



Etude de l'évolution de la déformation du front d'une fissure

Nadjime Pindra

► To cite this version:

Nadjime Pindra. Etude de l'évolution de la déformation du front d'une fissure. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. Français. NNT : . tel-00710029

HAL Id: tel-00710029

<https://theses.hal.science/tel-00710029>

Submitted on 19 Jun 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : **Mécanique**

présentée par

Nadjime PINDRA

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet de thèse :

**ETUDE DE L'EVOLUTION DE LA DÉFORMATION DU FRONT D'UNE
FISSURE**

Soutenance effectuée le 10 Juillet 2009

devant le jury composé de Madame et Messieurs :

Mokhtar ADDA-BEDIA	Rapporteur
Andrei CONSTANTINESCU	Rapporteur
Véronique LAZARUS	Examineur
Jean-Baptiste LEBLOND	Examineur
Jean-Jacques MARIGO	Examineur
Djimédo KONDO	Examineur
Damien VANDEMBROUCQ	Examineur
Jean SCHMITTBUHL	Examineur

Table des matières

1	Quelques éléments théoriques de rupture fragile	13
1.1	Introduction	13
1.2	Les Facteurs d'intensité de contraintes "FIC"	14
1.2.1	Cas d'une fissure dans un matériau homogène	14
1.2.2	Cas d'une fissure semi-infinie d'interface	15
1.3	Lois de propagation	15
1.3.1	Rupture brutale	16
1.3.2	Rupture subcritique ou par fatigue	16
1.4	Théorie des fonctions de poids	17
1.4.1	Cas du milieu homogène	17
1.4.1.1	Définition de la fonction de poids et du noyau fondamental	17
1.4.1.2	Perturbation coplanaire du front de fissure	18
1.4.1.3	Cas d'une fissure d'interface semi-infinie	19
1.5	Conclusion	19
2	Désordre du front d'une fissure modes 2 et 3	21
2.1	Introduction	21
2.2	Cas de la fissure en forme de fente	22
2.2.1	Définition et notation du noyau fondamental	22
2.2.2	Expression des variations des FIC dans le cadre du mode mixte 2 et 3	22
2.2.3	Transformée de Fourier (TF) des expressions des FIC et du taux de restitution d'énergie	24
2.3	Evolution temporelle en fatigue	27
2.3.1	Loi de Paris	27
2.3.2	Evolution en temps des fluctuations des deux fronts	28
2.3.3	Détermination des équations différentielles ordinaires EDO	28

2.3.4	Résolution de l'équation différentielle (2.22)	29
2.3.4.1	Cas $K_2 K_3^+ = 0$	29
2.3.4.2	Cas $K_2 K_3^+ \neq 0$	29
2.3.5	Quelques propriétés de la résolvante	31
2.4	Etude statistique des évolutions des fronts	32
2.4.1	Hypothèses sur les fluctuations $\delta c^\pm$ des constantes de Paris	33
2.4.2	Les Hypothèses sur les fluctuations $\delta a^\pm$ des fronts de la fissure	33
2.4.3	Expression générale du spectre des perturbations des fronts	34
2.4.4	Etude asymptotique du spectre de la fonction d'autocorrélation de la perturbation	35
2.4.5	Etude asymptotique de la fonction d'autocorrélation de la perturbation	37
2.4.6	Etude asymptotique de la fonction d'autocorrélation de la pente	38
2.4.7	Etude asymptotique de la variance de la fluctuation	38
2.4.8	Etude asymptotique de la distance d'autocorrélation	39
2.5	Conclusion	40
3	Fissure d'interface	43
3.1	Introduction	44
3.2	Preliminaries and notations	48
3.3	The LLPMM formulae	50
3.4	Distribution of the energy release rate along the crack front	52
3.4.1	Class of loadings considered	52
3.4.2	Calculation of the energy release rate	54
3.5	Deformation of the crack front in fatigue	55
3.5.1	Paris-type propagation law	55
3.5.2	Evolution of the perturbation of the crack front	56
3.5.3	Statistical hypotheses	57
3.5.4	General formula for the power spectrum of the perturbation of the crack front	58
3.5.5	Asymptotic expression of the power spectrum of the perturbation of the crack front	58
3.5.6	Comments	60
3.5.7	Asymptotic expression of the autocorrelation function of the perturbation	63
3.5.8	Asymptotic expression of the autocorrelation function of the slope of the perturbation	67

3.5.9	Asymptotic expression of the distance of correlation of the perturbation . . .	69
3.6	Deformation of the crack front in brittle fracture	70
3.6.1	Generalities	70
3.6.2	Asymptotic expression of the power spectrum of the perturbation of the crack front	71
3.6.3	Asymptotic expression of the autocorrelation function of the perturbation	72
3.6.4	Asymptotic expression of the autocorrelation function of the slope of the perturbation	73
3.6.5	Asymptotic expression of the distance of correlation of the perturbation . .	73
3.7	Synthesis	73
4	Etude expérimentale	77
4.1	Introduction	77
4.2	Méthode expérimentale de la rupture	78
4.2.1	Préparation des échantillons	78
4.3	Montage mécanique	79
4.4	Détermination théorique de la rugosité du front	80
4.4.1	Géométrie et loi d'avancée	80
4.4.2	Evolution temporelle des composantes de Fourier de la perturbation . . .	83
4.4.3	Etude statistique du désordre du front de la fissure	83
4.4.3.1	Fonction d'autocorrélation et son spectre	83
4.4.3.2	Etude du comportement de la variance de la fluctuation	84
4.4.3.3	Exposant de rugosité	85
4.5	Résultats expérimentaux	86
4.5.1	Traitement de l'image et du front extrait	86
4.5.1.1	Extraction du front	86
4.5.1.2	Détermination de la fonction d'autocorrélation et de la variance	88
4.5.1.3	Détermination du spectre de la fonction d'autocorrélation	90
4.6	Conclusion	91
5	Calcul du noyau fondamental	93
5.1	Introduction	93
5.2	Eléments de base de deux fissures coplanaires	94
5.2.1	Cas du problème 2D	94
5.2.1.1	FIC pour deux fissures symétriques	94

5.2.1.2	FIC pour deux fissures de longueurs différentes	95
5.2.1.3	Etude des variations des FIC	98
5.2.2	Cas du problème 3D	101
5.2.3	Quelques propriétés des fonctions f_α et $g_{\alpha\beta}$	103
5.2.4	Calculs des constantes C_α et des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\beta}(\eta) d\eta$	104
5.3	fissures coplanaires en forme de fentes infinies	105
5.3.1	Equations intégrro-différentielles sur les composantes f_α et $g_{\alpha\beta}$ du noyau fondamental	106
5.3.1.1	Mouvements de translation des fronts	106
5.3.1.2	Mouvements de rotation des fronts	108
5.3.2	Equations différentielles sur les transformées de Fourier des fonctions f_α et $g_{\alpha\beta}$	111
5.3.2.1	Comportements asymptotiques des fonctions $\widehat{F}_\alpha(p)$ et $\widehat{g}_{\alpha\beta}(p)$	111
5.3.3	Résolution numérique des équations différentielles	113
5.3.3.1	Principe de la méthode	113
5.3.3.2	Résultats numériques	114
5.4	Conclusion	116
A	Quelques démonstrations du chapitre 2	121
A.1	Démonstration de certaines propriétés de la résolvante	121
A.2	Comportement asymptotique $\widehat{\Gamma}(k, a)$ pour $a \rightarrow +\infty$ $k \neq 0$ fixé	123
A.3	Comportement asymptotique de $\Gamma(z, a)$ pour $a \rightarrow +\infty$	124
B	Appendice du chapitre 3	127
B.1	Inequalities on the equivalent Poisson ratio	127
B.2	Appendix : inequality on the constants A and B	128
B.3	Appendix : statistical description of an ensemble of cracked media	129
B.4	Appendix : qualitative analysis of the evolution in time of a sinusoidal perturbation of the crack front of short wavelength	130
B.5	Appendix : calculation of the mean value of the function $F_\theta(\lambda)$	131
C	Annexe du chapitre 5	133
C.1	comportement à l'infini des fonctions $\widehat{F}_\alpha(p)$ et $\widehat{g}_{\alpha\beta}(p)$	133
	Bibliographie	140

Introduction générale

En mécanique de la rupture fragile, les références historiques sont celles de Griffith, Irwin et Paris. Elles donnent les lois de propagation en fournissant le lien entre chargement et avancée de la fissure. D'abord le critère de Griffith (1920), fondé sur des considérations énergétiques, fournit un seuil de propagation exprimé à l'aide du taux de restitution d'énergie créée lors de l'avancée par rupture brutale de la fissure. Ensuite le critère d'Irwin (1957) reprend cette démarche mais met plutôt l'accent sur le lien entre un seuil de propagation et le champ mécanique au voisinage de la pointe de la fissure. Ce critère porte donc sur les Facteurs d'Intensité de Contraintes (FIC). Enfin la loi de Paris (Paris et Erdogan (1963)) aborde le cas des fissures se propageant sous chargement cyclique en dessous des seuils cités précédemment. Elle donne une relation entre la vitesse de propagation et l'amplitude des FIC. Ces lois de propagation ont été utilisées de façon extensive. Dans la majorité des cas, le problème est traité en 2D et la fissure est considérée comme une ligne dont l'extrémité, la pointe se propage dans le matériau.

Le cas de la rupture tridimensionnelle n'est pas une simple extension du problème bidimensionnel car les effets de la forme du front de fissure sont absents du cas 2D. Le traitement analytique des problèmes de propagation de fissure dans leur version tridimensionnelle est peu fréquent. Citons celui de stabilité configurationnelle du front de fissure, qui a été traitée pour quelques géométries simples grâce, à la théorie tridimensionnelle des fonctions de poids de Bueckner-Rice.

Beaucoup de travaux ont été consacrés à ces problèmes au cours des dernières décennies. Bien que certains comme Perrin and Rice (1994), Morrissey and Rice (1998, 2000) ont étudié la propagation de façon dynamique, en utilisant les résultats de Willis and Movchan (1995) et de Ramanathan and Fisher (1997), d'autres considèrent l'aspect quasistatique de l'évolution de la fissure. Leur point commun est la théorie tridimensionnelle des fonctions de poids développée par Rice (1985) et Bueckner (1987). Cette théorie fournit la formule de la variation des FIC résultant d'une petite perturbation du front de la fissure.

Ces travaux peuvent être divisés en deux groupes. Le premier groupe se consacre au problème

de stabilité de la forme du front de la fissure et le second groupe à l'étude expérimentale du problème. Plus précisément, le premier groupe comprend d'une part des travaux analytiques dont :

- Rice (1985) pour une fissure semi-infinie chargée en mode 1,
- Gao and Rice (1986) pour une fissure semi-infinie chargée en mode de cisaillement,
- Gao and Rice (1987*a, b*) pour une fissure en forme circulaire chargée en mode 1 et en cisaillement,
- Leblond *et al.* (1996) pour une fissure en forme de fente chargée en mode 1,
- Lazarus and Leblond (2002*a, b*) pour une fissure en forme de fente chargée en mode de cisaillement,

et d'autre part des travaux numériques dont ceux de Bower and Ortiz (1990), Lazarus (2003) et Favier *et al.* (2006).

Le deuxième groupe étudie expérimentalement l'évolution de la déformation coplanaire du front d'une fissure chargée en mode 1. C'est le cas de Delaplace *et al.* (1999) et Schmittbuhl *et al.* (2003a) qui ont étudié l'évolution du front de fissure dans le verre de plexiglas. Ils ont trouvé que la rugosité du front de fissure à travers l'interface, présente un caractère universel d'auto-affinité.

Dans la lignée de ces travaux, la thèse apporte une contribution sur certains problèmes tridimensionnels concernant l'évolution en temps de la déformation du front de fissures planes tant en fatigue qu'en rupture brutale avec comme hypothèse majeure que la propagation reste coplanaire malgré la présence des modes 2 et 3 et est axée sur la propagation quasistatique. Cette thèse est divisée en cinq parties dont le contenu est brièvement présenté ci-dessous :

Chapitre 1

Cette partie se propose d'exposer les outils classiques de la mécanique de la rupture fragile tridimensionnelle dont nous avons besoin dans les autres chapitres. Les Facteurs d'Intensité de Contraintes y sont définis ainsi que la version tridimensionnelle des critères de propagation. Il s'agit précisément du critère de Griffith sous chargement monotone et de la loi de Paris sous chargement cyclique. Nous présenterons aussi le formalisme des fonctions de poids de Bueckner-Rice sous sa forme tridimensionnelle qui permet de trouver la variation des FIC résultant d'une petite perturbation, ainsi que la variation du noyau fondamental qui y apparaît.

Chapitre 2

Ce chapitre est consacré à la déformation des fronts d'une fissure en forme de fente, située dans un milieu élastique isotrope chargée en modes de cisaillement plan et antiplan. Il constitue la suite du travail effectué par Favier et al. (2006b) pour le cas du mode 1. Après avoir rappelé les résultats de Lazarus et Leblond (2002*a, b*) concernant les variations des FIC et du taux de restitution d'énergie pour une petite perturbation du front, nous avons introduit la loi de Paris comme loi d'avancée des fronts de la fissure. Ensuite la combinaison de cette loi et de la Transformée de Fourier sur les variations des FIC, permet d'aboutir à des équations différentielles sur les Transformées de Fourier des fluctuations des deux fronts. Une fois ces équations résolues, l'utilisation de quelques outils statistiques permet de trouver certains comportements asymptotiques sur l'évolution de ces fronts.

Chapitre 3

Ce chapitre constitue une extension du chapitre 2. Les méthodes de calcul restent identiques. Toutefois la principale différence réside non seulement dans le choix de la géométrie mais aussi de la nature du matériau et de la loi de propagation. Son but est l'étude de la déformation coplanaire du front d'une fissure semi-infinie d'interface se propageant entre deux matériaux élastiques isotropes de propriétés de rupture aléatoire. Différents types de chargements sont envisagés. Les calculs sont basés sur les travaux de Lazarus et Leblond (1998) qui ont étendu la théorie tridimensionnelle des fonctions de poids de Bueckner (1987) et Rice (1985) au cas d'une fissure d'interface et donné au premier ordre, la variation du taux de restitution d'énergie résultant d'une petite perturbation du front. Cela permet de quantifier l'évolution du désordre en calculant différentes grandeurs mathématiques liées à la fonction d'autocorrélation de la déviation du front par rapport à un front droit de référence.

Chapitre 4

Ce chapitre s'inscrit dans le prolongement du chapitre précédent. Son but est de caractériser expérimentalement la propagation de la rupture par l'intermédiaire d'imagerie optique. Pour cela, le dispositif expérimental Delaplace et al. (1999), consiste à induire et à suivre l'ouverture en mode 1 d'une interface entre deux plaques de plexiglas, dont les surfaces ont été préalablement sablées, afin d'induire de l'hétérogénéité sous forme d'aspérités. Le travail est mené en deux parties, une partie théorique et l'autre expérimentale. La partie théorique se déduit principalement des calculs

faits au niveau du chapitre 3 et les résultats trouvés sont comparés aux résultats expérimentaux, non seulement concernant le coefficient de rugosité, mais aussi la fonction d'autocorrélation et son spectre.

Chapitre 5

Le but de ce chapitre est l'établissement des bases de l'étude de la déformation des fronts durant la coalescence des fissures. Pour cela, nous nous intéressons à la géométrie-type la plus simple : il s'agit de deux fissures en fentes infinies, coplanaires et parallèles, chargées en mode 1 dans un milieu infini. Pour cette géométrie, nous établissons les équations de la théorie de Bueckner-Rice, en calculant les fonctions de poids. La méthode utilisée pour ce calcul est comparable à celle déjà utilisée pour une fissure en forme de fente infinie unique, par Leblond et al. (1996) en mode 1 et Lazarus and Leblond (2002c) pour les modes 2 et 3.

Notations

– Algèbre et analyse

$a \wedge b$: produit vectoriel des vecteurs a et b .

$[[f]]$: saut de la quantité f au passage de la discontinuité de la fissure.

$VP \int$: intégrale au sens de la valeur principale de Cauchy.

Re et Im : parties réelle et imaginaire.

$\hat{\phi}$ et $\tilde{\phi}$ simple et double transformée de Fourier (TF) de ϕ .

$E[F(z)]$: espérance mathématique de F .

$\mathbf{E}(k)$ et $\mathbf{K}(k)$: intégrales elliptiques complètes de première et seconde espèce.

– grandeurs mécaniques

σ : champ de contraintes.

u : champ de déplacement.

E et ν : module d'Young et le coefficient de poisson du matériau.

K_n : n -ième facteur d'intensité de contraintes (FIC).

$\mathcal{G}$: taux de restitution d'énergie.

k_{nm} : m -ième composante de la n -ième fonction de poids tridimensionnelle.

Z_{nm} : noyau fondamental homogène de degré -2 .

W_{nm} : noyau fondamental homogène de degré 0 .

N_{nm} : coefficient universel.

Chapitre 1

Quelques éléments théoriques de rupture fragile

1.1 Introduction

Cette partie se propose d'exposer les bases théoriques nécessaires à la résolution des problèmes de ruptures fragiles tridimensionnelles abordés dans cette thèse.

On présente d'abord les outils classiques de la mécanique de la rupture fragile tridimensionnelle ainsi que les notations et conventions adoptées. En particulier, les Facteurs d'Intensité de Contraintes (FIC) y sont définis. On examine ensuite la version tridimensionnelle des critères de propagation que nous utiliserons plus tard. Il s'agit plus précisément du critère de Griffith sous chargement monotone et de la loi de Paris sous chargement cyclique. Ensuite, le formalisme des fonctions de poids de Bueckner-Rice sera abordé. La version bidimensionnelle de ce formalisme a été initiée par Bueckner (1970) et Rice (1972). Puis son extension tridimensionnelle est apparue pour divers cas particuliers de chargement et de géométrie chez Rice (1985, 1989) et Gao (1986, 1988). Dans cette voie, Leblond et al. (1996) ont établi la variation des FIC pour une fissure en forme de fente infinie chargée en mode 1 et Lazarus and Leblond (2002b) l'ont complétée pour les modes 2 et 3. Cette théorie donne, au premier ordre, la variation des FIC résultant d'une petite perturbation coplanaire du front de fissure, à chargement supposé constant, sous la forme d'une intégrale curviligne étendue à tout le front. Cette dernière fait apparaître un noyau pour lequel il est également possible de donner une variation au premier ordre. Les formules concernant le mode 1 ont été fournies par Rice (1989) pour une fissure plane de forme arbitraire. La généralisation de ces formules aux modes 2 et 3 a été faite par Favier et al. (2006a).

1.2 Les Facteurs d'intensité de contraintes “FIC”

1.2.1 Cas d'une fissure dans un matériau homogène

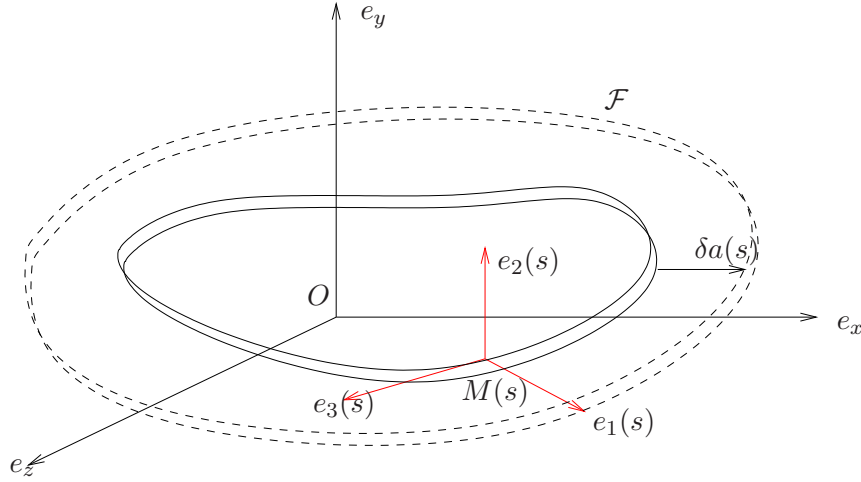


FIG. 1.1 – Vue d'ensemble de la fissure

Considérons une fissure plane (cf. figure 1.1) située dans le plan (O, e_x, e_z) . On désigne par $\mathcal{F}$ le front de fissure orienté sur lequel on construit une abscisse curviligne s . En chaque point $M(s)$, on construit une base locale orthonormée directe telle que :

- $e_1(s)$ soit normal au front, situé dans le plan de la fissure et ayant pour sens celui de la propagation,
- $e_2(s) \equiv e_y$ normal au plan de la fissure,
- $e_3(s) = e_1(s) \wedge e_2(s)$ soit tangent au front.

De plus, on suppose que le milieu est en évolution quasistatique.

Considérons le milieu élastique homogène et isotrope, Leblond and Torlai (1992) ont montré que les champs mécaniques, au voisinage du point $M(s)$ du front, résultent de la superposition d'un problème de déformation plane d'une part, et d'autre part d'un problème de déformation antiplane.

Si on cherche la forme asymptotique de la solution (u, σ) au voisinage de $M(s)$, on trouve alors les relations suivantes :

– pour le champ de déplacement au premier ordre

$$\begin{cases} \llbracket u_1 \rrbracket(r, s) \sim_{r \rightarrow 0^+} 8 \frac{1 - \nu^2}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_2(s) \\ \llbracket u_2 \rrbracket(r, s) \sim_{r \rightarrow 0^+} 8 \frac{1 - \nu^2}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_1(s) \\ \llbracket u_3 \rrbracket(r, s) \sim_{r \rightarrow 0^+} 8 \frac{1 + \nu^2}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_3(s) \end{cases} \quad (1.1)$$

– pour le champ de contraintes au premier ordre

$$\begin{cases} \sigma_{21}(r, s) \sim_{r \rightarrow 0^+} \frac{K_2(s)}{\sqrt{2\pi r}} \\ \sigma_{22}(r, s) \sim_{r \rightarrow 0^+} \frac{K_1(s)}{\sqrt{2\pi r}} \\ \sigma_{23}(r, s) \sim_{r \rightarrow 0^+} \frac{K_3(s)}{\sqrt{2\pi r}} \end{cases} \quad (1.2)$$

$K_1(s)$, $K_2(s)$ et $K_3(s)$ sont les FIC au point $M(s)$

1.2.2 Cas d'une fissure semi-infinie d'interface

Considérons maintenant la fissure comprise entre deux matériaux élastiques isotropes différents. Dans ce cas, le comportement asymptotique de la solution (u, σ) d'après Hutchinson et al. (1987), vérifie :

– pour le champ de déplacement au premier ordre

$$\begin{cases} \llbracket u_y + iu_x \rrbracket(r, s) \sim 2 \frac{[(1 - \nu_1)/\mu_1 + (1 - \nu_2)/\mu_2]}{(1 + 2i\epsilon)ch(\pi\epsilon)} K(s) \sqrt{\frac{|r|}{\pi}} |r|^{i\epsilon} \\ \llbracket u_z \rrbracket(r, s) \sim 2 \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) K_3(s) \sqrt{\frac{|r|}{\pi}} \end{cases} \quad (1.3)$$

– pour le champ de contraintes au premier ordre

$$\begin{cases} (\sigma_{yy} + i\sigma_{yx})(r, s) \sim \frac{K(s)r^{i\epsilon}}{\sqrt{2\pi r}} \\ \sigma_{yz}(r, s) \sim \frac{K_3(s)}{\sqrt{2\pi r}} \end{cases} \quad (1.4)$$

Les facteurs $K(s)$ et $K_3(s)$ introduits ci-dessus sont appelés facteurs d'intensités de contraintes (FIC) au point $M(s)$. A noter que dans le cas de la fissure d'interface $K(s)$ est complexe, et peut se décomposer en $K_1(s) + iK_2(s)$, mais les modes 1 et 2 ne peuvent pas être découplés.

1.3 Lois de propagation

Le but de cette partie est de présenter les lois de propagation qui nous seront utiles par la suite. Elles sont basées sur les FIC, donc sur l'état local des contraintes.

1.3.1 Rupture brutale

La plupart des matériaux fragiles se cassent pour un chargement critique. Pour ces matériaux, dans le cadre du mode 1, on utilise le critère d'Irwin en chaque point $M(s)$ du front :

$$\begin{cases} K_1 < K_c & \implies \text{pas de propagation} \\ K_1 = K_c & \implies \text{propagation possible} \end{cases} \quad (1.5)$$

K_c est une caractéristique physique du matériau appelée *ténacité*.

En se basant sur un raisonnement énergétique, Griffith (1920) a proposé le critère suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{G}(s) < \mathcal{G}_c & \implies \text{pas de propagation} \\ \mathcal{G}(s) = \mathcal{G}_c & \implies \text{propagation possible} \end{cases} \quad (1.6)$$

où $\mathcal{G}$ est le taux de restitution d'énergie.

Il s'exprime en fonction des FIC grâce à la formule d'Irwin :

$$\mathcal{G}(s) = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)(K_1^2 + K_2^2)(s) + K_3^2(s)] \quad (1.7)$$

Si bien que le critère d'Irwin est un cas particulier du critère de Griffith dans le cas du mode 1. Mais contrairement au critère d'Irwin, il permet l'étude du mode mixte.

1.3.2 Rupture subcritique ou par fatigue

On sait que la plupart des matériaux soumis à des chargements cycliques, se rompent au bout d'un certain temps, même en-dessous du seuil critique de la section 1.3.1. On parle alors de propagation par fatigue. La loi communément utilisée pour apprécier l'avancée normale de la fissure est celle de *Paris* et s'énonce dans le cadre d'une sollicitation en mode 1, comme suit :

$$\frac{da(s)}{dN} = C [\Delta K_1(s)]^m \quad (1.8)$$

avec N le nombre de cycle, C et m des caractéristiques du matériau.

De même, on a une formule similaire dans le cas du mode mixte, en faisant intervenir le taux de restitution d'énergie, ce qui donne :

$$\frac{da(s)}{dN} = C [\Delta \mathcal{G}(s)]^m \quad (1.9)$$

Il peut y avoir propagation de la rupture lorsque le seuil évoqué dans le cas de la rupture brutale n'est pas atteint pour un chargement constant donc non cyclique. C'est la rupture subcritique pour laquelle l'avancée est généralement très lente tout en étant d'autant plus rapide que le chargement est élevé. On peut donc adapter les lois (1.8) et (1.9) pour décrire l'évolution du front en substituant t (le temps) à N et $\mathcal{G}$ à $\Delta \mathcal{G}$.

$$\frac{da(s)}{dt} = C [\mathcal{G}(s)]^m \quad (1.10)$$

1.4 Théorie des fonctions de poids

1.4.1 Cas du milieu homogène

Considérons une fissure plane quelconque de contour $\mathcal{F}$ pour laquelle on envisage une perturbation coplanaire infinitésimale (voir *figure 1.1*) à chargement constant. Ce qui correspond à une avancée normale au point $M(s)$, d'une quantité $\delta a(s)$ négligeable devant une longueur caractéristique de la fissure. L'objectif est de déterminer les champs mécaniques, en particulier les FIC dans la nouvelle configuration géométrique. Pour cela, l'utilisation des fonctions de poids tridimensionnelles permettent de trouver les variations de $[[u]]$, puis de K_i , pour $i = \{1, 2, 3\}$, dues à la perturbation de δa .

1.4.1.1 Définition de la fonction de poids et du noyau fondamental

La *fonction du poids* $k_{pi}(\mathcal{F}; s, s', r)$, $p = 1, 2, 3$, $i = x, y, z$ est définie comme le $p^{\text{ième}}$ facteur d'intensité de contraintes, au point s' du front, dû à l'application d'un doublet de forces unitaires dans les directions $\pm e_i$.

Le noyau fondamental défini par la matrice $(W_{ij})_{1 \leq p \leq 3, 1 \leq m \leq 3} \equiv \underline{\underline{W}}$, est donné par la formule suivante :

$$W_{ij}(s', s) \equiv \pi \sqrt{\frac{\pi}{2}} D^2(s, s') \lim_{r \rightarrow 0} \frac{k_{ij}(\mathcal{F}, s, s', r)}{\sqrt{r}} \quad (1.11)$$

où $D(s, s')$ représente la distance cartésienne entre les points s et s' .

Pour ce qui va suivre, nous définissons d'une autre manière le noyau fondamental en posant

$$Z_{ij}(s', s) = \frac{W_{ij}(s', s)}{2\pi D^2(s, s')}. \quad (1.12)$$

Voici quelques propriétés de cette fonction, qui nous seront utiles par la suite :

1. Z_{ij} est homogène de degré -2 par rapport à ses arguments, soit

$$\forall \lambda > 0, \quad Z_{ij}(\lambda s, \lambda s') = \lambda^{-2} Z_{ij}(s, s')$$

2. Z_{ij} possède une propriété de symétrie par rapport à ses arguments :

$$\Lambda_{ip} Z_{pj}(s, s') = \Lambda_{jp} Z_{pi}(s', s) \quad (1.13)$$

- 3.

$$\lim_{s \rightarrow s_0} D^2(s, s_0) Z_{ij}(s, s_0) \quad \text{reste finie}$$

et la limite est universelle, c'est-à-dire indépendante de la géométrie de la fissure. On a :

$$\lim_{s \rightarrow s_0} D^2(s, s_0) Z_{ij}(s, s_0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{si } i = j = 1 \\ \frac{2 - 3\nu}{2\pi(2 - \nu)} & \text{si } i = j = 2 \\ \frac{2 + \nu}{2\pi(2 - \nu)} & \text{si } i = j = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.14)$$

Les démonstrations de ces différentes propriétés ont déjà été établies dans la thèse de Elie Favier (2005), et ne seront plus répétées ici.

1.4.1.2 Perturbation coplanaire du front de fissure

Les variations $\delta K_m(s)$, $m = 1, 2, 3$ des facteurs d'intensité de contraintes FIC, sont données au premier ordre au point $M(s)$ par Rice (1989) en mode 1 et en modes 2 et 3 par Leblond et al. (1999), par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \delta K_m(s) &= [\delta K_m(s)]_{\delta a(s') \equiv \delta a(s)} + N_{mn} K_n(s) \frac{d\delta(s)}{ds} \\ &+ VP \int_{\mathcal{F}} Z_{mn}(\Omega; s, s') K_n(s') [\delta a(s') - \delta a(s)] ds' \end{aligned} \quad (1.15)$$

où s, s' sont respectivement les abscisses curvilignes des points M et M' le long du front, de plus la convention de sommation d'Einstein est employée sur l'indice $n = 1, 2, 3$. Dans les équations (1.15), $K_m(s)$ sont les valeurs des FIC initiales (*c'est à dire* avant la perturbation du front). $[\delta K_m(s)]_{\delta a(s') \equiv \delta a(s)}$ sont les valeurs de $\delta K_m(s)$ pour une avancée égale à $\delta a(s)$ partout. Les valeurs N_{mn} définies dans Leblond et al. (1999) sont les composantes de l'opérateur universel $\underline{\underline{N}}$:

$$\underline{\underline{N}} = \frac{2}{1 - \nu} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 - \nu & 0 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

La variation du noyau fondamental est donnée au premier ordre par Rice (1989) en mode 1 et en modes 2 et 3 par Favier et al. (2006a), par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \delta Z_{ij}(s_0, s_1) &= N_{ik} Z_{kj}(s_0, s_1) \frac{d\delta a(s_0)}{ds} - Z_{ik}(s_0, s_1) N_{kj} \frac{d\delta a(s_1)}{ds} \\ &+ VP \int_{\mathcal{F}} Z_{ik}(s_0, s) Z_{kj}(s, s_1) \delta a(s) ds \end{aligned} \quad (1.17)$$

1.4.1.3 Cas d'une fissure d'interface semi-infinie

Dans un souci d'exhaustivité, nous avons donné les formules des variations des FIC pour une fissure plane de forme quelconque dans le cas d'un milieu homogène. Par contre ces formules ne sont pas disponibles dans le cas d'une fissure d'interface, c'est pourquoi nous nous restreindrons dans ce cas aux formules correspondant à une fissure semi-infinie qui ont été développées par Lazarus (1998) lors de sa thèse.

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta K(z) = \frac{dK}{da}(z) \delta a(z) \\ \quad + \frac{1+2i\epsilon}{8 \cosh(\pi\epsilon)} \left\{ VP \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\gamma_+}{|z'-z|^{2i\epsilon}} \overline{K(z')} + \gamma_- K(z') \right] \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{(z'-z)^2} dz' \right. \\ \quad \left. + \frac{2\gamma_3}{1-\nu} FP \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(z'-z) K_3(z') \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{|z'-z|^{2+i\epsilon}} dz' \right\} \\ \delta K_3(z) = \frac{dK_3}{da}(z) \delta a(z) + \frac{\gamma}{4} VP \int_{-\infty}^{+\infty} K_3(z') \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{(z'-z)^2} dz' \\ \quad + \frac{1-\nu}{4} \operatorname{Re} \left[\gamma_z FP \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(z'-z) \overline{K(z')} \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{|z'-z|^{2+i\epsilon}} dz' \right]. \end{array} \right. \quad (1.18)$$

Les valeurs des constantes γ_+ , γ_- , γ_3 , γ_z , γ dépendant des propriétés élastiques des matériaux, sont données analytiquement dans Piccolroaz et al. (2007).

1.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons introduit les différents outils théoriques nécessaires au traitement des problèmes de propagation d'une fissure. Nous avons d'abord abordé les définitions des FIC et donné les diverses lois de propagations. Ensuite, nous nous sommes focalisés sur les définitions et les propriétés des fonctions de poids de Bueckner. Ceci nous a permis d'établir pour une petite perturbation du front, les variations du FIC (équation 1.15) ainsi que celles du noyau fondamental (équation 1.17) dans un cadre général. Ces relations nous seront d'une grande utilité dans les parties suivantes :

- Dans les chapitres 2 et 3, l'utilisation des équations (1.15) et (1.18) respectivement pour une fissure en forme de fente chargée en modes 2 et 3 et pour une fissure semi-infinie d'interface, permettra de déterminer l'évolution de la perturbation du front pour chacun de ces problèmes.

- Par ailleurs c'est sur l'équation (1.17), que nous nous sommes basés dans le chapitre 5, pour déterminer le noyau fondamental pour deux fissures coplanaires en formes de fente.

Chapitre 2

Désordre du front d'une fissure en forme de fente infinie chargée en modes 2 et 3

2.1 Introduction

Favier et al. (2006b) ont récemment réalisé une étude sur la déformation des fronts d'une fissure en forme de fente infinie, chargée en mode 1 et se propageant dans un milieu de ténacité aléatoire. Il s'agit de quantifier la rugosité du front découlant de cette distribution aléatoire de ténacité. Leur travail est basé sur la formule de Leblond et al. (1999) donnant la variation des FIC d'une fissure en fente infinie chargée en mode 1. Le travail présenté ici, est une extension aux modes 2 et 3 du travail de Favier et al. (2006b).

Plus précisément, nous allons au cours de cette partie, appliquer les résultats du chapitre 1 à une fissure en forme de fente infinie, chargé en mode mixte (*figure 2.1*). Nous allons également rappeler les équations permettant la mise en place d'un lien entre l'avancée normale δa et le champ aléatoire C définissant l'hétérogénéité du milieu. Puis, sera abordée, la manière de mesurer le "désordre" le long du front de fissure lors de sa propagation. C'est par le biais des fonctions d'autocorrélation à deux points que sera appréciée la rugosité du front, d'abord sur le champ de perturbation δa lui-même, ensuite sur ses dérivées successives, sur la fluctuation quadratique et enfin sur la longueur de corrélation. Les résultats analytiques se limitent au comportement asymptotique des différents champs évoqués, dans la limite des temps longs, c'est à dire des ouvertures larges de la fissure.

2.2 Cas de la fissure en forme de fente

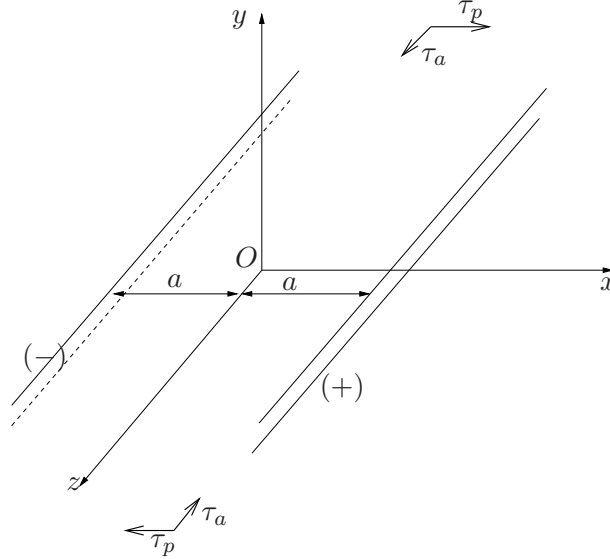


FIG. 2.1 – Fissure en forme de fente infinie

2.2.1 Définition et notation du noyau fondamental

Considérons une fissure en forme de fente infinie occupant le domaine $-a \leq x \leq a$, $y = 0$, dans un matériau élastique isotrope (figure 2.1). Les droites $x = a$, $y = 0$ et $x = -a$, $y = 0$ seront respectivement désignées comme étant le front avant et le front arrière de la fissure. Nous supposons également que ce système est chargé en mode 2 et 3 à travers les contraintes de cisaillement planes et antiplanes τ_p , τ_a et que la propagation est coplanaire malgré la mixité du chargement.

Les facteurs d'intensité de contrainte (FIC) sont alors uniformes le long des fronts avant (+) et arrière (-) et sont donnés par :

$$K_2^+ = K_2^- = K_2 = \tau_p \sqrt{\pi a}, \quad K_3^+ = -K_3^- = \tau_a \sqrt{\pi a} \quad (2.1)$$

2.2.2 Expression des variations des FIC dans le cadre du mode mixte 2 et 3

Perturbons légèrement ces fronts à l'intérieur du plan de fissure. Désignons par $\delta a^+(z)$, $\delta a^-(z)$ les distances entre l'origine et les nouvelles positions des fronts avant et arrière aux points $(x = a, y = 0, z)$, $(x = -a, y = 0, z)$ et $K_2(z)$, $K_3(z)$ les nouveaux FIC. Pour de petites perturbations, nous obtenons :

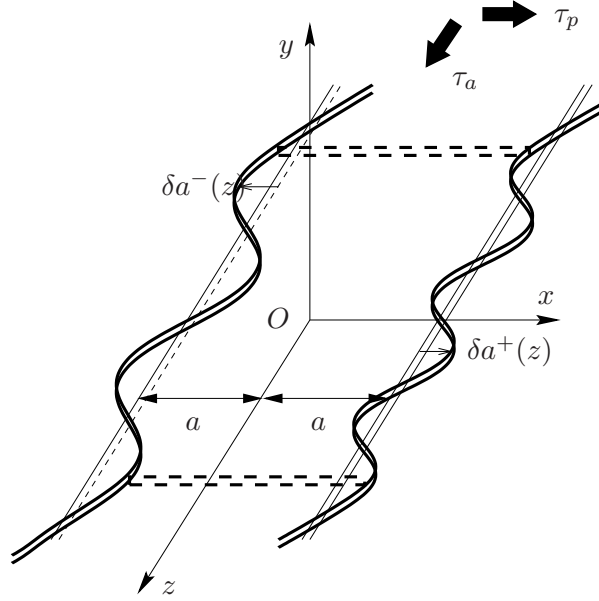


FIG. 2.2 – Fissure en forme de fente infinie perturbée

$$\begin{cases} a^\pm(z, t) & \equiv a(t) + \delta a^\pm(z, t) & , & |\delta a^\pm(z, t)| \ll a(t) \\ K_2^\pm(z, t) & \equiv K_2(t) + \delta K_2^\pm(z, t) & , & |\delta K_2^\pm(z, t)| \ll K_2(t) \\ K_3^\pm(z, t) & \equiv K_3(t) + \delta K_3^\pm(z, t) & , & |\delta K_3^\pm(z, t)| \ll K_3(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

où $a(t)$ est la valeur moyenne de la longueur de la fissure, $K_2^+(t) = K_2^-(t) = \tau_b \sqrt{\pi a(t)}$, $K_3^+(t) = -K_3^-(t) = \tau_a \sqrt{\pi a(t)}$ les valeurs moyennes des facteurs d'intensité de contraintes à l'instant t , ainsi que $\delta a^\pm(z, t)$ et $\delta K_2^\pm(z, t)$, $\delta K_3^\pm(z, t)$ leurs fluctuations correspondantes.

Appliquant les relations (1.15) au cas de la tunnel-crack, Lazarus and Leblond (2002c) ont donné la variation des FIC au premier ordre pour une petite perturbation du front :

$$\begin{cases} \delta K_2^\pm & = K_2 \frac{\delta a(z^\pm)}{4a} - \frac{2}{2-\nu} K_3^\pm \frac{d\delta a}{dz}(z^\pm) \\ & + VP \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f_{22}\left(\frac{z'-z}{a}\right) K_2 + f_{23}\left(\frac{z'-z}{a}\right) K_{33}^\pm \right] \frac{\delta a(z'^\pm) - \delta a(z^\pm)}{(z'-z)^2} dz' \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[g_{22}\left(\frac{z'-z}{a}\right) K_2 + g_{23}\left(\frac{z'-z}{a}\right) K_3^\mp \right] \frac{\delta a(z'^\mp)}{a^2} dz' \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \delta K_3^\pm &= K_2 \frac{\delta a(z^\pm)}{4a} + \frac{2(1-\nu)}{2-\nu} K_2^\pm \frac{d\delta a}{dz}(z^\pm) \\ &+ VP \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-(1-\nu) f_{23} \left(\frac{z' - z}{a} \right) K_2 + f_{33} \left(\frac{z' - z}{a} \right) K_{33}^\pm \right] \frac{\delta a(z'^\pm) - \delta a(z^\pm)}{(z' - z)^2} dz' \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-(1-\nu) g_{23} \left(\frac{z' - z}{a} \right) K_2 + g_{23} \left(\frac{z' - z}{a} \right) K_3^\mp \right] \frac{\delta a(z'^\mp)}{a^2} dz' \end{aligned} \right. \quad (2.4)$$

Dans ces relations, le symbole VP représente la valeur principale de Cauchy, les fonctions $f_{\alpha\beta}$ et $g_{\alpha\beta}$ représentant les composantes du noyau fondamental, dépendent du coefficient de poisson ν . De plus, les fonctions f_{22} , f_{33} et g_{33} sont paires alors que f_{23} et g_{23} sont impaires. Toutes ces fonctions ont été calculées numériquement par Lazarus and Leblond (2002b).

En utilisant le développement limité de la formule d'Irwin au premier ordre en δa , le taux de restitution d'énergie est alors donnée par $\mathcal{G}^\pm(z) = \mathcal{G} + \delta\mathcal{G}^\pm(z)$ avec :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[K_2^2 + \frac{1}{1-\nu} (K_3^+)^2 \right] \\ \delta\mathcal{G}^\pm(z) &= 2 \frac{1-\nu^2}{E} \left[K_2 \delta K_2^\pm(z) + \frac{1}{1-\nu} K_3^\pm \delta K_3^\pm(z) \right] \end{aligned} \right. \quad (2.5)$$

Dans ces expressions, K_2 et $K_3^\pm$ sont exprimés dans les équations (2.1), alors $\delta K_2^\pm(z)$ et $\delta K_3^\pm(z)$ sont donnés par les équations (2.3), (2.4).

2.2.3 Transformée de Fourier (TF) des expressions des FIC et du taux de restitution d'énergie

Nous utiliserons les Transformées de Fourier (TF) de diverses fonctions le long des fronts de la fissure. Ces TF nous permettront d'obtenir les équations différentielles des fluctuations au cours de leurs évolutions. Par définition, la Transformée de Fourier $\hat{\phi}(k)$ de la fonction $\phi(z)$ est donnée par la formule :

$$\hat{\phi}(k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z) e^{ikz} dz \quad \Longleftrightarrow \quad \phi(z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(k) e^{-ikz} dk. \quad (2.6)$$

La première étape consiste à prendre les Transformées de Fourier des perturbations des facteurs d'intensité de contraintes de part et d'autre des fronts de la fissure. Ainsi en prenant les TF des équations (2.3), (2.4), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{aligned} \widehat{\delta K_2^\pm}(k, t) &= \left(\frac{K_2}{4a} + \frac{2iakK_3^\pm}{2-\nu} \right) \frac{\widehat{\delta a^\pm}(k, t)}{a(t)} \\ &+ \left[PV \int_{-\infty}^{+\infty} (f_{22}(u)K_2 + f_{23}(u)K_{33}^\pm) \frac{e^{-ipu} - 1}{u^2} du \right] \frac{\widehat{\delta a^\pm}(k, t)}{a(t)} \\ &+ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (g_{22}(u)K_2 + g_{23}(u)K_3^\mp) e^{-ipu} du \right] \frac{\widehat{\delta a^\mp}(k, t)}{a(t)} \end{aligned} \right. \quad (2.7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \widehat{\delta K_3^\pm}(k, t) &= \left(\frac{K_3^\pm}{4a} - \frac{2iak(1-\nu)K_2^\pm}{2-\nu} \right) \frac{\widehat{\delta a^\pm}(k, t)}{a(t)} \\ &+ \left[PV \int_{-\infty}^{+\infty} (-(1-\nu)f_{22}(u)K_2 + f_{23}(u)K_{33}^\pm) \frac{e^{-ipu} - 1}{u^2} du \right] \frac{\widehat{\delta a^\pm}(k, t)}{a(t)} \\ &+ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (-(1-\nu)g_{22}(u)K_2 + g_{23}(u)K_3^\mp) e^{-ipu} du \right] \frac{\widehat{\delta a^\mp}(k, t)}{a(t)} \end{aligned} \right. \quad (2.8)$$

où l'on a posé $u = \frac{z' - z}{a}$.

En introduisant les fonctions $\bar{f}_{\alpha\beta}$ et $\hat{g}_{\alpha\beta}$; $(\alpha, \beta) = (2, 2), (2, 3), (3, 3)$ définies par

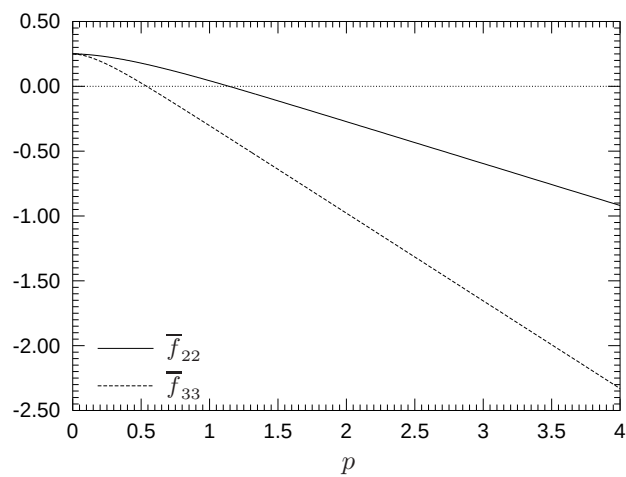
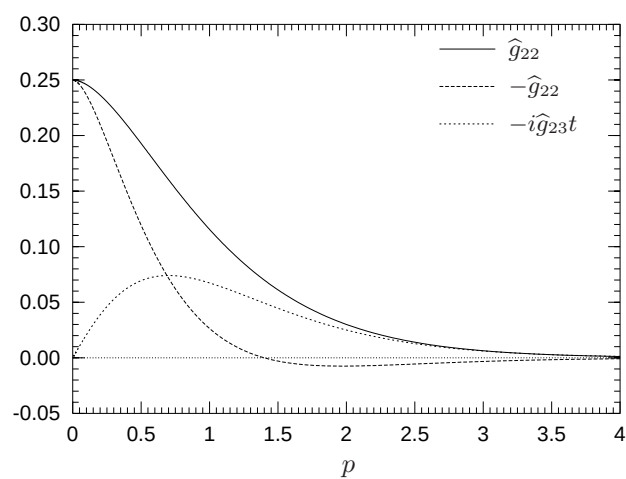
$$\left\{ \begin{aligned} \bar{f}_{\alpha\beta}(p) &= \frac{1}{4} + 2PV \int_0^{+\infty} f_{\alpha\beta}(u) \frac{\cos(pu) - 1}{u^2} du, \quad (\alpha, \beta) = (2, 2), (3, 3) \\ \bar{f}_{23}(p) &= -ip \frac{2}{2-\nu} + 2i \int_0^{+\infty} f_{23}(u) \frac{\sin(pu)}{u^2} du \\ \hat{g}_{\alpha\beta}(p) &= 2 \int_0^{+\infty} g_{\alpha\beta}(u) \cos(pu) du, \quad (\alpha, \beta) = (2, 2), (3, 3) \\ \hat{g}_{23}(p) &= 2i \int_0^{+\infty} g_{23}(u) \sin(pu) du \end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

on obtient

$$a \widehat{\delta K_2^\pm}(k) = [\bar{f}_{22}(ka)K_2 - \bar{f}_{23}(ka)K_3^\pm] \widehat{\delta a^\pm}(k) + [\hat{g}_{22}(ka)K_2 - \hat{g}_{23}(ka)K_3^\mp] \widehat{\delta a^\mp}(k) \quad (2.10)$$

$$a \widehat{\delta K_3^\pm}(k) = [(1-\nu)\bar{f}_{23}(ka)K_2 + \bar{f}_{33}(ka)K_3^\pm] \widehat{\delta a^\pm}(k) + [(1-\nu)\hat{g}_{23}(ka)K_2 + \hat{g}_{33}(ka)K_3^\mp] \widehat{\delta a^\mp}(k) \quad (2.11)$$

Les fonctions $\hat{g}_{\alpha\beta}$ sont simplement les TF des fonctions $g_{\alpha\beta}$ alors que la relation entre $\bar{f}_{\alpha\beta}$ et $f_{\alpha\beta}$ est plus complexe. Les fonctions $\bar{f}_{22}$, $\bar{f}_{33}$, $\hat{g}_{22}$, $\hat{g}_{33}$ sont des fonctions réelles paires et $\bar{f}_{23}$ et $\hat{g}_{23}$ sont des fonctions imaginaires pures et impaires. Ces fonctions sont traitées dans Lazarus and Leblond (2002c) et sont ici rappelées pour $\nu = 0.3$ dans les figures 2.3 et 2.4 (car nous en aurons besoin lors des discussions sur l'évolution des désordres).

FIG. 2.3 – Fonctions $\bar{f}_{22}$ et $\bar{f}_{33}$ FIG. 2.4 – Fonctions $\hat{g}_{mn}$

L'étape suivante consiste à considérer la Transformée de Fourier $\widehat{\delta\mathcal{G}}(k)$ de la perturbation du taux de restitution d'énergie $\delta\mathcal{G}(z)$. En prenant l'équation (2.5), nous avons :

$$\frac{\widehat{\delta\mathcal{G}^\pm}(k)}{2\mathcal{G}} = \frac{1}{a} \left\{ F(p)\widehat{\delta a^\pm}(k) + [G(p) \pm iH(p)]\widehat{\delta a^\mp}(k) \right\} \quad (2.12)$$

où $p \equiv ka$ est une grandeur sans dimension du vecteur d'onde et les quantités F , G , H sont fournies par les expressions suivantes :

$$F(p) = \frac{1-\nu^2}{E} \left[K_2^2 \bar{f}_{22}(p) + \frac{1}{1-\nu} (K_3^+)^2 \bar{f}_{33}(p) \right] \quad (2.13)$$

$$G(p) = \frac{1-\nu^2}{E} \left[K_2^2 \hat{g}_{22}(p) - \frac{1}{1-\nu} (K_3^+)^2 \hat{g}_{33}(p) \right] \quad (2.14)$$

$$H(p) = -\frac{1-\nu^2}{E} [2iK_3^+ K_2 \hat{g}_{23}(p)] \quad (2.15)$$

Il est à noter que les fonctions F , G , H sont des fonctions réelles et indépendantes de la fonction $\bar{f}_{22}$. De plus, les fonctions F et G sont paires alors que la fonction H est impaire.

2.3 Evolution temporelle de la perturbation de l'avancée du front lors d'une propagation en fatigue

2.3.1 Loi de Paris

L'avancée de la fissure est supposée suivre une loi de la forme :

$$\frac{\partial a^\pm}{\partial t}(z, t) = C^\pm(z, t) [\mathcal{G}^\pm(z, t)]^{N/2} \quad (2.16)$$

où $C^\pm(z, t)$ et N sont des paramètres dépendant du matériau. Aussi “ t ” peut être interprété comme étant le “nombre de cycles” et $\mathcal{G}(z, t)$ comme la “variation durant un cycle”.

Cette loi de propagation est connue sous le nom de Loi de Paris, et pour cette raison, nous appellerons $C^\pm(z, t)$ la constante de Paris et N l'exposant de Paris. Les valeurs de N sont comprises entre 2 - 5 pour les métaux, 4 - 10 pour les polymères. Mais, de grandes valeurs de N peuvent être prises en compte dans le cadre de la rupture fragile. Cependant toutes les linéarisations utilisées dans le cadre de ce travail, ne seront plus valables lorsque $N \longrightarrow +\infty$.

L'hétérogénéité du milieu est caractérisée par la constante de Paris, qui est considérée comme étant une fonction de la position. On adopte la notation $C^\pm(z, t)$ pour des raisons de simplicité, mais cela représente en fait la valeur de la constante aux points $(x = \pm a^\pm(z, t), y = 0, z)$.

De plus, on suppose qu'elle varie légèrement, donc on a :

$$C^\pm(z, t) \equiv C [1 + \delta c^\pm(z, t)] \quad , \quad |\delta c^\pm(z, t)| \ll 1 \quad (2.17)$$

où C est la valeur moyenne de $C^\pm(z, t)$ et $\delta c^\pm(z, t)$ est sa fluctuation, qui est une grandeur "normalisée", sans dimension.

2.3.2 Evolution en temps des fluctuations des deux fronts

Cette étape consiste à faire un développement limité au premier ordre de la loi de propagation (2.16) et à identifier ensuite les termes d'ordre 0 et 1. En insérant les équations (2.2) et (2.17) dans (2.16), on a :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt}(t) + \frac{\partial \delta a^\pm}{\partial t}(z, t) &= C [1 + \delta c^\pm(z, t)] [\mathcal{G}(t) + \delta \mathcal{G}^\pm(z, t)]^{N/2} \\ &= C [\mathcal{G}(t)]^{N/2} + \frac{N}{2} C [\mathcal{G}(t)]^{N/2-1} \delta \mathcal{G}^\pm(z, t) + C \delta c^\pm(z, t) [\mathcal{G}(t)]^{N/2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

D'abord, l'identification des termes d'ordre 0 de l'équation (2.18), nous permet d'avoir :

$$a(t) = C \mathcal{G}^{N/2} t + a_0 \quad (2.19)$$

où a_0 est la position initiale des fronts ($t = 0$). Ensuite celle des termes d'ordre 1, après avoir procédé au changement de la variable t en a , permet d'obtenir :

$$\frac{\partial \delta a^\pm}{\partial a}(z, a) = N \frac{\delta \mathcal{G}^\pm(z, a)}{2 \mathcal{G}} + \delta c^\pm(z, a) \quad (2.20)$$

Les variations $\delta \mathcal{G}^\pm(z, a)$ sont obtenues en insérant les équations (2.3) et (2.4) dans l'équation (2.5). Elles contiennent des termes non locaux sous forme d'une intégrale dépendant des fluctuations $\delta a^\pm(z, a)$ le long des fronts de la fissure, de ce fait l'équation (2.20) est une équation intégral-différentielle sur $\delta a^\pm(z, a)$.

2.3.3 Détermination des équations différentielles ordinaires EDO

Les équations (2.20) contiennent des produits de convolution. Prendre leurs Transformées de Fourier, permettent d'avoir des équations différentielles ordinaires (EDO). En appliquant les TF de l'équation (2.6) à $\delta a^\pm(z, a)$, $\delta c^\pm(z, t)$ et $\delta \mathcal{G}^\pm(z, a)$, nous obtenons les équations d'évolution des perturbations des avancées des fronts arrière et avant de la fissure, lesquelles dépendent de a :

$$\frac{\partial \widehat{\delta a^\pm}}{\partial a}(k, a) = \frac{N}{a} \left\{ F(p) \widehat{\delta a^\pm}(k, t) + [G(p) \pm iH(p)] \widehat{\delta a^\mp}(k, t) \right\} + \widehat{\delta c^\pm}(k, a), \quad p = ka \quad (2.21)$$

Par la suite, il serait plus intéressant d'écrire ces équations sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \widehat{\gamma}}{\partial a}(k, a) = \frac{N}{a} \underline{\underline{M}}(ka) \widehat{\gamma}(k, a) + \widehat{\phi}(k, a) \quad (2.22)$$

où $\underline{\hat{\gamma}}$ et $\underline{\hat{\phi}}$ sont les vecteurs colonnes suivants :

$$\underline{\gamma}(z, a) = \begin{pmatrix} \delta a^+(z, a) + \delta a^-(z, a) \\ \delta a^+(z, a) - \delta a^-(z, a) \end{pmatrix} \quad \underline{\phi} = \begin{pmatrix} \delta c^+(z, a) + \delta c^-(z, a) \\ \delta c^+(z, a) - \delta c^-(z, a) \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

et $\underline{\underline{M}}(p)$ la matrice 2x2 suivante :

$$\underline{\underline{M}}(p) = \begin{bmatrix} F(p) + G(p) & -iH(p) \\ iH(p) & F(p) - G(p) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

L'équation (2.22) est un système d'équations différentielles ordinaires en $\hat{\gamma}$. La résolution et les propriétés liées à cette équation seront abordées dans la section suivante.

2.3.4 Résolution de l'équation différentielle (2.22)

La résolution de l'équation (2.22) dépend fortement de la matrice $\underline{\underline{M}}(p)$. Mais cette matrice est diagonale si et seulement si la fonction H est nulle c'est-à-dire le produit $K_2 K_3^+ = 0$. Ce qui nous amène à distinguer les deux cas : $K_2 K_3^+ = 0$ et $K_2 K_3^+ \neq 0$

2.3.4.1 Cas $K_2 K_3^+ = 0$

Si $K_2 K_3^+ = 0$, nous nous retrouvons dans le cas du mode pur 2 ou 3, ainsi la matrice $\underline{\underline{M}}$ est diagonale, les équations ne sont plus couplées et nous obtenons alors les solutions sous une forme exponentielle, comme dans le cas du mode 1 (Favier et al. (2006b)) :

$$\begin{cases} \left(\widehat{\delta a^+} + \widehat{\delta a^-} \right) (k, a) &= \int_{a_0}^a \left[\frac{\psi_{11}(ka)}{\psi_{11}(ka')} \right]^N \left(\frac{a}{a'} \right)^{N/2} \left(\widehat{\delta c^+} + \widehat{\delta c^-} \right) (k, a') da' \\ \left(\widehat{\delta a^+} - \widehat{\delta a^-} \right) (k, a) &= \int_{a_0}^a \left[\frac{\psi_{22}(ka)}{\psi_{22}(ka')} \right]^N \left(\widehat{\delta c^+} - \widehat{\delta c^-} \right) (k, a') da'. \end{cases} \quad (2.25)$$

avec

$$\psi_{11}(p) \equiv \exp \left\{ \int_0^p \left[(F + G)(p') - \frac{1}{2} \right] \frac{dp'}{p'} \right\} \quad \psi_{22}(p) \equiv \exp \left[\int_0^p (F - G)(p') \frac{dp'}{p'} \right]. \quad (2.26)$$

Le terme $\frac{1}{2}$ assure la convergence de l'intégrale comme dans le cas du mode 1.

2.3.4.2 Cas $K_2 K_3^+ \neq 0$

Dans le cas $K_2 K_3^+ \neq 0$, la fonction H est non nulle, donc la matrice $\underline{\underline{M}}$ n'est pas diagonale. Les quantités $\underline{\underline{M}}(p_1)$ et $\underline{\underline{M}}(p_2)$ ne sont pas commutatives, les équations sont dans ce cas couplées et la solution de l'équation (2.22) ne peut pas être exprimée sous forme exponentielle. Néanmoins, nous pouvons l'écrire sous une forme semi-explicite en utilisant la méthode de la "variation de

constantes".

Pour cela, nous définissons l'équation homogène associée à l'équation (2.22) par

$$\frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial a}(k, a) = \frac{N}{a} \underline{\underline{M}}(ka) \hat{\gamma}(k, a) \quad (2.27)$$

et notons $\hat{\gamma}_0(k, a)$ sa solution. Pour la résoudre, deux cas sont envisagés :

– **Pour** $k \neq 0$

En divisant les deux membres de l'équation (2.27) par k , on obtient :

$$\frac{\partial \hat{\gamma}_0}{\partial p}(p) = \frac{N}{p} \underline{\underline{M}}(p) \cdot \hat{\gamma}_0(p) \quad , \quad p \equiv ka, \quad (2.28)$$

dans laquelle toutes les quantités dépendent de la variable réduite p au lieu de a . Puisque l'équation homogène (2.28)₁ est linéaire, $\hat{\gamma}_0(p)$ dépend linéairement de $\hat{\gamma}_0(p_0)$ où p_0 est une valeur arbitraire de p . Il existe donc une matrice carrée, appelée résolvante $\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0)$ telle que :

$$\hat{\gamma}_0(p) = \underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0) \cdot \hat{\gamma}_0(p_0). \quad (2.29)$$

La définition (2.29) du résolvant permet d'établir les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \underline{\underline{\mathcal{L}}}(p_0, p_0) & = & \mathbf{1} \quad \text{Condition initiale} \\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}(p_2, p_1) \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}(p_1, p_0) & = & \underline{\underline{\mathcal{L}}}(p_2, p_0) \quad \text{associativité} \\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}(p_0, p) & = & [\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0)]^{-1} \quad \text{Inversion} \end{array} \right. \quad (2.30)$$

De plus, l'équation (2.28)₁ implique que la résolvante vérifie l'EDO suivante :

$$\frac{d \underline{\underline{\mathcal{L}}}}{dp}(p, p_0) = \frac{N}{p} \underline{\underline{M}}(p) \underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0) \quad (2.31)$$

La résolvante permet d'exprimer la solution de l'équation homogène (2.27) pour $k \neq 0$ sous la forme suivante :

$$\hat{\gamma}_0(k, a) = \underline{\underline{\mathcal{L}}}(ka, ka_0) \hat{\gamma}_0(k, a_0) \quad (2.32)$$

– **Pour** $k = 0$

Les valeurs de $\bar{f}_{22}(0)$, $\bar{f}_{22}(0)$, $\hat{g}_{22}(0)$, $\hat{g}_{33}(0)$, $\hat{g}_{32}(0)$ sont respectivement $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, 0 (voir Lazarus and Leblond (2002a) et les figures 2.3 et 2.4), en introduisant ces valeurs dans les équations (2.13), on trouve $F(0) = G(0) = \frac{1}{4}$, $H(0) = 0$. Il s'en suit alors que :

$$\mathbf{M}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

par conséquent, la solution de l'équation homogène (2.27) s'écrit de la manière suivante :

$$\hat{\gamma}_0(0, a) = \underline{\underline{N}}(a/a_0) \hat{\gamma}_0(0, a_0) \quad (2.34)$$

où

$$\underline{\underline{N}}(x) = \begin{bmatrix} x^{N/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Revenons maintenant à l'équation non homogène (2.22). Appliquons à la solution de l'équation homogène obtenue pour $k \neq 0$ la méthode "de variation de constantes". Cette solution s'écrit alors de la manière suivante :

$$\hat{\gamma}(k, a) \equiv \underline{\underline{L}}(ka, ka_0) \cdot \hat{\chi}(k, a) \quad (2.36)$$

où $\hat{\chi}(k, a)$ représente la variation de $\hat{\gamma}_0(k, a_0)$.

En combinant les équations (2.22), (2.31) et (2.36), la fonction $\hat{\chi}(k, a)$ vérifie alors la relation :

$$\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial a}(k, a) = \underline{\underline{L}}(ka_0, ka) \hat{\phi}(k, a) \quad (2.37)$$

L'intégration de l'équation (2.37) permet finalement de trouver la solution de l'équation (2.22) sous la forme semi-explicite suivante :

$$\hat{\gamma}(k, a) = \int_{a_0}^a \underline{\underline{L}}(ka, ka_1) \hat{\phi}(k, a_1) da_1 \quad (2.38)$$

où $\gamma_0(k, a_0) = 0$ c'est-à-dire le front de la fissure est initialement supposé droit.

2.3.5 Quelques propriétés de la résolvante

Dans la partie précédente, nous avons établi certaines propriétés (équations (2.30)) de la résolvante $\underline{\underline{L}}(p, p_0)$ lesquelles restent vraies pour toute EDO linéaire, toutefois, la résolvante vérifie d'autres propriétés spécifiques à l'équation (2.22) et dont nous aurons besoin par la suite.

– Nature des composantes (réelle ou imaginaire) :

On définit la matrice

$$\underline{\underline{L}}'(p, p_0) \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11}(p, p_0) & -\mathcal{L}_{12}(p, p_0) \\ -\mathcal{L}_{21}(p, p_0) & \mathcal{L}_{22}(p, p_0) \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Et on obtient

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}'(p, p_0) = \overline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0)}. \quad (2.40)$$

Par conséquent les éléments diagonaux de $\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0)$ sont réels alors que les autres sont des imaginaires purs.

– **Changement du signe des arguments :**

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}(-p, -p_0) = \overline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0)}. \quad (2.41)$$

Combinée avec la propriété (2.40), cela implique que les éléments diagonaux de $\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0)$ sont des fonctions paires par rapport au couple (p, p_0) tandis que les éléments non diagonaux sont des fonctions impaires pour ce couple.

– **Comportement asymptotique pour $p \equiv Cst.$, $p_0 \rightarrow 0$:**

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0) \sim \underline{\underline{\psi}}(p) \cdot \underline{\underline{N}}\left(\frac{p}{p_0}\right) \quad (p \equiv Cst., p_0 \rightarrow 0) \quad (2.42)$$

pour toute matrice carrée $\underline{\underline{\psi}}(p)$, où $\underline{\underline{N}}(X)$ est définie par l'équation (2.35).

On en déduit alors que la matrice $\underline{\underline{\psi}}(p)$ admet des propriétés similaires : ses éléments diagonaux sont des fonctions réelles paires de la variable p alors que ses éléments non diagonaux des fonctions impaires et imaginaires pures.

– **Comportement asymptotique pour p et $p_0 \rightarrow \pm\infty$:**

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0) \sim e^{-N\chi(|p|-|p_0|)} \mathbf{1} \quad (p \text{ et } p_0 \rightarrow \pm\infty) \quad (2.43)$$

où

$$\chi \equiv \frac{1}{2(2-\nu)} \frac{(1-\nu)(2-3\nu)K_2^2 + (2+\nu)(K_3^+)^2}{(1-\nu)K_2^2 + (K_3^+)^2}. \quad (2.44)$$

la constante χ dépend seulement du rapport de K_2 et K_3^+ et reste indépendant de a .

Les démonstrations des équations (2.40) à (2.43) sont fournies dans l'Annexe A.1.

2.4 Etude statistique des évolutions des fronts

Si $\delta c^\pm$ est connu en chaque point du plan de la fissure, l'équation (2.38) permet de déterminer numériquement à chaque instant $\widehat{\delta a}^\pm(k, a)$, et par conséquent l'inverse de la TF $\delta \hat{a}^\pm(z, a)$.

Cependant, nous ne connaissons que des propriétés statistiques de $\delta c^\pm$. L'objectif de cette partie est de déterminer quelques propriétés statistiques des fluctuations des avancées des fronts induites par $\delta c^\pm$. Ces propriétés statistiques seront abordées à travers des outils mathématiques comme la fonction d'autocorrélation et sa TF. Les définitions et les propriétés mathématiques utilisées sont fournies dans l'Annexe B.3.

2.4.1 Hypothèses sur les fluctuations $\delta c^\pm$ des constantes de Paris

Nous procédons ici à l'établissement des hypothèses statistiques d'homogénéité et d'isotropie sur la distribution de la constance de Paris à l'intérieur du plan de fissure. Nous supposons également que la distance de corrélation b de ces fluctuations est très petite devant la valeur moyenne a de la fissure. Ce qui donne :

$$\begin{cases} E[\delta c^+(z_1, a_1)\delta c^+(z_2, a_2)] \equiv E[\delta c^-(z_1, a_1)\delta c^-(z_2, a_2)] \equiv \mathcal{C}^{++}(z_2 - z_1, a_2 - a_1) \\ E[\delta c^+(z_1, a_1)\delta c^-(z_2, a_2)] \equiv E[\delta c^-(z_1, a_1)\delta c^+(z_2, a_2)] \approx 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

où $E[.]$ est l'espérance mathématique définie dans l'Annexe B.3 (équation (B.1)) : La fonction $\mathcal{C}^{++}$ ne dépend que de la distance $[(z_2 - z_1)^2 + (a_2 - a_1)^2]^{1/2}$, par conséquent elle est paire par rapport à z . De plus la définition de b , permet d'établir :

$$\mathcal{C}^{+\pm}(z, a) \ll 1 \text{ pour } (z^2 + a^2)^{1/2} \gg b \quad (2.46)$$

La notation $^{+\pm}$ adoptée n'est autre que $^{++}$ et $^{+-}$.

2.4.2 Les Hypothèses sur les fluctuations $\delta a^\pm$ des fronts de la fissure

Les hypothèses faites sur $\delta c^\pm$ permettent de supposer que les perturbations des évolutions des fronts sont statistiquement invariantes dans les directions des fronts. Ce qui signifie que :

$$\begin{cases} E[\delta a^+(z_1, a)\delta a^+(z_2, a)] \equiv E[\delta a^-(z_1, a)\delta a^-(z_2, a)] \equiv \mathcal{A}^{++}(z_2 - z_1, a) \\ E[\delta a^+(z_1, a)\delta a^-(z_2, a)] = E[\delta a^-(z_2, a)\delta a^+(z_1, a)] \equiv \mathcal{A}^{+-}(z_2 - z_1, a) \end{cases} \quad (2.47)$$

où $\mathcal{A}^{++}(z, a)$ est une fonction paire par rapport à z . Par contre $\mathcal{A}^{+-}(z, a)$ n'est ni une fonction paire, ni une fonction impaire, du fait du chargement.

Puisque la solution (2.38) des équations d'évolution des perturbations des fronts est donnée en fonction des variables $\underline{\psi}$ et $\underline{\gamma}$ définies dans l'équation (2.23), l'étude des propriétés statistiques de ces fluctuations sera faite en utilisant les quantités Γ_{ij} et Φ_{ij} définies par :

$$\begin{cases} \Gamma_{ij}(z_2 - z_1, a) \equiv E [\gamma_i(z_1, a) \gamma_j(z_2, a)] \\ \Phi_{ij}(z_2 - z_1, a_2 - a_1) \equiv E [\phi_i(z_1, a_1) \phi_j(z_2, a_2)] \end{cases} \quad (2.48)$$

Ces quantités doivent être exprimées en fonction de $\mathcal{C}(z_2 - z_1, a_2 - a_1)$, $\mathcal{A}^{++}(z_2 - z_1, a)$ et $\mathcal{A}^{+-}(z_2 - z_1, a)$.

En utilisant la définition (2.23)₂ de $\underline{\underline{\phi}}$ et les équations (2.45), nous obtenons :

$$E [\phi_i(z_1, a_1) \phi_j(z_2, a_2)] = 2\mathcal{C}(z_2 - z_1, a_2 - a_1) \delta_{ij}. \quad (2.49)$$

De même, l'utilisation de la définition (2.23)₁ de $\underline{\underline{\gamma}}$ et des équations (2.47), permet de trouver :

$$\begin{cases} \Gamma_{11}(z, a) &= 2\mathcal{A}^{++}(z, a) + \mathcal{A}^{+-}(z, a) + \mathcal{A}^{+-}(-z, a) \\ \Gamma_{22}(z, a) &= 2\mathcal{A}^{++}(z, a) - \mathcal{A}^{+-}(z, a) - \mathcal{A}^{+-}(-z, a) \\ \Gamma_{12}(z, a) &= -\mathcal{A}^{+-}(z, a) + \mathcal{A}^{+-}(-z, a) \end{cases}$$

ce qui permet d'avoir

$$\begin{cases} \mathcal{A}^{++}(z, a) &= \frac{1}{4} [\Gamma_{11}(z, a) + \Gamma_{22}(z, a)] \\ \mathcal{A}^{+-}(z, a) &= \frac{1}{4} [\Gamma_{11}(z, a) - \Gamma_{22}(z, a)] - \frac{1}{2} \Gamma_{12}(z, a). \end{cases} \quad (2.50)$$

2.4.3 Expression générale du spectre des perturbations des fronts

La base des calculs qui suivront, est articulée autour de l'expression de la fonction $\underline{\underline{\hat{\Gamma}}}(k, a)$, représentant la TF de la matrice $\underline{\underline{\Gamma}}(z, a)$ de composantes $\Gamma_{ij}(z, a)$. Pour la calculer, nous utilisons la définition (B.2) de la fonction d'autocorrélation et la solution (2.38), ce qui donne

$$E [\hat{\gamma}_i(k_1, a) \hat{\gamma}_j(k_2, a)] = \int_{a_0}^a \int_{a_0}^a \mathcal{L}_{im}(k_1 a, k_1 a_1) \mathcal{L}_{jn}(k_2 a, k_2 a_2) E [\hat{\phi}_m(k_1, a_1) \hat{\phi}_n(k_2, a_2)] da_1 da_2.$$

A partir de là, on utilise l'équation (2.49) et on applique l'équation (B.3) de l'Annexe B.3 sur ϕ_m et ϕ_n , afin d'avoir

$$\begin{aligned} E [\hat{\gamma}_i(k_1, a) \hat{\gamma}_j(k_2, a)] &= 4\pi \delta(k_1 + k_2) \times \\ &\quad \times \int_{a_0}^a \int_{a_0}^a \mathcal{L}_{im}(k_1 a, k_1 a_1) \mathcal{L}_{jn}(k_2 a, k_2 a_2) \hat{\mathcal{C}}(k_2, a_2 - a_1) \delta_{mn} da_1 da_2 \\ &= 4\pi \delta(k_1 + k_2) \times \\ &\quad \times \int_{a_0}^a \int_{a_0}^a \mathcal{L}_{im}(-k_2 a, -k_2 a_1) \mathcal{L}_{jm}(k_2 a, k_2 a_2) \hat{\mathcal{C}}(k_2, a_2 - a_1) da_1 da_2. \end{aligned}$$

Ensuite en utilisant l'équation (2.41) et en comparant l'expression résultant de $E [\hat{\gamma}_i(k_1, a) \hat{\gamma}_j(k_2, a)]$ à celle fournie par l'équation (B.3) de l'Annexe B.3, nous obtenons

$$\hat{\Gamma}_{ij}(k, a) = 2 \int_{a_0}^a \int_{a_0}^a \overline{\mathcal{L}_{im}(ka, ka_1)} \mathcal{L}_{jm}(ka, ka_2) \hat{\mathcal{C}}(k, a_2 - a_1) da_1 da_2$$

ou de façon équivalente

$$\underline{\underline{\hat{\Gamma}}}(k, a) = 2 \int_{a_0}^a \int_{a_0}^a \overline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}(ka, ka_1)} \cdot [\underline{\underline{\mathcal{L}}}(ka, ka_2)]^T \hat{\mathcal{C}}(k, a_2 - a_1) da_1 da_2. \quad (2.51)$$

L'équation (2.51) a été obtenue sans procéder à aucune approximation. Toutefois, il est judicieux, pour ce qui va suivre, d'utiliser certaines propriétés de la fonction $\mathcal{C}$.

D'abord, on va utiliser le changement de variables défini par :

$$r \equiv \frac{a_1 + a_2}{2} \quad ; \quad s \equiv a_2 - a_1 \quad (2.52)$$

afin d'avoir

$$\hat{\underline{\underline{\Gamma}}}(k, a) = 2 \int_{a_0}^a \left\{ \int_{-s_m(r)}^{s_m(r)} \overline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}(ka, k(r - s/2))} \cdot [\mathbf{L}(ka, k(r + s/2))]^T \hat{\mathcal{C}}(k, s) ds \right\} dr$$

où $-s_m(r)$ et $s_m(r)$ sont les valeurs minimale et maximale de s obtenues à partir des inégalités $a_0 \leq a_1 \equiv r - s/2 \leq a$, $a_0 \leq a_2 \equiv r + s/2 \leq a$. On observe que comme $\mathcal{C}(z_2 - z_1, a_2 - a_1)$ devient très petite quand $[(z_2 - z_1)^2 + (a_2 - a_1)^2]^{1/2} \gtrsim b$, $\hat{\mathcal{C}}(k, s)$ prend des valeurs non négligeables seulement si $|s| \lesssim b$. Comme $b \ll a_0 \leq r$, alors $|s| \ll r$. (Dans les termes de Perrin and Rice (1994), il y a un phénomène de *domination de la diagonale dans l'intégration sur* $(a_1, a_2) \in [a_0, a]^2$). Il s'en suit que $\overline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}(ka, k(r - s/2))}$ et $[\underline{\underline{\mathcal{L}}}(ka, k(r + s/2))]^T$ peuvent être remplacés par $\overline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}(ka, kr)}$ et $[\underline{\underline{\mathcal{L}}}(ka, kr)]^T$. Ensuite, quand cela est fait, on étend l'intégrale de $-s_m(r)$ à $s_m(r)$ sur toute la droite des réels ; car tout élément r de l'intervalle $[a_0, a]$, $s_m(r)$ est comparable à $a - a_0$ dès que $a - a_0 \gtrsim a_0$, l'intervalle $[-s_m(r), s_m(r)]$ devient plus grand que l'intervalle $[-b, b]$ sur lequel $\hat{\mathcal{C}}(k, s)$ prend des valeurs non négligeables. L'expression de $\hat{\underline{\underline{\Gamma}}}(k, a)$ devient alors

$$\hat{\underline{\underline{\Gamma}}}(k, a) \approx 2 \tilde{\mathcal{C}}(k, 0) \int_{a_0}^a \overline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}(ka, kr)} \cdot [\underline{\underline{\mathcal{L}}}(ka, kr)]^T dr \quad (2.53)$$

où $\tilde{\mathcal{C}}$ est la double (z, x) -TF de la fonction $\mathcal{C}$.

2.4.4 Etude asymptotique du spectre de la fonction d'autocorrélation de la perturbation

Nous allons donner au cours de cette section, l'expression asymptotique du spectre $\hat{\underline{\underline{\Gamma}}}(k, a)$ quand $a \rightarrow +\infty$. Deux cas sont envisagés.

– **Cas General** : $k \neq 0$.

Ce cas a été fait dans l'Annexe A.2 en utilisant l'expression générale (2.53) de $\hat{\underline{\underline{\Gamma}}}(k, a)$ et la forme asymptotique de (2.43) de $\mathbf{L}(p, p_0)$ pour p et $p_0 \rightarrow \pm\infty$. ce qui donne

$$\hat{\underline{\underline{\Gamma}}}(k, a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(k, 0)}{N\chi|k|} \mathbf{1} \quad (k \neq 0, a \rightarrow +\infty) \quad (2.54)$$

où χ est la constante définie par (2.44). Par conséquent si $k \neq 0$ alors $\hat{\underline{\underline{\Gamma}}}(k, a)$ tend vers une limite finie pour $a \rightarrow +\infty$; cette limite depend de k et elle diverge comme $1/|k|$ pour $k \rightarrow 0$.

– *Cas special* : $k = 0$.

Puisque $\underline{\underline{\mathcal{L}}}(ka, kr) \equiv \underline{\underline{N}}(a/r)$ dans la limite $k \rightarrow 0$, comme évoqué dans la section 2.3.4, l'équation (2.53) devient alors

$$\widehat{\underline{\underline{\Gamma}}}(0, a) = 2\tilde{\mathcal{C}}(0, 0) \int_{a_0}^a \left[\mathbf{N}\left(\frac{a}{r}\right) \right]^2 dr \sim 2\tilde{\mathcal{C}}(0, 0) a_0 \begin{bmatrix} \frac{(a/a_0)^N}{N-1} & 0 \\ 0 & a/a_0 \end{bmatrix} \quad (a \rightarrow +\infty) \quad (2.55)$$

où l'équation (2.35) a été utilisée. Ainsi les éléments diagonaux de $\widehat{\underline{\underline{\Gamma}}}(0, a)$ diverge pour $a \rightarrow +\infty$, mais la divergence de $\widehat{\Gamma}_{11}(0, a)$ est plus importante que celle de $\widehat{\Gamma}_{22}(0, a)$.

En utilisant les équations (2.50), on conclut à partir des équations (2.54) et (2.55) que pour $a \rightarrow +\infty$

$$\begin{cases} |\widehat{\mathcal{A}^{+-}}(k, a)| \ll \widehat{\mathcal{A}^{++}}(k, a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(k, 0)}{2N\chi|k|} & (k \neq 0) \\ \widehat{\mathcal{A}^{+-}}(0, a) \sim \widehat{\mathcal{A}^{++}}(0, a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{2(N-1)} a_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^N & (k = 0) \end{cases} \quad (a \rightarrow +\infty). \quad (2.56)$$

Les équations (2.56) nous permettent de faire quelques commentaires :

1. Considérons d'abord la corrélation le long d'un même front, c'est à dire $\widehat{\mathcal{A}^{++}} \equiv \widehat{\mathcal{A}^{--}}$, l'équation (2.56)₁ montre que la TF $\widehat{\mathcal{A}^{++}}(k, a)$ diverge rapidement (comme a^N ou t^N) pour $k = 0$, cependant pour $k \neq 0$ elle tend vers une constante d'autant plus grande que k est petit, ceci s'explique par le fait que les perturbations des avancées du front ayant des nombres d'onde petits k (c'est à dire de grandes longueurs d'onde $\lambda \equiv 2\pi|k|$) sont instables.
2. Considérons ensuite la TF $\widehat{\mathcal{A}^{+-}}(k, a)$ de la corrélation de δa^+ et δa^- . L'équation (2.56)₁ montre que pour $k \neq 0$, cette TF est très petite devant $\widehat{\mathcal{A}^{++}}$. Cela s'explique par le fait qu'il n'y existe pas de corrélation entre les valeurs des constantes de Paris des deux fronts.
3. Néanmoins, l'équation (2.56)₂ montre exceptionnellement pour $k = 0$, que $\widehat{\mathcal{A}^{+-}}(0, a)$ devient asymptotiquement identique à $\widehat{\mathcal{A}^{++}}(0, a)$. Cette propriété s'explique en considérant l'EDO (2.22) pour $k = 0$. En effet, avec la valeur de $\underline{\underline{M}}(0)$ donnée par l'équation (2.33), cette EDO montre que $|\widehat{\gamma}_2(0, a)| \equiv |\widehat{\delta a^+}(0, a) - \widehat{\delta a^-}(0, a)|$ devient finalement très petit devant $|\widehat{\gamma}_1(0, a)| \equiv |\widehat{\delta a^+}(0, a) + \widehat{\delta a^-}(0, a)|$. Ce qui signifie que $\widehat{\delta a^+}(0, a)$ et $\widehat{\delta a^-}(0, a)$ deviennent finalement égales. C'est pour cela que $\widehat{\mathcal{A}^{+-}}(0, a) \sim \widehat{\mathcal{A}^{++}}(0, a)$ pour $a \rightarrow +\infty$.
4. La constante χ définie par l'équation (2.44) est une fonction croissante par rapport à K_3^+/K_2 . Par conséquent, la limite de $\widehat{\mathcal{A}^{++}}(k, a)$ pour $k \neq 0$, $a \rightarrow +\infty$ décroît rapport à ce rapport.

Sauf la dernière remarque, toutes les autres concernant les influences des modes 2 et 3, sont essentiellement similaires à celles faites par Favier et al. (2006b) pour le cas du mode 1.

2.4.5 Etude asymptotique de la fonction d'autocorrélation de la perturbation

Pour obtenir l'expression asymptotique de la fonction d'autocorrélation $\underline{\underline{\Gamma}}(z, a)$ pour $a \rightarrow +\infty$, on doit simplement prendre la TF du spectre $\underline{\underline{\hat{\Gamma}}}(k, a)$. Cependant nous ne pouvons pas remplacer $\underline{\underline{\hat{\Gamma}}}(k, a)$ par son expression asymptotique pour $a \rightarrow +\infty$, donnée par les équations (2.54) et (2.55). En effet la limite de la fonction $\underline{\underline{\hat{\Gamma}}}(k, a)$ pour $a \rightarrow +\infty$ admet une singularité en $k \rightarrow 0$, il est clair que la convergence de $\underline{\underline{\hat{\Gamma}}}(k, a)$ vers cette limite est non uniforme par rapport à k . Il est donc nécessaire d'utiliser la forme originale (2.53) de $\underline{\underline{\hat{\Gamma}}}(k, a)$ et lui appliquer ensuite la démarche faite à la section 2.4.4. Ce qui est fait dans l'Annexe A.3, en utilisant la forme asymptotique (2.42) de $\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0)$ pour $p \equiv Cst.$, $p_0 \rightarrow 0$ et les propriétés de parité des composantes de la matrice $\underline{\underline{\psi}}(p)$. On obtient donc

$$\underline{\underline{\Gamma}}(z, a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi(N-1)} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} |\psi_{11}(p)|^2 & 0 \\ 0 & |\psi_{21}(p)|^2 \end{bmatrix} dp \quad (a \rightarrow +\infty). \quad (2.57)$$

Il s'en suit à partir des équations (2.50) que

$$\begin{cases} \mathcal{A}^{++}(z, a) & \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{4\pi(N-1)} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (|\psi_{11}(p)|^2 + |\psi_{21}(p)|^2) dp \\ \mathcal{A}^{+-}(z, a) & \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{4\pi(N-1)} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (|\psi_{11}(p)|^2 - |\psi_{21}(p)|^2) dp \end{cases} \quad (a \rightarrow +\infty). \quad (2.58)$$

Ces résultats nous permettent de faire les commentaires suivants :

1. Les fonctions d'autocorrélation $\mathcal{A}^{++}(z, a)$ et $\mathcal{A}^{+-}(z, a)$ des perturbations croissent proportionnellement à a^{N-1} ou t^{N-1} . Cela est dû à la croissance rapide des composantes de Fourier de la perturbation.
2. Les fonctions d'autocorrélation $\mathcal{A}^{++}(z, a)$ et $\mathcal{A}^{+-}(z, a)$ deviennent asymptotiquement indépendantes de la distance z des deux points du front sur lesquels les fluctuations sont évaluées. En d'autres termes, cela signifie que pour $a \rightarrow +\infty$, il y a une corrélation parfaite entre les valeurs de la perturbation en ces deux points, qu'ils soient proches ou non.
3. Les fonctions d'autocorrélation vérifient la relation $\mathcal{A}^{+-}(z, a) \leq \mathcal{A}^{++}(z, a)$, l'inégalité devient stricte si la fonction ψ_{21} est non nulle. Ceci signifie que les valeurs de $\delta a^\pm$ sur des fronts différents sont moins corrélées que celles situées sur un même front.
4. Cependant, pour le mode pur 2 ou 3 ($K_2 K_3^+ = 0$), on a $\mathcal{A}^{++}(z, a) \sim \mathcal{A}^{+-}(z, a)$, car la fonction $\psi_{21} \equiv 0$. Dans ce cas, les fluctuations des deux fronts de la fissure, tendent à devenir symétrique.

Les deux premiers commentaires sont identiques à ceux faits par Favier et al. (2006b) pour le cas du mode 1. Mais le fait que l'on a $\mathcal{A}^{+-}(z, a) < \mathcal{A}^{++}(z, a)$ est une propriété spécifique au mode mixte 2 et 3.

2.4.6 Etude asymptotique de la fonction d'autocorrélation de la pente

Les fonctions d'autocorrélation $\mathcal{A}^{++}(z, t)$, $\mathcal{A}^{+-}(z, t)$ de la perturbation, incluent des composantes $\widehat{\delta a}(k = 0, a)$. Ces composantes ne doivent pas être prises en considération, quand on essaie d'étudier la déviation du front par rapport à un front droit. Une façon de répondre à ce problème est de déterminer les fonctions d'autocorrélation des "pentes" $\partial \delta a^\pm / \partial z$.

Ces fonctions d'autocorrélation, comme celles des fluctuations $\delta a^\pm$, peuvent être déduites à partir du spectre $\widehat{\Gamma}(k, a)$ et de sa TF inverse.

La démarche est analogue à celle de la section 2.4.5 et ne sera plus détaillée. Nous obtenons pour $a \rightarrow +\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} E \left[\frac{\partial \delta a^+}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a^+}{\partial z}(z_2, a) \right] \sim \frac{\widetilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{2\pi(N-1)a_0^2} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{N-3} \times \\ \quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} (|\psi_{11}(p)|^2 + |\psi_{21}(p)|^2) p^2 dp \\ E \left[\frac{\partial \delta a^+}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a^-}{\partial z}(z_2, a) \right] \sim \frac{\widetilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{2\pi(N-1)a_0^2} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{N-3} \times \\ \quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} (|\psi_{11}(p)|^2 - |\psi_{21}(p)|^2) p^2 dp \end{array} \right. \quad (2.59)$$

$(a \rightarrow +\infty).$

Les commentaires faits sur les expressions asymptotiques (2.58) de $\mathcal{A}^{++}(z, t)$ et $\mathcal{A}^{+-}(z, t)$ $A(z, t)$ peuvent être répétés ici : la seule différence significative est que $E \left[\frac{\partial \delta a^+}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a^+}{\partial z}(z_2, a) \right]$ et $E \left[\frac{\partial \delta a^+}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a^-}{\partial z}(z_2, a) \right]$ diverge moins rapidement comme a^{N-3} au lieu de a^{N-1} .

2.4.7 Etude asymptotique de la variance de la fluctuation

D'autre mesure possible de l'amplitude de la déviation est la moyenne mathématique de la "fluctuation au carré" $(\delta a^+(z_2, a) - \delta a^+(z_1, a))^2$ et $(\delta a^+(z_2, a) - \delta a^-(z_1, a))^2$.

Par l'équation (2.47), on a :

$$\begin{aligned} E \left[(\delta a^+(z_2, a) - \delta a^+(z_1, a))^2 \right] &= 2E \left[(\delta a^+(z, a))^2 \right] - 2E [\delta a^+(z_1, a) \delta a^+(z_2, a)] \\ &= 2\mathcal{A}^{++}(0, a) - 2\mathcal{A}^{++}(z_2 - z_1, a) \\ &= \frac{1}{2} [\Gamma_{11}(0, a) + \Gamma_{22}(0, a)] - \frac{1}{2} [\Gamma_{11}(z, a) + \Gamma_{22}(z, a)] \\ &= \frac{1}{2} [\Gamma_{11}(0, a) - \Gamma_{11}(z, a)] - \frac{1}{2} [\Gamma_{22}(0, a) - \Gamma_{22}(z, a)] \end{aligned} \quad (2.60)$$

Pour continuer, nous allons essayer de trouver d'abord les expressions asymptotiques des deux quantités entre crochets.

sachant que

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}(0, a) + \Gamma_{11}(z, a) &\sim \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{C}}(p/a, 0) \left(1 - e^{-ip(z_2 - z_1)/a}\right) \times \\ &\times \left\{ \int_{a_0/a}^1 (\underline{\mathcal{L}}(-p, -p\theta) \underline{\mathcal{L}}^T(p, p\theta))_{11} d\theta \right\} dp \end{aligned} \quad (2.61)$$

En utilisant ensuite l'approximation suivante

$$1 - e^{-ip \frac{z_2 - z_1}{a}} \sim \frac{p^2}{2} \left(\frac{z_2 - z_1}{a} \right)^2 \text{ pour } a \rightarrow +\infty;$$

nous obtenons

$$\Gamma_{11}(0, a) + \Gamma_{11}(z, a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{2\pi} \left(\frac{z_2 - z_1}{a} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{a_0/a}^1 p^2 (\underline{\mathcal{L}}(-p, -p\theta) \underline{\mathcal{L}}^T(p, p\theta))_{11} d\theta dp \quad (2.62)$$

En s'inspirant du calcul de $\mathbf{J}_1(a)$ de l'Annexe A.3, on obtient

$$\Gamma_{11}(0, a) + \Gamma_{11}(z, a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{2\pi(N-1)} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{N-3} \left(\frac{z_2 - z_1}{a} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 |\psi_{11}|^2 dp \text{ pour } a \rightarrow +\infty. \quad (2.63)$$

de la même façon nous obtenons :

$$\Gamma_{22}(0, a) + \Gamma_{22}(z, a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{2\pi(N-1)} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{N-3} \left(\frac{z_2 - z_1}{a} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 |\psi_{12}|^2 dp \text{ pour } a \rightarrow +\infty. \quad (2.64)$$

Ce qui donne finalement pour $a \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} E \left[(\delta a^+(z_2, a) - \delta a^+(z_1, a))^2 \right] &\sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{4\pi(N-1)} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{N-3} \left(\frac{z_2 - z_1}{a} \right)^2 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 (|\psi_{11}|^2 + |\psi_{12}|^2) dp \end{aligned} \quad (2.65)$$

De la même manière, on en déduit aussi que pour $a \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} E \left[(\delta a^-(z_2, a) - \delta a^-(z_1, a))^2 \right] &\sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{4\pi(N-1)} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{N-3} \left(\frac{z_2 - z_1}{a} \right)^2 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 (|\psi_{11}|^2 + |\psi_{12}|^2) dp \end{aligned} \quad (2.66)$$

On s'aperçoit que ces expressions divergent pour $a \rightarrow +\infty$, mais moins vite que pour la fonction d'autocorrélation.

2.4.8 Etude asymptotique de la distance d'autocorrélation

La "distance de corrélation" $L(a)$ de la perturbation, est la distance au-delà de laquelle il n'y a plus de corrélation entre les différents points du front de la fissure.

Par définition, on pose :

$$\begin{aligned} L^{++}(a) &\equiv \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}^{++}(k, a) dk}{\int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \hat{A}^{++}(k, a) dk} \right)^{1/2} \\ L^{+-}(a) &\equiv \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}^{+-}(k, a) dk}{\int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \hat{A}^{+-}(k, a) dk} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.67)$$

En prenant l'équation (2.6), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}^{++}(k, a) dk}{\int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \hat{A}^{++}(k, a) dk} &= \frac{\mathcal{A}^{++}(0, a)}{E \left[\left(\frac{\partial \delta a^+}{\partial z}(z, a) \right)^2 \right]} \\ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}^{+-}(k, a) dk}{\int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \hat{A}^{+-}(k, a) dk} &= \frac{\mathcal{A}^{+-}(0, a)}{E \left[\frac{\partial \delta a^+}{\partial z}(z, a) \frac{\partial \delta a^-}{\partial z}(z, a) \right]} \end{aligned} \quad (2.68)$$

D'après les équations (2.58), (2.59) et (2.67) on obtient finalement :

$$\begin{aligned} L^{++}(a) &\sim a \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (|\psi_{11}|^2 + |\psi_{12}|^2) dp}{\int_{-\infty}^{+\infty} p^2 (|\psi_{11}|^2 + |\psi_{12}|^2) dp} \right)^{1/2} \\ L^{+-}(a) &\sim a \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (|\psi_{11}|^2 - |\psi_{12}|^2) dp}{\int_{-\infty}^{+\infty} p^2 (|\psi_{11}|^2 - |\psi_{12}|^2) dp} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.69)$$

On voit que la distance de corrélation croît proportionnellement à a . Ce qui peut s'expliquer par le phénomène de sélection de la perturbation pour de grandes longueurs d'onde.

2.5 Conclusion

Ce chapitre est consacré à l'analyse du désordre du front d'une fissure en forme de fente infinie se propageant dans un milieu élastique homogène isotrope, chargée en modes 2 et 3. Le couplage des modes 2 et 3 a engendré certaines difficultés mathématiques : les équations d'évolutions des fluctuations des fronts sont couplées et il est difficile d'obtenir une forme explicite de la solution. Cependant, l'utilisation de la notion de la résolvante du système d'EDO linéaires, nous a permis d'établir certaines propriétés statistiques de la solution. C'est par le biais des fonctions

d'autocorrélation à deux points qu'a été appréciée la rugosité du front, d'abord sur le champ de perturbation δa lui-même, ensuite sur ses dérivées successives, sur la fluctuation quadratique et enfin sur la longueur de corrélation. Ces résultats analytiques se limitent au comportement asymptotique des différents champs évoqués, dans la limite des temps longs, c'est à dire des ouvertures larges de la fissure.

La plupart des résultats trouvés, sont similaires à ceux déjà établis par Favier et al. (2006b) pour le cas du mode 1. Tels sont en particulier, le cas des points importants suivants :

- la sélection des grandes longueurs d'ondes ;
- la croissance illimitée de l'amplitude des fluctuations des fronts de la fissure ;
- les corrélations entre les valeurs de ces fluctuations en deux points donnés du front deviennent finalement indépendantes de la distance qui les sépare.

La différence entre le cas du mode mixte 2 et 3 et le mode 1, est que les corrélations entre les fluctuations des fronts sont plus faibles pour les points situés sur des fronts différents que pour des points situés sur un même front, alors qu'elles sont égales dans le cas du mode 1 à cause de la symétrie des fluctuations de part et d'autre des fronts.

Chapitre 3

Désordre du front d'une fissure semi-infinie d'interface chargée en mode 1,2 et 3

Introduction

Le chapitre précédent sur la fissure en forme de fente infinie chargée en mode mixte, a permis de faire des analyses statistiques sur le désordre du front au cours de sa propagation coplanaire. La présente partie, copie d'un article, reprend les mêmes démarches que lors du chapitre 2 mais pour une fissure d'interface semi-infinie.

L'objectif de ce chapitre est l'étude statistique, dans le cadre de la mécanique de la rupture fragile, de la déformation coplanaire du front d'une fissure plane semi-infinie se propageant entre deux matériaux élastiques isotropes de propriétés de rupture aléatoire. Les calculs sont basés sur les travaux de Lazarus et Leblond (1998) qui ont étendu la théorie tridimensionnelle des fonctions de poids de Bueckner (1987) et Rice (1985) au cas d'une fissure d'interface et donné, au premier ordre, la variation du taux de restitution d'énergie résultant d'une petite perturbation du front. Pour cela, l'application de la formule (1.18) du chapitre 1 permet de déterminer l'évolution de la fluctuation. Dans cette formule, figurent des constantes γ dépendant des propriétés élastiques des matériaux. Piccolroaz et al. (2007) ont établi les expressions analytiques de ces constantes, ce qui a permis de quantifier l'évolution du désordre en calculant différentes grandeurs mathématiques liées à la fonction d'autocorrélation de la déviation du front par rapport à un front droit de référence.

Dans ce travail, l'orientation est axée une fois de plus sur la fluctuation du front de fissure, avec l'influence des facteurs suivants :

- La différence de nature ϵ entre les deux matériaux, pour une fissure d'interface.
- Le type de chargement : chargement ponctuel ou réparti sur les lèvres
- Le type de lois de propagation : Paris ou Griffith

The deformation of the front of a 3D interface crack propagating quasistatically in a medium with random fracture properties
Journal of the mechanics and Physics of Solids, **56(4)** :1269-1295, 2008.

(Copie d'un article de N. Pindra, V. Lazarus et J.-B. Leblond paru dans *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* - 2008)

abstract

One studies the evolution in time of the deformation of the front of a semi-infinite 3D interface crack propagating quasistatically in an infinite heterogeneous elastic body. The fracture properties are assumed to be lower on the interface than in the materials so that crack propagation is channelled along the interface, and to vary randomly within the crack plane. The work is based on earlier formulae which provide the first-order change of the stress intensity factors along the front of a semi-infinite interface crack arising from some small but otherwise arbitrary in-plane perturbation of this front. The main object of study is the long-time behavior of various statistical measures of the deformation of the crack front. Special attention is paid to the influences of the mismatch of elastic properties, the type of propagation law (fatigue or brittle fracture) and the stable or unstable character of 2D crack propagation (depending on the loading) upon the development of this deformation.

Keywords : deformed front ; 3D interface crack ; heterogeneous fracture properties ; quasistatic propagation ; fatigue ; brittle fracture

3.1 Introduction

Three-dimensional interfacial fracture mechanics is not an easy subject, and the literature devoted to this topic is still very scarce. The first contributions in this field were due to Willis (1971, 1972) and contained solutions for internal and external circular interface cracks subjected

to polynomial (not necessarily axisymmetric) loads. Then almost 30 years elapsed before Lazarus and Leblond (1998a,b) considered the problem of small coplanar perturbation of the front of a semi-infinite interface crack.

Lazarus and Leblond (1998a) first analyzed the variation of the stress intensity factors (SIFs) along the front of such a crack. The method of solution was, in Bueckner (1987) 's terminology, "special" rather than "general" since it did not yield the full solution of the elasticity problem implied but concentrated on the sole distribution of the SIFs along the crack front, at the expense of completeness but with the advantage of (relative) simplicity and elegance. This method basically stood as an extension of that devised in the work of Rice (1985), and used there and in the work of Gao and Rice (1986) to analyze the same problem but for an ordinary crack in an elastically homogeneous medium. The basis of Rice (1985)'s method was a reformulation of Bueckner's weight function theory; Bueckner's 3D weight functions for a semi-infinite *ordinary* crack in an infinite body have been known for a long time, and this allowed Rice (1985) and Gao and Rice (1986) to derive explicit formulae for the perturbation of the SIFs for such a crack. In contrast, the 3D weight functions for a semi-infinite *interface* crack in an infinite body were unknown in 1998, and this prevented Lazarus and Leblond (1998a) from deriving similar fully explicit formulae for this type of crack. They nevertheless succeeded in establishing formulae containing only five unknown constants γ_+ , γ_- , γ_3 , γ_z , γ depending on the elastic properties of the materials, thus reducing the problem to the evaluation of these constants.

Lazarus and Leblond (1998b) then tried to calculate the " γ " constants, with mitigated success. The method they used was similar to that already employed by Leblond et al. (1996) to evaluate the 3D weight function of a tensile tunnel-crack embedded in an infinite body. The basic idea was to apply the formulae established previously to special motions of the crack front preserving its shape while modifying its position and orientation, namely translatory motions and rotations. The output of this procedure consisted of differential equations on the Fourier transforms of the weight functions in the direction of the crack front which, in theory, allowed to evaluate these functions, together with the " γ " constants. Unfortunately, these differential equations were too complex to be solvable analytically in general. As a consequence, analytical expressions of the weight functions and the " γ " constants could be found only for small values of the "bielastic constant" ϵ , to first order in this constant. For arbitrary values of ϵ , the weight functions and the " γ " constants could only be calculated numerically.

A few years later, the problem of the semi-infinite interface crack with a slightly wavy front was re-investigated completely independently by Bercial-Velez et al. (2005), using some techniques devised by Willis (1971, 1972), Morrissey and Rice (2000) and Antipov (1999). Their

elaborate method of solution was “general” in Bueckner (1987) ’s terminology since it yielded, in principle, the full solution of the elasticity problem implied, and in particular did not involve any unknown quantities analogous to Lazarus and Leblond’s “ γ ” constants. Unfortunately the format in which the solution was expressed was not very explicit and did not allow for a comparison with Lazarus and Leblond (1998a,b)’s results.

Very recently, the problem was again revisited by Piccolroaz et al. (2007) with the idea of filling this gap. The new work was inspired by that of Bercial-Velez et al. (2005), but rather than concentrating again on the perturbed crack problem, Piccolroaz *et al.* directly calculated the 3D weight functions of a semi-infinite interface crack. The formulae they obtained were sufficiently explicit to yield the exact analytic expressions of all “ γ ” constants, for arbitrary values of the bielastic constant ϵ . Detailed comparison with the numerical values of these constants obtained by Lazarus and Leblond (1998b) revealed an excellent agreement, thus validating the results obtained in both works. different, this agreement strongly suggests that both

It is therefore now possible to supplement Lazarus and Leblond (1998a)’s formulae for the SIFs of a slightly perturbed semi-infinite interface crack with Piccolroaz et al. (2007)’s expressions of the “ γ ” constants appearing in these formulae. One thus gets fully explicit, analytic formulae for these SIFs, which be called the *LLPMM formulae*¹ in the sequel. cracks, they represent the first known analytic solution

The aim of the present paper is to apply the LLPMM formulae to the study of the evolution in time of the deformation of the front of a semi-infinite interface crack propagating quasistatically in a medium whose fracture properties are random functions of position. These properties will be assumed to be lower on the interface than in the materials, thereby channelling crack propagation along the interface. Two types of propagation laws will be envisaged : fatigue governed by a Paris-type law and brittle fracture governed by a Griffith-type law. Several types of loadings will also be considered.

This work comes as a natural complement to a number of papers published in the past 15 years, which were devoted to similar studies of the deformation of the front of a crack propagating in a material with spatially variable fracture properties, but with different geometrical and mechanical hypotheses. All of these papers bore potential applications in the context of propagation of geological faults and cracks in composites.

Perrin and Rice (1994) and Woolfries and Willis (1999) first considered the case of a semi-infinite mode I crack propagating dynamically in a homogeneous elastic solid obeying a model scalar wave equation. Propagation was assumed to be governed by some Griffith-type law with a

¹LLPMM : Lazarus-Leblond-Piccolroaz-Mishuris-Movchan.

spatially variable fracture toughness. Using a previous work of Rice et al. (1994), Perrin and Rice (1994) studied several statistical measures of the deformation of the crack front. These measures were found to grow without bound at a moderate rate proportional to the logarithm of time. The emphasis of Woolfries and Willis (1999)'s subsequent work was on the effect of the “next” term (proportional to the square root of the distance to the crack front) in the expansion of the tensile stress ahead of the crack tip, which had been disregarded in the previous work. The conclusion was that this term has a major influence upon the rate of development of the “wavyness” of the crack front.

Perrin and Rice (1994)'s work was also extended to true elastic solids obeying the vectorial equations of elastodynamics by Morrissey and Rice (1998, 2000), using Willis and Movchan (1995)'s recent discovery of the exact expression of the 3D mode I dynamic weight function for a semi-infinite crack. They found that the deformation of the crack front increased proportionally to time. This implied a larger rate of growth of this deformation for the true equations of elastodynamics than for the model scalar equation, which was interpreted as being due to the existence of persistent “crack front waves”.

The same problem but for quasistatic crack propagation was studied by Schmittbuhl et al. (1995) and Katzav et al. (2007), using some results of Rice (1985). The focus of these two works was on self-affine properties of the crack front.

One shortcoming of the semi-infinite crack geometry considered in all of these works was the lack of any characteristic lengthscale. This was the motivation for Favier et al. (2006b)'s study of the same problem but for a tunnel-crack of finite width. This work was based on Leblond et al. (1996)'s earlier study of coplanar perturbation of such a crack. For technical reasons, propagation had to be assumed to be quasistatic and the problem could only be treated in the case of fatigue, using a Paris-type propagation law. The “wavyness” of the crack front was found to increase much more quickly than in the case of a semi-infinite crack. This phenomenon was interpreted as being due to an effect of instability of sinusoidal perturbations of the front of large wavelength typical of such finite crack geometries.

In the present work, the focus will again be on the development of the “wavyness” of the crack front, with special emphasis on the influences of the following factors :

- The mismatch of elastic properties between the two materials, for an interface crack. This factor was not envisaged at all in previous studies which considered only ordinary cracks in elastically homogeneous materials.

- The type of loading. We shall consider a typical class of loadings depending on a parameter whose sign will govern the stable or unstable character of 2D crack propagation² under constant loading. There will be a strong connection here with the work of Woolfries and Willis (1999) in spite of the differences in the hypotheses made.
- The type of propagation law (fatigue versus brittle fracture). Previous works did consider different propagation laws, but there were other differences in the hypotheses made so that it was difficult to separate the influences of the various factors.

The paper is organized as follows. Section 3.2 is devoted to preliminaries and notations for 3D interface cracks. Section 3.3 provides the LLPMM formulae for the variation of the SIFs arising from some slight coplanar perturbation of a semi-infinite interface crack. These formulae are used in Section 3.4 to determine the distribution of the energy release rate along the perturbed front for the class of loadings considered. From there, Section 3.5 studies the statistical evolution in time of the deformation of the front of a semi-infinite crack propagating in fatigue along some heterogeneous interface. Section 3.6 re-considers the same problem but in brittle fracture. Finally Section 3.7 provides a synthesis of the results obtained.

3.2 Preliminaries and notations

The notations adopted are similar to those in the work of Hutchinson et al. (1987). We consider an infinite heterogeneous body made of two isotropic elastic materials bonded together on their planar interface. Materials “+” and “−”, with shear moduli μ_+ and μ_- and Poisson ratios ν_+ and ν_- , occupy the half-spaces $y > 0$ and $y < 0$ respectively. The “bielastic constant” ϵ and the “equivalent Poisson ratio” ν are defined by

$$\begin{cases} \epsilon & \equiv \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(3 - 4\nu_+)/\mu_+ + 1/\mu_-}{(3 - 4\nu_-)/\mu_- + 1/\mu_+} \\ 1 - \nu & \equiv \frac{(1 - \nu_+)/\mu_+ + (1 - \nu_-)/\mu_-}{(1/\mu_+ + 1/\mu_-) \cosh^2(\pi\epsilon)}. \end{cases} \quad (3.1)$$

The definition of the bielastic constant is classical. That of the equivalent Poisson ratio, which was introduced by Lazarus and Leblond (1998a), is less standard but will reveal very convenient for the problem considered here. The notation ν is logical in the sense that for a homogeneous body ($\mu_+ = \mu_-$, $\nu_+ = \nu_-$, $\epsilon = 0$), this quantity is identical to the common Poisson ratios of the materials. Also, it is shown in Appendix B.1 that it satisfies the inequalities (which will be needed in the sequel)

$$0 < \nu < \frac{1}{2}, \quad (3.2)$$

²That is, propagation within a medium with uniform fracture properties. In this case the crack front remains straight at all instants so that the problem is 2D in the perpendicular plane.

analogous to those satisfied by the individual Poisson ratios.

Now consider, within the interface, a crack with arbitrary smooth contour and some arbitrary point M on this contour (Figure 3.1). Define a frame $Mxyz$ with origin at this point and axes Mx , My , Mz parallel to the direction of crack propagation, perpendicular to the crack plane and coincident with the local tangent to the crack front, respectively.

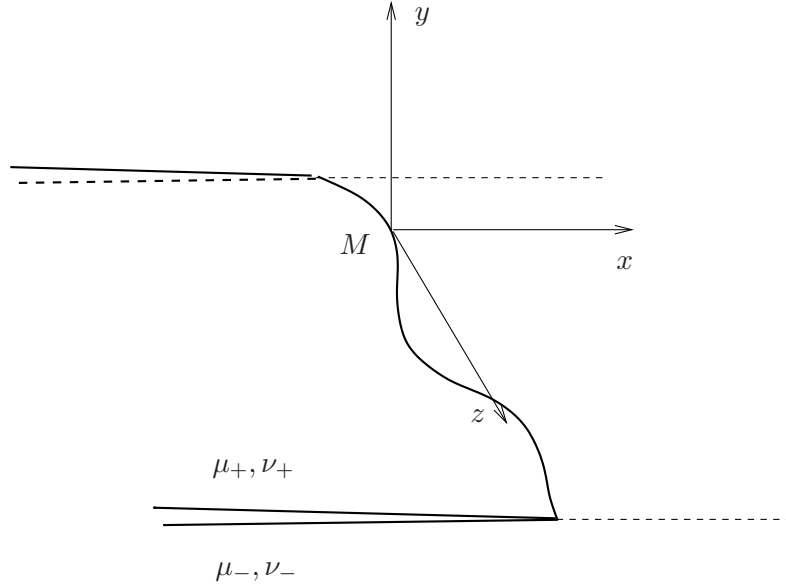


FIG. 3.1 – Planar interface crack with arbitrary contour in an infinite body

The SIFs at the point M are defined *via* the local expressions of the displacement discontinuity across the crack faces and the stresses on the interface ahead of the crack front. The displacement discontinuity $[[\mathbf{u}]] \equiv \mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-$ across the crack faces, in the plane Mxy locally perpendicular to the crack front and near the point M , is given by the following asymptotic formulae :

$$\begin{cases} [[u_y + iu_x]](x < 0, z = 0) & \sim 2(1 - \nu) \frac{\cosh(\pi\epsilon)}{1 + 2i\epsilon} \left(\frac{1}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-} \right) K(M) \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} |x|^{i\epsilon} \\ [[u_z]](x < 0, z = 0) & \sim 2 \left(\frac{1}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-} \right) K_3(M) \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} \end{cases} \quad (3.3)$$

In these expressions, SIFs $K_1(M)$, $K_2(M)$ as

$$K(M) \equiv K_1(M) + iK_2(M) \quad (3.4)$$

is the local complex SIF ($K_1(M)$ and $K_2(M)$ are the local mode I and mode II SIFs), and $K_3(M)$ is the local mode III SIF. The asymptotic expressions of the stress components σ_{yx} , σ_{yy} and σ_{yz} on the interface ahead of the crack front, in the plane Mxy and near the point M , are

given by

$$\begin{cases} (\sigma_{yy} + i\sigma_{yx})(x > 0, y = 0, z = 0) & \sim \frac{K(M) x^{i\epsilon}}{\sqrt{2\pi x}} \\ \sigma_{yz}(x > 0, y = 0, z = 0) & \sim \frac{K_3(M)}{\sqrt{2\pi x}}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Finally the energy release rate $G(M)$ at the point M is given by Irwin's formula :

$$G(M) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-} \right) \left\{ (1 - \nu) |K(M)|^2 + [K_3(M)]^2 \right\}. \quad (3.6)$$

3.3 The LLPMM formulae

We now envisage, within some infinite heterogeneous elastic body, a semi-infinite interface crack lying in the Ozx plane, with a straight front parallel to the Oz axis (Figure 3.2). Let a denote the distance from the reference Oz axis to the crack front. Let the crack be loaded through some arbitrary system of forces exerted anywhere in the body and/or on the crack faces. This loading generates a distribution of SIFs $K(M) \equiv K(z) \equiv K_1(z) + iK_2(z)$, $K_3(M) \equiv K_3(z)$ along the crack front.

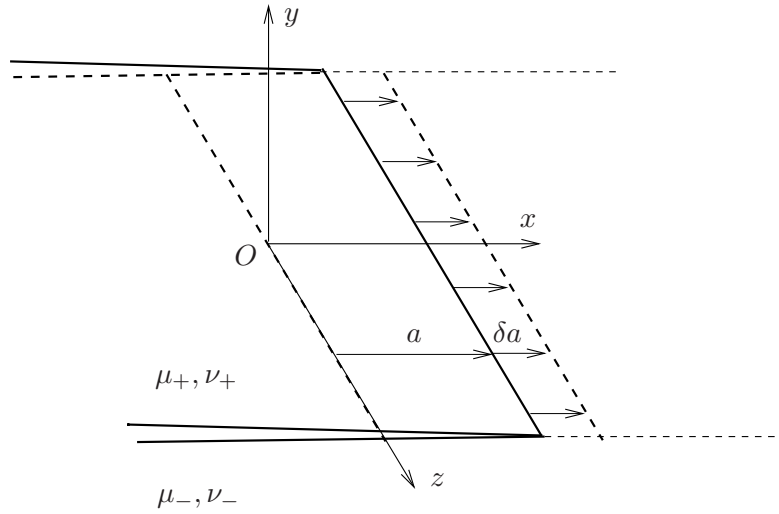


FIG. 3.2 – Semi-infinite interface crack with straight front

Consider first *translatory* motions of the crack front in the direction x under constant loading (Figure 3.2). For such motions, let $\frac{dK}{da}(z) \equiv \frac{dK_2}{da}(z) + i\frac{dK_1}{da}(z)$ and $\frac{dK_3}{da}(z)$ denote the derivatives of the SIFs at the point z with respect to the position of the front. x , the SIFs at the point z vary by the amounts

Consider now small, *non-uniform* motions of the crack front in the direction x under constant loading; let $\delta a(z)$ denote the local distance from the original front to the new one at the point z

(Figure 3.3). Then, to first order in the perturbation, the variations of the SIFs $\delta K(z)$, $\delta K_3(z)$ are given by the following formulae Lazarus and Leblond (1998a) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta K(z) = \frac{dK}{da}(z) \delta a(z) \\ \quad + \frac{1+2i\epsilon}{8 \cosh(\pi\epsilon)} \left\{ PV \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\gamma_+}{|z'-z|^{2i\epsilon}} \overline{K(z')} + \gamma_- K(z') \right] \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{(z'-z)^2} dz' \right. \\ \quad \left. + \frac{2\gamma_3}{1-\nu} FP \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(z'-z) K_3(z') \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{|z'-z|^{2+i\epsilon}} dz' \right\} \\ \delta K_3(z) = \frac{dK_3}{da}(z) \delta a(z) + \frac{\gamma}{4} PV \int_{-\infty}^{+\infty} K_3(z') \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{(z'-z)^2} dz' \\ \quad + \frac{1-\nu}{4} \operatorname{Re} \left[\gamma_z FP \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(z'-z) \overline{K(z')} \frac{\delta a(z') - \delta a(z)}{|z'-z|^{2+i\epsilon}} dz' \right]. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

In these expressions the symbols $PV \int$ and $FP \int$ denote the Cauchy principal value and Hadamard finite part of the integral considered, respectively, and γ_+ , γ_- , γ_3 , γ_z , γ are quantities which depend only on the bielastic constant ϵ and the equivalent Poisson ratio ν . Note that for a translatory motion of the front ($\delta a(z) \equiv Cst. \equiv \delta a$), $\delta K(z)$ and $\delta K_3(z)$ reduce to $\frac{dK}{da}(z) \delta a$ and $\frac{dK_3}{da}(z) \delta a$, as desired.

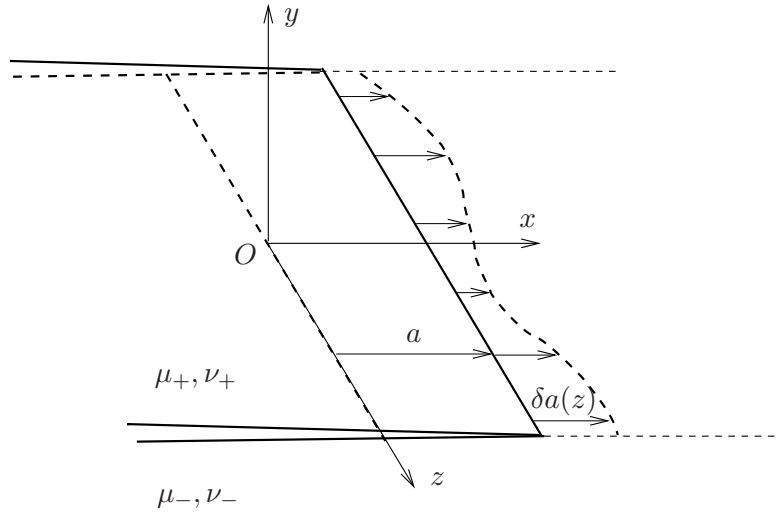


FIG. 3.3 – Semi-infinite interface crack with slightly perturbed front

The values of the “ γ ” constants, as provided by Piccolroaz et al. (2007), are

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_+ = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1+i\epsilon)}{\Gamma(1/2+i\epsilon)} \cosh(\pi\epsilon) \frac{\cosh(\pi\epsilon) - 1/(1-\nu)}{\cosh(\pi\epsilon) + 1/(1-\nu)} \\ \gamma_- = \frac{8}{\cosh^2(\pi\epsilon)} \frac{\pi(1+2i\epsilon)}{2^{2-i\epsilon}} \frac{\cosh(\pi\epsilon) + 1/(1-\nu)}{\epsilon(1+i\epsilon)} \\ \gamma_3 = -\frac{\sqrt{\pi}}{1+2i\epsilon} \frac{\Gamma(1/2-i\epsilon)}{\Gamma(1-i\epsilon)} \frac{\cosh^2(\pi\epsilon)}{\cosh(\pi\epsilon/2) [\cosh(\pi\epsilon) + 1/(1-\nu)]} \\ \gamma_z = -\frac{(1-\nu) \cosh(\pi\epsilon)}{2} \frac{\gamma_3}{\cosh(\pi\epsilon) - 3/(1-\nu)} \\ \gamma = -\frac{1}{\pi} \frac{\cosh(\pi\epsilon) - 3/(1-\nu)}{\cosh(\pi\epsilon) + 1/(1-\nu)} \end{array} \right. \quad (3.8)$$

where the notation ν introduced in equation (3.1)₂ is used and Γ is the gamma function.

3.4 Distribution of the energy release rate along the crack front

3.4.1 Class of loadings considered

For simplicity, we shall only consider distributions of forces invariant in the direction z . For such loadings and a straight crack front, the distributions of the SIFs and the energy release rate are uniform along the front. Thus, if the fracture properties are uniform and the crack front is initially straight, it remains straight at all instants. We shall then speak of *2D crack propagation* (in the plane perpendicular to the crack front). This kind of propagation is said to be “stable” or “unstable”, under constant loading, according to whether the energy release rate is a decreasing or an increasing function of the distance of propagation³.

The loading being invariant in the direction z and the crack front being straight and located at the distance a from the reference Oz axis, let the (uniform) SIFs be denoted $K(a)$ and $K_3(a)$, or simply K and K_3 . Similarly, let the (uniform) energy release rate be denoted $G(a)$ or simply G . For definiteness, we introduce the extra assumption that $K(a)$ and $K_3(a)$ vary according to the formulae

$$\left\{ \begin{array}{l} K(a) \equiv k a^{\alpha-i\epsilon} \\ K_3(a) \equiv k_3 a^\alpha \end{array} \right. \quad (3.9)$$

where k and k_3 are constants independent of a and α some real exponent. Such dependences can be achieved, for various values of the exponent α , through suitable distributions of forces exerted on the crack faces :

³This terminology makes an implicit reference to Griffith's propagation law for which crack propagation occurs when the energy release rate reaches some critical value. For such a law and under constant loading, after the onset of crack propagation, the velocity of the crack goes immediately down to zero if the energy release rate decreases with distance, but continuously increases in the opposite case ; hence the expressions “stable propagation”, “unstable propagation”.

- The value $\alpha = -1/2$ is obtained by exerting uniform line tractions $\pm \mathbf{P}$ on the lines $x = 0, y = 0^\pm$ (Figure 3.4). Indeed the SIFs are then given by (Hutchinson et al., 1987)

$$\begin{cases} K(a) &= (P_y + iP_x) \cosh(\pi\epsilon) \sqrt{\frac{2}{\pi a}} a^{-i\epsilon} \\ K_3(a) &= P_z \sqrt{\frac{2}{\pi a}}. \end{cases} \quad (3.10)$$

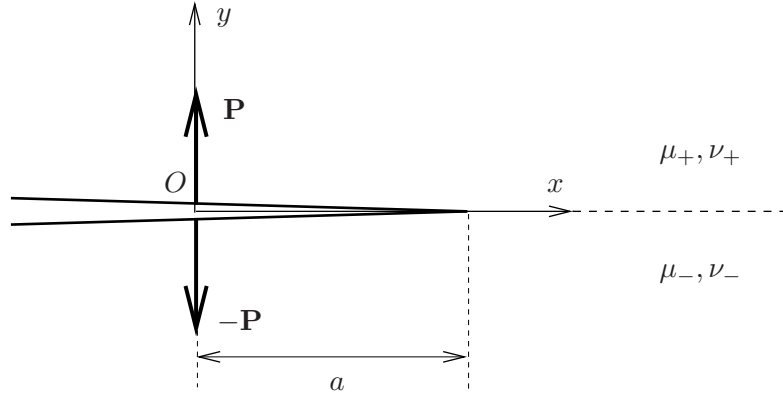


FIG. 3.4 – Semi-infinite interface crack with uniform line tractions (the picture is 2D in the plane Oxy and the tractions are drawn parallel to the direction y)

- The value $\alpha = 1/2$ is obtained by exerting uniform surface tractions $\pm \mathbf{p}$ on the regions $0 < x < a, y = 0^\pm$ of the crack faces (Figure 3.5). Indeed integration of formulae (3.10) immediately shows that the SIFs are then given by

$$\begin{cases} K(a) &= 2(p_y + ip_x) \frac{\cosh(\pi\epsilon)}{1 - 2i\epsilon} \sqrt{\frac{2a}{\pi}} a^{-i\epsilon} \\ K_3(a) &= 2p_z \sqrt{\frac{2a}{\pi}}. \end{cases} \quad (3.11)$$

- More generally, all values of α larger than $-1/2$ can be obtained by exerting surface tractions of the form $\pm \mathbf{p}(x) = \pm \mathbf{C} x^{\alpha-1/2}$ on the regions $0 < x < a, y = 0^\pm$ of the crack faces. Indeed use of formulae (3.10) and the change of variable $u \equiv x/a$ then yields

$$\begin{cases} K(a) &= \int_0^a (C_y + iC_x) x^{\alpha-1/2} \cosh(\pi\epsilon) \sqrt{\frac{2}{\pi(a-x)}} (a-x)^{-i\epsilon} dx \\ &= (C_y + iC_x) \cosh(\pi\epsilon) \sqrt{\frac{2}{\pi}} a^{\alpha-i\epsilon} \int_0^1 u^{\alpha-1/2} (1-u)^{-1/2-i\epsilon} du \\ K_3(a) &= \int_0^a C_z x^{\alpha-1/2} \sqrt{\frac{2}{\pi(a-x)}} dx \\ &= C_z \sqrt{\frac{2}{\pi}} a^\alpha \int_0^1 u^{\alpha-1/2} (1-u)^{-1/2} du. \end{cases} \quad (3.12)$$

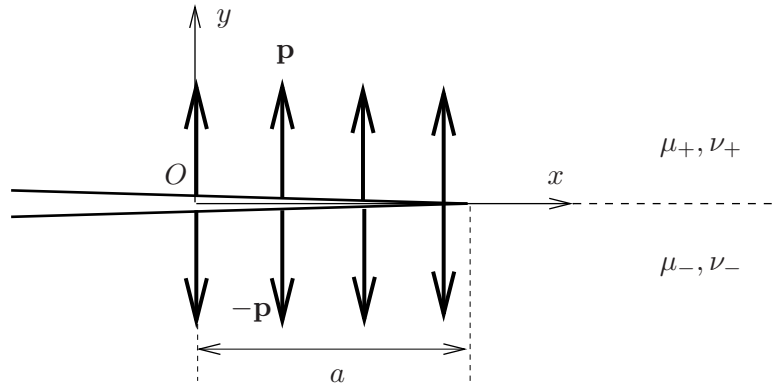


FIG. 3.5 – Semi-infinite interface crack with uniform surface tractions (the picture is 2D in the plane Oxy and the tractions are drawn parallel to the direction y)

The practical realization of the majority of loadings belonging to the class considered would obviously be problematic, but this is of little importance since they only serve as typical examples. One advantage of this class is that it encompasses loadings leading to stable propagation (for $\alpha < 0$) as well as unstable propagation (for $\alpha > 0$) of the crack. Note also that although the semi-infinite crack geometry considered does not involve any characteristic lengthscale, such a lengthscale comes into play *via* the loading, as clearly appears in equations (3.9) (except for $\alpha = 0$). The importance of introduction of some characteristic lengthscale in studies of the development of the deformation of crack fronts has been underlined by Leblond et al. (1996).

3.4.2 Calculation of the energy release rate

We shall use Fourier transforms of various functions in the direction z of the crack front. The Fourier transform $\widehat{\phi}(k)$ of an arbitrary function $\phi(z)$ is defined by

$$\widehat{\phi}(k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z) e^{ikz} dz \quad \Leftrightarrow \quad \phi(z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\phi}(k) e^{-ikz} dk. \quad (3.13)$$

A few double Fourier transforms, denoted with a tilde instead of a hat, will also be encountered.

As a prerequisite to the discussion of crack propagation, one must calculate the distribution of the local energy release rate along the perturbed crack front for an arbitrary perturbation $\delta a(z)$, $-\infty < z < +\infty$. The first task consists of taking the Fourier transforms of equations (3.7). The elements required to do so have been provided by Lazarus and Leblond (1998a) and will not be repeated here. The final expressions of the Fourier transforms $\widehat{\delta K}(k)$, $\widehat{\delta K_3}(k)$ of the

perturbations of the SIFs $\delta K(z)$, $\delta K_3(z)$ are

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\delta K}(k) = \left\{ \frac{dK}{da} - \frac{1+2i\epsilon}{8 \cosh(\pi\epsilon)} \left[\gamma_+ \frac{\sinh(\pi\epsilon)}{\epsilon} \Gamma(1-2i\epsilon) \frac{|k|^{1+2i\epsilon}}{1+2i\epsilon} \overline{K} + \pi\gamma_- |k| K \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4\gamma_3}{1-\nu} \frac{\cosh(\pi\epsilon/2)}{\epsilon} \Gamma(1-i\epsilon) \operatorname{sgn}(k) \frac{|k|^{1+i\epsilon}}{1+i\epsilon} K_3 \right] \right\} \widehat{\delta a}(k) \\ \widehat{\delta K_3}(k) = \left\{ \frac{dK_3}{da} - \frac{\pi\gamma}{4} |k| K_3 \right. \\ \left. + i \frac{1-\nu}{2} \frac{\cosh(\pi\epsilon/2)}{\epsilon} \operatorname{sgn}(k) \operatorname{Im} \left[\gamma_z \Gamma(1-i\epsilon) \frac{|k|^{1+i\epsilon}}{1+i\epsilon} \overline{K} \right] \right\} \widehat{\delta a}(k). \end{array} \right. \quad (3.14)$$

The next step consists of evaluating the Fourier transform $\widehat{\delta G}(k)$ of the perturbation of the energy release rate $\delta G(z)$ from equations (3.6) and (3.14). The calculation is lengthy but straightforward. Using equations (3.8) and (3.9) and formulae (8.332.3) and (8.335.1) of Gradshteyn and Ryzhik (1965), one gets

$$\frac{\widehat{\delta G}(k)}{G} = \frac{2}{a} [\alpha - f(ka)] \widehat{\delta a}(k) \quad (3.15)$$

where G is recalled to denote the energy release rate for a straight front and f is the function defined by

$$f(p) \equiv A|p| + \operatorname{Re} (B|p|^{1+2i\epsilon}); \quad (3.16)$$

in this expression A and B are constants given by

$$\left\{ \begin{array}{l} A \equiv H^{-1} \left\{ (1-\nu) \cosh(\pi\epsilon) |k|^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{3}{1-\nu} - \cosh(\pi\epsilon) \right] k_3^2 \right\} \\ B \equiv H^{-1} [1 - (1-\nu) \cosh(\pi\epsilon)] \frac{\Gamma(1/2-i\epsilon)}{\Gamma(1/2+i\epsilon)} \frac{\overline{k}^2}{2^{1+2i\epsilon}}, \end{array} \right. \quad (3.17)$$

where

$$H \equiv [1 + (1-\nu) \cosh(\pi\epsilon)] \left(|k|^2 + \frac{k_3^2}{1-\nu} \right). \quad (3.18)$$

It is shown in Appendix B.2 that the constants A and B defined by equations (3.17) satisfy the inequality (will be needed in the sequel)

$$A > |B(1+2i\epsilon)| = |B| \sqrt{1+4\epsilon^2}. \quad (3.19)$$

3.5 Deformation of the crack front in fatigue

3.5.1 Paris-type propagation law

Let $a(z, t)$ denote the distance from the Oz axis to the perturbed crack front at location z along this axis and time t . Also, let $G(z, t)$ denote the energy release rate at the point ($x =$

$a(z, t), y = 0, z)$ of the perturbed crack front at time t . In this Section, propagation of this front is assumed to be governed by the following Paris-type law⁴ :

$$\frac{\partial a}{\partial t}(z, t) = C(z, t)[G(z, t)]^{N/2} \quad (3.20)$$

where $C(z, t)$ (the *Paris constant*) and N (the *Paris exponent*) are material parameters. The inhomogeneity of the interface is modelled by assuming the Paris constant to be a function of position, the Paris exponent being considered as uniform for simplicity. The simple notation $C(z, t)$ in fact represents the value of the Paris constant at the position $(x = a(z, t), y = 0, z)$; it is assumed to vary only slightly so that it can be written as

$$C(z, t) \equiv C[1 + \delta c(z, t)] \quad , \quad |\delta c(z, t)| \ll 1 \quad (3.21)$$

where C represents its mean value and $\delta c(z, t)$ its “normalized”, dimensionless fluctuation.

The fluctuations of the position of the crack front and the energy release rate arising from the fluctuations of the Paris constant are also naturally assumed to be small at each instant, so that

$$\begin{cases} a(z, t) \equiv a(t) + \delta a(z, t) & , \quad |\delta a(z, t)| \ll a(t) \\ G(z, t) \equiv G(t) + \delta G(z, t) & , \quad |\delta G(z, t)| \ll G(t) \end{cases} \quad (3.22)$$

where the quantities $a(t)$ and $G(t)$ denote the mean position of the crack and the mean energy release rate at time t .

3.5.2 Evolution of the perturbation of the crack front

The evolution of the perturbation $\delta a(z, t)$ of the crack front will now be obtained by combining the expression (3.15) of the perturbed energy release rate and the propagation law (3.20).

Expanding first the propagation law to first order in $\delta a(z, t)$, $\delta c(z, t)$, $\delta G(z, t)$ and identifying terms of order 0 and 1, one gets

$$\begin{cases} \frac{da}{dt}(t) & = C[G(t)]^{N/2} \\ \frac{\partial \delta a}{\partial t}(z, t) & = C[G(t)]^{N/2} \left[\frac{N}{2} \frac{\delta G(z, t)}{G(t)} + \delta c(z, t) \right]. \end{cases}$$

Eliminating then dt between these expressions and considering henceforward all perturbations as functions of the mean position $a(t) \equiv a$ of the crack instead of time, one gets

$$\frac{\partial \delta a}{\partial a}(z, a) = \frac{N}{2} \frac{\delta G(z, a)}{G(a)} + \delta c(z, a).$$

⁴Equation (3.20) is written formally as a propagation law for subcritical crack growth. In the case of fatigue “ t ” must be re-interpreted as “number of cycles” and “ G ” as “amplitude of variation of the energy release rate during one cycle”.

Upon use of the Fourier decompositions of $\delta a(z, a)$, $\delta G(z, a)$, $\delta c(z, a)$ and equation (3.15), this yields the evolution equation of the Fourier transform $\widehat{\delta a}(k, a)$ of the perturbation of the crack front :

$$\frac{\partial \widehat{\delta a}}{\partial a}(k, a) = \frac{N}{a} [\alpha - f(ka)] \widehat{\delta a}(k, a) + \widehat{\delta c}(k, a). \quad (3.23)$$

Assuming the crack to be initially straight and integrating the linear, inhomogeneous, first-order differential equation (3.23) by standard methods, one gets

$$\widehat{\delta a}(k, a) = \int_{a_0}^a \left(\frac{a}{a'}\right)^{N\alpha} \left[\frac{\psi(ka)}{\psi(ka')}\right]^N \widehat{\delta c}(k, a') da' \quad (3.24)$$

where a_0 denotes the initial value of a and ψ the function defined by

$$\psi(p) \equiv \exp \left[- \int_0^p f(p') \frac{dp'}{p'} \right] = \exp \left[-A|p| - \operatorname{Re} \left(B \frac{|p|^{1+2i\epsilon}}{1+2i\epsilon} \right) \right] \quad (3.25)$$

(where equation (3.16) has been used).

3.5.3 Statistical hypotheses

Using equation (3.24) for the perturbation of the crack front, we shall now study some features of this perturbation for a statistical ensemble of possible “realizations” of the heterogeneous interface. Basic elements of the mathematical description of such an ensemble are provided in Appendix B.3. These elements include precise definitions of the *mathematical expectation* $E[F(z)]$ of any observable $F(z)$ defined on the crack front (equation (B.1)) and of its *two-point autocorrelation function* $E[F(z_1)F(z_2)]$ (equation (B.2)).

If the observable is statistically invariant in the direction z of the crack front, its two-point autocorrelation function depends only on the relative distance between points z_1 and z_2 :

$$E[F(z_1)F(z_2)] \equiv \mathcal{F}(z_2 - z_1). \quad (3.26)$$

The function $\mathcal{F}$ here is obviously even and is called the *autocorrelation function* of F . It is shown in Appendix B.3 that the following relations then hold :

$$\widetilde{E[F_1 F_2]}(k_1, k_2) = E[\widehat{F}(k_1)\widehat{F}(k_2)] = 2\pi \delta(k_1 + k_2) \widehat{\mathcal{F}}(k_2) \quad (3.27)$$

where δ is Dirac’s function and $\widetilde{E[F_1 F_2]}(k_1, k_2)$ the double Fourier transform of the function $E[F(z_1)F(z_2)]$. The function $\widehat{\mathcal{F}}$ in equation (3.27)₂ is called the *power spectrum* of the observable and is the Fourier transform of its autocorrelation function.

We shall make the hypothesis of statistical homogeneity and isotropy of the distribution of the Paris constant within the interface. This implies that its two-point autocorrelation function is of the form

$$E[\delta c(z_1, a_1) \delta c(z_2, a_2)] \equiv \mathcal{C}(z_2 - z_1, a_2 - a_1). \quad (3.28)$$

The function $\mathcal{C}(z_2 - z_1, a_2 - a_1)$ here depends only on the distance $\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (a_2 - a_1)^2}$, which notably implies that it is even in its first argument. It is assumed to decrease down to zero over some characteristic distance b (the “fluctuation distance” of the Paris constant) much smaller than the characteristic lengthscale a introduced by the loading.

Since the perturbation of the crack front arises from the fluctuations of the Paris constant, hypothesis (3.28) implies that is also statistically invariant in the direction of this front, which means that

$$E[\delta a(z_1, a) \delta a(z_2, a)] \equiv \mathcal{A}(z_2 - z_1, a). \quad (3.29)$$

The function $\mathcal{A}$ here is obviously even in its first argument.

3.5.4 General formula for the power spectrum of the perturbation of the crack front

The first task is to derive the general expression, valid for all times, of the power spectrum $\widehat{\mathcal{A}}(k, a)$ of the perturbation of the crack front. By the expression (3.24) of $\widehat{\delta a}(k, a)$ and the definition (B.2) of the two-point autocorrelation function,

$$\begin{aligned} E[\widehat{\delta a}(k_1, a) \widehat{\delta a}(k_2, a)] &= \int_{a_0}^a \int_{a_0}^a \left(\frac{a^2}{a_1 a_2} \right)^{N\alpha} \left[\frac{\psi(k_1 a) \psi(k_2 a)}{\psi(k_1 a_1) \psi(k_2 a_2)} \right]^N E[\widehat{\delta c}(k_1, a_1) \widehat{\delta c}(k_2, a_2)] da_1 da_2 \\ &= 2\pi \delta(k_1 + k_2) \int_{a_0}^a \int_{a_0}^a \left(\frac{a^2}{a_1 a_2} \right)^{N\alpha} \left(\frac{[\psi(k_2 a)]^2}{\psi(k_2 a_1) \psi(k_2 a_2)} \right)^N \widehat{\mathcal{C}}(k_2, a_2 - a_1) da_1 da_2. \end{aligned}$$

Use has been made here of equation (3.27)₂ for the observable δc . Also, since the right-hand side is nonzero only for $k_1 + k_2 = 0$ and the function ψ defined by equation (3.25) is even, we have safely replaced $\psi(k_1 a)/\psi(k_1 a_1)$ by $\psi(-k_2 a)/\psi(-k_2 a_1) = \psi(k_2 a)/\psi(k_2 a_1)$.

On the other hand, equation (3.27)₂ for the observable δa implies that

$$E[\widehat{\delta a}(k_1, a) \widehat{\delta a}(k_2, a)] = 2\pi \delta(k_1 + k_2) \widehat{\mathcal{A}}(k_2, a).$$

Comparison between these two expressions of $E[\widehat{\delta a}(k_1, a) \widehat{\delta a}(k_2, a)]$ reveals that

$$\widehat{\mathcal{A}}(k, a) = \int_{a_0}^a \int_{a_0}^a \left(\frac{a^2}{a_1 a_2} \right)^{N\alpha} \left(\frac{[\psi(ka)]^2}{\psi(ka_1) \psi(ka_2)} \right)^N \widehat{\mathcal{C}}(k, a_2 - a_1) da_1 da_2, \quad (3.30)$$

which is the expression looked for.

3.5.5 Asymptotic expression of the power spectrum of the perturbation of the crack front

We shall now derive the asymptotic expression of the power spectrum $\widehat{\mathcal{A}}(k, a)$ of the perturbation of the crack front for large times, that is for $a \gg a_0$. Just like in the works of Perrin

and Rice (1994) and Favier et al. (2006b), the treatment will basically rely on some argument of domination of the diagonal $a_1 = a_2$ in integration over the square $[a_0, a] \times [a_0, a]$.

Use of the change of variables defined by

$$r \equiv \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \quad ; \quad s \equiv a_2 - a_1 \quad (3.31)$$

in equation (3.30) yields

$$\hat{\mathcal{A}}(k, a) = \int_{a_0}^a \left[\int_{-s_m(r)}^{s_m(r)} \left(\frac{a^2}{r^2 - s^2/4} \right)^{N\alpha} \left(\frac{[\psi(ka)]^2}{\psi[k(r-s/2)]\psi[k(r+s/2)]} \right)^N \hat{\mathcal{C}}(k, s) ds \right] dr \quad (3.32)$$

where $-s_m(r)$ and $s_m(r)$ are the minimum and maximum values of s allowed by the inequalities $a_0 \leq a_1 = r - s/2 \leq a$, $a_0 \leq a_2 = r + s/2 \leq a$. Now the function $\hat{\mathcal{C}}(k, s)$ takes non-negligible values only when $|s| \lesssim b$. On the other hand $r \geq a_0 \gg b$. Therefore the integrand in equation (3.32) takes non-negligible values only when $|s| \ll r$ (domination of the diagonal). One may therefore safely replace $r^2 - s^2/4$, $\psi[k(r-s/2)]$, $\psi[k(r+s/2)]$ by r^2 , $\psi(kr)$, $\psi(kr)$ in the integral. Also, if $a \gg a_0$, $s_m(r) \sim a \gg b$ for almost every $r \in [a_0, a]$, so that $|s| \ll s_m(r)$ for those values of s for which the integrand is non-negligible; hence the integral over the interval $[-s_m(r), s_m(r)]$ may safely be extended to the entire real line. The integral of $\hat{\mathcal{C}}(k, s)$ then becomes identical to $\tilde{\mathcal{C}}(k, 0)$ where $\tilde{\mathcal{C}}$ is the double Fourier transform of the function $\mathcal{C}$, so that equation (3.32) becomes

$$\hat{\mathcal{A}}(k, a) \sim \tilde{\mathcal{C}}(k, 0) a^{2N\alpha} [\psi(ka)]^{2N} \mathcal{I}(a) \quad , \quad \mathcal{I}(a) \equiv \int_{a_0}^a r^{-2N\alpha} [\psi(kr)]^{-2N} dr. \quad (3.33)$$

It now becomes necessary to distinguish between the cases $k = 0$ and $k \neq 0$.

– *Special case : $k = 0$.*

Then $\psi(kr) = \psi(0) = 1$ so that

$$\mathcal{I}(a) = \frac{a^{1-2N\alpha} - a_0^{1-2N\alpha}}{1 - 2N\alpha}.$$

Therefore there are two sub-cases according to whether the exponent $1 - 2N\alpha$ here is negative or positive :

* If $\alpha > \frac{1}{2N}$,

$$\hat{\mathcal{A}}(0, a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{2N\alpha - 1} a_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{2N\alpha}. \quad (3.34)$$

* If $\alpha < \frac{1}{2N}$,

$$\hat{\mathcal{A}}(0, a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{1 - 2N\alpha} a. \quad (3.35)$$

– *General case : $k \neq 0$.*

It is clear, by equation (3.25) and inequality (3.19), that the function $\psi(p)$ goes to zero for $|p| \rightarrow +\infty$ not less quickly than $\exp(-C|p|)$ where $C \equiv A - |B|/|1 + 2i\epsilon| > 0$. Therefore

$[\psi(kr)]^{-2N}$ goes to infinity for $r \rightarrow +\infty$ not less quickly than $\exp(2NC|k|r)$. Since $r^{-2N\alpha}$ varies much less quickly, it may safely be replaced by $a^{-2N\alpha}$ in the expression (3.33)₂ of $\mathcal{I}(a)$ which thus becomes

$$\mathcal{I}(a) \sim a^{-2N\alpha} \int_{a_0}^a [\psi(kr)]^{-2N} dr = a^{-2N\alpha} \int_{a_0}^a \exp \left[2NA|k|r + 2N\operatorname{Re} \left(B \frac{|kr|^{1+2i\epsilon}}{1+2i\epsilon} \right) \right] dr.$$

Integration by parts of this integral now yields

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(a) \sim & a^{-2N\alpha} \left\{ \frac{\exp(2NA|k|a)}{2NA|k|} \exp \left[2N\operatorname{Re} \left(B \frac{|ka|^{1+2i\epsilon}}{1+2i\epsilon} \right) \right] \right. \\ & \left. - \int_{a_0}^a \frac{\exp(2NA|k|r)}{A|k|} \exp \left[2N\operatorname{Re} \left(B \frac{|kr|^{1+2i\epsilon}}{1+2i\epsilon} \right) \right] \operatorname{Re}(B|k|^{1+2i\epsilon}r^{2i\epsilon}) dr \right\}. \end{aligned}$$

Replacing the term $r^{2i\epsilon}$ in the expression $\operatorname{Re}(\dots)$ here by $a^{2i\epsilon}$ since it varies much less quickly than the exponentials, one gets

$$\mathcal{I}(a) \sim a^{-2N\alpha} \frac{\exp \left[2NA|k|a + 2N\operatorname{Re} \left(B \frac{|ka|^{1+2i\epsilon}}{1+2i\epsilon} \right) \right]}{2NA|k|} - \frac{\operatorname{Re}(B|k|^{1+2i\epsilon}a^{2i\epsilon})}{A|k|} \mathcal{I}(a),$$

which implies that

$$\mathcal{I}(a) \sim a^{-2N\alpha} \frac{\exp \left[2NA|k|a + 2N\operatorname{Re} \left(B \frac{|ka|^{1+2i\epsilon}}{1+2i\epsilon} \right) \right]}{2N[A|k| + \operatorname{Re}(B|k|^{1+2i\epsilon}a^{2i\epsilon})]} = \frac{a^{-2N\alpha}[\psi(ka)]^{-2N}}{2N|k|[A + \operatorname{Re}(B|ka|^{2i\epsilon})]}.$$

Insertion of this result into equation (3.33)₁ finally yields

$$\widehat{\mathcal{A}}(k, a) \sim \frac{\widetilde{\mathcal{C}}(k, 0)}{2N|k|[A + \operatorname{Re}(B|ka|^{2i\epsilon})]} \quad (k \neq 0). \quad (3.36)$$

Note that the denominator here does not vanish, since $A + \operatorname{Re}(B|ka|^{2i\epsilon}) \geq A - |B| > 0$ by inequality (3.19).

Equations (3.34) and (3.35) show that in the limit of large times, $\widehat{\mathcal{A}}(0, a)$ goes to infinity in all cases; the larger the value of α , the quicker the divergence. In contrast, equation (3.36) shows that for $k \neq 0$, $\widehat{\mathcal{A}}(k, a)$ asymptotically oscillates indefinitely between finite values (except if $\epsilon = 0$, in which case it tends toward a constant), and therefore remains bounded. This means that Fourier components of the perturbation of the crack front with small wavenumbers (large wavelengths) gradually develop in time at the expense of Fourier components with large wavenumbers (small wavelengths); the higher the value of α , the larger the effect. This phenomenon will be referred to as the *gradual selection of Fourier components of the perturbation of large wavelength* in the sequel.

3.5.6 Comments

Some useful qualitative understanding of the phenomenon just evidenced can be gained by considering the evolution equation (3.23) of $\widehat{\delta a}(k, a)$.

- Assume first that 2D crack propagation is unstable, that is, $\alpha > 0$.

The function f defined by equation (3.16) is even and its derivative is given, for positive values of its argument, by $f'(p) = A + \operatorname{Re} [B(1 + 2i\epsilon)p^{2i\epsilon}] \geq A - |B(1 + 2i\epsilon)| > 0$ by inequality (3.19). Therefore f is an increasing function over the interval $[0, +\infty)$. Also, $f(0) = 0$ and $\lim_{p \rightarrow +\infty} f(p) = +\infty$ since f' is bounded from below by a positive constant. Therefore the equation $f(p) = \alpha$ has a unique solution p_0 over the interval $(0, +\infty)$ ⁵. The quantity $\alpha - f(ka)$ is positive for $|k| < p_0/a$ and negative for $|k| > p_0/a$. In the first case, that is if the wavelength $\lambda \equiv 2\pi/|k|$ is larger than $\lambda_0 \equiv 2\pi a/p_0$, the Fourier component $\widehat{\delta a}(k, a)$ tends to “explode” because of the term $\frac{N}{a} [\alpha - f(ka)] \widehat{\delta a}(k, a)$ in its evolution equation (3.23). In the second case, that is if λ is smaller than λ_0 , this term tends to reduce the value of $\widehat{\delta a}(k, a)$, which therefore remains bounded. In other words, there is a effect of unstable growth of Fourier components of the perturbation of wavelength greater than the “critical” wavelength λ_0 .

However the picture is made a bit more complex by the fact that for any given $k \neq 0$, the wavelength λ is fixed and finite, and thus *always* ultimately becomes smaller than λ_0 which increases proportionally to a . The implication is that if $k \neq 0$, unstable growth of $\widehat{\delta a}(k, a)$ always stops after a certain time. This is why $\widehat{\delta a}(k, a)$ diverges only for $k = 0$.

- Assume now that 2D crack propagation is stable, that is, $\alpha < 0$.

Then the equation $f(p) = \alpha$ has no solution. The quantity $\alpha - f(ka)$ is negative for all values of k , and does not generate any dramatic “explosion” of $\widehat{\delta a}(k, a)$. In other words, there is no effect of unstable growth of Fourier components of the perturbation of wavelength greater than the critical wavelength, because such a critical wavelength no longer exists. However the phenomenon of gradual selection of Fourier components of large wavelength is still present, although less spectacular. Indeed the term $\frac{N}{a} [\alpha - f(ka)] \widehat{\delta a}(k, a)$ in equation (3.23) tends to reduce the value of $\widehat{\delta a}(k, a)$, and the effect is maximum for large $|k|$ (small λ) since $\alpha - f(ka)$ goes to $-\infty$ then; hence Fourier components of the perturbation of small wavelength are more attenuated in time than components of large wavelength.

The conclusion is that the selection of Fourier components of the perturbation of large wavelength occurs for all values of the coefficient α characterizing the stability or instability of 2D crack propagation. However it is more dramatic in the unstable case, because it is enhanced then

⁵This solution is connected to the existence of a bifurcated solution in brittle fracture, as will be seen in Section 3.6 below.

by an effect of “explosion” of Fourier components of wavelength greater than some critical value proportional to the characteristic lengthscale a .

Similar phenomena have been reported at least twice in the literature. Favier et al. (2006b) recently performed a similar study of the deformation of the front of a tensile tunnel-crack propagating in some elastically homogeneous medium with random fracture properties. This study evidenced both gradual selection of Fourier components of the perturbation of large wavelength and unstable development of components of wavelength greater than some critical value. However a single loading consisting of uniform stresses at infinity was considered; the value of α , namely $1/2$ (implying unstable 2D crack propagation) was fixed, and this precluded any study of the influence of this parameter.

There is also a strong connection with the work of Woolfries and Willis (1999), in spite of the fact that the situation considered by these authors (dynamic crack propagation of an ordinary crack governed by a Griffith-type law) was somewhat different from that studied here (quasistatic propagation of an interface crack governed by a Paris-type law). Woolfries and Willis (1999)’s major conclusion was that the sign of the quantity M appearing in the “next” term (proportional to the square root of the distance to the crack front) in the expansion of the tensile stress ahead of the front had a paramount influence on the evolution of Fourier components of the perturbation of large wavelength. This is in line with our own observations on the influence of the exponent α , since for an ordinary mode I crack, as considered by Woolfries and Willis (1999), the parameter M is directly related to the derivative dK_I/da of the SIF for a uniform advance of the crack front⁶ and hence to the exponent α .

The strong influence of the sign of M or α , which governs the stable or unstable character of 2D crack propagation, upon the possible “explosion” of Fourier components of the perturbation of sufficiently large wavelength, obviously arises from the fact that when this wavelength goes to infinity, the perturbation ultimately becomes uniform along the front so that the problem becomes 2D in the perpendicular plane.

In contrast, the fact that the gradual selection of Fourier components of the perturbation of large wavelength has been found to occur for both the tensile tunnel-crack and the semi-infinite interface crack *for all values of α* , even in the absence of dramatic “explosion” of such components, strongly suggests that it must be a pretty general phenomenon. This conclusion is confirmed by the following qualitative reasoning. Consider Fourier components of the perturbation of the crack front of small wavelength. For such components, the front oscillates over distances much smaller

⁶This relation was evidenced by Amestoy and Leblond (1992). For a semi-infinite crack in an infinite body, as considered here, dK_I/da is simply proportional to M .

than the characteristic lengthscales of the geometry and the loading. Therefore the distributions of the SIFs and the energy release rate along the perturbed front, which govern the evolution in time of the Fourier component considered, are determined by the local geometry of the front and do not depend much on the details of the far geometry and the loading. A simple argument presented in Appendix B.4 confirms that independently of the far geometry and loading, for sinusoidal undulations of the crack front of short wavelength, the energy release rate is larger at these points where the crack advance is minimum than at those points where it is maximum; the smaller the wavelength, the larger the difference. The implication is that such undulations tend to disappear in time at a rate which increases when the wavelength decreases, independently of the far geometry and loading.

eliminated in time must be independent of the geometry and

3.5.7 Asymptotic expression of the autocorrelation function of the perturbation

We shall now derive the asymptotic expression of the autocorrelation function $\mathcal{A}(z, a)$ of the perturbation of the crack front for large times. This will be done by taking the inverse Fourier transform of the power spectrum $\hat{\mathcal{A}}(k, a)$. Unfortunately it does not suffice here to simply replace $\hat{\mathcal{A}}(k, a)$ by its asymptotic expression (3.36) for $a \rightarrow +\infty$. Indeed the fact that this expression goes to infinity when k goes to 0 makes it clear that the convergence of $\hat{\mathcal{A}}(k, a)$ toward its asymptotic expression is non-uniform with respect to k . It is thus necessary to come back to the original form (3.30) of $\hat{\mathcal{A}}(k, a)$. Following then the same steps as at the beginning of Subsection 3.5.5, based on the inequalities $b \ll a_0 \ll a$, one gets

$$\mathcal{A}(z, a) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{C}}(k, 0) e^{-ikz} \left\{ \int_{a_0}^a \left(\frac{a}{r}\right)^{2N\alpha} \left[\frac{\psi(ka)}{\psi(kr)} \right]^{2N} dr \right\} dk.$$

This expression is readily transformed, upon use of the change of variables defined by

$$u \equiv \frac{r}{a} \quad ; \quad p \equiv ka \tag{3.37}$$

and change of the order of integration, into

$$\mathcal{A}(z, a) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{a_0/a}^1 u^{-2N\alpha} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{C}}\left(\frac{p}{a}, 0\right) e^{-ipz/a} \left[\frac{\psi(p)}{\psi(pu)} \right]^{2N} dp \right\} du. \tag{3.38}$$

Detailed inspection of the integral on u here reveals that both its lower and upper bounds can generate divergent behaviors, depending on the value of α , in the limit $a \rightarrow +\infty$. It is thus necessary to express $\mathcal{A}(z, a)$ in the form

$$\mathcal{A}(z, a) \sim \mathcal{J}_1(a) + \mathcal{J}_2(a) \tag{3.39}$$

where⁷

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1(a) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{a_0/a}^{1/2} u^{-2N\alpha} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{C}}\left(\frac{p}{a}, 0\right) e^{-ipz/a} \left[\frac{\psi(p)}{\psi(pu)} \right]^{2N} dp \right\} du \\ \mathcal{J}_2(a) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{1/2}^1 u^{-2N\alpha} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{C}}\left(\frac{p}{a}, 0\right) e^{-ipz/a} \left[\frac{\psi(p)}{\psi(pu)} \right]^{2N} dp \right\} du, \end{cases} \quad (3.40)$$

and to study the behavior of the integrals $\mathcal{J}_1(a)$ and $\mathcal{J}_2(a)$ separately.

– *Study of the integral $\mathcal{J}_1(a)$.*

This integral may or may not, depending on the value of α , go to infinity in the limit $a \rightarrow +\infty$ because of its lower bound on u . Indeed, replacing $\tilde{\mathcal{C}}(p/a, 0)$ by $\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)$ and $e^{-ipz/a}$ by unity in the limit $a \rightarrow +\infty$ and using the fact that the function $\psi(p)$ is even, one gets

$$\mathcal{J}_1(a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi} \int_{a_0/a}^{1/2} u^{-2N\alpha} \left\{ \int_0^{+\infty} \left[\frac{\psi(p)}{\psi(pu)} \right]^{2N} dp \right\} du.$$

There are again two cases here according to whether the exponent $-2N\alpha$ of u is larger or smaller than -1 :

* If $\alpha > \frac{1}{2N}$, considering the integral as a function of the small parameter $\xi \equiv a_0/a$ instead of a and differentiating it, one gets

$$\frac{d\mathcal{J}_1}{d\xi} \sim -\frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi} \xi^{-2N\alpha} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\psi(p)}{\psi(p\xi)} \right]^{2N} dp \sim -\frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi} \xi^{-2N\alpha} \int_0^{+\infty} [\psi(p)]^{2N} dp$$

(since $\psi(0) = 1$), which yields upon integration

$$\mathcal{J}_1(a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi(2N\alpha - 1)} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{2N\alpha - 1} \int_0^{+\infty} [\psi(p)]^{2N} dp. \quad (3.41)$$

Therefore $\mathcal{J}_1(a)$ goes to infinity in this case.

* If $\alpha < \frac{1}{2N}$, $\mathcal{J}_1(a)$ goes to a finite limit :

$$\mathcal{J}_1(a) \rightarrow \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi} \int_0^{1/2} u^{-2N\alpha} \left\{ \int_0^{+\infty} \left[\frac{\psi(p)}{\psi(pu)} \right]^{2N} dp \right\} du. \quad (3.42)$$

– *Study of the integral $\mathcal{J}_2(a)$.*

We shall see, at the expense of a somewhat elaborate reasoning, that this integral goes to infinity in all cases in the limit $a \rightarrow +\infty$ because of its upper bound on u .

One difficulty is that $\tilde{\mathcal{C}}(p/a, 0)$ cannot simply be replaced by $\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)$ in equation (3.40)₂. Indeed it is easy to check, using the definition (3.25) of the function ψ , that what is obtained then is a divergent (infinite) integral on u , because of the upper bound of unity. It becomes

⁷The “intermediary” bound of 1/2 here is arbitrary, and could be replaced by any number in the interval (0, 1).

necessary here to account for the fact that it is the decrease of the function $\tilde{\mathcal{C}}(k, 0)$ down to zero at infinity which ensures the convergence of the integral on u in equation (3.40)₂. It will be assumed more precisely, for definiteness, that this function is of the form

$$\tilde{\mathcal{C}}(k, 0) \equiv \tilde{\mathcal{C}}(0, 0) e^{-b|k|} \quad (3.43)$$

where b is recalled to denote the "fluctuation distance" of the Paris constant. Inserting this expression into equation (3.40)₂ and using the fact that the function ψ is even, one gets

$$\mathcal{J}_2(a) = \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{1/2}^1 u^{-2N\alpha} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\eta(1+i\theta)p} \left(\frac{\psi(p)}{\psi(pu)} \right)^{2N} dp \right] du \right\}$$

where

$$\eta \equiv \frac{b}{a} \quad ; \quad \theta \equiv \frac{z}{b}. \quad (3.44)$$

Note that η is a small parameter whereas θ is fixed and finite. To study the singular behavior of this integral in the limit $\eta \rightarrow 0^+$ due to the upper bound of unity on u , one may safely replace $u^{-2N\alpha}$ by unity, define $v \equiv 1 - u$ and expand $\psi(pu) \equiv \psi[p(1 - v)]$ to first order in v using the definition (3.25) of the function ψ . This leads to

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2(a) &\sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{1/2} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\eta(1+i\theta)p} \exp[-2NvAp - 2Nv \operatorname{Re}(Bp^{1+2i\epsilon})] dp \right] dv \right\} \\ &= \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{2\pi N} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-\eta(1+i\theta)p} \frac{1 - \exp[-NAp - N \operatorname{Re}(Bp^{1+2i\epsilon})]}{Ap + \operatorname{Re}(Bp^{1+2i\epsilon})} dp \right\}. \end{aligned}$$

Considering now $\mathcal{J}_2(a)$ as a function of the small parameter η , differentiating it, and using the change of variable $q \equiv \eta p$, one gets

$$\frac{d\mathcal{J}_2}{d\eta} \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{2\pi N} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} (1+i\theta) e^{-(1+i\theta)q} \frac{\exp[-NAq/\eta - N \operatorname{Re}(B(q/\eta)^{1+2i\epsilon})] - 1}{A + \operatorname{Re}(B(q/\eta)^{2i\epsilon})} \frac{dq}{\eta} \right\}.$$

The exponential in the ratio here can be discarded in the limit $\eta \rightarrow 0^+$, so that

$$\frac{d\mathcal{J}_2}{d\eta} \sim -\frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{2\pi N\eta} \operatorname{Re} \left[\int_0^{+\infty} \frac{(1+i\theta) e^{-(1+i\theta)q}}{A + \operatorname{Re}(B(q/\eta)^{2i\epsilon})} dq \right]. \quad (3.45)$$

To study the behavior of the integral here in the limit $\eta \rightarrow 0^+$, let us define the function (depending upon the parameter θ)

$$F_\theta(\lambda) \equiv \int_0^{+\infty} \frac{(1+i\theta) e^{-(1+i\theta)q}}{A + \operatorname{Re}(B e^{-2i\epsilon\lambda} q^{2i\epsilon})} dq. \quad (3.46)$$

This function is periodic of period $\pi/|\epsilon|$. It may therefore be written in the form $F_\theta(\lambda) \equiv \overline{F} + \widetilde{F}_\theta(\lambda)$ where $\overline{F}$ denotes its mean value and the function $\widetilde{F}_\theta(\lambda)$ is periodic with zero

mean value. The calculation of $\overline{F}$ is presented in Appendix B.5, and the result is

$$\overline{F} = \begin{cases} \frac{1}{A + \operatorname{Re}(B)} & \text{if } \epsilon = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{A^2 - |B|^2}} & \text{if } \epsilon \neq 0. \end{cases} \quad (3.47)$$

Note that $\overline{F}$ is real and independent of the parameter θ . We also denote $\widetilde{\mathcal{F}}_\theta(\lambda)$ some indefinite integral of the function $\widetilde{F}_\theta(\lambda)$. Since $\widetilde{F}_\theta(\lambda)$ is periodic and its mean value is zero, $\widetilde{\mathcal{F}}_\theta(\lambda)$ is periodic.

With these notations, equation (3.45) yields

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{J}_2}{d\eta} &\sim -\frac{\widetilde{\mathcal{C}}(0,0)}{2\pi N\eta} \operatorname{Re}[F_\theta(\ln \eta)] \\ \Rightarrow d\mathcal{J}_2 &\sim -\frac{\widetilde{\mathcal{C}}(0,0)}{2\pi N} \left\{ \overline{F} + \operatorname{Re}[\widetilde{F}_\theta(\ln \eta)] \right\} d(\ln \eta) \\ \Rightarrow \mathcal{J}_2(a) &\sim -\frac{\widetilde{\mathcal{C}}(0,0)}{2\pi N} \left\{ \overline{F} \ln \eta + \operatorname{Re}[\widetilde{\mathcal{F}}_\theta(\ln \eta)] \right\} + Cst. \end{aligned}$$

Since the function $\widetilde{\mathcal{F}}_\theta(\lambda)$ is periodic, the term $\operatorname{Re}[\widetilde{\mathcal{F}}_\theta(\ln \eta)]$ here is bounded, like the constant, and therefore both are negligible compared to the term $\overline{F} \ln \eta$ which goes to infinity in the limit $\eta \rightarrow 0^+$. It follows that

$$\mathcal{J}_2(a) \sim -\frac{\widetilde{\mathcal{C}}(0,0)}{2\pi N} \overline{F} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \sim \frac{\widetilde{\mathcal{C}}(0,0)}{2\pi N} \overline{F} \ln a. \quad (3.48)$$

Combining equations (3.39), (3.41), (3.42) and (3.48), we see that there are two cases :

- If $\alpha > \frac{1}{2N}$, the integral $\mathcal{J}_2(a)$ is negligible compared to the integral $\mathcal{J}_1(a)$, so that

$$\mathcal{A}(z, a) \sim \mathcal{J}_1(a) \sim \frac{\widetilde{\mathcal{C}}(0,0)}{\pi(2N\alpha - 1)} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{2N\alpha - 1} \int_0^{+\infty} [\psi(p)]^{2N} dp. \quad (3.49)$$

- If $\alpha < \frac{1}{2N}$, the integral $\mathcal{J}_1(a)$ is negligible compared to the integral $\mathcal{J}_2(a)$, so that

$$\mathcal{A}(z, a) \sim \mathcal{J}_2(a) \sim \frac{\widetilde{\mathcal{C}}(0,0)}{2\pi N} \overline{F} \ln a, \quad (3.50)$$

where the quantity $\overline{F}$ is recalled to be given by equation (3.47).

Several comments are in order here. The first observation is that the autocorrelation function $\mathcal{A}(z, a)$ of the perturbation of the crack front goes to infinity in the limit $a \rightarrow +\infty$ in all cases ; the larger the value of the parameter α , the quicker the divergence. These effects obviously arise from similar features apparent in the behavior of the Fourier component $\widehat{\mathcal{A}}(0, a)$ (see equations (3.34) and (3.35)). The role of the other Fourier components $\widehat{\mathcal{A}}(k, a)$, $k \neq 0$, is less important since they remain bounded (see equation (3.36)).

It is also worth noting in this context that the decomposition of $\mathcal{A}(z, a)$ into $\mathcal{J}_1(a) + \mathcal{J}_2(a)$ followed by separate study of the behavior of these integrals in the limit $a \rightarrow +\infty$, far from

being a mere mathematical procedure, possesses a nice physical interpretation. Indeed we have noted that the divergence of $\mathcal{A}(z, a)$ in the limit $a \rightarrow +\infty$ arises from the lower bound of a_0/a in the expression $(3.40)_1$ of $\mathcal{J}_1(a)$ for large values of α , but from the upper bound of unity in the expression $(3.40)_2$ of $\mathcal{J}_2(a)$ for small values of α . This means that this divergence is due to the far past ($r \simeq a_0$, see equation $(3.37)_1$) if α is large, but from the near past ($r \simeq a$) if α is small. In other words, quite naturally, the influence of the far past upon the development of the perturbation of the crack front is more important when 2D crack propagation is unstable (α large) than when it is stable (α small).

Another observation is that $\mathcal{A}(z, a)$ becomes independent of z in the limit $a \rightarrow +\infty$. Thus correlations between values of δa at different points of the crack front ultimately become independent of the distance between these points, that is exactly as strong as if they coincided. The explanation lies in the gradual selection of Fourier components of δa of large wavelength evidenced in Subsection 3.5.6, which implies that long-range correlations develop in time at the expense of short-range ones.

3.5.8 Asymptotic expression of the autocorrelation function of the slope of the perturbation

Although the autocorrelation function of δa does provide informations about the geometric evolution of the crack front, it is not a good measure of its “wavyness”, because it depends on all Fourier components of δa , including that corresponding to $k = 0$ which represents a mere translatory motion of the front. It is thus interesting to study the autocorrelation function of the “slope” $\partial \delta a / \partial z$, which is independent of this particular Fourier component.

By equations $(3.27)_1$ and (3.29) ,

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_2, a) \right] &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E \left[\frac{\widehat{\partial \delta a}}{\partial z}(k_1, a) \frac{\widehat{\partial \delta a}}{\partial z}(k_2, a) \right] e^{-ik_1 z_1 - ik_2 z_2} dk_1 dk_2 \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k_1 k_2 E[\widehat{\delta a}(k_1, a) \widehat{\delta a}(k_2, a)] e^{-ik_1 z_1 - ik_2 z_2} dk_1 dk_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \widehat{\mathcal{A}}(k, a) e^{-ik(z_2 - z_1)} dk. \end{aligned} \quad (3.51)$$

>From this point, the reasoning is basically similar to that made in Subsection 3.5.7 for the autocorrelation function of δa , so that a mere sketch of the procedure will be sufficient. One first gets, in the limit $a \rightarrow +\infty$,

$$E \left[\frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_2, a) \right] \sim \mathcal{K}_1(a) + \mathcal{K}_2(a) \quad (3.52)$$

where

$$\begin{cases} \mathcal{K}_1(a) &\equiv \frac{1}{2\pi a^2} \int_{a_0/a}^{1/2} u^{-2N\alpha} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 \tilde{\mathcal{C}}\left(\frac{p}{a}, 0\right) e^{-ip(z_2-z_1)/a} \left[\frac{\psi(p)}{\psi(pu)}\right]^{2N} dp \right\} du \\ \mathcal{K}_2(a) &\equiv \frac{1}{2\pi a^2} \int_{1/2}^1 u^{-2N\alpha} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 \tilde{\mathcal{C}}\left(\frac{p}{a}, 0\right) e^{-ip(z_2-z_1)/a} \left[\frac{\psi(p)}{\psi(pu)}\right]^{2N} dp \right\} du. \end{cases} \quad (3.53)$$

Detailed study of the integral $\mathcal{K}_1(a)$ reveals that

– If $\alpha > \frac{1}{2N}$,

$$\mathcal{K}_1(a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0,0)}{\pi(2N\alpha-1)a_0^2} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{2N\alpha-3} \int_0^{+\infty} p^2 [\psi(p)]^{2N} dp. \quad (3.54)$$

– If $\alpha < \frac{1}{2N}$,

$$\mathcal{K}_1(a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0,0)}{\pi a^2} \int_0^{1/2} u^{-2N\alpha} \left\{ \int_0^{+\infty} p^2 \left[\frac{\psi(p)}{\psi(pu)}\right]^{2N} dp \right\} du. \quad (3.55)$$

The study of the integral $\mathcal{K}_2(a)$ is again based on hypothesis (3.43) on the function $\tilde{\mathcal{C}}(k,0)$. It is similar to that of the integral $\mathcal{J}_2(a)$ except that no derivation with respect to the parameter $\eta \equiv b/a$ is needed. The result is

$$\mathcal{K}_2(a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0,0)}{2\pi N b^2} \operatorname{Re} \left\{ G_\theta \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{2i\epsilon} \right] \right\}, \quad G_\theta(\zeta) \equiv \int_0^{+\infty} \frac{q e^{-(1+i\theta)q}}{A + \operatorname{Re}(B\zeta q^{2i\epsilon})} dq, \quad \theta \equiv \frac{z_2 - z_1}{b}. \quad (3.56)$$

Combining equations (3.52), (3.54), (3.55) and (3.56), one sees that there are again two cases :

– If $\alpha > \frac{3}{2N}$,

$$E \left[\frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_2, a) \right] \sim \mathcal{K}_1(a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0,0)}{\pi(2N\alpha-1)a_0^2} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{2N\alpha-3} \int_0^{+\infty} p^2 [\psi(p)]^{2N} dp. \quad (3.57)$$

– If $\alpha < \frac{3}{2N}$,

$$E \left[\frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_2, a) \right] \sim \mathcal{K}_2(a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0,0)}{2\pi N b^2} \operatorname{Re} \left\{ G_\theta \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{2i\epsilon} \right] \right\}. \quad (3.58)$$

Note that the term $\operatorname{Re} \left\{ G_\theta \left[(a/b)^{2i\epsilon} \right] \right\}$ here is a periodic function of $\ln a$ of period $\pi/|\epsilon|$.

It cannot be expressed in a simple analytical form except if $\epsilon = 0$, in which case its value

$$\text{is } \frac{1}{A+\operatorname{Re}(B)} \frac{1-\theta^2}{(1+\theta^2)^2} = \frac{b^2}{A+\operatorname{Re}(B)} \frac{b^2-(z_2-z_1)^2}{[b^2+(z_2-z_1)^2]^2}.$$

Thus, for large values of α , $E \left[\frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_2, a) \right]$ goes to infinity in the limit $a \rightarrow +\infty$, but the divergence is less quick than that of $\mathcal{A}(z, a)$ (compare equations (3.49) and (3.57)). For small values of α , $E \left[\frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_2, a) \right]$ oscillates indefinitely between finite values for $a \rightarrow +\infty$ (except if $\epsilon = 0$, in which case it tends toward a finite limit), whereas $\mathcal{A}(z, a)$ goes to infinity (compare equations (3.50) and (3.58)). Thus $E \left[\frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_2, a) \right]$ evolves less quickly

than $\mathcal{A}(z, a)$ in all cases. The obvious explanation is that as noted in Subsection 3.5.7, the divergence of $\mathcal{A}(z, a)$ for $a \rightarrow +\infty$ essentially arises from that of the Fourier component $\hat{\mathcal{A}}(0, a)$, and $E \left[\frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_2, a) \right]$ does not depend upon this particular component.

Another observation is that in the limit $a \rightarrow +\infty$, $E \left[\frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_2, a) \right]$ depends upon the distance $z_2 - z_1$ between the points of observation of the slope for small values of α , but not for large ones. The explanation is that as noted in Subsection 3.5.7, the phenomenon responsible for the disappearance of the dependence upon this distance is the selection of Fourier components of δa of large wavelength, which is maximum for large values of α , as was explained in Subsection 3.5.6. The fact that for small values of α , $E \left[\frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_2, a) \right]$ depends on $z_2 - z_1$ whereas $\mathcal{A}(z, a)$ is independent of z (compare equations (3.50) and (3.58)) can be rationalized in a similar way : $\mathcal{A}(z, a)$ is more sensitive than $E \left[\frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_2, a) \right]$ to the selection of Fourier components of δa of large wavelength, since the former quantity depends upon the Fourier component $\hat{\mathcal{A}}(0, a)$ contrary to the latter.

3.5.9 Asymptotic expression of the distance of correlation of the perturbation

The “distance of correlation” L of the perturbation of the crack front characterizes the distance over which correlations between values of δa at different points of this front can be felt. It can be given several definitions, the simplest being

$$L \equiv \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathcal{A}}(k, a) dk}{\int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \hat{\mathcal{A}}(k, a) dk}} = \sqrt{\frac{\mathcal{A}(0, a)}{E \left\{ [(\partial \delta a / \partial z)(z, a)]^2 \right\}}}. \quad (3.59)$$

There are three cases here in the limit $a \rightarrow +\infty$:

- If $\alpha > \frac{3}{2N}$, by equations (3.49) and (3.57),

$$L \sim a \sqrt{\frac{\int_0^{+\infty} [\psi(p)]^{2N} dp}{\int_0^{+\infty} p^2 [\psi(p)]^{2N} dp}}. \quad (3.60)$$

- If $\frac{1}{2N} < \alpha < \frac{3}{2N}$, by equations (3.49) and (3.58),

$$L \sim b \left(\frac{a}{a_0} \right)^{N\alpha-1/2} \sqrt{\frac{2N}{2N\alpha-1} \frac{\int_0^{+\infty} [\psi(p)]^{2N} dp}{\operatorname{Re} \left\{ G_0 \left[(a/b)^{2i\epsilon} \right] \right\}}}. \quad (3.61)$$

- If $\alpha < \frac{1}{2N}$, by equations (3.50) and (3.58),

$$L \sim b \sqrt{\frac{\bar{F} \ln a}{\operatorname{Re} \left\{ G_0 \left[(a/b)^{2i\epsilon} \right] \right\}}}. \quad (3.62)$$

In equations (3.61) and (3.62), G_0 is the function defined by equation (3.56)₂ with $\theta \equiv 0$.

Equations (3.60), (3.61) and (3.62) show that the correlation distance of the perturbation goes to infinity in the limit $a \rightarrow +\infty$ in all cases (with superimposed oscillations if $\epsilon \neq 0$ and $\alpha < \frac{3}{2N}$); the larger the value of α , the quicker the divergence. This again illustrates the selection of Fourier components of the perturbation of large wavelength and the dependence of this phenomenon upon the value of α .

3.6 Deformation of the crack front in brittle fracture

3.6.1 Generalities

In this Section, we assume that crack propagation is governed by Griffith's law :

$$G(z, a) = G_c(z, a) \equiv G_c [1 + \delta g_c(z, a)] \quad , \quad |\delta g_c(z, a)| \ll 1. \quad (3.63)$$

In this equation the x -coordinate of the point of the crack front considered is denoted a as above, and $\delta g_c(z, a)$ represents the “normalized”, dimensionless fluctuation of the critical energy release rate $G_c(z, a)$. The distribution of this fluctuation is assumed to be statistically homogeneous and isotropic within the interface, so that its two-point autocorrelation function is given by

$$E[\delta g_c(z_1, a) \delta g_c(z_2, a)] \equiv \mathcal{G}_c(z_2 - z_1) \quad (3.64)$$

where $\mathcal{G}_c$ is an even function. The fluctuations of the crack advance resulting from those of the critical energy release rate are also statistically invariant in the direction of the crack front, so that equation (3.29) still applies.

Taking the Fourier transform of equation (3.63) and identifying terms of order 0 and 1 in the perturbation, one gets

$$\begin{cases} G(a) &= G_c \\ \frac{\widehat{\delta G}(k, a)}{G(a)} &= \widehat{\delta g_c}(k, a). \end{cases} \quad (3.65)$$

Note that equation (3.65)₁ implies that $G(a)$ must remain invariable, which requires a continuous adjustment in time of the quantities k and k_{III} of equations (3.9), that is of the loading. This condition being assumed to be fulfilled, combination of equations (3.15) and (3.65)₂ yields

$$\widehat{\delta a}(k, a) = \frac{a}{2} \frac{\widehat{\delta g_c}(k, a)}{\alpha - f(ka)} \quad \Rightarrow \quad \delta a(z, a) = \frac{a}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\delta g_c}(k, a)}{\alpha - f(ka)} e^{-ikz} dk. \quad (3.66)$$

Unfortunately, if $\alpha > 0$, the expression (3.66)₂ of $\delta a(z, a)$ is meaningless because the integral is divergent. Indeed, referring to Subsection 3.5.6 above, one sees that for such values of α , the

denominator has simple poles at the points $k = \pm p_0/a$. This means that *the problem is intractable in brittle fracture in the case of unstable 2D crack propagation*.

The origin of the problem can be best understood by considering the special case of a uniform distribution of the critical energy release rate within the interface. The condition of uniformity of G is then obviously met by a straight front. But if $\alpha > 0$, this is not the sole solution, because by equation (3.15), a sinusoidal perturbation of the front having $k = \pm p_0/a$, that is of wavelength $\lambda_0 \equiv 2\pi a/p_0$, generates a zero perturbation of G . The implication is existence of a bifurcation. Worse, new bifurcations continuously appear, since the reasoning just made applies at every instant. The consequence is that the problem is ill-posed, resulting in the divergent integral of equation (3.66)₂.

We shall therefore consider the sole case of stable 2D crack propagation ($\alpha < 0$) henceforward. Equation (3.66) then takes the form

$$\widehat{\delta a}(k, a) = -\frac{a}{2} \frac{\widehat{\delta g_c}(k, a)}{|\alpha| + f(ka)} \Rightarrow \delta a(z, a) = -\frac{a}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\delta g_c}(k, a)}{|\alpha| + f(ka)} e^{-ikz} dk \quad (3.67)$$

where the integral is convergent. It is important to note that there is no integral from a_0 to a here, that is, the values of $\widehat{\delta a}(k, a)$ and $\delta a(z, a)$ depend on the distribution of δg_c at the sole position $x = a$. In other words, the shape of the crack front is entirely determined by the instantaneous distribution of the critical energy release rate; there is no memory of its past distributions or the past shapes of the crack front. This characteristic feature of Griffith's propagation law will considerably simplify the mathematical treatment and bear important physical consequences, as will be seen.

3.6.2 Asymptotic expression of the power spectrum of the perturbation of the crack front

By the expression (3.67)₁ of $\widehat{\delta a}(k, a)$, the definition (B.2) of the two-point autocorrelation function, equation (3.27)₂ for the observable δg_c and the fact that the function $f(p)$ is even,

$$E[\widehat{\delta a}(k_1, a) \widehat{\delta a}(k_2, a)] = \frac{a^2}{4} \frac{E[\widehat{\delta g_c}(k_1, a) \widehat{\delta g_c}(k_2, a)]}{[|\alpha| + f(k_1 a)][|\alpha| + f(k_2 a)]} = \frac{a^2}{4} \frac{2\pi \delta(k_1 + k_2) \widehat{\mathcal{G}}_c(k_2)}{[|\alpha| + f(k_2 a)]^2}.$$

Comparison with equation (3.27)₂ for the observable δa then reveals that

$$\widehat{\mathcal{A}}(k, a) = \frac{a^2}{4} \frac{\widehat{\mathcal{G}}_c(k)}{[|\alpha| + f(ka)]^2}. \quad (3.68)$$

Now consider the limit $a \rightarrow +\infty$. There are again two cases :

- If $k = 0$, since $f(0) = 0$, equation (3.68) reduces to

$$\widehat{\mathcal{A}}(0, a) = \frac{\widehat{\mathcal{G}}_c(0)}{4\alpha^2} a^2. \quad (3.69)$$

- If $k \neq 0$, using equation (3.16) and the fact that the term $|\alpha|$ in equation (3.68) is negligible compared to the term $f(ka)$ which goes to infinity, one gets

$$\hat{\mathcal{A}}(k, a) \sim \frac{\hat{\mathcal{G}}_c(k)}{4k^2 \left[A + \operatorname{Re} \left(B |ka|^{2i\epsilon} \right) \right]^2} \quad (k \neq 0). \quad (3.70)$$

Equations (3.69) and (3.70) show that in the limit of large times, $\hat{\mathcal{A}}(0, a)$ goes to infinity, whereas $\hat{\mathcal{A}}(k, a)$ remains bounded for $k \neq 0$. These features are analogous to those found in Subsection 3.5.5 in the case of fatigue, and again symptomatic of a gradual selection in time of Fourier components of the perturbation of the crack front of large wavelength.

However the divergence of $\hat{\mathcal{A}}(0, a)$ for $a \rightarrow +\infty$ is quicker in brittle fracture than in fatigue (compare equations (3.35) and (3.69)), and similarly the asymptotic formula for $\hat{\mathcal{A}}(k, a)$, $k \neq 0$ goes to infinity in the limit $k \rightarrow 0$ more quickly in brittle fracture (compare equations (3.36) and (3.70))⁸. This means that the selection of Fourier components of δa of large wavelength is stronger in brittle fracture. The explanation lies in the presence, in fatigue, of an effect of memory of previous configurations of the crack front, which is absent in brittle fracture, as was noted above. Such a memory effect delays the elimination of Fourier components of δa of short wavelength.

3.6.3 Asymptotic expression of the autocorrelation function of the perturbation

Fourier inversion of equation (3.68) and use of the change of variable $p \equiv ka$ yields

$$\mathcal{A}(z, a) = \frac{a}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\mathcal{G}}_c(p/a)}{[|\alpha| + f(p)]^2} e^{-ipz/a} dp.$$

It follows that in the limit $a \rightarrow +\infty$,

$$\mathcal{A}(z, a) \sim \frac{\hat{\mathcal{G}}_c(0)}{4\pi} a \int_0^{+\infty} \frac{dp}{[|\alpha| + Ap + \operatorname{Re}(Bp^{1+2i\epsilon})]^2} \quad (3.71)$$

where use has been made of equation (3.16).

Comparison of equations (3.50) and (3.71) shows that the divergence of $\mathcal{A}(z, a)$ for $a \rightarrow +\infty$ is quicker in brittle fracture than in fatigue. This is obviously because it essentially arises from the divergence of the Fourier component $\hat{\mathcal{A}}(0, a)$ (other Fourier components remaining bounded), which was noted above to be stronger in brittle fracture.

⁸Since the problem is tractable in brittle fracture only if $\alpha < 0$, the comparison with fatigue can be made only in this case. The formulae for fatigue used here are therefore those pertaining to small values of α .

3.6.4 Asymptotic expression of the autocorrelation function of the slope of the perturbation

By equations (3.51) and (3.68),

$$E \left[\frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_2, a) \right] = \frac{a^2}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\mathcal{G}}_c(k)}{[|\alpha| + f(ka)]^2} k^2 e^{-ik(z_2 - z_1)} dk.$$

Discarding the term $|\alpha|$ which becomes negligible compared to $f(ka)$ in the limit $a \rightarrow +\infty$ and using equation (3.16), one gets from there

$$E \left[\frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_2, a) \right] \sim \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\mathcal{G}}_c(k)}{\left[A + \operatorname{Re} \left(B |ka|^{2i\epsilon} \right) \right]^2} e^{-ik(z_2 - z_1)} dk. \quad (3.72)$$

This expression cannot be simplified further, except if $\epsilon = 0$, in which case it reduces to $\frac{\mathcal{G}_c(z_2 - z_1)}{4[A + \operatorname{Re}(B)]^2}$.

Thus in the limit $a \rightarrow +\infty$, $E \left[\frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_1, a) \frac{\partial \delta a}{\partial z}(z_2, a) \right]$ oscillates indefinitely between finite values (except if $\epsilon = 0$, in which case it tends toward a constant). Also, it depends upon the distance $z_2 - z_1$ between the points of observation of the slope, unlike $\mathcal{A}(z, a)$ which is independent of z . Both of these features are analogous to those observed in fatigue for negative values of α (see Subsection 3.5.8).

3.6.5 Asymptotic expression of the distance of correlation of the perturbation

Using the definition (3.59) of the distance of correlation and equations (3.71) and (3.72), one gets, in the limit $a \rightarrow +\infty$:

$$L \sim \sqrt{a \frac{\int_0^{+\infty} \frac{\widehat{\mathcal{G}}_c(0) dp}{[|\alpha| + Ap + \operatorname{Re}(Bp^{1+2i\epsilon})]^2}}{\int_0^{+\infty} \frac{\widehat{\mathcal{G}}_c(k) dk}{\left[A + \operatorname{Re} \left(B (ka)^{2i\epsilon} \right) \right]^2}}}. \quad (3.73)$$

Thus L diverges for $a \rightarrow +\infty$ more quickly than in fatigue (compare to equation (3.62)). This is again connected to the fact that the selection of Fourier components of the perturbation of large wavelength is stronger in brittle fracture than in fatigue.

3.7 Synthesis

The main findings of this work can be summarized as follows :

– *General observations :*

* Although the mismatch of elastic properties between the materials introduces oscillations in the long-time behavior of many of the quantities studied, its overall role is relatively minor. It never changes the basic, bounded or divergent character of these quantities.

* The problem can be treated in fatigue for all values of the parameter α characterizing the stability or instability of 2D crack propagation. In brittle fracture, however, it can be treated only if 2D crack propagation is stable ($\alpha < 0$), because some apparently intractable bifurcation problem arises in the case of unstable 2D crack propagation ($\alpha > 0$).

– *In fatigue :*

* There is an effect of gradual selection in time of Fourier components of the perturbation of the crack front of large wavelength. The effect is present for all values of α , but is enhanced for $\alpha > 0$ by a dramatic “explosion” of Fourier components of large wavelength.

* The “wavyness” of the crack front, as measured by the autocorrelation function of the slope (derivative of the perturbation in the direction of the front), grows in time without bound for large values of α and tends toward a constant or oscillates for small ones.

* The distance of correlation of the perturbation of the crack front increases in time without bound in all cases.

– *In brittle fracture :*

* The gradual selection of Fourier components of the perturbation of the crack front of large wavelength is stronger than in fatigue. This is because in fatigue, it is mitigated by an effect of “memory” of previous configurations of the crack front which delays the elimination of Fourier components of short wavelength.

* The autocorrelation function of the slope tends toward a constant or oscillates in time, like in fatigue.

* The distance of correlation of the perturbation of the crack front diverges in time more quickly than in fatigue.

Acknowledgements

We wish to express our warm thanks to Profs. L. Mishuris and A. Movchan for having provided us with the values of the “ γ ” constants, without which this work would have been incomplete, prior to publication. Their friendly welcome in Liverpool and interesting comments are also gratefully acknowledged.

We also wish to thank M. Adda-Bedia, D. Bonamy, E. Katzav, L. Ponson, J. Schmittbuhl and R. Toussaint for several enlightening discussions.

Chapitre 4

Etude expérimentale

4.1 Introduction

La propagation du front de fissure à l'intérieur d'un matériau hétérogène, est une question centrale dans la compréhension de nombreux problèmes mécaniques. Ainsi des travaux expérimentaux ont été menés afin de pouvoir comprendre les éléments qui entrent en jeu. Parmi ces travaux, on peut citer d'une part le travail de Daguer et al. (1995) dans lequel les morphologies des fronts de fissures sont analysées pour deux alliages métalliques différents, et d'autre part les travaux de Delaplace et al. (1999) et Schmittbuhl et al. (2003b) qui ont étudié l'évolution du front de fissure dans le verre de plexiglas.

Toutes les études théoriques traitant les propriétés statistiques du front en quasi-statique, utilisent la théorie des fonctions de poids de Bueckner (1987) et Rice (1985), pour calculer les facteurs d'intensité de contraintes le long du front de fissure. Parmi eux, on peut distinguer deux groupes dépendant du type de la loi d'avancée utilisée. Le premier groupe, dont Schmittbuhl and Roux (1995) et Schmittbuhl and Vilotte (1999), utilise le critère d'Irwin comme loi d'avancée dans le cadre de la rupture fragile. Le second groupe, parmi lequel Favier et al. (2006b), utilise la loi de Paris comme critère de propagation de la fissure.

Nombre de ces travaux expérimentaux se sont focalisés sur la détermination du coefficient de rugosité du front de la fissure, mais les résultats trouvés sur ce coefficient, demeurent pour de multiples raisons controversés. En particulier on trouve des valeurs de $\xi = 0.5 - 0.6$ expérimentalement et pour une analyse au premier ordre $\xi = 0.3$ ou $\xi = 0.5$ selon les modèles.

L'objectif de notre travail est de reprendre dans une autre optique, les expériences de Delaplace et al. (1999), afin de pouvoir mesurer l'évolution de la perturbation du front en calculant des grandeurs liées à celle de la fonction d'auto-corrélation, en plus du coefficient de rugosité. Après

avoir présenté la description concernant la préparation des échantillons et le système mécanique et optique, nous aborderons ensuite l'étude théorique en utilisant la formulation de Bueckner-Rice pour une fissure semi-infinie, soumise à un chargement linéique sur ses faces. Enfin, les résultats théoriques obtenus, seront comparés avec ceux de l'expérimentation.

4.2 Méthode expérimentale de la rupture

Ce travail, fruit d'une collaboration de trois mois, a été mené à l'Institut Physique du Globe de Strasbourg avec Jean Schmittbuhl directeur de recherche CNRS, Renaud Toussaint, chargé de recherche et Mélanie Grob, étudiante en thèse avec J. Schmittbuhl dont le sujet porte sur l'étude expérimentale de la propagation de la rupture en milieu hétérogène, par l'intermédiaire d'imagerie optique et acoustique.

4.2.1 Préparation des échantillons

Les échantillons sont faits à partir du verre de plexiglas, le polyméthacrylate (PMMA). Chaque échantillon est obtenu à partir de l'assemblage de deux plaques de PMMA (voir Schmittbuhl and Måløy (1997); Delaplace et al. (1999)) dont l'une est épaisse et l'autre mince.

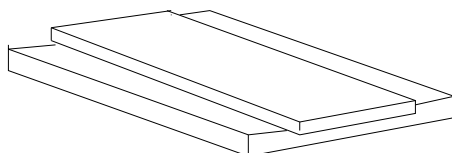


FIG. 4.1 – Deux plaques de plexiglas

La plaque épaisse a 16cm de longueur, 14 cm de largeur et 1cm d'épaisseur alors que celle qui est mince a pour dimension 17cmx12cmx0.5cm. Chaque plaque est alors sablée sur l'une de ses faces, par des particules dont les tailles varient entre $100\mu m$ et $150\mu m$. Le sablage introduit donc des aspérités, ce qui fait que ces surfaces deviennent rugueuses. L'une des conséquences du sablage, est que les plaques de PMMA perdent leur transparence. Les deux plaques sont assemblées suivant leurs faces sablées et sont ensuite mises dans une sorte de moule fait avec de l'aluminium.

Ce dispositif, permet de maintenir ces deux plaques collées, avec une force de 10N.m. L'ensemble moule et plaques, est introduit dans un four et cuit dans des conditions normales de pressions pendant 30 minutes à une température de 205C.



(c)

FIG. 4.2 – Préparation des plaques

Après la cuisson, on obtient finalement un unique bloc qui redevient transparent, car de nouvelles chaînes de polymères sont formées à travers l'interface sous l'effet du chargement appliqué sur le moule. L'interface est hétérogène à cause des microstructures injectées durant le sablage. Durant l'expérience, quand les plaques sont ouvertes la fissure se propage et les chaînes de polymères se disloquent à travers l'interface. Ainsi la différence de réfraction sur l'interface revient, et la surface de fissure *c'est à dire* la partie ouverte, devient opaque à cause de la diffusion de la lumière des microstructures. La frontière située entre la zone transparente et celle opaque, constitue le front de la fissure.

4.3 Montage mécanique

L'échantillon obtenu est déposé sous un microscope sur lequel est placé un appareil photo numérique Nikon D200. Cet appareil permet de prendre des images de taille 1cmx1.5cm, d'une partie du front. La plaque épaisse de l'échantillon obtenu par thermocollage, est bloquée dans un dispositif mécanique en aluminium, construit spécialement pour cette expérimentation.

On impose un déplacement normal grâce à un rouleau lié à un moteur qui vient appuyer sur la plaque mince pour provoquer une ouverture en mode 1 lorsque le moteur qui dirige la table de translation est actionné. L'intérêt de ce rouleau est de permettre un appui uniforme sur toute la largeur de la plaque mince. Le rouleau se déplace verticalement de façon quasi-statique

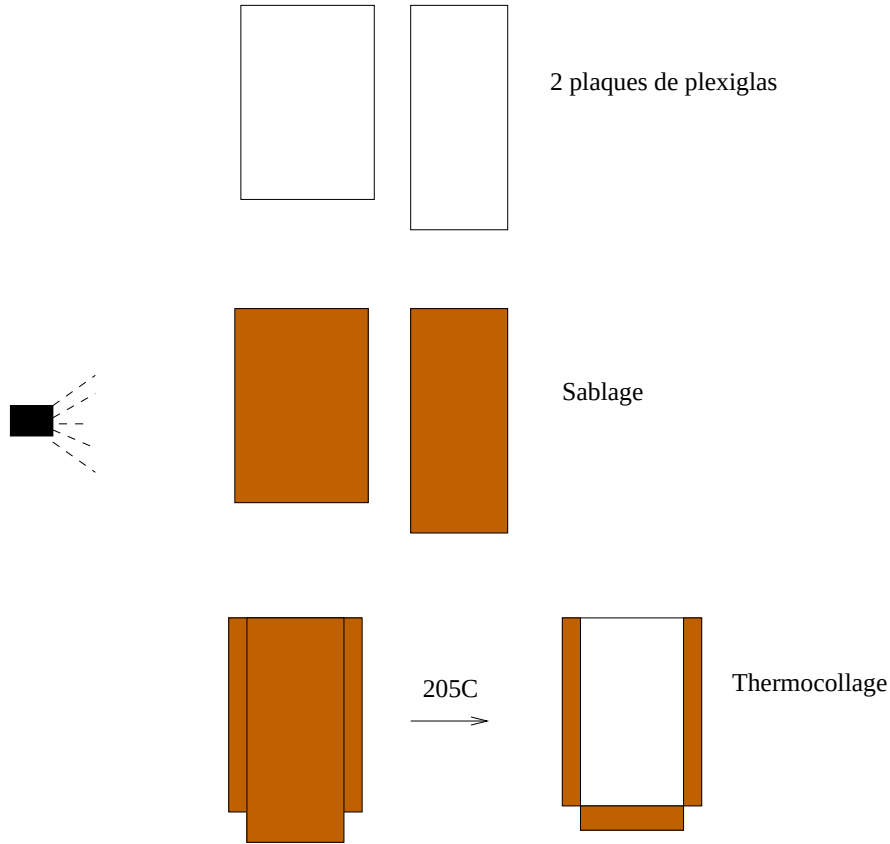


FIG. 4.3 – Procédure de préparation des échantillons

à une vitesse de l'ordre de $10^{-7}m/s$. Un capteur de force est placé sur la table de translation de manière à mesurer la force appliquée par le rouleau. Régulièrement, on supprime le chargement appliqué afin de pouvoir arrêter la propagation de la fissure et des photos du front sont prises. La fissure se trouve dans le plan (x, y) : l'axe x est dans la direction de l'avancée de la fissure alors que l'axe y est parallèle à la position moyenne du front. Durant l'expérience, plusieurs photos du front ont été prises lors de la propagation. Lorsque l'appareil photo n'est plus dans le champ du front, on déplace le microscope dans la direction de x pour pouvoir bien le positionner. Sur la figure 4.6 on peut voir une photo du front.

4.4 Détermination théorique de la rugosité du front

4.4.1 Géométrie et loi d'avancée

Pour modéliser le dispositif expérimental, nous considérons une fissure semi-infinie dans un matériau élastique homogène. La fissure est située dans le demi-plan $y = 0$, $x < 0$. Le système

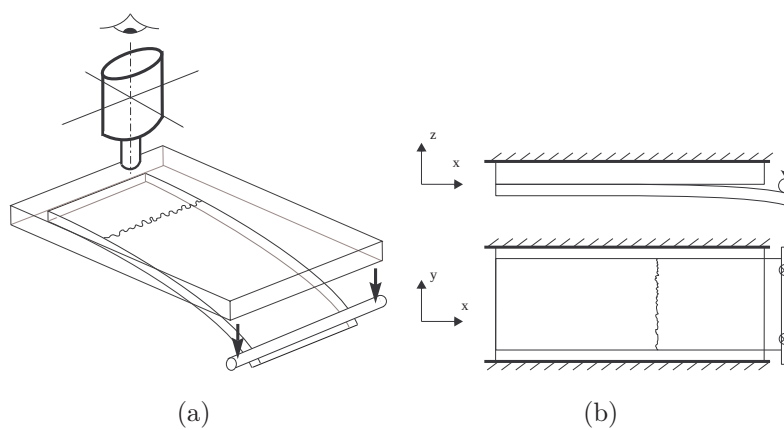


FIG. 4.4 – Schéma du dispositif mécanique

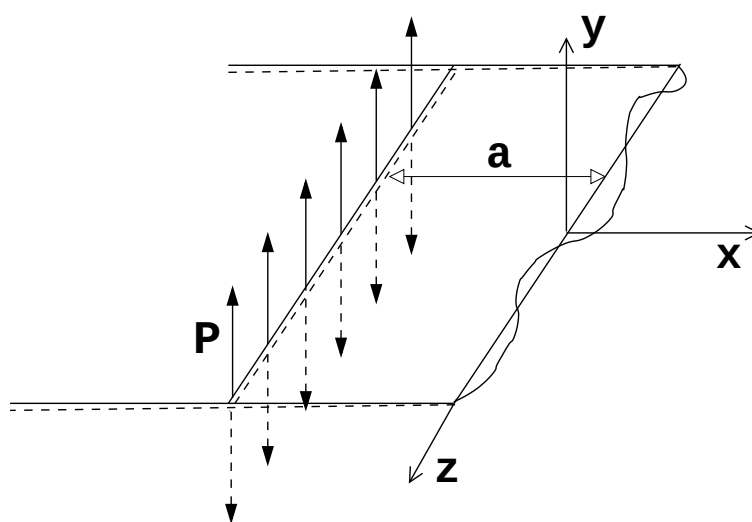


FIG. 4.5 – fissure semi-infinie avec front perturbé

est soumis à des forces de tractions $\pm P \vec{e}_y$ appliquées sur les faces et situées à une distance a du front (*figure 4.5*). Nous sommes alors en présence d'un cas particulier du problème déjà traité dans le chapitre 3. Contrairement à celui-ci où l'implication des paramètres α (stabilité) et ϵ (hétérogénéité), a conduit à des résultats assez lourds, nous verrons que dans le cas, l'expérience correspondant à $\alpha = -1/2$ et $\epsilon = 0$, les calculs sont plus simples à effectuer aussi bien au niveau de l'établissement de l'équation d'évolution du front que l'étude statistique du désordre. Aussi plutôt que de reprendre simplement les résultats du chapitre 3, nous avons choisi ici de redémontrer les équations qui nous sont utiles afin que le lecteur ne voulant pas se perdre sur les subtilités du chapitre 3, puisse néanmoins comprendre la démarche.

Nous supposons que pour chaque position d'équilibre du front de la fissure, le critère d'Irwin est satisfait en tout point M du front :

$$K_1(M) = K_c(M) \quad (4.1)$$

où $K_1(M)$ et $K_c(M)$ représentent respectivement le FIC et la ténacité au point M . Par la suite, on omet l'indice 1 de $K_1(M)$ pour des raisons de simplification.

Si la ténacité est uniforme, le front de la fissure reste droit, durant la propagation.

Le FIC le long du front est donné par :

$$K = P \sqrt{\frac{2}{a\pi}} \quad (4.2)$$

où P est la valeur du chargement appliqué et vérifie, en utilisant $K = K_c$

$$P = K_c \sqrt{\frac{a\pi}{2}} \quad (4.3)$$

Nous remarquons que la propagation est stable car le chargement doit être croissant pour que la fissure avance.

Maintenant, perturbons légèrement la ténacité :

$$K_c(z, x) = \overline{K}_c(1 + \kappa(z, x)), \quad |\kappa| \ll 1 \quad (4.4)$$

Ce qui provoque des variations $\delta a(z, a)$ et $\delta K(z, a)$ de la position du front et du FIC (Voir *figure 4.5*). On a :

$$\begin{cases} a(z, a) & \equiv & \bar{a} + \delta a(z, a), & |\delta a(z, a)| & \ll & \bar{a} \\ K(z, a) & \equiv & K(a) + \delta K(z, a), & |\delta K(z, a)| & \ll & K(a) \end{cases} \quad (4.5)$$

où $\bar{a}$ et $K(a)$ sont leurs valeurs moyennes.

En développant le critère d'Irwin (4.1) au premier ordre, et après identification des termes d'ordre

0 et 1, on a :

$$\begin{cases} K(a) = \overline{K}_c \\ \frac{\delta K(z, a)}{K(a)} = \kappa(z, a) \end{cases} \quad (4.6)$$

4.4.2 Evolution temporelle des composantes de Fourier de la perturbation

La variation du FIC est donnée au premier ordre par l'équation (3.7) du chapitre 3 pour $\epsilon = 0$, c'est à dire par la formule suivante :

$$\frac{\delta K(z, a)}{K(a)} = -\frac{1}{2a}\delta a(z, a) + \frac{1}{2\pi}PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta a(z', a) - \delta a(z, a)}{(z' - z)^2} dz' \quad (4.7)$$

En utilisant la définition (2.6) de la transformée de Fourier de $\frac{\delta K(z, a)}{K(a)}$ et $\delta a(z, a)$, on obtient :

$$\frac{\widehat{\delta K}(k, a)}{K(a)} = -\frac{1}{2a}\widehat{\delta a}(k, a) + \frac{\widehat{\delta a}(k, a)}{2\pi}VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ik(z'-z)} - 1}{(z' - z)^2} dz' \quad (4.8)$$

L'utilisation de la nouvelle variable $u = \frac{z' - z}{a}$ où $a = \overline{a}$, permet d'avoir finalement :

$$\frac{\widehat{\delta K}(k, a)}{K(a)} = -\frac{1}{2a}\widehat{\delta a}(k, a) + \frac{\widehat{\delta a}(k, a)}{2a\pi}PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ika u} - 1}{u^2} du \quad (4.9)$$

On insère alors l'équation (4.6) dans l'équation (4.9), et on obtient finalement

$$\widehat{\delta a}(k, a) = -\frac{2a\hat{\kappa}(k, a)}{1 + |ka|} \quad (4.10)$$

A noter que cette équation permet de déterminer $\widehat{\delta a}(k, a)$ de façon explicite si $\widehat{\delta K}(k, a)$ est connu. Quand seules les propriétés statistiques sont connues, il faut néanmoins avoir recours à une étude statistique.

4.4.3 Etude statistique du désordre du front de la fissure

4.4.3.1 Fonction d'autocorrélation et son spectre

L'étude statistique proposée est également analogue à celle traitée dans la section 3.5.3 du chapitre 3. Nous considérons un grand nombre de réalisation possible de l'hétérogénéité et de la géométrie du front de la fissure. Nous supposons également que la fonction $\delta\kappa(z, x)$ est statistiquement invariante dans les directions z et x ainsi que la fonction $\delta a(z, t)$ dans la direction z . Ainsi les fonctions d'autocorrélations dépendent seulement de la position relative des points

considérés. L'équation (3.26) permet d'avoir :

$$E [\kappa(z_1, a) \kappa(z_2, a)] = \mathcal{K}(z_2 - z_1) \quad (4.11)$$

$$E [\delta a(z_1, a) \delta a(z_2, a)] = \mathcal{A}(z_2 - z_1, a) \quad (4.12)$$

La fonction $\mathcal{A}(z, a)$ donne des informations statistiques sur la géométrie du front de la fissure. En utilisant la propriété (B.3) de l'annexe (B.3), le spectre de la fonction d'autocorrélation est donné par :

$$\hat{\mathcal{A}}(k, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E [\delta \hat{a}(k_1, a) \delta \hat{a}(-k, a)] dk_1 \quad (4.13)$$

en insérant l'équation (4.10), on obtient finalement :

$$\hat{\mathcal{A}}(k, a) = \frac{4a^2}{(1 + |ka|)^2} \hat{\mathcal{K}}(k) \quad (4.14)$$

pour $a \gg a_0$ on a :

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{A}}(k, a) = \frac{4}{k^2} \hat{\mathcal{K}}(k), & \text{pour } k \neq 0 \\ \hat{\mathcal{A}}(0, a) = 4\hat{\mathcal{K}}(0)a^2 \end{cases} \quad (4.15)$$

Essayons maintenant de déterminer l'expression de la fonction d'autocorrélation pour $a \rightarrow \infty$.

Ce qui se fait en prenant l'inverse de la transformée de Fourier de l'équation (4.13) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(z, a) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathcal{A}}(k, a) e^{-ikz} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4a^2}{(1 + |ka|)^2} \hat{\mathcal{K}}(k) e^{-ikz} dk \\ &= \frac{2a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + |p|)^2} \hat{\mathcal{K}}\left(\frac{p}{a}\right) e^{-i\frac{p}{a}z} dp & \text{avec } p = ka \\ &= \frac{2a}{\pi} \hat{\mathcal{K}}(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + |p|)^2} dp & \text{avec } a \rightarrow \infty \\ &= \frac{4a}{\pi} \hat{\mathcal{K}}(0) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + p)^2} dp \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ce qui permet d'avoir en fin de compte pour $a \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{A}(z, a) \sim \frac{4}{\pi} a \hat{\mathcal{K}}(0) \quad (4.17)$$

4.4.3.2 Etude du comportement de la variance de la fluctuation

La quantité considérée ici est :

$$E \left[(\delta a(z, a) - \delta a(0, a))^2 \right] \equiv \sigma^2(z, a) \quad (4.18)$$

Elle caractérise la déviation du front de la fissure par rapport à un front droit.

On a

$$\sigma^2(z, a) = 2\mathcal{A}(0, a) - 2\mathcal{A}(z, a) \quad (4.19)$$

donc en adoptant le même raisonnement que lors du calcul de $\mathcal{A}(z, a)$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma^2(z, a) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{A}}(k, a) dk - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{A}}(k, a) e^{-ikz} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4a^2}{(1 + |ka|)^2} \widehat{\mathcal{K}}(k) (1 - e^{-ikz}) dk \\ &= \frac{2a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + |p|)^2} \widehat{\mathcal{K}}\left(\frac{p}{a}\right) (1 - e^{-i\frac{p}{a}z}) dp \end{aligned} \quad (4.20)$$

Pour $a \gg a_0$ et $z \gg b$, où b est la longueur de corrélation de κ ($b = 0$ correspond au cas d'un bruit blanc), on a :

$$\sigma^2(z, a) \sim 4\widehat{\mathcal{K}}(0)z \quad (4.21)$$

4.4.3.3 Exposant de rugosité

Dans le plan de fissure, la rugosité du front est analysée en terme d'auto-affinité. La perturbation du front $\delta a(z)$ est statistiquement invariant par l'échelle de transformation : $(z, \delta a(z)) \rightarrow (\lambda z, \lambda^\xi \delta a)$ où ξ est l'exposant de rugosité.

Il existe plusieurs techniques qui permettent de déterminer le comportement d'auto-affinité. Parmi celles-ci, il y a le *spectre de puissance* pour lequel le spectre de la fonction d'autocorrélation suit une loi de puissance de la forme :

$$\widehat{\mathcal{A}}(k) \propto k^{-1-2\xi} \quad (4.22)$$

Il existe une autre façon d'écrire cette loi dans le domaine des espaces :

$$\sigma^2(z, a) \propto |z|^{2\xi} \quad (4.23)$$

Dans le cadre de l'étude théorie, on suppose que la fluctuation de la ténacité est donnée par un bruit blanc : ce qui entraîne : $\widehat{\mathcal{K}}(k) = \widehat{\mathcal{K}}_0 = Cst$.

Alors, en identifiant l'équation (4.15) ou (4.23) à la loi du spectre de puissance, on trouve $\xi = 0.5$.

4.5 Résultats expérimentaux

4.5.1 Traitement de l'image et du front extrait

Le logiciel utilisé pour le traitement des données est le logiciel matlab. Dans un premier temps en utilisant l'histogramme de l'image, nous allons extraire le front de fissure puis à l'aide de différentes boîtes à outils de matlab, calculer la fonction d'autocorrélation et son spectre.

4.5.1.1 Extraction du front

Cette partie comprend les principales étapes du traitement pour l'extraction du front à partir d'une photo. Les photos prises ont une taille de 3872x2592 pixels. Chaque pixel a une taille de $3,5\mu m$.

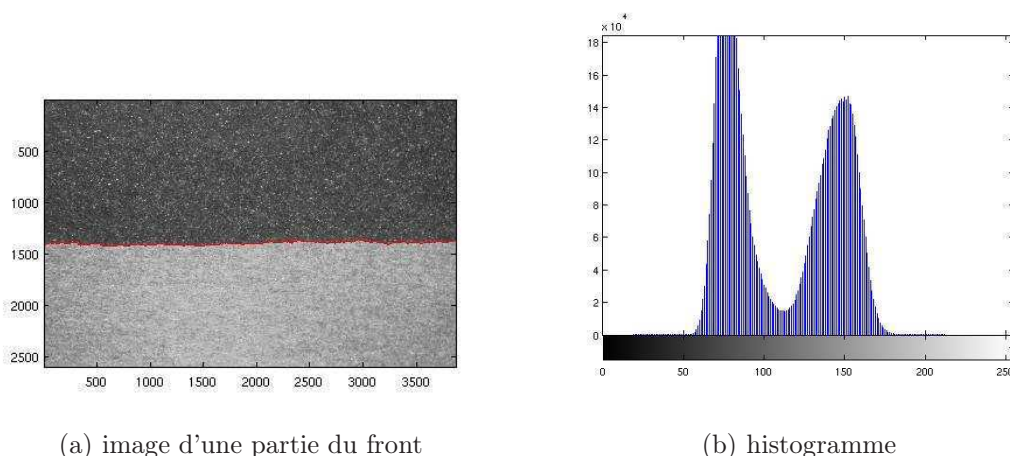


FIG. 4.6 – Image du front et histogramme

1. On transforme la photo couleur en niveau de gris par le programme de matlab *rgb2gray*, on obtient alors typiquement l'image de la figure 4.6(a) qui comprend deux parties distinctes : une zone sombre qui correspond à la partie de l'échantillon non fracturée et une zone claire correspondant à une région ouverte.
2. On en sort un graphique correspondant à l'histogramme voire figure (4.6(b)). Cet histogramme a deux lobes qui correspondent aux niveaux de gris maximum des parties fracturée et non ouverte.
3. Le seuil minimal entre les deux lobes définissant une zone de transition entre les deux zones sombre et claire, correspond au front de fissure.

4. On transforme l'image en zone de 1 (partie supérieure au seuil) et en zone 0 sinon. Au final, l'extraction du front correspond à la frontière entre les zones "1" et "0", constitué de la réunion de points (X_i, Y_i) où X_i définissant la position le long du front .

En utilisant la méthode décrite ci-dessus aux images du front de la figure 4.6, on obtient l'évolution de la figure 4.7. Durant l'expérience, pour chaque avancée du front, sa position notée $a(z, t)$,

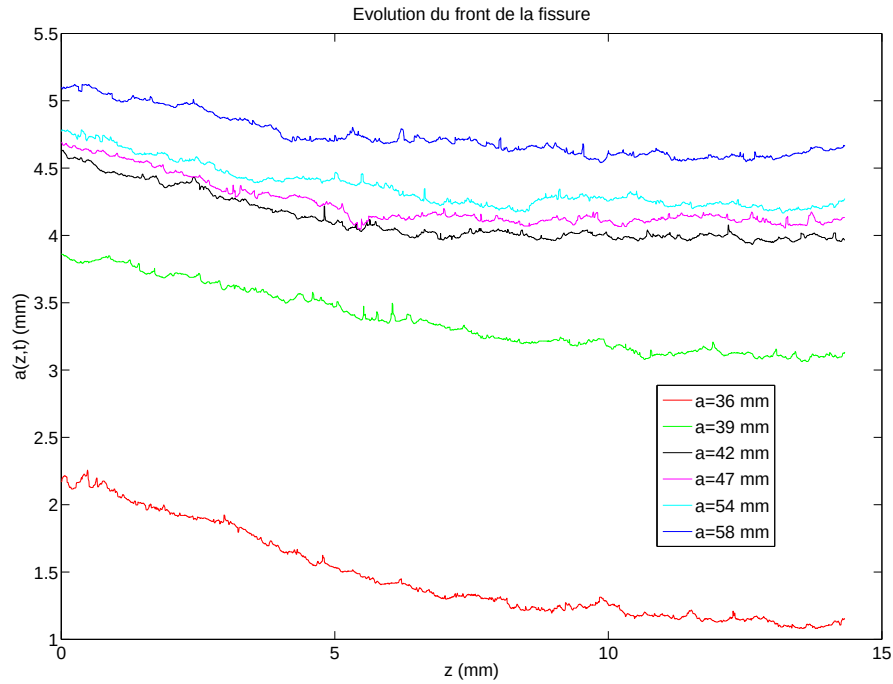


FIG. 4.7 – Fronts superposés extraits à différents instants de la propagation

est repérée par rapport à la ligne d'application de la charge. On identifie $X_i = z_i$ et $Y_i = a(z_i, t)$. Les fluctuations observées le long du front sont données par $\delta a(z_i, t) = a(z_i, t) - \overline{a(t)}$ où $\overline{a(t)}$ est une avancée uniforme moyenne du front.

Ce qui nous permet alors de calculer des grandeurs statistiques liées à ces perturbations, $\mathcal{A}(z_i)$ et $\sigma^2(z_i)$, en adoptant le schéma suivant, pour chaque instant t c'est à dire pour chaque position d'équilibre du front :

- à partir de l'ensemble $(z_i, a(z_i))$, on détermine $\delta a(z_i)$
- on enlève ensuite la tendance linéaire pouvant influencer les fluctuations. En effet, comme on ne s'intéresse qu'à une partie du front, ce dernier n'est défini qu'à l'intérieur de cette

lucarne. En déterminant les fluctuations, on observe une apparition de saut de $\delta a(z_i)$ au niveau des extrémités du front qui est artificiel et modifiera sans raison d'être les grandeurs statistique telles $\mathcal{A}(z)$, $\hat{\mathcal{A}}(k)$, $\sigma^2(z)$. Pour remédier à cela, on extrait une tendance linéaire,

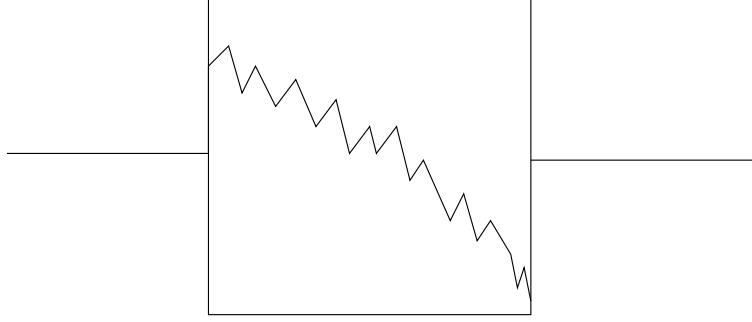


FIG. 4.8 – fluctuation du front avec tendance linéaire

ramenant les valeurs des fluctuations à 0 aux extrémités, ce qui permet de définir une autre fluctuation en posant $\delta a(z_i)^* = \delta a(z_i) - \text{Tendancelinaire}$

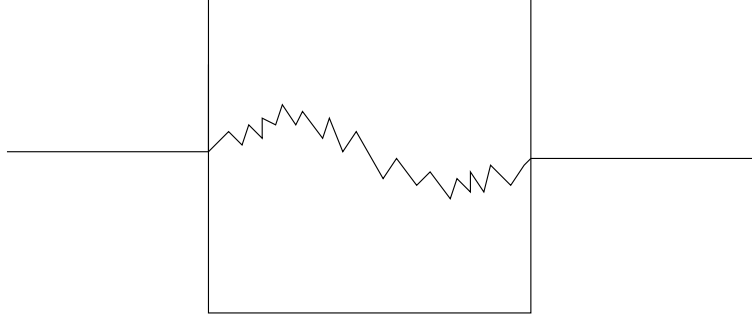


FIG. 4.9 – fluctuation du front sans tendance linéaire

4.5.1.2 Détermination de la fonction d'autocorrélation et de la variance

L'autocorrélation d'un signal est la corrélation croisée de ce signal avec lui-même. Dans cette partie, comme nous nous intéressons à la rugosité du front, ce signal va correspondre aux fluctuations qui s'y observent.

La fonction d'autocorrélation est définie par

$$\mathcal{A}(z) \equiv E[\delta a(z + z')\delta a(z)] \quad (4.24)$$

L'utilisation du critère d'ergodicité permet de transformer la moyenne sur un grand nombre de réalisation en une moyenne spatiale :

$$\mathcal{A}(z) \equiv E[\delta a(z+z')\delta a(z')] \equiv \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \delta a(z+z')\delta a(z')dz' \quad (4.25)$$

Puisqu'on est en présence d'un nombre fini de données, pour tout z_i on a :

$$\mathcal{A}(z_i) \sim \frac{1}{2L} \sum_j \delta a(z_j)\delta a(z_i+z_j)\Delta z \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (4.26)$$

On en déduit alors, la variance par :

$$\sigma^2(z_i) = 2\mathcal{A}(0) - 2\mathcal{A}(z_i) \quad (4.27)$$

en différentes positions du front représentées sur la figure 4.7.

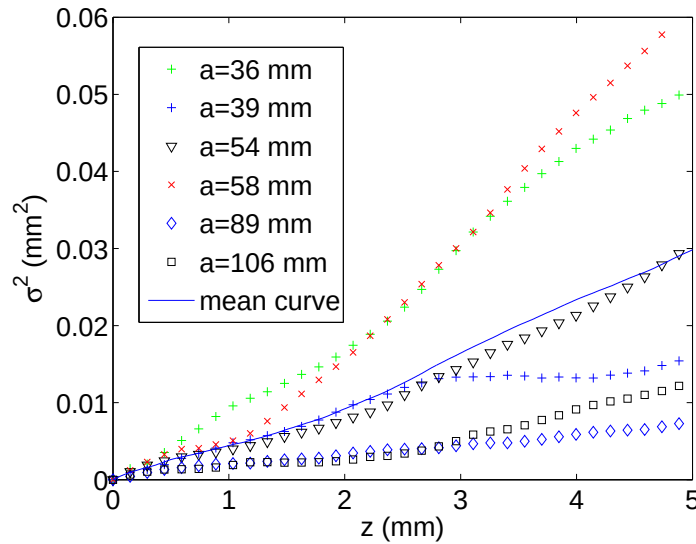


FIG. 4.10 – Courbes d'évolutions de la variance

Sur la figure 4.10, les courbes représentant plusieurs positions du front sont tracées. Ce qui permet de faire les remarques suivantes :

1. Les valeurs de $\sigma(z, a)$ pour plusieurs fronts, semblent osciller autour d'une valeur moyenne durant la propagation. Ce qui semble correspondre aux fluctuations de chaque position du front autour d'un état stable.
2. L'état stable observé est en accord avec le comportement asymptotique de la variance trouvé dans l'équation (4.21).
3. La valeur moyenne de σ semble varier linéairement en fonction de z , ce qui correspond à la prédiction de la théorie.

4.5.1.3 Détermination du spectre de la fonction d'autocorrélation

Dans notre expérience, la courbe du spectre de la fonction d'autocorrélation au cours de la propagation du front est donnée dans la figure 4.11.

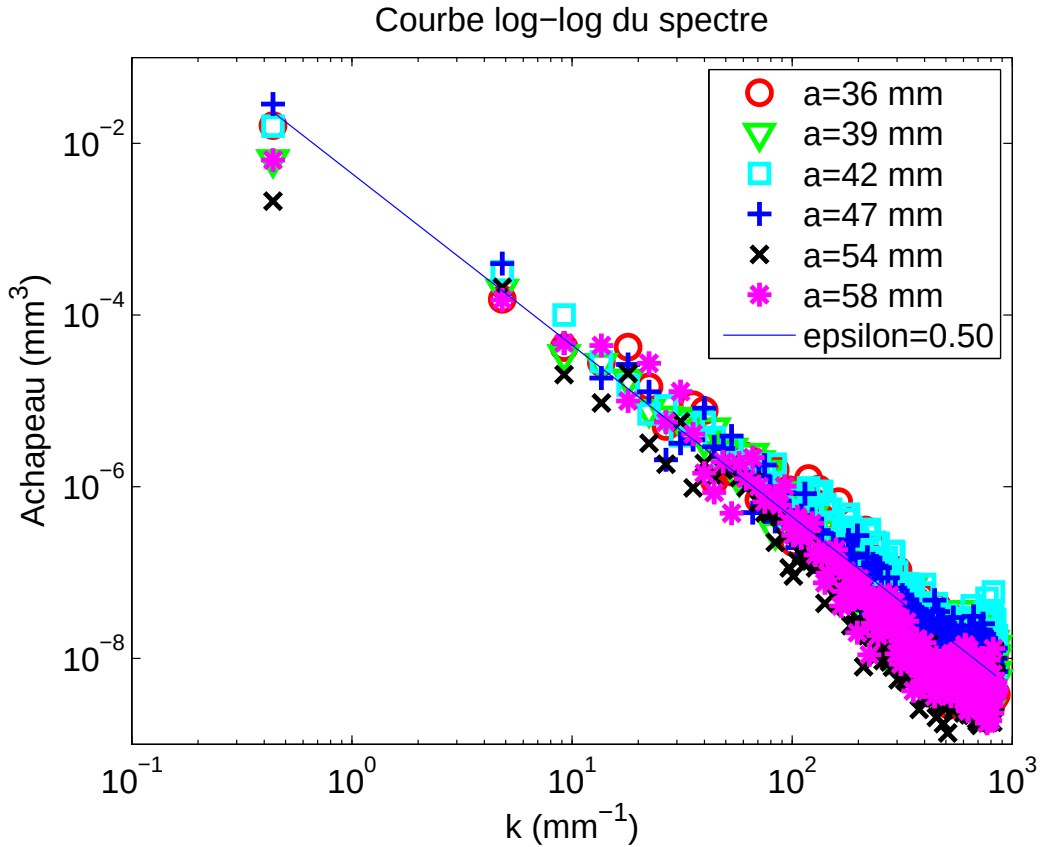


FIG. 4.11 – Spectre de la fonction d'autocorrélation

Elle représente l'évolution de $\hat{\mathcal{A}}(k)$ en fonction du k en échelle logarithmique pour plusieurs positions a de la fissure. La pente de la droite d'ajustement obtenue, permet de trouver $\xi = 0.5$. A travers cette analyse, on peut observer que :

1. Pour toutes les positions du front, $\hat{\mathcal{A}}(k, a)$ est indépendant de a . Ce qui est en accord avec son comportement asymptotique obtenu au niveau de l'équation (4.15) pour de grandes valeurs de a .
2. La valeur de l'exposant de rugosité $\xi = 0.5$ correspond à la valeur prédite par notre étude théorique.

4.6 Conclusion

On a étudié expérimentalement la propagation de fissure à travers l'interface de deux plaques de plexiglas. La fluctuation de la ténacité est introduite par une technique de sablage qui a ainsi créée des aspérités sur les surfaces des plaques. Durant la propagation, le front est localement coincé dans des régions de forte ténacité et devient ainsi rugueux.

Les résultats expérimentaux sont comparés avec ceux d'un modèle théorique basé sur la propagation d'une fissure semi-infinie en mode 1. Ainsi la variance de la fluctuation $\sigma(z, a)$ et le spectre de la fonction d'autocorrélation $\hat{\mathcal{A}}(k)$ obtenues à partir du dépouillement des données expérimentales, semblent être en accord avec nos résultats théoriques. La rugosité est examinée en terme d'auto-affinité et la valeur de l'exposant de rugosité à travers l'interface est $\xi = 0.5$ en première approximation.

Notre étude grossière semble donc donner un bon accord entre expérience et théorie : $\xi = 0.5 - 0.6$ est la valeur expérimentale déjà trouvée dans de nombreux papiers.

Subsistent alors à comprendre l'origine des différents coefficients trouvés théoriquement, $\xi = 0.3$ ou $\xi = 0.6$ selon les papiers. Les différences peuvent venir de la nature du bruit, des échelles considérées, de l'approximation au premier ordre mais aussi de travers numériques ; notre approche analytique présente sur ce dernier point un avantage. Néanmoins le débat n'est pas encore clos.

Un récent papier expérimental de Santucci et al. (2009) met le doigt sur la nécessité de bien définir les échelles de longueur sur lesquelles les résultats sont valables. Ils trouvent en effet $\xi = 0.5$ pour des échelles en-dessous de la taille des hétérogénéités et $\xi = 0.3$ au-dessus. C'est donc sur les échelles de longueur qu'il faut à notre avis, travailler à l'avenir.

Chapitre 5

Calcul du noyau fondamental d'un système de deux fissures en forme de fentes parallèles et coplanaires, chargées en mode I

5.1 Introduction

Un certain nombre de travaux récents ont été consacrés à l'étude de la déformation du front de fissures planes se propageant dans des matériaux hétérogènes. Parmi ces travaux, nous pouvons citer notamment celui de Favier et al. (2006b) qui ont considéré le cas de la propagation d'une fissure en forme de fente infinie chargée en mode 1 dans un milieu infini.

Toutes ces études nécessitent une formule donnant les FIC le long du front perturbé. La première et la plus simple a été donnée par Rice (1985) pour la fissure semi-infinie située dans un milieu infini. D'autres cas ont été étudiés, comme par exemple celui d'une fissure en forme de fente infinie dans un milieu infini (Leblond et al. (1996)), mais jusqu'à présent les géométries considérées ne comportaient qu'une seule fissure, ce qui ne permettait pas l'étude de la coalescence des fissures. Le but de ce chapitre est donc de poser les bases de l'étude de la déformation des fronts pendant la coalescence des fissures, en donnant les formules des FIC perturbés pour la géométrie-type la plus simple possible : deux fissures en forme de fentes infinies, coplanaires et parallèles situées dans un milieu infini chargé en mode 1.

Pour cette géométrie, le “noyau fondamental” qui apparaît dans la formule donnant les FIC

perturbés se réduit à six fonctions inconnues décrivant les interactions entre les quatre fronts ; le problème revient donc à la détermination de ces fonctions.

La méthode développée ici, représente l'extension à la géométrie considérée, de la méthode mise au point par Leblond et al. (1996) pour une unique fissure en forme de fente infinie. Cette technique utilise une équation due à Rice donnant la perturbation du noyau fondamental résultant d'une perturbation arbitraire du front. Elle consiste à appliquer à cette équation des mouvements préservant la forme des fissures, tout en modifiant leur taille et leur orientation. Cette procédure fournit un système de six équations intégrodifférentielles non linéaires, lesquelles sont ensuite transformées en équations différentielles ordinaires non linéaires par transformation de Fourier, puis résolues numériquement.

Un aspect remarquable de cette méthode est qu'elle permet de calculer le noyau fondamental en évitant le calcul complet de la solution élastique très complexe impliquée.

5.2 Etude de deux fissures coplanaires en forme de fentes infinies : éléments de base

5.2.1 Cas du problème 2D

Avant d'aborder le problème de la perturbation coplanaire d'un système de deux fissures en forme de fentes infinies parallèles et coplanaires, il est nécessaire, pour des raisons techniques qui apparaîtront dans la suite, de disposer de la solution dans le cas 2D. Cette section est consacrée à cette question.

5.2.1.1 FIC pour deux fissures symétriques

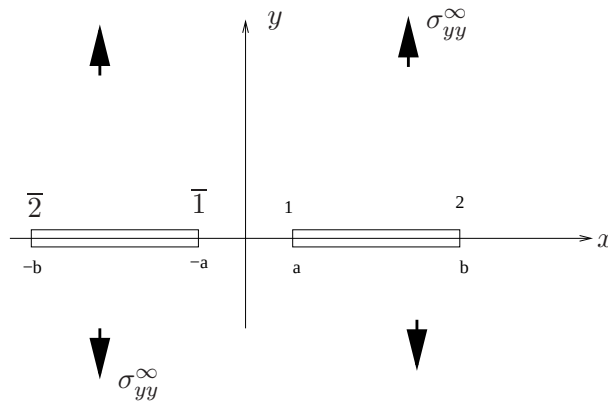


FIG. 5.1 – Cas 2D. Deux fissures colinéaires de même longueur

Nous considérons un milieu infini 2D (en fait 3D en déformation plane) contenant deux fissures de même longueur et soumis à un champ de traction uniforme à l'infini σ_{yy}^∞ dans la direction y (figure 5.1). On note 1, $\bar{1}$, 2, $\bar{2}$ les quatre pointes de la fissure, situées respectivement en $x = a$, $x = -a$, $x = b$ et $x = -b$.

L'objectif de cette partie est de déterminer les FIC aux pointes des fissures ainsi que leurs variations induites par une légère avancée des pointes 1, $\bar{1}$, 2, $\bar{2}$.

Nous nous sommes référés aux travaux de Sadowsky and Troy (1956) donnant les FIC aux différentes pointes pour deux fissures de longueurs égales :

– pour les pointes externes 2, $\bar{2}$

$$K_2 = K_{\bar{2}} = b^{3/2} \sqrt{\frac{\pi}{b^2 - a^2}} \left(1 - \frac{\mathbf{E}'}{\mathbf{K}'} \right) \sigma_{yy}^\infty \quad (5.1)$$

– pour les pointes internes 1, $\bar{1}$

$$K_1 = K_{\bar{1}} = \sqrt{\frac{\pi}{a(b^2 - a^2)}} \left(b^2 \frac{\mathbf{E}'}{\mathbf{K}'} - a^2 \right) \sigma_{yy}^\infty \quad (5.2)$$

Dans ces expressions $\mathbf{E}'$ et $\mathbf{K}'$ sont des intégrales elliptiques complètes de première et seconde espèces, définies en fonction du paramètre

$$k \equiv \frac{a}{b} \quad (5.3)$$

par les formules

$$\left\{ \begin{array}{ll} k' & \equiv \sqrt{1 - k^2} \\ \mathbf{E} & \equiv \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha \\ \mathbf{K} & \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \\ \mathbf{E}' & \equiv \mathbf{E}(k') & \equiv \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \alpha} d\alpha \\ \mathbf{K}' & \equiv \mathbf{K}(k') & \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \alpha}} \end{array} \right. \quad (5.4)$$

5.2.1.2 FIC pour deux fissures de longueurs différentes

Pour pouvoir évaluer les variations des facteurs d'intensité de contraintes dues à de légères avancées des pointes, il nous faut d'abord connaître les FIC pour deux fissures de différentes longueurs, ce qui nous amène à définir la géométrie suivante :

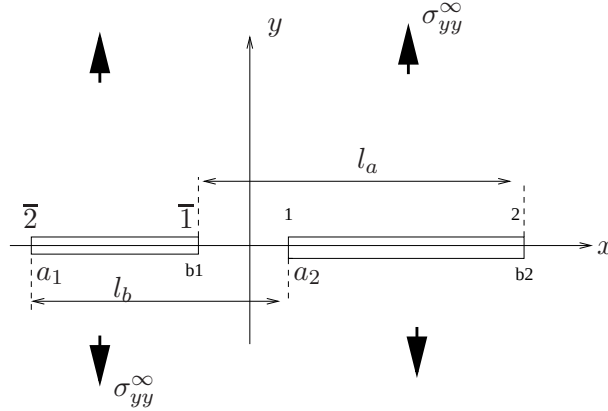


FIG. 5.2 – Cas 2D. Deux fissures colinéaires de différentes longueurs

Nous allons maintenant donner les expressions des FIC pour les pointes 1, $\bar{1}$, 2, $\bar{2}$ en fonction de a_1 , b_1 , a_2 et b_2 et d'intégrales elliptiques. Le livre de Tada et al. (1973) fournit les FIC pour les pointes internes c'est à dire 1 et $\bar{1}$:

$$K_1 = \sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\pi a} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha_b}} \left[1 - \frac{1}{\alpha_a} \left(1 - \frac{\mathbf{E}_T}{\mathbf{K}_T} \right) \right] \quad (5.5)$$

$$K_{\bar{1}} = \sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\pi b} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha_a}} \left[1 - \frac{1}{\alpha_b} \left(1 - \frac{\mathbf{E}_T}{\mathbf{K}_T} \right) \right] \quad (5.6)$$

où $k_T \equiv \mathbf{K}(k_T)$, $\mathbf{E}_T \equiv \mathbf{E}(k_T)$, k_T (“ k Tada”) étant un nouveau paramètre donné par

$$k_T = \sqrt{\frac{(b_2 - a_2)(b_1 - a_1)}{(b_2 - b_1)(a_2 - a_1)}} \quad (5.7)$$

et où les autres notations sont définies par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2a & = & b_2 - a_2 \\ 2b & = & b_1 - b_1 \\ \alpha_a & = & \frac{2a}{l_a} = \frac{b_2 - a_2}{b_2 - b_1} \\ \alpha_b & = & \frac{2b}{l_b} = \frac{b_1 - a_1}{a_2 - a_1} \end{array} \right. \quad (5.8)$$

En introduisant les valeurs de α_a et α_b dans les expressions (5.5) et (5.6), nous obtenons alors K_1 et $K_{\bar{1}}$ en fonction de a_1 , b_1 , a_2 , b_2 , $\mathbf{K}_T$ et $\mathbf{E}_T$.

$$K_1 = \sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{(a_2 - b_1)(b_2 - a_2)}} \left[b_1 - a_2 + (b_2 - b_1) \frac{\mathbf{E}_T}{\mathbf{K}_T} \right] \quad (5.9)$$

$$K_{\bar{1}} = \sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{b_2 - b_1}{(a_2 - b_1)(b_1 - a_1)}} \left[b_1 - a_2 + (a_2 - a_1) \frac{\mathbf{E}_T}{\mathbf{K}_T} \right] \quad (5.10)$$

Pour trouver maintenant les FIC aux pointes externes 2 et $\bar{2}$ en fonction de $a_1, b_1, a_2, b_2, \mathbf{K}_T$ et $\mathbf{E}_T$, nous allons nous appuyer sur les travaux de Hwu (1991) dans lesquels tous les FIC sont donnés.

Malheureusement les expressions de Hwu font intervenir des intégrales qui ne sont pas explicitées en fonctions des intégrales elliptiques classiques. Plutôt que de les expliciter directement, ce qui nécessiterait des calculs lourds, nous allons utiliser une “astuce” consistant à comparer les expressions de Hwu à celles de Tada et *al.*, dans le cas des pointes internes 1 et $\bar{1}$ pour lesquelles les deux articles donnent le résultat.

D’après Hwu,

$$\left\{ \begin{array}{ll} K_1 = -\sigma_{yy}^\infty \sqrt{2\pi} \frac{\lambda a_2^2 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3}{\lambda \sqrt{(a_2 - a_1)(a_2 - b_1)(b_2 - a_2)}} & \text{en } x_1 = a_2 \\ K_{\bar{1}} = -\sigma_{yy}^\infty \sqrt{2\pi} \frac{\lambda b_1^2 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3}{\lambda \sqrt{(b_1 - a_1)(a_2 - b_1)(b_2 - b_1)}} & \text{en } x_1 = b_1 \\ K_2 = \sigma_{yy}^\infty \sqrt{2\pi} \frac{\lambda b_2^2 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3}{\lambda \sqrt{(b_2 - a_1)(b_2 - b_1)(b_2 - a_2)}} & \text{en } x_1 = b_2 \\ K_{\bar{2}} = \sigma_{yy}^\infty \sqrt{2\pi} \frac{\lambda a_1^2 + \lambda_2 a_1 + \lambda_3}{\lambda \sqrt{(b_1 - a_1)(a_2 - a_1)(b_2 - a_1)}} & \text{en } x_1 = a_1 \end{array} \right. \quad (5.11)$$

où $\lambda, \lambda_2, \lambda_3$ sont exprimés en fonction d’intégrales compliquées. La comparaison avec les formules (5.9) et (5.10) donne

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{2\pi} \frac{\lambda a_2^2 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3}{\lambda \sqrt{(a_2 - a_1)(a_2 - b_1)(b_2 - a_2)}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{(a_2 - b_1)(b_2 - a_2)}} \left[b_1 - a_2 + (b_2 - b_1) \frac{\mathbf{E}_T}{\mathbf{K}_T} \right] \\ -\sqrt{2\pi} \frac{\lambda b_1^2 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3}{\lambda \sqrt{(b_1 - a_1)(a_2 - b_1)(b_2 - b_1)}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{b_2 - b_1}{(a_2 - b_1)(b_1 - a_1)}} \left[b_1 - a_2 + (a_2 - a_1) \frac{\mathbf{E}_T}{\mathbf{K}_T} \right] \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Posons alors $\bar{\lambda}_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda}$ et $\bar{\lambda}_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda}$. Les équations précédentes s’écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2^2 + \bar{\lambda}_2 a_2 + \bar{\lambda}_3 = -\frac{a_2 - a_1}{2} \left[b_1 - a_2 + (b_2 - b_1) \frac{\mathbf{E}_T}{\mathbf{K}_T} \right] \\ b_1^2 + \bar{\lambda}_2 b_1 + \bar{\lambda}_3 = -\frac{b_2 - b_1}{2} \left[b_1 - a_2 + (a_2 - a_1) \frac{\mathbf{E}_T}{\mathbf{K}_T} \right] \end{array} \right. \quad (5.13)$$

La résolution du système (5.13) par rapport à $\bar{\lambda}_2$ et $\bar{\lambda}_3$ donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\lambda}_2 = -\frac{a_1 + b_1 + a_2 + b_2}{2} \\ \bar{\lambda}_3 = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{2} - \frac{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}{2} \frac{\mathbf{E}_T}{\mathbf{K}_T} \end{array} \right. \quad (5.14)$$

En introduisant finalement les valeurs de $\bar{\lambda}_2$ et $\bar{\lambda}_3$ dans la relation (5.11), nous obtenons les quatre FIC en fonction des abscisses des pointes et des intégrales elliptiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = -\sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{(a_2 - b_1)(b_2 - a_2)}} \left[a_2 - b_1 - (b_2 - b_1) \frac{E_T}{K_T} \right] \\ K_{\bar{1}} = -\sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{b_2 - b_1}{(a_2 - b_1)(b_1 - a_1)}} \left[a_2 - b_1 - (a_2 - a_1) \frac{E_T}{K_T} \right] \\ K_2 = \sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{b_2 - b_1}{(b_2 - a_1)(b_2 - a_2)}} \left[b_2 - a_1 - (a_2 - a_1) \frac{E_T}{K_T} \right] \\ K_{\bar{2}} = \sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_1)}} \left[b_2 - a_1 - (b_2 - b_1) \frac{E_T}{K_T} \right] \end{array} \right. \quad (5.15)$$

5.2.1.3 Etude des variations des FIC

Le but de cette partie est de déterminer les variations des FIC aux pointes 1, $\bar{1}$, 2, $\bar{2}$ induites par une petite avancée de l'une d'entre elles. Pour cela, nous considérons le cas de deux fissures symétriques et nous faisons avancer d'une quantité ϵ l'une des pointes, tout en laissant fixes les trois autres. Toutefois, pour des raisons de symétrie, ces avancées ne vont concerner qu'une seule fissure.

– Variation de la pointe 2

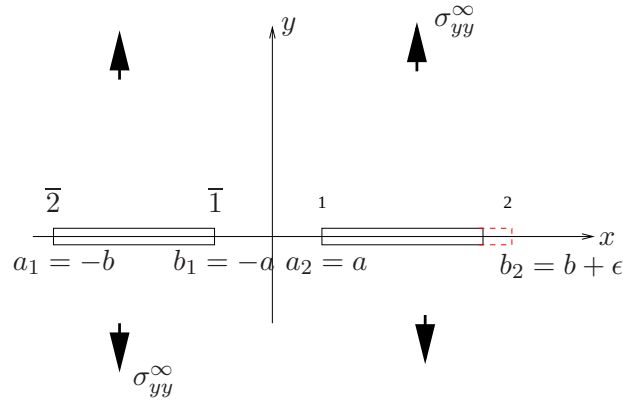


FIG. 5.3 – Avance de la pointe 2

Dans ce cas, nous faisons avancer la pointe 2 d'une petite quantité ϵ . Les expressions des FIC de la relation (5.15) deviennent :

$$\begin{aligned}
 K_1(\epsilon) &= -\sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a+b}{2a(b+\epsilon-a)}} \left[2a - (b+\epsilon+a) \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}(k_T + \delta k_T) \right] \\
 K_{\bar{1}}(\epsilon) &= -\sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{(b+\epsilon+a)}{2a(b-a)}} \left[2a - (b+a) \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}(k_T + \delta k_T) \right] \\
 K_2(\epsilon) &= \sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{b+\epsilon+a}{(2b+\epsilon)(b+\epsilon-a)}} \left[2b + \epsilon - (b+a) \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}(k_T + \delta k_T) \right] \\
 K_{\bar{2}}(\epsilon) &= \sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{b+a}{(2b+\epsilon)(b-a)}} \left[2b + \epsilon - (b+\epsilon+a) \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}(k_T + \delta k_T) \right]
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

En utilisant la notation $k = \frac{a}{b}$ dans ces expressions, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 K_1(\epsilon) &= -\frac{\sigma_{yy}^{\infty} b}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{\frac{1+k}{(1+\frac{\epsilon}{b}-k)}} \left[2k - (1+\frac{\epsilon}{b}+k) \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}(k_T + \delta k_T) \right] \\
 K_{\bar{1}}(\epsilon) &= -\frac{\sigma_{yy}^{\infty} b}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{\frac{1+\frac{\epsilon}{b}+k}{1-k}} \left[2k - (1+k) \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}(k_T + \delta k_T) \right] \\
 K_2(\epsilon) &= \sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi b}{2}} \sqrt{\frac{(1+k)(1+\frac{\epsilon}{b(1+k)})}{2(1-k)(1+\frac{\epsilon}{2b})(1+\frac{\epsilon}{b(1-k)})}} \left[2 + \frac{\epsilon}{b} - (1+k) \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}(k_T + \delta k_T) \right] \\
 K_{\bar{2}}(\epsilon) &= \sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi b}{2}} \sqrt{\frac{(1+k)}{(1-k)(1+\frac{\epsilon}{2b})}} \left[2 + \frac{\epsilon}{b} - (1-\frac{\epsilon}{b}+k) \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}(k_T + \delta k_T) \right]
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Le développement limité à l'ordre 1 des expressions des $K_i(\epsilon)$ nous permet de trouver les variations $\delta K_i(\epsilon)$. Dans les expressions du système (5.17), figurent les intégrales elliptiques et des fonctions racines dépendant de ϵ . Nous allons d'abord procéder au développement limité au premier ordre en ϵ de ces fonctions, et donner ensuite la valeur du rapport des intégrales elliptiques $\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}(k_T + \delta k_T)$ au premier ordre.

Ainsi le développement au premier ordre des fonctions racines carrées permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{(1+k)(1+\frac{\epsilon}{b(1+k)})}{2(1-k)(1+\frac{\epsilon}{2b})(1+\frac{\epsilon}{b(1-k)})}} &= \sqrt{\frac{1+k}{2(1-k)}} \left(1 + \frac{k^2 - 4k - 1}{2(1-k^2)} \frac{\epsilon}{2b} \right) \\
 \sqrt{\frac{1+k}{(1+\frac{\epsilon}{b}-k)}} &= \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \left(1 - \frac{\epsilon}{2b(1-k)} \right) \\
 \sqrt{\frac{1+\frac{\epsilon}{b}+k}{1-k}} &= \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \left(1 + \frac{\epsilon}{2b(1+k)} \right) \\
 \sqrt{\frac{(1+k)}{(1-k)(1+\frac{\epsilon}{2b})}} &= \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \left(1 - \frac{\epsilon}{4b} \right)
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

De plus

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}(k_T + \delta k_T) &= \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}(k_T) + \delta k_T \frac{d}{dk_T} \left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} \right) \\ &= \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}(k_T) + \delta k_T \left(\frac{\mathbf{K} \frac{d\mathbf{E}}{dk_T} - \mathbf{E} \frac{d\mathbf{K}}{dk_T}}{\mathbf{K}^2} \right) (k_T)\end{aligned}\quad (5.19)$$

Or

$$k_T(\epsilon) = \sqrt{\frac{(1-k)(1-k+\frac{\epsilon}{b})}{(1+k)(1+k+\frac{\epsilon}{b})}} = \frac{1-k}{1+k} \sqrt{\frac{1+\frac{\epsilon}{b(1-k)}}{1+\frac{\epsilon}{b(1+k)}}} \quad (5.20)$$

Pour $\epsilon = 0$, les fissures sont symétriques, et

$$k_T(0) \equiv k_T = \frac{1-k}{1+k} \quad (5.21)$$

Le développement à l'ordre 1 de $k_T(\epsilon)$ donne donc :

$$k_T(\epsilon) = k_T + k_T \frac{k\epsilon}{b(1-k^2)} \quad (5.22)$$

ce qui nous permet de trouver la variation de k_T :

$$\delta k_T = k_T \frac{k\epsilon}{b(1-k^2)} \quad (5.23)$$

Dans l'équation (5.19), les valeurs des dérivées par rapport à k_T des intégrales elliptiques sont données dans Grdsteyn and Ryzhik (1980) par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{E}}{dk_T}(k_T) = \frac{\mathbf{E}_T - \mathbf{K}_T}{k_T} \\ \frac{d\mathbf{K}}{dk_T}(k_T) = \frac{\mathbf{E}_T}{k_T k_T'^2} - \frac{\mathbf{K}_T}{k_T} \quad \text{avec} \quad k_T' = \sqrt{1-k_T^2} \\ \mathbf{E}(k_T) = \mathbf{E}\left(\frac{1-k}{1+k}\right) = \frac{1}{1+k} [\mathbf{E}(k') + k\mathbf{K}(k')] \\ \mathbf{K}(k_T) = \mathbf{K}\left(\frac{1-k}{1+k}\right) = \frac{1+k}{2} \mathbf{K}(k') \end{array} \right. \quad (5.24)$$

L'équation (5.21) permet d'exprimer k_T' en fonction de k .

$$k_T' = \frac{4k}{(1+k)^2} \quad (5.25)$$

A partir de (5.24), on en déduit que

$$\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}(k_T) = \frac{2}{(1+k)^2} \left[\frac{\mathbf{E}(k')}{\mathbf{K}(k')} + k \right] \quad (5.26)$$

En combinant les équations (5.19), (5.21) et (5.24), on trouve à l'ordre 1 :

$$\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}}(k_T + \delta k_T) = \frac{2}{(1+k)^2} \left(\frac{\mathbf{E}'}{\mathbf{K}'} + k \right) + \frac{k\epsilon}{b(1-k^2)} \left[\frac{-\frac{\mathbf{E}'^2}{\mathbf{K}'^2} + 2k \frac{\mathbf{E}'}{\mathbf{K}'} - k + k^2 - k^3}{k(1+k)^2} \right] \quad (5.27)$$

En introduisant les équations (5.18) et (5.27) dans le système (5.16), on trouve alors les expressions des FIC pour une avancée ϵ de la pointe 2 :

$$\begin{aligned}
 \delta K_1(\epsilon) &= -\frac{\sigma_{yy}^\infty \sqrt{\pi a}}{k'^3 k} \left[\frac{E'^2}{K'^2} - (1-k) \frac{E'}{K'} - k \right] \frac{\epsilon}{2b} \\
 \delta K_{\bar{1}}(\epsilon) &= -\frac{\sigma_{yy}^\infty \sqrt{\pi a}}{k'^3 k} \left[\frac{E'^2}{K'^2} - (1+k) \frac{E'}{K'} + k \right] \frac{\epsilon}{2b} \\
 \delta K_2(\epsilon) &= \frac{\sigma_{yy}^\infty \sqrt{\pi b}}{k'^3} \left[2 \frac{E'^2}{K'^2} + (1-k^2) \frac{E'}{K'} + 1 - 3k^2 \right] \frac{\epsilon}{4b} \\
 \delta K_{\bar{2}}(\epsilon) &= \frac{\sigma_{yy}^\infty \sqrt{\pi b}}{k'^3} \left[2 \frac{E'^2}{K'^2} - (3+k^2) \frac{E'}{K'} + 1 + k^2 \right] \frac{\epsilon}{4b}
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

– Variation de la pointe 1

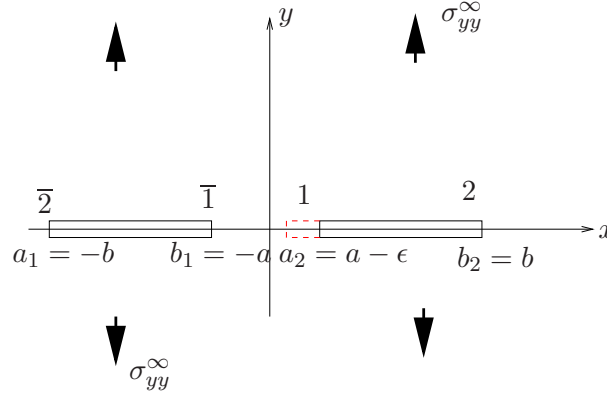


FIG. 5.4 – Variation du front 1

Les variations des FIC pour une petite perturbation de la pointe 1, s'obtiennent de la même manière que lors du calcul précédent.

En se basant sur les démarches utilisées pour la pointe 2, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \delta K_1(\epsilon) &= -\frac{\sigma_{yy}^\infty \sqrt{\pi a}}{k'^2 k'^3} \left[2 \frac{E'^2}{K'^2} + (k^2 - 1) \frac{E'}{K'} + (-3 + k^2) k^2 \right] \frac{\epsilon}{4b} \\
 \delta K_{\bar{1}}(\epsilon) &= -\frac{\sigma_{yy}^\infty \sqrt{\pi a}}{k'^2 k'^3} \left[2 \frac{E'^2}{K'^2} - (1 + 3k^2) \frac{E'}{K'} + (1 + k^2) k^2 \right] \frac{\epsilon}{4b} \\
 \delta K_2(\epsilon) &= \frac{\sigma_{yy}^\infty \sqrt{\pi b}}{k'^3 k} \left[\frac{E'^2}{K'^2} + k(1-k) \frac{E'}{K'} - k^3 \right] \frac{\epsilon}{2b} \\
 \delta K_{\bar{2}}(\epsilon) &= \frac{\sigma_{yy}^\infty \sqrt{\pi b}}{k'^3 k} \left[\frac{E'^2}{K'^2} - k(1+k) \frac{E'}{K'} + k^3 \right] \frac{\epsilon}{2b}
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

5.2.2 Cas du problème 3D

Considérons un système de deux fissures coplanaires en forme de fentes infinies parallèles, situées dans un milieu infini élastique isotrope et chargé en mode 1 par un système de forces symétriques par rapport au plan des fissures. Perturbons à l'intérieur de ce plan, chacun des fronts α ($\alpha = 1, \bar{1}, 2, \bar{2}$) d'une petite quantité $\delta_\alpha a(z)$ dépendant de z .

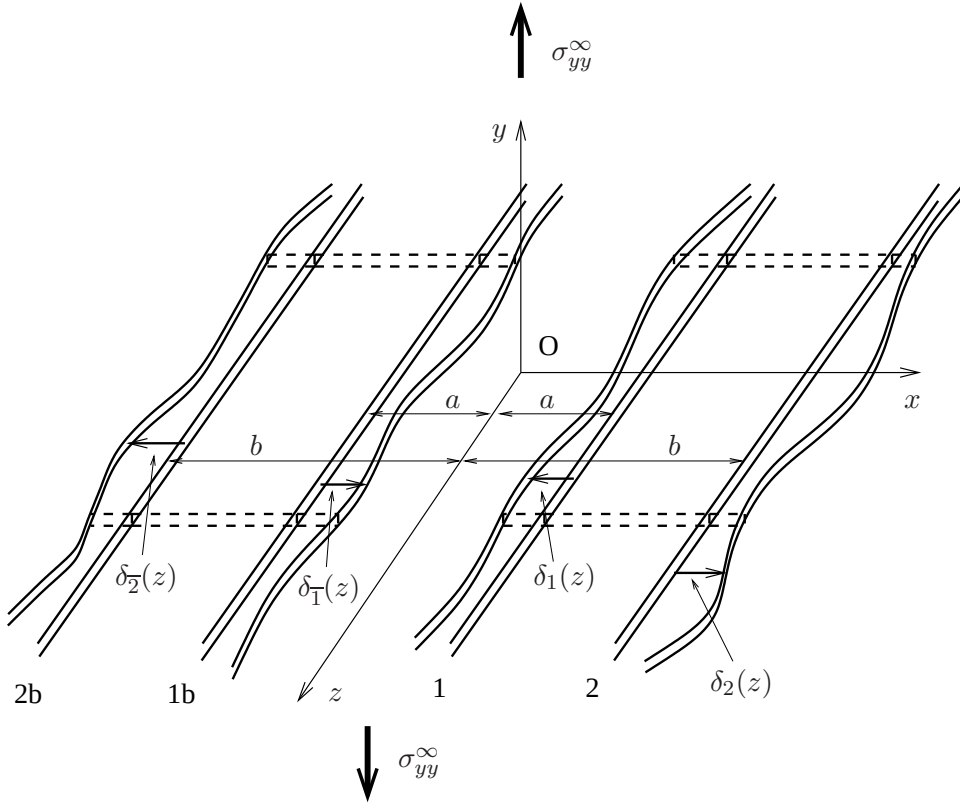


FIG. 5.5 – Perturbation de deux fissures coplanaires en forme de fentes infinies

Les variations des FIC sur chaque front se déduisent de la relation (1.15) du chapitre 1 :

$$\delta K_\alpha(z) = [\delta K_\alpha(z)]_{\delta_\beta a(z') \equiv \delta_\alpha a(z)} + \sum_\beta VP \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{\alpha\beta}(z, z') K_\beta(z') [\delta_\beta a(z') - \delta_\alpha a(z)] dz' \quad (5.30)$$

où $\alpha, \beta \in \{1, \bar{1}, 2, \bar{2}\}$.

En posant $[\delta K_\alpha(z)]_{\delta_\beta a(s') \equiv \delta_\alpha a(s)} \equiv A_\alpha(z) \delta_\alpha a(z)$ et en décomposant les intégrales correspondant aux indices $\beta \neq \alpha$ intervenant dans l'équation (5.30), on a :

$$\begin{aligned} \delta K_\alpha(z) &= A_\alpha(z) \delta_\alpha a(z) + VP \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{\alpha\alpha}(z, z') K_\alpha(z') [\delta_\alpha a(z') - \delta_\alpha a(z)] dz' \\ &+ \sum_{\beta \neq \alpha} VP \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{\alpha\beta}(z, z') \delta_\beta a(z') K_\beta(z') dz' - \sum_{\beta \neq \alpha} VP \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{\alpha\beta}(z, z') \delta_\alpha a(z) K_\beta(z') dz' \end{aligned} \quad (5.31)$$

Comme la géométrie du système ne dépend que des distances a et b , on redéfinit le noyau fondamental de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Z_{\alpha\alpha}(z, z') &\equiv \frac{f_\alpha[(z - z')/b]}{(z' - z)^2} \\ Z_{\alpha\beta}(z, z') &\equiv \frac{g_{\alpha\beta}[(z - z')/b]}{b^2} \quad (\alpha \neq \beta) \end{aligned} \quad (5.32)$$

On note que la redéfinition des $Z_{\alpha\alpha}(z, z')$ respecte le comportement asymptotique de ces fonctions pour $z \rightarrow z'$ (cf. équation (1.14)).

Par la suite la détermination du noyau fondamental reviendra à la recherche des fonctions f_α et $g_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \bar{1}, 2, \bar{2}$).

Les variations des facteurs d'intensité de contraintes s'écrivent avec les fonctions f_α et $g_{\alpha\beta}$ sous la forme suivante, en se restreignant désormais au cas de FIC uniformes le long des fronts avant perturbation de ces derniers :

$$\begin{aligned} \delta K_\alpha(z) &= C_\alpha \delta_\alpha a(z) + VP \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha \left(\frac{z - z'}{b} \right) K_\alpha \frac{\delta_\alpha a(z') - \delta_\alpha a(z)}{(z' - z)^2} dz' \\ &+ \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\beta} \left(\frac{z - z'}{b} \right) K_\beta \frac{\delta_\beta a(z')}{b^2} dz' \end{aligned} \quad (5.33)$$

où l'on a posé

$$C_\alpha = A_\alpha(z) - \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\beta} \left(\frac{z - z'}{b} \right) \frac{K_\beta}{b^2} dz' \quad (5.34)$$

Il résulte de l'équation (5.33) que le terme $C_\alpha \delta_\alpha a(z)$ représente la variation de δK_α au point z résultant d'une avance uniforme du seul front α . Cette propriété sera utilisée plus loin pour calculer les C_α .

5.2.3 Quelques propriétés des fonctions f_α et $g_{\alpha\beta}$

- Les f_α et $g_{\alpha\beta}$ sont des fonctions paires compte tenu de la symétrie par rapport aux plans parallèles à (Oxy) .

- $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. En effet

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} [(z - z')/b] &= b^2 Z_{\alpha\beta}(z, z') \\ &= b^2 Z_{\beta\alpha}(z', z) \quad \text{d'après (1.13)} \\ &= g_{\beta\alpha} [(z' - z)/b] \end{aligned} \quad (5.35)$$

d'où en posant $\eta = \frac{z' - z}{b}$:

$$g_{\alpha\beta}(-\eta) = g_{\beta\alpha}(\eta) \quad (5.36)$$

d'où $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ puisque $g_{\alpha\beta}$ est paire.

- $g_{\alpha\bar{\beta}} = g_{\alpha\beta}$ et $g_{\bar{\alpha}\beta} = g_{\alpha\bar{\beta}}$ par symétrie par rapport au plan (Oyz) .

– $f_\alpha = f_{\bar{\alpha}}$ pour la même raison.

– $f_1(0) = f_2(0) = \frac{1}{2\pi}$ d'après la relation (1.14)

5.2.4 Calculs des constantes C_α et des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\beta}(\eta) d\eta$

Considérons le cas particulier d'une avancée uniforme du seul front α , les autres fronts restant fixes. Il s'agit en fait du cas 2D étudié dans la section 5.2.1.

Dans ce cas, la valeur de δK_α donne la valeur de la constante C_α , et les valeurs des δK_β , $\beta \neq \alpha$, fournissent les valeurs des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\beta}(\eta) d\eta$.

– **Avance du front 2** : $\delta_2 a(z) = \epsilon$ et $\delta_\alpha a(z) = 0$ pour $\alpha \neq 2$

1. Pour $\alpha = 2$, l'équation (5.33) permet d'écrire :

$$\delta K_2 = C_2 \delta_2 a(z) = C_2 \epsilon \quad (5.37)$$

Comme la valeur de δK_2 est fournie par le système d'équations (5.28) dans la section précédente, ceci donne :

$$C_2 = \frac{\sigma_{yy}^\infty \sqrt{\pi b}}{4bk'^3} \left[2 \frac{\mathbf{E}'^2}{\mathbf{K}'^2} + (1 - k^2) \frac{\mathbf{E}'}{\mathbf{K}'} + 1 - 3k^2 \right] \quad (5.38)$$

2. Pour $\alpha = 1$, l'équation (5.33) permet d'écrire :

$$\delta K_1(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{12} \left(\frac{z' - z}{b} \right) \frac{\epsilon}{b^2} K_2 dz' \quad (5.39)$$

En combinant les équations (5.1) et (5.28), et en effectuant le changement de variable $\eta = \frac{z' - z}{b}$, on obtient alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{12}(\eta) d\eta = \frac{1}{2k^{1/2}k'^2} \left[\frac{\mathbf{E}'}{\mathbf{K}'} + k \right] \quad (5.40)$$

3. Pour $\alpha = \bar{1}$, l'équation (5.33) permet d'écrire :

$$\delta K_{\bar{1}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\bar{1}2} \left(\frac{z' - z}{b} \right) \frac{\epsilon}{b^2} K_2 dz' \quad (5.41)$$

En utilisant le même raisonnement que précédemment, on trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\bar{1}2}(\eta) d\eta = \frac{1}{2k^{1/2}k'^2} \left[\frac{\mathbf{E}'}{\mathbf{K}'} - k \right] \quad (5.42)$$

4. Pour $\alpha = \bar{2}$, d'après l'équation (5.33) on a :

$$\delta K_{\bar{2}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\bar{2}2} \left(\frac{z' - z}{b} \right) \frac{\epsilon}{b^2} K_2 dz' \quad (5.43)$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\bar{2}2}(\eta) d\eta = \frac{1}{2k'^2} \left[-\frac{E'}{K'} + \frac{1+k^2}{2} \right] \quad (5.44)$$

– **Avance du front 1** : $\delta_1 a(z) = \epsilon$ et $\delta_\alpha a(z) = 0$ pour $\alpha \neq 1$.

Dans ce cas, les mêmes démarches que précédemment permettent d'obtenir :

1. Pour $\alpha = 1$,

$$C_1 = \frac{\sigma_{yy}^\infty \sqrt{\pi a}}{4bk'^3 k^2} \left[-2 \frac{E'^2}{K'^2} + (1-k^2) \frac{E'}{K'} + k^2(3-k^2) \right] \quad (5.45)$$

2. Pour $\alpha = \bar{1}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\bar{1}1}(\eta) d\eta = \frac{1}{2kk'^2} \left[-\frac{E'}{K'} + \frac{1+k^2}{2} \right] \quad (5.46)$$

– Enfin il est évident par symétrie que $C_{\bar{1}} = C_1$ et $C_{\bar{2}} = C_2$

5.3 Etude de deux fissures coplanaires en forme de fentes infinies : calcul des fonctions f_α et $g_{\alpha\beta}$

Dans cette partie, on procède à la détermination du noyau fondamental $Z_{\alpha\beta}(z, z')$, c'est-à-dire des fonctions f_α et $g_{\alpha\beta}$. Compte tenu des propriétés établies dans la section 5.2.3, seulement six fonctions doivent être calculées : $f_1, f_2, g_{12}, g_{1\bar{1}}, g_{1\bar{2}}, g_{2\bar{2}}$. Ces fonctions sont toutes paires.

La méthode utilisée est basée sur une équation de Rice (1989) qui fournit la variation du noyau fondamental pour une petite perturbation $\delta a(z)$ du front :

$$\delta Z(s_1, s_2) = VP \int_{CF} Z(s_1, s) Z(s, s_2) \delta a(s) ds \quad (5.47)$$

Dans l'idée de Rice (1989), l'équation (5.47) devait être utilisée pour calculer le noyau fondamental $Z_{\alpha\beta}$ pour de nouvelles formes de la fissure à travers une intégration numérique, en commençant par une fissure de référence de noyau connu. Au lieu de cela, des mouvements particuliers conservant la forme du système de fissures seront ici appliqués. Cette méthode produira des équations intégrales-différentielles sur le noyau fondamental, qui seront transformées en équations différentielles ordinaires par transformation de Fourier dans la direction des fronts, puis intégrées numériquement.

5.3.1 Equations intégro-différentielles sur les composantes f_α et $g_{\alpha\beta}$ du noyau fondamental

Les mouvements à imaginer doivent préserver les distances relatives caractéristiques de la géométrie consid eree, c'est-à-dire le rapport $k = \frac{a}{b}$, afin que dans la perturbation, seuls les arguments du noyau fondamental changent, mais pas ce noyau lui-même.

5.3.1.1 Mouvements de translation des fronts

1. **Premier cas** : Front 2 fixe et légères translations des trois autres.

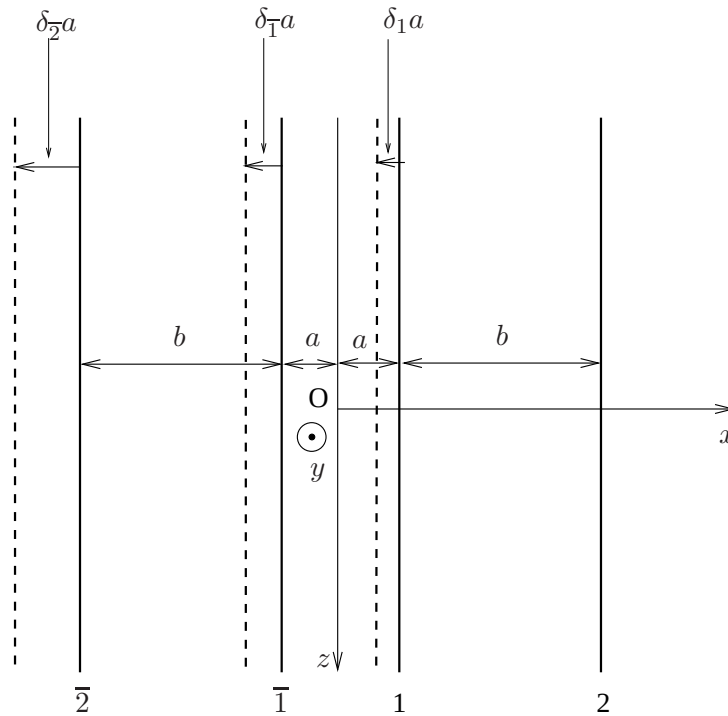


FIG. 5.6 – Mouvements de translation des fronts 1, $\bar{1}$ et $\bar{2}$

Considérons les mouvements de translation des fronts 1, $\bar{1}$ et $\bar{2}$ de la figure 5.6, définis par :

$$\begin{cases} \delta_1 a &= (1 - k)\epsilon \\ \delta_2 a &= 0 \\ \delta_{\bar{1}} a &= -(1 + k)\epsilon \\ \delta_{\bar{2}} a &= 2\epsilon \end{cases} \quad (5.48)$$

Les valeurs de $\delta_1 a$, $\delta_{\overline{1}} a$ et $\delta_{\overline{2}} a$ sont ici ajustées de telle manière que la nouvelle géométrie soit homothétique de la première, c'est-à-dire que le rapport k soit respecté.

Dans ce mouvement, la distance $2b$ entre les fronts 2 et $\overline{2}$ devient $2b + 2\epsilon$. En combinant les équations (5.32) et (5.47) sur deux points arbitraires z_1 et z_2 appartenant au front 2, on trouve alors :

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\{ \frac{f_2 [(z_1 - z_2)/(b + \epsilon)]}{(z_1 - z_2)^2} \right\}_{\epsilon=0} = \sum_{\gamma \neq 2} PV \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2\gamma} \left(\frac{z_1 - z}{b} \right) g_{\gamma 2} \left(\frac{z - z_2}{b} \right) \frac{\delta_\gamma a}{b^4} dz \quad (5.49)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} -\frac{\epsilon}{b^2(z_1 - z_2)} f_2' \left(\frac{z_1 - z_2}{b} \right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_{21} \left(\frac{z_1 - z}{b} \right) g_{12} \left(\frac{z - z_2}{b} \right) \frac{\delta_1 a}{b^4} dz \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2\overline{1}} \left(\frac{z_1 - z}{b} \right) g_{\overline{1}2} \left(\frac{z - z_2}{b} \right) \frac{\delta_{\overline{1}} a}{b^4} dz &+ \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2\overline{2}} \left(\frac{z_1 - z}{b} \right) g_{\overline{2}2} \left(\frac{z - z_2}{b} \right) \frac{\delta_{\overline{2}} a}{b^4} dz \end{aligned} \quad (5.50)$$

en utilisant les changements de variables $\eta = \frac{z_1 - z_2}{b}$ et $\eta' = \frac{z_1 - z}{b}$ et les équations (5.48), l'équation précédente s'écrit sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{aligned} f_2'(\eta) &= -(1 - k)\eta \int_{-\infty}^{+\infty} g_{21}(\eta') g_{12}(\eta - \eta') d\eta' \\ + \eta \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2\overline{1}}(\eta) g_{\overline{1}2}(\eta - \eta') d\eta' &+ \eta \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2\overline{2}}(\eta) g_{\overline{2}2}(\eta - \eta') d\eta' \end{aligned} \quad (5.51)$$

soit

$$\frac{f_2'(\eta)}{\eta} = -(1 - k)(g_{12} \star g_{12})(\eta) - 2(g_{2\overline{2}} \star g_{2\overline{2}})(\eta) + (1 + k)(g_{1\overline{2}} \star g_{1\overline{2}})(\eta) \quad (5.52)$$

où $\star$ désigne le produit de convolution.

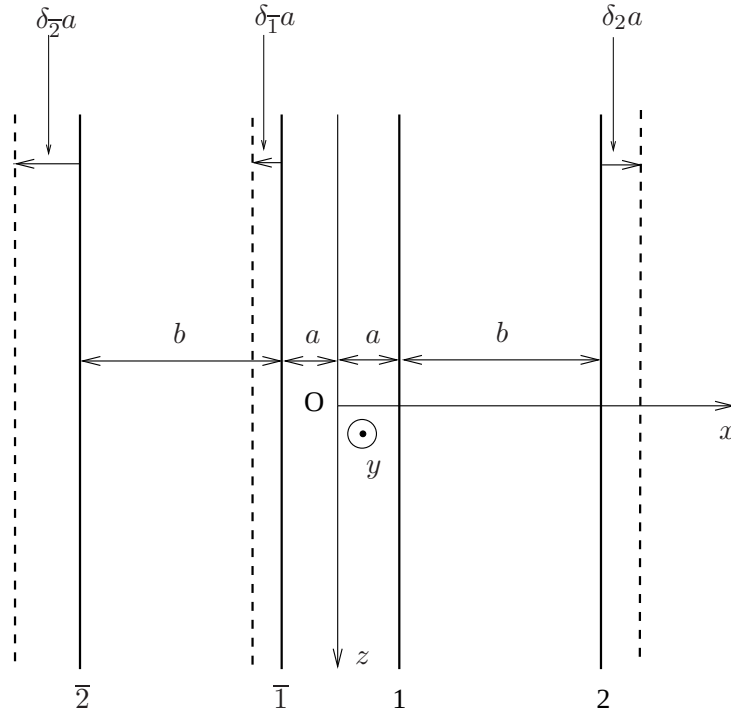
2. Deuxième cas : Front 1 fixe et légères translations des trois autres.

Les avances des fronts sont données par :

$$\begin{cases} \delta_1 a &= 0 \\ \delta_2 a &= (1 - k)\epsilon \\ \delta_{\overline{1}} a &= -2k\epsilon \\ \delta_{\overline{2}} a &= (1 + k)\epsilon \end{cases} \quad (5.53)$$

Là encore, ces valeurs permettent de respecter le rapport k . La combinaison des équations (5.32) et (5.47) permet de trouver l'équation vérifiée par la composante f_1 du noyau pour deux points arbitraires z_1 et z_2 du front 1 :

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\{ \frac{f_1 [(z_1 - z_2)/(b + \epsilon)]}{(z_1 - z_2)^2} \right\}_{\epsilon=0} = \sum_{\gamma \neq 1} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{1\gamma} \left(\frac{z_1 - z}{b} \right) g_{\gamma 1} \left(\frac{z - z_2}{b} \right) \frac{\delta_\gamma a}{b^4} dz \quad (5.54)$$

FIG. 5.7 – Mouvements de translation des fronts $2, \bar{1}$ et $\bar{2}$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\epsilon}{b^2(z_1 - z_2)} f'_1 \left(\frac{z_1 - z_2}{b} \right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_{12} \left(\frac{z_1 - z}{b} \right) g_{21} \left(\frac{z - z_2}{b} \right) \frac{\delta_1 a}{b^4} dz \\
 + \int_{-\infty}^{+\infty} g_{1\bar{1}} \left(\frac{z_1 - z}{b} \right) g_{\bar{1}1} \left(\frac{z - z_2}{b} \right) \frac{\delta_{\bar{1}} a}{b^4} dz &+ \int_{-\infty}^{+\infty} g_{1\bar{2}} \left(\frac{z_1 - z}{b} \right) g_{\bar{2}1} \left(\frac{z - z_2}{b} \right) \frac{\delta_{\bar{2}} a}{b^4} dz
 \end{aligned} \quad (5.55)$$

En utilisant les changements de variables $\eta = \frac{z_1 - z_2}{b}$ et $\eta' = \frac{z_1 - z}{b}$ et les équations (5.53), l'équation précédente s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 f'_1(\eta) &= -(1 - k)\eta \int_{-\infty}^{+\infty} g_{12}(\eta') g_{21}(\eta - \eta') d\eta' \\
 + 2k\eta \int_{-\infty}^{+\infty} g_{1\bar{1}}(\eta) g_{\bar{1}1}(\eta - \eta') d\eta' &- (1 + k)\eta \int_{-\infty}^{+\infty} g_{1\bar{2}}(\eta) g_{\bar{2}1}(\eta - \eta') d\eta'
 \end{aligned} \quad (5.56)$$

soit :

$$\frac{f'_1(\eta)}{\eta} = -(1 - k)(g_{12} \star g_{12})(\eta) + 2k(g_{1\bar{1}} \star g_{1\bar{1}})(\eta) - (1 + k)(g_{1\bar{2}} \star g_{1\bar{2}})(\eta) \quad (5.57)$$

5.3.1.2 Mouvements de rotation des fronts

Considérons les perturbations des fronts définies par des rotations de même angle ϵ autour de centres $z_1, z_2, z_{\bar{1}}$ et $z_{\bar{2}}$ alignés sur une même droite. Une application immédiate du théorème

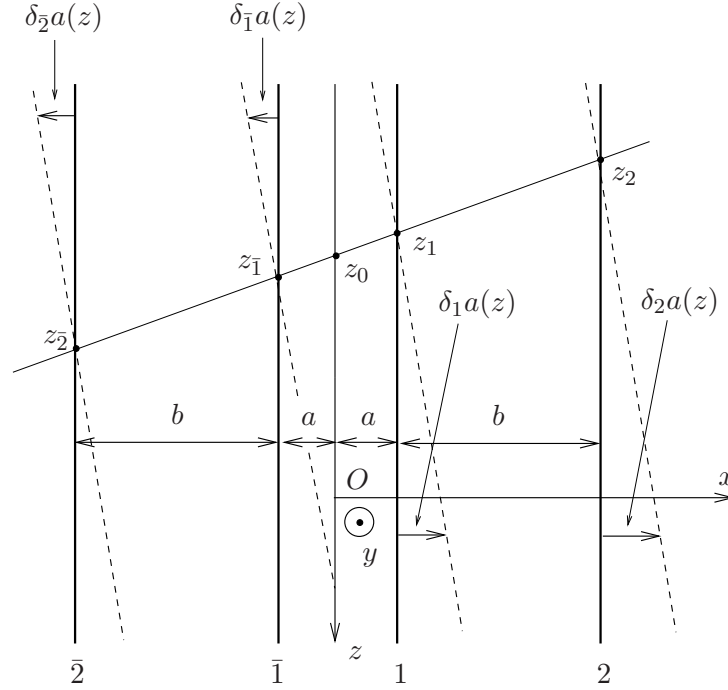


FIG. 5.8 – Mouvements de rotation des quatre fronts

de Thalès montre alors que le rapport k est respecté dans la transformation. Les avancées des fronts sont données par :

$$\begin{cases} \delta_1 a(z) &= -\epsilon(z - z_1) \\ \delta_2 a(z) &= \epsilon(z - z_2) \\ \delta_{\bar{1}} a(z) &= \epsilon(z - z_{\bar{1}}) \\ \delta_{\bar{2}} a(z) &= -\epsilon(z - z_{\bar{2}}) \end{cases} \quad (5.58)$$

– **Application de l'équation de Rice aux points z_1 et z_2**

D'après les équations (5.32) et (5.47), comme z_1, z_2 appartiennent aux fronts 1 et 2, on a :

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\{ \frac{g_{21} [(z'_2 - z'_1)/b']}{b'^2} \right\} &= VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2 \left(\frac{z_2 - z}{b} \right) g_{21} \left(\frac{z - z_1}{b} \right)}{(z_2 - z)^2 b^2} \delta_2 a(z) dz \\ &+ VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{21} \left(\frac{z_2 - z}{b} \right) f_1 \left(\frac{z - z_1}{b} \right)}{b^2 (z - z_1)^2} \delta_1 a(z) dz + \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2\bar{1}} \left(\frac{z_2 - z}{b} \right) g_{\bar{1}1} \left(\frac{z - z_1}{b} \right) \frac{\delta_{\bar{1}} a(z)}{b^4} dz \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2\bar{2}} \left(\frac{z_2 - z}{b} \right) g_{\bar{2}1} \left(\frac{z - z_1}{b} \right) \frac{\delta_{\bar{2}} a(z)}{b^4} dz \end{aligned} \quad (5.59)$$

où z'_1 et z'_2 sont les abscisses des projections orthogonales des points z_1 et z_2 sur l'axe parallèle aux nouveaux fronts, et $2b'$ la nouvelle distance entre les fronts $\bar{2}$ et 2 dans la configuration actuelle. On a les relations suivantes : $z'_1 - z'_2 = z_1 - z_2 + (b - a)\epsilon$ et

$$b' = b + \epsilon(z_{\overline{2}} - z_2)/2.$$

En effectuant les changements de variables $\eta = \frac{z_2 - z_1}{b}$ et $\eta' = \frac{z_2 - z}{b}$ et en exprimant $z_{\overline{1}}$ et $z_{\overline{2}}$ en fonction de z_1 et z_2 , on trouve alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left[\left(1 - k + \frac{\eta^2}{1 - k} \right) g_{12}(\eta) \right] &= -PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(\eta')}{\eta'} g_{21}(\eta - \eta') d\eta' \\ &- PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(\eta')}{\eta'} g_{12}(\eta - \eta') d\eta' + \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2\overline{1}}(\eta - \eta') g_{\overline{1}1}(\eta') \left(\eta' + \frac{2k}{1 - k} \eta \right) d\eta' \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2\overline{2}}(\eta - \eta') g_{\overline{2}1}(\eta') \left(\eta' + \frac{1 + k}{1 - k} \eta \right) d\eta' \end{aligned} \quad (5.60)$$

soit encore

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left[\left(1 - k + \frac{\eta^2}{1 - k} \right) g_{12}(\eta) \right] &= -VP \left(\frac{f_1 + f_2}{\eta} \star g_{12} \right) (\eta) + ((\eta g_{1\overline{1}}) \star g_{1\overline{2}}) (\eta) \\ &- ((\eta g_{1\overline{2}}) \star g_{2\overline{2}}) (\eta) + \frac{2k}{1 - k} \eta (g_{1\overline{1}} \star g_{1\overline{2}}) (\eta) - \frac{1 + k}{1 - k} \eta (g_{1\overline{2}} \star g_{2\overline{2}}) (\eta) \end{aligned} \quad (5.61)$$

– **Application de l'équation de Rice aux points z_1 et $z_{\overline{1}}$**

En appliquant le même raisonnement que précédemment aux points z_1 et $z_{\overline{1}}$ appartenant respectivement aux fronts 1 et $\overline{1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left[\left(2k + \frac{\eta^2}{2k} \right) g_{1\overline{1}}(\eta) \right] &= 2VP \left(\frac{f_1}{\eta} \star g_{1\overline{1}} \right) (\eta) - ((\eta g_{12}) \star g_{1\overline{2}}) (\eta) + ((\eta g_{1\overline{2}}) \star g_{12}) (\eta) \\ &- \frac{\eta}{k} (g_{12} \star g_{1\overline{2}}) (\eta) \end{aligned} \quad (5.62)$$

– **Application de l'équation de Rice aux points z_1 et $z_{\overline{2}}$**

La même démarche pour les points z_1 et $z_{\overline{2}}$ appartenant respectivement aux fronts 1 et $\overline{2}$, permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left[\left(1 + k + \frac{\eta^2}{1 + k} \right) g_{1\overline{2}}(\eta) \right] &= VP \left(\frac{f_1 - f_2}{\eta} \star g_{1\overline{2}} \right) (\eta) - ((\eta g_{12}) \star g_{2\overline{2}}) (\eta) - ((\eta g_{1\overline{1}}) \star g_{12}) (\eta) \\ &- \frac{1 - k}{1 + k} \eta (g_{12} \star g_{2\overline{2}}) (\eta) + \frac{2k}{1 + k} \eta (g_{1\overline{1}} \star g_{12}) (\eta) \end{aligned} \quad (5.63)$$

– **Application de l'équation de Rice aux points z_2 et $z_{\overline{2}}$**

De même pour le couple de points z_2 et $z_{\overline{2}}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left[\left(2 + \frac{\eta^2}{2} \right) g_{2\overline{2}} \right] &= -2VP \left(\frac{f_2}{\eta} \star g_{2\overline{2}} \right) (\eta) + ((\eta g_{12}) \star g_{1\overline{2}}) (\eta) - ((\eta g_{1\overline{2}}) \star g_{12}) (\eta) \\ &+ k\eta (g_{12} \star g_{1\overline{2}}) (\eta) \end{aligned} \quad (5.64)$$

5.3.2 Equations différentielles sur les transformées de Fourier des fonctions

f_α et $g_{\alpha\beta}$

La présence de produits de convolution dans les équations (5.52), (5.57), (5.61), (5.62), (5.63) et (5.64) permet d'utiliser la transformée de Fourier (TF). Une difficulté est de prendre les transformées de Fourier des fonctions $\frac{f_1}{\eta}$ et $\frac{f_2}{\eta}$. Pour cela, on définit une fonction h_j où $j = 1, 2$ telle que $f_j(\eta) = \eta h_j(\eta)$. On obtient alors $\widehat{f_j}(p) = \widehat{\eta h_j}(p) = i\widehat{h_j}'(p)$, l'intégrale définissant la TF de $h_j(\eta)$ étant prise au sens de la valeur principale de Cauchy. On a donc $\widehat{h_j}(p) = i\widehat{F_j}(p)$ où $\widehat{F_j}(p)$ est une primitive de $\widehat{f_j}(p)$. Pour trouver la constante arbitraire impliquée dans la définition de cette primitive, il suffit de remarquer que $\widehat{h_j}(0) = 0$ car $f_j(\eta)$ est une fonction paire ; ce qui donne $\widehat{F_j}(0) = 0$. On en déduit que $\widehat{F_j}$ est l'unique primitive impaire de la fonction $\widehat{f_j}$.

On obtient alors le système d'équations différentielles suivantes :

$$p\widehat{F_1}' = -2(1-k)\widehat{g_{12}}\widehat{g_{12}}' + 4k\widehat{g_{11}}\widehat{g_{11}}' - 2(1+k)\widehat{g_{12}}\widehat{g_{12}}' \quad (5.65)$$

$$p\widehat{F_2}' = -2(1-k)\widehat{g_{12}}\widehat{g_{12}}' - 4\widehat{g_{22}}\widehat{g_{22}}' + 2(1+k)\widehat{g_{12}}\widehat{g_{12}}' \quad (5.66)$$

$$p \left[(1-k)\widehat{g_{12}} - \frac{\widehat{g_{12}}''}{1-k} \right] = (\widehat{F_1} + \widehat{F_2})\widehat{g_{12}} + \frac{1+k}{1-k}\widehat{g_{11}}'\widehat{g_{12}} + \frac{2k}{1-k}\widehat{g_{11}}\widehat{g_{12}}' - \frac{2}{1-k}\widehat{g_{12}}'\widehat{g_{22}} - \frac{1+k}{1-k}\widehat{g_{12}}\widehat{g_{22}}' \quad (5.67)$$

$$p \left[2k\widehat{g_{11}} - \frac{\widehat{g_{11}}''}{2k} \right] = -2\widehat{F_1}\widehat{g_{11}} - \frac{1+k}{k}\widehat{g_{12}}'\widehat{g_{12}} - \frac{1-k}{k}\widehat{g_{12}}\widehat{g_{12}}' \quad (5.68)$$

$$p \left[(1+k)\widehat{g_{12}} - \frac{\widehat{g_{12}}''}{1+k} \right] = (\widehat{F_2} - \widehat{F_1})\widehat{g_{12}} - \frac{1-k}{1+k}\widehat{g_{11}}'\widehat{g_{12}} + \frac{2k}{1+k}\widehat{g_{11}}\widehat{g_{12}}' - \frac{2}{1+k}\widehat{g_{12}}'\widehat{g_{22}} - \frac{1-k}{1+k}\widehat{g_{12}}\widehat{g_{22}}' \quad (5.69)$$

$$p \left[2\widehat{g_{22}} - \frac{\widehat{g_{22}}''}{2} \right] = 2\widehat{F_2}\widehat{g_{22}} + (1+k)\widehat{g_{12}}'\widehat{g_{12}} - (1-k)\widehat{g_{12}}\widehat{g_{12}}' \quad (5.70)$$

Le système d'équations ci-dessus est un système d'équations différentielles non linéaires du second ordre. Malheureusement, la résolution d'un tel système ne peut se faire que de façon numérique. Pour en trouver la solution, il faut avoir les conditions initiales en 0 ou à l'infini, c'est-à-dire le comportement asymptotique des fonctions $\widehat{F_\alpha}(p)$ et $\widehat{g_{\alpha\beta}}(p)$ pour $p \rightarrow 0$ et pour $p \rightarrow +\infty$.

5.3.2.1 Comportements asymptotiques des fonctions $\widehat{F_\alpha}(p)$ et $\widehat{g_{\alpha\beta}}(p)$

1. Comportement $p \rightarrow 0$

On a $\widehat{F}_1(0) = \widehat{F}_2(0) = 0$ puisque $\widehat{F}_1$ et $\widehat{F}_2$ sont les primitives impaires de $\widehat{f}_1$ et $\widehat{f}_2$.

De plus d'après la définition de la TF, on a :

$$\widehat{g}_{\alpha\beta}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\beta}(z) dz \quad (5.71)$$

On en déduit à partir de la section 5.2.4, les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \widehat{g}_{12}(0) = \frac{1}{2k^{1/2}k'^2} \left[\frac{\mathbf{E}'}{\mathbf{K}'} + k \right] \\ \widehat{g}_{1\overline{2}}(0) = \frac{1}{2k^{1/2}k'^2} \left[\frac{\mathbf{E}'}{\mathbf{K}'} - k \right] \\ \widehat{g}_{1\overline{1}}(0) = \frac{1}{2kk'^2} \left[-\frac{\mathbf{E}'}{\mathbf{K}'} + \frac{1+k^2}{2} \right] \\ \widehat{g}_{2\overline{2}}(0) = \frac{1}{2k'^2} \left[-\frac{\mathbf{E}'}{\mathbf{K}'} + \frac{1+k^2}{2} \right] \end{cases} \quad (5.72)$$

De plus, comme ces fonctions sont paires, on a :

$$\begin{cases} \widehat{g}_{12}'(0) = 0 \\ \widehat{g}_{1\overline{2}}'(0) = 0 \\ \widehat{g}_{1\overline{1}}'(0) = 0 \\ \widehat{g}_{2\overline{2}}'(0) = 0 \end{cases} \quad (5.73)$$

2. Comportement pour $p \rightarrow +\infty$

En ne conservant que les termes dominants dans le système (5.65) à (5.70), on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{F}_2'(p) &= 0 \\ \widehat{F}_2'(p) &= 0 \\ (1-k)\widehat{g}_{12}(p) - \frac{\widehat{g}_{12}''(p)}{1-k} &= 0 \\ 2k\widehat{g}_{1\overline{1}}(p) - \frac{\widehat{g}_{1\overline{1}}''(p)}{2k} &= 0 \\ (1+k)\widehat{g}_{1\overline{2}}(p) - \frac{\widehat{g}_{1\overline{2}}''(p)}{1+k} &= 0 \\ 2\widehat{g}_{2\overline{2}}(p) - \frac{\widehat{g}_{2\overline{2}}''(p)}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.74)$$

Les fonctions $\widehat{g}_{12}(p)$, $\widehat{g}_{1\overline{1}}(p)$, $\widehat{g}_{1\overline{2}}(p)$, et $\widehat{g}_{2\overline{2}}(p)$, qui doivent tendre vers 0 à l'infini puisque ce sont des TF, sont alors respectivement proportionnelles en première approximation aux fonctions $e^{-(1-k)p}$, e^{-2kp} , $e^{-(1+k)p}$ et e^{-2p} .

On montre plus précisément dans l'Annexe C.1 que pour $p \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned}
 \widehat{F}_1(p) &\rightarrow \frac{1}{2} \\
 \widehat{F}_2(p) &\rightarrow \frac{1}{2} \\
 \widehat{g}_{12}(p) &= C_{12}\sqrt{p} \left[1 + \frac{1}{8(1-k)p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right] e^{-(1-k)p} \\
 \widehat{g}_{1\bar{1}}(p) &= \frac{C_{1\bar{1}}}{\sqrt{p}} \left[1 - \frac{3}{16kp} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right] e^{-2kp} \\
 \widehat{g}_{1\bar{2}}(p) &= \left[C_{1\bar{2}} - \frac{C_{1\bar{1}}C_{12}}{4p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right] e^{-(1+k)p} \\
 \widehat{g}_{2\bar{2}}(p) &= \sqrt{p} \left[C_{2\bar{2}} + \frac{C_{2\bar{2}}}{16p} - (1+k)\frac{C_{1\bar{2}}C_{12}}{4p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right] e^{-2p}
 \end{aligned} \tag{5.75}$$

où C_{12} , $C_{1\bar{1}}$, $C_{1\bar{2}}$ et $C_{2\bar{2}}$ sont des constantes inconnues.

5.3.3 Résolution numérique des équations différentielles

5.3.3.1 Principe de la méthode

Rappelons que les fonctions $\widehat{F}_\alpha$ et $\widehat{g}_{\alpha\beta}(p)$ doivent :

- vérifier les équations (5.65) à (5.70),
- avoir le bon comportement asymptotique pour $p \rightarrow 0$, et donc vérifier les équations (5.72),
- avoir le bon comportement asymptotique pour $p \rightarrow +\infty$, et donc, vérifier les équations (5.75).

En pratique, l'ensemble des équations différentielles (5.65) à (5.70) doit être résolu sur un intervalle $[p_0, p_\infty]$ où $0 < p_0 < 1$ et $p_\infty > 1$. On peut a priori intégrer de la gauche vers la droite ou de la droite vers la gauche. Cependant les fonctions $\widehat{g}_{\alpha\beta}$, solutions du système d'équations (5.65), se comportent respectivement pour $p \rightarrow +\infty$, comme des combinaisons linéaires des fonctions exponentielles $e^{-k_{\alpha\beta}p}$ et $e^{k_{\alpha\beta}p}$. Mais une seule de ces deux fonctions $e^{-k_{\alpha\beta}p}$ assure la nullité de $\widehat{g}_{\alpha\beta}$ à l'infini, nécessaire puisqu'il s'agit d'une transformée de Fourier. Dans ces conditions, une intégration numérique de la gauche vers la droite ne peut pas aboutir. En effet les petites erreurs numériques notamment au niveau des conditions initiales, finiront par générer la fonction croissante $e^{k_{\alpha\beta}p}$ qui masquera complètement la fonction exponentielle décroissante recherchée.

Pour pallier ce problème, on décide d'intégrer de la droite vers la gauche en utilisant la méthode d'intégration à “*reculons*” pour laquelle la fonction exponentielle recherchée ($e^{-k_{\alpha\beta}p}$) apparaît comme une fonction croissante et la fonction “parasite” $e^{k_{\alpha\beta}p}$ comme décroissante.

Cette méthode d'intégration étant adoptée, nous avons besoin des valeurs des $\widehat{F}_\alpha(p_\infty)$, des $\widehat{g}_{\alpha\beta}(p_\infty)$ et des $\widehat{g}_{\alpha\beta}'(p_\infty)$ mais seules les valeurs de $\widehat{F}_\alpha(p_\infty)$ sont connues. Pour déterminer celles des $\widehat{g}_{\alpha\beta}(p_\infty)$ et celles des $\widehat{g}_{\alpha\beta}'(p_\infty)$ qui en découlent via les équations (5.75), nous avons utilisé

la méthode de Newton pour déterminer les valeurs des constantes C_{12} , $C_{1\bar{1}}$, $C_{1\bar{2}}$, $C_{2\bar{2}}$ assurant le respect des valeurs souhaitées des $\widehat{g_{\alpha\beta}}(0)$ (équations (5.72)).

Cette tâche n'est pas simple car pour beaucoup de choix des constantes, l'intégration numérique diverge avant que la valeur p_0 du paramètre ne soit atteinte.

Pour intégrer de p_∞ à p_0 , nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

5.3.3.2 Résultats numériques

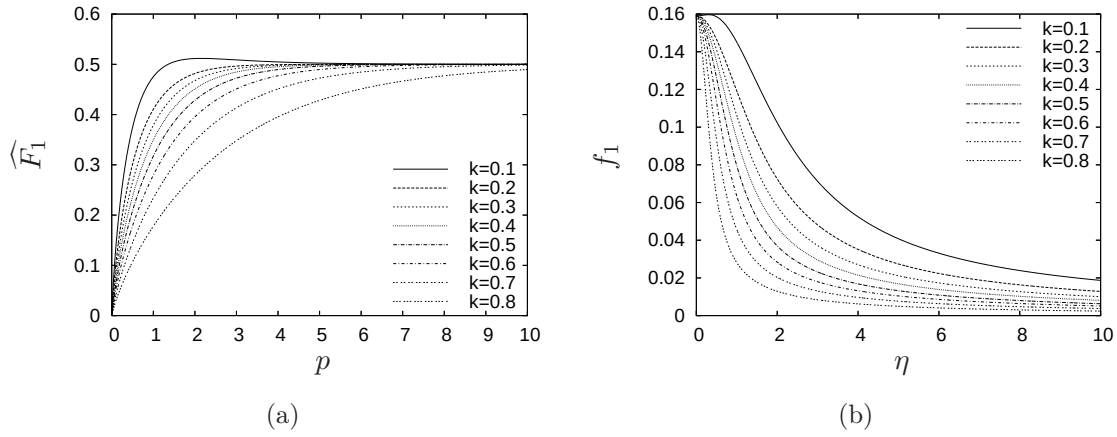


FIG. 5.9 – Fonctions $\widehat{F}_1$ et f_1

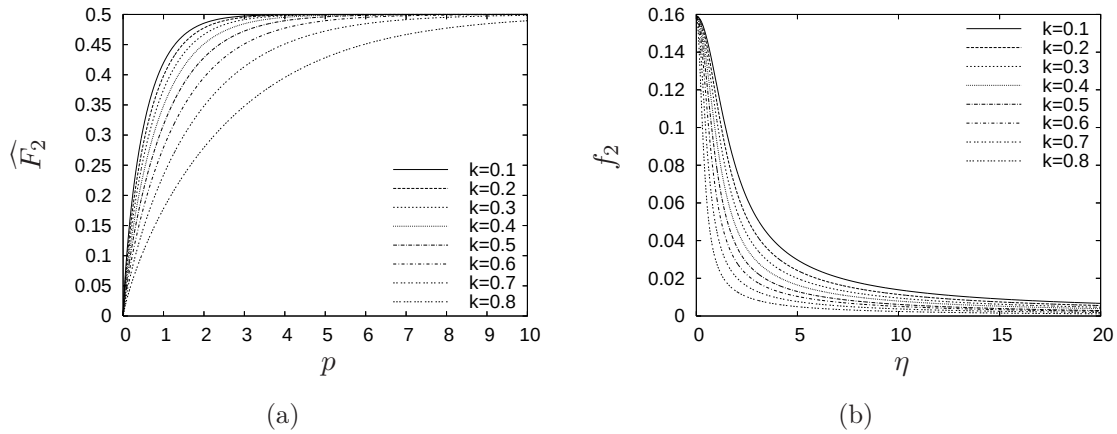
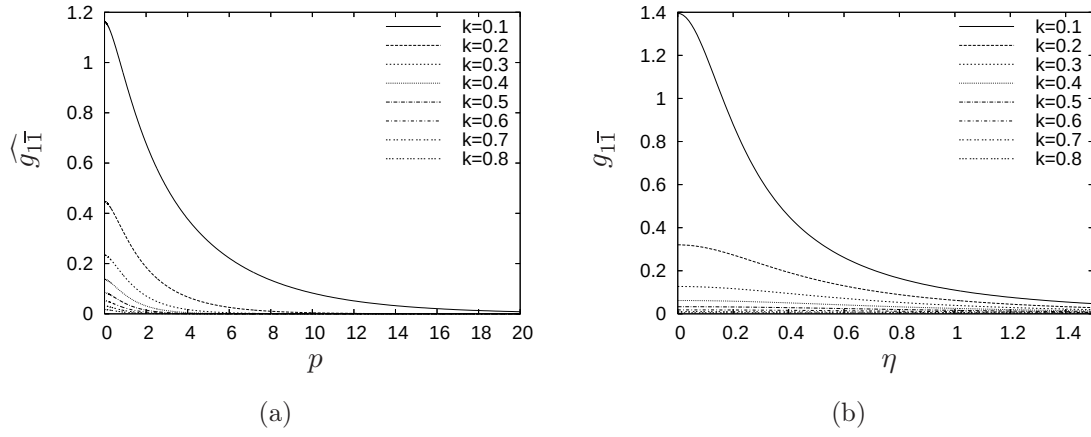
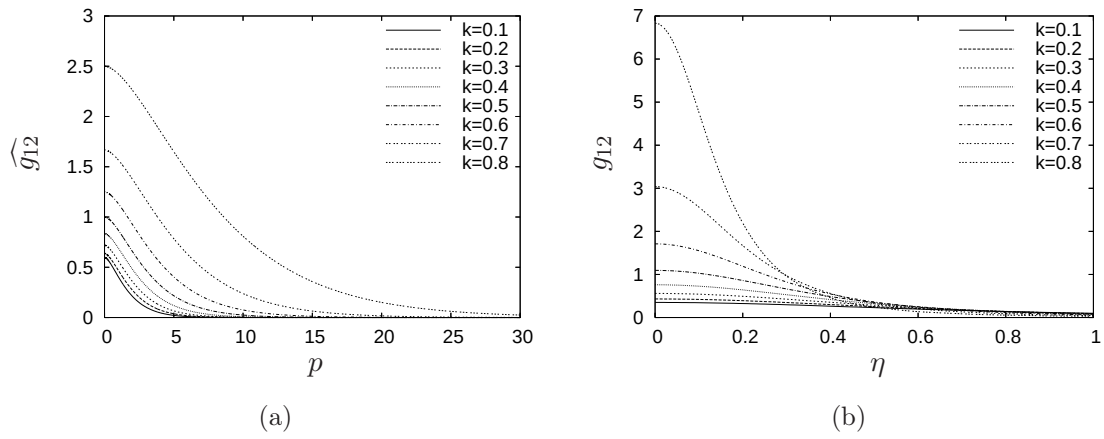
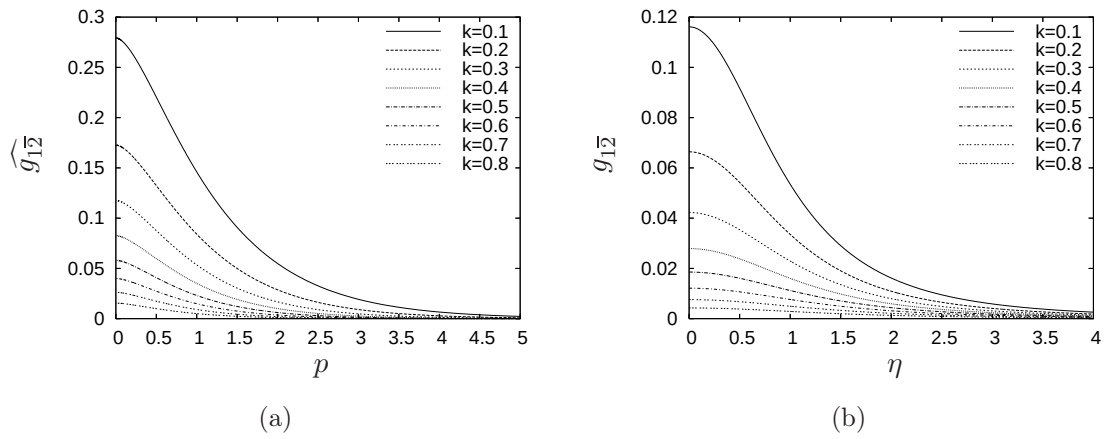
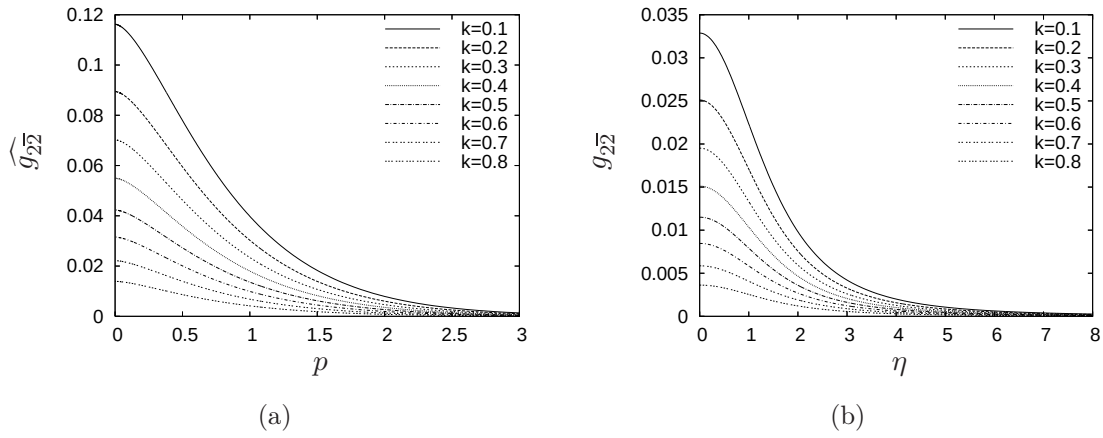


FIG. 5.10 – Fonctions $\widehat{F}_2$ et f_2

Après avoir numériquement obtenu les fonctions $\widehat{F}_\alpha$ et $\widehat{g_{\alpha\beta}}(p)$, on détermine leur TF inverse pour obtenir les composantes f_1 , f_2 , g_{12} , $g_{1\bar{1}}$, $g_{1\bar{2}}$, $g_{2\bar{2}}$ du noyau fondamental.

FIG. 5.11 – Fonctions $\widehat{g_{1\bar{1}}}$ et $g_{1\bar{1}}$ FIG. 5.12 – Fonctions $\widehat{g_{12}}$ et g_{12} FIG. 5.13 – Fonctions $\widehat{g_{1\bar{2}}}$ et $g_{1\bar{2}}$

FIG. 5.14 – Fonctions $\widehat{g_{22}}$ et g_{22}

Sur les figures 5.9 à 5.14, on a représenté pour plusieurs valeurs de k les courbes de f_1 , f_2 , g_{12} , $g_{1\bar{1}}$, $g_{1\bar{2}}$, ainsi que celles de leur TF inverse.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a procédé à la détermination du noyau fondamental d'un système de deux fissures en forme de fentes infinies coplanaires et parallèles. L'intérêt de ce noyau fondamental est de donner, grâce à des formules intégrales, les expressions au premier ordre des perturbations des facteurs d'intensité de contraintes le long des fronts résultant de perturbations coplanaires arbitraires de ces fronts.

Ces fonctions ont pu être calculées grâce à une méthode reposant sur une combinaison de trois éléments :

- Application de la formule de Rice pour la variation du noyau fondamental résultant d'une petite perturbation du front de la fissure. Cette formule est appliquée pour des mouvements particuliers des fronts de la fissure conservant sa forme mais modifiant sa taille et son orientation.
- Transformation des équations intégrales obtenues en équations différentielles ordinaires par transformation de Fourier dans la direction des fronts.
- Intégration numérique de ces équations différentielles ordinaires et inversion de Fourier.

Les résultats établis au cours de ce chapitre permettent d'envisager les études suivantes :

1. Etude du cas $k \rightarrow 0$ ($\frac{a}{b} \rightarrow 0$), en vue de l'étude de la coalescence des fissures.
2. Etude de la déformation des fronts intérieurs lors de la coalescence (propagation coplaire dans un milieu hétérogène).

Conclusion

La thèse a exposé quelques résultats de la propagation des fissures planes au sein d'un milieu infini isotrope. Les études menées sont développées autour du formalisme de Bueckner-Rice, et les différents problèmes abordés, traitent de la forme du front de fissure au cours de son évolution. A la suite des travaux de Favier et al. (2006b) concernant une fissure en forme de fente infinie en mode 1, nous avons traité le cas de cisaillement en fatigue (chapitre 2) et le cas de la fissure semi-infinie d'interface en mode mixte en fatigue et en fragile (chapitre 3). Ces deux études ont permis d'étudier l'influence de :

- couplage des modes 2 et 3,
- la différence de nature des matériaux ϵ ,
- la géométrie : tunnel-crack ou fissure semi-infinie d'interface,
- type de loi de propagation : Paris ou Griffith,
- type de chargement : $K_p \propto a^{\alpha-i\epsilon}$, où le paramètre α caractérise la stabilité ($\alpha < 0$) ou l'instabilité ($\alpha > 0$) pour la propagation 2D.

Dans le chapitre 2, on a montré que le couplage des modes entraîne un déphasage, mais ne modifie pas le caractère général.

Dans le chapitre 3, on a montré que ϵ introduit un caractère oscillant mais ne change pas le comportement général.

Pour faciliter la discussion, nous avons récapitulé dans le tableau 5.1 les principaux résultats pour le cas particulier de matériau homogène $\epsilon = 0$ chargé en mode pur 1 ou 2 ou 3. Les propriétés statistiques sont étudiées sur un front donné. Pour le tunnel crack, on choisit $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^{++}$.

Dans les expressions du tableau 5.1, $\psi(p)$ est une fonction dépendant du chargement K_p , de la géométrie et du matériau, elle vaut 1 pour $p = 0$ et tend vers 0 quand $p \rightarrow +\infty$, alors que les constantes Δ , χ dépendent du matériau et du chargement K_p .

On constate dans tous les cas qu'il y a un phénomène de sélection des grandes longueurs d'ondes c'est-à-dire $\mathcal{A}(0, a)$ tendant vers l'infini, $\mathcal{A}(z, a)$ devenant indépendant de z et que $\mathcal{L}$ devient de

plus en plus large.

Par contre les différences sont :

- En considérant les colonnes 1 et 2 du tableau, on constate que la géométrie n'a pas d'influence sur la forme du comportement, seul le préfacteur change.
- En considérant les colonnes 2 et 3, on constate que la croissance est plus rapide quand $\alpha > 0$ que quand $\alpha < 0$. C'est normal car dans le cas $\alpha > 0$ il existe des longueurs d'onde instable, alors qu'il n'en existe pas dans le cas stable $\alpha < 0$. La sélection des grandes longueurs d'onde subsistent néanmoins même dans le cas $\alpha < 0$ car les grandes longueurs croissent plus vite que les petites.
- En considérant les colonnes 3 et 4, on constate que la croissance est plus rapide en fragile qu'en fatigue car en fatigue, la croissance est freinée par un effet de mémoire (traduit par la présence d'une intégrale dans l'expression de $\widehat{\delta a}$) qui retarde l'élimination des petites longueurs d'onde. On remarque de plus que les relations sont plus simples en fragile qu'en fatigue car l'expression de $\widehat{\delta a}$ dépend uniquement de la configuration actuelle (pas d'effet de mémoire).

Et pour finir, on voit qu'en fragile le traitement permet d'obtenir le coefficient de rugosité alors qu'en fatigue, on obtient $\epsilon = 0$. Là encore, cela est sans doute due à l'effet de mémoire qui nécessite un traitement au second ordre (*cf.* Adda-Bedia et al. (2006)).

Pour valider ces différentes approches, nous avons étudié expérimentalement la propagation de fissure à travers l'interface de deux plaques de plexiglas dont les surfaces ont été rendues rugueuses par une technique de sablage. Le but de cette approche est de comparer les grandeurs liées à la fonction d'autocorrélation et celles issues de l'étude théorique consacrée à la déformation du front de fissure semi-infinie située dans un milieu élastique homogène, chargée en mode 1. Nous avons observé que les fonctions $\widehat{\mathcal{A}}(k, a)$, $\mathcal{A}$ et σ^2 , tant en théorie qu'en expérimentale, ont des comportements asymptotiques similaires, ce qui nous a d'ailleurs permis de trouver une valeur de l'exposant de rugosité proche de 0.5.

Dans le souci de mener les études sur l'évolution des fronts quand deux fissures interagissent, nous avons mis en place dans le chapitre 5 les relations nécessaires pour l'étude du désordre lors de la coalescence des fissures. Ce cas sera traité dans la thèse de Laurène Legrand.

TAB. 5.1 – Tableau comparatif résumant les principaux résultats

	tunnel-crack $\alpha = 1/2$ fatigue	semi-infinie $\alpha > 0$ fatigue	semi-infinie $\alpha < 0$ fatigue	semi-infinie $\alpha < 0$ fragile
$\widehat{\delta a}$	$\int_{a_0}^a \left(\frac{\psi(ka)}{\psi(a')} \right)^N \left(\frac{a}{a'} \right)^{N/2} \widehat{\delta a}(k, a') da'$	idem	idem	$-\frac{2a\widehat{\mathcal{K}}(k, a)}{1 + ka }$
$\widehat{\mathcal{A}}(k, a)$	$\frac{\widetilde{\mathcal{C}}(k, 0)}{2N\chi k }$	$\frac{\widetilde{\mathcal{C}}(k, 0)}{2N k \Delta}$	$\frac{\widetilde{\mathcal{C}}(k, 0)}{2N k \Delta}$	$\frac{4\widehat{\mathcal{K}}(k)}{k^2}$
$\widehat{\mathcal{A}}(0, a)$	$\frac{\widetilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{2(N-1)} a_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^N$	$\frac{\widetilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{2N\alpha - 1} a_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{2N\alpha}$	$\frac{\widetilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{1 - 2N\alpha} a$	$4\widehat{\mathcal{K}}(0)a^2$
$\mathcal{A}(z)$	$\frac{\widetilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{4\pi(N-1)} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(p)^{2N} dp$	$\frac{\widetilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi(2N\alpha - 1)} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(p)^{2N-1} dp$	$\frac{\widetilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{2N k \Delta} \ln a$	$\frac{4\widehat{\mathcal{K}}(0)}{\pi}$
$\mathcal{L}$	$a \frac{\left(\int_0^{+\infty} \psi^{2N} dp \right)^{1/2}}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} p^2 \psi^{2N} dp \right)^{1/2}}$	$a \frac{\left(\int_0^{+\infty} \psi^{2N} dp \right)^{1/2}}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} p^2 \psi^{2N} dp \right)^{1/2}}$	$b\sqrt{\ln a}$	$\sqrt{a} \frac{\int_0^{+\infty} \frac{\widehat{\mathcal{K}}(0)}{ \alpha + \Delta} dp}{\int_0^{+\infty} \frac{\widehat{\mathcal{K}}(0)}{\Delta} dp}$
ξ	0	0	0	1/2

Annexe A

Quelques démonstrations du chapitre 2

A.1 Démonstration de certaines propriétés de la résolvante

Démonstration de l'équation (2.40).

Comme les fonctions F , G et H sont réelles, la définition (2.24) de la matrice $\underline{\underline{M}}(p)$ implique que

$$\overline{\underline{\underline{M}}(p)} = \begin{bmatrix} M_{11}(p) & -M_{12}(p) \\ -M_{21}(p) & M_{22}(p) \end{bmatrix}.$$

Ecrivons alors en détail, les composantes de l'EDO (2.31), en utilisant la définition (2.39) de la matrice $\underline{\underline{\mathcal{L}}}'(p, p_0)$ pour substituer ses éléments à ceux de la matrice $\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0)$: on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{L}}}'_{11}}{\partial p}(p, p_0) &= \frac{N}{p} [M_{11}(p) \underline{\underline{\mathcal{L}}}'_{11}(p, p_0) - M_{12}(p) \underline{\underline{\mathcal{L}}}'_{21}(p, p_0)] \\ \frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{L}}}'_{12}}{\partial p}(p, p_0) &= \frac{N}{p} [M_{11}(p) \underline{\underline{\mathcal{L}}}'_{12}(p, p_0) - M_{12}(p) \underline{\underline{\mathcal{L}}}'_{22}(p, p_0)] \\ \frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{L}}}'_{21}}{\partial p}(p, p_0) &= \frac{N}{p} [-M_{21}(p) \underline{\underline{\mathcal{L}}}'_{11}(p, p_0) + M_{22}(p) \underline{\underline{\mathcal{L}}}'_{21}(p, p_0)] \\ \frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{L}}}'_{22}}{\partial p}(p, p_0) &= \frac{N}{p} [-M_{21}(p) \underline{\underline{\mathcal{L}}}'_{12}(p, p_0) + M_{22}(p) \underline{\underline{\mathcal{L}}}'_{22}(p, p_0)] \end{cases},$$

ou de façon équivalente :

$$\frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{L}}}'}{\partial p}(p, p_0) = \frac{N}{p} \overline{\underline{\underline{M}}(p)} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}'(p, p_0).$$

Cette équation représente le conjugué de l'EDO (2.31), c'est donc l'EDO vérifiée par la matrice $\overline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0)}$. Les conditions initiales satisfaites par les matrices $\underline{\underline{\mathcal{L}}}'(p, p_0)$ et $\overline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0)}$ sont aussi identiques, $\underline{\underline{\mathcal{L}}}'(p_0, p_0) = \overline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p_0, p_0)} = \mathbf{1}$. Il s'en suit que ces matrices sont identiques, d'où le résultat donné par l'équation

(2.39) :

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}'(p, p_0) \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11}(p, p_0) & -\mathcal{L}_{12}(p, p_0) \\ -\mathcal{L}_{21}(p, p_0) & \mathcal{L}_{22}(p, p_0) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Démonstration de l'équation (2.41)

Comme les fonctions F et G sont paires, et la fonction H est impaire, on a :

$$\underline{\underline{M}}(-p) = \overline{\underline{\underline{M}}(p)}.$$

On définit alors la matrice

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}''(p, p_0) \equiv \underline{\underline{\mathcal{L}}}(-p, -p_0).$$

Par l'équation (2.31), on établit l'EDO :

$$\frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{L}}}''}{\partial p}(p, p_0) = -\frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{L}}}}{\partial p}(-p, -p_0) = \frac{N}{p} \underline{\underline{M}}(-p) \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}(-p, -p_0) = \frac{N}{p} \overline{\underline{\underline{M}}(p)} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}''(p, p_0)$$

Laquelle représente encore l'EDO satisfait par $\overline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0)}$, d'où $\underline{\underline{\mathcal{L}}}''(p, p_0) = \overline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0)}$ (équation (2.41)) et $\underline{\underline{\mathcal{L}}}''(p_0, p_0) = \overline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p_0, p_0)} = 1$.

Démonstration de l'équation (2.42)

Examinons la forme asymptotique de l'EDO (2.31) pour $p_0 \equiv Cst.$, $p \rightarrow 0$. Cette EDO devient alors

$$\frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{L}}}}{\partial p}(p, p_0) \sim \frac{N}{p} \underline{\underline{M}}(0) \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0) \quad (p_0 \equiv Cst., p \rightarrow 0)$$

où la matrice $\underline{\underline{M}}(0)$ est donnée par l'équation (2.33). L'intégration de cette EDO donne alors

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{11}(p, p_0) \sim Cst. \times |p|^{N/2} \\ \mathcal{L}_{12}(p, p_0) \sim Cst. \times |p|^{N/2} \\ \mathcal{L}_{21}(p, p_0) \sim Cst. \\ \mathcal{L}_{22}(p, p_0) \sim Cst. \end{cases} \quad (p_0 \equiv Cst., p \rightarrow 0)$$

où toutes les constantes dépendent p_0 . Cela peut être écrite sous une forme matricielle, en introduisant dans ces constantes, des facteurs adéquates dépendant de p_0 ,

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0) \sim \underline{\underline{N}} \left(\frac{p}{p_0} \right) \cdot \left[\underline{\underline{\psi}}(p_0) \right]^{-1} \quad (p_0 \equiv Cst., p \rightarrow 0) \quad (\text{A.2})$$

pour une certaine matrice $\underline{\underline{\psi}}(p_0)$, où $\underline{\underline{N}}(X)$ est définie par l'équation (2.35). En écrivant ce résultat pour le couple (p_0, p) au lieu de (p, p_0) et en utilisant la règle d'inversion (2.30)₃, on obtient l'équation (2.42), valable pour $p \equiv Cst.$, $p_0 \rightarrow 0$.

Démonstration de l'équation (2.43)

Déterminons d'abord les expressions asymptotiques des fonctions $\overline{f_{22}}(p)$, $\overline{f_{33}}(p)$, $\widehat{g_{22}}(p)$, $\widehat{g_{33}}(p)$, $\widehat{g_{23}}(p)$ for $p \rightarrow \pm\infty$. Les trois dernières fonctions étant des TF, elles tendent vers zéro.

Pour trouver les deux premières fonctions, réécrivons leur définition (2.9)₁ en utilisant le changement de variable $v \equiv |p|u$; on obtient ainsi :

$$\overline{f_{\alpha\beta}}(p) = \frac{1}{4} + 2|p| \int_0^{+\infty} f_{\alpha\beta}\left(\frac{v}{|p|}\right) \frac{\cos v - 1}{v^2} dv \quad ((\alpha, \beta) = (2, 2) \text{ et } (3, 3)).$$

En remplaçant alors $f_{\alpha\beta}(v/|p|)$ par $f_{\alpha\beta}(0)$ pour $|p| \rightarrow +\infty$ et en intégrant, on a

$$\overline{f_{\alpha\beta}}(p) \sim -\pi f_{\alpha\beta}(0)|p| \quad ((\alpha, \beta) = (2, 2) \text{ et } (3, 3), p \rightarrow \pm\infty),$$

en prenant en compte les valeurs de $f_{22}(0)$ et $f_{33}(0)$ fournies par Lazarus and Leblond (2002a), on obtient :

$$\begin{cases} \overline{f_{22}}(p) \sim -\frac{2-3\nu}{2(2-\nu)}|p| \\ \overline{f_{33}}(p) \sim -\frac{2+\nu}{2(2-\nu)}|p| \end{cases} \quad (p \rightarrow \pm\infty).$$

Il s'en suit alors à partir de la définition (2.13) des fonctions F , G et H que

$$F(p) \sim -\chi|p| ; G(p) \rightarrow 0 ; H(p) \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \pm\infty)$$

où χ est la constante donnée par l'équation (2.44). La définition (2.24) de la matrice $\underline{\underline{M}}(p)$ implique alors que

$$\mathbf{M}(p) \sim -\chi|p| \mathbf{1} \quad (p \rightarrow \pm\infty).$$

Supposons maintenant que p_0 et p tendent vers $\pm\infty$. Alors la matrice $\underline{\underline{M}}(p)$ peut être remplacée par son expression asymptotique sur tout l'intervalle d'intégration dans l'EDO (2.31), laquelle devient ainsi

$$\frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{L}}}}{\partial p}(p, p_0) \sim -N\chi \operatorname{sgn}(p) \underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p_0) \quad (p \text{ et } p_0 \rightarrow \pm\infty)$$

où $\operatorname{sgn}(p)$ signifie le signe de p . L'intégration de cette EDO est facile et l'on obtient l'équation (2.43), en prenant en compte la condition initiale (2.30)₁.

A.2 Comportement asymptotique $\widehat{\Gamma}(k, a)$ pour $a \rightarrow +\infty$ $k \neq 0$ fixé

Soit p_0 un nombre réel fixe tel que $|p| \geq |p_0|$. Cette condition, avec l'équation (2.30)₂, implique que pour de grandes valeurs de a ,

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}(ka, kr) = \underline{\underline{\mathcal{L}}}(ka, p_0) \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}(p_0, kr) \sim e^{-N\chi(|k|a-|p_0|)} \underline{\underline{\mathcal{L}}}(p_0, kr) \quad (k \neq 0, a \rightarrow +\infty)$$

de sorte que l'équation (2.53) devient

$$\widehat{\underline{\underline{\Gamma}}}(k, a) \sim 2\tilde{\mathcal{C}}(k, 0)e^{-2N\chi(|k|a-|p_0|)} \mathbf{I}(a) \quad (k \neq 0, a \rightarrow +\infty) \quad (\text{A.3})$$

où

$$\mathbf{I}(a) \equiv \int_{a_0}^a \overline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p_0, kr)} \cdot [\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p_0, kr)]^T dr. \quad (\text{A.4})$$

Pour trouver la forme asymptotique de l'intégrale $\mathbf{I}(a)$ pour $a \rightarrow +\infty$, on dérive son expression (A.4) et on utilise l'équation (2.43) :

$$\frac{d\mathbf{I}}{da}(a) = \overline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p_0, ka)} \cdot [\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p_0, ka)]^T \sim e^{2N\chi(|k|a-|p_0|)} \mathbf{1} \quad (k \neq 0, a \rightarrow +\infty);$$

En réintégrant le résultat, on obtient

$$\mathbf{I}(a) \sim \frac{e^{2N\chi(|k|a-|p_0|)}}{2N\chi|k|} \mathbf{1} \quad (k \neq 0, a \rightarrow +\infty). \quad (\text{A.5})$$

La combinaison des équations (A.3) et (A.5) donne finalement l'équation (2.54) :

$$\widehat{\underline{\underline{\Gamma}}}(k, a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(k, 0)}{N\chi|k|} \mathbf{1} \quad (k \neq 0, a \rightarrow +\infty)$$

A.3 Comportement asymptotique de $\Gamma(z, a)$ pour $a \rightarrow +\infty$

Par l'équation (2.53), on a

$$\underline{\underline{\Gamma}}(z, a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{C}}(k, 0) e^{-ikz} \left(\int_{a_0}^a \overline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}(ka, kr)} \cdot [\underline{\underline{\mathcal{L}}}(ka, kr)]^T dr \right) dk.$$

En utilisant le changement de variables défini par :

$$\theta \equiv \frac{r}{a} \quad ; \quad p \equiv ka$$

et en changeant l'ordre d'intégration, on obtient à partir de là :

$$\underline{\underline{\Gamma}}(z, a) = \frac{1}{\pi} \int_{a_0/a}^1 \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{C}}\left(\frac{p}{a}, 0\right) e^{-ipz/a} \overline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p\theta)} \cdot [\underline{\underline{\mathcal{L}}}(p, p\theta)]^T dp \right\} d\theta.$$

Un examen détaillé de cette intégrale révèle que sa borne inférieure $\theta = a_0/a$ et sa borne supérieure $\theta = 1$ produisent des comportements divergents pour $a \rightarrow +\infty$. Il est donc nécessaire de l'exprimer sous la forme

$$\underline{\underline{\Gamma}}(z, a) \equiv \mathbf{J}_1(a) + \mathbf{J}_2(a) \quad (\text{A.6})$$

où

$$\begin{cases} \mathbf{J}_1(a) & \equiv \frac{1}{\pi} \int_{a_0/a}^{1/2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{C}}\left(\frac{p}{a}, 0\right) e^{-ipz/a} \overline{\underline{\mathcal{L}}(p, p\theta)} \cdot [\underline{\mathcal{L}}(p, p\theta)]^T dp \right\} d\theta \\ \mathbf{J}_2(a) & \equiv \frac{1}{\pi} \int_{1/2}^1 \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{C}}\left(\frac{p}{a}, 0\right) e^{-ipz/a} \overline{\underline{\mathcal{L}}(p, p\theta)} \cdot [\underline{\mathcal{L}}(p, p\theta)]^T dp \right\} d\theta, \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

et d'étudier séparément les intégrales $\mathbf{J}_1(a)$ et $\mathbf{J}_2(a)$.

– *Etude de $\mathbf{J}_1(a)$.*

En remplaçant $\tilde{\mathcal{C}}(p/a, 0)$ par $\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)$ et $e^{-ipz/a}$ par 1 pour $a \rightarrow +\infty$ dans l'équation (A.7)₁, on obtient

$$\mathbf{J}_1(a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi} \mathbf{K}_1\left(\frac{a_0}{a}\right) \quad (a \rightarrow +\infty), \quad \mathbf{K}_1(X) \equiv \int_X^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\underline{\mathcal{L}}(p, p\theta)} \cdot [\underline{\mathcal{L}}(p, p\theta)]^T dp \right) d\theta. \quad (\text{A.8})$$

Pour avoir l'expression asymptotique de $\mathbf{K}_1(X)$ pour $X \rightarrow 0$, on considère sa dérivée et on utilise la forme asymptotique (2.42) de $\underline{\mathcal{L}}(p, pX)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}_1}{dX}(X) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\underline{\mathcal{L}}(p, pX)} \cdot [\underline{\mathcal{L}}(p, pX)]^T dp \\ &\sim - \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\underline{\psi}(p)} \cdot \left[\mathbf{N}\left(\frac{1}{X}\right) \right]^2 \cdot [\underline{\psi}(p)]^T dp \quad (X \rightarrow 0). \end{aligned}$$

En conservant seulement la composante dominante $N_{11}(1/X) = X^{-N/2}$ de la matrice $\underline{\mathbf{N}}(1/X)$ (voir équation (2.35)), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}_1}{dX}(X) &\sim -X^{-N} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} |\psi_{11}(p)|^2 & \overline{\psi_{11}(p)}\psi_{21}(p) \\ \psi_{11}(p)\overline{\psi_{21}(p)} & |\psi_{21}(p)|^2 \end{bmatrix} dp \\ &= -X^{-N} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} |\psi_{11}(p)|^2 & 0 \\ 0 & |\psi_{21}(p)|^2 \end{bmatrix} dp \quad (X \rightarrow 0) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait les fonctions ψ_{11} et ψ_{21} sont respectivement paire et impaire par rapport à p . En intégrant et en utilisant l'équation (A.8)₁, on conclut que

$$\mathbf{J}_1(a) \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi(N-1)} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} |\psi_{11}(p)|^2 & 0 \\ 0 & |\psi_{21}(p)|^2 \end{bmatrix} dp \quad (a \rightarrow +\infty). \quad (\text{A.9})$$

– *Etude de $\mathbf{J}_2(a)$.*

Il est malheureusement impossible de remplacer simplement $\tilde{\mathcal{C}}(p/a, 0)$ par $\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)$ dans l'expression (A.7)₂ de $\mathbf{J}_2(a)$ pour $a \rightarrow +\infty$, comme nous l'avons fait pour $\mathbf{J}_1(a)$, parce que nous obtiendrions une intégrale divergente. Il devient nécessaire ici de tenir compte de la

décroissance de la fonction $\tilde{\mathcal{C}}(k, 0)$ au voisinage de l'infini. Cette fonction est supposée de la forme

$$\tilde{\mathcal{C}}(k, 0) \equiv \tilde{\mathcal{C}}(0, 0) e^{-|k|b} \quad (\text{A.10})$$

où b représente la distance de corrélation de la fluctuation de la constance de Paris.

A présent, soit p_0 un nombre positif tel que $|p| \geq p_0$. alors

$$\mathbf{J}_2(a) \equiv \mathbf{K}'_2(a) + \mathbf{K}''_2(a) \quad (\text{A.11})$$

où

$$\begin{cases} \mathbf{K}'_2(a) & \equiv \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi} \int_{1/2}^1 \left(\int_{-p_0}^{p_0} e^{-|p|b/a - ipz/a} \overline{\underline{\mathcal{L}}(p, p\theta)} \cdot [\underline{\mathcal{L}}(p, p\theta)]^T dp \right) d\theta \\ \mathbf{K}''_2(a) & \equiv \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi} \int_{1/2}^1 \left(\int_{|p| \geq p_0} e^{-|p|b/a - ipz/a} \overline{\underline{\mathcal{L}}(p, p\theta)} \cdot [\underline{\mathcal{L}}(p, p\theta)]^T dp \right) d\theta. \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Désignons par $\|\cdot\|$ la norme arbitraire pour l'espace des matrices 2×2 . Alors

$$\|\mathbf{K}'_2(a)\| \leq \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi} \int_{1/2}^1 \left(\int_{-p_0}^{p_0} \|\overline{\underline{\mathcal{L}}(p, p\theta)} \cdot [\underline{\mathcal{L}}(p, p\theta)]^T\| dp \right) d\theta \quad (\text{A.13})$$

où le membre de droite est une constante indépendante de a . D'autre part, l'utilisation de l'équation (2.43) pour $\underline{\mathcal{L}}(p, p\theta)$ donne

$$\begin{aligned} \mathbf{K}''_2(a) & \sim \frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi} \left[\int_{1/2}^1 \left(\int_{|p| \geq p_0} e^{-|p|b/a - ipz/a - 2N\chi(1-\theta)|p|} dp \right) d\theta \right] \mathbf{1} \\ & = \frac{2\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_{1/2}^1 \left(\int_{p_0}^{+\infty} e^{-pb/a - ipz/a - 2N\chi(1-\theta)p} dp \right) d\theta \right] \mathbf{1} \\ & = \frac{2\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{1/2}^1 \frac{e^{-p_0b/a - ip_0z/a - 2N\chi(1-\theta)p_0}}{b/a + iz/a + 2N\chi(1-\theta)} d\theta \right) \mathbf{1} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

soit

$$\|\mathbf{K}''_2(a)\| \lesssim \frac{2\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi} \|\mathbf{1}\| \int_{1/2}^1 \frac{d\theta}{b/a + 2N\chi(1-\theta)} \sim -\frac{\tilde{\mathcal{C}}(0, 0)}{\pi} \|\mathbf{1}\| \frac{\ln(b/a)}{N\chi} \quad (a \rightarrow +\infty). \quad (\text{A.15})$$

On en déduit à partir des équations (A.11), (A.13) et (A.15) que

$$\mathbf{J}_2(a) = O(\ln a) \quad (a \rightarrow +\infty). \quad (\text{A.16})$$

Les équations (A.9) et (A.16) impliquent que $\mathbf{J}_1(a)$ diverge plus rapidement que $\mathbf{J}_2(a)$ pour $a \rightarrow +\infty$. Par conséquent, l'expression asymptotique de $\underline{\mathcal{I}}(z, a)$ pour $a \rightarrow +\infty$ est la même que celle de $\mathbf{J}_1(a)$, équation (A.9).

Annexe B

Appendice du chapitre 3

B.1 Inequalities on the equivalent Poisson ratio

The aim of this Appendix is to establish inequalities (3.2) of the text on the constant ν (the “equivalent Poisson ratio”) defined by equation (3.1)₂. Of course, the individual Poisson ratios ν_+ , ν_- will be assumed to verify the inequalities $0 < \nu_+ < 1/2$, $0 < \nu_- < 1/2$.

Inequality (3.2)₁ is quite trivial; indeed, since ν_+ and ν_- are positive, $(1 - \nu_+)/\mu_+ < 1/\mu_+$, $(1 - \nu_-)/\mu_- < 1/\mu_-$ so that, by equation (3.1)₂,

$$1 - \nu < \frac{1}{\cosh^2(\pi\epsilon)} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \nu > 0.$$

To establish inequality (3.2)₂, one needs an explicit expression of $\cosh(\pi\epsilon)$. By equation (3.1)₁,

$$e^{\pi\epsilon} = \sqrt{\frac{\frac{3-4\nu_+}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-}}{\frac{3-4\nu_-}{\mu_-} + \frac{1}{\mu_+}}} \quad \Rightarrow \quad \cosh(\pi\epsilon) = 2 \frac{\frac{1-\nu_+}{\mu_+} + \frac{1-\nu_-}{\mu_-}}{\sqrt{\left(\frac{3-4\nu_+}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-}\right) \left(\frac{3-4\nu_-}{\mu_-} + \frac{1}{\mu_+}\right)}}. \text{ It then}$$

follows from equation (3.1)₂ that

$$1 - \nu = \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{3-4\nu_+}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-}\right) \left(\frac{3-4\nu_-}{\mu_-} + \frac{1}{\mu_+}\right)}{\left(\frac{1}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-}\right) \left(\frac{1-\nu_+}{\mu_+} + \frac{1-\nu_-}{\mu_-}\right)}.$$

Let us now write ν_+ and ν_- in the form

$$\nu_+ \equiv \frac{1}{2} - \alpha_+ \quad ; \quad \nu_- \equiv \frac{1}{2} - \alpha_-.$$

Then $\alpha_+ > 0$, $\alpha_- > 0$ and

$$\begin{aligned}
1 - \nu &= \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{1+4\alpha_+}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-}\right) \left(\frac{1+4\alpha_-}{\mu_-} + \frac{1}{\mu_+}\right)}{\left(\frac{1}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-}\right) \left(\frac{1/2 + \alpha_+}{\mu_+} + \frac{1/2 + \alpha_-}{\mu_-}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-} + \frac{4\alpha_+}{\mu_+}\right) \left(\frac{1}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-} + \frac{4\alpha_-}{\mu_-}\right)}{\left(\frac{1}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-}\right) \left(\frac{1}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-} + \frac{2\alpha_+}{\mu_+} + \frac{2\alpha_-}{\mu_-}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-}\right)^2 + 4 \left(\frac{1}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-}\right) \left(\frac{\alpha_+}{\mu_+} + \frac{\alpha_-}{\mu_-}\right) + 16 \frac{\alpha_+}{\mu_+} \frac{\alpha_-}{\mu_-}}{\left(\frac{1}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-}\right)^2 + 2 \left(\frac{1}{\mu_+} + \frac{1}{\mu_-}\right) \left(\frac{\alpha_+}{\mu_+} + \frac{\alpha_-}{\mu_-}\right)}.
\end{aligned}$$

The big ratio here is obviously larger than unity, so that $1 - \nu > 1/2$, which implies that $\nu < 1/2$.

B.2 Appendix : inequality on the constants A and B

The aim of this Appendix is to establish inequality (3.19) of the text on the constants A and B defined by equations (3.17). The proof will rely on inequalities (3.2) on the equivalent Poisson ratio ν .

The following preliminary remark is in order : since $1 - \nu < 1/\cosh^2(\pi\epsilon)$, as noted at the beginning of Appendix B.1, and since $1 - \nu > 0$ by inequality (3.2)₂,

$$(1 - \nu) \cosh(\pi\epsilon) \leq (1 - \nu) \cosh^2(\pi\epsilon) < 1.$$

Now since $1 - \nu > 0$, the quantity H defined by equation (3.18) is positive. Also, $\frac{3}{1-\nu} - \cosh(\pi\epsilon) = \frac{1}{1-\nu} [3 - (1 - \nu) \cosh(\pi\epsilon)] > \frac{2}{1-\nu} > 0$ by the preliminary remark. Equation (3.17)₁ then implies that

$$A \geq H^{-1} |k|^2 (1 - \nu) \cosh(\pi\epsilon).$$

Also, equation (3.17)₂, combined with the preliminary remark, implies that

$$|B| = H^{-1} \frac{|k|^2}{2} [1 - (1 - \nu) \cosh(\pi\epsilon)].$$

It follows from there that

$$A - |B| \sqrt{1 + 4\epsilon^2} \geq H^{-1} |k|^2 \left[(1 - \nu) \cosh(\pi\epsilon) \left(1 + \frac{\sqrt{1 + 4\epsilon^2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{1 + 4\epsilon^2}}{2} \right].$$

Since $(1 - \nu) \cosh(\pi\epsilon) \geq 1 - \nu > \frac{1}{2}$, this implies that

$$A - |B| \sqrt{1 + 4\epsilon^2} > H^{-1} \frac{|k|^2}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{1 + 4\epsilon^2}}{2} \right).$$

The problem is reduced to proving that the term (...) here is non-negative, *i.e.* that $|\epsilon| \leq \sqrt{3}/2$.

To show that this is indeed true, write equation (3.1)₁ defining ϵ in the form

$$e^{2\pi\epsilon} = \frac{3 - 4\nu_+ + \frac{\mu_+}{\mu_-}}{(3 - 4\nu_-)\frac{\mu_+}{\mu_-} + 1}.$$

The denominator in the right-hand side here does not vanish since $3 - 4\nu_- > 0$, so that this right-hand side is a monotone function of the ratio μ_+/μ_- . Hence its extremal values are $3 - 4\nu_+$, for $\mu_+/\mu_- = 0$, and $\frac{1}{3 - 4\nu_-}$, for $\mu_+/\mu_- = +\infty$. Since $0 < \nu_+ < 1/2$ and $0 < \nu_- < 1/2$, they are in the interval $(\frac{1}{3}, 3)$. Hence $\frac{1}{3} < e^{2\pi\epsilon} < 3$, which implies that $|\epsilon| < \frac{\ln 3}{2\pi} < \frac{\sqrt{3}}{2}$. This concludes the proof.

B.3 Appendix : statistical description of an ensemble of cracked media

We consider a statistical ensemble of possible “realizations” of a medium made of two elastic half-spaces bonded together except on a semi-infinite interface crack. The elastic properties are the same for all realizations, but the fracture properties of the interface and the geometry of the crack front vary from one realization to another. To each realization is attached a specific real number ω , which is a random variable spanning some domain Ω of the real line. The *density of probability* of the variable ω is denoted $p(\omega)$. The probability that this variable lie in some neighborhood of ω of measure $d\omega$ is thus $p(\omega)d\omega$. The integral of $p(\omega)$ over Ω is unity by definition.

The *mathematical expectation* $E[F(z)]$ of any observable $F(z; \omega)$ defined on the crack front (depending upon the specific realization considered) is defined as

$$E[F(z)] \equiv \int_{\Omega} F(z; \omega) p(\omega) d\omega. \quad (\text{B.1})$$

Its *two-point autocorrelation function* $E[F(z_1)F(z_2)]$ is similarly defined as

$$E[F(z_1)F(z_2)] \equiv \int_{\Omega} F(z_1; \omega) F(z_2; \omega) p(\omega) d\omega. \quad (\text{B.2})$$

Similar formulae hold for functions defined in Fourier’s space.

Let $\widetilde{E[F_1 F_2]}(k_1, k_2)$ denote the double Fourier transform of the function $E[F(z_1)F(z_2)]$. Then

$$\begin{aligned} \widetilde{E[F_1 F_2]}(k_1, k_2) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E[F(z_1)F(z_2)] e^{ik_1 z_1} e^{ik_2 z_2} dz_1 dz_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_1 z_1} e^{ik_2 z_2} \left(\int_{\Omega} F(z_1; \omega) F(z_2; \omega) p(\omega) d\omega \right) dz_1 dz_2 \\ &= \int_{\Omega} p(\omega) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(z_1; \omega) e^{ik_1 z_1} dz_1 \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(z_2; \omega) e^{ik_2 z_2} dz_2 \right) d\omega \\ &= \int_{\Omega} \widehat{F}(k_1; \omega) \widehat{F}(k_2; \omega) p(\omega) d\omega \\ &= E[\widehat{F}(k_1) \widehat{F}(k_2)]. \end{aligned}$$

This establishes equation (3.27)₁ of the text.

Moreover, if the observable is statistically invariant in the direction of the crack front, in which case its two-point autocorrelation function is of the form (3.26), one also gets

$$\begin{aligned}
 \widetilde{E[F_1 F_2]}(k_1, k_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(z_2 - z_1) e^{ik_1 z_1} e^{ik_2 z_2} dz_1 dz_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(z_2 - z_1) e^{i(k_1 + k_2)z_1} e^{ik_2(z_2 - z_1)} dz_1 dz_2 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(k_1 + k_2) \mathcal{F}(z) e^{ik_2 z} dz \\
 &= 2\pi \delta(k_1 + k_2) \hat{\mathcal{F}}(k_2),
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

where δ denotes Dirac's function. This establishes equation (3.27)₂.

B.4 Appendix : qualitative analysis of the evolution in time of a sinusoidal perturbation of the crack front of short wavelength

Figure B.1 shows a picture of an interface crack with a sinusoidal front, as seen from above. The hatched region represents the still unbroken part of the interface. The crack advance is maximum at point *A* and minimum at point *B*.

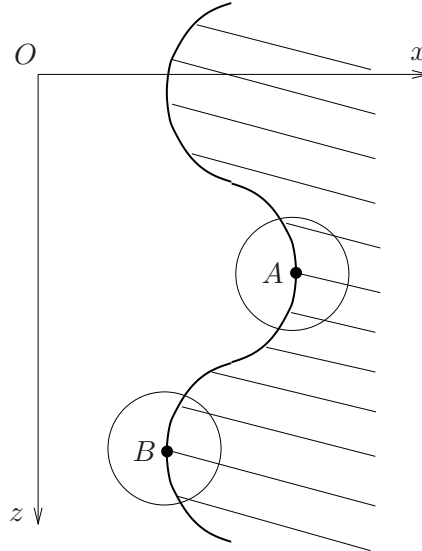


FIG. B.1 – Planar interface crack with sinusoidal front

Now draw small circles centered at points *A* and *B*. Because the sign of the curvature of the crack front is different at these two points, the relative proportion of the interior of the circle occupied by the unbroken interface is larger at point *A* than at point *B*. Thus relative motions

of the crack faces are more hindered near point A than near point B . The implication is that the SIFs, and consequently the energy release rate, tend to be larger at point B than at point A . This phenomenon will be referred to as the “curvature effect”.

The curvature effect is present whatever the value of the wavelength of the undulation. However, when this wavelength is large, the crack front is only weakly curved so that the curvature effect is small and bound to be overcome by other effects arising from the far geometry and loading. On the other hand, when the wavelength of the undulation is small, the crack front is strongly curved so that the curvature effect is important and must dominate over other ones. The implication is that for sinusoidal perturbations of the crack front of short wavelength, these points of the front where the crack advance is minimum will propagate more quickly than those where the crack advance is maximum. In other words, the amplitude of the perturbation will decrease in time; the smaller the wavelength, the larger the difference between the values of the energy release rate at points A and B , and therefore the faster the decay of the perturbation.

B.5 Appendix : calculation of the mean value of the function $F_\theta(\lambda)$

The purpose of this Appendix is to establish equation (3.47) of the text, which provides the mean value $\overline{F}$ of the function $F_\theta(\lambda)$ defined by equation (3.46).

- If $\epsilon = 0$, the function $F_\theta(\lambda)$ is constant and therefore identical to $\overline{F}$, and its value is

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+i\theta) e^{-(1+i\theta)q}}{A + \operatorname{Re}(B)} dq = \frac{1}{A + \operatorname{Re}(B)}.$$

This establishes equation (3.47)₁.

- If $\epsilon \neq 0$, the function $F_\theta(\lambda)$ is periodic of period $\pi/|\epsilon|$. Therefore

$$\begin{aligned} \overline{F} &\equiv \frac{\epsilon}{\pi} \int_0^{\pi/\epsilon} \left[\int_0^{+\infty} \frac{(1+i\theta) e^{-(1+i\theta)q}}{A + \operatorname{Re}(Bq^{2i\epsilon} e^{-2i\epsilon\lambda})} dq \right] d\lambda \\ &= \frac{\epsilon}{\pi} \int_0^{+\infty} (1+i\theta) e^{-(1+i\theta)q} \left[\int_0^{\pi/\epsilon} \frac{d\lambda}{A + \operatorname{Re}(Bq^{2i\epsilon} e^{-2i\epsilon\lambda})} \right] dq. \end{aligned}$$

Instead of integrating on λ from 0 to π/ϵ here, one may integrate from λ_0 to $\lambda_0 + \pi/\epsilon$ where λ_0 is an arbitrary number, and then use the change of variable $\mu \equiv \lambda - \lambda_0$. The integral on λ is then replaced by

$$\int_0^{\pi/\epsilon} \frac{d\mu}{A + \operatorname{Re}(Bq^{2i\epsilon} e^{-2i\epsilon\lambda_0} e^{-2i\epsilon\mu})}.$$

Choose λ_0 in such a way that $Bq^{2i\epsilon} e^{-2i\epsilon\lambda_0} = |B|$. This integral then reduces to

$$\int_0^{\pi/\epsilon} \frac{d\mu}{A + |B| \cos(2\epsilon\mu)},$$

the value of which is readily shown by standard methods to be $\frac{\pi}{\epsilon \sqrt{A^2 - |B|^2}}$. Inserting this value into the preceding expression of $\overline{F}$ and performing the integration on q , one gets equation (3.47)₂ of the text.

Annexe C

Annexe du chapitre 5

C.1 Calcul du comportement asymptotique à l'infini des fonctions $\widehat{F}_\alpha(p)$ et $\widehat{g}_{\alpha\beta}(p)$

– **Comportement de $\widehat{F}_\alpha(p)$ pour $p \rightarrow +\infty$**

D'après la définition de la TF de f_α , on a :

$$\begin{aligned}\widehat{f}_\alpha(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(\eta) e^{ip\eta} d\eta \\ &= 2 \int_0^{+\infty} f_\alpha(\eta) \cos(p\eta) d\eta \quad \text{car } f_\alpha \text{ est paire}\end{aligned}\tag{C.1}$$

donc

$$\begin{aligned}\widehat{F}_\alpha(p) &= \int_0^p f_\alpha(p') dp' \\ &= 2 \int_0^{+\infty} f_\alpha(\eta) \frac{\sin(p\eta)}{\eta} d\eta\end{aligned}\tag{C.2}$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}\widehat{F}_\alpha^\infty &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \widehat{F}_\alpha(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} 2 \int_0^{+\infty} f_\alpha(\eta) \frac{\sin(p\eta)}{\eta} d\eta \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v} f_\alpha\left(\frac{v}{\eta}\right) dv \quad \text{en posant } v = p\eta \\ &= 2f_\alpha(0) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v} dv \\ &= \pi f_\alpha(0)\end{aligned}\tag{C.3}$$

or $f_\alpha(0) = \frac{1}{2\pi}$, on obtient :

$$\widehat{F}_\alpha^\infty = \frac{1}{2} \quad \text{avec } \alpha = 1, 2\tag{C.4}$$

– **Comportement de $\widehat{g}_{1\overline{1}}(p)$ pour $p \rightarrow +\infty$**

Considérons l'équation différentielle :

$$p \left[2k\widehat{g}_{1\overline{1}} - \frac{\widehat{g}_{1\overline{1}}''}{2k} \right] = -2\widehat{F}_1\widehat{g}_{1\overline{1}} - \frac{1+k}{k}\widehat{g}_{1\overline{2}}'\widehat{g}_{1\overline{2}} - \frac{1-k}{k}\widehat{g}_{1\overline{2}}\widehat{g}_{1\overline{2}}' \quad (\text{C.5})$$

Puisque pour $p \rightarrow +\infty$, $\widehat{F}_1 \rightarrow \frac{1}{2}$, $\widehat{g}_{1\overline{2}}$ se comporte comme e^{-2kp} , $\widehat{g}_{1\overline{2}}$ se comporte comme $e^{-(1-k)p}$ et $\widehat{g}_{1\overline{2}}$ se comporte comme $e^{-(1+k)p}$, les deuxième et troisième termes du membre de droite de l'équation (C.5) sont négligeables devant le premier. Cette équation devient

$$p \left[4k^2\widehat{g}_{1\overline{1}} - \widehat{g}_{1\overline{1}}'' \right] = -2k\widehat{g}_{1\overline{1}} + \dots \quad (\text{C.6})$$

soit

$$\frac{\widehat{g}_{1\overline{1}}''}{\widehat{g}_{1\overline{1}}} = 4k^2 + \frac{2k}{p} + \dots \quad (\text{C.7})$$

En écrivant $\frac{\widehat{g}_{1\overline{1}}''}{\widehat{g}_{1\overline{1}}} = \left(\frac{\widehat{g}_{1\overline{1}}'}{\widehat{g}_{1\overline{1}}} \right)' + \left(\frac{\widehat{g}_{1\overline{1}}'}{\widehat{g}_{1\overline{1}}} \right)^2$ et en posant $\frac{\widehat{g}_{1\overline{1}}'}{\widehat{g}_{1\overline{1}}} = -2k + \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right)$, on obtient après identification de a et b :

$$\frac{\widehat{g}_{1\overline{1}}'}{\widehat{g}_{1\overline{1}}} = -2k - \frac{1}{2p} + \frac{3}{16kp^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right) \quad (\text{C.8})$$

L'intégration de l'équation (C.8) donne

$$\widehat{g}_{1\overline{1}}(p) = \frac{C_{1\overline{1}}}{\sqrt{p}} \left[1 - \frac{3}{16kp} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right] e^{-2kp} \quad (\text{C.9})$$

– **Comportement de $\widehat{g}_{1\overline{2}}(p)$ pour $p \rightarrow +\infty$**

Considérons l'équation différentielle

$$\begin{aligned} p \left[(1-k)\widehat{g}_{1\overline{2}} - \frac{\widehat{g}_{1\overline{2}}''}{1-k} \right] &= (\widehat{F}_1 + \widehat{F}_2)\widehat{g}_{1\overline{2}} + \frac{1+k}{1-k}\widehat{g}_{1\overline{1}}'\widehat{g}_{1\overline{2}} + \frac{2k}{1-k}\widehat{g}_{1\overline{1}}\widehat{g}_{1\overline{2}}' \\ &\quad - \frac{2}{1-k}\widehat{g}_{1\overline{2}}'\widehat{g}_{2\overline{2}} - \frac{1+k}{1-k}\widehat{g}_{1\overline{2}}\widehat{g}_{2\overline{2}}' \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

pour $p \rightarrow +\infty$, $\widehat{F}_\alpha \rightarrow \frac{1}{2}$ avec $\alpha = 1, 2$ et les fonctions $\widehat{g}_{1\overline{2}}$, $\widehat{g}_{1\overline{1}}$, $\widehat{g}_{1\overline{2}}$ et $\widehat{g}_{2\overline{2}}$ se comportent respectivement comme $e^{-(1-k)p}$, e^{-2kp} , $e^{-(1+k)p}$ et e^{-2p} . Les autres termes du membre de droite de l'équation (C.10) sont négligeables devant le premier terme. Cette équation devient

$$p \left[(1-k)^2\widehat{g}_{1\overline{2}} - \widehat{g}_{1\overline{2}}'' \right] = (1-k)\widehat{g}_{1\overline{2}} + \dots \quad (\text{C.11})$$

soit

$$\frac{\widehat{g}_{1\overline{2}}''}{\widehat{g}_{1\overline{2}}} = (1-k)^2 - \frac{1-k}{p} + \dots \quad (\text{C.12})$$

En écrivant $\frac{\widehat{g}_{12}''}{\widehat{g}_{12}} = \left(\frac{\widehat{g}_{12}'}{\widehat{g}_{12}}\right)' + \left(\frac{\widehat{g}_{12}'}{\widehat{g}_{12}}\right)^2$ et en posant $\frac{\widehat{g}_{12}'}{\widehat{g}_{12}} = (1-k) + \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \dots$ on trouve

$$\frac{\widehat{g}_{12}'}{\widehat{g}_{12}} = (1-k) + \frac{1}{2p} - \frac{1}{8(1-k)p^2} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \quad (\text{C.13})$$

L'intégration de cette dernière équation donne :

$$\widehat{g}_{12}(p) = C_{12}\sqrt{p} \left[1 + \frac{1}{8(1-k)p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right] e^{-(1-k)p} \quad (\text{C.14})$$

– **Comportement de $\widehat{g}_{1\bar{2}}(p)$ pour $p \rightarrow +\infty$**

Soit l'équation différentielle

$$\begin{aligned} p \left[(1+k)\widehat{g}_{1\bar{2}} - \frac{\widehat{g}_{1\bar{2}}''}{1+k} \right] &= (\widehat{F}_2 - \widehat{F}_1)\widehat{g}_{1\bar{2}} - \frac{1-k}{1+k}\widehat{g}_{1\bar{1}}'\widehat{g}_{1\bar{2}} + \frac{2k}{1+k}\widehat{g}_{1\bar{1}}\widehat{g}_{1\bar{2}}' \\ &\quad - \frac{2}{1+k}\widehat{g}_{1\bar{2}}'\widehat{g}_{2\bar{2}} - \frac{1-k}{1+k}\widehat{g}_{1\bar{2}}\widehat{g}_{2\bar{2}}' \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

L'examen des ordres de grandeur des différents termes permet de simplifier cette équation de la manière suivante :

$$p \left[(1+k)^2\widehat{g}_{1\bar{2}} - \widehat{g}_{1\bar{2}}'' \right] = -\frac{\widehat{g}_{1\bar{1}}\widehat{g}_{1\bar{2}}'}{2} \left[\frac{1+k}{(1-k)p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right] \quad (\text{C.16})$$

En utilisant ensuite les équations (C.9) et (C.14), on aboutit à une équation différentielle avec second membre :

$$\widehat{g}_{1\bar{2}}'' - (1+k)^2\widehat{g}_{1\bar{2}} = -\frac{C_{1\bar{1}}C_{12}(1+k)e^{-(1+k)p}}{2p^2} \left[1 + O\left(\frac{1}{p}\right) \right] \quad (\text{C.17})$$

Une solution particulière de cette équation est de la forme $\widehat{g}_{1\bar{2}} = -\frac{C_{1\bar{1}}C_{12}}{4p}e^{-(1+k)p}$ alors que la solution homogène est $\widehat{g}_{1\bar{2}} = C_{1\bar{2}}e^{-(1+k)p}$.

Finalement la solution générale de l'équation (C.17) est :

$$\widehat{g}_{1\bar{2}}(p) = \left[C_{1\bar{2}} - \frac{C_{1\bar{1}}C_{12}}{4p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right] e^{-(1+k)p} \quad (\text{C.18})$$

– **Comportement de $\widehat{g}_{2\bar{2}}(p)$ pour $p \rightarrow +\infty$**

Soit l'équation

$$p \left[2\widehat{g}_{2\bar{2}} - \frac{\widehat{g}_{2\bar{2}}''}{2} \right] = 2\widehat{F}_2\widehat{g}_{2\bar{2}} + (1+k)\widehat{g}_{1\bar{2}}'\widehat{g}_{1\bar{2}} - (1-k)\widehat{g}_{1\bar{2}}\widehat{g}_{1\bar{2}}' \quad (\text{C.19})$$

L'examen des ordres de grandeur des différents termes permet de simplifier cette équation de la manière suivante, compte tenu des équations (C.14) et (C.18) :

$$p \left[4\widehat{g}_{2\bar{2}} - \widehat{g}_{2\bar{2}}'' \right] = 2\widehat{g}_{2\bar{2}} + \frac{C_{12}C_{1\bar{2}}(1+k)e^{-2p}}{\sqrt{p}} \left[1 + O\left(\frac{1}{p}\right) \right] \quad (\text{C.20})$$

Cherchons d'abord la solution homogène, cela revient à résoudre l'équation

$$p [4\widehat{g_{2\bar{2}}} - \widehat{g_{2\bar{2}}}'''] = 2\widehat{g_{2\bar{2}}} \quad (\text{C.21})$$

soit

$$\frac{\widehat{g_{2\bar{2}}}'''}{\widehat{g_{2\bar{2}}}} = 4 - \frac{2}{p} \quad (\text{C.22})$$

En écrivant $\frac{\widehat{g_{2\bar{2}}}'''}{\widehat{g_{2\bar{2}}}} = \left(\frac{\widehat{g_{2\bar{2}}}' }{\widehat{g_{2\bar{2}}}}\right)' + \left(\frac{\widehat{g_{2\bar{2}}}' }{\widehat{g_{2\bar{2}}}}\right)^2$ et en posant $\frac{\widehat{g_{2\bar{2}}}' }{\widehat{g_{2\bar{2}}}} = -2 + \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + O(\frac{1}{p^3})$, la solution homogène se met sous la forme suivante :

$$\widehat{g_{2\bar{2}}} = C_{2\bar{2}}\sqrt{p}e^{-2p} \left[1 + \frac{1}{16p} + O(\frac{1}{p^2})\right] \quad (\text{C.23})$$

De plus une solution particulière de l'équation (C.20) est de la forme : $\widehat{g_{2\bar{2}}} = -\frac{C_{12}C_{1\bar{2}}(1+k)e^{-2p}}{4\sqrt{p}}$

Ce qui permet d'obtenir finalement la solution générale :

$$\widehat{g_{2\bar{2}}}(p) = \sqrt{p} \left[C_{2\bar{2}} + \frac{C_{2\bar{2}}}{16p} - (1+k)\frac{C_{1\bar{2}}C_{12}}{4p} + O(\frac{1}{p^2}) \right] e^{-2p} \quad (\text{C.24})$$

Bibliographie

- Adda-Bedia, M., Katzav, E., Vandembroucq, D., 2006. Second order variation of elastic fields of a tensile planr crack with curved front. PHYSICAL REVIEW E. .
- Amestoy, M., Leblond, J.-B., 1992. Crack Paths in Plane Situations - II. Detailed Form of the Expansion of the Stress Intensity Factors. International Journal of Solids and Structures 29, 465–501.
- Antipov, Y., 1999. An exact solution of the 3-d-problem of an interface semi-infinite plane crack. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 47 (5), 1051–1093.
- Bercial-Velez, J., Antipov, Y., Movchan, A., May 2005. High-order asymptotics and perturbation problems for 3d interfacial cracks. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 53 (5), 1128–1162.
- Bueckner, H. F., 1987. Weight functions and fundamental fields for the penny-shaped and the half-plane crack in three-space. International Journal of Solids and Structures 23 (1), 57–93.
- Daguier, P., Bouchaud, E., Lapasset, G., 1995. Roughness of a crack front pinned by microstructural obstacles. EPL (Europhysics Letters) 31 (7), 367–372.
URL <http://stacks.iop.org/0295-5075/31/367>
- Delaplace, A., Schmittbuhl, J., Måløy, K. J., 1999. High resolution description of a crack front in a heterogeneous plexiglas block. Physical Review E (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics) 60 (2), 1337–43.
- Favier, E., Lazarus, V., Leblond, J.-B., 2006a. Coplanar propagation paths of 3D cracks in infinite bodies loaded in shear. International Journal of Solids and Structures 43 (7-8), 2091–2109.
- Favier, E., Lazarus, V., Leblond, J.-B., 2006b. Statistics of the deformation of the front of a tunnel-crack propagating in some inhomogeneous medium. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 54 (7), 1449–1478.

- Gao, H., Rice, J. R., 1986. Shear stress intensity factors for planar crack with slightly curved front. *ASME Journal of Applied Mechanics* 53 (4), 774–778.
- Gradsteyn, I. S., Ryzhik, I. M., 1965. *Tables of integrals series, and products*. Academic Press, New-York.
- Gradsteyn, I. S., Ryzhik, I. M., 1980. *Tables of integrals series, and products*. Academic Press, New-York.
- Hutchinson, J. W., Mear, M. E., Rice, J. R., 1987. Crack paralleling an interface between dissimilar materials. *ASME Journal of Applied Mechanics* 54, 828–832.
- Hwu, C., 1991. Collinear cracks in anisotropic bodies. *Int. J. of Fracture* 52, 239–256.
- Katzav, E., Adda-Bedia, M., Amar, M. B., Boudaoud, A., 2007. Roughness of moving elastic lines : Crack and wetting fronts. *Phys. Rev. E* 76 (5).
- Lazarus, V., Leblond, J.-B., 1998a. Three-dimensional crack-face weight functions for the semi-infinite interface crack. I. Variation of the stress intensity factors due to some small perturbation of the crack front. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46 (3), 489–511.
- Lazarus, V., Leblond, J.-B., 1998b. Three-dimensional crack-face weight functions for the semi-infinite interface crack. II. Integrodifferential equations on the weight functions and resolution. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46 (3), 513–536.
- Lazarus, V., Leblond, J.-B., 2002a. Crack front stability for a tunnel-crack propagating along its plane in mode 2+3. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, Serie II (Mécanique, Physique, Astronomie)* 330 (6), 437–443.
- Lazarus, V., Leblond, J.-B., 2002b. In-plane perturbation of the tunnel-crack under shear loading. I : bifurcation and stability of the straight configuration of the front. *International Journal of Solids and Structures* 39 (17), 4421–4436.
- Lazarus, V., Leblond, J.-B., 2002c. In-plane perturbation of the tunnel-crack under shear loading. II : determination of the fundamental kernel. *International Journal of Solids and Structures* 39 (17), 4437–4455.
- Leblond, J.-B., Lazarus, V., Mouchrif, S.-E., 1999. Crack paths in three-dimensional elastic solids. II. Three-term expansion of the stress intensity factors - Applications and perspectives. *International Journal of Solids and Structures* 36 (1), 105–142, [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00271-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00271-0).

- Leblond, J.-B., Mouchrif, S.-E., Perrin, G., 1996. The tensile tunnel-crack with a slightly wavy front. *International Journal of Solids and Structures* 33 (14), 1995–2022.
- Leblond, J.-B., Torlai, O., 1992. The stress field near the front of an arbitrarily shaped crack in a three-dimensional elastic body. *Journal of Elasticity* 29 (2), 97–131.
- Morrissey, J., Rice, J., 2000. Perturbative simulations of crack front waves. *Journal of the mechanics and physics of solids* 48 (6-7), 1229 – 1251.
- Perrin, G., Rice, J. R., 1994. Disordering of a dynamic planar crack front in a model elastic medium of randomly variable toughness. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42 (6), 1047–1064.
- Piccolroaz, A., Mishuris, G., Movchan, A. B., 2007. Evaluation of the Lazarus-Leblond constants in the asymptotic model of the interfacial wavy crack. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 55 (8), 1575–1600.
- Rice, J., Ben-Zion, Y., Kim, K., 1994. Three-dimensional perturbation solution for a dynamic planar crack moving unsteadily in a model elastic solid. *J. Mech. Phys. Solids* 42, 813–843.
- Rice, J. R., 1985. First-order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front. *ASME Journal of Applied Mechanics* 52 (3), 571–579.
- Rice, J. R., 1989. Weight function theory for three-dimensional elastic crack analysis. In : Wei, R. P., Gangloff, R. P. (Eds.), *Fracture Mechanics : Perspectives and Directions (Twentieth Symposium)*. American Society for Testing and Materials STP 1020, Philadelphia, USA.
- Sadowsky, M., Troy, N. Y., 1956. Stress concentration caused by multiple punches and cracks. *Journal of Applied Mechanics* 23, 80–84.
- Santucci, S., Grob, M., Toussaint, R., Schmittbuhl, J., Hansen, A., Maloy, K. J., 2009. The complex morphology of interfacial crack fronts. *archivx* .
- Schmittbuhl, J., Delaplace, A., Maloy, K., Perfettini, H., Vilotte, J., 2003a. Slow crack propagation and slip correlations. *Pure Appl. Geophys.* 160, 961–976.
- Schmittbuhl, J., Delaplace, A., Måløy, K. J., Perfettini, H., Vilotte, J. P., 2003b. Slow crack propagation and slip correlations. *PURE AND APPLIED GEOPHYSICS* 160 (5-6), 961–976.
- Schmittbuhl, J., Måløy, K. J., 1997. Direct observation of a self-affine crack propagation. *Physical Review Letters* 78 (20), 3888–91.

- Schmittbuhl, J., Roux, S., 1995. Interface crack pinning : effect of nonlocal interactions. *Physical Review Letters* 74(10), 787–1790.
- Schmittbuhl, J., Roux, S., Vilotte, J. P., Maloy, K.-J., 1995. Interfacial crack pinning : effect of nonlocal interactions. *Physical Review Letters* 74 (10), 1787–1790.
- Schmittbuhl, J., Vilotte, J.-P., 1999. Interfacial crack front wandering : influence of quenched noise correlations. *Physica A* 270 (1-2), 42–56.
- Tada, H., Paris, P. C., Irwin, G. R., 1973. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Del Research Corporation, Hellertown, USA.
- Willis, J. R., Movchan, A. B., 1995. Dynamic weight-functions for a moving crack .1. mode-i loading. *J. Mech. Phys. Solids* 43 (3), 319–341.
- Woolfries, S., Willis, J. R., 1999. Perturbation of a dynamic planar crack moving in a model elastic solid. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 47 (8), 1633–1661.