



**HAL**  
open science

# Approches hyperélastiques pour la modélisation du comportement mécanique de préformes tissées de composites

Adrien Charmetant

► **To cite this version:**

Adrien Charmetant. Approches hyperélastiques pour la modélisation du comportement mécanique de préformes tissées de composites. Autre. INSA de Lyon, 2011. Français. NNT : 2011ISAL0149 . tel-00706212

**HAL Id: tel-00706212**

**<https://theses.hal.science/tel-00706212v1>**

Submitted on 9 Jun 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre NUM\_ORDRE

Année 2011

Thèse

# **Approches hyperélastiques pour la modélisation du comportement mécanique de préformes tissées de composites**

**Présentée devant**

L'institut national des sciences appliquées de Lyon

**Pour obtenir**

Le grade de docteur

**Formation doctorale**

Ecole doctorale Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)

Spécialité : Mécanique, génie mécanique, génie civil

**Par**

Adrien Charmetant

Soutenue le 13 Décembre 2011 devant la Commission d'examen

**Jury**

P. Boisse	Professeur (INSA Lyon)	Directeur
M. Brieu	Professeur (Ecole Centrale Lille)	Rapporteur
P. Ladeveze	Professeur (ENS Cachan)	Examineur
S. Lomov	Professeur (Katholiek Universiteit Leuven)	Rapporteur
A. Madeo	Maître de conférences (INSA Lyon)	Examineur
E. Maire	Directeur de recherches CNRS (INSA Lyon)	Invité
S. Otin	Ingénieur de recherches (Snecma)	Examineur
F. Sidoroff	Professeur émérite (Ecole Centrale Lyon)	Examineur
E. Vidal-Sallé	Maître de conférences (INSA Lyon)	Examineur

Laboratoire de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) - UMR5259

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales - Quinquennal  
2011-2015

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a>  Insa : R. GOURDON	<b>M. Jean Marc LANCELIN</b> Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a>  Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN eea@ec-lyon.fr	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a>  Insa : H. CHARLES	<b>Mme Gudrun BORNETTE</b> CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43.12.94 <a href="mailto:e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr">e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</b> <a href="http://ww2.ibcp.fr/ediss">http://ww2.ibcp.fr/ediss</a>  Sec : Safia AIT CHALAL Insa : M. LAGARDE	<b>M. Didier REVEL</b> Hôpital Louis Pradel Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69677 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16 <a href="mailto:Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr">Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</b> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Johannes KELLENDONK</b> Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 43.19.05 Fax 04 72 43 13 10 <a href="mailto:infomaths@bat710.univ-lyon1.fr">infomaths@bat710.univ-lyon1.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b>MATERIAUX DE LYON</b>	<b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b> Secrétaire : Mériem LABOUNE  INSA de Lyon École Doctorale Matériaux Mérim LABOUNE Bâtiment Antoine de Saint-Exupéry 25bis Avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Tel : 04 72 43 71 70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:ed.materiaux@insa-lyon.fr">ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE (ED n°162)</b>	<b>M. Philippe BOISSE</b> Secrétaire : Mériem LABOUNE  Adresse : INSA de Lyon École Doctorale MEGA Mérim LABOUNE Bâtiment Antoine de Saint-Exupéry 25bis Avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Tel : 04 72 43 71 70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a> Site web : <a href="http://www.ed-mega.com">http://www.ed-mega.com</a>
<b>ScSo</b>	<b>ScSo*</b>  <b>M. OBADIA Lionel</b>  Sec : Viviane POLSINELLI Insa : J.Y. TOUSSAINT	<b>M. OBADIA Lionel</b> Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

# Approches hyperélastiques pour la modélisation du comportement mécanique de préformes tissées de composites

## Résumé

La simulation des procédés de mise en forme des composites à renforts tissés de type RTM est un enjeu majeur pour les industries de pointe mettant en œuvre ce type de matériaux. Au cours de ces procédés, la préforme tissée est souvent soumise à des déformations importantes. La connaissance et la simulation du comportement mécanique de la préforme à l'échelle macroscopique et à l'échelle mésoscopique s'avère souvent nécessaire pour optimiser la phase de conception de pièces composites formées par de tels procédés.

Une analyse du comportement mésoscopique des préformes tissées de composites est d'abord proposée. Une loi de comportement hyperélastique isotrope transverse est développée, permettant de décrire le comportement mécanique de chacun des modes de déformation de la mèche : élongation dans la direction des fibres, compaction et distorsion dans le plan d'isotropie de la mèche, cisaillement le long des fibres. Une méthodologie est proposée pour identifier les paramètres de cette loi de comportement à l'aide d'essais sur la mèche et sur le tissu, et une validation par comparaison avec des essais expérimentaux est présentée.

Une analyse du comportement macroscopique des renforts interlocks est ensuite proposée : une loi de comportement hyperélastique orthotrope est développée et implémentée. Cette loi, extension de la loi de comportement pour la mèche, est également basée sur une description phénoménologique des modes de déformation de la préforme. Une méthode d'identification des paramètres de cette loi de comportement est mise en œuvre, utilisant des essais expérimentaux classiques dans le contexte des renforts tissés (tension uniaxiale, compression, bias extension test, flexion). Cette seconde loi de comportement est validée par comparaison avec des essais de flexion et d'emboutissage hémisphérique.

## Mots-Clés

Renforts tissés, composites, mise en forme, propriétés mécaniques, analyse mésoscopique, analyse macroscopique, lois de comportements hyperélastiques, grandes transformations, méthode par éléments finis

## Hyperelastic approaches to model the mechanical behaviour of woven preforms of composites

### Abstract

Simulating the preforming stage of RTM-like fabric-reinforced composites manufacturing processes is a major stake for industries which use such materials. During such processes, the woven preform often undergoes finite deformations. Simulation methods are then required to optimize the conception of composites parts formed by RTM.

An analysis of the mechanical behaviour of woven preforms at mesoscale is first presented. A transversely isotropic hyperelastic behaviour law is developed in order to describe the mechanical behaviour of each deformation mode of the yarn : elongation in the direction of fibres, compaction and distorsion in the transverse plane and along-fibres shear. An identification method is set up for this behaviour law which allows to compute its parameters by use of simple experimental tests on the yarn and on the fabric. The behaviour law is then validated by comparizon between simulations ans experimental tests.

An analysis of the mechanical behaviour of interlock woven preforms at macroscale is the presented. An orthotropic hyperelastic behaviour law is developed and implemented as an extension of the behaviour law for the yarn. A phenomenological approach is also used to describe the mechanical behaviour of each deformation mode of the preform. An identification method is set up and put into place, based on tests well known in the field of fabric reinforcements : tensile test, crushing test, bias extension test, flexure test. A hemispherical stamping simulation is set up and compared to experiment for validation purpose.

**Keywords:** Textile composites, woven reinforcements, resin transfer moulding (RTM), mechanical properties, mesoscopic analysis, macroscopic analysis, hyperelastic behaviour laws, finite transformations, finite element analysis (FEA)



# Table des matières

<b>LISTE DES ILLUSTRATIONS .....</b>	<b>7</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX .....</b>	<b>10</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>11</b>
<b>CHAPITRE 1 LES RENFORTS TISSES DE COMPOSITES : COMPORTEMENT ET MODELISATION .....</b>	<b>13</b>
1.1 PRESENTATION GENERALE DES MATERIAUX COMPOSITES .....	14
1.2 LES RENFORTS TISSES : DE LA FIBRE A LA PIECE FINALE .....	15
1.2.1 <i>Structure multiéchelles du matériau.....</i>	<i>16</i>
1.2.2 <i>La mise en forme du composite à renfort tissé par LCM .....</i>	<i>20</i>
1.3 COMPORTEMENT MECANIQUE DES RENFORTS TISSES .....	21
1.3.1 <i>Comportement à l'échelle mésoscopique.....</i>	<i>22</i>
1.3.2 <i>Comportement à l'échelle macroscopique .....</i>	<i>27</i>
1.4 SIMULATION DE LA MISE EN FORME.....	35
1.4.1 <i>Simulations à l'échelle microscopique.....</i>	<i>36</i>
1.4.2 <i>Simulations à l'échelle macroscopique.....</i>	<i>37</i>
1.4.3 <i>Simulations à l'échelle mésoscopique.....</i>	<i>39</i>
CONCLUSION DU CHAPITRE 1 .....	44
<b>CHAPITRE 2 MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS EN GRANDES TRANSFORMATIONS &amp; HYPERELASTICITE.....</b>	<b>45</b>
2.1 CINEMATIQUE DES GRANDES TRANSFORMATIONS .....	46
2.1.1 <i>Tenseur gradient de la transformation.....</i>	<i>46</i>
2.1.2 <i>Mesures des déformations.....</i>	<i>47</i>
2.1.3 <i>Vitesses de déformation.....</i>	<i>48</i>
2.2 DESCRIPTION DES EFFORTS INTERNES .....	48
2.3 DUALITE CONTRAINTES – DEFORMATIONS .....	50
2.4 LOIS DE COMPORTEMENT HYPERELASTIQUES.....	50
2.4.1 <i>Formulation des lois de comportement hyperélastiques.....</i>	<i>50</i>
2.4.2 <i>Hyperélasticité isotrope .....</i>	<i>52</i>
2.4.3 <i>Hyperélasticité anisotrope .....</i>	<i>53</i>
2.4.4 <i>Différentes approches de modélisation.....</i>	<i>55</i>
2.5 IMPLEMENTATION DES LOIS DE COMPORTEMENT DANS ABAQUS/EXPLICIT.....	55
2.5.1 <i>Schémas d'intégration temporelle.....</i>	<i>55</i>
2.5.2 <i>Implémentation de sous-routines VUMAT pour les matériaux hyperélastiques anisotropes ...</i>	<i>60</i>
CONCLUSION DU CHAPITRE 2 .....	66
<b>CHAPITRE 3 LOI DE COMPORTEMENT HYPERELASTIQUE POUR LA MECHE DE RENFORT TISSE .....</b>	<b>67</b>
3.1 HYPOTHESES SUR LE COMPORTEMENT DE LA MECHE.....	69
3.1.1 <i>Isotropie transverse de la mèche.....</i>	<i>69</i>
3.1.2 <i>Modes de déformation de la mèche.....</i>	<i>69</i>

3.2	DEFINITION D'INVARIANTS PORTEURS DE SENS PHYSIQUE .....	70
3.2.1	<i>Une représentation particulière du gradient de la transformation</i> .....	70
3.2.2	<i>Invariants correspondant aux modes de déformation de la mèche</i> .....	72
3.2.3	<i>Dérivation des invariants</i> .....	74
3.2.4	<i>Bilan sur les invariants</i> .....	76
3.3	ENERGIES DE DEFORMATION POUR CHACUN DES MODES DE DEFORMATION .....	77
3.3.1	<i>Energie d'élongation</i> .....	77
3.3.2	<i>Energie de compaction</i> .....	79
3.3.3	<i>Energie de distorsion dans le plan transverse</i> .....	79
3.3.4	<i>Energie de cisaillement transverse</i> .....	80
3.3.5	<i>Bilan sur la loi de comportement</i> .....	81
3.4	IDENTIFICATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT .....	84
3.4.1	<i>Modélisation géométrique des renforts étudiés</i> .....	84
3.4.2	<i>Identification du comportement des mèches du taffetas de verre</i> .....	91
3.4.3	<i>Identification du comportement des mèches du sergé de carbone</i> .....	95
3.4.4	<i>Bilan sur la méthode d'identification de la loi de comportement</i> .....	98
3.5	COMPARAISONS SIMULATIONS/EXPERIENCES .....	99
3.5.1	<i>Tension biaxiale</i> .....	99
3.5.2	<i>Cisaillement du renfort tissé dans le plan</i> .....	100
3.6	CONCLUSION DU CHAPITRE 3 .....	104
 <b>CHAPITRE 4 LOI DE COMPORTEMENT HYPERELASTIQUE POUR LES RENFORTS</b>		
	<b>INTERLOCKS EPAIS .....</b>	<b>107</b>
4.1	COMPORTEMENT DU RENFORT INTERLOCK ET HYPOTHESES DE MODELISATION .....	109
4.1.1	<i>Orthotropie des renforts interlocks</i> .....	109
4.1.2	<i>Modes de déformation des interlocks</i> .....	109
4.2	DEFINITION DES INVARIANTS .....	110
4.2.1	<i>Invariants pour l'élongation dans les directions chaîne et trame</i> .....	110
4.2.2	<i>Invariant pour l'écrasement du renfort</i> .....	111
4.2.3	<i>Invariant pour le cisaillement plan du renfort</i> .....	112
4.2.4	<i>Invariants pour les cisaillements transverses</i> .....	114
4.2.5	<i>Bilan sur les invariants</i> .....	114
4.3	ECRITURE DES ENERGIES DE DEFORMATION ET IDENTIFICATION .....	115
4.3.1	<i>Le renfort interlock étudié</i> .....	115
4.3.2	<i>Tension dans les directions chaîne et trame</i> .....	116
4.3.3	<i>Compaction transverse</i> .....	117
4.3.4	<i>Cisaillement dans le plan du renfort</i> .....	118
4.3.5	<i>Cisaillement transverse</i> .....	124
4.3.6	<i>Bilan sur les densités d'énergie et sur l'identification</i> .....	126
4.4	VALIDATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT .....	126
4.4.1	<i>Flexion à 0°/90°</i> .....	127
4.4.2	<i>Emboutissage hémisphérique</i> .....	132
4.5	INTERLOCKS ET MILIEUX DU SECOND GRADIENT .....	135
4.6	CONCLUSION DU CHAPITRE 4 .....	137
 <b>CONCLUSION GENERALE .....</b>		<b>139</b>
 <b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>		<b>141</b>

# Liste des illustrations

Figure 1-1. Procédé de filage et d'assemblage des mèches de fibres de verre [DAL08].....	17
Figure 1-2. Procédé de fabrication des fibres de carbone à partir d'un précurseur PAN [DUP08].....	18
Figure 1-3. Schéma d'un métier à tisser .....	18
Figure 1-4. Les différents motifs de tissage 2D. (a) Taffetas (b) Sergé 2x2 (c) Satin.....	19
Figure 1-5. Définition de l'embuvage d'un tissu.....	19
Figure 1-6. Une structure de renfort interlock 2.5D.....	20
Figure 1-7. Schéma de principe du processus d'infusion sous vide. ....	20
Figure 1-8. Schéma de principe du processus RTM. (a) Formage du renfort fibreux (b) injection et polymérisation de la matrice (c) démoulage de la pièce finale .....	21
Figure 1-9. Différentes échelles d'un renfort tissé.....	22
Figure 1-10. Comportement en tension de mèches de verre (a) et de carbone (b) [DUM03a] .....	23
Figure 1-11. Difficulté de la définition d'une contrainte, liée au changement de section apparente de la mèche.....	23
Figure 1-12. Vue en coupe (par tomographie X) du plan transverse de la mèche (a) tissu au repos (b) tissu sous tension équi-biaxiale [BAD08a].....	24
Figure 1-13. Distorsion de la mèche (fibres orthogonale au plan du dessin) .....	25
Figure 1-14. Cisaillement transverse de la mèche.....	25
Figure 1-15. Mécanismes intervenant dans la flexion d'une mèche de renfort tissé. ....	26
Figure 1-16. Validation de l'hypothèse de non glissement entre chaîne et trame.....	27
Figure 1-17. Traction uniaxiale sur un taffetas de verre: mécanismes et courbe expérimentale [BUE98].....	28
Figure 1-18. Cinématique et dispositif expérimental de l'essai de traction biaxiale [BUE98, BUE01] .....	29
Figure 1-19. Réseau de courbes de traction biaxiale pour un taffetas de verre [BUE98] .....	29
Figure 1-20. Cinématique et dispositif expérimental de l'essai de cadre (picture frame test). ....	30
Figure 1-21. Couple surfacique obtenu avec l'essai de cadre pour un taffetas de verre.....	31
Figure 1-22. Cinématique et dispositif expérimental du bias extension test.....	32
Figure 1-23. Dispositif d'écrasement et courbes d'écrasements successifs d'un taffetas de verre. ....	33
Figure 1-24. Dispositif de flexion ASTM .....	34
Figure 1-25. Dispositif KES-FB2 utilisé pour mesurer le comportement en flexion.....	35
Figure 1-26. Dispositif de flexion de De Bilbao [DEB10].....	35
Figure 1-27. Modèle de maille élémentaire à l'échelle microscopique [DUR10] .....	36
Figure 1-28. Méthode du filet : détermination de la position du point C connaissant celles de A et B [BOI04] .....	37
Figure 1-29. Différents types de raideurs des modélisations mésoscopiques discrètes [SZE05].....	38
Figure 1-30. Simulation avec un modèle hypoélastique (a) et expérience (b) du drapage d'un double dôme [KHA10].....	38
Figure 1-31. Schématisation des éléments formulés et résultats de simulation de mises en formes obtenus pour le modèle semi discret 2D (a) et le modèle semi discret 3D (b).....	39
Figure 1-32. Modélisation analytique de Kawabata [KAW73a].....	40
Figure 1-33. Définition des points de contrôle de la ligne moyenne d'un sergé 3x2 [HIV05].....	42
Figure 1-34. Définition du contour des sections de la mèche [HIV05].....	42
Figure 1-35. Exemple de modèle de taffetas issu du modèle de Hivet .....	42



Figure 1-36. Cisaillement d'une maille élémentaire de taffetas [BAD08].....	43
Figure 2-1. Définition des efforts internes.....	49
Figure 2-2. Schéma de principe de l'implémentation d'un code de calcul explicite en différences centrées à pas adaptatif.....	59
Figure 2-3. Estimation du pas de temps critique en fonction de la longueur caractéristique de l'élément pour la mèche de fibres de verre étudiée.....	60
Figure 2-4. Cas-test utilisé pour la vérification des orientations dans Abaqus. (a) Etat initial. (b) Transformation de corps rigide ( $u$ , $\beta$ ) + cisaillement ( $\gamma$ ) + élongation ( $\lambda$ ).....	61
Figure 2-5. Implémentation du test des orientations dans Abaqus. La base représentée est la base de Green-Naghdi présentée précédemment. ....	63
Figure 2-6. Structure de la subroutine VUMAT.....	65
Figure 3-1. Isotropie transverse de la mèche de renfort tissé. Image obtenue par tomographie X.....	69
Figure 3-2. Modes de déformation de la mèche (la flèche désigne la direction des fibres) : (a) élongation (b) compaction (c) distorsion (d) cisaillement transverse .....	69
Figure 3-3. Essais de traction sur une mèche seule [BUE01].....	78
Figure 3-4. Mécanismes de déformation du renfort sollicité en traction uniaxiale. ....	80
Figure 3-5. Tests de vérification de l'implémentation de la loi de comportement. (a) Elongation. (b) Compaction. (c) Distorsion. (d) Cisaillement transverse.....	82
Figure 3-6. Résultat des tests de validation de l'implémentation de la loi de comportement. Comparaison des énergies et des efforts mis en oeuvre. (a) Elongation. (b) Compaction. (c) Distorsion. (d) cisaillement transverse.....	83
Figure 3-7. Caractéristiques géométriques moyennes du taffetas de verre étudié.....	84
Figure 3-8. Caractéristiques géométriques moyennes du sergé de carbone étudié.....	85
Figure 3-9. Reconstitution du renfort complet par translation d'une maille élémentaire (a) non déformée et (b) soumise à une transformation homogène.....	85
Figure 3-10. Points appariés au sein d'une maille élémentaire. ....	86
Figure 3-11. Déformation globale et déformations locales de la maille élémentaire permettant de garantir les conditions de périodicité du champ de déplacement du renfort soumis à une transformation globale homogène. ....	86
Figure 3-12. Deux mailles élémentaires de taffetas possédant plusieurs symétries. ....	87
Figure 3-13. Modèles éléments finis utilisés pour les différents cas de chargement sur la maille élémentaire de taffetas.....	88
Figure 3-14. Comparaison du modèle géométrique du taffetas de verre issu du modèle de Hivet avec une coupe obtenue par tomographie X.....	89
Figure 3-15. Modèle géométrique du sergé de carbone. Comparaison avec des images issues de tomographie X.....	90
Figure 3-16. Gestion de l'orientation dans Abaqus (a) en intégration complète et (b) en intégration réduite.....	90
Figure 3-17. Identification du comportement de la mèche de verre en élongation .....	91
Figure 3-18. Identification du comportement en cisaillement transverse de la mèche du taffetas de verre. (a) Réseau de courbes obtenues en faisant varier le paramètre de cisaillement transverse (b) Ecarts cumulés entre simulations et expérience, obtenus pour chaque paramètre testé (c) Courbe obtenue après identification. ....	92
Figure 3-19. Identification du comportement dans le plan transverse de la mèche du taffetas de verre.....	94
Figure 3-20. Identification du comportement de la mèche de carbone en élongation.....	95
Figure 3-21. Identification du comportement de la mèche de carbone en cisaillement transverse. (a) Réseau de courbes obtenues en faisant varier le paramètre de cisaillement	

transverse (b) Ecarts entre simulation et expérience, obtenus pour chaque paramètre testé (c) Courbe obtenue après identification.....	96
Figure 3-22. Sensibilité de la traction uniaxiale au comportement (a) en compaction et (b) en distorsion.....	97
Figure 3-23. Identification du comportement de la mèche de carbone dans le plan transverse.....	98
Figure 3-24. Réseaux de tension biaxiale obtenus expérimentalement et par simulation pour le taffetas de verre.....	99
Figure 3-25. Réseaux de tension biaxiale obtenus expérimentalement et par simulation pour le sergé de carbone.....	100
Figure 3-26. Déformée de cisaillement de la maille élémentaire de taffetas de verre obtenue par la simulation.....	101
Figure 3-27. Couples de cisaillement obtenus expérimentalement et par simulation pour le taffetas de verre.....	101
Figure 3-28. Influence de la tension sur le cisaillement de la maille élémentaire.....	102
Figure 3-29. Déformée de cisaillement pur de la maille élémentaire de sergé de carbone obtenue par la simulation.....	103
Figure 3-30. Comparaison des couples surfaciques de cisaillement obtenus expérimentalement et par simulation pour le sergé de carbone.....	103
Figure 4-1. Modes de déformation des renforts interlocks. (a) compression transverse, (d) cisaillement dans le plan, (b,e) elongations, (c,f) cisaillements transverses.....	110
Figure 4-2. L'écrasement d'un renfort ne peut être associée à la norme du vecteur covariant transverse.....	111
Figure 4-3. Définition de l'angle de cisaillement plan.....	112
Figure 4-4. Interlock générique étudié.....	115
Figure 4-5. Essai de traction sur une éprouvette d'interlock.....	116
Figure 4-6. Energie de déformation (a) et contraintes de compaction transverse (b) obtenues expérimentalement et par simulation.....	118
Figure 4-7. Paramètres géométriques du bias extension test.....	118
Figure 4-8. Courbe de « bias extension test » obtenue pour un interlock 4 mm. (a) courbe entière (b) zoom sur le début de la courbe.....	119
Figure 4-9. Identification du comportement en cisaillement à partir d'un essai de bias extension test. (a) Déformée. (b) Courbes effort/déplacement (valeur des paramètres à chaque boucle entre parenthèses). (c) Ecarts relatif entre les courbes simulées et la courbe expérimentale.....	121
Figure 4-10. Sensibilité à la vitesse de traction des simulations de bias extension test.....	121
Figure 4-11. Sensibilité au maillage des simulations de bias extension test lorsque les éléments sont alignés avec les bords de l'éprouvette.....	123
Figure 4-12. Sensibilité au maillage des simulations de bias extension test lorsque les éléments sont alignés avec les directions des mèches.....	123
Figure 4-13. Essai de cisaillement sur interlock.....	124
Figure 4-14. Comparaison des angles de cisaillement transverse théorique et expérimental.....	124
Figure 4-15. Courbes de cisaillement transverse de l'interlock générique.....	125
Figure 4-16. Résultat de l'identification du comportement de l'interlock générique en cisaillement transverse. (a) sens chaîne (b) sens trame.....	126
Figure 4-17. Effort de flexion expérimental pour l'interlock générique.....	128
Figure 4-18. Comparaison entre expérience et simulation de la déformation macroscopique de l'éprouvette d'interlock en flexion.....	128

Figure 4-19. Comparaison entre expérience et simulation des lignes moyennes de l'éprouvette d'interlock au cours d'un essai de flexion. ....	129
Figure 4-20. Comparaison de l'évolution de l'angle entre la verticale et différentes sections transverses pour l'expérience et pour la simulation. ....	130
Figure 4-21. Comparaison des efforts de flexion sur interlock issus de l'expérience et de la simulation. ....	131
Figure 4-22. Caractéristiques géométriques du montage d'emboutissage hémisphérique.....	133
Figure 4-23. Vues de dessus de l'éprouvette emboutie par le poinçon hémisphérique : (a) expérience [DEL09] et (b) simulation.....	134
Figure 4-24. Angles de cisaillements plans (a) et taux de compression (b) dans le renfort interlock au cours d'un emboutissage hémisphérique, calculés par simulation. ....	134
Figure 4-25. Ajout de poutres dans les directions de chaîne et de trame pour modéliser l'influence du second gradient de la transformation sur le comportement du renfort. ....	135
Figure 4-26. Comparaison des déformées de flexion obtenues par l'expérience et avec la superposition du modèle hyperélastique avec des poutres prenant en compte la part de la loi de comportement liée au second gradient de la transformation.....	136
Figure 4-27. Comparaison l'évolution de la ligne moyenne et des orientations des sections transverses obtenues expérimentalement et pour une simulation de flexion avec un modèle agrémenté de poutres. ....	136

## Liste des tableaux

Tableau 1. Compositions des principales fibres de verre pour le renforcement.....	16
Tableau 2. Schémas implicites classiques dérivés du schéma de Newmark .....	57
Tableau 3. Invariants associés aux modes de déformation de la mèche de renfort tissé.....	77
Tableau 4. Récapitulatif des paramètres de la loi de comportement hyperélastique pour la mèche et des essais utilisés pour leur identification. ....	98
Tableau 5. Invariants associés aux modes de déformation des renforts interlocks épais. ....	115

# Introduction générale

Dans le domaine des transports, en particulier du transport aéronautique, l'allègement des structures est un enjeu économique et écologique majeur. Les excellentes caractéristiques mécaniques spécifiques des matériaux composites à fibres continues offrent pour beaucoup d'applications une alternative intéressante aux matériaux métalliques plus traditionnels. Les grands acteurs de l'industrie aéronautique font état de ce constat : l'Airbus A350 XWB et le Boeing 787, deux gros porteurs en cours de conception, sont tous deux composés de à 50% en masse de composites. Certaines pièces structurelles de classe 1, c'est-à-dire vitales pour l'avion, sont notamment réalisées en composites, à l'instar du caisson central de voilure de l'A380 et de l'A350 XWB, pièce reliant la voilure au fuselage.

Dans les applications structurelles, les composites permettent d'adapter le matériau d'une pièce aux sollicitations auxquelles celle-ci est soumise : par exemple, dans une pièce qui n'est sollicitée qu'en traction dans une direction constante au cours de son fonctionnement, les fibres seront orientées dans cette direction. Dans ce cas les propriétés mécaniques seront très bonnes dans la direction de sollicitation prévue, mais moins bonnes dans les autres directions. La maîtrise de l'élaboration des pièces composites est donc primordiale pour obtenir les caractéristiques mécaniques prévues, car seuls de faibles écarts d'orientation des fibres sont admissibles. Un effort de recherche intense est consacré à l'analyse et à l'amélioration des procédés de mise en forme des composites. La plupart des procédés de fabrication de composites à fibres continues comportent une phase de mise en forme du renfort sec (ou contenant une résine non polymérisée), suivie d'une phase dans laquelle la matrice fige la pièce et lui apporte sa cohérence. La phase de mise en forme du renfort sec est primordiale pour les caractéristiques mécaniques de la pièce finale, car elle détermine la position et l'orientation des fibres.

L'étude de la mise en forme des renforts tissés est particulièrement intéressante. Ces renforts présentent généralement des rigidités importantes en tension et une rigidité faible en cisaillement dans le plan : cet écart de rigidité permet de former des pièces avec des formes complexes, y compris des formes à double courbure, ce qui n'est pas possible avec des renforts stratifiés par exemple. Lorsque le renfort est cisailé, l'orientation des fibres est modifiée de façon significative, et cette orientation doit être bien maîtrisée. La simulation de la phase de mise en forme du renfort sec permet donc de prévoir la formabilité et les caractéristiques mécaniques finales d'une pièce, et ainsi d'optimiser numériquement la forme de la pièce et l'outillage nécessaire. Pour cela, des simulations dites macroscopiques (i.e. à l'échelle de la pièce) doivent être développées. Ces simulations nécessitent de connaître le comportement du renfort tissé à l'échelle mésoscopique, c'est-à-dire à l'échelle de la maille élémentaire de tissu. Ce comportement peut être déterminé expérimentalement lorsque le renfort utilisé existe, mais le développement d'outils de simulation du comportement de la maille élémentaire (simulations mésoscopiques) permettrait de concevoir des tissus adaptés à l'application et aux spécifications de chaque pièce. L'objectif du travail présenté dans ce manuscrit est d'étudier l'apport des lois de comportement hyperélastiques dans la modélisation des renforts tissés de composites à ces différentes échelles.

Ce manuscrit est composé de quatre chapitres, au cours desquels la mécanique des renforts tissés et différentes approches de modélisation de leur comportement mécanique seront présentées. Le premier chapitre constitue une présentation générale des matériaux composites à renforts tissés, de leurs procédés de fabrication à leurs propriétés mécaniques. Un état de l'art de la simulation des renforts tissés à l'échelle mésoscopique et à l'échelle macroscopique sera également présenté.

Dans le second chapitre, les concepts de base de la mécanique des milieux continus en grandes transformations et de l'hyperélasticité, nécessaires au développement de lois de comportement

hyperélastiques, seront présentés. Une méthode d'implémentation des lois de comportement de ce type dans le code de calcul Abaqus, qui sera mise en œuvre dans les deux chapitres suivants, sera également décrite.

Le troisième chapitre présente une loi de comportement hyperélastique développée pour décrire le comportement de la mèche à l'échelle mésoscopique, et permettant de contourner certaines complexités de formulation des lois de comportement existantes. Une méthode d'identification des paramètres de cette nouvelle loi de comportement sera proposée, et la loi de comportement sera validée par comparaison avec des essais expérimentaux issus de la littérature.

Dans le dernier chapitre, la loi de comportement hyperélastique développée pour la mèche, matériau à une direction privilégiée, sera étendue à une loi de comportement pour des matériaux à deux directions de fibres. Cette seconde loi de comportement permet de décrire le comportement macroscopique de renforts interlocks épais de façon relativement simple, ce qui constitue une avancée significative par rapport aux modèles actuels, complexes et difficiles à mettre en œuvre. Ici aussi une méthode d'identification des paramètres de la loi de comportement sera présentée, et la loi sera validée par comparaison avec des essais de flexion et d'emboutissage hémisphérique.

# Chapitre 1 Les renforts tissés de composites : comportement et modélisation

*Ce premier chapitre est une introduction à l'étude des renforts tissés de composites. Après une présentation générale des matériaux composites, les renforts textiles de composites seront détaillés. Dans ce manuscrit, nous serons amenés à nous intéresser au comportement mécanique de ces matériaux à l'échelle mésoscopique et à l'échelle macroscopique. Les différentes étapes de fabrication d'un renfort tissé ayant une influence directe sur sa structure et donc sur son comportement mécanique à chacune de ces échelles, le procédé de fabrication du renfort tissé sera décrit succinctement, de la fabrication de la fibre au tissage de la pièce finale.*

*Le comportement mécanique des renforts tissés aux différentes échelles sera ensuite décrit, et les essais permettant de caractériser les différents modes de déformation du renfort tissé seront présentés. A l'issue de cette partie, une bonne compréhension des phénomènes et des mécanismes pouvant apparaître au sein du renfort sera acquise, qui permettra de donner un cadre aux modèles et aux lois de comportement qui seront développés par la suite.*

*Enfin, les modèles et lois de comportement permettant à l'heure actuelle de simuler le comportement mécanique des renforts tissés de composites aux différentes échelles seront présentés, avec leurs avantages et leurs limites.*

## Sommaire

1.1 PRESENTATION GENERALE DES MATERIAUX COMPOSITES .....	14
1.2 LES RENFORTS TISSES : DE LA FIBRE A LA PIECE FINALE .....	15
1.2.1 Structure multiéchelles du matériau.....	16
1.2.2 La mise en forme du composite à renfort tissé par LCM .....	20
1.3 COMPORTEMENT MECANIQUE DES RENFORTS TISSES .....	21
1.3.1 Comportement à l'échelle mésoscopique .....	22
1.3.2 Comportement à l'échelle macroscopique .....	27
1.4 SIMULATION DE LA MISE EN FORME.....	35
1.4.1 Simulations à l'échelle microscopique.....	36
1.4.2 Simulations à l'échelle macroscopique.....	37
1.4.3 Simulations à l'échelle mésoscopique.....	39
CONCLUSION DU CHAPITRE 1 .....	44

## 1.1 Présentation générale des matériaux composites

### Définition

Par définition, un *matériau composite* est un assemblage de plusieurs constituants non miscibles, dont les propriétés répondent à un besoin spécifique que les constituants de base, pris individuellement, ne satisfont pas. Cette définition très large inclue un grand nombre de matériaux naturels utilisés depuis des siècles, parmi lesquels le bois, l'os, le torchis, etc.... Les matériaux composites sont généralement constitués de deux phases : un *renfort* qui confère au matériau ses caractéristiques mécaniques principales, et une *matrice* qui assure la cohésion. La multiplicité des matériaux disponibles pour former le renfort et la matrice permet d'imaginer de nouveaux matériaux composites adaptés à de nombreuses situations industrielles. Les matériaux composites « modernes » ont pour objectif de lever certains verrous technologiques.

### Différents types de matrices

Les matrices des matériaux composites développés à l'heure actuelle sont généralement classées en deux catégories :

- les matrices organiques (polymères thermoplastiques, thermodurcissables ou élastomères) qui sont les plus utilisées dans l'industrie, que ce soit à destination de produits grand public ou de produit de haute technicité.
- les matrices minérales (céramiques, métaux, graphite) utilisées pour des applications de pointe et lorsque l'environnement est hostile aux matrices organiques (hautes températures, hygrométrie défavorable).

Les renforts que nous étudierons dans ce document seront principalement destinés à des matériaux composites à matrice organique. Parmi ces derniers, les composites à matrice thermodurcissable sont aujourd'hui les plus utilisés pour les applications structurelles. La faible viscosité des polymères thermodurcissables avant réticulation facilite grandement la mise en forme du composite, notamment dans une phase d'injection de la résine. Par ailleurs, leurs caractéristiques mécaniques sont souvent meilleures que celles des polymères thermoplastiques. Ces derniers ont néanmoins des propriétés qui encouragent aujourd'hui la recherche à leur sujet :

- ils se dégradent peu dans le temps, ce qui rend leur stockage plus aisé,
- leur mise en forme est rapide et ne provoque pas d'émanations toxiques,
- ils peuvent être refondus, ce qui permet de faire des réparations par refonte locale, de souder des pièces et de les recycler

Les matrices élastomères sortent du cadre de cette étude du fait de leurs applications très spécifiques, aux pneumatiques notamment.

### Renforts de composites

Les renforts sont généralement classés en fonction de leur géométrie. On distingue notamment :

- *les renforts particuliers* : il s'agit généralement d'inclusions granulaires (craie), lamellaire (talc, mica) ou aciculaire (wallostonite, fibres courtes), dispersées dans la matrice. Les composites à renforts particuliers sont peu utilisés à des fins structurelles, mais plutôt pour des applications spécifiques ou des produits de grande consommation.
- *les renforts à fibres longues* : ces renforts se présentent sous la forme de fibres de faible longueur (quelques dizaines de mm) orientées ou non, assemblées en nappes appelées *mats*. Cet assemblage se fait généralement à l'aide d'un liant ou d'une couture.

- *les renforts à fibres continues* : ce type de renfort est constitué d'un assemblage ordonné de fibres continues, c'est-à-dire dont la longueur est voisine des dimensions de la pièce finale. Les directions privilégiées des fibres confèrent à la pièce finale ses caractéristiques mécaniques principales, et le comportement de la matrice est de second ordre dans ces directions. Le comportement de la matrice dans les autres directions, et la cohésion qu'elle apporte, ont néanmoins une importance majeure.

Les fibres, longues ou continues, peuvent être formées à partir de nombreux matériaux : verre, carbone, métaux, ou encore matériaux d'origine végétale (cellulose, lignine) ou animale (collagène).

Dans cette étude nous nous intéresserons exclusivement aux renforts à fibres continues. Dans ces renforts l'assemblage des fibres peut être réalisé de différentes façons

- en couches de fibres unidirectionnelles (UD) superposées. Ces couches sont généralement appelées « plis » et peuvent avoir des orientations de fibres différentes. Plusieurs plis d'orientation différente peuvent être cousus : on obtient alors un NCF (Non Crimp Fabric)
- par tricotage
- par tressage
- par tissage avec un métier à tisser, en utilisant les armures classique de l'industrie textile ou des armures plus complexes

Nous étudierons ici les *renforts tissés* : les fibres sont assemblées en paquets de fibres appelés *mèches* ou *torons*, puis tissées selon des armures plus ou moins complexes. Dans les applications structurelles, des renforts de fibres de verre et de carbone sont généralement utilisés. Le coût élevé de ces matériaux les destine plutôt aux produits à haute valeur ajoutée pour lesquels l'allégement représente un enjeu économique fort (e.g. pour l'industrie aéronautique/aérospatiale ou automobile). Certaines applications « grand public » commencent néanmoins à voir le jour, souvent autant pour l'esthétique de ces matériaux que pour leur caractéristiques mécaniques. Notons également que des recherches sont menées à l'heure actuelle sur la possibilité de renforcer le renfort lui-même à l'aide de nanotubes de carbone [GOD09, LOM11]. Ces nanotubes, destinés à des applications de haute technicité, sont « cultivés » directement au sein du renfort, et permettent notamment d'améliorer le comportement en rupture du composite.

## 1.2 Les renforts tissés : de la fibre à la pièce finale

Les renforts faisant l'objet de ce manuscrit sont donc des assemblages de mèches de carbone ou de verre obtenus par tissage. On distingue les *tissages 2D* (ou surfaciques), les *tissages 2.5D* (interlocks) et les *tissages 3D* (ou tridimensionnels). Les premiers sont obtenus en imbriquant deux réseaux de mèches (la *chaîne* et la *trame*), qui sont les directions privilégiées du tissu. Le type d'assemblage utilisé est appelé *armure* du renfort, et on retrouve pour les renforts 2D les armures classiques de l'industrie textile. Les *tissages 2.5D* sont obtenus en imbriquant plusieurs épaisseurs de chaîne avec plusieurs épaisseurs de trame. De même que pour les renforts 2D, différents types d'armures existent mais pour l'instant il n'existe pas de consensus sur leurs appellations. Le procédé de tissage 2.5D permet d'obtenir des tissés très épais (plusieurs dizaines de cm) qui ne posent pas les problèmes d'endommagement par délaminage que peuvent poser des empilements de renforts 2D ou de plis unidirectionnels. Dans les *tissages 3D*, une troisième direction de mèches est ajoutée dans l'épaisseur du renfort.

La structure complexe et multiéchelles du renfort conditionne une grande partie du comportement mécanique du composite à renfort tissé. Dans cette partie les différents procédés de mise en forme du renfort et du composite final seront présentés.



## 1.2.1 Structure multiéchelles du matériau

### 1.2.1.1 Différents types de fibres

Comme mentionné en introduction de ce chapitre, les tissus étudiés dans ce manuscrit seront tous constitués de fibres continues de verre ou de carbone. Chacune de ces deux grandes familles de fibres comprend néanmoins des nuances, notamment au niveau de la géométrie, de la composition chimique et du procédé de fabrication des fibres.

#### Fibres de verre

Selon l'usage qui sera fait de la fibre, plusieurs types de compositions peuvent être utilisées comme matière première. Parmi les différentes compositions classiques du verre, les plus couramment utilisées pour former des fibres de verres destinées à des applications structurelles sont décrites dans le Tableau 1.

	Verre type E	Verre type C	Verre type AR
SiO <sub>2</sub>	53-55 %	60-65 %	61%
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	14-15 %	3,5- 6 %	
CaO	17-23 %	14%	5%
MgO	1.00%	3%	
Na <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.80%	10%	17%
B <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0-8 %	5%	
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0,3 %	0,5 %	0,3 %
TiO <sub>2</sub>	0,5 %		
ZrO <sub>2</sub>			10%

Tableau 1. Compositions des principales fibres de verre pour le renforcement

La composition de type E est la composition standard. La composition de type C est généralement utilisée dans des applications nécessitant une bonne résistance à la corrosion. La composition de type AR résiste, grâce à la présence de ZrO<sub>2</sub>, aux attaques d'hydroxyde de calcium (chaux) ce qui permet notamment de renforcer des bétons.

La composition choisie est chauffée à environ 1500°C, puis filée à grande vitesse pour former les fibres. Ce procédé permet d'obtenir des *mèches silionnes* (appelées également *stratifils* ou *rovings*) composées de fibres continues (par opposition aux mèches *verrannes* composées de fibres longues) et présentant de très bonnes caractéristiques mécaniques. Ces fibres, dont le diamètre nominal est généralement compris entre 5 et 24 microns, sont alors assemblées en *mèches* : chaque mèche comporte entre 1000 (1k) et 12000 (12k) fibres. Cet assemblage est réalisé par des organes d'assemblage qui permettent d'introduire une éventuelle torsion de la mèche ainsi qu'un additif appelé *ensimage* permettant d'assurer la cohésion des fibres au sein de la mèche, de limiter l'abrasion des fibres lors du tissage du renfort, et d'améliorer la tenue mécanique des interfaces fibres/matrices dans le composite final. La figure 1-1 illustre le procédé de fabrication des fibres par filage. Dans ce procédé, le diamètre de fibre obtenu dépend principalement de la géométrie de la filière, de la vitesse de filage et de la vitesse de refroidissement.

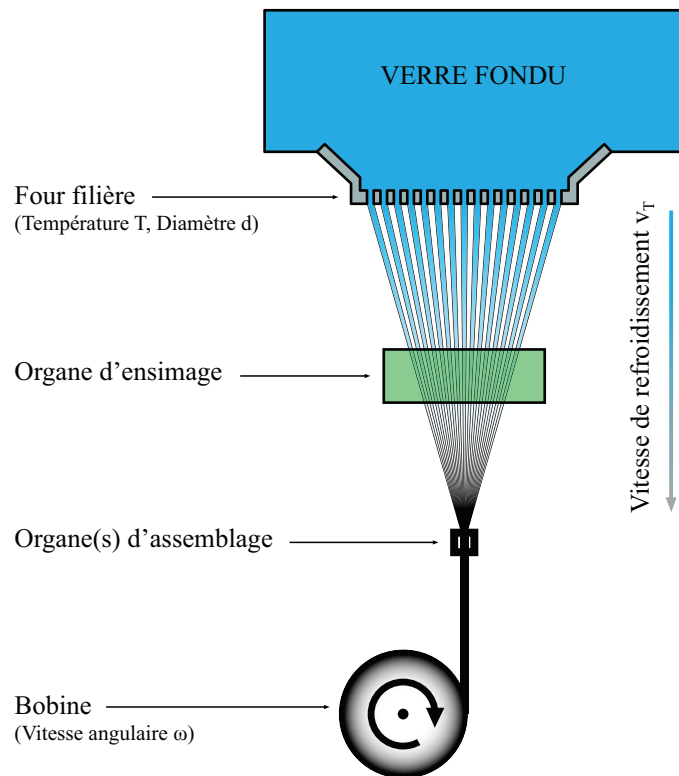


Figure 1-1. Procédé de filage et d'assemblage des mèches de fibres de verre [DAL08]

### Fibres de carbone

Les fibres de carbone sont quant à elles obtenues à partir de tresses d'une matière première appelée *précurseur*. Un procédé de carbonisation à haute température et sous atmosphère inerte transforme ces tresses en fibres de carbone. Trois précurseurs peuvent être utilisés :

- les fibres de rayonne (cellulose régénérée),
- les fibres de brai obtenues par filage de résidu de houille ou de pétrole,
- le polyacronitrile (PAN).

Les fibres obtenues à l'aide de ces différents précurseurs sont respectivement appelées ex-rayonne, ex-brai et ex-PAN. Parmi ces précurseurs, le premier n'est plus utilisé que pour l'obtention de fibres de carbone à usage thermique. Si ce précurseur présente l'avantage de ne nécessiter aucun traitement avant carbonisation, son faible rendement de carbonisation et le coût élevé du procédé de fabrication associé l'ont rendu obsolète pour les applications structurelles.

Les fibres de brai permettent quant à elles d'obtenir des fibres de carbone possédant un très bon taux de carbone, mais la difficulté d'élimination des impuretés dans le brai d'origine confère à ces fibres une résistance à la traction relativement faible.

Enfin, les fibres de carbone peuvent être obtenues à partir de fibres acryliques, qui constituent le précurseur le plus utilisé de nos jours. La figure 1-2 explique les différentes étapes de ce procédé. Après oxydation et carbonisation des fibres de PAN, des fibres dites de haute résistance (HR) sont obtenues. Si un procédé de graphitisation est mis en œuvre après la carbonisation (afin de parfaire la structure moléculaire du carbone graphite), des fibres dites haut module (HM) sont obtenues, mais dont la résistance est plus faible. Des variations de l'étape de graphitisation permettent d'obtenir différentes gammes de fibres, depuis les fibres haute résistance/faible module jusqu'aux fibres faible résistance/haut module.

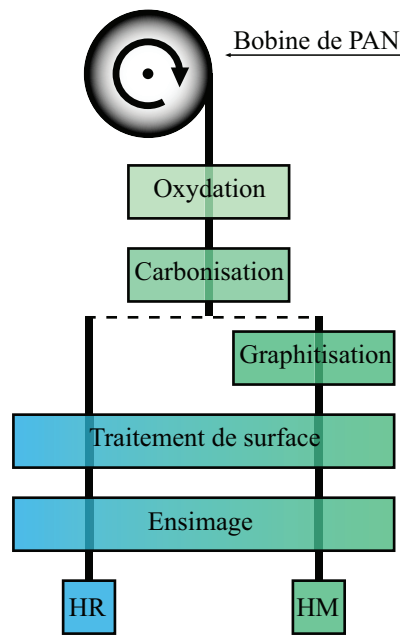


Figure 1-2. Procédé de fabrication des fibres de carbone à partir d'un précurseur PAN [DUP08]

### 1.2.1.2 Caractéristiques d'une mèche

Une fois assemblées, les mèches de fibres de carbone contiennent généralement entre 3000 et 48000 fibres. Différents types d'assemblage peuvent être réalisés : les fibres au sein de la mèche peuvent être torsadées, entrelacées ou simplement juxtaposées (stratifié ou roving), conférant à la mèche plus ou moins de cohérence. L'ensimage est également très influent sur la cohérence de la mèche. Les grandeurs caractéristiques généralement utilisées pour décrire une mèche sont les suivantes :

- matériau (verre, carbone) et type d'assemblage (torsadé, stratifié)
- nombre de fibres
- rigidité en tension (N)
- effort de rupture en tension (N)
- masse linéique (tex, 1 tex = 1 g/km)

Les caractéristiques des mèches que nous allons étudier seront détaillées dans la suite de ce manuscrit.

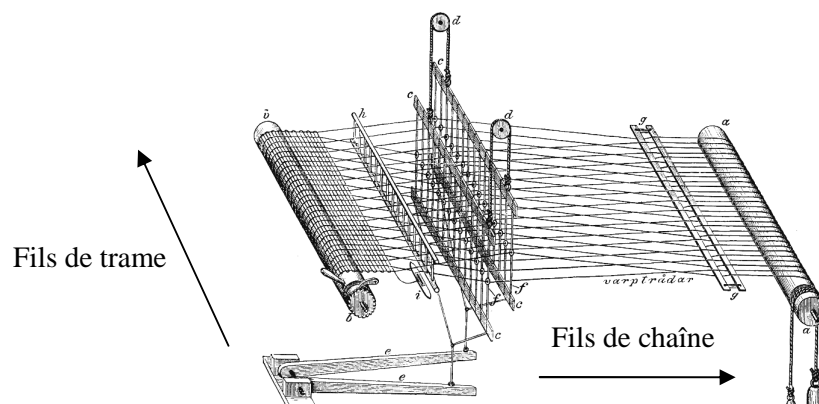


Figure 1-3. Schéma d'un métier à tisser

### 1.2.1.3 Des mèches au tissu : l'armure

Le tissu est confectionné en assemblant les mèches décrites précédemment selon une *armure*. Les tissages de renfort 2D sont généralement réalisés avec un métier à tisser (voir figure 1-3), de la même

façon que les textiles d'habillement. Comme cela a été mentionné en introduction de cette section, seules les armures 2D et 2.5D seront étudiées dans ce manuscrit.

### Armures 2D

En ce qui concerne les tissus 2D il existe trois armures principales :

- la *toile* ou *taffetas* (*plain weave*), l'armure la plus simple : chaque fil de chaîne passe alternativement au dessus et en dessous de chaque fil de trame (figure 1-4.a).
- le *sergé*  $n \times m$  (*nxm twill*) : le fil de trame passe au dessus de  $n$  puis en dessous de  $m$  fils de chaîne en décalant d'un fil à chaque passage (figure 1-4.b).
- le *satins* : les points de liage de la chaîne et de la trame sont disséminés de façon à atténuer l'effet de diagonale présent sur le sergé (figure 1-4.c).

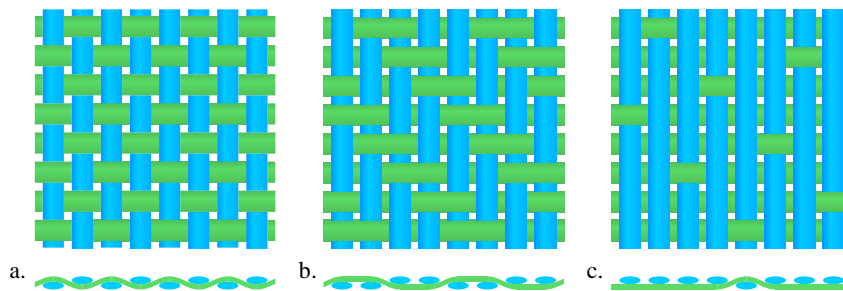


Figure 1-4. Les différents motifs de tissage 2D. (a) Taffetas (b) Sergé 2x2 (c) Satin.

La combinaison de ces trois familles d'armures avec la multiplicité de géométries et de matériaux disponibles pour la mèche, permet d'obtenir une grande diversité de renforts tissés. Si le renfort est identique dans la direction chaîne et dans la direction trame, on parle de tissu *équilibré*. De façon générale, un tissu peut être caractérisé par les paramètres suivants :

- son armure : la disposition relative des chaînes et de trames
- ses mèches : caractéristiques du paragraphe précédent
- son embuvage (%) : la différence relative entre la longueur du tissu dans une direction et la longueur d'une mèche dans cette même direction :  $e = (l_{mèche} - l_{tissu}) / l_{mèche}$  (figure 1-5)
- son taux de renforts (mèches/mm) : nombre de mèches par millimètre de tissu dans chaque direction

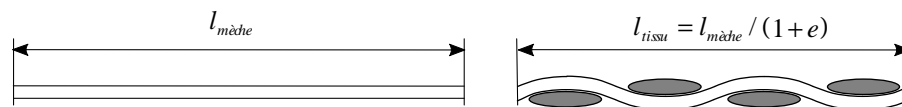


Figure 1-5. Définition de l'embuvage d'un tissu

### Armures tissées 2.5D : interlocks

Les interlocks [BIG05] sont des renforts tissés 2.5D, dans lesquels plusieurs couches de chaînes sont assemblées ensemble par plusieurs trames (figure 1-6). Cette structure en couches entrelacées structurellement permet d'obtenir des renforts tissés épais (plusieurs dizaines de centimètres) possédant de très bonnes caractéristiques mécaniques, tout en évitant les problèmes de délaminage qui peuvent apparaître dans les matériaux multicouches obtenus par superposition de couches tissées indépendantes. Certains métiers à tisser permettant de réaliser de tels assemblages permettent également de tisser des préformes dont le motif de tissage varie au sein de la préforme, afin d'obtenir des caractéristiques mécaniques optimales pour l'application recherchée. Ce type de matériau, très onéreux, est pour l'instant réservé aux applications de pointe de l'aéronautique et de l'aérospatiale.

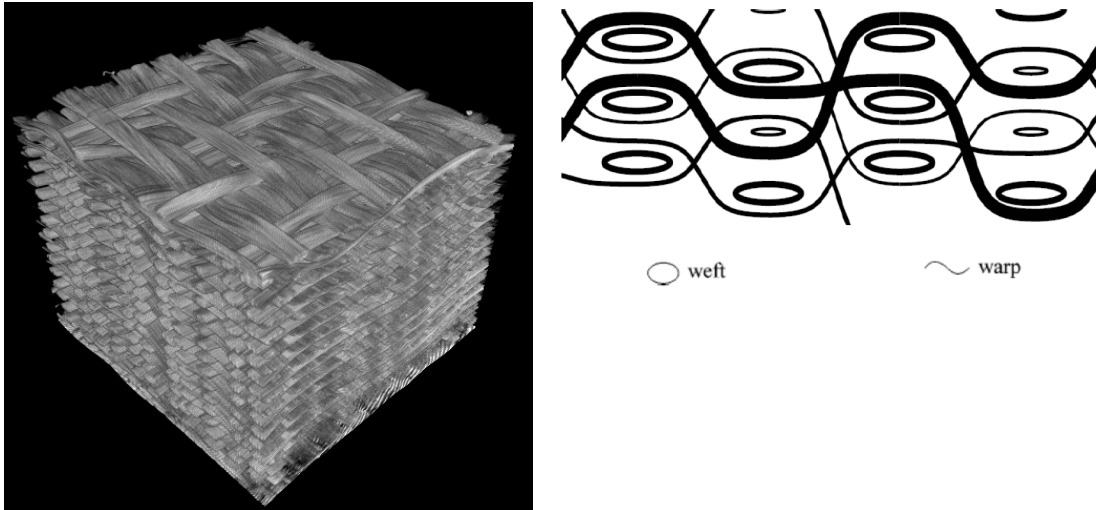


Figure 1-6. Une structure de renfort interlock 2.5D

## 1.2.2 La mise en forme du composite à renfort tissé par LCM

Les procédés de type LCM (Liquid Composite Moulding) permettent de mettre en forme les composites à renforts tissés et à matrice polymère. Parmi ces procédés, l'infusion sous vide et le RTM (Resin Transfer Moulding) sont les plus utilisés. Ce sont des procédés « moule fermé » : la résine n'est pas en contact direct avec l'atmosphère ambiante, ce qui permet notamment un contrôle strict des composés organiques volatiles émis lors de la fabrication des pièces.

### 1.2.2.1 Infusion sous vide

Dans le procédé d'infusion sous vide, le renfort tissé est placé entre un moule et une membrane étanche (figure 1-7). Une pompe à vide permet de plaquer le renfort contre le moule et entraîne l'écoulement de la résine. Un filet de drainage, réalisé dans un matériau poreux, est inséré entre la membrane et le renfort pour faciliter la distribution de la résine dans le renfort.

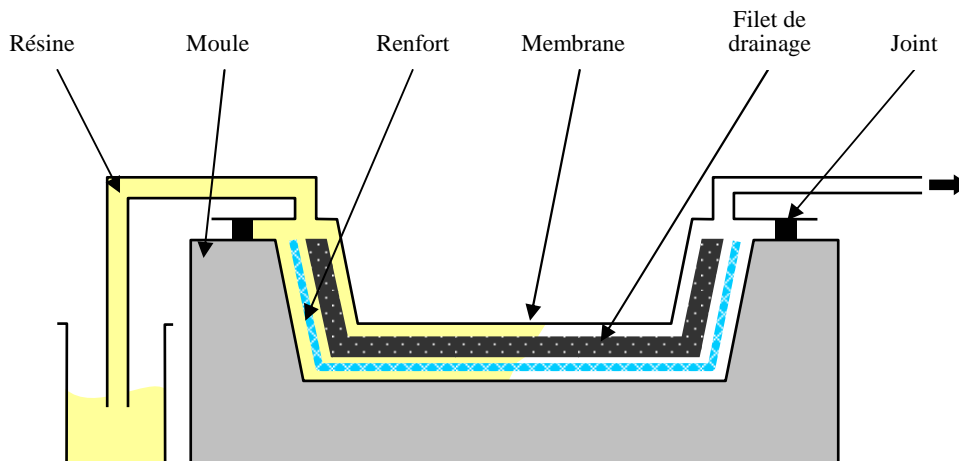


Figure 1-7. Schéma de principe du processus d'infusion sous vide.

Ce procédé est moins onéreux et plus aisé à mettre en œuvre que le RTM, mais il ne permet pas de contrôler finement l'épaisseur de la pièce finale, et l'état de surface du côté de la membrane est généralement moins bon que celui du côté du moule.

### 1.2.2.2 Resin transfer moulding

Le procédé RTM (Resin Transfer Molding) est également très utilisé pour la mise en forme des composites à renforts tissés [RUD97, POT99, PAR00]. Il se décompose en 3 étapes (figure 1-8). La première étape, dite de préformage, consiste à mettre en forme le renfort : celui-ci est déposé puis embouti dans un moule constitué d'un poinçon et d'une matrice. Les deux parties du moule étant rigides, il est possible de maîtriser l'épaisseur de la pièce et d'obtenir un bon état de surface des deux côtés, ce qui n'est pas le cas pour l'infusion sous vide. Des serre-flans sont généralement utilisés lors de cette étape pour tendre le tissu et retarder l'apparition de plis.

Une fois le renfort mis en forme, la résine liquide est injectée dans le renfort. La consolidation de la matrice est alors effectuée par chauffage pour une matrice thermodurcissable, et par refroidissement pour une matrice thermoplastique. Lorsque la résine est consolidée la pièce est finalement démoulée.

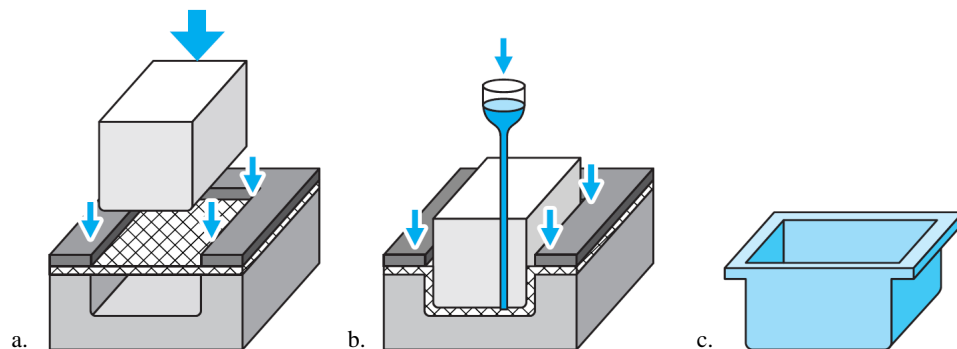


Figure 1-8. Schéma de principe du processus RTM. (a) Formage du renfort fibreux (b) injection et polymérisation de la matrice (c) démoulage de la pièce finale

L'étape de mise en forme du renfort est une étape clé de ce procédé. La capacité du renfort à se déformer pour prendre la forme du moule a en effet une influence majeure sur l'étape d'injection (qualité de l'imprégnation, temps de remplissage du moule) ainsi que sur les caractéristiques mécaniques de la pièce.

Le processus RTM classique est prévu pour fonctionner à basse pression (inférieure à 10 bar) et à faible débit (de l'ordre du litre par minute). Certaines variantes ont néanmoins été développées pour accélérer ou faciliter l'injection dans le cas de renforts peu perméables ou de résines très visqueuses : une mise sous vide peut être utilisée (Vacuum Assisted RTM) ou encore une injection à haute pression (High Speed RTM). Ces variantes rendent le procédé RTM adaptable à de nombreux types de renforts, et donc à une gamme très large de pièces réalisables. Des pièces de grandes dimensions peuvent être réalisées à l'aide de ce procédé.

Par ailleurs, le stockage de la matière première est généralement plus aisé pour le RTM que pour les procédés nécessitant des préimprégnés (e.g. thermocompression), et la segmentation du procédé permet un contrôle qualité à chacune des étapes. Ce procédé permet de réaliser de petites séries de pièce à haute performance ou de grandes séries, s'adaptant ainsi aux exigences de l'industrie aéronautique comme à celles de l'industrie automobile. Les moules des pièces complexes ou de grande taille peuvent néanmoins nécessiter un effort de développement considérable. Ces nombreux avantages incitent aujourd'hui les industriels à porter un grand intérêt au développement et à la recherche associés à ce procédé. C'est dans ce cadre que se situe l'étude présentée dans ce manuscrit.

## 1.3 Comportement mécanique des renforts tissés

Les assemblages successifs de fibres en mèches, puis de mèches en tissus, font du renfort tissé un matériau fondamentalement multiéchelles : le comportement mécanique macroscopique du tissu est

directement hérité de son comportement aux échelles inférieures. Trois échelles d'observation du renfort sont généralement distinguées (figure 1-9) :

- *échelle microscopique* : échelle de la fibre
- *échelle mésoscopique* : échelle de la mèche
- *échelle macroscopique* : échelle de la pièce complète

À chacune de ces échelles le comportement mécanique ainsi que les défauts éventuels du renfort sont différents. Cette section a pour but de décrire les mécanismes connus qui régissent le comportement à chaque échelle, afin de pouvoir appréhender le comportement du renfort dans son ensemble. Les moyens d'essai associés à ces mécanismes seront également présentés.

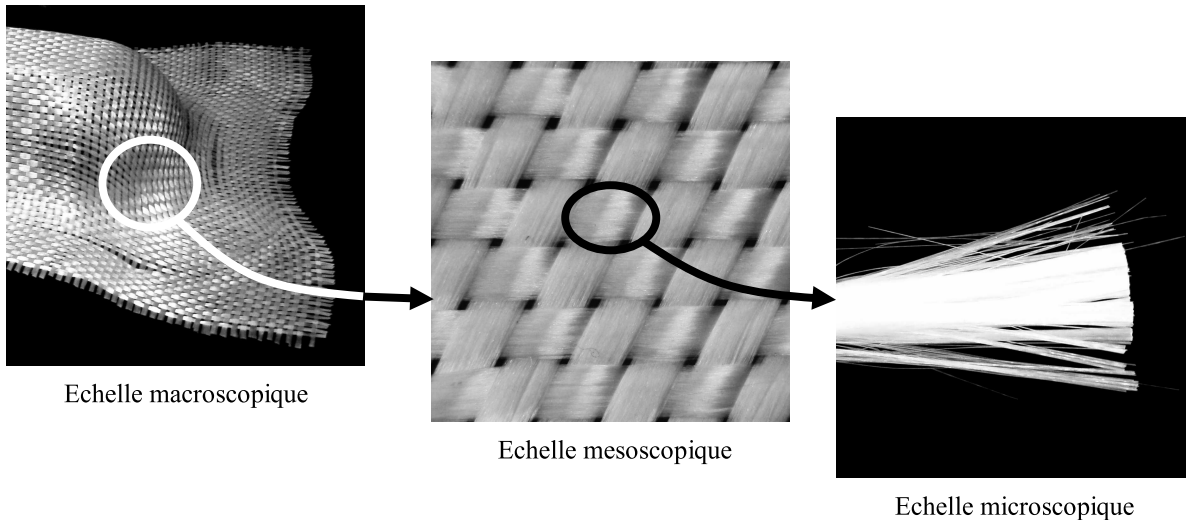


Figure 1-9. Différentes échelles d'un renfort tissé.

### 1.3.1 Comportement à l'échelle mésoscopique

À l'échelle mésoscopique, on s'intéresse au comportement de la mèche seule. Les mécanismes de déformation de la mèche sont pilotés par les interactions entre les fibres à l'échelle inférieure. L'un des seuls outils permettant d'observer finement ces mécanismes microscopiques est la tomographie X. L'utilisation de cette technique semble prometteuse pour l'analyse du comportement des renforts tissés à l'échelle mésoscopique [DES05, BAD08b, LAT11]. Malgré ces difficultés d'observation, plusieurs phénomènes ont pu être mis en évidence à l'aide d'essais simple sur la mèche, ou de considérations physiques.

#### 1.3.1.1 Comportement de la mèche en tension

Les mèches étudiées sont constituées d'un grand nombre de fibres. Lorsqu'une mèche est tendue, toutes ces fibres ne se tendent pas simultanément. Cette tension progressive des fibres au sein de la mèche induit une non-linéarité du comportement de la mèche en début de tension (figure 1-10). Cette non-linéarité dépend du matériau, ainsi que du procédé de fabrication de la mèche : on peut constater qu'elle est bien moins marquée pour une mèche de carbone que pour une mèche de verre.

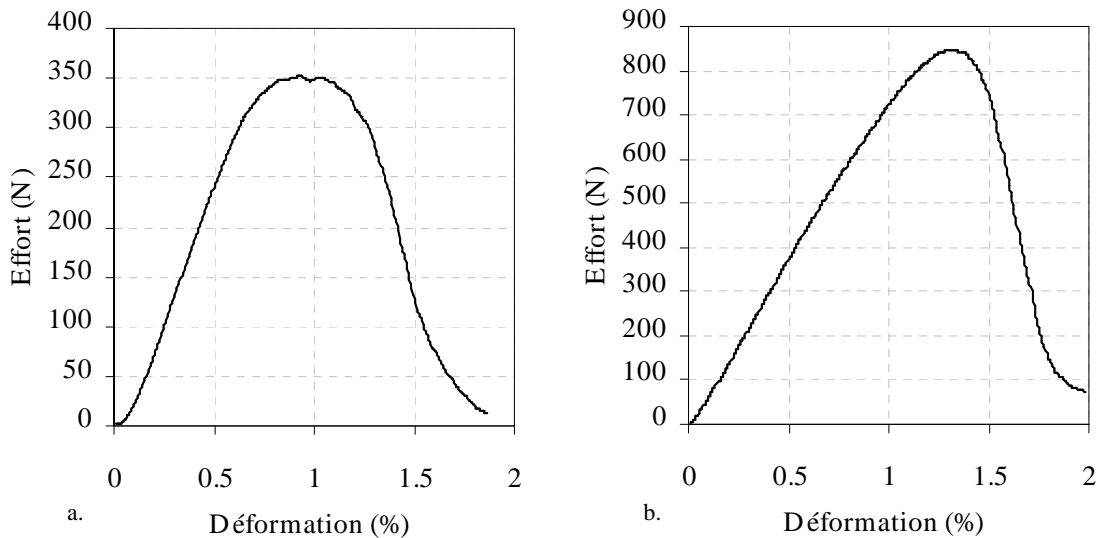


Figure 1-10. Comportement en tension de mèches de verre (a) et de carbone (b) [DUM03a]

Si elle est clairement définie dans les matériaux continus, la notion de contrainte est moins évidente pour une mèche de renfort tissé : considérons les sections apparentes  $S_1$  et  $S_2$  de la figure 1-11. Ces deux sections contiennent le même nombre de fibres, seule la densité de fibres est différente.

Le nombre de fibres étant le même dans la section  $S_1$  que dans la section  $S_2$ , le comportement de la mèche en tension est identique dans les deux cas. C'est pourquoi définir une contrainte dans la mèche comme l'effort divisé par la section apparente n'a que peu de sens, cette section n'ayant pas une influence directe sur la réponse en effort du matériau. Le comportement en élongation de la mèche est donc caractérisé non pas par un module mais par une *rigidité*, rapport de l'effort sur la déformation dans la partie linéaire de la réponse en tension, et un *effort maximum*, tous deux exprimés en N.

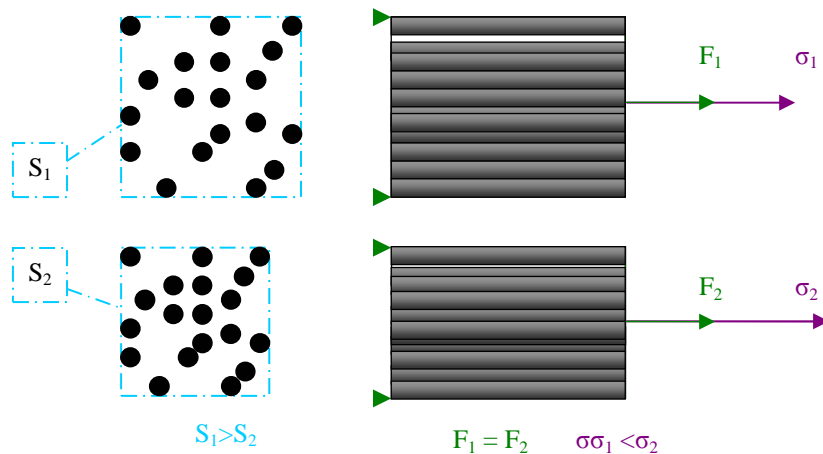


Figure 1-11. Difficulté de la définition d'une contrainte, liée au changement de section apparente de la mèche

### 1.3.1.2 Compaction de la mèche dans le plan transverse

On appelle *compaction* le changement d'aire dans le *plan transverse* de la mèche, c'est-à-dire dans le plan perpendiculaire à la direction des fibres. Lorsque la mèche est compactée, les fibres se rapprochent et les vides se combler. La figure 1-12 illustre ce mode de déformation, dans le cas où le tissu est soumis à une sollicitation de tension équibiaxiale.

La compaction d'une mèche comporte plusieurs étapes : les fibres commencent par se réorganiser de façon à combler les vides, avec généralement l'apparition de flexions de fibres qui confèrent à ce mode de déformation son comportement élastique. Un blocage est ensuite progressivement atteint et la



rigidité de compaction de la mèche tend vers la rigidité de compaction du matériau constituant les fibres. Ce comportement en compaction est difficile à caractériser expérimentalement, car la mise en place d'essais de compaction pure sur une mèche sortie du tissu est difficilement envisageable. Dans les études précédentes décrivant le comportement de la mèche à l'échelle mésoscopique, le comportement en compaction de la mèche est généralement identifié par une méthode inverse à partir d'un essai à l'échelle macroscopique [GAS00, HAG04, BAD08a, POT08]. C'est également ce qui sera fait dans ce manuscrit.

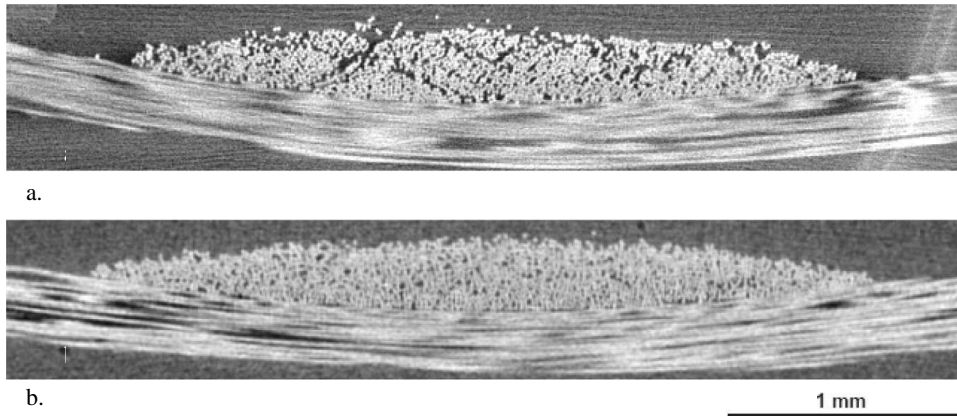


Figure 1-12. Vue en coupe (par tomographie X) du plan transverse de la mèche (a) tissu au repos (b) tissu sous tension équi-biaxiale [BAD08a]

La compaction est l'un des modes de déformation privilégiés de la mèche, et elle intervient dans la plupart des sollicitations auxquelles le tissu peut être soumis. Directement liée à cette compaction, la densité de fibres au sein de la mèche a une influence considérable sur la perméabilité locale de la mèche, et donc sur l'étape d'injection du procédé RTM. L'identification du comportement en compaction est donc importante lorsque l'objectif est de calculer la perméabilité locale du renfort.

### 1.3.1.3 Cisaillements de la mèche

Deux modes de cisaillement existent dans la mèche : une *distorsion* (i.e. un cisaillement dans le plan transverse de la mèche) et un *cisaillement transverse* (au sens du cisaillement transverse des poutres, i.e. dans la direction des fibres). De même que pour la compaction, l'identification directe de ces modes de déformation est difficilement envisageable.

### Distorsion de la mèche dans le plan transverse

La distorsion correspond au changement de forme de la mèche dans le plan transverse, c'est-à-dire à sa déformation sans compaction. La figure 1-13 illustre deux transformations particulières correspondant à ce mode de déformation. Lors d'une telle transformation, les fibres se réarrangent en glissant les unes par rapport aux autres pour s'adapter à la déformation. A l'échelle microscopique des flexions de fibres peuvent apparaître car les fibres ne sont pas parfaitement alignées. Lorsque la mèche n'est pas compactée, il y a peu d'interactions entre les fibres donc ces réarrangements entre les fibres sont aisés. Lorsque la mèche est compactée, les nombreuses interactions entre les fibres rigidifient ce comportement en distorsion. Il existe donc un couplage entre ces deux modes de déformation, mais dont la caractérisation expérimentale reste difficile.

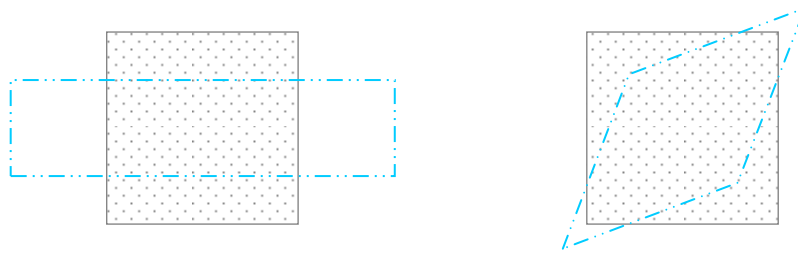


Figure 1-13. Distorsion de la mèche (fibres orthogonale au plan du dessin)

### Cisaillement transverse de la mèche

Le cisaillement transverse est un mode de cisaillement dans la direction des fibres : les fibres glissent les unes par rapport aux autres dans la direction de leur alignement. La figure 1-14 illustre ce mode de déformation. La présence d'ensimage dans la mèche, créant une cohésion entre les fibres à l'échelle microscopique, confère à ce mode de déformation une raideur et une élasticité. De même que la distorsion, le cisaillement transverse est certainement rigidifié lorsque la densité de fibres est élevée (i.e. lorsque la mèche est compactée).

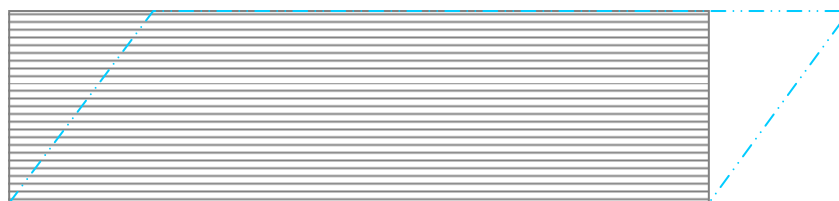


Figure 1-14. Cisaillement transverse de la mèche

### Comportement de la mèche en flexion

Peu d'études concernent le comportement en flexion de la mèche seule. Ce comportement est toutefois très intéressant sur le plan de la mécanique des milieux continus, et sa description peut s'avérer nécessaire lorsque l'on cherche à déterminer par une étude mésoscopique le comportement en flexion du renfort entier. Quelques points concernant ce type de déformation seront donc ébauchés ici. Nous verrons par la suite que les renforts épais ont, à l'échelle macroscopique, un comportement en flexion voisin de celui de la mèche à l'échelle mésoscopique.

Lorsque la mèche est soumise à une flexion trois points, trois phénomènes sont susceptibles de se produire :

- un cisaillement transverse de la mèche,
- une flexion de chaque fibre constituant la mèche,
- un flambement latéral des fibres au niveau de l'appui central.

Chaque fibre hérite de son matériau constitutif et de sa géométrie une raideur en flexion. En supposant le matériau constitutif de la fibre linéaire orthotrope, cette raideur peut être quantifiée relativement facilement. Comme nous l'avons vu précédemment, une raideur en cisaillement transverse peut être attribuée à la mèche du fait du frottement entre les fibres et de la présence d'ensimage. Cette raideur est généralement trop élevée (i.e. la cohésion des fibres au sein de la mèche est trop forte) pour que le cisaillement transverse se propage jusqu'aux extrémités de la mèche testée, c'est pourquoi la mèche flambe latéralement (figure 1-15).

Le comportement de la mèche en flexion dépend donc du cisaillement transverse (i.e. de la déformation locale) *et* de la courbure des fibres au sein de la mèche (i.e. de la courbure locale de la mèche). Cette dépendance à la courbure locale permet d'affirmer que le comportement de la mèche en flexion n'est pas un comportement de milieu continu classique (i.e. de Cauchy) : le comportement local étant dépendant des rotations locales au sein du milieu, la mèche est en fait un milieu micropolaire [COS09, MIN65, IND08]. Un modèle prenant en compte explicitement l'influence de la courbure sur le comportement du renfort est proposé dans [MAG01].

La flexion de la maille élémentaire ne sera pas étudiée dans l'étude mésoscopique proposée dans ce manuscrit, cette étude sera limitée aux chargements du renfort dans le plan. L'embuvage des mèches étant très faible, la courbure de la mèche ne varie que très peu au cours de ces chargements, c'est pourquoi cet aspect « de Cosserat » du comportement de la mèche ne sera pas pris en compte dans les simulation à l'échelle mésoscopique.

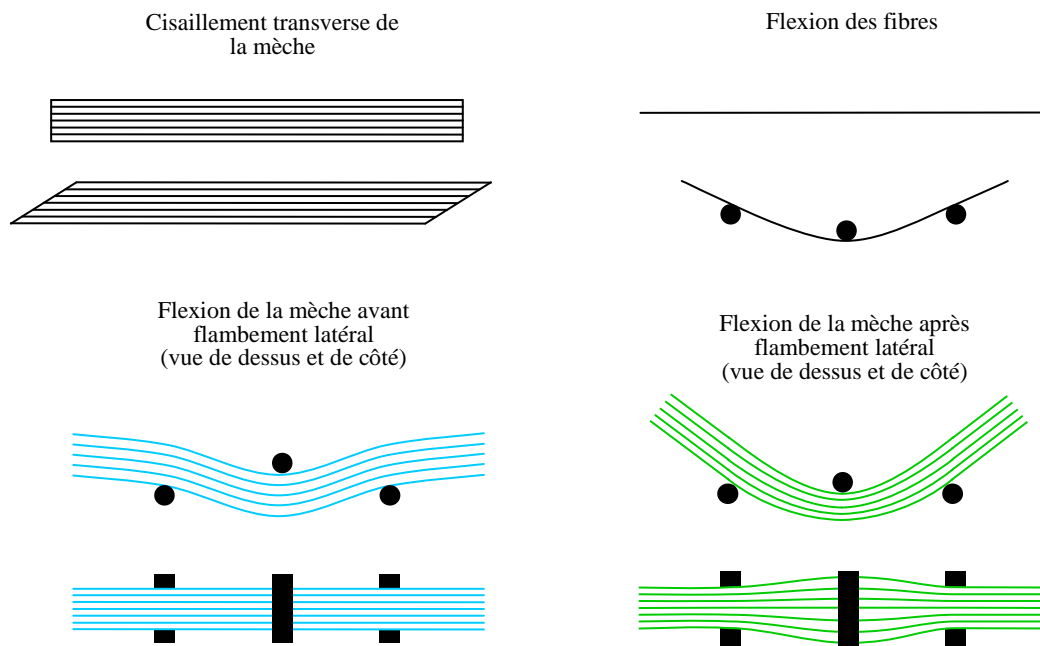


Figure 1-15. Mécanismes intervenant dans la flexion d'une mèche de renfort tissé.

A l'échelle macroscopique le renfort a un comportement en flexion semblable à celui de la mèche, à ceci près que l'armure du renfort empêche généralement le flambement latéral. Le renfort pouvant être soumis à des flexions très importantes, notamment lors des essais d'emboutissage, ce comportement de Cosserat a une influence plus significative que dans le cas de la mèche. Une coque possédant une rigidité de flexion est un milieu de Cosserat ; les modèles macroscopiques utilisant des modèles classiques de coque prennent donc en compte cet aspect. Notons que des travaux incluant cette dépendance des contraintes à la courbure du matériau ont été réalisés concernant le composite final (i.e. avec la matrice) dans [SPE07].

### 1.3.2 Comportement à l'échelle macroscopique

Outre les comportements mécaniques qu'ils héritent de la mèche, les renforts tissés possèdent des comportements propres à leur structure : le non glissement entre chaîne et trame, les variations d'embuvage dans les directions de chaîne et de trame ou encore la rigidification en cisaillement sont autant de mécanismes dans lesquels l'armure du renfort joue un rôle clé. Des essais spécifiques aux renforts tissés permettent de caractériser les modes de déformation macroscopiques et les mécanismes de déformation associés.

#### 1.3.2.1 Non glissement entre chaîne et trame

L'hypothèse de non glissement relatif entre la chaîne et la trame est une hypothèse classique de l'étude macroscopique des renforts tissés. Selon cette hypothèse, l'existence d'interactions fortes entre les réseaux de chaîne et de trame permet de considérer que tout mouvement des mèches de chaîne entraîne un mouvement des mèches de trame sans glissement relatif, et réciproquement. Cette hypothèse constitue la base des modèles continus de renforts tissés : si des glissements apparaissent entre les deux réseaux, le tissu ne peut plus être considéré comme un matériau continu.

La figure 1-16 permet de valider cette hypothèse dans le cas d'un taffetas de verre soumis à un emboutissage de type « poinçon hémisphérique » : des traits ont été tracés avant l'emboutissage dans les directions de chaîne et de trame. Le fait que ces traits se coupent au même endroit avant et après déformation permet d'affirmer qu'il n'y a pas eu de glissement relatif entre les deux réseaux [BOI95].

Lorsque des défauts macroscopiques tels que les glissements inter réseaux ou les détissages apparaissent au cours de la déformation du renfort, le renfort perd localement ce caractère continu et l'hypothèse précédente n'est évidemment plus respectée. Un modèle dédié à l'étude de ce type de défaut a récemment été développé [GAT11].

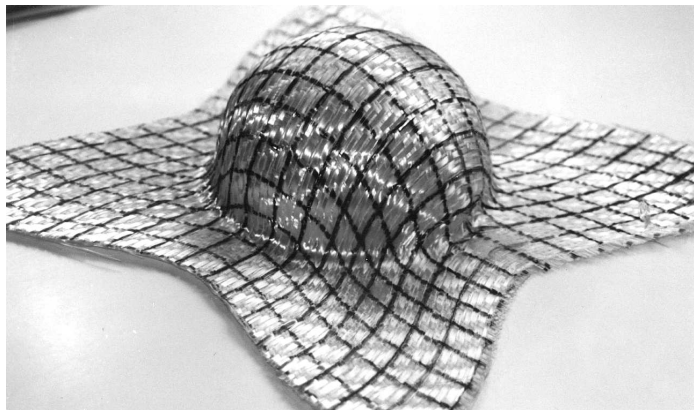


Figure 1-16. Validation de l'hypothèse de non glissement entre chaîne et trame

L'hypothèse de non glissement relatif des réseaux, qui sera faite dans le reste de ce manuscrit, est donc vérifiée dans la plupart des cas de mise en forme classiques, mais il faut garder à l'esprit que certains cas de chargement et certains tissus lui sont incompatibles.

#### 1.3.2.2 Comportement en tension

Lorsque le renfort est sollicité en traction uniaxiale, deux phénomènes se produisent successivement (figure 1-17) :

- une forte réduction de l'embuvage dans la direction sollicitée, et une forte augmentation de l'embuvage dans la direction orthogonale,
- une fois l'embuvage de la direction sollicitée réduit à zéro, une elongation des mèches dans la direction sollicitée.

Ces deux mécanismes induisent une forte non-linéarité du comportement du renfort en tension : sa rigidité est faible tant que l'embuvage n'a pas été résorbé dans la direction de sollicitation, puis vaut la somme des rigidités des  $n$  mèches de cette direction.

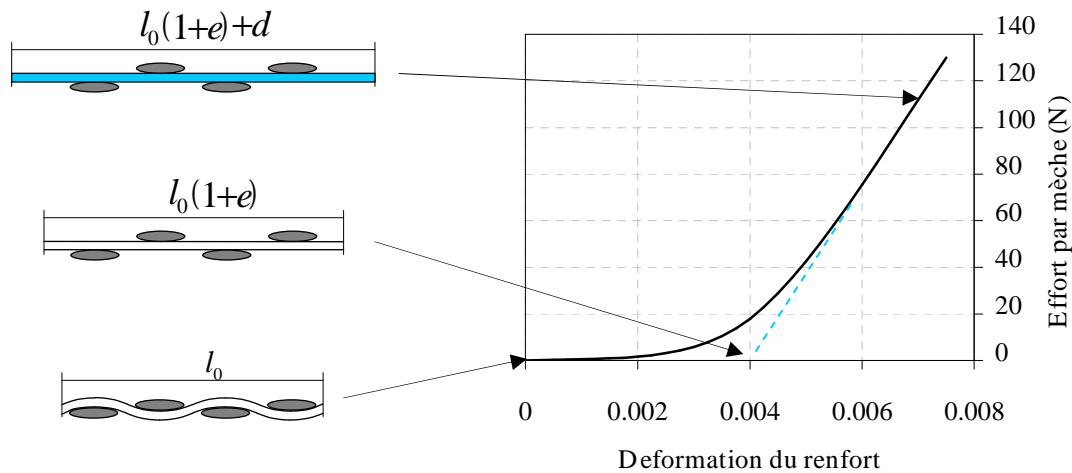


Figure 1-17. Traction uniaxiale sur un taffetas de verre: mécanismes et courbe expérimentale [BUE98]

La forte réduction de l'embuvage dans la direction de sollicitation induit une forte augmentation de l'embuvage dans la direction orthogonale. La longueur de la mèche restant constante, cette augmentation de l'embuvage se traduit par un « avalement » des mèches dans cette direction. Ce phénomène contredit l'hypothèse de non glissement entre les réseaux de chaîne et de trame formulée au paragraphe 1.3.2.1. Cependant les renforts étudiés dans ce manuscrit ont pour la plupart un embuvage si faible (inférieur à 1%) que ce phénomène d'avalement dans la direction orthogonale est difficile à caractériser.

### 1.3.2.3 Comportement en tension biaxiale

Une sollicitation de traction biaxiale consiste à soumettre chacun des deux réseaux à une sollicitation de traction (non nécessairement identique, voir **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**). Si l'on note  $\varepsilon_{obs}$  la déformation dans la direction du réseau observé (i.e. le réseau pour lequel les efforts sont mesurés), et  $\varepsilon_{orth}$  la déformation dans la direction de l'autre réseau, on définit le coefficient de traction biaxiale  $k$  par :

$$k = \frac{\varepsilon_{orth}}{\varepsilon_{obs}} \quad (1.1)$$

Un coefficient  $k = 1$  signifie donc que les deux réseaux sont sollicités de façon identique (traction équi-biaxiale), et un coefficient  $k = 2$  signifie que la déformation dans la direction du réseau observé est deux fois plus faible que la déformation dans la direction de l'autre réseau.

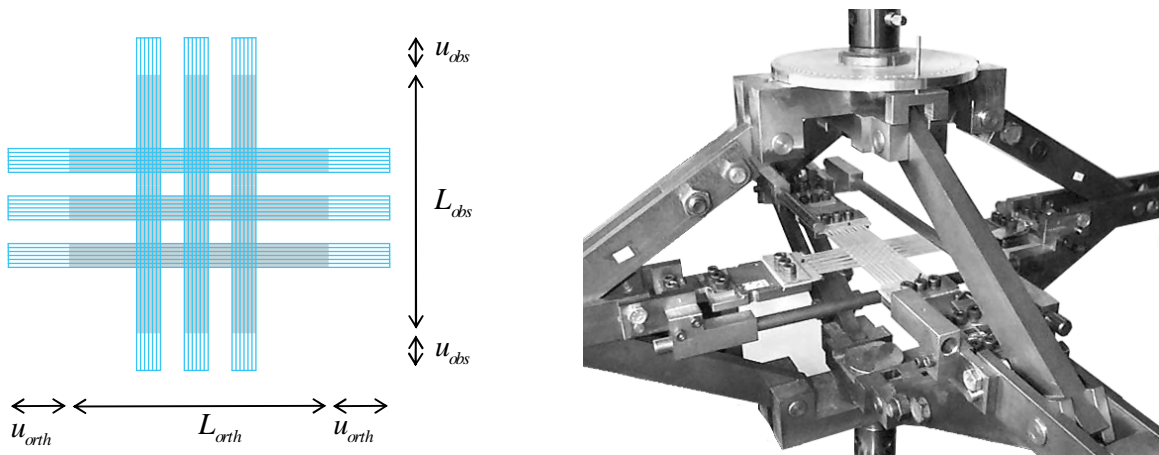


Figure 1-18. Cinématique et dispositif expérimental de l'essai de traction biaxiale [BUE98, BUE01]

Le comportement en traction biaxiale est fortement non linéaire (figure 1-19), et cette non-linéarité dépend, entre autres, du coefficient  $k$  : les mécanismes de déformation du tissu changent lorsque ce coefficient varie. En traction équibiaxiale ( $k = 1$ ), c'est principalement la compaction de la mèche qui accommode la déformation mais lorsque  $k = 0$  ou  $k = +\infty$ , c'est la réduction de l'embuvage (et donc le cisaillement transverse de la mèche) qui accommode la plus grande partie de la déformation.

Plusieurs dispositifs expérimentaux de traction biaxiale adaptés au tissu ont été conçus [KAW73a, BUE01, WIL08], qui permettent de régler le coefficient de traction biaxiale (un exemple sur la figure 1-19). La fabrication des éprouvettes en croix utilisées dans ces dispositifs est un point clé de l'essai : la raideur des mèches en tension étant très importante, et les déplacements très faibles, les mèches doivent être parfaitement alignée dans les deux directions afin d'entrer en tension simultanément.

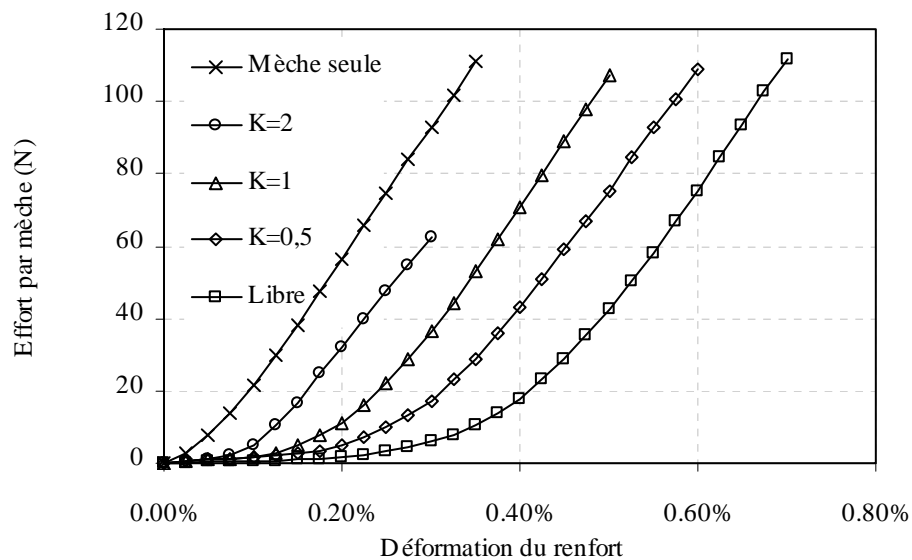


Figure 1-19. Réseau de courbes de traction biaxiale pour un taffetas de verre [BUE98]

#### 1.3.2.4 Comportement en cisaillement dans le plan du renfort

Lors des essais de formage on constate que la souplesse du tissu en cisaillement en fait le mode de déformation dans le plan privilégié des renforts tissés, lorsque la surface formée est à double courbure. C'est grâce à la faible raideur associée à ce mode de déformation qu'il est possible de donner au renfort une géométrie non développable (emboutissage hémisphérique par exemple, voir figure 1-16). Le comportement du renfort en cisaillement est fortement non-linéaire car différents mécanismes de

déformation interviennent. La caractérisation du comportement en cisaillement du renfort est essentielle :

- pour l'étude de la déformabilité du renfort, c'est-à-dire de sa capacité à prendre des formes complexes sans que des défauts apparaissent,
- pour l'étude de la perméabilité du renfort : lorsque l'angle de blocage en cisaillement est atteint, la perméabilité locale du renfort est réduite de façon considérable, ce qui rend l'injection de résine beaucoup plus difficile [HEA01, GRU04, LOI08].

Une étude par corrélation d'images [DUM03a, DUM03b] a montré qu'en début d'essai les deux réseaux tournent l'un par rapport à l'autre en un mouvement relatif de rotation pure, avec un effort de cisaillement relativement faible. Ce mouvement est en accord avec l'hypothèse de non glissement entre la chaîne et la trame : les deux réseaux se déforment de façon semblable à un treillis articulé (figure 1-20). Une *rigidification en cisaillement* apparaît lorsque les deux réseaux entrent en contact latéral, généralement pour un angle de cisaillement compris entre 40° et 50°. Le mécanisme de déformation en cisaillement change alors radicalement : la rotation relative des réseaux est remplacée par une compaction latérale des mèches, et la rigidité en cisaillement augmente fortement. Une courbe caractéristique du comportement en cisaillement du renfort est présentée sur la figure 1-21.

Deux essais classiques permettent d'étudier le comportement du tissu en cisaillement l'*essai de cadre* et le *bias extension test*. Ces deux types d'essais seront détaillés ci-après.

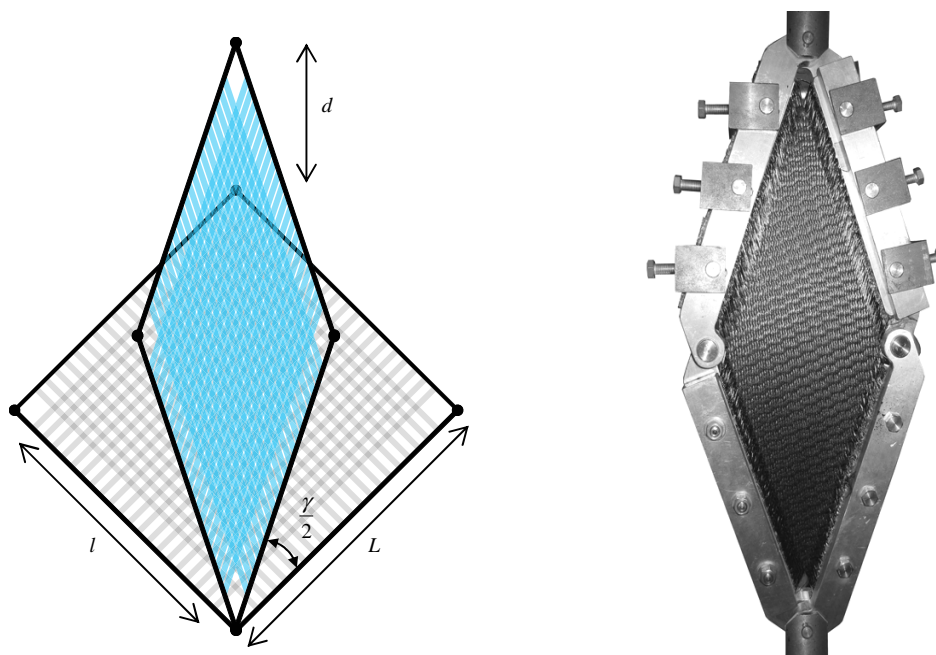


Figure 1-20. Cinématique et dispositif expérimental de l'essai de cadre (picture frame test).

#### Essai de cadre (picture frame test)

Dans un essai de cadre [PEN04, HAR04, CAO08] le tissu est disposé dans un cadre articulé, initialement de forme carrée. Le cadre est alors placé dans une machine de traction et déformé en un losange, imposant au tissu une déformation de cisaillement pur (figure 1-20). L'*angle de cisaillement* est défini comme la variation d'angle entre les deux réseaux de mèches. Un calcul cinématique simple permet de relier le déplacement  $d$  du cadre à l'angle de cisaillement  $\gamma$  :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - 2 \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{d}{L}\right) \quad (1.2)$$

Afin que le comportement observé soit indépendant des dimensions de l'éprouvette, il faut adimensionner l'effort  $F$  mesuré. Cela permettra également de comparer les résultats de cet essai avec ceux d'autres essais de cisaillement. Une grandeur appelée *couple surfacique*  $C_s$  permet une mesure adimensionnée des efforts de cisaillement au sein du tissu [DEL09]. Cette grandeur permet de comparer les essais réalisés avec différents tissus et/ou différents dispositifs d'essai. Elle est définie de la façon suivante :

$$C_s = F \frac{L}{l^2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (1.3)$$

La figure 1-21 montre une courbe obtenue à l'aide de cette approche pour un taffetas de verre.

L'essai de cadre, bien que théoriquement bien adapté à la caractérisation du cisaillement, présente quelques difficultés :

- les mèches désalignées par rapport au côté du cadre vont être tendues lors de l'essai, créant des efforts parasites [MIL07]. Les mèches étant très rigides, et le comportement en cisaillement très souple, ces efforts parasites peuvent s'avérer plus importants que l'effort de cisaillement, et ainsi perturber la mesure de façon significative,
- dans le modèle théorique, les mèches sont en liaison pivot avec le bord du cadre. En pratique il n'est pas envisageable de réaliser une liaison pivot entre chaque mèche et le cadre. La mèche flambe donc localement [DUM03a, DUM03b, WIL08, ZHU07], créant des déformations parasites difficiles à évaluer,
- lorsque l'éprouvette est montée dans le cadre, une légère tension lui est appliquée. La valeur de cette tension influe sur l'interaction entre les deux réseaux de mèches, et donc sur le comportement en cisaillement [LAU08, LOM06]. Les efforts de glissement seront donc plus importants au sein d'une éprouvette initialement plus tendue.

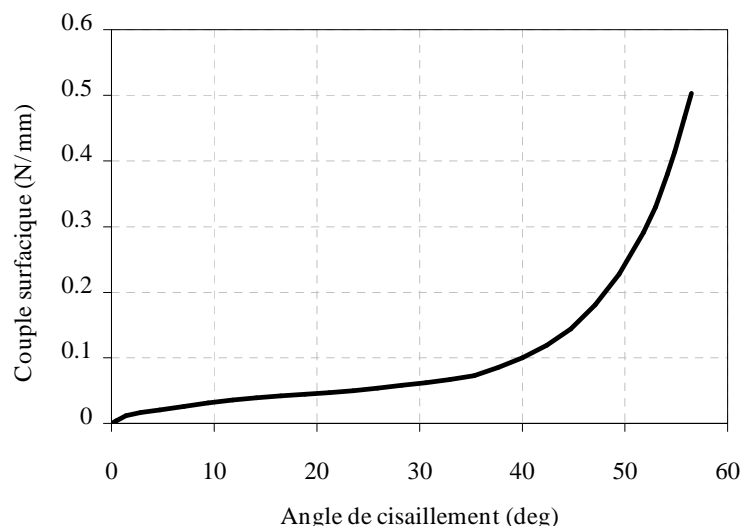


Figure 1-21. Couple surfacique obtenu avec l'essai de cadre pour un taffetas de verre

#### Bias extension test

Le bias extension test [CAO08, HAR04, LOM08, POT06a] est un essai de traction simple sur le tissu, dans une direction orientée à  $45^\circ$  par rapport aux réseaux de chaîne et de trame (figure 1-22). Si l'on suppose la rigidité en tension des mèches infinie et la rigidité en cisaillement du tissu nulle, et si l'hypothèse de non glissement entre les réseaux est vérifiée, trois zones se forment au sein de



l'éprouvette : une zone non cisailée (en bleu), une zone cisailée d'un angle  $\gamma$  (en orange) et une zone dite « demi cisailée », cisailée d'un angle  $\gamma/2$  (en vert). Avec les hypothèses précédentes, un angle de cisaillement théorique peut être calculé en fonction de l'allongement de l'éprouvette :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - 2 \arccos \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{d}{L-l} \right) \right) \quad (1.4)$$

De même que pour l'essai de cadre, il faut définir une mesure adimensionnée des efforts de cisaillement. La présence des zones non cisailées et demi-cisailées rend la relation entre l'effort global sur l'éprouvette et l'effort local de cisaillement plus complexe que pour l'essai de cadre. Un bilan de puissances permet d'exprimer, pour le bias extension test, le couple surfacique introduit précédemment [DEL09] :

$$C_s(\gamma) = \frac{1}{S_1} \left( F D \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2} S_2 C_s \left( \frac{\gamma}{2} \right) \right) \quad (1.5)$$

Dans l'expression (1.5),  $S_1$  et  $S_2$  sont respectivement l'aire initiale de la zone cisailée et l'aire de la zone demi cisailée. Le premier terme est semblable à l'expression obtenue pour l'essai de cadre, et le second est une correction liée à la présence des zones demi cisailées. A partir de cette expression, le couple surfacique peut être déterminé numériquement par une méthode séquentielle.

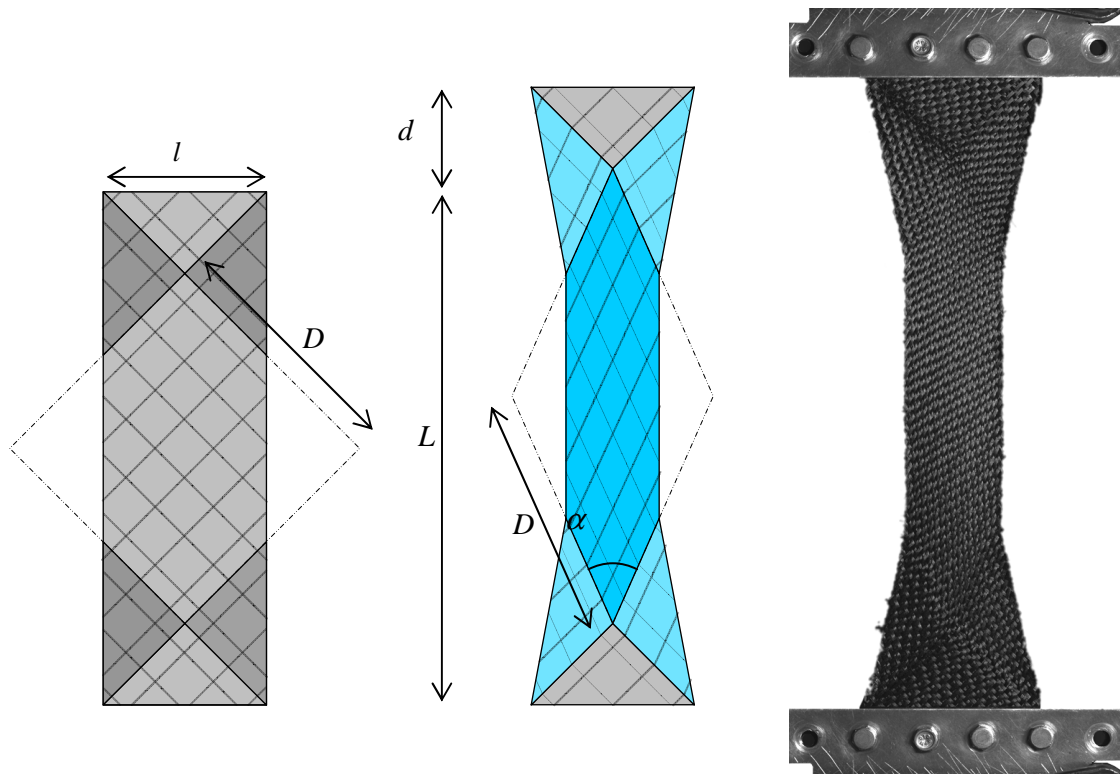


Figure 1-22. Cinématique et dispositif expérimental du bias extension test

Cet essai est exploitable tant que les hypothèses précédentes sont satisfaites. Dans les tissus peu cohérents, c'est-à-dire dans lesquels les réseaux interagissent peu, il sera difficile d'appliquer cette méthode car le glissement entre les deux réseaux apparaît dès le début de l'essai. A l'aide d'un outil de corrélation d'images, il a notamment été montré que cet essai n'est plus en accord avec l'hypothèse de non glissement des mèches au-delà d'un certain angle de cisaillement [DEL09].

### 1.3.2.5 Comportement en écrasement

Le comportement du renfort en écrasement influe à la fois sur la mise en forme du renfort et sur la phase d'injection de la matrice au cours du procédé RTM : au cours de la mise en forme le renfort est écrasé afin d'augmenter sa densité de fibres et donc le rapport performances mécaniques/masse du renfort. Les efforts mis en œuvre au cours d'une mise en forme sont donc directement liés au comportement en écrasement. Par ailleurs, l'augmentation de la densité de fibre a une importance significative sur la perméabilité du renfort et donc sur l'écoulement de la résine dans le renfort [BIC97, GRU04].

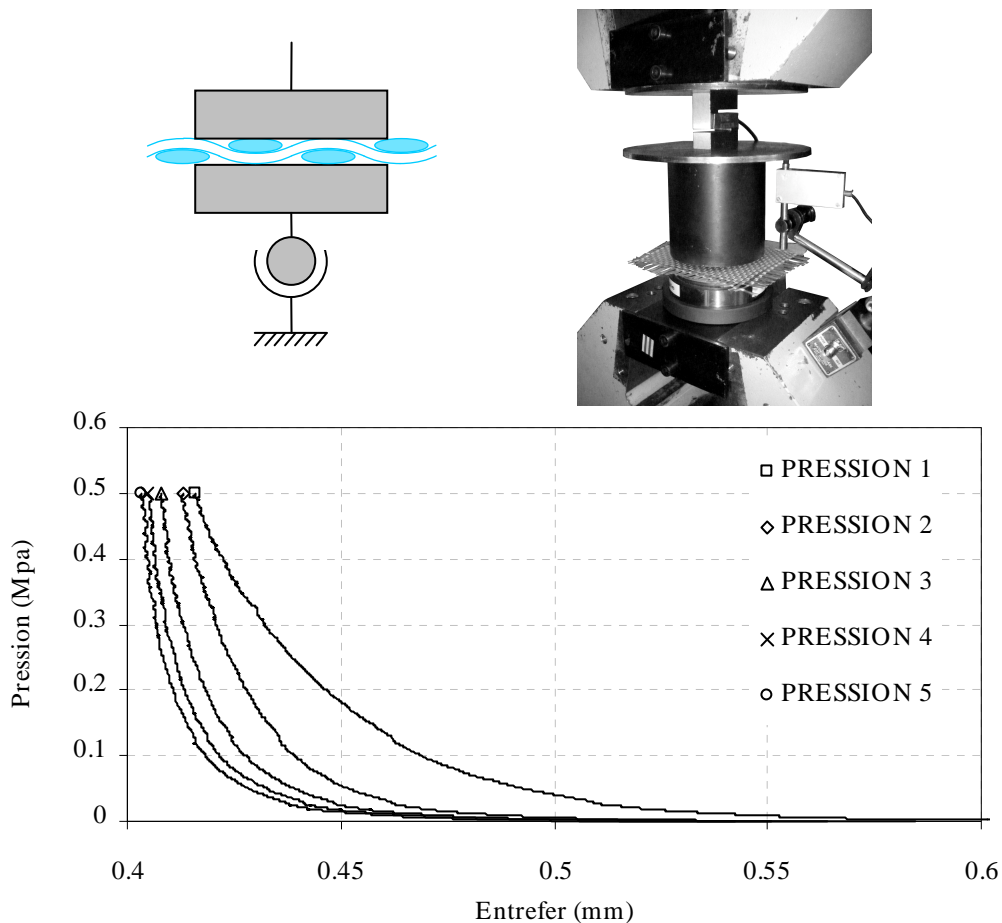


Figure 1-23. Dispositif d'écrasement et courbes d'écrasements successifs d'un taffetas de verre.

La figure 1-23 montre l'allure des courbes d'écrasement obtenues lors de ces essais : la raideur initiale du renfort est très faible, puis elle augmente fortement lorsque la densité de fibres devient importante. Plusieurs écrasements successifs de la même éprouvette ont été réalisés, illustrant ainsi l'influence de l'histoire de la déformation sur le comportement du renfort. Bien que les essais d'écrasement d'un renfort semblent assez simples à réaliser, plusieurs facteurs rendent l'expérimentation difficile :

- le frottement du tissu avec les outils de compression ainsi que la taille de ces outils ont une influence significative sur le comportement du renfort.
- le réarrangement des fibres lors de l'écrasement du renfort induit des phénomènes de relaxation difficiles à quantifier, et qui rendent les résultats très sensibles à la vitesse de l'essai et à l'histoire de la déformation. Ces phénomènes existent dans tous les essais mais leur influence est particulièrement significative dans les essais d'écrasement.

- les efforts d'écrasement importants nécessitent l'utilisation de machines d'essai de capacité importante, ce qui complique la mesure précise des faibles déplacements mis en œuvre dans ce type d'essais.

### 1.3.2.6 Comportement en flexion

Il a été montré que, bien que très faible, la raideur du renfort en flexion a une influence significative sur l'apparition et la forme des plissements qui peuvent être observés lorsque le renfort est soumis à des cisaillements plans importants [HAM07a, BOI11]. Plusieurs dispositifs expérimentaux et méthodes de dépouillement ont donc été développés afin d'étudier cette flexion [DEB10], et plus particulièrement la relation entre le moment fléchissant et la courbure du renfort.

#### L'essai standard ASTM

L'ASTM est un standard de normes très utilisé pour mesurer la raideur en flexion des tissus d'habillement. Il s'agit d'une méthodologie incluant un essai standard et une méthode de dépouillement de cet essai. L'essai consiste à faire glisser le tissu sur le plan horizontal du dispositif jusqu'à ce que l'extrémité du tissu entre en contact avec un plan incliné à  $41,5^\circ$  (figure 1-24). La longueur de surplomb, c'est-à-dire la distance de glissement du tissu, est alors mesurée.

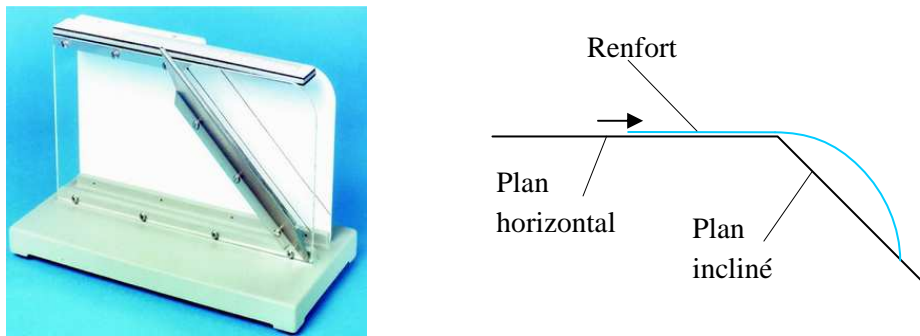


Figure 1-24. Dispositif de flexion ASTM

Si cet essai est très simple à réaliser, le dépouillement indiqué par la norme ASTM repose sur des hypothèses incompatibles avec le comportement des renforts tissés : la raideur en flexion du tissu est supposée constante. Or il a été montré que le comportement de flexion d'un renfort peut s'avérer fortement non-linéaire [LIV64, KAW80, DEB10]. Le standard ASTM permet donc au mieux l'obtention d'un ordre de grandeur de la rigidité en flexion du renfort, ne prenant pas en compte cette non linéarité.

#### Le dispositif de flexion du KES (Kawabata Evaluation System for fabrics)

Ce dispositif est un standard de l'investigation du comportement en flexion des tissus. Il consiste à fixer une bande de tissu entre des mors imposant une cinématique de flexion pure (figure 1-25). Ce système est néanmoins peu adapté aux renforts de composites, dont les raideurs en flexion sont beaucoup plus importantes que celles des tissus d'habillement classiquement testés avec ce dispositif. La bande de tissu testée doit donc avoir une largeur proche de la taille de la maille élémentaire du renfort, ce qui implique des phénomènes locaux (e.g. flambements) qui ne peuvent être généralisés au comportement global du renfort en flexion.



Figure 1-25. Dispositif KES-FB2 utilisé pour mesurer le comportement en flexion

### Le flexomètre de De Bilbao

Ce dispositif ressemble au dispositif décrit par la norme ASTM : le tissu repose sur des lames qui sont retirées progressivement (figure 1-26), entraînant une flexion du tissu sous l'action de son propre poids. Un système de mesure optique permet, à l'aide d'un programme de traitement d'images, d'obtenir le profil de l'échantillon pour chaque longueur de surplomb. Un dépouillement complexe basé sur l'ensemble des profils de flexion obtenus est alors mis en place, qui permet de prendre en compte la non-linéarité du comportement en flexion du renfort. Ce dispositif, et la méthode de dépouillement associée, permettent une analyse plus fine du comportement du renfort que le standard ASTM, et est mieux adapté aux renforts de composites que le KeS-FB2 car il permet de mesurer des raideurs de flexion plus importantes.

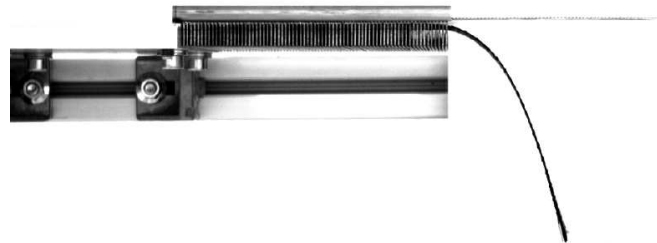


Figure 1-26. Dispositif de flexion de De Bilbao [DEB10]

## 1.4 Simulation de la mise en forme

La simulation du procédé RTM est un réel besoin industriel : la réduction du coût de ce procédé permettrait de l'étendre à de nombreux types de pièces, et éventuellement à d'autres types d'industries que les industries de pointe auxquelles le RTM est réservé pour l'instant.

Une grande part des simulations développées concerne l'écoulement de la résine au sein du renfort. Pourtant, la simulation de la mise en forme du renfort au cours de ce procédé permettrait d'optimiser numériquement les moules et les renforts, et ainsi d'éviter une phase d'essai-erreur très onéreuse lors de la conception de pièces en composites à renforts tissés. Un effort de recherche important est donc consacré au comportement du renfort sec et à la simulation de sa déformation. L'objectif est de prédire les caractéristiques géométriques et mécaniques (positions des mèches et des fibres dans le renfort, caractéristiques mécaniques, perméabilité de la pièce finale, et les différents défauts susceptibles d'apparaître au cours de la mise en forme. Sont donc recherchés :

- la position des mèches et des fibres après déformation,

- les caractéristiques mécaniques du renfort déformé
- la perméabilité locale du renfort déformé
- l'apparition éventuelle de plissements<sup>1</sup>, de détissages, de ruptures de fibres.

Ces caractéristiques et ces défauts ne sont pas tous définis à la même échelle : si une rupture de fibre est un phénomène microscopique difficile à détecter lorsque l'échelle d'observation est macroscopique, un plissement est un phénomène macroscopique qui ne peut être décelé lorsque l'échelle d'observation est microscopique. C'est pourquoi différents types de simulations ont été développés, chacun se plaçant à une échelle bien précise du renfort tissé :

- échelle microscopique : étude des fibres et leurs interactions. Seules quelques centaines de fibres par mèche peuvent être simulées au maximum.
- échelle mésoscopique : étude du comportement de la mèche afin de déterminer les caractéristiques locales du renfort. Les volumes simulés sont généralement de l'ordre de la maille élémentaire du renfort.
- échelle macroscopique : étude de la déformation du renfort dans sa globalité, afin de caractériser l'apparition de plissements, de glissements de mèches, et plus généralement la formabilité d'une pièce complète.

Les modèles qui ont été développés à ces différentes échelles sont détaillés ci-après.

### 1.4.1 Simulations à l'échelle microscopique

Dans une approche à l'échelle microscopique, le constituant de base est la fibre. Le comportement de la fibre est orthotrope linéaire, et ses grandeurs caractéristiques sont relativement bien connues. La difficulté de ce type d'approche est la gestion des nombreux corps constituant le modèle, et notamment du contact entre ces corps.

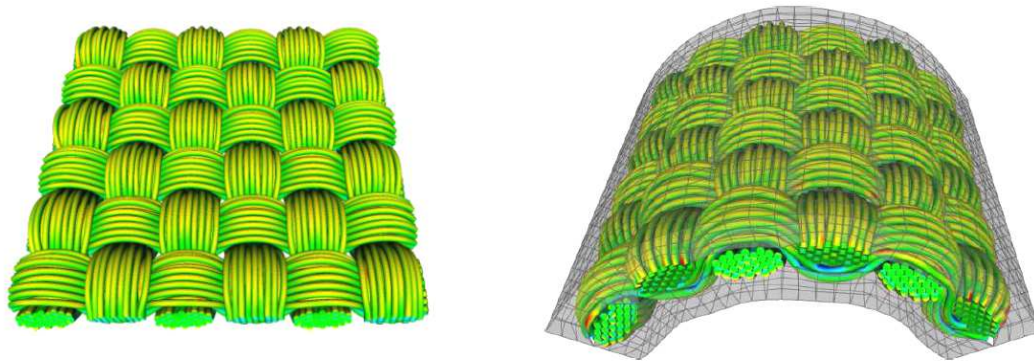


Figure 1-27. Modèle de maille élémentaire à l'échelle microscopique [DUR10]

Dans la littérature, de nombreux articles portent sur la simulation des cordes et des câbles, qui s'apparentent à des mèches comportant moins de fibres et fortement torsadées [GHO07, JIA99, NAW00, SRE06]. Les études spécifiques aux renforts tissés sont plus rares. Une modélisation du tissage a notamment été développée [ZHO04], qui permet de prévoir, dans certaines limites, la géométrie des mèches au sein de la maille élémentaire du renfort. Des modèles de mailles élémentaires complètes ont été développés [DUR10], qui permettent notamment de visualiser, au cours d'une sollicitation, le réarrangement des fibres au sein de la mèche, et les contraintes dans chaque fibre (voir figure 1-27).

<sup>1</sup> Dans ce manuscrit, le terme plissement sera préféré au terme pli afin d'éviter la confusion avec le terme « pli » désignant généralement une couches au sein d'un renfort multicouches.

La limitation principale de ce type de modèles est le temps de calcul nécessaire : à l'heure actuelle, seules quelques dizaines de fibres par mèche peuvent être modélisées, alors qu'une mèche de renfort tissé peut en contenir quelques dizaines de milliers. Ceci est très limitant car lorsque les fibres sont rassemblées par paquets, car dans ce cas le comportement de ces paquets est plus proche de celui de la mèche, beaucoup plus complexe que de celui des fibres.

### 1.4.2 Simulations à l'échelle macroscopique

Les simulations à l'échelle macroscopique constituent le but final de la recherche sur la simulation de la mise en forme des renforts tissés : il s'agit, en caractérisant la déformation globale du renfort, d'étudier la formabilité d'une pièce composite à renfort tissé. L'étude de la formabilité consiste notamment à prévoir l'apparition de défauts macroscopique comme les plissements ou les glissements de mèches.

De nombreux modèles permettent de simuler la déformation d'un renfort tissés, depuis les modèles géométriques simples, utilisés pour simuler le drapage au stade du bureau d'étude par exemple, jusqu'aux modèles éléments finis les plus complexes. Ces modèles macroscopiques nécessitent une caractérisation locale du comportement du renfort, qui peut être obtenue à l'aide des modèles à l'échelle mésoscopique. Les modèles macroscopiques sont donc présentés ici car ils constituent, pour certains d'entre eux, la raison d'être des modèles mésoscopiques qui seront étudiés dans ce manuscrit.

#### 1.4.2.1 Algorithme du filet

L'algorithme du filet [VAN91, BOR03] est une approche dite géométrique ou cinématique, généralement utilisée pour la simulation du drapage. Cette approche permet d'obtenir une simulation de drapage dans des temps très réduits. Elle est basée sur des hypothèses fortes, très limitantes pour la simulation de mises en formes complexes :

- les mèches sont inextensibles,
- pas de glissement entre les réseaux de chaîne et de trame,
- rotation libre entre les réseaux,
- pas de frottements avec la surface à draper.

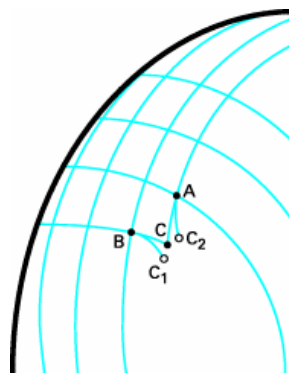


Figure 1-28. Méthode du filet : détermination de la position du point C connaissant celles de A et B [BOI04]

Ces hypothèses éloignent toute considération mécanique, et donc toute différenciation entre les différents renforts : le résultat de l'algorithme du filet sera identique quel que soit l'armure du renfort considéré ou la raideur de ses mèches. Par ailleurs, l'absence de frottements avec les outils de mise en forme empêche la prise en compte d'éventuels serre-flans.

Dans cette approche, le renfort est donc semblable à un ensemble de barres articulées non déformables (figure 1-28). Partant d'une ligne initiale, l'algorithme calcule la position des points

connexes sur des géodésiques de la surface à draper issues de ce point. Dans l'étude des renforts tissés, l'algorithme du filet peut être utilisée comme approche préliminaire, permettant de déterminer le degré de complexité du formage d'une pièce.

#### 1.4.2.2 Approches mécaniques

Parmi les approches mécaniques on distingue généralement les approches discrètes, les approches continues et les approches semi discrètes.

Les *approches discrètes* [SZE05, BEN07] sont généralement des extensions simples de l'algorithme du filet : les barres sont modélisées par des ressorts, au comportement linéaire ou non, et une raideur est ajoutée au changements de direction des barres (figure 1-29). Ainsi, il devient possible de simuler les comportements en traction, en cisaillement et en flexion du renfort.

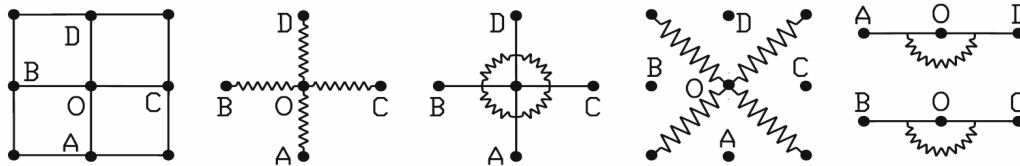


Figure 1-29. Différents types de raideurs des modélisations mésoscopiques discrètes [SZE05]

Les *approches continues* considèrent le renfort comme un matériau continu à l'échelle macroscopique. La géométrie du renfort est alors décrite par un maillage par éléments finis de coque ou de membrane. La difficulté de cette approche réside dans le choix de la loi de comportement associée aux éléments, qui doit traduire précisément le comportement mécanique du renfort.

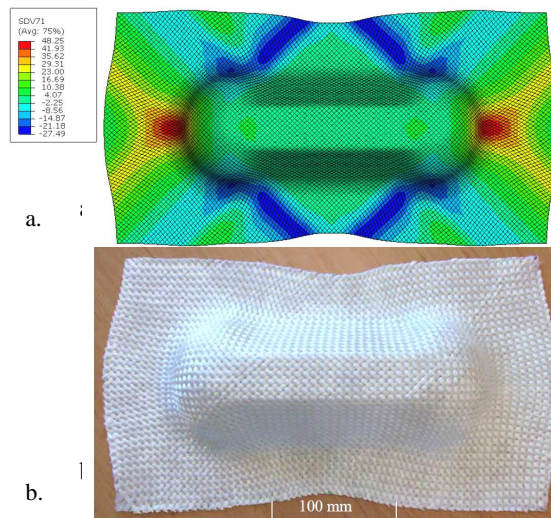


Figure 1-30. Simulation avec un modèle hypoélastique (a) et expérience (b) du drapage d'un double dôme [KHA10]

A ce jour, plusieurs lois de comportement ont été développées à l'aide de différentes approches, notamment des approches hypoélastiques [PEN05, YU05, KHA10] et des approches hyperélastiques [TEN07, AIM10, DRI10]. Un exemple de résultat obtenu à l'aide de l'une de ces méthodes est présenté sur la figure 1-30.

Enfin, les *approches semi discrètes* sont une combinaison des deux approches précédentes : des éléments finis sont formulés dans lesquels la puissance des efforts internes est subdivisée en différentes contributions, liées aux différentes rigidité du tissu. Deux modèles de ce type ont été développés, le premier dédié aux tissus 2D utilisant des éléments de coque ou de membrane [BOI06,

HAM07b, HAM09], et le second dédié aux interlocks 3D utilisant des éléments 3D [DEL09]. Des résultats d'emboutissages de renfort obtenus par ces deux modèles sont présentés sur la figure 1-31.

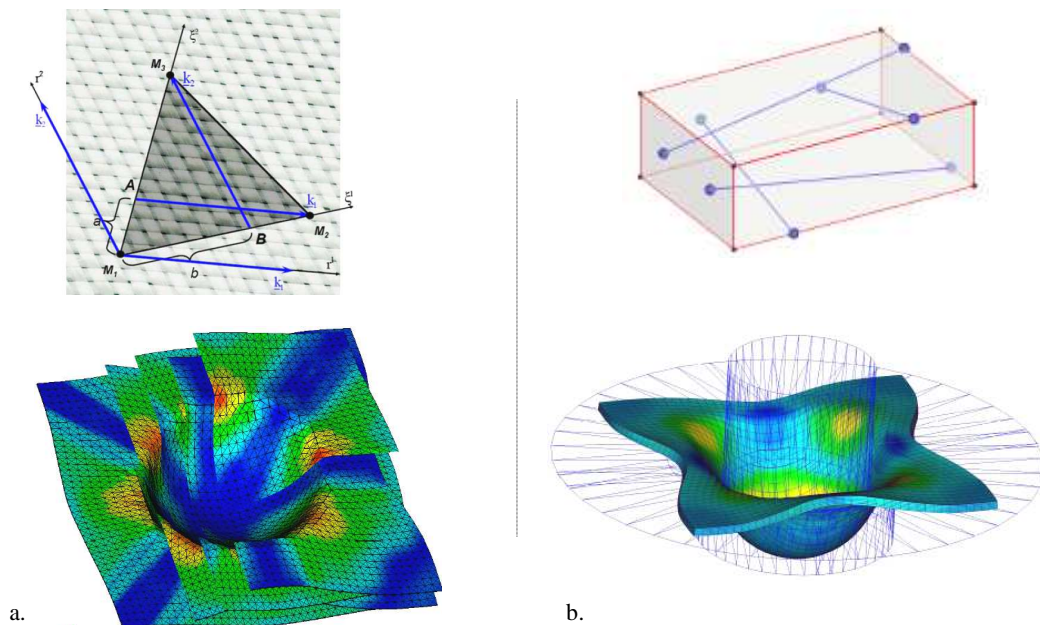


Figure 1-31. Schématisation des éléments formulés et résultats de simulation de mises en formes obtenus pour le modèle semi discret 2D (a) et le modèle semi discret 3D (b)

### 1.4.3 Simulations à l'échelle mésoscopique

Les modèles à l'échelle mésoscopique s'intéressent au comportement d'une maille élémentaire du renfort. A cette échelle, la mèche est considérée comme un milieu continu. L'objectif de ces modèles est de déterminer certains comportements ou certaines propriétés du renfort dont la détermination expérimentale est difficile ou onéreuse. Parmi ces propriétés, les plus recherchées sont :

- le comportement mécanique macroscopique du renfort, permettant notamment d'alimenter les modèles à l'échelle macroscopique. Il est également envisageable, par un tel passage méso-macro, de déterminer automatiquement l'armure adaptée aux besoins d'une pièce en cours de conception
- la perméabilité locale du renfort en fonction de la déformation de la maille élémentaire, permettant d'alimenter les simulations d'écoulement de la résine dans le renfort.

Quelques approches analytiques ont été développées pour déterminer ces propriétés. Ces approches se basent généralement sur une simplification de la géométrie de la maille élémentaire et des hypothèses sur le comportement mécanique. Dans les travaux de Kawabata par exemple [KAW73a, KAW73b], la mèche est décrite par un ensemble de segments schématisant sa ligne moyenne : ces segments forment alors un ensemble de barres en traction représentant l'ensemble du renfort tissé. Le comportement de chaque barre (blocs Ai sur la figure 1-32) est élastique, éventuellement non linéaire, et les interactions entre les mèches aux points de croisement sont modélisées par des ressorts de différents types (blocs Bi sur la figure 1-32). Si ce modèle permet un calcul analytique satisfaisant du comportement en traction biaxiale et en traction uniaxiale du renfort, il reste géométriquement trop pauvre pour simuler des sollicitations d'écrasement ou de cisaillement du renfort pour lesquelles le changement de forme des mèches a une importance considérable.



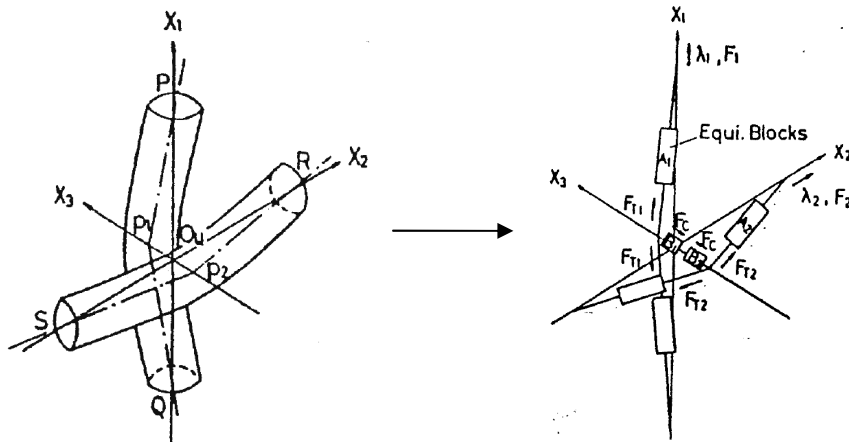


Figure 1-32. Modélisation analytique de Kawabata [KAW73a]

Une approche analytique intéressante a également été développée par Lomov [LOM06]. Cette approche est basée sur une minimisation de l'énergie de déformation des mèches au sein du renfort. Un système d'équations est construit à partir d'une paramétrisation de la géométrie des mèches, et de différentes contributions mécaniques : tension des mèches, flexion des mèches, torsion des mèches, compression des mèches, contacts aux intersections de mèches, contacts latéraux entre mèches et frottement entre mèches. De petites portions de mèches (*elementary bent intervals*) sont définies pour discrétiser le problème de minimisation, qui est alors résolu afin d'obtenir l'état d'équilibre mécanique du renfort. Une approche similaire basée sur un principe de stationnarité de l'énergie potentielle totale du système traduisant l'équilibre entre les efforts extérieurs appliqués et la réponse du système a également été proposée [SAG03].

Les approches analytiques fonctionnent bien pour déterminer le comportement mécanique de la maille élémentaire dans en tension uniaxiale et en tension biaxiale. L'application de ces approches à des cas plus complexes tels que le cisaillement est possible mais difficile, car la simplification de la géométrie de la mèche rend les conditions de contact latéral entre les mèches peu réalistes. Face aux limitations de ces approches analytiques, les simulations par éléments finis apparaissent comme une très bonne alternative. Les simulations par éléments finis à l'échelle mésoscopiques nécessitent trois données principales : la description de la géométrie de la maille élémentaire par des éléments finis (3D), la loi de comportement de la mèche, et les conditions aux limites appliquées à la maille élémentaire. Ces différents aspects sont complexes et ont fait l'objet de plusieurs études, qui sont présentées dans cette section.

#### 1.4.3.1 Description géométrique et discrétisation de la maille élémentaire

L'obtention d'une discrétisation de la maille élémentaire nécessite au préalable une description de la géométrie des mèches. Afin d'être en mesure de prévoir le comportement d'un renfort avant sa fabrication, et ainsi d'optimiser ses caractéristiques en fonction de l'application voulue, cette géométrie doit pouvoir être obtenue simplement à partir des caractéristiques de la mèche (comportement mécanique) et des caractéristiques de l'armure (type de motif, densités de mèche, embuvages). Trois méthodes permettent de caractériser expérimentalement la géométrie des mèches au sein du renfort, et ainsi de valider le modèle géométrique utilisé :

- l'observation au microscope de différentes coupes du renfort considéré, après avoir figé le renfort dans une résine. Cette méthode présente l'inconvénient d'être légèrement intrusive : la forme de la mèche peut varier lors de l'ajout de la résine [POT06b].
- la réalisation de mesures 3D à l'aide d'un dispositif optique [HIV05]. Contrairement à la précédente, cette méthode n'est pas intrusive. Par contre elle ne permet pas d'observer l'intérieur de la mèche.

- l'utilisation d'un tomographe à rayons X : cette méthode, plus récente, nécessite un matériel sophistiqué mais ne présente pas les défauts des deux méthodes précédentes [BAD08b].

Par ailleurs, le modèle géométrique obtenu doit être *cohérent* : il doit garantir l'absence d'interpénétration entre les mèches. Cette condition est particulièrement délicate aux points de croisement des mèches. La difficulté principale de la modélisation géométrique du renfort réside donc dans la nécessité de décrire la géométrie de la mèche avec une complexité suffisante, tout en assurant la cohérence du modèle.

Plusieurs modèles ont été proposés dans la littérature pour déterminer cette géométrie de la maille élémentaire. Un premier, mis en œuvre dans le logiciel *Wisetex*, est développé à l'université de Louvain [LOM00, VER05, LOM06]. Il consiste à définir une paramétrisation de la géométrie de la maille élémentaire, puis à déterminer ces paramètres en minimisant l'énergie de flexion des mèches de la maille élémentaire. La géométrie est décrite par la ligne moyenne des mèches, décomposée en *segments ondulés élémentaires* (paramétrisés par des polynômes d'ordre 5), et par les sections des mèches à chaque croisement, de formes lenticulaires ou elliptiques (paramétrisées par deux dimensions caractéristiques). Un effort transversal est défini à chaque croisement, permettant de décrire l'interaction entre les deux réseaux de mèches. Cet effort transversal est relié au comportement de la mèche en compaction, et ainsi à la forme des sections transverses. Le problème de minimisation de l'énergie est alors résolu afin de déterminer l'ensemble des paramètres de la description géométrique de la maille élémentaire. Ce modèle permet de déterminer rapidement des géométries de renforts très complexes, y compris des renforts 2,5D et 3D. Il permet également de prendre en compte les ondulations latérales des mèches qui apparaissent notamment lorsque la géométrie des mèches n'est pas symétrique au niveau des points de croisement, ce qui est le cas dans la plupart des armures autres que le taffetas. Il s'agit également de l'un des seuls modèles capables de fournir des informations sur l'interaction entre les deux réseaux de mèches ainsi que l'orientation des fibres dans un tissu au repos. Initialement ce modèle ne garantissait pas la condition de cohérence : des intersections entre les mèches étaient susceptibles d'apparaître. Une méthode a été implémentée par la suite afin résoudre ces problèmes d'incohérence [VER05]. Une transition directe entre les modèles obtenus dans *Wisetex* et des calculs par éléments finis de comportement mécanique ou de perméabilité de la maille élémentaire de renfort est maintenant possible.

Une alternative à *Wisetex* est le logiciel *Texgen*, développé à l'université de Nottingham [SHE07]. A l'inverse de *Wisetex*, *Texgen* ne fait pas intervenir de considérations mécaniques dans le calcul de la géométrie du renfort au repos. *Texgen* ne permet pas non plus de calculer des géométries déformées de maille élémentaire. Il permet toutefois de réaliser facilement des modèles de maille élémentaires complexes (2D, 2,5D, 3D, NCD, tresses, tricots), dans lesquels les mèches peuvent avoir des sections de formes complexes et variables le long de la ligne moyenne. La gestion de l'interpénétration entre les mèches est ici aussi une question majeure. Notons qu'avec *Texgen* il est possible d'exporter directement le maillage de la maille élémentaire dans un format de mise en donnée pour Abaqus.

Le dernier type de modèle qui a été envisagé pour la modélisation de la géométrie de la maille élémentaire est un modèle géométrique proposé par Gilles Hivet [HIV05, HIV08]. Ce modèle ne s'intéresse qu'aux renforts tissés 2D mais propose une modélisation géométrique garantissant l'absence d'interpénétrations entre les mèches, c'est pourquoi il sera utilisé dans ce manuscrit pour générer les modèles de mailles élémentaires. Dans ce modèle, la section de la mèche peut varier le long de la ligne moyenne. Les sections sont définies en un certain nombre de points de contrôle sur cette ligne moyenne, nombre variable selon le type d'armure considéré (figure 1-33). Ces points de contrôle définissent les différentes zones caractéristiques de la mèche : les zones sans contact avec d'autres mèches (e.g. M3-M4), les zones avec contact courbe (e.g. M2-M3) et les zones avec un contact plan (e.g. M1-M2).

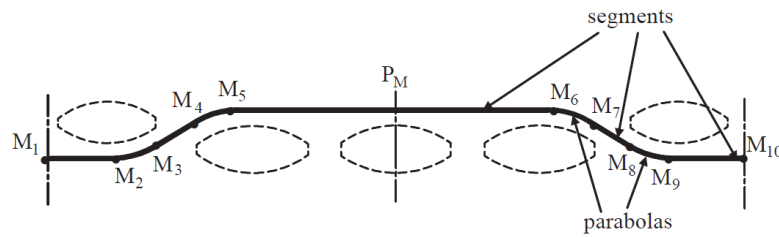


Figure 1-33. Définition des points de contrôle de la ligne moyenne d'un sergé 3x2 [HIV05]

Les sections de la mèche sont définies en chacun de ces points de contrôle, c'est-à-dire pour chacune des différentes zones. Le contour de chaque section est divisé en quatre parties, modélisées par quatre coniques (figure 1-34). Une dégénérescence des coniques situées sur les bords de la mèche permet d'obtenir des formes simplifiées dont le bord est réduit à un point ou à un segment, ce qui pourra par la suite faciliter la discrétisation de la géométrie en éléments finis. Notons que pour les armures taffetas les sections sont symétriques (figure 1-34b).

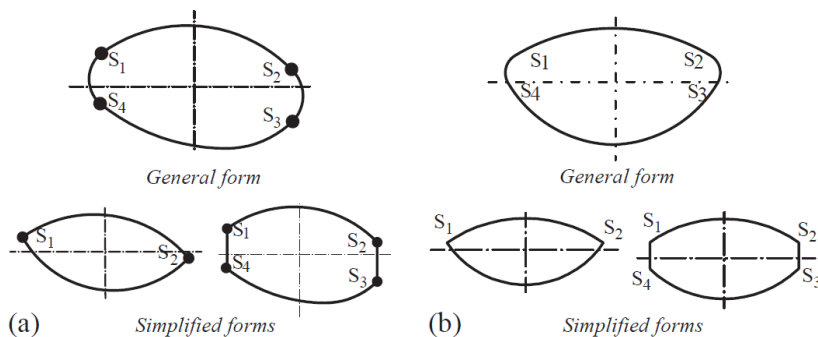


Figure 1-34. Définition du contour des sections de la mèche [HIV05]

La géométrie de la mèche entre les sections est obtenue par un balayage le long de la ligne moyenne, avec interpolation des sections des points de contrôle. En utilisant les formes simplifiées, il a été montré que trois paramètres sont nécessaires pour modéliser un taffetas équilibré, et six pour un taffetas déséquilibré. Un exemple de maillage d'un taffetas de verre issu de cette modélisation géométrique est présenté sur la figure 1-35.



Figure 1-35. Exemple de modèle de taffetas issu du modèle de Hivet

#### 1.4.3.2 Lois de comportement

Une fois la géométrie et la discrétisation du modèle effectués, il faut déterminer la réponse d'un élément à une sollicitation extérieure : la *loi de comportement*. Il s'agit donc de déterminer une loi de comportement précise du matériau « mèche », homogénéisation d'un matériau composé de fibres

alignées et de vides entre ces fibres. Ce comportement doit rendre compte des spécificités d'un tel assemblage, liées notamment de la très forte anisotropie de sa structure et aux possibles glissements entre les fibres au sein de la mèche. La définition de cette loi de comportement n'est donc pas triviale.

La plupart des études précédentes utilisent des modèles hypoélastiques pour décrire le comportement de la mèche. L'un des premiers modèles hypoélastiques pour la mèche a été proposé par Gasser dans [GAS00] : la mèche est considérée comme un matériau orthotrope, et seules les contributions de la tension de la mèche dans la direction des fibres, et de sa compaction dans le plan transverse sont pris en compte.

Par la suite, les travaux de Hagège [HAG04] ont montré que l'utilisation des dérivées classiques de Jaumann et de Green-Naghdi ne permet pas de garantir l'objectivité des lois de comportement hypoélastique pour la mèche : les repères associés à ces dérivées tournent avec des rotations moyennes de la matière, et donc ne suivent pas exactement la direction matérielle liée aux fibres. Les travaux de Hagège introduisent donc la définition d'une nouvelle dérivée, objective, calculée dans un repère suivant exactement la direction matérielle des fibres. Ces travaux ont mené notamment à une description satisfaisante du comportement en traction biaxiale d'un renfort tricoté.

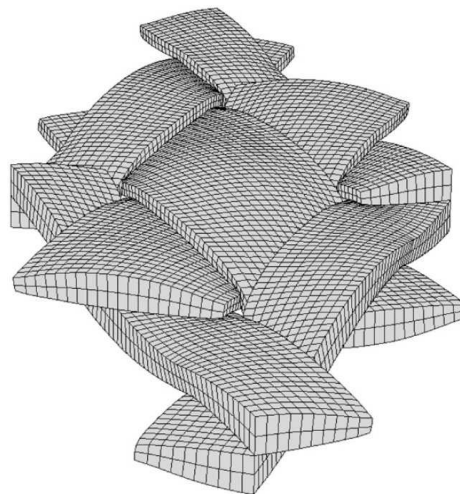


Figure 1-36. Cisaillement d'une maille élémentaire de taffetas [BAD08]

Ces travaux ont été poursuivis par Badel [BAD08a] qui a appliqué cette loi de comportement orthotrope à des renforts tissés, et qui a notamment mis au point une simulation satisfaisante du cisaillement d'une maille de renfort tissé (figure 1-36).

Ces lois de comportement hypoélastiques posent néanmoins des problèmes d'identification, liés à la difficulté de réaliser des essais à l'échelle de la mèche. Par ailleurs, si le formalisme de la dérivée objective suivant la direction des fibres apparaît aujourd'hui relativement simple, l'extension de ce formalisme au suivi simultané de plusieurs directions de fibres, initié dans [HAG04], est relativement ardue. Un tel formalisme serait pourtant intéressant pour étendre les modèles mésoscopiques aux tissus interlocks 2,5D.

Ces modèles hypoélastiques posent également un problème : ils ne sont pas élastiques, et l'anélasticité introduite est difficile à maîtriser car elle dépend du code de calcul utilisé. Ainsi, il faut s'attendre à dissiper de l'énergie lors d'un chargement cyclique sur la mèche, bien qu'aucun terme de dissipation n'ait été introduit dans la loi de comportement.

## Conclusion du chapitre 1

Dans ce premier chapitre, les renforts tissés de composites ont été présentés dans leur globalité, de la fibre et sa fabrication au renfort final avec son armure. Cette description de la structure du renfort aux différentes échelles nous a permis de mieux comprendre les mécanismes de déformation du renfort. Le procédé RTM a également été présenté, ainsi que les enjeux industriels associés à la simulation de ce procédé.

Les essais « classiques » utilisés pour décrire le comportement mécanique du renfort ont été présentés : tension uniaxiale et biaxiale, picture frame test, bias extension test, flexion, écrasement. Ces essais seront utilisés dans la suite de ce manuscrit pour identifier ou valider les lois de comportement proposées.

Finalement, un état de l'art de la simulation de la mise en forme des renforts tissés a été réalisé, présentant les modèles micro-, méso- et macroscopiques existant dans la littérature, et permettant de simuler la déformation du renfort aux différentes échelles.

A l'échelle mésoscopique, les lois de comportement hypoélastiques existantes sont difficiles à identifier et ne permettent pas une analyse fine des énergies mises en jeu eu sein de la maille élémentaire du renfort. Par ailleurs, le formalisme lié au suivi de la direction des fibres, utilisant des dérivées objectives, est assez complexe, c'est pourquoi des hypothèses sont généralement réalisées qui ne permettent pas d'assurer un suivi exact de la matière. Une nouvelle approche sera présentée dans ce manuscrit pour décrire le comportement de la mèche de renfort tissé, utilisant une loi de comportement hyperélastique.

Aucune approche continue 3D n'existe dans la littérature pour simuler le comportement des interlocks épais. Nous verrons que le formalisme hyperélastique permettra d'étendre la loi de comportement de la mèche à une loi de comportement adaptée à des matériaux à plusieurs directions de fibres, permettant ainsi de simuler la mise en forme des renforts interlocks.

Afin de formuler ces nouvelles lois de comportement, un aperçu du formalisme de la mécanique des grandes transformations et de l'hyperélasticité anisotrope sera proposé au chapitre suivant. La méthode qui sera utilisé pour implémenter ces lois de comportement dans le code de calcul par éléments finis Abaqus/Explicit sera également présentée.

# Chapitre 2 Mécanique des milieux continus en grandes transformations & hyperélasticité

*Dans ce chapitre, les concepts et les méthodes nécessaires à la mise en place de lois de comportement hyperélastiques anisotropes non-linéaires en grandes transformations et leur intégration dans le code Abaqus/Explicit seront présentés. Les concepts de base de la mécanique des milieux continus en grandes transformations seront brièvement rappelés. Le formalisme de l'hyperélasticité isotrope et anisotrope pourra alors être introduit, et les modèles hyperélastiques les plus classiques seront présentés succinctement. Les différents types de schémas d'intégration temporelle seront également décrits, et le choix du code de calcul Abaqus/Explicit pour la simulation de la mise en forme des renforts tissés de composites sera justifié. La méthodologie d'implémentation d'une loi de comportement dans ce code de calcul, sous la forme d'une subroutine utilisateur VUMAT, sera présentée. Nous aurons alors à notre disposition tous les outils nécessaires au développement et à l'implémentation de lois de comportement hyperélastiques adaptées au comportement mécanique des renforts tissés de composites.*

## Sommaire

2.1 CINEMATIQUE DES GRANDES TRANSFORMATIONS .....	46
2.1.1 Tenseur gradient de la transformation.....	46
2.1.2 Mesures des déformations.....	47
2.1.3 Vitesses de déformation.....	48
2.2 DESCRIPTION DES EFFORTS INTERNES .....	48
2.3 DUALITE CONTRAINTES – DEFORMATIONS .....	50
2.4 LOIS DE COMPORTEMENT HYPERELASTIQUES.....	50
2.4.1 Formulation des lois de comportement hyperélastiques.....	50
2.4.2 Hyperélasticité isotrope .....	52
2.4.3 Hyperélasticité anisotrope .....	53
2.4.4 Différentes approches de modélisation.....	55
2.5 IMPLEMENTATION DES LOIS DE COMPORTEMENT DANS ABAQUS/EXPLICIT.....	55
2.5.1 Schémas d'intégration temporelle.....	55
2.5.2 Implémentation de routines VUMAT pour les matériaux hyperélastiques anisotropes ...	60
CONCLUSION DU CHAPITRE 2 .....	66

## 2.1 Cinématique des grandes transformations

L'implémentation de lois de comportement en grandes transformations nécessite une description des mouvements au sein du milieu continu qui dépasse le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Seules les grandeurs et les concepts de base utilisés en mécanique des milieux continus de Cauchy en grandes transformations seront présentés.

### 2.1.1 Tenseur gradient de la transformation

La transformation d'un milieu continu, occupant le volume  $\Omega_0$  dans la configuration de référence (i.e. à l'état naturel non contraint du matériau), et le volume  $\Omega$  dans la configuration actuelle, peut être décrite par une application  $\chi$  bijective qui fait correspondre à chaque position initiale  $\underline{X} \in \Omega_0$  une position actuelle  $\underline{x} \in \Omega$ <sup>2</sup>:

$$\underline{x} = \chi(\underline{X}) \quad (2.1)$$

Pour décrire localement la transformation, on considère un point matériel  $P(\underline{X}_P)$ , ainsi qu'un point  $Q(\underline{X}_Q)$  dans le voisinage de  $P$ , formant le vecteur élémentaire  $d\underline{X} = \underline{X}_Q - \underline{X}_P$  en configuration initiale. Le vecteur transformé s'écrit alors :

$$d\underline{x} = \underline{x}_Q - \underline{x}_P = \chi(\underline{X}_P + d\underline{X}) - \chi(\underline{X}_P) \quad (2.2)$$

Le *tenseur gradient de la transformation*, également appelé *application linéaire tangente* ou *transformation homogène tangente*, est le tenseur jacobien de l'application  $\chi$ . Le vecteur  $d\underline{x}$  se met alors sous la forme :

$$d\underline{x} = \frac{\partial \chi}{\partial \underline{X}} \cdot d\underline{X} = \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{X} \quad (2.3)$$

Ainsi défini, le tenseur gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}$  constitue une description locale (au premier ordre) de la transformation du solide.

#### 2.1.1.1 Transformation d'un élément de volume

Soit  $dV \subset \Omega_0$  un volume élémentaire dans la configuration initiale. Le volume déformé  $dv \subset \Omega$  est donné par le jacobien de la transformation, c'est-à-dire par le déterminant du tenseur gradient de la transformation :

$$dv = JdV, \quad J = \det(\underline{\underline{F}}) \quad (2.4)$$

L'application  $\chi$  étant bijective, son jacobien  $J$  sera toujours strictement positif, ce qui revient à dire que le volume de l'élément de matière défini par le volume élémentaire  $dV$  ne peut s'annuler.

---

<sup>2</sup> Dans toute cette partie, et sauf mention contraire, les grandeurs écrites en minuscule seront relatives à la configuration actuelle tandis que les grandeurs écrites en majuscule seront relatives à la configuration initiale.

### 2.1.1.2 Transformation d'un élément de surface

Soit  $d\mathbf{A} = dA \underline{\mathbf{N}}$  un élément de surface de normale  $\underline{\mathbf{N}}$  en configuration initiale. La surface transformée  $d\mathbf{a} = da \underline{\mathbf{n}}$ , de normale  $\underline{\mathbf{n}}$ , est donnée classiquement par la formule de Nanson :

$$da \underline{\mathbf{n}} = J \underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \underline{\mathbf{N}} dA \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Mesures des déformations

Le tenseur gradient de la transformation décrit les transformations locales du milieu étudié. Ces transformations se décomposent en rotations de corps rigide et en déformations de la matière. Ce constat est formalisé par le théorème de la décomposition polaire du gradient de la transformation, selon lequel il est possible d'écrire, de façon unique,

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{V}} \cdot \underline{\mathbf{R}} \quad (2.6)$$

où  $\underline{\mathbf{R}}$  est un tenseur de rotation (i.e. orthogonal direct) et où  $\underline{\mathbf{U}}$  et  $\underline{\mathbf{V}}$  sont des tenseurs symétriques définis positifs appelés tenseurs de déformation pure. Afin d'étudier les variations de longueur et d'angle au sein du solide, on peut étudier le produit scalaire de deux vecteurs élémentaires en configuration déformée :

$$\begin{aligned} d\underline{\mathbf{u}} \cdot d\underline{\mathbf{v}} &= du_i dv_i = F_{ij} dU_j F_{ik} dV_k = dU_j F_{ji}^T F_{ik} dV_k \\ &= d\underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}} \cdot d\underline{\mathbf{V}} \\ &= d\underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot d\underline{\mathbf{V}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

L'écriture précédente permet d'introduire le *tenseur de Cauchy-Green droit*  $\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{F}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{U}}^2$ , mesure du produit scalaire des vecteurs déformés. Par suite, la variation de ce produit scalaire entre la configuration initiale et la configuration déformée s'écrit :

$$\begin{aligned} d\underline{\mathbf{u}} \cdot d\underline{\mathbf{v}} - d\underline{\mathbf{U}} \cdot d\underline{\mathbf{V}} &= d\underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot d\underline{\mathbf{V}} - d\underline{\mathbf{U}} \cdot d\underline{\mathbf{V}} \\ &= d\underline{\mathbf{U}} \cdot (\underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{I}}) \cdot d\underline{\mathbf{V}} \\ &= d\underline{\mathbf{U}} \cdot 2\underline{\mathbf{E}} \cdot d\underline{\mathbf{V}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Le tenseur  $\underline{\mathbf{E}} = 1/2(\underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{I}})$  introduit ainsi est appelé *tenseur des dilatations de Green-Lagrange* : en petites déformations, ce tenseur se confond avec le tenseur des déformations linéarisé  $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ . Les deux tenseurs précédents sont définis sur la configuration initiale. A ce titre, ils sont généralement dits « lagrangiens ». On peut définir de la même façon leurs équivalents en configuration actuelle, qui seront dits « eulériens »<sup>3</sup> :

$$\underline{\underline{\mathbf{b}}} = \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T = \underline{\mathbf{V}}^2 \quad (2.9)$$

<sup>3</sup> Un tenseur sera dit *lagrangien* (resp. *eulérien*) lorsque ses quantités d'entrée et de sortie sont exprimées dans la configuration initiale (resp. actuelle). Un tenseur dont la quantité d'entrée et la quantité de sortie ne sont pas exprimées dans la même configuration sera dit *bipoint*.



$$\underline{\underline{a}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{b}}^{-1}) \quad (2.10)$$

Les tenseurs définis par (2.9) et (2.10) seront appelés respectivement *tenseur de Cauchy-Green gauche* et *tenseur d'Euler-Almansi*.

### 2.1.3 Vitesses de déformation

L'écriture de la puissance des efforts internes (voir 2.3), ainsi que différents types de lois de comportement (e.g. viscoélastiques) nécessitent de définir la notion de vitesse de déformation. En différentiant l'équation (2.3), on obtient :

$$d\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot d\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot d\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{l}} \cdot d\underline{\underline{x}} \quad (2.11)$$

Le tenseur  $\underline{\underline{l}}$  est appelé *tenseur gradient de vitesse*. Il est classiquement décomposé en un terme symétrique  $\underline{\underline{d}}$  (*tenseur taux de déformation*) et un terme antisymétrique  $\underline{\underline{\omega}}$  (*tenseur taux de rotation*) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{l}} &= \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\omega}} \\ \underline{\underline{d}} &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T), \quad \underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{F}}^T) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le tenseur taux de déformation est une mesure de la vitesse de déformation dans la configuration actuelle. En différentiant l'équation (2.7), on peut également obtenir une mesure de la vitesse de déformation dans la configuration initiale :

$$\underline{\underline{\dot{E}}} = \frac{1}{2}\underline{\underline{\dot{C}}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{F}} \quad (2.13)$$

## 2.2 Description des efforts internes

On considère un solide déformable virtuellement coupé en deux sous domaines, avant et après transformation (figure 2-1). L'équilibre de chacun des deux sous domaines ainsi définis impose l'existence de forces internes à la frontière entre les deux. Soit  $ds$  un élément de surface infinitésimal positionné à la frontière entre les deux sous domaines, soumise à un effort  $d\underline{\underline{f}}$ . Le *vecteur contrainte* est alors défini localement par :

$$\underline{\underline{t}} = \frac{d\underline{\underline{f}}}{ds} \quad (2.14)$$

Selon le théorème de Cauchy, ce vecteur contrainte ne dépend, au point considéré, que de la normale  $\underline{\underline{n}}$  à la surface élémentaire  $ds$  considérée, et ce de façon linéaire. Il existe donc un tenseur d'ordre deux, que l'on appellera *tenseur des contraintes de Cauchy*  $\underline{\underline{\sigma}}$ , tel que :

$$\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} \quad (2.15)$$

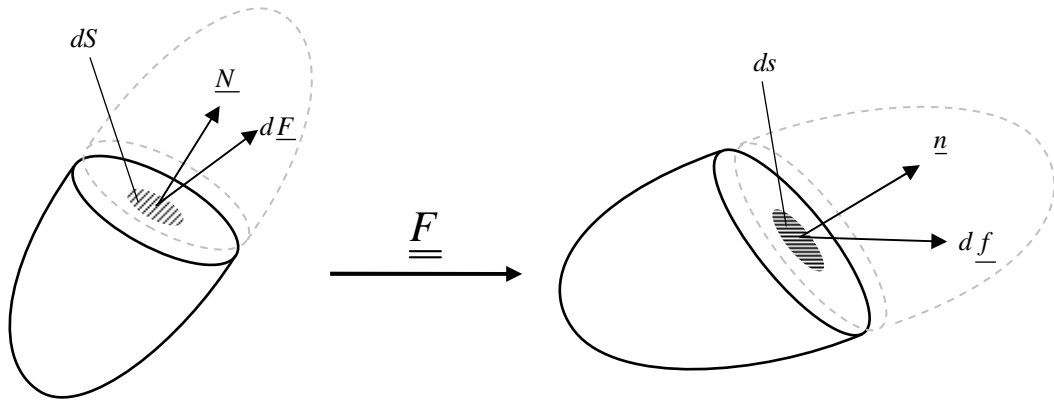


Figure 2-1. Définition des efforts internes

L'écriture de l'équation de moment du principe fondamental de la dynamique permet de démontrer que ce tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique. Notons que dans l'expression (2.15), les vecteurs  $\underline{t}$  et  $\underline{n}$  sont définis en configuration actuelle. Avec (2.14) et (2.15), l'effort exercé sur la surface élémentaire s'écrit :

$$d\underline{f} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \, ds \quad (2.16)$$

Le tenseur de Cauchy représente donc les efforts internes exprimés dans la configuration actuelle. De même que pour les différentes mesures de déformation établies précédemment, il est possible de définir d'autres mesures des efforts internes. Ainsi, en notant  $d\underline{F}$ ,  $dS$  et  $\underline{N}$  l'effort, la surface et sa normale ramenés en configuration initiale, on définit les trois tenseurs  $\underline{\underline{S}}$ ,  $\underline{\underline{P}}$  et  $\underline{\underline{\tau}}$  :

$$\begin{aligned} d\underline{f} &= \underline{\underline{P}} \cdot \underline{N} \, dS \\ d\underline{F} &= \underline{\underline{S}} \cdot \underline{N} \, dS \\ d\underline{F} &= \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} \, ds \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ces tenseurs sont respectivement appelés *premier tenseur de Piola-Kirchhoff*, *second tenseur de Piola-Kirchhoff* (ou tenseur de Boussinesq) et *tenseur de Kirchhoff*. En petites déformations, ces quatre tenseurs sont identiques. Les équations (2.3) et (2.5) permettent de démontrer les relations suivantes :

$$\underline{\underline{\tau}} = J \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \quad (2.18)$$

Avec la définition précédente des adjectifs *lagrangien* et *eulérien*, le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$ , qui permet d'obtenir le vecteur contrainte dans la configuration actuelle en fonction de la normale dans cette même configuration, sera dit eulérien. A l'inverse, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{S}}$ , qui permet d'obtenir le vecteur contrainte dans la configuration initiale en fonction de la normale dans cette même configuration, sera dit lagrangien. Le premier tenseur de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{P}}$  et le tenseur de Kirchhoff  $\underline{\underline{\tau}}$  ne sont ni lagrangiens ni eulériens : ils sont appelés tenseurs bipoints.

## 2.3 Dualité contraintes – déformations

En théorie du premier gradient, la puissance des efforts intérieurs se met sous la forme [SAL05] :

$$\mathcal{P}_i = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \left( \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{v}) \right)^T d\Omega \quad (2.19)$$

avec  $\underline{\underline{\sigma}}$  le tenseur des contraintes de Cauchy introduit précédemment et  $\underline{v}$  le champ de vitesse au point considéré. Par ailleurs,  $\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{v})$  n'est autre que le tenseur gradient de vitesse :

$$\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \right) \frac{\partial X_j}{\partial x_j} = \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{l}} \quad (2.20)$$

En utilisant la décomposition sphérique / déviatorique de  $\underline{\underline{l}}$  et la symétrie de  $\underline{\underline{\sigma}}$ , on fait apparaître la dualité du tenseur des contraintes de Cauchy avec le tenseur des taux de déformation :

$$\mathcal{P}_i = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} d\Omega \quad (2.21)$$

On note  $\rho_i$  la puissance massique des efforts intérieurs, et  $\rho$  (resp.  $\rho_0$ ) la densité en configuration actuelle (resp. initiale) :

$$\mathcal{P}_i = - \int_{\Omega} \rho \rho_i d\Omega = - \int_{\Omega_0} \rho_0 \rho_i d\Omega_0 \quad (2.22)$$

En utilisant l'expression (2.21) de la puissance des efforts intérieurs, ainsi que des relations (2.18) entre les différentes mesures de contraintes, cette puissance massique s'écrit :

$$\rho_i = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} = \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{E}}} = \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{P}} : \underline{\underline{\dot{F}}} \quad (2.23)$$

ce qui montre la dualité entre les autres mesures de déformation et d'efforts internes introduites précédemment. Le terme  $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}$  représente la puissance des efforts internes par unité de volume final, tandis que les termes  $\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{E}}}$  et  $\underline{\underline{P}} : \underline{\underline{\dot{F}}}$  représentent la puissance des efforts internes par unité de volume initial.

## 2.4 Lois de comportement hyperélastiques

### 2.4.1 Formulation des lois de comportement hyperélastiques

Issue d'une combinaison du premier et du second principe de la thermodynamique, ainsi que de la description (2.23) des efforts internes, l'inégalité de Clausius-Duhem constitue le point de départ de la définition des lois de comportement hyperélastiques. Ces lois diffèrent en ce point des lois élastiques et des lois hypoélastiques qui sont dépourvues de fondements thermodynamiques. Notons que les lois hyperélastiques font partie des lois élastiques, qui font elles-mêmes partie des lois hypoélastiques. Dans la configuration initiale et dans la configuration déformée, l'inégalité de Clausius-Duhem prend respectivement les formes (2.24) et (2.25) :

$$\Phi_0 = -\rho_0 \left( \dot{\psi} - \dot{\theta} \eta \right) - \frac{1}{\theta} \underline{Q} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \underline{x}} + \underline{S} : \underline{\dot{E}} \geq 0 \quad (2.24)$$

$$\Phi = -\rho \left( \dot{\psi} - \dot{\theta} \eta \right) - \frac{1}{\theta} \underline{q} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \underline{X}} + \underline{\sigma} : \underline{D} \geq 0 \quad (2.25)$$

avec  $\Phi_0$  et  $\Phi$  les dissipations par unité de volume (initial et final),  $\psi$  l'énergie libre spécifique (i.e. par unité de masse),  $\theta$  la température et  $\underline{Q}$  et  $\underline{q}$  les vecteurs flux de chaleur en configuration initiale et actuelle. En théorie « purement mécanique », il est courant de s'affranchir des effets thermiques, c'est-à-dire de considérer la température homogène et la transformation isotherme. Les dissipations s'écrivent alors :

$$\Phi_0 = -\rho_0 \dot{\psi} + \underline{S} : \underline{\dot{E}} \quad (2.26)$$

$$\Phi = -\rho \dot{\psi} + \underline{\sigma} : \underline{D} \quad (2.27)$$

Un matériau hyperélastique est par définition un matériau non dissipatif (i.e. pour lequel les dissipations (2.26) et (2.27) sont nulles) dont l'énergie de déformation par unité de volume initial  $w = \rho_0 \psi$  ne dépend que de l'état actuel des déformations du matériau. Ces deux considérations se traduisent par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{w}(\underline{F}) &= \underline{S} : \underline{\dot{E}} \\ w &= w(\underline{F}) = \rho_0 \psi \end{aligned} \quad (2.28)$$

On peut montrer par ailleurs [CIA88] qu'afin que le matériau respecte le principe d'indifférence matérielle, il faut et il suffit que cette énergie de déformation soit une fonction du tenseur de Cauchy-Green droit. Nous écrivons donc directement les relations (2.28) sous la forme :

$$\begin{aligned} w &= w(\underline{C}) = \rho_0 \psi \\ \dot{w}(\underline{C}) &= \underline{S} : \underline{\dot{E}} = \frac{1}{2} \underline{S} : \underline{\dot{C}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

A partir de l'équation précédente, on peut écrire :

$$\dot{w}(\underline{C}) = \frac{1}{2} \underline{S} : \underline{\dot{C}} \Leftrightarrow \left( \frac{\partial w}{\partial \underline{C}} - \frac{1}{2} \underline{S} \right) : \underline{\dot{C}} = 0 \Leftrightarrow \underline{S} = 2 \frac{\partial w}{\partial \underline{C}} \quad (2.30)$$

Cette dernière équation constitue l'expression générale des lois de comportement hyperélastique. On peut également la mettre sous la forme :

$$\underline{\sigma} = \frac{2}{J} \underline{F} \cdot \frac{\partial w}{\partial \underline{C}} \cdot \underline{F}^T \quad (2.31)$$

Pour établir la loi de comportement d'un matériau hyperélastique, il suffit donc de déterminer l'énergie de déformation  $w$  correspondant au comportement mécanique du matériau considéré. Afin d'être admissible, cette énergie de déformation doit vérifier plusieurs conditions :

- $w$  s'annule lorsque le matériau est dans son état naturel (i.e. sans sollicitation ni contraintes résiduelles) :

$$w(\underline{\underline{I}}) = 0 \quad (2.32)$$

- $w$  respecte le principe d'indifférence matérielle :

$$w(\underline{\underline{F}}) = w(\underline{\underline{QF}}), \quad \forall \underline{\underline{Q}} \in \mathcal{SO}_3 \quad (2.33)$$

- $w$  respecte les symétries du matériau :

$$w(\underline{\underline{F}}) = w(\underline{\underline{FQ}}), \quad \forall \underline{\underline{Q}} \in \mathcal{G} \subset \mathcal{SO}_3 \quad (2.34)$$

où  $\mathcal{G}$  est le groupe de symétrie du matériau. La condition (2.32) dépend de la forme choisie pour l'énergie de déformation, elle devra donc être vérifiée lors de l'établissement concret de la loi de comportement. La condition (2.33) est satisfaite par l'utilisation du tenseur de Cauchy-Green droit comme argument de  $w$  [CIA88]. En ce qui concerne la condition (2.34), nous verrons par la suite, à travers les cas de l'isotropie et le l'isotropie transverse, que le respect des symétries du matériau est satisfait par l'introduction d'invariants du tenseur de Cauchy-Green droit.

## 2.4.2 Hyperélasticité isotrope

Le groupe de symétrie d'un matériau isotrope est constitué de l'ensemble entier des rotations et des réflexions (i.e.  $\mathcal{G} = O_3$ ). La fonction  $w$  est donc isotrope au sens mathématique. Les théorèmes de représentation des fonctions à arguments vectoriels ou tensoriels statuent qu'une fonction d'un tenseur symétrique d'ordre deux est isotrope si et seulement si elle peut être représentée par une fonction de trois invariants du tenseur argument [ITS07] :

$$w(\underline{\underline{C}}) \text{ est isotrope} \Leftrightarrow \exists \tilde{w} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad w(\underline{\underline{C}}) = \tilde{w}(I_1, I_2, I_3) \quad (2.35)$$

Les invariants classiquement utilisés pour définir la fonction  $\tilde{w}$  sont les coefficients du polynôme caractéristique de  $\underline{\underline{C}}$  (ou les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  de  $\underline{\underline{F}}$  qui y sont liées directement) :

$$\begin{aligned} I_1 &= Tr(\underline{\underline{C}}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left( Tr(\underline{\underline{C}})^2 - Tr(\underline{\underline{C}}^2) \right) = (\lambda_1 \lambda_2)^2 + (\lambda_1 \lambda_3)^2 + (\lambda_2 \lambda_3)^2 \\ I_3 &= Det(\underline{\underline{C}}) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Dans un souci de simplicité, la même notation sera utilisée pour  $w$  et  $\tilde{w}$ . Différentes lois de comportement isotropes peuvent être trouvées dans la littérature : ces lois sont classiquement utilisées pour étudier le comportement de matériaux caoutchoutiques, ainsi que de certains tissus biologiques. Lorsque le matériau étudié est considéré comme incompressibles (ce qui est souvent le cas dans les

matériaux caoutchoutiques notamment), une liaison interne est souvent postulée sous la forme  $I_3 = 1$ , qui se traduit dans la loi de comportement par une pression hydrostatique  $p$  :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{2}{J} \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T - p \underline{\underline{I}} \quad (2.37)$$

#### 2.4.2.1 Modèle de Rivlin

Le modèle de Rivlin [RIV48] décrit l'énergie de déformation en une série de polynômes :

$$w = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (2.38)$$

avec  $C_{00} = 0$  afin que l'énergie de déformation s'annule lorsque le matériau n'est pas sollicité. Trois modèles classiques découlent de ce modèle de Rivlin :

- le modèle néo-hookéen :  $w = C_{10} (I_1 - 3)$
- le modèle de Mooney-Rivlin :  $w = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3)$
- le modèle de Yeoh :  $w = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3$

Afin que ces modèles assurent une bijection entre les contraintes et les déformations, les coefficients  $C_{ij}$  doivent être positifs.

#### 2.4.2.2 Modèle de Ogden

Dans le modèle de Ogden [OGD84], l'énergie de déformation est écrite en fonction les déformations principales  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  :

$$w = \sum_{k=1}^N \frac{\mu_k}{\alpha_k} (\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3) \quad (2.39)$$

On peut montrer que les modèles néo-hookéen et de Mooney-Rivlin sont également des cas particuliers du modèle d'Ogden. Ce modèle est particulièrement adapté aux très grandes déformations de matériaux caoutchoutiques.

#### 2.4.2.3 Modèles compressibles

Dans le cas de matériaux compressibles, des invariants réduits sont généralement utilisés, obtenus en opérant une décomposition dilatation/distorsion du tenseur gradient de la transformation :

$$\underline{\underline{F}} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{\bar{F}}} \quad (2.40)$$

Les modèles précédents sont alors utilisés en utilisant les invariants (dits « réduits »)  $\bar{I}_1$  et  $\bar{I}_2$  de  $\underline{\underline{\bar{F}}}$ , et un terme en  $I_3 = J^2$  permet d'ajouter au modèle l'énergie de déformation liée à la dilatation du matériau.

### 2.4.3 Hyperélasticité anisotrope

Dans le cas d'un matériau anisotrope,  $\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{O}_3$  donc la fonction  $w$  est anisotrope. Des tenseurs de structure  $\underline{\underline{M}}_i$  peuvent être définis pour caractériser mathématiquement le groupe de symétrie du matériau [BOE87]. Il a été montré [ZHA90] qu'il existe une fonction isotrope  $\hat{w}$  dépendant de  $\underline{\underline{C}}$  ainsi que de ces tenseurs de structure telle que :

$$w(\underline{\underline{C}}) = \hat{w}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{M}}_1, \dots, \underline{\underline{M}}_N) \quad (2.41)$$

Comme pour le cas isotrope, les théorèmes de représentation des fonctions isotropes à valeurs réelles et à arguments scalaires, vectoriels et/ou tensoriels, donnent alors l'existence d'un nombre fini de scalaires  $(I_1, \dots, I_n)$  ( $n$  dépendant du nombre et du type d'arguments de la fonction considérée) ainsi qu'une fonction  $\hat{w}$  tels que

$$\hat{w}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{M}}_i) = \hat{w}(I_1, \dots, I_n) \quad (2.42)$$

Quelques lois de comportement hyperélastiques anisotropes incompressibles sont récapitulées ci-après.

#### 2.4.3.1 Hyperélasticité isotrope transverse

Un matériau isotrope transverse est caractérisé, dans la configuration initiale, par une direction privilégiée  $\underline{\underline{M}}$  (normée). Cette direction permet de définir le tenseur de structure  $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}} \otimes \underline{\underline{M}}$  caractéristique du groupe de symétrie du matériau. D'après le théorème de représentation, la représentation du potentiel de déformation s'écrit dans ce cas [BOE87, QUA94, ITS07] :

$$w^{it} = w^{it}(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) \quad (2.43)$$

où  $I_1, I_2, I_3$  sont les invariants de  $\underline{\underline{C}}$  définis précédemment, et  $I_4 = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}}$  et  $I_5 = \underline{\underline{C}}^2 : \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}}^2 \cdot \underline{\underline{M}}$  sont des invariants mixtes correspondant au tenseur de structure  $\underline{\underline{M}}$ . Le second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff s'écrit alors :

$$\underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{C}}} = 2 \left( \frac{\partial w}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w}{\partial I_5} \frac{\partial I_5}{\partial \underline{\underline{C}}} \right) \quad (2.44)$$

L'expression (2.44) est la forme la plus générale des lois de comportement hyperélastique pour les matériaux isotropes transverse.

Un certain nombre de modèles isotropes transverses peuvent être trouvés dans la littérature. La plupart de ces modèles décrivent le comportement de matériaux dans lequel une matrice et un renfort peuvent être distingués : matériaux caoutchoutiques renforcés [AGO09, DIA04], composites fibres/matrice organique [GUO07], tissus organiques comme les parois artérielles [BAS09, HOL00] ou les ligaments [HIR00]. Une superposition du comportement de la matrice et du comportement du renfort est généralement utilisée, en additionnant deux densités d'énergie distinctes pour chacune de ces phases. Par ailleurs, ces modèles sont généralement définis en fonction des invariants classiques ou des élongations du matériau, ce qui ne sera pas le cas pour l'approche qui sera proposée dans ce manuscrit.

#### 2.4.3.2 Hyperélasticité orthotrope

Un matériau orthotrope possède trois directions privilégiées orthogonales (en configuration initiale). De même que pour l'isotropie transverse, ces directions privilégiées peuvent être caractérisées par trois vecteurs unitaires  $\underline{\underline{M}}_1, \underline{\underline{M}}_2$  et  $\underline{\underline{M}}_3$ . Le groupe de symétrie du matériau est alors caractérisé par les tenseurs de structure  $\underline{\underline{M}}_1 = \underline{\underline{M}}_1 \otimes \underline{\underline{M}}_1$ ,  $\underline{\underline{M}}_2 = \underline{\underline{M}}_2 \otimes \underline{\underline{M}}_2$  et  $\underline{\underline{M}}_3 = \underline{\underline{M}}_3 \otimes \underline{\underline{M}}_3$ . Nous supposons par la suite que les vecteurs  $\underline{\underline{M}}_1$  et  $\underline{\underline{M}}_2$  décrivent respectivement les directions chaîne et

trame du renfort, et que le vecteur  $\underline{M}_3$  est initialement orthogonal à ces deux directions en configuration initiale.

Le théorème de représentation permet alors la représentation de la fonction densité d'énergie de la façon suivante [QUA94, ITS07] :

$$w^{orth} = w^{orth}(I_1, I_2, I_3, I_{41}, I_{42}, I_{43}, I_{412}, I_{423}, I_{51}, I_{52}, I_{53}) \quad (2.45)$$

où  $I_1, I_2, I_3$  sont les invariants de  $\underline{C}$  définis par les équations (2.36), et où  $I_{4i} = \underline{C} : \underline{M}_i = \underline{M}_i \cdot \underline{C} \cdot \underline{M}_i$ ,  $I_{4ij} = \underline{M}_i \cdot \underline{C} \cdot \underline{M}_j$  et  $I_{5i} = \underline{C}^2 : \underline{M}_i = \underline{M}_i \cdot \underline{C}^2 \cdot \underline{M}_i$  sont des invariants mixtes correspondant aux tenseurs de structure.

#### 2.4.4 Différentes approches de modélisation

Deux approches classiques sont généralement distinguées lors de la mise en place de lois de comportement hyperélastiques : les approches phénoménologiques et les approches basées sur la microstructure. Les approches phénoménologiques ont pour but de reproduire le comportement d'un matériau à l'échelle macroscopique, sans introduire explicitement dans le modèle les mécanismes microscopiques à l'origine de ce comportement. A l'inverse, les approches basées sur la microstructure partent des mécanismes de déformation aux échelles inférieures pour remonter au comportement à l'échelle considérée.

## 2.5 Implémentation des lois de comportement dans Abaqus/Explicit

Les lois de comportement issues de la mécanique des milieux continus peuvent être implantées dans le code de calcul Abaqus/Explicit sous la forme de sous-routines utilisateur VUMAT (Vectorized User Material). Les paramètres d'entrée de la sous-routine contiennent les informations nécessaires à la mise en place de la plupart des lois de comportement de milieux continus.

Après un rappel sur les schémas d'intégration temporels les plus classiques, et plus particulièrement sur le schéma explicite en différences centrées, l'implémentation des sous-routines VUMAT sera détaillée.

### 2.5.1 Schémas d'intégration temporelle

L'analyse de problèmes dynamiques non linéaires nécessite la mise en place de schémas d'intégration temporelle itératifs permettant de résoudre pas à pas les équations de la dynamique :

$$M \ddot{u} + C \dot{u} = f^{ext} - f^{int} \quad (2.46)$$

où  $u$  est une matrice colonne contenant tous les degrés de liberté du modèle (déplacements des nœuds),  $M$  est la matrice de masse,  $C$  est la matrice d'amortissement, et  $f^{int}$  et  $f^{ext}$  sont des matrices colonnes contenant respectivement les efforts internes et externes aux nœuds.

La résolution de cette équation dans le temps se fait à l'aide d'un schéma d'intégration temporelle. Le temps est d'abord discrétisé en *incrément*s espacés par un *pas de temps*, ce pas de temps pouvant être constant ou variable selon le type de calcul effectué. L'équation (2.46) discrétisée en temps s'écrit, à l'incrément  $i$  :



$$M \ddot{u}^{(i)} + C \dot{u}^{(i)} = f^{ext,(i)} - f^{int,(i)} \quad (2.47)$$

Le schéma d'intégration temporel définit alors la façon dont le déplacement, la vitesse et l'accélération sont calculés à chaque incrément. Les schémas les plus répandus sont les *schémas de Newmark* [NEW59, KRE09]. Dans ces schémas, le déplacement et la vitesse sont d'abord développés en séries de Taylor puis tronqués au jerk avec deux coefficients de pondération sur celui-ci :

$$\begin{aligned} u^{(i+1)} &= u^{(i)} + \Delta t \dot{u}^{(i)} + \frac{(\Delta t^{(i)})^2}{2} \ddot{u}^{(i)} + \beta (\Delta t^{(i)})^2 \dot{\ddot{u}}^{(i)} \\ \dot{u}^{(i+1)} &= \dot{u}^{(i)} + \Delta t \ddot{u}^{(i)} + \gamma (\Delta t^{(i)})^2 \dot{\ddot{u}}^{(i)} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Il est ensuite supposé que l'accélération est linéaire sur l'incrément, ce qui permet d'écrire le jerk sous la forme :

$$\dot{\ddot{u}}^{(i)} = \frac{\ddot{u}^{(i+1)} - \ddot{u}^{(i)}}{\Delta t^{(i)}} \quad (2.49)$$

En remplaçant cette expression du jerk dans les formules (2.48), les expressions classiques du déplacement et de la vitesse associées au schéma de Newmark sont obtenues :

$$\begin{aligned} u^{(i+1)} &= u^{(i)} + \Delta t \dot{u}^{(i)} + \frac{(\Delta t^{(i)})^2}{2} \left( (1 - 2\beta) \ddot{u}^{(i)} + 2\beta \ddot{u}^{(i+1)} \right) \\ \dot{u}^{(i+1)} &= \dot{u}^{(i)} + \Delta t \left( (1 - \gamma) \ddot{u}^{(i)} + \gamma \ddot{u}^{(i+1)} \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  permettent de décliner les équations (2.50) et d'obtenir différents schémas d'intégration, adaptables au problème donné. La stabilité et la précision du schéma dépendent fortement de ces deux paramètres.

Lorsqu'il est possible de connaître le déplacement à l'incrément  $i + 1$  en fonction du déplacement, de la vitesse et de l'accélération à l'incrément  $i$ , le schéma est dit *explicite*. Par exemple, le couple  $\beta = 0, \gamma = 0$  donne un schéma *purement explicite* et le couple  $\beta = 0, \gamma = 1/2$  donne un schéma *explicite aux différences centrées*. A l'inverse, lorsque le déplacement à l'incrément  $i + 1$  en fonction du déplacement ne peut pas être calculé explicitement à partir de la vitesse et de l'accélération à l'incrément  $i$ , le schéma sera dit *schéma implicite*. Une description succincte de ces deux types de schémas est proposée ci-après.

### 2.5.1.1 Schémas implicites

Dans les schémas implicites, la connaissance du déplacement, de la vitesse et du déplacement à l'incrément  $i$  ne suffit pas à calculer le déplacement à l'incrément. Une prédiction de la solution est donc réalisée à partir des données connues à l'incrément  $i$ , puis un algorithme itératif (e.g. la méthode de Newton-Raphson) est mis en place pour corriger cette prédiction et faire converger la solution vers une solution satisfaisant l'équation d'équilibre. Les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  correspondant aux schémas implicites les plus classiques [HUG] sont récapitulés dans le Tableau 2.

La stabilité de ces schémas implicites dépend du choix de ces paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  : on montre qu'ils sont conditionnellement stables si  $\gamma \geq 1/2$  et  $\beta \leq \gamma/2$ . Dans ce cas il existe un pas de temps critique dont la valeur dépend des paramètres  $\beta$  et  $\gamma$ .

Lorsque  $2\beta \geq \gamma \geq 1/2$ , ces schémas sont inconditionnellement stables. Les pas de temps peuvent donc prendre des valeurs assez grandes, permettant ainsi d'effectuer un calcul en peu d'itérations. Dans le cas de matériaux ou de structures au comportement non-linéaire, la convergence de l'algorithme permettant de satisfaire l'équation de la dynamique à chaque incrément peut néanmoins s'avérer difficile, auquel cas une diminution du pas de temps est nécessaire, augmentant d'autant le temps de calcul. Pour des structures au comportement fortement linéaire (matériaux avec un raidissement exponentiel, conditions de contact sévères, ...) une forte diminution du pas de temps peut s'avérer nécessaire, pouvant mener à des temps de calcul prohibitifs.

Schéma	$\beta$	$\gamma$
Accélération moyenne	1/4	1/2
Accélération linéaire	1/6	1/2
Fox-Goodwin	1/12	1/2
Accélération moyenne modifiée	$(1+\gamma)^2/4$	1/2

Tableau 2. Schémas implicites classiques dérivés du schéma de Newmark

### 2.5.1.2 Schéma explicite aux différences centrées

Le schéma obtenu en prenant  $\beta=0$  et  $\gamma=1/2$  dans les formules de Newmark (2.50) s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 u^{(i+1)} &= u^{(i)} + \Delta t^{(i)} \dot{u}^{(i)} + \frac{(\Delta t^{(i)})^2}{2} \ddot{u}^{(i)} \\
 \dot{u}^{(i+1)} &= \dot{u}^{(i)} + \frac{\Delta t^{(i)}}{2} (\ddot{u}^{(i)} + \ddot{u}^{(i+1)})
 \end{aligned}
 \tag{2.51}$$

Bien que l'accélération  $\ddot{u}^{(i+1)}$  intervienne dans le calcul de la vitesse, il est possible de calculer le déplacement à l'incrément  $i$ , c'est pourquoi il s'agit d'un schéma explicite. En exprimant l'accélération dans (2.51)a et en substituant dans (2.51)b, les relations suivantes sont obtenues (pour un pas de temps constant) :

$$\begin{aligned}
 \dot{u}^{(i)} &= \frac{u^{(i+1)} - u^{(i-1)}}{2\Delta t} \\
 \ddot{u}^{(i)} &= \frac{u^{(i+1)} - 2u^{(i)} + u^{(i-1)}}{(\Delta t)^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.52}$$

Lorsque  $\beta=0$  et  $\gamma=1/2$ , les dérivées du déplacement sont donc approchées par différences centrées. C'est pourquoi ce schéma est dit *explicite aux différences centrées*. De façon numériquement équivalente, les équations (2.52) peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \dot{u}^{(i+1/2)} &= \frac{u^{(i+1)} - u^{(i)}}{\Delta t^{(i+1/2)}} \\
 \ddot{u}^{(i)} &= \frac{\dot{u}^{(i+1/2)} - \dot{u}^{(i-1/2)}}{\frac{1}{2}(\Delta t^{(i+1/2)} + \Delta t^{(i-1/2)})}
 \end{aligned}
 \tag{2.53}$$

Le principal intérêt d'écrire le schéma sous cette forme est de faciliter son implémentation. Les déplacements et les vitesses se mettent alors sous la forme :

$$\begin{aligned} u^{(i+1)} &= u^{(i)} + \Delta t^{(i+1/2)} \dot{u}^{(i+1/2)} \\ \dot{u}^{(i+1/2)} &= \dot{u}^{(i-1/2)} + \frac{1}{2} \left( \Delta t^{(i+1/2)} + \Delta t^{(i-1/2)} \right) \ddot{u}^{(i)} \end{aligned} \quad (2.54)$$

A chaque pas de temps, l'accélération  $\ddot{u}^{(i)}$  est calculée à l'aide de l'équation de la dynamique (2.47). Ce type de schéma est donc plus aisé à implémenter qu'un schéma implicite, car il n'est pas nécessaire de mettre en place un algorithme faisant converger la solution à chaque pas de temps. En contrepartie, la stabilité de ce schéma explicite est conditionnée par le pas de temps : celui-ci doit rester en dessous d'une valeur critique  $\Delta t_{crit}^{(i)}$  afin que la stabilité du schéma soit assurée. Ce pas de temps critique correspond au temps de propagation d'une onde de compression dans un élément. Il dépend donc de la plus petite dimension d'élément dans la discrétisation en éléments finis, de la densité du matériau et de sa rigidité. Le matériau pouvant avoir un comportement non-linéaire, l'incrément de temps critique doit être réévalué à chaque pas de temps. Un coefficient de sécurité  $\alpha$  est généralement mis en place afin de s'assurer que le pas de temps critique n'est pas dépassé :

$$\Delta t^{(i)} = \alpha \Delta t_{crit}^{(i)} \quad (2.55)$$

Abaqus/Explicit utilise ce schéma explicite aux différences centrées à pas de temps adaptatif [ABA08]. Un organigramme de principe de l'implémentation de ce schéma est proposé sur la figure 2-2. Le calcul du pas de temps critique associé à chaque élément est effectué par Abaqus de la façon suivante :

$$\Delta t_{crit}^{(i)} = \min_{\text{éléments}} \left( L^e \sqrt{\frac{\rho}{\lambda^e + 2\mu^e}} \right) \quad (2.56)$$

avec  $L^e$  la plus petite dimension de l'élément,  $\rho$  la densité du matériau dans l'élément, et  $\lambda^e$  et  $\mu^e$  des coefficients de Lamé équivalents. Cette façon de calculer le pas de temps critique convient pour les matériaux faiblement non-linéaires et/ou faiblement anisotropes. Pour les matériaux étudiés dans ce manuscrit, au comportement fortement anisotrope, un pas de temps critique maximum sera calculé manuellement et imposé à Abaqus, à l'aide de la formule suivante :

$$\Delta t_{crit}^{(i)} = \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{E}} \min_{\text{éléments}} (L^e) \quad (2.57)$$

où  $E$  est une estimation du module d'élasticité maximal du matériau, *pour le calcul considéré*. Pour une mèche de renfort tissé par exemple, en notant  $K_{dang}$  la rigidité maximale de la mèche dans la direction des fibres et  $S_0$  sa section dans la configuration initiale, le module  $E$  sera défini par :

$$E = \frac{K_{dang}}{0.8S_0} \quad (2.58)$$

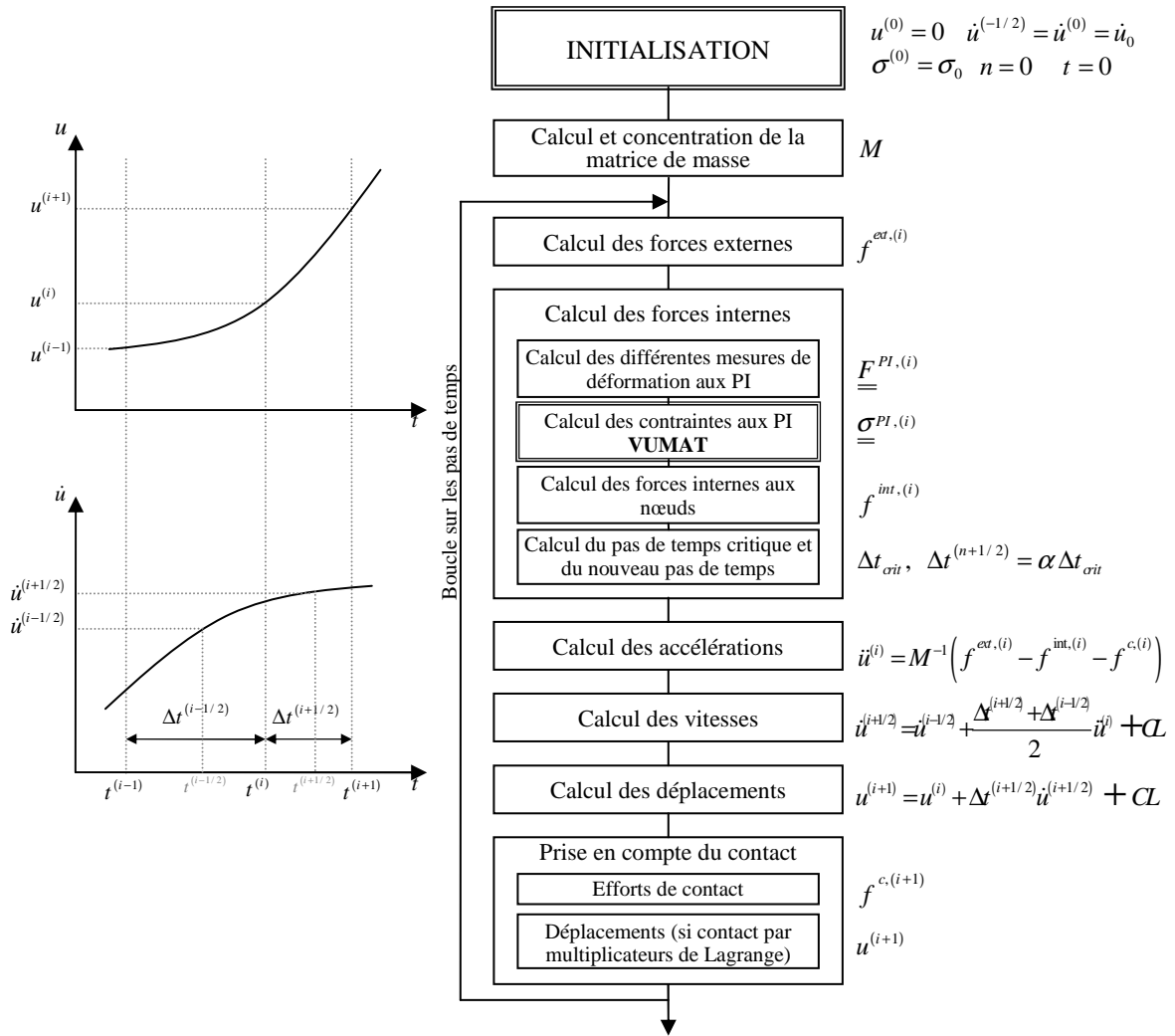


Figure 2-2. Schéma de principe de l'implémentation d'un code de calcul explicite en différences centrées à pas adaptatif

Le coefficient 0.8 permet de prendre en compte une éventuelle diminution de la section transverse de la mèche au cours du calcul, induisant une modification du module apparent. La figure 2-3 donne une estimation du pas de temps critique pour une mèche de fibres de verre, en fonction de la taille caractéristique de l'élément. L'algorithme de contact par pénalité étant susceptible de modifier légèrement le pas de temps critique (une diminution maximale de 4% est indiquée dans le manuel Abaqus), un coefficient de sécurité sera appliqué sur cette estimation lors des calculs.

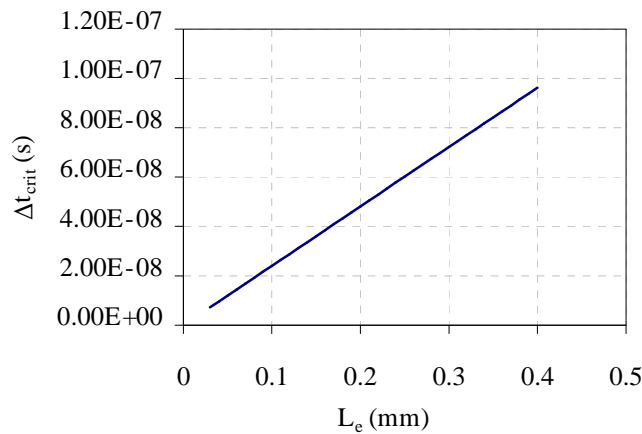


Figure 2-3. Estimation du pas de temps critique en fonction de la longueur caractéristique de l'élément pour la mèche de fibres de verre étudiée

Ainsi que la figure 2-2 le montre, la loi de comportement (et donc la subroutine VUMAT) intervient dans le calcul des forces internes, lorsque les contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^{Pl.(i)}$  induites par les déplacements  $u^{(i)}$  sont calculées. Les détails de l'implémentation de la subroutine VUMAT sont présentés dans la partie suivante.

## 2.5.2 Implémentation de subroutines VUMAT pour les matériaux hyperélastiques anisotropes

Nous avons vu que l'implémentation d'une loi de comportement dans Abaqus se fait par l'intermédiaire d'une subroutine VUMAT écrite en FORTRAN, qui permet de déterminer les contraintes dans le matériau en fonction de la transformation qui lui est imposée. Plusieurs lois de comportement hyperélastiques seront définies dans ce manuscrit pour des matériaux distincts, dont l'implémentation dans la subroutine utilisateur VUMAT sera similaire. Après une étude sur les bases utilisées par Abaqus pour projeter les différents tenseurs de déformation et de contrainte, les différentes étapes de l'implémentation de la VUMAT seront présentées.

### 2.5.2.1 Vérification des bases de projection des tenseurs caractéristiques de la transformation

Les matériaux étudiés étant généralement soumis à de grandes déformations, les directions d'anisotropie sont susceptibles d'être modifiées de façon significative au cours d'un calcul. Une bonne gestion de l'orientation du matériau au sein des éléments est donc primordiale pour le bon fonctionnement de la loi de comportement.

Selon la documentation Abaqus 6.8, les tenseurs fournis en entrée de la subroutine VUMAT sont projetés dans la base de Green-Naghdi, c'est-à-dire dans la base de l'orientation initiale tournée par le tenseur  $\underline{\underline{R}}$  de la décomposition polaire du gradient de la transformation. Toutefois, des informations contradictoires existent à ce propos dans certains documents annexes à la documentation du logiciel. Cette partie a donc pour objectif de déterminer les différents systèmes de coordonnées utilisés par Abaqus pour projeter les quantités d'intérêt.

#### Test mis en œuvre

L'objectif de ce test est de déterminer dans quelle base les grandeurs relatives à la transformation au point considéré sont fournies à la subroutine. Comme indiqué sur la figure 2-4, un élément sera d'abord transformé selon une translation et une rotation de corps rigide. Une elongation ainsi qu'un cisaillement de grande amplitude lui seront alors imposés afin que la base de Green-Naghdi se distingue de la base de l'orientation initiale attribuée à l'élément.

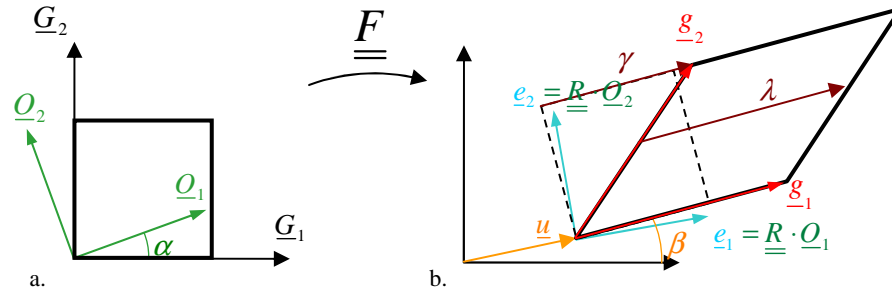


Figure 2-4. Cas-test utilisé pour la vérification des orientations dans Abaqus. (a) Etat initial. (b) Transformation de corps rigide  $(u, \beta)$  + cisaillement  $(\gamma)$  + élongation  $(\lambda)$

Les projections théoriques des tenseurs  $\underline{\underline{F}}$  et  $\underline{\underline{U}}$  seront d'abord déterminées puis comparées à celle obtenues dans Abaqus dans le cas particulier  $\{\alpha = 20^\circ; \beta = 15^\circ; \lambda = 1.5; \gamma = 1.2\}$ . Afin de simplifier les formules, le cosinus et le sinus de l'angle  $\alpha$  seront respectivement notés  $c_\alpha$  et  $s_\alpha$ , et ceux de l'angle  $\beta$  seront respectivement notés  $c_\beta$  et  $s_\beta$ .

Différentes matrices de composantes pour les tenseurs représentatifs de la transformation

La base globale du modèle (en noir sur la figure 2-4) est une base spatiale notée  $\underline{\mathcal{G}} = \{\underline{G}_1, \underline{G}_2, \underline{G}_3\}$ . Une seconde base spatiale  $\underline{\mathcal{O}} = \{\underline{O}_1, \underline{O}_2, \underline{O}_3\}$  (en vert sur la figure 2-4) définit l'orientation initiale du matériau par une rotation d'angle  $\alpha$  autour du vecteur  $\underline{G}_3$ . Une base orthonormée  $\underline{\mathcal{E}} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ , appelée base de Green-Naghdi (en bleu sur la figure 2-4), est également définie : confondue avec la base de l'orientation initiale en configuration initiale, elle est entraînée en rotation par le tenseur  $\underline{\underline{R}}$  issu de la décomposition polaire du gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}$ . Finalement, les vecteurs matériels covariants  $\underline{g}_i$  sont introduits (en rouge sur la figure 2-4).

Les composantes  $\underline{\underline{F}}^{ij}$ ,  $\widehat{F}^{ij}$  et  $\widehat{F}^{ij}$  de  $\underline{\underline{F}}$  dans les bases  $\underline{\mathcal{G}}$ ,  $\underline{\mathcal{O}}$  et  $\underline{\mathcal{E}}$  (respectivement) seront calculées puis comparées aux composantes fournies par Abaqus à la subroutine VUMAT. Dans ces bases, le gradient de la transformation s'écrit :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{g}_i \otimes \underline{G}^i = F^{ij} \underline{G}_i \otimes \underline{G}_j = \widehat{F}^{ij} \underline{O}_i \otimes \underline{O}_j = \widehat{F}^{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (2.59)$$

Précisons que, les bases  $\underline{\mathcal{G}}$ ,  $\underline{\mathcal{O}}$  et  $\underline{\mathcal{E}}$  étant orthonormées, on a les relations suivantes :

$$\underline{G}_i = \underline{G}^i, \underline{O}_i = \underline{O}^i, \underline{e}_i = \underline{e}^i \quad (2.60)$$

Exprimons tout d'abord les composantes de  $\underline{\underline{F}}$  dans la base globale  $\underline{\mathcal{G}}$  :

$$\begin{aligned} F^{ij} &= \underline{G}_i \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{G}_j = \underline{G}_i \cdot \left( \underline{g}_k \otimes \underline{G}^k \right) \cdot \underline{G}_j \\ &= \left( \underline{G}_i \cdot \underline{g}_k \right) \cdot \left( \underline{G}^k \cdot \underline{G}_j \right) = \delta_{kj} \underline{G}_i \cdot \underline{g}_k \\ &= \underline{G}_i \cdot \underline{g}_j \end{aligned} \quad (2.61)$$

Dans la base  $\underline{\mathcal{G}}$ , les vecteurs covariants  $\underline{g}_i$  ont pour composantes :

$$\begin{bmatrix} \underline{g}_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} \lambda c_\beta \\ \lambda s_\beta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{g}_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} -s_\beta + \gamma c_\beta \\ c_\beta + \gamma s_\beta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{g}_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

On a donc :

$$\begin{bmatrix} \underline{F} \end{bmatrix}_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} \lambda c_\beta & -s_\beta + \gamma c_\beta & 0 \\ \lambda s_\beta & c_\beta + \gamma s_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\alpha=20^\circ, \beta=15^\circ \\ \lambda=1.5, \gamma=1.2}}{=} \begin{pmatrix} 1.449 & 0.900 & 0 \\ 0.388 & 1.277 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Dans la base  $\mathcal{O}$ , les composantes  $\widehat{F}^{ij}$  de  $\underline{F}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \widehat{F}^{ij} &= \underline{O}_i \cdot \underline{F} \cdot \underline{O}_j = \underline{O}_i \cdot (F^{kl} \underline{G}_k \otimes \underline{G}_l) \cdot \underline{O}_j \\ &= F^{kl} (\underline{O}_i \cdot \underline{G}_k) (\underline{G}_l \cdot \underline{O}_j) \end{aligned} \quad (2.64)$$

On introduit le tenseur  $\underline{\Delta}$  de rotation de la base  $\mathcal{G}$  à la base  $\mathcal{O}$ , ainsi que ses composantes dans la base  $\mathcal{G}$  :

$$\underline{\Delta} = \Delta^{ij} \underline{G}_i \otimes \underline{G}_j \quad \text{et} \quad \underline{O}_i = \underline{\Delta} \cdot \underline{G}_i \quad (2.65)$$

Avec ces notations, l'expression (2.64) s'écrit :

$$\begin{aligned} \widehat{F}^{ij} &= F^{kl} \left( (\underline{\Delta} \cdot \underline{G}_i) \cdot \underline{G}_k \right) \left( \underline{G}_l \cdot (\underline{\Delta} \cdot \underline{G}_j) \right) \\ &= (\Delta^T)^{ik} F^{kl} \Delta^{lj} \end{aligned} \quad (2.66)$$

La projection du tenseur gradient de la transformation dans la base  $\mathcal{O}$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{F} \end{bmatrix}_{\mathcal{O}} &= \begin{pmatrix} \lambda c_\alpha^2 c_\beta + (c_\beta + \gamma s_\beta) s_\alpha^2 & (\gamma c_\beta - s_\beta) c_\alpha^2 - \lambda s_\alpha^2 s_\beta & 0 \\ + (\gamma c_\beta + (\lambda - 1) s_\beta) c_\alpha s_\alpha & + ((1 - \lambda) c_\beta + \gamma s_\beta) c_\alpha s_\alpha & 0 \\ \lambda c_\alpha^2 s_\beta + (-\gamma c_\beta + s_\beta) s_\alpha^2 & (c_\beta + \gamma s_\beta) c_\alpha^2 + \lambda s_\alpha^2 c_\beta & 0 \\ + ((1 - \lambda) c_\beta + \gamma s_\beta) c_\alpha s_\alpha & - (\gamma c_\beta + (\lambda - 1) s_\beta) c_\alpha s_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\substack{\alpha=20^\circ, \beta=15^\circ \\ \lambda=1.5, \gamma=1.2}}{=} \begin{pmatrix} 1.843 & 0.694 & 0 \\ 0.182 & 0.883 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.67)$$

On peut ensuite écrire les composantes de  $\underline{\underline{F}}$  dans la base  $\mathcal{E}$  :

$$\begin{aligned}\hat{F}^{ij} &= \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{e}_j \\ &= \hat{F}^{kl} (\underline{e}_i \cdot \underline{O}_k) (\underline{O}_l \cdot \underline{e}_j)\end{aligned}\quad (2.68)$$

On note  $\underline{R}$  la rotation « moyenne » de la matière issue de la décomposition polaire du gradient de la transformation, et  $R_{ij}$  ses composantes dans la base  $\mathcal{O}$  :

$$\underline{R} = R_{ij} \underline{O}_i \otimes \underline{O}_j \text{ et, par définition, } \underline{e}_i = \underline{R} \cdot \underline{O}_i \quad (2.69)$$

Avec ces notations, les composantes de  $\underline{\underline{F}}$  dans la base  $\mathcal{E}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}\hat{F}^{ij} &= \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{e}_j \\ &= \hat{F}^{kl} \left( (\underline{R} \cdot \underline{O}_i) \cdot \underline{O}_k \right) \left( \underline{O}_l \cdot (\underline{R} \cdot \underline{O}_j) \right) \\ &= \hat{F}^{kl} \left( (R_{mn} (\underline{O}_m \otimes \underline{O}_n) \cdot \underline{O}_i) \cdot \underline{O}_k \right) \left( \underline{O}_l \cdot (R_{op} (\underline{O}_o \otimes \underline{O}_p) \cdot \underline{O}_j) \right) \\ &= R_{ik}^T \hat{F}^{kl} R_{lj}\end{aligned}\quad (2.70)$$

Finalement,

$$\left[ \underline{\underline{F}} \right]_{\mathcal{E}} = \begin{matrix} \alpha=20^\circ, \beta=15^\circ \\ \lambda=1.5, \gamma=1.2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1.651 & 0.839 & 0 \\ 0.326 & 1.074 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

#### Analyse du résultat

La déformation précédente est reproduite à l'identique dans un calcul Abaqus (figure 2-5). Les valeurs du gradient de la transformation et des dilatations, fournies par Abaqus à la subroutine, sont stockées à chaque incrément.

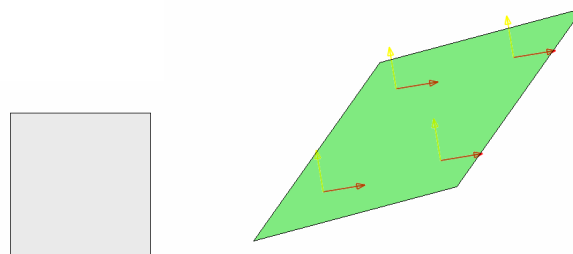


Figure 2-5. Implémentation du test des orientations dans Abaqus. La base représentée est la base de Green-Naghdi présentée précédemment.

Après calcul, les projections des tenseurs représentatifs de la transformation fournis par Abaqus sont les suivantes :



$$\underline{\underline{F}}_{Abaqus} = \begin{pmatrix} 1.843 & 0.6942 & 0 \\ 0.1821 & 0.8825 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

et

$$\underline{\underline{U}}_{Abaqus} = \begin{pmatrix} 1.643 & 0.1572 & 0 \\ 0.1572 & 0.9282 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

En comparant les valeurs obtenues avec les valeurs calculées précédemment, on peut conclure sur la problématique posée : contrairement à ce qu'indique la documentation Abaqus, les composantes du tenseur gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}$  et du tenseur des dilatations  $\underline{\underline{U}}$  sont fournies à la subroutine VUMAT dans la base de l'orientation initiale de l'élément  $\mathcal{O}$ <sup>4</sup>. Comme expliqué précédemment, cette base est une base spatiale fixe par rapport au repère global du modèle. Notons toutefois que cette conclusion n'est valable que lorsqu'une orientation a été attribuée au matériau par le mot clé \**ORIENTATION* : dans le cas contraire, la base de projection de  $\underline{\underline{F}}$  est la base mixte  $\mathcal{C} \otimes \mathcal{O}$ .

#### 2.5.2.2 Ecriture de la loi de comportement

Comme cela a été déterminé dans le paragraphe précédent, le tenseur gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}$  et le tenseur des dilatations  $\underline{\underline{U}}$  sont fournis à la subroutine VUMAT dans la base de l'orientation initiale de l'élément  $\mathcal{O}$ . La subroutine doit calculer le tenseur de contrainte issu de ces données dans la base de l'orientation initiale tournée de la rotation  $\underline{\underline{R}}$  (i.e. la base de Green-Naghdi  $\mathcal{E}$ ).

Afin de limiter le nombre d'opérations effectuées dans la VUMAT (qui ont une influence significative sur le temps de calcul), quelques simplifications peuvent être effectuées dans l'expression des projections matricielles des tenseurs précédents. Nous cherchons à déterminer la projection du tenseur des contraintes de Cauchy dans la base de Green-Naghdi  $\mathcal{E}$ . Rappelons que ce tenseur correspond au transport par  $\underline{\underline{F}}$  du second tenseur de Piola-Kirchhoff, ce qui permet d'écrire les relations matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}_{\mathcal{E}} &= \frac{1}{J} \underline{\underline{F}}_{\mathcal{E}} \cdot \underline{\underline{S}}_{\mathcal{E}} \cdot \underline{\underline{F}}_{\mathcal{E}}^T \\ \underline{\underline{\sigma}}_{\mathcal{O}} &= \frac{1}{J} \underline{\underline{F}}_{\mathcal{O}} \cdot \underline{\underline{S}}_{\mathcal{O}} \cdot \underline{\underline{F}}_{\mathcal{O}}^T \end{aligned} \quad (2.74)$$

Nous disposons initialement de  $\underline{\underline{F}}$  et  $\underline{\underline{U}}$  dans la base de l'orientation initiale  $\mathcal{O}$ . Le tenseur de Cauchy-Green droit peut donc être exprimé dans cette même base :

$$\underline{\underline{C}}_{\mathcal{O}} = \underline{\underline{F}}_{\mathcal{O}}^T \cdot \underline{\underline{F}}_{\mathcal{O}} = \underline{\underline{U}}_{\mathcal{O}}^2 \quad (2.75)$$

---

<sup>4</sup> Ce résultat diffère lorsque le mot clé \**ORIENTATION* n'est pas utilisé dans la mise en donnée de la simulation considérée. Ce résultat diffère également dans le cas des subroutines UMAT utilisées pour implémenter les lois de comportement dans le code de calcul Abaqus/Standard.

Nous avons vu que dans le cadre de l'hyperélasticité, le second tenseur de Piola-Kirchhoff dérive d'un potentiel énergétique  $w$ . Il est donc possible à ce stade de calculer le second tenseur de Piola-Kirchhoff dans la base de l'orientation initiale :

$$[\underline{S}]_{\circ} = \left[ 2 \frac{\partial w}{\partial \underline{C}} \right]_{\circ} \tag{2.76}$$

Par définition de la base de Green-Naghdi, le changement de base des composantes du tenseur de Cauchy de la base de l'orientation initiale vers la base de Green-Naghdi s'écrit :

$$[\underline{\sigma}]_{\varepsilon} = [\underline{R}]_{\circ}^T \cdot [\underline{\sigma}]_{\circ} \cdot [\underline{R}]_{\circ} \tag{2.77}$$

En utilisant (2.74), cela donne :

$$\begin{aligned} [\underline{\sigma}]_{\varepsilon} &= \frac{1}{J} [\underline{R}]_{\circ}^T \cdot [\underline{F}]_{\circ} \cdot [\underline{S}]_{\circ} \cdot [\underline{F}]_{\circ}^T \cdot [\underline{R}]_{\circ} \\ &= \frac{1}{J} [\underline{R}^T \cdot \underline{F}]_{\circ} \cdot [\underline{S}]_{\circ} \cdot [\underline{F}^T \cdot \underline{R}]_{\circ} \\ &= \frac{1}{J} [\underline{U}]_{\circ} \cdot [\underline{S}]_{\circ} \cdot [\underline{U}^T]_{\circ} \end{aligned} \tag{2.78}$$

Dans la formule (2.78), toutes les grandeurs du terme de droite sont connues. La structure de la subroutine VUMAT, résultant des équations précédentes, est décrite sur la figure 2-6.

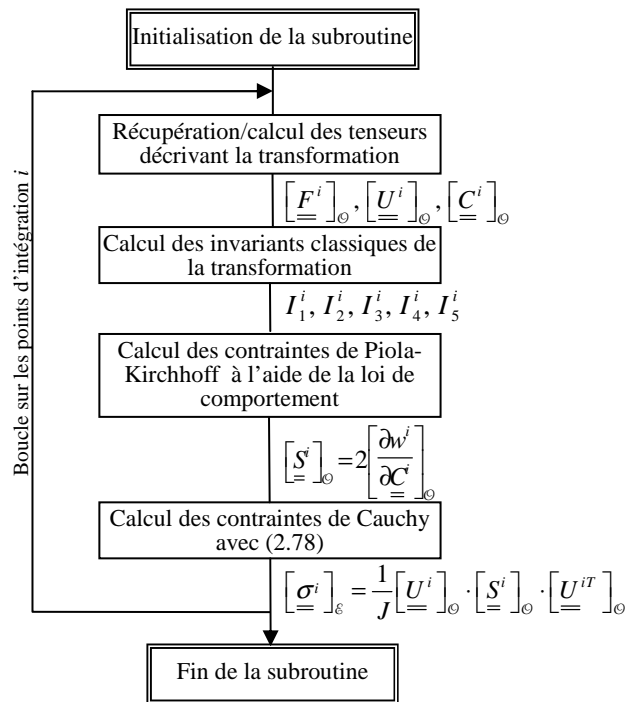


Figure 2-6. Structure de la subroutine VUMAT

## Conclusion du chapitre 2

A travers ce chapitre, les bases de la mécanique des milieux continus ont été abordées. La formulation générale des lois de comportement hyperélastiques isotropes et anisotropes en grandes déformations a été introduite. Ce formalisme nous permettra, dans les chapitres qui suivent, de définir de nouvelles lois de comportement adaptées aux renforts tissés.

Le principe de fonctionnement du code de calcul Abaqus/Explicit a également été décrit dans les grandes lignes. La compréhension du fonctionnement des codes de calcul, industriels ou non, est primordiale lorsque les calculs réalisés sortent du cadre des matériaux élastiques linéaires en petites perturbation : elle permet d'avoir une vision globale sur l'algorithme utilisé et sur les différents problèmes qui peuvent être rencontrés. L'un des objectifs de cette section était donc d'avoir les clés nécessaires à une utilisation du code de calcul adaptée au problème traité, afin de pouvoir résoudre les difficultés liées à l'implémentation des lois de comportement hyperélastiques pour les renforts tissés.

Finalement, la méthodologie nécessaire à l'implémentation de lois de comportement dans Abaqus/Explicit a été décrite. Nous disposons donc du formalisme et des outils nécessaires à la création et à l'implémentation de lois de comportement hyperélastiques adaptées au comportement mécanique des renforts tissés de composites.

# Chapitre 3      Loi de comportement

## hyperélastique pour la mèche de renfort tissé

*Après la présentation générale des renforts tissés et de leur comportement, nous avons vu au chapitre 1 qu'une loi de comportement hypoélastique a été développée dans [BAD08] pour modéliser le comportement de la mèche de renfort tissé. Néanmoins, cette loi de comportement présente quelques inconvénients, notamment en ce qui concerne la définition de la dérivée objective nécessaire à sa formulation, et en ce qui concerne le contrôle de l'énergie stockée dans le matériau. Le formalisme nécessaire à la définition d'une loi de comportement hyperélastique, et à son implémentation dans le code de calcul Abaqus/Explicit, a été introduit au chapitre 2.*

*Sur ces bases, une approche hyperélastique sera proposée dans ce chapitre pour modéliser le comportement mécanique de la mèche de renfort tissé à l'échelle mésoscopique. Après avoir précisé les hypothèses de modélisation qui seront utilisées, des invariants porteurs de sens physique seront définis, à partir desquels le potentiel de déformation hyperélastique constituant la loi de comportement de notre matériau sera écrit. Cette loi de comportement sera alors implantée dans le code de calcul Abaqus/Explicit et identifiée à l'aide de différents essais expérimentaux. Nous verrons que la réalisation d'essais fiables sur une mèche seule est difficile, ce qui nous obligera à identifier la plupart des paramètres de la loi de comportement par méthode inverse à l'aide d'essais à l'échelle macroscopique issus de la littérature. Des cas de chargement plus complexes, de tension biaxiale déséquilibrée et de cisaillement notamment, seront alors comparés aux expériences correspondantes afin de tester les performances et les limites de la loi de comportement proposée.*

### Sommaire du chapitre

3.1	HYPOTHESES SUR LE COMPORTEMENT DE LA MECHE.....	69
3.1.1	Isotropie transverse de la mèche.....	69
3.1.2	Modes de déformation de la mèche.....	69
3.2	DEFINITION D'INVARIANTS PORTEURS DE SENS PHYSIQUE.....	70
3.2.1	Une représentation particulière du gradient de la transformation... ..	70
3.2.2	Invariants correspondant aux modes de déformation de la mèche.....	72
3.2.3	Dérivation des invariants.....	74
3.2.4	Bilan sur les invariants.....	76
3.3	ENERGIES DE DEFORMATION POUR CHACUN DES MODES DE DEFORMATION.....	77
3.3.1	Energie d'élongation.....	77
3.3.2	Energie de compaction.....	79
3.3.3	Energie de distorsion dans le plan transverse.....	79
3.3.4	Energie de cisaillement transverse.....	80
3.3.5	Bilan sur la loi de comportement.....	81
3.4	IDENTIFICATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT.....	84
3.4.1	Modélisation géométrique des renforts étudiés.....	84
3.4.2	Identification du comportement des mèches du taffetas de verre.....	91
3.4.3	Identification du comportement des mèches du sergé de carbone.....	95

3.4.4 <i>Bilan sur la méthode d'identification de la loi de comportement</i> .....	98
3.5 COMPARAISONS SIMULATIONS/EXPERIENCES .....	99
3.5.1 <i>Tension biaxiale</i> .....	99
3.5.2 <i>Cisaillement du renfort tissé dans le plan</i> .....	100
3.6 CONCLUSION DU CHAPITRE 3 .....	104

## 3.1 Hypothèses sur le comportement de la mèche

### 3.1.1 Isotropie transverse de la mèche

Une mèche est un assemblage de fibres orientées approximativement dans la même direction (figure 3-1). Cet assemblage est supposé suffisamment compact pour que les fibres ne puissent pas se déplacer de façon indépendante. Cette hypothèse permet de considérer ce matériau « mèche » comme un matériau continu. Dans [LAT11], des essais mécaniques sont réalisés à l'intérieur d'un tomographe à rayons X. Des observations précises de la déformation microscopique et des mouvements des fibres au sein d'une mèche ont ainsi pu être réalisées, montrant le bien fondé d'une telle approche continue. Le matériau homogénéisé correspondant présente alors une direction privilégiée, celle des fibres. La distribution des fibres dans une section de la mèche déformée a pu être analysée par tomographie X [BAD08b], et il a été conclu que cette distribution est isotrope pour les matériaux étudiés dans ce manuscrit. Notons que certains matériaux dont la structure est plus complexe ne satisfont pas cette hypothèse [KOI06]. Le matériau homogénéisé « mèche », sera donc supposé *isotrope transverse*.

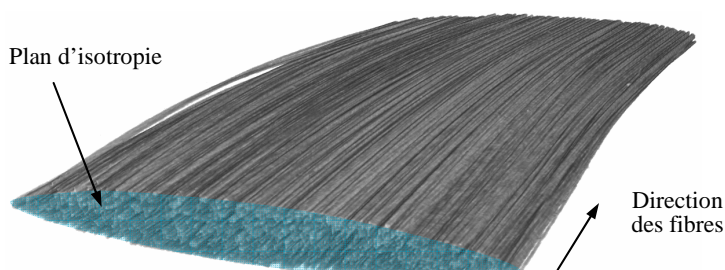


Figure 3-1. Isotropie transverse de la mèche de renfort tissé. Image obtenue par tomographie X

### 3.1.2 Modes de déformation de la mèche

L'approche utilisée dans ce chapitre pour modéliser le comportement mécanique de la mèche est basée sur une description de ses modes de déformation. Ces modes de déformation découlent directement de la microstructure de la mèche, c'est-à-dire de l'arrangement des fibres à l'échelle microscopique. Les quatre modes de déformation introduits dans la section 1.3.1 (page 22) seront retenus : l'*élongation* dans la direction des fibres, la *compaction* dans le plan transverse, la *distorsion* dans le plan transverse et le *cisaillement transverse*. Ces modes de déformation sont illustrés sur la figure 3-2.

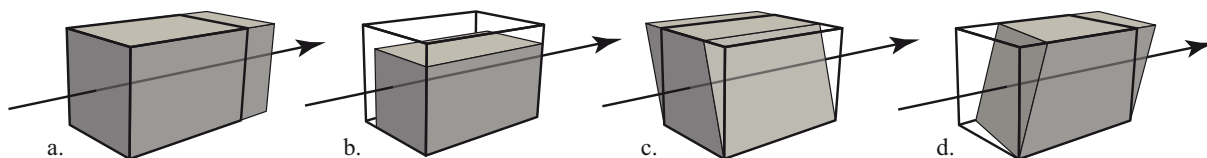


Figure 3-2. Modes de déformation de la mèche (la flèche désigne la direction des fibres) :  
(a) élongation (b) compaction (c) distorsion (d) cisaillement transverse

Si le comportement de la mèche en élongation est relativement aisé à caractériser expérimentalement, il n'en va pas de même pour les trois autres modes de déformation. En effet, le tissage avec les autres mèches du renfort et l'ensimage apportent une cohésion à la mèche, qui change lorsque la mèche est manipulée une fois sortie du renfort. Il est donc difficile d'envisager des essais de caractérisation de la compaction et de la distorsion sur une mèche isolée du renfort.

Pour la caractérisation et l'identification de ces deux derniers modes de déformation, deux approches sont envisageables : la réalisation de simulations à l'échelle microscopique [DUR10], ou l'utilisation d'une méthode inverse à partir d'essais sur des éprouvettes de renfort tissé.

## 3.2 Définition d'invariants porteurs de sens physique

Une approche basée sur une décomposition multiplicative du gradient de la transformation est proposée ici, afin de déterminer des invariants porteurs de sens physique correspondant à chacun des modes de déformation précédents. Cette approche s'inspire de l'approche établie dans [CRI01], mais le matériau étudié étant différent, la décomposition du gradient de la transformation qui en résulte est différente.

Une base  $\{\underline{M}, \underline{N}_1, \underline{N}_2\}$  sera d'abord recherchée, dans laquelle le gradient de la transformation peut être écrit, pour un matériau isotrope transverse, d'une façon qui autorise des décompositions multiplicatives simples. Une telle décomposition sera alors effectuée, qui permettra de mettre en évidence les parties du gradient de la transformation décrivant chacun des modes de déformation de la mèche. Chacun des termes de cette décomposition pourra être caractérisé par un invariant dit « physique » que nous relierons aux invariants classiques introduits au chapitre précédent (§2.4.3.1, p. 54).

### 3.2.1 Une représentation particulière du gradient de la transformation...

Soit  $\underline{M}$  le vecteur (normé) d'anisotropie du matériau en configuration initiale, et  $\underline{m}$  son image en configuration actuelle :

$$\underline{m} = \underline{F} \cdot \underline{M} \quad (3.1)$$

On recherche deux plans contenant ce vecteur d'anisotropie, orthogonaux en configuration initiale et conservant cette orthogonalité en configuration actuelle. Ces plans sont caractérisés par leurs normales, notées  $\underline{N}_1$  et  $\underline{N}_2$  en configuration initiale et  $\underline{n}_1$  et  $\underline{n}_2$  en configuration actuelle. La relation entre la normale à un plan dans la configuration de référence et dans la configuration déformée sont obtenues à l'aide de la formule de Nanson (§2.1.1.2, p. 47) :

$$\underline{n}_1 = \frac{\underline{F}^{-T} \cdot \underline{N}_1}{\|\underline{F}^{-T} \cdot \underline{N}_1\|} \quad \text{et} \quad \underline{n}_2 = \frac{\underline{F}^{-T} \cdot \underline{N}_2}{\|\underline{F}^{-T} \cdot \underline{N}_2\|} \quad (3.2)$$

Afin que ces vecteurs soient orthogonaux et normés en configuration initiale comme en configuration actuelle, et pour que les plans qu'ils définissent contiennent la direction  $\underline{M}$  d'anisotropie du matériau, ces vecteurs doivent vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{N}_1 \cdot \underline{N}_2 &= 0, \quad \underline{M} \cdot \underline{N}_1 = 0, \quad \underline{M} \cdot \underline{N}_2 = 0, \\ \underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 &= 0, \quad \underline{m} \cdot \underline{n}_1 = 0, \quad \underline{m} \cdot \underline{n}_2 = 0, \\ \|\underline{N}_1\| &= \|\underline{N}_2\| = 1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

La condition

$$\underline{N}_1 \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{N}_1 \leq \underline{N}_2 \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{N}_2 \quad (3.4)$$

sera également requise, qui porte uniquement sur le choix de l'ordre des vecteurs  $\underline{N}_1$  et  $\underline{N}_2$ . Il a été montré dans [CRI01] que les conditions précédentes peuvent être satisfaites en définissant les vecteurs  $\underline{N}_1$  et  $\underline{N}_2$  comme les vecteurs propres de la sous matrice de  $\left[ \underline{\underline{C}}^{-1} \right]_{\{\underline{M}, \underline{N}_1, \underline{N}_2\}}$  obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne :

$$\{\underline{N}_1, \underline{N}_2\} = \text{VecteursPropres} \left( \begin{bmatrix} C_{22}^{-1} & C_{23}^{-1} \\ C_{23}^{-1} & C_{33}^{-1} \end{bmatrix} \right) \quad (3.5)$$

Les bases  $\{\underline{M}, \underline{N}_1, \underline{N}_2\}$  et  $\{\underline{m}, \underline{n}_1, \underline{n}_2\}$  ainsi définies sont donc orthonormées, et il existe une rotation  $\underline{\underline{Q}}$  permettant de passer de l'une à l'autre :

$$\{\underline{m}, \underline{n}_1, \underline{n}_2\} = \underline{\underline{Q}} \cdot \{\underline{M}, \underline{N}_1, \underline{N}_2\} \quad (3.6)$$

Le tenseur gradient de la transformation peut alors être écrit dans un système de coordonnées dans lequel l'observateur serait fixe par rapport à la base  $\{\underline{M}, \underline{N}_1, \underline{N}_2\}$  :

$$\underline{\underline{\tilde{F}}} = \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \quad (3.7)$$

Rappelons que si  $\underline{\underline{\tilde{F}}}$  et  $\underline{\underline{F}}$  ne sont pas identiques, le principe d'objectivité impose que les énergies de déformation découlant de ces deux tenseurs soient identiques. Par ailleurs, les relations suivantes montrent que  $\underline{M}$  est un vecteur propre de  $\underline{\underline{\tilde{F}}}$ , ainsi que de son inverse  $\underline{\underline{\tilde{F}}}^{-1}$  :

$$\underline{\underline{\tilde{F}}} \cdot \underline{M} = \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{M} = \sqrt{\underline{M} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{M}} \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{m} = \sqrt{\underline{M} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{M}} \underline{M} \quad (3.8)$$

$$\underline{M} = \underline{\underline{\tilde{F}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\tilde{F}}} \cdot \underline{M} = \sqrt{\underline{M} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{M}} \underline{\underline{\tilde{F}}}^{-1} \underline{M} \Rightarrow \underline{\underline{\tilde{F}}}^{-1} \underline{M} = \frac{1}{\sqrt{\underline{M} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{M}}} \underline{M} \quad (3.9)$$

Les propriétés (3.8) et (3.9) permettent de faire apparaître les relations suivantes :

$$\underline{N}_1 \cdot \underline{\underline{\tilde{F}}}^{-1} \cdot \underline{M} = 0, \underline{N}_2 \cdot \underline{\underline{\tilde{F}}}^{-1} \cdot \underline{M} = 0, \underline{N}_1 \cdot \underline{\underline{\tilde{F}}}^{-1} \cdot \underline{N}_2 = 0, \underline{N}_2 \cdot \underline{\underline{\tilde{F}}}^{-1} \cdot \underline{N}_1 = 0 \quad (3.10)$$

Ces relations impliquent que la matrice de  $\underline{\underline{\tilde{F}}}^{-1}$  dans la base  $\{\underline{M}, \underline{N}_1, \underline{N}_2\}$  est de la forme suivante :

$$\left[ \underline{\underline{\tilde{F}}}^{-1} \right]_{\{\underline{M}, \underline{N}_1, \underline{N}_2\}} = \begin{bmatrix} f_m^{-1} & f_{m1}^{-1} & f_{m2}^{-1} \\ 0 & f_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & f_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

et par inversion la représentation matricielle de  $\underline{\underline{\tilde{F}}}$  s'écrit dans cette base :



$$\underline{\underline{\tilde{F}}}_{\{M, N_1, N_2\}} = \begin{bmatrix} f_m & f_{m1} & f_{m2} \\ 0 & f_{11} & 0 \\ 0 & 0 & f_{22} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Tout tenseur gradient de la transformation admet donc une représentation sous cette forme. Comme nous le verrons par la suite, cette représentation permet une interprétation physique simple de chacune des composantes de  $\underline{\underline{\tilde{F}}}$ . Elle permet également, par la forme de la matrice obtenue, de réaliser simplement des décompositions multiplicatives du gradient de la transformation, et notamment d'isoler chacun des modes de déformation de la mèche qui sont sollicités.

### 3.2.2 Invariants correspondant aux modes de déformation de la mèche

#### 3.2.2.1 Décomposition multiplicative du gradient de la transformation

La représentation (3.12) du gradient de la transformation permet de décomposer aisément celui-ci de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\tilde{F}}}_{\{M, N_1, N_2\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{F}}_{\text{elong}}}_{\beta} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{f_{11}f_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{f_{11}f_{22}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{F}}_{\text{comp}}}_{\beta} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{f_{11}/f_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{f_{22}/f_{11}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{F}}_{\text{dist}}}_{\beta} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & f_{m1} & f_{m2} \\ 0 & f_m & f_m \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{F}}_{\text{sh}}}_{\beta} \quad (3.13)$$

Ce faisant, les différents modes de déformation de la mèche de renfort tissé sont mis en évidence : les matrices  $\underline{\underline{F}}_{\text{elong}}$ ,  $\underline{\underline{F}}_{\text{comp}}$ ,  $\underline{\underline{F}}_{\text{dist}}$  et  $\underline{\underline{F}}_{\text{sh}}$  obtenues permettent de décrire respectivement l'élongation dans la direction des fibres, la compaction et la distorsion dans le plan transverse, et le cisaillement transverse. En notant

$$\alpha_{\text{elong}} = f_m, \quad \alpha_{\text{comp}} = \sqrt{f_{11}f_{22}}, \quad \alpha_{\text{dist}} = \sqrt{f_{11}/f_{22}}, \quad \alpha_{\text{sh}} = \sqrt{\frac{f_{m1}^2 + f_{m2}^2}{f_m^2}}, \quad \tan(\gamma) = \frac{f_{m1}}{f_{m2}} \quad (3.14)$$

la décomposition précédente s'écrit

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\tilde{F}}}_{\{M, N_1, N_2\}} &= \begin{bmatrix} \alpha_{elong} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{comp} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{comp} \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{dist} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha_{dist} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{cis} \cos(\gamma) & \alpha_{cis} \sin(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Finalement, cinq grandeurs  $\alpha_{elong}$ ,  $\alpha_{comp}$ ,  $\alpha_{dist}$ ,  $\alpha_{cis}$  et  $\gamma$  sont nécessaires pour décrire la transformation de la mèche avec cette approche. Ceci est cohérent avec le fait que cinq invariants sont nécessaires pour décrire la déformation des matériaux isotropes transverses (§2.4.3.1, p. 54). Ces cinq grandeurs sont caractéristiques des modes de déformation précédents, et constituent des invariants de la transformation car la décomposition proposée peut être effectuée de façon unique quel que soit le gradient de la transformation, et quelle que soit la base de projection de celui-ci.

### 3.2.2.2 Détermination d'invariants porteurs de sens physique

Avec la représentation (3.15), les cinq invariants classiques du tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit, définis dans la section 2.4, peuvent être écrits en fonction des cinq grandeurs précédentes décrivant les modes de déformation de la mèche :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \alpha_{elong}^2 (1 + \alpha_{cis}^2) + \alpha_{comp}^2 \left( \alpha_{dist}^2 + \frac{1}{\alpha_{dist}^2} \right) \\
I_2 &= \alpha_{elong}^2 \alpha_{comp}^2 \alpha_{dist}^2 \left( 1 + \alpha_{cis}^2 + \frac{1}{\alpha_{dist}^4} \right) + \alpha_{comp}^4 + \alpha_{elong}^2 \alpha_{comp}^2 \alpha_{cis}^2 \left( \frac{1}{\alpha_{dist}^2} - \alpha_{dist}^2 \right) \cos^2(\gamma) \\
I_3 &= \alpha_{elong}^2 \alpha_{comp}^4 \\
I_4 &= \alpha_{elong}^2 \\
I_5 &= \alpha_{elong}^4 (1 + \alpha_{cis}^2)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Afin d'obtenir les expressions des grandeurs  $\alpha_{elong}$ ,  $\alpha_{comp}$ ,  $\alpha_{dist}$ ,  $\alpha_{cis}$  et  $\gamma$  en fonction des invariants  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$  et  $I_5$ , il faut inverser le système précédent, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\alpha_{elong} &= \sqrt{I_4} \\
\alpha_{comp} &= \sqrt{\sqrt{\frac{I_3}{I_4}}} \\
\alpha_{dist} &= \sqrt{\frac{I_1 I_4 - I_5}{2\sqrt{I_3 I_4}} + \sqrt{\left(\frac{I_1 I_4 - I_5}{2\sqrt{I_3 I_4}}\right)^2 - 1}} \\
\alpha_{cis} &= \sqrt{\frac{I_5}{I_4^2} - 1} \\
\cos^2(\gamma) &= \frac{I_2 + \frac{I_3}{I_4} I_{dist}^2 + \sqrt{I_4 I_3} I_{dist}^2 \left(\frac{I_5}{I_4^2} + \frac{1}{I_{dist}^4}\right)}{\sqrt{I_4 I_3} \left(\frac{I_5}{I_4^2} - 1\right) \left(I_{dist}^2 - \frac{1}{I_{dist}^2}\right)}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

La quantité  $\gamma$  est une mesure du couplage entre la distorsion et le cisaillement transverse de la mèche [CRI01, DEB06]. Ces deux modes de déformation seront supposés indépendants, et l'énergie de déformation de la mèche sera supposée indépendante de cette quantité. Parmi les grandeurs précédentes, seul  $\alpha_{cis}$  s'annule lorsque le matériau n'est soumis à aucune déformation, les autres grandeurs tendant vers 1. Les invariants « normalisés » suivants seront donc utilisés pour décrire la transformation de la mèche :

$$\begin{aligned}
I_{elong} &= \frac{1}{2} \ln(I_4) \\
I_{comp} &= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{I_3}{I_4}\right) \\
I_{dist} &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{I_1 I_4 - I_5}{2\sqrt{I_3 I_4}} + \sqrt{\left(\frac{I_1 I_4 - I_5}{2\sqrt{I_3 I_4}}\right)^2 - 1}\right) \\
I_{cis} &= \sqrt{\frac{I_5}{I_4^2} - 1}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Ces quantités décrivent les quatre modes de déformation de la mèche. Une énergie de déformation sera définie pour décrire le comportement de chacun d'entre eux : ces énergies seront écrites en fonction de ces invariants. Nous avons vu également que la loi de comportement des matériaux hyperélastiques fait intervenir la dérivée de ces invariants par rapport au tenseur de Cauchy-Green droit (équation (2.44), Chapitre 3 p. 67). Ces dérivées donnent les « directions » des contraintes attribuées à chaque mode de déformation. Les dérivées des invariants (3.18) seront calculées et étudiées ci-après.

### 3.2.3 Dérivation des invariants

L'énergie de déformation de la mèche sera écrite en fonction des invariants (3.18) à la place des invariants classiques  $I_1, I_2, I_3, I_4$  et  $I_5$  des matériaux isotropes transverses :

$$w = w(I_{elong}, I_{comp}, I_{dist}, I_{cis}) \tag{3.19}$$

La loi de comportement hyperélastique du matériau prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \frac{1}{J} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \frac{2}{J} \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \\ &= \frac{2}{J} \underline{\underline{F}} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial I_{elong}} \frac{\partial I_{elong}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w}{\partial I_{comp}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w}{\partial I_{dist}} \frac{\partial I_{dist}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w}{\partial I_{cis}} \frac{\partial I_{cis}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w}{\partial \cos(\gamma)} \frac{\partial \cos(\gamma)}{\partial \underline{\underline{C}}} \right) \cdot \underline{\underline{F}}^T \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dans l'équation (3.20), les termes du type  $\partial w / \partial I$  définissent l'amplitude des contraintes associées à chacun des modes de déformation, tandis que les termes du type  $\partial I / \partial \underline{\underline{C}}$  représentent les directions des contraintes associées à chaque mode de déformation. Ces dérivées, calculées à l'aide des dérivées des invariants classiques, s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{elong}}{\partial \underline{\underline{C}}} &= \frac{1}{2I_4} \underline{\underline{M}} \\ \frac{\partial I_{comp}}{\partial \underline{\underline{C}}} &= \frac{1}{4} \left( \underline{\underline{C}}^{-1} - \frac{1}{I_4} \underline{\underline{M}} \right) \\ \frac{\partial I_{dist}}{\partial \underline{\underline{C}}} &= \frac{2I_4 \underline{\underline{I}} - (I_1 I_4 - I_5) \underline{\underline{C}}^{-1} + \left( I_1 + \frac{I_5}{I_4} \right) \underline{\underline{M}} - 2(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}})}{4\sqrt{(I_1 I_4 - I_5)^2 - 4I_3 I_4}} \\ \frac{\partial I_{cis}}{\partial \underline{\underline{C}}} &= \frac{1}{2I_{cis}} \left[ \frac{1}{I_4^2} (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}}) - \frac{2I_5}{I_4^3} \underline{\underline{M}} \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Une étude quantitative des dérivées (3.21) est mise en place afin de valider les directions de contraintes associées à chaque invariant. Pour cela les dérivées des invariants seront calculées en fonction des composantes du gradient de la transformation (3.12) dans la base  $\{\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{N}}_1, \underline{\underline{N}}_2\}$ .

### 3.2.3.1 Dérivée de l'invariant d'élongation

La dérivée de l'invariant d'élongation est donnée par l'équation (3.21)a. Dans la base  $\{\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{N}}_1, \underline{\underline{N}}_2\}$  déterminée précédemment, cette grandeur admet la représentation suivante :

$$\frac{2}{J} \left[ \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial I_{elong}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \right]_{\{\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{N}}_1, \underline{\underline{N}}_2\}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Quel que soit le potentiel associé à cet invariant, les contraintes obtenues seront dirigées exclusivement par la direction des fibres, ce qui est conforme au comportement souhaité. Le terme  $1/J$  sera discuté par la suite.

### 3.2.3.2 Dérivée de l'invariant de compaction

De la même façon, la représentation de la dérivée (3.21)b de l'invariant de compaction s'écrit dans la base  $\{\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{N}}_1, \underline{\underline{N}}_2\}$  :

$$\frac{2}{J} \left[ \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial I_{comp}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \right]_{\{M, N_1, N_2\}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Les contraintes obtenues à l'aide de cet invariant seront donc toujours de type sphérique dans le plan orthogonal à la direction des fibres.

### 3.2.3.3 Dérivée de l'invariant de distorsion

Dans la même base, la dérivée (3.21)c de l'invariant de distorsion s'écrit :

$$\frac{2}{J} \left[ \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial I_{elong}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \right]_{\{M, N_1, N_2\}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Les contraintes découlant de cet invariant sont donc réparties de façon déviatorique entre les deux directions du plan orthogonal à la direction des fibres. La position de la contrainte négative (ici la direction 3) est imposée par la condition (3.4).

### 3.2.3.4 Dérivée de l'invariant de cisaillement transverse

La dérivée (3.21) de l'invariant de cisaillement transverse s'écrit

$$\frac{2}{J} \left[ \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial I_{ds}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \right]_{\{M, N_1, N_2\}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 & \frac{f_{m1} f_{11}}{f_m \sqrt{f_{m1}^2 + f_{m2}^2}} & \frac{f_{m2} f_{22}}{f_m \sqrt{f_{m1}^2 + f_{m2}^2}} \\ \frac{f_{m1} f_{11}}{f_m \sqrt{f_{m1}^2 + f_{m2}^2}} & 0 & 0 \\ \frac{f_{m2} f_{22}}{f_m \sqrt{f_{m1}^2 + f_{m2}^2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Cette expression est plus complexe que les expressions précédentes car elle répartit les contraintes en fonction de la façon dont chacune des deux directions possibles de cisaillement transverse est sollicitée.

## 3.2.4 Bilan sur les invariants

Des invariants ont été définis pour chacun des modes de déformation de la mèche de renfort tissé. Ils sont synthétisés dans le TABLEAU. Ces invariants permettent d'obtenir des directions de contraintes conformes aux modes de déformation définis précédemment. Ces directions sont orthogonales entre elles, c'est-à-dire que le produit doublement contracté des dérivées précédentes est toujours nul. Cela traduit le fait que les modes de déformation choisis sont décrits de façon indépendante les uns des autres. Le terme  $1/J$  présent dans chacune des dérivées provient du fait que les grandeurs de notre modèle sont définies par rapport au volume initial. Ce terme permet de décrire

naturellement certaines propriétés essentielles de la mèche de renfort tissé, comme l'invariance de sa raideur en élongation lors d'un changement de section dans le plan d'isotropie.

Elongation	$I_{elong} = \frac{1}{2} \ln(I_4)$
Compaction	$I_{comp} = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{I_3}{I_4}\right)$
Distorsion	$I_{dist} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{I_1 I_4 - I_5}{2\sqrt{I_3 I_4}} + \sqrt{\left(\frac{I_1 I_4 - I_5}{2\sqrt{I_3 I_4}}\right)^2 - 1}\right)$
Cisaillement transverse	$I_{cis} = \sqrt{\frac{I_5}{I_4}} - 1$

Tableau 3. Invariants associés aux modes de déformation de la mèche de renfort tissé.

### 3.3 Energies de déformation pour chacun des modes de déformation

#### 3.3.1 Energie d'élongation

Un essai de traction sur une mèche seule permet de caractériser le comportement de la mèche en élongation. Les essais de ce type réalisés révèlent un comportement en traction quasi linéaire (figure 3-3). Comme nous l'avons vu (Chapitre 1 §1.3.1.1, p. 22), les défauts d'alignement des fibres introduisent une légère non-linéarité de ce comportement : au sein de la mèche, les fibres ne sont pas exactement de la même longueur ; ainsi, la mise sous tension de la mèche se traduit à l'échelle inférieure par une mise sous tension progressive des fibres<sup>5</sup>.

La prise en compte de cette non-linéarité est très importante pour le comportement global de la maille élémentaire, surtout pour les mèches de fibres de verre pour lesquelles cette non-linéarité est assez marquée. Dans ce cas le décalage induit sur la courbe de tension est significatif par rapport aux décalages des courbes de tension biaxiale (voir 1.3.2.3 page 28), et ne pas prendre en compte cette non-linéarité empêcherait une identification robuste des paramètres de la loi de comportement.

Afin de prendre en compte cette non-linéarité, le potentiel de déformation sera défini par morceaux : une partie décrivant la réponse en effort non-linéaire de la mèche lorsque  $I_{elong} \leq I_{elong}^0$ , et une partie décrivant la réponse linéaire lorsque  $I_{elong} > I_{elong}^0$  :

$$w_{elong}(I_{elong}) = \begin{cases} W_{elong}^{nl}(I_{elong}) & \text{si } I_{elong} \leq I_{elong}^0 \\ W_{elong}^{lin}(I_{elong}) & \text{si } I_{elong} > I_{elong}^0 \end{cases} \quad (3.26)$$

<sup>5</sup> Cette non linéarité est répétable : le retour élastique se fait par le même chemin, et des mèches plus rigides ont été testées avec succès. Ceci montre que cette non linéarité est bien liée au comportement de la mèche et non à une mauvaise préhension de la mèche dans les mors au cours de l'essai.

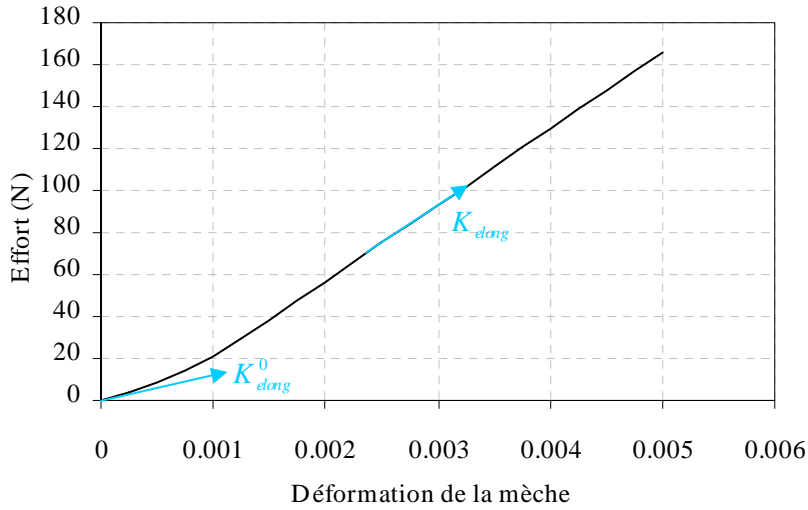


Figure 3-3. Essais de traction sur une mèche seule [BUE01].

Une réponse en effort linéaire correspond à une énergie de déformation quadratique. La partie de l'énergie d'élongation  $w_{elong}^{lin}$  associée à la réponse linéaire de la mèche sera donc écrite comme un polynôme d'ordre deux. Un polynôme d'ordre trois sera utilisé pour la partie  $w_{elong}^{nl}$ . Ces deux parties seront donc respectivement recherchées sous les formes :

$$w_{elong}^{nl} (I_{elong}) = a_0 + a_1 I_{elong} + a_2 I_{elong}^2 + a_3 I_{elong}^3 \quad (3.27)$$

$$w_{elong}^{lin} (I_{elong}) = b_0 + b_1 I_{elong} + b_2 I_{elong}^2 \quad (3.28)$$

En introduisant la section initiale  $S_0$  de la mèche (supposée constante le long de la mèche), sa rigidité initiale  $K^0_{elong}$  et sa rigidité finale  $K_{elong}$  (figure 3-3), ainsi que les conditions de continuité et de dérivabilité de la fonction  $w_{elong}$ , on obtient :

$$w_{elong}^{nl} = \frac{K_{elong} - K^0_{elong}}{6S_0 I_{elong}^0} I_{elong}^3 + \frac{K^0_{elong}}{2S_0} I_{elong}^2 \quad (3.29)$$

$$w_{elong}^{lin} = \frac{K_{elong}}{2S_0} I_{elong}^2 - \frac{K_{elong} - K^0_{elong}}{2S_0} I_{elong}^0 I_{elong} + \frac{K_{elong} - K^0_{elong}}{6S_0} (I_{elong}^0)^2 \quad (3.30)$$

Avec la loi de comportement (3.20), le second tenseur de Piola-Kirchhoff est donné par :

$$S_{=elong} = \frac{1}{I_4} \underline{\underline{M}} = \begin{cases} \frac{K^0_{elong}}{S_0} I_{elong} + \frac{K_{elong} - K^0_{elong}}{2S_0 I_{elong}^0} I_{elong}^2 & \text{si } I_{elong} \leq I_{elong}^0 \\ -\frac{K_{elong} - K^0_{elong}}{2S_0} I_{elong}^0 + \frac{K_{elong}}{S_0} I_{elong} & \text{si } I_{elong} > I_{elong}^0 \end{cases} \quad (3.31)$$

L'aire  $S_0$  de la section de la mèche étant connue (issue de la modélisation géométrique de la maille élémentaire), trois paramètres devront donc être identifiés :  $I_{elong}^0$ ,  $K^0_{elong}$  et  $K_{elong}$ . Ces paramètres seront identifiés par méthode inverse, simplement avec le solveur non-linéaire d'Excel, à partir de la courbe d'élongation. Pour la modélisation de mèche ne présentant pas la non-linéarité décrite

précédemment, la partie linéaire de la densité d'énergie peut être utilisée seule, conduisant à une loi de comportement à un seul paramètre.

### 3.3.2 Energie de compaction

L'énergie de compaction de la mèche est liée à plusieurs phénomènes physiques à l'échelle microscopique (principalement des flexions et des réarrangements de fibres) qu'il est difficile d'étudier séparément. De la même façon que dans [CAI92, HAG04, BOI05, POT08], une loi de type « puissance » est proposée pour décrire le comportement de la mèche en compaction, et l'énergie nécessaire à une décompaction sera considérée comme nulle :

$$w_{comp}(I_{comp}) = \begin{cases} K_{comp} |I_{comp}|^p & \text{si } I_{comp} \leq 0 \\ 0 & \text{si } I_{comp} > 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

Il est supposé que dans la gamme de déformations étudiée (celle de la mise en forme du renfort), la rigidité en compaction de la mèche n'atteint jamais la rigidité du matériau composant les fibres, c'est à dire que la mèche ne peut pas être suffisamment compactée pour que tous les vides entre les fibres soient comblés. Le second tenseur de Piola-Kirchhoff correspondant à la compaction de la mèche dérive de l'expression (3.32) :

$$\underline{S}_{comp}(I_{comp} \leq 0) = -\frac{p}{2} K_{comp} |I_{comp}|^{p-1} \left( \underline{C}^{-1} - \frac{1}{I_4} \underline{M} \right) \quad (3.33)$$

Les paramètres à identifier sont donc  $K_{comp}$  et  $p$ . Comme il a été mentionné précédemment, le comportement en compaction ne peut être caractérisé expérimentalement aussi simplement que le comportement en élongation. Il sera donc fait appel à une méthode inverse, utilisant des essais de traction équilibrée pour identifier les deux paramètres.

Plusieurs raisons ont mené à l'utilisation d'un essai de traction équilibrée plutôt que d'un essai d'écrasement pour identifier le comportement en compaction de la mèche : comme cela a été mentionné dans le Chapitre 1 (§1.3.2.5, p. 33), les essais d'écrasement sont très sensibles au coefficient de frottement entre les outils et le renfort et à la vitesse de l'essai, et il est difficile d'obtenir une mesure précise de l'épaisseur du renfort au cours de l'essai. Les essais de traction biaxiale font intervenir la compaction du renfort de façon prépondérante sans présenter les défauts précédents, c'est pourquoi ils ont été choisis pour identifier les paramètres de compaction de la mèche.

### 3.3.3 Energie de distorsion dans le plan transverse

De même que le comportement en compaction, le comportement en distorsion est difficile à caractériser expérimentalement de façon directe. Il a été supposé dans cette étude que la raideur en distorsion est constante, ce qui donne le potentiel de déformation suivant :

$$w_{dist}(I_{dist}) = \frac{1}{2} K_{dist} I_{dist}^2 \quad (3.34)$$

La constante  $K_{dist}$  sera identifiée par méthode inverse, en même temps que les coefficients de la loi de compaction (3.32). Le second tenseur de Piola-Kirchhoff correspondant à la distorsion de la mèche dérive de l'expression (3.34) :



$$\underline{\underline{S}}_{dist} = 2K_{dist} I_{dist} \frac{2I_4 \underline{\underline{I}} - (I_1 I_4 - I_5) \underline{\underline{C}}^{-1} + \left( I_1 + \frac{I_5}{I_4} \right) \underline{\underline{M}} - 2(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}})}{4\sqrt{(I_1 I_4 - I_5)^2 - 4I_3 I_4}} \quad (3.35)$$

Dans les cas où le dénominateur de l'expression (3.35) s'annule, des simplifications apparaissent et le tenseur des contraintes reste défini. D'un point de vue théorique, cette expression ne pose donc pas de problème. D'un point de vue numérique, il faudra toutefois traiter à part le cas de la nullité du dénominateur lors de l'implémentation de la loi de comportement afin d'éviter d'obtenir des expressions indéterminées.

### 3.3.4 Energie de cisaillement transverse

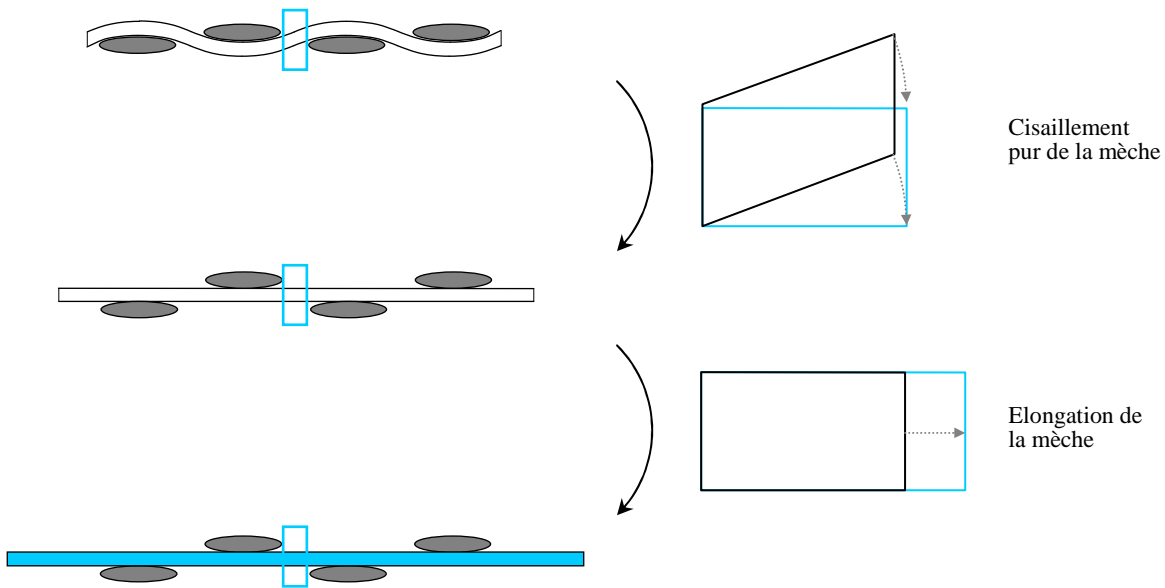


Figure 3-4. Mécanismes de déformation du renfort sollicité en traction uniaxiale.

Comme cela a été décrit au Chapitre 1 (§1.3.1.3, p. 25), l'énergie de cisaillement transverse de la mèche est liée au glissement relatif des fibres dans leur direction privilégiée et à la présence d'ensimage dans la mèche. Cet ensimage est supposé suffisamment influent pour que le comportement associé à ce mode de déformation soit élastique. Il est supposé également que ce comportement n'est pas rigidifiant (raideur constante). L'énergie de déformation est alors écrite sous la forme :

$$w_{as}(I_{as}) = \frac{1}{2} K_{as} I_{as}^2 \quad (3.36)$$

Et les contraintes du second tenseur de Piola-Kirchhoff sont donnée par :

$$\underline{\underline{S}}_{as} = \frac{1}{2} K_{as} \left[ \frac{1}{I_4^2} (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{C}}) - \frac{2I_5}{I_4^3} \underline{\underline{M}} \right] \quad (3.37)$$

Au cours d'un essai de traction simple sur un renfort tissé, ce mode de déformation intervient fortement : dans la partie non-linéaire de la courbe de tension uniaxiale, correspondant à la diminution de l'embuvage du réseau sollicité, seuls les modes d'élongation et de cisaillement travaillent [KAW73b]. Ensuite, dans la partie linéaire, seule l'élongation travaille (figure 3-4). Une fois le

comportement en élongation identifié, il sera donc possible d'identifier le coefficient de cisaillement à partir d'un essai de traction simple.

### 3.3.5 Bilan sur la loi de comportement

Finalement, l'écriture complète de la loi de comportement est obtenue en combinant les contributions de chacun des modes de déformation discutés précédemment :

$$w = w_{elong}(I_{elong}) + w_{comp}(I_{comp}) + w_{dist}(I_{dist}) + w_{cis}(I_{cis})$$

$$\underline{\underline{S}} = 2 \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{C}}} = 2 \left( \frac{\partial w_{elong}}{\partial I_{elong}} \frac{\partial I_{elong}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w_{comp}}{\partial I_{comp}} \frac{\partial I_{comp}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w_{dist}}{\partial I_{dist}} \frac{\partial I_{dist}}{\partial \underline{\underline{C}}} + \frac{\partial w_{cis}}{\partial I_{cis}} \frac{\partial I_{cis}}{\partial \underline{\underline{C}}} \right) \quad (3.38)$$

Sept paramètres doivent être identifiés : trois pour l'élongation, deux pour la compaction, un pour la distorsion et un pour le cisaillement. Notons que les trois paramètres liés au mode de déformation en élongation seront très aisés à déterminer. Cette loi de comportement a été implémentée dans le code de calcul Abaqus/Explicit selon la méthode présentée précédemment (2.5.2, page 60).

La loi de comportement précédente a été implantée dans le code de calcul Abaqus/Explicit avec la méthodologie définie au Chapitre 2. Des tests élémentaires ont été réalisés afin de vérifier l'implémentation de la subroutine VUMAT, et de s'assurer de la cohérence du modèle implémenté avec la loi de comportement hyperélastique formulée pour la mèche de renfort tissé. Ces tests ont été réalisés sur un élément seul, un hexaèdre à huit nœuds et huit points d'intégration appelé C3D8 dans Abaqus.

Quatre tests, correspondant à chacun des modes de déformation, sont mis en œuvre pour vérifier l'implémentation de la subroutine. Au cours de ces tests, deux types de grandeurs sont comparés :

- des énergies de déformation : les énergies de déformation issue du potentiel hyperélastique (3.38) et calculée par Abaqus à partir des contraintes et des déformations sont comparées. Cela permet notamment de vérifier que les dérivées des invariants par rapport au tenseur de Cauchy-Green droit (i.e. les termes  $\partial I / \partial \underline{\underline{C}}$ ) ont été calculées correctement.
- des efforts : les efforts caractéristiques obtenus par simulation sont comparés aux efforts théoriques. Ceci permet de vérifier la bonne implémentation des dérivées du potentiel énergétique par rapport aux différents invariants (i.e. les termes  $\partial w / \partial I$ ).

Ces tests, ainsi que les efforts caractéristiques qui seront comparés, sont introduits sur la figure 3-5.

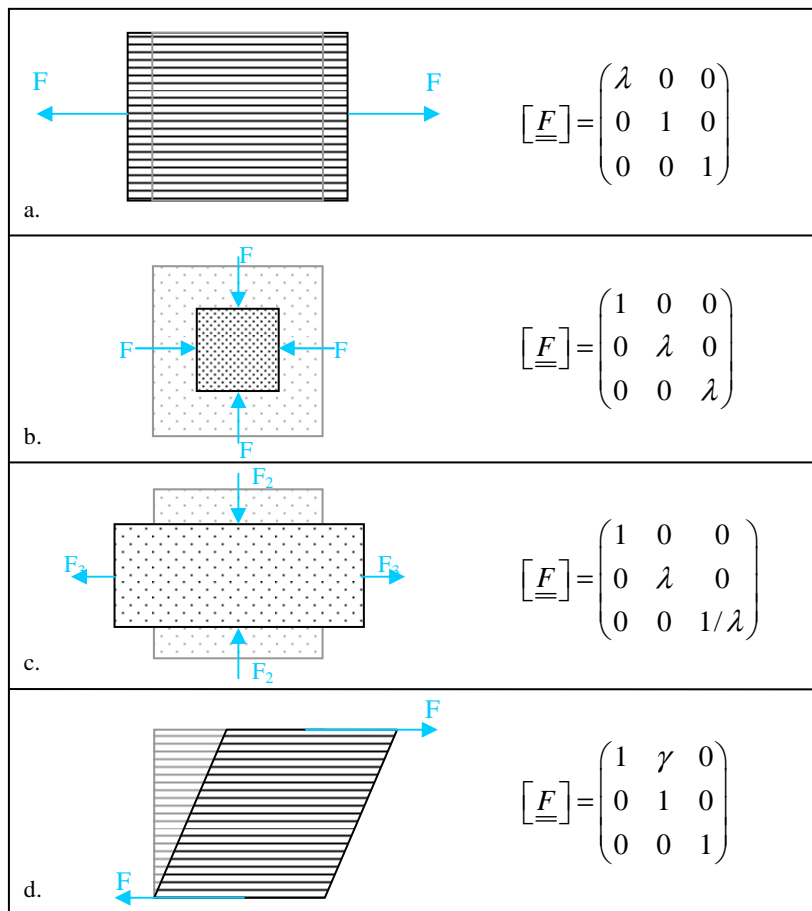


Figure 3-5. Tests de vérification de l'implémentation de la loi de comportement. (a) Elongation. (b) Compaction. (c) Distorsion. (d) Cisaillement transverse.

La figure 3-6 donne la comparaison des courbes d'énergies et d'efforts obtenues pour chacun de ces cas tests. Sur chacun des graphes, la différence entre les deux courbes est tracée, dont les valeurs se lisent sur l'échelle de droite.

Les courbes d'énergie issue du potentiel hyperélastique et calculée par Abaqus à partir des contraintes et des déformations sont très proches. Cela valide le calcul et l'implémentation des dérivées des invariants par rapport au tenseur de Cauchy-Green droit.

Pour chacun des cas-tests, les courbes d'efforts obtenues sont également très proches des courbes théoriques. Cela permet de valider de calcul et l'implémentation des dérivées du potentiel de déformation par rapport aux différents invariants.

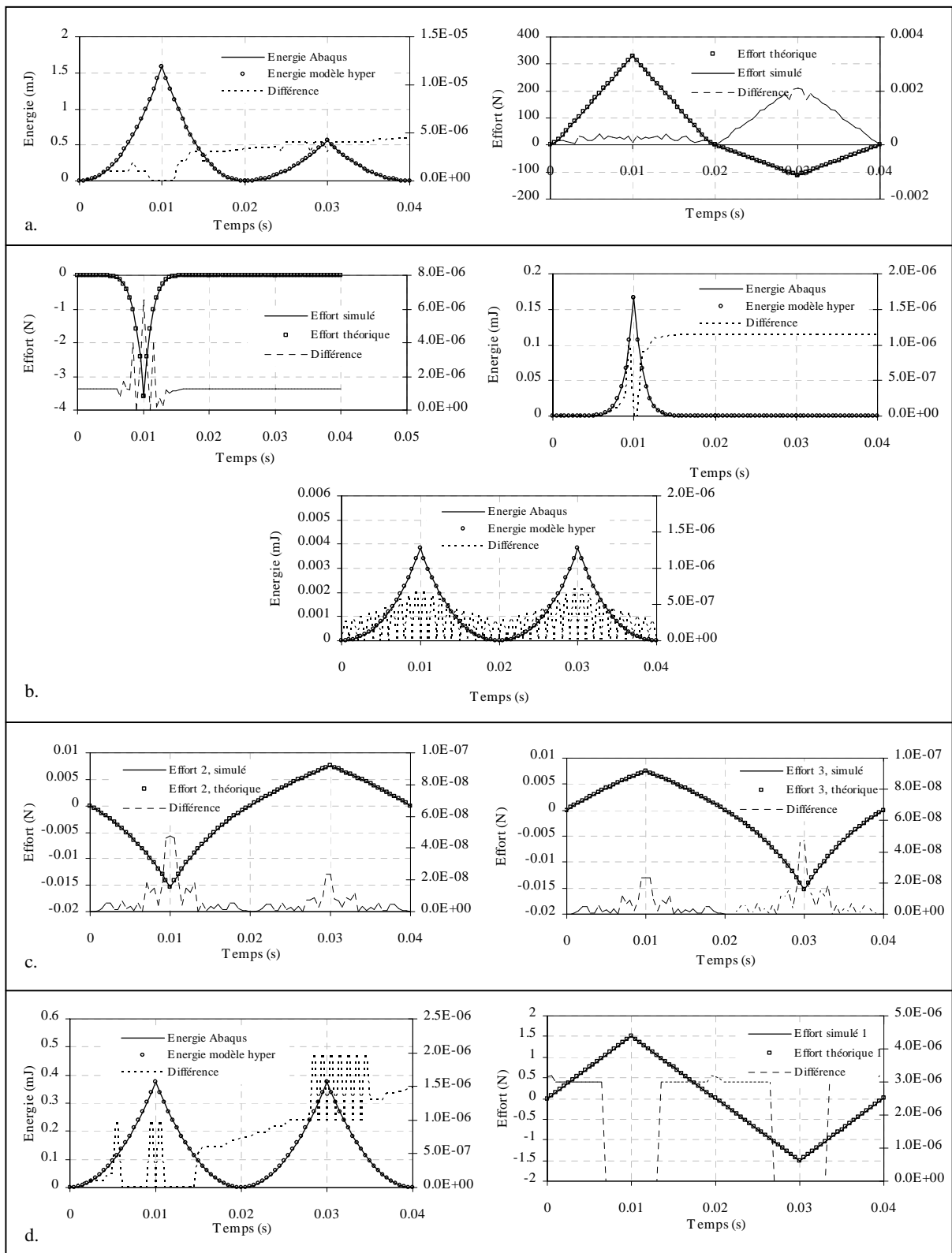


Figure 3-6. Résultat des tests de validation de l'implémentation de la loi de comportement. Comparaison des énergies et des efforts mis en oeuvre. (a) Elongation. (b) Compaction. (c) Distorsion. (d) cisaillement transverse.

## 3.4 Identification de la loi de comportement

### 3.4.1 Modélisation géométrique des renforts étudiés

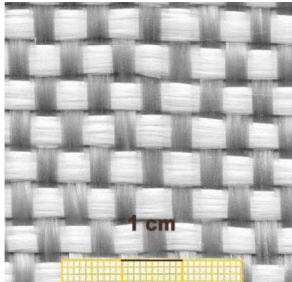
La modélisation géométrique des renforts tissés revêt une importance capitale pour la précision des résultats obtenus. Afin d'identifier et de valider la loi de comportement proposée de façon robuste, la géométrie modélisée doit être très proche de la géométrie réelle du renfort, ou au moins de sa géométrie moyenne lorsque le renfort présente des irrégularités. La très forte raideur des fibres impose également une bonne maîtrise des conditions aux limites qui seront imposées : conditions de périodicité, de symétrie et chargements.

#### 3.4.1.1 Les renforts étudiés

Deux renforts d'armures différentes seront étudiés dans cette partie : un taffetas de verre et un sergé 2x2 de carbone. Ces deux renforts ont fait l'objet de plusieurs études, notamment sur la géométrie de leurs mailles élémentaires et sur leur comportement mécanique [BUE98, DUM03a, HIV03, BAD08a]. Grâce à ces différentes études, une connaissance fine de ces matériaux a été acquise, ainsi que des données expérimentales qui nous fourniront les éléments nécessaires au développement des méthodes de modélisation et d'identification adaptées au modèle hyperélastique présenté précédemment.

#### Taffetas de verre

Le premier renfort étudié est un taffetas de verre : parmi les différents types d'armures, l'armure de taffetas présente la géométrie la plus simple, qui peut être décrite de façon très fidèle à la géométrie réelle par le modèle de Hivet [HIV08]. L'utilisation de ce taffetas pour identifier et valider la loi de comportement proposée permet ainsi de limiter les imprécisions du calcul liées au modèle géométrique utilisé. La figure 3-7 présente les caractéristiques géométriques principales de ce taffetas : il s'agit d'un taffetas de verre quasi équilibré.

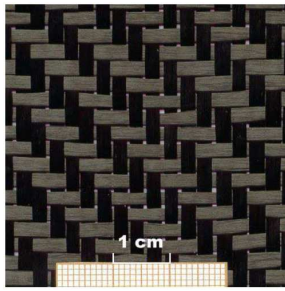


	Chaîne	Trame
Embuvage (%)	0.347	0.38
Densité de mèches (mèches/mm)	0.2	0.22
Largeur des mèches (mèches/mm)	4.03	3.66
Epaisseur (mm)	~0.7	

Figure 3-7. Caractéristiques géométriques moyennes du taffetas de verre étudié.

#### Sergé de carbone

Plus onéreux que le taffetas de verre précédent mais présentant des caractéristiques mécaniques plus élevées ainsi qu'une formabilité plus aisée, le sergé de carbone étudié ici est principalement utilisé dans des applications aéronautiques. Ses caractéristiques géométriques principales sont décrites sur la figure 3-8. Comme le taffetas de verre précédent, ce renfort présente une bonne symétrie chaîne/trame. Il est donc considéré comme étant équilibré dans cette étude.



	Chaîne	Trame
Embuvement (%)	0.33	0.35
Densité de mèches (mèches/mm)	0.35	0.35
Largeur des mèches (mèches/mm)	2.5	2.5
Épaisseur (mm)	~0.7	

Figure 3-8. Caractéristiques géométriques moyennes du sergé de carbone étudié.

### 3.4.1.2 Périodicité et symétries

#### Périodicité des renforts tissés

Dans la configuration non déformée, le renfort tissé est une structure périodique plane : l'ensemble du renfort peut être reconstitué par translations successives d'un motif appelé *maille élémentaire* (voir figure 3-9). Cette maille élémentaire, non unique, constitue un volume élémentaire représentatif (VER) du matériau : son comportement est supposé représentatif du comportement du matériau homogénéisé équivalent. Lorsque le renfort est soumis à une transformation homogène<sup>6</sup>, chaque maille élémentaire se déforme de façon identique : le comportement macroscopique du renfort s'apparente alors à la superposition des comportements de toutes les mailles élémentaires qui le composent. Dans ce cas il est possible de comparer le comportement d'une maille élémentaire seule au comportement du renfort à l'échelle macroscopique. C'est ce qui sera fait par la suite pour identifier et valider la loi de comportement.

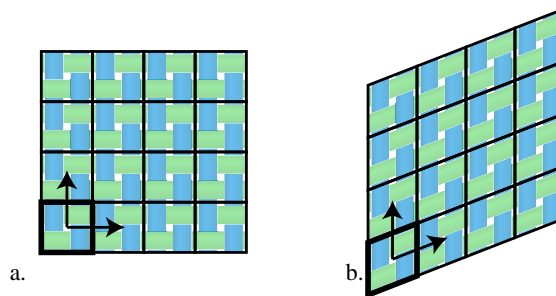


Figure 3-9. Reconstitution du renfort complet par translation d'une maille élémentaire (a) non déformée et (b) soumise à une transformation homogène

Deux vecteurs, non uniques, sont nécessaires pour décrire la périodicité du renfort. Par souci de simplicité, ces deux vecteurs seront pris orientés par les directions de chaîne et de trame du renfort, et de normes égales aux largeurs de la maille élémentaire<sup>7</sup>. Ils seront notés  $\vec{T}_c$  et  $\vec{T}_t$  (figure 3-10). Deux points matériels  $P_1$  et  $P_1'$  du renfort sont *appariés* s'ils sont images l'un de l'autre par un déplacement d'un nombre entier de translations  $\vec{T}_c$  et  $\vec{T}_t$  :

$$P_1 \text{ et } P_1' \text{ sont appariés} \Leftrightarrow P_1' = P_1 + n_c \vec{T}_c + n_t \vec{T}_t \quad (3.39)$$

<sup>6</sup> Certains essais présentent des effets de bord particulièrement importants (e.g. pour le « picture frame test » [DUM03a, DUM03b, WIL08, ZHU07]), qui seront discutés lorsque les simulations correspondantes seront présentées.

<sup>7</sup> En configuration de référence, la maille élémentaire est carrée pour un renfort équilibré et rectangulaire pour un renfort déséquilibré.

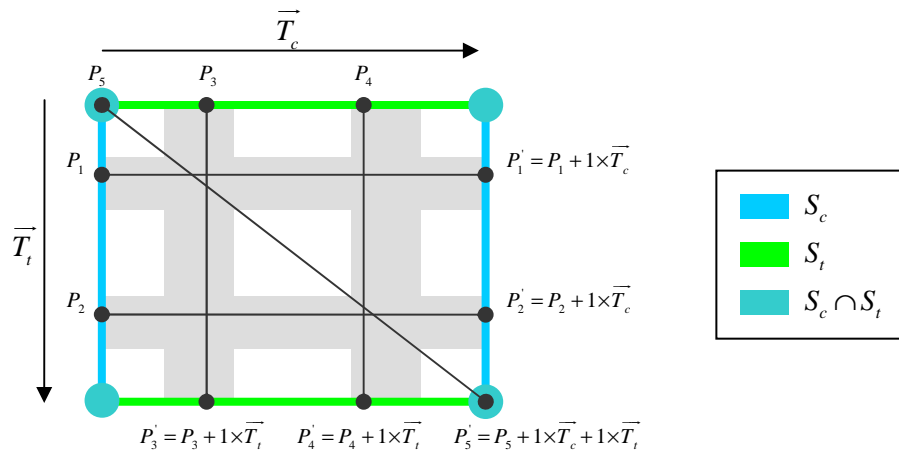


Figure 3-10. Points appariés au sein d'une maille élémentaire.

Lorsque l'on isole une maille élémentaire du renfort, seuls les points situés sur les bords ont un point apparié dans la maille élémentaire (figure 3-10) : les points situés sur chaque côté sont appariés avec les points du côté opposé, et les nombres  $n_c$  et  $n_t$  correspondant sont égaux à 0, 1 ou  $-1$ . L'ensemble des points appariés dans la direction chaîne sera noté  $S_c$ , et l'ensemble des points appariés dans la direction trame sera noté  $S_t$  :

$$\begin{aligned}
 S_c &= \{P \in \text{maille} / \exists Q \in \text{maille}, \exists n_c \in \mathbb{Z}^*, \exists n_t \in \mathbb{Z}, Q = P + n_c \vec{T}_c + n_t \vec{T}_t\} \\
 S_t &= \{P \in \text{maille} / \exists Q \in \text{maille}, \exists n_c \in \mathbb{Z}, \exists n_t \in \mathbb{Z}^*, Q = P + n_c \vec{T}_c + n_t \vec{T}_t\}
 \end{aligned}
 \tag{3.40}$$

L'intersection de ces deux ensembles ne contient que les quatre coins de la maille élémentaire.

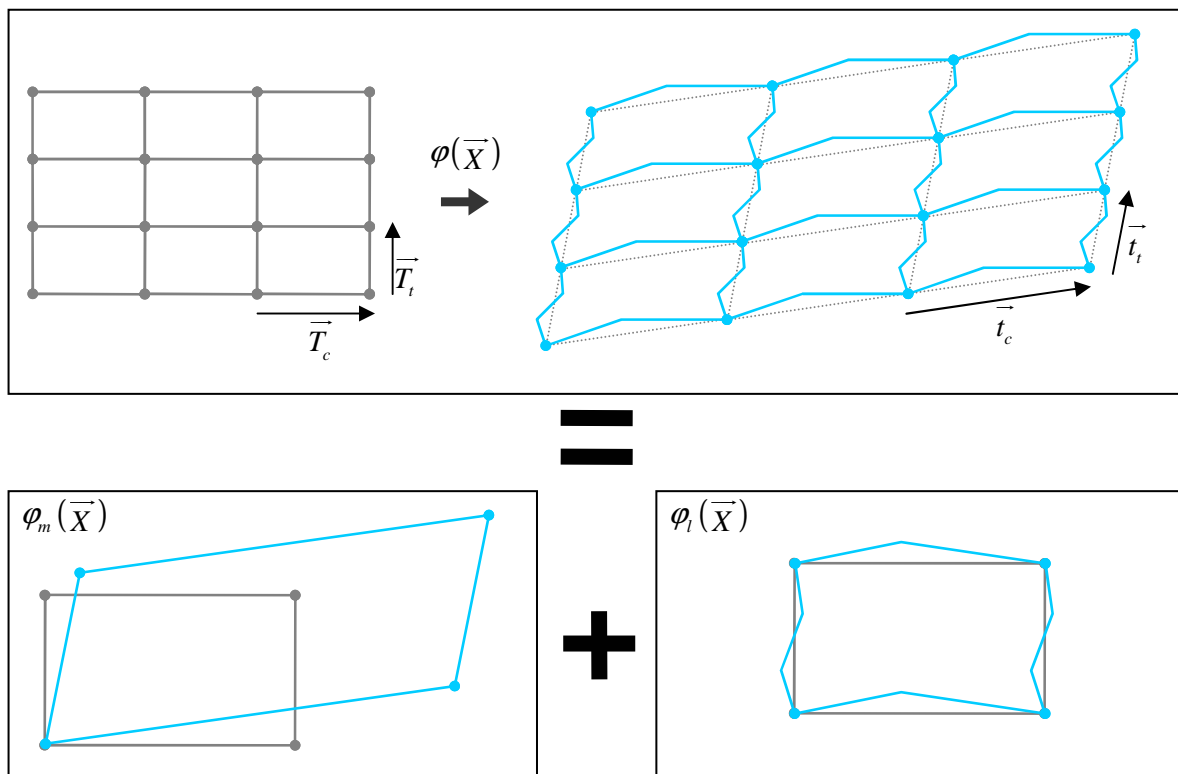


Figure 3-11. Déformation globale et déformations locales de la maille élémentaire permettant de garantir les conditions de périodicité du champ de déplacement du renfort soumis à une transformation globale homogène.

Lorsque le renfort est soumis à une transformation homogène, les propriétés de périodicité précédentes sont conservées, mais les vecteurs  $\overline{T}_c$  et  $\overline{T}_t$  changent : les nouveaux vecteurs  $\overline{t}_c$  et  $\overline{t}_t$  sont les images par cette transformation des vecteurs  $\overline{T}_c$  et  $\overline{T}_t$  (figure 3-11).

Le champ de déplacement  $\varphi(\overline{X})$  associé à la transformation de la maille élémentaire peut être décomposé en deux parties : un champ de déplacement homogène macroscopique  $\varphi_m(\overline{X})$ , et un champ de déplacement local  $\varphi_l(\overline{X})$  décrivant les déplacements de chaque point de la maille élémentaire par rapport aux déplacements macroscopiques :

$$\varphi(\overline{X}) = \varphi_m(\overline{X}) + \varphi_l(\overline{X}) \quad (3.41)$$

Dans les simulations qui seront mises en place dans ce chapitre, le champ de déplacement macroscopique sera imposé à la maille élémentaire (e.g. traction biaxiale, cisaillement) tandis que le champ de déplacement local fera partie des inconnues du problème.

La périodicité du renfort se traduit par la nécessité que les déplacements locaux des points appariés soient identiques :

$$P_1 \text{ et } P_2 \text{ sont appariés} \Rightarrow \varphi_l(P_1) = \varphi_l(P_2) \quad (3.42)$$

En particulier, les coins de la maille élémentaire étant appariés les uns aux autres, leurs déplacements locaux doivent être identiques. Un déplacement local identique des coins de la maille élémentaire correspondant à un mouvement de corps rigide, les mouvements locaux des coins de la maille élémentaire peuvent être supposés nuls, sans perte de généralité :

$$\varphi_l(S_c \cap S_t) = 0 \quad (3.43)$$

Le champ de déplacement macroscopique  $\varphi_m(\overline{X})$  ainsi que les relations (3.42) et (3.43) constituent les conditions aux limites de la plupart des simulations qui sont présentées dans ce chapitre : pour une transformation globale  $\varphi_m$  donnée, chaque paire de points  $(P_1, P_2)$  appariés doit vérifier la relation :

$$\varphi(P_1) - \varphi(P_2) = \varphi_m(P_1) - \varphi_m(P_2) \quad (3.44)$$

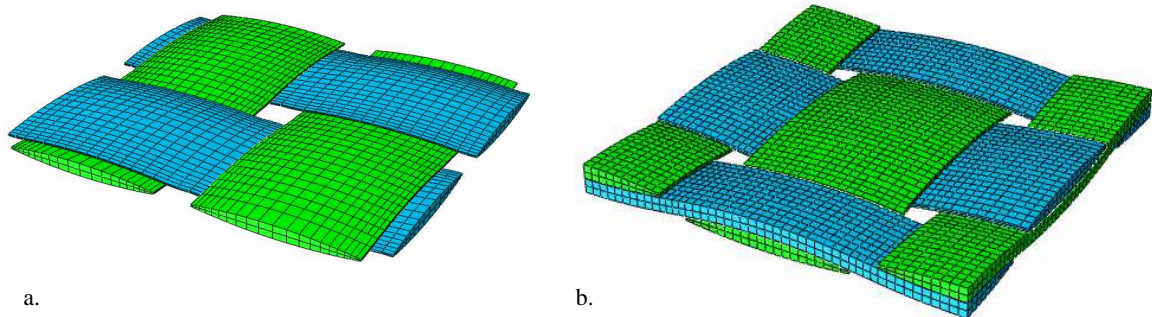


Figure 3-12. Deux mailles élémentaires de taffetas possédant plusieurs symétries.

### Mailles élémentaires et symétries

La maille élémentaire n'est pas unique, il existe même une infinité de mailles élémentaires possibles pour un renfort 2D donné. Pour un taffetas, deux mailles élémentaires particulières seront retenues, qui possèdent un grand nombre de symétries (figure 3-12). Ces symétries permettront par la



suite de réduire le modèle éléments finis de façon significative, et de simplifier les conditions aux limites. Ainsi que cela a été discuté dans [BAD08a], l'utilisation d'une maille élémentaire comme celle de la figure 3-12b, possédant des points matériels sur l'ensemble de sa frontière, permet une application plus aisée des conditions aux limites et notamment du champ de déplacement macroscopique  $\varphi_m(\bar{X})$ . C'est donc ce type de maille élémentaire qui sera utilisée par la suite.

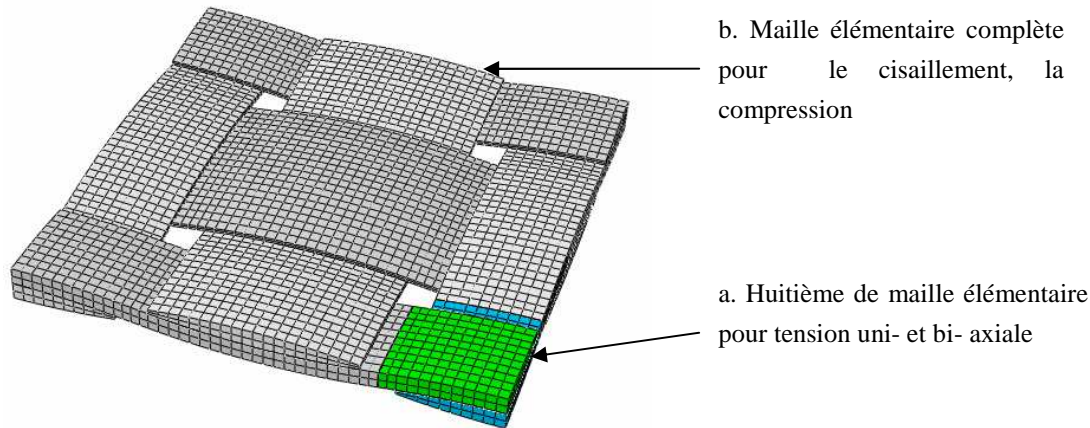


Figure 3-13. Modèles éléments finis utilisés pour les différents cas de chargement sur la maille élémentaire de taffetas.

Les symétries de cette maille élémentaire permettent, dans certains cas de chargement, de réduire le modèle éléments finis utilisé de façon conséquente :

- si les symétries du chargement imposé diffèrent des symétries de la maille élémentaire, ou si les mèches d'un même réseau interagissent de façon significative au cours du chargement, un modèle de la maille entière doit être utilisé (figure 3-13b). C'est le cas par exemple lorsqu'une maille élémentaire de taffetas est sollicitée en flexion ou en cisaillement dans le plan du renfort.
- si le chargement imposé possède les mêmes symétries que la maille élémentaire *et* s'il n'y a pas d'interaction entre les mèches d'un même réseau au cours de ce chargement, le modèle peut être réduit. Dans le cas d'un taffetas soumis à un chargement de compression ou de traction uni- ou bi- axiale par exemple, le modèle peut généralement<sup>8</sup> être réduit au huitième de la maille élémentaire (figure 3-13a).

Dans le cas où les symétries du renfort et du chargement permettent de réduire le modèle à une fraction de la maille élémentaire, les conditions aux limites qui sont appliquées ne sont plus des conditions de périodicité mais des conditions de symétries. Ces conditions de symétries sont toutefois compatibles avec les conditions de périodicité précédentes.

#### 3.4.1.3 Modèles géométriques

La modélisation géométrique utilisée pour étudier le comportement de la maille élémentaire est capitale pour les résultats des simulations du comportement de la maille élémentaire. Nous avons vu par exemple que la position de l'asymptote d'un essai de traction uniaxiale est une mesure de

<sup>8</sup> Certains tissus ont une densité de mèches très importante qui induit, même au repos, un contact entre les mèches d'un même réseau. Pour ces tissus il ne sera donc pas possible de réduire la taille du modèle éléments finis.

l'embuvage du renfort (voir §1.3.2.2, p. 27) : c'est principalement le modèle géométrique qui permettra d'obtenir une bonne description de la partie linéaire de la courbe de traction uniaxiale.

Dans ce manuscrit il sera fait usage des modèles développés dans sa thèse par Gilles Hivet [HIV05, HIV08]. Ces modèles permettent d'obtenir une géométrie proche de la géométrie réelle du renfort en utilisant des paramètres mesurables sur le renfort (embuvages, largeurs de mèches, épaisseur). Comme cela a été mentionné au chapitre 1, ils présentent également l'avantage d'éviter les interpénétrations au niveau des zones de contact entre les mèches. Les deux modèles géométriques utilisés pour décrire les deux renforts étudiés dans ce manuscrit sont présentés ci-après.

#### Modèle géométrique pour le taffetas de verre

Comme cela a été mentionné précédemment, la géométrie du taffetas de verre étudiée est modélisée à l'aide du modèle de Hivet [HIV05, HIV08]. Les propriétés de symétrie du taffetas permettent de considérer les sections comme étant symétriques et constantes le long de la ligne moyenne des mèches. Le modèle de Hivet permet d'obtenir facilement un maillage structuré des mèches par balayage le long de la ligne moyenne. Le modèle éléments finis ainsi obtenu, qui sera utilisé pour étudier ce taffetas de verre, est illustré sur la figure 3-14 et comparé avec des coupes issues de tomographie X du taffetas réel.

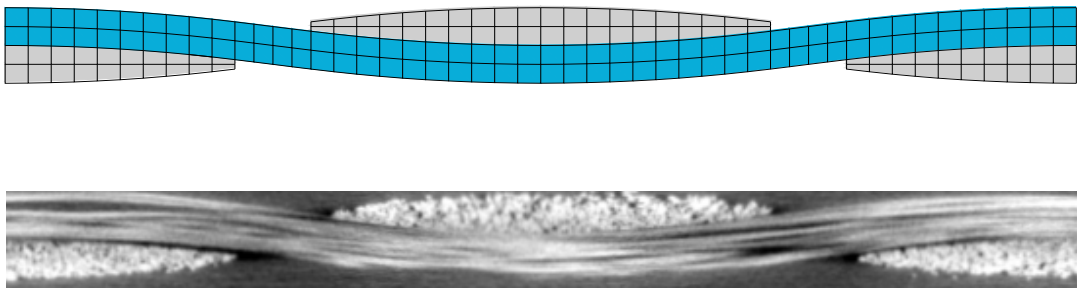


Figure 3-14. Comparaison du modèle géométrique du taffetas de verre issu du modèle de Hivet avec une coupe obtenue par tomographie X.

#### Modèle géométrique pour le sergé de carbone

Seuls les taffetas ont des propriétés de symétrie suffisantes pour que les sections puissent être considérées symétriques et constantes le long de la ligne moyenne de la mèche. L'utilisation de ces hypothèses pour un sergé mène à une description géométrique trop éloignée de la géométrie réelle de la maille élémentaire, notamment dans les zones de contact entre les mèches, qui peut avoir une influence significative sur les résultats obtenus [BAD08a]. Un modèle plus complexe issu de la description géométrique proposée dans [HIV05, HIV08] est donc utilisé, dans lequel la section de la mèche n'est pas symétrique et varie le long de la ligne moyenne (figure 3-15). Ce type de modèle a été présenté au §1.4.3.1, p. 40.

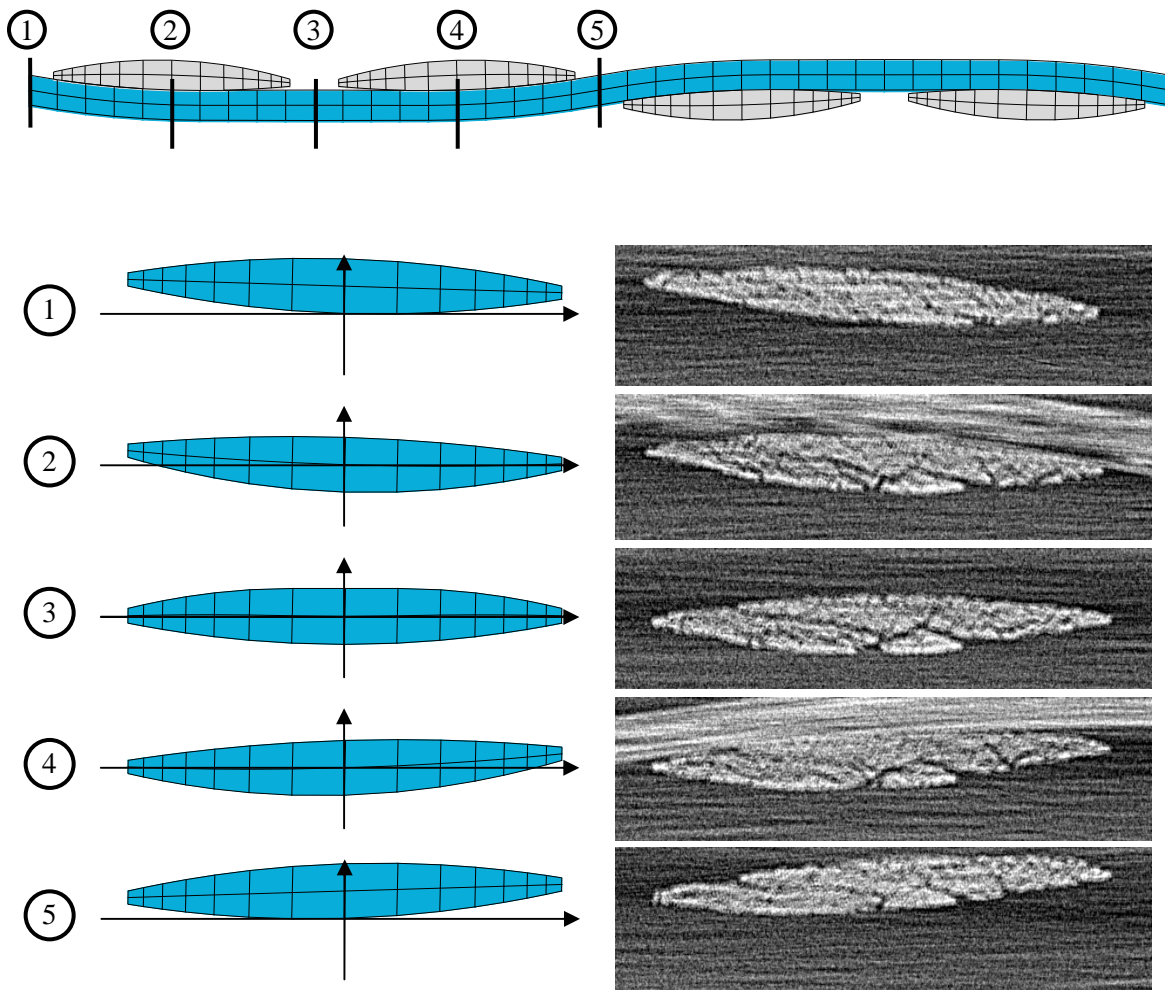


Figure 3-15. Modèle géométrique du sergé de carbone. Comparaison avec des images issues de tomographie X.

#### 3.4.1.4 Choix du maillage

Dans toutes les simulations par éléments finis, la qualité de la discrétisation a une influence sur les résultats obtenus. Comme la géométrie issue du modèle de Hivet est connue analytiquement, il est possible de générer automatiquement un maillage structuré en suivant la ligne moyenne de la mèche. Les bords des éléments sont donc alignés avec la direction des fibres, ce qui facilite l'implémentation de l'orientation des fibres dans le modèle.

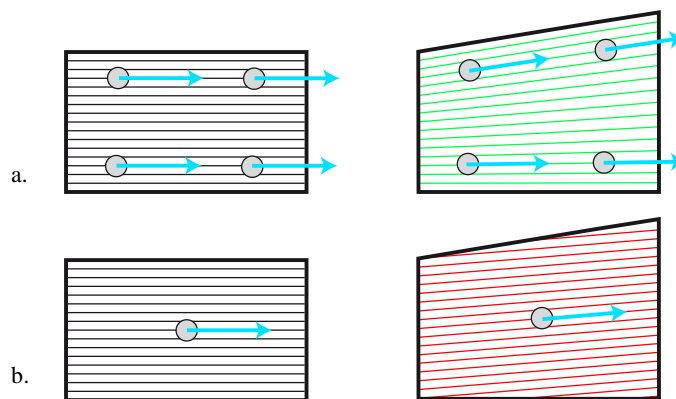


Figure 3-16. Gestion de l'orientation dans Abaqus (a) en intégration complète et (b) en intégration réduite.

Le choix du nombre d'éléments dans l'épaisseur et dans la largeur de la mèche a peu d'influence sur les résultats de calcul [GAS00]. Des maillages contenant deux éléments dans l'épaisseur sont donc utilisés. Par contre l'intégration dans l'élément est importante car l'orientation des fibres est définie à chaque point d'intégration : dès que l'élément est soumis à des transformations non homogènes il existe des différences d'orientation des fibres au sein du volume représenté par l'élément (Figure 3-16). Si une intégration réduite est utilisée, ces variations d'orientation au sein de l'élément ne peuvent être prises en compte, ce qui peut mener à une rigidification de certains modes de cisaillement. Des éléments cubiques à huit nœuds sont utilisés avec une intégration complète (8 points d'intégration).

### 3.4.2 Identification du comportement des mèches du taffetas de verre

#### 3.4.2.1 Identification du comportement en élongation

Quatre paramètres définissent, dans le modèle proposé, le comportement de la mèche correspondant au mode de déformation en élongation dans la direction des fibres :  $S_0$ ,  $I_{elong}^0$ ,  $K_{elong}^0$  et  $K_{elong}$ .  $S_0$  est l'aire de la section transversale de la mèche : sa valeur doit correspondre à l'aire définie dans le modèle géométrique, constante le long de la mèche.

Les trois autres paramètres sont identifiés à l'aide d'un essai de traction simple sur une mèche isolée du renfort : le modèle théorique est implémenté dans Excel, puis le solveur non-linéaire d'Excel est utilisé pour déterminer les paramètres. Il est important de réaliser cet essai sur une mèche isolée du renfort plutôt que sur une mèche provenant d'une bobine avant le tissage car, dans certains cas, l'opération de tissage du renfort peut induire une modification de la raideur de la mèche.

La courbe expérimentale et la courbe issue de l'identification sont représentées sur la figure 3-17. Le potentiel énergétique (3.26) formulé pour le comportement en élongation permet d'obtenir des courbes expérimentale et simulée très proches, même dans la partie non-linéaire de la réponse en tension.

Paramètres identifiés pour  
l'élongation

$S_0$	(mm <sup>2</sup> )	1.0496
$I_{elong}^0$		0.00134
$K_{elong}^0$	(N)	11660
$K_{elong}$	(N)	36714

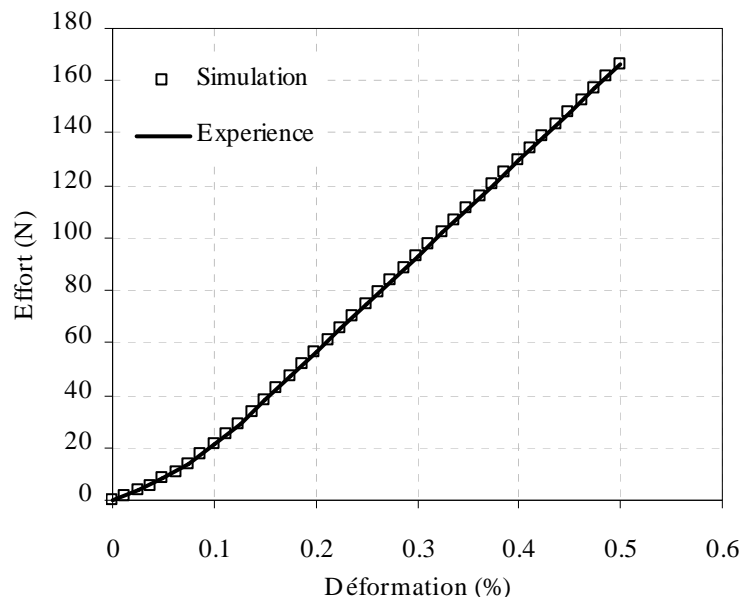


Figure 3-17. Identification du comportement de la mèche de verre en élongation

#### 3.4.2.2 Identification du comportement en cisaillement transverse

Une fois le comportement en élongation identifié, il devient possible d'identifier le comportement de la mèche en cisaillement transverse à partir d'un essai de traction uniaxial sur le renfort : ainsi que

nous l'avons vu au paragraphe 1.3.2.2 (page 27), les modes de déformation les plus sollicités au cours d'un tel essai sont l'élongation et le cisaillement transverse.

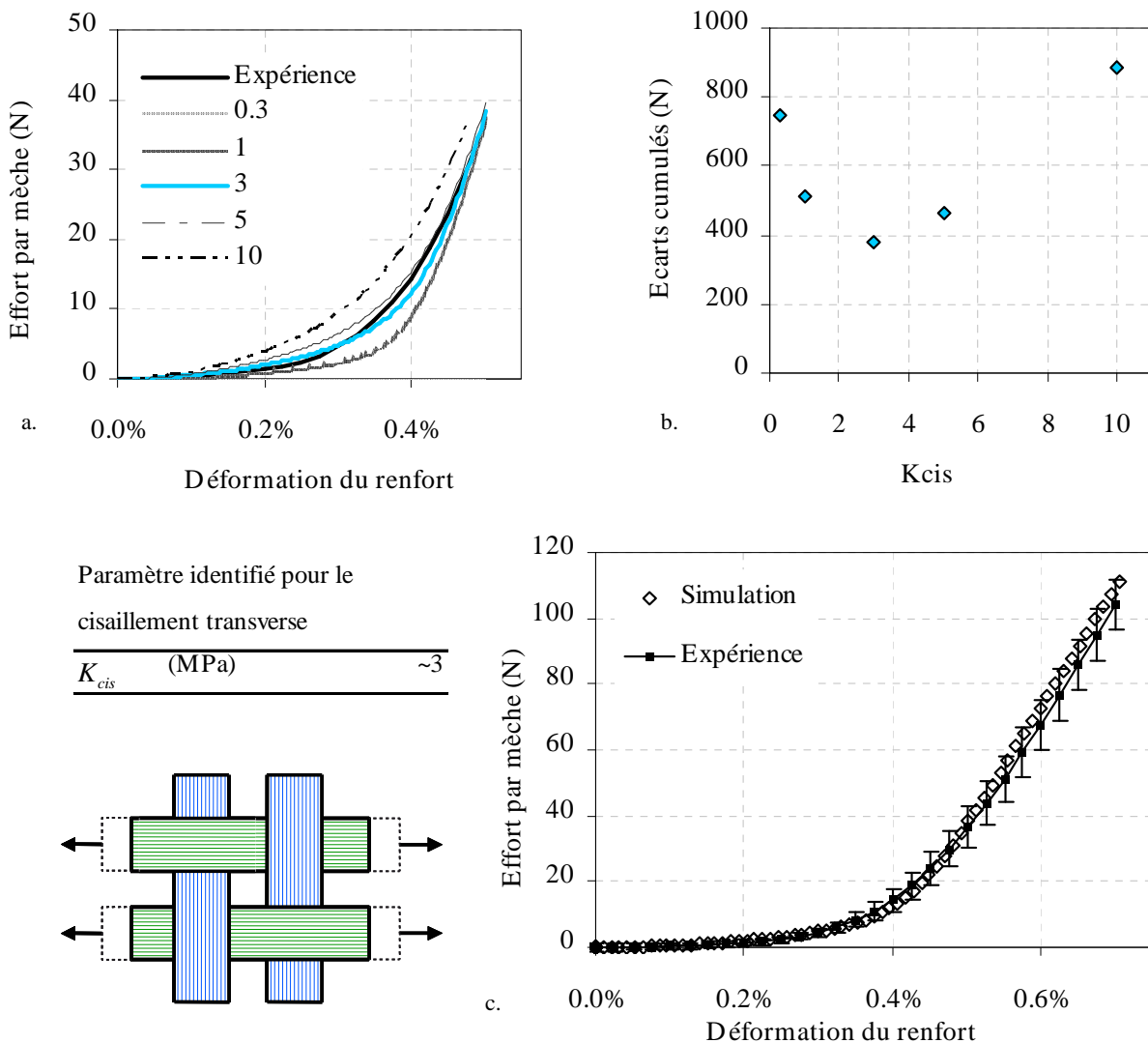


Figure 3-18. Identification du comportement en cisaillement transverse de la mèche du taffetas de verre. (a) Réseau de courbes obtenues en faisant varier le paramètre de cisaillement transverse (b) Écarts cumulés entre simulations et expérience, obtenus pour chaque paramètre testé (c) Courbe obtenue après identification.

La Figure 3-18 présente les courbes de tension uniaxiale obtenues pour différentes valeurs de raideur du comportement en cisaillement transverse. La courbe simulée la plus proche de la courbe expérimentale est celle obtenue pour un coefficient  $K_{cis}$  environ égal à 3. Cette identification est approximative car les courbes issues de l'expérience et de la simulation n'ont pas exactement la même forme : comme le comportement du renfort en tension uniaxiale est fortement dépendant de la géométrie de la maille élémentaire (de l'embuvage notamment), cette différence de formes entre les courbes obtenues peut être attribuée à :

- une description géométrique approximative de la maille élémentaire,
- une mauvaise homogénéité de l'éprouvette utilisée dans l'expérience,
- une description trop pauvre du comportement en cisaillement transverse par la loi de comportement.

Nous verrons par la suite que l'identification du comportement en cisaillement transverse du sergé de carbone est plus précise que celle qui est obtenue ici. Il est donc probable que la différence de

forme entre les courbes issues de l'expérience et de la simulation constatée pour le taffetas de verre soit liée au modèle géométrique ou à l'expérience.

### 3.4.2.3 Identification du comportement dans le plan transverse

#### Problème d'optimisation

Nous cherchons ici à optimiser les paramètres du comportement de la mèche dans le plan transverse, afin que la courbe de tension équi-biaxiale simulée approche au mieux la courbe mesurée expérimentalement. Ce problème est formalisé mathématiquement par un résidu  $R$ , mesure de l'écart entre ces deux courbes : la méthode des moindres carrés sera utilisée pour réaliser cette comparaison.

Notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des  $n_{\mathcal{E}}$  points de la courbe expérimentale et  $\mathcal{S}$  l'ensemble des  $n_{\mathcal{S}}$  points de la courbe simulée. Les abscisses de ces points ne correspondant généralement pas, l'un de ces deux ensembles doit être interpolé aux abscisses de l'autre. La courbe expérimentale sera interpolée sur la courbe simulée, les points de cette dernière étant plus nombreux et plus réguliers. Ce choix n'est toutefois pas déterminant pour la qualité finale de l'algorithme. L'ensemble des points interpolés sera noté  $\mathcal{E}^{interp}$ . Pour chacun des points  $\vec{X}_{\mathcal{S}} = (x_{\mathcal{S}} \ y_{\mathcal{S}})$  de la courbe simulée, le point  $\vec{X}_{\mathcal{E}^{interp}} = (x_{\mathcal{E}^{interp}} = x_{\mathcal{S}} \ y_{\mathcal{E}^{interp}})$  correspondant, interpolé à partir de la courbe expérimentale, est calculé de la façon suivante :

- Recherche des points expérimentaux  $\vec{X}_{\mathcal{E}}^{(1)} = (x_{\mathcal{E}}^{(1)} \ y_{\mathcal{E}}^{(1)})$  et  $\vec{X}_{\mathcal{E}}^{(2)} = (x_{\mathcal{E}}^{(2)} \ y_{\mathcal{E}}^{(2)})$  d'abscisses les plus proches, encadrant l'abscisse  $x_{\mathcal{S}} = x_{\mathcal{E}^{interp}}$  :

$$x_{\mathcal{E}}^{(1)} \leq x_{\mathcal{S}} \leq x_{\mathcal{E}}^{(2)} \quad (3.45)$$

- Interpolation linéaire des ordonnées  $y_{\mathcal{E}}^{(1)}$  et  $y_{\mathcal{E}}^{(2)}$  à l'abscisse  $x_{\mathcal{S}} = x_{\mathcal{E}^{interp}}$  :

$$y_{\mathcal{E}^{interp}} = y_{\mathcal{E}}^{(1)} + \frac{y_{\mathcal{E}}^{(2)} - y_{\mathcal{E}}^{(1)}}{x_{\mathcal{E}}^{(2)} - x_{\mathcal{E}}^{(1)}} (x_{\mathcal{E}^{interp}} - x_{\mathcal{E}}^{(1)}) \quad (3.46)$$

L'écart entre les deux courbes est alors mesuré par la méthode des moindres carrés :

$$R = \sum_{n_{\mathcal{S}}} (y_{\mathcal{E}^{interp}} - y_{\mathcal{S}})^2 \quad (3.47)$$

C'est ce résidu  $R$  qui doit être minimisé afin que la courbe simulée s'approche au mieux de la courbe expérimentale. Pour ce faire, plusieurs algorithmes sont envisageables. Le choix s'est porté sur l'algorithme de Levenberg-Marquardt, décrit ci-après.

#### Algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt

L'algorithme de Levenberg-Marquardt [MAR63, SCH92] permet de déterminer de façon itérative un problème de minimisation d'une fonction non-linéaire  $R$ , dépendant d'un vecteur paramètres  $\underline{p} = \{p_1, \dots, p_n\}$ . Dans le cas étudié ici, le résidu  $R$  est défini par l'équation (3.47), et le vecteur paramètres est formé des trois paramètres décrivant le comportement de la mèche dans le plan transverse :  $\underline{p} = \{K_{comp}, P_{comp}, K_{dist}\}$ . On cherche donc à déterminer  $\underline{p}$  tel que  $R(\underline{p}) = 0$ .

Les méthodes à directions de descente sont classiquement utilisées pour résoudre ce type de problème de minimisation. Parmi ceux-ci, l'algorithme de Gauss-Newton et l'algorithme du gradient sont probablement les plus simples : le premier présente l'avantage d'une convergence rapide, mais pouvant osciller autour de la solution, alors que le second a une convergence moins rapide mais une approche précise de la solution. L'algorithme de Levenberg-Marquardt est une interpolation de ces

deux algorithmes, tirant partie des avantages de chacun d'entre eux. Dans cet algorithme, le calcul des nouveaux paramètres se fait à chaque itération à l'aide de la formule suivante :

$$\underline{p}_{i+1} = \underline{p}_i - (\underline{H} + \lambda \underline{I})^{-1} \cdot \underline{p}_i \tag{3.48}$$

$\lambda$  est le paramètres de Levenberg : lorsque ce paramètre est grand l'algorithme se rapproche de l'algorithme du gradient, et lorsqu'il est faible l'algorithme se rapproche de l'algorithme de Gauss-Newton. Ce paramètre est mis à jour automatiquement à chaque itération. Lorsque l'algorithme converge rapidement il est diminué pour approcher finement la solution, et lorsque la convergence est plus difficile il est augmenté pour faire varier les paramètres dans la direction de la plus grande pente.

**Identification des paramètres de compaction et de distorsion**

La mesure de l'écart entre l'expérience et la simulation défini précédemment, et l'algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt implémenté, permettent d'identifier les paramètres liés au comportement de la mèche dans le plan transverse. Les courbes de tension équibiaxiale obtenues à chaque itération de l'algorithme sont présentées sur la figure 1-19.

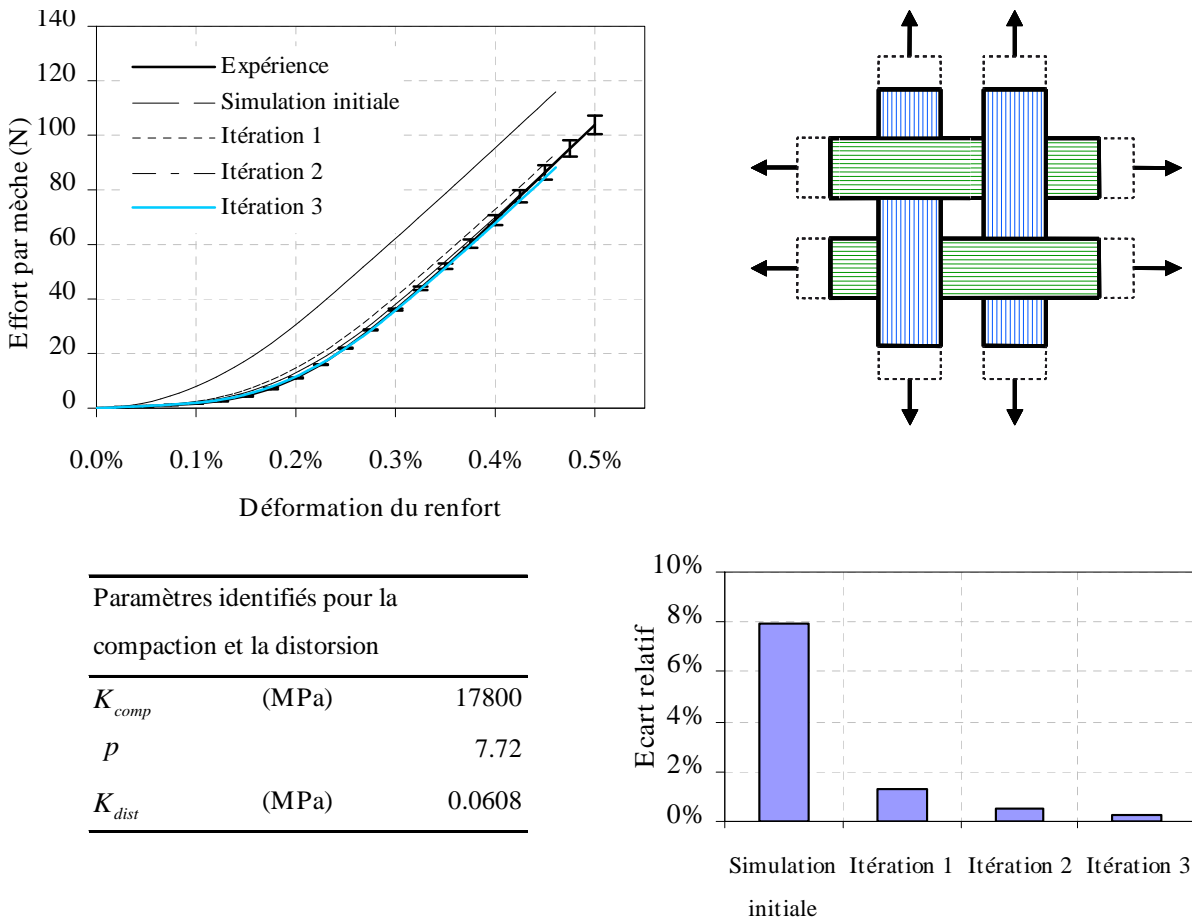


Figure 3-19. Identification du comportement dans le plan transverse de la mèche du taffetas de verre.

Les paramètres identifiés par la méthode présentée ici permettent d'obtenir une courbe de tension biaxiale proche de la courbe expérimentale, et ce en peu d'itérations. L'utilisation de paramètres initiaux réalistes (i.e. proches de la solution recherché) est nécessaire, afin que l'algorithme ne converge pas vers un minimum local de la fonction résidu. Pour la mèche de sergé de carbone dont les

paramètres seront identifiés par la suite, les paramètres déterminés ici seront utilisés comme paramètres de départ.

### 3.4.3 Identification du comportement des mèches du sergé de carbone

Dans cette partie la loi de comportement sera identifiée pour les mèches issues du sergé de carbone (§3.4.1.1, p. 84). Nous verrons que les fonctions utilisées pour décrire l'élongation, la compaction, la distorsion et le cisaillement transverse conviennent aussi bien pour ces mèches de fibres de carbone que pour les mèches de fibres de verre. La méthodologie adoptée sera identique à celle mise en œuvre pour les mèches de verre :

- identification de l'élongation des mèches avec un essai de traction uniaxiale sur une mèche
- identification du cisaillement transverse avec un essai de traction uniaxiale
- identification de la compaction et de la distorsion avec un essai de tension biaxiale

Le même algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt qu'au §3.4.2.3, est utilisé pour identifier les paramètres du comportement en compaction et du comportement en distorsion.

#### 3.4.3.1 Identification du comportement en élongation

Les paramètres du comportement en élongation identifiés pour la mèche de carbone, et les courbes expérimentale et simulée obtenues sont présentés sur la figure 3-20.

Paramètres identifiés pour  
l'élongation

$S_0$	(mm <sup>2</sup> )	0.537
$I_{elong}^0$		0.00047
$K_{elong}^0$	(N)	22000
$K_{elong}$	(N)	53800

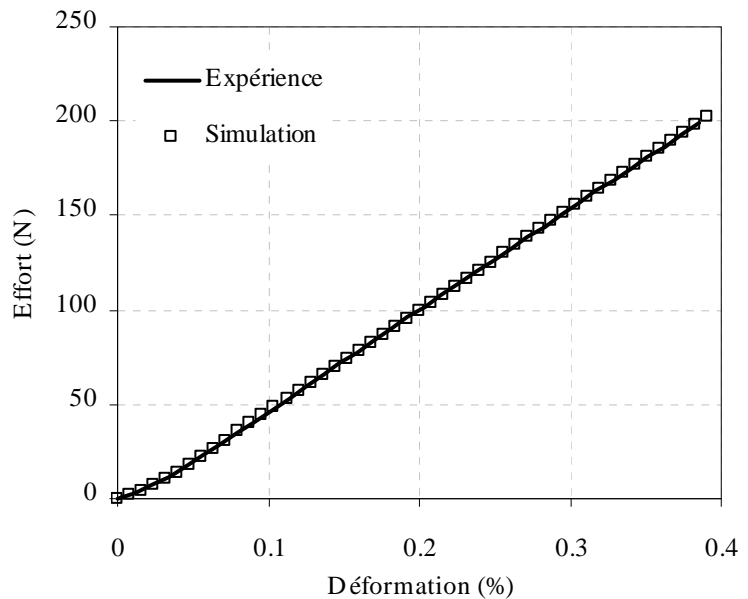
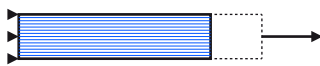


Figure 3-20. Identification du comportement de la mèche de carbone en élongation.

De même que pour la mèche de verre, une très bonne corrélation entre l'expérience et la simulation est obtenue très simplement à l'aide du solveur d'Excel.

#### 3.4.3.2 Identification du comportement en cisaillement transverse

Comme pour le taffetas, le cisaillement transverse est identifié à l'aide d'un essai de traction uniaxiale sur le renfort : il est supposé que seul le cisaillement transverse travaille dans la partie non-linéaire de la courbe de traction uniaxiale, et donc que le comportement associé aux autres modes de déformation est sans influence. Le résultat de l'identification est donné sur la figure 3-21.



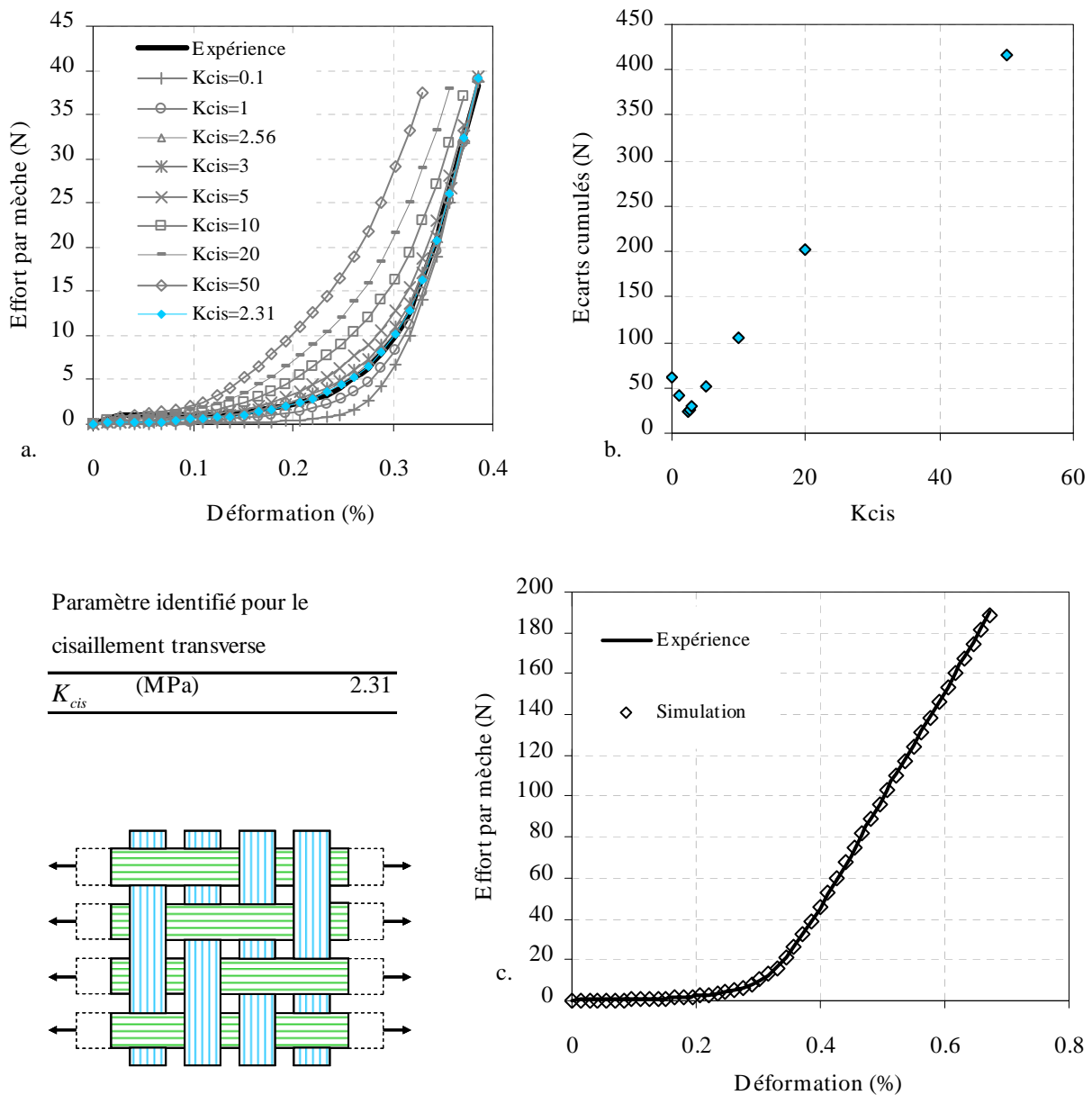


Figure 3-21. Identification du comportement de la mèche de carbone en cisaillement transverse. (a) Réseau de courbes obtenues en faisant varier le paramètre de cisaillement transverse (b) Ecarts entre simulation et expérience, obtenus pour chaque paramètre testé (c) Courbe obtenue après identification.

L’hypothèse précédente, disant que seul le comportement en cisaillement transverse travaille lors d’un essai de traction uniaxiale, a des limites : par exemple, si une raideur nulle est associée au comportement en compaction, la section diminuera et le cisaillement transverse ne travaillera pas. Des valeurs « raisonnables » doivent donc être choisies pour le comportement des autres modes de déformation afin que cette hypothèse soit valable. La sensibilité des simulations de traction uniaxiale par rapport au comportement des modes de déformation de compaction et de distorsion a été étudiée. La figure 3-22 montre que cette sensibilité est très faible, malgré de fortes variations des paramètres de comportement associés à la compaction et à la distorsion.

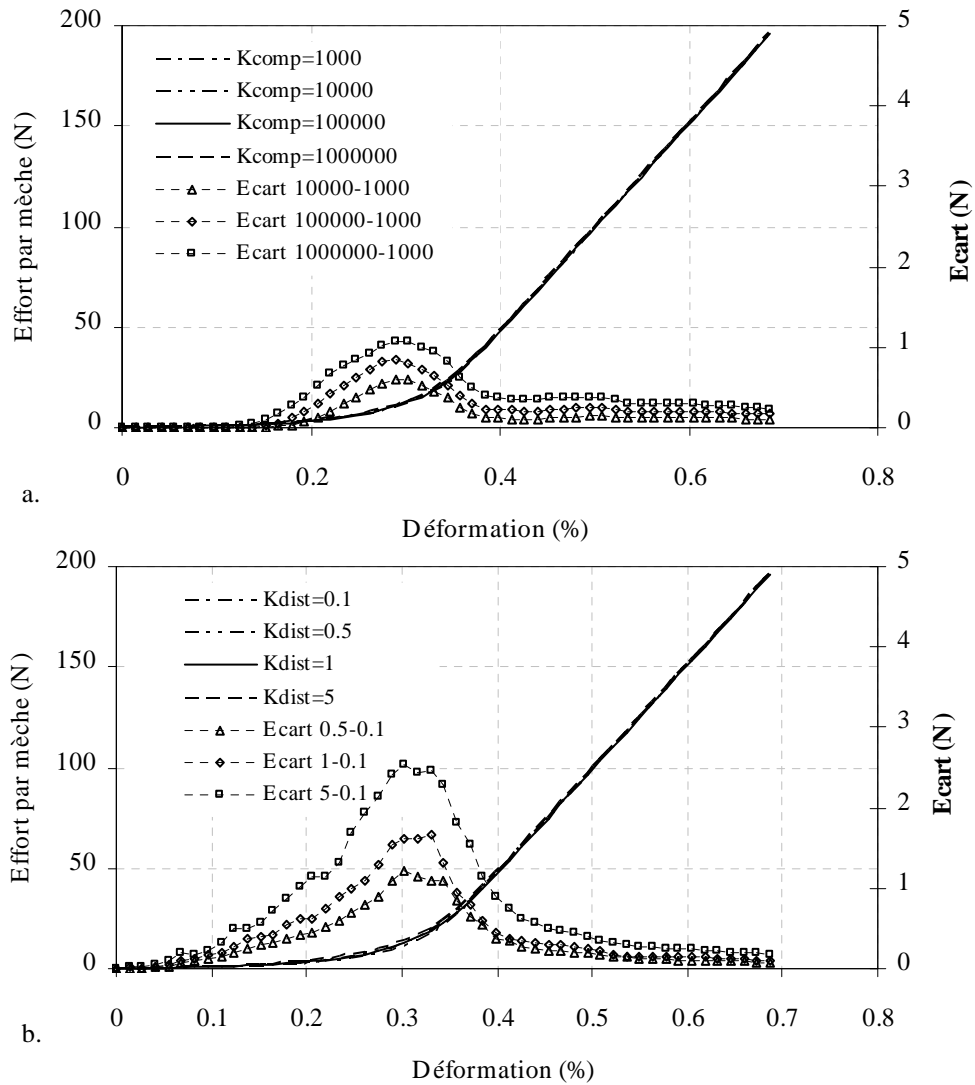


Figure 3-22. Sensibilité de la traction uniaxiale au comportement (a) en compaction et (b) en distorsion

### 3.4.3.3 Identification du comportement dans le plan transverse

L'algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt, utilisé pour l'identification de la compaction et de la distorsion de la mèche de fibres de verre, est également utilisé ici. Les paramètres utilisés comme point de départ de l'algorithme sont les paramètres déterminés pour la mèche de fibres de verre. L'erreur initiale obtenue avec ces paramètres est relativement faible, et les paramètres identifiés sont proches des paramètres identifiés pour la mèche de verre.

Les courbes obtenues et l'évolution de la fonction erreur à chaque itération de l'algorithme sont présentées sur la figure 3-23. L'algorithme d'optimisation permet une identification proche des résultats expérimentaux. Une légère différence de raideur peut toutefois être constatée entre la simulation et l'expérience.

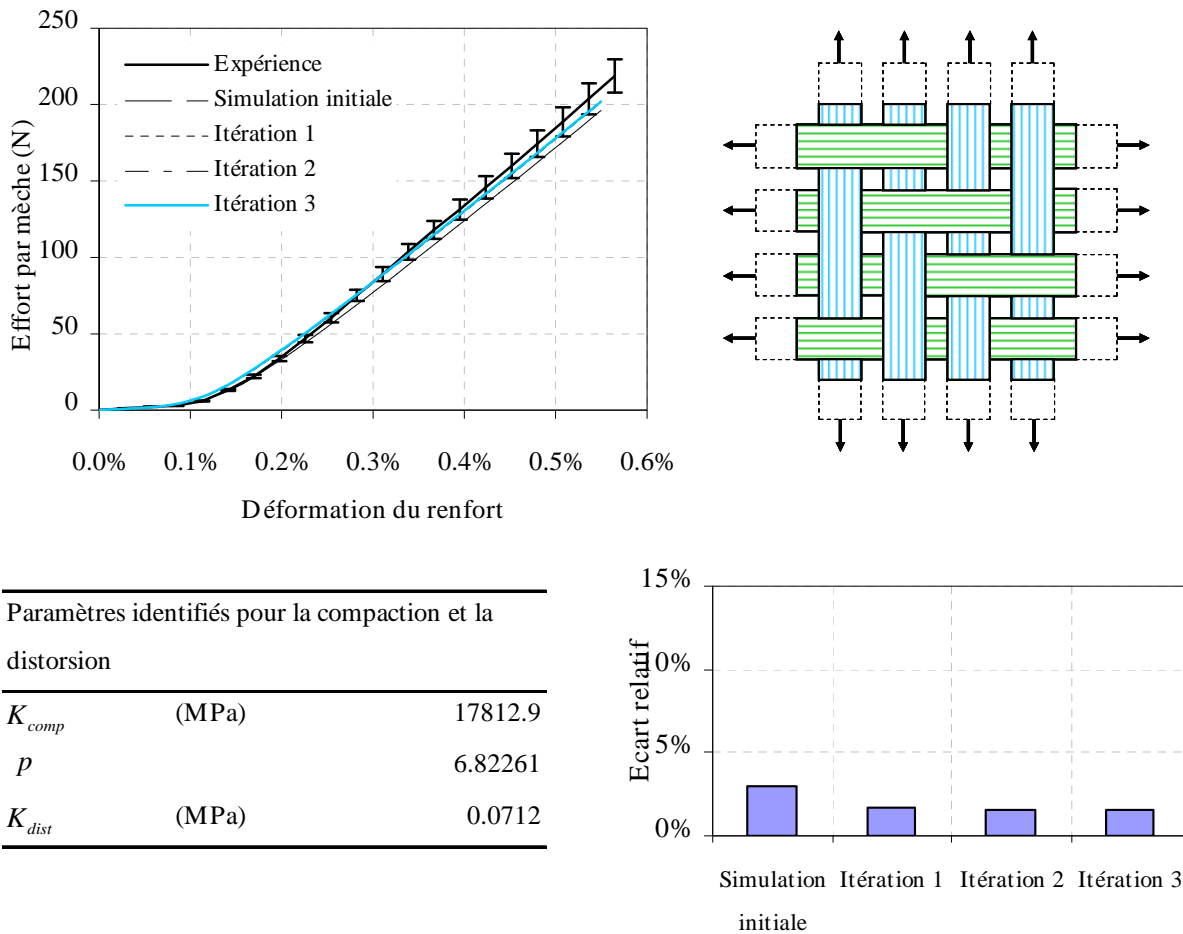


Figure 3-23. Identification du comportement de la mèche de carbone dans le plan transverse.

### 3.4.4 Bilan sur la méthode d'identification de la loi de comportement

Une méthode d'identification des paramètres de la loi hyperélastique a été proposée et utilisée pour identifier les paramètres de la loi de comportement hyperélastique pour une mèche de fibres de verre et une mèche de fibres de carbone. Cette méthode nécessite de disposer d'observations géométriques pour la modélisation de la maille élémentaire, ainsi que de trois essais :

- un essai de tension uniaxiale sur la mèche du renfort
- un essai de tension uniaxiale sur le renfort
- un essai de tension biaxiale sur le renfort

Le tableau 4 récapitule les paramètres associés aux différents modes de déformation et les essais utilisés pour identifier ces paramètres.

Mode de déformation	Elongation		Compaction	Distorsion	Cisaillement transverse	
Paramètres	$I_{elong}^0$	$K_{elong}^0$	$K_{elong}$	$K_{comp}$ $p$	$K_{dist}$	$K_{ds}$
Mode d'identification	Essai de tension uniaxiale sur la mèche			Essai de tension équibiaxiale, optimisation par une approche itérative		Essai de tension uniaxiale sur le tissu

Tableau 4. Récapitulatif des paramètres de la loi de comportement hyperélastique pour la mèche et des essais utilisés pour leur identification.

## 3.5 Comparaisons simulations/expériences

Les paramètres de la loi de comportement établie dans ce chapitre ont été identifiés pour une mèche de fibres de verre et pour une mèche de fibres de carbone. Pour cela, des résultats expérimentaux de traction uniaxiale sur la mèche, de traction uniaxiale sur le renfort et de traction équilibrée sur le renfort ont été utilisés.

L'objectif de cette section est de valider cette loi de comportement en comparant des résultats de simulations à des résultats expérimentaux, pour des cas de chargement différents de ceux étudiés précédemment. Les chargements de traction biaxiale déséquilibrée seront étudiés dans un premier temps. Ces essais présentent néanmoins une cinématique assez proche des cinématiques utilisées pour l'identification. Des simulations de cisaillement de la maille élémentaire, dont la cinématique est quant à elle bien différente de celle des essais de tension biaxiale, seront réalisées et comparées à des résultats expérimentaux pour chacun des renforts étudiés.

### 3.5.1 Tension biaxiale

Dans cette section la loi de comportement identifiée est utilisée pour simuler le comportement du renfort soumis à des chargements de traction biaxiale déséquilibrée (i.e.  $k \neq 1$ ). Des données expérimentales, issues des travaux de Karine Buet [BUET01], sont disponibles pour  $k = 0.5$  et  $k = 2$ . Ce sont donc les simulations correspondant à ces rapports qui seront étudiées, puisque les autres ont été utilisées pour l'identification.

#### 3.5.1.1 Taffetas de verre

Le réseau complet des courbes de tension biaxiale du taffetas de verre est donné sur la Figure 3-24. La bonne correspondance entre les courbes de tension biaxiale déséquilibrée, qui n'ont pas été utilisées pour l'identification, permet une première validation de la loi de comportement pour la mèche de taffetas verre.

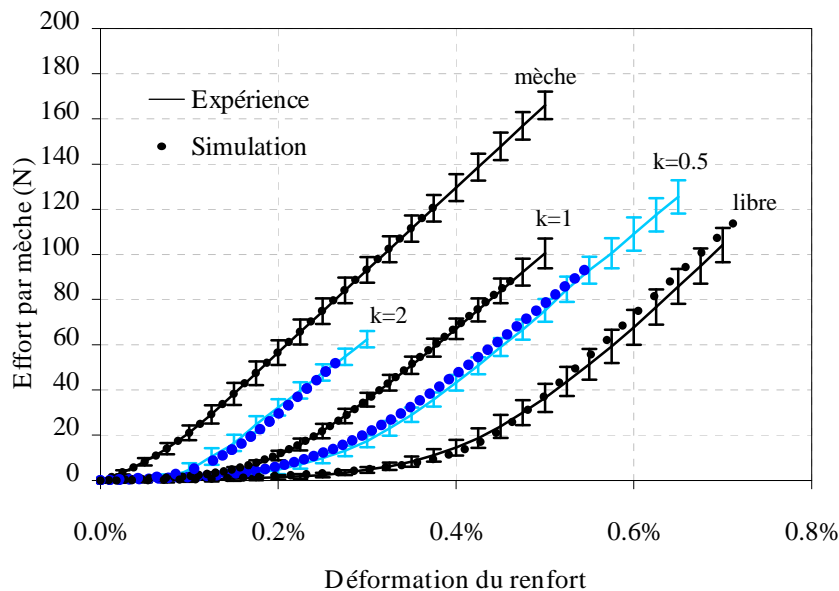


Figure 3-24. Réseaux de tension biaxiale obtenus expérimentalement et par simulation pour le taffetas de verre.

#### 3.5.1.2 Sergé de carbone

Les réseaux de tension biaxiale obtenus expérimentalement et par simulation pour le sergé de carbone sont comparés sur la figure 3-25. Comme pour le taffetas de verre, les courbes de tension

uniaxiale sur la mèche et sur le renfort ainsi que la courbe de tension équi-biaxiale ont été utilisées pour l'identification de la loi de comportement. Les courbes obtenues pour  $k = 0.5$  et  $k = 2$  n'ont pas été utilisées pour l'identification.

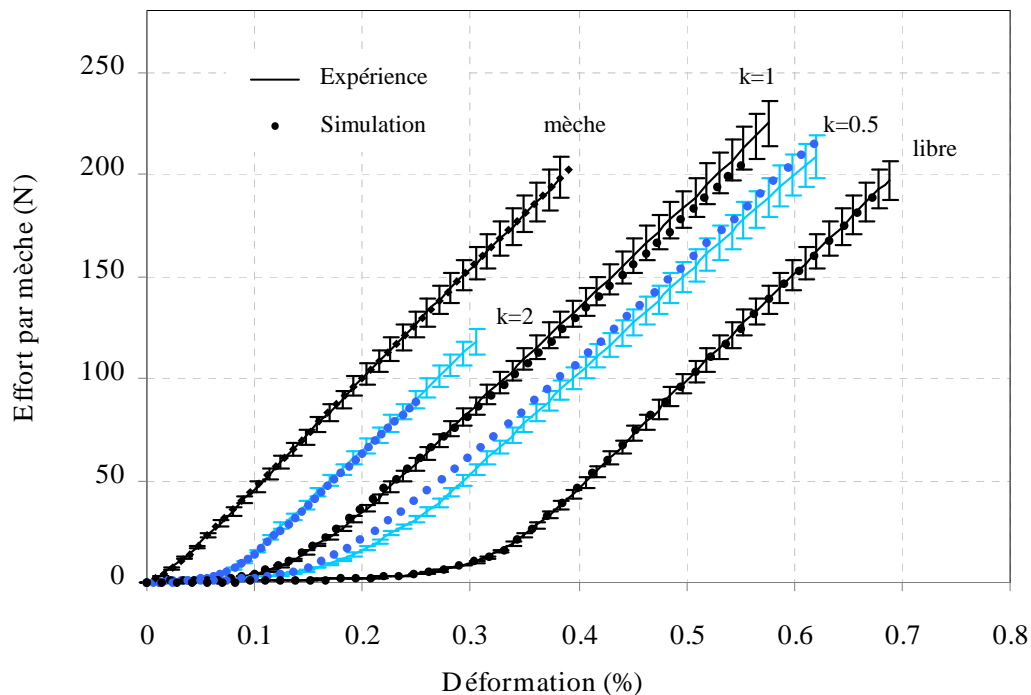


Figure 3-25. Réseaux de tension biaxiale obtenus expérimentalement et par simulation pour le sergé de carbone.

La courbe obtenue par simulation pour  $k = 2$  est très proche de la courbe expérimentale. Par contre, pour  $k = 0.5$ , un léger décalage des déformations peut être observé entre la courbe expérimentale et la courbe simulée. De façon générale dans les essais de tension biaxiale, le point de départ (i.e. le zéro des déformations) est difficile à obtenir précisément, le tissu pouvant être légèrement déformé lors de sa manutention. Ceci pourrait expliquer ce décalage constaté entre les courbes expérimentale et simulée.

### 3.5.2 Cisaillement du renfort tissé dans le plan

Les réseaux de tension biaxiale présentés précédemment montrent une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et les résultats de simulation, et permettent ainsi une première validation de la loi de comportement. Toutefois, les cinématiques des tests de validation sont très proches des cinématiques utilisées pour l'identification des paramètres de la loi de comportement. Des simulations de cisaillement sont présentées dans cette partie, permettant de tester la loi de comportement proposée dans un cas où la déformation de la maille élémentaire est plus complexe. Ces simulations sont effectuées pour les deux types de renforts étudiés dans ce chapitre. Une comparaison des efforts mis en œuvre est proposée pour chacun des renforts. La quantité d'intérêt utilisée pour comparer ces efforts est le couple de cisaillement, défini dans la section 1.3.2.4 (p. 29).

#### 3.5.2.1 Taffetas de verre

La déformée de cisaillement de la maille élémentaire de taffetas de verre obtenue par la simulation est présentée sur la figure 3-26.

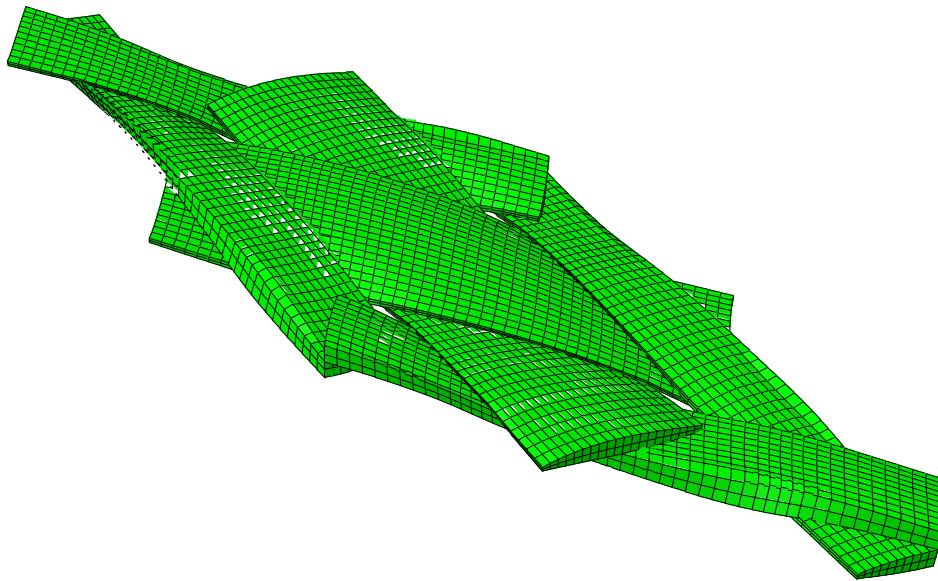


Figure 3-26. Déformée de cisaillement de la maille élémentaire de taffetas de verre obtenue par la simulation.

Les couples de cisaillement, calculés à partir d'un essai de picture frame et à partir de la simulation de cisaillement de la maille élémentaire, sont présentés sur la figure 3-27.

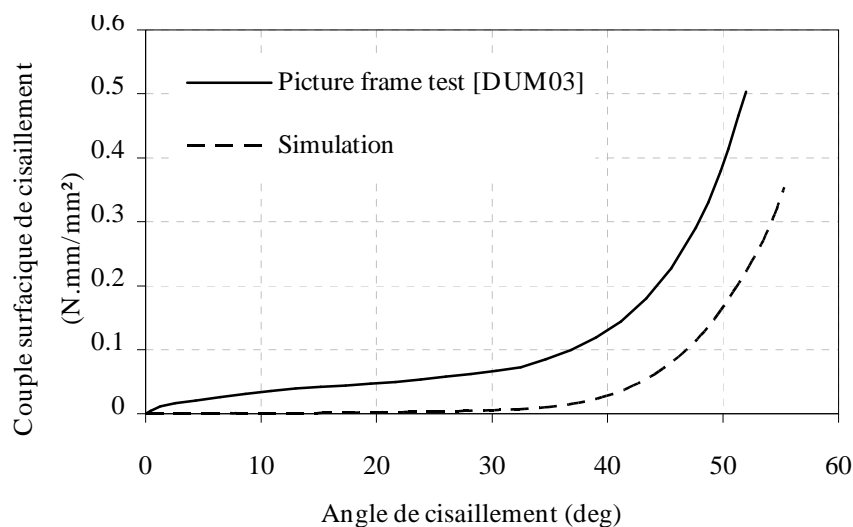


Figure 3-27. Couples de cisaillement obtenus expérimentalement et par simulation pour le taffetas de verre.

L'allure de la courbe obtenue par la simulation est satisfaisante : la rigidification en cisaillement, liée notamment à l'apparition d'un contact latéral entre les mèches, apparaît nettement sur la courbe simulée. Néanmoins le couple de cisaillement calculé par la simulation est nettement plus faible que le couple mesuré au cours de l'expérience. La partie de la courbe située avant cette rigidification est notamment mal décrite par la simulation : expérimentalement une raideur initiale est constatée, alors que dans la simulation la courbe est initialement tangente à l'axe des abscisses. Deux aspects peuvent expliquer cette différence :

- dans le tissu réel, les mèches sont ensimées (voir 1.2.1.2, p. 18). Il est possible que cet ensimage soit à l'origine de la raideur initiale en cisaillement du renfort. Rapidement, cet ensimage se rompt et la raideur diminue. Dans certains cas, une diminution du couple de

cisaillement peut apparaître après la rupture de l'ensimage. Ce comportement lié à l'ensimage n'est pas pris en compte dans le modèle proposé ici.

- lorsque le tissu est mis en place dans le cadre de cisaillement, une légère tension lui est appliquée (§1.3.2.4, p.29) : cette tension accentue le frottement entre les mèches de chaîne et les mèches de trame. Dans la simulation présentée ici, aucune tension préalable n'a été imposée à la maille élémentaire.

Des simulations de cisaillement sous traction biaxiale ont été mises en place afin de tester l'influence de cette traction sur les efforts mis en œuvre lors d'un cisaillement de la maille élémentaire. Les courbes obtenues pour différentes tractions biaxiales sont présentées sur la figure 3-28. Le paramètre  $e$  est la déformation d'élongation imposée au renfort dans les directions chaîne et trame.

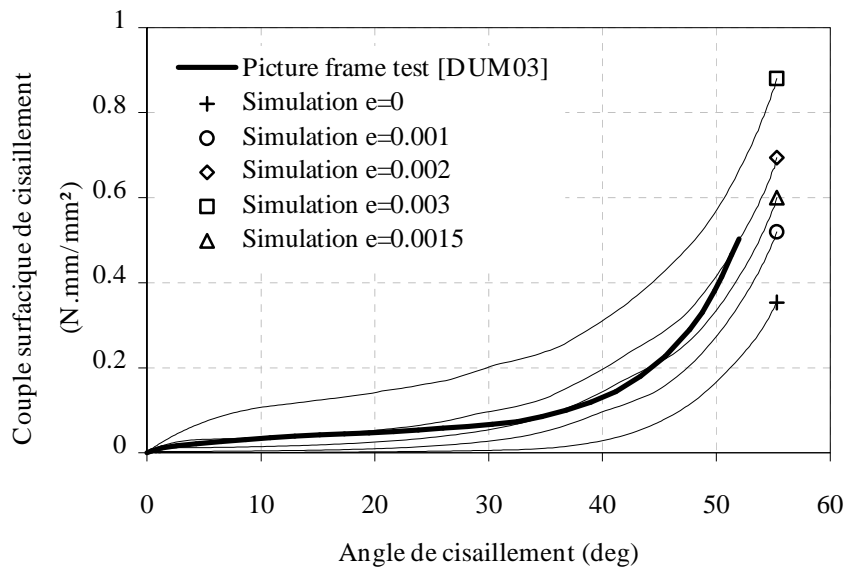


Figure 3-28. Influence de la tension sur le cisaillement de la maille élémentaire.

L'influence de l'introduction d'une tension biaxiale sur le cisaillement de la maille élémentaire est très nette sur la figure 3-28. La courbe la plus proche de la courbe expérimentale est celle obtenue pour une tension  $e = 0.0015$ . On peut supposer que pour l'essai utilisé ici une telle déformation ait été imposée au renfort, mais même avec cette valeur de déformation initiale le début de la courbe reste mal décrit. La présence de l'ensimage semble donc avoir une influence déterminante pour cette partie de l'essai.

### 3.5.2.2 Sergé de carbone

La figure 3-29 montre la déformée de cisaillement obtenue par simulation pour le sergé de carbone.

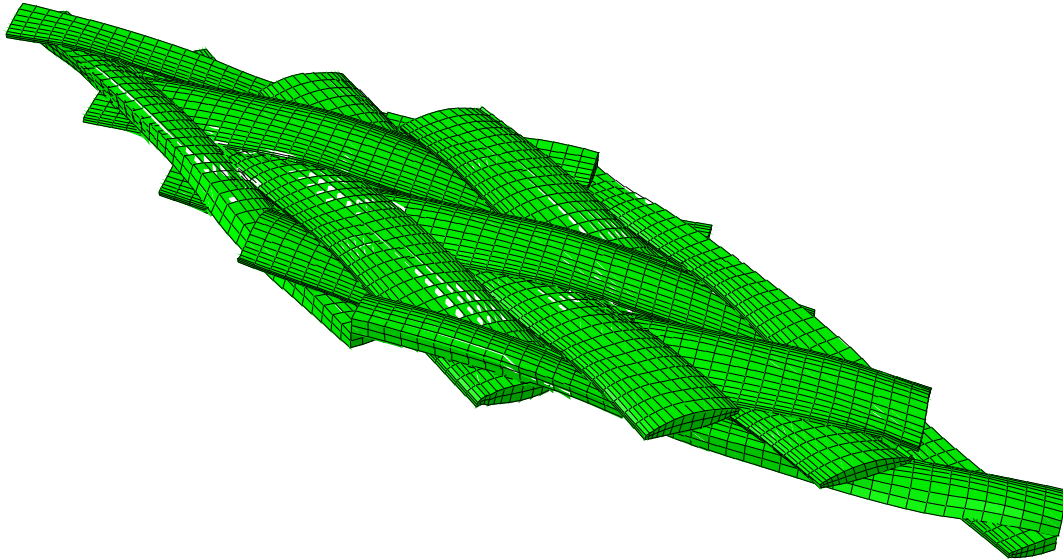


Figure 3-29. Déformée de cisaillement pur de la maille élémentaire de sergé de carbone obtenue par la simulation.

Une courbe expérimentale de couple surfacique de cisaillement a été obtenue expérimentalement pour le sergé de carbone dans la thèse de Dumont [DUM03]. Cette courbe est comparée avec la courbe issue de la simulation sur la figure 3-30. Les remarques et conclusions qui ont été faites pour le taffetas de verre s'appliquent également dans ce cas :

- la forme de la courbe simulée est en accord avec l'expérience, et la rigidification en cisaillement semble apparaître au même moment que pour l'expérience,
- au cours de l'expérience l'effort augmente plus progressivement car les interstices entre les mèches ne se ferment pas tous au même moment, le tissage n'étant pas tout à fait homogène au sein de l'éprouvette testée,
- le niveau d'effort mesuré au cours de l'expérience est plus important que le niveau d'effort issu de la simulation : la présence de l'ensimage et la tension initiale appliquée aux mèches lors de la mise en place de l'éprouvette dans le picture frame sont certainement responsable de cette différence.

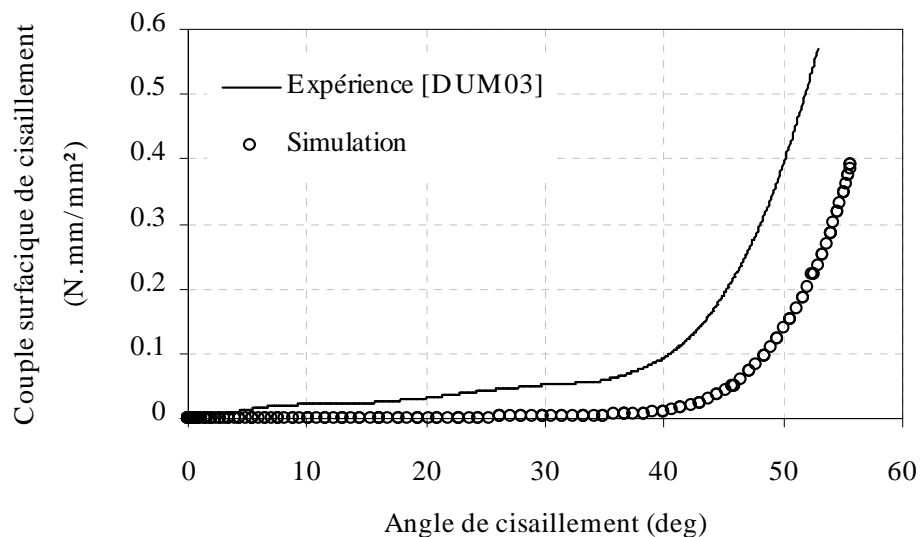


Figure 3-30. Comparaison des couples surfaciques de cisaillement obtenus expérimentalement et par simulation pour le sergé de carbone.



### 3.6 Conclusion du chapitre 3

Dans ce chapitre, une loi de comportement hyperélastique a été formulée pour décrire le comportement des mèches des renforts tissés. Pour cela, la mèche a été considérée comme un milieu continu isotrope transverse, et ses différents modes de déformation ont été analysés et décrits indépendamment : un invariant et une fonction densité d'énergie ont été définis pour chacun des quatre modes de déformation de la mèche (élongation, compaction, distorsion, cisaillement transverse). Cette loi de comportement a été implémentée dans le code de calcul Abaqus/Explicit.

Les renforts étudiés, un taffetas de verre et un sergé de carbone, ont ensuite été présentés. La périodicité de ces renforts nous a amené à définir la maille élémentaire du renfort tissé. Il a alors été montré que, cette maille élémentaire étant un volume élémentaire représentatif du renfort, son comportement mécanique peut être comparé au comportement macroscopique du renfort soumis à une transformation homogène : il est donc possible de comparer des simulations à l'échelle mésoscopique avec des essais à l'échelle macroscopiques pour lesquels la transformation imposée au renfort est homogène. Les conditions de périodicité qui doivent être appliquées à la maille élémentaire pour réaliser ce passage méso-macro ont ensuite été explicitées. Des modèles géométriques ont également été définis pour décrire la géométrie des mailles élémentaires des deux renforts étudiés.

Une méthodologie a été proposée pour identifier la loi comportement à partir de données expérimentales facilement accessibles. Le comportement en élongation a d'abord été identifié à l'aide d'un essai de traction uniaxiale sur la mèche. Ensuite le cisaillement transverse a été identifié à l'aide d'un essai de traction uniaxiale sur le renfort. Enfin le comportement dans le plan transverse de la mèche a été identifié à l'aide d'un essai de traction équibiaxiale sur le renfort, et d'un algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt. Cette méthodologie a permis d'identifier les paramètres de la loi de comportement associés aux deux types de renforts étudiés.

Des cas de chargement plus complexes ont alors été étudiés afin de valider le bon fonctionnement de la loi de comportement, munie des deux jeux de paramètres identifiés. Des simulations de traction biaxiale déséquilibrée ont été réalisées, pour lesquelles une bonne corrélation a été constatée avec les résultats expérimentaux. Quelques différences ont toutefois été relevées, pouvant provenir de la difficulté de définir le zéro des déformations lors d'un essai de traction biaxiale. Afin de confronter la loi de comportement à des cas de chargements plus complexes, des simulations de cisaillement de la maille élémentaire ont également été mises en place. Le couple surfacique de cisaillement a été utilisé pour comparer les efforts mis en œuvre au cours des essais et dans la simulation. Les courbes de simulation obtenues ont une forme satisfaisante, mais présentent des couples sensiblement plus faibles que ceux qui sont mis en œuvre au cours de l'essai. Une tension initiale imposée au renfort lors de la préparation de l'essai de picture frame pouvant être à l'origine de cette différence, une étude de l'influence de cette tension sur le cisaillement a été réalisée. Cette étude permet de déterminer quelques valeurs de tension pour lesquelles les courbes de couple de cisaillement issues de l'expérience et de la simulation sont en bon accord.

Dans ce chapitre, un modèle hyperélastique a été formulé, identifié et validé avec succès pour décrire le comportement d'un matériau fibreux à une direction de fibres. Les difficultés liées à la définition des dérivées objectives n'apparaissent pas avec ce type de modèle, et une bonne maîtrise de l'énergie de déformation du matériau est possible. Bien que les déformations élastiques des fibres induisent la majeure partie du comportement mésoscopique, une part de l'énergie de déformation est absorbée par des phénomènes de dissipation liés aux frottements entre les fibres. Ces phénomènes expliquent notamment la relaxation qui peut être observée lors d'un essai d'écrasement du renfort. L'introduction d'un terme dissipatif dans la loi de comportement proposée, écrit comme une fonction des invariants définis dans ce chapitre, permettrait de prendre en compte ces dissipations et de simuler la relaxation observée.

L'extension de ce type de loi de comportement à des matériaux hyperélastiques à plusieurs directions de fibres ne présentant pas de grande difficulté supplémentaire, un second modèle hyperélastique 3D à deux directions de fibres a été développé pour décrire le comportement mécanique macroscopique des renforts épais interlock. Le chapitre 4 présente la formulation, l'identification et la validation de cette nouvelle loi de comportement.



# Chapitre 4 Loi de comportement

## hyperélastique pour les renforts interlocks épais

*La loi de comportement développée pour la mèche de renfort tissé a montré l'efficacité des approches hyperélastiques pour la modélisation de matériaux textiles à une direction de fibres. Ces approches permettent notamment de s'affranchir de la définition d'une dérivée objective nécessaire aux approches hypoélastiques.*

*Des lois de comportement hypoélastiques à plusieurs directions de fibres soit possible peuvent être formulées [HAG04, KHA10], mais elles nécessitent soit l'introduction d'hypothèses fortes, soit l'utilisation des outils complexes de la géométrie différentielle. En comparaison, le formalisme de l'hyperélasticité anisotrope non-linéaire, utilisant les tenseurs de structure, reste relativement simple. C'est pourquoi un second modèle hyperélastique est proposé dans ce manuscrit, dont l'objectif est de modéliser le comportement mécanique des renforts épais interlocks possédant plusieurs directions privilégiées initialement orthogonales. La méthodologie utilisée pour définir cette nouvelle loi de comportement hyperélastique sera similaire à celle utilisée pour la loi isotrope transverse : description des modes de déformation, association d'invariants à ces modes de déformation et écriture des énergies associées à chacun des modes de déformation.*

*La loi isotrope transverse développée précédemment était une loi à l'échelle mésoscopique : elle décrivait le comportement de la mèche de renfort tissé, assemblage de fibres. La loi de comportement proposée dans ce chapitre constitue une approche macroscopique, dont l'objectif est de modéliser le comportement global du renfort au cours d'une mise en forme. Les renforts de faible épaisseur sont généralement modélisés, à l'échelle macroscopique, à l'aide d'approches 2D utilisant une discrétisation par éléments finis avec des coques ou des membranes [HAM07, HAM09, AIM10, KHA10, BOI11]. La loi de comportement proposée dans ce chapitre vise à modéliser le comportement mécanique des renforts interlocks 2.5D, dont l'épaisseur est beaucoup plus importante que celle des tissés 2D (plusieurs centimètres). Les lois de comportement macroscopiques 2D ne permettent pas de modéliser les déformations de ces renforts dans l'épaisseur : elles ne sont donc pas adaptées à la modélisation du comportement macroscopique des interlocks. La loi de comportement présentée dans ce chapitre propose une modélisation macroscopique 3D, utilisant des éléments finis volumiques, permettant de prendre en compte le comportement du renfort dans l'épaisseur.*

*Dans le cas du matériau homogénéisé « interlock », une caractérisation expérimentale directe sera possible, qui facilitera l'identification des paramètres de la loi de comportement. Différents essais de caractérisation des renforts interlocks seront utilisés dans ce chapitre : tension dans la direction des mèches, écrasement du renfort, bias extension test et essais de flexion. Ces essais ont été réalisés dans le cadre d'un autre travail de thèse au LaMCoS. Ils seront introduits au fur et à mesure de l'identification de la loi de comportement.*

*Après la formulation des hypothèses de base de la loi de comportement proposée, concernant notamment les symétries du matériau étudié et ses modes de déformation, un ensemble d'invariants sera déterminé de la même façon que pour la loi de comportement de la mèche au chapitre précédent. Des densités d'énergie de déformation seront ensuite associées à chacun de ces invariants et*

identifiées à l'aide d'essais expérimentaux. Finalement la loi de comportement sera utilisée pour simuler un cas de flexion à  $0^\circ/90^\circ$ , un cas de flexion à  $45^\circ$  et un cas d'emboutissage hémisphérique, faisant intervenir simultanément les différents mode de déformation. L'étude de ces cas de chargement révélera un comportement inattendu des interlocks, dépendant de la courbure, et une première approche sera proposée pour modéliser ce comportement.

## Sommaire du chapitre

4.1	COMPORTEMENT DU RENFORT INTERLOCK ET HYPOTHESES DE MODELISATION .....	109
4.1.1	Orthotropie des renforts interlocks .....	109
4.1.2	Modes de déformation des interlocks .....	109
4.2	DEFINITION DES INVARIANTS .....	110
4.2.1	Invariants pour l'élongation dans les directions chaîne et trame .....	110
4.2.2	Invariant pour l'écrasement du renfort .....	111
4.2.3	Invariant pour le cisaillement plan du renfort .....	112
4.2.4	Invariants pour les cisaillements transverses.....	114
4.2.5	Bilan sur les invariants.....	114
4.3	ECRITURE DES ENERGIES DE DEFORMATION ET IDENTIFICATION .....	115
4.3.1	Le renfort interlock étudié.....	115
4.3.2	Tension dans les directions chaîne et trame.....	116
4.3.3	Compaction transverse.....	117
4.3.4	Cisaillement dans le plan du renfort .....	118
4.3.5	Cisaillement transverse .....	124
4.3.6	Bilan sur les densités d'énergie et sur l'identification .....	126
4.4	VALIDATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT .....	126
4.4.1	Flexion à $0^\circ/90^\circ$ .....	127
4.4.2	Flexion à $45^\circ$ .....	132
4.4.3	Emboutissage hémisphérique .....	133
4.5	INTERLOCKS ET MILIEUX DU SECOND GRADIENT .....	135
4.6	CONCLUSION DU CHAPITRE 4 .....	137

## 4.1 Comportement du renfort interlock et hypothèses de modélisation

Les renforts interlocks ont été introduits dans le premier chapitre de ce manuscrit (§1.2.1.3, p. 18). Comme celle des renforts 2D, l'armure des renforts interlocks est constituée de deux réseaux de mèches : les mèches de chaîne et les mèches de trame. Toutefois, dans les armures des interlocks, ces réseaux sont constitués de plusieurs couches: l'entrelacement des réseaux, défini par le motif de tissage, fait parcourir aux mèches toute l'épaisseur du renfort, permettant ainsi de lier les différentes couches entre elles, sans ajouter un troisième réseau de mèches. Cela permet d'obtenir un renfort dont l'épaisseur peut aller jusqu'à plusieurs dizaines de centimètres d'épaisseur, tout en évitant les problèmes de délaminages des composites constitués de couches de renforts 2D. A partir de cette description du renfort, plusieurs hypothèses de modélisation sont formulées dans cette partie : le renfort sera supposé orthotrope et ses déformations seront décrites par six modes de déformation.

### 4.1.1 Orthotropie des renforts interlocks

Comme les renforts 2D, les renforts interlocks sont constitués d'un réseau de chaînes et d'un réseau de trames, orthogonaux dans la configuration de référence. Le matériau 3D homogénéisé correspondant peut donc être considéré comme orthotrope en configuration de référence, avec pour directions privilégiées :

- la direction chaîne  $\underline{M}_1$
- la direction trame  $\underline{M}_2$
- la direction orthogonale aux deux précédentes  $\underline{M}_3$

### 4.1.2 Modes de déformation des interlocks

Les modes de déformation des renforts interlocks sont similaires à ceux des renforts tissés 2D, auxquels s'ajoutent les modes de déformation liés à l'épaisseur du renfort. Finalement, les modes de déformation suivants sont considérés :

- élongation du renfort dans la direction chaîne,
- élongation du renfort dans la direction trame,
- compression transverse du renfort,
- cisaillement du renfort dans le plan,
- cisaillement transverse sens chaîne,
- cisaillement transverse sens trame.

Ces modes de déformation sont illustrés sur la figure 4-1. A l'inverse des modes de déformation de la mèche, la plupart des modes de déformation des renforts interlocks peuvent être caractérisés expérimentalement de façon directe.

Plusieurs types d'anélasticité ont été mis en évidence lors de la caractérisation expérimentale du comportement mécanique associé à ces différents modes de déformation. A l'échelle de la méso et de la microstructure, il existe des dissipations induites par les frottements entre les mèches et entre les fibres. Par ailleurs les possibles réarrangements des fibres induisent des phénomènes de relaxation dans le comportement de la plupart de ces modes de déformation, qui ont une influence pour les cas de chargement cycliques notamment. Dans ce manuscrit, seuls des cas de chargement simples, quasi statiques, seront étudiés, c'est pourquoi le comportement plastique ou visqueux associé à ces phénomènes ne sera pas inclus dans la loi de comportement. Les comportements mécaniques associés aux différents modes de déformation seront supposés élastiques non-linéaires.

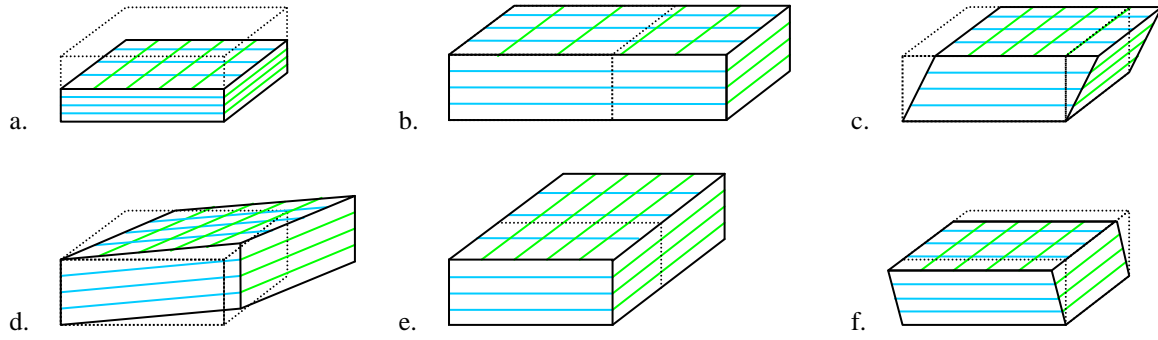


Figure 4-1. Modes de déformation des renforts interlocks. (a) compression transverse, (d) cisaillement dans le plan, (b,e) élongations, (c,f) cisaillements transverses.

## 4.2 Définition des invariants

Comme pour la loi de comportement de la mèche présentée au chapitre 3, des invariants sont associés à chacun des modes de déformation du renfort interlock. La méthodologie utilisée dans le chapitre 3, basé sur une décomposition multiplicative du gradient de la transformation, est plus difficile à mettre en place dans le cas d'un matériau orthotrope. L'existence d'une base dans laquelle le gradient de la transformation prend une forme facile à décomposer est notamment moins évidente. Les invariants seront donc définis par extension des invariants définis pour la mèche, en prenant en compte l'existence de deux directions privilégiées au lieu d'une.

### 4.2.1 Invariants pour l'élongation dans les directions chaîne et trame

Les invariants  $I_{41}$  et  $I_{42}$  définis dans le §2.4.3.2 (page 54) correspondent aux carrés des élongations du matériau dans les directions 1 et 2 (i.e. chaîne et trame). De la même façon que pour la loi de comportement pour la mèche, les invariants choisis pour décrire l'élongation du renfort interlock dans les directions chaîne et trame seront les suivants :

$$\begin{aligned} I_{elong}^1 &= \ln(\sqrt{I_{41}}) \\ I_{elong}^2 &= \ln(\sqrt{I_{42}}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Les dérivées de ces invariants s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{elong}^1}{\partial \underline{\underline{C}}} &= \frac{1}{2I_{41}} \underline{\underline{M}}_1 \\ \frac{\partial I_{elong}^2}{\partial \underline{\underline{C}}} &= \frac{1}{2I_{42}} \underline{\underline{M}}_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

En considérant un gradient de la transformation triangulaire supérieur dans la base  $\{\underline{\underline{M}}_1, \underline{\underline{M}}_2, \underline{\underline{M}}_3\}$ , les tenseurs directeurs des contraintes de Cauchy associés à l'élongation des directions chaîne et trame admettent la représentation suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{J} \left[ \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial I_{\text{elong}}^1}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \right]_{\{M_1, M_2, M_3\}} &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \frac{2}{J} \left[ \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial I_{\text{elong}}^2}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \right]_{\{M_1, M_2, M_3\}} &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Avec les invariants (4.1), les élongations dans le sens chaîne et dans le sens trame donnent bien lieu à des contraintes orientées exclusivement dans la direction chaîne et dans la direction trame.

#### 4.2.2 Invariant pour l'écrasement du renfort

Un invariant doit être défini pour décrire le comportement en écrasement du renfort. Cet écrasement n'est pas lié qu'au vecteur covariant  $\underline{m}_3$  associé à la direction privilégiée  $\underline{M}_3$  de la configuration de référence : dans le cas d'un cisaillement transverse pur par exemple, le vecteur covariant  $\underline{m}_3$  change de direction mais ne change pas de norme, et pourtant le renfort subit une compaction transverse (Figure 4-2). La compaction transverse ne peut donc être traitée de la même façon que l'élongation dans les directions chaîne et trame.

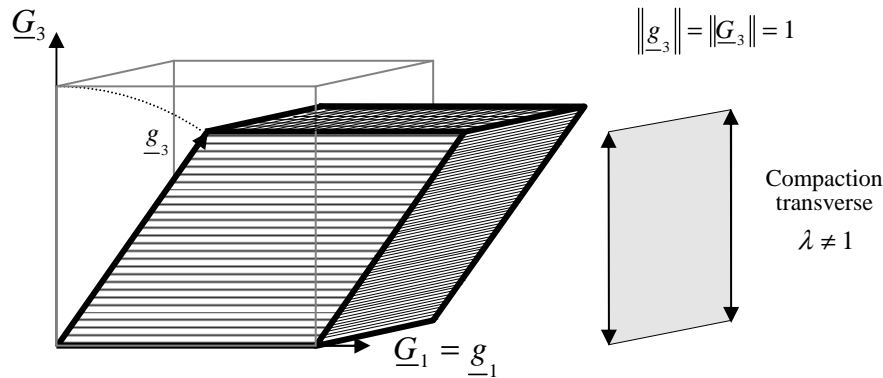


Figure 4-2. L'écrasement d'un renfort ne peut être associée à la norme du vecteur covariant transverse

Dans le modèle hyperélastique de la mèche, la compaction est définie par le changement volume total divisé par l'allongement dans la direction des fibres, ce qui donne un changement de surface du plan d'isotropie de la mèche. Par extension, la compaction du renfort interlock sera définie par le changement de volume total ( $J = \sqrt{I_3}$ ) divisé par les déformations en élongation dans les directions chaîne et trame (resp.  $\sqrt{I_{41}}$  et  $\sqrt{I_{42}}$ ):

$$I_{\text{comp}} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{I_3}{I_{41} I_{42}} \right) \tag{4.4}$$

Notons que le changement de volume associé à un cisaillement pur du renfort dans le plan sera pris en compte par l'invariant (4.4), puisque dans le cas d'un cisaillement plan il n'y a pas d'allongement des directions chaîne et trame. Cet aspect sera discuté plus en détail dans la partie concernant



l'identification de l'énergie de déformation associée au cisaillement plan. La dérivée de l'invariant de compaction (4.4) est la suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_{comp}}{\partial \underline{\underline{C}}} &= \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{C}}} \left( \frac{1}{2} \ln(I_3) - \frac{1}{2} \ln(I_{41}) - \frac{1}{2} \ln(I_{42}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{C}}^{-1} - \frac{1}{I_{41}} \underline{\underline{G}}_1 - \frac{1}{I_{42}} \underline{\underline{G}}_2 \right)\end{aligned}\quad (4.5)$$

En considérant un gradient de la transformation triangulaire supérieur dans la base  $\{\underline{\underline{M}}_1, \underline{\underline{M}}_2, \underline{\underline{M}}_3\}$ , le tenseur directeur des contraintes de compaction induites par l'invariant (4.4) admet dans cette base la représentation suivante :

$$\frac{2}{J} \left[ \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial I_{comp}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \right]_{\{\underline{\underline{M}}_1, \underline{\underline{M}}_2, \underline{\underline{M}}_3\}} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (4.6)$$

Cette représentation est compatible avec les directions de contrainte recherchées : les contraintes de compaction obtenues en dérivant l'invariant  $I_{comp}$  sont orthogonales au plan du renfort.

### 4.2.3 Invariant pour le cisaillement plan du renfort

Le cisaillement plan est caractérisé par la variation de l'angle entre les deux réseaux de chaîne et de trame (figure 4-3). Les vecteurs covariants  $\underline{\underline{m}}_1$  et  $\underline{\underline{m}}_2$  suivant ces deux directions, cette variation d'angle peut s'écrire :

$$\gamma = (\widehat{\underline{\underline{M}}_1, \underline{\underline{M}}_2}) - (\widehat{\underline{\underline{m}}_1, \underline{\underline{m}}_2})\quad (4.7)$$

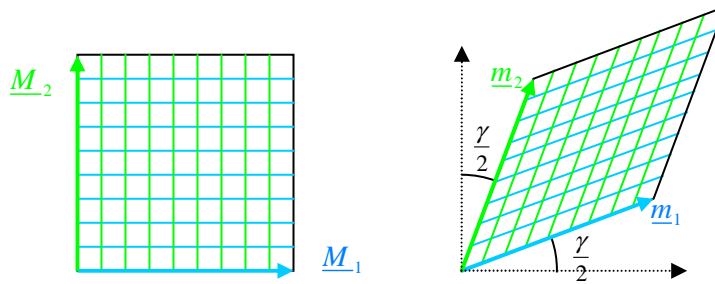


Figure 4-3. Définition de l'angle de cisaillement plan.

Les deux réseaux étant orthogonaux en configuration non déformée, le sinus de cette variation d'angle est :

$$\sin(\gamma) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\widehat{\underline{\underline{m}}_1, \underline{\underline{m}}_2})\right) = \cos(\widehat{\underline{\underline{m}}_1, \underline{\underline{m}}_2})\quad (4.8)$$

Le cosinus des vecteurs covariants  $\underline{\underline{m}}_1$  et  $\underline{\underline{m}}_2$  s'écrit simplement à partir de leur produit scalaire, ce qui donne, par substitution dans (4.8) :

$$\sin(\gamma) = \frac{\underline{m}_1 \cdot \underline{m}_2}{\|\underline{m}_1\| \|\underline{m}_2\|} \quad (4.9)$$

Ainsi que nous l'avons vu précédemment, les normes de ces vecteurs sont données par les invariants  $I_{41}$  et  $I_{42}$  :  $\|\underline{m}_1\| \|\underline{m}_2\| = \sqrt{I_{41} I_{42}}$ . Par ailleurs, leur produit scalaire peut se réécrire :

$$\begin{aligned} \underline{m}_1 \cdot \underline{m}_2 &= \underline{F} \cdot \underline{M}_1 \cdot \underline{F} \cdot \underline{M}_2 \\ &= F_{ij} M_{1j} F_{ik} M_{2k} \\ &= \underbrace{\underline{M}_1 \cdot \underline{C} \cdot \underline{M}_2}_{I_{412}} = \underbrace{\underline{M}_2 \cdot \underline{C} \cdot \underline{M}_1}_{I_{421}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

L'invariant utilisé pour décrire le cisaillement dans le plan sera donc le suivant :

$$I_{\varphi} = \frac{I_{421}}{\sqrt{I_{41} I_{42}}} = \sin(\gamma) \quad (4.11)$$

La dérivée de l'invariant ainsi défini s'exprime de la façon suivante :

$$\frac{\partial I_{\varphi}}{\partial \underline{C}} = \frac{1}{\sqrt{I_{41} I_{42}}} \frac{\partial I_{421}}{\partial \underline{C}} - \frac{I_{41}}{2I_{41}} \frac{\partial I_{41}}{\partial \underline{C}} - \frac{I_{42}}{2I_{42}} \frac{\partial I_{42}}{\partial \underline{C}} \quad (4.12)$$

Les dérivées  $\partial I_{41} / \partial \underline{C}$  et  $\partial I_{42} / \partial \underline{C}$  sont classiques. Afin de calculer la dérivée  $\partial I_{421} / \partial \underline{C}$  la formule suivante, donnant la dérivée par rapport à un tenseur d'ordre 2 du produit d'un tenseur d'ordre 2 avec deux tenseurs d'ordre 1, sera utilisée :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{B}} (\underline{x} \cdot \underline{A} \cdot \underline{y}) = \underline{x} \cdot \frac{\partial \underline{A}}{\partial \underline{B}} \cdot \underline{y} \quad (4.13)$$

où  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  sont deux tenseurs d'ordre 2 quelconques, et  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$  deux tenseurs d'ordre 1 indépendants de  $\underline{B}$ . Avec la formule précédente, on peut exprimer la dérivée de l'invariant de cisaillement plan de la façon suivante<sup>9</sup> :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{421}}{\partial \underline{C}} &= \frac{\partial}{\partial \underline{C}} (\underline{M}_2 \cdot \underline{C} \cdot \underline{M}_1) \\ &= \underline{M}_2 \cdot \frac{\partial \underline{C}}{\partial \underline{C}} \cdot \underline{M}_1 \\ &= \underline{M}_2 \cdot \frac{1}{2} \left( \underline{I} + \underline{I}^T \right) \cdot \underline{M}_1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

---

<sup>9</sup> La dérivée d'un tenseur d'ordre 2 symétrique par rapport à lui-même n'est pas intuitive : on pourrait dire grossièrement que cela vient du fait qu'il existe un lien entre les composantes d'un côté et de l'autre de la diagonale. La formule  $\frac{\partial \underline{C}}{\partial \underline{C}} = 1/2 \cdot \left( \underline{I} + \underline{I}^T \right) = 1/2 \cdot \left( \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} \right) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l$  peut être trouvée dans différents ouvrages et publications, [ITS00] par exemple.

Afin de simplifier l'expression (4.14), les différents tenseurs sont projetés dans une base orthonormée  $\{\underline{e}_i\}$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_{421}}{\partial \underline{\underline{C}}} &= (M_{2m} \underline{e}_m) \cdot \left( \frac{1}{2} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \right) \cdot (M_{1n} \underline{e}_n) \\
&= \frac{1}{2} (M_{2m} \underline{e}_m) \cdot \left( \delta_{ij} \delta_{kl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \right) \cdot (M_{1n} \underline{e}_n) \\
&\quad + \frac{1}{2} (M_{2m} \underline{e}_m) \cdot \left( \delta_{ik} \delta_{jl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \right) \cdot (M_{1n} \underline{e}_n) \\
&= \frac{1}{2} (M_{2i} \underline{e}_i) \otimes (M_{1k} \underline{e}_k) + \frac{1}{2} (M_{1i} \underline{e}_i) \otimes (M_{2k} \underline{e}_k) \\
&= \frac{1}{2} (\underline{M}_2 \otimes \underline{M}_1 + \underline{M}_1 \otimes \underline{M}_2)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

La dérivée de l'invariant de cisaillement dans le plan s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_\varphi}{\partial \underline{\underline{C}}} &= \frac{1}{\sqrt{I_{41} I_{42}}} \frac{\partial I_{421}}{\partial \underline{\underline{C}}} - \frac{I_\varphi}{2I_{41}} \frac{\partial I_{41}}{\partial \underline{\underline{C}}} - \frac{I_\varphi}{2I_{42}} \frac{\partial I_{42}}{\partial \underline{\underline{C}}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{I_{41} I_{42}}} (\underline{M}_1 \otimes \underline{M}_2 + \underline{M}_2 \otimes \underline{M}_1) - \frac{I_\varphi}{2I_{41}} \underline{M}_1 - \frac{I_\varphi}{2I_{42}} \underline{M}_2
\end{aligned} \tag{4.16}$$

#### 4.2.4 Invariants pour les cisaillements transverses

De façon similaire au cisaillement dans le plan du renfort, les quantités décrivant les cisaillements transverses sont les angles entre les directions d'anisotropie du renfort et la normale au plan du renfort. Les invariants décrivant ces deux modes de déformation de cisaillement s'écriront donc, comme pour le cisaillement dans le plan :

$$I_{ai} = \frac{I_{4i3}}{\sqrt{I_{4i} I_{43}}} = \sin(\alpha_{i3}) \quad (i = 1, 2) \tag{4.17}$$

Et leurs dérivées :

$$\frac{\partial I_{ai}}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{1}{2\sqrt{I_{4i} I_{43}}} (\underline{G}_i \otimes \underline{G}_3 + \underline{G}_3 \otimes \underline{G}_i) - \frac{I_a}{2I_{4i}} \underline{G}_i - \frac{I_a}{2I_{43}} \underline{G}_3 \quad (i = 1, 2) \tag{4.18}$$

#### 4.2.5 Bilan sur les invariants

Six invariants ont été définis pour décrire la déformation des renforts interlocks épais selon chaque mode de déformation. Ces invariants sont récapitulés dans le tableau 5.

Elongation sens chaîne	$I_{elong1} = \ln(\sqrt{I_{41}})$
Elongation sens trame	$I_{elong2} = \ln(\sqrt{I_{42}})$
Compaction	$I_{comp} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{I_3}{I_{41}I_{42}}\right)$
Cisaillement dans le plan	$I_{cp} = \frac{I_{421}}{\sqrt{I_{41}I_{42}}}$
Cisaillement transverse chaîne	$I_{\sigma1} = \frac{I_{413}}{\sqrt{I_{41}I_{43}}}$
Cisaillement transverse trame	$I_{\sigma2} = \frac{I_{423}}{\sqrt{I_{42}I_{43}}}$

Tableau 5. Invariants associés aux modes de déformation des renforts interlocks épais.

Ces invariants étant définis, des densités d'énergies de déformation peuvent maintenant leur être associées afin de décrire le comportement mécanique de chacun des modes de déformation du renfort.

## 4.3 Ecriture des énergies de déformation et identification

### 4.3.1 Le renfort interlock étudié

Le tissu étudié est un interlock dit « générique » : il s'agit d'un renfort fabriqué spécialement pour que les laboratoires puissent développer et publier des méthodes d'essai et de simulation, les matériaux effectivement utilisés dans l'industrie étant généralement confidentiels. Quelques images représentant la maille élémentaire de ce renfort, obtenues par tomographie X, sont présentées sur la figure 4-4. Ce renfort a un ratio de 51/49, c'est-à-dire que dans une maille élémentaire de renfort 51% de la masse est constituée de mèches de chaîne et 49% de mèches de trame. Ce renfort est donc quasiment équilibré (en masse). Cependant les coupes de la figure 4-4 montrent que les géométries des mèches de chaîne et des mèches de trame, et notamment les embuvages, ne sont pas identiques. La méthodologie décrite dans ce chapitre a donc été développée pour décrire le comportement des renforts équilibrés et des renforts déséquilibrés. Elle peut être appliquée à n'importe quel type de renfort interlock.

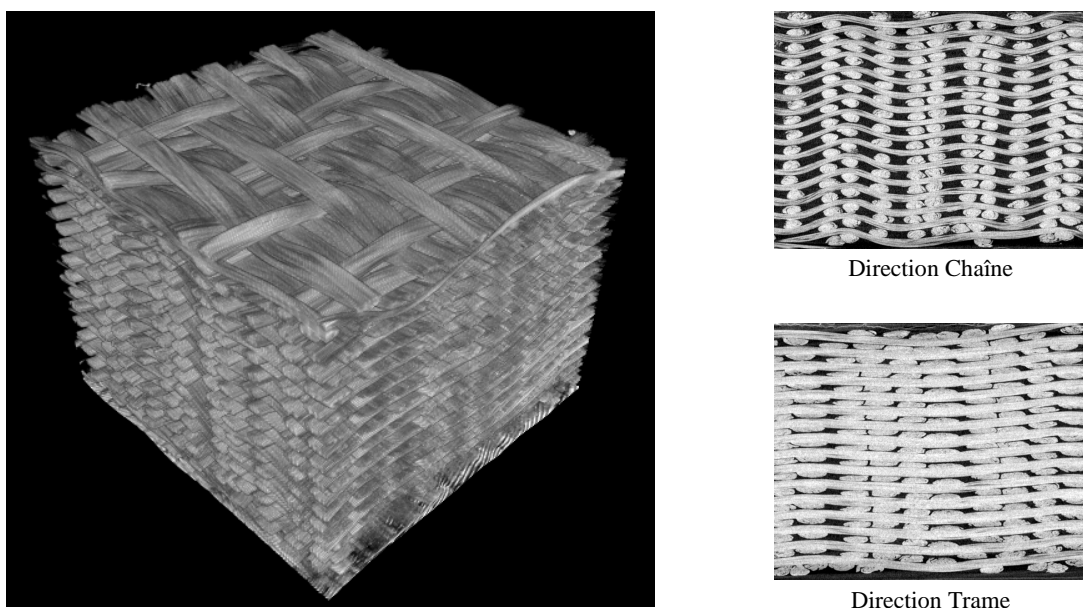


Figure 4-4. Interlock générique étudié.

A l'aide de ce renfort, différents essais de caractérisation expérimentale des renforts interlock épais ont été développés au laboratoire dans le cadre de la thèse de J.G. Orliac. Ceux qui ont été utilisés seront présentés au fur et à mesure de l'identification du comportement mécanique des différents modes de déformation. A l'aide de ces essais, des densités d'énergie de déformation sont attribuées à chaque mode de déformation (i.e. à chaque invariant). La définition et l'identification des paramètres de chacune de ces densités d'énergies seront présentées en même temps, bien qu'en pratique la loi de comportement a été implémentée entièrement avant l'identification.

### 4.3.2 Tension dans les directions chaîne et trame

Le comportement en tension est supposé identique dans les directions de chaîne et de trame, mais la subroutine utilisateur développée permet de dissocier les deux comportements en tension pour décrire le comportement des renforts moins équilibrés. Une courbe expérimentale a été obtenue à l'aide d'un essai de traction sur une éprouvette de 35x275 mm (figure 4-5). Sur cette courbe, deux parties peuvent être distinguées : une première partie correspondant à une mise en tension progressive des mèches, et donc à une rigidification progressive du matériau, et une seconde partie où la raideur du matériau peut être supposée constante. Un paramètre  $I_{elong}^0$  fixe la limite entre ces deux parties. Les énergies de déformation associées à l'élongation dans les directions de chaîne et de trame sont donc écrites par parties de la façon suivante :

$$w_{elong}^i = \begin{cases} \frac{1}{2} K_{elong}^0 (I_{elong}^i)^2 & \text{si } I_{elong}^i \leq I_{elong}^0 \\ \frac{1}{2} K_{elong} (I_{elong}^i - I_{elong}^0)^2 + \frac{1}{2} K_{elong}^0 I_{elong}^0 I_{elong}^i & \text{si } I_{elong}^i > I_{elong}^0 \end{cases} \quad (4.19)$$

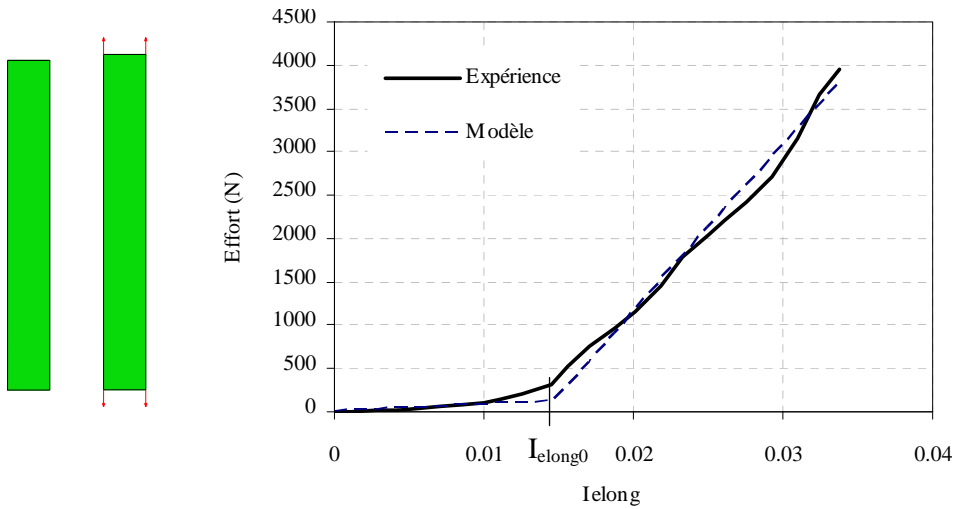


Figure 4-5. Essai de traction sur une éprouvette d'interlock.

Les seconds tenseurs des contraintes de Piola-Kirchhoff dérivant de l'énergie (4.19) s'écrivent (sans sommation) :

$$S_{=elong}^i = 2 \frac{\partial w_{elong}^i}{\partial C} = \frac{1}{I_{4i}} G_{=i} \begin{cases} 2K_{elong}^0 I_{elong}^i & \text{si } I_{elong}^i \leq I_{elong}^0 \\ 2K_{elong} (I_{elong}^i - I_{elong}^0) + K_{elong}^0 I_{elong}^0 & \text{si } I_{elong}^i > I_{elong}^0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Les coefficients identifiés à partir de la courbe expérimentale sont les suivants :

$$\begin{aligned}
I_{elong}^0 &= 0.0145 \\
K_{elong}^0 &= 37.85 \text{ MPa} \\
K_{elong} &= 816.33 \text{ MPa}
\end{aligned}
\tag{4.21}$$

La courbe simulée issue de cette identification est présentée sur la figure 4-5. Notons qu'il serait aisé d'obtenir une courbe d'effort plus fidèle à l'expérience en introduisant une fonction cubique dans la première partie de la courbe (lorsque  $I_{elong} \leq I_{elong}^0$ ) : c'est ce qui a été fait pour modéliser le comportement de la mèche en tension dans la loi de comportement définie au chapitre 3. La rigidité de ce mode de déformation étant très importante par rapport aux rigidités des autres modes de déformation, ce mode de déformation est très peu sollicité lors de la mise en forme. Cette complexité n'a donc pas été introduite.

### 4.3.3 Compaction transverse

Un essai de compaction transverse a été réalisé sur une éprouvette de 50x50 mm. Les résultats expérimentaux exprimés en termes d'énergie et de contrainte de Cauchy sont donnés sur la figure 4-6. L'énergie de déformation est approchée par une fonction puissance de la forme :

$$w_{comp} = K_{comp} \left[ \left( 1 - \frac{I_{comp}}{I_{comp}^0} \right)^{-p} - p \frac{I_{comp}}{I_{comp}^0} - 1 \right]
\tag{4.22}$$

Le coefficient  $I_{comp}^0$  correspond à la valeur que prendrait l'invariant  $I_{comp}$  si le renfort était compacté jusqu'à l'obtention d'une proportion de 100% de carbone. Il s'agit donc d'une valeur limite de l'invariant  $I_{comp}$ . Ce coefficient  $I_{comp}^0$  peut être déterminé très simplement en pesant l'éprouvette : en notant  $m_{ep}$  la masse de l'éprouvette de volume initial  $V_0$ , et en supposant connue la densité du carbone constituant les fibres  $\rho_{carb} = 1.78e - 6 \text{ kg/mm}^3$ , ce coefficient s'exprime :

$$I_{comp}^0 = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{m_{ep}}{\rho_{carb} V_0} \right) = 1.12
\tag{4.23}$$

Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff dérivant de l'énergie (4.19) s'écrit :

$$S_{comp} = \frac{p K_{comp}}{I_{comp}^0} \left[ \left( 1 - \frac{I_{comp}}{I_{comp}^0} \right)^{-p-1} - 1 \right] \left( C^{-1} - \frac{1}{I_{41}} G_{41} - \frac{1}{I_{42}} G_{42} \right)
\tag{4.24}$$

Pour l'identification des coefficients  $K_{comp}^0$  et  $p$ , le solveur d'Excel est utilisé : ces paramètres sont optimisés afin que la courbe théorique corresponde à la courbe expérimentale (figure 4-6a). Les paramètres identifiés sont les suivants :

$$\begin{aligned}
K_{comp}^0 &= 7.57e-3 \text{ MPa} \\
p &= 2.85
\end{aligned}
\tag{4.25}$$

Les contraintes de Cauchy issues de la simulation de compaction obtenues avec ces paramètres sont comparées sur la figure 4-6b. Un bon accord est obtenu entre la courbe expérimentale et la courbe issue de la simulation.

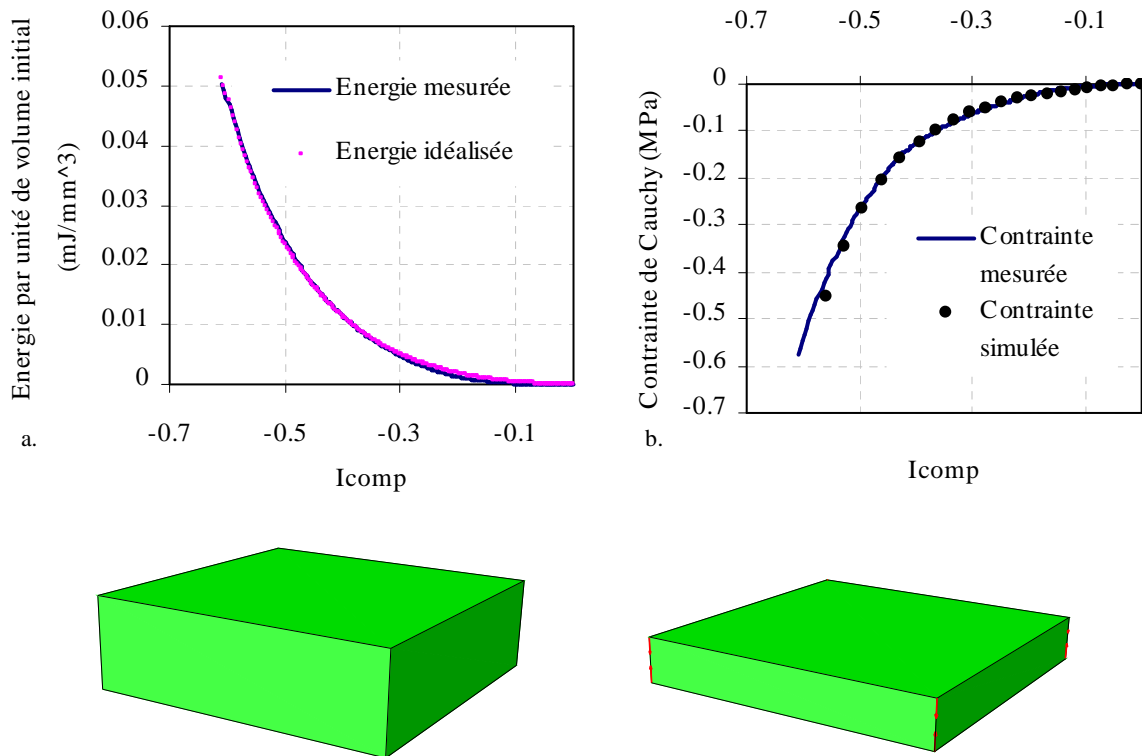


Figure 4-6. Energie de déformation (a) et contraintes de compaction transverse (b) obtenues expérimentalement et par simulation

#### 4.3.4 Cisaillement dans le plan du renfort

Le comportement mécanique du renfort interlock en cisaillement dans le plan peut être obtenu à l'aide d'essais de type « bias extension test » ou « picture frame test » (voir §1.3.2.4, p. 29). Un essai de bias extension test portant sur le matériau étudié étant disponible, c'est à partir de cet essai que l'identification du comportement du renfort en cisaillement sera effectuée. La cinématique et les paramètres géométriques du bias extension test sont rappelés sur la figure 4-7.

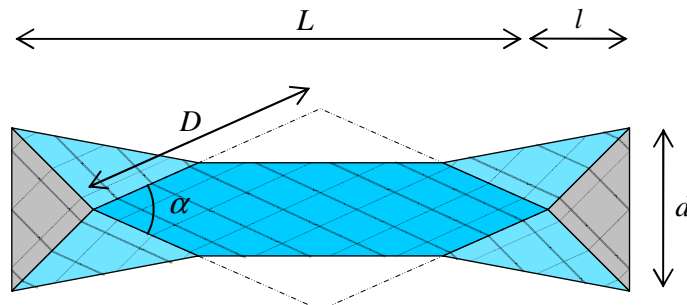


Figure 4-7. Paramètres géométriques du bias extension test

On cherche à extraire l'énergie de déformation par unité de volume initial liée au mode de déformation de cisaillement du renfort interlock épais à partir d'une courbe effort/déplacement mesurée sur un bias extension test (figure 4-8).

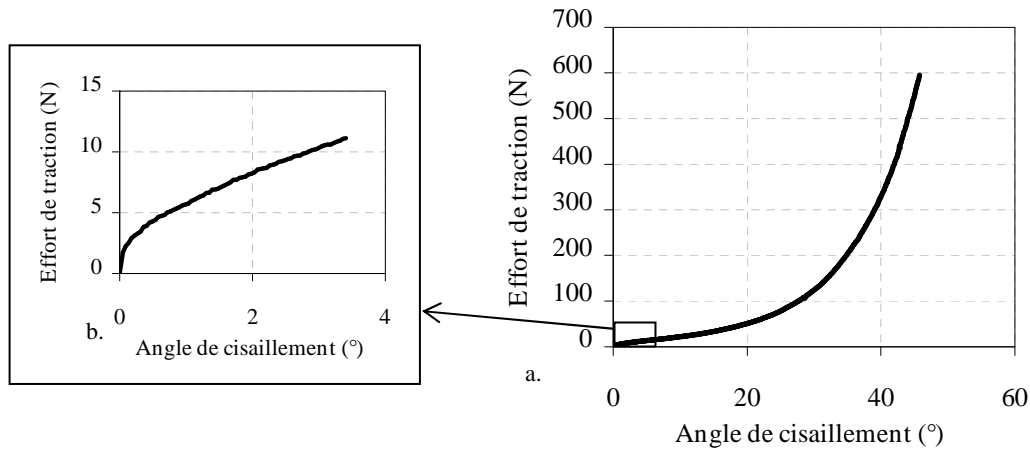


Figure 4-8. Courbe de « bias extension test » obtenue pour un interlock 4 mm. (a) courbe entière (b) zoom sur le début de la courbe.

Au cours d'un bias extension test, l'aire des zones cisailées et demi cisailées (resp. en bleu foncé et en bleu clair sur la figure 4-7) diminue de façon significative. Nous ne disposons pas d'une mesure de l'évolution de l'épaisseur de l'éprouvette au cours d'un bias extension test. Il est donc difficile de savoir si cette variation d'aire induit une variation de volume de la préforme. Néanmoins, l'épaisseur de la préforme ne pouvant pas varier au niveau des mors, une telle variation de volume existe nécessairement. Il n'est donc pas envisageable de déduire directement le comportement en cisaillement dans le plan à partir d'un bias extension test, dans la mesure où l'énergie de compaction, prenant en compte cette variation de volume, ne sera pas nulle. Par ailleurs, les modes de déformation en élancement dans la direction des mèches risquent également d'être sollicités car leur raideur est moins grande que celle d'un renfort tissé 2D, et donc l'hypothèse de rigidité infinie, nécessaire pour obtenir la cinématique de la figure 4-7, n'est pas respectée.

Afin de déterminer l'énergie de cisaillement dans le plan, une méthode inverse par un algorithme d'optimisation est adoptée (comme pour l'identification de la compaction de la mèche dans le plan transverse au chapitre précédent). Une forme d'énergie est postulée, dont les paramètres sont recalés afin de faire correspondre les courbes efforts/déplacements issues de l'expérience et de la simulation. L'énergie de cisaillement dans le plan est définie par morceaux. Un premier morceau correspond à la variation de raideur du comportement en cisaillement dans le plan que l'on peut observer sur le début de la courbe de bias extension test (figure 4-8b) : un zoom sur cette courbe montre que la raideur mesurée au cours d'un bias extension test est d'abord relativement importante avant de diminuer de façon significative. Ce comportement peut correspondre à la rupture de l'ensimage. Il est important de prendre en compte ce comportement, notamment pour deux raisons :

- pour obtenir le palier d'effort que l'on peut observer sur les courbes de bias extension test
- pour éviter les flambements du mode de déformation en cisaillement dans le plan qui peuvent apparaître au cours des simulations : si la raideur initiale est choisie nulle (ce qui est généralement obtenu avec une loi puissance ou exponentielle), le cisaillement dans le plan devient un mode de déformation à énergie nulle en début d'essai.

Un polynôme d'ordre 3 sera utilisé pour décrire cette variation de raideur en début d'essai. Le second morceau de l'énergie de déformation sera décrit à l'aide d'une loi puissance. Finalement, la forme postulée pour l'énergie de déformation en cisaillement dans le plan est la suivante :

$$w_{\varphi}(I_{\varphi}) = \begin{cases} w_{\varphi}^1(I_{\varphi}) & \text{si } I_{\varphi} \leq I_{\varphi}^0 \\ w_{\varphi}^2(I_{\varphi}) & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.26)$$



avec :

$$\begin{aligned} w_{\varphi}^1(I_{\varphi}) &= K_{\varphi 12} I_{\varphi}^2 + K_{\varphi 13} I_{\varphi}^3 \\ w_{\varphi}^2(I_{\varphi}) &= K_{\varphi 21} (1 - I_{\varphi})^{-p_{22}} + w_{\varphi 20} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Afin que la raideur évolue de façon continue, la fonction  $w_{\varphi}$  doit être de classe  $C^2$ , c'est-à-dire qu'elle doit être continue et dérivable, que sa dérivée doit être continue et dérivable et que sa dérivée seconde doit être continue. Ceci induit des relations entre les différents coefficients des fonctions  $w_{\varphi}^1$  et  $w_{\varphi}^2$ . Une fois ces conditions prises en compte, seules trois grandeurs suffisent pour décrire le comportement en cisaillement dans le plan :

- la raideur initiale :  $K_{\varphi}^0$
- la grandeur définissant la limite entre les deux formes d'énergies (4.27) :  $I_{\varphi}^0$
- la raideur à la limite entre les deux formes d'énergies (4.27) :  $K_{\varphi}^1$

Avec ces trois grandeurs, les coefficients des énergies (4.27) s'écrivent :

$$\begin{aligned} K_{\varphi 12} &= \frac{K_0}{2} & p_{22} &= \frac{K_1(2 - 3I_{\varphi}^0) - K_0 I_{\varphi}^0}{I_{\varphi}^0(K_0 + K_1)} \\ K_{\varphi 13} &= \frac{K_1 - K_0}{6I_{\varphi}^0} & K_{\varphi 21} &= \frac{K_0 + K_1}{2p_{22}} I_{\varphi}^0 (1 - I_{\varphi}^0)^{1+p_{22}} \\ & & w_{\varphi 20} &= w_{\varphi}^1(I_{\varphi}^0) - w_{\varphi}^2(I_{\varphi}^0) \end{aligned} \quad (4.28)$$

De la même façon que pour l'identification des coefficients de compaction et de distorsion de la loi de comportement de la mèche, un algorithme de Levenberg-Marquardt est utilisé afin de déterminer ces trois grandeurs. Les paramètres identifiés pour l'interlock 4mm considéré sont les suivants :

$$K_0 = 3.0 \text{ MPa} \quad I_{\varphi}^0 = 4.2\text{e-}3 \quad K_1 = 3.0\text{e-}2 \text{ MPa} \quad (4.29)$$

La déformée et les courbes effort/déplacement obtenues par simulation à chaque itération de l'algorithme sont données sur la figure 4-9.

La forme d'énergie proposée permet donc d'obtenir une courbe de bias extension test très proche de la courbe expérimentale. La figure 4-9a montre sur la géométrie déformée les différentes valeurs d'angle de cisaillement. La cinématique obtenue par simulation n'est pas identique à la cinématique théorique du bias extension test pour les raisons évoquées précédemment : sur un interlock, le ratio *raideur en élongation / raideur en cisaillement* est trop faible, et donc une légère élongation de l'éprouvette dans les directions de chaîne et de trame apparaît.

Afin de diminuer le temps de calcul, il est courant de diminuer la durée de la simulation, c'est-à-dire d'augmenter la vitesse de traction (pour un débattement donné). Une telle augmentation de la vitesse peut faire apparaître des effets d'inertie d'influence non négligeable sur les résultats obtenus. Par ailleurs, la sensibilité des simulations de bias extension test au maillage, et notamment à l'alignement des éléments, est un problème bien connu [YU06]. Afin de valider le résultat obtenu, les études de sensibilité correspondant à la vitesse de déformation et au maillage sont présentées ci-après.

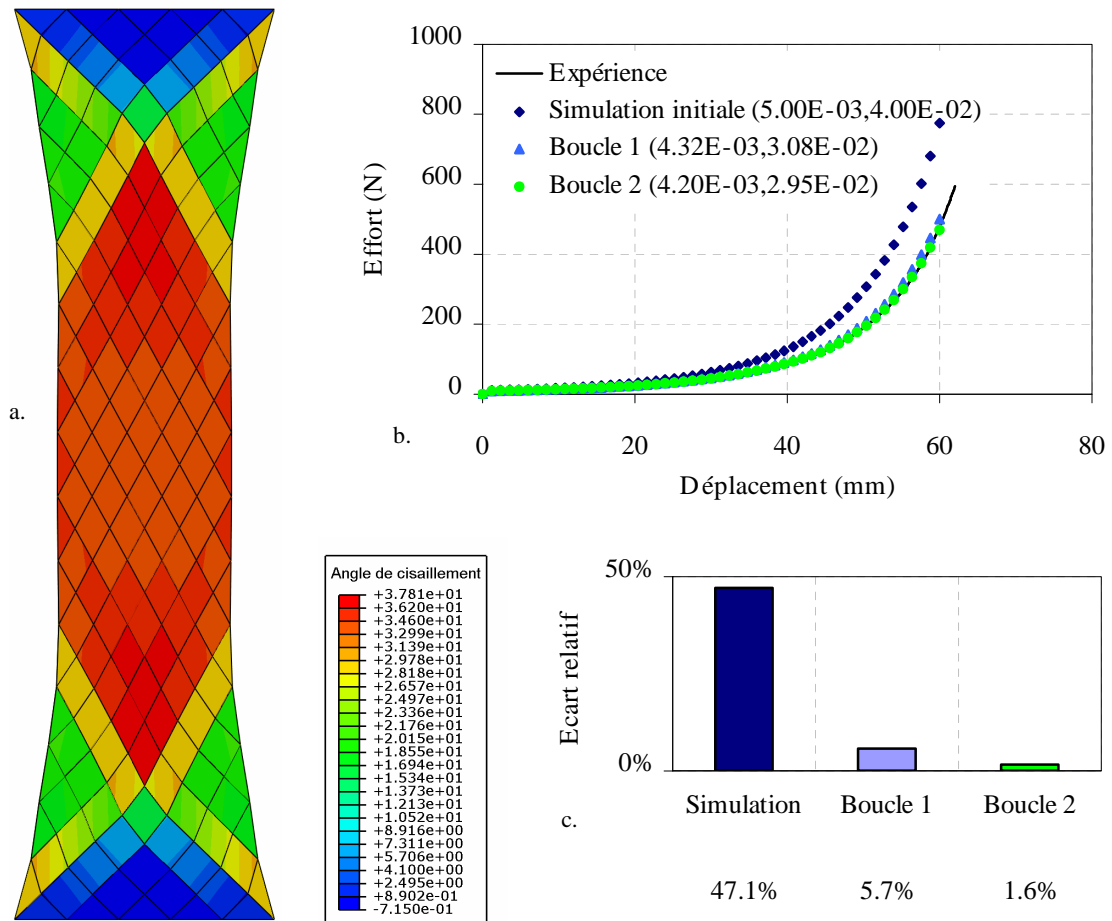


Figure 4-9. Identification du comportement en cisaillement à partir d'un essai de bias extension test. (a) Déformée. (b) Courbes effort/déplacement (valeur des paramètres à chaque boucle entre parenthèses). (c) Ecarts relatifs entre les courbes simulées et la courbe expérimentale.

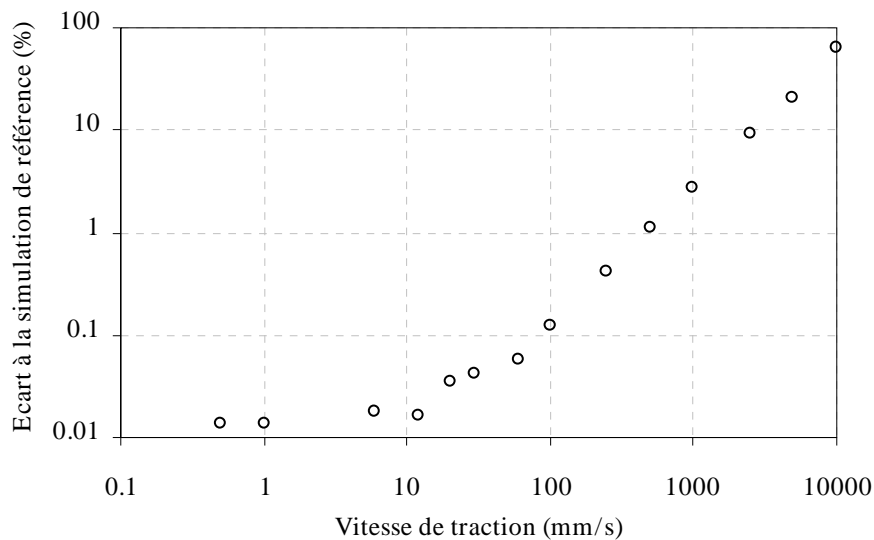


Figure 4-10. Sensibilité à la vitesse de traction des simulations de bias extension test

#### Sensibilité à la vitesse de déformation des simulations de bias extension test

Plusieurs vitesses de déformation ont été testées afin d'étudier l'influence de la vitesse sur les simulations de bias extension test proposée ici. S'agissant de simulations en dynamique explicite, le temps de calcul est proportionnel à la durée du chargement imposé, et donc, pour un déplacement

identique, inversement proportionnel à la vitesse de déformation. La figure 4-10 donne les écarts obtenus par rapport à une simulation de référence pour différentes vitesses de déformation.

La figure 4-10 montre que la sensibilité de la simulation du bias extension test à la vitesse de traction est faible jusqu'à des valeurs de l'ordre de 10 mm/s. L'erreur augmente ensuite rapidement avec la vitesse. Les simulations réalisées pour l'identification du comportement en cisaillement dans le plan ont donc été réalisées à 3mm/s.

#### Sensibilité au maillage des simulations de bias extension test

La sensibilité au maillage est un problème bien connu de la simulation de la mise en forme des renforts tissés [YU06, THI08]. Dès qu'un gradient de cisaillement apparaît au cours d'une simulation, un phénomène de verrouillage en cisaillement apparaît si les bords des éléments ne sont pas alignés aux directions des mèches : ces éléments n'ayant pas les degrés de liberté nécessaires pour décrire la déformée réelle du matériau (la courbure notamment), les modes de déformation en tension sont sollicités. Lorsque ce phénomène se produit, les courbes de simulation de « bias extension test » obtenues sont donc significativement plus rigides, ainsi que le montre la figure 4-11. L'ajout de degrés de liberté (i.e. le raffinement du maillage) près des zones à fort gradient de cisaillement permet de limiter ce phénomène de rigidification en cisaillement. Lorsque les bords des éléments sont alignés aux directions des mèches, ce phénomène n'apparaît pas puisque les éléments peuvent naturellement décrire localement le gradient de cisaillement dans le plan.

Deux types de maillage seront donc utilisés pour analyser la sensibilité des simulations de bias extension test au maillage : des maillages dont les éléments seront alignés (dans la configuration initiale) aux bords de l'éprouvette, et des maillages dont les éléments seront alignés aux directions des mèches (chaîne et trame). Les maillages utilisés sont présentés sur la figure 4-11a et la figure 4-12a.

Ainsi que la figure 4-11 le montre, les simulations pour lesquelles les éléments sont alignés aux bords de l'éprouvette sont très sensibles au maillage. Même avec un maillage très fin il est difficile d'atteindre les valeurs d'effort observées sur la simulation de référence. A l'inverse, comme le montre la figure 4-12, les simulations pour lesquelles les éléments ont été alignés aux directions des mèches sont très peu sensibles au maillage. C'est pourquoi l'identification du cisaillement dans le plan a été réalisée avec un tel maillage.

Afin d'éviter que ce phénomène de verrouillage n'apparaisse, notamment dans les simulations d'emboutissage qui seront présentées dans la suite de ce manuscrit, les éléments sont systématiquement alignés avec les directions des mèches. Le renfort étant initialement plat, ce type de maillage est très facile à obtenir.

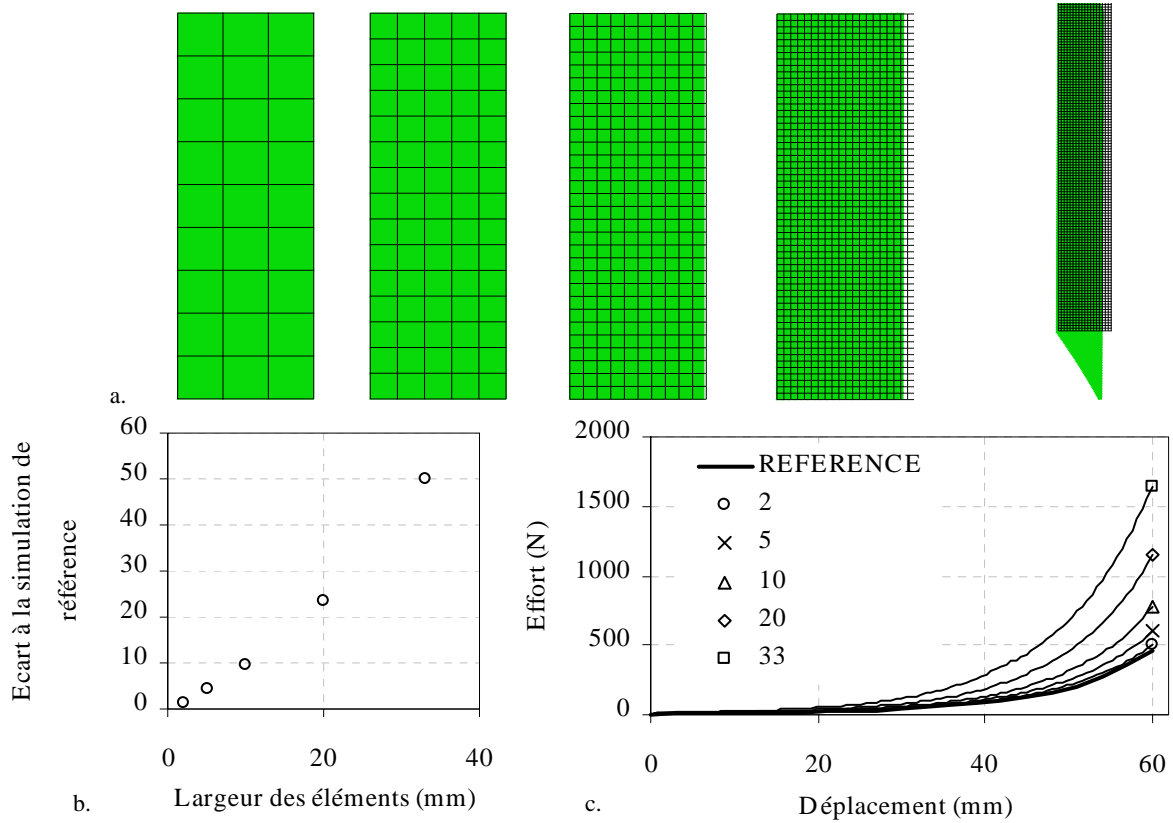


Figure 4-11. Sensibilité au maillage des simulations de bias extension test lorsque les éléments sont alignés avec les bords de l'éprouvette.

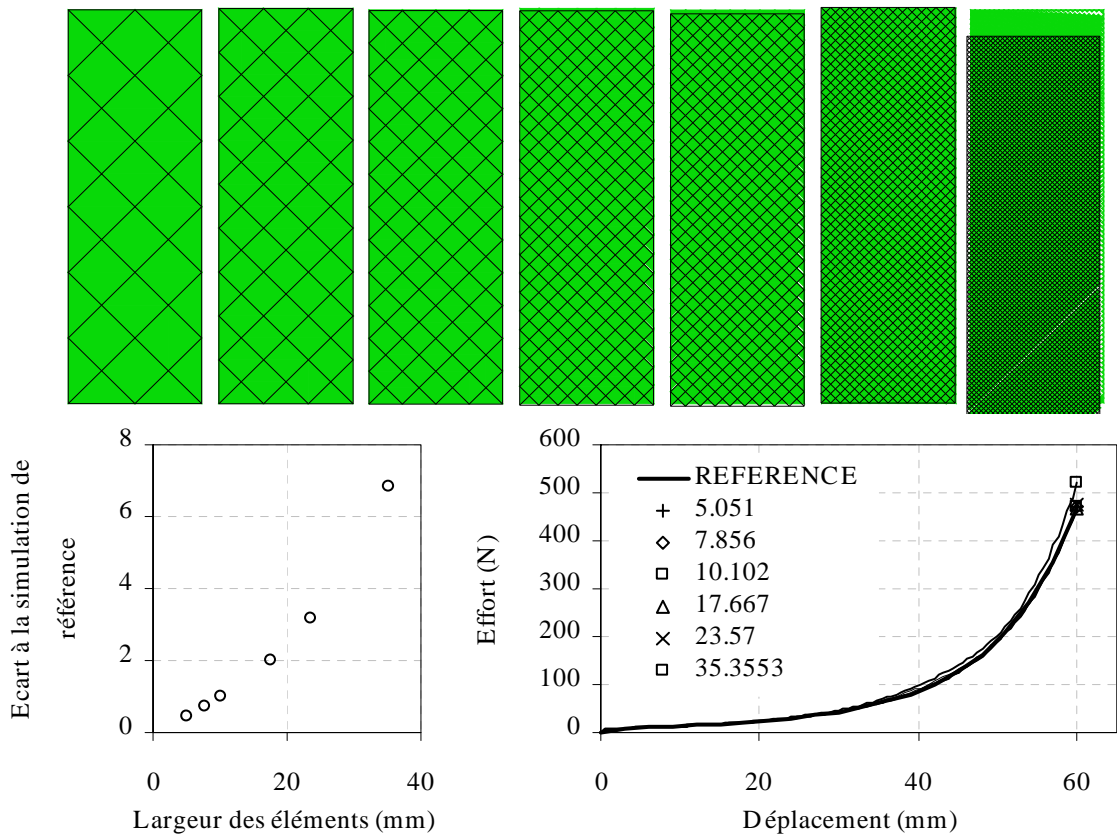


Figure 4-12. Sensibilité au maillage des simulations de bias extension test lorsque les éléments sont alignés avec les directions des mèches

### 4.3.5 Cisaillement transverse

Des essais ont été réalisés pour caractériser le comportement du renfort en cisaillement transverse. Une cinématique de cisaillement simple est imposée à une éprouvette de forme parallélépipédique, afin de ne solliciter que le mode de déformation de cisaillement transverse. Ces essais sont réalisés dans le sens chaîne et dans le sens trame afin d'identifier les comportements des deux directions, généralement différents. Le dispositif utilisé est présenté sur la figure 4-13. Il est constitué de deux plaques fixées à chaque côté du renfort transmettant l'effort imposé par la machine aux surfaces de part et d'autre de l'éprouvette. Un système de barres et de cales permet de régler la position de l'axe de traction et de s'assurer du parallélisme des deux faces de l'éprouvette.

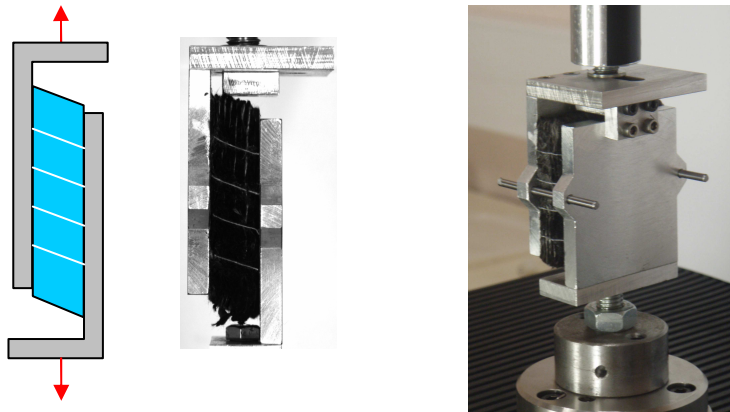


Figure 4-13. Essai de cisaillement sur interlock.

Des fils témoins sont déposés sur le côté de l'éprouvette, qui permettent de vérifier l'homogénéité du champ de déplacement au sein de l'éprouvette et ainsi de déterminer le champ de validité de l'essai. La figure 4-14 présente la comparaison entre l'angle de cisaillement théorique et l'angle de cisaillement calculé à partir du traitement des images d'essai. A partir d'environ 22°, les fils se détachent et le calcul de leur orientation par traitement d'images n'est plus pertinent. Une bonne corrélation est obtenue entre l'angle théorique et l'angle mesuré pour la gamme de déformation considérée. L'angle théorique est donc utilisé par la suite pour écrire l'énergie de déformation mise en œuvre au cours de l'essai.

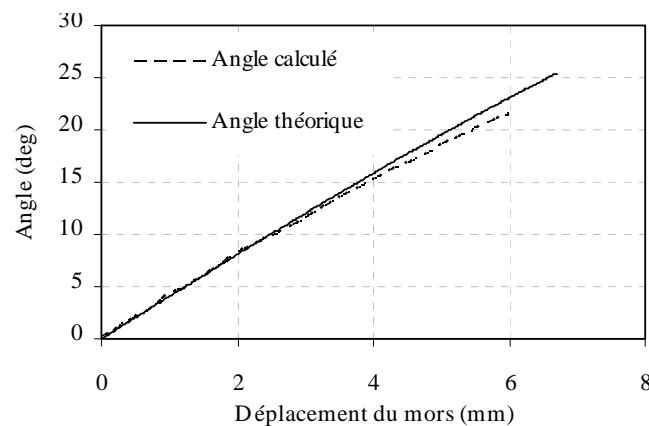


Figure 4-14. Comparaison des angles de cisaillement transverse théorique et expérimental.

Les courbes de cisaillement transverse (chaîne et trame) obtenues expérimentalement sont présentées sur la figure 4-15. Le comportement mécanique observé peut être décomposé en deux

phases : une première durant laquelle la raideur diminue de façon significative, et une seconde au cours de laquelle la réponse en effort est quasi linéaire.

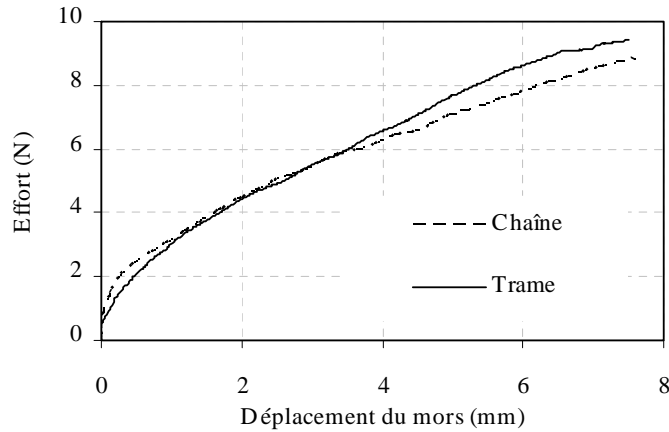


Figure 4-15. Courbes de cisaillement transverse de l'interlock générique.

Les courbes de cisaillement transverse mesurées nous permettent d'envisager une énergie de déformation définie par morceaux pour chacune des phases de la déformation. La première phase sera décrite par une loi puissance avec une puissance comprise entre 1 et 2, permettant d'obtenir pour la réponse en effort une fonction de type *racine*. Pour la seconde phase une énergie quadratique sera utilisée, permettant d'obtenir une réponse en effort linéaire. La forme d'énergie proposée est donc la suivante :

$$w_{ai}(I_{ai}) = \begin{cases} K_{ai} |I_{ai}|^{p_{ai}} & \text{si } |I_{ai}| \leq I_{ai}^0 \\ K_2 |I_{ai}|^2 + K_1 |I_{ai}| + K_0 & \text{avec } 0 < p_{ai} < 2 \text{ et } i = C, T \end{cases} \quad (4.30)$$

Une fois de plus, les conditions de compatibilité entre les deux morceaux de l'énergie (4.30) permettent d'introduire des relations entre les différents paramètres introduits :

$$\begin{aligned} K_0 &= \left( 1 - \frac{3}{2} p_{ai} + \frac{1}{2} (p_{ai})^2 \right) K_{ai} (I_{ai}^0)^{p_{ai}} \\ K_1 &= K_{ai} p_{ai} (2 - p_{ai}) (I_{ai}^0)^{p_{ai}-1} \\ K_2 &= \frac{1}{2} K_{ai} p_{ai} (p_{ai} - 1) (I_{ai}^0)^{p_{ai}-2} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Trois paramètres doivent donc être identifiés avec cette forme d'énergie :  $K_{ai}$ ,  $p_{ai}$  et  $I_{ai}^0$ . Ces paramètres sont identifiés sur la courbe expérimentale à l'aide du solveur d'Excel. Les valeurs obtenues au terme de l'identification sont les suivantes :

<i>Sens chaîne</i>	<i>Sens trame</i>	
$K_{aC} = 2.67 \text{ e}^{-3} \text{ MPa}$	$K_{aT} = 3.65 \text{ e}^{-3} \text{ MPa}$	(4.32)
$I_{aC}^0 = 5.96 \text{ e}^{-2}$	$I_{aT}^0 = 10.74 \text{ e}^{-2}$	
$p_{aC} = 1.375$	$p_{aT} = 1.5536$	

Les courbes identifiées obtenues avec la description précédente de l'énergie de déformation sont présentées sur la figure 4-16. La forme de l'énergie de déformation utilisée pour décrire le comportement du renfort en cisaillement transverse permet d'obtenir des simulations proches des résultats d'essais.

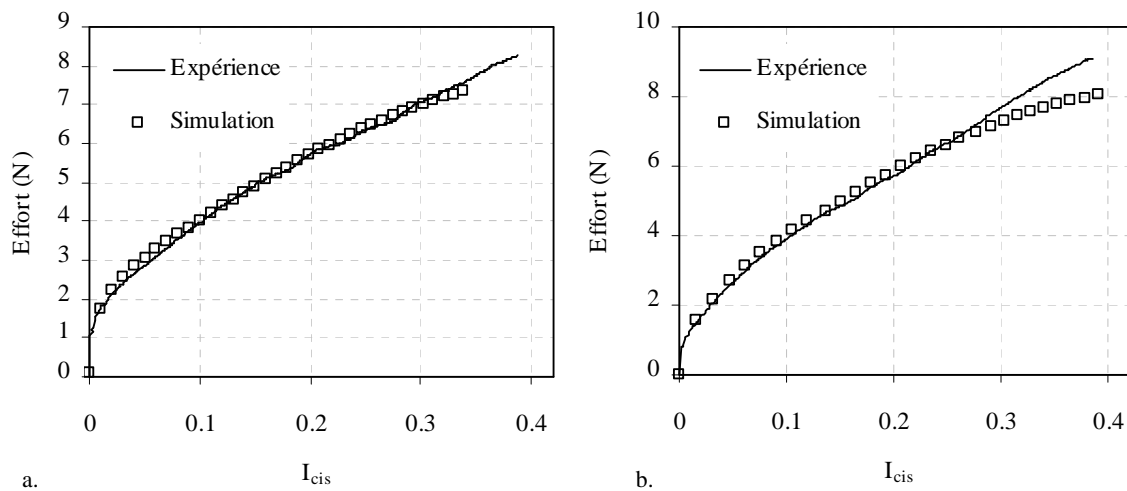


Figure 4-16. Résultat de l'identification du comportement de l'interlock générique en cisaillement transverse. (a) sens chaîne (b) sens trame.

#### 4.3.6 Bilan sur les densités d'énergie et sur l'identification

A l'aide de courbes expérimentales issues des travaux de thèse de Jean-Guillaume Orliac au LaMCoS, des fonctions densité d'énergie de déformation ont été postulées, et leurs paramètres ont été identifiés. Les modes de déformation présentés présentent des comportements mécaniques complexes, souvent non-linéaires, et faisant intervenir plusieurs mécanismes de déformation du renfort. C'est pourquoi la plupart de ces densités d'énergie de déformation sont définies par morceaux.

6 densités d'énergie ont été postulées, décrivant l'élongation dans la direction chaîne, l'élongation dans la direction trame, l'écrasement, le cisaillement plan, le cisaillement transverse dans la direction chaîne et le cisaillement transverse dans la direction trame. Ces densités d'énergie permettent d'obtenir, pour chacun des modes de déformation, un résultat de simulation proche des résultats d'essais correspondant. Dans la méthodologie présentée ici, les formes des fonctions « densité d'énergie » utilisées font presque partie de l'identification : si, pour un autre type de renfort, le comportement mécanique de l'un des modes de déformation s'avère différent de celui qui est utilisé dans ce manuscrit, il est aisé de changer la fonction « densité d'énergie » afin qu'elle prenne en compte ce nouveau comportement. Cette méthodologie est donc adaptable à de nombreux renforts, même possédant des particularités, tant que les modes de déformation (et donc les invariants) restent les mêmes.

Cette loi de comportement va maintenant être utilisée pour simuler des cas de chargement plus complexes, et notamment des chargements de flexion et d'emboutissage hémisphérique.

## 4.4 Validation de la loi de comportement

Dans cette partie, la loi de comportement hyperélastique déterminée et identifiée précédemment pour les renforts interlocks épais est testée avec des cas de chargement au cours desquels les différents modes de déformation sont sollicités. Deux cas de chargement sont étudiés :

- la flexion à  $0^\circ/90^\circ$ , c'est-à-dire avec les directions de chaîne et de trame alignées avec les bords de l'éprouvette. Ce type de sollicitation présente un comportement macroscopique caractéristique des renforts interlocks épais.
- la flexion à  $45^\circ/45^\circ$ , c'est-à-dire avec les directions de chaîne et de trame tournée de  $45^\circ$  par rapport aux bords de l'éprouvette. Le comportement du renfort en flexion à  $45^\circ$  est très différent de celui de la flexion à  $0^\circ/90^\circ$ , ce qui est également une spécificité du comportement des interlocks.
- l'emboutissage hémisphérique : il s'agit d'une mise en forme complète, dans laquelle le renfort est embouti par un poinçon hémisphérique.

Ces trois cas de chargement permettront de comparer la loi de comportement à l'expérience, et mettront en lumière quelques caractéristiques du comportement liées à la microstructure du renfort, qui s'avèreront impossibles à décrire par une approche de matériau de Cauchy.

#### 4.4.1 Flexion à $0^\circ/90^\circ$

Dans cette partie, un essai et une simulation de flexion sont comparés. Nous verrons que cet essai permet de mettre en évidence un comportement très particulier des renforts interlocks. Une simulation est ensuite mise en place, utilisant la loi de comportement hyperélastique développée et identifiée précédemment.

##### 4.4.1.1 Expérience

Au cours de cet essai, une éprouvette de  $200 \times 30 \times 15$  mm est sollicitée en flexion trois points. La direction chaîne est alignée avec le grand côté de l'éprouvette, et la direction trame est orientée à  $90^\circ$  par rapport à ce même côté, c'est pourquoi cet essai de flexion est dit à  $0^\circ/90^\circ$ . Le renfort est posé sur deux points d'appui fixes écartés de 116 mm, puis sollicité au niveau d'un troisième point d'appui situé au centre de l'éprouvette (figure 4-18). Un déplacement de 60 mm du point d'appui central est effectué, sollicitant l'éprouvette en flexion.

Des fils sont placés sur le côté de l'éprouvette, et une caméra enregistre des images du profil de l'éprouvette : cela permet d'analyser les déformations de la ligne moyenne et des sections transverses de l'éprouvette par traitement d'images (figure 4-19, figure 4-20). Les images obtenues pour un déplacement de l'appui central de 0 mm, 30 mm et 60 mm sont présentées sur la figure 4-18. Ces images montrent que lors d'un essai de flexion sur un interlock, la cinématique des sections transverses est particulière : à l'inverse des sections transverses d'une poutre d'Euler-Bernoulli qui restent orthogonales à la ligne moyenne, celles d'une éprouvette d'interlock restent quasiment verticales. Les angles entre les sections transverses de l'interlock et la ligne moyenne varient donc fortement. Ces images permettent un second constat : les zones de l'éprouvette situées à l'extérieur des appuis fixes sont presque dans le prolongement de la partie centrale de l'éprouvette (un léger angle peut être mesuré). Ce serait également le cas pour une poutre d'Euler-Bernoulli. Ce qui est remarquable cependant, c'est que ces zones extérieures sont déformées en cisaillement alors qu'*en principe* elles ne sont pas sollicitées : il est donc nécessaire qu'une densité de moment ait été propagée dans cette zone de l'éprouvette depuis la zone centrale, ce qui est incompatible avec les hypothèses de matériau de Cauchy. Il s'agit là d'un premier indice poussant à croire que le matériau homogénéisé « interlock » n'a pas un comportement de matériau de Cauchy : l'énergie de déformation, bien que fortement liée au premier gradient de la transformation  $\underline{F}$ , est également liée au second gradient de la déformation  $\underline{\nabla F}$ , ce qui n'est pas pris en compte dans le modèle hyperélastique mis en place précédemment.



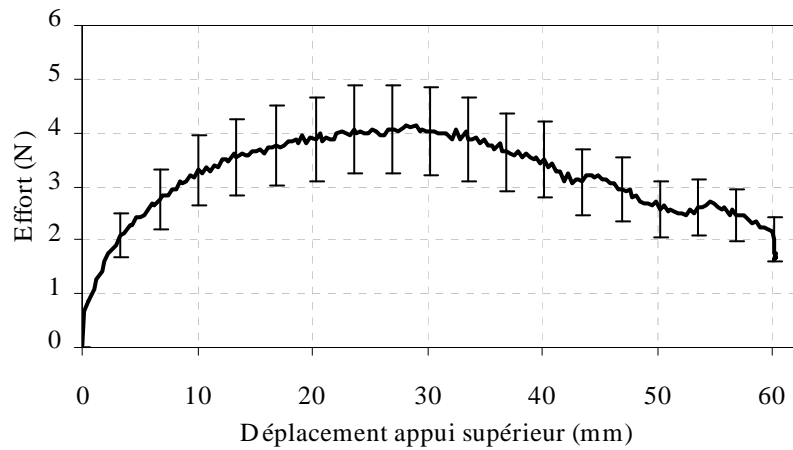


Figure 4-17. Effort de flexion expérimental pour l'interlock générique.

Un capteur placé dans le prolongement de l'appui central permet d'enregistrer les efforts mis en œuvre lors de l'essai. La courbe d'efforts obtenue est présentée sur la Figure 4-17. Cette courbe montre que la raideur mesurée diminue au cours de l'essai, et qu'en fin d'essai l'effort lui-même diminue : les normales aux contacts entre l'éprouvette et les points d'appui fixes tendent à devenir horizontales, diminuant ainsi l'effort de réaction sur le point d'appui mobile.

Au cours de l'essai de flexion, un effort maximal d'environ 4N est mesuré. L'éprouvette testée ici pèse 52.5g, ce qui représente un effort de 0.5N, soit environ 12% de l'effort maximal mesuré. Il faut donc veiller à prendre en compte le poids de l'éprouvette lors des simulations de flexion.

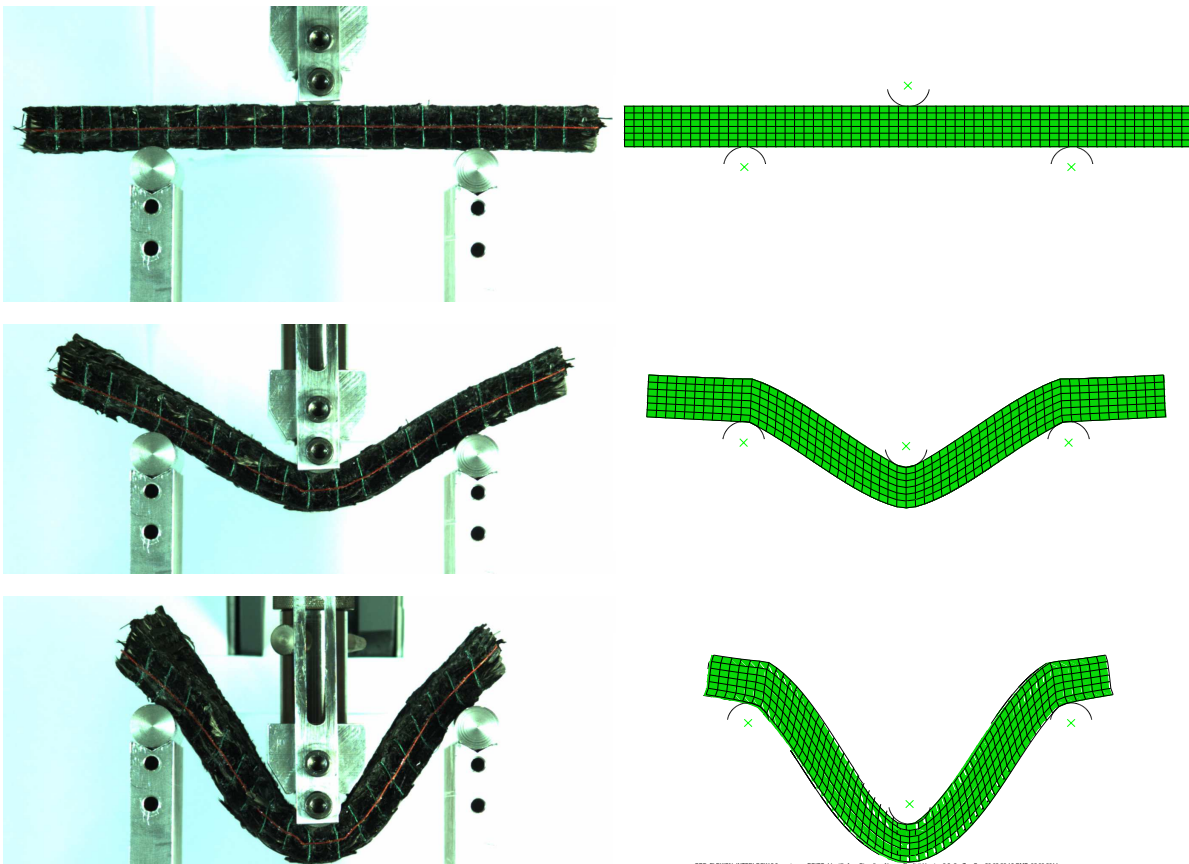


Figure 4-18. Comparaison entre expérience et simulation de la déformation macroscopique de l'éprouvette d'interlock en flexion.

#### 4.4.1.2 Simulation

Pour la simulation, l'éprouvette complète a été modélisée par des éléments finis, et les appuis ont été modélisés par des surfaces analytiques rigides. La loi de comportement hyperélastique développée précédemment est utilisée avec les paramètres issus de l'identification. Afin de satisfaire les considérations précédentes concernant le poids de l'éprouvette, la gravité est modélisée dans l'ensemble du modèle. Les efforts et les déformations mis en œuvre au cours de l'essai et de la simulation seront comparés.

Deux critères seront utilisés pour comparer la cinématique issue de la simulation avec la cinématique obtenue expérimentalement : la forme de la ligne moyenne et l'orientation des sections transverses. La comparaison des lignes moyennes est présentée sur la figure 4-19. L'utilisation du modèle hyperélastique conduit à une ligne moyenne semblable à celle des essais dans la zone centrale de l'éprouvette, c'est-à-dire entre les deux points d'appui inférieurs. Dans cette zone, la ligne moyenne obtenue est très proche de celle obtenue par l'expérience. Les rayons de courbure de cette ligne moyenne au niveau des appuis sont plus faibles dans le cas de la simulation que lors de l'expérience.

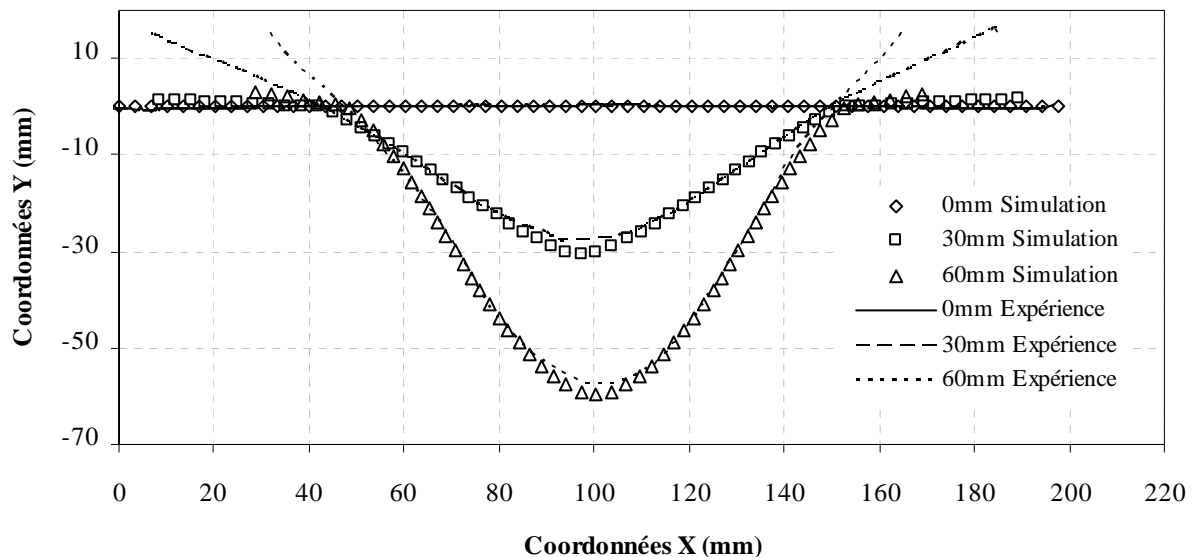


Figure 4-19. Comparaison entre expérience et simulation des lignes moyennes de l'éprouvette d'interlock au cours d'un essai de flexion.

Par ailleurs, une différence importante des lignes moyennes peut être constatée dans les zones situées à l'extérieur des points d'appui fixes : lors de l'expérience, ces zones sont sensiblement dans le prolongement de la zone centrale de l'éprouvette, alors que lors de la simulation elles sont proches de l'horizontale. Ces différences entre la ligne moyenne simulée et la ligne moyenne obtenue expérimentalement peuvent être attribuées au fait que la loi de comportement proposée ne prend pas en compte la partie du comportement du matériau dépendant de la courbure du matériau, i.e. du second gradient de la transformation, qui a été mise en évidence précédemment.

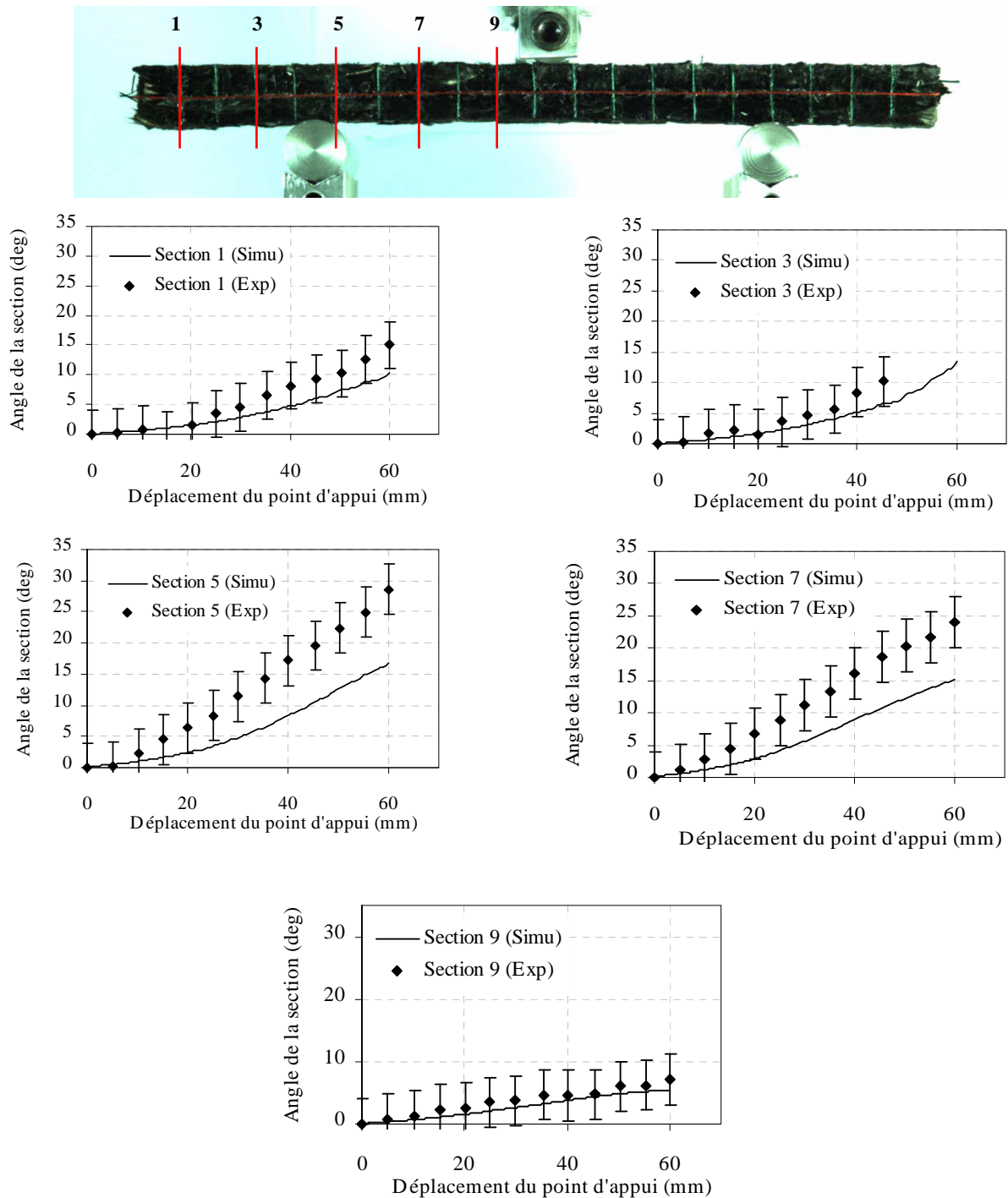


Figure 4-20. Comparaison de l'évolution de l'angle entre la verticale et différentes sections transverses pour l'expérience et pour la simulation.

Dans l'essai comme dans la simulation, les sections dans la zone centrale ne restent pas perpendiculaires à la ligne moyenne de l'éprouvette. Il s'agit là d'une caractéristique importante du comportement des renforts interlocks, mais faut noter que ces sections ne restent pas non plus tout à fait verticales. De même que la ligne moyenne, les orientations moyennes des fils déposés lors de l'expérience sur le côté du renfort sont calculées à l'aide d'un algorithme de traitement d'images. Une comparaison de l'évolution des orientations de certaines sections transverses est proposée sur la figure 4-20. Les orientations obtenues par la simulation à l'extérieur des points d'appui et proche du point d'appui central (sections 1, 3 et 9) sont en bon accord avec l'expérience. Cependant, dans la zone située entre les points d'appui fixes (sections 5 et 7) les angles obtenus entre la verticale et les sections

transverses sont plus faibles lors de la simulation que dans l'expérience : les sections tournent moins. Ceci est encore un effet du fait que la courbure du matériau n'est pas prise en compte dans la loi de comportement.

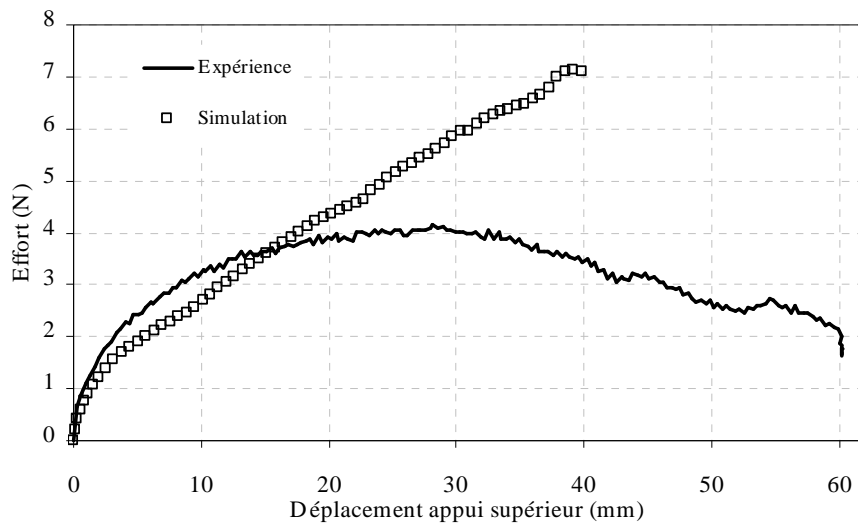


Figure 4-21. Comparaison des efforts de flexion sur interlock issus de l'expérience et de la simulation.

Finalement, les efforts mis en œuvre au cours de l'essai de flexion peuvent être comparés. La figure 4-21 présente les courbes d'effort obtenues expérimentalement et par simulation. Bien que le début de la courbe montre un assez bon accord entre l'expérience et la simulation, la décroissance de l'effort de flexion n'est pas mise en évidence par la simulation. Ceci provient du fait que la cinématique issue de la simulation ne permet pas d'obtenir des normales au contact se rapprochant de l'horizontale au niveau des points d'appui fixes. Il n'est donc pas étonnant que l'effort ne cesse de croître sur la courbe issue de la simulation.

#### 4.4.1.3 Bilan sur la flexion à 0°/90°

La mise en place et la comparaison des essais et des simulations de flexion ont permis une meilleure compréhension du comportement mécanique des interlocks de forte épaisseur lorsque ceux-ci sont soumis à des courbures importantes : l'étude de l'évolution de la courbure de la ligne moyenne et des orientations des sections transverses a apporté des éléments de preuve que l'énergie de déformation du renfort interlock dépend de cette courbure. Le comportement en flexion des interlocks n'est pas complètement décrit par un comportement de matériau de Cauchy mais plus probablement par un comportement du second gradient. Les renforts tissés étant souvent utilisés pour obtenir des pièces aux courbures importantes, de telles courbures apparaissent dans la plupart des cas de mises en forme industrielles et peuvent avoir une influence sur les efforts mis en œuvre. Par contre, la mauvaise description de la cinématique des zones situées à l'extérieur des points d'appui est moins importante pour la simulation de la mise en forme : en effet, le procédé RTM est un procédé *moule fermé*, au cours duquel la déformée du renfort est contrainte par le moule en tout point.

Une modélisation apportant quelques éléments de réponse à la problématique de la prise en compte du comportement lié à la courbure du renfort est proposée dans la section 4.5 et testée avec un essai de flexion. Un essai et une simulation d'emboutissage hémisphérique vont maintenant être présentés, permettant d'étudier la pertinence de la loi de comportement proposée et ses limites dans une sollicitation 3D.

#### 4.4.2 Flexion à 45°

Un second cas de flexion est étudié dans cette partie, pour lequel les directions de chaîne et de trame sont orientées à 45° par rapport aux bords de l'éprouvette. Le dispositif expérimental utilisé est le même que pour la flexion à 0°/90°. L'étude de sensibilité des simulations de bias test à l'orientation des éléments du maillage a montré que les côtés des éléments doivent être alignés aux directions de chaîne et de trame. Un nouveau maillage est donc utilisé afin de satisfaire à cette condition.

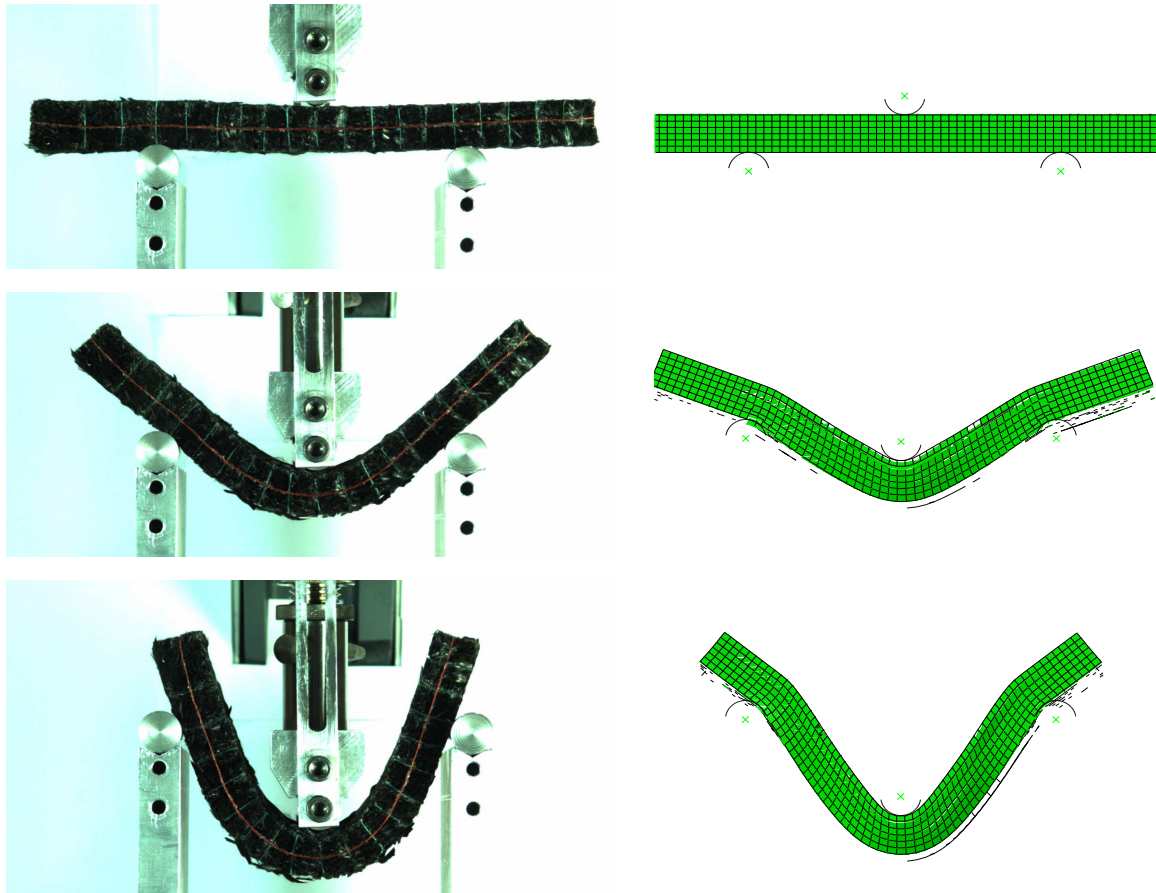


Figure 4-22. Déformées de flexion à 45° obtenues par expérience et par simulation.

Les déformées obtenues expérimentalement et par simulation avec la loi de comportement précédente sont présentées sur la figure 4-22. La déformée issue de l'expérience présente une cinématique caractéristique des essais de flexion à 45° : au niveau du point d'appui central l'éprouvette a un rayon de courbure plus important que lors d'un essai de flexion classique, mais surtout les sections transverses restent presque orthogonal à la ligne moyenne. Par ailleurs, les zones situées à l'extérieur des points d'appui ne sont pas déformées. A ce titre, le comportement des interlocks en flexion à 45° « ressemble » à un comportement de poutre d'Euler-Bernoulli. Sur la simulation, les zones extérieures ne sont pas déformées, et les sections tournent plus que dans le cas de la flexion à 0°/90°. Cependant, les sections ne restent pas orthogonales à la ligne moyenne, et le rayon de courbure observé au niveau du point d'appui central est plus faible que lors de l'expérience. Ceci peut être attribué, comme pour la flexion à 0°/90°, au fait que la partie du comportement liée à la courbure du renfort n'est pas prise en compte dans la loi de comportement hyperélastique.

Par ailleurs, ce type d'essai met en évidence une courbure dans la largeur de l'éprouvette au niveau du point d'appui mobile de la machine de flexion (figure 4-23a). Bien qu'aisément constatée expérimentalement, cette courbure n'a pas été caractérisée et il n'existe pas de données quantitatives à son sujet.

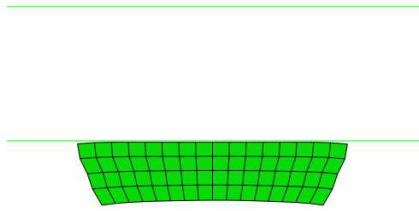


Figure 4-23. Courbure de l'éprouvette lors d'un essai de flexion à 45°.

Malgré ces différences entre l'expérience et la simulation de la flexion à 45°, ce modèle permet une première compréhension de la cinématique de cet essai, fondamentalement différente de la cinématique de l'essai de flexion à 0°/90°. Lorsque les mèches sont orientées à 45° par rapport aux bords de l'éprouvette, des elongations importantes de la partie supérieure et de la partie inférieure de l'éprouvette sont possibles : c'est notamment la faible raideur en cisaillement dans le plan qui permet à l'éprouvette de se comprimer dans la partie supérieure et de s'allonger dans la partie inférieure. Cette raideur en cisaillement dans le plan étant plus faible que la raideur en cisaillement transverse, l'éprouvette se déforme presque exclusivement en cisaillement dans le plan.

#### 4.4.3 Emboutissage hémisphérique

Dans cette partie, un emboutissage du renfort interlock par un poinçon hémisphérique est étudié. Les caractéristiques géométriques du montage expérimental sont présentées sur la figure 4-24. Les mêmes caractéristiques sont utilisées dans le modèle éléments finis. Pour cet essai, seules les déformées expérimentales et simulées seront comparées, le montage expérimental ne permettant pas d'obtenir les efforts d'emboutissage. L'essai d'emboutissage a été réalisé dans le cadre de la thèse de De Luycker [DEL09], sur un interlock différent de celui dont le comportement a été identifié dans ce chapitre. La comparaison des déformées sera donc essentiellement qualitative.

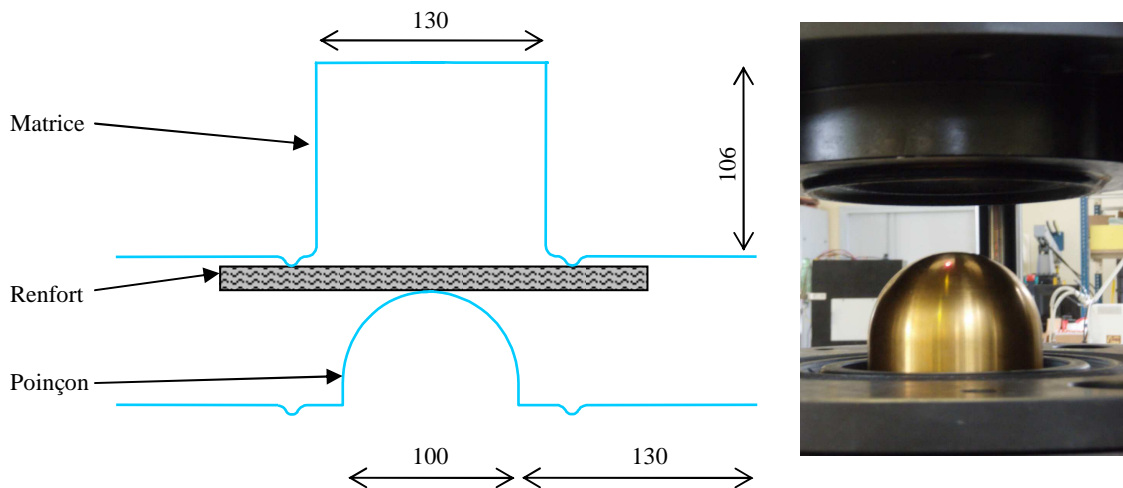


Figure 4-24. Caractéristiques géométriques du montage d'emboutissage hémisphérique.

Les vues de dessus des éprouvettes embouties expérimentalement et par simulation permettent de comparer la cinématique des bords du renfort. La figure 4-25 montre que la cinématique obtenue par simulation est compatible avec la cinématique obtenue expérimentalement. Quelques plissements apparaissent néanmoins au cours de la simulation, qui peuvent une fois de plus être attribués au fait que le comportement lié à la courbure n'est pas inclus dans la loi de comportement.

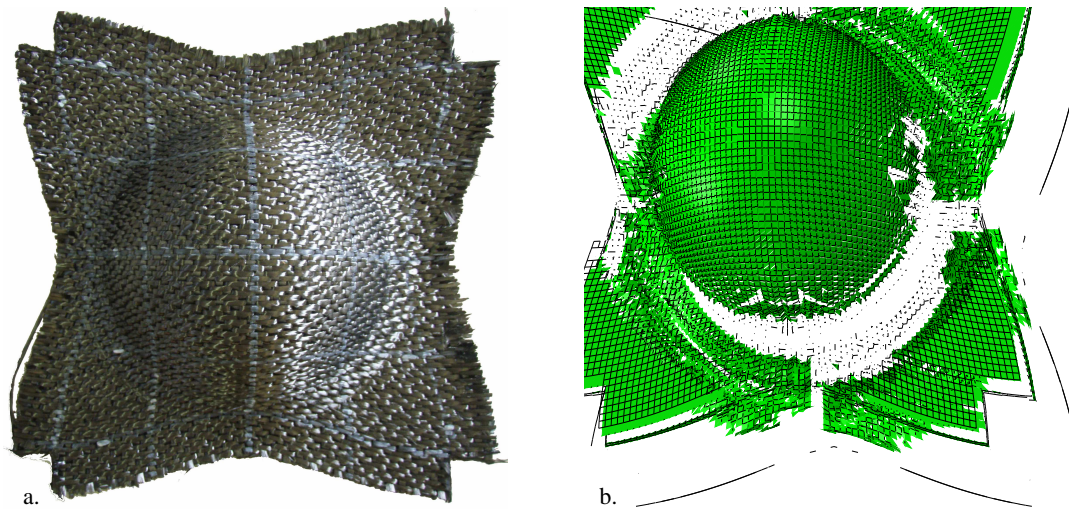


Figure 4-25. Vues de dessus de l'éprouvette emboutie par le poinçon hémisphérique : (a) expérience [DEL09] et (b) simulation.

La définition de la loi de comportement par les modes de déformation permet de visualiser directement les cisaillements plans et le taux de compression du renfort au cours de la déformation. La connaissance de ces grandeurs est importante pour la simulation de l'injection de la résine dans le renfort. Des cartographies de ces grandeurs, obtenues par la simulation, sont présentées sur la figure 4-26. Un écart important est constaté entre les cisaillements dans le plan des deux faces de la préforme. Ceci confirme le bien fondé de l'approche 3D proposée dans ce chapitre par rapport aux les approches 2D, qui ne permettent pas de caractériser les déformations du renfort dans l'épaisseur.

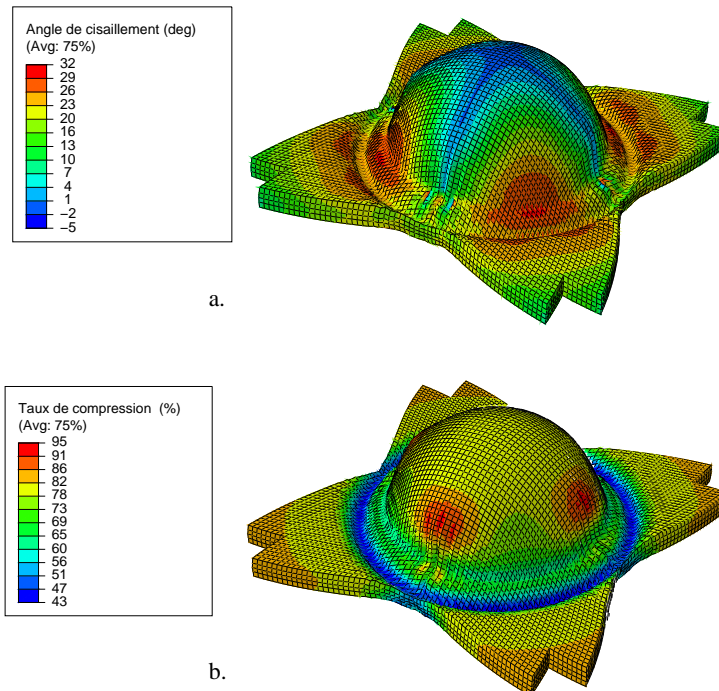


Figure 4-26. Angles de cisaillements plans (a) et taux de compression (b) dans le renfort interlock au cours d'un emboutissage hémisphérique, calculés par simulation.

## 4.5 Interlocks et milieux du second gradient

Le modèle proposé dans ce chapitre permet de prendre en compte la majeure partie du comportement des renforts interlocks, à travers les différents modes de déformation qui ont été définis. Les sollicitations imposées au renfort pour valider la loi de comportement hyperélastique ont mis en évidence une lacune de ce modèle pour la description du comportement mécanique des renforts interlocks : cette loi de comportement est basée sur une hypothèse de matériau de Cauchy, ce qui signifie l'énergie de déformation modélisée ne dépend que du gradient de l'état actuel de la déformation du matériau. A travers les essais précédents, et notamment l'essai de flexion, il a été montré que l'énergie de déformation dépend également de la courbure du milieu, c'est-à-dire du second gradient de la transformation. Dans cette partie une première approche est proposée pour modéliser la contribution du second gradient de la transformation dans l'écriture de la loi de comportement.

Le code de calcul Abaqus ne donne pas accès au second gradient de la transformation lors de la mise en œuvre de la loi de comportement dans la subroutine utilisateur VUMAT. Par ailleurs, la méthodologie proposée dans cette partie n'est qu'une première approche visant à mettre en évidence une fois de plus l'influence de la prise en compte du second gradient de la transformation. Il a donc été fait le choix d'implémenter la contribution du second gradient par superposition avec la loi hyperélastique proposée précédemment : des réseaux de poutres de Timoshenko utilisant la même discrétisation que l'éprouvette sont ajoutés dans les directions de chaîne et de trame (figure 4-27). Ces poutres sont caractérisées par une raideur et une inertie qui constitueront les deux paramètres permettant de décrire la dépendance du matériau au second gradient de la transformation. Afin de ne pas perturber le modèle hyperélastique en élongation dans les directions chaîne et trame, les raideurs totales des réseaux de poutres sont retranchées aux raideurs en élongation de la loi de comportement hyperélastique. La masse de l'éprouvette est répartie entre les éléments 3D et les éléments de poutre, et ce de façon à optimiser le pas de temps critique.

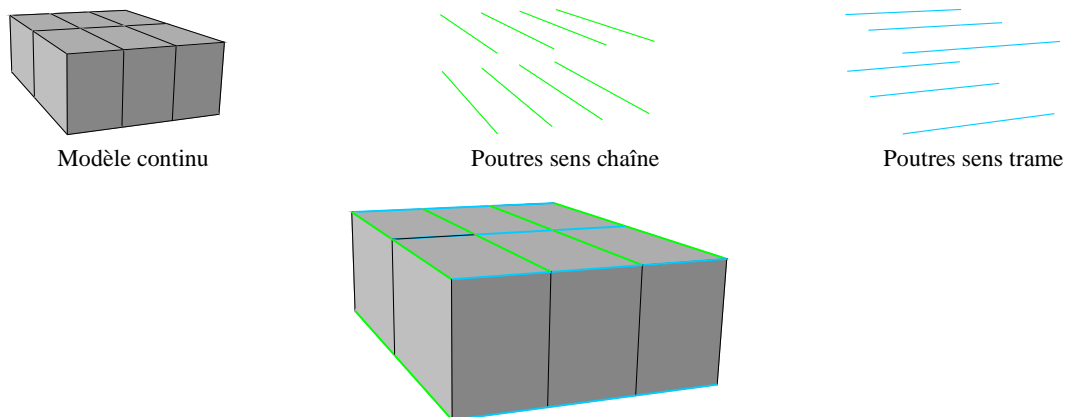


Figure 4-27. Ajout de poutres dans les directions de chaîne et de trame pour modéliser l'influence du second gradient de la transformation sur le comportement du renfort.

Une simulation de flexion, avec les mêmes caractéristiques géométriques que celui présenté dans la partie 4.4.1 (p. 127), est réalisée en utilisant ce nouveau modèle. Une comparaison globale des cinématiques obtenues expérimentalement et par simulation est proposée sur la figure 4-28, La cinématique de la ligne moyenne est comparée aux valeurs mesurées par traitement d'images sur la figure 4-29.



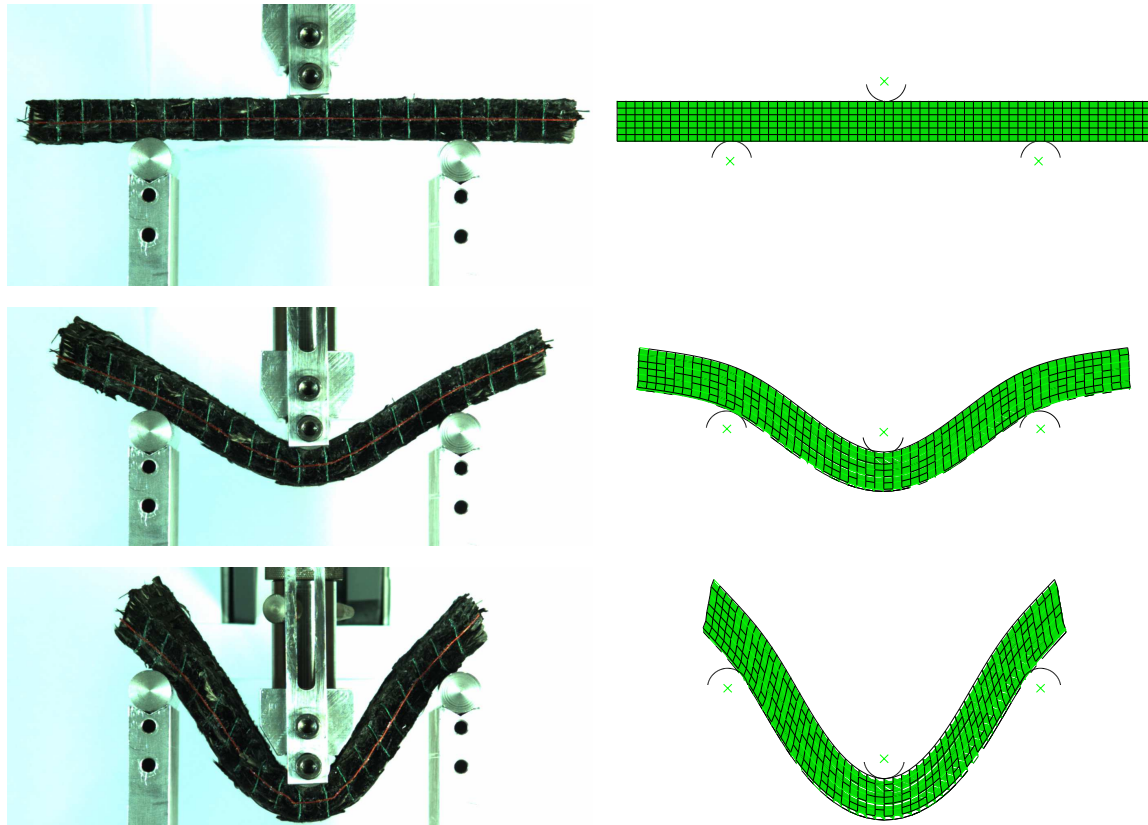


Figure 4-28. Comparaison des déformées de flexion  $0^\circ/90^\circ$  obtenues par l'expérience et avec la superposition du modèle hyperélastique avec des poutres prenant en compte la part de la loi de comportement liée au second gradient de la transformation.

L'ajout de poutres au modèle, première approche pour la prise en compte de l'influence du second gradient de la transformation dans la loi de comportement du matériau, permet d'obtenir une cinématique de flexion plus proche de l'expérience que l'utilisation de la seule loi de comportement hyperélastique : au-delà des points d'appui extérieurs, les lignes moyennes obtenues prolongent le reste de l'éprouvette, et une déformation de l'éprouvette est propagée au-delà des points d'appui fixes.

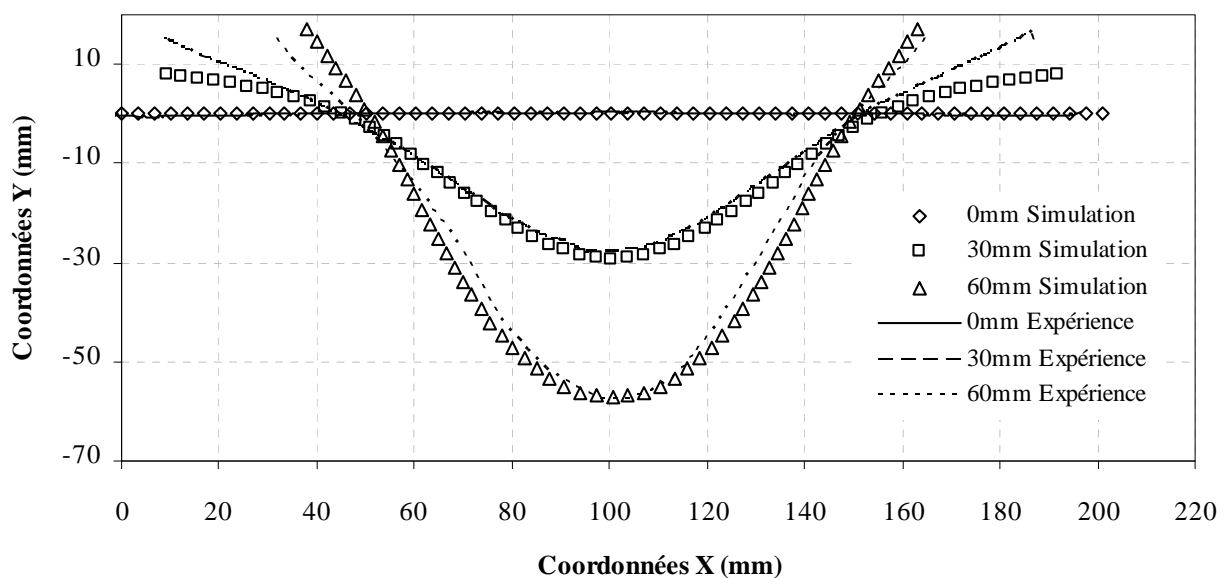


Figure 4-29. Comparaison de l'évolution de la ligne moyenne et des orientations des sections transverses obtenues expérimentalement et pour une simulation de flexion à  $0^\circ/90^\circ$  avec un modèle enrichi de poutres.

Toutefois, on constate qu'avec cette approche la raideur en flexion des poutres est trop faible en début d'essai : cette raideur ne permet pas de redresser suffisamment les bords de l'éprouvette lorsque le point d'appui central est à mi-course. A l'inverse, cette raideur est trop importante en fin d'essai : dans la simulation le rayon de courbure obtenu au niveau du point d'appui central est plus important que lors de l'essai. Ces deux considérations permettent d'imaginer que la raideur attribuée au comportement du second gradient n'est pas constante : la diminution de cette raideur déductible de la fin de l'essai de flexion peut être liée à des flambements des mèches à l'échelle mésoscopique, qui ne sont pas pris en compte par le modèle avec les poutres. Un modèle de poutres au comportement non-linéaire, ou une « vraie » formulation de la dépendance de la loi de comportement par rapport au second gradient de la transformation, est donc nécessaire.

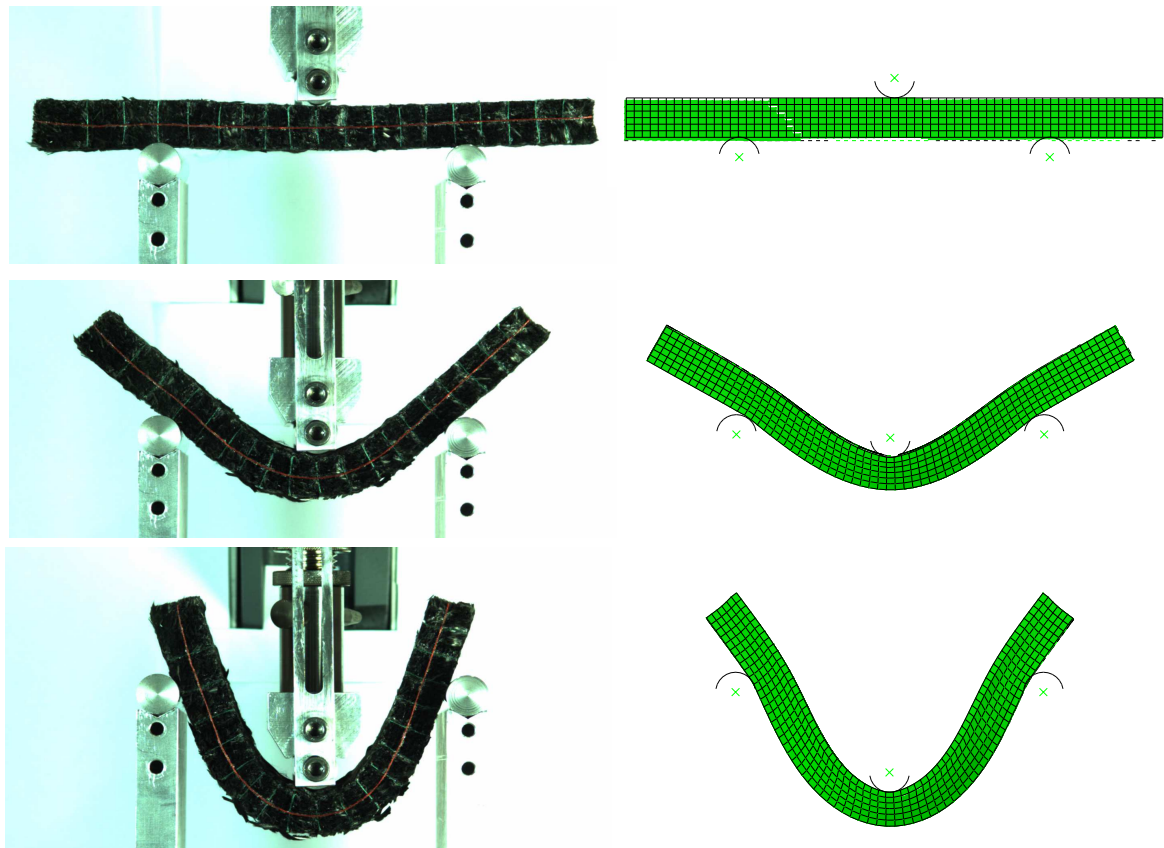


Figure 4-30. Comparaison des déformées de flexion à  $45^\circ$  obtenues par l'expérience et avec la superposition du modèle hyperélastique avec des poutres prenant en compte la part de la loi de comportement liée au second gradient de la transformation.

L'essai de flexion à  $45^\circ$  a également été simulé avec cette méthode de superposition de poutres dans les directions de chaîne et de trame avec le modèle de milieu continu proposé. La déformée obtenue est présentée sur la figure 4-30. Le comportement observé dans la simulation est plus proche du comportement observé expérimentalement que lorsque le modèle continu est utilisé seul. La différence de comportement entre la flexion à  $0^\circ/90^\circ$  et la flexion à  $45^\circ$ , caractéristique du comportement des renforts interlocks, est bien retrouvée par la simulation.

## 4.6 Conclusion du chapitre 4

Dans ce chapitre, la loi de comportement hyperélastique proposée pour la mèche au chapitre 3 a été étendue à une loi de matériau à deux directions de fibres permettant de décrire le comportement mécanique des renforts interlocks. De nouveaux invariants ont été introduits, basés sur les invariants

de base des matériaux orthotropes, permettant de décrire chacun des modes de déformation du renfort interlock : élongation dans la direction chaîne, élongation dans la direction trame, compaction transverse, cisaillement dans le plan, cisaillement transverse chaîne et cisaillement transverse trame.

Des données expérimentales, obtenues dans le cadre d'un autre travail de thèse au LaMCoS, ont permis de caractériser chacun de ces modes de déformation, et d'identifier des densités d'énergie de déformation bien adaptées à leur comportement. La loi de comportement obtenue a été implémentée dans une subroutine utilisateur VUMAT, permettant ainsi de simuler deux cas de déformation du renfort : un essai de flexion à  $0^\circ/90^\circ$  et un essai d'emboutissage hémisphérique. L'analyse des expériences et des simulations de flexion à  $0^\circ/90^\circ$  nous a permis de mettre en évidence un type de comportement mécanique spécifique aux renforts tissés interlocks : le comportement mécanique de ces matériaux ne dépend pas que du premier gradient de la transformation, mais également de la courbure macroscopique du matériau (i.e. du second gradient de la transformation). Les renforts interlocks ne sont donc pas des matériaux satisfaisant les hypothèses de matériau de Cauchy.

Une première approche a été introduite afin de prendre en compte cette dépendance de la loi de comportement à la courbure : deux réseaux de poutres ont été ajoutés dans les directions de chaîne et de trame. Les résultats obtenus à l'aide de cette première approche ont permis de confirmer que la loi de comportement homogénéisée du matériau interlock est dépendante du second gradient de la transformation. Toutefois l'approche introduite est trop grossière pour décrire la complexité de cette dépendance : des phénomènes de flambage de fibres et de mèches apparaissant aux échelles microscopique et mésoscopique sont certainement responsables d'une non linéarité de ce comportement dépendant de la courbure, qui ne peut être modélisée par des poutres linéaires. L'utilisation de poutres non-linéaires ou d'une « vraie » formulation de milieu du second gradient permettrait d'améliorer cette loi de comportement et d'obtenir une très bonne description du matériau interlock homogénéisé.

# Conclusion générale

La maîtrise de l'élaboration des pièces en composites à renforts tissés passe par une connaissance précise de leur comportement à l'échelle mésoscopique et à l'échelle macroscopique. A l'heure actuelle, le développement de modèles numériques permet d'analyser et de comprendre le comportement des renforts tissés à ces deux échelles. A terme, les objectifs sont multiples : réduire le nombre de tests expérimentaux nécessaire à la caractérisation d'un renfort, concevoir numériquement des renforts adaptés à une application donnée, étudier la formabilité et la perméabilité d'un renfort, prévoir l'apparition de défauts et, plus généralement, réduire la durée et le coût du cycle de conception d'une pièce en composite à renfort tissé.

Dans ce contexte, la formulation de lois permettant de décrire le comportement mécanique des renforts tissés à l'échelle mésoscopique et à l'échelle macroscopique est incontournable. Ces lois doivent être anisotropes, non linéaires et formulées en grandes transformations. A l'échelle mésoscopique, les lois de comportement proposées dans la littérature sont hypoélastiques : la difficulté principale est alors la définition d'une base dans laquelle la dérivée des contraintes est objective. Ces modèles n'étant pas basés sur des considérations thermodynamiques, ils ne permettent pas une maîtrise précise de l'énergie de déformation du renfort. À l'échelle macroscopique, les lois de comportement existantes sont généralement des lois 2D : le renfort est modélisé comme un continuum 2D, en utilisant les éléments finis de coque ou de membrane. Cette hypothèse de modélisation est trop restrictive pour décrire le comportement de renforts épais tels que les renforts interlocks. L'objectif du travail de recherche qui a été présenté dans ce manuscrit était d'évaluer les possibilités offertes par les approches hyperélastiques pour la modélisation du comportement mécanique des renforts tissés de composites.

Dans ce cadre, une première loi de comportement hyperélastique a été formulée pour décrire le comportement de la mèche à l'échelle mésoscopique. La déformation de la mèche a été décomposée en quatre modes de déformation, traduisant les mécanismes de déformation de la mèche. Des invariants ont été définis décrivant la façon dont ces différents modes sont sollicités. Des fonctions densité d'énergie de déformation ont été associées à chacun de ces invariants pour modéliser le comportement mécanique associé à chacun des modes de déformation, définissant ainsi la loi de comportement. Une méthode a été proposée pour identifier les paramètres de cette loi de comportement, à partir d'un essai de traction uniaxiale sur la mèche, d'un essai de traction uniaxiale sur le renfort, et d'un essai de traction biaxiale sur le renfort. Ce dernier essai a par ailleurs été couplé à un algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt pour identifier les paramètres du comportement dans le plan d'isotropie de la mèche. Cette méthode a été appliquée avec succès pour une mèche de taffetas de verre et pour une mèche de sergé de carbone. Des essais de tension biaxiale déséquilibrée ont été simulés afin de valider la loi de comportement. Compte tenu des résultats d'essais expérimentaux, le comportement de la mèche observé au cours de ces simulations s'est avéré satisfaisant. Des simulations de cisaillement de la maille élémentaire, dans son état libre et soumise à une sollicitation de tension biaxiale, ont également été mises en place. Le comportement simulé était conforme au comportement réel du renfort, notamment pour la description de la rigidification en cisaillement qui apparaît lorsque les mèches de chaîne et de trame entre en contact latéral. Ces cas de chargement ont donc permis de valider la loi de comportement hyperélastique proposée pour la description du comportement mécanique de la mèche de renfort tissé.

Une seconde loi de comportement hyperélastique a été proposée, par extension de la première. Alors que la plupart des lois de comportement macroscopique sont des lois de comportement 2D, une approche macroscopique 3D a été mise en place, permettant notamment de modéliser le comportement des renforts épais de type interlock. Cette loi de comportement a été formulée en suivant le même canevas que pour la formulation de la loi hyperélastique pour la mèche. Les modes de déformation des renforts interlocks 2.5D ont d'abord été identifiés et décrits à l'aide d'invariants. Des fonctions densité d'énergie ont alors été associées à ces invariants, dont les paramètres ont été identifiés en utilisant des résultats d'essais issus d'une autre thèse en cours au LaMCoS. La loi de comportement ainsi obtenue a été utilisée pour simuler différents cas de déformation macroscopiques : un essai de flexion à  $0^\circ/90^\circ$  caractéristique des renforts interlock, et un essai d'emboutissage hémisphérique. Un accord satisfaisant a été obtenu entre les résultats de simulation et les résultats des essais expérimentaux. Il a toutefois été montré que le comportement mécanique des renforts interlock est sensible à la courbure de l'éprouvette, et sort donc du cadre des hypothèses de matériau de Cauchy. Cet aspect n'étant pas pris en compte dans la loi de comportement proposée, les déformées obtenues présentent des courbures plus importantes que les éprouvettes réelles. Une première approche a été proposée pour prendre en compte cette influence de la courbure, dans laquelle deux réseaux de poutres ont été superposés au modèle continu. Cette approche a permis d'obtenir une déformée de flexion plus proche de la déformée réelle, mais pas tout à fait satisfaisante : la dépendance à la courbure du comportement du matériau semble être de nature non-linéaire, certainement du fait de flambages de fibres et de mèches aux échelles inférieures.

Les deux lois de comportement développées au cours de cette thèse ont permis de montrer que les approches hyperélastiques sont des alternatives intéressantes aux approches hypoélastiques ou élastiques utilisées dans la littérature : le suivi simultané d'une ou plusieurs directions de fibres est possible, en grandes transformations, sans avoir à introduire le formalisme des dérivées convectives. Par ailleurs, la définition de la loi de comportement commençant par une description des différents modes de déformation permet d'apporter une modélisation plus physique et plus intuitive du comportement mécanique étudié.

Quelques perspectives intéressantes s'ouvrent à l'issue du travail présenté dans ce manuscrit. En ce qui concerne la loi de comportement de la mèche, il serait intéressant d'introduire un terme de dissipation pour prendre en compte les phénomènes de relaxation qui sont mis en évidence lors des essais expérimentaux, et notamment lors des essais d'écrasement du renfort. Cette relaxation pouvant avoir une influence significative sur les efforts mis en œuvre lors de l'emboutissage d'un renfort, qu'il soit 2D ou interlock, sa caractérisation et sa modélisation serait intéressante.

La loi de comportement formulée pour les interlocks pourrait quant à elle être améliorée en ajoutant un terme dépendant du second gradient de la transformation, afin de prendre en compte l'influence de la courbure du matériau. Une description précise du comportement des interlocks sera être obtenue, et des simulations d'emboutissage fiables pourront alors être mises en place à l'échelle industrielle.

# Bibliographie

- [ABA08] *Abaqus 6.8 Analysis User's Manual*. Dassault Systemes Simulia Corp., 2008.
- [AIM10] **Aimène Y., Vidal–Sallé E., Hagège B., Sidoroff F., Boisse P.** *A hyperelastic approach for composite reinforcement large deformation analysis*. Journal of Composite Materials, 2010, vol. 44, n°1, 5–26.
- [AGO09] **Agoras M., Lopez-Pamies O., PonteCastaneda P.** *A general hyperelastic model for incompressible fiber-reinforced elastomers*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2009, vol. 57, pp. 268–286.
- [ALM98] **Almeida E.S., Spilker R.L.** *Finite element formulations for hyperelastic transversely isotropic biphasic soft tissues*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, vol. 151, pp. 513–538.
- [AST02] *ASTM, Standard test method for stiffness of fabrics*. American Society for Testing and Materials, 2002, ch. D1388–96(2002).
- [BAD08a] **Badel P.** *Analyse mésoscopique du comportement mécanique des renforts tissés de composites utilisant la tomographie aux rayons X*. Thèse de doctorat LaMCoS, Lyon : INSA de Lyon, 2008, 149 p.
- [BAD08b] **Badel P., Vidal–Sallé E., Maire E., Boisse P.** *Simulation and tomography analysis of textile composite reinforcement deformation at the mesoscopic scale*. Composite Science and Technology, 2008, vol. 68, n°12, pp. 2433–2440.
- [BAS09] **Basciano C.A., Kleinstreuer C.** *Invariant-Based Anisotropic Constitutive Models of the Healthy and Aneurysmal Abdominal Aortic Wall*. Journal of Biomechanical Engineering, ASME, 2009, vol. 131, n°2, 021009.
- [BEN07] **Ben Boubaker B., Haussy B., Ganghoffer J.F.** *Discrete models of woven structures. Macroscopic approach*. Composites Part B: Engineering, 2007, vol. 38, pp. 498–505.
- [BIC07] **Bickerton S., Simacek P., Guglielmi S.E., Advani, S.G.** *Investigation of draping and its effects on the mold filling process during manufacturing of a compound curved composite part*. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 1997, vol. 28, pp. 801–16.
- [BIG05] **Bigaud D., Dreano L., Hamelin P.** *Models of interactions between process, microstructure and mechanical properties of composite materials—a study of the interlock layer-to-layer braiding technique*. Composite Structures, 2005, vol. 67, n°1, pp. 99–114.
- [BOE87] **Boehler J.P.** *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics*. CISM Course no. 292, Springer-Verlag, 1987.
- [BOI95] **Boisse P., Cherout A., Gelin J.C., Sabhi H.** *Experimental study and finite element simulation of a glass fiber fabric shaping process*. Polymer Composites, 1995, vol. 16, n°1, pp. 83–95.
- [BOI04] **Boisse P.** *Mise en forme des renforts fibreux de composites*. Techniques de l'Ingénieur, AM 3734, 2004, 10 p.
- [BOI06] **Boisse P., Zouari B., Daniel J.L.** *Importance of in-plane shear rigidity in finite element analyses of woven fabric composite preforming*. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 2006, vol. 37, pp. 2201–2212.

- [BOI11] **Boisse P., Hamila N., Vidal-Sallé E., Dumont F.** *Simulation of wrinkling during textile composite reinforcement forming. Influence of tensile, in-plane shear and bending stiffnesses.* Composites Science and Technology, 2011, vol. 71, n°5, pp. 683–692.
- [BOR03] **Borouchaki H., Cherouat A.** *Drapage géométrique des composites.* Comptes Rendus Mécanique, 2003, vol. 331, 437–442.
- [BUE98] **Buet–Gautier K.** *Analyse et simulation du comportement mécanique des renforts composites tissés.* Thèse de doctorat LMMS, Orléans : Université d'Orléans, 1998, 129 p.
- [BUE01] **Buet–Gautier K., Boisse P.** *Experimental analysis and modeling of biaxial mechanical behavior of woven composite reinforcements.* Experimental Mechanics, 2001, vol. 41, pp. 260–269.
- [CAI92] **Cai Z., Gutowski T.** *The 3-D deformation behavior of a lubricated fiber bundle.* Journal of composite materials, 1992, vol. 26, 1207–1237.
- [CAO08] **Cao J., Akkerman R., Boisse P., Chen J., Cheng H. S., de Graaf E. F., Gorczyca J. L., Harrison P., Hivet G., Launay J., Lee W., Liu L., Lomov S.V., Long A., de Luycker E., Morestin F., Padvoiskis J., Peng X. Q., Sherwood, J., Stoilova T., Tao X. M., Verpoest I., Willems A., Wriggers J., Yu T. X., Zhu B.** *Characterization of mechanical behavior of woven fabrics: Experimental methods and benchmark results.* Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 2008, vol. 39, n°6, pp. 1037–1053.
- [CIA88] **Ciarlet P.** *Mechanical Elasticity : three dimensional elasticity,* Elsevier, 1988.
- [COS09] **Cosserat E., Cosserat F.** *Théorie des Corps Déformables.* Hermann, Paris, 1909, 226 p., ISBN 2705669205.
- [CRI01] **Criscione J.C., Douglas A.S., Hunter W.C.** *Physically based strain invariant set for materials exhibiting transversely isotropic behavior.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2001, vol. 49, pp.871–897.
- [DAL08] **Dallies E., Berthereau A.** *Fibres de verre de renforcement.* Techniques de l'Ingénieur, AM 5132, 2008, 19 p.
- [DEB06] **DeBotton G., Hariton I., Socolsky E.** *Neo-Hookean fiber-reinforced composites in finite elasticity.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2006, vol. 54, pp. 533–559.
- [DEB10] **de Bilbao E., Soulat D., Hivet G., Gasser A.** *Experimental study of bending behaviour of reinforcements.* Experimental Mechanics, 2010, vol. 50, pp. 333–351.
- [DEL09] **De Luycker E.** *Simulation et expérimentation en mise en forme de renforts composites 3D interlocks.* Thèse de doctorat LaMCoS, Lyon : INSA de Lyon, 2009, 148 p.
- [DES05] **Desplentere F.S., Lomov S.V., Woerdeman D.L., Verpoest I., Wevers M., Bogdanovich A.** *Micro-CT characterization of variability in 3D textile architecture.* Composite Science and Technology, 2005, vol. 65, pp. 1920–30.
- [DIA04] **Diani J., Brieu M., Vacherand J.-M., Rezgui A.** *Directional model for isotropic and anisotropic hyperelastic rubber-like materials.* Mechanics of Materials, 2004, vol. 36, pp. 313–321.
- [DRI10] **Dridi S.** *Essais de caractérisation des structures tissées.* Thèse de doctorat LaMCoS, Lyon : INSA de Lyon, 2010, 125 p.
- [DUM03a] **Dumont F.** *Contribution à l'expérimentation et à la modélisation du comportement de renforts de composites tissés.* Thèse de doctorat LMSP/LM2S, Paris : Université de Paris VI, 2003, 149 p.

- [DUM03b] **Dumont F., Hivet G., Rotinat R., Launay J., Boisse P., Vacher P.** *Mesures de champs pour des essais de cisaillement sur des renforts tissés.* Mécanique & Industries, 2003, vol. 4, pp. 627–635.
- [DUP08] **Dupupet G.** *Fibres de carbone.* Techniques de l'Ingénieur, AM 5134, 2008, 15 p.
- [DUR10] **Durville D.** *Simulation of the mechanical behaviour of woven fabrics at the scale of fibers.* International Journal of Material Forming, 2010, vol. 3, 1241–1251.
- [GAS00] **Gasser A., Boisse P., Hanklar S.** *Mechanical behaviour of dry fabric reinforcements. 3D simulations versus biaxial tests.* Computational Materials Science, 2000, vol. 17, pp. 7–20.
- [GHO07] **Ghoreishi S.R., Cartraud P., Davies P., Messenger T.** *Analytical modeling of synthetic fiber ropes subjected to axial loads. Part I: A new continuum model for multilayered fibrous structures.* International Journal of Solids and Structure, 2007, vol. 44, pp. 2924–2942.
- [GOD09] **Godara A., Mezzo L., Luizi F, Warriier A., Lomov S.V., van Vuure A.W., Gorbatiikh L., Moldenaers P., Verpoest I.** *Influence of carbon nanotube reinforcement on the rocessing and the mechanical behaviour of carbon fiber/epoxy composites.* Carbon, 2009, vol. 47, pp. 2914–2923.
- [GRU04] **Grujicic M., Chittajallu K.M., Walsh S.** *Effect of shear, compaction and nesting on permeability of the orthogonal plain-weave fabric preforms.* Materials Chemistry and Physics, 2004, vol. 86, pp.358-369.
- [GUO07] **Guo Z., Peng X., Moran B.** *Large deformation response of a hyperelastic fibre reinforced composite: Theoretical model and numerical validation.* Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 2007, vol. 38, pp. 1842–1851.
- [HAG04] **Hagège B.** *Simulation du comportement mécanique des milieux fibreux en grandes transformations : application aux renforts tricotés.* Thèse de doctorat LMSP, Paris : ENSAM de Paris, 2004, 262 p.
- [HAM07] **Hamila N.** *Simulation de la mise en forme des renforts composites mono et multi plis.* Thèse de doctorat LaMCoS, Lyon : INSA de Lyon, 2007, 136 p.
- [HAM07b] **Hamila N., Boisse P.** *A meso–macro three node finite element for draping of textile composite preforms.* Applied Composite Materials, 2007, vol. 14, n°4, pp. 235–250.
- [HAM09] **Hamila N., Boisse P., Sabourin F., Brunet M.** *A semi-discrete shell finite element for textile composite reinforcement forming simulation.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, vol. 79, pp. 1443–1466.
- [HAN98] **Hanklar S.** *Modélisation mécanique et numérique du comportement des tissus de fibres. Simulation du comportement mésoscopique de la maille élémentaire.* Thèse de doctorat LM2S, Paris : Université Paris IV, 1998, 156 p.
- [HAR04] **Harrison P., Clifford M. J., Long A. C.** *Shear characterisation of viscous woven textile composites: a comparison between picture frame ans bias extension experiments.* Composites Science and Technology, 2004, vol. 64, n°10–11, pp. 1453–1465.
- [HEA01] **Heardman E., Lekakou C.** *In-plane permeability of sheared fabrics.* Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 2001, vol. 32, n°7, pp. 933–940.
- [HIR00] **Hirokawa S., Tsuruno R.** *Three-dimensional deformation and stress distribution in an analytical/computational model of the anterior cruciate ligament.* Journal of Biomechanics, 2000, vol. 33, pp. 1069–1077.
- [HIV03] **Hivet G.** *Modélisation mésoscopique pour le comportement bi-axial et la mise en forme des renforts de composites tissés.* Thèse de doctorat LMSP, Orléans : Université d'Orléans, 2003, 146 p.



- [HIV05] **Hivet G., Boisse P.** *Consistent 3D geometrical model of fabric elementary cell. Application to a meshing preprocessor for 3D finite element analysis.* Finite Elements in Analysis and Design, 2005, vol. 42, n°1, pp. 25–49.
- [HIV08] **Hivet G., Boisse P.** *Consistent mesoscopic mechanical behaviour model for woven composite reinforcements in biaxial tension.* Composites Part B: Engineering, 2008, vol. 39, n°2, pp. 345–361.
- [HOL00] **Holzappel G.A., Gasser T.C.** *A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models.* Journal of Elasticity, 2000, vol. 61, pp. 1–48.
- [HUG00] **Hughes T.J.R.** *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.* Dover Publications, 2000, 672 p., ISBN 0486411818.
- [IND08] **Indelicato G.** *Mechanical models for 2D fiber networks and textiles.* Thèse de doctorat LEMTA, Torino : Univerità degli studi di Torino, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2008, 134 p.
- [ITS00] **Itskov M.** *On the theory of fourth-order tensors and their applications in computational mechanics .* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, vol. 189, n°2, pp. 419–438.
- [JIA99] **Jiang W.G., Yao M.S., Walton J.M.** *A concise finite element model for simple straight wire rope strand.* International Journal of Mechanical Sciences, 1999, vol. 41, 143–161.
- [KAW73a] **Kawabata S., Niwa M., Kawai H.** *The Finite Deformation Theory of Plain Weave Fabrics Part I: The biaxial deformation theory.* Journal of the Textile Institute., 1973, vol. 64, n°1, pp. 21–46.
- [KAW73b] **Kawabata S., Niwa M., Kawai H.** *The Finite Deformation Theory of Plain Weave Fabrics Part II: The uniaxial deformation theory.* Journal of the Textile Institute., 1973, vol. 64, n°2, pp. 47–61.
- [KAW80] **Kawabata S.** *The standardization and analysis of hand evaluation,* The Textile Machinery Society of Japan, 1980, 97p.
- [KHA10] **Khan M.A., Mabrouki T., Vidal-Sallé E., Boisse P.** *Numerical and experimental analyses of woven composite reinforcement forming using a hypoelastic behaviour. Application to the double dome benchmark.* Journal of Materials Processing Technology, 2010, vol. 210, pp. 378–388.
- [KOI06] **Koissin V., Ivanov D.S., Lomov S.V., Verpoest I.** *Fibre distribution inside yarns of textile composite: geometrical and FE modelling,* in Proceedings of the 8th International Conference on Textile Composites (TexComp-8), Nottingham, 2006, CD edition.
- [KRE09] **Krenk S.** *Non-linear Modeling and Analysis of Solids and Structures.* Cambridge University Press, 2009, 360 p., ISBN: 978-0511601514.
- [LAT11] **Latil P., Orgéas L., Geindreau C., Dumont P.J.J., Rolland du Roscoat S.** *Towards the 3D in situ characterisation of deformation micro-mechanisms within a compressed bundle of fibres.* Composites Science and Technology, 2011, vol. 71, pp. 480–488.
- [LAU08] **Launay J., Hivet G., Duong A. V., Boisse P.** *Experimental analysis of the influence of tensions on in plane shear behaviour of woven composite reinforcements.* Composites Science and Technology, 2008, vol. 68, pp. 506–515.
- [LIV64] **Livesey R.G., Owen J.D.** *Cloth stiffness and hysteresis in bending.* Journal of the Textile Institute, 1964, vol. 55, 516–530.
- [LOI08] **Loix F., Badel P., Orgéas L., Geindreau C., Boisse P.** *Woven fabric permeability: From textile deformation to fluid flow mesoscale simulations.* Composites Science and Technology, 2008, vol. 68, pp. 1624–1630.

- [LOM00] **Lomov S.V., Gusakov, A. V., Huysmans G., Prodromou A., Verpoest I.** *Textile geometry preprocessor for meso-mechanical models of woven composites*. Composites Science and Technology, 2000, vol. 60, n°11, pp. 2083–2095.
- [LOM06] **Lomov S.V., Verpoest I.** *Model of shear of woven fabric and parametric description of shear resistance of glass woven reinforcements*. Composites Science and Technology, 2006, vol. 66, pp. 919–933.
- [LOM08] **Lomov S.V., Boisse P., de Luycker E., Morestin F., Vanclooster K., Vandepitte D., Verpoest I., Willems A.** *Full-field strain measurements in textile deformability studies*. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 2008, vol. 39, n°8, pp. 1232–1244.
- [LOM11] **Lomov S.V., Gorbatikh L., Kotanjac Z., Koissin V., Houle M., Rochez O., Karahan M., Mezzo L., Verpoest I.** *Compressibility of carbon woven fabrics with carbon nanotubes/nanofibres grown on the fibres*. Composites Science and Technology, 2011, vol. 71, pp. 315–325.
- [MAG01] **Magno M., Ganghoffer J.-F.** *Un modèle mésoscopique en grandes perturbations de matériaux textiles – Application à l’armure toile*. Comptes Rendus Académie des Sciences de Paris, 2001, vol. 329, pp. 149–152.
- [MAR63] **Marquardt D.W.** *An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters*. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1963, vol. 11, pp. 431–441.
- [MIL07] **Milani A.S., Nemes J.A., Abeyaratne R.C., Holzapfel G.A.** *A method for the approximation of non-uniform fiber misalignment in textile composites using picture frame test*. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 2007, vol. 38, pp. 1493–1501.
- [MIN65] **Mindlin R.D.** *Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity*. International Journal of Solids and Structures, 1965, vol. 1, n°4, pp. 417–438.
- [NAW00] **Nawrocki A., Labrosse M.** *A finite element model for simple straight wire rope strands*. Computers and Structures, 2000, vol. 77, 345–359.
- [NEW59] **Newmark N.M.** *A method of computation for structural dynamics*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 1959, vol. 85, n°3, 67–94.
- [OGD84] **Ogden R.W.** *Non-Linear Elastic Deformations*, Paris : John Wiley, 1984, 544 p
- [PAR00] **Parnas R.S.** *Liquid composite molding*. Hanser Garner Publications, 2000, 170 p., ISBN 1-56990-287-9.
- [PEN04] **Peng, X., Cao J., Chen J., Xue P., Lussier D., Liu L.** *Experimental and numerical analysis on normalization of picture frame tests for composite materials*. Composites Science and Technology, 2004, vol. 64, pp. 11–2.
- [PEN05] **Peng, X., Cao J.** *A continuum mechanics-based non-orthogonal constitutive model for woven composite fabrics*. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 2005, vol. 36, pp. 859–874.
- [POT99] **Potter K.D.** *History of the resin transfer moulding for aerospace applications*. Composites: Part A, 1999, vol. 30, pp. 757–765.
- [POT06a] **Potluri P., Perez Ciurezu D. A., Ramgulam R. B.** *Measurement of meso-scale shear deformations for modelling textile composites*. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 2006, vol. 37, n°2, pp. 303–314.
- [POT06b] **Potluri P., Parlak I., Ramgulam R., Sagar T.V.** *Analysis of tow deformations in textile preforms subjected to forming forces*. Composites Science and Technology, 2006, vol. 66, pp.297–305.

- [POT08] **Potluri P., Sagar T.V.** *Compaction modelling of textile preforms for composite structures*. Composite Structures, 2008, vol. 86, pp. 177–185.
- [QUA94] **Quanshui Z., Boehler J. P.** *Tensor function representations as applied to formulating constitutive laws for clinotropic materials*. Acta Mechanica Sinica, vol. 10, n°4, pp. 336–348.
- [RUD97] **Rudd C.D., Long, A.C.** *Liquid moulding technologies: Resin transfer moulding, structural reaction injection moulding and related processing techniques*. Woodhead Publishing Limited, 1997, 304 p., ISBN 1–85573–242–4.
- [RIV48] **Rivlin R.S.** *Large elastic deformations of isotropic materials*, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1948, vol. 241, pp. 379–397.
- [SAL05] **Salençon J.** *Mécanique des milieux continus – Tome 1 : Concepts généraux*. Ecole polytechnique (éditions), 2005, 370 p., ISBN 2–7302–1245–0.
- [SCH92] **Schnur D.S., Zabarar N.** *An inverse method for determining elastic material properties and a material interface*. International Journal of Numerical Methods for Engineering, 1992, vol. 33, pp. 2039–2057.
- [SHE07] **Sherburn M.** *Geometric and mechanical modelling of textiles*. Thèse de doctorat, Université de Nottingham, 2007, 271 p.
- [SPE07] **Spencer A.J.M., Soldatos K.P.** *Finite deformations of fibre-reinforced elastic solids with fibre bending stiffness*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2007, vol. 42, pp. 355–368.
- [SRE06] **Sreprateep K., Bohez E.L.J.** *Computer aided modeling of fiber assemblies*. Computer–Aided Design & Applications, 2006, vol. 3, n°1–4, pp. 367–376.
- [TEN07] **Ten Thije R.H.W., Akkerman R., Huétink J.** *Large deformation simulation of anisotropic material using an updated Lagrangian finite element method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, vol. 196, pp. 3141–3150.
- [VAN91] **Van Der Weeën F.** *Algorithms for draping fabrics on doubly–curved surfaces*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991, vol. 31, n°7, pp. 1415–1426.
- [VER05] **Verpoest I., Lomov S.V.** *Virtual textile composites software WiseTex: Integration with micro–mechanical, permeability and structural analysis*. Composites Science and Technology, 2005, vol. 65, n°15–16, pp. 2563–2574.
- [WIL08] **Willems A., Lomov S.V., Verpoest I., Vandepitte D.** *Optical strain fields in shear and tensile testing of textile reinforcements*. Composites Science and Technology, 2008, vol. 68, n°3–4, pp. 807–819.
- [YU05] **Yu W.R., Zampaloni M., Pourboghraat F., Chung K., Kang T.J.** *Analysis of flexible bending behavior of woven preform using non-orthogonal constitutive equation*. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 2005, vol. 36, pp.839–850.
- [YU06] **Yu X., Cartwright B., McGuckin D., Ye L., Mai Y.-W.** *Intra-ply shear locking in finite element analyses of woven fabric forming processes*. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 2006, vol. 37, n°5, pp. 790–803.
- [ZHA90] **Zhang J.M., Rychlewski J.** *Structural tensors for anisotropic solids*, Archives of Mechanics, 1990, vol. 42, pp. 267–277.
- [ZHO04] **Zhou G., Sun X., Wang Y.** *Multi–chain digital element analysis in textile mechanics*. Composites Science and Technology, 2004, vol. 64, pp. 239–244.
- [ZHU07a] **Zhu B., Yu T. X., Tao X. M.** *An experimental study of in–plane large shear deformation of woven fabric composite*. Composites Science and Technology, 2007, vol. 67, n°2, pp. 252–261.

FOLIO ADMINISTRATIFTHESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : CHARMETANT

DATE de SOUTENANCE : 13/12/2011

Prénoms : Adrien Alexandre

TITRE :

Approches hyperélastiques pour la modélisation du comportement mécanique de préformes tissées de composites

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : AAAAISALXXXX

Ecole doctorale :

Mécanique, énergétique, Génie civil, Acoustique

Spécialité :

Mécanique, Génie mécanique, Génie civil

RESUME :

La simulation des procédés de mise en forme des composites à renforts tissés de type RTM est un enjeu majeur pour les industries de pointe mettant en œuvre ce type de matériaux. Au cours de ces procédés, la préforme tissée est souvent soumise à des déformations importantes. La connaissance et la simulation du comportement mécanique de la préforme à l'échelle macroscopique et à l'échelle mésoscopique s'avère souvent nécessaire pour optimiser la phase de conception de pièces composites formées par de tels procédés.

Une analyse du comportement mésoscopique des préformes tissées de composites est d'abord proposée. Une loi de comportement hyperélastique isotrope transverse est développée, permettant de décrire le comportement mécanique de chacun des modes de déformation de la mèche : élongation dans la direction des fibres, compaction et distorsion dans le plan d'isotropie de la mèche, cisaillement le long des fibres. Une méthodologie est proposée pour identifier les paramètres de cette loi de comportement à l'aide d'essais sur la mèche et sur le tissu, et une validation par comparaison avec des essais expérimentaux est présentée.

Une analyse du comportement macroscopique des renforts interlocks est ensuite proposée : une loi de comportement hyperélastique orthotrope est développée et implémentée. Cette loi, extension de la loi de comportement pour la mèche, est également basée sur une description phénoménologique des modes de déformation de la préforme. Une méthode d'identification des paramètres de cette loi de comportement est mise en œuvre, utilisant des essais expérimentaux classiques dans le contexte des renforts tissés (tension uniaxiale, compression, bias extension test, flexion). Cette seconde loi de comportement est validée par comparaison avec des essais d'emboutissage hémisphérique.

MOTS-CLES :

Renforts tissés, composites, mise en forme, propriétés mécaniques, analyse mésoscopique, analyse macroscopique, lois de comportements hyperélastiques, grandes transformations, méthode par éléments finis

Laboratoire (s) de recherche :

Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS)

CNRS UMR 5259

Directeur de thèse:

BOISSE Philippe

Composition du jury :

BOISSE Philippe, BRIEU Mathias, LADEVEZE Pierre, LOMOV Stepan, MADEO Angela, MAIRE Eric, OTIN Stéphane, SIDOROFF François, VIDAL-SALLE Emmanuelle