Nancy-Université
Université Henri Poincaré

cnrs dépasser les frontières

CRAN

Département de formation doctorale en automatique **École doctorale IAEM Lorraine**
UFR Sciences et Technologies

Observation et commande des systèmes singuliers non linéaires

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 14 Novembre 2011

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré – Nancy 1
(spécialité automatique)

par

Mohamed ZERROUGUI

Composition du jury

Rapporteurs : Mohamed M'saad Professeur, GREYC, ENSICAEN, Caen
Holger Voos Professeur, Université de Luxembourg

Examinateurs : Jean François Lafay Professeur, IRCCyN, Ecole Centrale de Nantes
Didier Maquin Professeur, INPL-CRAN, Nancy-Université
Mohamed Darouach Professeur, UHP-CRAN, Nancy-Université, Directeur de thèse
Latifa Boutat-Baddas Maître de conférences, UHP-CRAN, Nancy-Université, Co-directeur de thèse

Centre de Recherche en Automatique de Nancy — UMR 7039

Mis en page avec la classe thloria.

À mes chers parents.
À mes frères et soeurs.

L'erreur n'annule pas la valeur de l'effort accompli.
Qui veut faire quelque chose trouve un moyen. Qui ne veut rien faire trouve une excuse.
Proverbes arabes (Traduction).

Remerciements

Ces travaux de recherche ont été effectués au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN, UMR 7039, CNRS), dirigé par Monsieur Alain RICHARD, plus particulièrement au sein du groupe thématique ACOS, sous la direction de Monsieur Mohamed DAROUACH, Professeur à l'université de de Henri Poincaré Nancy 1 et co-dirigée par Madame Latifa BOUTAT-BADDAS, Maître de conférences à l'Université Henri Poincaré Nancy I.

Je tiens d'abord à remercier Monsieur Mohamed DAROUACH Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I pour m'avoir accueilli et intégré dès mon arrivée au sein de son équipe entant que responsable de cette dernière. Qu'il trouve ici aussi l'expression de ma profonde gratitude entant que directeur de ma thèse, pour sa disponibilité malgré ses occupations multiples et pour son soutien permanent et indéfectible. Ses qualités, tant humaines que scientifiques furent pour moi un apport inestimable. Je lui en suis très reconnaissant.

Mes remerciements vont également à Madame Latifa BOUTAT-BADDAS, Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et membre de l'équipe de Longwy du CRAN, pour avoir co-encadré mes travaux de recherche et pour ses conseils judicieux, nos discussions fructueuses et son soutien de tous les instants.

Je suis très sensible à l'intérêt qu'ont bien voulu porter à ce travail Monsieur Mohamed M'SAAD, Professeur de l'université de CEAN, Directeur adjoint du Groupe de Recherche en Informatique, Image, Automatique et Instrumentation de Caen (GREYC) et Monsieur Holgar VOOS, Professeur à l'Université de Luxembourg et directeur du Laboratoire "Automatic Control Laboratory". Je tiens à les remercier pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ce mémoire.

Je suis honoré par la présence de Monsieur Jean-François LAFAY, Professeur à l'Ecole Centrale de Nantes Directeur Directeur de l'Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes (IRCCyN), ainsi que de Monsieur Didier MAQUIN, Professeur à l'Institut national polytechnique de Lorraine etmembre du CRAN. Je tiens à les remercier pour m'avoir fait l'honneur d'être membre de mon jury.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance envers le personnel du Laboratoire de Longwy. Je souhaite exprimer toute mon amitié à l'équipe de Longwy : Michel Zasadzinski, Mohamed Boutayeb, Harouna Souley-Ali, Ali Zemouche, Hugues Rafaralahy, Cédric Delattre, Gaëtan Didier, Ibrahima N'Doye, Bertrand Grandvallet, Arnaud Koehl, Lama Hassan, Mohamed Ghattassi et Adrien Drouot sans oublier les anciens thésards Benjamin Gérard et Boulaid Boulkroune. Merci également aux "post-docs" de passage au laboratoire Faruque Ali et Mohamed Benallouch. Je tiens à exprimer toute ma gratitude ainsi que ma sympathie à Joëlle Pinelli et Marie-Pascale Saint-Michel et Allison Bordier pour m'avoir toujours aidé dans mes démarches administratives. Mes remerciement vont aussi

Comme on ne passe pas toute sa vie au travail, merci à tous mes amis à l'exterieur du laboratoire. Merci à Reda, Nabil, Abd el halim, Fethi (couscous), Khereddine, Hazem, Fouzi, Nadia et Asma, merci pour les discussions sympathiques et l'encouragement. Une pensée à Saoussane, à qui je souhaite bon courage dans le reste de ses études. Merci à tous ceux et celles qui ont contribué, de près ou de loin au bon déroulement de ce travail.

Enfin, je profite de cette occasion pour exprimer ma profonde gratitude à mon père, ma mère, ainsi que mes frères et soeurs pour leur amour, leur encouragement et leur soutien indéfectible, de façon permanente tout au long de ces années d'études. Qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance.

Table des matières

Symboles et abbréviations **3**

Introduction **1**

Chapitre 1
Présentation de l'état de l'art sur les systèmes singuliers **5**

1.1 Introduction 5
1.2 Présentation des systèmes singuliers 6
1.2.0.1 Exemple 1 7
1.2.0.2 Exemple 2 8
1.3 Propriétés structurelles des système singuliers 9
1.3.1 Régularité 9
1.3.2 Equivalence entre systèmes singuliers 10
1.3.2.1 La forme de Kronecker-Weierstrass 10
1.3.2.2 La forme par décomposition en valeurs singulières 11
1.3.3 Réponse temporelle et causalité 11
1.3.4 Commandabilité, $R-$commandabilité et $Imp-$commandabilité . . . 13
1.3.4.1 Commandabilité 13
1.3.4.2 $R-$commandabilité 14
1.3.4.3 $Imp-$commandabilité 15
1.3.5 Obsevabilité, $R-$observabilité, $Imp-$Observabilité et détectabilité . 16
1.3.5.1 Observabilité 16
1.3.5.2 $R-$observabilité 17
1.3.5.3 $Imp-$observabilité 18
1.3.5.4 Détectabilité 18
1.4 Outils pour l'analyse des systèmes dynamiques 18
1.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov 18

1.4.1.1 Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte) . . . 20
1.4.1.2 Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe) 20
1.4.2 Norme $\mathcal{H}_\infty$, gain $\mathcal{L}_2$ 21
1.5 Observateurs d'état 22
1.5.1 Observateurs d'ordre réduit 22
1.5.2 Observateurs d'état des systèmes singuliers linéaires 24
1.5.2.1 Observateur d'état singulier 24
1.5.2.2 Observateur d'état usuel 25
1.5.3 Observateurs d'état des systèmes non linéaires 27
1.5.3.1 Observabilité des systèmes non linéaires 27
1.5.3.2 Les différents types d'observateurs pour les systèmes non linéaires 29
1.5.3.3 Méthodes de transformations non linéaires 29
1.5.3.4 Observateurs étendus 32
1.5.3.5 Observateur à grand gain : Approche de Thau et ses généralisations 34
1.5.3.6 Observateurs de Luenberger Généralisés (OLG) 37
1.5.4 Observateurs d'état des systèmes singuliers non linéaires 39
1.6 Stabilisation par retour d'état statique et par commande basée observateur 40
1.6.1 Stabilisation par retour d'état statique 40
1.6.2 Stabilisation par commande basée observateur 41
1.7 Conclusion 41

Chapitre 2
Systèmes singuliers bilinéaires 43

2.1 Introduction 43
2.2 Préliminaires et formulation du problème 44
2.2.1 Généralités sur les systèmes bilinéaires 44
2.2.1.1 Exemple 45
2.2.2 Systèmes avec des incertitudes vérifiant des contraintes quadratiques intégrales IQC 46
2.2.3 Systèmes auxiliaires et performances robustes 48
2.2.3.1 Performances robustes $\mathcal{H}_\infty$ 49
2.2.4 Formulation du problème 50
2.2.5 Conditions de non biais de l'observateur 52

2.3 Procédure de synthèse de l'observateur 53
2.3.1 La résolution des contraintes de Sylvester 53
2.3.2 Etude de la stabilité 57
2.3.3 Extension au filtrage H_∞ 58
2.4 Exemple Numérique 61
2.5 Conclusion 63

Chapitre 3
Observation des systèmes singuliers non linéaires 69

3.1 Introduction 69
3.2 Classe de systèmes singuliers non linéaires traitée 70
3.3 Extension au cas des systèmes à entrées inconnues 70
3.4 Formulation du problème 72
3.5 Procédure de synthèse d'observateur 75
3.5.1 Résolution des équations de Sylvester 75
3.5.2 Etude de stabilité 78
3.5.3 Les conditions de stabilité sous forme d'une inégalité matricielle stricte 80
3.6 L'extension au filtrage $\mathcal{H}_\infty$ 81
3.6.1 Procédure de synthèse du filtre $\mathcal{H}_\infty$ 81
3.6.2 Exemple numérique 85
3.7 Extension aux systèmes à sorties non linéaires 87
3.7.1 Exemple numérique 93
3.8 Synthèse de filtre $\mathcal{H}_\infty$ des systèmes à temps discret 99
3.8.1 Formulation du problème 99
3.8.2 Procédure de synthèse d'observateur 100
3.9 Exemple numérique 103
3.10 Conclusion 110

Chapitre 4
Stabilisation et commande basée observateur des systèmes singuliers non linéaires 111

4.1 Introduction 111
4.2 Préliminaires et formulation du problème 111
4.2.1 Rappels et généralités 111
4.2.2 Classe de systèmes considérés 114

4.3 Stabilisation des systèmes singuliers non linéaires par retour d'état statique 114
4.3.1 Stabilisation dans le cas sans perturbations 115
4.3.2 Stabilisation $\mathcal{H}_\infty$ 117
4.3.3 Exemple numérique 121
4.4 Stabilisation des systèmes singuliers non linéaires par commande basée observateur 124
4.4.1 Synthèse d'observateur 124
4.4.2 Commande basée observateur 126
4.4.3 Synthèse de la commande dans le cas sans perturbations 128
4.4.4 Synthèse de la commande $\mathcal{H}_\infty$ 131
4.4.5 Exemple numérique 135
4.5 Conclusion 138

Conclusion générale **139**

Annexe A
Lemme de Hadamard **141**

Annexe B **143**

B.1 Décomposition en valeurs singulières 143
B.2 Lemme de Schur 143
B.3 Lemme Borné Réel 144

Bibliographie **149**

Résumé **155**

Abstract **155**

Symboles et abbréviations

Ensembles

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	l'ensemble des nombres réels (resp. complexes)
$\mathbb{R}_+$	l'ensemble des nombres réels non négatifs $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$
$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$	espace réel (resp. complexe) euclidien de dimension n
$\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbb{C}^{n\times m}$	ensemble des matrices réelles (resp. complexes) de dimension $n \times m$

Sous-espaces de fonctions

$f(.) > 0$	la fonction $f(.)$ est définie positive
$f(.) \leqslant 0$	la fonction $f(.)$ est définie non positive
$f(.) < 0$	la fonction $f(.)$ est définie négative
$f(.) \geqslant 0$	la fonction $f(.)$ est définie non négative
$\langle X, Y\rangle = X^T Y$	est le produit scalaire des vecteurs X et Y
$\mathcal{C}^k(\mathbb{R};\mathbb{R})$	ensemble des fonctions $f(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continûment dérivables k fois

Normes

$\|.\|$	norme euclidienne d'un vecteur ou norme spectrale d'une matrice par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$
$\|x\|_\infty$	norme $\mathcal{L}_\infty$ du signal $x \in \mathcal{L}_\infty[0, \infty)$
$\|x\|_2$	norme $\mathcal{L}_2$ du signal $x \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$
$\|G\|_\infty$	norme $\mathcal{H}_\infty$ du système continu $G(s)$

Matrices, opérations et relations matricielles

$P > 0,\ P \geqslant 0$	matrice P symétrique définie (resp. semi-définie) positive
$P > Q,\ P \geqslant Q$	$P - Q > 0$ (resp. $P - Q \geqslant 0$) pour $P,\ Q$ symétriques $\in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\mathrm{tr}(A)$	trace de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\mathrm{rang}(A)$	rang de $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$
$\det(A)$	déterminant de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\mathrm{Im}(A)$	espace image de A : $\{y$ tel que $y = Ax\}$
$\mathrm{Re}(A)$	partie réelle de A
$(A)_{ik}$	$(i,k)^{\text{th}}$ élément de A
$A^{\perp}$	matrice Z telle que $AZ = 0$ et $[A^T \ \ Z]$ de rang maximal
$\ker(A)$	noyau de A : $\{x$ tel que $Ax = 0\}$
$\lambda(A)$	valeurs propres de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\lambda_{\max}(A),\ \lambda_{\min}(A)$	valeur propre de module maximal (resp. minimal) de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$A^T,\ A^{-T}$	transposée de A (resp. de l'inverse de A) $\in \mathbb{R}^{n\times m}$
A^{-1}	inverse de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\det(A) \neq 0$
$A^{\dagger}$	pseudo-inverse de $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ vérifiant $AA^{\dagger}A = A$
$I,\ 0$	matrice identité (resp. nulle) de dimension appropriée
$I_n,\ 0_{n\times m}$	matrice identité (resp. nulle) de dimension $n \times n$ (resp. $n \times m$)
$\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_p)$	matrice diagonale constituée avec les éléménts de la diagonale des matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1, \ldots, p$
$\mathrm{bdiag}(A_1, \ldots, A_p)$	matrice bloc-diagonale constituée avec $A_1, \ldots, A_p$ ($A_i \in \mathbb{C}^{n\times m}$) matrices $A_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $i = 1, \ldots, p$
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ (1,2)^T & A_{22} \end{bmatrix}$	matrice partitionnée telle que le symbole $(1,2)^T$ représente le transposé du bloc (1,2), soit A_{12}^T

Introduction

Les systèmes algébro-différentiels ou systèmes singuliers peuvent être considérés comme une généralisation des systèmes dynamiques. Ils constituent un puissant outil de modélisation dans la mesure où ils peuvent décrire des processus régis à la fois par des équations différentielles (dynamiques) et des équations algébriques (statiques). Ce formalisme représente les phénomènes physiques dont le modèle ne peut pas être décrit par des équations différentielles ordinaires. On les rencontre dans des domaines aussi variés que les industries chimiques et minérales, la robotique et le domaine électrique.

Au cours des dernières décennies, une partie importante des activités de recherche en automatique s'est focalisée sur le problème de l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires. Ceci est motivé par le fait que l'estimation de l'état est une étape importante voire indispensable pour la synthèse de lois de commande, pour le diagnostic ou la supervision des systèmes industriels. Les premières approches utilisées pour l'estimation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires sont basées sur des techniques d'approximation. Citons le Filtre de Kalman Etendu. Le gain de l'estimateur est calculé, à chaque instant, par rapport à une approximation au premier ordre de l'équation de l'état et de l'équation de mesure. Dans de nombreux cas pratiques, cette approche donne des résultats relativement satisfaisants. La deuxième approche concerne la classe des systèmes non linéaires composés d'une partie non linéaire remplissant la condition de Lipschitz et une partie linéaire supposée observable. Cette technique a l'avantage d'être simple à implanter car le gain de l'observateur, s'il existe, est constant. Cependant, les conditions de convergence sont fortement restrictives et ne concernent que les systèmes avec des constantes de Lipschitz très faibles. La dernière approche consiste à se ramener à un système linéaire ou bilinéaire modulo une injection de sortie par un changement de coordonnées non linéaire. Ces approches s'appliquent sous des conditions restrictives de linéarisation ou de bi-linéarisation, d'autant plus que la robustesse aux perturbations et aux incertitudes a été peu étudiée.

D'autre part, le problème de la synthèse d'observateur pour les systèmes singuliers linéaires a été traité par de nombreux chercheurs. Les approches proposées considèrent des observateurs singuliers ou standards en utilisant le concept de la décomposition en valeurs singulières et de la matrice inverse généralisées. Néanmoins, si les problèmes d'analyse et de commande des systèmes linéaires singuliers ont été bien étudiés dans la littérature, le domaine des systèmes singuliers non linéaires est très peu abordé par la communauté automaticienne, malgré son intérêt pratique. Nous avons constaté quelques extensions étendues des approches développées dans le cas des systèmes standards tels que l'utilisation du filtre de Kalman, des observateurs asymptotiques locaux en utilisant une transformation

de coordonnée. De plus, une approche de conception d'observateur d'ordre réduit est développée en se basant sur la résolution des équations de Sylvester généralisée. Une extension a été proposée par G.Lu et D.W.C.Ho pour une classe de systèmes singuliers non linéaires Lipschitziens, dont l'observateur proposé a une forme de système singulier. Récemment, une nouvelle méthode a été proposée par Darouach et al, pour une classe de systèmes singuliers non linéaires Lipschitziens, l'observateur proposé a une forme standard.

Dans ce contexte, nous avons mené des travaux de recherche sur l'estimation de l'état pour une classe de systèmes singuliers bilinéaires et pour une classe de systèmes singuliers non linéaires. Pour la classe des systèmes singuliers bilinéaires nous proposons un observateur d'ordre réduit standard. L'approche est basée sur la considération des bi-linéarités comme des incertitudes structurées bornées en normes. Cette formulation nous permet de réécrire la dynamique de l"erreur d'observation sous forme d'inclusion différentielle linéaire indépendante de l'état du système, ce qui nous permet d'appliquer les différentes techniques de convergence exponentielle et de l'atténuation du gain $\mathcal{H}_\infty$. La deuxième contribution de ce mémoire concerne la synthèse d'observateur d'ordre réduit pour une classe de systèmes singuliers non linéaire Lipschitziens. L'observateur proposé est un observateur standard. La synthèse repose sur la paramétrisation des solutions des équations de Sylvester pour éliminer le biais entre l'erreur d'observation et l'état du système. Notre dernière contribution concerne la stabilisation des systèmes singuliers non linéaires. Nous avons proposé une loi de commande stabilisante par retour d'état statique et une loi de commande basée observateur pour les systèmes singuliers non linéaires dont l'état ou une partie de l'état n'est plus accessible.

Objectifs du travail de thèse

Les principaux objectifs de cette thèse sont :

1. Développement d'une nouvelle méthode de synthèse d'observateurs pour la classe des systèmes singuliers bi-linéaires.
2. Développement de nouvelles méthodes de synthèse d'observateurs pour la classe des systèmes singuliers non linéaires, notamment les systèmes lipschitziens. L'objectif est d'établir des conditions de synthèse non restrictives du point de vue de faisabilité par rapport à des résultats existants dans la littérature.
3. Proposition de nouvelles structures d'observateurs en se basant sur celles développées récemment dans la littérature. Le but est d'étendre les méthodes développées dans le cas des systèmes non linéaires standards au cas des systèmes singuliers non linéaires.
4. L'utilisation de l'observateur développé pour synthétiser une commande basée observateur.

Structure du mémoire

Les développements résumés ci-dessus constituent les quatre chapitres de ce mémoire. Nous allons en décrire les principaux aspects

Chapitre 1 :

Dans ce chapitre nous présentons quelques rappels et définitions des méthodes et des techniques utilisées dans ce mémoire, ainsi que quelques travaux qui permettent de se positionner vis-à-vis de ce qui se fait dans le domaine de l'observation et la commande des systèmes non linéaires.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. D'abord, nous commençons par une introduction aux systèmes singuliers. Après nous nous intéressons aux propriétés structurelles des systèmes singuliers telles que, la régularité, l'équivalence, la réponse temporelle, la causalité, l'observabilité et la commandabilité. Ensuite, nous présentons quelques outils utilisés dans l'analyse de la stabilité et de la robustesse des systèmes dynamiques. La troisième partie est consacrée à un état de l'art sur l'observation et la synthèse des observateurs pour les différents types de systèmes ; les systèmes linéaires ordinaires, les systèmes singuliers linéaires, les systèmes non linéaires et les systèmes singuliers non linéaires. Enfin, nous allons présenter le principe de base de la commande par retour d'état statique et la commande basée observateur dans la dernière partie.

Chapitre 2 :

Ce chapitre propose une méthode de synthèse d'observateur $\mathcal{H}_\infty$ pour une classe de systèmes singuliers bilinéaires. Ces derniers sont introduits lorsque le comportement dynamique d'un système ne permet pas de le modéliser par une représentation linéaire. La dynamique et les équations des mesures des systèmes singuliers bilinéaires considérés sont soumis à des perturbations à énergie finie non mesurées et à des entrées bornées. Les entrées sont traitées comme des incertitudes structurées bornées en normes.

L'observateur proposé pour cette classe de systèmes est un observateur non biaisé, i.e. la dynamique de l'erreur d'estimation est indépendante de l'état du système. Les conditions nécessaires et suffisantes de non-biais de l'observateur sont données sous une forme d'équations de Sylvester.

Dans la première partie de ce chapitre nous présentons la classe des systèmes singuliers bilinéaire à laquelle nous nous s'intéressons plus particulièrement, un exemple de la littérature décrivant un processus réel (un robot avec joint flexible) pouvant être modélisé par une dynamique bilinéaire est présenté. Ensuite, nous faisons un petit rappel sur les systèmes incertains et l'étude de stabilité des systèmes soumis à des incertitudes structurées. Après, nous allons abordé la formulation du problème de synthèse de l'observateur d'ordre réduit que nous proposons. Ensuite, la procédure de synthèse d'observateur sera présentée en détail, en commençant par la méthode de résolution des équations de Sylvester, par la suite l'étude de stabilité dans le cas sans perturbations, et enfin la méthode de synthèse de l'observateur $\mathcal{H}_\infty$. Les conditions d'existence et de stabilité robuste de l'observateur sont données sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Un exemple numérique de simulation est donné à la fin de ce chapitre pour illustrer la méthode.

Chapitre 3 :

Dans ce chapitre nous présentons une méthode de synthèse d'observateur pour une classe de systèmes singuliers non linéaires. L'approche proposée repose sur la paramétrisation des solutions des équations de Sylvester pour éliminer le biais entre l'erreur d'observation et la paire (entrée/ état).

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans un premier temps nous allons définir la classe de systèmes considérée et quelques extensions qu'elle peut englober. Ensuite, nous commençons par la formulation du problème de construction de l'observateur d'ordre réduit que nous proposons. Par la suite, nous présentons la procédure de synthèse d'observateur, tout en exposant en détail la méthode de résolution des équation de Sylvester et l'étude de stabilité. Deux extensions seront par la suite présentées. Il s'agit du filtrage $\mathcal{H}_\infty$ pour le cas des systèmes qui présentent des perturbations sur l'équation de la dynamique et les équations de mesure, la deuxième extension concerne les systèmes à dynamique et sortie non linéaires. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la synthèse d'observateur pour les systèmes singuliers non linéaires à temps discret. A la fin de chaque section un exemple d'illustration est donné pour valider les différents résultats théoriques.

Chapitre 4 :

Dans ce chapitre nous présentons une méthode de synthèse de commande stabilisante par retour d'état statique et une commande basée observateur pour une classe de systèmes singuliers non linéaires. La non-linéarité considérée est supposée continue et différentiable, cette non-linéarité est transformée par le lemme de Hadamard en une forme bien adaptée à la synthèse d'une loi de commande par retour statique et par l'utilisation de la stabilité au sens de Lyapunov.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Après avoir donné quelques rappels concernant les problèmes de stabilisation des systèmes singuliers linéaires, nous allons définir la classe de systèmes singuliers non linéaires considérée. Ensuite, la synthèse de la commande $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état statique sera étudiée. Ces résultats supposent que l'état du système est entièrement accessible. Par la suite, cette hypothèse est levée et le cas où l'état est inaccessible à la mesure est traité à l'aide d'une commande basée observateur. Un exemple académique est donné afin de valider les résultats de ce chapitre.

Chapitre 1

Présentation de l'état de l'art sur les systèmes singuliers

Sommaire

1.1 Introduction 5
1.2 Présentation des systèmes singuliers 6
1.3 Propriétés structurelles des système singuliers 9
1.3.1 Régularité 9
1.3.2 Equivalence entre systèmes singuliers 10
1.3.3 Réponse temporelle et causalité 11
1.3.4 Commandabilité, $R-$commandabilité et $Imp-$commandabilité 13
1.3.5 Obsevabilité, $R-$observabilité, $Imp-$Observabilité et détectabilité 16
1.4 Outils pour l'analyse des systèmes dynamiques 18
1.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov 18
1.4.2 Norme $\mathcal{H}_\infty$, gain $\mathcal{L}_2$ 21
1.5 Observateurs d'état 22
1.5.1 Observateurs d'ordre réduit 22
1.5.2 Observateurs d'état des systèmes singuliers linéaires 24
1.5.3 Observateurs d'état des systèmes non linéaires 27
1.5.4 Observateurs d'état des systèmes singuliers non linéaires 39
1.6 Stabilisation par retour d'état statique et par commande basée observateur 40
1.6.1 Stabilisation par retour d'état statique 40
1.6.2 Stabilisation par commande basée observateur 41
1.7 Conclusion 41

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons quelques rappels et définitions des méthodes et des techniques utilisées dans ce mémoire, ainsi que quelques travaux qui permettent de se

positionner vis-à-vis de ce qui se fait dans le domaine de l'observation et de la commande des systèmes non linéaires.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. D'abord, nous commençons par une introduction aux systèmes singuliers. Après nous nous intéressons aux propriétés structurelles des systèmes singuliers telles que, la régularité, l'équivalence, la réponse temporelle, la causalité, l'observabilité et la commandabilité. En suite, nous présentons quelques outils utilisés dans l'analyse de la stabilité et de la robustesse des systèmes dynamiques. La troisième partie est consacrée à un état de l'art sur l'observation et la synthèse des observateurs pour les différents types de systèmes ; les systèmes linéaires ordinaires, les systèmes singuliers linéaires, les systèmes non linéaires et les systèmes singuliers non linéaires. Enfin, nous allons présenter le principe de base de la commande par retour d'état statique et la commande basée observateur dans la dernière partie.

1.2 Présentation des systèmes singuliers

La modélisation d'état d'un processus est obtenue en appliquant la méthode dite de variables d'états. Cette méthode offre une meilleure compréhension du système et s'avère très intéressante pour l'analyse et la synthèse des systèmes. Pour obtenir un modèle d'espace d'état, nous devons choisir quelques variables qui ont une signification physique comme la vitesse, le poids, la température, l'accélération, etc. Ces variables doivent contenir suffisamment d'informations pour caractériser le processus étudié. Puis, plusieurs équations seront établies à partir des relations entre ces variables. Généralement, ce sont des équations différentielles et algébriques qui décrivent le modèle mathématique d'un processus physique. Nous arrivons naturellement à une mise en équation de la forme suivante :

$$f(\dot{x}(t), x(t), u(t)) = 0 \tag{1.1a}$$
$$g(x(t), u(t), y(t)) = 0 \tag{1.1b}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état regroupant les variables d'état, $\dot{x}(t)$ est sa dérivée par rapport au temps, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ désigne le vecteur de commande et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des sorties mesurées. Un cas particulier des systèmes de la forme (1.1) qui est utilisé pour décrire certains types de processus est le suivant :

$$E(t)\dot{x}(t) = H(x(t), u(t)) \tag{1.2a}$$
$$y(t) = J(x(t), u(t)) \tag{1.2b}$$

avec H et J des fonctions de $x(t)$, $u(t)$ et t. La matrice $E(t)$ peut être singulière. Le système (1.2) est appelé système singulier. Si maintenant H et J sont des fonctions linéaires de l'état $x(t)$ et $u(t)$, on obtient le système singulier linéaire suivant :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.3a}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{1.3b}$$

où E, A, B et C sont des matrices réelles, constantes et de dimensions compatibles avec les dimensions de $x(t), u(t)$ et $y(t)$. Si la matrice E est non singulière, on peut dans ce cas se ramener à un système standard (usuel) qui aura la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t) \tag{1.4a}$$
$$y(t) = Cx(t) \tag{1.4b}$$

Dans ce mémoire on s'intéresse plus particulièrement aux systèmes singuliers. Donc, dans notre cas la matrice E est toujours considérée singulière c-à-d $rangE = q < n$, où n représente l'ordre du système.

De nombreux processus peuvent être décrits par la forme d'état dans (1.3), nous donnons ci-dessous quelques exemples

1.2.0.1 Exemple 1

Considérons le circuit électrique représenté par la figure (1.1)

Le circuit est commandé par la tension $v(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$ et on mesure les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ traversant respectivement les deux résistances de valeur R_1 et R_2. La charge aux bornes du condensateur de capacité C est notée $q(t)$ et L désigne une inductance pure.

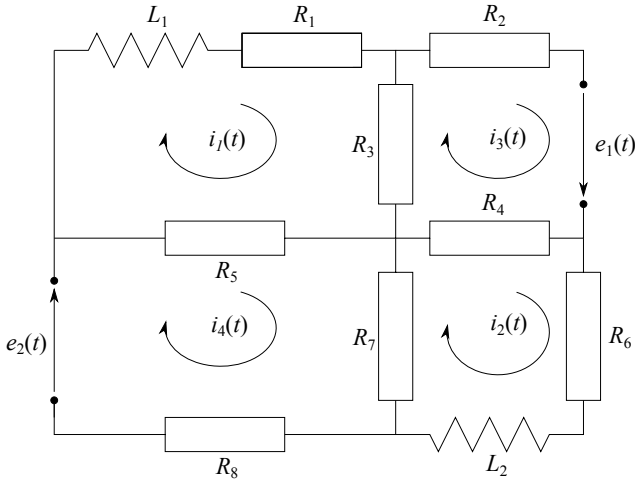


FIGURE 1.1: Un circuit électrique

En appliquant la loi des mailles, nous obtenons les équations suivantes :

$$L_1\frac{di_1(t)}{dt} = -(R_1 + R_3 + R_5)i_1(t) + R_3i_3(t) + R_5i_4(t) \tag{1.5a}$$
$$L_2\frac{di_2(t)}{dt} = -(R_4 + R_6 + R_7)i_2(t) + R_4i_3(t) + R_7i_4(t) \tag{1.5b}$$

$$0 = R_3 i_1(t) + R_4 i_2(t) - (R_2 + R_3 + R_4) i_3(t) + e_1(t) \tag{1.5c}$$
$$0 = R_5 i_1(t) + R_7 i_2(t) - (R_5 + R_7 + R_8) i_4(t) + e_2(t) \tag{1.5d}$$

On choisit comme variables d'état $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$, $i_4(t)$. Nous obtenons alors la représentation sous forme d'état généralisée suivante :

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \\ \dot{i}_3(t) \\ \dot{i}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{11} & 0 & R_{13} & R_{14} \\ 0 & -R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & -R_{33} & 0 \\ R_{41} & R_{42} & 0 & R_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v(t) \tag{1.6a}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \end{bmatrix} \tag{1.6b}$$

avec $R_{11} = R_1 + R_3 + R_5, R_{13} = R_{31} = R_3, R_{14} = R_{41} = R_5, R_{22} = R_4 + R_6 + R_7,$

$R_{23} = R_{32} = R_4, R_{24} = R_{42} = R_7, R_{33} = R_2 + R_3 + R_4, R_{44} = R_5 + R_7 + R_8$

1.2.0.2 Exemple 2

Soit le processus de la figure (1.2). Un disque roulant sur une surface sans glissement, relié à un mur fixe par l'intermédiaire d'un ressort non linéaire et un amortisseur linéaire. Le ressort a deux coefficients de raideur positifs K_1, K_2. Le coefficient d'amortissement est donné par b qui est aussi positif. Le rayon du disque est noté r, son inertie est J et sa masse est m.

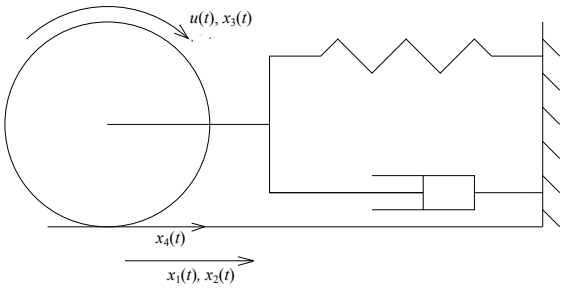


FIGURE 1.2: Un disque roulant

Le choix des variables d'état pour ce modèle est le suivant :
$x_1(t)$: La position du centre du disque.
$x_2(t)$: La vitesse de translation du disque.
$x_3(t)$: La vitesse angulaire du disque.
$x_4(t)$: La force de contact entre le disque et la surface.

Ainsi, ce processus peut être modélisé par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) && (1.7a)\\
\dot{x}_2(t) &= \frac{-K_1}{m}x_1(t) - \frac{-K_2}{m}x_1^3(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}x_4(t) && (1.7b)\\
\dot{x}_3(t) &= -\frac{r}{J}x_4(t) + \frac{1}{J}u(t) && (1.7c)\\
0 &= x_2(t) - rx_3(t) && (1.7d)
\end{aligned}$$

de (1.7d), (1.7c) et (1.7b) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) && (1.8a)\\
\dot{x}_2(t) &= \frac{-K_1}{m}x_1(t) - \frac{-K_2}{m}x_1^3(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}x_4(t) && (1.8b)\\
0 &= x_2(t) - rx_3(t) && (1.8c)\\
0 &= \frac{-K_1}{m}x_1(t) - \frac{-K_2}{m}x_1^3(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + (\frac{r^2}{J} + \frac{1}{m})x_4(t) - \frac{r}{J}u(t) && (1.8d)
\end{aligned}$$

ce qui donne sous forme matricielle le système

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (\frac{-K_1}{m} - \frac{-K_2}{m}x_1^2) & -\frac{b}{m} & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 1 & -r & 0 \\ (-\frac{-K_1}{m} - \frac{-K_2}{m}x_1^2) & -\frac{b}{m} & 0 & (\frac{r^2}{J} + \frac{1}{m}) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{r}{J} \end{bmatrix} u(t) \quad (1.9a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (1.9b)$$

1.3 Propriétés structurelles des système singuliers

1.3.1 Régularité

Définition 1.3.1. *Le système singulier linéaire* (1.3) *a une réponse unique pour une entrée suffisamment différentiable et une condition initiale donnée, si et seulement si le faisceau matriciel* (E, A) *est régulier.*

Définition 1.3.2. *Le faisceau matriciel* (E, A) *est dit régulier, si et seulement si* $det(sE - A) \not\equiv 0$*, c-à-d s'il existe un scalaire* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tel que* $det(\alpha E - A) \neq 0$*.*

Lemme 1.3.1. *[Dai88] Les différentes propositions suivantes sont équivalentes*

1. *Le système* (1.3) *est régulier.*
2. *La paire* (E, A) *est régulière.*
3. *Pour* $X_0 = KerA$*,* $X_i = \{x | Ax_{i-1}\}$*, nous avons* $KerE \cap X_i = 0$ *pour* $i = 0, 1, 2, \cdots$;

4. *Soit les matrices* $G(k) \in \mathbb{R}^{(k+1)n \times nk}$, *et* $F(k) \in \mathbb{R}^{nk \times (k+1)n}$, *telles que ;*

$$G(k) = \begin{bmatrix} E & & & \\ A & E & & \\ & A & \ddots & \\ & & \ddots & E \\ & & & A \end{bmatrix} \quad et \quad F(k) = \begin{bmatrix} E & A & & & \\ & E & A & & \\ & & E & A & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & E & A \end{bmatrix}$$

   $rangG(k) = rangF(k) = nk$ *pour* $k = 0, 1, 2, \cdots$;

5. *Pour chaque paire* (E, A), *il existe deux matrices non singulières* Q *et* P *telles que*

$$QEP = \begin{bmatrix} I_{n2} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \quad et \quad QAP = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n2} \end{bmatrix}$$

   où $n_1 + n_2 = n$, *la matrice* $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ *et la matrice* $N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ *est nilpotente d'indice de nilpotence* h, *c-à-d* $N^h = 0$.

1.3.2 Equivalence entre systèmes singuliers

Considérons le système de la forme (1.3) et le système suivant :

$$\tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \tag{1.10a}$$
$$y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) \tag{1.10b}$$

les deux systèmes (1.3) et (1.10) sont dits équivalents s'il existe deux matrices non singulières P et Q telles que

$$x = P\tilde{x} \quad \text{tel que;} \quad QEP = \tilde{E}, \quad QAP = \tilde{A}, \quad QB = \tilde{B}, \quad \text{et} \quad CP = \tilde{C}.$$

Il est facile de démontrer que les propriétés de la relation d'équivalence sont vérifiées. Ainsi, la réflexivité est vérifiée par $Q = P = I_n$, en multipliant les matrices de passage on peut vérifier la transitivité, et la symétrie est assurée par l'inversibilité des matrices de passage.

1.3.2.1 La forme de Kronecker-Weierstrass

Considérons le système (1.3), il existe toujours deux matrices non singulières telles que (1.3) est équivalent à

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = A_1\bar{x}_1(t) + B_1u(t) \tag{1.11a}$$
$$N\dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{x}_2(t) + B_2u(t) \tag{1.11b}$$

$$y(t) \;=\; C_1\bar{x}_1(t) + C_2\bar{x}_2(t) \tag{1.11c}$$

où $\bar{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}, \bar{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $y(t) \in \mathbb{R}^r$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, N est nilpotente d'indice de nilpotence h, c-à-d $N^h = 0$, et $QEP = diag(I_{n_1}, N)$, $\quad QAP = diag(A_1, I_{n_2})$, $QB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$, $\quad CP = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$.

Le système (1.11a) est dit *sous-système lent* et le système (1.11b) est dit *sous-système rapide*.

1.3.2.2 La forme par décomposition en valeurs singulières

Pour toute matrice E de rang q, il existe toujours deux matrices non singulières $\bar{Q}$ et $\bar{P}$ telles que $\bar{Q}E\bar{P} = diag(I_q, 0)$. En considérant le changement de coordonnées $\bar{P}^{-1}x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, avec $x_1 \in \mathbb{R}^q$ et $x_2 \in \mathbb{R}^{n-q}$, le système (1.3) devient équivalent à

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) && \text{(1.12a)} \\ 0 &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) && \text{(1.12b)} \\ y(t) &= C_1x_1(t) + C_2x_2(t) \end{aligned}$$

$$\text{où} \qquad \bar{Q}A\bar{P} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C\bar{P} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}.$$

Dans cette transformation, les matrices $\bar{Q}$ et $\bar{P}$ ne sont pas uniques, donc on peut trouver plusieurs systèmes équivalents selon le choix de ces deux matrices. Le système (1.12a) est une équation différentielle qui traduit la partie dynamique du système (1.3), tandis que l'équation (1.12b) est une équation algébrique qui représente les connections entre les sous-systèmes de (1.3).

1.3.3 Réponse temporelle et causalité

Considérons la forme équivalente de Kronecker-Weierstrass (1.11) avec

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t), \quad y_1(t) = C_1\bar{x}_1 \quad \text{et} \quad y_2(t) = C_2\bar{x}_2$$

Ainsi, le sous-système lent (1.11a) est une équation différentielle ordinaire. Il possède une solution unique pour toute entrée continue par morceaux $u(t)$ et une condition initiale $\bar{x}(0)$, donnée par

$$\bar{x}_1(t) = e^{A_1t}\bar{x}(0) + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)}B_1u(\tau)d\tau \tag{1.13}$$

Et en dérivant le sous-système rapide (1.11a), et par la pré-multiplication par la matrice N, nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl} N\dot{\bar{x}}_2(t) & = & \bar{x}_2(t) + B_2u(t) \\ N^2\bar{x}_2^{(2)}(t) & = & N\bar{x}_{(2)}(t) + NB_2\bar{u}(t) \\ & \cdots\cdots & \\ N^h\bar{x}_2^{(h)}(t) & = & N^{h-1}\bar{x}_2^{(h-1)}(t) + N^{h-1}B_2u^{(h-1)}(t) \end{array} \tag{1.14}$$

Nous avons $N^h = 0$, donc la dernière équation devient

$$0 \;=\; N^{h-1}\bar{x}_2^{(h-1)}(t) + N^{h-1}B_2u^{(h-1)}(t) \tag{1.15}$$

En additionnant ces équations, nous pouvons déduire la solution de $\bar{x}_2$ comme suit :

$$\bar{x}_2 \;=\; -\textstyle\sum_{i=0}^{h-1} N^iB_2u^{(i)}(t) \tag{1.16}$$

$\bar{x}_2$ est une combinaison linéaire des dérivés de $u(t)$ par rapport au temps.
Les deux solutions (1.13) et (1.16) constituent la solution entière $x(t)$ et la réponse $y(t)$, elles sont données par :

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & P\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}(e^{A_1t}\bar{x}(0) + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)}B_1u(\tau)d\tau) - P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}\sum_{i=0}^{h-1} N^iB_2u^{(i)}(t) \\ y(t) & = & CP\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}(e^{A_1t}\bar{x}(0) + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)}B_1u(\tau)d\tau) - CP\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}\sum_{i=0}^{h-1} N^iB_2u^{(i)}(t) \end{array} \tag{1.17}$$

Pour $t \longrightarrow 0^+$ la solution (1.17) impose la condition initiale suivante

$$x(0^+) \;=\; P\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\bar{x}(0) - P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}\sum_{i=0}^{h-1} N^iB_2u^{(i)}(0^+) \tag{1.18}$$

Les conditions initiales vérifiant cette contrainte sont dites admissibles. L'équation (1.17) implique la connaissance des entrées et des états futurs pour connaître l'état à l'instant t, d'où le problème de causalité.

Définition 1.3.3. *(Causalité)*
(1) le système (1.3) *est causal si et seulement s'il n'y a pas de pôles infinis.*
(2) Le système linéaire singulier (1.3) *est causal si la relation suivante*

$$degré|sE - A| = rangE, \qquad \forall s \in \mathbb{C} \quad \text{et } s \text{ fini.}$$

est satisfaite.

Les pôles infinis sont générés par la matrice N, dans ce cas, le système (1.3) est causal si la matrice N est nulle.

Remarque 1.3.1.

(1) Si la matrice E n'est pas carrée et de rang plein ligne, alors le système (1.3) est causal.

(2) Si la matrice E n'est pas carrée et n'est pas de rang plein ligne, alors il existe deux matrices non singulières P et Q, telles que

$$QAP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad QEP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

le système (1.3) est causal si et seulement si la matrice A_{22} est de rang plein colonne.

Avant aborder les problèmes d'observabilité et de commandabilité, d'abord nous commençons par caractériser l'ensemble d'états atteignable.

Définition 1.3.4. *(Etat atteignable) Un état x_a est dit atteignable, s'il existe une condition initiale x_0, une commande $u(t) \in C_m^{h-i}$ et $t_f > 0$ telles que $x(t_f) = x_a$. En utilisant l'expression de l'état donné par* (1.13) *et* (1.16)*, on en déduit l'espace atteignable.*

Théorème 1.3.1. *[Dai89] Soit $R(0)$ l'ensemble des états atteignables depuis une condition initiale nulle $x_0 = 0$, $R(0)$ est défini par*

$$R(0) = Im \begin{bmatrix} B_1 & A_1B_1 & \cdots & A_1^{n_1-1}B_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} B_2 & NB_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

où $\oplus$ désigne la somme directe d'espaces vectoriels. Notons R l'ensemble des états atteignables depuis toutes les conditions initiales $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, R est défini par

$$R = \cup_{x_0}(R(0) + H(x_0)) \tag{1.20}$$

où $H(x_0)$ représente la réponse libre à la condition initiale x_0 définie par

$$H(x_0) = \{x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \mid x_1(t) = e^{A_1 t}x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}, x_2(t) = 0 \in \mathbb{R}^{n_2}\} \tag{1.21}$$

1.3.4 Commandabilité, $R-$commandabilité et $Imp-$commandabilité

1.3.4.1 Commandabilité

Définition 1.3.5. *(Commandabilité) Le système* (1.3) *est dit commandable, si pour tout $t_1 > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout état $x_f \in \mathbb{R}^n$, il existe une commande $u(t) \in \mathbb{C}_p^{h-1}$ telle que $x(t_1) = x_f$.*

Il est facile de remarquer que cette définition est une généralisation naturelle du concept de la commandabilité pour le cas standard.

Considérons le système (1.3) *sous sa forme de Kronecker-Weierstrass* (1.11) *alors nous pouvons donner le théorème suivant :*

Théorème 1.3.2. *[Dai89]*

(1) Le sous-système lent (1.11a) *est commandable si et seulement si* $rang\begin{bmatrix} sE-A & B \end{bmatrix} = n$, $\forall s \in \mathbb{C}$ *et* s *fini.*

(2) Les propositions suivantes sont équivalentes

(a) le système rapide (1.11b) *est commandable.*

(b) $rang\begin{bmatrix} B_2 & NB_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 \end{bmatrix} = n_2$

(c) $rang\begin{bmatrix} N & B_2 \end{bmatrix} = n_2$

(d) $rang\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix} = n.$

(e) Pour toutes matrices non singulières Q_1 *et* P_1 *satisfaisant* $E = Q_1 diag(I,0)P_1$, *on pose* $Q_1B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$; *donc,* B_2 *est de rang plein ligne c-à-d* $rang B_2 = n - rang E.$

(3) Les propositions suivantes sont équivalentes

(a) Le système (1.3) *est commandable.*

(b) Les sous-systèmes lent (1.11a) *et rapide* (1.11b) *sont tous les deux commandables.*

(c) $rang\begin{bmatrix} B_1 & A_1B_1 & \cdot & A_1^{n_1-1}B_1 \end{bmatrix} = n_1$ *et* $rang\begin{bmatrix} B_2 & NB_2 & \cdot & N^{h-1}B_2 \end{bmatrix} = n_2$

(d) $rang\begin{bmatrix} sE-A & B \end{bmatrix} = n$ $\forall s \in \mathbb{C}$ *et* s *fini, et* $rang\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix} = n$

(e) La matrice $\mathcal{D}_1 \in \mathbb{R}^{n^2 \times (n+m-1)n}$ *telle que*

$$\mathcal{D}_1 = \begin{bmatrix} -A & & & & B & & & \\ E & -A & & & & B & & \\ & E & \ddots & & & & B & \\ & & \ddots & -A & & & & B \\ & & & E & & & & \end{bmatrix}$$

où d'une manière équivalente

$$\mathcal{D}_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -A & B \\ E & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} -A & B \\ E & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix} -A & B \\ E & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

est de rang plein ligne.

1.3.4.2 $R-$commandabilité

Un système singulier est dit $R-$*commandable s'il est commandable sur l'espace atteignable.*

Définition 1.3.6. *(R-commandabilité) Le système* (1.3) *est dit* $R-$*commandable si pour tout instant* $t_1 > 0$*, tout état initial* $x_0^t\mathbb{R}^n$ *et tout état* $x_1^t \in \mathbb{R}^n$*, il existe toujours une commande admissible* $u(t) \in \mathbb{C}_p^{h-1}$ *telles que* $x(t_1) = x_1^t$.

Théorème 1.3.3. *[Dai89] Soit le système* (1.3) *dans sa forme équivalente de Kronecker-Weierstrass. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) Le système (1.3) *est* $R-$*commandable.*

(b) Le sous-système lent (1.11a) *est commandable.*

(c) $rang\begin{bmatrix} sE - A & B \end{bmatrix} = n$, $\forall s \in \mathbb{C}$ *et* s *fini.*

(d) $rang\begin{bmatrix} B_1 & A_1B_1 & \ddots & A_1^{n_1-1}B_1 \end{bmatrix} = n_1$

(e) La matrice $\mathcal{D}_2 \in \mathbb{R}^{kn\times(n+m)k}$*, avec* $k \geq n_1$ *telle que*

$$\mathcal{D}_2 = \begin{bmatrix} -A & & & & B & & & \\ E & -A & & & & B & & \\ & E & \ddots & & & & B & \\ & & \ddots & -A & & & & B \\ & & & E & & & & \end{bmatrix}$$

est de rang plein ligne.

La commandabilité et la $R-$commandabilité ne concernent pas les termes impulsifs qui peuvent apparaître à cause de l'entrée et de ses dérivées. Il est donc nécessaire d'analyser l'effet de la commande sur les termes impulsifs qui peuvent apparaître dans la réponse temporelle du système singulier. D'où l'introduction de la commandabilité impulsive ($Imp-$commandable).

1.3.4.3 $Imp-$commandabilité

Définition 1.3.7. *Le système* (1.3) *est dit Imp-commandable si pour toute condition initiale* $x_0^t\mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}$ *et* $x_s^t\,\mathbb{R}^{n_2}$*, il existe toujours une commande admissible* $u(t) \in \mathbb{C}_p^{h-1}$ *telle que* $x_\tau(t) = I_\tau(x_s^t, t)$*. avec* $I_\tau(x_s^t, t)$ *contenant tous les termes impulsifs possibles dans* $x(t)$ *à l'instant* τ *où*

$$I_\tau(x_s^t, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{2\tau}(x_s, t) \end{bmatrix}, \quad et \quad I_{2\tau}(x_s, t) = \sum_{i=1}^{h-1} \delta^{i-1}(t-\tau)N^i x_s.$$

Théorème 1.3.4. *[Dai89] Soit le système* (1.3) *dans sa forme équivalente de Kronecker-Weierstrass. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) Le système (1.3) *est* $Imp-$*commandable.*

(b) Le sous-systèmes rapide (1.11b) *est* $Imp-$*commandable.*

(c) $KerN \oplus Im\begin{bmatrix} B_2 & NB_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^{n_2}$.

(d) $ImN = Im\begin{bmatrix} B_2 & NB_2 & \cdots & N^{h-1}B_2 \end{bmatrix}$..

(d) $ImN \oplus ImB_2 = \mathbb{R}^{n_2}$.

(d) $rang \begin{bmatrix} A & E & B \\ E & 0 & 0 \end{bmatrix} = n + r.$

1.3.5 Obsevabilité, $R-$observabilité, $Imp-$Observabilité et détectabilité

1.3.5.1 Observabilité

Définition 1.3.8. *(Observabilité) Le système* (1.3) *est dit observable si la condition initiale* x_0 *peut être déterminée de manière unique à partir de* $u(t)$ *et* $y(t)$*, pour tout* $t \geq 0$*.*

Cette définition de l'observabilité est générale et correspond à celle des systèmes standards.

Considérons le système (1.11), et soit

$$R_s = Ker \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1A_1 \\ \vdots \\ C_1A_1^{n_1-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R_f = Ker \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2N \\ \vdots \\ C_{2N}^{h-1} \end{bmatrix}$$

Théorème 1.3.5. *[Dai89]*

(1) Soit $u(t) \equiv 0$*, donc* $y(t) \equiv 0, t \geq 0$ *si et seulement si* $x(0) \in R_s \oplus R_f$*.*

(2) Le sous-système lent (1.11a) *est observable si et seulement si* $rang \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n,$ $\forall s \in \mathbb{C}$ *et* s *fini.*

(3) Les propositions suivantes sont équivalentes

(a) Le système rapide (1.11b) *est observable .*

(b) $rang \begin{bmatrix} C_2 \\ CN \\ \vdots \\ C_2N^{h-1} \end{bmatrix} = n_2$

(c) $Ker \begin{bmatrix} N \\ C_2 \end{bmatrix} = 0$

(d) $rang \begin{bmatrix} N \\ C_2 \end{bmatrix} = n_2$

(e) $rang \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n.$

(f) Pour toutes matrices non singulières Q_1 *et* P_1 *satisfaisant* $Q_1EP_1 = diag(I_q, 0)$*,* $CP_1 = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$*;* C_2 *est de rang plein colonne et* $rangC_2 = n - rangE$*.*

(4) Les propositions suivantes sont équivalentes

(a) Le système (1.3) *est observable.*

(b) Les sous-systèmes lent (1.11a) *et rapide* (1.11b) *sont observables.*

(c) $rang \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n$, $\forall s \in \mathbb{C}$ *et* s *fini, et* $rang \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$

(d) La matrice $\Theta_1 \in \mathbb{R}^{(n+r-1)n \times n^2}$ *telle que*

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} -A & E & & & & \\ & -A & E & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -A & E & \\ C & & & & & \\ & C & & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & C & \end{bmatrix}$$

est de rang plein colonne.

1.3.5.2 $R-$observabilité

Un système singulier est dit $R-observable$ s'il est observable sur l'espace atteignable.

Définition 1.3.9. *(R-observabilité) Le système* (1.3) *est dit* $R-observable$ *si tout état de l'espace atteignable peut être déterminé de manière unique à partir de la sortie y(t) et de l'entrée* $u(\tau)$ *pour* $0 < \tau < t$.

Théorème 1.3.6. *Soit le système* (1.3) *dans sa forme équivalente de Kronecker-Weierstrass. Les propositions suivantes sont équivalentes*

(a) Le système (1.3) *est* $R-observable$.

(b) Le sous-système lent (1.11a) *est observable.*

(c) $rang \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n$, $\forall s \in \mathbb{C}$ *et* s *fini.*

(d) La matrice $\Theta_2 \in \mathbb{R}^{(n+r)k \times nk}$, *avec* $k \geq n_1$ *telle que*

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} -A & E & & & & \\ & -A & E & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -A & E & \\ & & & & -AC & \\ & C & & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & C \end{bmatrix}$$

est de rang plein colonne nk.

La $R-$observabilité ne concerne que les états atteignables, donc ne reflète pas l'observabilité des termes impulsifs, cette dernière est assurée par l'observabilité impulsive ($Imp-$observabilité).

1.3.5.3 $Imp-$observabilité

Le système (1.3) est dit Imp-observable si les termes impulsifs de l'état $x_\tau(t)$ peuvent être déterminés de manière unique à partir de la sortie implusive $y_\tau(t)$ et de $\Delta_\tau u(t)$, avec $\Delta_\tau u(t)$ représente les sauts de l'entrée.
Cette défnition n'est valable que pour $x_\tau(\tau)$ et $y_\tau(\tau)$ différents de zéro.

Théorème 1.3.7. *Soit le système* (1.3) *dans sa forme équivalente de Kronecker-Weierstrass. Les propositions suivantes sont équivalentes*

(a) Le système (1.3) *est $Imp-$observable.*

(b) Le sous-systèmes rapide (1.11b) *est Imp-observable.*

(c) $Ker \begin{bmatrix} C_2^T & C_2^T N^T & \cdots & C_2^T (N^{h-1})^T \end{bmatrix}^T \bigcap ImN = 0.$

(d) $NKer \begin{bmatrix} C_2^T & C_2^T N^T & \cdots & C_2^T (N^{h-1})^T \end{bmatrix}^T = KerN.$

(d) $KerN = KerC_2 = ImN = 0.$

(d) $rang \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + rankE.$

1.3.5.4 Détectabilité

Définition 1.3.10. *(Détectabilité) Un système singulier de la forme* (1.3) *est dit détectable s'il existe une matrice $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$ telle que le faisceau matriciel $(sE - A - GC)$ soit stable.*

Théorème 1.3.8. *Le système* (1.3) *est détectable si et seulement si*

$rang \begin{bmatrix} sE^T - A^T & C^T \end{bmatrix}^T = n$, $\forall s \in \mathbb{C}^+$ *et s fini.*

1.4 Outils pour l'analyse des systèmes dynamiques

1.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov

Dans cette section, nous rappelerons quelques concepts sur la stabilité des systèmes dynamiques à temps continu. La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour des points d'équilibre. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre.

La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie générale valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée

au voisinage d'un point d'équilibre en reste suffisamment proche.

On considère un système non linéaire décrit par son modèle d'état

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \tag{1.22}$$

Avec $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et la condition initiale $x(t_0) = x_0$, on suppose que le système possède un point d'équilibre $\bar{x}$

Définition 1.4.1. *(Equilibre stable) Le point $\bar{x}$ est un point d'équilibre stable du système* (1.22) *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \textit{tel que}; \qquad ||x_0 - \bar{x}|| < \delta \Longrightarrow ||x(t, x_0, u) - \bar{x}|| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

avec $x(t, x_0, u)$ désigne la solution à l'instant $t \geq t_0$ du système (1.22)*. Si cette condition n'est pas satisfaite, le point d'équilibre est instable.*

Définition 1.4.2. *(Equilibre attracteur)*
Le point $\bar{x}$ est un point d'équilibre attracteur du système (1.22) *si*

$$\exists \quad \delta > 0 \quad \textit{tel que}; \qquad ||x_0 - \bar{x}|| < \delta \Longrightarrow \lim_{t \to \infty} ||x(t, x_0, u) - \bar{x}|| = 0, \forall t \geq t_0$$

$\bar{x}$ est un équilibre attracteur veut dire que $\bar{x}$ est un point vers lequel convergent les solutions $x(t)$ si elles démarrent suffisamment près de $\bar{x}$. Lorsque $\delta = +\infty$, on dit que $\bar{x}$ est globalement attractif.

Définition 1.4.3. *(Equilibre asymptotiquement stable) Le point $\bar{x}$ est un point d'équilibre asymptotiquement (resp. globalement asymptotiquement) stable pour le système* (1.22) *s'il est stable et attractif (resp. globalement attracteur).*

Un ensemble d'états initiaux x_0 à partir desquels les trajectoires convergent vers un équilibre asymptotiquement stable est appelé bassin d'attraction.

La stabilité asymptotique est la propriété qui est généralement recherchée en pratique. Cette définition ne nous dit rien sur la vitesse avec laquelle la trajectoire $x(t)$ converge vers son équilibre. C'est pourquoi, on introduit la notion suivante de stabilité exponentielle.

Définition 1.4.4. *(Stabilité exponentielle)*
Le point $\bar{x}$ est un point d'équilibre exponentiel stable si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \beta > 0 \quad et \quad \delta > 0 \quad \textit{tel que};$$

$$||x_0 - \bar{x}|| < \delta \Longrightarrow ||x(t, x_0, u) - \bar{x}|| \leq \alpha ||x_0 - \bar{x}|| exp(-\beta t), \forall t \leq t_0$$

Il est évident que la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

Par la suite, nous nous intéresserons à la stabilité autour de l'origine c-à-d quand $\bar{x} = 0$.

1.4.1.1 Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation du système (1.22) autour de l'équilibre $\bar{x}$. Donc elle équivaut à examiner les valeurs propres $\lambda_i(A)$, où A est la matrice Jacobienne évaluée à l'équilibre, c-à-d

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$$

Définition 1.4.5. *(méthode indirecte de Lyapunov) Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont à partie réelle négative c-à-d*

$$\forall \quad i \quad tel\ que; \quad Re(\lambda_i(A)) < 0$$

le point d'équilibre $\bar{x}$ est exponentiellement stable. Sinon, si A possède au moins une valeur propre à partie réelle positive c-à-d

$$\exists \quad i \quad tel\ que; \quad Re(\lambda_i(A)) > 0$$

l'équilibre $\bar{x}$ est instable.

Cette méthode est simple à mettre en oeuvre mais elle ne permet d'analyser que très partiellement la stabilité, car elle ne donne aucune indication sur la taille des bassins d'attraction.

1.4.1.2 Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)

Cette méthode est basée sur la définition d'une fonction particulière définie positive (notée généralement $V(x,t)$), appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. Elle est plus difficile à mettre en oeuvre par rapport à la méthode indirecte, mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale.

Définition 1.4.6. *(Stabilité locale et stabilité asymptotique)*
L'origine est un point d'équilibre localement stable pour le système (1.22) *s'il existe une fonction $V(x,t)$ continue et différentiable et s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_0$ telles que*

1. $\forall x \in \mathcal{V}_0, \quad V(x,t) > 0$
2. $\forall x \in \mathcal{V}_0, \quad \dot{V}(x,t) = \dfrac{dV(x,t)}{dt} = \dfrac{\partial V(x,t)}{\partial x}\dot{x}(t) \leq 0$

Si $\dot{V}(x,t) < 0$, $V(t,x)$ est appelée fonction de Lyapunov au sens strict. Dans ce cas l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Définition 1.4.7. *(Stabilité exponentielle)*
L'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable pour le système (1.22) *s'il existe une fonction $V(x,t)$ continue et différentiable, des constantes $\alpha, \beta, \gamma > 0, p \geq 0$ et s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_0$ tel que*

1. $\forall x \in \alpha||x||^p \leq V(x,t) < \beta||x||^p$
2. $\forall x \in \mathcal{V}_0, \quad \dot{V}(x,t) < -\gamma V(x,t).$

1.4.2 Norme $\mathcal{H}_\infty$, gain $\mathcal{L}_2$

Considérons le système linéaire décrit par

$$G := \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bw(t) \\ z(t) & = & Cx(t) + Dw(t) \end{array} \right. \tag{1.23}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ set le vecteur de sortie et $w(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée.

Définition 1.4.8 (Norme $\mathcal{H}_\infty$)**.** *[Fra87] La norme $\mathcal{H}_\infty$ du système* (1.23)*, stable ou instable, est définie par*

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \lambda_{\max}(G(j\omega)G^T(-j\omega)) \tag{1.24}$$

dans le cas où le système (1.23) *n'a pas de pôle, sur l'axe imaginaire.*

Définition 1.4.9. *On définit l'énergie E d'un signal $w(t)$ comme l'intégrale de sa puissance :*

$$E = \int_0^\infty \|w(t)\|^2 \, dt. \tag{1.25}$$

En d'autres termes, la norme $\mathcal{H}_\infty$ d'une fonction de transfert représente le maximum sur toute la bande de fréquence de la valeur singulière maximale de la réponse fréquentielle du système considéré. Elle permet de spécifier des conditions du *pire cas*. Cette propriété en fait une norme très pertinente pour traiter les problèmes de robustesse.

La norme $\mathcal{H}_\infty$ est définie par (1.24), que le système soit stable ou instable, tant que le système ne possède pas de pôles sur l'axe imaginaire. En effet, $\left\|\frac{1}{s+1}\right\|_\infty = \left\|\frac{1}{s-1}\right\|_\infty = 1$, tandis que $\left\|\frac{1}{s}\right\|_\infty = \infty$. Toutefois, pour une entrée bornée, le système $\frac{1}{s+1}$ possède une sortie bornée, ce qui n'est pas vrai pour le système $\frac{1}{s-1}$. Il est donc nécessaire de définir le gain $\mathcal{L}_2$.

Définition 1.4.10 (Gain $\mathcal{L}_2$)**.** *[GL95] Si le système* (1.23) *est asymptotiquement stable, alors, $w(t) \in \mathcal{L}_2$ implique $z(t) \in \mathcal{L}_2$ et, pour $x(0) = 0$, le gain $\mathcal{L}_2$ du système* (1.23) *est donné par*

$$\|G\|_\infty = \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \ , \ \|w\|_2 \neq 0. \tag{1.26}$$

Le gain $\mathcal{L}_2$ sert à mesurer la quantité d'énergie transmise par le système. Si ce gain est inférieur à 1, on dit que le système est contractif ou non expansif. Ainsi, la notion de gain $\mathcal{L}_2$ est utile pour quantifier la façon dont le système rejette les perturbations externes.

Remarque 1.4.1 (Norme $\mathcal{H}_\infty$ et gain $\mathcal{L}_2$). L'utilisation du théorème de Parseval permet d'interpréter (1.26) comme un gain fréquentiel ou temporel sur les signaux (la norme $\mathcal{L}_2$ d'un signal temporel est la même que la norme $\mathcal{L}_2$ de la transformée de Fourrier de ce même signal). Ainsi, pour un système stable, la norme $\mathcal{H}_\infty$ de la fonction de transfert est la norme induite $\mathcal{L}_2$ de l'opérateur d'entrée-sortie associé au système, c'est donc le gain $\mathcal{L}_2$ du système. De plus, les équations (1.24) et (1.26) permettent de considérer $\|G\|_\infty$ comme une généralisation de la norme spectrale des matrices constantes.

Le lemme borné réel, qui fournit une majoration du gain $\mathcal{L}_2$ entre l'entrée et la sortie d'un système, peut être utilisé pour quantifier l'atténuation des perturbations.

1.5 Observateurs d'état

On appelle observateur d'état ou estimateur d'état pour le système $(\mathcal{S})$ un système dynamique auxiliaire $(\mathcal{O})$ dont les entrées sont les vecteurs d'entrée et de sortie du système $(\mathcal{S})$, et la sortie est l'état estimé, la figure (1.3) donne un schéma qui décrit ce principe

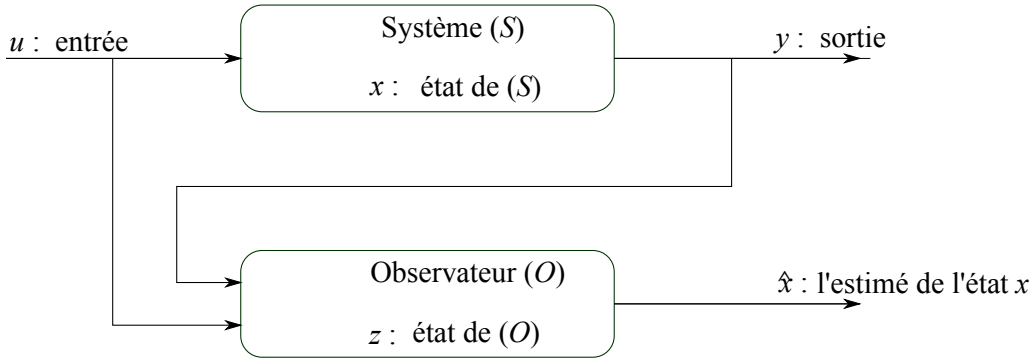


FIGURE 1.3: Observateur d'état

Soient les deux systèmes suivants :

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t) \tag{1.27a}$$
$$y(t) = h(x,u,t) \tag{1.27b}$$

$$\dot{z}(t) = f(z,u,y,t) \tag{1.28a}$$
$$\hat{x}(t) = h(z,u,y,t) \tag{1.28b}$$

Le système (1.28) est un observateur asymptotique local pour le système (1.27) si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $x(0) = \hat{x}(0) \Longrightarrow x(t) = \hat{x}(t), \quad \forall t \geq 0$
2. $\exists$ un espace ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$; $x(0) - \hat{x}(0) \in U \Longrightarrow ||x(t) - \hat{x}(t)|| \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$

1.5.1 Observateurs d'ordre réduit

Selon les cas d'étude, parfois seule une partie de l'état du système a besoin d'être estimée. En effet, certaines méthodes de commande ne nécessitent pas forcément de reconstruire tout l'état du système et nous remarquons également que généralement il est possible de trouver une transformation d'état de façon à ce que les sorties forment une partie du nouveau vecteur d'état, (voir [Sor97]). Dans cette section nous allons présenter à titre d'exemple un observateur d'ordre réduit de type Luenberger pour les systèmes linéaires à temps invariant LTI.

Soit le système linéaire suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.29a}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{1.29b}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie et $u(t) \in \mathbb{R}^q$ est l'entrée du système. Les matrice A, B et C sont constantes de dimensions appropriées telles que

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

où $rang C_1 = p$, $A_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}, C_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}, x_1 \in \mathbb{R}^p$ et $B_1 \in \mathbb{R}^{p \times q}$.

Nous effectuons le changement de variable suivant :

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} x(t)$$

Le système (1.29) devient

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \tag{1.30a}$$
$$y(t) = \bar{C}\bar{x}(t) \tag{1.30b}$$

où

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix}, \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

les différentes matrices sont calculées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= \begin{bmatrix} C_1 A_{11} + C_2 A_{21} \end{bmatrix} C_1^{-1} \\ \bar{A}_{12} &= \bar{A}_{11} C_2 + \begin{bmatrix} C_1 A_{12} + C_2 A_{22} \end{bmatrix} \\ \bar{A}_{21} &= A_{21} C_1^{-1} \\ \bar{A}_{22} &= A_{22} - A_{21} C_1^{-1} C_2 \\ \bar{B}_1 &= C_1 B_1 + C_2 B_2 \end{aligned}$$

Nous pouvons donc réécrire le système (1.29) comme suit :

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{A}_{11}\bar{x}_1(t) + \bar{A}_{12}\bar{x}_2(t) + \bar{B}_1 u(t) \tag{1.32a}$$
$$\dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{A}_{21}\bar{x}_1(t) + \bar{A}_{22}\bar{x}_2(t) + B_2 u(t) \tag{1.32b}$$

$$y(t) = \bar{x}_1(t) \tag{1.32c}$$

où la sortie $y(t)$ correspond aux p premiers états, qu'on n'a pas besoin d'estimer. Donc, il suffit de proposer un observateur uniquement pour estimer le vecteur $\bar{x}_2$. La première équation de (1.32) peut alors être considérée comme une mesure $\bar{y}(t)$ dépendant de $\bar{x}_2$, la partie du vecteur d'état à estimer, et de l'entrée $u(t)$ telle que

$$\bar{y}(t) = \dot{\bar{x}}_1(t) - \bar{A_{11}} x_1(t) - A_{11}\bar{x}_1(t) = A_{12}\bar{x}_2(t) + \bar{B}_1 u(t)$$

Soit l'observateur de Luenberger suivant :

$$\dot{z}(t) = \bar{A}_{21}\bar{y}_1(t) + \bar{A}_{22}z(t) + B_2u(t) + L(\bar{y} - \hat{\bar{y}}) \tag{1.33a}$$
$$\hat{\bar{y}}(t) = A_{12}z + \bar{B}_1u(t) \tag{1.33b}$$

où $z(t)$ est l'estimé de $\bar{x}_2(t)$, et $\hat{\bar{y}}(t)$ est l'estimé de $\bar{y}(t)$.
Ainsi, la dynamique de l'erreur d'estimation $e(t) = z - \bar{x}_2$ est donnée par

$$\dot{e}(t) = (\bar{A}_{22} - L\bar{A}_{12})e(t) \tag{1.34a}$$

Ainsi, lorsque la paire $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$ est observable, les valeurs propres de $\bar{A}_{22} - L\bar{A}_{12}$ peuvent être fixées par un choix convenable du gain L.

1.5.2 Observateurs d'état des systèmes singuliers linéaires

Depuis les années 70, les systèmes singuliers ont suscité l'intérêt de la communauté des automaticiens. Plusieurs méthodes de synthèse de commande et d'observation ont été proposées pour les systèmes singuliers linéaires. Il s'agit généralement des extensions des résultats obtenus dans le cas standard en tenant compte de la spécificité des systèmes singuliers. De nombreux travaux sur la synthèse d'observateur d'ordre plein et d'ordre réduit ont été introduits, [DB95] , [HM99], [PK92], [Dai88], [Dai89], [Dar00].

Considérons le système singulier linéaire suivant :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.35a}$$
$$y(t) = Cx(t) \tag{1.35b}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie $u(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur d'entrée. E est une matrice singulière, A, B,et C sont des matrices de dimensions appropriées. Nous supposons que $rangE = r < n$ et $rangC = p$.

1.5.2.1 Observateur d'état singulier

Supposons que le système (1.35) soit détectable, donc il admet un observateur singulier de la forme

$$E\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + G(y(t) - \hat{y}(t)) \tag{1.36a}$$

$$\hat{y}(t) \quad = \quad C\hat{x}(t) \tag{1.36b}$$

où $\hat{x}(t)$ est l'état estimé de $x(t)$ et

$$\lim_{t\to\infty}(\hat{x}(t) - x(t)) = 0, \quad \forall(x_0, \hat{x}_0)$$

.

Démonstration

Soit $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ l'erreur d'observation, sa dynamique dans ce cas est donnée par

$$E\dot{e}(t) = (A - GC)e(t), \qquad \text{avec} \quad e(t) = \hat{x}(t) - x(t) \tag{1.37a}$$

Sous l'hypothèse de détectabilité, il existe une matrice $G \in \mathbb{R}^{n\times r}$ telle que les valeurs propres généralisées de la paire $(E, A - GC)$ sont à parties réelles négatives.

De (1.37) et sous l'hypothèse de la détectabilité, nous avons

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty}(\hat{x}(t) - x(t)) = 0, , \quad \forall x_0, \hat{x}_0$$

Par conséquent, le système (1.36) est un observateur asymptotique pour le système (1.35).

1.5.2.2 Observateur d'état usuel

Dans [DB95] une méthodes simple et facile de synthèse d'observateurs standards (non singuliers) pour les systèmes singuliers linéaires est proposée. La méthode est basée sur la résolution des équations de Sylvester généralisées.

Soit le système singulier linéaire suivant :

$$E\dot{x}(t) \quad = \quad Ax(t) + Bu(t) \tag{1.38a}$$
$$y(t) \quad = \quad Cx(t) \tag{1.38b}$$

L'hypothèse suivante est considérée

$$rang \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n \tag{1.39}$$

Sous cette hypothèse, il existe une matrice non singulière $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ telle que

$$aE + bC \quad = \quad I_n \tag{1.40a}$$

$$cE + dC = 0 \tag{1.40b}$$

L'observateur d'ordre plein proposé est de la forme suivante

$$\dot{z}(t) = Nz(t) + L_1 y(t) + L_2 y(t) + Gu(t) \tag{1.41a}$$
$$\hat{x}(t) = z(t) + by(t) + Kdy(t) \tag{1.41b}$$

N, L_1, L_2, G et K sont des matrices de dimensions appropriées à déterminer telles que l'estimé $\hat{x}(t)$ converge vers $x(t)$.

De (1.38), (1.40) et (1.41), l'erreur d'estimation est donnée par

$$e(t) = (a + Kc)Ex(t) - z(t) \tag{1.42}$$

sa dérivée est donnée par

$$\dot{e}(t) = Ne(t) + [(a+Kc)A - N(a+Kc)E - L_1C - L_2C]x(t) + [(a+Kc)B - G]u(t) \tag{1.43}$$

cette dynamique est indépendante de $x(t)$ et $u(t)$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$(a + Kc)A - N(a + Kc)E - L_1C - L_2C = 0 \tag{1.44}$$

et

$$(a + Kc)B = G \tag{1.45}$$

dans ce cas, la dynamique de l'erreur devient

$$\dot{e}(t) = Ne(t) \tag{1.46}$$

L'erreur d'estimation $e(t)$ converge vers 0 si et seulement si N est Hurwitz.

Donc, le problème de synthèse de l'observateur d'ordre plein de la forme (1.41) se réduit à trouver les matrices L_1, L_2, K et une matrice Hurwitz N telles que (1.44) est satisfaite.

de (1.40) et (1.44) nous avons :

$$N = (aA + Kc)A - L_2C + [N(b + Kd) - L_1]C$$

prenons

$$L_1 = N(b + Kd)$$

donc

$$N = aA + KcA - L_2C = aA + \begin{bmatrix} K & -L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cA \\ C \end{bmatrix} \tag{1.47}$$

De (1.47), N est Hurwitz si et seulement si la paire $(aA, \begin{bmatrix} cA \\ C \end{bmatrix})$ est détectable. Dans ce cas, les matrices L_1, L_2, et K peuvent être déterminées par les méthodes standards de synthèse d'observateur (méthode de placement des pôles par exemple).

1.5.3 Observateurs d'état des systèmes non linéaires

1.5.3.1 Observabilité des systèmes non linéaires

Contrairement au cas linéaire, le problème de l'observabilité des systèmes non linéaires est plus compliqué. Dans le cas général des systèmes non linéaires, l'observabilité peut dépendre des entrées appliquées et des conditions initiales, et elle est définie à partir de la notion de distinguabilité.

Considérons le système non linéaire suivant

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t) \tag{1.48a}$$
$$y(t) = h(x,u,t) \tag{1.48b}$$

Nous donnons les définitions suivantes :

Définition 1.5.1. *(Indistinguabilité) une paire d'états (x_0, x_0') est dite indistinguable si pour toute entrée $u(t)$ et pour tout $t \geq 0$ nous avons*

$$y(x_0,u,t) = y(x_0',u,t)$$

Dans le cas contraire, on dit que x_0 et x_0' sont distinguables.

Définition 1.5.2. *(Observabilité) Le système non linéaire* (1.48) *est observable s'il n'admet pas de paire indistinguable, c-à-d le système* (1.48) *est observable si $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, x_0$ est distinguable.*

Supposons que u et y sont connus et leurs dérivés respectives peuvent être calculées, Le concept d'observabilité peut être interprété de la manière suivante.
Pour un système mono-entrée/mono Sortie (SISO), nous définissons :

$$y' = \begin{bmatrix} y & \dot{y} & \ddot{y} & \cdots & y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$
$$u' = \begin{bmatrix} u & \dot{u} & \ddot{u} & \cdots & u^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Chaque dérivée $y^{(i)}$ est une fonction de $x,\ u, \dot{u}, \ddot{u}, \cdots, u^{(i)}$
Soit ψ_i une fonction définie par

$$y^{(i)} = \psi_i(x,u')$$

La dérivée de $y^{(i)}$ est alors donnée par

$$y^{(i+1)} = \Big[\frac{\partial \psi_i(x,u')}{\partial x}\Big] f(x,u) + \Big[\frac{\partial \psi_i(x,u')}{\partial u'}\Big] \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t}$$

ce qui est, par définition, $\psi_{i+1}(x,u')$ si $i+1 \leq n-1$. En définissant l'opérateur linéaire $\mathcal{M}_f$ par :

$$\Big(\mathcal{M}_f \psi\Big)(x,u') = \Big[\frac{\partial \psi(x,u')}{\partial x}\Big] f(x,u) + \Big[\frac{\partial \psi(x,u')}{\partial u'}\Big] \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t}$$

alors y' s'écrit :

$$y' = \omega(x, u'),$$

$$\omega(x, u') = \begin{bmatrix} h(x,u) \\ \Big(\mathcal{M}_f h\Big)(x,u) \\ \vdots \\ \Big(\mathcal{M}_f^{n-1} h\Big)(x,u) \end{bmatrix} \tag{1.49}$$

est la matrice d'observabilité.

Si la matrice d'observabilité (1.49) est inversible, c-à-d il existe ω^{-1} telle que

$$x = \omega^{-1}(y', u')$$

alors le système correspondant est observable. En outre, si la jacobienne de la matrice d'observabilité,

$$\Omega(x, u') = \frac{\partial \omega(x, u')}{\partial x},$$

est inversible en x^0, alors il existe un voisinage $\mathcal{V}_{x^0}$ de x^0 sur lequel ω est inversible. Dans ce cas, le système correspondant est localement observable, ce qui signifie que x^0 est distinguable de tous les points de $\mathcal{V}_{x^0}$.
Pour les systèmes multi-sorties, c'est-à-dire $y \in \mathbb{R}^p, p > 1$, la notion d'observabilité peut être donnée d'une manière similaire.
Soit

$$N = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_p \end{bmatrix}^T$$

un vecteur d'entiers positifs, avec $\sum_{i=1}^{i=p} n_i = n$.

Définissons

$$y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_p \end{bmatrix}^T,$$

et

$$h(x,u) = \begin{bmatrix} h_1(x,u) & h_2(x,u) & \cdots & h_p(x,u) \end{bmatrix}^T.$$

En posant

$$\omega_j(x, u') = \begin{bmatrix} h_j(x,u) \\ \Big(\mathcal{M}_f h_j\Big)(x,u) \\ \vdots \\ \Big(\mathcal{M}_f^{n_j-1} h_j\Big)(x,u) \end{bmatrix},$$

les dérivées de y^j jusqu'à l'ordre n_j sont

$$[y_j \quad \dot{y}_j \quad \ldots \quad y_j^{(n_j)}]^T = \omega_j(x, u').$$

La matrice d'observabilité pour les systèmes multi-sorties est alors définie par :

$$\omega_N(x,u') = \begin{bmatrix} \omega_1(x,u') \\ \omega_2(x,u') \\ \vdots \\ \omega_q(x,u') \end{bmatrix}.$$

S'il existe N tel que $\omega_N(x,u')$ soit inversible, alors l'état x peut être déterminé à partir de u', y, et les dérivées de chaque y_j peuvent être déterminées jusqu'à l'ordre n_j. De ce fait, le système correspondant est observable.

Dans le domaine non linéaire, il existe plusieurs façons de définir la notion d'observabilité. En lien avec le concept d'indistinguabilité des états, une définition très répandue a été établie dans [HK77]. Des résultats importants ont été établis dans [GB81] pour une classe spéciale de systèmes affines en la commande. Pour plus de détails sur les différents types de définitions sur l'observabilité des systèmes non linéaires, nous disposons dans la littérature de quelques références, à savoir [HK77], [Son84] et [BG97].

1.5.3.2 Les différents types d'observateurs pour les systèmes non linéaires

Initialement les systèmes abordés ont été les systèmes linéaires, pour lesquels les observateurs de Kalman et Luenberger ont donné de bons résultats. Le filtre de Kalman est utilisé dans le cas des systèmes stochastiques en minimisant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, et l'observateur de Luenberger est utilisé pour les systèmes linéaires déterministes.

Dans le cas des systèmes non linéaires, l'observation d'état est un peu plus délicate et il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthode universelle pour la synthèse d'observateurs. Les approches existantes sont soit une extension des algorithmes linéaires, soit des algorithmes non linéaires spécifiques. Dans le premier cas, l'extension est basée sur une linéarisation du modèle autour d'un point de fonctionnement. Pour le cas d'algorithmes non linéaires spécifiques, les nombreux travaux menés sur ce sujet (voir [WCŻ87], [MH89]) ont donné naissance à de nombreux algorithmes d'observation. Nous présenterons quelques algorithmes dans la suite de ce chapitre.

1.5.3.3 Méthodes de transformations non linéaires

Cette technique consiste à transformer, à l'aide d'un changement de coordonnées, un système non linéaire en un système linéaire modulo une injection de sortie. Une fois qu'un tel changement de coordonnées est obtenu, l'utilisation d'un observateur de type Luenberger (corrigé par l'injection de sortie) suffira pour estimer l'état du système transformé, et donc l'état du système non linéaire original en utilisant le changement de coordonnées inverse.
L'un des premiers travaux réalisés dans ce domaine est proposé dans [KI83], où le système

autonome de la forme

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.50a}$$
$$y = h(x) \tag{1.50b}$$

est transformé, par un changement de coordonnées non linéaire $z = \Phi(x)$, en un système linéaire sous la forme canonique observable suivante :

$$\dot{z} = A_c z + \lambda(y) \tag{1.51a}$$
$$y = C_c z \tag{1.51b}$$

où A_c et C_c sont sous la forme duale de Brunovsky, c-à-d :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0_{n-1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{n-1}^T \end{bmatrix}, \quad C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0_{n-1}^T \end{bmatrix}.$$

L'observateur de Luenberger correspondant à (1.51) est donné par :

$$\dot{\hat{z}} = A_c \hat{z} + \lambda(y) + K(y - C_c \hat{z}), \tag{1.52}$$

dont la dynamique de l'erreur $\varepsilon = z - \hat{z}$ est linéaire et s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = (A_c - KC_c)\varepsilon. \tag{1.53}$$

Le calcul du gain K se fait par un placement de pôles.
Ce travail a été étendu dans [KR85] au cas des systèmes à sorties multiples et la transformation non linéaire a été généralisée comme suit :

$$z = \Phi(x), \tag{1.54}$$

$$v = \Psi(y). \tag{1.55}$$

où v est la transformation de la sortie y à l'aide du changement de coordonnées non linéaire $\Psi(.)$. Les conditions sous lesquelles une telle transformation existe ont été établies. Cependant, trois problèmes sont liés à cette approche :

1. La classe des systèmes pour lesquels une telle transformation existe est très restreinte ;
2. La procédure d'obtention d'une telle transformation est très compliquée ;
3. Dans le cas des systèmes avec entrées (systèmes commandés), le système transformé contient toutes les dérivées des entrées.

Dans [Kel87], le système

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.56a}$$
$$y = h(x, u) \tag{1.56b}$$

a été considéré. Dans ce cas, le système transformé sous forme canonique généralisée est défini par :

$$\dot{z} = A_c z + \lambda(y, u') \tag{1.57a}$$
$$v = C_c z \tag{1.57b}$$

où $u' = \begin{bmatrix} u & \dot{u} & ... & u^{(n)} \end{bmatrix}^T$. La transformation non linéaire utilisée est

$$z = \Phi(x, u'),$$

$$v = \Psi(x, u')$$

et en supposant que les dérivées de l'entrée u sont disponibles, la structure de l'observateur suggéré est :

$$\dot{\hat{z}} = A_c \hat{z} + \lambda(y, u') + K(v - \hat{v}) \tag{1.58a}$$
$$\hat{v} = C_c \hat{z}. \tag{1.58b}$$

La dynamique de l'erreur est donnée par (1.53).

D'autres généralisations aux systèmes à sorties multiples ont été proposées dans [XG89], [RZ94] et [HP99]. Un algorithme simplifié permettant de calculer la transformation convenable, pour le cas des systèmes autonomes, a été conçu dans [Phe91]. Des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de la transformation pour les systèmes mono-sortie ont été données dans [GMP96]. Ces résultats ont été généralisés dans [PG97] aux systèmes à sorties multiples, et un algorithme de calcul du changement de variables a été donné.

Une des raisons pour laquelle la classe des systèmes qui peuvent être transformés sous forme linéaire observable est restreinte est due au fait que la sortie doit être linéaire comme dans (1.51) et (1.57b). Cette condition est relaxée dans [KK98] pour la classe des systèmes autonomes mono-sortie. L'idée est de transformer le système(1.50), en utilisant le changement de variables $z = \Phi(x)$, en

$$\dot{z} = Az + Ly \tag{1.59a}$$
$$y = \eta(z) \tag{1.59b}$$

où $\eta(z) = h(x)|_{x=\Phi^{-1}(z)}$. L'observateur s'écrit :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + Ly, \tag{1.60}$$

et la dynamique de l'erreur $\varepsilon = z - \hat{z}$ est

$$\dot{\varepsilon} = A\varepsilon. \tag{1.61}$$

La transformation Φ est choisie de façon à obtenir une matrice A avec des propriétés souhaitables.

Afin de surmonter la difficulté d'obtention de la transformation convenable, indépendamment des travaux précédents, une nouvelle approche a été présentée dans [BZ83] pour la classe des systèmes non linéaires autonomes et mono-sortie. Une méthode constructive basée sur des techniques de synthése linéaires a été proposée. Les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de la forme canonique ont été énoncées dans [LT87]. Plusieurs extensions de cette approche au cas des systèmes non linéaires commandés et multi-sorties sont données dans [Zei87b], [Zei87a] et [BZ88].

1.5.3.4 Observateurs étendus

Il est possible d'étendre quelques techniques linéaires à des systèmes non linéaires, ceci en calculant le gain de l'observateur à partir du modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement. C'est par exemple le cas du filtre de Kalman étendu et l'observateur de Luenberger étendu que nous présentons un peu plus en détail par la suite.

A) Filtre de Kalman étendu (EKF)

Le filtre de Kalman étendu est l'une des techniques d'estimation les plus populaires et les plus largement étudiées dans le domaine d'estimation d'état des systèmes dynamiques non linéaires. Ce filtre étendu consiste à utiliser les équations du filtre de Kalman standard au modèle non linéaire linéarisé par la formule de Taylor au premier ordre.
Ce filtre étendu a été appliqué avec succès sur différents types de procédés non linéaires. Malheureusement, les preuves de stabilité et de convergence établies dans le cas des systèmes linéaires, ne peuvent pas être étendues de manière générale au cas des systèmes non linéaires. Dans un environnement déterministe, une preuve de la convergence du filtre de Kalman étendu a été établie dans [BAD97] et [BA99] pour la classe des systèmes non linéaires à temps discret. Cependant, cette convergence n'est que locale. L'analyse de la convergence de cet estimateur reste, à l'heure actuelle, un problème ouvert. Les nombreuses recherches qui ont été menées sur ce sujet ont donné naissance à de nombreuses publications et ouvrages [Che93], [GA93], [BH97], [Bro98], [SG95], [BRD97], [BADF97], [BAD97], [ABD98].

Avant d'introduire le filtre de Kalman étendu, nous avons besoin d'introduire l'estimateur de Kalman standard pour les systèmes linéaires à temps variant (LTV). Nous abordons les deux cas, systèmes à temps continu et systèmes à temps discret.

– **Cas des systèmes LTV à temps continu :**
Pour le système stochastique LTV de la forme

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + v_1(t) \tag{1.62a}$$
$$y = C(t)x + v_2(t) \tag{1.62b}$$

l'estimateur de Kalman standard est donné par :

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + B(t)u + PC^T(t)R^{-1}(y - C(t)\hat{x}) \tag{1.63}$$

où P est la solution symétrique et définie positive de l'équation de Riccati suivante :

$$\dot{P} = AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP. \tag{1.64}$$

– **Cas des systèmes LTV à temps discret :**
Pour le système stochastique LTV à temps discret de la forme

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + v_k && (1.65a)\\ y_k &= C_k x_k + w_k && (1.65b) \end{aligned}$$

l'estimateur de Kalman standard est donné par :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}\Big(y_{k+1} - C_{k+1}\hat{x}_{k+1/k}\Big) && (1.66a)\\ P_{k+1} &= \Big(P_{k+1/k}^{-1} + C_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} C_{k+1}\Big)^{-1} && (1.66b)\\ \hat{x}_{k+1/k} &= A_k \hat{x}_k + B_k u_k && (1.66c)\\ P_{k+1/k} &= A_k P_k A_k^T + Q_k && (1.66d)\\ K_{k+1} &= P_{k+1/k} C_{k+1}^T \Big(C_{k+1} P_{k+1/k} C_{k+1}^T + R_{k+1}\Big)^{-1} && (1.66e) \end{aligned}$$

où $P_0 = \mu I_n > 0$. $\hat{x}_{k+1}$ et $\hat{x}_{k+1/k}$ sont l'estimation et la prédiction de l'état x_{k+1}. Les matrices P_{k+1} et $P_{k+1/k}$ sont les covariances des erreurs d'estimation et de prédiction. Q_k et R_{k+1} sont des matrices de covariances des bruits v_k et w_k respectivement.

Le filtre de Kalman étendu [Jaz70] est une extension directe du filtre de Kalman standard en remplaçant les matrices d'état et de sortie, A, C du système linéaire (1.62) ou (1.65) par les jacobiennes des non-linéarités du système en question.
Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) + v(t) && (1.67a)\\ y &= h(x,u) + w(t) && (1.67b) \end{aligned}$$

L'EKF s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x},u) + PH(\hat{x},u)R^{-1}(y - h(\hat{x},u)) && (1.68a)\\ \dot{P} &= F(\hat{x},u)P + PF(\hat{x},u)^T + Q - PH(\hat{x},u)^T R^{-1} H(\hat{x},u)P && (1.68b) \end{aligned}$$

où

$$F(\hat{x},u) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x},u);$$

$$H(\hat{x},u) = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x},u).$$

Ce type d'estimateur a été utilisé dans [JS04]. Dans le cas des systèmes à temps discret de la forme :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k,u_k) + G_k v_k && (1.69a)\\ y_k &= h(x_k,u_k) + D_k w_k && (1.69b) \end{aligned}$$

l'EKF est donné par :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} e_{k+1} \tag{1.70}$$

où

$$\begin{aligned}
P_{k+1} &= \Big(I_n - K_{k+1} H_{k+1}\Big) P_{k+1/k} && (1.71a)\\
\hat{x}_{k+1/k} &= f(\hat{x}_k, u_k) && (1.71b)\\
P_{k+1/k} &= F_k P_k F_k^T + Q_k && (1.71c)\\
K_{k+1} &= P_{k+1/k} H_{k+1}^T \Big(H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1}\Big)^{-1} && (1.71d)\\
e_{k+1} &= y_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1}) && (1.71e)\\
F_k &= F(\hat{x}_k, u_k) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_k, u_k) && (1.71f)\\
H_k &= H(\hat{x}_k, u_k) = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_k, u_k) && (1.71g)
\end{aligned}$$

où $P_0 = \mu I_n > 0$.
Il est courant (ceci n'a pas encore été démontré) de choisir en pratique, pour l'optimalité du filtre de Kalman étendu, Q_k et R_{k+1} comme les matrices de covariance des bruits du système et des mesures, c-à-d :

$$Q_k = G_k G_k^T, \quad R_{k+1} = D_{k+1} D_{k+1}^T.$$

Ce choix est valable sous certaines conditions [ABD01]. Dans un contexte déterministe, la synthèse de Q_k et R_{k+1} joue un rôle primordial dans l'amélioration des performances du filtre de Kalman étendu. Pour plus de détails sur ce dernier point, nous invitons le lecteur à consulter [DBGR92], [DBB+93], [BRD97], [RSU98] et [RSU99].

B) Observateur de Luenberger étendu

L'observateur de Luenberger étendu intervient, soit au niveau du système original avec un gain constant, soit par le biais d'un changement de coordonnées avec un gain dépendant de l'état à estimer. Dans le premier cas, un modèle linéarisé est nécessaire, et le gain de l'observateur est calculé par placement de pôles. Ce type d'observateur ne peut être utilisé que lorsque l'on est sûr que l'état restera au voisinage de l'état d'équilibre. Pour cette raison, cette méthode n'est pas très utilisée, parce que son utilisation peut être compromise par les instabilités qui peuvent se révéler si on s'éloigne du point de fonctionnement. Dans le deuxième cas, comme nous l'avons mentionné précédemment, les méthodes de changement de coordonnées ne concernent qu'une classe restreinte de systèmes non linéaires. En effet, beaucoup d'approches utilisant les changements de coordonnées nécessitent l'intégration d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles non linéaires, ce qui est souvent très délicat à réaliser. De ce fait, l'utilisation de solutions approchées est envisageable.

1.5.3.5 Observateur à grand gain : Approche de Thau et ses généralisations

Une méthode directe de conception d'observateurs est d'utiliser un retour de sortie linéaire. Cette approche, introduite initialement dans [Tha73], s'applique à la classe des

systèmes non linéaires s'écrivant sous la forme suivante :

$$\dot{x} = Ax + \phi(x, u) \tag{1.72a}$$
$$y = Cx \tag{1.72b}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, des entrées et des sorties du système. La paire (A, C) est détectable et la non-linéarité ϕ satisfait la propriété de Lipschitz par rapport à x :

$$\|\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)\| \leq \gamma_\phi \|x - \hat{x}\|, \quad \forall\, x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall\, u \in \mathbb{R}^m \tag{1.73}$$

où γ_ϕ est la constante de Lipschitz de la fonction ϕ.

Ce type d'observateurs est relativement classique en observation des systèmes non linéaires. Son nom est dû au fait que le gain de l'observateur choisi est suffisamment grand pour compenser la non linéarité du système.
L'observateur de type Luenberger correspondant à (1.72) est de la forme :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \phi(\hat{x}, u) + K(y - C\hat{x}) \tag{1.74}$$

La dynamique de l'erreur d'estimation $\varepsilon = x - \hat{x}$ est donnée par l'équation :

$$\dot{\varepsilon} = (A - KC)\varepsilon + \phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u) \tag{1.75}$$

L'objectif est de déterminer sous quelles conditions le gain K peut garantir la stabilité de l'erreur d'estimation ε en zéro.
La méthode de Thau [Tha73] fournit une condition suffisante de stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation (1.75). Le résultat de cette méthode est donné par le théorème suivant :

Théorème 1.5.1. ([Tha73]) *Considérons le système* (1.72) *et l'observateur* (1.74). *Si le gain d'observation K est choisi tel que*

$$\gamma_\phi < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} \tag{1.76}$$

où $\lambda_{\min}(S)$ et $\lambda_{\max}(S)$ désignent respectivement les valeurs propres minimale et maximale de la matrice carrée S, les matrices $P = P^T > 0$ et $Q = Q^T > 0$ désignent les solutions de l'équation de Lyapunov :

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) + Q = 0 \tag{1.77}$$

alors l'erreur d'estimation (1.75) *est exponentiellement stable.*

La preuve de ce théorème est basée sur l'utilisation de la fonction de Lyapunov standard

$$V = V(\varepsilon) = \varepsilon^T P \varepsilon.$$

Pour plus de détails sur la preuve du théorème 1.5.1, nous invitons le lecteur à consulter [Tha73].

Il a été démontré dans [PT80] que le rapport $\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}$ est maximal si $Q = I_n$. Le problème donc est réduit à choisir un gain K qui satisfait

$$\gamma_\phi < \frac{1}{2\lambda_{\max}(P)} \tag{1.78}$$

où

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) = -I_n.$$

L'approche de Thau n'est pas une méthode de synthèse systématique. Elle permet seulement de vérifier la convergence de l'observateur (1.74), a *posteriori*. En effet, le choix des matrices P, Q et K qui satisfait l'inégalité (1.76) n'est pas direct. Par exemple, le placement des valeurs propres de $(A - KC)$ dans le demi-plan gauche n'implique pas que la condition (1.76) soit satisfaite. Il n'existe aucune relation spécifique entre les valeurs propres de $(A - KC)$ et $\lambda_{\max}(P)$, ceci a été prouvé dans [RH94] par un simple exemple numérique.

Ce type d'observateurs a été largement étudié dans la littérature par de nombreux chercheurs. Une méthode constructive a été proposée par Raghavan dans [RH94], où une solution explicite et systématique du choix du gain de l'observateur est fournie. Cette solution est illustrée dans le théorème suivant :

Théorème 1.5.2. ([RH94]) *Considérons le système* (1.72) *et l'observateur* (1.74). *S'il existe* $\epsilon > 0$ *tel que l'équation de Riccati*

$$AP + PA^T + P\Big(\gamma_\phi^2 I_n - \frac{1}{\epsilon} C^T C\Big) P + I_n + \epsilon I_n = 0 \tag{1.79}$$

admet une solution P *symétrique définie positive, alors le gain d'observateur donnée par*

$$K = \frac{1}{2\epsilon} P C^T \tag{1.80}$$

stabilise asymptotiquement la dynamique de l'erreur d'estimation (1.75).

Cependant, cet algorithme n'est pas efficace pour toutes les paires (A, C) observables et malheureusement ne donne pas d'informations sur les conditions que doit vérifier la matrice $(A - KC)$ afin d'assurer la stabilité de l'erreur d'estimation. Nous avons vu que le placement des valeurs propres de $(A - KC)$ dans le demi-plan gauche est certainement insuffisant.
Dans [Zak90], l'auteur a suggéré une procédure de conception liée directement à la matrice $(A - KC)$. Dans cette procédure, le choix du gain K tel que

$$\sigma_{\min}(A - KC) > \gamma_\phi \tag{1.81}$$

assure l'inégalité (1.78). Les valeurs singulières de $(A-KC)$ jouent, en effet, un rôle sur la convergence de l'observateur. Malheureusement, ce résultat est en général incorrect. Ceci

a été démontré par un contre exemple dans [Raj98].

L'inexactitude du résultat précédent est intuitivement compréhensible. En effet, les valeurs singulières d'une matrice déterminent si celle-ci est proche d'être singulière. Une matrice pourrait être proche d'être singulière, mais ses valeurs propres restent proches de l'axe imaginaire. Cette distinction a été clarifiée après la nouvelle méthode proposée dans [Raj98]. En effet, dans [Raj98], Rajamani a établi un nouveau résultat permettant de corriger le précédent. Ce résultat est résumé dans le théorème suivant qui fournit des conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier la matrice $(A-KC)$ afin de démontrer la convergence de l'observateur.

Théorème 1.5.3. ([Raj98]) *Considérons le système* (1.72) *et l'observateur* (1.74)*, avec* (A, C) *observable et* ϕ *satisfait* (1.73)*. Alors, l'erreur d'estimation est asymptotiquement stable si le gain* K *peut-être choisi tel que* $(A - KC)$ *soit stable et*

$$\min_{\omega \geq 0} \Big(\sigma_{\min}(A - KC - j\omega I_n) \Big) > \gamma_\phi \tag{1.82}$$

où j *est tel que* $j^2 = -1$.

La démonstration complète de ce théorème est donnée en trois étapes dans [Raj98].

D'autres méthodes de synthèse d'observateurs ont été développées spécialement pour la classe des systèmes uniformément observables [GHO92], [BH91] et [BCCG93]. Ces méthodes utilisent un changement de variables pour se ramener à un système de la forme (1.72). Une fois le système transformé, l'utilisation d'un observateur à grand gain est systématique. Ce type d'observateurs a été appliqué à une classe de systèmes biologiques et à des procédés biotechnologiques dans [GHO92], [FH93] et [OBS99].

1.5.3.6 Observateurs de Luenberger Généralisés (OLG)

Récemment, une nouvelle conception d'observateurs a été proposée dans [AK99], [AK01b], [AK01a], [Arc02], [FA02] et [FA03]. La classe des systèmes concernés par cette nouvelle conception consiste à ajouter à l'observateur de Luenberger un deuxième retour de sortie linéaire à l'intérieur de la partie non linéaire du système. Cette approche concerne les systèmes décrits par les équations suivantes :

$$\dot{x} = Ax + G\gamma(Hx) + \varrho(y, u) \tag{1.83a}$$
$$y = Cx. \tag{1.83b}$$

L'observateur d'état proposé a la structure suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + G\gamma\Big(H\hat{x} + K(y - C\hat{x})\Big) + \varrho(y, u) + L(y - C\hat{x}). \tag{1.84}$$

Des conditions de convergence de l'observateur (1.84) ont été établies dans [AK99] et [AK01a] . Ce résultat concerne les systèmes pour lesquels la fonction non linéaire γ satisfait les hypothèses suivantes :

1. chaque composante γ_i est une fonction scalaire à variable scalaire, c-à-d :

$$\gamma_i = \gamma_i\Big(\sum_{j=1}^{j=n} H_{ij}x_j\Big), i = 1, ..., r. \tag{1.85}$$

2. Toutes les composantes de γ sont des fonctions non décroissantes, c-à-d :

$$0 \leq \frac{\gamma_i(v) - \gamma_i(w)}{v - w}, \ \forall\ v \neq w \in \mathbb{R}. \tag{1.86}$$

En utilisant (1.83) et (1.84), la dynamique de l'erreur d'estimation $\varepsilon = x - \hat{x}$ s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = (A - LC)\varepsilon + G\Big(\gamma(v) - \gamma(w)\Big) \tag{1.87}$$

où

$$v = Hx \ \text{ et } \ w = H\hat{x} + K(y - C\hat{x}).$$

Ces conditions de convergence sont illustrées dans le théorème suivant :

Théorème 1.5.4. *L'erreur d'estimation* (1.87) *est exponentiellement stable à l'origine s'il existe une matrice $P = P^T > 0$, une constante $\nu > 0$ et une matrice diagonale $\Lambda > 0$ telles que l'inégalité*

$$\begin{bmatrix} (A - LC)^T P + P(A - LC) + \nu I_n & PG + (H - KC)^T\Lambda \\ G^T P + \Lambda(H - KC) & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \tag{1.88}$$

soit faisable.

Cette technique a été étendue dans [FA02] et [FA03] au cas des systèmes monotones multi-variables. Des conditions de convergence analogues ont étés obtenues. De nouvelles conditions suffisantes de synthèse des gains K et L ont été proposées dans [AK01b] pour une classe de systèmes dont la non linéarité est une fonction scalaire à variable scalaire. Ce résultat est plus général que le précédent, puisqu'il prend en compte les bornes du terme $\frac{\gamma(v)-\gamma(w)}{v-w}$ quand elles existent, c'est à dire quand la non-linéarité satisfait la condition

$$0 \leq \frac{\gamma(v) - \gamma(w)}{v - w} \leq b, \ \forall\ v \neq w \in \mathbb{R}. \tag{1.89}$$

Dans ce cas, en exploitant la condition (1.89), les auteurs ont établi le théorème suivant :

Théorème 1.5.5. *L'observateur d'état* (1.84) *converge exponentiellement s'il existe une matrice $P = P^T > 0$, une constante $\nu > 0$ et une matrice diagonale $\Lambda > 0$ telles que l'inégalité*

$$\begin{bmatrix} (A - LC)^T P + P(A - LC) + \nu I_n & PG + (H - KC)^T \\ G^T P + (H - KC) & -\frac{2}{b} \end{bmatrix} \leq 0 \tag{1.90}$$

soit faisable.

Cette dernière inégalité est moins restrictive que (1.88). En effet, dans (1.88) il est nécessaire d'avoir $PG + (H - KC)^T \Lambda = 0$ à cause de la présence d'un zéro sur la diagonale. Ceci rend l'inégalité (1.88) contraignante. Cependant, dans (1.90), le zéro sur la diagonale est remplacé par $-\frac{2}{b}$, ce qui n'impose pas à $PG + (H - KC)^T$ d'être nul. Notons qu'en particulier, pour $b = +\infty$, nous retrouvons l'inégalité (1.88).

Le seul inconvénient de cette technique se trouve dans le fait qu'elle est applicable aux systèmes dont la jacobienne de chaque composante de la fonction non linéaire est une matrice carrée.

1.5.4 Observateurs d'état des systèmes singuliers non linéaires

A l'inverse du cas linéaire, peu de travaux ont été réalisés autour de l'observation des systèmes singuliers non linéaires. Récemment, quelques travaux intéressants ont été proposés par [BADF97], [Shi96], [ZM97], [LH06] et [DBB08]. Dans [BADF97], un observateur asymptotique local est proposé pour des systèmes singuliers non linéaires généraux. L'approche est basée sur la résolution des équations de Sylvestre et la transformation des coordonnées. Dans [Shi96], l'auteur a proposé un observateur implicite pour une classe de systèmes singuliers non linéaires Lipschitz, l'approche est basée sur la décomposition du système singulier en deux parties, une dynamique et l'autre statique.

Un des travaux intéressants et les plus récents qui traitent les systèmes singuliers non linéaires est proposé dans [LH06], le type de système traité est le suivant

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + B\Phi(t, x, u) && \text{(1.91a)} \\ y(t) &= Cx(t) && \text{(1.91b)} \end{aligned}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ l'entrée, et $y \in \mathbb{R}^p$ la sortie, la matrice $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est carrée avec $0 < rankE < n$ les matrices A, B, C sont constantes et de dimensions appropriées, avec $rangC = p$. La fonction Φ satisfait la condition Lipschitz suivante

$$\|\Phi(t, x_1, u) - f(t, x_2, u)\| \leq \lambda(\|F(x_1 - x_2)\|)$$

avec F une matrice constante de dimension appropriée.

L'observateur proposé est un observateur singulier de type Luenberger d'ordre plein

$$E\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B\Phi(t, \hat{x}, u) - L(y - C\hat{x}) \qquad \text{(1.92a)}$$

où $\hat{x}$ est l'estimé de x, $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ est le gain de l'observateur qu'on doit déterminer.

La dynamique de l'erreur d'observation $e(t) = x - \hat{x}$ est donnée par

$$E\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + B[\Phi(t, \hat{x}, u) - \Phi(t, \hat{x}, u)] \qquad \text{(1.93a)}$$

Le théorème suivant donne les conditions d'existence de l'observateur (1.92)

Théorème 1.5.6. *Il existe un observateur d'ordre plein de la forme* (1.92) *pour le système* (1.91) *s'il existe deux matrices* $P \in \mathbb{R}^{nn}$ *et* $Q \in \mathbb{R}^{pn}$ *telles que les inégalités suivantes :*

$$E^T P = P^T E \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} A^T P + P^T A + C^T Q + Q^T C + F^T F & P^T B \\ B^T P & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{1.94}$$

soit satisfaites. La matrice P doit avoir la forme suivante :

$$P = M^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_4 \end{bmatrix} N^{-1}$$

avec M et N deux matrices non singulières qui vérifient

$$MEN = \begin{bmatrix} I_E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour trouver la condition (1.94), les auteurs ont introduit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = e(t)E^T P e(t) \quad \text{avec} \quad E^T P = P^T E \geq 0$$

En dérivant cette fonction le long de la solution de (1.91) et en utilisant la propriété de Lipschitz, on retrouve la condition (1.94).

1.6 Stabilisation par retour d'état statique et par commande basée observateur

Le but de la stabilisation est de construire une loi de commande dite en boucle fermée, par retour d'état statique $u(t) = Kx(t)$, ou par commande basée observateur $u = K\hat{x}(t)$, où $\hat{x}(t)$ est l'estimé de $x(t)$, afin d'amener le système à l'origine, quel que soit le point de départ. Le premier type de commande est basé sur l'utilisation à chaque instant de l'état du système pour déterminer la commande, par conséquent l'état doit être accessible pour tout $t > 0$. Dans le cas où l'état n'est pas accessible, la commande réellement mise en oeuvre est celle par retour de sortie dynamique, qui est basée sur l'utilisation d'un observateur asymptotique de l'état.

1.6.1 Stabilisation par retour d'état statique

Considérons le système linéaire suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.95a}$$
$$y(t) = Cx(t) \tag{1.95b}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des commandes et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur des mesures. A, B, C des matrices constantes de dimensions appropriées.

Théorème 1.6.1. *Si on suppose que le système* (1.95) *est commandable et observable, il existe un feedback de la forme* $u(t) = Kx(t)$ *stabilisant le système* (1.95)*, c-à-d il existe une matrice* K *telle que la matrice* $A + BK$ *soit Hurwitz.*

1.6.2 Stabilisation par commande basée observateur

Considérons le système (1.95), soit l'observateur de Luenberger suivant

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(C\hat{x}(t) - y(t)) \tag{1.96a}$$

où $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'estimée de $x(t)$, L est une matrice de dimension appropriée qui représente le gain de l'observateur
Introduisons l'erreur d'observation $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$, nous obtenons la dynamique suivante

$$\dot{e}(t) = (A + LC)e(t) \tag{1.97a}$$

Si la matrice $A + LC$ est Hurwitz, nous avons $e(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Définition 1.6.1. *On appelle commande basée observateur, la commande* $u(t) = K\hat{x}(t)$

Théorème 1.6.2. *Si on suppose que le système* (1.95) *est stabilisable et détectable, il existe une commande basée observateur* $u(t) = K\hat{x}(t)$ *stabilisant le système* (1.95)*, c-à-d il existe deux matrice* K *et* L *de dimensions appropriées telles que les matrices* $A + BK$ *et* $A + LC$ *soient Hurwitz, alors le système en boucle fermé*

$$\dot{x} = Ax(t) + BK\hat{x} \tag{1.98a}$$
$$\dot{\hat{x}} = (A + BK)\hat{x}(t) + LC(\hat{x}(t) - x(t)) \tag{1.98b}$$

est asymptotiquement stable.

Démonstration :

En augmentant l'équation de la dynamique de (1.95) par la dynamique de l'erreur (1.97) nous obtenons le système suisvant

$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e(t) \end{pmatrix} \tag{1.99}$$

Par l'application du *principe de séparation*, les dynamiques du système commandé en boucle fermé (1.98)-(1.98), c-à-d les valeurs propres de la matrice $\begin{bmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix}$ sont à partie réelle négative. Ces valeurs propres sont constituées de la réunion de celles de la commande par retour d'état statique et de celles de l'observateur, c-à-d les valeurs propres de $A + BK$ et $A + LC$.

1.7 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à quelques rappels et informations nécessaires sur les systèmes singuliers. Aussi, nous avons mis le point sur quelques concepts relatifs à la stabilité des systèmes dynamiques (stabilité au sens de Lyapunov), le filtrage $\mathcal{H}_\infty$. Ensuite, nous avons présenté quelques rappels et définitions sur l'observabilité et le principe d'estimation d'état dans le cas des systèmes singuliers linéaires ainsi que les systèmes non linéaires. D'autres part, nous avons présenté des méthodes de synthèse d'observateur développées dans la littérature, pour le cas des systèmes singuliers linéaires, les systèmes non linéaires, et les systèmes singuliers non linéaires. Le dernier point abordé dans ce chapitre concerne l'application du principe de séparation pour la synthèse de commande basée observateur dans le cas des systèmes linéaires standards.

Chapitre 2

Systèmes singuliers bilinéaires

Sommaire

2.1 Introduction 43
2.2 Préliminaires et formulation du problème 44
2.2.1 Généralités sur les systèmes bilinéaires 44
2.2.2 Systèmes avec des incertitudes vérifiant des contraintes quadratiques intégrales IQC 46
2.2.3 Systèmes auxiliaires et performances robustes 48
2.2.4 Formulation du problème 50
2.2.5 Conditions de non biais de l'observateur 52
2.3 Procédure de synthèse de l'observateur 53
2.3.1 La résolution des contraintes de Sylvester 53
2.3.2 Etude de la stabilité 57
2.3.3 Extension au filtrage H_∞ 58
2.4 Exemple Numérique 61
2.5 Conclusion 63

2.1 Introduction

Ce chapitre propose une méthode de synthèse d'observateur $\mathcal{H}_\infty$ pour une classe de systèmes singuliers bilinéaires. Ces derniers sont introduits lorsque le comportement dynamique d'un système ne permet pas de le modéliser par une représentation linéaire. La dynamique et les équations des mesures des systèmes singuliers bilinéaires considérés sont soumis à des perturbations à énergie finie non mesurées et à des entrées bornées. Les entrées sont traitées comme des incertitudes structurées bornées en normes.

L'observateur proposé pour cette classe de systèmes est un observateur non biaisé, c-à-d la dynamique de l'erreur d'estimation est indépendante de l'état du système. Les conditions nécessaires et suffisantes de non biais de l'observateur sont données sous une forme d'équations de Sylvester.

Dans la première partie de ce chapitre nous présentons la classe des systèmes singuliers bilinéaires à laquelle nous nous intéressons plus particulièrement, un exemple de la littérature décrivant un processus réel (un robot avec joint flexible) pouvant être modélisé par un modèle bilinéaire sera présenté afin de mettre en exergue cette classe. Ensuite, nous faisons un rappel sur les systèmes incertains et l'étude de stabilité des systèmes soumis à des incertitudes structurées. Après, nous abordons la formulation du problème de synthèse de l'observateur d'ordre réduit que nous proposons. Ensuite, la procédure de synthèse d'observateur sera présentée en détail, en commençant par la méthode de résolution des équations de Sylvester, par la suite l'étude de stabilité dans le cas sans perturbations, et enfin la méthode de synthèse de l'observateur $\mathcal{H}_\infty$ seront présentées. Les conditions d'existence et de stabilité robuste de l'observateur sont données sous forme d'inégalité matricielle linéaire (LMI). Un exemple numérique de simulation est donné à la fin de ce chapitre pour illustrer la méthode.

2.2 Préliminaires et formulation du problème

2.2.1 Généralités sur les systèmes bilinéaires

Considérons le système bilinéaire singulier suivant

$$E\dot{x}(t) = A_0x(t) + Bu(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)A_ix(t) + D_1w(t) \tag{2.1a}$$

$$y(t) = Cx(t) + D_2w(t) \tag{2.1b}$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le semi-vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ l'entrée du sytème, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ un signal de perturbation à énergie finie, et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie du sytème. La matrice $E \in \mathbb{R}^{n_E \times n}$ est singulière pour $n_E = n$. Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n_E \times n}$ pour $i = 0, 1..., m$, $B \in \mathbb{R}^{n_E \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n_E \times n_w}$ et, $D_2 \in \mathbb{R}^{p \times n_w}$ sont réelles. le signal de perturbation $w(t) \in \mathcal{L}_2$ est continu . L'entrée $u(t)$, est continue et bornée, c-à-d $u(t) \in \Gamma \subset \mathbb{R}^m$, telle que

$$\Gamma := \{u(t) \in \mathbb{R}^m / u_{i,\min} \leq u_i(t) \leq u_{i,\max}, i = 1, ..., m\}. \tag{2.2}$$

Cette représentation englobe plusieurs types de systèmes bilinéaires.

Remarque 2.2.1. Durant ce chapitre, nous utilisons les notations suivantes : $u_i(t)$ est la i^{ime} coordonnée du vecteur des commandes $u(t)$ et A_i est la matrice associée à la coordonnée $u_i(t)$ dans le système (2.1a). Ainsi la matrice A_0 décrit la dynamique de la partie linéaire du système bilinéaire.

De nombreux processus en biologie, en écologie et en économie [Moh73], [Moh91], [Wil77] (modélisation d'un réacteur biologique ou d'échange commerciaux), ainsi qu'en mécanique [Rug81], [Hać92], [ZRMD98] (modélisation d'une suspension active), et en chimie (approximation du comportement d'une colonne à distiller [EL77]) peuvent être modélisés par des systèmes bilinéaires. A titre d'exemple pris dans la littérature, considérons le cas d'un robot à joint flexible décrit dans l'exemple suivant :

2.2.1.1 Exemple

Soit le processus des figures (2.1) et (2.2). Il s'agit d'un robot à joint flexible muni d'un moteur à courant continu (DC), permettant de fournir un couple à un axe de transmission qui le transmet au pendule constituant la partie mobile principale du robot. Cette transmission n'est pas rigide, mais elle est modélisée par un ressort de torsion de constante de raideur k. La dynamique rapide peut être modélisée par des équations bilinéaires statiques. Le modèle détaillé sous forme de système singulier bilinéaire est donné dans la littérature [N97], [ZW07], [ZW06], on choisit comme variable d'état les grandeurs suivantes :

1) $x_1(t)$ la rotation angulaire du moteur.
2) $x_2(t)$ la vélocité angulaire du moteur.
3) $x_3(t)$ la position angulaire de la liaison.
5) $x_4(t)$ la vitesse angulaire de la liaison.
6) $x_5(t)$ la perturbation du sous-système rapide.
7) $f(t)$ la perturbation inconnue .
8) $d(t)$ le défaut inconnu.

Ce processus peut être modélisé par les équations suivantes

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{J_m}x_1(t) + \frac{k}{J_m}x_2(t) + \frac{K_k}{J_m}x_3(t) + u(t) \\
\dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
\dot{x}_4(t) &= \frac{k}{J_l}x_1(t) + \frac{k}{J_l}x_3(t) + \gamma x_5(t) + \frac{mghk}{J_l}(x_3(t) + x_5(t))u(t) + \frac{mghk}{J_l}d(t) \\
0 &= x_1 + x_3 + x_5 + d_0(x_3(t) + x_5(t))u(t) + d_1 d(t) \\
y_1(t) &= x_1, \quad y_2(t) = x_2(t)
\end{aligned}$$

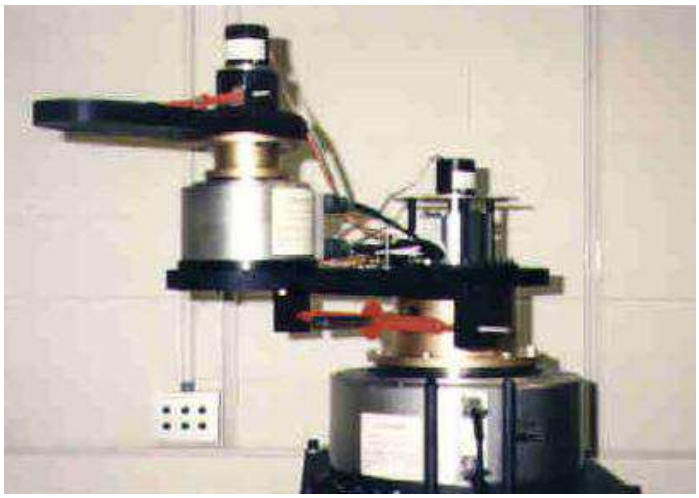


FIGURE 2.1: Robot à joint flexible

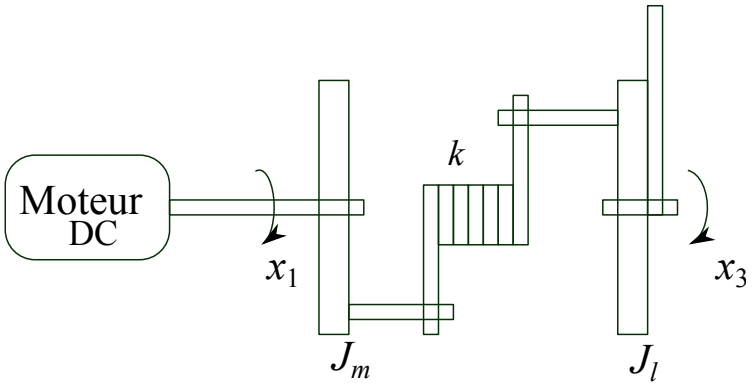


FIGURE 2.2: Schéma d'un robot avec joint flexible

Ceci nous donne, sous forme matricielle, le système singulier bilinéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \dot{x}_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J_m} & \frac{k}{J_m} & \frac{K_k}{J_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{k}{J_l} & \frac{k}{J_l} & \gamma & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{mgh_k}{J_l} \\ d_0 \end{bmatrix} x_3(t)u(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{mgh_k}{J_l} \\ d_0 \end{bmatrix} x_5(t)u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_k}{J_l} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{mgh_k}{J_l} \\ d_1 \end{bmatrix} d(t) \quad (2.3a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} \quad (2.3b)$$

2.2.2 Systèmes avec des incertitudes vérifiant des contraintes quadratiques intégrales IQC

Dans cette section nous considérons un type de système incertain défini par [MR97b], [MR97a], [JM99] :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + D_1 w(t) + \sum_{i=1}^{s} H_{1i} p_i(t) \quad (2.4a)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_2 w(t) + \sum_{i=1}^{s} H_{2i} p_i(t) \tag{2.4b}$$

Où $x(t) \in I\!R^n$ est le vecteur d'état, $w(t) \in I\!R^{n_w}$ le vecteur de perturbation à énergie finie et $y(t) \in I\!R^p$ la sortie du sytème. Les variables $p_i(t) \in \mathbb{R}^{k_i}$, représentent les incertitudes, avec k_i le nombre de colonnes de H_{1i} ou $H_{2i}, lesmatrices$A, C, D_1 et D_2 sont des matrices de dimensions appropriées et les matrices H_{1i}, H_{2i} expriment les poids respectifs selon lesquels le système (2.4) est assujetti aux incertitudes. Elles sont constantes et de dimensions appropriées. Nous considérons des sorties fictives $q_i(t) \in \mathbb{R}^{k_i}$ données par

$$q_i(t) = E_{1i} x(t) + E_{2i} w(t) + E_{3i} p(t)$$

qui vérifient les contraintes IQC suivantes

$$\int_0^T ||p_i(t)||^2 dt \leq \int_0^T ||q_i(t)||^2 dt$$

avec E_{1i}, E_{2i}, E_{3i} des matrices constantes de dimensions appropriées.

Le système (2.4) peut être représenté par la figure (2.3)

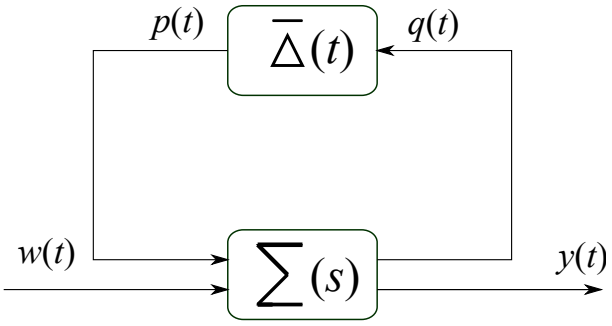


FIGURE 2.3: Système incertain avec IQC

donc la fonction de transfert du système (2.4) est donnée par

$$\Sigma(s) = \begin{bmatrix} E_1 \\ C \end{bmatrix} (sI_n - A)^{-1} \begin{bmatrix} H_1 & D_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_3 & E_2 \\ H_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

où $\bar{\Delta}(t) \in \Upsilon$ représente les incertitudes, tel que Υ est l'ensemble des matrices bloc diagonales défini par

$$\Upsilon = \left\{ \bar{\Delta}(t) = bdiag(\Delta_1(t), \Delta_2(t), \cdots, \Delta_s(t)); \Delta_i(t) \in I\!R^{k_i \times k}, \bar{\Delta}^T(t)\bar{\Delta} \leq I_{\bar{k}}, \forall t \geq 0, \bar{k} = \sum_{i=1}^{s} k_i \right\} \tag{2.5}$$

En définissant

$$\begin{aligned} H_{1i} &= H_1 bdiag(0, \cdots, I_{k_i}, \cdots, 0), \\ H_{2i} &= H_2 bdiag(0, \cdots, I_{k_i}, \cdots, 0), \\ E_{1i} &= bdiag(0, \cdots, I_{k_i}, \cdots, 0) E_1, \\ E_{2i} &= bdiag(0, \cdots, I_{k_i}, \cdots, 0) E_2. \end{aligned}$$

Dans ce cas nous avons

$$\begin{cases} p_i(t) &= \bar{\Delta}(t)q_i(t) \\ q_i(t) &= E_{1i}x(t) + E_{2i}w(t) + E_{3i}q(t), \end{cases} \quad ; \qquad i = 1, \cdots, s.$$

2.2.3 Systèmes auxiliaires et performances robustes

Considérons le système incertain suivant :

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta_A(t))x(t) + (D_1 + \Delta_{D_1}(t))w(t) \tag{2.6a}$$
$$y(t) = (C + \Delta_C(t))x(t) + (D_2 + \Delta_{D_2}(t))w(t) \tag{2.6b}$$

où $x(t) \in I\!R^n$ est le vecteur d'état, $w(t) \in I\!R^{n_w}$ le vecteur de perturbation à énergie finie et $y(t) \in I\!R^p$ la sortie du sytème. A, C, D_1 et D_2 sont des matrices constantes de dimension appropriée, $\Delta_A(t), \Delta_C(t), \Delta_{D_1}$ et Δ_{D_2} sont les matrices des incertitudes telles que

$$\begin{bmatrix} \Delta_A(t) & \Delta_{D_1} \\ \Delta_C(t) & \Delta_{D_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \underbrace{\bar{\Delta}(t)(I_{\bar{k}} - E_3\bar{\Delta}(t))^{-1}}_{\Delta(t)} \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \end{bmatrix}$$

avec $\bar{\Delta}(t) \in \Upsilon$ représentant les incertitudes, Υ est l'ensemble définie par (2.5)

La fonction de transfert dans ce cas est donnée par

$$\Sigma(s) = \begin{bmatrix} \Sigma_{pq}(s) & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ C \end{bmatrix} (sI_n - A)^{-1} \begin{bmatrix} H_1 & D_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_3 & E_2 \\ H_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

$\Sigma_{pq}(s)$ est la matrice de transfert de $p(t)$ vers $q(t)$.

Pour le cas des incertitudes structurées et bornées en norme, le critère de stabilité robuste $\mathcal{H}_\infty$ se réduit à la norme $||\Sigma_{pq}||_\infty = 1$. Pour le cas des incertitudes non structurées, la condition de stabilité $\mathcal{H}_\infty$ est très conservatrice. Cette dernière peut être relaxée en introduisant la norme $||\bar{M}\Sigma_{pq}\bar{M}||$ (appelée "scaled $\mathcal{H}_\infty$ norm") [MTD] avec

$$\bar{M} = bdiag(M_1, M_2, \cdots, M_s); \bar{M}_i = \bar{M}_i^T > 0, i = 1, \cdot, s.$$

Théorème 2.2.1. *[FBL95],[LF97] Le système* (2.6) *est exponentiellement stable avec une atténuation $\mathcal{H}_\infty$ s'il existe une matrice symétrique S et des scalaires μ et γ tels que le système suivant :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + + \begin{bmatrix} H_1 S^{-\frac{1}{2}} & \gamma^{-1}D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \tag{2.7a}$$

$$\begin{bmatrix} q(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^{-\frac{1}{2}}E_1 \\ C \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} S^{\frac{1}{2}}E_3S^{-\frac{1}{2}} & \gamma^{-1}S^{\frac{1}{2}}E_2 \\ H_2S^{-\frac{1}{2}} & \gamma^{-1}D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \tag{2.7b}$$

est stable et vérifie

$$\int_0^\infty || \begin{bmatrix} q(t) \\ y(t) \end{bmatrix} ||^2 dt < \int_0^\infty || \begin{bmatrix} p(t) \\ w(t) \end{bmatrix} ||^2 dt, \quad \begin{bmatrix} p(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \neq 0$$

avec

$$S = Bdiag(\mu_1 I_{k_1}, \cdots, \mu_m I_k) > 0$$

2.2.3.1 Performances robustes $\mathcal{H}_\infty$

Considérons le système avec des incertitudes paramaétriques structurées suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_p p(t) + B_w w(t) && \text{(2.8a)} \\ q(t) &= C_q x(t) + D_{qp} p(t) + D_{qw} w(t) && \text{(2.8b)} \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yp} p(t) + D_{yw} w(t) && \text{(2.8c)} \end{aligned}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la sortie, $q(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$ la sortie fictive, $p(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ et $w(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ les vecteurs des perturbations, avec

$$p(t) = \bar{\Delta}(t) q(t) \qquad \text{et} \quad \bar{\Delta}^T(t)\bar{\Delta}(t) \leq I_{m_1}$$

où $\bar{\Delta}(t) \in \mathbb{R}^{m_1 \times p_1}$ est la matrice des incertitudes paramétriques qui affecte le système, telle que $(I_m - \bar{\Delta}(t) D_{qp})$ est non singulière.

Théorème 2.2.2. *[Sch01] Le système* (2.8) *est exponentiellement stable et vérifie la norme $\mathcal{H}_\infty$ si et seulement si il existe une matrice symétrique et définie positive X et une matice symétrique $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix}$ et un scalaire γ tels que la LMI suivante :*

$$\left[\begin{array}{cc|c|cc|cc} I_n & A^T & 0 & C_q^T & 0 & C_y^T \\ 0 & B_p^T & I_{m_1} & D_{qp}^T & 0 & D_{yp}^T \\ 0 & B_w^T & 0 & D_{qw}^T & I_{m_2} & D_{yw}^T \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & P_1 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_2^T & P_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^{-1} I_{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_p \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} I_n & 0 & 0 \\ A & B_p & B_w \\ \hline 0 & I_{m_1} & 0 \\ C_q & D_{qp} & D_{qw} \\ \hline 0 & 0 & I_{m_2} \\ C_y & D_{yp} & D_{yw} \end{array}\right] < 0 \quad \text{(2.9)}$$

soit vérifiée

Maintenant, si on choisit

$$P = \begin{bmatrix} -S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

avec $S = Bdiag(\mu_1 I_{k_1}, \cdots, \mu_m I_k)$, $S = S^T > 0$ et $S^{\frac{1}{2}} = S^{\frac{T}{2}} > 0$, dans ce cas la LMI (2.12) devient

$$\left[\begin{array}{cc} XA + A^TX + C_q^TSC_q + C_y^TC_y & XB_p + C_q^TSD_{qp} + C_y^TD_{yp} \\ B_p^TX + D_{qp}^TSC_q + D_{yp}^TC_y & -S + D_{qp}^TSD_{qp} + D_{yp}^TD_{yp} \\ B_w^TX + D_{qw}^TSC_q + D_{yw}^TC^y & D_{qw}^TSD_{qp} + D_{yw}^TD_{yp} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c} XB_w + C_q^TSD_{qw} + C_y^TD_{yw} \\ D_{qp}^TSD_{qw} + D_{yp}^TD_{yw} \\ D_{qw}^TSD_{qw} - \gamma^2 I_{m_2} + D_{yw}^TD_{yw} \end{array}\right] < 0 \tag{2.10}$$

Nous choisissons comme système auxiliaire au système (2.8) le système de la forme (2.7) suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_pS^{-\frac{1}{2}}p(t) + \gamma^{-1}B_ww(t) \tag{2.11a}$$
$$q(t) = S^{\frac{1}{2}}C_qx(t) + S^{\frac{1}{2}}D_{qp}S^{-\frac{1}{2}}p(t) + \gamma^{-1}S^{\frac{1}{2}}D_{qw}w(t) \tag{2.11b}$$
$$y(t) = C_yx(t) + D_{yp}S^{-\frac{1}{2}}p(t) + \gamma^{-1}D_{yw}w(t) \tag{2.11c}$$

Par correspondance avec la LMI (2.10) nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\left[\begin{array}{cc} XA + A^TX + C_q^TSC_q + C_y^TC_y & XB_pS^{-\frac{1}{2}} + C_q^TS^2D_{qp}S^{-\frac{1}{2}} + C_y^TD_{yp}S^{-\frac{1}{2}} \\ S^{-\frac{1}{2}}B_p^TX + S^{-\frac{1}{2}}D_{qp}^TS^2C_q + S^{-\frac{1}{2}}D_{yp}^TC_y & -S + S^{-\frac{1}{2}}D_{qp}^TS^2D_{qp}S^{-\frac{1}{2}} + S^{-\frac{1}{2}}D_{yp}^TD_{yp}S^{-\frac{1}{2}} \\ \gamma^{-1}B_w^TX + \gamma^{-1}D_{qw}^TS^2C_q + \gamma^{-1}D_{yw}^TC_y & \gamma^{-1}D_{qw}^TS^2D_{qp}S^{-\frac{1}{2}} + \gamma^{-1}D_{yw}^TD_{yp}S^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c} \gamma^{-1}XB_w + \gamma^{-1}C_q^TS^2D_{qw} + \gamma^{-1}C_y^TD_{yw} \\ \gamma^{-1}S^{-\frac{1}{2}}D_{qp}^TS^2D_{qw} + \gamma^{-1}S^{-\frac{1}{2}}D_{yp}^TD_{yw} \\ \gamma^{-2}D_{qw}^TS^2D_{qw} - \gamma^2 I_{m_2} + \gamma^{-2}D_{yw}^TD_{yw} \end{array}\right] < 0 \tag{2.12}$$

2.2.4 Formulation du problème

Soit le système singulier bilinéaire suivant :

$$E\dot{x}(t) = A_0x(t) + Bu(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)A_ix(t) + D_1w(t) \tag{2.13a}$$
$$y(t) = Cx(t) + D_2w(t) \tag{2.13b}$$

Par la suite, nous considérons chaque entrée $u_i(t)$ comme "une incertitude structurée" (voir [BEFB94]). Notons que la définition du "domaine incertain" Υ dans la relation (2.5) peut engendrer un certain conservatisme, parcequ'en général, nous avons $\mid u_{i,min} \mid \neq \mid$

$u_{i,max} \mid$ avec $\mid u_{i,min} \mid \neq 1$ et $\mid u_{i,max} \mid \neq 1$. Pour diminuer ce conservatisme nous pouvons réécrire $u_i(t)$ comme suit :

$$u_i(t) = \alpha_i + \sigma_i \delta_i(t) \tag{2.14}$$

où $\alpha_i \in I\!R$ et $\sigma_i \in I\!R$ sont données, $\forall i = 1, ..., m$, par

$$\alpha_i = \frac{u_{i,\min} + u_{i,\max}}{2} \text{ et } \sigma_i = \frac{u_{i,\max} - u_{i,\min}}{2}$$

avec $\alpha_0 = 1$ et $\sigma_0 = 0$.

La nouvelle variable incertaine sera $\delta_i(t) \in \bar{\Gamma} \subset I\!R^m$ où le polytope $\bar{\Gamma}$ est défini par

$$\bar{\Upsilon} := \{\delta(t) \in I\!R^m / \underbrace{\delta_{i,\min} \leq \delta_i(t) \leq \delta_{i,\max}}_{\text{pour } i=1,...,m}\}.$$

où : $\delta_{i,\min} = -1$ et $\delta_{i,\max} = +1$.

Soit $\Phi \in I\!R^{r \times n_1}$ une matrice de rang plein ligne ([DBB08]), avec $\Phi E = 0$, donc de (2.13) nous obtenons

$$\Phi A_0 x(t) + \Phi D_1 w(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) \Phi A_i x(t) = -\Phi B u(t).$$

Nous proposons pour le système (2.13) l'observateur d'ordre réduit suivant :

$$\dot{\zeta}(t) = \left(N_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) N_i\right) \zeta(t) + H u(t) + \left(J_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) J_i\right) y(t) \tag{2.15a}$$

$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) - Q\Phi B u(t) + \left(G_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) G_i\right) y(t) \tag{2.15b}$$

Le vecteur $\zeta(t) \in I\!R^q$ représente le vecteur d'état de l'observateur et $\widehat{x}(t) \in I\!R^n$ l'estimé de $x(t)$. Les matrices N_i, J_i, H, P, Q, et G_i sont des matrices de dimension appropriée à déterminer pour que $\widehat{x}(t)$ converge asymptotiquement vers $x(t)$ pour $w(t) = 0$, et pour $w(t) \neq 0$, $\|e(t)\|_2 < \gamma \|w(t)\|_2$, où $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$.

Remarque 2.2.2. Nous pouvons remarquer que la dimension de l'observateur (2.15) est $q \leqslant n$, donc la présente approche unifie la synthèse des observateurs d'ordre plein ($q = n$) et d'ordre réduit ($q = n - p$).

Soit $\varepsilon(t) = \zeta(t) - TEx(t)$ l'écart entre $\zeta(t)$ et $TEx(t)$, donc la dynamique de $\varepsilon(t)$ est donnée par l'équation suivante

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left(N_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) N_i\right) \varepsilon(t) + (J_0 C + N_0 TE - TA_0) x(t)$$

$$+ \quad \left(\sum_{i=1}^{m} u_i(t)\left(N_i TE + J_i C - TA_i\right)\right) x\left(t\right) \tag{2.16a}$$

$$+ \quad (H - TB)u(t) + (J_0 D_2 - TD_1 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) J_i D_2) w(t)$$

$$e(t) = P\varepsilon(t) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\left(G_i C + Q\Phi A_i\right) x(t) + \left(PTE + Q\Phi A_0 + G_0 C - I_n\right) x(t)$$

$$+ \quad \left(Q\Phi D_1 + G_0 D_2 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) G_i D_2\right) w(t) \tag{2.16b}$$

2.2.5 Conditions de non biais de l'observateur

Le système (2.16) est indépendant de $x(t)$ et de $u(t)$ si et seulement si les équations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{array}{lll} i) & N_0 TE - TA_0 + J_0 C = 0 & \\ ii) & N_i TE - TA_i + J_i C = 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq m \\ iii) & H = TB & \\ iv) & \begin{bmatrix} P & Q & G_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TE \\ \Phi A_0 \\ C \end{bmatrix} = I_n & \\ v) & \begin{bmatrix} Q & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi A_i \\ C \end{bmatrix} = 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq m \end{array} \tag{2.17}$$

Les équations $i) - v)$ ont la forme d'un système d'équation de Sylvester.

Sous les conditions (2.17), la dynamique de $\varepsilon(t)$ et l'erreur $e(t)$ dans (2.16) sont indépendantes de $u(t)$ et de $x(t)$.
Dans ce cas nous obtenons :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left(N_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) N_i\right) \varepsilon(t) + \varphi_1(t) w(t) \tag{2.18a}$$

$$e(t) = P\varepsilon(t) + \varphi_2(t) w(t) \tag{2.18b}$$

avec $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ définies par

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= J_0 D_2 - TD_1 + \left(\textstyle\sum_{i=1}^{m} u_i(t) J_i\right) D_2 \\ \varphi_2(t) &= Q\Phi D_1 + G_0 D_2 + \left(\textstyle\sum_{i=1}^{m} u_i(t) G_i\right) D_2 \end{aligned}$$

2.3 Procédure de synthèse de l'observateur

Dans cette section, nous présentons une nouvelle méthode de synthèse de l'observateur (2.15) pour le système (2.13), elle garantit que l'erreur $e(t)$ converge asymptotiquement vers zéro pour $w(t) = 0$ ainsi que pour $w(t) \neq 0, \|e(t)\|_2 < \gamma \|w(t)\|_2$ où γ est un scalaire qui correspond à la performance prescrite. La synthèse de l'observateur (2.15) de dimension q revient à trouver les matrices T, N_i, J_i, H, P, Q et G_i.

2.3.1 La résolution des contraintes de Sylvester

Avant de donner la méthode de synthèse de l'observateur (2.15), nous procédons à la résolution des équations $i), ii), iv)$ et $v)$. Définissons deux matrices $\tilde{T}$ et Ψ telles que $\tilde{T} = T - \Psi\Phi$ ([DBB08]), donc les équations $i), ii), iv)$ et $v)$ peuvent être écrites comme suit :

$$i) \quad \begin{bmatrix} N_0 & -\Psi & J & \bar{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}\bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \\ \Theta \end{bmatrix} = \tilde{T}\bar{A} \tag{2.19}$$

$$ii) \quad \begin{bmatrix} P & Q & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}\bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \bar{I}_n \tag{2.20}$$

Où

$$\begin{aligned}
\bar{N} &= \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_m \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} A_0 & \bar{A}_1 \end{bmatrix}, \\
G &= \begin{bmatrix} G_0 & \bar{G} \end{bmatrix}, \bar{G} = \begin{bmatrix} G_1 & \cdots & G_m \end{bmatrix}, \\
\bar{J} &= \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & \cdots & J_m \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} J_0 & \bar{J} \end{bmatrix}, \\
\bar{E} &= \begin{bmatrix} E & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \bar{I}_n = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix}, \\
\bar{C} &= \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & \bar{C}_1 \end{bmatrix} \text{ et } \Theta = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{T}E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{T}E & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{T}E \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Avec

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_m \end{bmatrix} \text{ et } \bar{C}_1 = \begin{bmatrix} C & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C \end{bmatrix}.$$

Supposons que le système (2.13) satisfasse l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.3.1.

$$rang \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = n + rang \begin{bmatrix} \Phi\bar{A}_1 \\ \bar{C}_1 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Remarque 2.3.1. Lorsque $u_i(t) = 0$ pour $i = 1, \cdots, m$, l'hypothèse 2.3.1 se réduit à celle obtenue pour les systèmes singuliers linéaires (voir [DBB08]).

Les équations (2.19) et (2.20) admettent une solution si et seulement si

$$rang \begin{bmatrix} \tilde{T}\bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \\ \Theta \\ \bar{I}_n \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} \tilde{T}\bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Maintenant, de l'Hypothèse 2.3.1 et (2.22), nous obtenons

$$rang \begin{bmatrix} \tilde{T}\bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = n + rang \begin{bmatrix} \Phi\bar{A}_1 \\ \bar{C}_1 \end{bmatrix}$$

Soit, R_1 une matrice de rang plein ligne telle que

$$rang \begin{bmatrix} R_1 \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} \tilde{T}\bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = n + rang \begin{bmatrix} \Phi\bar{A}_1 \\ \bar{C}_1 \end{bmatrix}$$

alors, il existe toujours deux matrices paramétriques K_1 et $\tilde{T}$ telles que

$$\tilde{T}\bar{E} = R_1 - K_1 \begin{bmatrix} \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}$$

Autrement écrit

$$\begin{bmatrix} \tilde{T} & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = R_1 \tag{2.23}$$

Donc sous l'Hypothèse 2.3.1, une solution de (2.23) est

$$\begin{bmatrix} \tilde{T} & K_1 \end{bmatrix} = R_1 \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}^+ \tag{2.24}$$

Ce qui donne

$$\tilde{T} = R_1 \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$K_1 = R_1 \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Donc, sous l'Hypothèse 2.3.1 la solution générale de (2.19) est donnée par

$$\begin{bmatrix} N_0 & -\Psi & J & \bar{N} \end{bmatrix} = \tilde{T}\bar{A}\Omega_2^+ - Z_1\left(I - \Omega_2\Omega_2^+\right) \tag{2.25}$$

et la solution générale de (2.20) par

$$\begin{bmatrix} P & Q & G \end{bmatrix} = \bar{I}_n\Omega_1^+ - Z_2\left(I - \Omega_1\Omega_1^+\right) \tag{2.26}$$

où $\Omega_1 = \begin{bmatrix} \tilde{T}\bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}$ $\Omega_2 = \begin{bmatrix} \tilde{T}\bar{E} \\ \Phi\bar{A} \\ \bar{C} \\ \Theta \end{bmatrix}$. Z_1 et Z_2 sont des matrices arbitraires et de dimension appropriée.

Afin de simplifier les notations, définissons les matrices suivantes :

$$\Lambda_P = \bar{I}_n\Omega_1^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Lambda_Q = \bar{I}_n\Omega_1^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_G = \bar{I}_n\Omega_1^+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \Delta_P = \left(I - \Omega_1\Omega_1^+\right) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_Q = \left(I - \Omega_1\Omega_1^+\right) \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta_G = \left(I - \Omega_1\Omega_1^+\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{N_0} = \tilde{T}\bar{A}\Omega_2^+ \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Lambda_\Psi = \tilde{T}\bar{A}\Omega_2^+ \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_J = \tilde{T}\bar{A}\Omega_2^+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \Lambda_{\bar{N}} = \tilde{T}\bar{A}\Omega_2^+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{N_0} = (I - \Omega_2\Omega_2^+) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta_\Psi = (I - \Omega_2\Omega_2^+) \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_J = (I - \Omega_2\Omega_2^+) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta_{\bar{N}} = (I - \Omega_2\Omega_2^+) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Dans ce cas nous obtenons

$$\begin{aligned} N_0 &= \Lambda_{N_0} - Z_1\Delta_{N_0}, \bar{N} = \Lambda_{\bar{N}} - Z_1\Delta_{\bar{N}}, \\ \Psi &= -\Lambda_\Psi + Z_1\Delta_\Psi, J_0 = \Lambda_{J_0} - Z_1\Delta_{J_0}, \\ \bar{J} &= \Lambda_{\bar{J}} - Z_1\Delta_{\bar{J}}, P = \Lambda_P - Z_2\Delta_P, \\ \bar{G} &= \Lambda_G - Z_2\Delta_G, Q = \Lambda_Q - Z_2\Delta_Q \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda_G &= \begin{bmatrix} \Lambda_{G_0} & \Lambda_{\bar{G}} \end{bmatrix}, \Delta_G = \begin{bmatrix} \Delta_{G_0} & \Delta_{\bar{G}} \end{bmatrix} \\ &\text{et} \\ \Lambda_J &= \begin{bmatrix} \Lambda_{J_0} & \Lambda_{\bar{J}} \end{bmatrix}, \Delta_J = \begin{bmatrix} \Delta_{J_0} & \Delta_{\bar{J}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A partir de ces valeurs nous pouvons en déduire $\varphi_1(t)$et $\varphi_2(t)$ comme suit

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \Lambda_{\varphi_1(t)} - Z_1\Delta_{\varphi_1(t)} \\ \varphi_2(t) &= \Lambda_{\varphi_2(t)} - Z_2\Delta_{\varphi_2} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Lambda_{\varphi_1(t)} &= \Lambda_{J_0}D_2 - TD_1 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\Lambda J_i D_2, \\ \Delta_{\varphi_1(t)} &= \Delta_{J_0}D_2 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\Delta J_i D_2, \\ \Lambda_{\varphi_2(t)} &= \Lambda_Q\Phi D_1 + \Lambda_{G_0}D_2 + \sum_{i=1}^{n} u_{i\Lambda G_i}D_2, \\ \Delta_{\varphi_2(t)} &= \Delta_Q\Phi D_1 + \Delta_{G_0}D_2 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\Delta_{G_i}D_2. \end{aligned}$$

2.3.2 Etude de la stabilité

Nous pouvons remarquer que la stabilité asymptotique de $\varepsilon(t)$ est suffisante pour que $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$, puisque pour $w(t) = 0$ nous avons

$$e(t) = P\varepsilon(t).$$

Le lemme suivant donne les conditions de stabilité de (2.18).

Lemme 2.3.1. *Pour $w(t) = 0$, la dynamique de l'erreur (2.18) est asymptotiquement stable, s'il existe une matrice $X > 0$, telle que*

$$\begin{pmatrix} \left(N_0 + \bar{N}\bar{\alpha} + \bar{N}\bar{\sigma}\Delta_\varepsilon(\delta)\bar{H}_\varepsilon\right)^T X + \\ X\left(N_0 + \bar{N}\bar{\alpha} + \bar{N}\bar{\sigma}\Delta_\varepsilon(\delta)\bar{H}_\varepsilon\right) \end{pmatrix} < 0 \tag{2.27}$$

où

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_\varepsilon &= \begin{bmatrix} \alpha_1 I_q & \dots & \alpha_m I_q \end{bmatrix}^T, \\
\bar{\alpha}_w &= \begin{bmatrix} \alpha_1 I_p & \dots & \alpha_m I_p \end{bmatrix}^T, \\
\bar{\sigma}_\varepsilon &= bdiag\begin{bmatrix} \sigma_1 I_q & \dots & \sigma_m I_q \end{bmatrix}, \\
\bar{D}_2 &= bdiag\begin{bmatrix} \sigma_1 D_2 & \dots & \sigma_m D_2 \end{bmatrix}, \\
\Delta_{\varepsilon(t)}(\delta) &= bdiag(\begin{bmatrix} \delta_1 I_q & \dots & \delta_m I_q \end{bmatrix}), \\
\Delta_w(\delta) &= bdiag(\begin{bmatrix} \delta_1 I_{n_w} & \dots & \delta_m I_{n_w} \end{bmatrix}), \\
\bar{H}_\varepsilon &= \begin{bmatrix} I_q & \dots & I_q \end{bmatrix}^T \\
\bar{H}_w &= \begin{bmatrix} I_{n_w} & \dots & I_{n_w} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

Démonstration :

Pour $w(t) = 0$, l'équation (2.18) devient :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left(N_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) N_i\right)\varepsilon(t) \tag{2.28a}$$

$$e(t) = P\varepsilon(t) \tag{2.28b}$$

Par la substitution de $u_i(t) = \alpha_i + \sigma_i\delta_i(t)$ dans (2.28) nous obtenons

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left(N_0 + \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \sigma_i\delta_i(t)) N_i\right)\varepsilon(t) \tag{2.29a}$$

$$e(t) = P\varepsilon(t) \tag{2.29b}$$

Ce que nous pouvons réécrire comme suit :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left(N_0 + \bar{N}\bar{\alpha}_\varepsilon + \bar{N}\bar{\sigma}_\varepsilon\Delta_\varepsilon(\delta)\bar{H}_\varepsilon\right)\varepsilon(t) \tag{2.30a}$$

$$e(t) \quad = \quad P\varepsilon(t) \tag{2.30b}$$

Soit la fonction de Lyapunov candidate $V(t) = \varepsilon^T(t)X\varepsilon(t)$, sa dérivée $\dot{V}(t)$ le long de la solution de (2.30) est donnée par

$$\dot{V}(t) \quad = \quad \left(N_0 + \bar{N}\bar{\alpha}\varepsilon + \bar{N}\bar{\sigma}\varepsilon\Delta_\varepsilon(\delta)\bar{H}_\varepsilon\right)^T X + X\left(N_0 + \bar{N}\bar{\alpha}_\varepsilon + \bar{N}\bar{\sigma}_\varepsilon\Delta_\varepsilon(\delta)\bar{H}_\varepsilon\right)$$

si (2.27) est satisfaite, $\dot{V}(t) < 0$, et la stabilité de $\varepsilon(t)$ est garantie, ce qui démontre le lemme 2.3.1.

2.3.3 Extension au filtrage H_∞

La synthèse de l'observateur H_∞ consiste à déterminer les matrices T, N_i, J_i, H, P, Q et G_i $(i = 0, \cdots, m)$ telles que

– L'observateur (2.15) est non biaisé pour $w(t) = 0$ (c'est-à-dire les erreurs d'estimation $\varepsilon(t)$ et $e(t)$ sont indépendantes de $x(t)$).

– L'observateur (2.15) est asymptotiquement stable pour toutes les entrées $u_i(t) \in \Gamma$.

– Le gain L_2 du système entre les perturbations $w(t)$ et l'erreur d'estimation $e(t)$ est inférieur à un scalaire positif donné γ pour toute entrée $u_i(t) \in \Upsilon$ lorsque $w(t) \neq 0$.

En utilisant le changement de variable (2.14), le système (2.18) peut être reformulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}(t) \quad &= \quad \left(N_0 + \textstyle\sum_{i=1}^m (\alpha_i + \sigma_i\delta_i(t))N_i\right)\varepsilon(t) + (J_0D_2 - TD_1)w(t) \\
&+ \quad \textstyle\sum_{i=1}^m (\alpha_i + \sigma_i\delta_i(t))J_iD_2w(t)
\end{aligned}$$

$$e(t) \quad = \quad P\varepsilon(t) + (Q\Phi D_1 + G_0D_2)w(t) + \textstyle\sum_{i=1}^m (\alpha_i + \sigma_i\delta_i(t))G_iD_2w(t)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}(t) \quad &= \quad \left(N_0 + \bar{N}\bar{\alpha}_\varepsilon + \bar{N}\bar{\sigma}_\varepsilon\Delta_\varepsilon(\delta)\bar{H}_\varepsilon\right)\varepsilon(t) + \left(J_0D_2 + \bar{J}\bar{\alpha}_wD_2 - \tilde{T}D_1 - \Psi\Phi D_1\right)w(t) \\
&+ \quad \bar{J}\bar{D}_2\Delta_w(\delta)\bar{H}_ww(t) \\
e(t) \quad &= \quad P\varepsilon(t) + (Q\Phi D_1 + G_0D_2 + \bar{G}\bar{\alpha}_wD_2)w(t) + \bar{G}\bar{D}_2\Delta_w(\delta)\bar{H}_ww(t)
\end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}(t) \quad &= \quad [(\Lambda_{N_0} + \Lambda_{\bar{N}}\bar{\alpha}_\varepsilon) - Z_1(\Delta_{N_0} + \Delta_{\bar{N}}\bar{\alpha}_\varepsilon)]\varepsilon(t) + \left[(\Lambda_{\bar{N}}\bar{\sigma}_\varepsilon - Z_1\Delta_{\bar{N}}\bar{\sigma}_\varepsilon)\Delta_\varepsilon(\delta)\bar{H}_\varepsilon\right]\varepsilon(t) \\
&+ \quad \left(\Lambda_{J_0}D_2 - \tilde{T}D_1 + \Lambda_\Psi\Phi D_1 + \Lambda_{\bar{J}}\bar{\alpha}_wD_2\right)w(t) - Z_1\left(\Delta_{J_0}D_2 + \Delta_\Psi\Phi D_1 + \Delta_{\bar{J}}\bar{\alpha}_wD_2\right)w(t) \\
&+ \quad \left[(\Lambda_{\bar{J}}\bar{D}_2 - Z_1\Delta_{\bar{J}}\bar{D}_2)\Delta_w(\delta)\bar{H}_w\right]w(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e(t) \quad &= \quad (\Lambda_P - Z_2\Delta_P)\varepsilon(t) + (\Lambda_{G_0}D_2 + \Lambda_{\bar{G}}\bar{\alpha}_wD_2 + \Lambda_Q\Phi D_1)w(t) \\
&- \quad Z_2\left(\Delta_{G_0}D_2 + \Delta_Q\Phi D_1 + \Delta_{\bar{G}}\bar{\alpha}_wD_2\right)w(t) + \left[(\Lambda_{\bar{G}}\bar{D}_2 - Z_2\Delta_{\bar{G}}\bar{D}_2)\Delta_w(\delta)\bar{H}_w\right]w(t)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= (\mathbb{A}-Z_1\mathbb{C})\varepsilon(t)+((\widetilde{\mathbb{A}}-Z_1\widetilde{\mathbb{C}})\Delta_\varepsilon(\delta)\bar{H}_\varepsilon)\varepsilon(t)\\ &+ (\mathbb{B}-Z_1\mathbb{G})w(t)+((\widetilde{\mathbb{B}}-Z_1\widetilde{\mathbb{G}})\Delta_w(\delta)\bar{H}_w)w(t)\end{aligned}$$

$$e(t) = (\Lambda_P - Z_2\Delta_P)\varepsilon(t)+((\widetilde{\mathbb{F}}-Z_2\widetilde{\mathbb{H}})\Delta_w(\delta)\bar{H}_w)w(t)+(\mathbb{F}-Z_2\mathbb{H})w(t)$$

où

$$\begin{aligned}\mathbb{A} &= \Lambda_{N_0}+\Lambda_{\bar{N}}\bar{\alpha}_\varepsilon,\\ \mathbb{C} &= \Delta_{N_0}+\Delta_{\bar{N}}\bar{\alpha}_\varepsilon, \widetilde{\mathbb{A}}=\Lambda_{\bar{N}}\bar{\sigma}_\varepsilon, \widetilde{\mathbb{C}}=\Delta_{\bar{N}}\bar{\sigma}_\varepsilon,\\ \mathbb{B} &= \Lambda_{J_0}D_2-\bar{T}D_1+\Lambda_{\bar{J}}\bar{\alpha}_w D_2+\Lambda_\Psi\Phi D_1,\\ \mathbb{G} &= \Delta_{J_0}D_2+\Delta_\Psi\Phi D_1+\Delta_{\bar{J}}\bar{\alpha}_w D_2, \widetilde{\mathbb{B}}=\Lambda_{\bar{J}}\bar{D}_2, \widetilde{\mathbb{G}}=\Delta_{\bar{J}}\bar{D}_2,\\ \mathbb{F} &= \Lambda_{G_0}D_2+\Lambda_{\bar{G}}\bar{\alpha}_w D_2+\Lambda_Q\Phi D_1, \widetilde{\mathbb{F}}=\Lambda_{\bar{G}}\bar{D}_2,\\ \mathbb{H} &= \Delta_{G_0}D_2+\Delta_Q\Phi D_1+\Delta_{\bar{G}}\bar{\alpha}_w D_2, \widetilde{\mathbb{H}}=\Delta_{\bar{G}}\bar{D}_2\end{aligned}$$

Finalement nous obtenons

$$\dot{\varepsilon}(t)=(\mathbb{A}-Z_1\mathbb{C})\varepsilon(t)+(\begin{bmatrix}\mathbb{B} & \widetilde{\mathbb{A}} & \widetilde{\mathbb{B}}\end{bmatrix}-Z_1\begin{bmatrix}\mathbb{G} & \widetilde{\mathbb{C}} & \widetilde{\mathbb{G}}\end{bmatrix})\begin{pmatrix} w\\ p_\varepsilon\\ p_w\end{pmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} e(t)\\ q_\varepsilon\\ q_w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Lambda_P-Z_2\Delta_P\\ \bar{H}_\varepsilon\\ 0\end{bmatrix}\varepsilon(t)+\left[\begin{array}{ccc}\mathbb{F}-Z_2\mathbb{H} & 0 & \widetilde{\mathbb{F}}-Z_2\widetilde{\mathbb{H}}\\ 0 & 0 & 0\\ \bar{H}_w & 0 & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{c} w\\ \hline p_\varepsilon\\ p_w\end{array}\right] \tag{2.31}$$

où

$$\begin{bmatrix} p_\varepsilon\\ p_w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta_\varepsilon(\delta) & 0\\ 0 & \Delta_w(\delta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_\varepsilon\\ q_w\end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème relatif à la stabilité asymptotique de l'observateur (2.15) et l'atténuation du gain L_2 du transfert entre $w(t)$ et $e(t)$.

Théorème 2.3.1. *Sous l'Hypothèse 2.3.1, il existe un observateur de la forme (2.15) tel que l'erreur $e(t)$ donnée par (2.18) est asymptotiquement stable pour $w(t)=0$ et satisfait $\|e(t)\|_2 < \gamma\|w(t)\|_2$ pour $w(t)\neq 0$ s'il existe des matrices symétriques définies positives X, S_ε, S_w, une matrice Y_1 et un scalaire γ tels que la LMI suivante soit satisfaite :*

$$\left[\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{A}^TX-\mathbb{C}^TY_1+XA-Y_1^T\mathbb{C} & * & * & * & * & * & *\\
\mathbb{B}^TX-\mathbb{G}^TY_1 & -\gamma^2I & * & * & * & * & *\\
\widetilde{\mathbb{A}}^TX-\widetilde{\mathbb{C}}^TY_1 & 0 & -S_\varepsilon & * & * & * & *\\
\widetilde{\mathbb{B}}^TX-\widetilde{\mathbb{G}}^TY_1 & 0 & 0 & -S_w & * & * & *\\
-S_w & * & * & * & & & \\
\Lambda_P-Z_2\Delta_P & \mathbb{F}-Z_2\mathbb{H} & 0 & \widetilde{\mathbb{F}}-Z_2\widetilde{\mathbb{H}} & -I & * & *\\
S_\varepsilon\bar{H}_\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_\varepsilon & *\\
0 & S_w\bar{H}_w & 0 & & 0 & 0 & 0\\
-S_w & & & & & &
\end{array}\right] < 0 \tag{2.33}$$

avec

$$\begin{aligned} S_\varepsilon &= Bdiag(\mu_{1,\varepsilon} I, \cdots, \mu_{m,\varepsilon} I) > 0, \\ S_w &= Bdiag(\mu_{1,w} I, \cdots, \mu_{m,w} I) > 0, \\ Y_1 &= Z_1^T X \ . \end{aligned}$$

où, $\mu_{i,\varepsilon}$ et $\mu_{i,w}$, $i = 1, ..., m$, sont des scalaires positifs,
$'*'$: est le transposé de la partie triangulaire inférieure de la matrice.

Démonstration :

Tout d'abord , définissons les matrices suivantes :

$$A_e = \mathbb{A} - Z_1 \mathbb{C}, B_e = \mathbb{B} - Z_1 \mathbb{G} \tag{2.34a}$$

$$H_1 = \left[\begin{array}{cc} \widetilde{\mathbb{A}} - Z_1 \widetilde{\mathbb{C}} & \widetilde{\mathbb{B}} - Z_1 \widetilde{\mathbb{G}} \end{array} \right], C_e = \Lambda_p - Z_2 \Delta_p \tag{2.34b}$$

$$E_1 = \left[\begin{array}{c} \bar{H}_\varepsilon \\ 0 \end{array} \right], E_2 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \bar{H}_w \end{array} \right], E_3 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]. \tag{2.34c}$$

$$D_e = \mathbb{F} - Z_2 \mathbb{H}, H_2 = \left[\begin{array}{cc} 0 & \widetilde{\mathbb{F}} - Z_2 \widetilde{\mathbb{H}} \end{array} \right] \tag{2.34d}$$

$$p = \left[\begin{array}{c} p_\varepsilon \\ p_w \end{array} \right], \hat{e}(t) = \left[\begin{array}{c} e(t) \\ p_\varepsilon \\ q_w \end{array} \right] \tag{2.34e}$$

Le système (2.31)-(2.32) peut être réécrit comme suit :

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_e \varepsilon(t) + \left[\begin{array}{cc} B_e & H_1 \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} w \\ p \end{array} \right)$$

et

$$\hat{e}(t) = \left[\begin{array}{c} C_e \\ E_1 \end{array} \right] \varepsilon(t) + \left[\begin{array}{cc} D_e & H_2 \\ E_2 & E_3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} w \\ p \end{array} \right]$$

Nous pouvons introduire le système auxiliaire suivant :

$$\dot{\varepsilon}(t) = A_e \varepsilon(t) + \left[\begin{array}{cc} \gamma^{-1} B_e & H_1 S^{\frac{-1}{2}} \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} w \\ p \end{array} \right) \tag{2.35a}$$

$$\hat{e}(t) = \left[\begin{array}{c} C_e \\ S^{\frac{1}{2}} E_1 \end{array} \right] \varepsilon(t) + \left[\begin{array}{cc} \gamma^{-1} D_e & H_2 S^{\frac{-1}{2}} \\ \gamma^{-1} S^{\frac{1}{2}} E_2 & S^{\frac{1}{2}} E_3 S^{\frac{-1}{2}} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} w \\ p \end{array} \right] \tag{2.35b}$$

où $S = \left[\begin{array}{cc} S_\varepsilon & 0 \\ 0 & S_w \end{array} \right]$.

En utilisant le lemme borné réel (voir [BEFB94], [LF97], [FdX91]), le système (2.35) est asymptotiquement stable pour $w(t) = 0$ et vérifie $\|e(t)\|_2 < \gamma \|w(t)\|_2$ pour $w(t) \neq 0$ s'il existe

deux matrices symétriques et définies positives X, S, et un scalaire γ tels que l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$\begin{bmatrix} A_e^T X + X A_e + C_e^T C_e + E_1^T S E_1 & \gamma^{-1} X B_e + \gamma^{-1} C_e^T D_e + \gamma^{-1} E_1^T S E_2 \\ \gamma^{-1} B_e^T X + \gamma^{-1} D_e^T C_e + \gamma^{-1} E_2^T S E_1 & \gamma^{-2} D_e^T D_e + \gamma^{-2} E_2^T S E_2 \\ S^{\frac{-1}{2}} H_1^T + S^{\frac{-1}{2}} H_2^T C_e + S_{\frac{-1}{2}} E_3^T S E1 & S^{\frac{-1}{2}} \gamma{-}1 H_2^T D_e + \gamma{-}1 S^{\frac{-1}{2}} E_3^T E_2 \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

$$\begin{bmatrix} X H_1 S^{\frac{-1}{2}} + C_e^T H_2 S^{\frac{-1}{2}} + E_1^T S E_3 S^{\frac{-1}{2}} \\ \gamma^{-1} D_e^T H_2 S_{\frac{-1}{2}} + \gamma^{-1} S^{\frac{-1}{2}} E_2 S E_3 S^{\frac{-1}{2}} \\ \gamma^{-1} H_2^T H_2 S^{\frac{-1}{2}} + S^{\frac{-1}{2}} + S^{\frac{-1}{2}} E_3^T S E_3 S^{\frac{-1}{2}} \end{bmatrix} < 0 \tag{2.37}$$

En multipliant cette inégalité à gauche et à droite par :

$$bdiag(I, \gamma I, S^{\frac{1}{2}})$$

et en appliquant le lemme de Schur (voir l'annexe B (B.2.1)), nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} A_e^T X + X A_e & X B_e & X H_1 & C_e^T & E_1^T S \\ B_e^T X & -\gamma^2 I & 0 & D_e^T & E_2^T S \\ H_1^T X & 0 & -S & H_2^T & E_3 S \\ C_e & D_e & H_2 & -I & 0 \\ S E_1 & S E_2 & S E_3 & 0 & -S \end{bmatrix} < 0 \tag{2.38}$$

En remplaçant les matrices $A_e, B_e, H_1, C_e, E_1, D_e, H_2, E_2, E_3$ par leurs valeurs, et en faisant le changement de variable $Y_1 = Z_1^T X$, nous obtenons la LMI (2.33). Cela complète la démonstration du théorème.

2.4 Exemple Numérique

Considérons le système singulier bilinéaire décrit par :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} 3sin(2\pi t) \\ sin(2\pi t) \end{bmatrix}$$

Pour cette exemple, l'Hypothèse 2.3.1 est vérifiée.

Ainsi, nous avons

$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{E} = \begin{bmatrix} E & 0_{3\times 6} \end{bmatrix}$, $\bar{A} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \end{bmatrix}$, $\bar{D}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

On choisit de synthétiser un observateur d'ordre réduit $q = 1$, soit

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant les résultats de la synthèse précédemment présentés, on obtient les matrices de l'observateur suivantes :

$$\begin{aligned}
N0 &= 1.2927 \times 10^{13}, N1 = 0.1371, N2 = -0.099, \\
J0 &= 10^{12} \begin{bmatrix} -7.7 & 8.17 & -0.475 \end{bmatrix}, \\
J1 &= \begin{bmatrix} -0.75 & 1.186 & -0.586 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0.584 & -0.0486 \end{bmatrix} \\
J2 &= \begin{bmatrix} 0.221 & 1.8054 & -0.0516 \end{bmatrix}, \quad P = 10^{-14} \begin{bmatrix} 0.007 \\ 0.011 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \\
Q &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.11 \end{bmatrix}, \quad G0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -0.324 & 0.324 & 0.2432 \end{bmatrix}, \\
G1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.11 \end{bmatrix}, \quad G2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.12 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Les résultats de simulation sont présentés dans les figures (2.4)- (2.11). Les figures (2.4) et (2.5), présentent les perturbations $w_1(t)$ et $w_2(t)$. Les figures (2.6), (2.7) et (2.8) présentent les états $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ et leurs estimés $\hat{x}_1(t)$, $\hat{x}_2(t)$, $\hat{x}_3(t)$. Les figure (2.9), (2.10), et (2.11) présentent les erreurs d'estimation. Avec $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\zeta(0) = -5$, comme conditions initiales.

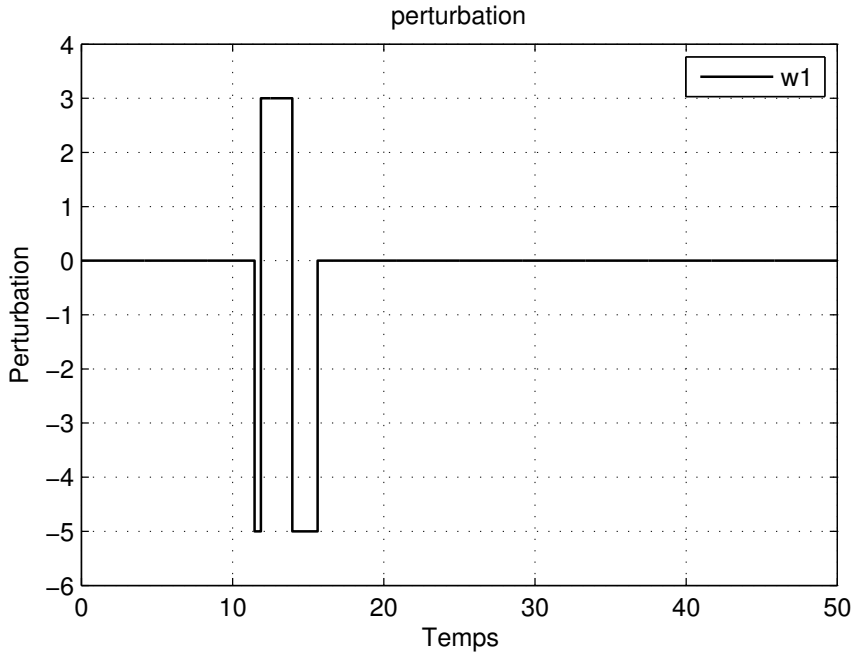


FIGURE 2.4: La perturbation $w_1(t)$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé une méthode de synthèse d'un observateur $\mathcal{H}_\infty$ pour une classe de systèmes singuliers bilinéaires. Cette approche unifie la synthèse des observateurs d'ordre réduit, d'ordre plein et d'ordre minimal. La méthode que nous avons proposé est basée sur la résolution des équations de Sylvester sous contraintes. Les paramètres de l'observateur sont obtenus via la résolution des inégalités matricielles linéaires LMI. Un exemple numérique est donné afin de valider nos résultats.

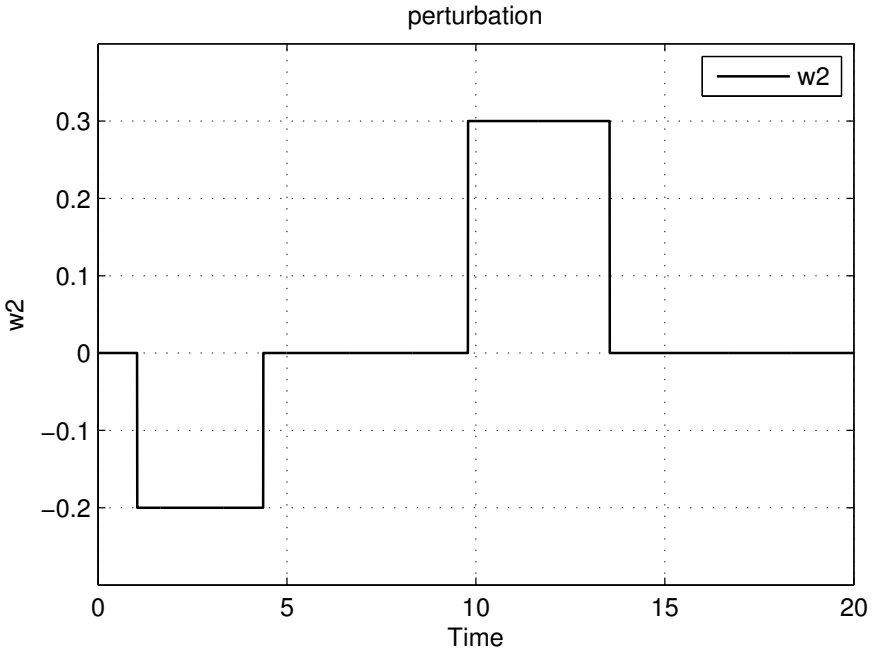


FIGURE 2.5: La perturbation $w_2(t)$

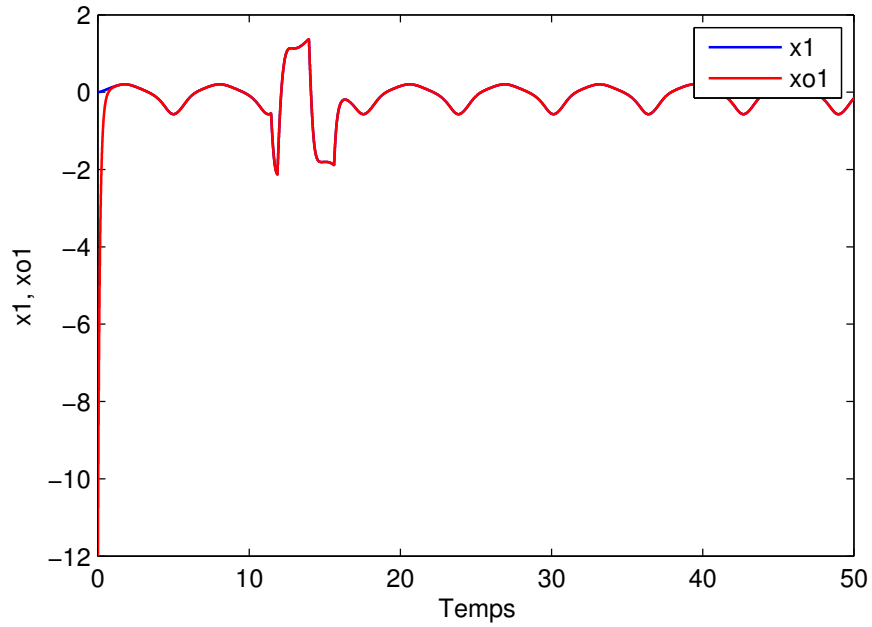


FIGURE 2.6: L'état $x_1(t)$ et son estimé $\hat{x_1}(t)$

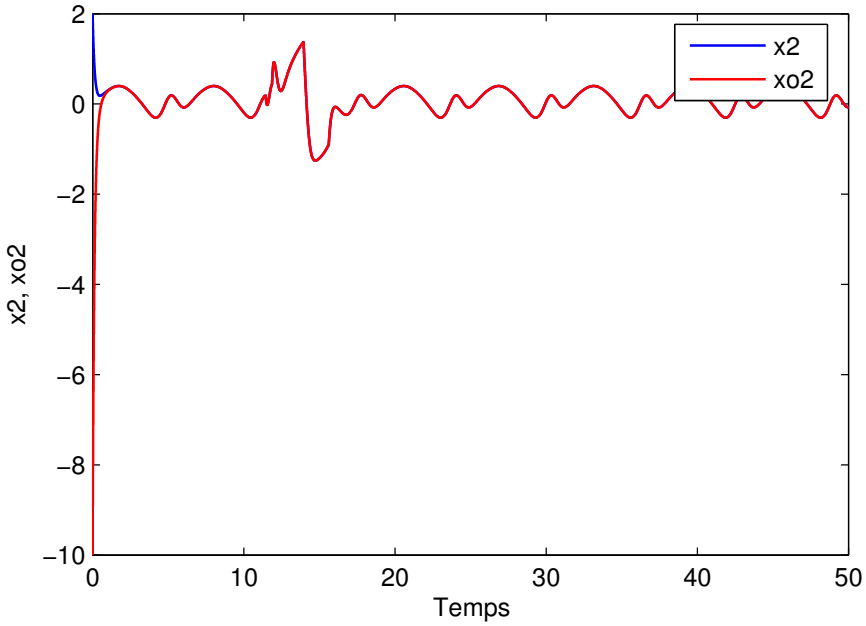


FIGURE 2.7: L'état $x_2(t)$ et son estimé $\hat{x_2}(t)$

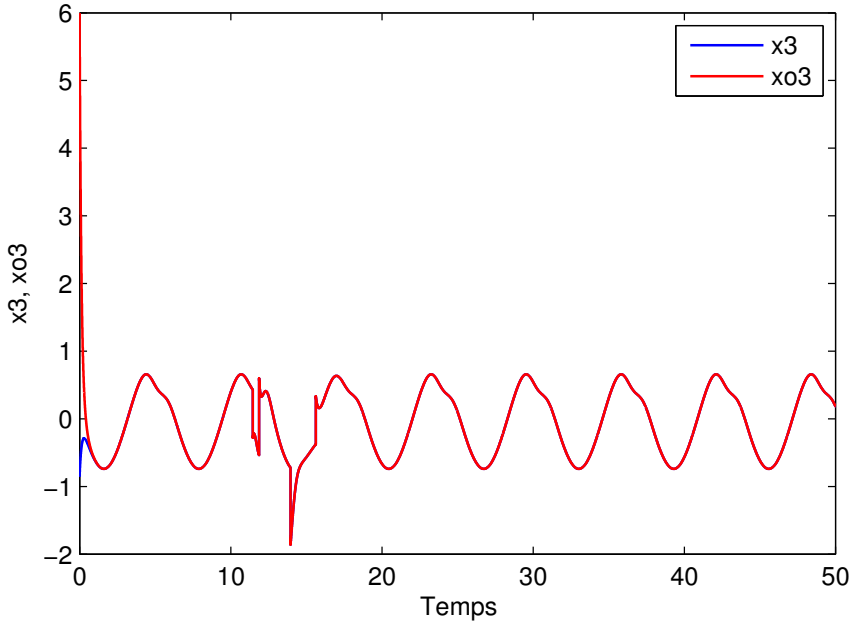


FIGURE 2.8: L'état $x_3(t)$ et son estimé $\hat{x_3}(t)$

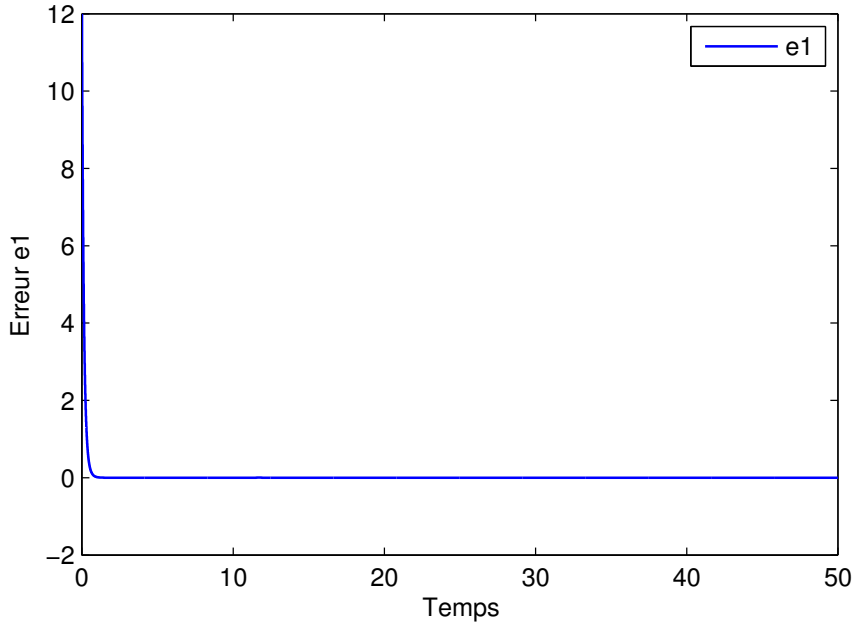


FIGURE 2.9: L'erreur $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$

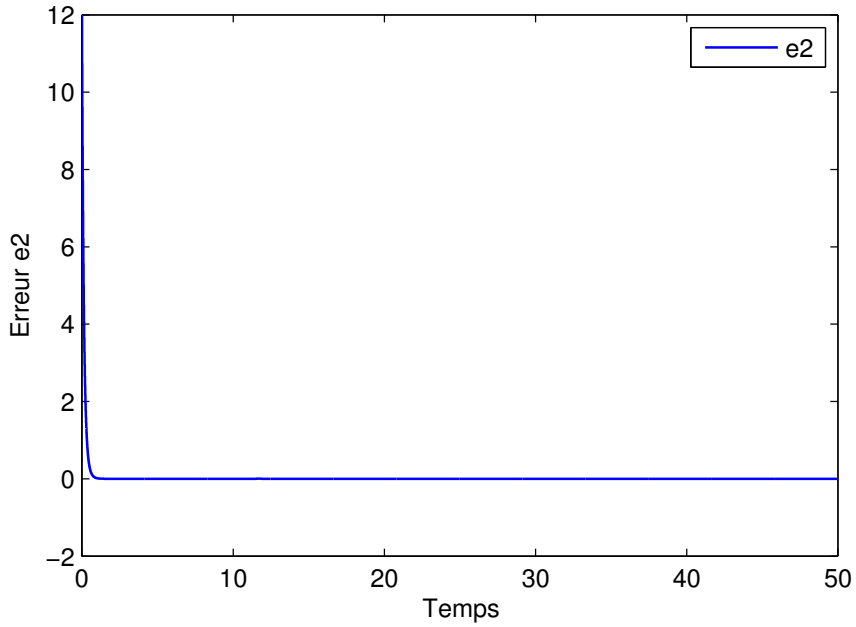


FIGURE 2.10: L'erreur $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$

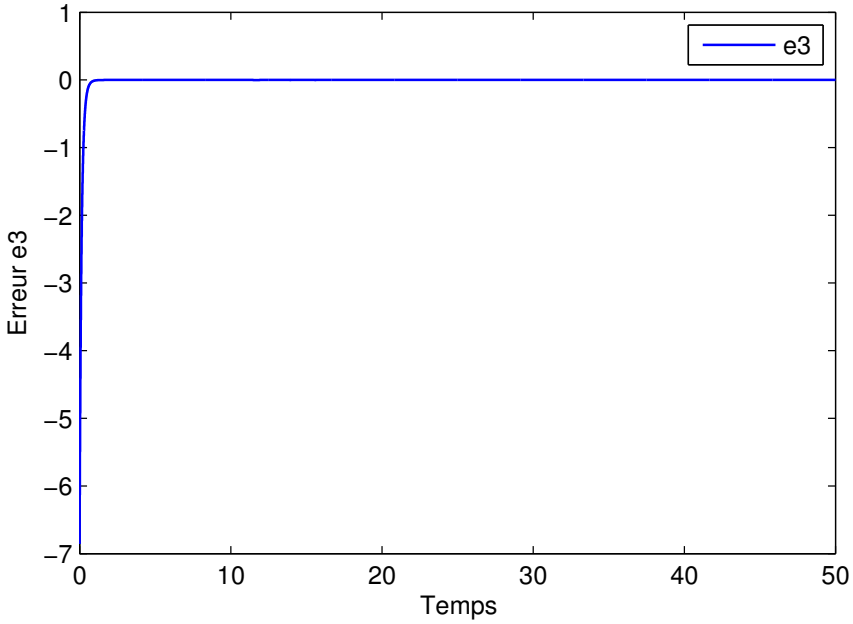


FIGURE 2.11: L'erreur $e_3(t) = x_2(t) - \hat{x}_3(t)$

Chapitre 3

Observation des systèmes singuliers non linéaires

Sommaire

3.1 Introduction 69
3.2 Classe de systèmes singuliers non linéaires traitée 70
3.3 Extension au cas des systèmes à entrées inconnues 70
3.4 Formulation du problème 72
3.5 Procédure de synthèse d'observateur 75
3.5.1 Résolution des équations de Sylvester 75
3.5.2 Etude de stabilité 78
3.5.3 Les conditions de stabilité sous forme d'une inégalité matricielle stricte 80
3.6 L'extension au filtrage $\mathcal{H}_\infty$ 81
3.6.1 Procédure de synthèse du filtre $\mathcal{H}_\infty$ 81
3.6.2 Exemple numérique 85
3.7 Extension aux systèmes à sorties non linéaires 87
3.7.1 Exemple numérique 93
3.8 Synthèse de filtre $\mathcal{H}_\infty$ des systèmes à temps discret 99
3.8.1 Formulation du problème 99
3.8.2 Procédure de synthèse d'observateur 100
3.9 Exemple numérique 103
3.10 Conclusion 110

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons une méthode de synthèse d'observateur pour une classe de systèmes singuliers non linéaires. L'approche proposée repose sur la paramétrisation des solutions des équations de Sylvester pour éliminer la dépendance l'état des entrées et de la partie linéaire de l'état.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans un premier temps nous allons définir la classe de systèmes considérée et quelques extensions qu'elle peut englober. Ensuite, nous présentons la formulation du problème de construction de l'observateur d'ordre réduit. Par la suite, nous présentons la procédure de synthèse d'observateur, tout en exposant en détail la méthode de résolution des équation de Sylvester et l'étude de stabilité. Deux extensions seront par la suite présentées. Il s'agit du filtrage $\mathcal{H}_\infty$ pour le cas des systèmes qui présentent des perturbations sur l'équation d'état et les équations de mesure, la deuxième extension concerne les systèmes à dynamique et sortie non linéaires. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la synthèse d'observateur pour les systèmes singuliers non linéaires à temps discret. A la fin de chaque section un exemple d'illustration est donné pour valider les différents résultats théoriques.

3.2 Classe de systèmes singuliers non linéaires traitée

Considérons le système singulier non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Df(t, F_L x, u) && (3.1a)\\ y(t) &= Cx(t) && (3.1b)\end{aligned}$$

avec le semi état initial $x(0) = x_0$, $x(t) \in I\!R^n$ est le semi vecteur d'état, $u(t) \in I\!R^m$ est la commande, et $y(t) \in I\!R^p$ est la sortie du système. La matrice $E \in I\!R^{n_1 \times n}$ et pour $n_1 = n$, elle est singulière. Les matrices $A \in I\!R^{n_1 \times n}$, $B \in I\!R^{n_1 \times m}$, $C \in I\!R^{p \times n}$ et $D \in I\!R^{n_1 \times n_f}$ sont des matrices de dimension appropriée. La non-linéarité, $f(t, F_L x, u)$ satisfait la propriété de Lipschitz par rapport à x :

$$\|f(t, F_L x_1, u) - f(t, F_L x_2, u)\| \leq \lambda(\|F_L(x_1 - x_2)\|),$$

où λ représente la constante de Lipschitz, la matrice F_L est réelle de dimension appropriée.

3.3 Extension au cas des systèmes à entrées inconnues

En effet le système (3.1) couvre une large classe de systèmes singuliers non linéaires comme les systèmes singuliers non linéaires à entrées inconnues . Considérons le système suivant :

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \varphi(F_L x, u) + D_1 w(t) && (3.2a)\\ y(t) &= Cx(t) + D_2 w(t) && (3.2b)\end{aligned}$$

avec

$$\varphi(t, F_L x(t), u(t)) = Df(t, F_L x, u) + D_d d(t)$$

et $d(t) \in I\!R^{p \times n_d}$ représente le vecteur des entrées inconnues, avec $rang D_d = n_d$. Le système (3.2) peut être transformé en une forme équivalente à (3.1). Considérons l'annulateur Π_{D_d} de D_d, l'équation (3.2) peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \Pi_{D_d} E\dot{x}(t) &= \Pi_{D_d} Ax(t) + \Pi_{D_d} Bu(t) + \Pi_{D_d} Df(F_L x, u) + \Pi_{D_d} D_1 w(t) && (3.3a)\\ D_d^\dagger E\dot{x}(t+1) &= D_d Ax(t) + D_d^\dagger Bu(t) + D_d^\dagger Df(F_L x, u) + d(t) + D_d^\dagger D_1 w && (3.3b)\\ y(t) &= Cx(t) + D_2 w(t) && (3.3c)\end{aligned}$$

avec $D_d^\dagger$ l'inverse généralisée de D_d qui vérifie

$$D_d D_d^\dagger D_d = D_d.$$

De même le modèle (3.1) peut être utilisé pour le problème d'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues. Considérons le système à entrées inconnues suivant :

$$\begin{aligned} Ex(t) &= Ax + Bu + F_d d(t) + Df(t,x,u) + D_1 w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + G_d d(t) + D_2 w(t) \end{aligned} \tag{3.4a}$$

où $d(t)$ est le vecteur des entrées inconnues, avec $rang G_d = n_d$.
Il existe toujours une décomposition en valeur singulière (SVD) de G_d telle que

$$UG_dV = \begin{bmatrix} \Sigma_{n_d} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{n_d}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} UG_dV = \begin{bmatrix} I_{n_d} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Posons

$$U_1 = \begin{bmatrix} \Sigma_{n_d}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} U, \quad \begin{pmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{pmatrix} = V^{-1} d(t), \quad \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = U_1 y(t) = \bar{y}(t)$$

d'où

$$U_1 y(t) = U_1 C x(t) + U_1 G_d V V^{-1} d(t) + U_1 D_2 w(t)$$

nous obtenons alors

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_1 x(t) + d_1(t) + D_{21} w(t) \\ y_2(t) &= C_2 x(t) + D_{22} w(t) \end{aligned}$$

et

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F_d V V^{-1} d(t) + Df(t,x,u) + D_1 w(t)$$

ou encore

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F_{d1} d_1(t) + F_{d2} d_2(t) + Df(t,x,u) + D_1 w(t)$$

soit

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) = {} & Ax(t) + Bu(t) + F_{d_1}(y_1(t) - C_1 x(t) - D_{21} w(t)) + F_{d_2} d_2(t) \\ & + Df(t,x,u) + D_1 w(t) \end{aligned}$$

qui peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A - F_{d_1}C_1)\,x(t) + Bu(t) + F_{d_1}y_1((t) + F_{d_2}d_2\,(t) + Df(t,x,u) \\ &\quad + (D_1 - F_{d_1}D_{21})\,w(t) \end{aligned}$$

Donc le système (3.4) peut être réécrit en augmentant le semi-vecteur d'état $x(t)$ par le vecteur des entrées inconnues $d(t)$, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}\dot{\mathcal{X}}(t) &= \bar{\mathbf{A}}\mathcal{X}(t) + Bu(t) + F_{d_1}y_1\,(t) + Df(F_L\mathcal{X},u) + \bar{D}_1 w \\ \bar{y}(t) &= \bar{\mathbf{C}}\mathcal{X}(t) + \bar{D}_2 w(t) \end{aligned} \tag{3.5a}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_0^t d_2(\tau)d\tau \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E & -F_{d_2} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A - F_{d_1}C_1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_1 & I_{n_d} \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{D}_1 &= D_1 - F_{d_1}D_{21}, \bar{D}_2 = \begin{bmatrix} D_{21} \\ D_{22} \end{bmatrix}, \text{et } \bar{F}_L = \begin{bmatrix} F_L & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.4 Formulation du problème

Considérons le système singulier non linéaire de la forme (3.1) suivante :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Df(t,F_Lx,u) \tag{3.6a}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{3.6b}$$

Définition 3.4.1. *Soit r le rang de la matrice E et soit $E^\perp \in \mathbb{R}^{r_1\times n_1}$, avec $r_1 = n_1 - r$ une matrice de plein rang ligne telle que*

$$E^\perp E = 0$$

$E^\perp$ est appelée la matrice orthogonale de E.
Pour E singulière, il existe toujours deux matrices non singulières $\bar{M}$ et $\bar{N}$ telles que

$$E = \bar{M}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\bar{N}$$

Dans ce cas, l'expression de $E^\perp$ peut être comme suit

$$E^\perp = \bar{H}\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}\bar{M}^{-1}$$

avec $\bar{H}$ une matrice non singulière de dimension appropriée.

En multipliant (3.6a) par $E^\perp$ nous obtenons

$$E^\perp Ax(t) + E^\perp Df(t,F_Lx,u) = -E^\perp Bu(t) \tag{3.7}$$

L'hypothèse suivante est nécessaire pour la suite de ce travail :

Hypothèse 3.4.1. $rang\begin{bmatrix} E \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix} = n.$

La relation entre cette hypothèse avec l'observabilité impulsionnelle est donnée par le lemme suivant :

Lemme 3.4.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

$$1) \qquad rang \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & C \\ 0 & E \end{bmatrix} = n + rang E$$

$$2) \qquad rang \begin{bmatrix} E \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix} = n$$

Démonstration :

La démonstration de ce lemme peut être obtenue de la manière suivante :
Tout d'abord, la matrice $\begin{bmatrix} E^{\perp} \\ EE^{+} \end{bmatrix}$ est de rang plein colonne, où E^{+} est 'inverse généralisée de E qui vérifie $EE^{+}E = E$, donc

$$rang \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & C \\ 0 & E \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} E^{\perp} & 0 \\ EE^{+} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & C \\ 0 & E \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

$$= rang \begin{bmatrix} 0 & E^{\perp}A \\ E & EE^{+}A \\ 0 & C \\ 0 & E \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$= rang \begin{bmatrix} 0 & E^{\perp}A \\ E & EE^{+}A \\ 0 & C \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -E^{+}A \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

$$= rang \begin{bmatrix} E \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix} + rang E \tag{3.11}$$

Considérons pour le système (3.6) l'observateur d'ordre réduit suivant :

$$\dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + Jy(t) + Hu(t) + TDf(t, F_L\widehat{x}, u) \tag{3.12a}$$

$$\widehat{x}(t) = P\zeta(t) - QE^{\perp}Bu(t) + Fy(t) - QE^{\perp}Df(t, F_L\widehat{x}, u) \tag{3.12b}$$

avec la condition initiale $\zeta(0) = \zeta_0$, où $\zeta(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur d'état de l'observateur et $\widehat{x}(t) \in I\!R^n$ est l'estimée de $x(t)$. Les matrices N, J, T, H, P, Q, et F sont des matrices de dimension appropriée à déterminer telles que l'erreur $e(t) = \widehat{x}(t) - x(t)$ converge asymptotiquement vers 0.

Soit $\varepsilon(t) = \zeta(t) - TEx(t)$ l'écart entre $\zeta(t)$ et $TEx(t)$, la dynamique de $\varepsilon(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= \dot{\zeta} - TE\dot{x} \\ &= N\zeta(t)+Jy(t)+Hu(t)+TDf(t,F_L\widehat{x},u)-TAx(t)-TBu(t)-TDf(t,F_Lx,u) \\ &= N(\zeta(t) - TEx(t)) + (NTE - TA + JC)x(t) + (H - TB)u(t) \\ &\quad +TD[f(t,F_L\widehat{x},u) - f(t,F_Lx,u)]\end{aligned} \tag{3.13a}$$

soit

$$\dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon + (NTE - TA + JC)x + (H - TB)u(t) + TD\Delta f \tag{3.14a}$$

où $\Delta f = f(t, F_L\widehat{x}(t), u) - f(t, F_Lx(t), u)$.

En substituant (3.7) dans (3.12b) nous obtenons

$$\begin{aligned}\widehat{x}(t) &= P\zeta(t)+Q(E^\perp Ax(t)+E^\perp Df(t,F_Lx,u))+Fy(t)-QE^\perp Df(t,F_L\widehat{x},u) \\ &= P(\zeta(t) - (TEx(t)) + PTE + QE^\perp A + FC)x(t) + QE^\perp D[f(t,F_Lx,u) - f(t,F_L\widehat{x},u)] \\ &= P\varepsilon + \begin{bmatrix} P & Q & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TE \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix} x - QE^\perp D\Delta f\end{aligned} \tag{3.15a}$$

Sous l'hypothèse 3.4.1, s'il existe une matrice T telle que

$$NTE - TA + JC = 0 \tag{3.16a}$$

$$H = TB \tag{3.16b}$$

$$\begin{bmatrix} P & Q & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TE \\ E^\perp A \\ C \end{bmatrix} = I \tag{3.16c}$$

la dynamique de l'erreurs d'estimations (3.14)-(3.15) devient

$$\dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) + TD\Delta f \tag{3.17a}$$

$$e(t) = P\varepsilon(t) - QE^\perp D\Delta f \tag{3.17b}$$

Le problème de synthèse d'observateur se ramène à trouver l'observateur de la forme (3.12a)-(3.12b), pour le système singulier non linéaire (3.6) telle que l'erreur d'observation (3.17) est stable.

3.5 Procédure de synthèse d'observateur

3.5.1 Résolution des équations de Sylvester

Les contraintes (3.16a) et (3.16c) sont présentées sous forme d'équation de Sylvester. Afin de paramétrer les solutions de ces équations, nous devons réécrire ces équations sous forme de système d'équation linéaire $XA = B$. Nous proposons de définir deux matrices arbitraires de dimensions appropriées $\tilde{T}$ et Ψ telles que

$$\tilde{T} = T + \Psi E^{\perp} \tag{3.18}$$

donc

$$T = \tilde{T} - \Psi E^{\perp} \tag{3.19}$$

En remplaçant (3.19) dans l'équation (3.16a) nous obtenons

$$N(\tilde{T} - \Psi E^{\perp})E - (\tilde{T} - \Psi E^{\perp})A + JC = 0$$

ce qui donne

$$N\tilde{T}E + \Psi E^{\perp}A + JC = \tilde{T}A$$

Sous forme matricielle nous obtenons

$$\begin{bmatrix} N & \Psi & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}E \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{T}A \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

en remplaçant (3.19) dans (3.16c) nous obtenons

$$\begin{bmatrix} P & Q & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}E \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix} = I_n \tag{3.21}$$

Définition 3.5.1. *On définit l'inverse généralisée d'une matrice M, toute matrice notée M^+ qui vérifie*

$$MM^+M = M$$

Cette inverse généralisée n'est pas unique. Soit M^+ une solution de $MXM = M$, alors la solution générale de l'équation $MXM = M$ est donnée par

$$X = M^+ + (I - M^+M)U + V(I - MM^+)$$

où U et V sont des matrices arbitraires de dimension appropriée.

Lemme 3.5.1. *Soit le système d'équation non homogène suivant :*

$$AX = B \tag{3.22}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ une matrice constante, $B \in \mathbb{R}^m$ vecteur constant de dimension m , $X \in \mathbb{R}^n$ le vecteur à déterminer.

– L'équation (3.22) a une solution, si et seulement si tous les éléments de B sont des combinaisons linéaires de A

– *L'équation* (3.22) *admet une solution si et seulement si* $Im(B) \subset Im(A)$ *ou encore,*

$$rangA = rang \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

Dans ce cas la solution générale du système d'équation est donnée par

$$X = A^{+}B + (I - A{+}A)Z$$

avec Z*, une matrice arbitraire de dimension appropriée.*

De même, pour un système d'équations de la forme $XA = B$*, la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution est :*

$$rangA = rang \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, la solution générale est donnée par :

$$X = BA^{+} + Y(I - AA^{+})$$

où Y *est une matrice arbitraire de dimension appropriée.*

Donc, les équations (3.20) et (3.21) ont une solution si et seulement si

$$rang \begin{bmatrix} \tilde{T}E \\ E^{\perp}A \\ C \\ \tilde{T}A \\ I_n \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} \tilde{T}E \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix} = n \tag{3.23}$$

De l'hypothèse 3.4.1 et de l'équation (3.23), nous obtenons

$$rang \begin{bmatrix} \tilde{T}E \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} E \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix} = n$$

Soit R une matrice de rang plein ligne telle que

$$rang \begin{bmatrix} R \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} E \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} \tilde{T}E \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix} = n$$

donc il existe toujours deux matrices K et $\tilde{T}$ telles que

$$\begin{bmatrix} \tilde{T} & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix} = R \tag{3.24}$$

Donc, sous l'hypothèse 3.4.1, il existe une solution pour (3.24) donnée par

$$\begin{bmatrix} \tilde{T} & K \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} E \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix}^{\dagger} \tag{3.25}$$

Dans ce cas les matrices $\tilde{T}$ et K sont données par

$$\tilde{T} = R \begin{bmatrix} E \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K = R \begin{bmatrix} E \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Toujours, sous l'hypothèse 3.4.1, la solution générale de (3.20) est donnée par :

$$\begin{bmatrix} N & \Psi & J \end{bmatrix} = \tilde{T}A\Omega^{\dagger} - Z\left(I - \Omega\Omega^{\dagger}\right) \tag{3.26}$$

où $\Omega = \begin{bmatrix} \tilde{T}E \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix}$ et Z est une matrice arbitraire de dimension appropriée.

Toujours, sous l'hypothèse 3.4.1, (3.21) admet la solution suivante :

$$\begin{bmatrix} P & Q & F \end{bmatrix} = I_n\Omega^{\dagger} \tag{3.27}$$

Maintenant, afin de simplifier les notations et de réécrire les différentes matrices N, Ψ, J, P, Q, F, TD, φ_2 et φ_2 en fonctions du paramètre Z, définissons les matrices suivantes :

$$\begin{aligned}
\Lambda_P &= \Omega^{\dagger} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Lambda_Q = \Omega^{\dagger} \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \Lambda_F = \Omega^{\dagger} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \\
\Lambda_N &= \tilde{T}A\Omega^{\dagger} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta_N = (I - \Omega\Omega^{\dagger}) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Lambda_{\Psi} &= \tilde{T}A\Omega^{\dagger} \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta_{\Psi} = (I - \Omega\Omega^{\dagger}) \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\Lambda_J &= \tilde{T}A\Omega^{\dagger} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \Delta_J = (I - \Omega\Omega^{\dagger}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \\
\Lambda_{\varphi_1} &= \left(\Lambda_J D_2 - \tilde{T}D_1 + \Lambda_{\Psi}E^{\perp}D_1\right), \Delta_{\varphi_1} = \left(\Delta_J D_2 + \Delta_{\Psi}E^{\perp}D_1\right), \\
\Lambda_{\varphi_2} &= (\Lambda_Q E^{\perp}D_1 + \Lambda_F D_2), \\
\Lambda_{TD} &= \tilde{T}D - \Lambda_{\Psi}E^{\perp}D, \Delta_{TD} = \Delta_{\Psi}E^{\perp}D.
\end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} N &= \Lambda_N - Z\Delta_N, \Psi = \Lambda_\Psi - Z\Delta_\Psi \\ J &= \Lambda_J - Z\Delta_J, P = \Lambda_P, Q = \Lambda_Q, F = \Lambda_F \\ \varphi_1 &= \Lambda_{\varphi_1} - Z\Delta_{\varphi_1}, \varphi_2 = \Lambda_{\varphi_2}, TD = \Lambda_{TD} - Z\Delta_{TD} \end{aligned}$$

3.5.2 Etude de stabilité

Afin d'étudier la stabilité du système (3.17a-3.17b), nous allons le réécrire sous forme d'un système singulier non linéaire de la forme

$$\mathbb{E}\dot{\xi}(t) = \mathbb{A}\xi(t) + \mathbb{B}\Delta f \tag{3.28}$$

avec

$$\xi = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \end{bmatrix}, \mathbb{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{A} = \begin{bmatrix} N & 0 \\ P & -I \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} TD \\ -QE^{\perp}D \end{bmatrix}$$

Dans la suite de ce chapitre nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 3.5.2. *Soit u et v deux vecteurs de dimension appropriée. Pour tout scalaire $\mu > 0$ l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$u^T v + v^T u \leqslant \mu u^T u + \frac{1}{\mu} v^T v \tag{3.29}$$

Le lemme suivant donne les conditions suffisantes de stabilité de (3.28).

Lemme 3.5.3. *Le système (3.28) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice Y, et un scalaire $\mu > 0$ tels que*

$$\mathbb{E}^T Y = Y^T \mathbb{E} \geqslant 0 \tag{3.30}$$

et

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}^T Y + Y^T \mathbb{A} + \mu\rho & Y^T \mathbb{B} \\ \mathbb{B}^T Y & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.31}$$

où $\rho = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 F_L^T F_L \end{bmatrix}$.

Démonstration :

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = \xi^T(t)\mathbb{E}^T Y \xi(t) = \xi^T(t) Y^T \mathbb{E}\xi(t)$$

$$\text{avec} \qquad \mathbb{E}^T Y = Y^T \mathbb{E} \geqslant 0$$

La dérivée de $V(t)$ le long de la solution de (3.28) est donnée par

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \dot{\xi}^T(t)\mathbb{E}^T Y\xi(t) + \xi^T(t)Y^T\mathbb{E}\dot{\xi}(t)\\ &= (\mathbb{A}\xi(t)+\mathbb{B}\Delta f)^T Y\xi(t) + \xi^T(t)Y^T(\mathbb{A}\xi(t)+\mathbb{B}\Delta f)\\ &= \xi^T(t)(\mathbb{A}^TY + Y^T\mathbb{A})\xi(t) + \Delta f^T\mathbb{B}^TY\xi(t) + \xi^TY^T\mathbb{B}\Delta f\end{aligned}$$

En utilisant (3.29) nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\Delta f^T\mathbb{B}^TY\xi + \xi^TY^T\mathbb{B}\Delta f \leqslant \frac{1}{\mu}\xi^TY^T\mathbb{B}\mathbb{B}^TY\xi + \mu\Delta f^T\Delta f \tag{3.32}$$

et pour $\dot{V}(t)$ on obtient :

$$\dot{V}(t)\leqslant\xi^T(t)(\mathbb{A}^TY + Y^T\mathbb{A})\xi(t) + \mu\Delta f^T\Delta f + \frac{1}{\mu}\xi^T(t)Y^T\mathbb{B}\mathbb{B}^TY\xi(t)$$

De la condition de Lipschitz, nous avons

$$\Delta f^T\Delta f \leqslant \lambda^2 e^TF_L^TF_Le$$

et comme

$$e = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}\xi$$

nous obtenons

$$\Delta f^T\Delta f \leqslant \xi^T\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & \lambda^2F_L^TF_L\end{bmatrix}\xi$$

ce qui nous permet d'avoir

$$\dot{V}(t) \leqslant \xi^T(\mathbb{A}^TY + Y^T\mathbb{A} + \frac{1}{\mu}Y^T\mathbb{B}\mathbb{B}^TY + \mu\rho)\xi$$

avec $\rho = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & \lambda^2F_L^TF_L\end{bmatrix}$.

Donc $\dot{V}(t) < 0$ si

$$(\mathbb{A}^TY + Y^T\mathbb{A} + \frac{1}{\mu}Y^T\mathbb{B}\mathbb{B}^TY + \mu\rho) < 0$$

et en appliquant le complément de Schur à cette inégalité nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}^TY + Y^T\mathbb{A} + \mu\rho & Y^T\mathbb{B}\\ \mathbb{B}^TY & -\mu I\end{bmatrix} < 0$$

Ce qui complète la démonstration du théorème.

Remarque 3.5.1. Dans ce lemme, on peut voir que les conditions de stabilité (3.30) et (3.31) sont des LMIs non-strictes, car elles contiennent des contraintes égalités, cela peut entraîner des problèmes numériques lors de la résolution de ces équations. Par conséquent, des conditions sous forme de LMIs strictes sont plus souhaitables du point de vue numérique.

3.5.3 Les conditions de stabilité sous forme d'une inégalité matricielle stricte

Le théorème qui suit présente les conditions de stabilité sous la forme d'une inégalité matricielle linéaire stricte (LMI).

Théorème 3.5.1. *Le système (3.28) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice définie positive X_1 et des matrices X_2, Q_1, et Q_2, et un scalaire μ positif tels que la LMI suivante :*

$$\begin{bmatrix} N^TX_1 + X_1^TN + X_2P + P^TX_2^T + P^TQ_1 + Q_1^TP & -X_2 - Q_1^T + P^TQ_2 & X_1TD - Q_1^TQE^{\perp}D - X_2QE^{\perp}D \\ * & -Q_2 - Q_2^T + \mu\lambda^2F_LF_L & -Q_2^TQE^{\perp}D \\ * & * & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.33}$$

est satisfaite.

Démonstration :

Soit $Y = X\mathbb{E} + \mathbb{E}^{\perp T}\bar{Q}$, où $\mathbb{E}^{\perp T}$ est la matrice orthogonale de $\mathbb{E}^T$ qui satisfait $\mathbb{E}^{\perp T}\mathbb{E}^T = 0$ et $\mathbb{E}^{\perp T}\mathbb{E}^{\perp} > 0$. Soit $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix}$ et $\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}$. Il est facile de vérifier que

$$\mathbb{E}^TY = Y^TE \geqslant 0$$

Dans ce cas les inégalités (3.30-3.31) sont réduites à

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}^TX\mathbb{E} + \mathbb{A}^T\mathbb{E}^{\perp T}\bar{Q} + \mathbb{E}^TX^T\mathbb{A} + \bar{Q}^T\mathbb{E}^{\perp}\mathbb{A} & \mathbb{E}^TX^T\mathbb{B} + \bar{Q}^T\mathbb{E}^{\perp}\mathbb{B} \\ \mathbb{B}^TX\mathbb{E} + \mathbb{B}^T\mathbb{E}^{\perp T}\bar{Q} & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.34}$$

En remplaçant les matrices $\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}$ et $\mathbb{D}$ par leurs valeurs dans (3.34), nous obtenons la LMI (3.33), ce qui prouve le lemme 3.5.1.

Remarque 3.5.2. Pour $\mathbb{E}^{\perp}D = 0$, l'inégalité (3.33) devient

$$\begin{bmatrix} N^TX_1 + X_1^TN + X_2P + P^TX_2^T + P^TQ_1 + Q_1^TP & -X_2 - Q_1^T + P^TQ_2 & X_1^TTD \\ -X_2^T - Q_1 + Q_2^TP & -Q_2 - Q_2^T + \mu\lambda_1^2F_L^TF_L & 0 \\ (TD)^TX_1 & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.35}$$

En pré-multipliant le membre gauche de (3.35) par $\begin{bmatrix} I & P^T & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ et en le post-multipliant par $\begin{bmatrix} I & 0 \\ P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ nous obtenons

$$\begin{bmatrix} N^T X_1 + X_1^T N + \mu\lambda_1 F_L^T F_L & X_1^T TD \\ (TD)^T X_1 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.36}$$

qui est exactement l'inégalité (15) de [DBB08].

3.6 L'extension au filtrage $\mathcal{H}_\infty$

Dans cette section nous considérons le système (3.1) avec des perturbations sur l'équation d'état et sur l'équation de mesure. Il peut être décrit par :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Df(t, F_L x, u) + D_1 w(t) \tag{3.37a}$$
$$y(t) = Cx(t) + D_2 w(t) \tag{3.37b}$$

avec $w(t) \in I\!R^{n_w}$ le vecteur de perturbation à énergie finie, lesmatrices $D_1 \in I\!R^{n_1 \times n_w}$ et $D_2 \in I\!R^{p \times n_w}$ sont réelles.

Remarque 3.6.1. Il n'y'a aucune perte de généralité dans l'introduction de la même perturbation $w(t)$ dans la dynamique du système et dans sa sortie. En effet, si on prend deux vecteurs différents pour les perturbations $w_1(t)$ pour la dynamique, et $w_2(t)$ pour la sortie, et des matrices de dimension appropriée D_{w_1} et D_{w_2} respectivement, on peut toujours se ramener à la représentation (3.3) en posant $D_1 = \begin{bmatrix} D_{w_1} & 0 \end{bmatrix}$, $D_2 = \begin{bmatrix} 0 & D_{w_2} \end{bmatrix}$ et $w(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}$.

3.6.1 Procédure de synthèse du filtre $\mathcal{H}_\infty$

En multipliant (3.37) par $E^\perp$ nous obtenons

$$E^\perp Ax(t) + E^\perp D_1 w(t) + E^\perp Df(t, F_L x, u) = -E^\perp Bu(t) \tag{3.38}$$

L'objectif est de construire maintenant un observateur de la forme (3.12a)-(3.12b) pour le système (3.3). C'est à dire, trouver les matrices N, J, T, H, P, Q, et F telles que les conditions suivantes soient satisfaites

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \hat{x} - x = 0 \quad \text{pour} \quad w(t) = 0$$

$$\|e(t)\|_{L_2} < \gamma \|w(t)\|_{L_2} \quad \text{pour} \quad w(t) \neq 0$$

De la même façon que dans la section précédente, soit l'erreur $\varepsilon(t) = \zeta(t) - TEx(t)$, la dynamique de $\varepsilon(t)$ dans ce cas sera donnée par

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= \dot{\zeta} - TE\dot{x} \\ &= N\varepsilon + (NTE - TA + JC)x + (H - TB)u(t) + TD\Delta f + (JD_2 - TD_1)w(t)\end{aligned}$$

et on a aussi

$$\widehat{x}(t) = P\varepsilon + \begin{bmatrix} P & Q & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TE \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix} x - QE^{\perp}D\Delta f + (QE^{\perp}D_1 + FD_2)w(t)$$

Si les contraintes (3.16), (3.16b) et (3.16c) sont vérifiées la dynamique de l'erreur $\varepsilon(t)$ et l'expression de $e(t)$ deviennent :

$$\dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) + TD\Delta f + \varphi_1 w(t) \tag{3.39a}$$
$$e(t) = P\varepsilon(t) - QE^{\perp}D\Delta f + \varphi_2 w(t) \tag{3.39b}$$

avec

$$\varphi_1 = JD_2 - TD_1$$
$$\varphi_2 = QE^{\perp}D_1 + FD_2$$

Toujours, de la même façon que dans les sections précédentes, on peut réécrire le système (3.39)-(3.39) sous forme d'un système singulier non linéaire en présence de perturbation

$$\mathbb{E}\dot{\xi}(t) = \mathbb{A}\xi(t) + \mathbb{B}\Delta f + \mathbb{D}w \tag{3.40a}$$

avec

$$\xi = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \end{bmatrix}, \mathbb{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{A} = \begin{bmatrix} N & 0 \\ P & -I \end{bmatrix}, \mathbb{B} = \begin{bmatrix} TD \\ -QE^{\perp}D \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{D} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, le problème de synthèse d'observateur $\mathcal{H}_\infty$ revient à déterminer les matrices N, T, J, P, Q et F telles que, le système (3.40) est asymptotiquement stable pour $w(t) = 0$ et $\|e(t)\|_{L_2} < \gamma \|w(t)\|_{L_2}$ pour $w(t) \neq 0$.

Le théorème suivant donne les conditions d'existences de solution sous forme d'inégalité matricielle linéaire stricte :

Théorème 3.6.1. *Le système donné par (3.40) est asymptotiquement stable pour $w(t) = 0$ et $\|e(t)\|_{L_2} < \gamma \|w(t)\|_{L_2}$ pour $w(t) \neq 0$ s'il existe une matrice définie positive X_1, des matrices X_2, Q_1, Q_2 et des scalaires μ, γ tels que la LMI suivante soit satisfaite*

$$\begin{bmatrix} N^TX_1 + X_1N + X_2P + P^TX_2^T + P^TQ_1 + Q_1^TP & -X_2 - Q_1^T + P^TQ_2 \\ * & -Q_2 - Q_2^T + I + \mu\lambda^2 F_L^T F_L \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c} X_1TD - Q_1^TQE^\perp D \\ -X_2QE^\perp D \end{array}\right) & \left(\begin{array}{c} X_1^T\varphi_1 + X_2^T\varphi_2 \\ +Q_1^T\varphi_2 \end{array}\right) \\ -Q_2^TQE^\perp D & Q_2^T\varphi 2 \\ -\mu I & 0 \\ * & -\gamma^2 I \end{array}\right] < 0 \qquad (3.41)$$

Démonstration :

Pour la même fonction de Lyapunov de la section précédente :

$$V(t) = \xi^T\mathbb{E}^TY\xi = \xi^TY^T\mathbb{E}\xi$$

$$\text{avec} \qquad \mathbb{E}^TY = Y^T\mathbb{E}$$

nous obtenons sa dérivée $\dot{V}(t)$ le long de la solution de (3.40)

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{\xi}^T(t)\mathbb{E}^TY\xi(t) + \xi^T(t)Y^T\mathbb{E}\dot{\xi}(t) \\ &= \xi^T(\mathbb{A}^T\xi + Y^T\mathbb{A})\xi + \Delta f^T\mathbb{B}^TY\xi + \xi^TY^T\mathbb{B}\Delta f + w^T\mathbb{D}^TY\xi + \xi^TY^T\mathbb{D}w \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés (3.29), et la propriété de Lipschitz nous obtenons :

$$\dot{V}(t) \leqslant \xi^T(\mathbb{A}^TY + Y^T\mathbb{A})\xi + \mu\lambda^2\xi^T\rho\xi + \frac{1}{\mu}\xi^TY^T\mathbb{B}\mathbb{B}^TY\xi + w^T\mathbb{D}^TY\xi + \xi^TY^T\mathbb{D}w \qquad (3.42)$$

De (3.42) et (3.40) nous obtenons l'inégalité suivante

$$\dot{V} + e^Te - \gamma^2w^Tw \leqslant \left[\begin{array}{c} \xi(t) \\ w\,(t) \end{array}\right]^T \Sigma \left[\begin{array}{c} \xi(t) \\ w\,(t) \end{array}\right]$$

avec

$$\Sigma = \left[\begin{array}{cc} \mathbb{A}^TY + Y^T\mathbb{A} + \frac{1}{\mu}Y^T\mathbb{B}\mathbb{B}^TY + \mu\bar{\rho} & Y^T\mathbb{D} \\ \mathbb{D}^TY & -\gamma^2 I \end{array}\right]$$

où

$$\bar{\rho} = \rho + \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & I + \lambda^2F_L^TFL \end{array}\right]$$

Si $\Sigma < 0$, nous obtenons

$$\dot{V} < \gamma^2w^Tw - e^Te$$

En intégrant les deux membres de cette inégalité nous obtenons

$$\int_0^\infty \dot{V}\,(\tau)\,d\tau < \int_0^\infty \gamma^2w^T(\tau)w(\tau)d\tau - \int_0^\infty e^T(\tau)e(\tau)d\tau$$

ce qui est équivalent à

$$V\,(\infty) - V\,(0) < \gamma^2\,\|w\,(t)\|_2^2 - \|e\,(t)\|_2^2$$

Sous la condition initiale nulle, nous obtenons

$$V(\infty) < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2 - \|e(t)\|_2^2$$

ce qui donne

$$\|e(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2 .$$

En utilisant le complément de Schur nous obtenons

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbb{A}^T Y + Y^T \mathbb{A} + \mu\bar{\rho} & Y^T\mathbb{B} & Y^T\mathbb{D} \\ \mathbb{B}^T Y & -\mu I & 0 \\ \mathbb{D}^T Y & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.43}$$

De la même manière pour obtenir des conditions LMI strictes nous posons

$$Y = X\mathbb{E} + \mathbb{E}^{\perp T}\bar{Q}$$

avec $\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}$ et $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix}$ donc la relation

$$\mathbb{E}^T Y = Y^T E \geqslant 0 \tag{3.44}$$

est toujours vérifiée, et par substitutions dans (3.43) nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}^T X\mathbb{E} + \mathbb{A}^T\mathbb{E}^{\perp T}\bar{Q} + \mathbb{E}^T X^T\mathbb{A} + \bar{Q}^T\mathbb{E}^{\perp}\mathbb{A} & \mathbb{E}^T X^T\mathbb{B} + \bar{Q}^T\mathbb{E}^{\perp}\mathbb{B} & \mathbb{E}^T X^T\mathbb{D} + \bar{Q}^T\mathbb{E}^{\perp}\mathbb{D} \\ \mathbb{B}^T X\mathbb{E} + \mathbb{B}^T\mathbb{E}^{\perp T}\bar{Q} & -\mu I & 0 \\ \mathbb{D}^T X\mathbb{E} + \mathbb{D}^T\mathbb{E}^{\perp T}\bar{Q} & 0 & \gamma^2 \end{bmatrix} < 0 \tag{3.45}$$

Finalement, en remplaçant les matrices $\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}$ et $\mathbb{D}$ par leurs valeurs respectives nous obtenons (3.41), ce qui démontre le théorème 3.6.1 .

Remarque 3.6.2. Les résultats du théorème 3.6.1 sont indépendants du choix de la matrice $\mathbb{E}^{\perp}$. Cela est dû au fait que la forme générale de $\mathbb{E}^{\perp}$ est $\mathbb{E}^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & M \end{bmatrix}$, où M est une matrice arbitraire non singulière. Dans ce cas l'expression $\mathbb{E}^{\perp T}\bar{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 & \bar{Q}_2 \end{bmatrix}$, où $\bar{Q}_1 = MQ_1$ et $\bar{Q}_2 = MQ_2$. Ceci montre qu'il suffit de choisir $\mathbb{E}^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$.

Le théorème suivant donne les conditions d'existence de l'observateur (3.12a)-(3.12b) sous forme d'inégalité matricielle linéaire et la valeur de la matrice Z.

Théorème 3.6.2. *Sous l'hypothèse 3.4.1, il existe un observateur de la forme (3.12a-3.12b) tel que l'erreur $e(t)$ donnée par (3.39) est asymptotiquement stable pour $w(t) = 0$ et $\|e(t)\|_{L_2} < \gamma \|w(t)\|_{L_2}$ pour $w(t) \neq 0$, s'il existe une matrice symétrique définie positive X_1 et des matrices $X_2, Q_1, Q_2, \Omega_{X_1}$ et des scalaires μ et γ tels que la LMI suivante :*

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \\ (1,3)^T & (2,3)^T & -\mu I & 0 \\ (1,4)^T & (2,4)^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.46}$$

soit satisfaite, avec

$$\begin{aligned}
(1,1) &= \Lambda_N^T X_1 - \Delta_N^T \Omega_{X_1} + X_1 \Lambda_N - \Omega_{X_1}^T \Delta_N \\
&\quad + X_2 \Lambda_P + \Lambda_P^T X_2^T + \Lambda_P^T Q_1 + Q_1^T \Lambda_P \\
(1,2) &= -X_2 - Q_1^T + \Lambda_P^T Q_2 \\
(1,3) &= X_1 \Lambda_{TD} - \Omega_{X_1}^T \Delta_{TD} - Q_1^T \Lambda_Q E^\perp D - X_2 \Lambda_Q E^\perp D \\
(1,4) &= X_1 \Lambda_{\varphi_1} - \Omega_{X_1}^T \Delta_{\varphi_1} + Q_1^T \Lambda_{\varphi_1} + X_2 \Lambda_{\varphi_2} \\
(2,2) &= -Q_2 - Q_2^T + I + \mu \lambda^2 F_L^T F_L \\
(2,3) &= -Q_2^T \Lambda_Q E^\perp D \\
(2,4) &= Q_2^T \Lambda_{\varphi_2}
\end{aligned}$$

Dans ce cas le gain Z est donné par $Z = X_1^{-1} \Omega_{X_1}^T$.

Démonstration :

Soit $\Omega_{X_1} = Z^T X_1$, en substituant N, P, Q, φ_1, et φ_2 par leurs valeurs respectives dans (3.41) nous obtenons la LMI (3.46).

3.6.2 Exemple numérique

Soit le système singulier non linéaire de la forme (3.37) avec

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \sin(2t) \quad \text{et} \quad f(x,u,t) = sin(x_2(t)).$$

Dans cet exemple, $rangE = 2$, donc $E^\perp$ de rang maximal $= 1$. Dans ce cas on peut choisir $E^\perp = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Il est facile de voir que la condition $E^\perp E = 0$ est vérifiée et que l'hypothèse 3.4.1 est vérifiée. Par ailleurs, nous avons $rangC = 1$, donc on peut proposer un observateur d'ordre réduit de dimension $q = 2$.

Soit $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, qui vérifie la condition $rang \begin{bmatrix} R \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix} = 3$.

Pour $\gamma^2 = 9.762$, et $\lambda = 1$, $\mu = 1$.

La résolution de la LMI (3.46) nous donne les résultats suivants :

$$\Omega_{X_1} = 10^2 \begin{bmatrix} -4.183 & 0.5 \\ -0.331 & -0.11 \\ -0.567 & 0.276 \\ -0.045 & 0.627 \end{bmatrix}, X_1 = \begin{bmatrix} 3.919 & -2.628 \\ -2.628 & 5.139 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{X}_2 = \begin{bmatrix} 1.536 & -35.286 & -5.232 \\ 8.021 & -4.039 & -8.142 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} -2.798 & -11.094 \\ 11.263 & 2.965 \\ 5.102 & 6.803 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{Q}_2 = \begin{bmatrix} 3.498 & 2.245 & 0.649 \\ 2.245 & 28.836 & 0.565 \\ 0.6498 & 0.565 & 2.113 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas la matrice Z est donnée par

$$Z = 10^2 \begin{bmatrix} -1.387 & -0.151 & -0.209 & 0.051 \\ -0.351 & -0.151 & -0.132 & 0.128 \end{bmatrix}$$

et en calculant les différentes matrices nous obtenons le modèle de l'observateur $\mathcal{H}_\infty$ suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -1.996 \\ 0.666 & -2.121 \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} -0.331 \\ -1.414 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} -0.331 \\ -0.747 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -0.331 \\ -0.747 \end{bmatrix} sin(\widehat{x}_2(t)) \\ \widehat{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -0.352 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.705 \end{bmatrix} \zeta(t) - \begin{bmatrix} 0.235 \\ 0 \\ 0.529 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.764 \\ 0 \\ -0.529 \end{bmatrix} y(t) - \begin{bmatrix} 0.235 \\ 0 \\ 0.529 \end{bmatrix} sin(\widehat{x}_2(t)) \end{aligned} \tag{3.47}$$

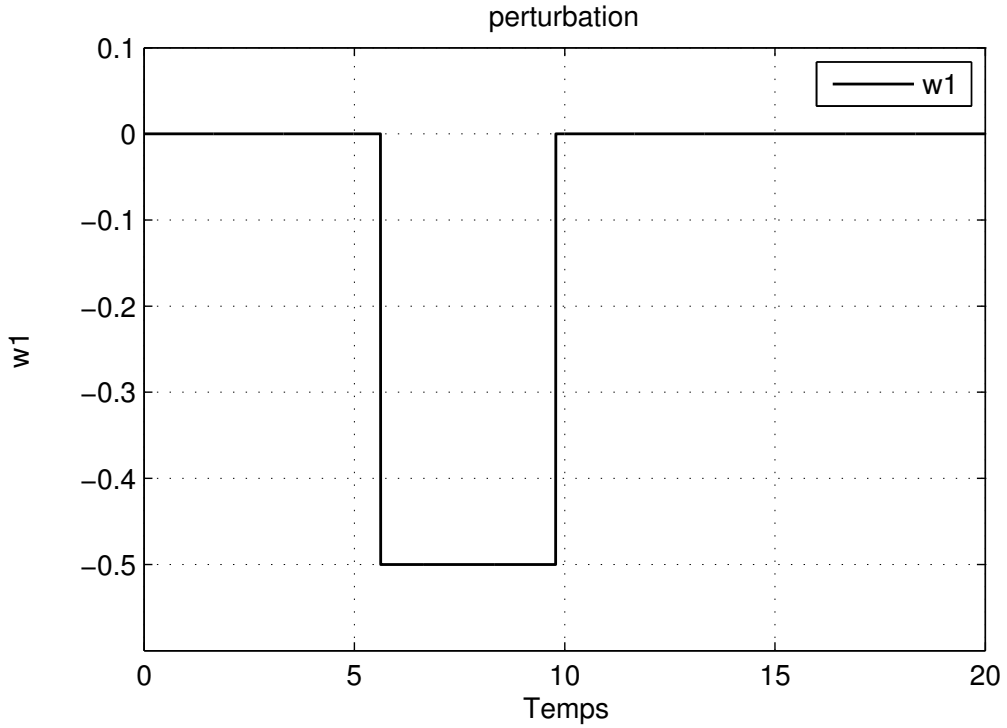


FIGURE 3.1: La perturbation $w_1(t)$

Les figures (3.1), (3.2) représentent les deux composantes du vecteur de la perturbation $w(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}$, les figures (3.3), (3.4) et (3.5) représentent les états x_1, x_2, x_3 et leurs estimés $\hat{x}_1, \hat{x}_2$, et $\hat{x}_3$ respectivement. Les dernières figures (3.6), (3.7) et (3.8) représentent les erreurs d'estimation $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$

3.7 Extension aux systèmes à sorties non linéaires

Dans cette section, nous proposons une extension directe de la méthode de synthèse du filtre $\mathcal{H}_\infty$ à une classe plus générale de systèmes singuliers non linéaires avec des sorties non linéaires.
Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Df(t, F_L x, u) + D_1 w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + g(t, G_L x, u) + D_2 w(t) \end{cases} \tag{3.48}$$

où les fonctions non linéaires $f(t, F_L x, u)$ et $g(t, G_L x, u)$ vérifient les conditions de Lipschitz suivantes :

$$\begin{aligned} \|f(t, F_L x_1, u) - f(t, F_L x_2, u)\| &\leq \lambda_1 \|F_L(x_1 - x_2)\| \\ \|g(t, G_L x_1, u) - g(t, G_L x_2, u)\| &\leq \lambda_2 \|G_L(x_1 - x_2)\| \end{aligned}$$

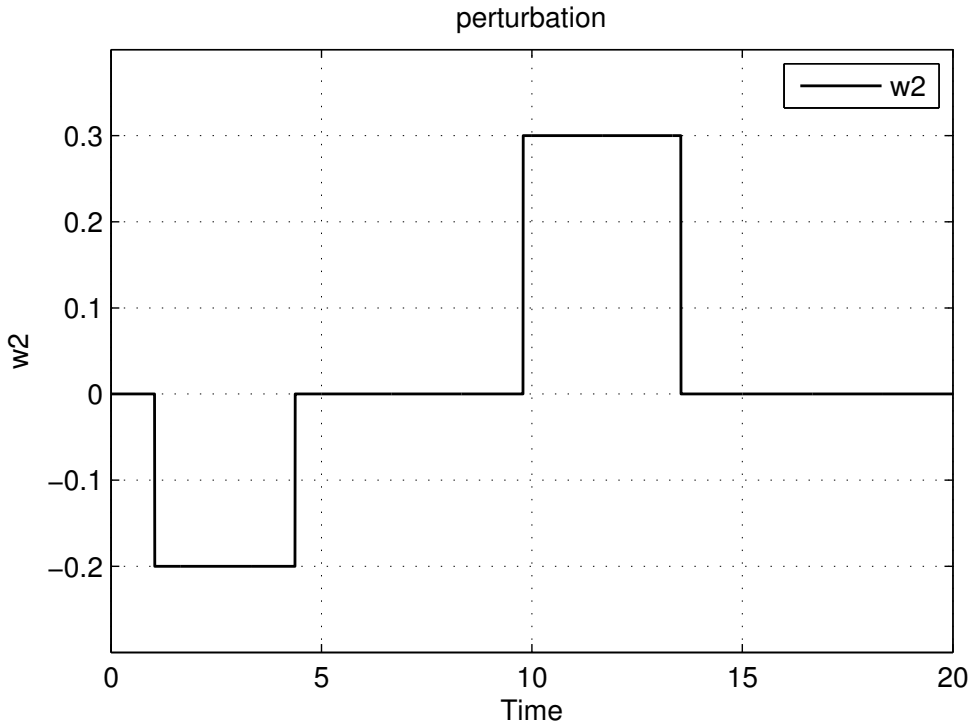


FIGURE 3.2: La perturbation $w_2(t)$

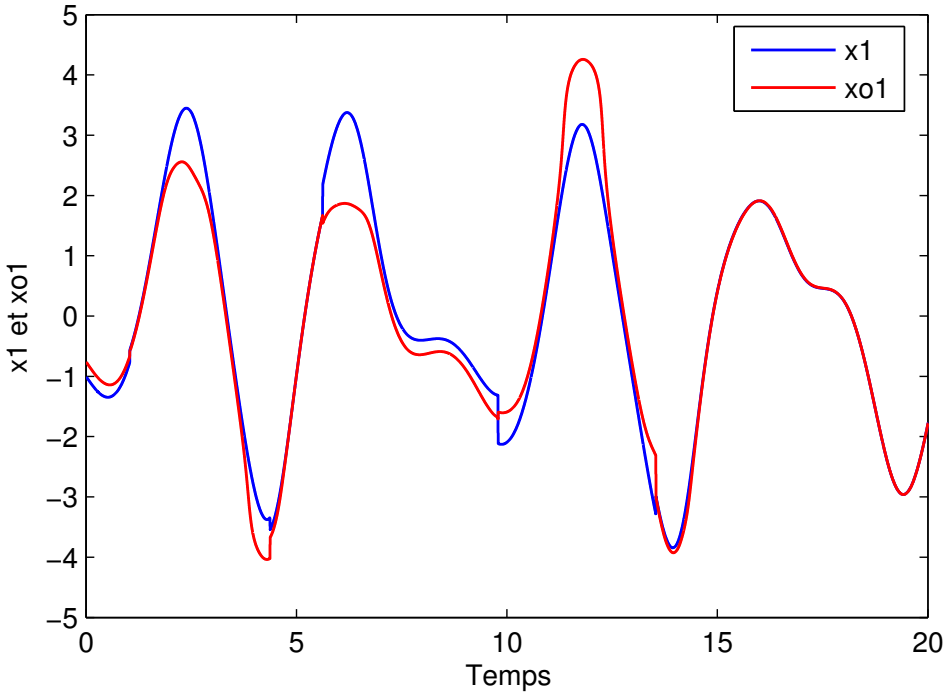


FIGURE 3.3: L'état $x_1(t)$ et son estimé $\hat{x_1}(t)$

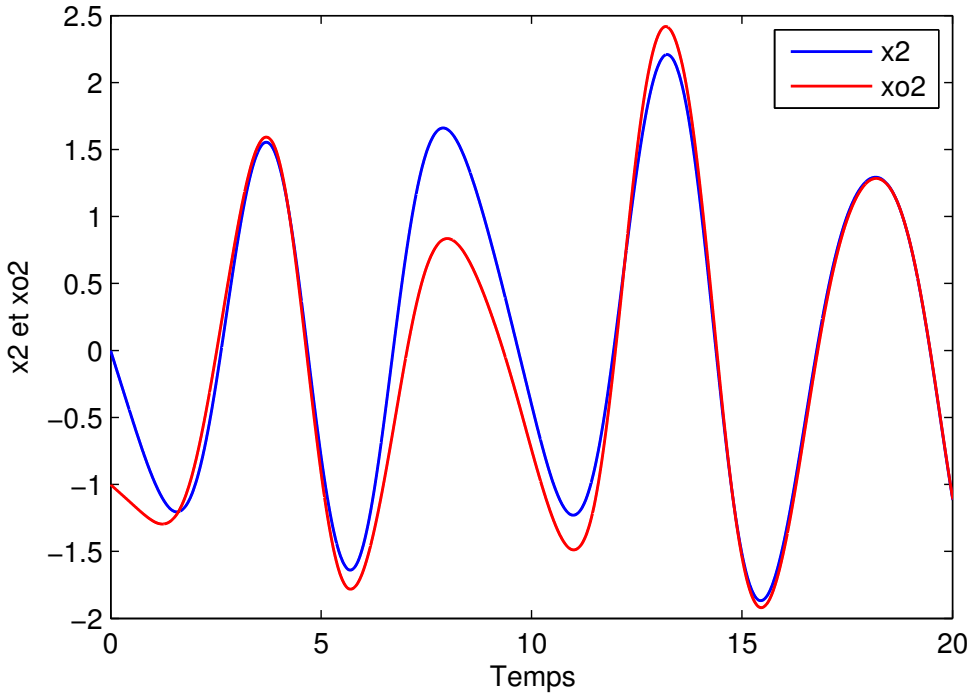


FIGURE 3.4: L'état $x_2(t)$ et son estimé $\hat{x_2}(t)$

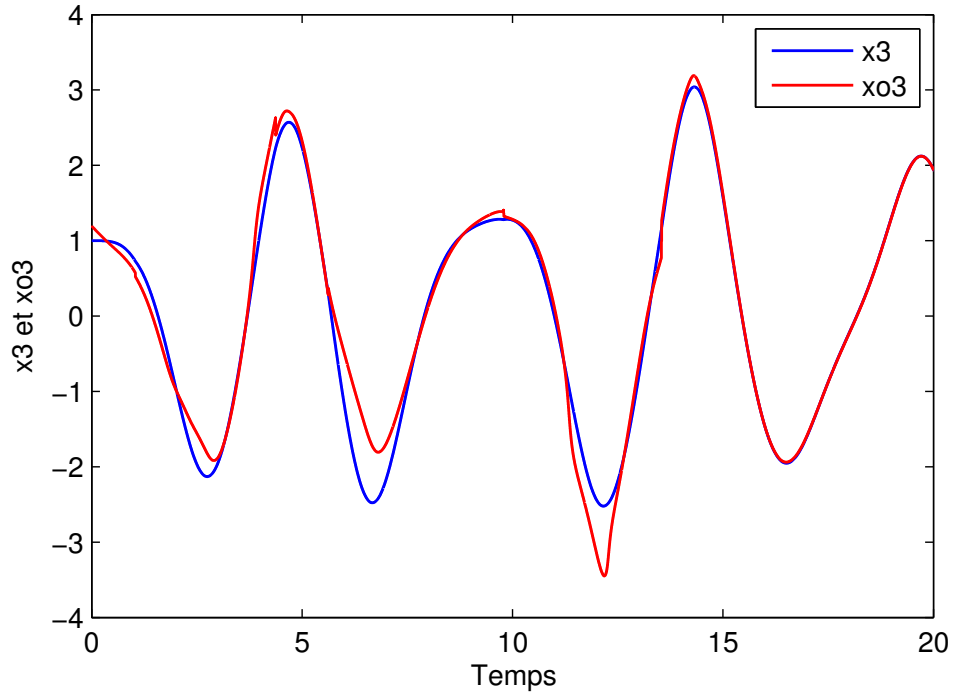


FIGURE 3.5: L'état $x_3(t)$ et son estimé $\hat{x_3}(t)$

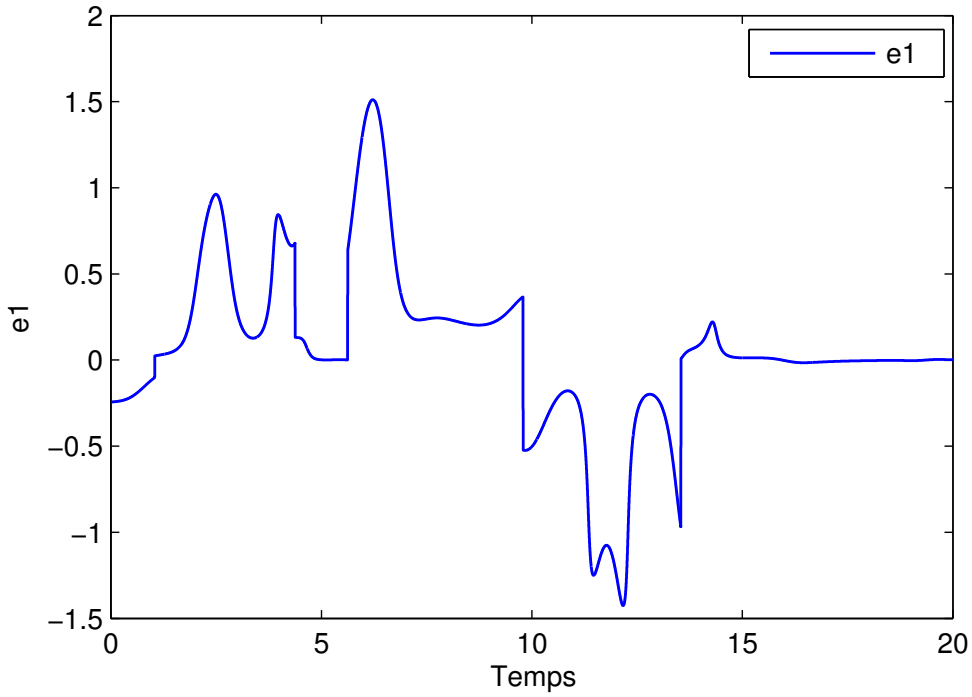


FIGURE 3.6: L'erreur $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$

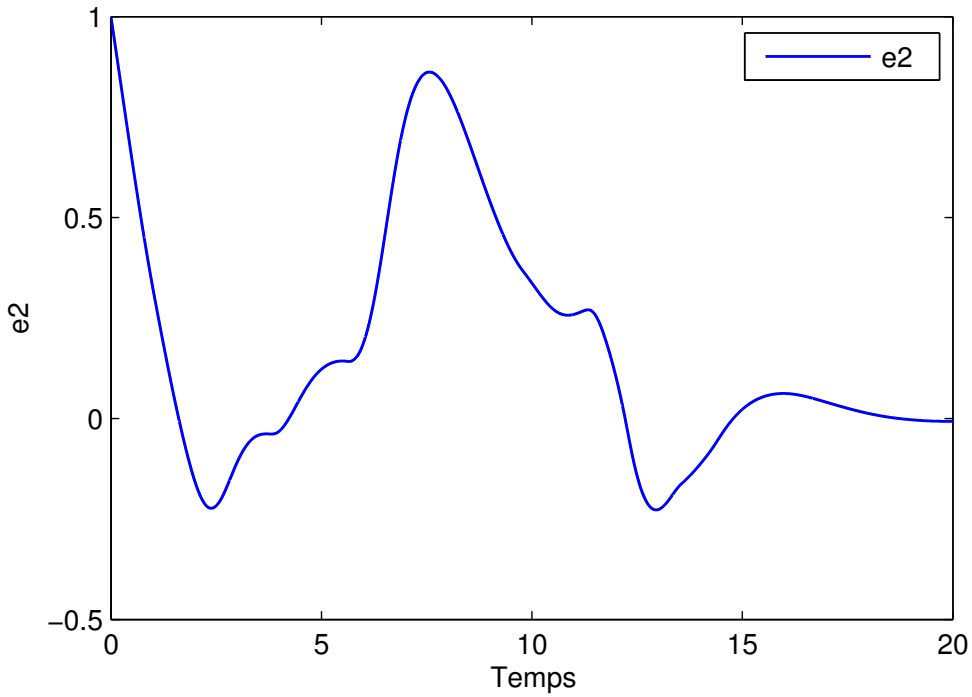


FIGURE 3.7: L'erreur $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$

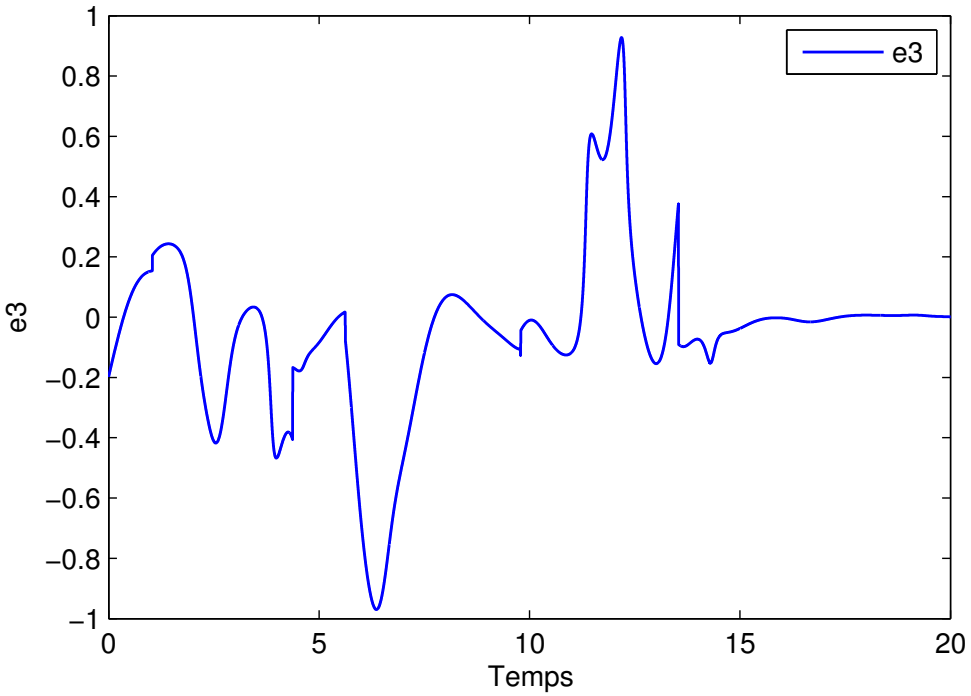


FIGURE 3.8: L'erreur $e_3(t) = x_2(t) - \hat{x}_3(t)$

où λ_1 et λ_2 représentent les deux constantes de Lipschitz.
Pour le système (3.48), nous proposons l'observateur suivant :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) &= N\zeta(t) + Jy(t) + Hu(t) + TDf(t, F_L\widehat{x}, u) - Jg(t, G_L\widehat{x}, u) \\ \widehat{x}(t) &= P\zeta(t) - QE^{\perp}Bu(t) + Fy(t) - QE^{\perp}Df(t, F_L\widehat{x}, u) - Fg(t, G_L\widehat{x}, u) \end{cases} \tag{3.49}$$

avec la condition initiale $\zeta(0) = \zeta_0$,

Soit l'erreur $\varepsilon = \zeta(t) - TEx(t)$, en utilisant l'équation (3.38), et sous les contraintes (3.16a), (3.16b) et (3.16c) nous obtenons :

$$\dot{\epsilon}(t) = N\epsilon(t) + TD\Delta f - J\Delta g + \varphi_1 w(t) \tag{3.50a}$$

$$e(t) = P\epsilon(t) - QE^{\perp}D\Delta f - F\Delta g + \varphi_2 w(t) \tag{3.50b}$$

où $\Delta f = f(t, F_L\widehat{x}(t), u) - f(t, F_L x(t), u)$ et $\Delta g = g(t, G_L\widehat{x}(t), u) - g(t, G_L x(t), u)$.

En utilisant le vecteur augmenté $\xi(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$, nous obtenons pour la variable $\xi(t)$ le système singulier non linéaire de la forme (3.28) suivante :

$$\mathbb{E}\dot{\xi}(t) = \mathbb{A}\xi(t) + \mathbb{B}\Delta\mathcal{F} \tag{3.51a}$$

avec

$$\mathbb{E}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{A}=\begin{bmatrix} N & 0 \\ P & -I \end{bmatrix}, \mathbb{B}=\begin{bmatrix} TD & -J \\ -QE^{\perp}D & -F \end{bmatrix}, \Delta\mathcal{F}=\begin{bmatrix} \Delta f \\ \Delta g \end{bmatrix}, \text{et} D=\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

Le théorème suivant donne les condition d'existence de l'observateur sous forme d'inégalité matricielle linéaire (LMI).

Théorème 3.7.1. *Sous l'hypothèse 3.4.1, il existe un observateur de la forme* (3.49) *tel que l'erreur* $e(t)$ *donnée par* (3.50a)-(3.50b) *est asymptotiquement stable pour* $w(t)=0$ *et* $\|e(t)\|_{L_2} < \gamma \|w(t)\|_{L_2}$ *pour* $w(t)\neq 0$*, s'il existe une matrice symétrique définie positive* X_1 *et des matrices* $X_2, Q_1, Q_2, \Omega_{X_1}$ *et des scalaires* μ *et* γ *tels que la LMI suivante :*

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) \\ (2,1) & (2,2) & -Q_2^T\Lambda_Q E^{\perp}D & -Q_2^T\Lambda_F & Q_2^T\Lambda_{\varphi_2} \\ (1,3)^T & (-Q_2^T\Lambda_Q E^{\perp}D)^T & -\mu I & 0 & 0 \\ (1,4)^T & (-Q_2^T\Lambda_F)^T & 0 & -\mu I & 0 \\ (1,5)^T & (Q_2^T\Lambda_{\varphi_2})^T & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.52}$$

soit vérifiée, avec

$$\begin{aligned}
(1,1) &= \Lambda_N^T X_1 - \Delta_N^T\Omega_{X_1} + X_1\Lambda_N - \Omega_{X_1}^T\Delta_N + X_2\Lambda_P + \Lambda_P^T X_2^T + \Lambda_P^T Q_1 + Q_1^T\Lambda_P,\\
(1,2) &= -X_2 - Q_1^T + \Lambda_P^T Q_2,\\
(1,3) &= X_1^T\Lambda_{TD} - \Omega_{X_1}^T\Delta_{TD} - Q_1^T\Lambda_Q E^{\perp}D - X_2\Lambda_Q E^{\perp}D,\\
(1,4) &= -X_1^T\Lambda_J + \Omega_{X_1}^T\Delta_J - Q_1^T\Lambda_F - X_2\Lambda_F,\\
(1,5) &= X_1^T\Lambda_{\varphi_1} - \Omega_{X_1}^T\Delta_{\varphi_1} + Q_1^T\Lambda_{\varphi_2} + X_2\Lambda_{\varphi_2},\\
(2,2) &= -Q_2 - Q_2^T + I + \mu\left(\lambda_1^2 F_L^T F_L + \lambda_2^2 G_L^T G_L\right),
\end{aligned}$$

Dans ce cas la matrice Z_1 *est donnée par* $Z_1 = X_1^{-1}\Omega_{X_1}^T$.

Démonstration :

Les inégalités (3.43) et (3.44) donnent les conditions de stabilité pour le système (3.51). En remplaçant les matrices $\mathbb{E}, \mathbb{A}, \mathbb{B}$ et $\mathbb{D}$ par leurs valeurs dans (3.43) et en appliquant le changement de variable

$$Y = X\mathbb{E} + \mathbb{E}^{\perp T}\bar{Q}$$

nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} N^TX_1 + X_1^TN + X_2P + P^TX_2^T + P^TQ_1 + Q_1^TP & -X_2 - Q_1^T + P^TQ_2 \\ * & -Q_2 - Q_2^T + I + \mu\left(\lambda_1^2F_L^TF_L + \lambda_2^2G_L^TG_L\right) \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1TD - Q_1^TQE^{\perp}D - X_2QE^{\perp}D & -X_1J - Q_1^TF - X_2F & X_1^T\varphi_1 + X_2\varphi_2 + Q_1^T\varphi_2 \\ -Q_2^TQE^{\perp}D & -Q_2^TF & Q_2^T\varphi 2 \\ -\mu I & 0 & 0 \\ * & -\mu I & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

En posant $\Omega_{X_1} = Z_1^TX_1$, et en substituant N, P, Q, φ_1, et φ_2 par leurs valeurs respectives, nous obtenons la LMI (3.52), ce qui démontre le théorème 3.7.1.

3.7.1 Exemple numérique

Considérons le système singulier non linéaire de la forme (3.48) avec

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $u(t) = \sin(2t)$. Les nonlinéarités sont $f(x,u,t) = \sin(x_2(t))$ et $g(x,u,t) = \sin(x_1(t))$. La matrice $E^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et la matrice $E^{\perp}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. On peut facilement vérifier que l'hypothèse 3.4.1 est vérifiée. Nous allons synthétiser un observateur d'ordre réduit de dimension $q = 2$. Soit $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, donc $rang \begin{bmatrix} R \\ E^{\perp}A \\ C \end{bmatrix} = 3$.

Pour $\gamma = 3.16$, $\lambda = 1$, et $\mu = 1$.

La résolution de la LMI (3.52) nous donne les résultats suivants :

$$\Omega_{X_1} = 10^3 \begin{bmatrix} -6.532 & -1.453 \\ -0.211 & -1.806 \\ 0.349 & -2.902 \\ 0.666 & -0.192 \end{bmatrix}, X_1 = \begin{bmatrix} 0.230 & -0.325 \\ -0.325 & 0.553 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
X_2 &= 10^4 \begin{bmatrix} 0.000015 & -3.702 & 0.00057 \\ 0.00012 & 0.000004 & 0.00037 \end{bmatrix}, Q_1 = 10^4 \begin{bmatrix} -0.000024 & -0.000100 \\ -3.702232 & -0.000004 \\ -0.000585 & 0.000044 \end{bmatrix}, \\
Q_2 &= 10^4 \begin{bmatrix} 0.000217 & -0.000005 & 0.000109 \\ -0.000005 & 7.404586 & -0.000002 \\ 0.000109 & -0.000002 & 0.000377 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

Dans ce cas la matrice Z_1 est donnée par

$$
Z_1 = 10^2 \begin{bmatrix} -189.4005 & -32.6285 & -34.7857 & 14.1849 \\ -113.9388 & -22.4417 & -25.6914 & 7.9893 \end{bmatrix}
$$

En calculant les différentes matrices nous obtenons de l'observateur $\mathcal{H}_\infty$ suivant :

$$
\begin{aligned}
\dot{\zeta}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -16.08 \\ 0.667 & -10.656 \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} -9.723 \\ -7.104 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} -9.723 \\ -6.437 \end{bmatrix} u(t) \\
&\quad + \begin{bmatrix} -9.723 \\ -6.437 \end{bmatrix} f(t, F_L \widehat{x}, u) - \begin{bmatrix} -9.723 \\ -7.104 \end{bmatrix} g(t, G_L \widehat{x}, u) \\
\widehat{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -0.353 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.706 \end{bmatrix} \zeta(t) - \begin{bmatrix} 0.235 \\ 0 \\ 0.529 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.765 \\ 0 \\ -0.529 \end{bmatrix} y(t) \\
&\quad - \begin{bmatrix} 0.235 \\ 0 \\ 0.529 \end{bmatrix} f(t, F_L \widehat{x}, u) - \begin{bmatrix} 0.765 \\ 0 \\ -0.529 \end{bmatrix} g(t, G_L \widehat{x}, u)
\end{aligned}
$$

Les résultats de simulation sont présentés dans les figures (3.9)-(3.16). Les figures (3.9) et (3.10) présentent les perturbations $w_1(t)$ et $w_2(t)$. Les figures (3.11), (3.12) et (3.13) présentent les états $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ et leurs estimés $\hat{x}_1(t)$, $\hat{x}_2(t)$, $\hat{x}_3(t)$. Les figure (3.14), (3.15) et (3.16) présentent les erreurs d'estimation. Ces résultats montrent l'efficacité de la méthode proposée.

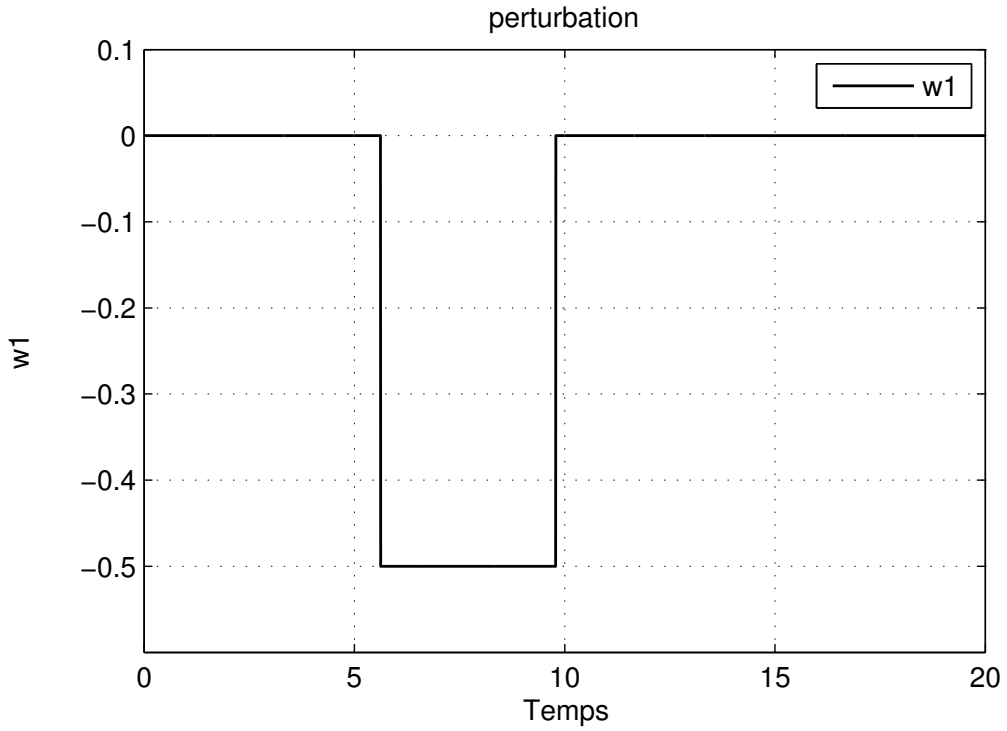


FIGURE 3.9: La perturbation $w_1(t)$

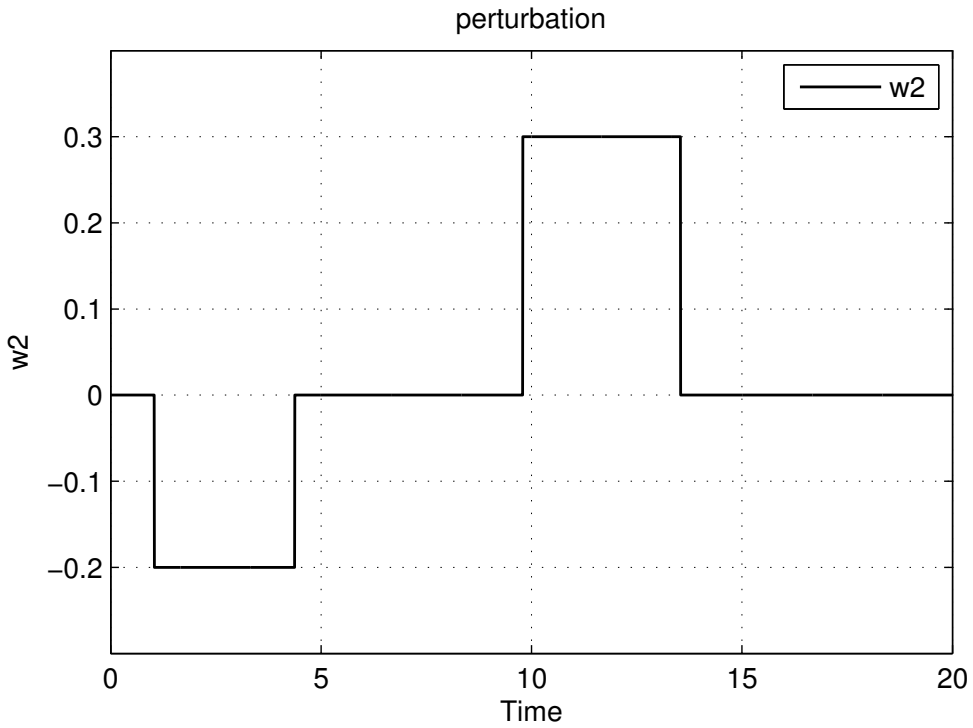


FIGURE 3.10: La perturbation $w_2(t)$

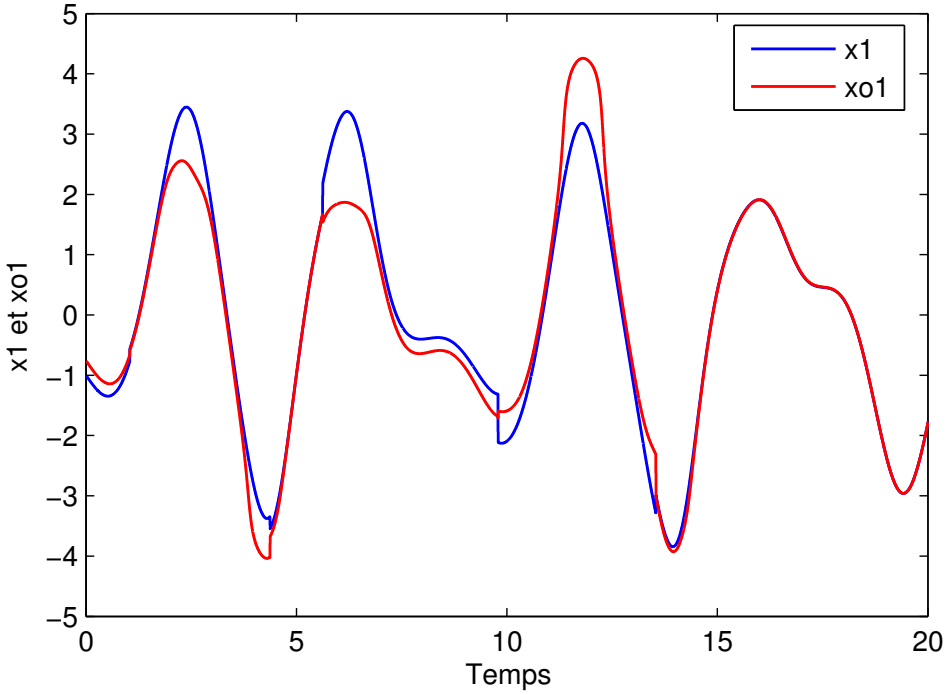


FIGURE 3.11: L'état $x_1(t)$ et son estimé $\hat{x_1}(t)$

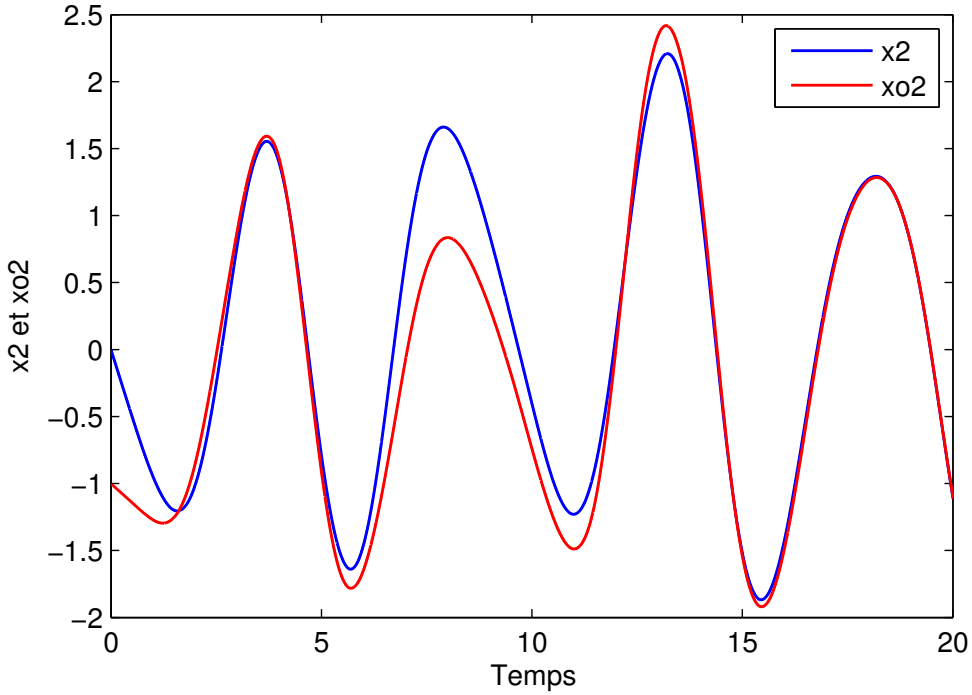


FIGURE 3.12: L'état $x_2(t)$ et son estimé $\hat{x_2}(t)$

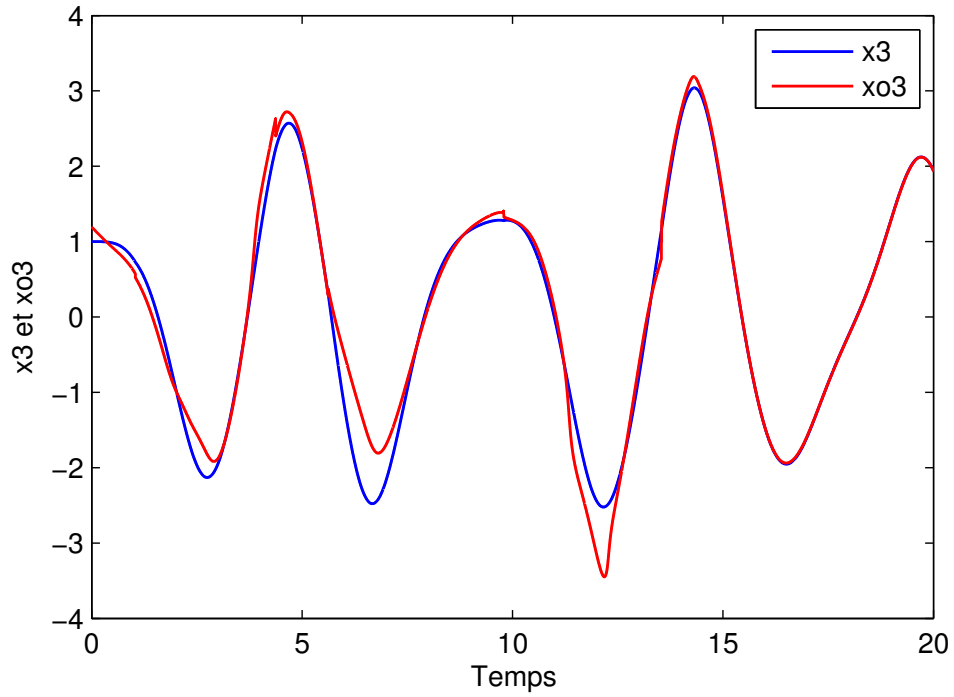


FIGURE 3.13: L'état $x_3(t)$ et son estimé $\hat{x}_3(t)$

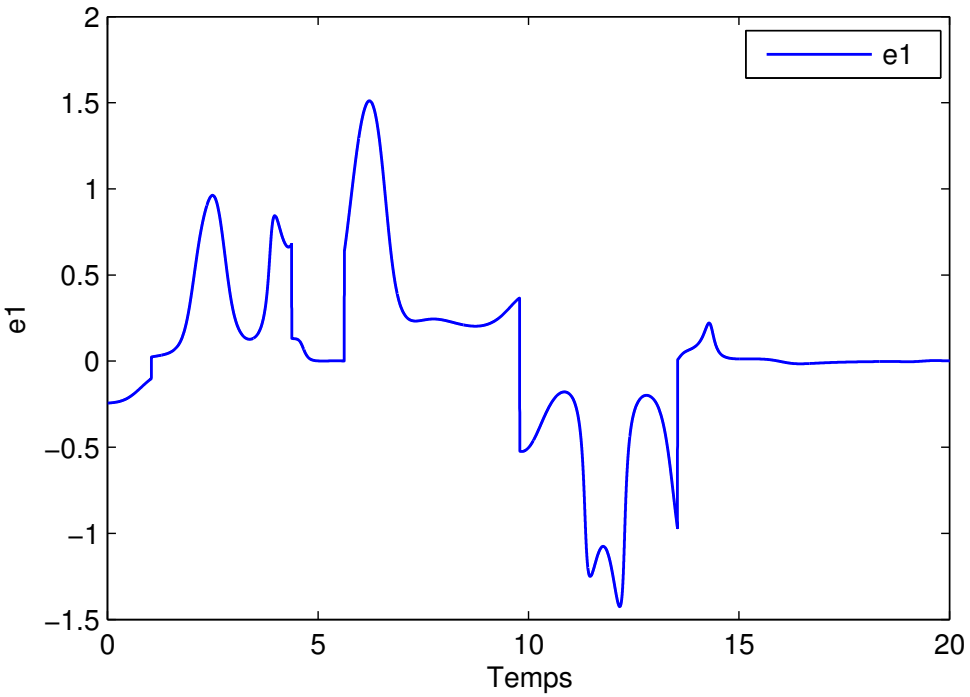


FIGURE 3.14: L'erreur $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$

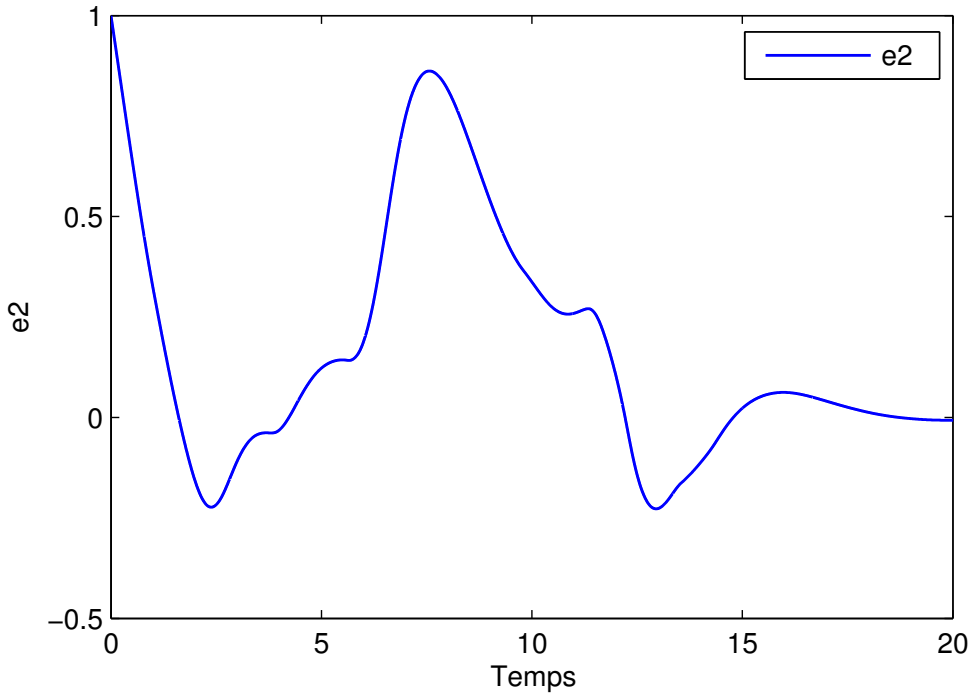


FIGURE 3.15: L'erreur $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$

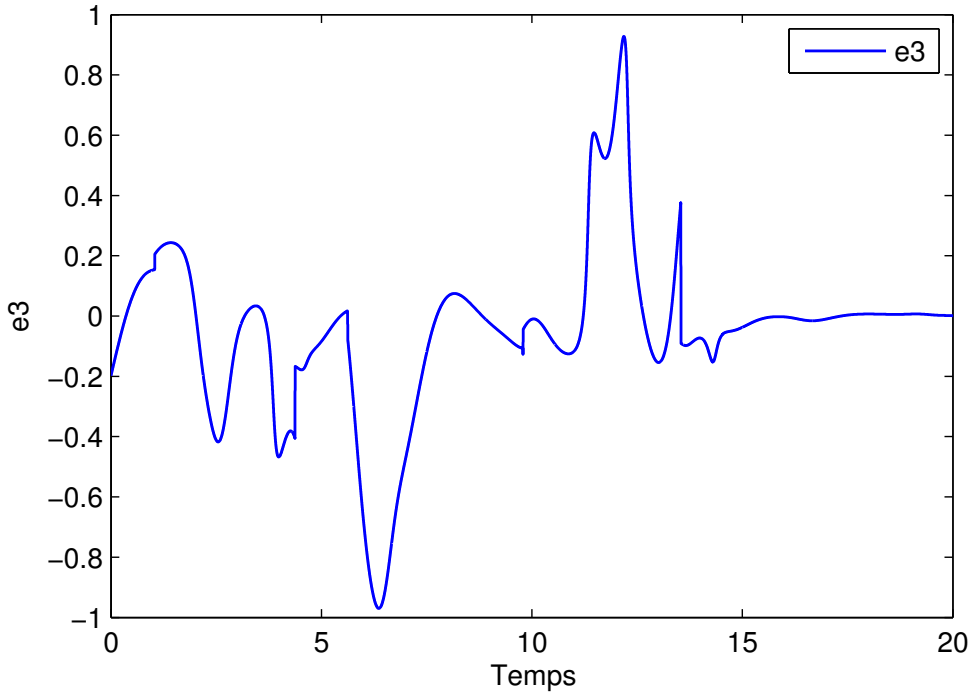


FIGURE 3.16: L'erreur $e_3(t) = x_2(t) - \hat{x}_3(t)$

3.8 Synthèse de filtre $\mathcal{H}_\infty$ des systèmes à temps discret

Dans cette section, nous allons proposer une extension de la méthode de synthèse proposée dans les sections précédentes pour les systèmes singuliers non linéaires à temps continu au cas des systèmes singuliers non linéaires à temps discret.

3.8.1 Formulation du problème

Considérons le système non linéaire à temps discret suivant

$$\begin{aligned} Ex(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + Df(F_L x, u) + D_1 w(t) && (3.55a)\\ y(t) &= Cx(t) + D_2 w(t) && (3.55b) \end{aligned}$$

avec l'état initial $x(0) = x_0$, $x(t) \in I\!R^n$ est le semi vecteur d'état, $u(t) \in I\!R^m$ est la commande, $w(t) \in I\!R^{n_w}$ est le vecteur de perturbation, et $y(t) \in I\!R^p$ est la sortie du système. La matrice $E \in I\!R^{n_1 \times n}$, et pour $n_1 = n$, E est singulière. Les matrices $A \in I\!R^{n_1 \times n}$, $B \in I\!R^{n_1 \times m}$, $C \in I\!R^{p \times n}$ et $D \in I\!R^{n_1 \times n_f}$, la non-linéarité, $f(t, F_L x, u)$ satisfait la propriété de Lipschitz par rapport à x :

$$\|f(t, F_L x_1, u) - f(t, F_L x_2, u)\| \leq \lambda_1 \|F_L(x_1 - x_2)\|$$

où λ_1 représente la constante de Lipschitz, la matrice F_L est une matrice réelle de dimension appropriée.

Soit $E_D^\perp \in I\!R^{r_1 \times n_1}$ la matrice de rang plein ligne orthogonale de $\begin{bmatrix} E & D \end{bmatrix}$, c'est à dire $E_D^\perp \begin{bmatrix} E & D \end{bmatrix} = 0$.

En multipliant (3.55a) par $E_D^\perp$ nous obtenons

$$E_D^\perp A x(t) + Q E_D^\perp D_1 w = -E_D^\perp B u(t). \tag{3.56}$$

Nous supposons que l'hypothèse 3.4.1 est vérifiée.

Considérons pour le système (3.55a)-(3.55b) l'observateur d'ordre réduit suivant :

$$\begin{aligned} \zeta(t+1) &= N\zeta(t) + Jy(t) + Hu(t) + TDf(t, F_L \widehat{x}, u) && (3.57a)\\ \widehat{x}(t) &= P\zeta(t) - QE_D^\perp B u(t) + Fy(t) && (3.57b) \end{aligned}$$

avec la condition initiale $\zeta(0) = \zeta_0$, $\zeta(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur d'état de l'observateur et $\widehat{x}(t) \in I\!R^n$ est l'estimé de $x(t)$. Les matrices N, J, T, H, P, Q, et F sont des matrices de dimension appropriée à déterminer telles que :

(a) Pour $w(t) = 0$, l'erreur d'observation $e(t) = \widehat{x}(t) - x(t)$ converge asymptotiquement vers 0.

(b) Pour $w(t) \neq 0$, on résout $\min \sup_{\omega \in l_2 - \{0\}} \dfrac{\|e\|_{l_2}}{\|\omega\|_{l_2}}$.

Soit $\varepsilon(t) = \zeta(t) - TEx(t)$ l'écart entre $\zeta(t)$ et $TEx(t)$, la dynamique de $\varepsilon(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t+1) &= \zeta(t+1) - TEx(t+1) \\ &= N\varepsilon(t) + (NTE - TA + JC)x(t) + (H - TB)u + TD\Delta f \\ &\quad + (JD_2 - TD_1)w(t) \end{aligned} \tag{3.58}$$

avec $\Delta f = f(t, F_L\widehat{x}(t), u) - f(t, F_L x(t), u)$

En substituant (3.56) dans (3.57b) nous obtenons :

$$\widehat{x}(t) = P\varepsilon + \begin{bmatrix} P & Q & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} TE \\ E_D^{\perp} A \\ C \end{bmatrix} x + (QE_D^{\perp} D_1 + FD_2)w \tag{3.59a}$$

Dans ce cas, sous les contraintes (3.16a), (3.16b) et (3.16c), l'erreur d'estimation devient :

$$\epsilon(t+1) = N\epsilon(t) + TD\Delta f - J\Delta g + \varphi_1 w(t) \tag{3.60a}$$

$$e(t) = P\epsilon(t) + \varphi_2 w(t) \tag{3.60b}$$

où $\Delta f = f(t, F_L\widehat{x}(t), u) - f(t, F_L x(t), u)$ et $\varphi_1 = JD_2 - TD_1$, $\varphi_2 = QE_D^{\perp} D_1 + FD_2$

3.8.2 Procédure de synthèse d'observateur

Le lemme suivant donne les conditions d'existence de l'observateur (3.57).

Lemme 3.8.1. *Le système donné par (3.60) est asymptotiquement stable pour $w(t) = 0$ et $\|e(t)\|_{L_2} < \gamma \|w(t)\|_{L_2}$ pour $w(t) \neq 0$ s'il existe une matrice symétrique définie positive X, des matrices G, T, N, P, φ_1 et φ_2 telles que la LMI suivante est vérifiée :*

$$\begin{bmatrix} -X + P^T\rho P & 0 & P^T\rho\varphi_2 & N^T G \\ 0 & -I & 0 & (TD)^T G \\ \varphi_2^T \rho P & 0 & -\gamma^2 I + \varphi_2^T \rho \varphi_2 & \varphi_1^T G \\ G^T N & G^T(TD) & G^T\varphi_1 & X - G - G^T \end{bmatrix} < 0 \tag{3.61}$$

avec $\rho = I + \lambda^2 F_L^T F_L$.

Démonstration :

Supposons que (3.61) soit satisfaite, donc en pré-multipliant à gauche par :

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & N^T \\ 0 & I & 0 & (TD)^T \\ 0 & 0 & I & \varphi_1^T \end{bmatrix}$$

et en post-multipliant par :

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ N & (TD) & \varphi_1 \end{bmatrix}$$

nous obtenons

$$\bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} -X + P^T\rho P + N^T X N & N^T X(TD) & P^T\rho\varphi_2 + N^T X\varphi_1 \\ (TD)^T XN & -I + (TD)^T X(TD) & N^T X\varphi_1 \\ \varphi_2^T\rho P + \varphi_1^T XN & \varphi_1^T X(TD) & -\gamma^2 I + \varphi_2^T\rho\varphi_2 + \varphi_1^T X\varphi_1 \end{bmatrix} < 0 \tag{3.62}$$

D'autre part, nous avons $w(t) \neq 0$,

$$\Delta V = [\varepsilon^T(t)N^T + \Delta f^T(DT)^T + w^T(t)\varphi_1^T]X[N\varepsilon(t) + (TD)\Delta f + \varphi_1 w(t)] - \varepsilon^T(t)X\varepsilon(t)$$

Soit

$$\begin{aligned} \delta &= \Delta V - \Delta f^T\Delta f + \lambda^2 e^T(t)F_L^T F_L e(t) \\ &= \Delta V - \Delta f^T\Delta f + \lambda^2(P\varepsilon(t) + \varphi_2 w(t))^T F_L^T F_L(P\varepsilon + \varphi_2 w), \end{aligned}$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\delta = \eta^T(t)\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & N^T XTD & (\Sigma_{31})^T \\ (TD)^T XN & \Sigma_{22} & (TD)^T X\varphi_1 \\ \Sigma_{31} & \varphi_1^T X(TD) & \Sigma_{33} \end{bmatrix}\eta(t)$$

où $\eta(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \Delta f(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ et

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= N^T XN - X + \lambda^2 P^T F_L^T F_L P, \\ \Sigma_{22} &= -I + (TD)^T X(TD), \\ \Sigma_{33} &= \lambda^2\varphi_2^T F_L^T F_L\varphi_2 + \varphi_1^T X\varphi_1, \\ \Sigma_{31} &= \varphi_1^T XN + \lambda^2\varphi_2^T F_L^T F_L P \end{aligned}$$

De même, soit

$$\bar{\delta} = \eta^T(t) \begin{bmatrix} P^T P & 0 & P^T \varphi_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varphi_2^T P & 0 & \varphi_2^T \varphi_2 - \gamma^2 I \end{bmatrix} \eta(t)$$

Donc nous avons

$$\delta + \bar{\delta} = \eta^T(t) \bar{\Sigma} \eta(t)$$

Si (3.62) est satisfaite, nous obtenons

$$\eta^T(t) \bar{\Sigma} \eta(t) < 0$$

ce qui donne

$$\Delta V < -\bar{\delta} \quad \text{ou} \quad \Delta V < -(e^T(t)e(t) - \gamma^2 w^T w(t)),$$

ce qui implique

$$V(\infty) - V(0) < -\sum_{t=0}^{\infty} e^T(t)e(t) + \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^2 w^T(t)w(t))$$

Sous la condition initial nulle, nous obtenons $\|e\|_{l^2} < \gamma \|w\|_{l^2}$, ce qui démontre le lemme.

Des résultats du lemme précédent, on peut donner le théorème suivant :

Théorème 3.8.1. *Sous l'hypothèse 2.3.1, il existe un observateur de la forme tel que l'erreur d'observation $e(t)$ donnée par (3.60) est asymptotiquement stable pour $w(t) = 0$ et $\|e(t)\|_{l_2} < \gamma \|w(t)\|_{l_2}$ pour $w(t) \neq 0$ s'il existe une matrice symétrique définie positive X et des matrices Ω_{Y_1} et $\bar{Y}_2$ telles que la LMI suivante est satisfaite*

$$\begin{bmatrix} -X & 0 & 0 & (4,1)^T & (5,1)^T \\ 0 & -I & 0 & (4,2)^T & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & (4,3)^T & (5,3)^T \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & X - G - G' & 0 \\ (5,1) & 0 & (5,3) & 0 & -\rho \end{bmatrix} < 0 \tag{3.63}$$

avec

$$\begin{aligned} (4,1) &= G^T \Lambda_N - \Omega_{Y_1} \Delta_N, \\ (4,2) &= G^T \Lambda_{TD} - \Omega_{Y_1} \Delta_{TD}, \\ (4,3) &= G^T \Lambda_{\varphi_1} - \Omega_{Y_1} \Delta_{\varphi_1} \\ (5,1) &= \rho \Lambda_P - \bar{Y}_2 \Delta_P, \\ (5,3) &= \rho \Lambda_{\varphi_2} - \bar{Y}_2 \Delta_{\varphi_2}, \\ Y_1 &= G^{T-1} \Omega_{Y_1} \text{ et } Y_2 = \rho^{-1} \bar{Y}_2. \end{aligned}$$

Démonstration :

Du lemme 3.8.1 l'erreur $e(t)$ donnée par (3.60) est asymptotiquement stable pour $w(t) = 0$ et $\|e(t)\|_{l_2} < \gamma \|w(t)\|_{l_2}$ s'il existe une matrice symétrique définie positive X, des matrices G, T, N, P, φ_1 et φ_2 telles que la LMI (3.62) est satisfaite. En appliquant le complément de Schur à (3.62) nous obtenons

$$\begin{bmatrix} -X & 0 & 0 & N^T G & P^T \rho \\ 0 & -I & 0 & (TD)^T G & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & \varphi_1^T G & \varphi_2^T \rho \\ G^T N & G^T(TD) & G^T \varphi_1 & -X & 0 \\ \rho P & 0 & \rho \varphi_2 & 0 & -\rho \end{bmatrix} < 0 \tag{3.64}$$

En substituant les matrices N, P, TD, φ_1 et φ_2 par leurs valeurs respectives dans (3.64), nous obtenons la LMI (3.63). Avec $Y_1 = G^{T-1}\Omega_{Y_1}$ et $Y_2 = \rho^{-1}\,\bar{Y}_2$. Le théorème est démontré

3.9 Exemple numérique

Considérons le systèmes non linéaire à temps discret avec des entrée inconnues suivant :

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 0.1 & -1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ D_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ F_d &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \text{and}\ \ D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La non linéarité $f(x, u, t) = 0.5\sin(x_2(t))$. Ici, le problème est d'estimer simultanément l'état $x(t)$ et l'entrée inconnue $d(t)$. Dans ce cas, nous obtenons le système augmenté de la forme (3.55) avec :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{X}}(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t-1) \end{bmatrix},\ \bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E & -F_d \end{bmatrix},\ \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{C}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ C & 0 \end{bmatrix},\ \bar{\mathbf{D}}_1 = D_1,\ \bar{\mathbf{D}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \end{bmatrix},\ \text{and}\ \bar{F}_{_L} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pour ce système, la matrice $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Maintenant, nous allons synthétiser un observateur d'ordre $q = 3$, soit $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, donc nous avons $rang \begin{bmatrix} R \\ \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} = 4$.

Pour $\gamma^2 = 2.235$, nous obtenons les résultats suivantes

$$\Omega_{Y_1} = 10^2 \begin{bmatrix} 0 & -0.030 & 0.030 & -0.896 & -0.756 & -0.615 \\ 0 & 0.030 & -0.030 & 1.717 & 1.505 & 1.210 \\ 0 & -0.054 & 0.053 & -1.748 & -1.466 & -1.196 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1.109 & 0.030 & -0.030 \\ 0.030 & 1.197 & 0.263 \\ -0.030 & 0.263 & 1.202 \end{bmatrix} \text{ et } G = \begin{bmatrix} 1.214 & 0.027 & -0.027 \\ 0.027 & 1.297 & 0.165 \\ -0.027 & 0.165 & 1.300 \end{bmatrix}$$

dans ce cas l'observateur est donnée par le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) = & \begin{bmatrix} 0.1 & 0.00027 & -0.00027 \\ 0 & 0.00327 & -0.00324 \\ 0 & -0.00324 & 0.00321 \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 0.00018 & 0.10001 \\ 0.00217 & -0.00313 \\ -0.00215 & 0.00310 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.33554 \\ 0 & -0.33222 \end{bmatrix} u(t) \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3355 \\ -0.3322 \end{bmatrix} sin(\widehat{x}_2(t)) \end{aligned}$$

$$\widehat{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0.02467 & -0.02442 \\ 0 & 0.00123 & -0.00122 \\ 0 & -0.01232 & 0.01220 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta(t) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.01639 & 0.00163 \\ 0.00081 & -0.09991 \\ -0.00819 & 0.99918 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y(t) \tag{3.65}$$

Les résultats de simulation sont présentés dans les figures (3.17)-(3.26). Les figures (3.17) et (3.18) présentent les perturbations $w_1(t)$ et $w_2(t)$. Les figures (3.19), (3.20) et (3.21) présentent les états $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ et leurs estimés $\hat{x}_1(t)$, $\hat{x}_2(t)$, $\hat{x}_3(t)$. La figure (3.22) présente l'entrée inconnue $d(t)$ et son estimé $\hat{d}(t)$. Les figure (3.23), (3.24), (3.25) et (3.26) présetent les erreurs d'estimation. On peut constater à partir de ces résultats la bonne estimation des états et de l'entrée inconnue.

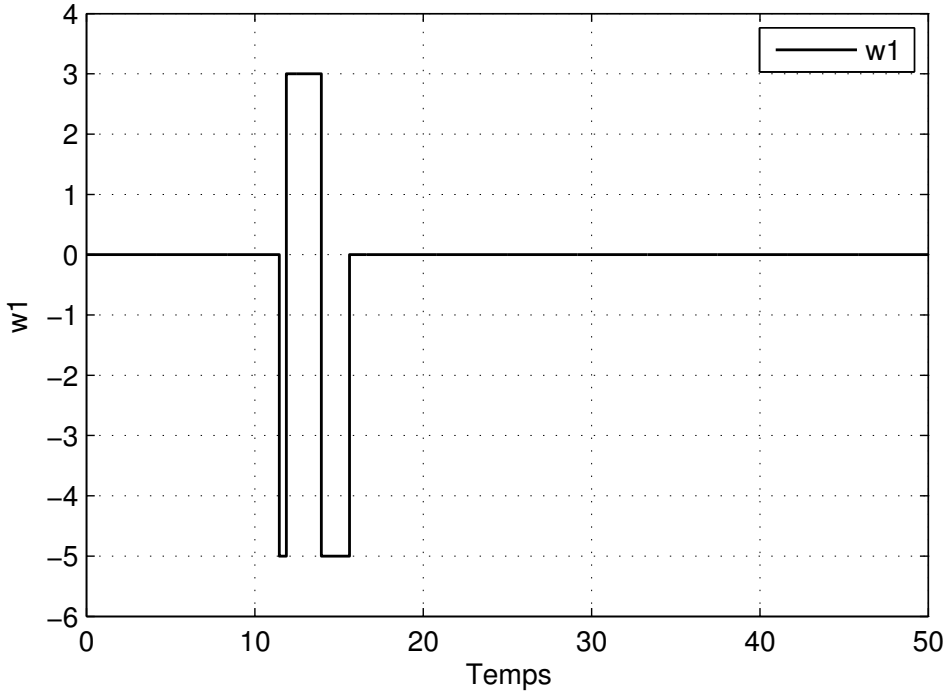


FIGURE 3.17: La perturbation $w_1(t)$

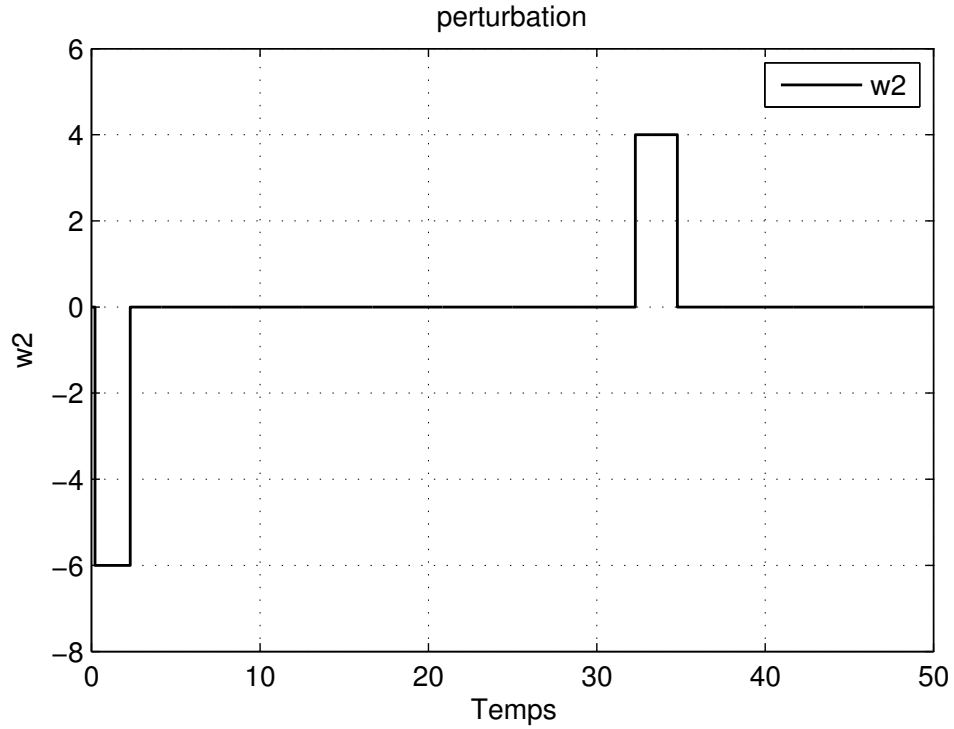


FIGURE 3.18: La perturbation $w_2(t)$

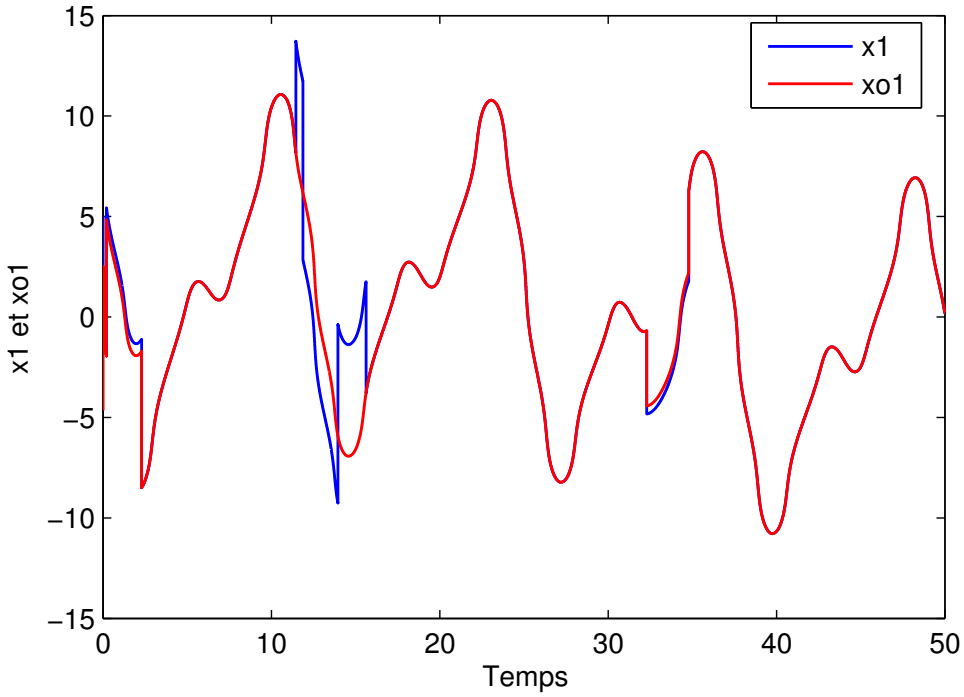


FIGURE 3.19: L'état $x_1(t)$ et son estimé $\hat{x_1}(t)$

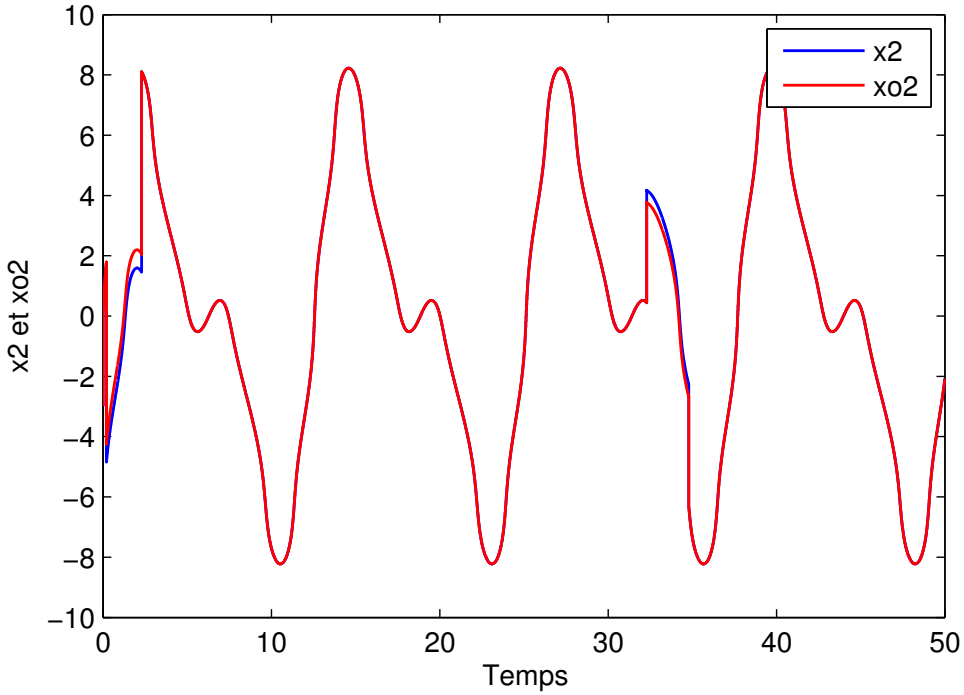


FIGURE 3.20: L'état $x_2(t)$ et son estimé $\hat{x_2}(t)$

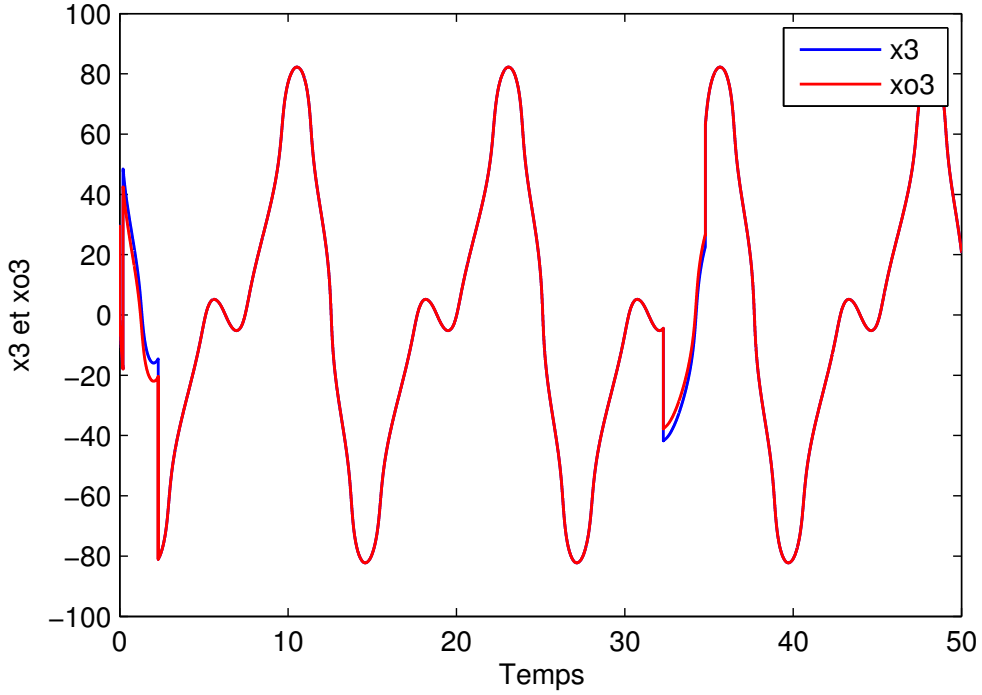


FIGURE 3.21: L'état $x_3(t)$ et son estimé $\hat{x_3}(t)$

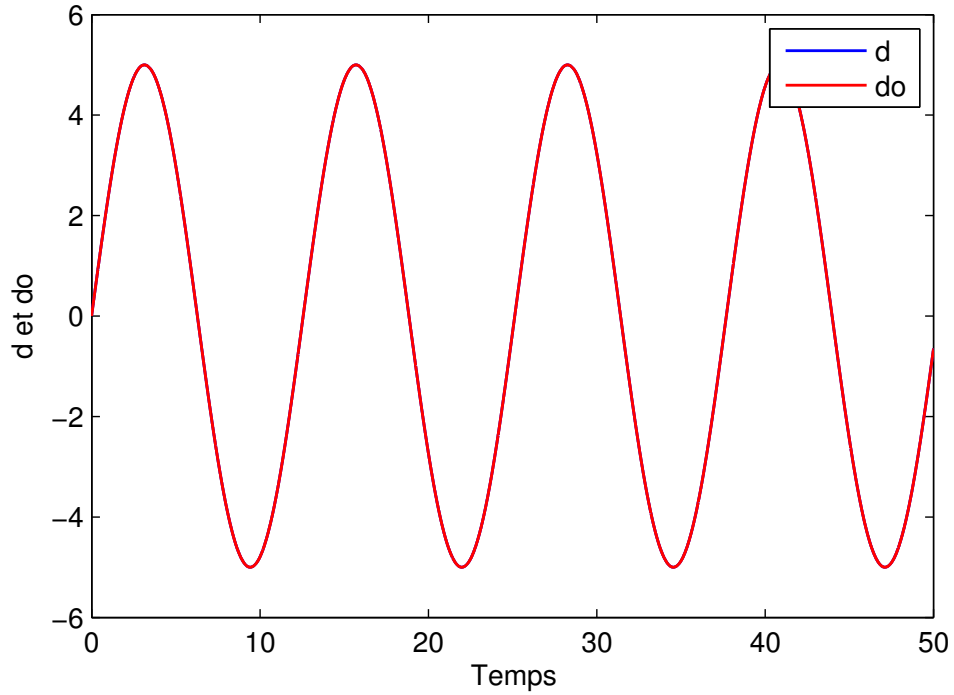


FIGURE 3.22: L'entrée inconnue $d(t)$ et son estimé $\hat{d}(t)$

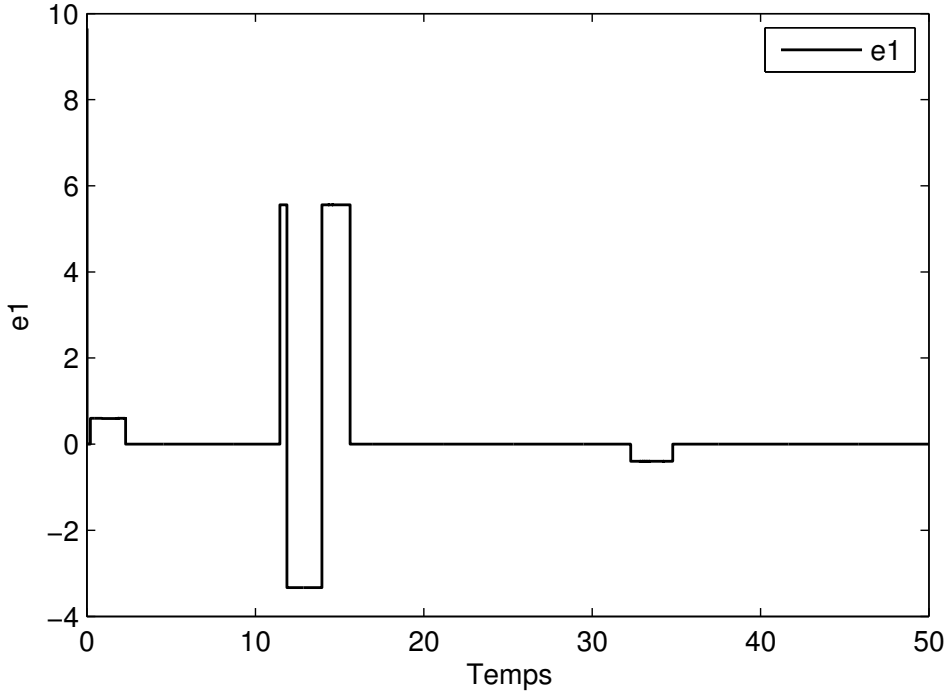


FIGURE 3.23: L'erreur $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$

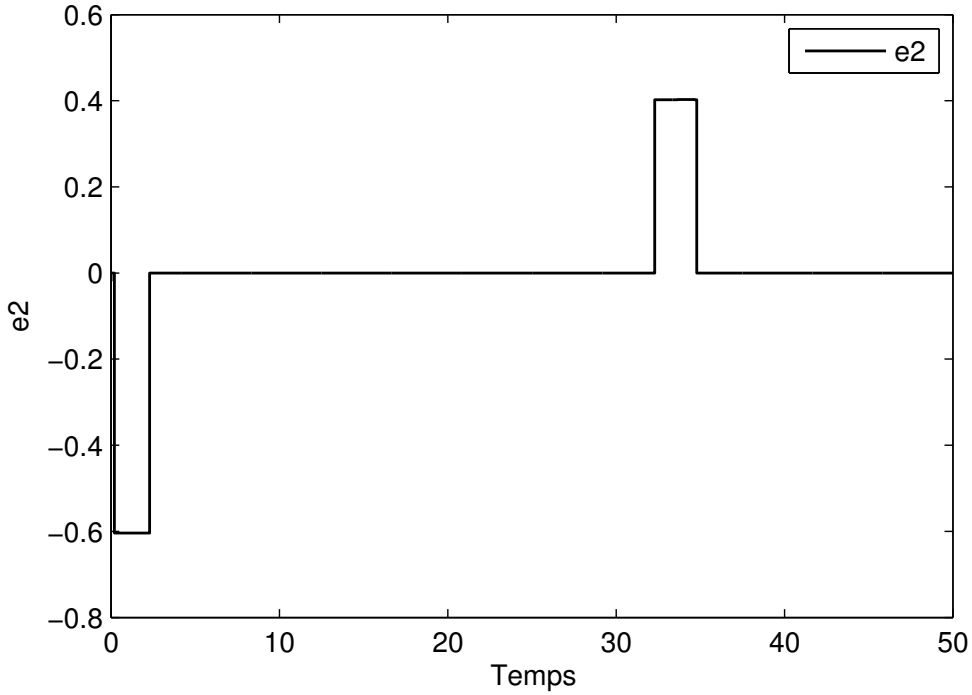


FIGURE 3.24: L'erreur $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$

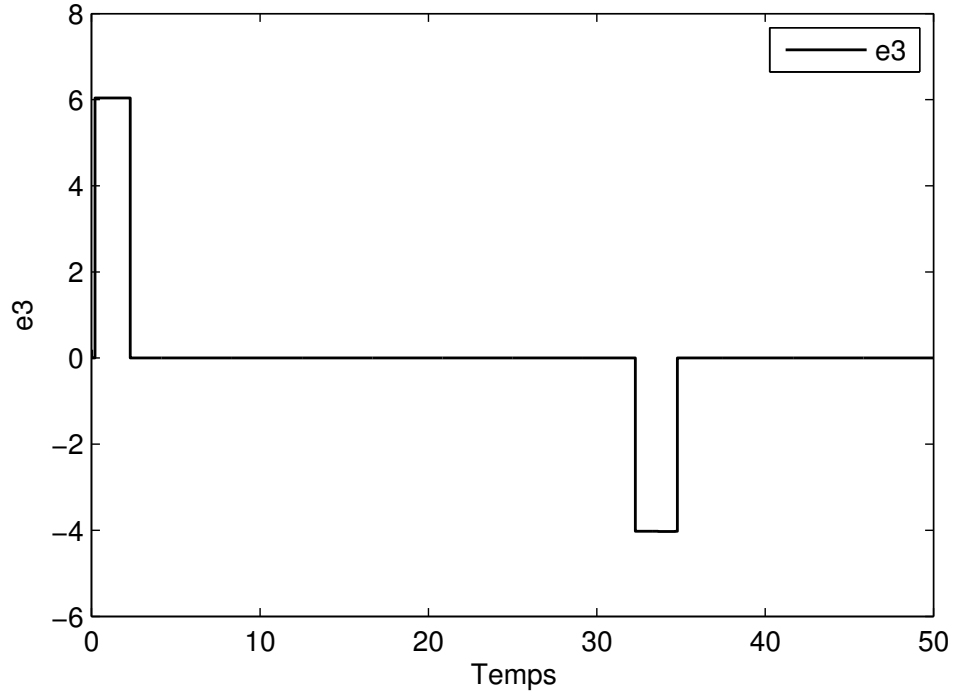


FIGURE 3.25: L'erreur $e_3(t) = x_2(t) - \hat{x}_3(t)$

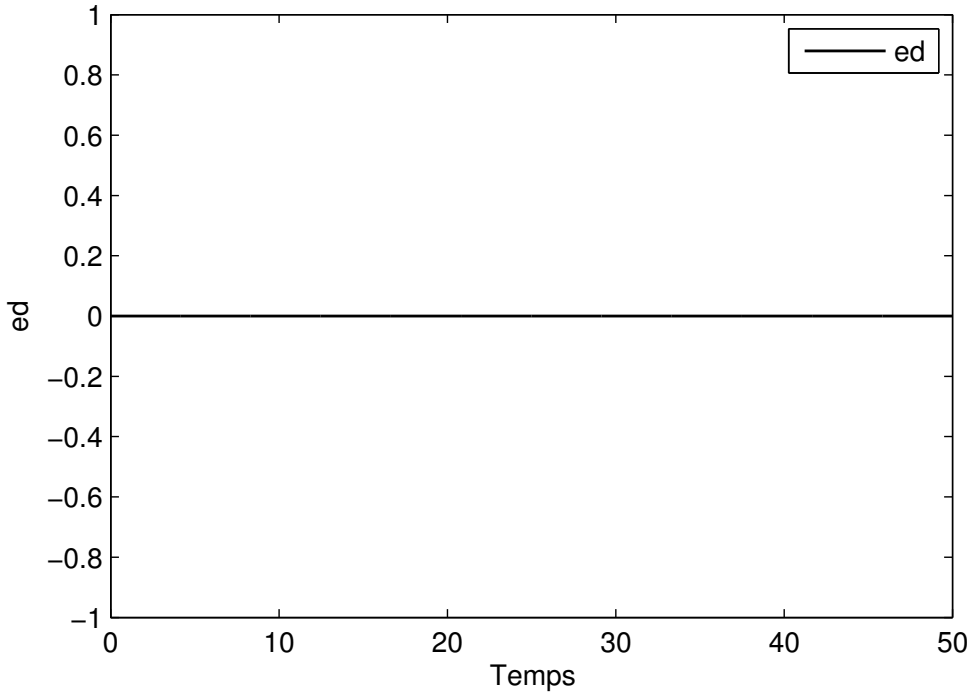


FIGURE 3.26: L'erreur $e_d(t) = d(t) - \hat{d}(t)$

3.10 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle méthode de synthèse d'observateur $\mathcal{H}_\infty$ pour des systèmes singuliers non linéaires Lipschitziens a été développée. Les résultats obtenus unifient la synthèse d'observateur d'ordre plein, d'ordre réduit et d'ordre minimal. Les conditions suffisantes d'existence de l'observateur sont données sous forme d'inégalités matricielles linéaires LMIs.

Les cas des systèmes singuliers non linéaires continus et discrets ont été étudiés. Plusieurs simulations ont été effectuées et montrent l'intérêt de notre approche qui unifie les résultats existants pour les systèmes standards et les systèmes singuliers. Nos résultats peuvent être utilisés dans le domaine du diagnostic à base de modèle fondé sur les observateurs à entrées inconnues.

Chapitre 4

Stabilisation et commande basée observateur des systèmes singuliers non linéaires

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons une méthode de synthèse de commande stabilisante par retour d'état statique et une commande basée observateur pour une classe de systèmes singuliers non linéaires. La non-linéarité considérée est supposée continue et différentiable, cette non-linéarité est transformée par le lemme de Hadamard en une forme bien adaptée à la synthèse d'une loi de commande par retour d'état statique et par l'utilisation de la stabilité au sens de Lyapunov.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Après avoir donné quelques rappels concernant les problèmes de stabilisation des systèmes singuliers linéaires, nous allons définir la classe de systèmes singuliers non linéaires considérée. Ensuite, la synthèse de la commande $\mathcal{H}_\infty$ par retour d'état statique sera étudiée. Ces résultats supposent que l'état du système est entièrement accessible. Par la suite, cette hypothèse est levée et le cas où l'état est inaccessible à la mesure est traité à l'aide d'une commande basée observateur. Des exemples académiques sont donnés afin de valider les résultats de ce chapitre.

4.2 Préliminaires et formulation du problème

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions, critères et techniques de stabilisation nécessaires pour la suite de notre travail. Ensuite nous allons définir le type de systèmes auxquel on s'intéresse et les fonctions non linéaires considérées.

4.2.1 Rappels et généralités

Considérons le système singulier linéaire suivant

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + D_1 w(t) \tag{4.1a}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{4.1b}$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le semi vecteur d'état, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est le vecteur de perturbations et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie du système. La matrice $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est singulière. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times n_w}$ et $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

Dans ce chapitre nous utilisons le critère de performance H_∞ suivante :

$$J_{yw} = \int_0^\infty \left(y(t)^T y(t) - \gamma^{-2} w^T(t) w(t) \right) dt \tag{4.2}$$

avec $\gamma > 0$.

Pour les systèmes singuliers, l'étude de l'admissibilité est plus judicieuse que l'étude de stabilité. En effet, la notion de stabilité connue dans le cas des systèmes standards est insuffisante. Par conséquent, il est nécessaire de rappeler les propriétés de régularité et d'impulsion pour le système singulier autonome (4.1) dans le cas où $w(t) = 0$. Nous avons les définitions suivantes :

Définition 4.2.1.

1. *Le système (4.1) (ou la paire (E, A)) est régulier s'il existe un scalaire $s \in \mathbb{C}$ tel que, $det(sE - A)$ est différent de zéro.*
2. *Le système (4.1) (ou la paire (E, A)) est impulsionel s'il existe un scalaire $s \in \mathbb{C}$ tel que, $deg(det(sE - A)) = rankE$.*
3. *Le système (4.1) (ou la paire (E, A)) est stable si toutes les valeurs propres de (E, A), c-à-d les racines de $det(sE - A) = 0$ sont à partie réelle négative.*
4. *Le système (4.1) (ou la paire (E, A)) est admissible s'il est régulier, impulsionel et stable.*

Lemme 4.2.1. *Soient U et V deux vecteurs de dimensions appropriées, alors, pour tout réel $\mu > 0$ l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$U^T V + V^T U \leqslant \mu U^T U + \frac{1}{\mu} V^T V \tag{4.3}$$

Théorème 4.2.1. *Le système (4.1) est admissible pour $w(t) = 0$ et satisfait le critère H_∞ ($J_{yw} < \gamma$) pour un $\gamma > 0$, pour $w(t) \neq 0$ si et seulement s'il existe une matrice définie positive $\bar{X}$ et une matrice Q telles que la LMI suivante est satisfaite.*

$$\begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_{11} & D_1 & \left(E\bar{X} + D_1^T Q E^{T\perp}\right) C^T \\ D_1^T & -\gamma^2 I & 0 \\ C\left(E\bar{X} + D_1^T Q E^{T\perp}\right)^T & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.4}$$

avec

$$\bar{\Sigma}_{11} = E\bar{X}A^T + QE^{T\perp}A^T + A\bar{X}E^T + AE^{T\perp T}Q^T$$

Démonstration :

Appliquant le résultat de [Mas97] au système singulier (4.1), l'admissibilité et la performance $\mathcal{H}_\infty$ sont satisfaites si et seulement s'il existe une matrice Y telle que

$$E^T Y = Y^T E \geq 0 \tag{4.5}$$

et

$$A^T Y + Y^T A + C^T C + \gamma^2 Y^T D_1 D_1^T Y < 0 \tag{4.6}$$

En appliquant le complément de Schur à (4.6), nous obtenons la LMI suivante

$$\begin{bmatrix} A^T Y + Y^T A + C^T C & Y^T D_1 \\ D_1^T Y & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.7}$$

Maintenant, nous montrerons que la matrice Y est non singulière. Pour cela, supposons que la condition (4.7) est vérifiée et que la matrice Y est singulière. Et soit v un vecteur non nul tel que $Yv = 0$. De (4.5) nous avons

$$A^T Y + Y^T A < 0. \tag{4.8}$$

Si on pré-multiplie l'inégalité (4.8) par v^T et on post-multiplie par v, nous obtenons $0 < 0$. Ce qui n'est pas possible. Alors Y est non singulière.

Posons, $\bar{Y} = Y^T$, alors, (4.5) est équivalent à

$$\bar{Y} E^T = E \bar{Y}^T \geq 0 \tag{4.9}$$

et en pré-multipliant (4.7) par $\begin{bmatrix} \bar{Y}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ et en post-mutipliant par $\begin{bmatrix} \bar{Y}^{-T} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \bar{Y} A^T + A \bar{Y}^T + \bar{Y} C^T C \bar{Y}^T & D_1 \\ D_1^T Y & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

En utilisant le complément de Schur, nous aurons :

$$\begin{bmatrix} \bar{Y} A^T + A \bar{Y}^T & D_1 & \bar{Y} C^T \\ D_1^T Y & -\gamma^2 I & 0 \\ \bar{Y} C^T & 0 & I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.10}$$

Maintenant, nous posons

$$\bar{Y} = E \bar{X} + Q E^{T\perp},$$

alors (4.9) est satisfaite.

En remplaçant cette valeur de $\bar{Y}$ dans (4.10) nous obtenons la LMI (4.4). Cela démontre le théorème.

4.2.2 Classe de systèmes considérés

Considérons la classe de systèmes non linéaires suivante :

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Df(t, F_L x, u) + D_1 w(t) && \text{(4.11a)} \\ y(t) &= Cx(t) + D_2 w(t) && \text{(4.11b)} \end{aligned}$$

avec l'état initial $x(0) = x_0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le semi vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est la commande, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est le vecteur des perturbations, et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie. La matrice $E \in \mathbb{R}n \times n$ est singulière. Les matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times n_f}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times n_w}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{p\times n_w}$ et $F_L \in \mathbb{R}^{n_f \times n}$.

Nous supposons que l'hypothèse suivante est vérifiée :

Hypothèse 4.2.1. *La non-linéarité $f(t, s, u)$ est de classe C^1 (différentiable et sa dérivée est continue) et vérifie*

$$\|\frac{\partial f(t,s,u)}{\partial s}\| \leq K \quad avec \quad K \in \mathbb{R}^+ \tag{4.12}$$

$$et \qquad f(t, 0, u) = 0$$

Remarque 4.2.1. D'après le lemme 2.2 [Kha], si f est de classe C^1 satisfaisant (4.12) alors $f(t, s, u)$ est localement Lipschitz.

Sous l'Hypothèse 4.2.1 il existe deux matrices $M_f \in \mathbb{R}^{n_f \times n_F}$ et $N_f \in \mathbb{R}^{m_F \times n_f}$ telles que

$$\frac{\partial f(t,s,u)}{\partial s} = M_f F(t, s, u) N_f, \tag{4.13}$$

avec

$$F^T(t, s, u)F(t, s, u) \leq I \tag{4.14}$$

D'après le lemme d'Hadamard [Nes02], si $f(t, s, u)$ vérifie (4.12), nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(t, F_L x, u) &= \int_0^1 \tfrac{\partial f(t,s,u)}{\partial s}|_{s=\lambda F_L x} F_L x \, (d\lambda) \\ &= \int_0^1 M_f F(s) N_f F_L x \, (t) \, (d\lambda) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Dans ce qui suit, nous allons donner une méthode de synthèse d'une loi de commande robuste par retour d'état statique pour le système (4.11).

4.3 Stabilisation des systèmes singuliers non linéaires par retour d'état statique

Dans cette section, nous allons donner les conditions d'existence d'un gain $L \in \mathbb{R}^{n\times m}$ du retour d'état tel que le système singulier en boucle fermée sous le bouclage $u(t) = -Lx(t)$

est admissible pour $w(t) = 0$ et satisfait la performance H_∞ ($J_{yw} < \gamma$) pour un $\gamma > 0$, pour $w(t) \neq 0$.

En substituant la commande $u(t) = -Lx(t)$ dans (4.11), nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} E\dot{x}(t) & = & (A - BL)\,x(t) + Df(t, F_L x, u) + D_1 w(t) \\ y(t) & = & Cx(t) + D_2 w(t) \end{array} \tag{4.16}$$

et en substituant (4.15) dans (4.16) nous obtenons le modèle suivant :

$$E\dot{x}(t) = A(x)\,x(t) + D_1 w(t) \tag{4.17}$$

avec

$$A(x) = (A - BL) + D\int_0^1 M_f F(\lambda F_L x, t) N_f F_L d(\lambda)$$

4.3.1 Stabilisation dans le cas sans perturbations

Le théorème suivant donne les conditions suffisantes pour la stabilité du système (4.17) pour $w(t) = 0$.

Théorème 4.3.1. *Le système (4.17) est asymptotiquement stable pour $w(t) = 0$ s'il existe une matrice définie positive $\bar{X}$, des matrices X et Q et un scalaire positif μ tels que la LMI suivante est satisfaite :*

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \left(E\bar{X} + QE^{T\perp}\right) & \left(E\bar{X} + QE^{T\perp}\right) F_L^T N_f^T \\ * & -I & 0 \\ * & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.18}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_{11} & = & E\bar{X}A^T + QE^{T\perp}A^T + A\bar{X}E^T + AE^{T\perp T}Q^T - XB^T \\ & & -BX^T + \mu D M_f M_f^T D^T \end{array}$$

Dans ce cas, la matrice de gain L est donnée par $L = X^T\left(E\bar{X} + QE^{T\perp}\right)^{-T}$.

Démonstration :

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x) = x^T E^T Y x(t) = x^T(t) Y^T E x(t)$$

où Y est une matrice non singulière telle que $E^T Y = Y^T E \geqslant 0$. La dérivée de $V(x)$ est donnée par :

$$\dot{V}(x) = (E\dot{x}(t))^T Y x(t) + x^T(t) Y^T E\dot{x}(t)$$

En utilisant le modèle (4.17) nous obtenons

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= (A(x)x(t))^T Yx(t) + x^T(t)Y^T(A(x)x(t)) \\ &= x^T(t)\left[A^T(x)Y + Y^T A(x)\right]x(t)\end{aligned}$$

Alors si

$$A^T(x)Y + Y^T A(x) < 0 \tag{4.19}$$

on a $\dot{V}(x) < 0$.

En pré-multipliant le premier membre de l'inégalité (**??**) par Y^{-T} et en le post-multipliant par Y^{-1} nous obtenons

$$\bar{Y}A^T(x) + A(x)\bar{Y}^T < 0 \tag{4.20}$$

avec $\bar{Y} = Y^{-T}$.

Dans ce cas, la condition

$$E^T Y = Y^T E \geqslant 0$$

est équivalente à

$$\bar{Y}E^T = E\bar{Y}^T \geqslant 0$$

En substituant $A(x)$ dans (4.20) nous obtenons

$$\begin{pmatrix} \bar{Y}A^T + A\bar{Y}^T - \bar{Y}L^T B^T - BL\bar{Y}^T + \\ \bar{Y}\int_0^1 F_L^T N_f^T F(\lambda F_L x, t) M_f^T D^T (d\lambda) + \\ D\int_0^1 M_f F(\lambda F_L x, t) N_f F_L d(\lambda)\bar{Y}^T \end{pmatrix} < 0 \tag{4.21}$$

Posons $U = M_f^T D^T$ et $V = \int_0^1 F(\lambda x, t) N_f F_L d(\lambda)\bar{Y}^T$, alors, en utilisant (4.3) et le fait que

$$\|F(\lambda F_L x, t)\| \leq I$$

nous avons

$$\begin{pmatrix} \bar{Y}\int_0^1 F_L^T N_f^T F(\lambda F_L x, t) M_f^T D^T (d\lambda) + \\ D\int_0^1 M_f F(\lambda F_L x, t) N_f F_L d(\lambda)\bar{Y}^T \end{pmatrix} < \mu D M_f M_f^T D^T + \mu^{-1}\bar{Y}F_L^T N_f^T N_f F_L \bar{Y}^T \tag{4.22}$$

de (4.21) et (4.22) nous obtenons

$$\begin{pmatrix} \bar{Y}A^T + A\bar{Y}^T - \bar{Y}L^T B^T - BL\bar{Y}^T + \\ \bar{Y}\int_0^1 F_L^T N_f^T F(\lambda F_L x, t) M_f^T D^T (d\lambda) + \\ D\int_0^1 M_f F(\lambda F_L x, t) N_f F_L d(\lambda)\bar{Y}^T \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \bar{Y}A^T + A\bar{Y}^T - \bar{Y}L^T B^T - BL\bar{Y}^T + \\ \mu D M_f M_f^T D^T + \mu^{-1}\bar{Y}F_L^T N_f^T N_f F_L \bar{Y}^T + \end{pmatrix}$$

Maintenant, si

$$\begin{pmatrix} \bar{Y}A^T + A\bar{Y}^T - \bar{Y}L^TB^T - BL\bar{Y}^T + \\ \mu DM_fM_f^TD^T + \mu^{-1}\bar{Y}F_L^TN_f^TN_fF_L\bar{Y}^T \end{pmatrix} < 0 \tag{4.23}$$

alors (4.21) est vérifiée.
Posons, $X = \bar{Y}L^T$, et en appliquant le complément de Schur à (4.23), nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Y}A^T + A\bar{Y}^T - XB^T - BX^T + \\ \mu DM_fM_f^TD^T + \mu^{-1}\bar{Y}F_L^TN_f^TN_fF_L\bar{Y}^T \end{pmatrix} & \bar{Y} \\ \bar{Y}^T & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.24}$$

Maintenant, en introduisant le changement de variable suivant :

$$\bar{Y} = E\bar{X} + QE^{T\perp} \tag{4.25}$$

nouq avons l'inégalité suivante :

$$\bar{Y}E^T = E\bar{Y}^T \geq 0$$

qui est toujours vérifiée et en substituant (4.25) dans (4.24) nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} + \bar{\Sigma} & E\bar{X} + QE^{T\perp} \\ \left(E\bar{X} + QE^{T\perp}\right)^T & -I \end{bmatrix} < 0$$

avec

$$\bar{\Sigma} = \mu^{-1}(E\bar{X} + QE^{T\perp})F_L^TN_f^TN_fF_L(E\bar{X} + QE^{T\perp})^T$$

Enfin, par l'application du complément de Schur nous obtenons la LMI (4.18), ce qui complète la démonstration du théorème.

4.3.2 Stabilisation $\mathcal{H}_\infty$

Le théorème suivant donne les conditions suffisantes pour que le système (4.11) soit stable pour $w(t) = 0$ et $\|x(t)\|_{L_2} < \gamma \|w(t)\|_{L_2}$, pour $w(t) \neq 0$.

Théorème 4.3.2. *Le système (4.17) est asymptotiquement stable pour $w(t) = 0$ et $\|x(t)\|_{L_2} < \gamma \|w(t)\|_{L_2}$, pour $w(t) \neq 0$ s'il existe une matrice définie positive $\bar{X}$, des matrices X, Q et un scalaire positif μ tels que la LMI suivante est satisfaite*

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & D_1 & E\bar{X} + QE^{T\perp} & \left(E\bar{X} + QE^{T\perp}\right)F_L^TN_f^T \\ * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & 0 & -I & 0 \\ * & 0 & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.26}$$

avec

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} \;=\; & E\bar{X}A^T + QE^{T\perp}A^T + A\bar{X}E^T + AE^{T\perp T}Q^T - XB^T \\ & -BX^T + \mu DM_fM_f^TD^T \end{aligned}$$

La matrice de gain L est donnée par $L = X^T\left(E\bar{X} + QE^{T\perp}\right)^{-T}$.

Démonstration :

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x) = x^T E^T Y x(t) = x^T(t) Y^T E x(t)$$

où Y est une matrice non singulière vérifiant la condition suivante :

$$E^T Y = Y^T E \geqslant 0$$

La dérivée de $V(x)$ le long de la solution de (4.17) est donnée par :

$$\dot{V}(x) = (E\dot{x}(t))^T Y x(t) + x^T(t) Y^T E \dot{x}(t)$$

En utilisant le modèle (4.17) nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (A(x)x(t) + D_1 w(t))^T Y x(t) + x^T(t) Y^T (A(x)x(t) + D_1 w(t)) \\ &= x^T(t)\left[A^T(x)Y + Y^T A(x)\right] x(t) + w^T(t) D_1^T Y x(t) + x^T(t) Y^T D_1 w(t) \end{aligned}$$

sMaintenant, nous avons

$$\dot{V}(x) + x^T(t)x(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) = \zeta^T(t) \begin{bmatrix} A^T(x)Y + Y^T A(x) + I & Y^T D_1 \\ D_1^T Y & -\gamma^2 \end{bmatrix} \zeta(t)$$

avec $\zeta(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$

Si

$$\begin{bmatrix} A^T(x)Y + Y^T A(x) + I & Y^T D_1 \\ D_1^T Y & -\gamma^2 \end{bmatrix} < 0 \tag{4.27}$$

donc nous obtenons

$$\dot{V}(x) < \gamma^2 w^T(t) w(t) - x^T(t) x(t)$$

par l'intégration des deux membres de cette inégalité, nous obtenons

$$\int_0^\infty \dot{V}(\tau)\, d\tau < \int_0^\infty \gamma^2 w^T(\tau) w(\tau)\, d\tau - \int_0^\infty x^T(\tau) x(\tau)\, d\tau$$

ce qui est équivalent à

$$V(\infty) - V(0) < \gamma^2 \|w(t)\|_2 - \|x(t)\|_2$$

Sous la condition initiale nulle, nous obtenons

$$V(\infty) < \gamma^2 \|w(t)\|_2 - \|x(t)\|_2$$

ce qui est équivalent à

$$\|x(t)\|_2 < \gamma^2 \|w(t)\|_2$$

En prée-multipliant le premier membre de (4.27) par $\begin{bmatrix} Y^{-T} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ et en le post-mutipliant par $\begin{bmatrix} Y^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \bar{Y}A^T(x) + A(x)\bar{Y}^T + \bar{Y}\bar{Y}^T & D_1 \\ D_1^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.28}$$

avec $\bar{Y} = Y^{-T}$.

Dans ce cas, la condition

$$E^T Y = Y^T E \geqslant 0$$

est devient

$$\bar{Y}E^T = E\bar{Y}^T \geqslant 0$$

En remplaçant $A(x)$ par sa valeur dans (4.28) nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Y}A^T + A\bar{Y}^T - \bar{Y}L^T B^T - BL\bar{Y}^T + \\ \bar{Y}\int_0^1 F_L^T N_f^T F(\lambda F_L x, t) M_f^T D^T (d\lambda) + \\ D\int_0^1 M_f F(\lambda F_L x, t) N_f F_L d(\lambda)\bar{Y}^T + \bar{Y}\bar{Y}^T \end{pmatrix} & D_1 \\ D_1^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.29}$$

En appliquant le complément de Schur, (4.29) devient

$$\begin{pmatrix} \bar{Y}A^T + A\bar{Y}^T - \bar{Y}L^T B^T - BL\bar{Y}^T + \\ \bar{Y}\int_0^1 F_L^T N_f^T F(\lambda F_L x, t) M_f^T D^T (d\lambda) + \\ D\int_0^1 M_f F(\lambda F_L x, t) N_f F_L d(\lambda)\bar{Y}^T \\ +\bar{Y}\bar{Y}^T + \gamma^2 D_1 D_1^T \end{pmatrix} < 0 \tag{4.30}$$

Posons $U = M_f^T D^T$ et $V = \int_0^1 F(\lambda x, t) N_f F_L d(\lambda)\bar{Y}^T$, alors, en utilisant (4.3) et (4.14) nous avons

$$\begin{pmatrix} \bar{Y}\int_0^1 F_L^T N_f^T F(\lambda F_L x, t) M_f^T D^T (d\lambda) + \\ D\int_0^1 M_f F(\lambda F_L x, t) N_f F_L d(\lambda)\bar{Y}^T \end{pmatrix} \\ < \\ \mu D M_f M_f^T D^T + \mu^{-1}\bar{Y}F_L^T N_f^T N_f F_L \bar{Y}^T \tag{4.31}$$

De (4.30) et (4.31) nous obtenons

$$\begin{pmatrix} \bar{Y}A^T + A\bar{Y}^T - \bar{Y}L^TB^T - BL\bar{Y}^T + \\ \bar{Y}\int_0^1 F_L^T N_f^T F(\lambda F_L x,t) M_f^T D^T (d\lambda) + \\ D\int_0^1 M_f F(\lambda F_L x,t) N_f F_L d(\lambda)\bar{Y}^T \\ +\bar{Y}\bar{Y}^T + \gamma^2 D_1 D_1^T \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \bar{Y}A^T + A\bar{Y}^T - \bar{Y}L^TB^T - BL\bar{Y}^T + \\ \mu DM_f M_f^T D^T + \mu^{-1}\bar{Y}F_L^T N_f^T N_f F_L \bar{Y}^T + \\ \bar{Y}\bar{Y}^T + \gamma^2 D_1 D_1^T \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

Maintenant, si

$$\begin{pmatrix} \bar{Y}A^T + A\bar{Y}^T - \bar{Y}L^TB^T - BL\bar{Y}^T + \\ \mu DM_f M_f^T D^T + \\ \mu^{-1}\bar{Y}F_L^T N_f^T N_f F_L \bar{Y}^T + \\ \bar{Y}\bar{Y}^T + \gamma^2 D_1 D_1^T \end{pmatrix} < 0 \tag{4.33}$$

est vérifiée, alors (4.30) est vérifiée.

Par l'application du complément de Schur et l'introduction du changement de variable $X = \bar{Y}L^T$, (4.33) devient

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Y}A^T + A\bar{Y}^T - XB^T - BX^T + \\ \mu DM_f M_f^T D^T + \mu^{-1}\bar{Y}F_L^T N_f^T N_f F_L \bar{Y}^T \end{pmatrix} & D_1 & \bar{Y} \\ D_1^T & -\gamma^2 I & 0 \\ \bar{Y}^T & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.34}$$

En posant

$$\bar{Y} = E\bar{X} + QE^{T\perp} \tag{4.35}$$

l'inégalité suivante

$$\bar{Y}E^T = E\bar{Y}^T \geq 0$$

est toujours vérifiée, et en remplaçant (4.35) dans (4.34) nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} + \bar{\Sigma} & D_1 & E\bar{X} + QE^{T\perp} \\ D_1^T & -\gamma^2 I & 0 \\ \left(E\bar{X} + QE^{T\perp}\right)^T & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

avec

$$\bar{\Sigma} = \mu^{-1}(E\bar{X} + QE^{T\perp})F_L^T N_f^T N_f F_L (E\bar{X} + QE^{T\perp})^T$$

En appliquant le complément de Schur à cette inégalité nous obtenons (4.26). Cela complète la démonstration du théorème.

4.3.3 Exemple numérique

Considérons le système singulier non linéaire de la forme (4.11) avec

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -19 & -1 & -1 \\ -5 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$. La non-linéarité $f(x,u,t) = sin(x_3(t))$. Pour ce système la matrice

$$E^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$E^{T\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour $N_f = M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, on a $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos x_3 \end{bmatrix}$

La résolution de la LMI (4.26), donne les résultats suivants :

$$\gamma^2 = 2.0607, \bar{Y} = \begin{bmatrix} 0.036 & 0.389 & 0.348 \\ -0.039 & 0.348 & 0.462 \\ 0.004 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.036 \\ -0.039 \\ 0.0037 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 0.072 \\ 0.768 \\ 0.484 \end{bmatrix} \text{ et} \bar{X} = \begin{bmatrix} 1.289 & 0 & 0 \\ 0 & 0.389 & 0.348 \\ 0 & 0.348 & 0.462 \end{bmatrix}.$$

Le retour d'état statique stabilisant pour ce système est donné par :

$$u(t) = -10^2 \begin{bmatrix} 1.316 & -0.722 & 0.674 \end{bmatrix} x(t).$$

La figure (4.1) représente la perturbation à énergie finie que nous avons appliquée, les figures (4.2), (4.3) et (4.4) représentent les différents états du système, et la dernière figure (4.5) représente l'entrée.

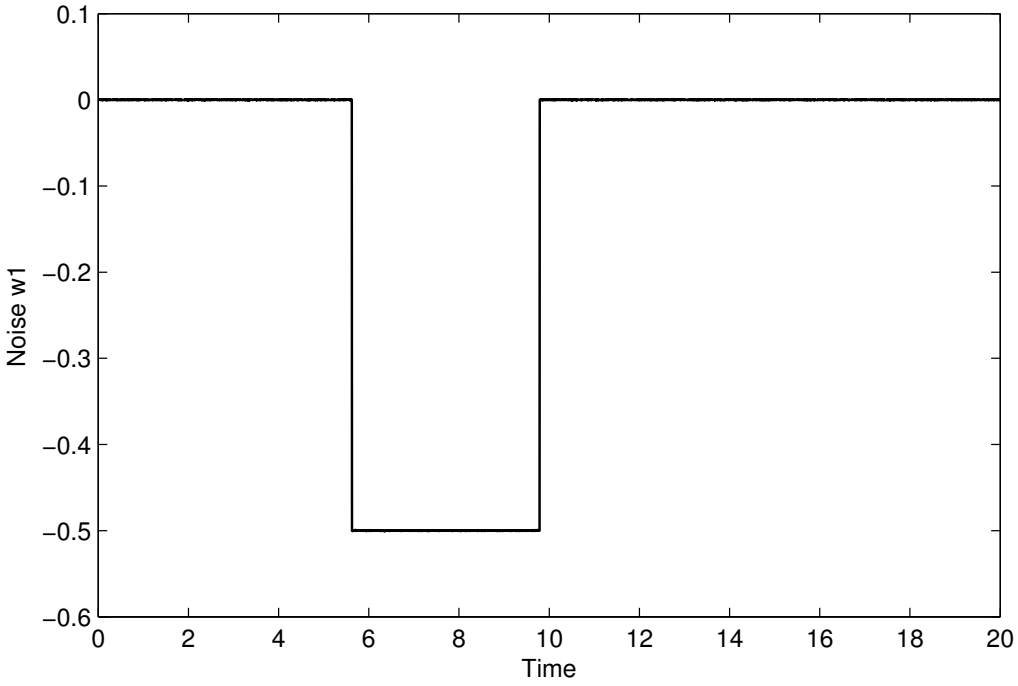


FIGURE 4.1: La perturbation $w(t)$

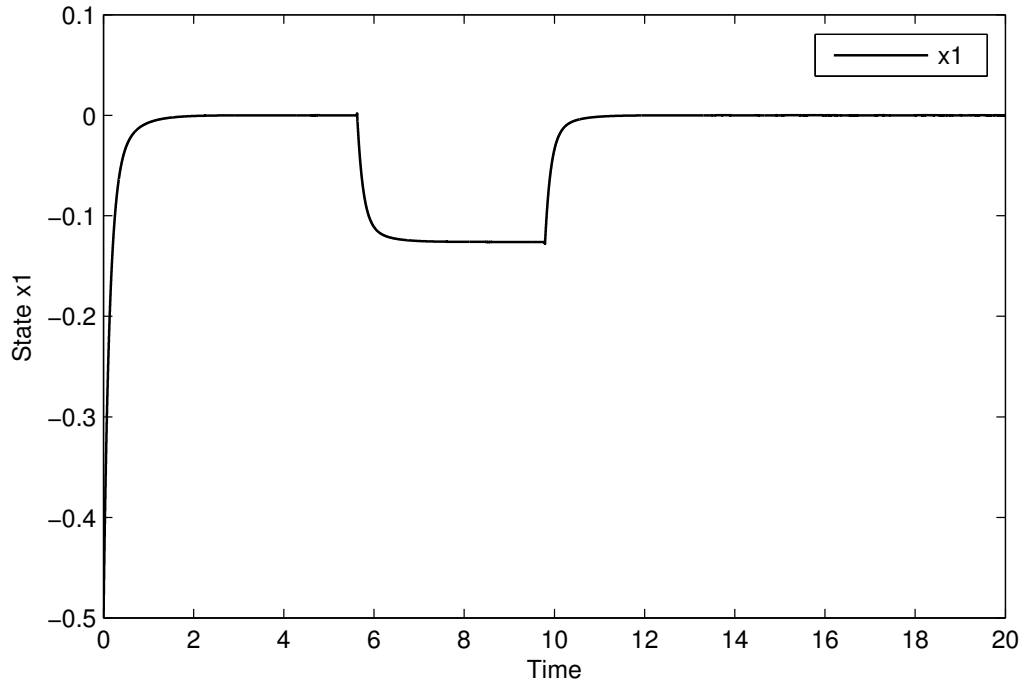


FIGURE 4.2: L'état $x_1(t)$

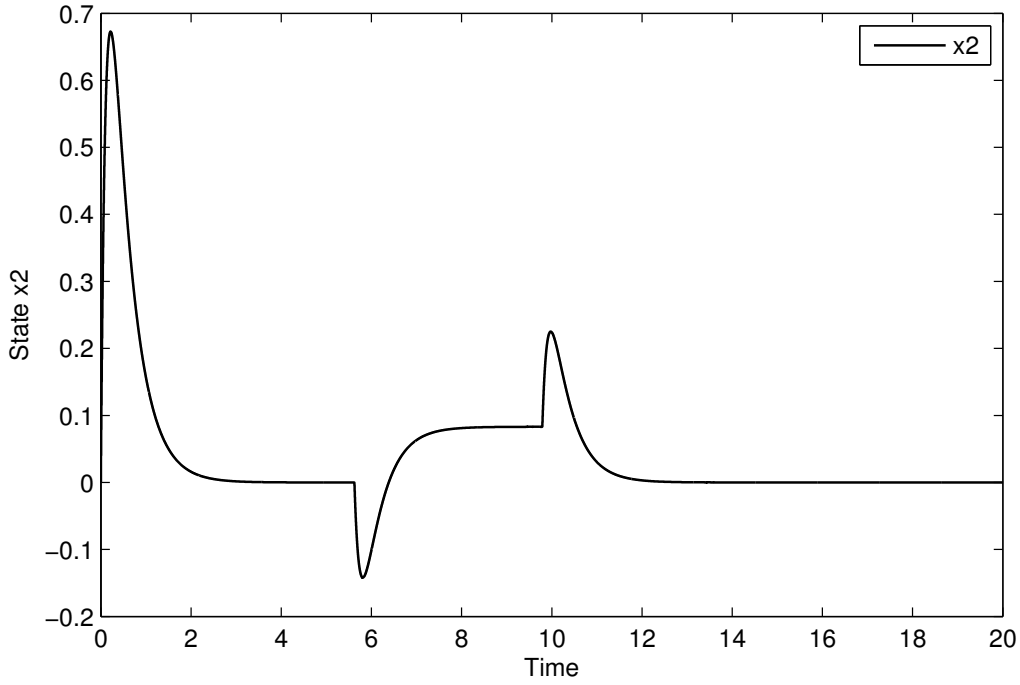


FIGURE 4.3: L'état $x_2(t)$

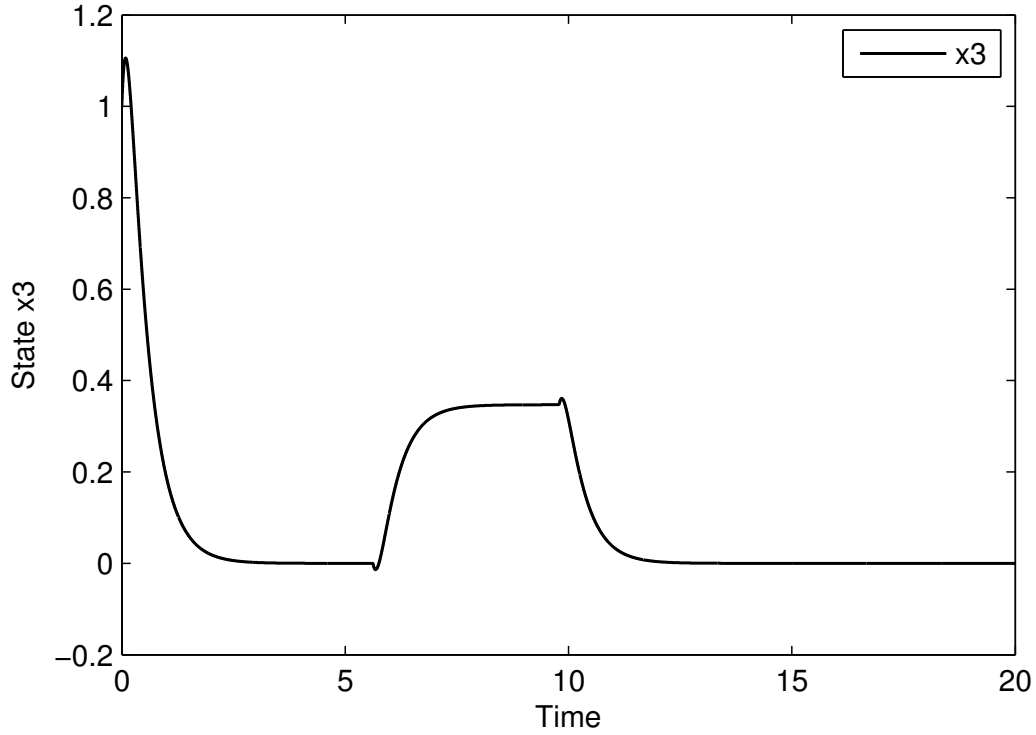


FIGURE 4.4: L'état $x_3(t)$

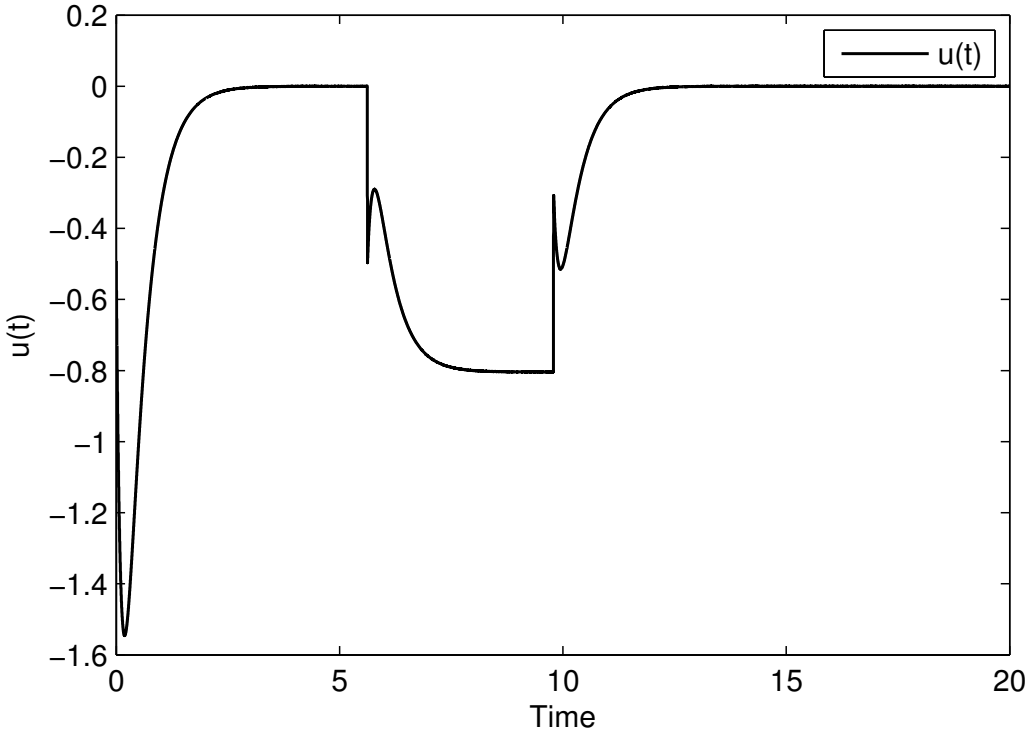


FIGURE 4.5: La commande $u(t)$

4.4 Stabilisation des systèmes singuliers non linéaires par commande basée observateur

Dans cette section, nous proposons une loi de commande basée observateur qui garantit que l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro en boucle fermée. Nous allons donner les conditions d'existence d'un gain de contrôle $L \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tel que le système singulier en boucle fermée sous une contre réaction $u(t) = -L\hat{x}(t)$ est admissible pour $w(t) = 0$ et satisfait la performance H_∞ ($J_{yw} < \gamma$) pour un $\gamma > 0$, pour $w(t) \neq 0$.

4.4.1 Synthèse d'observateur

Considérons pour le système (4.11) l'observateur d'ordre réduit (3.12a)-(3.12b) présenté dans le troisième chapitre est de la forme :

$$\dot{\zeta}(t) = N\zeta(t) + Jy(t) + Hu(t) + TDf(t, F_L\widehat{x}, u) \tag{4.36a}$$
$$\hat{x}(t) = P\zeta(t) - QE_D^{\perp}Bu(t) + Fy(t) \tag{4.36b}$$

avec $E_D^{\perp}$ une matrice de dimension appropriée vérifiant

$$E_D^{\perp}\begin{bmatrix} E & D \end{bmatrix} = 0$$

et $f(t, F_L\widehat{x}, u)$ vérifie l'hypothèse (4.2.1), et en posant $\varepsilon(t) = \zeta(t) - TEx(t)$ l'écart entre $\zeta(t)$ et $TEx(t)$, nous obtenons la dynamique suivante

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= \dot{\zeta}(t) - TE\dot{x}(t)\\ \dot{\varepsilon}(t) &= N\varepsilon(t) + (NTE - TA + JC)x(t) + (H - TB)u(t) + TD\Delta f + (JD_2 - TD_1)w(t)\end{aligned}$$

Et en utilisant (4.36b), nous obtenons donc le système suivant :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= N\varepsilon(t) + (NTE - TA + JC)x(t) + (H - TB)u(t) + TD\Delta f \\ &\quad +(JD_2 - TD_1)w(t) \qquad (4.37a)\\ e(t) &= P\varepsilon(t) + \left(PTE + QE_D^{\perp}A + FC - I_n\right)x(t) + (QE_D^{\perp}D_1 + FD_2)w(t) \qquad (4.37b)\end{aligned}$$

avec

$$\Delta f = f(t, F_L\widehat{x}(t), u) - f(t, F_Lx(t), u)$$

Maintenant, si les conditions (3.16a), (3.16b) et (3.16c) du chapitre 3 sont vérifiées, c-à-d ;

$$NTE - TA + JC = 0 \qquad (4.38a)$$

$$H = TB \qquad (4.38b)$$

$$\begin{bmatrix} P & Q & F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} TE \\ E_D^{\perp}A \\ C \end{bmatrix} = I_n \qquad (4.38c)$$

l'erreur (4.37) est indépendante de $u(t)$ et $x(t)$, dans ce cas nous obtenons

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= N\varepsilon(t) + TD\Delta f + \varphi_1 w(t) \qquad (4.39a)\\ e(t) &= P\varepsilon(t) + \varphi_2 w(t) \qquad (4.39b)\end{aligned}$$

Avec

$$\varphi_1 = JD_2 - TD_1$$

$$\varphi_2 = QE_D^{\perp}D_1 + FD_2$$

Considérons $M_f \in I\!R^{n_f \times n_F}$ et $N_f \in I\!R^{m_F \times n_f}$ deux matrices réelles telles que

$$\frac{\partial f(t, s, u)}{\partial s} = M_f F(s) N_f$$

avec

$$F^T(s)F(s) \leq I \qquad (4.40)$$

En utilisant le théorème d'Hadamard nous obtenons

$$f(t, F_Lx, u) = \int_0^1 \left.\frac{\partial f(t, s, u))}{\partial s}\right|_{s=\lambda F_L x} F_Lx\,(d\lambda)$$

$$= \int_0^1 M_f F(s) N_f F_L x\,(t)\,(d\lambda) \tag{4.41a}$$

$$f(t, F_L\hat{x}, u) - f(t, F_L x, u) = \int_1^0 \left.\frac{\partial f(t,\eta,u))}{\partial \eta}\right|_{\eta = F_L\hat{x} - \lambda F_L(\hat{x}-x)} F_L\,(\hat{x} - x)\,(d\lambda)$$

$$= \int_1^0 M_f F(\eta) N_f F_L e\,(t)\,(d\lambda)\,, \tag{4.41b}$$

avec

$$s = \lambda F_L x \quad \text{et} \quad \eta = F_L\hat{x} - \lambda F_L(\hat{x} - x)$$

En remplaçant dans (4.39) nous obtenons

$$\dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) + TD\int_1^0 M_f F(\eta) N_f F_L e\,(t)\,(d\lambda) + \varphi_1 w(t) \tag{4.42a}$$

$$e(t) = P\varepsilon(t) + \varphi_2 w(t) \tag{4.42b}$$

4.4.2 Commande basée observateur

En remplaçant $u = -L\hat{x}$, dans (4.11) nous obtenons le système suivant :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) - BL\hat{x}(t) + Df(t, F_L x, u) + D_1 w(t) \tag{4.43a}$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) + TD\Delta f + \varphi_1 w(t) \tag{4.43b}$$

$$e(t) = P\varepsilon(t) + \varphi_2 w(t) \tag{4.43c}$$

En substituant $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ nous obtenons

$$E\dot{x}(t) = (A - BL)x\,(t) - BLe(t) + Df(t, F_L x, u) + D_1 w(t) \tag{4.44a}$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = N\varepsilon(t) + TD\Delta f + \varphi_1 w(t) \tag{4.44b}$$

$$e(t) = P\varepsilon(t) + \varphi_2 w(t) \tag{4.44c}$$

En utilisant le vecteur augmenté suivant $\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\varepsilon}(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$ nous obtenons le système suivant

$$\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\varepsilon}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - BL) & 0 & -BL \\ 0 & N & 0 \\ 0 & P & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & TD \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t, F_L x, u) \\ \Delta f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} w(t) \tag{4.45}$$

En remplaçant l'expression de $e(t)$ dans (4.41a) et (4.41b), nous obtenons

$$\begin{aligned} f(t, F_L x, u) &= \int_0^1 M_f F(s) N_f F_L x\,(t)\,(d\lambda) \\ f(t, F_L \hat{x}, u) - f(t, F_L x, u) &= \int_1^0 M_f F(\eta) N_f F_L P \varepsilon\,(t)\,(d\lambda) \\ &\quad + \int_1^0 M_f F(\eta) N_f F_L \varphi_2 w(t)\,(t)\,(d\lambda) \end{aligned}$$

En substituant dans (4.45), nous obtenons

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\varepsilon}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{11}(x) & 0 & -BL \\ 0 & \mathbb{A}(x)_{22} & 0 \\ 0 & P & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} D_1 \\ \varphi_1 + TD \int_1^0 M_f F(\eta) N_f F_L \varphi_2 (d\lambda) \\ \varphi_2 \end{bmatrix} w(t) \end{aligned} \tag{4.46}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{11}(x) &= (A - BL) + D \int_0^1 M_f F(s) N_f F_L\,(d\lambda) \\ \mathbb{A}_{22}(x) &= N + TD \int_1^0 M_f F(\eta) N_f F_L P\,(d\lambda) \end{aligned}$$

Le système (4.46) peut être réécrit sous la forme d'un système singulier :

$$\mathbb{E}\dot{z}(t) = \mathbb{A}(x) z(t) + \mathbb{D}(x) w(t) \tag{4.48}$$

avec

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \\ e(t) \end{bmatrix}, \mathbb{E} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{11}(x) & 0 & -BL \\ 0 & \mathbb{A}_{22}(x) & 0 \\ 0 & P & -I \end{bmatrix}$$
$$\text{et } \mathbb{D}(x) = \begin{bmatrix} D_1 \\ \varphi_1 + TD \int_0^1 M_f F(\eta) N_f F_L \varphi_2\,(d\lambda) \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

Dans la suite, nous nous intéressons à la stabilité du système augmenté (4.48).

4.4.3 Synthèse de la commande dans le cas sans perturbations

Le théorème suivant donne les conditions suffisantes pour la stabilité du système (4.48) pour $w(t) = 0$.

Théorème 4.4.1. *Le système (4.48) est asymptotiquement stable pour $w(t) = 0$ s'il existe des matrices définies positives $\bar{X}$, X_1 et Y_2, des matrices Q, Y_3 et Q_1, et des scalaires positifs μ, μ_1 et μ_2 tels que les deux LMIs suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_{11} & \left(E\bar{X} + QE^{T\perp}\right) & \left(E\bar{X} + QE^{T\perp}\right) F_L^T N_f^T \\ * & -I & 0 \\ * & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.49}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 & -\left(X_1E + E^{\perp T}Q_1\right)^T BL & \left(X_1E + E^{\perp T}Q_1\right)^T DM_f & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} & \Lambda_P^T Y_3 & 0 & \begin{pmatrix} Y_2^T \Lambda_{TD} M_f - \\ \Omega_{Y2}\Delta_{TD}M_f \end{pmatrix} & \Lambda_P^T F_L^T N_f^T \\ * & * & -Y_3 - Y_3^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & -\frac{1}{\mu_1} I & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & -\frac{1}{\mu_2} I & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & -\mu_2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.50}$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_{11} &= E\bar{X}A^T + QE^{T\perp}A^T + A\bar{X}E^T + AE^{T\perp T}Q^T - XB^T - BX^T + \mu DM_f M_f^T D^T \\ \Sigma_{11} &= A^T\left(X_1E + E^{\perp T}Q_1\right) + \left(X_1E + E^{\perp T}Q_1\right)^T A - (BL)^T\left(X_1E + E^{\perp T}Q_1\right) \\ &\quad - \left(X_1E + E^{\perp T}Q_1\right)^T BL + \mu_1^{-1} F_L^T N_f^T N_f F_L \\ \Sigma_{22} &= \Lambda_N^T Y_2 - \Delta_N^T \Omega_{Y_2}^T + Y_2^T \Lambda_N - \Omega_{Y_2}\Delta_N \end{aligned}$$

et $\quad \Omega_{Y_2} = Y_2^T Z_1$

La matrice de gain L est donnée par $L = X^T\left(E\bar{X} + QE^{T\perp}\right)^{-T}$.

Démonstration :

Pour la synthèse de la commande basée observateur proposée, on doit déterminer le gain de la commande L. Comme dans l'équation (4.45) la synthèse de l'observateur et celle de la commande sont couplées. On propose de faire cette synthèse en 2 étapes, d'abord supposer préalablement que (4.36) est un observateur asymptotique pour le système (4.11). Cela implique que

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow +\infty$$

Alors, le système (4.44a) devient :

$$E\dot{x}(t) = \mathbb{A}_{11}(x)x\,(t) \tag{4.51}$$

ce dernier est asymptotiquement stable si la LMI (4.49) est satisfaite (voir le théorème 4.3.1). La résolution de l'inégalité (4.49) nous donne le gain de la commande L.

La deuxième étape de la synthèse consiste à trouver les condition de stabilité du système global (4.48).

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V\,(z) = z^T\mathbb{E}^T Y z(t) = z^T(t)Y^T\mathbb{E}z(t)$$

avec Y est une matrice non singulière telle que $\mathbb{E}^T Y = Y^T\mathbb{E} \geqslant 0$.

La dérivée de $V(z)$ le long de la solution de (4.48) est donnée par

$$\dot{V}\,(z) = \left(\mathbb{E}\dot{z}(t)\right)^T Yz(t) + z^T(t)Y^T\mathbb{E}\dot{z}(t)$$

En utilisant le modèle (4.48) nous obtenons

$$\begin{aligned}\dot{V}\,(z) &= z^T\,(t)\,\mathbb{A}(x)^T Yz(t) + z^T(t)Y^T\mathbb{A}(x)z\,(t)\\ &= z^T(t)\left[\mathbb{A}(x)^T Y + Y^T\mathbb{A}(x)\right]z(t)\end{aligned}$$

Si

$$\mathbb{A}(x)^T Y + Y^T\mathbb{A}(x) < 0 \tag{4.52}$$

Alors, $\dot{V}\,(z) < 0$,

En remplaçant $Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0\\ 0 & Y_2 & 0\\ 0 & 0 & Y_3 \end{bmatrix}$ dans (4.52) nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_{11}(x)^T Y_1 + Y_1^T\mathbb{A}_{11}(x) & 0 & -Y_1^T BL\\ 0 & \mathbb{A}_{22}(x)^T Y_2 + Y_2^T\mathbb{A}_{22}(x) & P^T Y_3\\ -\left(BL\right)^T Y_1 & Y_3^T P & -Y_3 - Y_3^T \end{bmatrix} < 0 \tag{4.53}$$

et en remplaçant $\mathbb{A}_{11}(x)$ et $\mathbb{A}_{22}(x)$ dans (4.53) nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11}(x) & 0 & -Y_1^T BL\\ 0 & \bar{A}_{22}(x) & P^T Y_3\\ -\left(BL\right)^T Y_1 & PY_3^T & -Y_3 - Y_3^T \end{bmatrix} < 0$$

avec

$$\bar{A}_{11}(x) = \begin{pmatrix} A^T Y_1 + Y_1^T A - \left(BL\right)^T Y_1 - Y_1^T BL\\ \int_0^1 F_L^L N_f^T F^T(s) M_f^T D^T\,(d\lambda))Y_1 +\\ +Y_1^T D\int_0^1 M_f F(s) N_f F_L\,(d\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}_{22}(x) = \begin{pmatrix} N^T Y_2 + Y_2^T N + \\ \int_0^1 P^T F_L^L N_f^T F^T(\eta) M_f^T \left(TD\right)^T (d\lambda)\, Y_2 + \\ Y_2^T TD \int_0^1 M_f F(\eta) N_f F_L P\,(d\lambda) \end{pmatrix}$$

Posons

$$U_1 = M_f^T D^T Y_1, V_1 = \int_0^1 F(s) N_f F_L\,(d\lambda)$$

et

$$U_2 = M_f^T \left(TD\right)^T Y_2, V_2 = \int_0^1 F(\eta) N_f F_L P\,(d\lambda)$$

en utilisant (4.3) et (4.40), nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{11}(x) & 0 & -Y_1^T BL \\ 0 & \hat{A}_{22}(x) & P^T Y_3 \\ -\left(BL\right)^T Y_1 & PY_3^T & -Y_3 - Y_3^T \end{bmatrix} < 0$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{A}_{11}(x) &= A^T Y_1 + Y_1^T A - \left(BL\right)^T Y_1 - Y_1^T BL \\ &\quad + \mu_1 Y_1^T D M_f M_f^T D^T Y_1 + \mu_1^{-1} F_L^T N_f^T N_f F_L \\ \hat{A}_{22}(x) &= N^T Y_2 + Y_2^T N + \mu_2 Y_2^T \left(TD\right) M_f M_f^T \left(TD\right)^T Y_2 \\ &\quad + \mu_2^{-1} P^T F_L^T N_f^T N_f F_L P \end{aligned}$$

par l'application du complément de Schur nous obtenons

$$\begin{bmatrix} (1,1) & 0 & -Y_1^T BL & Y_1^T D M_f & 0 & 0 \\ 0 & (2,2) & P^T Y_3 & 0 & Y_2^T \left(TD\right) M_f & P^T F_L^T N_f^T \\ * & * & -Y_3 - Y_3^T & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu_1} I & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu_2} I & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{bmatrix} < 0 \qquad (4.54)$$

où

$$\begin{aligned} (1,1) &= \begin{pmatrix} A^T Y_1 + Y_1^T A - \left(BL\right)^T Y_1 - Y_1^T BL \\ + \mu_1^{-1} F_L^T N_f^T N_f F_L \end{pmatrix} \\ (2,2) &= N^T Y_2 + Y_2^T N \end{aligned}$$

Soit Y_3 une matrice carrée quelconque, Y_2 une matrice définie positive et $Y_1 = X_1 E + E^{\perp T} Q_1$, alors l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E}^T Y_1 = Y_1^T \mathbb{E} \geqslant 0$$

est satisfaite, en substituant Y_1, N et P par leurs valeurs dans (4.54) nous obtenons la LMI (4.50) avec $\Omega_{Y_2} = Y_2^T Z_1$, ce qui complète la démonstration du théorème.

4.4.4 Synthèse de la commande $\mathcal{H}_\infty$

Le théorème suivant donne les conditions suffisantes pour la stabilité du système (4.48) pour $w(t) = 0$ et $\|x(t)\|_{L_2} < \gamma \|w(t)\|_{L_2}$, pour $w(t) \neq 0$.

Théorème 4.4.2. *Le système (4.48)est asymptotiquement stable pour $w(t) = 0$ et $\|x(t)\|_{L_2} < \gamma \|w(t)\|_{L_2}$, pour $w(t) \neq 0$ s'ils existe des matrices définies positives $\bar{X}$, X_1 et Y_2, des matrices X, Q, Y_3 et Q_1 et des scalaires positifs μ, μ_1, μ_2 et μ_3 tels que les LMIs suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_{11} & D_1 & E\bar{X} + QE^{T\perp} & \left(E\bar{X} + QE^{T\perp}\right) F_L^T N_f^T \\ * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & 0 & -I & 0 \\ * & 0 & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.55}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 & -\left(X_1E + E^{\perp T}Q_1\right)^T BL & \left(X_1E + E^{\perp T}Q_1\right)^T & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} & \Lambda_P^T Y_3 & 0 & Y_2^T \\ * & * & -Y_3 - Y_3^T + I & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & -\mu_3 I & 0 \\ * & * & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu_1} I \\ 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(X_1E + E^{\perp T}Q_1\right)^T D_1 & \left(X_1E + E^{\perp T}Q_1\right)^T DM_f \\ 0 & Y_2^T \Lambda_{TD} M_f & \Lambda_P^T F_L^T N_f^T & Y_2^T \Lambda_{\varphi_1} - \Omega_{Y_2} \Delta_{\varphi_1} \\ Y_3^T & 0 & Y_3^T \Lambda_{\varphi_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\mu_2} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & N_f F_L \Lambda_{\varphi_2} \\ 0 & 0 & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.56}$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_{11} &= E\bar{X}A^T + QE^{T\perp}A^T + A\bar{X}E^T + AE^{T\perp T}Q^T - XB^T - BX^T + \mu DM_f M_f^T D^T \\ \Sigma_{11} &= A^T\left(X_1E + E^{\perp T}Q_1\right) + \left(X_1E + E^{\perp T}Q_1\right)^T A - \left(BL\right)^T\left(X_1E + E^{\perp T}Q_1\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \left(X_1 E + E^{\perp T} Q_1\right)^T BL + \mu_1^{-1} F_L^T N_f^T N_f F_L + I \\
\Sigma_{22} &= \Lambda_N^T Y_2 + \Delta_N^T \Omega_{Y_2}^T + Y_2^T \Lambda_N + \Omega_{Y_2} \Delta_N + I
\end{aligned}
$$

et $\Omega_{Y_2} = Y_2^T Z_1$

La matrice de gain L est donnée par $L = X^T \left(E\bar{X} + QE^{T\perp}\right)^{-T}$.

Démonstration :

De la même façon, on suppose préalablement que (4.36) est un observateur asymptotique pour le système (4.11). Alors, $e(t)$ tend vers 0 et le système (4.44a) devient :

$$E\dot{x}(t) = \mathbb{A}_{11}(x)x(t) + D_1 w(t) \tag{4.57}$$

ce dernier est asymptotiquement stable si la LMI (4.55) est satisfaite (voir le théorème 4.3.2). La résolution de l'inégalité (4.55) nous donne le gain de la commande L.

Pour trouver les condition de stabilité du système global (4.48), d'abord, posons $\mathbb{D}(x) = \mathbb{D}_1 + \mathbb{D}_1(x)$, alors le système (4.48) devient :

$$\mathbb{E}\dot{z}(t) = \mathbb{A}(x)z(t) + \mathbb{D}_1 w(t) + \mathbb{D}_2(x)w(t) \tag{4.58}$$

avec

$$\mathbb{D}_1 = \begin{bmatrix} D_1 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{D}_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \int_0^1 M_f F(\lambda F_L x, t) N_f F_L \varphi_2 \, (d\lambda) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(z) = z^T \mathbb{E}^T Y z(t) = z^T(t) Y^T \mathbb{E} z(t)$$

avec Y est une matrice non singulière telle que

$$\mathbb{E}^T Y = Y^T \mathbb{E} \geqslant 0$$

La dérivée de $V(z)$ le long de la solution de (4.48) est donnée par :

$$\dot{V}(z) = \left(\mathbb{E}\dot{z}(t)\right)^T Y z(t) + z^T(t) Y^T \mathbb{E}\dot{z}(t)$$

En utilisant le modèle (4.58), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(z) &= \left(\mathbb{A}(x)z(t) + \mathbb{D}_1 w(t)\right)^T Y z(t) + z^T(t) Y^T \left(\mathbb{A}(x)z(t) + \mathbb{D}_1 w(t) + \mathbb{D}_2(x)w(t)\right) \\
&= z^T(t)\left[\mathbb{A}(x)^T Y + Y^T \mathbb{A}(x)\right] z(t) + w^T(t)\, \mathbb{D}_1^T Y z(t) + z^T(t) Y^T \mathbb{D}(x)_1 w(t) \\
&\quad + w^T(t)\, \mathbb{D}_2(x)^T Y z(t) + z^T(t) Y^T \mathbb{D}_2(x) w(t)
\end{aligned}
$$

Posons $U_3 = \mathbb{D}_2(x)w(t)$, $V_3 = Yz(t)$, alors, en utilisant (4.3) et (4.40), nons aurons

$$w^T(t)\, \mathbb{D}_2(x)^T Y z(t) + z^T(t) Y^T \mathbb{D}_2 w(t) \leq \mu_3 w^T(t)\, \mathbb{D}_2^T \mathbb{D}_2(x) w(t) + \frac{1}{\mu_3} z^T(t) Y^T Y z(t)$$

$$\leq \quad \mu_3 w^T(t)\,\varphi_2^T F_L^T N_f^T N_f F_L \varphi w(t) + \frac{1}{\mu_3} z^T(t) Y^T Y z(t)$$

alors

$$\begin{aligned}\dot{V}(z) \quad \leq \quad & z^T(t)\left[\mathbb{A}(x)^T Y + Y^T \mathbb{A} + \frac{1}{\mu_3} Y^T Y\right] z(t) + w^T(t)\,\mathbb{D}_1^T Y z(t) + z^T(t) Y^T \mathbb{D}_1 w(t) \\ & + \mu_3 w^T(t)\,\varphi_2^T F_L^T N_f^T N_f F_L \varphi w(t)\end{aligned}$$

Maintenant, nous avons

$$\dot{V}(z) + z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t)\, w(t)$$

$$=$$

$$\bar{z}^T(t) \begin{bmatrix} \mathbb{A}(x)^T Y + Y^T \mathbb{A}(x) + I + \frac{1}{\mu_3} Y^T Y & Y^T \mathbb{D}_1 \\ \mathbb{D}_1^T Y & -\gamma^2 I + \varphi_2^T F_L^T N_f^T N_f F_L \varphi \end{bmatrix} \bar{z}(t)$$

avec $\bar{z}(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$.

L'inégalité suivante

$$\dot{V}(z) + z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t)\, w(t) < 0$$

est satisfaite, si

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}(x)^T Y + Y^T \mathbb{A}(x) + I + \frac{1}{\mu_3} Y^T Y & Y^T \mathbb{D}_1 \\ \mathbb{D}_1^T Y & -\gamma^2 I + \varphi_2^T F_L^T N_f^T N_f F_L \varphi \end{bmatrix} < 0 \qquad (4.59)$$

ce qui est équivalent à

$$\dot{V}(z) < \gamma^2 w^T(t)\, w(t) - z^T(t) z(t)$$

L'intégration des deux membres de cette inégalité nous donne

$$\int_0^\infty \dot{V}(\tau)\, d\tau < \int_0^\infty \gamma^2 w^T(\tau)\, w(\tau)\, d\tau - \int_0^\infty z^T(\tau) z(\tau)\, d\tau$$

ce qui est équivalent à

$$V(\infty) - V(0) < \gamma^2 \|w(t)\|_2 - \|z(t)\|_2$$

Sous la condition initiale nulle, nous obtenons

$$V(\infty) < \gamma^2 \|w(t)\|_2 - \|z(t)\|_2$$

ce qui est équivalent à

$$\|z(t)\|_2 < \gamma^2 \|w(t)\|_2$$

Le complément de Schur, appliqué à (4.59) donne :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}(x)^T Y + Y^T \mathbb{A}(x) + I & Y^T & Y^T \mathbb{D}_1 & 0 \\ Y & -\mu_3 I & 0 & 0 \\ \mathbb{D}_1^T Y & 0 & -\gamma^2 I & N_f F_L \varphi_2 \\ 0 & 0 & \varphi_2^T F_L^T N_f^T & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.60}$$

En remplaçant $\mathbb{A}(x)$, $\mathbb{D}_1$ et Y dans (4.60) nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} (1,1) & 0 & -Y_1^T BL & Y_1^T & Y_1^T D M_f \\ 0 & (2,2) & P^T Y_3 & 0 & Y_2^T \\ * & * & -Y_3 - Y_3^T + I & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & -\mu_3 I & 0 \\ * & * & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu_1} I \\ 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & Y_1^T D_1 & 0 \\ Y_2^T (TD) M_f & P^T F_L^T N_f^T & Y_2^T \varphi_1 & 0 \\ Y_3^T & 0 & Y_3^T \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\mu_2} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & N_f F_L \varphi_2 \\ 0 & 0 & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.61}$$

où

$$\begin{aligned} (1,1) &= \begin{pmatrix} A^T Y_1 + Y_1^T A - (BL)^T Y_1 - Y_1^T BL + I \\ +\mu_1^{-1} F_L^T N_f^T N_f F_L \end{pmatrix} \\ (2,2) &= N^T Y_2 + Y_2^T N + I \end{aligned}$$

Soit Y_3 une matrice quelconque, Y_2 une matrice définie positive et $Y_1 = X_1 E + E^{\perp T} Q_1$, alors l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E}^T Y = Y^T \mathbb{E} \geq 0$$

est satisfaite, ainsi en substituant N et P par leurs valeurs dans (4.61) nous obtenons la LMI (4.56) avec $\Omega_{Y_2} = Y_2^T Z_1$, ce qui complète la démonstration du théorème.

4.4.5 Exemple numérique

Considérons le système singulier non linéaire de la forme (4.11) avec :

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$. La non-linéarité $f(t, x, u) = sin(x_3(t))$. Pour $\gamma^2 = 2.5$, $\mu = 0.1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 0.5, \mu_3 = 1$, la résolution de la LMI (4.55), nous donne le gain de la commande L :

$$L = \begin{bmatrix} -0.3712 & 1.634 & 0.670 \end{bmatrix}$$

En remplaçant L par sa valeur dans la LMI (4.56), la résolution de cette dernière nous a permis de trouver l'observateur suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) = 10^4 \begin{bmatrix} 0 & -6.861 \\ 0 & -0.704 \end{bmatrix} \zeta(t) + 10^4 \begin{bmatrix} -4.574 \\ -0.469 \end{bmatrix} y(t) \ + 10^4 \begin{bmatrix} -4.574 \\ -0.469 \end{bmatrix} u(t) \\ + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.667 \end{bmatrix} sin(\widehat{x}_2(t)) \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\widehat{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -0.353 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.706 \end{bmatrix} \zeta(t) - \begin{bmatrix} 0.235 \\ 0 \\ 0.529 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.765 \\ 0 \\ -0.529 \end{bmatrix} y(t)$$

La figure (4.6) représente la perturbation à énergie finie que nous avons appliquée, les figures (4.7), (4.8) et (4.9) représentent les différents états du système, et la dernière figure (4.10) représente l'entrée.

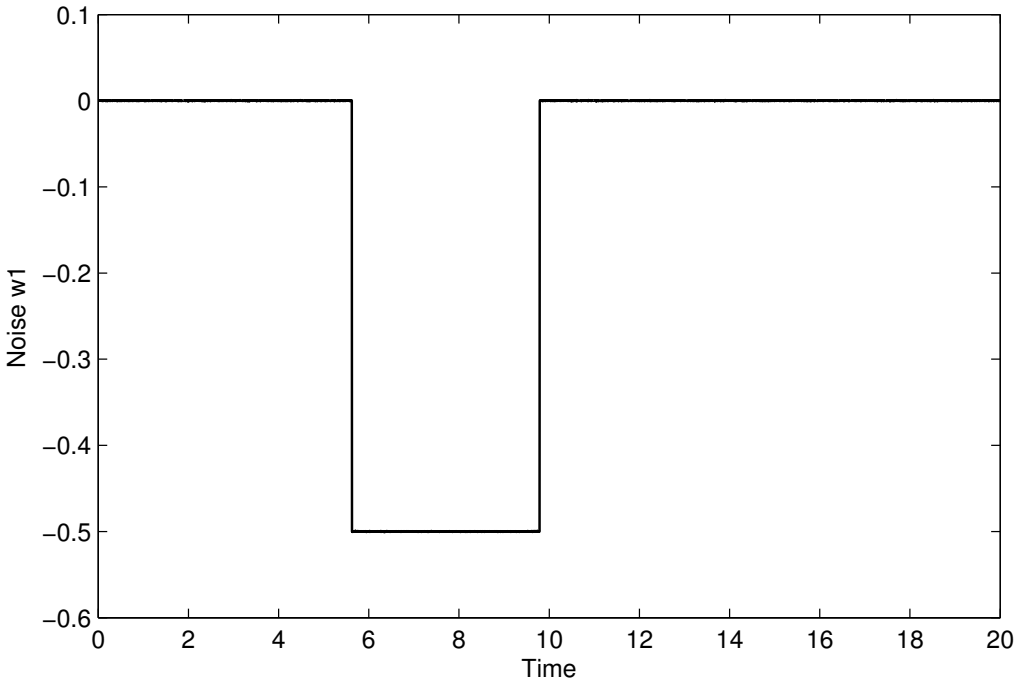


FIGURE 4.6: La perturbation $w(t)$

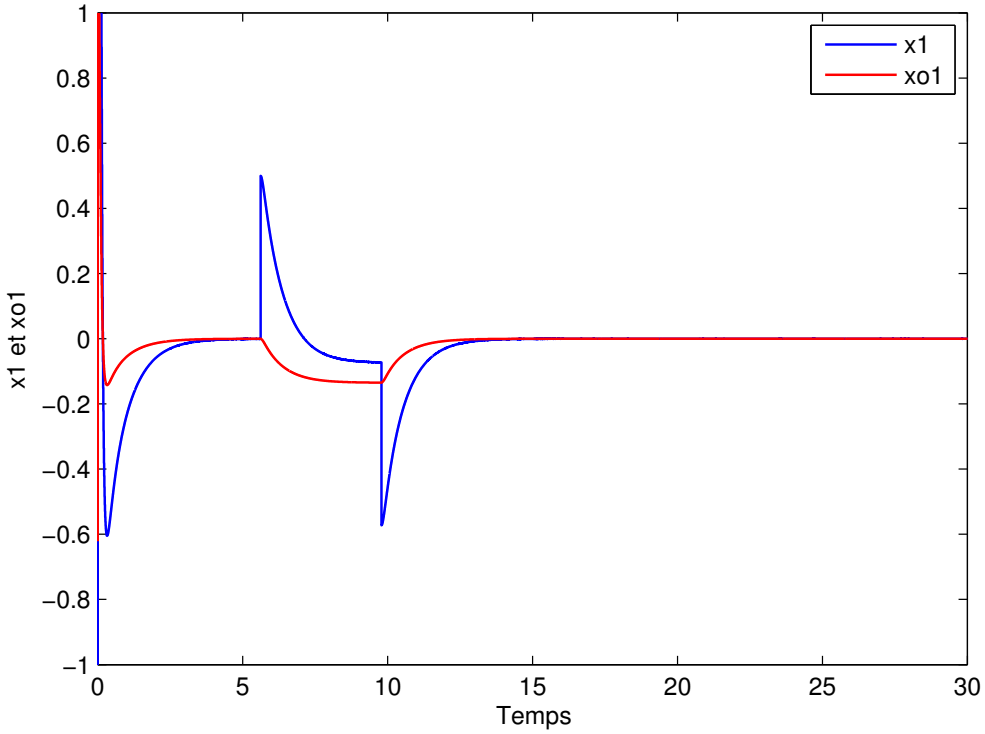


FIGURE 4.7: L'état $x_1(t)$ et son estimé $\hat{x}_1(t)$

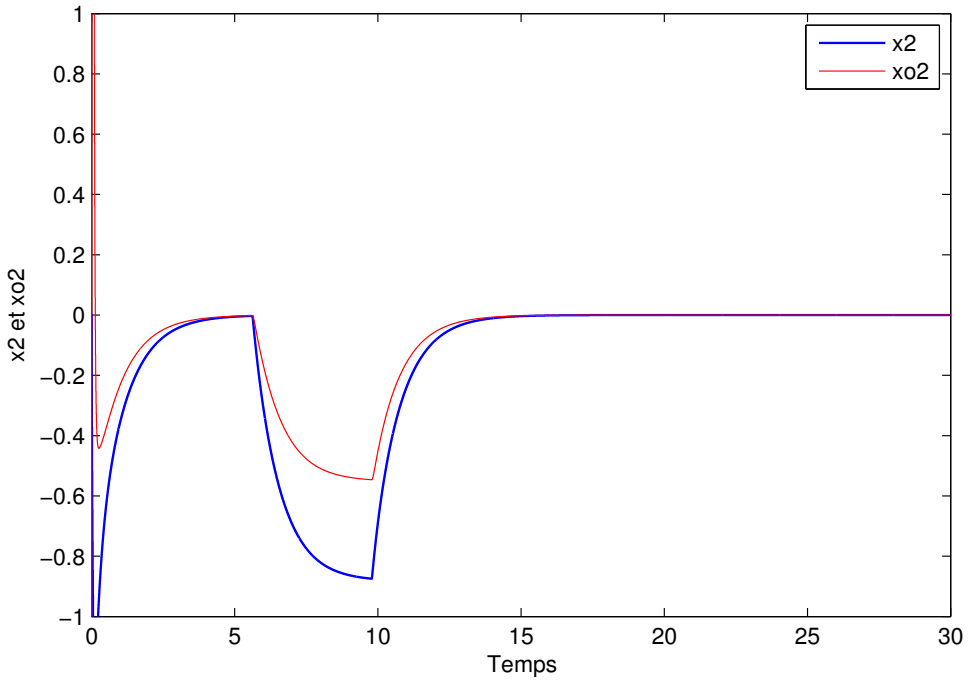


FIGURE 4.8: L'état $x_2(t)$ et son estimé $\hat{x}_2(t)$

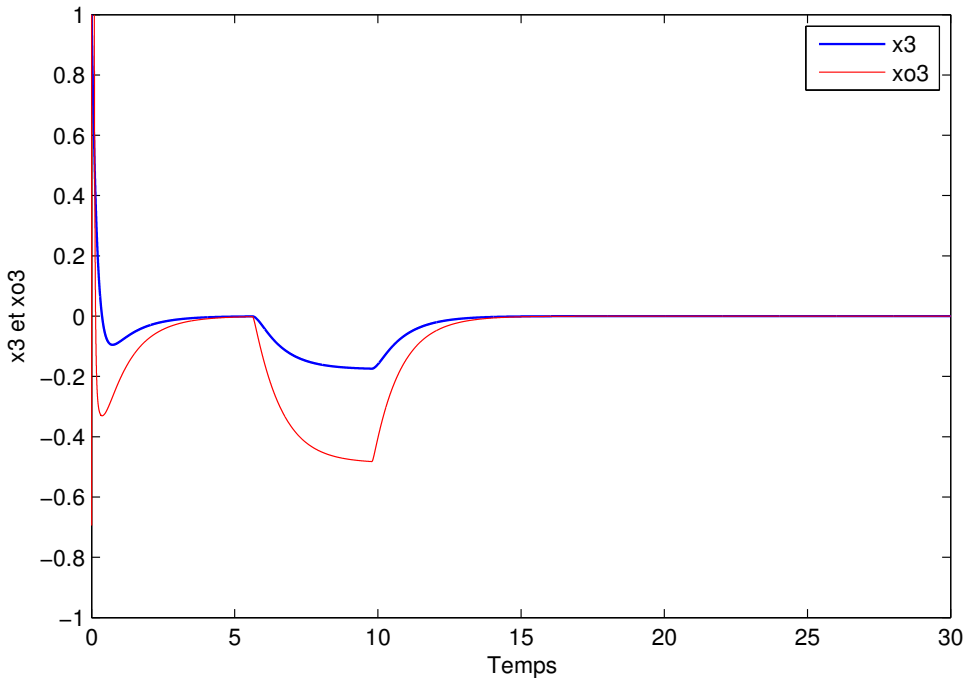


FIGURE 4.9: L'éta $x_3(t)$ et son estimé $\hat{x}_3(t)$

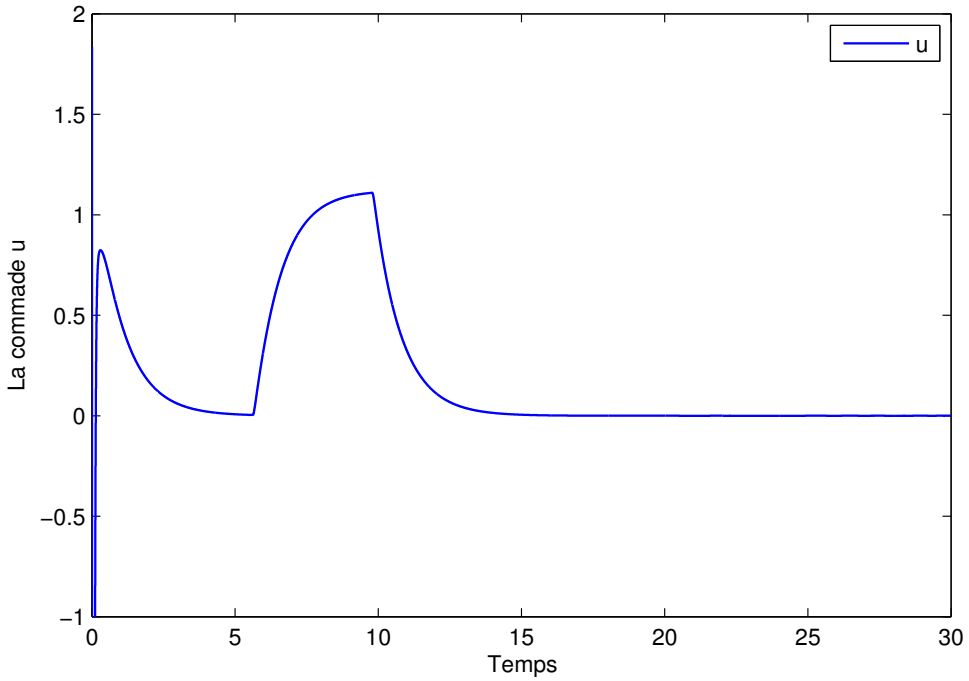


FIGURE 4.10: La commande $u(t)$

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème de la stabilisation d'une classe de systèmes singuliers non linéaires. La stabilisation par retour d'état statique est étudiée dans la première partie. Les conditions d'existence d'une commande stabilisante sont données, l'état du système est supposé entièrement accessible. Cette contrainte est levée dans la deuxième partie de ce chapitre où, nous avons proposé une commande basée observateurs , les conditions d'existence de cette dommande sont données sous forme d'inégalités matricielles linéaires strictes (LMIs). Des exemples numériques sont donnés afin de valider les résultats théoriques.

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons proposé plusieurs méthodes de synthèse d'observateurs d'état qui permettent d'étendre les résultats existants dans la littérature sur l'observation des systèmes standards au cas des systèmes singuliers bilinéaires et au cas des systèmes singuliers non linéaires.
Dans la première partie de ce mémoire, nous avons proposé une méthode de synthèse d'observateur pour une classe de systèmes bilinéaires. Les systèmes considérés sont supposés soumis à des entrées bornées, afin de diminuer le conservatisme. Nous avons considéré ces entrées comme des incertitudes structurées. L'observateur proposé est un observateur d'ordre réduit standard (non singulier). La dynamique de l'erreur d'estimation est indépendante de l'état du système à observer. les conditions nécessaires et suffisantes pour le non biais sont données sous forme d'équations de Sylvester. La paramétrisation des solutions de ces dernières est donnée en détail. Les condition d'existence et de stabilité sont données sous forme d'inégalité matricielle linéaire.

La deuxième partie de ce mémoire est dédiée à la synthèse d'observateur et au filtrage $\mathcal{H}_\infty$ pour une classe systèmes singuliers non linéaires Lipschitzien. La dynamique de l'erreur d'estimation est indépendante de la partie linéaire de l'état et de l'entrée du système observé. Cette dynamique est réécrite sous forme d'un système singulier non linéaire pour lequel nous avons étudié la stabilité. Les conditions d'existence et de stabilité sont données sous forme d'inégalité matricielle linéaire stricte. Cette approche est étendue par la suite au cas des systèmes singuliers non linéaires présentant des perturbations inconnues à énergie finie. Pour ces systèmes, nous avons proposé un filtre $\mathcal{H}_\infty$ robuste. Une autre extension est traitée, il s'agit des systèmes non linéaires singuliers à dynamique et à sortie non linéaires. Un filtre $\mathcal{H}_\infty$ robuste a été également proposé pour cette classe. Des exemples numériques ont été donnés pour les différents filtre développés afin de montrer l'efficacité de la méthode proposée.

La dernière partie de ce travail traite le problème de stabilisation et de stabilisation robuste d'une classe de systèmes singuliers non linéaires. La non-linéarité est supposée continue et différentiable. La méthode repose sur l'utilisation du théorème de Hadamard pour transformer les fonctions non linéaires afin d'obtenir une forme adaptée à la synthèse d'une commande par retour d'état statique ou d'une commande basée observateur. Dans un premier temps nous avons supposé que l'état du système est accessible. Les conditions d'existence et de stabilité sont données sous forme d'inégalité matricielle linéaire. Ensuite, cette contrainte est levée, et nous avons construit une commande basée observateur. Les résultat obtenus sont étendus aux cas des systèmes présentant des perturbations à énergie finie.

Les travaux sur l'observation et la commande des systèmes singuliers non linéaires sont récents. Les résultats obtenus dans cette thèse peuvent être étendus à des classes de systèmes plus généraux, en particulier en utilisant des nouvelles formes normales d'observabilité, qui s'appliquent au cas non linéaires non Lipschitziens. Notre approche peut être utilisée dans le domaine du diagnostic et de détection de défauts pour les systèmes non linéaires standards à entrées inconnues. Nos résultats peuvent aussi s'étendre au cas des systèmes non linéaires incertains.

Annexe A

Lemme de Hadamard

Lemme A.0.1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction réelle lisse définie sur un ouvert $U \in \mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$ dont le jacobien est inversible en un point $a \in U$. de plus la fonction est $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage de a sur un voisinage de $f(a)$. Donc $f(x)$ peut être exprimée pour tout $x \in U$ sous forme*

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) g_i(x)$$

où g_i est une fonction lisse dans U, $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ and $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Démonstration Soit $x \in U$ et h une application définie de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}^n$ telle que

$$h(x) = f(a + t(x - a))$$

donc

$$h'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (a + t(x - a)) (x_i - a_i)$$

nous avons

$$\begin{aligned} h(1) - h(0) &= f(x) - f(a) = \int_0^1 h'(t)\, dt \\ &= \int_0^1 \sum_{\substack{i=1 \\ i=1}}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (a + t(x - a)) (x_i - a_i)\, dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} (a + t(x - a))\, dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)\, g_i(x)\, dt \end{aligned}$$

où $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} (a + t(x - a))\, dt$.

Annexe B

Cette annexe regroupe des rappels sur quelques notions mathématiques utilisées dans ce mémoire.

Une matrice symétrique $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est dite :

1. définie positive $S > 0$ ssi $x^T Sx > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$.
2. semi-définie positive $S \geq 0$ ssi $x^T Sx \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$.
3. définie négative $S < 0$ ssi $x^T Sx < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$.
4. semi-définie négative $S \leq 0$ ssi $x^T Sx \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$.

B.1 Décomposition en valeurs singulières

Soit A une matrice de dimension $n \times m$ de $rang = q$, alors il existe deux matrices unitaires U et V de dimensions appropriées telles que :

$$A = U^T \begin{pmatrix} \sum_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V$$

où $\sum = diag(\sigma_i), i = 1, \cdots, q$ et $\sigma_i > 0$.

Une matrice

$$A^+ = V^T \begin{pmatrix} \sum_q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U$$

On peut aussi déduire que pour toute matrice A il existe deux matrices régulières $\bar{U}$ et $\bar{V}$ telles que

$$A = \bar{U}^T \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{V}$$

B.2 Lemme de Schur

Lemme B.2.1 (Lemme de Schur). *[BEFB94] Etant données trois matrices Q, R et S ($Q = Q^T$ et $S = S^T$), les deux propositions suivantes sont équivalentes*

(1)

$$\begin{bmatrix} Q & R \\ R^T & S \end{bmatrix} < 0 \tag{B.1}$$

(2)

$$S < 0 \ et \ Q - RS^{-1}R^T < 0 \tag{B.2}$$

$\circ$

La matrice $Q - RS^{-1}R^T$ est aussi appelée complément de Schur de S. Ce lemme reste vérifié lorsque l'on remplace "$<$" par "$\leqslant$".

B.3 Lemme Borné Réel

Un système dynamique continu linéaire de matrices d'état A, B, C et D a une norme $\mathcal{H}_\infty$ inférieure à γ si et seulement si il existe une matrice $P = P^T$ telle que la LMI suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} A^TP + PA + C^TC & PB + C^TD \\ B^TP + D^TC & D^TD - I \end{bmatrix} < 0 \tag{B.3}$$

Cette LMI est faisable si et seulement si le système linéaire (A, B, C, D) est non expansif, c-à-d ;

$$\int_0^T y\left(t\right)^T y\left(t\right) dt \leq \int_0^T u^T(t)u(t)dt \tag{B.4}$$

sous la condition initiale $x(0) = 0$.

Bibliographie

Références personnelles :

Conférences Internationales

[1] Zerrougui M., Boutat-Baddas L., Darouach M. *'$\mathcal{H}_\infty$ observers design for a class of continuous time nonlinear singular systems'*, Dans *8th International Conference on Systems, Signals and Devices, SSD'11*, Tunisie 2011.

[2] Darouach M., Boutat-Baddas L., Zerrougui M. *$\mathcal{H}_\infty$ observers design for a class of continuous nonlinear singular systems.* Dans *19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, MTNS'10*, Hongrie 2010

[3] Zerrougui M., Boutat-Baddas L., Darouach M. *'$\mathcal{H}_\infty$ Observers Design for Singular Bilinear Systems'*, Dans *2010 American Control Conference - 2010 American Control Conference*, États-Unis 2010.

[4] Darouach M., Boutat-Baddas L., Zerrougui M. *'$\mathcal{H}_\infty$ observers design for a class of discrete time nonlinear singular systems'*, Dans *18th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'10*, Maroc 2010

[5] Zerrougui M., Boutat-Baddas L., Darouach M. 'Observateur $\mathcal{H}_\infty$ pour une classe de systèmes singuliers bilinéaires', Dans *Sixième Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA 2010*, France 2010

Conférences Nationales

[6] Zerrougui M., Boutat-Baddas L., Darouach M. 'Synthèse d'observateur $\mathcal{H}_\infty$ pour une classe de systèmes singuliers non linéaires', Dans *4èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, JD-JN-MACS*, France (2011)

[7] Zerrougui M., Boutat-Baddas L., Darouach M. 'Commande basée observateur pour une classe de systèmes singuliers non linéaires', Dans *Congrès National de Recherche en IUT*, Cherbourg-Octeville, France, June 2011.

Articles en revues internationales

[8] Darouach M., Boutat-Baddas L., Zerrougui M. *'$\mathcal{H}_\infty$ Observers design for a class of nonlinear singular systems'*, dans *Automatica (2011)*, Volume 47, Issue 11, November 2011, Pages 2517-2525

[9] Zerrougui M.,Darouach M., Boutat-Baddas L. '$\mathcal{H}_\infty$ observers design for a class of continuous time nonlinear singular systems'. dans *Journal of Control Science and Engineering JCSE, Volume 2011 (2011), Article ID 967571, 8 pages*

Articles soumis en revues internationales

[10] Zerrougui M.,Darouach M., Boutat-Baddas L. '$\mathcal{H}_\infty$ filtering for Lipschitz nonlinear singular systems'. Soumis

[11] Zerrougui M.,Darouach M., Boutat-Baddas L. '$\mathcal{H}_\infty$ stabilization of a class of nonlinear singular systems : An LMI approach'. Soumis

Bibliographie

[ABD98] D. Aubry, M. Boutayeb, and M. Darouach. Observateurs de type Kalman étendu pour les systèmes non linéaires temps discret. application à une machine asynchrone. In *Colloque Inter-GDR Thème Commande des Entraînements Electriques, Paris, France*, 1998.

[ABD01] D. Aubry, M. Boutayeb, and M. Darouach. On extended Kalman type observers design with application to the ball and beam system. In *5th IFAC Symposium of the 15th IMACS Nonlinear Systems- NOLCOS 2001, Saint-Petersburg, Russia*, pages 1431–1436, 2001.

[AK99] M. Arcak and P.V. Kokotović. Nonlinear observers : a circle criterion design. *Proceedings of the 38 st Conference on Decision and Control, Phoenix, USA*, 1999.

[AK01a] M Arcak and P. Kokotovic. Nonlinear observers : A circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, 37(12) :1923–1930, 2001.

[AK01b] M Arcak and P. Kokotovic. Observer-based control of systems with slope-restricted nonlinearities. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 46(7) :1146–1150, 2001.

[Arc02] M Arcak. A global separation theorem for a new class of nonlinear observers. *Proceedings of the 41 st Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada*, 2002.

[BA99] M. Boutayeb and D. Aubry. A strong tracking extended Kalman observer for nonlinear discrete-time systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 44(8), 1999.

[BAD97] M. Boutayeb, D. Aubry, and M. Darouach. Robust observers design for a class of nonlinear discrete-time systems. In *Proceedings of the 4th European Control Conference , Bruxelle, Belgique*, 1997.

[BADF97] M. Boutayeb, D. Aubry, M. Darouach, and P. M. Frank. Observers design for nonlinear descriptor systems. In *Proceedings of the 15th IMACS World Congress , Berlin, Allemagne*, 1997.

[BCCG93] G. Bornard, F. Celle-Couenne, and G. Gilles. *Observabilité et observateurs.* chapitre 3. systèmes non linéaires. tome 1 : Modélisation-Estimation. *Masson*, 1993.

[BEFB94] S.P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Féron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequality in Systems and Control Theory.* SIAM, Philadelphia, 1994.

[BG97] E.B. Beran and K.M. Grigoriadis. Computational issues in alternating projection algorithms for fixed-order control design. In *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, Albuquerque, USA, 1997.

[BH91] G. Bornard and H. Hammouri. A high gain observer for a class of uniformly observable systems. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control , Brighton, England*, 1991.

[BH97] R. Brown and P. Hwang. Introduction to random signals and applied kalman filtering : with matlab exercises and solutions. *John Wiley Sons, Third Edition*, 1997.

[BRD97] M. Boutayeb, H. Rafaralahy, and M. Darouach. Convergence analysis of the extended Kalman filter used as an observer for nonlinear deterministic discrete-time systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 42(4), 1997.

[Bro98] E. Brookner. Tracking and kalman filtering made easy. *John Wiley Sons, Third Edition*, 1998.

[BZ83] D. Bestle and M. Zeitz. Canonical form observer design for nonlinear time-variables systems. *International Journal of Control*, 38, 1983.

[BZ88] J. Birk and M. Zeitz. Extended Luenberger observer for nonlinear multivariable systems. *International Journal of Control*, 47(6), 1988.

[Che93] G. Chen. Approximate Kalman filtering. *World Scientific series in approximations and decompositions*, 1993.

[Dai88] L. Dai. Observers for discrete singular systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 33 :187–191, 1988.

[Dai89] L. Dai. *Singular Control Systems*, volume 118 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1989.

[Dar00] M. Darouach. Existence and design of functional observers for linear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 45 :940–943, 2000.

[DB95] M. Darouach and M. Boutayeb. Design of observers for descriptor systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 40 :1323–1327, 1995.

[DBB+93] F. Deza, D. Bossanne, E. Busvelle, J. P. Gauthier, and D. Rakotopara. Exponential observers for nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 38(3), 1993.

[DBB08] M. Darouach and L Boutat-Baddas. Observer for a class of nonlinear singular systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 53 :2627–2633, 2008.

[DBGR92] F. Deza, E. Busvelle, J. P. Gauthier, and D. Rakotopara. High gain estimation for nonlinear systems. *Systems and Control letters*, 18 :295–299, 1992.

[EL77] M. España and I.D. Landau. Reduced order bilinear models for distillations columns. *Automatica*, 14 :345–355, 1977.

[FA02] X. Fan and M Arcak. Nonlinear observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities. *Proceedings of the 41 st Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada*, 2002.

[FA03] X. Fan and M Arcak. Observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities. *Systems and Control Letters*, 50 :319–330, 2003.

[FBL95] M. Fu, N.E. Barabanov, and H. Li. Robust $\mathcal{H}_\infty$ analysis and control of linear systems with integral quadratic constraints. In *Proc. European Contr. Conf.*, Roma, Italy, 1995.

[FdX91] M. Fu, C.E. de Souza, and L. Xie. $\mathcal{H}_\infty$ estimation for continuous-time linear uncertain systems. In *Proc. IFAC Symp. Design Methods Control Systems*, Zurich, Switzerland, 1991.

[FH93] K Farza, M. Busawon and Hammouri. H. Simple nonlinear observers for online estima- tion of kinetic rates in bioreactors. *Automatica*, 34 :301–318, 1993.

[Fra87] B.A. Francis. *A course in $\mathcal{H}_\infty$ Control Theory*, volume 88 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1987.

[GA93] M. Grewal and A. Andrews. Kalman filtering : Theory and practice. *Prentice Hall*, 1993.

[GB81] J.P. Gauthier and G. Bornard. Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 26 :922–926, 1981.

[GHO92] J. P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems. Applications to bioreactors. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37(6) :875–880, 1992.

[GL95] M. Green and D.N.J. Limebeer. *Robust Linear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.

[GMP96] A. Glumineau, C. H. Moog, and F. Plestan. New algebro-geometric conditions for the linearization by input-output injection. *IEEE Trans. Automatic Control*, 41(4) :598–603, 1996.

[Hać92] A. Hać. Design of disturbance decoupled observer for bilinear systems. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 114 :556–562, 1992.

[HK77] R. Hermann and A.J. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 22 :728–740, 1977.

[HM99] M. Hou and P.C. Müller. Observer design for descriptor systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 44 :164–169, 1999.

[HP99] M. Hou and A.C. Pugh. Observer with linear error dynamics for nonlinear multi output systems. *Systems and Control Letters*, 37(1) :1–9, 1999.

[Jaz70] A. H. Jazwinski. Stochastic processes and filtering theory. *New York Academic*, 1970.

[JM99] U. Jönsson and A. Megretski. IQC characterizations of signal classes. In *Proc. European Contr. Conf.*, Karlsruhe, Germany, 1999.

[JS04] J. Jouffroy and J.-J. E. Slotine. Methodological remarks on contraction theory. *Proc. Conference on Decision and Control, Atlantis, Paradise Island, Bahamas*, 3 :2537–2543, 2004.

[Kel87] H. Keller. Nonlinear observer design by transformation into a generalized observer canonical form. *International. Journal of Control*, 46(6) :1915–1930, 1987.

[Kha] H. K. Khali. *Nonlinear Systems, 2-nd edition.* Prentice-Hall.

[KI83] A. J. Krener and A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems and Control Letters*, 3(1) :47–52, 1983.

[KK98] N. Kazantzis and C. Kravaris. Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem. *Systems & Control Letters*, 34, 1998.

[KR85] A. J. Krener and W. Respondek. Nonlinear observer with linearizable error dynamics. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23(2) :197–216, 1985.

[LF97] H. Li and M. Fu. A linear matrix inequality approach to robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 45 :2338–2350, 1997.

[LH06] Guoping Lu and Daniel W. C. Ho. Full-order and reduced-order observers for lipschitz descriptor systems : The unified lmi approach. *IEEE Trans. Circ. Syst. II : Express Briefs*, 53 :563–567, 2006.

[LT87] C. W. Li and L. W. Tao. Observing nonlinear time-variable systems through a canonical form observer. *International Journal of Control*, 44(6) :1703–1713, 1987.

[Mas97] I. Masubuchi. An exact solution to parameter-dependent convex differential inequalities. *Automatica*, 33(4) :669–673, 1997.

[MH89] E.A. Misawa and J.K. Hedrick. Nonlinear observers : a state-of-the-art survey. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 111 :344–352, 1989.

[Moh73] R.R. Mohler. *Bilinear Control Processes*, volume 106 of *Mathematics in Science and Engineering.* Academic Press, New York, 1973.

[Moh91] R.R. Mohler. *Nonlinear systems : Applications to Bilinear Control*, volume 2. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.

[MR97a] A. Megretski and A. Rantzer. System analysis via integral quadratic constraints. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 42 :819–830, 1997.

[MR97b] A. Megretski and A. Rantzer. System analysis via integral quadratic constraints, Part II. Technical Report ISRN LUTFD2/TFRT-7559-SE, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1997.

[MTD] Safonov. M. G Morphopoulos. T. D. Convexity of diagonally scaled infinity norm optimal control problems-the square, one-sided case. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, volume 2.

[N97] Shields D. N. Observer design and detection for nonlinear descriptor systems. *International Journal of Control*, 67 :153–168, 1997.

[Nes02] Jet Nestruev. *Smooth Manifolds and Observables.* lncis. Springer-Verlag, New York, 2002.

[OBS99] G. Sallet O. Bernard and A. Sciandra. Nonlinear observers for a class of biological systems : Application to validation of a phytoplanktonic growth model. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 43 :2257–2270, 1999.

[PG97] F. Plestan and A. Glumineau. Linearization by generalized input-output injection. *Systems and Control Letters*, 31(2) :115–128, 1997.

[Phe91] A. R. Phelps. On constructing nonlinear observers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29(3) :516–534, 1991.

[PK92] P.N. Paraskevopoulos and F.N. Koumboulis. Observers for singular systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 37 :1211–1215, 1992.

[PT80] R. V. Patel and M. Toda. Quantitative measures of robustness in multivariable systems. In *American Control Conference, San-Francisco, USA*, 1980.

[Raj98] R Rajamani. Observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 43(3) :397–401, 1998.

[RH94] S. Raghavan and J. K. Hedrick. Observer design for a class of nonlinear systems. *Int. J. of Control*, 59(2) :515–528, 1994.

[RSU98] K. Reif, F. Sonnemann, and R. Unbehauen. An EKF based nonlinear observer with a prescribed degree of stability. *Automatica*, 34(9) :1119–1123, 1998.

[RSU99] K. Reif, F. Sonnemann, and R. Unbehauen. Nonlinear state observation using H_∞-filtring riccati design. *IEEE Trans. Automatic Control*, 44(1) :203–208, 1999.

[Rug81] W.J. Rugh. *Nonlinear System Theory.* Johns Hopkins Series in Information Sciences and Systems. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.

[RZ94] J. Rudolph and M. Zeitz. A block triangular nonlinear observer normal form. *Systems and Control Letters*, 23 :1–8, 1994.

[Sch01] C. W. Scherer. *LPV* control and full block multipliers. *Automatica*, 37 :361–375, 2001.

[SG95] Y. Song and J. W. Grizzle. Th extended Kalman filter as a local asymptotic observer for discrete-time nonlinear systems. *Journal of Mathematical Systems Estimation and Control*, 5(1) :59–78, 1995.

[Shi96] D.N. Shields. Observer for discrete nonlinear descriptor systems. In *Proc. UKACC Int. Conf. Control*, Exeter, UK, 1996.

[Son84] E. D. Sontag. A concept of local observability. *Syst. & Contr. Letters*, 5(1) :41–47, 1984.

[Sor97] M. Soroush. Nonlinear state-observer design with application to reactors. *Chemical Engineering Science*, 52(3) :387–404, 1997.

[Tha73] F. E. Thau. Observing the state of nonlinear dynamic systems. *Int. J. of Control*, 17(3) :471–479, 1973.

[WCŻ87] B.L. Walcott, M.J. Corless, and S.H. Żak. Comparative study of non-linear state-observation techniques. *Int. J. Contr.*, 45 :2109–2132, 1987.

[Wil77] D. Williamson. Observation of bilinear systems with application to biological control. *Automatica*, 13 :243–254, 1977.

[XG89] X. H. Xia and W. B. Gao. Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM J. Control and Optimization*, 27(1) :199–216, 1989.

[Zak90] S. H. Zak. On the stabilization and observation of nonlinear/uncertain dynamic systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 35(5) :397–401, 1990.

[Zei87a] M. Zeitz. Comments on 'comparative study of nonlinear state observation techniques'. *Int. J. of Control*, 46(5) :1861–1863, 1987.

[Zei87b] M. Zeitz. The extended Luenberger observer for nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 9 :149–156, 1987.

[ZM97] Gerta Zimmer and Jürgen Meierb. On observing nonlinear descriptor systems. *Systems Control Letters*, 32, Issue 1 :43–48, 1997.

[ZRMD98] M. Zasadzinski, H. Rafaralahy, C. Mechmeche, and M. Darouach. On disturbance decoupled observer for a class of bilinear systems. *Trans. of the ASME, J. Dyn. Syst., Meas. & Cont.*, 120 :371–377, 1998.

[ZW06] H. ZHANG1 Z. Wang. Design of bilinear observer for singular bilinear systems. *Journal of Control Theory and Applications*, 4(4) :413–417, 2006.

[ZW07] H. ZHANG1 Z. Wang. Design of a bilinear fault detection observer forsingular bilinear. *Journal of Control Theory and Applications*, 5(1) :28–36, 2007.

Résumé

Les travaux présentés dans cette thèse ont été effectués au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN). Ils portent sur l'observation et la commande des systèmes singuliers non linéaires.

Dans un premier temps nous nous sommes intéressés à la synthèse d'observateur et au filtrage $\mathcal{H}_\infty$ des systèmes singuliers bilinéaires. Dans un deuxième temps, nous avons étudié la synthèse d'observateur pour les systèmes singuliers non linéaires Lipschitziens. La dernière partie de ce travail concerne la stabilisation et la commande basée observateurs des systèmes singuliers non linéaires. L'objectif de ce travail a été de proposer des résultats facilement implémentables et de couvrir une large classe de systèmes non linéaires. La contribution principale de ce mémoire a été de proposer des observateurs $\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes singuliers non linéaires, en utilisant le non biais de l'erreur d'estimation. Les paramètres de ces observateurs sont obtenus par la résolution des inégalités matricielles linéaires (LMIs). Le deuxième apport concerne la synthèse de commande stabilisante et l'utilisation d'un des observateurs proposés dans cette thèse pour la synthèse d'une commande basée observateur pour les systèmes singuliers non linéaires. Cette dernière est réalisée grâce à la réécriture des fonctions non linéaires sous des formes adéquates à l'application de la commande des systèmes.

Mots-clés: Systèmes singuliers non linéaires, observateurs non linéaires, stabilité au sens de Lyapunov, synthèse $\mathcal{H}_\infty$, inégalités matricielles linéaires (LMI), commande basée observateur

Abstract

This thesis work is realized in the Research Center in Automatic Control of Nancy (CRAN). It concerns the observation and control of nonlinear singular systems.

Firstly, we were interested in the observer design and Hinfinity filtering for singular bilinear systems. In a second step, we studied the observers design for Lipschitz nonlinear singular systems. The last part of this work relates to the stabilization and observer based controller for a classe of singular nonlinear systems. The objective is to develop a simple and straightforward results which covers a large class of nonlinear systems. The main contribution of this thesis is in the Hinfinity observers design for nonlinear singular systems. It is based on the parametrization of the solution of the constrained generalized Sylvester equation. The second contribution relates to the design of stabilizing control and using the proposed observer to design an observer based controller for nonlinear singular systems. Solutions of these problems are obtained by using Linear Matrix Inequalities (LMI) Formulation.

Keywords: Singular systems, non linear observers, stability analysis, $\mathcal{H}_\infty$ synthesis, Linear matrix inequalities, observer based control