



HAL
open science

Perturbations à oscillations lentes de l'opérateur de Schrödinger périodique.

Asya Metelkina

► **To cite this version:**

Asya Metelkina. Perturbations à oscillations lentes de l'opérateur de Schrödinger périodique.. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2011. Français. NNT : . tel-00714033

HAL Id: tel-00714033

<https://theses.hal.science/tel-00714033>

Submitted on 3 Jul 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 13 – Institut Galilée
Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications UMR
7539

N° attribué par la bibliothèque

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement par

Asya METELKINA

le 30 septembre 2011

**Perturbations à oscillations lentes de
l'opérateur de Schrödinger périodique**

Jury

M. Mouez DIMASSI	<i>examineur</i>
M. Setsuro FUJIE	<i>rapporteur (absent)</i>
M. Alain GRIGIS	<i>examineur</i>
M. Frédéric KLOPP	<i>directeur</i>
M. Francis NIER	<i>rapporteur</i>
M. Maciej ZWORSKI	<i>examineur</i>

Sommaire

Sommaire	iii
Remerciements	1
Introduction	2
1 Résultats antérieurs	5
2 Généralisation de la méthode de B. Simon et Y. Zhu	8
2.1 Densité d'états intégrée	8
2.2 Exposant de Lyapounov	10
1 Hypothèses	12
2 Matrices de transfert et matrices de monodromie	13
2.1 Symétries de (AdiabQP) et solutions cohérentes	13
2.2 Définition et propriétés de la matrice de monodromie	15
2.3 Matrices de monodromie et matrices de transfert	18
3 Asymptotique de la matrice de monodromie : le cas général	19
I Équation de Schrödinger périodique	23
1 Spectre de l'opérateur périodique	23
1.1 Matrice de monodromie pour l'équation périodique (EqnPer)	24
1.2 Solutions de Bloch	24
1.3 Quasimoment de Bloch	25
1.4 Densité d'états intégrée pour l'équation périodique	25
1.5 Exposant de Lyapounov	28
1.6 Énergie complexe et propriétés analytiques de quasimoment de Bloch	30
1.7 Prolongement analytique des déterminations du quasimoment	32
1.8 Calcul des indices et des signatures des courbes	33
1.8.1 Indice et signature d'une courbe : le cas des lacets	33
1.8.2 Indices et signatures des courbes : la matrice $A(\gamma, k)$	34
1.8.3 Applications : courbe composée $\gamma = \gamma_N \circ \dots \circ \gamma_1$ et changement de détermination	35
1.9 Énergie complexe et l'opérateur périodique	36
1.9.1 Énergie complexe	36
1.9.2 Équation périodique et ensembles \mathcal{B} et \mathcal{C}	37
1.9.3 Ensemble des énergies Σ	37
1.9.4 Deux types d'intervalles : $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$	37
1.9.5 Moment complexe $\kappa(z)$ et ses déterminations	37

II	Densité d'états intégrée et formule de Thouless	39
1	Propriétés de la densité d'états intégrée	39
1.1	Valeurs propres de restrictions	42
1.2	Encadrement par Dirichlet et Neumann	43
2	Densité d'états intégrée : la preuve du Théorème 10	44
2.1	Encadrement dans le cadre de mon problème	44
2.1.1	Estimations par une intégrale	46
2.1.2	Modification de l'estimation : la fin de la preuve de l'existence	47
2.2	Preuve du Théorème 16 : la formule de Thouless	48
2.2.1	Théorème d'oscillations de Sturm pour H et H_0	48
2.2.2	Démonstration de la formule de Thouless : premier pas	49
2.2.3	Démonstration de la formule de Thouless : deuxième étape . .	50
2.2.4	Démonstration de la formule de Thouless : troisième étape . .	50
2.3	Preuve du Théorème 16 : formule de l'exposant de Lyapounov	52
2.3.1	Formule de l'exposant de Lyapounov	52
III	Méthode WKB complexe	55
1	Théorème principal de la méthode WKB complexe	55
1.1	Comportement asymptotique standard	56
1.1.1	Courbes et domaines canoniques	56
1.1.2	Théorème principal de la méthode WKB complexe	57
1.1.3	Lignes de Stokes	57
1.1.4	Lignes de type Stokes	58
1.1.5	Domaine canonique à partir d'une courbe canonique	59
1.1.6	Construction d'une courbe canonique à partir d'une courbe pré-canonique	59
1.1.7	Symétrie pour les courbes et les domaines canoniques	59
1.2	Méthodes de prolongement des asymptotiques	60
1.2.1	Diagrammes de prolongement pour les solutions	60
1.2.2	Lemme du Rectangle	61
1.2.3	Principe des Domaines Adjacents	61
1.2.4	Descriptif des domaines canoniques enveloppants	62
1.2.5	Lemme du Trapèze	62
1.2.6	Lemme de Stokes	63
1.3	Formules asymptotiques pour les wronskiens de solutions	63
1.3.1	Solutions h et g au comportement asymptotique standard . .	63
1.3.2	Arcs	64
1.3.3	Domaines de rencontre	64
1.3.4	Amplitude et action sur un arc	64
1.3.5	Coefficients de Fourier	65
1.3.6	Principe de comportement standard à plusieurs composantes .	65
2	Base cohérente $\{f_J, f_J^*\}$	69
2.1	Objets géométriques associés au moment complexe	69
2.1.1	Détermination naturelle κ_J du moment complexe	69
2.1.2	Propriétés de la détermination naturelle κ_J et les lignes de Stokes	69
2.1.3	Branches complexes de $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \cap S_Y$	71

2.2	Diagrammes de prolongement pour f_J et f_J^*	72
2.2.1	Diagramme de prolongement de f_J	72
2.2.2	Asymptotique de la solution f_J^*	74
2.2.3	Wronskien des solutions f_J et f_J^* et la renormalisation	75
2.3	Démonstration de la Proposition 2.8	75
2.3.1	Construction locale	75
2.3.2	Solution f_J : dans les deux cas	77
2.4	Prolongement de l'asymptotique de la solution f_J dans tout D_J	78
IV Matrice de monodromie		85
1	Matrice de monodromie et matrice de transfert	85
2	Asymptotique de la matrice de monodromie	88
2.1	Théorème 2.3 et asymptotique de la matrice de monodromie	88
2.2	Remarque structurelle	90
2.3	Preuve du Théorème 2.3	91
2.4	Cas où $E - W(\mathbb{R}) \subset [E_{2n-1}, E_{2n}]$	93
2.5	Cas où $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}} \cap \mathcal{C}$ contient un point par intervalle de longueur 2π	95
2.5.1	Cas où $\sigma(\mathbb{H}_0) \cap (E - W(\mathbb{R})) \subset [E_{2n-1}, E_{2n}]$	95
2.5.2	Cas où $\sigma(\mathbb{H}_0) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R}) \subset [E_{2n-3}, E_{2n-2}] \cup [E_{2n-1}, E_{2n}]$	97
2.6	Cas où $\mathcal{C} \cap \mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0)) = \emptyset$	98
2.7	Propriétés des solutions au CASpl	100
V Exposant de Lyapounov		103
1	Hypothèses et structure du travail	104
1.1	Intervalles I_n et approximation du potentiel $W(x^\alpha)$	104
1.1.1	Première étape : choix du paramètre z_0	105
1.1.2	Deuxième étape : choix des intervalles I_n	105
1.1.3	Troisième étape : choix des paramètres ε_n et z_n	105
1.1.4	Justification du choix des paramètres	105
2	Solutions de (SIosc) par la méthode de la résolvente approchée	106
2.1	Description de la méthode de la résolvente approchée	106
2.1.1	Familles de solutions de (AdiabQP) au poids exponentiel	107
3	Énergies E dans $\sigma_{ac}(\mathbb{H}_\theta)$	108
3.1	Asymptotique des solutions de (SIosc) sur I_n	109
3.2	Matrice de transfert sur I_n	110
3.3	Exposant de Lyapounov	112
4	Énergies E dans le spectre singulier de \mathbb{H}_θ	113
4.1	Estimation de la résolvente dans un domaine de rencontre	113
4.2	Solutions de (SIosc)	116
4.3	Matrices de transfert pour (SIosc)	119
A Exposant de Lyapounov et spectre singulier		129
Bibliographie		133

Remerciements

Je suis très reconnaissante à Frédéric Klopp, qui a su me proposer un sujet de recherche inspirant et trouver du temps dans sa vie professionnelle très active pour encadrer cette thèse. Frédéric m'a laissée libre dans ma recherche, tout en insistant sur l'aboutissement vers un résultat final. J'ai une très grande estime pour ses connaissances mathématiques.

Setsuro Fujiie et Francis Nier ont accepté de rapporter cette thèse et s'en sont acquitté avec une grande minutie. Leurs remarques très judicieuses ont largement contribué à l'amélioration de ce manuscrit et je les en remercie vivement. Je suis ravie qu'Alain Grigis préside mon jury de thèse et je le remercie chaleureusement pour ses encouragements tout le long du chemin, parfois épineux, vers la soutenance, pour son magnifique cours, presque "particulier", d'analyse microlocale et pour son sourire amical. Je remercie également Mouez Dimassi et Maciej Zworski qui me font l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Je suis très reconnaissante à Günter Stolz pour les discussions que nous avons pu avoir lors de son passage à Paris et lors de diverses conférences. Elles ont largement contribué à l'avancement de mes travaux. De plus, je reste admirative de ses mathématiques, simples et précises à la fois.

On pourrait comparer la préparation de cette thèse à une odyssée. Mon bateau est parti de Saint-Pétersbourg, baptisé par Alexander Fedotov —Vulcain des maths apparaissant à ses fidèles dans un nuage de fumée— et je le remercie chaleureusement car depuis toujours il m'envoie son conseil et son soutien. Mon navire a ensuite jeté l'ancre dans trois ports successifs. À chaque fois les indigènes m'ont très chaleureusement accueillie et m'ont fourni d'excellentes conditions de travail.

Il y a eu d'abord le Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications, où j'ai passé de très bonnes heures avec les thésards de la tribu. Je voudrais remercier particulièrement mes anciens compagnons de galère —Sabrina, Stéphanie, Christine, Ibrahima— ainsi que ceux de la galère voisine —Olivier, Benjamin et Aurélien— et enfin un affranchi —David. Merci à mes guides dans la forêt de l'administration : Yolande et Isabelle, toujours gentilles, toujours très belles. Dans les labyrinthes du LAGA, j'ai rencontré Konstantin qui m'a fait découvrir les soirées de tango et, par conséquent, les matinées de mathématiques aux yeux cernés. De ce temps parisien, je garde un bon souvenir de la tribu des Bourbakettes de Chevaleret, pratiquant des café-croissants dans une grotte à géométrie tropicale. C'est dans cette même grotte que j'ai eu la chance de suivre les cours de Hakan Eliasson. Avec mes amis, Martin et Claire, on a trouvé ses cours très clairs.

Puis, mon bateau s'est amarré en Allemagne, au sein de l'équipe de Stochastique de FernUniversität in Hagen : les adorateurs du dieu Espresso. Auprès du chef de tribu — Werner Kirsch, *alias* Herr Doktor Professor— j'ai apprivoisé quelques opérateurs aléatoires. Je remercie vivement Jessica, Tobias, Christian, Martin, Eugen et Wolfgang — l'autre Herr Doktor Professor— pour leur entourage amical et stimulant. *Vielen Dank!*

Merci aussi aux ex-habitants de la colonie franco-suisse du Hausdorff Center (colonie maintenant malheureusement décimée) : à Gérald pour ses encouragements et à Christian pour m'avoir prêté sa table¹. Merci à Antoine, (tribu des *Bonnerinnen*)², qui a eu le courage d'annoter une partie de ce manuscrit.

Enfin, les tempêtes ont poussé mon navire en Méditerranée, où je suis recueillie par le Laboratoire J.-A. Dieudonné. Ici aussi les indigènes sont très sympathiques : Magali et Julien (et bien sûr Camille et Jeanne), Laurent et Charlotte (et aussi Léo et Aurélien), François-Xavier (qui me remplace gentiment pour mon td de L2 en ce moment même), et mon voisin Raphaël³ (qui se cache derrière le placard).

Dans ce long voyage, j'ai été soutenue par les aborigènes russes —Ira et Sasha, Katja, Genja, Slava, Sasha et Katja, Maxim. Un jeune galérien —Nikolai— s'est chargé de transmettre mes offrandes aux Dieux et son aide m'est précieuse.

Un grand merci au scribe Nicolas (tribu des faux-Grecs) pour le temps et les efforts qu'il a consacrés à mes dessins (dont les six heures passées dans l'amphitéâtre 3).

Parmi les plus anciens soutiens, il y a bien sûr ma famille : ma Maman, mon Papa et Marina m'ont toujours aidé à retrouver le courage dans les moments difficiles, à me dépasser et parfois, tout simplement, à changer de rames⁴. Ma belle-famille aussi m'a beaucoup soutenue à l'aide de quiches et de tartes aux fraises.

J'ai gardé ces dernières lignes pour mon cher équipage, qui a partagé avec moi les jours de soleil et ceux de tempête, qui m'a aidé à réparer mes rames et à dessiner mes flèches. Mes pensées les plus chères vont à mon mari Christophe et à nos trois mousses —Alexis, Catherine et ...⁵— qui illuminent ma vie et font gonfler mes voiles.

1. De sacrifices ?

2. À ne pas confondre avec les bonobos.

3. Adorateur du dieu Xerox.

4. De Rham ??

5. Chut ! c'est une autre histoire.

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude de perturbations à oscillations asymptotiquement lentes d'une équation de Schrödinger périodique :

$$-\Psi''(x, E) + V(x)\Psi(x, E) = E\Psi(x, E) \quad (\text{EqnPer})$$

pour un potentiel $V \in L_{2,loc}(\mathbb{R})$ périodique. Plus précisément, on étudie l'équation à oscillations asymptotiquement lentes :

$$-\Psi''(x, E) + [V(x) + W(x^\alpha)]\Psi(x, E) = E\Psi(x, E), \quad (\text{SIosc})$$

dans laquelle $\alpha \in (0, 1)$ est un paramètre réel et la perturbation W est une fonction périodique vérifiant certaines conditions de régularité.

L'équation (SIosc) a déjà été étudiée auparavant à l'aide d'approximations périodiques.

- Dans [Sto96, Sto97], G. Stolz a obtenu la description du spectre de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(x^\alpha)$.
- Dans [SZ96] B. Simon et Y. Zhu ont démontré l'existence et ont calculé la densité d'états intégrée et l'exposant de Lyapounov pour l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2} + \cos x^\alpha$ (c'est-à-dire dans le cas particulier $V \equiv 0$ et $W \equiv \cos$).

Une des idées principales de ces travaux consiste à approximer l'équation (SIosc) par une équation périodique. En effet, les hypothèses sur α et W assurent en particulier que la perturbation $W(x^\alpha)$ varie de plus en plus lentement quand x tend vers $+\infty$. Ainsi, on peut bien approximer la fonction $W(x^\alpha)$ par une fonction constante sur de grands intervalles, intervalles d'autant plus grands que x est grand. Ceci ramène par exemple Stolz à comparer sur ces grands intervalles l'équation (SIosc) à une équation périodique :

$$-\Psi''(x, E) + V(x)\Psi(x, E) = (E - W(z))\Psi(x, E)$$

dans laquelle z est un paramètre. La théorie de tels opérateurs périodiques est classique et bien comprise. (Dans les travaux de Simon–Zhu, $V \equiv 0$ et l'équation précédente est résoluble explicitement).

Nous proposons dans ce travail des généralisations possibles des résultats de Simon–Zhu [SZ96]. Tout d'abord, nous montrons qu'à l'aide de la théorie des opérateurs périodiques, la méthode employée par Simon–Zhu s'adapte pour traiter le cas d'un potentiel V périodique générique et d'un potentiel W continûment dérivable.

D'autre part, sous certaines hypothèses sur W et pour $\alpha > \frac{1}{2}$, on peut améliorer la méthode d'approximation de l'équation (SIosc) comme suit. Plutôt qu'approximer x^α par une constante, on l'approxime mieux par une fonction linéaire $\varepsilon x + z$ de faible pente. Ceci nous

ramène alors à comparer sur de grands intervalles l'équation (SIosc) à une équation quasi-périodique adiabatique :

$$-\Psi''(x, z, E; \varepsilon) + [V(x) + W(\varepsilon x + z)]\Psi(x, z, E; \varepsilon) = E\Psi(x, z, E; \varepsilon) \quad (\text{AdiabQP})$$

où ε est petit. Nous utilisons la méthode que A. Fedotov et F. Klopp [FK01, FK04a] ont développé pour étudier l'asymptotique des solutions de telles équations. Nous pouvons alors décrire les matrices de transfert et le spectre singulier continu plus précisément que dans [SZ96].

Le texte comporte trois parties :

- Dans une première partie (les Chapitres I et II), on utilise la théorie des opérateurs de Schrödinger périodiques pour adapter la méthode de Simon et Zhu au cas de (SIosc) avec un potentiel périodique $V \in L_{2,loc}(\mathbb{R})$ et $W \in C^1(\mathbb{R})$. On calcule l'exposant de Lyapounov et la densité d'états intégrée. On démontre la formule de Thouless qui relie ces deux quantités.
- Dans une seconde partie (les Chapitres III et IV), on prépare le terrain pour l'utilisation des approximations quasi-périodiques adiabatiques. Dans cette partie on étudie l'asymptotique quand ε tend vers zéro des solutions et des matrices de transfert de l'équation quasi-périodique adiabatique (AdiabQP) sur de grands intervalles. On utilise pour cela un analogue, dû à A. Fedotov et F. Klopp [FK01, FK04a], de la méthode WKB complexe.
- Dans une troisième partie (le Chapitre V), on utilise les résultats de la seconde partie pour étudier l'équation (SIosc) avec $\alpha > \frac{1}{2}$. En particulier, on estime la matrice de transfert ; puis, pour presque toute énergie E , on démontre l'existence de l'exposant de Lyapounov et on le calcule. On décrit plus précisément l'ensemble résonnant, c'est-à-dire l'ensemble des énergies E pour lesquelles on ignore l'existence de l'exposant de Lyapounov. On montre, par exemple, que c'est un ensemble de dimension de Hausdorff nulle et on calcule sa "dimension de Hausdorff logarithmique".

Détaillons maintenant le contenu de chaque partie.

Partie 1 : Approximations périodiques pour l'équation à oscillations asymptotiquement lentes

Notre travail s'ouvre par l'étude de l'équation de Schrödinger (SIosc) et l'étude spectrale de l'opérateur de Schrödinger

$$\mathbb{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(x^\alpha) \quad (1)$$

à l'aide des approximations périodiques. On passe en revue les résultats et les méthodes existantes dans ce cadre, notamment les résultats spectraux de G. Stolz ([Sto97, Sto96]) et la méthode de Simon–Zhu [SZ96] (dans le cas $V \equiv 0$). Ensuite, par une modification appropriée d'une méthode existante, on obtient une formule pour l'exposant de Lyapounov et une formule pour la densité d'états intégrée dans le cas d'un potentiel périodique $V \in L_{2,loc}(\mathbb{R})$.

Commençons par décrire le cadre du travail. On considère l'équation (SIosc) sous les hypothèses suivantes :

(HV) $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L_{2,loc}(\mathbb{R})$, est 1-périodique (*i.e.* $V(x+1) = V(x)$) et n'est pas identiquement constant.

(HWG) $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 , est 2π -périodique (*i.e.* $W(x+2\pi) = W(x)$) et n'est pas identiquement constant.

Pour que la fonction $W(x^\alpha)$ soit une perturbation à oscillations asymptotiquement lentes de l'opérateur périodique $\mathbb{H}_0 := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$, il faut qu'elle varie peu sur une période du potentiel V quand x est grand. Ceci est vrai si α vérifie l'hypothèse :

(H α) $\alpha \in (0, 1)$.

Sous les hypothèses **(HWG)** et **(H α)** on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sup_{y \in [x, x+1]} |W(x^\alpha) - W(y^\alpha)| \right) = 0 \quad (2)$$

Ceci permet d'utiliser la théorie des perturbations dans l'étude spectrale et asymptotique de l'équation (SIosc).

D'après la théorie de subordination de D. Gilbert et D. Pearson [GP87], le lieu et la nature du spectre d'un opérateur de Schrödinger H (en particulier, de \mathbb{H} défini par (1)) en dimension 1 sont alors décrits en termes du comportement asymptotique des solutions de l'équation de Schrödinger associée. En particulier, S. Kotani [Kot86] a montré que la nature du spectre de H peut souvent être déterminée par son exposant de Lyapounov (voir définition 15). Un des résultats importants sur ce sujet est celui de S. Jitomirskaya et Y. Last [JL99] sur la dimension de Hausdorff de la mesure spectrale. Soit T la matrice de transfert (voir la définition 13 pour (SIosc)). On pose

$$\overline{\gamma(E)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|T(n, 0, E)\|}{n}$$

et on note μ la mesure spectrale de H (en particulier, de H défini dans (1)). On a

Théorème 1 (analogue continu du Corollaire 4.3 de [JL99]). *Supposons que $\overline{\gamma(E)} > 0$ pour tout E dans un borélien A . Alors la restriction $\mu(A \cap \cdot)$ est zéro-dimensionnelle : c'est une mesure supportée par un ensemble de dimension de Hausdorff nulle.*

De plus, le spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger contient⁶ l'ensemble d'accroissement de la densité d'états intégrée (voir Définition 9 et Lemme 1.1). Par conséquent, la densité d'états intégrée et l'exposant de Lyapounov apportent une information importante sur une partie du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger en dimension 1.

1 Résultats antérieurs

Grâce aux travaux de G. Stolz on dispose d'une description du spectre de l'opérateur

$$H = \frac{d^2}{dx^2} + [V(x) + W(x^\alpha)]$$

6. Il coïncide même parfois avec cet ensemble.

sous les hypothèses **(HV)**, **(HWG)** et **(H α)**. Tout lecteur intéressé par les méthodes de la théorie spectrale des opérateurs de Schrödinger à oscillations lentes est invité à lire les articles [Sto94] et [Sto97], ainsi que le mémoire de thèse d'habilitation de G. Stolz [Sto96]. On donne ci-après un bref aperçu de ces travaux, en se limitant aux résultats qui concernent l'équation (SIosc).

Premièrement, sous les hypothèses **(HV)**, **(HWG)** et **(H α)**, le spectre essentiel de l'opérateur de H , en tant qu'ensemble, est donné par :

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathbb{H}) = \sigma(\mathbb{H}_0) + W(\mathbb{R})$$

où $\sigma(\mathbb{H}_0)$ désigne le spectre de l'opérateur périodique $\mathbb{H}_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ dans $L_2(\mathbb{R})$.

Ceci se démontre en construisant une suite de Weyl orthogonale à partir des solutions de Bloch d'une équation périodique (il s'agit d'une suite orthonormée $\psi_n \in D(\mathbb{H})$ telle que $\|(\mathbb{H} - E)\psi_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$). Comme l'opérateur $\mathbb{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + [V(x) + W(x^\alpha)]$ appartient au cas du point limite dans $L_2([0, \infty))$ (c.f. la Section 2.2 du Chapitre 2 de [LS91]) pour chaque condition au bord, il ne peut pas avoir de valeurs propres plongées dans le spectre continu. On obtient ainsi que $\sigma_{pp}(\mathbb{H}) \cap (\sigma(\mathbb{H}_0) + W(\mathbb{R}))$ est purement ponctuel dense. Le résultat suivant, qui décrit le spectre absolument continu de \mathbb{H} , est un corollaire du Théorème 2.5 de [Sto97] :

Théorème 2 (Stolz). *Si (α, β) est un intervalle de stabilité (intérieur d'une zone spectrale) de \mathbb{H}_0 , alors le spectre de chaque réalisation auto-adjointe de H dans $L_2([0, \infty))$ est purement absolument continu dans $(\alpha + W_+, \beta + W_-)$, i.e. :*

$$\sigma(\mathbb{H}) \cap (\alpha + W_+, \beta + W_-) = \sigma_{ac}(\mathbb{H}),$$

où $W_+ = \max_{x \in [0, 2\pi]} W(x)$ et $W_- = \min_{x \in [0, 2\pi]} W(x)$.

On a également une description du spectre singulier de \mathbb{H} . Ce résultat est une application directe du corollaire 2 de [Sto97] à notre problème dans le cas où V est borné inférieurement :

Théorème 3 (Stolz). *Supposons V borné inférieurement. Si $\sigma(\mathbb{H}_0) \cap (\alpha, \beta) = \emptyset$, alors pour chaque réalisation auto-adjointe de \mathbb{H} dans $L_2([0, \infty))$ on a :*

$$\sigma_{ac}(\mathbb{H}) \cap (\alpha + W_-, \beta + W_+) = \emptyset.$$

La nature du spectre singulier est aussi connue. Dans son habilitation [Sto96], G. Stolz a démontré, à l'aide de techniques développées par Kirsch, Molchanov et Pastur [KMP90, KMP92], le résultat suivant (sans supposer que V soit borné inférieurement) :

Théorème 4 (Kirsch–Stolz, Stolz). *Si $(\alpha, \beta) \cap \sigma(\mathbb{H}_0) = \emptyset$, alors pour presque tout $\theta \in [0, 2\pi)$, le spectre de la réalisation de \mathbb{H} dans $L_2([0, \infty))$ avec la condition au bord :*

$$f(0) \cos \theta - f'(0) \sin \theta = 0$$

dans les intervalles $(\alpha + W_-, \beta + W_+)$ est purement ponctuel et les fonctions propres associées sont exponentiellement décroissantes. Autrement dit, pour presque tout θ :

$$(\alpha + W_-, \beta + W_+) \cap \sigma(\mathbb{H}) = \sigma_{pp}(\mathbb{H})$$

et $\sigma_c(\mathbb{H}) \cap (\alpha + W_-, \beta + W_+) = \emptyset$.

C'est un corollaire de la conjonction des théorèmes 5.1 et 5.8 de [Sto96].

Remarque 5. La nature purement ponctuelle du spectre de \mathbb{H} dans les intervalles en considération avait été annoncée dans [KMP92] (voir la Proposition dans l'exemple b), la preuve faisant référence à l'analogie avec la preuve dans le cas des hautes barrières.

La question qui apparaît alors naturellement est celle de la vitesse précise de décroissance des fonctions propres de l'opérateur \mathbb{H} . Cette vitesse peut être décrite par l'exposant de Lyapounov. Il est aussi intéressant de déterminer la distribution de la mesure spectrale. A l'échelle de volume, cette distribution est décrite par la densité d'états.

Dans ce travail, je réponds à ces questions, en fournissant une formule exacte pour la densité d'états intégrée et pour l'exposant de Lyapounov pour presque toute valeur de l'énergie. Je décris également l'ensemble résonnant, ensemble des valeurs de l'énergie où le comportement de Lyapounov n'est pas démontré.

A notre connaissance, le seul résultat antérieur sur le sujet est donné dans [SZ96]. Dans cet article, B. Simon et Y. Zhu démontrent l'existence et donnent une formule précise pour la densité d'états intégrée et pour l'exposant de Lyapounov dans le cas $V \equiv 0$ et $W \equiv \cos$. Leurs résultats sont les suivants.

Posons $L(l) := (2\pi l)^{\frac{1}{\alpha}}$ et notons $N(E, \mathbb{H}_{\text{BC}}(L(l)))$ le nombre de valeurs propres inférieures à E de la restriction de \mathbb{H} sur un intervalle $[0, L(l)]$ avec une condition⁷ au bord auto-adjointe BC. La densité de ces valeurs propres est définie par :

$$k^{(l)}(E) := \frac{N(E, \mathbb{H}_{\mathcal{N}}(L(l)))}{L(l)}.$$

Les auteurs définissent la densité d'états intégrée par :

$$k(E) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{N(E, \mathbb{H}_{\text{BC}}(L(l)))}{L(l)},$$

et obtiennent :

Théorème 6 (Théorème 2.2 de [SZ96]). *La densité d'états intégrée pour l'opérateur de Schrödinger $-\frac{d^2}{dx^2} + \cos x^\alpha$ existe, est indépendante des conditions au bord et est donnée par la formule :*

$$k(E) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{[E - \cos x]_+} dx.$$

(Ici $[f(x)]_+ = \max\{f(x), 0\}$.) De plus, on a l'estimation suivante :

$$|k^{(l)}(E) - k(E)| = O(l^{-\nu(\alpha)})$$

où $\nu(\alpha) = \min\left\{\frac{1-\alpha}{3\alpha}, 1\right\}$.

7. Nos notations sont :

BC= \mathcal{D} pour la condition au bord de Dirichlet,

BC= \mathcal{N} pour la condition au bord de Neumann,

BC= \mathcal{DN} pour la condition de Dirichlet à gauche et de Neumann à droite,

BC= \mathcal{ND} pour la condition au bord de Neumann à gauche et de Dirichlet à droite.

Puis, ils définissent un ensemble résonnant :

$$R_\alpha = R_{\mathcal{D}} \cup R_{\mathcal{N}} \cup R_{\mathcal{D}\mathcal{N}} \cup R_{\mathcal{N}\mathcal{D}} \quad (3)$$

avec

$$R_{\text{BC}} = \bigcup_{d=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \bigcap_k \{E \in [-d, d] \mid |E - E_k(n, \text{BC})| < \exp(-n^{\nu(\alpha) - \varepsilon_\alpha})\} \quad (4)$$

et $E_k(n, \text{BC})$ les valeurs propres de la restriction de $H = -\frac{d^2}{dx^2} + \cos(x^\alpha)$ à l'intervalle $[(2\pi(n-1))^\frac{1}{\alpha}, (2\pi n)^\frac{1}{\alpha}]$ avec une condition au bord BC et ε_α est un nombre positif arbitraire fixé tel que $\varepsilon_\alpha < \nu(\alpha)$.

Dans [SZ96], on trouve également les théorèmes suivants :

Théorème 7 (Théorème 3.2 de [SZ96], Thouless formula). *On pose $\gamma_0(E) = \sqrt{[-E]_+}$ et $k_0(E) = \sqrt{[E]_+}$. Pour tout $E \notin R_\alpha$, où R_α est défini dans (3), on a :*

$$\gamma(E) = \gamma_0(E) + \int_{-\infty}^{\infty} \ln |E - E'| d(k - k_0)(E')$$

où $\gamma(E)$ est l'exposant de Lyapounov pour \mathbb{H} et $k(E)$ est la densité d'états pour \mathbb{H} .

Théorème 8 (Théorème 3.8 de [SZ96]). *Pour tout $E \notin R_\alpha$, l'opérateur $\mathbb{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + \cos(x^\alpha)$ vérifie le comportement de Lyapounov d'exposant :*

$$\gamma(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{[\cos x - E]_+} dx.$$

Au Chapitre II, je généralise ces résultats à certaines perturbations des opérateurs périodiques de potentiel périodique $V \in L_{2,loc}(\mathbb{R})$.

2 Généralisation de la méthode de B. Simon et Y. Zhu

2.1 Densité d'états intégrée

Dans cette section, on définit la densité d'états intégrée pour l'opérateur $\mathbb{H}_\theta = \frac{d^2}{dx^2} + [V(x) + W(x^\alpha)]$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{H}_\theta) = \{f \in H^2(\mathbb{R}_+) \text{ tel que } \cos \theta f(0) + \sin \theta f'(0) = 0\}$. Puis on énonce le Théorème 10, donnant l'existence et la formule pour la densité d'états intégrée.

Définition 9. On appelle *densité d'états intégrée* pour l'opérateur \mathbb{H}_θ la limite suivante quand elle existe :

$$k(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(E, \mathbb{H}_\theta(n))}{n}$$

où pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on note $N(E, \mathbb{H}_\theta(n))$ le nombre de valeurs propres inférieures à E de la restriction de $H = \frac{d^2}{dx^2} + [V(x) + W(x^\alpha)]$ à l'intervalle $[0, n]$ avec les conditions au bord $f(0) \cos \theta + f'(0) \sin \theta = 0$ et $f(n) = 0$.

Je démontre le théorème suivant :

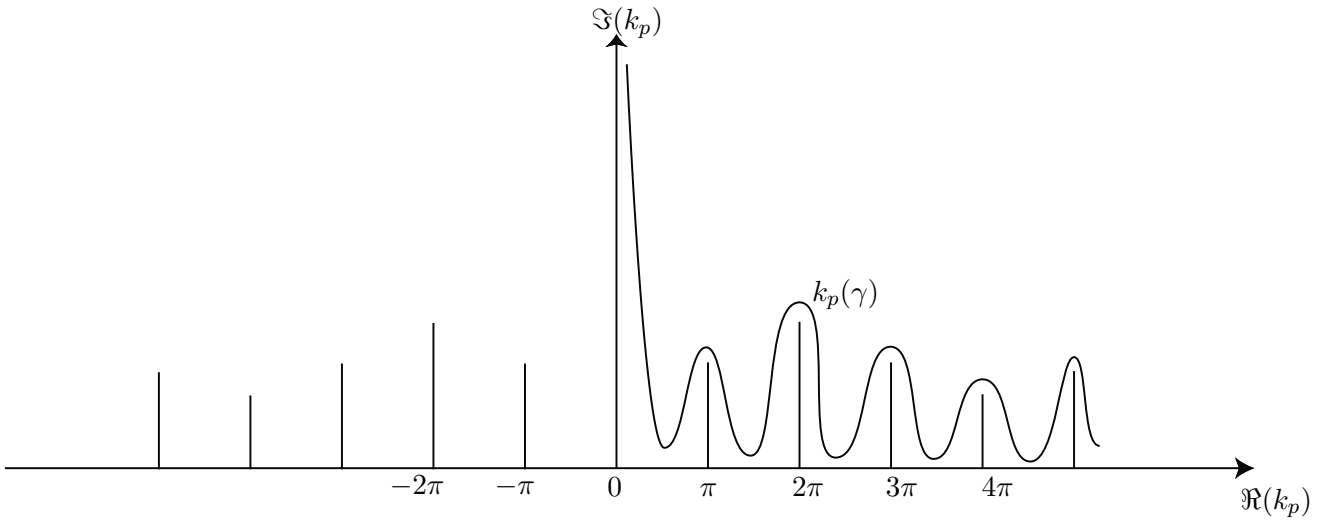


FIGURE 1 – Détermination principale k_p du quasimoment de Bloch

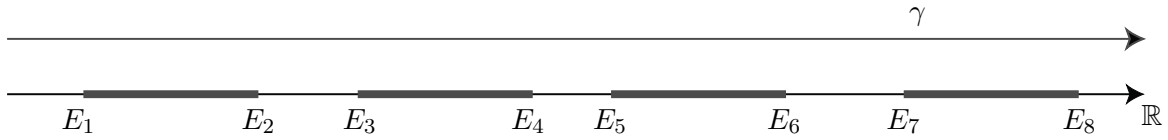


FIGURE 2 – Spectre de l'opérateur périodique \mathbb{H}_0

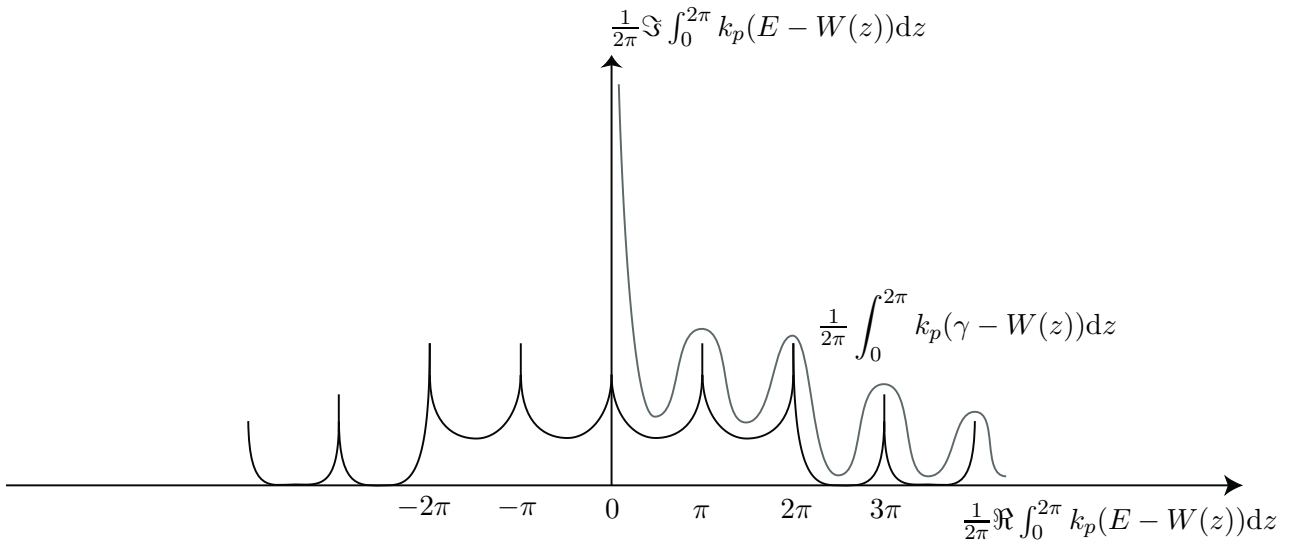


FIGURE 3 – Moyenne du moment complexe $k_p(E - W(z))$ sur une période de W

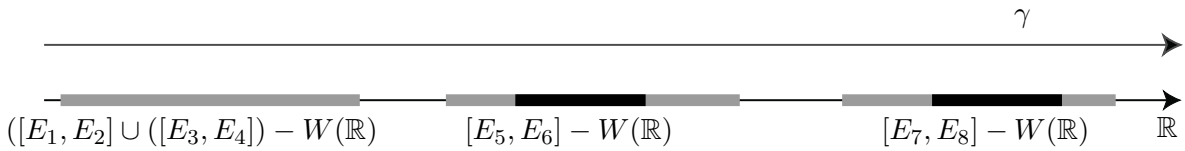


FIGURE 4 – Spectre essentiel de \mathbb{H}_θ , en gris : $\sigma_s(\mathbb{H}_\theta)$; en noir : $\sigma_{ac}(\mathbb{H}_\theta)$

Théorème 10. *Pour toute énergie $E \in \mathbb{R}$, la densité d'états intégrée pour l'opérateur \mathbb{H} existe et est donnée par la formule :*

$$k(E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_0(E - W(z)) dz \quad (5)$$

$k_0(E)$ désignant la densité d'états intégrée pour l'opérateur périodique $\mathbb{H}_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ (c.f (1.1.6) dans le Chapitre I).

Remarque 11. $k_0 = \frac{1}{\pi} \Re k_p$, où k_p est la détermination principale du quasimoment de Bloch.

Remarque 12. Comme $k_0(E)$ est une fonction continue, $k(E)$ est aussi continue.

2.2 Exposant de Lyapounov

On commence par rappeler la définition de l'exposant de Lyapounov en termes de la matrice de transfert. Considérons une équation de Schrödinger :

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right] \psi(x) = 0 \quad (6)$$

avec $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. On forme un vecteur Ψ :

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \frac{d\psi}{dx}(x) \end{pmatrix}.$$

ψ est une solution de l'équation (6) si et seulement si Ψ est une solution de l'équation matricielle :

$$\frac{d\Psi}{dx} = A(x)\Psi \quad \text{avec} \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Définition 13. On appelle *matrice de transfert* (ou *matrice résolvante* ou *solution fondamentale*) pour (6) la solution $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C})$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dT}{dx}(x, y) = A(x)T(x, y) \\ T(y, y) = \text{Id} \\ T^{-1}(x, y) = T(y, x). \end{cases} \quad (8)$$

avec A défini comme précédemment.

Remarque 14. Par le théorème de Liouville (c.f. [Arn76, §16, chapitre 3]) on a :

$$\det T(x, y) = \exp \left(\int_y^x \text{tr} A(s) ds \right) = 1. \quad (9)$$

Quelques propriétés des matrices de transfert :

- si q est à valeurs réelles alors $T(x, y) \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$.
- $T(x, y)T(y, z) = T(x, z)$,

Par définition, la matrice de transfert $T : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{C} \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ pour (SIosc) résout le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{dT(x, y, E)}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ V(x) + W(x^\alpha) - E & 0 \end{pmatrix} T(x, y, E) \\ T(y, y, E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(x, y, E) = T^{-1}(y, x, E) \end{cases} \quad (10)$$

Définition 15. On appelle *exposant de Lyapounov* pour l'équation (SIosc) la limite suivante quand elle existe :

$$\gamma(E) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|T(x, 0, E)\|}{x}. \quad (11)$$

Comme $T(x, y, E) \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$, l'exposant de Lyapounov, s'il existe, est positif ou nul. Au Chapitre II, je démontre le théorème suivant qui donne la formule pour l'exposant de Lyapounov :

Théorème 16. *Pour presque toute énergie $E \in \mathbb{R}$, l'exposant de Lyapounov pour l'équation (SIosc) existe et se calcule par la formule suivante :*

$$\gamma(E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_0(E - W(x)) dx, \quad (12)$$

où $\gamma_0(E)$ est l'exposant de Lyapounov pour l'équation (EqnPer) (voir (1.1.8) dans le Chapitre I). De plus, pour presque tout $E \in \mathbb{R}$, on a la formule de Thouless :

$$\gamma(E) - \gamma_0(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |E - E'| d(k - k_0)(E'). \quad (13)$$

Remarque 17. $\gamma_0 = \Im k_p$, où k_p est la détermination principale du quasimoment de Bloch.

On peut aussi décrire l'ensemble résonant, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de l'énergie E où l'existence de l'exposant de Lyapounov n'est pas démontrée.

Proposition 18. *L'exposant de Lyapounov pour l'équation (SIosc) existe et vérifie (12) pour tout $E \in \mathbb{R} \setminus D_\infty$ où D_∞ est donné par :*

$$D_\infty := \left\{ E \in \mathbb{R} \text{ tels qu'il existe } \{l_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \text{ et } k = k(l_i) \in \mathbb{N} \text{ tels que } \begin{array}{l} |E - E_k(l_i)| \leq \exp\left(-l_i^{\varepsilon(\alpha)}\right) \end{array} \right\} \quad (14)$$

où $E_k(l)$ désignent des valeurs propres de Dirichlet de \mathbb{H} sur l'intervalle $[0, (2\pi l)^{\frac{1}{\alpha}}]$ et $\varepsilon(\alpha)$ est un nombre arbitraire fixé vérifiant $\varepsilon(\alpha) < \nu(\alpha)$.

Remarque 19. On peut également exprimer D_∞ comme suit :

$$D_\infty := \bigcup_{d=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{E \in [-d, d], \quad |E - E_k(n)| \leq e^{-n^{\varepsilon(\alpha)}}\}$$

Remarque 20. La dimension de Hausdorff de D_∞ est nulle. Comme $\sigma_{sc}(\mathbb{H}) \subset D_\infty$, le spectre singulier continu est supporté par un ensemble d'énergies de dimension de Hausdorff nulle. Autrement dit, dans les termes de S. Jitomirskaya et Y. Last (*c.f.* section 2 de [JL99], en particulier, la formule (2.2)) la composante singulière de la mesure spectrale est une mesure 0-singulière. Ceci implique, par exemple, le résultat suivant.

Soit E_n un bord de lacune spectrale ouverte de \mathbb{H}_0 . Par le Théorème 1.2 de [JL99], la solution subordonnée $u(\cdot, E)$ pour une énergie dans les intervalles $(E_n + W_-, E_n + W_+)$ vérifie

$$\liminf_{L \rightarrow +\infty} \frac{\|u(\cdot, E)\|_L}{\|v(\cdot, E)\|_L^\beta} = 0$$

pour toute solution $v(\cdot, E)$ indépendante de $u(\cdot, E)$ et pour tout $\beta > 0$.

Remarque 21. D'après le Théorème 5.1 et l'Exemple 5.2 de [DRMS94] (voir aussi [Gor92, Gor94]), il existe un ensemble G_δ dense d'énergies E dans le spectre singulier de H_θ pour lesquelles $\gamma(E)$ n'existe pas ou bien est nul. En particulier, la formule (12) ne peut pas être vraie pour toutes les valeurs de l'énergie E et l'ensemble des énergies exceptionnelles dans le Théorème 16 ne peut pas être vide. Mais, dans la Proposition 18 nous montrons que pour (SIosc) cet ensemble G_δ dense est de dimension de Hausdorff nulle.

Partie 2. Étude d'une équation adiabatique quasi-périodique

La deuxième partie est consacrée à l'étude asymptotique des solutions et de la matrice de monodromie (*c.f.* Définition 27) pour l'équation quasi-périodique adiabatique :

$$-\Psi''(x, z, E; \varepsilon) + [V(x) + W(\varepsilon x + z)]\Psi(x, z, E; \varepsilon) = E\Psi(x, z, E; \varepsilon). \quad (\text{AdiabQP})$$

La matrice de monodromie est un objet important dans l'étude de l'asymptotique des solutions de l'équation de Schrödinger. Elle reflète une symétrie présente dans cette équation. Notre but est de généraliser (dans la mesure du possible) les résultats de A. Fedotov et F. Klopp [FK02, FK04b, FK06b, FK06a], qui ont étudié en détails le cas $W \equiv \cos$, au cas d'un potentiel quelconque analytique réel et périodique. On utilisera ces résultats pour construire des approximations quasi-périodiques à l'équation (SIosc) dans la troisième partie.

On considère l'équation quasi-périodique adiabatique (AdiabQP) comme une perturbation de l'équation de Schrödinger associée à l'opérateur périodique

$$\mathbb{H}_0 := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (15)$$

mais avec une énergie dépendant de la variable complexe z .

1 Hypothèses

Le potentiel V . On suppose que la fonction V est non constante et vérifie les hypothèses suivantes :

$$(\text{HVR}) \quad V \in L_{2,loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

$$(\text{HVP}) \quad V(x+1) = V(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ces hypothèses sont suffisantes pour mettre en place la théorie de Bloch-Floquet (*c.f.* [LS91, §2.6 et 2.7], [Enc94, §17] et [Fir00]) pour l'opérateur \mathbb{H}_0 , ainsi que la théorie de perturbations pour \mathbb{H}_0 (« méthode de la résolvante approchée », *c.f.* [FK01]). Les constructions de la méthode de WKB complexe pour les perturbations des opérateurs périodiques (voir Chapitre II) utilisent des objets de la théorie de Bloch-Floquet (voir Chapitre I).

Le potentiel W . Fixons $Y > 0$ et soit alors S_Y la bande $S_Y := \{z \in \mathbb{C}, |\Im z| < Y\}$ du plan complexe. On suppose que la fonction $W : S_Y \rightarrow \mathbb{C}$ vérifie les hypothèses suivantes :

(HWA) W est non constante, prolongement d'une fonction analytique réelle dans la bande S_Y , *i.e.* $W \in \mathcal{H}(S_Y)$ et $W(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

(HWC) Dans S_Y tous les points critiques de W sont réels.

(HWP) $W(z + 2\pi) = W(z)$ pour tout $z \in S_Y$.

L'hypothèse d'analyticité **(HWA)** est indispensable pour pouvoir appliquer la méthode WKB complexe pour les perturbations des opérateurs périodiques (voir la Section 1.1 du Chapitre III). L'hypothèse sur les points critiques **(HWC)** joue un rôle important dans les constructions géométriques de la méthode de prolongement des asymptotiques des solutions (*c.f.* la Section 1.2 du Chapitre III) et [FK04a]). L'hypothèse de périodicité **(HWP)** permet d'introduire la matrice de monodromie grâce à la symétrie supplémentaire qu'elle apporte dans l'équation (AdiabQP).

La fréquence adiabatique ε . Dans cette partie, ε est un petit paramètre réel. Les résultats sont asymptotiques dans le sens où ils sont valables pour ε suffisamment petit.

Le paramètre complexe z . Le paramètre z de l'équation (AdiabQP) parcourt toute la bande complexe S_Y :

(Hz) $z \in S_Y$.

2 Matrices de transfert et matrices de monodromie

Quand une équation a des symétries, on peut introduire l'opérateur de monodromie associé au groupe de symétries agissant sur l'ensemble des solutions de cette équation. Ayant fixé une base de solutions, on peut calculer la matrice de l'opérateur de monodromie dans cette base, la matrice de monodromie. Dans cette section, on rappelle la définition des matrices de monodromie pour l'équation quasi-périodique (AdiabQP). On discute les propriétés de ces matrices et leur rapport à la matrice de transfert pour (AdiabQP).

2.1 Symétries de (AdiabQP) et solutions cohérentes

L'équation (AdiabQP) est invariante sous l'action des transformations suivantes de l'espace des solutions de (AdiabQP) :

1. l'opérateur de décalage $T_{2\pi}$ défini par $(T_{2\pi}f)(x, z, E; \varepsilon) := f(x, z + 2\pi, E; \varepsilon)$,
2. l'opérateur de décalage simultané des deux variables P_ε défini par : $(P_\varepsilon f)(x, z, E; \varepsilon) := f(x + 1, z - \varepsilon, E; \varepsilon)$.

Ces opérateurs commutent ($P_\varepsilon T_{2\pi} = T_{2\pi} P_\varepsilon$) et l'opérateur $H_{z,\varepsilon} := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(\varepsilon x + z)$ commute aux opérateurs $T_{2\pi}$ et P_ε :

$$T_{2\pi} H_{z,\varepsilon} = H_{z,\varepsilon} T_{2\pi} \quad \text{et} \quad P_\varepsilon H_{z,\varepsilon} = H_{z,\varepsilon} P_\varepsilon.$$

On considère les groupes $\langle T_{2\pi} \rangle$ et $\langle P_\varepsilon \rangle$ comme des groupes de symétries de l'équation (AdiabQP).

Remarque 22. Pour chaque ε fixé irrationnel, $z \mapsto H_{z,\varepsilon}$ est une famille ergodique d'opérateurs, considérée sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ avec la mesure $\frac{1}{2\pi}Leb$ et la σ -algèbre B des boréliens. On associe le groupe des opérateurs unitaires engendré par l'opérateur de translation : $x \mapsto x+1$ à la transformation ergodique $z \mapsto z+\varepsilon$ qui préserve la mesure sur \mathbb{T} . L'opérateur $H_{z+\varepsilon,\varepsilon}$ est unitairement équivalent à l'opérateur $H_{z,\varepsilon}$ (voir [PF92] pour les définitions).

On introduit un couplage entre la variable x et le paramètre z en se restreignant aux solutions invariantes sous l'action de P_ε .

Définition 23. On dit qu'une fonction $f = f(x, z, E; \varepsilon)$ vérifie la condition de cohérence si elle est invariante sous l'action de P_ε :

$$(P_\varepsilon f)(x, z, E; \varepsilon) = f(x, z, E; \varepsilon). \quad (16)$$

Fixons une énergie E . Soit \mathcal{K} l'ensemble des solutions de $H_{z,\varepsilon}f = Ef$ telles que $P_\varepsilon f = f$:

$$\mathcal{K} := \left\{ f : \mathbb{R} \times S_Y \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{telle que} \quad \begin{array}{l} f(\cdot, z) \in C^2(\mathbb{R}) \\ f(x, \cdot) \in \mathcal{H}(S_Y) \\ H_{z,\varepsilon}f(\cdot, z) = Ef(\cdot, z) \\ P_\varepsilon f = f \end{array} \right\}. \quad (17)$$

\mathcal{K} est un module sur l'anneau des fonctions

$$\{a : S_Y \rightarrow \mathbb{C} \mid a(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}, a \in \mathcal{H}(S_Y), a(z+\varepsilon) = a(z)\}.$$

On considère aussi des bases de solutions vérifiant la condition de cohérence. Il est utile d'introduire la notion suivante :

Définition 24. Soit $\{f_1, f_2\} = \{f_1, f_2\}(x, z, E; \varepsilon)$ une base de solutions de l'équation (AdiabQP). On dit que $\{f_1, f_2\}$ est une base cohérente si f_1 et f_2 vérifient la condition de cohérence et que leur wronskien est égal à 1 :

$$w[f_1, f_2] := f_1'(x, z, E; \varepsilon)f_2(x, z, E; \varepsilon) - f_1(x, z, E; \varepsilon)f_2'(x, z, E; \varepsilon) \equiv 1. \quad (18)$$

On peut aussi considérer des solutions matricielles

$$F(x, z, E, \varepsilon) := \begin{pmatrix} f_1(x, z, E; \varepsilon) & f_2(x, z, E; \varepsilon) \\ f_1'(x, z, E, \varepsilon) & f_2'(x, z, E; \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Définition 25. On appelle *solution cohérente matricielle* une solution matricielle formée d'une base cohérente de solutions de (AdiabQP).

La matrice de transfert $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S_Y \times \mathbb{C} \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ résout le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dT(x, y, z, E; \varepsilon)}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ V(x) + W(\varepsilon x + z) - E & 0 \end{pmatrix} T(x, y, z, E; \varepsilon) \\ T(y, y, z, E; \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (19)$$

Pour une fonction $f : S_Y \rightarrow \mathbb{C}$ on note $f^* : S_Y \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

On définit un groupe \mathcal{A} de fonctions à valeurs dans $SL_2(\mathbb{C})$:

$$\mathcal{A} := \{A : S_Y \rightarrow SL(2, \mathbb{C}) \text{ tel que } A \in \mathcal{H}(S_Y), \quad A(z + \varepsilon) = A(z), \quad A^{(*)} = \sigma A\}, \quad (20)$$

où pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on note $A^{(*)} := \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}$ et $\sigma := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Lemme 26. *Soient $\{f_1, f_2\}$ une base cohérente et F la solution matricielle associée. Alors, il existe $A(z; E, \varepsilon) \in \mathcal{A}$ telle que :*

$$F(x, z; E, \varepsilon) = T(x, 0, z; E, \varepsilon)A(z; E, \varepsilon).$$

Donc l'ensemble des solutions matricielles cohérentes coïncide avec l'ensemble \mathcal{S} :

$$\mathcal{S} := \left\{ \begin{array}{l} F : \mathbb{R} \times S_Y \times \mathbb{C} \rightarrow SL(2, \mathbb{C}) \text{ tel que} \\ \text{il existe } A(\cdot, E; \varepsilon) \in \mathcal{A} \text{ tel que } F(x, z, E; \varepsilon) = T(x, 0, z, E; \varepsilon)A(z, E, \varepsilon) \end{array} \right\}$$

Démonstration. Soient F_1 et F_2 deux solutions matricielles cohérentes, et soit P la matrice de passage de l'une à l'autre :

$$F_2(x, z; E, \varepsilon) = F_1(x, z; E, \varepsilon)P(z, E, \varepsilon).$$

On va démontrer que $P \in \mathcal{A}$. Comme $F_1, F_2 \in SL(2, \mathbb{C})$, on a $P \in SL(2, \mathbb{C})$. De plus, les coefficients de P s'expriment comme somme de produits de coefficients de F_1 et F_2 . Donc comme $F_1, F_2 \in \mathcal{H}(S_Y)$, on a aussi $P \in \mathcal{H}(S_Y)$. Les coefficients de P sont indépendants de x , donc la condition de cohérence $F_{1,2}(x + 1, z - \varepsilon; E, \varepsilon) = F_{1,2}(x, z; E, \varepsilon)$ implique $P(z + \varepsilon; E, \varepsilon) = P(z; E, \varepsilon)$. On voit que $\sigma P \sigma = P^{(*)}$ puisque $P^{(*)} = (F_1^{-1})^{(*)} F_2^{(*)} = \sigma F_1^{-1} \sigma \sigma F_2 \sigma = \sigma P \sigma$. On obtient que chaque matrice de passage d'une solution matricielle cohérente à une autre appartient à \mathcal{A} . Mais la matrice de transfert $T(x, 0, z, E; \varepsilon)$ est une solution matricielle cohérente, ce qui finit la démonstration. \square

2.2 Définition et propriétés de la matrice de monodromie

L'espace des solutions de l'équation (AdiabQP) est invariant sous l'action de $T_{2\pi}$. On introduit de façon usuelle l'opérateur de monodromie \mathbb{M} qui agit sur les solutions par translation $T_{2\pi}$. Pour obtenir une représentation de l'opérateur de monodromie on considère sa restriction sur l'espace des solutions cohérentes (ceci est possible car $T_{2\pi}$ commute avec P_ε). Soient f et g des solutions de l'équation (AdiabQP) qui forment une base cohérente. Vue la périodicité de W , $f(x, z + 2\pi, E; \varepsilon)$ et $g(x, z + 2\pi, E; \varepsilon)$ sont aussi des solutions de l'équation (AdiabQP) et forment une base cohérente. Par conséquent, il existe une fonction matricielle —une représentation de l'opérateur de monodromie sur l'espace des solutions cohérentes— $M(z, E; \varepsilon)$ à coefficients complexes telle que :

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (x, z + 2\pi, E; \varepsilon) = M(z, E; \varepsilon) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (x, z, E; \varepsilon). \quad (21)$$

Définition 27. La fonction matricielle $M : S_Y \times \mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C})$ définie par la formule (21) s'appelle *matrice de monodromie* associée à la base cohérente $\{f, g\}$.

La matrice de monodromie satisfait aux propriétés suivantes :

1. $M(z, E; \varepsilon)$ est à valeurs dans $SL(2, \mathbb{C})$, *i.e.* $\det M(z, E; \varepsilon) \equiv 1$.
2. $M(z, E; \varepsilon)$ est ε -périodique en z , *i.e.* $M(z + \varepsilon, E; \varepsilon) = M(z, E; \varepsilon)$.
3. Soit $V \subset \mathbb{C}$ un domaine⁸. Si les solutions f et g sont analytiques en (z, E) dans $S_Y \times V$, il en est de même de la matrice de monodromie associée.
4. Les coefficients de la matrice de monodromie s'expriment en termes des wronskiens de solutions :

$$\begin{aligned}
M_{11}(z, E; \varepsilon) &= \frac{w[f(x, z + 2\pi, E; \varepsilon), g(x, z, E; \varepsilon)]}{w[f(x, z, E; \varepsilon), g(x, z, E; \varepsilon)]} \\
M_{12}(z, E; \varepsilon) &= -\frac{w[f(x, z + 2\pi, E; \varepsilon), f(x, z, E; \varepsilon)]}{w[f(x, z, E; \varepsilon), g(x, z, E; \varepsilon)]} \\
M_{21}(z, E; \varepsilon) &= \frac{w[g(x, z + 2\pi, E; \varepsilon), g(x, z, E; \varepsilon)]}{w[f(x, z, E; \varepsilon), g(x, z, E; \varepsilon)]} \\
M_{22}(z, E; \varepsilon) &= -\frac{w[g(x, z + 2\pi, E; \varepsilon), f(x, z, E; \varepsilon)]}{w[f(x, z, E; \varepsilon), g(x, z, E; \varepsilon)]} \tag{22}
\end{aligned}$$

5. Soient $N, M \in \mathbb{N}$ et une fonction $f : \mathbb{R}^M \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$. Notons f^* la fonction suivante :

$$f^*(x_1, \dots, x_M, z_1, \dots, z_N) := \overline{f(x_1, \dots, x_M, \overline{z_1}, \dots, \overline{z_N})} \tag{23}$$

Supposons que les solutions f et g forment une base cohérente et soient reliées par la relation $g(x, z, E; \varepsilon) = f^*(x, z, E; \varepsilon)$. Alors la matrice de monodromie associée à la base $\{f, g\}$ est de la forme suivante :

$$M(z, E; \varepsilon) = \begin{pmatrix} a(z, E; \varepsilon) & b(z, E; \varepsilon) \\ b^*(z, E; \varepsilon) & a^*(z, E; \varepsilon) \end{pmatrix} \tag{24}$$

où les coefficients a et b sont donnés par :

$$a(z, E; \varepsilon) = \frac{w[f(x, z + 2\pi, E; \varepsilon), f^*(x, z, E; \varepsilon)]}{w[f(x, z, E; \varepsilon), f^*(x, z, E; \varepsilon)]} \tag{25}$$

$$b(z, E; \varepsilon) = \frac{w[f(x, z, E; \varepsilon), f(x, z + 2\pi, E; \varepsilon)]}{w[f(x, z, E; \varepsilon), f^*(x, z, E; \varepsilon)]} \tag{26}$$

Les propriétés de la matrice de monodromie impliquent que $M(\cdot, E, \varepsilon) \in \mathcal{A}$. De plus, on définit l'action du groupe \mathcal{A} sur une matrice $M \in SL(2, \mathbb{C})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{A}, (A \cdot M)(z) := A(z + 2\pi)MA^{-1}(z) \tag{27}$$

Lemme 28. Soit $M_0(x, z; E, \varepsilon)$ une matrice de monodromie associée à une base cohérente. Soit M une matrice de monodromie associée à une autre base cohérente. Alors M appartient à l'orbite de M_0 sous l'action de \mathcal{A} .

8. C'est-à-dire un ouvert simplement connexe.

Démonstration. L'assertion du lemme découle de la formule suivante. Soient F_0 la solution matricielle associée à M_0 et F la solution matricielle associée à M . Comme $F = F_0 P$ ($P \in \mathcal{A}$), alors

$$M(z; E, \varepsilon) = P^t(z + 2\pi; E, \varepsilon) M_0(z; E, \varepsilon) (P^t)^{-1}(z; E, \varepsilon).$$

Pour conclure, on remarque que si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^t, A^{-1} \in \mathcal{A}$ et si $A(\cdot) \in \mathcal{A}$ alors on a $A(\cdot + 2\pi) \in \mathcal{A}$. \square

Les exemples de base d'action des éléments du groupe \mathcal{A} sont :

1. Soient $\{f, f^*\}$ une base cohérente et $\{g, g^*\}$ une autre base liée à $\{f, f^*\}$ par :

$$\begin{pmatrix} f \\ f^* \end{pmatrix} (x, z, z_0, E; \varepsilon) = S_m(z - z_0) \begin{pmatrix} g \\ g^* \end{pmatrix} (x, z, z_0, E; \varepsilon)$$

avec
$$S_m(z - z_0) = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{2\pi im(z-z_0)}{\varepsilon}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{2\pi im(z-z_0)}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}.$$

Alors $\{g, g^*\}$ est une base cohérente et la matrice de monodromie M_f associée à $\{f, f^*\}$ est reliée à la matrice M_g associée à $\{g, g^*\}$ par la transformation :

$$M_f(z, z_0, E; \varepsilon) = S(z - z_0 + 2\pi) M_g(z, z_0, E; \varepsilon) S^{-1}(z - z_0).$$

2. Soit $\{g, g^*\}$ la base reliée à la base cohérente $\{f, f^*\}$ par $g = -if^*$ et $g^* = if$. Alors la matrice de monodromie M_f est liée à M_g par la relation :

$$M_f(z, z_0, E; \varepsilon) = G M_g(z, z_0, E; \varepsilon) G \quad \text{avec} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 29. On définit le cocycle matriciel associé à une matrice de monodromie M :

$$M_n(z, E, \varepsilon) := M(z + (n-1)2\pi, E; \varepsilon) \cdots M(z + 2\pi, E; \varepsilon) M(z, E; \varepsilon) \quad \text{avec} \quad M_0(z, E; \varepsilon) := \text{Id}.$$

Les M_n vérifient la relation de cocycle $M_{m+n}(z, E; \varepsilon) = M_m(z + 2\pi n, E; \varepsilon) M_n(z, E; \varepsilon)$. On introduit la relation d'équivalence entre cocycles suivante.

Soit $G \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$ un groupe. Deux cocycles $M_n, (M_0)_n : \mathbb{R}/\varepsilon\mathbb{Z} \rightarrow G$ sont équivalents s'il existe $A : \mathbb{R}/\varepsilon\mathbb{Z} \rightarrow G$ telle que

$$M_n(z, E) = A(z + 2\pi n)^{-1} (M_0)_n(z, E) A(z).$$

La définition (27) de l'action du groupe \mathcal{A} et le Lemme 28 impliquent que

Lemme 30. *Toutes les matrices de monodromie associées à des bases cohérentes engendrent des cocycles $\mathbb{R}/\varepsilon\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}$ équivalents.*

Définissons un exposant de Lyapounov pour le cocycle engendré par une matrice de monodromie :

$$\gamma(M, z, E, \varepsilon) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \|M_n(z, E; \varepsilon)\|}{n}.$$

Utilisant ergodicité des cocycles de matrices de monodromie on obtient :

Corollaire 31. *Les exposants de Lyapounov pour toutes les matrices de monodromie associées à des bases cohérentes coïncident et ne dépendent que de E et ε .*

2.3 Matrices de monodromie et matrices de transfert

La matrice de monodromie est liée à la matrice de transfert :

Lemme 32. *Il existe $\delta_\varepsilon \in (-\varepsilon, 0]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la matrice de transfert vérifie*

$$T(x + [\frac{2\pi}{\varepsilon}], x, z, E, \varepsilon) = \Psi(x, z + \delta_\varepsilon, E, \varepsilon) M^t(z + \delta_\varepsilon, E, \varepsilon) \Psi(x, z, E, \varepsilon)$$

où $\Psi(x, z + \delta_\varepsilon, E, \varepsilon)$ est une solution cohérente matricielle (voir Définition 25) et M est la matrice de monodromie associée à cette solution matricielle.

Démonstration. Soit $\Psi(x, z, E, \varepsilon)$ une solution matricielle cohérente de (AdiabQP), on peut exprimer la matrice de transfert :

$$T(x + [\frac{2\pi}{\varepsilon}], x, z, E, \varepsilon) = \Psi(x + [\frac{2\pi}{\varepsilon}], z, E, \varepsilon) \Psi^{-1}(x, z, E, \varepsilon)$$

Par la condition de cohérence, on a :

$$\Psi(x + [\frac{2\pi}{\varepsilon}], z, E, \varepsilon) = \Psi(x, z + [\frac{2\pi}{\varepsilon}]\varepsilon, E, \varepsilon)$$

Soit $M(z, E, \varepsilon)$ la matrice de monodromie associée à la solution cohérente Ψ , *i.e.*

$$\Psi^t(x, z + 2\pi, E, \varepsilon) = M(z, E, \varepsilon) \Psi^t(x, z, E, \varepsilon).$$

On obtient

$$\Psi(x, z + 2\pi + \delta_\varepsilon, E, \varepsilon) = \Psi(x, z + \delta_\varepsilon, E, \varepsilon) M^t(z + \delta_\varepsilon, E, \varepsilon),$$

où on a noté $\delta_\varepsilon = [\frac{2\pi}{\varepsilon}]\varepsilon - 2\pi$. On exprime :

$$T(x + [\frac{2\pi}{\varepsilon}], x, z, E, \varepsilon) = \Psi(x, z + \delta_\varepsilon, E, \varepsilon) M^t(z + \delta_\varepsilon, E, \varepsilon) \Psi^{-1}(x, z, E, \varepsilon).$$

□

Supposons que $x \in \mathbb{N}$ et qu'on puisse estimer $\left\| \frac{d\Psi(0,t,E,\varepsilon)}{dt} \right\| \leq C$ uniformément en t dans $[z + \varepsilon x, z + \varepsilon(x + 1)]$. Alors, puisque

$$\text{Tr } T(x + [\frac{2\pi}{\varepsilon}], x, z, E, \varepsilon) = \text{Tr} \left(\Psi(0, z + \varepsilon x + \delta_\varepsilon, E, \varepsilon) \Psi^{-1}(0, z + \varepsilon x, E, \varepsilon) M^t(z + \varepsilon x + \delta_\varepsilon) \right),$$

on estime aussi :

$$|\text{Tr } T(x + [\frac{2\pi}{\varepsilon}], x, z, E, \varepsilon)| \leq (1 + 2C\varepsilon) |\text{Tr } M^t(z + \varepsilon x + \delta_\varepsilon)|.$$

Ceci est utile pour estimer le nombre de valeurs propres sur un intervalle de longueur $\frac{2\pi}{\varepsilon}$.

Une propriété importante de la matrice de monodromie concerne les valeurs propres de $\mathbb{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + [V(x) + W(\varepsilon x + z)]$.

Lemme 33. *Soit $\delta > 0$ suffisamment petit. Supposons que la trace de la matrice de monodromie vérifie :*

$$|\text{Tr } M(z, E, \varepsilon)| > C \|M(z, E, \varepsilon)\| \exp(-\frac{\delta}{\varepsilon})$$

et Ψ est uniformément borné au voisinage de x , alors E n'est pas une valeur propre de $H = -\frac{d^2}{dx^2} + [V(x) + W(\varepsilon x + z)]$ sur $[x, x + [\frac{2\pi}{\varepsilon}]]$ avec une condition au bord périodique, ni de l'opérateur avec une condition au bord antipériodique.

3 Asymptotique de la matrice de monodromie : le cas général

J'étudie l'asymptotique des matrices de monodromie quand ε est petit. Le Théorème 2.3 du Chapitre IV décrit l'asymptotique de la matrice de monodromie associée à une base cohérente de solutions de l'équation (AdiabQP). Pour présenter ce résultat, on a besoin d'introduire plusieurs notations. Par conséquent, dans cette introduction on va se contenter d'un corollaire du Théorème 2.3 qui reflète les propriétés essentielles de cette asymptotique. On trouvera plus de détails, en particulier, les définitions nécessaires et l'énoncé du Théorème 2.3 au Chapitre IV.

Supposons que $(E - W(\mathbb{R})) \cap \sigma(\mathbb{H}_0) \neq \emptyset$ et contienne un intervalle. Soit I le nombre de composantes connexes de $\mathcal{S} := \{z \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mid (E - W(z)) \in \sigma(\mathbb{H}_0)\}$. Nous démontrons le résultat suivant :

Proposition 34. *Fixons $E \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ petit. Soit $z_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(E - W(z_0)) \in \sigma(\mathbb{H}_0)$ et $|E - W(z_0) - (\mathbb{R} \setminus \sigma(\mathbb{H}_0))| > \delta$. Il existe $Y', 0 < Y' < Y$, et $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0$ tels que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ on peut construire une base cohérente dont la matrice de monodromie M associée admet l'asymptotique uniforme suivante dans $S_{Y'}$:*

$$M(z, E; \varepsilon) = \exp\left(\frac{2\pi\gamma(E)}{\varepsilon}\right) \sum_{k=1}^{2^I} \begin{pmatrix} f_k(z, E) & 0 \\ 0 & f_k^*(z, E) \end{pmatrix} \left(M_k(z, E; \varepsilon) + O(e^{-\frac{p_k}{\varepsilon}})\right)$$

avec

- $\gamma(E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_0(E - W(s)) ds$ où $\gamma_0(E)$ est l'exposant de Lyapounov pour (EqnPer).
- $m_k \in \mathbb{Z}$ et $|m_k| \leq (I + 1)$ où I est le nombre de composantes connexes de \mathcal{S} .
- $f_k(z, E) = \exp\left(\frac{2\pi i m_k}{\varepsilon}(z - z_0)\right)$.
- M_k est une matrice aux coefficients non nuls, dont chaque coefficient est un monôme trigonométrique en $\frac{2\pi(z-z_0)}{\varepsilon}$ d'ordre au plus 2.
- $p_k > p(\delta, Y, Y') > 0$.

On déduit de cette proposition l'asymptotique de la matrice de monodromie pour $z \in \mathbb{R}$:

Corollaire 35. *Sous les conditions de la Proposition 34, on a*

$$M(z, E, \varepsilon) = \exp\left(\frac{2\pi\gamma(E)}{\varepsilon}\right) \left(M_0(z, E, \varepsilon) + O(e^{-\frac{p}{\varepsilon}})\right)$$

avec M_0 une matrice dont les coefficients sont $O(1)$, ε -périodiques en z et pour presque tout $z \in [0, \varepsilon)$ non nuls.

Corollaire 36. *Soit $E \in \mathbb{R}$ tel que les ensembles $(E - W(\mathbb{R})) \cap (\mathbb{R} \setminus \sigma(\mathbb{H}_0))$ et $(E - W(\mathbb{R})) \cap \sigma(\mathbb{H}_0)$ contiennent un intervalle et supposons que pour chaque z tel que $W'(z) = 0$ on ait $E - W(z) \in \mathbb{R} \setminus \sigma(\mathbb{H}_0)$. Alors pour chaque z dans $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \delta < \Im z < Y'\}$ on a*

$$M(z, E; \varepsilon) = \exp\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}(\gamma(E) - (M + 1)(z - z_0))\right) \left(M_0(E; \varepsilon) + O(e^{-\frac{p}{\varepsilon}})\right)$$

où $M_0(E; \varepsilon)$ est égale soit à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a(E, \varepsilon) & 0 \end{pmatrix}$, soit à $\begin{pmatrix} 0 & a(E, \varepsilon) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $|a(E, \varepsilon)| \leq 1$.

Dans la démonstration du Théorème 2.3 du Chapitre IV, on obtient des estimations pour les solutions cohérentes de l'équation (AdiabQP). Pour énoncer ce résultat on a besoin de quelques notations.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\lambda : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour $a \leq x \leq y \leq b$ on a $\lambda(y, x) \geq 0$. Soit μ un réel. On introduit les normes suivantes sur $\mathcal{C}^1([a, b])$:

$$\|f\|_{L_\infty(\lambda, \mu, [a, b])} = \max_{x \in [a, b]} \left(\exp\left(-\frac{\mu}{\varepsilon}\right) \int_a^x |f(s)| e^{-\lambda(s, a)} ds \right).$$

Lorsque $\mu = 0$, on simplifie la notation en $\|f\|_{L_\infty(\lambda, [a, b])}$.

Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$. On note $\{E_n\}$ les bords des zones spectrales de \mathbb{H}_0 . Soient (ξ_i) , $i = 1, \dots, M$, les solutions de $E - W(z + \varepsilon \xi_i) \in \{E_n\}$ telles que $\xi_i \in [x_0, x_0 + \frac{2\pi}{\varepsilon}]$.

Théorème 37. *Fixons $z \in [0, 2\pi]$ tel que $|E - W(z) - E_n| > \delta$. Alors il existe une base (Ψ_+, Ψ_-) de solutions cohérentes et une petite constante positive δ telles que :*

- Pour tout x dans $[x_0, x_0 + \frac{2\pi}{\varepsilon}) \setminus \bigcup_{i=1}^{2M} [\xi_i - \frac{\delta}{\varepsilon}, \xi_i + \frac{\delta}{\varepsilon}] = \bigcup_{i=1}^{2M+1} [a_i, b_i]$ on a $\|\Psi(x, z, E, \varepsilon)\|_{L_\infty(\lambda(E, \cdot), [a_i, b_i])}$ est bornée uniformément en ε . Ici $\lambda(E, x, y) = \int_{z_0 + \varepsilon x}^{z_0 + \varepsilon y} \Im k_p(E - W(z)) dz$.
- Pour x dans $[b_i, a_{i+1}] := [\xi_i - \frac{\delta}{\varepsilon}, \xi_i + \frac{\delta}{\varepsilon}]$ on a $\|\Psi(x, z, E; \varepsilon)\|_{L_\infty(\lambda(E, \cdot), \beta(E, \xi_i) \delta, [b_i, a_{i+1}])}$ est bornée uniformément en ε . Ici $\lambda(E, x, y) = \int_{z_0 + \varepsilon x}^{z_0 + \varepsilon y} \Im k_p(E - W(z)) dz$, $\beta(E, \xi_i) = 2\pi m_i$ et m_i est une constante entière.

Ce théorème est important pour les constructions de la troisième partie de cette thèse. Les estimations sont utilisées dans les approximations des matrices de transfert pour l'équation (SIosc) dans le Chapitre V.

Partie 3. Perturbation à oscillations asymptotiquement lentes

Dans une troisième partie, j'applique les résultats de la seconde partie à l'étude de l'équation :

$$-\Psi''(x, E) + [V(x) + W(x^\alpha)]\Psi(x, E) = E\Psi(x, E) \quad (\text{SIosc})$$

et à l'étude spectrale de l'opérateur de Schrödinger associé

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(x^\alpha). \quad (28)$$

En particulier, je redémontre la formule (12) pour l'exposant de Lyapounov montrée précédemment. On dispose aussi de descriptions asymptotiques des matrices de transfert pour l'équation (SIosc) pour certains régimes d'énergies. Pour $z_0 \in [0, 2\pi)$, on pose $y_n(z_0) := (2\pi n + z_0)^{\frac{1}{\alpha}}$ et $x_n(z_0) := [y_n(z_0)]$. Les approximations quasi-périodiques adiabatiques pour l'équation (SIosc) de la partie 2 permettent de démontrer le résultat suivant :

Théorème 38. *[c.f. Lemme 3.6 du Chapitre V] On fixe $E \in \mathbb{R}$ tel que $E - W(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathbb{H}_0)$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $n > n_0$ et pour chaque $z_0 \in [0, 2\pi)$, la matrice de transfert pour (SIosc) vérifie :*

$$T(x_n(z_0), x_{n_0}(z_0), E) = (\Phi^0(z_0) + o_n(1)) \prod_{k=n_0}^{n-1} [(I + o_{k+1}(1)) \mathbf{D}_n(E, z_0)] (\Phi^0(z_0) + o_{n_0}(1))^{-1},$$

où

- \prod désigne le produit à gauche,
- $\mathbf{D}_n(E, z_0) := \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi_n(E, z_0)}{\varepsilon_n}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi_n(E, z_0)}{\varepsilon_n}} \end{pmatrix}$,
- $\phi_n(E, z_0) = \int_{z_0 + \alpha_n}^{z_0 + 2\pi + \beta_n} \kappa(s) ds \in (0, 2\pi^2)$,
- $\forall s \in \mathbb{R}, \kappa(s) \in (0, \pi)$,
- $\alpha_n, \beta_n \in (-\varepsilon_n, 0)$,
- $\Phi^0(E, z_0) = \begin{pmatrix} \Phi_+^0 & \Phi_-^0 \\ (\Phi_+^0)' & (\Phi_-^0)' \end{pmatrix} (x, E - W(z_0))$,
- Φ_{\pm}^0 sont des solutions de Bloch de $-(\Phi^0)'' + V(x)\Phi^0 = E\Phi^0$.

Corollaire 39. *Pour tout E vérifiant $E - W(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathbb{H}_0)$, l'exposant de Lyapounov existe et est nul : $\gamma(E) = 0$.*

Ce corollaire est démontré dans le Chapitre V.

Pour conclure cette partie, pour les énergies dans $\sigma_s(\mathbb{H}_\theta)$ on obtient la deuxième description (la première est à la Proposition 18) de l'ensemble résonant :

Proposition 40. *[c.f. Corollaire 4.12 du Chapitre V] Pour chaque $K > 10C$, pour tout $E \notin G_\infty(K)$, où*

$$G_\infty(K) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} G_\infty(K, \delta = \frac{1}{k}),$$

l'exposant de Lyapounov $\gamma(E)$ existe et on a

$$\gamma(E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_0(E - W(s)) ds.$$

Ici $G_\infty(K, \delta) = \bigcap_m \bigcup_{n=m}^\infty G_n(K, \delta)$, où $G_n(K, \delta)$ est défini dans (5.4.19) p.125. De plus, la "dimension de Hausdorff logarithmique" (voir la Définition 2.3 du Chapitre II) de $G_\infty(K)$ vérifie

$$\text{lndim}(G_\infty(K)) = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

La "dimension de Hausdorff logarithmique" est une caractéristique fine des sous-ensembles de \mathbb{R} de dimension de Hausdorff nulle.

La structure de ce mémoire

Le Chapitre I est consacré à des rappels sur la théorie des opérateurs de Schrödinger périodiques en dimension 1. Les résultats de ce chapitre seront systématiquement utilisés par la suite. Ce chapitre ouvre la première partie de la thèse consacrée aux approximations périodiques.

Dans le Chapitre II on étudie l'équation à oscillations asymptotiquement lentes (SIosc) à l'aide des approximations périodiques. On y démontre les Théorèmes 10 et 16 par des méthodes qui suivent les idées de B. Simon et Y. Zhu (c.f. [SZ96]).

Dans le Chapitre III, qui ouvre la seconde partie de ma thèse, on passe en revue la méthode

WKB complexe pour les perturbations adiabatiques des opérateurs de Schrödinger périodiques accompagnée de quelques nouveaux résultats (*c.f.* Corollaire 1.27 et Lemme 1.25). On étudie l'équation quasi-périodique adiabatique afin de préparer le terrain aux approximations dans le Chapitre V.

Le Chapitre IV est consacré à l'étude asymptotique de l'équation (AdiabQP). On démontre les théorèmes sur l'asymptotique de la matrice de monodromie et des solutions cohérentes, en particulier, la Proposition 34 et le Théorème 37. On illustre nos résultats sur des exemples différents de W . Ceci finit la deuxième partie de ma thèse.

Dans le Chapitre V on construit des approximations pour les matrices de transfert pour l'équation (SIosc) sur les intervalles de la taille d'ordre $Cn^{\frac{1}{\alpha}-1}$ par des matrices de transfert pour l'équation (AdiabQP) et on recalcule les formules pour l'exposant de Lyapounov. On donne les démonstrations du Théorème 38 et de la Proposition 40 de cette introduction. Le résultat sur l'ensemble résonant, la Proposition 40, améliore celui de la Proposition 18 du Chapitre II, car on estime plus précisément la "dimension de Hausdorff" logarithmique du spectre singulier (la dimension de Hausdorff ordinaire étant nulle) de $\mathbb{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(x^\alpha)$.

Chapitre I

Équation de Schrödinger périodique

Ce chapitre est consacré à des rappels de la théorie de l'opérateur de Schrödinger périodique $\mathbb{H}_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ dans $L_2(\mathbb{R})$ (c.f. [MvM75, MO75, Fir00]). Ces résultats seront systématiquement utilisés par la suite. On suppose que V vérifie les hypothèses **(HV)**, i.e. V dans $L_{2,loc}(\mathbb{R})$, à valeurs réelles et $V(x+1) = V(x)$ pour tout x réel. On passe en revue la théorie de Bloch–Floquet pour cet opérateur.

On commence par décrire le spectre de l'opérateur périodique. Puis on introduit les objets centraux de la théorie de Bloch–Floquet, notamment la matrice de monodromie, les multiplicateurs de Floquet, le quasimoment de Bloch global et les solutions de Bloch, et on décrit leurs propriétés.

1 Spectre de l'opérateur périodique

Sous les hypothèses **(HV)** sur V , l'opérateur \mathbb{H}_0 dans $L_2(\mathbb{R})$ est auto-adjoint : c'est l'*opérateur de Hill*. Soient $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble de valeurs propres de \mathbb{H}_0 dans $L_2([0, 1])$ avec une condition au bord périodique (i.e. $f(0) = f(1)$) ou anti-périodique (i.e. $f(0) = -f(1)$) numérotées par ordre croissant. Le spectre de $\mathbb{H}_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ dans $L_2(\mathbb{R})$ est purement absolument continu, sans réflexion (le coefficient de réflexion est nul à l'intérieur des bandes spectrales), de multiplicité deux. Il est constitué d'intervalles, appelés *zones spectrales* ou *intervalles de stabilité* :

$$[E_1, E_2], [E_3, E_4], [E_5, E_6], [E_7, E_8], \dots, [E_{2n-1}, E_{2n}], \dots$$

avec

$$E_1 < E_2 \leq E_3 < E_4 \dots E_{2n} \leq E_{2n+1} < E_{2n+2} \leq \dots \quad \text{tel que} \quad E_n \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Pour chaque entier naturel n , les intervalles (E_{2n}, E_{2n+1}) ne contiennent pas de spectre de \mathbb{H}_0 : ce sont les *lacunes spectrales* ou zones interdites. On dit que la n -ème lacune est ouverte si $E_{2n} < E_{2n+1}$. Les longueurs des lacunes convergent vers zéro quand n tend vers l'infini.

De plus, l'opérateur \mathbb{H}_0 est unitairement équivalent à une intégrale directe d'opérateurs à résolvante compacte $\mathbb{H}_{0,\phi}$, indexés par un angle $\phi \in [0, \pi]$. Autrement dit, il existe un opérateur

unitaire U tel que :

$$\mathbb{H}_0 = U^* \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbb{H}_{0,\phi} d\phi \right) U.$$

Chaque opérateur $\mathbb{H}_{0,\phi}$ est une restriction de \mathbb{H}_0 sur $[0, 1]$ avec la condition au bord quasi-périodique $f(1) = e^{ik}f(0)$. Pour chaque $\phi \in (0, \pi)$, l'opérateur $\mathbb{H}_{0,\phi}$ a précisément une valeur propre dans chaque zone spectrale.

Il est également connu que le spectre de l'opérateur \mathbb{H}_0 dans $L_2(\mathbb{R})$ peut être exprimé en termes du déterminant de la matrice de monodromie dont on rappelle maintenant la définition.

1.1 Matrice de monodromie pour l'équation périodique (EqnPer)

On introduit l'opérateur de monodromie \mathbf{M} associé à l'opérateur t de translation par 1 de l'espace (de dimension deux) des solutions de l'équation $H_0\Psi = E\Psi$:

$$(t\Psi)(x, E) := \Psi(x + 1, E).$$

Chaque base de l'espace des solutions de $H_0\Psi = E\Psi$ nous fournit une représentation matricielle de l'opérateur de monodromie, la *matrice de monodromie*. Si on choisit deux solutions standard, disons $c(x, E)$ et $s(x, E)$, définies par les conditions initiales $c(0) = s'(0) = 1$ et $c'(0) = s(0) = 0$, alors la matrice de monodromie $M(E)$ dans la base formée par ces solutions est :

$$M(E) = \begin{pmatrix} c(1) & c'(1) \\ s(1) & s'(1) \end{pmatrix}. \quad (1.1.1)$$

Le déterminant de cette matrice vaut 1, $\det M(E) \equiv 1$, puisque c'est le wronskien de solutions $c(x)$ et $s(x)$.

Définition 1.1. La trace de la matrice de monodromie $D(E) := \text{Tr}M(E) = c(1) + s'(1)$ est appelée le *discriminant de Hill*.

Définition 1.2. On appelle *multiplicateurs de Floquet* les valeurs propres de $M(E)$, i.e. les racines $\lambda(E)$ du polynôme caractéristique de la matrice de monodromie :

$$\det(M(E) - \lambda(E)\text{Id}) = \lambda^2(E) - D(E)\lambda(E) + 1.$$

1.2 Solutions de Bloch

Soit $\lambda(E)$ un multiplicateur de Floquet. Il existe alors une solution Φ de l'équation :

$$-\Phi''(x, E) + V(x)\Phi(x, E) = E\Phi(x, E) \quad (\text{EqnPer})$$

qui vérifie $\Phi(x + 1, E) = \lambda(E)\Phi(x, E)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition 1.3. Une solution vérifiant cette condition est appelée *solution de Bloch*.

Pour montrer l'existence d'une solution de Bloch, il suffit de remarquer que l'opérateur de monodromie \mathbf{M} commute à H_0 , et donc ils sont réductibles dans une même base.

Quand la matrice de monodromie est diagonalisable, les solutions de Bloch forment une base dans l'espace des solutions de (EqnPer). On note $\lambda_+(E)$ et $\lambda_-(E)$ les valeurs propres de $M(E)$, et on note $\Phi_+(x, E)$ et $\Phi_-(x, E)$ les solutions de Bloch associées.

Si $|D(E)| \leq 2$, alors les solutions $\lambda_{\pm}(E)$ de l'équation caractéristique sont de module 1. Ceci implique qu'il existe une solution de Bloch bornée. En tronquant cette solution, on peut construire une suite de fonctions propres approchées à support compact. On en déduit que E est dans le spectre de \mathbb{H}_0 dans ce cas.

Par contre, si $|D(E)| > 2$, alors $|\lambda_+(E)| < 1$ et $|\lambda_-(E)| > 1$ (dans une numérotation cohérente). Donc la solution de Bloch $\Phi_+(x, E)$ de (EqnPer) décroît exponentiellement en $+\infty$ et croît exponentiellement en $-\infty$, tandis que $\Phi_-(x, E)$ croît exponentiellement en $+\infty$ et décroît exponentiellement en $-\infty$. A partir de ces solutions, on peut facilement construire la fonction de Green. Par conséquent, si $|D(E)| > 2$, alors E n'est pas dans le spectre de \mathbb{H}_0 .

Ainsi on voit que le spectre est décrit par le discriminant de Hill :

$$E \in \sigma(\mathbb{H}_0) \iff |D(E)| \leq 2$$

1.3 Quasimoment de Bloch

Il est pratique de représenter les multiplicateurs de Floquet sous la forme $\lambda(E) = e^{ik(E)}$.

Définition 1.4. On appelle $k(E)$ le *quasimoment de Bloch*.

Le quasimoment de Bloch est défini modulo 2π . On a l'égalité $D(E) = 2 \cos(k(E))$. Quand la matrice de monodromie est diagonalisable, les solutions de Bloch admettent la forme suivante :

$$\Phi_+(x, E) = e^{ik(E)x} p_+(x, E) \quad \text{et} \quad \Phi_-(x, E) = e^{-ik(E)x} p_-(x, E) \quad (1.1.2)$$

où $p_{\pm}(x+1, E) = p_{\pm}(x, E)$.

Une des déterminations possibles du quasimoment est particulièrement liée aux propriétés spectrales de \mathbb{H}_0 .

Définition 1.5. On définit la *détermination principale* $k_p(E)$ du quasimoment de Bloch $k(E)$ par la condition :

$$\Re k_p(E) = 0 \quad \text{et} \quad \Im k_p(E) < 0$$

pour tout $E < E_1$.

Il est clair que cette fonction est correctement définie et unique. De plus, elle est liée à la densité d'états intégrée et à l'exposant de Lyapounov de \mathbb{H}_0 .

1.4 Densité d'états intégrée pour l'équation périodique

Soit $k_p(E)$ la détermination principale de $k(E)$. Considérons $\Re k_p(E)$ comme une fonction de E . La fonction $\Re k_p(E)$ vérifie :

- $\Re k_p(E)$ est continue et non-décroissante sur \mathbb{R} .
- $\Re k_p(E) = 0$ sur $(-\infty, E_1]$ et constante sur chaque lacune spectrale, à valeurs dans $\pi\mathbb{Z}$.
- Pour $E \in \sigma(\mathbb{H}_0)$ on a $k_p(E) = \Re k_p(E)$.

Pour chaque $E \in \sigma(\mathbb{H}_0)$ qui n'est pas un bord d'une lacune ouverte, les solutions de Bloch $\Phi_+(x, E)$ et $\Phi_-(x, E) = \overline{\Phi_+(x, E)}$ de l'équation $H_0\Phi = E\Phi$ avec le quasimoment $k_p(E)$, sont linéairement indépendantes. On peut renormaliser ces solutions par la condition :

$$\int_0^1 |\Phi_+(x, E)|^2 dx = 1.$$

La fonction spectrale $e(E; x, y)$ (le noyau du projecteur spectral sur $(-\infty, E]$) de l'opérateur de Hill \mathbb{H}_0 s'exprime en termes de Φ_+ et $\Phi_- = \overline{\Phi_+}$, ainsi que du quasimoment :

$$e(E, x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^E \Re[\Phi_+(x, E)\overline{\Phi_+(y, E)}] d\Re k_p(E).$$

Remarque 1.6. Comme la projection spectrale P_E de l'opérateur de Hill \mathbb{H}_0 commute à la translation par 1, on a :

$$e(E; x + 1, y + 1) = e(E; x, y).$$

En particulier, $x \mapsto e(E; x, x)$ est périodique de période 1. La densité d'états intégrée $k_0(E)$ est la valeur moyenne de $e(E; x, x)$ sur une période.

Définition 1.7. On appelle *densité d'états intégrée* $k_0(E)$ pour l'opérateur de Hill la fonction suivante :

$$k_0(E) = \int_0^1 e(E; x, x) dx$$

Définition 1.8. Soit Φ une solution non-triviale réelle de l'équation (EqnPer). On appelle *nombre de rotations* $\rho(E)$ la limite suivante

$$\rho(E) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Arg}(\Phi(x, E) + i\Phi'(x, E))}{2\pi x}.$$

Dans cette définition, on peut prendre n'importe quelle détermination (continue en x) de l'argument. Johnson et Moser (*c.f.* [JM82]) ont démontré que cette limite existe et est indépendante du choix de la solution Φ . Choissant $\Phi = \Phi_+$, on obtient que $\Re k_p(E)$ coïncide, modulo un multiplicateur, avec le nombre de rotations $\rho(E)$:

$$\rho(E) = \frac{\Re k_p(E)}{2\pi}.$$

D'autre part, $\Re k_p(E)$ coïncide avec la densité d'états intégrée $k_0(E)$.

Il existe une façon alternative de définir la densité d'états intégrée :

$$k_0(E) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{N_D(\mathbb{H}_0(l), E)}{l}$$

où $N_D(\mathbb{H}_0(l), E)$ est la fonction de comptage des valeurs propres $< E$ de H_0 sur $[0, l]$ avec des conditions aux bords de Dirichlet. On a :

$$k_0(E) = \frac{\Re k_p(E)}{\pi} = 2\rho(E).$$

Le spectre $\sigma(\mathbb{H}_0)$ est égal à l'ensemble de points de croissance de $k_0(E)$:

$$\sigma(\mathbb{H}_0) = \{E \in \mathbb{R} \mid k_0(E + \varepsilon) - k_0(E - \varepsilon) > 0 \text{ pour tout } \varepsilon > 0\}$$

La dérivée $n(E) = \frac{dk_0(E)}{dE}$ est appelée *densité d'états* pour l'opérateur de Hill. Pour exprimer $n(E)$, on prend la dérivée de la formule $D(E) = 2 \cos(\Re k_p(E))$ avec $E \in \sigma(\mathbb{H}_0)$ à l'exception des bords de zones spectrales. On obtient l'expression suivante pour $n(E) = k'_0(E) = \frac{\Re k'_p(E)}{\pi}$ en termes de $D(E)$:

$$n(E) = \frac{|D(E)|}{\pi \sqrt{4 - D^2(E)}} \Theta(4 - D^2(E))$$

où Θ est la fonction de Heaviside. À chaque bord \tilde{E} d'une lacune ouverte, la densité d'états $n(E)$ a une singularité de type $|E - \tilde{E}|^{\frac{1}{2}}$. On a l'estimation suivante de la vitesse de convergence du nombre d'états par unité de volume vers la densité d'états intégrée.

Lemme 1.9. *Soient a et $b \in \mathbb{N}$. Soit $k_0(E)$ la densité d'états pour l'opérateur périodique \mathbb{H}_0 . Le nombre $N_D(\mathbb{H}_0(a, b), E)$ de valeurs propres de Dirichlet $< E$ et le nombre $N_N(\mathbb{H}_0(a, b), E)$ de valeurs propres de Neumann $< E$ de H_0 sur $[a, b]$ vérifient l'estimation pour $b - a$ grand :*

$$|N_D(\mathbb{H}_0(a, b), E) - k_0(E)(b - a)| \leq 2 \max(k_0(E), 1), \quad (1.1.3)$$

$$|N_N(\mathbb{H}_0(a, b), E) - k_0(E)(b - a)| \leq 2 \max(k_0(E), 1). \quad (1.1.4)$$

Démonstration. Comme $(b - a) \in \mathbb{Z}$, une énergie E telle que $E \notin \{E_n\}_n$, i.e. $k(E) \neq \pi\mathbb{N}$, ne peut être une valeur propre de Dirichlet ou de Neumann que si $k(E) \in \frac{\pi}{b-a}\mathbb{N}$. Ainsi le nombre de valeurs propres de Dirichlet ou de Neumann inférieures à E est égal à $\left\lfloor \frac{k(E)(b-a)}{\pi} \right\rfloor$ à $2 \left\lfloor \frac{k(E)}{\pi} \right\rfloor$ près. Ce qui est équivalent à l'assertion du lemme. \square

Démonstration. (version alternative). La preuve est basée sur l'étude du nombre de rotations. Le nombre de rotations de $\Phi(x, E) + \Phi'(x, E)$ vaut :

$$\rho([a, b], E) = \frac{\arg(\Phi(b, E) + i\Phi'(b, E)) - \arg(\Phi(a, E) + i\Phi'(a, E))}{b - a}$$

On choisit maintenant la solution $\Phi(x, E) = e^{ik_p(E)x} p_+(x, E)$ pour obtenir (en utilisant la périodicité de p_+ et de p'_+ en x) :

$$\rho([a, b], E) = \frac{\arg(e^{ik_p(E)b} (p_+(b, E) - k_p(E)p_+(b, E) + ip'_+(b, E)))}{b - a}$$

$$\frac{\arg(e^{ik_p(E)a} (p_+(a, E) - k_p(E)p_+(a, E) + ip'_+(a, E)))}{b - a} = \frac{\arg(e^{ik_p(E)b}) - \arg(e^{ik_p(E)a})}{b - a} = \Re k_p(E).$$

Enfin, on conclut en utilisant l'estimation :

$$\left| N_D(\mathbb{H}_0([a, b], E) - \frac{\rho([a, b], E)(b - a)}{\pi} \right| \leq 1.$$

\square

Lemme 1.10. Soient $l \in \mathbb{N}$ et $N(\mathbb{H}_{0,per}(l), E)$ le nombre des valeurs propres de la restriction de H_0 sur l'intervalle $[0, l]$ avec une condition au bord périodique. Pour tout $E \in \mathbb{R}$, la densité d'états pour l'équation périodique :

$$k_0(E) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{N(\mathbb{H}_{0,per}(l), E)}{l} \quad (1.1.5)$$

existe, est continue et est donnée par la formule :

$$k_0(E) = \frac{1}{\pi} \Re k_p(E). \quad (1.1.6)$$

De plus, en termes de $k(\mathbb{H}_{0,D}(l), E) = \frac{N_D(\mathbb{H}_0(l), E)}{l}$, la vitesse de convergence admet l'estimation :

$$|k_0(E) - k(\mathbb{H}_{0,D}(l), E)| \leq \frac{2k_0(E)}{l}.$$

Démonstration. Si $E \notin \{E_n\}$ alors $p_{\pm}(0, E) \neq 0$ et pour que E soit une valeur propre il faut que $\sin k(E)l = 0$. Donc il existe un entier m , tel que $k(E) = k_m := \frac{\pi m}{l}$; on note E_m la valeur propre associée. La condition $E_m < E$ se traduit alors par $k_m \leq \Re k_p(E) = \pi k_0(E)$ et le nombre de valeurs propres $N_D(\mathbb{H}_0(l), E)$ peut être estimé par :

$$[k_0(E)l] - 1 \leq N_D(\mathbb{H}_0(l), E) \leq [k_0(E)l] + 1$$

On divise par l et on passe à la limite quand l tend vers l'infini pour démontrer (1.1.5). On utilise le Lemme 1.9 pour obtenir l'estimation pour la vitesse de convergence et finir la preuve. \square

On aura besoin également du comportement asymptotique de $k_0(E)$ pour les grandes énergies. On a :

Lemme 1.11 (le Lemme 5.4, notamment la formule (5.11), et la Remarque 5.7, notamment la formule (5.17), de [Fir00]). *Il existe $\delta > 0$ suffisamment petit, $\tilde{E} \in \mathbb{R}_+$ et $m_0 \in \mathbb{N}$ suffisamment grands tels que la densité d'états intégrée k_0 admet une asymptotique quand $|E| \rightarrow \infty$:*

$$\begin{aligned} k_0(E) &= \sqrt{E} + O\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right) & \forall |E| > |\tilde{E}| \quad \text{tel que } \forall m \in \mathbb{N} \quad E \notin B_{\delta}(E_m) \\ k_0(E) &= \sqrt{E} + O\left(\frac{1}{E^{\frac{1}{6}}}\right) & \forall m \in \mathbb{N} \quad m > m_0 \quad \forall E \in B_{\delta}(E_m) \end{aligned}$$

où $B_{\delta}(E_m)$ est une boule complexe centrée en E_m de rayon δ .

1.5 Exposant de Lyapounov

L'exposant de Lyapounov peut être défini en termes de la matrice de transfert $T(x, y, E)$. Cette matrice résout le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dT}{dx}(x, y, E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ V(x) - E & 0 \end{pmatrix} \\ T(y, y, E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

La matrice de transfert est 1-périodique en x et y simultanément $T(x+1, y+1) = T(x, y)$. Donc $T(x+1, y) = T(x, y)T(y+1, y)$. On obtient par un calcul direct le résultat suivant sur l'asymptotique de la matrice de transfert :

Lemme 1.12. *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors les matrices de transfert et de monodromie sont reliées par :*

$$T(n, 0) = (M^t)^n. \quad (1.1.7)$$

Définition 1.13. On appelle exposant de Lyapounov $\gamma_0(E)$ pour l'opérateur de Hill la limite suivante :

$$\gamma_0(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|T(n, 0, E)\|}{n}.$$

Lemme 1.14. *Pour tout $E \in \mathbb{R}$, l'exposant de Lyapounov $\gamma_0(E)$ pour le problème périodique existe, est continu et se calcule par la formule :*

$$\gamma_0(E) = \Im k_p(E). \quad (1.1.8)$$

De plus, pour tout $E \in \mathbb{R} \setminus \{E_n(l)\}_{n \in \mathbb{N}}$, il est égal à la limite suivante :

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{l} \ln |u_0(l, E)| = \gamma_0(E) \quad (1.1.9)$$

où $l \in \mathbb{N}$, $u_0(x, E)$ est une solution de l'équation (EqnPer) qui vérifie la condition de Dirichlet en 0 et $E_n(l)$ est la n -ème valeur propre de Dirichlet de H_0 sur $[0, l]$.

Démonstration. Le premier point du lemme est un corollaire de la relation (1.1.7). On va démontrer le deuxième. On distingue deux cas, selon que E est ou non un bord d'une lacune ouverte.

Pour chaque $E \notin \{E_n(l)\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui n'est pas un bord de lacune ouverte, les solutions de Bloch :

$$\Phi_+(x, E) = e^{ik_p(E)x} p_+(x, E) \quad \text{et} \quad \Phi_-(x, E) = e^{-ik_p(E)x} p_-(x, E)$$

forment une base de solutions. On exprime u_0 dans cette base :

$$u_0(x, E) = a(E)\Phi_+(x, E) + b(E)\Phi_-(x, E) = a(E)e^{ik_p(E)x} p_+(x, E) + b(E)e^{-ik_p(E)x} p_-(x, E).$$

Comme les fonctions p_+ et p_- sont périodiques en x , il suffit d'exclure les énergies telles que $p_-(0, E) = 0$. L'ensemble de ces énergies est $\{E_n(l)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et, en dehors de cet ensemble, on a

$$\frac{\ln |u_0(l, E)|}{l} = \frac{\ln |2ip_+(0, E) \sin(k_p(E)l)|}{l} = \Im k_p(E) + O\left(\frac{1}{l}\right) = \gamma_0(E) + O\left(\frac{1}{l}\right).$$

On passe à la limite en l pour conclure.

Dans le cas où E est un bord de lacune ouverte, on peut faire la même analyse. Dans ce cas, u_0 s'exprime dans la base composée de $\Phi_+(x, E)$ et de la solution $\Phi_a(x, E)$ vérifiant $H_0\Phi_a(x, E) = E\Phi_a(x, E) + \Phi_+(x, E)$. Comme $\Phi_+(x, E)$ et $\Phi_a(x, E)$ croissent au plus linéairement, les deux quantités suivantes sont nulles :

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{l} \ln |u_0(l, E)| = \gamma_0(E) = 0$$

si $E \notin \{E_n(l)\}$. Ceci achève la preuve. □

On utilise le comportement asymptotique quand $|E| \rightarrow +\infty$, donné dans le Lemme 1.11, de la densité d'états intégrée $k_0(E)$ de l'opérateur périodique \mathbb{H}_0 pour obtenir la formule de Thouless. Cette formule relie l'exposant de Lyapounov $\gamma_0(E)$ à la densité d'états intégrée $k_0(E)$ comme suit :

Lemme 1.15. *Pour tout $E \in \mathbb{R}$, $\gamma_0(E)$ et $k_0(E)$ sont reliés par la transformation de Hilbert :*

$$\gamma_0(E) = \int_{\mathbb{R}} \frac{k_0(E')}{E - E' + i0} dE'$$

et par la formule de Thouless :

$$\gamma_0(E) - \Im\sqrt{E} = \int_{\mathbb{R}} \ln |E - E'| d(k_0(E') - \Re\sqrt{E'}).$$

1.6 Énergie complexe et propriétés analytiques de quasimoment de Bloch

Dans cette section, on considère l'équation (EqnPer) pour une énergie $E \in \mathbb{C}$. On va décrire les propriétés des multiplicateurs de Floquet, des solutions de Bloch et du quasimoment de Bloch comme fonctions de la variable complexe E .

Multiplicateurs de Floquet Les multiplicateurs de Floquet $\lambda_{\pm}(E)$ sont analytiques en E dans $\mathbb{C} \setminus \sigma(H_0)$. Aux bords des lacunes ouvertes, λ_+ et λ_- ont des points de branchement de type racine carrée, *i.e.*

$$\lambda_{\pm}(E) - \lambda_{\pm}(E_n) = c_n \sqrt{E - E_n} + O(E - E_n).$$

On peut considérer λ_+ et λ_- comme deux déterminations de la fonction multivaluée $\lambda(E)$ définie par l'équation polynomiale de degré deux :

$$\lambda^2 - D(E)\lambda + 1 = 0.$$

La surface de Riemann Γ associée est construite comme suit :

- On prends deux exemplaires de \mathbb{C} et on les coupe le long des zones spectrales de \mathbb{H}_0 , *i.e.* des intervalles $[E_{2n-1}, E_{2n}]$. On note ces deux feuilles coupées Γ_+ et Γ_- .
- On colle ensemble Γ_+ et Γ_- de façon à ce que le bord $[E_{2n-1}, E_{2n}] + i0$ de Γ_+ soit collé au bord $[E_{2n-1}, E_{2n}] - i0$ de Γ_- et vice versa.

Ainsi $\lambda(E)$ est une fonction holomorphe sur Γ . On appelle λ le multiplicateur de Floquet global.

Solutions de Bloch Les solutions de Bloch Φ_+ et Φ_- ont également des points de branchement de type racine carrée dans les bords des lacunes ouvertes de \mathbb{H}_0 :

$$\{E \in \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ tel que } E_{n-1} \neq E_n \neq E_{n+1}\}.$$

De plus, Φ_{\pm} sont méromorphes en E et dans chaque lacune ou sur son bord une des deux solutions de Bloch a un pôle. Ces pôles sont un défaut de normalisation des solutions Φ_{\pm} . A. Fedotov et F. Klopp ont montré que, localement, au voisinage de chaque point \tilde{E} , on peut renormaliser un couple de solutions de Bloch de façon à les rendre analytiques. Soit

\tilde{E} une énergie et $U \subset \mathbb{C}$ un petit voisinage de \tilde{E} ; on définit deux fonctions méromorphes g_+ et g_- , $g_{\pm} : U \rightarrow \mathbb{C}$:

$$g_{\pm}(E) := \frac{\int_x^{x+1} p_{\pm}(x, E) \partial_E p_{\mp}(x, E) dx}{\int_x^{x+1} p_+(x, E) p_-(x, E) dx}. \quad (1.1.10)$$

A l'aide des $g_{\pm}(E)$, on définit deux formes méromorphes Ω_+ et Ω_- :

$$\Omega_{\pm}(E) = g_{\pm}(E) dE. \quad (1.1.11)$$

Une propriété importante des formes Ω_{\pm} concerne leurs pôles et leurs résidus.

Lemme 1.16 (Lemme 1.1 de [FK04a]). *Les pôles des formes méromorphes Ω_{\pm} sont simples; ils sont situés dans les points de $P \cup Q$, où P est l'ensemble des pôles de la solution de Bloch Φ_{\pm} et où Q est l'ensemble des zéros de $k'(E)$. Les résidus de Ω_{\pm} sont donnés par la formule :*

$$\text{res}_p \Omega_{\pm} = 1 \quad \forall p \in P \setminus Q; \quad \text{res}_q \Omega_{\pm} = -\frac{1}{2} \quad \forall q \in Q \setminus P; \quad \text{res}_r \Omega_{\pm} = \frac{1}{2} \quad \forall r \in P \cap Q.$$

Lemme 1.17. *Pour toute énergie \tilde{E} , il existe un voisinage U tel que les solutions $\Phi_{\pm}^0 : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{C}$ de l'équation (EqnPer) définies par :*

$$\Phi_{\pm}^0(x, E; \tilde{E}) := \sqrt{k'(E)} e^{\int_{\tilde{E}}^E g_{\pm}(e) de} \Phi_{\pm}(x, E) \quad (1.1.12)$$

soient analytiques en E pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition 1.18. On appelle *solutions de Bloch canoniques* les solutions $\Phi_{\pm}^0(x, E; \tilde{E})$ définies dans l'équation (1.1.12) ci-dessus.

Tout comme le multiplicateur de Floquet, les solutions de Bloch sont deux déterminations d'une fonction multivaluée, qu'on appelle *solution de Bloch globale*. La solution de Bloch globale vérifie :

$$\begin{cases} -\Phi''(x, E) + V(x)\Phi(x, E) = E\Phi(x, E) \\ \Phi(x+1, E) = \lambda(E)\Phi(x, E), \end{cases}$$

où $\lambda(E)$ est le multiplicateur de Floquet global. La solution de Bloch globale est une fonction méromorphe de l'énergie sur la surface de Riemann Γ . Localement, au voisinage de chaque point, cette solution peut être rendue analytique par la normalisation (1.1.12).

Le quasimoment de Bloch Le quasimoment de Bloch global $k(E)$ s'exprime en termes du multiplicateur de Floquet global :

$$k(E) = -i \ln \lambda(E).$$

Ainsi $k(E)$ hérite des points de branchement de $\lambda(E)$ et de ceux du logarithme. On peut fixer une détermination analytique de quasimoment de Bloch dans tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C} \setminus \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

1.7 Prolongement analytique des déterminations du quasimoment

Dans tout ce travail, une *courbe* désigne une application lipschitzienne $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Les courbes sont orientées : $\gamma(0)$ est l'*origine* de la courbe γ et $\gamma(1)$ son extrémité. On appelle *domaine* un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} .

Définition 1.19. Un ensemble $A \subset S_Y$ est dit *régulier* s'il ne contient pas de bords de zones spectrales de \mathbb{H}_0 , i.e $A \cap \{E_n\}_{n \in \mathbb{R}} = \emptyset$. On a ainsi la notion de *point régulier*, de *courbe régulière* et de *domaine régulier*.

Soit D un domaine régulier. On peut fixer une détermination k_0 du moment complexe analytique dans D , $k_0 \in \mathcal{H}(D)$. Toute autre détermination k_1 du moment complexe qui est analytique dans D s'exprime en termes de k_0 de la façon suivante. Il existe un unique signe $\sigma \in \{+, -\}$, appelé *la signature* de k_1 par rapport à k_0 , et un unique entier $m \in \mathbb{N}$, appelé *l'indice* de k_1 par rapport à k_0 , tels que :

$$k_1(E) = \sigma k_0(E) + 2\pi m. \quad (1.1.13)$$

Soient E_1, E_2 deux points réguliers et U_1 un voisinage régulier de E_1 . Fixons une détermination du quasimoment $k_1 \in \mathcal{H}(U_1)$. Soit α une courbe régulière qui va de E_1 à E_2 et U_α un voisinage régulier de α . On note $k_1|_\alpha$ le prolongement analytique de k_1 le long de α :

$$k_1|_\alpha \in \mathcal{H}(U_\alpha) \text{ et } k_1|_\alpha(E) = k_1(E) \text{ pour tout } E \in U_1 \cap U_\alpha.$$

Soient $E_1 \in \mathbb{C}$ et $E_2 \in \mathbb{C}$ deux points réguliers. Sur l'ensemble des courbes régulières de classe C^1 qui connectent les points E_1 et E_2 on introduit la relation d'équivalence suivante.

Définition 1.20 (Relation d'équivalence). On dit que la courbe α est *équivalente* à la courbe β et on note

$$\alpha \sim \beta \quad (1.1.14)$$

si α est homotope à β parmi les courbes C^1 qui connectent E_1 avec E_2 et qui sont régulières. On note $[\alpha]$ la classe d'équivalence de α :

$$[\alpha] := \{\beta \mid \beta \sim \alpha\}.$$

On note $\mathbb{C}_0 := \mathbb{C} \setminus [E_1, \infty)$. Les observations suivantes concernant les prolongements analytiques de k_p à travers $[E_1, +\infty)$ seront utiles par la suite :

Lemme 1.21. Prolongement à travers une zone spectrale : Soit v_1 est une courbe régulière fermée qui connecte un point de \mathbb{C}_0 avec lui-même et traverse une fois l'intervalle $(E_1, +\infty)$ dans un point intérieur d'une zone spectrale de \mathbb{H}_0 . Alors on a

$$k_p|_{v_1}(E) = -k_p(E).$$

Donc, l'indice de $k_p|_{v_1}$ par rapport à k_p est $m = 0$ et la signature est $\sigma = -1$.

Prolongement à travers la n -ème lacune spectrale : Soit v_2 une courbe régulière qui connecte un point de \mathbb{C}_0 avec lui-même et traverse une fois l'intervalle $(E_1, +\infty)$ dans un point de n -ème lacune spectrale de \mathbb{H}_0 . Alors on a

$$k_p|_{v_2}(E) = k_p - 2\pi n.$$

Donc $\sigma = 1$ et $m = \pm n$ pour le prolongement de \mathbb{C}_\pm dans \mathbb{C}_\mp .

Démonstration. Pour $E \in [E_{2n-1}, E_{2n}] \pm i0$, on a $k_p(E) \in \pm[\pi(n-1), \pi n]$. Le prolongement analytique de k_p à travers $[E_{2n-1}, E_{2n}]$, noté $k_p|_{v_1}$, est donné par la symétrie : $k_p|_{v_1}(E) = \overline{k_p(\overline{E})}$. Mais $k_p(\overline{E}) = -\Re k_p(E) + i\Im k_p(E)$. D'où $k_p|_{v_1}(E) = -k_p(E)$. Ce qui démontre le premier point. Le prolongement analytique à travers une lacune, noté $k_p|_{v_2}$, est donné par la symétrie :

$$\forall E \in \mathbb{C}_\pm, k_p|_{v_2}(E) = 2\Re k_p(\Re E \mp i0) - k_p(\overline{E}).$$

Mais $k_p(\overline{E}) = -\Re k_p(E) + i\Im k_p(E)$, d'où $k_p|_{v_2}(E) = 2\Re k_p(\Re E \mp i0) + k_p(E)$. On a

$$\Re k_p(\Re E \mp i0) = \mp \pi n,$$

ce qui achève la démonstration du lemme. \square

Dans un voisinage $U \subset \mathbb{C}_0$, fixons une détermination du quasimoment $k(E) = \sigma k_p(E) + 2\pi m$. Alors :

- En traversant une préimage d'une zone spectrale, on a $k|_{v_1}(E) = -\sigma k_p(E) + 2\pi m$.
- En traversant une préimage de la n -ème lacune, on a $k|_{v_2}(E) = \sigma(k_p(E) - 2\pi n) + 2\pi m$.

L'exposant de Lyapounov et la densité d'états intégrée pour le problème périodique se prolongent en des fonctions harmoniques dans \mathbb{C}_+ et sont reliés à la détermination principale du quasimoment de Bloch par la relation :

$$k_p(E) = \pi k(E) + i\gamma(E). \tag{1.1.15}$$

$k(E)$ a les mêmes points de branchement que $\Phi(x, E)$, *i.e.* $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Sur sa surface de Riemann, on peut distinguer deux types de courbes fondamentales :

- les courbes, disons a_n qui font un tour autour d'une zone spectrale de \mathbb{H}_0 ;
- les courbes, disons b_n qui font un tour autour d'une lacune spectrale de \mathbb{H}_0 .

Soit D un domaine simplement connexe de \mathbb{C} qui ne contient pas de points de branchement du moment complexe. Fixons dans D une détermination analytique de k , disons $k_0(E)$. On trouve toutes les autres déterminations analytiques dans D par la formule :

$$k_{\pm, l}(E) = \pm k_0(E) + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{1.1.16}$$

En particulier, sur $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus [E_1, \infty)$ on peut fixer de façon unique une détermination analytique du quasimoment.

1.8 Calcul des indices et des signatures des courbes

1.8.1 Indice et signature d'une courbe : le cas des lacets

Soit $E_0 \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [E_{2n}, E_{2n+1}]$, *i.e.* telle que E_0 n'appartient à aucune fermeture de lacune spectrale. Considérons une courbe fermée orientée lipschitzienne régulière γ sur le plan de E qui a son origine et son extrémité en E_0 , $\gamma(0) = \gamma(1) = E_0$. Soit U_0 un voisinage régulier de E_0 . Fixons une détermination k du quasimoment global k analytique dans U_0 , $k \in \mathcal{H}(U_0)$. On appelle *lacet* le triplet $\{E_0, \gamma, k\}$.

Considérons le prolongement analytique $k|_\gamma$ de k le long de γ . Au voisinage de E_0 , on peut comparer la détermination initiale k avec la détermination $k|_\gamma$ obtenue par le prolongement analytique le long de γ . D'après (1.1.13), on peut écrire au voisinage de E_0 :

$$k|_\gamma(E) = \sigma_\gamma k(E) + 2\pi m_\gamma \tag{1.1.17}$$

avec $\sigma_\gamma \in \{+, -\}$ et $m_\gamma \in \mathbb{Z}$. On appelle σ_γ la *signature* du lacet et m_γ l'*indice* du lacet $\{E_0, \gamma, k\}$. Ces notions deviennent claires quand on considère la courbe γ comme une courbe sur la surface de Riemann Γ du multiplicateur de Floquet (p. 30).

Le lemme suivant permet de calculer facilement l'indice du lacet et sa signature :

Lemme 1.22. [FK04b] *Soit γ un lacet. Supposons que γ croise successivement les lacunes spectrales en les points z_1, \dots, z_N . Pour $n = 1, \dots, N$, posons $r_n = \Re k_\gamma(E_n)$. Alors l'indice et la signature du lacet γ se calculent par les formules suivantes :*

$$\sigma_\gamma = (-1)^N, \quad m_\gamma = \frac{1}{\pi}(r_N - r_{N-1} + r_{N-2} \dots + (-1)^{N-1}r_1). \quad (1.1.18)$$

La formule précédente permet de calculer l'indice et la signature pour un lacet simple. Mais dans le calcul de l'asymptotique de la matrice de monodromie on rencontre des courbes composées. Il est utile d'établir les règles de calcul pour une composition de courbes .

1.8.2 Indices et signatures des courbes : la matrice $A(\gamma, k)$

Le but ici est de ramener le calcul des indices et des signatures de courbes à des opérations matricielles simples. Soit a (resp. b) le début (resp. la fin) d'une courbe régulière γ .

Supposons que $a = b$. Fixons une branche k_0 du moment complexe au voisinage de début de γ . La signature $\sigma(\gamma, k_0)$, avec $\sigma(\gamma, k_0) \in \{-1, 1\}$, et l'indice $m(\gamma, k_0)$, avec $m(\gamma, k_0) \in \mathbb{N}$, de γ par rapport à la branche k_0 sont définis par la relation :

$$k_0|_\gamma(b) = \sigma(\gamma, k_0)k_0(a) + 2\pi m(\gamma, k_0). \quad (1.1.19)$$

Mon but ici est d'établir des règles de calcul simples pour les indices des courbes composées ou des indices d'une courbe par rapport à différentes déterminations du moment complexe. Soient $\sigma(\gamma, k_0)$ la signature et $m(\gamma, k_0)$ l'indice de γ pour k_0 . On leur associe une matrice :

$$A(\gamma, k_0) = \begin{pmatrix} \sigma(\gamma, k_0) & 0 \\ m(\gamma, k_0) & 1 \end{pmatrix} \quad (1.1.20)$$

Ainsi on trouve la signature et l'indice de γ pour k_0 à partir de $A(\gamma, k_0)$:

$$\sigma(\gamma, k_0) = A_{11}(\gamma, k_0) \quad m(\gamma, k_0) = A_{21}(\gamma, k_0) \quad (1.1.21)$$

Nous n'allons plus parler des indices et des signatures, mais des matrices $A(\gamma, k)$. On vérifie que les matrices

$$\mathcal{A} := \left\{ A = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma \in \{+1, -1\} \text{ et } m \in \mathbb{Z} \right\}$$

forment un groupe (non commutatif) pour le produit matriciel.

Soient α et β deux courbes telles que $\alpha(1) = \beta(0)$. On note $\beta \circ \alpha$ la concaténation de la courbe α suivie de la courbe β (\circ est donc la loi de composition du groupoïde de Poincaré).

1.8.3 Applications : courbe composée $\gamma = \gamma_N \circ \dots \circ \gamma_1$ et changement de détermination

Lemme 1.23. $A(\cdot, k_0)$ réalise un morphisme du groupoïde de Poincaré vers le groupe \mathcal{A} . Autrement dit, soit $\gamma := \gamma_N \circ \dots \circ \gamma_1$, on a

$$A(\gamma, k_0) = A(\gamma_N, k_0)A(\gamma_{N-1}, k_0) \dots A(\gamma_1, k_0). \quad (1.1.22)$$

Démonstration. Il suffit de démontrer ce lemme pour une composition de deux courbes, disons $\gamma_2 \circ \gamma_1$.

$$\begin{aligned} k_0|_{\gamma_2 \circ \gamma_1}(z) &= (\sigma(k_0, \gamma_1)k_0(z) + 2\pi m(k_0, \gamma_1))|_{\gamma_2} = \\ &= \sigma(k_0, \gamma_1)k_0|_{\gamma_2}(z) + 2\pi m(k_0, \gamma_1) = \\ &= \sigma(k_0, \gamma_1)(\sigma(k_0, \gamma_2)k_0(z) + 2\pi m(k_0, \gamma_2)) + 2\pi m(k_0, \gamma_1) = \\ &= \sigma(k_0, \gamma_1)\sigma(k_0, \gamma_2)k_0(z) + 2\pi(m(k_0, \gamma_1) + m(k_0, \gamma_2)\sigma(k_0, \gamma_1)). \end{aligned}$$

D'où $\sigma(k_0, \gamma_2 \circ \gamma_1) = \sigma(k_0, \gamma_1)\sigma(k_0, \gamma_2)$ et $m(k_0, \gamma_2 \circ \gamma_1) = m(k_0, \gamma_1) + m(k_0, \gamma_2)\sigma(k_0, \gamma_1)$. Ce qui démontre $A(\gamma_2 \circ \gamma_1, k_0) = A(\gamma_2, k_0)A(\gamma_1, k_0)$. \square

Pour k_0 et k_1 tels que $k_1 = Gk_0 + 2\pi M$ avec $G \in \{+1, -1\}$ et $M \in \mathbb{Z}$ on note

$$S(k_1, k_0) := \begin{pmatrix} G & 0 \\ M & 1 \end{pmatrix} \text{ et donc } S^{-1}(k_0, k_1) = \begin{pmatrix} G & 0 \\ -GM & 1 \end{pmatrix}.$$

Lemme 1.24. Soit k_1 une détermination du quasimoment reliée à k_0 au voisinage de a (l'origine de γ) par :

$$k_1 = Gk_0 + 2\pi M, \quad G \in \{-1, 1\}, \quad M \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$A(\gamma, k_1) = S^{-1}(k_0, k_1)A(\gamma, k_0)S(k_0, k_1). \quad (1.1.23)$$

Ainsi si $\sigma(k_0, \gamma) = 1$ alors $m(k_1, \gamma) = Gm(k_0, \gamma)$ et ne dépend pas de M .

Démonstration. On exprime :

$$\begin{aligned} k_1|_{\gamma}(z) &= (Gk_0 + 2\pi M)|_{\gamma}(z) = G(\sigma(k_0, \gamma)k_0(z) + 2\pi m(k_0, \gamma)) + 2\pi M = \\ &= G\sigma(k_0, \gamma)(Gk_1(z) - 2\pi GM) + 2\pi(Gm(k_0, \gamma) + M) = \\ &= GG\sigma(k_0, \gamma)k_1(z) + 2\pi(-GG\sigma(k_0, \gamma)M + Gm(k_0, \gamma) + M) \end{aligned}$$

D'où $\sigma(k_1, \gamma) = GG\sigma(k_0, \gamma) = \sigma(k_0, \gamma)$ et $m(k_1, \gamma) = -GG\sigma(k_0, \gamma)M + Gm(k_0, \gamma) + M = -\sigma(k_0, \gamma)M + Gm(k_0, \gamma) + M$. Ce qui démontre

$$A(\gamma, k_1) = S^{-1}(k_0, k_1)A(\gamma, k_0)S(k_0, k_1).$$

\square

Le lemme suivant réunit les résultats de lemmes précédents :

Lemme 1.25. Soient γ_1, γ_2 et γ_3 trois courbes régulières telles que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = \gamma_2(1) = \gamma_3(0)$ (donc $\gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1$ et $\gamma_3 \circ \gamma_1$ sont correctement définies). Notons $\gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(1) = b$ et $\gamma_3(1) = c$. Supposons que $a = c$. Soit k_0 (resp. k_1) une détermination du quasimoment analytique dans un voisinage de a (resp. de b). Alors on a :

$$A(k_0, \gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1) = A(k_0, \gamma_3 \circ \gamma_1)S^{-1}(k_0|_{\gamma_1}, k_1)A(k_1, \gamma_2)S(k_0|_{\gamma_1}, k_1). \quad (1.1.24)$$

Démonstration. On calcule :

$$\begin{aligned} k_0|_{\gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1} &= (Gk_1 + 2\pi M)|_{\gamma_3 \circ \gamma_2} = G(\sigma(k_1, \gamma_2)k_1 + 2\pi m(k_1, \gamma_2))|_{\gamma_3} + 2\pi M \\ &= G\sigma(k_1, \gamma_2)(Gk_0|_{\gamma_3 \circ \gamma_1} - 2\pi GM) + 2\pi(Gm(k_1, \gamma_2) + M) \\ &= \sigma(k_1, \gamma_2)\sigma(k_0, \gamma_3 \circ \gamma_1)k_0 + 2\pi(\sigma(k_1, \gamma_2)m(k_0, \gamma_3 \circ \gamma_1) - M\sigma(k_1, \gamma_2) + Gm(k_1, \gamma_2) + M). \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{cases} \sigma(k_0, \gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1) = \sigma(k_1, \gamma_2)\sigma(k_0, \gamma_3 \circ \gamma_1) \\ m(k_0, \gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1) = \sigma(k_1, \gamma_2)m(k_0, \gamma_3 \circ \gamma_1) - M\sigma(k_1, \gamma_2) + Gm(k_1, \gamma_2) + M \end{cases}$$

Ceci est équivalent à

$$A(k_0, \gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1) = A(k_0, \gamma_3 \circ \gamma_1)S^{-1}(k_0|_{\gamma_1}, k_1)A(k_1, \gamma_2)S(k_0|_{\gamma_1}, k_1).$$

□

1.9 Énergie complexe et l'opérateur périodique

Pour formuler le théorème sur l'asymptotique de la matrice de monodromie, j'ai besoin d'introduire l'énergie complexe et les objets associés.

1.9.1 Énergie complexe

Dans le régime adiabatique, pour les petits ε , on considère l'équation (AdiabQP) comme une perturbation de l'équation Schrödinger périodique :

$$-\Phi''(x, E, z) + V(x)\Phi(x, E, z) = (E - W(z))\Phi(x, E, z) \quad (1.1.25)$$

Quand $E \in \mathbb{R}$ est fixé, $\mathcal{E}(z) = E - W(z)$ est une fonction de la variable z .

Définition 1.26. Pour chaque $E \in \mathbb{R}$ fixé, l'énergie complexe est la fonction $\mathcal{E} : S_Y \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$\mathcal{E}(z) := E - W(z). \quad (1.1.26)$$

Remarque 1.27. $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ car $E \in \mathbb{R}$ et $W(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

L'énergie complexe hérite de l'analyticité de la fonction $W : \mathcal{E}(z) \in \mathcal{H}(S_Y)$. Les fonctions de l'énergie E se transforment en fonctions de z quand on prend la composition avec $\mathcal{E}(z)$.

1.9.2 Équation périodique et ensembles \mathcal{B} et \mathcal{C}

Considérons l'ensemble \mathcal{C} des points critiques réels de la fonction W :

$$\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{R} \mid W'(z) = 0\} \quad (1.1.27)$$

et l'ensemble \mathcal{B} des préimages réelles des bords de zones spectrales de l'opérateur \mathbb{H}_0 :

$$\mathcal{B} := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \mathcal{E}(z) = E_n\}, \quad (1.1.28)$$

où $\mathcal{E}(z)$ est défini dans (1.1.26). Les ensembles \mathcal{B} et \mathcal{C} ont les propriétés suivantes :

- Les ensembles \mathcal{B} et \mathcal{C} sont discrets et 2π -périodiques.
- L'ensemble \mathcal{C} est non vide, contient au moins 2 points par période $[a, a + 2\pi] \forall a \in \mathbb{R}$.
- L'ensemble \mathcal{B} dépend continûment de E .

1.9.3 Ensemble des énergies Σ

Fixons $\delta > 0$ petit. Nous supposons que l'énergie $E \in \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses :

(HED) $\text{dist}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) > \delta$

(HEB) \mathcal{B} est non vide et dans S_Y toutes les préimages des bords des zones spectrales de \mathbb{H}_0 sont réelles

Nous notons $\Sigma = \Sigma_\delta$ l'ensemble des énergies E qui vérifient les hypothèses **(HED)** et **(HEB)**.

1.9.4 Deux types d'intervalles : $\mathcal{Z}_\mathbb{R}$ et $\mathcal{G}_\mathbb{R}$

Fixons $\delta > 0$ et $E \in \Sigma_\delta$. Considérons les collections d'intervalles de \mathbb{R} suivantes :

- Soit $\mathcal{Z}_\mathbb{R}$ l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{E}^{-1}(\sigma(H_0)) \cap \mathbb{R}$. C'est l'ensemble des intervalles qui sont des préimages de zones spectrales de l'opérateur périodique \mathbb{H}_0 .
- On définit également l'ensemble $\mathcal{Z}_\mathbb{C}$ de composantes connexes de $\mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0)) \cap S_Y$.
- Soit $\mathcal{G}_\mathbb{R}$ l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{E}^{-1}(\mathbb{R} \setminus \sigma(\mathbb{H}_0)) \cap \mathbb{R}$. C'est l'ensemble des préimages des lacunes dans le spectre de l'opérateur périodique \mathbb{H}_0 .
- On définit également l'ensemble $\mathcal{G}_\mathbb{C}$ de composantes connexes de $\mathcal{E}^{-1}(\mathbb{R} \setminus \sigma(\mathbb{H}_0)) \cap S_Y$.

Les éléments de $\mathcal{Z}_\mathbb{R}$ et $\mathcal{G}_\mathbb{R}$ sont des intervalles réels.

On peut distinguer trois types différents de composantes connexes de l'ensemble des énergies Σ . Cette classification correspond aux différents cas de distribution des points critiques de W par rapport aux intervalles de $\mathcal{Z}_\mathbb{R}$:

- $\mathcal{G}_\mathbb{R} = \emptyset$,
- $\mathcal{G}_\mathbb{R} \neq \emptyset$, $\mathcal{Z}_\mathbb{R} \neq \emptyset$, mais $\forall J \in \mathcal{Z}_\mathbb{R}$ on a $J \cap \mathcal{C} = \emptyset$,
- $\mathcal{G}_\mathbb{R} \neq \emptyset$, $\mathcal{Z}_\mathbb{R} \neq \emptyset$ et il existe $J \in \mathcal{Z}_\mathbb{R}$ tel que $J \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

La géométrie du problème est différente dans ces trois cas et donc les matrices de monodromie ont des asymptotiques différentes.

1.9.5 Moment complexe $\kappa(z)$ et ses déterminations

On fixe E . On a déjà introduit l'énergie complexe $\mathcal{E}(z) = E - W(z)$ dans (1.1.26). Afin d'utiliser les constructions de Bloch-Floquet pour l'équation périodique avec l'énergie complexe :

$$-\Phi''(x, \mathcal{E}(z)) + V(x)\Phi(x, \mathcal{E}(z)) = \mathcal{E}(z)\Phi(x, \mathcal{E}(z))$$

j'exprime les objets de cette théorie en termes de la nouvelle variable z .

Définition 1.28. Soit $E \in \mathbb{R}$ fixé. On appelle la fonction multivaluée $\kappa(z) := k(\mathcal{E}(z))$ définie par composition $\kappa = k \circ \mathcal{E}$ le *moment complexe*.

Étant la composée des deux applications $k(E)$ et $E - W(z)$, le moment complexe hérite des propriétés du quasimoment de Bloch. En particulier, le moment complexe est une fonction multivaluée avec des points de branchement de type racine carrée. En dehors de ces points de branchement, dans chaque domaine simplement connexe on peut en fixer une détermination analytique.

On fixe E . On définit la *détermination principale* du moment complexe par $\kappa_p(z) := k_p(\mathcal{E}(z))$, i.e. $\kappa_p = k_p \circ \mathcal{E}$. On définit par composition la forme différentielle $\Omega = \Omega \circ \mathcal{E}$ et le facteur normalisant $q(z, z_0)$ par :

$$\Omega(z) := \Omega(\mathcal{E}(z)) \quad \text{et} \quad q(z, z_0) := q(\mathcal{E}(z), \mathcal{E}(z_0)) \quad (1.1.29)$$

où $\Omega(E)$ est définie par (1.1.11) et (1.1.10), et $q(E, E_0) = \frac{1}{\sqrt{k'(E)}}$. A l'aide de l'énergie complexe $\mathcal{E}(z)$, on obtient la notion d'ensemble *régulier* dans le plan de z :

Définition 1.29. On appelle *régulier* un ensemble A dans S_Y si $\mathcal{E}(A)$ est un ensemble régulier au sens de la Définition 1.19.

On introduit une relation d'équivalence pour les courbes régulières de classe C^1 joignant deux points z_1 et z_2 .

Définition 1.30. On dit que les courbes α et β sont *équivalentes* et l'on note :

$$\alpha \sim \beta$$

si ces courbes ont la même origine, la même extrémité et $\mathcal{E}(\alpha) \sim \mathcal{E}(\beta)$ au sens de la Définition 1.20.

Chapitre II

Densité d'états intégrée et formule de Thouless pour des perturbations à oscillations lentes de l'opérateur de Schrödinger périodique

Ce chapitre ouvre l'étude de l'équation de Schrödinger à oscillations asymptotiquement lentes :

$$-\Psi''(x, E) + [V(x) + W(x^\alpha)]\Psi(x, E) = E\Psi(x, E). \quad (\text{SI Osc})$$

On travaille sous les hypothèses **(HV)** et **(HW)** de régularité et de périodicité sur les potentiels V et W . On suppose que α vérifie **(H α)**, *i.e.* $\alpha \in (0, 1)$.

Dans ce chapitre on formule et démontre quelques propriétés de la densité d'états intégrée pour l'équation (SI Osc). On démontre les Théorèmes 10 et 16 de l'introduction. A la fin, on formule les propriétés dimensionnelles de l'ensemble résonnant (où l'existence de l'exposant de Lyapounov n'est pas démontrée) et les corollaires spectraux de ces propriétés.

1 Propriétés de la densité d'états intégrée

Considérons l'opérateur \mathbb{H}_θ défini par $\mathbb{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(x^\alpha)$ dans $L_2(\mathbb{R}_+)$ avec la condition au bord θ en 0 :

$$D(\mathbb{H}_\theta) = \{ f \in H^2(\mathbb{R}_+) \mid f(0) \cos \theta + f'(0) \sin \theta = 0 \}$$

Pour chaque $\theta \in [0, 2\pi)$ l'opérateur \mathbb{H}_θ est auto-adjoint car il est dans le cas du point limite à l'infini (*c.f.* Section 2.2 du Chapitre 2 de [LS91]) et régulier en zéro. Par la théorie de subordination de D. Gilbert et D. Pearson (*c.f.* [GP87]), le spectre singulier de \mathbb{H}_θ est simple (*c.f.* la Définition 2 d'une solution subordonnée de la Section 3 de [GP87] et le Théorème 3 de la Section 6 de [GP87]). Dans l'Introduction on trouve la description du spectre de \mathbb{H}_θ obtenue par G. Stolz (*c.f.* les théorèmes 2, 3, 4).

Dans la Définition 9 p. 8, on a défini la densité d'états intégrée $k(E)$ pour l'opérateur \mathbb{H}_θ . On commence par l'étude de ses propriétés.

De la définition de la fonction $k(E)$, il découle qu'elle est continue à gauche et croissante. La première propriété de $k(E)$ concerne le spectre de \mathbb{H}_θ . On a :

Lemme 1.1. *Pour tout θ dans $[0, 2\pi)$, soit*

$$\Sigma := \{E \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 \quad k(E + \varepsilon) - k(E - \varepsilon) > 0\}.$$

On a $\Sigma \subset \sigma_{ess}(\mathbb{H}_\theta)$.

Démonstration. Fixons une énergie $E \in \Sigma$. Pour démontrer que $E \in \sigma_{ess}(\mathbb{H}_\theta)$ on va construire une suite singulière de Weyl à l'aide de fonctions propres des restrictions de $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(x^\alpha)$ sur des intervalles finis. On note $\mathbb{H}_\theta(n)$ l'opérateur H sur $[0, n]$ avec la condition au bord $f(0) \cos \theta + f'(0) \sin \theta$ en 0 et la condition de Dirichlet en n . On a :

1. Les résolvantes des opérateurs $\mathbb{H}_\theta(n)$ convergent fortement vers les résolvantes de \mathbb{H}_θ quand n tend vers l'infini :

$$\mathbb{H}_\theta(n) \xrightarrow{sr.s} \mathbb{H}_\theta.$$

2. Soit ε_n une suite, $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Pour chaque $E \in \Sigma$ et pour chaque ε_n , il existe $\delta(\varepsilon_n) > 0$ telle que $k(E + \varepsilon_n) - k(E - \varepsilon_n) > \delta(\varepsilon_n)$.

3. Pour chaque $\tilde{\delta}_n$ il existe $N(\tilde{\delta}_n)$ telle que $\forall n > N(\tilde{\delta}_n)$ on a $|\frac{1}{n}N(E, H_\theta(n)) - k(E)| < \tilde{\delta}_n$.

On réunit ces observations pour conclure qu'on peut choisir une suite E_{m_k} de valeurs propres des $\mathbb{H}_\theta(n_k)$ telles que $E_{m_k} \rightarrow E$ quand $k \rightarrow \infty$. Par conséquent, on construit une suite singulière à partir des fonctions propres normalisées $\Phi_{m_k}(x)$ des $\mathbb{H}_\theta(n_k)$ associées à des E_k , multipliées par une troncature appropriée Ξ_k . On a :

$$\mathbb{H}_\theta(n_k)\Phi_{m_k}(x) = E_{m_k}\Phi_{m_k}(x) \quad \|\Phi_{m_k}\| = 1$$

Il est facile à voir que $\|\Phi_{m_k}\Xi_k\| \rightarrow 1$. On choisit les troncatures $\Xi_k(x)$ pour que $\Phi_{m_k}(x)\Xi_k(x)$ soit dans $D(\mathbb{H}_\theta)$ et que

$$\|(\mathbb{H}_\theta - E)\Phi_{m_k}(x)\Xi_k(x)\| \leq |E - E_{m_k}| + \|2\Xi_k'(x)\Phi_{m_k}'(x) + \Xi_k''(x)\Phi_{m_k}(x)\| \rightarrow 0$$

quand $k \rightarrow \infty$. On a une grande liberté de choix pour E_{m_k} et Φ_{m_k} (leur nombre est proportionnel à n_k), donc on peut choisir la suite $\Phi_{m_k}\Xi_k$ orthogonale (en passant à une sous-suite si nécessaire). Ainsi le critère de Weyl est satisfait et $E \in \sigma_{ess}(\mathbb{H}_\theta)$. \square

Remarque 1.2. En fait, dans le cas de l'opérateur \mathbb{H}_θ , le spectre essentiel coïncide avec le support de la densité d'états intégrée. Pour démontrer l'égalité $\sigma_{ess}(\mathbb{H}_\theta) = \Sigma$ on détermine le support de la densité d'états intégrée à partir de la formule (5). Puis, on utilise le résultat de G. Stolz (*c.f.* [Sto97]) qui décrit le placement du spectre essentiel de l'opérateur \mathbb{H}_θ :

$$\sigma_{ess}(\mathbb{H}_\theta) = \sigma(\mathbb{H}_0) + W(\mathbb{R})$$

pour démontrer que ces deux ensembles coïncident.

Soit $\Psi(x, E)$ une solution réelle de l'équation (SIosc) qui vérifie la condition au bord $\Psi(0, E) \cos \theta + \Psi'(0, E) \sin \theta = 0$. On peut définir le nombre de rotations pour \mathbb{H}_θ :

Définition 1.3. On appelle *nombre de rotations* de \mathbb{H}_θ la limite suivante quand elle existe :

$$\rho(E) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arg(\Psi(x, E) + i\Psi'(x, E))}{x}. \quad (2.1.1)$$

Le nombre de rotations $\rho(E)$ coïncide modulo multiplication par une constante avec la densité d'états intégrée $k(E)$:

Lemme 1.4. *Quand l'un des deux existe, la densité d'états intégrée et le nombre de rotations sont liés par la relation :*

$$k(E) = \frac{1}{\pi} \rho(E). \quad (2.1.2)$$

Lemme 1.5. *Quand elle existe, la densité d'états intégrée $k(E)$ ne dépend pas de θ .*

Démonstration. Il est évident que le nombre de rotations $\rho(E)$ ne dépend pas de θ . On utilise le rapport entre le nombre de rotations $\rho(E)$ et la densité d'états intégrée $k(E, \theta)$ pour conclure.

Autre démonstration. Par un argument de B. Simon (voir section 1.6 de [Sim95]) on démontre que le changement de condition au bord est une perturbation de rang 1. Soit une fonction $f \in H^1([0, l])$ qui vérifie la condition de Dirichlet en l . Soit $\mathbb{H}_D(l)$ (resp. $\mathbb{H}_\theta(l)$) l'opérateur $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(x^\alpha)$ dans $L_2([0, l])$ avec les conditions au bord de Dirichlet (resp. condition $f(0) \cos \theta + f'(0) \sin \theta = 0$ et $f(l) = 0$). Considérons la différence des formes quadratiques associées à \mathbb{H}_D et \mathbb{H}_θ sur $[0, l]$:

$$\begin{aligned} (f, \mathbb{H}_\theta(l)f) - (f, \mathbb{H}_D(l)f) &= \int_0^l (|f'(x)|^2 + (V(x) + W(x^\alpha)|f(x)|^2)dx - |f(0)|^2 \cot \theta - \\ &\quad - \int_0^l (|f'(x)|^2 + (V(x) + W(x^\alpha)|f(x)|^2)dx = \\ &= -\cot \theta \int_0^l \delta(x)|f(x)|^2 dx = -\cot \theta (f, \delta f) \end{aligned}$$

où δ est l'opérateur borné sur les fonctions de H^1 défini par $(f, \delta f) = |f(0)|^2$. Ainsi

$$\mathbb{H}_\theta(l) = \mathbb{H}_D(l) + \lambda \delta(x) \text{ avec } \lambda = -\cot(\theta). \quad (2.1.3)$$

Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints inférieurement bornés à spectre discret. On définit la fonction de décalage spectral de Krein ξ pour ces opérateurs par

$$\xi(A, B, E) = \#\{(\sigma(A) \cap ((-\infty, E]) \setminus (\sigma(B) \cap ((-\infty, E]))\} = \text{tr}(P_{(-\infty, E)}(A) - P_{(-\infty, E)}(B))$$

ξ n'est rien d'autre que la différence entre les fonctions de comptage de valeurs propres de A et de B . Par la théorie des perturbations de rang 1 (voir l'argument de B. Simon et F. Gesztesy dans 1.4 de [Sim95]), grâce à la représentation (2.1.3), la fonction de décalage spectral pour $\mathbb{H}_D(L)$ et $\mathbb{H}_\theta(L)$ vérifie l'estimation

$$|\xi(H_\theta(L), H_D(L), E)| \leq 1$$

Ceci implique $|k(\mathbb{H}_\theta(l), E) - k(\mathbb{H}_D(l), E)| = \frac{1}{l}\xi(\mathbb{H}_\theta(l), \mathbb{H}_D(l), E) \leq \frac{1}{l}$ pour chaque $E \in \mathbb{R} \setminus (\sigma(\mathbb{H}_\theta(l)) \cup \sigma(\mathbb{H}_D(l)))$ puisque les valeurs propres de ces opérateurs sont discrètes et non dégénérées. Passant à la limite l tend vers $+\infty$:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (k(\mathbb{H}_\theta(l), E) - k(\mathbb{H}_D(l), E)) = 0,$$

on obtient l'indépendance de $k(E)$ de condition au bord θ . \square

Par conséquent, la notation $k(E)$ est correcte pour la densité d'états intégrée.

On démontre que la densité d'états intégrée existe pour tout $E \in \mathbb{R}$ à l'aide de la méthode de *l'encadrement par Dirichlet et Neumann*. Il s'agit de la méthode qui utilise les inégalités pour les valeurs propres de Dirichlet et celles de Neumann.

1.1 Valeurs propres de restrictions

On démontre deux lemmes sur les valeurs propres des restrictions de l'opérateur $H = -\frac{d^2}{dx^2} + [V(x) + W(x^\alpha)]$ à un intervalle fini. On commence par l'estimation de la distance entre les valeurs propres de Dirichlet de H sur $[a, b]$ et celles de $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ sur $[a, b]$.

Lemme 1.6. *Soient a et b deux entiers. Soient $E_k^0([a, b])$ les valeurs propres de Dirichlet de H_0 sur $[a, b]$ et $E_k([a, b])$ les valeurs propres de Dirichlet de H sur $[a, b]$ numérotées par ordre croissant. Alors on a :*

$$|E_k([a, b]) - E_k^0([a, b])| \leq \|W\|_\infty \quad (2.1.4)$$

Démonstration. Pour tout $\Psi \in Q(\mathbb{H}_0)$ ($Q(\mathbb{H}_0) = Q(\mathbb{H})$ est le domaine de définition de la forme quadratique associée à l'opérateur \mathbb{H}_0), on a :

$$(\mathbb{H}_0\Psi, \Psi) - \|W\|_\infty(\Psi, \Psi) \leq (\mathbb{H}\Psi, \Psi) \leq (\mathbb{H}_0\Psi, \Psi) + \|W\|_\infty(\Psi, \Psi).$$

On applique le principe du mini-max pour obtenir l'estimation désirée (*c.f.* le Théorème XIII.2 de ([RS78])). \square

Le deuxième lemme contient une estimation de la différence entre le nombre $N_D([a, b]; E)$ de valeurs propres de $\mathbb{H}_D([a, b])$ (avec la condition au bord de Dirichlet) et le nombre $N_{\theta_1, \theta_2}([a, b], E)$ de valeurs propres de $\mathbb{H}_{\theta_1, \theta_2}([a, b])$ (avec les conditions $f(a) \cos \theta_1 + f'(a) \sin \theta_1 = 0$ et $f(b) \cos \theta_2 + f'(b) \sin \theta_2 = 0$). Ce lemme contient aussi les mêmes estimations pour \mathbb{H}_0 .

Lemme 1.7. *Soient a et b deux entiers. Alors on a*

$$\begin{aligned} |N_D([a, b], E) - N_{\theta_1, \theta_2}([a, b], E)| &\leq 2 \\ |N_{0, D}([a, b], E) - N_{0, \theta_1, \theta_2}([a, b], E)| &\leq 2 \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Démonstration. Ce lemme se démontre par l'application de la théorie des perturbations de rang 1, *i.e.* par l'argument utilisé dans la démonstration du Lemme 1.5. Ce lemme peut être démontré également par les calculs liés à l'angle de Prüffer (les solutions tournent quand on change E de façon continue). \square

1.2 Encadrement par Dirichlet et Neumann

Les estimations (2.1.4) et (2.1.5) sont importantes pour la méthode de l'encadrement par Dirichlet et Neumann. L'idée clé de cette méthode est l'utilisation de l'inégalité suivante.

Considérons un opérateur de Sturm-Liouville $A = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ avec $q(x)$ relativement borné par rapport à $-\frac{d^2}{dx^2}$ au sens des formes. On introduit la fonction de comptage $N_\theta(E, A, I)$ du nombre de valeurs propres $< E$ de l'opérateur A restreint à un intervalle fini I avec une condition au bord $f(a) \cos \theta + f'(a) \sin \theta = f(b) \cos \theta + f'(b) \sin \theta = 0$. Pour les valeurs particulières $\theta = 0$, *i.e.* une condition au bord de Dirichlet, (resp. $\theta = \frac{\pi}{2}$, *i.e.* une condition au bord de Neumann) on va utiliser la notation $N_D(E, A, I)$ (resp. $N_N(E, A, I)$). On a alors le résultat suivant, appelé encadrement de Dirichlet-Neumann :

Lemme 1.8. *Soit un intervalle I décomposé en deux sous-intervalles I_1 et I_2 , *i.e.* $I = I_1 \cup I_2$ et $\#(I_1 \cap I_2) \leq 1$, alors*

$$\begin{aligned} N_D(E, A, I_1) + N_D(E, A, I_2) &\leq \\ &\leq N_D(E, A, I) \leq N_\theta(E, A, I) \leq N_N(E, A, I) \leq \\ &\leq N_N(E, A, I_1) + N_N(E, A, I_2) \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Démonstration. L'encadrement est démontré pour le laplacien dans la Proposition 4 du chapitre XIII de [RS78]. Pour l'opérateur de Schrödinger, le même encadrement découle par simple application du principe du mini-max (le Théorème XIII.2 de ([RS78])). \square

Pour l'opérateur \mathbb{H}_θ , on donne une définition modifiée de la densité d'états intégrée est plus pratique à manipuler.

Lemme 1.9. *Considérons une suite S_l de nombres entiers, $S_l \in \mathbb{N}$, telle que*

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} S_l = +\infty \quad \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{S_{l+1} - S_l}{S_l} = 0$$

*Si la limite suivante existe alors la densité d'états intégrée $k(E)$ définie dans (9) existe aussi et est égale à cette limite et vice versa, *i.e.* :*

$$k(E) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_l} N(\mathbb{H}_D([0, S_l]), E) \quad (2.1.7)$$

où pour chaque $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$ on note $\mathbb{H}_D([0, S_l])$ l'opérateur H sur $[0, S_l]$ avec les conditions au bord de Dirichlet et $N(\mathbb{H}_D([0, S_l]), E)$ le nombre de ses valeurs propres $< E$.

Démonstration. La convergence du nombre de valeurs propres par unité de volume quand x tend vers l'infini implique en particulier la convergence du nombre de valeurs propres par unité de volume pour chaque sous-suite $\{S_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini.

Pour vérifier la réciproque on montre que l'existence de $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{N_D(E; [0, S_l]; 0, 0)}{S_l}$ implique l'existence de $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{N_D(E; [0, L]; 0, 0)}{L}$. L'égalité entre ces quantités sera automatiquement vérifiée car par unicité de la limite, elle coïncide pour chaque suite qui tend vers l'infini.

Pour chaque $L \in \mathbb{N}$ fixé, il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $L \in [S_l, S_{l+1}]$. On va estimer la différence

$|N(\mathbb{H}_D([0, L]), E) - N(\mathbb{H}_D([0, S_l]), E)|$ à l'aide de l'encadrement de Dirichlet-Neumann. On écrit $[0, L] = [0, S_l] \cup [S_l, L]$. Par l'encadrement Dirichlet-Neumann (Lemme 1.8) on a :

$$\begin{aligned} N_D(E; [0, S_l]) + N_D(E; [S_l, L]) &\leq \\ &\leq N_D(E; [0, L]) \leq N_N(E; [0, L]) \leq \\ &\leq N_N(E; [0, S_l]) + N_N(E; [S_l, L]) \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

L'estimation (2.1.4) implique :

$$\begin{aligned} N_D(\mathbb{H}_0(S_l, L), E - \|W\|_\infty) &\leq N_D(\mathbb{H}(S_l, L), E) \leq N_D(\mathbb{H}_0(S_l, L), E + \|W\|_\infty) \\ N_N(\mathbb{H}_0(S_l, L), E - \|W\|_\infty) &\leq N_N(\mathbb{H}(S_l, L), E) \leq N_N(\mathbb{H}_0(S_l, L), E + \|W\|_\infty) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Pour un opérateur périodique \mathbb{H}_0 , on a l'estimation (1.9) pour la différence entre $N_D(\mathbb{H}_0, [a, b])$ (resp. $N_N(\mathbb{H}_0, [a, b])$) et $k_0(E)(b - a)$ par $2k_0(E)$. Ainsi l'estimation (1.6) de la distance entre les valeurs propres de \mathbb{H}_0 et celles de \mathbb{H} implique qu'il existe une constante C , indépendante de l , telle que pour l assez grand on a :

$$|N_D(\mathbb{H}(S_l, L), E)| \leq C(L - S_l) \quad |N_N(\mathbb{H}(S_l, L), E)| \leq C(L - S_l).$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{N_D(\mathbb{H}(S_l, L), E)}{L} &\leq C \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{S_{l+1} - S_l}{S_l} = 0 \\ \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{N_N(\mathbb{H}(S_l, L), E)}{L} &\leq C \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{S_{l+1} - S_l}{S_l} = 0 \end{aligned}$$

Par la théorie des perturbations de rang 1 on a :

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_l} N_D(\mathbb{H}(0, S_l), E) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{S_l} N_N(\mathbb{H}(0, S_l), E) = k(E).$$

Ceci implique l'équivalence des deux définitions de $k(E)$. □

2 Densité d'états intégrée : la preuve du Théorème 10

Pour démontrer que la densité d'états existe, on suit la stratégie établie par Simon et Zhu dans ([SZ96]). Plus précisément, on utilise l'encadrement par Dirichlet et Neumann et les propriétés des perturbations de rang un. On adapte ces arguments pour traiter des perturbations de l'opérateur de Schrödinger périodique.

2.1 Encadrement dans le cadre de mon problème

On pose $S_l = S(l) := [(2\pi n)^{\frac{1}{\alpha}}]$, où $[\]$ désigne la partie entière d'un nombre réel. On pose $\Omega_l = [S(l-1), S(l)]$. L'encadrement par Dirichlet et Neumann implique :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l N_D(\mathbb{H}(\Omega_j), E) &\leq N_D(\mathbb{H}([0, S(l)]), E) \leq \\ &\leq N_N(\mathbb{H}([0, S(l)]), E) \leq \sum_{j=1}^l N_N(\mathbb{H}(\Omega_j), E) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

On découpe chaque intervalle Ω_j en intervalles $[a_k(j), b_k(j)]$ avec $a_k(j) \in \mathbb{N}$ et $b_k(j) \in \mathbb{N}$ associés à un paramètre $\beta > 0$ (qui sera choisi par la suite) tels qu'il existe $C > 1$ et $K_j \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\Omega_j = \bigcup_{k=1}^{K_j} [a_k(j), b_k(j)], \quad \frac{1}{C}j^\beta \leq |b_k(j) - a_k(j)| \leq Cj^\beta, \quad a_k(j) < b_k(j) = a_{k+1}(j)$$

On applique l'encadrement par Dirichlet et Neumann à ce découpage des Ω_j pour obtenir :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{K_j} N_D(\mathbb{H}([a_k(j), b_k(j)]), E) &\leq N_D(\mathbb{H}([0, S(l)]), E) \leq \\ &\leq N_N(\mathbb{H}([0, S(l)]), E) \leq \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{K_j} N_N(\mathbb{H}([a_k(j), b_k(j)]), E) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

On va estimer le nombre de valeurs propres de Dirichlet $N_D(\mathbb{H}([a_k(j), b_k(j)]), E)$ et de Neumann $N_N(\mathbb{H}([a_k(j), b_k(j)]), E)$ de H sur les intervalles $[a_k(j), b_k(j)]$. Sur ces intervalles la fonction $W(x^\alpha)$ varie très peu. Ainsi, pour $x \in [a_k(j), b_k(j)]$, on peut approximer des valeurs de $W(x^\alpha)$ par le minimum $W_{\min,k} = \min_{x \in [a_k(j), b_k(j)]} W(x^\alpha)$ ou par le maximum $W_{\max,k} = \max_{x \in [a_k(j), b_k(j)]} W(x^\alpha)$ sans faire une grande erreur.

On introduit pour chaque j et $k = 1, \dots, K_j$ sur l'intervalle $[a_k(j), b_k(j)]$ les opérateurs périodiques suivants

$$\mathbb{B}_D(j, k) = H_0 + \max_{x \in [a_k(j), b_k(j)]} W(x^\alpha) \quad \text{sur} \quad D(\mathbb{B}_D(j, k)) = \{f \in H^2 \mid f(a_k(j)) = f(b_k(j)) = 0\},$$

i.e. avec les condition au bord de Dirichlet, et

$$\mathbb{B}_N(j, k) = H_0 + \min_{x \in [a_k(j), b_k(j)]} W(x^\alpha) \quad \text{sur} \quad D(\mathbb{B}_N(j, k)) = \{f \in H^2 \mid f'(a_k(j)) = f'(b_k(j)) = 0\},$$

i.e. avec les condition au bord de Neumann. Clairement on a des inégalités suivantes :

$$\mathbb{B}_N(j, k) \leq \mathbb{H}_N(a_k(j), b_k(j)) \leq \mathbb{H}_D(a_k(j), b_k(j)) \leq \mathbb{B}_D(j, k)$$

Par le principe du mini-max, cette inégalité implique :

$$N(\mathbb{B}_D(j, k), E) \leq N_D(\mathbb{H}([a_k(j), b_k(j)]), E) \leq N_N(\mathbb{H}([a_k(j), b_k(j)]), E) \leq N(\mathbb{B}_N(j, k), E).$$

Par définition, $\mathbb{B}_D(j, k)$ et de $\mathbb{B}_N(j, k)$ sont des restrictions aux intervalles $[a_k(j), b_k(j)]$ d'opérateurs périodiques $H_0 + W_{\max,k}$ et $H_0 + W_{\min,k}$ respectivement. D'où on obtient :

$$\begin{aligned} N(\mathbb{B}_D(j, k), E) &= N_D(\mathbb{H}_0([a_k(j), b_k(j)]), E - W_{\max,k}) \\ N(\mathbb{B}_N(j, k), E) &= N_N(\mathbb{H}_0([a_k(j), b_k(j)]), E - W_{\min,k}). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

On estime ces quantités à l'aide d'une estimation (1.9) (l'estimation du nombre de valeurs propres des restrictions de H_0 sur les intervalles finis avec une condition au bord de Neumann ou de Dirichlet) :

$$|N_D(\mathbb{H}_0([a_k(j), b_k(j)]), E - W_{\max,k}) - \frac{1}{\pi} k_0 (E - W_{\max,k}) (b_k(j) - a_k(j))| \leq 2 \min(k_0 (E - W_{\max,k}), 1),$$

$$|N_N(\mathbb{H}_0([a_k(j), b_k(j)]), E - W_{\min,k}) - \frac{1}{\pi} k_0(E - W_{\min,k})(b_k(j) - a_k(j))| \leq 2 \min(k_0(E - W_{\min,k}), 1).$$

Ce qui revient à écrire :

$$|N(\mathbb{B}_D(j, k), E) - \frac{1}{\pi} k_0(E - W_{\max,k})(b_k(j) - a_k(j))| \leq 2 \min(k_0(E - W_{\max,k}), 1),$$

$$|N(\mathbb{B}_N(j, k), E) - \frac{1}{\pi} k_0(E - W_{\min,k})(b_k(j) - a_k(j))| \leq 2 \min(k_0(E - W_{\min,k}), 1).$$

2.1.1 Estimations par une intégrale

Notre but est de montrer que les termes $k_0(E - W_{\min,k})(b_k(j) - a_k(j))$ et $k_0(E - W_{\max,k})(b_k(j) - a_k(j))$ sont proches de l'intégrale $\int_{a_k(j)}^{b_k(j)} k_0(E - W(x^\alpha)) dx$. On estime la différence :

– Si $E - W(x^\alpha)$ est loin de bord E_n , $n \in \mathbb{N}$, d'une lacune ouverte de \mathbb{H}_0 , on estime :

$$\begin{aligned} & \left| k_0(E - W_{\min,k})(b_k - a_k) - \int_{a_k}^{b_k} k_0(E - W(x^\alpha)) dx \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{a_k}^{b_k} (k_0(E - W_{\min,k}) - k_0(E - W(x^\alpha))) dx \right| \leq \\ & \leq (b_k - a_k)^2 \max_{x \in [a_k, b_k]} k_0'(E - W(x^\alpha)) \max_{x \in [a_k, b_k]} W'(x) \alpha a_k^{\alpha-1} \leq \\ & \leq C_1 j^{2\beta} \alpha j^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

– Si $E - W(x^\alpha)$ est proche d'un bord E_n , $n \in \mathbb{N}$, d'une lacune ouverte de \mathbb{H}_0 , on estime :

$$\begin{aligned} & \left| k_0(E - W_{\min,k})(b_k - a_k) - \int_{a_k}^{b_k} k_0(E - W(x^\alpha)) dx \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{a_k}^{b_k} (k_0(E - W_{\min,k}) - k_0(E - W(x^\alpha))) dx \right| \leq \\ & \leq (b_k - a_k)^{\frac{3}{2}} \left(\max_{x \in [a_k, b_k]} W'(x) \alpha a_k^{\alpha-1} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq C_1 j^{\frac{3\beta}{2}} \alpha j^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}}. \end{aligned}$$

Maintenant, on pose $\beta = \frac{1-\alpha}{3\alpha}$ et on somme les termes, $\sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{K_j}$. Le nombre de termes dans la somme $\sum_{k=1}^{K_j}$ est égal à $K_j = O(j^{\frac{1}{\alpha} - \beta - 1}) = O(j^{\frac{2(1-\alpha)}{3\alpha}})$. On peut donc majorer :

$$\sum_{k=1}^{K_j} \left| k_0 \left(E - \min_{x \in [a_k, b_k]} |W(x^\alpha)| \right) (b_k - a_k) - \int_{a_k}^{b_k} k_0(E - W(x^\alpha)) dx \right| \leq O(j^{\frac{2(1-\alpha)}{3\alpha}})$$

Comme $\frac{2(1-\alpha)}{3\alpha} > 0$, la somme par j de ces termes s'estime par $O(l^{\frac{2(1-\alpha)}{3\alpha} + 1}) = O(l^{\frac{2+\alpha}{3\alpha}})$ et on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{K_j} N_N(\mathbb{B}(j, k), E) &= \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{K_j} \frac{1}{\pi} \int_{a_k}^{b_k} k_0(E - W(x^\alpha)) dx + O(l^{\frac{2+\alpha}{3\alpha}}) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{S(l)} k_0(E - W(x^\alpha)) dx + O(l^{\frac{2+\alpha}{3\alpha}}) \end{aligned}$$

Par le même argument on estime :

$$\sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{K_j} N_D(\mathbb{B}(j, k), E) = \frac{1}{\pi} \int_0^{S(l)} k_0(E - W(x^\alpha)) dx + O(l^{\frac{2+\alpha}{3\alpha}})$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{K_j} N_N(\mathbb{B}(j, k), E) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{S(l)} k_0(E - W(x^\alpha)) dx + O(l^{\frac{2+\alpha}{3\alpha}}), \\ \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{K_j} N_D(\mathbb{B}(j, k), E) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{S(l)} k_0(E - W(x^\alpha)) dx + O(l^{\frac{2+\alpha}{3\alpha}}). \end{aligned}$$

D'où on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{S(l)} k_0(E - W(x^\alpha)) dx + O(l^{\frac{2+\alpha}{3\alpha}}) &\leq \\ &\leq N_D(\mathbb{H}([0, S_l]), E) \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{S(l)} k_0(E - W(x^\alpha)) dx + O(l^{\frac{2+\alpha}{3\alpha}}). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

2.1.2 Modification de l'estimation : la fin de la preuve de l'existence

On fait le changement de variable $t = x^\alpha$ dans l'intégrale $\frac{1}{\pi} \int_0^{S(l)} k_0(E - W(x^\alpha)) dx$, puis on l'estime, en utilisant la périodicité de W et la comparaison d'une somme avec une intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^{S(l)} k_0(E - W(x^\alpha)) dx &= \int_0^{2\pi l} k_0(E - W(t)) t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dt + O(1) = \\ &= \sum_{j=0}^l \int_0^{2\pi} k_0(E - W(x)) (2\pi j + x)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dx + O(1) = \\ &= \int_0^{2\pi} k_0(E - W(x)) dx \left(\sum_{j=1}^l (2\pi j)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + O\left(l^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right) \right) = \\ &= (2\pi l)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_0(E - W(x)) dx (1 + O(l^{-1})) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

On réunit les estimations (2.2.4) et (2.2.5) pour conclure :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_0(E - W(x)) dx + O(l^{-1}) + O(l^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}}) &\leq \\ &\leq \frac{1}{S_l} N_D(\mathbb{H}([0, S(l)]), E) \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_0(E - W(x)) dx + O(l^{-1}) + O(l^{\frac{\alpha-1}{3\alpha}}). \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

On obtient :

$$\left| \frac{1}{S_l} N_D(\mathbb{H}([0, S(l)]), E) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_0(E - W(x)) dx \right| = O(l^{-\min(\frac{1-\alpha}{3\alpha}, 1)})$$

En passant à la limite $l \rightarrow +\infty$ et utilisant la définition équivalente (2.1.7) de la densité d'états intégrée $k(E)$, on obtient :

$$k(E) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{S(l)} N_D(\mathbb{H}([0, S(l)]), E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_0(E - W(x)) dx$$

Ainsi on a démontré l'existence de la densité d'états intégrée $k(E)$, sa formule et on a obtenu une estimation de la vitesse de convergence de $\frac{1}{S(l)} N_D(\mathbb{H}([0, S(l)]), E)$ vers $k(E)$:

$$\left| \frac{1}{S(l)} N_D(\mathbb{H}([0, S(l)]), E) - k(E) \right| \leq Cl^{-\nu(\alpha)} \quad \text{avec} \quad \nu(\alpha) = \min \left\{ \frac{1-\alpha}{3\alpha}, 1 \right\}$$

Ce qui achève la démonstration du Théorème 10.

2.2 Preuve du Théorème 16 : la formule de Thouless

La démonstration du Théorème 16 se compose de deux parties. On commence par la démonstration de la formule de Thouless (13). On remarque ce qu'il suffit de démontrer la formule équivalente :

$$\gamma(E) - \Im\sqrt{E} = \int_{\mathbb{R}} \ln |E - E'| d(k(E')) - \frac{1}{\pi} \Re\sqrt{E'}.$$

Dans cette formule on change de régularisation, utilisant la densité d'états intégrée et l'exposant de Lyapounov pour $-\frac{d^2}{dx^2}$ au lieu de ceux pour $-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$. Après, on en déduit la formule de l'exposant de Lyapounov et ses propriétés à l'aide des outils de l'analyse harmonique et de la formule de la densité d'états intégrée (*c.f.* Théorème 10).

La formule de Thouless relie la densité d'états intégrée $k(E)$ à l'exposant de Lyapounov $\gamma(E)$ pour $H = -\frac{d^2}{dx^2} + [V(x) + W(x^\alpha)]$. Dans la formule de Thouless, apparaît une régularisation en termes de la densité d'états intégrée $k_\Delta(E) = \frac{1}{\pi} \Re\sqrt{E}$ et de l'exposant de Lyapounov $\gamma_\Delta(E) = \Im\sqrt{E}$ pour l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$.

Comme on l'a démontré, le nombre de valeurs propres de restrictions de H à des intervalles finis par unité de volume converge vers la densité d'états intégrée $k(E)$ On a obtenu une estimation de vitesse de cette convergence. Maintenant, on passe à la démonstration de la formule de Thouless. On utilise les résultats de la section précédente.

2.2.1 Théorème d'oscillations de Sturm pour H et H_0

Le théorème des oscillations de Sturm (*c.f.* Théorème 1.3.3 de Chapitre 1 de [LS91]), appliqué à une solution non nulle $u(x, E)$ de l'équation à oscillations lentes (SIosc) vérifiant $u(0, E) = 0$ et à une solution non nulle $u_0(x, E)$ de l'équation $-u_0''(x, E) = Eu_0(x, E)$ vérifiant $u_0(0, E) = 0$, implique le lemme suivant .

Lemme 2.1 (Oscillations de Sturm).

$$\frac{u(l, E)}{u_0(l, E)} = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{E - E_k(l)}{E - E_k^0(l)} \right) \quad (2.2.7)$$

Ici $E_k(l)$ (resp. $E_k^0(l)$) sont des valeurs propres de Dirichlet pour les restrictions de $H = -\frac{d^2}{dx^2} + [V(x) + W(x^\alpha)]$ (resp. de $-\frac{d^2}{dx^2}$) sur $[0, S(l)]$.

On utilise ce lemme pour démontrer la formule de Thouless. Afin de démontrer la convergence du produit dans (2.2.7), on utilise les propriétés asymptotiques des valeurs propres des restrictions des opérateurs $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(x^\alpha)$ et $-\frac{d^2}{dx^2}$.

2.2.2 Démonstration de la formule de Thouless : premier pas

Cette partie est consacrée à la démonstration de la formule de Thouless. L'idée est la suivante. Pour chaque l fini, on a l'égalité :

$$\frac{1}{S(l)} \ln \left| \frac{u(S(l), E)}{u_0(S(l), E)} \right| = \frac{1}{S(l)} \ln \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{E - E_k(l)}{E - E_k^0(l)}.$$

On peut récrire cette égalité, utilisant les propriétés de logarithme :

$$\frac{1}{S(l)} \ln |u(S(l), E)| - \frac{1}{S(l)} \ln |u_0(S(l), E)| = \frac{1}{S(l)} \sum_{k=0}^{+\infty} \ln \frac{E - E_k(l)}{E - E_k^0(l)}. \quad (2.2.8)$$

Pour tout $E \in \mathbb{R}$, le deuxième terme de partie gauche de l'égalité (2.2.8) converge :

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{S(l)} \ln |u_0(S(l), E)| \right) = \gamma_\Delta(E) = \Im \sqrt{E}.$$

Pour étudier la convergence du terme de droite, on sépare le produit en deux parties : le produit pour les $k \leq S(l)L$ et le produit pour $k > S(l)L$, où le nombre L est grand et sera choisi par la suite. Le première somme contient un nombre fini de termes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{S(l)L} \ln \frac{E - E_k(l)}{E - E_k^0(l)} &= \sum_{k=0}^{S(l)L} (\ln |E - E_k(l)| - \ln |E - E_k^0(l)|) = \\ &= \int_{-\infty}^{a_1(l, L)} \ln |E - E'| dN_D(E', [0, S(l)]) - \int_{-\infty}^{a_0(l, L)} \ln |E - E'| dN_D^0(E', [0, S(l)]) \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Ci-dessus, on a utilisé les notations suivantes :

$$\begin{aligned} a_0(l, L) &= \sup\{E \in \mathbb{R} | N_D^0(E, [0, S(l)]) \leq S(l)L\} \\ a_1(l, L) &= \sup\{E \in \mathbb{R} | N_D(E, [0, S(l)]) \leq S(l)L\} \end{aligned}$$

Ici $N_D(E, [0, S(l)])$ (resp. $N_D^0(E, [0, S(l)])$) est le nombre de valeurs propres du problème de Dirichlet pour la restriction de l'opérateur H (resp. $-\frac{d^2}{dx^2}$) sur $[0, S(l)]$.

2.2.3 Démonstration de la formule de Thouless : deuxième étape

Démontrons que les termes qui contiennent le reste de produit tendent vers zéro à la limite $l \rightarrow +\infty$. A l'aide de l'estimation (1.6) on obtient :

$$\begin{aligned} \ln \prod_{k=S(l)L}^{+\infty} \left| \frac{E - E_k(l)}{E - E_k^0(l)} \right| &= \sum_{k=S(l)L}^{+\infty} \ln \left| 1 + \frac{E_k^0(l) - E_k(l)}{E - E_k^0(l)} \right| \\ &\leq \sum_{k=S(l)L}^{+\infty} \ln \left| 1 + \frac{\|W\|_\infty}{E - E_k^0(l)} \right| \end{aligned}$$

Pour l et L suffisamment grands, il existe une constante $C = C(E)$ telle que

$$|E - E_k(\mathbb{H}_0(0, S(l)))| > C \frac{k^2}{S^2(l)}$$

On utilise l'équivalence des séries et la convergence dominée pour démontrer que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=S(l)L}^{+\infty} \ln \left| \frac{E - E_k(l)}{E - E_k^0(l)} \right| &\leq \sum_{k=S(l)L}^{+\infty} \ln \left| 1 + \frac{C\|W\|_\infty S(l)^2}{k^2} \right| = S(l) \sum_{m=L}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{C}{m^2} \right) \\ &\leq S(l) \sum_{m=L}^{+\infty} \frac{C}{m^2} \leq C \left(\frac{S(l)}{L} \right). \end{aligned}$$

Puis en passant à la limite l tend vers l'infinie, on obtient :

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{S(l)} \sum_{k=S(l)L} \ln \left| \frac{E - E_k(l)}{E - E_k^0(l)} \right| \leq \frac{C}{L}.$$

2.2.4 Démonstration de la formule de Thouless : troisième étape

Dans ce qui reste, on va soustraire le terme qu'on veut obtenir et démontrer que les autres termes convergent vers 0. On écrit :

$$\int_{-\infty}^{a_1(l,L)} \ln |E - E'| dk^l(E') - \int_{-\infty}^{a_0(l,L)} \ln |E - E'| dk_\Delta^l(E') = \int_{\mathbb{R}} \ln |E - E'| d(k - k_\Delta)(E') - I_1 + I_2$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{a_1(l,L)}^{+\infty} \ln |E - E'| dk(E') - \int_{a_0(l,L)}^{+\infty} \ln |E - E'| dk_\Delta(E') \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{a_1(l,L)} \ln |E - E'| d(k^l - k)(E) - \int_{-\infty}^{a_0(l,L)} \ln |E - E'| d(k_\Delta^l - k_\Delta)(E) = I_3 + I_4 \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \ln |E - E'| d(k - k_\Delta)(E')$ est le terme qu'on voudrait obtenir. Il nous faut démontrer que I_1 et I_2 tendent vers 0 quand $l \rightarrow \infty$.

$$\lim_{l \rightarrow \infty} I_2 = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{a_1(l,L)}^{+\infty} \ln |E - E'| dk(E') - \int_{a_0(l,L)}^{+\infty} \ln |E - E'| dk_\Delta(E') = 0$$

En effet, $I_2 = O\left(\ln a(l, L)a(l, L)^{-\frac{1}{6}}\right)$ parce que $|k(E) - k_\Delta(E)| = O\left(\frac{1}{E^{\frac{1}{6}}}\right)$ pour les grands valeurs de E . Cette dernière estimation découle des propriétés asymptotiques de k_0 : $|k_0(E) - k_\Delta(E)| = O\left(\frac{1}{E^{\frac{1}{6}}}\right)$ et de la continuité et de la monotonie de k_0 en E à l'aide de l'encadrement $k_0(E - \|W\|_\infty) \leq k(E) \leq k_0(E + \|W\|_\infty)$.

On a intérêt à éviter les valeurs propres $E_k(l)$ et $E_k^\Delta(l)$. Pour faire ça, on considère les énergies E en dehors d'un *ensemble résonnant*, i.e. on fixe $\varepsilon(\alpha) \in (0, \nu(\alpha))$ et considère $E \in \mathbb{R} \setminus D_\infty$ ou :

$$D_\infty(\varepsilon(\alpha)) := \left\{ E \in \mathbb{R} \mid \exists \{l_i\}_{i \in \mathbb{N}} l_i \rightarrow +\infty \text{ tel que } \forall i > 0 \quad |E - E_k(l_i)| \leq \exp\left(-l_i^{\nu(\alpha) - \varepsilon(\alpha)}\right) \right\} \quad (2.2.10)$$

L'idée est de profiter de la condition $E \in \mathbb{R} \setminus D_\infty$ pour séparer les intégrales I_3 et I_4 en un intégrale sur un intervalle d'énergies proches de E , et donc non-résonnantes, et un intégrale sur le reste des énergies, qui sont maintenant séparées de E par une distance positive qui dépend de l . Les premières tendent vers zéro car la mesure de l'intervalle d'intégration tend vers zéro et qu'il n'y a pas de résonances. Pour le reste des énergies, la vitesse de convergence des densités d'états des restriction et la distance de E impliquent la convergence vers zéro.

Je ne démontre que l'estimation pour I_3 , celle de I_4 étant analogue. On pose

$$V_l(E) = [E - \delta_l, E + \delta_l] \quad \text{avec} \quad \delta_l = \frac{1}{3} \exp\left(-l^{\nu(\alpha) - \varepsilon(\alpha)}\right),$$

avec $\varepsilon(\alpha) \leq \frac{\nu(\alpha)}{2}$. Si $E \in D_\infty(\varepsilon(\alpha))$, dans $V_l(E)$ il n'y a pas de valeurs propres de $\mathbb{H}_D([0, S(l)])$, ni de $\mathbb{H}_{0,D}([0, S(l)])$. On utilise l'estimation non-résonnante et l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{a_1(l, L)} \ln |E - E'| d(k^l - k)(E') = \int_{V_l(E)} \ln |E - E'| d(k - k^l)(E') \\ & + \int_{(-\infty, a_1(l, L)) \setminus V_l(E)} \ln |E - E'| d(k - k^l)(E') \leq C(E) \sqrt{|V_l(E)|} + (k - k^l)(a_1(l, L)) \ln |E - a_1(l, L)| \\ & + \ln \delta_l \left((k - k^l)(E + \delta_l) - (k - k^l)(E - \delta_l) \right) + \int_{(-\infty, a_1(l, L)) \setminus V_l(E)} \frac{(k - k^l)(E')}{E - E'} dE' \end{aligned}$$

Les estimations $|(k^l - k)(E)| = O(l^{-\nu(\alpha)})$ et $\ln \delta_l = O(l^{\nu(\alpha) - \varepsilon(\alpha)})$ impliquent :

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow +\infty} (k - k^l)(a_1(l, L)) \ln |E - a_1(l, L)| &= 0 \\ \lim_{l \rightarrow +\infty} \ln \delta_l \left((k - k(\mathbb{H}_D(0, S_l)))(E + \delta_l) - (k - k(\mathbb{H}_D(0, S_l)))(E - \delta_l) \right) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi on a démontré la formule de Thouless pour toutes les valeurs E à l'extérieur d'un ensemble résonnant, c'est-à-dire pour $E \in \mathbb{R} \setminus D_\infty(\varepsilon(\alpha))$. On peut choisir $\varepsilon(\alpha)$ aussi petit qu'on veut. Autrement dit, on a

$$D_\infty := \bigcup_{d \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{l=m}^{\infty} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_{d, n, l, k} \quad \text{avec} \quad D_{d, n, l, k} = \left\{ E \in [-d, d] \mid |E - E_k(l)| \leq \exp\left(-l^{\min\{\frac{1-\alpha}{3\alpha}, 1\} - \frac{1}{n}}\right) \right\} \quad (2.2.11)$$

Pour chaque intervalle finie $[a, b]$ l'ensemble $D_\infty \cap [a, b]$ est de mesure 0 par le lemme de Borel-Cantelli. Donc D_∞ est de mesure 0. De plus, il est facile de voir que D_∞ est de dimension de Hausdorff zéro.

2.3 Preuve du Théorème 16 : formule de l'exposant de Lyapounov

Dans la preuve de la formule de Thouless, on a démontré ce que, pour $E \in \mathbb{R} \setminus D_\infty$, la limite suivante existe :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{S(l)} \ln |u(l, E)|$$

où $u(x, E)$ est une solution non nulle de l'équation $(Hu)(x, E) = Eu(x, E)$ qui vérifie en 0 la condition au bord de Dirichlet. On introduit une relation d'équivalence pour les fonctions $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln g_1(x)}{x} - \frac{\ln g_2(x)}{x} \right) = 0 \quad (2.2.12)$$

Cette relation d'équivalence ne dépend pas du choix de la détermination du logarithme. Soit $T(S(l), 0, E)$ la matrice de transfert (*c.f.* définie dans (10)) de l'équation (SIosc) sur l'intervalle $[0, S(l)]$. Il est facile de voir que cela implique $\|T(S(l), 0, E)\| \sim |u(S(l), E)|$ dans le sens de (2.2.12) :

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|T(S(l), 0, E)\|}{S(l)} = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{\ln u(S(l), E)}{S(l)}$$

Et donc l'exposant de Lyapounov existe pour tout $E \in \mathbb{R} \setminus D_\infty$ et sa formule peut être calculée à partir de la formule de la densité d'états intégrée à l'aide de la formule de Thouless.

2.3.1 Formule de l'exposant de Lyapounov

Pour tout intervalle fini $[a, b]$ et pour tout $E \in [a, b] \setminus D_\infty$ on a démontré la formule de Thouless. Maintenant on considère une fonction $F(z) = \pi k(z) + i\gamma(z)$ analytique dans \mathbb{C}_+ . On reconstruit $F(z)$ à partir de la formule de $k(E)$:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_p(z - W(x)) dx.$$

La formule de Thouless décrit précisément la relation entre la partie réelle et la partie imaginaire de cette fonction. Donc à partir de la formule de la densité d'états intégrée, on retrouve la formule pour l'exposant de Lyapounov :

$$\begin{aligned} \gamma(E) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(E + i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Im k_p(E + i\varepsilon - W(x)) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Im k_p(E + i0 - W(x)) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_0(E - W(x)) dx \end{aligned}$$

pour presque tout $E \in \mathbb{R}$. Plus précisément, pour tout $E \in \mathbb{R} \setminus D_\infty$.

Remarque 2.2. Pour les valeurs de α proche de 1, cette définition d'ensemble résonnant devient trop grossière. La méthode d'obtention de l'exposant de Lyapounov pour les $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ par les approximations quasi-périodiques présentée dans le chapitre suivant donne le résultat plus précis (voir le Corollaire 4.12 pour l'ensemble résonnant).

On introduit la notation $\ln - \text{mes}(S)$ pour la dimension de Hausdorff d'un ensemble $S \subset \mathbb{R}$ par rapport à l'exponentielle de la mesure de Lebesgue. Plus précisément, on considère un recouvrement de l'ensemble compact S de dimension de Hausdorff 0 par les intervalles I_δ de longueur au plus δ et on calcule la limite :

$$\alpha(S) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\ln |\ln |\sum_j |I_j||} \text{ tels que } S \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_j \text{ avec } |I_j| < \delta \right\}.$$

Définition 2.3. On appelle cette limite “ α -dimensionnelle mesure logarithmique de Hausdorff” de l'ensemble S .

Ainsi l'ensemble résonnant D_∞ vérifie les propriétés dimensionnelles suivantes :

Lemme 2.4. L'ensemble résonnant D_∞ vérifie :

- La dimension de Hausdorff de D_∞ est égale à zéro.
- La capacité de D_∞ est égale à zéro.
- La “dimension de Hausdorff logarithmique” de D_∞ vérifie

$$\ln - \text{mes}(D_\infty) = \frac{1}{\min(\frac{1-\alpha}{3\alpha}, 1)}$$

Démonstration. Ce lemme se démontre par un calcul élémentaire utilisant les définitions et les propriétés de la dimension de Hausdorff, de la capacité et de la “dimension de Hausdorff logarithmique”.

Par le Théorème A.20 de [Sim07], chaque ensemble de capacité nulle est de dimension de Hausdorff nulle. Ainsi le deuxième point du Lemme 2.4 implique le premier.

Par la définition de la capacité, il faut montrer :

$$C(D_\infty) := \exp(-\min\{\mathcal{E}(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_{+,1}(D_\infty)\}) = 0$$

où $\mathcal{E}(\mu) := \int \log \frac{1}{|x-y|} d\mu(x)d\mu(y)$ et $\mathcal{M}_{+,1}(D_\infty)$ est l'ensemble des mesures de probabilité sur D_∞ . On va utiliser les propriétés de la capacité :

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on a $C([a, b]) = \frac{1}{4}|b - a|$,
2. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$, alors $C(A \cup B) + C(A \cap B) \leq C(A) + C(B)$.
3. Si $A \subset B$, alors $C(A) \leq C(B)$.

Si $n_1 \leq n_2$, alors $D_{d,n_2,l,k} \subset D_{d,n_1,l,k}$ et $C(D_{d,n_2,l,k}) \leq C(D_{d,n_1,l,k})$. Si $d_1 \leq d_2$, alors $D_{d_1,n,l,k} \subset D_{d_2,n,l,k}$ et $C(D_{d_1,n,l,k}) \leq C(D_{d_2,n,l,k})$. D'où il suffit de montrer pour chaque $d \in \mathbb{N}$ que $C(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{l=m}^{\infty} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_{d,n_0,l,k}) = 0$ pour un $n_0 \in \mathbb{N}$ pour conclure $C(D_\infty) = 0$.

On choisit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $s := \min\{\frac{1-\alpha}{3\alpha}, 1\} - \frac{1}{n_0} > 0$. Utilisant les propriétés 1 et 2, on calcule

$$C\left(\bigcup_k D_{d,n_0,l,k}\right) = O(\sqrt{dl}) \exp(-l^s),$$

$$C\left(\bigcap_m \bigcup_{l=m}^{\infty} \bigcup_k D_{d,n_0,l,k}\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{l=m}^{\infty} O(\sqrt{dl} e^{-l^s}) = 0$$

pour chaque d fixé. D'où $C(D_\infty) = 0$. Ceci achève la démonstration du deuxième point du Lemme 2.4.

On calcule la “dimension de Hausdorff logarithmique” par définition. On fixe $\varepsilon > 0$ et on choisit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{s} < \frac{1}{\min\{\frac{1-\alpha}{3\alpha}, 1\}} + \varepsilon$ avec $s(n_0) := \min\{\frac{1-\alpha}{3\alpha}, 1\} - \frac{1}{n_0} > 0$.

On calcule $\alpha(D_\infty) := \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\ln |\ln |\sum_{j=1}^{\infty} |\ln |I_j|||}} \text{ tel que } D_\infty \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \text{ avec } |I_j| \leq \delta \right\}$. On choisit les intervalles I_j de longueur $\delta_l = e^{-l^s}$. Le nombre des intervalles nécessaire et suffisant pour couvrir $D_{d,n_0,l,k}$ est $O(\sqrt{dl})$. D'où :

$$\alpha(D_\infty) = \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \lim_{d \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln |\ln |\sum_{l=m}^{\infty} O(\sqrt{dl}e^{-l^s})||} = \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{s(n_0)}.$$

Comme $s(n_0) \rightarrow \min\{\frac{1-\alpha}{3\alpha}, 1\}$ quand $n_0 \rightarrow \infty$, ceci achève la démonstration. \square

Chapitre III

Méthode WKB complexe pour les perturbations adiabatiques de l'opérateur de Schrödinger périodique

Ce chapitre passe en revue la méthode WKB complexe dans sa version adaptée aux perturbations adiabatiques des problèmes périodiques. Cette version de la méthode a été créée et développée par A. Fedotov et F. Klopp. Le matériel de la section est basé essentiellement sur les articles [FK04a, FK01, FK05, FK04b]. La nouveauté est la construction des diagrammes de prolongement des asymptotiques des solutions de (AdiabQP) pour W analytique réel (sans l'hypothèse d'un maximum et un minimum) dans la Proposition 2.8, démontrée à la fin de ce chapitre, ainsi que la démonstration du comportement asymptotique standard à plusieurs composantes des solutions de (AdiabQP). On se donne comme but de décrire en détails les constructions qui seront largement utilisées par la suite. A l'exception du nouveau matériel, les théorèmes et lemmes sont formulés sans démonstrations. Le lecteur intéressé trouvera les preuves dans les références qui accompagnent chaque assertion.

Dans ce chapitre on étudie l'asymptotique quand ε tend vers zéro des solutions de l'équation de Schrödinger :

$$-\Psi''(x, z, E, \varepsilon) + [V(x) + W(\varepsilon x + z)]\Psi(x, z, E, \varepsilon) = E\Psi(x, z, E, \varepsilon) \quad (\text{AdiabQP})$$

avec x dans un intervalle compact $[-X, X]$ avec $X > 1$ et z dans un domaine borné du plan complexe. Dans l'ensemble de ce chapitre et du chapitre suivant (Chapitre IV), on suppose que V et W vérifient les hypothèses de la Section 1 (page 12). On note S_Y une bande horizontale $S_Y = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Im z| < Y\}$ d'analyticité de W . L'adjectif *régulier* est utilisé dans ce chapitre au sens de Définition 1.29 sur la page 38.

1 Théorème principal de la méthode WKB complexe

Le but de la méthode WKB complexe est de décrire les asymptotiques des solutions de l'équation quasi-périodique adiabatique (AdiabQP) quand ε tend vers zéro. Premièrement on va définir le comportement asymptotique typique des solutions. Le théorème principal (Théorème 1.5) décrit les conditions sous lesquelles on peut justifier ce comportement asymptotique.

1.1 Comportement asymptotique standard

On note $\Phi_{\pm}(x, z, E, z_0)$ les solutions de Bloch canoniques $\Phi_{\pm}^0(x, E, E_0)$ (Définition 1.18 page 31) avec $E = \mathcal{E}(z)$ et $E_0 = \mathcal{E}(z_0)$, analytiques en énergie dans un voisinage de $\mathcal{E}(z_0)$. La définition suivante décrit le comportement asymptotique typique pour les solutions de l'équation (AdiabQP). Dans ce qui suit, pour un domaine $D \subset \mathbb{C}$, on note $S(D)$ la plus petite bande horizontale $\{z \in \mathbb{C} \mid y_1 \leq \Im z \leq y_2\}$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, qui contient D .

Définition 1.1. Soient $\sigma = \pm$, $X > 1$ et D un domaine dans S_Y . On dit qu'une solution $f = f(x, z, E; \varepsilon)$ de l'équation adiabatique quasi-périodique (AdiabQP), définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $z \in S(D)$, admet le *comportement asymptotique standard* dans $[-X, X] \times D$ et l'on note :

$$f(x, z, E; \varepsilon) \sim \exp\left(\sigma \frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \kappa(s) ds\right) \Phi_{\sigma}(x, z, E, z_0) \quad (3.1.1)$$

si :

1. f est analytique en z dans D .
2. κ est une détermination du moment complexe (voir Définition 1.28 page 38)
3. Pour $z \in D$, $x \in [-X, X]$ et $E \in U_0(E_0)$ la fonction f a l'asymptotique :

$$f(x, z, E; \varepsilon) = \exp\left(\sigma \frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \kappa(s) ds\right) (\Phi_{\sigma}(x, z, E, z_0) + o(1)). \quad (\text{CAS})$$

4. L'asymptotique est uniforme sur chaque compact $K \subset D$, *i.e.*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|o(1)\|_{L^{\infty}([-X, X] \times K)} = 0.$$

5. L'asymptotique est différentiable une fois en x en gardant l'estimation d'erreur uniforme sur $[-X, X] \times D$.

On va utiliser la notation CAS pour designer le comportement asymptotique standard.

1.1.1 Courbes et domaines canoniques

On a besoin de définir les courbes et les domaines spéciaux, dits canoniques. Ce sont des domaines dans lesquels le théorème principal (Théorème 1.5) garantit le comportement asymptotique standard.

Définition 1.2. On dit que γ est une *courbe verticale* si l'angle θ entre γ et chaque ligne $\Im z = \text{const}$ vérifie $\theta \in (0, \pi)$.

Soit D un domaine régulier et $\gamma \subset D$ une courbe verticale régulière. On fixe une détermination $\kappa(z)$ du moment complexe analytique dans D .

Définition 1.3. On dit que γ est une courbe *canonique* pour la détermination $\kappa(z)$ du moment complexe si le long de γ :

$$\Im \int_{z_0}^z \kappa(s) ds \quad \text{est croissante} \quad (3.1.2)$$

$$\Im \int_{z_0}^z (\kappa(s) - \pi) ds \quad \text{est décroissante} \quad (3.1.3)$$

La notion de courbe canonique est une notion fondamentale de la méthode de WKB complexe pour les problèmes adiabatiques. Elle est au cœur de toutes les constructions de solutions au comportement asymptotique standard. Soit γ une courbe verticale ; γ peut être paramétrée par $t = \Im z$, *i.e.* $\gamma = z(t)$. Une courbe verticale est canonique si on a

$$\frac{d\Im \int_{z_0}^{z(t)} \kappa(s) ds}{dt} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\Im \int_{z_0}^{z(t)} (\kappa(s) - \pi) ds}{dt} < 0. \quad (3.1.4)$$

Définition 1.4. On dit que un domaine régulier D est un *domaine canonique* pour une détermination κ du moment complexe analytique dans D si D est une réunion de courbes canoniques pour cette détermination joignant deux points sur sa frontière.

1.1.2 Théorème principal de la méthode WKB complexe

Le théorème suivant est le théorème principal de la méthode WKB pour les perturbations adiabatiques de problèmes périodiques.

Théorème 1.5 (Théorème 1.1 de [FK01]). *Soit D un domaine canonique pour une détermination κ du moment complexe. Il existe une base cohérente $\{\Psi_+, \Psi_-\}$ de solutions de l'équation quasi-périodique adiabatique (AdiabQP) qui admet un CAS pour la détermination κ dans D :*

$$\Psi_{\pm} \sim \exp\left(\pm \frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \kappa(s) ds\right) \Phi_{\pm}(x, z, E, z_0).$$

1.1.3 Lignes de Stokes

La notion de lignes de Stokes dans la méthode WKB pour les problèmes adiabatiques est analogue à la définition classique des lignes de Stokes (*c.f.* [Fed93]). *Grosso modo*, les lignes de Stokes sont des lignes qui peuvent former des frontières entre les domaines où, le long des lignes horizontales $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z = \text{const}\}$, les solutions qui ont CAS sont croissantes et ceux où elles sont décroissantes.

On considère l'intégrale suivante : $\int_{z_0}^z \kappa(z) dz$. Cette intégrale va apparaître dans les asymptotiques des solutions qui ont CAS. C'est une fonction multivaluée dont les points de branchement sont les mêmes que les points de branchement du moment complexe $\kappa(z)$. Soit z_0 un point de branchement de $\kappa(z)$.

Définition 1.6. On appelle *ligne de Stokes* une courbe γ qui commence en $z_0 \in S_Y$ et définie par la condition :

$$\Im \int_{z_0}^z (\kappa(z) - \kappa(z_0)) dz = 0 \quad (3.1.5)$$

où l'intégrale est prise le long de γ .

Les propriétés du moment complexe impliquent que les lignes de Stokes sont indépendantes du choix de la détermination du moment complexe. D'après l'hypothèse **(HED)** page 37, dans chaque point de branchement z_0 du moment complexe, on a $W'(z_0) \neq 0$. Il y a donc précisément trois lignes de Stokes sortantes de z_0 , dont l'une est réelle et les deux autres sont symétriques par rapport à la droite réelle. Les angles entre ces courbes valent $\frac{2\pi}{3}$.

1.1.4 Lignes de type Stokes

Soit $D \subset S_Y$ un domaine régulier et soit $\gamma \subset D$ une courbe régulière. On fixe une détermination du moment complexe $\kappa_0(z)$ analytique dans D et un point $z_0 \in D$. On définit les fonctions $f_0(z; z_0, \kappa_0)$ et $f_\pi(z; z_0, \kappa_0)$:

$$\begin{cases} f_0(\cdot; z_0, \kappa_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \\ z \mapsto \Im \int_{z_0}^z \kappa_0(s) ds \end{cases} \quad \begin{cases} f_\pi(\cdot; z_0, \kappa_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \\ z \mapsto \Im \int_{z_0}^z (\kappa_0(s) - \pi) ds \end{cases}$$

On appelle $\mathcal{F}_0(\kappa_0)$ (resp. $\mathcal{F}_\pi(\kappa_0)$) la famille de courbes de niveau de $f_0(\cdot, z_0, \kappa_0)$ (resp. $f_\pi(\cdot, z_0, \kappa_0)$) :

$$\mathcal{F}_0(\kappa_0) := \{ \gamma \text{ courbe dans } S_Y \text{ telle que } f_0(z; z_0, \kappa_0) = \text{const} \quad \forall z \in \gamma \},$$

$$\mathcal{F}_\pi(\kappa_0) := \{ \gamma \text{ courbe dans } S_Y \text{ telle que } f_\pi(z; z_0, \kappa_0) = \text{const} \quad \forall z \in \gamma \}.$$

Ces familles ne dépendent pas du choix de point z_0 dans D .

Définition 1.7. Une courbe γ est une *ligne de type Stokes* pour κ_0 si $\gamma \in \mathcal{F}_0$ ou si $\gamma \in \mathcal{F}_\pi$.

La définition d'une ligne de type Stokes dépend du choix de la détermination du moment complexe. Une courbe verticale ne peut vérifier la définition de ligne de type Stokes que pour deux déterminations du moment complexe, disons κ_0 et $-\kappa_0$. Pour voir ça, il suffit de remarquer que $f_{0,\pi}(z, z_0, \sigma\kappa_0 + 2\pi m) = \sigma f_{0,\pi}(z, z_0, \kappa_0) + 2\pi m \Im(z - z_0)$, $f_0(z, z_0, \sigma\kappa_0 + 2\pi m) = \sigma f_0(z, z_0, \kappa_0) + (2m+1)\pi \Im(z - z_0)$ et $f_\pi(z, z_0, \sigma\kappa_0 + 2\pi m) = \sigma f_\pi(z, z_0, \kappa_0) + (2m-1)\pi \Im(z - z_0)$.

Lemme 1.8 (Corollaire 2.1 et Lemme 5.5 de [FK04a]). *Soit D un domaine régulier et κ_0 une détermination du moment complexe analytique dans D . Les courbes de chaque famille $\mathcal{F}_0(\kappa_0)$ et $\mathcal{F}_\pi(\kappa_0)$ forment une fibration du domaine D , i.e. :*

$$D = \bigcup_{\gamma_1 \in \mathcal{F}_0(\kappa_0)} \gamma_1 \quad \text{et} \quad D = \bigcup_{\gamma_2 \in \mathcal{F}_\pi(\kappa_0)} \gamma_2$$

De plus, dans un domaine régulier :

- deux courbes de familles différentes ne se croisent pas ou ne se croisent qu'une seule fois, i.e. soient $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$, $\gamma_1 \in \mathcal{F}_0$ et $\gamma_2 \in \mathcal{F}_\pi$ alors $\gamma_1 \cap \gamma_2$ contient au maximum un point ;
- dans un domaine régulier deux courbes de la même famille ne se croisent pas ou coïncident, i.e. soient $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{F}_0$ ou $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{F}_\pi$ alors soit $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \gamma_1$ soit $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$.
- une courbe canonique peut croiser une ligne de type de Stokes au plus une fois.

Dans chaque domaine régulier les champs de vecteurs $\bar{\kappa}(z)$ et $\bar{\kappa}(z) - \pi$ sont C^∞ et les lignes de type de Stokes de famille \mathcal{F}_0 (resp. \mathcal{F}_π) sont des courbes intégrales pour un champ de vecteurs $\bar{\kappa}(z)$ (resp. $\bar{\kappa}(z) - \pi$) (Lemme 2.1 de [FK04a]). Par conséquent, puisque $\bar{\kappa}(z) \in \mathbb{R}$ équivaut à $\mathcal{E}(z) \in \sigma(\mathbb{H}_0)$, on a :

Lemme 1.9. *Soit D un domaine tel que $D \cap \mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0)) \neq \emptyset$. Dans D , les lignes de type de Stokes de familles $\mathcal{F}_0(\kappa_0)$ et $\mathcal{F}_\pi(\kappa_0)$ sont verticales.*

Où l'on note $\mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0))$ la préimage par rapport à $\mathcal{E}(z)$ du spectre de l'opérateur périodique \mathbb{H}_0 , i.e. $\mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0)) := \{z \in S_Y \mid \mathcal{E}(z) := E - W(z) \in \sigma(\mathbb{H}_0)\}$.

1.1.5 Domaine canonique à partir d'une courbe canonique

Dans ce qui suit D est un domaine régulier. On fixe une détermination κ du moment complexe analytique dans D . Le terme *segment* d'une courbe désigne un sous-ensemble connexe et compact de cette courbe. Soient $\gamma \subset D$ une courbe canonique pour la détermination κ du moment complexe, z_1 et z_2 ces bouts tels que $\Im z_1 < \Im z_2$.

Définition 1.10. On dit qu'un domaine $K \subset D$ est un domaine canonique *entourant* γ si K est canonique pour le triplet $\{\kappa, z_1, z_2\}$ et $\gamma \subset K$.

Le lemme suivant établit l'existence des petits domaines canoniques.

Lemme 1.11 (le Lemme 4.1 de [FK05], domaine canonique local). *Soit γ une courbe canonique compacte. On peut toujours construire un domaine canonique K_γ qui l'entoure.*

Ce lemme est une conséquence du fait que des courbes obtenues par des petites déformations C^1 d'une courbe canonique compacte sont canoniques.

Définition 1.12. Les domaines canoniques dont l'existence est assurée par le Lemme 1.11 s'appellent domaines canoniques *locaux*.

1.1.6 Construction d'une courbe canonique à partir d'une courbe pré-canonique

La construction d'une courbe canonique s'appuie sur l'existence d'une courbe canonique dans un voisinage arbitraire d'une courbe pré-canonique.

Définition 1.13. Une courbe *pré-canonique* est une courbe régulière composée de segments des courbes canoniques et/ou de lignes de Stokes.

Les courbes pré-canoniques sont faciles à construire et vérifient une propriété importante :

Lemme 1.14 (Proposition 6.2 de [FK04a]). *Soient D un domaine régulier, α une courbe pré-canonique ayant l'origine en z_1 et l'extrémité en z_2 et $V \subset D$ un voisinage de α . Pour chaque voisinage V_1 de z_1 , il existe une courbe canonique γ telle que $\gamma \subset V$ et γ a l'origine en $\tilde{z}_1 \in V_1$ et l'extrémité en z_2 .*

Ce lemme dit que, dans un voisinage arbitraire d'une courbe pré-canonique, on peut trouver une courbe canonique.

1.1.7 Symétrie pour les courbes et les domaines canoniques

Le lemme suivant permet de construire des courbes canoniques par symétrie :

Lemme 1.15. *Soit γ une courbe pré-canonique (resp. canonique) pour une branche du moment complexe $\kappa(z)$. Alors son symétrique pour \mathbb{R} , $\bar{\gamma}$ est une courbe pré-canonique (resp. canonique) pour $\kappa^*(z)$.*

Démonstration. Soit γ une courbe canonique pour la détermination $\kappa(z)$ du moment complexe. Donc le long de γ on a :

$$\frac{d\Im \int_{z_\gamma}^z \kappa(s) ds}{d\Im z} > 0 \quad \frac{d\Im \int_{z_\gamma}^z (\kappa(s) - \pi) ds}{d\Im z} < 0$$

La courbe $\bar{\gamma}$ est verticale et lisse, car γ l'est par définition de la courbe canonique. La détermination $\kappa(z)$ est continue sur γ donc la détermination $\kappa^*(z)$ est continue sur $\bar{\gamma}$. Considérons $\int_{\bar{\gamma}}^z \kappa^*(s)ds$. Par définition de $\kappa^*(z)$, pour chaque $z \in \bar{\gamma}$ on a $\kappa^*(z) = \overline{\kappa(\bar{z})}$ où $\bar{z} \in \gamma$. Donc on a :

$$\Im \int_{\bar{\gamma}}^z (\kappa^*(s))ds = -\Im \int_{\bar{\gamma}}^z \overline{\kappa^*(s)}ds = -\Im \int_{\bar{\gamma}}^z \overline{\kappa^*(s)} \overline{ds} = -\Im \int_{z,\gamma}^{\bar{z}} \kappa(s)ds$$

Mais $\Im \int_{z,\gamma}^{\bar{z}} \kappa(s)ds$ est une fonction croissante de $\Im \bar{z}$ et donc, fonction décroissante de $\Im z$. Le même argument marche pour $(\kappa^*(z) - \pi)$. On obtient donc :

$$\frac{d\Im \int_{\bar{\gamma}}^z (\kappa^*(s))ds}{d\Im z} > 0 \quad \frac{d\Im \int_{\bar{\gamma}}^z (\kappa^*(s) - \pi)ds}{d\Im z} < 0$$

ce qui démontre que la courbe $\bar{\gamma}$ est canonique par rapport à la détermination $\kappa^*(z)$ du moment complexe. \square

Corollaire 1.16. *Si un domaine D est un domaine canonique pour une détermination $\kappa(z)$ du moment complexe analytique sur ce domaine, alors \bar{D} est un domaine canonique pour $\kappa^*(z)$.*

Si $(D \cap \bar{D}) \cap \mathcal{E}^{-1}\sigma(\mathbb{H}_0) \neq \emptyset$, i.e. contient une partie d'une préimage réelle d'une zone spectrale de \mathbb{H}_0 , alors $D \cup \bar{D}$ est un domaine canonique pour la détermination obtenue de κ par prolongement analytique dans $D \cup \bar{D}$.

Démonstration. Pour démontrer le premier point il suffit d'utiliser la symétrie réelle et la définition d'un domaine canonique. La formule clé est :

$$\Im \int_{z_0}^z \kappa^*(s)ds = \Im \int_{z_0}^z \overline{\kappa(\bar{s})}ds = \Im \int_{z_0}^{\bar{z}} \kappa(s)ds$$

Comme D est un domaine canonique, la partie imaginaire de cet intégrale est décroissante en $\Im \bar{z}$, donc croissante en $\Im z$. Il en est de même pour les intégrales de $\kappa^* - \pi$. \square

1.2 Méthodes de prolongement des asymptotiques

1.2.1 Diagrammes de prolongement pour les solutions

Le Théorème 1.5 permet de construire des solutions au comportement asymptotique simple dans les domaines canoniques. Mais les domaines canoniques ne sont pas des domaines maximaux sur lesquels les solutions vérifient le CAS. On démontre le CAS dans des domaines plus grands par des méthodes de prolongement des asymptotiques. On introduit une définition qui généralise celle de domaines canoniques.

Définition 1.17. On dit qu'un domaine D est le *diagramme de prolongement* pour une solution f de (AdiabQP) si f vérifie un CAS dans D .

Cette partie est consacrée à des méthodes de prolongement des asymptotiques des solutions construites localement sur des diagrammes de prolongement. Ces méthodes sont développées par A. Fedotov et F. Klopp. Il y a trois outils principaux du prolongement :

- Le Lemme du Rectangle,

- Le Principe des Domaines Adjacents,
- Le Lemme de Stokes.

On va parler de chaque outil en détail pour pouvoir l'appliquer par la suite.

On utilise l'adjectif "constant" pour désigner des domaines qui ne dépendent pas de ε .

1.2.2 Lemme du Rectangle

Cet outil permet de prolonger l'asymptotique d'une solution sur des domaines où l'asymptotique reste croissante quand on longe $\Re z = \text{const}$.

Fixons y_1 et y_2 réels tels que $y_1 < y_2$. Soit $S = \{z \in \mathbb{C} \mid y_1 \leq \Im z \leq y_2\}$. Soient γ_1 et γ_2 deux courbes verticales telles que :

- γ_1 et γ_2 ne se croisent pas dans S ,
- γ_1 et γ_2 croisent les deux lignes $\Im z = y_1$ et $\Im z = y_2$,
- dans S , γ_1 est située à gauche de γ_2 .

Considérons un "rectangle" R , un ensemble compact limité par ∂S , γ_1 et γ_2 . On pose $D = R \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$. Le lemme suivant, appelé « Lemme du rectangle » a lieu.

Lemme 1.18 (Le Lemme 5.1 de [FK05], Lemme du rectangle). *On fixe $E = E_0$ et on suppose que R est régulier. Soit f une solution cohérente de l'équation (AdiabQP).*

Alors il existe ε_0 tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ on a :

- *Si $\Im k > 0$ dans D et f a un CAS $f \sim \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int^z k(s) ds\right) \Phi_+$ au voisinage de γ_2 , alors elle garde le même CAS dans un domaine constant qui contient R .*
- *Si $\Im k < 0$ dans D et f a un CAS $f \sim \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int^z k(s) ds\right) \Phi_+$ au voisinage de γ_1 , alors elle garde le même CAS dans un domaine constant qui contient R .*

On voit que $\Re\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \kappa(s) ds\right)$ est croissante avec $\Re z$ si $\Im \kappa < 0$ et les solutions qui ont CAS $\exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int^z k(s) ds\right) \Phi_+$ sont croissantes à droite. Par contre, si $\Im \kappa > 0$, $\Re\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \kappa(s) ds\right)$ est décroissante avec $\Re z$ et les solutions qui ont CAS $\exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int^z k(s) ds\right) \Phi_+$ sont croissantes à gauche.

1.2.3 Principe des Domaines Adjacents

Soient γ un segment d'une courbe verticale et S la plus petite bande horizontale qui le contient. Soit $U \subset S$ un domaine régulier. On appelle U un domaine *adjacent* à γ si $\gamma \subset \partial U$.

La proposition suivante, appelée Principe des Domaines Adjacents, permet de justifier le CAS d'une solution décroissante.

Proposition 1.19 (Le Lemme 5.6 de [FK05], Principe des Domaines Adjacents). *Soit γ un segment d'une courbe canonique. Supposons que la solution f de l'équation (AdiabQP) vérifie le CAS dans un domaine adjacent à γ . Alors f a le même CAS dans tout domaine canonique enveloppant γ .*

Pour appliquer ce principe nous avons besoin de décrire les domaines canoniques enveloppant une courbe canonique donnée.

1.2.4 Descriptif des domaines canoniques enveloppants

Soit D un domaine régulier. On fixe une détermination κ du moment complexe analytique dans D . La proposition suivante fournit une description des domaines canoniques enveloppant une courbe canonique donnée.

Proposition 1.20 (La Proposition 6.3 de [FK02]). *Soit γ un segment d'une courbe canonique. Notons $\tilde{\gamma}$ la courbe γ privée de ses extrémités. Supposons qu'un domaine $K \subset D$ est simplement connexe et $\tilde{\gamma} \subset K$. Alors K est un domaine canonique enveloppant γ si et seulement si il se compose des courbes pré-canoniques obtenues par le remplacement d'un segment intérieur de γ par une courbe pré-canonique.*

1.2.5 Lemme du Trapèze

Il est souvent difficile de trouver un domaine canonique maximal enveloppant une courbe canonique donnée. Le lemme suivant, appelé Lemme de Trapèze, nous fournit un moyen pour construire des domaines canoniques enveloppants simples.

Lemme 1.21 (Le Lemme 5.4 de [FK04a], Lemme de Trapeze). *Soient γ_0 une courbe canonique et γ un segment intérieur de γ_0 . Soit U un domaine régulier adjacent à γ_0 . Supposons que $\Im k \neq 0$ dans U . Soit σ_d une ligne de type de Stokes qui commence à l'extrémité inférieure de γ et va vers le haut. Soit σ_u une ligne de type de Stokes qui commence à l'extrémité supérieure de γ et va vers le bas.*

Alors :

- Si $\tilde{\gamma} \subset U$ est une autre courbe canonique qui croise σ_u et σ_d comme sur le dessin 1.21, et qui ne croise pas γ et si $T \subset U$ est le domaine simplement connexe délimité par γ , $\tilde{\gamma}$, σ_d et σ_u , alors T est une partie d'un domaine canonique enveloppant γ .
- Si $\tilde{\gamma} \subset U$ est une autre courbe canonique qui croise σ_u et qui commence à l'extrémité inférieure de γ et si $T \subset U$ est le domaine simplement connexe délimité par γ , $\tilde{\gamma}$ et σ_u , alors T est une partie d'un domaine canonique enveloppant γ .

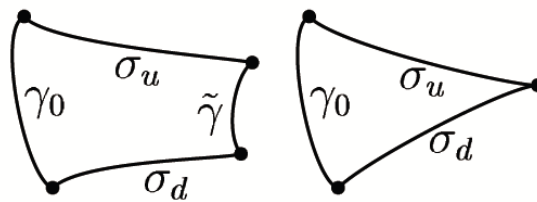


FIGURE III.1 – Lignes de type de Stokes dans le Lemme 1.21

1.2.6 Lemme de Stokes

Soit z_0 est un point de branchement du moment complexe tel que $W'(z_0) \neq 0$. Trois lignes de Stokes commencent en z_0 . L'angle entre ces lignes en z_0 est égal à $\frac{2\pi}{3}$. On utilise la notation σ_1 , σ_2 et σ_3 pour ces lignes pourvue que σ_1 soit verticale en z_0 (il se peut qu'il y ait deux ou trois lignes verticales, on en choisit une).

Soit $\tilde{\sigma}_1$ un segment de σ_1 qui commence en z_0 et contient un seul point de branchement de

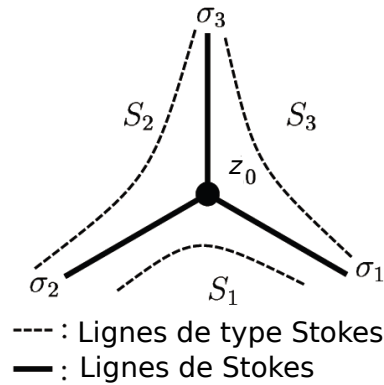


FIGURE III.2 – Lemme de Stokes

moment complexe. Soit V un voisinage de $\tilde{\sigma}_1$. Supposons que V est suffisamment petit pour que les lignes σ_1 , σ_2 et σ_3 le divisent en trois secteurs. Nous désignons par S_1 le secteur situé entre σ_1 et σ_2 , par S_2 le secteur situé entre σ_2 et σ_3 , et par S_3 le troisième secteur. On a le lemme suivant, appelé lemme de Stokes.

Lemme 1.22 (Le Lemme 5.6 de [FK04a], Lemme de Stokes). *Supposons que V est suffisamment petit. Soit f une solution au CAS $f \sim \exp(\frac{i}{\varepsilon} \int^z \kappa(s) ds) \Psi_+$ à l'intérieur du secteur $S_1 \cup \sigma_2 \cup S_2$ de V . De plus, supposons que dans S_1 au voisinage de σ_1 , l'on ait :*

- $\Im \kappa > 0$ si S_1 est à gauche de σ_1 ,
- $\Im \kappa < 0$ si S_1 est à droite de σ_1 .

Alors f a un CAS dans $V \setminus \sigma_1$ et le terme principal de l'asymptotique est obtenu par prolongement analytique de $S_1 \cup \sigma_2 \cup S_2$ à $V \setminus \sigma_1$.

1.3 Formules asymptotiques pour les wronskiens de solutions

1.3.1 Solutions h et g au comportement asymptotique standard

Fixons $E = E_0$. Soient h et g deux solutions de l'équation (AdiabQP) au comportement asymptotique standard dans des domaines réguliers D_h et D_g :

$$h \sim e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_h}^z \kappa_h(s) ds} \Phi_h(x, z, E) \quad , \quad g \sim e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_g}^z \kappa_g(s) ds} \Phi_g(x, z, E) \quad (3.1.6)$$

Ici κ_h et κ_g sont des déterminations du moment complexe analytiques dans D_h et D_g . Φ_h et Φ_g désignent les solutions de Bloch canoniques associées à κ_h et κ_g et normalisées respectivement en z_h et z_g .

Par la condition de cohérence, le wronskien des solutions h et g est ε -périodique en z . Nous allons décrire l'asymptotique des coefficients de Fourier de ce wronskien. Pour ce faire nous avons besoin d'introduire certains objets.

On suppose par la suite que $D_g \cap D_h$ contient un domaine simplement connexe, disons d .

1.3.2 Arcs

Soit γ une courbe qui va de z_g à z_h de façon suivante : elle va de z_g à un point de d en restant dans D_g et puis de ce point de d à z_h en restant dans D_h . On dit que γ est *un arc associé au triplet h, g et d* .

Comme d est simplement connexe et régulier, toutes les arcs associés au triplet h, g et d appartiennent à la même classe d'équivalence dans le sens de la Définition 1.30. On note leur classe d'équivalence $\gamma(h, g, d)$.

Considérons les prolongements analytiques de κ_h et de κ_g le long de $\gamma(h, g, d)$. Les propriétés du moment complexe impliquent que pour tout z dans un petit voisinage V de $\gamma(h, g, d)$ on a :

$$\kappa_g(z) = \sigma \kappa_h(z) + 2\pi m \quad (3.1.7)$$

ou $m \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in \{-, +\}$.

Nous appelons $\sigma = \sigma(h, g, d)$ *signature* et $m = m(h, g, d)$ *indice* de $\gamma(h, g, d)$.

1.3.3 Domaines de rencontre

Soit d comme ci-dessus.

Définition 1.23. On appelle *d domaine de rencontre* des solutions g et h si les fonctions $\Im \kappa_g$ et $\Im \kappa_h$ ne s'annulent pas dans d et sont de signes opposés.

Pour ε petit, le facteur exponentiel est dominant dans l'asymptotique des solutions g et h . Donc dans un domaine de rencontre les solutions h et g croissent en sens opposé le long d'une ligne $\Im z = \text{const}$.

1.3.4 Amplitude et action sur un arc

On appelle l'intégrale

$$S(h, g, d) = \int_{\gamma(h, g, d)} \kappa_g(s) ds \quad (3.1.8)$$

action sur un arc $\gamma(h, g, d)$. Évidemment l'action est correctement définie, car l'intégrale prends les mêmes valeurs sur les arcs équivalents.

Supposons que $\mathcal{E}(z) \notin P \cup Q$ le long de $\gamma(h, g, d)$. Considérons les prolongements analytiques de la fonction $q_g(z) = \sqrt{k'(\mathcal{E}(z))}$ et de la 1-forme $\Omega_g(\mathcal{E}(z))$ dans la définition de la solution de Bloch canonique le long de $\gamma(h, g, d)$. On pose :

$$A(h, g, d) = \left(\frac{q_g}{q_h} \right) \Big|_{z=z_h} e^{\int_{\gamma} \Omega_g} \quad (3.1.9)$$

On appelle $A(h, g, d)$ *amplitude* de l'arc γ . L'amplitude est définie correctement car elle coïncide sur tous les arcs équivalents.

1.3.5 Coefficients de Fourier

Soit $S(d)$ une bande minimale horizontale, $S(d) = \{z \mid C_1 < \Im z < C_2\}$, qui contient le domaine d . La proposition suivante a lieu :

Proposition 1.24 (Proposition 8.1 de [FK04b]). *Soient d un domaine de rencontre des solutions h et g , $m = m(h, g, d)$ l'indice associé. Alors, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, pour tout $z \in S(d)$, on a :*

$$w[h, g] = w_m(E) e^{\frac{2\pi im}{\varepsilon}(z-z_h)} (1 + o(1)) \quad (\text{Wrons})$$

où $w_m(E)$ est une constante donnée par :

$$w_m(E) = A(h, g, d) e^{\frac{i}{\varepsilon} S(h, g, d)} w[\Phi_+(\cdot, z_h), \Phi_-(\cdot, z_h)] \quad (\text{FCoef})$$

avec $\Phi_+ = \Phi_h$ et Φ_- la solution de Bloch canonique complémentaire à Φ_+ .

De plus, pour tout compact $K \subset S(d)$, il existe un voisinage complexe V_0 de E_0 tel que l'asymptotique (Wrons) est uniforme en $(z, E) \in K \times V_0$.

Pour mieux comprendre ce théorème il suffit de remarquer que le wronskien de deux solutions cohérentes est ε -périodique en z . Ainsi il est décomposable en série de Fourier :

$$w[h, g] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{\frac{2\pi im(z-z_0)}{\varepsilon}}.$$

Le facteur w_m est le terme principal de l'asymptotique du m -ème coefficient de Fourier a_m de $w[h, g]$.

Corollaire 1.25. *Soit le domaine de rencontre d des solutions f et g est telle qu'il existe $R > 0$ tel que $S_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |\Im z| \leq R\} \subset S(d)$, alors pour chaque $R' < R$ et pour chaque $z \in S_{R'}$, on a :*

$$w[h, g] = w_m(E) e^{\frac{2\pi im}{\varepsilon}(z-z_h)} \left(1 + o_E(1) + O\left(e^{-\frac{p}{\varepsilon n}}\right) \right) \quad (3.1.10)$$

où $w_m(E)$ est donné par (FCoef), $o_E(1)$ est indépendant de z et $p = 2\pi(R - R')$.

Démonstration du corollaire 1.25. On décompose $w[h, g](z, E, \varepsilon)$ en série de Fourier dans la bande S_R : $w[h, g] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{\frac{2\pi im(z-z_0)}{\varepsilon}}$. On écrit l'égalité de Parseval sur $\Im z = R$ pour obtenir pour chaque $k < m$ l'estimation $|a_k| \leq c e^{\frac{2\pi(m-k)R}{\varepsilon}}$. Puis on utilise l'égalité de Parseval sur $\Im z = -R$ pour estimer $|a_k| \leq c e^{\frac{2\pi(k-m)R}{\varepsilon}}$ pour chaque $k > m$. D'où on obtient (3.1.10). \square

1.3.6 Principe de comportement standard à plusieurs composantes

On aura besoin d'une généralisation du CAS. Soient deux points z_0 et z_1 fixés. On dit qu'une solution cohérente f de (AdiabQP) vérifie le CAS à deux composantes et plusieurs fréquences, qu'on va noter CASpl, au voisinage U du point z_1 si f vérifie :

$$f(x, z, E, \varepsilon) = A_+(z, E, \varepsilon)(\Phi_+(x, z, E, z_0) + o(1)) + A_-(z, E, \varepsilon)(\Phi_-(x, z, E, z_0) + o(1))$$

avec $A_{\pm}(z, E, \varepsilon) = \sum_{\alpha_k \in \text{Adm}_{\pm}} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0, \alpha_k}^z \kappa_{\alpha_k}(s) ds + n(\alpha_k, z_1, E)\right)$

et $n(\alpha_k, z_1, E) = \Delta \arg q(z_1, z_0, E) + \int_{z_0, \alpha}^{z_1} \Omega(s) ds$ (3.1.11)

La forme méromorphe Ω et le facteur q sont définis par (1.1.29) sur la page 38. Ici les contours d'intégration α_k ont l'origine en z_0 et l'extrémité en z_1 . On somme sur les classes d'équivalence dans un ensemble de classes d'équivalence (voir la Définition 1.30) des courbes horizontales, où Adm_+ désigne les courbes de signature positive et Adm_- désigne les courbes dont la signature est négative.

Le lemme suivant est le principe de comportement asymptotique standard à deux composantes :

Lemme 1.26. *Soient f , g et h des solutions cohérentes de l'équation (AdiabQP). Supposons que f (resp. g et h) vérifient le CAS dans A_1 (resp. A_2) et que g et h forment une base de solutions de (AdiabQP). Soit d un domaine de rencontre pour f et g et $\gamma(f, g, d)$ un arc associé. Soient \tilde{d} un domaine de rencontre pour f et h et $\gamma(f, h, \tilde{d})$ un arc associé. Alors f vérifie le CAS à deux composantes dans l'intersection $S(d) \cap S(\tilde{d}) \cap A_2$:*

$$\begin{aligned} f(x, z, E, \varepsilon) &= \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_f, \gamma(f, h, \tilde{d})}^z \kappa_f|_{\gamma(f, h, \tilde{d})}(s) ds\right) \left(\Phi_{+,f}|_{\gamma(f, h, \tilde{d})}(x, z, E, z_f) + o(1)\right) \\ &+ \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_f, \gamma(f, g, d)}^z \kappa_f|_{\gamma(f, g, d)}(s) ds\right) \left(\Phi_{+,f}|_{\gamma(f, g, d)}(x, z, E, z_f) + o(1)\right) \end{aligned}$$

où

- $\Phi_{+,f}|_{\gamma(f, h, \tilde{d})}(x, z, E, z_f)$ désigne le prolongement analytique de la solution canonique $\Phi_{+,f}$ associé à la détermination κ_f et normalisée en z_f le long de l'arc $\gamma(f, g, d)$.
- $\kappa_f|_{\gamma(f, h, \tilde{d})}(z)$ (resp. $\kappa_f|_{\gamma(f, g, d)}(s)$) désigne le prolongement analytique le long de $\gamma(f, h, \tilde{d})$ (resp. $\gamma(f, g, d)$) de la détermination κ_f analytique au voisinage de z_f .
- $\int_{z_f, \gamma(f, h, \tilde{d})}^z$ (resp. $\int_{z_f, \gamma(f, g, d)}^z$) désigne l'intégrale, où on intègre de z_f à z_h (resp. à z_g) le long de $\gamma(f, h, \tilde{d})$ (resp. $\gamma(f, g, d)$) et puis de z_h (resp. z_g) jusqu'à z on intègre le long d'une courbe dans A_2

Démonstration. On exprime la solution f dans la base de solutions $\{g, h\}$

$$f(x, z, E, \varepsilon) = \frac{1}{w[g, h](z)} (w[f, h](z)g(x, z, E, \varepsilon) + w[g, f](z)h(x, z, E, \varepsilon)).$$

Dans le domaine de rencontre d (resp. \tilde{d}) l'asymptotique de wronskien $w[f, g](z)$ (resp. $w[f, h](z)$) se calcule par les formules (Wrons) et (FCoef) (sur la page 65) :

$$w[f, g](z) = A(f, g, d) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_f, \gamma(f, g, d)}^{z_g} \kappa_f(s) ds + \frac{2\pi i}{\varepsilon} m(f, g, d)(z - z_g)\right) w[\Phi_{+,g}, \Phi_{-,g}](z_g)(1+o(1)),$$

$$w[f, h](z) = A(f, h, \tilde{d}) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_f, \gamma(f, h, \tilde{d})}^{z_h} \kappa_f(s) ds + \frac{2\pi i}{\varepsilon} m(f, h, \tilde{d})(z - z_h)\right) w[\Phi_{+,h}, \Phi_{-,h}](z_h)(1+o(1))$$

avec $A(f, g, d)$ et $A(f, h, \tilde{d})$ définis dans (3.1.8), $m(f, g, d)$ et $m(f, h, \tilde{d})$ définis dans (3.1.7). Les wronskiens de solutions cohérentes sont ε -périodiques en z :

$$w[f, g](z + \varepsilon) = w[f, g](z) \quad \text{et} \quad w[f, h](z + \varepsilon) = w[f, h](z).$$

Ainsi l'asymptotique de $w[f, g](z)$ est valable pour $z \in S(d)$ et l'asymptotique de $w[f, h](z)$ est valable dans $S(\tilde{d})$. Pour $z \in S(d) \cap S(\tilde{d})$ on obtient :

$$\begin{aligned} f(x, z, E, \varepsilon) &= \frac{1}{w[g, h](z)} (w_{m(f, h, \tilde{d})} e^{\frac{2\pi i}{\varepsilon} m(f, h, \tilde{d})(z - z_h)} (1 + o(1)) g(x, z, E, \varepsilon) - \\ &\quad - w_{m(f, g, d)} e^{\frac{2\pi i}{\varepsilon} m(f, g, d)(z - z_g)} (1 + o(1)) h(x, z, E, \varepsilon)) \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Le wronskien $w[g, h]$ peut également être représenté comme :

$$w[g, h](z) = w_{m(g, h, A_2)} e^{\frac{2\pi i}{\varepsilon} m(g, h, A_2)(z - z_h)} (1 + o(1))$$

où $m(g, h, A_2)$ vient de $\kappa_g(s) = \kappa_h(s) + 2\pi m(g, h, A_2)$ pour tout $s \in A_2$. Il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned} \kappa_g(z) &= \kappa_f|_{\gamma(f, h, \tilde{d})}(z) + 2\pi(m(g, h, A_2) - m(f, h, \tilde{d})) \\ \text{et } \kappa_h(z) &= \kappa_f|_{\gamma(f, g, d)}(z) + 2\pi(m(g, h, A_2) - m(f, g, d)). \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

On exprime :

$$\begin{aligned} w[g, h](z) &= -A(g, h) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_g}^{z_h} \kappa_g(s) ds + \frac{2\pi i}{\varepsilon} m(g, h)(z - z_h)\right) w[\Phi_{+, h}, \Phi_{-, h}](z_h) (1 + o(1)) \\ &= -A(g, h) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_g}^{z_h} \kappa_f|_{\gamma(f, h)}(s) ds - \frac{2\pi i}{\varepsilon} m(f, h)(z_h - z_g) + \frac{2\pi i}{\varepsilon} m(g, h)(z - z_g)\right) \\ &\quad w[\Phi_{+, h}, \Phi_{-, h}](z_h) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

D'où on a :

$$\frac{w[f, h](z)}{w[g, h](z)} = \frac{A(f, h)}{A(g, h)} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_f, \gamma(f, h)}^{z_g} \kappa_f(s) ds + \frac{2\pi i}{\varepsilon} (m(f, h) - m(g, h))(z - z_g)\right) (1 + o(1)). \quad (3.1.14)$$

et aussi, par le même argument :

$$\frac{w[f, g](z)}{w[h, g](z)} = \frac{A(f, g)}{A(h, g)} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_f, \gamma(f, g)}^{z_h} \kappa_f(s) ds + \frac{2\pi i}{\varepsilon} (m(f, g) - m(g, h))(z - z_h)\right) (1 + o(1)). \quad (3.1.15)$$

Pour $z \in S(d) \cap S(\tilde{d}) \cap A_2$ on utilise les formules (3.1.14) et (3.1.15) pour les wronskiens et le CAS des solutions g et h pour obtenir :

$$\begin{aligned} f(x, z) &= \frac{A(f, h)}{A(g, h)} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_f, \gamma(f, h)}^{z_g} \kappa_f(s) ds + \frac{2\pi i}{\varepsilon} (m(f, h) - m(g, h))(z - z_g)\right) (1 + o(1)) \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_g}^z \kappa_g(s) ds\right) (\Phi_{+, g}(x, z, z_g) + o(1)) + \\ &+ \frac{A(f, g)}{A(h, g)} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_f, \gamma(f, g)}^{z_h} \kappa_f(s) ds + \frac{2\pi i}{\varepsilon} (m(f, g) - m(g, h))(z - z_h)\right) (1 + o(1)) \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_h}^z \kappa_h(s) ds\right) (\Phi_{+, h}(x, z, z_h) + o(1)). \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\frac{A(f, h)}{A(g, h)} \Phi_{+,g}(x, z, z_g) = \Phi_{+,f}|_{\gamma(f,h)}(x, z, z_f) \quad \text{et} \quad \frac{A(f, g)}{A(h, g)} \Phi_{+,h}(x, z, z_h) = \Phi_{+,f}|_{\gamma(f,g)}(x, z, z_f).$$

Utilisant (3.1.13), on obtient l'assertion souhaitée pour tout $z \in A_2 \cap S(d) \cap S(\tilde{d})$:

$$\begin{aligned} f(x, z) = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_f, \gamma(f,h)}^z \kappa_f(s) ds\right) & (\Phi_{+,f}|_{\gamma(f,h)}(x, z, z_f) + o(1)) + \\ & + \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_f, \gamma(f,g)}^z \kappa_f(s) ds\right) (\Phi_{+,f}|_{\gamma(f,g)}(x, z, z_f) + o(1)). \end{aligned}$$

Ceci démontre le lemme. □

Le corollaire suivant sera utilisé dans l'application au calcul de l'asymptotique de la matrice de monodromie. On introduit des domaines de type A , disons A_1, A_2, \dots, A_k , et des domaines de type B , disons B_1, B_2, \dots, B_{k-1} . Dans chaque A_i il existe une base $\{g_i, h_i\}$ de solutions de (AdiabQP) telle que :

1. g_i et h_i ont le CAS dans A_i ,
2. Dans A_i on a $\kappa_{g_i}(z) = -\kappa_{h_i}(z) + 2\pi m(g_i, h_i)$,
3. B_{i-1} ($i = 2, \dots, k$) et B_i ($i = 1, \dots, k-1$) font partie de diagrammes de prolongement de g_i et de h_i (c.f. Définition 1.17)
4. B_i ($i = 1, \dots, k-1$) est un domaine de rencontre de g_i et g_{i+1} , de g_i et h_{i+1} , de h_i et g_{i+1} , de h_i et h_{i+1} (c.f. Définition 1.23).

On note $S = \bigcap_{i=1}^k S(A_i) \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} S(B_i)$. Supposons que $S \neq \emptyset$. Pour $\{f_i\}_{i=2}^{k-1}$ avec $f_i \in \{g_i, h_i\}$, on introduit une courbe composée :

$$\gamma(g_1, \{f_i\}, g_k) = \gamma(f_{k-1}, g_k, B_{k-1}) \circ \dots \circ \gamma(f_3, f_4, B_3) \circ \gamma(f_2, f_3, B_2) \circ \gamma(g_1, f_2, B_1).$$

On note $Adm(g_1, g_k)$ l'ensemble de classes d'équivalence toutes ces courbes composées :

$$Adm(g_1, g_k) := \{[\gamma(g_1, \{f_i\}, g_k)] , f_i \in \{g_i, h_i\}\}.$$

De la même façon on introduit $Adm(g_1, h_k)$, $Adm(h_1, g_k)$ et $Adm(h_1, h_k)$.

Corollaire 1.27. Soient $\{A_i\}_{i=1}^k$ les domaines de type A et $\{g_i, h_i\}$, $i = 1, \dots, k$, les bases de solutions de (AdiabQP) associées. Soient $\{B_i\}_{i=1}^{k-1}$ les domaines de type B associés. Alors les solutions g_1 et h_1 vérifient le CAS à plusieurs composantes dans $S \cap A_k$, i.e. pour tout $z \in A_k$ on a :

$$\begin{aligned} g_1(x, z) = \sum_{[\gamma(g_1, h_k)] \in Adm(g_1, h_k)} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_{g_1, \gamma(g_1, h_k)}}^z \kappa_{g_1}(s) ds\right) & (\Phi_{+,g_1}|_{\gamma(g_1, h_k)}(x, z, z_{g_1}) + o(1)) + \\ + \sum_{[\gamma(g_1, g_k)] \in Adm(g_1, g_k)} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_{g_1, \gamma(g_1, g_k)}}^z \kappa_{g_1}(s) ds\right) & (\Phi_{+,g_1}|_{\gamma(g_1, g_k)}(x, z, z_{g_1}) + o(1)) \end{aligned}$$

Démonstration. La démonstration du Corollaire 1.27 se résume en application successive du Lemme 1.26 avec $d = B_i$, $\tilde{d} = B_i$, $A_1 = A_i$ et $A_2 = A_{i+1}$, $i = 1, \dots, k-1$. On remplace $g = g_{i+1}$ et $h = h_{i+1}$. On choisit $f = g_i$ et puis $f = h_i$. □

2 Base cohérente $\{f_J, f_J^*\}$ associée à une préimage J de zone spectrale de \mathbb{H}_0 et ses diagrammes de prolongement

2.1 Objets géométriques associés au moment complexe

Dans cette section, on définit une détermination du moment complexe qui sera particulièrement utile pour les constructions. Puis on formule les propriétés de cette détermination importantes pour la méthode WKB complexe. Notamment, on décrit les courbes et domaines canoniques pour cette détermination, ainsi que les lignes de Stokes et lignes de type Stokes.

2.1.1 Détermination naturelle κ_J du moment complexe

Considérons une préimage de zone spectrale de \mathbb{H}_0 , c'est-à-dire un intervalle $J \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ (voir la Section 1.9.4). Soit z_J un point intérieur de J . On peut choisir un voisinage complexe $V_J \subset S_Y$ du point z_J suffisamment petit pour qu'il ne contienne pas de points de branchement du moment complexe, i.e. $V_J \cap \mathcal{B} = \emptyset$. La condition $E \in \Sigma_\delta$ implique que l'ensemble des points de branchement du moment complexe dans la bande S_Y coïncide avec l'ensemble \mathcal{B} . Alors V_J est régulier et on peut choisir une détermination κ_J du moment complexe analytique dans V_J . Fixons la détermination κ_J par la condition :

$$\kappa_J(z_J) \in (0, \pi) \quad (3.2.1)$$

Lemme 2.1. *Il existe une unique détermination κ_J du moment complexe analytique dans V_J qui vérifie la condition (3.2.1).*

Démonstration. Soit $D \subset V_J$, un domaine régulier qui ne croise pas de préimages de zones spectrales de \mathbb{H}_0 . Dans D la détermination principale κ_p du moment complexe est analytique. Alors chaque détermination du moment complexe analytique dans D peut être représentée en termes de la détermination principale κ_p par :

$$\kappa_{\sigma, m} = \sigma \kappa_p + 2\pi m$$

avec unique signature $\sigma \in \{+, -\}$ et indice $m \in \mathbb{Z}$. Prolongeant analytiquement κ_p dans V_J on obtient $\tilde{\kappa}_p(z_J) \in (\pi m, \pi(m+1))$ pour un $m \in \mathbb{Z}$. Donc il existe un unique couple $\{\sigma, m\}$ tel que la détermination κ_J qui coïncide avec $\kappa_{\sigma, m}$ dans D et qui est analytique dans V_J vérifie la condition (3.2.1). \square

Définition 2.2. On appelle κ_J la détermination *naturelle* du moment complexe (pour l'intervalle $J \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$).

Remarque 2.3. La détermination κ_J est définie uniquement par l'intervalle J et ne dépend pas de choix du point $z_J \in J$.

2.1.2 Propriétés de la détermination naturelle κ_J et les lignes de Stokes

On passe à des propriétés de la détermination naturelle κ_J très utilisées par la suite. Pour cela, on introduit quelques notations relatives aux préimages réelles de zones spectrales de \mathbb{H}_0 . Considérons un intervalle $J \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$.

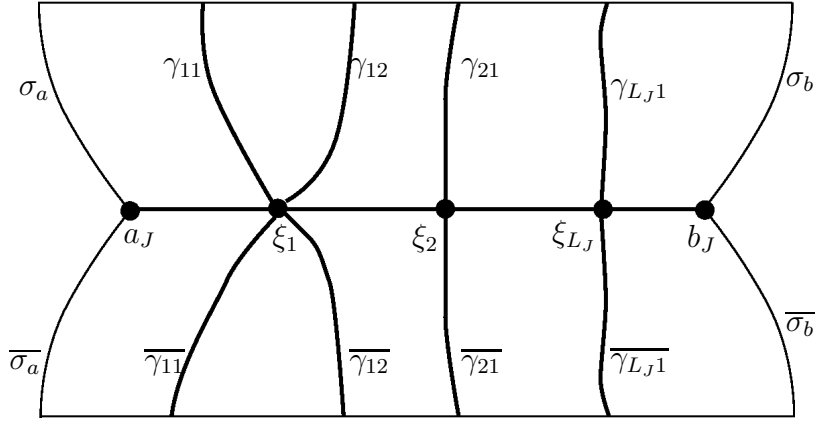


FIGURE III.3 – Ensemble $\mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0)) \cap \mathbb{R}$ et les lignes de Stokes $\sigma_a, \sigma_b, \overline{\sigma}_a, \overline{\sigma}_b$

- On note a_J et b_J des bords de l'intervalle J , $J = [a_J, b_J]$. L'entier m_J désigne le numéro de la zone spectrale de \mathbb{H}_0 dans laquelle se trouve $\mathcal{E}(J)$, *i. e.* $\mathcal{E}(z) \subset [E_{2m_J-1}, E_{2m_J}]$. L'entier L_J désigne le nombre des points critiques de W dans J .
- Pour $i = 1, \dots, L_J$, on note ξ_i ($\xi_i \in \mathbb{R}$) les points critiques de W dans J numérotés dans l'ordre croissant :

$$J \cap \mathcal{C} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{L_J}\} \quad \text{avec} \quad \xi_i < \xi_j \quad \text{si} \quad i < j \quad (3.2.2)$$

Pour $i = 1, \dots, L_J$, l'entier n_i est l'ordre du point critique ξ_i (*i. e.* pour tout $n = 1, \dots, n_i$ on a $W^{(n)}(\xi_i) = 0$ et $W^{(n_i+1)}(\xi_i) \neq 0$).

- On définit l'indice N_J de l'intervalle J :

$$N_J := \begin{cases} \sum_{i=1}^{L_J} (n_i - 1) & \text{si } L_J \neq 0, \\ 0 & \text{si } L_J = 0. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

- Le réel z_a (resp. z_b) est le dernier (resp. premier) point de branchement du moment complexe avant a_J (resp. après b_J) :

$$z_a = \sup\{z \in \mathcal{B} \mid z < a_J\} \quad z_b = \inf\{z \in \mathcal{B} \mid z > b_J\} \quad (3.2.4)$$

Le lemme suivant décrit des propriétés importantes de κ_J .

Lemme 2.4. *Soit $J = [a_J, b_J]$ tel que $J \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$. La détermination naturelle κ_J satisfait les propriétés suivantes :*

1. *Les valeurs de κ_J sur les bords de J vérifient :*

$$\kappa_J(a_J) \in \{0, \pi\} \quad \text{et} \quad \kappa_J(b_J) \in \{0, \pi\}$$

De plus, on a :

$$\kappa_J(a_J) = \kappa_J(b_J) \quad \iff \quad N_J \in 2\mathbb{N} + 1$$

2. *Pour tout $z \in J$ on a $\kappa_J(z) \in [0, \pi]$.*

3. (*Les lignes de type Stokes*). Les lignes de Stokes qui sortent des points a_J et b_J sont des lignes de type Stokes pour κ_J .

Démonstration. Comme a_J est une image réciproque d'un bord de zone spectrale, i.e. $a_J \in \mathcal{B}$, on a $\kappa(a_J) \in \pi\mathbb{Z}$. Par définition de κ_J , $\kappa_J(z_J) \in (0, \pi)$ pour z_J à l'intérieur de J , d'où $\kappa_J(z) \in [0, \pi]$ pour tout $z \in J$ et donc $\kappa_J(a_J) \in (\pi\mathbb{Z} \cap [0, \pi]) = \{0, \pi\}$. Le même raisonnement est valable pour b_J . De plus, si l'indice N_J de l'intervalle J est impair alors $\mathcal{E}(a_J) = \mathcal{E}(b_J)$, sinon $\mathcal{E}(a_J) \neq \mathcal{E}(b_J)$. Ce qui finit la démonstration du premier point.

Pour les mêmes raisons on obtient $\kappa_J(z) \in [0, \pi]$ pour chaque $z \in J$.

Comme $\kappa_J(a_J) \in \{0, \pi\}$, les lignes de Stokes qui sortent de a_J sont soit de la forme $\Im \int_{a_J}^z \kappa(s) ds = \text{const}$ si $\kappa_J(a_J) = 0$, soit de la forme $\Im \int_{a_J}^z (\kappa(s) - \pi) ds = \text{const}$ si $\kappa_J(a_J) = \pi$. Donc ce sont des lignes de type Stokes d'une de deux familles (de famille \mathcal{F}_0 si $\kappa_J(a_J) = 0$ ou de la famille \mathcal{F}_π si $\kappa_J(a_J) = \pi$). Le même raisonnement est valable pour b_J . Ce qui démontre le lemme. \square

2.1.3 Branches complexes de $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \cap S_Y$

La géométrie de l'ensemble $\mathcal{E}^{-1}(\mathbb{R}) \cap S_Y$ est très importante pour les constructions et les résultats des sections suivantes. Cet ensemble est 2π -périodique et symétrique par rapport à \mathbb{R} . Il contient \mathbb{R} et des courbes (dites *branches complexes*) sortant des points critiques réels de W (les points de l'ensemble \mathcal{C}).

Considérons $z_0 \in \mathcal{C}$, un point critique réel de W d'ordre N . Il y a $2(N - 1)$ branches complexes de $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \cap S_Y$ qui sortent de z_0 : $\gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}, \overline{\gamma_1}, \dots, \overline{\gamma_{N-1}}$. $N - 1$ branches complexes $\gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}$ sont verticales et montent dans $\mathbb{C}_+ \cap S_Y$. Les autres $N - 1$ branches sont obtenues par la symétrie par rapport à \mathbb{R} . Sous les hypothèses **(HWA)** et **(HWC)** page 13, les branches complexes sortantes de z_0 ne se croisent plus dans S_Y . Elles ne croisent pas des branches qui sortent d'autres points critiques réels ξ_j de W , $\xi_j \in \mathcal{B}$. Les angles en ξ_j entre les branches voisines, y compris \mathbb{R} , valent $\frac{\pi}{N}$.

Tout comme les composantes connexes de $\mathcal{E}^{-1}(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R}$, les branches complexes sont de deux types :

- Les images réciproques de zones spectrales de \mathbb{H}_0 , qui forment l'ensemble $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}}$.
- Les images réciproques de lacunes spectrales de \mathbb{H}_0 , qui forment l'ensemble $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$.

Toutes les branches complexes de $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \cap S_Y$ sortantes de points critiques dans les préimages de zones appartiennent à $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}}$. Et toutes les branches complexes de $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \cap S_Y$ sortant des points critiques dans les préimages de lacunes spectrales de \mathbb{H}_0 appartiennent à $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$. Par définition, le long de composantes de $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}}$, on a $\Re \kappa(z) = 0$. Le long de composantes connexes de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$, la fonction $\Re \kappa(z)$ est constante et prends ses valeurs dans $\pi\mathbb{Z}$. La propriété suivante des composantes de $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}}$ est utile :

Lemme 2.5 (Les courbes canoniques). Les branches complexes de $\mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0)) \cap S_Y$ qui appartiennent à $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}}^1$ sont des courbes canoniques pour κ_J .

Démonstration. Par définition de J et κ_J , on a $\kappa_J(z) \in [0, \pi]$ pour tout $z \in J$. Ceci implique ce que le long de branches complexes $\gamma_{i,j}$ sortantes de J on a $\kappa_J(z) > 0$ et $\kappa_J(z) - \pi < 0$. De plus, $\gamma_{i,j}$ sont des courbes verticales. Donc, le long des $\gamma_{i,j}$, $\Im \int^z \kappa_J(s) ds$ est une fonction croissante de $\Im z$ et $\Im \int^z (\kappa_J(s) - \pi) ds$ est une fonction décroissante de $\Im z$. L'analyticité de

1. i.e. celles qui commencent dans les points critiques $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{L_J}$ situés dans une image réciproque réelle d'une zone spectrale de \mathbb{H}_0 (avec $\xi_i \in \mathcal{C} \cap J$ ou $J \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$).

W , l'absence de points critiques de W dans $S_Y \setminus \mathbb{R}$ et le théorème d'inversion locale impliquent la propriété de régularité : chaque $\gamma_{i,j}$ est une courbe analytique réelle (car le potentiel W est analytique réel), en particulier de classe C^∞ . Donc $\gamma_{i,j}$ vérifie la définition d'une courbe canonique. \square

Corollaire 2.6. *Pour chaque courbe $\gamma_{i,j} \circ \overline{\gamma_{i,n_i-j}}$ on peut construire un domaine local $K_{i,j}$ qui l'entoure.*

Par le Lemme 2.4, on sait que chaque $\gamma_{i,j}$, une branche complexe de $\mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0))$, est un segment d'une courbe canonique. De plus, au voisinage de ξ_i la courbe composée $\gamma := \gamma_{i,j} \circ \overline{\gamma_{i,n_i-j}}$ est une courbe de classe C^1 . Par conséquent, γ est une courbe canonique. Par le lemme 1.11, on peut construire un domaine canonique local $K_{i,j}$ qui entoure γ .

Corollaire 2.7. *Au voisinage gauche/droit de $\gamma_{i,j} \circ \overline{\gamma_{i,n_i-j}}$ on peut construire une courbe canonique arbitrairement proche de $\gamma_{i,j} \circ \overline{\gamma_{i,n_i-j}}$.*

Comme $\gamma_{i,j} \circ \overline{\gamma_{i,n_i-j}}$ est une courbe canonique compacte, les petites C^1 -déformations de $\gamma_{i,j} \circ \overline{\gamma_{i,n_i-j}}$ sont des courbes canoniques, ce qui démontre ce corollaire.

Soit J une composante connexe d'une préimage d'une zone spectrale de \mathbb{H}_0 , i.e $J \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$. On va associer à J une base cohérente $\{f_J, f_J^*\}$ au comportement asymptotique standard. Cette section est consacrée à la construction d'une telle base $\{f_J, f_J^*\}$. Dans le chapitre suivant, on calcule l'asymptotique de la matrice de monodromie pour cette base cohérente.

On va démontrer que, au voisinage de la droite réelle, la géométrie des diagrammes de prolongement intervenant dans le calcul de l'ordre principal des asymptotiques des solutions de (AdiabQP) est la même pour tous les N_J impairs (donc celle de $N_J = 1$) ou la même pour tous les N_J pairs (celle de $N_J = 0$). Ceci est la conséquence de l'asymptotique des Wronskiens de solutions dans leur domaine de rencontre, des propriétés des indices et des signatures des arcs.

2.2 Diagrammes de prolongement pour f_J et f_J^*

2.2.1 Diagramme de prolongement de f_J

On considère une composante connexe de $\mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0)) \cap \mathbb{R}$, un intervalle $J \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$. Quand $\mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0)) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, on note $I \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ le premier intervalle qui précède J tel que $I \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ et $K \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ le premier intervalle qui suit J tel que $K \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. On utilise les notations introduites dans la section précédente, notamment la notation κ_J pour la détermination naturelle du moment complexe (voir la (3.2.1)). La proposition suivante décrit le diagramme de prolongement d'une solution cohérente f_J associée à l'intervalle J :

Proposition 2.8. *Pour chaque $E_0 \in \Sigma_\delta$ et $z_J \in (a_J, b_J)$, il existe des nombres réels Y_J et ε_0 , $Y_J \in (0, Y)$ et $\varepsilon_0 > 0$ petit, tels qu'on peut construire une solution cohérente f_J de l'équation (AdiabQP) vérifiant le CAS dans un domaine $D_J(\delta)$:*

$$f_J \sim \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_J}^z \kappa_J(s) ds\right) \Phi_+(x, z, E; z_J) \quad (3.2.5)$$

où κ_J est la détermination naturelle du moment complexe fixée par la condition (3.2.1) et $\Phi_+(x, z, E; z_J)$ est la solution de Bloch canonique associée à κ_J et normalisée en z_J et $D_J(\delta) = D_J \setminus V_\varepsilon(\partial D_J)$. Ici D_J est un domaine obtenu en coupant S_{Y_J} :

1. le long des intervalles $(-\infty, z_a]$ et $[z_b, +\infty)$ où z_a et z_b sont définis en (3.2.4),
2. le long des lignes verticales l_g et l_d .
 - Dans le cas quand $\mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0)) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ on a $l_g = \sigma_I \cup \overline{\sigma}_I$ et $l_d = \sigma_K \cup \overline{\sigma}_K$; (voir fig. III.4-III.7)
 - dans le cas quand $\mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0)) \cap \mathcal{C} = \emptyset$, l_g et l_d sont deux lignes verticales arbitraires, mais fixées, l_g est située à gauche de $\sigma_a \cup \overline{\sigma}_a$ et l_d est située à droite de $\sigma_b \cap \overline{\sigma}_b$. (voir fig. III.8 et III.9)
3. le long des courbes verticales σ_1 et σ_2 . Si $\mathfrak{S}\kappa_J \leq 0$ le long de σ_a , on a $\sigma_1 = \sigma_a$ (voir fig. III.6, III.7 et III.9) et, sinon, on a $\sigma_1 = \overline{\sigma}_a$ (voir fig. III.4, III.5 et III.8); si $\mathfrak{S}\kappa_J \geq 0$ le long de σ_b , on a $\sigma_2 = \sigma_b$ (voir fig. III.5, III.6 et III.8) et, sinon, on a $\sigma_2 = \overline{\sigma}_b$ (voir fig. III.4, III.7 et III.9).

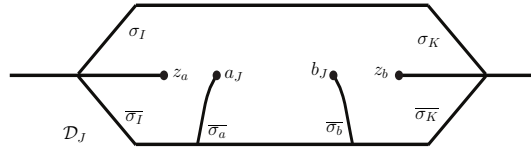


FIGURE III.4 – diagramme de prolongement de f_J

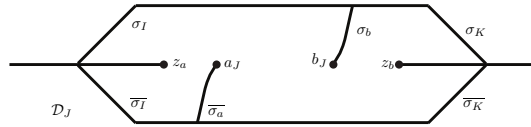


FIGURE III.5 – diagramme de prolongement de f_J

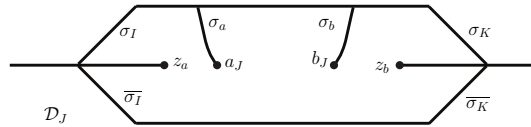


FIGURE III.6 – diagramme de prolongement de f_J

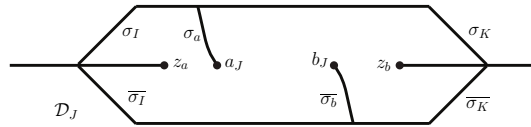
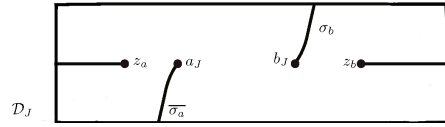
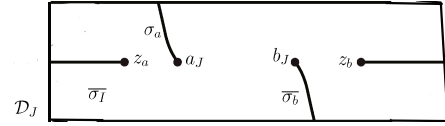


FIGURE III.7 – diagramme de prolongement de f_J

FIGURE III.8 – diagramme de prolongement de f_J FIGURE III.9 – diagramme de prolongement de f_J

La démonstration de la proposition 2.8 se compose de deux parties principales : la construction locale de f_J et le prolongement de l'asymptotique de f_J à l'aide de méthodes géométriques. Avant de procéder à cette démonstration, on va utiliser la proposition 2.8 pour construire une base cohérente $\{f_J, f_J^*\}$ qui a CAS.

2.2.2 Asymptotique de la solution f_J^*

Pour compléter la base on utilise la symétrie réelle de l'équation (AdiabQP). Considérons un domaine $\overline{D_J}$ symétrique de D_J par rapport à \mathbb{R} . Pour $z \in \overline{D_J}$, nous choisissons $f_J^*(x, z, E)$ comme deuxième solution cohérente pour compléter la base. Le lemme suivant a lieu :

Lemme 2.9. *La solution cohérente f_J^* admet un comportement asymptotique standard dans $\overline{D_J}$:*

$$f_J^* \sim \exp\left(-\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_J}^z \kappa_{J^*}(s) ds\right) \Phi_{-,*}(x, z, E; z_J) \quad (3.2.6)$$

où κ_{J^*} est une détermination du moment complexe égale à κ_J sur (a_J, b_J) et analytique dans $\overline{D_J}$ et $\Phi_{-,*}$ la solution de Bloch canonique associée à κ_{J^*} et normalisée en z_J .

Remarque 2.10. $D_J \cap \overline{D_J}$ contient l'intervalle (a_J, b_J) .

Démonstration du Lemme 2.9. Par la Proposition 2.8 f_J a le CAS (CAS) dans D_J . Par définition de f_J , l'assertion du lemme est la conséquence de la relation suivante :

$$\overline{\exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_J}^{\overline{z}} k_J(s) ds\right) \Phi_+^*(x, z, E; z_J)} = \exp\left(-\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_J}^z k_J^*(s) ds\right) \Phi_{-,*}(x, z, E; z_J) \quad (3.2.7)$$

Donc il suffit de démontrer l'équation (3.2.7). Comme la partie gauche et la partie droite de l'équation (3.2.7) sont des fonctions analytiques de z dans S_Y , il suffit de démontrer l'égalité entre eux pour $z \in (a_J, b_J)$.

- $z_J \in \mathbb{R}$. Pour tout $z \in (a_J, b_J)$ on a $k_J^*(z) = k_J(z)$, car (a_J, b_J) fait partie de préimage d'une zone spectrale de \mathbb{H}_0 . Donc, sur (a_J, b_J) les solutions de Bloch vérifient $\psi_+^*(x, z, E) = \psi_-(x, z, E)$.
- Le facteur normalisant dans Ψ_+ est fixé par la condition $q(E) = \sqrt{k'_E(\mathcal{E}(z_J))} > 0$, donc $\overline{q(\mathcal{E}(z_J))} = q(\mathcal{E}(z_J))$.

– par la définition de la forme méromorphe $\overline{\omega_+}(\overline{z}, \overline{E}) = \omega_-(z, E)$.

Par conséquent, $\Psi_+^*(x, z, E; z_J) = \Psi_-(x, z, E; z_J)$ sur (a_J, b_J) . Ce qui implique $\Psi_+^*(x, z, E; z_J) = \Psi_{-,*}(x, z, E)$ pour tout $z \in \overline{D}_J$. \square

2.2.3 Wronskien des solutions f_J et f_J^* et la renormalisation

Les solutions f_J et f_J^* sont analytiques en z dans S_Y . De plus, la condition de cohérence implique que leur wronskien est ε -périodique en z . Le lemme suivant donne l'asymptotique du wronskien de f_J et f_J^* :

Lemme 2.11. *Pour tout $z \in S_Y$ le wronskien des solutions f_J et f_J^* admet la représentation asymptotique suivante :*

$$w\{f_J, f_J^*\}(z, E; z_J) = w\{\Phi_+, \Phi_-\}(E; z_J) + g(z, E; z_J) \quad (3.2.8)$$

ou $g : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction vérifiant les propriétés :

1. g est analytique réelle en z dans S_Y et en E dans un petit voisinage complexe de E_0 ,
2. $g = o(1)$ localement uniformément sur chaque compact de S_Y si E est dans un voisinage suffisamment petit de E_0 .

Le wronskien de solutions de Bloch canoniques $w\{\Phi_+, \Phi_-\}(E; z_J)$ ne dépend pas de z , mais seulement d'un point de normalisation z_J . On renormalise les solutions pour rendre leur wronskien égal à 1. On appelle f_J nouveau :

$$f_J(w[\Phi_+, \Phi_-](E; z_J) + g(z, E; z_J))^{-\frac{1}{2}} \quad (3.2.9)$$

Ainsi f_J nouveau et f_J^* forment une base cohérente. Une fois une base est obtenue, on choisit une solution de cette base et on prolonge son asymptotique à l'aide de méthodes de prolongement. On réunit les méthodes de prolongement ensemble pour avoir un descriptif en termes de champ de vecteurs (continu partout et C^∞ en dehors d'un union fini de courbes).

2.3 Démonstration de la Proposition 2.8

2.3.1 Construction locale

On commence par construire "localement", dans un voisinage de $z_J \in J$, une solution cohérente $f_J(x, z, E; \varepsilon)$ de (AdiabQP) qui a CAS à l'aide du Théorème 1.5. Pour appliquer ce théorème, on a besoin d'un domaine canonique (voir la Définition 1.4). Avant de procéder à la preuve, on va décrire comment on va faire. La démonstration se fait en trois étapes. A la première étape on construit un couple de solutions au comportement asymptotique standard dans un domaine canonique local K_γ . La construction de K_γ suit les étapes suivants :

1. une fois la détermination κ_γ du moment complexe est fixée, on compose de morceaux simples une courbe γ , canonique par rapport à la détermination κ_γ qui passe par le point z_J .
2. on construit un domaine canonique local (voir la Définition 1.12) K_γ qui enveloppe γ ,
3. on construit une base de solutions de l'équation (AdiabQP) au comportement asymptotique standard dans K_γ .

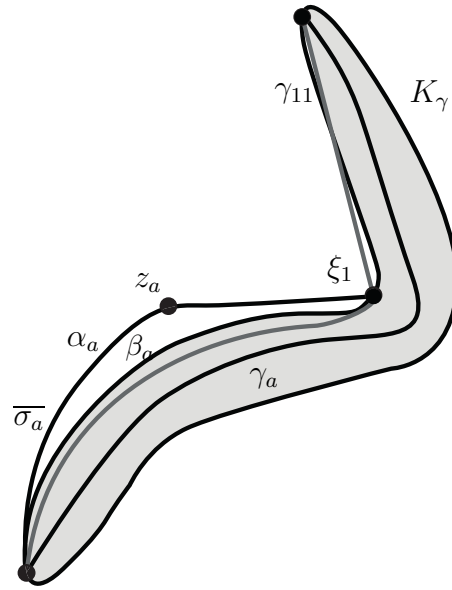


FIGURE III.10 – Construction du domaine canonique local : En noir : γ_a est une courbe canonique, En gris foncé : β_a est une courbe précanonique, En gris clair : le domaine canonique local K_γ .

Lemme 2.12. Soient $\mathcal{J} \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ et κ_J la détermination naturelle du moment complexe. On utilise les notations sur la page 70.

Si $\mathcal{J} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Alors on peut construire un domaine canonique K_γ dans :

- le voisinage gauche arbitrairement proche de la courbe $\alpha := \bar{\sigma}_a \cup [a, b] \cup \sigma_b$ si $\Im \kappa_J > 0$ dans le voisinage gauche de σ_b .
- dans un voisinage droit de la courbe $\alpha := \sigma_a \cup [a, b] \cup \bar{\sigma}_b$ si $\Im \kappa_J < 0$ dans le voisinage gauche de σ_b .

Si $\mathcal{J} \cap \mathcal{C} = \{\xi_1, \dots, \xi_{L_J}\} \neq \emptyset$ alors pour chaque courbe $\gamma := \gamma_{i,j} \cup \bar{\gamma}_{i,n_i-j}$ on peut construire un domaine canonique K_γ qui entoure γ_{ij} (voir Section 2.3.1).

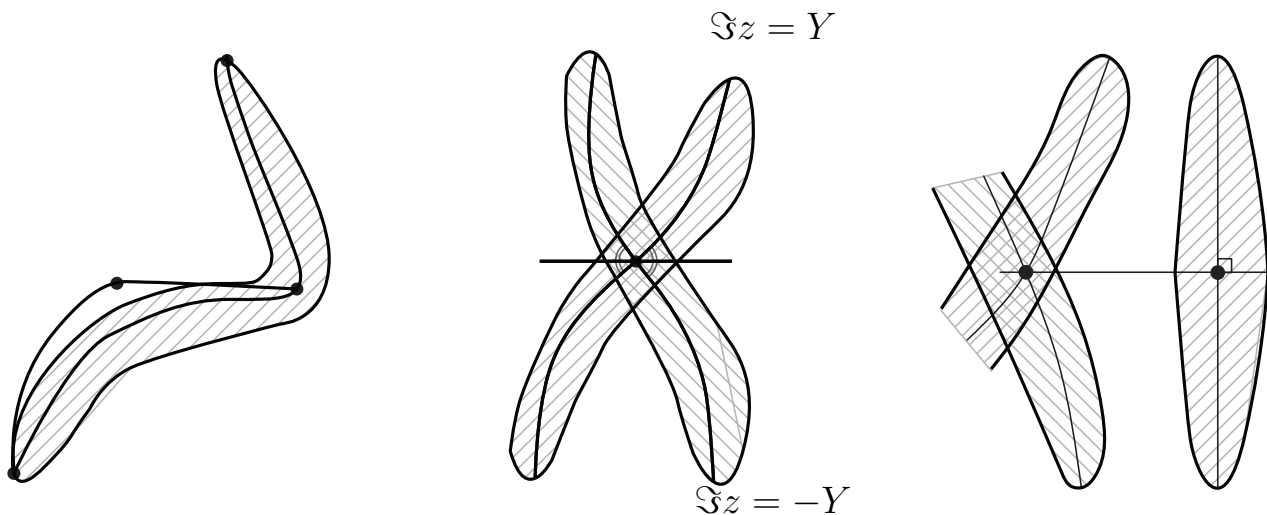


FIGURE III.11 – Domaine canonique local K_γ qui entoure $\gamma := \gamma_{i,j} \cup \bar{\gamma}_{i,n_i-j}$

Corollaire 2.13. *Dans chacun de cas décrits par le Lemme 2.12 on peut construire une base cohérente f_J^+ et f_J^- telle que, dans K_γ , f_J^+ et f_J^- ont le CAS pour κ_J :*

$$f_J^\pm(x, z, E, \varepsilon) = e^{\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \kappa_J(s) ds} (\Phi_\pm(x, z, E, z_0) + o(1))$$

Démonstration du lemme 2.12. On commence par supposer $\mathcal{J} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. On donne la démonstration pour le cas quand $\Im \kappa_J > 0$ dans le voisinage gauche de σ_b . La démonstration pour le cas $\Im \kappa_J < 0$ étant analogue, on ne la reproduit pas.

Dans le cas en considération, on a $\alpha := \bar{\sigma}_a \cup [a, b] \cup \sigma_b$. Par le Lemme 2.4 on a :

$$\sigma_a, \bar{\sigma}_a, [a, b] \in \mathcal{F}_{q_1} \quad \sigma_b, \bar{\sigma}_b, [a, b] \in \mathcal{F}_{q_2} \quad q_1 \in \{0, \pi\} \quad q_2 \in \{0, \pi\} \setminus \{q_1\},$$

donc α est une courbe composée de segments de lignes de type de Stokes pour κ_J . Mais α n'est pas une courbe pré-canonique car elle n'est pas régulière parce qu'elle passe par deux points de branchement du moment complexe. On va construire une courbe pré-canonique β dans un voisinage gauche de α , arbitrairement proche de α .

On fixe $\delta > 0$ petit. Soit $V_{g,\delta}(\alpha)$ le δ -voisinage gauche de α . Par le Lemme 1.8, on a les fibrations de $V_{g,\delta}(\alpha)$:

$$V_{g,\delta}(\alpha) := \bigcup_{\gamma \in \mathcal{F}_{q_1}} \gamma = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{F}_{q_2}} \gamma$$

De plus, $V_{g,\delta}(\alpha) \cap \mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0)) = \emptyset$, donc, par le Lemme 1.8, on a :

1. Chaque $\gamma_1 \in \mathcal{F}_{q_1}$ et chaque $\gamma_2 \in \mathcal{F}_{q_2}$ est une courbe verticale dans $V_{g,\delta}(\alpha)$,
2. Si $\gamma_1 \in \mathcal{F}_{q_1}$ et $\gamma_2 \in \mathcal{F}_{q_2}$ alors $\gamma_1 \cap \gamma_2$ contient au maximum un point dans $V_{g,\delta}(\alpha)$.

Démontrons que chaque courbe $\gamma_1 \in \mathcal{F}_{q_1}$, $\gamma_1 \subset V_{g,\delta}(\alpha)$, suffisamment proche de $[a, b] \cup \sigma_b$ croise chaque courbe $\gamma_2 \in \mathcal{F}_{q_2}$, $\gamma_2 \subset V_{g,\delta}(\alpha)$, suffisamment proche de $\sigma_a \cup \bar{\sigma}_a$.

Comme γ_2 est verticale, elle ne peut pas croiser ni $[a, b]$, ni σ_b . Donc γ_2 croise σ_a . Si γ_1 est suffisamment proche de σ_a , alors γ_1 et γ_2 se croisent en un point, disons z_{12} .

Composons une courbe pré-canonique β de $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_1$ est le segment de γ_1 situé à gauche de z_{12} , et de $\tilde{\gamma}_2$, $\tilde{\gamma}_2$ est le segment de γ_2 situé à droite de z_{12} :

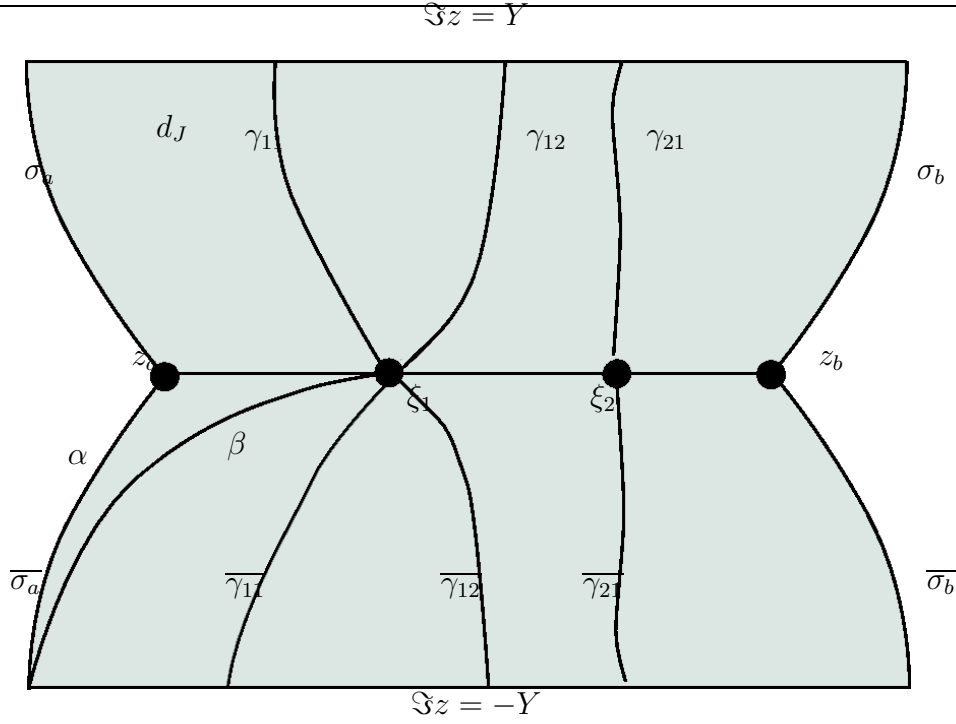
$$\beta := \tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2.$$

Par le Lemme 1.14, on peut construire une courbe canonique γ arbitrairement proche de β , telle que $\gamma \subset V_{g,\delta}(\alpha)$. Le Lemme 1.11 assure qu'existe un domaine canonique K_γ qui entoure γ . On peut supposer $K_\gamma \subset V_{g,\delta}(\alpha)$. Ceci achève la démonstration pour le cas $\mathcal{J} \cap \mathcal{C} = \emptyset$.

Maintenant supposons que $\mathcal{J} \cap \mathcal{C} = \{\xi_1, \dots, \xi_{L_J}\} \neq \emptyset$. Par le Corollaire 2.6, il existe un domaine canonique $K_\gamma := K_{ij}$ qui entoure γ . Ceci achève la démonstration du Lemme 2.12. \square

2.3.2 Solution f_J : dans les deux cas

Une fois que l'on a un domaine canonique K_γ , on applique le Théorème 1.5 pour montrer qu'il existe un couple de solutions cohérentes ayant CAS pour κ_J dans K_γ , disons f_J et f_J^* .

FIGURE III.12 – Courbes canoniques, $\gamma_{ij} \cup \overline{\gamma_{ij}}$, et courbe pré-canonique β ,

2.4 Prolongement de l'asymptotique de la solution f_J dans tout D_J

Dans cette section, on finit la démonstration de la Proposition 2.8. Cette dernière partie de preuve se compose de plusieurs étapes liées à l'application successive des méthodes de prolongement.

On a déjà construit une solution cohérente f_J au comportement asymptotique standard dans un domaine canonique K_γ , décrite dans le Lemme 2.12. Maintenant, on va prolonger son asymptotique dans tout D_J .

Premièrement, il est pratique de définir de nouveaux champs de vecteurs remplaçant les champs $\overline{\kappa}$ et $\overline{\kappa} - \pi$. Soit D un domaine régulier et κ une détermination du moment complexe analytique dans D . On considère des champs de vecteurs sur D suivants :

1. le champ c_d (qui descend à droite si $\Re \kappa > 0$) :

$$c_d(z) := \begin{cases} \overline{\kappa}(z) & \text{si } \Im \kappa(z) \geq 0 \\ \Re \kappa(z) & \text{si } \Im \kappa(z) \leq 0 \end{cases}$$

2. le champ c_g (qui monte à droite si $\Re(\kappa) > 0$) :

$$c_g(z) := \begin{cases} \overline{\kappa}(z) & \text{si } \Im \kappa(z) \leq 0 \\ \Re \kappa(z) & \text{si } \Im \kappa(z) \geq 0 \end{cases}$$

3. le champ de vecteurs s_d (qui descend à gauche si $\Re(\kappa - \pi) < 0$) :

$$s_d(z) := \begin{cases} \overline{\kappa}(z) - \pi & \text{si } \Im \kappa(z) \geq 0 \\ \Re \kappa(z) - \pi & \text{si } \Im \kappa(z) \leq 0 \end{cases}$$

4. le champ de vecteurs s_g (qui monte à gauche si $\Re\kappa - \pi < 0$) :

$$s_g(z) := \begin{cases} \bar{\kappa}(z) - \pi & \text{si } \Im\kappa(z) \leq 0 \\ \Re\kappa(z) - \pi & \text{si } \Im\kappa(z) \geq 0 \end{cases}$$

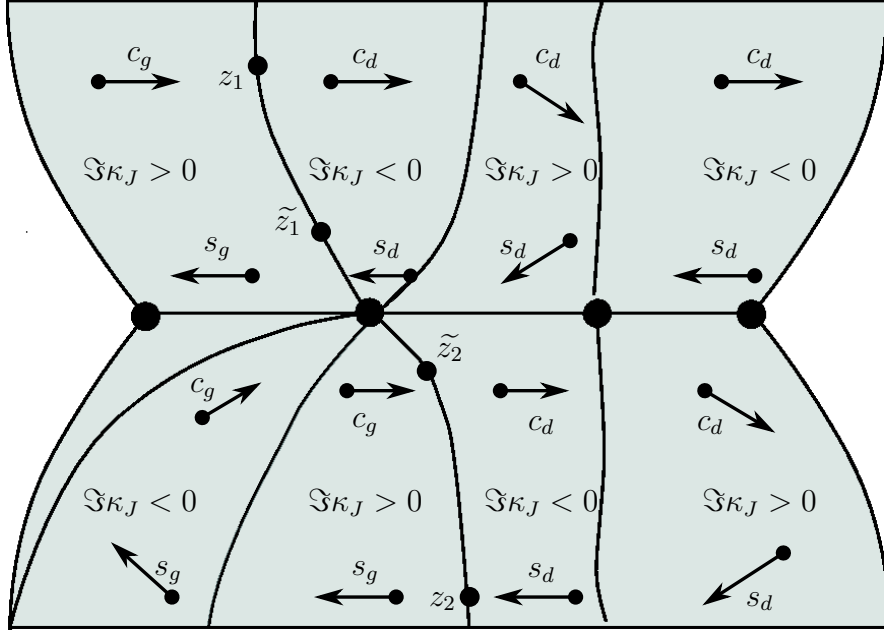


FIGURE III.13 – Les champs de vecteurs c_g, c_d, s_g et s_d

Lemme 2.14. Dans chaque domaine régulier D les champs de vecteurs c_g, c_d, s_g, s_d sont continus et ces courbes intégrales sont de la classe C^1 .

Démonstration. Les champs de vecteurs c_g, c_d, s_g et s_d sont collés de morceaux d'autres champs. En dehors des points de recollement $\{z \in D \mid \Im\kappa(z) = 0\}$, les champs de vecteurs c_g, c_d, s_g et s_d coïncident avec un des champs suivants :

$$\bar{\kappa}, \bar{\kappa} - \pi, \Re\kappa, \Re\kappa - \pi.$$

Dans chaque domaine régulier les champs de $\bar{\kappa}$ et $\bar{\kappa} - \pi$ sont analytiques. Dans chaque domaine régulier, les champs horizontaux de vecteurs $\Re\kappa(z) = \Re\bar{\kappa}(z)$ et $\Re\kappa(z) - \pi = \Re\bar{\kappa}(z) - \pi$ sont C^∞ . Ceci implique ce que dans chaque domaine régulier, en dehors d'ensemble des points $\{z \in D \mid \Im\kappa(z) = 0\}$, les champs c_g, c_d, s_g et s_d sont réguliers, même C^∞ .

C'est un ensemble qui ne dépend pas du choix de la détermination κ .

Dans un domaine régulier D , le recollement des champs se passe le long des courbes $\alpha = \{z \in D \mid \Im\kappa(z) = 0\}$ qui forment $\mathcal{E}^{-1}(\mathbb{H}_0) \cap D$, où $\bar{\kappa}(z) = \Re\kappa(z)$ et $\bar{\kappa}(z) - \pi = \Re\kappa(z) - \pi$. Dans les points des courbes α les deux champs de vecteurs de chaque paire qu'on recolle coïncident et les champs c_g, c_d, s_g et s_d sont continus. Ce qui démontre que c_g, c_d, s_g et s_d sont continus dans chaque domaine régulier.

Dans chaque domaine régulier, la continuité des champs c_g, c_d, s_g et s_d implique que leurs courbes intégrales sont de classe C^1 . \square

On va finir la démonstration de la Proposition 2.8. Soient $J \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ et κ_J la détermination naturelle associée à J . On commence par le cas $J \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Soit $\gamma_{i,j}$ la branche complexe de $\mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0))$ qui a été utilisé dans la construction locale de f_J . Fixons $\delta > 0$ petit. On note

$$\{z_1\} = \gamma_{i,j} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z = Y - \delta\} \quad \text{et} \quad \{z_2\} = \overline{\gamma_{i,j}} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z = -Y + \delta\}.$$

Considérons une courbe γ_1 (resp. γ_2) qui passe par z_1 (resp. z_2) et tangente au champ de vecteurs c_g (resp. s_g) à gauche de $\{z \mid \Re z = \Re z_1\}$ (resp. $\{z \mid \Re z = \Re z_2\}$) et tangente au champ c_d (resp. s_d) à droite de $\{z \mid \Re z = \Re z_1\}$ (resp. $\{z \mid \Re z = \Re z_2\}$). On note aussi :

$$\{\tilde{z}_1\} = \gamma_{i,j} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z = \delta\} \quad \text{et} \quad \{\tilde{z}_2\} = \overline{\gamma_{i,j}} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z = -\delta\}.$$

On considère également une courbe $\tilde{\gamma}_1$ (resp. $\tilde{\gamma}_2$) qui passe par \tilde{z}_1 (resp. \tilde{z}_2) et tangente au champ de vecteurs s_g (resp. c_g) à gauche de \tilde{z}_1 (resp. \tilde{z}_2) et tangente au champ s_d (resp. c_d) à droite de \tilde{z}_1 (resp. \tilde{z}_2).

Lemme 2.15. *On a $\gamma_1 \cap J = \emptyset$ et $\gamma_2 \cap J = \emptyset$. On peut choisir $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$ on a $\tilde{\gamma}_1 \cap \gamma_1 = \emptyset$ et $\tilde{\gamma}_2 \cap \gamma_2 = \emptyset$ entre $\sigma_a \cup \overline{\sigma_a}$ et $\sigma_b \cup \overline{\sigma_b}$.*

Corollaire 2.16. *On obtient $\gamma_1 \cap \sigma_a = \{z_{1a}\}$ avec $\Im z_{1a} > 0$, $\gamma_1 \cap \sigma_b = \{z_{1b}\}$ avec $\Im z_{1b} > 0$, $\gamma_2 \cap \overline{\sigma_a} = \{z_{2a}\}$ avec $\Im z_{2a} < 0$ et $\gamma_2 \cap \overline{\sigma_b} = \{z_{2b}\}$ avec $\Im z_{2b} < 0$.*

Démonstration du lemme 2.15. On démontre ce lemme par l'absurde. Supposons que $\gamma_1 \cap J \neq \emptyset$, autrement dit, il existe $\xi \in \gamma_1 \cap J$. Soient i' et j' tels que entre $\eta \in \gamma_{i',j'} \cap \gamma_1$ et ξ la courbe γ_1 ne croise plus des branches complexes de $\mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0))$. Calculons $\Im \int_{\xi}^{\eta} \kappa_J(s) ds$. D'un côté, on obtient :

$$\Im \int_{\xi, J + \gamma_{i',j'}}^{\eta} \kappa_J(s) ds = \Im \int_{\xi_{i'}, \gamma_{i',j'}}^{\eta} \kappa_J(s) ds > 0$$

car $J \in \mathcal{F}_0(\kappa_J)$, d'où $\Im \int_{\xi}^{\xi_{i'}} \kappa_J(s) ds = 0$, et la courbe $\gamma_{i',j'}$ est une courbe canonique, d'où $\Im \int_{\xi_{i'}, \gamma_{i',j'}}^{\eta} \kappa_J(s) ds > 0$.

Par ailleurs, on a une contradiction car d'un autre côté

$$\Im \int_{\xi, \gamma_1}^{\eta} \kappa_J(s) ds = 0$$

parce que la courbe γ_1 entre ξ et η est une courbe de famille $\mathcal{F}_0(\kappa_J)$, une ligne de type de Stokes pour κ_J . Ainsi l'hypothèse que $\gamma_1 \cap J \neq \emptyset$ mène à une contradiction, d'où $\gamma_1 \cap J = \emptyset$. Ce qui démontre que $\gamma_1 \cap J = \emptyset$. La démonstration de $\gamma_2 \cap J = \emptyset$ est analogue.

La démonstration de ce que pour δ suffisamment petit $\gamma_1 \cap \tilde{\gamma}_1 = \emptyset$ est analogue. Supposons que pour chaque $\delta > 0$ et petit il existe $\xi \in \gamma_1 \cap \tilde{\gamma}_1$. Soient i' et j' tels que entre $\eta \in \gamma_{i',j'} \cap \gamma_1$ et ξ la courbe γ_1 ne croise plus des branches complexes de $\mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0))$. Calculons $\Im \int_{\xi}^{\eta} \kappa_J(s) ds$. Supposons que $\Im \kappa_J < 0$ entre ξ et η . D'un côté, on obtient :

$$\Im \int_{\xi, \gamma_1}^{\eta} \kappa_J(s) ds = 0$$

car la courbe γ_1 entre ξ et η est une courbe de famille $\mathcal{F}_0(\kappa_J)$, une ligne de type de Stokes pour κ_J . On note $\tilde{\xi}_{i'} = \gamma_2 \cap \gamma_{i',j'}$. Pour δ suffisamment petit, on a une contradiction

$$\Im \int_{\xi, \gamma_2 + \gamma_{i',j'}}^{\eta} \kappa_J(s) ds = \Im \int_{\xi, \gamma_2}^{\tilde{\xi}_{i'}} \kappa_J(s) ds + \Im \int_{\tilde{\xi}_{i'}, \gamma_{i',j'}}^{\eta} \kappa_J(s) ds > 0$$

car pour δ suffisamment petit γ_2 est proche de J et $\tilde{\xi}_{i'}$ est proche de $\xi_{i'}$. Ainsi en choisissant δ_0 assez petit on rend $\Im \int_{\xi}^{\xi_{i'}} \kappa_J(s) ds$ si petit qu'on veut. Comme $\gamma_{i'j'}$ est une courbe canonique, on a $\Im \int_{\xi_{i'}, \gamma_{i'j'}}^{\eta} \kappa_J(s) ds > c > 0$. Ainsi l'hypothèse que pour tout $\delta > 0$ petit on a $\gamma_1 \cap \tilde{\gamma} \neq \emptyset$ mène à une contradiction, d'où il existe δ_0 tel que pour tout $\delta < \delta_0$ on a $\gamma_1 \cap \tilde{\gamma} = \emptyset$.

La démonstration pour le cas $\Im \kappa_J > 0$ entre $\tilde{\xi}_{i'}$ et η , ainsi que la démonstration de $\gamma_2 \cap \tilde{\gamma}_2 = \emptyset$ sont analogues. Ceci achève la preuve du Lemme 2.15. \square

Considérons un domaine \tilde{A}_J :

$$\tilde{A}_J = \{z \in S_Y \text{ entre } \gamma_1 \text{ et } \gamma_2 \text{ et entre } \sigma_a \cap \overline{\sigma}_a \text{ et } \sigma_b \cap \overline{\sigma}_b\} \tag{3.2.10}$$

Soit f_J la solution cohérente qui a CAS pour κ_J

$$f_J \sim \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \kappa_J(s) ds\right) \Psi_{+,J}(x; z, E)$$

dans le domaine canonique local K_γ qui entoure $\gamma_{i,j}$.

Lemme 2.17. *La solution cohérente f_J a le CAS pour κ_J dans le domaine \tilde{A}_J défini par (3.2.10) :*

$$f_J \sim \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \kappa_J(s) ds\right) \Psi_{+,J}(x; z, E)$$

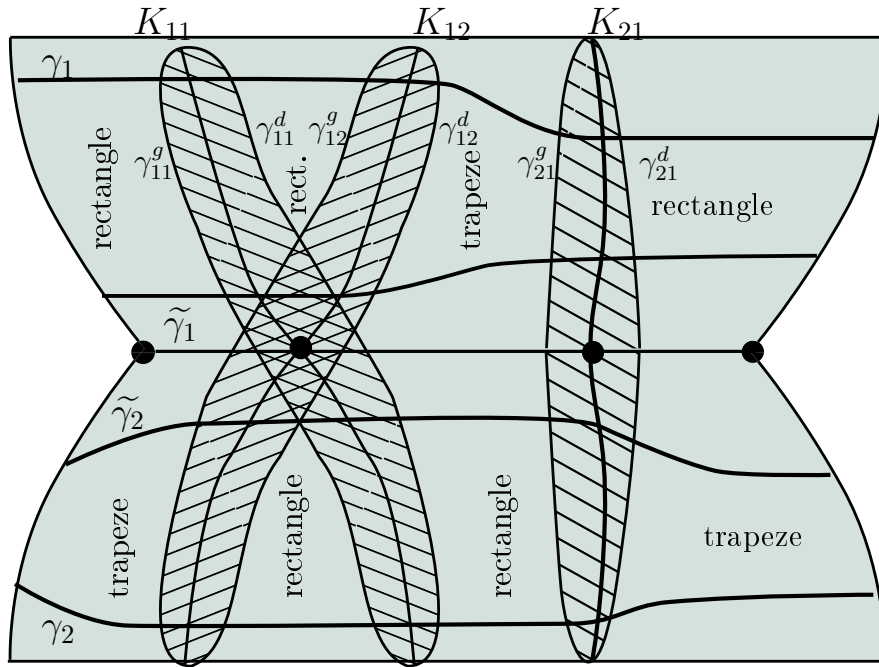


FIGURE III.14 – Les domaines canoniques locales $K_{i,j}$, les domaines de type rectangle et de type trapèze.

Démonstration du Lemme 2.17. Le Lemme 2.17 se démontre par applications successives des méthodes de prolongement :

- le principe des domaines adjacents, le Proposition 1.19,
- le lemme de rectangle, le Lemme 1.18,

– le lemme de trapèze, le Lemme 1.21

On démontre par l'absurde le CAS au voisinage de J .

On commence par la démonstration de comportement asymptotique standard pour f_J dans $A_{J,+}$ et $A_{J,-}$, où :

$$A_{J,+} = \{z \in \tilde{A}_J \text{ entre } \gamma_1 \text{ et } \tilde{\gamma}_1\} \quad A_{J,-} = \{z \in \tilde{A}_J \text{ entre } \gamma_2 \text{ et } \tilde{\gamma}_2\}.$$

On décompose ce domaine en parties suivantes (voir la fig.III.13) :

- Les domaines canoniques locales $K_{i,j}$ qui entourent $\gamma_{i,j}$. Sont utilisés pour l'application de principe des domaines adjacents (Proposition 1.19) ;
- Les domaines limités par les courbes canoniques $\gamma_{i,j}^g \subset K_{i,j}$ (resp. $\gamma_{i,j}^d \in K_{i,j}$) dans le voisinage gauche (resp. droit) des courbes $\gamma_{i,j}$. Ces domaines sont utilisés pour appliquer le lemme du rectangle (Lemme 1.18) et le lemme du Trapèze (Lemme 1.21).

Une fois, qu'on a démontré le comportement asymptotique standard dans un $\tilde{A}_{J,\pm}$, on démontre que f_J vérifie le comportement asymptotique standard au voisinage de J par absurde. Pour un $\delta < \delta_0$ considérons un domaine $\tilde{A}_{J,0}$:

$$\tilde{A}_{J,0} = \{z \in \tilde{A}_J \text{ entre } \tilde{\gamma}_2 \text{ et } \tilde{\gamma}_1\}$$

La solution f_J vérifie le comportement asymptotique standard par rapport à la détermination κ_J dans un voisinage du point ξ_i . Soit $t \in J$ tel que :

$$t = \inf\{z \in J \mid z > \xi_i \text{ tel que } f_J \text{ ne vérifie pas le CAS dans } z\}.$$

On va démontrer que $t = b$. Supposons que $t < b$. Par définition de t , pour tout point $t' \in [\xi_i, t)$ on trouve un voisinage où f_J vérifie le CAS. Mais si $t < b$, chaque courbe verticale qui passe par t est une courbe canonique dans un petit voisinage de t . Par conséquent t appartient à un petit domaine canonique, disons K_t . Mais dans un voisinage gauche de t la solution f_J a le CAS. Par le principe de domaines adjacents (Proposition 1.19), on obtient que f_J a le CAS dans K_t , ce qui contredit l'hypothèse que pour tout $z > t$ la solution f_J n'a plus de CAS. Par conséquent, l'hypothèse $t < b$ est fautive, donc $t = b$. Ceci achève la preuve du Lemme 2.17. \square

Pour finir la démonstration de la Proposition 2.8 dans le cas $J \cap \mathcal{C} = \emptyset$, on utilise le lemme du Rectangle (Lemme 1.18), et le lemme de Stokes (Lemme 1.22). Premièrement, à l'aide du lemme de rectangle, on prolonge l'asymptotique dans les domaines où $\Im \kappa_J < 0$. On pose

$$\tilde{\sigma}_a = \begin{cases} \sigma_a & \text{si } \Im \kappa_J(z) > 0 \quad \forall z \in \sigma_a \\ \bar{\sigma}_a & \text{si } \Im \kappa_J(z) > 0 \quad \forall z \in \bar{\sigma}_a \end{cases} \quad \tilde{\sigma}_b = \begin{cases} \sigma_b & \text{si } \Im \kappa_J(z) < 0 \quad \forall z \in \sigma_b \\ \bar{\sigma}_b & \text{si } \Im \kappa_J(z) < 0 \quad \forall z \in \bar{\sigma}_b \end{cases}.$$

On prolonge l'asymptotique de f_J à travers $\tilde{\sigma}_a$ et à travers $\tilde{\sigma}_b$ par le lemme du Rectangle. Le prolongement s'arrête quand $\Im \kappa_J(z) = 0$, *i.e.* quand les lignes horizontales de prolongement croisent les branches complexes de $\mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0))$. Maintenant, par le lemme de Stokes, on prolonge l'asymptotique autour de $(\sigma_a \cup \bar{\sigma}_a) \setminus \tilde{\sigma}_a$ et de $(\sigma_b \cup \bar{\sigma}_b) \setminus \tilde{\sigma}_b$. Comme le prolongement analytique de κ_J autour de $(\sigma_a \cup \bar{\sigma}_a) \setminus \tilde{\sigma}_a$ (resp. autour de $(\sigma_b \cup \bar{\sigma}_b) \setminus \tilde{\sigma}_b$) vérifie $\Im \kappa_J > 0$ (resp. $\Im \kappa_J < 0$) dans un voisinage gauche (resp. droit) de cette courbe. Donc le prolongement analytique se fait par le lemme de rectangle jusqu'à $\mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0))$. Ce qui démontre la Proposition 2.8 dans le cas $J \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

La démonstration pour le cas $J \cap \mathcal{C} = \emptyset$ étant analogue, on n'en fait que le résumé. Par le lemme du Rectangle (Lemme 1.18) on prolonge l'asymptotique de f_J dans la partie de S_Y située entre γ et l_g . Puis on applique le lemme de Stokes (Lemme 1.22) pour prolonger l'asymptotique dans le voisinage droit de $\overline{\sigma_a}$. Puis on prolonge l'asymptotique de f_J dans la partie de $S_{Y,-}$ située entre $\overline{\sigma_a}$ et l_d . On démontre par absurde que l'asymptotique est vrai sur (a, b) . Puis par le lemme de Stokes (Lemme 1.22) on montre l'asymptotique dans le voisinage droit de σ_b . Et finalement, par le lemme du Rectangle (Lemme 1.18) on prolonge l'asymptotique dans le reste du domaine D_J . Ainsi on a démontré la Proposition 2.8.

Chapitre IV

Matrice de monodromie pour les problèmes quasi-périodiques adiabatiques

Dans ce chapitre on étudie l'asymptotique quand ε tend vers zéro de la matrice de monodromie $M(z, E, \varepsilon)$ associée à une base cohérente des solutions de (AdiabQP). Le lecteur trouvera les définitions dans l'Introduction. On commence par la motivation de l'étude asymptotique des matrices de monodromie.

1 Matrice de monodromie et matrice de transfert

Il y a un rapport important entre la matrice de transfert $T_{z,\varepsilon}(x, y, E)$ pour l'équation (AdiabQP) et des matrices de monodromie.

Fixons E tel que $(E - W(\mathbb{R})) \cap \sigma(\mathbb{H}_0) \neq \emptyset$ et $\delta > 0$ petit. Soit $z_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\text{dist}((E - W(z_0)), \mathbb{R} \setminus \sigma(\mathbb{H}_0)) > \delta.$$

On considère la matrice de monodromie $M(z, E, \varepsilon)$ associée à une base cohérente de solutions de (AdiabQP) qui a le CAS au voisinage d'un point z_0 . On a :

Proposition 1.1. *Soit $\{\Psi_+, \Psi_-\}$ une base cohérente de solutions de (AdiabQP) ayant pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ pour tout $x \in [-X, X]$ et z dans un voisinage complexe $U(z_0)$ de z_0 le CAS pour la détermination κ du moment complexe. Soit $M(z, E, \varepsilon)$ la matrice de monodromie associée à la base $\{\Psi_+, \Psi_-\}$. Pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, $x \in [-X, X]$, $z \in U(z_0) \cap \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :*

$$T_{z,\varepsilon}\left(x + \left\lfloor \frac{2\pi m}{\varepsilon} \right\rfloor, x, E\right) = (\mathbf{\Phi}^0 + \mathbf{o}(1))D(z + \eta_m, E, \varepsilon)(\mathcal{M}_m)^t(z + \eta_m, E, \varepsilon)D^{-1}(z)(\mathbf{\Phi}^0 + \mathbf{o}(1))^{-1} \quad (4.1.1)$$

où

- $\mathcal{M}_m(z, E, \varepsilon) := M(z + 2\pi(n-1), E, \varepsilon) \dots M(z + 2\pi, E, \varepsilon)M(z, E, \varepsilon)$,
- $\mathbf{\Phi}^0 = \mathbf{\Phi}^0(x, z, E) = \begin{pmatrix} \Phi_+^0 & \Phi_-^0 \\ (\Phi_+^0)' & (\Phi_-^0)' \end{pmatrix}(x, z, E)$ est dans $SL_2(\mathbb{C})$.
- Φ_\pm^0 sont les solutions de Bloch canoniques pour l'énergie $E - W(z)$ qui sont analytiques en z dans $U(z_0)$.
- $\mathbf{o}(1)$ désigne une matrice 2×2 dont les coefficients sont $o(1)$ en norme sup.
- $D(z)$ est la matrice diagonale $\text{diag} \left\{ \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \kappa(s) ds\right), \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \kappa(s) ds\right) \right\}$.

$$- \eta_m := \left(\left[\frac{2\pi m}{\varepsilon} \right] \varepsilon - 2\pi m \right) \in (-\varepsilon, 0].$$

De plus, on a la relation suivante entre les traces :

$$\text{tr} T_{z,\varepsilon} \left(x + \left[\frac{2\pi m}{\varepsilon} \right], x, E \right) = \text{tr} \left((D_m(z, E, \varepsilon) + \mathbf{o}(1)) (\mathcal{M}_m)^t(z, E, \varepsilon) \right) \quad (4.1.2)$$

avec la matrice diagonale $D_m(z, E, \varepsilon) := \text{diag}\{d, d^{-1}\}$ où $|d| = \left| \exp \left(\frac{i}{\varepsilon} \int_z^{z+\eta_m} \kappa(s) ds \right) \right| = 1$.

Corollaire 1.2. *On reprend les hypothèses de la Proposition 1.1. Supposons de plus que pour un $z \in U(z_0) \cap \mathbb{R}$ et pour un $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, on a $|\text{tr} M(z + \eta, E, \varepsilon)| > C > 2$. Alors on a $|\text{tr} T_{z,\varepsilon} \left(x + \left[\frac{2\pi}{\varepsilon} \right], x, E \right)| > \tilde{C} > 2$. En particulier, pour chaque $\theta \in [0, 2\pi)$, l'énergie E n'est pas une valeur propre du problème quasipériodique :*

$$\begin{cases} -\Psi''(x, z, E, \varepsilon) + [V(x) + W(\varepsilon x + z)]\Psi(x, z, E, \varepsilon) = E\Psi(x, z, E, \varepsilon) \\ \Psi \left(x + \left[\frac{2\pi}{\varepsilon} \right], z, E, \varepsilon \right) = e^{i\theta} \Psi(x, z, E, \varepsilon). \end{cases}$$

Démonstration de la Proposition 1.1. Soit $\{\Psi_+, \Psi_-\}(x, z, E, \varepsilon)$ une base de solutions de l'équation (AdiabQP). On exprime la matrice de transfert $T_{z,\varepsilon}(y, x, E)$ dans cette base :

$$T_{z,\varepsilon}(y, x, E) = \begin{pmatrix} \Psi_+ & \Psi_- \\ \Psi'_+ & \Psi'_- \end{pmatrix} (y, z, E, \varepsilon) \begin{pmatrix} \Psi_+ & \Psi_- \\ \Psi'_+ & \Psi'_- \end{pmatrix}^{-1} (x, z, E, \varepsilon) \quad (4.1.3)$$

Supposons que $\{\Psi_+, \Psi_-\}$ est une base cohérente, *i.e.* vérifiant :

$$\Psi_{\pm}(x + 1, z, E, \varepsilon) = \Psi_{\pm}(x, z + \varepsilon, E, \varepsilon) \quad \text{et} \quad w[\Psi_+, \Psi_-](z, E) \equiv 1. \quad (4.1.4)$$

Posons $y := x + \left[\frac{2\pi m}{\varepsilon} \right]$. En utilisant (4.1.4), on obtient :

$$\begin{aligned} T_{z,\varepsilon}(y, x, E) &= \begin{pmatrix} \Psi_+ & \Psi_- \\ \Psi'_+ & \Psi'_- \end{pmatrix} \left(x, z + \varepsilon \left[\frac{2\pi m}{\varepsilon} \right], E, \varepsilon \right) \begin{pmatrix} \Psi_+ & \Psi_- \\ \Psi'_+ & \Psi'_- \end{pmatrix}^{-1} (x, z, E, \varepsilon) = \\ &= \begin{pmatrix} \Psi_+ & \Psi_- \\ \Psi'_+ & \Psi'_- \end{pmatrix} (x, z + \eta_m + 2\pi m, E, \varepsilon) \begin{pmatrix} \Psi_+ & \Psi_- \\ \Psi'_+ & \Psi'_- \end{pmatrix}^{-1} (x, z, E, \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

avec $\eta_m := \left(\varepsilon \left[\frac{2\pi m}{\varepsilon} \right] - 2\pi m \right) \in (-\varepsilon, 0]$. Soit $M(z, E, \varepsilon)$ la matrice de monodromie associée à la base cohérente $\{\Psi_+, \Psi_-\}$:

$$\begin{pmatrix} \Psi_+ & \Psi_- \\ \Psi'_+ & \Psi'_- \end{pmatrix}^t (x, z + 2\pi, E, \varepsilon) = M(z, E, \varepsilon) \begin{pmatrix} \Psi_+ & \Psi_- \\ \Psi'_+ & \Psi'_- \end{pmatrix}^t (x, z, E, \varepsilon). \quad (4.1.6)$$

On exprime la matrice de transfert $T_{z,\varepsilon}(x, y, E)$ en termes de la matrice de monodromie $M(z, E, \varepsilon)$ à l'aide de (4.1.5) :

$$\begin{aligned} T_{z,\varepsilon}(x, y, E) &= \begin{pmatrix} \Psi_+ & \Psi_- \\ \Psi'_+ & \Psi'_- \end{pmatrix} (x, z + \eta_m + 2\pi(m-1), E, \varepsilon) M^t(z + \eta_m + 2\pi(m-1), E, \varepsilon) \times \\ &\quad \begin{pmatrix} \Psi_+ & \Psi_- \\ \Psi'_+ & \Psi'_- \end{pmatrix}^{-1} (x, z, E, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \Psi_+ & \Psi_- \\ \Psi'_+ & \Psi'_- \end{pmatrix} (x, z + \eta_m, E, \varepsilon) \times \\ &\quad (\mathcal{M}_m)^t(x, z + \eta_m, E, \varepsilon) \begin{pmatrix} \Psi_+ & \Psi_- \\ \Psi'_+ & \Psi'_- \end{pmatrix}^{-1} (x, z, E, \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Supposons, de plus, que la base cohérente $\{\Psi_+, \Psi_-\}$ a le CAS pour z dans un voisinage constant (indépendant de ε) $U(z_0)$ de z_0 pour une détermination κ du moment complexe, *i.e.* pour tout $z \in U(z_0)$ et $x \in [-X, X]$ (où $X > 1$) on a :

$$\Psi_{\pm}(x, z, E, \varepsilon) = \exp\left(\pm \frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \kappa(s) ds\right) (\Phi_{\pm}^0(x, z, E) + o(1)) \quad (4.1.8)$$

où $\Phi_{\pm}^0(x, z, E) = n(z, z_0, E)e^{\pm i\kappa(z)x} p_{\pm}(x, z, E)$ sont les solutions de Bloch canoniques, analytiques dans $U(z_0)$ pour chaque x fixé. $\Phi_{\pm}^0(x, z, E)$ ne dépendent pas de ε . Par analyticité de Φ_{\pm}^0 en la variable z , on a $\Phi_{\pm}^0(x, z + \eta_m, E) = \Phi_{\pm}^0(x, z, E) + O(\varepsilon)$.

Pour $y \in [-X, X]$ et $z \in U(z_0)$, on met (4.1.8) dans (4.1.7) et on obtient :

$$T_{z,\varepsilon}(y, x, E) = (\Phi^0(x, z, E) + o(1)) D(z + \eta_m, E, \varepsilon) (\mathcal{M}_m)^t(z + \eta_m, E, \varepsilon) D^{-1}(z) (\Phi^0(x, z, E) + o(1))^{-1} \quad (4.1.9)$$

avec

$$- \Phi^0(x, z, E) = \begin{pmatrix} \Phi_+^0 & \Phi_-^0 \\ \Phi_+^0 & \Phi_-^0 \end{pmatrix} (x, z, E),$$

- $o(1)$ désigne une matrice 2×2 dont les coefficients sont $o(1)$,

- $D(z)$ est la matrice diagonale $\text{diag} \left\{ \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \kappa(s) ds\right), \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \kappa(s) ds\right) \right\}$.

Ceci démontre la première partie de la Proposition 1.1. Pour démontrer la relation entre les traces des matrices on utilise $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ et $(\Phi^0(x, z, E) + o(1))(\Phi^0(x, z, E) + o(1))^{-1} = I + o(1)$:

$$\text{tr} T_{z,\varepsilon}\left(x + \left[\frac{2\pi m}{\varepsilon}\right], x, E\right) = \text{tr}((D_m + o(1))(\mathcal{M}_m)^t(z + \eta_m, E, \varepsilon))$$

avec $D_m = D(z + \eta_m)D^{-1}(z) = \text{diag}\{d, d^{-1}\}$ où $d = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_z^{z+\eta_m} \kappa(s) ds\right)$. \square

Démonstration du Corollaire 1.2. Supposons que $\text{Tr}M(z + \eta, E, \varepsilon) > C > 2$ (la preuve pour le cas $\text{Tr}M(z + \eta, E, \varepsilon) < C < -2$ est analogue). Soient $\lambda_1 = \lambda_1(z, E, \varepsilon)$ et λ_1^{-1} les valeurs propres de M . La condition sur trace implique ce que $\lambda_1 > \frac{C}{2} + \sqrt{\left(\frac{C}{2}\right)^2 - 1} > 1$. Les valeurs propres μ_1 et μ_1^{-1} de la matrice de transfert $T_{z,\varepsilon}\left(x + \left[\frac{2\pi}{\varepsilon}\right], x, E\right)$ vérifient :

$$\mu_1 = \lambda_1(d + o(1)).$$

$$\text{tr} T_{z,\varepsilon}\left(x + \left[\frac{2\pi}{\varepsilon}\right], x, E\right) = \mu_1 + \mu_1^{-1} = \lambda_1(d + o(1)) + \lambda_1^{-1}(d + o(1))^{-1} > 2$$

car pour ε suffisamment petit $o(1) < \delta < \lambda_1 - 1$ et la fonction $x + \frac{1}{x}$ envoie l'extérieur de cercle de rayon 1 dans l'extérieur de l'intervalle $[-2, 2]$.

La trace de la matrice de transfert est réelle, d'où $|\text{tr} T_{z,\varepsilon}(x, E)| > 2$ ce qui achève la preuve. \square

Ainsi on relie le spectre des problèmes avec les conditions au bord quasi-périodiques avec la trace de la matrice de monodromie. Dans la section suivante, on va étudier l'asymptotique de la matrice de monodromie, en particulier, on va calculer la trace de cette matrice et sa norme en termes du paramètre spectral E .

2 Asymptotique de la matrice de monodromie

Dans cette section, on formule le Théorème 2.3 qui décrit l'asymptotique de la matrice de monodromie associée à une base cohérente et on démontre ce théorème. Puis on illustre l'application du Théorème 2.3 en considérant différents cas d'énergies et différents types de potentiels. On va voir que différents cas d'énergies ramènent à des asymptotiques de la matrice de monodromie de structure différente.

2.1 Théorème 2.3 et asymptotique de la matrice de monodromie

Pour formuler le Théorème 2.3 qui décrit l'asymptotique de la matrice de monodromie associée à une base cohérente qui a le CAS dans un voisinage complexe de z_0 situé à l'intérieur de $\mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0)) \cap \mathbb{R}$, on introduit la notion de courbe *admissible*.

Définition 2.1. On dit que α est une *courbe horizontale* si l'angle θ entre γ et chaque ligne $\{\Re z = \text{const}\}$ vérifie $\theta \in (0, \pi)$.

Considérons les classes d'équivalence $[\alpha]$ (voir Définition 1.30) des courbes α dans S_Y vérifiant :

- α joint z_0 avec $z_0 + 2\pi$,
- est horizontale,
- est de classe C^1 ,
- est régulière (au sens de Définition 1.29).

Fixons un point z_0 à l'intérieur de J_0 où $J_0 \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$. Fixons une détermination du moment complexe κ_0 analytique au voisinage U_0 de z_0 et une détermination κ_1 du moment complexe analytique au voisinage $U_0 + 2\pi$ de $z_0 + 2\pi$.

Définition 2.2. On dit qu'une courbe horizontale α qui va de z_0 à $z_0 + 2\pi$ est *admissible* pour le couple $\{\kappa_0, \kappa_1\}$ si :

- $\Im \kappa_0|_{\alpha}(z) = \Im \kappa_1(z)$ pour $z \in U_0 + 2\pi$, où $\kappa_0|_{\alpha}$ désigne le prolongement analytique de κ_0 le long α ,
- À un intervalle $J \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ on associe \tilde{J} par $\tilde{J} \in \mathcal{Z}_{\mathbb{C}}$ tel que $J \subset \tilde{J}$. On suppose que pour chaque $J \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ situé entre J_0 et $J_0 + 2\pi$ on a $\#\{\tilde{J} \cap \alpha\} \in 2\mathbb{Z}$.
- $\#\{\alpha \cap \tilde{J}_0\} \in 2\mathbb{Z}$ si $\Im \kappa_0 < 0$ et $\#\{\alpha \cap \tilde{J}_0\} \in 2\mathbb{Z} + 1$ si $\Im \kappa_0 > 0$.
- $\#\{\alpha \cap (\tilde{J}_0 + 2\pi)\} \in 2\mathbb{Z}$ si $\Im \kappa_1 < 0$ et $\#\{\alpha \cap (\tilde{J}_0 + 2\pi)\} \in 2\mathbb{Z} + 1$ si $\Im \kappa_1 > 0$.

On va noter par $Adm(\kappa_1, \kappa_2)$ l'ensemble des classes d'équivalence de courbes admissibles pour un couple κ_1 et κ_2 . On note $T_{2\pi}\kappa(z) := \kappa(z + 2\pi)$. Soit α une courbe lipschitzienne, soient $z_1 \in \alpha$ et $z_2 \in \alpha$, on note l'intégrale d'une fonction continue f de z_1 à z_2 le long de α par

$$\int_{z_1, \alpha}^{z_2} f(s) ds.$$

Soit κ une détermination du moment complexe analytique dans un voisinage de z_0 . Soient Ω et q définis dans l'équation (1.1.29). On note $\Delta \arg q|_{\alpha}$ le changement de l'argument de q le long d'une courbe régulière α . Pour une courbe régulière α qui part de z_0 et arrive en $z_0 + 2\pi$ on introduit la fonction suivante

$$I(\alpha, z_0) = \exp \left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0, \alpha}^{z_0 + 2\pi} \kappa|_{\alpha}(s) ds + \Delta \arg q|_{\alpha} + \int_{\alpha} \Omega(s) ds \right) \quad (4.2.1)$$

Théorème 2.3. Soient W, V vérifiant les hypothèses **(HWA)**, **(HWP)**, **(HWC)**, **(HVR)**, **(HVP)** et soit l'énergie $E_0 \in \Sigma_\delta$. Soit $J \in \mathcal{Z}_\mathbb{R}$. Fixons $z_0 \in J$ tel que $|\mathcal{E}(z_0) - E_m| > \delta$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$, $Y > 0$, $C > 0$ et une détermination κ de moment complexe analytique dans un voisinage de z_0 tels qu'on peut construire une base cohérente $\{f, f^*\}$ pour laquelle la matrice de monodromie $M(z, E, \varepsilon)$ associée vérifie :

- M a la forme (24),
- pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ et $z \in S_Y$ les coefficients $a(z, E, \varepsilon)$ et $b(z, E, \varepsilon)$ dans (24) admettent l'asymptotique :

$$a(z, E, \varepsilon) = \sum_{[\alpha_k] \in \text{Adm}(\kappa_0, T_{2\pi}^{-1} \kappa_0)} I(\alpha_k, z_0)(1 + a_{0,k}(E, \varepsilon) + a_{1,k}(z, E, \varepsilon)) \quad (4.2.2)$$

$$b(z, E, \varepsilon) = \sum_{[\beta_k] \in \text{Adm}(\kappa_0, T_{2\pi}^{-1} \kappa_0^*)} I(\beta_k, z_0)(1 + b_{0,k}(E, \varepsilon) + b_{1,k}(z, E, \varepsilon)) \quad (4.2.3)$$

avec

$$\begin{aligned} |a_{0,k}(E, \varepsilon)|, |b_{0,k}(E, \varepsilon)| &= o(1) \text{ indépendants de } z \\ a_{1,k}(z, E, \varepsilon) &= O(e^{-\frac{C}{\varepsilon}}) \quad b_{1,k}(z, E, \varepsilon) = O(e^{-\frac{C}{\varepsilon}}) \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Remarque 2.4. Pour les valeurs complexes de z les coefficients de Fourier sont à croissance/décroissance exponentielle en $\Im z$. Donc, pour $z \in S_{Y,+}$, le terme principal de la matrice de monodromie vient de l'intégration le long des courbes d'indice minimal. Pour $z \in S_{Y,-}$, par contre, les termes principaux viennent des courbes d'indice maximal. Plus précisément, on définit :

$$m_{\max} := \max_{[\alpha] \in \text{Adm}(\kappa_0, T_{2\pi}^{-1} \kappa_0)} m(\alpha) \quad m_{\min} := \min_{[\alpha] \in \text{Adm}(\kappa_0, T_{2\pi}^{-1} \kappa_0)} m(\alpha)$$

Pour $z \in S_{Y,+}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{[\alpha_k] \in \text{Adm}(\kappa_0, T_{2\pi}^{-1} \kappa_0)} I(\alpha_k, z_0)(1 + a_{0,k}(E, \varepsilon) + a_{1,k}(z, E, \varepsilon)) &= \\ &= \sum_{[\alpha_k] \in \text{Adm}(\kappa_0, T_{2\pi}^{-1} \kappa_0), m(\alpha_k) = m_{\max}} I(\alpha_k, z_0)(1 + a_{0,k}(E, \varepsilon) + \tilde{a}_{1,k}(z, E, \varepsilon)). \end{aligned}$$

où $|\tilde{a}_{1,k}(z, E, \varepsilon)| = O(e^{-\frac{C}{\varepsilon}})$. Pour $z \in S_{Y,-}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{[\alpha_k] \in \text{Adm}(\kappa_0, T_{2\pi}^{-1} \kappa_0)} I(\alpha_k, z_0)(1 + a_{0,k}(E, \varepsilon) + a_{1,k}(z, E, \varepsilon)) &= \\ &= \sum_{[\alpha_k] \in \text{Adm}(\kappa_0, T_{2\pi}^{-1} \kappa_0), m(\alpha_k) = m_{\min}} I(\alpha_k, z_0)(1 + a_{0,k}(E, \varepsilon) + \tilde{a}_{1,k}(z, E, \varepsilon)). \end{aligned}$$

où $|\tilde{a}_{1,k}(z, E, \varepsilon)| = O(e^{-\frac{C}{\varepsilon}})$.

L'analyse des intégrales et des indices dans les formules (4.2.2) et (4.2.3) montre que la structure et les coefficients de la matrice de monodromie dépendent d'objets définis sur les surfaces iso-énergétiques $\{\mathbb{E}(\kappa) + W(z) = E\}$.

2.2 Remarque structurelle

L'asymptotique de la matrice de monodromie associée à une base cohérente de solutions de l'équation (AdiabQP) qui ont un CAS au voisinage de z_0 est donnée par le Théorème 2.3. La taille du coefficient $M_{11}(z, E, \varepsilon, z_0) = a(z, E, \varepsilon, z_0)$ de la matrice de monodromie est donnée par $\max_{[\alpha_k] \in \text{Adm}(\kappa_J, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J^*)} |I(\alpha_k, z_0)|$. Les $I(\alpha_k, z_0)$ sont de la forme suivante :

$$I(\alpha_k, z_0) = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\lambda(\alpha_k, E) + \frac{2\pi i}{\varepsilon}m(\alpha_k)(z - z_0) + O(1)\right) \text{ avec } \lambda(\alpha_k, E) = \int_{\alpha_k} \kappa_J|_{\alpha}(s)ds.$$

Il est facile de vérifier que pour toute courbe $[\alpha_k] \in \text{Adm}(\kappa_J, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J^*)$ on a :

$$\Im \int_{\alpha_k} \kappa_J|_{\alpha_k}(s)ds = - \int_{z_0}^{z_0+2\pi} \Im \kappa_p(s)ds = - \int_{z_0}^{z_0+2\pi} \gamma_0(E - W(z))dz.$$

Ainsi le terme principal des coefficients de la matrice de monodromie pour $z \in S_Y$ est du même ordre que celui de la somme

$$\sum_{[\alpha_k] \in \text{Adm}(\kappa_J, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J^*)} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^{z_0+2\pi} \gamma_0(E - W(z))dz - \frac{2\pi m(\alpha_k)}{\varepsilon} \Im z + O(1)\right).$$

Pour des valeurs de $z \in S_{Y,+}$, *i.e.* de partie imaginaire strictement positive, les termes dominants viennent des courbes d'indice minimal (voir la Remarque 2.4) :

$$\{[\alpha_{k_m}] \in \text{Adm}(\kappa_J, T\kappa_J^*) \text{ tel que } m(\alpha_{k_m}) = m_{\min} = \min_{\alpha_k \in \text{Adm}(\kappa_J, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J^*)} m(\alpha_k)\}.$$

Pour des valeurs de $z \in S_{Y,-}$, *i.e.* de partie imaginaire strictement négative, les termes dominants viennent des courbes d'indice maximal (voir la Remarque 2.4) :

$$\{[\alpha_{k_m}] \in \text{Adm}(\kappa_J, T\kappa_J^*) \text{ tel que } m(\alpha_{k_m}) = m_{\max} = \max_{\alpha_k \in \text{Adm}(\kappa_J, T\kappa_J^*)} m(\alpha_k)\}.$$

Pour des valeurs réelles de z , il faut prendre en compte toutes les courbes admissibles.

Lemme 2.5. *On a l'asymptotique suivante pour la trace de la matrice de monodromie :*

$$\begin{aligned} \text{Tr}M(z, E, \varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^{z_0+2\pi} \gamma_0(E - W(z))dz\right) \\ \sum_k \left(\cos\left(\frac{\Phi_k(E) + 2\pi m_k(z - z_0) + \phi_k(E)}{\varepsilon}\right) + e_k(z, E)\right) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

où

- Φ_k est une fonction analytique et non constante de E , à valeurs positives,
- m_k est un entier, $m_k \in \{0, M\}$ avec M le nombre d'intervalles de $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ par intervalle de longueur 2π .
- $\phi_k(E) \in \frac{\pi i}{2}\mathbb{Z}$.
- $e_k(z, E) = s_k(E) + t_k(z, E)$ avec $s_k(E) = o(1)$ et $t_k(z, E) = O(e^{-\frac{\delta}{\varepsilon}})$.

Ce lemme est un simple corollaire du Théorème 2.3. On va démontrer le Théorème 2.3. Par la suite, on étudie l'asymptotique de la matrice de monodromie sur des exemples. On va traiter les cas suivants :

- Le plus simple est le cas où la fenêtre spectrale $E - W(\mathbb{R})$ est contenue dans une zone spectrale de \mathbb{H}_0 , *i.e.* il existe un entier naturel n tel que $E - W(\mathbb{R}) \subset [E_{2n-1}, E_{2n}]$.
- Le cas où W a un maximum et un minimum par période, dont un dans une préimage d'une zone spectrale et l'autre dans une préimage de lacune spectrale de \mathbb{H}_0 .
- le cas où W a un minimum, disons z_1 , et un maximum, disons z_2 par période et $E - W(z_1) \in (E_{2n+1}, E_{2n+2})$ et $E - W(z_2) \in (E_{2n-1}, E_{2n})$.
- Le cas où W a tous ses points critiques dans les préimages de lacunes spectrales.
- Le cas d'un point critique dans la préimage de zone spectrale et l'autre dans la préimage de lacune spectrale, quand la fenêtre spectrale couvre entièrement une zone et une lacune spectrales.
- Le cas de deux points critiques dans les préimages de zones spectrales quand la fenêtre spectrale couvre entièrement deux lacunes de \mathbb{H}_0 .

2.3 Preuve du Théorème 2.3

Cette section est consacrée à la démonstration du Théorème 2.3 et à la formulation d'un principe de réflexion qui permet de calculer le terme principal de l'asymptotique d'une solution cohérente.

Démonstration du Théorème 2.3. On fixe un intervalle J , une préimage de la zone spectrale de \mathbb{H}_0 . On va calculer l'asymptotique de la matrice de monodromie $M(z, E, \varepsilon)$ associée à la base cohérente $\{f_J, f_J^*\}$ construite dans la Proposition 2.8. Cette base a le CAS dans le domaine A_J délimité par $\overline{\sigma_a} \cup \sigma_a, \overline{\sigma_b} \cup \sigma_b$ et les lignes $\Im z = Y$. On va appliquer le Corollaire 1.27 pour démontrer que la base $\{f_J, f_J^*\}$ a le CASpl dans le domaine $A_J + 2\pi$.

Par la suite, on va utiliser les formules (22) qui expriment les coefficients de la matrice de monodromie en termes de wronskiens de solutions de (AdiabQP). Pour chaque $z \in S_Y$ on écrit :

$$\begin{aligned} M_{11}(z - 2\pi, E, \varepsilon) &= \frac{w[f_J(x, z, E, \varepsilon), T_{2\pi}^{-1} f_J^*(x, z, E, \varepsilon)]}{w[T_{2\pi}^{-1} f_J(x, z, E, \varepsilon), T_{2\pi}^{-1} f_J^*(x, z, E, \varepsilon)]} \\ M_{12}(z - 2\pi, E, \varepsilon) &= \frac{w[f_J(x, z, E, \varepsilon), T_{2\pi}^{-1} f_J(x, z, E, \varepsilon)]}{w[T_{2\pi}^{-1} f_J^*(x, z, E, \varepsilon), T_{2\pi}^{-1} f_J(x, z, E, \varepsilon)]} \\ M_{21}(z - 2\pi, E, \varepsilon) &= \frac{w[f_J^*(x, z, E, \varepsilon), T_{2\pi}^{-1} f_J^*(x, z, E, \varepsilon)]}{w[T_{2\pi}^{-1} f_J(x, z, E, \varepsilon), T_{2\pi}^{-1} f_J^*(x, z, E, \varepsilon)]} \\ M_{22}(z - 2\pi, E, \varepsilon) &= \frac{w[f_J^*(x, z, E, \varepsilon), T_{2\pi}^{-1} f_J(x, z, E, \varepsilon)]}{w[T_{2\pi}^{-1} f_J^*(x, z, E, \varepsilon), T_{2\pi}^{-1} f_J(x, z, E, \varepsilon)]} \end{aligned}$$

Pour démontrer que f_J et f_J^* ont le CASpl dans $A_J + 2\pi$ on commence par construire une séquence de domaines de type A et de domaines de type B. *Grosso modo*, il s'agit de domaines d'oscillation de solutions (type A) et de domaines de croissance-décroissance exponentielle (type B).

Soit $J \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ et $K \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ deux intervalles consécutifs, $J = [a_J, b_J]$ et $K = [a_K, b_K]$. On rappelle les notations introduites précédemment :

1. On note κ_J (resp. κ_K) la détermination du moment complexe naturelle pour J (resp. naturelle pour K).
2. On note $\sigma_a, \bar{\sigma}_a$ (resp. $\sigma_b, \bar{\sigma}_b, \sigma_{\bar{a}}, \bar{\sigma}_{\bar{a}}, \sigma_{\bar{b}}$ et $\bar{\sigma}_{\bar{b}}$) sont des lignes de type de Stokes qui sortent de a_J (resp. de b_J , de a_K et de b_K).

On introduit des domaines de type A et de type B associés :

$$A_J := \{z \in S_y \text{ entre } \sigma_a \cup \bar{\sigma}_a \text{ et } \sigma_b \cup \bar{\sigma}_b\}$$

$$B_J := \{z \in S_y \text{ entre } \sigma_b \cup \bar{\sigma}_b \text{ et } \sigma_{\bar{a}} \cup \bar{\sigma}_{\bar{a}}\}$$

$$A_K := \{z \in S_y \text{ entre } \sigma_{\bar{a}} \cup \bar{\sigma}_{\bar{a}} \text{ et } \sigma_{\bar{b}} \cup \bar{\sigma}_{\bar{b}}\}$$

Par la Proposition 2.8, pour chaque intervalle J qui forme une composante connexe de

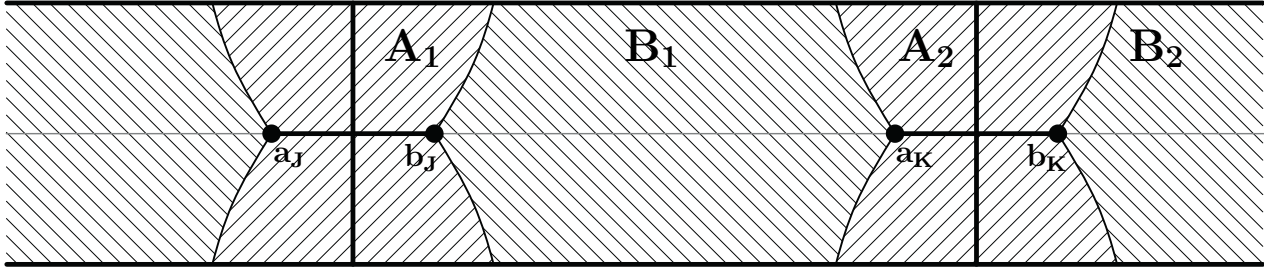


FIGURE IV.1 – Domaines A_1 , B_1 et A_2

$\mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0)) \cap \mathbb{R}$ on peut construire une base cohérente $\{f_J, f_J^*\}$ telle que f_J a le CAS dans D_J pour la détermination naturelle κ_J et f_J^* a le CAS dans $\overline{D_J}$ pour la détermination κ_J^* . On fixe un J et on utilise le Corollaire 1.27 pour montrer que la solution f_J (resp. f_J^*), qui a le CAS dans D_J (resp. $\overline{D_J}$), a le CASpl dans le domaine $A_J + 2\pi$. Le principe de réflexion définit les courbes de prolongement d'asymptotique qui apparaissent dans le CASpl.

Pour chaque $J \in \mathcal{Z}_{\mathbb{C}}$ on peut construire D_J et $\overline{D_J}$ qui vérifient :

- $A_J \subset D_J \cap \overline{D_J}$,
- $B_J \subset D_J \cap \overline{D_J}$,
- $A_K \subset D_J \cap \overline{D_J}$,
- dans A_J on a $\Im \kappa_J > 0$ et $\Im \kappa_J^* > 0$,
- dans A_K on a $\Im \kappa_J < 0$ et $\Im \kappa_K^* < 0$,
- dans B_J on a $\kappa_J = -\kappa_J^*$.

Maintenant, on numérote $J_1 := J, J_2, \dots, J_m, J_{m+1} := J + 2\pi$ les intervalles consécutifs de $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$. Les bases de solutions cohérentes $\{f_{J_i}, f_{J_i}^*\}$ et les domaines A_{J_i}, B_{J_i} vérifient les hypothèses du Corollaire 1.27. D'où pour $z \in A_{J_{m+1}} = A_J + 2\pi$ on a :

$$\begin{aligned}
f_J(x, z, E, \varepsilon) = & \sum_{[\alpha_k] \in \text{Adm}(\kappa_J, T_{2\pi}^{-1} \kappa_J)} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_J, \alpha_k}^z \kappa_J(s) ds\right) (\Phi_{+, J} |_{\alpha_k}(x, z, z_J) + o(1)) + \\
& + \sum_{[\beta_k] \in \text{Adm}(\kappa_J, T_{2\pi}^{-1} \kappa_J^*)} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_J, \alpha_k}^z \kappa_J(s) ds\right) (\Phi_{+, J} |_{\alpha_k}(x, z, z_J) + o(1)) \quad (4.2.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_J^*(x, z, E, \varepsilon) = & \sum_{[\tilde{\alpha}_k] \in \text{Adm}(\kappa_J^*, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J)} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_J, \alpha_k}^z \kappa_J(s) ds\right) (\Phi_{-,J}|_{\alpha_k}(x, z, z_J) + o(1)) \\
 & \sum_{[\tilde{\beta}_k] \in \text{Adm}(\kappa_J^*, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J^*)} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_J, \alpha_k}^z \kappa_J(s) ds\right) (\Phi_{-,J}|_{\alpha_k}(x, z, z_J) + o(1)) \quad (4.2.6)
 \end{aligned}$$

Les courbes admissibles (voir la Définition 2.2) sont décrites par le principe de réflexion :

Définition 2.6 (Principe de réflexion). Soit κ_J la détermination naturelle pour J . Une courbe α est *admissible* pour κ_1 et κ_2 , on note $\alpha \in \text{Adm}(\kappa_1, \kappa_2)$, où $\kappa_1 = \kappa_J$ ou κ_J^* et $\kappa_2 = T_{2\pi}^{-1}\kappa_J$ ou $T_{2\pi}^{-1}\kappa_J^*$ si :

1. α est une courbe horizontale qui va de $z_0 = z_J$ à $z_1 = z_J + 2\pi$,
2. α vérifie le principe de réflexion suivant :

$$\forall J_i \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}} \text{ avec } i = 1, \dots, m \text{ on a } \#\{J_i \cap \alpha\} \in 2\mathbb{N}$$

3. α reste dans $D_1 \cup D_2$, où $D_1 = D_J$ si $\kappa_1 = \kappa_J$, $D_1 = \overline{D_J}$ si $\kappa_1 = \kappa_J^*$, $D_2 = D_J + 2\pi$ si $\kappa_2 = T_{2\pi}^{-1}\kappa_J$ et $D_2 = \overline{D_J} + 2\pi$ si $\kappa_2 = T_{2\pi}^{-1}\kappa_J^*$.

Les asymptotiques (4.2.5), (4.2.6) et le CAS des solutions

$$f_{J_{m+1}}(x, z, E, \varepsilon, z_J + 2\pi) := T_{2\pi}^{-1} f_{J_1}(x, z, \varepsilon, z_J) \text{ et } f_{J_{m+1}}^*(x, z, E, \varepsilon, z_J + 2\pi) := T_{2\pi}^{-1} f_{J_1}^*(x, z, \varepsilon, z_J)$$

dans $A_{J_{m+1}} = A_J + 2\pi$ impliquent :

$$\begin{aligned}
 M_{11}(z, E, \varepsilon) = & \sum_{[\alpha_k] \in \text{Adm}(\kappa_J, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J)} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_J, \alpha_k}^{z_J + 2\pi} \kappa_J(s) ds\right) \\
 & \exp\left(\frac{2\pi i}{\varepsilon} m(\kappa_J|_{\alpha_k}, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J)(z - z_J - 2\pi) + \int_{\alpha_k} \Omega_J(s) ds + \Delta \arg q|_{\alpha_k}\right) (1 + o(1))
 \end{aligned}$$

Maintenant, on applique le Corollaire 1.25 (notamment la formule (3.1.10)) pour préciser les termes $o(1)$, utilisant ce que chaque domaine de rencontre B_j utilisé dans la construction vérifie $S_Y \subset S(B_j)$ pour un $\tilde{Y} > 0$. Ceci permet de remplacer $o(1)$ par $a_{0,k}(E, \varepsilon) + a_{1,k}(z, E, \varepsilon)$ avec les propriétés annoncées en choisissant $0 < Y < \tilde{Y}$. Ceci achève la preuve de l'asymptotique de $M_{11}(z, E, \varepsilon)$.

Pour terminer la démonstration du Théorème 2.3, obtient de même façon les asymptotiques des coefficients M_{12} , M_{21} et M_{22} annoncées dans le théorème. \square

On va illustrer le Théorème 2.3 par plusieurs exemples d'application à différents cas d'énergies et de potentiels.

2.4 Cas où $E - W(\mathbb{R}) \subset [E_{2n-1}, E_{2n}]$

On considère les énergies E réelles telles que

(HEAbs) il existe un entier naturel n tel que $E - W(\mathbb{R}) \subset [E_{2n-1}, E_{2n}]$.

Ici $[E_{2n-1}, E_{2n}]$ est la n -ème zone spectrale de \mathbb{H}_0 . Sous l'hypothèse **(HEAbs)** les classes de courbes admissibles $Adm(\kappa_J, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J^*)$ et $Adm(\kappa_J^*, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J)$ sont vides, les classes $Adm(\kappa_J, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J)$, $Adm(\kappa_J^*, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J^*)$, contiennent un seul élément :

$$[\alpha_0] \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = [z_0, z_0 + 2\pi],$$

i.e. la courbe α_0 est une courbe qui va le long de \mathbb{R} de z_0 à $z_0 + 2\pi$.

L'image de α_0 par l'énergie complexe $\mathcal{E}(z)$, le lacet $\mathcal{E}(\alpha_0)$, est une courbe contractile en un point et on a

$$m(\alpha_0) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma(\alpha_0) = 1.$$

De plus, $\Im \int_{\alpha_0} \kappa_J|_{\alpha_0}(s)ds = \int_{z_0}^{z_0+2\pi} \gamma_0(E - W(z))dz = 0$ car $E - W(z) \in \sigma(\mathbb{H}_0)$ pour $z \in [z_0, z_0 + 2\pi]$ et donc $\gamma_0(E - W(z)) = 0$. On pose

$$\Phi(E) := \Re \int_{\alpha_0} \kappa_J|_{\alpha_0}(s)ds = \int_{z_0}^{z_0+2\pi} \Re \kappa_J(s)ds.$$

La fonction $\Phi(E)$ est analytique réelle en E , non constante et $\Phi(E) \in (0, 2\pi^2)$. On a

$$\int_{\alpha_0} \Omega_J(s)ds = 0.$$

De plus, les coefficients de la matrice de monodromie ont l'asymptotique :

$$\begin{aligned} M_{11}(z, E, z_0, \varepsilon) &= a(z, E; \varepsilon) = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\Phi(E)\right) (1 + o_E(1) + O_{z,E}\left(e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right)) \quad \text{et} \\ M_{12}(z, E, z_0, \varepsilon) &= b(z, E; \varepsilon) = o_E(1) + O_{z,E}\left(e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Les coefficients $M_{21}(z, E, z_0, \varepsilon)$ et $M_{22}(z, E, z_0, \varepsilon)$ se calculent par symétrie :

$$\begin{aligned} M_{21}(z, E, z_0, \varepsilon) &= b^*(z, E, z_0; \varepsilon) = o_E(1) + O_{z,E}\left(e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right) \quad \text{et} \\ M_{22}(z, E, z_0, \varepsilon) &= a^*(z, E; \varepsilon) = \exp\left(-\frac{i}{\varepsilon}\Phi(E)\right) (1 + o_E(1) + O_{z,E}\left(e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right)). \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

On calcule la trace de la matrice de monodromie :

$$\begin{aligned} Tr M(z, E, \varepsilon, z_0) &= \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\Phi(E)\right) (1 + o_E(1) + O_{z,E}\left(e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right)) + \\ &+ \exp\left(-\frac{i}{\varepsilon}\Phi(E)\right) (1 + o_E(1) + O_{z,E}\left(e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right)) = \\ &= 2 \cos\left(\frac{i}{\varepsilon}\Phi(E)\right) + o_E(1) + O_{z,E}\left(e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right) \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Ainsi l'asymptotique des zéros de la trace de la matrice de monodromie peut être décrite grâce à la fonction $\Phi(E)$. Les zéros de la trace de la matrice de monodromie sont situés dans des intervalles de longueur exponentiellement petite (le terme $O_{z,\varepsilon}\left(e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right)$) autour des points proches de solutions de l'équation

$$2 \cos\left(\frac{i}{\varepsilon}\Phi(E)\right) = 0.$$

2.5 Cas où $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}} \cap \mathcal{C}$ contient un point par intervalle de longueur 2π

Ici on suppose que W a deux points critiques, disons z_0 et z_1 . On suppose que :

(HE1pc) $\mathcal{E}(z_0) \in \sigma(\mathbb{H}_0)$ et $\mathcal{E}(z_1) \in \sigma(\mathbb{H}_0)$.

2.5.1 Cas où $\sigma(\mathbb{H}_0) \cap (E - W(\mathbb{R})) \subset [E_{2n-1}, E_{2n}]$

On suppose que $E - W(z_0) \in [E_{2n-1}, E_{2n}]$ et que $E - W(z_1)$ se trouve dans la lacune voisine à la zone $[E_{2n-1}, E_{2n}]$. Quatre cas sont possibles :

1. n est impair et z_0 est un minimum,
2. n est pair et z_0 est un minimum,
3. n est impair et z_0 est un maximum,
4. n est pair et z_0 est un maximum.

Considérons le premier cas en détails, les autres étant analogues. Dans ce cas là, entre $\gamma_{1,1}$ et σ_a , la détermination naturelle κ_J est liée à la détermination principale κ_p par $\kappa_J = \kappa_p - \pi(n-1)$. Les classes de courbes admissibles sont :

$$\text{Adm}(\kappa_J, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J^*) = \{[\alpha_1]\} \quad \text{et} \quad \text{Adm}(\kappa_J, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J) = \{[\beta_1]\}.$$

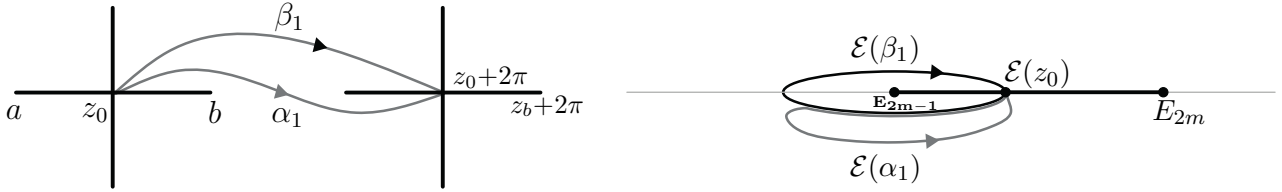


FIGURE IV.2 – Les courbes α_1 et β_1

On voit sur la Figure IV.2 que $\mathcal{E}(\alpha_1)$ est contractile en un point, d'où $\sigma(\alpha_1) = 1$ et $m(\alpha_1) = 0$. On calcule $\sigma(\beta_1) = -1$ et $m(\beta_1) = 0$. Pour appliquer le Théorème 2.3, on a besoin de calculer :

$$\int_{z_0, \alpha_1}^{z_0+2\pi} \kappa_J(s) ds = \int_{z_0}^{z_0+2\pi} \gamma_0(E - W(s)) ds + \int_{a+i0}^{b+i0} \Re \kappa_J(s) ds = -iS(E) + \Phi(E)$$

où

$$S(E) = \int_{z_0}^{z_0+2\pi} \gamma_0(s) ds.$$

On a $S(E)$ continue en E , non-constante et $S(E) > 0$. On a $\Phi(E) \in (0, 2\pi^2)$, non constante et continue en E . On calcule aussi :

$$\int_{z_0, \beta_1}^{z_0+2\pi} \kappa_J(s) ds = \int_{z_0}^{z_0+2\pi} \gamma_0(s) ds + \int_{a+i0}^{b+i0} \Re \kappa_J(s) \text{sign}(z_0 - z) ds = -iS(E) + \tilde{\Phi}(E).$$

On note $\phi(E) := \Delta \arg q|_{\alpha_1} + \int_{\alpha_1} \Omega_J(s) ds = 0$ et $\tilde{\phi}(E) := \Delta \arg q|_{\beta_1} + \int_{\beta_1} \Omega_J(s) ds = i\frac{\pi}{2}$.

Par le Théorème 2.3, on obtient l'asymptotique suivante pour les coefficients de la matrice de monodromie $M(z, E, z_0, \varepsilon)$:

$$M_{11}(z, E, z_0, \varepsilon) = a(z, E, z_0, \varepsilon) \exp\left(\frac{S(E)}{\varepsilon} + i\frac{\Phi(E)}{\varepsilon} + \phi(E)\right) (1 + o_E(1) + O_{z,\varepsilon}\left(e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right))$$

$$M_{12}(z, E, z_0, \varepsilon) = b(z, E, z_0, \varepsilon) = \exp\left(\frac{S(E)}{\varepsilon} + i\frac{\tilde{\Phi}(E)}{\varepsilon} + \tilde{\phi}(E)\right) (1 + o_E(1) + O_{z,E}\left(e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right))$$

Autrement dit, on a

$$M(z, E, \varepsilon) = \exp\left(\frac{S(E)}{\varepsilon}\right) D(E, \varepsilon) \left[\begin{pmatrix} a_{11}(E, \varepsilon) & a_{12}(E, \varepsilon) \\ a_{21}(E, \varepsilon) & a_{22}(E, \varepsilon) \end{pmatrix} + O(e^{-\frac{c}{\varepsilon}}) \right] D^{-1}(E, \varepsilon)$$

avec

$$D(E, \varepsilon) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\Phi_1(E)}{\varepsilon}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\Phi_1(E)}{\varepsilon}} \end{pmatrix},$$

$$a_{11}(E, \varepsilon) = \exp\left(\frac{i\Phi(E)}{\varepsilon} + \phi(E)\right) (1 + o_E(1)),$$

$$a_{12}(E, \varepsilon) = \exp\left(\frac{i\Phi(E)}{\varepsilon} + \tilde{\phi}(E)\right) (1 + o_E(1)),$$

$$a_{21}(E, \varepsilon) = \exp\left(\frac{-i\Phi(E)}{\varepsilon} - \tilde{\phi}(E)\right) (1 + o_E(1)),$$

$$a_{22}(E, \varepsilon) = \exp\left(\frac{-i\Phi(E)}{\varepsilon} - \phi(E)\right) (1 + o_E(1)).$$

Maintenant, calculons l'asymptotique de la trace de la matrice de monodromie. On a :

$$\text{Tr}M(z, E, \varepsilon) = \cos\left(\frac{\Phi(E)}{\varepsilon} + \phi(E)\right) + o_E(1) + O_{z,E}\left(e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right) \quad (4.2.10)$$

Donc les valeurs propres des problèmes de Dirichlet ou de Neumann sur $[x, x + \frac{2\pi}{\varepsilon}]$ dans les intervalles d'énergie vérifiant **(HE1pc)** sont situées dans des voisinages exponentiellement petits (d'ordre $O_{z,E}\left(e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right)$) des énergies E vérifiant

$$\cos\left(\frac{\Phi(E)}{\varepsilon} + \phi(E)\right) + o_E(1) = 0.$$

Cette information n'est pas suffisante pour l'analyse spectrale de l'opérateur quasi-périodique à travers l'étude du cocycle matriciel engendré par la matrice de monodromie. En général, une telle analyse demande plus de renseignements sur le potentiel. La possibilité d'obtenir les asymptotiques dans la bande complexe plus large joue un grand rôle.

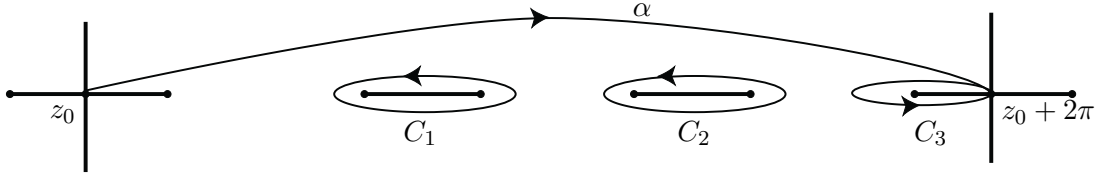


FIGURE IV.3 – Cas d'une croix avec deux zones, c'est-à-dire un maximum et un minimum

2.5.2 Cas où $\sigma(\mathbb{H}_0) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R}) \subset [E_{2n-3}, E_{2n-2}] \cup [E_{2n-1}, E_{2n}]$

Supposons maintenant que $E - W(\mathbb{R})$ couvre entièrement une zone spectrale et une partie d'une autre zone spectrale. On suppose, par exemple, que $\mathcal{E}(z_0) \in [E_{2n-1}, E_{2n}]$ et $\mathcal{E}(z_1) \subset [E_{2n-4}, E_{2n-3}]$.

On considère le cas où z_0 est un minimum et n est impair. Dans ce cas là, entre σ_a et $\gamma_{1,1}$, la détermination naturelle κ_J est liée à la détermination principale κ_p par la relation $\kappa_J = \kappa_p - \pi(n - 1)$. On note α la courbe $[z_0 + i0, z_0 + 2\pi + i0]$. On note C_1 un lacet qui va autour J_2 et on note C_2 un lacet qui va autour de J_3 . La classe $\text{Adm}(\kappa_J, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J)$ de courbes admissibles contient quatre éléments :

$$\text{Adm}(\kappa_J, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J) = \{[\alpha_1], [\alpha_2], [\alpha_3], [\alpha_4]\}$$

avec $\alpha_1 = \alpha = [z_0 + i0, z_0 + 2\pi + i0]$, $\alpha_2 = \alpha_1 \circ C_1$, $\alpha_3 = \alpha_1 \circ C_2$ et $\alpha_4 = \alpha_1 \circ C_2 \circ C_1$. La classe $\text{Adm}(\kappa_J, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J^*)$ de courbes admissibles contient aussi quatre éléments :

$$\text{Adm}(\kappa_J, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J^*) = \{[\beta_1], [\beta_2], [\beta_3], [\beta_4]\}$$

avec $\beta_i = C_3 \circ \alpha_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, où C_3 un lacet qui entoure la moitié gauche de $J_4 = J + 2\pi$. On calcule facilement :

$$m(\alpha, \kappa_J) = -1 \quad \text{et} \quad \sigma(\alpha, \kappa_J) = -1, \quad \text{d'où} \quad A(\alpha, \kappa_J) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$m(C_1, \kappa_J) = 1 \quad \text{et} \quad \sigma(C_1, \kappa_J) = 1, \quad \text{d'où} \quad A(C_1, \kappa_J) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$m(C_2, \kappa_J) = 1 \quad \text{et} \quad \sigma(C_2, \kappa_J) = 1, \quad \text{d'où} \quad A(C_2, \kappa_J) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$m(C_3, \kappa_J) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma(C_3, \kappa_J) = -1, \quad \text{d'où} \quad A(C_3, \kappa_J) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On applique le Lemme 1.23 pour calculer les indices et les signatures de courbes α_i et β_i , $i = 1, 2, 3, 4$:

$$m(\alpha_1, \kappa_J) = -1 \quad \sigma(\alpha_1, \kappa_J) = -1.$$

$$A(\alpha_2, \kappa_J) := A(\alpha \circ C_1, \kappa_J) = A(\alpha, \kappa_J)A(C_1, \kappa_J) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{d'où } m(\alpha_2, \kappa_J) = 0 \quad \sigma(\alpha_2, \kappa_J) = -1.$$

$$A(\alpha_3, \kappa_J) := A(\alpha \circ C_2, \kappa_J) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } m(\alpha_3, \kappa_J) = 0 \quad \sigma(\alpha_3, \kappa_J) = -1.$$

$$A(\alpha_4, \kappa_J) := A(\alpha \circ C_2 \circ C_1, \kappa_J) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } m(\alpha_4, \kappa_J) = 0 \quad \sigma(\alpha_4, \kappa_J) = -1.$$

$$A(\beta_1, \kappa_J) := A(C_3 \circ \alpha, \kappa_J) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } m(\beta_1, \kappa_J) = -1 \quad \sigma(\beta_1, \kappa_J) = 1.$$

$$A(\beta_2, \kappa_J) := A(C_3 \circ \alpha_2, \kappa_J) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } m(\beta_2, \kappa_J) = 0 \quad \sigma(\beta_2, \kappa_J) = 1.$$

$$A(\beta_3, \kappa_J) := A(C_3 \circ \alpha_2, \kappa_J) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } m(\alpha_4, \kappa_J) = 0 \quad \sigma(\alpha_4, \kappa_J) = -1.$$

$$A(\beta_4, \kappa_J) := A(C_3 \circ \alpha_4, \kappa_J) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } m(\beta_4, \kappa_J) = 1 \quad \sigma(\beta_4, \kappa_J) = 1.$$

Ainsi on obtient l'asymptotique suivante pour $M(z, E, \varepsilon)$:

$$M(z, E, \varepsilon) = \exp\left(\frac{S(E)}{\varepsilon}\right) \begin{pmatrix} p_{11}(z, z_0) & p_{12}(z, z_0) \\ p_{21}(z, z_0) & p_{22}(z, z_0) \end{pmatrix}.$$

Ici p_{11} , p_{12} , p_{21} et p_{22} sont exponentiellement proches de polynômes trigonométriques de degré 1 en $\left(\frac{z-z_0}{\varepsilon}\right)$:

$$p_{ij}(z, E, \varepsilon) = a_{ij}(E, \varepsilon)e^{-\frac{2\pi i}{\varepsilon}(z-z_0)} + b_{ij}(E, \varepsilon) + c_{ij}(E, \varepsilon)e^{\frac{2\pi i}{\varepsilon}(z-z_0)} + O(e^{-\frac{C}{\varepsilon}}).$$

Pour z tel que $\Im z > 0$ on peut écrire aussi :

$$M(z, E, \varepsilon) = \exp\left(\frac{S(E)}{\varepsilon} - \frac{2\pi i}{\varepsilon}(z - z_0)\right) \left[\begin{pmatrix} a_{11}(E, \varepsilon) & a_{12}(E, \varepsilon) \\ a_{21}(E, \varepsilon) & a_{22}(E, \varepsilon) \end{pmatrix} + O(e^{-\frac{C}{\varepsilon}}) \right].$$

2.6 Cas où $\mathcal{C} \cap \mathcal{E}^{-1}(\sigma(\mathbb{H}_0)) = \emptyset$

On considère les cas où tous les maxima et minima de W sont situés dans les lacunes :

(HEpcl) Pour chaque z dans S_Y tel que $W'(z) = 0$ on a $E - W(z) \in \mathbb{R} \setminus \sigma(\mathbb{H}_0)$.

On introduit le nombre M de préimages de zones spectrales de \mathbb{H}_0 par l'intervalle de longueur 2π comme suit :

$$M = \sum_{n \in \mathbb{N}} l(n) \quad \text{avec} \quad l(n) := \#\{z \in [z_0, z_0 + 2\pi) \mid \mathcal{E}(z) = E\} \text{ pour un } E \in [E_{2n-1}, E_{2n}].$$

Remarque 2.7. Pour les énergies considérées et pour chaque J dans $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ le nombre $l(n)$ est correctement défini car c'est le même pour chaque $E \in [E_{2n-1}, E_{2n}]$. De plus, il n'y a qu'un nombre fini de $n \in \mathbb{N}$ tels que $l(n) \neq 0$, donc un nombre fini de termes dans la somme définissant M .

On fixe un intervalle $J_1 \in \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$, disons $J_1 = [a, b]$. On note les intervalles consécutifs de $\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ par $J_1, J_2, \dots, J_M, J_{M+1}$ avec $J_{M+1} = J_1 + 2\pi$. On note C_1 (resp. C_{M+1}) les demi-lacets qui vont autour de $[z_0, b]$ (resp. $[a + 2\pi, z_0 + 2\pi]$). Pour $i = 2, \dots, M$ on note C_i un lacet autour de J_i . On note α la courbe qui va le long de $[z_0, z_0 + 2\pi]$. Le nombre de classes d'équivalence dans lesquels se sépare $\mathcal{A}(\kappa_J, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J^*)$ (resp. $\mathcal{A}(\kappa_J, T_{2\pi}^{-1}\kappa_J)$) est égale à $L = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{M-i+1} \binom{i-1}{M-j+1}$.

Les courbes admissibles de $\text{Adm}(\kappa_J, \kappa_J^*)$ sont des courbes des classes $\{[\alpha_{ijk}]\}_{i=1, j=1}^M \binom{M-i+1}{k=1}^{M-j-1}$ avec

$$\alpha_{ijk} = C_{M+1} \circ \alpha \circ \sum_{j_1=1 \leq j_2=j \leq \dots \leq j_i \leq M} C_{j_i}.$$

Les courbes admissibles de $\text{Adm}(\kappa_J, \kappa_J)$ sont des courbes des classes $\{[\beta_{ijk}]\}_{i=1, j=1}^M \binom{M-i+1}{k=1}^{M-j-1}$ avec

$$\beta_{ijk} = \alpha \circ \sum_{j_1=1 \leq j_2=j \leq \dots \leq j_i \leq M} C_{j_i}.$$

Pour chaque $n = 1, \dots, L$ on a $m(\beta_i, \kappa_J) \in \{-\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1\}$ et $\sigma(\beta_i, \kappa_J) = 1$. Pour calculer l'indice et la signature des courbes α_{ijk} et β_{ijk} , on utilise le Lemme 1.23. On a $m(\alpha, \kappa_J) = \frac{M}{2}$ et $\sigma(\alpha, \kappa_J) = 1$. Pour chaque $i = 1, \dots, M$ on a $m(C_i, \kappa_J) = -1$ et $\sigma(C_i, \kappa_J) = 1$. D'où la matrice d'indice-signature $A(\alpha_{ijk}, \kappa_J)$ pour chaque α_{ijk} est de la forme :

$$A(\alpha_{ijk}, \kappa_J) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{M}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ N - \frac{M}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

avec $N = i - 1$, *i.e.* le nombre des cycles entiers qui interviennent dans α_{ijk} . D'où on obtient $m(\alpha_{ijk}, \kappa_J) = N - \frac{M}{2} \in \{-\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1\}$ et $\sigma(\alpha_{ijk}, \kappa_J) = -1$. Par le Lemme 1.23 on obtient :

$$A(\beta_{ijk}, \kappa_J) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{M}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N - \frac{M}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

D'où $m(\beta_{ijk}, \kappa_J) = N - \frac{M}{2} \in \{-\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1\}$ et $\sigma(\beta_{ijk}, \kappa_J) = 1$.

Pour les valeurs de z avec $\Im z > 0$, l'asymptotique de la matrice de monodromie se simplifie, car dans chaque classe seule la courbe d'indice minimal va intervenir dans le terme principal de l'asymptotique.

Pour $0 < y \leq \Im z \leq Y$, il existe une constante positive $c = c(y) > 0$ telle que la matrice de monodromie a l'asymptotique suivante :

$$M(z, E, \varepsilon) = \exp\left(\frac{S(E)}{\varepsilon} + \frac{\pi i M}{\varepsilon}(z - z_0)\right) \left[\begin{pmatrix} a_{11}(E, \varepsilon) & a_{12}(E, \varepsilon) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + O(e^{-\frac{c}{\varepsilon}}) \right] \quad (4.2.11)$$

avec

$$\begin{aligned} - S(E) &= \int_{z_0}^{z_0+2\pi} \gamma_0(E - W(z) + i0) dz, \\ - |a_{11}(E, \varepsilon)| &= 1 + o(1) \text{ et } |a_{12}(E, \varepsilon)| = 1 + o(1). \end{aligned}$$

Cette asymptotique permet de démontrer un résultat important sur l'exposant de Lyapounov (voir [MN08] et aussi l'Appendice A).

2.7 Propriétés des solutions au CASpl

On commence par définir une classe de fonctions au poids exponentiel pratique pour décrire les solutions cohérentes de (AdiabQP) au comportement asymptotique standard à plusieurs composantes.

Soit $[a, b]$ un intervalle réel. Soit $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On introduit une norme sur $C([a, b])$:

$$\|f\|_{L_\infty([a,b],\rho)} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)e^{-\rho(x)}|.$$

On démontre le :

Lemme 2.8. *Supposons qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, f est une solution cohérente qui a CASpl au voisinage de l'intervalle horizontal $[c, d]$, i.e. pour tout $x \in [-X, X]$ et tout $z \in [c, d]$ on a :*

$$f(x, z, \varepsilon) = \sum_{\alpha_k \in \text{Adm}} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \kappa|_{\alpha_k}(s) ds\right) (n_k(z, z_0) \Phi|_{\alpha_k}(x, z) + o(1)).$$

Alors il existe $C \in (0, \infty)$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ et pour chaque $z \in \mathbb{R}$ on a

$$\|f\|_{L_\infty([a(z,\varepsilon), b(z,\varepsilon)], \rho(\cdot, z, \varepsilon))} \leq C.$$

Ici $a(z, \varepsilon) = \frac{c-z}{\varepsilon}$, $b(z, \varepsilon) = \frac{d-z}{\varepsilon}$ et $\rho(x, z, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^{\Re z + \varepsilon x} \gamma_0(s) ds$.

De plus, on a l'estimation suivante pour f :

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \exp\left(-\frac{2\pi}{\varepsilon} \min_{\alpha_k} \min_{s \in [\Re z + \varepsilon x, z + \varepsilon x]} \Re \kappa|_{\alpha_k}(s) \Im z\right) &\leq \\ &\leq |f(x, z, \varepsilon) e^{-\rho(x, z, \varepsilon)}| \leq \\ &\leq C \exp\left(-\frac{2\pi}{\varepsilon} \min_{\alpha_k} \min_{s \in [\Re z + \varepsilon x, z + \varepsilon x]} \Re \kappa|_{\alpha_k}(s) \Im z\right). \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Démonstration du Lemme 2.8. La condition de cohérence permet d'écrire $f(x, z, \varepsilon) = f(s, z + k\varepsilon, \varepsilon)$ avec $s := \{x\} = x - [x] \in [0, 1]$ et $k := [x] \in \mathbb{Z}$. On exprime f à l'aide de composantes standards :

$$|f(x, z, \varepsilon)| = |f(s, z + k\varepsilon, \varepsilon)| = \left| \sum_{\alpha_m \in \text{Adm}} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^{z+k\varepsilon} \kappa|_{\alpha_m}(s) ds\right) (n_k(z + k\varepsilon, z_0) \Phi|_{\alpha_m}(s, z + k\varepsilon) + o(1)) \right|. \quad (4.2.13)$$

Il existe une constante finie C_1 indépendante de z, ε, x, m telle que :

$$\frac{1}{C_1} \leq \max_{x \in [a(z,\varepsilon), b(z,\varepsilon)], \alpha_m \in \text{Adm}} |n_k(z + k\varepsilon, z_0) \Phi|_{\alpha_m}(s, z + k\varepsilon) + o(1)| \leq C_1.$$

D'où on estime :

$$\begin{aligned}
|f(x, z, \varepsilon)| &\leq C_1 \sum_{\alpha_m \in Adm} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_0}^{z+k\varepsilon} \kappa|_{\alpha_m}(s) ds\right) \\
&= C_1 \sum_{\alpha_m \in Adm} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^{\Re z+k\varepsilon} \Im \kappa|_{\alpha_m}(s) ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Re z+k\varepsilon}^{z+k\varepsilon} \Re \kappa|_{\alpha_m}(s) ds\right) \\
&\leq C_2 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^{\Re z+k\varepsilon} \gamma_0(s) ds - \frac{1}{\varepsilon} \min_{\alpha_m \in Adm} \left(\min_{s \in [\Re z+k\varepsilon, z+k\varepsilon]} \Re \kappa|_{\alpha_m}(s) \right) \Im z\right). \quad (4.2.14)
\end{aligned}$$

Ainsi on a démontré le Lemme 2.8 car $\rho(x, z, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^{\Re z+x\varepsilon} \gamma_0(s) ds = \frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^{\Re z+k\varepsilon} \gamma_0(s) ds + O(1)$. \square

Chapitre V

Exposant de Lyapounov pour $\alpha > \frac{1}{2}$ par les approximations quasi-périodiques

Dans ce chapitre, on étudie l'asymptotique de la matrice de transfert (voir la Définition 13, page 10) pour l'équation :

$$-\Psi''(x, E) + [V(x) + W(x^\alpha)]\Psi(x, E) = E\Psi(x, E). \quad (\text{SIsc})$$

Pour les énergies situées dans le spectre absolument continu de \mathbb{H}_θ , on démontre que sur des grands intervalles la matrice de transfert pour (SIsc) est bien approchée par la transposée d'une matrice de monodromie (voir Définition 27, page 16) pour l'équation quasi-périodique adiabatique :

$$-\Phi(x, z, E, \varepsilon) + [V(x) + W(\varepsilon x + z)]\Phi(x, z, E, \varepsilon) = E\Phi(x, z, E, \varepsilon). \quad (\text{AdiabQP})$$

On démontre le Théorème 38 de l'Introduction qui porte sur les approximations des matrices de transfert par un conjugué du cocycle matriciel, formé des produits de transposées de matrices de monodromie pour (AdiabQP). Comme corollaire de cette approximation, on démontre que l'exposant de Lyapounov existe et est nul sur tout le spectre absolument continu.

Pour les énergies situées dans le spectre singulier de \mathbb{H}_θ , on redémontre la formule :

$$\forall E \in \sigma_s(\mathbb{H}_\theta) \setminus G_\infty(K), \quad \gamma(E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_0(E - W(s)) ds.$$

On démontre que la "dimension de Hausdorff logarithmique" (voir la Définition 2.3) de $G_\infty(K)$ vérifie (voir la Proposition 40 de l'Introduction) :

$$\text{ldim}(G_\infty(K)) \leq \frac{1}{1 - \alpha}. \quad (5.0.1)$$

La Proposition 40 et la Remarque 4.10 fournissent une description plus précise de l'ensemble résonant que l'ensemble D_∞ obtenu par les approximations périodiques (voir la Proposition 18 du Chapitre II).

1 Hypothèses et structure du travail

Dans ce chapitre on travaille sous les hypothèses :

- (V) Le potentiel V vérifie les hypothèses **(HVP)** et **(HVR)**, *i.e.* V est à valeurs réelles, appartient à $L_{2,loc}$ et $V(x+1) = V(x)$.
- (W) Le potentiel W vérifie les hypothèses **(HWA)**, **(HWC)** et **(HWP)**, *i.e.* W est analytique réel, non constant et $W(z+2\pi) = W(z)$.
- (α) L'exposant $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

La structure de ce chapitre est la suivante :

1. On commence par découper \mathbb{R} en intervalles, disons $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sur chaque intervalle I_n , on approxime l'équation (SIosc) par une équation :

$$-\Phi(x, E, z_n; \varepsilon_n) + [V(x) + W(\varepsilon_n x + z_n)]\Phi(x, E, z_n; \varepsilon_n) = E\Phi(x, E, z_n; \varepsilon_n) \quad (\text{AdiabQPn})$$

avec les paramètres z_n et ε_n bien choisis.

2. On remarque que chaque équation (AdiabQPn) est un membre d'une famille d'équations (AdiabQP) avec des paramètres ε et z . On utilise les solutions cohérentes de (AdiabQP) avec $z = z_n$ et $\varepsilon = \varepsilon_n$ pour approcher les solutions de (SIosc) sur les intervalles I_n .
3. Sur chaque intervalle I_n , on construit une base de solutions $\{\Psi_n, \Psi_n^*\}$ de (SIosc) proche d'une base cohérente $\{f, f^*\}$ de solutions de (AdiabQP). On calcule l'asymptotique de cette base sur I_n et l'asymptotique de la matrice de transfert de (SIosc) sur I_n .
4. En passant à la limite quand n tend vers l'infini dans le produit de matrices de transfert sur des intervalles I_n , on calcule l'exposant de Lyapounov $\gamma(E)$ pour l'équation (SIosc) pour presque tout E et on estime l'ensemble *résonnant* où on ignore l'existence de l'exposant de Lyapounov.

1.1 Intervalles I_n et approximation du potentiel $W(x^\alpha)$

Notre but est de démontrer que les matrices de transfert pour l'équation (SIosc) associée à l'opérateur $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(x^\alpha)$ sont bien approchées par les matrices de monodromie pour l'équation quasi-périodique (AdiabQP). On utilise une linéarisation locale de la fonction x^α . On représente \mathbb{R} comme une suite d'intervalles consécutifs $(I_n)_n$ tels que, sur chaque I_n , la fonction x^α est « bien approchée » par une fonction linéaire $\varepsilon_n x + z_n$ de faible pente. La condition de « bonne approximation » définit le choix des paramètres ε_n et z_n . On dit que l'approximation est *bonne* si pour n grand on a :

$$|I_n| \sup_{x \in I_n} |W(x^\alpha) - W(\varepsilon_n x + z_n)| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \quad (\text{BonneAp})$$

Lorsque $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, il est possible de choisir les intervalles I_n , les paramètres z_n et ε_n tels que sur I_n la fonction x^α parcourt un intervalle de longueur 2π (c'est-à-dire une période de la fonction W) et que (BonneAp) soit satisfait.

La construction de l'approximation se fait en trois étapes.

1.1.1 Première étape : choix du paramètre z_0

Pour $\mu > 0$ petit fixé, on choisit $z_0 \in [0, 2\pi)$ tel que $(E - W(z_0)) \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} [E_{2m-1} + \mu, E_{2m} - \mu]$, *i.e.* $E - W(z_0)$ est dans l'intérieur du spectre de l'opérateur périodique $\mathbb{H}_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$.

1.1.2 Deuxième étape : choix des intervalles I_n

On définit des suites de points $\{y_n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $y_n \in \mathbb{R}$, et $\{x_n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbb{N}$, paramétrées par z_0 :

$$y_n = y_n(z_0) := (z_0 + 2\pi n)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad x_n = x_n(z_0) := [y_n(z_0)], \tag{5.1.1}$$

où $[\]$ désigne la partie entière d'un nombre réel. On pose :

$$I_n = I_n(z_0) := [x_n(z_0), x_{n+1}(z_0)] \tag{5.1.2}$$

La longueur de I_n vérifie l'estimation $|I_n| = O(n^{\frac{1}{\alpha}-1})$. En particulier, $|I_n|$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini car $\frac{1}{\alpha} - 1 > 0$ pour $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

1.1.3 Troisième étape : choix des paramètres ε_n et z_n

On définit les suites de petits paramètres $\{\varepsilon_n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et de paramètres de décalage $\{z_n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n(z_0) := \frac{2\pi}{y_{n+1}(z_0) - y_n(z_0)}, \quad z_n = z_n(z_0) := y_n^\alpha(z_0) - \varepsilon_n(z_0)y_n(z_0) \tag{5.1.3}$$

Les paramètres ε_n vérifient l'estimation $\varepsilon_n = O(n^{1-\frac{1}{\alpha}})$. En particulier, ε_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Les paramètres choisis satisfont des égalités

$$y_n^\alpha = 2\pi n + z_0 = \varepsilon_n y_n + z_n \quad \text{et} \quad y_{n+1}^\alpha = 2\pi(n+1) + z_0 = \varepsilon_n y_{n+1} + z_n.$$

Pour chaque n , $\varepsilon_n(z_0)$ et $z_n(z_0)$ vérifient :

$$[\varepsilon_n x_n + z_n, \varepsilon_n x_{n+1} + z_n] \subset [z_0 + 2\pi n + O(\varepsilon_n), z_0 + 2\pi(n+1) + O(\varepsilon_n)].$$

Pour $x \in I_n$, on introduit la fonction-escalier Z_n :

$$\begin{cases} x \mapsto Z_n(x) := \varepsilon_n [x] + z_n - 2\pi n \\ I_n \mapsto [z_0 + O(\varepsilon_n), z_0 + 2\pi + O(\varepsilon_n)] \end{cases} \tag{fct} Z_n$$

1.1.4 Justification du choix des paramètres

On calcule l'erreur faite utilisant l'approximation linéaire sur l'intervalle I_n :

$$\Delta W_n(x) := W(x^\alpha) - W(\varepsilon_n x + z_n).$$

Un calcul élémentaire montre qu'il existe $C > 0$ indépendant de n tel que :

$$\sup_{x \in I_n} |\Delta W_n(x)| \leq C \frac{1}{n}. \tag{5.1.4}$$

Ainsi, sur l'intervalle I_n , l'équation (SIosc) est proche de l'équation (AdiabQPn), *i.e.* de (AdiabQP) avec $z = z_n$ et $\varepsilon = \varepsilon_n$.

2 Construction des solutions de (SlOsc) sur les intervalles I_n par la méthode de la résolvante approchée

Dans cette section on décrit la méthode de la résolvante approchée et on rappelle les estimations pour les solutions de (AdiabQP). Par la suite, pour des énergies différentes, on utilise cette méthode pour construire un couple de solutions de (SlOsc) proche d'une base cohérente de solutions de (AdiabQP).

2.1 Description de la méthode de la résolvante approchée

Considérons les opérateurs différentiels associés aux équations (AdiabQP) et (SlOsc) respectivement :

$$H_{z,\varepsilon} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(\varepsilon x + z) \quad \text{et} \quad H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(x^\alpha).$$

Représentons pour $x \in I_n$

$$H = H_{z_n, \varepsilon_n} + \Delta W_n(x) \quad \text{avec} \quad \Delta W_n(x) := W(x^\alpha) - W(\varepsilon_n x + z_n).$$

Sur chaque I_n , on écrit l'équation $(H - E)\Psi = 0$ comme une équation non homogène :

$$(H_{z_n, \varepsilon_n} - E)\Psi_n = \Delta W_n(x)\Psi_n,$$

on obtient ainsi une famille d'équations paramétrée par n .

On considère une suite de poids $\{\gamma_n\}_n$ avec $\gamma_n : I_n \rightarrow \mathbb{R}$. On dit qu'une suite de fonctions $\{f_n\}_n$, $f_n : I_n \rightarrow \mathbb{C}$, appartient à $l_\infty(L_\infty(I_n, \gamma_n))$ si

$$\|\{f_n\}_n\|_{l_\infty(L_\infty(I_n, \gamma_n))} := \sup_n \sup_{x \in I_n} (|f_n(x)| e^{-\gamma_n(x)}) < \infty.$$

On considère une famille de fonctions $\{f_n\}_n \in l_\infty(L_\infty(I_n, \gamma_n))$ avec des poids γ_n bien choisis. Pour chaque n , on cherche une solution de l'équation non homogène

$$(H_{z_n, \varepsilon_n} - E)\Psi_n = f_n, \quad \forall x \in I_n \tag{5.2.1}$$

pour que la suite $\{\Psi_n\}_n$ soit dans $l_\infty(L_\infty(I_n, \gamma_n))$. Supposons que, pour chaque n , $\{(H_{z_n, \varepsilon_n} - E)^{-1} f_n\} \in l_\infty(L_\infty(I_n, \gamma_n))$. Soit $\Phi_n(x, E, z_n, \varepsilon_n)$ une solution de l'équation homogène $(H_{z_n, \varepsilon_n} - E)\Phi_n(x, E, z_n, \varepsilon_n) = 0$, alors la fonction

$$\Psi_n = (H_{z_n, \varepsilon_n} - E)^{-1} f_n + \Phi_n$$

est une solution de l'équation (5.2.1) sur I_n . Ainsi, sur chaque I_n , on passe à la forme intégrale de l'équation (SlOsc).

À partir d'une solution Φ_n de l'équation (AdiabQP) sur I_n avec $z = z_n$, on construit une solution $\Psi_n(x, E)$ de (SlOsc) proche de Φ_n sur un intervalle I_n en construisant une solution de l'équation intégrale sur I_n :

$$\Psi_n = -(H_{z_n, \varepsilon_n} - E)^{-1} \Delta W_n(x)\Psi_n + \Phi_n.$$

On peut récrire :

$$\Phi_n = (I + (H_{z_n, \varepsilon_n} - E)^{-1} \Delta W_n(x))\Psi_n.$$

Si les conditions suivantes sont satisfaites :

- la famille $\{\Phi_n\}$ de solutions des problèmes homogènes $(H_{z_n, \varepsilon_n} - E)\Phi_n = 0$ appartient à $l_\infty(L_\infty(I_n, \gamma_n))$
 - $(I + (H_{z_n, \varepsilon_n} - E)^{-1}\Delta W_n(\cdot))^{-1}$ existe sur I_n pour chaque n
 - $\{(I + (H_{z_n, \varepsilon_n} - E)^{-1}\Delta W_n(\cdot))^{-1}\}_n$ est borné de $l_\infty(L_\infty(I_n, \gamma_n))$ dans lui-même
- alors la suite $\{\Psi_n\}_n$:

$$\Psi_n = (I + (H_{z_n, \varepsilon_n} - E)^{-1}\Delta W_n(x))^{-1}\Phi_n \quad (5.2.2)$$

est dans $l_\infty(L_\infty(I_n, \gamma_n))$.

2.1.1 Familles de solutions de (AdiabQP) au poids exponentiel

On commence par définir une classe de fonctions adaptée pour décrire les solutions cohérentes de (AdiabQP). On va travailler dans cette classe pour estimer la résolvante approchée.

Définition 2.1. On fixe $\varepsilon_0 > 0$. On se donne une famille d'intervalles $\{I(\varepsilon)\}_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)}$, $I(\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ et $|I(\varepsilon)| \rightarrow \infty$ quand ε tend vers zéro, et une famille $\{\gamma(\varepsilon)\}_\varepsilon$ de poids, $\gamma(\varepsilon) : I(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$. On dit qu'une famille $\{f_\varepsilon\}$ de fonctions $f_\varepsilon : I(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ paramétrée par ε appartient à $L_\infty(L_\infty(I(\varepsilon), \gamma(\varepsilon)))$ si :

$$\|\{f_\varepsilon\}\|_{L_\infty(L_\infty(I(\varepsilon), \gamma(\varepsilon)))} := \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)} \sup_{x \in I(\varepsilon)} |(f_\varepsilon(x))e^{-\gamma(x, \varepsilon)}| < \infty.$$

Lemme 2.2. On fixe \tilde{z} un point régulier dans la bande S_Y , et $\varepsilon_0 > 0$. Soit $\Phi(x, z, E, \varepsilon)$ une solution cohérente de (AdiabQP) qui a, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, un CAS¹ dans un voisinage constant de l'intervalle horizontal $[\tilde{z} + a, \tilde{z} + b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Plus précisément, il existe $X > 1$ tel que pour tout $x \in [-X, X]$ et $z \in [\tilde{z} + a, \tilde{z} + b]$ on ait :

$$\begin{aligned} \Phi(x, z, E, \varepsilon) &= \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^{\tilde{z} + \varepsilon x} \kappa(s) ds\right) (\Phi_+^0(x, z, z_0) + o(1)), \\ \Phi'(x, z, E, \varepsilon) &= \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^{\tilde{z} + \varepsilon x} \kappa(s) ds\right) ((\Phi_+^0)'(x, z, z_0) + o(1)). \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Alors on a

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)} \|\Phi(\cdot, \tilde{z}, E, \varepsilon)\|_{L_\infty(I(\varepsilon), \gamma(\varepsilon))} \leq C < \infty,$$

où $I(\varepsilon) := [\frac{a}{\varepsilon}, \frac{b}{\varepsilon}]$ et $\gamma(\varepsilon) := -\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_0}^{\tilde{z} + \varepsilon x} \kappa(s) ds$, i.e $\{\Phi_\varepsilon\} := \{\Phi(\cdot, \tilde{z}, E, \varepsilon)\} \in L_\infty(L_\infty(I(\varepsilon), \gamma(\varepsilon)))$. Il en est de même pour sa dérivée $\Phi'(\cdot, \tilde{z}, E, \varepsilon)$.

Démonstration. A l'aide de la condition de cohérence, on exprime le comportement en x en termes du comportement en z . $\Phi(x, \tilde{z}, E, \varepsilon)$ est une solution cohérente, donc on a :

$$\Phi(x, \tilde{z}, E, \varepsilon) = \Phi(\{x\}, \tilde{z} + \varepsilon[x], E, \varepsilon).$$

On note $s = \{x\} := x - [x] \in [0, 1)$ et $z[x] = \tilde{z} + \varepsilon[x]$. Pour tout $x \in I(\varepsilon) := [\frac{a}{\varepsilon}, \frac{b}{\varepsilon}]$, on a $z[x] \in [\tilde{z} + a, \tilde{z} + b]$.

1. voir la page 56

Pour $s \in [-X, X]$ avec $X = 1$, on utilise le CAS de $\Phi(s, z, E, \varepsilon)$ au voisinage de $[\tilde{z}+a, \tilde{z}+b]$ et les estimations (5.2.3) pour obtenir pour tout $x \in I(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}\Phi(x, \tilde{z}, E, \varepsilon) &= \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^{z[x]} \kappa(s) ds\right) (\Phi_+^0(s, z[x], E, z_0) + o(1)), \\ \Phi'(x, \tilde{z}, E, \varepsilon) &= \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^{z[x]} \kappa(s) ds\right) ((\Phi_+^0)'(s, z[x], E, z_0) + o(1)).\end{aligned}\quad (5.2.4)$$

La solution de Bloch Φ_+^0 et sa dérivée en x sont bornées, *i.e.* il existe $C > 0$, indépendant de ε , tel que :

$$\sup_{s \in [0,1], z \in [\tilde{z}+a, \tilde{z}+b]} |\Phi_+^0(s, z, E)| + \sup_{s \in [0,1], z \in [\tilde{z}+a, \tilde{z}+b]} |(\Phi_+^0)'(s, z, E)| \leq C. \quad (5.2.5)$$

Puis $z[x] = \tilde{z} + \varepsilon x - \varepsilon s$, d'où

$$\Re\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^{z[x]} \kappa(s) ds\right) = -\Im\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^{\tilde{z}+\varepsilon x} \kappa(s) ds\right) + O(1). \quad (5.2.6)$$

On réunit (5.2.4), (5.2.5) et (5.2.6) pour conclure la preuve du lemme par l'estimation suivante. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ et tout $x \in I(\varepsilon)$ on a :

$$|\Phi(x, \tilde{z}, E, \varepsilon)| + |\Phi'(x, \tilde{z}, E, \varepsilon)| \leq C e^{-\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_0}^{\tilde{z}+\varepsilon x} \kappa(s) ds} \quad (5.2.7)$$

On achève la démonstration en utilisant la définition de $\|\{f_\varepsilon\}\|_{L_\infty(L_\infty(I, \gamma))} := \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)} \sup_{x \in I} (|f(x)| e^{-\gamma(x)})$

avec $I = I(\varepsilon)$ et $\gamma(x, \varepsilon) := -\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_0}^{\tilde{z}+\varepsilon x} \kappa(s) ds$.

□

Remarque 2.3. Sous les hypothèses du Lemme 2.2, on a même la minoration suivante. Il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in I$ on a :

$$|\Phi(x, \tilde{z}, E, \varepsilon)| + |\Phi'(x, \tilde{z}, E, \varepsilon)| \geq c e^{-\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_0}^{\tilde{z}+\varepsilon x} \kappa(s) ds}$$

car $\inf_{s \in [0,1], z \in [\tilde{z}+a, \tilde{z}+b]} (|\Phi_+^0(s, z, E)| + |(\Phi_+^0)'(s, z, E)|) > c > 0$.

3 Énergies E dans $\sigma_{ac}(\mathbb{H}_\theta)$

Par le Théorème 2 de l'Introduction, on sait que E est dans le spectre absolument continu de $\mathbb{H}_\theta = -\frac{d^2}{dx^2} + [V(x) + W(x^\alpha)]$ si et seulement si E vérifie $(E - W(\mathbb{R})) \subset \sigma(\mathbb{H}_0)$, *i.e.* il existe un entier naturel m tel que $E - W(\mathbb{R}) \subset (E_{2m-1}, E_{2m})$. Les énergies situées dans le spectre absolument continu de \mathbb{H}_θ vérifient l'hypothèse **(HEAbs)**, page 93. Dans cette section, on construit à l'aide de la méthode de la résolvante approchée des solutions de (SIOsc) proches sur l'intervalle I_n de solutions cohérentes de (AdiabQP) avec $z = z_n$ et $\varepsilon = \varepsilon_n$.

Sous l'hypothèse **(HEAbs)**, dans [FK05] A. Fedotov et F. Klopp ont construit des solutions de (AdiabQP) qui ont un CAS. On rappelle leurs résultats (aux notations près) :

Théorème 3.1 (Théorème 1.4 de [FK05]). *Pour tout E vérifiant l'hypothèse **(HEAbs)** et pour chaque couple de réels fixé z_1 et z_2 ($z_1 < z_2$), il existe un nombre réel $Y' < Y$ et une base cohérente $\{\Phi_+, \Phi_-\}(x, z, E; \varepsilon)$ de solutions de (AdiabQP) qui ont un CAS dans le rectangle $R = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z \in (z_1, z_2) \quad |\Im z| < Y'\}$:*

$$\Phi_\pm(x, z, E; \varepsilon) \sim \exp\left(\pm \frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \kappa_J(s) ds\right) \Phi_\pm^0(x, \mathcal{E}(z), \mathcal{E}(z_0)) \quad z_0 \in R. \quad (5.3.1)$$

Ici, κ_J est la détermination du moment complexe analytique dans S_Y et telle que $\forall z \in \mathbb{R}$, $\kappa_J(z) \in (0, \pi)$.

De plus, la matrice de monodromie associée admet une asymptotique :

$$\mathcal{M}(z, E; \varepsilon) = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{i\Phi(E)}{\varepsilon} + O_E(1)\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i\Phi(E)}{\varepsilon} + O_E(1)\right) \end{pmatrix} + o\left(ce^{-\frac{S+2\pi|\Im z|}{\varepsilon}}\right)$$

avec

- $\Phi(E) = \int_z^{z+2\pi} \kappa_J(s) ds$,
- $S > 0$ une constante qui dépend de Y' ,
- $O_E(1)$ une fonction de E , qui dépend de ε , mais pas de z .

Remarque 3.2. - $\Phi(E) \in \mathbb{R}$ puisque pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\kappa_J(z) \in (0, \pi)$.

- Soit $k_0(E)$ la densité d'états intégrée pour l'opérateur périodique \mathbb{H}_0 , on a

$$\Phi(E) = \sigma\pi \int_0^{2\pi} k_0(E - W(z)) dz - (2\pi)^2 m$$

où $\sigma \in \{-, +\}$ et $m \in \mathbb{Z}$ sont l'indice et la signature de κ_J en termes de la détermination principale κ_p .

A partir d'ici, on note Φ_\pm les solutions données par le Théorème 3.1 qui correspondent au choix $z_1 = z_0$ et $z_2 = z_0 + 2\pi$ et on note $f_{\pm, n} := T_{2\pi}^{-n} \Phi_\pm$.

Remarque 3.3. Grâce à la condition de cohérence, on vérifie que pour tout n les solutions $f_{\pm, n}$ sont bornées sur I_n car :

$$\sup_{x \in I_n} |f_{\pm, n}(x)| = \sup_{s \in [0, 1]} \sup_{z \in [z_0, z_0 + 2\pi]} |\Phi_\pm(s, z, \varepsilon_n)|.$$

Par conséquent $f_{\pm, n}(\cdot, z, \varepsilon_n) \in L_\infty(I_n)$.

3.1 Asymptotique des solutions de (SIosc) sur I_n

Sous l'hypothèse **(HEAbs)** page 93, on peut utiliser la méthode de la résolvante approchée afin d'obtenir l'asymptotique des solutions de (SIosc) :

Lemme 3.4. *Pour tout $z_0 \in [0, 2\pi)$, on définit I_n , ε_n et z_n par (5.1.2) et (5.1.3) respectivement. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$ on peut construire une base $\{\Psi_{+, n}(z_0), \Psi_{-, n}(z_0)\}$ de solutions de (SIosc) vérifiant pour tout $x \in I_n(z_0)$:*

$$\Psi_{\pm, n}(x, E; z_0) = \exp\left(\pm \frac{i}{\varepsilon_n} \int_{z_0}^{Z_n(x)} \kappa(s) ds\right) (\Phi_\pm^0(\{x\}, E - W(Z_n(x)), E - W(z_0)) + o(1)) \quad (5.3.2)$$

où

- $\Phi_{\pm}^0(x, E, E_0)$ sont les solutions de Bloch canoniques normalisées en E_0 ,
- κ est la détermination analytique du moment complexe telle que $\kappa(z_0) \in (0, \pi)$,
- Z_n est définie dans (fct Z_n) page 105.

De plus, cette asymptotique est différentiable une fois en x .

Remarque 3.5. Le Lemme 3.4 implique que toutes les solutions de (SlOsc) sont bornées sur les intervalles I_n : pour toute solution Ψ de (SlOsc), il existe une constante $C > 0$, indépendante de n , telle que $\sup_{x \in I_n} (|\Psi(x, E)| + |\Psi'(x, E)|) \leq C$.

Démonstration du Lemme 3.4. Comme $f_{\pm, n}(x, z_n, E; \varepsilon_n)$ sont dans $L_{\infty}(I_n)$, on peut appliquer le Lemme 4.2 utilisant le fait que $f_{\pm, n}(x, z, E; \varepsilon_n)$ ont un CAS dans le voisinage de $[z_0 + 2\pi n, z_0 + 2\pi(n + 1)]$. Ainsi on obtient l'estimation $\|R\|_{L_{\infty}(I_n) \rightarrow L_{\infty}(I_n)} = O(n^{\frac{1}{\alpha}-2})$ et, par conséquent :

$$\Psi_{\pm, n}(x, E) = f_{\pm, n}(x, z_n, E; \varepsilon_n) + O(n^{\frac{1}{\alpha}-2}),$$

où $O(n^{\frac{1}{\alpha}-2})$ est en norme sup sur I_n . Les solutions $f_{\pm, n}$ ont l'asymptotique :

$$f_{\pm, n}(x, z, E; \varepsilon) = \exp\left(\pm \frac{i}{\varepsilon_n} \int_{z_0}^{Z_n(x)} \kappa(s) ds\right) (\Phi_{\pm}^0(x, E - W(Z_n(x)), E - W(z_0)) + o(1)).$$

On a démontré ainsi le premier point du lemme.

Pour obtenir le résultat sur la dérivée, il suffit d'estimer de même $\|R'\|_{L_{\infty}(I_n) \rightarrow L_{\infty}(I_n)} = O(n^{\frac{1}{\alpha}-2})$. D'où :

$$\Psi'_{\pm, n}(x, E) = f'_{\pm, n}(x, z_n, E; \varepsilon_n) + O(n^{\frac{1}{\alpha}-2}).$$

On met dans cette formule les asymptotiques des $f'_{\pm, n}$ pour conclure la preuve. \square

3.2 Matrice de transfert sur I_n

Grâce au Lemme 3.4, on contrôle l'asymptotique de la matrice de transfert $T(x_{n+1}, x_n, E)$ de (SlOsc) :

Lemme 3.6. *Les matrices de transfert pour l'équation (SlOsc) admettent l'asymptotique suivante quand $n \rightarrow \infty$:*

$$T(x_{n+1}, x_n, E) = (\Phi^0 + o(1)) \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0+a_n}^{z_0+2\pi+b_n} \kappa(s) ds\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_0+a_n}^{z_0+2\pi+b_n} \kappa(s) ds\right) \end{pmatrix} (\Phi^0 + o(1))^{-1} \quad (5.3.3)$$

avec

- $a_n = Z_n(x_n) - z_0 \in (-\varepsilon_n, 0]$,
- $b_n = Z_n(x_{n+1}) - (z_0 + 2\pi) \in (-\varepsilon_n, 0]$,
- $\Phi^0 = \Phi^0(0, E - W(z_0)) = \begin{pmatrix} \Phi_+^0 & (\Phi_+^0)' \\ \Phi_-^0 & (\Phi_-^0)' \end{pmatrix} (0, E - W(z_0))$ où $\Phi_{\pm}^0(x, E)$ sont les solutions de Bloch avec l'énergie E .

Démonstration. On calcule $T(x_{n+1}, x_n, E)$ à l'aide de la base de solutions $\{\Psi_{n,+}, \Psi_{n,-}\}$ construite dans le Lemme 3.4 par la formule :

$$T(x_{n+1}, x_n, E) = \begin{pmatrix} \Psi_{n,+} & \Psi_{n,-} \\ \Psi_{n,+}' & \Psi_{n,-}' \end{pmatrix} (x_{n+1}, E) \begin{pmatrix} \Psi_{n,+} & \Psi_{n,-} \\ \Psi_{n,+}' & \Psi_{n,-}' \end{pmatrix}^{-1} (x_n, E).$$

On a

$$\Psi_{\pm,n}(x, E) = \exp\left(\pm \frac{i}{\varepsilon_n} \int_{z_0}^{Z_n(x)} \kappa(s) ds\right) (\Phi_{\pm}^0(\{x\}, E - W(Z_n(x)), E(z_0)) + o(1)).$$

Comme $Z_n(x_n) = z_0 + a_n$ avec $a_n = O(\varepsilon_n)$ et $Z_n(x_{n+1}) = z_0 + 2\pi + b_n$ avec $b_n = O(\varepsilon_n)$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi_{\pm}^0(0, \mathcal{E}(Z_n(x_n)), \mathcal{E}(z_0)) &= \Phi_{\pm}^0(0, \mathcal{E}(z_0), \mathcal{E}(z_0)) + O(\varepsilon_n), \\ \Phi_{\pm}^0(0, \mathcal{E}(Z_n(x_{n+1})), \mathcal{E}(z_0)) &= \Phi_{\pm}^0(0, \mathcal{E}(z_0), \mathcal{E}(z_0)) + O(\varepsilon_n). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} T(x_{n+1}, x_n, E) &= (\Phi^0(0, E - W(z_0)) + o(1)) \\ &\begin{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon_n} \int_{z_0+a_n}^{z_0+2\pi+b_n} \kappa(s) ds\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i}{\varepsilon_n} \int_{z_0+a_n}^{z_0+2\pi+b_n} \kappa(s) ds\right) \end{pmatrix} (\Phi^0(0, E - W(z_0)) + o(1))^{-1}, \end{aligned}$$

avec $\Phi^0(0, E)$ défini dans l'énoncé du lemme. Ceci achève la preuve du lemme. \square

Lemme 3.7. *On a la relation suivante entre la matrice de transfert pour (SlOsc) et la matrice de monodromie $M(z, E, \varepsilon)$ associée à la base cohérente $\Phi_{\pm}(x, z, E, \varepsilon)$ (du Théorème 3.1) de solutions de (AdiabQP) :*

$$T(x_{n+1}, x_n, E) = (\Phi^0(0, E - W(z_0)) + o(1)) M(Z_n(x_{n+1}) - 2\pi, E, \varepsilon_n) (\Phi^0(0, E - W(z_0)) + o(1))^{-1}.$$

Remarque 3.8. L'asymptotique quand $n \rightarrow \infty$ de $M(Z_n(x_{n+1}) - 2\pi, E, \varepsilon_n)$ est donnée dans le Théorème 3.1.

Démonstration. On utilise la relation entre $\Psi_{n,\pm}(x_n, E)$, $\Psi_{n,\pm}(x_{n+1}, E)$ et $f_{\pm,n}(0, z_n + \varepsilon_n x_n)$, $f_{\pm,n}(0, z_n + \varepsilon_n x_{n+1})$, établie dans la démonstration du Lemme 3.4. Les matrices de transfert pour (AdiabQP) sont liées aux matrices de monodromie pour cette équation :

$$\begin{aligned} T_n(x_{n+1}, x_n, z_n, E; \varepsilon) &= (\Phi^0(0, E - W(z_0)) + o(1)) \\ &M_n^t(Z_n(x_{n+1}) + 2\pi(n-1), E; \varepsilon_n) (\Phi^0(0, E - W(z_0)) + o(1))^{-1}. \end{aligned}$$

Par définition des solutions $f_{\pm,n}$, la matrice de monodromie associée M_n s'exprime en terme de la matrice de monodromie M associée à la base cohérente $\{\Phi_+, \Phi_-\}$ comme :

$$M_n(z, E; \varepsilon_n) = M(z - 2\pi n, E; \varepsilon_n).$$

D'où on obtient l'expression de l'asymptotique de la matrice de transfert pour (SlOsc) en termes de la matrice de monodromie M pour (AdiabQP) :

$$\begin{aligned} T(x_{n+1}, x_n, E) &= (\Phi^0(0, E - W(z_0)) + o(1)) \\ &M^t(Z_n(x_{n+1}) - 2\pi, E; \varepsilon_n) (\Phi^0(0, E - W(z_0)) + o(1))^{-1}. \end{aligned}$$

Ceci démontre le Lemme 3.7. \square

3.3 Exposant de Lyapounov

Pour calculer l'exposant de Lyapounov pour (SIosc), il est pratique d'en utiliser une définition alternative. On considère une suite de points $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$. Supposons que la suite $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k} = 0$$

Alors l'exposant de Lyapounov pour le problème (SIosc) est égal à la limite suivante :

$$\gamma(E) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|T(x_k, 0, E)\|}{x_k}. \quad (5.3.4)$$

Le lemme suivant est utile dans les calculs.

Lemme 3.9 (Exercice 70 sur la page 30 de [PS78]). *Si deux suites réelles a_n and b_n vérifient les conditions :*

- $b_n > 0$,
- $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N b_n = +\infty$,
- *il existe une limite finie $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \gamma \geq 0$*

alors la limite $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^N a_n}{\sum_{n=0}^N b_n}$ existe et elle est égale à γ .

Le Lemme 3.6 décrivant l'asymptotique des matrices de transfert pour (SIosc) implique :

Corollaire 3.10. *Pour tout E vérifiant (**HEAbs**), l'exposant de Lyapounov est nul.*

$$\gamma(E) = 0.$$

Démonstration du Corollaire 3.10. Comme les matrices de transfert appartiennent à $SL_2(\mathbb{C})$, il suffit de majorer la norme du produit (car la positivité de $\gamma(E)$ est automatique).

On majore :

$$\left\| \prod_{n=n_0}^N T(x_n, x_{n+1}, E) \right\| \leq \prod_{n=n_0}^N \|T(x_n, x_{n+1}, E)\|.$$

Le Lemme 3.6 implique qu'il existe une constante finie $C > 1$ indépendante de n telle que :

$$\|T(x_n, x_{n+1}, E)\| \leq \|T_n(x_{n+1}, x_n, z_n, E; \varepsilon_n) + \tilde{T}_n\| \leq C + O(n^{\frac{1}{\alpha}-2}) \leq 2C$$

Le logarithme s'estime :

$$0 \leq \ln \left\| \prod_{n=n_0}^N T(x_n, x_{n+1}, E) \right\| \leq 2C(N - n_0).$$

On applique le Lemme 3.9 et l'estimation $x_{n+1} - x_n = O(n^{\frac{1}{\alpha}-1})$ pour conclure :

$$\gamma(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left\| \prod_{n=n_0}^N T(x_n, x_{n+1}, E) \right\|}{x_N} = 0.$$

□

4 Énergies E dans le spectre singulier de \mathbb{H}_θ

Par le Théorème 3 de l'Introduction, on sait que les énergies E vérifiant $(E - W(\mathbb{R})) \cap \sigma(\mathbb{H}_0) \neq \emptyset$ et $(E - W(\mathbb{R})) \cap (\mathbb{R} \setminus \sigma(\mathbb{H}_0)) \neq \emptyset$ sont dans le spectre singulier de $\mathbb{H}_\theta = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(x^\alpha)$. On étudie les solutions et les matrices de transfert de (SIosc) pour ces énergies. On commence par obtenir une estimation importante pour la méthode de la résolvante approchée.

4.1 Estimation de la résolvante dans un domaine de rencontre

Soit D_g (resp. D_h) le diagramme de prolongement d'une solution cohérente g (resp. h) de l'équation (AdiabQP). Soit $[c, d] \subset D_g \cap D_h$ un intervalle indépendant de ε et tel qu'au voisinage de $[c, d]$ on ait :

$$\Im \kappa_g(z) < 0 \quad \text{et} \quad \Im \kappa_h(z) > 0. \quad (5.4.1)$$

Soit $I(\varepsilon) := [a, b]$ un intervalle réel, $a = a(\varepsilon)$ et $b = b(\varepsilon)$, tel que

$$[z + \varepsilon a(\varepsilon), z + \varepsilon b(\varepsilon)] \subset [c, d].$$

On définit le noyau de la résolvante de $H_{z,\varepsilon}$ sur $I(\varepsilon)$ comme suit :

$$R(x, y, z, \varepsilon) = \frac{1}{w[g, h](z, \varepsilon)} (g(x, z, \varepsilon)h(y, z, \varepsilon)\chi_{\{x < y\}} - h(x, z, \varepsilon)g(y, z, \varepsilon)\chi_{\{x \geq y\}}). \quad (5.4.2)$$

On considère l'opérateur \mathbf{R}_ε d'intégration contre le noyau $R(x, y, z, \varepsilon)$ sur l'intervalle $I(\varepsilon)$

$$(\mathbf{R}_\varepsilon f)(x, z, \varepsilon) := \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} R(x, y, z, \varepsilon) f(y, z) dy. \quad (5.4.3)$$

Lemme 4.1. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε telle que*

$$|(\mathbf{R}_\varepsilon f)(x, z, \varepsilon)| \leq C \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \left| \Im \int_{z+\varepsilon x}^{z+\varepsilon y} \kappa_g(s) ds \right| \right) |f(y, z)| dy.$$

Démonstration. On commence par l'estimation de $w[g, h](z, \varepsilon)$. La condition (5.4.1) implique que $[c, d]$ fait partie d'un domaine de rencontre² D de solutions g et h . Ceci permet d'utiliser la formule asymptotique (Wrons) page 65 pour le wronskien $w[g, h](z, \varepsilon)$ de g et h :

$$w[g, h](z, \varepsilon) = -w_m(\varepsilon) \exp\left(\frac{2\pi i m(g, h)}{\varepsilon} (z - z_h)\right) (1 + o(1)), \quad \forall z \in [c, d]$$

avec $m = m(g, h, D)$ qui vient de la formule $\kappa_g(z) = -\kappa_h(z) + 2\pi m(g, h)$. Le m -ème coefficient de Fourier w_m de $w[g, h]$ est donné par :

$$w_m(\varepsilon) = A(g, h; D) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_g}^{z_h} \kappa_g(s) ds\right) w[\Phi_h^0, \Phi_{h^*}^0](z_h)$$

2. Voir la Définition 1.23 page 64.

avec $A(g, h; D)$ une fonction analytique d'énergie telle que $|A(g, h; D)| = 1$.

Pour z_h tel que $\mathcal{E}(z_h) \in \Sigma$, i.e. tel que $\text{dist}(\mathcal{E}(z_h), E_m)$ est positive pour tous les bords E_m de zones spectrales de \mathbb{H}_0 , on a $w[\Phi_h^0, \Phi_{h^*}^0](z_h) \geq c > 0$. Par conséquent, $w[g, h](z, \varepsilon)$ est minorée :

$$|w[g, h](z, \varepsilon)| \geq c \left| \exp \left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_g}^{z_h} \kappa_g(s) ds + \frac{2\pi im}{\varepsilon} (z - z_h) \right) \right| \quad (5.4.4)$$

On note $L_\varepsilon := w[g, h](z, \varepsilon)(\mathbf{R}_\varepsilon f)(x, z, \varepsilon)$. Supposons que $[z + \varepsilon a(\varepsilon), z + \varepsilon b(\varepsilon)] \subset [c, d]$. On applique l'estimation (5.2.7) à g et à h pour obtenir :

$$\begin{aligned} |L_\varepsilon| &\leq C_g C_h \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_g}^{z+\varepsilon x} \kappa_g(s) ds - \frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_h}^{z+\varepsilon y} \kappa_h(s) ds \right) \chi_{\{x < y\}} f(y, z) dy \\ &+ C_g C_h \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_g}^{z+\varepsilon y} \kappa_g(s) ds - \frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_h}^{z+\varepsilon x} \kappa_h(s) ds \right) \chi_{\{x > y\}} |f(y, z)| dy \end{aligned}$$

On utilise la relation $\kappa_h(z) = -\kappa_g(z) + 2\pi m(g, h)$ qui relie κ_g et κ_h dans D pour obtenir

$$\int_{z_h}^z \kappa_h(s) ds = \int_{z_g}^{z_h} \kappa_g(s) ds - \int_{z_g}^z \kappa_g(s) ds + \frac{2\pi im}{\varepsilon} (z - z_h).$$

D'où

$$|g(x, z, \varepsilon)h(y, z, \varepsilon)| \leq C_g C_h \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_g}^{z_h} \kappa_g(s) ds + \frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z+\varepsilon x}^{z+\varepsilon y} \kappa_g(s) ds - \frac{2\pi m(g, h)}{\varepsilon} \Im z \right).$$

Ceci implique :

$$\begin{aligned} |L_\varepsilon| &\leq C_g C_h \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_g}^{z_h} \kappa_g(s) ds - \frac{2\pi m(g, h)}{\varepsilon} (\Im z) \right) \\ &\int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} \left(\exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z+\varepsilon x}^{z+\varepsilon y} \kappa_g(s) ds \right) \chi_{\{x < y\}} + \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z+\varepsilon y}^{z+\varepsilon x} \kappa_g(s) ds \right) \chi_{\{x \geq y\}} \right) |f(y, z)| dy \leq \\ &\leq C_g C_h \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_g}^{z_h} \kappa_g(s) ds - \frac{2\pi m(g, h)}{\varepsilon} (\Im z) \right) \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \left| \Im \int_{z+\varepsilon x}^{z+\varepsilon y} \kappa_g(s) ds \right| \right) |f(y, z)| dy \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

On pose $C := 2C_g C_h c^{-1}$. Grâce aux estimations (5.4.4) et (5.4.5), on obtient l'estimation de la résolvante \mathbf{R}_ε :

$$|(\mathbf{R}_\varepsilon f)(x, z, \varepsilon)| \leq C \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \left| \Im \int_{z+\varepsilon x}^{z+\varepsilon y} \kappa_g(s) ds \right| \right) |f(y, z)| dy$$

□

Lemme 4.2. Soit $\varepsilon_0 > 0$. Soient f, g, h trois solutions qui ont pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ un CAS au voisinage de $[c, d]$. Soit $I(\varepsilon) := [a(\varepsilon), b(\varepsilon)]$ un intervalle réel vérifiant $[z + \varepsilon a(\varepsilon), z + \varepsilon b(\varepsilon)] \subset [c, d]$. Supposons que $\Im \kappa_g < 0$ et $\Im \kappa_h > 0$ sur $[c, d]$. Alors la résolvante \mathbf{R}_ε définie par les formules (5.4.2) et (5.4.3) vérifie l'estimation :

$$\|\mathbf{R}_\varepsilon\|_{L^\infty(I(\varepsilon), \gamma(\varepsilon)) \rightarrow L^\infty(I(\varepsilon), \gamma_f(\varepsilon))} = O(b(\varepsilon) - a(\varepsilon)),$$

où $\gamma_f(\varepsilon) := -\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_f}^{z+\varepsilon x} \kappa_f(s) ds$.

Démonstration. Supposons que $f(x, z, E, \varepsilon)$ soit une solution cohérente de (AdiabQP) qui vérifie un CAS au voisinage de $[c, d]$. Par le Lemme 2.2, pour tout intervalle réel $I(\varepsilon) := [a(\varepsilon), b(\varepsilon)]$ tel que $[z + \varepsilon a(\varepsilon), z + \varepsilon b(\varepsilon)] \subset [c, d]$ on a

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)} \|f(\cdot, z, \varepsilon)\|_{L_\infty(I(\varepsilon), \gamma_f(\varepsilon))} < \infty, \quad \gamma_f(x, \varepsilon) := -\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_f}^{z+\varepsilon x} \kappa_f(s) ds,$$

i.e. on a l'estimation (5.2.7) :

$$|f(y, z, \varepsilon)| \leq C_f \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_f}^{z+\varepsilon y} \kappa_f(s) ds\right).$$

Sur $[c, d]$, la détermination du moment complexe κ_f est liée à κ_h par la relation :

$$\kappa_g(z) = \sigma(f, g) \kappa_f(z) + 2\pi m(f, g) \quad \forall z \in [c, d].$$

Donc

$$\Im \int_{z+\varepsilon x}^{z+\varepsilon y} \kappa_g(s) ds = \sigma(f, g) \Im \int_{z+\varepsilon x}^{z+\varepsilon y} \kappa_f(s) ds.$$

Considérons le cas $\sigma(f, g) = 1$, puis le cas $\sigma(f, g) = -1$:

– Si $\sigma(f, g) = 1$ alors on a :

$$\begin{aligned} |(\mathbf{R}f)(x, z, \varepsilon)| &\leq C \exp\left(-\frac{2\pi m(f, g)}{\varepsilon} \Im z\right) |b - a| \\ &\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_f}^{z+\varepsilon x} \kappa_f(s) ds\right) \left(1 + \sup_{y \in [a, x]} \exp\left(\frac{2}{\varepsilon} \Im \int_{z+\varepsilon y}^{z+\varepsilon x} \kappa_f(s) ds\right)\right) \end{aligned}$$

– Si $\sigma(f, g) = -1$ alors on a :

$$\begin{aligned} |(\mathbf{R}_\varepsilon f)(x, z, \varepsilon)| &\leq C \exp\left(-\frac{2\pi m(f, g)}{\varepsilon} \Im z\right) |b(\varepsilon) - a(\varepsilon)| \\ &\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_f}^{z+\varepsilon x} \kappa_f(s) ds\right) \left(1 + \sup_{y \in [x, b]} \exp\left(\frac{2}{\varepsilon} \Im \int_{z+\varepsilon y}^{z+\varepsilon x} \kappa_f(s) ds\right)\right) \end{aligned}$$

D'où

$$|(\mathbf{R}_\varepsilon f)(x, z, \varepsilon)| \leq C \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \Im \int_{z_f}^{z+\varepsilon y} \kappa_f(s) ds\right) \exp\left(\frac{2\pi i m(f, g)}{\varepsilon} \Im z\right).$$

Ceci démontre le Lemme 4.2. □

Dans la section suivante, on utilise le Lemme 4.2 pour obtenir l'asymptotique de type WKB pour les solutions de (SIosc) sur les sous-intervalles de I_n pour les valeurs d'énergie E dans spectre singulier de $\mathbb{H}_\theta := -\frac{d^2}{dx^2} + [V(x) + W(x^\alpha)]$ (voir les Théorèmes 3 et 4 de l'Introduction pour la description du spectre de \mathbb{H}_θ obtenue par G. Stolz).

4.2 Solutions de (SIOsc)

On va maintenant construire les solutions de (SIOsc) qui ont une asymptotique simple. Ceci n'est pas possible sur tout \mathbb{R} . On fait donc une subdivision de chaque I_n en intervalles où l'on contrôle bien l'asymptotique des solutions de (SIOsc) et en intervalles où on ne les contrôle pas très bien à cause des points tournants.

Dans l'intervalle $[z_0, z_0 + 2\pi]$ sur l'axe du paramètre z , l'équation (AdiabQP) a des points tournants. Ce sont des points où $E - W(z) = E_m$ pour $m \in \mathbb{N}$, *i.e.* l'énergie complexe $\mathcal{E}(z) := E - W(z)$ prend une valeur dans le bord de la lacune spectrale ouverte de \mathbb{H}_0 .

On définit la fonction :

$$X_n(z) := \frac{z - z_n + 2\pi n}{\varepsilon_n} \quad (\text{fct } X_n)$$

qui envoie $[z_0 + O(\varepsilon_n), z_0 + 2\pi + O(\varepsilon_n)]$ sur I_n .

Pour définir une partition adéquate de I_n , on repartit $[z_0 + O(\varepsilon_n), z_0 + 2\pi + O(\varepsilon_n)]$ en intervalles contenant ou non les points tournants de la façon suivante. On note les préimages de zones spectrales de \mathbb{H}_0 dans $[z_0, z_0 + 2\pi]$ par :

$$[z_0, \xi_1], [\eta_2, \xi_2], [\eta_3, \xi_3], \dots, [\eta_I, z_0 + 2\pi].$$

On fixe $\mu > 0$ petit. On pose $\eta_i^\pm := \eta_i \pm \mu$ et $\xi_i^\pm := \xi_i \pm \mu$. On sépare l'intervalle $[z_0, z_0 + 2\pi]$ en

– intervalles d'oscillation des solutions de (AdiabQP) :

$$A_i := [\xi_i^+, \eta_i^-] \quad \forall i = 2, \dots, I - 1$$

$$A_1 := [z_0 + O(\varepsilon_n), \xi_1^-] \quad A_I := [\eta_I^+, z_0 + 2\pi + O(\varepsilon_n)],$$

– voisinages des points critiques de (AdiabQP) $B_i := [\eta_i^-, \eta_i^+]$ et $D_i := [\xi_i^-, \xi_i^+]$,

– intervalles de croissance-décroissance exponentielle des solutions de (AdiabQP) $C_i := [\eta_i^+, \xi_{i+1}^-]$.

On note $a_{ni}^\pm := X_n(\eta_i^\pm)$ et $b_{ni}^\pm := X_n(\xi_i^\pm)$. Sur l'axe de la variable x , on définit la partition de I_n en :

– intervalles d'oscillation des solutions de (AdiabQPn) et (AdiabQP) :

$$[x_n, b_{n1}^-], \dots, [a_{ni}^+, b_{ni}^-], \dots, [a_{nI}^+, x_{n+1}],$$

– voisinages des points tournants de (AdiabQPn) et (AdiabQP) :

$$[a_{ni}^-, a_{ni}^+], \quad i = 2, \dots, I, \quad \text{et} \quad [b_{ni}^-, b_{ni}^+], \quad i = 1, \dots, I - 1,$$

– intervalles de croissance-décroissance exponentielle des solutions de (AdiabQPn) et (AdiabQP)

$$[b_{ni}^+, a_{n(i-1)}^-], \quad i = 1, \dots, I - 1.$$

En utilisant les résultats du Chapitre III, on démontre :

Lemme 4.3. *Pour chaque $\mu > 0$ fixé, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $n > n_0$ et chaque $i = 1, \dots, I$, on peut construire une base cohérente $\{\Phi_{+,ni}, \Phi_{-,ni}\}$ de solutions de (AdiabQPn) telle que*

1. $\Phi_{\pm,ni}(\cdot, z_n, E; \varepsilon_n)$ sont bornées sur $[a_{ni}^+, b_{ni}^-]$.

2. pour $x \in [a_{ni}^+, b_{ni}^-]$, $\Phi_{\pm,ni}(x, z_n, E; \varepsilon_n)$ ont l'asymptotique :

$$\Phi_{\pm,ni}(x, z_n, E; \varepsilon_n) = \exp\left(\pm \frac{i}{\varepsilon_n} \int_{z_i}^{Z_n(x)} \kappa_i(s) ds\right) (\Phi_{\pm}^0(\{x\}, Z_n(x), z_i, E) + o(1)).$$

où

- $z_i \in [\xi_i^+, \eta_i^-]$,
- Z_n est défini dans (fct Z_n) page 105,
- κ_i la détermination du moment complexe telle que $\kappa_i(z_i) \in (0, \pi)$.
- $\Phi_{\pm}^0(x, z, z_i, E)$ sont des solutions de Bloch canoniques avec l'énergie $E - W(z)$, normalisés en point $E - W(z_i)$,

Cette asymptotique est dérivable une fois en x .

Démonstration du Lemme 4.3. Rappelons les résultats du Chapitre III. Dans la Proposition 2.8 du Chapitre III, pour chaque $i = 0, \dots, I$, pour chaque $z \in [\xi_i^+, \eta_i^-]$, on a construit une base cohérente $\{f_i, f_i^*\}$ qui a un CAS sur $[\xi_i^+, \eta_i^-]$.

Plus précisément, on a démontré qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour chaque $\varepsilon < \varepsilon_0$ et pour chaque $i = 0, \dots, I$, il existe une base cohérente $\{f_i, f_i^*\}$ de solutions de (AdiabQP) qui vérifie pour tout $z \in [\xi_i^+, \eta_i^-]$ et tout $x \in [-X, X]$ avec $X > 1$ l'asymptotique :

$$\begin{aligned} f_i(x, z, E, \varepsilon) &= \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_i}^z \kappa_i(s) ds\right) (\Phi_+^0(x, z, z_i, E) + o(1)), \\ f_i'(x, z, E, \varepsilon) &= \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{z_i}^z \kappa_i(s) ds\right) ((\Phi_+^0)'(x, z, z_i, E) + o(1)). \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

où $z_i, \kappa_i, \Phi_+^0(x, z, z_i, E)$ sont comme dans l'énoncé du Lemme 4.3.

Pour conclure la démonstration, on pose :

$$\Phi_{+,in}(x, z, E, \varepsilon_n) := f_i(x, z - 2\pi n, E, \varepsilon_n), \quad \Phi_{-,in}(x, z, E, \varepsilon_n) := f_i^*(x, z - 2\pi n, E, \varepsilon_n). \quad (5.4.7)$$

On utilise la condition de cohérence :

$$\begin{aligned} \Phi_{+,in}(x, z_n, E, \varepsilon_n) &= \Phi_{+,in}(\{x\}, Z_n(x) + 2\pi n, E, \varepsilon_n) = f_i(\{x\}, Z_n(x), E; \varepsilon_n), \\ \Phi_{-,in}(x, z_n, E, \varepsilon_n) &= \Phi_{-,in}(\{x\}, Z_n(x) + 2\pi n, E, \varepsilon_n) = f_i^*(\{x\}, Z_n(x), E; \varepsilon_n). \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Par (5.4.6) et (5.4.7), la base $\{\Phi_{+,ni}, \Phi_{-,ni}\}$ vérifie les propriétés annoncées. \square

Lemme 4.4. Pour tout $\mu > 0$ suffisamment petit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, on peut construire une base cohérente $\{\tilde{\Phi}_{+,ni}, \tilde{\Phi}_{-,ni}\}$ de solutions de (AdiabQP) telle que :

$$1. \tilde{\Phi}_{\pm,ni}(\cdot, z_n, E; \varepsilon_n) \in L_\infty\left([b_{ni}^+, a_{n(i+1)}^-], e^{\pm \frac{1}{\varepsilon_n} \int_{z_i}^{Z_n(x)} \gamma_0(E-W(s)) ds}\right),$$

2. pour tout $x \in [b_{ni}^+, a_{n(i+1)}^-]$ les solutions $\tilde{\Phi}_{\pm,ni}(x, z_n, E; \varepsilon_n)$ ont l'asymptotique :

$$\tilde{\Phi}_{\pm,ni}(x, z_n, E; \varepsilon_n) = \exp\left(\pm \frac{i}{\varepsilon_n} \int_{z_i}^{Z_n(x)} \kappa_i(s) ds\right) (\Phi_{\pm}^0(\{x\}, Z_n(x), z_i, E) + o(1)).$$

où

- $z_i \in [\xi_i^+, \eta_i^-]$,

- Z_n est défini dans (fct Z_n) page 105,
- κ_i la détermination du moment complexe telle que $\kappa(z_i) \in (0, \pi)$.
- $\Phi_{\pm}^0(x, z, z_i, E)$ sont des solutions de Bloch canoniques avec l'énergie $E - W(z)$, normalisés en point $E - W(z_i)$,

Cette asymptotique est dérivable une fois en x .

Démonstration du Lemme 4.4. Pour $i = 1, \dots, K - 1$, sur chaque intervalle $[b_{ni}^+, a_{n(i+1)}^-]$, on forme une base cohérente $\{\tilde{\Phi}_{+,ni}, \tilde{\Phi}_{-,ni}\}$ comme suit :

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{+,ni}(x, z_n, E; \varepsilon_n) &:= \Phi_{+,ni}(x, z_n, E, \varepsilon_n), \\ \tilde{\Phi}_{-,ni}(x, z_n, E, \varepsilon_n) &:= \frac{\Phi_{-,n(i+1)}(x, z_n, E, \varepsilon_n)w_0}{w[\Phi_{+,ni}(x, z_n, E, \varepsilon_n), \Phi_{-,n(i+1)}(x, z_n, E, \varepsilon_n)]}\end{aligned}$$

avec $w_0 = w[\Phi_+^0(x, z_i, z_i, E), \Phi_-^0(x, z_i, z_i, E)]$.

Par la Proposition 2.8, l'asymptotique de f_i et de f_{i+1}^* dans $[\xi_i^+, \eta_{i+1}^-] := [Z_n(b_{ni}^+), Z_n(a_{n(i+1)}^-)]$ est obtenue par le prolongement analytique dans le diagramme de prolongement de ces solutions. Cet intervalle fait partie du domaine de rencontre de f_i et f_{i+1}^* . Par la condition de cohérence et définition de $\Phi_{+,ni}$ et $\Phi_{-,n(i+1)}$, on a $\Phi_{+,ni}(x, z_n, E; \varepsilon_n) = f_i(\{x\}, Z_n(x), E; \varepsilon_n)$ et $\Phi_{-,n(i+1)} = f_{i+1}^*(\{x\}, Z_n(x), E; \varepsilon_n)$. On calcule alors l'asymptotique de leur wronskien par les formules de la Proposition 1.24. On réunit ensemble l'asymptotique de f_i et f_{i+1}^* avec l'asymptotique de $w[\Phi_{+,ni}(x, z_n, E, \varepsilon_n), \Phi_{-,n(i+1)}(x, z_n, E, \varepsilon_n)] = w[f_i, f_{i+1}^*](Z_n(x))$ pour obtenir pour tout $x \in [-X, X]$ et tout $z \in [Z_n(b_{ni}^+), Z_n(a_{n(i+1)}^-)]$:

$$\begin{aligned}f_i(x, z, E; \varepsilon_n) &= \exp\left(\frac{i}{\varepsilon_n} \int_{z_i}^z \kappa_i(s) ds\right) (\Phi_+^0(x, z, z_i, E) + o(1)), \\ \frac{f_{i+1}^*(x, z, E; \varepsilon_n)}{w[f_i, f_{i+1}^*](z)} &= \exp\left(-\frac{i}{\varepsilon_n} \int_{z_i}^z \kappa_i(s) ds\right) (\Phi_-^0(x, z, z_i, E) + o(1)),\end{aligned}$$

différentiables une fois en x . D'où pour tout $x \in [b_{ni}^+, a_{n(i+1)}^-]$ on a :

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{ni}^+(x, z_n, E; \varepsilon_n) &= \exp\left(\frac{i}{\varepsilon_n} \int_{z_i}^{Z_n(x)} \kappa_i(s) ds\right) (\Phi_+^0(\{x\}, Z_n(x), z_i, E) + o(1)), \\ \tilde{\Phi}_{ni}^-(x, z_n, E; \varepsilon_n) &= \exp\left(-\frac{i}{\varepsilon_n} \int_{z_i}^{Z_n(x)} \kappa_i(s) ds\right) (\Phi_-^0(\{x\}, Z_n(x), z_i, E) + o(1)),\end{aligned}$$

et cette asymptotique est différentiable une fois en x . □

A l'aide du Lemme 4.3 (resp. du Lemme 4.4), par la méthode de la résolvante approchée on démontre le comportement oscillatoire (resp. exponentiellement croissant ou décroissant) des solutions de (SIosc) sur des grands intervalles :

Lemme 4.5. *Il existe n_0 tel que pour chaque $n > n_0$ et $i = 1, \dots, I$, on peut construire une base $\{\Psi_{+,ni}, \Psi_{-,ni}\}$ de solutions de (SIosc) ayant pour $x \in [a_{ni}^+, b_{ni}^-]$ la même asymptotique que $\Phi_{\pm,ni}$ dans le Lemme 4.3.*

Pour tout $n > n_0$ et $i = 1, \dots, I - 1$, on peut construire une base $\{\tilde{\Psi}_{+,ni}, \tilde{\Psi}_{-,ni}\}$ de solutions de (SIosc) ayant pour $x \in [b_{ni}^+, a_{n(i+1)}^-]$ la même asymptotique que $\tilde{\Phi}_{\pm,ni}$ dans le Lemme 4.4

Démonstration du Lemme 4.5. On construit une base de solutions de (SIosc) par la méthode de la résolvante approchée à partir de la base de solutions $\tilde{\Phi}_{\pm,ni}$ de (AdiabQPn) décrite dans le Lemme 4.3.

On a

$$\tilde{\Psi}_{\pm,ni}(x, E) = \tilde{\Phi}_{\pm,ni}(x, z_n, E, \varepsilon_n) + O(\mathbf{R}_{ni}\Delta W_n \tilde{\Phi}_{\pm,ni})$$

où \mathbf{R}_{ni} est la résolvante pour (AdiabQPn) construite par les formules (5.4.2) et (5.4.3) avec $h = \tilde{\Phi}_{+,ni}$ et $g = \tilde{\Phi}_{-,ni}$. Pour justifier ceci, on utilise les propriétés des $\tilde{\Phi}_{\pm,ni}$ décrites dans le Lemme 4.3. On applique alors le Lemme 4.2 pour obtenir :

$$\|\mathbf{R}_{ni}\Delta W_n\|_{L_\infty([b_{ni}^+, a_{n(i+1)}^-], \pm\gamma_{ni}) \rightarrow L_\infty([b_{ni}^+, a_{n(i+1)}^-], \pm\gamma_{ni})} \leq Cn^{\frac{1}{\alpha}-2},$$

où $\gamma_{ni}(x) := \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon_n} \Im \int_{z_i}^{Z_n(x)} \kappa_i(s) ds\right)$.

D'où $\tilde{\Psi}_{\pm,ni}(x, E) := \tilde{\Phi}_{\pm,ni}(x, z_n, E, \varepsilon_n) + (\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{R}_{ni}\Delta W_n)^k \tilde{\Phi}_{\pm,ni})(x, z_n, E, \varepsilon_n)$ vérifie l'asymptotique :

$$\tilde{\Psi}_{\pm,ni}(x, E) = \exp\left(\pm \frac{i}{\varepsilon_n} \int_{z_i}^{Z_n([x])} \kappa_i(s) ds\right) (\Phi_{\pm}^0(\{x\}, Z_n([x]), z_i, E) + o(1) + O(n^{\frac{1}{\alpha}-2})).$$

La même construction est valable pour obtenir l'asymptotique de la dérivée en x des $\Psi_{\pm,ni}$, où l'opérateur \mathbf{R}_{ni} est remplacé par $\tilde{\mathbf{R}}_{ni}$ avec le noyau $\tilde{R}_{ni}(x, y, E) := \frac{d}{dx} R_{ni}(x, y, E)$ où $R_{ni}(x, y, E)$ est le noyau de \mathbf{R}_{ni} . On laisse les détails au lecteur. \square

Pour pouvoir analyser les matrices de transfert sur I_n , il faut estimer les matrices de transfert de (SIosc) sur les intervalles $[a_{ni}^-, a_{ni}^+]$ et $[b_{ni}^-, b_{ni}^+]$, *i.e.* au voisinage des points tournants.

4.3 Matrices de transfert pour (SIosc)

Pour analyser la matrice de transfert $T(x_{n+1}, x_n, E)$, on l'exprime comme le produit :

$$T(x_{n+1}, x_n, E) := T(x_{n+1}, a_{nK}^-, E) T(a_{nK}^-, b_{n(K-1)}^+, E) T(b_{n(K-1)}^+, a_{n(K-1)}^-, E) \dots \\ \dots T(b_{n2}^+, a_{n2}^-, E) T(a_{n2}^-, b_{n1}^+, E) T(b_{n1}^+, x_n, E). \quad (5.4.9)$$

On a :

Lemme 4.6. *Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $n > n_0$:*

– pour $i \in \{0, \dots, I\}$, les matrices de transfert $T(a_{ni}^+, b_{ni}^-, E)$ ont l'asymptotique :

$$T(a_{ni}^+, b_{ni}^-, E) := (\Phi_i^0(Z_n(b_{ni}^-)) + o(1)) \begin{pmatrix} e^{\frac{i\phi_{ni}(E)}{\varepsilon_n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\phi_{ni}(E)}{\varepsilon_n}} \end{pmatrix} (\Phi_i^0(Z_n(a_{ni}^+)) + o(1))^{-1}$$

où $\phi_{ni}(E) = \int_{Z_n(a_{ni}^+)}^{Z_n(b_{ni}^-)} \Re \kappa_i(s) ds$ et la matrice $\Phi_i^0(z) := \begin{pmatrix} \Phi_+^0(0, z, z_i, E) & \Phi_-^0(0, z, z_i, E) \\ (\Phi_+^0)'(0, z, z_i, E) & (\Phi_-^0)'(0, z, z_i, E) \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$ est bornée, d'inverse borné.

3. Remarquer que $\phi_{ni}(E) \in \mathbb{R}_+$, est analytique réelle en E et non constante.

– pour $i \in \{0, \dots, I\}$, les matrices de transfert $T(a_{n(i+1)}^-, b_{ni}^+, E)$ ont l'asymptotique :

$$T(a_{n(i+1)}^-, b_{ni}^+, E) := (\Phi_i^0(Z_n(a_{n(i+1)}^+)) + o(1)) \begin{pmatrix} e^{\frac{S_{ni}(E)}{\varepsilon_n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{S_{ni}(E)}{\varepsilon_n}} \end{pmatrix} (\Phi_i^0(Z_n(b_{ni}^+)) + o(1))^{-1}$$

où

– $\Phi_i^0(z)$ est défini précédemment,

– $S_{ni}(E) := -\int_{Z_n(b_{ni}^+)}^{Z_n(a_{n(i+1)}^-)} \Im \kappa_i(s) ds \neq 0$, analytique réelle en E , non constante.

Démonstration. On applique le Lemme 4.5 : pour chaque $n > n_0$ et pour chaque $i \in \{1, \dots, I\}$, on utilise les bases $\{\Psi_{+,ni}, \Psi_{-,ni}\}$ et $\{\tilde{\Psi}_{+,ni}, \tilde{\Psi}_{-,ni}\}$ de solutions de (SIosc) pour calculer l'asymptotique de $T(b_{ni}^-, a_{ni}^+, E)$ et $T(a_{n(i+1)}^-, b_{ni}^+, E)$:

$$T(b_{ni}^-, a_{ni}^+, E) = \Psi_{ni}(b_{ni}^-, E) \Psi_{ni}^{-1}(a_{ni}^+, E), \quad T(a_{n(i+1)}^-, b_{ni}^+, E) = \tilde{\Psi}_{ni}(a_{n(i+1)}^-, E) \tilde{\Psi}_{ni}^{-1}(b_{ni}^+, E)$$

$$\text{où } \Psi_{n,i} := \begin{pmatrix} \Psi_{+,n,i} & \Psi_{-,n,i} \\ \Psi'_{+,n,i} & \Psi'_{-,n,i} \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\Psi}_{n,i} := \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{+,n,i} & \tilde{\Psi}_{-,n,i} \\ \tilde{\Psi}'_{+,n,i} & \tilde{\Psi}'_{-,n,i} \end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$T(b_{ni}^-, a_{ni}^+, E) = (\Phi(Z_n(b_{ni}^-)) + o(1)) \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{\varepsilon_n} \phi_{ni}(E)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{\varepsilon_n} \phi_{ni}(E)} \end{pmatrix} (\Phi(Z_n(a_{ni}^+) + o(1))^{-1}.$$

avec $\phi_{ni}(E) = \int_{Z_n(a_{ni}^+)}^{Z_n(b_{ni}^-)} \Re \kappa_i(s) ds$. Comme $\kappa_i \in (0, \pi)$ sur $[Z_n(a_{ni}^+), Z_n(b_{ni}^-)]$, on a $\phi_{ni}(E) > 0$. Les propriétés du moment complexe impliquent l'analyticité de $\phi_{ni}(E)$ en E et sa non constance.

On calcule l'asymptotique de $T(a_{n(i+1)}^-, b_{ni}^+, E)$ en utilisant les asymptotiques des solutions $\tilde{\Psi}_{\pm,ni}$ obtenues dans le Lemme 4.4 :

$$\begin{aligned} T(a_{n(i+1)}^-, b_{ni}^+, E) &= \tilde{\Psi}_{ni}(a_{n(i+1)}^-, E) \tilde{\Psi}_{ni}^{-1}(b_{ni}^+, E) = \\ &= (\Phi(Z_n(a_{n(i+1)}^-), E) + o(1)) \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{\varepsilon_n} S_{ni}(E)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{\varepsilon_n} S_{ni}(E)} \end{pmatrix} (\Phi(Z_n(b_{ni}^-), E) + o(1))^{-1}. \end{aligned}$$

Ici $S_{ni}(E) := -\int_{Z_n(b_{ni}^+)}^{Z_n(a_{n(i+1)}^-)} \Im \kappa_i(s) ds \neq 0$, car pour tout $s \in [Z_n(b_{ni}^+), Z_n(a_{n(i+1)}^-)]$ on a $\Im \kappa_i(s) \neq 0$ et $\Re \kappa_i(s) = \text{const} \in \pi \mathbb{Z}$. Les propriétés du moment complexe impliquent l'analyticité de $S_{ni}(E)$ en E et sa non constance. \square

Lemme 4.7. Pour $j, k = 1, 2$, on a l'estimation :

$$|T_{jk}(b_{ni}^+, a_{ni}^-, E)| \leq e^{\frac{2C\delta}{\varepsilon_n}}, \quad j, k = 1, 2 \quad (5.4.10)$$

Démonstration. On étudie la matrice de transfert

$$T(b_{ni}^+, a_{ni}^-, E) = T(b_{ni}^+, b_{ni}^-, E) T(b_{ni}^-, a_{ni}^+, E) T(a_{ni}^+, a_{ni}^-, E).$$

Pour démontrer le Lemme 4.7, on démontre :

- La matrice $T(b_{ni}^-, a_{ni}^+, E)$ est bornée et ses coefficients sont bornés par une constante C qui ne dépend que de V et W . Ceci est un corollaire du Lemme 4.6.
- Les matrices $T(b_{ni}^+, b_{ni}^-, E)$ et $T(a_{ni}^+, a_{ni}^-, E)$ ont des coefficients bornés par $e^{\frac{C\delta}{\varepsilon_n}}$ où la constante C ne dépend que de $\|V(x)\|_{L_2([0,1])}$ et $\|W\|_{L_\infty}$.

On a $b_{ni}^+ - b_{ni}^- = \frac{\delta}{\varepsilon_n}$ et $a_{ni}^+ - a_{ni}^- = \frac{\delta}{\varepsilon_n}$. Ainsi, pour démontrer que

$$|T_{jk}(b_{ni}^+, b_{ni}^-, E)|, |T_{jk}(a_{ni}^+, a_{ni}^-, E)| \leq e^{\frac{C\delta}{\varepsilon_n}} \quad j = 1, 2 \quad k = 1, 2$$

il suffit de trouver les constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout $y \in \mathbb{R}$ et pour toute solution Ψ de (SIOsc) avec la donnée de Cauchy $\Psi(y, E) = u$ et $\Psi'(y, E) = v$, on ait

$$|\Psi(x, E)|, |\Psi'(x, E)| \leq c_1 e^{c_2|x-y|} \quad (5.4.11)$$

Ceci découle de la théorie générale. Plus précisément, on définit :

Définition 4.8. Soit $q \in L_{2,loc}(\mathbb{R}_+)$. On dit que q appartient à $L_{2,loc}^{unif}(\mathbb{R}_+)$ s'il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$\|q\|_{L_2([x,x+1])} \leq C.$$

Il est facile de vérifier que $V(x) + W(x^\alpha) - E \in L_{2,loc}^{unif}(\mathbb{R}_+)$. De plus, on peut majorer la constante C :

$$C \leq \|V\|_{L_2([0,1])} + \|W\|_{L_\infty} + |E|.$$

Pour tout $q \in L_{2,loc}^{unif}(\mathbb{R}_+)$, chaque solution de $-f''(t) + q(t)f(t) = 0$ vérifie (5.4.11). Au voisinage de chaque point $x \in \mathbb{R}_+$, on construit la solution de

$$\begin{cases} -f''(t) + q(t)f(t) = 0 \\ f(x) = u \\ f'(x) = v \end{cases}$$

comme la limite dans $H^1([x, x+a])$ de la suite f_n , où

$$f_n \in H^1([x, x+a]) \quad \text{et} \quad |f_n(t)|, |f_n'(t)| \leq c_1 e^{c_2(x-t)}.$$

On pose

$$f_0(x) := u + v(t-x) \quad \text{et} \quad f_{n+1}(t) := u + v(t-x) + \int_x^t \int_x^s (-q(y))f_n(y)dyds.$$

On note $C_q := \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \|q\|_{L_2([x,x+1])}$. On estime la convergence des f_n :

$$\|f_{n+1} - f_n\|_{L_2([x,x+a])} \leq C_q 3^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} \|f_n - f_{n-1}\|_{L_2([x,x+a])}.$$

D'où $\|f_{n+1} - f_n\|_{L_2([x,x+a])} \leq (C_q a^{\frac{3}{2}} 3^{-\frac{1}{2}})^{n+1} (|u|a^{\frac{1}{2}} + |v|a^{\frac{3}{2}})$.

On estime la convergence des f_n' :

$$\|f_{n+1}' - f_n'\|_{L_2([x,x+a])} \leq C_q a^{\frac{1}{2}} \|f_n - f_{n-1}\|_{L_2([x,x+a])}.$$

D'où $\|f_{n+1}' - f_n'\|_{L_2([x,x+a])} \leq C_q a^{\frac{1}{2}} (C_q a^{\frac{3}{2}} 3^{-\frac{1}{2}})^n (|u|a^{\frac{1}{2}} + |v|a^{\frac{3}{2}})$.

On fixe $a < 3^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{C_q}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$. On a $f_n \rightarrow f$ dans $L_2([x, x+a])$ car on peut estimer

$$\|f_n - f_m\|_{L_2([x, x+a])} \leq \sum_{k=m+1}^n \|f_k - f_{k-1}\|_{L_2([x, x+a])} \leq \sum_{k=m+1}^n p^k (|u| + |v|a),$$

où $p := C_q a^{\frac{3}{2}} 3^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}$. De même, on estime la vitesse de convergence de $f'_n \rightarrow f'$. Maintenant, montrons que si $|u|, |v| \leq c_1 e^{c_2}$, alors $|f(x+a)|, |f'(x+a)| \leq c_1 e^{C_2(x+a)}$.

$$\begin{aligned} |f(x+a)| &\leq |f_0| + \sum_{n=0}^{\infty} |f_{n+1}(x+a) - f_n(x+a)| \leq \\ &\leq (|u| + |v|a) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} |C_q a^2 \frac{1}{2}|^n\right) \leq c_1 e^{c_2 x} \left(1 + a + \frac{C_q a^2 \frac{1}{2} (1+a)}{1 - C_q a^2 \frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

On choisit $a < C_q^{-\frac{1}{2}}$. Pour tout $C_2 > 3$, on a :

$$|f(x+a)| \leq c_1 e^{c_2(x+a)}.$$

$$\begin{aligned} |f'(x+a)| &\leq |f'_0| + \sum_{n=0}^{\infty} |f'_{n+1}(x+a) - f'_n(x+a)| \leq \\ &\leq |v| + (|u| + |v|a) C_q a \sum_{n=0}^{\infty} |C_q a^2 \frac{1}{2}|^n \leq c_1 e^{c_2 x} (1 + 2C_q a(1+a)) \leq c_1 e^{c_2(x+a)} \end{aligned}$$

si $C_2 > 4C_q$. Finalement, on a $C_2 > \max(3, 4C_q)$. \square

Maintenant on va estimer les ensembles d'énergies E tels qu'au moins un des coefficients de la matrice $T(b_{ni}^+, a_{ni}^-, E)$ vérifie :

$$|T_{jk}(b_{ni}^+, a_{ni}^-, E)| \leq e^{-\frac{K\delta}{\varepsilon_n}}, \quad j, k \in \{1, 2\}$$

pour une constante $K > 10C$, où $C > 0$ est la constante dans (5.4.10). On a :

Lemme 4.9. *Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact. Pour $K > 10C$ et ε_n assez petit on considère :*

$$B_K(J) := \{E \in J \text{ telles que } \exists j, k \in \{1, 2\} \text{ tels que } |T_{jk}(b_{ni}^+, a_{ni}^-, E)| \leq e^{-\frac{K\delta}{\varepsilon_n}}\}$$

On a :

$$\text{mes} B_K(J) \leq \frac{96\pi}{\varepsilon_n} e^{-\frac{(K-10C)\delta}{\varepsilon_n}} |J|.$$

Démonstration. On estime :

$$\text{mes} B_K(J) \leq \sum_{j,k=1,2} \text{mes} B_{K,jk}(J)$$

où, pour $j, k = 1, 2$, on note

$$B_{K,jk}(J) := \{E \in J \text{ tel que } |T_{jk}(b_{ni}^+, a_{ni}^-, E)| \leq e^{-\frac{K\delta}{\varepsilon_n}}\}.$$

Maintenant, pour démontrer le Lemme 4.9, il suffit de démontrer que :

$$\text{mes}B_{K,jk}(J) \leq \frac{24\pi}{\varepsilon_n} e^{-\frac{(K-10C)\delta}{\varepsilon_n}}.$$

On va traiter en détail l'estimation de $\text{mes}B_{K,11}(J)$. Les autres étant analogues, on laisse les détails au lecteur.

Soient $c(x, E)$ et $s(x, E)$ les solutions des problèmes de Cauchy sur $[a_{ni}^-, b_{ni}^+]$ pour (SIosc) :

$$\begin{cases} c(a_{ni}^-, E) = 1 \\ c'(a_{ni}^-, E) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} s(a_{ni}^-, E) = 0 \\ s'(a_{ni}^-, E) = 1 \end{cases}$$

On exprime la matrice de transfert $T(b_{ni}^-, a_{ni}^+, E)$ en termes de ces solutions :

$$T(b_{ni}^-, a_{ni}^+, E) = \begin{pmatrix} c(b_{ni}^+, E) & s(b_{ni}^+, E) \\ c'(b_{ni}^+, E) & s'(b_{ni}^+, E) \end{pmatrix}.$$

Ainsi $|T_{11}(b_{ni}^+, a_{ni}^-, E)| = |c(b_{ni}^+, E)|$ et on représente :

$$B_{K,11}(J) = B_{K,11} \cap J \quad \text{et} \quad B_{K,11} := \{E \in \mathbb{R} \text{ telles que } |c(b_{ni}^+, E)| \leq e^{-\frac{K\delta}{\varepsilon_n}}\} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} [\alpha_j^-, \alpha_j^+].$$

On estime :

$$\text{mes}B_{K,11}(J) \leq \max_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_j^+(K) - \alpha_j^-(K)| \#\{j \in \mathbb{Z} \text{ tels que } J \cap [\alpha_j^-(K), \alpha_j^+(K)] \neq \emptyset\}. \quad (5.4.12)$$

On majore, utilisant ce que pour $f \in C^1$ on a $|b - a| \leq (\min_{x \in [a,b]} |f'|)^{-1} |f(b) - f(a)|$:

$$|\alpha_j^+(K) - \alpha_j^-(K)| \leq \left(\min_{E \in [\alpha_j^-(K), \alpha_j^+(K)]} \left| \frac{dc(b_{ni}^+, E)}{dE} \right| \right)^{-1} 2e^{-\frac{K\delta}{\varepsilon_n}}$$

car $c(\alpha_j^+(K))c(\alpha_j^-(K)) < 0$ et $|c(\alpha_j^+(K))| = |c(\alpha_j^-(K))| = e^{-\frac{K\delta}{\varepsilon_n}}$. Pour chaque x , les applications $E \mapsto c(x, E)$ et $E \mapsto s(x, E)$ sont analytiques en E . On estime $\frac{d}{dE}c(x, E)$ en utilisant qu'elle est la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(x^\alpha) - E\right) \frac{dc}{dE}(x, E) = c(x, E) \\ \frac{dc}{dE}(a_{ni}^-, E) = 0 \\ \frac{dc'}{dE}(a_{ni}^-, E) = 0 \end{cases}$$

On trouve la solution par la méthode de variation de la constante :

$$\frac{dc}{dE}(x, E) = c(x, E) \int_{a_{ni}^-}^x s(t, E)c(t, E)dt - s(x, E) \int_{a_{ni}^-}^x c^2(t, E)dt \quad (5.4.13)$$

Par (5.4.13), on minore $\left|\frac{dc}{dE}(b_{ni}^+, E)\right|$:

$$\left|\frac{dc}{dE}(b_{ni}^+, E)\right| \geq |s(b_{ni}^+, E)| \int_{a_{ni}^-}^{b_{ni}^+} c^2(t, E)dt - |c(b_{ni}^+, E)| \int_{a_{ni}^-}^x |s(t, E)||c(t, E)|dt. \quad (5.4.14)$$

Comme $\det T(b_{ni}^+, a_{ni}^-, E) = 1$ et, par le Lemme 4.7, on a $|s(b_{ni}^+, E)| + |s'(b_{ni}^+, E)| \leq 2e^{\frac{2C\delta}{\varepsilon_n}}$, on peut minorer $|s(b_{ni}^+, E)|$:

$$|s(b_{ni}^+, E)| = |(c(b_{ni}^+, E)s'(b_{ni}^+, E) - 1)c'(b_{ni}^+, E)| \geq (1 - e^{-\frac{(K-2C)\delta}{\varepsilon_n}})e^{-2\frac{C\delta}{\varepsilon_n}}.$$

D'où on obtient une minoration pour $\frac{dc}{dE}(b_{ni}^+, E)$ utilisant (5.4.14) :

$$\left| \frac{dc}{dE}(b_{ni}^+, E) \right| \geq (1 - e^{-\frac{(K-2C)\delta}{\varepsilon_n}})e^{-\frac{2C\delta}{\varepsilon_n}} \frac{1}{2} - |b_{ni}^+ - a_{ni}^-| e^{-\frac{K-4C\delta}{\varepsilon_n}} \geq \frac{1}{4}e^{-\frac{2C\delta}{\varepsilon_n}} \quad (5.4.15)$$

pour $K > 10C$, i.e. $\frac{dc}{dE}(b_{ni}^+, E) > \frac{1}{4}e^{-\frac{2C\delta}{\varepsilon}}$ ou bien $\frac{dc}{dE}(b_{ni}^+, E) < -\frac{1}{4}e^{-\frac{2C\delta}{\varepsilon}}$. Ici on a utilisé :

$$\int_{a_{ni}^-}^{b_{ni}^+} c^2(t, E) dt \geq \frac{1}{2}$$

car $c(a_{ni}^-, E) = 1$ et $|c'(x, E)| \leq e^{\frac{2C}{\varepsilon_n}}$. D'où :

$$|\alpha_j^+(K) - \alpha_j^-(K)| \leq 8e^{-\frac{(K-2C)\delta}{\varepsilon}}. \quad (5.4.16)$$

Pour J connexe, on a :

$$\#\{j \text{ tels que } [\alpha_j^-(K), \alpha_j^+(K)] \cap J \neq \emptyset\} \leq \frac{|J|}{|\alpha_{j+1}^+(K) - \alpha_j^-(K)|} + 1.$$

On estime :

$$\begin{aligned} |\alpha_{j+1}^+(K) - \alpha_j^+(K)| &\geq |\alpha_{j+1}^-(2C) - \alpha_{j+1}(K)| + |\alpha_j^+(2C) - \alpha_j^+(K)| \geq \\ &\geq 2|e^{-\frac{2C\delta}{\varepsilon_n}} - e^{-\frac{K\delta}{\varepsilon_n}}| \left(\max_{E \in [-e^{-\frac{2C\delta}{\varepsilon_n}}, -e^{-\frac{K\delta}{\varepsilon_n}}] \cup [e^{-\frac{K\delta}{\varepsilon_n}}, e^{-\frac{2C\delta}{\varepsilon_n}}]} \left| \frac{dc}{dE}(b_{ni}^+, E) \right| \right)^{-1} \geq \\ &\geq |e^{-\frac{2C\delta}{\varepsilon_n}} - e^{-\frac{K\delta}{\varepsilon_n}}| e^{-\frac{6C\delta}{\varepsilon_n}} |b_{ni}^+ - a_{ni}^-|^{-1} \geq \frac{\varepsilon_n}{4\pi} e^{-\frac{8C\delta}{\varepsilon_n}}. \quad (5.4.17) \end{aligned}$$

On a utilisé que :

1. Pour $f(E) = \frac{dc}{dE}(b_{ni}^+, E)$, on a $|x - y| \geq \frac{|f(x) - f(y)|}{\max_{E \in [x, y]} |f'(E)|}$.
2. Par (5.4.13), on majore

$$\begin{aligned} \left| \frac{dc}{dE}(b_{ni}^+, E) \right| &\leq |b_{ni}^+ - a_{ni}^-| \max_{x \in [a_{ni}^-, b_{ni}^+]} |s(x, E)| \max_{x \in [a_{ni}^-, b_{ni}^+]} |c^2(x, E)| + \\ &+ |b_{ni}^+ - a_{ni}^-| \max_{x \in [a_{ni}^-, b_{ni}^+]} |c(x, E)| \max_{x \in [a_{ni}^-, b_{ni}^+]} |c(x, E)s(x, E)| \leq \\ &\leq e^{\frac{6C\delta}{\varepsilon_n}} 2|b_{ni}^+ - a_{ni}^-|. \end{aligned}$$

3. $|b_{ni}^+ - a_{ni}^-| \leq \frac{2\pi}{\varepsilon_n}$.

Par (5.4.17), si J est un intervalle compact de \mathbb{R} , on a :

$$\#\{j \text{ tels que } [\alpha_j^-(K), \alpha_j^+(K)] \cap J \neq \emptyset\} \leq |J| \frac{4\pi}{\varepsilon_n} e^{\frac{8C\delta}{\varepsilon}}. \quad (5.4.18)$$

Réunissant (5.4.12), (5.4.16) et (5.4.18), on obtient :

$$\text{mes} B_{K,1}(J) \leq \frac{24\pi}{\varepsilon_n} e^{-\frac{(K-10C)\delta}{\varepsilon}} |J|.$$

Par le même argument on estime $B_{K,12}$, $B_{K,21}$ et $B_{K,22}$. Ceci achève la preuve du Lemme 4.9. \square

Remarque 4.10. On note

$$G_n(K, \delta) := \bigcup_{i=1}^I B_{ni}(K, \delta) \quad (5.4.19)$$

où

$$B_{ni}(K, \delta) := \left\{ E \in \mathbb{R} \text{ telles que } \exists j, k \in \{1, 2\} \right. \\ \left. \mid \left| [(\Phi(Z_n(b_{ni}^+), E) + o(1))^{-1} T(b_{ni}^+, a_{ni}^-, E) (\Phi(Z_n(a_{ni}^-), E) + o(1))] \right]_{jk} \right| \leq e^{-\frac{K\delta}{\varepsilon_n}} \right\}.$$

Soit J un intervalle compact. Par le Lemme 4.9, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $n > n_0$, pour toute énergie E dans $J \setminus G_n(K, \delta)$, où $\text{mes}(G_n(K, \delta) \cap J) = |J| I \frac{96\pi}{\varepsilon_n} e^{-\frac{(K-10C)\delta}{\varepsilon_n}}$, pour chaque $i = 1, \dots, I$, les coefficients des matrices de transfert $T(b_{ni}^+, a_{ni}^-, E)$ vérifient :

$$\left| [(\Phi(Z_n(b_{ni}^+), E) + o(1))^{-1} T(b_{ni}^+, a_{ni}^-, E) (\Phi(Z_n(a_{ni}^-), E) + o(1))] \right]_{jk} \right| \geq e^{-\frac{K\delta}{\varepsilon_n}} \quad j = 1, 2, k = 1, 2.$$

Ce résultat permet de démontrer un encadrement :

Lemme 4.11. *Soient $\delta > 0$ petit et $K > 10C$ fixés. Il existe une constante $\tilde{C} > 0$ et un ensemble $G_\infty(K, \delta)$ de dimension de Hausdorff nulle tels que pour tout $E \in \mathbb{R} \setminus G_\infty(K, \delta)$ on ait un encadrement :*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_0(E - W(x)) dx - \frac{(IK + \tilde{C})\delta}{2\pi} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(x_N, x_{n_0}, E)\|}{x_N - x_{n_0}} \leq \\ \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_0(E - W(x)) dx + \frac{(I2C + \tilde{C})\delta}{2\pi}. \quad (5.4.20)$$

Ici $G_\infty(K, \delta) = \bigcap_m \bigcup_{n=m}^\infty G_n(K, \delta)$, où $G_n(K, \delta)$ est défini dans (5.4.19).

Le Lemme 4.11 admet le corollaire suivant :

Corollaire 4.12. *Pour chaque $K > 10C$, pour tout $E \notin G_\infty(K)$, où*

$$G_\infty(K) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} G_\infty(K, \delta = \frac{1}{k}),$$

l'exposant de Lyapounov $\gamma(E)$ existe et on a

$$\gamma(E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_0(E - W(s)) ds.$$

Ici $G_\infty(K, \delta) = \bigcap_m \bigcup_{n=m}^\infty G_n(K, \delta)$, où $G_n(K, \delta)$ est défini dans (5.4.19) dans le Chapitre V. De plus la "dimension de Hausdorff logarithmique" (voir la Définition 2.3 du Chapitre II) de $G_\infty(K)$ vérifie

$$\text{Indim}(G_\infty(K)) \leq \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Démonstration. Il est facile d'obtenir la majoration. On a :

$$\begin{aligned} \ln \|T(x_N, x_{n_0}, E)\| &\leq \sum_{n=n_0}^{N-1} \ln \|T(x_{n+1}, x_n, E)\| \leq \\ &\leq \sum_{n=n_0}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^{I-1} \ln \|T(a_{n(i+1)}^-, b_{ni}^+, E)\| + \frac{2CI\delta}{\varepsilon_n} \right) = \\ &= \sum_{n=n_0}^{N-1} \left(\frac{1}{\varepsilon_n} \sum_{i=1}^{I-1} S_{ni}(E) + \frac{(2CI + \tilde{C})\delta}{\varepsilon_n} \right) \end{aligned}$$

Ici on a utilisé la notation :

$$S_{ni}(E) = \int_{Z_n(b_{ni}^+)}^{Z_n(a_{n(i+1)}^-)} \gamma_0(E - W(s)) ds$$

et l'estimation

$$\left| \sum_{i=1}^{I-1} S_{ni}(E) - \int_0^{2\pi} \gamma_0(E - W(x)) dx \right| \leq \tilde{C}\delta.$$

Par le Lemme 3.9, on calcule :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(x_N, x_{n_0}, E)\|}{x_N - x_{n_0}} &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=n_0}^{N-1} \left(\frac{1}{\varepsilon_n} \sum_{i=1}^{I-1} S_{ni}(E) + \frac{(2CI + \tilde{C})\delta}{\varepsilon_n} \right)}{x_N - x_{n_0}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\varepsilon_n} \int_0^{2\pi} \gamma_0(E - W(x)) dx + \frac{(2CI + \tilde{C})\delta}{\varepsilon_n}}{x_{n+1} - x_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_0(E - W(x)) dx + \frac{(2CI + \tilde{C})}{2\pi} \end{aligned}$$

Pour minorer l'exposant de Lyapounov, pour chaque n , on minore la norme de la matrice de transfert pour (SIosc) sur $I_n = [x_n, x_{n+1}]$. Pour ce faire, on décompose cette matrice en produit des matrices $T(a_{n(i+1)}^-, b_{ni}^+, E)$ et $T(b_{ni}^+, a_{ni}^-, E)$:

$$T(x_{n+1}, x_n, E) = T(x_{n+1}, a_{nI}^-, E) T(a_{nI}^-, b_{n(I-1)}^+, E) \dots T(a_{n2}^-, b_{n1}^+, E) T(b_{ni}^+, x_n, E).$$

On utilise les minoration des coefficients des matrices

$$(\Phi(Z_n(b_{ni}^+), E) + o(1))^{-1} T(b_{ni}^+, a_{ni}^-, E) (\Phi(Z_n(a_{ni}^-), E) + o(1))$$

pour $E \notin G_n(K, \delta)$ (voir la Remarque 4.10) et les asymptotiques des matrices $T(a_{n(i+1)}^-, b_{ni}^+, E)$ (voir le Lemme 4.6) pour minorer par récurrence $\left\| T(a_{n(i+1)}^-, a_{ni}^-, E) \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \right\|$, en supposant

que $E \in \mathbb{R} \setminus G_n(K, \delta)$.

Par le Lemme 4.6, on a :

$$T(a_{n(i+1)}^-, b_{ni}^+, E) = (\Phi(Z_n(a_{n(i+1)}^-), E) + o(1))e^{\frac{S_{ni}(E)}{\varepsilon_n}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{-\frac{S_{ni}(E)}{\varepsilon_n}} P_{ni}(E) \right] (\Phi(Z_n(b_{ni}^+), E) + o(1))^{-1},$$

où

- $P_{ni}(E)$, $\Phi(Z_n(a_{n(i+1)}^-), E)$ et $\Phi(Z_n(b_{ni}^+), E)$ sont des matrices bornées,
- $\Phi(Z_n(a_{n(i+1)}^-), E)$, $\Phi(Z_n(b_{ni}^+), E) \in SL_2(\mathbb{C})$.

Pour tout $E \notin G_n(K, \delta)$ on a

$$|[(\Phi(Z_n(b_{ni}^+), E) + o(1))^{-1} T(b_{ni}^+, a_{ni}^-, E) (\Phi(Z_n(a_{ni}^-), E) + o(1))]_{jk}| \geq e^{-\frac{K\delta}{\varepsilon_n}},$$

d'où on obtient :

$$T(x_{n+1}, x_n, E) = e^{\frac{1}{\varepsilon_n} \sum_{i=1}^{I-1} S_{ni}(E)} \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + O(e^{-\frac{R(E)}{\varepsilon_n}}) \right]$$

où

- $R = R(E) > 0$ est indépendant de δ et de n .
- $e^{-\frac{IK\delta}{\varepsilon_n}} \leq |a|, |b| \leq 1$.

On veut minorer l'exposant de Lyapounov. On démontre pour tout $E \notin \bigcup_{n=n_0}^N G_n(K, \delta)$ l'estimation suivante :

$$T(x_{N+1}, x_{n_0}, E) = \exp \left(\sum_{n=n_0}^N \frac{1}{\varepsilon_n} \sum_{i=1}^{I-1} S_{ni}(E) \right) \tilde{T}(x_{N+1}, x_{n_0}, E) \text{ avec}$$

$$\tilde{T}(x_{N+1}, x_{n_0}, E) = \left[\begin{pmatrix} a_N & 0 \\ b_N & 0 \end{pmatrix} + O(e^{-\frac{R(E)}{\varepsilon_N}}) \right] \dots \left[\begin{pmatrix} a_{n_0} & 0 \\ b_{n_0} & 0 \end{pmatrix} + O(e^{-\frac{R(E)}{\varepsilon_{n_0}}}) \right] \quad (5.4.21)$$

où pour chaque $n > n_0$ on a

$$e^{-\frac{IK\delta}{\varepsilon_n}} \leq |a_n|, |b_n| \leq 1. \quad (5.4.22)$$

Pour démontrer (5.4.21), on considère une suite :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} a_n & 0 \\ b_n & 0 \end{pmatrix} + O(e^{-\frac{R(E)}{\varepsilon_n}}) \right] \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{n_0} \\ v_{n_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_n u_n \left(1 + \frac{v_n}{a_n u_n} O(e^{-\frac{R}{\varepsilon_n}}) \right), \\ v_{n+1} &= b_n u_n \left(1 + \frac{v_n}{b_n u_n} O(e^{-\frac{R}{\varepsilon_n}}) \right). \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

Supposons que $\left| \frac{v_n}{u_n} \right| \leq e^{2\frac{IK\delta}{\varepsilon_n}}$, alors par (5.4.22), on obtient :

$$\left| \frac{v_n}{u_n} \right| \left(\frac{1}{|a_n|} + \frac{1}{|b_n|} \right) e^{-\frac{R}{\varepsilon_n}} \leq e^{-\frac{R-2IK\delta}{\varepsilon_n}}.$$

D'où $\left| \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} \right| \leq e^{2\frac{IK\delta}{\varepsilon_n}}$. Donc (5.4.23) nous dit que $|u_N| \geq C \prod_{n=n_0}^N a_k$, ce qui implique pour tout $E \notin G_\infty(K, \delta)$ avec $G_\infty(K, \delta) = \bigcap_m \bigcup_{n=m}^\infty G_n(K, \delta)$ la minoration

$$\ln \|\tilde{T}(x_{N+1}, x_{n_0}, E)\| \geq e^{-\sum_{n=n_0}^N \frac{1}{\varepsilon_n} IK\delta}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \gamma(E) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|T(x_{N+1}, x_{n_0}, E)\|}{x_{N+1} - x_{n_0}} \geq \\ &\geq \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(\int_0^{2\pi} \gamma_0(E - W(s)) ds - (\tilde{C} + IK)\delta) \sum_{n=n_0}^N \frac{1}{\varepsilon_n}}{x_{N+1} - x_{n_0}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_0(E - W(s)) ds - \frac{(\tilde{C} + IK)I\delta}{2\pi} \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

Ce qui achève la preuve du Lemme 4.11. □

Annexe A

Exposant de Lyapounov et spectre singulier

Soit $(M(z, \varepsilon))_{0 < \varepsilon < 1}$ une famille de fonctions à valeurs dans $SL(2, \mathbb{C})$, 1-périodiques en $z \in \mathbb{C}$. On fixe ε . Soit h un réel rationnellement indépendant de ε . Considérons un cocycle matriciel $P_N(h)$ associé à la fonction $M(z, \varepsilon)$ et au paramètre h , défini par :

$$P_N(z; h) = M(z + Nh) \cdot M(z + (N - 1)h) \cdots M(z + h) \cdot M(z).$$

On définit l'exposant de Lyapounov $\theta(z; M, h)$ pour le cocycle matriciel $P_N(h)$ par :

$$\theta(z; M, h) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log \|P_N(z; M, h)\|. \quad (1.0.1)$$

Il est classique (*c.f.* [PF92, CL90]) que, pour h rationnellement indépendant de ε , la limite $\theta(z; M, h)$ existe pour presque tout $z \in [0, 2\pi]$, indépendante de z et vérifie pour presque tout z :

$$\theta(z; M, h) = \theta(M, h) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \int_0^1 \log \|P_N(z; M, h)\| dz.$$

On étudie le cocycle matriciel associé à la matrice de monodromie $M(z, E, \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$ et $E \in \mathbb{R}$ fixés et au paramètre $h = \frac{\varepsilon}{2\pi}$.

Pour E fixé vérifiant l'hypothèse **(HEp1)** page 98 et ε suffisamment petit et $z \in S_{Y, \delta} := \{z \in \mathbb{C} \mid \delta < \Im z < Y\}$ la matrice de monodromie $M(z, E, \varepsilon)$ vérifie l'asymptotique (4.2.11). Pour $h = \frac{\varepsilon}{2\pi}$ est irrationnel, utilisant (4.2.11), on peut démontrer, que l'exposant de Lyapounov $\theta(z, M(\cdot, E, \varepsilon))$ pour le cocycle matriciel associé à la matrice de monodromie $M(\cdot, E, \varepsilon)$ est positif pour presque tout $z \in [0, 2\pi]$. D'abord, on obtient la borne inférieure sur $\theta(z, M(\cdot, E, \varepsilon))$, on utilise :

Proposition 0.13 (la Proposition 10.1 de [FK02]). *Soit $\varepsilon_0 > 0$. Supposons qu'il existe y_0 et y_1 vérifiant $0 < y_0 < y_1 < \infty$ et tels que, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ on a*

- la fonction $z \rightarrow M(z, \varepsilon)$ est analytique dans la bande $S = \{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \Im z \leq y_1/\varepsilon\}$;
- dans la bande $S_1 = \{z \in \mathbb{C}; y_0/\varepsilon \leq \Im z \leq y_1/\varepsilon\} \subset S$, $M(z, \varepsilon)$ admet la représentation

$$M(z, \varepsilon) = \lambda(\varepsilon) e^{i2\pi n_0 z} \cdot (M_0(\varepsilon) + M_1(z, \varepsilon)),$$

avec une constante $\lambda(\varepsilon)$, un entier n_0 et une matrice $M_0(\varepsilon)$, indépendants de z ;

$$- M_0(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \beta(\varepsilon) \\ 0 & \alpha(\varepsilon) \end{pmatrix};$$

- il existe des constantes $\beta > 0$ et $\alpha \in (0, 1)$ indépendantes de ε et telles que $|\alpha(\varepsilon)| \leq \alpha$ et $|\beta(\varepsilon)| \leq \beta$;

- $\sup_{z \in S_1} \|M_1(z, \varepsilon)\| \leq m(\varepsilon)$, $m(\varepsilon) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Alors, il existe $C > 0$ et $\varepsilon_1 > 0$, qui ne dépendent que de y_0, y_1, α, β et $m(\cdot)$, tels que, si $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, on a

$$\theta(z, M) > \log |\lambda(\varepsilon)| - Cm(\varepsilon). \quad (1.0.2)$$

Cette proposition est basée sur les idées de [SS91] qui généralise l'argument de Herman de [Her83].

Une fois que l'on dispose de la borne inférieure, on obtient la borne supérieure pour $\theta(z, M(\cdot, E, \varepsilon))$ à l'aide de l'asymptotique de la matrice de monodromie sur la droite réelle. Comparant la borne supérieure et la borne inférieure on obtient pour presque tout z :

$$\theta(z, M(\cdot, E, \varepsilon)) = \frac{S(E)}{\varepsilon} + O(1). \quad (1.0.3)$$

Grâce à la relation :

$$\gamma(z, E, \varepsilon) = \theta(z, M(\cdot, E, \varepsilon)) \frac{\varepsilon}{2\pi},$$

qui relie l'exposant de Lyapounov $\theta(z, M(\cdot, E, \varepsilon))$ pour le cocycle des matrices de monodromie $P_N(M, \frac{2\pi}{\varepsilon})$ et l'exposant de Lyapounov $\gamma(z, E)$ pour (AdiabQP), l'asymptotique (1.0.3) (quand ε tend vers zéro) implique le résultat suivant

Théorème 0.14. ([MN08]) Soit I un intervalle des énergies E vérifiant (**HEpcl**). Alors pour chaque $E \in I$ et pour chaque $\frac{\varepsilon}{2\pi}$ irrationnel et suffisamment petit, l'exposant de Lyapounov pour (AdiabQP) existe, positif et vérifie l'asymptotique :

$$\gamma(E, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_0(E - W(z)) dz.$$

Bibliographie

- [Arn76] V. Arnold. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Éditions Mir, Moscow, 1976. Traduit du russe par Djilali Embarek.
- [CL90] René Carmona and Jean Lacroix. *Spectral theory of random Schrödinger operators*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990.
- [DRMS94] R. Del Rio, N. Makarov, and B. Simon. Operators with singular continuous spectrum. II. Rank one operators. *Comm. Math. Phys.*, 165(1) :59–67, 1994.
- [Enc94] *Partial differential equations. VII*, volume 64 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Spectral theory of differential operators, A translation of it Current problems in mathematics. Fundamental directions. Vol. 64 (Russian), Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1989 [MR1033499 (91h :35229a)], Translation by T. Zastawniak, Translation edited by M. A. Shubin.
- [Fed93] Mikhail V. Fedoryuk. *Asymptotic analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1993. Linear ordinary differential equations, Translated from the Russian by Andrew Rodick.
- [Fir00] N. E. Firsova. On the global quasimomentum in solid state physics. In *Mathematical methods in physics (Londrina, 1999)*, pages 98–141. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000.
- [FK01] Alexander Fedotov and Frédéric Klopp. A complex WKB method for adiabatic problems. *Asymptot. Anal.*, 27(3-4) :219–264, 2001.
- [FK02] Alexander Fedotov and Frédéric Klopp. Anderson transitions for a family of almost periodic Schrödinger equations in the adiabatic case. *Comm. Math. Phys.*, 227(1) :1–92, 2002.
- [FK04a] Alexander Fedotov and Frédéric Klopp. Geometric tools of the adiabatic complex WKB method. *Asymptot. Anal.*, 39(3-4) :309–357, 2004.
- [FK04b] Alexander Fedotov and Frédéric Klopp. On the singular spectrum for adiabatic quasi-periodic Schrödinger operators on the real line. *Ann. Henri Poincaré*, 5(5) :929–978, 2004.
- [FK05] Alexander Fedotov and Frédéric Klopp. On the absolutely continuous spectrum of one-dimensional quasi-periodic Schrödinger operators in the adiabatic limit. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(11) :4481–4516 (electronic), 2005.
- [FK06a] Alexander Fedotov and Frédéric Klopp. Level repulsion and spectral type for one-dimensional adiabatic quasi-periodic Schrödinger operators. In *Mathematical physics of quantum mechanics*, volume 690 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 383–402. Springer, Berlin, 2006.

- [FK06b] Alexander Fedotov and Frédéric Klopp. Weakly resonant tunneling interactions for adiabatic quasi-periodic Schrödinger operators. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (104) :vi+105, 2006.
- [Gor92] A. Ya. Gordon. Exceptional values of the boundary phase for the Schrödinger equation on the semi-axis. *Uspekhi Mat. Nauk*, 47(1(283)) :211–212, 1992.
- [Gor94] A. Ya. Gordon. Pure point spectrum under 1-parameter perturbations and instability of Anderson localization. *Comm. Math. Phys.*, 164(3) :489–505, 1994.
- [GP87] D. J. Gilbert and D. B. Pearson. On subordinacy and analysis of the spectrum of one-dimensional Schrödinger operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 128(1) :30–56, 1987.
- [Her83] Michael-R. Herman. Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques exemples montrant le caractère local d’un théorème d’Arnol’d et de Moser sur le tore de dimension 2. *Comment. Math. Helv.*, 58(3) :453–502, 1983.
- [JL99] Svetlana Jitomirskaya and Yoram Last. Power-law subordinacy and singular spectra. I. Half-line operators. *Acta Math.*, 183(2) :171–189, 1999.
- [JM82] R. Johnson and J. Moser. The rotation number for almost periodic potentials. *Comm. Math. Phys.*, 84(3) :403–438, 1982.
- [KMP90] V. Kirsh, S. A. Molchanov, and L. A. Pastur. The one-dimensional Schrödinger operator with unbounded potential : the pure point spectrum. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 24(3) :14–25, 96, 1990.
- [KMP92] W. Kirsch, S. A. Molchanov, and L. A. Pastur. One-dimensional Schrödinger operators with high potential barriers. 57 :163–170, 1992.
- [Kot86] S. Kotani. Lyapunov exponents and spectra for one-dimensional random Schrödinger operators. In *Random matrices and their applications (Brunswick, Maine, 1984)*, volume 50 of *Contemp. Math.*, pages 277–286. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [LS91] B. M. Levitan and I. S. Sargsjan. *Sturm-Liouville and Dirac operators*, volume 59 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991. Translated from the Russian.
- [MN08] M. Marx and H. Najjar. On the singular spectrum for adiabatic quasi-periodic Schrödinger Operators. *ArXiv e-prints*, November 2008.
- [MO75] V. A. Marčenko and I. V. Ostrovs’kiĭ. A characterization of the spectrum of the Hill operator. *Mat. Sb. (N.S.)*, 97(139)(4(8)) :540–606, 633–634, 1975.
- [MvM75] H. P. McKean and P. van Moerbeke. The spectrum of Hill’s equation. *Invent. Math.*, 30(3) :217–274, 1975.
- [PF92] Leonid Pastur and Alexander Figotin. *Spectra of random and almost-periodic operators*, volume 297 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [PS78] G. Polia and G. Sege. *Zadachi i teoremy iz analiza. Chast pervaya*. Izdat. “Nauka”, Moscow, russian edition, 1978. Ryady. Integralnoe ischislenie. Teoriya funktsii. [Series. Integral calculus. Function theory], Translated from the German by D. A. Raïkov.

-
- [RS78] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
- [Sim95] Barry Simon. Spectral analysis of rank one perturbations and applications. In *Mathematical quantum theory. II. Schrödinger operators (Vancouver, BC, 1993)*, volume 8 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 109–149. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [Sim07] Barry Simon. Equilibrium measures and capacities in spectral theory. *Inverse Probl. Imaging*, 1(4) :713–772, 2007.
- [SS91] Eugene Sorets and Thomas Spencer. Positive Lyapunov exponents for Schrödinger operators with quasi-periodic potentials. *Comm. Math. Phys.*, 142(3) :543–566, 1991.
- [Sto94] Günter Stolz. Spectral theory for slowly oscillating potentials. I. Jacobi matrices. *Manuscripta Math.*, 84(3-4) :245–260, 1994.
- [Sto96] Gunter Stolz. *Schrödinger operators*. Habilitation thesis, 1996.
- [Sto97] G. Stolz. Spectral theory for slowly oscillating potentials. II. Schrödinger operators. *Math. Nachr.*, 183 :275–294, 1997.
- [SZ96] Barry Simon and Yunfeng Zhu. The Lyapunov exponents for Schrödinger operators with slowly oscillating potentials. *J. Funct. Anal.*, 140(2) :541–556, 1996.

Perturbations à oscillations lentes de l'opérateur de Schrödinger périodique

On étudie l'opérateur de Schrödinger $H_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(x^\alpha)$ dans $L_2(\mathbb{R}_+)$, où V est un potentiel périodique générique. On suppose que W est périodique et $\alpha \in (0, 1)$ de sorte que la perturbation $W(x^\alpha)$ soit à oscillations asymptotiquement lentes. On étudie l'asymptotique des solutions de l'équation propre associée par deux approches différentes.

La première approche, qui est basée sur une méthode de Simon–Zhu, utilise des approximations périodiques. On obtient une formule explicite pour la densité d'états intégrée pour H_α . Puis, on prouve l'existence et on donne une formule pour l'exposant de Lyapounov pour presque toutes les énergies. Nous décrivons aussi l'ensemble exceptionnel des énergies, qui contient le spectre singulier continu de H_α .

La seconde méthode est nouvelle : elle utilise des approximations quasi-périodiques plutôt que périodiques. On approxime la résolvante de H_α par les résolvantes des opérateurs quasi-périodiques $H_{z,\varepsilon} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(\varepsilon x + z)$ pour des paramètres z et ε bien choisis. Afin de pouvoir appliquer la méthode de la résolvante approchée à H_α , on étudie des solutions de l'équation propre pour $H_{z,\varepsilon}$ à l'aide de la méthode BKW complexe de Fedotov–Klopp. On obtient les asymptotiques des solutions et des matrices de monodromie quand ε tend vers zéro. Sous la condition $\alpha > \frac{1}{2}$, on construit des solutions de l'équation propre pour H_α ayant une asymptotique simple en x sur de grands intervalles. Puis, par l'étude des matrices de transfert associées, on obtient une nouvelle description, plus précise que la précédente, de l'ensemble exceptionnel des énergies.

Mots clés : opérateurs de Schrödinger, opérateurs quasi-périodiques, perturbations à oscillations lentes, densité d'états intégrée, exposant de Lyapounov, matrice de monodromie.

Slowly oscillating perturbations of the periodic Schrödinger operator

We study the Schrödinger operator $H_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(x^\alpha)$ in $L_2(\mathbb{R}_+)$, with a generic periodic potential V . We suppose that W is periodic and $\alpha \in (0, 1)$ so that the perturbation $W(x^\alpha)$ is asymptotically slowly oscillating. We use two approaches for the asymptotic study of the solutions of the associated eigenvalue equation.

The first method is developed by Simon–Zhu and based on periodic approximations. We give an explicit formula for the integrated density of states for H_α . Then we prove existence and give a formula for the Lyapounov exponent for almost all energies. We obtain a description of the exceptional set of energies containing the singular continuous spectrum of H_α .

The second method is new and uses quasiperiodic approximations instead of periodic ones. We approach the resolvent of H_α by the resolvents of the quasiperiodic operators $H_{z,\varepsilon} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + W(\varepsilon x + z)$ for some parameters z and ε . In order to use the approximate resolvent method for H_α , we also study the solutions of the eigenvalue equation for $H_{z,\varepsilon}$ using Fedotov–Klopp's complex WKB method. We obtain the asymptotics of the solutions and of the monodromy matrices as ε goes to zero. Under the condition $\alpha > \frac{1}{2}$, we construct solutions of the eigenvalue equation associated to H_α having simple asymptotics in x on large intervals. Then by studying the associated transfer matrices, we obtain a new, more precise than the previous one, description of the exceptional set of energies.

Keywords: Schrödinger operators, quasiperiodic operators, slowly oscillating potentials, integrated density of states, Lyapounov exponent, monodromy matrix.