^{(n)}_{i,j+1/2} + f^z_{v_{i,j+1/2}} \end{aligned} \tag{II.6.30}$$

dans laquelle les différents opérateurs de différences finies sont définis par

$$\nabla_x \phi_{i,j} = \frac{1}{hx}\left(\phi_{i+1/2,j} - \phi_{i-1/2,j}\right) \tag{II.6.31}$$

$$\nabla_z \phi_{i,j} = \frac{1}{hz}\left(\phi_{i,j+1/2} - \phi_{i,j-1/2}\right) \tag{II.6.32}$$

$$D_{xx} = \Delta_x u \tag{II.6.33}$$

$$D_{zz} = \Delta_z v \tag{II.6.34}$$

$$D_{xz} = \frac{1}{2}(\nabla_x v + \nabla_z u) \tag{II.6.35}$$

$$D_{zx} = \frac{1}{2}(\nabla_x v + \nabla_z u) \tag{II.6.36}$$

et où les quantités non définies sont obtenues par interpolation,

$$uu_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j})^2 \tag{II.6.37}$$

$$uv_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j})(v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2}) \tag{II.6.38}$$

$$vv_{i,j} = \frac{1}{4}(v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2})^2. \tag{II.6.39}$$

Les équations (II.6.29) et (II.6.30) nous permettent donc d'obtenir le champ de vitesse intermédiaire $\boldsymbol{u}^*$. Cependant, ce champ n'est que partiellement solution du système, puisqu'il n'est pas de divergence nulle.

6.3.2 Résolution de l'équation de type Poisson

Connaissant le champ de vitesse intermédiaire $\boldsymbol{u}^*$ obtenu dans la section précédente, on souhaite à présent obtenir le champ de vitesses $\boldsymbol{u}^{(n+1)}$ au pas de temps $(n+1)$. Ce dernier doit vérifier la condition d'incompressibilité (II.6.3). Ainsi, le champ de vitesses $\boldsymbol{u}^{(n+1)}$ défini par

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}^* - \frac{\delta t}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p \tag{II.6.40}$$

sera de divergence nulle dès que le champ de pression p sera solution du problème de type Poisson

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p\right) = \dfrac{1}{\delta t}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}^* & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\nabla} p\cdot\boldsymbol{n} = -\dfrac{\rho}{\delta t}\left(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^*\right)\cdot\boldsymbol{n} = \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{n} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{II.6.41}$$

où Ω est le domaine fluide, $\partial\Omega$ sa frontière, et $\mathbf{n}$ la normale à cette frontière. En conservant les notations (II.6.31) et (II.6.32) introduites dans la section précédente, l'équation (II.6.41) devient, sous forme discrète,

$$\begin{aligned} \frac{hz}{\rho_{x,i+1/2,j}}(\nabla_x p)_{i+1/2,j} &- \frac{hz}{\rho_{x,i-1/2,j}}(\nabla_x p)_{i-1/2,j} + \\ \frac{hx}{\rho_{z,i,j+1/2}}(\nabla_z p)_{i,j+1/2} &- \frac{hx}{\rho_{z,i,j-1/2}}(\nabla_z p)_{i,j-1/2} \\ &= \frac{hz}{\delta t}(u^*_{i+1/2,j} - u^*_{i-1/2,j}) + \frac{hx}{\delta t}(v^*_{i+1/2,j} - v^*_{i-1/2,j}) \end{aligned} \tag{II.6.42}$$

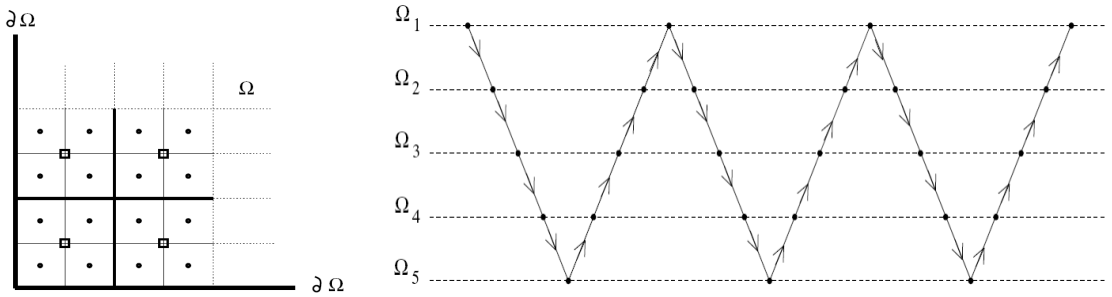


FIGURE II.6.3 – A Gauche : Extrapolation d'une grille grossière (□) à partir d'une grille fine (•). A Droite : Algorithme de V-cycle représenté ici sur 5 niveaux de grilles.

où $\rho_{x,i,j}$ et $\rho_{z,i,j}$ sont définis par

$$\rho_{x,i,j} = \frac{1}{2}\left(C_{i-1/2,j} + C_{i+1/2,j}\right)\rho_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\left(C_{i-1/2,j} + C_{i+1/2,j}\right)\right)\rho_2 \qquad \text{(II.6.43)}$$

$$\rho_{z,i,j} = \frac{1}{2}\left(C_{i,j-1/2} + C_{i,j+1/2}\right)\rho_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\left(C_{i,j-1/2} + C_{i,j+1/2}\right)\right)\rho_2. \qquad \text{(II.6.44)}$$

Ainsi, l'équation (II.6.42) se ramène sur tout le domaine Ω à un problème linéaire classique de la forme

$$\mathbb{A}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{B}. \qquad \text{(II.6.45)}$$

La résolution de cette équation constitue la difficulté majeure de notre approche. En effet, il s'agit d'un problème elliptique classique, dont l'inversion a été largement étudiée. L'inversion directe étant exclue pour des raisons de taille mémoire et de temps de calcul, de nombreuses méthodes itératives ont été développées. Parmi elles on pourra citer les méthodes de relaxation de Gauss-Seidel, ou encore de Jacobi. Ces méthodes présentent l'avantage d'être très simples à mettre en œuvre. Cependant, elles présentent des lacunes en terme de convergence, et donc de temps de calcul. En effet, si on représente l'erreur de la méthode, c'est-à-dire de l'écart entre la solution $\boldsymbol{p}$ et sa solution approchée $\tilde{\boldsymbol{p}}$, sur une base de Fourier, les taux de convergence ne sont pas du tout les mêmes selon la longueur d'onde considérée. Ainsi, Briggs (1987) et Wesseling (1992) ont observé que les méthodes de relaxation convergent très vite sur des composantes de longueurs d'ondes proches de la taille de la maille, et beaucoup moins vite sur les composantes de longueurs d'ondes très grandes devant cette dimension. Les méthodes multigrilles, que nous avons choisi d'utiliser ici, ont été développées pour résoudre ce problème. Ces méthodes font en effet appel à une hiérarchie de grilles de résolutions différentes. Ainsi, la méthode peut réaliser quelques itérations de relaxation sur des grilles de différentes tailles, permettant à la méthode de converger très rapidement sur un grand nombre de composantes de l'erreur. Les grilles grossières permettent en effet de réduire rapidement l'erreur régulière, tandis que les grilles fines permettent de réduire l'erreur oscillante très efficacement.

En pratique, on peut considérer dans un maillage différents niveaux de grilles, notés Ω_1, Ω_2, ..., Ω_N, où la grille la plus fine est Ω_1 et où N désigne le nombre de grilles. Sur chaque grille, les inconnues sont définies au centre des cellules, ce qui facilite le traitement des problèmes à interfaces, comme l'indique Wesseling (1992). La Figure (II.6.3), à gauche, indique comment la grille Ω_k est obtenue à partir de la grille Ω_{k-1}. Puisque les inconnues sont exprimées au centre des cellules, de nouveaux centres sont définis par interpolation sur la grille fine. Par conséquent, si la grille Ω_{k-1} contient $N_x \times N_y$ cellules, la grille Ω_k en contiendra $N_x/2 \times N_y/2$. Pour passer d'une grille à l'autre, nous pouvons définir des opérateurs de prolongation et de restriction. Ainsi, les grandeurs connues sur la grille Ω_k pourront être restreintes à la grille Ω_{k+1} par interpolation

grâce à l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{R}: \quad \Omega_k &\rightarrow \Omega_{k+1} \\ u^k &\mapsto u^{k+1} \end{aligned} \tag{II.6.46}$$

$$\text{avec} \quad u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4}\left(u_{2i,2j}^k + u_{2i-1,2j}^k + u_{2i-1,2j-1}^k + u_{2i,2j-1}^k\right)$$

De la même manière, un opérateur de prolongation simple s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: \quad \Omega_{k+1} &\rightarrow \Omega_k \\ u^{k+1} &\mapsto u^k \\ \text{avec} \quad u_{2i,2j}^k &= u_{i,j}^{k+1} \\ u_{2i-1,2j}^k &= u_{i,j}^{k+1} \\ u_{2i-1,2j-1}^k &= u_{i,j}^{k+1} \\ u_{2i,2j-1}^k &= u_{i,j}^{k+1} \end{aligned} \tag{II.6.47}$$

Ainsi, sur chaque grille, on peut définir le problème de Poisson

$$\mathbb{A}_k \boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{B}_k. \tag{II.6.48}$$

Introduisons également les quantités

$$\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{p}_k - \tilde{\boldsymbol{p}_k}, \tag{II.6.49}$$

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{B}_k - \mathbb{A}_k \tilde{\boldsymbol{p}_k}, \tag{II.6.50}$$

dans lesquelles $\boldsymbol{p}_k$ désigne la solution exacte du problème, et $\tilde{\boldsymbol{p}_k}$ désigne sa solution approchée. On constate que $\boldsymbol{e}_k$ et $\boldsymbol{r}_k$ sont également solutions du problème de Poisson (II.6.48). Ainsi, l'algorithme de V-cycle réalise une convergence successive sur différentes longueurs d'ondes caractéristiques de ces erreurs. Cet algorithme comporte différentes étapes, organisées de la manière suivante.

i). Cette méthode étant itérative, il est nécessaire de connaître une valeur initiale de la pression pour débuter l'algorithme. La valeur naturellement choisie est la valeur de la pression au pas de temps (n). Ainsi, le premier résidu est initialisé à la valeur $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{B} - \mathbb{A}\boldsymbol{p}^{(n)}$.

ii). Une phase de calcul de l'erreur est mise en oeuvre itérativement sur les différentes grilles, de la grille la plus fine à la grille la plus grossière :
- La valeur initiale de l'erreur $\boldsymbol{e}_k$ est imposée nulle. On réalise dès lors un petit nombre d'itérations α_k de la méthode de relaxation sur l'équation $\mathbb{A}_k \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{r}_k$, ce qui nous fournit une première approximation de $\boldsymbol{e}_k$.
- L'obtention de $\boldsymbol{e}_k$ nous permet de calculer une valeur finale de résidu $\boldsymbol{r}_k^f = \boldsymbol{r}_k - \mathbb{A}_k \boldsymbol{e}_k$.
- Le résidu $\boldsymbol{r}_k^f$ ainsi obtenu est restreint à la grille Ω_{k+1}, grâce à l'opérateur de restriction $\boldsymbol{r}_{k+1} = \mathcal{R}_k^{k+1} \boldsymbol{r}_k^f$ et la démarche est reprise sur cette grille.

iii). Lorsque la grille Ω_N est atteinte, et que l'on connaît la valeur de $\boldsymbol{r}_N$, on effectue α_N itérations de la méthode de relaxation, et on obtient l'erreur $\boldsymbol{e}_N$ sur cette grille.

iv). L'erreur obtenue sur les grilles les plus grossières, une phase de prolongation de cette erreur sur les grilles les plus fines est mise en oeuvre.

- Lorsque l'on connaît la valeur de l'erreur sur la grille Ω_{k+1}, on peut la prolonger sur la grille Ω_k grâce à l'opérateur de prolongation $\mathcal{P}_{k+1}^k$. On obtient ainsi une nouvelle estimation de l'erreur corrigée $\boldsymbol{e}_k^c = \boldsymbol{e}_k + \mathcal{P}_{k+1}^k \boldsymbol{e}_{k+1}$.
- On effectue alors un nombre restreint d'itérations β_k de la méthode de relaxation sur l'équation $\mathbb{A}_k \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{r}_k$, en prenant $\boldsymbol{e}_k^c$ comme valeur initiale. On obtient ainsi une nouvelle valeur de l'erreur $\boldsymbol{e}_k$ sur la grille Ω_k.

v). Une fois la grille la plus fine atteinte, l'erreur obtenue est ajoutée à la pression initiale $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^{(n)} + \boldsymbol{e}_1$. Un test est alors réalisé sur l'erreur. En effet, si $||\boldsymbol{e}_1||_\infty \geq \varepsilon$, un V-cycle est recommencé depuis l'étape (ii). Sinon, la condition de convergence est vérifiée, et la méthode est considérée comme ayant convergé.

Cet algorithme est représenté schématiquement sur la Figure (II.6.3). On y présente trois V-cycles de l'algorithme défini sur cinq niveaux de grilles. La phase descendante correspond à la phase de restriction, permettant de capturer les grandes longueurs d'onde de l'erreur, tandis que la phase montante correspond à la phase de prolongation, permettant d'affiner la convergence ainsi obtenue pour de plus petites longueurs d'onde. Dans notre code, la méthode de relaxation utilisée est une méthode classique de Gauss-Seidel.

Troisième partie

Interaction entre vent et vagues scélérates

Table des matières

7 Vagues scélérates générées par focalisation dispersive **63**

7.1 Touboul J., Giovanangeli J.-P., Kharif C., Pelinovsky E., Freak waves under the action of wind : experiments and simulations, *Eur. J. Mech. B/ Fluids,* **25**, p. 662–676, 2006 63

7.2 Touboul J., Peliniovsky E., Kharif C., Nonlinear Focusing Wave groups on current, *J. Kor. Soc. Coast. and Oce. Eng.,* **19(3)**, p. 222–227, 2007 79

7.3 Touboul J., Kharif C., Pelinovsky E., Giovanangeli J.-P., Miles' mechanism effect on gravity wave groups, *J. Fluid Mech.*, In Revision 86

7.4 Kharif C., Giovanangeli J.-P., Touboul J., Grare L., Pelinovsky E., Influence of wind on extreme wave events : Experimental and numerical approaches, *J. Fluid Mech.*, **594**, p. 209–247, 2008 98

8 Vagues scélérates générées par instabilité modulationnelle **139**

8.1 Touboul J., Kharif C., On the interaction of wind and extreme gravity waves due to modulational instability, *Phys. Fluids*, **18**, 108103, 2006 139

8.2 Touboul J., On the influence of wind on extreme wave events, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.,* **7**, p. 123–128, 2007 144

9 Approche diphasique **151**

9.1 Touboul J., Abid M., Kharif C., Simulation numérique d'ondes interfaciales en milieu océanique, *Proceedings du* 18ème *Congrès Français de Mécanique,* Grenoble, 2007 151

9.2 Perspectives de la méthode 158

Chapitre 7

Vagues scélérates générées par focalisation dispersive

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au comportement de vagues scélérates obtenues par focalisation dispersive sous l'action de vent. En partant de l'observation expérimentale, une approche modèle est utilisée pour expliquer le phénomène.

7.1 Touboul J., Giovanangeli J.-P., Kharif C., Pelinovsky E., Freak waves under the action of wind : experiments and simulations, *Eur. J. Mech. B/ Fluids,* 25, p. 662–676, 2006

Une approche expérimentale de l'influence du vent sur les vagues scélérates obtenues par focalisation dispersive dans la soufflerie de Luminy à mis en évidence une dérive du point de focalisation, une légère amplification de ces vagues, ainsi qu'une augmentation significative de leur durée de vie. Cette augmentation est directement liée à une forte asymétrie qui apparaît entre la phase de focalisation, et celle de défocalisation au cours de l'évolution du groupe de vagues. En effet, l'une des caractéristiques intéressantes est la faible influence du vent observée sur le cycle de focalisation-défocalisation avant le point de focalisation. Cette remarque nous incite, dans un premier temps, à négliger l'influence du courant induit par le vent, ainsi qu'à négliger l'influence du mécanisme de Miles dans le forçage atmosphérique, qui est théoriquement actif en permanence, au cours de l'évolution du groupe. Nous suspectons plutôt l'existence d'un phénomène de transfert d'énergie du vent au vagues aussi bref que violent. Nous pensons à un mécanisme à seuil, comme par exemple l'apparition de décollement dans l'écoulement aérien lorsqu'un seuil en cambrure est franchi. Nous suggérons donc une approche modèle de type Jeffreys (voir le chapitre I.3), mais qui ne serait active qu'au delà d'un seuil en pente locale du groupe de vagues. Une série de simulations numériques est alors conduite, fondée sur cette hypothèse. Nous utilisons la méthode BIEM pour réaliser une série d'expériences numériques similaire à celle conduite dans la soufflerie, en modélisant le vent grâce au mécanisme de Jeffreys modifié. Un comportement comparable est alors observé.

Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
European Journal of Mechanics B/Fluids 25 (2006) 662–676

Freak waves under the action of wind: experiments and simulations

J. Touboul [a,*], J.P. Giovanangeli [a], C. Kharif [a], E. Pelinovsky [b]

[a] *Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre (IRPHE), Technopôle de Chateau-Gombert, 49, rue Joliot Curie, BP 146, 13384 Marseille cedex 13, France*

[b] *Laboratory of Hydrophysics and Nonlinear Acoustics, Institute of Applied Physics, 46 Uljanov street, Nizhny Novgorod 603950, Russia*

Received 14 November 2005; accepted 20 February 2006

Available online 5 June 2006

Abstract

The freak wave formation due to the dispersive focusing mechanism is investigated experimentally without wind and in presence of wind. An asymmetric behaviour between the focusing and defocusing stages is found when the wind is blowing over the mechanically generated gravity wave group. This feature corresponds physically to the sustain of the freak wave mechanism on longer periods of time. Furthermore, a weak amplification of the freak wave and a shift in the downstream direction of the point where the waves merge are observed. The experimental results suggest that the Jeffreys' sheltering mechanism could play a key role in the coherence of the group of the freak wave. Hence, the Jeffreys' sheltering theory is introduced in a fully nonlinear model. The results of the numerical simulations confirm that the duration of the freak wave event increases with the wind velocity.
© 2006 Elsevier SAS. All rights reserved.

Keywords: Freak waves; Wind interaction; Jeffreys' sheltering mechanism

1. Introduction

Freak, or rogue waves, refer to giant waves appearing suddenly on the sea surface (waves from nowhere). Since they are unpredictable, they are responsible for an important number of marine disasters. Freak waves have been part of the marine folklore for centuries. But confronted to the increasing number of data gathered by oil and shipping industry, the oceanographers began to believe them. A large number of disasters connected to freak waves events have been reported by Mallory, Lawton and others [1,2]. These events took place in a large number of basins, in deep or shallow waters, with or without current.

Several mechanisms have been suggested to explain the formation of rogue waves in so various environments. Among them one can mention the wave-current interaction [3], the geometrical focusing, the dispersive focusing [4,5], the modulational instability or nonlinear focusing [6,7], the soliton collisions [8], etc. More details can be found in a paper by Kharif and Pelinovsky [9].

A statistical approach of the phenomenon has shown that these events could occur really more often than predicted by the linear theory, as it has been pointed out by an increasing number of oceanographers (see [10]). For long-crested waves (narrow angular distribution), a strong correlation is observed between the density increase of large waves and

* Corresponding author.
E-mail address: touboul@irphe.univ-mrs.fr (J. Touboul).

0997-7546/$ – see front matter © 2006 Elsevier SAS. All rights reserved.
doi:10.1016/j.euromechflu.2006.02.006

the spectral change (strong increase of the kurtosis). For short-crested waves (broad angular distribution), the extended Tayfun's distribution approximates quite well the distribution of extreme waves (see Fig. 9 in [10]).

The direct influence of wind has never been taken into account to investigate its role on the dynamics of freak waves. In order to fill in this gap, the paper reports on a series of experiments and numerical simulations designed to analyze the influence of wind on freak waves. Experiments conducted in the Large Air-Sea Interaction Facility (LASIF) of IRPHE, are first described. The results are presented and discussed. The analysis of the mechanism involved in the interaction between wind and freak waves suggests that Jeffreys' sheltering phenomenon could explain some features observed during the experiments. Hence, the Jeffreys' sheltering theory is introduced in a fully nonlinear model. A series of numerical simulations is performed for different values of the wind velocity. Finally, experimental and numerical results are qualitatively compared.

2. Experimental study

2.1. Set-up and experimental conditions

The experiments have been conducted in the large wind-wave tank of IRPHE at Marseille Luminy. Fig. 1 gives a schematic presentation of the facility. It is constituted of a closed loop wind tunnel located over a water tank 40 m long, 1 m deep and 2.6 m wide. The wind tunnel over the water flow is 40 m long, 3.2 m wide and 1.6 m high. The blower allows to produce wind speeds up to 14 m/s and a computer-controlled wave maker submerged under the upstream beach can generate regular or random waves in a frequency range from 0.5 Hz to 2 Hz. Particular attention has been taken to simulate pure logarithmic mean wind profile with constant shear layer over the water surface. A trolley installed in the test section allows to locate probes at different fetches all along the facility. The water surface elevation is determined by using three capacitive wave gauges of 0.3 mm outer diameter with DANTEC model 55E capacitance measuring units. A wave gauge is located at a fixed fetch of 1 m from the upstream beach. The other wave gauges are installed on the trolley in order to determine the water surface elevation at different fetches from the upstream beach. The typical sensitivity of the wave probes is of order 0.6 V/cm.

Freak waves are generated by means of a spatio-temporal focusing mechanism. This mechanism is based upon the dispersive behaviour of water waves. A linear approach of the problem would lead to consider sea surface as a superposition of linear waves of frequencies $\omega(x,t)$. According to Whitham (see [11]), the spatio-temporal evolution of the frequency of these components is governed by the following hyperbolic equation

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + c_{\mathrm{gr}}(\omega)\frac{\partial\omega}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

where c_{gr} is the group velocity. This equation can be solved by using the method of characteristics. Its solution is

$$\omega(x,t) = \omega_0(\tau), \quad v_g(\tau) = c_{\mathrm{gr}}\big(\omega_0(\tau)\big) \quad \text{on } t = \tau + x/v_g(\tau) \tag{2}$$

where ω_0 corresponds to the temporal frequency distribution of the wave train at $x = 0$. By differentiating the frequency, one obtains

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{v_g^2\,\mathrm{d}\omega_0/\mathrm{d}\tau}{v_g^2 - x\,\mathrm{d}v_g/\mathrm{d}\tau} \tag{3}$$

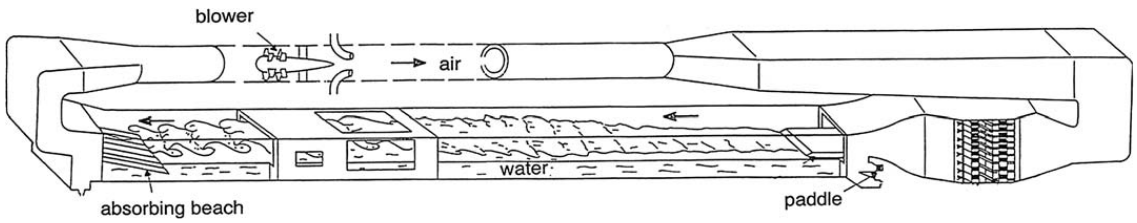


Fig. 1. A schematic representation of the large air-sea interactions facility.

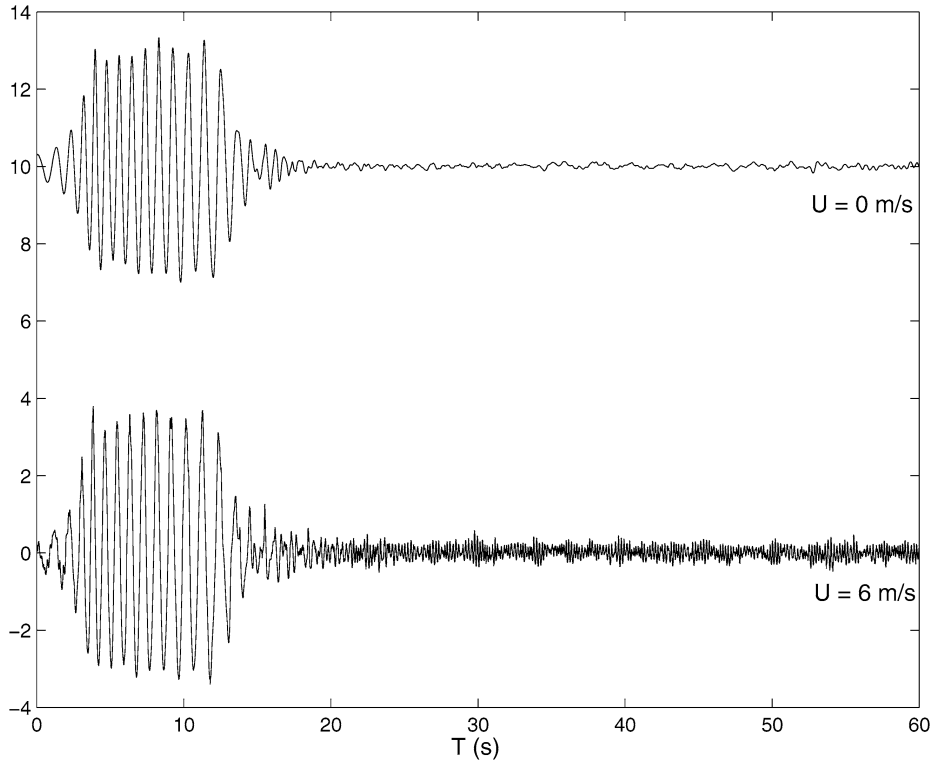


Fig. 2. Surface elevation (in cm) at fetch $X = 1$ m, for wind speeds $U = 0$ and 6 m/s.

and one can notice that the case $\mathrm{d}v_g/\mathrm{d}\tau > 0$, which corresponds to the case of short waves emitted before longer waves, leads to a singularity. This singularity corresponds to the focusing of several waves at $t = T_{f_{\mathrm{th}}}$ and $x = X_{f_{\mathrm{th}}}$. For infinite depth, the frequency to impose to a wave maker located at $x = 0$ is given by

$$\omega(0,t) = \frac{g}{2}\frac{T_{f_{\mathrm{th}}} - t}{X_{f_{\mathrm{th}}}} \tag{4}$$

where $X_{f_{\mathrm{th}}}$ and $T_{f_{\mathrm{th}}}$ are the coordinates of the focusing point in the $(x$–$t)$ plane

$$\begin{aligned} T_{f_{\mathrm{th}}} &= T\frac{f_{\max}}{f_{\max} - f_{\min}}, \\ X_{f_{\mathrm{th}}} &= \frac{gT}{4\pi}\frac{1}{f_{\max} - f_{\min}} \end{aligned} \tag{5}$$

and g is the acceleration due to gravity.

Experimentally, the values $f_{\max} = 1.3$ Hz and $f_{\min} = 0.8$ Hz correspond to the maximal and minimal frequencies of the wave maker and $T = 10$ s is the duration of the wave generation. The surface elevation given by the probe located at 1 m from the upstream beach is presented in Fig. 2. From these data we find that $T_{f_{\mathrm{th}}} = 26$ s and $X_{f_{\mathrm{th}}} = 17$ m while the experimental values are $T_{f_{\mathrm{exp}}} = 26$ s and $X_{f_{\mathrm{exp}}} = 20$ m (see Fig. 3). Experimental data show a good agreement with the linear theory. The slight difference observed between the theoretical and experimental values of X_f is mainly due to the nonlinearity of the experimental wave train.

The focusing experiments are performed with and without wind. The same initial wave train is propagated freely (without wind), and under the action of wind for several values of the wind velocity equal to $U = 4$ m/s, 5 m/s, 6 m/s, 8 m/s and 10 m/s. When the wind blows, the focusing wave train is generated once wind waves have developed. For each value of the mean wind velocity U the water surface elevation is measured at 1 m fetch and at different fetches between 3 m and 35 m. The wave maker is driven by an analog electronic signal, in order to produce this signal linearly varying with time from 1.3 Hz to 0.8 Hz in 10 s, with an almost constant amplitude of the displacement. The fetch is measured from the entrance of the wave-tank where the air flow meets the water surface i.e. at the end of the upstream beach. The wave maker is totally submerged, in order to avoid perturbation of the air flow which could be induced by its displacement.

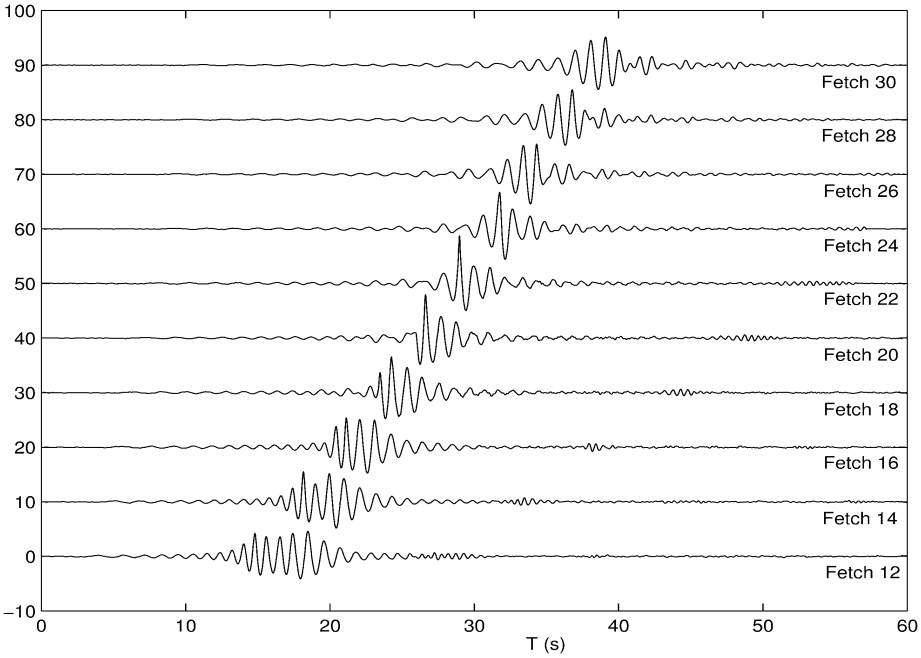


Fig. 3. Surface elevation (in cm) at several fetches (in m), for wind speed $U = 0$ m/s, as a function of time.

Table 1
The r.m.s. elevation for different values of the wind velocity at fetch 1 m

Wind velocity (m/s)	$\sqrt{\langle \eta^2 \rangle}$ (cm)
0	1.88
4	1.88
5	1.87
6	1.88
8	1.87
10	1.88

To ensure the repeatability of the experimental conditions under the wind action, the water elevations at 1 m were recorded with and without wind. Fig. 2 shows two time-series of this probe, recorded with no wind, and under a wind speed $U = 6$ m/s. The probe record corresponding to a wind of 6 m/s is artificially increased by 10 cm, for more clarity of the figure. We see that the two signals are very similar, since frequency properties, phases and duration are maintained. Some weak differences in amplitude are locally observed. Table 1 shows the root mean square of the elevation $\eta(x, t)$ obtained at fetch 1 m for different wind speeds. It is clear from these data that no significant variations are observed, and the experiment is considered to be repeatable in presence of wind. Results of these experiments are presented in the following subsection.

2.2. Experimental results

Fig. 3 presents the time series of the water surface elevation $\eta(x, t)$ at different fetches for $U = 0$ m/s. For sake of clarity, as it has been done for Fig. 2, the probes records given here are recursively increased by 10 cm. As predicted by the linear theory of the free deep-water waves (no wind), dispersion leads short waves to propagate slower than long waves, and as a matter of fact, the waves focus at a precise distance leading to the occurrence of a large amplitude freak wave. Downstream the point of focusing, the amplitude of the group decreases rapidly (defocusing).

Fig. 4 shows the same time series of $\eta(x, t)$, at several values of the fetch x, and for a wind speed $U = 6$ m/s. The wave groups mechanically generated by the wave maker are identical to those used in the case without wind (see Fig. 2). Whatever, some differences appear in the time–space evolution of the focusing wave train.

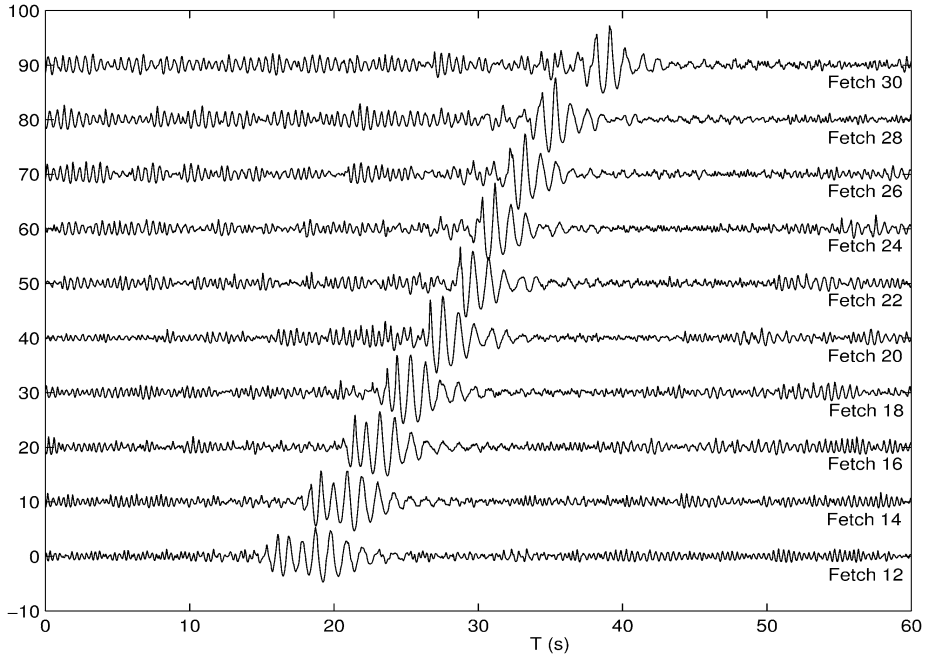


Fig. 4. Surface elevation (in cm) at several fetches (in m), for wind speed $U = 6$ m/s, as a function of time.

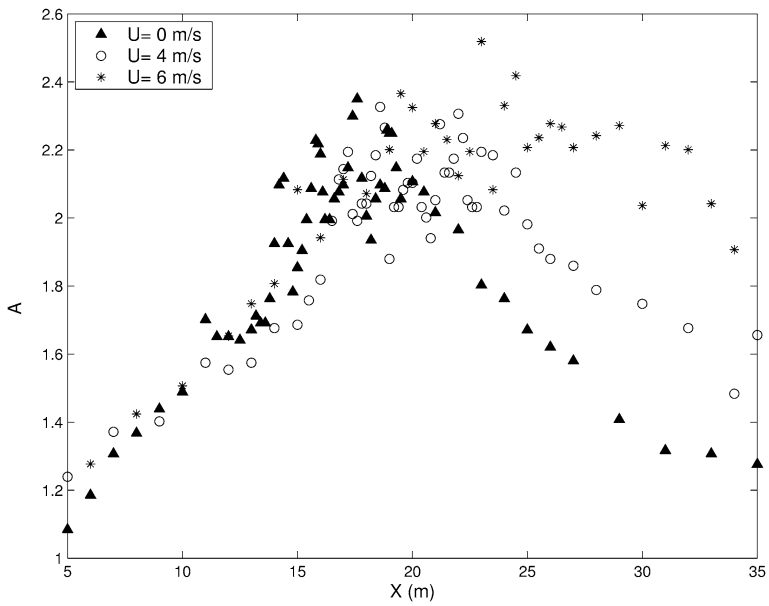


Fig. 5. Evolution of the amplification factor $A(x, U)$ as a function of the distance (in m), for several values of the wind speed.

For each value of the wind velocity, the amplification factor $A(x, U)$ of the group between fetches x and 1 m can be defined as

$$A(x, U) = \frac{H_{\max}(x, U)}{H_{\text{ref}}} \tag{6}$$

where $H_{\max}(x, U)$ is the maximal height between two consecutive crest and through in the transient group. The height, H_{ref}, of the quasi uniform wave train generated at the entrance of the tank is measured at 1 m. The mean height crest to through is $H_{\text{ref}} = 6.13$ cm.

Fig. 5 gives this amplification factor as a function of the distance from the upstream beach for various values of the wind velocity, equal to 0 m/s, 4 m/s and 6 m/s. This figure shows that the effect of the wind is twofold: (i) it increases weakly the amplification factor, and (ii) it shifts downstream the focusing point (caustic). Moreover,

contrary to the case without wind, an asymmetry appears between focusing and defocusing stages. The slope of the curves corresponding to defocusing changes. One can observe that the freak wave criterium ($A > 2$) is satisfied for a longer period of time. The effect of the wind on the freak wave is to shift the focusing point downstream, and to increase slightly its amplitude. It is also interesting to emphasize that the freak wave criterium is satisfied for a longer distance, while the wind velocity increases.

To better understand the time–space evolution of the wave group with and without wind, the time series are analyzed by means of a wavelet analysis. Fig. 6 displays the wavelet analysis at several fetches, without wind. It shows the time-frequency evolution of the wave group as it propagates downstream the wave tank. At small fetches, the waves of high frequencies are in front of the group and the waves of lower frequencies at its back. As it propagates downstream, a focusing and defocusing process is observed. Downstream the focusing point, the waves of low frequencies are in front of the group, and the high frequencies at its back. In Fig. 7 is shown the wavelet analysis of probe records at the same fetches, for a wind speed of 6 m/s. Contrary to the case without wind, the focusing point seems to be shifted downstream the wave tank, confirming what we observe in Fig. 5. The freak wave mechanism is sustained longer. We note that the coherence of the group is maintained longer. This could explain the asymmetry observed in the amplification curves.

We observe in Figs. 4 and 7, that the background wind waves are suppressed by the freak wave. The phenomenon of high frequency waves suppressed by strongly nonlinear low frequency waves has been investigated by Balk [12]. He showed that the effect of the long wave is to transport the short wave action to high wave numbers, where high dissipation occurs.

To summarize the main experimental results we can claim that the effect of wind on the freak wave mechanism is to shift the focusing point downstream, to increase its amplitude and lifetime due to an asymmetry of the amplification curve. Figs. 6 and 7 demonstrate that the effect of the wind is to transform the short group containing the freak wave into a long-lived short group. The effect of the wind is to delay the defocusing stage.

3. Wind action modeling

As it has been mentioned in the description of the experimental setup, the focusing wave group is generated only once the wind is established in the wind tunnel. This means that the waves generated mechanically propagate on a current induced by the wind near the water surface. In a recent approach, Giovanangeli et al. [13] suggested that the presence of this current could explain the shift of the focusing point downstream. The comparison with a linear theory based on the parabolic equation for the evolution of the amplitude, showed that indeed the shift was due to the action of the current. A good agreement between experimental and theoretical amplification was obtained. Unfortunately, the linear theory was unable to explain the asymmetry of the amplification curve observed during the experiments.

Since the asymmetry observed experimentally in the amplification curve cannot be explained by the effect of the current induced by the wind one should find an explanation in the direct action of the wind on the freak wave. To model this interaction, two mechanisms can be considered: the Miles' mechanism, and the Jeffreys' sheltering mechanism. The Miles' mechanism is a quasi laminar model of the transfer of energy to a surface wave from a turbulent shear flow [14]. The Jeffreys' sheltering mechanism assumes that this transfer is due to the air flow separation occurring over very steep waves [15,16].

To see what is the dominant phenomenon prevailing in our experiments, one can calculate the characteristic time scale of each mechanism. According to the Jeffrey's theory the energy flux for a monochromatic wave is given by

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} S \rho_a (U - c_\varphi)^2 a^2 k^2 c_\varphi \tag{7}$$

where S is the Jeffreys' sheltering coefficient, ρ_a is the atmospheric density, U is the mean wind velocity, c_φ is the wave phase velocity, a and k are the amplitude and wavenumber of the wave respectively, $E = \rho_w g a^2/2$ is the mean wave energy (ρ_w is the water density).

The normalized growth rate is given by

$$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial t} = S \frac{\rho_a}{\rho_w} \frac{(U - c_\varphi)^2}{c_\varphi^2} \omega = \Gamma_{\text{Jeffreys}} \tag{8}$$

where the wave frequency is $\omega = \sqrt{gk}$.

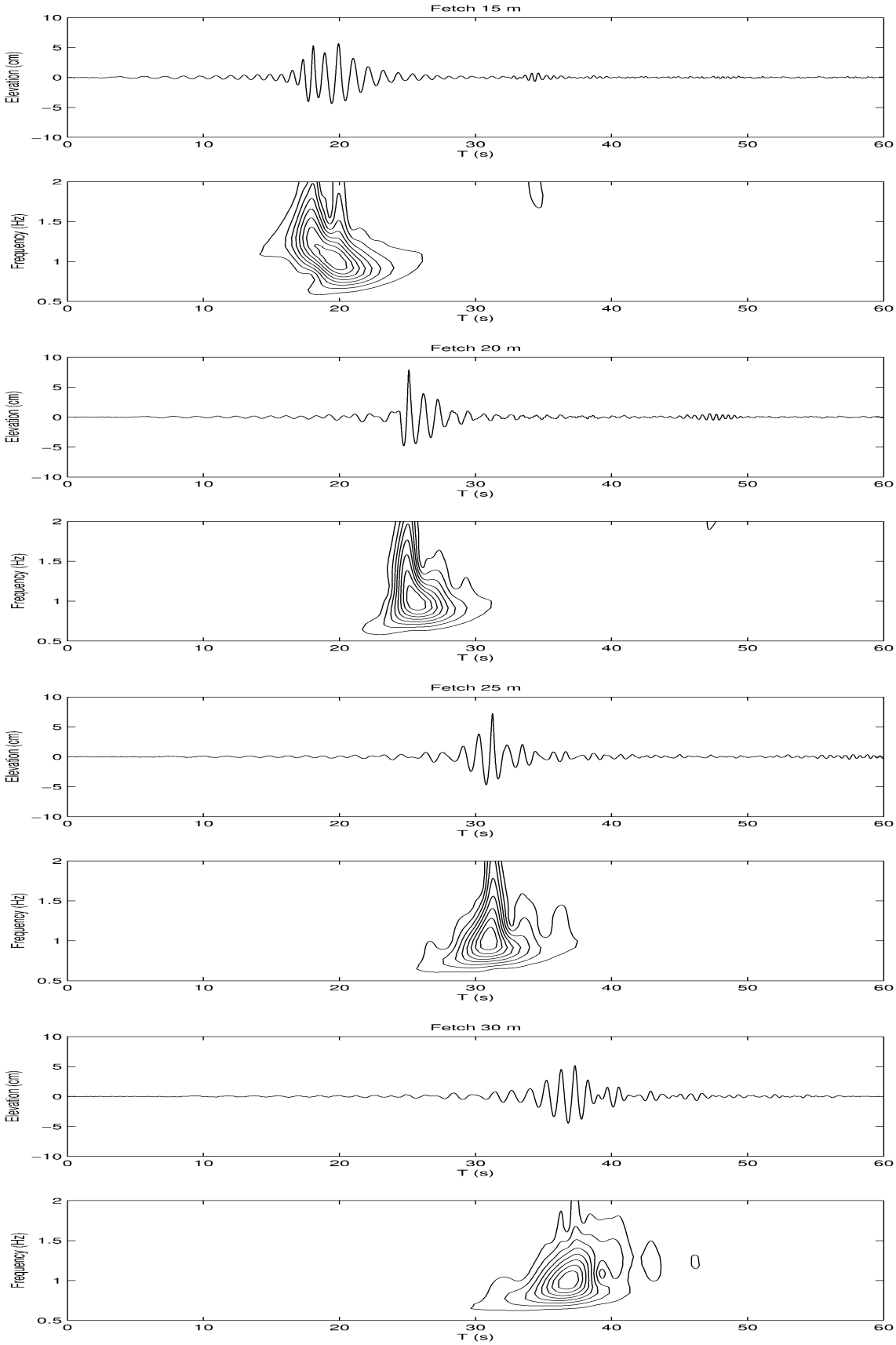


Fig. 6. Wavelet analysis of probe records for fetches $x = 15$, 20, 25 and 30 m for a wind speed value of $U = 0$ m/s.

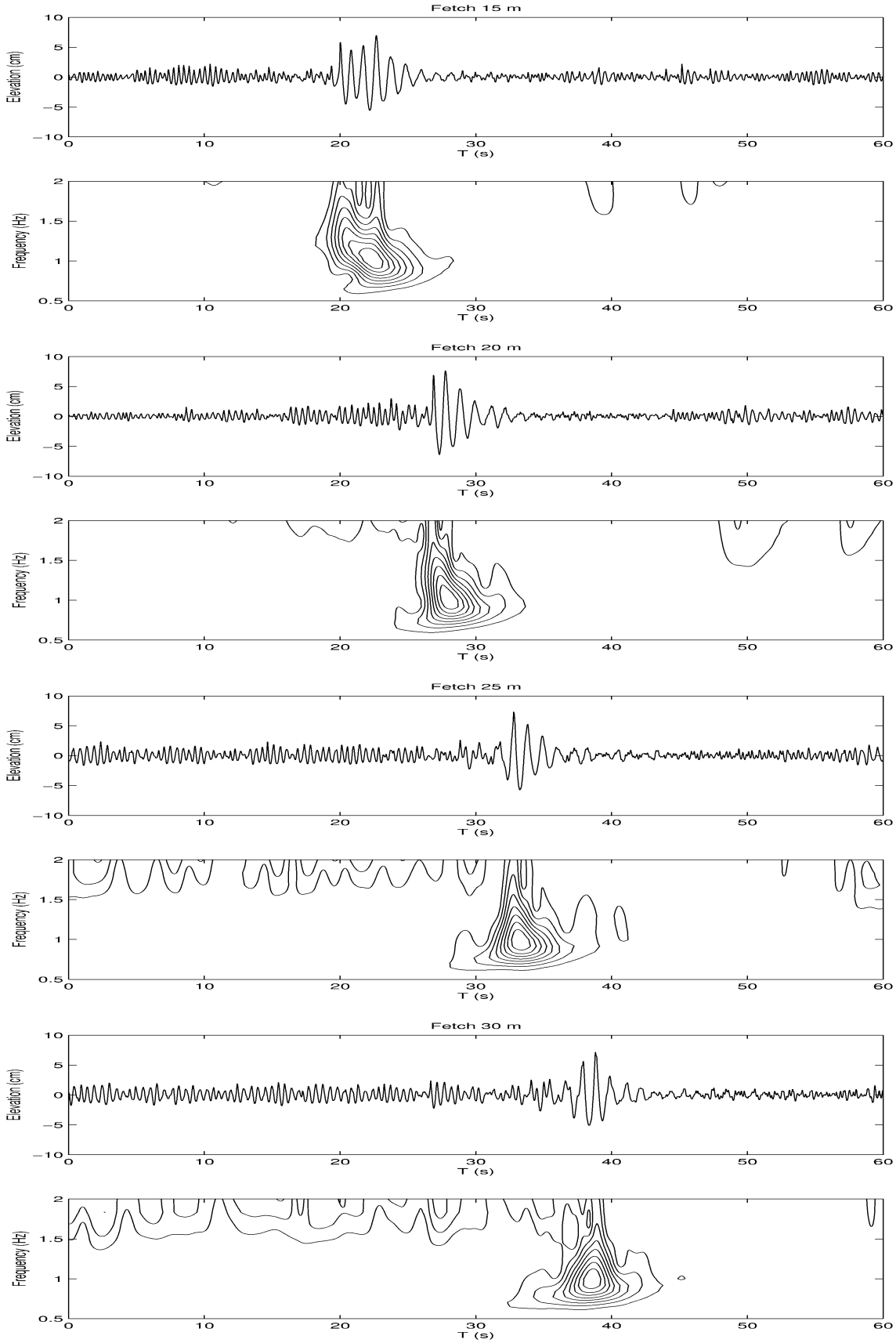


Fig. 7. Wavelet analysis of probe records for fetches $x = 15$, 20, 25, and 30 m, for a wind speed value of $U = 6$ m/s.

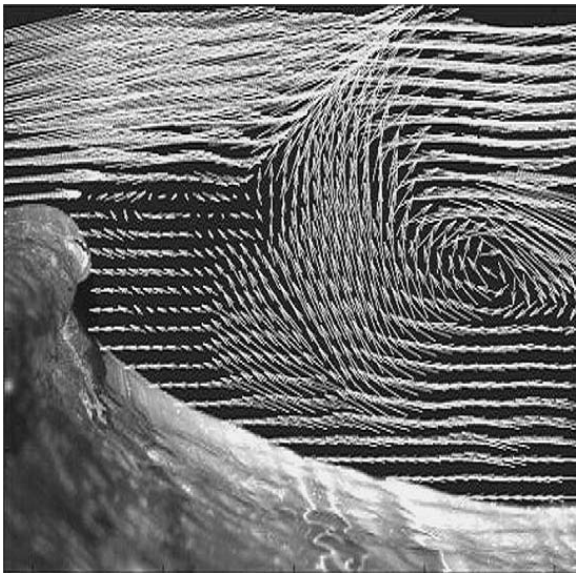


Fig. 8. Air flow separation observed by PIV over a breaking wave (Reul et al., [17]).

Based upon the same idea, the normalized growth rate relative to the Miles' mechanism is written as follows

$$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\rho_a}{\rho_w}\frac{\beta}{\kappa^2}\frac{U_*^2}{c_\varphi^2}\omega = \Gamma_{\text{Miles}} \tag{9}$$

where κ is von Karman's constant, β is the energy-transfer parameter of Miles and U_* is the friction velocity.

The ratio of the two characteristic time scales is given by

$$\frac{\Gamma_{\text{Jeffreys}}}{\Gamma_{\text{Miles}}} = S\frac{\kappa^2}{\beta}\frac{(U-c_\varphi)^2}{U_*^2}. \tag{10}$$

The sheltering coefficient, $S = 0.5$, was calculated from experimental data. The friction velocity is $U_* = U\sqrt{C_d}$ where the measured drag coefficient is $C_d = 0.004$. The energy transfer parameter β is a function of the wave age obtained from Fig. 1 of [14]. For U varying from 4 m/s to 8 m/s, and by assuming that the freak wave generated experimentally presents a peak at 1 Hz, it is found that the Miles' characteristic time scale is roughly three times the Jeffreys' characteristic time scale. Furthermore, Fig. 5 shows that the amplification factor does not depend on the wind velocity during the focusing stage up to the freak wave occurrence. The asymmetry which develops rapidly is due to a fast phenomenon such as flow separation occurring on the leeward side of wave crests. The picture presented in Fig. 8 was provided by Reul et al. [17] who performed PIV measurements of the air flow over a breaking wave. They showed that above the leeward face of a nearly breaking wave, i.e. a high steepness wave, a well organized vortex appears due to an air flow separation process. Moreover Banner [18] demonstrated that air flow separation is responsible for large increments in the form drag. These remarks lead us to consider that Jeffreys' mechanism is more relevant than the Miles' mechanism to describe the air sea interaction process observed in the present experiments.

Under the assumption of the air flow separation, Jeffreys suggested that the air flow pressure at the interface, $z = \eta(x,t)$, is related to the local wave slope, according to the following expression

$$p = \rho_a S(U-c_\varphi)^2\frac{\partial\eta}{\partial x}. \tag{11}$$

He considered that the out of phase pressure-surface elevation variations could lead to wave growth. We use this approach and apply the Jeffreys' mechanism when the wave steepness is larger than a given threshold. Hence, we introduce a critical value of the local slope η_{x_c}, above which an energy transfer from the wind to the waves occurs. The corresponding pressure distribution at the surface given by Eq. (11) is shown in Fig. 9. For each wave, the maximal local slope is computed, and the pressure distribution on the surface of the wave is given by

$$\begin{cases} p(x) = 0 & \text{if } \eta_{x_{\max}} < \eta_{x_c}, \\ p(x) = \rho_a S(U-c_\varphi)^2\frac{\partial\eta}{\partial x}(x) & \text{if } \eta_{x_{\max}} \geqslant \eta_{x_c}. \end{cases} \tag{12}$$

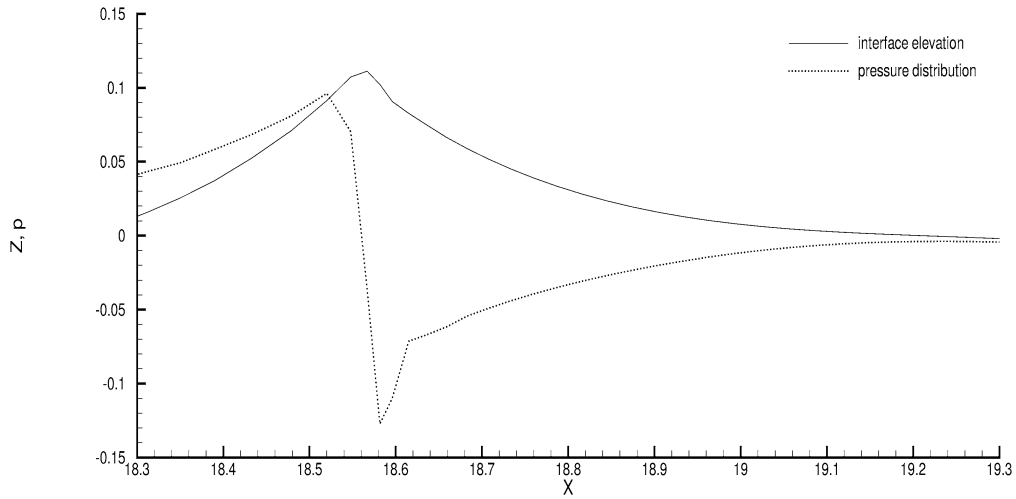


Fig. 9. Pressure distribution (dotted line, given in 10^{-1} Hpa) on the interface (solid line, given in m) in the model.

This critical value η_{x_c} is arbitrarily chosen as a parameter, varying from 0.44 to 0.57. These values correspond to angles close to 30 degrees. One can note that this value corresponds to the maximal local slope reached by a Stokes wave. The Stokes' corner presenting exactly this value. In this way the Jeffreys' sheltering mechanism works when the critical steepness of the surface is locally reached. The transfer of energy from the wind to the water waves stops as soon as the maximal local steepness becomes lower than η_{x_c}.

4. Numerical study

4.1. Mathematical formulation and numerical modeling

4.1.1. Mathematical formulation

The problem is solved by assuming the fluid to be inviscid, incompressible, and the motion irrotational. Hence, the velocity field is given by $\vec{u} = \nabla\phi$ where the velocity potential $\phi(x, z, t)$ satisfies the Laplace's equation

$$\Delta\phi = 0. \tag{13}$$

Eq. (13) is solved within a domain bounded by the fluid interface and solid boundaries of the numerical wave tank. The boundary conditions are defined below.

The impermeability condition writes

$$\nabla\phi \cdot \vec{n} = \vec{V} \cdot \vec{n} \quad \text{on } \partial\Omega_B \tag{14}$$

where $\partial\Omega_B$ is the solid boundaries, $\vec{V}$ is the velocity of these solid boundaries, set equal to zero on the walls of the wave tank, and equal to the velocity of the paddle at any point of the wave maker and $\vec{n}$ is the unit normal vector to the boundaries.

A Lagrangian description of the free surface is used

$$\begin{aligned} \frac{Dx}{Dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial x}, \\ \frac{Dz}{Dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{aligned} \tag{15}$$

where $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla\phi \cdot \nabla$.

The dynamic free surface condition states that the pressure at the surface is equal to the atmospheric pressure:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2}\nabla\phi^2 - gz - p, \tag{16}$$

where $p(x,t)$ is given by Eq. (11). Thus the problem to be solved is

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{in the fluid domain,} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial n} = \vec{V}\cdot\vec{n} & \text{on the solid boundaries,} \\ \dfrac{D\phi}{Dt} = \dfrac{\nabla\phi^2}{2} - gz - p, & \\ \dfrac{Dx}{Dt} = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \text{on the free surface,} \\ \dfrac{Dz}{Dt} = \dfrac{\partial\phi}{\partial z}. & \end{cases} \tag{17}$$

4.1.2. Numerical modeling

The equations are solved using a boundary integral equation method (BIEM) and a mixed Euler Lagrange (MEL) time marching scheme. The Green's second identity is used to solve Laplace's equation

$$\int_{\partial\Omega} \phi(P)\frac{\partial G}{\partial n}(P,Q)\,\mathrm{d}l - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial n}(P)G(P,Q)\,\mathrm{d}l = c(Q)\phi(Q) \tag{18}$$

for the velocity potential. Here $\partial\Omega = \partial\Omega_F \cup \partial\Omega_B$, where $\partial\Omega_F$ is the free surface boundary, and $\partial\Omega_B$ is the body boundary. Thus, $\partial\Omega$ is the fluid domain boundary. G is the free space Green's function. The unit normal vector $\vec{n}$ points outside the fluid domain. The angle $c(Q)$ is defined as

$$c(Q) = \begin{cases} 0 & \text{if } Q \text{ is outside the fluid domain,} \\ \alpha & \text{if } Q \text{ is on the boundary,} \\ -2\pi & \text{if } Q \text{ is inside the fluid domain} \end{cases} \tag{19}$$

where α is the inner angle relative to the fluid domain at point Q along the boundary. Eq. (18) can be rewritten as follows

$$\alpha\phi - \int_{\partial\Omega_F} \phi(P)\frac{\partial G}{\partial n}(P,Q)\,\mathrm{d}l + \int_{\partial\Omega_B} \frac{\partial\phi}{\partial n}(P)G(P,Q)\,\mathrm{d}l = \int_{\partial\Omega_B} \phi(P)\frac{\partial G}{\partial n}(P,Q)\,\mathrm{d}l - \int_{\partial\Omega_F} \frac{\partial\phi}{\partial n}(P)G(P,Q)\,\mathrm{d}l$$

for $Q \in \partial\Omega_F$, and

$$\int_{\partial\Omega_F} \phi(P)\frac{\partial G}{\partial n}(P,Q)\,\mathrm{d}l + \int_{\partial\Omega_B} \frac{\partial\phi}{\partial n}(P)G(P,Q)\,\mathrm{d}l = \alpha\phi + \int_{\partial\Omega_B} \phi(P)\frac{\partial G}{\partial n}(P,Q)\,\mathrm{d}l - \int_{\partial\Omega_F} \frac{\partial\phi}{\partial n}(P)G(P,Q)\,\mathrm{d}l$$

for $Q \in \partial\Omega_B$.

The unknowns are $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ on $\partial\Omega_F$ and ϕ on $\partial\Omega_B$ in the integrands of the right-hand side of the above equations. These equations satisfied at a discrete set of N nodes on the boundaries, are transformed into a linear system of algebraic equations for a finite number of unknowns (see [19,20]).

4.2. Tests of convergence

In order to check the convergence of the numerical scheme we have performed a series of numerical simulations for different values of the number of meshes N. A modulated motion is imposed to the wave maker generating a focusing modulated wave train. An absorbing beach located at the end of the wave tank dissipates the incident wave energy. For more details about the principle of the experiment see Section 4.4.1. To avoid numerical instability the grid spacing Δx and time increment Δt have been chosen to satisfy the following Courant relation derived from the linearized surface conditions

$$\Delta t^2 \leqslant \frac{8\Delta x}{\pi g}. \tag{20}$$

Table 2 displays the values of the maximum of elevation at the focusing fetch for increasing values of the number of meshes. For $N = 2000$ the accuracy of the computations is less than 10^{-3}.

Table 2
Maximum elevation of the surface as a function of N, the number of meshes

N	$\eta_{\max}$
500	0.076409205
750	0.092047992
1000	0.098460514
1250	0.101706569
1500	0.103529434
1750	0.104587033
2000	0.105057848

4.3. Verification of the method

Following Dommermuth et al. [21] who conducted numerical simulations and experiments of focusing gravity waves in infinite depth, we reproduced numerically their experimental setup by adopting similar numerical parameters.

4.3.1. Principle of the simulations

The spatio-temporal focusing mechanism is simulated in a 25 m long wave tank, 0.7 m wide, and 0.6 m deep. The piston wave maker is moving periodically with the velocity

$$U(t) = \sum_{n=1}^{72} U_n \cos(\omega_n t - \theta_n), \tag{21}$$

where the coefficients U_n, ω_n and θ_n are the parameters of the initial value signal. These parameters can be found in [21]. This corresponds to the spatio-temporal focusing mechanism. Short waves are emitted first, followed by longer waves. All waves meet at a point of the wave tank. Using these data, we have reproduced the same numerical conditions.

For these simulations, Dommermuth et al. used 250 meshes on the free surface. A dynamic regridding was performed every five time steps. They used a dynamic time step to perform the time integration, almost constant and close to 0.05 s before the occurrence of breaking. When breaking occurred, a mesh refinement was iteratively performed, and then the time step decreased.

To compare with their results, the time step Δt is fixed equal to 0.05 s, and reduced when approaching breaking. we use 250 meshes on the free surface before breaking, and mesh refinement is applied iteratively.

4.3.2. Numerical results

Comparison between our numerical simulations and the results obtained by Dommermuth et al. before breaking stage is presented in Fig. 10.

These curves show the time records of probes located along the tank, at fetches equal to (a): 3.17 m, (b): 5.00 m, (c): 6.67 m, (d): 9.17 m, and (e): 10.83 m. The origin of the tank corresponds to the wave maker position at rest. Fig. 10 displays the focusing of several waves into an extreme wave. One can notice that the agreement is quite good, but some differences appear when the wave group focuses, and begins to break.

4.4. Effect of the wind: numerical simulations

4.4.1. Principle of the experiment

A 2D numerical wave tank simulating the Large Air-Sea Interaction Facility has been considered. The tank has a length of 40 m, and a depth of 1 m. A focusing wave train is generated by a piston wave maker, leading to the formation of a rogue wave followed by a defocusing stage. The free surface, and the solid walls (downstream wall, bottom and wave maker) are discretized by 1300, and 700 meshes respectively, uniformly distributed.

The time integration is performed by using a RK4 scheme, with a constant time step of 0.01 s. The focusing process is studied successively with and without wind.

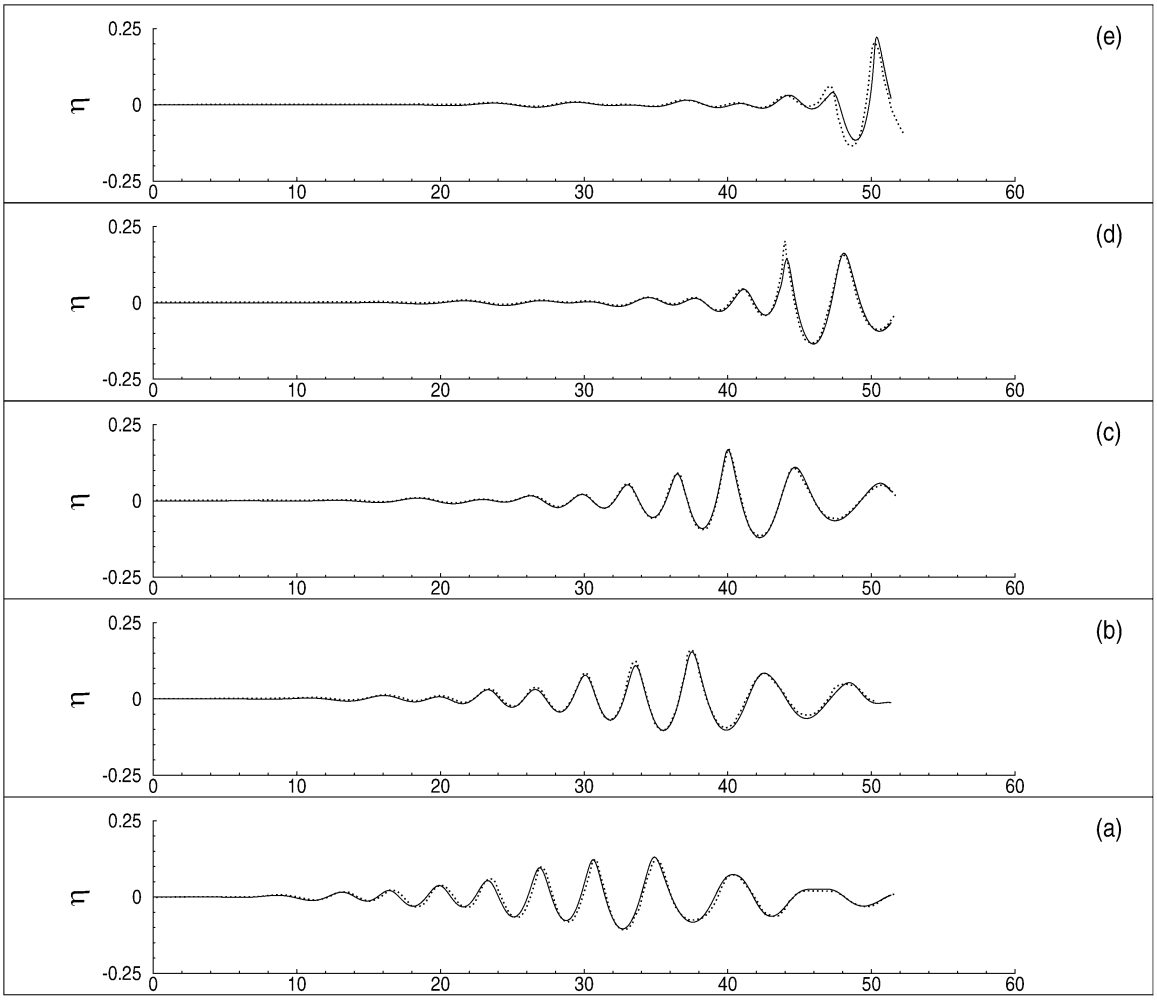


Fig. 10. Numerical results of the spatio-temporal focusing: elevation as a function of time for fetches (a): 3.17 m, (b): 5.00 m, (c): 6.67 m, (d): 9.17 m, and (e): 10.83 m. Dotted line: present results. Solid line: from Dommermuth et al.

4.4.2. Numerical results

The numerical simulations have been run for several values of the critical wave slope η_{x_c}, and wind velocity.

Fig. 11 shows the spatial evolution of the amplification factor computed numerically by using Eq. (6). These curves plotted for three values of the wind velocity, $U = 0$ m/s, 4 m/s and 6 m/s present the same behavior than those in Fig. 5 and emphasize again the asymmetry found in the experiments. Herein, the critical slope beyond which the wind forcing is applied is $\eta_{x_c} = 0.5$. One can notice that the effect of the wind is not sufficient to increase the amplification of the freak wave. A very weak increase of the amplification factor is observed in presence of wind. The increase of the amplification due to the wind is significantly larger in the experiments. This feature will be discussed later. However, one can observe a significant asymmetry between the focusing and defocusing stages of the wave train. This asymmetry results in an increase of the life time of the freak wave event. Furthermore, a comparison between Fig. 11 and Fig. 5 shows that the numerical maxima of the amplification factor are larger than those obtained experimentally. This can be due in part to spilling breaking events which were observed in the experiments, resulting in dissipation of energy, and in saturation in the growth of the amplification factor. The comparison between experimental and numerical results should remain qualitative since the initial conditions used in the experiments and simulations are different. The fact that no downstream shifting of the focusing point is observed in the numerical simulations is due to the absence of current in the model.

It is important to emphasize that the transfer of energy from the wind to the water waves depends mainly on two parameters, which are the wind velocity, and its duration depending on the critical parameter η_{x_c}. Fig. 12 shows the duration of the transfer of energy as a function of the critical parameter η_{x_c} for several values of the wind velocity. The curve $U = 0$ m/s which corresponds to no wind shows the time during which the group presents a local slope

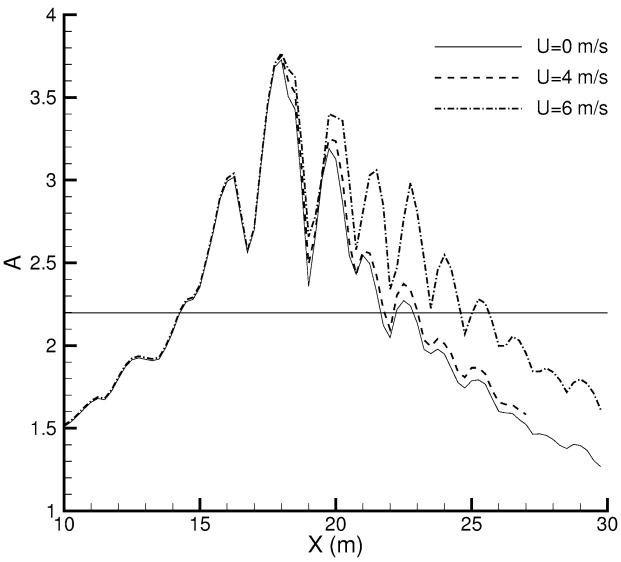


Fig. 11. Evolution of the numerical amplification factor $A(x, U)$ as a function of fetch (in m) and for wind speeds $U = 0$, 4 and 6 m/s. The critical slope is $\eta_{x_c} = 0.5$.

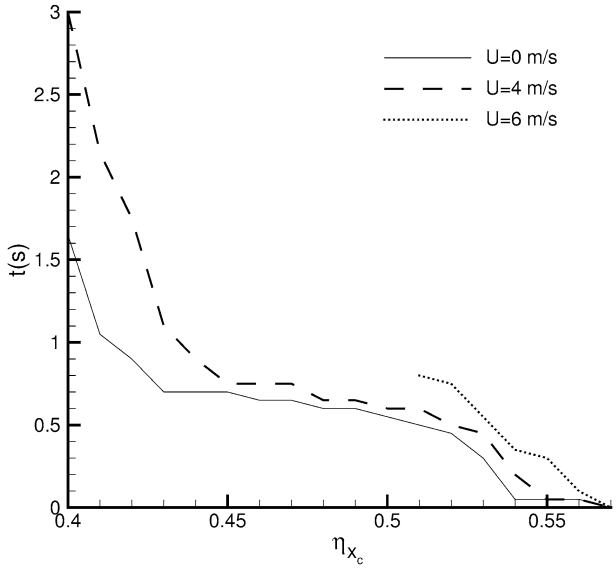


Fig. 12. Duration of energy transfer from wind as a function of the critical slope η_{x_c}.

larger than a critical value. One can notice that the critical wave slope $\eta_{x_c} = 0.57$ corresponds to a value that is never exceeded during the simulation without wind, meaning that no forcing can exist, whatever the wind velocity is. Curves relative to wind velocity values of $U = 4$ m/s and 6 m/s correspond to the time during which a transfer of energy is imposed. The duration of transfer of energy increases wind velocity, nevertheless it is seen from the latter curve that it stops due to the occurrence of breaking.

The wind velocity and threshold critical wave slope have a strong influence on the duration of the transfer of energy from the wind to the waves. For a given critical wave slope, this time increases significantly as the wind velocity increases. Owing to the large difference existing between air and water densities, the time of forcing corresponding to the wind input is not long enough to amplify significantly the height of the freak wave event. The main effect of the sheltering mechanism is to sustain the coherence of the short group involving the freak wave.

5. Conclusions

The direct effect of the wind on a freak wave event generated by means of a dispersive spatio-temporal mechanism has been investigated experimentally and numerically.

The experiments have shown that, in presence of wind, the focusing point is shifted downstream, which is due to the action of the current induced by the wind (see Giovanangeli et al. [13]). A weak increase of the freak wave height, and an asymmetry in the amplification curve occurs in presence of wind. This asymmetry results in an enhancement of the life time of the freak wave event.

The mechanism suggested to explain the energy transfer needed to sustain the envelope of the group involving the freak wave event is the Jeffreys' sheltering mechanism. This phenomenon is due to the air flow separation process occurring over very steep waves (see [15–17]). Following Jeffreys we expressed the normal wind tension at the sea surface as a sum of two terms, one being a constant reference to atmospheric pressure and the other to the wind pressure. The numerical results presented here have demonstrated that this mechanism may explain the sustain of the freak wave event.

Both experimental and numerical results are in qualitative good agreement even if some quantitative differences have been observed for the height of the freak wave and the point of focusing. The experiments have been performed under strong wind, and with high values of initial steepness of the wave group, generating some spilling breakers. Hence, it has not been possible to reproduce exactly these experiments numerically. This can explain the deviations noticed previously. In order to provide quantitative comparisons, the next step should be to perform some new experi-

ments, using an initial wave train of smaller amplitude, to avoid breaking of the freak wave. Thus, it would be possible to reproduce these experiments numerically, and to obtain some quantitative comparisons.

Acknowledgements

The authors thank the referees for their useful comments and IRPHE for the computations assistance. The authors would also like to thank B. Zucchini and A. Laurence for their helpful technical assistance during the experiments.

References

[1] G. Lawton, Monsters of the deep (the perfect wave), New Scientist 170 (2297) (2001) 28–32.
[2] J.K. Mallory, Abnormal waves on the South-East Africa, Int. Hydrog. Rev. 51 (1974) 89–129.
[3] I.V. Lavrenov, The wave energy concentration at the Agulhas current of South Africa, Natural Hazards 17 (1998) (1974) 117–127.
[4] E. Pelinovsky, T. Talipova, C. Kharif, Nonlinear-dispersive mechanism of the freak wave formation in shallow water, Physica D 147 (2000) 83–94.
[5] A. Slunyaev, C. Kharif, E. Pelinovsky, T. Talipova, Nonlinear wave focusing on water of finite depth, Physica D 173 (2002) 77–97.
[6] K. Trulsen, K.B. Dysthe, Freak waves – A three-dimensional wave simulation, in: Proc. 21st Symp. on Naval Hydrodynamics, National Academy Press, 1997, pp. 550–560.
[7] A.R. Osborne, M. Onorato, M. Serio, The nonlinear dynamics of rogue waves and holes in deep water gravity wave train, Phys. Lett. A 275 (2000) 386–393.
[8] D. Clamond, J. Grue, Interaction between envelop solitons as a model for freak wave formation, C. R. Mecanique 330 (2002) 575–580.
[9] C. Kharif, E. Pelinovsky, Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon, Eur. J. Mech. B Fluids 22 (2003) 603–634.
[10] H. Socquet-Juglard, K. Dysthe, K. Trulsen, H. Krogstad, Probability distributions of surface gravity waves during spectral changes, J. Fluid Mech. 542 (2005) 195–216.
[11] G.B. Whitham, Linear and Non Linear Waves, Willey & Sons, New York, 1974.
[12] A.M. Balk, The suppression of short waves by a train of long waves, J. Fluid Mech. 315 (1996) 139–150.
[13] J.P. Giovanangeli, C. Kharif, E. Pelinovsky, Experimental study of the wind effect on the focusing of transient wave group, in: Rogue Waves Proceedings, Rogue Waves (Brest, 2004).
[14] J. Miles, Surface wave generation: a viscoelastic model, J. Fluid Mech. 322 (1996) 131–145.
[15] H. Jeffreys, On the formation of water waves by wind, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 107 (1925) 189–206.
[16] H. Jeffreys, On the formation of water waves by wind, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 110 (1926) 241–247.
[17] N. Reul, H. Branger, J.P. Giovanangeli, Air flow separation over unsteady breaking waves, Phys. Fluids 11 (1999) 1959–1961.
[18] M.L. Banner, The influence of wave breaking on the surface pressure distribution in wind-wave interactions, J. Fluid Mech. 211 (1990) 463–495.
[19] M. Greco, A two-dimensional study of green water loading, PhD thesis, Dept. Marine Hydrodynamics, NTNU, Norway, 2001.
[20] T. Vinje, P. Brevig, Breaking waves on finite depth: a numerical study, Ship Res. Inst. Norway, R-118-81, 1981.
[21] D. Dommermuth, D. Yue, W. Lin, R. Rapp, E. Chan, W. Melville, Deep-water plunging breakers: a comparison between potential theory and experiments, J. Fluid Mech. 189 (1988) 423–442.

7.2 Touboul J., Peliniovsky E., Kharif C., Nonlinear Focusing Wave groups on current, *J. Kor. Soc. Coast. and Oce. Eng.,* 19(3), p. 222–227, 2007

L'un des effets les plus naturels du vent sur une surface libre est d'engendrer un courant de dérive. Dans la section précédente, nous avons négligé cet effet, en considérant que le courant de dérive, se propageant dans le sens de propagation des vagues, avait un effet négligeable sur l'asymétrie du processus de focalisation-défocalisation. Dans cette section, nous introduisons un courant uniforme sur toute la couche de fluide dans la méthode BIEM. Ce choix est criticable, dans la mesure où le courant induit par le vent à la surface est un courant cisaillé. Il nous est cependant imposé par la condition de conservation de la masse, qui nous impose d'avoir un champ de vitesse de divergence nulle.

Nous introduisons d'autre part un modèle linéaire, permettant de simuler l'évolution de vagues scélérates. Une comparaison des deux modèles tend à montrer que si la non-linéarité joue un rôle dans le cas d'un courant opposé au sens de propagation du groupe de vagues, elle est en revanche négligeable dans le cas d'un courant colinéaire au sens de propagation des vagues. Ceci permet donc de justifier que le comportement d'un groupe de vagues dans un courant colinéaire au sens de propagation tend à avoir un comportement linéaire, et qu'un courant n'augmente donc pas l'amplitude maximale atteinte au cours du processus de focalisation-défocalisation, mais qu'il la diminue. Ce courant, de la même manière, ne brise pas la symétrie du processus de focalisation-défocalisation, bien qu'il augmente légèrement la durée de vie de la vague scélérate.

Journal of Korean Society of
Coastal and Ocean Engineers
Vol. 19, No. 3, pp. 222~227, June 2007

Nonlinear Focusing Wave Group on Current
흐름의 영향을 받는 파랑 그룹의 비선형 집중

Julien Touboul*, Efim Pelinovsky** and Christian Kharif*
쥬리언 투보울* · 에핌 페리높스키** · 크리스티안 카리프*

Abstract : Formation of freak waves is studied in deep water from transient wave packets propagating on current. Those waves are obtained by means of dispersive focusing. This process is investigated by solving both linear and nonlinear equations. The role of nonlinearity is emphasized in this interaction.

Keywords : dispersive focusing, wave-current interaction, kinematic model, nonlinear equations.

요 지 : 심해에서 생성된 최극해파가 파랑과 상호작용하는 현상에 대한 연구를 수행하였다. 이러한 파랑은 분산집중을 이용하여 산정하였다. 이러한 과정은 선형 및 비선형 방정식의 해를 구하여 얻을 수 있다. 상호작용에서 비선형성의 역할을 강조하였다.

핵심용어 : 분산집중, 파랑-흐름 상호작용, 운동학적 모형, 비선형방정식

1. Introduction

Freak, rogue or giant waves are extreme events. They are characterized by their unpredictability, which explains that they are known as ”waves from nowhere”. As a matter of fact, they are responsible for an important number of large damages, caused to ships or offshore rigs. Over the last twenty years, a large number of events has been reported, and a lot of ship disappearances have been correlated to rogue waves events. Up to now there is no definite consensus about a unique definition of freak wave. The most popular definition is the amplitude criterion: the height of a freak wave should exceed twice the significant height of the background wave field. Several mechanisms have been suggested to explain the formation of freak waves, such as spatio-temporal focusing (Kharif et al., 2001; Johannessen and Swan, 2003; Gibson and Swan), nonlinear or modulational instability (Benjamin-Feir instability) (Benjamin and Feir, 1967; Dyachenko and Zakharov, 2005), envelope soliton and breather interactions (Clamond and Grue, 2002). Those mechanisms have been reviewed by Kharif and Pelinovsky in (2003) and by Dysthe in (2001).

Wave-current interaction contributes also in the freak wave formation and historically, this mechanism was the rst to explain the origin of freak waves (Peregrine, 1976; Smith, 1976). In fact, the vertical shear of the oceanic current is important for short wind waves with length shorter than a few meters (Craik, 1985; Thomas, 1981; Thomas, 1990; Silva and Peregrine, 1988; Shrira and Sazonov, 2001), but can be ignored for typical gravity waves. The horizontal variability of the oceanic current is relatively high (for instance in the vicinity of the Agulhas current off South Africa) and leads to the strong spatial (geometrical) focusing of the swell (Lavrenov, 1998; White and Fornberg, 1998). Meanwhile the current (even uniform) can influence the temporal focusing of wind waves. Recently Wu and Yao (2004) studied the last problem experimentally. They observed a shift of the focusing point, and by analyzing the shape of limiting freak waves, and their spectral evolution, they concluded that the nonlinearity of freak waves is affected by

*Institut de Recherche sur les Phénoménes Hors Equilibre (IRPHE), Technopole de Chateau-Gombert, 49 rue Joliot Curie, BP146, 13384 Marseille cedex 13, France
**Department of Nonlinear Geophysical Processes, Institute of Applied Physics, 46 Uljanov Street, Nizhny Novgorod, 603950 Russia

the presence of current. Indeed, the role of nonlinearity on uniform wave trains propagating on currents has been investigated numerically in by Ryu et al. (2003).

This work presents a series of numerical simulations of a focusing wave train propagated with and without current in infinite depth. The current is assumed to be constant in space. The wave packet with linear frequency modulation is generated at a fixed point. Herein we emphasize the problem we are dealing with is a boundary value problem (BVP) and not an initial value problem (IVP). In this particular case, the Galileo transformation is not used directly. Firstly (section 2), we demonstrate the shifting of focal points in the framework of kinematic approach. Then, the fully nonlinear numerical method is briey introduced (section 3). Numerical results of freak wave formation on the current obtained in the framework of the fully nonlinear model are presented and compared to results given by linear theory, including the kinematic model. A special interest is taken to analyze the evolution of the spectral components present in the focusing wave group.

2. The Kinematic Model

Due to the dispersive behaviour of water waves, when short waves propagate in front of longer waves, they will be overtaken, and large amplitude wave can occur at a fixed point. A linear approach of the problem would lead to consider sea surface as a superposition of linear waves of frequencies $\omega(x, t)$. Following Whitham (1974) and Brown (2001), the spatio-temporal evolution of these components is governed by the following hyperbolic equation

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + c_g(\omega)\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

where c_g is the group velocity. The boundary value problem for this equation can be solved by using the method of characteristics. Its solution is

$$\omega(x,t) = \omega_0(\tau),\ \tau = t - \frac{x}{c_g(\omega)} \tag{2}$$

where ω_0 corresponds to the temporal frequency distribution of the wave train at $x = 0$. By differentiating the frequency, it comes

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{d\omega_0/d\tau}{1+(2x/g)d\omega_0/d\tau} \tag{3}$$

and one can notice that the case $d\omega_0/d\tau < 0$, which corresponds to the case of short waves emitted before longer waves, leads to a singularity. This singularity corresponds to the focusing of several waves at $t = T_f$ and $x = X_f$. For infinite depth, the group velocity of each components is given by $c_g(\omega) = g/2\omega$. As a matter of fact, the frequency to impose to a wave maker located at $x = 0$, and for $0 < t < T$ is given by

$$\omega(0,t) = \frac{g}{2}\frac{T_f - t}{X_f} \tag{4}$$

where g is the acceleration due to gravity. This frequency modulation, varying linearly from ω_{min} to ω_{max}, provides the optimal focusing of the linear wave packets in still water and is very often applied in the laboratory conditions. Components following this law will all merge at the same place X_f, and the same time T_f, coordinates of the focusing point in the $(x - t)$ plane, given by

$$X_f = \frac{gT}{2}\frac{1}{\omega_{\max} - \omega_{\min}},\ T_f = \frac{2\omega_{\max}}{g}X_f \tag{5}$$

In presence of current, equation (1) should be modified, to take care of the Doppler effect. It rewrites

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + [c_g(\omega) + U]\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

where U is the current velocity. The solution, previously given by (2), becomes

$$\omega(x,t) = \omega_0(\tau),\ \tau = t - \frac{x}{c_g(\omega) + U} \tag{7}$$

By differentiating the frequency, it comes

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{d\omega_0/d\tau}{1 + \frac{2xg}{(g+2\omega U)^2}\frac{d\omega_0}{d\tau}} \tag{8}$$

One can notice that the dynamics of the wave group is more complicated. The denominator is now a function of time, and is equal to zero for several values of space and time. The waves do not merge at the same place, at the same time. The focusing point is theoretically spread to a focusing area, extending from L_{min} to L_{max}, where

$$L_{\max} = X_f\left(1 + \frac{2U\omega_{\max}}{g}\right)^2,\ L_{inx} = X_f\left(1 + \frac{2U\omega_{\min}}{g}\right)^2 \tag{9}$$

The kinematic model presented above has some limitations. It demonstrates the shifting of the focusing point, but cannot predict wave amplitudes which are formally infinite at this point. To avoid this problem, a fully linear approach is used based on the Fourier integral. It is based on the linear dispersion relation in infinite depth, in presence of current, that reads

$$(\omega - kU)^2 = gk \tag{10}$$

where $k(\omega)$ is the wave number. This equation is solved iteratively, by means of Newton's method. Solutions preserving the sign of $(kx - \omega t)$ are considered. By introducing this dispersion relation into linear equations, it comes

$$\eta(x,t) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(0,\tau)\exp(i\omega\tau)d\tau\right]\exp[i(kx-\omega t)]d\omega \tag{11}$$

that can be solved at any place and any time by knowing $\eta(0, t)$.

3. Mathematical Formulation of the Fully Nonlinear Problem

The problem is solved numerically by assuming valid the potential theory. Hence, ϕ, the velocity potential, satises the Laplace's equation $\Delta\phi = 0$. By introducing the decomposition

$$\phi(x,z,t) = Ux + \phi(x,z,t) \tag{12}$$

where Ux is the potential due to the presence of current, and φ can be understood as a perturbed potential, one can notice that φ is also solution of the Laplace's equation $\Delta\varphi = 0$. Classical free surface conditions, respectively kinematic and dynamic, reads

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} - U\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} - U\frac{\partial\varphi}{\partial x} - g\eta \tag{13}$$

The solution of the Laplace's equation for j, with the above boundary conditions can be obtained by using Green's second identity. A mixed Euler-Lagrange description of the problem is adopted, meaning that a particular description of the surface is used. More details can be found in Brown (2006). This method has been checked by comparison with numerical simulations by Zhu and Zhang (1997), and a good agreement has been found.

4. Results and Discussion

Numerical simulations presented here show the interaction of the focusing wave packet and current. The focusing wave group has a frequency varying from 1.3 to 0.7 Hz. It is propagated numerically with, and without a current varying from $U/c_g = -0.25$ to $U/c_g = +0.25$. If the mean steepness, during simulations, is of order $\varepsilon \sim 0.1$, it can locally reach 0.35 for large wave events corresponding to an important nonlinearity.

Figure 1 presents the free surface obtained at each focusing point by solving the nonlinear equations, without current, and with current velocities of $U/c_g = -0.125$ and $U/c_g = +0.125$. Here c_g is the mean group velocity of the frequency modulated wave group. The focusing point is defined as the location where maximum elevation is reached. Differences appear between those profiles. The group propagated with a co-current focuses further (and later) than the one propagated freely, while its elevation is lower. On the other hand, the group propagated in a counter-current focuses closer (and faster), and its amplitude is larger than the amplitude of the group propagated freely. Variation of freak wave amplitude is of order 10%. The evolution of the focusing

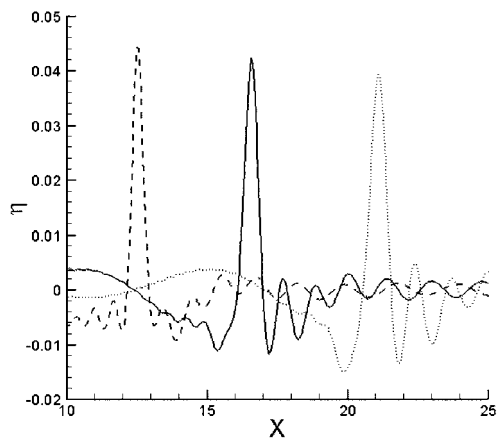


Fig. 1. Free surface elevation at each focusing time for a group propagated freely (solid line) with counter-current of velocity $U/c_g = -0.125$ (dashed line), and with co-current of velocity $U/c_g = +0.125$ (dotted line).

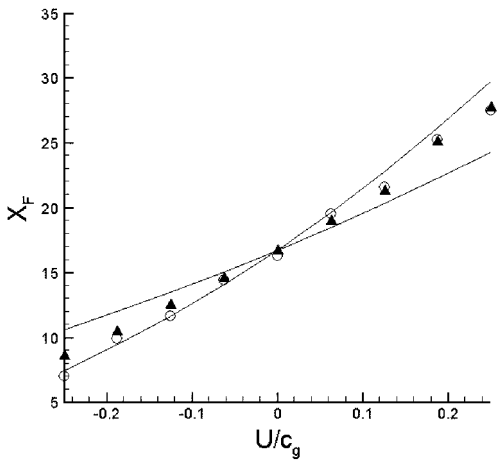


Fig. 2. Numerical focusing point as a function of the current velocity, for both linear (circles) and nonlinear models (triangles), plotted together with the theoretical extreme values of the focusing area L_{min} and L_{max} from the kinematic model.

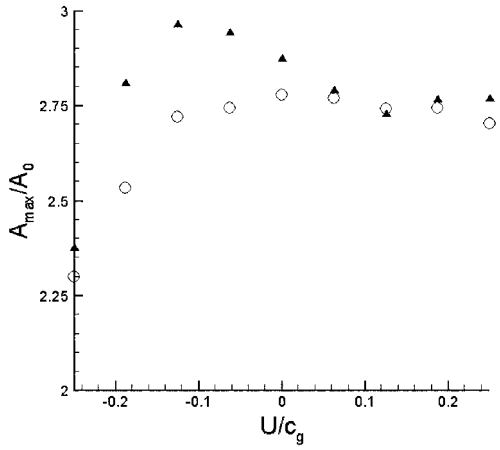


Fig. 3. Amplitude at the focal point as a function of the current velocity, for both linear (circles) and nonlinear models (triangles).

point corresponds to linear prediction. Indeed, one can notice from equation (9) that linear theory predicts an area spreading closer than X_f for counter-stream, and further for co-stream. On the other hand, results concerning wave amplitudes are surprising. Actually, linear theory predicts a spreading of the focusing area in both counter and co-stream, which should result in a decay of the wave amplitude in both cases. Quantitative comparisons can be obtained with linear approach presented above.

Figure 2 presents the location of the focusing point obtained from both linear and nonlinear methods, plotted as a function of current velocity. Theoretical values obtained from the kinematic model also appear. One can notice a very good agreement between linear and nonlinear methods. Focusing appears in an area spreading from $L_{\max}$ to $L_{\min}$, as predicted by the kinematic model. Very weak differences can be observed between linear and nonlinear methods, especially in strong countercurrents, where the waves become steeper. This shows that from a kinematic point of view, the linear representation of the problem is a relevant approach.

Figure 3 shows the maximum elevation reached at the focusing point as a function of the current velocity, for both linear and nonlinear models. Differences are more important here. For the linear model, the maximum is reached without any current. This can be understood by considering that the focal point turns into a focusing area in both cases of counter and co-current. The energy is spread, and the resulting wave is lower. The influence of current, through Doppler effect, leads to non-optimal focusing, as it was shown in the framework of the kinematic model. Dispersion parameter, $d^2k/d\omega^2$ increases for counter-current more than for co-current, which results in a decay of the focal amplitude for counter-current. For the nonlinear case, the observation is different. If the behavior in co-currents is very similar to the behavior presented by the kinematic model, the evolution in counter-currents is different. These differences have a pronounced maximum in a counter-current of $U/c_g = -0.125$. The amplification of the wave amplitude on counter-current is due to two effects. Firstly, wave dispersion (deviation from optimal focusing) is decreased in counter-currents when nonlinearity is taken into account, as it is emphasized later. This mechanism tends to keep coherence of components, and maintain focusing on counter-currents. Secondly, the role of the modulational (Benjamin-Feir) instability increases while the wave steepness is enlarged in counter-currents. Thus, the nonlinear parameter ak is increased, and the growth rate of modulational instability is also increased. This mechanism also tends to increase wave amplitude on focusing point. Development of this mdoulational instability in frequency modulated wave groups propagated has been observed in by Brown and Jensen (2001). One can notice that this phenomenon should disappear for two dimensional waves propagating in finite depth,

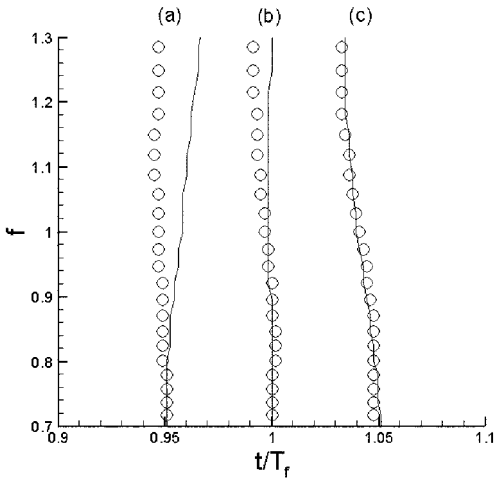


Fig. 4. Location of the components in the (t-f) plane at the focusing point, from both linear (solid line) and nonlinear models (circles). (a): U/c_g = -0.125, (b): U/c_g = 0, and (c): U/c_g = +0.125. For sake of clarity, curves are artificially shifted from $t/T = \pm 0.05$.

since modulational instability is not relevant in this case.

The time frequency representation of the focused wave group, obtained by means of wavelet analysis, is presented on Figure 4 for freak waves obtained on several current velocities U/c_g. A perfect focusing should be represented as a vertical straight line. Results obtained with the linear model are plotted together with results of the fully nonlinear simulations. As expected, the agreement is excellent for a freak wave obtained on a co-stream (c). It emphasizes the linear behavior of the waves during the focusing process in a co-stream. It can be understood by the low steepness of waves involved in the process. In both linear and nonlinear simulations, the focusing obtained is not perfect, illustrating the spread area of focusing. Weak differences appear for the case without current. Those differences concern high frequencies, corresponding to the most nonlinear waves. Components are almost perfectly focused in the (t-f) plane, explaining the high amplitude reached for that current velocity. As mentioned earlier, the differences between nonlinear and linear simulations are larger in the case of U/c_g = -0.125. Figure 4 confirms that high frequencies propagate faster in the nonlinear simulation, as predicted by first-order correction of the linear dispersion relation (see Whitham (1974)). Therefore, high frequencies components focus on longer distances in this case, than in the linear one. Nonlinearity seems to balance the linear effect, by accelerating slowest components of the group, and maintaining focusing on larger locations. This explains partially the differences observed in amplitudes between kinematic model and nonlinear one.

5. Conclusion

The interaction between a focusing wave group and current is studied numerically. Two methods are used. In linear theory we use an approximated kinematic approach as well as full linear solution based on the Fourier integral. Another approach is to solve numerically the nonlinear equations. The results obtained for both models are compared. The global kinematic behavior (locations of the focal points) is found to be similar. In terms of maximum amplitude, some differences are obtained. In the linear description, maximal amplitudes of freak waves are obtained without current, while in the nonlinear case, maximal amplitude of freak waves occurs in a weak opposing current. The presence of a maximum of the amplitude curve in linear theory is related with the shift from optimal conditions of linear focusing. In nonlinear theory, waves propagated on counter-current suffer a decay of wavelength resulting in an increase of their steepness. Increasing nonlinearity results in two phenomena. First, the dispersion relation is changed, leading nonlinear waves to propagate faster than the group velocity predicted by the linear dispersion relation. Secondly, the modulational instability can develop. These phenomena result in larger values of the wave amplitude at the focal point.

Acknowledgement

Particularly, this study is supported by INTAS grant (06-1000013-9236), and also for EP - by grants from INTAS (03-51-4286) and RFBR (05-05-64265).

References

Kharif, C., Pelinovsky, E., Talipova, T. and Slunyaev, A. (2001). Focusing of nonlinear wave groups in deep water, *JETP Letters,* vol. 73, No. 4, 170-175.

Johannessen, T.B. and Swan, C. (2003). On the nonlinear dynamics of wave groups produced by the focusing of surface water waves, *Proc. R. Soc. London,* vol. A459, 1021-1052.

Gibson, R.S. and Swan, C. The evolution of large ocean

waves: the role of local and rapid spectral changes, submitted to *Proc. Royal Soc. London*.

Benjamin, T. and Feir, J. (1967). The desintegration of wave train on deep water, *J. Fluid Mech.* vol. 27, 417-430.

Dyachenko, A.I. and Zakharov, V.E. (2005). Modulation instability of Stokes waves - freak wave, *JETP Letters,* vol. 81, 6, 255-259.

Clamond, D. and Grue, J. (2002). Interaction between envelope solitons as a model for freak wave formations. Part I: Long time interaction *C. R. Mecanique,* vol. 330, 575-580.

Kharif, C. and Pelinovsky, E. (2003). Physical mechanisms of the rogue wave formation, *European J. Mech. B/Fluids,* vol. 22, 603-634.

Dysthe, K.B. (2001). Modelling a Rogue Wave - Speculations or a realistic possibility?, *Rogue Waves*, Brest, Ed. by M. Olagnon, and G.A. Athanassoulis, 255-264.

Peregrine, D.H. (1976). Interaction of water waves and currents, *Adv. Appl. Mech.,* vol. 16, 9-117.

Smith, R. (1976). Giant waves, *J. Fluid Mech.* vol. 77, 417-131.

Craik, A.D.D. (1985). Wave interactions and fluid flows, *Cambridge University Press*.

Thomas, G.P. (1981). Wave-current interactions: an experimental and numerical study. Part I: linear waves, *J. Fluid Mech.*, vol. 110, 457-474.

Thomas, G.P. (1990). Wave-current interactions: an experimental and numerical study. Part II: nonlinear waves, *J. Fluid Mech.*, vol. 216, 505-536.

Teles da Silva, A.F. and Peregrine, D.H. (1988). Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity, *J. Fluid Mech.*, vol. 195, 281-302.

Shrira, V.I. and Sazonov, I.A. (2001). Quasi-modes in boundary-layer-type flows. Part 1. Inviscid two-dimensional spatially harmonic perturbations, *J. Fluid Mech.*, vol. 446, 133-171.

Lavrenov, I.V. (1998). The wave energy concentration at the Agulhas current of South Africa, *Natural Hazards,* vol. 17, 117-127.

White, B.S. and Fornberg, B. (1998). On the chance of freak waves at sea, *J. Fluid Mech.,* vol. 355, 113-138.

Wu, C.H. and Yao, A. (2004). Laboratory measurements of limiting freak waves on current, *J. Geophys. Res.,* vol. 109, C12002, doi:10.1029/2004JC002612.

Ryu, S., Kim, M.H. and Lynett, P.J. (2003). Fully nonlinear wave-current interactions and kinematics by a BEM-based numerical wave tank, *Comp. Mech.,* vol. 32, 336346.

Brown, M.G. and Jensen, A. (2001). Experiments on focusing unidirectional water waves, *J. Geophys. Res.*, vol. 108, No. C8, 16917-16928.

Whitham, G.B. (1974). Linear and nonlinear waves, *Wiley.*

Brown, M.G. (2001). Space-time surface gravity wave caustics: structurally stable extreme events, *Wave Motion,* vol. 33, 117-143.

Touboul, J., Giovanangeli, J.P., Kharif, C. and Pelinovsky, E. (2006). Freak waves under the action of wind: experiments and simulations, *European J. Mech. B/Fluids,* vol. 25, 662-676.

Zhu, S. and Zhang, Y. (1997). On nonlinear transient free-surface flows over a bottom obstruction, *Phys. Fluids,* vol. 9, 2598-2604.

Received April 11, 2007
Accepted May 29, 2007

7.3 Touboul J., Kharif C., Pelinovsky E., Giovanangeli J.-P., Miles' mechanism effect on gravity wave groups, *J. Fluid Mech.*, In Revision

Comme nous l'avons évoqué dans la section 7.1, nous avons choisi, dans notre première approche, de négliger le mécanisme de Miles dans le processus de transfert d'énergie entre le vent et les vagues. Ce choix était en partie lié au peu de différences observées entre les phases de focalisation d'un groupe de vagues propagé avec ou sans vent. Ceci suggère en effet qu'un mécanisme de transfert d'énergie prépondérant devant le mécanisme de Miles intervient au bout d'un certain temps. Il convient cependant de vérifier cette hypothèse, en constatant que le mécanisme de Miles a peu d'influence sur la durée de vie des vagues scélérates.

Pour cela, un modèle linéaire est mis au point à partir de l'équation de Schrödinger. Le vent y est introduit comme un taux de croissance d'amplitude identique à celui de Miles. Une très faible asymétrie est alors observée dans le processus de focalisation-défocalisation, ainsi qu'une légère augmentation de l'amplitude du pic de focalisation. Devant ce constat, il est important de se demander si la non-linéarité ne peut jouer un rôle dans le processus. Le modèle de Miles est donc introduit dans la méthode BIEM, et les simulations sont reproduites. Ici encore, une légère augmentation du pic est observée, et la durée de vie des vagues scélérates est à présent augmentée. La non-linéarité est alors prise comme paramètre de l'étude, et il apparaît qu'elle joue un rôle prépondérant dans le processus. Quoi qu'il en soit, une comparaison avec les résultats obtenus grâce au modèle de Jeffreys permet de mettre en évidence que l'augmentation de la durée de vie liée au mécanisme de Miles est faible devant celle liée au mécanisme de Jeffreys modifié. Ceci nous permet donc de valider notre hypothèse initiale, bien qu'en toute rigueur, il faudrait tenir compte des deux mécanismes.

On the interaction of wind and steep gravity wave groups using Miles' and Jeffreys' mechanisms

J. TOUBOUL[1]†, C. KHARIF[1],
E. PELINOVSKY[2], AND J.- P. GIOVANANGELI[1]
[1]Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre, Marseille, France
[2]Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod, Russia

(Received ?? and in revised form ??)

The interaction of wind and wave groups is investigated theoretically and numerically. A steep wave is generated by means of dispersive focusing, using both linear theory and fully nonlinear equations. Linear theory is based on Schrödinger equation while nonlinear study is performed numerically in the framework of potential theory. The interaction between the chirped wave packet and wind is described by the Miles' mechanism. The differences between both approaches are discussed, and the influence of nonlinearity is emphasized. Furthermore, a comparison is performed using a different mechanism described by the modified Jeffreys' sheltering theory. It is found that the persistence of the wave group depends on the physical process used, and is significantly increased using the latter mechanism.

1. Introduction

The problem of modelling the interaction of wind and sea waves has been widely studied during the last century. A large number of theories have been proposed to describe the phenomenon. None of them were completely satisfying before the theory derived by Miles (1957), as pointed out by Ursell (1956). Popular Miles' theory is based on the modelling of the resonant interaction of a sheared air flow with weakly nonlinear periodic wave field. This theory, complementary to the theory proposed by Phillips (1957), was the first to predict an exponential growth of waves corresponding to the growth observed, using the same set of parameters. The principal parameter controlling growth rate was the curvature of the mean wind vertical profile at the critical height. This growth rate was then parameterized by using the wave age (c/u^*), c being the wave phase velocity, and u^* the wind friction velocity. Since then, this mechanism as been widely studied and improved, for example through incorporating Reynolds stresses originally ignored in the model (Miles (1996, 1999)). It is now recognized as an excellent description of the wind-wave interaction (Janssen (2004)).

However, the specific case of wind interacting with space limited wave groups was not the central point of the previous investigations. This situation changed recently, with the growing interest of the scientific community in rogue waves. The increasing number of accidents related to those waves lead oceanographers to focus on the study of such events. As suggested by Kharif & Pelinovsky (2003), rogue waves can appear in various places, and are related to numerous physical phenomena. Especially, such waves can appear in

† Present address: Julien.Touboul@irphe.univ-mrs.fr

storm areas, where they encounter strong winds. In this context, the influence of wind on such unusual waves became a key point.
Recent work by Touboul *et al.* (2006),Touboul & Kharif (2006), and Kharif *et al.* (2008) investigated experimentally and numerically the influence of wind on focusing wave groups. Their study emphasized the existence of a strong asymmetry in the focusing-defocusing process, related to the interaction between wind and very steep waves. The previous authors suggested that the process could be described by a modified Jeffreys' sheltering mechanism. This mechanism, first introduced by Jeffreys (1925), is based on the difference of pressure between the leeward and the windward faces of the waves induced by air flow separation over high wave crests. With this assumption, they considered that local air flow separation observed over steep waves was predominant to describe the global process of wind and steep waves events.
In the framework of wind interaction with steep waves, one should recall that very steep waves are very short-lived events in a wave group presenting low steepness' value most of the time. Hence, it is questionable to consider the role of air flow separation as dominant mechanism. One can wonder if Miles' mechanism could be relevant to describe this specific interaction, since it should act during the whole lifetime of the group. Present work has been motivated by this remark.
In a first step, a linear model based on Schrödinger equation is derived, describing the evolution of a chirped wave packet. Wind is introduced in this model using Miles' theory. In a second step, full nonlinearity of hydrodynamical equations is introduced with the Miles' mechanism. Theoretical and numerical results obtained with both models are compared. The role of nonlinearity is emphasized. The asymmetry induced by this process is then quantified and discussed. Values of asymmetry obtained do not explain experimental observation presented in Kharif *et al.* (2008). Thus, a comparison with the modified Jeffreys' sheltering mechanism is finally provided and discussed.

2. Theoretical model

The spatio-temporal evolution of the envelope of narrow-banded weakly nonlinear water waves may be described by the nonlinear Schrödinger equation (NLS), initially derived in the context of water waves by Benney & Newell (1967). A balance between dispersion and nonlinearity results in this universal equation that reads

$$i(\frac{\partial A}{\partial t} + c_g \frac{\partial A}{\partial x}) - \frac{\varepsilon\omega_0}{8k_0^2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon\omega_0 k_0^2}{2} \mid A \mid^2 A = 0, \tag{2.1}$$

where A is the complex amplitude, where ε is a small parameter of nonlinearity corresponding to wave steepness, and where the surface elevation $\eta(x,t)$ is given by

$$\eta(x,t) = \frac{1}{2}A(x,t)\exp[i(k_0 x - \omega_0 t)] + c.c. \tag{2.2}$$

The wavenumber and frequency of the carrier wave are k_0 and ω_0 respectively, $c_g = (d\omega/dk)_{k_0}$ is the group velocity and $c.c.$ denotes the complex conjugate. The complex amplitude is assumed to be a slowly varying function of x and t. Introducing the transformation $\tau = \omega_0(t - x/c_g)$, $y = \varepsilon k_0 x$, $a = k_0 A$, and introducing wind forcing in equation (2.1) yields to the forced spatial nonlinear Schrödinger equation

$$i\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} - \mid a \mid^2 a = i\delta a. \tag{2.3}$$

The RHS term represents the wind action, where δ is the spatial growth rate. It was initially introduced in an *ad hoc* manner by Trulsen & Dysthe (1992) to model wind influence. However, this term can also be obtained by expressing the interface dynamic condition in presence of wind. Writing the kinematic boundary condition, with the assumption $\delta \simeq \varepsilon^2$, provides a link between the pressure term p and the vertical component of the velocity ika. Within the framework of water waves, a proper derivation of the forced NLS equation is done by Leblanc (2007).

Let us consider the focusing of a linear wave group under wind action. Equation (2.3) reduces to the following linear parabolic equation

$$i\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} + i\delta a, \tag{2.4}$$

By introducing $a(\tau, y) = b(\tau, y)\exp(\delta y)$ into equation (2.4), this equation rewrites

$$i\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial^2 b}{\partial \tau^2}. \tag{2.5}$$

Equation (2.5) is generally used to describe the wave focusing of chirped wave trains (see Clauss (1999) and Kharif & Pelinovsky (2003)), since it admits the following solution

$$b(\tau, y) = \frac{B_1}{\sqrt{1 - 4i\Omega_1^2 y}} \exp(-\frac{\Omega_1^2 \tau^2}{1 - 4i\Omega_1^2 y}). \tag{2.6}$$

The corresponding amplitude is given by

$$\mid b(\tau, y) \mid = \frac{B_1}{(1 + 16\Omega_1^4 y^2)^{\frac{1}{4}}} \exp(-\frac{\Omega_1^2 \tau^2}{1 + 16\Omega_1^4 y^2}), \tag{2.7}$$

and the related phase is

$$\arg[b(\tau, y)] = -\frac{\mathrm{atan}(4\Omega_1^2 \mathrm{y})}{2} - \frac{4\Omega_1^4 \tau^2 y}{1 + 16\Omega_1^4 y^2}. \tag{2.8}$$

The maximum of amplitude, reached for $\tau = 0$, decreases as $y^{-1/2}$. The frequency modulation, $\Omega(\tau, y) = \partial \arg(b)/\partial \tau$, varies linearly with time in the wave train. Hence, the low frequency oscillations are located ahead of the wave group as it is expected for a dispersive system. Under the transformation $y \to -y$ the high frequency oscillations are now located in front of the wave train (see Figure 1). The dispersive behavior of water waves leads this modulated wave group to focus energy in time and space. A caustic is formed, corresponding to a large amplitude wave. It describes the dispersive focusing of a chirped wave packet, generating an extreme wave event of maximal amplitude B_1 and characteristic spectral width Ω_1, at point $y = 0$.

Let us put the wave maker at point $y = -X_f$, and introduce the new spatial coordinate $z = y/L + 1$. Here, $L = k_0 X_f$ is a dimensionless focusing length with X_f the dimensional coordinate of the focus point. Let us also introduce $q = 4\Omega_1^2 L$, the phase index. The amplitude (2.7) of solution (2.6) reads now

$$\mid b(\tau, z) \mid = B_0 \left(\frac{1 + q^2}{1 + q^2(z-1)^2} \right)^{1/4} \exp\left(-\Omega_0^2 \tau^2 \frac{1 + q^2}{1 + q^2(z-1)^2} \right), \tag{2.9}$$

while the argument (2.8) becomes

$$\arg[b(\tau, z)] = \frac{\mathrm{atan(q(z-1))}}{2} + \left(\frac{1 + q^2}{1 + q^2(z-1)^2} \right) q(z-1)\Omega_0^2 \tau^2. \tag{2.10}$$

In equation (2.9) and (2.10), B_0 and Ω_0 refer to initial amplitude and characteristic spectral width. They are connected to B_1 and Ω_1 by relations

$$B_0 = \frac{B_1}{(1+q^2)^{1/4}} \qquad \text{and} \qquad \Omega_0 = \frac{\Omega_1}{(1+q^2)^{1/2}}. \tag{2.11}$$

The linear evolution of a transient wave packet yielding a steep wave event is completely described by equations (2.9) and (2.10), which only depend on the three independent parameters: the initial maximum amplitude B_0, the initial characteristic spectral width Ω_0, and the phase index q.

As mentioned earlier, wind effect is introduced by multiplying solution (2.9) by $\exp(\delta y)$. Maximum amplitude of the envelope of the chirped wave packet propagated under the action of wind is given by

$$A(z) = A_0 \left(\frac{1+q^2}{1+q^2(z-1)^2} \right)^{1/4} \exp(\gamma z), \tag{2.12}$$

where $A_0 = B_0$ is the maximum amplitude of the initial condition's envelope, and where $\gamma = \delta L$ is the dimensionless spatial growth rate of wave energy. It is clear that the wave amplitude $A(z)$ is now non-symmetric around focusing point $z = 1$, while it was in absence of wind.

The spatial growth rate of energy is computed using Miles' theory. Hence, the spatial growth rate of wave amplitude due to a wind of velocity U is given by

$$\delta = \frac{2\beta}{\kappa^2} \frac{\rho_a}{\rho_w} \left(\frac{u^*}{c} \right)^2. \tag{2.13}$$

In equation (2.13), β is the energy-transfer parameter of Miles, $\kappa = 0.4$ is the Von Karman constant, ρ_a and ρ_w are the densities of air and water respectively, $u^* = \sqrt{C_d} U$ is the friction velocity, c is the wave phase velocity and k_0 is the corresponding wave number. The drag coefficient $C_d = 0.004$ is known experimentally for such wave groups, and for inverse wave age $u^*/c = 0.2$. These experiments are described in Kharif *et al.* (2008). The value of β is considered as a parameter, as it will be discussed later. Phase velocity and wave number are obtained using linear dispersion relation in infinite depth: $k_0 = \omega_0^2/g$, and $c = g/\omega_0$.

3. Numerical model

The focusing wave group has low steepness during the major part of its existence. This feature can justify the use of the linear approach. Nevertheless, the steepness reached in the vicinity of the focusing point becomes important, and one should consider nonlinear effects due to large steepness. Thus, the fully nonlinear potential equations governing the free surface motion are considered here to describe the evolution of the transient wave group. These equations are the Laplace equation and nonlinear boundary conditions

$$\Delta\phi = 0, \qquad \text{for} \qquad -h < z < \eta(x,t), \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \qquad \text{on} \qquad z = \eta(x,t), \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi + g\eta = -\frac{p}{\rho_w}, \qquad \text{on} \qquad z = \eta(x,t), \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \qquad \text{on} \qquad z = -h, \tag{3.4}$$

where $\phi(x, z, t)$ is the velocity potential, $z = \eta(x, t)$ is the equation of the surface, g is the acceleration due to gravity, p is the atmospheric pressure at the surface, x and z are the horizontal and vertical coordinates respectively and t is the time. The numerical wave tank is closed using wall conditions on its ends. One of these ends is mobile and used as a wavemaker. The equations are solved with a boundary integral element method (BIEM), using a mixed Euler Lagrange description of the above equations. Time stepping is performed using a fourth order Runge & Kutta scheme, with a constant time step. More details can be found in Touboul *et al.* (2006).
The wind effect is described by the pressure term $p(x, t)$ applied at the interface, in equation (3.3). Following Banner & Song (2002), this term is assumed to be in phase with the wave slope. The surface pressure is assumed to have a distribution of the form

$$p(x, t) = \alpha \rho_a {u^*}^2 \frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{3.5}$$

where ρ_a is the air density, and α an unknown parameter. The total energy input from this pressure term is $\int_\lambda (p\partial\eta/\partial t)\, dx$, where λ is a wavelength. Thus, the relation between α and the spatial growth rate is easily established by using a linear description of $\eta(x, t)$, and calculating this integral. It comes

$$\delta = \frac{2\beta}{\kappa^2} \frac{\rho_a}{\rho_w} \left(\frac{u^*}{c}\right)^2 = \alpha \frac{\rho_a}{\rho_w} \left(\frac{u^*}{c}\right)^2. \tag{3.6}$$

The simulations are conducted using the pressure term of equation (3.5), with the value $\alpha = 2\beta/\kappa^2$. The growth rates respectively due to this pressure term and to the theoretical approach are the same. However, it is important to notice that full nonlinearity is only introduced in water. This description of air flow, based on Miles' theory, neglects nonlinearity. The friction velocity u^* is assumed constant along the group, which is a basic assumption. However, the recent work by Makin *et al.* (2007) emphasizes that the variation of u^* in the range of steepness considered in our groups is of order 10%.

4. Results and discussion

To investigate the effect of nonlinearity, several initial conditions are used. Table 1 presents these conditions, with the corresponding nonlinearity reached during the simulations. $\varepsilon_{th} = B_1 \times k_0$ is the maximum steepness at the focusing point, from linear theory. $|\partial\eta/\partial x|$ is the maximum local slope obtained from nonlinear simulations without wind, while ε_s is the steepness of a nonlinear Stokes wave presenting the same maximal slope. One should note that linear theory underestimates steepness up to 70%.
Initial conditions correspond to initial parameters $X_f = 15m$ and $\Omega_1 = 0.3$. The frequency of the carrier wave is chosen such as $\omega_0 = 2\pi\,\mathrm{rad/s}$, which is similar to the value used in Kharif *et al.* (2008). Figure 1 shows the theoretical initial elevation (solid line) versus time, obtained from equations (2.2) and (2.9), at $z = 0$. It corresponds to the initial focusing wave train, with initial parameter $B_1 = 0.3$. Figure 1 displays the nonlinear free surface elevation (dotted line) too, recorded one carrier wavelength away from the paddle. It has been obtained iteratively, to reproduce theoretical initial condition. This probe location is considered as being the origin of the x axis in the following simulations. The comparison between both theoretical and numerical probes shows an excellent agreement.
These initial conditions are used to propagate numerically wave groups without wind, and under wind, for $u^*/c = 0.2$. For this value of inverse wave age, several values of α extending from 27 and 38 are available in the literature (see Figure 1 of Banner & Song

	B_1	ε_{th}	$\lvert\partial\eta/\partial x\rvert$	ε_s
1	0.075	0.024	0.030	0.030
2	0.150	0.048	0.061	0.061
3	0.225	0.072	0.098	0.098
4	0.300	0.095	0.131	0.130
5	0.375	0.119	0.181	0.178
6	0.450	0.144	0.227	0.220
7	0.525	0.168	0.305	0.289

TABLE 1. Initial conditions used for the simulations and corresponding maximal steepness

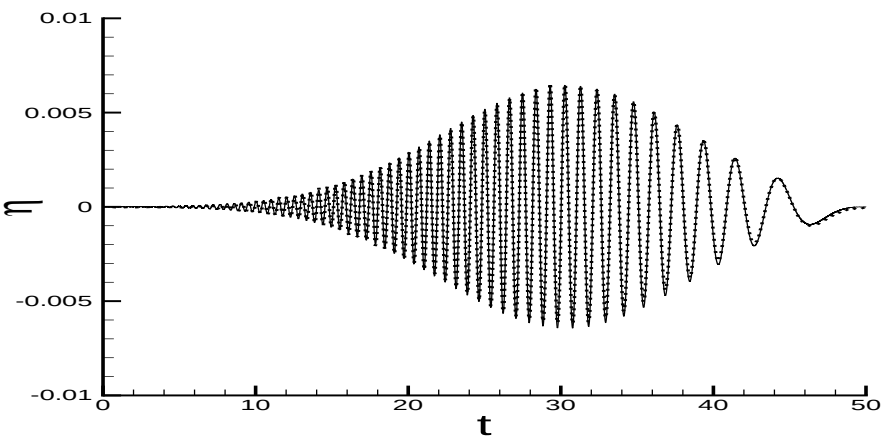


FIGURE 1. Surface elevation η (m) as a function of time t (s) corresponding to initial condition 4 of Table 1: theoretical solution (—) and numerical simulation $(\cdots)$.

(2002)). The latter authors used $\alpha = 32.5$. According to equation (3.6), this value corresponds to $\beta = 2.6$, obtained graphically. Simulations are then performed with $\beta = 2.2$, $\beta = 2.6$ and $\beta = 3$, and results are compared.
Figure 2 shows the amplification factor A/A_0 versus dimensionless fetch z. Amplification parameter is defined numerically by

$$\frac{A}{A_0}(z) = \frac{\max\{\eta(z,t)\}}{\max\{\eta(0,t)\}}. \tag{4.1}$$

Figure 2(a) corresponds to the theoretical solution and numerical solution corresponding to the initial condition 4 of Table 1, without wind. Nonlinear effects results in a widening of the curve around the peak. The nonlinear interactions among the different components of the group produce a detuning effect that diminishes the peak height. The maximum amplitude is weaker in the nonlinear simulation than predicted by the linear theory.
Figure 2(b) shows the spatial evolution of the numerical solution corresponding to initial condition 4 of Table 1 and theoretical solutions with and without wind. The growth rate used herein is $\beta = 2.6$. A comparison between theoretical linear solutions emphasizes the effect of the wind. An increase of the amplification factor and a weak asymmetry between focusing and defocusing stages are observed. These features are more important

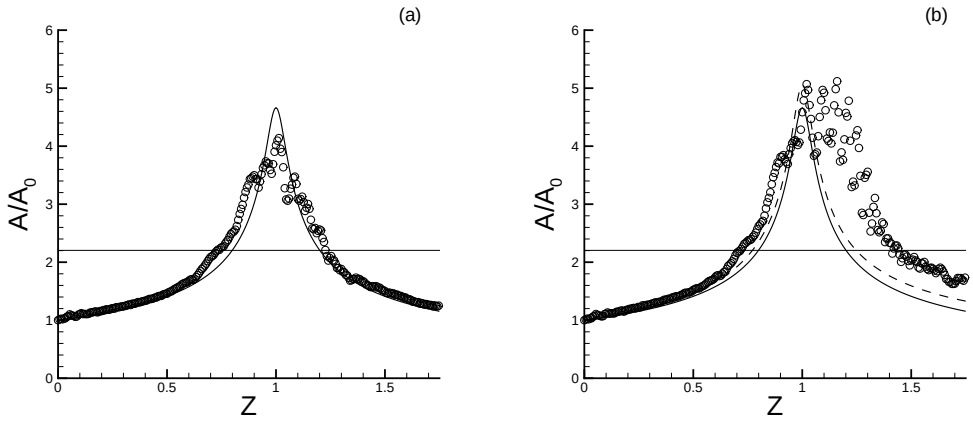


FIGURE 2. (a): Amplification factor $A/A_0(z)$ for a transient wave group propagated without wind. (—): Theoretical linear solution; (o): Numerical solution. (b): Amplification factor for a wave group propagated under wind action, with growth rate $\beta = 2.6$. (—): Theoretical linear solution without wind; (- -): Theoretical linear solution with wind; (o): Numerical solution. Both simulations are conducted with initial condition 4 of Table 1.

when the nonlinearity is introduced.

In both Figures 2(a) and 2(b), oscillations of wave number k_0 appear around the peak. They are not obvious without wind, but increase significantly in presence of wind. Similar oscillations have already been observed by Song & Banner (2002) around the maximum of modulation for a wave group submitted to Benjamin-Feir instability, without wind. They noticed that these oscillations were the consequence of the asymmetry between wave crests and troughs. When a crest or a trough are located at the maximum envelope amplitude, the densities of energy are not the same. This results in an oscillation of frequency $2\omega_0$, and wave number k_0, of the maximum amplitude of the envelope of the group. Thus, this phenomenon is correlated to nonlinearity, rather than wind action. However, it is reasonable to consider that wind increases nonlinearity. The phenomenon observed is similar to the one described by Song & Banner (2002).

Figures 2(a) and 2(b) also display an horizontal line, which corresponds to $A/A_0 = 2.2$. This criterion is often used as a rogue wave definition. A wave is considered to be a rogue wave as soon as $A/A_0 \geqslant 2.2$, as mentioned by Kharif & Pelinovsky (2003). This criterion is used to define a significant length of existence of steep waves in the group. This length L_f during which this criterion is satisfied, depends on the asymmetry of the focusing-defocusing curve.

Figures 3(a) and 3(b) show respectively the length L_f, normalized by its value without wind L_{f0}, and the maximum amplitude A_f reached by the transient wave packet during the focusing-defocusing process, normalized by the corresponding value without wind A_{f0}, for several values of the growth rate β. Both quantities are presented as a function of the steepness parameter ε_s. This nonlinear parameter used as abscissa is the steepness presented in Table 1. It corresponds to an estimate of the steepness reached in the simulations without wind. The value $\varepsilon_s = 0$ corresponds to the theoretical solution, and the corresponding points on Figures 3(a) and 3(b) show respectively the normalized length L_f and the normalized amplitude A_f obtained with the theoretical approach. Simulations have been performed with growth rates $\beta = 2.2$, $\beta = 2.4$, and $\beta = 3$ respectively. Points corresponding to larger steepness are not presented, because breaking occurred during these simulations. It is important to emphasize that the local slope $|\partial\eta/\partial x|$ obtained in

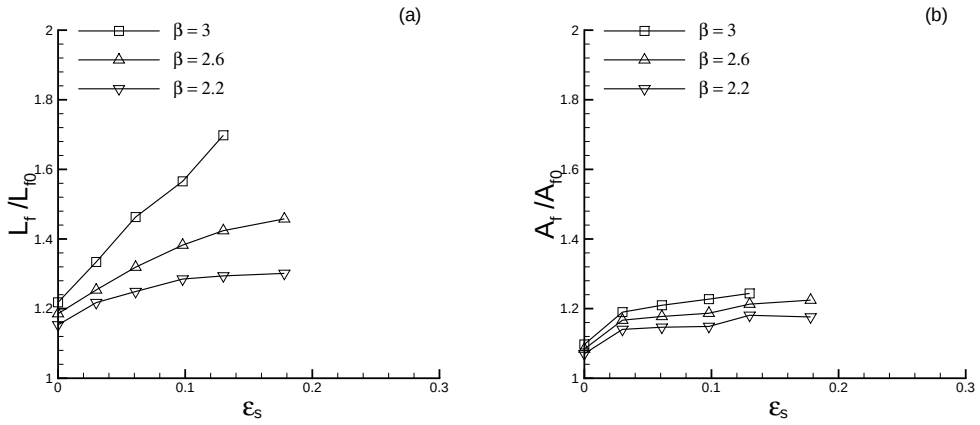


FIGURE 3. (a): Length of existence of the steep wave under wind action L_f/L_{f0} as a function of the nonlinear parameter ε_s. (b): Maximum amplitude reached by the transient wave group under wind action versus nonlinear parameter ε_s. The value $\varepsilon_s = 0$ corresponds to theoretical model in both cases.

the simulations with wind can be larger than 0.5.

One can notice from Figure 3(a) that nonlinearity plays a significant role in sustaining steep wave groups. For small value of the growth rate $\beta = 2.2$, the deviation from the linear theory is not very important (about 10%). For larger values of β, 2.6 and 3, the deviation from the linear theory is quite more significant (up to 50%). For the latter cases, wind input is more important, and nonlinearity is increased. The transient wave packet which is affected by nonlinearity, presents steep waves over significant distances.

From Figure 3(b), it is observed that the normalized amplification A/A_0 is not significantly affected by the nonlinear parameter ε_s. In every simulations, the deviation from linear theory has never been larger than 13%. This confirms the fact that nonlinear interactions between waves lead to the detuning process mentioned above.

However, as mentioned in section 3, nonlinearity in the air flow is not taken into account using this mechanism. Its relevance to describe the interaction of wind and steep waves might be questionable. The Jeffreys' sheltering mechanism describes air flow separation over waves. This mechanism is not relevant for low steepness waves as shown by Stanton *et al.* (1932). However, for larger steepness, it is well known that air flow separation occurs, resulting in a significant increase of wind to wave energy flux. Belcher & Hunt (1998) suggested that the Jeffreys sheltering mechanism would be appropriate to describe wind forcing over the steepest waves. This behavior can be described by introducing a threshold in slope, and expressing the pressure term of Equation (3.5) by

$$\begin{cases} p(x) = 0 & \text{if } |\partial\eta/\partial x|_{max} < |\partial\eta/\partial x|_c \\ p(x) = \rho_a s\,(U-c)^2 \dfrac{\partial\eta}{\partial x}(x) & \text{if } |\partial\eta/\partial x|_{max} \geqslant |\partial\eta/\partial x|_c \end{cases} \tag{4.2}$$

where s is a sheltering coefficient, introduced by Jeffreys (1925). More details about the modified Jeffreys' sheltering mechanism can be found in Touboul *et al.* (2006).

In order to compare Miles' theory with the modified Jeffreys' sheltering mechanism, simulations have also been performed using this latter phenomenon. Each initial condition has been propagated under the Jeffreys' sheltering mechanism. The parameter $|\partial\eta/\partial x|_c$ was chosen to be 60% of the maximum value presented in Table 1, while the sheltering coefficient was chosen to be $s = 0.5$, as suggested by Jeffreys (1925), and confirmed

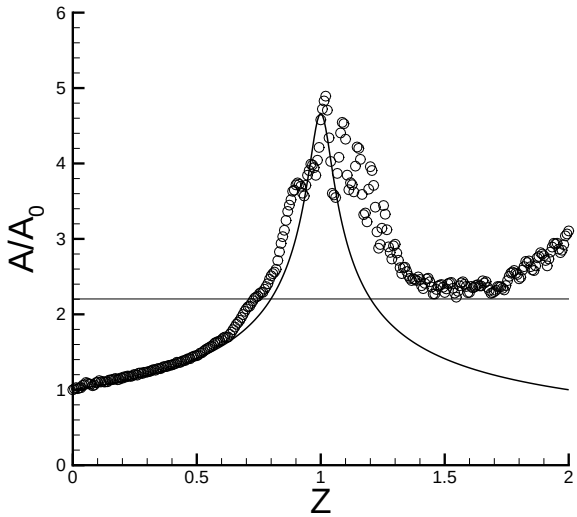


FIGURE 4. Amplification factor $A/A_0(z)$ for a transient wave group. (—): Theoretical linear solution without wind; (o): Numerical solution corresponding to a wave group of steepness $\varepsilon_{Stokes} = 0.28$ propagated under wind modelled through the modified Jeffreys' sheltering mechanism.

experimentally. The numerical and theoretical spatial evolutions of the amplification factor $A/A_0(z)$ are plotted in Figure 4. The solution computed numerically from the fully nonlinear equations corresponds to the initial condition 7 of Table 1 under wind action when the modified Jeffreys' sheltering mechanism is used. The theoretical solution given by the linear theory without wind effect and the horizontal straight line corresponding to the rogue wave criterion are also plotted, for the sake of reference.

Jeffreys pressure term is applied on the surface of each wave of the group overcoming this threshold. It is the critical parameter $|\partial\eta/\partial x|_c$ mentioned above. Thus, during the focusing-defocusing process, the modified Jeffreys' sheltering mechanism is only active near the focusing point. This is very different from Miles' mechanism, which is effective during the whole process. The total amount of energy transferred from wind to waves is larger through Jeffreys' mechanism during extreme wave event, but the energy distribution in time and space is different from a mechanism to another. This changes considerably the dynamics of the chirped wave packets under wind action. In absence of wind, wave groups of large steepness are near breaking in the vicinity of the focusing point. In presence of wind, some energy is added. Using Miles' mechanism, a large amount of energy have already been transferred before occurrence of the extreme wave event. With Jeffreys' mechanism, the transfer starts when the chirped wave packet reaches the focusing point. If wind is introduced using Miles' mechanism, this would result in the disappearance of the group close to that point because breaking will occur. It is not the case for wave groups propagated using Jeffreys' sheltering mechanism. Results can be seen in Figure 4. In that case, the length of existence of the rogue wave event is significantly increased (at least 200%). This result is sensitive to the set of parameters used to model air flow separation. However, this model produces a persistence of rogue waves which is in good agreement with experimental behavior observed by Kharif *et al.* (2008).

5. Conclusions

The influence of wind on the dynamics of extremely steep waves obtained from chirped wave packets has been studied theoretically and numerically. Wind has been described by the Miles' theory. The role of nonlinearity in the process has been investigated.
The theory, derived from linear Schrödinger equation points out that the wind is responsible for an increase of the maximum wave amplitude. A weak asymmetry in the focusing-defocusing process is also observed.
The nonlinear simulations have partially confirmed these results. Several initial conditions have been used in the numerical wave tank. These initial conditions, corresponding to different values of the steepness ε_s, lead to several behaviors. Results are analyzed as a function of the nonlinear parameter ε_s. In every simulations, a weak deviation from linear theory for the maximum of amplitude is observed (less than 13%) while it is not the case for the length L_f which is proportional to wind input. Major differences are found when considering the asymmetry in the focusing-defocusing process. The asymmetry observed in the focusing-defocusing process is significantly larger than expected, resulting in the persistence over larger distances of the extreme wave event. The relative deviation between nonlinear and linear models with wind action presents values up to 50%. However the relative deviation between the nonlinear models with and without wind never exceeds 70%.
Experimentally, Touboul *et al.* (2006) and Kharif *et al.* (2008) found an increase of duration length larger than 200%. We can conclude that Miles' mechanism cannot explain correctly experimental observations. Hence, simulations have also been performed using the modified Jeffreys' sheltering theory. In this case, a better agreement between numerical and experimental results is found. The relative deviation between the nonlinear models with and without wind exceeds 200%, for large values of ε_s.

We are grateful to the referees for their useful comments that helped us to improve the paper. This work was supported by the INTAS Grant $N^o 06 - 1000013 - 9236$

REFERENCES

Banner, M.I. & Song, J.-B. 2002 On determining the onset and strength of breaking for deep water waves. part ii : Influence of wind forcing and surface shear. *J. Phys. Oceanogr.* **32 (9)**, 2559–2570.

Belcher, S.E. & Hunt, J.C.R. 1998 Turbulent flows over hill and waves. *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **30**, 507–538.

Benney, D.J. & Newell, A.C. 1967 The propagation of nonlinear wave envelop. *J. Math. Phys.* **46**, 133–139.

Clauss, G. 1999 Task-related wave groups for seakeeping tests or simulation of design storm waves. *Appl. Ocean Res.* **21 (5)**, 219–234.

Janssen, P. 2004 The interaction of ocean waves and wind. Cambridge University Press.

Jeffreys, H. 1925 On the formation of wave by wind. *Proc. Roy. Soc. A* **107**, 189–206.

Kharif, C., Giovanangeli, J.-P., Touboul, J., Grare, L. & Pelinovsky, E. 2008 Influence of wind on extreme wave events: Experimental and numerical approaches. *J. Fluid Mech.* **594**, 209–247.

Kharif, C. & Pelinovsky, E. 2003 Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon. *Eur. J. Mech. B/Fluids* **22**, 603–634.

Leblanc, S. 2007 Amplification of nonlinear surface waves by wind. *Phys. Fluids* **19**, 101705.

Makin, V.K., Branger, H., Peirson, W.L. & Giovanangeli, J.-P. 2007 Stress above wind-plus-paddle waves: modelling of a laboratory experiment. *J. Phys. Oceanogr.* **In Press**.

Miles, J. W. 1957 On the generation of surface waves by shear flow. *J. Fluid Mech.* **3**, 185–204.

Miles, J. W. 1996 Surface-wave generation: a viscoelastic model. *J. Fluid Mech.* **322**, 131–145.

Miles, J. W. 1999 The quasi-laminar model for wind-to-wave energy transfer. In *Wind-over-wave couplings* (ed. S. G. Sajjadi, N. H. Thomas & J. C. R. Hunt), *The institute of mathematics & its applications conference series*, vol. 69, pp. 1–7. Clarendon Press, Oxford.

Phillips, O. M. 1957 On the interaction of waves by turbulent wind. *J. Fluid Mech.* **2**, 417–455.

Song, J.-B. & Banner, M. I. 2002 On determining the onset and strength of breaking for deep water waves. part i : Unforced irrotational wave groups. *J. Phys. Oceanogr.* **32 (9)**, 2541–2558.

Stanton, T., Marshall, D. & Houghton, R. 1932 The growth of waves on water due to the action of the wind. *Proc. Roy. Soc. A* **137**, 283–293.

Touboul, J., Giovanangeli, J.-P., Kharif, C. & Pelinovsky, E. 2006 Freak waves under the action of wind: Experiments and simulations. *Eur. J. Mech. B/Fluids* **25 (5)**, 662–676.

Touboul, J. & Kharif, C. 2006 On the interaction of wind and extreme gravity waves due to modulational instability. *Phys. Fluids* **18**, 108103.

Trulsen, K. & Dysthe, K.B. 1992 Action of windstress and breaking on the evolution of a wavetrain. In *Breaking Waves, IUTAM Symposium Sydney (Australia)* (ed. M.I. Banner & R.H.J. Grimshaw). Springer Verlag Berlin Heidelberg.

Ursell, F. 1956 Wave generation by wind. In *Surveys in Mechanics* (ed. G. K. Batchelor). Cambridge University Press.

7.4 Kharif C., Giovanangeli J.-P., Touboul J., Grare L., Pelinovsky E., Influence of wind on extreme wave events : Experimental and numerical approaches, *J. Fluid Mech.*, 594, p. 209–247, 2008

Les sections 7.1, 7.2 et 7.3 ont permis de mettre en évidence qu'une approche faisant appel au mécanisme de Jeffreys modifié semblait appropriée pour décrire l'interaction entre le vent et les vagues scélérates obtenue par focalisation dispersive. Ce constat phénoménologique est basé sur la nature du comportement observé. La section 7.3 a d'ailleurs permis de montrer qu'un mécanisme de type Miles pouvait ici être écarté. Cependant, à ce stade de l'étude, nous ne pouvons pas affirmer que le phénomène suggéré est bien fidèle à la physique observée. Dans ce chapitre, nous nous attachons à étoffer notre hypothèse de manière conséquente. De nouvelles expériences ont été conduites dans la soufflerie. Ces expériences permettent d'obtenir une confrontation directe entre le modèle et la théorie. Un décollement aérien au dessus d'une vague scélérate est également observé. Les travaux présentés ici permettent de conclure quand à la pertinence du choix d'un mécanisme à seuil, faisant appel au mécanisme de Jeffreys, qui décrit le décollement aérien au dessus des vagues.

J. Fluid Mech. (2008), *vol.* 594, *pp.* 209–247. © 2008 Cambridge University Press
doi:10.1017/S0022112007009019 Printed in the United Kingdom

Influence of wind on extreme wave events: experimental and numerical approaches

C. KHARIF[1], J.-P. GIOVANANGELI[1], J. TOUBOUL[1], L. GRARE[1] AND E. PELINOVSKY[2]

[1]Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre, Aix-Marseille University, France
kharif@irphe.univ-mrs.fr

[2]Institute of Applied Physics, Nizhny Novgorod, Russia

(Received 9 October 2006 and in revised form 28 August 2007)

The influence of wind on extreme wave events in deep water is investigated experimentally and numerically. A series of experiments conducted in the Large Air–Sea Interactions Facility (LASIF-Marseille, France) shows that wind blowing over a short wave group due to the dispersive focusing of a longer frequency-modulated wavetrain (chirped wave packet) may increase the time duration of the extreme wave event by delaying the defocusing stage. A detailed analysis of the experimental results suggests that extreme wave events may be sustained longer by the air flow separation occurring on the leeward side of the steep crests. Furthermore it is found that the frequency downshifting observed during the formation of the extreme wave event is more important when the wind velocity is larger. These experiments have pointed out that the transfer of momentum and energy is strongly increased during extreme wave events.

Two series of numerical simulations have been performed using a pressure distribution over the steep crests given by the Jeffreys sheltering theory. The first series corresponding to the dispersive focusing confirms the experimental results. The second series which corresponds to extreme wave events due to modulational instability, shows that wind sustains steep waves which then evolve into breaking waves. Furthermore, it was shown numerically that during extreme wave events the wind-driven current could play a significant role in their persistence.

1. Introduction

The main objective of this paper is to understand better the physics of extreme wave events in the presence of wind. This study deals with the fundamental problem of the air flow structure above steep water wave groups and its impact on wind–wave coupling, namely its effects on air–sea fluxes. The present experimental and numerical investigations concern the rogue wave phenomenon in the presence of wind. This work, which has been motivated primarily by the problem of rogue waves, goes beyond the scope of these water waves and can be applied to the field of the interaction between wind and strongly modulated surface wave groups in deep water.

There are a number of physical mechanisms that focus the wave energy into a small area and produce the occurrence of extreme waves called freak or rogue waves. These events may be due to refraction (presence of variable currents or bottom topography), dispersion (frequency modulation), wave instability(the Benjamin–Feir instability also

called modulational instability), soliton interactions, etc. For more details on these different mechanisms see the reviews on freak waves by Dysthe (2001) and Kharif & Pelinovsky (2003). At present, there is no consensus about a unique definition of rogue wave events. One definition often used is based on height criterion. A wave is considered to be a rogue wave if its height, H_f, satisfies the condition

$$H_f > 2.2H_s, \tag{1.1}$$

where H_s is the significant height.

To our knowledge, the present experimental and numerical study is the first one to consider the direct effect of strong wind on the rogue wave formation. In different situations, several authors have investigated experimentally the influence of wind on the evolution of mechanically generated gravity water waves. Bliven, Huang & Long (1986), Li, Hui & Donelan (1987) and Waseda & Tulin (1999) have studied the influence of wind on Benjamin–Feir instability. Contrary to results reported by Bliven *et al.* and Li *et al.* Waseda & Tulin found that wind did not suppress the sideband instability. Banner & Song (2002) have studied numerically the onset of wave breaking in nonlinear wave groups in the presence of wind forcing. In the present paper, we investigate how wind forcing modifies unforced extreme wave events due to spatio-temporal focusing and modulational instability.

Extreme wave events that are due to spatio-temporal focusing phenomena can be described as follows. If initially short wave packets are located in front of longer wave packets having larger group velocities, then during the stage of evolution, longer waves will overtake shorter waves. A large-amplitude wave can occur at some fixed time because of superposition of all the waves merging at a given location (the focus point). Afterwards, the longer waves will be in front of the shorter waves, and the amplitude of the wavetrain will decrease. This focusing–defocusing cycle was described by Pelinovsky, Talipova & Kharif (2000) within the framework of the shallow-water theory. Slunyaev *et al.* (2002) used the Davey–Stewartson system for three-dimensional water waves propagating in finite depth. This technique was also used in the experiments on extreme waves conducted by Giovanangeli, Kharif & Pelinovsky (2005) and Touboul *et al.* (2006).

Another mechanism generating extreme wave events is the modulational instability or the Benjamin–Feir instability. Owing to this instability, uniform wavetrains suffer modulation–demodulation cycles (the Fermi–Pasta–Ulam recurrence). At the maximum of modulation, a frequency downshifting is observed and very steep waves occur. Many authors have investigated rogue waves or extreme wave events due to modulational instability (e.g., Henderson, Peregrine & Dold 1999; Dysthe & Trulsen 1999; Osborne, Onorato & Serio 2000; Kharif *et al.* 2001; Calini & Schober 2002; Janssen 2003; Dyachenko & Zakharov 2005; Clamond *et al.* 2006). Nevertheless, none of these studies considered the direct effect of wind on the dynamics of extreme wave events.

In the presence of wind, separation of the air flow occurring in the lee of very steep crests, suggests that the Jeffreys sheltering mechanism can be applied locally in space and time. Banner & Melville (1976) explored both experimentally and analytically the occurrence of air-flow separation over a simple gravity surface wave. Herein we used the simple wind modelling suggested by Jeffreys (1925).

The wind influence on extreme wave events due to spatio-temporal focusing is investigated experimentally and numerically while extreme wave events caused by modulation instability are considered numerically only.

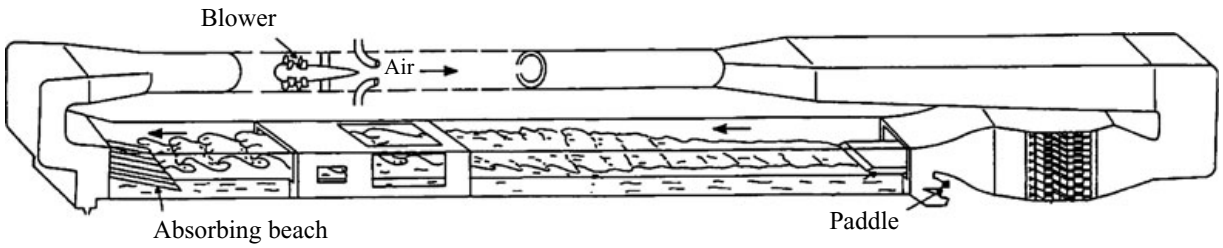


FIGURE 1. A schematic description of the Large Air–Sea Interactions Facility.

In §2 we present the experimental facility and results concerning extreme waves generated through the spatio-temporal focusing. A wind modelling is proposed in §3, based on the Jeffreys sheltering mechanism that is used for the numerical simulations corresponding to the spatio-temporal focusing and the nonlinear focusing due to the Benjamin–Feir instability, respectively.

2. Experiments and results

2.1. *Experimental facility*

The experiments have been conducted in the large wind-wave tank of IRPHE at Marseille Luminy (figure 1). It consists of a closed loop wind tunnel located over a water tank 40 m long, 1 m deep and 2.6 m wide. The wind tunnel over the water flow is 40 m long, 3.2 m wide and 1.6 m high. The blower can produce wind velocities up to 14 m s^{-1} and a computer-controlled wavemaker submerged under the upstream beach can generate regular or random waves in a frequency range from 0.5 Hz to 2 Hz. Particular attention has been paid to simulate a pure logarithmic mean wind velocity profile with a constant shear layer over the water surface. A trolley installed in the test section allows probes to be located at different fetches all along the facility. The water-surface elevation is measured by using three capacitive wave gauges of 0.3 mm outer diameter with DANTEC model 55E capacitance measuring units. A wave gauge is located at a fixed fetch of 1 m from the upstream beach. The other wave gauges are installed on the trolley to measure the water surface elevation at different fetches from the upstream beach. The typical sensitivity of the wave probes is of the order of 0.6 V cm^{-1}. The longitudinal and vertical air flow velocity fluctuations, u' and w', have been measured by means of an X hot wire. The fetch is defined as the distance between the probes on the trolley and the end of the upstream beach where air flow meets the water surface.

2.2. *The spatio-temporal focusing mechanism*

Extreme wave events are generated by means of a spatio-temporal focusing mechanism. This mechanism is based upon the dispersive behaviour of water waves. In this chirped wave packet, the leading waves have a higher frequency than trailing waves. Within the framework of a linear approach to the problem, the sea surface is a superposition of linear waves of frequencies $\omega(x, t)$. According to Whitham (1967), the spatio-temporal evolution of the frequency of these components is governed by the hyperbolic equation

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + c_g(\omega)\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \tag{2.1}$$

where c_g is the group velocity. This equation can be solved by using the method of characteristics. The solution is given by

$$\omega(x,t) = \omega_0(\tau), \qquad v_g(\tau) = c_g(\omega_0(\tau)) \quad \text{on} \quad t = \tau + x/v_g(\tau), \tag{2.2}$$

where ω_0 corresponds to the temporal frequency distribution of the wavetrain at $x = 0$. The temporal partial derivative of the frequency is

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\omega_0}{\mathrm{d}\tau}}{1 - \dfrac{x}{v_g^2}\dfrac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}\tau}}. \tag{2.3}$$

We can see that the case $\mathrm{d}v_g/\mathrm{d}\tau > 0$, which corresponds to short waves emitted before longer waves, leads to a singularity. This singularity corresponds to the focusing of several waves at $t = T_{f_{th}}$ and $x = X_{f_{th}}$. For infinite depth, the frequency to impose on the wavemaker located at $x = 0$ is given by

$$\omega(0,t) = \frac{g}{2}\frac{T_{f_{th}} - t}{X_{f_{th}}}, \tag{2.4}$$

where $X_{f_{th}}$ and $T_{f_{th}}$ are the coordinates of the point of focus in the (x,t)-plane. Using $\omega = 2\pi f$ the coordinates of the focus point reads

$$T_{f_{th}} = \Delta T \frac{f_{max}}{f_{max} - f_{min}}, \tag{2.5a}$$

$$X_{f_{th}} = \frac{g\Delta T}{4\pi}\frac{1}{f_{max} - f_{min}}, \tag{2.5b}$$

where f_{max} and f_{min} are the maximal and minimal values of the frequency imposed to the wavemaker during a period of time equal to ΔT and g is the acceleration due to gravity.

The wave amplitude, a, satisfies the following equation

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(c_g a^2) = 0. \tag{2.6}$$

This equation corresponds to the conservation of wave energy, and its solution is found explicitly by

$$a(x,t) = \frac{a_0(\tau)}{\sqrt{1 - \dfrac{x}{v_g^2}\dfrac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}\tau}}}, \tag{2.7}$$

where $a_0(\tau)$ is the temporal distribution of the wave amplitude at $x = 0$. Within the framework of the linear theory, focus points are singular points where the amplitude becomes infinite and behaves as $(X_{f_{th}} - x)^{-1/2}$.

Experimentally, the values $f_{max} = 1.3$ Hz and $f_{min} = 0.8$ Hz correspond to the maximal and minimal frequencies of the wavemaker and $\Delta T = 10$ s is the duration of the wave generation. The surface elevation given by the probe located at 1 m from the upstream beach is presented in figure 2. From these data we find that $T_{f_{th}} = 26$ s and $X_{f_{th}} = 17$ m while the experimental values are $T_{f_{exp}} = 26$ s and $X_{f_{exp}} = 20$ m (see figure 3). Experimental data are in close agreement with the linear theory. The difference observed between the theoretical and experimental values of X_f is mainly due to the nonlinearity of the experimental wavetrain. The wavetrain generated at

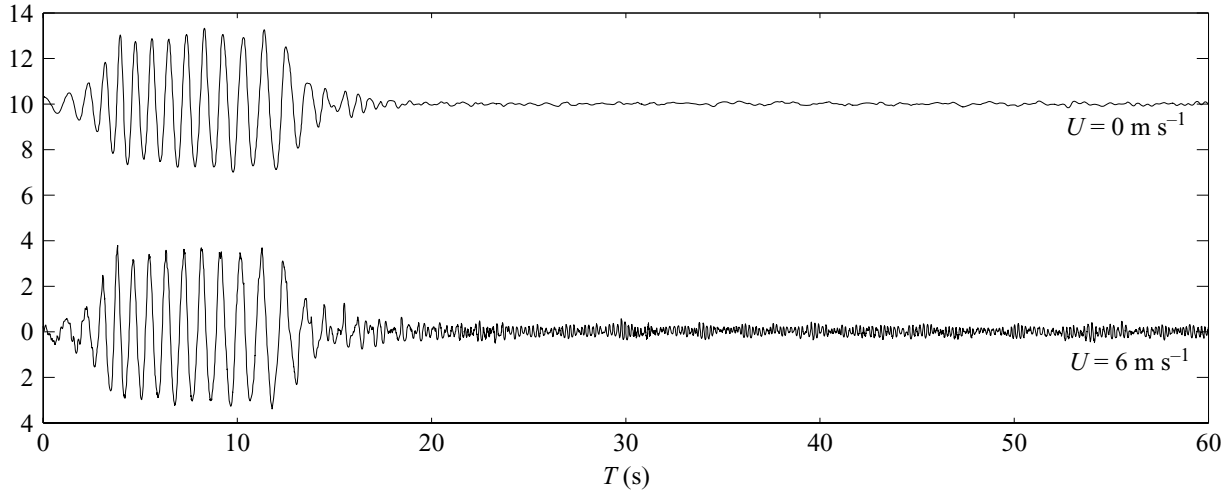


FIGURE 2. Surface elevation (in cm) at fetch $X = 1$ m, for wind speeds $U = 0$ and $6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (note that for $U = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, the origin of the elevation corresponds to the value 10 cm).

the wavemaker is uniform in amplitude, hence the short waves are more nonlinear than the longer waves, and the result is a downstream shift of the focusing location.

2.3. *Experimental results*

The focusing experiments are performed with and without wind. The same initial wavetrain is generated and propagated without wind, and under the action of wind for several values of the wind velocity equal to $U = 4$ m s^{-1}, 5 m s^{-1}, 6 m s^{-1}, and 8 m s^{-1} respectively. When the wind blows, the focusing wavetrain is generated once wind waves have developed. For each value of the mean wind velocity U, the water surface elevation is measured at 1 m fetch and at different fetches between 3 m and 35 m. The wavemaker is driven by an analogue electronic signal to produce this signal linearly varying with time from 1.3 Hz to 0.8 Hz in 10 s, with an almost constant amplitude of the displacement. The wavemaker is totally submerged to avoid any perturbation of the air flow which could be induced by its displacement.

To ensure the repeatability of the experimental conditions under the wind action, the water elevations at 1 m were recorded with and without wind.

Figure 2 shows two time series of this probe, recorded with no wind, and under a wind speed $U = 6$ m s^{-1}. The probe record corresponding to a wind velocity equal to 6 m s^{-1} is artificially increased by 10 cm, for more clarity of the figure. We see that the two signals are very similar, since frequency properties, phases and duration are maintained. Some weak differences in amplitude are locally observed. Table 1 shows the root mean square of the elevation $\eta(x, t)$ obtained at fetch 1 m for different wind speeds. It is clear from these data that no significant variations are observed, and the experiment is considered to be repeatable in the presence of wind. Results of these experiments are presented in the following subsection.

Figure 3 presents the time series of the water-surface elevation $\eta(x, t)$ at different fetches for $U = 0$ m s^{-1}. For the sake of clarity, as has been done for figure 2, the probe records given here are recursively increased by 10 cm. As predicted by the linear theory of free deep-water waves (no wind), dispersion leads short waves to propagate more slowly than long waves, and as a result, the waves focus at a given position in the wave tank leading to the occurrence of a large-amplitude wave. Downstream of the point of focus, the amplitude of the group decreases rapidly (defocusing).

Figure 4 shows the same time series of $\eta(x, t)$, at several values of the fetch x, and for a wind speed $U = 6$ m s^{-1}. The wave groups mechanically generated by the

Wind velocity ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)	$\sqrt{\langle\eta^2\rangle}$ (cm)
0	1.88
4	1.88
5	1.87
6	1.88
8	1.87
10	1.88

TABLE 1. The r.m.s. elevation for different values of the wind velocity at fetch 1 m.

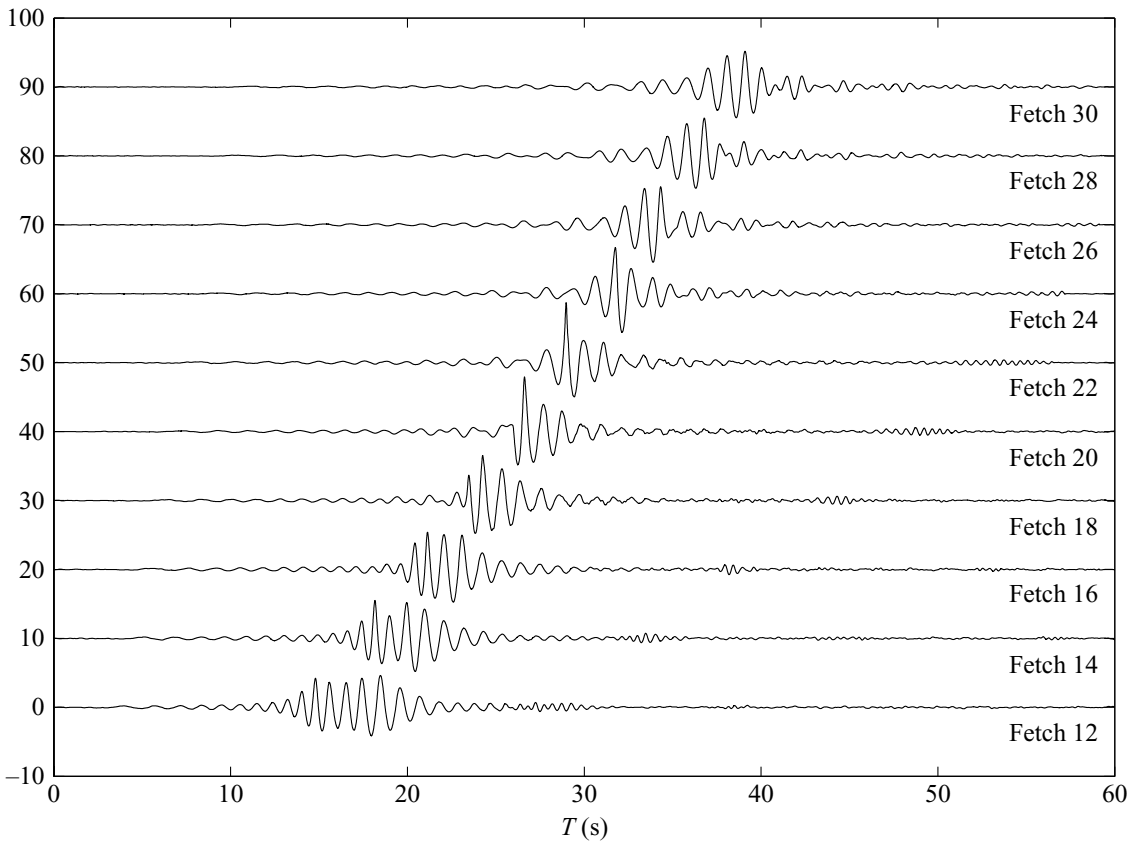


FIGURE 3. Surface elevation (in cm) at several fetches (in m), for wind speed $U = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, as a function of time.

wavemaker are identical to those used in the experiments without wind (see figure 2). Some differences appear in the time–space evolution of the focusing wavetrain. We can see that the group of the extreme wave event is sustained longer.

For each value of the wind velocity, the amplification factor $A(x, U)$ of the group between fetches x and 1 m can be defined as

$$A(x, U) = \frac{H_{max}(x, U)}{H_{ref}}, \tag{2.8}$$

where $H_{max}(x, U)$ is the maximal height between two consecutive crests and troughs in the transient group. The height, H_{ref}, of the quasi-uniform wavetrain generated at the entrance of the tank is measured at 1 m. The mean height crest to trough is $H_{ref} = 6.13$ cm.

Figure 5 gives this amplification factor as a function of the distance from the upstream beach for various values of the wind velocity, equal to 0 m s^{-1}, 4 m s^{-1} and

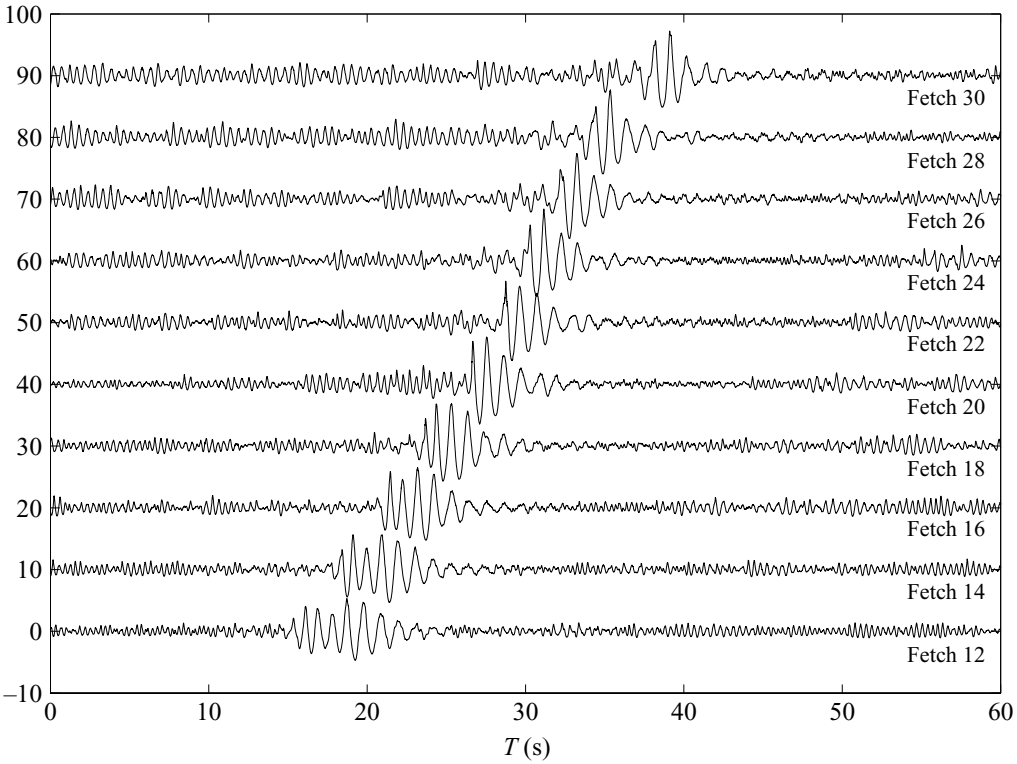


FIGURE 4. As figure 3, but for wind speed $U = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

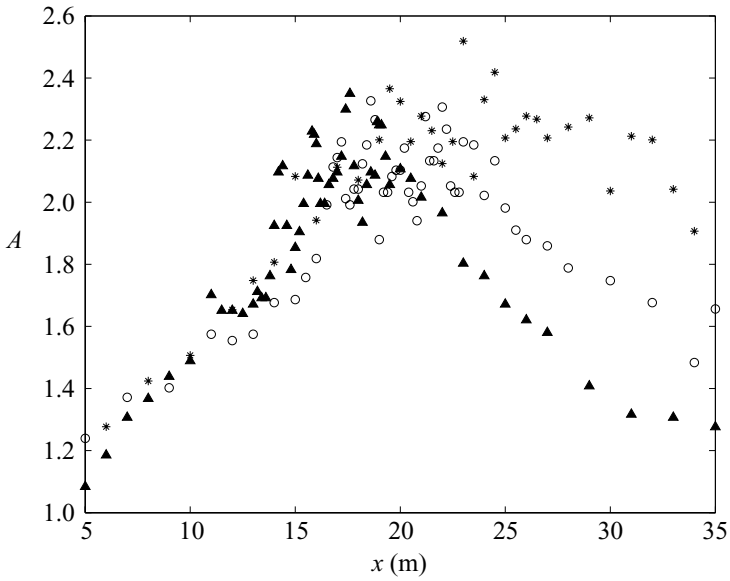


FIGURE 5. Evolution of the amplification factor $A(x, U)$ as a function of the distance, for several values of the wind speed. ▲, $u = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; o, $4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $*$, $6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

6 m s^{-1}. This figure shows that the effect of the wind is twofold: (i) it increases weakly the amplification factor; and (ii) it shifts the focus point downstream. Moreover, contrary to the case without wind, an asymmetry appears between the focusing and defocusing stages. The slope of the curves corresponding to defocusing changes. Note that before the focus point, the wind has no effect on the amplification factor. We can see that the rogue wave criterion ($A > 2.2$) is satisfied for a longer period of time. The effect of the wind on the rogue wave is to shift the focusing point downstream,

and to increase its amplitude slightly. Also, the rogue wave criterion is satisfied for a longer distance, while the wind velocity increases.

To better understand the time–space evolution of the wave group with and without wind, the time series are analysed by means of a wavelet analysis. Figure 6 displays the local wavelet power spectra of probe records at several fetches, without wind. The wavelet power spectrum is defined as the square of the modulus of the wavelet transform. These spectra show the time–frequency evolution of the wave group as it propagates downstream in the wave tank. At short fetches, the waves of high frequencies are in front of the group and the waves of lower frequencies at the back. As it propagates downstream, focusing and defocusing processes are observed. The focus point corresponds to the merging of all the frequencies. Downstream of the focus point, the low-frequency waves are in front of the group, and the high-frequency waves at the back.

Figure 7 shows the local wavelet power spectra of probe records at the same fetches, for a wind speed of 6 m s^{-1}. Contrary to the case without wind, the focusing point is shifted downstream in the wave tank, confirming what we observe in figure 5. We note that the coherence of the group is maintained longer and consequently the extreme wave event mechanism is sustained longer. This could explain the asymmetry observed in the amplification curves.

We observe in figures 4 and 7, that the background wind waves are suppressed by the extreme wave event. The phenomenon of high-frequency waves suppressed by strongly nonlinear low-frequency waves has been investigated by Balk (1996). He showed that the effect of the long wave is to transport the short-wave action to high wavenumbers, where high dissipation occurs.

To summarize the main experimental results, we can claim that the effect of wind on the extreme wave-event mechanism is to shift the focus point downstream, to increase its amplitude and lifetime, leading to an asymmetry of the amplification curve. Figures 6 and 7 demonstrate that the effect of the wind is to transform the short group containing the extreme wave into a long-lived short group. The effect of the wind is to delay the defocusing stage.

2.4. *Wind–wave coupling over focusing group*

The previous results show that in presence of wind the focusing/defocusing phenomenon is significantly modified. The focus point is shifted downstream, the amplitude and duration of the extreme wave event are increased even for weak values of wind velocity. To clarify the physical processes which could explain these results, a second series of experiments has been conducted to investigate the wind–wave interaction during the focusing and defocusing stages.

The experimental conditions are similar to those described previously except that other probes have been installed on the trolley to measure pressure and velocity fluctuations in the air flow at different heights in the turbulent boundary layer and different fetches in the wave tank. The longitudinal and vertical wind speed fluctuations, u' and w', are measured by means of a cross-wire mounted on two DANTEC model constant-temperature anemometers. The two hot wires of the cross-wire have been calibrated before and after the experiments in a small wind tunnel. A least-squares regression law is used to relate the output voltages of each anemometer to the effective cooling velocities U_{eff1} and U_{eff2}, respectively, for the wires $i = 1, 2$, using the Collis and Williams law

$$E_i^2 = A_i + B_i U_{effi}^{n_i} \quad (i = 1, 2), \tag{2.9}$$

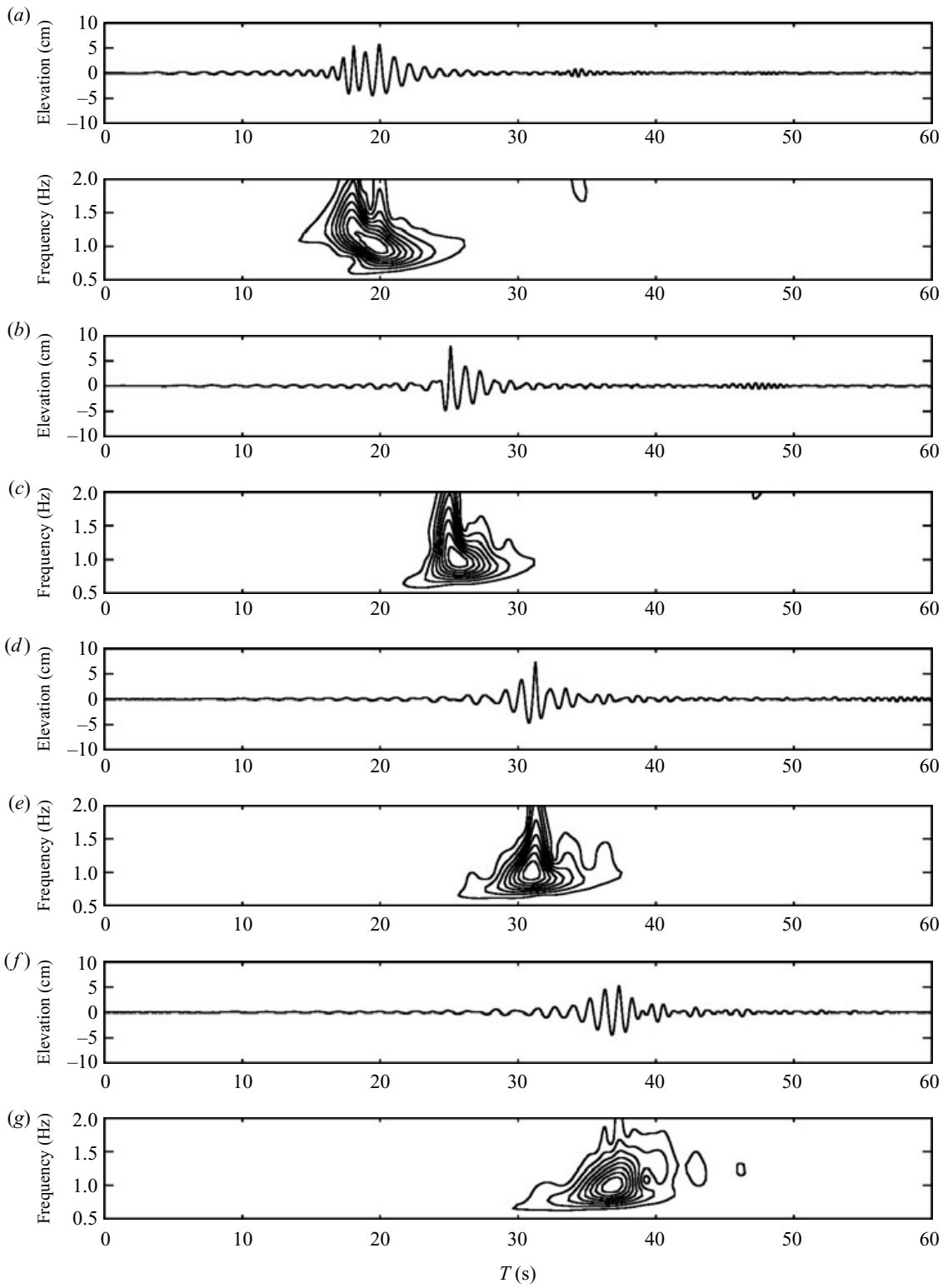


FIGURE 6. Local wavelet power spectra of probe records at fetches (*a*) $x = 15$, (*b*) 20, (*c*) 25 and (*d*) 30 m for a wind speed value of $U = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. The vertical and bottom axes are the frequency and time, respectively.

where the effective velocities U_{effi} are related to the wind speed by the following relationship

$$U_{effi} = \sqrt{\cos^2 \Phi_i + K_i^2 \sin^2 \Phi_i} \quad (i = 1, 2), \tag{2.10}$$

Here, K_i is the cooling factor of wire i and Φ_i is the angle between the wind speed vector and the normal to wire i. The coefficients A_i, B_i and n_i are computed during

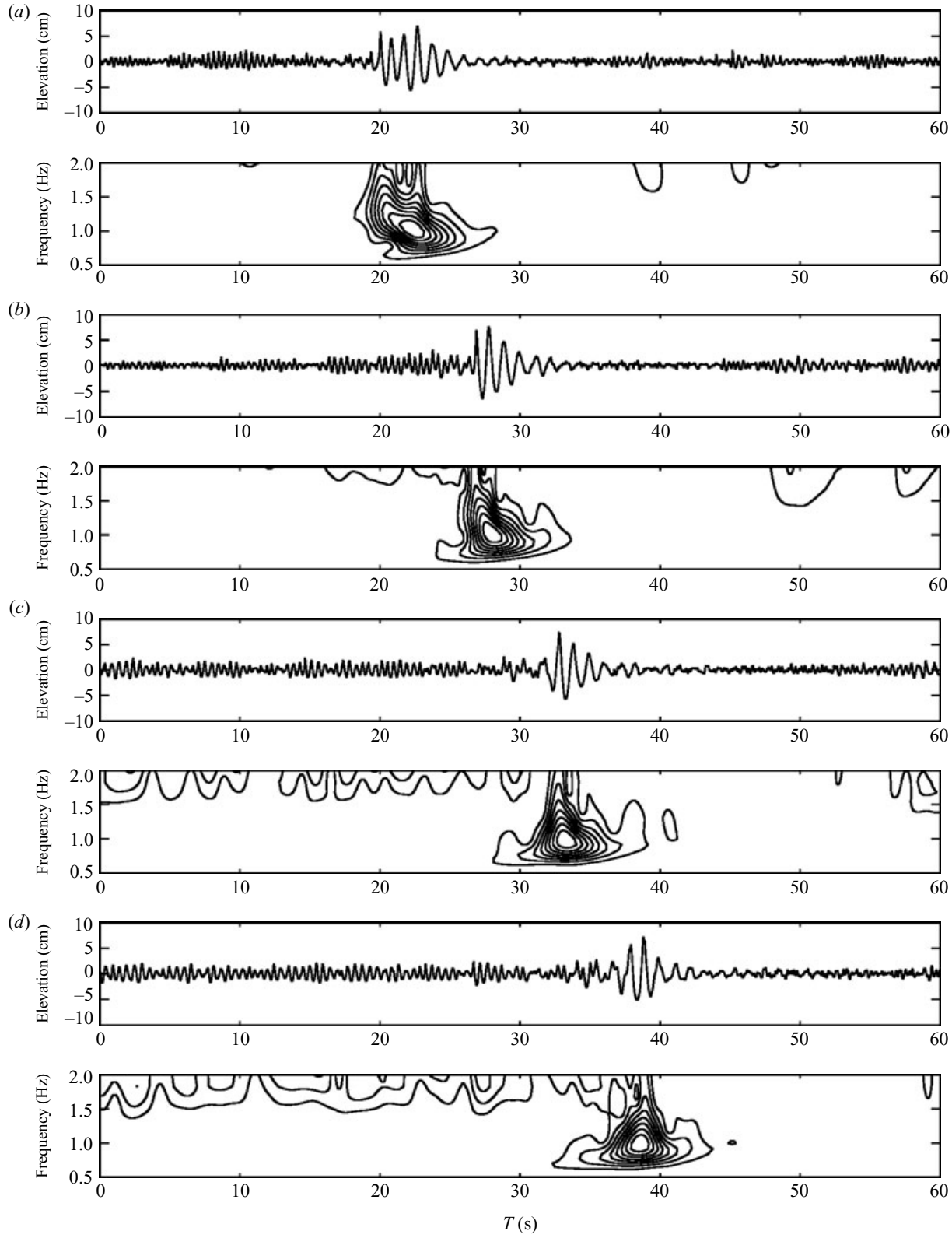


FIGURE 7. Local wavelet power spectra of probe records at fetches (*a*) $x = 15$, (*b*) 20, (*c*) 25 and (*d*) 30 m for a wind speed value of $U = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. The vertical and bottom axes are the frequency and time, respectively.

the calibration. The two components u' and w' of the wind velocity are determined from the ratio E_1/E_2.

The pressure fluctuations in the air flow are measured using a method developed by Giovanangeli (1988) whereby the static pressure is determined from the difference

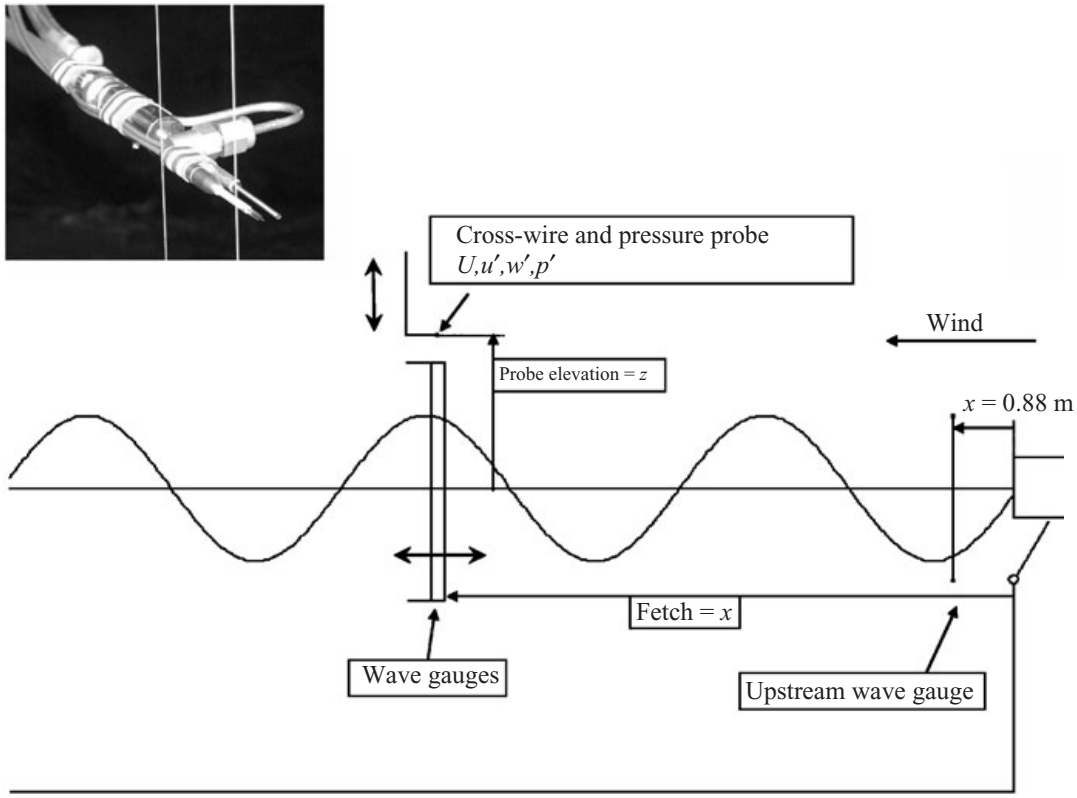


FIGURE 8. A schematic representation of the experimental set-up.

between the observed total pressure and the dynamical pressure derived from the velocity measurements. The total pressure is measured using a bleed-type pressure sensor TSI model 1412J. Details about the method and features of the pressure probe can be found in Giovanangeli & Chambaud (1987). It was shown that the pressure probe in combination with the method used here allows measurements of the static pressure fluctuations in the air flow, particularly close to steep surface waves, with an accuracy of 0.05 Pa.

The key point of the present experiments is to measure the static pressure fluctuations in the presence of paddle waves. As proved by others (Latif 1974; Papadimitrakis, Hsu & Street 1986; Banner 1990), the driving mechanism and the displacements of the wavemaker induce rather large acoustic pressure fluctuations inside the wave tank. Hence, they used different methods to correct this effect. Rather than trying to correct the contamination of the acoustic mode, we choose to avoid this effect by recording the wavemaker displacements and analysing the data only when it is turned off. Since acoustic pressure fluctuations propagate at the sound velocity, we record output voltage of the probes without acoustic contamination. The procedure summarized herein is described in detail by Mastenbroeck *et al.* (1996).

The amplitude and longitudinal wave slope are computed by means of two wave gauges installed on the trolley and 2 cm spatially separated in the mean wind direction. Figure 8 gives a schematic representation of the experimental set-up installed on the trolley. Figure 9 shows the time series of the water surface elevation η in cm, the total vertical momentum flux from wind to water waves $\langle u'w' \rangle$, the form drag $\langle p' \partial\eta/\partial x \rangle$ and energy flux $\langle p' \partial\eta/\partial t \rangle$ from wind to water waves. The pressure fluctuation is p', $\partial\eta/\partial x$ is the longitudinal wave slope and $\partial\eta/\partial t$ is the time derivative of the surface elevation. The form drag, momentum and energy fluxes are time averaged on an interval of 2 s. For a wind velocity $U = 6$ m s^{-1}, at fetch 20 m and height of 13 cm

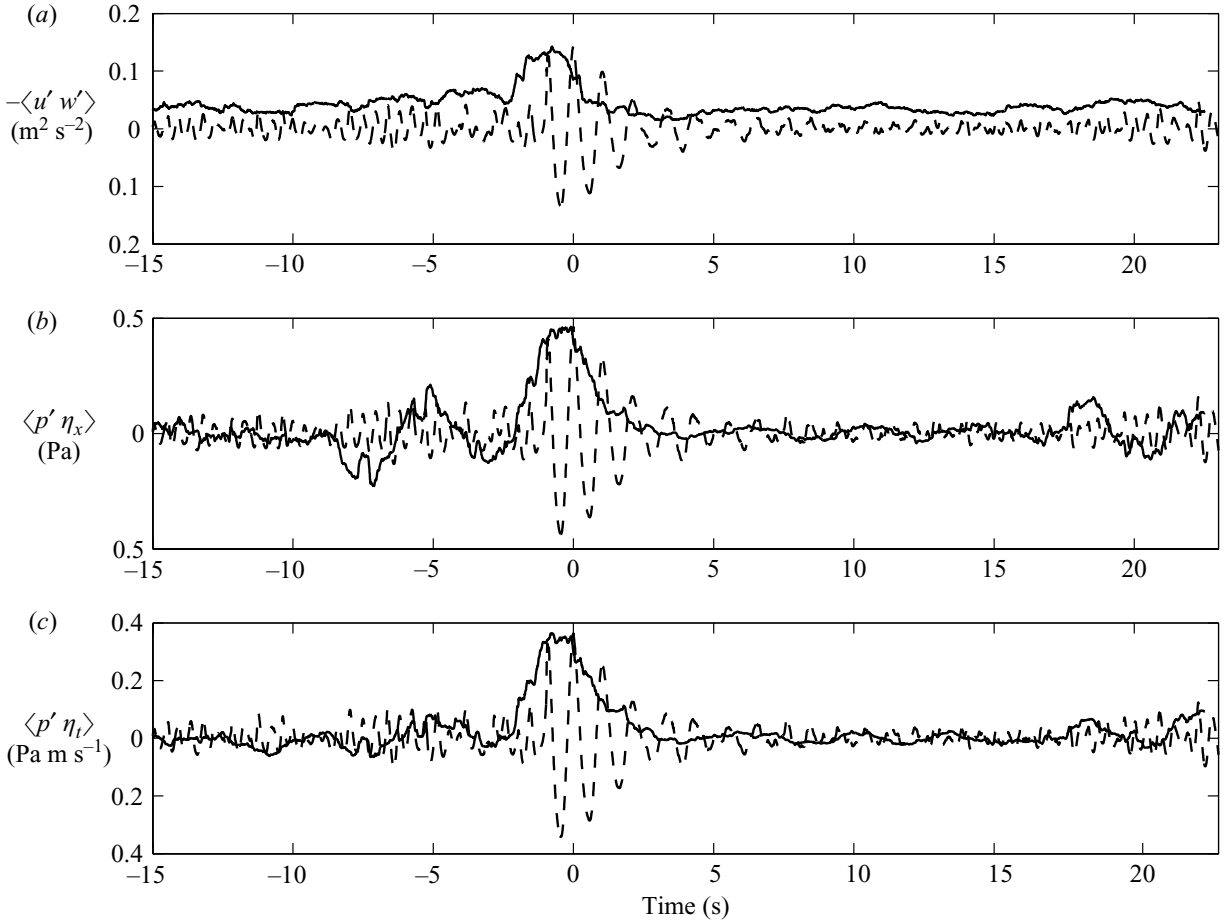


FIGURE 9. Time series of the surface elevation η (dashed lines), vertical momentum flux (solid line in (*a*)), form drag (solid line in (*b*)) and energy flux (solid line in (*c*)).

above the mean water level, it can be observed that the occurrence of focusing wave groups corresponds to a significant enhancement of the fluxes. Notice that the time origin corresponds to the occurrence of the extreme wave event. Note that the air flow pressure fluctuations p' were measured at different heights above the interface. Hence, it was not possible to determine the exact value of the form drag $\langle p' \partial\eta/\partial x \rangle$ at $z = \eta(t)$. However the determination of $\langle p' \partial\eta/\partial x \rangle$ at the height z will provide crucial information about wind–wave coupling between the air flow and the interface during the focusing event.

Local wavelet power spectra of the surface elevation has been computed and, as shown in figure 7, the duration of the extreme wave event is increased in the presence of wind.

Figures 10 and 11 correspond to the local wavelet power spectra of the longitudinal wind velocity fluctuation u' and pressure fluctuation p' along the wave tank, at height $z = 13$ cm above the mean water level, for mean wind velocity $U = 6$ cm s^{-1}. From these figures, it is not easy to observe the coupling between the group and the turbulent boundary layer. This is mainly due to the broadband character of the spectra.

To emphasize this coupling, a cross-wavelet analysis has been applied between u' and w', p' and $\partial\eta/\partial x$, and p' and $\partial\eta/\partial t$, respectively (for more detail see Torrence & Compo 1998). These terms are considered as a contribution in time and frequency range to the total stress, form drag and energy flux from wind to waves, respectively. Figure 12 shows the cross-wavelet power for u' and w'. The cross-wavelet spectrum for

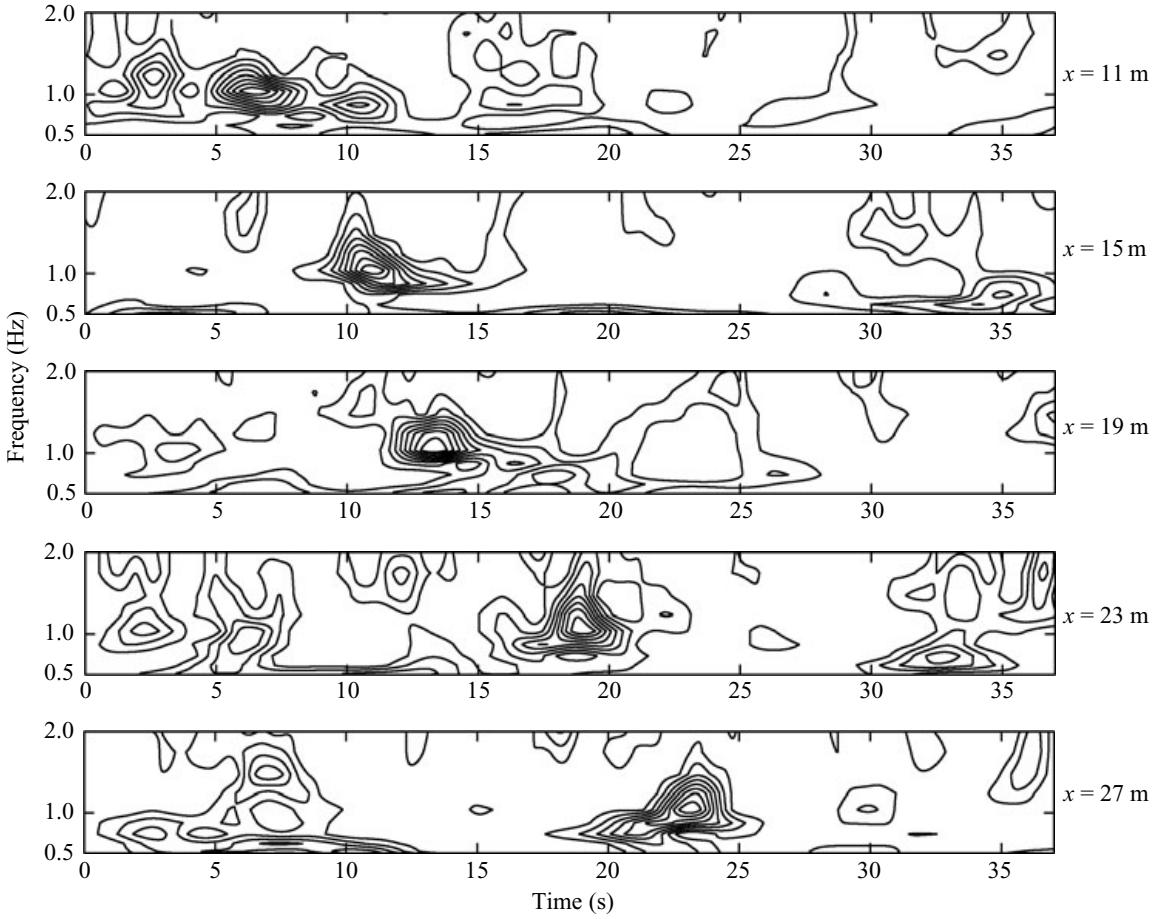


FIGURE 10. Local wavelet power spectra of the longitudinal wind velocity fluctuations, u', at several fetches for a mean wind velocity $U = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ and 13 cm above the mean water level. The vertical and bottom axes are the frequency and time, respectively.

the longitudinal and transversal velocity fluctuations is defined as the product of the wavelet transform of u' and complex conjugate wavelet transform of w'. The cross-wavelet power is the modulus of the cross-wavelet spectrum. For more details see the practical step-by-step guide to wavelet analysis by Torrence & Compo (1998). A strong correlation between u' and w' is observed above the groups. At fetch $x = 11$ m, two groups can be seen, the higher-frequency components propagate in front of the lower-frequency components. At fetch $x = 17$ m, the two groups have begun to merge into one group which propagates downstream. We can observe that the maximum of the cross-wavelet power travels downstream with the group.

Figures 13 and 14 confirm the behaviour observed above and demonstrate the strong correlation existing between the group and the form drag and the energy transfer from wind to water waves. Air–sea fluxes are strongly enhanced in presence of strongly modulated wave groups.

An accurate measurement of the maximum of the wavelet power spectrum of the surface elevation η is calculated. Figure 15 displays the characteristic curves of this maximum for several values of the wind velocity. The figure shows that the maximum propagates downstream with a constant velocity which increases as the wind speed increases. This velocity is equal to 0.87 m s^{-1}, 0.90 m s^{-1}, 0.92 m s^{-1} and 0.93 m s^{-1} for $U = 0$ m s^{-1}, 4 m s^{-1}, 6 m s^{-1} and 8 m s^{-1} respectively. These values which are equal to the slope of the characteristic curves plotted in figure 15 correspond to mean values of the group velocity in the vicinity of the focus area. For $U = 0$ m s^{-1}, a

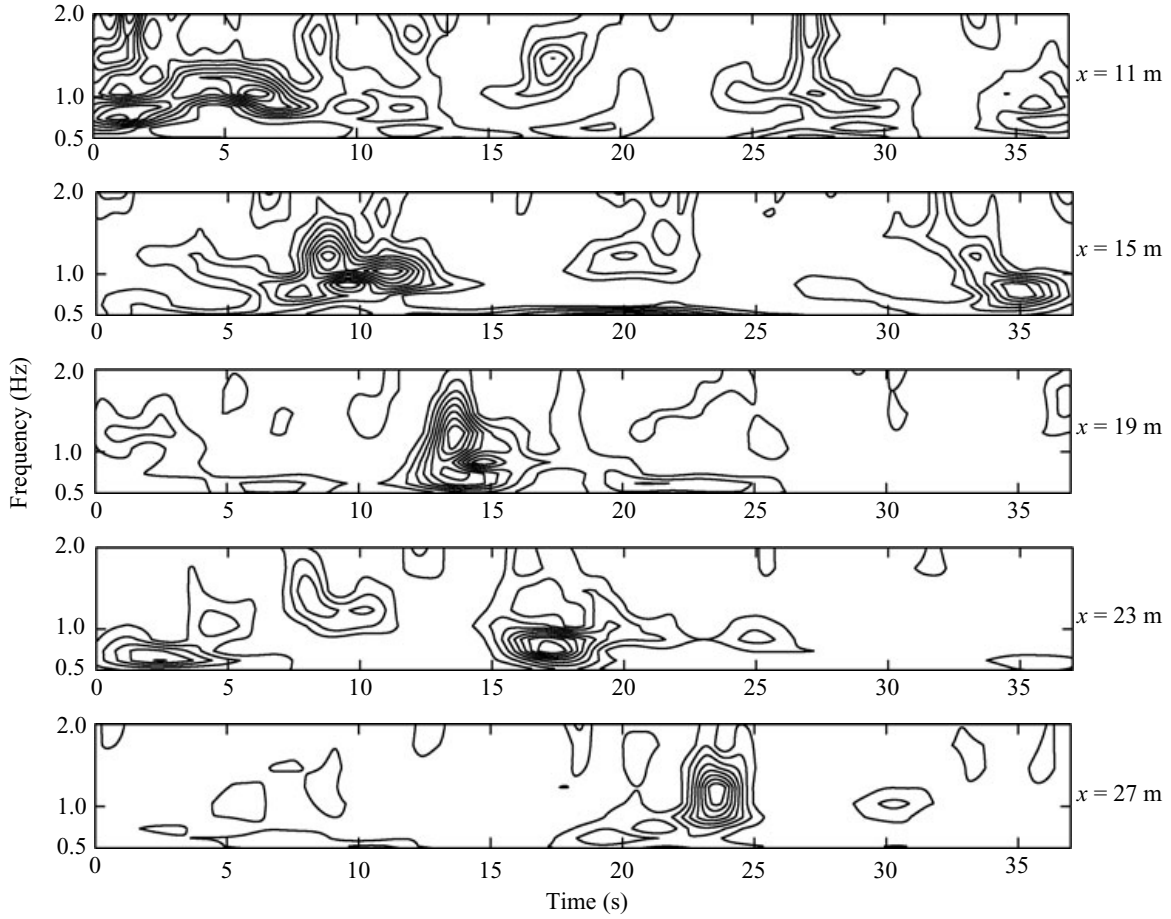


FIGURE 11. Local wavelet power spectra of the pressure fluctuations, p', at several fetches for a mean wind velocity $U = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ and 13 cm above the mean water level. The vertical and bottom axes are the frequency and time, respectively.

more careful inspection shows fluctuations of the group velocity during the extreme wave event as observed numerically by Song & Banner (2002) at the maximum of modulation due to Benjamin–Feir instability. The distance between two consecutive probes is too large to detect the group velocity fluctuations accurately.

Figure 16 shows the characteristic curves corresponding to the maximum of the cross-wavelet power for u' and w' at several altitudes above the mean water surface from $z = 13$ cm to $z = 30$ cm, for $U = 6$ m s^{-1}. We can see that this maximum travels at a speed close to the velocity defined previously, independently of the altitude z above the mean water level. This figure emphasizes that the coupling between the air flow and the water wave group is effective in the whole boundary layer and strongly attached to the group.

Figure 17 shows the characteristic curves corresponding to the maximum of the cross-wavelet power for u' and w' at the altitude $z = 14$ cm above the mean water level for $U = 4$ m s^{-1}, 6 m s^{-1} and 8 m s^{-1} respectively. The space–time diagram shows that this maximum propagating at a velocity close to the velocity of the maximum of the wavelet power spectrum of the surface elevation.

Figure 18 shows the characteristic curves corresponding to the maximum of the cross-wavelet power of u' and $\partial\eta/\partial t$ at several altitudes above the mean water surface from $z = 13$ cm to $z = 30$ cm, for $U = 6$ m s^{-1}. Herein again this maximum corresponding to the transfer of energy between wind and waves propagates with the velocity of the maximum of the wavelet power spectrum of the surface elevation. As for

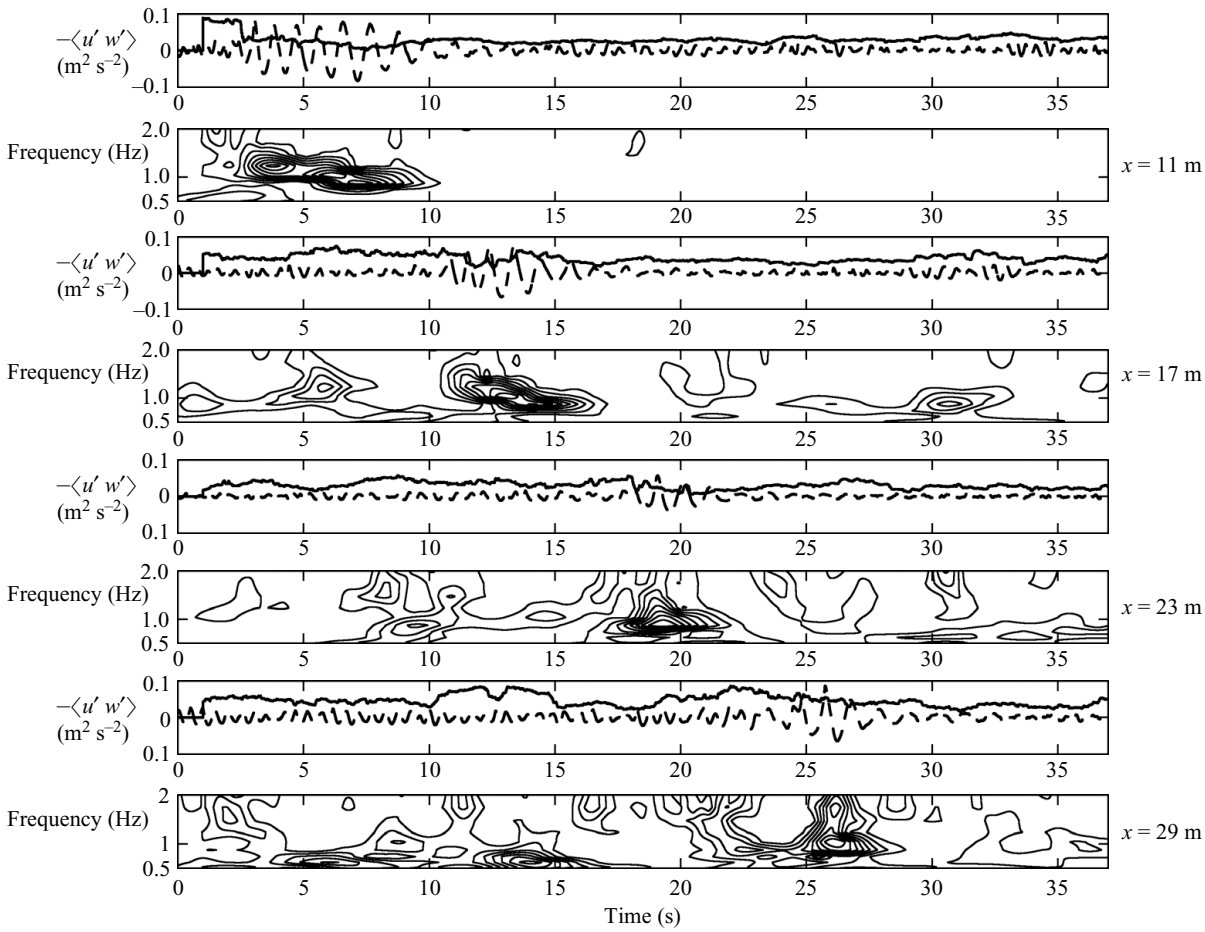


FIGURE 12. Cross-wavelet power for wind velocity fluctuations u' and w' at height $z = 13$ cm, for mean wind velocity $U = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. The vertical and bottom axes are the frequency and time, respectively.

the maximum of the cross-wavelet power for u' and w' corresponding the momentum flux, the maximum of cross-wavelet power corresponding to the instantaneous flux of energy to waves due to pressure fluctuations above the group, $p'\partial\eta/\partial t$, travels downstream at the velocity of the maximum of the cross-wavelet power spectrum of the surface elevation.

Figure 19 shows the spatial evolution of the frequency corresponding to the maximum of the cross-wavelet power spectrum of the surface elevation as a function of x for 11 m $< x <$ 29 m, i.e. in the vicinity of the focus point for several values of the wind velocity. It can be seen that the frequency decreases during the formation of the extreme wave event. Hence, rogue waves are associated with frequency downshifting. This feature which has been observed by Clamond *et al.* (2006) when extreme waves are due to modulational phenomenon or envelope–soliton collision, can be extended to extreme waves due to spatio-temporal focusing. Furthermore, the figure emphasizes two main features pointed out previously: The downwind shift of the focus point and time duration of the extreme wave event increase with wind velocity. Notice that the frequency minimum decreases as wind velocity increases. The curves exhibit a minimum which corresponds to a maximum of the group velocity calculated from the linear dispersion relation. The maxima of the associated group velocity are 0.814 m s^{-1}, 0.819 m s^{-1}, 0.825 m s^{-1} and 0.841 m s^{-1} for $U = 0$ m s^{-1}, 4 m s^{-1}, 6 m s^{-1} and 8 m s^{-1}, respectively. These values of the group velocity are less than those of the velocity calculated previously. The deviations can be explained by nonlinear effects.

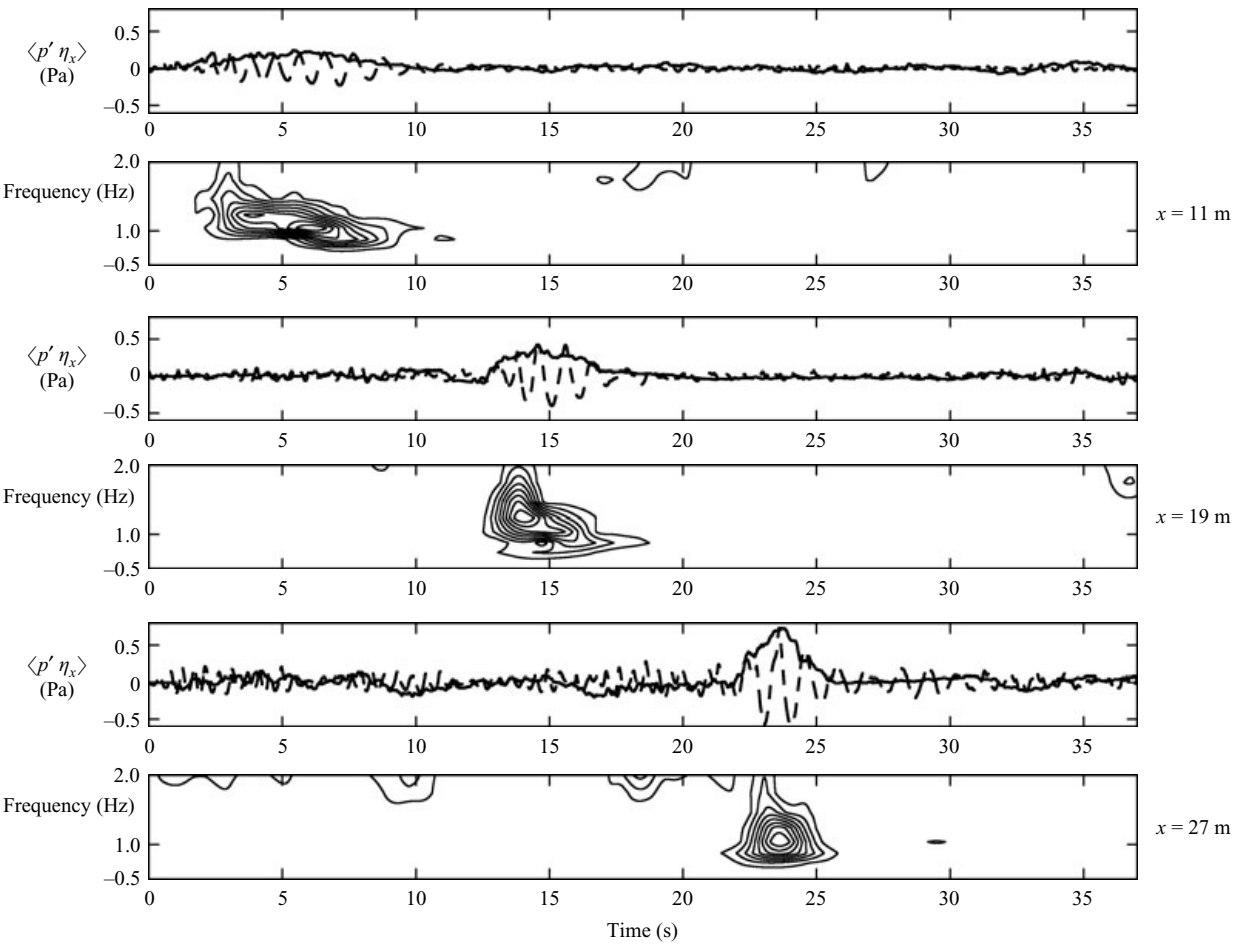


FIGURE 13. Cross-wavelet power for pressure fluctuations p' and $\partial\eta/\partial x$ at height $z = 13\,\mathrm{cm}$, for mean wind velocity $U = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. The vertical and bottom axes are the frequency and time, respectively.

Indeed, the extreme waves are strongly nonlinear and their envelope velocities on average are larger than the group velocities calculated from the linear dispersion relation. Nevertheless, as emphasized previously, the group velocity fluctuates during an extreme wave event and may be locally less than the linear value. This feature has been pointed out by Song & Banner (2002) in the case of nonlinear spatio-temporal focusing due to Benjamin–Feir instability. This tendency which is also observed experimentally for the dispersive focusing investigated herein has been confirmed by numerical simulations.

Figure 20 shows the wind stress as a function of z for $U = 4$ m s^{-1} with or without the presence of focusing wave groups. It can be seen that when there is no extreme wave event, the wind stress varies 20% from $z = 10$ cm to $z = 19$ cm whereas it varies 130% between the same altitude values when extreme wave events occur. This feature can be explain by a strong longitudinal mean pressure gradient due to the modification of the air-flow structure in the presence of extreme wave events or strongly modulated wave trains.

The previous experimental results suggest that air-flow separation could explain the strong increase of the transfer of momentum and energy during extreme wave events. To verify the validity of this assumption, a series of experiments using an original probe (figure 21) developed at the laboratory by Giovanangeli *et al.* (1999) to detect air-flow separation mechanism (AFS) has been conducted. A hot wire and a cold wire separated from each other by 1 mm in the direction of the mean wind direction are

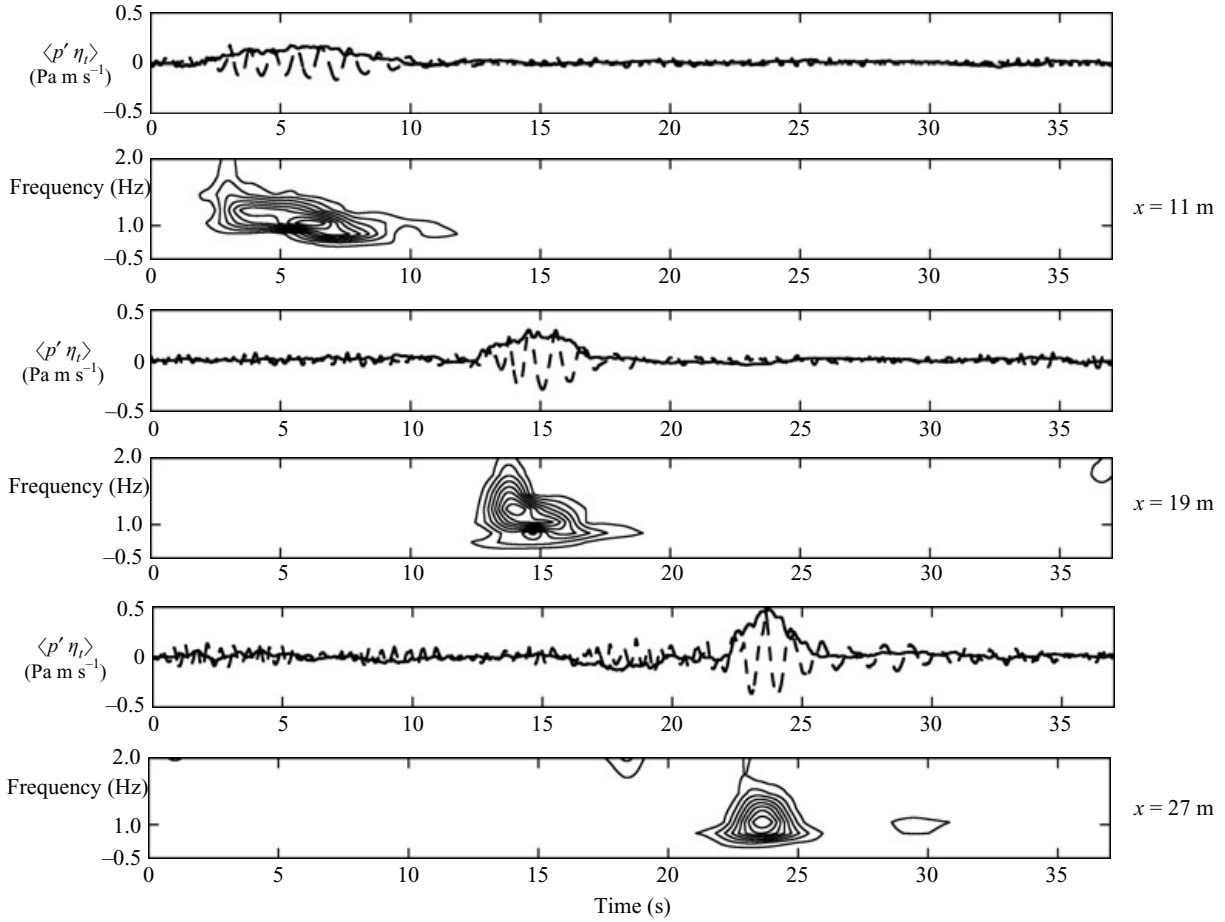


FIGURE 14. Cross-wavelet power for pressure fluctuations p' and $\partial\eta/\partial t$ at height $z = 13\,\mathrm{cm}$, for mean wind velocity $U = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. The vertical and bottom axes are the frequency and time, respectively.

installed on a wave-follower. Any temperature fluctuation can be detected by the cold wire when it is located in the hot wake generated by the hot wire. In the presence of air-flow separation, a reverse flow directed towards the upstream direction can occur in the vicinity of the leeward face of the crest (Reul, Branger & Giovanangeli 1999) which produces both a positive temperature fluctuation measured by the cold wire and a negative wind velocity fluctuation measured by the hot wire. Using the wave-follower, the AFS probe was located close to the instantaneous water-wave surface and particularly close to the wave trough. Figure 22, corresponding to the case $U = 4$ m s^{-1} shows the elevation of the interface, elevation of the AFS probe fixed at 3 cm from the water-wave surface, and output voltage given by the cold and hot wires. We can see that during the burst of the local wave slope, there is a decrease of the wind velocity and a positive temperature fluctuation measured by the cold wire. Hence, even for a wind velocity of 4 m s^{-1} an air-flow separation occurs when the local wave slope of the interface reaches a threshold value which has been evaluated herein as close to 0.35. This suggests that the local wave slope is a significant parameter which is highly correlated to the air-flow separation phenomenon. In the presence of steep wave events, the wave age is not the unique parameter to be considered, the local wave slope is a significant parameter too. Furthermore, it has been observed that the occurrence of air-flow separation is generally accompanied by breaking. This is in agreement with the results of Banner & Melville (1976).

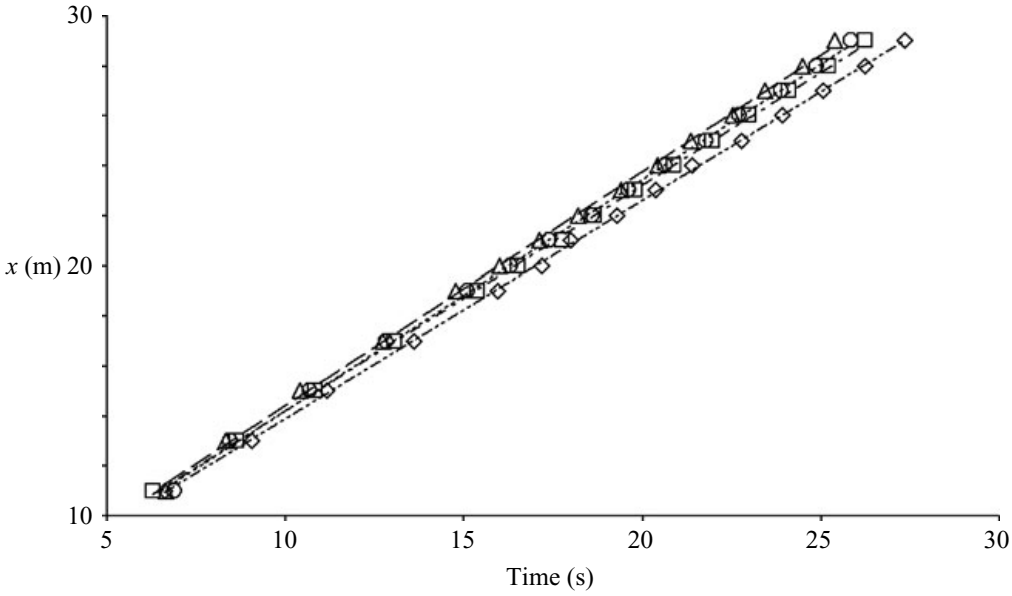


FIGURE 15. Trajectories of the maximum of the wavelet power spectrum of the surface elevation for several values of the wind velocity in the (x, t)-plane. $U = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (◇), $U = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (□), $U = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (◯), $U = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (△).

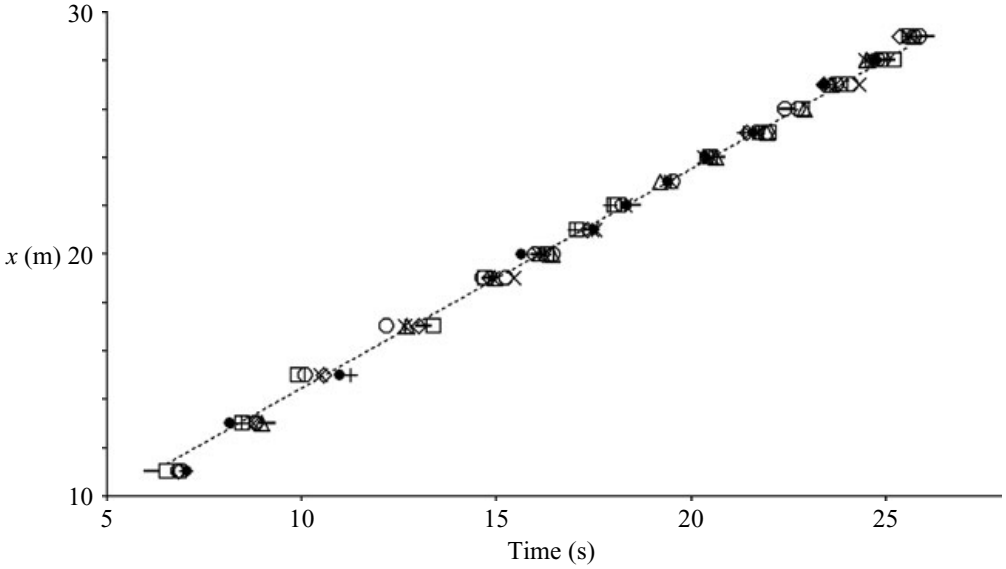


FIGURE 16. Trajectories of the maximum of the cross-wavelet power for u' and w' at several altitudes above the mean water level for $U = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ in the (x, t)-plane. $Z = 13\,\mathrm{cm}$ (•), $Z = 14\,\mathrm{cm}$ (□), $Z = 15\,\mathrm{cm}$ (○), $Z = 16\,\mathrm{cm}$ (×), $Z = 17\,\mathrm{cm}$ (∗), $Z = 18\,\mathrm{cm}$ (◯), $Z = 19\,\mathrm{cm}$ (+), $Z = 20\,\mathrm{cm}$ (△), $Z = 25\,\mathrm{cm}$ (−), $Z = 30\,\mathrm{cm}$ (◇).

In §3, the critical slopes that will be used in the numerical simulations of the spatio-temporal focusing are chosen close to the experimental threshold of 0.35.

3. Numerical simulations

One of the main objectives of the present section is to study frequency-modulated wavetrains generated in a numerical wave tank to compare their behaviour with experiments with and without wind. To consider conditions similar to those of the previous experiments we used a numerical wave tank based on a boundary-integral equation method (BIEM). In the previous experiments, sporadic breaking has been

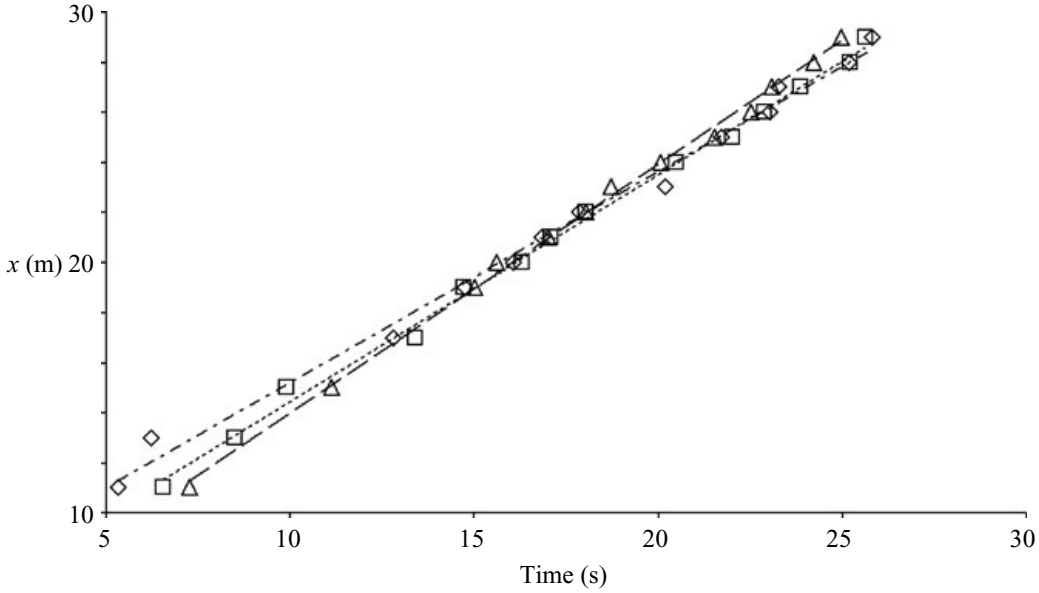


FIGURE 17. Trajectories of the maximum of the cross-wavelet power for u' and w' at altitude $z = 14\,\mathrm{cm}$, for several wind velocities in the (x, t)-plane. $U = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (◇), $U = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (□), $U = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (△).

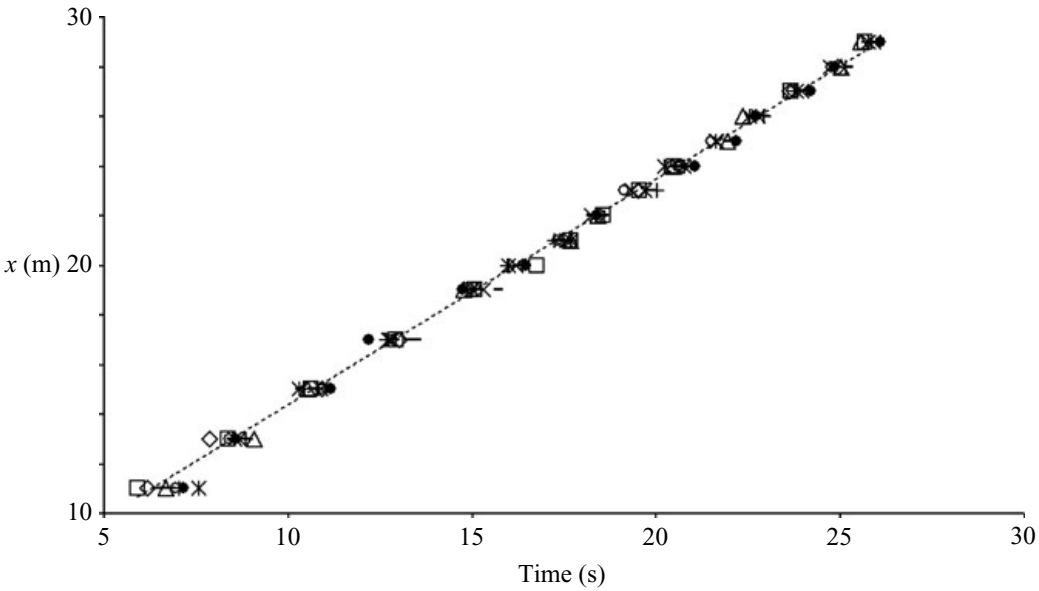


FIGURE 18. Trajectories of the maximum of the cross-wavelet power for p' and $\partial\eta/\partial t$ at several altitudes above the mean water level for $U = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, in the (x, t)-plane. $Z = 13\,\mathrm{cm}$ (◇), $Z = 14\,\mathrm{cm}$ (□), $Z = 15\,\mathrm{cm}$ (△), $Z = 16\,\mathrm{cm}$ (×), $Z = 17\,\mathrm{cm}$ (∗), $Z = 18\,\mathrm{cm}$ (•), $Z = 19\,\mathrm{cm}$ (+), $Z = 20\,\mathrm{cm}$ (−), $Z = 25\,\mathrm{cm}$ (—), $Z = 30\,\mathrm{cm}$ (○).

observed. To avoid this two-phase dissipative process which our numerical model cannot simulate, a third series of experiments has been conducted to compare both experimental and numerical results and also to check the validity of the numerical wave tank.

Beside the focusing due to the dispersion of a chirped wave group, another mechanism, the modulational instability or Benjamin–Feir instability of uniform wavetrains, can generate extreme wave events. This instability was discovered by Benjamin & Feir (1967). Zakharov (1968), using a Hamiltonian formulation of the water-wave problem, arrived at the same instability. The nonlinear evolution of

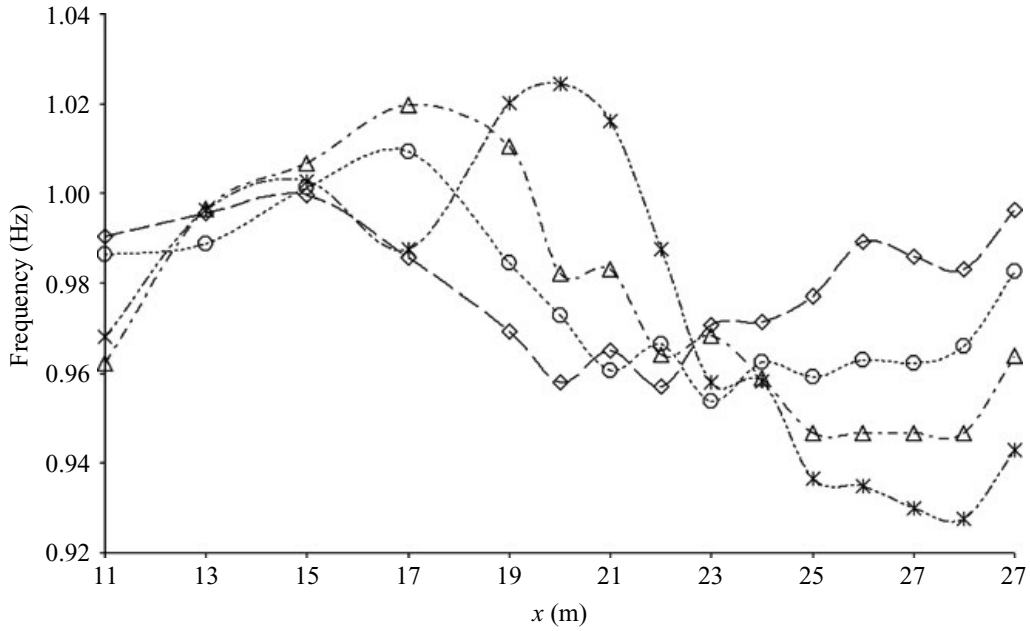


FIGURE 19. Evolution of the frequency of the maximum of the wavelet power spectrum of the surface elevation with the fetch for several values of the wind velocity. $U = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (◇), $U = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (◯), $U = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (△), $U = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (∗).

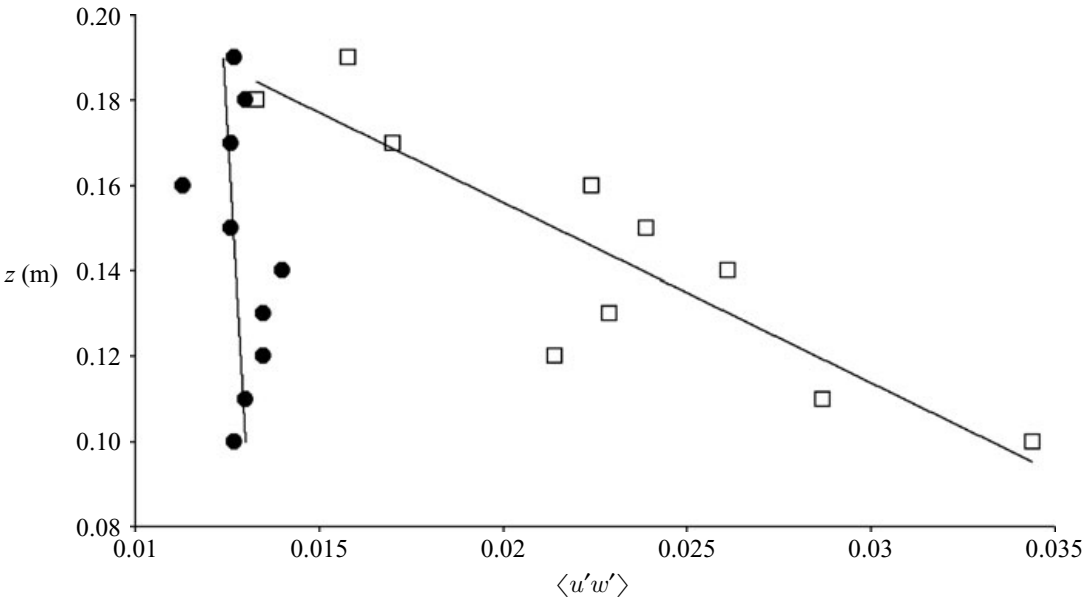


FIGURE 20. The wind stress $-\langle u'w'\rangle$ as a function of the altitude z above the mean surface elevation for $U = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$: □, over the focusing group and •, without focusing group.

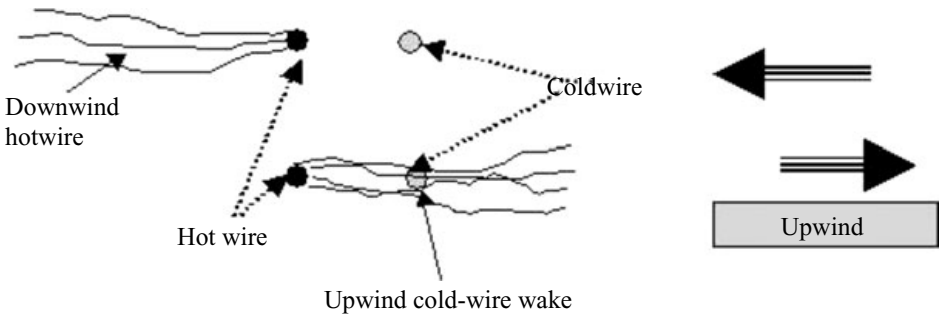


FIGURE 21. Schematic representation of the air-flow separation probe.

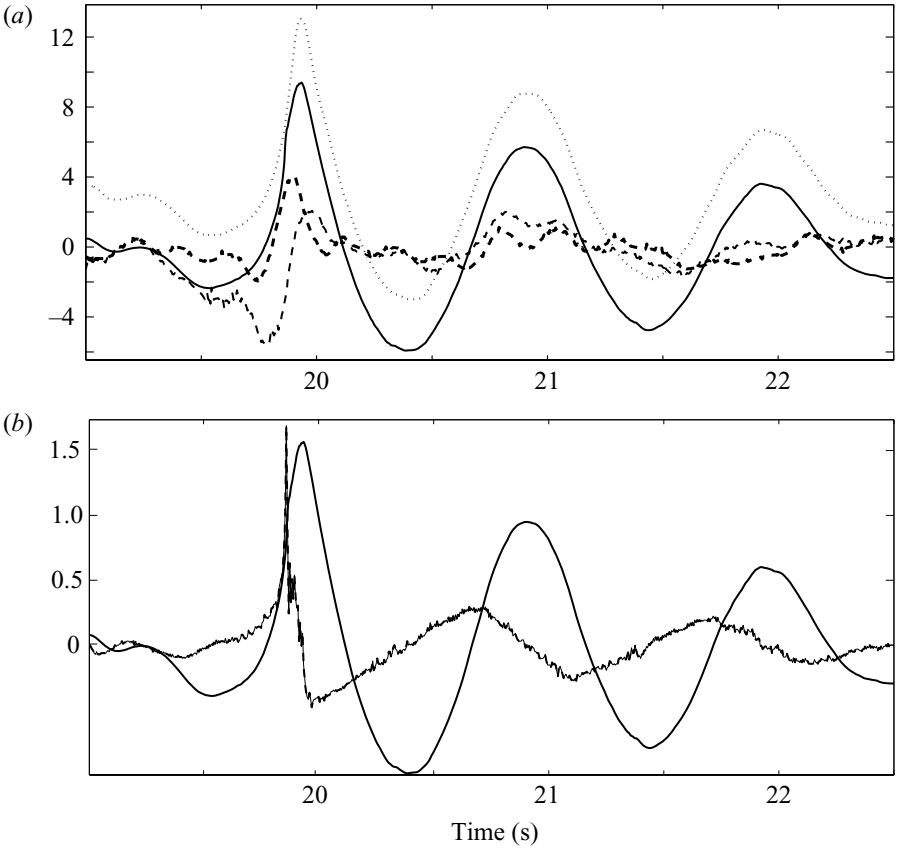


FIGURE 22. (*a*) Wave-surface elevation (solid line), AFS probe elevation (dotted line), cold-wire ouput (thick dashed line) and hot-wire output (thin dashed line) as a function of time for $U = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. (*b*) Local longitudinal wave slope (dashed line) and wave surface elevation as a function of time for $U = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

this periodic phenomenon is investigated numerically using a high-order spectral method (HOSM), without experimental counterpart. The question is how do extreme wave events due to modulational instability under wind action evolve? How are the amplification and time duration of these waves under wind effect modified? Are these effects similar to or different from those observed in the case of extreme wave events due to the spatio-temporal focusing discussed previously?

3.1. *Wind modelling: the modified Jeffreys sheltering theory*

In §2, it was demonstrated experimentally for a wind velocity $U = 4\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ that steep wave events occurring in water-wave groups are accompanied by air-flow separation. Furthermore, a careful inspection of figure 5 suggests that a significant wind effect takes place when the steep wave event occurs. The focusing stage is almost independent of the wind velocity. Deviations can be observed only in the vicinity of the focus point where the waves become steep. This observation reinforces the idea that separation of the air flow in the lee of the wave crests is responsible for the growth and persistence of steep waves. The Jeffreys sheltering mechanism (Jeffreys 1925) could be used as wind modelling. Since air-flow separation occurs only over steep waves, the Jeffreys sheltering mechanism has to be applied locally in time and space and not permanently over the whole wave field. It is well known that this mechanism cannot be applied continuously over water waves. This mechanism works only when air-flow separation occurs over steep waves (Banner & Melville 1976; Kawai 1982).

Previous works on rogue waves have not considered the direct effect of wind on their dynamics. It was assumed that they occur independently of wind action, that is, far away from storm areas where wind-wave fields are formed. Herein the Jeffreys theory (see Jeffreys 1925) is invoked for the modelling of the pressure, p_a. Jeffreys proposed a plausible mechanism to explain the phase shift of the atmospheric pressure, p_a, required for an energy transfer from wind to the water waves. He suggested that the energy transfer was due to the form drag associated with the flow separation occurring on the leeward side of the crests. The air-flow separation would cause a pressure asymmetry with respect to the wave crest, resulting in a wave growth. This mechanism can be invoked only if the waves are sufficiently steep to produce air-flow separation. Banner & Melville (1976) have shown that separation occurs over breaking waves. For weak or moderate steepness of the waves this phenomenon cannot apply and the Jeffreys sheltering mechanism becomes irrelevant.

Following Jeffreys (1925), the pressure at the interface $z = \eta(x, t)$ is related to the local wave slope according to

$$p_a = \rho_a s (U - c)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{3.1}$$

where the constant s is termed the sheltering coefficient, U is the wind speed, c is the wave phase velocity and ρ_a is atmospheric density. The sheltering coefficient, $s = 0.5$, has been calculated from experimental data. In order to apply (3.1) for steep waves only we introduce a threshold value for the slope $(\partial\eta/\partial x)_c$. When the local slope of the waves becomes larger than this critical value, the pressure is given by (3.1), otherwise the pressure at the interface is taken equal to a constant which is chosen equal to zero without loss of generality. This means that wind forcing is applied locally in time and space. According to the experiments, the critical value of the slope, $(\partial\eta/\partial x)_c$, is chosen close to 0.35, in the range (0.30–0.40) for the spatio-temporal focusing. For the nonlinear focusing due to modulational instability, we used higher values to avoid a rapid evolution towards breaking. When the critical value is low, the transfer of energy from the wind to the waves leads to wave breaking, and when it is too high, this transfer becomes negligible in influencing the wave dynamics. The choice of the value of the sheltering coefficient is also important. This coefficient has been computed experimentally. We have not performed a systematic study on the influence of $(\partial\eta/\partial x)_c$ and s on the wind–wave coupling. Our main purpose is to show that the application of the modified Jeffreys mechanism could explain simply some features of the interaction between wind and strongly modulated water-wave groups.

Figure 23 shows the pressure distribution at the interface in the vicinity of the crest, given by equation (3.1), for a threshold value close to the slope corresponding to the Stokes' corner.

3.2. *Basic equations*

We consider two-dimensional propagating nonlinear gravity wavetrains on the surface of an inviscid and incompressible fluid. Under the assumption that the motion is irrotational, the governing equations are the Laplace equation and nonlinear boundary conditions

$$\Delta\phi = 0 \qquad \text{for} \qquad z < \eta(x, t), \tag{3.2}$$

$$\lim_{z \to -\infty} \nabla\phi = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \qquad z = \eta(x, t), \tag{3.4}$$

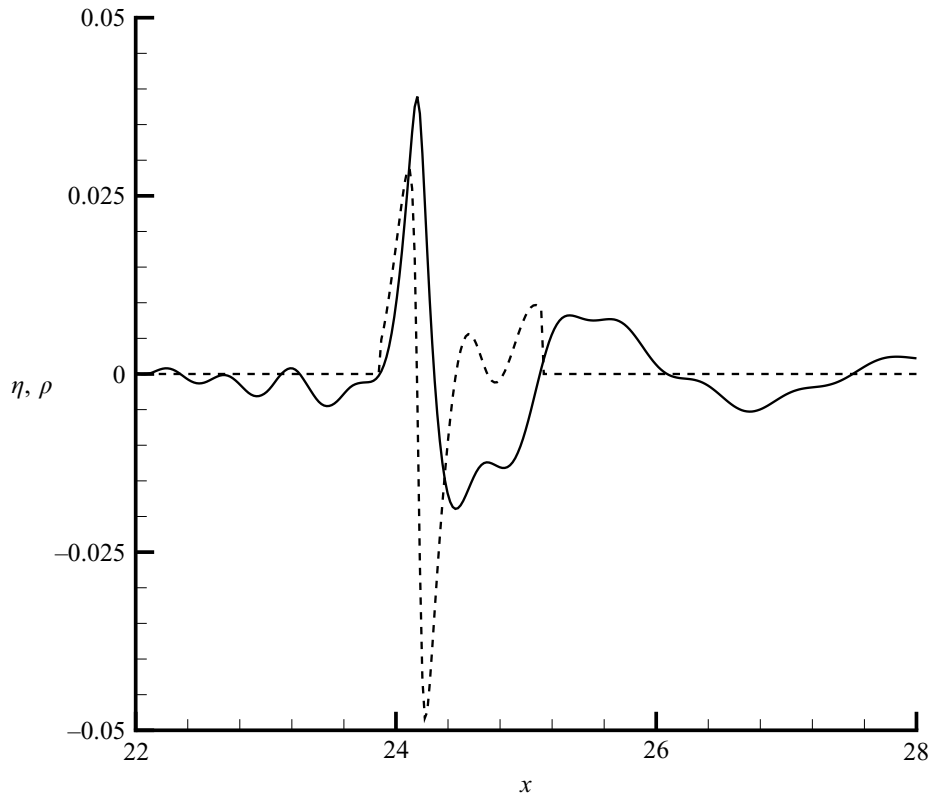


FIGURE 23. Pressure at the interface given in 10^{-1} HPa (dashed line) and surface elevation given in m (solid line) as a function of x .

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi + g\eta = -\frac{p_a}{\rho_w}, \qquad z = \eta(x,t), \tag{3.5}$$

where $\phi(x,z,t)$ is the velocity potential, $z = \eta(x,t)$ is the equation of the surface, g is the acceleration due to gravity, p_a is the atmospheric pressure, x and z are the horizontal and vertical coordinates, respectively, and t is the time.

3.3. *The spatio-temporal focusing*

Herein we considered a numerical wave tank simulating the experimental water-wave tank described in the previous section. The gravity wavetrain is generated by a piston-type wavemaker. An absorbing beach located at the end of the wave tank dissipates the incident wave energy.

The Laplace equation (3.2) is solved within a domain bounded by the water surface and solid boundaries of the numerical wave tank. The condition on the solid boundary is

$$\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \quad \text{on} \quad \partial\Omega_{\mathrm{S}}, \tag{3.6}$$

where $\partial\Omega_{\mathrm{S}}$ corresponds to solid boundaries, $\boldsymbol{v}$ is the velocity of the solid boundaries, set equal to zero on the horizontal bottom and downstream wall of the wave tank and equal to the velocity of the piston at any point of the wavemaker, and $\boldsymbol{n}$ is the unit normal vector to the boundaries.

A Lagrangian description of the water surface is used

$$\frac{\mathrm{D}\eta}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\phi}{\partial z}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \tag{3.8}$$

where x is the abscissa of the water surface and $\mathrm{D}/\mathrm{D}t = \partial/\partial t + \nabla\phi\cdot\nabla$.

Equation (3.7) is an alternative form of (3.4). The kinematic boundary condition is

$$\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t} = 0, \tag{3.9}$$

where $S(x, z, t) = \eta(x, t) - z = 0$ is the water-surface equation.

The dynamic boundary condition (3.5) is rewritten as follows:

$$\frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - g\eta - \frac{p_a}{\rho_w}, \tag{3.10}$$

where the pressure, $p_a(x, t)$, at the water surface is given by (3.1), i.e. the Jeffreys theory presented in §4 is used for modelling the wind effect on extreme waves. Over waves presenting slopes of less than a threshold value, the atmospheric pressure is uniform, set equal to zero without loss of generality.

The system of equations to solve is (3.2), (3.6), to (3.8) and (3.10). The method to integrate numerically this system is a boundary-integral equation method (BIEM) with a mixed Euler–Lagrange (MEL) time-marching scheme. The numerical method is based on the Green's second identity. For more details see Touboul *et al.* (2006).

A focusing wavetrain is generated by the piston wavemaker, leading during the focusing stage to the generation of an extreme wave followed by a defocusing stage. The water surface and the solid boundaries (downstream wall, bottom and wavemaker) are discretized by 2000 and 1000 meshes, respectively, uniformly distributed. The time integration is performed using an RK4 scheme, with a constant time step of 0.01 s. To avoid numerical instability, the grid spacing Δx and time increment Δt have been chosen to satisfy the following Courant criterion derived from the linearized surface conditions:

$$(\Delta t)^2 \leqslant \frac{8\Delta x}{\pi g}. \tag{3.11}$$

Figure 24 shows the experimental and computed surface elevation $\eta(t)$ at fetch $x = 1$ m while figure 25 shows the surface elevation at several fetches, measured experimentally and computed numerically. The origin of the surface elevation corresponding to fetches $x = 18$ m and $x = 21$ m are located at 0.05 and 0.1, respectively. The data at fetch $x = 1$ m are in excellent agreement while discrepancies observed for steep waves at fetches $x = 11$ m, 18 m and 21 m are possibly due to local breaking. Nevertheless, the phases of the numerical and experimental wavetrains are the same, demonstrating the efficiency of the numerical code in reproducing correctly the nonlinear evolution of water-wave groups during the focusing–defocusing cycle.

In the first series of experiments described in §2, spilling breaking events were observed, resulting in energy dissipation and in saturation in the growth of amplitude. The present model which is based on the assumption of inviscid fluid cannot describe energy dissipation. In our model, the transfer of energy from the wind to the water waves depends on the wind velocity and threshold wave-slope value. If the latter value is low, the energy transferred becomes high and breaking occurs.

To avoid breaking waves, a third series of experiments and numerical simulations have been performed with an initial group of waves of weaker amplitude. For these experiments and simulations, the period during which water waves are emitted is increased so that the initial group contains a greater number of waves. This explains why the amplification factor is greater for this case, as can be seen in figure 26. The frequency of the wavemaker is varied linearly from $f_{max} = 1.85$ Hz to $f_{min} = 0.8$ Hz during $\Delta T = 23.5$ s. The focusing mechanism is investigated with and without wind

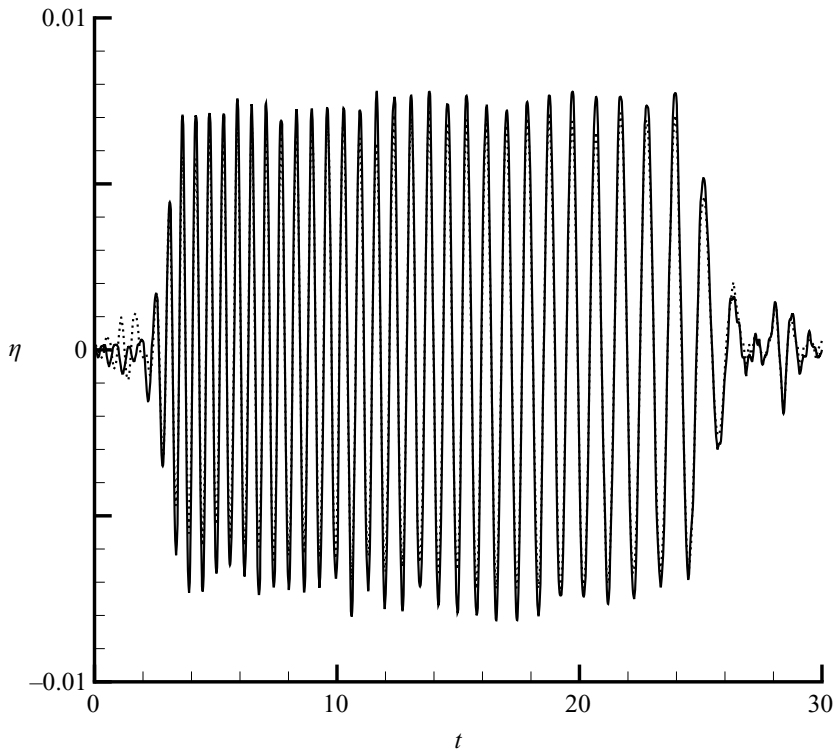


FIGURE 24. Surface elevation (m) as a function of time (s) at fetch $x = 1$ m. Experiments (solid line) and numerical simulation (dotted line) within the framework of the spatio-temporal focusing.

as well. A series of numerical simulations has been run for two values of the wind velocity: $U = 0$ m s^{-1} and 6 m s^{-1}. Using (2.8), figure 26 describes the spatial evolution of the amplification factor computed numerically. For $(\partial\eta/\partial x)_c = 0.3$, a blow-up of the numerical simulation occurs owing to the onset of breaking. This threshold value is too low and the transfer of energy from the wind to the steep waves leads to wave breaking. The threshold value of the slope beyond which the wind forcing is applied has been increased and is $(\partial\eta/\partial x)_c = 0.4$. This value corresponds to a wave close to the limiting form for which the modified Jeffreys theory applies. It can be observed that the numerical curves behave similarly to those in figure 5 and thus emphasize the asymmetry found in the experiments. The observed asymmetry between the focusing and defocusing regimes can be explained as follows. Without wind, the amplitude of the extreme wave is decreasing during defocusing. In presence of wind, the modified Jeffreys mechanism, which is acting locally in time and space, amplifies only the highest waves and hence delays their amplitude decrease during the very beginning of the defocusing stage. The competition between the dispersive nature of the water waves and the local transfer of energy from the wind to the extreme wave event leads to a balance of these effects at the maximum of modulation. This asymmetry results in an increase of the lifetime of the steep wave event which increases with the wind velocity. Hence the duration of the wind effect is relatively short to increase the amplification of the extreme wave event significantly. However, a weak increase of the amplification factor is observed in the presence of wind. The main effect of the Jeffreys sheltering mechanism is to sustain the coherence of the short group involving the steep wave event.

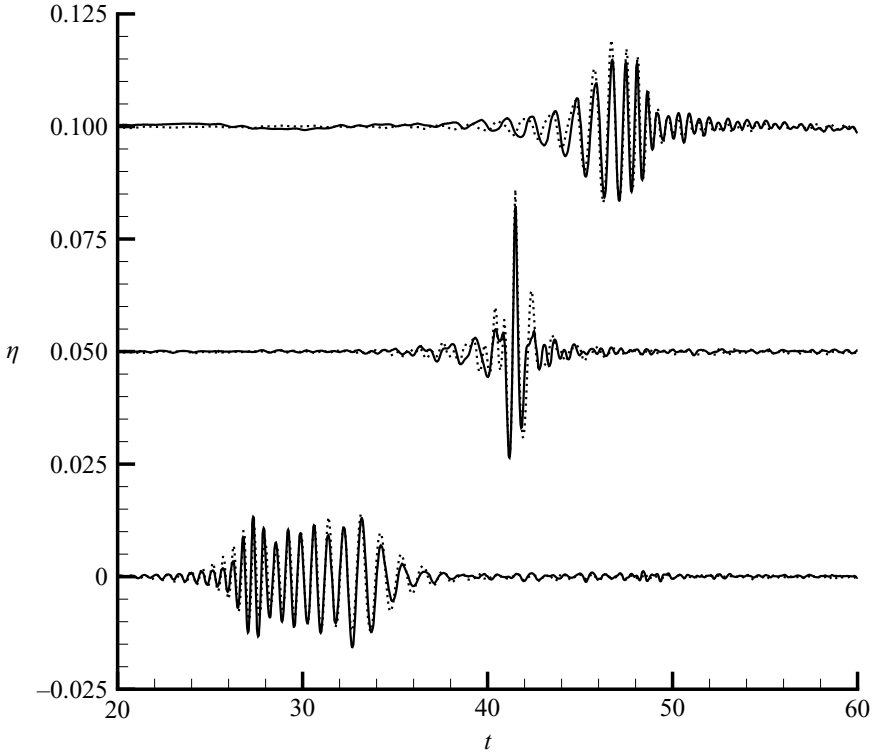


FIGURE 25. Surface elevation (m) as a function of time (s) at fetches $x = 21$ m (top), $x = 18$ m (middle) and $x = 11$ m (bottom). Experiments (solid line) and numerical simulation (dotted line) within the framework of the spatio-temporal focusing.

Figure 27 shows the experimental amplification factor and numerical amplification factor as a function of the normalized fetch x/x_f where x_f is the abscissa of the point of focus without wind. We can observe an excellent agreement between the experimental and numerical results. The experimental and numerical values of the abscissa of the focus point, x_f, and amplification factor, A, are almost the same.

In the presence of wind of velocity $U = 6$ m s^{-1}, figure 28(a) demonstrates that the numerical and experimental amplification factors disagree beyond the focus point. For the value $(\partial\eta/\partial x)_c = 0.4$, the Jeffreys sheltering mechanism is not effective enough in the present case whereas a reduction of the threshold value to 0.30 produces the onset of breaking at the focus point.

Wind waves are generally propagating in the presence of a current. Figure 28(b) corresponds to the spatio-temporal focusing in the presence of wind and current with $(\partial\eta/\partial x)_c = 0.3$. The wind velocity is $U = 6$ m s^{-1} and a uniform following current corresponding to 2% of U has been introduced to have the numerical value of the focus point equal to the experimental value. Generally, the current induced by wind is taken equal to 3% of the wind velocity. More information about the introduction of a current in the model can be found in Touboul *et al.* (2007) who considered the formation of rogue waves from transient wavetrains propagating on a current. The introduction of the following current prevents the onset of breaking. During extreme wave events, the wind-driven current may play a significant role in the wind–wave interaction. The combined action of the Jeffreys sheltering mechanism and wind-driven current may sustain longer extreme wave events. We can see good agreement between the numerical simulation and experiment. The steep wave event is propagating over a longer distance (or period of time) in the numerical simulation and experiments as well.

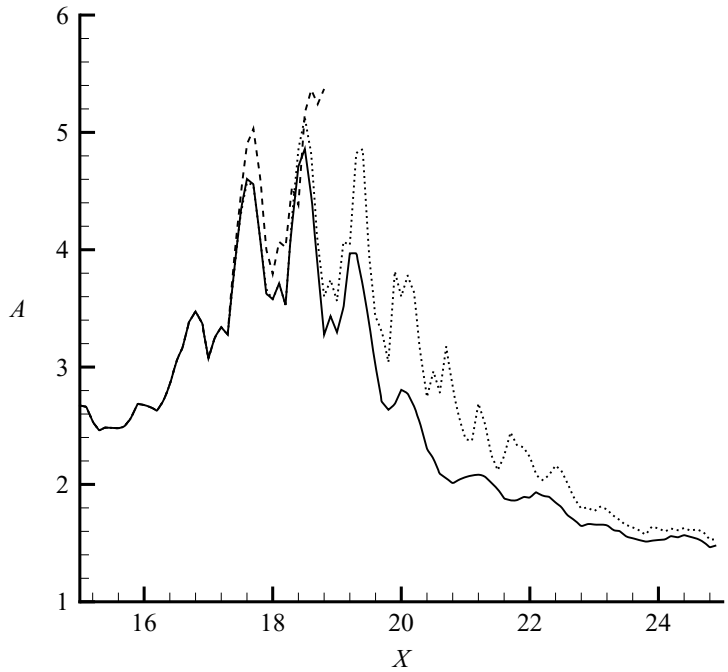


FIGURE 26. Numerical amplification factor $A(X, U)$ as a function of the distance (in m) for two values of the wind velocity within the framework of the spatio-temporal focusing: $U = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (solid line), $U = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ and $(\partial\eta/\partial x)_c = 0.4$ (dotted line), $U = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ and $(\partial\eta/\partial x)_c = 0.3$ (dashed line).

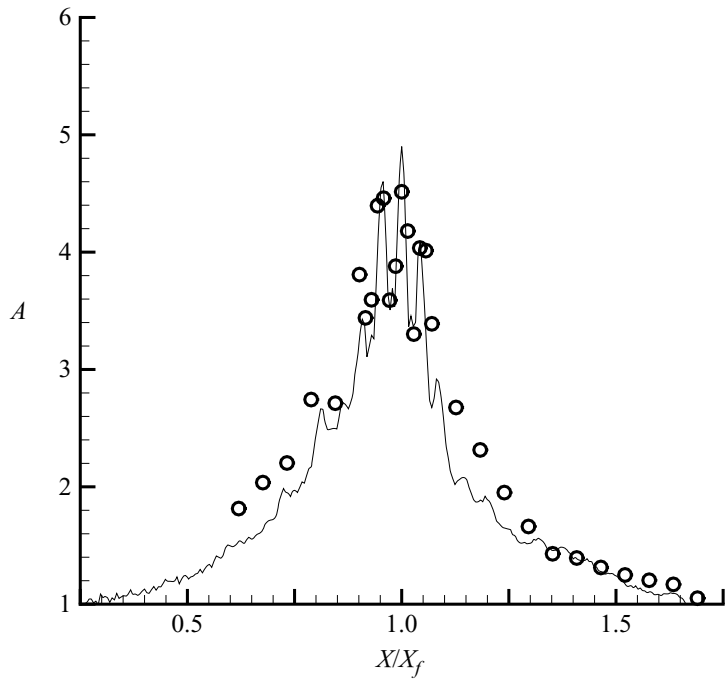


FIGURE 27. Numerical (solid line) and experimental (circle) amplification factor $A(X/X_f, U)$ as a function of the normalized distance without wind within the framework of the spatio-temporal focusing.

To summarize, we can claim that within the framework of the spatio-temporal focusing, both experimental and numerical results are in qualitative good agreement even if some quantitative differences have been observed, namely when the wind-induced

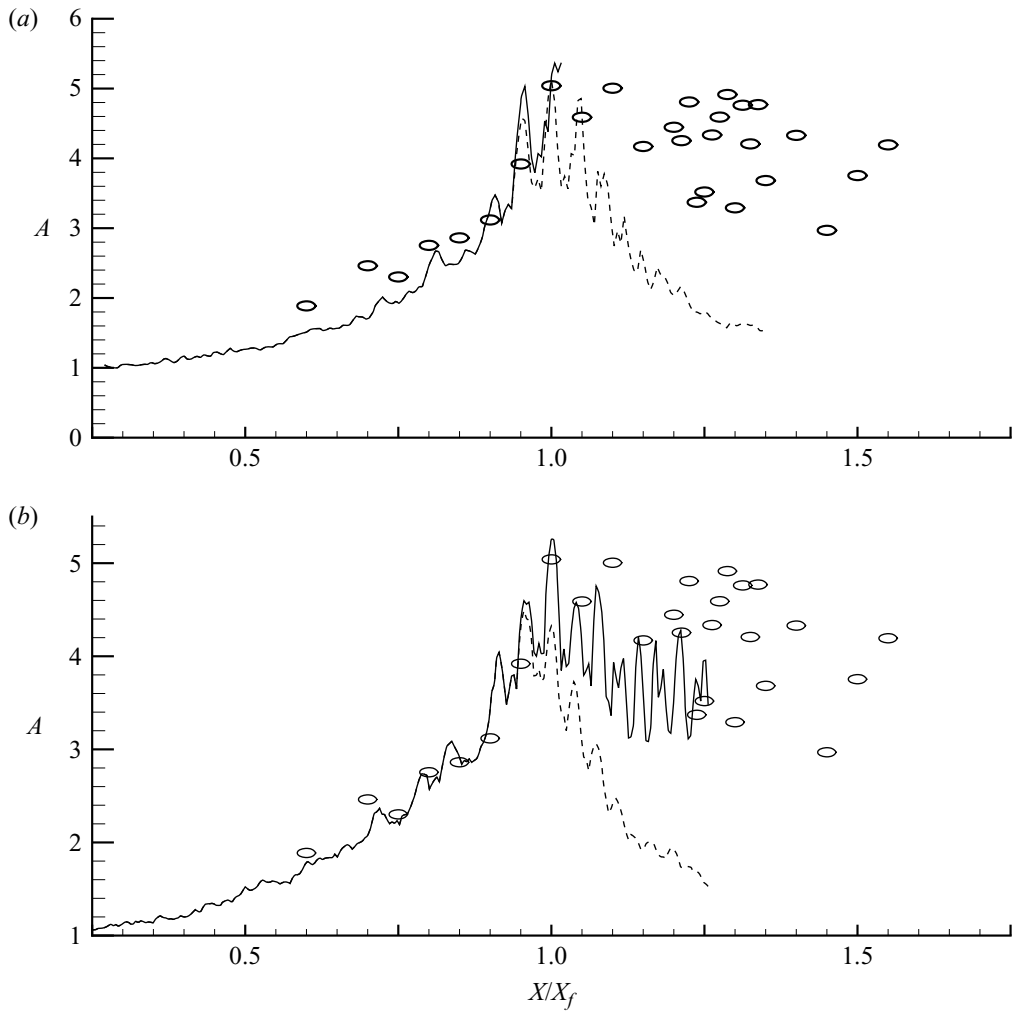


FIGURE 28. (*a*) Numerical (solid and dashed lines) and experimental (circle) amplification factor $A(X/X_f, U)$ as a function of the normalized distance with wind ($U = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$) for $(\partial\eta/\partial x)_c = 0.3$ (solid line) and $(\partial\eta/\partial x)_c = 0.4$ (dashed line) within the framework of the spatio-temporal focusing. (*b*) Numerical (solid and dashed lines) and experimental (circle) amplification factor $A(X/X_f, U)$ as a function of the normalized distance in presence of wind ($U = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$) and following current for $(\partial\eta/\partial x)_c = 0.3$ (solid line) and $(\partial\eta/\partial x)_c = 0.4$ (dashed line) within the framework of the spatio-temporal focusing.

current is ignored. The importance of a following current on the evolution of the wave group has been emphasized as well.

3.4. *Focusing due to modulational instability*

Beside the focusing due to dispersion of a chirped wave group, another mechanism, the modulational instability or Benjamin–Feir instability (Benjamin & Feir 1967) of uniform wavetrains, can generate extreme wave events. This periodic phenomenon is investigated numerically using a high-order spectral method (HOSM) without experimental counterpart. The question is how do extreme wave events due to modulational instability under wind action evolve? How are the amplification and time duration under wind effect modified? Are these effects similar to or different from those observed in the case of extreme wave due to dispersive focusing?

Using the fully nonlinear equations, Henderson, Peregrine & Dold (1999) and Dyachenko & Zakharov (2005) investigated numerically the onset of extreme wave events due to modulational instability, but without considering wind influence.

Introducing the potential velocity at the free surface $\phi^s(x,t) = \phi(x, \eta(x,t), t)$, (3.4) and (3.5) can be written as

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial t} = -\eta - \frac{1}{2}\nabla\phi^s \cdot \nabla\phi^s + \frac{1}{2}W^2[1 + (\nabla\eta)^2] - p_a, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\nabla\phi^s \cdot \nabla\eta + W[1 + (\nabla\eta)^2]. \tag{3.13}$$

where

$$W = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, \eta(x, y, t), t). \tag{3.14}$$

Equations (3.12) and (3.13) are given in dimensionless form. Reference length, reference velocity and reference pressure are, $1/k_0$, $\sqrt{g/k_0}$ and $\rho_w g/k_0$, respectively.

The numerical method used to solve the evolution equations is based on a pseudo-spectral treatment with a fourth-order Runge–Kutta integrator with constant time step, similar to the method developed by Dommermuth & Yue (1987). For more details see the paper by Skandrani, Kharif & Poitevin (1996).

It is well known that uniformly travelling wavetrains of Stokes waves are unstable to the Benjamin–Feir instability (or modulational instability) which results from a quartet resonance, that is, a resonance interaction between four components of the wave field. This instability corresponds to a quartet interaction between the fundamental component (the carrier) $\boldsymbol{k}_0 = k_0(1, 0)$ counted twice and two satellites $\boldsymbol{k}_1 = k_0(1 + p, q)$ and $\boldsymbol{k}_2 = k_0(1 - p, -q)$ where p and q are the longitudinal wavenumber and transversal wavenumber, respectively, of the modulation. Instability occurs when the following resonance conditions are fulfilled:

$$\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 = 2\boldsymbol{k}_0, \tag{3.15}$$

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_0, \tag{3.16}$$

where ω_i with $i = 0, 1, 2$ are frequencies of the carrier and satellites.

A presentation of the different classes of instability of Stokes waves is given by Dias & Kharif (1999).

The procedure used to calculate the linear stability of Stokes waves is similar to the method described by Kharif & Ramamonjiarisoa (1988). Let $\eta = \bar{\eta} + \eta'$ and $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ be the perturbed elevation and perturbed velocity potential where $(\bar{\eta}, \bar{\phi})$ and (η', ϕ') correspond, respectively, to the unperturbed Stokes wave and infinitesimal perturbative motion ($\eta' \ll \bar{\eta}, \phi' \ll \bar{\phi}$). Following Longuet-Higgins (1985), the Stokes wave of amplitude a_0 and wavenumber k_0 is computed iteratively. Substituting these decompositions into the boundary conditions linearized about the unperturbed motion and using the following forms for a two-dimensional flow:

$$\eta' = \exp(\lambda t + \mathrm{i}px) \sum_{-\infty}^{\infty} a_j \exp(\mathrm{i}jx), \tag{3.17}$$

$$\phi' = \exp(\lambda t + \mathrm{i}px) \sum_{-\infty}^{\infty} b_j \exp(\mathrm{i}jx + \gamma_j z)), \tag{3.18}$$

where λ, a_j and b_j are complex numbers and $\gamma_j = \mid p + j \mid$.

Equations (3.17) and (3.18) correspond to an eigenvalue problem for λ with eigenvector $\boldsymbol{u} = (a_j, b_j)^t$:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{B})\boldsymbol{u} = 0. \tag{3.19}$$

where $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ are complex matrices depending on the unperturbed wave steepness of the basic wave, $\epsilon = a_0 k_0$, and the arbitrary real number p. The eigenvalue, λ, satisfies

$$\det(\lambda \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}) = 0. \tag{3.20}$$

The physical disturbances are obtained from the real part of the complex expressions η' and ϕ' at $t = 0$.

McLean *et al.* (1981) and McLean (1982) showed that the dominant instability of a uniformly travelling train of Stokes waves in deep water is the two-dimensional modulational instability (class I), provided its steepness is less than $\epsilon = 0.30$. For higher values of the wave steepness three-dimensional instabilities (class II) become dominant, phase locked to the unperturbed wave. Herein we shall focus on the two-dimensional nonlinear evolution of a Stokes wavetrain suffering modulational instability with and without wind action. Two series of numerical simulations have been performed corresponding to two wavetrains of five and nine waves, respectively.

3.4.1. *Numerical simulations without wind action*

First, we consider the case of wavetrains of five waves. The initial condition is a Stokes wave of steepness $\epsilon = 0.11$, disturbed by its most unstable perturbation which corresponds to $p \approx 0.20 = 1/5$. The fundamental wavenumber of the Stokes wave is chosen so that integral numbers of the sideband perturbations (satellites) can be fitted into the computational domain. For $p = 1/5$, the fundamental wave harmonic of the Stokes wave is $k_0 = 5$ and the dominant sidebands are $k_1 = 4$ and $k_2 = 6$ for subharmonic and superharmonic parts of the perturbation, respectively. The wave parameters have been re-scaled so that the wavelength of the perturbation is equal to 2π. There exist higher harmonics present in the interactions which are not presented here. The normalized amplitude of the perturbation relative to the Stokes wave amplitude is initially taken to be equal to 10^{-3}. The order of nonlinearity is $M = 6$, the number of mesh points is $N > (M+1)k_{max}$ where k_{max} is the highest harmonic taken into account in the simulation. The latter criterion concerning N is introduced to avoid aliasing errors. The definition of the integer M can be found in Dommermuth & Yue (1987). To compute the long-time evolution of the wavetrain, the time step Δt is chosen to be equal to $T/100$ where T is the fundamental period of the basic wave. This temporal discretization satisfies the CFL condition.

For the case without wind, the time histories of the normalized amplitude of the carrier, lower sideband and upper sideband of the most unstable perturbation are plotted in figure 29(*a*). Another perturbation which was initially linearly stable becomes unstable in the vicinity of the maximum of modulation resulting in the growth of the sidebands $k_3 = 3$ and $k_4 = 7$. The nonlinear evolution of the two-dimensional wavetrain exhibits the Fermi–Pasta–Ulam recurrence phenomenon. This phenomenon is characterized by a series of modulation–demodulation cycles in which initially uniform wavetrains become modulated and then demodulated until they are again uniform. Herein one cycle is reported. At $t \approx 360T$ the initial condition is more or less recovered. At the maximum of modulation $t = 260T$, we can see a temporary frequency (and wavenumber) downshifting since the subharmonic mode $k_1 = 4$ is dominant. At this stage, a very steep wave occurs in the group (figure 30*a*). Notice that the solid line represents the free surface without wind effect while the dotted line corresponds to the case with wind effect which will be discussed below. Figures 30(*b*) to 30(*d*) show the free-surface profiles at several instants of time. The solid lines correspond to the case without wind action. We can emphasize

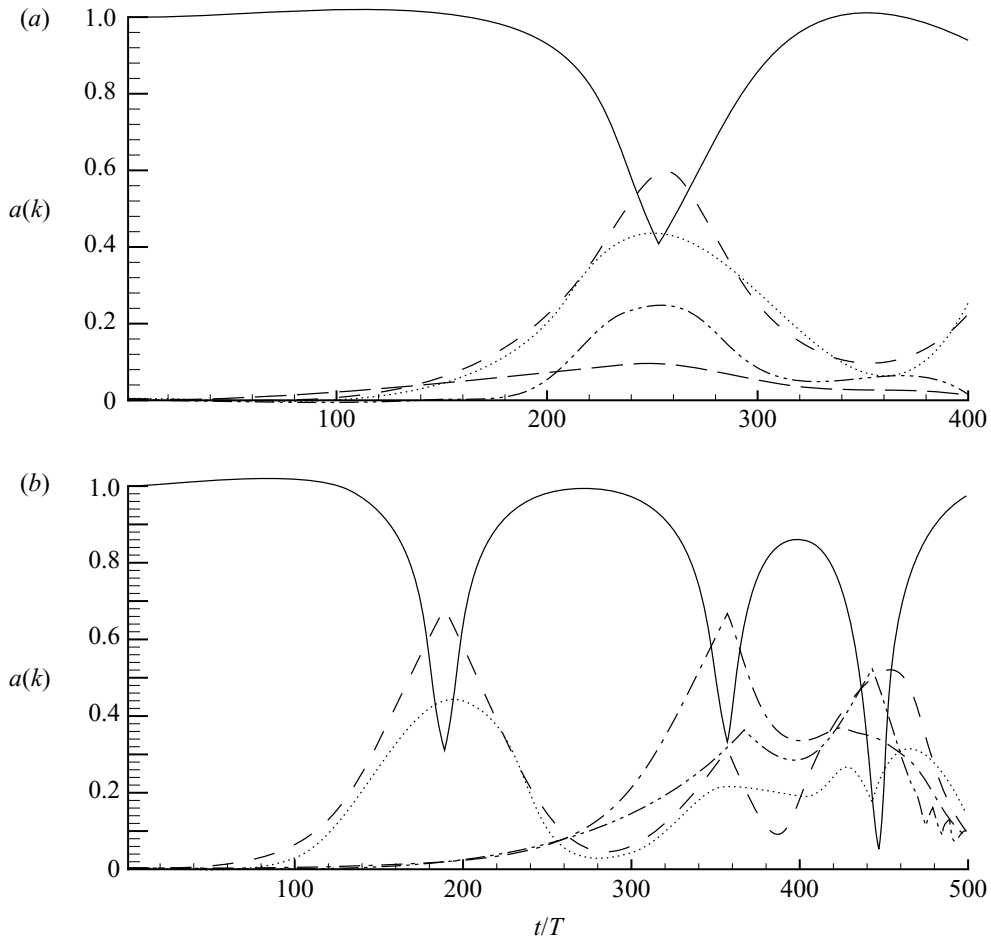


FIGURE 29. (*a*) Time histories of the amplitude of the fundamental mode, $k_0 = 5$ (solid line), subharmonic mode, $k_1 = 4$ (dashed line), and superharmonic mode, $k_2 = 6$ (dotted line), for an evolving perturbed Stokes wave of initial wave steepness $\epsilon = 0.11$ and fundamental wave period T, without wind action. The two lowest curves (dot-dot-dashed and dot-dashed lines) correspond to the modes $k_3 = 3$ and $k_4 = 7$. (*b*) Time histories of the amplitude of the fundamental mode, $k_0 = 9$ (solid line), subharmonic modes, $k_1 = 7$ (dashed line) and $k_3 = 8$ (dot-dashed line), and superharmonic modes, $k_2 = 11$ (dotted line) and $k_4 = 10$ (dot-dot-dashed line), for an evolving perturbed Stokes wave of initial wave steepness $\epsilon = 0.13$ and fundamental wave period T, without wind action.

that no breaking occurs during the numerical simulation. Dold & Peregrine (1986) have studied numerically the nonlinear evolution of different modulating wavetrains towards breaking or recurrence. For a given number of waves in the wavetrains, breaking always occurs above a critical initial steepness, and below a recurrence towards the initial wave group is observed. This problem was revisited by Banner & Tian (1998) who, however, did not considered the excitation at the maximum of modulation of the perturbation corresponding to $p = 2/5$.

A second numerical simulation corresponding to the case of wavetrains of nine waves is now considered. The initial condition is a Stokes wave of steepness $\epsilon = 0.13$, disturbed by its most unstable perturbation which corresponds to $p \approx 2/9$. The unstable sideband perturbations corresponding to $p = 1/9$ are introduced as well. Hence, we consider the nonlinear evolution of the wavetrain when two unstable modulations are now present whereas in the previous case only one unstable modulation was introduced. For $p = 2/9$, the fundamental wave harmonic of the Stokes wave is now $k_0 = 9$ and the dominant sidebands are $k_1 = 7$ and $k_2 = 11$ for the subharmonic and superharmonic parts of the perturbation, respectively, whereas

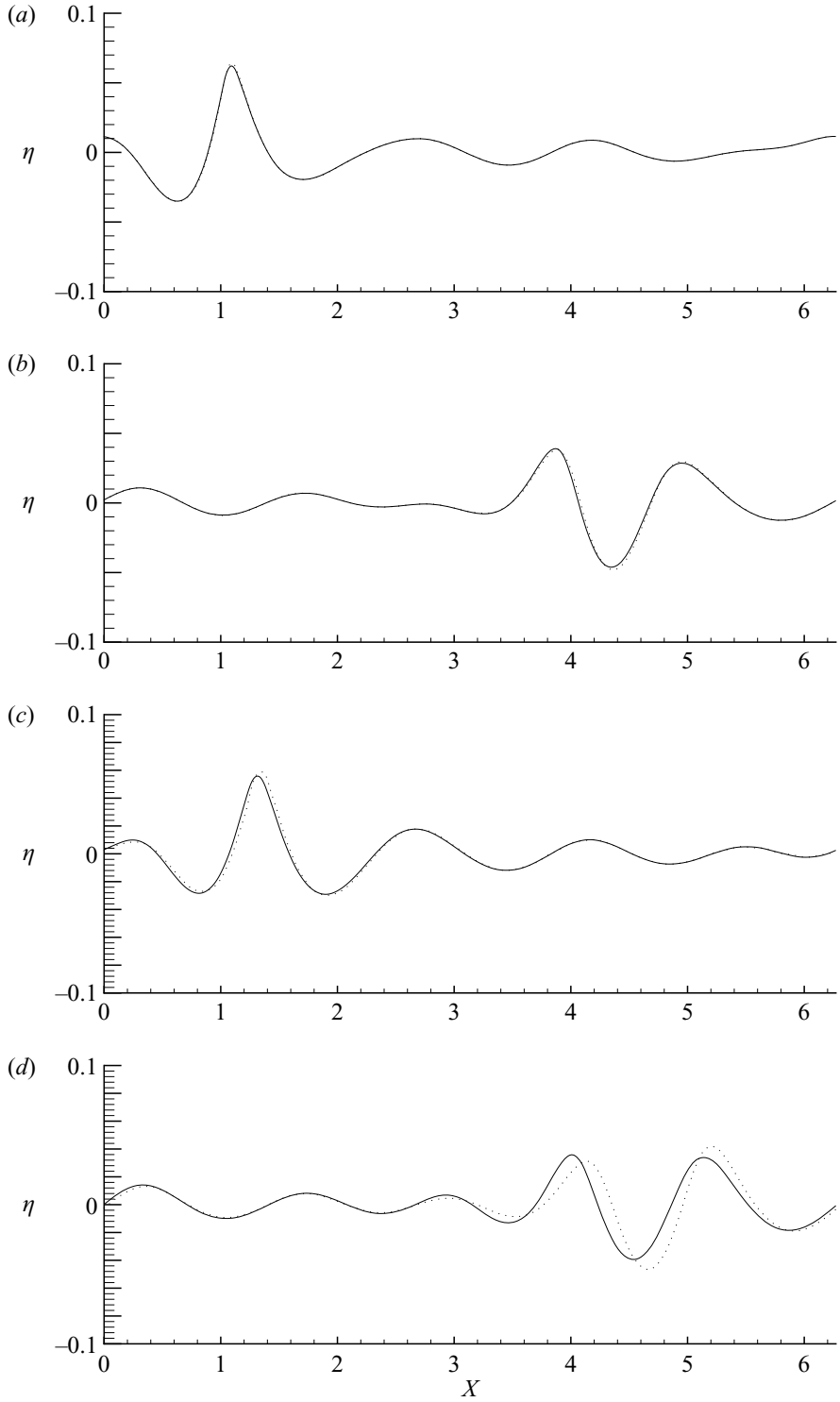


FIGURE 30. Surface wave profile at (*a*) $t = 260T$, (*b*) $t = 265T$, (*c*) $t = 270T$, (*d*) $t = 275T$: without wind (solid line) and with wind (dotted line).

the satellites $k_3 = 8$ and $k_4 = 10$ are the sidebands of the unstable perturbation corresponding to $p = 1/9$. The time histories of the normalized amplitude of the carrier, lower sideband and upper sideband of the two unstable perturbations are plotted in figure 29(*b*). A kind of Fermi–Pasta–Ulam recurrence can be observed, which is stopped at $t \approx 500T$ by the onset of breaking. Herein the onset of breaking is delayed by the presence of two unstable perturbations. This result is in agreement with those of Dold & Peregrine (1986) and Banner & Tian (1998). At $t = 192T$,

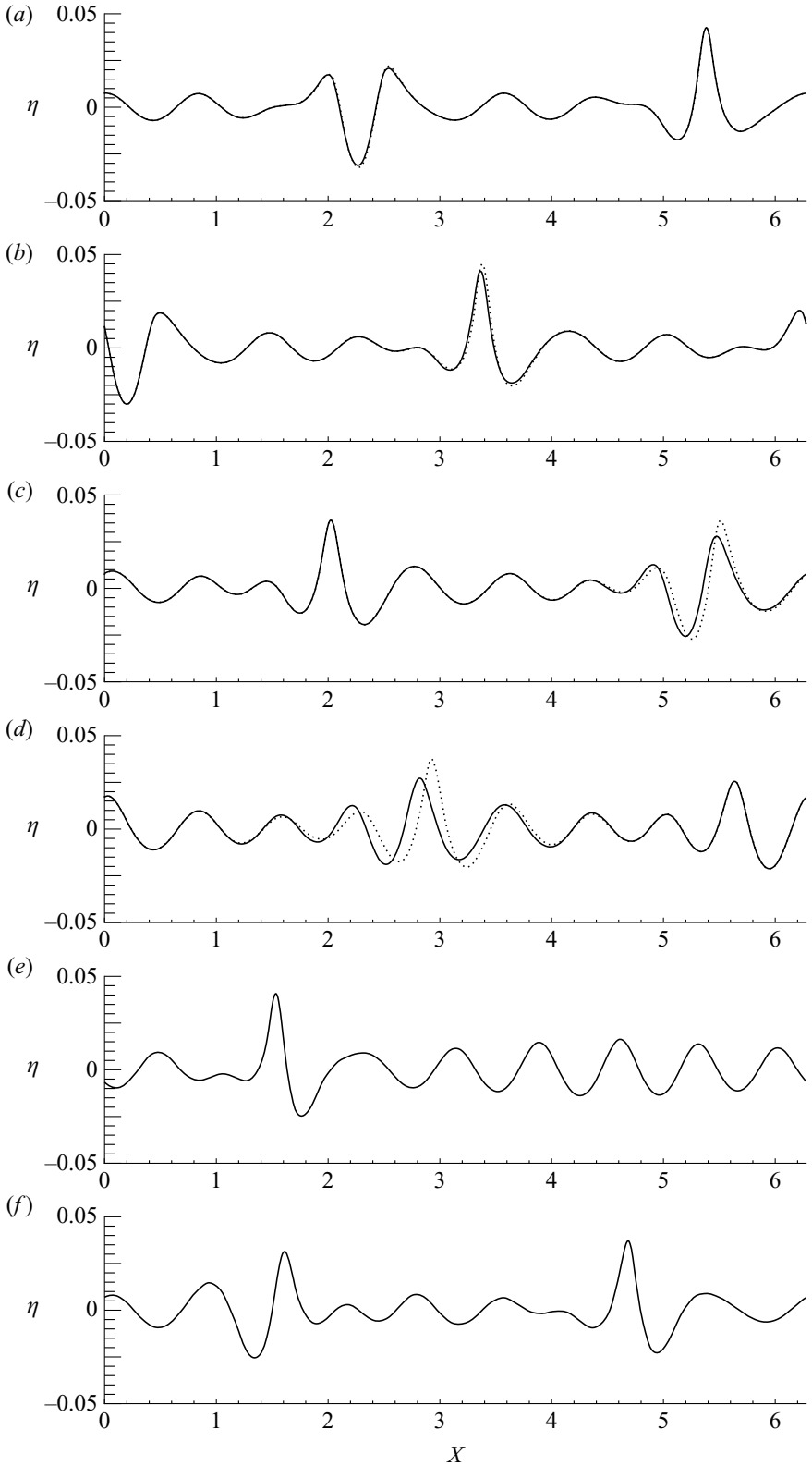


FIGURE 31. Surface wave profile at (a) $t = 192T$, (*b*) $t = 195T$, (*c*) $t = 200T$, (*d*) $t = 210T$, (*e*) $t = 360T$, (*f*)$t = 445T$: without wind (solid line) and with wind (dotted line).

$t = 360T$ and $t = 445T$ which correspond to the first, second and third maxima of modulation without wind, a extreme wave event occurs (figures 31*a* (solid line), 31*e* and 31*f*). The subharmonic sideband, $k_1 = 7$, is dominant and a temporary frequency downshifting is observed. Figures 31(*b*), 31(*c*) and 31(*d*) give the profiles of the wavetrain at $t = 195T$, $t = 200T$ and $t = 210T$, respectively.

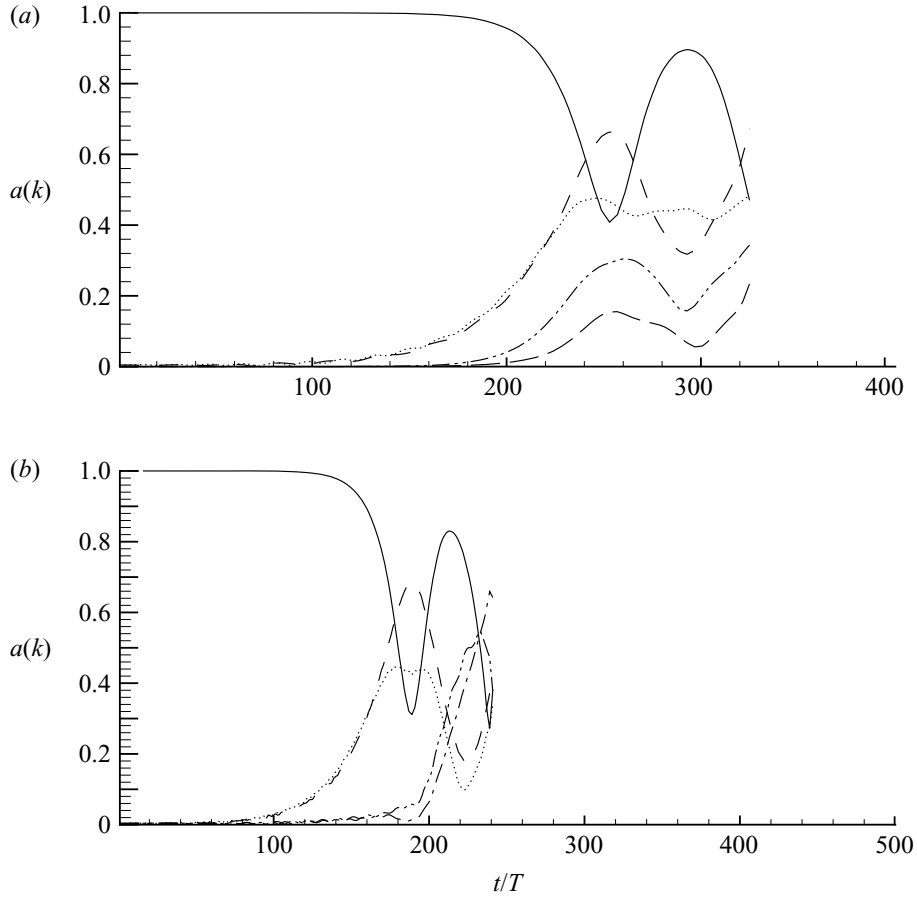


FIGURE 32. (*a*) Time histories of the amplitude of the fundamental mode, $k_0 = 5$ (solid line), subharmonic mode, $k_1 = 4$ (dashed line), and superharmonic mode, $k_2 = 6$ (dotted line), for an evolving perturbed Stokes wave of initial wave steepness $\epsilon = 0.11$ and fundamental wave period T, with wind action ($U = 1.75c$). The two lowest curves (dot-dot-dashed and dot-dashed lines) correspond to the modes $k_3 = 3$ and $k_4 = 7$. (*b*) Time histories of the amplitude of the fundamental mode, $k_0 = 9$ (solid line), subharmonic modes, $k_1 = 7$ (dashed line) and $k_3 = 8$ (dot-dashed line), and superharmonic modes, $k_2 = 11$ (dotted line) and $k_4 = 10$ (dot-dot-dashed line), for an evolving perturbed Stokes wave of initial wave steepness $\epsilon = 0.13$ and fundamental wave period T, with wind action.

Owing to a mode competition between the satellites of the two unstable disturbances, it is now the subharmonic sideband, $k_3 = 8$, of the initially less unstable perturbation which is dominant at the second maximum of modulation.

3.4.2. *Numerical simulations with wind action*

Figures 32(*a*) and 32(*b*) are similar to figures 29(*a*) and 29(*b*), respectively, except that now water waves evolve under wind action. Wind forcing is applied over crests of the group of five waves of slopes larger than $(\partial\eta/\partial x)_c = 0.405$ while for the group of nine waves it is applied over crests of slope steeper than 0.5125. These conditions are satisfied for $256T < t < 270T$ for the first wavetrain and for $187T < t < 200T$ and $237T < t < 240T$ for the second, that is during the maximum of modulation which corresponds to the formation of the extreme wave event. When the values of the wind velocity are too high, numerical simulations fail during the formation of the extreme wave event, owing to breaking. During the breaking wave process, the slope of the surface becomes infinite, leading numerically to a spread of energy into high wavenumbers. This local steepening is characterized by a numerical blow-up (for methods dealing with an Eulerian description of the flow). To avoid a wave breaking

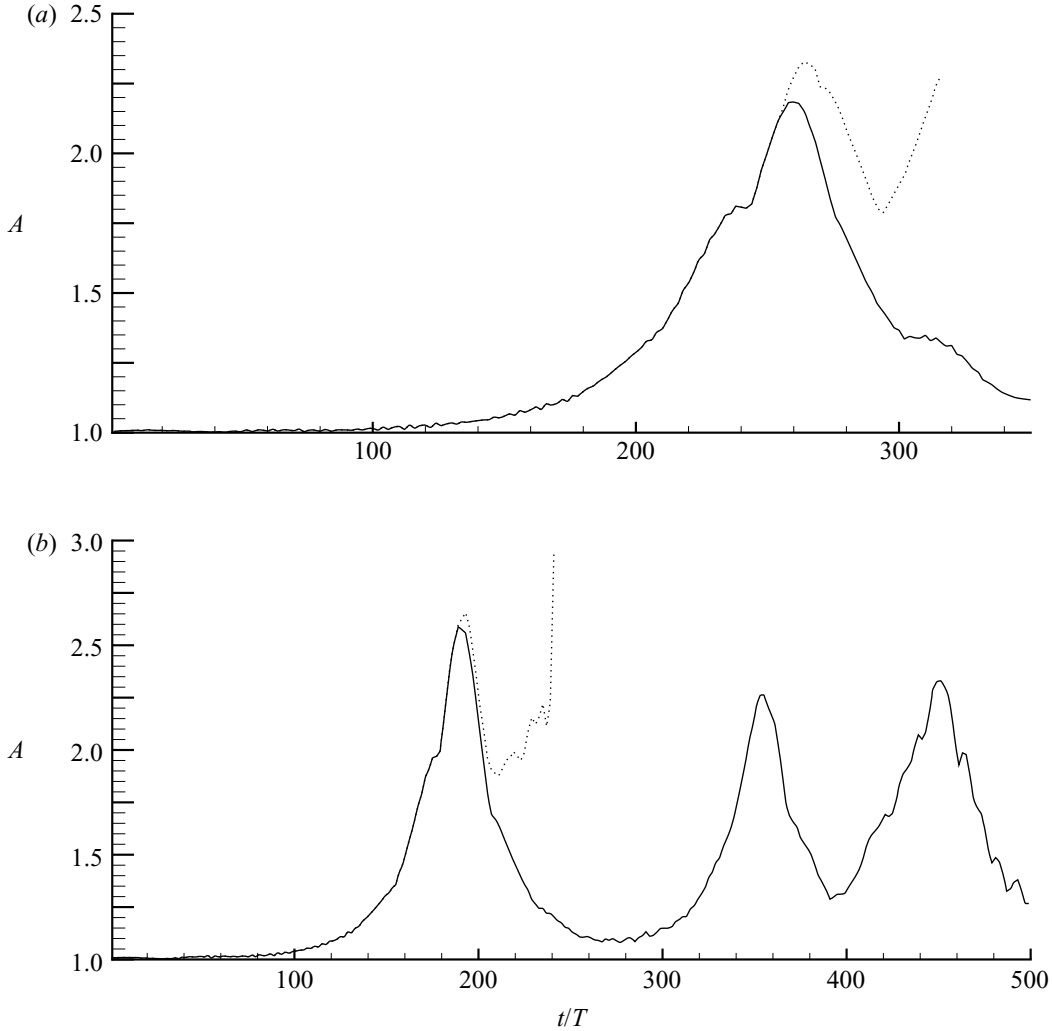


FIGURE 33. (*a*) Numerical amplification factor as a function of time for a wavetrain of five waves without wind (solid line) and with wind (dotted line) for $U = 1.75c$. (*b*) Numerical amplification factor as a function of time for a wavetrain of nine waves without wind (solid line) and with wind (dashed line) for $U = 1.75c$.

too early, the wind velocity U is fixed close to $1.75c$. Owing to the weak effect of the wind on the kinematics of the crests on which it acts, the phase velocity, c, is computed without wind. The effect of the wind reduces significantly the demodulation cycle and thus sustains the extreme wave event. This feature is clearly shown in figures 33(*a*) and 33(*b*), corresponding to wavetrains of five and nine waves, respectively. The amplification factor is stronger in the presence of wind and the rogue wave criterion given by (1.1), $A > 2.2$, is satisfied during a longer period of time. In the presence of wind forcing, extreme waves evolve into breaking waves at $t \approx 330T$ and $t \approx 240T$ for wavetrains of five and nine waves, respectively. For the case of a wavetrain of five waves, figures 30(*a*) to 30(*d*) display water-wave profiles at different instants of time in the vicinity of the maximum of modulation with and without wind. The solid lines corresponds to waves propagating without wind while the dotted lines represent the wave profiles under wind action. These figures show that the wind does not modify the phase velocity of the very steep waves while it increases their height and their duration. A similar behaviour is shown in figures 31(*a*) to 31(*d*), corresponding to the group of nine waves. We can conclude that extreme waves occurring under wind action in both wavetrains present the same features.

To summarize the results of this section, we can claim that extreme wave events generated by modulational instability in the presence of wind behave similarly to those due to dispersive spatio-temporal focusing discussed in the §§2 and 3.3. It is found that extreme wave events generated by two different mechanisms exhibit the same behaviour in the presence of wind. Furthermore, in the presence of local wind forcing, extreme waves evolve to breaking waves for initial wavetrains of steepness $\epsilon = 0.11$ and $\epsilon = 0.13$ considered herein. In another context, Banner & Song (2002) have investigated numerically the onset and strength of breaking for deep-water waves under wind forcing and surface shear. In their study, wind modelling is based on the Miles theory which is different from the Jeffreys sheltering mechanism used in this paper.

4. Conclusions

A series of experiments on the formation of extreme waves through the spatio-temporal focusing mechanism has been conducted in the large wind-wave tank of IRPHE and corresponding numerical simulations have been run as well. Furthermore, a second mechanism due to modulational instability and yielding to the generation of these extreme wave events has been considered numerically.

Experiments have shown that in presence of wind, the kinematics and dynamics of the wave group are modified, namely the focus point is shifted downstream, the height and duration of the extreme waves are increased. A more careful and detailed analysis of the wind–wave interaction during the wave focusing emphasized the strong coupling between the wave group and the turbulent boundary layer when the extreme wave event occurs. Hence, it has been shown that air-sea fluxes are strongly enhanced in the presence of strongly modulated wave groups. This strong correlation between the very steep waves of the group and the wind suggests that the Jeffreys sheltering mechanism could be a suitable model. In the presence of wind, it is shown experimentally that the occurrence of extreme wave events is accompanied by a reverse flow. Note that this mechanism, which is applied only over very steep water waves, works locally in space and time. For the smallest wind velocity, $U = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, considered herein, it has been shown experimentally that the wind has a sufficient aerodynamic influence to maintain extreme wave events. Nevertheless from our experiments, it is not possible to provide the value of the critical velocity for which aerodynamic influence becomes appreciable, that is, when air flow separation occurs. For $U < 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, a new series of experiments is required to determine the critical wind velocity for which air-flow separation is observed. This phenomenon depends strongly on wind velocity and local wave slope as well. Numerical simulations based on two-phase-flow Navier–Stokes equations and experiments are planned to investigate the occurrence of reverse air-flow events as a function of both wind velocity and local wave slope.

Similar numerical simulations have been performed, corresponding to the spatio-temporal focusing studied experimentally and the wave focusing due to modulational instability as well. For the spatio-temporal focusing, a numerical wave tank has been used to generate the water waves while the Jeffreys theory has been applied for the wind modelling to reproduce the experimental configuration. The numerical results are in qualitative good agreement with those obtained experimentally. The generation of extreme wave events due to modulational instability has concerned two numerical simulations of wavetrains of five waves and nine waves, respectively, using a pseudo-spectral method. It was found that in the presence of wind, extreme wave events due to modulational instability behave similarly to those due to spatio-temporal focusing.

For both cases considered in the present study, namely modulating wave trains of five and nine waves, it was found that steep waves evolve to breaking waves under local wind forcing. The role of the wind-driven current has been emphasized during extreme wave events. Following Banner & Song (2002), it should be interesting to introduce wind forcing with surface shear instead of the uniform current used in the present investigation. Another issue is to find an indicator for the onset of rogue waves.

The present study has demonstrated that under specific conditions, the modified Jeffreys sheltering mechanism can be physically relevant for influencing the dynamics of extreme wave events. The wave breaking or/and limited length of the numerical wind–wave tank do not allow this information to be readily determined and require more attention. Nevertheless, from figure 26, we can obtain an estimate for $U = 6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ and $(\partial\eta/\partial x)_c = 0.4$. The duration of the extreme wave event is roughly multiplied by 1.75. For $(\partial\eta/\partial x)_c = 0.3$, we observe a blow-up of the numerical simulation that corresponds to breaking. On the other hand when a co-flowing current is introduced, no breaking occurs and the extreme wave event is sustained longer. In our numerical experiments, the normalized amplitude does not become less than 2.2 beyond the maximum of modulation (see figure 28-*b*).

We are grateful to the referees for their useful comments which helped us to improve the paper. E.P. gratefully acknowledges the Centre National de la Recherche Scientifique which supported his stay at the Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre as Directeur de Recherche. This work was partly supported by INTAS (06-1000013-9236).

REFERENCES

Balk, A. M. 1996 The suppression of short waves by a train of long waves. *J. Fluid Mech.* **315**, 139–150.

Banner, M. I. 1990 The influence of wave breaking on the surface distribution in wind–wave interactions. *J. Fluid Mech.* **211**, 463–495.

Banner, M. I. & Melville, W. K. 1976 On the separation of air flow over water waves. *J. Fluid Mech.* **77**, 825–842.

Banner, M. I. & Song, J. 2002 On determining the onset and strength of breaking for deep water waves. Part ii: Influence of wind forcing and surface shear. *J. Phys. Oceanogr.* **32**, 2559–2570.

Banner, M. I. & Tian, X. 1998 On the determination of the onset of breaking for modulating surface gravity water waves. *J. Fluid Mech.* **367**, 107–137.

Benjamin, T. B. & Feir, J. E. 1967 The desintegration of wave trains on deep water. Part 1. theory. *J. Fluid Mech.* **27**, 417–430.

Bliven, L. F., Huang, N. E. & Long, S. R. 1986 Experimental study of the influence of wind on Benjamin–Feir sideband instability. *J. Fluid Mech.* **162**, 237–260.

Calini, A. & Schober, C. M. 2002 Homoclinic chaos increases the likelihood of rogue wave formation. *Phys. Lett.* A **298**, 335–349.

Clamond, D., Francius, M., Grue, J. & Kharif, C. 2006 Strong interaction between envelope solitary surface gravity waves. *Eur. J. Mech.* B/*Fluids* **25**, 536–553.

Dias, F. & Kharif, C. 1999 Nonlinear gravity and capillary–gravity waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31**, 301–346.

Dold, J. W. & Peregrine, D. H. 1986 Water wave modulation. In *Proc. 20th Intl. Conf. Coastal Engng, ASCE, Taipei*, vol. 1, pp. 163–175.

Dommermuth, D. G. & Yue, D. K. P. 1987 A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *J. Fluid Mech.* **184**, 267–288.

Dyachenko, A. I. & Zakharov, V. E. 2005 Modulational instability of Stokes wave → freak wave. *Sov. Phys., J. Exp. Theor. Phys.* **81** (6), 318–322.

Dysthe, K. B. 2001 Modelling a 'rogue wave' – speculations or a realistic possibility? In *Rogue Waves 2000* (ed. M. Olagnon & G. A. Athanassoulis), vol. 32, pp. 255–264. Ifremer, Brest.

Dysthe, K. B. & Trulsen, K. 1999 Note on breather type solutions of the nls as a model for freak waves. *Phys. Scripta* **82**, 48–52.

Giovanangeli, J. P. 1988 A new method for measuring static pressure fluctuations with application to wind wave interaction. *Exps. Fluids* **6**, 1221–1225.

Giovanangeli, J. P. & Chambaud, P. 1987 Pressure, velocity and temperature sensitivities of a bleed-type pressure sensor. *Rev. Sci. Instrum.* **58**, 154–164.

Giovanangeli, J. P., Kharif, C. & Pelinovsky, E. 2005 Experimental study of the wind effect on the focusing of transient wave groups. In *Rogue Waves 2004* (ed. M. Olagnon & M. Prevosto), vol. 39. Ifremer, Brest.

Giovanangeli, J. P., Reul, N., Garat, M. H. & Branger, H. 1999 Some aspects of wind-wave copling at high winds: an experimental study. In *Wind-over-Wave Couplings* (ed. S.G. Sajjadi, N.H. Thomas & J.C.R. Hunt), pp 81-90. Clarendon Press Oxford.

Henderson, K. L., Peregrine, D. H. & Dold, J. W. 1999 Unsteady water wave modulations: fully nonlinear solutions and comparison with the nonlinear Schrödinger equation. *Wave Motion* **29**, 341–361.

Janssen, P. A. E. M. 2003 Nonlinear four-wave interactions and freak waves. *J. Phys. Oceanogr.* **33**, 863–884.

Jeffreys, H. 1925 On the formation of wave by wind. *Proc. R. Soc. Lond.* A **107**, 189–206.

Kawai, S. 1982 Structure of air flow separation over wind wave crests. *Boundary-Layer Met.* **23**, 503–521.

Kharif, C. & Pelinovsky, E. 2003 Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon. *Eur. J. Mech.* B/*Fluids* **22**, 603–634.

Kharif, C. & Ramamonjiarisoa, A. 1988 Deep water gravity wave instabilities at large steepness. *Phys. Fluids* **31**, 1286–1288.

Kharif, C., Pelinovsky, E., Talipova, T. & Slunyaev, A. 2001 Focusing of nonlinear wave groups in deep water. *Sov. Phys., J. Exp. Theor. Phys. Lett.* **73**(4), 170–175.

Latif, M. A. 1974 Acoustic effects on pressure measurements over water waves in the laboratory. *Tech. Rep.* 25. Coastal and Oceanographic Engineering Laboratory, Gainsville, Florida.

Li, J. C., Hui, W. H. & Donelan, M. A. 1987 Effects of velocity shear on the stability of surface deep water wave trains. In *Nonlinear Water Waves (IUTAM Symp.)*, pp. 213–220. Springer.

Longuet-Higgins, M. S. 1985 Bifurcation in gravity waves. *J. Fluid Mech.* **151**, 457–475.

McLean, J. W. 1982 Instabilities of finite-amplitude water waves. *J. Fluid Mech.* **114**, 315–330.

McLean, J. W., Ma, Y. C., Martin, D. U., Saffman, P. G. & Yuen, H. C. 1981 Three-dimensional instability of finite-amplitude water waves. *Phys. Rev. Lett.* **46**, 817–820.

Mastenbroeck, C., Makin, V. K., Garat, M. H. & Giovanangeli, J. P. 1996 Experimental evidence of the rapid distortion of turbulence in the air flow over water waves. *J. Fluid Mech.* **318**, 273–302.

Osborne, A. R., Onorato, M. & Serio, M. 2000 The nonlinear dynamics of rogue waves and holes in deep-water gravity wave train. *Phys. Rev.* A **275**, 386–393.

Papadimitrakis, Y. A., Hsu, Y. & Street, R. L. 1986 The role of wave-induced pressure fluctuations in the transfer accross an air–water interface. *J. Fluid Mech.* **170**, 113–127.

Pelinovsky, E., Talipova, T. & Kharif, C. 2000 Nonlinear dispersive mechanism of the freak wave formation in shallow water. *Physica* D **147**, 83–94.

Reul, N., Branger, H. & Giovanangeli, J.-P. 1999 Air flow separation over unsteady breaking waves. *Phys. Fluids* **11**, 1959–1961.

Skandrani, C., Kharif, C. & Poitevin, J. 1996 Nonlinear evolution of water surface waves: The frequency downshifting phenomenon. *Contemp. Maths* **200**, 157–171.

Slunyaev, A., Kharif, C., Pelinovsky, E. & Talipova, T. 2002 Nonlinear wave focusing an water of finite depth. *Physica* D **173**, 77–96.

Song, J. & Banner, M. I. 2002 On determining the onset and strength of breaking for deep water waves. part I: Unforced Irrotational Wave Groups. *J. Phys. Oceanogr.* **32**, 2541–2558.

Torrence, C. & Compo, G. P. 1998 A practical guide to wavelet analysis. *Bull. Am. Met. Soc.* **79**, 61–78.

Touboul, J., Giovanangeli, J. P., Kharif, C. & Pelinovsky, E. 2006 Freak waves under the action of wind: experiments and simulations. *Eur. J. Mech.* B/*Fluids* **25**, 662–676.

Touboul, J., Pelinovsly, E. & Kharif, C. 2007 Nonlinear focusing wave groups on current. *J. Korean Soc. Coastal Ocean Engng* **19**(3), 222–227.

Waseda, T. & Tulin, M. P. 1999 Experimental study of the stability of deep-water wave trains including wind effects. *J. Fluid Mech.* **401**, 55–84.

Whitham, G. B. 1967 Nonlinear dispersion of water waves. *J. Fluid Mech.* **27**, 399–412.

Zakharov, V. E. 1968 Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of deep water. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9**, 190–194.

Chapitre 8

Vagues scélérates générées par instabilité modulationnelle

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que le vent augmentait significativement la durée de vie des vagues scélérates formées par focalisation dispersive. Nous tentons dans ce chapitre de généraliser notre approche modèle à des vagues scélérates engendrées par instabilité modulationnelle.

8.1 Touboul J., Kharif C., On the interaction of wind and extreme gravity waves due to modulational instability, *Phys. Fluids*, 18, 108103, 2006

Dans le chapitre précédent, nous avons observé que des vagues scélérates engendrées par focalisation dispersive étaient largement soutenues par l'action du vent. Une légère augmentation de leur amplitude, ainsi qu'une légère dérive du point de focalisation était observée. Nous sommes donc conduits à nous interroger sur la généralité de ce phénomène. En effet, cette observation est-elle inhérente aux vagues scélérates dans l'absolu, ou bien s'agit d'un phénomène lié au mécanisme de focalisation dispersive ? Pour le vérifier, nous nous proposons d'étudier l'action du vent sur des vagues scélérates engendrées par instabilité modulationnelle. Cependant, une approche expérimentale est ici extrêmement difficile à mettre en œuvre, dans la mesure où les taux de croissance de cette instabilité sont très faibles. La distance de développement de cette instabilité est donc très grande, et il est difficile d'observer un cycle de modulation-démodulation (cycle de Fermi-Pasta-Ulam) complet dans le canal de Luminy. Nous nous restreignons donc ici à l'étude numérique du phénomène. Pour cela, nous introduisons le vent dans la méthode pseudo-spectrale (HOSM), sous la forme du mécanisme de Jeffreys modifié introduit dans le chapitre précédent. Les vagues scélérates ainsi obtenues présentent un comportement similaire sous l'action du vent que celles obtenues par focalisation dispersive.

On the interaction of wind and extreme gravity waves due to modulational instability

J. Touboul and C. Kharif
Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre, Technopôle de Château-Gombert, 49 rue Joliot Curie, B.P. 146, 13384 Marseille Cedex 13, France

(Received 9 August 2006; accepted 28 September 2006; published online 30 October 2006)

Freak waves are generated numerically by means of modulational instability. Their interaction with wind is investigated. Wind is modeled as Jeffreys' sheltering mechanism. Contrary to the case without wind, it is found that wind sustains the maximum of modulation due to the Benjamin-Feir instability. The general kinematic behavior observed for freak waves due to dispersive focusing is recovered here, even if the underlying physics are different in both cases. © *2006 American Institute of Physics*. [DOI: 10.1063/1.2374845]

Extreme wave events such as rogue waves correspond to large-amplitude waves occurring suddenly on the sea surface. *In situ* observations provided by oil and shipping industries and capsizing of giant vessels confirm the existence of such events. Up to now there is no definitive consensus about a unique definition of a rogue wave event. The definition based on height criterion is often used. When the height of the wave exceeds twice the significant height it is considered as a rogue wave. Owing to the non-Gaussian and nonstationary character of the water wave fields on the sea surface, it is a very tricky task to compute the probability density function of rogue waves. So, the approaches presented herein are rather deterministic than statistical. Recently, Refs. 1 and 2 provided reviews on the physics of these events when the direct effect of the wind is not considered. Rogue waves can occur far away from storm areas where wave fields are generated. In that case huge waves are possible on quasi-still water.

There are a number of physical mechanisms producing the occurrence of rogue waves. Extreme wave events can be due to refraction (presence of variable currents or bottom topography), dispersion (frequency modulation), wave instability (Benjamin-Feir instability), soliton interactions, etc. that may focus the wave energy into a small area. All these different mechanisms can work without direct effect of wind on waves. More details can be found in Refs. 2 and 3.

Among the mechanisms that generate extreme wave events, is the modulational instability or the Benjamin-Feir instability. Numerical simulations of the fully nonlinear equations have been performed by Refs. 4–6. Due to a resonant four wave interaction, the uniform wave trains suffer modulation-demodulation cycles (the Fermi-Pasta-Ulam recurrence). At the maximum of modulation a frequency downshift is observed and very steep waves occur.

Several experimental and theoretical studies have concerned the wind action on the modulational instability.[7–10] Herein we used a different theory based on the Jeffreys sheltering mechanism to describe the air flow separation over very steep waves.

Recently, the authors in Ref. 11 took interest in the interaction of wind and freak waves due to dispersive focusing. They found a weak amplification of the freak waves under the action of wind, and a significant increase of their lifetime. Those observations were explained by means of Jeffreys' sheltering mechanism. The purpose of this Brief Communication is to extend those results to freak waves due to modulational instability.

The fluid is assumed to be inviscid and the motion irrotational, such that the velocity $\mathbf{u}$ may be expressed as the gradient of a potential $\phi(x,z,t):\mathbf{u}=\nabla\phi$. If the fluid is assumed to be incompressible, the equation that holds throughout the fluid is the Laplace's equation.

The waves are supposed to propagate in infinite depth, and the bottom condition writes

$$\nabla\phi \to 0 \quad \text{when } z \to -\infty. \tag{1}$$

The kinematic requirement that a particle on the sea surface, $z=\eta(x,t)$, remains on it is expressed by

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \quad \text{on } z=\eta(x,t). \tag{2}$$

Since surface tension effects are ignored, the dynamic boundary condition which corresponds to pressure continuity through the interface, can be written

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{(\nabla\phi)^2}{2}+g\eta+\frac{p_a}{\rho_w}=0 \quad \text{on } z=\eta(x,t), \tag{3}$$

where g is the gravitational acceleration, p_a is the pressure at the sea surface, and ρ_w is the density of water. The atmospheric pressure at the sea surface can vary in space and time.

By introducing the potential velocity at the free surface $\phi^s(x,t)=\phi(x,\eta(x,t),t)$, Eqs. (2) and (3) write

$$\frac{\partial\phi^s}{\partial t}=-\eta-\frac{(\nabla\phi^s)^2}{2}+\frac{1}{2}W^2[1+(\nabla\eta)^2]-p_a, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=-\nabla\phi^s\cdot\nabla\eta+W[1+(\nabla\eta)^2], \tag{5}$$

where

 © 2006 American Institute of Physics

Downloaded 24 Jan 2007 to 147.94.56.43. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

$$W = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, \eta(x,t), t). \tag{6}$$

Equations (4) and (5) are given in dimensionless form. Reference length, reference velocity and reference pressure are $1/k_0$, $\sqrt{g/k_0}$, and $\rho_w g/k_0$ respectively.

The numerical method used to solve the evolution equations is based on a pseudo-spectral treatment with a fourth-order Runge-Kutta integrator with constant time step, similar to the method developed by Ref. 12. More details can be found in Ref. 13.

It is well known that the uniformly traveling wave train of the Stokes' waves are unstable to the Benjamin-Feir instability, or modulational instability, which results from a quartet resonance, that is, a resonance interaction between four components of the wave field. This instability corresponds to a quartet interaction between the fundamental component k_0 counted twice and two satellites $k_1 = k_0(1+p)$ and $k_2 = k_0(1-p)$ where p is the wave number of the modulation. Instability occurs when the following resonance conditions are fulfilled:

$$k_1 + k_2 = 2k_0, \tag{7}$$

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_0, \tag{8}$$

where ω_i with $i=0,1,2$ are frequencies of the carrier and satellites. A presentation of the different classes of instability of the Stokes waves is given in the review paper by Dias and Kharif.[14]

The procedure used to calculate the linear stability of the Stokes waves is similar to the method described by Kharif and Ramamonjiarisoa.[15] Let $\eta = \bar{\eta} + \eta'$ and $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ be the perturbed elevation and perturbed velocity potential where $(\bar{\eta}, \bar{\phi})$ and (η', ϕ') correspond, respectively, to the unperturbed Stokes wave and infinitesimal perturbative motion $(\eta' \ll \bar{\eta}, \phi' \ll \bar{\phi})$. Following Ref. 16, the Stokes wave of amplitude a_0 and wave number k_0 is computed iteratively. This decomposition is introduced in the boundary conditions (4) and (5) linearized about the unperturbed motion, and the following form is used:

$$\eta' = \exp(\lambda t + ipx) \sum_{-\infty}^{\infty} a_j \exp(ijx), \tag{9}$$

$$\phi' = \exp(\lambda t + ipx) \sum_{-\infty}^{\infty} b_j \exp(ijx + \gamma_j z), \tag{10}$$

where λ, a_j, and b_j are complex numbers and where $\gamma_j = |p + j|$. An eigenvalue problem for λ with eigenvector $\mathbf{u} = (\mathbf{a_j}, \mathbf{b_j})^{\mathbf{t}} : (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B})\mathbf{u} = 0$ is obtained, where $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ are complex matrices depending on the unperturbed wave steepness of the basic wave. The physical disturbances are obtained from the real part of the complex expressions η' and ϕ' at $t=0$.

References 17 and 18 showed that the dominant instability of a uniformly traveling train of Stokes' waves in deep water is the two-dimensional modulational instability, or class I instability, as soon as its steepness is less than $\epsilon = 0.30$.

In our simulations, the initial condition is a Stokes wave of steepness $\epsilon = 0.11$, disturbed by its most unstable perturbation which corresponds to $p \approx 0.20 = 1/5$. The fundamental wave number of the Stokes wave is $k_0 = 5$ and the dominant sidebands are $k=4$ and $k=6$ for the subharmonic and superharmonic part of the perturbation, respectively. There exists higher harmonics present in the interactions which are not presented here. The normalized amplitude of the perturbation relative to Stokes wave amplitude is initially taken to be equal to 10^{-3}. The order of nonlinearity is $M=6$, and the number of mesh points is $N > (M+1)k_{\max}$, where $k_{\max}$ is the highest harmonic taken into account in the simulation. The latter criterion concerning N is introduced to avoid aliasing errors. To compute the long time evolution of the wave packet the time step Δt is chosen to be equal to $T/100$, where T is the fundamental period of the basic wave. This temporal discretization satisfies the CFL condition.

Previous works on the rogue wave have not considered the direct effect of wind on their dynamics. It was assumed that they occur independently of wind action, that is far away from storm areas where wind wave fields are formed. Herein the Jeffreys' theory (see Ref. 19) is invoked for the modelling of the pressure, p_a. Jeffreys suggested that the energy transfer was due to the form drag associated with the flow separation occurring on the leeward side of the crests. The air flow separation would cause a pressure asymmetry with respect to the wave crest resulting in a wave growth. This mechanism can be invoked only if the waves are sufficiently steep to produce air flow separation. Reference 20 has shown that separation occurs over near breaking waves. For weak or moderate steepness of the waves this phenomenon cannot apply and the Jeffreys' sheltering mechanism becomes irrelevant.

Following Ref. 19 the pressure at the interface $z = \eta(x,t)$ is related to the local wave slope according to the following expression:

$$p_a = \rho_a s (U - c)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{11}$$

where the constant, s is termed the sheltering coefficient, U is the wind speed, c is the wave phase velocity, and ρ_a is the atmospheric density. The sheltering coefficient, $s=0.5$, has been calculated from the experimental data. In order to apply the relation (11) for only very steep waves we introduce a threshold value for the slope $(\partial \eta / \partial x)_c$. When the local slope of the waves becomes larger than this critical value, the pressure is given by Eq. (11), otherwise the pressure at the interface is taken to be equal to a constant which is chosen to be equal to zero without loss of generality. This means that wind forcing is applied locally in time and space.

The initial condition described previously is propagated numerically with the high order spectral method. Both cases with and without wind are studied and compared.

For the case without wind, the time histories of the normalized amplitude of the carrier, lower sideband and upper

Downloaded 24 Jan 2007 to 147.94.56.43. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

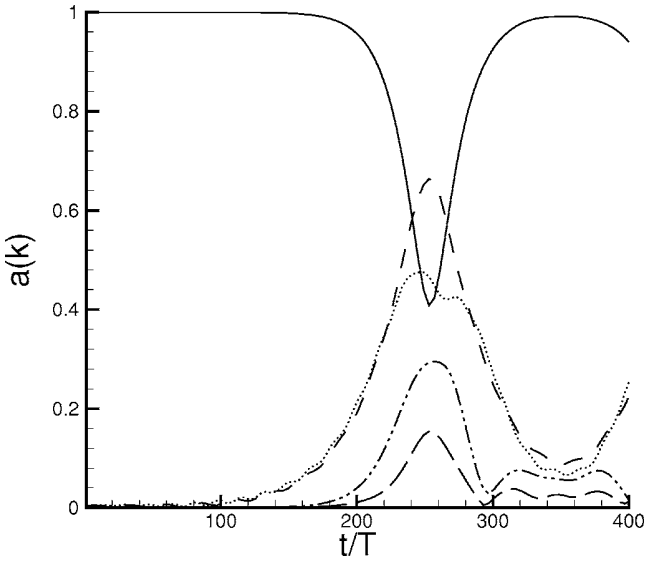


FIG. 1. Time histories of the amplitude of the fundamental, $k_0=5$ (solid line), subharmonic, $k_1=4$ (dashed line), and superharmonic, $k_2=6$ (dotted line), modes without wind action. The two lowest curves (dashed-dotted lines) correspond to the modes $k_3=3$ and $k_4=7$.

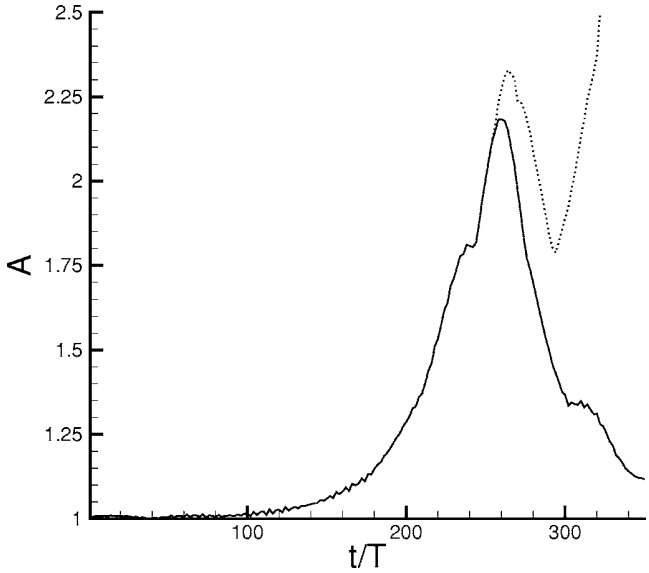


FIG. 3. Numerical maximum elevation normalized by the initial wave amplitude (amplification factor) as a function of time without wind (solid line) and with wind (dotted line) for $U=1.75c$.

sideband of the most unstable perturbation are plotted in Fig. 1. Another perturbation which was initially linearly stable becomes unstable in the vicinity of maximum of modulation resulting in the growth of the sidebands $k_3=3$ and $k_4=7$. The nonlinear evolution of the two-dimensional wave train exhibits the Fermi-Pasta-Ulam recurrence phenomenon. This phenomenon is characterized by a series of modulation-demodulation cycles in which initially uniform wave trains become modulated and then demodulated until they are again uniform. Herein one cycle is reported. At $t\approx 360$ T the initial condition is more or less recovered. At the maximum of modulation $t=260$ T, one can observe a temporary frequency (and wave number) downshifting since the subharmonic mode $k_1=4$ is dominant. At this stage a very steep wave occurs in the group.

Figure 2 is similar to Fig. 1, except that now water waves evolve under wind action. Wind forcing is applied over crests of slopes larger than $(\partial\eta/\partial x)_c=0.405$. This condition is satisfied for $256\ \mathrm{T}<t<270\ \mathrm{T}$, that is during the maximum of modulation which corresponds to the formation of the extreme wave event. When the values of the wind velocity are too high numerical simulations fail during the formation of the rogue wave event, due to breaking. During the breaking wave process the slope of the surface becomes infinite, leading numerically to a spread of energy into high

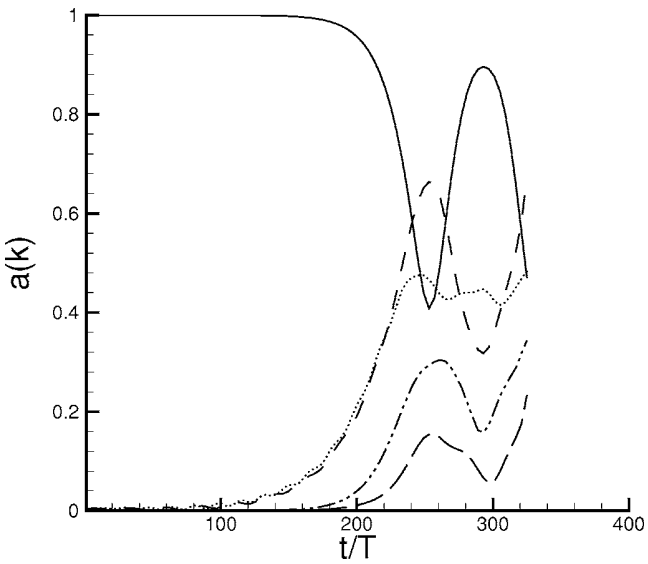


FIG. 2. Time histories of the amplitude of the fundamental, $k_0=5$ (solid line), subharmonic, $k_1=4$ (dashed line), and superharmonic, $k_2=6$ (dotted line), modes with wind action ($U=1.75c$). The two lowest curves (dashed-dotted lines) correspond to the modes $k_3=3$ and $k_4=7$.

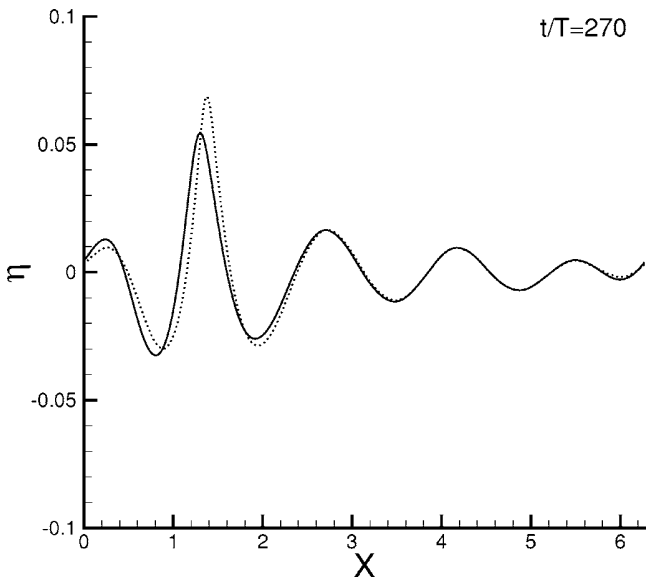


FIG. 4. Surface wave profile at $t=270T$: without wind (solid line) and with wind (dotted line).

Downloaded 24 Jan 2007 to 147.94.56.43. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

wave numbers. This local steepening is characterized by a numerical blowup. In order to avoid a too early breaking wave, the wind velocity is fixed at $U \approx 1.75c$. Owing to the weak effect of the wind on the phase velocity of the crests on which it acts, the phase velocity is computed without wind. The effect of the wind reduces significantly the demodulation cycle and thus sustains the rogue wave event. This feature is clearly shown in Fig. 3. The amplification factor A is the maximal wave height of the packet normalized by the initial wave height of the Stokes wave. It is stronger in the presence of wind and the rogue wave criterion $A > 2$ is satisfied during a longer period of time. Figure 4 displays the water wave profile at $t = 170$ T in the vicinity of the maximum of modulation with and without wind. The solid line corresponds to waves propagating without wind while the dotted line represents the wave profile under wind action. This figure shows that the wind does not significantly modify the phase velocity of the very steep waves while it increases their height.

To summarize the results, it appears that extreme wave events generated by modulational instability in the presence of wind behaves similarly to those due to dispersive spatio-temporal focusing discussed in Ref. 11 at least from a kinematic point of view. An amplification of the freak wave event and a significant increase of its lifetime are found. The behavior observed here is correlated with the change in the Fermi-Pasta-Ulam recurrence.

[1] K. B. Dysthe, "Modelling a 'rogue wave'—Speculations or a realistic possibility?" in *Rogues Waves 2000*, edited by M. Olagnon and G. A. Athanassoulis (Brest, France, 2001), pp. 255–264.
[2] C. Kharif and E. Pelinovsky, "Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon," Eur. J. Mech. B/Fluids **22**, 603 (2003).
[3] C. Kharif and E. Pelinovsky, *Freak Waves Phenomenon: Physical Mechanisms and Modelling*, edited by J. Grue and K. Trulsen (Springer-Verlag, Berlin, 2006), pp. 107–172.
[4] K. L. Henderson, D. H. Peregrine, and J. W. Dold, "Unsteady water wave modulations: Fully nonlinear solutions and comparison with the nonlinear Schrödinger equation," Wave Motion **29**, 341 (1999).
[5] J. B. Song and M. L. Banner, "On determining the onset and strength of breaking for deep water waves. Part 1: unforced irrotational wave groups," J. Phys. Oceanogr. **32**, 2541 (2002).
[6] A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, "Modulation instability of Stokes waves → freak wave," JETP Lett. **81**, 255 (2005).
[7] L. F. Bliven, "Experimental study of the influence of wind on Benjamin-Feir sideband instability," J. Fluid Mech. **162**, 237 (1986).
[8] K. Trulsen and K. B. Dysthe, "Action of wind stress and breaking on the evolution of a wave train," in *IUTAM Symposium on Breaking Waves 1991*, edited by M. L. Banner and R. H. J. Grimshaw (Springer-Verlag, Berlin, 1992), pp. 243–249.
[9] M. I. Banner and X. Tian, "On the determination of the onset of breaking for modulating surface gravity water waves," J. Fluid Mech. **367**, 107 (1998).
[10] M. I. Banner and J. Song, "On determining the onset and strength of breaking for deep water waves. Part II: Influence of wind forcing and surface shear," J. Phys. Oceanogr. **32**, 2559 (2002).
[11] J. Touboul, J. P. Giovanangeli, C. Kharif, and E. Pelinovsky, "Freak waves under the action of wind: Experiments and simulations," Eur. J. Mech. B/Fluids **25**, 662 (2006).
[12] D. G. Dommermuth and D. K. P. Yue, "A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves," J. Fluid Mech. **184**, 267 (1987).
[13] C. Skandrani, C. Kharif, and J. Poitevin, "Nonlinear evolution of water surface waves: The frequency downshifting phenomenon," Contemp. Math. **200**, 157 (1996).
[14] F. Dias and C. Kharif, "Nonlinear gravity and capillary-gravity waves," Annu. Rev. Fluid Mech. **31**, 301 (1999).
[15] C. Kharif and A. Ramamonjiarisoa, "Deep water gravity wave instabilities at large steepness," Phys. Fluids **31**, 1286 (1988).
[16] M. S. Longuet-Higgins, "Bifurcation in gravity waves," J. Fluid Mech. **151**, 457 (1985).
[17] J. W. McLean, Y. C. Ma, D. U. Martin, P. G. Saffman, and H. C. Yuen, "Three-dimensional instability of finite-amplitude water waves," Phys. Rev. Lett. **46**, 817 (1981).
[18] J. W. McLean, "Instabilities of finite-amplitude water waves," J. Fluid Mech. **114**, 315 (1982).
[19] H. Jeffreys, "On the formation of wave by wind," J. Proc. R. Soc. N. S. W. **107**, 189 (1925).
[20] M. I. Banner and W. K. Melville, "On the separation of air flow over water waves," J. Fluid Mech. **77**, 825 (1976).

Downloaded 24 Jan 2007 to 147.94.56.43. Redistribution subject to AIP license or copyright, see http://pof.aip.org/pof/copyright.jsp

8.2 Touboul J., On the influence of wind on extreme wave events, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, 7, p. 123–128, 2007

Dans le chapitre 7, nous avons pu constater que des vagues scélérates obtenues par focalisation dispersive étaient considérablement soutenues par l'action du vent. Dans la section 8.1, nous venons de voir que ce comportement était reproduit pour des vagues scélérates engendrées par instabilité modulationnelle. Toutefois, les deux processus physiques sont fondamentalement différents, dans la mesure où le premier cas correspond à la focalisation linéaire de composantes réalisée grâce au caractère dispersif des ondes de surface, tandis que le second correspond à l'interaction résonnante, fondamentalement non-linéaire, de quatres ondes voisines. Or nous savons, pour le premier cas, que le vent est responsable d'un maintien de la cohérence de groupe des composantes. Une étude détaillée des analyses temps-fréquence présentées chapitre 7, sections 7.1 et 7.3 montre effectivement que les composantes sont maintenues en phases cinématiquement par l'action du vent. Ce ne peut être le cas ici, étant donné la nature du processus, et nous nous interrogeons donc sur la nature du processus physique mis en œuvre ici. Pour cela, une série de simulations numériques est réalisée ici afin de tenter de mettre ce processus en évidence. Deux conditions initiales sont utilisées, chacune d'elles contenant différentes perturbations. Il apparaît alors clairement que le vent excite toujours la même perturbation, qu'elle soit initialement présente dans la simulation où non. L'action du vent consiste donc à exciter l'instabilité modulationnelle, mais pas nécessairement son mode le plus instable.

Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 7, 123–128, 2007
www.nat-hazards-earth-syst-sci.net/7/123/2007/
© Author(s) 2007. This work is licensed
under a Creative Commons License.

Natural Hazards and Earth System Sciences

On the influence of wind on extreme wave events

J. Touboul

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre, Marseille, France

Received: 19 October 2006 – Revised: 8 January 2007 – Accepted: 8 January 2007 – Published: 25 January 2007

Abstract. This work studies the impact of wind on extreme wave events, by means of numerical analysis. A High Order Spectral Method (HOSM) is used to generate freak, or rogue waves, on the basis of modulational instability. Wave fields considered here are chosen to be unstable to two kinds of perturbations. The evolution of components during the propagation of the wave fields is presented. Their evolution under the action of wind, modeled through Jeffreys' sheltering mechanism, is investigated and compared to the results without wind. It is found that wind sustains rogue waves. The perturbation most influenced by wind is not necessarily the most unstable.

1 Introduction

Extreme waves events, called rogue, or freak waves, are well known from the seafarers. Historically believed to belong to the domain of myth, more than to the domain of physics, they are now widely observed and witnessed. A large number of disasters have been reported by Mallory (1974) and Lawton (2001). This phenomenon has been observed in various conditions, and various places. It points out that a large number of physical mechanisms is involved in the generation of freak waves. A large review of the different mechanisms involved can be found in Kharif and Pelinovsky (2003). Up to now, there is no definitive consensus about their definition. The definition based on height is often used. A wave is considered to be rogue when its height exceeds twice the significant wave height of the wave field.

These waves often occur in storm areas, in presence of strong wind. In those areas, H_s is generally large, leading freak waves defined by $H \geq 2 \times H_s$ to be very devastating. This observation lead to wonder what can be the impact of wind on such waves. Recent work by Touboul et al. (2006) and Giovanangeli et al. (2006) pointed out experimentally and numerically that freak waves generated by means of dispersive focusing were sustained by wind. A focusing wave train was emitted, and propagated under the action of wind. It was found that the freak wave was shifted, and had a higher lifetime. Part of those results were observed numerically by modeling the wind action through Jeffreys' sheltering mechanism (Jeffreys, 1925).

Thus, one can wonder if these characteristics are generic for freak waves in general, or are specific to the case of dispersive focusing. Previous experimental work by Bliven et al. (1986), comforted by theoretical results by Trulsen and Dysthe (1991) observed that wind action was to delay, or even to suppress Benjamin-Feir instability. But more recent work by Banner and Tian (1998) concluded that this result could be different, with another approach for wind modeling. Very recent work by Touboul and Kharif (2006) showed that the Jeffreys' sheltering model was leading to an increase of the lifetime of the freak wave due to modulational instability, observing the results found in the case of dispersive focusing. However, the authors concluded that the underlying physics of both cases were different. As a matter of fact, it is interesting to investigate further the present phenomenon.

Following this purpose, the approach used here is designed to analyze the evolution of several perturbations under the action of wind. The numerical scheme introduced by Dommermuth and Yue (1987) and West et al. (1987) is presented first. Nonlinear equations of waves propagation are solved by means of a High Order Spectral Method (HOSM). It is based on the pseudo-spectral treatment of the equations, resulting in a quite good precision, given the high efficiency of the method. This approach allows to simulate long time evolution (several hundreds of peak period) of the wave field to model Benjamin-Feir instability with a good accuracy. The model is presented in Sect. 2. Wind modeling is also presented in this section, explaining how Jeffreys' sheltering mechanism can be introduced in the equations of wave propagation. In Sect. 3, the initial conditions used in the numerical experiences are detailed, and results are presented and discussed in Sect. 4.

Correspondence to: J. Touboul
(julien.touboul@irphe.univ-mrs.fr)

Published by Copernicus GmbH on behalf of the European Geosciences Union.

2 Modeling of the problem

2.1 Governing equations of the fluid

The fluid is assumed to be inviscid and the motion irrotational, so that the velocity **u** may be expressed as the gradient of a potential $\phi(x,z,t)$: $\mathbf{u}=\nabla\phi$. If the fluid is assumed to be incompressible, the governing equation in the fluid is the Laplace's equation $\Delta\phi=0$.

The waves are supposed to propagate in infinite depth, and the fluid should remain asymptotically unperturbed by waves motion. Thus, the bottom condition writes

$$\nabla\phi \to 0 \quad \text{when} \quad z \to -\infty. \tag{1}$$

The kinematic definition of the sea surface, which expresses the fact that a particle of the surface should remain on it, is expressed by

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \quad z = \eta(x,t). \tag{2}$$

Since surface tension effects are ignored, the dynamic boundary condition which corresponds to pressure continuity through the interface, can be written

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{(\nabla\phi)^2}{2} + g\eta + \frac{p_a}{\rho_w} = 0 \quad \text{on} \quad z = \eta(x,t). \tag{3}$$

where g is the gravitational acceleration, p_a the pressure at the sea surface and ρ_w the density of water. The atmospheric pressure at the sea surface can vary in space and time.

By introducing the potential velocity at the free surface $\phi^s(x,t)=\phi(x,\eta(x,t),t)$, Eqs. (2) and (3) writes

$$\frac{\partial\phi^s}{\partial t} = -\eta - \frac{(\nabla\phi^s)^2}{2} + \frac{1}{2}W^2[1+(\nabla\eta)^2] - p. \tag{4}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\nabla\phi^s\cdot\nabla\eta + W[1+(\nabla\eta)^2]. \tag{5}$$

where p is the nondimensional form of p_a, and where

$$W = \frac{\partial\phi}{\partial z}(x,\eta(x,t),t). \tag{6}$$

Equations (4) and (5) are given in dimensionless form. Reference length, reference velocity and reference pressure are, $1/k_0$, $\sqrt{g/k_0}$ and $\rho_w g/k_0$ respectively.

The numerical method used to solve the evolution equations is based on a pseudo-spectral treatment with an explicit fourth-order Runge-Kutta integrator with constant time step, similar to the method developed by Dommermuth and Yue (1987). More details, and test reports of the method can be found in Skandrani et al. (1996).

2.2 The Jeffreys' sheltering mechanism

Previous works on rogue waves have not considered the direct effect of wind on their dynamics. It was assumed that they occur independently of wind action, that is far away from storm areas where wind wave fields are formed. Herein the Jeffreys' theory (see Jeffreys, 1925) is invoked for the modelling of the pressure, p_a. Jeffreys suggested that the energy transfer was due to the form drag associated with the flow separation occurring on the leeward side of the crests. The air flow separation would cause a pressure asymmetry with respect to the wave crest resulting in a wave growth. This mechanism can be invoked only if the waves are sufficiently steep to produce air flow separation. Banner and Melville (1976) have shown that separation occurs over near breaking waves. For weak or moderate steepness of the waves this phenomenon cannot apply and the Jeffreys' sheltering mechanism becomes irrelevant.

Following Jeffreys (1925), the pressure at the interface $z=\eta(x,t)$ is related to the local wave slope according to the following expression

$$p_a = \rho_a s(U-c)^2\frac{\partial\eta}{\partial x}. \tag{7}$$

where the constant, s is termed the sheltering coefficient, U is the wind speed, c is the wave phase velocity and ρ_a is atmospheric density. The sheltering coefficient, $s=0.5$, has been calculated from experimental data. In a nondimensional form, Eq. (7) rewrites

$$p = \frac{\rho_a}{\rho_w}s(\frac{U}{c}-1)^2\frac{\partial\eta}{\partial x}. \tag{8}$$

In order to apply the relation (8) for only very steep waves we introduce a threshold value for the slope $(\partial\eta/\partial x)_c$. When the local slope of the waves becomes larger than this critical value, the pressure is given by Eq. (7) otherwise the pressure at the interface is taken equal to a constant which is chosen equal to zero without loss of generality. This means that wind forcing is applied locally in time and space.

In the following simulations, parameter $(\partial\eta/\partial x)_c$ has been taken equal to 0.32. This parameter is chosen arbitrarily, noticing that this slope corresponds to an angle close to 30°, which the angle of the limiting Stokes wave in infinite depth. The parameter $\frac{U}{c}$ has been taken equal to 1.6, which would correspond to a wind speed $U=25$ m/s for waves of period $T=10$ s.

3 Initialization of the method

Stokes waves are well known to be unstable to the Benjamin-Feir instability, or modulational instability. It is the consequence of the resonant interaction of four components presents in the wave field. This instability corresponds to a quartet interaction between the fundamental component k_0 counted twice and two satellites $k_1=k_0(1+p)$ and

$k_2 = k_0(1-p)$ where p is the wavenumber of the modulation. Instability occurs when the following resonance conditions are fulfilled.

$$k_1 + k_2 = 2k_0 \quad \text{and} \quad \omega_1 + \omega_2 = 2\omega_0. \tag{9}$$

where ω_i with $i=0, 1, 2$ are frequencies of the carrier and satelites. A presentation of the different classes of instability of Stokes waves is given in the review paper by Dias and Kharif (1999).

The procedure used to calculate the linear stability of Stokes waves is similar to the method described by Kharif and Ramamonjiarisoa (1988). Let $\eta = \bar{\eta} + \eta'$ and $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ be the perturbed elevation and perturbed velocity potential. $(\bar{\eta}, \bar{\phi})$ and (η', ϕ') correspond respectively to the unperturbed Stokes wave and to the infinitesimal perturbative motion $(\eta' \ll \bar{\eta}, \phi' \ll \bar{\phi})$. Following Longuet-Higgins (1985), the Stokes wave of amplitude a_0 and wavenumber k_0 is computed iteratively, providing a very high order solution of $(\bar{\eta}, \bar{\phi})$. This decomposition is introduced in the boundary conditions (4) and (5) linearized about the unperturbed motion, and the following form is used:

$$\eta' = \exp(\lambda t + ipx) \sum_{-\infty}^{\infty} a_j \exp(ijx). \tag{10}$$

$$\phi' = \exp(\lambda t + ipx) \sum_{-\infty}^{\infty} b_j \exp(ijx + \gamma_j z)). \tag{11}$$

where λ, a_j and b_j are complex numbers and where $\gamma_j = |p+j|$. An eigenvector problem for λ with eigenvector $\mathbf{u} = (\mathbf{a_j}, \mathbf{b_j})^{\mathbf{t}}$:$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{0}$ is obtained, where $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ are complex matrices depending on the unperturbed wave steepness of the basic wave. The physical disturbances are obtained from the real part of the complex expressions η' and ϕ' at $t=0$.

McLean et al. (1981) and McLean (1982) showed that the dominant instability of a uniformly-traveling train of Stokes' waves in deep water is the two-dimensional modulational instability, or class I instability, as soon as its steepness is less than $\epsilon = 0.30$.

In the following simulations, two initial conditions are used. Those conditions are designed to lead to modulational instability. The first one, named initial condition (1), is a Stokes wave of steepness $\epsilon = 0.11$, disturbed by its most unstable perturbation which corresponds to $p \approx 2/9 \approx 0.22$. The fundamental wave number of the Stokes wave is $k_0 = 9$ and the dominant sidebands are $k_1 = 7$ and $k_2 = 11$ for the subharmonic and the superharmonic part of the perturbation respectively.

The initial condition (2), is also a Stokes wave of same steepness, disturbed by its most unstable perturbation $p \approx 2/9 \approx 0.22$. But the linear stability analysis demonstrates that the stokes of $\epsilon = 0.11$ is also unstable to the perturbation $q \approx 1/9 \approx 0.11$, which is added to the previous initial condition. Thus, the fundamental wave number of the Stokes wave is still $k_0 = 9$ and the sidebands $k_3 = 8$ and $k_4 = 10$ for subharmonic and superharmonic part of the modulation q are also present, and have the same amplitude than sidebands $k_1 = 7$ and $k_2 = 11$ corresponding to the modulation p.

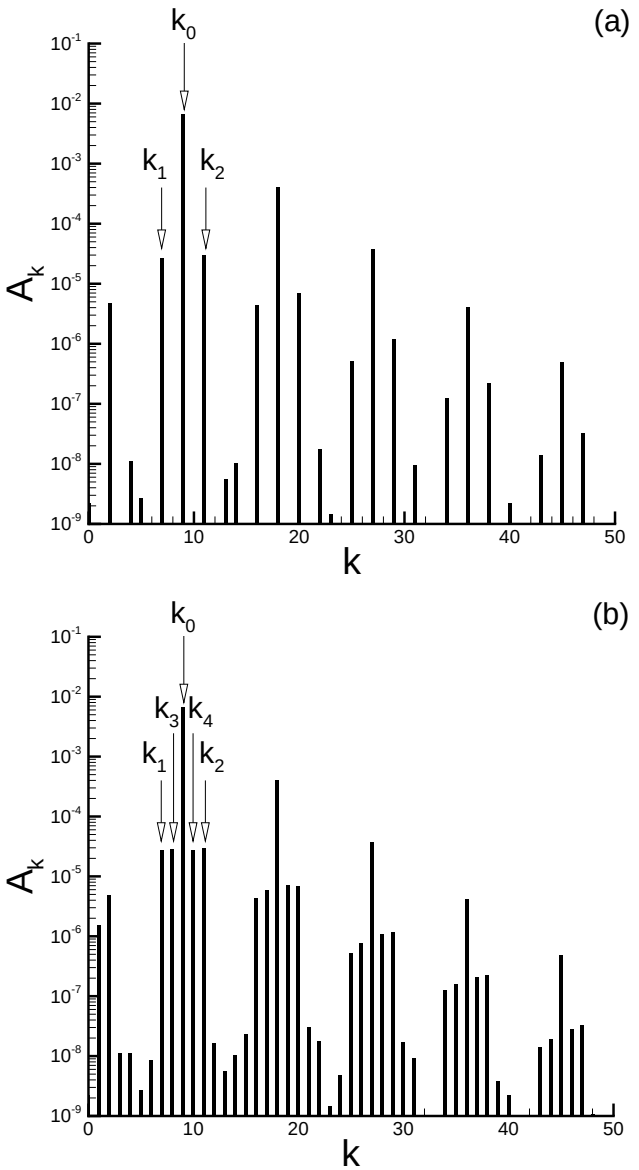


Fig. 1. Spectra of the two initial conditions used in the simulations. **(a)**: initial condition (1), with perturbation p alone; **(b)**: initial condition (2), with both perturbations p and q. Spectra are presented up to $k=50$ for sake of clarity.

Higher harmonics are present in the interaction but they are not presented here, for sake of clarity. Figure 1 present the spectra of these initial conditions, up to fourth harmonic. From this figure, it also appears that wavenumbers $k=1$ and $k=2$ are present. They respectively correspond to the wavenumbers of the perturbations p and q.

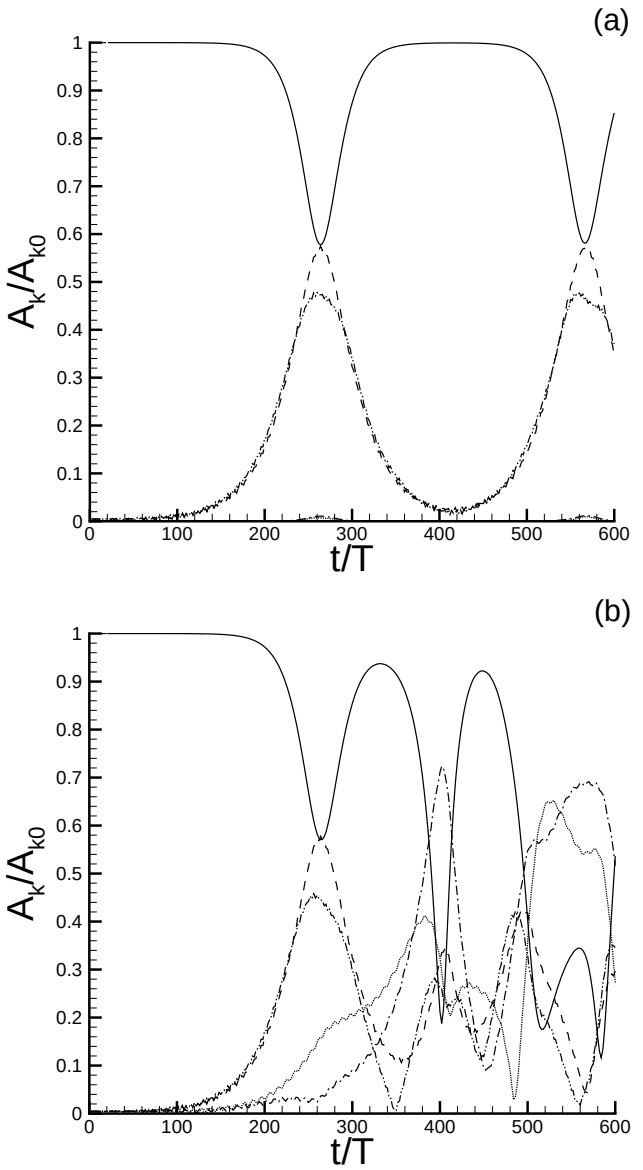


Fig. 2. Time evolution of the components of the fundamental mode k_0=9 (solid line), of subharmonic modes k_1=7 (dashed line) and k_3=8 (dotted line), and of superharmonic modes k_4=10 (dash-dotted line) and k_2=11 (dash-dot-doted line) propagated without wind. **(a)**: From initial condition (1). **(b)**: From initial condition (2).

In all simulations, the order of nonlinearity is taken such that M=8. The number of mesh points satisfies the condition $N>(M+1)k_{\max}$ where $k_{\max}$ is the highest wavenumber taken into account in the simulation. Here, it has been taken equal to $k_{\max}$=70, and $N=k_0\times100$=900, so that 7 harmonics of the fundamental wavenumber are described. The latter criterion concerning N is introduced to avoid aliasing errors. More details can be found in Tanaka (2001). To compute the long time evolution of the wave packet the time step Δt is chosen equal to $T/100$ where T is the fundamental period

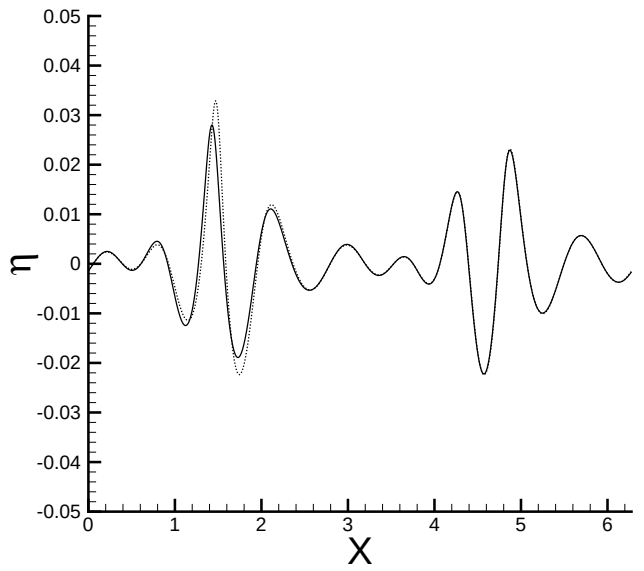


Fig. 3. Free surface elevation obtained at time t/T=280, from initial condition (2), without wind (solid line), and under wind action (dotted line).

of the basic wave. This temporal discretization satisfies the Courant-Friedricks-Lewy (CFL) condition of stability of finite difference scheme. Thus, a special concern regarding the accuracy of the method has been observed, since HOSM methods are known for the decay of accuracy for the steepest waves of concern here.

4 Results

4.1 Propagation without wind

Results obtained for both initial conditions propagated without wind are presented here. Figure 2 describes the normalized time evolution of the fundamental wavenumber k_0 of the wave field, and sidebands of the two perturbations k_1, k_2, k_3 and k_4.

On Fig. 2a, one can see the Fermi-Pasta-Ulam recurrence obtained from initial condition (1). The perturbation p, which is alone in this initial condition, passes through a maximum of modulation, during which components k_1 and k_2 are predominant. Then it demodulates, and the fundamental k_0 gets its initial amplitude back. Afterward begins a new cycle. It is interesting to notice that the components involved in the process are k_0, k_1 and k_2. The amplitude of components k_3 and k_4 remains almost constant through the modulation-demodulation cycle.

On Fig. 2b, it appears that no cycle is observed. This is understood since two perturbations are present in initial condition (2). As a matter of fact, two cycles are superimposed, and there is a nonlinear interaction of the components of each perturbation. It results in the destruction of the recurrence of

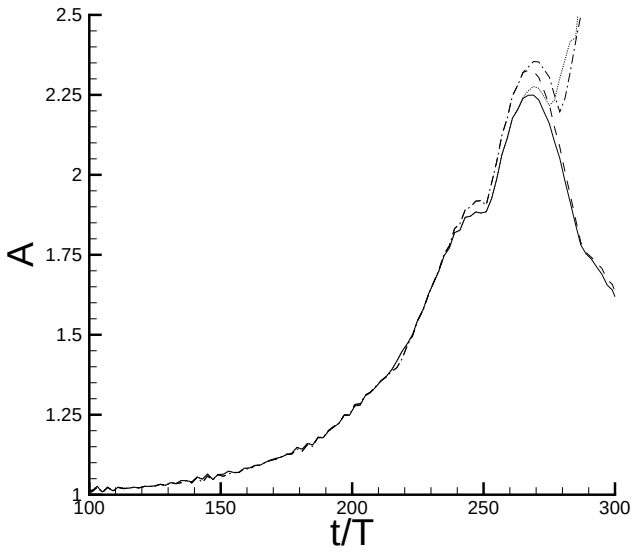


Fig. 4. Time evolution of the amplification factor A, obtained from: initial condition (1) without wind (solid line), initial condition (2) without wind (dashed line), initial condition (1) under wind action (dotted line), and initial condition (2) under wind action (dash-dotted line).

each cycle, and a more chaotic behavior. During some modulation, components k_1 and k_2 are predominant, while during some others, components k_3 and k_4 are.

4.2 Propagation with wind

Initial conditions are now propagated under wind action. Figure 3 displays free surface elevations obtained from initial condition (2), propagated with and without wind for nondimensional time t/T=280. This time corresponds barely to the maximum of modulation. It is interesting to notice that the height H of the wave propagated under wind action is larger than the height of the freak wave obtained without wind. But phase of the two waves remain very close. Phase velocity is almost not affected by the presence of wind.

From the height H of the waves, one can define an amplification factor $A=\frac{H}{H_0}$, H_0 being the wave height of the initial condition. Figure 4 displays the time evolution of this amplification factor for initial conditions (1) and (2), propagated with, and without wind. It is clear that in both cases, the presence of wind leads to an amplification of the freak wave. Furthermore, the time during which the wave group fulfills the freak wave criterion ($\frac{H}{H_0}>2$) is increased. This is understood as an increase of the freak wave's lifetime.

Simulations of the evolution of both initial conditions propagated under wind action stop around t/T=295. Numerical blow up appearing is understood as wave breaking, due to the large input of energy under wind action.

Figure 5 presents the evolution of components k_0, k_1, k_2, k_3 and k_4 propagated under wind action, in the same way

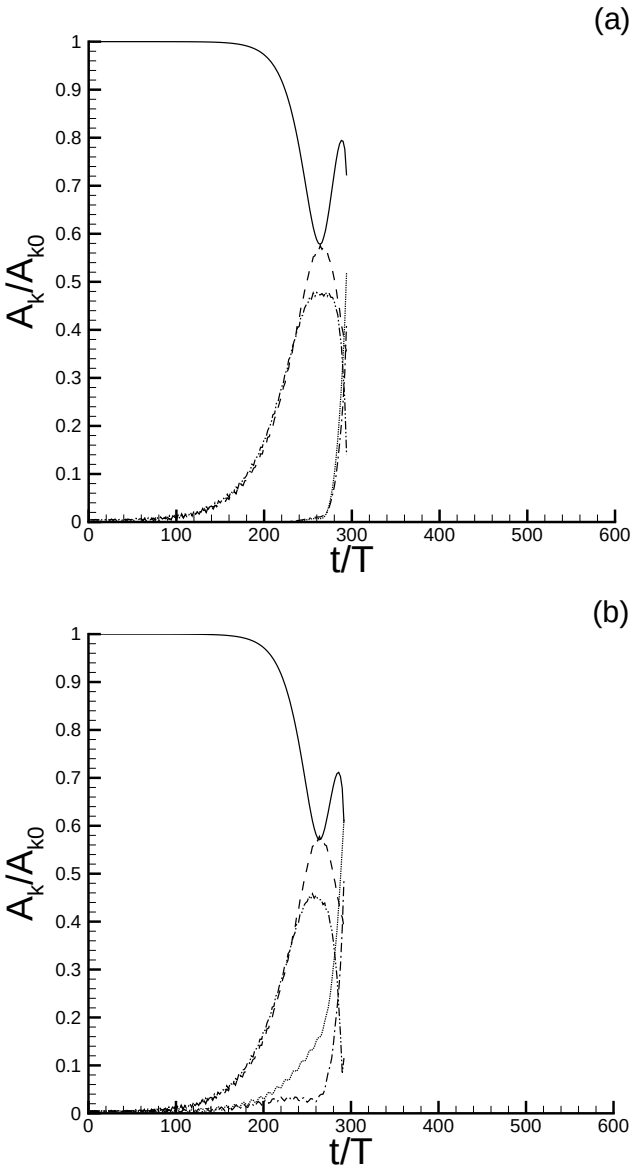


Fig. 5. Time evolution of the components of the fundamental mode k_0=9 (solid line), of subharmonic modes k_1=7 (dashed line) and k_3=8 (dotted line), and of superharmonic modes k_4=10 (dash-dotted line) and k_2=11 (dash-dot-doted line) propagated under wind action. **(a)**: From initial condition (1). **(b)**: From initial condition (2).

it was done on Fig. 2 without wind. Curves last up to t/T=295, after numerical blow up. Results obtained from initial conditions (1) and (2) are very similar. One can notice that in both cases, components k_1 and k_2 are not affected by the introduction of wind. Differences appear on the behavior of components k_3 and k_4. If components related to perturbation p seem to follow the evolution they had without wind, components related to perturbation q show a rapid divergence from their behavior without wind. By comparing Fig. 2b and Fig. 5b, it appears that amplitude of the

components k_3 and k_4 grow earlier in presence of wind. In presence of wind, these components are dominant around t/T=290, while without wind, they are not dominant before t/T=400. Between Figs. 2a and 5a, the difference is also very important. The normalized amplitude of components k_3 and k_4, related to perturbation q, never exceeds 0.01 when propagated without wind. But while propagated under wind action, these components become dominant after t/T=290. As a matter of fact, the modulation q, which is not the most unstable, turns out to be more sensitive to wind forcing. This observation could be explained while noticing that a phase opposition exists between the two freak waves present around the time of maximum modulation. Therefore, the forcing criterion is not overcome simultaneously, but alternatively by these waves. This could result in the forcing of the perturbation q, which presents one wavelength in the computational domain, instead of perturbation p, which presents two.

5 Conclusions

The effect of wind on freak waves generated by means of modulational instability has been investigated numerically. Two initial conditions have been considered. In the first one, only the most linearly unstable perturbation has been considered, while in the other one, the two perturbations linearly unstable were imposed. Those initial conditions have been propagated with, and without wind.

It appeared that without wind, the Fermi-Pasta-Ulam recurrence disappear when both modulations are present. This recurrence is broken by the presence of a second perturbation, of different growth rate. As a matter of fact, two cycle of different length are superimposed, and nonlinear interactions quickly destruct recurrence.

Under wind forcing, the lifetime of the freak wave is increased, in both cases. An amplification of the peak is also found, confirming previous results by Touboul and Kharif (2006). But in both cases, the influence of wind seems to help developing the perturbation which is not the most unstable. In both simulations, wind forcing lead to numerical blow up, which is understood as wave breaking.

As a result, it appears that wind blowing over rogue waves lead them to breaking. Those waves, naturally dangerous, become very more devastating while breaking. The impact of huge breaking waves on ships or off-shore structures is responsible of a large amount of energy destroying those structures. This phenomenon appears to be supported by wind action on rogue waves.

To improve and validate this approach, a stronger investigation of the pressure distribution in separating flows over waves is required. A two phase flow code is being developed for this study. A numerical simulation of the problem will provide a lot of information on the pressure distribution at the interface, and on the controling parameters.

Acknowledgements. The author would like to thank C. Kharif for very interesting and helpful conversations.

Edited by: E. Pelinovsky
Reviewed by: two referees

References

Banner, M. I. and Melville, W. K.: On the separation of air flow over water waves, J. Fluid Mech., 77, 825–842, 1976.

Banner, M. I. and Tian, X.: On the separation of air flow over water waves, J. Fluid Mech., 367, 107–137, 1998.

Bliven, L. F., Huang, N. E., and Long, S. R.: Experimental study of the influence of wind on BenjaminFeir sideband, J. Fluid Mech., 162, 237–260, 1986.

Dias, F. and Kharif, C.: Nonlinear gravity and capillary-gravity waves, Annu. Rev. Fluid Mech., 31, 301–346, 1999.

Dommermuth, D. and Yue, D.: A high order spectral method for the study of nonlinear water waves, J. Fluid Mech., 184, 267–288, 1987.

Giovanangeli, J. P., Touboul, J., and Kharif, C.: On the role of the Jeffreys' sheltering mechanism in sustaining extreme water waves, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. IIB, 8-9, 568–573, 2006.

Jeffreys, H.: On the formation of wave by wind, Proc. Roy. Soc. A, 107, 189–206, 1925.

Kharif, C. and Pelinovsky, E.: Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon, Eur. J. Mech B/Fluids, 22, 603–634, 2003.

Kharif, C. and Ramamonjiarisoa, A.: Deep water gravity wave instabilities at large steepness, Phys. Fluids, 31, 1286–1288, 1988.

Lawton, G.: Monsters of the deep (the perfect wave), New Scientist, 170(2297), 28–32, 2001.

Longuet-Higgins, M. S.: Bifurcation in gravity waves, J. Fluid Mech., 151, 457–475, 1985.

Mallory, J. K.: Abnormal waves on the South-East Africa, Int. Hydrog. Rev., 51, 89–129, 1974.

McLean, J. W.: Instabilities of finite-amplitude water waves, J. Fluid Mech., 114, 315–330, 1982.

McLean, J. W., Ma, Y. C., Martin, D. U., Saffman, P. G., and Yuen, H. C.: Three-dimensional instability of finite-amplitude water waves, Phys. Rev. Lett., 46, 817–820, 1981.

Skandrani, C., Kharif, C., and Poitevin, J.: Nonlinear evolution of water surface waves: The frequency downshifting phenomenon, Contemp. Math., 200, 157–171, 1996.

Tanaka, M.: A method for studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation, Fluid Dyn. Res., 28, 41–60, 2001.

Touboul, J. and Kharif, C.: On the interaction of wind and extreme gravity waves due to modulational instability, Phys. Fluids, 18, 108103, 2006.

Touboul, J., Giovanangeli, J. P., Kharif, C., and Pelinovsky, E.: Freak waves under the action of wind: experiments and simulations, Eur. J. Mech. B/Fluids, 25, 662–676, 2006.

Trulsen, K. and Dysthe, K. B.: Action of wind stress and breaking on the evolution of a wave train, in: IUTAM Symposium on Breaking Waves, edited by: Grimshaw, B., pp. 243–249, Springer-Verlag, 1991.

West, B., Brueckner, K., Janda, R., Milder, M., and Milton, R.: A new numerical method for surface hydrodynamics, J. Geophys. Res., 92(C11), 11 803–11 824, 1987.

Chapitre 9

Approche diphasique

Dans les chapitres précédents, nous avons mis en évidence qu'une approche modèle de type Jeffreys représentait correctement l'interaction entre le vent et les vagues scélérates. Dans ce chapitre, nous mettons en œuvre une technique dont le but est la simulation de l'écoulement diphasique complet. En effet, en tenant compte de l'écoulement visqueux rotationnel, on pourra simuler le problème de l'interaction vent vagues.

9.1 Touboul J., Abid M., Kharif C., Simulation numérique d'ondes interfaciales en milieu océanique, *Proceedings du* 18ème *Congrès Français de Mécanique,* Grenoble, 2007

Nous avons évoqué, dans les chapitres précédents, la possibilité de modéliser un décollement aérien au dessus d'un champ de vagues au moyen d'un modèle de Jeffreys modifié. Cependant, ce modèle présentait un défaut important, puisqu'il laissait libre deux paramètres ajustables, à savoir le coefficient d'abri introduit par Jeffreys (1925), et le seuil d'activation de ce mécanisme. Par conséquent, une étude beaucoup plus poussée de cet écoulement apporterait une aide précieuse. C'est dans ce but que nous introduisons une méthode diphasique dont le but est de simuler notre problème d'une manière beaucoup plus réaliste. En résolvant les equations de Navier-Stokes dans les deux fluides, on peut en effet représenter des écoulements rotationnels, et par conséquent, le tourbillon associé au décollement aérien au dessus des vagues. Une étude paramétrique permettra ainsi de connaître les valeurs de la vitesse du vent et de la pente locale des vagues aboutissant à la formation d'un tourbillon au dessus des crêtes.

Toutefois, ceci présente une difficulté majeure. En effet, les méthodes diphasiques permettant de simuler ce type de problème à interface sont assez lourdes à mettre en œuvre, puisqu'elles présentent des temps de calcul très élevés. Des études récentes ont permis d'introduire des algorithmes de résolution plus efficaces, mais le comportement de ces algorithmes se dégrade en fonction du rapport de densité des deux fluides considérés. Nous nous attachons donc ici à étudier la convergence de cette méthode en fonction de ce paramètres. Ce travail constitue donc une étude préliminaire afin de conclure sur la formation de tourbillons au dessus des vagues.

Simulation numérique d'ondes interfaciales en milieu océanique

Julien Touboul, Malek Abid & Christian Kharif

IRPHE
49 rue F. Joliot Curie,
Technopôle de Château-Gombert, B.P. 146,
Marseille cedex 13.
Julien.Touboul@irphe.univ-mrs.fr

Résumé :

Cette étude concerne la simulation numérique directe d'ondes interfaciales séparant deux fluides incompressibles. Le modèle utilisé repose sur l'équation de Navier-Stokes et un suivi d'interface de type Volume Of Fluid (VOF). La résolution de cette équation nécessite d'inverser une équation de type Poisson, et pour cela, on a recours à une méthode multigrille. L'une des principales limitations de cette méthode est le rapport des masses volumiques des deux fluides. Nous nous proposons donc d'étudier l'influence de ce paramètre sur le comportement de l'algorithme. Le problème d'une onde interfaciale stationnaire est alors considéré pour différentes valeurs du rapport des masses volumiques.

Abstract :

This study deals with the direct numerical simulation of interfacial waves between two incompressible fluids. The model used is based on the Navier-Stokes equation with a Volume of Fluid (VOF) method for tracking the interface's motion. The solution of this equation needs to solve a Poisson like equation with a multigrid algorithm. One of the main limitations of this method is the ratio of density of both fluids. We study herein the influence of this parameter on the behavior of the algorithm. To achieve that goal, the problem of a standing interfacial wave is considered for several values of the density ratio.

Mots-clefs :

Ondes interfaciales, algorithme multigrille, rapport de masses volumiques

1 Introduction

La connaissance des ondes interfaciales en milieu océanique constitue un enjeu majeur scientifique, notamment en ingénierie côtière. Il s'agit d'un domaine vaste s'étendant des ondes internes aux ondes de surface et leur interaction avec le vent. Parmi ces phénomènes, les vagues scélérates font référence à des vagues géantes qui apparaissent soudain à la surface de la mer. Les témoignages rapportés par Mallory (1974), Lawton (2001) et d'autres, permettent de prendre en compte la mesure de l'enjeu que ces vagues représentent. Des travaux récents ont montré que le vent pouvait jouer un rôle majeur dans la dynamique de telles vagues. En effet, Touboul *et al.* (2006) et Touboul & Kharif (2006) ont illustré l'importance de ce couplage dans le phénomène.

Cependant, la simulation numérique directe de tels phénomènes présente de nombreuses difficultés de part la diversité des échelles à modéliser. Pour cette raison, de nombreuses méthodes d'inversion de l'équation de type Poisson ont été développées au cours des dernières années (Press *et al.* (1999)). Notamment, parmi elles, l'algorithme multigrille s'est révélé l'un des meilleurs compromis en terme de vitesse de convergence pour des problèmes multi échelles. L'une des limitations principales de ces méthodes est le rapport de masse volumique des deux

fluides. L'évolution de la convergence de ces méthodes en fonction de ce paramètre paraît donc être un enjeu essentiel de la modélisation du processus physique qui nous intéresse ici.

Le travail proposé s'inscrit donc dans cette démarche. En effet, dans un premier temps, la méthode utilisée est brièvement décrite, puis son comportement global est étudié dans une seconde partie. Pour cela, nous avons recours à des ondes interfaciales stationnaires dans une configuration de stratification stable, qui sont des ondes présentant un grand cisaillement à l'interface, et qui, par conséquent, sont un cas limitant du problème qui nous intéresse.

2 Méthode numérique

2.1 Formulation mathématique

La méthode présentée dans cette partie s'attache à résoudre les équations du mouvement de deux fluides visqueux, incompressibles, non miscibles, séparés par une interface. Ce problème est un problème particulièrement difficile, dans la mesure où la position de l'interface est l'une des inconnues du problème. Le mouvement des fluides est régi par l'équation de Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right)=-\nabla p+\nabla.\left(2\mu\mathbf{D}\right)+\rho\mathbf{g} \tag{1}$$

et la condition d'incompressibilité

$$\nabla.\mathbf{u}=\mathbf{0} \tag{2}$$

dans lesquelles ρ et μ désignent la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide, et $\mathbf{g}$ la force de pesanteur. D'autre part, $\mathbf{u}$ et p désignent respectivement le vecteur vitesse et le champ de pression, tandis que $\mathbf{D}$ est le tenseur des taux de déformation.

Les équations (1) et (2) sont valables dans tout le domaine Ω composé des deux fluides. ρ et μ sont alors des fonctions d'espace, dépendant de l'appartenance à l'un ou l'autre des fluides. En introduisant la fonction χ, qui prend pour valeur 0 dans l'un des deux fluides, et 1 dans l'autre, on a

$$\begin{aligned}\rho&=\chi\rho_1+(1-\chi)\rho_2\\ \mu&=\chi\mu_1+(1-\chi)\mu_2\end{aligned} \tag{3}$$

ou ρ_1 et ρ_2 désignent les masses volumiques de chacuns des fluides, et μ_1 et μ_2 leurs viscosités. La fonction χ est alors transportée comme un scalaire passif par l'écoulement, et χ est donc solution de l'équation

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\mathbf{u}.\nabla\chi=\mathbf{0}. \tag{4}$$

la résolution de l'équation (4) permet donc de simuler l'évolution de la fonction χ dans tout le domaine de calcul Ω.

2.2 Méthode de projection

Pour résoudre ce problème, l'on a recours à une méthode de projection. On introduit un champ de vitesses intermédiaire $\mathbf{u}^*$, tel que

$$\rho\frac{\partial\mathbf{u}^*}{\partial t}=-\rho\mathbf{u}^{(\mathbf{n})}.\nabla\mathbf{u}^{(\mathbf{n})}+\nabla.\left(\mathbf{2}\mu\mathbf{D}^{(\mathbf{n})}\right)+\rho\mathbf{g} \tag{5}$$

ou $\mathbf{u^{(n)}}$ désigne le champ de vitesse au pas de temps $(\mathbf{n})$. Ainsi, le champ de vitesses $\mathbf{u^{(n+1)}}$ au pas de temps $(\mathbf{n+1})$ défini par

$$\mathbf{u^{n+1}} = \mathbf{u}^* - \frac{\delta \mathbf{t}}{\rho} \nabla \mathbf{p} \tag{6}$$

sera de divergence nulle dès que le champ de pression p sera solution du problème de type Poisson

$$\begin{cases} \nabla \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \frac{1}{\delta t} \nabla \mathbf{u}^* & \text{dans } \Omega \\ \nabla p.\mathbf{n} = -\frac{\rho}{\delta \mathbf{t}} \left(\mathbf{u^{n+1}} - \mathbf{u}^* \right).\mathbf{n} = \rho \mathbf{g}.\mathbf{n} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{7}$$

Dans les équations ci dessus, δt est le pas de temps, Ω le domaine de calcul, $\partial\Omega$ sa frontière, et $\mathbf{n}$ la normale à cette frontière.

Le problème constitué des équations (1) et (2) se ramène donc à la résolution du système (7). Ce système est inversé au moyen d'une méthode multigrille similaire à celle présentée par Gueyffier (2000). Cette méthode est choisie pour les avantages numériques qu'elle présente, notamment en terme de temps de calcul. Cependant, une étude minutieuse de l'évolution des taux de convergence en fonction du rapport des masses volumiques ρ_1/ρ_2 de telles méthodes n'est pas disponible et s'avère indispensable (voir section 3).

2.3 Calcul d'interface affine par morceaux

Il s'agit ici de résoudre l'équation (4). En effet, une fois le champ de vitesse connu, la fonction χ peut être transportée par l'écoulement. On choisit pour cela une méthode de type "Piecewise Linear Interface Calculation" (PLIC), proposée par Li (1995). Le principe de cette méthode est de reconstruire l'interface comme une fonction affine par morceaux sur le maillage du calcul. La fonction χ, une fois discrétisée, est notée C. Elle peut être interprétée comme la fraction volumique de l'un des fluides dans la cellule considérée. On peut ainsi définir la normale à l'interface $\mathbf{n} = \nabla C = (n_x, n_y)^t$ dans chaque cellule. Ainsi, l'interface à pour équation

$$n_x x + n_y y = \alpha. \tag{8}$$

α est un paramètre à déterminer. Pour cela, on dispose de la fraction volumique C. En effet, l'aire comprise sous l'interface reconstruite doit correspondre à la fraction volumique. On peut ainsi déterminer α.

Une fois l'équation de l'interface connue, on peut procéder à une seconde étape pendant laquelle on advecte cette interface grâce à une méthode lagrangienne. En interpolant linéairement le champ de vitesses dans la cellule, l'interface advectée est une droite d'équation

$$n'_x x + n'_y y = \alpha' \tag{9}$$

avec

$$\begin{aligned} n'_x &= n_x / \left(1 - u_1 \delta t/dx + u_2 \delta t/dx\right) \\ n'_y &= n_y / \left(1 - v_1 \delta t/dy + v_2 \delta t/dy\right) \\ \alpha' &= \alpha + n'_x u_1 \delta t/dx + v_1 \delta t/dy \end{aligned} \tag{10}$$

u_1 et u_2 désignent respectivement les composantes horizontales de la vitesse à gauche et à droite de la cellule, tandis que v_1 et v_2 sont les composantes verticales en bas et en haut de la cellule. La méthode PLIC est stable et satisfait la contrainte physique $0 \leq C \leq 1$ dès que la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) $||\mathbf{u}||_\infty \, \delta t/min(dx, dy) \leq 1/2$ est vérifiée.

3 Vérification de la méthode

3.1 Tests préliminaires

Un code basé sur la méthode développée par Lafaurie *et al.* (1994) a été développé pour cette étude. Nous nous attachons dans un premier temps à vérifier le bon fonctionnement des algorithmes mis en œuvre. Tout d'abord, la méthode PLIC décrite dans la section précédente est utilisée dans différents champs de vitesses, notamment en translation et en rotation. La Figure 1 (à gauche) présente l'évolution d'un disque transporté par un champ de rotation $\mathbf{u} = (\mathbf{5} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{5})^{\mathbf{t}}$. Le maillage est de 256×256. On constate que ce disque est très bien conservé. Notamment, il apparaît que la masse est conservée à environs 0.1% près au cours de toutes les simulations présentées ici. On peut considérer que l'algorithme PLIC fonctionne de manière très satisfaisante.

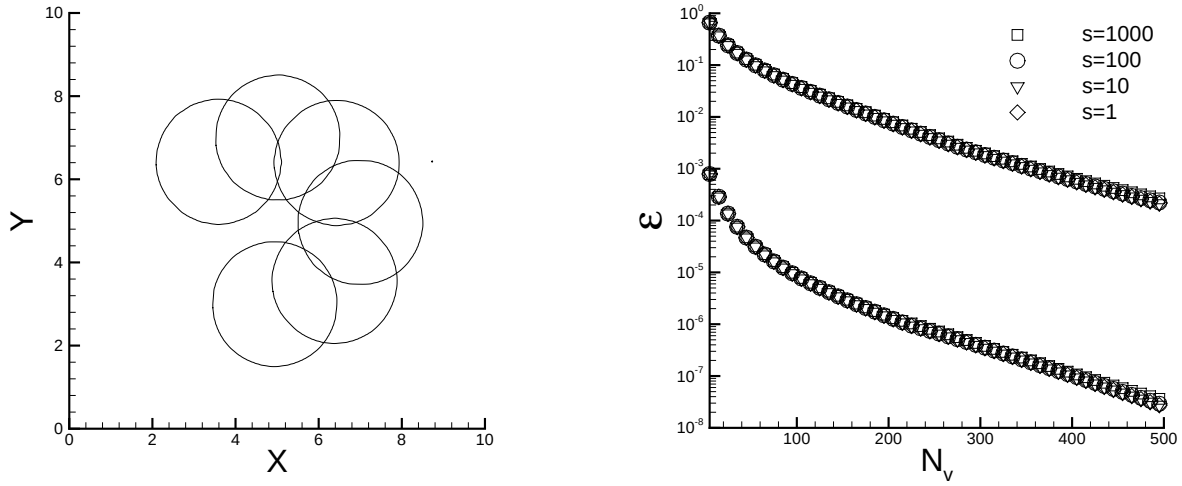


FIG. 1 – *A gauche* : évolution d'un disque advecté par la méthode PLIC dans un champ de rotation $\mathbf{u} = (\mathbf{5} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{5})^{\mathbf{t}}$. *A droite* : convergence de l'algorithme multigrille vers une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en fonction du nombre de V–cycles effectués. La courbe du haut est la norme infinie de l'erreur, celle du bas est la norme infinie du résidu.

Nous étudions également le taux de convergence de la méthode multigrille, destinée à résoudre l'équation de type Poisson, vers la fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$p_{exacte}(x, y) = e^{-(x-5)^2} \times e^{-(y-5)^2} \tag{11}$$

La Figure 1 (à droite) présente l'évolution de la norme infinie de l'erreur $||p - p_{exacte}||_\infty$ (courbe du haut), ainsi que la norme infinie du résidu de la méthode multigrille (courbe du bas), en fonction du nombre de V-cycles réalisés par l'algorithme multigrille. Ces courbes sont représentées pour différentes valeurs du paramètre $s = \rho_1/\rho_2$. Il est intéressant de constater que le taux de convergence de cet algorithme n'est absolument pas affecté par ce paramètre dès qu'il converge vers une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il est également intéressant de constater qu'une erreur de l'ordre de 10^{-6} en terme de résidus correspond tout de même à une erreur absolue de l'ordre de 10^{-2}. Nous retenons donc cette erreur en terme de résidus comme erreur maximale à obtenir lors de la procédure multigrille.

3.2 Simulation d'ondes interfaciales stationnaires

Bien que les résultats de la section précédente soient satisfaisants, il est nécessaire de poursuivre plus avant les tests de convergence de cette méthode, dans la mesure où les problèmes qui seront abordés par la suite n'admettent pas de solutions de classe $\mathcal{C}^\infty$. En effet, l'interface entre les deux fluides introduit une discontinuité du gradient de pression, qui résulte en une chute de la convergence de la méthode.

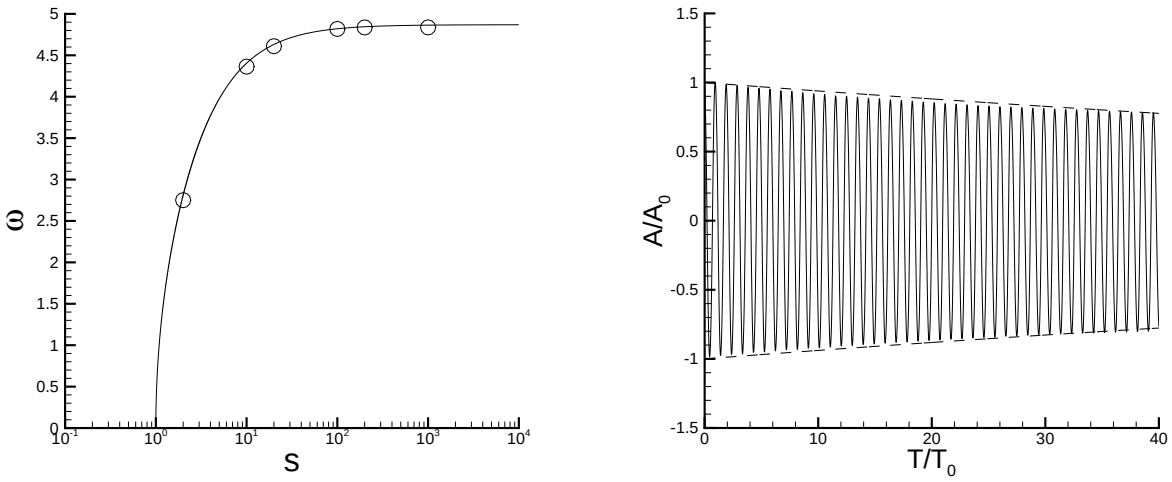


FIG. 2 – *A gauche* : évolution de la relation de dispersion en fonction du paramètre s. (–) évolution théorique. (o) résultat obtenu grâce à la méthode numérique. *A droite* : évolution de la surface libre en fonction du temps pour $s = 20$. L'enveloppe correspond à la décroissance théorique due à la viscosité.

Nous choisissons donc d'étudier l'évolution d'une onde interfaciale stationnaire grâce à cette méthode. La Figure 2 (à gauche) représente la pulsation en fonction du paramètre s. La courbe en trait plein est l'évolution théorique prédite par Lamb (1932) et Plesset & Whipple (1974), à savoir, en profondeur infinie,

$$\omega^2 = \frac{s-1}{s+1} gk. \tag{12}$$

On constate que la méthode a convergé vers le résultat dans tous les cas correspondant à $1 \leq s \leq 10^3$. Toutefois, il est important de signaler que le nombre de V-cycles nécessaire à la convergence n'est absolument pas équivalent dans chacun de ces cas. Les temps de calcul ont pu varier d'un facteur 4 pour ces différentes simulations.

La figure 2 (à droite) montre l'évolution temporelle de la surface libre en $x = 0$ pour $s = 20$. L'enveloppe en pointillés représente l'atténuation théorique

$$\frac{A(t)}{A_0} = e^{-\nu k^2 t} \tag{13}$$

liée à la présence de viscosité ($\nu = \mu_1/\rho_1 = \mu_2/\rho_2$ représente ici la viscosité cinématique des deux fluides). Il est intéressant de noter, une fois encore, le bon comportement de la méthode. Cependant, la viscosité utilisée est importante ($\nu = 10^{-3} m^2/s$), ce qui a pour effet de stabiliser le schéma. La convergence, d'une manière générale, a tendance à se dégrader lorsque la viscosité chute. Ceci est du à la présence d'un cisaillement très important à l'interface. Il semble donc que les ondes progressives, qui présentent un meilleur comportement de ce point de vue, permettront de simuler des viscosités de l'ordre de celle de l'eau.

4 Conclusions

La méthode présentée ici est testée dans différents cas de figure. Notamment, nous nous attachons à déterminer l'évolution de la convergence de cette méthode lorsque le rapport de masses volumiques croît, notamment jusqu'a 1000. Les tests mis en place sont d'une part la convergence vers une fonction infiniment dérivable, et d'autre part, la convergence vers un problème d'ondes interfaciales stationnaires. Bien que la convergence se détériore dans ce dernier cas, nous constatons que le temps de calcul nécessaire à l'obtention de la convergence reste acceptable. Ces résultats sont donc très encourageants quand à la modélisation d'ondes océaniques interfaciales, incluant l'étude de l'interaction entre vent et vagues.

Références

Gueyffier D., 2000, Etude de l'impact de gouttes sur un film liquide mince. Développement de la corole et formation de projections. **Thèse de doctorat,** *Université Pierre et Marie Curie*.

Jeffreys H., 1925, On the formation of water waves by wind. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A,* **107**, 189-206.

Kharif C. & Pelinovsky E., 2003, Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon. *Eur. J. Mech. B Fluids,* **22**, 603-634.

Lafaurie B., Scardovelli R., Zaleski S. & Zanetti G., 1994, Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER. *J. Comp. Phys.* **113** (1), 134-147.

Lamb H., 1932, Hydrodynamics. *Dover Publications,* **New York**.

Lawton G., 2001, Monsters of the deep (the perfect wave). *New Scientist,* **170**, 28-32.

Li J., 1995, Calcul d'intresface affine par morceaux. *C. R. Acad. Sci. Paris, Serie II b,* **320**, 391-396.

Mallory, J.K., 1974, Abnormal waves on the South-East Africa. *Int. Hydrog. Rev.,* **51**, 89-129.

Plesset, S. M. & Whipple, C. G., 1974, Viscous effect in Rayleigh-Taylor instability. *Phys. Fluids,* **17** (1), 1-7.

Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. & Vetterling W. T., 1999, Numerical Recipes in Fortran 77 : The art of scientific computing. *Cambridge University Press*.

Touboul J., Giovanangeli J. P., Kharif C. & Pelinovsky E., 2006, Freak waves under the action of wind : experiments and simulations. *Eur. J. Mech. B Fluids,* **25**, 662-676.

Touboul J.& Kharif C., 2006, On the interaction of wind and extreme gravity waves due to modulationnal instability. *Phys. Fluids,* **18**, 108103.

9.2 Perspectives de la méthode

A travers une série de tests, nous avons pu mettre en évidence la convergence de la méthode numérique pour différentes gammes de rapports de masses volumiques entre les deux fluides. Notamment, dans le cas d'ondes de gravité, on parvient à simuler le comportement pour un rapport mille, c'est-à-dire le rapport de masse volumique entre l'air et l'eau, sans trop dégrader les performances en termes de temps de calcul. La méthode retenue est donc adaptée à la simulation du problème qui nous intéresse.

D'un point de vue plus physique, nous avons vu dans les chapitres 7 et 8 que notre approche modèle décrivait correctement le phénomène physique mis en œuvre dans le cadre de notre problème, mais de manière simplifiée. En effet, l'approche modèle de type Jeffreys nous permet de décrire un phénomène de décollement au moyen d'un terme de pression en phase avec la pente des vagues. Cette hypothèse est sans doute très simplificatrice, et nous ne connaissons pas réellement la forme de la distribution de pression dans un tel cas. De plus l'amplitude de ce terme de pression est fixée par un coefficient d'abri s, qui constitue un paramètre assez difficile à estimer. En effet, il est difficile de mesurer expérimentalement la pression à l'interface entre l'air et l'eau, et nous ne pouvons donc y accéder que de manière indirecte. Ainsi, en traçant l'évolution de la pression verticalement, au dessus de l'interface, on peut estimer une valeur de la pression à l'interface par extrapolation, et ainsi se faire une idée de l'ordre de grandeur de ce paramètre. Mais il est évident qu'une telle approche ne peut être satisfaisante pour évaluer un paramètre de manière précise.

D'autre part, notre approche modèle nous a permis de souligner la nécessité d'introduire un seuil de déclenchement de ce mécanisme. Nous avons estimé qu'un seuil en pente pouvait convenir, bien qu'un seuil en courbure paraisse plus indiqué. Au regard des travaux sur l'interaction entre vent et vagues, l'existence de ce seuil correspond à l'introduction d'un nouveau paramètre dans la description du transfert d'énergie entre le vent et les vagues. En effet, l'importance du transfert est traditionnellement estimée en fonction de l'age des vagues, c'est-à-dire en fonction du cisaillement à l'interface. Or nous avons mis en évidence qu'au delà d'un certain seuil en pente, une explosion des taux de transfert se produisait, coïncidant avec l'apparition de décollements aériens au dessus de l'interface. Ici encore, nous nous sommes limités à une approche paramétrique de la question, fixant la valeur de ce seuil de manière plus ou moins arbitraire. L'existence de ces décollements étant acquise, il reste donc à en estimer les conditions de déclenchement.

Notre approche numérique nous permettra donc de répondre à ces questions. En effet, nous pourrons l'utiliser pour simuler l'écoulement diphasique que constitue le vent au dessus des vagues. Ainsi, en introduisant le vent d'une part, et différentes vagues en temps que conditions initiales d'autre part, nous pourrons décrire assez précisément la formation de décollements aériens. Cette approche nous permettra de décrire la formation de ces décollements, dont les paramètres principaux seront sans doute la vitesse relative du vent aux vagues, ainsi que la courbure locale de l'interface. D'autre part, nous pourrons extraire des résultats les différents profils de pression à l'interface, nous donnant ainsi accès à la nature du profil lui même, ainsi qu'à la valeur du coefficient d'abri. Une grande partie des question posées par ce travail pourraient ainsi être résolues.

Quatrième partie

Travaux futurs

Chapitre 10

Conclusions et perspectives

Cette étude porte sur l'interaction entre le vent et les vagues scélérates. Une première approche, expérimentale, permet de mettre en évidence que ce dernier a une influence importante sur la dynamique des vagues scélérates. En effet, des groupes de vagues propagés dans la grande soufflerie de Luminy permettent d'engendrer des vagues scélérates au moyen du mécanisme de focalisation dispersive. Lorsqu'ils sont propagés sans vent, ces groupes montrent un comportement symétrique entre la phase de focalisation et la phase de défocalisation. Lorsque l'on ajoute du vent, très peu de différences sont observées au cours de la phase de focalisation. Seuls apparaissent un faible déplacement du point de focalisation, sans doute lié au courant induit par le vent, et une faible amplification de l'amplitude de la vague scélérate. En revanche, la phase de défocalisation présente un caractère sensiblement différent du cas sans vent, puisque la symétrie avec la phase de focalisation est complètement brisée. Cette asymétrie induite est à l'origine d'un augmentation significative de la durée de vie de la vague extrême.

Afin de mieux comprendre le phénomène, une approche numérique est développée, basée sur l'introduction d'un modèle de vent. Tout d'abord, le fait que le vent agisse peu sur la phase de focalisation nous incite à penser que son action est faible durant cette phase. En revanche, le changement de comportement brutal observé au moment de la formation de la vague extrême suggère qu'un transfert significatif d'énergie survient à ce moment précis. Un tel phénomène peut être justifié par l'apparition de décollement dans l'écoulement aérien au dessus de la vague extrême. Ceci nous conduit à modéliser l'influence du vent au moyen du mécanisme de Jeffreys, en limitant toutefois son influence en temps et en espace au moyen de l'introduction d'un seuil d'activation. Cette approche permet de reproduire assez fidèlement les résultats obtenus en soufflerie. La présence de ce décollement aérien est également mise en évidence expérimentalement.

Notre approche s'est, jusqu'alors, limitée aux vagues scélérates engendrées par focalisation dispersive. La persistence de ces dernières sous l'action du vent est manifestement liée à un maintien de la cohérence du groupe sous l'action du différentiel de pression, comme le montrent les analyses temps fréquence du chapitre IV. Ceci peut suggérer que le phénomène observé est propre aux vagues scélérates générées par le mécanisme de focalisation dispersive. Pour s'en assurer, nous mettons donc en place une approche numérique visant à étudier l'influence du vent sur les vagues scélérates engendrées par instabilité modulationnelle. Ceci permet de mettre en évidence le fait que ces vagues sont également maintenues par le vent. Le mécanisme physique mis en jeu, toutefois n'a rien à voir avec celui étudié précédemment dans le cadre des vagues

engendrées par focalisation dispersive. Ainsi, la vague scélérate est obtenue ici par la croissance du mode le plus instable, au sens de l'instabilité modulationnelle (instabilité de Benjamin Feir). Au maximum de modulation, un autre mode instable est excité par le vent. La croissance de cette nouvelle modulation prend alors le relais sur la précédente. La récurrence de Fermi-Pasta-Ulam est donc brisée, conduisant à la persistance de la vague scélérate.

Ces travaux sont réalisés en supposant que le vent est modélisable au moyen de la théorie de Jeffreys. Cette théorie affirme que la pression associée à un décollement aérien au dessus des vagues peut être exprimée sous la forme d'un terme en phase avec la pente des vagues. De plus, ce dernier est fonction d'un paramètre, le coefficient d'abri, difficile à déterminer. Finalement, nous ajoutons un paramètre supplémentaire en introduisant un seuil d'activation du décollement aérien. Ces hypothèses sont raisonnables, puisque nous avons vu qu'elles permettent de reproduire les observations expérimentales de manière satisfaisantes. Néanmoins, il est en effet important de connaître plus précisément les paramètres qui contrôlent le décollement. Dans cette logique, nous mettons en œuvre une méthode numérique permettant de simuler l'écoulement diphasique que constitue le problème de l'interaction entre le vent et les vagues. Ce type d'approche n'a jamais été utilisé dans ce contexte, et une étude préalable de la méthode est nécessaire. Un paramètre en particulier dégrade le comportement numérique des méthodes diphasiques. Il s'agit du rapport des masses volumiques des deux fluides. Une analyse détaillée du comportement numérique de la méthode en fonction de ce paramètre est donc réalisée. Les résultats permettent de mettre en évidence que cette méthode convient à la simulation du problème qui nous intéresse. Une étude plus poussée n'est pas menée ici, faute de temps, et ce travail est à faire. En effet, il reste à obtenir des conditions initiales satisfaisantes pour décrire notre problème, et les propager numériquement grâce à notre code. L'introduction du vent ne posant pas de problème particulier, on devrait obtenir rapidement des résultats mettant en évidence le décollement aérien pour cet écoulement. Une étude détaillée sera alors nécessaire, afin d'identifier clairement les paramètres influençant l'apparition du décollement. Les profils de pression détaillés seront obtenus au même moment, permettant éventuellement de modifier le terme de pression suggéré par Jeffreys.

Parmi les perspectives à plus long terme, citons l'extension de cette approche en profondeur finie, ou faible. L'étude présentée ici se cantonne à des vagues se propageant en profondeur infinie. Il faut pourtant considérer l'évolution des vagues scélérates en zones côtières, qui sont les zones des océans les plus fréquentées par l'homme. Or la diminution de la profondeur résulte en une augmentation des pentes locales des vagues. Il est donc probable que les décollements aériens deviennent plus fréquents en zone côtière. Il sera particulièrement intéressant de reprendre cette étude dans ce contexte.

De la même manière, on doit raisonnablement envisager de reproduire cette étude en dimension trois. En effet, les vagues scélérates en milieu naturel présentent parfois une forme plus complexe, et ne peuvent être ramenées au simple cas bidimensionnel. Ces vagues peuvent effectivement être engendrées par focalisation géométrique, présentant alors une forme pyramidale. Une instabilité de classe II peut également générer des vagues scélérates en forme de fer à cheval. Dans un tel cas, l'approche de type Jeffreys suggérée dans ce travail sera largement criticable. L'écoulement d'air tridimensionnel au dessus de telles vagues ne correspondra sans doute pas au seul tourbillon au dessus d'une crête. La simulation tridimensionnelle de l'écoulement aérien turbulent au dessus de vagues pyramidales est donc un travail futur à prévoir.

D'autre part, une partie du travail réalisé au cours de cette thèse n'est pas abordée dans ce manuscrit. Ce travail se destinait en partie à étudier les vagues scélérates du point de vue de leur télédétection. En effet, les radars sont largement utilisés dans le contexte de l'étude des vagues, depuis plusieurs années, déjà. Cet aspect de l'océanographie physique a connu un essor

important avec l'usage de plus en plus fréquent des satellites pour l'observation des océans. La plupart des radars destinés à observer les océans utilisent des longueurs d'onde de l'ordre de grandeur du centimètre, ou de la dizaine de centimètres. Ces longueurs d'onde, d'autre part, sont caractéristiques des vagues présentes à la surface des océans en présence de vent. Par conséquent, les signaux radars réagissent grandement à la présence de ces vagues à la surface des mers. Ce constat nous conduit à supposer qu'une vague scélérate peut présenter une signature radar particulière. Ces vagues ont des cambrures très importantes, qui influencent significativement les vagues de petites échelles, c'est-à-dire les vagues de vent. Une observation détaillée de la Figure 4 de la publication présentée dans la section 7.1 le montre d'ailleurs. On constate en effet une disparition des vagues de vent au voisinage de la vague scélérate. Une approche numérique est alors mise en œuvre.

Les modèles électromagnétiques classiques en télédétection considèrent que l'énergie rétrodiffusée par une surface suit deux types de comportements asymptotiques. Une évolution de type Kirchhoff correspond à l'approximation du plan tangent, c'est-à-dire à l'approximation de l'optique géométrique. Une évolution de type Bragg correspond à l'hypothèse des faibles pentes, traitant la diffusion comme une perturbation de la direction de réflexion naturelle sur un plan non perturbé. Or Elfouhaily *et al.* (2003) ont récemment proposé une théorie permettant de reproduire les comportements asymptotiques de ces deux modèles. Nous nous proposons donc d'étudier l'influence sur la rétrodiffusion du changement de rugosité de la surface de la mer lié à la présence d'une vague scélérate. Pour cela, nous utilisons une centaine de conditions initiales, correspondant à une onde de Stokes perturbée par une perturbation modulationnellement instable. Un bruit aléatoire est ajouté à ces surfaces, bruit selon le spectre introduit par Elfouhaily (1996). Toutes ces surfaces sont alors propagées numériquement, au moyen de la méthode HOSM, et des vagues scélérates sont obtenues. Une comparaison entre le signal rétrodiffusé par les conditions initiales et par celles contenant les vagues scélérates permet de mettre en évidence la signature recherchée. En effet, le spectre des vagues de vent est bien lissé par la présence de la vague scélérate, et ceci est observable sur le signal radar. En incidence rasante, le comportement asymptotique observé dans chacun des cas n'est pas le même. Ceci pourrait permettre d'identifier des vagues scélérates. Ces résultats ne sont que préliminaires (c'est d'ailleurs pourquoi ils n'ont pas été détaillés dans ce manuscrit). Ils sont présentés en détails par Touboul *et al.* (2005). Une étude plus poussée, notamment en trois dimensions, pourrait apporter des résultats importants en matière de télédétection des vagues scélérates.

Bibliographie

Ashgriz, N. & Poo, J.Y. 1991 Flair : Flux-line segment for model for advection and interface reconstruction. *J. Comp. Phys.* **93**, 449–468. 51

Baldock, T.E., Swan, C. & Taylor, P.H. 1996 A laboratory study of surface waves on water. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **354**, 649–676. 14, 16

Banner, M.I. & Melville, W.K. 1976 On the separation of air flow over water waves. *J. Fluid Mech.* **77**, 825–842. 29

Bateman, W.J.D., Swan, C. & Taylor, P.H. 2001 On the efficient numerical simulation of directionnally spread surface water waves. *J. Comp. Phys.* **174**, 277–305. 16

Benjamin, T.B. & Feir, J.E. 1967 The desintegration of wave trains on deep water. part 1. theory. *J. Fluid Mech.* **27**, 417–430. 17

Bretherton, F.P. & Garrett, J.R. 1969 Wavetrains in inhomogeneous moving media. *Proc. Roy. Soc. London A* **302**, 529–554. 12

Briggs, W.L. 1987 In *A multigrid tutorial*. SIAM, Philadelphia. 56

Calini, A. & Schober, C.M. 2002 Homoclinic chaos increases the likelihood of rogue wave formation. *Phys. Lett. A* **298**, 335–349. 18, 21

Clamond, D., Francius, M., Grue, J. & Kharif, C. 2006 Strong interaction between envelope solitary surface gravity waves. *Eur. J. Mech. B/Fluids* **25 (5)**, 536–553. xiii, 23, 24

Dias, F. & Kharif, C. 1999 Nonlinear gravity and capillary-gravity waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31**, 301–346. 20

Dommermuth, D.G. & Yue, D.K.P. 1987 A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *J. Fluid Mech.* **184**, 267–288. 42

Dyachenko, A.I. & Zakharov, V.E. 2005 Modulational instability of stokes wave → freak wave. *J. Exp. Theor. Phys.* **81 (6)**, 318–322. 18

Dysthe, K.B. 2001*a* Modelling a "Rogue Wave" - Speculations or a realistic possibility ? In *Rogues Waves 2000* (ed. M. Olagnon & G.A. Athanassoulis), , vol. 32, pp. 255–264. Ifremer, Brest. 11

Dysthe, K.B. 2001*b* Refraction of gravity waves by weak current gradients. *J. Fluid. Mech* **442**, 157–159. 11

Dysthe, K.B. & Trulsen, K. 1999 Note on breather type solutions of the nls as a model for freak waves. *Phys. Scripta* **82**, 48–52. 17, 21

Eckart, C. 1953 The generation of wind waves on a water surface. *J. Appl. Phys* **24 (12)**, 1485–1494. 29

Elfouhaily, T., Guignard, S., Awadallah, R. & Thompson, D.R. 2003 Local and non-local curvature approximation : a new asymptotic theory for wave scattering. *Waves Random Media* **13**, 321–328. 163

Elfouhaily, T. M. 1996 A consistent wind and wave model and its application to microwave remote sensing of the ocean surface. PhD thesis, Université Denis Diderot, Paris. 163

Faltinsen, O.M., Greco, M. & Landrini, M. 2002 Green water loading on a fpso. *J. Offshore Mech. Art. Eng.* **124**, 97–103. 42

Fochesato, C., Grilli, S. & Dias, F. 2007 Numerical modeling of extreme rogue waves generated by directional energy focusing. *Wave Motion* **44**, 395–416. 16

Greco, M. 2001 A two-dimensional study of green water loading. PhD thesis, Dept. Marine Hydrodynamics, NTNU, Trondheim. 42

Grue, J. & Palm, E. 1985 Wave radiation and wave diffraction from a submerged body in a uniform current. *J. Fluid Mech.* **151**, 257–278. 13

Gueyffier, D. 2000 Etude de l'impact de gouttes sur un film mince. développement de la corolle, et formation de projections. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris. xiii, 52

Helmholtz, H.L.F. 1868 Über discontinuierliche flüssigkeits-bewegungen. *Monthly Reports of the Royal Prussian Academy of Philosophy in Berlin* **23**, 215. 25, 27

Henderson, K.L., Peregrine, D.H. & Dold, J.W. 1999 Unsteady water wave modulations : Fully nonlinear solutions and comparison with the nonlinear schrödinger equation. *Wave Motion* **29**, 341–361. 17, 21

Hirt, C.W. & Nicholls, B.D. 1981 Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comp. Phys.* **39**, 201–225. 51

Janssen, P.A.E.M. 2004 *The interaction of ocean waves and wind*. Cambridge University Press. 36

Jeffreys, H. 1925 On the formation of wave by wind. *Proc. Roy. Soc. A* **107**, 189–206. 28, 29, 32, 36, 151

Jeffreys, H. 1926 On the formation of wave by wind (second paper). *Proc. Roy. Soc. A* **110**, 241–247. 28, 29

Johannessen, T.B. & Swan, C. 2001 A laboratory study of the focusing of transient and directionnaly spread surface water waves. *Proc. R. Soc. Lond. A* **457**, 971–1006. 16

Johannessen, T.B. & Swan, C. 2003 On the nonlinear dynamics of wave groups produced by the focusing of surface waves. *Proc. R. Soc. Lond. A* **459**, 1021–1052. 14

Kelvin, W.T. 1871 Hydrokinetic solutions and observations. *Philosophical Magazine* **42**, 362–377. 25, 27

Kharif, C. & Pelinovsky, E. 2003 Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon. *Eur. J. Mech. B/Fluids* **22**, 603–634. 7, 11, 17

Korteweg, D.J. & de Vries, F. 1895 On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationnary waves. *Phil. Mag.* **39**, 422–443. 21

Lafaurie, B., Scardovelli, R., Zaleski, S. & Zanetti, G. 1994 Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with surfer. *J. Comp. Phys.* **113 (1)**, 137–147. 42

Lamb, H. 1932 *Hydrodynamics*. Dover Publications (New-York). 27

Lavrenov, I.V. 1998 The wave energy concentration at the aguhlas current of south africa. *Natural hazards* **17**, 117–127. 6, 11

Lawton, G. 2001 Monsters of the deep (the perfect wave). *New Scientist* **170 (2297)**, 28–32. 6

Li, J. 1995 Calcul d'interface affine par morceaux (piecewise linear interface calculation). *C. R. Acad. Sci. Paris, Serie IIb* **320**, 391–396. 51, 53

Lighthill, M.J. 1965 Contributions to the theory of waves in nonlinear dispersive systems. *J. Inst. Math. Appl.* **1**, 269–306. 17

Longuet-Higgins, M.S. & Cokelet, E. 1976 The deformation of steep surface waves on water. *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **350**, 1–26. 42

Longuet-Higgins, M.S. & Stewart, R.W. 1961 The changes in amplitude of short gravity waves on steady non uniform currents. *J. Fluid Mech.* **10**, 529–549. 13

Mallory, J.K. 1974 Abnormal waves on the south-east africa. *Int. Hydrog. Rev.* **51**, 89–129. 6, 11

Massel, S.R. 1996 *Ocean surface waves : Their Physics and prediction*. Word Scientific (Singapore). 10

McLean, J.W. 1982*a* Instabilities of finite-amplitude water waves. *J. Fluid Mech.* **114**, 315–330. 20

McLean, J.W. 1982*b* Instabilities of finite-amplitude water waves on water of finite depth. *J. Fluid Mech.* **114**, 331–341. 20

Miles, J. 1957 On the generation of surface waves by shear flows. *J. Fluid Mech.* **3**, 185–204. 32, 36

Noh, W.F. & Woodward, P. 1976 SLIC (simple line interface calculation. In *Proceedings of the fifth international conference on fluid dynamics* (ed. A.I. van de Vooren & P.J. Zandbergen), , vol. 59, pp. 330–340. Springer, Berlin. 51

Onkuma, K. & Wadati, M. 1983 The kadomtsev-petviashvili equation, the trace methos and the soliton resonance. *J. Phys. Soc. Japan* **52**, 749–760. 22

Osborne, A.R., Onorato, M. & Serio, M. 2000 The nonlinear dynamics of rogue waves and holes in deep-water gravity wave train. *Phys. Rev. A* **275**, 386–393. 7, 18, 21

Pelinovsky, E.N. 1996 Hydrodynamics of tsunami waves. *Tech. Rep.*. Applied Physics Institute Press. 22

Pelinovsky, E., Talipova, T. & Kharif, C. 2000 Nonlinear dispersive mechanism of the freak wave formation in shallow water. *Physica D* **147(1-2)**, 83–94. 14

Peterson, P., Soomere, T., Engelbrecht, J. & van Groesen, E. 2003 Soliton intercation as a possible model for extreme waves. *Nonlinear process in geophysics* **10**, 503–510. xiii, 22, 24

Phillips, O.M. 1957 On the generation of waves by turbulent wind. *J. Fluid Mech.* **2**, 417–445. 29, 32

Porubov, A.V., Tsuji, H., Lavrenov, I.V. & Oikawa, M. 2005 Formation of the rogue wave due to non-linear two-dimensional waves interaction. *Wave Motion* **42**, 202–210. 24

Rayleigh, L. 1880 On the stability, or instability of certain fluid motions. *Proc. Lond. Math. Soc.* **11**, 57–70. 34

Reul, N., Branger, H. & Giovanangeli, J.-P. 1999 Air flow separationover unsteady breaking waves. *Phys. Fluids* **11**, 1959–1961. 29

Russell, J.S. 1844 Report on waves. In *Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, pp. 311–390. London : John Murray. 21

Skandrani, C. 1997 Contribution à l'étude de la dynamique non linéaire des champs de vagues en profondeur infinie. PhD thesis, Université de la Méditerranée, Marseille. 42

Skandrani, C., Kharif, C. & Poitevin, J. 1996 Nonlinear evolution of water surface waves : The frequency downshifting phenomenon. *Contemp. Math.* **200**, 157–171. 42

Slunyaev, A., Kharif, C., Pelinovsky, E. & Talipova, T. 2002 Nonlinear wave focusing on water of finite depth. *Physica D* **173(1-2)**, 77–96. 14, 18, 20

Smith, R. 1976 Giant waves. *J. Fluid Mech.* **77**, 417–431. 11

Soomere, T. & Engelbrecht, J. 2005 Extreme elevations and slopes of interacting solitons in shallow water. *Wave Motion* **41**, 179–192. 24

Stanton, T., Marshall, D. & Houghton, R. 1932 The growth of waves on water due to the action of the wind. *Proc. Roy. Soc. A* **137**, 283–293. 29

Sverdrup, H.U. & Munk, W.H. 1947 Wind, sea, and swell ; theory of relations for forecasting. *Tech. Rep.*. U. S. Navy Hydrographic Office. 10

Touboul, J., Elfouhaily, T. & Kharif, C. 2005 Numerical simulations of freak waves applied to their remote sensing. *European Geophysical Union, Vienne* **5**, EGU05–A–05277. 163

Ursell, F. 1956 Wave generation by wind. In *Surveys in Mechanics* (ed. G. K. Batchelor). Cambridge University Press. 29

Vinje, T. & Brevig, P. 1981 Breaking waves on finite depth : a numerical study. *Tech. Rep.* R-118-81. Ship Res. Inst. Norway. 42

Wesseling, P. 1992 In *An introduction to multigrid methods*. Wiley, Chichester. 56

White, B.S. & Fornberg, B 1998 On the chance of freak waves at sea. *J. Fluid Mech.* **355**, 113–138. 11

Whitham, G.B. 1974 *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & Sons. 14, 15, 17

Wu, C.H. & Yao, A. 2004 Laboratory measurements of limiting freak waves on current. *J. Geophys. Res.* **109 (C12002)**, 1–18. 11

Zakharov, V.E. 1966 Instability of waves in nonlinear dispersive media. *J. Exp. Theor. Phys.* **51**, 1107–1114. 17

Zakharov, V.E. 1968 Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of deep water. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9**, 190–194. 17

Résumé

Le phénomène de vague scélérate, qui constitue un enjeu majeur pour la sécurité maritime, ne peut être corrélé à un phénomène géophysique particulier. En effet, de telles vagues peuvent surgir sur tous les océans du monde, en eaux profonde ou peu profonde, en eaux calmes ou en zone de tempête. Ce travail s'attache à étudier l'influence du vent sur la dynamique de ces vagues.

Une approche expérimentale a mis en évidence que des vagues scélérates générées par focalisation d'énergie due à la nature dispersive des vagues, étaient légèrement amplifiées par le vent, et que leur point de formation variait peu, mais surtout que leur durée de vie était significativement augmentée. Une forte asymétrie est effectivement observée entre les phases de focalisation et de défocalisation. Des simulations numériques sont réalisées dans le but d'analyser, de comprendre, et de modéliser ce phénomène. Les expériences effectuées dans la grande soufflerie des échanges air-mer de Luminy sont reproduites dans un canal numérique à partir d'une méthode d'intégrales de frontière. Le mécanisme de Miles, ainsi que le mécanisme d'abri de Jeffreys modifié sont tous les deux considérés pour modéliser l'influence du vent. Le mécanisme d'abri proposé par Jeffreys est modifié par l'introduction d'un seuil de pente pour lequel un décollement de l'écoulement aérien se produit au-dessus des crêtes les plus cambrées. Les vagues scélérates peuvent également être dues à un autre mécanisme physique : l'instabilité modulationnelle des champs de vagues ou instabilité de Benjamin-Feir. Une extension de l'étude à des vagues scélérates obtenues par instabilité modulationnelle est donc développée. Des simulations numériques de ce phénomène à partir d'un modèle pseudo-spectral ont été réalisées. Ces simulations montrent, comme dans le cas de la focalisation dispersive, que le mécanisme d'abri modifié de Jeffreys augmente la durée de vie de ces vagues extrêmes, bien que la physique mise en oeuvre soit différente.

Cependant, ces approches reposent toutes sur un couplage vent/vagues linéaire sans rétroaction des vagues sur l'écoulement aérien, ainsi qu'une description potentielle de l'écoulement. Or la présence d'une recirculation (tourbillon aérien) au-dessus des crêtes les plus hautes mise en évidence expérimentalement ne peut être correctement simulé que si la vorticité est prise en compte. Nous introduisons donc une approche numérique permettant la simulation de l'écoulement rotationnel et diphasique de deux fluides visqueux séparés par une interface.

Abstract

The rogue wave phenomenon, which is of majeur interest for marine safety, cannot be correlated to any specific geophysical phenomenon. Such waves can appear on every ocean of the world, in deep or shallow water, and encounter strong winds in tempest zones. This work aims to study the influence of wind on rogue waves.

An experimental approach showed that rogue waves generated by means of energy focusing due to the dispersive nature of water waves, were slightly amplified, that there was a drift of the focusing point, and that their life time was significantly increased. A strong asymmetry is indeed observed between the focusing and defocusing stages. Numerical simulations are performed to analyse, understand, and reproduce the phenomenon. Experiments performed in the air-sea interaction facility are reproduced in a numerical wave tank using boundary integrals method. Miles' mechanism and the modified Jeffreys sheltering mechanism are both considered to model wind action. Jeffreys' sheltering mechanism is modified by introducing a threshold in local slope above which air flow separation occurs over steep crests. Rogue waves can also be generated using another physical mechanism : modulationnal instability of wave fields, or Benjamin-Feir instability. An extension of the study to rogue waves due to modulationnal instability is developed. Numerical simulations of this phenomenon are performed with a pseudo-spectral method. These simulations show that the modified Jeffreys' sheltering mechanism is responsible for a significant increase of the lifetime of those extreme waves, such as for rogue waves due to dispersive focusing. However, the underlying physics are different in both cases.

However, these approaches are both based on a linear wind wave coupling, neglecting the influence of waves on the air flow, and based on a potential description of the flow. The existence of a recirculation area (air vortex) observed experimentally above the highest crests can only be simulated correctly when vorticity is taken into account. A numerical method to simulate the rotationnal flow of the two phases viscous fluids, separated by an interface, is introduced.