



**HAL**  
open science

## Quelques exemples de convection hétérogène rencontrés en géophysique.

Guillaume Lavorel

► **To cite this version:**

Guillaume Lavorel. Quelques exemples de convection hétérogène rencontrés en géophysique.. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Aix-Marseille Université; Université de Provence - Aix-Marseille I, 2010. Français. NNT: . tel-00706760

**HAL Id: tel-00706760**

**<https://theses.hal.science/tel-00706760>**

Submitted on 11 Jun 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ**  
**INSTITUT DE RECHERCHE SUR LES PHÉNOMÈNES HORS**  
**ÉQUILIBRE**

**THÈSE**

présentée pour obtenir le grade de  
DOCTEUR D' AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ

*Spécialité : Physique des fluides*

par

**Guillaume LAVOREL**

*Titre :*

**Quelques exemples de convection hétérogène  
rencontrés en géophysique.**

**JURY**

Anne DAVAILLE	F.A.S.T., Paris	Rapporteur
Innocent MUTABAZI	L.O.M.C., Le Havre	Rapporteur
Elisabeth GUAZZELLI	I.U.S.T.I., Marseille	Examinatrice
Laurent LACAZE	I.M.F.T., Toulouse	Examineur
Michael LE BARS	I.R.P.H.E., Marseille	Directeur
Patrice LE GAL	I.R.P.H.E., Marseille	Directeur

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction générale.</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>La convection thermique.</b>	<b>6</b>
1.1	Le phénomène physique. . . . .	6
1.2	La convection de Rayleigh-Bénard. . . . .	6
1.2.1	Mise en équations. . . . .	6
1.2.2	Nombres sans dimension. . . . .	8
1.2.3	Etude locale à haut nombre de Rayleigh. . . . .	10
1.3	La convection dans un fluide en rotation. . . . .	14
1.3.1	Les équations en référentiel tournant. . . . .	14
1.3.2	Modèle de la convection dans une cavité cylindrique tournante. . . . .	14
1.3.3	La convection dans une coquille sphérique. . . . .	20
<b>2</b>	<b>Structure, dynamique et composition de l'intérieur de la Terre.</b>	<b>24</b>
2.1	La Terre. . . . .	24
2.1.1	Sa structure interne. . . . .	24
2.1.2	Formation de la Terre. . . . .	26
2.1.3	Transferts de chaleur. . . . .	26
2.2	Le manteau terrestre. . . . .	27
2.2.1	Sa physique. . . . .	27
2.3	Le noyau externe. . . . .	31
2.3.1	Description. . . . .	31
2.3.2	La géodynamo. . . . .	31
2.4	Le noyau interne : la graine. . . . .	33
<b>3</b>	<b>Techniques expérimentales de visualisation.</b>	<b>36</b>
3.1	Les particules réfléchissantes. . . . .	37
3.2	Les cristaux liquides thermochromiques. . . . .	37

<b>II</b>	<b>Sédimentation de particules dans un fluide convectant.</b>	<b>40</b>
<b>4</b>	<b>Résultats expérimentaux.</b>	<b>42</b>
4.1	Introduction. . . . .	42
4.2	Experimental set up. . . . .	46
4.3	Observations and modeling. . . . .	47
4.4	Conclusions. . . . .	54
<b>5</b>	<b>Applications géophysiques.</b>	<b>57</b>
<b>6</b>	<b>Retour sur l'expérience.</b>	<b>64</b>
6.1	La procédure expérimentale. . . . .	64
6.1.1	La mise en suspension initiale des billes. . . . .	64
6.1.2	La nature des billes. . . . .	65
6.1.3	Le traitement d'images. . . . .	66
6.2	Points communs et différences par rapport au cas géophysique. . . . .	67
6.3	Hypothèses et limitations de l'expérience. . . . .	69
<b>7</b>	<b>Perspectives.</b>	<b>71</b>
<b>III</b>	<b>Forme et longévité de réservoirs denses et peu visqueux au bas du manteau terrestre.</b>	<b>73</b>
<b>8</b>	<b>Convection de Rayleigh-Bénard à deux couches.</b>	<b>75</b>
8.1	Mise en équations. . . . .	75
8.2	Analyse d'échelles dans la limite non diffusive. . . . .	78
<b>9</b>	<b>Etude numérique.</b>	<b>81</b>
9.1	Le taux de cisaillement $E$ . . . . .	81
9.2	le temps d'érosion $t$ . . . . .	81
<b>10</b>	<b>Etude expérimentale.</b>	<b>87</b>
10.1	Dispositif et procédure expérimentale. . . . .	87
10.1.1	Dispositif. . . . .	87
10.1.2	Procédure expérimentale. . . . .	89
10.2	Résultats expérimentaux. . . . .	89
10.2.1	Mesures préliminaires. . . . .	89
10.2.2	Exploitation des expériences. . . . .	89
10.2.3	Longévité des réservoirs. . . . .	90
10.2.4	Forme des réservoirs. . . . .	91
10.3	Conclusions. . . . .	93

<b>IV</b>	<b>Interaction entre les instabilités elliptique et convective.</b>	<b>95</b>
<b>11</b>	<b>L'instabilité elliptique.</b>	<b>97</b>
11.1	Généralités. . . . .	97
11.2	L'instabilité elliptique en géométrie cylindrique. . . . .	99
11.2.1	Dans un cylindre de hauteur finie. . . . .	99
11.2.2	Dans une cavité cylindrique. . . . .	101
11.3	L'instabilité de marées. . . . .	101
<b>12</b>	<b>Etude expérimentale.</b>	<b>105</b>
12.1	Introduction. . . . .	105
12.2	Experimental set-up. . . . .	107
12.3	On the influence of thermal effects on the growth of the elliptical instability. . . . .	110
12.4	On the influence of the elliptical instability on heat transfers. . . . .	114
12.5	Conclusion . . . . .	119
<b>13</b>	<b>Modélisation numérique de la convection dans une cavité cylindrique tournante.</b>	<b>121</b>
13.1	Introduction. . . . .	121
13.1.1	Bilan de l'expérience. . . . .	121
13.1.2	Considérations numériques. . . . .	122
13.1.3	Equations et conditions aux limites utilisées. . . . .	122
13.2	Résultats. . . . .	123
13.2.1	Structures thermiques. . . . .	123
13.2.2	Lois d'échelle d'origine numérique. . . . .	125
<b>14</b>	<b>Autres applications géo- et astrophysiques.</b>	<b>127</b>
<b>V</b>	<b>Solidification d'un alliage binaire en rotation et influence de l'instabilité elliptique.</b>	<b>131</b>
<b>15</b>	<b>Introduction.</b>	<b>133</b>
<b>16</b>	<b>Etude expérimentale.</b>	<b>135</b>
16.1	Méthodologie. . . . .	135
16.1.1	Résultats. . . . .	136
16.1.2	Interprétation. . . . .	139
<b>17</b>	<b>Conclusions.</b>	<b>144</b>

**Première partie**  
**Introduction générale.**

Cette étude traite de la convection thermique présente dans toute sa diversité dans les systèmes géophysiques. Celle-ci est par exemple présente dans les différentes enveloppes internes de la Terre. En effet, le système "Terre" fait intervenir, en plus d'une convection purement thermique, un ou plusieurs ingrédients supplémentaires. Dans le noyau, la solidification de la graine libère des éléments légers et entretient une convection thermo-solutale. Les mouvements de convection prennent alors une forme particulière due à la rotation de la Terre. L'instabilité de marées pourrait également perturber ces mouvements. Dans le manteau, c'est sans doute une convection impliquant des fluides de propriétés différentes qui a lieu. Enfin, lors de la formation de la Terre, des gouttelettes de fer ont sédimenté dans un écoulement convectif formé de matériau moins dense.

C'est donc au sens le plus large qu'il faut prendre le mot "hétérogène" du titre. Dans cette étude, la convection hétérogène désigne la convection thermique à laquelle vient s'ajouter un ou plusieurs ingrédients. Dans cette introduction, nous commençons donc par donner les bases de la convection thermique nécessaires pour la suite, puis nous rappelons quelques propriétés de notre planète. Enfin, nous détaillons les techniques de visualisations expérimentales mises en oeuvre lors de cette étude.

# Chapitre 1

## La convection thermique.

### 1.1 Le phénomène physique.

La convection est une instabilité hydrodynamique qui apparaît lorsqu'une particule fluide devient suffisamment moins dense que le fluide qui l'entoure. La force d'Archimède est alors susceptible de mettre en mouvement le fluide, initialement au repos. Le moyen le plus commode pour faire varier localement la densité du fluide est de modifier sa température, les autres paramètres physiques étant fixés. Cette situation peut se rencontrer dans la vie courante. Mais au delà des rouleaux convectifs apparaissant dans une casserole d'eau posée sur le feu, les phénomènes convectifs sont aussi impliqués dans certaines technologies et dans un grand nombre de systèmes naturels, notamment les systèmes géophysiques<sup>1</sup>.

Étant donné son importance, la convection thermique a fait l'objet d'une première publication de Thomson (1882). Dans le même temps, H. Bénard poursuivait des études qui firent l'objet d'un article en 1900, intitulé *Les tourbillons cellulaires dans une nappe de liquide*. Il y décrit la circulation induite dans une fine couche de fluide chauffée par le dessous, la surface supérieure étant libre. Mais c'est Lord Rayleigh (1916) qui définira l'expérience modèle permettant d'étudier cette instabilité, suite à son travail qu'il place lui-même dans la continuité de celui de Bénard.

### 1.2 La convection de Rayleigh-Bénard.

#### 1.2.1 Mise en équations.

Rayleigh, à la différence du dispositif expérimental de Bénard, fait l'hypothèse que le fluide est contenu entre deux plaques parallèles horizontales et infiniment grandes.

---

1. cf. chapitre suivant.

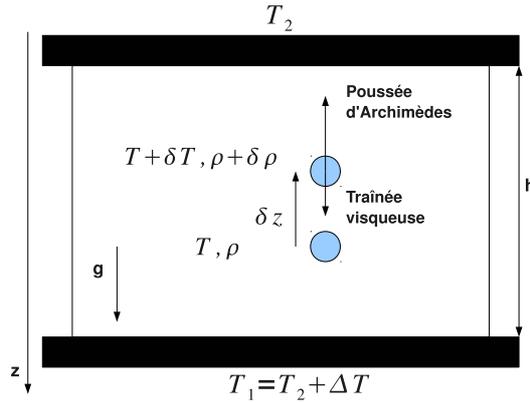


FIGURE 1.1 – Schéma de l'expérience de Rayleigh-Bénard.

Elles sont maintenues à des températures uniformes, la plaque du bas étant plus chaude que celle du haut. A la différence de l'expérience de Bénard, l'instabilité est due à la force d'Archimède et non à des gradients de tension interfaciale dus aux inhomogénéités de température. Rayleigh ouvre alors la voie pour de nombreuses études, qui sont encore d'actualité compte tenu de la multiplicité des comportements possibles. Une cellule de Rayleigh-Bénard typique est présentée sur la figure 1.1. Dorénavant et dans toute la suite, nous utiliserons un fluide homogène, isotrope, incompressible et newtonien.

Pour modéliser cette situation, les trois principes de conservation suivants sont mis en jeu :

- la conservation de la masse :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (1.1)$$

où  $\vec{u} = (u, v, w)$  désigne le vecteur vitesse.

- la conservation de la quantité de mouvement permettant d'obtenir l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \rho g \vec{e}_z + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{u}, \quad (1.2)$$

où  $p$  désigne la pression,  $\vec{e}_z$  un vecteur unitaire vertical orienté vers le bas,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide.  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  est la viscosité cinématique.

- la conservation de l'énergie permettant d'obtenir l'équation de la température :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) T = \kappa \vec{\nabla}^2 T, \quad (1.3)$$

où  $\kappa$  désigne le coefficient de diffusivité thermique du fluide.

Deux hypothèses sont également utilisées pour transformer l'équation de conservation de l'énergie :

- Dans l'équation de conservation de l'énergie, la dissipation visqueuse est négligée.
- Les coefficients thermodynamiques sont supposés constants.

A cela s'ajoute l'approximation de Boussinesq (1903) sur laquelle repose le modèle classique : les variations de masse volumique ne sont retenues que dans le terme de gravité de l'équation de Navier-Stokes. Elles s'expriment grâce à l'équation d'état du fluide :  $\rho(T) = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))$ , où  $\rho$  désigne la masse volumique à la température  $T$  ( $\rho_0$  à une température de référence  $T_0$ ) et  $\alpha$  le coefficient de dilatation thermique isobare du fluide. Si pour rendre les 3 équations de conservation (1.1),(1.2) et (1.3) non dimensionnelles, nous choisissons :

- la hauteur de fluide  $h$  comme échelle de longueur
- le temps typique de diffusion thermique  $\frac{h^2}{\kappa}$  comme échelle de temps
- $\frac{\eta\kappa}{h^2}$  comme échelle de pression
- la différence de température  $\Delta T$  entre le haut et le bas de la cuve comme échelle de température,

alors les équations sans dimension s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (1.4)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) T = \vec{\nabla}^2 T, \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla}^2 \vec{u} + Ra(T - T_0) \vec{e}_z, \quad (1.6)$$

où  $p$  désigne l'écart entre la pression réelle et la pression hydrostatique.

## 1.2.2 Nombres sans dimension.

Les nombres de Prandtl  $Pr$  et de Rayleigh  $Ra$  sont définis par :

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Ra = \frac{\alpha g \Delta T h^3}{\kappa \nu}. \quad (1.7)$$

Le nombre de Prandtl peut se réécrire :

$$Pr = \frac{h^2/\kappa}{h^2/\nu} = \frac{\text{temps caractéristique de diffusion thermique}}{\text{temps caractéristique de diffusion de la quantité de mouvement}}. \quad (1.8)$$

Lorsque  $Pr \ll 1$ , la chaleur diffuse beaucoup plus rapidement que la quantité de mouvement et le mouvement peut se poursuivre par inertie après suppression de la poussée d'Archimède. Dans l'équation (1.6), le deuxième terme du membre de droite correspond au freinage visqueux, et le troisième à la force d'Archimède. Lorsque  $Pr \gg 1$ , le terme inertiel est négligeable et la poussée d'Archimède est équilibrée par le freinage

visqueux. Pour mieux comprendre le phénomène, nous considérons une particule fluide rigide, pour laquelle le terme de pression est nulle, de rayon  $r$ , à la température  $T$  et de densité  $\rho$  perturbée verticalement d'une distance  $\delta z$  dans un gradient de température linéaire et stationnaire (figure 1.1). Cette particule se trouve alors environnée de fluide plus froid et plus dense, de température  $T + \delta T$  et de densité  $\rho + \delta \rho$  telles que

$$\delta T = \frac{T_2 - T_1}{h} \delta z < 0, \delta \rho = -\alpha \rho \delta T > 0. \quad (1.9)$$

La particule subit donc une force de flottabilité dirigée vers le haut et égale à  $F_{flott} = \frac{4}{3}\pi r^3 \delta \rho g$ . Lorsque  $Pr \gg 1$ , l'ascension qui en résulte est freinée par la résistance visqueuse que l'on peut modéliser par une force de traînée de Stokes  $F_s = -6\pi\eta r U$ , où  $U$  est la vitesse de la particule à l'équilibre, lorsque seule la traînée de Stokes s'oppose au poids et à la poussée d'Archimède :  $U = \frac{2\alpha g r^2 \delta T}{9\nu}$ .

Dans le mouvement ascensionnel, deux phénomènes sont en compétition : la diffusion thermique qui tend à homogénéiser la température et donc à stopper le mouvement, et l'advection à la vitesse  $U$  vers du fluide plus froid, qui "régénère" la différence de température et tend à entretenir le mouvement. A la limite de stabilité (on parle de stabilité marginale), ces deux phénomènes sont équilibrés. Cette équilibre se traduit par l'égalité de deux temps caractéristiques : le temps de diffusion thermique  $t_{diff}$  de la différence de température  $\delta T$  égal à  $h^2/\kappa$ , et le temps de régénération  $t_{reg}$  de cette différence égal à  $\delta z/U$ , avec  $\delta z/h = \delta T/(T_1 - T_2)$ .  $t_{reg}$  est minimal lorsque  $U$  est maximal. Le maximum de  $U$  correspond à des particules de taille caractéristique  $r \sim h$  et alors  $U \sim \frac{\alpha g h^2 \delta T}{\nu}$ . Comme  $t_{reg}$  est minimal pour ces échelles de taille, ce sont les particules fluides de tailles caractéristiques  $h$  qui seront déstabilisées en premier. Le nombre de Rayleigh  $Ra$ , qui exprime le rapport entre ces deux échelles de temps ( $t_{diff}/t_{reg}$ ), s'écrit :

$$\frac{h^2/\kappa}{h\delta T/(T_1 - T_2)U} = \frac{\alpha g h^3 (T_1 - T_2)}{\kappa \nu} = Ra. \quad (1.10)$$

Ce nombre sans dimension mesurant le rapport entre effets déstabilisants et stabilisants contrôle l'apparition de l'instabilité. Il existe un nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  au-delà duquel l'instabilité convective croît. Pour  $Ra < Ra_c$ , la diffusion thermique l'emporte sur l'advection et toute perturbation est dissipée ; pour  $Ra > Ra_c$ , le mouvement s'amplifie. Un calcul complet conduit à un Rayleigh critique  $Ra_c = 1708$  pour des limites rigides,  $Ra_c = 657$  pour des limites libres et  $Ra_c = 1100$  pour des limites rigide-libre (Chandrasekhar, 1961).

Pour une différence de température donnée, l'importance du mouvement convectif peut être modélisé par le nombre de Nusselt  $Nu$  :

$$Nu = \frac{\text{flux de chaleur en présence de convection}}{\text{flux de chaleur diffusif sans convection}} \quad (1.11)$$

Dans le cas où la stratification en densité est stable, les échanges thermiques se font uniquement par diffusion. Alors, d'après la définition du nombre de Nusselt, on a  $Nu = 1$  pour  $\Delta T < \Delta T_c$ , où  $\Delta T_c$  désigne la différence de température entre le haut et le bas de la cuve critique à partir de laquelle des mouvements convectifs se mettent en place. En présence de convection,  $Nu > 1$ , le transfert de chaleur est plus efficace.

### 1.2.3 Etude locale à haut nombre de Rayleigh.

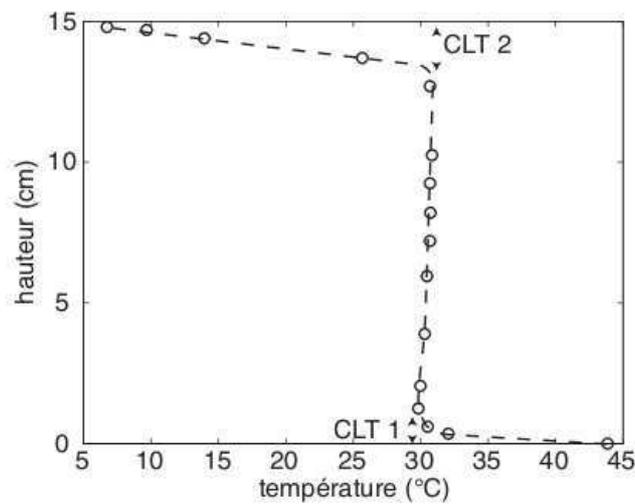


FIGURE 1.2 – Profil vertical typique de température pour une convection à haut nombre de Rayleigh ( $Ra = 2.6 \times 10^8$ ) (Le Bars, 2003).

La figure 1.2 présente le profil vertical typique de température d'une convection à haut nombre de Rayleigh ( $Ra > 10^4 - 10^5$ ) dans une cuve Rayleigh-Bénard. Dans le cœur de l'écoulement, les mouvements convectifs sont rapides : le transfert de chaleur est donc très efficace et la température quasi-homogène. Les variations de température sont concentrées dans de fines couches en contact avec les bords supérieur et inférieur où la convection est inexistante. Ce sont les couches limites thermiques, où le transfert de chaleur se fait par conduction.

Grâce à une étude locale (Howard, 1964), il est possible d'obtenir une loi d'échelle reliant le nombre de Nusselt au nombre de Rayleigh. Soit  $\delta(t)$  l'épaisseur de la couche limite thermique à un instant  $t$ . Elle grandit uniquement par diffusion de la chaleur, de telle sorte que l'équation de la température nous donne la dépendance en temps suivante :

$$\delta(t) = \sqrt{\pi \kappa t}. \quad (1.12)$$

On peut alors définir un nombre de Rayleigh local en utilisant l'épaisseur de la couche

limite comme échelle de longueur :

$$Ra_{local} = \frac{\alpha g \Delta T_{local} \delta^3}{\kappa \nu}, \quad (1.13)$$

où  $\Delta T_{local}$  désigne la différence de température entre les deux interfaces de la couche limite thermique. Celle-ci se déstabilise et se vide lorsque le nombre de Rayleigh local atteint le nombre de Rayleigh critique :

$$Ra_{local} = Ra_c. \quad (1.14)$$

La taille caractéristique de la couche limite thermique s'écrit alors :

$$\delta = h \left( \frac{\Delta T}{\Delta T_{local}} \frac{Ra_c}{Ra} \right)^{1/3}. \quad (1.15)$$

En utilisant la définition du Nusselt donné par l'expression 1.11, il vient :

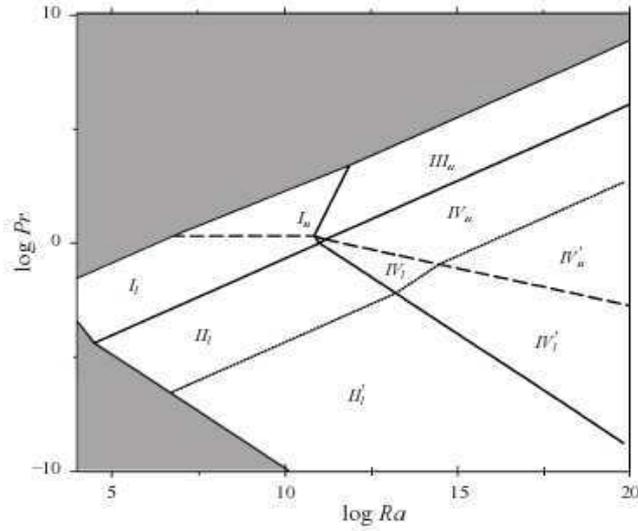
$$Nu = \frac{\Delta T_{local} / \delta}{\Delta T / h} = \left( \frac{\Delta T_{local}}{\Delta T} \right)^{4/3} \left( \frac{Ra}{Ra_c} \right)^{1/3}. \quad (1.16)$$

Or, la conservation du flux thermique implique que le nombre de Nusselt est identique sur les deux couches limites thermiques (CLT1 et CLT2), donc  $Nu_{CLT1} = Nu_{CLT2}$  et  $\Delta T_{local} = \Delta T / 2$ . Le nombre de Nusselt peut se réécrire :

$$Nu = \frac{1}{16^{1/3}} \left( \frac{Ra}{Ra_c} \right)^{1/3}. \quad (1.17)$$

Toutefois, cette étude locale possède ses limites et la loi d'échelle analytique en  $Ra^{1/3}$  peut être caduque dans certains cas. Grossmann & Lohse (2000) ont démontré qu'il était nécessaire d'envisager d'autres scaling selon le couple  $(Ra, Pr)$  de travail. Par l'évaluation des échelles caractéristiques impliquées dans les dissipations visqueuses  $\epsilon_u$  et thermiques  $\epsilon_\theta$  dans les couches limites et dans le "bulk", ils ont décomposé le plan  $(Ra, Pr)$  en plusieurs sous-domaines (figure 1.3). Ceux-ci se distinguent en cherchant quel type de dissipation, visqueuse ou thermique, est prépondérante d'une part dans les couches limites (indice "BL"), et d'autre part dans le "bulk" (indice "bulk"). Une loi d'échelle pour  $Nu$  et  $Re$  est obtenue pour chaque sous-domaine (figure 1.3).  $Re$  désigne le nombre de Reynolds caractérisant les grandes échelles de l'écoulement convectif. Il est défini comme :

$$Re = \frac{\text{temps caractéristique de diffusion de la quantité de mouvement}}{\text{temps caractéristique de la convection}} \sim \frac{L^2/\nu}{L/U} = \frac{UL}{\nu}, \quad (1.18)$$



Regime	Dominance of	BL	$Nu$	$Re$
$I_l$	$\epsilon_{u,BL}, \epsilon_{\theta,BL}$	$\lambda_u < \lambda_\theta$	$0.27Ra^{1/4}Pr^{1/8}$	$0.037Ra^{1/2}Pr^{-3/4}$
$I_u$	$\epsilon_{u,BL}, \epsilon_{\theta,BL}$	$\lambda_u > \lambda_\theta$	$0.33Ra^{1/4}Pr^{-1/12}$	$0.039Ra^{1/2}Pr^{-5/6}$
$II_l$	$\epsilon_{u,mult}, \epsilon_{\theta,BL}$	$\lambda_u < \lambda_\theta$	$0.97Ra^{1/5}Pr^{1/5}$	$0.47Ra^{2/5}Pr^{-3/5}$
$(II_u)$	$\epsilon_{u,mult}, \epsilon_{\theta,BL}$	$\lambda_u > \lambda_\theta$	$(\sim Ra^{1/5})$	$(\sim Ra^{2/5}Pr^{-2/3})$
$III_l$	$\epsilon_{u,BL}, \epsilon_{\theta,mult}$	$\lambda_u < \lambda_\theta$	$6.43 \times 10^{-6}Ra^{2/3}Pr^{1/3}$	$5.24 \times 10^{-4}Ra^{2/3}Pr^{-2/3}$
$III_u$	$\epsilon_{u,BL}, \epsilon_{\theta,mult}$	$\lambda_u > \lambda_\theta$	$3.43 \times 10^{-3}Ra^{3/7}Pr^{-1/7}$	$6.46 \times 10^{-3}Ra^{4/7}Pr^{-6/7}$
$IV_l$	$\epsilon_{u,mult}, \epsilon_{\theta,mult}$	$\lambda_u < \lambda_\theta$	$4.43 \times 10^{-4}Ra^{1/2}Pr^{1/2}$	$0.036Ra^{1/2}Pr^{-1/2}$
$IV_u$	$\epsilon_{u,mult}, \epsilon_{\theta,mult}$	$\lambda_u > \lambda_\theta$	$0.038Ra^{1/3}$	$0.16Ra^{4/9}Pr^{-2/3}$

FIGURE 1.3 – Diagramme des différents régimes de convection dans le plan  $(Ra, Pr)$  et scaling associés.  $\lambda_u$  désigne la taille de la couche limite visqueuse et  $\lambda_\theta$  désigne la taille de la couche limite thermique (Grossmann & Lohse, 2000).

où  $\nu$  est la viscosité cinématique,  $U$  la vitesse moyenne de l'écoulement convectif à grande échelle et  $L$  la taille de la cuve. C'est le processus le plus rapide qui sera dominant et imposera l'organisation du champ de vitesse.

A  $Pr$  fixé, on observe différents régimes suivant la valeur de  $Ra$ . Ces régimes diffèrent par l'intensité et la forme de la convection (Krishnamurti, 1970) : en augmentant progressivement  $Ra$  à partir de la valeur critique, on observe successivement (figure 1.4)

- un régime permanent à deux dimensions sous forme de rouleaux de convection comparable à la profondeur  $h$  du fluide,
- un régime permanent à trois dimensions sous forme de cellules de convection de taille comparable à  $h$ ,
- un régime à trois dimensions dépendant du temps sous forme de panaches thermiques,
- un régime turbulent. Notez que depuis l'étude de Krishnamurti (1970), de nouvelles recherches (Manneville, 2004) ont montré que ce diagramme était un peu plus complexe. Toutefois, cette première version suffit amplement pour définir notre cadre de travail.

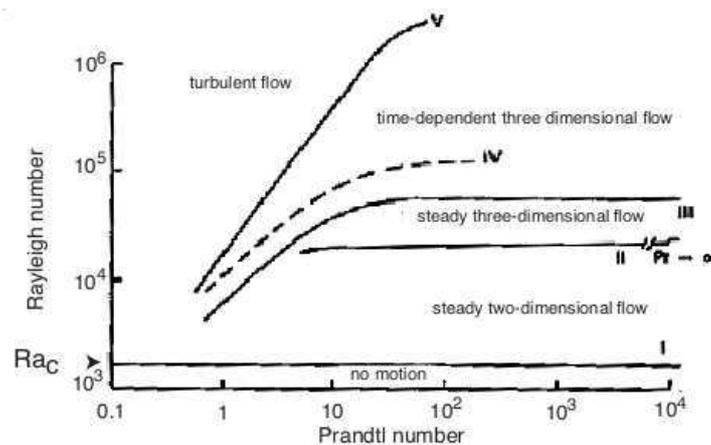


FIGURE 1.4 – Régimes convectifs en convection Rayleigh-Bénard simple en fonction des nombres sans dimension  $Pr$  et  $Ra$  (Krishnamurti, 1970).

Nous allons par la suite nous intéresser à la convection thermique dans les systèmes géophysiques. Pour certains d'entre eux, la rotation peut affecter significativement la forme de la convection. Pour comprendre cela, nous allons maintenant étudier la convection en référentiel tournant.

## 1.3 La convection dans un fluide en rotation.

### 1.3.1 Les équations en référentiel tournant.

Il s'agit ici de décrire le comportement d'un fluide dans un référentiel  $\mathcal{T}$  en rotation autour d'un axe  $\vec{e}_z$ , à une vitesse angulaire constante  $\vec{\Omega}$  par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{G}$ . Pour cela, il suffit de reprendre les équations de Navier-Stokes (1.2) et de la chaleur (1.3) exprimées dans le référentiel galiléen  $\mathcal{G}$  et d'utiliser ensuite les formules de changement de référentiel cinématiques suivantes :

$$\vec{u}_{\mathcal{G}} = \vec{u}_{\mathcal{T}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}, \quad \left( \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{G}} = \left( \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{T}} + 2\vec{\Omega} \wedge (\vec{u})_{\mathcal{T}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r}, \quad (1.19)$$

où  $\vec{r}$  est le vecteur position exprimé dans  $\mathcal{G}$  et  $\frac{d}{dt}$  est la dérivée totale, qui s'exprime :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}. \quad (1.20)$$

L'équation de Navier-Stokes dans le référentiel tournant s'écrit alors :

$$\left( \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{T}} + 2\vec{\Omega} \wedge (\vec{u})_{\mathcal{T}} = -\vec{\nabla} p' + \alpha(T - T_0)\vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 (\vec{u})_{\mathcal{T}}. \quad (1.21)$$

avec  $p' = p/\rho + \Omega^2 |\vec{r}|^2/2$ . Le deuxième terme du membre de gauche représente la force d'inertie de Coriolis tandis que la force d'inertie d'entraînement<sup>2</sup> est incluse dans la pression réduite  $p'$ . Désormais et pour alléger l'écriture, nous omettrons les indices  $\mathcal{T}$  et travaillerons dans le référentiel tournant.

L'équation de la température est quant à elle inchangée :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) T = \kappa \vec{\nabla}^2 T, \quad (1.22)$$

### 1.3.2 Modèle de la convection dans une cavité cylindrique tournante.

Nous étudions maintenant un écoulement dont les mouvements obéissent à l'équation (1.21). Cet écoulement est compris dans un conteneur formé de deux cylindres rigides coaxiaux de hauteur  $h$  tournant autour de leur axe de révolution  $\vec{e}_z$  à la même vitesse angulaire constante  $\Omega$  (figure 1.5). Le cylindre intérieur de rayon  $R_i$  est à la température  $T_i$  ; le cylindre extérieur de rayon  $R_e = R_i + \Delta R$  est à la température  $T_e = T_i + \Delta T$ . Nous supposons que le fluide tourne suffisamment vite pour négliger l'accélération de la pesanteur  $g$  devant l'accélération centrifuge. Nous adoptons un système de coordonnées

---

2. La force centrifuge

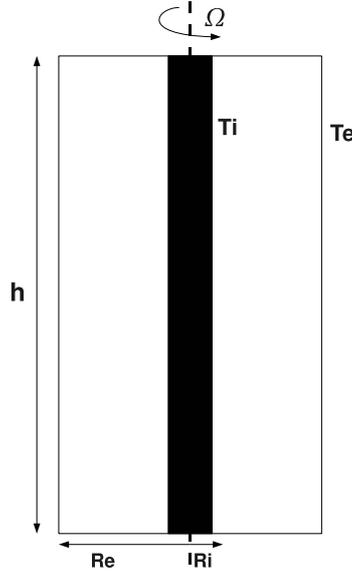


FIGURE 1.5 – Schéma d'une cavité cylindrique tournante.

cylindriques repéré par  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  et un champ de gravité centrifuge s'exprimant par  $\vec{g} = \Omega^2 \vec{r}$ . Nous choisissons des conditions aux limites de non-glissement sur les parois. Nous noterons les composantes de la vitesses  $\vec{u} = (u, v, w)$ . Nous verrons par la suite la pertinence de ce dispositif pour reproduire les mouvements de convection pouvant exister dans les noyaux planétaires.

### Adimensionnalisation.

Pour rendre non dimensionnelles les équations (1.21) et (1.22), nous choisissons les échelles typiques suivantes :

- $\Delta R$  pour l'échelle de longueur,
- $\frac{\Delta R^2}{\kappa}$  pour l'échelle de temps,
- $\Delta T$  pour l'échelle de température,
- $\rho \kappa \Omega$  comme échelle de pression.

Les équations sans dimension<sup>3</sup> s'écrivent alors :

$$\frac{E}{Pr} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + 2\vec{e}_z \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla} P + E \vec{\nabla}^2 \vec{u} - Ra E \Theta r \vec{e}_r, \quad (1.23)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \Theta = \vec{\nabla}^2 \Theta, \quad (1.24)$$

3. La variable  $r$  est également sans dimension.

où  $\Theta = (T - T_i)/\Delta T$ , de sorte que  $\Theta = 0$  sur le cylindre intérieur et  $\Theta = 1$  sur le cylindre extérieur.

Les nombres sans dimension s'expriment par :

- le nombre de Rayleigh  $Ra = \frac{\alpha \Delta T \Omega^2 \Delta R^4}{\kappa \nu}$ ,
- le nombre d'Ekman  $E = \frac{\nu}{\Omega \Delta R^2}$ ,
- le nombre de Prandtl  $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ .

Un nouveau nombre sans dimension est apparu : il s'agit du nombre d'Ekman  $E$ . Il est égal au rapport entre le terme de viscosité  $|\nu \vec{\nabla}^2 \vec{u}|$  et la force de Coriolis  $|\vec{\Omega} \wedge \vec{u}|$ . Lorsque  $E \ll 1$ , les effets visqueux sont négligeables et l'écoulement est dominé par la force de Coriolis en dehors des couches limites.

Il est également possible de choisir un autre jeu d'adimensionnement, d'avantage centré sur la convection :

- $U$  est l'échelle de vitesse moyenne des grands rouleaux de la convection,
- $\Delta R$  est l'échelle de longueur,
- $\frac{\Delta R}{U}$  est une échelle de temps typique,
- $\eta U / \Delta R$  est une échelle de pression.

Alors, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$Re \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + 2 \frac{Re}{Ro} \vec{e}_z \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla} P + \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \frac{Ra}{Re Pr} \Theta r \vec{e}_r, \quad (1.25)$$

où  $Re = \frac{U \Delta R}{\nu}$  désigne le nombre de Reynolds et  $Ro = \frac{U}{\Omega \Delta R}$  est le nombre de Rossby. Il mesure le rapport entre la force d'inertie et la force de Coriolis.

### Résolution.

Nous allons entreprendre la résolution des équations du mouvement (1.23) et de la température (1.24) en utilisant une approche perturbative, à la manière de Busse (1970); Busse & Carrigan (1974) et reprise par Nataf (2010). Le point de départ sont les équations de Navier-Stokes, de la température et de la masse adimensionalisées. Nous supposons que la courbure de la cavité est petite, i.e.  $R_e \gg \Delta R$ , de sorte que nous pouvons définir un repère cartésien local, avec l'axe  $x$  perpendiculaire aux surfaces des cylindres et orienté vers l'extérieur, l'axe  $z$  vertical et orienté vers le haut et l'axe  $y$  tangent aux cylindres et orienté de façon à obtenir un repère cartésien direct. Busse a démontré qu'une solution stable exacte à ces trois équations correspond à un profil conductif  $\Theta_{base} = x$  en température et un champ de vitesse zonal, appelé vent thermique. Regardons quelle est la solution perturbative dans le cas instable.

Pour cela, nous supposons que les forces de viscosité sont négligeables devant la rotation (nombre d'Ekman  $E \ll 1$ ). Pour examiner la réponse du système à une perturbation de l'état stationnaire, nous pouvons donc chercher les solutions sous la forme :

$$\Theta = \Theta_0 + E \Theta_1 + o(E), \quad \vec{u} = \vec{u}_0 + E \vec{u}_1 + o(E), \quad P = P_0 + E P_1 + o(E). \quad (1.26)$$

Ces variables décrivent le comportement à l'intérieur du fluide, sans les couches limites. Pour respecter la condition aux limites  $\vec{u} = 0$ , il faut prendre en compte une correction supplémentaire dans les couches limites dont nous ne nous préoccupons pas ici. A l'ordre 0 en  $E$ , nous obtenons l'équilibre de base, appelé écoulement géostrophique :

$$2\vec{e}_z \wedge \vec{u}_0 = -\vec{\nabla}P_0, \quad (1.27)$$

Les deux autres équations deviennent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0, \quad (1.28)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \Theta_0 = \vec{\nabla}^2 \Theta_0. \quad (1.29)$$

L'équation (1.27) stipule qu'un gradient de pression équilibre la force de Coriolis. Si nous en prenons son rotationnel, il vient :

$$\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial z} = 0. \quad (1.30)$$

Cette équation représente le théorème de Proudman-Taylor. L'écoulement géostrophique correspondant a les trois caractéristiques suivantes :

- Il est la somme d'un écoulement bidimensionnel et d'une translation parallèle à l'axe de rotation, et est indépendant de la coordonnée  $z$ . Si une condition aux limites impose  $w = 0$  en un point de l'écoulement<sup>4</sup>, alors  $w = 0$  sur toute la hauteur du segment de fluide parallèle à l'axe de rotation et passant par ce point.
- L'écoulement est normal au gradient de pression, les lignes de courant suivent donc les isobares.

L'équilibre géostrophique est dégénéré : la connaissance du gradient de pression n'implique pas une détermination univoque du champ de vitesse. En outre, cette équation ne fait pas apparaître le terme de flottabilité, qui représente pourtant le moteur de la convection. Il est donc impératif de poursuivre jusqu'à l'ordre suivant en  $E$  :

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u}_0 + 2\vec{e}_z \wedge \vec{u}_1 = -\nabla P_1 + \vec{\nabla}^2 \vec{u}_0 + Ra \Theta_0 r \vec{e}_r, \quad (1.31)$$

Calculons maintenant le rotationnel de cette équation :

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \omega_0}{\partial t} - 2 \frac{\partial w_1}{\partial z} = \vec{\nabla}^2 \omega_0 - Ra \frac{\partial \Theta_0}{\partial \theta}, \quad (1.32)$$

avec  $\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_0 = (0, 0, \omega_0)$ . Cette équation fait intervenir un grand nombre de quantités de l'écoulement géostrophique qui sont invariantes selon  $z$ . En effectuant leur moyenne

---

4. comme ça sera le cas dans notre dispositif expérimental.

dans la direction de l'axe de rotation, ces quantités ne seront pas affectées. La moyenne du terme non-géostrophique s'écrit :

$$\frac{\Delta R}{2H} \int_{-H/\Delta R}^{H/\Delta R} \frac{\partial w_1}{\partial z} dz = \frac{\Delta R}{2H} [w_1]_{-H/\Delta R}^{H/\Delta R}. \quad (1.33)$$

Cette vitesse verticale  $w_1$  induite dans le coeur de l'écoulement est nécessaire pour respecter la conservation de la matière dans les couches limites horizontales. Il s'agit en réalité du pompage d'Ekman dont nous connaissons l'expression :

$$w(H/\Delta R) = -w(-H/\Delta R) = \frac{1}{2} E^{1/2} \omega_0. \quad (1.34)$$

Cet écoulement brise la géostrophie du fluide à l'ordre  $E^{1/2}$ . Finalement,  $\frac{\Delta R}{2H} [w_1]_{-H/\Delta R}^{H/\Delta R} = -\frac{\Delta R}{2H} E^{-1/2} \omega_0$ . L'équation (1.32) moyennée devient :

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \omega_0}{\partial t} - \frac{\Delta R}{H} E^{-1/2} \omega_0 = \vec{\nabla}^2 \omega_0 - Ra \frac{\partial \Theta_0}{\partial \theta}, \quad (1.35)$$

L'équation de la température est

$$\frac{\partial \Theta_0}{\partial t} - \vec{\nabla}^2 \Theta_0 = -u_0. \quad (1.36)$$

Puisque l'écoulement géostrophique est bidimensionnel à divergence nulle, on peut définir une fonction de courant  $\psi$  tel que  $\vec{u}_0 = (-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x}, 0)$ . On obtient alors :

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \vec{\nabla}^2 \psi}{\partial t} - \frac{\Delta R}{H} E^{-1/2} \vec{\nabla}^2 \psi = \vec{\nabla}^2 \vec{\nabla}^2 \psi - Ra \frac{\partial \Theta_0}{\partial \theta}, \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial \Theta_0}{\partial t} - \vec{\nabla}^2 \Theta_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (1.38)$$

L'opération  $(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla}^2)(1.37) - Ra \frac{\partial}{\partial y}(1.38)$  donne finalement, en s'intéressant à la stabilité marginale :

$$\frac{\Delta R}{H} E^{-1/2} \vec{\nabla}^4 \psi + Ra \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \vec{\nabla}^6 \psi. \quad (1.39)$$

Cette équation admet une solution du type

$$\psi(x, y, t) = e^{\sigma t} \sin n\pi x \sin ay, \quad (1.40)$$

où  $\sigma$  définit le taux de croissance de l'instabilité,  $n$  désigne le nombre d'onde radial et  $a$  le nombre d'onde azimuthal. Cette fonction de courant est de la même forme que celle calculée en présence de convection Rayleigh-Bénard classique (Chandrasekhar, 1961).

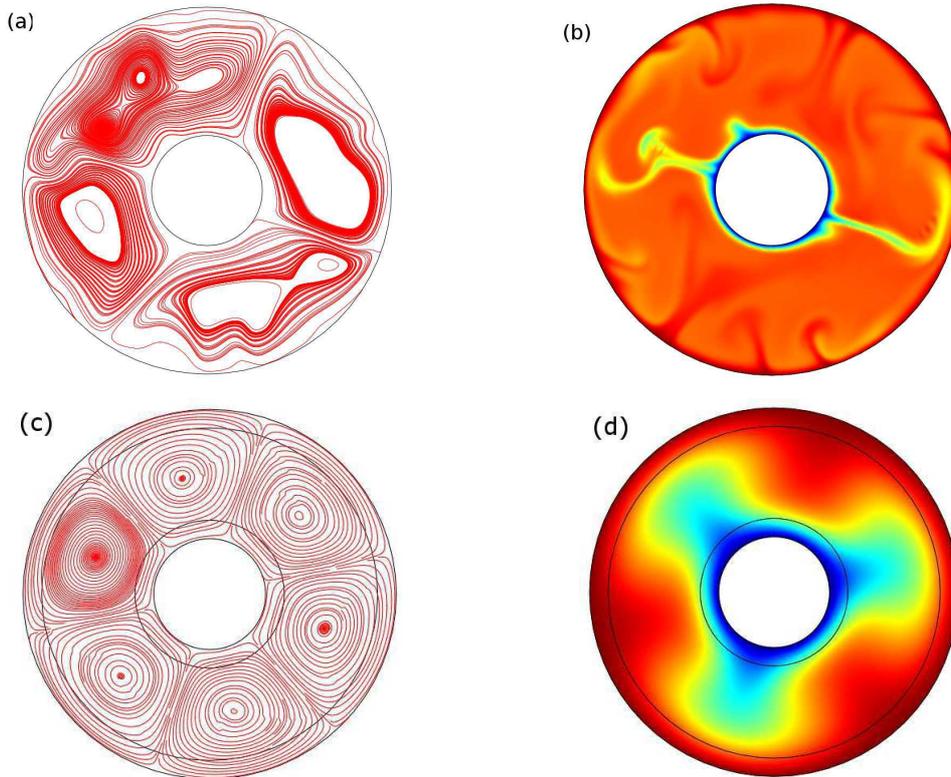


FIGURE 1.6 – Lignes de champ de vitesses convectives en géométrie cylindrique dans un plan horizontal (a, c) et champ de températures associé (b,d) :  $Ra = 1.2 \times 10^7$ ,  $Pr = 7$ ,  $E = 4.7 \times 10^{-6}$ ,  $R_e/R_i = 0.3$  (a, b) ;  $Ra = 1.7 \times 10^5$ ,  $Pr = 7$ ,  $E = 4.7 \times 10^{-5}$ ,  $R_e/R_i = 0.3$  (c, d). Calcul bidimensionnel avec conditions de non-glissement sur les parois et températures sur le cylindre intérieur et extérieur imposées (cf. partie 4, chapitre 13).

La figure 1.6 montre, grâce à une résolution numérique des mêmes équations (cf. chapitre 3) une visualisation dans un plan horizontal des lignes de champ de vitesses et du champ de température associé pour deux nombres de Rayleigh différents. Tout comme la convection de Rayleigh-Bénard habituelle, l'écoulement prend la forme de cellules ou de panaches thermiques dans un plan horizontal, suivant le nombre de Rayleigh. La rotation impose l'invariance selon  $z$ , ces structures prennent la forme de vortex sur toute la hauteur du conteneur comme le montre la figure 1.9. Dans le cas où  $E^{-1/2} \ll H/\Delta R$ , le terme lié à la rotation dans l'équation (1.39) est négligeable et le Rayleigh critique de l'apparition de l'instabilité prend exactement la même valeur numérique que dans le cas Rayleigh-Bénard plan.

En fait, il est possible de comprendre ce critère en raisonnant sur la dissipation visqueuse. Celle-ci peut prendre place dans les couches limites visqueuses en haut et en

bas<sup>5</sup> et dans le coeur de l'écoulement. Si cette dernière est prépondérante, tout se passe comme si on était en présence du cas Rayleigh-Bénard plan et  $Ra_c = 1708$ . *A contrario*, si la dissipation visqueuse dans les couches limites est prépondérante, alors  $Ra_c$  dépendra de  $E$ . La puissance dégagée par la dissipation visqueuse volumique dans le coeur de l'écoulement s'exprime :

$$\iiint_{\text{coeur}} \eta \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} d^3 \vec{r} \sim \eta \frac{U^2}{\Delta R^2} \Delta R^2 H. \quad (1.41)$$

Quant à la dissipation visqueuse dans les couches limites, elle s'écrit :

$$\iiint_{C.L.} \eta \vec{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} d^3 \vec{r} \sim \eta \frac{U^2}{\delta^2} \delta \Delta R^2, \quad (1.42)$$

où  $\delta = \Delta R E^{1/2}$  désigne l'épaisseur des couches limites visqueuses. Lorsque la dissipation visqueuse dans le coeur de l'écoulement est prépondérante, on retrouve bien que  $H/\Delta R \gg E^{-1/2}$ .

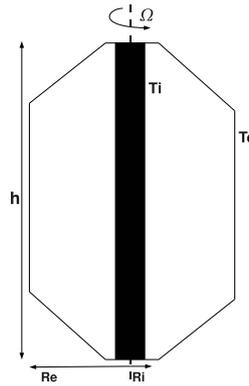


FIGURE 1.7 – Schéma d'une cavité cylindrique tournante aux couvercles inclinés.

### 1.3.3 La convection dans une coquille sphérique.

#### Cavité cylindrique à bords supérieur et inférieur penchés.

Avant de traiter le cas de la sphère, la première étape consiste à s'intéresser au cas de la cavité cylindrique possédant cette fois les bords supérieur et inférieur inclinés (figure 1.7). Nous nous rapprochons progressivement du cas de la sphère. La pente induit

5. Les couches limites latérales sur les cylindres sont des couches limites thermiques identiques au cas Rayleigh-Bénard plan.

une vitesse verticale dans le coeur de l'écoulement. Lorsque  $E$  est suffisamment petit, cette circulation devient supérieure au pompage d'Ekman et l'équilibre géostrophique est brisé. Il est d'autant plus brisé que la pente des parois est forte. De plus, la résolution complète fait apparaître un comportement oscillatoire de la convection. Il s'agit en fait d'une onde appelée onde de Rossby thermique. Tout comme nous l'avons vu précédemment, la convection prend la forme de colonnes (appelées communément colonnes de Busse<sup>6</sup>) parallèles à l'axe de rotation sur lesquelles vient se superposer l'onde de Rossby. L'onde de Rossby thermique se propage dans la direction prograde, plus vite que la rotation solide du fluide. Cette onde est une conséquence de la conservation de la vorticité potentielle le long d'une trajectoire d'une particule fluide en présence de parois inclinées. Elle a pour effet de faire osciller radialement les colonnes de Busse autour de leur position d'équilibre<sup>7</sup>.

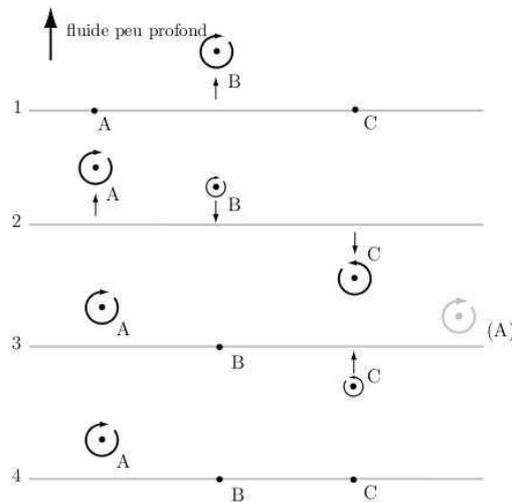


FIGURE 1.8 – Mécanisme de l'onde de Rossby thermique (Aubert, 2001). Le fluide est contenu dans un système en rotation vers la gauche.

Nous étudions la situation de la figure 1.8. Supposons qu'un cylindre de fluide B soit déplacé radialement par une perturbation vers l'extérieur de la cavité, i.e. vers les hauteurs de fluide plus faibles. Du fait de la conservation de la vorticité potentielle, cette colonne va acquérir une vorticité relative négative. Cette vorticité négative va permettre de déplacer A vers l'extérieur et C vers l'intérieur de la cavité. Une vorticité négative va donc se créer en A, et une vorticité positive en C, qui vont ramener B à sa position

6. Les colonnes de Taylor sont la généralisation des colonnes de Busse pour n'importe quel écoulement tournant, pas obligatoirement un écoulement convectif.

7. Souvent dans la littérature, les géophysiciens appellent onde de Rossby thermique les colonnes de Busse soumises à une onde de Rossby thermique, sans faire de distinction entre les deux, bien que leurs origines soient complètement différentes.

initiale. Les conditions aux limites sont périodiques, donc A influe sur C et le ramène à sa position initiale. La perturbation qui était en B est maintenant déplacée en A, et la propagation peut continuer par le même mécanisme.

Les couvercles inclinés permettent la propagation d'une onde de Rossby thermique et brisent l'équilibre géostrophique. Voyons maintenant comment se comporte la convection dans une sphère en rotation.

### **La coquille sphérique.**

Le modèle de la convection dans une sphère en rotation a été traité en particulier par Cardin & Olson (1994) et par Aubert *et al.* (2001). Le détail de l'analyse ne sera pas reporté ici, la lumière sera mise uniquement sur les résultats clefs. Tout d'abord, comme le cylindre aux parois inclinées, la condition de non pénétration du fluide aux parois va induire un écoulement vertical qui brise l'équilibre géostrophique. Plus la pente est forte, plus l'équilibre sera brisé. De plus, la composante parallèle à l'axe de rotation de la force d'Archimède ne sera pas au premier ordre utile aux mouvements convectifs, puisqu'elle induira des mouvements interdits par le théorème de Proudman-Taylor.

Les colonnes de Busse vont se positionner à l'endroit où l'équilibre géostrophique est le moins perturbé et où la force d'Archimède est la plus forte. Les situations de pente forte sur la sphère intérieure et de force d'Archimède ayant une composante parallèle à l'axe de rotation la plus grande se trouvent réunies dans le cylindre tangent à la sphère intérieure. A cet endroit, les mouvements convectifs n'ont pas une intensité significative. C'est pourquoi, dans le dispositif expérimental de la troisième partie, nous avons remplacé le cylindre tangent par un cylindre matériel. En outre, les situations de pente forte se rencontrent également sur la sphère externe, près de l'équateur. Les mouvements convectifs seront faibles à cet endroit. Nous pouvons donc supprimer cette partie de la sphère et la remplacer par des parois verticales. Nous venons de montrer que l'écoulement convectif dans une sphère en rotation pouvait se réduire à l'écoulement convectif dans une cavité cylindrique tournante, de largeur égale aux diamètres des colonnes convectives et possédant des couvercles inclinés, comme le décrit la sous-section précédente. Dans les deux cas, la propagation d'onde de Rossby thermique est possible. Nous verrons au chapitre suivant que ce modèle de convection dans une coquille sphérique est adapté à la description de l'écoulement dans le noyau externe de la Terre.

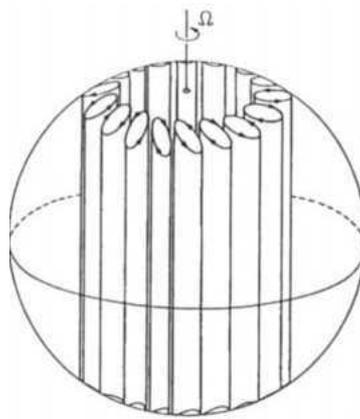


FIGURE 1.9 – Schéma de l'écoulement convectif colonnaire dans une sphère tournante (Busse, 2000). Le fait que les colonnes de convection soient penchées vers la direction prograde est une conséquence de la pente de la frontière sphérique, qui permet la propagation d'ondes de Rossby thermique.

## **Chapitre 2**

# **Structure, dynamique et composition de l'intérieur de la Terre.**

Depuis l'antiquité, notre planète a été le sujet de nombreuses investigations et spéculations. Nous avons aujourd'hui une vision globale assez claire de la formation, de l'évolution et de la structure interne de la Terre. Toutefois, il subsiste des zones d'ombre sur certains points précis. En premier lieu, le rôle de la convection sur la dynamique de la sédimentation de particules n'est pas entièrement connu. Pourtant, ces deux phénomènes peuvent -ou auraient pu- exister simultanément dans certains systèmes présents -ou ayant existés- sur Terre. Nous apporterons des éléments de réponse sur ce sujet dans la deuxième partie. Ensuite, l'effet de marées pourrait avoir une influence, d'une part sur l'écoulement dans le noyau et d'autre part sur la solidification de la graine. Ce sujet sera traité dans les quatrième et cinquième parties. Enfin, la forme et la longévité des réservoirs qui alimenteraient les volcans de type points chauds ne sont pas complètement expliquées. Nous en apporterons quelques éléments de réponse dans la troisième partie de cette thèse. Mais, pour bien comprendre les problématiques, il nous faut tout d'abord rappeler le contexte géophysique de ces études.

### **2.1 La Terre.**

#### **2.1.1 Sa structure interne.**

La connaissance de l'intérieur profond de la Terre requiert l'utilisation de données fournies par la sismologie. Les sismologues ont disposé des sismomètres sur la surface terrestre qui permettent de détecter la propagation des ondes sismiques et les interfaces entre les différentes enveloppes internes, où une partie de l'onde peut être réfléchi. Il est ainsi possible de repérer les différentes strates de l'intérieur terrestre et de connaître le profil de densité (cf. figure 2.1). Le profil radial de densité comporte des sauts abrupts

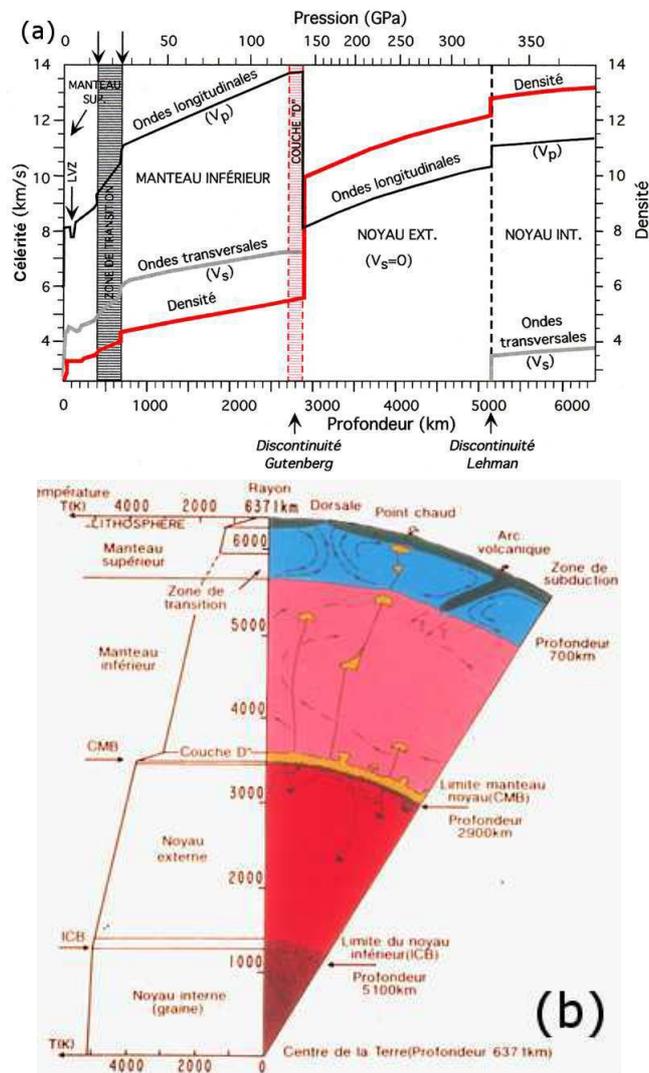


FIGURE 2.1 – (a) Modèle PREM (Preliminary Reference Earth Model (Dziewonski & Anderson, 1981)) ( $V_p$  est la vitesse des ondes de compression longitudinales et  $V_s$  celle des ondes de cisaillement transverses) permettant d'obtenir (b) une coupe verticale de la Terre (image CNRS).

causés par des changements de composition chimique et/ou des changements de phase. Ainsi, aux environs de 2900 km de profondeur, le saut en densité et en vitesse correspond au passage de l'interface entre le manteau et le noyau externe liquide, puisque les ondes S, qui sont des ondes de cisaillement transverses, ne se propagent pas dans les liquides. A environ 5200 km de profondeur, une autre discontinuité traduit le passage entre le noyau externe liquide et le noyau interne solide, appelé également graine. Un schéma de l'intérieur de la Terre est donné sur la figure 2.1.

## 2.1.2 Formation de la Terre.

Grâce à la matière issue du Big-Bang, le système solaire a pu commencer sa formation il y a 4.55 à 4.56 milliards d'années. Après l'apparition du Soleil, les premiers grains microscopiques de matériaux se sont agrégés pour former un disque d'accrétion. Puis, par interaction gravitationnelle, les agrégats de tailles centimétriques ont grossi pour finalement former des planétésimaux de tailles kilométriques. Les plus gros de ces planétésimaux vont devenir des proto-planètes. Les impacts de planétésimaux sur les proto-planètes ont fourni de l'énergie sous forme de chaleur aux proto-planètes. Dans certaines circonstances, une planète suffisamment échauffée entraîne la fusion d'une fraction de sa surface et de l'impactant composé de fer et d'éléments plus légers (du silicate en grande partie). Les gouttelettes de fer ont alors sédimenté sous l'effet de la gravité pour former le noyau. Cet océan de magma, formé de silicate et de gouttelettes de fer en sédimentation s'est refroidi également par convection. Dans la seconde partie de cette thèse, nous verrons dans quelle mesure les mouvements convectifs peuvent perturber la sédimentation de particules lourdes.

En parallèle de cette ségrégation initiale en un noyau central de fer et de nickel entouré d'une coquille de silicate, la croûte terrestre s'est formée par refroidissement de la surface. Environ 1 milliard d'années plus tard (Labrosse *et al.*, 2007), sous l'effet de la pression et du refroidissement progressif de la planète, le centre du noyau a commencé à se solidifier pour former la graine. Cette brève histoire de la Terre est une vision simplifiée, la réalité était sans doute beaucoup plus complexe. Toutefois, elle permet de positionner notre démarche scientifique.

## 2.1.3 Transferts de chaleur.

La température d'équilibre de la Terre (Hubbard, 1984; Carr, 1999), i.e. celle qu'elle aurait si elle était uniquement chauffée par radiation solaire, est inférieure à la température effectivement observée. Cette comparaison suggère que la Terre possède une ou plusieurs sources de chauffage interne. Grâce à des mesures de flux de chaleur effectuées sur tout le globe, les géophysiciens (Jaupart *et al.*, 2007) ont pu estimer la perte de chaleur totale à 40 TW. Dans ce paragraphe, nous discutons les mécanismes de transport mis en oeuvre pour évacuer la chaleur jusqu'à la surface.

Concernant la Terre, les trois mécanismes physiques de transfert de chaleur sont impliqués : conduction, radiation et convection. La radiation étant uniquement importante pour transporter l'énergie entre la surface et l'espace, nous ne la détaillerons pas. La conduction est impliquée dans les parties solides comme la croûte et l'intérieur de la graine. Dans le manteau, qui est solide à temps court mais se comporte comme un fluide à l'échelle des temps géologiques, l'énergie est transportée par convection, processus efficace pour évacuer la chaleur. De même dans le noyau liquide, où la convection prend la forme de colonnes de Busse, comme détaillé précédemment. Dans les couches limites thermiques, le transfert thermique est conductif. Nous verrons dans la quatrième partie que ces couches limites thermiques jouent un rôle primordial dans le contrôle du flux thermique. De plus, dans cette même partie, nous verrons si l'instabilité de marées peut être générée malgré les mouvements convectifs du noyau. Enfin, pour être complet, signalons qu'une partie de la chaleur est également cédée le long des plaques tectoniques lors des épisodes d'activités sismiques ainsi que lors des éruptions volcaniques.

En dernier lieu, il existe un autre type de transfert de chaleur dû à la compressibilité du manteau et du noyau liquide. Cette compressibilité induit le refroidissement adiabatique du fluide remontant vers la surface où la pression est plus faible. Ceci se traduit, dans le manteau comme dans le noyau liquide, par un flux de chaleur adiabatique qui ne participe pas à l'instabilité convective (Tritton, 1988). Il est possible de lui associer un gradient thermique, estimé par Jacobs (1987) à 1000 K entre la graine et la frontière noyau-manteau et à environ 1000 K entre la frontière noyau-manteau et la base de la croûte terrestre.

## 2.2 Le manteau terrestre.

### 2.2.1 Sa physique.

Les études sismiques ont permis, au cours du siècle dernier, de mettre en évidence la frontière noyau-manteau (Oldham, 1906; Geiger & Gutenberg, 1912). Le manteau s'étend donc depuis la base de la croûte terrestre, à quelques dizaines de kilomètres de profondeur, jusqu'au noyau liquide situé à 2900 km de profondeur. Bien qu'il soit constitué principalement de roches solides, l'observation de sa surface suggère qu'il est le siège de mouvements de convection ayant des vitesses typiques de l'ordre du centimètre par an. Le manteau, bien que solide, se comporte comme un fluide à l'échelle des temps géologiques<sup>1</sup>. Il est possible d'estimer sa viscosité dynamique à  $10^{21} Pa.s$  (Peltier & Jarvis, 1982). Le contraste de température entre la base et le haut du manteau est de l'ordre de 3500 K, dont 1000 K correspondent au gradient adiabatique. Les propriétés physiques du manteau peuvent être évaluées grâce aux échantillons qui nous

---

1. Un peu comme les glaciers

parviennent lors des éruptions volcaniques. D'après Poirier (1991), les ordres de grandeur sont  $\rho \sim 4000 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\alpha \sim 3 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$  et  $\kappa \sim 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ . L'ordre de grandeur de la vitesse des mouvements convectif  $U$  est de quelques centimètres par an.

Ces différentes valeurs numériques nous permettent d'estimer les nombres sans dimension caractérisant la convection dans le manteau :

$$Ra \sim 7.4 \times 10^7, \quad (2.1)$$

$$Pr \sim 2.5 \times 10^{23}, \quad (2.2)$$

$$Ro \sim 1.5 \times 10^{-12}, \quad (2.3)$$

$$Re \sim 4 \times 10^{-24}. \quad (2.4)$$

$Re \ll 1$  donc l'inertie est complètement négligeable : sa dynamique est contrôlée par l'équilibre entre les forces visqueuses et la poussée d'Archimède. De plus, la force de Coriolis est négligeable puisque  $Ro \ll 1$  : tout se passe comme si l'écoulement dans le manteau ne voyait pas la rotation de la Terre. La convection mantellique correspond à celle de Rayleigh-Bénard dans le cas très visqueux. Comme  $Ra \gg Ra_c$ , la convection prend la forme de panaches thermiques associés à ces circulations de grandes échelles.

Bien que l'analogie entre la convection mantellique et la convection de Rayleigh-Bénard soit tentante, il s'avère en réalité difficile d'appliquer les lois théoriques simples de la convection de Rayleigh-Bénard à un système terrestre aussi complexe. En premier lieu, les conditions à la limite supérieure du manteau sont différentes suivant que l'on se trouve sous un continent ou sous un océan (Guillou-Frottier *et al.*, 1995). De plus, les mouvements des plaques tectoniques induisent la formation de singularités à la limite supérieure du manteau. Par ailleurs, les propriétés physiques du manteau, notamment la viscosité, changent en fonction de la température et de la profondeur (Karato & Wu, 1993). Enfin, le manteau est découpé en deux zones : le manteau supérieur et le manteau inférieur. A l'interface entre ces deux parties, située à 660 km de profondeur, les minéraux des roches se réorganisent (Ito, 1989) pour engendrer une nouvelle phase solide.

De plus, l'activité volcanique sur notre planète n'est pas uniquement concentrée au niveau des plaques. Il existe en effet des volcans dits de "points chauds" (Wilson *et al.*, 1963) qui surgissent très généralement à l'intérieur des plaques et non à leurs frontières. Ces points chauds sont interprétés comme la trace en surface de panaches convectifs provenant des profondeurs du manteau (Morgan, 1972). Ceux-ci sont restés longtemps indétectables par la tomographie mais des recherches récentes (Montelli *et al.*, 2004) ont proposé les premières images de panaches sous plusieurs points chauds. Ces panaches proviennent sans doute en partie de la base du manteau, d'une couche en contact avec le noyau nommée D". Elle impose un certain nombre de paramètres thermiques influant sur la dynamique du manteau. Nous avons aujourd'hui une meilleure image de cette zone frontière, qui apparaît être très hétérogène. En effet, à certains endroits, les ondes

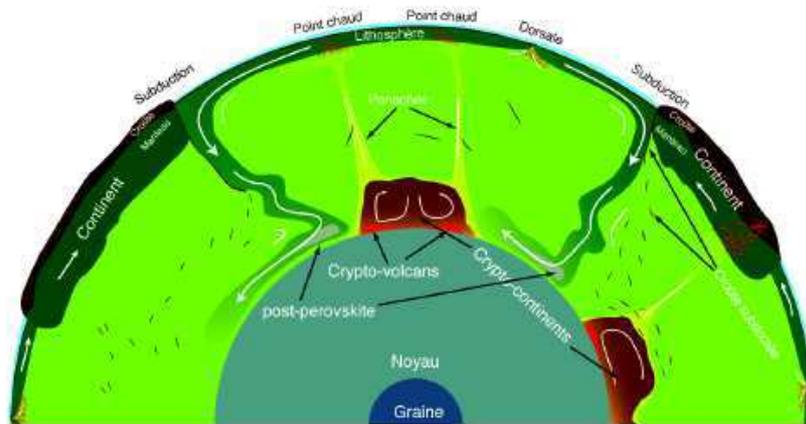


FIGURE 2.2 – Représentation schématique de l’intérieur du manteau terrestre, avec les différents structures le composant (image : page web Labrosse (2010)).

sismiques rencontrent deux discontinuités successives, tandis qu’à d’autres, aucune discontinuité n’est observée. Ces zones continues seraient la signature de panaches chauds de roches mantelliques provenant des profondeurs. En arrivant à la surface, ils percent les plaques qui se déplacent au-dessus, créant ainsi des chapelets de volcans dont seul le plus récent est actif : l’exemple typique est l’alignement d’îles volcaniques se terminant, actuellement, à Hawaï.

Par ailleurs, certaines zones situées à 2850 km de profondeur exhibent des variations de vitesse qui, sans être aussi brusques que des discontinuités, n’en sont pas moins riches d’informations. Ainsi, deux zones de vitesses lentes, situées sous l’océan pacifique et sous le continent africain, ont été détectées. Elles sont entourées de zones de vitesses rapides. Comme les vitesses sismiques augmentent lorsque la température diminue, ces mesures semblent indiquer deux zones chaudes entourées de zones froides. L’arrivée de plaques froides en subduction en provenance du pourtour du Pacifique expliquerait l’existence de ces zones froides. Les zones centrales de vitesses lentes s’avèrent être un peu plus complexes : elles seraient effectivement plus chaudes, mais aussi plus denses d’environ 3 % que les alentours. Pourtant, la dilatation thermique provoquée par la hausse de la température devrait diminuer la densité. On explique cette singularité par un changement de composition chimique : à l’intérieur de ces zones, les roches mantelliques contiendraient soit plus de fer, soit des proportions différentes d’autres minéraux. Stacey (1991) a proposé pour ces zones plus chaudes et plus denses le nom de crypto-continentes. L’épaisseur de ces structures peut atteindre 1500 km. Les panaches chauds naissent à la marge de ces crypto-continentes, qui, du fait de leur température élevée et de leur stabilité gravitationnelle, sont des régions d’ancrage privilégiées (figure 2.2).

Les sismologues ont également détecté d’autres structures à la base du manteau,

caractérisées par des vitesses sismiques très faibles (et donc appelées Ultra low Velocity Zone, ou ULVZ), entre 10 et 30 % inférieures à la moyenne. Ces structures ont une épaisseur comprise entre 5 et 10 km et une extension horizontale d'environ 100 km. Même si elles sont ralenties, les ondes de cisaillement, qui ne peuvent pas pénétrer dans les liquides, se propagent dans les ULVZ : ces zones sont donc principalement solides. Toutefois, elles ne le sont pas entièrement : ces zones seraient constituées d'une matrice solide percées de pores remplis de magma (dont la proportion atteindrait 10 %), comme une éponge gorgée d'eau. Ces zones semblent majoritairement localisées sur les bords des crypto-continents (figure 2.2). Elles auraient également une densité environ 10 % supérieure à la densité moyenne du manteau à la même profondeur.

D'autre part, les crypto-continents sont le siège de mouvements de convection de type Rayleigh-Bénard. Les rouleaux de convection entraineraient, par frottements visqueux, les réservoirs ULVZ en panaches ascendants qui alimenteraient les volcans de type points chauds.

La morphologie, la position et les caractéristiques physiques de ces réservoirs demeurent encore aujourd'hui largement méconnues. Leur origine est également sujette à polémique. Plusieurs hypothèses existent, leur formation pourrait être due :

- à la présence en profondeur d'un changement de phase (Yeganeh-Haeri *et al.*, 1989; Nataf & Houard, 1993),
- à la remontée de matériel lourd provenant du noyau (Hansen & Yuen, 1988; Knittle & Jeanloz, 1991), puisqu'il n'est pas encore en équilibre avec le manteau (Stevenson, 1981),
- au stockage et au recyclage au-dessus de la limite noyau-manteau des matériaux océaniques subductés (Gurnis & Davies, 1986; Christensen & Hofmann, 1994; Albarède, 1998; Coltice & Ricard, 1999),
- à l'accumulation à la base du manteau de fer et d'éléments sidérophiles lors de la différenciation de la Terre (Solomatov & Stevenson, 1993; Sidorin & Gurnis, 1998),
- à l'extraction de la croûte continentale uniquement à partir d'une couche supérieure du manteau (DePaolo & Wasserburg, 1976; Allègre *et al.*, 1979),
- à la combinaison de plusieurs de ces facteurs.

Cette description du volcanisme de points chauds est très controversée parmi les géologues et géophysiciens. En particulier, ces réservoirs denses et peu visqueux persistent sans être mélangés depuis la création du manteau. L'objet de notre étude, développée dans la troisième partie de ce document, est d'expliquer la forme et la longévité de ces réservoirs en combinant des expériences modèles de laboratoire et des simulations numériques simplifiées.

## **2.3 Le noyau externe.**

### **2.3.1 Description.**

L'état liquide du noyau externe fut d'abord l'objet de conjectures basées sur les marées terrestres (Jeffreys, 1926). Puis l'étude des ondes sismiques a permis de conclure qu'il était à l'état liquide, et de mettre en évidence la frontière noyau externe-graine (Lehmann, 1936). Le noyau liquide s'étend donc depuis la base du manteau située à 2900 km de profondeur jusqu'à la graine située à 5100 km de profondeur.

L'étude de la composition chimique des météorites, ainsi que les modèles selon lesquels la proto-Terre était, avant sa différenciation en plusieurs couches superposées, de composition similaire, ont permis de faire l'hypothèse que le noyau est constitué essentiellement de fer. A l'heure actuelle, les géochimistes (Poirier, 1994) ont conclu que le noyau liquide est constitué à 80-90 % de fer pur, et contient également les éléments suivants : silicium, oxygène, soufre et nickel.

### **2.3.2 La géodynamo.**

Le champ magnétique terrestre est d'origine interne. Les sources magnétiques présentent dans la croûte et le manteau étant trop faibles, l'origine du champ magnétique se trouve dans le noyau. S'il n'était pas entretenu par une source interne, il se serait éteint au bout du temps typique nécessaire à sa diffusion, estimé à 40000 ans (Gubbins & Roberts, 1987). Parmi toutes les possibilités évoquées au fil des siècles, l'hypothèse de la géodynamo est maintenant acceptée. Il s'agit du mécanisme grâce auquel les mouvements du fluide conducteur du noyau externe amplifient et entretiennent un champ magnétique. L'effet dynamo convertit l'énergie cinétique du fluide en énergie magnétique.

#### **Sources de chaleur.**

Il est donc nécessaire de trouver une source d'énergie cinétique dans le noyau. L'hypothèse aujourd'hui la plus robuste pour expliquer la géodynamo est la convection dans le noyau liquide, dont la solidification de la graine est partiellement responsable. Le noyau liquide possède différentes sources de chaleur nécessaire à l'entretien de la convection : en plus du refroidissement séculaire (lié à l'évacuation de la chaleur accumulée lors de la formation de la Terre) qui s'applique à l'ensemble de la planète, il en possède d'autres (Verhoogen, 1980) :

- en évacuant de la chaleur, le noyau se refroidit et la graine croît. La cristallisation libère de la chaleur latente de fusion qui réchauffe le fluide proche de la graine.
- la cristallisation de la graine entraîne une modification de la distribution de masse radiale. Le fer liquide se solidifie pour former la graine et les éléments légers

sont en grande partie rejetés dans le liquide. Du liquide est donc remplacé par un solide plus dense, ce qui diminue l'énergie potentielle de gravité. Par conservation de l'énergie, l'énergie thermique doit augmenter. En outre, le fluide proche de la graine est moins dense et subit la poussée d'Archimède, de la même façon que pour la convection thermique. On parle de convection compositionnelle<sup>2</sup>. Le débat existe pour déterminer, qui de la convection thermique ou de la convection compositionnelle, prédomine sur l'autre, ou si elles sont impliquées à proportion égale (Fearn & Loper, 1981).

### **Structure de l'écoulement convectif.**

Il s'agit de l'écoulement dans une coquille sphérique en rotation rapide, déjà longuement discuté précédemment. Dans le noyau liquide, le fluide est conducteur et une force magnétique existe. Nous ne l'avons pas pris en compte dans notre analyse car la force de Coriolis domine toutes les autres forces dans le noyau. La contrainte de Proudman-Taylor impose une invariance de l'écoulement selon la direction de l'axe de rotation. Au seuil, les vortex convectifs prennent la forme de colonnes parallèles à l'axe de rotation de taille caractéristique variant en  $E^{-1/3}$  (Cardin & Olson, 1994) (cf. figure 1.9), appelées colonnes de Busse. Ces colonnes sont comprises dans un anneau aux couvercles inclinés, délimité par le cylindre tangent à la graine à l'intérieur et dont la frontière externe est contrainte au diamètre des colonnes. Il a été montré (Glatzmaier & Olson, 1993) que cette structure est robuste et subsiste jusqu'à grand forçage thermique. En plus de l'onde de Rossby thermique, la pente de la frontière sphérique externe implique que les colonnes de convection soient penchées dans la direction prograde (Carrigan & Busse, 1983; Zhang & Gubbins, 1992; Cardin & Olson, 1994). Nous allons remettre en cause ce modèle standard en ajoutant un ingrédient supplémentaire jusqu'à présent négligé : l'effet de marées, responsable de la déformation ellipsoïdale de la Terre. Ces effets de marée, s'ils sont suffisamment forts, sont responsables de l'apparition d'une instabilité hydrodynamique, l'instabilité elliptique (Kerswell (2002), cf. partie III). Cette instabilité est susceptible de croître dans les écoulements aux lignes de courant déformées elliptiquement. Lorsque les lignes de courant sont déformées par l'effet de marées, comme par exemple dans les noyaux planétaires, on la nomme aussi "instabilité de marées". Nous verrons plus en détail le mécanisme de cette instabilité dans la troisième partie et verrons si ces structures colonnaires persistent en sa présence.

### **D'autres hypothèses...**

Plusieurs autres possibilités existent pour trouver cette source d'énergie cinétique nécessaire à l'entretien d'une dynamo. La précession de la Terre en est une (Noir,

---

2. On parle aussi de convection solutale, et de convection thermo-solutale pour englober les deux types de convection.

2000). L'énergie fournie par le forçage précessionnel est *a priori* suffisante pour entretenir une dynamo (Malkus, 1994). Cette condition est nécessaire mais pas suffisante, des contraintes sur la forme de l'écoulement induit par le forçage existent pour qu'il puisse entretenir une géodynamo. De plus, Noir (2000) a montré que le nombre de Reynolds magnétique<sup>3</sup> du noyau terrestre est trop faible pour que la précession puisse jouer un rôle dans la géodynamo. Un autre candidat sérieux est l'effet de marées. Bien que l'instabilité de marées génère un écoulement satisfaisant tous les critères nécessaires à l'entretien d'une dynamo, elle ne semble pas aujourd'hui contribuer à la génération du champ magnétique terrestre (Fearn, 1998). En revanche, elle pourrait être impliquée dans la génération de dynamos non terrestres ainsi que durant les premiers temps de l'histoire de la Terre, où un champ magnétique existait malgré l'absence de graine solide et donc de convection solutale.

## 2.4 Le noyau interne : la graine.

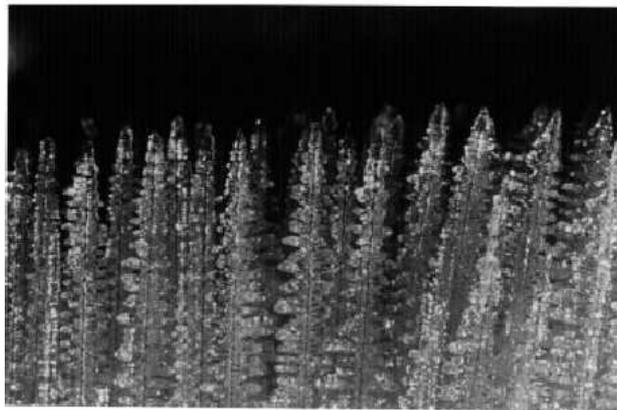


FIGURE 2.3 – Photographie d'une zone dendritique se formant à partir d'une solution de chlorure d'ammonium. L'intervalle typique entre deux dendrites est de 0.5 mm et la profondeur de la zone dendritique (ou "mushy layer") est de l'ordre de quelques centimètres (Worster, 1997).

La Terre se refroidissant, la graine cristallise lentement depuis le noyau liquide. Il est possible que cette cristallisation soit responsable de sa structure et de sa dynamique. Sa première caractéristique étonnante est l'anisotropie de ses propriétés élastiques. Cette anisotropie coïncide avec l'axe de rotation de la Terre. Cette propriété implique que les ondes sismiques ne se propagent pas à la même vitesse dans un plan nord-sud que dans

---

3. Ce nombre sans dimension quantifie le rapport entre l'advection du champ magnétique par l'écoulement et sa diffusion liée au fait que le noyau n'est pas un conducteur parfait.

un plan équatorial (Poupinet *et al.*, 1983). Il est également possible que la graine soit en super-rotation (Souriau, 2007) de l'ordre de 0 – 0.3 degré par an dans les études les plus récentes et jusqu'à 3 degrés par an pour les plus anciennes (Su *et al.*, 1996). Tout comme le noyau liquide, la graine est constituée essentiellement de fer. De plus, la différence de densité entre la graine et le noyau ne peut pas être expliquée uniquement par la différence de phases. La teneur en éléments légers est plus petite dans le noyau (Birch, 1952, 1964) que dans la graine où elle est estimée entre 2 et 5 % (Jephcoat & Olson, 1987; Stixrude *et al.*, 1997; Fiquet *et al.*, 2001).

La question de l'origine de l'anisotropie n'est pas encore tranchée et des dizaines de mécanismes ont été proposés. Nous nous attarderons dans ce manuscrit sur l'influence de la rotation sur la solidification d'un alliage binaire. Comme l'axe de rotation et l'axe d'anisotropie coïncident, et que de plus la contrainte de Proudman-Taylor impose une invariance selon l'axe de rotation, il est naturel de chercher un mécanisme exploitant cette constatation. Dans ce type de solidification fortement influencée par la rotation, le transfert de chaleur et d'éléments légers est privilégié dans les directions parallèles au plan équatorial. Yoshida *et al.* (1996) ont proposé que ce flux de chaleur anisotrope entraîne un taux de cristallisation de la graine plus important au niveau de l'équateur qu'au niveau des pôles (Bergman *et al.*, 2005; Glatzmaier & Roberts, 1998; Aubert *et al.*, 2008). Cette croissance préférentielle induirait une recirculation dans le noyau liquide et par conséquent un champ de contrainte susceptible d'influer la direction de cristallisation.

Par ailleurs, une analyse de stabilité du front de solidification de la graine (Deguen, 2009) suggère qu'il est instable au sens de l'instabilité morphologique. Celle-ci a tendance à amplifier une déformation apparaissant sur le front de solidification, pour former une zone biphasique, appelée zone dendritiques (cf. figure 2.3). Bergman (1997) a montré expérimentalement que ces dendrites, en surface, s'alignent préférentiellement dans la direction du flux thermique. Cette structure serait conservée en volume au fur et à mesure de la croissance de la graine. Beaucoup d'autres études ont été menées sur ce sujet, mais aucune n'a porté sur l'influence des effets de marée. Pour combler ce manque, nous avons commencé cette étude, les premiers résultats sont présentés dans la quatrième partie de cette thèse.

D'autre part, la convection induite par le relargage d'éléments légers lors de la cristallisation, prend la forme de fins panaches orientés vers le liquide et localisés dans des conduits dépourvus de solide, les cheminées (cf. figure 2.4). L'écoulement de recirculation résultant se fait en volume dans la zone dendritique. En l'absence de rotation, ces cheminées prennent la forme de fins conduits, mais cette morphologie est-elle conservée dans le cas d'une forte rotation obligeant le respect de la contrainte de Proudman-Taylor ? Comment évoluent-elles en présence d'instabilité elliptique ? Nous répondrons à ces questions dans la quatrième partie de cette thèse.



FIGURE 2.4 – Développement des cheminées en zone dendritique dans une cellule de Hele-Shaw, vue en coupe (Deguen, 2009).

## Chapitre 3

# Techniques expérimentales de visualisation.

Ces travaux de thèse ont nécessité l'utilisation de différentes techniques afin de visualiser la dynamique de l'écoulement. Des paillettes réfléchissantes<sup>1</sup> ont été utilisées pour mettre en évidence les zones de cisaillement de l'écoulement. D'autre part, une technique de mise en oeuvre des cristaux liquides thermochromiques a été développée afin de visualiser les isothermes dans un écoulement. Nous en présentons le principe dans ce chapitre.



FIGURE 3.1 – Photographie sous microscope ( $100\ \mu\text{m} \times 100\ \mu\text{m}$ ) d'une solution concentrée de Kalliroscope, possédant une large distribution de tailles (Gauthier *et al.*, 1998).

---

1. de marque Kalliroscope

### 3.1 Les particules réfléchissantes.

Il s'agit en réalité de petites plaques planes faites en guanine, de taille moyenne  $30 \times 6 \times 0.07 \mu m$ , mais avec une grande dispersion (cf. figure 3.1) et de densité  $1.66 g.cm^{-3}$ . Nous avons utilisé des fluides de densité proche de l'unité, mais étant donné la petite taille des paillettes, leur vitesse de sédimentation est très faible, de l'ordre de  $10^{-6} m.s^{-1}$ , ce qui permet de négliger la sédimentation sur la durée d'une expérience (au maximum quelques heures).

Leur utilisation est facilitée par le fait qu'il s'agisse d'une méthode directe de visualisation, et qu'elle présente l'avantage de donner des images très contrastées. Ces particules, du fait de leur géométrie particulière, sont orientées par l'écoulement et peuvent réfléchir de la lumière incidente différemment suivant leur place dans l'écoulement et ainsi révéler sa structure. La plupart des auteurs qui utilisent cette technique mentionnent uniquement qu'elles s'orientent suivant les surfaces de courant ou selon les zones de cisaillement de l'écoulement. Cependant, le fonctionnement exact de ces particules n'est en fait pas très bien défini. Cette méconnaissance peut être un frein à la compréhension de la dynamique de l'écoulement. Dans cette optique, Gauthier *et al.* (1998) ont mené une étude poussée qui compare la visualisation obtenue numériquement d'un ellipsoïde plongé dans un écoulement connu aux visualisations expérimentales obtenues grâce aux particules réfléchissantes. Ils confirment notamment que cette technique est purement qualitative, la lumière réfléchie par les particules ne permet pas de reconstruire le champ de vitesse de l'écoulement. Ils remarquent aussi que le temps de mise à l'équilibre d'une particule est d'autant plus petit que le rapport d'aspect du conteneur est grand. Il s'agit d'un paramètre pouvant être important lors de la visualisation de phénomènes transitoires. En revanche, il semblerait que l'intensité de la lumière réfléchie pourrait donner des informations sur le champ de vitesses de l'écoulement, notamment dans le cas d'un écoulement de Taylor-Couette, comme le suggère une récente étude (Abcha *et al.*, 2008).

### 3.2 Les cristaux liquides thermochromiques.

Alors que les particules réfléchissantes sont orientées en fonction de la dynamique de l'écoulement, ces cristaux liquides modifient certaines de leurs propriétés en fonction de la température. Ils permettent alors de suivre une isotherme dans un écoulement. Ces cristaux liquides, lorsqu'ils sont dans leur phase cholestérique, c'est-à-dire ni à l'état solide, ni à l'état liquide, possèdent des molécules réparties en couches liquides bidimensionnelles. A l'intérieur d'une couche, les molécules restent parallèles à une direction donnée mais peuvent se déplacer dans les deux directions du plan. La température est un paramètre essentiel puisqu'elle conditionne la nature même de la phase : cristalline, cholestérique ou purement liquide.

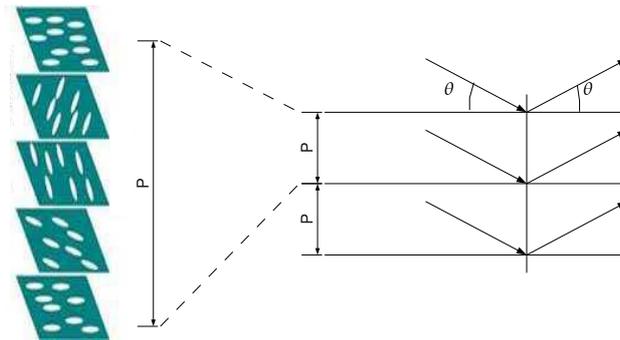


FIGURE 3.2 – Structure d’un cristal cholestérique et diffraction de Bragg associée.  $P$  est le pas de l’hélice.

En outre, la température peut changer les propriétés optiques des cholestériques. En effet, puisqu’on retrouve les molécules orientées dans les mêmes directions dans des plans périodiquement répartis (de période le pas  $P$  de l’hélice), il est possible d’obtenir de la diffraction de Bragg dans le domaine des longueurs d’onde optique (cf. figure 3.2). La lumière diffusée dans les directions vérifiant  $2P \sin \theta = k\lambda$  (avec  $k$  entier) donnera une interférence constructive et donc un maximum de lumière pour la longueur d’onde considérée  $\lambda$ . Comme le pas  $P$  dépend fortement de la température, en éclairant en lumière blanche, on pourra observer une couleur caractéristique de la température correspondante à une interférence de Bragg constructive. La couleur observée dépend de l’angle de la direction d’observation. Ainsi, en thermométrie<sup>2</sup>, on peut observer des couleurs différentes correspondant à des points de températures différentes. Des cristaux



FIGURE 3.3 – Photographie d’un isotherme, qui apparaît comme une ligne plus lumineuse.

thermochromiques qui “réagissent” à la lumière à une température donnée et parfaite-

2. certains thermomètres médicaux fonctionnent sur ce principe, leur précision est donnée au  $1/100^{\circ}\text{C}$

ment étalonnée ont été mis au point. Ainsi, les cristaux, une fois mélangés au fluide, sont orientés aléatoirement. Lorsqu'ils sont à leur température d'étalonnage, une partie d'entre eux renvoie de la lumière (leur orientation est telle que la condition de Bragg est vérifiée) tandis que les autres paraissent transparents (ils sont à la "bonne" température mais leur orientation ne permet pas une interférence de Bragg constructive). Il est ainsi possible de suivre précisément l'évolution d'un isotherme au cours du temps. Nous avons utilisé des cristaux liquides de marques LCR Hallcrest. Devant la difficulté d'obtention d'images d'isothermes de qualité, nous avons mis au point une procédure expérimentale de préparation :

1. Conserver les cristaux au frais et à l'abri de la lumière,
2. Agiter la boîte avant utilisation pour bien homogénéiser le mélange (Les cristaux ne sont pas purs, ils sont mélangés à un liquide.).
3. Peser 0.04% de la masse totale du volume de fluide étudié,
4. Diluer dans de l'eau, de préférence distillée, à l'aide d'un agitateur magnétique pendant au moins 24 heures.
5. Filtrer pour enlever les plus gros agglomérats.
6. Enfin, il est important d'avoir une caméra suffisamment sensible pour distinguer les isothermes.

Cette technique de préparation est aboutie et permet d'obtenir des images suffisamment contrastées. Leur fonctionnement s'étant avéré trop délicat et par manque de temps, nous avons pu nous en passer pour estimer la température dans nos expériences, où des mesures classiques à l'aide de thermocouples se sont avérées suffisantes.

## **Deuxième partie**

# **Sédimentation de particules dans un fluide convectant.**

Cette partie, qui reprend pour son premier chapitre un article publié au journal *Physical Review E* (Lavorel & Le Bars, 2009) sous le titre “Sedimentation of particles in a vigorously convecting fluid”, a pour objet l’étude expérimentale de la sédimentation de particules solides, plongées dans un fluide moins dense et soumis à des mouvements de convection thermique, de type Rayleigh-Bénard. Puisque l’écoulement résultant est constitué d’une phase solide et d’une phase liquide, nous pouvons parler de convection hétérogène.

Après un rappel du contexte géophysique de cette étude, nous détaillerons les résultats obtenus, puis le dispositif et la procédure expérimentale en mettant l’accent sur les difficultés rencontrées. Enfin, quelques applications géophysiques supplémentaires seront exposées et des perspectives possibles à ce travail seront données.

# Chapitre 4

## Résultats expérimentaux.

### Abstract.

The sedimentation of particles in a vigorously convecting fluid is a process of great interest in various geophysical and industrial settings. Using a classical Rayleigh-Bénard set-up with salty water as a working fluid and PMMA particles, we systematically quantify the progressive settling of a large number of heavy particles initially distributed homogeneously through the tank. Our two control parameters are the Rayleigh number  $Ra$  characterizing the vigor of convection and the density ratio between the particles and the fluid  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ . In all our experiments, the time evolution of the solid fraction of suspended particles is correctly described by a diffusion-convection equation, taking into account a constant settling velocity given by the classical Stoke's law with an apparent viscosity due to small-scale turbulent motions, as well as a time-independent diffusive flux of particles from the bottom of the tank. We define scaling laws for this diffusive flux as well as for the equilibrium value of the suspended particles solid fraction as a function of  $Ra$  and  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ , in agreement with the experimental results.

### 4.1 Introduction.

The sedimentation of particles in a convecting fluid is a process of great interest in geophysics. This mechanism takes place for instance in the atmosphere, where convective motions are involved in the dispersion of polluting particles. A systematic study of this problem is also fundamental to understand the crystallization of magma chambers (Martin & Nokes, 1988). Here, the point is to quantify to what extent the compositional and thermal convection influences the *in situ* crystallization, and in particular when heavy crystals formed at the upper (cooler) boundary stay in suspension due to convective motions until the full crystallization of the alloy. Another relevant application consists in understanding the dynamics of metal-silicate separation in a terrestrial

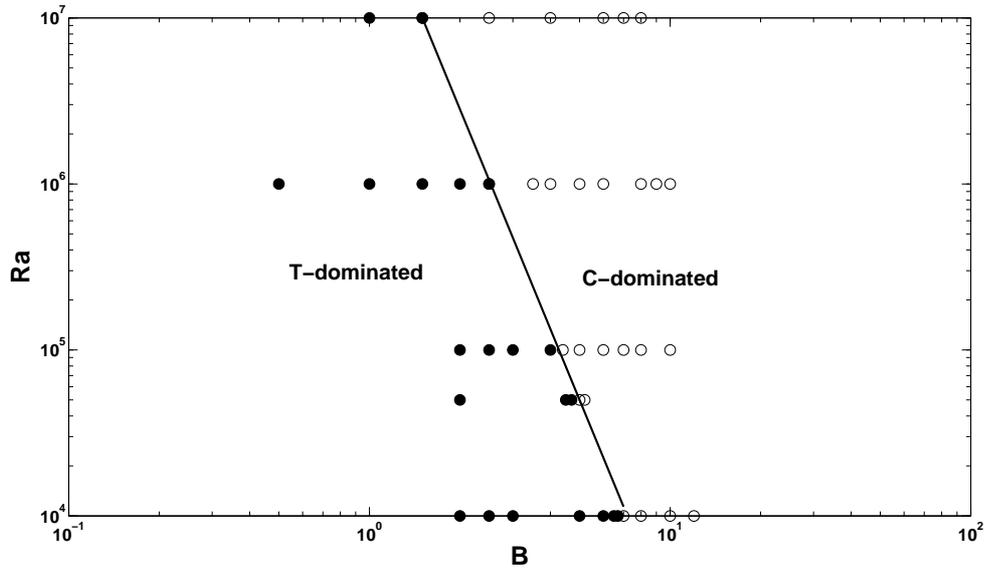


FIGURE 4.1 – Regime diagram in  $(B, Ra)$  determined numerically by Höink *et al.* (Höink *et al.*, 2006) using two-dimensional computations at infinite Prandtl number with  $R/H = 1.6 \times 10^{-3}$ . Filled circles stand for temperature-dominated cases, and open circles for droplet-dominated cases. The separation between the two regimes is indicated by a straight line corresponding to our scaling law (4.13) with  $\beta = 0.77$  and  $Pe_s = 3.5 \times 10^{-3}$ .

magma ocean during the Earth’s formation (Rubie *et al.*, 2003). During the last accretion stage, most of Earth’s mass and energy were acquired through bombardment of the proto-Earth by planetesimals. Giant impacts released enough energy into proto-Earth to increase temperature by thousands of degrees. By fusion of the terrestrial surface, silicate magma oceans then appeared, through which metal droplets coming from the planetesimals had to settle to form the iron core of the Earth. One of our goals here is to quantify the influence of the turbulent thermal convection on this metal droplets scenario. Note finally that similar problems involving convection and sedimentation also appear in industrial settings, as for instance in the context of nano and microfluid heat transfer technologies, which have received increasing attention in recent years (see for instance (Chang *et al.*, 2008)). From a general point of view, the dynamics of turbulent flows containing dense suspended particles have been the subject of numerous studies. One of the fundamental papers is due to Wang & Maxey (1993) who performed direct numerical simulations of this problem in isotropic homogeneous turbulence, including an one-way coupling (i.e. particles are advected by the flow field, but there is no back reaction on the carrier flow). They found that the terminal settling velocity of particles in the presence of turbulence is larger than the corresponding Stokes’ velocity

in a still fluid, and explained this result by a preferential sweeping effect of the particles in downward moving fluid. Such a velocity enhancement by turbulence has then been qualitatively confirmed by experimental studies, using either a wind tunnel (e.g. (Aliseda *et al.*, 2002)) or a tank with an oscillating grid (e.g. (Yang & Shya, 2003)). In contrast, the Monte Carlo computations by Mei (1994), focusing on the non-linear drag regime, exhibited a decrease of the mean particle settling velocity in the presence of turbulence. More recently, Bosse *et al.* (2006) implemented a numerical study including a fully two-way coupling and confirm the settling velocity enhancement suggested by Wang & Maxey (1993). However, no quantitative agreement was found with experiments, leading the authors to ask for additional studies and collaborations between experimentalists and computational modelers on this still open question.

One of the problems in comparing experimental and numerical results comes from the use of periodic boundary conditions in numerical studies, which tacitly eliminates the possibility of particles re-entrainment from the bottom. This point was explicitly addressed by Huppert *et al.* (1995), who demonstrated the importance of the bottom shear stress in the re-suspension process. Confronting analytical models with their own experiments using grid-generated turbulence as well as with previous works, they concluded that the re-suspension process strongly depends on the mechanisms for turbulence generation. In particular, significant differences are observed when turbulence is thermally driven, since the relevant stress regarding particles-fluid interaction is then the buoyancy rather than the Reynolds stress (see also Solomatov *et al.* (1993)). Specific studies devoted to the sedimentation of particles in the presence of vigorous convection are thus necessary.

However, up to now, only few papers have focused on this problem. From a numerical point of view, Gan *et al.* (2003) performed direct numerical simulations of the sedimentation of one or two particles with thermal convection and found many effects of the convection on the trajectories and aggregation of particles. Koyaguchi *et al.* (1990) conducted a series of experiments using a suspension of dense particles heated from below, focusing on the possible global regimes in the presence of a large initial mass fraction of suspended particles. They observed the formation of a density interface separating a dense convecting layer laden nearly uniformly with particles, from a clear layer without particles. Eventually the hotter bottom layer becomes unstable, and a sudden overturn takes place, homogenizing the temperature and concentration. The whole process then starts again. Using a two-dimensional simulation at infinite Prandtl number, as well as a selected number of three-dimensional computations, Hoink *et al.* (2006) confirmed the existence of such an oscillating regime separating two cases : the temperature-dominated case ("T-dominated"), where the droplets are advected by the flow and stay in suspension, and the droplet-dominated case ("C-dominated") where the convective motion is unable to keep the droplets suspended. According to their regime diagram ( $B, Ra$ ) reproduced in figure 1, the separation between the two cases depends

(i) on the Rayleigh number  $Ra = \frac{\alpha_T g \Delta T H^3}{\nu \kappa}$ , where  $\alpha_T$  is the fluid's thermal expansion coefficient,  $\nu$  the kinematic viscosity,  $\kappa$  the thermal diffusivity of the fluid and  $\Delta T$  the temperature drop across the tank and (ii) on the buoyancy ratio  $B = \frac{\Delta \rho}{\rho \alpha_T \Delta T}$ . One must however notice that Hoink *et al.* (2006) only considered an one-way coupling, hence limiting the validity of their results.

In the opposite limit of low initial mass fraction of suspended particles, Martin & Nokes (1988, 1989) described a laboratory model of the crystal settling in a vigorously convecting magma chamber. In following the time evolution of the number  $N$  of spherical polystyrene particles in suspension in a tank filled with convecting salty water, they concluded that in all their experiments except one,  $N$  decays with time according to an exponential law  $N = N_0 \exp(-\frac{v_s t}{H})$ . Here,  $H$  is the height of the tank,  $N_0$  the initial number of particles in suspension and  $v_s$  the Stokes' velocity defined by  $v_s = \frac{2}{9} \frac{\Delta \rho g R^2}{\eta}$ , where  $\Delta \rho$  is the difference between the density of the particles and the density of the working fluid,  $g$  the gravitational acceleration,  $R$  the radius of spherical particles and  $\eta$  the dynamical viscosity of the working fluid. In one of their experiments, i.e. in the one with the most viscous fluid and the smallest particles, Martin & Nokes (1988, 1989) noticed that re-entrainment into plumes emerging from the bottom boundary layer occurred, so that the particle concentration approached a steady non-zero value at long time. By addition of a constant re-entrainment rate in their sedimentation equation, they managed to correctly fit the data coming from this special case. However, they did not systematically explore the dependence of this re-entrainment rate nor the mechanisms explaining its origin. Later on, using the same type of set-up (i.e. aqueous solutions and polystyrene particles) but a different initial state (i.e. all particles are initially sedimented at the bottom of the tank), Solomatov *et al.* (1993) studied analytically and confirmed experimentally the steady-state entrainment from a bed of particles by thermal convection. They argued that at the bottom of the tank, the tangential buoyancy stress can move the particles in the horizontal direction and build up dunes, from which the particles are then entrained in the bulk of the fluid. Using a systematic experimental study as well as the data from Martin & Nokes (1988, 1989), they defined a critical value of the buoyancy stress non-dimensionalized by  $\Delta \rho g R$  separating a regime without particles bed motion from a regime of particles entrainment. Besides, Solomatov *et al.* (1993) defined a scaling law describing the final solid fraction of particles in suspension, which they claimed to agree with their data. However, they did not exhibit systematic results, which leads Huppert *et al.* (1995) to write that "the interpretation of these measurements is not so firmly supported as their earlier conclusions".

The present work takes place in the direct continuation of the studies by Martin & Nokes (1988, 1989) and Solomatov *et al.* (1993). Using a similar experimental set-up, we aim at combining and completing their results in systematically studying the re-entrainment process during particles sedimentation, starting from an initial homogeneous distribution of suspended particles through the whole tank. More specifically,

in complement to the first experiment of Martin & Nokes (1988, 1989) showing re-entrainment, we want to demonstrate that a constant re-entrainment coefficient is sufficient to explain the data for various values of the Rayleigh number  $Ra$  and of the density ratio  $\Delta\rho/\rho$ ; and in complement to the first results of Solomatov *et al.* (1993), we want to systematically check the scaling of this re-entrainment coefficient with  $Ra$  and  $\Delta\rho/\rho$ .

## 4.2 Experimental set up.

We study the sedimentation of spherical PMMA particles of radius  $R = (300 \pm 25) \mu\text{m}$  and density  $\rho_p = 1.190$  in the presence of vigorous Rayleigh-Bénard convection. The working fluid consists in water with various amounts of salt  $\text{NaCl}$  to increase its density  $\rho$  (measured at  $20^\circ\text{C}$ ) from 0.998 up to about 1.200. A sketch of the experimental set-up is shown in figure 2. The tank (width  $20 \times 4 \text{ cm}$  and height  $H = 20 \text{ cm}$ ) is cooled from above and heated from below through two copper plates whose temperatures are imposed by two circulating thermostated baths and measured by thermocouples placed inside the plates. The tank is illuminated through its short side by a slide projector, so that the particles are clearly visible. The particles are initially distributed uniformly throughout the tank. To do so, we tested two methods. We first introduced the particles by the top. This method presents mainly three disadvantages. First, it necessitates to open the tank, which disrupts the thermal convection. Then, due to surface tension phenomena, some particles stay at the surface. Finally, the PMMA particles are slightly porous : they can absorb up to 0.5% of water in volume and some molecules of salt can stay in the particles during the drying, changing their apparent density between two successive experiments. To minimize these effects, we choose to let the particles permanently in the salty water, in order to reach saturation. To distribute the particles uniformly through the tank, we initially stir the solution with a system of two magnets, one inside the tank and one outside. We then follow the statistical evolution of the number of suspended particles using a video camera and an image processing program written in Matlab. Our system is completely described by five dimensionless numbers : the Rayleigh number defined previously ; the density ratio  $\Delta\rho/\rho$ , where  $\Delta\rho = \rho_p - \rho$  ; the Prandtl number  $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ , which compares the viscous and thermal diffusions ; the aspect ratio  $R/H$  characterizing the relative size of the particles versus the typical size of the system ; and finally the initial suspended solid fraction  $\xi_i$ . Note that the viscosity, the density and the coefficient of thermal expansion of the fluid are temperature dependent. However, we are interested in the behaviour of settling particles in the bulk of the convecting fluid, which is fully mixed and isothermal at the rather large Rayleigh number considered here, whereas temperature variations are limited to small thermal boundary layers close to the top and bottom plates. In the definition of the dimensionless parameters, we thus use the single value of the fluid parameters taken at the mean temperature of the tank. Note also that we use the density ratio here rather than the

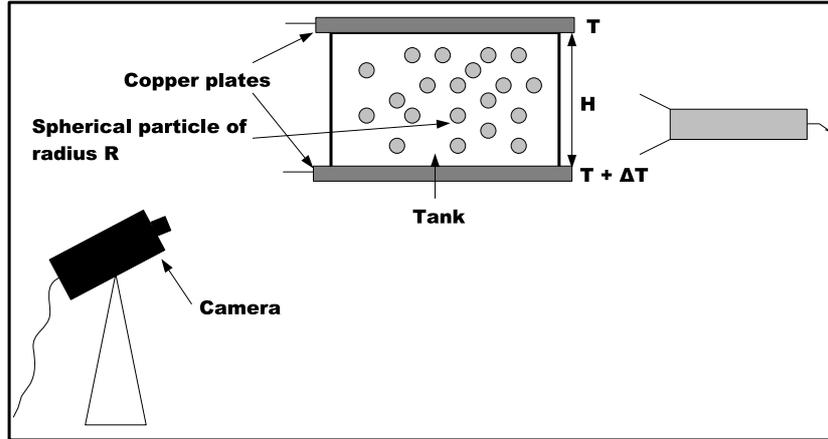


FIGURE 4.2 – Sketch of the experimental set-up. The PMMA particles are shown as grey circles, much greater than in the reality.

buoyancy number  $B$  defined in Hoink *et al.* (2006) because in our experiments, the control parameters are the temperature contrast and the water density : the density ratio and the Rayleigh number are thus controlled independently. In the present study,  $Ra$  typically ranges between  $10^9$  and  $2 \times 10^{10}$ ,  $\Delta\rho/\rho$  between  $3 \times 10^{-3}$  and  $2 \times 10^{-2}$  and  $Pr$  between 3.5 and 14. The other dimensionless parameters are constant in our study, with  $R/H = 0.0015$  and a low value of the initial suspended solid fraction  $\xi_i$  of about 0.3 %, ensuring that collective and hindered effects are negligible.

### 4.3 Observations and modeling.

We first performed experiments without convection. As illustrated in figure 3, we systematically observed two stages in the evolution of the relative number of particles in suspension  $N/N_0$  through time  $t$ . The first stage corresponds to the settling in the presence of motions due to the initial stirring, which tends to suspend and redistribute the particles. This stage vanishes after a typical viscous time  $t_v$ , corresponding to the typical time of dissipation of the initial eddies.  $t_v$  strongly depends on the characteristics of the stirring, especially on its characteristic length scale. So in all our experiments, we paid attention to reproduce the same initial stirring. After  $t_v$ , the particles settle at a constant velocity  $v_s$  and thus create a settling front. The conservation of the number of particles through time gives

$$N(t + dt) = N(t) - A\phi v_s dt \quad (4.1)$$

where  $A$  is the area of the base of the tank and  $\phi$  is the particles volumic concentration. We verified experimentally that the distribution of particles under the front is quasi-

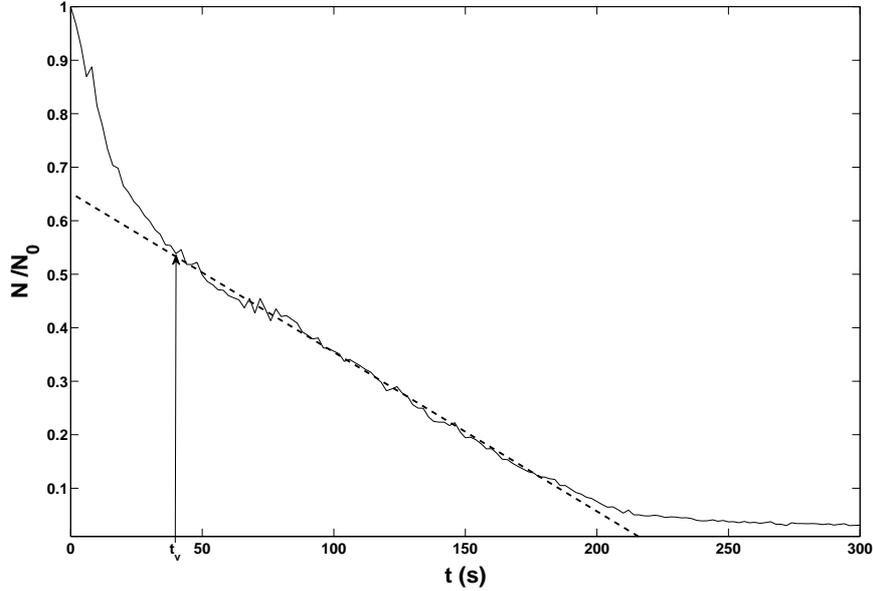


FIGURE 4.3 – Relative number of particles in suspension  $\frac{N}{N_0}$  through time (in seconds) in the absence of convection ( $Ra = 0$  and  $\rho = 1.184$ ).  $t_v$  corresponds to the viscous time of dissipation of the initial stirring. After  $t_v$ , simple sedimentation at the classical Stokes velocity takes place following our analytical law (4.2) (dashed curve).

uniform and constant through time, so that  $\phi = \frac{N_{t_v}}{AH}$  where  $N_{t_v} = N(t = t_v)$  is the number of particles in suspension when the constant settling becomes predominant over the inertia of the initial stirring. Integration of equation 4.1 yields

$$N(t) = N_{t_v} \left( 1 + \frac{v_s}{H} (t_v - t) \right). \quad (4.2)$$

Such a linear decay can be seen in figure 3, where we also show the result of the best fit of experimental data by equation (4.2), taking  $t_v$  and  $v_s$  as adjustable parameters (dashed curve). In all our experiments without convection, we systematically find an experimental value of  $v_s$  in good agreement with Stokes' formula, with a mean relative error of 17 %, which we attribute to the dispersion in the particles sizes.

Typical time evolutions of the relative number of particles in suspension  $N/N_0$  in the presence of convection are shown in figure 4 for various values of the temperature and density contrasts. As in experiments without convection, we systematically observe a first stage related to the initial stirring. The sedimentation during this first stage seems to be independent of the temperature and density contrasts. Convective motions then re-appear. For the typical Rayleigh numbers reached in this study (i.e. about  $10^9$ ), one can model the flow inside the tank in 3 different layers : an isothermal bulk where turbulent

convective motions take place and two symmetric thermal boundary layers of depth  $\delta_{th}$  (one at the top and one at the bottom) where heat transfer is purely diffusive. Following the classical study by Howard (1964), the scaling of  $\delta_{th}$  is determined by the fact that the local Rayleigh number computed on a thermal boundary layer with a temperature contrast  $\Delta T/2$  is critical. Hence

$$\delta_{th} = H \left( \frac{2Ra_c}{Ra} \right)^{1/3}, \quad (4.3)$$

where  $Ra_c$  is the critical Rayleigh number, about 1708 in our case. Convective motions in the bulk come from the emergence of thermal plumes from both boundary layers. The typical convective time separating the emergence of two plumes at the same location, also characterizing temperature fluctuations in the bulk, corresponds to the typical time necessary to establish the temperature contrast inside the boundary layer by diffusion, hence

$$t_{th} = \frac{\delta_{th}^2}{\pi\kappa} = \frac{H^2}{\pi\kappa} \left( \frac{2Ra_c}{Ra} \right)^{2/3} \approx 10 \text{ s}. \quad (4.4)$$

One can notice that the viscous dissipation time of initial eddies  $t_v$  in the absence of convection and the typical convective time  $t_{th}$  are close. This explains why in our experiments, disappearance of the initial mechanical stirring as well as re-appearance of convective motions take place almost simultaneously. Note finally that the typical convective velocity is simply given by  $v_c = \delta_{th}/t_{th} = \pi\kappa/H(Ra/2Ra_c)^{1/3}$ .

Once convection is fully established, the statistical behavior of suspended particles strongly depends on  $\Delta\rho$  and  $\Delta T$  (figure 4) : the characteristic time of settling as well as the final proportion of particles in suspension significantly increase when either  $\Delta T$  increases or  $\Delta\rho$  decreases, as expected.

Seen from a particle frame, the convective turbulent velocity field of the flow appears as isotropic and tends to disperse the particles. So, this phenomenon can be modeled by a classical diffusion process (Blanchette *et al.*, 2005) outside the thermal boundary layers, where no convective motion takes place. The conservation equation for particles in the bulk of the fluid, after averaging in the horizontal directions  $x$  and  $y$ , then writes

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - v_s \frac{\partial\phi}{\partial z} - D \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0, \quad (4.5)$$

valid after the reappearance of the turbulent convection at  $t_{conv}$  (i.e. typically after some  $t_{th}$ ). Here,  $v_s$  is the sedimentation velocity and  $D$  a turbulent convective diffusion coefficient. By integration of the equation (4.5) between  $\delta_{th}$  and  $H - \delta_{th}$  (i.e. the convecting part of the flow), we obtain

$$\frac{1}{A} \frac{dN}{dt} - v_s (\phi(H - \delta_{th}) - \phi(\delta_{th})) - D \left( \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_{H-\delta_{th}} - \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_{\delta_{th}} \right) = 0. \quad (4.6)$$

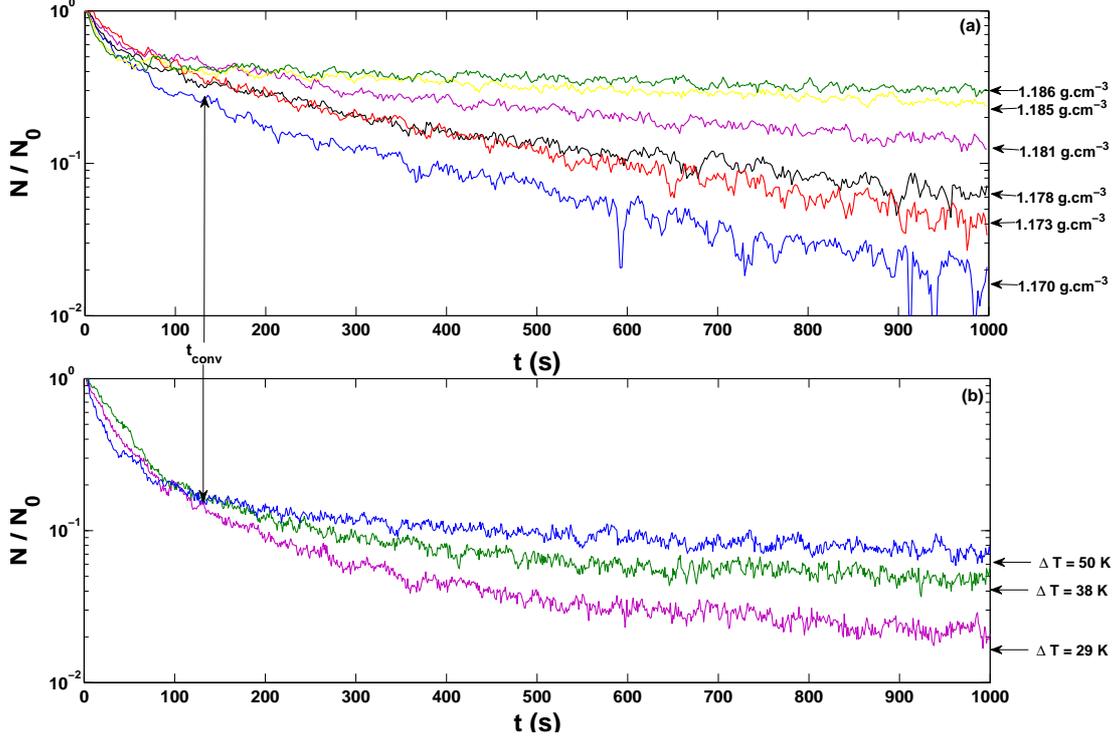


FIGURE 4.4 – Relative number of particles in suspension  $\frac{N}{N_0}$  through time (in seconds) in the presence of convection. (a) For a fixed value of the Rayleigh number ( $Ra = 3 \times 10^9$ ) and various fluid densities (indicated on the right of the figure) and (b) for a fixed value of fluid density  $\rho = 1.150$  and various Rayleigh numbers (see the temperature contrasts  $\Delta T$  indicated on the right of the figure). Initially, all curves overlap because of the inertia of the mechanical stirring. After the time  $t_{conv}$  corresponding to the reappearance of the convection motions, the evolution of  $\frac{N}{N_0}$  strongly depends on  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$  and on  $\Delta T$ . Note that the noisiness of the data is due to both real statistic fluctuations on the large number of suspended particles as well as to measurements artifact related to our image processing..

Following the study of Belinsky *et al.* (2005), we consider that there is no transport of particles through the upper boundary layer, so that the total particulate flux is equal to zero for  $z = H - \delta_{th}$ . Besides, we systematically observe in our experiments that the concentration in the bulk is quasi-uniform, so that  $\phi(\delta_{th}) \approx N/AH$ . Hence,

$$\frac{dN}{dt} + \frac{v_s N}{H} = -DA \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{\delta_{th}}. \quad (4.7)$$

The right-hand side term of this equation corresponds to the diffusive flux at the interface between the bottom thermal boundary layer and the bulk. Following the initial suggestion of Martin & Nokes (1988, 1989), we assume that this flux, which actually

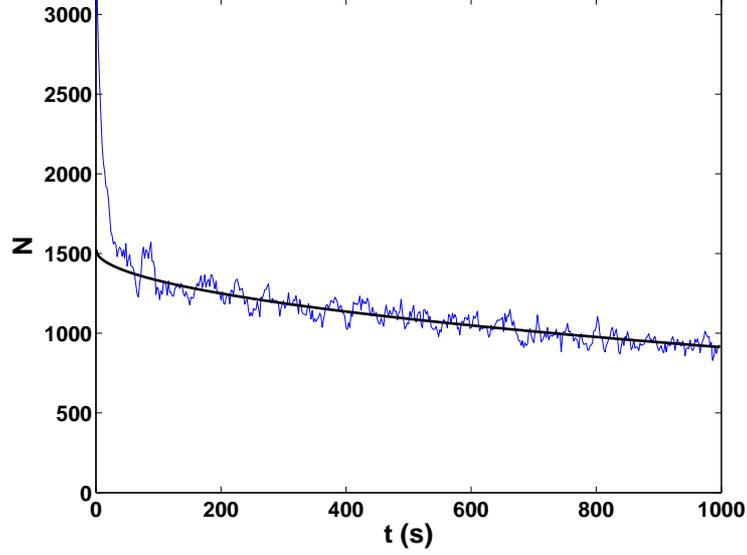


FIGURE 4.5 – temporal evolution of the number  $N$  of particles in suspension in the presence of convection ( $Ra = 3 \times 10^9$  and  $\rho = 1.186$ ). The continuous line represents the data fitting according to equation (4.9), valid for  $t > t_{conv}$ .

corresponds to the number of particles which are re-suspended per unit time  $R_{conv}$ , is constant. We expect this to be true as long as the amount of deposited particles is large enough for the bottom boundary layer never to be fully depleted at any time. This is indeed the case in all our experiments once convective motions have reappeared. Once the statistical stationary state is reached,  $\frac{dN}{dt} = 0$  and  $N$  takes a constant equilibrium value  $N_{eq}$ , so that  $R_{conv} = \frac{v_s N_{eq}}{H}$ . Finally,

$$\frac{dN}{dt} + \frac{v_s N}{H} = R_{conv} = \frac{v_s N_{eq}}{H}, \quad (4.8)$$

which yields to

$$N(t) = (N_{t_{conv}} - N_{eq}) \exp\left(-\frac{v_s}{H}(t - t_{conv})\right) + N_{eq}, \quad (4.9)$$

where  $N_{t_{conv}} = N(t = t_{conv})$  is the initial number of suspended particles once convective motions re-appear. This simple equation allows us to correctly describe all our experiments, taking  $N_{eq}$  and  $v_s$  as adjusting parameters depending on  $Ra$  and  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ . An example of the temporal evolution of the number  $N$  of particles in suspension in presence of convection ( $Ra = 3 \times 10^9$  and  $\rho = 1.186$ ) is shown in figure 5, together with the result of the best fit by equation 4.9, valid for  $t > t_{conv} \sim 50s$ . Figure 6 shows the systematic evolution of the settling velocity  $v_s$  determined experimentally as a function of  $\Delta\rho/\rho$  for

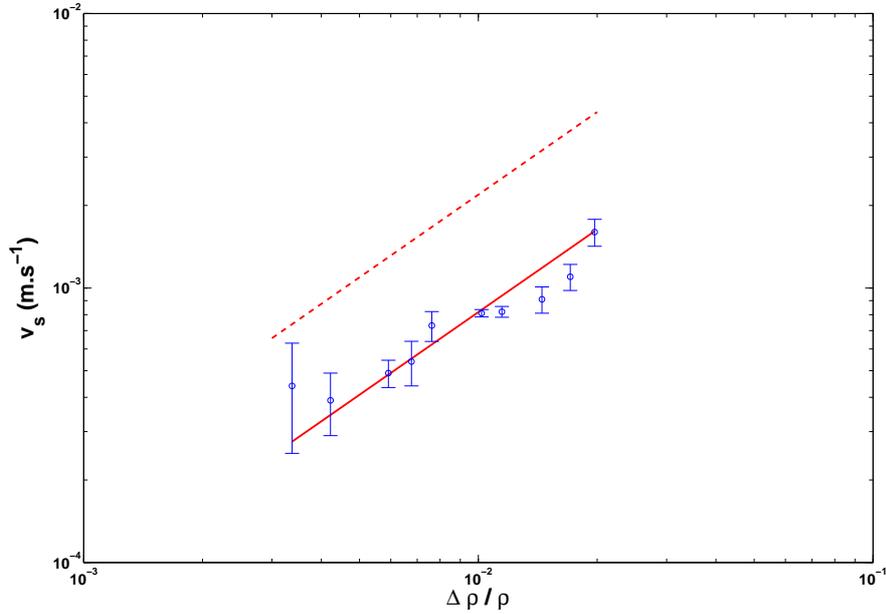


FIGURE 4.6 – Sedimentation velocity determined experimentally using equation (4.9) versus  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$  for  $Ra = 3 \times 10^9$ . The experimental data correspond to the classical Stokes velocity providing that we consider an apparent viscosity of  $2.4 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  (continuous line). The dashed line shows the calculation of the Stokes velocity with a molecular kinematic viscosity  $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , valid without convection..

a fixed value of the Rayleigh number,  $Ra = 3 \times 10^9$  and for a fixed mean temperature of  $25^\circ\text{C}$ . Values of  $v_s$  correspond to indirect data, coming from the fitting of experimental measurements by equation (4.9). Besides, our set-up does not allow to explore a very large range in  $\Delta\rho/\rho$ . Hence, we do not try here to define an experimental scaling law expressing its dependence on  $\Delta\rho/\rho$ , but we rather test the compatibility of our results with relevant analytical models. Here, we observe that the experimental results are compatible with a linear dependence in  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ , which would derive from the classical Stokes' velocity. However, the experimental prefactor is smaller than the theoretical one using the kinematic "molecular" viscosity at  $25^\circ\text{C}$   $\nu = 0.896 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  (dashed line), which nevertheless was relevant to explain our experiments without convection. This could be explained by the fact that, at the typical Rayleigh numbers considered here, the turbulence is fully developed and the apparent viscosity seen by the particles corresponds to the molecular viscous dissipation on their solid surface by all small scale eddies (i.e. smaller than the particles). Such a method consisting in describing large scale motions inside a turbulent fluid by a laminar law using an apparent viscosity has already been successfully used by Brito *et al.* (2004) when studying the spin-up of a rotating fluid

in the presence of turbulent convection : they then measured  $1.16 < \nu_a/\nu < 1.49$  for  $24.1 < Ra/Ra_c < 78.2$ . In the case shown in figure 6 at  $Ra = 3 \times 10^9 \sim 10^6 Ra_c$ , we find a typical value  $\nu_a/\nu = 2.7$ . This result suggests that the dependence of  $\nu_a$  in  $Ra$  is weak, corresponding to a 2.7 increase over 6 orders of magnitude in  $Ra$ . Since our set-up only allows to explore the range  $[10^9; 2 \times 10^{10}]$  in  $Ra$ , we do not expect to observe any systematic variations of  $\nu_a$  as a function of  $Ra$ . Note also that we do not expect the apparent viscosity measured here to be directly related to the turbulent viscosity of numerical models of turbulence, which characterizes the transport and dissipation of energy by the fluctuations of the flow, and is thus independent of the molecular viscosity.

Using our systematic experimental results, we also study the variations of the equilibrium number of particles  $N_{eq}$ . To obtain a result independent of the size of the system, we rather seek for a scaling law characterizing the equilibrium volume fraction of particles  $\xi_{eq} = \frac{V_p}{V_{obs}} N_{eq}$ , where  $V_p = \frac{4}{3}\pi R^3$  is the volume of one particle and  $V_{obs}$  is the observed volume. The energy necessary for maintaining heavy particles in suspension can only come from the work of viscous friction at their surface. The statistically stationary state is reached when the energy usually lost by viscous friction inside the convecting fluid is sufficient to compensate for the potential energy accumulated in the suspended heavy particles, i.e.

$$\iiint_{all\ particles} \vec{v}_s \cdot \Delta\rho \vec{g} dV \sim \iiint_{V_{obs}} \vec{v}_c \cdot \eta \nabla^2 \vec{v}_c dV. \quad (4.10)$$

In term of orders of magnitude, this writes

$$\nu_s \Delta\rho g \xi_{eq} V_{obs} = \epsilon \nu_c \eta \frac{\nu_c}{l^2} V_{obs}, \quad (4.11)$$

where  $\epsilon$  is a constant of order 1 to be determined experimentally,  $l$  the typical length scale of convective motions which we take as the thermal length  $\delta_{th}$  and  $\nu_c$  the typical convective velocity introduced above. After simplification, we obtain

$$\xi_{eq} = \epsilon \frac{9\pi^2}{2} \frac{k^2 \nu_a \nu}{H^4 g^2 R^2} \left(\frac{Ra}{Ra_c}\right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^{-2}. \quad (4.12)$$

This scaling law is similar - except for a constant multiplicative factor that can be included in  $\epsilon$  - to the one determined by Solomatov *et al.* (1993), coming from the equilibrium between the heat flux related to convection and the potential energy of suspended particles, taking into account an "efficiency factor" of energy conversion. Figure 7(a) shows the evolution of  $\xi_{eq}$  determined experimentally as a function of  $\Delta\rho/\rho$ . As for the study of  $\nu_s$ ,  $\xi_{eq}$  is an indirect data coming from the fitting of experimental measurements by equation (4.9) and the explored range is relatively small. Hence, we do not try to define an experimental scaling law expressing its dependence on  $\Delta\rho/\rho$ , but we rather test the compatibility of our results with our analytical model, given by equation (4.12). As

shown in figure 7(a), a slope  $(-2)$  is indeed compatible, and the corresponding prefactor allows us to calculate  $\epsilon$ , giving  $\epsilon \approx 0.25$  with  $v_a = 2.4 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Similarly, figure 7(b) shows the variations of  $\xi_{eq}$  as a function of  $v_a \nu (Ra/Ra_c)^{4/3} (\Delta\rho/\rho)^{-2}$ , derived from series of experiments where the bottom temperature has been systematically changed for a given fluid. Our data validate the scaling law (4.12) with a value of  $\epsilon \approx 0.54$ , of the same order of magnitude as the previous value. Note however that the uncertainty on  $\epsilon$  is large. To compare these values with the efficiency factor defined by Solomatov *et al.* (1993), we simply have to multiply  $\epsilon$  by  $\frac{2\pi^2}{Ra_c}$ . We then obtain efficiency values between 0.3 and 0.6 %, in good agreement with the estimations of Solomatov *et al.* (1993), which range between 0.2 and 0.9 %.

## 4.4 Conclusions.

Our systematic experimental study confirms the first experiment by Martin & Nokes (1988) : a constant re-entrainment term, derived from the introduction of a turbulent convective diffusive flux of particles from the bottom, allows to correctly describe the settling of initially randomly distributed heavy particles in the presence of vigorous convection. We also confirm that this re-entrainment term follows the scaling law suggested by Solomatov *et al.* (1993) for the entrainment from a bed of particles. Besides, our systematic experimental results demonstrate that the mean particles settling velocity scales as the classical Stokes velocity (i.e. linear dependence in  $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ ), providing that the fluid molecular viscosity is replaced by an apparent viscosity, which corresponds to the integration of all molecular viscous dissipations by small-scale eddies at the surface of a particle. Clearly, additional studies regarding this apparent viscosity are necessary, allowing in particular the exploration of a larger range of Rayleigh numbers and a systematic study of its variations with the particles diameter and the fluid viscosity. But in any case, the first trends shown here demonstrate that the fluid dynamics of the metal droplets sedimentation in a primitive magma ocean should not be over-simplified on the simple basis of the large density difference between iron and silicate. In particular, we claim that typical value of the settling velocity found in the literature (i.e.  $v_s \sim 0.5 \text{ m/s}$  (Rubie *et al.*, 2003)), which is especially important since it determines the typical time for chemical equilibration of metal droplets with their silicate environment, is probably underestimated. For illustration purpose only, if we suppose that the apparent viscosity follows a power law  $(v_a/\nu) \sim (Ra/Ra_c)^p$  and if we determine the constant exponent  $p$  using our experimental result, we find  $p \sim 0.06$ . For the typical Rayleigh number of a primitive magma, ranging between  $10^{28}$  and  $10^{32}$  (Rubie *et al.*, 2003), we thus predict an increase in viscosity for magma ocean by a factor 31 to 55. However in any case, the equilibrium suspended fraction predicted by (4.12) always remains negligible, as expected from geochemical observations. To finish with, in addition to these conclusions valid in the limit of small initial volume fraction of suspended particles (see for instance

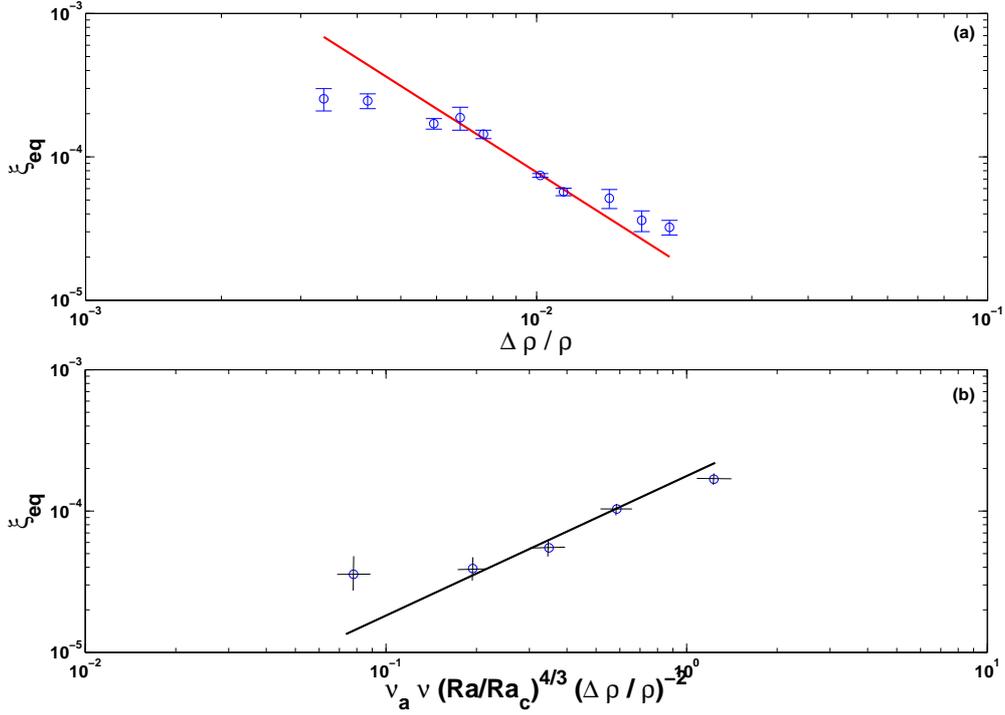


FIGURE 4.7 – Equilibrium suspended volume fraction  $\xi_{eq}$  measured experimentally, (a) as a function of  $\frac{\Delta \rho}{\rho}$  for a fixed  $Ra = 3 \times 10^9$ , and (b) as a function of the factor  $v_a \nu (Ra/Ra_c)^{4/3} (\Delta \rho / \rho)^{-2}$  suggested by our scaling law (4.12), when systematically changing the bottom temperature of our tank for a given fluid of density  $\rho = 1.150$  at  $25^\circ C$ . Lines correspond to the theoretically predicted dependence according to the scaling law (4.12), with a slope  $-2$  in  $\frac{\Delta \rho}{\rho}$  and a slope  $1$  in  $v_a \nu (Ra/Ra_c)^{4/3} (\Delta \rho / \rho)^{-2}$ . We also assume that the ratio  $v_a / \nu$  is constant and equal to  $2.7$ .

(Koyaguchi *et al.*, 1990)), it is interesting to note that our description in terms of convective diffusive flux of particles (equation 4.5) also explains the regime diagram of (Hoink *et al.*, 2006) shown in figure 1. Indeed, equation (4.5) leads to define a Peclet number  $Pe = \frac{v_s H}{D}$  distinguishing two regimes : when  $Pe \ll Pe_s$ , where  $Pe_s$  is a constant critical Peclet number to be determined, the turbulent diffusion is predominant and the particles stay in suspension, corresponding to the "T-dominated" case introduced by Hoink *et al.* (2006). On the contrary, the particles settle when  $Pe \gg Pe_s$ , corresponding to the "C-dominated" case. By analogy with the Einstein's model of brownian motions, we estimate the turbulent convective diffusion coefficient  $D = v_c \times H$ , where  $H$  is the mean free path of convective motions,  $v_c = \frac{\kappa}{\pi H} (\frac{Ra}{Ra_c})^\beta$  the typical convective velocity and  $\beta$  a constant exponent depending on the flow characteristics (see for instance (Grossmann & Lohse, 2000)). Then, the Peclet number simply corresponds to the ratio between the

sedimentation and the convective velocities. The separation between the two regimes in a  $(B, Ra)$  diagram is given by the equation

$$Pe_s = \frac{2}{9\pi} Ra_c^\beta \left(\frac{R}{H}\right)^2 B Ra^{1-\beta}. \quad (4.13)$$

The best fit of this equation with the numerical results of Höink *et al.* is shown in figure 1 and gives  $\beta = 0.77$  and  $Pe_s = 3.5 \times 10^{-3}$ . This value  $\beta = 0.77$  is compatible with the scaling of the convective velocity in the same numerical configuration, i.e. 2D and at  $Pr = \infty$  (see for instance Korenaga & Jordan (2001)).

# Chapitre 5

## Applications géophysiques.

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes concentrés uniquement sur l'océan de magma initial comme application géophysique possible de notre étude. Or, de façon plus générale, sont concernés par notre étude les systèmes géophysiques convectant et comprenant deux phases : une première phase majoritaire, liquide et une deuxième phase liquide ou solide, plus dense et non miscible avec la première. Cette deuxième phase prend la forme de gouttelettes si elle est liquide ou de cristaux si elle est solide. Le volume total qu'elle occupe est faible devant le volume total du système, de telle sorte que l'hypothèse concernant le fait que les particules ne se voient pas les unes par rapport aux autres est vérifiée.

Il existe au moins trois systèmes géophysiques susceptibles de contenir ce genre de convection hétérogène :

- **Les chambres magmatiques** : il s'agit d'un vaste réservoir de magma, possédant une taille typique kilométrique, située dans la lithosphère, entre 10 et 50 kilomètres de profondeur (figure 5.1). Le magma provient de la fusion de roches plus profondes et alimente la chambre par un ou plusieurs conduits. Le magma dans la chambre magmatique peut remonter en surface et donner naissance à des volcans. Le magma, s'il n'est pas expulsé lors d'une éruption volcanique, peut rester dans cette chambre pendant plusieurs siècles et subir d'importantes transformations physico-chimiques. En particulier, en l'absence de sources de chaleur, des minéraux peuvent cristalliser de façon fractionnée alors que des mouvements convectifs persistent dans la chambre.
- **L'océan de magma initial** (figure 5.2) : comme nous l'avons vu au chapitre précédent, l'énergie importante libérée lors des impacts des planétésimaux sur la proto-Terre a engendré la fusion d'une partie de sa surface. Il s'en suit dans un premier temps la mise en suspension de gouttelettes de fer dans du silicate fondu. Ensuite, une fois cette première étape terminée, l'océan de magma s'est refroidi efficacement par convection et a commencé à cristalliser. Si, aux pressions qui règnent à la base du manteau, le magma est plus dense que les cristaux

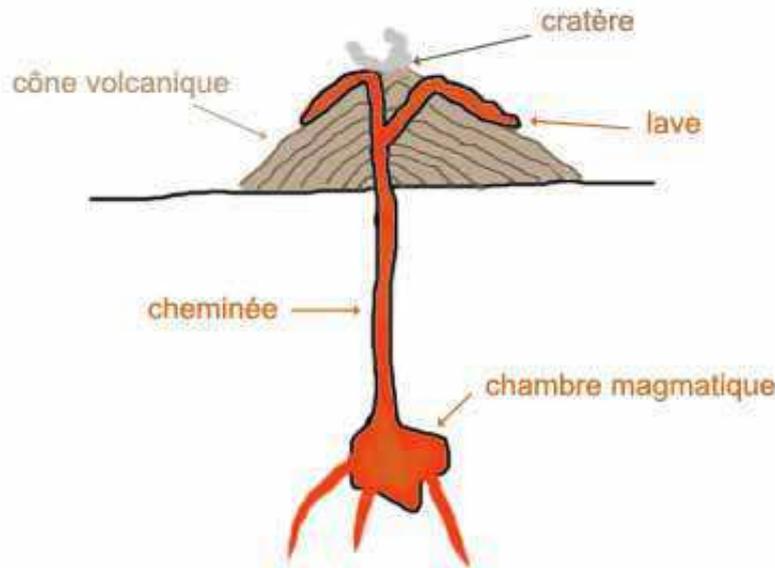


FIGURE 5.1 – Schéma sommaire de la structure d'un volcan vu en coupe.

formés lors de son refroidissement, ces derniers flottent vers la surface. En surface, en revanche, les cristaux sont plus denses et plongent vers la profondeur. On pense donc qu'une zone contenant la majorité des cristaux se forme à partir du centre, encadrée par un océan de magma superficiel et un océan de magma profond. Ce dernier cristallise beaucoup plus lentement que celui de surface, car puisqu'il n'est pas en contact avec l'extérieur, la chaleur s'en échappe beaucoup plus difficilement. En résumé, la cristallisation de cet océan magmatique primordial se propage donc du centre vers le haut et vers le bas. Les cristaux ainsi formés sont-ils advectés par la convection ou finissent-ils par être trop denses pour être emportés (Labrosse *et al.*, 2007) ?

- **Les lacs de lave** (figure 5.3) : tout comme les chambres magmatiques, il s'agit de systèmes existant encore à l'heure actuelle. Il s'agit d'un lac contenant de la lave basaltique effusive et fluide à haute température, contenue dans le cratère d'un volcan rouge, i.e. qui rejette de la lave fluide lors de son éruption et non des nuages de cendre. Si une baisse d'activité volcanique se présente, la température du lac de lave peut diminuer et la lave se solidifier. La cristallisation débute par la surface du lac et forme une croûte. Si cette croûte devient plus dense que la lave, elle peut se fragmenter et s'enfoncer dans les profondeurs du lac (Matson *et al.*, 2006). Notre étude pourrait être pertinente pour prédire le devenir de ces fragments. Restent-ils en suspension ou sédimentent-ils ? Selon les cas, le transfert de chaleur dans le lac pourrait également être modifié.

Nous nous concentrons donc sur ces trois systèmes, mais nous étudions en réalité 4

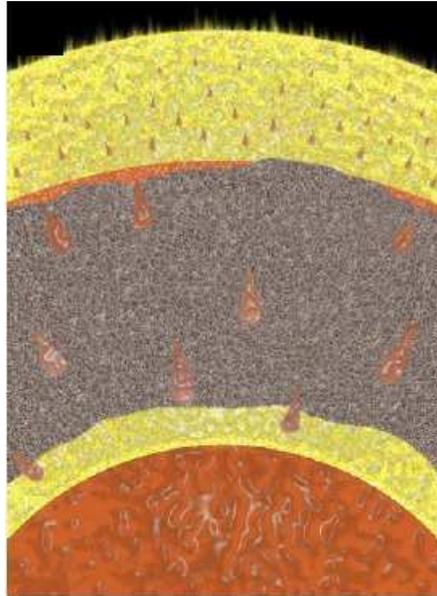


FIGURE 5.2 – Vue en coupe d'un océan de magma initial. Les zones en jaunes sont liquides, celle en gris contient des cristaux qui ont migré depuis la surface ou depuis la base de l'océan de magma. L'ensemble est soumis à des mouvements de convection (Labrosse *et al.*, 2007).



FIGURE 5.3 – Cliché de la surface du lac de lave de Nyiragongo, République démocratique du Congo (image Olivier Grunewald).

cas différents car l'océan de magma initial a été successivement le siège de deux types de convection hétérogène : entre deux phases liquides (constituée pour la première de silicate et pour la seconde de fer) tout d'abord, puis entre une phase liquide et une phase solide. Le tableau 5.4 synthétise les paramètres nécessaires pour l'application de nos résultats à ces 4 situations.

	Lac de lave	Chambre magma-tique	Océan de magma, pluie de fer	Océan de magma, cristallisation	Notre expérience
$\alpha (K^{-1})$	$5 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$2 \times 10^{-4}$
$g (m.s^{-2})$	10	10	10	10	10
$\Delta\rho (kg.m^{-3})$	200	500	4000	300	0.3-20
$\eta (Pa.s)$	$10 - 10^5$	$10 - 10^5$	$10^{-3} - 1$	$10^{-3} - 1$	$10^{-3}$
$H (m)$	100	$10^3$	$10^6$	$10^6$	0.2
$\rho (kg.m^{-3})$	2600	$3 \times 10^3$	3700	3700	$\sim 1150$
$\kappa (m^2.s^{-1})$	$10^{-5}$	$8 \times 10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
$F (W.m^{-2})$	$10^5 - 10^6$	$10^{-1} - 1$	$10^5 - 10^6$	$10^5 - 10^6$	$10^3 - 10^4$
$c_p (J.kg^{-1}.K^{-1})$	1500	$10^3$	$10^3$	$10^3$	4180
$R (m)$	$10^{-4} - 10^{-2}$	$10^{-4} - 10^{-2}$	$10^{-4} - 10^{-2}$	$10^{-4} - 10^{-2}$	$10^{-3}$
$Ra_c$	$10^3$	$10^3$	$10^3$	$10^3$	$10^3$
$Ra$	$10^9 - 10^{13}$	$3 \times 10^9 - 8 \times 10^{12}$	$5 \times 10^{27} - 10^{29}$	$5 \times 10^{27} - 10^{29}$	$10^9 - 2 \times 10^{10}$
$B$	1.5-3	$4 \times 10^3 - 3 \times 10^5$	7 - 200	0.5 - 17	1.5 - 10
$Pr$	$2 \times 10^4 - 2 \times 10^8$	$4 \times 10^3 - 4 \times 10^7$	0.27 - 270	0.27 - 270	7
$E$	$5 \times 10^{-3} - 53$	$5 \times 10^{-5} - 0.5$	$4 \times 10^{-15} - 4 \times 10^{-12}$	$4 \times 10^{-15} - 4 \times 10^{-12}$	$\infty$
$\beta_1$ (fig. 1.3)	4/7	4/7	4/9	4/9	4/9
$\beta_2$ (fig. 1.3)	3/7	3/7	1/3	1/3	1/3

FIGURE 5.4 – Synthèse des paramètres des quatre situations étudiées. Les données proviennent des études suivantes : Rubie *et al.* (2003); Solomatov & Stevenson (1993); Martin & Nokes (1988); Matson *et al.* (2006).

Ces paramètres nous permettent de calculer les nombres sans dimension  $Ra$  et  $B$  caractérisant chaque système magmatique. Nous les définissons alors en utilisant le flux thermique  $F$  défini comme  $F = k \frac{\Delta T}{2\delta}$  où  $\Delta T$  désigne le contraste de température entre le haut et le bas de la cuve et  $\delta \sim H \left( \frac{Ra_c}{Ra} \right)^{\beta_2}$  l'épaisseur typique d'une couche limite

thermique dans un tel système.  $\beta_2$  est le coefficient de la loi d'échelle  $Nu \sim Ra^{\beta_2}$ .  $\beta_1$  désigne quant à lui le coefficient de la loi d'échelle  $Re \sim Ra^{\beta_1}$ . Les valeurs numériques de ces deux coefficients ont été estimées par Grossmann & Lohse (2000) selon le couple  $(Ra, Pr)$  de travail (cf. figure 1.3). Leurs valeurs sont données pour les systèmes étudiés dans le tableau 5.4.  $Ra$  et  $B$  s'expriment alors comme :

$$Ra = \left( \frac{2\alpha g H^4 F R d_c^{\beta_2}}{\eta c_p \kappa^2} \right)^{\frac{1}{1+\beta_2}}, \quad (5.1)$$

$$B = \frac{\Delta \rho g H^3}{\kappa \eta} \left( \frac{\eta c_p \kappa^2}{2\alpha g H^4 F R d_c^{\beta_2}} \right)^{\frac{1}{1+\beta_2}}. \quad (5.2)$$

D'autre part, l'équation 4.13 nous fournit un critère sur le devenir des particules en

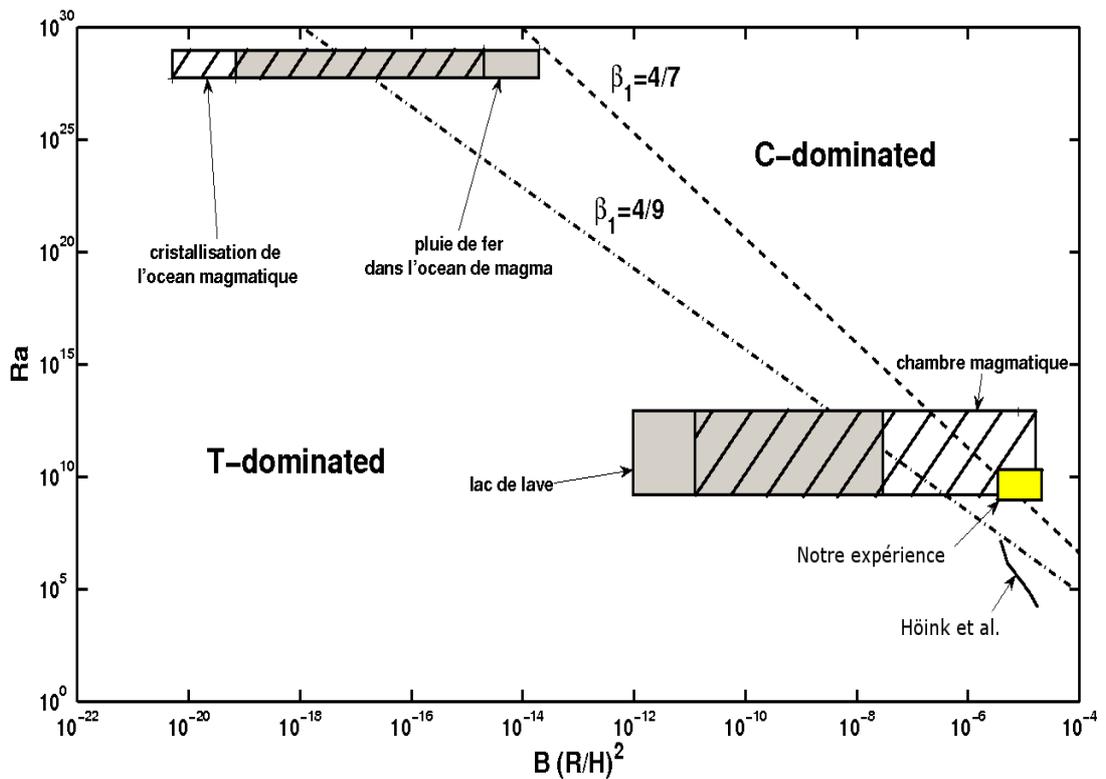


FIGURE 5.5 – Diagramme  $Ra$  en fonction de  $B \left( \frac{R}{H} \right)^2$ . Les lignes matérialisent la séparation entre les deux régimes "C-dominated" et "T-dominated" pour les deux valeurs de  $\beta_1$  correspondant au cas étudié.

suspension : sédimentation ou maintien partiel en suspension selon les valeurs de  $R/H$ ,  $B$  et  $Ra$ . Dans le cas le plus général, cette équation peut se réécrire sous la forme d'un seuil sur le nombre de Rayleigh :

$$Ra_s = \frac{9\pi}{2} Pe_s Ra_c^{-\beta} \left( \left( \frac{R}{H} \right)^2 B \right)^{\frac{1}{\beta_1 - 1}}. \quad (5.3)$$

Sur la figure 5, nous avons donc porté sur un diagramme  $(B \left( \frac{R}{H} \right)^2, Ra)$  les domaines susceptibles d'être couverts par les systèmes géophysiques. Les différentes lignes discontinues délimitent la séparation entre les deux régimes "T-dominated" et "C-dominated" pour différentes valeurs de  $\beta_1$  possibles. Est également portée la limite entre les deux régimes déterminés par les simulations numériques de Hoink *et al.* (2006). Le critère qui distingue les deux régimes est donné par l'équation (5.3). Ainsi, nous constatons d'emblée dans quel(s) régime(s) peuvent être les différents systèmes magmatiques. Nous réalisons que les systèmes étudiés peuvent être dans l'un ou l'autre des deux régimes, suivant les paramètres utilisés. Nous notons également que nos expériences se trouvent dans le régime "C-dominated", comme nous l'avons déjà constaté. Toutefois, quand bien même la convection agirait sur la sédimentation, il importe de calculer la fraction volumique pouvant rester en suspension à l'équilibre. Pour cela, nous utilisons la formule 4.12 établie par notre analyse :

$$\xi_{eq} = \epsilon \frac{9\pi^2}{2} \frac{\kappa^2 \gamma_a \nu}{H^4 g^2 R^2} \left( \frac{Ra}{Ra_c} \right)^{2(\beta_1 + \beta_2)} \left( \frac{\Delta\rho}{\rho} \right)^{-2}. \quad (5.4)$$

Le tableau 5.6 résume les résultats pour les systèmes sur lesquels nous nous sommes attardés : la gamme de fraction volumique possible à l'équilibre  $\xi_{eq}$  ainsi que le rayon maximal  $R_{max}$  des particules en suspension (dans une gamme raisonnable, i.e.  $10^{-2} - 10^{-4}$  m de rayon) pour lequel nous sommes certains que des particules peuvent être maintenues en suspension, quels que soient les valeurs des nombres de Rayleigh et de flottabilité possibles pour ce genre de système. Son expression est donnée par :

$$R_{max} = H \sqrt{\frac{9\pi Pe Ra_s^{\beta_1 - 1}}{2 B_{max} Ra_c^{\beta_1}}}, \quad (5.5)$$

où  $Ra_s$  est le nombre de Rayleigh en dessous duquel il est certain que des particules restent en suspension quelque soit la valeur de  $B \left( \frac{R}{H} \right)^2$  considérée. Il dépend de  $\beta_1$ .  $B_{max}$  est le nombre de flottabilité maximal du système considéré.

Le maintien en suspension est *a priori* possible dans tous les systèmes considérés. Toutefois, en ce qui concerne la pluie de fer dans l'océan de magma initial, la fraction volumique finale en suspension atteint au maximum 10%. Ce résultat va dans le sens de celui connu et validé par la communauté des géophysiciens, à savoir que le fer a

	Lac de lave	Chambre magmatique	Océan de magma, pluie de fer	Océan de magma, cristallisation
$\xi_{eq}$ (%)	$3 \times 10^{-10} - 100$	$10^{-16} - 100$	$10^{-10} - 10$	$10^{-9} - 100$
$R_{max}$ (m)	$8.2 \times 10^{-3}$	$10^{-2}$	$2.6 \times 10^{-3}$	$10^{-2}$

FIGURE 5.6 – Fraction volumique à l'équilibre et rayon maximal toléré pour que des particules puissent se maintenir en suspension pour n'importe quel couple  $(B\left(\frac{R}{H}\right)^2, Ra)$  considéré dans la partie "T-dominated" du diagramme 5.

sédimenté pour contribuer à la formation du noyau. C'est la raison pour laquelle le manteau ne contient quasiment pas de fer. Il est également connu que le manteau contient plusieurs réservoirs de composition différente. Ceux-ci pourraient s'être formés successivement par sédimentation des éléments initialement en suspension, en commençant par ceux dont le produit caractéristique  $B\left(\frac{R}{H}\right)^2$  est le plus grand. La gamme de paramètres se trouvant dans le régime "T-dominated" pour la pluie de fer dans l'océan de magma initial n'est donc sans doute pas réaliste. En revanche, le maintien en suspension est possible dans les autres systèmes, tout comme la sédimentation. Tous les cas sont donc possibles pour ces systèmes, du maintien en suspension de toutes les particules à la sédimentation. Lorsque aucune particule ne reste en suspension, la structure du système solidifié sera stratifiée. Au contraire, lorsque toutes les particules restent en suspension jusqu'à la solidification, la structure résultante sera homogène.

# Chapitre 6

## Retour sur l'expérience.

Dans ce chapitre, nous revenons sur les expériences faites au laboratoire, en particulier sur les points délicats qui ont posé problème pour l'interprétation des résultats.

### 6.1 La procédure expérimentale.

#### 6.1.1 La mise en suspension initiale des billes.

Lors des premières expériences, les billes de PMMA (PolyMéthylMétacrylate) s'aggloméraient par interaction électrostatique. Afin de résoudre ce problème, nous les avons enrobées d'une fine couche de liquide vaisselle pour éviter ce type d'interaction. Nous avons constaté qu'il est important de ne pas surdoser la quantité de liquide vaisselle qui blanchit la solution et rend alors l'exploitation des vidéos impossible. Cela permet également de limiter le nombre de billes qui restent "accrochées" sur la plaque du haut.

Une deuxième difficulté provient de la manière de mettre les billes en suspension. Ici, la problématique est de mettre initialement la totalité des billes en suspension, en perturbant le moins possible la convection préalablement établie. La convection n'étant pas assez vigoureuse, nous ne pouvons pas démarrer l'expérience en constituant initialement un lit de particules à la base de la cuve, attendant ensuite que toutes les particules soient arrachées par le cisaillement du fluide sur chaque particule située à la surface du lit. Notez que ce mécanisme a été suggéré par Solomatov *et al.* (1993) pour expliquer ce type d'entraînement. Nous avons donc dû tester plusieurs méthodes :

- la première, peut-être la plus évidente, est d'insérer les billes par le haut de la cuve, puis de mélanger afin d'obtenir une répartition homogène de billes dans tout le volume de la cuve. Malheureusement, cette technique implique de retirer la plaque du haut de la cellule expérimentale. La convection se trouve alors fortement perturbée : d'une part, la température n'est alors plus imposée en haut

pendant le déroulement de cette opération et d'autre part, manipuler cette plaque proprement s'avère difficile. En effet, une petite quantité de fluide est entraînée lors du retrait, ce qui implique la formation d'une bulle entre le fluide et la plaque du haut. Cette bulle, en créant une pellicule isolante, perturbe alors la diffusion thermique elle-même, la température n'étant pas imposée de la même façon sur toute la surface de la plaque. Elle perturbe également la dynamique des billes qui ont tendance alors à rester piégées à l'interface eau-air à cause des effets de tension superficielle.

- Une deuxième solution consisterait à injecter les billes à travers un orifice percé dans la plaque du haut. Toutefois, une bulle d'air apparaîtrait alors facilement au niveau du trou et les billes ne seraient pas équiréparties dans la cuve.
- La troisième solution consiste à commencer à imposer le gradient thermique alors que les billes sont déjà à l'intérieur. Ensuite, un système de deux aimants, le premier situé sur la surface intérieure de la cuve et le second sur sa surface extérieure<sup>1</sup>, permet de mettre les billes en suspension. L'aimant situé à l'intérieur de la cuve a une taille suffisamment grande pour créer des tourbillons capables d'entraîner les billes dans tout le volume. Nous mettons donc en mouvement l'aimant intérieur depuis l'extérieur, les billes se mettent alors en suspension. Nous avons choisi cette technique pour nos expériences. Elle est pratique car elle évite d'ouvrir la cuve. En outre, elle perturbe évidemment les mouvements convectifs mais cette perturbation entraîne une forme de décroissance du nombre de billes en suspension différente de celle observée pour la convection. Nous pouvons donc clairement identifier son effet.

### 6.1.2 La nature des billes.

Nous avons utilisé des billes en Polyméthylmétacrylate (PMMA). Ce matériau présente l'avantage d'être d'une densité proche de celle de l'eau salée. En revanche, nous avons réalisé lors des expériences que la densité des billes complètement sèches était plus petite que celle des billes mouillées. Pour expliquer ce phénomène nous avons émis deux hypothèses :

- le PMMA est un matériau légèrement poreux pouvant absorber les liquides à hauteur de 0.3 % de son volume. Si l'on considère une solution d'eau salée de densité 1.18 qui remplit complètement les porosités d'une bille en PMMA (densité du matériau=1.19), la densité de la bille mouillée est de 1.190 tandis que celle de la bille sèche, dont les pores sont remplis d'air, est de 1.186.
- nous avons également envisagé l'hypothèse d'un film d'eau salée qui vient se "coller" par interaction électrostatique sur la surface de chaque bille lors des ex-

---

1. Ce dispositif rappelle celui utilisé en aquariophilie pour nettoyer l'intérieur des vitres d'un aquarium.

périences. Si seul ce mécanisme est impliqué dans le phénomène, la densité d'une bille entourée d'un film d'eau salée moins dense est légèrement plus petite. Par exemple, pour un film d'eau d'une épaisseur de  $5 \mu m$ , la densité passe de 1.19 pour une bille sans film à 1.1895 pour une bille avec film.

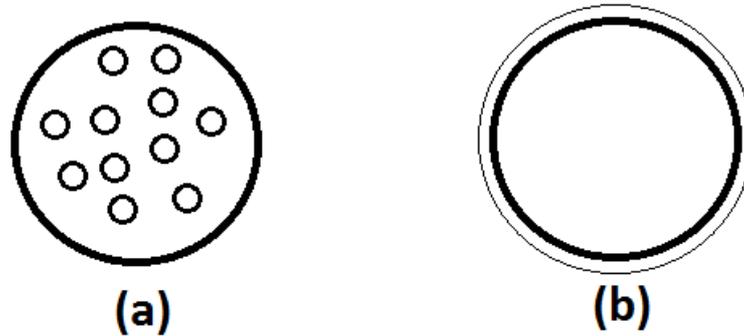


FIGURE 6.1 – Schéma des billes utilisées : (a) bille poreuse et (b) bille entourée d'un film d'eau salée.

Or, nous avons observé que la densité des billes augmentaient lorsqu'elles étaient plongées dans l'eau salée. Il semblerait donc que la première hypothèse l'emporte. Toutefois, nous ne pouvons pas éliminer la seconde. Il est probable que les deux phénomènes interviennent. Nous avons opté pour la solution suivante : laisser les billes à demeure dans de l'eau salée afin qu'elles soient toujours saturées en sel et que leur densité ne varie pas d'une expérience à l'autre.

### 6.1.3 Le traitement d'images.

Afin de décompter le nombre de particules en suspension en fonction du temps, nous avons mis au point un programme sous Matlab permettant de distinguer les particules par rapport au fluide environnant puis de les décompter. Les principales étapes successives sont :

1. convertir les images en niveaux de gris,
2. soustraire le bruit de fond sur toutes les images,
3. définir un niveau de gris qui sera le seuil de binarisation. Cette étape est cruciale car il ne faut perdre aucune particule ni en ajouter artificiellement sur les images. La difficulté réside également dans le fait que l'éclairage de la cuve (par un de ses côtés) n'est pas homogène sur toute sa surface, puisque la nappe de lumière éclaire par un seul des côtés de la cuve.

4. Enfin, la fonction “bwlabel” de Matlab permet d’attribuer un label à chaque particule en suspension puis de les compter.

## 6.2 Points communs et différences par rapport au cas géophysique.

En mécanique des fluides géophysiques, nous avons rarement accès au laboratoire aux ordres de grandeur des paramètres contrôlant les systèmes. Pour les analyser, nous cherchons donc des lois d’échelle entre les nombres sans dimension. Puis, nous faisons l’hypothèse que ces lois d’échelle restent valables sur l’ensemble de la gamme des nombres sans dimension si les mécanismes impliqués restent identiques. Nous pouvons alors extrapoler les résultats pour les nombres sans dimension correspondant au cas géophysique. De plus, dans notre expérience, nous avons effectué quelques simplifications par rapport au cas géophysique exact. Dans cette section, nous allons donc les expliciter. Nous verrons que, malgré la simplicité apparente de notre dispositif, les mécanismes impliqués sont encore d’actualité dans les systèmes géophysiques.

Tout d’abord, nous utilisons un dispositif de type Rayleigh-Bénard fixe dans le référentiel du laboratoire. La première constatation que nous faisons est que, contrairement à la Terre, notre dispositif n’est pas en rotation. Pour évaluer l’influence de la rotation, il convient d’estimer l’ordre de grandeur des différents termes de l’équation de Navier-Stokes, qui peut s’écrire dans sa version adimensionnée (cf. équation (1.23)) :

$$\frac{1}{Pr} \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{2}{E} \vec{e}_z \wedge \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}P}{E} + \vec{\nabla}^2 \vec{u} + Ra \Theta r \vec{e}_r. \quad (6.1)$$

Nous constatons que le terme de Coriolis est négligeable par rapport aux autres uniquement si  $E$  est grand. C’est le cas pour le manteau, dans lequel la convection n’est pas affectée par la rotation. En revanche, pour les systèmes géophysiques qui nous intéressent, le nombre d’Ekman est petit. Leurs valeurs sont données dans le tableau 5.4. Par exemple, pour l’océan de magma initial, le nombre d’Ekman est très petit (inférieur à  $10^{-12}$ ). La force de Coriolis a donc une influence sur ce système. Pour le lac de lave et la chambre magmatique, c’est plus discutable puisque  $E$  peut être de l’ordre, voir supérieur à 1, en fonction de la taille du système et de la viscosité du fluide. Nous avons vu que la rotation avait tendance à rendre l’écoulement invariant selon la direction de l’axe de rotation, il s’agit de la contrainte de Proudman-Taylor. La convection est alors dominée par la rotation et les couches limites sont des couches limites visqueuses, contrairement au cas de la convection non-tournante, où ce sont les couches limites thermiques qui sont impliquées. (King *et al.*, 2009) ont mis en évidence un nombre de Rayleigh  $Ra_t$  de transition entre ces deux régimes à partir de la loi d’échelle  $Nu$  en fonction de  $Ra$ . Ils ont montré que  $Ra_t \sim 10^8$  par des études numériques et expérimentales. Or, dans

les systèmes que nous avons considérés, les nombres de Rayleigh sont très grands, au minimum égaux à  $10^9$ . La loi d'échelle  $Nu$  en fonction de  $Ra$  sera donc inchangée par rapport au cas sans rotation. Par ailleurs, dans le cas où la convection serait fortement affectée par la rotation, le mécanisme de réentrainement des particules suggéré par Solomatov & Stevenson (1993) deviendrait sans doute caduc puisque le cisaillement serait alors différent. Toutefois, pour nous, la seule condition qui compte est d'avoir des mouvements vigoureux de convection capables de maintenir les particules en suspension, qu'ils soient influencés ou non par la rotation.

En deuxième lieu, nous imposons la température en haut et en bas de la cuve par deux circulations d'eau thermostatée dans les plaques de cuivre. Il est ainsi plus commode de conduire les expériences : les deux températures étant contrôlées, il est en effet plus facile d'imposer les paramètres sans dimension de travail choisis. De plus, dans ce cas la température moyenne du fluide reste constante pendant chaque expérience. La reproductibilité des expériences est donc plus facile à assurer puisque nous ne travaillons pas pendant le régime thermique transitoire. Toutefois, cette façon d'imposer la température ne correspond pas directement à l'ensemble des cas géophysiques comme nous allons le voir au paragraphe suivant.

En effet, on rencontre dans la nature toutes les possibilités pour transférer la chaleur vers et depuis le fluide. Elles peuvent être classées en trois catégories. Martin & Nokes (1989) ont étudié ces trois configurations : (i) refroidissement en haut et en bas, (ii) refroidissement par le dessus uniquement, ainsi que (iii) chauffage par le bas et refroidissement par le haut. Concernant les chambres magmatiques tout d'abord, si le magma qu'elles contiennent n'est pas expulsé lors d'une éruption volcanique, celui-ci peut cristalliser en commençant, compte-tenu des conditions de température et de pression, par le bas de la chambre. Lors de la cristallisation, de la chaleur latente est produite, permettant d'entretenir la convection thermique et des éléments plus légers sont également relâchés, permettant d'entretenir une convection compositionnelle. La température du haut est quant à elle imposée par conduction dans les roches entourant la chambre. Avant que la cristallisation ne se mette en place, la chaleur est uniquement perdue par le haut de la chambre. Ce cas correspondrait en toute rigueur au cas d'une cuve uniquement refroidie par le haut. Enfin, il est possible que le courant ascendant de chaleur responsable de la fusion partielle de la chambre, prenant place sous la chambre magmatique, s'arrête. Si la cristallisation n'a pas débuté, la chambre n'est plus soumise à aucune source de chaleur. Expérimentalement, cela correspond à une température en bas de la cuve plus importante qu'en haut, de telle sorte que la convection est encore possible mais en partant d'une situation initiale où la température moyenne du fluide est plus grande que les températures des plaques. Pendant tout le temps où la température moyenne est supérieure aux températures des deux plaques, on a bien à faire à un refroidissement similaire au cas géophysique. Cette configuration peut également modéliser un chauffage interne due aux désintégrations radioactives. L'évolution décroissante de

la température moyenne peut être alors comparée à la décroissance de la production de chaleur interne (Weinstein & Olson, 1990).

Martin & Nokes (1989) ont observé que les structures convectives sont les mêmes dans les trois cas, i.e. une ou plusieurs cellules convectives au centre de la cuve accompagnées de panaches ascendants et descendants, excepté lorsque la plaque du bas est refroidie. Dans ce cas, au lieu d'avoir des "plumes" ascendantes depuis le bas, ils ont observé la présence d'une couche de fluide stable à la base de la cuve, comme l'avait déjà relevé Jaupart *et al.* (1984) et Jaupart & Brandeis (1986). Les panaches se développent uniquement depuis la plaque du haut car la température moyenne au centre de la cuve étant plus grande que la température du bas, la zone du bas est thermiquement stable. Notre étude ne peut donc s'appliquer aux cas géophysiques pour lesquels le refroidissement a lieu en bas et en haut du conteneur. Hormis pour ce cas spécifique, nous pouvons cependant raisonnablement conclure que la façon d'imposer la convection n'a pas grande conséquence sur la forme de l'écoulement.

Evidemment, dans la nature, les systèmes ne sont pas parfaitement parallélépipédique comme l'est une cuve de type Rayleigh-Bénard. Cependant, Neumann (1990), en comparant l'écoulement convectif dans un conteneur cylindrique à celui d'un conteneur cubique, a montré que d'une part la convection prenait la même forme dans les deux cas, et d'autre part que l'amplitude des vitesses convectives étaient relativement similaires pour les deux géométries. Il est donc raisonnable de penser que l'utilisation d'une cuve parallélépipédique convient pour notre étude.

### 6.3 Hypothèses et limitations de l'expérience.

**La faible concentration de particules.** Nous avons fait l'hypothèse que la concentration en particules dans la cuve était suffisamment petite pour que chaque particule sédimente indépendamment des autres, et que la présence des autres particules ne perturbait pas son écoulement. Cette hypothèse est respectée dans nos expériences, puisque la fraction solide initiale était autour de 0.3%. De plus, pour visualiser les particules, nous avons utilisé une nappe de lumière bien plus épaisse que la taille des particules, de telle sorte que deux particules peuvent se situer sur un même plan horizontal. Il est donc important que la concentration de particules en suspension soit suffisamment petite pour que le nombre de particules cachées sur l'image soit négligeable. Enfin, nous supposons que le nombre de particules en suspension est suffisamment faible pour que la convection ne soit pas affectée par leur présence. En effet, le transfert thermique serait alors modifié et la convection perturbée, de telle sorte que les lois d'échelle que nous avons utilisées seraient sans doute à remettre en cause. Notre analyse est donc valable uniquement pour les faibles concentrations, nos résultats doivent être utilisés avec précaution pour les plus grandes concentrations.

**L'utilisation de particules solides.** Dans l'océan de magma initial, la séparation métal-silicate a impliqué la formation de gouttelettes de métal, non des particules solides. En premier lieu, travailler avec des particules solides est plus facile puisque d'une part, on se concentre alors uniquement sur le mécanisme de sédimentation et d'autre part, leur mise en oeuvre expérimentale est plus aisée. Toutefois, travailler avec des particules solides engendre un grand nombre de simplifications par rapport à des gouttelettes :

- tout d'abord, nous ne prenons pas en compte les effets de tension superficielle, responsables de la déformation, de la fragmentation ou de la coalescence des gouttelettes (Ichikawa *et al.*, 2010).
- Nous ne considérons pas non plus les échanges thermiques et chimiques importants pouvant exister entre les deux phases de l'océan de magma. Rubie *et al.* (2003) ont estimé le temps d'équilibre chimique (i.e. le temps au bout duquel la diffusion d'une phase vers l'autre sera terminée) minimal à 30000 ans. Le calcul du temps de sédimentation  $t_s$ , basé sur une vitesse typique de sédimentation de  $0.5 \text{ m.s}^{-1}$  et un océan de magma d'une profondeur approximative de 1000 km, donne  $t_s \approx 23$  jours.  $t_s$  est donc très inférieur au temps d'équilibre chimique. Par conséquent, nous pouvons négliger sans faire d'approximation tout effet chimique lors de notre étude et utiliser des particules solides chimiquement inertes dans nos conditions expérimentales.

# Chapitre 7

## Perspectives.

Les premiers résultats obtenus ouvrent la voie pour de futures études. Tout d'abord, il est indispensable d'étendre les lois d'échelle obtenues seulement sur une gamme réduite de paramètres à une gamme plus large. En particulier, ce genre d'étude systématique s'avère indispensable pour corroborer l'hypothèse de viscosité apparente expliquant la différence entre la vitesse de sédimentation déduite de l'expérience et la vitesse de Stokes théorique. Il serait notamment intéressant d'étudier la dépendance de la viscosité apparente sur une gamme de  $Ra$  plus grande, ainsi que sa dépendance en fonction du diamètre des particules et de la viscosité moléculaire du fluide.

Concernant l'application de notre étude à la pluie de fer dans l'océan de magma initial, nous avons considéré l'évolution des gouttelettes une fois formées. Nous ne nous sommes pas intéressés aux effets de tension de surface, responsables d'une part de la formation de ces gouttelettes à partir d'une plus grosse goutte, et de leur éventuelle coalescence durant la sédimentation. Une analyse statistique de la distribution des gouttelettes dans la cuve en fonction de leurs tailles serait également pertinente, afin de savoir si seules les plus petites gouttelettes seront ré-entraînées. En outre, une surface d'échange entre les deux fluides plus importante dans le cas de petites gouttes entraîne une augmentation du chauffage par frottement visqueux et donc une possible modification des propriétés thermiques du milieu. Ichikawa *et al.* (2010) ont étudié numériquement ces problèmes, en deux et trois dimensions. Le même type d'étude expérimentale serait pertinente.

Nous nous sommes concentrés uniquement sur l'influence de la convection sur le comportement des particules. Nous pouvons également nous poser la question inverse : quelle va être l'influence de la présence des particules sur l'écoulement. Même si quelques simulations numériques prennent en compte cet effet (Bosse *et al.*, 2006; Gan *et al.*, 2003), la majorité (Wang & Maxey, 1993) se limite à modéliser l'influence de l'écoulement sur les particules. En revanche, de nombreux travaux expérimentaux existent à ce propos, qui prennent de fait en compte les deux effets : pour des particules en suspension dans un fluide soumis à une turbulence de grille (Huppert *et al.*, 1995;

Aliseda *et al.*, 2002; Yang & Shy, 2003) ou pour des particules en suspension dans un fluide convectant, comme nous l'avons vu précédemment. Cette question est particulièrement pertinente lorsque la concentration moyenne en particules est très importante. Les tempêtes de sable sont par exemple concernées : elles résultent de mouvements de convection atmosphériques et ont pour conséquence un transport de poussière sur plusieurs milliers de kilomètres. Ces micro-grains de sable présents dans l'atmosphère peuvent alors inhiber la formation de cyclones, comme cela a été le cas pour les saisons cycloniques particulièrement peu intenses des années 80 et 90 (Evan *et al.*, 2006). Pour quantifier l'influence des particules sur la turbulence, il faudrait pouvoir caractériser le champ de vitesse des billes indépendamment du champ de vitesse de l'écoulement, par exemple en utilisant un système de double PIV (Vélocimétrie par Imagerie de Particules) : le premier pour le fluide et le second pour les particules.

Une autre perspective intéressante concerne l'influence de la présence de ces particules sur le flux de chaleur. Par exemple, Chang *et al.* (2008) ont étudié le comportement de micro-particules en suspension dans un fluide en convection. Ils ont montré que la sédimentation de particules entraînait une diminution du flux de chaleur, quantifié par le nombre de Nusselt  $Nu$  à travers l'écoulement.

## **Troisième partie**

### **Forme et longévité de réservoirs denses et peu visqueux au bas du manteau terrestre.**

Cette partie a pour objet, en combinant une expérience modèle de laboratoire à des simulations numériques, d'étudier la forme et la longévité des réservoirs situés à la base du manteau convectif. Comme expliqué plus en détails dans l'introduction générale, certains modèles d'évolution du globe considèrent que ces réservoirs denses et peu visqueux persistent sans être mélangés depuis la création du manteau, et constituent la source du volcanisme du type "points chauds".

Il est possible de modéliser cette situation par une convection thermique de Rayleigh-Bénard à deux couches, qui est donc hétérogène et s'inscrit dans la thématique de cette thèse. Cette étude a été en partie réalisée par A. Moinet, un stagiaire de licence 3 de l'E.N.S. de Cachan que nous avons encadré, D. Cébron, M. Le Bars et moi-même, au cours du mois de juin 2010.

Après un rappel du modèle théorique de la convection à deux couches, nous exposerons les résultats numériques puis expérimentaux.

# Chapitre 8

## Convection de Rayleigh-Bénard à deux couches.

### 8.1 Mise en équations.

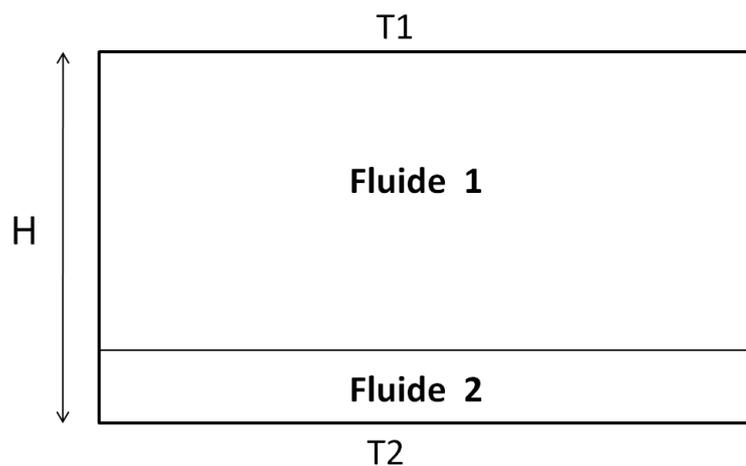


FIGURE 8.1 – Schéma du système à 2 couches étudié.

Cette fois, nous étudions non pas une seule couche, comme c'était le cas dans la partie introductive, mais deux couches de fluides miscibles. Initialement, ces deux couches sont superposées l'une sur l'autre, la couche la plus dense étant située en dessous (cf. figure 8.1), mais cette configuration peut éventuellement être renversée par les effets thermiques. Les deux fluides sont newtoniens. Nous appelons la couche 1 la couche du dessus et la couche 2 celle du dessous, et indiquerons les variables correspondantes par les mêmes numéros. La couche 1 a une viscosité cinématique  $\nu_1$  (et une viscosité dyna-

mique  $\eta_1 = \nu_1/\rho_0$ ) supérieure à celle de la couche 2 de densité supérieure et de viscosité cinématique  $\nu_2$  (et de viscosité dynamique  $\eta_2 = \nu_2/\rho_{20}$ ). Pour faire le parallèle avec la situation géophysique, la couche du dessus modélise un crypto-continent et la couche du dessous la zone ULVZ (cf. figure 8.2)).

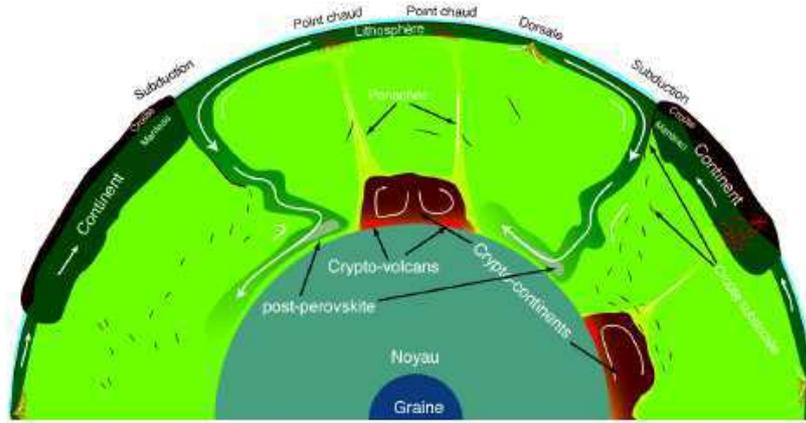


FIGURE 8.2 – Représentation schématique de l’intérieur du manteau terrestre, avec les différents structures le composant (image Labrosse (2010) (site web)).

Leurs densités s’écrivent :

$$\rho_1 = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)), \quad \rho_2 = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)) + \rho_{20} - \rho_0, \quad (8.1)$$

où  $\rho_0$  est la densité du fluide 1 à la température  $T_0$ ,  $\rho_{20}$  celle du fluide 2 à la température  $T_0$  et  $\alpha$  le coefficient de dilatation thermique isobare, supposé identique pour les deux fluides.

Nous pouvons maintenant réécrire les équations de la convection de Rayleigh-Bénard pour chacune des 2 couches. Pour adimensionner ces équations, nous prenons comme fluide de référence le fluide 1. Les différentes échelles caractéristiques que nous utilisons sont :

- $H$ , la hauteur totale du domaine comme échelle de longueur ;
- $\Delta T = T_2 - T_1$ , le contraste de température entre le bas et le haut du domaine comme échelle de température ;
- $H^2/\kappa_T$ , le temps typique de diffusion thermique comme échelle de temps ;
- $\frac{\rho_0 \nu_1 \kappa_T}{H^2}$  comme échelle de pression ;

où  $\kappa_T$  est la diffusivité thermique, considérée comme identique pour les deux couches. Pour les fluides 1 et 2, les équations de la température et de la conservation de la masse, s’écrivent alors dans leurs versions sans dimension :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla}^2 T. \quad (8.2)$$

En revanche, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'exprime différemment dans les deux fluides. Pour le fluide 1, son expression est inchangée par rapport au cas monocouche :

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla}^2 \vec{u} + Ra T \vec{e}_z, \quad (8.3)$$

où  $\vec{e}_z$  est un vecteur vertical unitaire dirigé vers le haut. Les nombres de Rayleigh  $Ra$  et de Prandtl  $Pr$  sont définis comme :

$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\kappa_T \nu_1}, \quad Pr = \frac{\nu_1}{\kappa_T}. \quad (8.4)$$

En revanche, pour le fluide 2, compte-tenu des définitions utilisées pour la viscosité et la densité de chaque fluide, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\frac{\rho_{20}}{\rho_0} \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \frac{\eta_2}{\eta_1} \vec{\nabla}^2 \vec{v} + Ra \left( T - \frac{\rho_{20} - \rho_0}{\alpha \Delta T \rho_0} \right) \vec{e}_z. \quad (8.5)$$

Dans le manteau et dans les expériences décrites par la suite, la généralisation de l'approximation de Boussinesq implique  $\frac{\rho_{20}}{\rho_0} \sim 1$ . En introduisant un paramètre  $c$  tel que  $c = 0$  dans le fluide 1 et  $c = 1$  dans le fluide 2, les deux équations (8.3) et (8.5) se simplifient en une seule :

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + (1 - Ac) \vec{\nabla}^2 \vec{v} + Ra(T - Bc) \vec{e}_z, \quad (8.6)$$

où  $A = 1 - \frac{\eta_2}{\eta_1}$  et  $B = \frac{\Delta \rho}{\alpha \Delta T \rho_0}$ , avec  $\Delta \rho = \rho_{20} - \rho_2$ .  $B$  est le nombre de flottabilité déjà rencontré dans la deuxième partie du manuscrit.  $c$  correspond à la concentration volumique du fluide 2, qui dans notre expérience, est liée linéairement à la concentration en sel. Nous pouvons donc écrire que  $c = 0$  dans le fluide 1 et  $c = 1$  dans le fluide 2. La différence entre les deux couches provient de la concentration en sel. Si l'on considère la diffusion du sel entre 1 et 2 à l'interface entre les deux fluides, il faut ajouter une équation d'advection-diffusion qui s'écrit en version adimensionnée :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} c = \frac{1}{Le} \vec{\nabla}^2 c, \quad (8.7)$$

où  $Le = \frac{\kappa_T}{\kappa_c}$ , le rapport entre les diffusivités thermique et chimique, est le nombre de Lewis. Il compare l'importance relative des deux types de diffusion. Si  $Le \gg 1$ , le temps caractéristique de diffusion chimique sera très grand devant le temps caractéristique de diffusion thermique. A l'échelle des temps d'observation du système étudié, l'interface entre les deux fluides restera franche et la diffusion chimique pourra être négligée devant la diffusion thermique. Enfin, il faut ajouter les conditions de continuité de vitesse, des contraintes, de la température et du flux de chaleur à l'interface.

En résumé, notre système peut donc être décrit par les nombres sans dimension  $Ra$ ,  $B$ ,  $Le$ ,  $A$  et  $Pr$ . Il faut ajouter le rapport d'épaisseur  $a = h_2/H$ , où  $h_2$  désigne l'épaisseur initiale de la couche 2.

## 8.2 Analyse d'échelles dans la limite non diffusive.

Nous cherchons la dépendance relative des différents paramètres sous forme de lois d'échelle. Pour cela, nous nous inspirons de l'analyse de Schmidt & Zhang (2008). Les auteurs considèrent que chaque réservoir (correspondant à la couche 2 de l'analyse précédente) est entraîné par un champ de contrainte local. Ils proposent une loi d'échelle concernant le débit volumique du fluide s'échappant de chaque réservoir. La situation est celle de la figure 8.3.

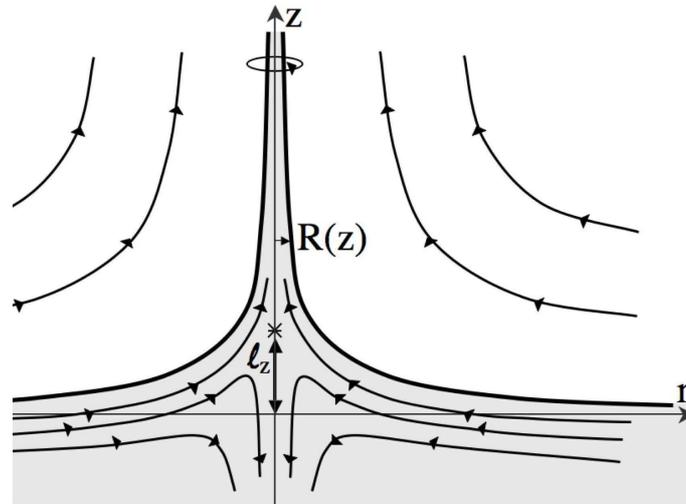


FIGURE 8.3 – Schéma de l'interface déformée  $R(z)$  et des lignes de courant associées dans les deux couches. L'écoulement dans la couche du haut entraîne celle du bas en formant un fin panache (Schmidt & Zhang, 2008).

Le champ de vitesses dans la couche supérieure s'exprime :

$$\vec{u} = -\frac{Ex}{2}\vec{e}_x - \frac{Ey}{2}\vec{e}_y + Ez\vec{e}_z, \quad (8.8)$$

en coordonnées cartésiennes.  $E$  ( $s^{-1}$ ) désigne le taux de cisaillement. Puis, en équilibrant dans l'équation de Navier-Stokes la contrainte visqueuse verticale avec le terme de pression hydrostatique, il est possible de définir une échelle de hauteur caractéristique :

$$l_z = \frac{2\eta_1 E}{\Delta\rho g}. \quad (8.9)$$

Cette grandeur correspond à la hauteur typique de déflexion de la cellule de recirculation de la couche du bas lorsque le fluide 1 est entraîné vers le haut. Dans l'hypothèse que la couche 2 est fine et ne convecte pas, le champ de vitesses s'y décompose selon trois zones distinctes :

1. proche de l'interface, le fluide est entrainé par les contraintes exercées par l'écoulement de la couche 1. La vitesse s'exprime comme  $u_+(z) = Ez$ .
2. Plus loin de l'interface, un écoulement de Poiseuille se met en place, gouverné par le gradient de pression interne  $dP_0/dz$  existant. La vitesse résultante s'exprime comme  $u_P(r, z) = -\frac{1}{4\eta_2} \frac{dP_0}{dz} [R^2(z) - r^2]$ .
3. Enfin, la pression hydrostatique entraine un écoulement de fuite  $u_-(r, z) = -\frac{\Delta\rho g}{4\eta_2} [R^2(z) - r^2]$ .

Il est possible de définir un rayon caractéristique  $l_R$  en égalant  $u_+$  et  $u_P$  calculées au point de stagnation situé environ à la hauteur  $l_z$  :

$$l_R = \sqrt{2 \frac{2\eta_2 E}{\Delta\rho g} \frac{2\eta_1 E}{\Delta\rho g}}. \quad (8.10)$$

Nous pouvons alors écrire le débit volumique de fluide  $Q_0$  entrainé depuis la couche du bas :

$$Q_0 = c_0 (El_z) (\pi l_R^2) = c_0 \frac{16\pi\eta_1^2\eta_2 E^4}{(\Delta\rho g)^3}, \quad (8.11)$$

où  $c_0$  est un coefficient d'entrainement sans dimension. En version bidimensionnelle, comme cela sera le cas lors de notre étude numérique,  $Q_0$  s'exprime comme :

$$Q_0 \sim c_0 (El_z) l_R = c_0 \frac{4\sqrt{2}\eta_1^{3/2}\eta_2^{1/2} E^3}{(\Delta\rho g)^2}. \quad (8.12)$$

En réalité, une analyse plus fine (Schmidt & Zhang, 2008) à partir de l'équation de Navier-Stokes donne pour  $Q_0$  :

$$Q_0 = (Ez)\pi R^2(z) - \frac{\pi R^4(z)}{8\eta_2} \left( \frac{dP_0}{dz} + \Delta\rho g \right). \quad (8.13)$$

Nous reconnaissons ici les trois contributions au débit : l'écoulement  $Ez$  induit par les contraintes de l'écoulement de la couche du haut, l'écoulement de Poiseuille dû au gradient de pression ainsi que le terme de pression hydrostatique. Une intégration numérique de cette équation conduit à l'expression de la forme de l'interface lorsque le réservoir ne se vide pas :

$$R_I(z) = S \sqrt{(3l_z/2z)^{2/5} - 1}, \quad (8.14)$$

où  $S$  est une hauteur définie lors de la résolution numérique comme étant le lieu au dessus de l'interface où s'exercerait la force effective qui permettrait de la déformer.

Les relations exprimées plus hauts impliquent  $E$ , le taux de cisaillement. Or, d'après la relation (8.8), le taux de cisaillement  $E$  peut s'exprimer en ordre de grandeur :  $E \sim$

$w/\delta$ , où  $w$  désigne la vitesse convective et  $\delta$  la taille caractéristique des instabilités. D'après l'étude de la première partie, ils s'expriment comme :

$$w \sim Ra^{1/3} \text{ et } \delta \sim Ra^{-1/3}. \quad (8.15)$$

Nous nous attendons donc pour  $E$  à une dépendance de la forme  $E \sim Ra^{2/3}$ .

Nous avons donc explicité les lois d'échelle obtenues par Schmidt & Zhang (2008), nous pouvons maintenant les comparer avec les résultats de nos études expérimentale et numérique.

# Chapitre 9

## Etude numérique.

Cette étude se fait par la méthode des éléments finis<sup>1</sup> dans un domaine à deux dimensions. Nous résolvons les équations (8.2), (8.6) et (8.7). Dans le cadre de cette étude numérique, nous suivons un cheminement identique à l'étude expérimentale. Nous voulons donc déterminer les lois d'échelle concernant le temps d'érosion en fonction des paramètres sans dimension du même problème. Nous partons d'une seule couche convectante puis nous insérons un petit volume de fluide à la base du domaine. Ici, le fluide inséré est confiné et ne s'étale pas sur toute la surface ; ce qui est une situation plus proche du cas géophysique. La figure 9.1 montre, par la visualisation de la concentration  $c$ , l'évolution temporelle typique du système.

### 9.1 Le taux de cisaillement $E$ .

Afin de pouvoir comparer le temps d'érosion mesuré pour différentes valeurs de  $Ra$  avec celui donné par l'équation (8.12), il convient de vérifier la dépendance de  $E$  selon  $Ra$ . Pour évaluer sa valeur numérique, nous avons utilisé l'expression (8.8) qui donne le champ de vitesses en coordonnées cartésiennes. La dépendance de la composante horizontale ou verticale de la vitesse en fonction de  $x$  ou de  $y$  respectivement, nous donne, via le calcul du coefficient directeur, le taux de cisaillement. La figure 9.2 expose, en coordonnées logarithmiques, les mesures de  $E$  en fonction de  $Ra$ . Nous constatons que, comme nous l'avions prévu précédemment, une loi du type  $E \sim Ra^{2/3}$  convient.

### 9.2 le temps d'érosion $t$ .

La figure 9.3 présente la dépendance du temps d'érosion adimensionné par  $H^2/\kappa_T$  en fonction de  $Ra$ , en coordonnées logarithmiques. Nous constatons qu'une droite de pente

---

1. Nous utilisons pour cela le logiciel Comsol.

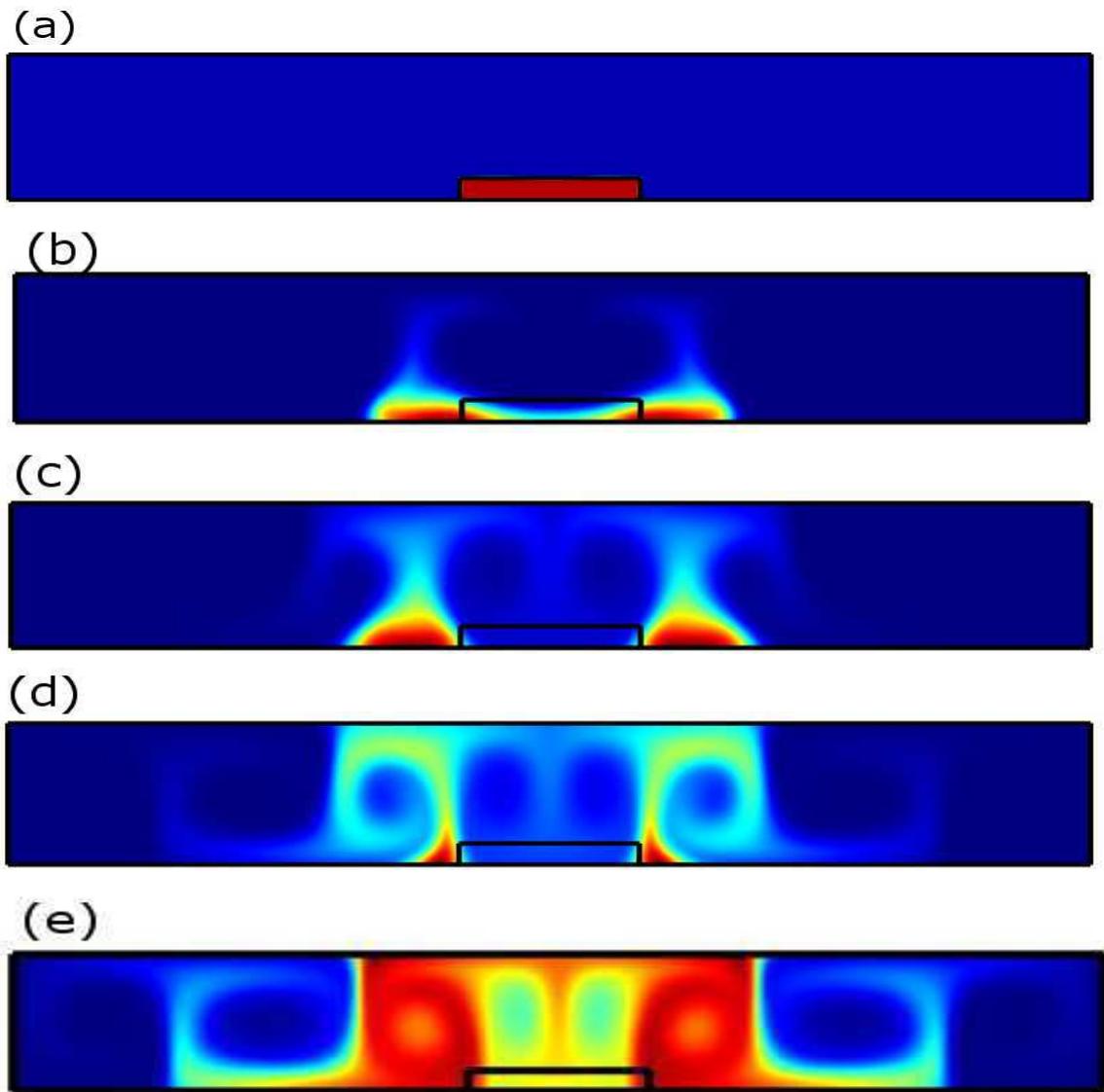


FIGURE 9.1 – Images de l'évolution typique d'un réservoir pour différents temps (adimensionnés par le temps diffusif  $H^2/\kappa_T$ ) : (a)  $t = 0$ ; (b)  $t = 0.06$ ; (c)  $t = 0.2$ ; (d)  $t = 0.3$  et (e)  $t = 0.4$ . Les paramètres sans dimension utilisés pour cette simulation sont :  $Ra = 7.5 \times 10^3$ ,  $B = 2$ ,  $Le = 10$ ,  $Pr = 10$  et  $A = 0.8$ . L'évolution du système est visualisée par la concentration en sel  $c$ . La couleur rouge correspond à  $c = 1$  et le bleu à  $c = 0$ .

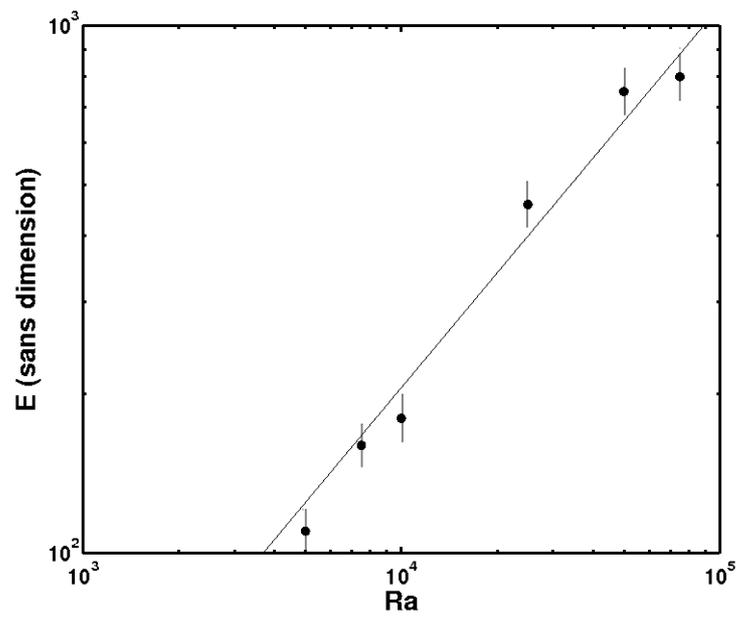


FIGURE 9.2 – Graphe, en coordonnées logarithmiques, du taux de cisaillement  $E$  en fonction du nombre de Rayleigh  $Ra$  ( $B = 2$ ,  $Le = 10$ ). La droite représente une loi d'échelle d'exposant  $2/3$

$-1/2$  s'aligne sur les points numériques. Puisque nous avons trouvé numériquement que

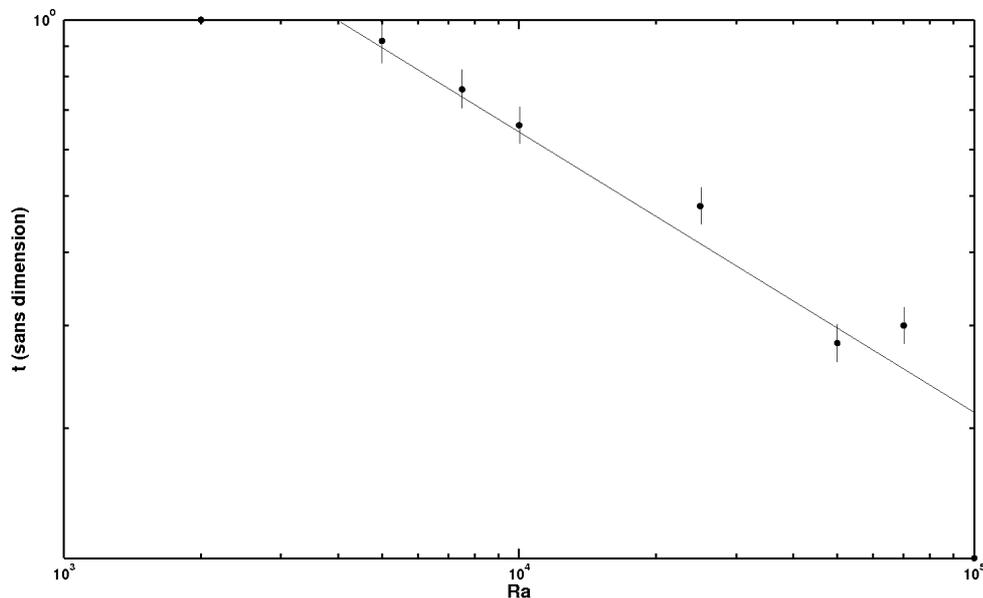


FIGURE 9.3 – Temps d'érosion adimensionné par  $H^2/\kappa_T$  en fonction du nombre de Rayleigh, en coordonnées logarithmique ( $B = 2$ ,  $Le = 10$ ). Une droite de pente  $-1/2$  s'aligne correctement sur les points numériques.

$E \sim Ra^{2/3}$ , nous nous attendons, d'après l'équation (8.12), à une loi du type  $t \sim Ra^{-2}$  puisque le système est bidimensionnel. Notre résultat peut sembler en contradiction avec le modèle proposé par Schmidt & Zhang (2008). Toutefois, celui-ci est valable dans la limite où la diffusion chimique peut être négligée, i.e. lorsque  $Le \gg 1$ . Or, nous sommes numériquement limités à  $Le = 10$ , ce qui est une valeur sans doute trop faible pour pouvoir négliger complètement la diffusion de concentration.

La figure 9.4 présente la dépendance du temps d'érosion adimensionné en fonction de  $B$ , en coordonnées logarithmiques. Ici, nous constatons que le régime asymptotique est atteint pour  $B > 1$ . Pour  $B \leq 1$ , la stratification en deux couches n'est pas stable et leurs renversements sont possibles. Il s'agit donc d'un régime différent de celui de notre étude. Nous nous concentrons donc sur les simulations effectuées pour  $B > 1$ . Dans cette gamme le temps d'érosion  $t$  varie comme  $t \sim B$ . Cette fois, nous nous attendions, toujours d'après l'équation (8.12) à une dépendance du type  $t \sim B^2$ .

Le désaccord entre nos résultats et le modèle de Schmidt & Zhang (2008) l'existence de deux types de régime :

- dans le régime diffusif, le mélange se fait uniquement par diffusion de concentration. Son temps caractéristique est proportionnel à  $h_2^2/\kappa_T$ , qui ne présente pas de

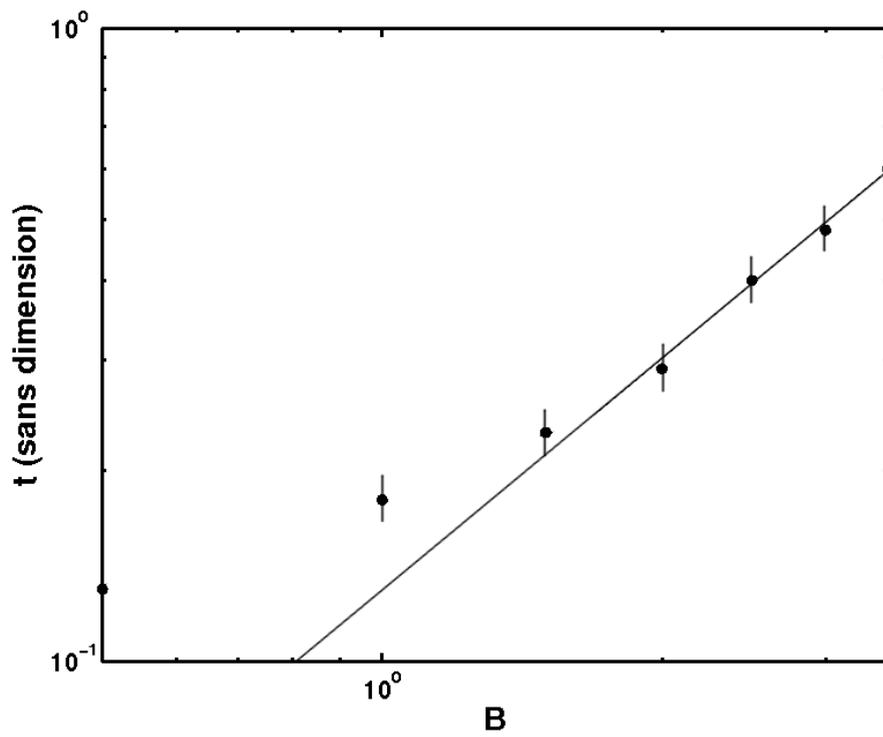


FIGURE 9.4 – Temps d'érosion adimensionné par  $H^2/\kappa_T$  en fonction du nombre de flottabilité  $B$  ( $Ra = 10^4$ ,  $Le = 10$ ). Une droite de pente 1 s'aligne correctement sur les points expérimentaux, pour  $B > 1$ .

dépendance en  $Ra$  ou en  $B$ .

- Dans le régime advectif, comme démontré par Schmidt & Zhang (2008), le temps caractéristique d'érosion  $t$  est de la forme  $t \propto Ra^{-2}$  pour la dépendance en fonction du nombre de Rayleigh et de la forme  $t \propto B^2$  pour la dépendance en fonction du nombre de flottabilité.

Dans notre étude, nous avons trouvé  $t \propto Ra^{-1/2}$  et  $t \propto B$ . Il semble donc que nous sommes dans une situation intermédiaire entre un régime purement advectif et un régime purement diffusif. Nous atteignons ici les limites de notre étude numérique qui ne permet pas d'atteindre des nombre de Lewis  $Le$  suffisamment grands. Une étude expérimentale où  $Le \gg 1$  et où il est possible de suivre la forme de l'interface parait donc indispensable.

# Chapitre 10

## Etude expérimentale.

### 10.1 Dispositif et procédure expérimentale.

#### 10.1.1 Dispositif.

Nous utilisons le même dispositif que celui utilisé pour l'étude de la deuxième partie. Il s'agit donc d'une cuve de dimensions  $20 \times 20 \times 4$  cm, aux parois en plexiglas. La convection est entretenue grâce à une plaque de cuivre à la base de la cuve à l'intérieur de laquelle circule de l'eau thermostatée. La surface supérieure est laissée à l'air libre. Les deux fluides utilisés sont :

- fluide 1 : il s'agit d'eau dans laquelle nous avons introduit une poudre appelée Natrosol. Elle a pour effet d'augmenter la viscosité d'une certaine quantité en fonction du pourcentage en masse de Natrosol dilué (cf. figure 10.1). La viscosité est augmentée par une réaction de polymérisation entre le Natrosol et les molécules d'eau. Elle modifie également la densité, mais dans des proportions très faibles.
- Fluide 2 : il s'agit d'eau salée. Nous pouvons ajuster sa densité en fonction de la quantité de sel dilué. Par ailleurs, afin de visualiser ce fluide une fois dans la cuve, nous avons dissous lors de sa préparation une petite quantité de Rhodamine, un colorant rose fluorescent qui, une fois éclairé par de la lumière verte, restitue une fluorescence de couleur rouge.

Nous disposons également d'une nappe Laser de couleur verte qui permet d'éclairer toute la hauteur de la cuve. Nous plaçons une caméra perpendiculairement à la nappe Laser, elle permet de suivre l'évolution temporelle du système. De plus, nous disposons un thermomètre sur la plaque inférieure et un autre à environ 1 cm sous la surface libre afin d'estimer  $\Delta T$ .

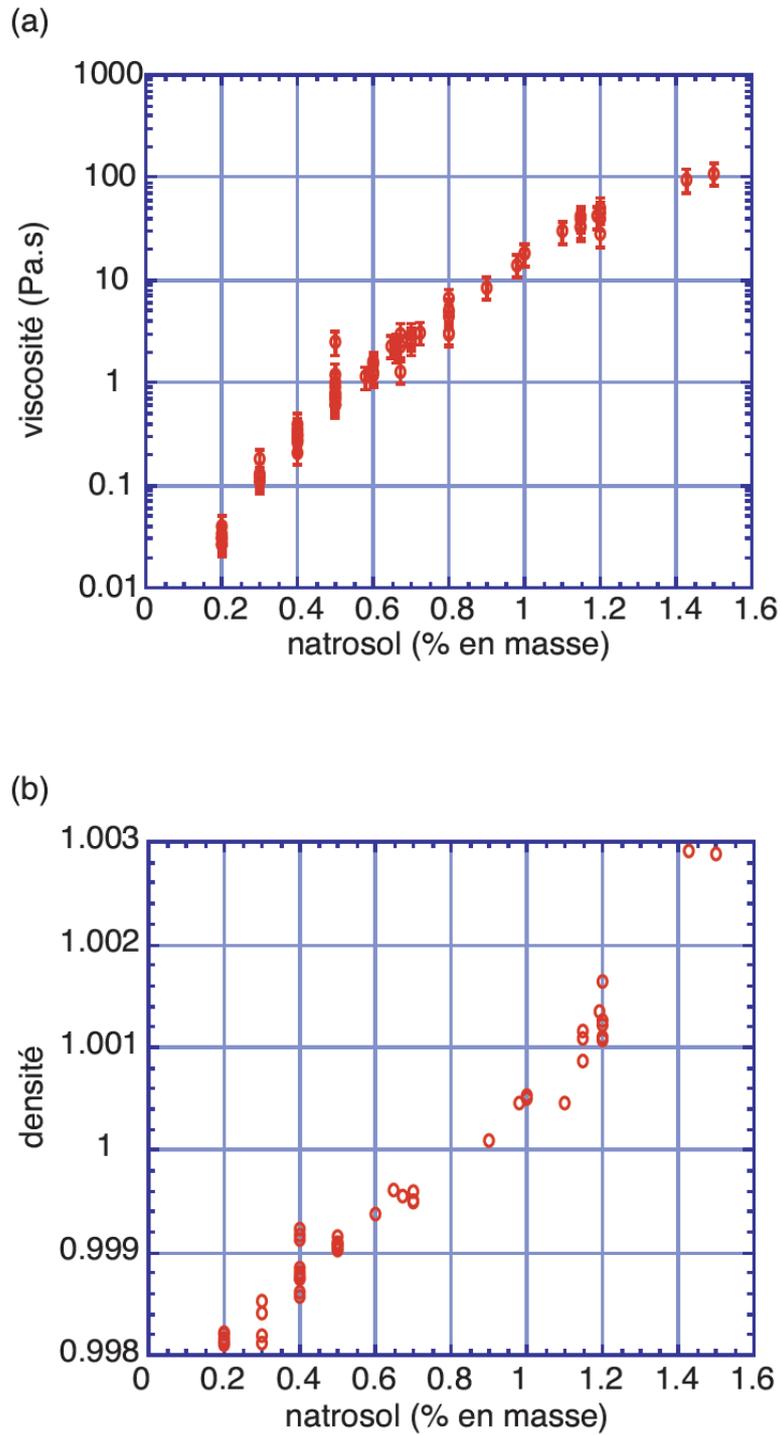


FIGURE 10.1 – (a) Variation de la viscosité et (b) de la densité des solutions de Natrosol en fonction de la quantité de Natrosol ajoutée (Le Bars, 2003).

### 10.1.2 Procédure expérimentale.

Une fois la préparation des deux fluides terminée, nous procédons pour toutes les expériences de la même façon :

1. nous portons à la température désirée la plaque du bas, la cuve étant vide.
2. Ensuite, nous insérons le fluide dans une majorité du volume de la cuve (jusqu'à environ 18 cm de hauteur) puis mettons en place le thermomètre du haut.
3. Enfin, nous injectons le fluide 2 à l'aide d'une seringue dont l'extrémité a été prolongée par un tube afin d'atteindre le fond de la cuve. Il convient d'insérer le fluide délicatement de façon à constituer un réservoir stable en bas de la cuve, tout en perturbant le moins possible les mouvements convectifs. Nous lançons au même instant l'enregistrement vidéo.

## 10.2 Résultats expérimentaux.

### 10.2.1 Mesures préliminaires.

**Viscosité de la solution préparée à partir d'eau et de Natrosol.** Suite aux premières expériences que nous avons effectuées, des doutes subsistaient à propos de l'évolution de la viscosité de cette solution dans le temps. A l'aide d'un viscosimètre à bille, nous avons mesuré la viscosité d'une même solution tous les jours durant une semaine. Il s'est avéré que la viscosité de la solution préparée initialement restait identique dans le temps. Toutefois, il faut prendre garde d'homogénéiser la solution pendant la polymérisation. En effet, dans le cas contraire, seule une partie de l'eau sera en contact avec le Natrosol et la réaction évoluera alors lentement dans toute la solution.

**Evolution du temps d'érosion en fonction du volume initial injecté.** Afin de s'assurer que le temps d'érosion est proportionnel au volume d'injection initial du fluide, nous avons effectué trois essais en injectant 5, 10 puis 20 mL. Nous avons constaté que la proportionnalité était bien respectée, avec une précision de 7 %. Nous avons également vérifié, dans les expériences où  $n$  réservoirs se forment simultanément, que le temps de vidange d'un des  $n$  réservoirs est égal à  $1/n$  fois le temps qu'il faudrait pour vider la même quantité depuis un seul gros réservoir.

### 10.2.2 Exploitation des expériences.

Nous avons effectué deux types de mesures à partir des vidéos enregistrées. La première concerne la longévité des réservoirs. Elle consiste à mesurer leurs temps d'érosion en fonction des paramètres de contrôle ajustables. La seconde s'intéresse à la forme des réservoirs, via un suivi de leurs enveloppes effectué par post-traitement sous Matlab.

La mesure du temps d'érosion est la plus difficile. D'une part, la dynamique de ces réservoirs est complexe : parfois ils fusionnent, parfois ils se scindent en plusieurs petits réservoirs. D'autre part, nous mesurons les temps d'érosion. Il faut donc mesurer le temps uniquement à partir du moment où le réservoir commence à se vider, et ce n'est pas toujours évident à visualiser.

### 10.2.3 Longévité des réservoirs.

Dans nos expériences, nous avons choisi de faire varier, en diluant plus ou moins de sel, la densité du fluide 2 (donc le nombre sans dimension  $\Delta\rho/\rho$ ) et le contraste de température  $\Delta T$  (donc  $Ra$ ) de façon indépendante. Un exemple d'image obtenue est donnée sur la figure 10.2.

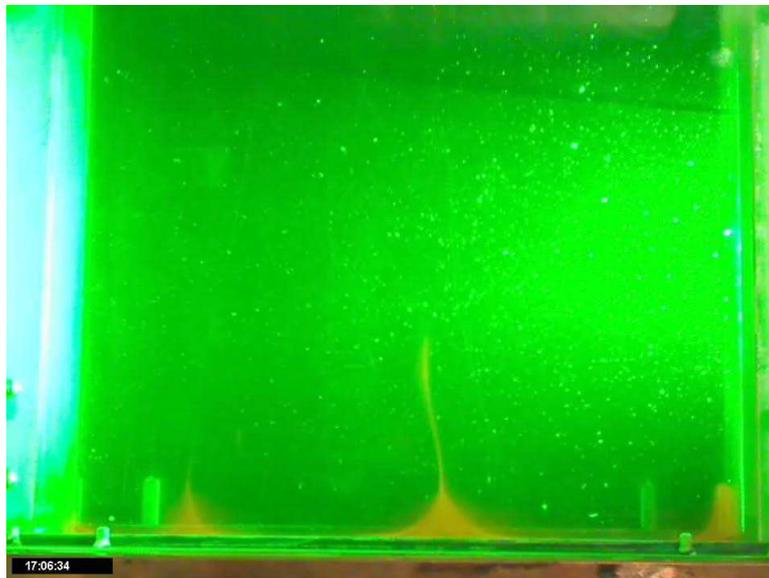


FIGURE 10.2 – Exemple d'un panache typique.

La figure 10.3 présente la dépendance du temps d'érosion adimensionné en fonction de  $Ra$ , en coordonnées logarithmiques. Nous constatons qu'une droite de pente  $-1$  s'aligne sur les points expérimentaux. Puisque nous avons trouvé numériquement que  $E \sim Ra^{2/3}$ , nous nous attendions plutôt (d'après l'équation (8.12)), dans l'hypothèse où notre système est bidimensionnel, à une loi du type  $t \sim Ra^{-2}$ . La figure 10.4 présente quant à elle la dépendance du temps d'érosion adimensionnée en fonction de  $B$ , en coordonnées logarithmiques. Ici, étant donnée la relativement grande dispersion des points expérimentaux, il est difficile de conclure quel exposant conviendrait pour une loi d'échelle. Toutefois, il paraît raisonnable de conclure que  $t \sim B^\beta$ , avec  $3/2 < \beta < 2$ . Cette fois, nous nous attendions, toujours d'après l'équation (8.12) à une dépendance

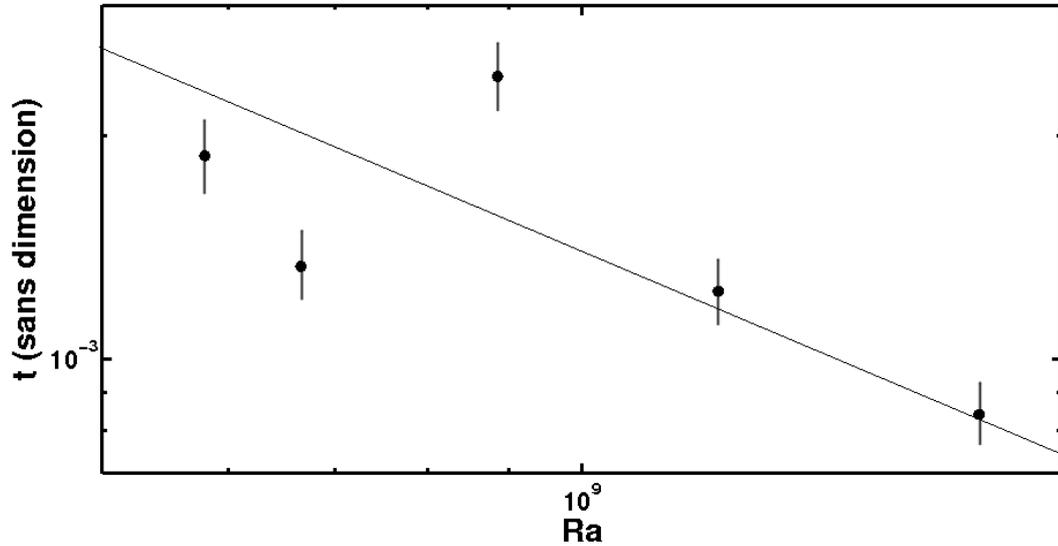


FIGURE 10.3 – Temps d'érosion adimensionné par  $H^2/\kappa_T$  en fonction du nombre de Rayleigh ( $B = 4$ ,  $Le \approx 700$ ). Une droite de pente  $-1$  s'aligne correctement sur les points expérimentaux.

du type  $t \sim B^2$ , ce qui pourrait être en accord avec nos mesures expérimentales. Les résultats expérimentaux sont plus proches de la théorie que les résultats numériques, mais des interrogations subsistent. Ici, contrairement au cas numérique, nous sommes bien dans le cas d'un régime advectif, puisque  $Le \approx 700$ . En revanche, contrairement à la théorie, notre système n'est pas exactement bidimensionnel, ni exactement tridimensionnel puisque son épaisseur est de  $4\text{ cm}$ . En effet, les parois semblent jouer un rôle important, étant donné la taille réduite de notre système. Nous avons pu observer à de nombreuses reprises que les réservoirs allaient se loger préférentiellement dans les coins en bas, à droite et à gauche de la cuve ou contre les parois latérales.

#### 10.2.4 Forme des réservoirs.

Par suivi d'un réservoir au cours du temps, nous avons pu étudier l'évolution de son enveloppe en reportant  $z$  en fonction de  $R$  à 3 instants successifs (cf. figure 10.5).

Afin de caractériser la similarité de ces profils, nous les avons portés sous la forme  $z/z_{max} = f(R/R_{max})$ , où  $z_{max}$  désigne la hauteur maximale du réservoir (i.e. en  $R = 0$ ) et  $R_{max}$  le rayon maximal du réservoir à un instant donné (i.e. le rayon à sa base). Nous constatons que, après avoir fait cette mise à l'échelle, les 3 profils se superposent (cf. figure 10.6). Cette superposition nous indique que le profil est autosimilaire. Il s'agit d'une propriété importante de la forme de ces réservoirs.

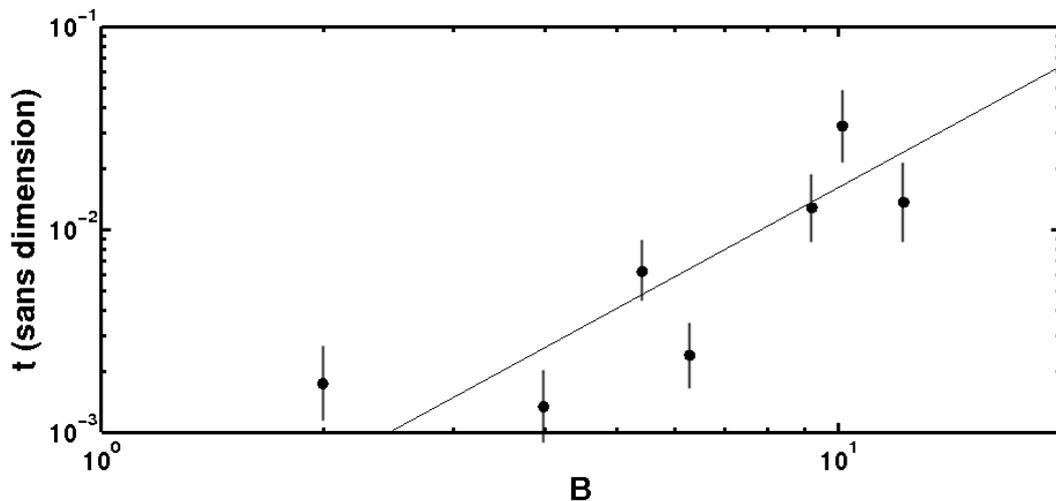


FIGURE 10.4 – Temps d'érosion adimensionné par  $H^2/\kappa_T$  en fonction du nombre de flottabilité ( $Ra = 6 \times 10^8$ ,  $Le \approx 700$ ). Une droite de pente comprise entre  $3/2$  et  $2$  peut s'aligner correctement sur les points expérimentaux. Par exemple, nous avons porté sur le graphe une droite de pente  $2$ .

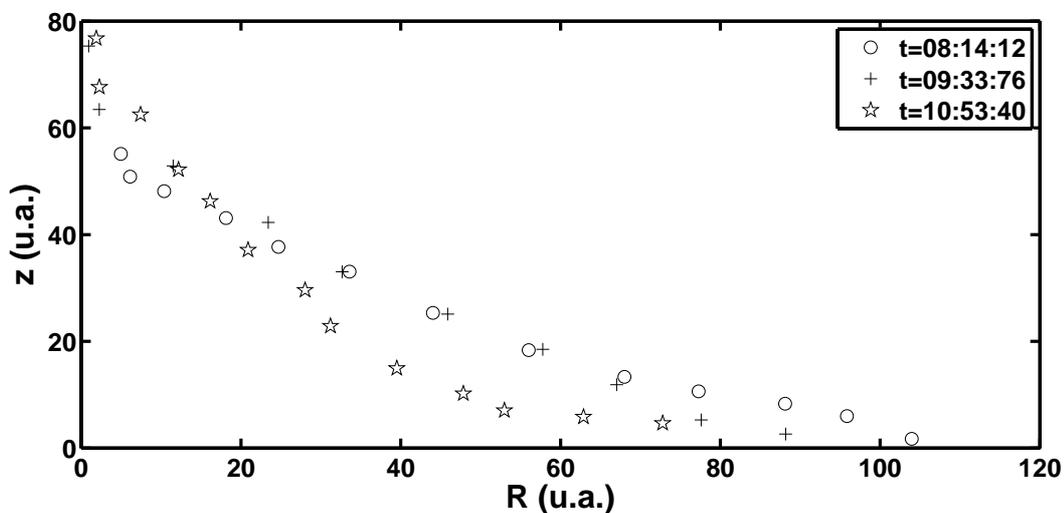


FIGURE 10.5 – Hauteur  $z$  de l'enveloppe d'un réservoir en fonction de  $R$  (en unité arbitraire) à 3 instants successifs : 8 min 14 sec (cercles), 9 min 33 sec (croix) et 10 min 53 sec (étoiles). Notez que seule la partie à droite de l'axe de symétrie du réservoir est donnée ( $B = 4$ ,  $Ra = 6 \times 10^8$ ,  $Le \approx 700$ ).

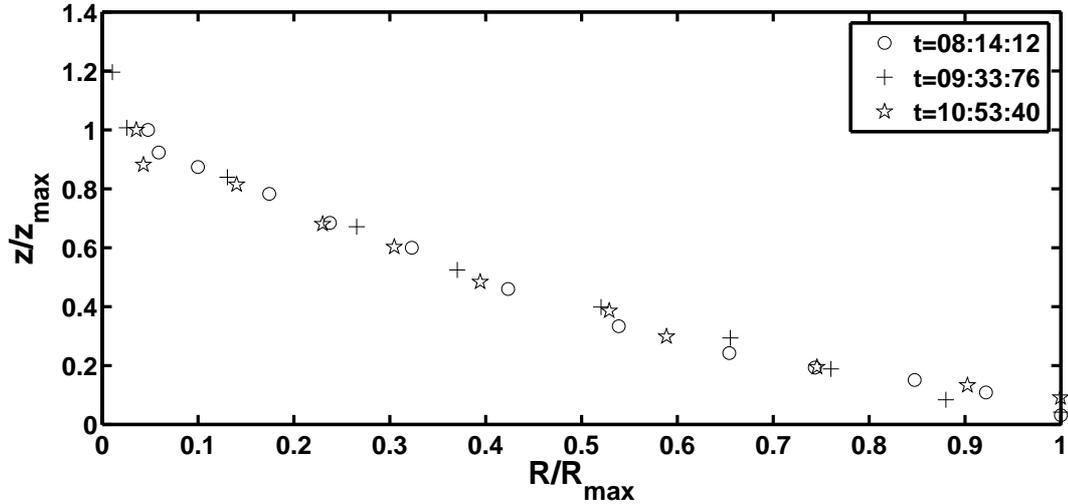


FIGURE 10.6 – Forme  $z/z_{max}$  en fonction de  $R/R_{max}$  d'un réservoir à 3 instants successifs (uniquement la partie à droite de l'axe de symétrie est donnée). Les paramètres sans dimension utilisés sont les suivants :  $B = 4$ ,  $Ra = 6 \times 10^8$  et  $Le \approx 700$ .

Nous pouvons également, pour comparer avec son expression donnée par l'expression (8.14), nous intéresser à la forme  $R$  en fonction de  $z$ . Pour cela, nous traçons  $R^2$  en fonction de  $z^{-2/5}$  (cf. figure 10.7).

Les points expérimentaux s'alignent convenablement avec la droite d'équation  $R^2 = 4 \times 10^{-5} z^{-2/5} - 1.9 \times 10^{-4}$ . Or, Schmidt & Zhang (2008) donnent une loi d'expression :

$$R^2 = S^2 \left( \left( \frac{3l_z}{2z} \right)^{2/5} - 1 \right), \quad (10.1)$$

où  $S$  est la taille typique des cellules convectives. Par identification avec cette expression, nous obtenons :  $S = 0.014 \text{ m}$  et  $l_z = 0.013 \text{ m}$ . Ces deux valeurs, de l'ordre du centimètre, sont du bon ordre de grandeur, ce qui corrobore la robustesse des résultats concernant la forme des réservoirs.

### 10.3 Conclusions.

Notre étude expérimentale donne des résultats corrects pour ce qui est du suivi de la forme. En revanche l'étude de la longévité des réservoirs ne donne pas des résultats cohérents entre les études numérique, expérimentale et théorique. Dans le cas numérique, cela s'explique par la faiblesse du nombre de Lewis ; dans le cas expérimental, cela s'explique par le fait que nous ne sommes pas exactement dans le cas bidimensionnel.

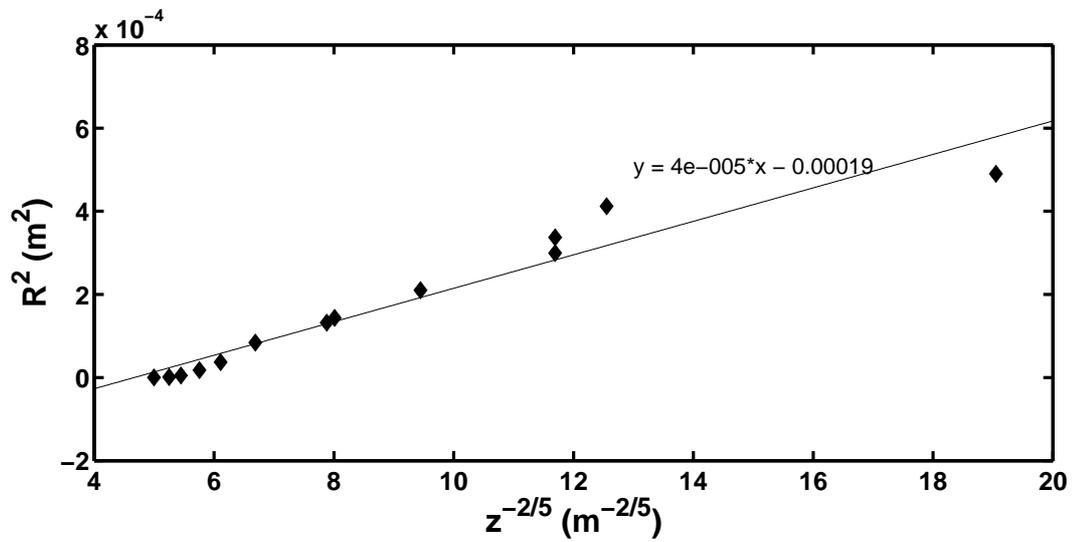


FIGURE 10.7 – Graphe  $R^2$  en fonction de  $z^{-2/5}$ . L'équation de la droite qui s'ajuste le mieux sur les points expérimentaux est donnée sur la figure. ( $B = 4$ ,  $Ra = 6 \times 10^8$  et  $\approx 700$ )

Ces premiers résultats demandent à être confirmés, d'une part via des simulations numériques à haut  $Le$  et d'autre part via la mise en place d'un nouveau dispositif expérimental bi- ou tridimensionnel.

## **Quatrième partie**

### **Interaction entre les instabilités elliptique et convective.**

Cette partie, qui reprend pour un de ces chapitres une publication acceptée au journal *Physics of Fluids* sous le titre “Experimental study of the interaction between convective and elliptical instabilities”, a pour objet l’étude expérimentale de l’influence réciproque des instabilités convective et elliptique dans une cavité cylindrique tournante, où la température du cylindre intérieur est imposée.

Nous avons vu en introduction que l’écoulement convectif dans une sphère en rotation peut se réduire à l’écoulement entre deux cylindres co-axiaux et co-rotatifs (Busse, 1970). Nous utilisons cette propriété pour cette étude, même si nous ne pas dans un premier temps une cavité aux couvercles inclinés. En s’inspirant de l’idée de Malkus (1989), le cylindre extérieur est comprimé grâce à deux rouleaux symétriques, verticaux et parallèles à l’axe de rotation. Nous pouvons donc étudier la convection en rotation, l’instabilité elliptique, ou imposer ces deux instabilités de façon à quantifier leurs influences relatives. Cette étude est particulièrement pertinente pour l’étude des noyaux planétaires où les instabilités elliptique et convective sont susceptibles d’être présentes. Si l’instabilité elliptique croît, des mouvements tridimensionnels sont forcés et peuvent venir se superposer sur une partie des mouvements convectifs ou les détruire complètement. En cela, nous sommes bien en présence d’un cas de convection hétérogène.

Dans cette partie, après quelques rappels sur l’instabilité elliptique, les résultats expérimentaux seront exposés. Puis, un complément numérique sera présenté. Enfin, quelques applications géophysiques seront développées.

# Chapitre 11

## L'instabilité elliptique.

### 11.1 Généralités.

Comme décrit dans l'article de revue de Kerswell (2002), l'instabilité elliptique est une instabilité hydrodynamique qui est susceptible de croître lorsque les lignes de courant d'un écoulement tournant sont elliptiques. Le mécanisme physique régissant la dynamique de cette instabilité peut s'expliquer de différentes façons.

Tout d'abord, elle peut être vue comme une résonance triadique entre deux ondes inertielles du fluide tournant et le champ de contrainte responsable de la déformation elliptique (Bayly, 1986; Waleffe, 1990). Les études de Kelvin (1880) ont montré que des ondes inertielles (appelées par conséquent ondes de Kelvin) peuvent vivre dans les écoulements tournants. Pour ces ondes, la force de Coriolis constitue une force de rappel sur les particules fluides. Ces ondes sont dans le cas le plus général complètement atténuées par la viscosité. Elles sont susceptibles d'être excitées lorsqu'un forçage externe est appliqué, par exemple un forçage elliptique par déformation de la paroi. Tous les ingrédients nécessaires sont alors réunis pour que l'instabilité elliptique croisse.

L'étude expérimentale de Malkus (1989) permettant, par l'utilisation du Kalliroscope<sup>1</sup>, de visualiser l'axe de rotation effectif de l'écoulement, a mis en évidence que le mode le plus simple de l'instabilité elliptique correspond à une déformation de l'axe de rotation effectif (cf figure 11.1(b)) par rapport à celui du même écoulement tournant sans instabilité elliptique. Il s'agit alors d'une rotation solide autour d'un axe déformé, et non pas d'une rotation solide autour d'un axe droit comme c'est le cas sans instabilité elliptique. Cette déformation de l'axe persiste dans toutes les géométries : sphères, cavités sphériques, cylindres et cavités cylindriques. Dans la sphère, il est possible de faire un parallèle entre l'instabilité elliptique et l'instabilité d'un solide en rotation (Lacaze *et al.*, 2006). En effet, pour expliquer le mécanisme du mode de spin-over, Lacaze *et al.* (2006) ont fait l'analogie avec l'instabilité d'un ellipsoïde solide tournant autour

---

1. présenté en introduction

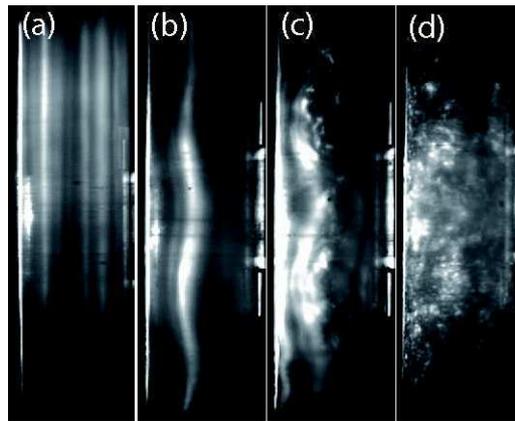


FIGURE 11.1 – 4 images extraites d’une séquence vidéo enregistrée depuis le référentiel du laboratoire. Elles montrent la croissance (b), la saturation (c) et l’explosion (d) du mode  $(-1, 1, 1)$  de l’instabilité elliptique.

de son axe médian. Lorsqu’on met en rotation un tel objet autour de son axe médian, il se retourne de façon cyclique de chaque côté de cet axe. Après plusieurs cycles, l’axe de rotation a dévié de la verticale vers le plus petit ou le plus grand des axes d’inertie de l’ellipsoïde. La similarité avec l’instabilité elliptique hydrodynamique dans un sphéroïde est claire : dans les deux cas, l’axe de rotation effectif a tendance à s’incliner par rapport à l’axe de rotation initial. Les équations régissant la dynamique des 3 axes d’inertie sont, comme dans le cas du solide, les équations d’Euler avec cette fois des coefficients qui dépendent du nombre d’Ekman. Pour mieux comprendre, considérons un écoulement de rotation solide autour d’un axe vertical. Appliquons maintenant une déformation sur deux côtés de cette sphère, de façon à faire apparaître trois axes d’inertie distincts. Si l’axe vertical est alors l’axe médian, l’axe de rotation effectif du fluide aura tendance à se déformer autour de celui-ci.

Les forçages externes permettant à l’instabilité elliptique de croître sont divers et ont été pour la plupart déjà étudiés. En premier lieu, le champ de contrainte elliptique peut être dû aux interactions mutuelles entre plusieurs vortex. Chaque vortex interagit sur son proche voisin et leurs lignes de courant se déforment. Ainsi, la dynamique d’une paire de vortex a été étudiée (Lewke & Williamson, 1998a; Le Dizès & Laporte, 2002; Meunier *et al.*, 2002) et appliquée notamment aux vortex présents dans le sillage des bouts d’ailes d’avions (Lewke & Williamson, 1998b). Enfin, le forçage externe peut être également obtenu par déformation mécanique du conteneur. En géo- et astrophysique, ce forçage peut être obtenu par l’effet de marées gravitationnelles, qui donnent aux corps célestes une géométrie ellipsoïdale. Les écoulements dans un ellipsoïde tournant (Suess, 2006; Gledzer & Ponomarev, 1977; Kerswell, 1994; Lacaze *et al.*, 2004), dans une cavité ellipsoïdale (Aldridge *et al.*, 1997; Seyed-Mahmoud *et al.*, 2004; Lacaze *et al.*, 2005)

et dans un cylindre elliptiquement déformé (Gledzer *et al.*, 1975; Malkus, 1989; Eloy *et al.*, 2000, 2003) ont été étudiés. Le terme “cavité” est communément utilisé pour désigner (i) l’écoulement entre un ellipsoïde externe et une sphère interne coaxiaux pour une cavité ellipsoïdale, et (ii) entre un cylindre externe déformé elliptiquement et un cylindre interne coaxiaux pour une cavité cylindrique. Dans la section suivante, nous détaillerons les connaissances sur l’instabilité elliptique dans un cylindre, puis par extension dans une cavité cylindrique. Cette dernière géométrie est en effet celle que nous avons utilisée pour notre étude.

## 11.2 L’instabilité elliptique en géométrie cylindrique.

### 11.2.1 Dans un cylindre de hauteur finie.

Notre étude s’inscrit dans la continuité des travaux expérimentaux de Eloy (2000) sur l’instabilité elliptique d’un vortex confiné. Contrairement à une analyse locale de stabilité, l’effet du confinement est à prendre en compte dans les conditions aux limites du problème. En effet, il faut désormais prendre en compte les couches limites visqueuses à la paroi et les modifications liées à la hauteur finie du cylindre. Les calculs effectués

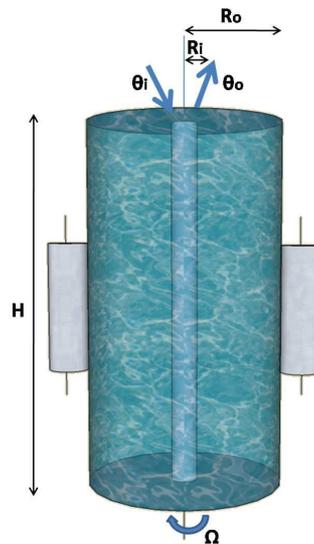


FIGURE 11.2 – Schéma de notre dispositif expérimental.  $R_i$  et  $R_o$  désignent respectivement les rayons des cylindres internes et externes.  $H$  est la hauteur de la cavité et  $\Omega$  sa vitesse de rotation. Eloy (2000) s’est concentré sur le cas isotherme et sans cylindre intérieur.

par Eloy ne seront pas détaillés, seuls les principaux résultats seront rappelés. L’idée est

de rechercher les solutions perturbatives de la vitesse et de la pression des équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un écoulement de base bidimensionnel aux lignes de courant elliptiques d'excentricité  $\epsilon$ . Un terme de couplage entre le champ de vitesse et le champ de contrainte bipolaire apparaît dans cette équation. Il modélise le phénomène de résonance triadique. Les modes de Kelvin associés à un tel écoulement sont solutions de ces équations. Un mode de Kelvin peut s'écrire :

$$\vec{v}_K(k, m, \omega) = \vec{U}(r)e^{i(kz+m\theta-\omega t)} + c.c., \quad (11.1)$$

où  $c.c.$  désigne le complexe conjugué,  $k$  le nombre d'onde axial du mode considéré,  $m$  son nombre d'onde azimuthal et  $\omega$  sa pulsation. En imposant une vitesse radiale nulle à la paroi, nous obtenons une relation de dispersion  $D(k, m, \omega) = 0$  à plusieurs branches pour chaque nombre d'onde azimuthal  $m$  :

$$D(k, m, \omega) = (m - \omega)\delta J'_{|m|}(\delta) + 2mJ_{|m|}(\delta), \quad (11.2)$$

avec  $J_\mu$  la fonction de Bessel du premier type,  $J'_\mu$  sa dérivée et  $\delta$  le "nombre d'onde radial" de la perturbation qui vérifie :

$$\delta^2 = \frac{k^2[4 - (m - \omega)^2]}{(m - \omega)^2}. \quad (11.3)$$

La condition de résonance de deux modes de Kelvin  $(k_1, m_1, \omega_1)$  et  $(k_2, m_2, \omega_2)$ , avec  $m_2 > m_1$ , s'écrit :

$$k_1 = k_2, \quad m_2 - m_1 = 2, \quad \omega_1 = \omega_2. \quad (11.4)$$

Elle correspond aux points d'intersection des relations de dispersion associées aux deux modes de Kelvin considérés (figure 11.3(a)). L'écoulement résultant sera la somme des deux modes de Kelvin impliqués dans la résonance triadique. La présence d'une couche limite visqueuse ne change pas l'écoulement dans le coeur du cylindre au premier ordre en  $E^{-1/2}$ , où  $E = \frac{\nu}{\Omega R^2}$  est le nombre d'Ekman de l'écoulement basé sur  $R$  le rayon du cylindre. En revanche, elle modifie la condition aux limites sur la paroi au deuxième ordre en  $\epsilon$ . La hauteur finie  $H$  du cylindre impose que la vitesse axiale soit nulle en  $z = 0$  et en  $z = H$ , soit  $k_i = n\pi R/H$  avec  $n$  entier. En ajustant  $H$ , il est possible de choisir le nombre de modes possibles. De plus, les couvercles aux extrémités ajoutent deux couches limites visqueuses. Leur effet est à prendre en compte uniquement pour les cylindres de rapport d'aspect proche de un. Le rapport d'aspect du cylindre que nous utilisons dans notre expérience est de 0.3, l'effet des couches limites aux extrémités est donc négligeable. L'effet principal de la hauteur finie du cylindre est donc de "frustrer" certains modes. Nous avons utilisé cette propriété pour déterminer la hauteur du cylindre que nous utilisons et par conséquent choisir les modes susceptibles de croître dans le cylindre. Mais voyons d'abord si la présence d'un autre cylindre à l'intérieur modifie les résultats précédemment énumérés.

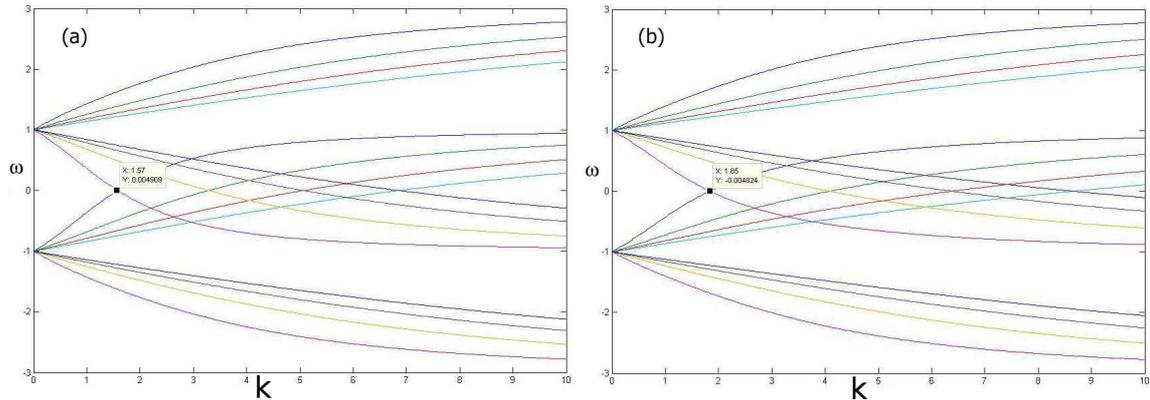


FIGURE 11.3 – Relation de dispersion  $(k, \omega)$  pour les modes  $(m_1 = -1, m_2 = 1)$  dans un cylindre (a) et dans une cavité cylindrique de rapport d’aspect 0.18 (il s’agit du rapport entre les rayons intérieur et extérieur de la cavité) (b) (Herreman, 2009).

### 11.2.2 Dans une cavité cylindrique.

Cette étude d’un vortex confiné non pas par un, mais par deux cylindres a été entreprise par Herreman (2005; 2009). Comme les conditions aux limites n’interviennent pas pour leurs calculs, les conditions de résonance (11.4) sont identiques au cas d’un seul cylindre. Les conditions aux limites sur les couvercles inférieur et supérieur ne sont pas non plus modifiées et la condition de quantification du nombre d’onde axial  $k = n\pi R/H$  est encore valable. En revanche, la présence du cylindre intérieur impose l’utilisation d’une autre famille de fonctions de Bessel dans la relation de dispersion : les points d’intersection des différentes branches se déplacent vers les grandes valeurs de  $k$  (figure 11.3b)). La structure spatiale des modes est quant à elle très proche de celle observée pour un vortex confiné par un seul cylindre.

## 11.3 L’instabilité de marées.

Nous avons vu qu’un forçage externe mécanique est susceptible de faire croître l’instabilité elliptique. Il peut être effectué grâce à deux rouleaux latéraux déformant un sphéroïde (Lacaze *et al.*, 2005) ou un cylindre (Malkus, 1989; Eloy *et al.*, 2003; Herreman, 2005) de façon à rendre elliptique les lignes de courant de l’écoulement, condition *sine qua non* de sa déstabilisation. Dans les systèmes géo- et astrophysiques, les astres prennent une forme ellipsoïdale par interaction gravitationnelle avec leurs plus proches voisins : c’est l’effet de marées (figure 11.4), également responsable sur Terre des marées océaniques. Restons sur Terre pour expliquer ce phénomène. Dans le cadre d’une théorie statique, en appliquant le principe fondamental de la dynamique à la Terre

dans le référentiel géocentrique<sup>2</sup>, il apparaît un champ de gravitation différentielle dans l'équation du mouvement :

$$\sum_i (\vec{G}_i(P) - \vec{G}_i(T)), \quad (11.5)$$

où  $\vec{G}_i(P)$  est le champ de gravitation créé par l'astre  $i$  en un point  $P$  de la Terre et  $\vec{G}_i(T)$  est le champ de gravitation créé par l'astre  $i$  au niveau du centre de gravité  $T$  de la Terre (figure 11.4). Le champ de gravitation différentielle est responsable de l'effet de marées. A l'ordre zéro, on peut considérer que seule la Lune contrôle le phénomène. L'influence du Soleil intervient pour moitié par rapport à la Lune et celle des autres astres est négligeable. Le champ différentiel tend à étirer notre planète selon la direction Terre-Lune, et à la comprimer dans les directions transverses. Il est ainsi possible de modéliser l'effet d'une lune en laboratoire en comprimant le conteneur selon les directions transverses comme l'a initié Malkus (1989). Les noyaux planétaires liquides<sup>3</sup> subissent également

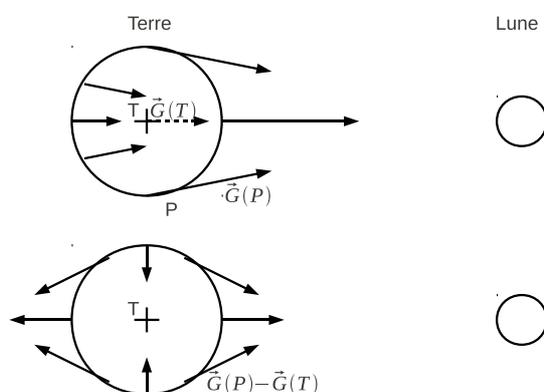


FIGURE 11.4 – Le champ gravitationnel  $\vec{G}$  créé par la Lune au centre et à la surface de la Terre, et le champ différentiel qui en découle.

ces actions en plus du champ gravitationnel terrestre. En effet, le champ de gravitation différentielle, bien que plus petit qu'à la surface terrestre, y est encore présent. Les sphères externe et interne du noyau vont donc se déformer en ellipsoïde. De cette façon, la croissance de l'instabilité elliptique (appelée alors également instabilité de marées) est permise, à condition bien sûr que le seuil de l'instabilité soit franchi. Ce seuil critique a été défini par Eloy (2000) :

$$(\epsilon / \sqrt{E})_c \sim 5. \quad (11.6)$$

2. Il s'agit du référentiel ayant pour origine le centre de la Terre, ses trois axes sont dirigés vers des étoiles "fixes" très éloignées.

3. par exemple le noyau terrestre externe, présenté par ailleurs dans la partie introductive

De plus, l'instabilité elliptique ne peut croître si la déformation tourne à la même vitesse angulaire que le fluide puisque, dans ce cas, une particule fluide ne "verra" jamais la déformation. Par exemple, ce cas se présenterait pour un système planète-lune pour lequel la rotation propre de la planète serait synchronisée avec la rotation orbitale de sa lune.

Les dispositifs expérimentaux utilisés jusqu'à présent (dont le notre) modélisent de façon sommaire la présence de la Lune. Dans la plupart des cas, il s'agit d'une lune fixe par rapport à la planète. Des dispositifs plus récents (Le Bars *et al.*, 2007; Morize *et al.*, 2010) reproduisent la rotation d'une lune autour de la planète. Ils montrent qu'elle peut avoir de grandes conséquences, comme la génération de vents zonaux. De plus, l'orbite elliptique de la Lune, qui peut être supposée dans le plan de l'écliptique, n'a jamais été pris en compte alors que la distance Terre-Lune varie de 10% lors d'une révolution.

L'application de cette loi d'échelle à divers corps du système solaire donne des résultats contrastés. Comme montré sur la figure 11.5, Io (un satellite de Jupiter) est clairement instable. Quant à la Terre, elle se situe très proche du seuil, ce qui laisse à penser que le développement de l'instabilité elliptique est possible (Kerswell, 1994). Ce n'est cependant probablement pas le cas pour la Terre actuelle. Concernant la Terre primitive, la présence de l'instabilité elliptique est très probable : en effet, il y a 4 milliards d'années, la Lune était trois fois plus proche de la Terre, provoquant un très fort effet de marées. En outre, à cette époque, la Terre tourne environ deux fois plus vite, son nombre d'Ekman était donc plus petit qu'aujourd'hui d'un facteur 2. Ces deux aspects impliquent que la Terre primitive était instable vis-à-vis de l'instabilité de marées. La présence de l'instabilité de marées dans le noyau aurait pu alors avoir des conséquences à la surface de la Terre, sur le champ magnétique terrestre et sur le flux de chaleur.

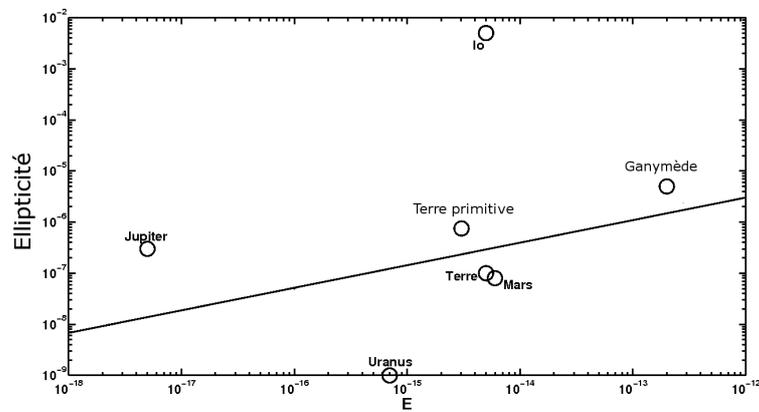


FIGURE 11.5 – Stabilité d’un écoulement dans différents corps célestes en fonction du nombre d’Ekman et de l’ellipticité imposée (Lacaze *et al.*, 2006). La zone au-dessus de la droite correspond à un écoulement instable tandis que celle en dessous correspond à un écoulement stable.

# Chapitre 12

## Etude expérimentale.

### Abstract.

The reciprocal influence of convective and elliptical instabilities is studied experimentally in an elliptically deformed rotating cylindrical shell with an imposed temperature at the inner cylinder, using the centrifugal force to mimic a radial gravity field. When the temperature contrast is stabilizing, we observe that the elliptical instability can grow and that the heat flux scales as the inverse of the viscous boundary layer depth. When the temperature profile is destabilizing, we observe that (i) the elliptical instability can still grow on established convective motions, that (ii) for the experimental range of parameters, its growth rate progressively decreases when the intensity of convection increases, and that (iii) the elliptical instability modifies the heat transfer when the viscous boundary layer is smaller than the thermal one. Scaling laws for both cases are derived analytically and validated experimentally. We conclude that in geophysical and astrophysical systems, thermal effects have to be taken into account when looking for inertial instabilities and that these inertial instabilities have to be taken into account when evaluating heat transfers.

### 12.1 Introduction.

It is known from the analysis of Kelvin (1880) that rotating flows support inertial (or "Kelvin") waves whose origin comes from the restoring effect of the Coriolis force. These waves are generally damped by viscosity but they can persist when an external forcing is applied. For instance, the elliptical instability arises in elliptically deformed systems from the triadic resonance between two Kelvin waves and the deformation (Walleffe, 1990). Such an instability could be excited in the liquid core of planets that are tidally deformed by close bodies, leading for instance to the generation or induction of a magnetic field (Lacaze *et al.*, 2006; Kerswell & Malkus, 1998). The dynamic of

the elliptical instability has been studied in details following the first experimental approach of Malkus (1989), but always in the isothermal case. However, thermal effects have a fundamental importance in the dynamics of planetary cores. Indeed, convective flows are expected to control heat transfers and dynamo processes in most planets, as for instance in the Earth (see (Roberts & Glatzmaier, 2000) for a review). Convective instabilities in rapidly rotating systems are also closely interconnected with inertial waves. Indeed, recent studies (e.g. (Zhang *et al.*, 2007; Zhang & Liao, 2009)) show that the convective flow can be represented, depending on the value of the Prandtl number, by either a single inertial-wave mode or by a combination of several inertial-wave modes, and is controlled or influenced by the effect of the Ekman boundary layer. Moreover, following the Proudman-Taylor constraint, convective flows in rapidly rotating systems are almost invariant along the axis of rotation (Busse, 1970). Experimentally, Busse and Carrigan (1974) reproduced these columns in a rapidly rotating system submitted to a destabilizing temperature contrast, using the centrifugal force to mimic the planetary radial gravity. In the present paper, we investigate the reciprocal influence of the elliptical instability and thermal effects in a fluid contained in a rotating cylindrical shell, by coupling in a single experiment the historical set-ups of Malkus (1989) and Busse and Carrigan (1974). Note that in addition to the geophysical interests, our study could also be relevant in some industrial applications, for instance in the domain of vortex control in the wake of aircraft wings by means of injection of heated or cooled air (D. Sipp *et al.*, 2005).

Le Bars and Le Dizès (2006) studied analytically the linear stability of a rotating flow in an elliptically deformed cylindrical shell with an imposed (stable or unstable) conductive temperature profile. In this case, the elliptical instability comes from the resonance of gravito-inertial waves. They concluded that the growth rate of the elliptical instability is a decreasing function of the Rayleigh number  $Ra$ , which characterizes the intensity of convection, and that the growth rate surprisingly increases with the intensity of stratification. Nevertheless, Le Bars and Le Dizès (2006) did not investigate the non-linear processes of the elliptical instability, and their stability analysis always started from a simple elliptical and non-convective rotating base flow. This paper thus aims at completing these first conclusions by a systematic experimental study. Our purpose is to answer the following three questions : (i) could the elliptical instability grow in the presence of established convective motions ? (ii) How are the growth rate of the elliptical instability and the convective heat flux modified ? And (iii) what is the predominant mechanism at the planetary scales ? Note that the same questions are addressed numerically in the ellipsoidal geometry in a companion paper by Cébron *et al.* (2010).

The paper is organized as follows. In § 2, the set-up and the experimental procedure are presented. In § 3, the influence of the convection on the growth of the elliptical instability is studied experimentally. The experimental results regarding the influence of the elliptical instability on heat transfers are presented in § 4, where general scaling

laws are also derived. Finally, these scaling laws are applied to geo- and astrophysical systems in § 5.

## 12.2 Experimental set-up.

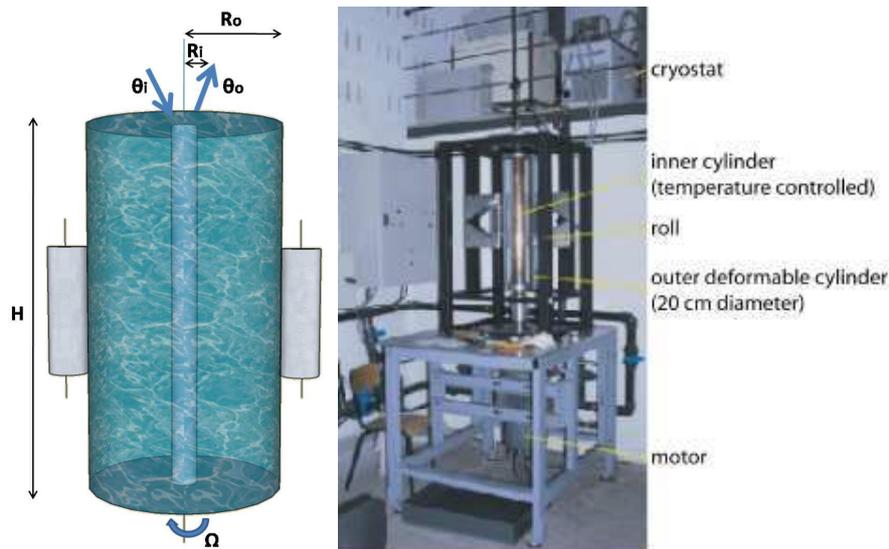


FIGURE 12.1 – Sketch and picture of our experimental device.  $R_i$  and  $R_o$  designate respectively the radii of the inner and the outer cylinders.  $H$  is the height of the tank and  $\Omega$  is its rotation rate.  $\theta_i$  and  $\theta_o$  are the temperatures respectively at the entrance and at the exit of the inner cylinder.

Our set-up is a combination of the one developed by Busse and Carrigan (1974) to study convective motions in a rapidly rotating system submitted to radial gravity, and of the one developed by Malkus (1989) to study the elliptical instability (see figure 12.1). A vertical cylindrical shell (height  $H = 80 \text{ cm}$ , inner radius  $R_i = 3 \text{ cm}$  and outer radius  $R_o = 10 \text{ cm}$ ) enclosed between two concentric cylinders is filled with water and set in rotation along the vertical axis at a constant angular velocity  $\Omega$ , ranging between 150 to 350 *rpm*. This angular velocity is sufficiently rapid, such that the local gravity is negligible compared to the centrifugal force (Busse, 1970; Busse & Carrigan, 1974). We apply an elliptical deformation to the outer cylinder made in  $e = 3 \text{ mm}$  thick transparent PMMA (Polymethyl Methacrylate), by compressing it on its middle with two fixed vertical 20 *cm* long rollers aligned with the rotation axis. We measure the value  $s$  of the compression, which ranges between 0 and 4 *mm*. In the centrifugally-driven case, the onset of convection is possible when the inner boundary is sufficiently cooled compared to the outer one. Otherwise, the flow is radially thermally stratified. In order to study

both cases, we can either cool or heat the inner cylinder at a fixed temperature  $T_{in}$  by the circulation of a coolant fluid from a thermostated bath inside the inner cylinder which is made in copper, so as to ensure an efficient heat transfer. Actually, the coolant fluid is injected in an inner pipe of radius 1 cm inside the copper cylinder from the top of the experiment. It flows through this pipe down to the bottom of the experiment, and then goes back to the top through the outer circular ring inside the copper cylinder, before being sucked. With this set-up, we do not measure any temperature variation along the outer boundary of the copper cylinder. The top and bottom of our shell are made of 5 cm thick plexiglas, ensuring a very good thermal isolation. Note that these flat ends are perpendicular to the axis of rotation. Four temperature probes (precisely calibrated thermocouples) permit to measure the inner and outer heat flux. Two probes measure the temperatures of the circulating fluid, respectively at the entry  $\theta_i$  and at the exit  $\theta_o$  of the system. The mean inner heat flux is then given by

$$F_i = \frac{\rho c_p \Gamma (\theta_i - \theta_o)}{2\pi R_i H}, \quad (12.1)$$

where  $\rho$  is the density of the circulating fluid,  $c_p$  its specific heat and  $\Gamma$  the flow rate of the thermostated bath, measured via a flowmeter. These two thermocouples also permit to define the surface temperature of the inner cylinder  $T_{in}$ , which we take as the mean value of  $\theta_i$  and  $\theta_o$ . Note that because of technical constraints, it was not possible to measure  $\theta_i$  and  $\theta_o$  exactly at the entrance of the inner cylinder. Corrections due to heat loss from the circulating pipe towards the surrounding atmosphere are thus included in  $F_i$ , using a standard value of the heat transfer coefficient of the air. The local temperature at a given location of the inner surface of the outer cylinder  $T_i$  and the temperature of its outer surface  $T_o$  at the same location are measured by the two others probes. They permit to define the local outer heat flux

$$F_o = k_p \frac{T_o - T_i}{e}, \quad (12.2)$$

where  $k_p = 0.2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  is the thermal conductivity of the PMMA. We verified that once a thermal steady state is reached, the measured time-averaged values of the power through inner and outer cylinders ( $2\pi R_i F_i H$  and  $2\pi R_o F_o H$ ) are in good agreement, i.e. within 10%.

To visualize motions, we embedded the working fluid with anisotropic Kalliroscope flakes and used two separate systems of camera and Laser sheet. In the first system, the Laser and a wireless camera are embarked in rotation with the cylindrical shell, which allow to visualize convective motions in an horizontal plane in the rotating frame. In the second system, a semi-rapid camera (200 frames per second) captures the dynamic of the elliptical instability from the laboratory frame through a vertical Laser sheet, tangential to the inner cylinder.

According to the  $\pi$ -Buckingham theorem, six dimensionless parameters control the system. We choose :

- the eccentricity of the outer cylinder measured at the mid-height  $\epsilon = \frac{2s}{R_o}$  ;
- the Ekman number based on the gap of the shell  $E = \frac{\nu}{\Omega(R_o - R_i)^2}$ , where  $\nu$  is the kinematic viscosity of the working fluid taken at the mean fluid temperature ;
- the Rayleigh number based on the centrifugally gravity taken at the outer cylinder  $Ra = \frac{\alpha(T_i - T_{in})\Omega^2 R_o (R_o - R_i)^3}{\kappa \nu}$ , where  $\alpha$  is the thermal expansion coefficient of the working fluid, and  $\kappa$  its thermal diffusivity ;
- the thermal Prandtl number  $P = \nu/\kappa$  ;
- the shell aspect ratio  $a_1 = R_i/R_o$  ;
- the cylinder aspect ratio  $a_2 = H/R_o$ .

By systematically changing the temperature of the thermostated bath, the rotation rate and the cylinder compression, we explored the following ranges :  $\epsilon \in [0; 0.08]$ ,  $E \in [5 \times 10^{-6}; 2 \times 10^{-5}]$  and  $|Ra| \in [10^7; 10^9]$ , with either a stabilizing (i.e.  $Ra < 0$ ) or a destabilizing (i.e.  $Ra > 0$ ) temperature contrast. The three other dimensionless parameters were kept constant, with the Prandtl number of water  $P \approx 7.0$ , the shell aspect ratio  $a_1 = 0.30$ , and a cylinder aspect ratio  $a_2 = 8.0$ , chosen so as to excite the isothermal principal mode  $(-1, 1, 1)$  with an axial wavenumber equal to 2 in the notations of Eloy and Le Dizès (2001) (i.e. the resonance between the Kelvin waves of azimuthal wavenumbers  $-1$  and  $1$  with the simplest radial structure).

In our case, the critical Rayleigh number for the onset of the convection  $Ra_c$  is given by Busse and Carrigan (1974) as

$$Ra_c = 8\pi^2 E^{-1/2} \frac{\Delta R}{H}, \quad (12.3)$$

where  $\Delta R = R_o - R_i$  is the size of the shell gap. This critical Rayleigh number corresponds to the equation (2.13) in (1974) where "the change in height can be neglected, the friction in the Ekman boundary layer becomes the dominant stabilizing force". It was derived in the small gap limit  $\Delta R/R_o \ll 1$  which is not really fulfilled in our experiment. Nevertheless, we have not found in the literature any analytical result for the critical Rayleigh number in the finite gap limit with an imposed temperature contrast, and we thus use this formula as a first order approximation. Note that since we do not change the value of  $\Delta R$  and  $H$  in our study, the important point here is the dependence of  $Ra_c$  in  $E^{-1/2}$ , which we expect to be generic. The same dependence is indeed found in (Zhang & Greed, 1998) in a geometry similar to our experimental set-up but for convection induced by internal heating rather than by an imposed temperature contrast. Note also that our experimental device is not designed to evaluate the value of  $Ra_c$ , and that a destabilizing temperature profile immediately leads to largely supercritical values of the Rayleigh number.

The same protocol was followed for all the experiments presented in this paper : (i) the system is set in rotation at a constant rate ; (ii) after the spin-up time (at least 30

min), the inner cylinder is thermalized at the assigned constant temperature ; (iii) once a thermal steady-state is reached (after several hours), heat flow measurements for the reference non-deformed case are performed at the inner and outer cylinders ; and finally (iv) the two rollers are pushed to deform elliptically the outer cylinder at the chosen eccentricity and systematic measurements of heat flux as a function of the eccentricity are performed.

### 12.3 On the influence of thermal effects on the growth of the elliptical instability.

Here, we study via systematic laboratory experiments, the potential development of the elliptical instability above established convective motions. Using the embarked ca-

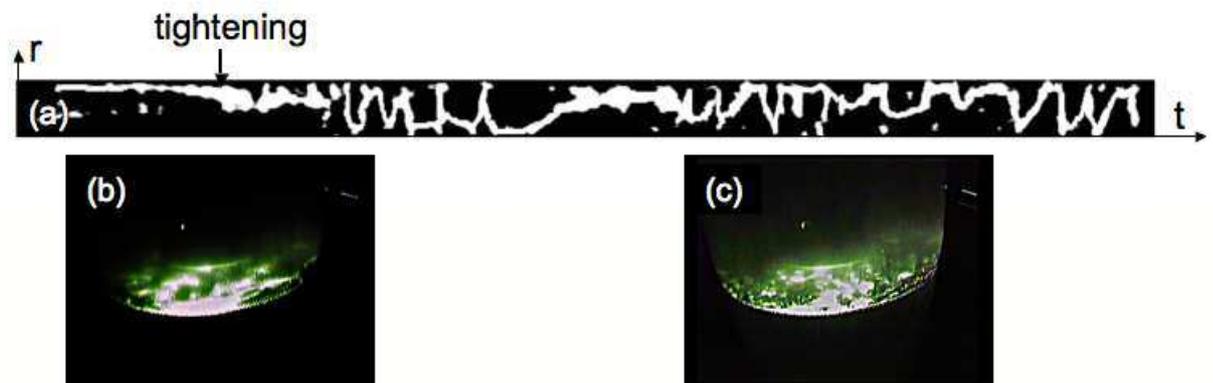


FIGURE 12.2 – (a) Space-time diagram of the flow in the rotating frame made along a radial line of the cylindrical shell. The left part of the space-time diagram corresponds to the convective case where the dynamic of the panaches is slow (see picture b) while the right part of the space-time diagram exhibits a more rapid and small scale chaotic dynamic (see picture c). The dimensionless numbers are :  $Ra = 1.8 \times 10^8$ ,  $E = 6.4 \times 10^{-6}$  and  $\epsilon = 0.04$ . See additional material online for a movie of the temporal evolution of the flow.

mera, we visualize the motions in the rotating frame in presence of convection, with or without elliptical instability. A space-time diagram made along a radial line between the two cylinders and some corresponding snapshots are shown in figure 12.2. In the absence of outer cylinder compression, convective plumes (typical size 1 cm) develop slowly and drift (figure 12.2(b)). But once a sufficient compression is applied, we observe cycles of rapid and fully turbulent small scale flows (figure 12.2(c)). Snapshots of the evolution of the dynamic of the flow from the laboratory frame are presented in figure 12.3. The first snapshot (figure 12.3(a)) presents the flow before the deformation,

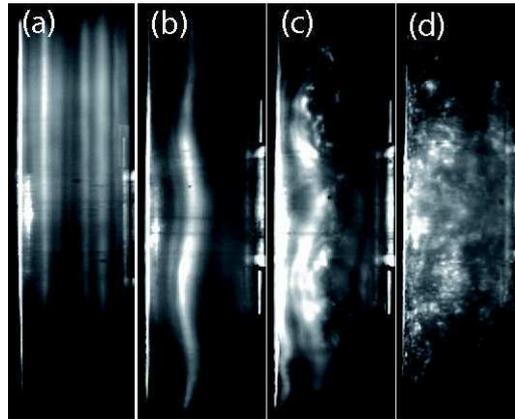


FIGURE 12.3 – Four images extracted from a video sequence captured from the laboratory frame which show the growth of the mode  $(-1, 1, 1)$  of the elliptical instability. (a) Time  $t=0$  : initial convective state, with vertical convective columns corresponding in the horizontal plane to the figure 2(b). (b)  $t=1.5$  s : growth of the mode. (c)  $t=3.5$  s : saturation of the mode. (d)  $t=4$  s : explosion which generates a three-dimensional turbulent flow corresponding in the horizontal plane to the figure 2(c). This dynamic is cyclic. The dimensionless numbers are :  $Ra = 1.8 \times 10^8$ ,  $E = 6.4 \times 10^{-6}$  and  $\epsilon = 0.04$ .

with only convective motions. Vertical structures corresponding to convective columns are clearly visualized, whose trace in the horizontal plane corresponds to the plumes already described. Once the outer cylinder is deformed and if the deformation is sufficient, the effective axis of rotation of the fluid is progressively tilted, confirming the growth of the mode  $(-1, 1, 1)$  of the elliptical instability above established convective motions (figure 12.3(b)). Its behavior is then similar to the cycling behavior observed in the isothermal case, as studied for instance by Eloy *et al.* (2003) in the cylinder and by Herreman (2009) in the cylindrical shell. After an exponential growth, the selected mode of instability saturates and finally explodes (figure 12.3(c)), giving rise to the small scale three dimensional turbulence (figure 12.3(d)) also observed in the rotating frame. Finally, these small scales are dissipated by viscosity, the flow relaminarizes and a new cycle starts (see also this cycling behavior in figure 12.2(a)). As illustrated in figure 12.4, we measured the growth rate of the elliptical instability by extracting from the movie recorded in the laboratory frame, the maximum amplitude of the sinusoidal deformation of the rotation axis as visualized by Kalliroscope with respect to time. On figure 12.4(b), the linear fit corresponding to the exponential growth of the instability before its non linear saturation, is superimposed on the experimental measurements. The slope of this straight line gives a direct measurement of the linear growth rate  $\sigma$  of the instability. This measurement is difficult because of the great size of the device and of the large rotation rate, which induce very fast growth and relatively important

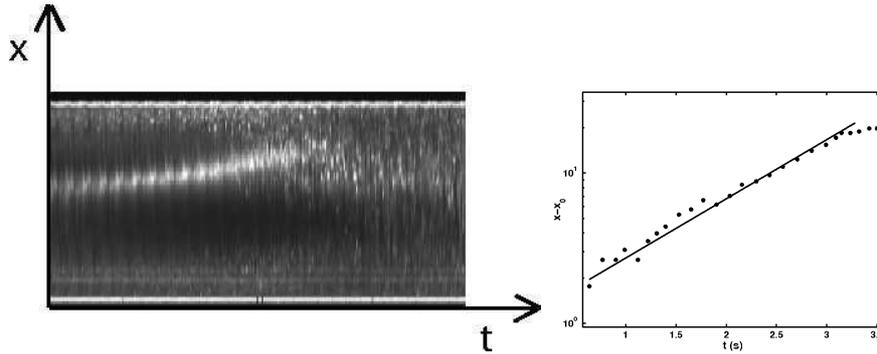


FIGURE 12.4 – Space-time diagram of the  $(-1, 1, 1)$  mode, made along a horizontal line of a video sequence captured from the laboratory. The highlighted curve corresponds to the growth of the sinusoidal S shape of the mode, whose temporal evolution is reported on the right curve together with the best exponential fit, indicating the growth rate of the instability. The dimensionless numbers are :  $Ra = 1.6 \times 10^8$ ,  $E = 3.8 \times 10^{-6}$  and  $\epsilon = 0.06$ .

vibrations. Nevertheless, we find that (i) in the absence of convection, our experimental results compare well with the asymptotic value of the dimensionless growth rate  $\sigma = 9\epsilon/16$  calculated for an unbounded, inviscid and isothermal elliptical flow (1990) and that (ii) the dimensionless growth rate  $\sigma$  is systematically smaller in presence of convection. Figure 12.5 shows the evolution of the growth rate with the Rayleigh number for two values of the Ekman number  $E$ . We conclude that the convection has a stabilizing influence on the growth of the elliptical instability. In their linear study of the elliptical instability in the presence of a diffusive temperature profile, Le Bars and Le Dizès (2006) concluded similarly on the stabilizing influence of an increasing Rayleigh number and quantified this influence. They predicted corrections in the growth rate and selected wave numbers of order  $\tilde{Ra} = \frac{\alpha(T_i - T_{in})}{\ln R_i/R_o}$ . In our experiments,  $\tilde{Ra}$  typically ranges between  $2 \times 10^{-4}$  and  $5 \times 10^{-3}$ , so this theoretically predicted dependence cannot explain the results presented in figure 12.5. Besides, we did not observe any change regarding the selected wave number when increasing the Rayleigh number. In fact, the significant variations of the growth rate measured experimentally must be related to the presence of an established convective flow that was not taken into account in the linear study. We can understand this effect qualitatively as a function of  $Ra$  by looking at the base flow above which the elliptical instability grows. For intermediate values of  $Ra$  (as those explored in the experiment), convective motions are two-dimensional and take place at a typical scale comparable to the size of the gap. They can thus be considered as perturbations of the isothermal elliptical base flow at an intermediate scale. When the Rayleigh number increases, the streamlines are more and more disturbed compared to the isothermal elliptical ones, so that the elliptical forcing is less and less felt by fluid

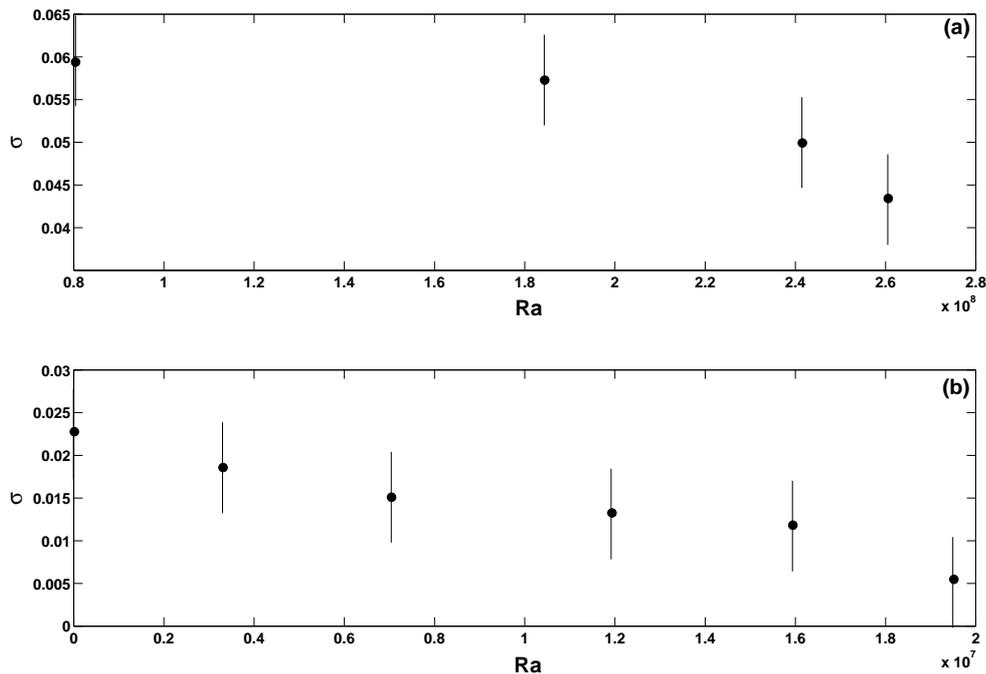


FIGURE 12.5 – Dimensionless growth rate  $\sigma$  as a function of  $Ra$  for  $\epsilon = 0.08$  and for (a)  $E = 9.7 \times 10^{-6}$  and (b)  $E = 3.9 \times 10^{-5}$ .

particles and the growth rate of the tidal instability decreases. There might even exist a Rayleigh number above which the elliptical instability cannot grow. But when further increasing  $Ra$ , the convection becomes fully turbulent and three-dimensional, with very small scale eddies : it is then possible to define an eddy viscosity which replaces the kinematic viscosity. Thus, the elliptical instability should reappear, providing that the deformation is sufficient to overcome viscous diffusion using the turbulent (rather than molecular) viscosity. Note that the study of Fabijonas and Holm (2004), using the rotating Craik-Criminale solutions of the LANS- $\alpha$  turbulence model, even shows that three-dimensional turbulence enhances the inviscid growth rate of the elliptical instability for Kelvin wavelengths that are larger than the turbulence correlation length. The study of this peculiar fully turbulent regime is very interesting, but unfortunately, it is beyond the possibilities of our present experiment. We thus plan to tackle this limit in a future experiment using grid generated turbulence.

## 12.4 On the influence of the elliptical instability on heat transfers.

As we discussed in the introduction, centrifugally-driven convection is typically organized in convection columns parallel to the rotation axis. We also saw in the previous section that this organization is completely broken in presence of the elliptical instability. Here, we study, via our laboratory experiment, the influence of the changes of the flow due to the elliptical instability on the radial heat transfer.

To do so, we introduce the Nusselt dimensionless number  $Nu$  which characterizes the efficiency of the real heat transfer compared to the purely conductive heat transfer. In the case of a cylindrical shell, the diffusive heat transfer writes  $2\pi k_e H \Delta T / \ln(R_o/R_i)$  and the Nusselt number is given by

$$Nu = \frac{\text{total heat transfer}}{\text{conductive heat transfer}} = \frac{2\pi R_i H F_i}{2\pi k_e H \Delta T / \ln(R_o/R_i)} \quad (12.4)$$

where  $k_e$  is the thermal conductivity of the working fluid,  $\Delta T = |T_i - T_{in}|$  and  $F_i$  the inner flux defined in the introduction. We use  $F_i$  to calculate  $Nu$  rather than the outer flux  $F_o$  because  $F_i$  is a mean value of the flux averaged over the whole inner cylinder whereas  $F_o$  is measured locally, at a given location of the outer cylinder. In figure 12.6, a typical temporal evolution of  $Nu$  for a convective case is shown. Once the thermal steady state is reached, the two lateral rollers are pushed on the outer cylinder and if the deformation is sufficient, a mode of the elliptical instability grows and the Nusselt number increases. Then, the Nusselt number does not stay constant, but its fluctuations correspond to the observed hydrodynamic cycles. During the laminarization phase,  $Nu$  decreases while during the turbulent stage,  $Nu$  increases. Once the elliptical constraint is released,  $Nu$  goes back to its value before the tidal deformation, provided that the thermal steady state is effectively reached.

Following the recent study of King *et al.* (2009) regarding the two regimes of heat transfer in rotating Rayleigh-Bénard convection, the sudden variation of the heat flux can be explained by a boundary layer control. Indeed, our fluid volume schematically consists in three distinct regions : the interior of the fluid (the bulk) and two vertical boundary layers situated near the inner and outer cylinders. The boundary layers located on the top and on the bottom of the shell are not considered here because the heat flux is there negligible. The boundary layers are thin regions where heat transfer is controlled by diffusion, whereas the bulk is well-mixed and isothermal. So, the heat transfer is completely controlled by the thickness of the boundary layers  $\delta$  and the inner heat flux scales as  $F_i = k_e \Delta T_i / \delta$ , and similarly for the outer heat flux. Here  $\Delta T_i$  is the temperature difference across the inner boundary layer and is given by the conservation of the total power  $2\pi R_i F_i H = 2\pi R_o F_o H$  plus the simple equation  $\Delta T = \Delta T_i + \Delta T_o$ , i.e.  $\Delta T_i = \Delta T R_o / (R_o + R_i)$ . The Nusselt number then scales as  $Nu = \frac{R_i R_o \ln(R_o/R_i)}{\delta(R_i + R_o)}$ .

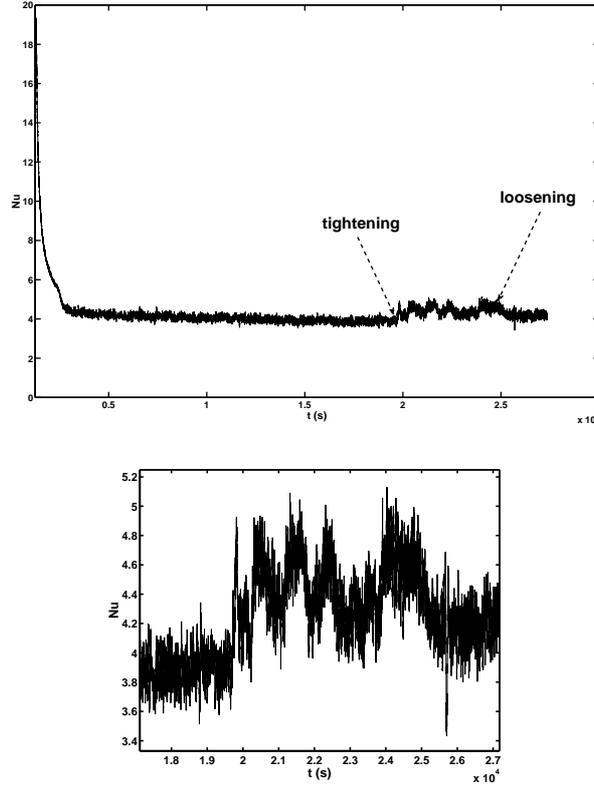


FIGURE 12.6 – Typical temporal evolution of  $Nu$  in a convective case for  $\epsilon = 0.06$ ,  $Ra = 10^8$  (once the thermal equilibrium is reached) and  $E = 9.7 \times 10^{-6}$ . A zoom on the elliptically unstable stage is made, with the presence of fluctuations linked to the dynamic of the instability.

Considering the elliptical instability only, the boundary layers are viscous layers of thickness  $\delta_E$ , which scales like  $\delta_E \sim \Delta R E_{EI}^{1/2}$ . Here  $E_{EI}$  is the Ekman number based on the typical velocity of the elliptical instability. As shown numerically by Cébron *et al.* (2010),  $E_{EI} = E$  except in the vicinity of the threshold of the elliptical instability given by the critical Ekman number  $E_c \sim (\epsilon/5.24)^2$ , where  $E_{EI} \sim E / \sqrt{E^{-1} - E_c^{-1}}$ . Now, considering convective motions only, the boundary layers are thermal boundary layers of thickness  $\delta_\kappa$ , which scales like  $\delta_\kappa \sim \Delta R \left(\frac{Ra}{Ra_c}\right)^{-\beta}$ , where  $\beta$  is a positive constant, such that the thermal boundary layers become thinner as the vigor of the convection increases. The numerical value of  $\beta$  depends of the type of convection we consider. For the classical Rayleigh-Bénard convection,  $\beta = 1/3$  is the most common scaling (Howard, 1964). In our case with a cylindrical shell and flat top and bottom perpendicular to the rotation axis, the same value is expected.

In our experiment, considering the convective structures as the base state above

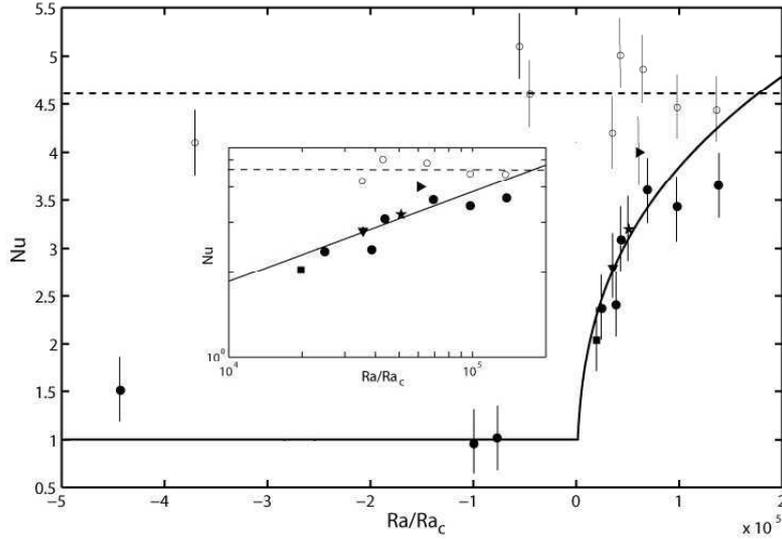


FIGURE 12.7 – Plot of Nusselt number,  $Nu$ , as a function of the ratio between the Rayleigh number and the critical Rayleigh number,  $Ra/Ra_c$ , without (filled symbols) and with elliptical instability (empty symbols,  $\epsilon = 0.04$ ).  $Ra_c$  is calculated for different Ekman numbers following Busse and Carrigan (1974).  $E = 1.3 \times 10^{-5}$  (squares),  $E = 9.7 \times 10^{-6}$  (circles),  $E = 7.8 \times 10^{-6}$  (vertical triangles),  $E = 6.5 \times 10^{-6}$  (stars) and  $E = 5.6 \times 10^{-6}$  (horizontal triangles). The solid line represents the best fit for the convective case (i.e.  $Ra > Ra_c$ ), giving the scaling law  $Nu = 0.097(Ra/Ra_c)^{0.32}$  above threshold and  $Nu = 1$  otherwise. Dotted line represents the mean experimental value (i.e.  $Nu = 4.6$ ) in presence of the elliptical instability. A zoom on the convective part is presented in the inset with a logarithmic plot.

which the elliptical instability grows, there are two possible regimes : (i) the thermal boundary layers are thinner than the viscous layers,  $\delta_\kappa < \delta_E$ , so that the elliptical instability grows inside the convective bulk and (ii) the viscous layers are thinner than the thermal ones,  $\delta_E < \delta_\kappa$ , so that the elliptical instability also partially grows over the thermal boundary layers. The transition between “thermal-control” by the convection and “viscous-control” due to the elliptical instability occurs when  $\delta_\kappa \approx \delta_E$ , corresponding to a transitional Nusselt number  $Nu_t$ . Our experiment allows us to change the thickness of the thermal boundary layers alone by varying the temperature contrast. Series of Nusselt number measurements for various Rayleigh and Ekman numbers are presented in figure 12.7 as a function of  $Ra/Ra_c$ , with and without elliptical instability. Note that in the experimental data,  $Ra_c$  is different for each Ekman number considered and computed according to (12.3). Concerning the elliptically stable but convectively unstable case,

the best fit of the heat transfer data in terms of  $Ra/Ra_c$  power law gives :

$$Nu = 0.097 \left( \frac{Ra}{Ra_c} \right)^{0.32}. \quad (12.5)$$

The obtained coefficient is consistent with the expected 1/3. When elliptical instability is included, heat transfer becomes larger for all studied cases, especially in the stratified case ( $Ra < 0$ ), and the Nusselt number remains roughly constant equal to 4.6 when changing  $Ra$ . This behavior is compatible with a viscous rather than thermal boundary layer control. We define the transition between the “thermal-control” regime and the “viscous-control” regime as the point of intersection between their respective scalings,  $Nu = 0.097(Ra/Ra_c)^{0.32}$  and  $Nu = 4.6$ . Equating the two, we solve for transitional Rayleigh number

$$Ra_t = 1.4 \times 10^7 \frac{\Delta R}{H} E^{-1/2}. \quad (12.6)$$

When  $Ra < Ra_t$ , convection is not sufficiently strong and heat transfer is affected by the elliptical instability. When  $Ra > Ra_t$ , heat transfer is not affected by the elliptical instability and follows the convective scaling. For example,  $Ra_t = 3.9 \times 10^8$  when  $E = 9.7 \times 10^{-6}$ . Unfortunately, our set-up does not allow to reach such values.

We can also explore the dependence of the heat flux on the Ekman number by systematically changing the rotation rate in maintaining  $\Omega^2 R_o \gg g$  and  $\Delta T$  constant. Note however that since our apparent gravity is related to the centrifugal force, changing the rotation rate also changes the Rayleigh number. In figure 12.8, the behavior of the heat transfer as a function of the Ekman number is shown, with and without elliptical instability. Concerning the elliptically unstable case, where the heat transfer is larger, the best fit of the heat transfer data gives the scaling law :

$$Nu_E = 0.016E^{-0.50}. \quad (12.7)$$

The obtained exponent is in excellent agreement with the expected exponent  $-1/2$ , which validates the hypothesis of control by the viscous boundary layer. The prefactor is also in very good agreement with the results of Cébron *et al.* (2010) who determined a prefactor equal to 0.01 for a spherical shell. Concerning the elliptically stable case, expressing (12.5) in the configuration of constant  $\Delta T$  and variable  $\Omega$  leads to :

$$Nu_k = 0.097 \left( \frac{\alpha \Delta T H R_o \nu}{8\pi^2 \Delta R^2 \kappa} \right)^{0.32} E^{-0.48}. \quad (12.8)$$

As shown in figure 8, the scaling closely agrees with our systematic experimental measurements.

Our last study concerns the dependance of  $Nu$  as a function of the eccentricity  $\epsilon$ . In figure 12.9, this dependence is plotted for different  $E$ . We notice that, in agreement with the previous equation (12.7),  $Nu$  increases when  $E$  decreases. For each experiment at

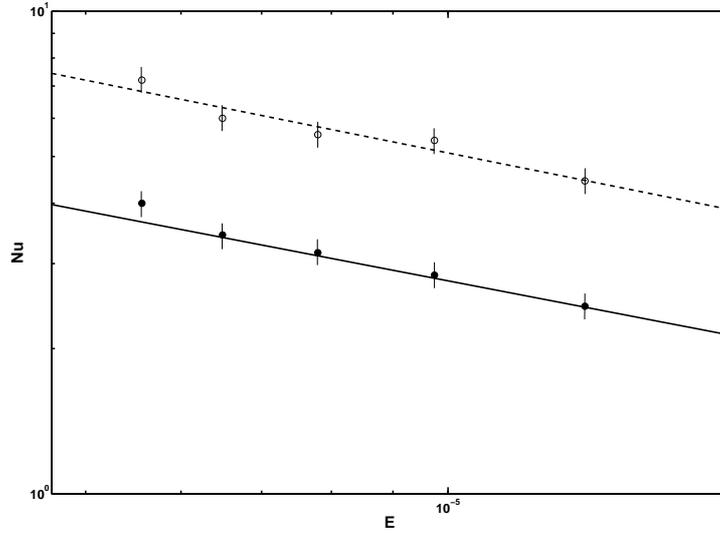


FIGURE 12.8 – Logarithmic plot of  $Nu$  as a function of  $E$  without (filled circles) and with elliptical instability (empty circles) for  $\epsilon = 0.04$  and  $\Delta T = 3 K$ . The dashed line represents the best fit in the elliptically unstable case,  $Nu_E = 0.016E^{-0.50}$ . The continuous line corresponds to the scaling law determined in figure 12.7 for the purely thermal (elliptically stable) case.

constant Ekman number,  $Nu$  increases close to threshold of the elliptical instability and rapidly reaches a constant value at larger  $\epsilon$ . This evolution is related to the evolution of  $E_{EI}$ , i.e. the Ekman number based on the typical velocity of the elliptical instability introduced before, which implies a scaling of  $Nu$  in  $(E/\sqrt{E^{-1} - (5.24/\epsilon)^2})^{-1/2}$  close to threshold and a rapid saturation towards  $E^{-1/2}$  once the deformation is sufficient. This result thus also validates our analysis in terms of relative thickness of the two types of boundary layers.

To finish with, note that the recent study of Schmitz and Tilgner (2009) has suggested an alternative explanation to King et al. (2009) regarding the heat flux control of rotating Rayleigh-Bénard convection. Indeed, their numerical simulations also show the presence of two regimes as the function of the rotation rate, even if their system has no Ekman layer. Hence, they do not interpret their results in terms of boundary layers competition, but rather in terms of advective flux competition in the bulk. In our case, the relevant advective heat flux in the bulk is related to the velocity along the imposed temperature gradient, which comes from the Ekman pumping induced by the elliptical instability. This Ekman pumping also scales in  $E^{-1/2}$  and induces the same  $Nu$  scalings as those that we obtained with the boundary layer analysis. Hence, we cannot discriminate one or the other control mechanism.

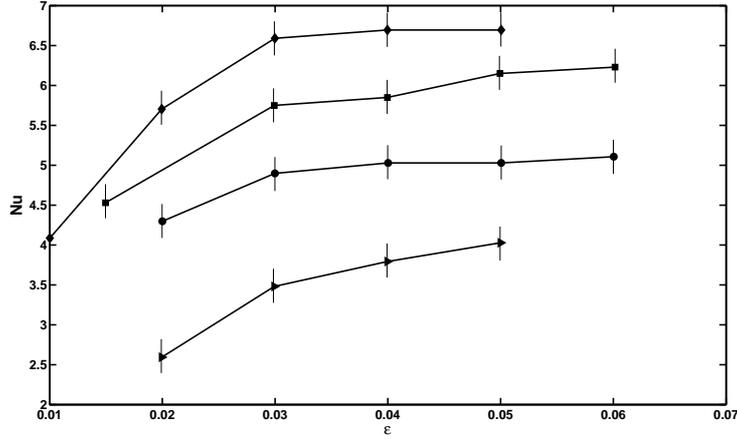


FIGURE 12.9 –  $Nu$  as a function of  $\epsilon$  for different  $E$ . Triangles  $E = 1.3 \times 10^{-5}$ , circles  $E = 9.7 \times 10^{-6}$ , squares  $E = 6.5 \times 10^{-6}$  and diamonds  $E = 5.6 \times 10^{-6}$ . Above the threshold of the elliptical instability,  $Nu$  changes with the amplitude of the instability following a typical supercritical bifurcation, until it rapidly saturates.

## 12.5 Conclusion

This paper presents the first systematic experimental study of the reciprocal influence of the elliptical and convective instabilities in an elliptically deformed and differentially heated rotating cylindrical shell. The first predominant result is that the elliptical instability grows on established convective motions even if its growth rate decreases when the intensity of the convection increases. We have also found scaling laws characterizing the Nusselt number. Two regimes were found corresponding to a boundary layers control by either thermal dissipation or viscous diffusion. Even if the range of parameters (Ekman and Rayleigh numbers) accessible to our experimental device is relatively limited, we have identified and validated general physical mechanisms which control the heat transfer, with or without elliptical instability.

In the Earth's core, convective motions are different from our case because of geometrical constraints. Indeed, they take the form of Busse columns (Busse, 1970) around the inner solid core which propagate as thermal Rossby waves. Hence, scaling law for heat transfers is different. Christensen and Aubert (2006) determined :

$$Nu - 1 = 0.14 \left( \frac{Ra}{Ra_c} \right)^{1.1}, \quad (12.9)$$

where  $Ra_c$  scales like  $E^{-4/3}$  (Carrigan & Busse, 1983). A good way to reproduce this type of motions in the laboratory is to incline the top and bottom boundaries of the shell

(Busse & Carrigan, 1974). This will be the subject of a future study. But we already expect the physical mechanisms shown here to remain valid. In particular, the scaling (12.7) is robust and should persist in planetary cases (Cébron *et al.*, 2010). Equating this scaling with (12.9), we can evaluate the transitional Rayleigh number  $Ra_t$  as a function of  $E$  :

$$Ra_t = Ra_c \left( \frac{0.016E^{-0.50} - 1}{0.14} \right)^{1/1.1}, \quad (12.10)$$

A typical estimation of the Ekman number in the Earth's liquid metal outer core is  $E \approx 10^{-15}$ , which gives a transitional Rayleigh number  $Ra_t \approx 7.2 \times 10^{22}$ . This result suggests that the outer Earth's core where  $Ra \approx 8 \times 10^{24}$  (Aurnou, 2007; Christensen & Aubert, 2006), is above the transition between the two regimes, hence it is thermally controlled. Nevertheless, due to the closeness of the obtained values, a tidally dominated flux is not precluded in other convective planetary systems. Note also that the heat transfer by elliptical instability could be especially important in the outer stratified part of the core (Kerswell, 1993), which should not be considered as a thermal blanket.

# Chapitre 13

## Modélisation numérique de la convection dans une cavité cylindrique tournante.

### 13.1 Introduction.

#### 13.1.1 Bilan de l'expérience.

La partie expérimentale de ce travail nous a permis d'obtenir des lois d'échelle pour la convection dans une cavité cylindrique en rotation d'une part et pour l'instabilité elliptique d'autre part. Nous avons vu que la taille des couches limites gouverne les différents scaling obtenus. Nous avons notamment montré que la loi d'échelle concernant  $Nu$  en fonction de  $Ra$  en présence de convection est de la forme  $Nu \sim (Ra/Ra_c)^{1/3}$ , similaire à la loi d'échelle obtenue pour la convection de Rayleigh-Bénard classique, dans la gamme des paramètres de travail. Compte-tenu des caractéristiques de notre système (cf. chapitre précédent), ce n'est pas une surprise. Toutefois, plusieurs questions restent ouvertes :

- expérimentalement, nous avons travaillé sur une gamme relativement réduite en  $Ra$ . La voie numérique est une bonne solution pour explorer une plus large gamme de  $Ra$ , et ainsi obtenir une courbe  $Nu$  versus  $Ra$  que nous pourrions comparer à celle obtenue pour la convection Rayleigh-Bénard classique. Le but est d'étudier la robustesse de l'exposant  $1/3$  trouvé expérimentalement.
- Les études de convection de Rayleigh-Bénard sont généralement effectuées à températures imposées. Ici, nous avons bien une température imposée sur le cylindre intérieur mais nous avons une condition sur le flux thermique au niveau du cylindre externe. La même question se pose une nouvelle fois : Le scaling en  $1/3$  est-il modifié selon la condition sur le cylindre externe utilisée ? De plus, le flux

dans l'air fait intervenir un coefficient convectif noté  $h$ . Nous quantifierons quelles modifications entraîne un changement de la valeur de  $h$  sur la loi d'échelle.

### 13.1.2 Considérations numériques.

Nous avons vu en introduction que les mouvements convectifs dans le cylindre en rotation sont quasi-invariants sur toute sa hauteur. En effet, le pompage et la recirculation induits par la hauteur finie du cylindre interviennent aux ordres supérieurs dans l'écoulement. De façon à rendre le calcul numérique moins lourd, nous utilisons donc une géométrie bidimensionnelle correspondant à une coupe horizontale à une hauteur donnée de la cavité cylindrique de longueur infinie. Une méthode simple et rapide pour étudier cet écoulement est celle des éléments finis<sup>1</sup>. Elle permet de reproduire la géométrie et d'imposer les conditions aux limites désirées facilement.

Les conditions initiales sont les mêmes pour chaque calcul : nous partons d'une situation où le fluide est au repos dans le référentiel en rotation et le profil de température radial est diffusif. En fait, notez que cette condition a peu d'importance puisque nous attendons que l'état d'équilibre statistique soit atteint pour exploiter les résultats de nos calculs. Cet état d'équilibre est obtenu par résolution des équations de Navier-Stokes et de la température adimensionnées dans le repère en rotation. Pour faire le parallèle avec l'expérience, deux quantités sont alors systématiquement évaluées : le flux thermique au niveau du cylindre intérieur permettant de calculer le nombre de Nusselt et la température sur la frontière externe permettant de calculer le nombre de Rayleigh.

### 13.1.3 Equations et conditions aux limites utilisées.

Le modèle que nous avons implémenté est décrit théoriquement dans la partie introductive. Nous rappelons ici les deux équations qui sont résolues :

- l'équation de Navier-Stokes (1.23) écrite avec la gravité centrifuge radiale :

$$\frac{E}{Pr} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + 2\vec{e}_z \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla} P + E\vec{\nabla}^2 \vec{u} + RaE\Theta r \vec{e}_r, \quad (13.1)$$

- l'équation de la température (1.24) :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \Theta = \vec{\nabla}^2 \Theta, \quad (13.2)$$

- l'équation de conservation de la masse :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0. \quad (13.3)$$

---

1. Nous avons utilisé le logiciel commercial Comsol.

Dans toutes les simulations, les conditions aux limites adoptées pour la vitesse sont le non-glissement (“no-slip”) aux deux frontières du modèle. Pour la température, nous avons simulé plusieurs cas :

- les températures sur les cylindres interne et externe sont imposées, égales respectivement à 0 et 1,
- comme dans l’expérience, seule la température sur le cylindre interne est imposée, la température sur le cylindre externe évolue par diffusion thermique à travers sa paroi puis par convection dans l’air, modélisée par un flux convectif faisant intervenir un coefficient de transfert thermique noté  $h$ . En fixant à 1 la température de l’air, ce flux thermique s’écrit dans sa version adimensionnée, en utilisant la conservation de l’énergie :

$$F_o = \frac{\Theta - 1}{\frac{1}{h} + \frac{e}{k_p}}, \quad (13.4)$$

où  $e$  est l’épaisseur du cylindre extérieur et  $k_p$  sa conductivité thermique.

## 13.2 Résultats.

### 13.2.1 Structures thermiques.

Suivant le nombre de Rayleigh de travail, l’instabilité convective prend la forme de cellules ou de panaches thermiques. Lorsque le nombre de Rayleigh est proche de celui au seuil, des cellules se développent autour du cylindre intérieur. Puis, lorsque le nombre de Rayleigh augmente, des panaches se développent depuis les deux cylindres (cf. figure 13.1). Ces structures thermiques prennent place dans le coeur du fluide (ou bulk), créant ainsi une couche limite thermique sur chaque frontière (figure 13.2). Dans le bulk, le fluide est correctement mélangé. Tout comme dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard classique (figure 1.2) la température décroît légèrement dans le bulk lorsqu’on va vers la température la plus élevée. Cependant, la majeure partie du gradient thermique radial se localise près des frontières. En outre, nous remarquons qu’à cause de la courbure des parois de la cavité, la température moyenne du fluide est différente de 0.5, contrairement au cas Rayleigh-Bénard plan. Ceci est dû à la géométrie cylindrique qui impose des facteurs géométriques dans l’expression de la conservation de l’énergie thermique. La température moyenne au sein de l’écoulement  $T_{moy}$  s’exprime alors comme :

$$T_{moy} = \frac{R_e T_e + R_i T_i}{R_i + R_e}, \quad (13.5)$$

où  $T_e$  est la température sur le cylindre externe,  $T_i$  celle du cylindre interne,  $R_i$  est le rayon intérieur et  $R_e$  le rayon extérieur de la cavité.

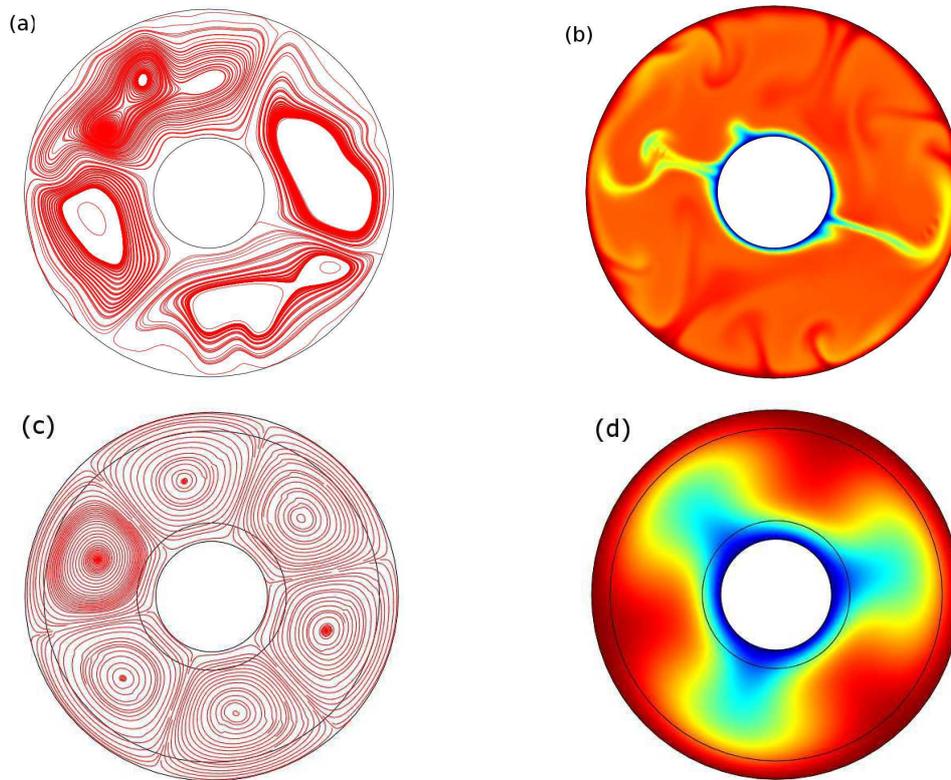


FIGURE 13.1 – Lignes de champ de vitesses convectives en géométrie cylindrique dans un plan horizontal (a, c) et champ de températures associé (b,d) :  $Ra = 1.2 \times 10^7$ ,  $Pr = 7$ ,  $E = 4.7 \times 10^{-6}$ ,  $R_e/R_i = 0.3$  (a, b);  $Ra = 1.7 \times 10^5$ ,  $Pr = 7$ ,  $E = 4.7 \times 10^{-5}$ ,  $R_e/R_i = 0.3$  (c, d). Calcul bidimensionnel avec conditions de non-glissement sur les parois et températures sur le cylindre intérieur et extérieur imposées (cf. chapitre 3).

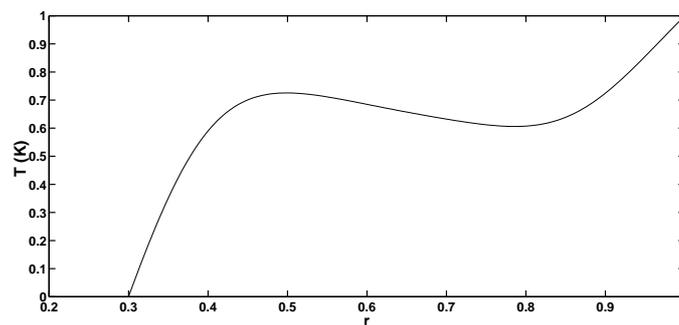


FIGURE 13.2 – Profil de température radial dans une cavité cylindrique.

### 13.2.2 Lois d'échelle d'origine numérique.

De la même façon que dans l'étude expérimentale, les nombres de Rayleigh et de Nusselt sont évalués pour chaque calcul. Le nombre de Nusselt est calculé par intégration du flux thermique interne sur la frontière intérieur du domaine et le nombre de Rayleigh est basé sur la différence de température entre le cylindre intérieur et l'intérieur du cylindre extérieur, pour toutes les configurations étudiées (i.e. températures imposées ou flux sur la frontière externe). Sur la figure 13.3, les points numériques obtenus pour  $Nu$  sont portés en fonction de  $Ra$ . Une loi d'échelle d'exposant  $1/3$  s'ajuste correctement sur ces points. De plus, le nombre de Rayleigh qui permet le démarrage de la convection est de l'ordre de  $10^3$ , en accord avec l'expression donnée par Busse & Carrigan (1974) dans le cas d'une cavité infiniment haute :

$$Ra_c = 1708. \quad (13.6)$$

Nous constatons également qu'une modification du coefficient convectif d'un ordre de grandeur, i.e. du transfert thermique dans l'air et donc de la condition à la limite extérieure (13.4), ne perturbe pas la loi d'échelle.

Nous avons donc vérifié que l'écoulement convectif avait les mêmes propriétés, au premier ordre, qu'un écoulement de convection dans une cellule de Rayleigh-Bénard fixe. En outre, nous avons validé la loi de puissance  $Nu \sim Ra^{1/3}$  pour une convection dirigée par la force centrifuge. Enfin, nous constatons également que les conditions aux limites utilisées pour le cylindre extérieur ne sont pas primordiales puisqu'elle ne modifie ni la loi de puissance, ni le nombre de Rayleigh critique, à condition d'utiliser le nombre de Rayleigh calculé avec le gradient de température effectif dans la coquille.

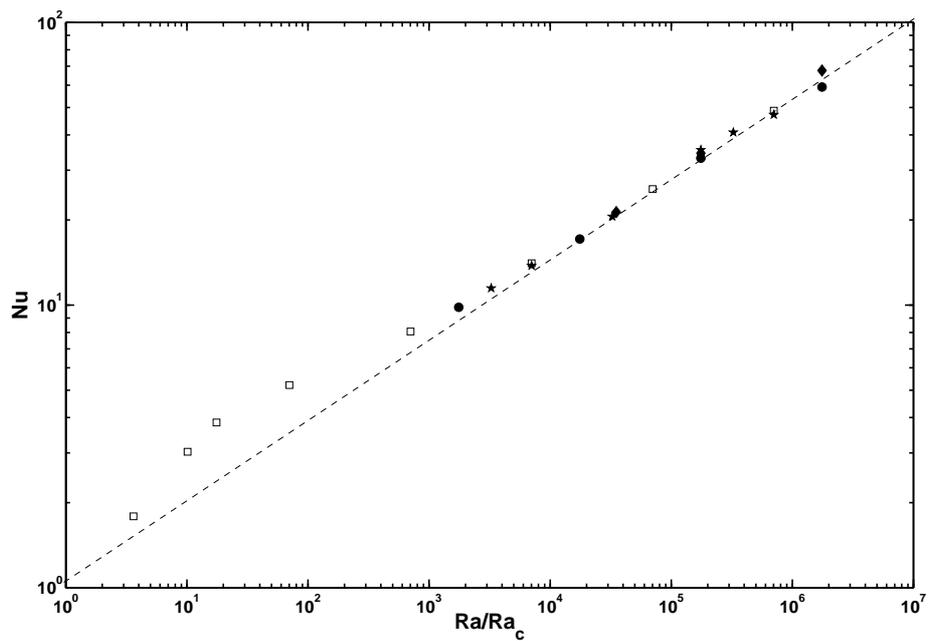


FIGURE 13.3 – Graphe du nombre de Nusselt  $Nu$  en fonction du nombre de Rayleigh  $Ra$  en coordonnées logarithmiques. Une droite de pente  $1/3$  s'ajuste convenablement sur les points numériques pour tous les cas : températures imposées sur les deux frontières (carrés), température imposée sur la frontière intérieure et condition de flux sur la frontière externe (cercles :  $h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , losanges :  $h = 50 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , étoiles :  $h = 100 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ .)

# Chapitre 14

## Autres applications géo- et astrophysiques.

Dans le chapitre concernant l'étude expérimentale, nous nous sommes concentrés sur une seule application : la Terre telle qu'elle nous apparaît à l'heure actuelle. Mais il existe d'autres corps dans le système solaire pour lesquels leurs régions liquides présentent des mouvements de convection thermo-solutales. Cela pourrait être le cas pour Mars, Jupiter et Uranus, planètes du système solaire ; ainsi que pour Ganymède, une des 4 lunes de Jupiter. Avant de donner leurs caractéristiques dans le tableau 14.1, il est nécessaire de définir le nombre de Rayleigh  $Ra_f$  basé sur le flux thermique. En effet, le nombre de Rayleigh classique  $Ra$  est déterminé par le gradient thermique qui est souvent difficile à quantifier dans de tels systèmes. Le nombre de Rayleigh-flux  $Ra_f$  s'écrit donc :

$$Ra_f = RaNu = \frac{\alpha g D^4 Q}{\rho c_p \kappa^2 \nu}, \quad (14.1)$$

où  $Q$  est le flux thermique,  $\rho$  la densité moyenne du fluide,  $c_p$  sa chaleur spécifique,  $\kappa$  sa diffusivité thermique,  $\alpha$  son coefficient d'expansion thermique,  $\nu$  sa viscosité cinématique,  $g$  l'accélération de la pesanteur du corps considéré et  $D$  la taille typique de la région convective. Les valeurs numériques de ces paramètres sont données dans le tableau 14.1.

Avant de commencer notre étude, il convient de s'interroger sur l'existence d'une instabilité de marées dans ces corps. Nous avons porté les couples ( $E$ , ellipticité) (Moore, 2003; Ioannou & Lindzen, 1993) pour ces astres sur le diagramme de stabilité de la figure 11.5. Il apparaît que seuls Io, Jupiter et Ganymède peuvent être instable vis-à-vis de l'instabilité de marées. La Terre est stable à l'heure actuelle mais a pu être instable lors de sa formation. Le cas de Mars est un peu plus compliqué. Si l'on considère uniquement l'effet de marées dû au Soleil, elle est stable. Néanmoins, Mars a pu être déformée par des interactions gravitationnelles avec des météorites, permettant alors l'excitation de l'instabilité elliptique (Arkani-Hamed, 2009).

	Terre	Ganymède	Jupiter	Uranus	Mars
$\Omega (s^{-1})$	$7 \times 10^{-5}$	$10^{-5}$	$2 \times 10^{-4}$	$1.4 \times 10^{-5}$	$7 \times 10^{-5}$
$\rho (kg.m^{-3})$	$1.1 \times 10^4$	$6 \times 10^3$	$10^3$	$10^3$	8300
$D (m)$	$3 \times 10^6$	$7 \times 10^5$	$3 \times 10^7$	$10^7$	$1.5 \times 10^6$
$Q (W.m^{-2})$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	3	$10^{-1}$	$10^{-3}$
$c_p (J.kg^{-1}.K^{-1})$	1000	1000	1000	1000	1000
$\kappa (m^2.s^{-1})$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\alpha (K^{-1})$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$
$\nu (m^2.s^{-1})$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$
$g (m^2.s^{-1})$	10	1.4	24.8	8.9	3.7
$E$	$5 \times 10^{-15}$	$2 \times 10^{-13}$	$5 \times 10^{-18}$	$7 \times 10^{-16}$	$6 \times 10^{-15}$
$Ra_f$	$6 \times 10^{29}$	$6 \times 10^{25}$	$6 \times 10^{37}$	$9 \times 10^{33}$	$9 \times 10^{27}$

FIGURE 14.1 – Paramètres physiques et nombres sans dimensions caractérisant les systèmes étudiés (King *et al.*, 2009; Christensen & Aubert, 2006; Stevenson, 2003; Nimmo & Stevenson, 2000).

Afin de déterminer si le transfert de chaleur est susceptible d’être modifié, il convient de définir un nombre de Rayleigh-flux de transition  $Ra_{ft}$ . Nous procédons comme dans le chapitre 9, la transition est définie par l’égalité des nombres de Nusselt thermique et visqueux. Il vient alors :

$$Ra_{ft} = 0.11Ra_c E^{-1/2} (0.016E^{-1/2} - 1)^{0.91}. \quad (14.2)$$

Or, dans ce genre de systèmes,  $Ra_c \sim E^{-4/3}$  (Christensen & Aubert, 2006) ; l’équation précédente se simplifie :

$$Ra_{ft} = 0.11E^{-11/6} (0.016E^{-1/2} - 1)^{0.91}. \quad (14.3)$$

Sur la figure 14.2, nous avons porté en coordonnées logarithmiques,  $Ra_{ft}$  en fonction de  $E$ , ainsi que les valeurs correspondant aux corps étudiés.

Nous constatons que Jupiter et Uranus sont clairement dans le régime dominé par la thermique. Si une instabilité de marées venait à se développer dans ces planètes, elle ne modifierait pas le flux thermique. La Terre quant à elle, se situe également dans ce même régime. Toutefois, elle est très proche de la transition. Cela nous laisse à penser qu’une instabilité de marées pourrait avoir des effets sur le transfert thermique. Enfin, les deux derniers corps, à savoir Mars et Ganymède, sont clairement dans le régime où l’instabilité de marées perturbe le flux thermique.

Enfin, notifions également qu’il existe des corps stratifiés thermiquement et où les conditions sont réunies pour que l’instabilité de marées puisse pousser. C’est le cas de

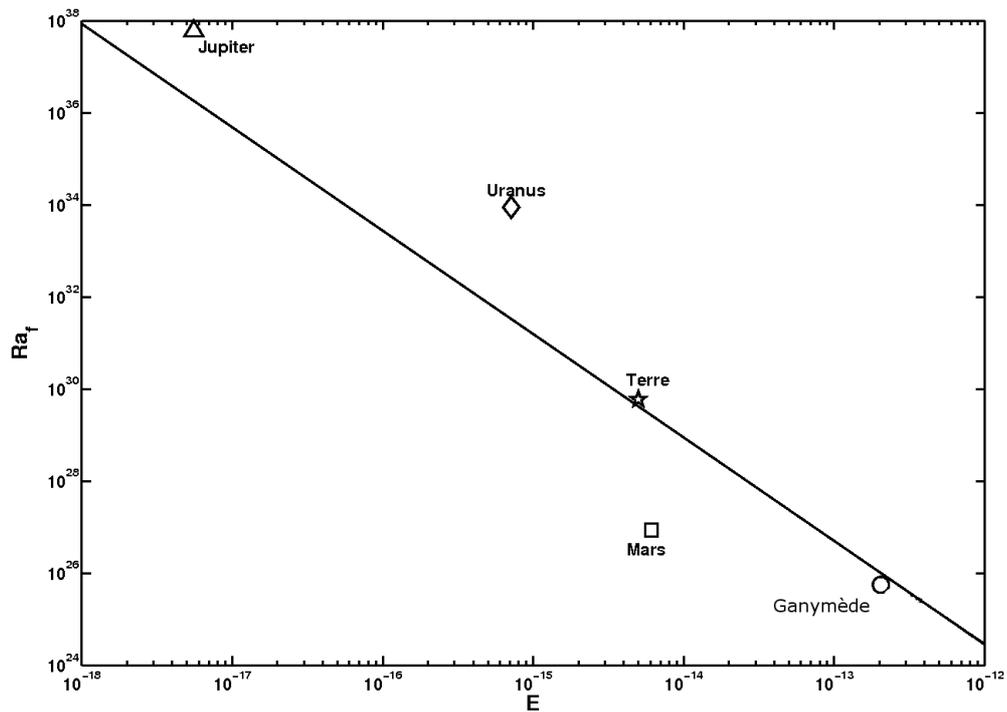


FIGURE 14.2 – Graphe du nombre de Rayleigh-flux  $Ra_f$  en fonction du nombre d'Ekman  $E$  en coordonnées logarithmiques. La droite correspondant à l'équation (14.3) indique la séparation entre le régime contrôlé par les couches limites visqueuses en dessous de la droite et le régime contrôlé par les couches limites thermiques au dessus.

Io, un autre satellite de Jupiter. En effet, Io possède un noyau constitué de fer fondu, purement conducteur (Wienbruch & Spohn, 1995). L'instabilité de marées pourrait y forcer un mécanisme de brassage et induire une augmentation du flux thermique. Ainsi, par une mesure de flux thermique à la surface de Io, nous pourrions confirmer ou infirmer la présence de l'instabilité de marées, l'augmentation du flux par rapport au cas conducteur étant alors sa signature.

## **Cinquième partie**

### **Solidification d'un alliage binaire en rotation et influence de l'instabilité elliptique.**

Cette partie est une étude préliminaire concernant la solidification d'un alliage binaire, avec ou sans instabilité elliptique. Les premiers résultats prometteurs présentés ouvrent la voie à de futures études. Comme pour les parties précédentes, il s'agit aussi ici d'un cas particulier de convection hétérogène. En effet, lors de la cristallisation d'un alliage binaire, des éléments légers sont relargués et entretiennent une convection solutale, exactement comme dans le noyau terrestre externe. Nous sommes alors en présence de 2 types de convection : thermique et solutale. Il s'agit donc bien de convection hétérogène. Par ailleurs, nous nous sommes également intéressés à l'influence de la présence de l'instabilité elliptique sur la cristallisation. Comme dans la quatrième partie, l'instabilité elliptique est susceptible de perturber le champ convectif et d'agir comme une convection forcée. Nous pouvons donc également parler de convection hétérogène pour ce cas précis.

Après une brève introduction, nous nous intéresserons à la phénoménologie de la cristallisation d'un mélange binaire. Nous présenterons ensuite le dispositif et la procédure expérimentale suivis. Ensuite, nous exposerons les résultats obtenus et les modèles simples qui permettent de les justifier. Nous concluerons enfin sur les implications géophysiques possibles de ces résultats.

# Chapitre 15

## Introduction.

La solidification d'un mélange à plusieurs composants -comme le noyau liquide de la Terre- entraîne la formation d'un solide et le rejet de liquide de composition différente du mélange initial. Une instabilité morphologique peut alors croître : une couche appelée "mushy layer" se développe à l'interface. Il s'agit d'une matrice poreuse qui évolue avec l'avancée de la solidification. Sa dynamique met en jeu des processus convectifs dans un système aux frontières qui évoluent (cf. la revue de Worster (1997)).

Un régime convectif particulier est celui pour lequel l'écoulement résultant de la cristallisation s'organise en fins canaux cylindriques appelés "cheminées". Ces structures à petites échelles présentent une importance dans de nombreux systèmes naturels et industriels et peuvent avoir des conséquences aux plus grandes échelles. Ainsi, dans l'industrie sidérurgique, ces cheminées sont responsables de la formation de zones de fragilité dans les produits coulés. Ces zones sont susceptibles d'altérer considérablement la résistance du produit (Sample & Hellawell, 1984). Par ailleurs, dans la nature, la formation de glace à partir d'eau salée (Eide & Martin, 1975; Wettlaufer *et al.*, 2000) entraîne le rejet de sel depuis les cheminées. Ce sel rejeté entraîne une augmentation de la densité de l'eau de mer à proximité. Ainsi, les courants océaniques (en particulier la circulation globale thermohaline) sont affectés par ce phénomène et plongent vers les profondeurs au niveau de la banquise. Ces cheminées doivent aussi apparaître dans le noyau terrestre (Fearn *et al.*, 2002; Bergman & Fearn, 1994), où elles pourraient alors affecter significativement la structure de la graine, ainsi que l'écoulement dans le noyau externe.

La solidification dans le noyau terrestre présente certaines particularités. Tout d'abord, le champ de gravité varie radialement et pourrait conduire à un effondrement de la "mushy layer" sous son propre poids. Ensuite, la force de Coriolis influe fortement sur l'écoulement dans la partie liquide du noyau, ce qui pourrait avoir des répercussions sur la solidification et par conséquent sur la forme des cheminées. Enfin, si l'instabilité de marée est présente dans la partie liquide d'un intérieur planétaire, elle pourrait également affecter la dynamique de la solidification. Dans notre étude expérimentale, nous

nous intéressons à la solidification sous rotation, où la force de Coriolis est prépondérante et le champ de gravité centrifuge et radial. Nous pouvons également imposer la croissance de l'instabilité de marées. Notre but est de répondre à ces quelques questions : (i) quelle est la structure du solide formé sous rotation ? Comment l'écoulement sous forme de colonnes de Busse affecte-t-il la solidification ? Quel est le devenir des cheminées ? (ii) Quelle est sa dynamique de croissance ? (iii) Quelle est l'influence de l'instabilité de marées sur la dynamique de croissance ?

# Chapitre 16

## Etude expérimentale.

### 16.1 Méthodologie.

Cette étude vient en complément de l'étude de la partie 4 et réutilise donc le même dispositif expérimental : deux cylindres co-rotatifs, verticaux et co-axiaux. La température du cylindre intérieur  $T_i$  est contrôlée par une circulation de fluide caloporteur thermostaté, à savoir du liquide de refroidissement automobile (liquide jusqu'à des températures de  $-20^\circ\text{C}$ ). Comme auparavant, les deux cylindres tournent suffisamment vite pour que la gravité du laboratoire soit négligeable devant la gravité radiale. Cette fois, la cavité cylindrique est remplie d'eau salée, à hauteur de 3.2 % en masse de sel. La nature du mélange binaire utilisé doit respecter ces conditions :

- le fluide doit être transparent afin de faciliter la visualisation de l'interface,
- sa température de cristallisation doit être inférieure à la température ambiante, de façon à pouvoir entretenir des mouvements de convection thermique dans notre système,
- le solide formé doit être moins dense que le fluide relargué, de façon à entretenir une convection compositionnelle. En effet, dans notre dispositif expérimental, la force centrifuge -qui joue le rôle de la gravité pour une planète- est orientée vers l'extérieur de la cavité. La situation est donc inversée par rapport à celle du noyau terrestre où c'est du fluide moins dense qui est rejeté lors de la solidification.

Les deux dernières conditions sont indispensables pour entretenir une convection thermosolutale. L'utilisation d'une solution de chlorure de sodium  $\text{NaCl} - \text{H}_2\text{O}$  convient. Son diagramme de phase est donnée sur la figure 16.1.

Dans nos expériences, on se placera dans le cas de la solidification d'un liquide de concentration  $c$  inférieure à la concentration du point eutectique  $c_e$  ( $c < c_e$ ), le solide cristallisé étant alors de l'eau pure. Le liquide résiduel est enrichi en chlorure de sodium et voit sa température de cristallisation diminuer au cours du temps. Nous suivrons l'évolution temporelle du front de solidification grâce à une camera placée dans

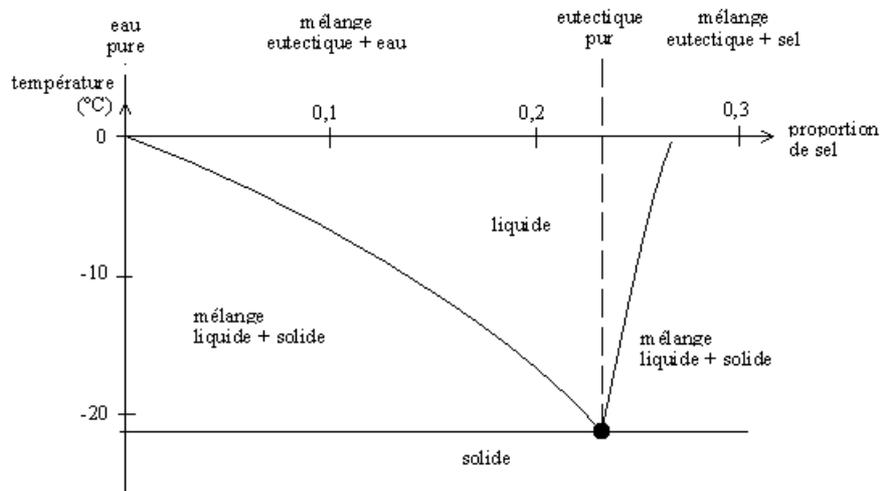


FIGURE 16.1 – Diagramme de phase (concentration  $c$ , température  $T$ ) du système binaire  $\text{NaCl} - \text{H}_2\text{O}$ . Le point eutectique est situé à  $c_e = 23.3 \%$  et  $T_e = -21.1^\circ\text{C}$ .

le laboratoire. Le solide obtenu sera photographié afin d'en caractériser la structure.

Enfin, comme dans l'étude de la quatrième partie, nous pouvons comprimer le cylindre extérieur à l'aide de 2 rouleaux verticaux disposés symétriquement à l'axe de rotation afin de permettre la croissance de l'instabilité elliptique, soit avant le début de la croissance cristalline, soit à la fin de la solidification. Par les mêmes méthodes que précédemment, nous pourrions caractériser son influence.

### 16.1.1 Résultats.

La figure 16.2 montre l'évolution de l'épaisseur du solide formé en fonction du temps, déduite à partir de l'enregistrement vidéo. Les résultats de l'expérience en rotation seule (cercles) sont comparés avec ceux de l'expérience où l'instabilité elliptique est présente dès le début de l'expérience (étoiles). Toutes ces expériences ont été réalisées dans les mêmes conditions : mêmes températures et mêmes vitesses de rotation. La différence est remarquable : la vitesse d'avancée du front de cristallisation est identique pour la première partie de l'expérience où la présence de l'instabilité elliptique ne perturbe pas la croissance cristalline. Puis à partir d'un certain temps ( $t \sim 4000$  s), la croissance s'arrête dans le cas où l'instabilité elliptique est présente tandis qu'elle se poursuit pour le cas sans instabilité elliptique. En revanche, il est important de relever que lorsque l'instabilité elliptique est présente uniquement à la fin de la solidification, elle ne semble pas avoir d'influence, ou alors une influence trop faible pour être détectable, étant donné la résolution des enregistrements vidéo. Il est également possible qu'elle agisse sur le solide formé, mais sur des échelles de temps trop longues pour voir

son effet lors de nos expériences de durées limitées.

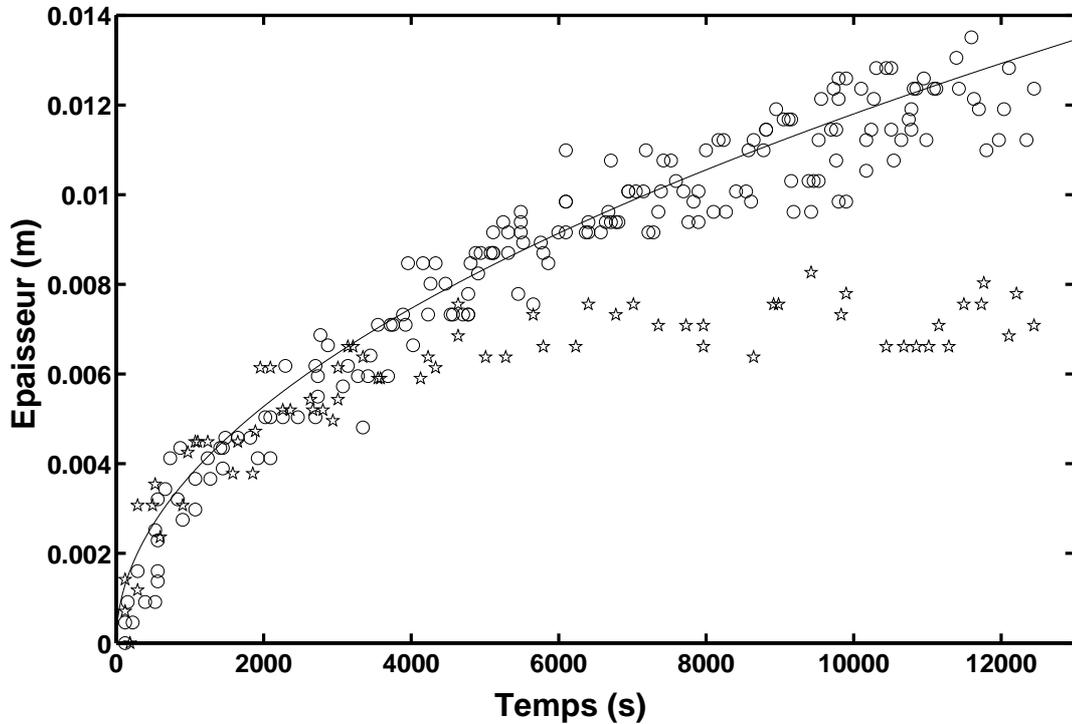


FIGURE 16.2 – Evolution de l'épaisseur en fonction du temps. Les données expérimentales sont données pour une vitesse de rotation  $\Omega = 200 \text{ trs/min}$  et une température imposée dans le cylindre intérieur  $T_i = -10^\circ\text{C}$ . Le cas sans instabilité elliptique (cercles) est superposé au cas avec instabilité elliptique (étoiles).

L'observation visuelle de la zone cristallisée sous forte rotation uniquement (figure 16.3) montre, en comparaison avec la solidification d'eau pure, la présence de cheminées. Elles semblent s'aligner préférentiellement selon la direction verticale, direction de l'axe de rotation. L'espacement radial entre les cheminées est de quelques millimètres. La présence de ces structures verticales nous invite à penser que, si elles existaient à l'interface graine-noyau, elles présenteraient alors une organisation différente dans le sens Nord-Sud et dans le sens Est-Ouest. Cette différence de structure pourrait expliquer une anomalie entre la vitesse sismique des ondes traversant la graine dans un plan équatorial et celles la traversant dans un plan polaire. Cette structure est conservée si l'instabilité elliptique est présente.

Un autre point est la forme, à l'échelle macroscopique, de l'interface (cf. figure 16.4). Elle n'est pas parfaitement verticale, l'épaisseur en bas du conteneur semble un peu plus importante qu'en haut. Cela pourrait provenir de deux raisons : (i) la tempéra-

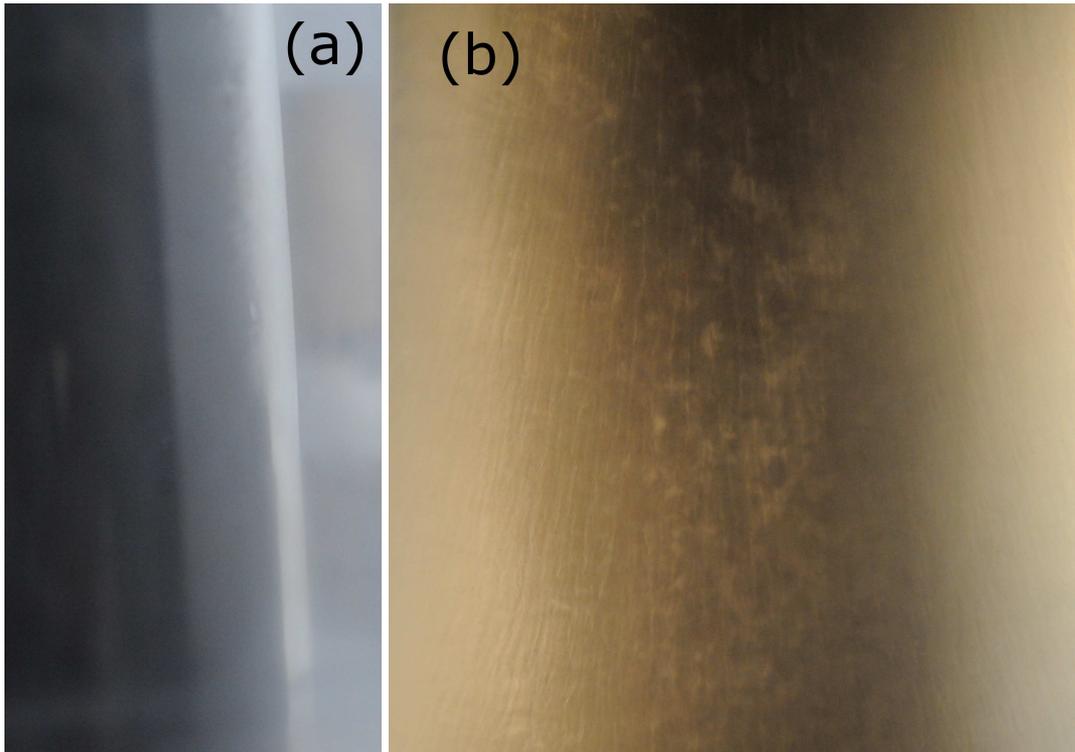


FIGURE 16.3 – Photographies de la surface du solide formé à la fin de l'expérience dans la cas de la cristallisation d'eau pure (a) et d'eau salée (b). Dans les deux cas, l'instabilité elliptique est absente.

ture du cylindre intérieur n'est pas parfaitement homogène sur toute la hauteur ; (ii) les mouvements de convection diffèrent entre le haut et le bas de la cuve, le flux de chaleur étant plus important en haut.



FIGURE 16.4 – Forme de l'interface photographiée à la fin d'une expérience, dans le cas où l'instabilité elliptique n'était pas présente ( $\Omega = 200 \text{ trs/min}$  et  $T_i = -10^\circ\text{C}$ ).

### 16.1.2 Interprétation.

Une manière d'expliquer la verticalité des cheminées est d'invoquer la contrainte de Proudman-Taylor. En effet, le flux de soluté lié à la cristallisation est lui aussi soumis à cette contrainte qui tend à "verticaliser" les cheminées. Comme ce flux de soluté n'est pas immédiatement affecté par l'instabilité elliptique, cette structure verticale persiste en sa présence.

Intéressons-nous maintenant à la modélisation de la propagation du front dans le temps. Dans notre système, les convections thermiques et compositionnelles existent simultanément. De ce fait, la convection dans la région liquide est légèrement plus vigoureuse, de par la présence d'une poussée d'Archimède "solutale" en plus. Toutefois, la modélisation peut être traitée de façon similaire au cas de la convection thermique

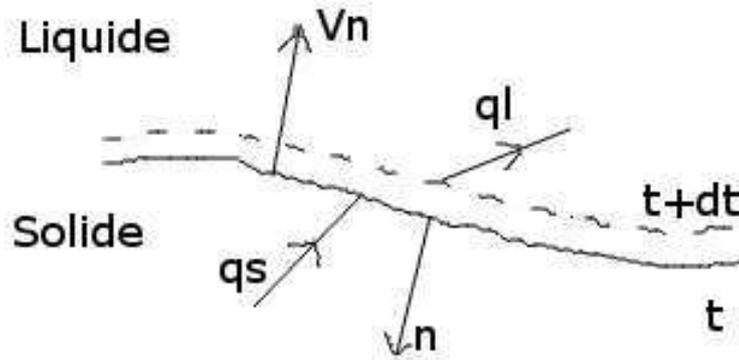


FIGURE 16.5 – Schéma du bilan de chaleur au niveau de l'interface (Worster & Moffatt, 2000).

seule. Il faut tout d'abord écrire la condition de Stefan. Pendant la solidification, de la chaleur latente est libérée. Si on appelle  $V_n$  le taux local de solidification (cf. figure 16.5), la chaleur latente libérée par unité de surface est  $\rho_s L V_n$ , où  $\rho_s$  est la densité du solide et  $L$  est la chaleur latente massique. La conservation de la chaleur écrite au niveau du front exprime l'égalité entre le flux de chaleur dans le solide et dans le liquide :

$$\vec{n} \cdot \vec{q}_s = \vec{n} \cdot \vec{q}_l + \rho_s L V_n, \quad (16.1)$$

où  $\vec{q}$  est le vecteur flux de chaleur local,  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à l'interface et pointant vers le solide et les indices  $s$  et  $l$  réfèrent respectivement aux propriétés du solide et du liquide. L'équation (16.1) s'appelle la condition de Stefan.

Appliquons maintenant cette relation à notre système d'étude. Pour effectuer nos expériences, nous nous plaçons dans le régime stationnaire, atteint lorsque l'énergie fournie à travers le cylindre intérieur est équilibrée avec celle perdue à travers la paroi du cylindre extérieur. Dans ce cas, la température sur le cylindre extérieur est alors constante. Pour le flux dans le solide, nous faisons l'hypothèse que le flux de chaleur est quasi-stationnaire. Cette hypothèse revient à considérer que le taux de solidification est suffisamment petit pour que la chaleur latente libérée soit négligeable et que le flux de chaleur puisse alors être considéré comme purement conductif :  $\vec{n} \cdot \vec{q}_s = k \Delta T / h$ , où  $\Delta T = T_m - T_i$ . Le taux de solidification s'écrit  $V_n = \dot{h}$ , où  $h$  est l'épaisseur du solide. Pour adimensionner l'équation (16.1), nous utilisons  $H = k \Delta T / F$  pour l'épaisseur, où  $k$  est la conductivité thermique du solide ;  $\Delta T$  pour la température ;  $F$  le flux dans le liquide et  $H^2 / \kappa$  pour le temps. La condition de Stefan (16.1) s'écrit alors dans sa version adimensionnée :

$$\frac{1}{h} = S \dot{h} + 1, \quad (16.2)$$

où le nombre de Stefan  $S = \frac{L}{C_p \Delta T}$  est le rapport entre la chaleur latente de solidification et la chaleur spécifique libérée par le refroidissement jusqu'à la température  $T_i$ .  $C_p$  est la capacité calorifique du solide formé. La solution complète de (16.2) pour  $h(t)$  est :

$$\ln \frac{1}{1-h} - h = \frac{t}{S}. \quad (16.3)$$

Toutefois, aux temps courts, la solidification est rapide et la libération de chaleur latente domine le flux thermique dans le liquide. L'équation (16.2) s'écrit alors en première approximation :

$$\frac{1}{h} \sim S \dot{h}, \quad (16.4)$$

qui a pour solution simple  $h \sim \sqrt{2t/S}$ . Aux temps longs, la solidification est lente, la libération de chaleur latente devient négligeable et le flux thermique dans le liquide est équilibré avec le flux thermique conductif à travers le solide. L'équation (16.2) montre alors simplement que  $h \sim 1$  à ce stade.

Pour des raisons pratiques, nous avons laissé les données expérimentales sous forme dimensionnée. La solution à l'équation (16.4) s'écrit dans sa forme dimensionnée :

$$h = \sqrt{\frac{2\kappa t}{S}}. \quad (16.5)$$

Sur la figure 16.2, nous avons porté cette solution en fonction du temps, en calculant  $S$  avec les caractéristiques de notre expériences i.e.  $L = 335 \times 10^3 \text{ J.kg}^{-1}$ ,  $C_p = 2060 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et  $\Delta T \sim 8 \text{ K}$ . Nous réalisons que, sans paramètre ajustable, la solution (16.5) s'accorde d'une part avec les données expérimentales qui correspondent au cas sans instabilité elliptique et d'autre part avec celles qui correspondent au début du cas avec instabilité elliptique. Nous nous apercevons que, concernant l'avancée temporelle du front, tout se passe comme si la rotation était absente.

La croissance s'arrête à une épaisseur plus faible sous l'influence de l'instabilité elliptique. La raison est l'augmentation du flux de chaleur entre l'interface et le domaine liquide. En effet, la condition de Stefan s'écrit aux temps longs comme un équilibre entre le flux thermique dans le liquide et le flux conductif dans le solide. De façon quantitative, cette condition s'écrit lorsque la croissance cristalline est terminée (cf. figure 16.6) :

$$k_s \frac{T_B - T_i}{e} = k_l \frac{T_m - T_B}{\delta}, \quad (16.6)$$

où  $e$  est l'épaisseur terminale du solide et  $\delta$  est l'épaisseur de la couche limite à l'interface solide-liquide.

Lorsque seule la convection est présente, il s'agit d'une couche limite thermique qui s'écrit  $\delta = \delta_\kappa \sim \Delta R \left( \frac{2Ra_c}{Ra} \right)^{1/3}$ . Lorsque l'instabilité elliptique a poussé, il s'agit d'une

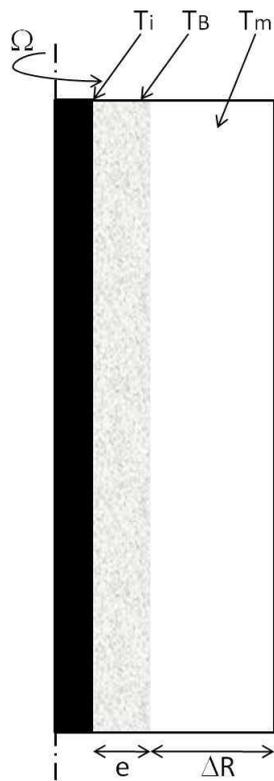


FIGURE 16.6 – Schéma de la cavité : la partie noire représente le cylindre intérieur, la partie grisée le solide et le reste le liquide.

couche limite visqueuse qui s'écrit  $\delta = \delta_E \sim \Delta R \sqrt{E}$ . L'épaisseur terminale s'écrit alors :

$$e \sim \frac{k_s}{k_l} \frac{T_B - T_i}{T_m - T_B} \delta. \quad (16.7)$$

Or, les relevés expérimentaux du front (cf. figure 16.2) nous indique que  $6 \text{ mm} < e_E < 8 \text{ mm}$  et  $e_\kappa > 12 \text{ mm}$ , où  $e_E$  désigne l'épaisseur finale du solide formé en présence d'instabilité elliptique et  $e_\kappa$  l'épaisseur finale sans instabilité elliptique. Nous obtenons donc que  $e_E < e_\kappa$ . Cela veut dire que l'instabilité elliptique augmente le flux de chaleur, ce qui se traduit, comme nous l'avons déjà vu dans la partie 4, par  $\delta_E < \delta_\kappa$ .

Par ailleurs, en présence de l'instabilité elliptique, le taux de croissance reste inchangé sur les premiers temps de la solidification (jusqu'à environ 4000 secondes) puis l'épaisseur du solide reste constante. En effet, aux temps courts, l'épaisseur de la couche limite n'intervient pas dans l'expression (16.5) de l'avancée du front en fonction du temps.

# Chapitre 17

## Conclusions.

Il paraît probable que la cristallisation de la graine soit affectée par la rotation de la planète. Celle-ci modifierait la structure de la surface de la graine selon la direction Nord-Sud. Cela est à mettre en relation avec l'idée de Deguen (2009) selon laquelle le taux de fusion de la surface de la graine est limité par la capacité à évacuer la chaleur latente liée au changement de phase, qui serait alors différente sur les pôles et près de l'équateur. L'écoulement résultant dans le noyau externe serait alors hétérogène, selon que l'on se place près de l'équateur ou près des pôles. Le mélange des éléments légers au noyau externe serait également différent. De plus cette hétérogénéité pourrait être une piste pour une explication de l'anisotropie de la graine, mais il faudrait d'abord quantifier comment se comporte les ondes sismiques au niveau d'une interface avec et sans cheminée.

Nous avons aussi proposé, en s'inspirant du travail de Worster & Moffatt (2000), un modèle d'évolution du front en fonction du temps qui s'accorde avec les données expérimentales.

Enfin, nous avons vu que la croissance était fortement perturbée en présence de l'instabilité de marées. Bien que son influence semble marginale sur la Terre actuelle, il est possible qu'elle ait joué un rôle dans le passé. Elle pourrait également modifier la dynamique interne de certaines planètes ou exoplanètes. Pour finir, des études minéralogiques récentes montrent que le régime de cristallisation du noyau terrestre pourrait faire figure d'exception dans le système solaire. Aux pressions plus modestes qui règnent dans les noyaux des planètes telluriques ou des satellites rocheux de petites tailles (Mars, Mercure, Lune, Ganymède...), le profil de température de solidification serait plus raide que l'adiabat (Chen *et al.*, 2008; Hauck II *et al.*, 2006; Stewart *et al.*, 2007). En conséquence, la solidification du noyau ne débiterait pas au centre du noyau comme sur la Terre, mais au niveau de la frontière noyau-manteau. Le fer solide étant plus dense que le liquide, les cristaux formés, gravitationnellement instables, couleraient vers le centre du noyau. Il serait donc intéressant de coupler notre étude de la deuxième partie sur la sédimentation en présence de convection avec la présente étude

pour quantifier l'influence des marées sur un tel mécanisme. Nous réalisons ici que nos trois études concernant la sédimentation, la convection, la solidification et l'influence des marées sont en réalité complémentaires et demanderaient à être rassemblées pour se rapprocher au plus près des systèmes géophysiques réels.

## **Conclusion générale.**

Les cas de convection hétérogène se rencontrent d'une part à tous les niveaux dans les systèmes géo- et astrophysiques, de la surface jusqu'à l'intérieur le plus profond et d'autre part à des âges très différents depuis la naissance de ces systèmes. Dans cette étude, nous nous sommes concentrés sur quatre situations :

- la sédimentation de particules dans un fluide convectant,
- la forme et la longévité des réservoirs présents dans un système convectif à deux couches,
- l'interaction entre les instabilités elliptiques et convectives,
- la solidification d'un alliage binaire sous forte rotation, en présence ou non de l'instabilité elliptique.

Pour chaque étude, notre objectif n'était pas de reproduire exactement le système géophysique en miniature : d'une part les complications naturelles sont trop nombreuses pour être toutes intégrées dans les modèles et les caractéristiques précises des systèmes ne sont pas entièrement connues ; d'autre part, nous voulions examiner l'influence d'un paramètre en particulier, des expériences plus complètes nous auraient rendu la tâche plus difficile. Par ailleurs, ces études présentent également un intérêt si l'on se place du point de vue du physicien des fluides, sans chercher à trouver des applications géophysiques. Toutefois, nous avons tenté de quantifier l'influence de différents paramètres sur la dynamique des systèmes, et via l'établissement de lois d'échelles d'extrapoler les résultats obtenus à des systèmes géo- et astrophysiques.

Les résultats de la partie 2 mettent en évidence l'importance des mouvements convectifs sur la dynamique de particules denses, et par conséquent sur la structure de certains systèmes géophysiques. En effet, nous avons démontré l'existence d'un couple (nombre de Rayleigh  $Ra$ , nombre de flottabilité  $B$ ) de transition entre deux régimes : le premier où la sédimentation de particules n'est absolument pas affectée par la convection, le second pour lequel les mouvements convectifs permettent à toutes ou une partie des particules de rester en suspension. Ce processus est impliqué dans les systèmes suivants : les lacs de laves, les chambres magmatiques et l'océan de magma initial.

La quatrième partie met en évidence le rôle déterminant des couches limites -thermiques ou visqueuses- pour comprendre l'influence de l'instabilité elliptique sur le flux de chaleur. En égalant l'épaisseur de ces deux couches limites, nous avons là aussi déterminé un nombre de Rayleigh de transition entre deux régimes : le premier où l'instabilité elliptique n'a aucune influence sur le flux de chaleur car elle pousse en dehors des couches limites thermiques ; le second où le flux de chaleur augmente, l'instabilité elliptique poussant en partie sur les couches limites thermiques. De plus, nous avons également étudié l'influence de la convection sur le taux de croissance de l'instabilité elliptique. Cet effet de l'instabilité de marées est potentiellement important pour certains corps comme Ganymède, Jupiter ou Io pour lesquels la croissance de l'instabilité de marées est possible.

Les parties 3 et 5 présentent des expériences préliminaires. Dans la partie 3, nous

nous sommes placés dans un cas simple de convection à deux couches : un petit volume de fluide est inséré dans un fluide convectant, de densité et de viscosité différentes. Nous avons étudié l'influence du nombre de Rayleigh et du nombre de flottabilité sur le temps d'érosion, expérimentalement et numériquement. Il subsiste un certain nombre d'interrogations avant d'assurer la validité de nos résultats. En effet, certains scaling obtenus restent encore inexplicés et en désaccord avec la littérature existante.

La partie 5 présente des résultats prometteurs de solidification d'un alliage binaire sous forte rotation. Nous avons montré que les cheminées ont tendance à être alignées avec l'axe de rotation. Il s'agit d'une conséquence de la contrainte de Proudman-Taylor qui pourrait avoir des conséquences sur la croissance de la graine. Ce résultat constitue également une piste pour la compréhension de l'origine de l'anisotropie de la graine. En revanche, nous avons démontré que la rotation n'avait aucune influence sur la dynamique du front de solidification. Par ailleurs, nous avons constaté que l'épaisseur du solide formé était beaucoup moins importante en présence de l'instabilité elliptique. L'augmentation du flux de chaleur pourrait en être la cause.

# Bibliographie

- N. Abcha, N. Latrache, F. Dumouchel & I. Mutabazi. Qualitative relation between reflected light intensity by kalliroscope flakes and velocity field in the couette–taylor flow system. *Experiments in Fluids*, vol. 45(1) :pp. 85–94, 2008.
- F. Albarède. Time-dependent models of u–th–he and k–ar evolution and the layering of mantle convection. *Chemical Geology*, vol. 145(3-4) :pp. 413–429, 1998.
- K. Aldridge, B. Seyed-Mahmoud, G. Henderson & W. van Wijngaarden. Elliptical instability of the earth’s fluid core. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, vol. 103 :pp. 365–374, 1997.
- A. Aliseda, A. Cartellier, F. Hainaux & J. Lasheras. Effect of preferential concentration on the settling velocity of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 468 :pp. 77–105, 2002.
- C. Allègre, B. Othman *et al.* The nd-sr isotopic correlation in mantle materials and geodynamic consequences. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, vol. 19 :pp. 293–306, 1979.
- J. Arkani-Hamed. Did tidal deformation power the core dynamo of Mars ? *Icarus*, vol. 201(1) :pp. 31–43, 2009.
- J. Aubert. *Modèles expérimentaux et numériques de la convection dans le noyau de la Terre*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2001.
- J. Aubert, H. Amit, G. Hulot & P. Olson. Thermochemical flows couple the earth’s inner core growth to mantle heterogeneity. *Nature*, vol. 454(7205) :pp. 758–761, 2008.
- J. Aubert, D. Brito, H. Nataf, P. Cardin & J. Masson. A systematic experimental study of rapidly rotating spherical convection in water and liquid gallium. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, vol. 128(1) :pp. 51–74, 2001.
- J. M. Aurnou. Planetary core dynamics and convective heat transfer scaling. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, vol. 101(5-6) :pp. 327–345, 2007.

- B. Bayly. Three-dimensional instability of elliptical flow. *Physical review letters*, vol. 57(17) :pp. 2160–2163, 1986.
- M. Belinsky, H. Rubin, Y. Agnon, E. Kit & J. Atkinson. Characteristics of resuspension, settling and diffusion of particulate matter in a water column. *Environmental Fluid Mechanics*, vol. 5 :pp. 415–441, 2005.
- H. Bénard. Les tourbillons cellulaires dans une nappe de liquide. *Revue générale des sciences*, vol. XII(1261), 1900.
- M. Bergman. Measurements of electric anisotropy due to solidification texturing and the implications for the earth's inner core. *Nature*, vol. 389(6646) :pp. 60–62, 1997.
- M. Bergman & D. Fearn. Chimneys on the Earth's inner-outer core boundary? *Geophysical Research Letters*, vol. 21(6) :pp. 477–480, 1994.
- M. Bergman, M. Macleod-Silberstein, M. Haskel, B. Chandler & N. Akpan. A laboratory model for solidification of earth's core. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, vol. 153(1-3) :pp. 150–164, 2005.
- F. Birch. Elasticity and constitution of the earth's interior. *Journal of Geophysical Research*, vol. 57(2) :pp. 227–286, 1952.
- F. Birch. Density and composition of mantle and core. *Journal of Geophysical Research*, vol. 69 :pp. 4377–4388, 1964.
- F. Blanchette, M. Strauss, E. Meiburg, B. Kneller & M. E. Glinsky. High-resolution numerical simulations of resuspending gravity currents : Conditions for self-sustainment. *J. Geophys. Res.*, vol. 110, 2005.
- T. Bosse, L. Kleiser & E. Meiburg. Small particles in homogeneous turbulence : Settling velocity enhancement by two-way coupling. *Physics of Fluids*, vol. 18 :p. 027102, 2006.
- J. Boussinesq. *Théorie analytique de la chaleur*, vol. 2. Gauthier-Villars, Paris, 1903.
- D. Brito, J. Aurnou & P. Cardin. Turbulent viscosity measurements relevant to planetary core-mantle dynamics. *Phys. Earth Planet. Int.*, vol. 141 :pp. 3–8, 2004.
- F. Busse. Homogeneous dynamos in planetary cores and in the laboratory. *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 32(1) :pp. 383–408, 2000.
- F. H. Busse. Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 44 :pp. 441–460, 1970.

- F. H. Busse & C. R. Carrigan. Convection induced by centrifugal buoyancy. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 62 :pp. 679–692, 1974.
- P. Cardin & P. Olson. Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell : consequences for flow in the outer core. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, vol. 82(3-4) :pp. 235–259, 1994.
- M. Carr. Mars : Surface and interior. *Encyclopedia of the Solar System*, pp. 291–308, 1999.
- C. R. Carrigan & F. H. Busse. An experimental and theoretical investigation of the onset of convection in rotating spherical shells. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 126 :pp. 287–305, 1983.
- D. Cébron, M. Le Bars, J. Leontini, P. Maubert & P. Le Gal. A systematic numerical study of the tidal instability in a rotating ellipsoid. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, *In press*, 2010.
- D. Cébron, P. Maubert & M. L. Bars. Tidal instability in a rotating and differentially heated ellipsoidal shell. *Geophysical Journal International*, vol. *In press*, 2010.
- S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover, New York, 1961.
- B. Chang, A. Mills & E. Hernandez. Natural convection of microparticle suspensions in thin enclosures. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 51 :pp. 1332–1341, 2008.
- B. Chen, J. Li & S. Hauck II. Non-ideal liquidus curve in the Fe-S system and Mercury’s snowing core. *Geophysical Research Letters*, vol. 35(7) :p. L07201, 2008.
- U. Christensen & J. Aubert. Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields. *Geophysical Journal International*, vol. 166(1) :pp. 97–114, 2006.
- U. Christensen & A. Hofmann. Segregation of subducted oceanic crust in the convecting mantle (paper 93jb03403). *Journal of Geophysical Research-Part B-Solid Earth-Printed Edition*, vol. 99(10) :pp. 19867–19884, 1994.
- N. Coltice & Y. Ricard. Geochemical observations and one layer mantle convection. *Earth and Planetary Science Letters*, vol. 174(1-2) :pp. 125–137, 1999.
- D. Sipp, D. Fabre, S. Michelin & L. Jacquin. Stability of a vortex with a heavy core. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 526 :pp. 67–76, 2005.

- R. Deguen. *Dynamique de la cristallisation de la grain : expériences et modèles*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2009.
- D. DePaolo & G. Wasserburg. Inferences about magma sources and mantle structure from variations of Nd. *Geophysical Research Letters*, vol. 3(12) :pp. 743–746, 1976.
- A. Dziewonski & D. Anderson. Preliminary reference earth model\* 1. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, vol. 25(4) :pp. 297–356, 1981.
- L. Eide & S. Martin. The formation of brine drainage features in young sea ice. *J. Glaciol*, vol. 14(70) :pp. 137–154, 1975.
- C. Eloy. *Instabilité multipolaire de tourbillons*. Thèse de Doctorat, Université Aix-Marseille II, 2000.
- C. Eloy & S. Le Dizès. Stability of the rankine vortex in a multipolar strain field. *Physics of Fluids*, vol. 13(3), 2001.
- C. Eloy, P. Le Gal & S. Le Dizès. Experimental study of the multipolar vortex instability. *Physical review letters*, vol. 85(16) :pp. 3400–3403, 2000.
- C. Eloy, P. Le Gal & S. Le Dizès. Elliptic and triangular instabilities in rotating cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 476 :pp. 357–388, 2003.
- A. Evan, J. Dunion, J. Foley, A. Heidinger & C. Velden. New evidence for a relationship between atlantic tropical cyclone activity and african dust outbreaks. *Geophys. Res. Lett*, vol. 33 :p. L19813, 2006.
- B. Fabijonas & D. Holm. Craik-criminale solutions and elliptic instability in nonlinear-reactive closure models for turbulence. *Physics of Fluids*, vol. 16(4) :pp. 853–866, 2004.
- D. Fearn. Hydromagnetic flow in planetary cores. *Reports on Progress in Physics*, vol. 61 :pp. 175–235, 1998.
- D. Fearn & D. Loper. Compositional convection and stratification of earth's core. *Nature*, vol. 289, 1981.
- D. Fearn, D. Loper & P. Roberts. Structure of the Earth's inner core. *Magnetohydrodynamics and the earth's core : selected works of Paul Roberts*, p. 86, 2002.
- G. Fiquet, J. Badro, F. Guyot, H. Requardt & M. Krisch. Sound velocities in iron to 110 gigapascals. *Science*, vol. 291(5503) :p. 468, 2001.

- H. Gan, J. Chang, J. Feng & H. Hu. Direct numerical simulation of the sedimentation of solid particles with thermal convection. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 481 :pp. 345–411, 2003.
- G. Gauthier, P. Gondret & M. Rabaud. Motions of anisotropic particles : application to visualization of three-dimensional flows. *Physics of Fluids*, vol. 10 :p. 2147, 1998.
- L. Geiger & B. Gutenberg. Über erdbebenwellen vi. *Konstitution des Erdinnern erschlossen aus der Intensität longitudinaler und transversaler Erdbebenwellen, und einige Beobachtungen an den Vorläufern*. *Gesell. Wiss. Göttingen, Nachrichten, Math.-physik. Kl*, pp. 623–675, 1912.
- G. Glatzmaier & P. Olson. Highly supercritical thermal convection in a rotating spherical shell : centrifugal vs. radial gravity. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, vol. 70 :pp. 113–136, 1993.
- G. Glatzmaier & P. Roberts. Dynamo theory then and now. *International Journal of Engineering Science*, vol. 36(12-14) :pp. 1325–1338, 1998.
- E. Gledzer, F. Dolzhanskii, A. Obukhov & V. Ponomarev. Experimental and theoretical studies of stability of fluid motion within an elliptical cylinder. *Akademiia Nauk SSSR Fizika Atmosfery i Okeana*, vol. 11 :pp. 981–992, 1975.
- E. Gledzer & V. Ponomarev. Finite-dimensional approximation of the motions of incompressible fluids within an ellipsoid. *Akademiia Nauk SSSR Fizika Atmosfery i Okeana*, vol. 13 :pp. 820–827, 1977.
- S. Grossmann & D. Lohse. Scaling in thermal convection : a unifying theory. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 407 :pp. 27–56, 2000.
- D. Gubbins & P. Roberts. Magnetohydrodynamics of the Earth's Core. *Geomagnetism*, 1987.
- L. Guillou-Frottier, J. Buttles & P. Olson. Laboratory experiments on the structure of subducted lithosphere. *Earth and Planetary Science Letters*, vol. 133(1-2) :pp. 19–34, 1995.
- M. Gurnis & G. Davies. The effect of depth-dependent viscosity on convective mixing in the mantle and the possible survival of primitive mantle. *Geophysical Research Letters*, vol. 13 :pp. 541–544, 1986.
- U. Hansen & D. Yuen. Numerical simulations of thermal-chemical instabilities at the core-mantle boundary. *Nature*, vol. 334(6179) :pp. 237–240, 1988.

- S. Hauck II, J. Aurnou & A. Dombard. Sulfur's impact on core evolution and magnetic field generation on Ganymede. *Journal of Geophysical Research*, vol. 111(E9) :p. E09008, 2006.
- W. Herreman. *Instabilité elliptique sous champ magnétique*. Master's thesis, Université de Provence Aix-Marseille, 2005.
- W. Herreman. *Instabilité elliptique sous champ magnétique et dynamo d'ondes inertielles*. Thèse de Doctorat, Université de Provence, 2009.
- T. Hoink, J. Schmalzl & U. Hansen. Dynamics of metal-silicate separation in a terrestrial magma ocean. *G<sup>3</sup>*, vol. 7(9), 2006.
- L. Howard. Convection at high rayleigh number. In *Proc. 11. Int. Congr. Appl. Mech.*, editor H. Gortler, pp. 1109–1115. Springer, 1964.
- W. Hubbard. *Planetary interiors*. Van Nostrand Reinhold Company, 1984.
- H. Huppert, J. Turner & M. Hallworth. Sedimentation and entrainment in dense layers of suspended particles stirred by an oscillating grid. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 289 :pp. 263–293, 1995.
- H. Ichikawa, S. Labrosse & K. Kurita. Direct numerical simulation of an iron rain in the magma ocean. *Journal of Geophysical Research*, vol. 115(B1) :p. B01404, 2010.
- P. Ioannou & R. Lindzen. Gravitational tides in the outer planets. ii. interior calculations and estimation of the tidal dissipation factor. *The Astrophysical Journal*, vol. 406 :p. 266, 1993.
- E. Ito. Stability relations of silicate perovskite under subsolidus conditions. *Perovskite : A structure of Great Interest to Geophysics and Materials Science*, pp. 27–32, 1989.
- J. Jacobs. *The Earth's core*. Academic Pr, 1987.
- C. Jaupart & G. Brandeis. The stagnant bottom layer of convecting magma chambers. *Earth and Planetary Science Letters*, vol. 80(1-2) :pp. 183–199, 1986.
- C. Jaupart, G. Brandeis & C. Allègre. Stagnant layers at the bottom of convecting magma chambers. *Nature*, vol. 308(5959) :pp. 535–538, 1984.
- C. Jaupart, S. Labrosse & J. Mareschal. Temperatures, heat and energy in the mantle of the earth. *Treatise on Geophysics*, vol. 7 :pp. 253–303, 2007.
- H. Jeffreys. The rigidity of the earth's central core. *Geophysical Journal International*, vol. 1 :pp. 371–383, 1926.

- A. Jephcoat & P. Olson. Is the inner core of the earth pure iron ? *Nature*, vol. 325 :pp. 332–335, 1987.
- S. Karato & P. Wu. Rheology of the upper mantle : a synthesis. *Science*, vol. 260(5109) :p. 771, 1993.
- L. Kelvin. Vibrations of a columnar vortex. *Phil. Mag.*, vol. 10 :pp. 155–168, 1880.
- R. Kerswell. Elliptic instabilities of stratified, hydromagnetic waves. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, vol. 71(1-4) :pp. 105–143, 1993.
- R. Kerswell. Tidal excitation of hydromagnetic waves and their damping in the earth. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 274 :pp. 219–241, 1994.
- R. Kerswell. Elliptical instability. *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 34(1) :pp. 83–113, 2002.
- R. Kerswell & W. Malkus. Tidal instability as the source for Io's magnetic signature. *Geophysical Research Letters*, vol. 25(5) :pp. 603–606, 1998.
- E. King, S. Stellmach, J. Noir, U. Hansen & J. Aurnou. Boundary layer control of rotating convection systems. *Nature*, vol. 457(7227) :pp. 301–304, 2009.
- E. Knittle & R. Jeanloz. Earth's core-mantle boundary- results of experiments at high pressures and temperatures. *Science*, vol. 251(5000) :pp. 1438–1443, 1991.
- J. Korenaga & T. Jordan. Effects of vertical boundaries on infinite Prandtl number thermal convection. *Geophysical Journal International*, vol. 147 :pp. 639–659, 2001.
- T. Koyaguchi, M. Hallworth, H. Huppert & R. Sparks. Sedimentation of particles from a convecting fluid. *Nature*, vol. 343 :pp. 447–450, 1990.
- R. Krishnamurti. On the transition to turbulent convection. part 1, 2. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 42 :pp. 295–320, 1970.
- S. Labrosse. <http://perso.ens-lyon.fr/stephane.labrosse>, 2010.
- S. Labrosse, J. Hernlund & N. Coltice. A crystallizing dense magma ocean at the base of the earth's mantle. *Nature*, vol. 450(7171) :pp. 866–869, 2007.
- L. Lacaze, W. Herreman, M. Le Bars, S. Le Dizès & P. Le Gal. Magnetic field induced by elliptical instability in a rotating spheroid. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, vol. 100(4-5) :pp. 299–317, 2006.
- L. Lacaze, P. Le Gal & S. Le Dizès. Elliptical instability in a rotating spheroid. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 505 :pp. 1–22, 2004.

- L. Lacaze, P. Le Gal & S. Le Dizès. Elliptical instability of the flow in a rotating shell. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, vol. 151(3-4) :pp. 194–205, 2005.
- G. Lavorel & M. Le Bars. Sedimentation of particles in a vigorously convecting fluid. *Physical Review E*, vol. 80(4) :p. 46324, 2009.
- M. Le Bars. *Convection thermique dans un fluide visqueux hétérogène : phénoménologie, lois d'échelle et applications aux systèmes terrestres*. Thèse de Doctorat, IPGP, Paris, 2003.
- M. Le Bars & S. Le Dizès. Thermo-elliptical instability in a rotating cylindrical shell. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 563 :pp. 189–198, 2006.
- M. Le Bars, S. Le Dizès & P. Le Gal. Coriolis effects on the elliptical instability in cylindrical and spherical rotating containers. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 585 :pp. 323–342, 2007.
- S. Le Dizès & F. Laporte. Theoretical predictions for the elliptical instability in a two-vortex flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 471 :pp. 169–201, 2002.
- I. Lehmann. P : Publications du bureau central sismologique international. *Travaux scientifiques*, vol. 14 :pp. 87–115, 1936.
- T. Leweke & C. Williamson. Cooperative elliptic instability of a vortex pair. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 360 :pp. 85–119, 1998a.
- T. Leweke & C. Williamson. Three-dimensional instabilities in wake transition. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, vol. 17(4) :pp. 571–586, 1998b.
- W. Malkus. An experimental study of global instabilities due to tidal (elliptical) distortion of a rotating elastic cylinder. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, vol. 48 :pp. 123–134, 1989.
- W. Malkus. Energy sources for planetary dynamos. In *Lectures on solar and planetary dynamos*, p. 161. 1994.
- P. Manneville. *Instabilités, chaos et turbulence*. Editions Ecole Polytechnique, 2004.
- D. Martin & R. Nokes. Crystal settling in a vigorously convecting magma chamber. *Nature*, vol. 332, 1988.
- D. Martin & R. Nokes. A fluid-dynamical study of crystal settling in convecting magmas. *J. Petrology*, vol. 30 :pp. 1471–1500, 1989.
- D. Matson, A. Davies, G. Veeder, J. Rathbun, T. Johnson & J. Castillo. Io : Loki patera as a magma sea. *Journal Of Geophysical Research*, vol. 111 :p. E09002, 2006.

- R. Mei. Effect of turbulence on the particle settling velocity in the non-linear drag range. *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 20 :pp. 273–284, 1994.
- P. Meunier, U. Ehrenstein, T. Leweke & M. Rossi. A merging criterion for two-dimensional co-rotating vortices. *Physics of Fluids*, vol. 14 :p. 2757, 2002.
- R. Montelli, G. Nolet, F. Dahlen, G. Masters, E. Engdahl & S. Hung. Finite-frequency tomography reveals a variety of plumes in the mantle. *Science*, vol. 303(5656) :p. 338, 2004.
- W. Moore. Tidal heating and convection in Io. *J. Geophys. Res.*, vol. 108(10.1029), 2003.
- W. Morgan. Deep mantle convection plumes and plate motions. *Am. Assoc. Pet. Geol. Bull.*, vol. 56(2) :pp. 203–213, 1972.
- C. Morize, M. Le Bars, P. Le Gal & A. Tilgner. Experimental Determination of Zonal Winds Driven by Tides. *Physical Review Letters*, vol. 104(21) :p. 214501, 2010.
- H. Nataf. Cours de M2R. [http://www-lgit.obs.ujf-grenoble.fr/users/hcnataf/Cours\\_MMGE/G9.html](http://www-lgit.obs.ujf-grenoble.fr/users/hcnataf/Cours_MMGE/G9.html), 2010.
- H. Nataf & S. Houard. Seismic discontinuity at the top of D ? : A world-wide feature ? *Geophysical Research Letters*, vol. 20(21) :pp. 2371–2374, 1993.
- G. Neumann. Three-dimensional numerical simulation of buoyancy-driven convection in vertical cylinders heated from below. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 214 :pp. 559–578, 1990.
- F. Nimmo & D. Stevenson. Influence of early plate tectonics on the thermal evolution and magnetic field of mars. *Journal of Geophysical Research*, vol. 105(E5) :pp. 11969–11980, 2000.
- J. Noir. *Ecoulement d'un fluide dans une cavité en précession : approches numériques et expérimentales*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2000.
- R. Oldham. The constitution of the interior of the earth, as revealed by earthquakes. *Quarterly Journal of the Geological Society*, vol. 62(1-4) :p. 456, 1906.
- W. Peltier & G. Jarvis. Whole mantle convection and the thermal evolution of the earth. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, vol. 29(3-4) :pp. 281–304, 1982.
- J. Poirier. Cloak of mystery over earth's mantle. *Phys. World*, vol. 4 :pp. 26–27, 1991.
- J. Poirier. Light elements in the earth's outer core : A critical review. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, vol. 85(3-4) :pp. 319–337, 1994.

- G. Poupinet, R. Pillet & A. Souriau. Possible heterogeneity of the earth's core deduced from pkikp travel times. *Nature*, vol. 305(5931) :pp. 204–206, 1983.
- L. Rayleigh. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *Philosophical magazine*, vol. 32(192) :pp. 529–546, 1916.
- P. Roberts & G. Glatzmaier. Geodynamo theory and simulations. *Reviews of modern physics*, vol. 72(4) :pp. 1081–1123, 2000.
- D. Rubie, H. Melosh, J. Reid, C. Liebske & K. Righter. Mechanisms of metal-silicate equilibration in the terrestrial magma ocean. *Earth and Planetary Science Letters*, vol. 205 :pp. 239–255, 2003.
- A. Sample & A. Hellawell. The mechanisms of formation and prevention of channel segregation during alloy solidification. *Metallurgical and Materials Transactions A*, vol. 15(12) :pp. 2163–2173, 1984.
- L. Schmidt & W. Zhang. Viscous Withdrawal of Miscible Liquid Layers. *Physical review letters*, vol. 100(4) :p. 44502, 2008.
- S. Schmitz & A. Tilgner. Heat transport in rotating convection without ekman layers. *Physical Review E*, vol. 80(1, Part 2), 2009.
- B. Seyed-Mahmoud, K. Aldridge & G. Henderson. Elliptical instability in rotating spherical fluid shells : application to earth's fluid core. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, vol. 142(3-4) :pp. 257–282, 2004.
- I. Sidorin & M. Gurnis. Geodynamically consistent seismic velocity predictions at the base of the mantle. *The Core-Mantle Boundary Region, Geodyn. Ser.*, vol. 28 :pp. 209–230, 1998.
- V. Solomatov, P. Olson & D. Stevenson. Entrainment from a bed of particles by thermal convection. *Earth and Planetary Science Letters*, vol. 120 :pp. 387–393, 1993.
- V. Solomatov & D. Stevenson. Nonfractional crystallization of a terrestrial magma ocean. *Journal of Geophysical Research*, vol. 98(E3) :pp. 5391–5406, 1993.
- A. Souriau. Deep earth structure—the earth's cores. *Treatise on Geophysics*, vol. 1 :pp. 655–693, 2007.
- F. Stacey. Effects on the core of structure within d". *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, vol. 60(1) :pp. 157–163, 1991.
- D. Stevenson. Models of the earth's core. *Science*, vol. 214(4521) :p. 611, 1981.

- D. Stevenson. Planetary magnetic fields. *Earth and Planetary Science Letters*, vol. 208 :pp. 1–11, 2003.
- A. Stewart, M. Schmidt, W. van Westrenen & C. Liebske. Mars : A new core-crystallization regime. *Science*, vol. 316(5829) :p. 1323, 2007.
- L. Stixrude, E. Wasserman & R. Cohen. Composition and temperature of earth's inner core. *Journal of Geophysical Research*, vol. 102 :pp. 24–24, 1997.
- W. Su, A. Dziewonski & R. Jeanloz. Planet within a planet : Rotation of the inner core of earth. *Science*, vol. 274(5294) :p. 1883, 1996.
- S. Suess. Viscous flow in a deformable rotating container. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 45(01) :pp. 189–201, 2006.
- J. Thomson. On a changing tessellated structure in certain liquids [due to convective circulation]. Philosophical Society of Glasgow, 1882.
- D. Tritton. *Physical fluid dynamics*. Oxford University Press, USA, 1988.
- J. Verhoogen. Energetics of the earth, 139 pp. *National Academy of Sciences, Washington, DC*, 1980.
- F. Waleffe. On the three-dimensional instability of strained vortices. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, vol. 2 :p. 76, 1990.
- L. Wang & M. Maxey. Settling velocity and concentration distribution of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 256 :pp. 27–68, 1993.
- S. Weinstein & P. Olson. Planforms in thermal convection with internal heat sources at large rayleigh and prandtl numbers. *Geophysical Research Letters*, vol. 17 :pp. 239–242, 1990.
- J. Wettlaufer, M. Worster & H. Huppert. Solidification of leads : Theory, experiment, and field observations. *J. Geophys. Res.*, vol. 105(C1) :pp. 1123–1134, 2000.
- U. Wienbruch & T. Spohn. A self sustained magnetic field on io ? *Planetary and Space Science*, vol. 43(9) :pp. 1045–1057, 1995.
- J. Wilson *et al.* A possible origin of the hawaiian islands. *Canadian Journal of Physics*, vol. 41(6) :pp. 863–870, 1963.
- M. Worster. Convection in mushy layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 29(1) :pp. 91–122, 1997.

- M. Worster & H. Moffatt. Solidification of Fluids. In *Perspectives in Fluid Dynamics* . pp. 393–446, 2000.
- T. Yang & S. Shy. The settling velocity of heavy particles in an aqueous near-isotropic turbulence. *Physics of Fluids*, vol. 15 :p. 868, 2003.
- T. S. Yang & S. S. Shya. The settling velocity of heavy particles in an aqueous near-isotropic turbulence. *Phys. Fluids*, vol. 15 :pp. 868–880, 2003.
- A. Yeganeh-Haeri, D. Weidner & E. Ito. Elasticity of mgsio# 73 in the perovskite structure. *Science*, vol. 243(4892) :pp. 787–9, 1989.
- S. Yoshida, I. Sumita & M. Kumazawa. Growth model of the inner core coupled with the outer core dynamics and the resulting elastic anisotropy. *Journal of Geophysical Research*, vol. 101 :pp. 28085–28103, 1996.
- K. Zhang & G. Greed. Convection in rotating annulus : An asymptotic theory and numerical solutions. *Physics of fluids*, vol. 10 :p. 2396, 1998.
- K. Zhang & D. Gubbins. On convection in the earth's core driven by lateral temperature variations in the lower mantle. *Geophysical Journal International*, vol. 108 :pp. 247–255, 1992.
- K. Zhang & X. Liao. The onset of convection in rotating circular cylinders with experimental boundary conditions. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 622 :pp. 63–73, 2009.
- K. Zhang, X. Liao & F. Busse. Asymptotic solutions of convection in rapidly rotating non-slip spheres. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 578 :pp. 371–380, 2007.